1.Tutorium Multivariate Verfahren
- Lineare Algebra -

Cornelia Gruber

28.04.2020

Institut für Statistik, LMU München

Spektralzerlegung

Sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische $(n \times n)$-Matrix mit $rg(\boldsymbol{A}) = r$. Dann existiert eine $(n \times r)$-Matrix $\boldsymbol{P}$, sodass gilt:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \boldsymbol{P}^{-1}$$

Dabei sind λ_i die von Null verschiedenen Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$. Die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{P}$ bestehen aus Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.
$\Rightarrow$ Suche Eigenwerte und Eigenvektoren!

Besonderheit symmetrische Matrix

- Eigenvektoren sind orthogonal zueinander
- Normierung auf Länge 1 $\rightarrow$ Orthogonale Matrix
- Für orthogonale Matrix P gilt: $P^t P = I$ und damit $P^t = P^{-1}$

Sei $\boldsymbol{B}$ eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix mit $rg(\boldsymbol{B}) = r$. Dann existiert eine $(n \times r)$-Matrix $\boldsymbol{Q}$, sodass gilt:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q} diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \boldsymbol{Q}^t$$

Dabei sind die Spaltenvektoren von $\boldsymbol{Q}$ paarweise orthonormale Eigenvektoren von $\boldsymbol{B}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms:
  $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \overset{!}{=} 0$
- Eigenvektoren berechnen:
  $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$

Eigenwerte zur Bestimmung Definitheit Matrizen

Eine quadratische, symmetrische Matrix ist genau dann

- positiv definit, wenn alle Eigenwerte größer als null sind
- positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte größer oder gleich null sind
- negativ definit, wenn alle Eigenwerte kleiner als null sind
- negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte kleiner oder gleich null sind
- indefinit, wenn positive und negative Eigenwerte existieren

Definitheit von nicht symmetrischen Matrizen

Jede reelle quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lässt sich als Summe $M = A + B$ einer symmetrischen Matrix A und einer schiefsymmetrischen Matrix B darstellen.

$$A = \frac{1}{2}(M + M^T) \text{ und } B = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

$\Rightarrow$ **Die Definitheit der Matrix M entspricht der Definitheit des symmetrischen Anteils A.**

Cholesky-Zerlegung

$\rightarrow$ Effiziente Bestimmung der Quadratwurzel einer Matrix
$\rightarrow$ Möglichkeit zur Lösung linearer Gleichungssysteme
$\rightarrow$ Bestimmung der Definitheit von Matrizen

Jede symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann eindeutig in der Form $A = LL^t$ geschrieben werden.

Cholesky-Zerlegung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = LL^t$$

Formel Berechnung Cholesky-Zerlegung:

$$l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1}(l_{jk} l_{ik}))$$

Funktion in R: chol()