Gabarito da Lista 1 - Matrizes

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Matemática
Geometria Analítica (MTM5512)

Exercício 1. Escreva cada uma das matrizes abaixo.

(a) $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$; $a_{ij} = j - 2i$

Solução: Temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \\ -7 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

(b) $A \in M_3(\mathbb{R})$; $a_{ij} = i.j + 3$

Solução: Temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

(c) $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$; $a_{ij} = i^2 - j$

Solução: Temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2. Determine o valor das incógnitas x e y, sabendo que as matrizes A e B são iguais.

(a) $A = \begin{pmatrix} x^2 + 5x & x^2 \\ y^2 - 5y & y^2 - 5 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 3 - 2x \\ 0 & 4y \end{pmatrix}$

Solução: Temos $x = -3$ e $y = 5$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 3x - 2y & 5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 4x + y \end{pmatrix}$

Solução: Temos $x = 1$ e $y = -2$.

Exercício 3. Determine o tamanho de cada uma das matrizes abaixo e classifique-a.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

Solução: $A \in M_{1\times 4}(\mathbb{R})$ e é uma matriz linha.

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solução: $A \in M_{1\times 5}(\mathbb{R})$ e é uma matriz linha.

(c) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solução: $I \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e é a matriz identidade de ordem 3.

(d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ 9 & 0 & \sqrt{2} & 5 & -4 \\ 7 & 9 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Solução: $B \in M_5(\mathbb{R})$ e é uma matriz quadrada de ordem 5.

(e) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solução: $C \in M_4(\mathbb{R})$, é uma matriz quadrada de ordem 4 e triangular superior.

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solução: $A \in M_4(\mathbb{R})$, é uma matriz quadrada de ordem 4 e triangular inferior.

Exercício 4. Verifique em quais itens é possível fazer a operação indicada com as matrizes A e B. Em caso afirmativo, determine qual é a ordem da matriz resultante da operação.

(a) $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$; $A + B, AB, BA$.

Solução: Temos

- $A + B$ não possível;
- AB possível e $AB \in M_4(\mathbb{R})$;
- BA possível e $BA \in M_5(\mathbb{R})$.

(b) $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$; $A - B, AB, BA$.

Solução: Temos

- $A - B$ possível e $A + B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$;
- AB não possível;
- BA não possível.

(c) $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $B \in M_4(\mathbb{R})$; $A+B, AB, BA$.

Solução: Temos

- $A+B$ possível e $A+B \in M_4(\mathbb{R})$;
- AB possível e $AB \in M_4(\mathbb{R})$;
- BA possível e $BA \in M_4(\mathbb{R})$.

Exercício 5. Efetue as operações solicitadas.

(a) AB e BA onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Solução: Temos

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 28 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ -6 & 6 & 18 \\ -5 & 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

(b) Ax onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

Solução: Temos

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

(c) bA onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Solução: Temos

$$bA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

verifique que:

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A + B = B + A$

(c) $(A + B)\,C = AC + BC$

Solução: Simples verificação.

Exercício 7. Verdadeiro (V) ou Falso (F)? Se verdadeiro, prove. Se falso, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ então $AB = BA$.

Solução: FALSO. Como contra-exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, logo A e B estão em $M_2(\mathbb{R})$ mas $AB \neq BA$.

(b) Sejam $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m\times p}$ e 0 a matriz nula de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se $AB = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$.

Solução: FALSO. Como contra-exemplo, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

(c) Sejam A e B matrizes. Se o produto AB está definido então o produto BA também está definido.

Solução: FALSO. Se, por exemplo, $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ então o produto AB está definido, mas o produto BA não está.

Exercício 8. Sejam $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = i + 3j$ e $B \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ definida por $b_{ij} = i^2 + j$. Sendo $C = AB$, determine os elementos c_{12} e c_{23}, sem escrever explicitamente as matrizes A, B e C.

Solução: Temos

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k2} = 164 \qquad \text{e } c_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3} = 208.$$

Exercício 9. Determine a matriz transposta das seguintes matrizes. Alguma(s) dessas matrizes são simétricas ou antissimétricas? Se sim, quais?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Solução: Temos $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solução: Temos $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 5 \\ 9 & 23 & 32 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solução: Temos $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 15 & 23 & 0 \\ 5 & 32 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solução: Temos $D^t = \begin{pmatrix} 34 & 4 & 1 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -13 \\ -2 & 0 & 12 \\ 13 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

Solução: Temos $E^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ 2 & 0 & -12 \\ -13 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ e E é antissimétrica, pois $E^t = -E$.

Exercício 10. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Determine A^t e B^t.

Solução: Temos $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Efetue, se possível, AB^t e B^tA.

Solução: Não é possível efetuar AB^t e

$$B^tA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 23 \\ 17 & 23 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercício 11. Sabendo que a matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & x+2y & z-4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3z+6 & 3x-y & 0 \end{pmatrix}$ é simétrica, determine os valores de x, y e z.

Solução: Temos $x = 2$, $y = 1$ e $z = -5$.

Exercício 12. Verdadeiro ou falso? Justifique.

(a) Uma matriz que não é quadrada pode ser simétrica.

Solução: FALSO. Para ser simétrica, primeiramente, ela e sua transposta dever ter o mesmo tamanho. Se $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ então sua transposta é $A^t \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e para que elas tenham o mesmo tamanha, devemos ter $n = m$, ou seja, ela deve ser quadrada.

(b) Uma matriz quadrada que tem elementos não nulos na diagonal principal pode ser uma matriz antissimétrica.

Solução: FALSO. Se A é antissimétrica, temos $A^t = -A$, e assim, para a diagonal obtemos $a_{ii} = -a_{ii}$, ou seja $a_{ii} = 0$ para cada i. Assim, todos os elementos da diagonal de uma matriz antissimétrica devem ser nulos.

(c) Seja A uma matriz quadrada. A matriz $B = A^t + A$ é uma matriz simétrica.

Solução: VERDADEIRO. Temos

$$B^t = (A^t + A)^t = (A^t)^t + A^t = A + A^t = A^t + A = B.$$

(d) Seja A uma matriz quadrada. A matriz $B = -A^t + A$ é uma matriz antissimétrica.

Solução: VERDADEIRO. Temos

$$B^t = (-A^t + A)^t = (-A^t)^t + A^t = -A + A^t = -(-A^t + A) = -B.$$

Exercício 13. Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que A pode ser escrita como uma soma de uma matriz simétrica e uma antissimétrica.

Dica: Olhe os itens (c) e (d) do exercício anterior.

Solução: Seja A matriz quadrada. Tome

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \qquad \text{e} \qquad C = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

Note que $A = B + C$ e do exercício anterior, B é simétrica e C é antissimétrica.

(b) Mostre que se A é simultaneamente simétrica e antissimétrica, então A é a matriz nula.

Solução: Suponha que A seja simétrica e antissimétrica, isto é, temos $A^t = A$ e $A^t = -A$. Assim obtemos $A = -A$, ou seja, $2A = 0$ e portanto $A = 0$.

Exercício 14. Justifique, usando uma matriz genérica de ordem 3, as seguintes propriedades dos determinantes:

(a) Se uma matriz tem duas linhas ou colunas iguais então seu determinante é nulo.

(b) Se uma matriz B é obtida de uma matriz A multiplicando-se uma linha ou coluna de A por um escalar α então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Solução: Simples verificação.

Exercício 15. Usando as propriedades de determinantes, calcule:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Solução: Temos o determinante igual a 0 pois a segunda e a quarta colunas são iguais.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 15 & 21 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solução: Temos o determinante igual a 0 pois a terceira linha é igual a primeira linha multiplicada por três.

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solução: Temos o determinante igual a 0 pois a segunda coluna é nula.

Exercício 16. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -75$, calcule os seguintes determinantes. Identifique as propriedades utilizadas.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

Solução: O determinante é 75. A terceira linha está multiplicada por -1.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

Solução: O determinante é -75. A segunda e terceira linha estão multiplicadas por -1.

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

Solução: O determinante é -150. A primeira linha está multiplicada por 2.

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 8 \\ 12 & -15 & 9 \end{vmatrix}$

Solução: O determinante é -900. A segunda linha está multiplicada por 4 e a terceira por 3.

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -5 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Solução: O determinante é -75 pois a matriz é a transposta.

Exercício 17. Usando a Regra de Laplace, calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Solução: O determinante é 1.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Solução: O determinante é 0.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & -6 & 25 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solução: O determinante é -567.

Exercício 18. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Obtenha as seguintes matrizes:

(a) A matriz A_1 é obtida de A substituindo-se a linha 2 pela soma da linha 2 com menos 3 vezes a linha 1.

(b) A matriz A_2 é obtida de A_1 substituindo-se a linha 3 pela soma da linha 3 com menos 4 vezes a linha 1.

(c) A matriz A_3 é obtida de A_2 substituindo-se a linha 4 pela linha 4 menos a linha 1.

(d) A matriz A_4 é obtida da matriz A_3 dividindo-se a linha 2 por -7.

(e) A matriz A_5 é obtida da matriz A_4 substituindo-se a linha 3 pela linha 3 mais 9 vezes a linha 2.

Note que a matriz A_5 é triangular superior e usando as propriedades de determinantes, calcule os determinantes das matrizes $A, A_1, ..., A_5$.

Solução: Temos

(a) A matriz A_1 é obtida de A substituindo-se a linha 2 pela soma da linha 2 com menos 3 vezes a linha 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{l_2 = l_2 - 3l_1}{\longrightarrow} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) A matriz A_2 é obtida de A_1 substituindo-se a linha 3 pela soma da linha 3 com menos 4 vezes a linha 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{l_3 = l_3 - 4l_1}{\longrightarrow} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) A matriz A_3 é obtida de A_2 substituindo-se a linha 4 pela linha 4 menos a linha 1.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{l_4 = l_4 - l_1}{\longrightarrow} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

(d) A matriz A_4 é obtida da matriz A_3 dividindo-se a linha 2 por -7.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \overset{l_2 = \left(-\frac{1}{7}\right) l_2}{\longrightarrow} A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

(e) A matriz A_5 é obtida da matriz A_4 substituindo-se a linha 3 pela linha 3 mais 9 vezes a linha 2.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -20 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \overset{l_3 = l_3 + 9l_2}{\longrightarrow} A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz A_5 é triangular superior. Assim $\det(A_5) = 18$ e $\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = \det(A_4) = -7\det(A_5) = -126$.

Exercício 19. Verdadeiro (V) ou Falso (F)? Justifique.

(a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

Solução: FALSO. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e assim $\det(A+B) = -12$ Mas $\det(A) = -2$ e $\det(B) = -3$, ou seja $\det(A) + \det(B) = -5$.

(b) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Solução: VERDADEIRO. Note que quando escrevemos A^-1 já estamos assumindo que A é inversível. Como $AA^{-1} = I$, temos

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

o que prova a afirmação.

(c) Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solução: VERDADEIRO. Vide notas de aula.

(d) Se A e B são matrizes quadradas, então $(AB)^t = A^tB^t$.

Solução: FALSO. Tome

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mas

$$A^tB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 20. Identifique quais das seguintes matrizes está na forma escalonada e determine o posto da matriz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: Escalonada e $\text{rank}(A) = 2$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: Não está escalonada.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: Escalonada e $\text{rank}(C) = 1$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Solução: Não está escalonada.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: Escalonada e $\text{rank}(E) = 4$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: Escalonada e $\text{rank}(F) = 3$.

Exercício 21. Através de operações elementares sobre linhas, calcule o determinante e o posto de cada uma das matrizes abaixo. No caso da matriz ser inversível, determine também a sua inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: $\det(A) = -8$, logo a matriz A é invertível, $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $\text{rank}(A) = 2$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Solução: $\det(B) = -1$, logo a matriz B é invertível, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 26 & 3 & -11 \\ -7 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\text{rank}(B) = 3$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução: $\det(C) = 1$, logo a matriz C é invertível, e $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\text{rank}(C) = 3$.