Lista 1 - Matrizes

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Matemática
Geometria Analítica (MTM5512)

Exercício 1. Escreva cada uma das matrizes abaixo.

(a) $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$; $a_{ij} = j - 2i$

(b) $A \in M_3(\mathbb{R})$; $a_{ij} = i.j + 3$

(c) $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$; $a_{ij} = i^2 - j$

Exercício 2. Determine o valor das incógnitas x e y, sabendo que as matrizes A e B são iguais.

(a) $A = \begin{pmatrix} x^2+5x & x^2 \\ y^2-5y & y^2-5 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -6 & 3-2x \\ 0 & 4y \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3x-2y & 5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -2 \\ 4 & 4x+y \end{pmatrix}$

Exercício 3. Determine o tamanho de cada uma das matrizes abaixo e classifique-a.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ 9 & 0 & \sqrt{2} & 5 & -4 \\ 7 & 9 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 4. Verifique em quais itens é possível fazer a operação indicada com as matrizes A e B. Em caso afirmativo, determine qual é a ordem da matriz resultante da operação.

(a) $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$; $A + B, AB, BA$.

(b) $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$; $A - B, AB, BA$.

(c) $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $B \in M_4(\mathbb{R})$; $A + B, AB, BA$.

Exercício 5. Efetue as operações solicitadas.

(a) AB e BA onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Ax onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) bA onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Exercício 6. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

verifique que:

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A + B = B + A$

(c) $(A + B)\,C = AC + BC$

Exercício 7. Verdadeiro (V) ou Falso (F)? Se verdadeiro, prove. Se falso, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ então $AB = BA$.

(b) Sejam $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m\times p}$ e 0 a matriz nula de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Se $AB = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$.

(c) Sejam A e B matrizes. Se o produto AB está definido então o produto BA também está definido.

Exercício 8. Sejam $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = i + 3j$ e $B \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ definida por $b_{ij} = i^2 + j$. Sendo $C = AB$, determine os elementos c_{12} e c_{23}, sem escrever explicitamente as matrizes A, B e C.

Exercício 9. Determine a matriz transposta das seguintes matrizes. Alguma(s) dessas matrizes são simétricas ou antissimétricas? Se sim, quais?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 5 \\ 9 & 23 & 32 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 34 & 9 \\ 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -13 \\ -2 & 0 & 12 \\ 13 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 10. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Determine A^t e B^t.

(b) Efetue, se possível, AB^t e B^tA.

Exercício 11. Sabendo que a matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & x+2y & z-4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 3z+6 & 3x-y & 0 \end{pmatrix}$ é simétrica, determine os valores de x, y e z.

Exercício 12. Verdadeiro ou falso? Justifique.

(a) Uma matriz que não é quadrada pode ser simétrica.

(b) Uma matriz quadrada que tem elementos não nulos na diagonal principal pode ser uma matriz antissimétrica.

(c) Seja A uma matriz quadrada. A matriz $B = A^t + A$ é uma matriz simétrica.

(d) Seja A uma matriz quadrada. A matriz $B = -A^t + A$ é uma matriz antissimétrica.

Exercício 13. Seja A uma matriz quadrada.

(a) Mostre que A pode ser escrita como uma soma de uma matriz simétrica e uma antissimétrica.

Dica: Olhe os itens (c) e (d) do exercício anterior.

(b) Mostre que se A é simultaneamente simétrica e antissimétrica, então A é a matriz nula.

Exercício 14. Justifique, usando uma matriz genérica de ordem 3, as seguintes propriedades dos determinantes:

(a) Se uma matriz tem duas linhas ou colunas iguais então seu determinante é nulo.

(b) Se uma matriz B é obtida de uma matriz A multiplicando-se uma linha ou coluna de A por um escalar α então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Exercício 15. Usando as propriedades de determinantes, calcule:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 15 & 21 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Exercício 16. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -75$, calcule os seguintes determinantes. Identifique as propriedades utilizadas.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 14 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ **(e)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -5 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **(d)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 8 \\ 12 & -15 & 9 \end{vmatrix}$

Exercício 17. Usando a Regra de Laplace, calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & -6 & 25 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Exercício 18. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Obtenha as seguintes matrizes:

(a) A matriz A_1 é obtida de A substituindo-se a linha 2 pela soma da linha 2 com menos 3 vezes a linha 1.

(b) A matriz A_2 é obtida de A_1 substituindo-se a linha 3 pela soma da linha 3 com menos 4 vezes a linha 1.

(c) A matriz A_3 é obtida de A_2 substituindo-se a linha 4 pela linha 4 menos a linha 1.

(d) A matriz A_4 é obtida da matriz A_3 dividindo-se a linha 2 por -7.

(e) A matriz A_5 é obtida da matriz A_4 substituindo-se a linha 3 pela linha 3 mais 9 vezes a linha 2.

Note que a matriz A_5 é triangular superior e usando as propriedades de derminantes, calcule os determinantes das matrizes $A, A_1, ..., A_5$.

Exercício 19. Verdadeiro (V) ou Falso (F)? Justifique.

(a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(b) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(c) Se A e B são matrizes inversíveis, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) Se A e B são matrizes quadradas, então $(AB)^t = A^t B^t$.

Exercício 20. Identifique quais das seguintes matrizes está na forma escalonada e determine o posto da matriz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(e)** $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ **(f)** $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 21. Através de operações elementares sobre linhas, calcule o determinante e o posto de cada uma das matrizes abaixo. No caso da matriz ser inversível, determine também a sua inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ **(c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$