Lista 4. Bases e Coordenadas – Gabarito

MTM5512 - Geometria Analítica

Exercício 1

Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

(a) Explique por que o conjunto $\mathcal{E} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é uma base para V^3.

Solução: Os três vetores em questão não são todos paralelos a um mesmo plano, e portanto são LI, e constituem uma base ordenada para V^3.

(b) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AM}$ em relação à base acima.

Solução: Podemos escrever $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, e como M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o vetor $\overrightarrow{OM}$ representa a mediana do triângulo OBC, e assim $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Assim temos

$$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

e portanto

$$\overrightarrow{AM} = \left(-1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)_{\mathcal{E}}$$

Exercício 2

Seja $\mathcal{E} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base ordenada de V^3 e $\vec{x}$ um vetor qualquer de V^3. Sabemos que existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$. Mostre que o conjunto

$$\{\vec{u} + \vec{x}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w} + \vec{x}\}$$

é LI se, e somente se, $a + b + c + 1 \neq 0$.

Solução: Tome $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(\vec{u} + \vec{x}) + \beta(\vec{v} + \vec{x}) + \gamma(\vec{w} + \vec{x}) = \vec{0}. \tag{1}$$

Os vetores em questão serão LI se, e somente se, pudermos mostrar que obrigatoriamente $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Note que, usando que $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, a equação (1) é equivalente a

$$[\alpha + a(\alpha + \beta + \gamma)]\vec{u} + [\beta + b(\alpha + \beta + \gamma)]\vec{v} + [\gamma + c(\alpha + \beta + \gamma)]\vec{w} = \vec{0},$$

e como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base, eles são LI, e portanto

$$\begin{cases} \alpha + a(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \\ \beta + b(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \\ \gamma + c(\alpha + \beta + \gamma) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Somando as três equações obtemos $(a+b+c+1)(\alpha+\beta+\gamma) = 0$. Assim se $a+b+c+1 \neq 0$ temos $\alpha+\beta+\gamma = 0$, e assim o sistema (2) nos dá $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e os vetores $\vec{u}+\vec{x}, \vec{v}+\vec{x}, \vec{w}+\vec{x}$ são LI . Reciprocamente, se $\vec{u}+\vec{x}, \vec{v}+\vec{x}, \vec{w}+\vec{x}$ são LI, então $\alpha = \beta = \gamma = 0$ é a única solução do sistema (2) que pode ser reescrito na forma matricial $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto nos dá que $\det(A) \neq 0$, e conclui o resultado, já que

$$\det(A) = a + b + c + 1.$$

Exercício 3 ...

Fixe uma base ordenada $\mathcal{E}$ de V^3. Encontre o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que, em cada um dos itens, os vetores sejam LD.

(a) $(3,5,1)_{\mathcal{E}}$, $(2,0,4)_{\mathcal{E}}$, $(1,m,3)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Sabemos que os vetores em questão serão LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Resolvendo a equação para m, encontramos $m = -1$.

(b) $(1,3,5)_{\mathcal{E}}$, $(2,m+1,10)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Neste caso, os vetores serão LD se, e somente se, forem paralelos, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(2, m+1, 10)_{\mathcal{E}} = \alpha(1,3,5)_{\mathcal{E}}.$$

Assim, se tal α existe, usando a primeira (ou a terceira) coordenada, obtemos $\alpha = 2$. Assim devemos ter $m + 1 = 6$, e portanto $m = 5$.

Exercício 4 ...

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada, $\vec{u} = (2,-2,-4)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (0,-1,-3)_{\mathcal{E}}$. Os vetores $\vec{w} = (1,-2,3)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{x} = (4,0,13)_{\mathcal{E}}$ podem ser escritos como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

Solução: Assuma que $\vec{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,-2,3)_{\mathcal{E}} = \alpha(2,-2,-4)_{\mathcal{E}} + \beta(0,-1,-3)_{\mathcal{E}},$$

o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ -2\alpha - \beta = -2, \\ -4\alpha - 3\beta = 3, \end{cases}$$

que é um SI, e portanto $\vec{w}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Fazendo o raciocínio análogo para $\vec{x}$ obtemos também um SI, e assim $\vec{x}$ também não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 5 ...

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{u} = (1,2,2)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)_{\mathcal{E}}$. Determine $m \in \mathbb{R}$, se possível, para que:

(a) $\vec{u}$ seja combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Solução: Para que $\vec{u}$ seja combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ devem existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} (m-1)\alpha + (m+1)\beta = 1 \\ \alpha + (m-1)\beta = 2, \\ (m-2)\alpha + 2\beta = 2. \end{cases}$$

Mas somando a segunda e a terceira linha deste sistema obtemos $(m-1)\alpha+(m+1)\beta = 4$, e comparando com a primeira linha, vemos que se trata de um SI. Logo não é possível encontrar m para que $\vec{u}$ seja combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam LD.

Solução: Devemos neste caso encontrar m para que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ m-1 & 1 & m-2 \\ m+1 & m-1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Isto é equivalente a $m^2 - 3m = 0$, ou seja, $m = 0$ ou $m = 3$.

Exercício 6 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3. Determine $m \in \mathbb{R}$, se possível, para que os vetores em cada item abaixo sejam LD.

(a) $(m, 1, m)_{\mathcal{E}}$, $(1, m, 1)_{\mathcal{E}}$.

Solução: $m = 1$ ou $m = -1$.

(b) $(1 - m^2, 1 - m, 0)_{\mathcal{E}}$, $(m, m, m)_{\mathcal{E}}$.

Solução: $m = 0$ ou $m = 1$.

(c) $(m, 1, m + 1)_{\mathcal{E}}$, $(1, 2, m)_{\mathcal{E}}$, $(1, 1, 1)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Não existe m para o qual os três vetores sejam LD.

(d) $(m, 1, m + 1)_{\mathcal{E}}$, $(0, 1, m)_{\mathcal{E}}$, $(0, m, 2m)_{\mathcal{E}}$.

Solução: $m = 0$ ou $m = 2$.

Exercício 7 ....

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3 e defina

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1.$$

Mostre que $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é uma base ordenada de V^3 e encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ em relação às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

Solução: Para mostrar que $\mathcal{F}$ é uma base ordenada, basta mostrar que $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são LI. Para isso seja

$$\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2 + \gamma\vec{f}_3 = \vec{0}.$$

Devemos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Mas esta igualdade acima é equivalente a

$$(\alpha + \beta + \gamma)\vec{e}_1 + (\alpha + \beta)\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3 = \vec{0},$$

o como $\mathcal{E}$ é uma base, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta = \alpha = 0,$$

o que nos dá $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e mostra que $\mathcal{F}$ é uma base ordenada de V^3.

Agora, claramente $\vec{u} = (-3, 0, -1)_{\mathcal{E}}$. Note que $\vec{e}_1 = \vec{f}_3$ e que $\vec{e}_3 = \vec{f}_1 - \vec{f}_2$, assim

$$\vec{u} = -3\vec{f}_3 - \vec{f}_1 + \vec{f}_2,$$

e assim $\vec{u} = (-1, 1, -3)_{\mathcal{F}}$.

Outra maneira é ver que a matriz mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ é

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e sua inversa, que é $\mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}}$ é dada por

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e assim

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8 ....

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

(a) Para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ forma uma base ordenada de V^3?

Solução: Para que seja uma base, devemos ter (por quê?)

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2m & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

o que nos dá $m \neq -\frac{4}{7}$.

(b) Encontre $m \in \mathbb{R}$, se possível, para o qual o vetor $\vec{u} = (1, 2, -1)_{\mathcal{E}}$ satisfaça $\vec{u} = (0, 1, 0)_{\mathcal{F}}$.

Solução: Sabemos que

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(\vec{u})_{\mathcal{F}},$$

assim devemos ter

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2m & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos então $m = 1$. (Note que neste caso, simplesmente encontramos que $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.)

Exercício 9 ....

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_3$.

(a) Mostre que $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é uma base ordenada de V^3.

Solução: Basta mostrar que $\mathcal{F}$ é LI. De fato, se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \gamma \vec{f_3} = \vec{0},$$

então

$$\alpha \vec{e}_1 + (\beta - \alpha)\vec{e}_2 + (3\gamma - \beta)\vec{e}_3 = \vec{0},$$

e como $\mathcal{E}$ é LI, temos $\alpha = \beta - \alpha = 3\gamma - \beta = 0$, o que implica que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e portanto $\mathcal{F}$ constitui uma base ordenada para V^3.
Equivalentemente, podemos simplesmente notar que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

para concluir que $\mathcal{F}$ é LI.

(b) Encontre m, se possível, para que os vetores $\vec{u} = (0, m, 1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)_{\mathcal{F}}$ sejam LD.

Solução: Primeiro vamos encontrar as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{E}$. Temos

$$\vec{v} = (0, 1, -1)_{\mathcal{F}} = \vec{f_2} - \vec{f_3} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - e\vec{e}_3 = \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 = (0, 1, 4)_{\mathcal{E}}.$$

Agora para que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LD, eles devem ser paralelos, ou seja, deve existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = a\vec{v}$. Assim

$$(0, m, 1)_{\mathcal{E}} = a(0, 1, -4)_{\mathcal{E}},$$

e nos dá $m = a$ e $1 = -4a$, assim obtemos $m = -\frac{1}{4}$.

Exercício 10 ....

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f_1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f_2} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $\vec{f_3} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

(a) Verifique que $\mathcal{F}$ é uma base ordenada de V^3.

Solução: Note que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0,$$

e portanto $\mathcal{F}$ é uma base de V^3.

(b) Encontre a matriz mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.

Solução: Por definição, a matriz é dada por:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Sendo $\vec{u} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, encontre a expressão do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{F}$.

Solução: Vamos encontrar as coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base $\mathcal{F}$, usando a matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}}$, que é a inversa da matriz $\mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$. Calculando a inversa (confira o cálculo da inversa, com o passo a passo do Método da Eliminação de Gauss-Jordan, no site `https:`

//matrixcalc.org/pt/) temos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Assim

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{11}{4} \\ \frac{25}{12} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\vec{u} = \frac{19}{12}\vec{f}_1 - \frac{11}{4}\vec{f}_2 + \frac{25}{12}\vec{f}_3$.

Exercício 11 ....

Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ duas bases ordenadas de V^3 e $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}} = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{F}}$. Suponha que

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_3 = 2y_1 + y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Determine, se possível, a matriz mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.

Solução: Não é possível determinar a matriz mudança de base somente com essa informação. De fato, se o vetor $\vec{v}$ for o vetor nulo, então as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ podem ser quaisquer. Mesmo que $\vec{v}$ não seja nulo não é possível dizer nada. Por exemplo, suponha $\vec{v} = (1, 0, 0)_{\mathcal{F}}$. Logo $\vec{v} = (1, 1, 2)_{\mathcal{E}}$. Qualquer matriz da forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & * & * \\ 2 & * & * \end{pmatrix} \text{ com } \det(A) \neq 0,$$

poderia ser uma matriz de mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$, onde $*$ representa um número qualquer.

Exercício 12 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3. Qual o valor de $x \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (3, -x, -2)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (3, 2, x)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (1, -3, 1)_{\mathcal{E}}$ sejam paralelos a um mesmo plano no espaço?

Solução: Para que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam paralelos a um mesmo plano no espaço, eles devem ser LD, ou seja, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 3 & -x & -2 \\ 3 & 2 & x \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, $x^2 - 12x - 28 = 0$, o que nos dá $x = 14$ ou $x = -2$.

Exercício 13 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3.

(a) Para quais valores de $a, b \in \mathbb{R}$ os vetores $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ e $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + (a - b)\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ são LI em V^3?

Solução: Determinaremos antes para quais valores de $a, b \in \mathbb{R}$ os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD em V^3, e para tal, deve existir $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$(a, b, 3)_{\mathcal{E}} = \gamma(2, a-b, 1)_{\mathcal{E}}.$$

Assim encontramos $\gamma = 3$, e teremos $a = 6$ e $b = \frac{9}{2}$. Desta maneira, para qualquer par de números (a, b) com $(a, b) \neq (6, \frac{9}{2})$, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão LI.

(b) Encontrar uma base ordenada $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ de V^3 tal que se $\vec{u} = (1, 2, 3)_{\mathcal{E}}$, tenhamos $\vec{u} = (1, 0, 0)_{\mathcal{F}}$.

Solução: Definindo $\vec{f_1} = \vec{u}$, já garantimos que $\vec{u} = (1, 0, 0)_{\mathcal{F}}$. Nos resta definir $\vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ de modo que $\mathcal{F}$ seja uma base. Por exemplo, tomando $\vec{f_2} = \vec{e}_2$ e $\vec{f_3} = \vec{e}_3$, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

e portanto $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é uma base ordenada de V^3.

(c) Qual a relação deve haver entre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (1, \alpha, \alpha^2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (1, \beta, \beta^2)$ sejam LD?

Solução: Devemos ter

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + \alpha^2 - \beta^2 + \beta - \alpha = 0,$$

isto é, $(\beta - \alpha)(\alpha(\beta - 1) + 1 - \beta) = 0$. Assim $\alpha = \beta$ ou $\alpha(\beta - 1) = \beta - 1$.
Analisando a segunda relação, vemos que ela está satisfeita para qualquer valor de β se $\alpha = 1$, também para qualquer valor de α se $\beta = 1$.
Resumidamente, as relações são

- $\alpha = \beta$, ou;
- α qualquer e $\beta = 1$, ou;
- $\alpha = 1$ e β qualquer.

Exercício 14 . . . .

Sejam $\mathcal{E}$ base ordenada de V^3, $\mathcal{F} = \{(1, 1, 1)_{\mathcal{E}}, (1, 2, 0)_{\mathcal{E}}, (1, 1, 0)_{\mathcal{E}}\}$ e $\mathcal{G} = \{(2, 1, -1)_{\mathcal{E}}, (3, 0, 1)_{\mathcal{E}}, (2, 0, 1)_{\mathcal{E}}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são bases ordenadas de V^3.

Solução: De fato, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

logo ambas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são bases ordenadas de V^3.

(b) Determine as matrizes mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{G}$.

Solução: Pela definição, temos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Se $\vec{u} = (m, 2, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (1, 1, 1)_{\mathcal{F}}$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)_{\mathcal{G}}$, determine se possível $m \in \mathbb{R}$ para o qual os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não formem uma base ordenada de V^3.

Solução: Encontrando as coordenadas de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na base $\mathcal{E}$, usando as matrizes mudança de coordenadas, obtemos

$$\vec{v} = (3, 4, 1)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (3, 2, -2)_{\mathcal{E}}.$$

Assim $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não formarão uma base ordenada de V^3 se forem LD, isto é, se

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos dá $m = \frac{6}{5}$.