Lineare Algebra & Multivariate Normalverteilung

Aufgabe 1: Matrixzerlegungen

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{D}$ positiv definit ist.

a) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$.

b) Führen Sie für die Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Spektralzerlegung durch.

c) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$.

Lösung:

a)

Motivation Zerlegungen:

- computational effizientere Berechnungsmöglichkeit

Bspw. Schätzung: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$

$\Rightarrow$ Berechnung nach Zerlegung von $\boldsymbol{X}$ i.A. effizienter,

z.B. QR-Zerlegung $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ mit $\boldsymbol{Q}\hat{=}$orthogonale Matrix, $\boldsymbol{R}\hat{=}$obere Dreiecksmatrix: $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R})^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Y}$

- mathematischer/statistischer Interpretations-/Informationsgehalt (z.B. Faktorenanalyse)

- Einfachere Berechnung von Inversen und Wurzeln

- Korrelation in Daten eliminieren, auf Basis von Kovarianzmatrix-Zerlegung möglich

---

Wiederholung:

Definitheit einer quadratischen und symmetrischen Matrix A:

- $\boldsymbol{A}$ positiv semidefinit $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$

- $\boldsymbol{A}$ positiv definit $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

- $\boldsymbol{A}$ indefinit $\Leftrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$ kommen vor

(- $\boldsymbol{A}$ negativ (semi)definit: Äquivalent zu positiver Definitheit)

Eigenwertbestimmung über charakteristisches Polynom: $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \overset{!}{=} 0$

Definitheit:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 \overset{!}{=} 0 \\ (2-\lambda)^2 &= 1 \\ 2-\lambda &= \pm 1 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 1 & \qquad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ ist positiv definit, weil alle Eigenwerte größer Null sind!

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}) &= det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \\ (1-\lambda)^2 &= 4 \\ 1-\lambda &= \pm 2 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 3 & \qquad \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{B}$ ist indefinit, weil ein EW kleiner und einer größer Null ist!

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ ist nicht symmetrisch, Definitheit kann nicht direkt über EWs bestimmt werden, aber über die EWs der entsprechenden symmetrischen Matrix
(*vereinfacht gesagt: wir lassen die Diagonale gleich, mitteln aber paarweise die Nebendiagonalelemente*)

$$\boldsymbol{C}_S = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^\top\right).$$

$$\boldsymbol{C}_S = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
det(\boldsymbol{C}_S - \lambda \boldsymbol{I}) &= det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1.5 \\ 1.5 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda) - 1.5^2 \\
&= \lambda^2 - 3\lambda - 0.25 \\
\Rightarrow \lambda_{1/2} &= \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2} \\
\lambda_1 \approx -0.08 & \qquad \lambda_2 \approx 3.08
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{C}$ ist indefinit, weil ein EW kleiner und einer größer Null ist!

b)

Wiederholung:

Spektralzerlegung:

$\boldsymbol{A}$ symmetrisch $\Rightarrow$ Faktorisierung durch $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^T$,
mit orthogonalem $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ als Spalten,
und Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$ auf der Diagonale.

Eigenvektorenbestimmung für spezifischen EW λ_i: $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}$

Normierter Eigenvektor: $\boldsymbol{x}$ ist EV $\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$ ist normierter EV

Spektralzerlegung:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit EW} \quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 3$$

Berechnung der EV:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow \text{normierter EV:} \;\; \sqrt{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + -x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow \text{normierter EV:} \;\; \sqrt{1/2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \underbrace{\sqrt{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} \cdot \underbrace{\sqrt{1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}^T}$$

c)

Wiederholung:

Cholesky-Zerlegung:

$\boldsymbol{A}$ symmetrisch & positiv definit $\Rightarrow$ Zerlegung in $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$,

mit unterer Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Im Allgemeinen ist Cholesky etwas instabiler als z.B. QR, aber effizienter für große n!

Cholesky Zerlegung:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$$

Praktische Berechnung der Cholesky-Zerlegung:

$$l_{ii} = (d_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} {l_{ik}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}(d_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik})$$

Konkrete Berechnung:

$$l_{11} = (d_{11} - \sum_{k=1}^{1-1} {l_{1k}}^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - 0)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$l_{21} = \frac{1}{l_{11}}(d_{21} - \sum_{k=1}^{1-1} l_{2k} l_{1k}) = \frac{d_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$l_{31} = \frac{1}{l_{11}}(d_{31} - \sum_{k=1}^{1-1} l_{3k} l_{1k}) = \frac{d_{31}}{l_{11}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$l_{22} = (d_{22} - \sum_{k=1}^{2-1} {l_{2k}}^2)^{\frac{1}{2}} = (5 - 2^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(d_{32} - \sum_{k=1}^{2-1} l_{3k} l_{2k}) = \frac{1}{1}(7 - 3 \cdot 2) = 1$$

$$l_{33} = (d_{33} - \sum_{k=1}^{3-1} {l_{3k}}^2)^{\frac{1}{2}} = \left(d_{33} - ({l_{31}}^2 + {l_{32}}^2)^{\frac{1}{2}}\right) = (26 - 3^2 - 1^2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Eigenwertzerlegung

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Kovarianz

$$\boldsymbol{\Sigma_x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 und die (normierten) Eigenvektoren der Matrix $\boldsymbol{\Sigma_x}$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a) einen Zufallsvektor $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$, dessen Komponenten y_1 und y_2 lineare Kombinationen von x_1 und x_2 sind und der folgende Kovarianz hat:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a)

$$\boldsymbol{\Sigma_x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$det(\boldsymbol{\Sigma_x} - \lambda \boldsymbol{I}) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\Sigma_x}$ ist Kovarianzmatrix (zu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$), denn $\boldsymbol{\Sigma_x}$ ist

(i) symmetrisch

(ii) positiv definit

Berechnung EV:

$$(\boldsymbol{\Sigma_x} - \lambda_1 \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \text{setze } v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = -2 \\ & \text{Länge von } \boldsymbol{v}: \ \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \Rightarrow \quad & \widetilde{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\Sigma_x} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4w_1 + 2w_2 \\ 2w_1 - 1w_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{setze } w_1 = 1 \Rightarrow w_2 = 2$$

$$\text{Länge von } \boldsymbol{w}: \ \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \widetilde{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Überprüfung:

(1) Orthogonalität:

$$< \widetilde{\boldsymbol{v}}, \widetilde{\boldsymbol{w}} >= -\frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \surd$$

(2) Spektralzerlegung:

$$\boldsymbol{P \Lambda P}^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(NR)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma_x} \quad \surd$$

b)

$$\boldsymbol{\Sigma_y} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Sigma_x P} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{Cov}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Cov}\,(\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow \text{definiere } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Merke: y_1 und y_2 sind Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ bzgl. der Basis der Eigenvektoren $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ und $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ von $\boldsymbol{\Sigma_x}$ (**s. Abbildung 1**).

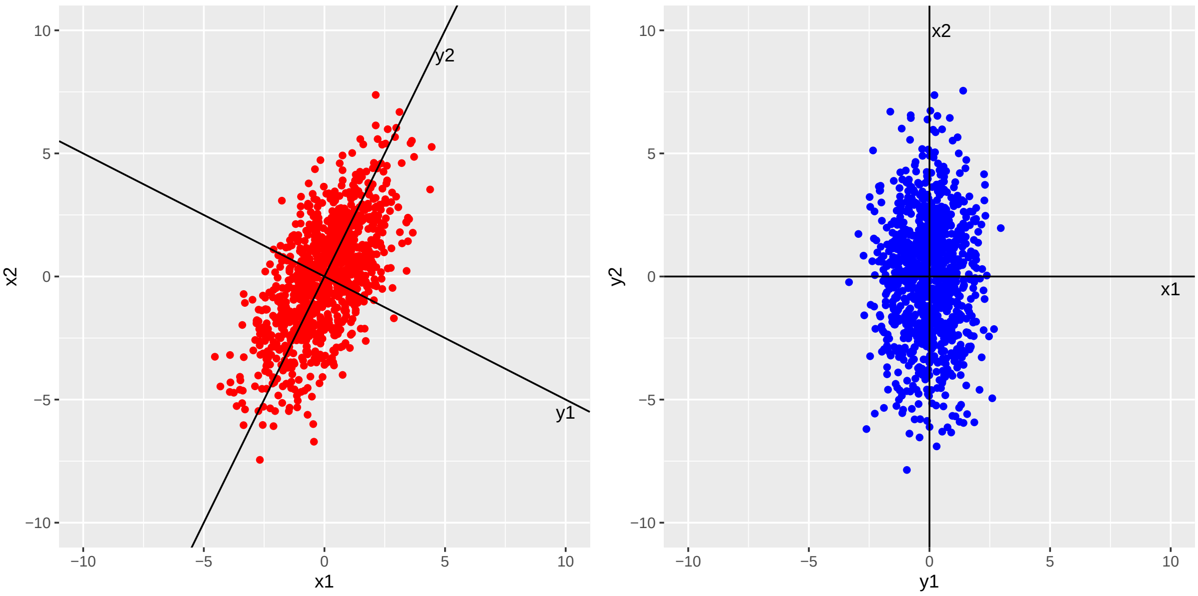

Abbildung 1: Koordinatentransformation

Aufgabe 3: Multivariate Normalverteilung

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ ein p-dimensionaler multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Die Dichte von $\boldsymbol{x}$ ist dann gegeben durch

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ der Mittelwert und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianz von $\boldsymbol{x}$ sind.

a) Berechnen Sie diese Dichte im Fall $p = 2$ mit den Bezeichnungen $\sigma_i^2 = var(x_i)$, $i = 1, 2$, und $\rho = \frac{cov(x_1,x_2)}{\sigma_1\sigma_2}$. Folgern Sie daraus, dass x_1 und x_2 unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

b) Stellen Sie die Dichte für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 3$ und verschiedenen Werten von ρ mit Hilfe von `R` graphisch dar. (Tipp: Hierfür eignet sich die Funktion `persp` in Kombination mit der Funktion `manipulate` aus dem gleichnamigen Paket.)

Lösung:

a)

Wiederholung:

Berechnung inverse Matrix:

$$\text{Sei } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}_{Adj(\boldsymbol{A})}$$

Berechnung quadratische Form:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 a_{11} + x_1x_2(a_{12} + a_{21}) + x_2^2 a_{22}$$

Hier: $p = 2$, $\sigma_1^2 = \boldsymbol{\mathcal{V}ar}\,(x_1)$, $\sigma_2^2 = \boldsymbol{\mathcal{V}ar}\,(x_2)$, $\mathbf{Cov}(x_1, x_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

(1) Determinante:

$$det(\boldsymbol{\Sigma}) = |\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

(2) Inverse:

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

Seien nun x_1 und x_2 unkorreliert $\Rightarrow \ \rho = 0$

$$
\begin{aligned}
\stackrel{\rho=0}{\Longrightarrow} f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}}_{=f_{\boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}_{=f_{\boldsymbol{x}_2}(\boldsymbol{x}_2)}
\end{aligned}
$$

b) *Siehe R-Code!!*

Aufgabe 4: Bestimmung marginaler Verteilungen

Sei $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}^T\ \boldsymbol{x}^T)^T \sim \mathcal{N}_{q+p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_y} \\ \boldsymbol{\mu_x} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_y} & \boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{xy}} & \boldsymbol{\Sigma_x} \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie für die Komponentenvektoren $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}$ die marginalen Verteilungen her.

Lösung:

a)

Wiederholung:

Alle Zufallsvektoren, die sich aus linearen Transformationen von normalverteilten Zufallsvektoren ergeben sind wiederum normalverteilt. Konkreter gilt für einen p-dim. Zufallsvektor:

$$\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma}) \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\boldsymbol{A}}_{\in \mathbb{R}^{q\times p}} \boldsymbol{w} + \underbrace{\boldsymbol{b}}_{\in \mathbb{R}^{q\times 1}} \sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{A\mu} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A\Sigma A}^T) \quad \text{mit } q = rg(\boldsymbol{A}) \leq p$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{q+p}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_y} \\ \boldsymbol{\mu_x} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_y} & \boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{xy}} & \boldsymbol{\Sigma_x} \end{pmatrix} \right)$$

Verteilung von $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned}
\text{Definiere } \boldsymbol{A_y} &= (\mathbf{I}_q\ \mathbf{0}_{q\times p}) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{q} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix}}_{p} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \boldsymbol{A_y z} &= \mathbf{I}_q \boldsymbol{y} + \mathbf{0}_{q\times p}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \\
\boldsymbol{y} &\sim \mathcal{N}_q\left(\boldsymbol{A_y} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_y} \\ \boldsymbol{\mu_x} \end{pmatrix} , \boldsymbol{A_y} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_y} & \boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{xy}} & \boldsymbol{\Sigma_x} \end{pmatrix} \boldsymbol{A_y}^T \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \boldsymbol{A_y} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu_y} \\ \boldsymbol{\mu_x} \end{pmatrix} &= \mathbf{I}_q \boldsymbol{\mu_y} + \mathbf{0}_{q\times p}\boldsymbol{\mu_x} = \boldsymbol{\mu_y} \\
\boldsymbol{A_y \Sigma A_y^T} &= (\mathbf{I}_q\ \mathbf{0}_{q\times p}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma_y} & \boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\ \boldsymbol{\Sigma_{xy}} & \boldsymbol{\Sigma_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q \\ \mathbf{0}_{p\times q} \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\Sigma_y} + \mathbf{0}_{q\times p}\boldsymbol{\Sigma_{xy}} ,\ \boldsymbol{\Sigma_{yx}} + \mathbf{0}_{q\times p}\boldsymbol{\Sigma_x}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q \\ \mathbf{0}_{p\times q} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\Sigma_y} + \mathbf{0}_{q\times p}\boldsymbol{\Sigma_{yx}} \\
\Rightarrow \boldsymbol{y} &\sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu_y},\ \boldsymbol{\Sigma_y})
\end{aligned}$$

Verteilung von x:

$$\text{Definiere } \boldsymbol{A_x} = (\mathbf{0}_{p\times q}\ \mathbf{I}_p)$$

Rest analog:

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}})$$