VIỆN ĐẠI HỌC MỞ HÀ NỘI

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ÔN THI TỐT NGHIỆP
MÔN TOÁN RỜI RẠC

Mục đích:

1) Nhắc lại một số nội dung lý thuyết cơ bản.
2) Hướng dẫn giải các lớp bài tập quan trọng nhằm cung cấp các phương pháp giải các bài tập có thể có trong các đề thi tốt nghiệp.

Tài liệu tham khảo:

- Toán rời rạc - tập 1(lý thuyết) và tập 2 (bài tập và lời giải) –Nguyễn Địch - NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà nội 2010.
- Toán rời rạc – Nguyễn Địch, Lê Thị Thanh Thùy – Viện Đại học Mở Hà Nội, 2012.

Nội dung:

Phần 1. Bài toán đếm.

1) Các công thức cơ bản trong lý thuyết tổ hợp:

- Chỉnh hợp không lặp $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$
- Chỉnh hợp lặp $L_n^k = n^k$
- Hoán vị không lặp $P_n = n!$
- Hoán vị lặp $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$
- Tổ hợp lặp $R_n^k = C_{n+k-1}^k$
- Nhị thức Newton $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$
  - Cho x = 1 sẽ có: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$
  - Cho x = -1 sẽ có: $C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 ... = 2^{n-1}$

2) Các nguyên lý đếm:

- Nguyên lý cộng: Nếu $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m$ và $B_i \cap B_j \neq \varnothing, \forall i \neq j$ thì

$$|B| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_m| \quad \Rightarrow \quad |B| = \sum_{i=1}^{m} |B_i|$$

- Nguyên lý nhân : Nếu $B = B_1 x B_2 x \ldots x B_m$ thì $|B| = |B_1|.|B_2|\ldots|B_m|$
- Nguyên lý loại trừ: Nếu $A \subset B$ thì ta có $|A| = |B| - |B \setminus A|$
- Nguyên lý bù trừ: Nếu $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ thì

$$|B| = \sum_{i=1}^{m} |B_i| - \sum_{i \neq j} |B_i \cap B_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |B_i \cap B_j \cap B_k| - \ldots + (-1)^{m-1} |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m|$$

- Nguyên lý quy về đơn giản.
- Nguyên lý truy hồi.

<u>Phần 2. Bài toán tồn tại.</u>

Định lý Dirichlet

a) Dạng giản đơn: Nhốt (n+1) con chim vào n chiếc lồng (n nguyên, dương) thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con chim.

b) Dạng tổng quát: Nhốt n con chim vào k chiếc lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất $\left]\frac{n}{k}\right[$ con chim (n và k nguyên dương). Trong đó $\left]\frac{n}{k}\right[$ là số nguyên nhỏ nhất trong các số nguyên $\geq \frac{n}{k}$

Thí dụ:

- Nếu n = 21 và k = 3 thì $\left]\frac{n}{k}\right[= 7 = \frac{n}{k}$

- Nếu n = 22 và k = 3 thì $\left]\frac{n}{k}\right[= 8 > \frac{n}{k}$, đó là số làm tròn lên.

<u>Phần 3. Đồ thị hữu hạn và ứng dụng.</u>

Một số khái niệm quan trọng

1) Đồ thị vô hướng.

a) Đồ thi vô hướng đủ G(X, V) (có n đỉnh, m cạnh) : mọi cặp đỉnh đều có cạnh nối. Khi đó có các công thức sau:

$$m = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

+ Số đồ thị con (bớt 1 số đỉnh):

$$s = C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} = 2^n - 2$$

+ Số đồ thị bộ phận (bớt 1 số cạnh):

$$r = C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^m = 2^{m-1}$$

b) Cây và cây bao trùm (cây khung):

Cây là đồ thị vô hướng liên thông và không chứa chu trình, khi đó m = n -1.

Cây chứa mọi đỉnh của đồ thị là cây bao trùm.

Định lý Kelly: Số cây bao trùm chứa trong một đồ thị vô hướng đủ có n đỉnh là:

$$T_n = n^{n-2}$$

c) Đồ thị Euler là đồ thị chứa chu trình Euler, đó là chu trình đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh 1 lần.

Định lý Euler: Điều kiện cần và đủ để một đồ thị vô hướng, liên thông là đồ thị Euler là bậc của tất cả các đỉnh đều là các số chẵn.

Chú ý: Đồ thị đủ n đỉnh thì bậc của mọi đỉnh đều bằng n -1, nếu đồ thị này là đồ thị Euler thì n-1 phải là số chẵn, nghĩa là n phải là số lẻ.

2) Đồ thị có hướng.

a) Bài toán tìm đường đi ngắn nhất và thuật toán Dijkstra.

- Phát biểu bài toán: Cho đồ thị có hướng, liên thông. Có 1 đỉnh S mà $F^{-1}(S) = \varnothing$ và 1 đỉnh Z mà $F(Z) = \varnothing$ nghĩa là không có cung đi đến S và không có cung đi từ Z (S là đỉnh xuất phát, Z là đích phải đến).

  $\forall u \in U$ ta gán cho nó một số l(u) > 0 gọi là độ dài của cung u. T là 1 đường đi từ S đến Z, độ dài của T là $l(T) = \sum_{u \in T} l(u)$. Ký hiệu $\Im$ là tập mọi đường đi từ S đến Z. Vấn đề đặt ra là tìm đường đi T^* sao cho:

$$l(T^*) \leq l(T) \quad \forall T \in \Im.$$ T^* là đường đi ngắn nhất.

- Thuật toán Dijkstra:

Bước 1. $L_1 = \{S\}$ gán cho S một số $\gamma(S)=0$

Bước 2. $L_2 = x \in X : F^{-1}(x) = S$, $\forall x \in L_2$ ta gán cho nó số: $\gamma(x)= l(S,x)$

…..

Bước k. $L_k = x \in X : F^{-1}(x) \subset L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_{k-1}$

$\forall x \in L_k$ ta gán cho nó số: $\gamma(x)= \min\{ \gamma(y) + l(y,x)\}$ với $y \in F^{-1}(x)$

Thuật toán kết thúc khi tìm được $\gamma(Z)$ Đó chính là độ dài của T^*.

b) Bài toán tìm luồng vận tải cực đại và thuật toán Ford- Fulkerson.

- Phát biểu bài toán: Cho đồ thị có hướng, liên thông. Có 1 đỉnh S mà $F^{-1}(S) = \varnothing$ và 1 đỉnh Z mà $F(Z) = \varnothing$ $\forall u \in U$ ta gán cho nó một số $t(u) > 0$ gọi là tải năng của cung u, đó là lượng hàng tối đa được phép chuyển qua cung u trong 1 đơn vị thời gian. Tìm lượng hàng lớn nhất có thể chuyển từ S đến Z trong một đơn vị thời gian, ta gọi đó là luồng vận tải cực đại.

Hàm $\varphi(u)$ xác định trên U thoả mãn các điều kiện sau đây được gọi là luồng:

+ $\varphi(u) \geq 0 \quad \forall u \in U$ (lượng hàng qua cung u là 1 số không âm).

+ $\varphi(u) \leq t(u) \ \forall u \in U$ (lượng hàng qua u không vượt quá t(u).

+ $\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) \quad \forall x \in X \backslash \{S, Z\}$

Trong đó U_x^- và U_x^+ tương ứng với tập các cung đến x và tập các cung đi khỏi x, nghĩa là tại các đỉnh trung gian tổng lượng hàng đến bằng tổng lượng hàng đi. Từ đó suy ra:

$$\sum_{u \in U_S^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_Z^-} \varphi(u) = f(\varphi) \text{ gọi là cường độ của luồng } \varphi$$

Ký hiệu Φ là tập mọi luồng có thể có. Bài toán đặt ra là tìm luồng φ^* sao cho

$$f(\varphi^*) \geq f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi$$

- Thuật toán Ford- Fulkerson:

Bước 1: Chọn một đường đi nào đó từ S đến Z, gọi là T_1 và làm cho T_1 trở thành đầy. Ký hiệu $f(T_1) = \min_{u \in T_1} t(u)$.

Ký hiệu U_1^* là tập các cung bão hòa của T_1.

Ta tìm đồ thị bộ phận G_1 của G như sau:

$G_1 = (X, U_1)$ trong đó $U_1 = U \setminus U_1^*$ (loại bỏ các cung bão hòa của T_1) ngoài ra tải năng $t_1(u)$ của các cung $u \in G_1$ được xác định như sau:

$$t_1(u) = \begin{cases} t(u) - f(T_1), & \forall\, u \in T_1 \\ t(u), & \forall\, u \notin T_1 \end{cases}$$

Bước 2: Lặp lại bước 1 đối với đồ thị $G_1(X, U_1)$.

Bước k: Lặp lại bước $(k-1)$ với đồ thị bộ phận $G_{k-1}(X, U_{k-1})$.

Nếu không tìm được đường T_k từ S đến Z, nghĩa là S và Z thuộc 2 thành phần liên thông khác nhau của $G_{k-1}(X, U_{k-1})$ hay S và Z mất liên thông thì thuật toán kết thúc. Khi đó: $f(\varphi^*) = \sum_{i=1}^{k-1} f(T_i)$

<u>Phần 4. Một số vấn đề về logic toán.</u>

1) Các phép toán đối với biến logic:

Cho các biến logic: x, y lấy giá trị 0 hoặc 1. Có các phép toán sau:

Phép phủ định: Phủ định của x ký hiệu là $\overline{x}$ lấy giá trị trái với x:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Các phép toán khác lấy giá trị như sau:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \to y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0

Trong đó: $x \vee y$ là x tuyển y (x hoặc y)

$x \wedge y$ là x hội y (x và y)

$x \oplus y$ là x tuyển loại y (x khác y)

$x \rightarrow y$ là x kéo theo y (nếu x thì y)

$x \mid y = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ hàm Sheffer của x và y

$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ hàm Vebb của x và y

2) Dạng chuẩn tắc của hàm đại số logic F(x, y, z):

a) Tuyển chuẩn tắc là tuyển của các hội sơ cấp khác nhau. Hội sơ cấp là hội mà trong đó mỗi biến logic hoặc phủ định của nó chỉ xuất hiện tối đa 1 lần, điều đó bảo đảm cho số phép toán của hội sơ cấp là ít nhất. Khi tìm hội sơ cấp thì căn cứ vào giá trị 1 của hàm F(x, y, z).

b) Hội chuẩn tắc là hội của các tuyển sơ cấp khác nhau. Tuyển sơ cấp là tuyển mà trong đó mỗi biến logic hoặc phủ định của nó chỉ xuất hiện tối đa 1 lần. Khi tìm tuyển sơ cấp thì căn cứ vào giá trị 0 của hàm F(x, y, z).

Nội dung cụ thể sẽ trình bày khi giải các bài tập trong phần 4.

Hướng dẫn giải các bài tập Toán rời rạc.

Phần 1. Các bài toán đếm.

Bài 1. Cho A là một tập gồm các chữ số { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Hỏi có thể lập được bao nhiêu con số hàng trăm trong các trường hợp sau đây:

1) Các chữ số tạo thành một dãy tăng; tạo thành một dãy giảm?

2) Các chữ số không lặp; các chữ số có thể lặp?

Bài giải.

1) Mỗi con số hàng trăm có các chữ số tạo thành một dãy tăng tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 9 chữ số nguyên dương (không lấy số 0). Vậy ta có :

$$C_9^3 = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84 \text{ con số.}$$

Mỗi con số hàng trăm có các chữ số tạo thành một dãy giảm tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 10 chữ số. Vậy ta có :

$$C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120 \text{ con số.}$$

2) Số các con số hàng trăm có các chữ số không lặp là :

$$S_1 = A_{10}^3 - A_9^2 = 10.9.8 - 9.8 = 648 \text{ con số.}$$

Số các con số hàng trăm có các chữ số có thể lặp là:

$$S_2 = L_{10}^3 - L_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 900 \text{ con số.}$$

Bài 2. Có bao nhiêu cách chia một bộ bài 52 quân cho 4 người:

1) Mọi người đều có số quân bằng nhau ?

2) Số quân tương ứng với mỗi người là 8, 12, 14, 18 quân ?

Bài giải.

1) Chia bộ bài 52 quân thành 4 phần bằng nhau có

$$C_{52}(13,13,13,13) = \frac{52!}{4!(13!)^4} \text{ cách chia.}$$

Sau đó chia 4 phần cho 4 người, vậy có

$$S_1 = C_{52}(13,13,13,13).\,4! = \frac{52!}{(13!)^4} \text{ cách chia.}$$

2) Tương tự như trên: Chia bộ bài thành 4 phần với số quân tương ứng là 8, 12, 14, 18 quân, sau đó chia cho 4 người mỗi người một phần. Số cách chia là:

$$S_2 = C_{52}(8,12,14,18).4! = \frac{52!4!}{8!.12!.14!.18!}$$

Bài 3. 1) Có bao nhiêu cách chia 7 quyển vở như nhau cho 5 em bé sao cho em nào cũng được nhận vở ?.

2) Có bao nhiêu cách gọi 5 sinh viên để trả lời 7 câu hỏi thi khác nhau sao cho sinh viên nào cũng được gọi để trả lời câu hỏi ?

Bài giải.

1) Chia cho mỗi em bé một quyển vở, còn lại 2 quyển chia tùy ý. Số cách chia là

$$S_1 = R_5^2 = C_6^2 = 15 \text{ cách.}$$

2) Chia 7 câu hỏi thi khác nhau thành 5 nhóm, mỗi nhóm có ít nhất 1 câu hỏi, số cách chia là

$$C_7(1,1,1,1,3) + C_7(1,1,1,2,2) = (7!)/(4!.3!) + (7!)/(3!2!2!2!) = 140 \text{ cách}$$

Sau đó giao cho mỗi sinh viên trả lời một nhóm câu hỏi, do đó ta có

$$S_2 = 140.\ 5! = 16800 \text{ cách.}$$

Bài 4. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ có bao nhiêu nghiệm nếu

1) $x_i \geq 0$ và nguyên , (i = 1, 2, 3, 4)

2) x_i nguyên và $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 2$.

Bài giải.

1) Số nghiệm nguyên không âm là $R_4^9 = C_{12}^9 = \frac{12.11.10}{1.2.3} = 220$

2) Đặt $x_i = t_i + 1$ với i = 1, 2, 3 và $x_4 = t_4 + 2$ thì sẽ có phương trình

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4;\ t_i \geq 0 \text{ và nguyên , } (i = 1, 2, 3, 4)$$

suy ra số nghiệm là $R_4^4 = C_7^4 = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$

Bài 5. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 gia đình, mỗi gia đình có 3 người sao cho những người trong mỗi gia đình thì ngồi gần nhau trong các trường hợp dưới đây:

1) Các ghế có ghi số và xếp thành một dãy ngang ?

2) Các ghế có ghi số và xếp quanh một bàn tròn ?

Bài giải.

1) Chia 12 ghế thành 4 lô, mỗi lô 3 ghế, sau đó chia cho mỗi gia đình 1 lô.

Vậy số cách xếp chỗ là $S_1 = 4!(3!)^4 = 31104$ cách.

2) Xếp chỗ cho 1 gia đình nào đó, có 12 cách xếp (vì có 12 ghế). Còn lại 9 ghế coi như một dãy thẳng xếp chỗ cho 3 gia đình còn lại. Vậy số cách xếp chỗ là

$$S_2 = 12.3!(3!)^4 = 93312 \text{ cách}$$

Bài 6. Nhóm A có 7 sinh viên, nhóm B có 6 sinh viên, nhóm C có 5 sinh viên

1) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 sinh viên thuộc 2 nhóm A và B; B và C; C và A?

2) Có bao nhiêu cách chọn ra 4 sinh viên thuộc cả 3 nhóm ?

Bài giải.

1) Ký hiệu S(A, B) là số cách chọn ra 4 sinh viên từ 2 nhóm A và B ta có :

$$S(A, B) = C_{13}^4 - (C_7^4 + C_6^4) = 715 - (35 + 15) = 665.$$

$$S(B, C) = C_{11}^4 - (C_6^4 + C_5^4) = 330 - (15 + 5) = 310.$$

$$S(C, A) = C_{12}^4 - (C_5^4 + C_7^4) = 495 - (5 + 35) = 455.$$

2) $S(A, B, C) = C_{18}^4 - [S(A, B) + S(B, C) + S(C, A)] - (C_7^4 + C_6^4 + C_5^4)$

$$= 3060 - (665 + 310 + 455) - (35 + 15 + 5) = 1575.$$

Bài 7. Có bao nhiêu cách xếp 10 nam và 10 nữ trong các trường hợp sau:

1) xếp thành 2 hàng dọc, mỗi hàng 10 người và trên mỗi hàng ngang đều có 1 nam và 1 nữ ?

2) xếp thành 4 hàng dọc mỗi hàng có 5 người, trên mỗi hàng ngang đều có 2 nam và 2 nữ?

Bài giải.

1) Xếp thành 2 hàng dọc, một hàng 10 nam, một hàng 10 nữ. Hoán vị dọc mỗi hàng, sau đó hoán vị ngang mỗi hàng thì sẽ có $S_1 = (10!)^2.(2!)^{10}$ cách.

2) Xếp thành 4 hàng dọc: 2 hàng 5 nam, 2 hàng 5 nữ sau đó hoán vị dọc và hoán vị ngang thì sẽ có $S_2 = (5!)^4.(4!)^5$ cách

Bài 8. Có 5 bộ quần áo TDTT đánh số từ 1 đến 5. Huấn luyện viên phát cho 5 cầu thủ mỗi người 1 quần và 1 áo. Hỏi có bao nhiêu cách phát khác nhau trong các trường hợp sau:

1) Cả 5 cầu thủ đều nhận được quần và áo có số khác nhau ?

2) Có đúng 2 cầu thủ nhận được quần và áo có số như nhau ?

Bài giải.

1) Bài toán này liên quan đến số mất thứ tự. Ký hiệu D_n là số cách bỏ n thư vào n phong bì đã ghi địa chỉ sao cho không có thư nào đúng địa chỉ, ta có phương trình truy hồi sau :

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ với $D_1 = 0$; $D_2 = 1$. Ta suy ra :

$D_3 = 2(1 + 0) = 2$: $D_4 = 3(2 + 1) = 9$; $D_5 = 4(9 + 2) = 44$

Xếp 5 quần và 5 áo sao cho các số của quần và áo đều khác nhau, sau đó phát cho mỗi cầu thủ một bộ. Số cách phát sẽ là: $S_1 = D_5.5! = 44. 120 = 5280$ cách.

2) Chọn ra 2 bộ quần áo để xếp đúng bộ, còn lai 3 bộ xếp quần và áo có số khác nhau; sau đó phát cho mỗi người một bộ. Số cách phát sẽ là $S_2 = C_5^2. D_3.5! = 10. 2. 120 = 2400$ cách

Bài 9. Cho 20 đường thẳng trên cùng một mặt phẳng. Có bao phần mặt phẳng được tạo thành trong các trường hợp sau đây:

1) Có 5 đường thẳng song song với nhau .
2) Có 5 đường thẳng đồng qui tại một điểm .

Bài giải.

1) 20 đường thẳng có vị trí tổng quát tạo ra $S_{20} = 1 + \dfrac{20.21}{2} = 211$ phần mặt phẳng;

5 đường thẳng tổng quát tạo ra $S_5 = 1 + (5 \times 6) / 2 = 16$ phần mặt phẳng

trong khi đó 5 đường thẳng song song chỉ tạo ra 6 phần mặt phẳng, nghĩa là số phần mặt phẳng phải bớt đi là 16 – 6 = 10. Vậy số phần mặt phẳng cần tìm là: S = 211 – 10 = 201

2) 5 đường thẳng đồng qui tại một điểm chỉ tạo ra 10 phần mặt phẳng nên số phần mặt phẳng phải bớt đi là 16 – 10 = 6. Vậy số phần mặt phẳng cần tìm là S = 211 – 6 = 205.

Bài 10. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 7 nam và 3 nữ thành một hàng ngang sao cho :

1) Cả 3 nữ ngồi gần nhau.
2) Có đúng 2 nữ ngồi gần nhau.
3) Cả 3 nữ không ngồi gần nhau.

Bài giải.

1) 3 nữ ngồi gần nhau coi như một đối tượng, cùng với 7 nam vậy có 8! hoán vị. Sau đó 3 nữ hoán vị chỗ với nhau. Vậy số cách xếp chỗ là $S_1 = 8! \times 3! = 241920$ cách.

2) Chọn ra 2 nữ để xếp gần nhau; có $C_3^2 = 3$ cách. Xếp 2 nữ đã chọn với 7 nam có

$$3 \times 8! \times 2! = 241920 \text{ cách.}$$

Với mỗi cách xếp 7 nam và 2 nữ này (coi 2 nữ là 1 đối tượng) thì có 9 chỗ có thể xếp cho một nữ còn lại nhưng phải loại đi 2 vị trí gần với 2 nữ đã xếp chỗ, do đó số cách xếp chỗ cần tìm là

$$S_2 = 241920 \times (9 - 2) = 1693440 \text{ cách.}$$

3) Hoán vị 7 nam có 7! = 5040 cách. Có 8 chỗ có thể chọn để xếp chỗ cho 3 nữ.

Vậy ta có số cách xếp chỗ là

$$S_3 = 5040 \times A_8^3 = 5040 \times (8.7.6) = 1693440 \text{ cách}$$

Cách 2: Tổng số có 10 người, có S = 10! Cách xếp.

Số cách xếp mà cả 3 nữ không ngồi gần nhau là: $S_3 = S - S_1 - S_2 = 1693440$

Bài 11. Có 4 đề thi khác nhau được phát cho 10 sinh viên dự thi, mỗi sinh viên một đề sao cho 2 sinh viên ngồi gần nhau thì nhận được 2 đề khác nhau

1) Có bao nhiêu cách phát đề nếu 10 sinh viên ngồi thành một dãy ngang ?

2) Giải bài toán trên nếu 10 sinh viên ngồi quanh một bàn tròn ?

Bài giải.

1) Sinh viên đầu tiên có 4 cách phát đề thi, các sinh viên còn lại có 3 cách phát.

Do đó ta có $S_1 = 4 \times 3^9 = 78732$ cách.

2) Ký hiệu T_n^4 là số cách phát 4 đề thi cho n sinh viên ngồi quanh một bàn tròn, thoả mãn điều kiện của bài toán. Ta áp dụng công thức truy hồi sau:

$$T_n^4 = 4 \times 3^{n-1} - T_{n-1}^4 \text{ với } T_3^4 = 4.3.2$$

Thay n =10 ta có :

$$T_{10}^4 = 4.3^9 - 4.3^8 + 4.3^7 - 4.3^6 + 4.3^5 - 4.3^4 + 4.3^3 - 4.3.2 = 3^{10} + 3.$$

Bài 12. Cho n đường tròn trên cùng một mặt phẳng sao cho mọi cặp 2 đường tròn đều cắt nhau và không có 3 đường tròn nào cắt nhau tại 1 điểm. Ký hiệu T_n là số phần mặt phẳng được tạo thành bởi n đường tròn đó.

1) Lập và giải phương trình truy hồi để tìm công thức của T_n.

2) Tìm T_{10} trong đó có một bộ 3 đường tròn cắt nhau tại 1 điểm.

Bài giải.

1) Vẽ thêm đường tròn thứ (n+1), nó cắt n đường tròn đã có tại 2n giao điểm.

Các giao điểm này chia đường tròn vẽ thêm thành 2n cung, mỗi cung nằm trong một phần mặt phẳng đã có và tạo thêm được một phần mặt phẳng, do đó ta có

$$T_{n+1} = T_n + 2n \; ; \text{ với } T_1 = 2.$$

Giải được $T_n = 2 + n(n - 1)$

2) Nếu không có 3 đường tròn cắt nhau tại một điểm thì $T_{10} = 2 + 10 \times 9 = 92$ phần mặt phẳng. Ba đường tròn đi qua một điểm tạo ra 7 phần mặt phẳng, trong khi đó

$T_3 = 2 + 3 \times 2 = 8$ nên số phần mặt phẳng phải bớt đi là 1 đơn vị :

$$S_2 = 92 – 1 = 91.$$

Bài 13. Cho n đường tròn lớn trên cùng một mặt cầu sao cho không có 3 đường tròn nào cắt nhau tại 1 điểm .Ký hiệu T_n là số phần mặt cầu được tạo thành bởi n đường tròn đó.

1) Lập và giải phương trình truy hồi để tìm công thức của T_n.

2) Tìm T_{10} trong đó có một bộ 3 đường tròn cắt nhau tại 1 điểm.

Bài giải.

1) Lập luận như bài 12, ta tìm được

$$T_{n+1} = T_n + 2n; \text{ với } T_1 = 2. \text{ Giải được } T_n = 2 + n(n - 1)$$

2) Ba đường tròn lớn cắt nhau tại một điểm thì sẽ cắt nhau tại một điểm nữa, đối xứng qua tâm hình cầu đối với điểm ban đầu và chỉ tạo ra 6 phần mặt cầu, do đó số phần mặt cầu bớt đi 2 đơn vị nên $S_2 = 92 – 2 = 90$ phần mặt cầu.

Bài 14. Một người vượt cầu thang có n bậc bằng cách lúc thì bước mỗi bước 1 bậc, lúc thì bước mỗi bước 2 bậc. Ký hiệu T_n là số cách vượt n bậc cầu thang như thế.

1) Lập và giải phương trình truy hồi để tìm công thức cho T_n.

2) Bằng phương pháp quy nạp chứng minh công thức dưới đây:

$$T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2 = T_n . T_{n+1} - 1.$$

Bài giải.

1) (Xem giáo trình). Ta có $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$; $T_1 = 1, T_2 = 2$.

Giải và tìm được:

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

2) Cho n =1; ta có vế trái là $T_1^2 = 1$; vế phải là $T_1.T_2 - 1 = 1.2 - 1 = 1$. Vậy VT=VP

nghĩa là công thức đã đúng với n = 1.

Ta còn phải CMR:

$$T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_n^2 + T_{n+1}^2 = T_{n+1} . T_{n+2} - 1.$$

Theo giả thiết qui nạp ta có:

$$VT = T_n.T_{n+1} - 1 + T_{n+1}^2 = T_{n+1}(T_n + T_{n+1}) - 1 = T_{n+1}.T_{n+2} - 1 = VP. \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 15. Một người phải trả một món tiền n nghìn đồng bằng cách trả lần lượt từng tờ một trong 2 loại giấy bạc có mệnh giá 1 nghìn đồng và 2 nghìn đồng. Ký hiệu T_n là số cách trả tiền như thế.

1) Lập và giải phương trình truy hồi đối với T_n .

2) Bằng phương pháp quy nạp CMR:

$$T_1.T_2 + T_2.T_3 + \ldots + T_{2n-1}.T_{2n} = (T_{2n})^2 - 2.$$

Bài giải.

1) Tương tự như bài 14 ta có :

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} ;\ T_1 = 1,\ T_2 = 2.$$

Giải và tìm được:

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

2) Cho n = 1 ta có VT = $T_1.T_2 = 1.2 = 2$; VP = $(T_2)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2$ = VT. Vậy công thức đúng với n = 1.

Ta còn phải chứng minh:

$$T_1.T_2 + T_2.T_3 + \ldots + T_{2n-1}.T_{2n} + T_{2n}.T_{2n+1} + T_{2n+1}.T_{2n+2} = (T_{2n+2})^2 - 2 .$$

Theo giả thiết qui nạp ta có:

$$VT = (T_{2n})^2 - 2 + T_{2n}.T_{2n+1} + T_{2n+1}.T_{2n+2} = T_{2n}(T_{2n} + T_{2n+1}) + T_{2n+1}.T_{2n+2} - 2 =$$

$$T_{2n}.T_{2n+2} + T_{2n+1}.T_{2n+2} - 2 = (T_{2n} + T_{2n+1}).T_{2n+2} - 2 = (T_{2n+2})^2 - 2 = VP. \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 16. Cho G(X, V) là đồ thị vô hướng, đủ và có 9 đỉnh.

1) Có bao nhiêu đồ thị con và đồ thị bộ phận ?

2) Có bao nhiêu đồ thị con là đồ thị Euler ?

Bài giải.

1) Số đồ thị con $S_1 = C_9^1 + C_9^2 + ... + C_9^8 = 2^9 - 2 = 510$

Số cạnh của đồ thị $m = C_9^2 = 36$, số đồ thị bộ phận là:

$$R_1 = C_{36}^1 + C_{36}^2 + ... + C_{36}^{36} = 2^{36} - 1$$

2) Số đồ thị con là đồ thị Euler, đó là các đồ thị con có số đỉnh là lẻ

$$S_2 = C_9^3 + C_9^5 + C_9^7 = 246$$

Bài 17. Cho G(X,V) là đồ thị vô hướng, đủ và có 7 đỉnh

1) Có bao nhiêu cây bao trùm chứa 1 cạnh cho trước ?
2) Có bao nhiêu cây bao trùm có 1 đỉnh bậc 4 và 1 đỉnh bậc 3 ?

Bài giải.

1) Số cây bao trùm chứa cạnh [a, b] cho trước chia thành các trường hợp sau:

- có 5 đỉnh liên thuộc a; không có đỉnh nào liên thuộc b; tạo ra $T_6 = 6^4 = 1296$ cây.
- có 4 đỉnh liên thuộc a; và có 1 đỉnh liên thuộc b; tạo ra $C_5^4.T_5 = 5.5^3 = 625$ cây.
- có 3 đỉnh liên thuộc a; có 2 đỉnh liên thuộc b; tạo ra $C_5^3.T_4.T_3 = 10.4^2.3 = 480$ cây.
- có 2 đỉnh liên thuộc a; có 3 đỉnh liên thuộc b; tạo ra $C_5^2.T_3.T_4 = 10.3.4^2 = 480$ cây.
- có 1 đỉnh liên thuộc a; có 4 đỉnh liên thuộc b; tạo ra $C_5^1.T_5 = 625$ cây.
- không có đỉnh liên thuộc a; có 5 đỉnh liên thuộc b; tạo ra $T_6 = 6^4 = 1296$ cây.

Vậy số cây cần tìm là $S_1 = 2.(1296 + 625 + 480) = 4802$ cây.

2) Chọn đỉnh bậc 4: Có $C_7^1 = 7$ cách.

Chọn 4 đỉnh nối với đỉnh bậc 4: có $C_6^4 = 15$ cách.

Chọn đỉnh bậc 3: có $C_4^1 = 4$ cách.

Vậy số cây cần tìm là $S_2 = 7.15.4 = 420$ cây.

Phần 2. Các bài toán tồn tại.

Bài 1. Lấy 5 điểm tùy ý bên trong một tam giác đều có cạnh bằng 1. CMR có ít nhất 2 điểm có khoảng cách < 1/2.

Bài giải. Nối trung điểm các cạnh của tam giác ta được 4 tam giác đều có cạnh bằng 1/2. Lấy 5 điểm từ 4 tam giác này, chắc chắn có ít nhất 2 điểm thuộc vào một tam giác, do đó khoảng cách giữa chúng < 1/2. ĐPCM.

Bài 2. Cho 5 điểm có tọa độ nguyên trên một mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. CMR từ các điểm trên có thể tìm được ít nhất 2 điểm mà trung điểm của chúng cũng có tọa độ nguyên.

Bài giải. Chia các điểm có tọa độ nguyên thành 4 nhóm:

nhóm 1: (x_l , y_l); nhóm 2: (x_c, y_l); nhóm 3: (x_l, y_c); nhóm 4: (x_c, y_c).

Lấy 5 điểm từ 4 nhóm, chắc chắn có ít nhất 2 điểm thuộc vào một nhóm; giả sử có 2 điểm A và B thuộc nhóm 3, nghĩa là x_A và x_B là lẻ ; y_A và y_B là chẵn. Gọi M là trung điểm của AB, ta có :

$$x_m = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \text{ là số nguyên; } y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \text{ là số nguyên. ĐPCM.}$$

Bài 3. Lấy 7 điểm tùy ý bên trong một lục giác đều có cạnh bằng 1. CMR có ít nhất 2 điểm có khoảng cách < 1.

Bài giải.

Nối 6 đỉnh của hình lục giác với tâm ta được 6 tam giác đều có cạnh bằng 1.

Lấy 7 điểm từ 6 tam giác thì có ít nhất 2 điểm thuộc vào một tam giác;

vậy khoảng cách giữa chúng < 1. ĐPCM.

Bài 4. Lấy 6 số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn 121. CMR có ít nhất 2 số x và y thỏa mãn điều kiện $0 < \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < 2$

Bài giải. Chia các số nguyên dương nhỏ hơn 121 thành 5 nhóm:

nhóm 1: {1, 2,…, 8 };

nhóm 2: {9, 10,…, 24};

nhóm 3: {25, 26,…, 48};

nhóm 4: {49, 50,…, 80};

nhóm 5: {81, 82,…, 120}.

Lấy 6 số từ 5 nhóm thì có ít nhất một nhóm chứa ít nhất 2 số. Hai số này thỏa mãn điều kiện đặt ra của bài toán.

Bài 5. Lấy 30 số nguyên dương bất kỳ nhỏ hơn 60. CMR có ít nhất 8 cặp số mà hiệu của chúng bằng nhau.

Bài giải.

Cứ 2 số tạo ra 1 hiệu số, có 30 số tạo ra $C_{30}^{2} = \frac{1}{2}(30 \times 29) = 435$ hiệu số.

Các hiệu số này lấy giá trị từ 1 đến 58. Theo định lý Dirichlet có ít nhất $\left]\frac{435}{58}\right[= 8$ giá trị bằng nhau.

Bài 6. Cho A là tập gồm 9 chữ số (từ 1 đến 9)

1) Có bao nhiêu tập con gồm 4 chữ số ?

2) CMR có ít nhất 8 tập con có tổng các chữ số bằng nhau.

Bài giải.

1) Số tập con gồm 4 chữ số là: $C_{9}^{4} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126$ tập.

2) $S_{min} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$; $S_{max} = 6 + 7 + 8 + 9 = 30$.

Nếu áp dụng ngay định lý Dirichlet thì ta chỉ có $\left]\frac{126}{21}\right[= 6$ tập có tổng các chữ số bằng nhau, không đạt yêu cầu của bài toán. Ta loại trừ 4 tập có tổng các chữ số là 10, 11, 29, 30 thì còn lại 122 tập lấy 17 giá trị khác nhau từ 13 đến 28. Vậy ta có $\left]\frac{122}{17}\right[= 8$ tập có tổng các chữ số bằng nhau.

Bài 7. Có 11 cầu thủ và 9 cổ động viên xếp ngẫu nhiên thành một dãy ngang. CMR luôn tìm được ít nhất 2 cầu thủ mà giữa họ có 4 người khác đứng xen vào.

Bài giải. Sau khi xếp thành dãy ngang ta đánh số thứ tự từ 1 đến 20 và phân thành 5 nhóm như sau:

nhóm 1: {1, 6, 11, 16},

nhóm 2: {2, 7, 12, 17},

nhóm 3: {3, 8, 13, 18},

nhóm 4: {4, 9, 14, 19},

nhóm 5: {5, 10, 15, 20}.

Chia 11 cầu thủ vào 5 nhóm, theo định lý Dirichlet có ít nhất một nhóm chứa ít nhất $\left]\frac{11}{5}\right[= 3$ cầu thủ. Như vậy luôn tìm được ít nhất 2 cầu thủ thỏa mãn điều kiện bài toán đặt ra.

Bài 8. Xếp tùy ý 12 quân cờ lên một bàn cờ vuông có kích thước 8x8 ô vuông. CMR luôn tìm đươc 4 hàng và 4 cột chứa tất cả các quân cờ nói trên.

Bài giải.

Trước tiên ta chọn 4 hàng có nhiều quân nhất. Số quân trên 4 hàng này ≥ 8. Thật vậy, nếu không thế thì số quân trên 4 hàng còn lại sẽ ≥ 5, do đó có ít nhất một hàng có ít nhất 2 quân mà ta không chọn. Trong khi đó số quân trong 4 hàng đã chọn ≤ 7, do đó có ít nhất một hàng có số quân ≤ 1. Điều này mâu thuẫn với cách chọn ban đầu của ta.

Khi số quân còn lại chỉ là ≤ 4 thì chỉ cần 4 cột là đủ chứa chúng. ĐPCM.

Bài 9. Cho dãy số: {1, 2, 3,…, 21}. Hỏi có thể chia dãy số này thành các nhóm rời nhau sao cho trong mỗi nhóm số lớn nhất bằng tổng các số còn lại trong nhóm được hay không ?

Bài giải.

Câu trả lời là không. Lý do: Tổng các số trong mỗi nhóm là một số chẵn, do đó tổng các số trong tất cả các nhóm cũng là một số chẵn. Trong khi đó tổng tất cả các số

$S = 1 + 2 + \ldots + 21 = 231$ là một số lẻ. Mâu thuẫn.

Bài 10. Có 16 cầu thủ bóng đá khoác áo từ số 1 đến số 16 xếp ngẫu nhiên thành một vòng tròn, CMR luôn tìm được ít nhất một nhóm 4 người đứng gần nhau có tổng các số ghi trên áo > 34.

Bài giải.

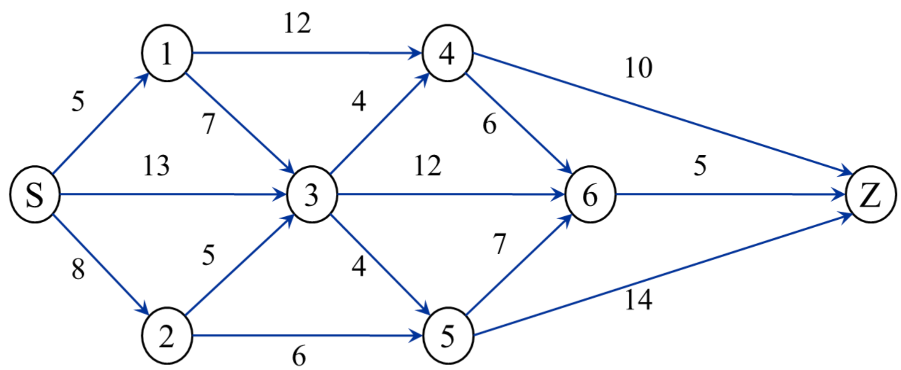
CM bằng phương pháp phản chứng. Nếu không có nhóm nào có tổng các số ghi trên áo lớn hơn 34 thì tổng các số ghi trên áo của mọi nhóm đều ≤ 34. Có tất cả 16 nhóm nên tổng các số ghi trên áo của tất cả các nhóm $S \leq 16.34 = 544$.

Mỗi người đều tham gia vào 4 nhóm nên $S = 4(1 + 2 + \ldots + 16) = 544$.

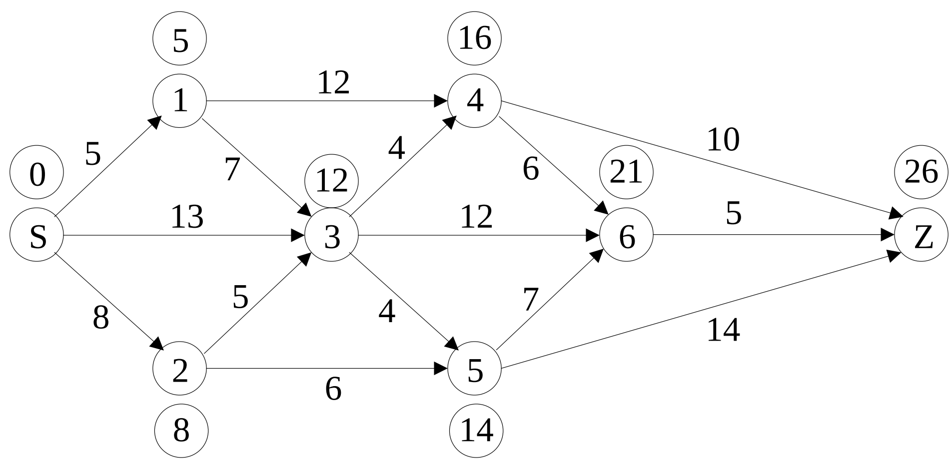
Từ đó suy ra tổng các số ghi trên áo của mọi nhóm đều = 34. Đó là điều vô lý.

Phần 3. Các bài toán tối ưu trên đồ thị.

Bài 1. Áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ S đến Z:



Bài giải.



Bước 1: $L_1 = \{S\}$; $\lambda(S) = 0$

Bước 2: $L_1 = \{1, 2\}$; $\lambda(1) = 5, \lambda(2) = 8$.

Bước 3: $L_3 = \{3\}$; $\lambda(3) = \min\{0 + 13, 5 + 7, 8 + 5\} = 12$.

Bước 4: $L_4 = \{4, 5\}$; $\lambda(4) = \min\{5 + 12, 12 + 4\} = 16$.

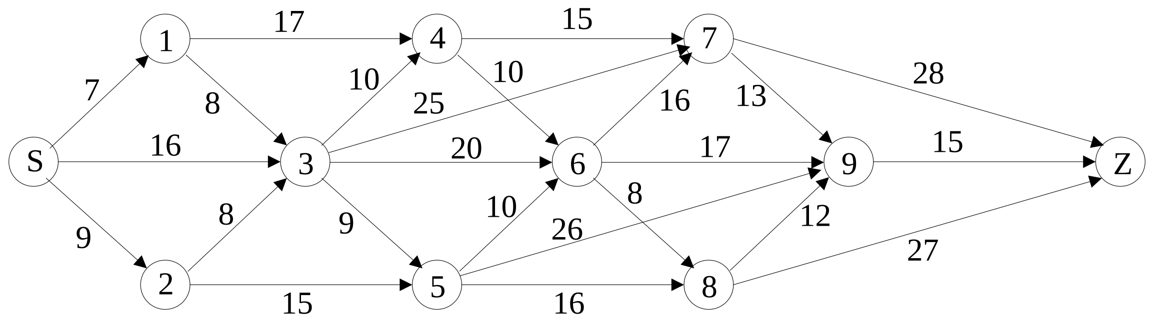
$$\lambda(5) = \min\{8 + 6, 12 + 4\} = 14.$$

Bước 5: $L_5 = \{6\}$; $\lambda(6) = \min\{16 + 6, 12 + 12, 14 + 7\} = 21$.

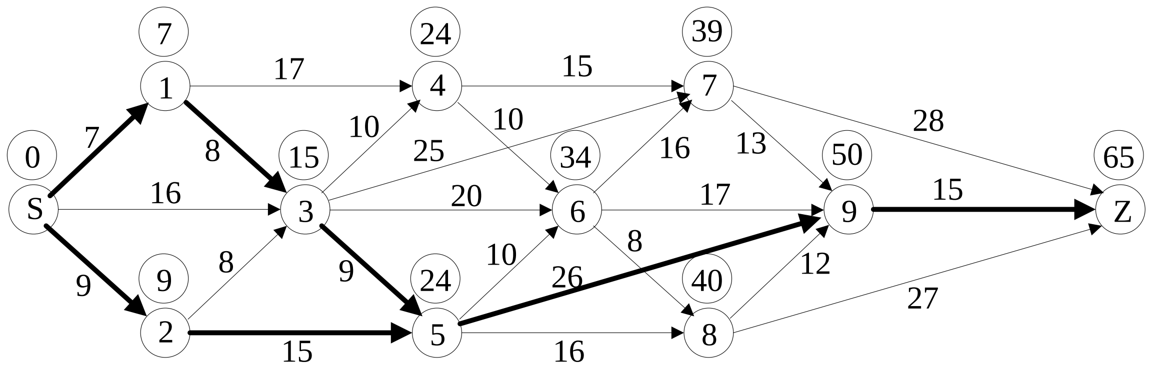
Bước 6: $L_6 = \{Z\}$; $\lambda(Z) = \min\{16 + 10, 21 + 5, 14 + 14\} = 26$.

Vậy độ dài của đường đi ngắn nhất từ S đến Z là $\lambda(Z) = 26$.

Bài 2. Áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ S đến Z:



Bài giải:



<u>Bước 1</u>. $L_1 = \{S\}$; $\lambda(S) = 0$

<u>Bước 2</u>. $L_2 = \{1, 2\}$; $\lambda(1) = 7$; $\lambda(2) = 9$

<u>Bước 3</u>. $L_3 = \{3\}$; $\lambda(3) = \min\{7+8, 0+16, 9+8\} = 15$

<u>Bước 4</u>. $L_4 = \{4, 5\}$; $\lambda(4) = \min\{7+17, 15+10\} = 24$;

$\lambda(5) = \min\{15+9, 9+15\} = 24.$

<u>Bước 5</u>. $L_5 = \{6\}$; $\lambda(6) = \min\{24+10, 15+20, 24+10\} = 34.$

<u>Bước 6</u>. $L_6 = \{7, 8\}$; $\lambda(7) = \min\{24+15, 15+25, 34+16\} = 39;$

$\lambda(8) = \min\{34+8, 24+16\} = 40.$

<u>Bước 7</u>. $L_7 = \{9\}$; $\lambda(9) = \min\{39+19, 34+17, 24+26, 40+12\} = 50.$

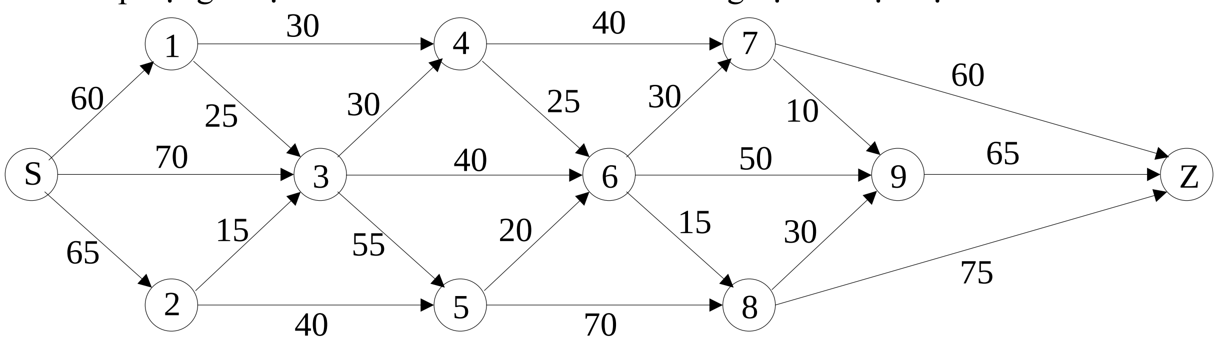
<u>Bước 8</u>. $L_8 = \{Z\}$; $\lambda(Z) = \min\{39+28, 50+15, 40+27\} = 65.$

Có 2 đường đi ngắn nhất

$$T_1^* = (S, 2, 5, 9, Z)\ ;\ T_2^* = (S, 1, 3, 5, 9, Z)$$

$$l(T_1^*) = l(T_2^*) = 65.$$

Bài 3. Áp dụng thuật toán Ford - Fulkerson tìm luồng vận tải cực đại từ S đến Z:



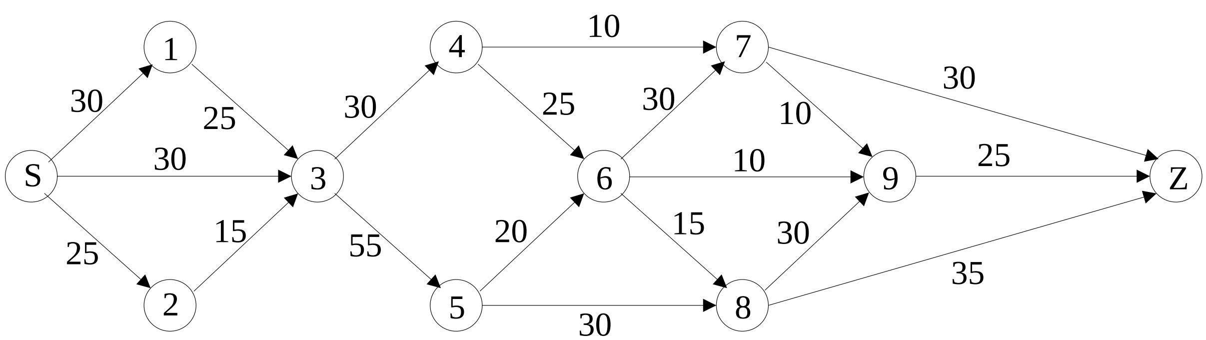
Bài giải:

<u>Bước 1</u>. $T_1 = \{S, 1, 4, 7, Z\}$; $f(T_1) = 30$; cbh $= (1, 4)$

$T_2 = \{S, 3, 6, 9, Z\}$; $f(T_2) = 40$; cbh $= (3, 6)$

$T_3 = \{S, 2, 5, 8, Z\}$; $f(T_3) = 40$; cbh $= (2, 5)$

Tìm được đồ thị $G_1(X, U_1)$ như sau :

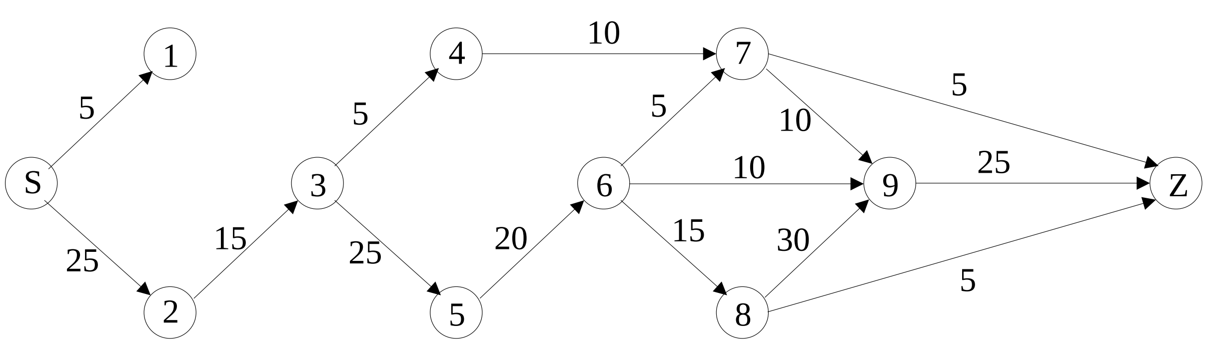


<u>Bước 2</u>.

$T_4 = \{S, 1, 3, 4, 6, 7, Z\}$; $f(T_4) = 25$; cbh $= \{(1, 3), (4, 6)\}$

$T_5 = (S, 3, 5, 8, Z)$; $f(T_5) = 30$; cbh $= \{(S, 3), (5, 8)\}$

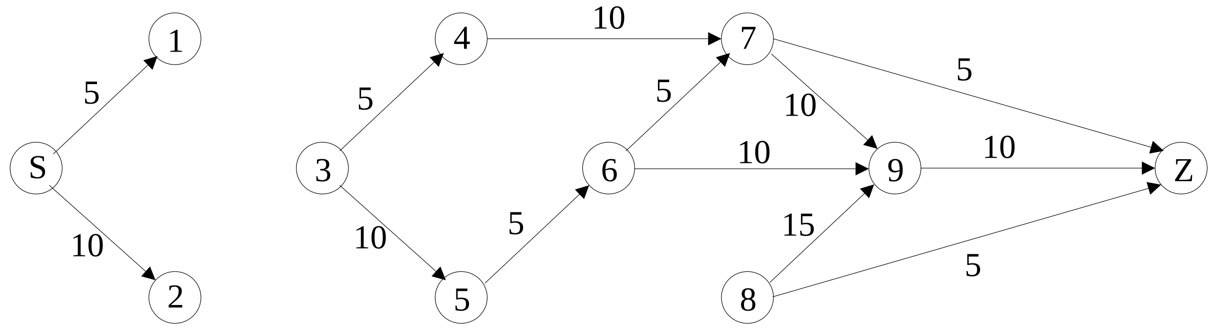
Đồ thị $G_2(X, U_2)$ như sau:



<u>Bước 3</u>.

$T_6 = \{S, 2, 3, 5, 6, 8, 9, Z\}$; $f(T_6) = 15$; cbh $= \{(2, 3), (6, 8)\}$

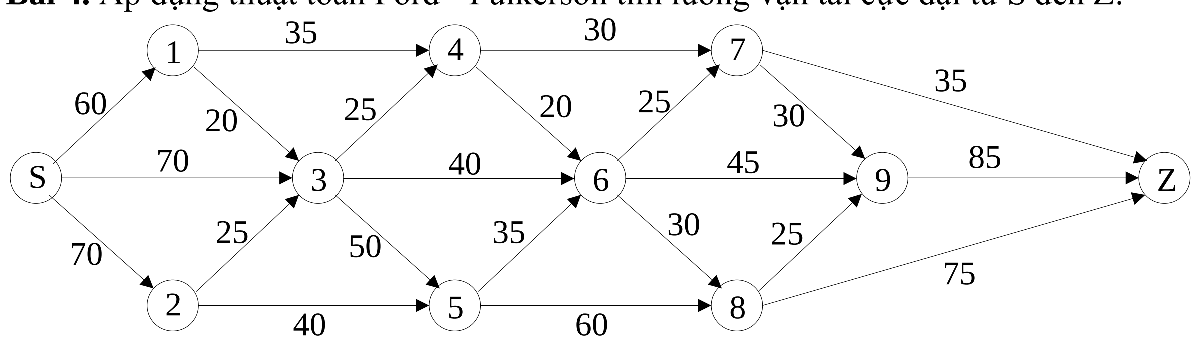
Đồ thị $G_3(X, U_3)$ như sau:



S và Z mất liên thông ; thuật toán kết thúc

$$f(\varphi^*) = \sum_{i=1}^{6} f(T_i) = 30 + 40 + 40 + 25 + 30 + 15 = 180$$

Bài 4. Áp dụng thuật toán Ford - Fulkerson tìm luồng vận tải cực đại từ S đến Z:



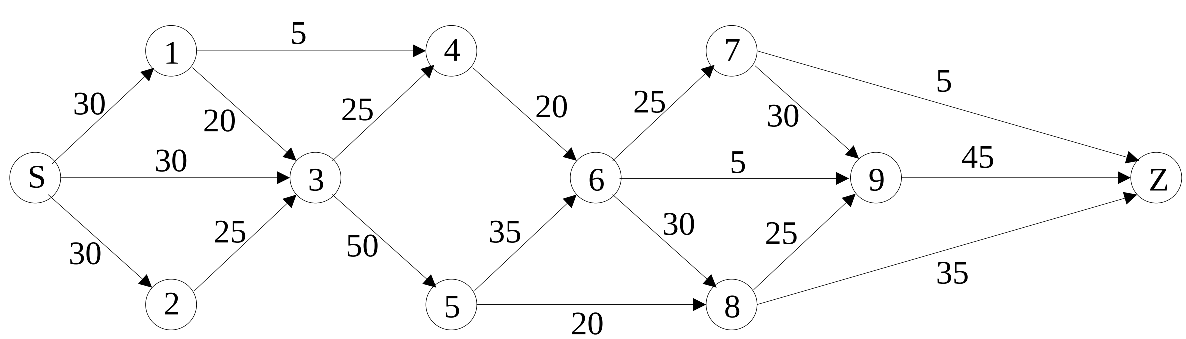
Bài giải:

Bước 1. $T_1 = \{S, 1, 4, 7, Z\}$; $f(T_1) = 30$; $cbh = (4, 7)$

$T_2 = \{S, 3, 6, 9, Z\}$; $f(T_2) = 40$; $cbh = (3, 6)$

$T_3 = \{S, 2, 5, 8, Z\}$; $f(T_3) = 40$; $cbh = (2, 5)$

Tìm được đồ thị $G_1(X, U_1)$ như sau :

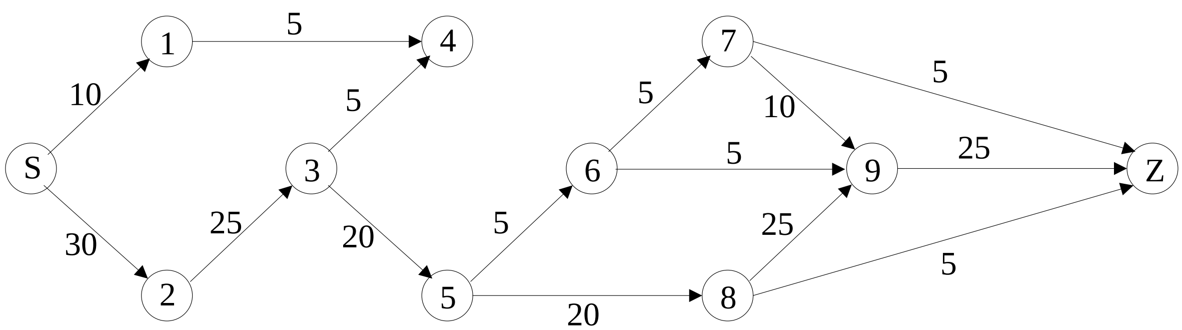


Bước 2.

$T_4 = \{S, 1, 3, 4, 6, 7, 9, Z\}$; $f(T_4) = 20$; $cbh = \{(1, 3), (4, 6)\}$

$T_5 = (S, 3, 5, 6, 8, Z)$; $f(T_5) = 30$; $cbh = \{(S, 3), (6, 8)\}$

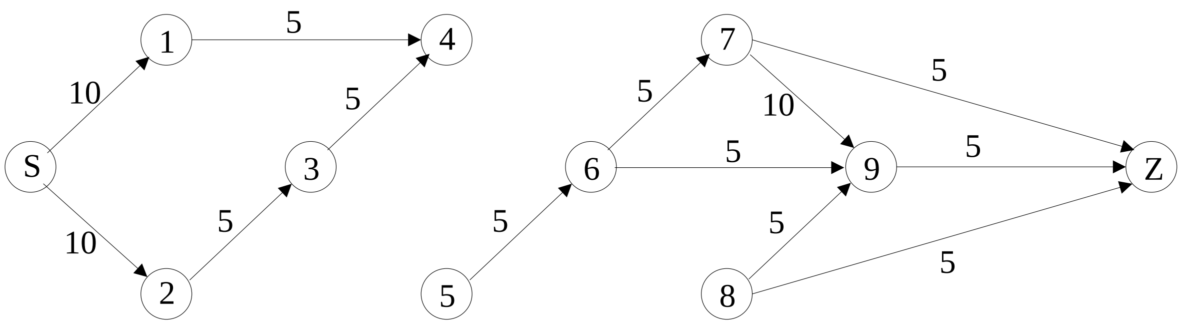
Đồ thị $G_2\ (X, U_2)$ như sau:



Bước 3.

$T_6 = \{S, 2, 3, 5, 8, 9, Z\};\ f(T_6) = 20;\ cbh = \{(3, 5), (5, 8)\}$

Đồ thị $G_3\ (X, U_3)$ như sau:



S và Z mất liên thông ; thuật toán kết thúc

$$f(\varphi^*) = \sum_{i=1}^{6} f(T_i) = 30 + 40 + 40 + 20 + 30 + 20 = 180$$

Phần 4. Các bài tập về logic toán.

Bài 1. Cho hàm đại số logic $F(x, y, z) = (x \mid y) \to (y \downarrow z)$

a) Lập bảng giá trị của hàm $F(x, y, z)$

b) Tìm dạng tuyển chuẩn tắc và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định.

c) Thiết kế mạch logic thực hiện hàm $F(x, y, z)$ với các cổng NOT, AND và OR.

Bài giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm

x	y	z	$x \mid y$	$y \downarrow z$	$F(x, y, z)$	
0	0	0	1	1	1	$H_1 = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	$H_2 = x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	$H_3 = x \wedge y \wedge \bar{z}$
1	1	1	0	0	1	$H_4 = x \wedge y \wedge z$

b) Dạng tuyển chuẩn tắc

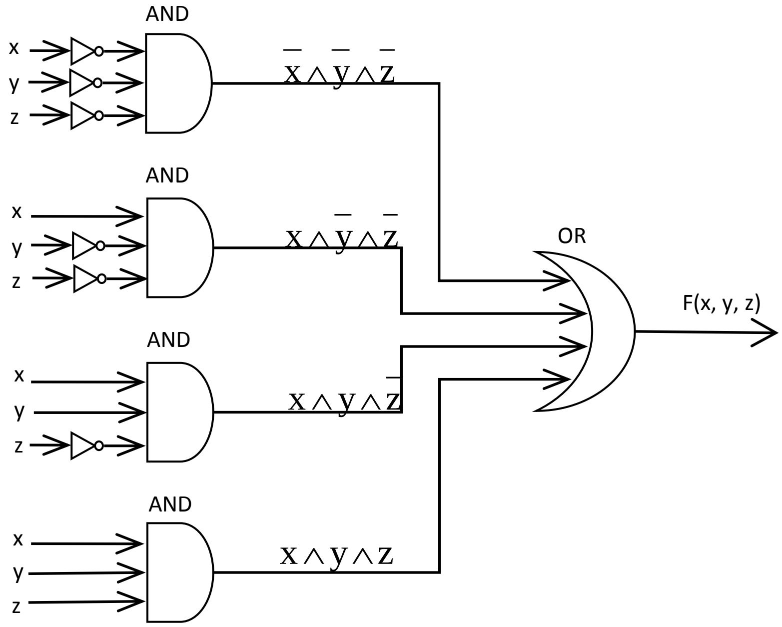
$$F(x, y, z) = H_1 \vee H_2 \vee H_3 \vee H_4$$

$$= (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Biến đổi về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định

$$F(x, y, z) = (\overline{x \vee y \vee z}) \vee (\overline{\bar{x} \vee y \vee z}) \vee (\overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z}) \vee (\overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}})$$

c) Vẽ mạch logic



Bài 2. Hàm đại số logic F(x, y, z) lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất 2 biến có giá trị 1

a) Lập bảng giá trị của hàm $F(x, y, z)$

b) Tìm dạng hội chuẩn tắc và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu hội và phủ định.

c) Thiết kế mạch logic thực hiện hàm $F(x, y, z)$ với các cổng NOT, AND và OR.

Bài giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm $F(x, y, z)$

x	y	z	$F(x, y, z)$	
0	0	0	0	$T_1 = x \vee y \vee z$
0	0	1	0	$T_2 = x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	0	$T_3 = x \vee \bar{y} \vee z$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$T_4 = \bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

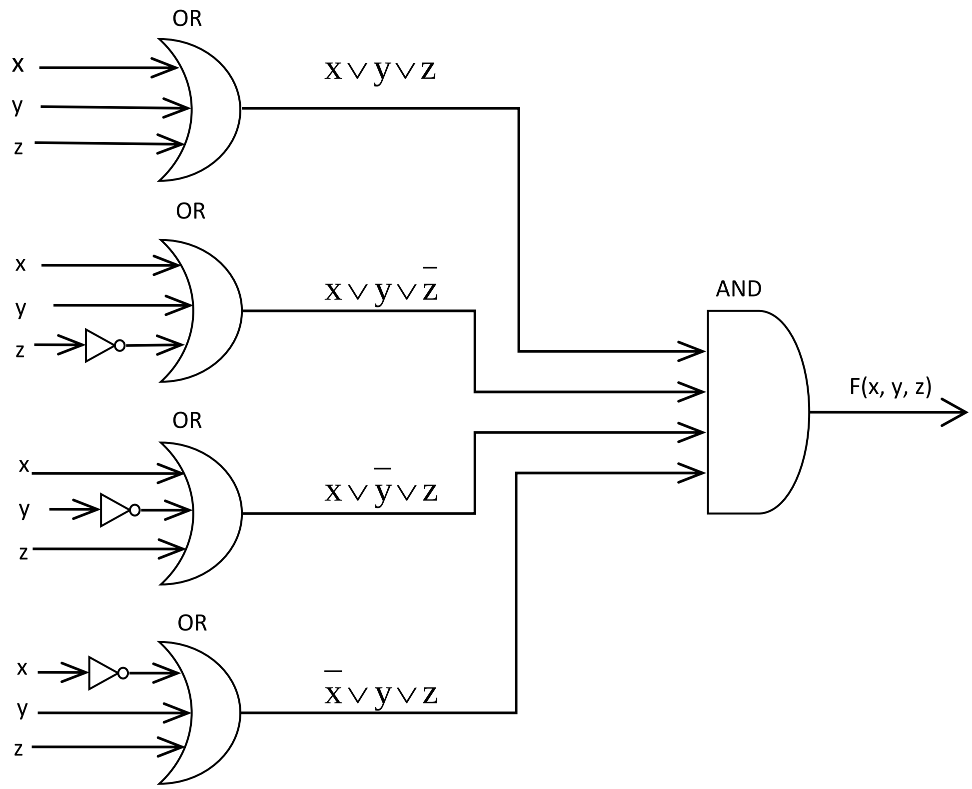
b) Dạng hội chuẩn tắc $F(x, y, z) = T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4$

$$= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$$

Biến đổi về dạng chỉ có dấu hội và phủ định

$$F(x, y, z) = \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})} \wedge \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)} \wedge \overline{(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})} \wedge \overline{(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})}$$

c) Thiết kế mạch logic



Bài 3. Cho hàm đại số logic $F(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \oplus z)$

a) Lập bảng giá trị của hàm $F(x, y, z)$

b) Tìm dạng tuyển chuẩn tắc và biến đổi nó về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định.

c) Thiết kế mạch logic thực hiện hàm $F(x, y, z)$ với các cổng NOT, AND và OR.

Bài giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm

x	y	z	$x \wedge y$	$y \oplus z$	$F(x, y, z)$	
0	0	0	0	0	0	

0	0	1	0	1	1	$H_1 = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$
0	1	0	0	1	1	$H_2 = \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	$H_3 = x \wedge \overline{y} \wedge z$
1	1	0	1	1	1	$H_4 = x \wedge y \wedge \overline{z}$
1	1	1	1	0	1	$H_5 = x \wedge y \wedge z$

b)

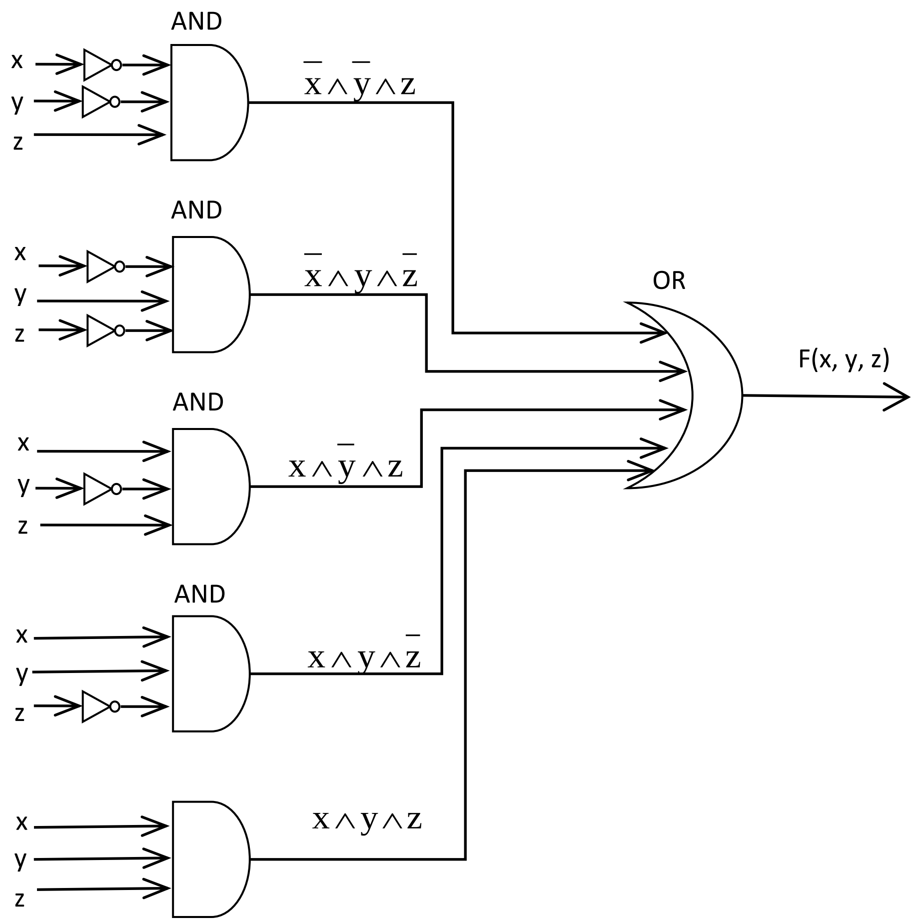
Dạng tuyển chuẩn tắc

$$F(x, y, z) = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

Biến đổi về dạng chỉ có dấu tuyển và phủ định

$$F(x, y, z) = \overline{(x \vee y \vee \overline{z})} \vee \overline{(x \vee \overline{y} \vee z)} \vee \overline{(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})}$$

c) Vẽ mạch logic


AND
x
y
z
$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$
AND
x
y
z
$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
OR
F(x, y, z)
AND
x
y
z
$x \wedge \bar{y} \wedge z$
AND
x
y
z
$x \wedge y \wedge \bar{z}$
x
y
z
$x \wedge y \wedge z$