# Tutorium 1

Dienstag, 28. April 2020 11:48

**Aufgabe 1:**
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

**a)** Bestimmen Sie die Definitheit der Matrizen $A$ und $B$

**b)** Führen Sie für Matrix $C$ eine Spektralzerlegung durch

a) $\det(B_{sym} - \lambda I)$ B ist nicht sym.!

$$\Rightarrow B_{sym} = \frac{1}{2}(B + \cancel{B^T}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2.5 \\ 2.5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2.5^2 \overset{!}{=} 0$$

$$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6.25 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.25 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1|2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-2.25)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{34}}{2}$$

$\lambda_1 = 5,41$ $\lambda_2 = -0,415$

$\Rightarrow$ B ist indefinit

1b) Spektralzerlegung $\rightarrow$ EW & EV

$$\det(C - \lambda \cdot I) \overset{!}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)^2 - 9 \overset{!}{=} 0$$

$$(6-\lambda)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - \lambda = \pm 3$$

$$\lambda = 6 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 9$$

$\lambda_1 = 3$: EV $(C - \lambda I) \cdot x = 0$

$$\begin{pmatrix} 6-3 & -3 \\ -3 & 6-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $3x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

II. $-3x_1 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow 3x_2 = 3x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |u_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Eigenvektor

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} 6-9 & -3 \\ -3 & 6-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-3x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow -3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow -x_1 = x_2$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow |u_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\rightarrow \boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$C = Q \; \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \; Q^T$

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^T \qquad \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$v_1$

$v_2$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&9\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&5&2\\0&2&5\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $\boldsymbol{D} = LL^t$

$$l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1}(l_{jk}l_{ik}))$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11}^{1.} & 0 & 0\\ l_{21}^{2.} & l_{22}^{3.} & 0\\ l_{31}^{4.} & l_{32}^{5.} & l_{33}^{6.}\end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \Big(4 - \underbrace{\sum_{k=1}^{\overbrace{1-1}^{0}} l_{ik}^2}_{0}\Big)^{1/2} = (4)^{1/2} = 2$$

$$l_{21} = \frac{1}{2}\Big(2 - \sum^{0} \dots\Big) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$l_{22} = \Big(5 - \sum_{k=1}^{1} l_{2k}^2\Big)^{1/2} = (5 - l_{21}^2)^{1/2} = (5-1^2)^{1/2} = (4)^{1/2} = 2$$

$$l_{31} = \frac{1}{2}\Big(0 - \underbrace{\sum_{k=1}^{0} l_{3k}\, l_{1k}}_{0}\Big) = 0$$

$$l_{32} = \dots = 1$$

$$l_{33} = \dots = 2$$

$$D = L \cdot L^T = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$