Beispiele verwandter uni- und multivariater Tests bei Normalverteilung

	Univariater Test	Multivariater Test
	Test bzgl. dem Mittelwert einer Stichprobe bei bekannter Varianz	
	<u>z-Test</u>	<u>χ^2-Test</u>
H_0	$\mu = \mu_0$	$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$
Annahme	σ^2 bekannt	$\boldsymbol{\Sigma}$ bekannt
Teststatistik	$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$	$n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)$
Verteilung	$N(0,1)$	$\chi^2(p)$
	Test bzgl. dem Mittelwert einer Stichprobe bei unbekannter Varianz	
	<u>t-Test</u>	<u>Hotelling's T^2-Test</u>
H_0	$\mu = \mu_0$	$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$
Annahme	σ^2 unbekannt	$\boldsymbol{\Sigma}$ unbekannt
Teststatistik	$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}$	$\frac{n-p}{p(n-1)}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)^T\boldsymbol{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)$
Verteilung	t_{n-1}	$F_{p;n-p}$
	Test bzgl. Gleichheit der Mittelwerte zweier Stichproben bei unverbundenen Stichproben	
	<u>t-Test</u>	<u>F-Test</u>
H_0	$\mu_1 = \mu_2$	$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$
Annahme	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$
Teststatistik	$\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)\cdot p}\cdot\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{(2)})^T\boldsymbol{S}_p^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}^{(1)}-\bar{\boldsymbol{x}}^{(2)})$
	mit $s_p = \sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2\right]}$	mit $\boldsymbol{S}_p = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)\boldsymbol{S}^{(1)}+(n_2-1)\boldsymbol{S}^{(2)}\right]$
Verteilung	$t_{n_1+n_2-2}$	$F_{p;n_1+n_2-p-1}$
	Test bzgl. Gleichheit der Mittelwerte zweier Stichproben bei verbundenen Stichproben	
	<u>t-Test</u>	<u>F-Test</u>
Definition	$d_i = x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\ , \quad \delta := \mathbb{E}(d)$	$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{x}_i^{(1)} - \boldsymbol{x}_i^{(2)}\ , \quad \boldsymbol{\delta} := \mathbb{E}(\boldsymbol{d})$
H_0	$\mu_1 - \mu_2 = \delta = 0$	$\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0}$
Annahme	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$
Teststatistik	$\sqrt{n}\frac{\bar{d}}{s_d}$	$\frac{(n-p)\cdot n}{(n-1)\cdot p}\cdot\bar{\boldsymbol{d}}^T\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{d}}^{-1}\bar{\boldsymbol{d}}$
Verteilung	t_{n-1}	$F_{p;n-p}$
	Mittelwertvergleich mehrerer Gruppen	
	<u>F-Test</u> *(ANOVA)*	<u>Test auf Basis von Wilks' Λ^*</u> *(MANOVA)*
Daten	Insgesamt N Beobachtungen aus K Gruppen	N (p-dimensionale) Beobachtungen aus K Gruppen
H_0	$\mu_A = \mu_B = \mu_C$	$\boldsymbol{\mu}_A = \boldsymbol{\mu}_B = \boldsymbol{\mu}_C$
Annahme	$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2$	$\boldsymbol{\Sigma}_A = \boldsymbol{\Sigma}_B = \boldsymbol{\Sigma}_C$
Teststatistik	$\frac{SS_{between}/(K-1)}{SS_{within}/(N-K)}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{W}\rvert}{\lvert\boldsymbol{B}+\boldsymbol{W}\rvert} = \lvert\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}\rvert^{-1}$
Verteilung	$F(K-1, N-K)$	$\Lambda(p, N-K, K-1)$
Notiz		*Auch möglich: Tests auf Basis des größten Eigenwerts von $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}$ (mit $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}$ dem multivariaten Analogon zu $\frac{SSB}{SSE}$)

Allgemeine Problemstellung, die multivariates Testen erforderlich macht

- Ob die vorliegenden Daten auf eine signifikante Abweichung bzgl. einer vorliegenden Nullhypothese hinweisen, muss anhand der multivariaten Ausprägungsstruktur beurteilt werden.
- Eine Zerlegung in univariate Testprobleme führt zum einen zur Missachtung von Abhängigkeiten zwischen den Variablen und ruft zum anderen ein multiples Testproblem hervor.

Likelihood-Quotienten-Tests als weitere allgemeine Tests

- Flexible Klasse von Tests, basierend auf χ^2-Verteilung
- exakte Verteilung der Teststatistik meist nur schwer oder gar nicht bestimmbar
- Annäherung durch χ^2-Verteilung in seltenen Fällen unzureichend

Allgemeine Methode zur Konstruktion von Tests

- Union-Intersection (UI-)Prinzip (zur Definition von Tests)
  $\rightarrow$ Vereinigung der 'Annahmebereiche', Schnitt der Ablehnbereiche
  (z.B.: $\mu = \mu_0 \;\Leftrightarrow\; \mu \geq \mu_0 \wedge \mu \leq \mu_0$)
- Zusammenfassung von Einzelhypothesen
- $\rightarrow$ Nachteil: Im Gegensatz zu LQ-Tests basieren UI-Tests oft nicht auf gut ausgearbeiteten (asymptotischen) Eigenschaften

Problematik multiples Testen
Bei der Durchführung mehrerer Tests muss darauf geachtet werden, dass das *simultane* (bzw. *globale*) Signifikanzniveau eingehalten wird!

Mögliche Korrekturmethoden:

- Nutzung einer auf die Überprüfung mehrerer Hypothesen ausgelegten Testmethode,
  siehe z.B. das `R`-Paket `multcomp` zur Betrachtung multipler (paarweiser) Gruppenvergleiche
- Bonferroni-Korrektur, bzw. Bonferroni-Holm-Korrektur als bessere (da weniger konservative) Methode
- Korrektur nach UI-Prinzip