Lista 7. Sistemas de Coordenadas, Retas e Planos no Espaço – Gabarito

MTM5512 - Geometria Analítica

Para os Exercícios de 1 a 13, $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ é um sistema de coordenadas ortogonal no espaço, fixado.

Exercício 1 ....

Em cada um dos casos abaixo, verifique se os pontos A,B e C são colineares.

(a) $A = (1, -1, 2)_\Sigma$, $B = (0, 1, 1)_\Sigma$, $C = (2, -3, 3)_\Sigma$.

Solução: Note que os vetores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, -1)_\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 1)_\mathcal{E}$ são paralelos, logo A, B, C são colineares.

(b) $A = (1, 1, -2)_\Sigma$, $B = (-1, 0, -4)_\Sigma$, $C = (5, 3, 2)_\Sigma$.

Solução: Note que os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -2)_\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{AC} = (4, 2, 4)_\mathcal{E}$ são paralelos, logo A, B, C são colineares.

(c) $A = (3, 0, 1)_\Sigma$, $B = (2, 1, 0)_\Sigma$, $C = (4, 5, 2)_\Sigma$.

Solução: Note que os vetores $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1)_\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 5, 1)_\mathcal{E}$ não são paralelos, logo A, B, C não são colineares.

Exercício 2 ....

Determine, se possível, valores reais para $m, n \in \mathbb{R}$ de modo que os pontos $A = (3, m, 5)_\Sigma$, $B = (n, 4, 4)_\Sigma$ e $C = (n, 0, n)_\Sigma$ sejam colineares.

Solução: O problema é equivalente a encontrar $m, n \in \mathbb{R}$ tais que os vetores $\overrightarrow{AB} = (n - 3, 4 - m, -1)_\mathcal{E}$ e $\overrightarrow{AC} = (n - 3, -m, n - 5)_\mathcal{E}$ sejam paralelos.

Para que eles sejam paralelos deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(n - 3, -m, n - 5)_\mathcal{E} = \alpha(n - 3, 4 - m, -1)_\mathcal{E}$.

• Se $n \neq 3$, então devemos ter $\alpha = 1$ e consequentemente $n - 5 = -1$, ou seja, $n = 4$. Mas deveríamos ter $4 - m = -m$, o que é impossível.

• Para $n = 3$, devemos ter $\alpha = 2$ e assim também $8 - 2m = -m$, e obtemos $m = 8$.

A solução então é $m = 8$ e $n = 3$, e os pontos são $A = (3, 8, 5)_\Sigma$, $B = (3, 4, 4)_\Sigma$ e $C = (3, 0, 3)_\Sigma$.

Exercício 3 ....

Verifique se os pontos $A = (2, 6, -5)_\Sigma$, $B = (5, 5, 0)_\Sigma$, $C = (6, 9, 7)_\Sigma$ e $D = (3, 10, 2)_\Sigma$ são vértices de um paralelogramo.

Solução: Basta notar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são LI e $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Exercício 4 ....

Dados os pontos $A = (1, 2, 5)_\Sigma$ e $B = (0, 1, 0)_\Sigma$, determine as coordenadas do ponto P no sistema Σ, onde P pertence à reta que passa por A e B, de modo que $\|\vec{PB}\| = 3\|\vec{PA}\|$.

Solução: A reta que passa por A e B tem equação $r\colon X = A + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (1,1,5)_{\mathcal{E}}$. Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + \lambda_0\vec{v}$. Assim $\overrightarrow{PA} = -\lambda_0\vec{v}$, e portanto $\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{27}|\lambda_0|$. Ainda $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = -\lambda_0\vec{v} - \vec{v}$ e assim $\overrightarrow{PB} = -(\lambda_0+1)\vec{v}$ e portanto $\|\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{27}|\lambda_0+1|$.

Do problema, como devemos ter $\|\vec{PB}\| = 3\|\vec{PA}\|$, devemos ter $|\lambda_0+1| = 3|\lambda_0|$. Esta equação modular tem soluções $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_0 = -\frac{1}{4}$. E assim temos dois possíveis pontos P:

$$P = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)_\Sigma \quad \text{e} \quad P = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)_\Sigma.$$

Exercício 5 . . . .

Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (2,0,-3)_\Sigma$ e:

(a) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1,0,4)_\Sigma$ e $C = (2,1,3)_\Sigma$.

Solução:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) é paralela à reta $s\colon \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$.

Solução:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \dfrac{4}{3}\lambda \\ z = -3 + 6\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) é paralela à reta $s\colon \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6 . . . .

Dados o ponto $A = (0,2,1)_\Sigma$ e a reta $r\colon (x,y,z)_\Sigma = (0,2,-1)_\Sigma + \lambda(1,-1,2)_{\mathcal{E}}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, encontre os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. Responda também: a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Por quê?

Solução: Os pontos são dados por $P_1 = (0,2,-1)_\Sigma + \lambda_1(1,-1,2)_{\mathcal{E}}$ e $P_2 = (0,2,-1)_\Sigma + \lambda_2(1,-1,2)_{\mathcal{E}}$, onde $\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$ e $\lambda_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$.

Como encontramos 2 pontos diferentes, vemos que distância do ponto A à reta r é menor que $\sqrt{3}$ (pois se fosse maior não encontraríamos nenhum, e se fosse igual encontraríamos somente 1).

Exercício 7 . . . .

Faça um esboço dos planos cujas equações gerais são dadas por

(a) $x = 2$

Solução: -

(b) $y + 1 = 0$

Solução: -

(c) $z + 4 = 0$

Solução: -

(d) $x - z = 0$

Solução: -

Exercício 8 ....

Mostre que os pontos $P = (-1, 0, 0)_\Sigma$, $Q = (2, -1, -1)_\Sigma$, $R = (0, 3, 1)_\Sigma$ e $S = (4, 5, 1)_\Sigma$ são vértices de um quadrilátero (porquê?). Escreva as equações das retas que contêm cada um dos seus lados.

Solução: Faça como o Exercício 3.

Exercício 9 ....

Determine a equação geral do plano, determinado pelo ponto $P = (2, 1, -1)_\Sigma$ e pela reta r, de modo que qualquer ponto desta reta é da forma $(2t, 1 + t, -1 - t)_\Sigma$ para $t \in \mathbb{R}$.

Solução: Sugestão: Note que P não está na reta r, e com isso obtenha 3 pontos não colineares. Assim, obtenha dois vetores diretores do plano, e por fim obtenha um vetor normal ao plano para encontrar a equação geral

$$\pi\colon y = 1.$$

Exercício 10 ....

Encontre a equação geral do plano que contém as retas dadas por

$$r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z \quad \text{e} \quad s\colon \frac{x-2}{5} = y - 1 = \frac{z}{3}.$$

Solução: $\pi\colon 5x - 4y - 7z - 6 = 0$.

Exercício 11 ....

Prove que a reta $r\colon X = (-4, 2, 4)_\Sigma + \lambda(1, -3, 5)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ está contida no plano $\pi\colon x + 2y + z = 4$.

Solução: Note que os pontos da reta são da forma $X = (-4 + \lambda, 2 - 3\lambda, 5 + 5\lambda)_\Sigma$ e como

$$-4 + \lambda + 2(2 - 3\lambda) + 4 + 5\lambda = 4,$$

vemos que todos os pontos de r satisfazem à equação geral de π, e portanto a reta r está contida em π.

Exercício 12 ....

Sendo $\vec{n} = (2, 1, -1)_{\mathcal{E}}$ um vetor normal ao plano π que passa pelo ponto $(1, 2, 2)_{\Sigma}$, encontre as equações paramétricas de π.

Solução: Use a equação geral $\pi\colon 2x + y - z - 2 = 0$ para encontrar 3 pontos não colineares em π (eu usei $A = (0, 0, -2)_{\Sigma}$, $B = (0, 2, 0)_{\Sigma}$ e $C = (1, 0, 0)_{\Sigma}$), e depois encontre dois vetores diretores do plano. Uma possibilidade para as equações paramétrica de π é

$$\pi\colon \begin{cases} x = -\beta \\ y = 2\alpha + 2\beta \\ z = -2 + 2\alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exercício 13 ....

Encontre a equação geral do plano que contém a reta $r\colon X = (0, 0, 2)_{\Sigma} + \lambda(1, -1, 1)_{\mathcal{E}}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, e é perpendicular ao plano $\alpha\colon x - 2y + z - 1 = 0$.

Solução: Note que a normal deste plano dever ser ortogonal ao vetor diretor da reta dada e também ortogonal ao vetor normal do plano dado. Encontramos $\pi\colon x - z + 2 = 0$.

Exercício 14 ....

Considere um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH como na figura abaixo, com lados de comprimento $AB = 4$, $BC = 3$ e $AE = 2$. Determine um sistema de coordenadas $\Sigma_1 = (O_1, \mathcal{E}_1)$ conveniente e encontre:

(a) Uma equação vetorial da reta que passa por A e F.

Solução: Nesta e nas seguintes, nosso sistema será $O_1 = A$ e $\mathcal{E}_1 = \{\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, que é ortonormal positiva.
O vetor diretor desta reta é $\vec{v} = (4, 0, 2)_{\mathcal{E}_1}$ e a equação da reta é

$$r\colon X = \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Uma equação vetorial da reta que passa por A e C.

Solução: $r\colon X = \lambda(4, 3, 0)_{\mathcal{E}_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Uma equação paramétrica da reta que passa por A e G.

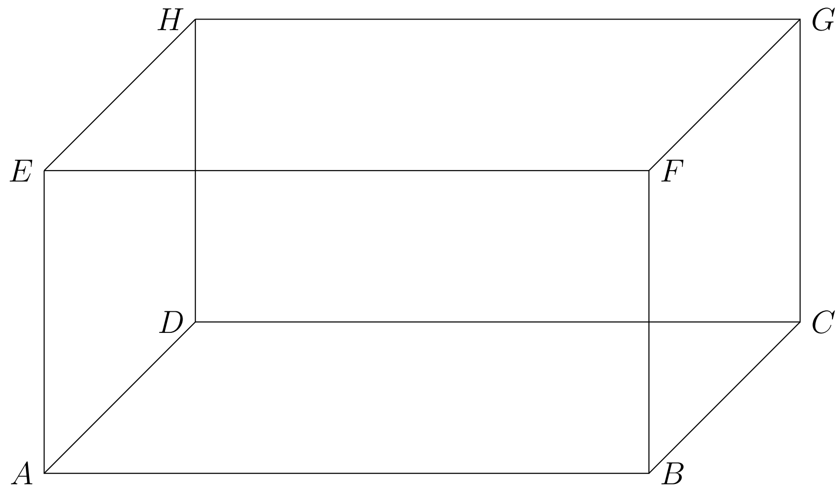
Solução: $r\colon X = \lambda(4, 3, 2)_{\mathcal{E}_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) A equação geral do plano que contém a face ABCD.

Solução: $\pi\colon z = 0$.

(e) A equação geral do plano que contém a face BCGF.

Solução: $\pi\colon x = 4$.



Exercício 15 . . . .

Seja $\Gamma = (O, \mathcal{F})$ um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Sendo $A = (2, -1)_\Gamma$, $B = (5, 4)_\Gamma$ e $C = (-7, 8)_\Gamma$, encontre a equação da reta que bissecta o ângulo $B\hat{A}C$.

Solução: Temos $\overrightarrow{AB} = (3, -5)_\mathcal{F}$ e $\overrightarrow{AC} = (-9, 9)_\mathcal{F}$. Sejam $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{17}}(3, -5)_\mathcal{F}$ e $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)_\mathcal{F}$. Assim sabemos (de exercícios de listas anteriores) que um vetor diretor da reta que bissecta o ângulo $B\hat{A}C$ é

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{17}}(2 - \sqrt{17}, -5 + \sqrt{17})_\mathcal{F}.$$

A reta então é dada por

$$r\colon X = A + \lambda \vec{w}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$