# Lineare Algebra & Multivariate Normalverteilung

**Aufgabe 1:** Matrixzerlegungen

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{D}$ positiv definit ist.

**a)** Bestimmen Sie die Definitheit der Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$.

**b)** Führen Sie für die Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Spektralzerlegung durch.

**c)** Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$.

**Aufgabe 2:** Eigenwertzerlegung

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Kovarianz

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

**a)** Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1$ und $\lambda_2$ und die (normierten) Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}$.

**b)** Berechnen Sie mit Hilfe von a) einen Zufallsvektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$, dessen Komponenten $y_1$ und $y_2$ lineare Kombinationen von $x_1$ und $x_2$ sind und der folgende Kovarianz hat:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3:** Multivariate Normalverteilung

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ ein $p$-dimensionaler multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Die Dichte von $\boldsymbol{x}$ ist dann gegeben durch

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ der Mittelwert und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianz von $\boldsymbol{x}$ sind.

**a)** Berechnen Sie diese Dichte im Fall $p = 2$ mit den Bezeichnungen $\sigma_i^2 = var(x_i)$, $i = 1, 2$, und $\rho = \frac{cov(x_1, x_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$. Folgern Sie daraus, dass $x_1$ und $x_2$ unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

**b)** Stellen Sie die Dichte für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$ und verschiedenen Werten von $\rho$ mit Hilfe von `R` graphisch dar. (Tipp: Hierfür eignet sich die Funktion `persp` in Kombination mit der Funktion `manipulate` aus dem gleichnamigen Paket.)

**Aufgabe 4:** Bestimmung marginaler Verteilungen

Sei $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}^T\ \boldsymbol{x}^T)^T \sim \mathcal{N}_{q+p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_y} \\ \boldsymbol{\mu_x} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_y} & \boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{xy}} & \boldsymbol{\Sigma_x} \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie für die Komponentenvektoren $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}$ die marginalen Verteilungen her.