BỘ CÔNG THƯƠNG

TRƯỜNG CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP HUẾ

BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP A2

Th.S. NGUYỄN HOÀNG ANH KHOA

Huế, tháng 02 năm 2014

CHƯƠNG 1. KHÔNG GIAN VECTƠ - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Không gian vectơ

1.1.1. Số phức

Tập hợp các số thực R đã rất phong phú. Tuy nhiên nếu chỉ biết các số thực thì một phương trình đơn giản như

$$x^2 + 1 = 0 \text{ hay } x^2 = -1 \quad (1)$$

sẽ không có nghiệm vì không có số thực nào bình phương lên lại bằng -1.

Giả sử tồn tại i sao cho $i^2=-1$ ta gọi i là đơn vị phức

a. Định nghĩa: Số phức là số có dạng z = a + bi với a,b $\in$ R. Trong đó, a gọi là phần thực của z kí hiệu a=Re(z) và b gọi là phần ảo của z kí hiệu b=Im(z)

b. Số phức liên hợp: Xét số phức z = a + bi. Số phức a - bi gọi là số liên hợp của z = a + bi và ký hiệu là $\bar{z}$

c. Các phép toán

- Phép cộng

- Phép nhân

- Phép chia

- Lũy thừa bậc n

- Căn bậc n

d. Các dạng biểu diễn của số phức

Dạng hình học

Dạng lượng giác của số phức:

Giả sử z = r(cos φ + i sin φ) và z' = r'(cos φ' + i sin φ')

- Tích của hai số phức ở dạng lượng giác:

$$z.z' = (r + r')[\cos(\varphi+\varphi') + i.\sin(\varphi+\varphi')]$$

- Thương của hai số phức:

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$$

- Công thức Moive:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in N$$

- Căn bậc n của z ≠ 0 có n giá trị là:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ i = 0;1;2..;(n-1).$$

Ví dụ: Tính các căn bậc ba của 1. Vì 1 = cos0 + isin0 nên các căn bậc ba của 1 là

$$z_k = \cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2$$

Vậy có ba căn bậc ba của 1 là: $z_0 = 1$; $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.1.2. Không gian vectơ

a. Định nghĩa: Cho V là tập hợp khác rỗng mà mỗi phần tử gọi là một vectơ, K là một trường (K là R hoặc C). Trên V xây dựng 2 phép toán cộng và nhân như sau:

$$\begin{array}{l} + : V \times V \to V \\ (a,b) \mapsto a + b \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{l} \times : K \times V \to V \\ (\lambda, a) \mapsto \lambda a \end{array}$$

Lúc đó V được gọi là một K - KGVT nếu V cùng với hai phép toán "+" và "x" ở trên thoả 8 tiên đề sau :

TĐ1: $\forall u,v \in V$ ta có: $u + v = v + u$

TĐ2: $\forall u,v,w \in V$ ta có: $u + (v + w) = (u + v) + w$

TĐ3: $\exists \theta \in V$: $\theta + u = u$ (θ gọi là phần tử trung hòa)

TĐ4: $\forall u \in V$, $\exists\, -u \in V$: $u + (-u) = \theta$ (-u gọi là phần tử đối của u)

TĐ5: $\forall u,v \in V$, $\forall k \in K$ ta có: $k(u + v) = ku + kv$

TĐ6: $\forall u \in V$, $\forall k,h \in K$ ta có: $(k + h)u = ku + hu$

TĐ7: $\forall u \in V$, $\forall k,h \in K$ ta có: $k(hu) = (kh)u$

TĐ8: $\forall u \in V$ ta có: $1.u = u$

Nếu K = R thì V gọi là KGVT thực (gọi tắc là KGVT), nếu K = C thì V gọi là KGVT phức.

Ví dụ 1: Kí hiệu $R^n = \{x=(x_1;x_2;..;x_n) \mid x_1,x_2,...,x_n \in R\}$, trên R^n với 2 phép toán cộng $x + y = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ ...;\ x_n + y_n)$ và nhân $kx = (kx_1;kx_2;\ ...;\ kx_n)$ với mọi $x=(x_1;x_2;...x_n)$; $y=(y_1;y_2;...y_n) \in R^n$. Chứng minh R^n với hai phép toán cộng và nhân trên là một KGVT.

Hd: $\theta = (0;0;...;0)$

Ví dụ 2: Chứng minh $P_2 = \{p=a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in R\}$ (tập các đa thức bậc không quá 2) với 2 phép toán cộng và nhân thông thường (phép cộng hai đa thức và phép nhân một số với đa thức) là một không gian vectơ.

Hd: $\theta = 0 + 0x + 0x^2$

b. Các tính chất cơ bản

- Phần tử trung hòa là duy nhất
- Với mọi $a, b, c \in V$: $a + c = b + c$ thì $a = b$
- Với mọi $a \in V$, $(-1).a = -a$
- Với mọi $k \in K$, $a \in V$ ta có: $k.a = \theta \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $a = \theta$.

1.1.3. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

Cho V là một không gian vectơ và $S = \{u_1,u_2,...,u_n\} \subset V$

a. Biểu thị tuyến tính: Phần tử $u \in V$ gọi là biểu thị tuyến tính được qua S nếu tồn tại $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ sao cho: $k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = u$.

Khi đó, $k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n$ gọi là một tổ hợp tuyến tính của u.

Ví dụ 3: Cho S = {$p_1=x+x^2$; $p_2=1+x^2$; $p_3=1+x$}$\subset P_2$. và $p = 3 + 4x + 5x^2$**.** Hãy tìm biểu thị tuyến tính p qua hệ S (nếu có).

Giải: Ta có $k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 = p$

$$\Leftrightarrow k_1(x+x^2) + k_2(1+x^2) + k_3(1+x) = 3 + 4x + 5x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + k_3 = 3 \\ k_1 \quad + k_3 = 4 \\ k_1 + k_2 \quad = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 1 \end{cases}.$$

Vậy $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$

b. Độc lập tuyến tính: Hệ S gọi là độc lập tuyến tính nếu

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = \theta \Leftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$$

c. Phụ thuộc tuyến tính: Hệ S gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu S không độc lập tuyến tính.

Ví dụ 4: Trong KGVT R^3 cho T = {$u_1 = (0;1;1)$; $u_2 = (1;0;1)$; $u_3 = (1;2;3)$}. Kiểm tra xem T độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải: Ta có $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \theta \Leftrightarrow k_1(0;1;1) + k_2(1;0;1) + k_3(1;2;3) = (0;0;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 \quad + 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -2t \\ k_2 = -t \\ k_3 = t \end{cases}, t \in R \Rightarrow \text{T phụ thuộc tuyến tính.}$$

d. Một số tính chất

- Bất kỳ một hệ vectơ nào chứa θ thì hệ đó phụ thuộc tuyến tính.
- Hệ S độc lập tuyến tính trong V. Khi đó nếu bất kỳ vectơ nào biểu thị tuyến tính được qua S thì sự biểu thị đó là duy nhất.

1.1.4. Hệ sinh, cơ sở. Tọa độ của vectơ

Cho V là một không gian vectơ và S = {$u_1,u_2,...,u_n$} $\subset$ V

a. Hệ sinh: S gọi là hệ sinh của V nếu mọi vectơ u $\in$ V, u biểu thị tuyến tính được qua hệ S.

hay hệ $k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = u$ có nghiệm với mọi u $\in$ V.

b. Cơ sở: S là cơ sở của V nếu S độc lập tuyến tính và S là hệ sinh.

hay hệ $k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = u$ có duy nhất nghiệm với mọi u $\in$ V.

c. Định lí: (*Không gian vectơ n chiều)*

- Nếu V là KGVT có một cơ sở gồm n vectơ thì mọi cơ sở khác đều có đúng n vectơ. Khi đó ta nói V là một ***KGVT n chiều***.

- Nếu V là một KGVT n chiều thì mọi hệ độc lập tuyến tính của V có n vectơ đều là cơ sở.

Chú ý: E = {$e_1=(1;0;0;...;0;0)$; $e_2=(0;1;0;...;0;0)$; $e_n=(0;0;0...;0;1)$} là một cơ sở của KGVT R^n ***(gọi là cơ sở chính tắc)*** nên R^n là KGVT n chiều.

d. Toạ độ của vectơ

Nếu T = $\{u_1; u_2; \ldots; u_n\}$ là cơ sở của V thì mọi vectơ x thuộc V đều tồn tại duy nhất bộ $(x_1; x_2; \ldots x_n)$ sao cho $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$. Khi đó, ta gọi bộ $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ là toạ độ của x đối với cơ sở T.

Kí hiệu $x_T = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ hay viết đưới dạng ma trận $[x]_T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Ví dụ 5: Trong KGVT R^3 cho T = {(0;1;1); (1;0;1); (1;1;0)}. Chứng minh T là cơ sở của R^3. Tìm tọa độ của vectơ x = (3 ;4 ;5) đối với cơ sở T.

<u>Giải:</u> Với mọi $(x;y;z) \in R^3$ ta có

$$k_1(0;1;1) + k_2(1;0;1) + k_3(1;1;0) = (x;y;z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad k_2 + k_3 = x \\ k_1 \quad + k_3 = y \\ k_1 + k_2 \quad = z \end{cases}$$

Ta có $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ hệ có duy nhất nghiệm $\Rightarrow$ T là cơ sở.

Tìm tọa độ của x = (1;2;3) đối với cơ sở T

Ta có $x_1(0;1;1) + x_2(1;0;1) + x_3(1;1;0) = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \quad + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 \quad = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy $x_T = (2;1;0)$.

e. Bài toán đổi cơ sở

Giả sử T = $\{u_1; u_2; \ldots; u_n\}$ và T' = $\{u'_1; u'_2; \ldots; u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều V, $x \in V$ và

$$[x]_T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ và } [x]_{T'} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[x]_T$ và $[x]_{T'}$.

Giả sử $\left[u'_i\right]_T = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}, i = 1,2,..,n.$

Ta có $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$

$= x'_1u'_1 + x'_2u'_2 + \ldots + x'_nu'_n$

$= x'_1(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \ldots + p_{n1}u_n) + x'_2(p_{12}u_1 + p_{22}u_2 + \ldots + p_{n2}u_n) + \ldots +$

$+ x'_n(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \ldots + p_{nn}u_n)$

$= (x'_1p_{11} + x'_2p_{12} + \ldots + x'_np_{1n})u_1 + (x'_1p_{21} + x'_2p_{22} + \ldots + x'_np_{2n})u_2 + \ldots +$

$+ (x'_1p_{n1} + x'_2p_{n2} + \ldots + x'_np_{nn})u_n$

Suy ra $\begin{cases} x_1 = p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \ldots + p_{1n}x'_n \\ x_2 = p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \ldots + p_{2n}x'_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \ldots + p_{nn}x'_n \end{cases}$ hay $[x]_T = P.\,[x]_{T'}$

trong đó $P = \left[[u'_1]_T, [u'_2]_T, \ldots, [u'_n]_T\right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

gọi là ma trận chuyển cơ sở từ T sang T'.

Ví dụ 6: Trong KGVT R^3 cho hai cơ sở T ={u_1=(0;1;1); u_2=(1;0;1); u_3=(1;1;0)} và B={v_1=(1;1;1); v_2=(1;1;0); v_3=(1;0;0)}. Tìm ma trận đổi cơ sở từ T sang B. Cho x_T=(1;2;3), tìm tọa độ của x đối với cơ sở B.

<u>Giải</u>: Ta có: $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = v_1 \Leftrightarrow k_1(0;1;1) + k_2(1;0;1) + k_3(1;1;0) = (1;1;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1/2 \\ k_2 = 1/2 \\ k_3 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \left[v_1\right]_T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Tương tự, ta có: $\left[v_2\right]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ và $\left[v_3\right]_T = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Vậy ma trận đổi cơ sở từ T sang B là: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Ta có $[x]_T = P.\,[x]_B \Rightarrow [x]_B = P^{-1}.\,[x]_T = \ldots.$

1.2. Ánh xạ tyến tính

1.2.1 Định nghĩa

Cho X,Y là hai KGVT. Ánh xạ f:X→Y gọi là ánh xạ tuyến tính nếu thỏa 2 tính chất sau:

i) f(x+y)=f(x)+f(y)

ii) f(kx)=kf(x)

Ví dụ 1: Chứng minh ánh xạ $f:R^2 \to R^3$ với f(x;y)=(y; x; x + y)là ánh xạ tuyến tính.

Giải

Với mọi u=(x;y), v=(x';y') $\in R^2$ và với mọi $k \in R$.

Ta có: f(u + v) = f(x + x'; y + y') = (y + y'; x + x'; x + x' + y + y') (1)

Mặt khác: f(u) + f(v) = f(x;y) + f(x';y') = (y; x; x + y) + (y'; x'; x' + y')

= (y + y'; x + x'; x + x' + y + y') (1')

Từ (1) và (1') suy ra: f(u + v) = f(u) + f(v) (I)

Ta có: f(ku) = f(kx;ky)=(ky; kx; kx + ky) = k(y; x; x + y) (2)

Mặt khác kf(u) = kf(x;y) = k(y; x; x + y) (2')

Từ (2) và (2') suy ra: f(ku) = kf(u) (II)

Từ (I) và (II) suy ra f là AXTT

Ví dụ 2: Chứng minh ánh xạ $f:P_2 \to P_1$ với f(p(x))=p'(x)là ánh xạ tuyến tính.

Định lí: f:X→Y là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi f(hx+ky)=hf(x)+kf(y) với mọi $x,y \in V$ và $h,k \in R$.

Nhận xét: Ánh xạ tuyến tính được xác định khi biết ảnh của một cơ sở.

Ví dụ 3: Cho $f:R^2 \to R^2$ là ánh xạ tuyến tính biết f(1;1)=(3;4), f(2;3)=(5;2). Xác định ánh xạ f.

Giải

Với mọi $(x;y) \in R^2$

Ta có $k_1(1;1) + k_2(2;3) = (x;y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = x \\ k_1 + 3k_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 3x - 2y \\ k_2 = y - x \end{cases}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f(x;y) &= f(k_1(1;1) + k_2(2;3)) \\ &= k_1 f(1;1) + k_2 f(2;3) \\ &= k_1(3;4) + k_2(5;2) \\ &= (3k_1 + 5k_2; 4k_1 + 2k_2) \\ &= (4x - y; 10x - 6y) \end{aligned}$$

Vậy f(x;y) = (4x – y; 10x – 6y)

1.2.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f: X \to Y$.

Tập hợp Kerf $:= \{x \in X \mid f(x) = 0_Y\}$ gọi là hạt nhân của AXTT f

Tập hợp Imf $:= \{y \in Y \mid \exists x \in X$ sao cho $f(x) = y\}$ gọi là ảnh của AXTT f

Ví dụ 4: Tìm ảnh, hạt nhân của ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^2$ với $f(x;y;z) = (x-y;\ y-z)$.

1.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

1.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa: Cho f: $X \to Y$ là AXTT, B là cơ sở của X và B' là cơ sở của Y. Ma trận A sao cho $A[x]_B = [f(x)]_{B'}$ gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B, B'.

Định lí: Cho f: $X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính, $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một cơ sở của X và $B' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là một cơ sở của Y . Khi đó

$$A = [[f(u_1)]_{B'}, [f(u_2)]_{B'}, \ldots, [f(u_m)]_{B'}]$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B, B'.

Đặc biệt

- Nếu X=Y và B=B' thì ta nói A là ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với cơ sở B.
- Nếu B và B' là các cơ sở chính tắc thì A gọi là ma trận chính tắc của f.

Ví dụ 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^3$ với $f(x;\ y;\ z) = (x+y\ ;\ x+z\ ;\ y+z)$ và 2 cơ sở của R^3 là $B = \{u_1 = (1;1;0);\ u_2 = (1;0;1);\ u_3 = (0;1;1)\}$ } và $T = \{v_1 = (0;1;1);\ v_2 = (1;0;1);\ v_3 = (1;1;0)\}$. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở B.

<u>***Giải***</u>

Ta có $f(u_1) = f(1;1;0) = (1+1;\ 1+0;\ 1+0) = (2;1;1)$

$$f(u_1) = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow [f(u_1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự $f(u_2) = (1;2;1) \Rightarrow [f(u_2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tương tự $f(u_3) = (1;1;2) \Rightarrow [f(u_3)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ví dụ 2: Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \rightarrow R^2$ đối với cơ sở $B=\{u_1=(1;1);\ u_2=(2;3)\}$. Xác định f.

Định lí *(Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong phép đổi cơ sở)*

Nếu A là ma trận của f đối với cơ sở B và A' là ma trận của f đối với cơ sở B' thì

$$A' = P^{-1}AP$$

với P là ma trận đổi cơ sở từ B sang B'

Ví dụ 3: Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f: R^2 \rightarrow R^2$ đối với cơ sở $B=\{u_1=(1;1);\ u_2=(1;2)\}$. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở $B'=\{u'_1=(3;1);\ u'_2=(1,4)\}$.

1.3.2. Hạng của ánh xạ tuyến tính

Hạng của ánh xạ tuyến tính là hạng của ma trận của ánh xạ tuyến tính đó.

Bài tập chương 1

1. Trong không gian vectơ R^3 cho u = (1;2;3) và hệ B = {u_1; u_2; u_3} với u_1=(0;1;1); u_2=(1;0;1); u_3=(1;1;0). Chứng minh B là cơ sở của R^3. Tìm tọa độ của vectơ u đối với cơ sở B.

2. Trong không gian vectơ P_2 gồm các đa thức bậc không quá 2, cho hệ B={$p_1=1+x+x^2$; $p_2=x+x^2$; $p_3=1+x$ } và $p=3+2x+x^2$. Chứng minh B là một cơ sở của P_2. Tìm tọa độ của vectơ p đối với cơ sở B.

3. Trong không gian vectơ R^3 cho u=(2;3;4) và cơ sở B={u_1;u_2;u_3} với u_1=(1;1;1); u_2=(1;1;0); u_3=(1;0;0). Xác định ma trận đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở B. Từ đó tìm tọa độ của vectơ u đối cơ sở B.

4. Trong không gian vectơ P_2 gồm các đa thức bậc không quá 2, cho hai cơ sở B={$p_1=1+x+x^2$; $p_2=x+x^2$; $p_3=x^2$} và B'={ $p'_1=1+x$; $p'_2=1+x^2$; $p'_3=x+x^2$}

a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ B sang B'.

b) Cho $(p)_B$ = (1; 2; 3). Tìm tọa độ của p đối với cơ sơ B'.

5. Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^3$ biết f(1;2;3) = (3;2;1); f(1;2;0) = (2;1;0); f(1;0;0) = (1;0;0). Xác định f, tìm ma trận chính tắc của f.

6. Cho ánh xạ f: $R^2 \rightarrow R^3$ với f(x;y) = (x; x + y ; x – y)

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B={u_1=(0;1); u_2=(1;1)} và B'={u_1'= (1;0;0); u_2'= (1;1;0); u_3'= (1;1;1)}

7. Cho ánh xạ tuyến tính f : $P_2 \to P_2$ với $f(a + bx + cx^2) = b + 2cx$ và hai cơ sở B={$p_1=1+x^2$; $p_2=x+x^2$; $p_3=1+x^2$} và T = {$q_1=1+x+x^2$; $q_2=x+x^2$; $q_3=x^2$} của P_2 (P_2 là không gian vectơ các đa thức bậc không quá 2). Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B và T.

8. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận của AXTT f : $R^3 \rightarrow R^2$ đối với cặp cơ sở B={u_1=(1;0;0); u_2=(1;1;0); u_3=(1;1;1)} và B'={u_1'=(0;1); u_2'=(1;1)}. Xác định f.

9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f:$R^3 \rightarrow R^3$ đối với cơ sở B={u_1; u_2; u_3} với u_1=(1;2;3); u_2=(0;1;2); u_3=(0;0;1). Xác định f.

10. Cho Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính f:$R^3 \rightarrow R^3$ đối với cơ sở B = {u_1=(1;1;1); u_2=(1;1;0); u_3=(1;0;0)}. Tìm ma trận của f đối với cơ sở B'={u_1=(1;2;3); u_2=(0;2;3); u_3=(0;0;3)}.

CHƯƠNG 2. CHÉO HÓA MA TRẬN

2.1. Giá trị riêng, véc tơ riêng

Định nghĩa:

A là ma trận vuông cấp n. Số k gọi là giá trị riêng của A nếu phương trình Ax=kx có nghiệm x ≠0.

Véc tơ x≠0 nói trên gọi là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng k.

Nhận xét:

- Nếu k là giá trị riêng thì det(A-kI)=0 (gọi là phương trình đặc của A)
- Nghiệm khác không của phương trình Ax=kx là các véc tơ riêng ứng với giá trị riêng k.

Ví dụ: Tìm véc tơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 3-k & 2 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0$ ⇔k^2-3k+2=0⇔k =1 hoặc k=2.

vậy có hai giá trị riêng k=1 và k=2.

Với k=1 ta có các véc tơ riêng x=$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$, t≠0

Với k=2 ta có các véc tơ riêng x=$\begin{bmatrix} 2t \\ -t \end{bmatrix}$, t≠0.

2.2. Vấn đề chéo hóa ma trận

Bài toán 1: Cho ma trận vuông A có hay không ma trận P sao cho A'=P^{-1}AP là ma trận chéo? xác định P và A'.

Bài toán 2: Cho ánh xạ tuyến tính f : X→X có hay không một cơ sở sao cho ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với cơ sở đó là ma trận chéo. Xác định cơ sở đó và tính ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với cơ sở đó.

Định nghĩa: Hai ma trận A, B gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P sao cho

$$B = P^{-1}AP$$

Định nghĩa: Cho A là ma trận vuông, A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại P sao cho P^{-1}AP là ma trận chéo.

Định lí: Nếu ma trận A có n véc tơ riêng $p_1, p_2, \ldots, p_n$ độc lập tuyến tính ứng với n giá trị riêng $k_1, k_2, .., k_n$ thì P=[$p_1; p_2, \ldots, p_n$] làm chéo hóa A. Hơn nữa,

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

Nhận xét:

- Nếu p_i là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k_i (i = 1,2,..,n) thì $\{p_1, p_2,...p_n\}$ độc lập tuyến tính.
- Hai ma trận đồng dạng có cùng các GTR và VTR.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận P làm chéo hóa A, xác định $P^{-1}AP$.

Giải

Phương trình đặc trưng $-k^3+6k^2-11k+6=0$ có 3 nghiệm k = 1 ; k = 2 ; k = 3

Với k = 1, ta có $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4t \\ x_3 = t \end{cases}$

Chọn t = 1 ta được vectơ riêng tương ứng $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tương tự,

k = 2 ta được vectơ riêng tương ứng $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

k = 3 ta được vectơ riêng tương ứng $p_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vậy $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ làm chéo hóa A và $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ví dụ 2. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:R^2 \to R^2$ đối với cơ sở $B=\{u_1=(1;1);\ u_2=(1;0)\}$. Tìm một cơ sở B’ của R^2 sao cho ma trận A’ của ánh xạ tuyến tính f đối với cơ sở B’ là ma trận chéo, xác định A’.

Giải

Phương trình đặc trưng $(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ hoặc $\lambda=3$

Các véc tơ riêng ứng với GTR $\lambda=1$ là $x = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, t \neq 0$.

Các véc tơ riêng ứng với GTR λ=3 là $x=\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}, t\neq 0$.

Suy ra ma trận $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A

Gọi B'={u_1';u_2'} là cơ sở của R^2 sao cho P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'. Khi đó, ta có

$u_1' = u_1 + 0.u_2 = (1;1)$

$u_2' = u_1 - u_2 = (0;1)$

Vậy B' = { u_1'=(1;1); u_2'= (0;1)} và $A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận của f đối với cơ sở B'.

Bài tập chương 2

1. Tìm ma trận P làm chéo hóa A, xác định $P^{-1}AP$ trong các trường hợp sau:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

2. Cho ánh xạ tuyến tính $T:R^3 \rightarrow R^3$ biết T(x;y;z)=(3x-2y;-2x+3y;5z)

Tìm một cơ sở của R^3 sao ma trận của T đối với cơ sở đó là ma trận chéo, xác định ma trận đó.

3. Cho $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Tính A^{2013}.

CHƯƠNG 3: CHUỖI

3.1. Chuỗi số

3.1.1 Định nghĩa

Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Tổng vô hạn $\quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ \ldots \qquad (1)$

được gọi là chuỗi số (gọi tắt là chuỗi) và được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ gọi là các số hạn của chuỗi, u_n được gọi là số hạn tổng quát.

Tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Nếu $\lim S_n = S \in R$ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S và ta viết $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không hội tụ ta nói chuỗi đó phân kì.

Hiệu $R_n = S - S_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi số.

Ví dụ 1: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ (nếu có), trong đó q là số thực cho trước.

Giải: Tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ với ($q \neq 1$) là: $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim S_n = \dfrac{1}{1-q}$

Nếu $|q| > 1$ thì $\lim S_n = \infty$

Nếu $q = 1$ thì $\lim S_n = \infty$.

Nếu $q = -1$ thì (S_n) không có giới hạn.

Vậy $|q| < 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \dfrac{1}{1-q}$ và $|q| \geq 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ phân kì

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Giải: Ta có $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}, \forall n$

Tổng riêng

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$

3.1.2. Các tính chất

Định lí 1 (điều kiện cần): Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim |u_n| = 0$.

Chứng minh

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nên $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$

Mặt khác, ta có $u_n = S_n - S_{n-1}$ với mọi $n \in N$.

Do đó $\lim |u_n| = |S - S| = 0$.□

Chú ý: Điều ngược lại của định lí nói chung không đúng.

Ví dụ 3: Xét chuỗi điều hoà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ta có, $\lim u_n = 0$

Mặt khác, ta có : $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x}$, $x \in [n;n+1]$ với mọi $n \in N$,do đó, $\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ với mọi $n \in N$, hay $\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ với mọi $n \in N$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có $S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \to \infty$ do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Định lí 2: Điều kiện cần và đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $m>n_0$, $n>n_0$ ta có $|s_m – S_n| < \varepsilon$.

Chứng minh

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nên dãy (S_n) hội tụ. Theo định lí Côsi ta có với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $m>n_0$, $n>n_0$ ta có $|s_m – S_n| < \varepsilon$

Ngược lại, nếu với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $m>n_0$, $n>n_0$ ta có $|s_m – S_n| < \varepsilon$ thì (S_n) là dãy Côsi do đó (S_n) hội tụ do đó $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.□

Định lí 3: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS$, với a là số thực kất kì cho trước.

Định lí 4: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = T$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = S + T$

Định lí 5: Tính hội tụ hay phân kì của chuỗi không đổi khi ta thay đổi một số hữu hạn các số hạn đầu.

3.1.3 Chuỗi số dương

a. Định nghĩa:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $a_n \geq 0$ với mọi $n \in N$ được gọi là chuỗi số dương. (2)

b. Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

Định lí 1: Điều kiện cần và đủ để chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là dãy tổng riêng tương ứng (S_n) bị chặn trên.

Chứng minh

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì dãy (S_n) có giới hạn do đó (S_n) bị chặn.

Ngược lại, Giả sử (S_n) bị chặn trên.

Mặt khác, do $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ nên (S_n) tăng.

Vậy (S_n) tăng và bị chặn trên, do đó (S_n) hội tụ hay $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.□

Tính chất: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \leq 1$.

Ví dụ 4: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5}$

Ta có $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k + 5} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$

Vậy (S_n) bị chặn trên do đó chuỗi hội tụ.

Định lí 2: (Dấu hiệu so sánh)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nếu tồn tại số dương c sao cho $u_n \leq c.v_n, \forall n \in N$ thì :

i) nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

ii) nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

Chứng minh

Gọi S_n và T_n lần lượt là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

i) Do $u_n \le c.v_n, \forall n \in N$ nên $S_n \le c.T_n, \forall n \in N$. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ nên (T_n) bị chặn do đó (S_n) cũng bị chặn. Theo định lí 1 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.□

ii) Do $u_n \le c.v_n, \forall n \in N$ nên $S_n \le c.T_n, \forall n \in N$. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì nên (S_n) không bị chặn trên do đó (T_n) cũng không bị chặn trên. Theo định lí 1 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.□

Ví dụ 5: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$

Giải: Ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \le \frac{1}{.3^n}, \quad \forall n \ge 1$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ.

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ

Ví dụ 6: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

Giải: Ta có, $\frac{1}{2n+1} \ge \frac{1}{3}.\frac{1}{n}, \quad \forall n > 0.$

Và chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì. Do đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ phân kì.

Định lí 3: (Dấu hiệu CôSi)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim \sqrt[n]{u_n} = L$ thì

i) nếu L < 1 suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

ii) nếu L > 1 suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Chứng minh

- Với L < 1. Ta chọn ε > 0 đủ bé sao cho 0< L + ε = q < 1.

Vì $\lim \sqrt[n]{u_n} = L$ nên với n đủ lớn thì $\sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon = q < 1$ do đó $u_n < q^n$

Mặt khác, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ (vì 0 ≤ q <1)

Từ dấu hiệu so sánh ta có $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

- Với L > 1. Ta chọn ε > 0 đủ bé sao cho L - ε > 1.

Vì $\lim\sqrt[n]{u_n} = L$ nên với n đủ lớn thì $\sqrt[n]{u_n} > 1 - \varepsilon > 1 \Rightarrow u_n > 1$

Do đo, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì

Định lí 4: (Dấu hiệu Đalămbe)

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Nếu $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ thì

i) nếu L < 1 suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

ii) nếu L > 1 suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

<u>Chứng minh</u>

Ví dụ 7: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ta có $\lim\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} < 1$.

Theo định lí Côsi ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ hội tụ.

Ví dụ 8: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$.

Ta có $\lim\dfrac{\frac{5^{n+1}}{n+2}}{\frac{5^n}{n+1}} = \lim\frac{5(n+1)}{n+2} = 5 > 1$.

Theo định lí Đalămbe ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$ phân kì.

3.1.4 Chuỗi đan dấu

a. Định nghĩa: Chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ trong đó $a_n \geq 0$ (hoặc $a_n \leq 0$) với mọi $n \in N$ được gọi là chuỗi đan dấu.

b. Định lí: (Tiêu chuẩn Lépnít)

Nếu dãy (u_n) giảm và $\lim u_n = 0$ thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ.

Ví dụ 9: Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ta có, dãy (u_n) với $u_n=\frac{1}{n}$ là dãy giảm và limu_n=0. Theo dấu hiệu Lépnít ta có chuỗi điều hoà đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ.

3.1.5 Chuỗi hội tụ tuyệt đối

a. Định nghĩa: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ.

b. Định lí: Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Ví dụ 10: Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Ta có, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ hội tụ.

3.2 Chuỗi luỹ thừa

3.2.1 Định nghĩa

Chuỗi luỹ thừa là chuỗi dạng $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\alpha)^n$ (3)

Nếu đặt $X=x-\alpha$ khi đó chuỗi (3) trở thành $\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$ (4)

3.2.2 Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lí Aben

Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ tại $x_0\neq 0$ thì nó hội tụ tại mọi điểm x mà $|x|<|x_0|$.

Từ định lí suy ra, tồn tại số thực không âm R sao cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ trên khoảng (-R;R) và phân kì trong $(-\infty,-R)\cup(R;+\infty)$.

Định nghĩa: Số thực không âm R sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ trên khoảng (-R;R) và phân kì trong $(-\infty,-R)\cup(R;+\infty)$ gọi là bán kính hội tụ của chuỗi đó.

Định lí CôSi

Nếu $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (4) là:

$$R = \begin{cases} 1/L & , \quad 0 < L < +\infty \\ +\infty & , \quad L = 0 \\ 0 & , \quad L = \infty \end{cases}$$

Định lí Đalămbe

Nếu $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (4) là:

$$R = \begin{cases} 1/L & , \quad 0 < L < +\infty \\ +\infty & , \quad L = 0 \\ 0 & , \quad L = \infty \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$

Đặt t = x – 2 chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$

Ta có $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, do đó R = 1.

Tại t = 1, ta có chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Tại t = -1, ta có chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi số điều hòa đan dấu thỏa mãn các điều kiện của định lý Leinitz, nó hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ $-1 \le t < 1$

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $1 \le x < 3$.

Ví dụ 2. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Ta có $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Do đó $R = +\infty$, chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn R.

Ví dụ 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^{n}$

Ta có $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow R=1$

Khi x = 1, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^{n}$. Số hạng tổng quát $u_n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\to\frac{1}{e}\neq 0$ khi $n\to\infty$, vậy chuỗi số phân kỳ.

Khi x = -1, ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, số hạng tổng quát của nó không dần tới 0 khi $n\to\infty$, chuỗi số phân kỳ.

Vậy miền hội tụ là (-1, 1).

3.2.3 Khai triển hàm số thành chuỗi luỹ thừa

a. Định nghĩa

Hàm số S(x) gọi là khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong khoảng (-R;R) nếu tồn tại chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ về hàm số S(x) trên khoảng (-R;R).

b. Các định lí

Định lí 1 (Điều kiện cần)

Điều kiện cần để hàm số S(x) khai triển được thành chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ trong khoảng (-R;R) là S(x) có đạo hàm các cấp và: $a_k=\frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ với mọi $k\in N$.

Định lí 2 (Điều kiện đủ)

Nếu có số thực dương C sao cho với mọi $x\in[-R;R]$ ta có $|S^{(n)}(x)|\le C$ với mọi $n\in N$ thì hàm số S(x) khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trên đoạn [-R;R] và $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Ví dụ 1: Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa

a) sinx
b) cosx
c) e^x

Ví dụ 2: Chứng minh $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}(x-2)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+5}(x+3)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3n+2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n+5}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(x-4)^n}{n^2.3^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+4)^n}{n.2^n}$

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. Phương trình vi phân cấp 1

4.1.1. Định nghĩa.

- Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng $F(x, y, y') = 0$,

Trong đó x là biến số độc lập, y=y(x) là hàm số phải tìm, y' là đạo hàm của y(x).

- Nghiệm là hàm số $y = \varphi(x)$ sao cho $F(x;\varphi(x);\varphi'(x))=0$
- Nghiệm tổng quát là nghiệm dạng $y = \varphi(x,C)$
- Tích phân tổng quát là phương trình G(x;C)=0 xác định nghiệm tổng quát
- Nghiệm riêng là một nghiệm trong nghiệm tổng quát
- Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong nghiệm tổng quát
- Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

4.1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho phương trình vi phân cấp 1 : y' = f(x;y)

Nếu f(x,y) và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trong miền D thì trong lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất nghiệm y=y(x) thỏa điều kiện đầu $y(x_0)=a$.

4.2. Các phương trình vi phân cơ bản.

4.2.1. Phương trình vi phân với biến số phân ly.

Dạng f(x)dx = g(y)dy

Cách giải

Lấy tích phân hai vế, ta được $\int f(x)dx = \int g(y)dy$ hay F(x) = G(y) + C,

trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x), G(y) là một nguyên hàm của g(y).

Ví dụ: Giải phương trình (1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0.

Giải: Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$, phương trình trở thành

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = \left(1-\frac{1}{y}\right)dy$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$$

hay

$$\ln|xy| + x - y = C.$$

Ta có x = 0, y = 0 cũng thỏa mãn phương trình, nên x = 0, y = 0 là hai nghiệm kì dị của phương trình.

4.2.2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

Dạng y'=f(y/x)

Phương pháp: Đặt y = z.x đưa về dạng biến số phân ly

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $(x^2 + xy)y'=y^2$

4.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Dạng: y’+ p(x)y = q(x), trong đó p(x) và q(x) là các hàm liên tục.

Phương trình y’+ p(x)y = 0 gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

Phương pháp

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng: y’ + p(x)y = 0

Nếu $y \neq 0$, có thể viết nó thành

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + K$$

$$\Leftrightarrow y = C\, e^{-\int p(x)dx},\ C \neq 0.$$

Mặt khác y = 0 cũng là một nghiệm và là một nghiệm riêng ứng với C = 0.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C\, e^{-\int p(x)dx}$

Bước 2: Tìm nghiệm của y’+p(x)y = q(x) dạng $y = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}$ ta có:

$$e^{-\int p(x)dx}C'(x) - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay

$$dC(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

Do đó

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$$

trong đó K là một hằng số tùy ý.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = K e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx$$

4.2.4. Phương trình Becnuli

Dạng $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ với $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

Phương pháp:

Chia hai vế cho y^{α} phương trình trở thành

$$y'.y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = y'.y^{-\alpha}$ nên phương trình trở thành

$$z' + p(x)z = q(x)$$

(z’+p(x)z=q(x) *là dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1*)

Ví dụ: Giải phương trình $y' + xy = xy^2$

4.2.5. Phương trình vi phân toàn phần.

Là phương trình vi phân có dạng: P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,

trong đó P(x, y), Q(x, y) là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục thỏa mãn điều kiện $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Khi đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Nếu $D=R^2$, hàm số u(x, y) được cho bởi công thức

$$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x, y)dy + K$$

hay $$u(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} Q(x_0, y)dy + K$$

trong đó x_0, y_0 là hai số nào đó, K là hằng số tùy ý.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là: u(x;y) = C.

Ví dụ: Giải phương trình $[(1 + x + y)e^x + e^y]dx + [e^x + xe^y]dy$.

Giải

Ta có $P(x, y) = (1 + x + y)e^x + e^y$, $Q(x, y) = e^x + xe^y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vậy Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u(x, y).

$$u(x, y) = \int_0^x \left[(1+x)e^x + 1\right]dx + \int_0^y \left(e^x + xe^y\right)dy$$

$$= xe^x + x + e^x y + xe^y - x = (x + y)e^x + xe^y$$

Tích phân tổng quát của phương trình là: $(x + y)e^x + xe^y = C$

4.3. Phương trình vi phân cấp 2.

4.3.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng F(x,y,y’,y’’) = 0

Nghiệm là hàm số y = φ(x) sao cho F(x;φ(x);φ’(x);φ’’(x))=0

Nghiệm tổng quát là nghiệm dạng $y = \varphi(x,C_1,C_2)$

Tích phân tổng quát là phương trình $G(x;C_1;C_2)=0$ xác định nghiệm tổng quát

Nghiệm riêng là một nghiệm trong nghiệm tổng quát

Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

4.3.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm, bài toán Cauchy.

Cho phương trình vi phân cấp hai y’’ = f(x,y,y’).

Nếu f(x,y,y’); $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ và $\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trong miền D thì trong lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất nghiệm y=y(x) thỏa các điều kiện đầu $y(x_0)=a$ và $y'(x_0)=b$.

4.3.3. Phương trình vi phân cấp 2 có thể giảm cấp được.

a. Phương trình khuyết y: F(x,y’,y’’)=0

Phương pháp: Đặt y’ = p, Khi đó, phương trình trở thành F(x,p,p’)=0

Ví dụ: Giải phương trình vi phân xy’+2y’’=6x *(Đs: $y = x^2+C_1/x +C_2$)*

b. Phương trình khuyết x: F(y,y',y'')=0

Phương pháp: Đặt y'=p ta có y'' = p.dp/dy.

Phương trình trở thành F(y,p,p.dp/dy)=0

Ví dụ: Giải phương trình vi phân y''+y'- 2y=0

Đs: $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

4.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2.

Là phương trình dạng y'' + p(x)y' +q(x)y = f(x) trong đó p(x), q(x) và f(x) là những hàm liên tục

Nếu f(x) = 0 thì phương trình đó gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Định lí 1: Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất đó.

Định lí 2 : Nếu y^* là một nghiệm riêng của PTVPTT và $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của PTVPTTTN tương ứng thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*$ là nghiệm tổng quát của PTVPTT đó.

Định lí 3 : (Nguyên lí chồng chất nghiệm)

Nếu $y_1(x)$ là nghiệm riêng của $y'' + p(x)y' +q(x)y = f_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm riêng của $y'' + p(x)y' +q(x)y = f_2(x)$ thì $y = y_1(x) +y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $y''+ p(x)y' +q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

4.3.5. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng.

Dạng : Ay''+By'+Cy=0, trong đó A, B, C $\in$ R

Phương pháp

B1: Giải phương trình đặc trưng $Ak^2 + Bk + C = 0$

B2: Kết luận nghiệm theo các trường hợp sau :

TH1: Nếu $k_1 \neq k_2$ thì NTQ là: $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$

TH2: Nếu $k_1 = k_2$ thì NTQ là: $y = (C_1 + xC_2)e^{k_1x}$

TH3: Nếu $k=\alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát là $y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Ví dụ: Giải các phương trình

a. y'' + y' = 0

b. y'' + 4y' + 4y = 0

c. y'' + 2y' +2y = 0

4.3.6. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng.

Dạng: Ay'' + By' + Cy = f(x), trong đó A, B, C $\in$ R

Phương pháp

B1: Giải phương trình thuần nhất

B2: Tìm nghiệm riêng của Ay'' + By' + Cy = f(x)

TH1: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

- Nếu α không là nghiệm của PTĐT thì ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y = e^{\alpha x}.Q_n(x)$$

- Nếu α là nghiệm đơn của PTĐT thì ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y = xe^{\alpha x}.Q_n(x)$$

- Nếu α là nghiệm kép của PTĐT thì ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y = x^2e^{\alpha x}.Q_n(x)$$

TH2: $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$; đặt $k = \max\{m,n\}$

- Nếu $\alpha + i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng ta tìm nghiệm riêng dạng $y = e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x]$
- Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng ta tìm nghiệm riêng dạng $y = x.e^{\alpha x}.[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x]$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $(x^2 + 1)y' = xy$

b) $(x + y)y' = x - y$

c) $x^2y' = xy + y^2$

d) $(x^2 + 1)y' + xy + 2 = 0$

e) $x^2y' + xy = 1;\ y(1) = 2$

f) $x^2y' - xy = y^2$

2. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

b) $y'' + 2y' - 3y = xe^x$

c) $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$

d) $y'' - 4y' + 3y = \sin x$

e) $y'' + y = \cos x$

f) $y'' - y' = x + \sin x$