

Bài 15

$$a) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$\text{Rank}(A)=2 \neq \text{Rank}(A^{\text{bs}}) = 3 \rightarrow$ hệ vô nghiệm

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$$

$\text{Rank}(A)=3 \neq \text{Rank}(A^{\text{bs}}) = 4 \rightarrow$ hệ vô nghiệm

$$c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$\text{Rank}(A)=\text{Rank}(A^{\text{bs}}) = 2 < 3$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_2 - 7x_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - 3x_3 \\ x_2 = 7 - 7x_3 \end{cases}$$

Đặt x_3 là α

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - 3\alpha \\ x_2 = 7 - 7\alpha \end{cases}$$

Ta có hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số $(x_1, x_2, x_3) = (11\alpha - 10, 7 - 7\alpha, \alpha)$

Bài 16

$$a) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 12 \\ 2x + 5y - z + 11t = 49 \\ 3x + 6y - 4z + 13t = 49 \\ x + 2y - 2z + 9t = 33 \end{cases}$$

$\text{Rank}(A)=\text{Rank}(A^{\text{bs}}) = 4$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 11 \\ 3 & 6 & -4 & 13 \\ 1 & 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = -2$$

-> hệ có nghiệm duy nhất $(x,y,z,t) = (-1,2,3,4)$

$$b) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -4 \\ 3x + 7y + 10z + 11t = -11 \\ x + 2y + 4z + 2t = -3 \\ x + 2y + 2z + 7t = -6 \end{cases}$$

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^{bs}) = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

-> hệ có nghiệm duy nhất $(x,y,z,t) = (1,1,-1,-1)$

Bài 17

$$\begin{cases} (a+5)x + 3y + (2a+1)z = 0 \\ ax + (a-1)y + 4z = 0 \\ (a+5)x + (a+2)y + 5z = 0 \end{cases}$$

Hpt có nghiệm không tầm thường khi $r(A) < 3$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ a+5 & a+2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+5 & 3 & 2a+1 \\ a & a-1 & 4 \\ 0 & a-1 & 4-2a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R(A)=2 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Bài 18

$$\begin{cases} mx_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -m \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất khi } \det A \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det A = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)^2 - 1 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Bài 19

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^{\text{bs}}) = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

-> hệ có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, -1, -5, 5)$

$$b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = k \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + (m-1)x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2mx_4 = 5 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất khi } \det(A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & m \\ 0 & 1 & 2 & m+2 \\ 0 & -5 & -1 & -m-1 \\ 0 & -1 & 2 & m \end{vmatrix}$$

$$= 2m-18 \neq 0 \rightarrow m \neq 9$$

c) Hệ có vô số nghiệm khi $r(A) = r(A^{\text{bs}}) < 4 \rightarrow r(A) = r(A^{\text{bs}}) = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} -4/9(4m+9) + (2m+2) = 0 \\ -4/9(5k+15) + (5+k) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ k = -15/11 \end{cases}$$