Lista 5. Ortogonalidade e Ângulos – Gabarito

MTM5512 - Geometria Analítica

Exercício 1 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Determine um vetor unitário $\vec{w}$ que seja ortogonal aos vetores $\vec{u} = (3,1,0)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (4,-1,3)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Seja $\vec{w} = (a,b,c)_{\mathcal{E}}$. Para que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ devemos ter

$$\|\vec{u}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

Lembrando que $\mathcal{E}$ é ortonormal, temos

$$(3+a)^2 + (1+b)^2 + c^2 = 10 + a^2 + b^2 + c^2,$$

e desenvolvendo a expressão, obtemos $b = -3a$. Agora para que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{v}$, devemos ter

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2,$$

e seguindo o mesmo raciocínio anterior, lembrando que $b = 3a$, obtemos $c = -\frac{7}{3}a$. Para que $\vec{w}$ seja unitário, devemos ter $\|w\| = 1$, isto é

$$1 = 1^2 = \|\vec{w}\|^2 = a^2 + 9a^2 + \frac{49}{9}a^2 = \frac{139}{9}a^2,$$

logo obtemos $a = \frac{3}{\sqrt{139}}$ ou $a = -\frac{3}{\sqrt{139}}$, e obtemos

$$\vec{w} = \left(\frac{3}{\sqrt{139}}, -\frac{9}{\sqrt{139}}, -\frac{7}{\sqrt{139}}\right) \text{ ou } \vec{w} = \left(-\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{9}{\sqrt{139}}, \frac{7}{\sqrt{139}}\right).$$

Exercício 2 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Calcule $\|\vec{u}\|$ para

(a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Solução: Como a base $\mathcal{E}$ é ortonormal, temos

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

(b) $\vec{u} = (1,-2,7)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Como a base $\mathcal{E}$ é ortonormal, temos

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54}.$$

Exercício 3 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Mostre que os vetores $\vec{u} = (1,1,-1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (0,1,1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (2,-1,1)_{\mathcal{E}}$ são dois a dois ortogonais.

Solução: Note que $\|\vec{u}\|^2 = 3$, $\|\vec{v}\|^2 = 2$ e $\|\vec{w}\|^2 = 6$. Ainda

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (1,2,0)_{\mathcal{E}}, \text{ logo } \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 5, \\
\vec{u} + \vec{w} &= (3,0,0)_{\mathcal{E}}, \text{ logo } \|\vec{u}+\vec{w}\|^2 = 9 \text{ e} \\
\vec{v} + \vec{w} &= (2,0,2)_{\mathcal{E}}, \text{ logo } \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = 8.
\end{aligned}$$

Assim vemos facilmente que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2, \\
\|\vec{u}+\vec{w}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \text{ e} \\
\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ e $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Exercício 4 . . . .

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3 e $\vec{r}$ um vetor de V^3 que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\|\vec{r}\| = \sqrt{5}$;
- $\vec{r}$ é ortogonal ao vetor $(2,1,-1)_{\mathcal{E}}$;
- os vetores $\vec{r}$, $(1,1,1)_{\mathcal{E}}$ e $(0,1,-1)_{\mathcal{E}}$ sejam coplanares.

Determine as coordenadas do vetor $\vec{r}$, se possível, na base $\mathcal{E}$.

Solução: Suponha que $\vec{r} = (a,b,c)_{\mathcal{E}}$. Para que $\vec{r}$ seja ortogonal ao vetor $(2,1,-1)_{\mathcal{E}}$, devemos ter

$$2a + b - c = 0, \text{ isto é } c = 2a + b.$$

Para que os vetores $\vec{r}$, $(1,1,1)_{\mathcal{E}}$ e $(0,1,-1)_{\mathcal{E}}$ sejam coplanares, devemos ter

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = c + b - 2a, \text{ isto é } c = 2a - b.$$

Juntando as duas equações, tiramos $b = 0$ e $c = 2a$. Assim $\vec{r} = (a,0,2a)_{\mathcal{E}}$, e para que $\|\vec{r}\| = \sqrt{5}$, devemos ter

$$a^2 + 4a^2 = 5, \text{ isto é } a = \pm 1.$$

Portanto as opções para $\vec{r}$ são

$$\vec{r} = (1,0,2)_{\mathcal{E}} \text{ ou } \vec{r} = (-1,0,-2)_{\mathcal{E}}.$$

Exercício 5 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada ortonormal de V^3. Encontra as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, que tem norma 75, é paralelo ao vetor $\vec{v} = (16,-15,12)_{\mathcal{E}}$, e tem sentido oposto ao de $\vec{v}$.

Solução: Como $\vec{u}$ deve ser paralelo ao vetor $\vec{v}$, deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = (16\alpha, -15\alpha, 12\alpha)$. Para que $\|\vec{u}\| = 75$, devemos ter

$$256\alpha^2 + 225\alpha^2 + 144\alpha^2 = 75^2 = 5625,$$

o que nos dá $\alpha^2 = 9$, assim obtemos $\alpha = \pm 3$. Como $\vec{u}$ deve ter sentido oposto ao de $\vec{v}$, devemos ter $\alpha < 0$ e assim temos $\alpha = 3$ e o vetor é

$$\vec{u} = (-48, 45 - 36)_{\mathcal{E}}.$$

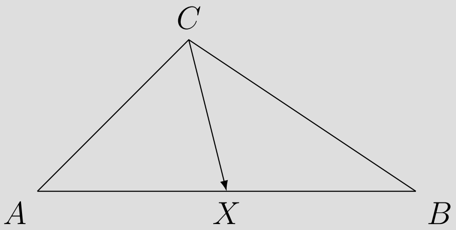
Exercício 6 . . . .

Sejam ABC um triângulo e X o ponto de intersecção do segmento $\overline{AB}$ com a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$.

(a) Mostre que o vetor $\overrightarrow{CX}$ é paralelo ao vetor

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}.$$

Solução: Considere o triângulo ABC na figura abaixo, onde $\overrightarrow{CX}$ é a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$.



Como $\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|}$ e $\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ têm o mesmo comprimento (a saber, ambos medem 1), sabemos que a diagonal do losango formado por esses vetores é igual à bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$, e portanto $\overrightarrow{CX}$ tem mesma direção e sentido da soma $\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$, e portanto são paralelos.

(b) Seja $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada ortonormal de V^3, e considere os vetores $\vec{u} = (2, -3, 6)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (-1, 2, -2)_{\mathcal{E}}$. Calcule às coordenadas do vetor $\vec{w}$ na base $\mathcal{E}$, tal que $\vec{w}$ tem norma $3\sqrt{42}$ e é paralelo à bissetriz interna do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Calculando a bissetriz interna do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{4+9+16}}(2, -3, 6)_{\mathcal{E}} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)_{\mathcal{E}},$$

e

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}(-1, 2, -2)_{\mathcal{E}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)_{\mathcal{E}}.$$

Assim

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(-\frac{1}{21}, \frac{5}{21}, \frac{4}{21}\right)_{\mathcal{E}},$$

e para que $\vec{w}$ seja paralelo à $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = \left(-\frac{1}{21}\alpha, \frac{5}{21}\alpha, \frac{4}{21}\alpha\right)_{\mathcal{E}}.$$

Agora nos resta encontrar valores de α para que $\|\vec{w}\| = 3\sqrt{42}$, isto é,

$$9(42)^2 = \|\vec{w}\|^2 = \frac{\alpha^2}{21^2} + \frac{25\alpha}{21^2} + \frac{16\alpha^2}{21^2} = \frac{42\alpha^2}{21^2},$$

e portanto encontramos $\alpha = \pm 63$.
Logo as possibilidades para $\vec{w}$ são:

$$\vec{w} = (-3, 15, 12)_{\mathcal{E}} \text{ ou } \vec{w} = (3, -15, -12)_{\mathcal{E}}.$$

Exercício 7 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, de modo que $\vec{u}$ ortogonal ao vetor $\vec{v} = (2, -3, 12)_{\mathcal{E}}$ e paralelo ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Para que $\vec{u}$ seja paralelo a $\vec{w}$, deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = (-6\lambda, 4\lambda, -2\lambda)_{\mathcal{E}}$. Agora, para que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{v}$, devemos ter $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, de onde encontramos $\lambda = 0$. Assim $\vec{u} = \vec{0}$.

Exercício 8 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Um vetor $\vec{u}$ forma com os vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ ângulos de $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{E}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$.

Solução: Se $\vec{u} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$, temos $\vec{u} \bullet \vec{e}_1 = a$ e $\vec{u} \bullet \vec{e}_2 = b$, e encontramos $a = 1$ e $b = -1$ (usando os cossenos dos ângulos dados e $\|\vec{u}\| = 2$). Finalmente, como $\|\vec{u}\| = 2$, encontramos $c^2 = 2$, assim $c = \pm\sqrt{2}$. Portanto as coordenadas de $\vec{u}$ são

$$\vec{u} = (1, -1, \sqrt{2})_{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = (1, -1, -\sqrt{2})_{\mathcal{E}}.$$

Exercício 9 ....

Sendo $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3, $\vec{u} = (2, -3, 2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (4, -1, 2)_{\mathcal{E}}$, calcule o seno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{15}{\sqrt{17}\sqrt{21}}.$$

Usando a relação $\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ (e lembrando que $\theta \in [0, \pi]$, logo $\operatorname{sen}(\theta) \geqslant 0$) temos

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{17}\sqrt{7}}.$$

Exercício 10 ....

Sejam A um ponto no espaço e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Defina $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ e $D = A + \vec{w}$.

(a) Mostre que

$$(A - B) \bullet (C - D) + (B - C) \bullet (A - D) + (B - D) \bullet (C - A) = 0.$$

Solução: Note que $A - B = -\vec{u}$, $C - D = \vec{v} - \vec{w}$, $B - C = \vec{u} - \vec{v}$, $A - D = -\vec{w}$, $B - D = \vec{u} - \vec{w}$ e $C - A = \vec{v}$, assim a identidade acima é equivalente a

$$\vec{u} \bullet (\vec{w} - \vec{v}) + \vec{w} \bullet (\vec{v} - \vec{u}) + \vec{v} \bullet (\vec{u} - \vec{w}) = 0,$$

que é facilmente verificada.

(b) Use a identidade acima para mostrar que as alturas de um triângulo sem interceptam no mesmo ponto.

Solução: Considere o triângulo ABC e D o ponto de intersecção das alturas que partem do ponto A e do ponto C. Assim $(A-B) \bullet (C-D) = 0$ e $(B-C) \bullet (A-D) = 0$, e portanto $(B-D) \bullet (C-A) = 0$ pela identidade acima, o que mostra que a altura que sai de B passa pelo ponto D.

Exercício 11 . . . .

Demonstre a **identidade do paralelogramo**: a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos quadrados dos comprimentos do quatro lados; isto é, mostre que

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

Solução: Temos

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v}) \bullet (\vec{u}-\vec{v}),$$

e desenvolvendo a expressão do lado direito, provamos o resultado.

Exercício 12 . . . .

Seja $\mathcal{E}$ uma base ortonormal de V^3. Encontre a projeção do vetor $\vec{u} = (3, -1, 1)_{\mathcal{E}}$ na direção do vetor $\vec{v} = (1, 5, 4)_{\mathcal{E}}$.

Solução: Para encontrar tal projeção, precisamos de versor de $\vec{v}$, isto é, precisamos de $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Como $\|\vec{v}\| = \sqrt{42}$, logo $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1, 5, 4)_{\mathcal{E}}$. Assim

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{w} = -\tfrac{1}{21}(1, 5, 4)_{\mathcal{E}} = (-\tfrac{1}{21}, -\tfrac{5}{21}, -\tfrac{4}{21})_{\mathcal{E}}.$$

Exercício 13 . . . .

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ortogonal de V^3, $\vec{u}$ um vetor não-nulo e α um número real.

(a) Mostre que o vetor $\vec{v} = \frac{\alpha}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ satisfaz

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \alpha.$$

(b) Fixe dois vetores LI $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ tais que $\vec{w}_i \perp \vec{u}$, $i = 1, 2$. Mostre que dados $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ o vetor

$$\vec{w} = \beta\vec{w}_1 + \gamma\vec{w}_2 + \vec{v}, \tag{1}$$

satisfaz $\vec{w} \bullet \vec{u} = \alpha$.

(c) Mostre que qualquer vetor ortogonal a $\vec{u}$ deve ser combinação linear de $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$.
Dica: Use o fato que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{u}\}$ é uma base para V^3.

(d) Mostre que dado $\vec{x}$ satisfazendo $\vec{x} \bullet \vec{u} = \alpha$, então existem $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x}$ é dado pela equação (1).
Dica: Note primeiro que $(\vec{x} - \vec{v}) \bullet \vec{u} = 0$.

Olha só: você acabou de mostrar que o conjunto solução da equação $\vec{x} \bullet \vec{u} = \alpha$ é o conjunto dos vetores $\vec{x} = \beta\vec{w}_1 + \gamma\vec{w}_2 + \vec{v}$ para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.