Bài 1. Cho ánh xạ f: R^3 -> R^2 xác định bởi công thức f(x1,x2,x3) = (3x1+x2-x3,2x1+x3)

Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính

Giải

∀ x=(x1,x2,x3),y=(y1,y2,y3) ∈R^3, k ∈ R^3

Ta có

f(x+y) = f(x1+y1,x2+y2,x3+y3)

=(3(x1+y1)+(x2+y2)-(x3+y3),2(x1+y1)+(x3+y3))

=((3x1+x2-x3)+(3y1+y2-y3),(2x1+x3)+(2y1+y3))

= (3x1+x2-x3,2x1+x3),(3y1+y2-y3,2y1+y3)

= f(x)+f(y)

f(kx) = f(kx1,kx2,kx3) = (3kx1 + kx2-kx3,2kx1+kx3)

= (k(3x1+x2-x3),k(2x1+x3)) = k((3x1+x2-x3), (2x1+x3)) = kf(x)

- ⇨ f là AXTT

Bài 2. Cho ánh xạ f: $P_2[x]$ -> $P_4[x]$ xác định như sau: f(p) = p+x^2p, ∀p∈ $P_2[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính
b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc E1 = {1,x,x2} của $P_2[x]$ và E2 ={1,x,x2,x3,x4} của $P_4[x]$
   f(1) = 1 +x^2
   f(x) = x + x^3
   f(x2) = x^2+x^4
   - ⇨ Ma trận của f = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở E' = {1+x,2x,1+x^2} của $P_2[x]$ và E2 ={1,x,x2,x3,x4} của $P_4[x]$
   f(1+x) = 1 + (1+x) x^2 = 1+ x^2 +x^3
   f(2x) = 2x + 2x^3
   f(1+ x^2) = 1 + 2 x^2 + x^4
   - ⇨ Ma trận của ánh xạ f = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Bài 3 Cho AXTT f: $P_2[x]$ -> $P_2[x]$ thỏa mãn:

$f(1-x^2) = -3+3x-6x^2$, $f(3x+2x^2)=17+x+16x^2$, $f(2+6x+3x^2) = 32+7x+25x^2$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$. Tính $f(1+x^2)$

Cặp cơ sở E1 = $\{1-x^2, 3x+2x^2, 2+6x+3x^2\}$ và E2 = $\{-3+3x-6x^2, 17+x+16x^2, 32+7x+25x^2\}$

⇨ $A = \begin{vmatrix} -3 & 17 & 32 \\ 3 & 1 & 7 \\ -6 & 16 & 25 \end{vmatrix}$

Tính $f(1+x^2)$

Biểu diễn đa thức $1+x^2$ trong cơ sở E1 của $P_2[x]$ ta có:

$1+x^2 = a(1-x^2) + b(3x+2x^2)+c(2+6x+3x^2) =(a+2c) +(3b+6c)x+(-a+2b+3c)x^2$

Do đó a,b,c là nghiệm của hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=1 \\ 3b+6c=0 \\ -a+2b+3c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$

⇨ $[1+x^2]_{E1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$f(1+x^2)=-2(-3+3x-6x^2)-2(17+x+16x^2)+(32+7x+25x^2) = 4-x+5x^2$