Bài 10: Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của A ⇔det(A- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 3-\Lambda & 0 \\ 8 & -1-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

⇔ Λ^2 - 2 Λ-3 = 0

⇔ $\begin{cases} \Lambda = 3 \\ \Lambda = -1 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 3$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$8x_1 - 4x_2 = 0$ <=> $x_2 = 2x_1$

Với $x_1 = 1$ => $x_2 = 2$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 3$ là v_1 =(1,2)

*Với $\Lambda = -1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

⇔ $\begin{cases} 4x1 = 0 \\ 8x1 = 0 \end{cases}$

<=> x_1 = 0 , x2 =t với t bất kì thuộc R

b) B = $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của B ⇔det(B- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 10-\Lambda & -9 \\ 4 & -2-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

⇔ Λ^2 - 8 Λ+16 = 0

⇨ $\Lambda = 4$

* Với $\Lambda = 4$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} 6x1 - 9x2 = 0 \\ 4x1 - 6x2 = 0 \end{cases}$ <=> $x_1 = 3/2x_2$

*Với $x_1 = 3$ => $x_2 = 2$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 4$ là v =(3,2)

d) D = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Λ là trị triêng của D ⇔det(D- ΛE) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\Lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\Lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-\Lambda)(\Lambda^2 - 4\Lambda + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\Lambda)(\Lambda - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \Lambda = 2$

*Với $\Lambda = 2$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} -2x1 + x2 = 0 \\ -4x1 + 2x2 = 0 \end{cases}$ <=> $x_2 = 2x_1$, x3=t bất kì thuộc R

*Với $x_1 = 1$ => $x_2 = 2$, x3 = 3 vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v =(1,2,3)

Bài 12 Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$, với:

a) A = $\begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của A ⇔det(A- ΛE) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -14-\Lambda & 12 \\ -20 & 17-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \Lambda^2 - 3\Lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda = 1 \\ \Lambda = 2 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} -15x1 + 12x2 = 0 \\ -20x1 + 16x2 = 0 \end{cases}$ <=> $x_1 = 4x_2/5$

*Với $x_1 = 4$ => $x_2 = 5$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_1 =(4,5)

*Với $\Lambda = 2$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} -16x1 + 12x2 = 0 \\ -20x1 + 15x2 = 0 \end{cases}$ <=> $x_1 = x_2$

Với $x_1 = 1$ => $x_2 = 1$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v_2 =(1,1)

Quan sát họ các VTR (trong không gian R2) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 2, đúng bằng số chiều của R2. Do đó A chéo hóa được

P = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa A và $P^{-1}AP$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của B ⇔det(B - ΛI) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\Lambda & 0 \\ 6 & -1-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ (1-Λ)(-1- Λ)= 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda = 1 \\ \Lambda = -1 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 1$ thay vào pt (B- ΛI)X = 0 ta có

$6x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1$

*Với $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 3$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_1 =(1,3)

*Với $\Lambda = -1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} 2x1 = 0 \\ 6x1 = 0 \end{cases}$ <=> x_1 = 0, x2=t với t khác 0

vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_2 =(0,1)

Vậy B chéo hóa được.

P = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa A và $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) C = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của A ⇔det(C- ΛE) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\Lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ Λ (1- Λ)(Λ -2)= 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda = 0 \\ \Lambda = 1 \\ \Lambda = 2 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 0$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} x1 = 0 \\ x2 + x3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = -x3 \end{cases}$

Với $x_2 = -1 \Rightarrow x_3 = 1$ vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_1 =(0,-1,1)

*Với $\Lambda = 1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} x1 = t \\ x2 = x3 = 0 \end{cases}$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_2 =(1,0,0)

*Với $\Lambda = 2$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} -x1 = 0 \\ -x2 + x3 = 0 \\ x2 - x3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = x3 = t \end{cases}$$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_3 =(0,1,1)

Quan sát họ các VTR (trong không gian R3) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 3, đúng bằng số chiều của R3. Do đó A chéo hóa được

P = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa C và $P^{-1}CP$ = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) D = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của D ⇔det(D- ΛI) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 2-\Lambda & 1 & -2 \\ 0 & 3-\Lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\Lambda \end{vmatrix}$ = 0

⇔ (2- Λ) (3- Λ) $(3 - \Lambda)$= 0

⇔ $\begin{cases} \Lambda = 2 \\ \Lambda = 3 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 2$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} x2 - 2x3 = 0 \\ x2 + x3 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = t \\ x2 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases}$$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v_1 =(1,0,0)

*Với $\Lambda = 3$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} -x1 + x2 - 2x3 = 0 \\ x3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = x2 = t \\ x3 = 0 \end{cases}$$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 3$ là v_2 =(1,1,0) hoặc v_3 =(2,2,0)

Quan sát họ các VTR (trong không gian R3) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 3, đúng bằng số chiều của R3. Do đó D chéo hóa được

P = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa D và $P^{-1}DP$ = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Bài 13 Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có, tìm ma trận chéo đó:

a) A = $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của A ⇔det(A- ΛI) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\Lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\Lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

⇔ (3- Λ) [(-1- Λ) $(4 - \Lambda)$+6]= 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda = 3 \\ \Lambda = 2 \\ \Lambda = 1 \end{cases}$$

*Với $\Lambda = 3$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} -4x1 + 4x2 - 2x3 = 0 \\ -3x1 + x2 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x1 = t \\ x2 = 3t \\ x3 = 4t \end{cases}$$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v_1 =(1,3,4)

*Với $\Lambda = 2$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} -3x1 + 4x2 - 2x3 = 0 \\ -3x1 + 2x2 = 0 \\ -3x1 + x2 + x3 = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x1 = a + b \\ x2 = 3a \\ x3 = 3b \end{cases}$$ a,b thuộc R, $a^2+b^2 \neq 0$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v_2 =(2,3,3)

*Với $\Lambda = 1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$$\begin{cases} -2x1 + 4x2 - 2x3 = 0 \\ -3x1 + 3x2 = 0 \\ -3x1 + x2 + 2x3 = 0 \end{cases}$$ <=> x1=x2=x3=t

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 1$ là v_3 =(1,1,1)

Quan sát họ các VTR (trong không gian R3) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 3, đúng bằng số chiều của R3.

⇨ A chéo hóa được vậy A đồng dạng ma trận chéo

P = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa A và ma trận chéo là $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 14. Tìm cơ sở của R3 để ma trận của f: R3 -> R3 có dạng chéo trong đó

a) f(x1,x2,x3)=(2x1+x2+x3,x1+2x2+x3,x1+x2+2x3)

Ma trận A của f đối với E ={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} là

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của D ⇔det(A- ΛI) = 0

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\Lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\Lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(2-\Lambda)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda = 1 \\ \Lambda = 3 \end{cases}$

*Với $\Lambda = 1$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\mathrm{x1} + \mathrm{x2} + \mathrm{x3} = 0 \text{<=>} \begin{cases} \mathrm{x1} = a \\ \mathrm{x2} = \mathrm{b} \\ x3 = -a - b \end{cases}$ a,b thuộc R, $a^2+b^2 \neq 0$

Vậy véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 2$ là v_1 =(0,1,-1) hoặc v2=(1,0,-1) hoặc v3=(0,1,1)

*Với $\Lambda = 3$ thay vào pt (A- ΛI)X = 0 ta có

$\begin{cases} -\mathrm{x1} + \mathrm{x2} + \mathrm{x3} = 0 \\ \mathrm{x1} - \mathrm{x2} + \mathrm{x3} = 0 \\ x1 + x2 - x3 = 0 \end{cases} \text{<=>} \mathrm{x1} = x2 = x3 = 0$

Vậy không có véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\Lambda = 3$

Quan sát họ các VTR (trong không gian R3) ứng với các GTR ta thấy tổng số tham số cần dùng là 3, đúng bằng số chiều của R3. Do đó A chéo hóa được

T = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận làm chéo hóa A

B là cơ sở của R3, T là ma trận chuyển cơ sở từ E sang B

=> bộ cơ sở B = {(0,1,-1),(1,0,-1),(0,-1,1)} là bộ cơ sở để ma trận f(x) có dạng chéo.