Lista 5. Ortogonalidade e Ângulos

MTM5512 - Geometria Analítica

Exercício 1 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Determine um vetor unitário $\vec{w}$ que seja ortogonal aos vetores $\vec{u} = (3,1,0)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (4,-1,3)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 2 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Calcule $\|\vec{u}\|$ para

(a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

(b) $\vec{u} = (1,-2,7)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 3 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Mostre que os vetores $\vec{u} = (1,1,-1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (0,1,1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (2,-1,1)_{\mathcal{E}}$ são dois a dois ortogonais.

Exercício 4 . . . .

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3 e $\vec{r}$ um vetor de V^3 que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\|\vec{r}\| = \sqrt{5}$;
- $\vec{r}$ é ortogonal ao vetor $(2,1,-1)_{\mathcal{E}}$;
- os vetores $\vec{r}$, $(1,1,1)_{\mathcal{E}}$ e $(0,1,-1)_{\mathcal{E}}$ sejam coplanares.

Determine as coordenadas do vetor $\vec{r}$, se possível, na base $\mathcal{E}$.

Exercício 5 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Encontra as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, que tem norma 75, é paralelo ao vetor $\vec{v} = (16,-15,12)_{\mathcal{E}}$, e tem sentido oposto ao de $\vec{v}$.

Exercício 6 . . . .

Sejam ABC um triângulo e X o ponto de intersecção do segmento $\overline{AB}$ com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$.

(a) Mostre que o vetor $\overrightarrow{CX}$ é paralelo ao vetor

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}.$$

(b) Seja $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada ortonormal de V^3, e considere os vetores $\vec{u} = (2,-3,6)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (-1,2,-2)_{\mathcal{E}}$. Calcule às coordenadas do vetor $\vec{w}$ na base $\mathcal{E}$, tal que $\vec{w}$ tem norma $3\sqrt{42}$ e é paralelo à bissetriz interna do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 7 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, de modo que $\vec{u}$ ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2,-3,12)_{\mathcal{E}}$ e paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6,4,-2)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 8 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Um vetor $\vec{u}$ forma com os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ ângulos de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$.

Exercício 9 . . . .

Sendo $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3, $\vec{u} = (2,-3,2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (4,-1,2)_{\mathcal{E}}$, calcule o seno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 10 . . . .

Sejam A um ponto no espaço e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Defina $B = A+\vec{u}$, $C = A+\vec{v}$ e $D = A+\vec{w}$.

(a) Mostre que

$$(A-B) \bullet (C-D) + (B-C) \bullet (A-D) + (B-D) \bullet (C-A) = 0.$$

(b) Use a identidade acima para mostrar que as alturas de um triângulo sem interceptam no mesmo ponto.

Exercício 11 . . . .

Demonstre a **identidade do paralelogramo**: a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos quadrados dos comprimentos do quatro lados; isto é, mostre que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

Exercício 12 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Encontre a projeção do vetor $\vec{u} = (3,-1,1)_{\mathcal{E}}$ na direção do vetor $\vec{v} = (1,5,4)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 13 . . . .

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ortogonal de V^3, $\vec{u}$ um vetor não-nulo e α um número real.

(a) Mostre que o vetor $\vec{v} = \frac{\alpha}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ satisfaz

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \alpha.$$

(b) Fixe dois vetores LI $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ tais que $\vec{w}_i \perp \vec{u}$, $i = 1,2$. Mostre que dados $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ o vetor

$$\vec{w} = \beta\vec{w}_1 + \gamma\vec{w}_2 + \vec{v}, \tag{1}$$

satisfaz $\vec{w} \bullet \vec{u} = \alpha$.

(c) Mostre que qualquer vetor ortogonal a $\vec{u}$ deve ser combinação linear de $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$.
Dica: Use o fato que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{u}\}$ é uma base para V^3.

(d) Mostre que dado $\vec{x}$ satisfazendo $\vec{x} \bullet \vec{u} = \alpha$, então existem $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x}$ é dado pela equação (1).
Dica: Note primeiro que $(\vec{x}-\vec{v}) \bullet \vec{u} = 0$.

Olha só: você acabou de mostrar que o conjunto solução da equação $\vec{x} \bullet \vec{u} = \alpha$ é o conjunto dos vetores $\vec{x} = \beta\vec{w}_1 + \gamma\vec{w}_2 + \vec{v}$ para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.