Aus Unkorreliertheit folgt im Allgemeinen keine Unabhängigkeit

Stochastische Unabhägigkeit

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $x_1, ..., x_n$ gilt

$$P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot ... \cdot P(X_n \leq x_n).$$

Korrelationskoeffizient

Definition

Seien X und Y reelle Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $0 < \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) < \infty$. Dann ist der Korrelationskoeffizient definiert als

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

0.1 Satz: Aus Unabhängigkeit folgt Unkorreliertheit

Beweis:
Für unabhängige Zufallsvariablen gilt $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Daraus folgt mit dem Verschiebungssatz $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$ und damit $\rho(X,Y) = 0$.

0.2 Satz: Aus Unkorreliertheit folgt im Allgemeinen nicht Unabhängigkeit

Beispiel:
Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen, die jeweils die Werte $-1, 0, 1$ annehmen. Zur Vereinfachung sei $p_{i,j} := P(X = i, Y = j)$ und die Wahrscheinlichkeiten seien wie folgt gegeben

$$p_{-1,-1} = p_{-1,0} = p_{-1,1} = p_{0,-1} = p_{0,1} = p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{1,1} = \frac{1}{8}, \quad p_{0,0} = 0.$$

Für die Wahrscheinlichkeiten von X und Y gilt demnach:

$$P(X=0) = P(Y=0) = \frac{1}{4}, \quad P(X=-1) = P(Y=-1) = P(X=1) = P(Y=1) = \frac{3}{8}.$$

Für den Erwartungswert folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} x \cdot P(X = x) = -\frac{3}{8} + 0 + \frac{3}{8} = 0.$$

Ebenso ergibt sich $\mathbb{E}(Y) = 0$ und

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y \in \{-1,0,1\}} xy \cdot p_{x,y} = 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0 + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{8} = 0.$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in \{-1,0,1\}} x^2 \cdot P(X = x) = (-1)^2 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

also

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{6}{8} - 0 = \frac{6}{8}.$$

Damit ist $0 < \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) < \infty$. Des Weiteren sind X und Y unkorreliert. Allerdings gilt

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{16} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

Somit sind X und Y zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig.