2. Tutorium Multivariate Verfahren

- Multivariate Verteilungen und Tests -

Cornelia Gruber

12.05.2020

Institut für Statistik, LMU München

Gliederung

- p-dimensionale Zufallsvariable X:

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \text{ wobei } X_1, \ldots, X_p \text{ Zufallsvariablen}$$

- Komponentenweiser Erwartungswert(vektor):

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix}$$

- Kovarianz:

$$\Sigma = Cov(\mathrm{X}) = \mathbb{E}[(\mathrm{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathrm{X}-\boldsymbol{\mu})^\top] =$$
$$\begin{pmatrix} cov(X_1,X_1) & \dots & cov(X_1,X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_p,X_1) & \dots & cov(X_p,X_p) \end{pmatrix}$$

- Korrelation:

$$\mathrm{P} = (\rho_{ij})_{pxp} = \mathrm{D}^{-1}\Sigma\mathrm{D}^{-1} \text{ mit } \mathrm{D} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p \end{pmatrix}$$

$$\text{da } \rho_{ij} = \frac{cov(X_i,X_j)}{\sqrt{var(X_i)}\sqrt{var(X_j)}}$$

Multivariate Normalverteilung

- x heißt p-dimensional normalverteilt mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix Σ: $\mathrm{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$
- Dichte:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} exp(-\frac{1}{2}(\mathrm{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathrm{x}-\boldsymbol{\mu}))$$

- Insbesondere ist in $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ jede Komponente X_i normalverteilt: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

Wishartverteilung

- M heißt wishart-verteilt mit Kovarianzmatrix Σ und m Freiheitsgraden: $\mathrm{M} \sim W_p(\Sigma, m)$
- Zusammenhang zur p-dimensionalen Normalverteilung:
  - Seien $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_m \overset{\text{iid}}{\sim} N_p(0, \Sigma)$
  - Sei weiterhin $\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{x}_i \mathrm{x}_i^\top \in \mathbb{R}^{pxp}$
  - Dann gilt: $\mathrm{M} \sim W_p(\Sigma, m)$
- Eindimensionales Pendant: $\mathcal{X}^2$-Verteilung

Hotellings T^2-Verteilung

- X ist Hotelling-T^2-verteilt mit p und m Freiheitsgraden:
  $X \sim T^2(p, m)$
- Zusammenhang zur p-dimensionalen Normalverteilung und Wishartverteilung:
  - Sei $\mathbf{d} \sim N_p(0, \Sigma)$ und $\mathrm{M} \sim W_p(\mathrm{I}, m)$
  - **d** und **M** seien unabhängig
  - Dann gilt: $m\mathrm{d}^\top \mathrm{M}^{-1}\mathrm{d} \sim T^2(p, m)$
- Eindimensionales Pendant: Student-t-Verteilung

Schätzung für $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\mathrm{X})$

- Gegeben sei die Datenmatrix $\mathbf{X}$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

- Schätzung des Erwartungswerts mittels des Mittelwertsvektors

$$\bar{\mathrm{x}} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

Schätzung der Kovarianzmatrix Σ (Vektordarstellung)

- Erwartungstreuer Schätzer **S**

$$\mathrm{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})(\mathrm{x}_i - \bar{\mathrm{x}})^\top = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{x}_i^\top - n\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{x}}^\top\right)$$

- Alternativer Schätzer

$$\hat{\Sigma} = \frac{n-1}{n}\mathrm{S} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\mathrm{x}_i^\top - n\bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{x}}^\top\right)$$

Schätzung der Kovarianzmatrix Σ (Matrixdarstellung)

- Betrachte Zentrierungsmatrix **H**:

$$H = I_n - \frac{1}{n} 1_n 1_n{}^\top = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

- **HX** enthält zentrierte Daten
- Erwartungstreuer Schätzer **S**

$$S = \frac{1}{n-1} (HX)^\top (HX) = \frac{1}{n-1} X^\top H^\top HX = \frac{1}{n-1} X^\top HX$$

- **H** ist idempotent und symmetrisch

Rechenregeln für Matrizen

- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = B^\top + A^\top$
- $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- $A \cdot (B + C) = AB + AC$
- $(A + B) \cdot C = AC + BC$
- $x^\top Ay = y^\top A^\top x = (x^\top Ay)^\top$
- $(x - y)^\top A = x^\top A - y^\top A$

Binomische Formel

- Erinnerung: Binomische Formel mit Skalaren

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Falls **A** symmetrisch

$$(\mathrm{x}-\mathrm{y})^\top \mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \mathrm{x}^\top \mathrm{A}\mathrm{x} - 2\mathrm{x}^\top \mathrm{A}\mathrm{y} + \mathrm{y}^\top \mathrm{A}\mathrm{y}$$

Ableitungsregeln

- $\frac{\partial y^\top x}{\partial x} = y$
- $\frac{\partial x^\top A y}{\partial A} = x y^\top$
- $\frac{\partial x^\top A x}{\partial x} = (A + A^\top) \cdot x$
- **A** symmetrisch $\Rightarrow (A + A^\top) \cdot x = 2Ax = 2A^\top x$