Tutorium 2

Montag, 11. Mai 2020 21:32

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Datenmatrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Mittelwertsvektor von $\mathbf{X}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3+1+2 \\ 2+5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Schätzen Sie die Kovarianzmatrix.

(i) unter Verwendung des Mittelwertsvektors (per Hand).

(ii) unter Verwendung der Zentrierungsmatrix $\mathbf{H}$ (per Hand).

(iii) in R.

i) $$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^T - n \bar{x}\bar{x}^T \right)$$

$$= \frac{1}{3-1} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} (3\ 2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} (1\ 5) + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} (2\ 5) - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} (2\ 4) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Mit Mittelswertvektor, Vektordarstellung

ii) $$S = \frac{1}{n-1} X^T \underbrace{HX}_{\text{zentrierte X-Werte}}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad HX = \begin{pmatrix} x_{11} - \underbrace{\bar{x}_{\cdot 1}}_{2} & x_{12} - \underbrace{\bar{x}_{\cdot 2}}_{4} \\ x_{21} - \bar{x}_{\cdot 1} & x_{22} - \bar{x}_{\cdot 2} \\ x_{31} - \bar{x}_{\cdot 1} & x_{32} - \bar{x}_{\cdot 2} \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{3-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ mit Zentrierungsmatrix H, Matrixdarstellung

Aufgabe 2:

Schreiben Sie eine Funktion in R zur Simulation von Wishart-verteilten Zufallsvariablen mit Σ und m. Erzeugen Sie damit n = 100 Wishart-verteilte Zufallsmatrizen mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } m = 10.$$

Vorüberlegung:

Eine Wishart-verteilte ZV mit $m=10$ braucht:

$$x_1, \ldots, x_{10} \sim N_2(0, \Sigma)$$

Für 100 solche Wishart-verteilten ZV braucht man:

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_{10}}_{M_1}, x_{11}, \ldots, x_{1000} \sim N_2(0, \Sigma)$$

...

$\longrightarrow$ Rest in R