Lista 6. Orientação, Produto Vetorial e Produto Misto

MTM5512 - Geometria Analítica

Exercício 1

As bases ordenadas $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ têm a mesma orientação?

(a) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

(b) $\vec{f}_1 = (0,0,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{f}_2 = (0,1,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 2

Fixe uma base ordenada $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Defina a orientação positiva de V^3 pela base $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ dada por $\vec{f}_1 = (0,0,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{f}_2 = (0,1,2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{f}_3 = (1,0,1)_{\mathcal{E}}$. Diga a orientação de cada uma das bases abaixo:

(a) $\mathcal{E}$.

(b) $\mathcal{E}_1 = \{\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1\}$.

(c) $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, onde $\vec{g}_1 = (1,1,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{g}_2 = (2,1,0)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{g}_3 = (3,0,0)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 3

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (3,1,-1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (a,0,2)_{\mathcal{E}}$. Encontre um valor de $a \in \mathbb{R}$, se possível, para que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $2\sqrt{6}$ unidades de área.

Exercício 4

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal. Considere os vetores $\vec{u} = (0,1,-1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (2,-2,-2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (1,-1,2)_{\mathcal{E}}$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{x}$, na base $\mathcal{E}$, que seja paralelo ao vetor $\vec{w}$ e que satisfação $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

Exercício 5

Mostre que se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$, então os vetores $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são LD em V^3.

Exercício 6

Dados uma base ortonormal $\mathcal{E}$ e os vetores $\vec{u} = (2,-3,2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (4,-1,2)_{\mathcal{E}}$, calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e também calcule o seno do ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 7

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores LI em V^3, e $\vec{w}$ um vetor satisfazendo $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Mostre que $\vec{w} = \vec{0}$.

Exercício 8

Mostre que se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são vetores de V^3 que satisfazem $\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{0}$, então eles são LD em V^3.

Dica: Calcule $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}$.

Exercício 9

Demonstre a **Identidade de Jacobi**, dada por

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Dica: Use o a fórmula para o duplo produto vetorial.

Exercício 10 ....

Se $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal, calcule o produto misto dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 3)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (2, -1, 5)_{\mathcal{E}}$, $\vec{w} = (4, -3, 1)_{\mathcal{E}}$ e responda: eles são paralelos a um mesmo plano?

Exercício 11 ....

Prove que $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}] = 2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.