山东大学
网络空间安全学院

创新创业实践
Project5c

学生姓名：滕怀源

学号：202200460054

学院：网络空间安全学院

专业班级： 2022 级网安 2 班

完成时间：2025 年 7 月 26 日

目录

1 伪造中本聪的数字签名

本节通过在 Kaggle 平台运行的 Python 实验代码，验证了 SM2 签名算法在随机数 k 重用场景下的安全漏洞。实验模拟攻击者通过收集目标用户两条不同消息的签名，并利用数学推导恢复目标私钥，从而实现伪造任意消息签名。

1.1 实验代码说明

核心代码流程如下：

1. **生成密钥对**：调用 `sm2_keygen()` 随机生成用户 Alice 的私钥 d_A 与公钥 $P_A = d_A G$。
2. **签名过程**：使用固定随机数 k_{fixed} 对两条不同消息 M_1、M_2 签名，生成 (r_1, s_1) 和 (r_2, s_2)。
3. **攻击步骤**：攻击者通过公式

$$d_A \equiv (s_2 - s_1) \cdot ((s_1 - s_2) + (r_1 - r_2))^{-1} \pmod{n}$$

恢复 Alice 的私钥。

4. **伪造签名**：攻击者使用恢复的 d_A 对一条新的消息 M_f 生成签名 (r_f, s_f)，并用公钥 P_A 验证通过。

1.2 数学推导

SM2 签名过程如下：

$$\begin{aligned} e &= H(M), \\ (x_1, y_1) &= kG, \\ r &= (e + x_1) \bmod n, \\ s &= (1 + d_A)^{-1}(k - r d_A) \bmod n. \end{aligned}$$

整理 s 的定义式可得：

$$s(1 + d_A) \equiv k - r d_A \pmod{n}.$$

对于两次签名 (r_1, s_1) 和 (r_2, s_2)，有

$$\begin{cases} s_1(1 + d_A) \equiv k - r_1 d_A \pmod{n}, \\ s_2(1 + d_A) \equiv k - r_2 d_A \pmod{n}. \end{cases}$$

两式相减，消去 k：

$$(s_1 - s_2)(1 + d_A) \equiv (r_2 - r_1) d_A \pmod{n}.$$

移项得：

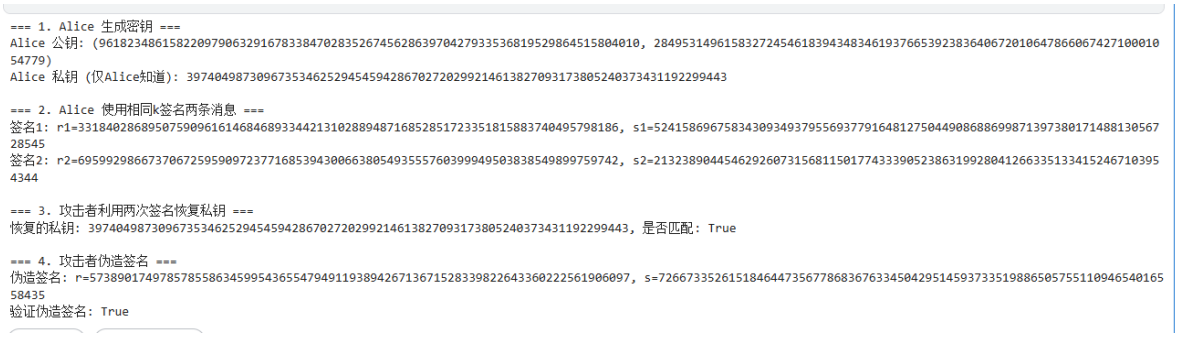
$$(s_1 - s_2) \equiv d_A((r_2 - r_1) - (s_1 - s_2)) \pmod{n}.$$

最终得到攻击公式：

$$\boxed{d_A \equiv (s_1 - s_2) \cdot ((r_2 - r_1) - (s_1 - s_2))^{-1} \pmod{n}.}$$

1.3 实验结果

Kaggle 运行结果显示：



- 原始私钥 d_A 与攻击恢复的私钥完全一致，证明攻击可行。
- 使用恢复的 d_A 对任意新消息 M_f 签名，公钥 P_A 验证通过，表明攻击者可完全伪造合法签名。

1.4 安全性分析

实验验证了 SM2 签名算法对随机数 k 的依赖性极强，一旦 k 重用或泄露，攻击者能够在多项式时间内恢复私钥，进而伪造任意签名。因此，必须使用 RFC6979 等规范生成确定性 k 或高强度随机数，避免复用。

A scapy 函数

```python
import hashlib
import random

# ==========================
# SM2 椭圆曲线参数 (sm2p256v1)
# ==========================
p = int("FFFFFFFEFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF00000000FFFFFFFFFFFFFFFF", 16)
a = int("FFFFFFFEFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF00000000FFFFFFFFFFFFFFFC", 16)
b = int("28E9FA9E9D9F5E344D5AEF20E93E3FBD6B5F6F4C52C9A7A3EB5C3C4F9DCC73E", 16)
n = int("FFFFFFFEFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF7203DF6B21C6052B53BBF40939D54123", 16)
Gx = int("32C4AE2C1F1981195F9904466A39C9948FE30BBFF2660BE1715A4589334C74C7", 16)
Gy = int("BC3736A2F4F6779C59BDCEE36B692153D0A9877CC62A474002DF32E52139F0A0", 16)
G = (Gx, Gy)

# ========== 椭圆曲线运算 ==========
def inverse_mod(x, m):
    return pow(x, -1, m)

def point_add(P, Q):
    if P == (0, 0): return Q
    if Q == (0, 0): return P
    if P == Q:
        lam = (3 * P[0]*P[0] + a) * inverse_mod(2 * P[1], p) % p
    else:
        lam = (Q[1]-P[1]) * inverse_mod(Q[0]-P[0], p) % p
    x = (lam*lam - P[0] - Q[0]) % p
    y = (lam*(P[0]-x)-P[1]) % p
    return (x, y)

def scalar_mul(k, P):
    R = (0, 0)
    while k > 0:
        if k & 1:
            R = point_add(R, P)
        P = point_add(P, P)
        k >>= 1
    return R

# ========== 哈希函数 (模拟SM3) ==========
def sm3_hash(msg):
    return int(hashlib.sha256(msg.encode()).hexdigest(), 16)

# ========== SM2 KeyGen ==========
def sm2_keygen():
    d = random.randint(1, n-1)
    P = scalar_mul(d, G)
```

```
    return d, P

# ========== SM2 签名 ==========
def sm2_sign(msg, d, k=None):
    e = sm3_hash(msg)
    if not k:
        k = random.randint(1, n-1)
    x1, y1 = scalar_mul(k, G)
    r = (e + x1) % n
    s = (inverse_mod(1+d, n) * (k - r*d)) % n
    return (r, s, k)

# ========== SM2 验签 ==========
def sm2_verify(msg, sig, P):
    r, s = sig
    e = sm3_hash(msg)
    t = (r + s) % n
    x1, y1 = point_add(scalar_mul(s, G), scalar_mul(t, P))
    R = (e + x1) % n
    return R == r

# ========== 攻击: 复用k恢复私钥 ==========
def attack_reuse_k(r1, s1, r2, s2):
    num = (s2 - s1) % n
    den = (s1 - s2 + r1 - r2) % n
    return (num * inverse_mod(den, n)) % n

# ============================
# 模拟攻击场景
# ============================
print("=== 1. Alice 生成密钥 ===")
dA, PA = sm2_keygen()
print(f"Alice 公钥: {PA}")
print(f"Alice 私钥 (仅Alice知道): {dA}")

# Alice 签两条消息, 误用相同k
print("\n=== 2. Alice 使用相同k签名两条消息 ===")
k_fixed = random.randint(1, n-1)
m1 = "Alice first message"
m2 = "Alice second message"

r1, s1, _ = sm2_sign(m1, dA, k_fixed)
r2, s2, _ = sm2_sign(m2, dA, k_fixed)
print(f"签名1: r1={r1}, s1={s1}")
print(f"签名2: r2={r2}, s2={s2}")

# 攻击者恢复私钥
print("\n=== 3. 攻击者利用两次签名恢复私钥 ===")
```

```
dA_recovered = attack_reuse_k(r1, s1, r2, s2)
print(f"恢复的私钥：{dA_recovered}，是否匹配：{dA == dA_recovered}")

# 伪造新消息签名
print("\n=== 4. 攻击者伪造签名 ===")
fake_msg = "This is a fake signed message"
r_fake, s_fake, _ = sm2_sign(fake_msg, dA_recovered)
print(f"伪造签名：r={r_fake}，s={s_fake}")
print("验证伪造签名:", sm2_verify(fake_msg, (r_fake, s_fake), PA))
```