Gabarito da Lista 2 - Sistemas Lineares

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Matemática
Geometria Analítica (MTM5512)

Exercício 1. Usando escalonamento, classifique os seguintes sistemas lineares. No caso do sistema admitir solução, determine-a.

(a) $$\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 2x + y - 2z = 10 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado (SPD), com solução $S = \{(4, 2, 0)\}$.

(b) $$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Solução: Sistema impossível (SI).

(c) $$\begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 2y + t = 1 \\ 5x + z - t = 5 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e determinado (SPD), com solução $S = \{(0, -1, 4, -1)\}$.

(d) $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e indeterminado (SPI).

(e) $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 3x - 5y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e indeterminado (SPI).

(f) $$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e indeterminado (SPI).

(g) $$\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x - 2y - 2z = -3 \\ 3x - 3y - 3z - t = -4 \end{cases}$$

Solução: Sistema possível e indeterminado (SPI).

(h) $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x - 5y - 6z = 0 \end{cases}$

Solução: Sistema impossível (SI).

Exercício 2. Escreva duas soluções numéricas de cada um dos sistemas do exercício anterior que seja SPI.

Solução: Deixando a solução em função da variável z, basta tomar dois valores distintos para z, e cada valor dará uma solução numérica para o sistema.

Exercício 3. Determine o valor de a para o qual o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2y + (a+1)\,z = 2 \\ 2x + 3y + (4+a)\,z = 3a + 1 \end{cases}$$

seja

(a) impossível.

Solução: $a = 1$.

(b) possível e indeterminado.

Solução: Não existe tal a.

(c) possível e determinado.

Solução: $a \neq 1$.

Exercício 4. Usando o método da Eliminação de Gauss-Jordan, resolva os seguintes sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$

Solução: $S = \{(1, 2, -3)\}$.

(b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

Solução: $S = \{(-a, a, a) \colon a \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$

Solução: $S = \{(a - 1, 2b, b, a) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+5y-2z=3 \\ x+7y-7z=5 \end{cases}$

Solução: Não possui solução, isto é, $S=\varnothing$.

(e) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$

Solução: $S=\{(-3a,0,a)\colon a\in\mathbb{R}\}$

(f) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=4 \\ x+y-z+t=-4 \\ x-y+z+t=2 \end{cases}$

Solução: $S=\{(1,-1,2,-2)\}$.

Exercício 5. Para quais valores de k os sistemas abaixo são: SPD, SPI e SI?

(a) $\begin{cases} -4x+3y=2 \\ 5x-4y=0 \\ 2x-y=k \end{cases}$

Solução: SPD se $k=4$ e SI se $k\neq 4$.

(b) $\begin{cases} -x-2y-kz=1 \\ kx-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

Solução: SI se $k=0$, SPI se $k=1$ e SPD se $k\neq 0$ e $k\neq 1$.

(c) $\begin{cases} 2x-5y+2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+kz=0 \end{cases}$

Solução: SPI se $k=2$, SPD de $k\neq 2$.

Exercício 6. Usando a FERL, encontre a inversa da matriz

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{4}{27} \\ -\frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{11}{27} \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. Usando inversão de matrizes, resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ x + 8z = 17 \end{cases}$$

Solução: $S = \{(1, -1, 2)\}$.

Exercício 8. Qual é a soma de todos os elementos da FERL da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

Solução: $\frac{3}{2}$.