Bài 10: Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của A ⇔det(A- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 3-\Lambda & 0 \\ 8 & -1-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

⇔ Λ^2 - 2 Λ-3 = 0

⇔ $\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = 3 \\ \Lambda = -1 \end{array} \right.$

b) B = $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Λ là trị triêng của B ⇔det(B- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 10-\Lambda & -9 \\ 4 & -2-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

⇔ Λ^2 - 8 Λ+16 = 0

⇨ $\Lambda = 4$

c) C = $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Λ là trị triêng của C ⇔det(C- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} 2-\Lambda & -1 & 0 \\ 5 & -3-\Lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

⇔ $\frac{1}{2-\Lambda}\begin{vmatrix} 2-\Lambda & -1 & 0 \\ 5 & -3-\Lambda & 3 \\ 0 & -1 & (-2-\Lambda)(2-\Lambda) \end{vmatrix}$= 0

⇔ $-\Lambda^3$-3 Λ^2 +3 Λ+13 = 0

d) D = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Λ là trị triêng của D ⇔det(D- ΛE) = 0

⇔ $\begin{vmatrix} -\Lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\Lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\Lambda \end{vmatrix}$= 0

$\Leftrightarrow (2-\Lambda)(\Lambda^2-4\Lambda+4)=0$

$\Leftrightarrow (2-\Lambda)(\Lambda-2)^2=0$

$\Leftrightarrow \Lambda = 2$

d) $E = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{vmatrix}$

Λ là trị triêng của E $\Leftrightarrow \det(E-\Lambda E) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\Lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\Lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\Lambda^3+\Lambda^2+6\Lambda+42 = 0$

Bài 11a: Cho biến đổi tuyến tính f: $P_2[x] \to P_2[x]$ được xác định

$f(a_0+a_1x+a_2x^2) = (5a_0+6a_1+2a_2) - (a_1+8a_2)x+(a_0-2a_2)x^2$

Tìm các trị riêng của f

$f(1)= 5+x^2$

$f(x)=6-x$

$f(x^2)=2-8x-2x^2$

$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & -8 & -2 \end{vmatrix}$

Λ là trị triêng của A $\Leftrightarrow \det(A-\Lambda E) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\Lambda & 0 & 1 \\ 6 & -1-\Lambda & 0 \\ 2 & -8 & -2-\Lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\Lambda^3+2\Lambda^2+15\Lambda+12= 0$

Bài 15: Cho toán tử tuyến tính trên R^3 xác định bởi

f(1;2;-1) = (4;-2;-6), f(1;1;2)=(5;5;0), f(1;0;0)=(1;2;2)

a) Tìm m để u=(6;-3;m) ∈ Im(f)

   u∈ Im(f) nghĩa là tồn tại v ∈ f(x) để cho u = f(v)

Im(f) là một không gian con của f(x) và có hệ sinh là

{ f(1;2;-1) , f(1;1;2), f(1;0;0)} = { (4;-2;-6), (5;5;0),(1;2;1)}

Nên để u$\in$ Im(f) thì u phải là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ { (4;-2;-6), (5;5;0),(1;2;2)}, hay nói cách khác, tồn tại a,b,c thỏa mãn

(6;-3;m) = a(4;-2;-6) +b (5;5;0)+c(1;2;1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5b + c = 6 \\ -2a + 5b + 2c = -3 \\ -6a + c = m \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ m = -9

b) Tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của f

Từ định nghĩa ta có bộ cơ sở E = { (1;2;-1) , (1;1;2), (1;0;0)} và U = { (4;-2;-6), (5;5;0),(1;2;1)}

U_1 = (4,-2,-6) = a(1,2,-1) + b(1,1,2)+c(1,0,0)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + b = -2 \\ -a + 2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -14/5 \\ c = -32/5 \end{cases}$

$[U_1]_E = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -14/5 \\ -32/5 \end{bmatrix}$