Departamento de Matemática - MTM

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

MTM5512 - Geometria Analítica

Notas de aula

Florianópolis - SC

2017.2

Sumário

Capítulo 2

Introdução

$\boxed{\textbf{2.a aula - 27.02.2014}}$

Estas notas serão utlizadas no curso de Geometria Analítica.

Elas possuem todos os elementos que serão desenvolvidos durante o semestre.

Ao final destas notas encontram-se a bibliografia utilizada na criação destas notas e dois apêndices que irão auxiliar no desenvolvimento dos itens a serem desenvolvidos.

Capítulo 3

Vetores no Plano e no Espaço

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um elemento muito importante da Geometria Analítica,no espaço (ou no plano), a saber, o vetor.

O conjunto onde faremos nossos estudos será o espaço tridimensional (ou bidimensional), que será indicado por $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) que usalamente será denominado de espaço (ou plano).

Os pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ (ou do plano $\mathbb{R}^2$), serão indicados pelas letras latinas:

$$A\,,\ B\,,\cdots\,.$$

As retas do espaço $\mathbb{R}^3$ (ou do plano $\mathbb{R}^2$), serão indicadas pelas letras latinas minúsculas:

$$a\,,\ b\,,\cdots\,,$$

e os planos do espaço $\mathbb{R}^3$, serão denotados pelas letras gregas minúsculas:

$$\alpha\,,\ \beta\,,\cdots\,.$$

Nossas atenções serão voltadas para o espaço.

Poderemos fazer um estudo análogo para o plano $\mathbb{R}^2$. Para tanto basta adaptar em sua grande maioria as definições e propriedades que iremos desenvolver a seguir.

3.2 Vetor no Espaço

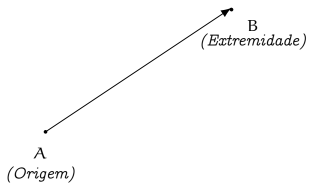
Começaremos introduzindo a seguinte noção:

Definição 3.2.1 *Sejam* $A\,,B$ *dois pontos do espaço.*

O par ordenado $(A\,,B)$ *daremos o nome de* **segmento orientado**.

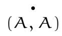
O ponto $\underline{A}$ *será dito* **origem** *e o ponto* $\underline{B}$ *será dito* **extremidade** *do segmento orientado* $(A\,,B)$.

Geometricamente, podemos representar o segmento orientado $(A\,,B)$ *da seguinte forma:*



Observação 3.2.1

1. *Um segmento orientado da forma* (A, A) *será dito* **segmento orientado nulo** *(ou simplesmente,* **segmento nulo***).*

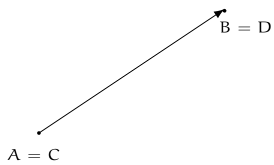


2. *Dois segmentos orientados serão ditos* **iguais** *se suas origens coincidem e suas extremidades também coincidem.*

   Neste caso escreveremos

$$(A\,,B) = (C\,,D)\,.$$

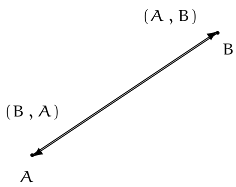
$(A, B) = (C, D)$ *se, e somente se,* $A = C$ *e* $B = D$



3. *Se os pontos* A *e* B *são diferentes (isto é,* $A \neq B$*) então*

$$(A\,,B) \neq (B\,,A)\,,$$

   isto os segmentos orientados $(A\,,B)$ *e* $(B\,,A)$ *são diferentes.*



Notação 3.2.1 *Um* **segmento geométrico***, de extremos nos pontos* A *e* B*, será indicado*

$$\overline{AB}\,.$$

O **comprimento** *de um segmento geométrico* $\overline{AB}$ *será a distância do ponto* A *ao ponto* B *e será indicado por*

$$AB\,.$$

Com isto temos as seguintes definições:

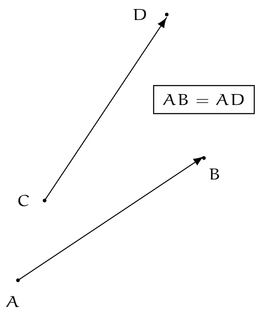
Definição 3.2.2 *Definimos o* **comprimento do segmento orientado** $(A\,,B)$*, como sendo o comprimento do segmento de reta que une os pontos* A *e* B*, isto é*

$$AB\,,$$

ou ainda, a distância do ponto A *ao ponto* B*, que será indicada por* $d(A\,,B)$.

Definição 3.2.3 *Sejam* A, B, C, D *pontos do espaço.*

1. *Diremos que os segmentos orientados* (A, B) *e* (C, D) *têm* **mesmo comprimento** *se os segmentos geométricos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *têm o mesmo comprimento, ou seja, se a distância do ponto* $\underline{A}$ *ao ponto* $\underline{B}$ *for igual a distância do ponto* $\underline{C}$ *ao ponto* $\underline{D}$*, ou ainda*
$$AB = CD\,.$$



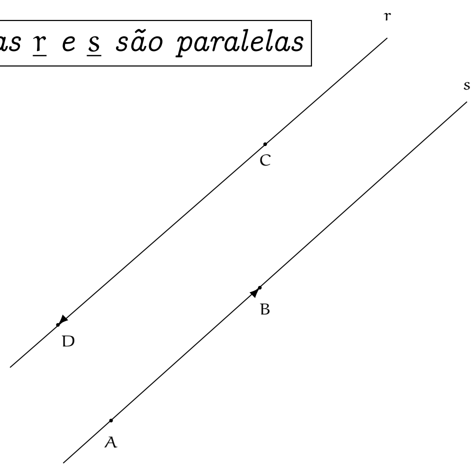
2. *Suponhamos que os segmentos orientados* (A, B) *e* (C, D) *não são o segmento orientado nulo.*

   Diremos que os segmentos orientados (A, B) *e* (C, D) *determinam a* **mesma direção***, se a reta que contém o segmento geométricos* $\overline{AB}$ *e a reta que contém o segmento geométrico* $\overline{CD}$ *são paralelas, incluindo-se, o caso em que as retas coincidem.*

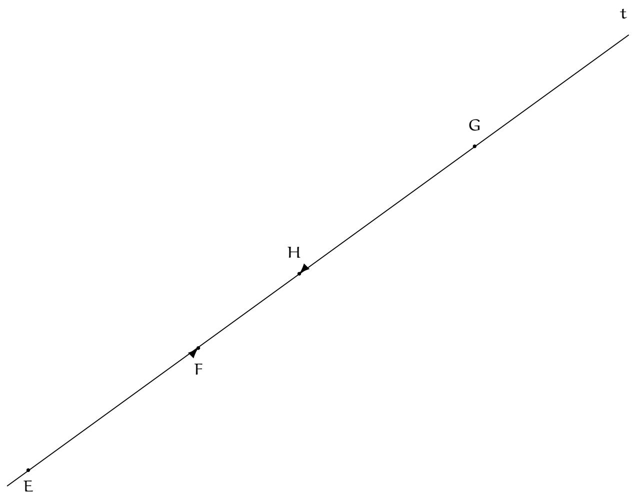
   Neste caso, diremos que os segmentos orientados (A, B) *e* (C, D) *são* **paralelos** *e escreveremos*
$$(A, B) \parallel (C, D)\,.$$

   Caso contrário, diremos que os segmentos orientados (A, B) *e* (C, D) *têm* **direções diferentes ou não paralelos**.

As retas $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são paralelas*



E, F, G, H *estão sobre uma mesma reta* $\underline{t}$



Na situação da figura acima, temos que os segmentos orientados $(A\,,B)$, $(C\,,D)$ têm mesma direção, assim como os segmentos orientados $(E\,,F)$, $(G\,,H)$.

3. Suponhamos que os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ (diferentes do segmento nulo) têm a mesma direção (ou seja, são paralelos).

   (a) Suponhamos que as retas que contém os segmentos geométricos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são distintas (veja a figura abaixo).

   Se os segmentos geométricos

   $$\overline{AC} \quad e \quad \overline{BD}$$

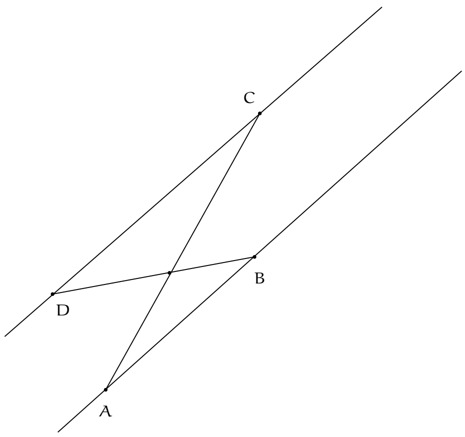
   não se interceptam, diremos que os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ têm **mesmo sentido**, ou seja, unindo-se as origens e as extremidades dos segmentos geométricos em questão, os segmentos geométricos obtidos não se interceptam.

   Caso contrário, isto é, e os segmentos geométricos

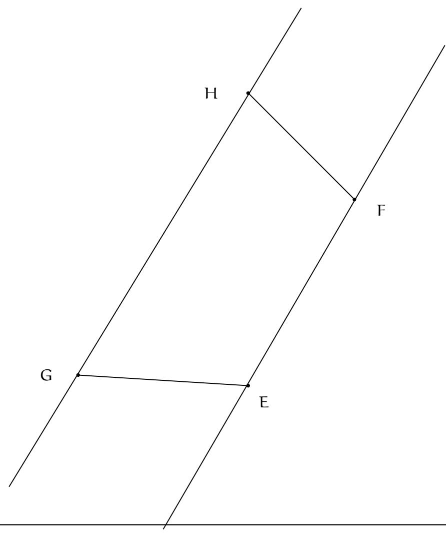
   $$\overline{AC} \quad e \quad \overline{BD}$$

   se interceptam, ou seja, unindo-se as origens e as extremidades dos segmentos geométricos em questão, os segmentos geométricos obtidos, se interceptam, diremos que os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ têm **sentidos contrários ou opostos**.

As retas que contém os segmentos geométricos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas e distintas



Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam



Os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ não se interceptam

Na situação ilustrada acima, temos que os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ têm mesma direção e sentidos opostos, enquanto os segmentos orientados $(E\,,F)$ e $(G\,,H)$ têm mesma direção e sentido.

(b) *Suponhamos que as retas que contém os segmentos geométricos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *coincidem (veja a figura abaixo).*

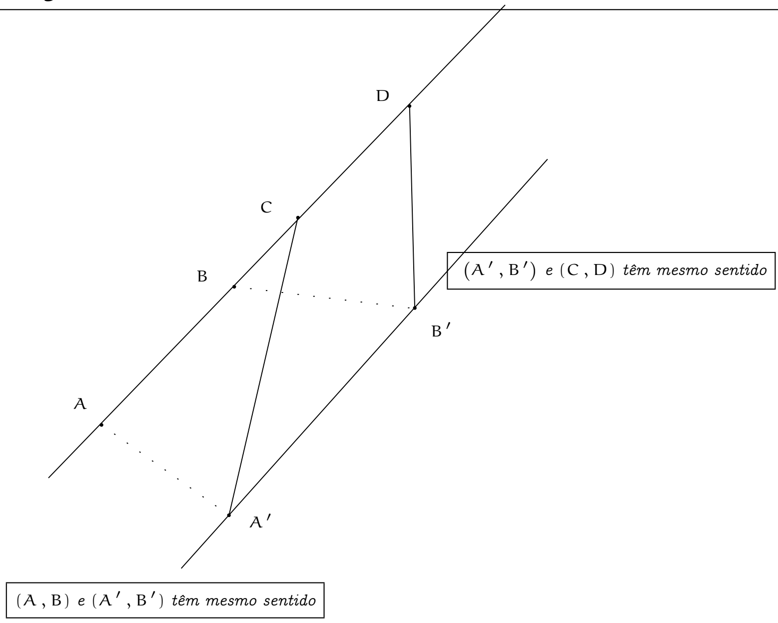
Consideremos os pontos $\underline{A'}$ *e* $\underline{B'}$ *do espaço, tais que o ponto* $\underline{A'}$ *não pertença àa reta que contém os segmentos geométricos em questão (a saber a reta que contém os segmentos geométricos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*) e o ponto* $\underline{B'}$ *seja tomado de modo que o segmento orientado* (A', B') *tenha mesma direção e sentido do segmento orientado* (A, B) *(como no item (a)).*

Para obtermos a situação acima, basta tomar uma reta paralela à reta que contém os pontos $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, pelo ponto* $\underline{A'}$ *e sobre esta escolher o ponto* $\underline{B'}$ *de modo conveniente (como no item (a)).*

Se os segmentos orientados (A', B')*,* (C, D) *têm mesmo sentido, diremos que os segmentos orientados* (A, B)*,* (C, D) *têm* **mesmo sentido***.*

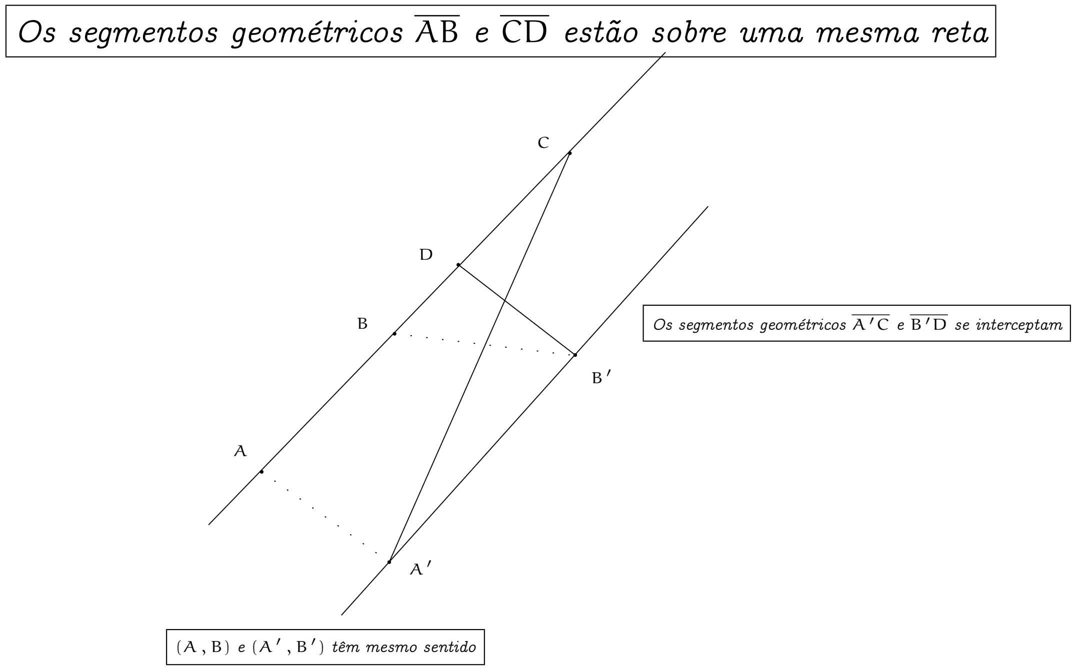
Caso contrário (isto é, se os segmentos orientados (A', B')*,* (C, D) *têm sentidos opostos) diremos que os segmentos orientados* (A, B)*,* (C, D) *têm* **sentidos contrários ou opostos***.*

Os segmentos geométricos $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *estão sobre uma mesma reta*



Na situação ilustrada acima, os segmentos orientados (A, B) *e* (C, D) *terão mesma direção e sentido.*

Na situação abaixo a situação é diferente.



Observação 3.2.2

1. *Notemos que, só faz sentido estudar o sentido de vetores que têm a* **<u>mesma direção</u>**.

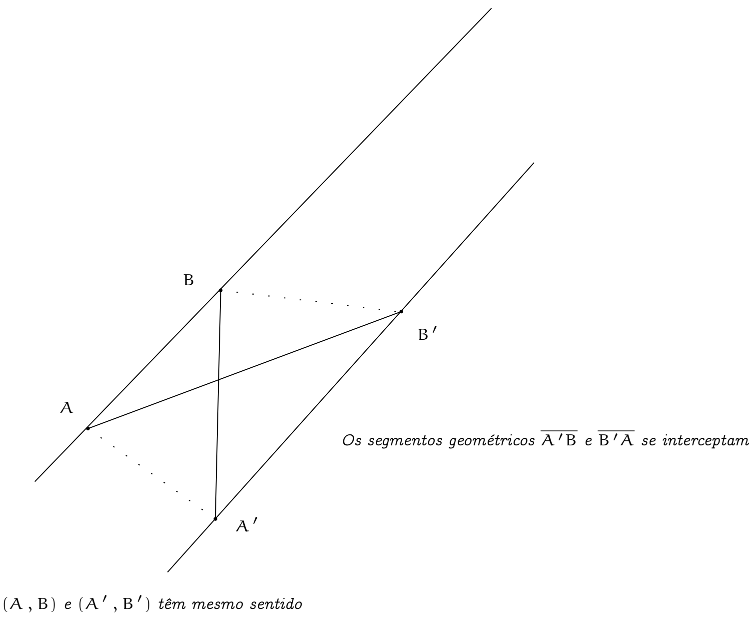
2. *Suponhamos que os pontos* <u>A</u> *e* <u>B</u>*, do espaço, são distintos (isto é,* $A \neq B$*).*

   Então, os segmentos orientados (A, B) *e* (B, A)*:*

   (a) têm o mesmo comprimento (pois os segmentos geométricos $\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$ *têm mesmo comprimento);*

   (b) têm a mesma direção (pois os segmentos geométricos $\overline{AB}$ *e* $\overline{BA}$ *estão sobre uma mesma reta, a reta que contém os pontos* A *e* B*);*

   (c) e têm sentidos opostos (vide ilustração abaixo).



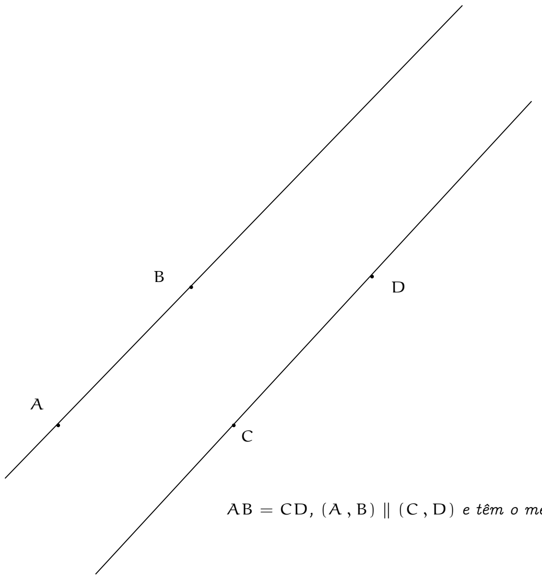
Definição 3.2.4 *Sejam* A, B, C, D *pontos do espaço.*

Diremos que os segmentos orientados são **equipolentes**, *indicando por*

$$(A, B) \sim (C, D)$$

se, e somente se:

1. *ou ambos são o segmento nulo;*
2. *ou nenhum é o segmento nulo e têm mesmo comprimento, direção e sentido.*



$AB = CD$, $(A, B) \parallel (C, D)$ *e têm o mesmo sentido*

Com isto temos a:

Proposição 3.2.1 *A relação* $\simeq$ *tem as seguintes propriedades:*

1. $(A, B) \sim (A, B)$ *(reflexiva);*
2. *Se* $(A, B) \sim (C, D)$ *então* $(C, D) \sim (A, B)$ *(simétrica);*
3. *Se* $(A, B) \sim (C, D)$ *e* $(C, D) \sim (E, F)$, *então* $(A, B) \sim (E, F)$ *(transitiva),*

isto é, a relação $\simeq$ *é uma relação de equivalência no conjunto formado por todos os segmentos orientados do espaço.*

Demonstração:

De 1.:

Como o segmento orientado (A, B) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado (A, B), ou seja

$$(A,, B) \sim (A, B)\,.$$

De 2.:

Como o segmento orientado (A, B) é equipolente ao segmento orientado (C, D), temos o segmento orientado (A, B) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado

(C, D), ou seja, o segmento orientado (C, D) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado (A, B),.

Portanto

$$(C, D) \sim (A, B).$$

De 3.:

Como o segmento orientado (A, B) é equipolente ao segmento orientado (C, D), o segmento orientado (A, B) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado (C, D).

Por outro lado o segmentos orientado (C, D) é equipolente ao segmento orientado (E, F) logo, o segmento orientado (C, D) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado (E, F).

Portanto o segmento orientado (A, B) têm mesmo comprimento, direção e sentido do segmento orientado (E, F), isto é,

$$(A, B) \sim (E, F),$$

completando a demonstração do resultado.

□

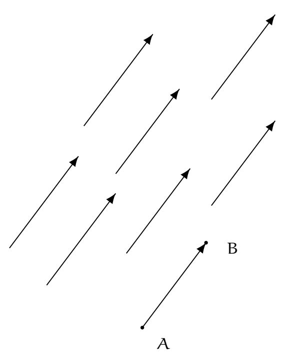
Com isto temos a:

Definição 3.2.5 *Fixado um segmento orientado (A, B) não nulo, definimos a* **classe de equipolência** *associada ao segmento orientado (A, B), como sendo o conjunto formado por todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento orientado (A, B).*

Neste caso diremos que o segmento orientado (A, B) é um **representante** *da classe de equipolência associada ao segmento orientado (A, B).*

Observação 3.2.3

1. *Todos os segmentos orientados abaixo pertencem a uma mesma classe de equipolência de (A, B)*



2. *Seja (A, B) um segmento orientado, não nulo.*

   Dois quaisquer elementos da classe de equipolência de (A, B) são equipolentes entre si.

De fato, se os segmentos orientados $(C\,,D)$ *e* $(E\,,F)$ *estão na classe de equipolência de* $(A\,,B)$*, então*

$$(C\,,D) \sim (A\,,B) \quad e \quad (E\,,F) \sim (A\,,B)\,.$$

Logo, da Proposição (3.2.1) item 3., segue que

$$(C\,,D) \sim (E\,,F)\,.$$

3. *Se o segmento orientado* $(C\,,D)$ *está na classe classe de equipolência do segmento orientado* $(A\,,B)$*, então o segmento orientado* $(A\,,B)$ *estará na classe classe de equipolência do segmento orientado* $(C\,,D)$*.*

   De fato, se o segmentos orientado $(C\,,D)$ *está na classe de equipolência de* $(A\,,B)$*, então*

$$(C\,,D) \sim (A\,,B)\,.$$

   Logo, da Proposição (3.2.1) item 2., segue que

$$(A\,,B) \sim (C\,,D)\,,$$

   isto é, o segmento orientado $(A\,,B)$ *estará na classe classe de equipolência do segmento orientado* $(C\,,D)$*.*

4. *Das duas Observações acima segue que qualquer elemento da classe de equipolência pode ser tomado como um representante da respectiva classe.*

   Além disso, cada segmento orientado é representante de um única classe (se ele fosse representante de duas classes essas duas classe teriam que ser iguais).

5. **Conclusões:**

   (a) *Todo segmento orientado, não-nulo, pertence a uma única classe de equipolência (a classe definida por ele);*

   (b) *Se duas classes tiverem um segmento orientado em comum, elas deverão ser iguais, ou seja, duas classes de equipolência ou são iguais ou são disjuntas (isto é, não têm elementos em comum).*

   Deste modo, o conjunto formado por todos os segmentos orientados não-nulos fica dividido, por meio da relação de equipolência $\simeq$*, em subconjuntos não-vazios e disjuntos dois a dois (que são as classe de equipolência, isto é, os conjuntos formados pelos segmentos orientados equipolentes entre si).*

Agora estamos preparados para introduzir o conceito mais importante deste capítulo, a saber:

Definição 3.2.6 *Um* vetor *do espaço (ou do plano) é uma classe de equipolência de segmentos orientados, não nulos.*

Dado um segmento orientado $(A\,,B)$ *não nulo, o vetor correspondente a classe de equipolência do segmento orientado* $(A\,,B)$ *será indicado por*

$$\overrightarrow{AB}\,,$$

ou seja,

$$\overrightarrow{AB} \doteq \{(E\,,F)\,;\,(E\,,F) \sim (A\,,B)\}\,. \tag{3.1}$$

Em geral, denotaremos um vetor por:

$$\vec{a}\,,\vec{b}\,,\cdots\,,$$

isto é, letra latina minúscula, com uma seta em cima.

No caso acima, não estaremos interessados quem é um segmento orientado que representa o mesmo.

O conjunto formado por todos os vetores do espaço (ou do plano, respectivamente) será indicado por $\underline{V^3}$ *(*$\underline{V^2}$*, respectivamente).*

Para o caso de segmentos nulos temos a:

Definição 3.2.7 *Definimos o* **<u>vetor nulo</u>**, *que será indicado por* $\underline{\vec{O}}$, *como sendo o conjunto formado por todos os segmentos orientado nulos, isto é,*

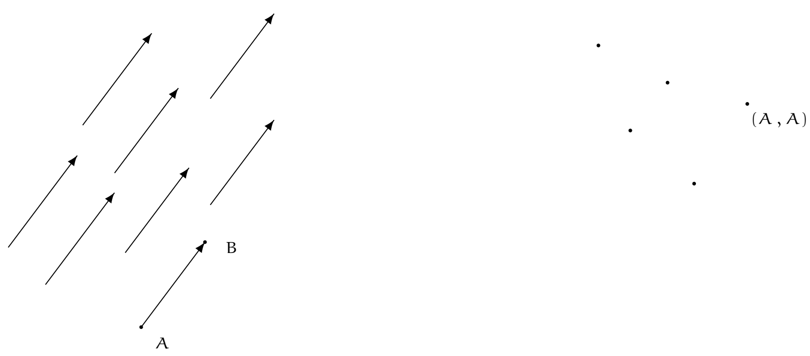
$$\vec{O} \doteq \{(A\,,A)\,;\,A \textit{ pertence ao espaço (ou ao plano)}\}\,. \tag{3.2}$$

Observação 3.2.4

1. *Um vetor é um conjunto formado por segmentos orientados.*
2. *Se o vetor for o vetor nulo ,ele será formado pela coleção dos segmentos orientados* $(A\,,A)$, *onde* $\underline{A}$ *é um ponto do espaço (ou do plano).*
3. *Se ele não for o vetor nulo, teremos que ele será o conjunto formado por todos os segmentos orientado que são, dois a dois, equipolentes entre si.*

   Logo **<u>NÃO</u>** *podemos desenhar um vetor, mas* **<u>SIM</u>** *um segmento orientado que o representa (isto é, um representante da classse equipolência definida pelo vetor).*

Vetor $\overrightarrow{AB}$ *Vetor* $\vec{O}$



Assim como fizemos com segmentos orientados podemos comparar vetores, como veremos a seguir:

Definição 3.2.8 *Sejam $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ vetores não nulos (ou seja, $\vec{a}\,,\vec{b} \in V^3$ (ou V^2) e $\vec{a}\,,\vec{b} \neq \vec{O}$).*

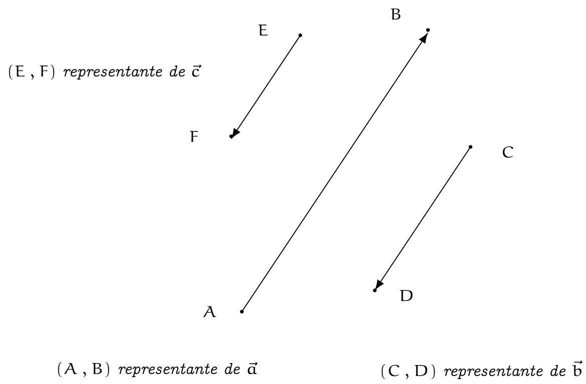
Diremos que os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são **paralelos** *(ou determinam uma mesma direção), indicando por*

$$\vec{a} \parallel \vec{b}\,,$$

se um segmento orientado que é representante do vetor $\underline{\vec{a}}$, for paralelo a um segmento orientado, que é representante do vetor $\underline{\vec{b}}$, isto é, se o segmento orientado $(A\,,B)$ é um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$ e o segmento orientado $(C\,,D)$ é um representante do vetor $\underline{\vec{b}}$, então

$$(A\,,B) \parallel (C\,,D)\,.$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad e \quad \vec{a} \parallel \vec{c}$$



Por definição, o vetor nulo $\underline{\vec{O}}$, é paralelo a todo vetor $\underline{\vec{a}}$ e escreveremos

$$\vec{O} \parallel \vec{a}\,.$$

Observação 3.2.5 *A Definição (3.2.8) acima,* **não** *depende da escolha dos representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$.*

De fato, se tomarmos representantes diferentes dos vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$, por exemplo, se o segmento orientado $(E\,,F)$ é um outro representante do vetor $\underline{\vec{a}}$ e o segmento orientado $(G\,,H)$ é um outro representante do vetor $\underline{\vec{B}}$, deveremos ter

$$(E\,,F) \sim (A\,,B) \quad e \quad (G\,,H) \sim (C\,,D)\,,$$

pois os segmetos orientados $(A\,,B)$ e $(E\,,F)$ são representantes do vetor $\underline{\vec{a}}$, isto é, da mesma classe de equipolência.

De modo análogo, os segmento orientados $(G\,,H)$ e $(C\,,D)$ são representantes do vetor $\underline{\vec{b}}$.

Como

$$(E\,,F) \parallel (A\,,B)\,,$$

pois os segmentos orientados $(E\,,F)$ e $(A\,,B)$ pertencem à mesma classe de equipolência, e

$$(A\,,B) \parallel (C\,,D) \quad e \quad (G\,,H) \parallel (C\,,D)\,,$$

pois os segmentos orientados $(A\,,B)$, $(C\,,D)$ *e* $(G\,,H)$, *pertencem à mesma classe de equipolência, segue*

$$(E\,,F) \parallel (G\,,H)\,,$$

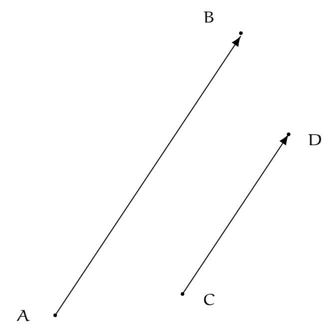
mostrando que a Definição acima independe dos representantes que escolhemos para cada um dos vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$.

Quando os vetores têm mesma direção, podemos introduzir a seguinte:

Definição 3.2.9 *Se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *forem paralelos e não nulos, diremos que eles têm* **mesmo sentido**, *se um segmento orientado representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *tem mesmo sentido de um segmento orientado representante do vetor* $\underline{\vec{b}}$, *isto é, se o segmento orientado* $(A\,,B)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *e o segmento orientado* $(C\,,D)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{b}}$, *então os segmentos orientados* $(A\,,B)$ *e* $(C\,,D)$ *têm mesmo sentido.*

Veja ilustração abaixo.

$\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *têm mesmo sentido*

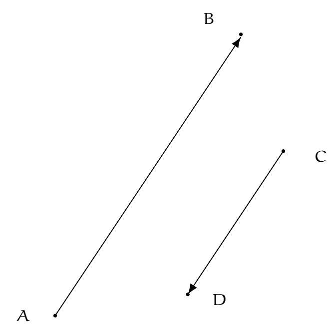


$(A\,,B)$ *representante de* $\underline{\vec{a}}$ $(C\,,D)$ *representante de* $\underline{\vec{b}}$

De modo análogo, se os vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *forem paralelos (e diferentes do vetor nulo), diremos que eles têm* **sentidos contrários ou opostos**, *se um segmento orientado representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *tem sentido contrário de um segmento orientado representante do vetor* $\underline{\vec{b}}$, *isto é, se o segmento orientado* $(A\,,B)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *e o segmento orientado* $(C\,,D)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{b}}$, *então os segmentos orientados* $(A\,,B)$ *e* $(C\,,D)$ *têm sentidos contrários.*

Veja ilustração abaixo.

$\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *têm sentidos opostos*



$(A\,,B)$ *representante de* $\underline{\vec{a}}$ $(C\,,D)$ *representante de* $\underline{\vec{b}}$

Observação 3.2.6 *A Definição (3.2.9) acima,* **não** *depende da escolha dos representantes dos vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$*.*

De fato, se tomarmos representantes diferentes dos vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$*, por exemplo, o segmento orientado* $(E\,,F)$ *com representante de* $\underline{\vec{a}}$ *e o segmento orientado* $(G\,,H)$ *com representante de* $\underline{\vec{b}}$*, deveremos ter*

$$(E\,,F) \sim (A\,,B) \quad e \quad (G\,,H) \sim (C\,,D)\,,$$

pois os segmentos orientados $(A\,,B)$ *e* $(E\,,F)$ *são representantes do vetor* $\underline{\vec{a}}$*, isto é, da mesma classe de equipolância e, de modo análogo, os segmentos orientado* $(G\,,H)$ *e* $(C\,,D)$ *são representantes do vetor* $\underline{\vec{b}}$*.*

Como os segmentos orientados

$$(E\,,F) \quad e \quad (A\,,B)$$

têm mesmo sentido (pois pertencem a mesma classe de equipolência), se os segmentos orientados

$$(A\,,B) \quad e \quad (C\,,D)$$

têm mesmo sentido e os segmentos orientados

$$(G\,,H) \quad e \quad (C\,,D)$$

têm mesmo sentido (pois pertencem a mesma classe de equipolência), segue que os segmentos orientados

$$(E\,,F) \quad e \quad (G\,,H)$$

têm mesmo sentido, mostrando que a Definição (3.2.9) acima, independe dos representantes que escolhemos para cada um dos vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$*.*

De modo análogo, pode-se mostrar que o mesmo ocorre no caso dos segmentos orientados

$$(A\,,B) \quad e \quad (C\,,D)$$

terem sentidos opostos.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Outro conceito importante é dado pela:

Definição 3.2.10 *Dado um vetor* $\underline{\vec{a}}$*, definimos a* **norma ou comprimento** *do vetor* $\underline{\vec{a}}$*, indicada por*

$$\|\vec{a}\|\,,$$

como sendo o comprimento de um segmento orientado que o representa, isto é, se o segmento orientado $(A\,,B)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$*, então*

$$\|\vec{a}\| \doteq AB\,.$$

Observação 3.2.7

1. *Notemos que, a Definição (3.2.10), acima não depende da escolha dos representantes do vetor $\vec{a}$.*

   De fato, se tomarmos um representante diferente dos vetor $\underline{\vec{a}}$, por exemplo, se o segmento orientado $(C\,,D)$ é um outro representante do vetor $\underline{\vec{a}}$, deveremos ter

$$(C\,,D) \sim (A\,,B)\,,$$

   pois os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ são representantes do vetor $\underline{\vec{a}}$, isto é, da mesma classe de equipolância.

   Como os segmentos orientados

$$(C\,,D) \quad e \quad (A\,,B)$$

   têm mesmo comprimento, pois pertencem a mesma classe de equipolência, temos que

$$\|\vec{a}\| = CD\,,$$

   isto é, o comprimento do vetor $\underline{\vec{a}}$, independe da escolha do segmento orientado que o representa.

2. *Um vetor $\vec{a}$ tal que*

$$\|\vec{a}\| = 1$$

   será dito <u>**vetor unitário**</u> *(isto é, um vetor de comprimento $\underline{1}$, também chamado de* <u>**versor**</u> *).*

3. *Vale observar que, um vetor não nulo, fica inteiramente caraterizado se conhecermos seu comprimento, sua direção e seu sentido, isto é, se fixarmos um comprimento, uma direção e sobre esta um sentido, existe um único vetor que satisfaz a todos esses elementos.*

4. *Suponhamos que os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são distintos.*

   Neste caso, como vimos anteiormente, os segmentos orientados

$$(A\,,B) \quad e \quad (B\,,A)$$

   têm mesmo comprimento, direção e sentidos opostos.

   Devido a estes fatos, o vetor $\overrightarrow{BA}$ será denominado <u>**vetor oposto**</u> *do vetor $\overrightarrow{AB}$.*

   Notemos que, estes dois vetores têm mesmo comprimento, direção e sentidos opostos, e assim utilizaremos a seguinte notação:

$$-\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{BA}\ .$$

   Em geral, dado um vetor $\underline{\vec{a}}$, não nulo, o vetor que tem mesma norma, direção e sentido oposto do vetor $\underline{\vec{a}}$ será denominado <u>**vetor oposto**</u> *do vetor $\underline{\vec{a}}$ será indicado por*

$$-\vec{a}\,.$$

   As propriedades que caracterizam o vetor $\underline{-\vec{a}}$ são: tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido oposto do vetor $\underline{\vec{a}}$.

Um resultado que será muito importante ao longo deste capítulo é dado pela:

Proposição 3.2.2 *Dado um vetor $\underline{\vec{a}}$ e um ponto $\underline{A}$, podemos encontrar um único ponto $\underline{B}$, de modo que*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,,$$

isto é, existe um único ponto $\underline{B}$, de modo que o segmento orientado $(A\,,B)$ seja um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$.

Demonstração:

Notemos que, se o vetor $\underline{\vec{a}}$ for o vetor nulo, basta considerarmos

$$B \doteq A\,,$$

e assim teremos

$$\vec{a} = \vec{O} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB}\,,$$

e o ponto

$$B = A$$

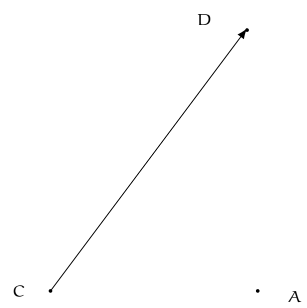
será o único com a propriedade acima.

Suponhamos agora, que $\vec{a} \neq \vec{O}$.

<u>Construção do ponto $\underline{B}$:</u>

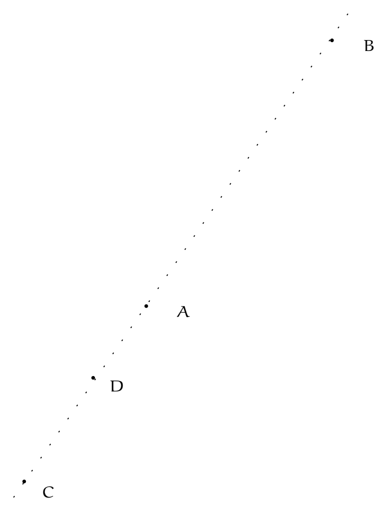
Consideremos $(C\,,D)$, um segmento orientado, que representa o vetor $\underline{\vec{a}}$, isto é,

$$\overrightarrow{CD} = \vec{a}\,.$$



Encontremos um ponto $\underline{B}$, sobre a reta paralela a reta $\overleftrightarrow{CD}$, que passa pelo ponto $\underline{A}$, de tal modo que

$$(A\,,B) \sim (C\,,D)\,.$$



Deste modo temos que o segmento orientado $(A\,,B)$ será um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$, isto é,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,,$$

pois, por construção, os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ terão mesma direção, sentido e comprimento.

Unicidade do ponto B:

Suponhamos que os segmentos orientados

$$(A\,,B) \quad \text{e} \quad (A\,,B')$$

são representantes do vetor $\underline{\vec{a}}$.

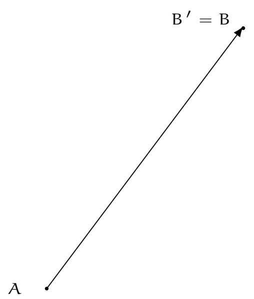
Então, deveremos ter

$$(A\,,B) \sim (A\,,B')\,,$$

isto é, os segmento orientados $(A\,,B)$ e $(A\,,B')$ têm mesmo comprimento, direção e sentido, o que implicará que

$$B' = B\,,$$

completando a demonstração do resultado.



□

Observação 3.2.8 *Observemos que se os segmentos orientados* $(A\,,B)$ *e* $(C\,,D)$ *são equipolentes (isto é, têm mesmo comprimento, direção e sentido) então os vetores*

$$\overrightarrow{AB} \quad e \quad \overrightarrow{CD}$$

são iguais, isto é,

$$(A\,,B) \sim (C\,,D)\,, \quad \textit{implicará que} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\,.$$

Reciprocamente, se

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

então, da Definição (3.2.6) *de vetor, os segmentos orientados* $(A\,,B)$ *e* $(C\,,D)$ *serão equipolentes .*

Conclusão:

$$(A\,,B) \sim (C\,,D)\,, \quad \textit{se, e somente se,} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\,. \tag{3.3}$$

A seguir introduziremos várias operações com vetores que serão importantes no estudo da Geometria Analítica.

3.a aula - 6.03.2014

3.3 Adição de Vetores

Observação 3.3.1 *A seguir vamos introduzir uma operação de adição em* $\underline{V}^3$ *(ou* $\underline{V}^2$*, respectivamente) , o conjunto formado pelos vetores do espaço (o conjunto formado pelos vetores de* $\underline{V}^2$*, respectivamente), isto é, vamos associar a cada para de vetores de* $\underline{V}^3$ *(ou* $\underline{V}^2$*),*

$$\left(\vec{a}\,,\vec{b}\right)\,,$$

um terceiro vetor de $\underline{V}^3$ *(ou* $\underline{V}^2$*), que indicaremos por*

$$\vec{a} + \vec{b}\,.$$

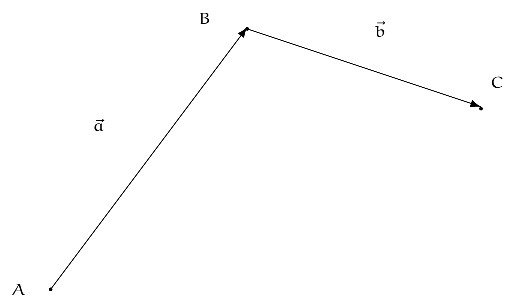
Para isto basta conhecermos um representante deste terceiro vetor.

Procedemos do seguinte modo:

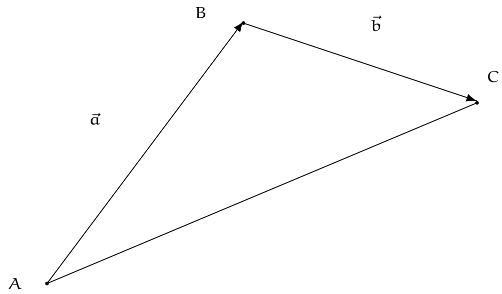
Consideremos um segmento orientado $(A\,,B)$ *que é representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$*.*

Da Proposição (3.2.2), segue que existe um único ponto $\underline{C}$*, de modo que (veja a figura abaixo)*

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b}\,.$$



Deste modo fica determinado o segmento orientado $(A\,,C)$ *(veja a figura abaixo).*



Com isto temos a:

Definição 3.3.1 *O vetor* $\underline{\overrightarrow{AC}}$, *será denominado* **<u>vetor soma (ou adição)</u>** *dos vetores* $\underline{\vec{a}}$ *com o vetor* $\underline{\vec{b}}$, *isto é,*

$$\vec{a}+\vec{b} \doteq \overrightarrow{AC}\ . \tag{3.4}$$

Observação 3.3.2

1. *A Definição* (3.3.1) *acima,* **<u>não</u>** *depende da escolha dos segmentos orientados em questão.*

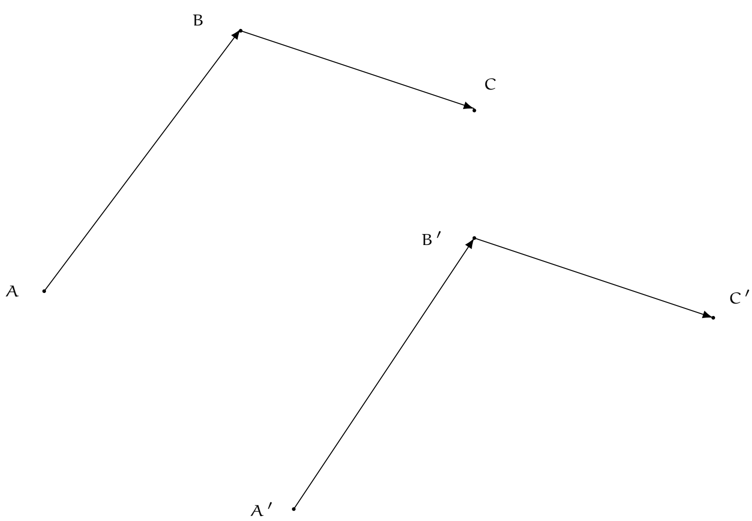
   De fato, se tomarmos um representante diferente do vetor $\underline{\vec{a}}$, *por exemplo, o segmento orientado* $(A'\,,B')$ *for um outro representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$, *deveremos ter*

   $$(A'\,,B') \sim (A\,,B)\,,$$

   pois $(A\,,B)$ *e* $(A'\,,B')$ *são segmentos orientados representantes do vetor* $\underline{\vec{a}}$, *isto é, da mesma classe de equipolência.*

   Da Proposição (3.2.2), fixado o ponto $\underline{B'}$, *existe um único ponto* $\underline{C'}$, *tal que (veja a figura abaixo)*

   $$\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}\,.$$



Deste modo, o segmento orientado (A', C') *será um outro representante para o vetor* $\vec{a}+\vec{b}$*, ou seja,*

$$\overrightarrow{A'C'} = \vec{a}+\vec{b}\,.$$

Precisamos mostrar que:

$$(A', C') \sim (A, C)\,,$$

deste modo, o vetor $\vec{a}+\vec{b}$*, independe da escolha dos segmentos orientados envolvidos.*

Como

$$(A', B') \sim (A, B)\,,$$

segue que os segmentos orientados (A', B') *e* (A, B) *têm mesmo comprimento, direção e sentido.*

De modo análogo,

$$(B', C') \sim (C, B)\,,$$

isto é, os segmentos orientados (B', C') *e* (B, C) *têm mesmo comprimento, direção e sentido.*

Logo os triângulos

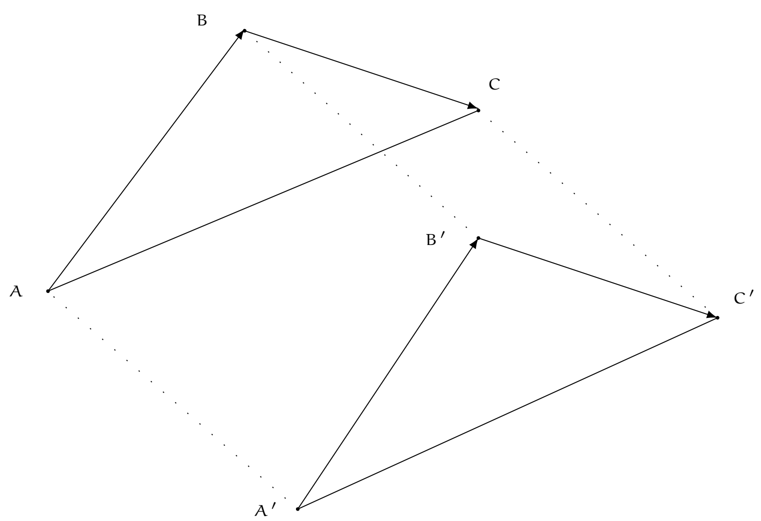
$$\Delta ABC \quad e \quad \Delta A'B'C'$$

serão congruentes (caso LAL).

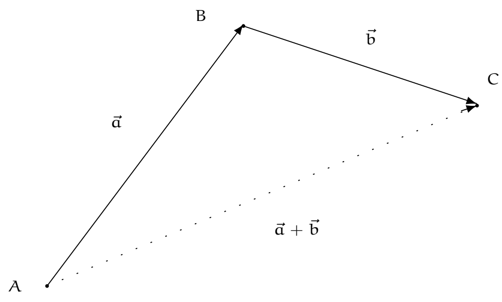
Em particular, os segmento orientados (A, C) *e* (A', C') *têm mesmo comprimento e direção e, além disso, terão o mesmo sentido, isto é,*

$$(A', C') \sim (A, C)\,,$$

ou seja, o vetor $\vec{a}+\vec{b}$*, introduzido na Definição (3.3.1) acima, independe das escolhas feitas.*



2. *A Definição* (3.3.1) *nos diz que, para determinarmos um representante do vetor* $\vec{a}+\vec{b}$*, basta escolhermos um representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *e um representante do vetor* $\underline{\vec{b}}$*, com origem na extremidade do representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *e "fechar"o triângulo, ou seja (veja a figura abaixo)*
$$\vec{a}+\vec{b} \doteq \overrightarrow{AC} \ .$$

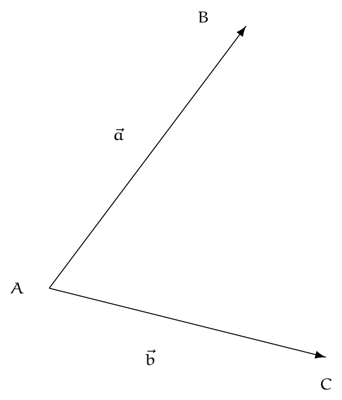


3. *Podemos obter um representante do vetor* $\vec{a}+\vec{b}$ *de outra forma, a saber:*

   Determinarmos um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$*, da forma:*
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

   e representante do vetor $\underline{\vec{b}}$*, da forma:*
$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} \, ,$$

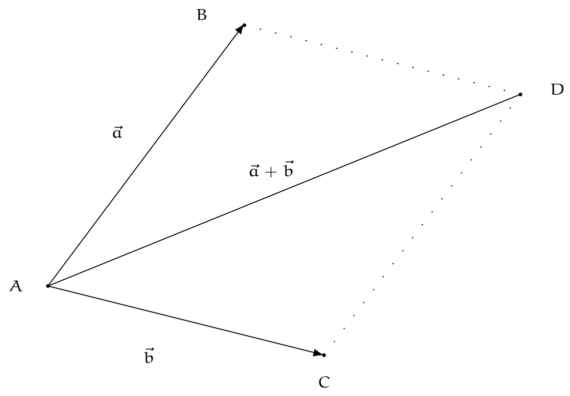
   ou seja, com a mesma origem do vetor $\underline{\vec{a}}$*, isto é, o ponto* $\underline{A}$ *(veja a figura abaixo).*



   Com os pontos $\underline{A}$*,* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$*, podemos construir um paralelogramo que tenha como três dos seus vértices, esses pontos.*

   Seja o ponto $\underline{D}$ *o quarto vértice desse paralelogramo.*

   Então, um representante do vetor $\vec{a}+\vec{b}$ *será o segmento orientado* $(A\,,D)$ *(veja a figura abaixo), isto é,*
$$\vec{a}+\vec{b} \doteq \overrightarrow{AD} \ .$$



Para mostrarmos isto, basta verificar que, como $ABCD$ *é um paralelogramo, segue que os as retas*

$$\overleftrightarrow{BD} \quad e \quad \overleftrightarrow{AC}$$

são paralelas.

Logo

$$BD = AC$$

e, além disso, os segmentos orientados

$$(A\,,C) \quad e \quad (B\,,D)$$

têm mesmo sentido, pois os segmentos geométricos $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *não se interceptam, ou seja,*

$$(A\,,C) \sim (B\,,D)\,.$$

Logo o segmento orientado $(A\,,D)$ *será um representante para o vetor* $\vec{a}+\vec{b}$*, como queríamos demonstrar.*

Temos as seguintes propriedades para a adição de vetores:

Proposição 3.3.1 *Sejam* $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c} \in V^3$ *(ou* $\underline{V}^2$*). Então:*

1. *a soma de vetores, introduzida na Definição (3.3.1), é associativa, isto é,*

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}\,.$$

2. *a soma de vetores, introduzida na Definição (3.3.1), é comutativa, isto é,*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,.$$

3. *existe um elemento neutro para a adição de vetores, introduzida na Definição (3.3.1), isto é, o vetor* $\underline{\vec{O}}$*, tem a seguinte propriedade:*

$$\vec{O} + \vec{a} = \vec{a}\,,$$

para cada $\vec{a} \in V^3$ *(ou* $\underline{V}^2$*).*

4. *existe um elemento oposto para a adição de vetores, isto é, dado um vetor* $\underline{\vec{a}}$ *existe um vetor, que indicaremos por* $\underline{-\vec{a}}$, *de tal modo que*

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}\,.$$

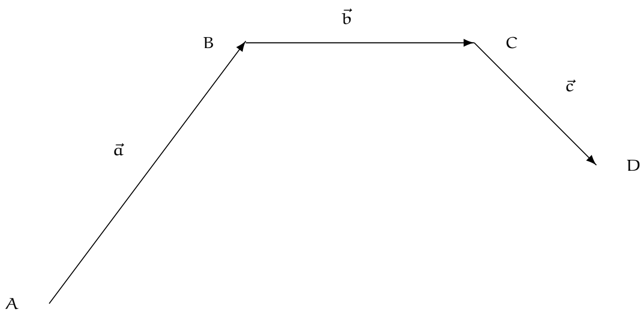
Demonstração:

De 1.:

Da Proposição (3.2.2), temos que existem pontos $B\,,C$ do espaço (ou do plano), tais que os segmentos orientados

$$(A\,,B)\,,\quad (B\,,C)\quad \text{e}\quad (C\,,D)$$

são representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ e $\underline{\vec{c}}$, respectivamente (veja a figura abaixo).



Logo, da Definição (3.3.1), o segmento orientado $(A\,,C)$ será um representante do vetor $\vec{a}+\vec{b}$ e assim, novamente da Definição (3.3.1), teremos que o segmento orientado $(A\,,D)$ é um representante do vetor $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Por outro lado, da Definição (3.3.1), o segmento orientado $(B\,,D)$ será um representante do vetor $\vec{b}+\vec{c}$ e assim, novamente da Definição (3.3.1), o segmento orientado $(A\,,D)$ será um representante do vetor $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Logo, da Proposição (3.2.2), temos que

$$(A\,,D) \sim (A\,,D)\,,$$

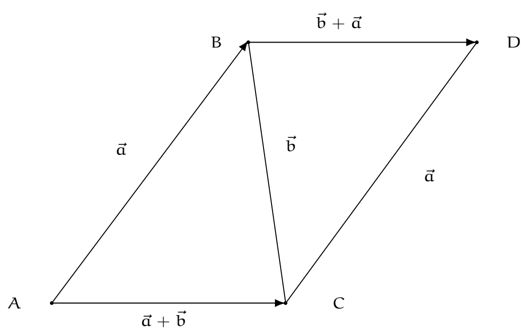
ou seja,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c} = \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\,,$$

como queríamos mostrar.

De 2.:

Consideremos os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ segmentos orientados representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$ e, da Proposição (3.2.2), o segmento orientado $(B\,,C)$ representante do vetor $\underline{\vec{b}}$ (veja a figura abaixo).



Então, da Definição (3.3.1), segue que os segmentos orientados $(A\,,C)$ e $(B\,,D)$ são representantes dos vetores

$$\vec{a}+\vec{b} \quad \text{e} \quad \vec{b}+\vec{a}\,,$$

respectivamente.

Como $ABCD$ é um paralelogramo (pois $(A\,,C) \sim (B\,,D)$), temos que os triângulos

$$\Delta ABC \quad \text{e} \quad \Delta DCB$$

são congruentes (caso LAL).

Em particular, deveremos ter $(A\,,C) \sim (B\,,D)$, ou seja

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,,$$

como queríamos mostrar.

<u>De 3.:</u>

Suponhamos que o segmento orientado $(A\,,B)$ é um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$ e $(B\,,B)$ é um representante do vetor nulo $\underline{\vec{O}}$, isto é,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BB}=\vec{O}\,. \tag{3.5}$$

Logo, da Definição (3.3.1), segue que

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{O} &\overset{(3.5)}{=} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}\\ &\overset{\text{Definição (3.3.1)}}{=} \overrightarrow{AB}=\vec{a}\,,\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

<u>De 4.:</u>

Suponhamos que o segmento orientado $(A\,,B)$ seja um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}\,. \tag{3.6}$$

Definamos o vetor $-\vec{a}$ como sendo a classe de equipolância associada ao segmento orientado (B, A), isto é,

$$\overrightarrow{BA}=-\vec{a}\,. \tag{3.7}$$

Deste modo temos, da Definição (3.3.1), segue que

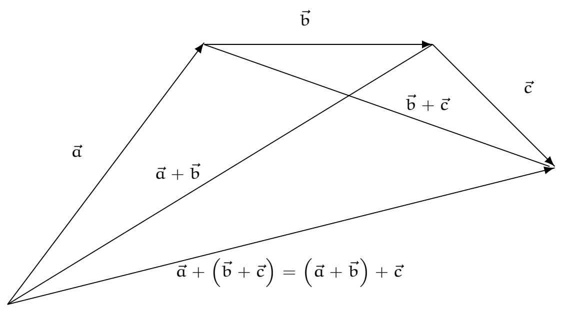
$$\begin{aligned}\vec{a}+(-\vec{a}) &\overset{(3.6)\text{ e }(3.7)}{=} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\\ &\overset{\text{Definição (3.3.1)}}{=} \overrightarrow{AA}=\vec{O}\,,\end{aligned}$$

isto é, existe um vetor oposto do vetor $\underline{\vec{a}}$, como queríamos mostrar.

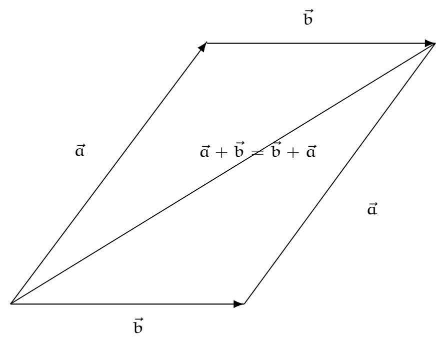
□

Observação 3.3.3 *Podemos dar uma interpretação geométrica para as propriedades acima, do seguinte modo:*

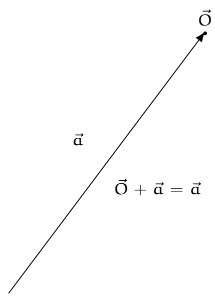
1. *Associativa:*



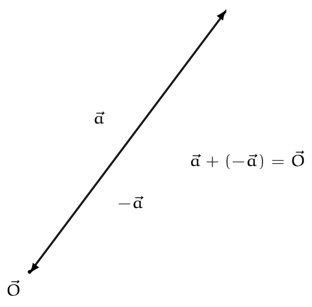
2. *Comutativa:*



3. *Elemento neutro:*



4. *Elemento oposto:*



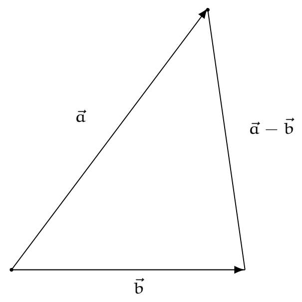
Podemos agora introduzir a:

Definição 3.3.2 *Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de V^3 (ou V^2), definimos a* **diferença** *do vetor $\vec{a}$ pelo vetor $\vec{b}$, indicada por $\vec{a}-\vec{b}$, como sendo:*

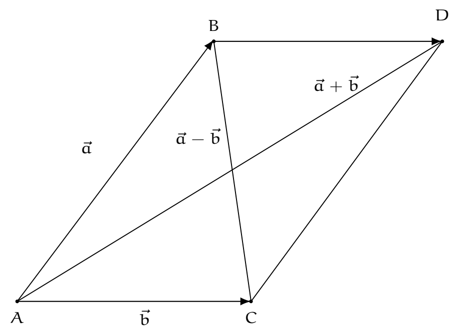
$$\vec{a}-\vec{b} \doteq \vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Observação 3.3.4

1. *Geometricamente, a diferença do vetor $\underline{\vec{a}}$ pelo vetor $\underline{\vec{b}}$, pode ser interpretada como:*



2. *Se os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(C\,,D)$ são representantes do vetor $\underline{\vec{a}}$ e os segmentos orientados $(A\,,C)$ e $(B\,,D)$ são representantes do vetor $\underline{\vec{b}}$ (como na figura abaixo), então um segmento orientado que representa o vetor $\vec{a}+\vec{b}$ é o segmento orientado $(A\,,D)$ e um segmento orientado que representa o vetor $\vec{a}-\vec{b}$ é o segmento orientado $(C\,,B)$, ou seja, as diagonais do palalelogramo $ABCD$, orientadas corretamente.*



3.

3.4 Multiplicação de um Número Real por um Vetor

A seguir introduziremos uma outra operação com vetores a saber:

Definição 3.4.1 *Seja $\vec{a} \in V^3$ (ou V^2) e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Definimos a **multiplicação do número real $\underline{\alpha}$ pelo vetor $\underline{\vec{a}}$**, *como sendo o vetor denotado por $\alpha \cdot \vec{a}$ e dado da seguinte forma:*

1. *Se*
$$\alpha = 0 \quad ou \quad \vec{a} = \vec{O},$$
definimos
$$\alpha \cdot \vec{a} \doteq \vec{O}.$$

2. *Se*
$$\alpha \neq 0 \quad e \quad \vec{a} \neq \vec{O},$$
definimos $\alpha \cdot \vec{a}$ como sendo o vetor que tem as seguintes características:

   (a) o vetor $\alpha \cdot \vec{a}$ é paralelo ao vetor $\underline{\vec{a}}$, isto é,
   $$\alpha \cdot \vec{a} \parallel \vec{a};$$

   (b) os vetores $\alpha \cdot \vec{a}$ e $\underline{\vec{a}}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos de $\alpha < 0$;

   (c) o comprimento do vetor $\alpha \cdot \vec{a}$ é igual o comprimento do vetor $\underline{\vec{a}}$, multiplicado por $|\alpha|$, isto é,
   $$\|\alpha \cdot \vec{a}\| = \|\vec{a}\|.$$

Observação 3.4.1

1. *Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{a} \neq \vec{O}$, resumidamente, temos que o vetor $\alpha \cdot \vec{a}$ satisfaz:*

   (a) $\alpha \cdot \vec{a} \parallel \vec{a}$;

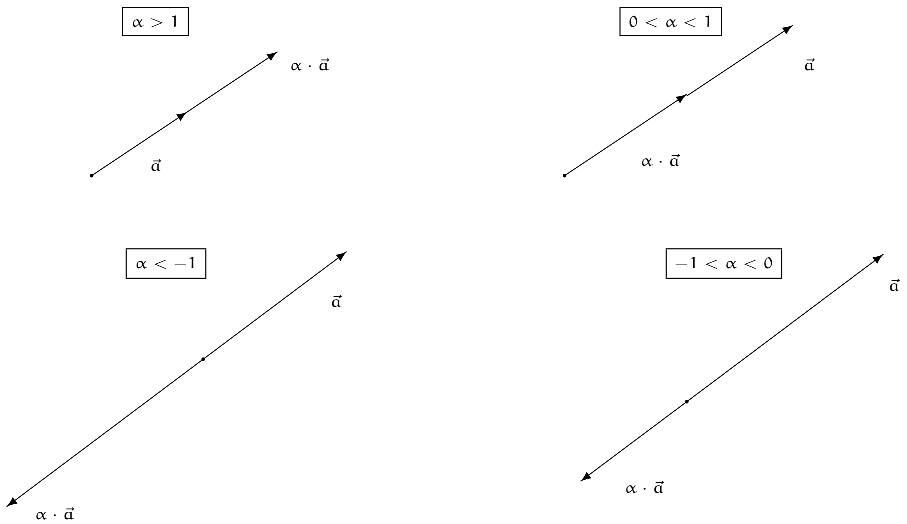
   (b) $\alpha \cdot \vec{a}$ e $\underline{\vec{a}}$, têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos de $\alpha < 0$;

   (c) $\|\alpha \cdot \vec{a}\| = |\alpha|\|\vec{a}\|$.

2. *Lembremos que um vetor não-nulo fica completamente determinado, se connhecermos sua direção, sentido e comprimento.*

   Assim, existe um único vetor, que tem as três propriedades acima.

3. *Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{a} \neq \vec{O}$, geometricamente, teremos a seguinte situação:*



Temos as seguinte propriedades básicas relacionadas com o produto de um número real por um vetor:

Proposição 3.4.1 *Sejam* $\vec{a}\,,\vec{b}\in V^3$ *(ou* V^2*) e* $\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}$*. Então valem:*

1. *(Distributiva do produto de número real pela adição de vetores)*
$$\alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}\,. \tag{3.8}$$

2. *(Distributiva da adição de números reais pela multiplicação por vetor)*
$$(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}\,. \tag{3.9}$$

3. *(Unidade da multiplicação de números real por vetor)*
$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}\,. \tag{3.10}$$

4. *(Associativa da multiplicação de números reais e da multiplicação por vetor)*
$$(\alpha\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})\,. \tag{3.11}$$

Demonstração:

De 1.:

Se $\alpha=0$, teremos:

$$0\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\overset{\text{Definição }(3.4.1)}{=}\vec{O}\quad\text{e}\quad 0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}\overset{\text{Definição }(3.4.1)}{=}\vec{O}+\vec{O}=\vec{O}$$

e assim a identidade (3.8) ocorrerá.

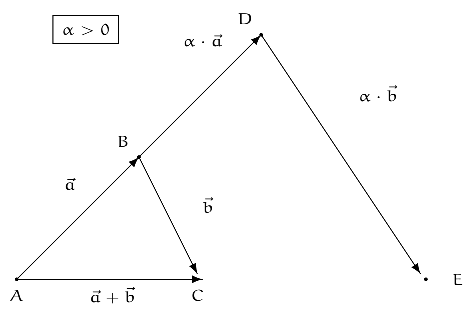
Se $\alpha\neq0$ e $\vec{a}=\vec{O}$, teremos

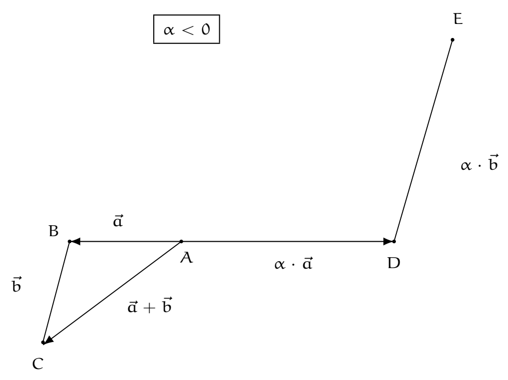
$$\alpha\cdot(\underbrace{\vec{O}+\vec{b}}_{=\vec{b}})=\alpha\cdot\vec{b}\quad\text{e}\quad\alpha\cdot\vec{O}+\alpha\cdot\vec{b}\overset{\text{Definição }(3.4.1)}{=}\vec{O}+\alpha\cdot\vec{b}=\alpha\cdot\vec{b}$$

e assim a identidade (3.8) também ocorrerá.

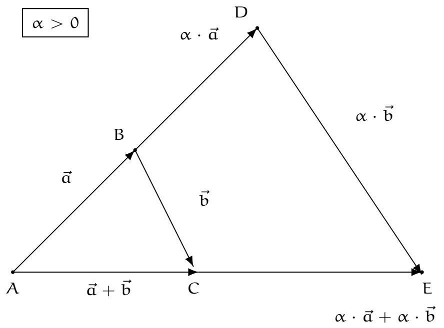
O caso $\alpha\neq0$ e $\vec{b}=\vec{O}$ é análogo a situação acima e sua elaboaração será deixada como exercício para leitor.

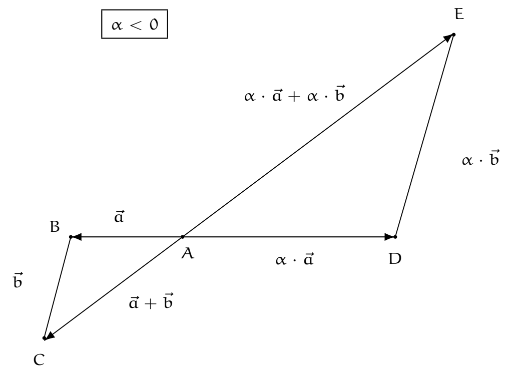
Se $\alpha\neq0$ e $\vec{a}$, $\vec{b}\neq\vec{O}$, fixado o ponto A, pela Proposição (3.2.2), segue que existem pontos B, C, D, E, tais que os segmentos orientados $(A\,,B)$, $(B\,,C)$, $(A\,,D)$, $(D\,,E)$ representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\alpha\cdot\vec{a}$ e $\alpha\cdot\vec{b}$, respectivamente (veja ilustração abaixo).





Logo, da Definição (3.3.1), teremos que o segmento orientado $(A\,,E)$ será um representante do vetor $\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.





Mostremos que o segmento orientado $(A\,,E)$ é um representante do vetor $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Para isto consideremos o segmento orientado $(A\,,E')$ é um representante do vetor $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Observemos que:

(i) $(A\,,C) \parallel (A\,,E)$, pois os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes (os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{D}$ estão sobre uma mesma reta e as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são paralelas).

Logo, os vetores $\left(\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right)$ e $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ são paralelos;

(ii) Por construção, o segmento orientado $(A\,,E)$ tem o mesmo sentido do segmento orientado $(A\,,E')$.

Logo, os vetores $\left(\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right)$ e $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ têm mesmo sentido;

(iii) Como os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes, segue que lados correspondentes guardam uma mesma proporção.

Em particular, temos que:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{\left\|\vec{b}\right\|}{\left\|\alpha \cdot \vec{b}\right\|} = \frac{\left\|\vec{b}\right\|}{|\alpha| \left\|\vec{b}\right\|} = \frac{1}{|\alpha|}\,,$$

isto é,

$$\left\|\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right\| = AE = |\alpha| AC = |\alpha| \left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \left\|\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b})\right\|\,,$$

ou ainda

$$\left\|\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right\| = \left\|\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right\|\,.$$

Logo de (i), (ii) e (iii) segue que os vetores

$$\left(\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\right) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

têm mesma direção, sentido e comprimento, logo são iguais, ou seja

$$\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}\,,$$

como queríamos mostrar.

De 2.:

Se $\alpha = 0$, segue que

$$\underbrace{(0+\beta)}_{=\beta} \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a} \quad \text{e} \quad \underbrace{0 \cdot \vec{a}}_{\text{Definição (3.4.1)} \atop = \vec{O}} + \beta \cdot \vec{a} = \vec{O} + \beta \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a}\,,$$

e assim a identidade (3.9) ocorrerá.

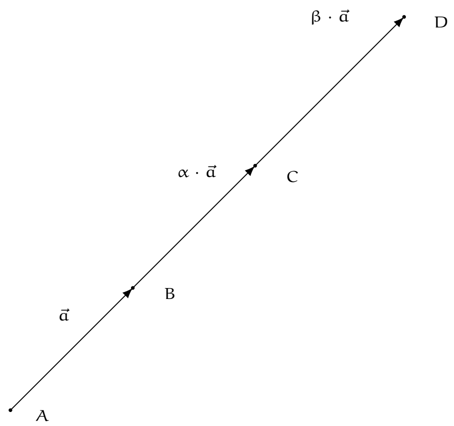
De modo análogo, podemos mostrar o caso em que $\beta = 0$, cuja elaboração será deixada como exercício para o leitor.

Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{a} = \vec{O}$, teremos

$$(\alpha+\beta) \cdot \vec{O} \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O} \quad \text{e} \quad \underbrace{\alpha \cdot \vec{O}}_{\text{Definição (3.4.1)} \atop = \vec{O}} + \underbrace{\beta \cdot \vec{O}}_{\text{Definição (3.4.1)} \atop = \vec{O}} = \vec{O} + \vec{O} = \vec{O}$$

e assim a identidade (3.9) também ocorrerá.

Se $\alpha, \beta \neq 0$ e $\vec{a} \neq \vec{O}$, fixado o ponto $\underline{A}$, da Proposição (3.2.2), segue que existem pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$, tais que os segmentos orientados $(A\,,B)$, $(A\,,C)$, $(C\,,D)$ representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\alpha \cdot \vec{a}$ e $\beta \cdot \vec{a}$, respectivamente (veja ilustração abaixo).



Logo, da Definição (3.3.1), o segmento orientado $(A\,,D)$ será um representante do vetor $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$.

Consideremos o segmento orientado $(A\,,D')$ como sendo um representante do vetor $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a}$.

Afirmamos que

$$(A\,,D') \sim (A\,,D)\,.$$

Se isto for verdade, segue que a identidade (3.9) ocorrerá.

Observemos que:

(i) os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ são paralelos, pois os vetores $\alpha \cdot \vec{a}$ e $\beta \cdot \vec{a}$ são paralelos ao vetor $\underline{\vec{a}}$.

Logo a adição dos mesmos, o vetor $\overrightarrow{AD}$ também será paralela ao vetor $\underline{\vec{a}}$ e o vetor $\overrightarrow{AD'} = (\alpha+\beta) \cdot \vec{a}$ é paralelo ao vetor $\underline{\vec{a}}$.

(ii) os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesmo sentido, pois:

(a) Se $0 < \alpha \leq \beta$, segue os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ terão mesmo sentido do segmento orientado $(A\,,B)$;

(b) Se $\alpha \leq \beta < 0$, teremos que os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ terão sentidos opostos do segmento orientado $(A\,,B)$, logo terão mesmo sentido;

(c) se $\beta \leq 0$ e $\beta \leq |\alpha|$, teremos que os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ terão sentidos opostos do segmento orientado $(A\,,B)$, logo terão mesmo sentido.

(iii) Notemos que,

$$AD \overset{\text{Definição (3.3.1)}}{=} AC + CD = \alpha\,\|\vec{a}\| + \beta\,\|\vec{a}\| = (\alpha+\beta)\,\|\vec{a}\| = AD'\,.$$

Portanto, de (i), (ii) e (iii) segue que $(A\,,D') \sim (A\,,D)$, como queríamos mostrar.

De 3.:

Se $\vec{a} = \vec{O}$, teremos

$$1 \cdot \vec{a} \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O} = \vec{a}$$

e assim a identidade (3.10) ocorrerá.

Se $\vec{a} \neq \vec{O}$ teremos:

(i) o vetor $1 \cdot \vec{a}$ é paralelo ao vetor $\underline{\vec{a}}$;

(ii) o vetor $1 \cdot \vec{a}$ tem mesmo sentido do vetor $\underline{\vec{a}}$ (pois $1 > 0$);

(iii) o vetor $1 \cdot \vec{a}$ tem o mesmo comprimento do vetor $\underline{\vec{a}}$, pois

$$\|1 \cdot \vec{a}\| = |1|\,\|\vec{a}\| = \|\vec{a}\|\,.$$

Logo os vetores $1 \cdot \vec{a}$ e $\underline{\vec{a}}$ têm mesma direção, sentido e comprimento, ou seja, são iguais, vale a identidade (3.10), como queríamos mostrar.

De 4.:

Se $\alpha = 0$, teremos

$$(0\,\beta)\cdot\vec{a} = 0 \cdot \vec{a} \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O} \quad \text{e} \quad 0 \cdot (\beta \cdot \vec{a}) \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O}$$

e assim a identidade (3.11) ocorrerá.

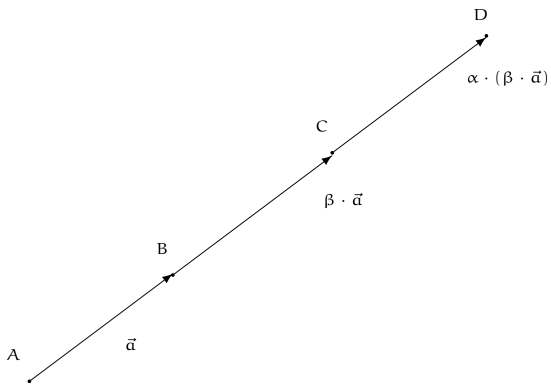
De modo análogo podemos mostrar o caso em que $\beta = 0$, cuja elaboração será deixado como exercíco para o leitor.

Se $\vec{a} = \vec{O}$, teremos

$$(\alpha\,\beta)\cdot\vec{O} \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O} \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{O}) \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \alpha \cdot \vec{O} \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} \vec{O}$$

e assim a identidade (3.11) também ocorrerá.

Se $\alpha\,,\beta \neq 0$ e $\vec{a} \neq \vec{O}$, fixado o ponto $\underline{A}$, da Proposição (3.2.2), segue que existem pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$, de modo que os segmentos orientados $(A\,,B)$, $(A\,,C)$, $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ representantes dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\beta \cdot \vec{a}$, $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ e $(\alpha\,\beta)\cdot\vec{a}$, respectivamente (vide ilustração abaixo).



Afirmamos que

$$(A\,,D') \sim (A\,,D)\,.$$

Caso isto seja verdade, segue que os vetores $(\alpha\,\beta)\cdot\vec{a}$ e $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$ serão iguais, isto é, a identidade (3.11) ocorrerá.

Observemos que:

(i) $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ são paralelos, pois

$$\beta\cdot\vec{a} \parallel \vec{a}\,,$$

logo

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a}) \parallel \vec{a} \quad \text{e} \quad (\alpha\,\beta)\cdot\vec{a} \parallel \vec{a}\,,$$

ou seja $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesma direção.

(ii) $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesmo sentido, pois:

(a) se $\alpha\,\beta > 0$, teremos que os vetores $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$ e $(\alpha\,\beta)\cdot\vec{a}$ terão mesmo sentido do vetor $\underline{\vec{a}}$, , ou seja $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesmo sentido;

(b) se $\alpha\,\beta < 0$, segue que os vetores $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$ e $(\alpha\beta)\cdot\vec{a}$ terão sentidos contrários ao do vetor $\underline{\vec{a}}$, ou seja $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesmo sentido.

(iii) Temos também:

$$\begin{aligned} AD = \|\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})\| &\overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} |\alpha|\,\|\beta\cdot\vec{a}\| \overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} |\alpha|\,(|\beta|\,\|\vec{a}\|) \\ &\overset{\text{Definição (3.4.1)}}{=} |\alpha\,\beta|\,\|\vec{a}\| = \|(\alpha\,\beta)\cdot\vec{a}\| = AD'\,, \end{aligned}$$

isto é, os segmentos orientados $(A\,,D)$ e $(A\,,D')$ têm mesmo comprimento.

Logo $(A, D') \sim (A, D)$, com queríamos mostrar.

$\square$

Notação 3.4.1 *Um número real será denominado* <u>escalar</u>.

Para finalizar esta seção daremos um resultado que será importante mais adiante, a saber:

Proposição 3.4.2 *Sejam $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ vetores de V^3 (ou V^2). Então*

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que ou

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}\,. \tag{3.12}$$

Ou seja, dois vetores são paralelos se, e somente se, um deles é múltiplo do outro.

Demonstração:

Observemos que se

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$$

então, pela Definição (3.4.1), eles serão paralelos.

Analogamente, se

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}\,.$$

Reciprocamente, se os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são paralelos, então os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ têm mesma direção.

Se $\vec{a} = \vec{O}$, teremos

$$\vec{a} = 0 \cdot \vec{b}\,,$$

e assim $\alpha = 0$.

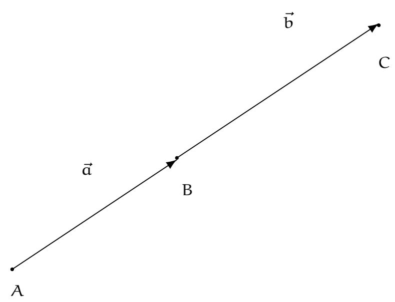
De modo análogo, podemo mostrar se $\vec{b} = \vec{O}$, poderemos teremos que

$$\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}\,.$$

Suponhamos que ambos são vetores não nulos, ou seja,

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{O}\,.$$

Fixado o ponto $\underline{A}$, pela Proposição (3.2.2), existem pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, de modo que os segmentos orientados $(A\,,B)$ e $(A\,,C)$ que representam os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$, respectivamente (veja a ilustração abaixo).



Como

$$\vec{a} \parallel \vec{b}\,,$$

segue que os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ devem ser colineares.

Como $\vec{b} \neq \vec{O}$, segue que

$$AC = \left\|\vec{b}\right\| \neq 0\,.$$

Seja

$$\alpha \doteq \frac{AB}{AC} = \frac{\|\vec{a}\|}{\left\|\vec{b}\right\|} > 0\,. \tag{3.13}$$

Assim, se os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ têm mesmo sentido, deveremos ter

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}\,,$$

caso contrário

$$\vec{a} = -\alpha \cdot \vec{b}\,,$$

pois os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\alpha \cdot \vec{b}$ deverão ter mesma direção e mesmo sentido, se $\alpha > 0$ e sentidos opostos, se $\alpha < 0$ e, além disso,

$$\|\vec{a}\| \overset{(3.13)}{=} \left\|\alpha \cdot \vec{b}\right\|\,,$$

completando a demostração.

□

3.5 Soma de um Ponto com um Vetor

Observação 3.5.1 *Dado um vetor $\vec{a} \in V^3$ (ou V^2, respectivamente) e um ponto $\underline{A}$ do espaço (ou do plano, respectivamente), a Proposição (3.2.2), garante que existe um único ponto $\underline{B}$ do espaço (ou do plano, respectivamente) tal que o segmento orientado $(A\,,B)$ é um representante do vetor $\underline{\vec{a}}$, ou seja,*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,.$$

Isto nos permite associar a cada ponto $\underline{A}$ e a cada vetor$\underline{\vec{a}}$, um único ponto $\underline{B}$, de modo que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,.$$

Com isto temos a:

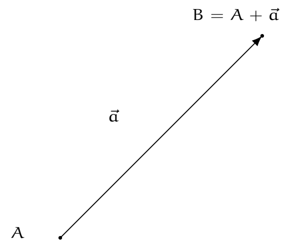
Definição 3.5.1 *O ponto $\underline{B}$ obtido acima, será dito* **<u>adição do ponto A com o vetor $\vec{a}$</u>** *e indicado por $A + \vec{a}$, isto é,*

$$A + \vec{a} \doteq B\,. \tag{3.14}$$

Observação 3.5.2

1. *Resumindo temos que:*

$$B = A + \vec{a} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \overrightarrow{AB} = \vec{a}\,.$$



2. *Usaremos a notação $A - \vec{a}$, para indicar a adição do ponto* A *com o vetor* $-\vec{a}$, *isto é,*
$$A - \vec{a} \doteq A + (-\vec{a}) \ .$$

3. *Intuitivamente podemos "ver"o ponto $A + \vec{a}$, como sendo a translação do ponto* A, *pelo vetor* $\vec{a}$.

A seguir temos algumas propriedades da soma de um ponto com um vetor:

Proposição 3.5.1 *Sejam* A *e* B *pontos do espaço (ou do plano, respectivamente) e* $\vec{a}, \vec{b}$ *vetores de* V^3 *(ou* V^2, *respectivamente). Então:*

1. *temos que*
$$A + \vec{O} = A \, .$$

2. *se*
$$A + \vec{a} = A + \vec{b} \, , \qquad \textit{então} \quad \vec{a} = \vec{b} \, .$$

3. *se*
$$A + \vec{a} = B + \vec{a} \, , \qquad \textit{então} \quad A = B \, .$$

4. *temos que*
$$(A + \vec{a}) + \vec{b} = A + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \ .$$

5. *temos também*
$$(A - \vec{a}) + \vec{a} = A \, .$$

Demonstração:

De 1.:

Como
$$\overrightarrow{AA} = \vec{O}$$
segue, da Definição, (3.5.1) que
$$A = A + \vec{O} \, ,$$
como queríamos mostrar.

De 2.:

Seja
$$B \doteq A + \vec{a} = A + \vec{b} \, .$$

Então, da Definição (3.5.1), temos que

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}\,, \qquad \text{ou seja,} \quad \vec{a} = \vec{b}\,,$$

como queríamos mostrar.

<u>De 3.:</u>

Seja

$$C \doteq A + \vec{a} = B + \vec{a}\,.$$

Então, da Definição (3.5.1), temos que

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} = \overrightarrow{BC}\,.$$

Logo, da Proposicão (3.2.2), segue que

$$A = B\,,$$

como queríamos mostrar.

<u>De 4.:</u>

Sejam

$$B \doteq A + \vec{a} \quad \text{e} \quad C = B + \vec{b}\,.$$

Logo

$$C = (A + \vec{a}) + \vec{b}\,.$$

Então, da Definição (3.5.1), temos que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}\,.$$

Assim

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Da Definição (3.5.1), segue que

$$C = A + \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\,,$$

ou seja

$$(A + \vec{a}) + \vec{b} = C = A + \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\,,$$

como queríamos mostrar.

<u>De 5.:</u>

Observemos que

$$(A - \vec{a}) + \vec{a} = [A + (-\vec{a})] + \vec{a} \overset{\text{Propriedade 4.}}{=} A + [(-\vec{a}) + \vec{a}]$$
$$\overset{\text{Prop. (3.3.1) item 4.}}{=} A + \vec{O} \overset{\text{Propriedade 1.}}{=} A\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 3.5.3 *Se o segmento orientado* $(A\,,B)$ *é um representante do vetor* $\underline{\vec{a}}$*, então sabemos que*

$$B = A + \vec{a}\,.$$

Devido a este fato, podemos utilizar a seguinte notação para representar o vetor $\underline{\vec{a}}$*, a saber:*

$$B - A \doteq \vec{a}\,.$$

Vale observar que **não** *estamos fazendo uma subtração entre pontos mas sim,* **apenas***, introduzimos uma outra notação para o vetor* $\underline{\vec{a}}$*.*

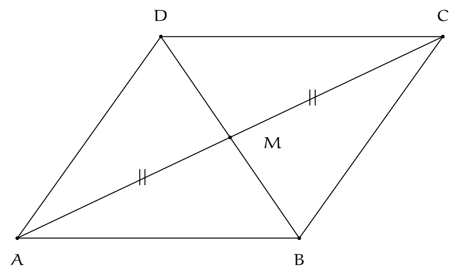
Com isto podemos denotar o vetor acima das seguintes formas:

$$\vec{a}\,, \quad \overrightarrow{AB} \quad \text{ou} \quad B - A\,.$$

Exemplo 3.5.1 *Mostre, utilizando a noção de vetores, que as diagonais de um paralelogramo cortam-se nos seus respectivos pontos médios.*

Resolução:

Consideremos o paralelogramo $ABCD$, cujas diagonais são os segmentos AC e BD, como na figura abaixo.



Indiquemos por $\underline{M}$, o ponto médio do segmento geométrico AC.

Mostraremos que o ponto $\underline{M}$ é ponto médio do segmento DB, ou seja as diagonais do paralelogramo cruzam-se nos seus respectivos pontos médios.

Para isto observemos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\\ &\overset{\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD} \text{ e } \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}}{=} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{MD}\,,\end{aligned}$$

isto é, o ponto $\underline{M}$ é o ponto médio do segmento BD e portanto as diagonais de um paralelogramo cruzam-se nos seus respectivos pontos médios.

□

4.a aula - 11.03.2014

3.6 Dependência Linear

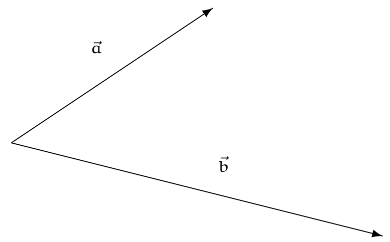
Nas observações abaixo, concentraremos nossa atenção em $\underline{V}^3$.

Mais adiante incluiremos $\underline{V}^2$.

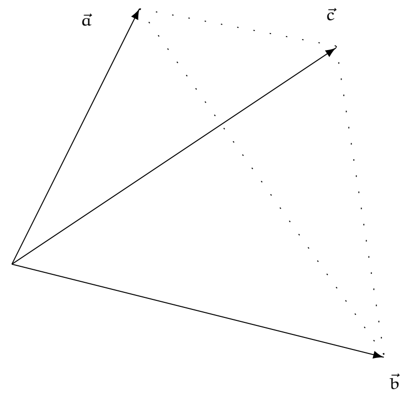
Algumas questões:

1. Precisamos de todos os vetores de $\underline{V}^3$ para determiná-lo? Talvez...

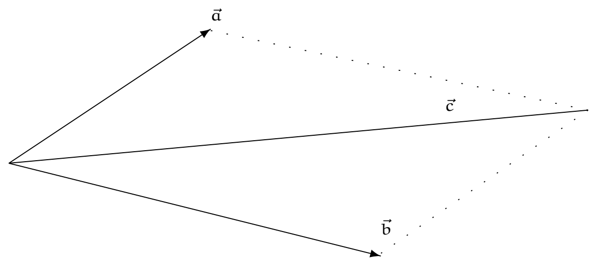
2. Podemos escolher um único vetor $\underline{\vec{a}}$, de modo que com este possamos representar **todos** os vetores de $\underline{V}^3$? Não tem como (vide figura abaixo).

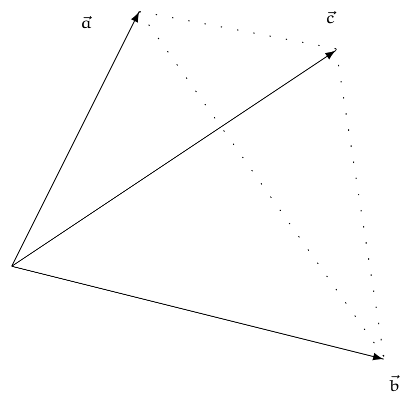


3. Podemos escolher dois vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$, de modo que com este possamos representar **todos** os vetores de $\underline{V}^3$? Não (vide figura abaixo).



4. Podemos escolher três vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ de modo que com estes possamos representar **todos** os vetores de $\underline{V}^3$? Depende (veja a figura abaixo)





5. Podemos escolher quatro ou mais vetores, de modo que com este possamos representar <u>**todos**</u> os vetores de $\underline{V^3}$? Depende...

6. Qual o número mínimo de vetores que podemos escolher, para podermos representar <u>**todos**</u> os vetores de $\underline{V^3}$ utilizando-se somente os escolhidos? Que propriedades escolhidos devem ter?

Passaremos a seguir a começar a responder estas e outras questões.
Para isto iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 3.6.1

1. *Um vetor* $\vec{a} \in V^3$ *será* <u>**linearmente dependente em**</u> $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se*
$$\vec{a} = \vec{O}\,.$$
Caso contrário, o vetor $\underline{\vec{a}}$ *será dito* <u>**linearmente independente em**</u> $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^3}$ *(ou seja, se* $\vec{a} \neq \vec{O}$*).*

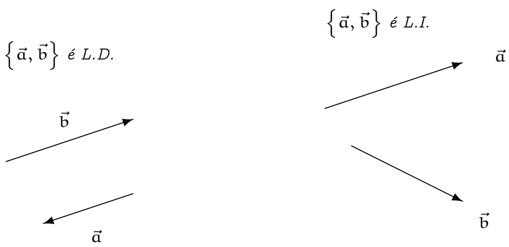
   Diremos que o conjunto $\{\vec{a}\}$ *é* <u>**linearmente dependente em**</u> $\underline{V^3}$ *, ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se*
$$\vec{a} = \vec{O}\,.$$
Caso contrário, diremos que o conjunto $\{\vec{a}\}$ *é* <u>**linearmente independente em**</u> $\underline{V^3}$ *, ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^3}$ *(ou seja, se* $\vec{a} \neq \vec{O}$*).*

2. *Os vetores* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *serão ditos* <u>**linearmente dependente em**</u> $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente por L.D. em* $\underline{V^3}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *forem paralelos (isto é, têm a mesma direção).*

   Caso contrário, os vetores $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *serão ditos* **linearmente independente em** $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$ *(ou seja, os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *não são paralelos).*

   Diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ *é* <u>**linearmente dependente em**</u> $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *são paralelos.*

   Caso contrário, diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ *é* <u>**linearmente independente em**</u> $\underline{V^3}$, *ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^3}$ *(ou seja, se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *não são paralelos).*



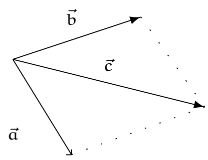
3. *Os vetores* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *serão ditos* **linearmente dependente em $\underline{V^3}$**, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ *e* $\underline{\vec{c}}$ *forem paralelos a um mesmo plano, isto é, existem segmentos orientados* (A, B), (A, C) *e* (A, D) *tais que os pontos* A, B, C, D *são coplanares.*

   Caso contrário, os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ *e* $\underline{\vec{c}}$ *serão ditos* **linearmente independente em $\underline{V^3}$**, *ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^3}$, *ou seja, se os vetores* $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ *e* $\underline{\vec{c}}$ *não são paralelos a um mesmo plano.*

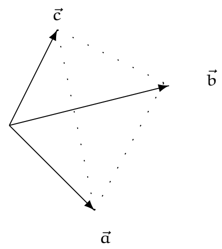
   Diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ *é* **linearmente dependente em $\underline{V^3}$**, , *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ *são paralelos a um mesmo plano.*

   Caso contrário, diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ *é* **linearmente independente em $\underline{V^3}$**, *ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^3}$ *(ou seja, se os vetores* $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ *não são paralelos a um mesmo plano).*

$\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ *é L.D.*



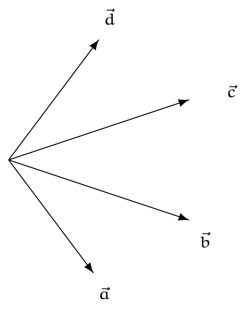
$\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ *é L.I.*



4. *Os vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$ *são* **linearmente dependentes em $\underline{V^3}$**, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se* $n \geq 4$.

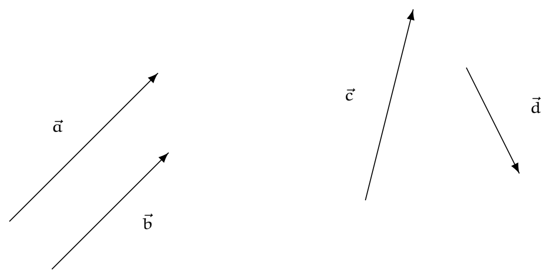
   Diremos que o conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n\}$ *é* **linearmente dependente em $\underline{V^3}$**, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^3}$, *se* $n \geq 4$.

L.D.



Exemplo 3.6.1

1. *Os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$, *que são representados pelos segmentos orientados apresentados na figura abaixo, são L.D. em* $\underline{V^3}$ *(pois são paralelos) e os vetores* $\underline{\vec{c}}$ *e* $\underline{\vec{d}}$, *que são representados pelos segmentos orientados apresentados na figura abaixo, são L.I. em* $\underline{V^3}$ *(pois não são paralelos).*



2. *Consideremos os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, $\underline{F}$, $\underline{G}$ e $\underline{H}$ vértices do paralelepípedo retângulo dado pela figura abaixo.*

   Logo os vetores

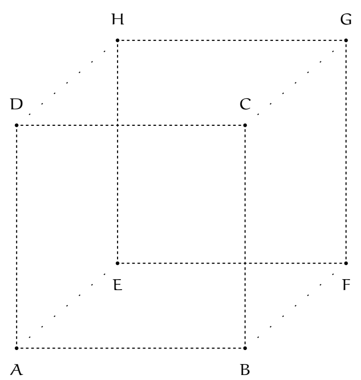
$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC} \quad e \quad \overrightarrow{AD},$$

   dados pela figura abaixo, são L.D. em $\underline{V}^3$ (pois são paralelos ao plano definido pelos pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$).

   Vale observar que os vetores

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AD} \quad e \quad \overrightarrow{AE},$$

   dados pela figura abaixo, são L.I. em $\underline{V}^3$ (pois não são paralelos a um mesmo plano).



3. *Quaisquer quatro (ou mais) vetores com origem e extremidade nos vértices do paralelogramo acima serão L.D. em $\underline{V}^3$.*

   Por exemplo, os vetores

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{DE} \quad e \quad \overrightarrow{AH}$$

   são L.D. em $\underline{V}^3$.

A seguir temos a:

Observação 3.6.1

1. *A dependência ou independência linear em $\underline{V^3}$, são propriedades inerentes ao conjunto de vetores em questão e não a cada um dos elementos do conjunto.*

   Por exemplo, se o conjunto $\{\vec{a}\}$ é L.I. em $\underline{V^3}$ e o conjunto $\{\vec{b}\}$ é L.I. em $\underline{V^3}$, isto **não** *implica que o conjunto $\left\{\vec{a}\,,\vec{b}\right\}$ sejam, necessariamente, L.I. em $\underline{V^3}$.*

   Para isto, veja o Exemplo (3.6.1) item 1., cada um dos vetores é L.I. em $\underline{V^3}$, mas os dois são L.D. em $\underline{V^3}$.

2. *O conjunto de vetores $\left\{\vec{O}\,,\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\,,\cdots,\vec{a}_n\right\}$ é L.D. em $\underline{V^3}$, para qualquer coleção de vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\,,\cdots,\vec{a}_n \in V^3$.*

   De fato, se $n \geq 3$, o conjunto será L.D. em $\underline{V^3}$, pela Definição (3.6.1) item 4. (pois o conjunto conterá mais de quatro vetores).

   Se $\underline{n=1}$, temos que o vetor $\underline{\vec{O}}$ é paralelo a qualquer vetor, em particular ao vetor $\underline{\vec{a}_1}$.

   Logo o conjunto $\{\vec{O}\,,\vec{a}_1\}$ será L.D. em $\underline{V^3}$.

   De modo análogo, se $\underline{n=2}$, temos que o vetor $\underline{\vec{O}}$ é paralelo a qualquer vetor, em particular, aos vetores $\underline{\vec{a}_1}$ e $\underline{\vec{a}_2}$.

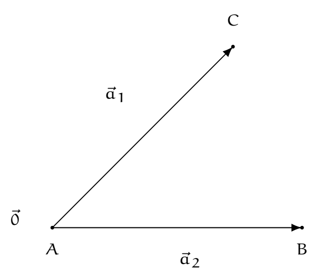
   Logo, se

   $$\vec{a}_1 = \overrightarrow{AB} \quad e \quad \vec{a}_2 = \overrightarrow{AC}\,,$$

   e como

   $$\vec{O} = \overrightarrow{AA}\,,$$

   ele será paralelo ao plano que contenha os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, mostrando que o conjunto $\{\vec{O}\,,\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\}$ será L.D. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo).



3. *Observemos que, no Exemplo (3.6.1) item 2., os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\vec{AD}$ são L.D. em $\underline{V^3}$, e podemos obter (por exemplo) o vetor $\overrightarrow{AC}$ da seguinte forma:*

   $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\ .$$

   Por outro lado, os vetores $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}$ são L.I. em $\underline{V^3}$, e **não** *existe um modo de escrever um deles como adição de múltiplos dos outros dois.*

A esse modo de escrever um vetor (como adição de múltiplos de outros vetores) será dado um nome, como veremos a seguir.

Definição 3.6.2 *Sejam* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$ *e* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, *com* $\underline{n \geq 1}$ *fixado.*

O vetor

$$\vec{u} \doteq \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{a}_i \,, \tag{3.15}$$

será denominado **combinação linear** *dos vetores*

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \,,$$

com coeficientes (ou escalares)

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \,.$$

Se $\vec{u} \in V^3$ *é uma combinação linear dos vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$*, isto é, se existem*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,,$$

tais que (3.15) ocorre, então diremos que o vetor $\underline{\vec{u}}$ *é* **gerado** *pelos vetores*

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \,.$$

Consideremos o:

Exemplo 3.6.2

1. *Sejam* $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V^3$.

   Então o vetor

   $$\vec{u} \doteq \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

   é uma combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2$*, ou ainda, é gerado pelos vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

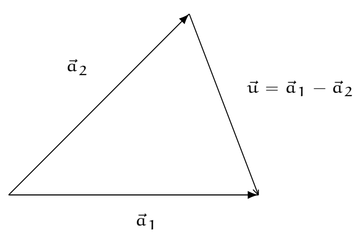
   De fato, pois

   $$\vec{u} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 1 \cdot \vec{a}_1 + (-1) \cdot \vec{a}_2$$

   logo

   $$\alpha_1 = 1 \quad e \quad \alpha_2 = -1$$

   são os coeficientes da combinação linear.



2. *O vetor nulo* $\underline{\vec{O}}$ *é gerado por qualquer coleção de vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$.

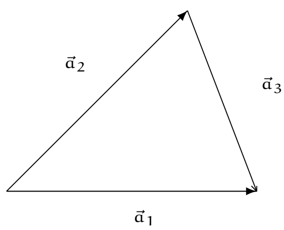
   De fato,
$$\vec{O} = 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n\,,$$
   ou seja os coeficientes são todos nulos , ou ainda,
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,.$$

Observação 3.6.2

1. *No Exemplo* (3.6.2) *item 2. acima, vimos que o vetor nulo* $\underline{\vec{O}}$ *sempre pode ser escrito como combinação linear de qualquer coleção de vetores*
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3\,,$$
   bastanto tomar todos os coeficientes iguais a zero.

   Pergunta-se: *será que haveria outra combinação linear (isto é, com coeficientes não todos nulos) desses mesmos vetores*
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3\,,$$
   que seja igual ao vetor nulo?

   Por exemplo, na figura abaixo,



   temos que
$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2\,, \qquad \textit{ou seja,} \quad \vec{O} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3$$
   e portanto
$$\vec{O} = 1 \cdot \vec{a}_1 + (-1) \cdot \vec{a}_2 + (-1) \cdot \vec{a}_3\,.$$
   Neste caso, conseguimos escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores
$$\vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\ \vec{a}_3$$
   com coeficientes **não todos nulos**.

   No caso nenhum deles é zero, pois
$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2 = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = -1\,.$$
   Observemos que $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$, *pois são paralelos a um mesmo plano.*

Logo é natural pensarmos que a resposta à pergunta acima estará diretamente relacionada com a dependência ou independência linear dos vetores

$$\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \cdots\,, \vec{a}_n\,,$$

ou seja, se eles são L.D. ou L.I. em $\underline{V^3}$.

Passaremos a seguir a tratar dessa relação.

Começaremos pela:

Proposição 3.6.1 *Sejam* $\vec{a}, \vec{b}$ *vetores de* V^3.

Os vetores $\vec{a}\,, \vec{b} \in V^3$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, existe* $\underline{\alpha}$, *número real, tal que ou*

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}\,.$$

Demonstração:

Da Definição (3.6.1) item 2., temos que os vetores $\vec{a}\,, \vec{b} \in V^3$ são L.D. em $\underline{V^3}$ se, e somente se,

$$\vec{a} \parallel \vec{b}\,.$$

Logo, da Proposição (3.4.2) segue, a conclusão o resultado, completando a demonstração do mesmo.

□

Observação 3.6.3

1. *A Proposição (3.6.1) acima, nos diz que os vetores* $\vec{a}\,, \vec{b} \in V^3$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, um dos vetores é combinação linear do outro (no caso, múltiplo do outro).*

2. *Um outro modo de ler a Proposição (3.6.1) acima é a seguinte: os vetores* $\vec{a}\,, \vec{b} \in V^3$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, existe* $\underline{\alpha}$, *número real, tal ou*

$$\vec{O} = \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} - \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{O} = -\alpha \cdot \vec{a} + \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{b}\,,$$

ou seja, o vetor nulo pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, *com coeficientes* **não todos nulos** *(na igualdade à esquerda, temos que o coeficiente do vetor* $\underline{\vec{a}}$ *é igual a* $1 \neq 0$ *e na igualdade à direita, temos que o coeficiente do vetor* $\underline{\vec{b}}$ *é igual a* $1 \neq 0$*).*

Para um conjunto com mais vetores temos uma situação análoga, a saber:

Proposição 3.6.2 *Sejam* $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \cdots\,, \vec{a}_n$ *vetores de* $\underline{V^3}$, *com* $\underline{n \geq 2}$ *fixado.*

Os vetores

$$\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \cdots\,, \vec{a}_n \quad \text{são L.D. em } \underline{V^3}$$

se, e somente se, um dos vetores da lista acima, pode ser escrito como combinação linear dos restantes, isto, é, existe um vetor $\underline{\vec{a}_i}$, *para algum* $i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, *de modo que*

$$\vec{a}_i = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n\,,$$

onde

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\alpha_{i-1}\,,\alpha_{i+1}\,,\cdots\,,\alpha_n\in\mathbb{R}\,.$$

Demonstração:

A demonstração do caso $\underline{n=2}$ é a Proposição (3.6.1) acima.

Passemos a demonstração do caso $\underline{n=3}$:

Suponhamos que os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\in V^3$ são vetores L.D. em $\underline{V^3}$, ou seja, são paralelos a um mesmo plano.

Dividiremos a demonstração deste caso em duas situações, a saber:

- se dois dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\in V^3$ são vetores L.D. em $\underline{V^3}$.
- se quaisquer dois dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\in V^3$ são vetores L.I. em $\underline{V^3}$.

Suponhamos que dois dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\in V^3$ são vetores L.D. em $\underline{V^3}$.

Podemos supor, sem perdade de genralidade, que os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\in V^3$ são L.D. em $\underline{V^3}$, bstando reindexar a lista.

Com isto, da Proposição (3.6.1) acima, segue que

$$\text{ou}\quad \vec{a}_1=\alpha\cdot\vec{a}_2\quad\text{ou}\quad \vec{a}_2=\alpha\cdot\vec{a}_1\,,$$

para algum $\alpha\in\mathbb{R}$.

Como isto, podemos escrever

$$\vec{a}_1=\alpha\cdot\vec{a}_2+0\cdot\vec{a}_3\quad\text{ou}\quad\vec{a}_2=\alpha\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_3\,,$$

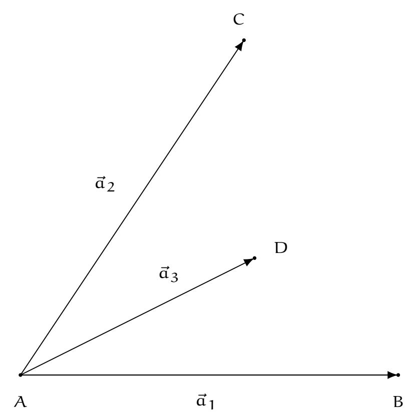
isto é, o vetor $\underline{\vec{a}_1}$, ou o vetor $\underline{\vec{a}_2}$ é combinação linear dos vetores $\vec{a}_2\,,\vec{a}_3$, ou dos vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_3$, respectivamente.

Portanto, um dos vetores da lista é combinção linear dos vetores restantes, , como queríamos mostrar.

Suponhamos agora, que quaisquer dois dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3\in V^3$ são vetores L.I. em $\underline{V^3}$.

Logo, como os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\in V^3$ são L.I. em $\underline{V^3}$, fixado o ponto $\underline{A}$, pela Proposição (3.2.2), podemos encontrar os pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, de modo que os segmento orientados $(A\,,B)$, $(A\,,C)$ e $(A\,,D)$ sejam representantes dos vetores $\underline{\vec{a}_1}$, $\underline{\vec{a}_2}$ e $\underline{\vec{a}_3}$, respectivamente. (*)

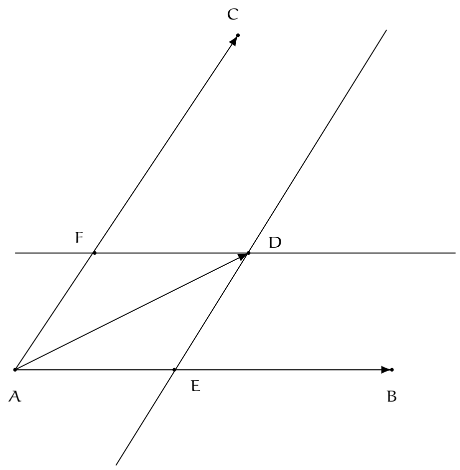
Como os vetores $\underline{\vec{a}_1}$, $\underline{\vec{a}_2}$, $\underline{\vec{a}_3}$ são paralelos a um mesmo plano segue que os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ pertencem a um mesmo plano (veja a ilustração abaixo).



Como os vetores $\underline{\vec{a}_1}$, $\underline{\vec{a}_2}$ não são paralelos (pois são L.I. em $\underline{V^3}$), podemos fazer a seguinte construção:

Consideremos a reta, que denotaremos por $\underline{r}$, que é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto $\underline{D}$ e reta, que denotaremos por $\underline{s}$, paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ pelo ponto $\underline{D}$.

Estas retas encontrarão as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ nos pontos $\underline{E}$ e $\underline{F}$, respectivamente (veja a ilustração abaixo).



Por construção $AEDF$ é um paralelogramo, logo deveremos ter

$$\vec{a}_3 = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} \ .$$

Observemos que os vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos logo, da Proposição (3.4.2), segue que existe um número real, que denotaremos por $\underline{\alpha_1}$, tal que

$$\overrightarrow{AE} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 \, .$$

De modo semelhante, os vetores $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos logo, da Proposição (3.4.2) segue que existe um número real, que denotaremos por $\underline{\alpha_2}$, tal que

$$\overrightarrow{AF} = \alpha_2 \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 \, .$$

Logo

$$\vec{a}_3 = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 \, ,$$

ou seja, o vetor $\underline{\vec{a}_3}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\underline{\vec{a}_1}$ e $\underline{\vec{a}_2}$, como queríamos mostrar.

Reciprocamente, se, por exemplo, o vetor , como queríamos mostrar $\underline{\vec{a}_3}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores , como queríamos mostrar $\underline{\vec{a}_1}$ e , como queríamos mostrar $\underline{\vec{a}_2}$, temos que

$$\vec{a}_3 = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 \, ,$$

para algum

$$\alpha_1 \, , \alpha_2$$

números reais.

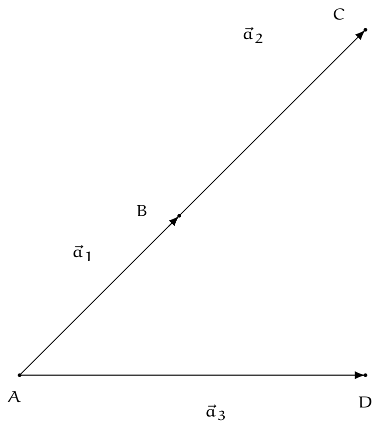
Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3 \neq \vec{O}\,,$$

caso contrário, se um deles for o vetor nulo, pela Observação (3.6.1) item 2. segue que os três serão L.D. em $\underline{V^3}$.

Fixando o ponto $\underline{A}$, da Proposição (3.2.2), podemos encontrar pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ pontos, tais que os segmento orientados $(A\,,B)$, $(A\,,C)$ e $(A\,,D)$ sejam representantes dos vetores $\underline{\vec{a}_1}$, $\underline{\vec{a}_2}$ e $\underline{\vec{a}_3}$, respectivamente.

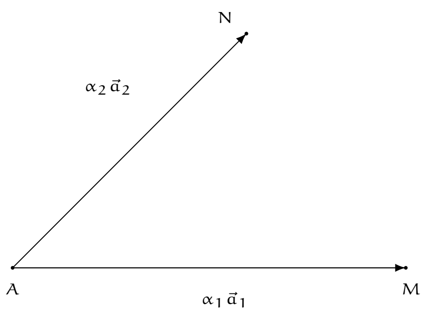
Notemos que, se os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ forem colineares teremos que os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ serão coplanares e assim os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\vec{a}_3 \in V^3$ serão L.D. em $\underline{V^3}$, pois serão paralelos ao plano que contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{D}$. (veja a ilustração abaixo).



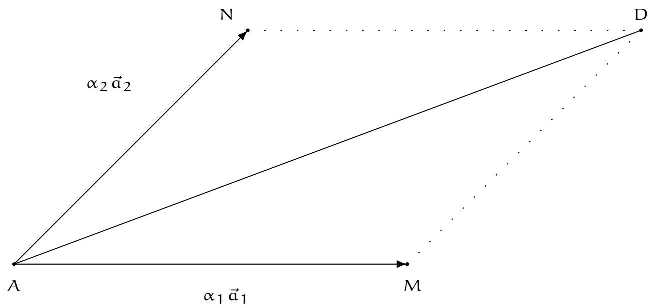
Por outro laod, se os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ forem não forem colineares, temos que estes três pontos determinam um plano.

Sejam $\underline{M}$ e $\underline{N}$ pontos, tais que (veja a ilustração abaixo)

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 = \overrightarrow{AM} \quad \text{e} \quad \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 = \overrightarrow{AN}\,. \tag{3.16}$$



Consideremos o ponto $\underline{D}$, o ponto de intersecção das retas paralelas às retas $\overleftrightarrow{AM}$ e a $\overleftrightarrow{AN}$ pelos pontos $\underline{M}$ e $\underline{N}$, respectivamente (veja a ilustração abaixo).



Como AMDN é um paralelogramo, deveremos ter que

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\overset{(3.16)}{=}\alpha_1\cdot\vec{a}_1+\alpha_2\cdot\vec{a}_2=\vec{a}_3\,,\quad \text{ou seja,}\quad \overrightarrow{AD}=\alpha_1\cdot\vec{a}_1+\alpha_2\cdot\vec{a}_2=\vec{a}_3\,.$$

Portanto

$$\overrightarrow{AD}=\vec{a}_3$$

e os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ são coplanares (estão no plano que contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$) mostrando que os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in V^3$ são L.D. em $\underline{V^3}$, como queríamos mostrar.

Caso $\underline{n \geq 4}$:

Se, para algum $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, o vetor $\underline{\vec{a}_i}$ é combinação linear dos vetores

$$\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\cdots\,,\vec{a}_{i-1}\,,\vec{a}_{i+1}\,,\cdots\,,\vec{a}_n\,,$$

então, como $\underline{n \geq 4}$, segue que os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\cdots\,,\vec{a}_n$ serão L.D. em $\underline{V^3}$.

Reciprocamente, se os vetores $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\cdots\,,\vec{a}_n \in V^3$ serão L.D. em $\underline{V^3}$, mostraremos que um deles pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Dividiremos a demonstração em duas situações, a saber:

- se três dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\cdots\,,\vec{a}_n \in V^3$ são vetores L.D. em $\underline{V^3}$.
- se quaisquer três dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\cdots\,,\vec{a}_n \in V^3$ são vetores L.I. em $\underline{V^3}$.

Suponhamos, inicialmente, que três dos vetores da lista $\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,,\cdots\,,\vec{a}_n \in V^3$ são vetores L.D. em $\underline{V^3}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que os vetores

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \quad \text{são L.D. em } V^3\,,$$

caso contrário, reindexamos a lista de vetores.

Como vimos no caso $\underline{n=3}$, demonstrado anteriormente, temos que um desses três pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

Podemos supor, sem perda de generalidade (a menos de reindexação), que o vetor $\underline{\vec{a}_1}$ possa ser escrito como cominação linear dos vetores $\vec{a}_2\,,\vec{a}_3 \in V^3$, ou seja,

$$\vec{a}_1=\alpha_2\cdot\vec{a}_2+\alpha_3\cdot\vec{a}_3\,,$$

para algum

$$\alpha_1\,,\alpha_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Como isto, temos que

$$\vec{a}_1 = \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_4 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n\,,$$

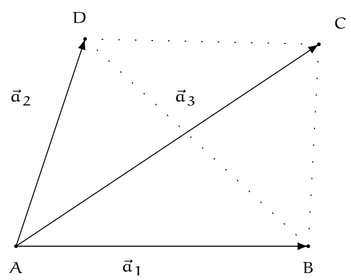
ou seja, o vetor $\underline{\vec{a}_1}$ pode ser escrito como combinação linear dos outros $n-1$ vetores, a saber, dos vetores

$$\vec{a}_2\,, \vec{a}_3\,, \cdots, \vec{a}_n\,.$$

Por outro lado, se quaisquer três dos vetores da lista $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$ são vetores L.I. em $\underline{V^3}$ então os vetores $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{a}_3 \in v^3$ são L.I. em $\underline{V^3}$.

Fixando o ponto $\underline{A}$, da Proposição (3.2.2), podemos encontrar pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$, tais que os segmento orientados $(A\,,B)$, $(A\,,C)$ e $(A\,,D)$ sejam representantes dos vetores $\underline{\vec{a}_1}$, $\underline{\vec{a}_2}$ e $\underline{\vec{a}_3}$, respectivamente. (**)

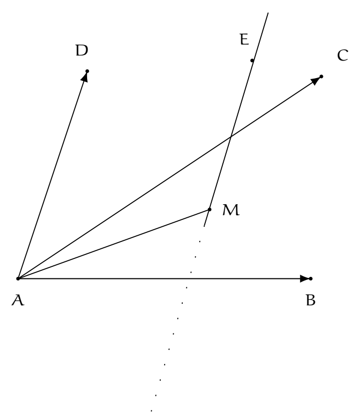
Como os vetores $\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{a}_3 \in V^3$ são L.I. em $\underline{V^3}$, segue que os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$,$\underline{D}$ não são coplanares, ou seja, os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ serão vértices de um tetraedro (veja a ilustração abaixo).



Pela Proposição (3.2.2), podemos encontrar um ponto $\underline{E}$, tal que o segmento orientado $(A\,,E)$ seja um representante do vetor $\underline{\vec{a}_4}$.

Com isto podemos fazer a seguinte construção:

Consideremos pelo ponto $\underline{E}$, uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AD}$, que encontrará o plano que contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ no ponto $\underline{M}$ (veja a ilustração abaixo).



Deste modo, temos que

$$\vec{a}_4 = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}\ . \tag{3.17}$$

Notemos que, por construção, teremeos

$$\overrightarrow{ME} \| \overrightarrow{AD} .$$

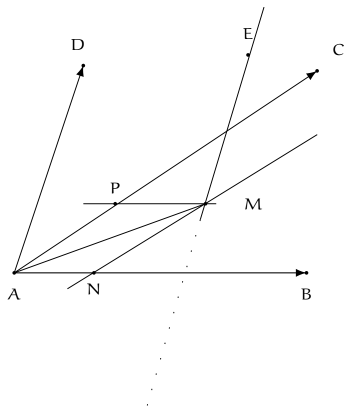
Logo, da Proposição (3.4.2), segue que existe um número real, que denotaremos por $\underline{\alpha_3}$, tal que

$$\overrightarrow{ME} = \alpha_3 \cdot \overrightarrow{AD} = \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 . \tag{3.18}$$

Por outro lado, o ponto $\underline{M}$ pertence ao plano determinado pelos pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$,$\underline{C}$.

Logo podemos agir como no caso $\underline{n = 3}$ (ver (*) na página 63), isto é, traçar retas paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ pelo ponto $\underline{M}$ e suas intersecções com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, e assim, encontrar os pontos $\underline{N}$ e $\underline{P}$, sobre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, de tal modo que (vide ilustração abaixo)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} . \tag{3.19}$$



Observemos que, por construção,

$$\overrightarrow{AN} \| \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP} \| \overrightarrow{AC} .$$

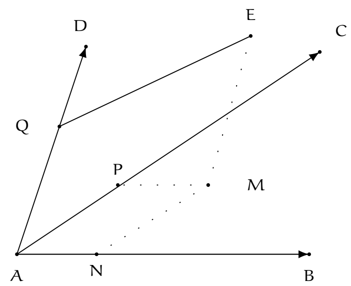
Logo, da Proposição (3.4.2), segue que existem números reais, que inidcaremos por $\underline{\alpha_1}$ e $\underline{\alpha_2}$, tais que

$$\overrightarrow{AN} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AP} = \alpha_2 \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 , \tag{3.20}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{AM} \overset{(3.19)}{=} \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} \overset{(3.20)}{=} \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 . \tag{3.21}$$

Para finalizar, traçamos pelo ponto $\underline{E}$, uma reta paralela ao plano que contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, que interceptará a reta $\overleftrightarrow{AD}$ no ponto $\underline{Q}$ (veja a ilustração abaixo).



Portanto

$$\begin{aligned}
\vec{a}_4 &\overset{(3.17)}{=} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ} \\
&\overset{(3.21)\text{ e }(3.18)}{=} \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 \\
&= \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_5 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n\,,
\end{aligned}$$

isto é, o vetor $\underline{\vec{a}_4}$, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{a}_3\,, \vec{a}_5\,, \cdots\,, \vec{a}_n\,,$$

como queríamos mostrar, completando a demonstração do resultado.

□

Como conseqüência da demonstração do resultado acima temos o:

Corolário 3.6.1 *Sejam* $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c} \in V^3$.

Se os vetores $\vec{a}\,, \vec{b}$ *são L.I. em* $\underline{V^3}$*, mas os vetores* $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$*, então o vetor* $\underline{\vec{c}}$*, pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{b}}$*, isto é, existem escalares*

$$\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$$

tal que

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}\,.$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado é correspondente a demonstração da Proposição (3.6.2) acima, para o caso $\underline{n \geq 3}$ com dois vetores L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a partir de (*), página 63, na demostração da Proposição (3.6.2) acima).

□

Também como conseqüência da demonstração da proposição acima temos o:

Corolário 3.6.2 *Sejam* $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c} \in V^3$.

Se os vetores $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}$ *são L.I. em* $\underline{V^3}$*, então todo vetor* $\vec{u} \in V^3$*, pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}$*, isto é, existem escalares*

$$\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}\,,$$

tal que

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}\,.$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado é correspondente a demonstração da Proposição (3.6.2) acima, para o caso $\underline{n \geq 4}$ com três vetores L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a partir de (**), página 67, na demostração da (3.6.2) acima).

□

5.a aula - 13.03.2014

Temos as seguintes considerações:

Observação 3.6.4

1. *Ainda com relação ao Corolário (3.6.2) acima, veremos mais adiante que os escalares* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *determinados, são os* **únicos** *com a propriedade que*

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}\,.$$

2. *O resultado a seguir, relaciona o fato de um conjunto de vetores ser L.D ou L.I. em* $\underline{V^3}$*, com o fato de podermos escrever o vetor nulo como combinação linear* **não trivial** *(isto é, com nem todos os coeficientes nulos) dos vetores em questão.*

Proposição 3.6.3 *Sejam* $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$.
Os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ *serão L.D. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, existem escalares*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$

não todos nulos, tais que

$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n\,,$$

ou seja, o vetor nulo pode ser escrito, como combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ *de, pelo menos, dois modos diferentes.*

Demonstração:
Suponhamos que os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ são L.D. em $\underline{V^3}$.
Se $n = 1$, teremos

$$\vec{a}_1 = \vec{O}\,, \quad \text{assim} \quad \vec{O} = 1 \cdot \vec{O} = 1 \cdot \vec{a}_1\,,$$

como queríamos mostrar.
Se $n \geq 2$, da Proposição (3.6.2), segue que um dos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$, pode ser escrito como combinação linear dos restantes, isto é, existe $\underline{\vec{a}_i}$, tal que

$$\vec{a}_i = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n\,,$$

para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, onde

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\vec{O} &= -\vec{a}_i + \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n \\ &= \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + (-1) \cdot \vec{a}_i + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n\,,\end{aligned}$$

isto é, conseguimos escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$, com nem todos os coeficientes nulos (o coeficiente de $\vec{a}_i$ é $-1 \neq 0$), como queríamos mostrar.
Por outro lado, se o vetor nulo pode ser como combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$, com nem todos os coeficientes nulos, então existem

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$

tais que existe, pelo menos um,

$$\alpha_i \neq 0 .$$

Assim

$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_i \cdot \vec{a}_i + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n ,$$

ou seja,

$$-\alpha_i \cdot \vec{a}_i = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n .$$

Como $\alpha_i \neq 0$, teremos

$$\vec{a}_i = \frac{\alpha_1}{-\alpha_i} \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i-1}}{-\alpha_i} \cdot \vec{a}_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{-\alpha_i} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_i} \cdot \vec{a}_n ,$$

ou seja, um dos vetores $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \cdots , \vec{a}_n$, é combinação linear dos restantes e assim, da Proposição (3.6.2) segue que os vetores $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \cdots , \vec{a}_n$ são L.D. em $\underline{V}^3$, como queríamos mostrar. □

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 3.6.3

1. *Seja* $\vec{a} \in V^3$.

   Então os vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{-\vec{a}}$ *são L.D. em* $\underline{V}^3$.

   De fato, pois

   $$1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot (-\vec{a}) = \vec{O} ,$$

   ou seja, podemos escrever o vetor nulo como uma combinação linear dos vetores $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{-\vec{a}}$ *com coeficientes não todos nulos (no caso nenhum dos coeficientes é igual a zero).*

2. *Sejam* $\vec{a} , \vec{b} \in V^3$.

   Então os vetores $\vec{a} , \vec{b} , \left(5 \cdot \vec{a} - 6 \cdot \vec{b}\right)$ *são L.D. em* $\underline{V}^3$.

   De fato, pois

   $$\vec{O} = (-5) \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 1 \cdot (5 \cdot \vec{a} - 6 \cdot \vec{b}) ,$$

   ou seja, podemos escrever o vetor nulo como uma combinação linear dos vetores $\vec{a} , \vec{b} , \left(5 \cdot \vec{a} - 6 \cdot \vec{b}\right)$*, com coeficientes não todos nulos (no caso nenhum dos coeficientes é igual a zero).*

3. *Sejam* $\vec{a} , \vec{b} \in V^3$.

   Os vetores $\vec{O} , \vec{a} , \vec{b}$ *são L.D. em* $\underline{V}^3$.

   De fato, pois

   $$\vec{O} = \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{O} + 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} ,$$

   ou seja, podemos escrever o vetor nulo como uma combinação linear dos vetores $\vec{O}\, \vec{a} , \vec{b}$ *com coeficientes não todos nulos (no caso só um deles é, necessariamente, não zero).*

Este último exemplo nos motiva o seguinte resultado:

Corolário 3.6.3 *Sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$. Então os vetores $\vec{O}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ são L.D. em $\underline{V^3}$.*

Demonstração:

A demonstração é semelhante ao que fizemos no Exemplo (3.6.3) item 3. acima.

Basta verificar que

$$\vec{O} = 1 \cdot \vec{O} + 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n,$$

ou seja, podemos escrever o vetor nulo como uma combinação linear dos vetores

$$\vec{O}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n,$$

com coeficientes não todos nulos (no caso só um deles é, necessariamente, não zero), completando a demonstração do resulado.

□

De modo análogo temos uma condição necessária e suficiente para que uma coleção de vetores seja L.I. em $\underline{V^3}$, a saber:

Proposição 3.6.4 *Sejam $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ em V^3.*

Os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ são L.I. em $\underline{V^3}$ se, e somente se, a única combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ que dá o vetor nulo é aquela que tem todos os escalares (coeficientes), necessariamente, iguais a zero.

Demonstração:

Suponhamos que os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ são L.I. em $\underline{V^3}$.

Devemos mostar que se

$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$$

então deveremos , necessariamente, ter

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

De fato, suponhamos, por abusro, que um dos $\underline{\alpha_i}$, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, pudesse ser diferente de zero.

Da Proposição (3.6.3), os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ seriam L.D. em $\underline{V^3}$, o que não pode acontecer por hipótese.

Reciprocamente, se

$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n,$$

implicar que a única possibilidade é

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

então os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ não podem ser L.D. em $\underline{V^3}$ pois, se fossem, existiriam escalares não todos nulos satisfazendo a identidade acima, o que não pode ocorrer, por hipótese, completando a demonstraão do resultado.

□

Observação 3.6.5 *Sejam* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^3$.

1. *A Proposição (3.6.3) nos diz que, os vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, existem escalares não todos nulos,*
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$
tais que
$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n .$$

2. *A Proposição (3.6.2) nos diz que, se um conjunto finito de de vetores é L.D. em* $\underline{V^3}$, *podemos retirar, pelo menos, um deles do conjunto dado, que o conjunto gerado pelos restantes será igual ao conjunto gerado por todos.*

3. *A Proposição (3.6.4) nos diz que, os vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ *são L.I. em* $\underline{V^3}$ *se, e somente se, a* **<u>única</u>** *possibilidade para que*
$$\vec{O} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$$
é
$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 .$$

4. *Se um conjunto finito de vetores é L.I. em* $\underline{V^3}$, **<u>não</u>** *podemos retirar um deles do conjunto, de modo que o conjunto gerado pelos restantes continue igual ao conjunto gerado por todos.*

5. *Os itens 2. e 4. desta Observação, estão diretamente relacionadas com as questões que colocamos no início desta seção.*

   Isto ficará mais claro a seguir.

Para V^2 temos algo parecido (porém diferente), cujas propriedades serão enumeradas na observação abaixo e cujas demonstrações são semelhantes ao caso V^3 e suas redações serão deixadas como exercício para o leitor.

Observação 3.6.6

1. *Começaremos introduzindo a definição de dependência linear em* $\underline{V^2}$.

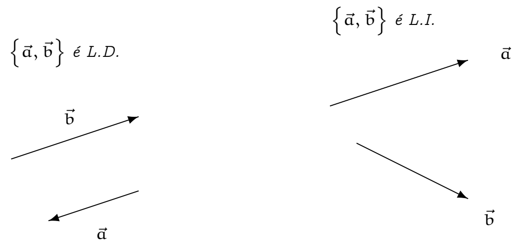
   (a) *Um vetor* $\vec{a} \in V^2$ *será* **<u>linearmente dependente em V^2</u>**, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^2}$, *se*
   $$\vec{a} = \vec{O} .$$
   Caso contrário, o vetor $\underline{\vec{a}}$ *será dito* **<u>linearmente independente em V^2</u>**, *ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^2}$, *(ou seja, se* $\vec{a} \neq \vec{O}$*).*
   Diremos que o conjunto $\{\vec{a}\}$ *é* **<u>linearmente dependente em V^2</u>**, *ou abreviadamente L.D. em* V^2 *se*
   $$\vec{a} = \vec{O} .$$
   Caso contrário, diremos que o conjunto $\{\vec{a}\}$ *é* **<u>linearmente independente em</u>** $\underline{V^2}$, *ou abreviadamente L.I. em* V^2 *(ou seja, se* $\vec{a} \neq \vec{O}$*).*

(b) *Os vetores* $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^2$ *serão ditos* **linearmente dependente em $\underline{V^2}$**, *ou abreviadamente por L.D. em* $\underline{V^2}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *forem paralelos (isto é, têm a mesma direção).*

Caso contrário, os vetores $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *serão ditos* **linearmente independente em $\underline{V^2}$**, *, ou abreviadamente L.I. em* $\underline{V^2}$ *(ou seja, os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *não são paralelos).*

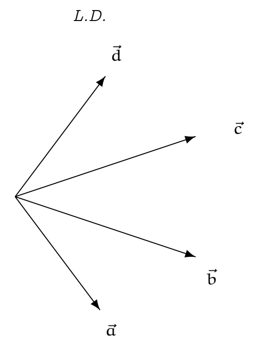
Diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ *é* **linearmente dependente em $\underline{V^2}$**, *ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^2}$, *se os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$ *são paralelos.*

Caso contrário, diremos que o conjunto $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ *é* **linearmente independente em V^2**, *ou abreviadamente L.I., em* V^2 *(ou seja, se os vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *não são paralelos).*



(c) *Os vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n \in V^2$ *são* **linearmente dependentes em $\underline{V^2}$**, *, ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^2}$, *se* $n \geq 3$.

Diremos que o conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \cdots, \vec{a}_n\}$ *é* **linearmente dependente em $\underline{V^2}$**, *, ou abreviadamente L.D. em* $\underline{V^2}$, *se* $n \geq 3$.



2. *Podemos mostrar que, o conjunto de vetores* $\left\{\vec{O}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\right\}$ *é L.D. em* $\underline{V^2}$, *para qualquer coleção de vetores* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, , \cdots, \vec{a}_n \in V^2$ *(veja a Observação* (3.6.1) *item 2.).*

3. *Podemos definir combinação linear para vetores de* $\underline{V^2}$, *do mesmo modo como fizemos para vetores de* $\underline{V^3}$ *(veja Definição* (3.6.2)*).*

4. *Podemos provar que (veja a Proposição (3.6.1)): sejam $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$.*

   Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ são L.D. em $\underline{V^2}$ se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que ou

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} .$$

5. *Temos também que: (veja Proposição (3.6.2)) sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in V^2$, com $n \geq 2$ fixado.*

   Os vetores

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \quad \text{são L.D. em } \underline{V^2}$$

   se, e somente se, um dos vetores da lista pode ser escrito como combinação linear dos restantes, isto, é, existe um vetor $\underline{\vec{a}_i}$, para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$, de modo que

$$\vec{a}_i = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots \alpha_{i-1} \cdot \vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n ,$$

   onde

$$\alpha_1, \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} .$$

6. *Podemos provar que (veja o Corolário (3.6.1)) se $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$ são tais que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ são L.I. em $\underline{V^2}$, então o vetor $\underline{\vec{c}}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$, isto é, existem escalares*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} ,$$

   tal que

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} .$$

7. *Temos também que (veja a Proposição (3.6.4)): sejam $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in V^2$.*

   Os vetores $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ são L.I. em $\underline{V^2}$ se, e somente se, a única combinação linear dos vetores $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ que dá o vetor nulo é aquela que tem todos os escalares (coeficientes), necessariamente, iguais a zero.

Na seção a seguir voltaremos a tratar de V^3 e, mais adiante, voltaremos a fazer as correspondentes considerações sobre V^2.

3.7 Base de $\underline{V^3}$

Começaremos pela:

Definição 3.7.1 *A uma tripla ordenada formada por três vetores linearmente independentes, isto é,*

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq V^3$$

é L.I. em $\underline{V^3}$, daremos o nome de **<u>base ou base ordenada</u> de $\underline{V^3}$**, *que será indicada por:*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad \text{ou} \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}_{\mathcal{E}} .$$

Temos as seguintes observações:

Observação 3.7.1

1. *Se* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *é uma base (ordenada) de* $\underline{V^3}$, *então, do Corolário (3.6.2), segue que cada vetor* $\vec{u} \in V^3$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores*

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,$$

isto é, existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 .$$

2. *Na situação acima, os escalares*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

são **unicamente** *determinados, ou seja, se*

$$\vec{u} = \beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2 + \beta_3 \cdot \vec{e}_3,$$

com

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R},$$

deveremos ter

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 \quad e \quad \beta_3 = \alpha_3 .$$

De fato, como

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 \quad e \quad \vec{u} = \beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2 + \beta_3 \cdot \vec{e}_3$$

então, subtraindo uma identidade da outra obteremos,

$$\begin{aligned} \vec{O} = \vec{u} - \vec{u} &= (\beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2 + \beta_3 \cdot \vec{e}_3) - (\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \cdot \vec{e}_1 + (\beta_2 - \alpha_2) \cdot \vec{e}_2 + (\beta_3 - \alpha_3) \cdot \vec{e}_3 . \end{aligned}$$

Mas os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *são L.I em* $\underline{V^3}$ *(pois formam uma base (ordenada) de* V^3*).*

Logo deveremos, necessariamente, ter:

$$\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \beta_3 - \alpha_3 = 0, \quad ou\ seja, \quad \beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2 \quad e \quad \beta_3 = \alpha_3,$$

como queríamos demonstrar.

3. **Conclusão:** *fixada uma base (ordenada)* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *de* V^3, *a cada vetor* $\vec{u} \in V^3$, *podemos associar uma terna ordenada*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3,$$

formada pelos coeficientes da combinação linear obtida quando escrevemos o vetor $\vec{u}$ *em termos dos vetores da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$, *de* $\underline{V^3}$.

Com isto temos a:

Definição 3.7.2 *À terna ordenada*

$$(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3\,,$$

obtida acima, daremos no nome de **coordenadas** *do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$ *e escreveremos (abuso da notação)*

$$\vec{u} = (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3)_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^3\,.$$

À matriz coluna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

daremos o nome de **matriz das coordenadas** *do vetor* $\underline{\vec{u}}$ *em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$ *e será denotada por* $(\vec{u})_{\mathcal{E}}$*, ou seja,*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Observação 3.7.2

1. *É fundamental a ordem dos escalares*

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3 \in \mathbb{R}\,,$$

para encontrarmos as coordenadas ou matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base (ordenada) fixada $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$*, ou seja, a ordem como esses escalares aparecem é determinada pela ordem como escrevemos o vetor dado em termos dos vetores da base (ordenada) de* $\underline{V}^3$ *dada (na ordem que estes últimos aparecem na base (ordenada) de* $\underline{V}^3$*.*

Por exemplo, fixada uma base (ordenada) de $\underline{V}^3$*, que indicaremos por*

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\;,$$

se um vetor $\underline{\vec{u}}$ *é dado por*

$$\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 1\cdot\vec{e}_1 + (-1)\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3\,, \tag{3.22}$$

então as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$*, serão dadas por:*

$$\vec{u} = (1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}}\,.$$

A ordem como aparecem os vetores da base (ordenada) de $\underline{V}^3$*, na combinação linear (3.22) acima, é definida pela ordem como os vetores aparecem na base (ordenada): 1.o o vetor* $\underline{\vec{e}_1}$*, depois o vetor* $\underline{\vec{e}_2}$ *e por último o vetor* $\underline{\vec{e}_3}$*.*

Sua matriz das coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, será dada por:

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Na situação acima, o vetor $\underline{\vec{v}}$, cuja coordenadas são dadas por:*

$$\vec{v} = (-1\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\,,$$

   em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, será o vetor

$$\vec{v} = (-1)\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,.$$

3. *Quando não houver dúvidas em relação à base (ordenada) de $\underline{V}^3$ que fixamos, escreveremos apenas*

$$\vec{u} = (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3) \quad ou \quad (\vec{u}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

4. *Veremos a seguir que, fixada uma base (ordenada) de $\underline{V}^3$, as operações com vetores podem ser feitas diretamente com suas coordenadas (ou matriz das coordenadas), facilitando muito o trabalho que envolvem esses cálculos.*

   Na verdade passaremos a fazer Geometria Analítica, ou seja, cálculos numéricos que, em muitas situações, nos levará a resultados geométricos.

Para os próximos resultados fixaremos uma base (ordenada) $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$ de V^3.

Proposição 3.7.1 *Temos que*

$$\vec{O} = (0\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\,.$$

Em particular,

$$(\vec{O})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração:

De fato, pois

$$\vec{O} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3\,,$$

logo, da Definição (3.7.2), segue que

$$\vec{O} = (0\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}$$

e assim, teremos

$$(\vec{O})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Para a adição de vetores utilizando as coordenadas dos mesmo temos a:

Proposição 3.7.2 *Suponhamos que as coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, são dadas por*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}},$$

respectivamente.

Então

$$\vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)_{\mathcal{E}}, \tag{3.23}$$

isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u} + \vec{v}}$ em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, são obtidas somando-se as coorrespondentes coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, a saber:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}} + (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)_{\mathcal{E}}.$$

Ou ainda,

$$(\vec{u} + \vec{v})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

isto é, a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u} + \vec{v}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, é obtida somando-se as matrizes coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, resumidamente,

$$(\vec{u} + \vec{v})_{\mathcal{E}} = (\vec{u})_{\mathcal{E}} + (\vec{v})_{\mathcal{E}}. \tag{3.25}$$

Demonstração:

Basta observar que se

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}},$$

então, da Definição (3.7.2), segue que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{v} = \beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2 + \beta_3 \cdot \vec{e}_3. \tag{3.26}$$

Logo

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &\overset{(3.26)}{=} (\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3) + (\beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2 + \beta_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \cdot \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Logo, da Definição (3.7.2), segue que as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u} + \vec{v}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, , serão dadas por

$$\vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)_{\mathcal{E}},$$

como queríamos mostrar.

Para a matriz das coordenadas dos vetores em questão, temos algo semelhante e sua demonstração será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Para a multiplicação de vetor por escalar, utilizando as coordenadas do mesmo, temos a:

Proposição 3.7.3 *Suponhamos que as coordenadas do vetor $\vec{u} \in V^3$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por*

$$\vec{u} = (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)_{\mathcal{E}}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha\, \alpha_1 , \alpha\, \alpha_2 , \alpha\, \alpha_3)_{\mathcal{E}} \,, \tag{3.27}$$

isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\alpha \cdot \vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são obtidas multiplicando-se as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, pelo número real $\underline{\alpha}$, ou seja:

$$\alpha\, (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)_{\mathcal{E}} = (\alpha\, \alpha_1 , \alpha\, \alpha_2 , \alpha\, \alpha_3)_{\mathcal{E}} \,.$$

Ou ainda

$$(\alpha \cdot \vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha\, \alpha_1 \\ \alpha\, \alpha_2 \\ \alpha\, \alpha_3 \end{pmatrix} , \tag{3.28}$$

isto é, a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\alpha \cdot \vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, é obtida multiplicando-se a matriz coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, pelo número real $\underline{\alpha}$, resumidamente,

$$(\alpha \cdot \vec{u})_{\mathcal{E}} = \alpha\, (\vec{u})_{\mathcal{E}} \,. \tag{3.29}$$

Demonstração:

De fati, como

$$\vec{u} = (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)_{\mathcal{E}} \,,$$

segue, da Definição (3.7.2), que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 \,. \tag{3.30}$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \vec{u} &\overset{(3.30)}{=} \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= (\alpha\, \alpha_1) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha\, \alpha_2) \cdot \vec{e}_2 + (\alpha\, \alpha_3) \cdot \vec{e}_3 \,, \end{aligned}$$

isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\alpha \cdot \vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, serão dadas por:

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha\, \alpha_1 , \alpha\, \alpha_2 , \alpha\, \alpha_3)_{\mathcal{E}} \,,$$

como queríamos mostrar.

Para a matriz das coordenadas dos vetores em questão, temos algo semelhante e sua demonstração será deixado como exercício para o leitor. □

Exemplo 3.7.1 *Seja $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ uma base (ordenada) de $\underline{V}^3$ e consideremos*

$$\vec{u} \doteq \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \quad e \quad \vec{v} \doteq \vec{e}_2 - 4\cdot\vec{e}_3\,. \tag{3.31}$$

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas dos vetores:

$$\vec{u}\,, \quad \vec{v}\,, \quad \vec{u}+\vec{v} \quad e \quad -4\cdot\vec{u}\,,$$

em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$.

Resolução:

De (3.31), segue que as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, serão dadas por :

$$\vec{u} = (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{v} = (0\,,1\,,-4)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.32}$$

Assim, as matrizes das coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$ serão dadas por :

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (\vec{v})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Logo, da Proposição (3.7.2), segue que

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &\overset{(3.32)}{=} (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}} + (0\,,1\,,-4)_{\mathcal{E}} \\ &\overset{(3.23)}{=} (1+0\,,0+1\,,-1-5)_{\mathcal{E}} = (1\,,1\,,-5)_{\mathcal{E}}\,, \end{aligned} \tag{3.34}$$

isto é, da Definição (3.7.2), teremos que:

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &\overset{(3.34)}{=} 1\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + (-5)\cdot\vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\cdot\vec{e}_3\,. \end{aligned}$$

Do ponto de vista matricial, teremos:

$$\begin{aligned} (\vec{u}+\vec{v})_{\mathcal{E}} &\overset{(3.25)}{=} (\vec{u})_{\mathcal{E}} + (\vec{v})_{\mathcal{E}} \\ &\overset{(3.33)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+1 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos também que, da Proposição (3.7.3), segue que

$$\begin{aligned} -4\cdot\vec{u} &\overset{(3.33)}{=} -4\,(1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}} \overset{(3.27)}{=} ((-4).1\,,(-4).0\,,(-4).(-1))_{\mathcal{E}} \\ &= (-4\,,0\,,4)_{\mathcal{E}}\,, \end{aligned}$$

isto é, da Definição (3.7.2), teremos

$$-4\cdot\vec{u} = (-4)\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 4\cdot\vec{e}_3 = -4\cdot\vec{e}_1 + 4\cdot\vec{e}_3\,.$$

Do ponto de vista matricial, da Proposição (3.7.3), teremos:

$$
\begin{aligned}
(-4 \cdot \vec{u})_{\mathcal{E}} = -4\,(\vec{u})_{\mathcal{E}} &= -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4).1 \\ (-4).0 \\ (-4).(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De modo semelhante, das Proposições e (3.7.2), (3.7.3) e de (3.32), segue que

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} &= 3\,(1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}} + (-5)\,(0\,,1\,,-4)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.23)\text{ e }(3.25)}{=} (3\,,-5\,,17)_{\mathcal{E}}\,,
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

isto é, da Definição (3.7.2), teremos

$$
\begin{aligned}
3 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} &\overset{(3.35)}{=} 3 \cdot \vec{e}_1 + (-5) \cdot \vec{e}_2 + 17 \cdot \vec{e}_3 \\
&= 3 \cdot \vec{e}_1 - 5 \cdot \vec{e}_2 + 17 \cdot \vec{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

Do ponto de vista matricial, das Proposições e (3.7.2), (3.7.3) e de (3.32) temos:

$$
\begin{aligned}
(3 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v})_{\mathcal{E}} &\overset{(3.25)\text{ e }(3.29)}{=} 3\,(\vec{u})_{\mathcal{E}} - 5\,(\vec{v})_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.33)}{=} 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 + (-5).0 \\ 3.0 + (-5).1 \\ 3.(-1) + (-5).(-4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 17 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

6.a aula - 18.03.2014

Podemos estudar a dependência ou independência linear de vetores de $\underline{V}^3$ utilizando-se suas coordenadas, em relação a uma base (ordenada) fixada de $\underline{V}^3$, como veremos na:

Proposição 3.7.4 *Suponhamos que as coordenadas dos vetores $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^3$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, sejam dadas por*

$$
\vec{u} = (\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{u} = (\beta_1\,,\beta_2\,,\beta_3)_{\mathcal{E}}\,.
$$

Então os vetores $\vec{u}\,,\vec{v}$ são L.D. em $\underline{V}^3$ se, e somente se, os números reais

$$
\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3 \quad e \quad \beta_1\,,\beta_2\,,\beta_3
$$

são proporcionais, isto é, existe um número real $\underline{\alpha}$, tal que ou

$$
\alpha_1 = \alpha\,\beta_1\,, \quad \alpha_2 = \alpha\,\beta_2 \quad e \quad \alpha_3 = \alpha\,\beta_3
$$

ou

$$
\beta_1 = \alpha\,\alpha_1\,, \quad \beta_2 = \alpha\,\alpha_2 \quad e \quad \beta_3 = \alpha\,\alpha_3\,.
$$

Demonstração:

Da Proposição (3.6.1), notemos que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são L.D. em $\underline{V}^3$ se, e somente se, existe um número real $\underline{\alpha}$, tal que

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}.$$

Logo, da Proposicão (3.7.3), segue que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}} = \underbrace{\alpha\,(\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}}}_{\overset{(3.27)}{=}(\alpha\,\beta_1, \alpha\,\beta_2, \alpha\,\beta_3)_{\mathcal{E}}} \quad \text{ou} \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}} = \underbrace{\alpha\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}}}_{\overset{(3.27)}{=}(\alpha\,\alpha_1, \alpha\,\alpha_2, \alpha\,\alpha_3)_{\mathcal{E}}},$$

ou seja,

$$\alpha_1 = \alpha\,\beta_1, \quad \alpha_2 = \alpha\,\beta_2 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \alpha\,\beta_3$$

ou

$$\beta_1 = \alpha\,\alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha\,\alpha_2 \quad \text{e} \quad \beta_3 = \alpha\,\alpha_3,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Observação 3.7.3

1. *Na situação da Proposição (3.7.4) acima, se*

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \neq 0,$$

então os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são L.D. em $\underline{V}^3$ se, e somente se,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}. \tag{3.36}$$

Vale uma relação semelhante, para o caso que

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \neq 0.$$

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

2. *Como consequência da Proposição (3.7.4) acima, segue que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ se, e somente se, os números reais*

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \quad e \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

<u>**não**</u> *são proporcionais.*

Para o estudo da dependência linear de três vetores utilizando-se suas coordenadas temos a:

Proposição 3.7.5 *Suponhamos que as coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, sejam dadas por:*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{E}}.$$

Então os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ se , e somente se,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.37}$$

isto é, se o determinante da matriz quadrada, de ordem três, onde cada linha é formada pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, for não nulo.

Demonstração:

De fato, da Proposição (3.6.4), temos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ se, e somente se,

$$a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{O},$$

implicará que a única solução deverá ser

$$a = b = c = 0.$$

Da Proposição (3.7.2), isto é equivalente a que única solução para

$$a\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}} + b\,(\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}} + c\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{E}} = (0, 0, 0)_{\mathcal{E}},$$

é

$$a = b = c = 0.$$

Da Proposição (3.7.3), isto será equivalente, que única solução para

$$(a\,\alpha_1 + b\,\beta_1 + c\,\gamma_1, a\,\alpha_2 + b\,\beta_2 + c\,\gamma_2, a\,\alpha_3 + b\,\beta_3 + c\,\gamma_3)_{\mathcal{E}} = (0, 0, 0)_{\mathcal{E}}$$

é

$$a = b = c = 0.$$

Logo os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ se, e somente se, a única solução do sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1\, a + \beta_1\, b + \gamma_1\, c = 0 \\ \alpha_2\, a + \beta_2 b + \gamma_2\, c = 0 \\ \alpha_3\, a + \beta_3\, b + \gamma_3\, c = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é a solução trivial isto é,

$$a = b = c = 0, \quad \text{ou seja, a matriz:} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto implicará que a matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

deverá ter determinante diferente de zero (veja o Teorema (B.5.1) do Apêndice (B)) das notas sobre matrizes e sistemas lineares, como queríamos demonstrar.

$\square$

Como conseqüência temos o:

Corolário 3.7.1 *Suponhamos que as coordenadas dos vetores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$*, sejam dadas por:*

$$\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathcal{E}}.$$

Então os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *são L.D. em* $\underline{V}^3$ *se , e somente se,*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.38}$$

isto é, se o determinante da matriz quadrada, de ordem três, onde cada linha da mesma é formada pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$*, for nulo.*

Demonstração:

A demonstração é semelhante a da Proposição (3.7.5) acima e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 3.7.2 *Seja* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *uma base (ordenada) de* $\underline{V}^3$*.*

Suponhamos que as coordenadas dos vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e} \in V^3$*, em relação à base* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^3$*, sejam dadas por:*

$$\vec{a} = (1, 2, -1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{b} = (-8, -16, 8)_{\mathcal{E}} \tag{3.39}$$

$$\vec{c} = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{d} = (1, 1, 0)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{d} = (1, 0, 0)_{\mathcal{E}}. \tag{3.40}$$

Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ *são L.D. em* $\underline{V}^3$ *e os vetores* $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ *são L.I. em* $\underline{V}^3$*.*

Resolução:

<u>Para os vetores $\vec{a}, \vec{b}$:</u>

Notemos que

$$-8 \cdot \vec{a} \overset{(3.39)}{=} -8\,(1, 2, -1)_{\mathcal{E}} \overset{(3.27)}{=} ((-8).1, (-8).2, (-8).(-1))_{\mathcal{E}}$$
$$= (-8, -16, 8)_{\mathcal{E}}.$$

Logo, da Proposição (3.7.4), segue que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ serão L.D. em $\underline{V}^3$.

Para os vetores $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$:
Notemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

assim, da Proposição (3.7.5) e de (3.40), teremos que os vetores $\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ serão L.I. em $\underline{V}^3$.

□

Podemos fazer uma estudo semelhante para $\underline{V}^2$, a saber, introduzir o conceito de base (ordenada) de $\underline{V}^2$, coordenadas de um vetor de $\underline{V}^2$, em relação a uma base (ordenada) fixada de $\underline{V}^2$, matriz das coordenadas de um vetor de $\underline{V}^2$, em relação a uma base (ordenada) fixada de $\underline{V}^2$ e resultados análogos aos que obtivemos no caso de$\underline{V}^3$.

Na observação a seguir mencionaremos estes conceitos e/ou resultados e deixaremos as correspondentes demonstrações como exercício para o leitor.

Observação 3.7.4

1. *A uma dupla ordenada formada por dois vetores linearmente independentes, isto é,* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subseteq V^2$ *é L.I. em* $\underline{V}^2$*, daremos o nome de* **base ou base ordenada de** $\underline{V}^2$*, que será indicada por:*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad ou \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2)_{\mathcal{E}} \quad ou \quad \mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \quad ou \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}_{\mathcal{E}}\,.$$

2. *Se* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *é uma base (ordenada) de* $\underline{V}^2$*, então segue que cada vetor* $\vec{u} \in V^2$*, pode ser escrito como combinação linear dos vetores* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$*, isto é, existem escalares*

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2\,.$$

Na situação acima, os escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, são* **unicamente** *determinados, ou seja, se*

$$\vec{u} = \beta_1 \cdot \vec{e}_1 + \beta_2 \cdot \vec{e}_2\,,$$

com $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$*, deveremos ter*

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad e \quad \beta_2 = \alpha_2\,.$$

Conclusão: *fixada uma base (ordenada)* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *de* $\underline{V}^2$*, a cada vetor* $\vec{u} \in V^2$*, podemos associar um par ordenado*

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2,$$

formado pelos coeficientes da combinação linear obtida quando escrevemos o vetor $\underline{\vec{u}}$ *em termo dos vetores da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*.*

3. *Ao par ordenado*
$$(\alpha_1\,,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2\,,$$
obtida acima, daremos no nome de **coordenadas** *do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$ *e escreveremos (abuso da notação)*
$$\vec{u}=(\alpha_1\,,\alpha_2)_{\mathcal{E}}\in\mathbb{R}^2\,.$$
À matriz coluna
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},$$
daremos o nome de **matriz das coordenadas** *do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*, e será denotada por* $(\vec{u})_{\mathcal{E}}$*, ou seja,*
$$(\vec{u})_{\mathcal{E}}\doteq\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

4. *É fundamental a ordem dos escalares*
$$\alpha_1\,,\alpha_2\in\mathbb{R}$$
para encontrarmos as coordenadas ou matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base (ordenada) fixada $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*, ou seja a ordem como esses escalares aparecem é determinada pela ordem como escrevemos o vetor dado em termos dos vetores da base (ordenada) dada (na ordem que estes últimos aparecem na base (ordenada) de* $\underline{V}^2$*).*

5. *Temos que*
$$\vec{O}=(0\,,0)_{\mathcal{E}}\,.$$

6. *Suponhamos que as coordenadas dos vetores* $\vec{u}\,\vec{v}\in V^2$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*, são dadas por:*
$$\vec{u}=(\alpha_1\,,\alpha_2)_{\mathcal{E}}\quad e\quad \vec{v}=(\beta_1\,,\beta_2)_{\mathcal{E}}\,,\tag{3.41}$$
respectivamente.

Então
$$\vec{u}+\vec{v}=(\alpha_1+\beta_1\,,\alpha_2+\beta_2)_{\mathcal{E}}\,,$$
isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}+\vec{v}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*, são obtidas somando-se as coorrespondentes coordenadas dos vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V}^2$*, a saber:*
$$(\alpha_1\,,\alpha_2)_{\mathcal{E}}+(\beta_1\,,\beta_2)_{\mathcal{E}}=(\alpha_1+\beta_1\,,\alpha_2+\beta_2)_{\mathcal{E}}\,.$$
Ou ainda,
$$(\vec{u}+\vec{v})_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix},$$

isto é, a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}+\vec{v}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, é obtida somando-se as matrizes coordenadas dos vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, resumidamente,*

$$(\vec{u}+\vec{v})_{\mathcal{E}} = (\vec{u})_{\mathcal{E}} + (\vec{v})_{\mathcal{E}} \,.$$

7. *Suponhamos que as coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, são dadas por*

$$\vec{u} = (\alpha_1 \,, \alpha_2)_{\mathcal{E}}$$

e $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Então

$$\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha\, \alpha_1 \,, \alpha\, \alpha_2)_{\mathcal{E}} \,,$$

isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\alpha \cdot \vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, são obtidas multiplicando-se as coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, pelo número real* $\underline{\alpha}$*, ou seja:*

$$\alpha\,(\alpha_1 \,, \alpha_2)_{\mathcal{E}} = (\alpha\, \alpha_1 \,, \alpha\, \alpha_2)_{\mathcal{E}} \,.$$

Ou ainda,

$$(\alpha \cdot \vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha\, \alpha_1 \\ \alpha\, \alpha_2 \end{pmatrix} ,$$

isto é, a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\alpha \cdot \vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, é obtida multiplicando-se a matriz coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, pelo número real* $\underline{\alpha}$*, resumidamente,*

$$(\alpha \cdot \vec{u})_{\mathcal{E}} = \alpha\,(\vec{u})_{\mathcal{E}} \,.$$

8. *Suponhamos que as coordenadas dos vetores* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, sejam dadas por:*

$$\vec{u} = (\alpha_1 \,, \alpha_2)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} = (\beta_1 \,, \beta_2)_{\mathcal{E}} \,.$$

Então os vetores $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$ *são L.D. em* $\underline{V^2}$ *se, e somente se, os números reais*

$$\alpha_1 \,, \alpha_2 \quad e \quad \beta_1 \,, \beta_2$$

são proporcionais, isto é, existe um número real $\underline{\alpha}$*, tal que ou*

$$\alpha_1 = \alpha\, \beta_1 \quad e \quad \alpha_2 = \alpha\, \beta_2$$

ou

$$\beta_1 = \alpha\, \alpha_1 \quad e \quad \beta_2 = \alpha\, \alpha_2 \,.$$

9. *Na situação acima, se* $\beta_1\,,\beta_2 \neq 0$*, então os vetores* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$ *são L.D. em* $\underline{V^2}$ *se, e somente se,*
$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}\,.$$
Vale uma relação semelhante para o caso em que
$$\alpha_1\,,\alpha_2 \neq 0\,.$$
Deixaremos os detlahes da mesma como exercício para o leitor.

10. *Notemos que da situação acima, segue que os vetores* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$ *são L.I. em* $\underline{V^2}$ *se, e somente se, os números reais*
$$\alpha_1\,,\alpha_2 \quad e \quad \beta_1\,,\beta_2$$
<u>não</u> *são proporcionais.*

11. *Notemos também que, os vetores* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$*, cujas coordenadas em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, são dadas por (3.41), são L.I. em* $\underline{V^2}$ *se , e somente se,*
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$
isto é, se o determinante da matriz quadrada, de ordem três, onde cada linha é formada pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}\,,\vec{v}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, for não nulo.*

12. *Como consequência, temos que os vetores* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$*, cujas coordenadas em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, são dadas por (3.41), são L.D. em* $\underline{V^2}$ *se , e somente se,*
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3.42}$$
isto é, se o determinante da matriz quadrada, de ordem dois, onde cada linha é formada pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^2}$*, for não nulo.*

3.8 Ortogonalidade

Passaremos a seguir a estudar um outro conceito importante da Geometria, a saber, a ortogonalidade entre vetores.

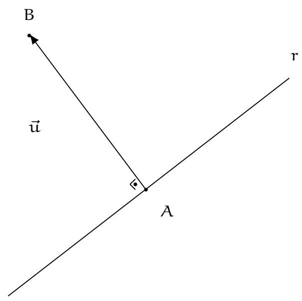
Definição 3.8.1

1. *Um vetor* $\vec{u} \neq \vec{O}$ *será dito* **<u>ortogonal a uma reta r</u>***, se dado um ponto* $\underline{A}$ *da reta* $\underline{r}$ *e um segmento orientado* $\underline{(A\,,B)}$*, que é um representante do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, tenhamos o*

segmento geométrico $\overline{AB}$*, perpendicular à reta* $\underline{r}$ *e, neste caso, denotaremos esta situação por*

$$\vec{u} \perp r\,.$$

Geometricamente temos:

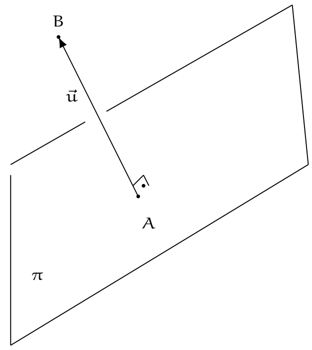


2. *Um vetor* $\vec{u} \neq \vec{O}$ *será dito* **ortogonal a um plano** $\underline{\pi}$*, se dado um ponto* $\underline{A}$ *do plano* $\underline{\pi}$ *e o segmento orientado* $\underline{(A\,,B)}$*, que é um representante do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, tenhamos o segmento geométrico* $\overline{AB}$ *perpendicular ao plano* $\underline{\pi}$*.*

   Neste caso, escreveremos

$$\vec{u} \perp \pi\,.$$

   Geometricamente temos:



3. *Por definição, o vetor nulo* $\underline{\vec{O}}$*, é ortogonal a toda reta e a todo plano do espaço.*

4. *Diremos que os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$ *são* **ortogonais***, se uma das situações abaixo ocorrer:*

   (a) quando

$$\vec{u} = \vec{O} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{O}\,;$$

   (b) se

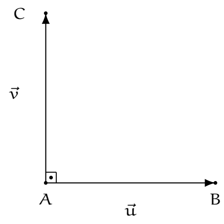
$$\vec{u}\,,\vec{v} \neq \vec{O}$$

   e se os segmentos orientados $\underline{(A\,,B)}$ *e* $\underline{(A\,,C)}$ *são representantes dos vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$*, respectivamente, então os segmentos geométricos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *são perpendiculares.*

Neste caso, escreveremos

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

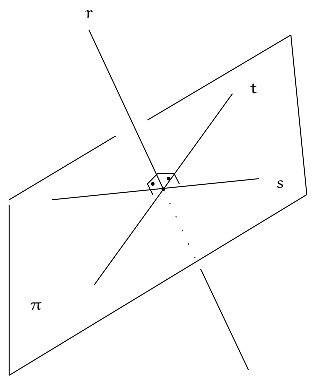
Geometricamente temos:



Com isto temos a:

Observação 3.8.1

1. *Lembremos que um segmento de reta (ou uma reta) é perpendicular a um plano se ele(a) for perpendidular a duas retas concorrentes desse plano (veja ilustração abaixo).*

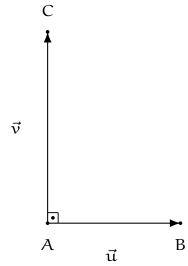


2. *Sejam* $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$.

   Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, *então os vetores* $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ *são L.I. em* $\underline{V^3}$.

   De fato, pois se os segmentos orientados $\underline{(A, B)}$ *e* $\underline{(A, C)}$ *representam os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$, *respectivamente, como os vetores são ortogonais (e não nulos) teremos que os segmentos geométricos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *deverão ser perpendiculares, em particular, não poderão ser paralelos.*

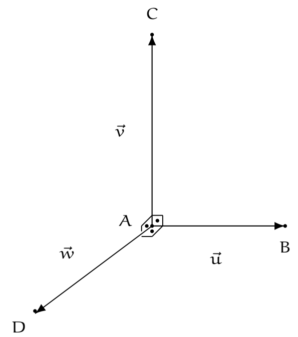
   Portanto os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ *serão L.I. em* $\underline{V^3}$.



3. *De análogo, se os vetores*
$$\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w} \neq \vec{O}$$
e são, dois a dois, ortogonais, eles deverão ser L.I. em $\underline{V^3}$.

A demonstração deste fato é um pouco mais complicada.

Mais adiante faremos uma demonstração que englobará esta situação e a do item 2. acima.



Com isto temos o seguinte resultado (conhecido como **Teorema de Pitágoras** em $\underline{V^3}$):

Proposição 3.8.1 *Sejam* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^3$.

Os vetores $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$ *são ortogonais se, e somente se,*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\,. \tag{3.43}$$

Demonstração:

Suponhamos que
$$\vec{u} = \vec{O} \quad \text{ou, de modo análogo, } \vec{v} = \vec{O}\,.$$

Neste caso, temos que

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{e} \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{O}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{O}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2\,,$$

mostrando que vale a afirmação.

Se
$$\vec{u}\,,\vec{v} \neq \vec{O}\,,$$

pela Proposição (3.2.2), podemos encontrar pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, tais que os segmentos orientados $\underline{(A\,,B)}$ e $\underline{(B\,,C)}$, representem os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, respectivamente.

Logo, da Definição (3.8.1) item 4.b., teremos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, os segmentos geométricos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{v}\,. \tag{3.44}$$

Com isto teremos que o segmento orientado $\underline{(A\,,C)}$ será um representante do vetor $\vec{u}+\vec{v}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u}+\vec{v}\,. \tag{3.45}$$

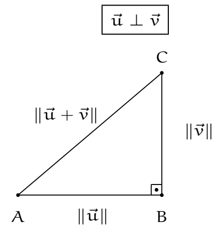
Logo, temos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ se, e somente se, vale o Teorema de Pitágoras, isto é,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 , \tag{3.46}$$

ou seja,

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \overset{(3.45)}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = AB^2 + BC^2$$
$$\overset{(3.46)}{=} AC^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \overset{(3.45)}{=} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 .$$

Geometricamente, teremos:



□

Podemos agora introduzir a:

Definição 3.8.2 *Uma base (ordenada)* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ *de* $\underline{V^3}$*, será dita* **base ortonormal (ordenada)** *de* V^3*, se:*

1. *os vetores* $\underline{\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3}$ *são unitários, isto é,*

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1 ;$$

2. *Os vetores* $\underline{\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3}$ *são, dois a dois, ortogonais, isto é,*

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 , \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \quad e \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3 .$$

Temos o seguinte:

Exemplo 3.8.1 *Consideremos* $\underline{O}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$*, quatro pontos distintos do espaço, tais que as retas*

$$\overleftrightarrow{OA} , \quad \overleftrightarrow{OB} \quad e \quad \overleftrightarrow{OC} ,$$

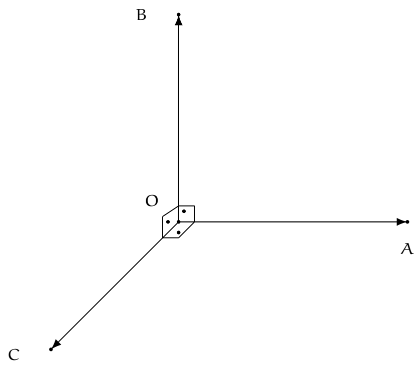
são, duas a duas, perpendiculares no ponto $\underline{O}$ *e*

$$OA = OB = OC = 1 .$$

Consideremos os vetores

$$\vec{e}_1 \doteq \overrightarrow{OA} , \quad \vec{e}_2 \doteq \overrightarrow{OB} \quad e \quad \vec{e}_3 \doteq \overrightarrow{OC} .$$

Geometricamente, temos a seguinte situação:



Mostre que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ *é uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V}^3$*.*

Resolução:

Notemos que, da Observação (3.8.1), segue que os vetores $\underline{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ (pois são, dois a dois, ortogonais e diferentes do vetor nulo).

Observemos também que, por construção os vetores $\underline{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3}$ são, dois a dois, ortogonais e são unitários, pois

$$\|\vec{e}_1\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = OA = 1\,, \quad \|\vec{e}_2\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = OB = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = OC = 1\,.$$

Portanto $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$.

□

Temos a:

Proposição 3.8.2 *Sejam* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ *uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V}^3$ *e* $\vec{v} \in V^3$ *um vetor cujas coordenadas, em relação à base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V}^3$*, são dadas por:*

$$\vec{u} \doteq (a\,, b\,, c)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.47}$$

Então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,. \tag{3.48}$$

Demonstração:

De fato, como $\underline{\mathcal{E}}$ é uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$ segue, em particular, que

$$\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1 \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2\,.$$

Afirmamos que isto implicará em

$$\vec{e}_3 \perp (a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2)\ . \tag{3.49}$$

De fato, pois neste caso o vetor $\underline{\vec{e}_3}$ será ortogonal a um plano que é paralelo aos vetores $\underline{\vec{e}_1}$ e $\underline{\vec{e}_2}$, ou seja, vale (3.49).

Deixaremos os detalhes da demonstração da afirmação acima como exercício para o leitor.

Assim teremos também

$$c \cdot \vec{e}_3 \perp (a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2)\ .$$

Logo, da Proposição (3.8.1), aplicada aos vetores $\underline{(a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2)}$ e $\underline{c \cdot \vec{e}_3}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\|^2 &\overset{(3.47)}{=} \|a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2 + c \cdot \vec{e}_3\|^2 = \|(a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2) + c \cdot \vec{e}_3\|^2 \\
&\overset{\text{Prop. } (3.8.1)}{=} \|a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2\|^2 + \|c \cdot \vec{e}_3\|^2 \\
&\overset{\|c \cdot \vec{e}_3\| = |c|\,\|\vec{e}_3\|}{=} \|a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2\|^2 + c^2 \|\vec{e}_3\|^2 \\
&\overset{\|\vec{e}_3\|=1)}{=} \|a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2\|^2 + c^2 .
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Notemos que

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2\,, \qquad \text{logo, também teremos:} \quad a \cdot \vec{e}_1 \perp b \cdot \vec{e}_2\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, podemos aplicar a Proposição (3.8.1) aos vetores $\underline{a \cdot \vec{e}_1}$ e $\underline{b \cdot \vec{e}_2}$, para obter a seguinte identidade:

$$
\begin{aligned}
\|a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2\|^2 &\overset{\text{Prop. } (3.8.1)}{=} \|a \cdot \vec{e}_1\|^2 + \|b \cdot \vec{e}_2\|^2 \\
&\overset{\|a \cdot \vec{e}_1\| = |a|\,\|\vec{e}_1\| \text{ e } \|b \cdot \vec{e}_2\| = |b|\,\|\vec{e}_2\|}{=} a^2\,\|\vec{e}_1\|^2 + b^2\,\|\vec{e}_2\|^2 \\
&\overset{\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1}{=} a^2 + b^2\,.
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

Portanto, de (3.50) e (3.51), segue que

$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2\,, \qquad \text{isto é,} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

$\boxed{\textbf{7.a aula - 20.03.2014}}$

Consideremos o seguinte exemplo para ilustrar.

Exemplo 3.8.2 *Sejam* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ *uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^3}$ *e os vetores* $\vec{u}\,, \vec{v} \in V^3$ *cujas coordenadas, em relação à base* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{u} \doteq (1\,, 1\,, 1)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (2\,, 1\,, -3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.52}$$

Pergunta-se: os vetores $\underline{\vec{u}\,, \vec{v}}$ *são ortogonais em* $\underline{V^3}$ *?*

Resolução:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (1\,, 1\,, 1)_{\mathcal{E}} + (2\,, 1\,, -3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.23)}{=} (1 + 2\,, 1 + 1\,, 1 - 3)_{\mathcal{E}} = (3\,, 2\,, -2)_{\mathcal{E}}\,.
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

Assim, pela Proposição (3.8.2), segue que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \overset{(3.53),(3.47) \text{ e } (3.48)}{=} 3^3 + 2^2 + (-2)^2 = 17\,. \tag{3.54}$$

Por outro lado,

$$\|\vec{u}\|^2 \overset{(3.52),(3.47)\text{ e }(3.48)}{=} 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \quad \text{e} \quad \|\vec{v}\|^2 \overset{(3.52),(3.47)\text{ e }(3.48)}{=} 2^2 + 1^2 + (-3)^2 = 14 . \quad (3.55)$$

Portanto

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \overset{(3.54)}{=} 17 = 3 + 14 \overset{(3.55)}{=} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 .$$

Logo, pela Proposição (3.8.1), segue que

$$\vec{u} \perp \vec{v} .$$

□

Notemos que podemos desenvolver os mesmos conceitos para $\underline{V^2}$, isto é, ortogonalidade, base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^2}$, Teorema de Pitágoras e assim por diante.

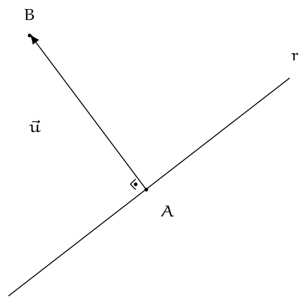
Faremos isto, de modo, breve na observação a seguir, cujas demonstrações serão deixadas como exercícios para o leitor.

Observação 3.8.2

1. (a) *Um vetor $\vec{u} \neq \vec{O}$ será dito* **ortogonal a uma reta** $\underline{r}$, *se dado um ponto $\underline{A}$ da reta $\underline{r}$ e um segmento orientado $\underline{(A, B)}$, que é um representante do vetor $\vec{u}$, tenhamos o segmento geométrico $\overline{AB}$, perpendicular à reta $\underline{r}$ e denotaremos esta situação por:*

$$\vec{u} \perp r .$$

Geometricamente temos:



(b) *Por definição, o vetor nulo $\underline{\vec{O}}$, é ortogonal a toda reta.*

(c) *Diremos que os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ são* **ortogonais**, *se uma das situações abaixo ocorrer:*

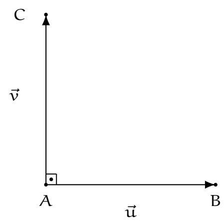
i. *quando*

$$\vec{u} = \vec{O} \quad ou \quad \vec{v} = \vec{O} ;$$

ii. *se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$, os segmentos orientados $\underline{(A, B)}$ e $\underline{(A, C)}$ são representantes dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, respectiavmente, então os segmentos geométricos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares.*
Neste caso, escreveremos:

$$\vec{u} \perp \vec{v} .$$

Geometricamente temos:



2. *Sejam* $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$.

   Se $\vec{u} \perp \vec{v}$*, então os vetores* $\underline{\vec{u}, \vec{v}}$ *são L.I. em* $\underline{V^2}$.

3. *Sejam* $\vec{u}, \vec{v} \in V^2$*. Os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$ *são ortogonais se, e somente se,*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 ,$$

   isto é, vale o **Teorema de Pitágoras** *em* $\underline{V^2}$.

4. *Uma base (ordenada)* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *de* $\underline{V^2}$*, será dita* **base ortonormal (ordenada)** *de* $\underline{V^2}$*, se:*

   (a) os vetores $\underline{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$ *são unitários, isto é,*

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 ;$$

   (b) Os vetores $\underline{\vec{e}_1, \vec{e}_2}$ *são ortogonais, isto é,*

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 .$$

5. *Sejam* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^2}$ *e* $\vec{v} \in V^2$ *um vetor, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, são dadas por*

$$\vec{u} = (a, b)_{\mathcal{E}} .$$

   Então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

3.9 Mudança de Base

Em muitas situações a escolha de uma base (ordenada), conveniente, de $\underline{V^3}$ (ou de $\underline{V^2}$) poderá facilitar a resolução de problemas.

Porém pode acontecer de uma base (ordenada) de $\underline{V^3}$ (ou de $\underline{V^2}$) já estar pré selecionada.

Se pretendermos mudar a base (ordenada) dada, para uma nova base (ordenada), a questão que se colocar é: como ficarão as coordenadas (ou a matriz das coordenadas) de um vetor em relação a nova base (ordenada)?

Como veremos a resposta a esta questão estará relacionada com uma relação apropriada que encontraremos entre a base (ordenada) dada e a nova base (ordenada).

Trataremos do caso $\underline{V^3}$ e, no final desta seção, falaremos sobre $\underline{V^2}$.

Para isto temos a:

Observação 3.9.1

1. *Sejam* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *e* $\mathcal{F} = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ *bases (ordenadas) de* $\underline{V^3}$.

   Logo podemos escrever, de modo único, cada elemento da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$, *como uma combinação linear dos elementos da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$, *da seguinte forma:*

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}, \tag{3.56}$$

   ou seja:

$$\left(\vec{f}_1\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \left(\vec{f}_2\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad e \quad \left(\vec{f}_3\right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

   Assim podemos construir a seguinte matriz quadrada de ordem $\underline{3}$:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

   onde

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \textit{para cada} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

   Logo, temos uma relação entre os elementos das bases (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$ *e* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^3}$, *dada pelas equações* (3.56) *acima.*

2. *Dado um vetor* $\vec{u} \in V^3$, *como* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *é base (ordenada) de* $\underline{V^3}$, *temos que existirão (únicos)*

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

   tais que

$$\vec{u} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}}, \tag{3.58}$$

   ou seja:

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

   De modo semelhante, como $\mathcal{F} = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ *é base (ordenada) de* $\underline{V^3}$, *temos que existem (únicos)*

$$y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R},$$

   tais que

$$\vec{u} = y_1 \cdot \vec{f}_1 + y_2 \cdot \vec{f}_2 + y_3 \cdot \vec{f}_3 = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{F}}. \tag{3.59}$$

ou seja:

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

<u>**Pergunta-se:**</u> *existe alguma relação entre as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$ (ou seja, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$) e as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$ (ou seja, $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$) ?*

Notemos que

$$\begin{aligned}
\vec{u} &\overset{(3.59)}{=} y_1 \cdot \vec{f}_1 + y_2 \cdot \vec{f}_2 + y_3 \cdot \vec{f}_3 \\
&\overset{(3.56)}{=} y_1 \cdot (a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3) + y_2 \cdot (a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3) \\
&\qquad + y_3 \cdot (a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3) \\
&= (y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + y_3 a_{13}) \cdot \vec{e}_1 + (y_1 a_{21} + y_2 a_{22} + y_3 a_{23}) \cdot \vec{e}_2 \\
&\qquad + (y_1 a_{31} + y_2 a_{32} + y_3 a_{33}) \cdot \vec{e}_3 \,. \qquad (3.60)
\end{aligned}$$

Logo comparando a expressão (3.60) *com (3.58), segue que*

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 = (y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12} + y_3\, a_{13}) \cdot \vec{e}_1 + (y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22} + y_3\, a_{23}) \cdot \vec{e}_2 \\
+ (y_1\, a_{31} + y_2\, a_{32} + y_3\, a_{33}) \cdot \vec{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Como o vetor $\underline{\vec{u}}$ deve ser <u>**unicamente**</u> *representado como combinção linear dos vetores da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, segue que deveremos ter:*

$$\begin{cases} x_1 = y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12} + y_3\, a_{13} \\ x_2 = y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22} + y_3\, a_{23} \\ x_3 = y_1\, a_{31} + y_2\, a_{32} + y_3\, a_{33} \end{cases}, \qquad (3.61)$$

isto é, encontramos uma relação entre as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ na base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, em termos das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ na base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$.

Os coeficientes que aparecem multiplicando as correspondetes coordenadas no sistema linear (3.61)*, são obtidos de escrever os vetores da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, em termos dos vetores da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, isto é, dos coeficientes de (3.56).*

Notemos que a expressão (3.61), pode ser reescrita em termos do produto de *matrizes, da seguinte forma:*

$$\begin{cases} x_1 = y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12} + y_3\, a_{13} \\ x_2 = y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22} + y_3\, a_{23} \\ x_3 = y_1\, a_{31} + y_2\, a_{32} + y_3\, a_{33} \end{cases}$$

se, e somente se, $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\, a_{11} + y_2\, a_{12} + y_3\, a_{13} \\ y_1\, a_{21} + y_2\, a_{22} + y_3\, a_{23} \\ y_1\, a_{31} + y_2\, a_{32} + y_3\, a_{33} \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente, $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Conclusão:

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = A\,(\vec{u})_{\mathcal{F}}\,, \tag{3.63}$$

onde a matriz $\underline{A}$ *é dada por* (3.57).

3. *Portanto para obter a matriz coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, basta multiplicar a matriz* $\underline{A}$ *(dada por* (3.57)*), cujas colunas são obtidas de escrevendo-se cada um dos vetores da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^3}$*, em termos dos vetores da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*) pela matriz das coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^3}$*.*

4. *Todo cuidado é pouco!*

   Observemos que a 1.a coluna da matriz $\underline{A}$*, dada por (3.57), é formada pelos coeficientes quando escrevemos o vetor* $\underline{\vec{f}_1}$*, como combinação linear dos vetores*

   $$\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\,,$$

   na ordem certa, a saber:

   $$\begin{cases} \vec{f}_1 = \boxed{a_{11}} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{a_{21}} \cdot \vec{e}_2 + \boxed{a_{31}} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

   e assim

   $$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

   De modo análogo, a 2.a coluna da matriz $\underline{A}$*, dada por (3.57), é formada pelos coeficientes quando escrevemos o vetor* $\underline{\vec{f}_2}$*, como uma combinação linear dos vetores*

   $$\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\,,$$

na ordem certa, a saber:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \boxed{a_{12}} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{a_{22}} \cdot \vec{e}_2 + \boxed{a_{32}} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

e assim

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

E finalmente, a 3.a coluna da matriz $\underline{A}$, dada por (3.57) é formada pelos coeficientes quando escrevemos o vetor $\underline{\vec{f}_3}$, como uma combinação linear dos vetores

$$\vec{e}_1 \,, \vec{e}_2 \,, \vec{e}_3 \,,$$

na ordem certa, ou seja:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \boxed{a_{13}} \cdot \vec{e}_1 + \boxed{a_{23}} \cdot \vec{e}_2 + \boxed{a_{33}} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$

e assim

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Com isto temos a:

Definição 3.9.1 *A matriz $\underline{A}$, obtida em (3.57), será denominada* **<u>matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{E}$ para a base (ordenada) $\mathcal{F}$</u>** *de $\underline{V^3}$ e denotada por*

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \,, \quad ou \quad \mathcal{E} \xrightarrow{M} \mathcal{F} \,, \quad ou \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \,. \tag{3.64}$$

Observação 3.9.2 *Logo, da Definição acima e de (3.63), segue que:*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \, (\vec{u})_{\mathcal{F}} \,. \tag{3.65}$$

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.9.1 *Sejam $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 \,, \vec{e}_2 \,, \vec{e}_3)$ e $\mathcal{F} = (\vec{f}_1 \,, \vec{f}_2 \,, \vec{f}_3)$ bases (ordenadas) de $\underline{V^3}$, que se relacionam da seguinte forma:*

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \tag{3.66}$$

e $\vec{u} \in V^3$ dado por:

$$\vec{u} \doteq \vec{f}_1 + 3 \cdot \vec{f}_2 + 4 \cdot \vec{f}_3 \,. \tag{3.67}$$

Encontre a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, isto é, $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$, as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$.

Resolução:

Segue de (3.66) que

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2 \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 1 \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} .$$

Logo, das relações acima e da Definição (3.9.1), segue que a matriz de mudança da base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, será dada por:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.68}$$

Notemos que, de (3.67), segue matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, será dada por:

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{3.69}$$

Então, da relação (3.65), a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, que indicaremos por

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ,$$

será dada por:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{u})_{\mathcal{E}} &\overset{(3.65)}{=} M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(\vec{u})_{\mathcal{F}} \\ &\overset{(3.68) \text{ e } (3.69)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.1 + 1.3 + 1.4 \\ (-1).1 + 1.3 + (-1).4 \\ 1.1 + 1.3 + 1.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, serão dadas por :

$$\vec{u} = (9\,, -2\,, 8)_{\mathcal{E}}\,,$$

ou ainda,

$$\vec{u} = 9 \cdot \vec{e}_1 - 2 \cdot \vec{e}_2 + 8 \cdot \vec{e}_3\,.$$

□

Observação 3.9.3

1. *No Exemplo (3.9.1) acima, vale observar que*

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) \overset{(3.69)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{Exercício}{=} 2 \neq 0 .$$

Logo, do Teorema (B.5.1) do Apêndice (B), segue que a matriz quadrada $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$ é não singular, ou seja, é inversível.

Além disso, da Proposição (A.5.7) do Apêndice (A), segue que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1} = \frac{[\operatorname{coft}(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})]^t}{\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{Exercício}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

2. *Vale notar que, também no Exemplo (3.9.1) acima, a matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1}}$, será a matriz de mudança da base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, isto é,*

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1} .$$

De fato, pois do sistema (3.56), podemos escrever (formalmente) que:

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix} = [M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}]^t \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} ,$$

assim,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \left\{[M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}]^t\right\}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(A.56)}{=} \left\{[M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}]^{-1}\right\}^t \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix} ,$$

ou seja, podemos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, cujos coeficientes são os elementos sa matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1}}$.

Logo as colunas da matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1}}$, serão as colunas da matriz $\underline{M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}}$, isto é, temos que

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}{}^{-1} .$$

Este fato será provado rigorosamente em um resultado, logo a seguir.

3. *Baseado no fato acima, se as coordenadas do vetor $\vec{u} \in V^3$, em relação às bases (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$ são, respectivamente, dadas por:*

$$\vec{u} = (9\,,-2\,,8)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{u} = (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{F}}\,,$$

então a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, isto é, a matriz

$$(\vec{y})_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

será dada por:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= (\vec{u})_{\mathcal{F}} \overset{(3.65)}{=} M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}(\vec{u})_{\mathcal{E}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.9 + 0.(-2) + (-1).8 \\ 0.9 + \frac{1}{2}.(-2) + \frac{1}{2}.8 \\ (-1).9 + \left(-\frac{1}{2}\right).(-2) + \frac{3}{2}.8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, serão:

$$\vec{u} = (1\,,3\,,4)_{\mathcal{E}}\,,$$

que são as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ que começamos o Exemplo (3.9.1) acima (veja (3.67)).

A seguir formalizaremos as propriedades verificadas no Exemplo (3.9.1) acima e daremos outras que facilitaram nosso trabalho em várias situações.

Proposição 3.9.1 *Sejam*

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,, \quad \mathcal{F} = \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right) \quad e \quad \mathcal{G} = (\vec{g}_1\,,\vec{g}_2\,,\vec{g}_3)$$

bases (ordenadas) de $\underline{V^3}$ e $\vec{u} \in V^3$.

Então:

1. *A matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, pode ser obtida multiplicando-se a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, pela matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, ou seja,*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}\,(\vec{u})_{\mathcal{F}}\,.$$

2. *A matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, isto é, a matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$, é uma matriz não singular (isto é, inversível) e sua matriz inversa é a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, ou seja,*

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^{-1}\,.$$

3. *A matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{G}}$ de $\underline{V^3}$, isto é, a matriz $\underline{M_{\mathcal{G}\mathcal{E}}}$, é igual ao produto das matrizes de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, pela matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{G}}$ de $\underline{V^3}$, isto é,*

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{G}\mathcal{F}}\,M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}\,.$$

   A ordem da multiplicação acima é fundamental.

4. *A matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a própria base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, é a matriz identidade de ordem $\underline{3}$, ou seja,*

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. *Seja $D \doteq (d_{ij})_{i,j\in\{1,2,3\}}$ é uma matriz quadrada de ordem $\underline{3}$, não singular (isto é, inversível).*

   Então existe uma base (ordenada)

$$\mathcal{H} \doteq \left(\vec{h}_1\,,\vec{h}_2\,,\vec{h}_3\right)$$

   de $\underline{V^3}$, tal que a matriz $\underline{D}$, seja a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\underline{\mathcal{H}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, ou seja

$$D = M_{\mathcal{E}\mathcal{H}}\,.$$

Demonstração:

Consideremos as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação às base (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, dadas, respectivamente, por:

$$\vec{u} = (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{u} = (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{F}}$$

e suponhamos que tenhamos as seguintes relações entre os vetores das bases (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$, $\underline{\mathcal{F}}$ e $\underline{\mathcal{G}}$, de $\underline{V}^3$:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{3.70}$$

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = b_{11} \cdot \vec{f}_1 + b_{21} \cdot \vec{f}_2 + b_{31} \cdot \vec{f}_3 \\ \vec{g}_2 = b_{12} \cdot \vec{f}_1 + b_{22} \cdot \vec{f}_2 + b_{32} \cdot \vec{f}_3 \\ \vec{g}_3 = b_{13} \cdot \vec{f}_1 + b_{23} \cdot \vec{f}_2 + b_{33} \cdot \vec{f}_3 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad M_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

e

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = c_{11} \cdot \vec{e}_1 + c_{21} \cdot \vec{e}_2 + c_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 = c_{12} \cdot \vec{e}_1 + c_{22} \cdot \vec{e}_2 + c_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 = c_{13} \cdot \vec{e}_1 + c_{23} \cdot \vec{e}_2 + c_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad M_{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.72}$$

De 1.:

Feita na Observação (3.9.1) item 2.

De 2.:

Como os vetores $\underline{\vec{f}_1}$, $\underline{\vec{f}_2}$, $\underline{\vec{f}_3}$ são L.I em $\underline{V}^3$ (pois formam uma base (ordenada) de $\underline{V}^3$) segue, da Proposição (3.7.5), que a matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$ tem determinante diferente de zero.

Logo, do Teorema (B.5.1) do Apêndice (B), segue que a matriz $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$ é não singular, isto é, admite matriz inversa.

Mas do item 1. deste resultado, sabemos que

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \, (\vec{u})_{\mathcal{F}} \, .$$

Logo

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = {M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}^{-1} \, (\vec{u})_{\mathcal{E}} \, ,$$

ou seja, das duas identidades acima, segue que

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = {M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}^{-1} \, ,$$

como queríamos mostrar.

De 3.:

Mostrar que

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{G}\mathcal{F}} \, M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}$$

é equivalente a mostrar que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk} \quad \text{para cada} \quad i \, , k \in \{1 \, , 2 \, , 3\} \, .$$

Notemos que, podemos escrever as equações de (3.70), (3.71) e (3.72) da seguinte forma abreviada

$$f_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot \vec{e}_i\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,3\}, \tag{3.73}$$

$$g_k = \sum_{j=1}^{3} b_{jk} \cdot \vec{f}_j\,, \quad \text{para cada} \quad k \in \{1\,,2\,,3\}, \tag{3.74}$$

$$g_k = \sum_{i=1}^{3} c_{ik} \cdot \vec{e}_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,3\}. \tag{3.75}$$

Para cada $k \in \{1\,,2\,,3\}$, substituindo-se (3.73) em (3.74), obteremos:

$$\begin{aligned} g_k &= \sum_{j=1}^{3} b_{jk} \cdot \vec{f}_j \overset{(3.73)}{=} \sum_{j=1}^{3} b_{jk} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot \vec{e}_i \right) \\ &\overset{\text{troca-se a ordem das somas}}{=} \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk} \right) \cdot \vec{e}_i. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Comparando (3.76) com (3.75) (utilizando-se a unicidade da representação de um vetor como combinção linear dos elementos da base (ordenada) $\mathcal{E}$, de $\underline{V}^3$), segue que:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{jk}\,, \quad \text{para cada} \quad i\,,k \in \{1\,,2\,,3\},$$

como queríamos mostrar.

De 4.:

Para obter a matriz de mudança da base (ordenada) $\mathcal{E}$, de $\underline{V}^3$, para ela mesma, precisamos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{E}$, de $\underline{V}^3$, como combinação linear desses mesmos elementos, isto é,

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases}.$$

Lembremos que um vetor se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{E}$ de $\underline{V}^3$.

Logo, das relações acima e da Definição (3.9.1), segue que:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

como queríamos mostrar.

De 5.:

Definamos os seguinte vetores:

$$\begin{cases} \vec{h}_1 \doteq d_{11} \cdot \vec{e}_1 + d_{21} \cdot \vec{e}_2 + d_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{h}_2 \doteq d_{12} \cdot \vec{e}_1 + d_{22} \cdot \vec{e}_2 + d_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{h}_3 \doteq d_{13} \cdot \vec{e}_1 + d_{23} \cdot \vec{e}_2 + d_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}. \tag{3.77}$$

Como a matriz quadrada $\underline{D}$ é não singular, da Proposição (3.7.5) segue que os vetores $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$ são L.I. em $\underline{V}^3$ e portanto formam uma base (ordenada), que denotaremos por $\underline{\mathcal{H}}$, de $\underline{V}^3$.

Além disso, da definição dos vetores em (3.77) segue, da Definição (3.9.1), que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{H}} = D\,,$$

como queríamos mostrar, completando a demonstração do resultado.

□

Consideremos o exemplo:

Exemplo 3.9.2 *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,,\quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right) \quad e \quad \mathcal{G} \doteq (\vec{g}_1\,,\vec{g}_2\,,\vec{g}_3)$$

bases (ordenadas) de $\underline{V}^3$, que se relacioname da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{f}_1 - 2\cdot\vec{f}_2 \\ \vec{e}_2 = \vec{f}_1 + \vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = \vec{f}_2 - \vec{f}_3 \end{cases} \tag{3.78}$$

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{g}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}. \tag{3.79}$$

Determinar as seguinte matrizes de mudança de base:

1. *da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$;*

2. *da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{G}}$;*

3. *da base (ordenada) $\mathcal{F}$ para a base (ordenada) $\mathcal{G}$;*

4. *da base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$;*

5. *da base (ordenada) $\underline{\mathcal{G}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$;*

6. *da base (ordenada) $\underline{\mathcal{G}}$ para a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$.*

Resolução:

Observemos que, de (3.78) teremos:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = 1\cdot\vec{f}_1 - 2\cdot\vec{f}_2 + 0\cdot\vec{f}_3 \\ \vec{e}_2 = 1\cdot\vec{f}_1 + 1\cdot\vec{f}_3 + 0\cdot\vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = 0\cdot\vec{f}_1 + 1\cdot\vec{f}_2 + (-1)\cdot\vec{f}_3 \end{cases} \tag{3.80}$$

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = 1\cdot\vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + (-1)\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 = 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 \end{cases}. \tag{3.81}$$

De 1.:
Assim, de (3.80) e da Definição (3.9.1), segue que

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

De 2.:
Assim, de (3.81) e da Definição (3.9.1), segue que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

De 3.:
Da Proposição (3.9.1) item 3., segue que

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}\mathcal{G}} \overset{(3.82)\text{ e }(3.83)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

De 4.:
Das Proposições (3.9.1) item 2. e (A.5.7) do Apêndice (A), segue que

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}^{-1} \overset{(A.53)}{=} \frac{1}{\det(M_{\mathcal{F}\mathcal{E}})}[\operatorname{coft}(M_{\mathcal{F}\mathcal{E}})]^t$$
$$\overset{(3.83)\text{ e Exercício}}{=} \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

<u>De 5.:</u>
Da Proposição (3.9.1) item 2., segue que

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}\mathcal{G}}{}^{-1} \overset{(A.53)}{=} \frac{1}{\det(M_{\mathcal{F}\mathcal{G}})}[\mathrm{coft}(M_{\mathcal{F}\mathcal{G}})]^t$$

$$\overset{(3.84)\text{ e Exercício}}{=} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

<u>De 6.:</u>
Da Proposição (3.9.1) item 2., segue que

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{G}}{}^{-1} \overset{(A.53)}{=} \frac{1}{\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{G}})}[\mathrm{coft}(M_{\mathcal{E}\mathcal{G}})]^t$$

$$\overset{(3.83)\text{ e Exercício}}{=} \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

□

Exemplo 3.9.3 *Considerando as bases (ordendas) dadas no Exemplo (3.9.2) acima e sabendo-se que que o vetor $\vec{u} \in V^3$ é dado por*

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3\,, \tag{3.86}$$

determinar as coordenadas do vetor $\vec{u}$ em relação às bases (ordenadas):

1. $\underline{\mathcal{F}}$;

2. $\underline{\mathcal{G}}$.

Resolução:

De (3.86), temos que

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + (-1) \cdot \vec{e}_3 \,,$$

ou seja, a matriz das coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, será dada por:

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{3.87}$$

De 1.:

Da Proposição (3.9.1) item 1. segue que:

$$\begin{aligned}
(\vec{u})_{\mathcal{F}} &= M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}\,(\vec{u})_{\mathcal{E}} \\
&\overset{\text{Exemplo (3.9.2) item 4. , a saber, (3.82) e (3.87)}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\vec{u})_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

ou ainda, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, serão dadas por :

$$\vec{u} = (4\,, -3\,, 4)_{\mathcal{F}} \quad (= 4 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2 + 4 \cdot \vec{e}_3)\,.$$

De 2.:

Da Proposição (3.9.1) item 1., segue que:

$$\begin{aligned}
(\vec{u})_{\mathcal{G}} &= M_{\mathcal{G}\mathcal{E}}\,(\vec{u})_{\mathcal{E}} \\
&\overset{\text{(3.85) e (3.86)}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\vec{u})_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ou ainda, as coordenadas do vetor $\vec{u}$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{G}$ de $\underline{V}^3$, serão dadas por:

$$\vec{u} = (3\,,-2\,,3)_{\mathcal{G}} \quad (= 3 \cdot \vec{g}_1 + -2 \cdot \vec{g}_2 + 3 \cdot \vec{g}_3)\,.$$

Podemos agir, de modo semelhante, em $\underline{V}^2$, ou seja, definir matriz mudança de base e obter todos os resultados análogos aos que obtivemos acima para $\underline{V}^3$, para o caso de $\underline{V}^2$.

Faremos isso ao longo da observação a seguir.

Observação 3.9.4

1. *Sejam* $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ *e* $\mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)$ *bases (ordenadas) de* $\underline{V}^2$.

   Logo podemos escrever, de modo único, cada elemento da base (ordenada) $\underline{\mathcal{F}}$, *como uma combinação linear dos elementos da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$, *de* $\underline{V}^2$, *da seguinte forma:*

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 \end{cases}, \tag{3.88}$$

   ou seja:

$$(\vec{f}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad e \quad (\vec{f}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

   Assim podemos construir a seguinte matriz quadrada de ordem $\underline{2}$:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

   onde

$$a_{ij} \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{para cada} \quad i\,,j \in \{1\,,2\}\,.$$

   Logo, temos uma relação entre os elementos das bases (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$ *e* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V}^2$, *dada pelas equações* (3.88) *acima.*

2. *Neste caso teremos*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = A\,(\vec{u})_{\mathcal{F}}\,, \tag{3.90}$$

   onde a matriz quadrada $\underline{A}$ *é dada por* (3.89).

3. *A matriz quadrada* $\underline{A}$, *obtida em* (3.89), *será denominada* <u>**matriz de mudança da base (ordenada)** $\mathcal{E}$ **para a base (ordenada)** $\mathcal{F}$</u> *de* $\underline{V}^2$ *e denotada por:*

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}\,, \quad \textit{ou} \quad \mathcal{E} \overset{M}{\to} \mathcal{F}\,, \quad \textit{ou} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\,. \tag{3.91}$$

4. *Logo, do item acima e de* (3.90), *segue que:*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}\,(\vec{u})_{\mathcal{F}}\,. \tag{3.92}$$

5. *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)\,, \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right) \qquad e \qquad \mathcal{G} \doteq (\vec{g}_1\,,\vec{g}_2)$$

bases (ordenadas) de $\underline{V^2}$ *e* $\underline{\vec{u}}$ *um vetor de* $\underline{V^2}$.

Então:

(a) *A matriz das coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$, *em relação à base (ordenda)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *pode ser obtida multiplicando-se a matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^2}$, *pela matriz das coordenadas do vetor* $\underline{\vec{u}}$, *em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^2}$, *ou seja,*

$$(\vec{u})_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}\,(\vec{u})_{\mathcal{F}}\,.$$

(b) *A matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^2}$, *isto é, a matriz* $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$, *é uma matriz não singular (isto é, inversível) e sua matriz inversa é a matriz de mudança de base, da base (ordenda)* $\underline{\mathcal{F}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *ou seja,*

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = {M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}^{-1}\,.$$

(c) *A matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{G}}$ *de* $\underline{V^2}$, *isto é, a matriz* $\underline{M_{\mathcal{G}\mathcal{E}}}$, *é igual ao produto das matrizes de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^2}$, *pela matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{G}}$ *de* $\underline{V^2}$, *isto é,*

$$M_{\mathcal{G}\mathcal{E}} = M_{\mathcal{G}\mathcal{F}}\,M_{\mathcal{F}\mathcal{E}}\,.$$

A ordem da multiplicação acima é fundamental!

(d) *A matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a própria base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *é a matriz identidade de ordem* $\underline{2}$, *ou seja,*

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) *Seja* $D \doteq (d_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$ *é uma matriz quadrada de ordem* $\underline{2}$, *não singular (isto é, inversível).*

Então existe uma base (ordenada)

$$\mathcal{H} \doteq \left(\vec{h}_1\,,\vec{h}_2\right)$$

de $\underline{V^2}$, *tal que a matriz* $\underline{D}$, *seja a matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\underline{\mathcal{H}}$ *para a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *ou seja*

$$D = M_{\mathcal{E}\mathcal{H}}\,.$$

8.a aula - 25.03.2014

3.10 Ângulo entre Vetores - Produto Escalar

O objtivo desta seção é introduzir o conceito de ângulo entre dois vetores de $\underline{V^3}$ (e, no final desta seção, em $\underline{V^2}$).

Para isto:

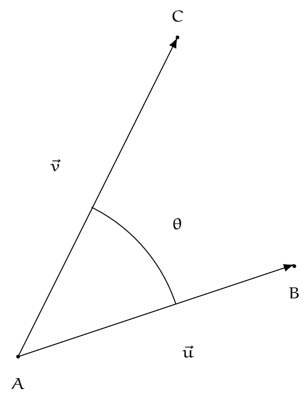
Observação 3.10.1 *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores $\underline{V^3}$, diferentes do vetor nulo.*

Fixado o ponto $A \in \mathbb{R}^3$, pela Proposição (3.2.2), existem únicos pontos $\underline{B}$, $\underline{C}$ do espaço, tais que

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad e \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}.$$

Denotemos por $\underline{\theta}$ a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{BAC}$, tal que (veja a ilustração abaixo)

$$\theta \in [0, \pi].$$

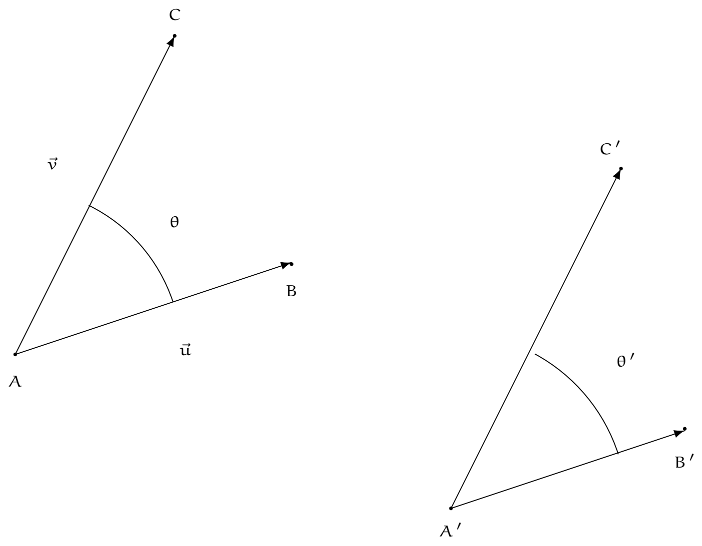


*Observemos que o ângulo $\underline{\theta}$, obtido acima, **<u>não</u>** depende da escolha dos representantes dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$.*

De fato, se os pontos $\underline{A'}$, $\underline{B'}$ $\underline{C'}$ pertencentes ao espaço, são tais que

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{u} \quad e \quad \overrightarrow{A'C'} = \vec{v},$$

então temos que os segmentos orientados $\underline{(A, B)}$ e $\underline{(A, C)}$ serão equipolentes aos segmentos orientados $\underline{(A', B')}$ e $\underline{(A', C')}$, respectivamente (pois eles representam os mesmos vetores).



Em particular, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $\overleftrightarrow{A'B'}$ *são paralelas, assim como, as retas* $\overleftrightarrow{AC}$ *e* $\overleftrightarrow{A'C'}$ *tabém são paralelas.*

Portanto

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC},$$

como queríamos demonstrar.

Com isto temos podemos introduzir a:

Definição 3.10.1 *O ângulo* $\theta \in [0, \pi]$*, obtido na Observação (3.10.1) acima, será denominado* **ângulo** *entre os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$*.*

Observação 3.10.2

1. *A seguir encontraremos uma expressão do ângulo* $\underline{\theta}$*, entre dois vetores, não nulos, do espaço, em termos das coordenadas desses vetores em relação a uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^3}$*.*

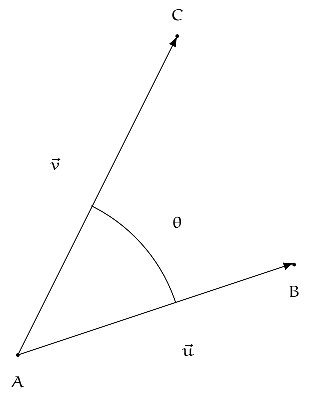
   Fixemos uma base ortonormal (ordenada)

   $$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

   de $\underline{V^3}$*.*

   Sejam $\underline{A}$*,* $\underline{B}$*,* $\underline{C}$ *pontos do espaço, tais que (veja a ilustração abaixo)*

   $$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad e \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}. \tag{3.93}$$



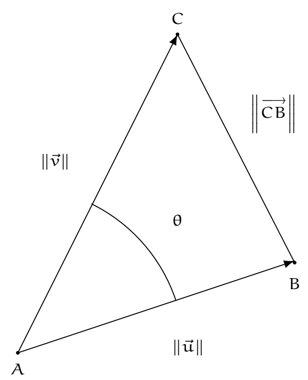
Consideremos as coordenadas dos vetores, em relação à base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, como sendo dadas por :*

$$\vec{u} = (x_1\,, x_2\,, x_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} = (y_1\,, y_2\,, y_3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.94}$$

Como a base $\underline{\mathcal{E}}$ *é uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^3}$*, da Proposição (3.8.2), segue que*

$$\|\vec{u}\|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \quad e \quad \|\vec{v}\|^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2\,. \tag{3.95}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\underline{\Delta ABC}$ *(veja a ilustração abaixo) obteremos:*



$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\theta)\,. \tag{3.96}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 &\overset{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{=} \left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right\|^2 \\
&\overset{\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}}{=} \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2 \\
&\overset{(3.93)}{=} \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \\
&\overset{(3.95)}{=} \|(x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}}-(y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}}\|^2 \\
&= \|(x_1-y_1\,,x_2-y_2\,,x_3-y_3)_{\mathcal{E}}\|^2 \\
&\overset{\text{Proposição (3.8.2)}}{=} \left[\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\right]^2 \\
&= (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\,. \qquad (3.97)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.95), (3.97), em (3.96), obteremos:

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2 = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right) - 2\cos(\theta)\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da identidade acima, cancelando-se os termos comuns a ambos os membros da igualdade acima, obteremos:

$$x_1\,y_1+x_2\,y_2+x_3\,y_3=\cos(\theta)\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,. \qquad (3.98)$$

Como $\vec{u}\,,\vec{v}\neq\vec{O}$, *segue que*

$$\|\vec{u}\|\,,\|\vec{v}\|\neq 0\,,$$

assim (3.98) *será equivalente à:*

$$\cos(\theta)=\frac{x_1\,y_1+x_2\,y_2+x_3\,y_3}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}. \qquad (3.99)$$

2. *Observemos que o valor da expressão*

$$x_1\,y_1+x_2\,y_2+x_3\,y_3$$

<u>**NÃO**</u> *depende da base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$ *que fixamos inicialmente.*

De fato, seja

$$\mathcal{F}=\left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

uma outra base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^3}$.

Consideremos as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$, *em relação à base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V^3}$, *dadas por:*

$$\vec{u}=(x_1{}'\,,x_2{}'\,,x_3{}')_{\mathcal{F}} \quad e \quad \vec{v}=(y_1{}'\,,y_2{}'\,,y_3{}')_{\mathcal{F}}\,.$$

Trocando-se

$$x_1\,,x_2\,,x_3\,,y_1\,,y_2\,,y_2$$

por

$$x_1{}', x_2{}', x_3{}', y_1{}', y_2{}', y_3{}',$$

nas contas que fizemos no item 1. desta Observação, obteremos:

$$x_1{}' y_1{}' + x_2{}' y_2{}' + x_3{}' y_3{}' = \cos(\theta)\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \overset{(3.98)}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

3. *Na verdade já sabíamos disso, pois o lado direito da expressão (3.98),* **NÃO** *depende de nenhuma base ortonormal (ordenada) escolhida de $\underline{V^3}$.*

Com isto temos a:

Definição 3.10.2 *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores de $\underline{V^3}$.*

Definiremos o **produto escalar** *do vetor $\underline{\vec{u}}$ pelo vetor $\underline{\vec{v}}$, indicado por $\underline{\vec{u} \bullet \vec{v}}$, como sendo a expressão;*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 , \tag{3.100}$$

onde

$$\vec{u} \doteq (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} \doteq (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{E}} ,$$

são as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, em relação a uma base ortonormal (ordenada) $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\underline{V^3}$ fixada.

Temos as seguintes considerações:

Observação 3.10.3

1. *Se o vetor $\underline{\vec{u}}$ ou o vetor $\underline{\vec{v}}$ for o vetor nulo, então temos que*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 .$$

De fato, pois neste caso, ou

$$\vec{u} \doteq (0, 0, 0)_{\mathcal{E}} \quad ou \quad \vec{v} \doteq (0, 0, 0)_{\mathcal{E}} ,$$

independente da base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$ fixada.

Logo,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \overset{(3.100)}{=} \begin{cases} 0 \,.\, y_1 + 0 \,.\, y_2 + 0 \,.\, y_3 = 0 \\ x_1 \,.\, 0 + x_2 \,.\, 0 + x_3 \,.\, 0 = 0 \end{cases} ,$$

ou seja,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 .$$

2. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores não nulos de $\underline{V^3}$.*

Então, de (3.98) e (3.100), segue que

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\theta) , \tag{3.101}$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, é o ângulo entre os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$.

3. *Sejam*

$$\vec{u}\,,\vec{v} \neq \vec{O}\,.$$

Então, de (3.101), segue que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\,. \tag{3.102}$$

4. *Se* $\vec{u} \in V^3$ *segue, da Proposição (3.8.2) e de (3.100), que que*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}\,. \tag{3.103}$$

Além disso, temos as seguintes propriedades para o produto escalar: de dois vetores:

Proposição 3.10.1 *Sejam* $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w} \in V^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então:*

1. *vale a comutativa para o produto escalar, isto é:*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}\,;$$

2. *vale a distributiva do produto escalar pela adição de vetores , isto é:*

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}\,;$$

3. *vale a associativa do produto de vetor por escalar, pelo produto escalar, isto é:*

$$(\alpha \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \bullet \vec{v})\,;$$

4. *temos também que:*

$$\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$$

e

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \vec{u} = \vec{O}\,.$$

Demonstração:

Sejam

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^3}$,

$$\vec{u} \doteq (x_1\,, x_2\,, x_3)_{\mathcal{E}}\,, \quad \vec{v} \doteq (y_1\,, y_2\,, y_3)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{w} \doteq (z_1\,, z_2\,, z_3)_{\mathcal{E}} \tag{3.104}$$

as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$, $\underline{\vec{w}}$, em relação à base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$.

<u>De 1.:</u>

Temos que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{v} &\overset{(3.104)}{=} (x_1\,, x_2\,, x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (y_1\,, y_2\,, y_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.100)}{=} x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 \\
&= y_1\,x_1 + y_2\,x_2 + y_3\,x_3 \\
&\overset{(3.100)}{=} (y_1\,, y_2\,, y_3)_{\mathcal{E}} \bullet (x_1\,, x_2\,, x_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.104)}{=} \vec{v} \bullet \vec{u}\,,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

De 2.:

Temos que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) &\overset{(3.104)}{=} (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet [(y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}} + (z_1\,,z_2\,,z_3)_{\mathcal{E}})] \\
&= (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (y_1 + z_1\,,y_2 + z_2\,,y_3 + z_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.100)}{=} x_1\,(y_1 + z_1) + x_2\,(y_2 + z_2) + x_3\,(y_3 + z_3) \\
&= [x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3] + [x_1\,z_1 + x_2\,z_2 + x_3\,z_3] \\
&\overset{(3.100)}{=} (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}} + (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (z_1\,,z_2\,,z_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.104)}{=} \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

De 3.:

Temos que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet (\alpha \cdot \vec{v}) &\overset{(3.104)}{=} (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet [\alpha \cdot (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}}] \\
&= (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (\alpha y_1\,,\alpha y_2\,,\alpha y_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.100)}{=} x_1\,(\alpha\,y_1) + x_2\,(\alpha\,y_2) + x_3\,(\alpha\,y_3) \\
&= \alpha[x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3] \\
&\overset{(3.100)}{=} \alpha\,[(x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}}] \\
&\overset{(3.104)}{=} \alpha\,(\vec{v} \bullet \vec{u})\,,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

De 4.:

Temos que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{u} &\overset{(3.104)}{=} (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.100)}{=} x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + x_3\,x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0\,,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}
0 &= (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \bullet (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{(3.100)}{=} x_1\,x_1 + x_2\,x_2 + x_3\,x_3 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0\,,$$

ou seja

$$\vec{u} = (0\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{ou seja,} \quad = \vec{O}\,,$$

como queríamos mostrar, completando a demonstração do resultado.

□

Outro resultado importante é dado pela:

Proposição 3.10.2 *Sejam* $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$.

Então

$$\vec{u} \perp \vec{v}, \quad \textit{se, e somente se,} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0. \tag{3.105}$$

Demonstração:

1.o caso:

Se

$$\vec{u} = \vec{O},$$

então, pelas Definição (3.8.1) item 4. (a) e Observação (3.10.3) item 1., segue que

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0.$$

O mesmo acontece se

$$\vec{v} = \vec{O}.$$

Deixaremos o detalhe deste caso como exercício para o leitor.

2.o caso:

Suponhamos agora, que

$$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O},$$

então de (3.98), segue que

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos(\theta).$$

Logo

$$\vec{u} \perp \vec{v},$$

se, e somente se

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$\cos(\theta) = 0,$$

ou ainda, se, e somente se,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0,$$

como queríamos demonstrar.

□

Observação 3.10.4

1. *Um outro modo de caraterizar uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^3}$, *é utilizando-se o conceito de produto escalar.*

   Mais precisamente, a Observação (3.10.3) item 4. e a Proposição (3.10.2), como veremos a seguir.

<u>**Condições necessárias e suficientes**</u> *para que um conjunto formado por três vetores*

$$\mathcal{E} \doteq \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\}$$

seja uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$ são:

(a) os vetores do conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ são unitários, que da Observação (3.10.3) item 4., é equivalente a:

$$\underbrace{\|\vec{e}_1\|}_{\overset{(3.103)}{=}\sqrt{\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1}} = \underbrace{\|\vec{e}_2\|}_{\overset{(3.103)}{=}\sqrt{\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2}} = \underbrace{\|\vec{e}_3\|}_{\overset{(3.103)}{=}\sqrt{\vec{e}_3\bullet\vec{e}_3}} = 1\,; \tag{3.106}$$

(b) os vetores do conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ são, dois a dois, ortogonais, que da Proposição (3.10.2), é equivalente a:

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0\,. \tag{3.107}$$

<u>**Resumindo:**</u> *de (3.106) e (3.107), segue que, o conjunto de vetores $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ é base ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$ se, e somente se,*

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad i = j \\ 0\,, & \textit{para} \quad i \neq j \end{cases} \quad , \quad \textit{onde} \quad i\,, j \in \{1\,,2\,,3\}\,. \tag{3.108}$$

2. *Vale observar que para que o conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ seja uma base (ordenada) $\underline{V}^3$, precisaríamos ter verificado se os vetores do conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, ou seja, se eles satisfazem (3.108) então eles deverão, necessariamente, L.I. em $\underline{V}^3$.*

   De fato, suponhamos que

$$\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 = \vec{O}\,. \tag{3.109}$$

   Logo, da Proposição (3.10.1) item 4., segue que:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\textit{Prop. (3.10.1) item 4.}}{=} \vec{e}_1 \bullet \vec{O} \\ &\overset{(3.109)}{=} \vec{e}_1 \bullet [\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3] \\ &\overset{\textit{Prop. (3.10.1) item 1. e 3.}}{=} \alpha_1\,(\underbrace{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1}_{\overset{(3.108)}{=}1}) + \alpha_2\,(\underbrace{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2}_{\overset{(3.108)}{=}0}) + \alpha_3\,(\underbrace{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3}_{\overset{(3.108)}{=}0}) \\ &= \alpha_1\,. \end{aligned}$$

Analogamente, teremos:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 4.}}{=} \vec{e}_2 \bullet \vec{O} \\
&\overset{(3.109)}{=} \vec{e}_2 \bullet [\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3] \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 1. e 3.}}{=} \alpha_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.108)}{=} 0} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.108)}{=} 1} + \alpha_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.108)}{=} 0} \\
&= \alpha_2 . \\
0 &\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 4.}}{=} \vec{e}_3 \bullet \vec{O} \\
&\overset{(3.109)}{=} \vec{e}_3 \bullet [\alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3] \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 1. e 3.}}{=} \alpha_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.108)}{=} 0} + \alpha_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.108)}{=} 0} + \alpha_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.108)}{=} 1} \\
&= \alpha_3 .
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 ,$$

mostrando que os vettores $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ *são L.I. em* $\underline{V}^3$*, portanto uma base (ordenada) de* $\underline{V}^3$*.*

3. *Observemos que se os vetores* $\vec{u} , \vec{v} , \vec{w} \in V^3$ *satisfazem*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w} ,$$

isto **NÃO** *implica, necessariamente, que*

$$\vec{v} = \vec{w} ,$$

ou seja, **não** *vale a "lei do cancelamento" no produto escalar.*

De fato, fixada uma base ortonormal (ordenada)

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$$

de $\underline{V}^3$*, se considerarmos os vetores, cujas coordenadas em relaçao á base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V}^3$*, são dadas por:*

$$\vec{u} \doteq (1 , 0 , 0) - \mathcal{E} , \quad \vec{v} \doteq (4 , 2 , -3)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{w} \doteq (4 , 3 , 8)_{\mathcal{E}} ,$$

então temos que

$$\vec{v} \neq \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} \overset{(3.100)}{=} 4 \overset{(3.100)}{=} \vec{u} \bullet \vec{w} .$$

4. *Por outro lado, observemos que*

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{w}$$

se, e somente se,

$$\vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{w} = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} - \vec{w}) = 0,$$

ou seja,

$$\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w}).$$

Consideremos o:

Exemplo 3.10.1 *Sejam $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal (ordenada) fixada de $\underline{V}^3$ e os vetores que têm coordenadas, em relação à base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$, dadas por:*

$$\vec{u} = (2, 1, -1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} = (-1, 0, 2)_{\mathcal{E}}. \tag{3.110}$$

Pede-se:

1. *Encontre os ângulo, em radianos, entre os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$;*

2. *Os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ são ortogonais?*

Resolução:

De 1.:

Como os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ são não nulos, temos que

$$\cos(\theta) \overset{(3.102)}{=} \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

Mas

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \overset{(3.110)}{=} (2, 1, -1)_{\mathcal{E}} \bullet (-1, 0, 2)_{\mathcal{E}} \overset{(3.100)}{=} 2.(-1) + 1.0 + (-1)2 = -4, \tag{3.111}$$

$$\|\vec{u}\| \overset{(3.103) \text{ e } (3.110)}{=} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \tag{3.112}$$

$$\|\vec{v}\| \overset{(3.103) \text{ e } (3.110)}{=} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}. \tag{3.113}$$

Logo, de (3.111), (3.112) e (3.113), segue que

$$\cos(\theta) = \frac{-4}{\sqrt{30}}, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{30}}\right).$$

De 2.:

Pela Proposição (3.10.2) os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ não ortogonais pois

$$\vec{u} \bullet \vec{v} \overset{(3.111)}{=} -4 \neq 0.$$

□

O resultado a seguir nos diz quem serão as coordenadas de um vetor de $\underline{V}^3$, quando este é escrito como combinação linear em relação a uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$.

Proposição 3.10.3 *Sejam $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^3}$ e $\vec{u} \in V^3$. Então*

$$\vec{u} = (\vec{u} \bullet \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + (\vec{u} \bullet \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 , \tag{3.114}$$

ou seja, quando escrevemos um vetor em relação a uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^3}$, os coeficientes (isto é, as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$) serão obtidos fazendo-se o produto escalar do vetor pelo correspondente elemento da base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^3}$.

Demonstração:

Seja

$$\vec{u} = (x_1 , x_2 , x_3)_{\mathcal{E}} ,$$

as coordenadas do vetor $\underline{\vec{u}}$ em relação à base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, isto é,

$$\vec{u} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 . \tag{3.115}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{e}_1 &\overset{(3.115)}{=} (x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) \bullet \vec{e}_1 \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1. e 3.}}{=} x_1 (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) + x_2 (\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1) + x_3 (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1) \\
&\overset{(3.108)}{=} x_1 .1 + x_2 .0 + x_3 .0 = x_1 , \\
\vec{u} \bullet \vec{e}_2 &\overset{(3.115)}{=} (x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) \bullet \vec{e}_2 \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1. e 3.}}{=} x_1 (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2) + x_2 (\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2) + x_3 (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2) \\
&\overset{(3.108)}{=} x_1 .0 + x_2 .1 + x_3 .0 = x_2 , \\
\vec{u} \bullet \vec{e}_3 &\overset{(3.115)}{=} (x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3) \bullet \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1 itens 1 e 3.}}{=} x_1 (\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3) + x_2 (\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3) + x_3 (\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3) \\
&\overset{(3.108)}{=} x_1 .0 + x_2 .0 + x_3 .1 = x_3 ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$x_i = \vec{u} \bullet \vec{e}_i , \quad \text{para cada} \quad i \in \{1 , 2 , 3\},$$

completando a demonstração do resultado.

□

Com isto temos a:

Definição 3.10.3 *Na situação da Proposição (3.10.3) acima, diremos que o vetor*

$$(\vec{u} \bullet \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 \tag{3.116}$$

é a <u>**projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$, na direção do vetor $\vec{e}_1$**</u> *(que é unitário).*

Mais geralmente, temos a:

Definição 3.10.4 *Seja $\vec{v} \in V^3$ um vetor unitário (isto é, $\|\vec{v}\| = 1$).*

O vetor

$$(\vec{u} \bullet \vec{v}) \cdot \vec{v} \tag{3.117}$$

será denominado de **projeção ortogonal do vetor $\underline{u}$, na direção do vetor $\underline{v}$**.

A seguir temos um outro resultado importante, a saber:

Proposição 3.10.4 *Sejam $\underline{u}$, $\underline{v}$ vetores de $\underline{V}^3$.*

Então

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \,. \tag{3.118}$$

Demonstração:

1.o caso:

Se

$$\vec{u} = \vec{O}\,,$$

então teremos

$$|\underbrace{\vec{u} \bullet \vec{v}}_{\text{Prop. (3.10.1) item 4.} \atop = 0}| = 0 = \underbrace{\|\underbrace{\vec{u}}_{=\vec{O}}\|}_{=0} \, \|\vec{v}\|\,,$$

isto é, a desigualdade (3.118) tornar-se-á uma igualdade.

Analogamente, se $\vec{v} = \vec{O}$.

Deixaremos os detalhes deste caso, como exercício para o leitor.

2.o caso:

Se

$$\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}\,,$$

consideremos $\theta \in [0\,,\pi]$, o ângulo entre os vetores $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

De (3.102) temos

$$|\cos(\theta)| = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\,,$$

ou seja,

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\cos(\theta)| \overset{|\cos(\theta)| \leq 1}{\leq} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|\,,$$

como queríamos mostrar.

□

Observação 3.10.5 *A desigualdade acima é conhecida como* **desigualdade de Cauchy-Schwarz** *.*

O resultado a seguir trata da matriz mudanca de base, entre bases ortonormais (ordenadas) de $\underline{V}^3$.

Proposição 3.10.5 *Sejam*

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3) \quad e \quad \mathcal{F} = \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

bases ortonormais (ordenadas) de $\underline{V}^3$.

Então a matriz de mudança de base, da base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V}^3$*, isto é, a matriz* $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$*, é uma matriz ortogonal, ou seja, sua matriz inversa é igual a sua transposta, ou ainda*

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^{-1} = (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^t\,. \tag{3.119}$$

Demonstração:

Seja

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = (a_{ij})_{i\,,j\in\{1\,,2\,,3\}}$$

a matriz de mudança de base, da base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$ ortonormal (ordenada) de $\underline{V}^3$, isto é,

$$\vec{f}_j = a_{1j}\cdot\vec{e}_1 + a_{2j}\cdot\vec{e}_2 + a_{3j}\cdot\vec{e}_3\,, \quad \text{para cada} \quad j\in\{1\,,2\,,3\}\,.$$

Como as bases (ordenadas) $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ são bases ortonormais (ordenadas) de $\underline{V}^3$ segue, de (3.108), que, para cada $i\,,j\in\{1\,,2\,,3\}$, teremos:

$$\vec{f}_i \bullet \vec{f}_j = \begin{cases} 1\,, & \text{para} \quad i=j \\ 0\,, & \text{para} \quad i\neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1\,, & \text{para} \quad i=j \\ 0\,, & \text{para} \quad i\neq j \end{cases}\,. \tag{3.120}$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_1 \bullet \vec{f}_1 \overset{(3.119)}{=} (a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{21}\cdot\vec{e}_2 + a_{31}\cdot\vec{e}_3)\bullet(a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{21}\cdot\vec{e}_2 + a_{31}\cdot\vec{e}_3) \\ &\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} {a_{11}}^2(\underbrace{\vec{e}_1.\vec{e}_1}_{\overset{(3.120)}{=}1}) + a_{11}a_{21}(\underbrace{\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2}_{\overset{(3.120)}{=}0}) + a_{11}a_{31}(\underbrace{\vec{e}_1\bullet\vec{e}_3}_{\overset{(3.120)}{=}0}) \\ &+ a_{21}a_{11}(\underbrace{\vec{e}_2\bullet\vec{e}_1}_{\overset{(3.120)}{=}0}) + {a_{21}}^2(\underbrace{\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2}_{\overset{(3.120)}{=}1}) + a_{21}a_{31}(\underbrace{\vec{e}_2\bullet\vec{e}_3}_{\overset{(3.120)}{=}0}) \\ &+ a_{31}a_{11}(\underbrace{\vec{e}_3\bullet\vec{e}_1}_{\overset{(3.120)}{=}0}) + a_{31}a_{21}(\underbrace{\vec{e}_3\bullet\vec{e}_2}_{\overset{(3.120)}{=}0}) + {a_{31}}^2(\underbrace{\vec{e}_3\bullet\vec{e}_3}_{\overset{(3.120)}{=}1}) \\ &= {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 + {a_{31}}^2\,; \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_1 \bullet \vec{f}_2 \overset{(3.119)}{=} (a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{21}\cdot\vec{e}_2 + a_{31}\cdot\vec{e}_3) \bullet (a_{12}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 + a_{32}\cdot\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} a_{11}a_{12}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{11}a_{22}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{11}a_{32}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{21}a_{12}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{21}a_{22}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{21}a_{32}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{31}a_{12}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{31}a_{22}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{31}a_{32}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}1} \\
&= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}\,; \qquad (3.122)
\end{aligned}
$$

$$
0 \overset{(3.120)}{=} \vec{f}_2 \bullet \vec{f}_1 \overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1.}}{=} \vec{f}_1 \bullet \vec{f}_2 \overset{(3.122)}{=} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}\,; \qquad (3.123)
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_1 \bullet \vec{f}_3 \overset{(3.119)}{=} (a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{21}\cdot\vec{e}_2 + a_{31}\cdot\vec{e}_3) \bullet (a_{13}\cdot\vec{e}_1 + a_{23}\cdot\vec{e}_2 + a_{33}\cdot\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} a_{11}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{11}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{11}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{21}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{21}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{21}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{31}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{31}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{31}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}1} \\
&= a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33}\,; \qquad (3.124)
\end{aligned}
$$

$$
0 \overset{(3.120)}{=} \vec{f}_3 \bullet \vec{f}_1 \overset{\text{Prop. (3.10.1) item 1.}}{=} \vec{f}_1 \bullet \vec{f}_3 \overset{(3.124)}{=} a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33}; \qquad (3.125)
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_2 \bullet \vec{f}_3 \overset{(3.119)}{=} (a_{12}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 + a_{32}\cdot\vec{e}_3) \bullet (a_{13}\cdot\vec{e}_1 + a_{23}\cdot\vec{e}_2 + a_{33}\cdot\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} a_{12}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{12}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{12}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{22}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{22}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{22}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{32}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{32}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{32}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}1} \\
&= a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}\,; \qquad (3.126)
\end{aligned}
$$

$$
0 \overset{(3.120)}{=} \vec{f}_3 \bullet \vec{f}_2 \overset{\text{Prop. (3.10.1) item 1.}}{=} \vec{f}_2 \bullet \vec{f}_3 \overset{(3.126)}{=} a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}\,, \qquad (3.127)
$$

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_2 \bullet \vec{f}_2 \overset{(3.119)}{=} (a_{12}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 + a_{32}\cdot\vec{e}_3) \bullet (a_{12}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 + a_{32}\cdot\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} {a_{12}}^2\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{12}a_{22}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{12}a_{32}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{22}a_{12}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + {a_{22}}^2\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{22}a_{32}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{32}a_{12}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{32}a_{22}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + {a_{32}}^2\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}1} \\
&= {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 + {a_{32}}^2\,; \qquad (3.128)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{(3.120)}{=} \vec{f}_3 \bullet \vec{f}_3 \overset{(3.119)}{=} (a_{13}\cdot\vec{e}_1 + a_{23}\cdot\vec{e}_2 + a_{33}\cdot\vec{e}_3) \bullet (a_{13}\cdot\vec{e}_1 + a_{23}\cdot\vec{e}_2 + a_{33}\cdot\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{Prop. (3.10.1) itens 1 e 3.}}{=} a_{13}{}^2\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{13}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{12}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{23}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{23}{}^2\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2}_{\overset{(3.120)}{=}1} + a_{23}a_{33}\underbrace{(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}0} \\
&\quad + a_{33}a_{13}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{33}a_{23}\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2)}_{\overset{(3.120)}{=}0} + a_{33}{}^2\underbrace{(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3)}_{\overset{(3.120)}{=}1} \\
&= a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{33}{}^2 .
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

Logo, terermos a seguinte identidade:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}^t M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}{}^2 + a_{21}{}^2 + a_{31}{}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{32}{}^2 & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{33}{}^2 \end{pmatrix} \\
&\overset{(3.121) \text{ a } (3.129)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

isto é,

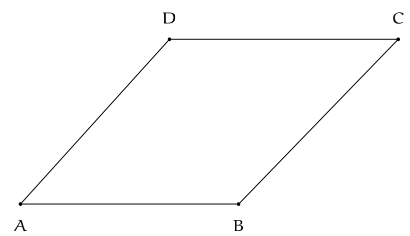
$$
(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^{-1} = (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^t ,
$$

ou seja, a matriz de mudança de base $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$ é uma matriz ortogonal, como queríamos mostrar.

□

Como uma aplicação temos o:

Exemplo 3.10.2 *Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares.*



Resolução:

Consideremos o losango $\underline{ABCD}$, como na figura acima.

Sejam

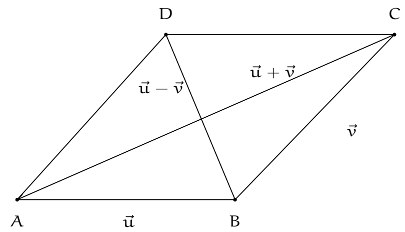
$$\vec{u} \doteq \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq \overrightarrow{BC} \,.$$

Como o quadrilátero $\underline{ABCD}$ é um losango, segue que

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \,. \tag{3.131}$$

Observemos que as diagonais do losango $\underline{ABCD}$ podem ser interpretados com segmentos orientados que representam os vetores (veja a ilustração abaixo)

$$\vec{u} + \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{u} - \vec{v} \,.$$



Logo como basta mostrarmos que os vetores $(\vec{u} + \vec{u})$ e $(\vec{u} - \vec{v})$ são ortogonais.

Para isto calculemos:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) &\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 1.}}{=} \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet (-\vec{v}) + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet (-\vec{v}) \\ &\overset{\text{Prop. (3.10.1) item 3.}}{=} \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 \overset{(3.131)}{=} 0 \,,\end{aligned}$$

mostrando que as digonais de uma losango interceptam-se perpendicularmente.

Observação 3.10.6 *O Exemplo (3.10.2) acima, juntamente com o Exemplo (3.5.1), implicarão que as diagonais de um losango interceptam perpendicularmente nos seus respectivos pontos médios.*

Fazendo-se as adaptações convenientes tudo o que fizemos em $\underline{V}^3$ pode ser feito em $\underline{V}^2$, a saber, ângulo entre vetores de $\underline{V}^2$, produto escalar em $\underline{V}^2$ e assim por diante.

Colocaremos estes conceitos e propriedades dos mesmos na observação a seguir, cujas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

Observação 3.10.7

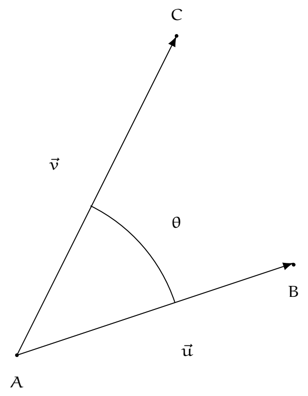
1. *Sejam $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ vetores $\underline{V}^2$, diferentes do vetor nulo.*

   Fixado o ponto $A \in \mathbb{R}^2$, sabemos que existem únicos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, pontos do plano, tais que

   $$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad e \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v} \,.$$

   Seja θ a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{BAC}$, tal que (veja a ilustração abaixo)

   $$\theta \in [0, \pi] \,.$$



*Observemos que o ângulo $\underline{\theta}$, obtido acima, **não** depende da escolha dos representantes dos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$.*

2. *O ângulo $\theta \in [0, \pi]$, obtido no item acima, será denominado **ângulo** entre os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$.*

3. *A seguir encontraremos uma expressão do ângulo $\underline{\theta}$, entre dois vetores não nulos, em termos das coordenadas desses vetores em relação a uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^2}$.*

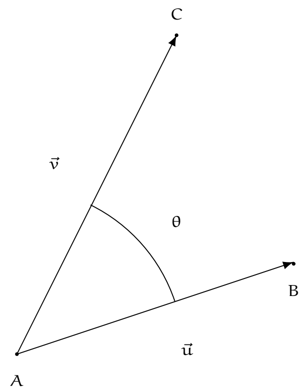
   Fixemos uma base ortonormal (ordenada)

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2),$$

   de $\underline{V^2}$.

   Sejam $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ pontos do plano, tais que (veja a ilustração abaixo)

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \quad e \quad \overrightarrow{AC} = \vec{v}.$$



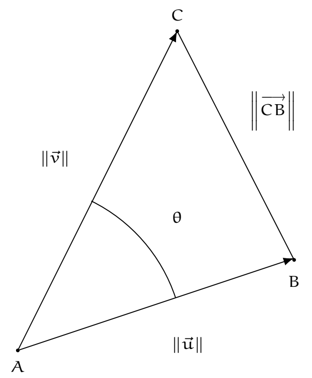
Consideremos as coordenadas dos vetores, em relação à base ortonormal (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V}^3$*, como sendo dadas por :*

$$\vec{u} = (x_1\,, x_2)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} = (y_1\,, y_2)_{\mathcal{E}}\,.$$

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *é uma base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V}^2$*, segue que*

$$\|\vec{u}\|^2 = {x_1}^2 + x_2^2 \quad e \quad \|\vec{v}\|^2 = {y_1}^2 + y_2^2\,.$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔABC *(vide ilustração abaixo) teremos:*



$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\theta).$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 &\overset{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{=} \left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right\|^2 \overset{\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}}{=} \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2 \\
&= \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|(x_1\,, x_2)_{\mathcal{E}} - (y_1\,, y_2)_{\mathcal{E}}\|^2 \\
&= \|(x_1 - y_1\,, x_2 - y_2)_{\mathcal{E}}\|^2 \\
&= \left[\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right]^2 \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\,.
\end{aligned}$$

Com isto, obteremos:

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \left({x_1}^2 + x_2^2\right) + \left({y_1}^2 + y_2^2\right) - 2\,\cos(\theta)\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da identidade acima, calcelando-se os termos comuns a ambos os membros da igualdade acima, obteremos:

$$x_1\,y_1 + x_2\,y_2 = \cos(\theta)\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,.$$

Como $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{O}$*, segue que*

$$\|\vec{u}\|\,, \|\vec{v}\| \neq 0\,,$$

e assim teremos:

$$\cos(\theta) = \frac{x_1\, y_1 + x_2\, y_2}{\|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|}\,.$$

Observemos que a expressão

$$x_1\, y_1 + x_2\, y_2$$

NÃO *depende da base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$ *que fixamos inicialmente.*

A verificação deste fato é semelhante a que fizemos em $\underline{V^3}$ *e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.*

4. *Com isto podemos introduzir a seguinte definição: sejam* $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ *vetores de* $\underline{V^2}$.

   Definiremos o **produto escalar** *dos vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$, *indicado por* $\underline{\vec{u} \bullet \vec{v}}$, *como sendo a expressão;*

   $$\vec{u} \bullet \vec{v} \doteq x_1\, y_1 + x_2\, y_2\,,$$

   onde

   $$\vec{u} \doteq (x_1\,, x_2)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} \doteq (y_1\,, y_2)_{\mathcal{E}}\,,$$

   são as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$, *em relação a uma base ortonormal (ordenada)* $\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$ *de* $\underline{V^2}$ *fixada.*

5. *Se o vetor* $\underline{\vec{u}}$, *ou o vetor* $\underline{\vec{v}}$, *for o vetor nulo, então teremos que*

   $$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0\,.$$

6. *Se* $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ *são vetores não nulos de* $\underline{V^2}$, *então teremos que*

   $$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, \cos(\theta)\,,$$

   onde $\theta \in [0\,, \pi]$, *é o ângulo entre os vetores* $\underline{\vec{u}}$ *e* $\underline{\vec{v}}$.

7. *Se* $\vec{u}\,, \vec{v} \neq \vec{O}$, *segue que*

   $$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|}.$$

8. *Se* $\vec{u} \in V^2$, *segue que que*

   $$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}\,.$$

9. *Se* $\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w} \in V^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos que:*

   (a) *vale a comutativa para o produto escalar, isto é:*

   $$\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}\,;$$

   (b) *vale a distributiva do produto escalar pela adição de vetores , isto é:*

   $$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}\,;$$

(c) *vale a associativa do produto de vetor por escalar, pelo produto escalar, isto é:*

$$(\alpha \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \bullet \vec{v})\,;$$

(d) *temos também que:*

$$\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$$

e

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad \vec{u} = \vec{O}\,.$$

10. *Se* $\vec{u}\,,\vec{v} \in V^2$, *segue que*

$$\vec{u} \perp \vec{v}\,, \quad \textit{se, e somente se,} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0\,.$$

11. *O conjunto de vetores* $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ *é base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^2}$ *se, e somente se,*

$$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad i = j \\ 0\,, & \textit{para} \quad i \neq j \end{cases}\,, \quad \textit{onde} \quad i,j \in \{1,2\}\,.$$

12. *Sejam* $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ *base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^2}$ *e* $\vec{u} \in V^2$. *Então*

$$\vec{u} = (\vec{u} \bullet \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + (\vec{u} \bullet \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2\,,$$

ou seja, quando escrevemos um vetor em relação a uma base ortonormal (ordenada) de $\underline{V^2}$, *os coeficientes (as coordenadas do vetor) serão obtidos fazendo-se o produto escalar do vetor pelo correspondente elemento da base ortonormal (ordenada) de* $\underline{V^2}$.

13. *Na situação acima, diremos que o vetor*

$$(\vec{u} \bullet \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1$$

é a **projeção ortogonal do vetor $\vec{u}$ na direção do vetor $\vec{e}_1$** *(que é unitário).*

Mais geralmente, se $\vec{v} \in V^2$ *é um vetor unitário (isto é,* $\|\vec{v}\| = 1$*).*

O vetor

$$(\vec{u} \bullet \vec{v}) \cdot \vec{v} \tag{3.132}$$

será denominado de **projeção ortogonal do vetor $\underline{\vec{u}}$, na direção do vetor $\underline{\vec{v}}$**.

14. *Se* $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ *vetores de* $\underline{V^2}$, *então*

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,,$$

que é conhecida como **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** *em* $\underline{V^2}$.

15. *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1 \,, \vec{e}_2) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1 \,, \vec{f}_2\right)$$

bases ortonormais (ordenadas) de $\underline{V}^2$*. Então a matriz de mudança de base, da base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base ortonormal (ordenada)* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V}^2$*, isto é, a matriz* $\underline{M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}$*, é uma matriz ortogonal, ou seja, sua matriz inversa é igual a sua transposta, ou ainda*

$$M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} = {M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}^{-1} = {M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}}^{t} \,.$$

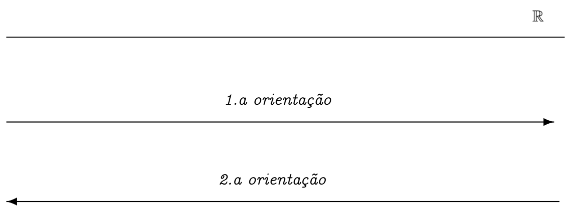
9.a aula - 27.03.2014

3.11 Orientação em $\underline{V}^1$, $\underline{V}^2$ ou $\underline{V}^3$

Começaremos com a:

Observação 3.11.1

1. *Dada uma reta* $\underline{r}$ *podemos, intuitivamente, dar a esta reta duas orientações diferentes, a saber:*



Observemos uma base do o conjunto formado por todos os vetores da reta $\underline{r}$*, que indicaremos por* $\underline{V}^1$*, é formada por um vetor não nulo.*

Além disso, se

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}\right)$$

são duas bases de $\underline{V}^1$*, então temos que os vetores* $\underline{\vec{e}}$ *e* $\underline{\vec{f}}$ *deverão ser paralelos, isto é, existe* $\alpha \neq 0$*, tal que*

$$\vec{f} = \alpha \cdot \vec{e} \,,$$

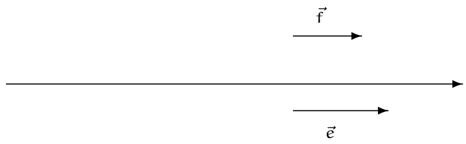
ou ainda, a matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ *para a base* $\underline{\mathcal{F}}$ *de* $\underline{V}^1$*, será dada por:*

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = (\alpha) \,,$$

matriz formada por um único elemento.

Se as duas bases $\underline{\mathcal{E}}$ *e* $\underline{\mathcal{F}}$ *nos fornecem a mesma orientação para a reta* $\underline{r}$*, ou melhor, para* $\underline{V}^1$*, então deveremos ter* $\alpha > 0$*, ou seja, (veja a figura abaixo)*

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \alpha > 0 \,.$$



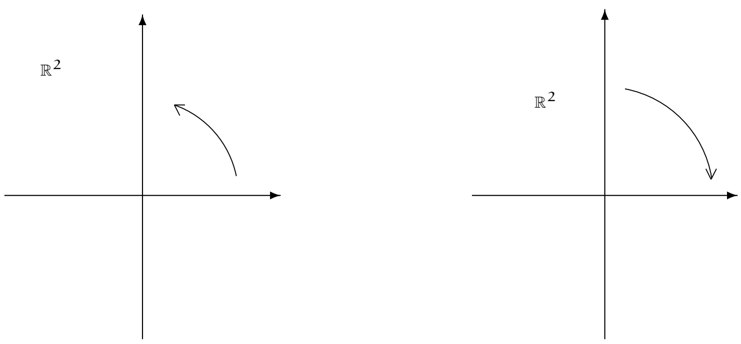
Por outro lado, se as duas bases $\underline{\mathcal{E}}$ *e* $\underline{\mathcal{F}}$ *nos fornecem orientações opostas para a reta* $\underline{r}$*, ou melhor, para* $\underline{V^1}$*, então deveremos ter* $\alpha < 0$*, ou seja, (veja a figura abaixo)*

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \alpha < 0\,.$$

Conclusão: *na reta* $\underline{r}$*, ou melhor, em* $\underline{V^1}$*, duas bases de* $\underline{V^1}$ *têm mesma orientação se, e somente se, o determinante da matriz de mudança de base é positivo.*

Caso contrário (isto é, se o determinante da matriz de mudança de base é negativo) as duas bases de $\underline{V^1}$ *têm orientações opostas.*

2. *No plano, ou melhor, em* $\underline{V^2}$*, podemos dar as seguintes orientações: horário e anti-horário (veja a figura abaixo).*

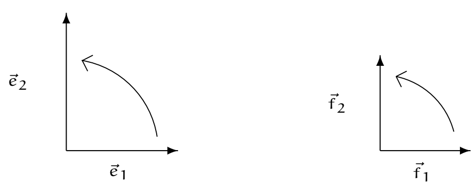


Observemos que uma base de $\underline{V^2}$ *será formada por dois vetores que são L.I. em* $\underline{V^2}$*.*

Consideremos as bases

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,, \vec{f}_2\right)$$

de $\underline{V^2}$*, como na ilustração abaixo, que nos fornecem uma mesma orientações no plano, ou melhor, de* $\underline{V^2}$ *(intuitivamente: de* $\underline{\vec{e}_1}$ *para* $\underline{\vec{e}_2}$ *é a mesma de* $\underline{\vec{f}_1}$ *para* $\underline{\vec{f}_2}$*, veja a figura abaixo):*



Na situação acima, temos que existem $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, tais que

$$\vec{f}_1 = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \quad e \quad \vec{f}_2 = \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2\,.$$

Logo, a matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V}^2$, será dada por:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Em particular, notemos que

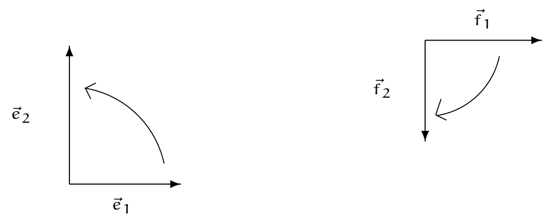
$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \alpha_1\alpha_2 > 0$$

e as duas bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ nos fornecem a mesma orientação no plano, ou melhor, em $\underline{V}^2$.

Consideremos uma outra situação, a saber, as bases

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,, \vec{f}_2\right)\,,$$

como na ilustração abaixo, que nos fornecem orientações opostas no plano $\mathbb{R}^2$, ou melhor, em V^2 (intuitivamente: de $\vec{e}_1$ para $\vec{e}_2$ é contrária a de $\vec{f}_1$ para $\vec{f}_2$):



Na situação acima temos que existem $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 < 0$, tais que

$$\vec{f}_1 = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \quad e \quad \vec{f}_2 = \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2\,.$$

Logo a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{E}$ para a base $\mathcal{F}$ de V^2, será dada por

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \alpha_1\alpha_2 < 0\,,$$

e as duas bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ nos fornecem orientações opostas no plano, ou melhor, em $\underline{V}^2$.

Poderíamos considerar outras situações mais gerais que o mesmo iria ocorrer, isto é, duas bases têm mesma orientação no plano se, e somente se, a matriz de mudança das bases tem determinante positivo e têm orientações opostas se, e somente se, a matriz de mudança das bases tem determinante negativo.

3. A seguir introduziremos o mesmo no espaço, ou melhor, em $\underline{V}^3$.

Definição 3.11.1 *Diremos que duas bases*

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3) \quad e \quad \mathcal{F} = \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

têm **mesma orientação** *em $\underline{V}^3$ se a matriz de mudança de bases tem determinante positivo, isto é, se, e somente se,*

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) > 0\,.$$

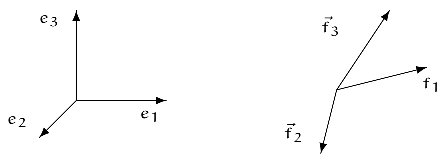
Caso contrário, isto é, se

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) < 0\,,$$

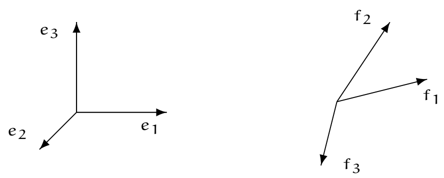
diremos que as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$, de $\underline{V}^3$, têm **orientações opostas** *em $\underline{V}^3$.*

Observação 3.11.2 *Um outro modo intuitivo de verificarmos se duas bases de têm mesma orientação é tentar "deformar" uma na outra, sendo que, em cada passo da "deformação", os três vetores obtidos, não deixam de ser uma base para $\underline{V}^3$ (ou seja, L.I. em $\underline{V}^3$).*

As base $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$, determinam uma mesma orientação em $\underline{V}^3$.



As base $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$, determinam orientações opostas em $\underline{V}^3$.



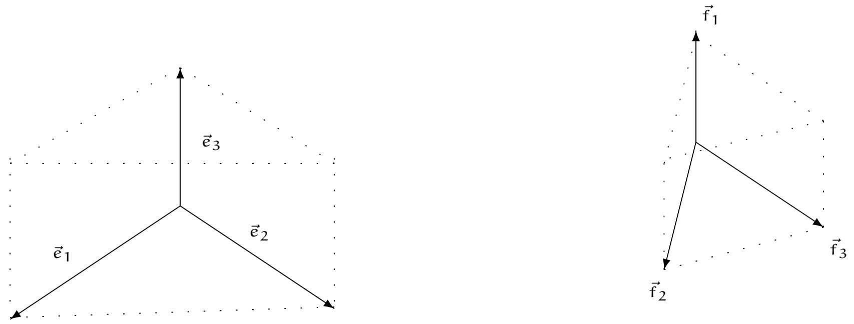
Consideremos os exemplos a seguir:

Exemplo 3.11.1 *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

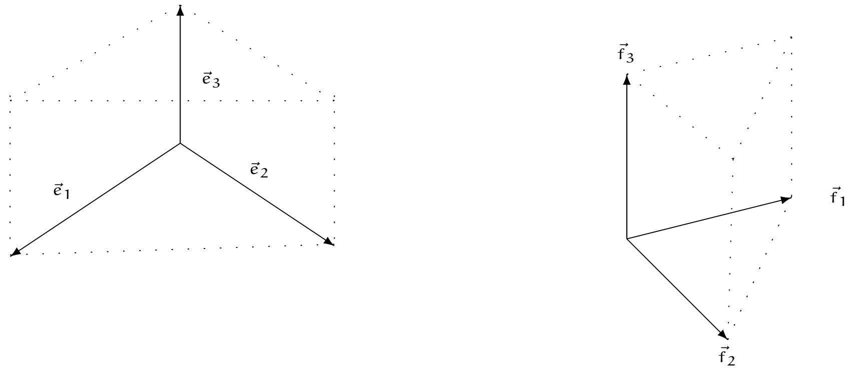
bases de $\underline{V}^3$, cujos os segmentos orientados que as representam estão nas figuras abaixo.

1.



Neste caso, as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ têm mesma orientação em $\underline{V}^3$.

2.



Neste caso as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ têm orientações opostas em $\underline{V}^3$.

□

Observação 3.11.3

1. *Com a noção de orientação introduzida acima, o conjunto formado por todas as bases de $\underline{V}^3$, fica dividido em duas classes que se caraterizam da seguinte forma:*

   Escolha uma base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$.

   Considere todas as bases de $\underline{V}^3$ que têm mesma orientação que a base $\underline{\mathcal{E}}$, isto é, cujo determinante da matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base tomada, seja positivo.

   Estas bases formam uma classe que denotaremos por $\underline{\mathcal{A}}$.

   Podemos também definir uma outra classe, formada por todas as bases de $\underline{V}^3$, que têm orientação oposta de $\underline{\mathcal{E}}$, isto é, cujo determinante da matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base tomada, seja negativo, que denotaremos por $\underline{\mathcal{B}}$.

2. *Duas bases pertencentes a uma mesma classe têm mesma orientação, isto é, se $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{A}$ (ou $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{B}$), segue que as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ têm mesma orientação em $\underline{V}^3$.*

   Duas bases pertencentes a classes distintas, possuem orientações opostas, isto é, se $\mathcal{E} \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$), segue que as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ têm orientações opostas em $\underline{V}^3$.

3. *As $\underline{\mathcal{A}}$ e $\underline{\mathcal{B}}$ **não** dependem da base $\mathcal{E}$ escolhida inicialmente.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 3.11.2 *Qualquer uma das classes $\underline{\mathcal{A}}$ ou $\underline{\mathcal{B}}$ será dita uma **orientação de $\underline{V^3}$**.*

*Escolhida uma orientação em $\underline{V^3}$ (ou seja, a classe $\underline{\mathcal{A}}$ ou a classe $\underline{\mathcal{B}}$) diremos que $\underline{V^3}$ está **orientado**.*

*Neste caso as bases que estão na orientação escolhida serão ditas **bases positivas de $\underline{V^3}$** e as que não estão na orientação escolhida serão ditas **bases negativas de $\underline{V^3}$**.*

Consideremos os:

Exemplo 3.11.2 *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$$

bases de $\underline{V^3}$, cujos vetores se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_1 = \vec{e}_3 \end{cases} . \tag{3.133}$$

As bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ de $\underline{V^3}$, têm mesma orientação em $\underline{V^3}$?

Resolução:

Notemos que (3.133) é equivalente à:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} ,$$

assim

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Logo

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) \overset{\text{Exercício}}{=} 1 > 0 ,$$

ou seja, as bases $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{\mathcal{F}}$ têm as mesma orientação em $\underline{V^3}$.

□

Exemplo 3.11.3 *Sejam*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \quad e \quad \mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$$

bases de $\underline{V}^3$, cujos vetores se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} . \tag{3.134}$$

As bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, de $\underline{V}^3$, têm mesma orientação em $\underline{V}^3$?

Resolução:

Notemos que (3.134) é equivalente à:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{cases} ,$$

assim

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

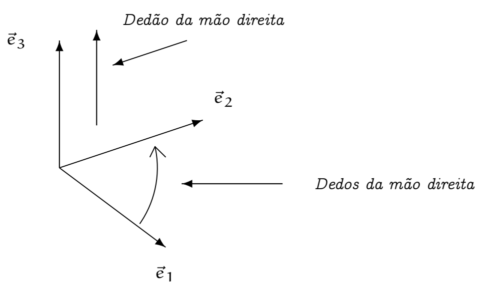
Logo

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) \overset{\text{Exercício}}{=} -1 < 0 ,$$

ou seja, as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ têm orientações opostas em $\underline{V}^3$.

□

Observação 3.11.4 *Para verificarmos se duas bases, "dadas geometricamente", têm a mesma orientação ou orientações opostas em $\underline{V}^3$, podemos utilizar a "regra da mão direita e do polegar" (veja a ilustração abaixo).*



Para finalizar esta seção, notamos que podemos definir orientações em $\underline{V}^2$ ou $\underline{V}^1$, de modo semelhante ao que fizemos em $\underline{V}^3$ (veja a Observação (3.11.3)).

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

3.12 Produto Vetorial de Vetores em $\underline{V}^3$

Observação 3.12.1 *Nosso objetivo é dados dois vetores $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, definir um outro vetor, que de um certo modo, será o "produto" dos vetores em questão, mais precisamente:*

Definição 3.12.1 *Fixemos uma orientação em $\underline{V}^3$.*

Dados $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ vetores de $\underline{V}^3$, definiremos o **produto vetorial** *do vetor $\underline{\vec{a}}$ pelo vetor $\underline{\vec{b}}$, indicado por*

$$\vec{a} \wedge \vec{b},$$

como sendo o vetor de $\underline{V}^3$, que tem as seguintes propriedades:

1. *se os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$, então*

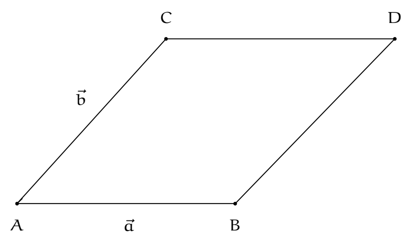
$$\vec{a} \wedge \vec{b} \doteq \vec{O};$$

2. *se os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, o vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$, deverá ter as seguintes características:*

   (a) *Comprimento do vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$:*

   Fixado o ponto $\underline{A}$ do espaço, pela Proposição (3.2.2), segue que existe úncos pontos $\underline{B}$ e $\underline{C}$, do espaço, de modo que os segmentos orientados $\underline{(A, B)}$ e $\underline{(A, C)}$ representam os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$, respectivamente.

   Consideremos o ponto $\underline{D}$ do espaço, de forma que o quadrilátero $\underline{ABDC}$ seja um paralelogramo (veja a figura abaixo).

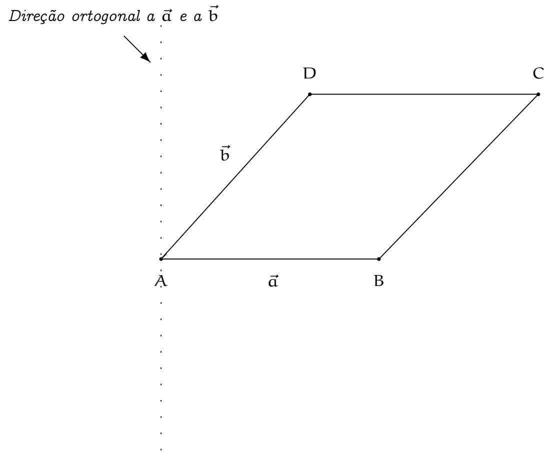


   A norma do vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ (isto é, $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|$) será dada pelo valor da área do paralelogramo $\underline{ABDC}$.

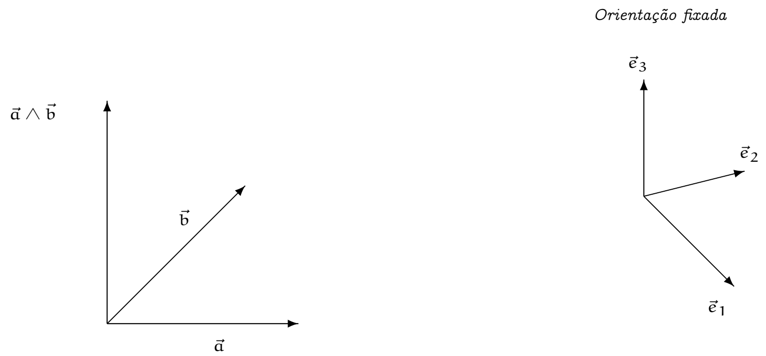
   (b) *Direção do vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$:*

   O vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ deverá ser ortogonal aos vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ (veja a figura abaixo), isto é,

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \perp \vec{a} \quad e \quad \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \perp \vec{b};$$



(c) *Sentido do vetor $\vec{a} \wedge \vec{b}$:*
O conjunto de vetores $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ deverá ser uma base positiva de $\underline{V}^3$.



Temos as seguintes observações:

Observação 3.12.2

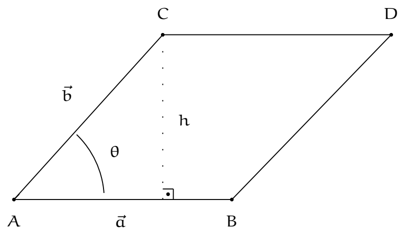
1. *Se $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{O}$, naa Definição (3.12.1) acima, vale observar que a área, que chamaremos de $\mathcal{A}$, do paralelogramo $\underline{ABDC}$ acima, será dada por:*

$$\mathcal{A} = AB.h \overset{h=AC.,\,\text{sen}(\theta)}{=} AB.AC.\,\text{sen}(\theta) = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \text{sen}(\theta),$$

ou seja:

$$\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \text{sen}(\theta), \tag{3.135}$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, é o ângulo entre os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$.



2. *Se* $\vec{a}\,,\vec{b} \neq \vec{O}$*, lembremos que, de* (3.101)*, temos que*

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos(\theta)\,,$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ *é o ângulo entre os vetores* $\underline{\vec{a}}$ *e* $\underline{\vec{b}}$.

3. *Observemos também que*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}\,, \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \underline{\vec{a}}\,,\underline{\vec{b}} \text{ são L.D. em } \underline{V^3}\,.$$

De fato, se os vetores $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{b}}$ *são L.D. me* $\underline{V^3}$*, da Definição* (3.12.1)*, deveremos ter*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}\,.$$

Reciprocamente, se

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}\,,$$

então os vetores $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{b}}$ *serão L.D em* $\underline{V^3}$ *pois, caso contrário, se eles fossem L.I. em* $\underline{V^3}$*, teríamos que*

$$\left(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

seria uma base, em particular, os vetores $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{b}}$*,* $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ *seriam L.I. em* $\underline{V^3}$*, o que seira um absurdo, pois* $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}$.

Logo os vetores $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{b}}$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$.

4. *Como os vetores* $\underline{\vec{a}}$*,* $\underline{\vec{a}}$ *são L.D. em* $\underline{V^3}$*, segue da Deifição* (3.12.1)*, que*

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{O}\,. \tag{3.136}$$

5. *A Definição (3.12.1) é dada em termos geométricos.*

   A seguir daremos uma caraterização algébrica para o produto vetorial de dois vetores de $\underline{V^3}$*, a saber:*

Proposição 3.12.1 *Seja*

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

uma base ortonormal (ordenada) positiva de $\underline{V^3}$.

Consideremos $\vec{a}\,,\vec{b} \in V^3$*, cujas coordenadas em relação à base ortonormal (ordenada) positiva* $\underline{\mathcal{E}}$*, de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{a} \doteq (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}} \qquad e \qquad \vec{b} \doteq (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.137}$$

Então

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\,, \tag{3.138}$$

onde, o determinante acima, deve ser interpretado como sendo igual ao vetor

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\,. \tag{3.139}$$

Demonstração:

Seja

$$\vec{c} \doteq \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 . \tag{3.140}$$

Notemos que:

(i) Suponhamos que os vetores $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ são L.D. em $\underline{V}^3$.

Então, pela Proposição (3.6.1), temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} . \tag{3.141}$$

Consideremos o caso que:

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} .$$

O caso

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$$

é semelhante e será deixado como exercício para o leitor.

Logo, de (3.141) e (3.137), segue que:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha\, y_1 \\ x_2 = \alpha\, y_2 \\ x_3 = \alpha\, y_3 \end{cases} . \tag{3.142}$$

Com isto teremos:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{(3.142)}{=} \begin{vmatrix} \alpha\, y_2 & \alpha\, y_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Corolário (A.5.1) do Apêndice (A)}}{=} \alpha \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \alpha\,(y_2\, y_3 - y_3\, y_2) = 0 ; \tag{3.143}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overset{(3.142)}{=} \begin{vmatrix} \alpha\, y_1 & \alpha\, y_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Corolário (A.5.1) do Apêndice (A)}}{=} \alpha \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \alpha\,(y_1\, y_3 - y_3\, y_1) = 0 ; \tag{3.144}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overset{(3.142)}{=} \begin{vmatrix} \alpha\, y_1 & \alpha\, y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overset{\text{Corolário (A.5.1) do Apêndice (A)}}{=} \alpha \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha\,(y_1\, y_2 - y_2\, y_1) = 0 , \tag{3.145}$$

isto é,

$$\vec{c} \overset{(3.140),(3.143),(3.144),(3.145)}{=} \vec{0}$$

e sabemos que

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O} .$$

Portanto, se

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} ,$$

valerá a identidade (3.138).

Logo, quando os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$, temos que vale a identidade (3.138).

(ii) Suponhamos que os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$.

Mostraremos que os vetores

$$\vec{c} \quad \text{e} \quad \vec{a} \wedge \vec{b}$$

têm mesmo comprimento (isto é, mesma norma), mesma direção e mesmo sentido, em particular, vale a identidade (3.138).

Observemos que, como $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ é uma base ortonormal (positiva) de $\underline{V}^3$, segue de (3.103) e (3.100), que

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &\overset{(3.140)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)^2 + (x_1\,y_3 - x_3\,y_1)^2 + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)^2 \\
&= \left(x_2^2\,y_3^2 - 2\,x_2\,y_3\,x_3\,y_2 + x_3^2\,y_2^2\right) + \left(x_1^2\,y_3^2 - 2\,x_1\,y_3\,x_3\,y_1 + x_3^2\,y_1^2\right) \\
&\qquad + \left(x_1^2\,y_2^2 - 2\,x_1\,y_2\,x_2\,y_1 + x_2^2\,y_1^2\right) \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - (x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.146}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|^2 &\overset{(3.135)}{=} \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \left[1 - \cos^2(\theta)\right] \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \cos^2(\theta) \\
&\overset{(3.101)}{=} \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - (x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Comparando (3.146) com (3.147), segue que

$$\|\vec{c}\| = \left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|\,. \tag{3.148}$$

Observemos também que o vetor $\underline{\vec{c}}$ é ortogonal aos vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$.

De fato, pois:

$$\begin{aligned}
\vec{c} \bullet \vec{a} &\overset{(3.140),(3.137)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} x_1 + \left(-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\right) x_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} x_3 \\
&\overset{\text{Def. (A.5.1)}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Corolário (A.5.3) do Apêndice (A)}}{=} 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{c} \perp \vec{a}\,.$$

De modo análogo, temos que

$$\vec{c} \bullet \vec{b} \overset{(3.140),(3.137)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} y_1 + \left(- \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \right) y_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} y_3$$
$$\overset{\text{Def. (A.5.1)}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Corolário (A.5.3) do Apêndice (A)}}{=} 0 ,$$

ou seja,

$$\vec{c} \perp \vec{b} .$$

Portanto, deveremos ter

$$\vec{c} \parallel \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) , \quad \text{ou seja, os vetores} \quad \underline{\vec{c}} \ \text{ e } \ \underline{\vec{a} \wedge \vec{b}} \text{ têm a mesma direção.}$$

Finalmente, mostremos que os vetores $\underline{\vec{c}}$ e $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ têm o mesmo sentido.

Observemos que os vetores

$$\vec{a} , \vec{b} , \vec{c}$$

são L.I. em $\underline{V}^3$, pois os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ e o vetor $\vec{c} \neq \vec{O}$ é ortogonal a ambos os vetores.

Logo, se mostrarmos que

$$\mathcal{F} \doteq \left(\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} \right)$$

é uma base (ordenada) positiva de $\underline{V}^3$, então segue que os vetores

$$\vec{c} \quad \text{e} \quad \vec{a} \wedge \vec{b}$$

deverão ter o mesmo sentido.

Notemos que, de (3.137) e (3.140), que a matriz de mudança da base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$, de $\underline{V}^3$, será dada por:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_2 & y_2 & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} .$$

Logo, seu determinante será dad por:

$$
\begin{aligned}
\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_2 & y_2 & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \left(- \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \right) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \left| \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}^t \right| + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}^t \right| + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^t \right| \\
&\overset{\text{(A.43) do Apêndice (A)}}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 \overset{(3.140)}{=} \|\vec{c}\|^2 > 0 .
\end{aligned}
$$

Assim, a base

$$
\mathcal{F} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)
$$

é uma base (ordenada) positiva de $\underline{V^3}$.

Como consequência, temos que os vetores $\underline{\vec{c}}$ e $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ têm mesmo sentido.

Como, os vetores $\underline{\vec{c}}$ e $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ têm mesma norma, mesma direção e mesmo sentido, eles deverão ser iguais, completando assim a demonstração do resultado.

$\square$

Com isto temos as seguintes propriedades para o produto vetorial:

Proposição 3.12.2 *Sejam $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ vetores de $\underline{V^3}$ e $\underline{\alpha}$ um número real.*

Então, valem as seguintes identidades:

$$
\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}, \tag{3.149}
$$

$$
\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}, \tag{3.150}
$$

$$
\vec{a} \wedge \left(\alpha \cdot \vec{b}\right) = (\alpha \cdot \vec{a}) \wedge \vec{b} = \alpha \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right), \tag{3.151}
$$

$$
\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right), \tag{3.152}
$$

Demonstração:

Seja $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base ortonormal (ordenada) positiva de $\underline{V^3}$.

Com isto os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$, possuirão as seguintes coordenadas em relação à base ortonormal (ordenada) positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$:

$$
\vec{a} \doteq (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{b} \doteq (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{c} \doteq (z_1, z_2, z_3)_{\mathcal{E}} . \tag{3.153}
$$

Notemos que, da Proposição (3.12.1), segue que:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\wedge\left(\vec{b}+\vec{c}\right) &\overset{(3.138)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2+z_2 & y_3+z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_3+z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{Prop. (A.5.2) do Apêndice (A)}}{=} \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_1 - \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_2 \\
&\qquad + \left[\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_3 \\
&= \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\qquad + \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \overset{(3.138)}{=} \vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c},
\end{aligned}
$$

ou seja, vale (3.149).

Novamente, da Proposição (3.12.1), segue que:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\wedge\left(\alpha\cdot\vec{b}\right) &\overset{(3.138)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha\, y_1 & \alpha\, y_2 & \alpha\, y_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \alpha\, y_2 & \alpha\, y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ \alpha\, y_1 & \alpha\, y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha\, y_1 & \alpha\, y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{Prop. (A.5.2) do Apêndice (A)}}{=} \left[\alpha \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_1 - \left[\alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \right] \cdot \vec{e}_2 \\
&\qquad + \left[\alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_3 \qquad (3.154) \\
&\overset{\text{Prop. (A.5.2) do Apêndice (A)}}{=} \left[\begin{vmatrix} \alpha\, x_2 & \alpha\, x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} \alpha\, x_1 & \alpha\, x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 \right. \\
&\qquad \left. + \begin{vmatrix} \alpha\, x_1 & \alpha\, x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\right] \overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha\, x_1 & \alpha\, x_2 & \alpha\, x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3.138)}{=} (\alpha\cdot\vec{a})\wedge\vec{b}. \qquad (3.155)
\end{aligned}
$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \left(\alpha \cdot \vec{b}\right) &\overset{(3.154)}{=} \left[\alpha \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_1 - \left[\alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \right] \cdot \vec{e}_2 + \left[\alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right] \cdot \vec{e}_3 \\
&= \alpha \left[\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\overset{(3.139)}{=} \alpha \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overset{(3.138)}{=} \alpha \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) .
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Logo, de (3.155) e (3.156), segue a validade da identidade (3.151).

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &\overset{(3.138)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\
&\overset{\text{Prop. (A.5.3) do Apêndice (A))}}{=} - \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\
&= - \left[\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\right] \\
&\overset{(3.139)}{=} - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \overset{(3.138)}{=} -\vec{b} \wedge \vec{a} ,
\end{aligned}$$

mostrando a validade da identidade (3.152).

Utilizando-se (3.152) e (3.149) podemos mostrar a identidade (3.150).

Deixaremos os detalhes deste caso como exercício para o leitor.

□

Consideremos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 3.12.1 *Fixemos um base ortonormal (ordenada) positiva $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ de $\underline{V}^3$.*

1. *Encontre o vetor $\vec{a} \wedge \vec{b}$, onde os vetores envolvidos, tem as seguinte coordenadas em relação à base ortonormal (ordenada) positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$:*
$$\vec{a} \doteq (-2 , 0 , 0)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{b} \doteq (0 , 3 , 0)_{\mathcal{E}} . \tag{3.157}$$
2. *Calcule a área do paralelogramo $\underline{ABCD}$, onde os vetores envolvidos, tem as seguinte coordenadas em relação à base ortonormal (ordenada) positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$:*
$$\overrightarrow{AB} \doteq (1 , 1 , -1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \overrightarrow{AD} \doteq (2 , 1 , 4)_{\mathcal{E}} . \tag{3.158}$$

3. *Encontre as coordenadas de um vetor unitário $\vec{c}$, em relação à base ortonormal (ordenada) positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$, que seja ortogonal aos vetores que tem coordenadas, em realação à base ortonormal (ordenada) positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$, dadas por:*

$$\vec{a} \doteq (1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{b} \doteq (-3\,,3\,,3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.159}$$

Resolução:

De 1.:

Neste caso temos que:

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &\overset{(3.138)\text{ e }(3.157)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 - 6 \cdot \vec{e}_3 = (0\,,0\,,-6)_{\mathcal{E}}\,,\end{aligned}$$

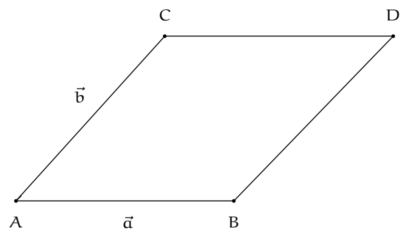
ou seja,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (0\,,0\,,-6)_{\mathcal{E}}\,.$$

De 2.:

Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ (não são paralelos - verifique!), da Definição (3.12.1) item 2., segue que a área, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, do paralelogramos $\underline{ABCD}$ (veja a figura abaixo) na situação dada, será dada por

$$\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|\,.$$



Mas

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} &\overset{(3.138)\text{ e }(3.158)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \\ &= 5 \cdot \vec{e}_1 - 6 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (5\,,-6\,,-1)_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned} \tag{3.160}$$

Logo, a área do paralelogramo será dada por:

$$\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| \overset{(3.103),(3.100)\text{ e }(3.160)}{=} \sqrt{5^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{62} \text{ unidades de área.}$$

De 3.:

Como os vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ (pois um não é múltiplo do outro), temos que o vetor $\underline{\vec{c}}$ terá a mesma direção do vetor $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{O}$.

Mas

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \overset{(3.138) \text{ e } (3.159)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3$$

$$= -12 \cdot \vec{e}_1 - 6 \cdot \vec{e}_2 - 6 \cdot \vec{e}_3 = (-12, -6, -6)_{\mathcal{E}} .$$

Como o vetor $\underline{\vec{c}}$ deve ser paralelo ao vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$, deverá existir $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} \wedge \vec{b} = \alpha \cdot (-12, -6, -6)_{\mathcal{E}} = (-12\,\alpha, -6\,\alpha, -6\,\alpha)_{\mathcal{E}} . \tag{3.161}$$

Mas, o vetor $\underline{\vec{c}}$ tem que ser unitário, ou seja,

$$1 = \|\vec{c}\| \overset{(3.103),(3.100) \text{ e } (3.161)}{=} \sqrt{(-12\,\alpha)^2 + (-6\,\alpha)^2 + (-6\,\alpha)^2} = \sqrt{216\,\alpha^2} ,$$

ou seja,

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{216}} .$$

Portanto

$$\vec{c}_1 \doteq \left(-\frac{12}{\sqrt{216}}, -\frac{6}{\sqrt{216}}, -\frac{6}{\sqrt{216}} \right)_{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \vec{c}_2 \doteq \left(\frac{12}{\sqrt{216}}, \frac{6}{\sqrt{216}}, \frac{6}{\sqrt{216}} \right)_{\mathcal{E}}$$

têm as propriedades requeridas para o vetor procurado no item 3..

□

10.a aula - 1.04.2014

3.13 Duplo Produto Vetorial

A seguir exibiremos uma expressão, mais simples, de se operar para o duplo produto vetorial, a saber:

Proposição 3.13.1 *Sejam $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ vetores de $\underline{V}^3$.*

Então, valem as seguintes identidades:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \vec{a} , \tag{3.162}$$

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) \cdot \vec{c} . \tag{3.163}$$

Demonstração:

1.o caso: os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$.

Notemos que, se os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$, da Definição (3.12.1) item 1., segue que

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}\,.$$

Por outro lado, os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$, existe um número real $\underline{\alpha}$, tal que

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}\,.$$

Consideremos o caso que

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}\,. \tag{3.164}$$

O caso

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}\,,$$

é semelhante e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor.

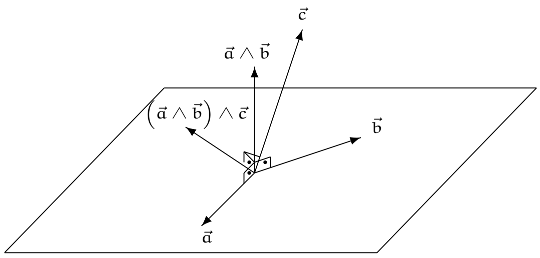
Logo

$$-\left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} \overset{(3.164)}{=} -\left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \left(\alpha \cdot \vec{b}\right) + (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \left(\alpha \cdot \vec{b}\right)$$
$$= \alpha \left[\underbrace{-\left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \vec{b} + \left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \vec{b}}_{=0}\right] = 0\,,$$

ou seja, se os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.D. em $\underline{V}^3$, segue que vale a identidade (3.162).

2.o Caso: os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$

Se os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, como o vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ é ortogonal aos vetores $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ e o vetor $\underline{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}}$ deverá ser ortogonal ao vetor $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$, segue que os vetores $\underline{\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \vec{c}}$, $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{c}}$ deverão ser paralelos a um mesmo plano, isto é, são L.D. em $\underline{V}^3$ (veja a figura abaixo).



Como os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, do Corolário (3.6.1), que existem números reais $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, tais que

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}\,. \tag{3.165}$$

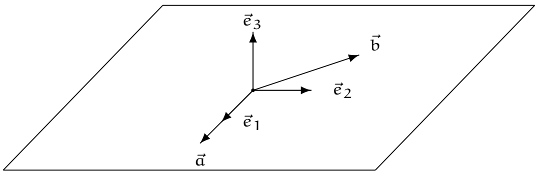
Seja

$$\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_3)$$

uma base ortonormal positiva (ordenada) de $\underline{V}^3$, de modo que

$$\vec{e}_1 \parallel \vec{a} \quad \text{e o vetor }, \quad \vec{e}_2$$

é paralelo ao um plano que seja paralelo aos vetores (L.I. em $\underline{V}^3$) $\underline{\vec{a}}$ e $\underline{\vec{b}}$ (veja a figura abaixo).



Deste modo, as coordenadas dos vetores acima, em relação a base ortonormal positiva (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, serão dadas por :

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = (x_1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\,, \tag{3.166}$$
$$\vec{b} = y_1 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = (y_1\,,y_2\,,0)_{\mathcal{E}}\,, \tag{3.167}$$
$$\vec{c} = z_1 \cdot \vec{e}_1 + z_2 \cdot \vec{e}_2 + z_3 \cdot \vec{e}_3 = (z_1\,,z_2\,,z_3)_{\mathcal{E}}\,, \tag{3.168}$$

e assim, teremos:

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} \overset{(3.165)}{=} \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \tag{3.169}$$
$$\overset{(3.166)\text{ e }(3.167)}{=} (\alpha\, x_1 + \beta y_1\,, \beta\, y_2\,, 0)_{\mathcal{E}} \tag{3.170}$$

Com isto, segue que:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \overset{(3.138),(3.166)\text{ e }(3.167)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + x_1 y_2 \cdot \vec{e}_3 = (0\,,0\,,x_1\,y_2)_{\mathcal{E}}\,, \tag{3.171}$$

logo,

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} \overset{(3.138),(3.171)\text{ e }(3.168)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & x_1 y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{Exercício}}{=} (-x_1\,y_2\,z_2) \cdot \vec{e}_1 + (x_1\,y_2\,z_1) \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$
$$= (-x_1\,y_2\,z_2\,, x_1\,y_2\,z_1\,, 0)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.172}$$

Comparando (3.170) com (3.172), segue que:

$$(\alpha\, x_1 + \beta\, y_1\,, \beta\, y_2\,, 0)_{\mathcal{E}} = (-x_1\,y_2\,z_2\,, x_1\,y_2\,z_1\,, 0)_{\mathcal{E}}\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 = -x_1\,y_2\,z_2 \\ \beta\, y_2 = x_1\,y_2\,z_1 \end{cases} . \tag{3.173}$$

Como

$$y_2 \neq 0\,,$$

pois os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ são L.I. em $\underline{V}^3$ (veja (3.166) e (3.167)) , da 2.a equação em (3.173), segue que

$$\beta = x_1\, z_1 \overset{(3.100),(3.166) \text{ e } (3.168)}{=} \vec{a} \bullet \vec{c}\,. \tag{3.174}$$

Substituindo o valor de $\underline{\beta}$, obtido acima, na 1.a equação de (3.173), obteremos:

$$\alpha\, x_1 + (x_1\, z_1)\, y_1 = -x_1\, y_2\, z_2\,. \tag{3.175}$$

Como

$$x_1 \neq 0\,,$$

pois $\underline{\vec{a} \neq \vec{O}}$ (os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ são L.I. em $\underline{V}^3$), segue, de (3.175) que

$$\alpha \overset{(3.175)}{=} -(y_1\, z_1 + y_2\, z_2) \overset{(3.100),(3.167) \text{ e } (3.168)}{=} -\vec{b} \bullet \vec{c}\,. \tag{3.176}$$

Portanto, segue de (3.169), (3.176) e (3.174), segue que

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = -\left(\vec{b} \bullet \vec{c}\right) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b}\,,$$

obtendo a validade da identidade (3.162).

Para finalizar, observemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) &\overset{\text{Prop. } (3.12.2) \text{ item 3.}}{=} -\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \wedge \vec{a} \\
&\overset{(3.162)}{=} -\left[-(\vec{c} \bullet \vec{a}) \cdot \vec{b} + \left(\vec{b} \bullet \vec{a}\right) \cdot \vec{c}\right] \\
&= (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

obtendo assim a validade da indetidada (3.163), completando a demonstração do resultado.

□

Consideremos o exemplo:

Exemplo 3.13.1 *Sejam $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_3)$ base ortonormal positiva (ordenada) de $\underline{V}^3$ e os vetores, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal positiva (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, são dadas por:*

$$\vec{a} = (1\,, -1\,, 2)_{\mathcal{E}}\,, \quad \vec{b} = (0\,, 1\,, 0)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{c} = (0\,, 0\,, 1)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.177}$$

Calcular $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$.

Resolução:

Utilizando a Proposição (3.13.1), temos que:

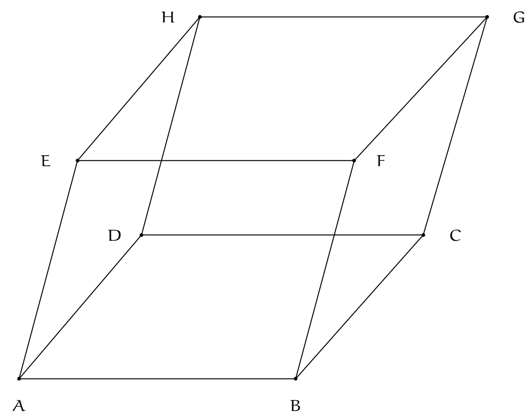
$$\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) &\overset{(3.163)}{=} (\vec{a} \bullet \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \\
&\overset{(3.177)}{=} [(1\,, -1\,, 2)_{\mathcal{E}} \bullet (0\,, 0\,, 1)_{\mathcal{E}}] \cdot (0\,, 1\,, 0)_{\mathcal{E}} - [(1\,, -1\,, 2)_{\mathcal{E}} \bullet (0\,, 1\,, 0)_{\mathcal{E}}] \cdot (0\,, 0\,, 1)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} (-1\,, 2\,, -2)_{\mathcal{E}}\,.
\end{aligned}$$

□

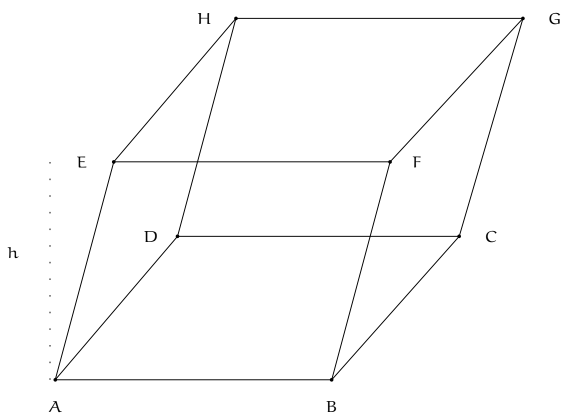
3.14 Produto Misto

Fixemos uma orientação em $\underline{V}^3$.

Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, de um paralelepípedo $\underline{ABCDEFGH}$ do espaço, como na figura abaixo.



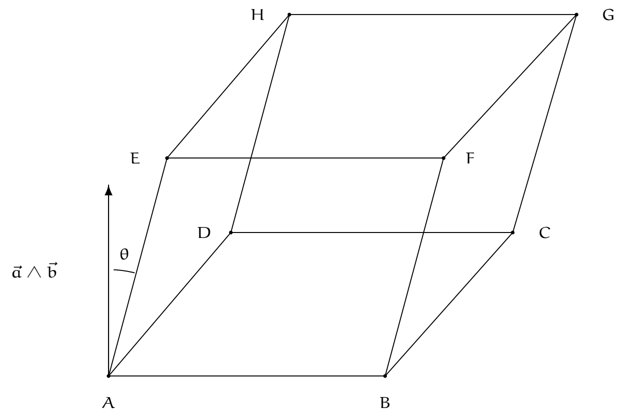
Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pela área da sua base, no caso, a área do paralelogramo $\underline{ABCD}$, multiplicado pela sua altura $\underline{h}$, relativa à base $\underline{ABCD}$ (veja a figura abaixo).



Consideremos (veja figura a abaixo):

$$\begin{aligned}
\vec{a} &\doteq \overrightarrow{AB} \\
\vec{b} &\doteq \overrightarrow{AD} \\
\vec{c} &\doteq \overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

θ : o ângulo entre os vetores $\underline{\vec{a} \wedge \vec{b}}$ e $\underline{\vec{c}}$.



Como os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, da Definição (3.12.1) item 2. (a), temos que o valor da área do paralelogramo $\underline{ABCD}$, que indicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, é dada por:

$$\mathcal{A} = \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| .$$

Com isto temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = \mathcal{A} \,.\, h &= \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| .h \\
&\overset{h = \|\vec{c}\| \cos(\theta)}{=} \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \, \|\vec{c}\| \cos(\theta) \\
&\overset{\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{=} \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \, \|\vec{c}\| \, |\cos(\theta)| \\
&= \left| \left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\| \, \|\vec{c}\| \cos(\theta) \right| \\
&\overset{(3.101)}{=} \left| \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) \bullet \vec{c} \right| .
\end{aligned} \tag{3.178}$$

Conclusão: o valor do volume do paralelepípedo $\underline{ABCDEFGH}$, será dado por

$$\mathcal{V} = \left| \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) \bullet \vec{c} \right| \quad \text{unidades de volume.}$$

Com isto temos a:

Definição 3.14.1 *Dados os vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$ de $\underline{V}^3$, daremos o nome de* **produto misto** *dos vetores $\underline{\vec{a}}$, $\underline{\vec{b}}$, $\underline{\vec{c}}$, indicado por $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, como sendo*

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \doteq \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) \bullet \vec{c} . \tag{3.179}$$

Observação 3.14.1 *Em particular, das Observaçãoes acima (veja (3.178) e (3.179)), segue que o volume do paralelepípedo do paralepepípedo $\underline{ABCDEFGH}$ do espaço, será dado por*

$$\mathcal{V} = \left| \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \right| .$$

Temos uma expressão mais simples para calcular o produto misto de três vetores de $\underline{V}^3$, a saber:

Proposição 3.14.1 *Sejam $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_3)$ base ortonormal positiva (ordenada) e os vetores de $\underline{V^3}$ que têm coordenadas, em relação à base ortonormal positiva (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, dadas por:*

$$\vec{a} = (x_1\,,x_2\,,x_3)_{\mathcal{E}}\,,\quad \vec{b} = (y_1\,,y_2\,,y_3)_{\mathcal{E}}\quad e\quad \vec{c} = (z_1\,,z_2\,,z_3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{3.180}$$

Então

$$\left[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\right] \doteq \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\,. \tag{3.181}$$

Demonstração:

Notemos que

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &\overset{(3.138)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &\overset{(3.139)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3\,. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \bullet \vec{c} &\overset{(3.180)\text{ e }(3.121)}{=} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\,, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

□

Como conseqüência temos o:

Corolário 3.14.1 *Sejam $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_3)$ base ortonormal positiva (ordenada) de $\underline{V^3}$ e $\mathcal{F} \doteq \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ uma base (ordenada) de $\underline{V^3}$.*

Então

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \left[\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right]\,. \tag{3.183}$$

Demonstração:

De fato, pois escrevendo-se os vetores $\underline{\vec{f}_1}$, $\underline{\vec{f}_2}$, $\underline{\vec{f}_3}$, como combinaçãpo linear dos vetores da base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, obteremos:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases}.$$

Logo

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e assim, como $\underline{\mathcal{E}}$ é uma base ortonromal positiva (ordenada) de $\underline{V}^3$, segue que:

$$\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(3.181)}{=} \left[\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right],$$

como queríamos demonstrar.

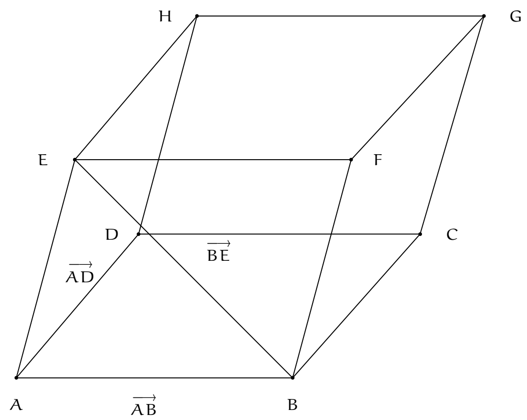
$\square$

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 3.14.1 *Sejam $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ base ortonormal positiva (ordenada) de $\underline{V}^3$ e os vetores de $\underline{V}^3$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal positiva (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V}^3$, são dadas por:*

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1)_{\mathcal{E}}, \quad \overrightarrow{BE} = (1,1,1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \overrightarrow{AD} = (0,3,1)_{\mathcal{E}}. \tag{3.184}$$

Calcule o volume do paralelepípedo $\underline{ABCDEFGH}$, obtido como no início da seção (veja a figura abaixo).



Resolução:

Precisamos encontrar o vetor $\underline{\overrightarrow{AE}}$.

Para isto, observemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \\ &\overset{(3.184)}{=} (1,0,1)_{\mathcal{E}} + (1,1,1)_{\mathcal{E}} = (2,1,2)_{\mathcal{E}}. \end{aligned} \tag{3.185}$$

Assim valor do volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, do paralelepípedo $\underline{ABCDEFGH}$ acima, será dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\overset{(3.178)}{=} \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right]\right| \overset{(3.181),(3.184) \text{ e } (3.185)}{=} \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} |-3| = 3 \quad \text{unidades de volume.} \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Sistemas de Coordenadas em plano e espaço

Nosso objetivo inical é localizar de modo preciso um ponto $\underline{P}$ do espaço.

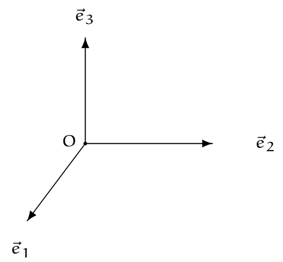
Mais adiante faremos o mesmo para pontos do plano.

Para isto utilizaremos o seguinte conceito:

Definição 4.0.2 *Fixemos $\underline{O}$, um ponto do espaço e $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ uma base (ordenada) de $\underline{V^3}$.*

*O par $\underline{(O\,, \mathcal{E})}$ será denominado **sistema de coordenadas** do espaço (veja a figura abaixo), também indicado por*

$$\Sigma \doteq (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)\,.$$



*O ponto $\underline{O}$ será dito **origem do sistema de coordenadas** $\underline{\Sigma = (O\,, \mathcal{E})}$.*

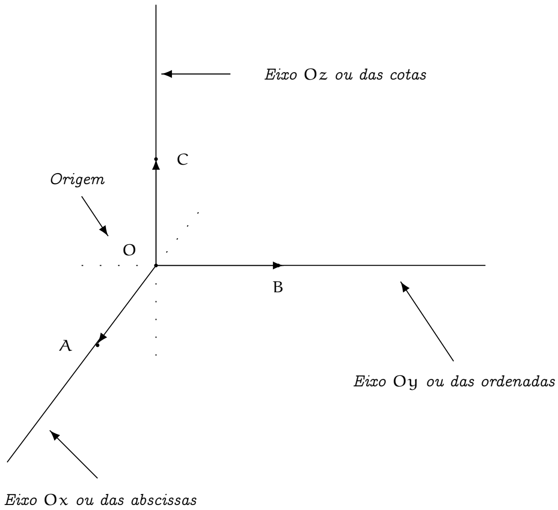
Definindo-se os pontos

$$A \doteq O + \vec{e}_1\,, \quad B \doteq O + \vec{e}_2 \quad e \quad C \doteq O + \vec{e}_3\,, \tag{4.1}$$

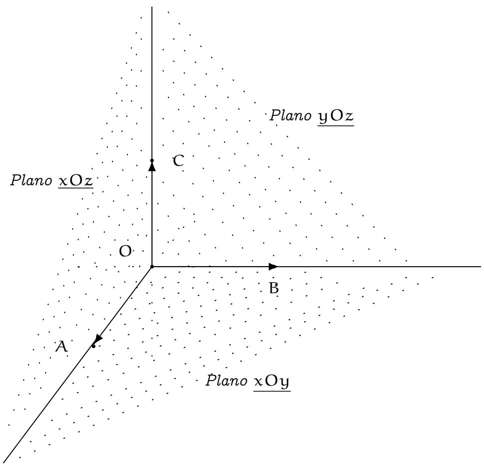
as retas

$$\overleftrightarrow{OA}\,, \quad \overleftrightarrow{OB} \quad e \quad \overleftrightarrow{OC}$$

*serão denominadas **eixos coordenados** do sistema de coordenados $\underline{\Sigma = (O\,, \mathcal{E})}$, ditos **eixo Ox ou das abscissas**, **eixo Oy ou das ordenadas** e **eixo Oz ou eixo das cotas**, respectivamente (veja a figura abaixo).*



Os três planos determinados pelos pontos $\underline{O}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$, *pelos pontos* $\underline{O}$, $\underline{A}$, $\underline{C}$ *e pelos pontos* $\underline{O}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, *serão ditos* **planos coordenados** *e denominados* **plano** $\underline{xOy}$, **plano** $\underline{xOz}$ *e* **plano** $\underline{yOz}$, *respectivamente do sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma = (O\,,\mathcal{E})}$ *(veja a figura abaixo).*



Temos também a:

Definição 4.0.3 *O sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *será dito* **ortogonal**, *se a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$, *de* $\underline{V^3}$, *for uma base (ordenada) ortonormal positiva de* $\underline{V^3}$.

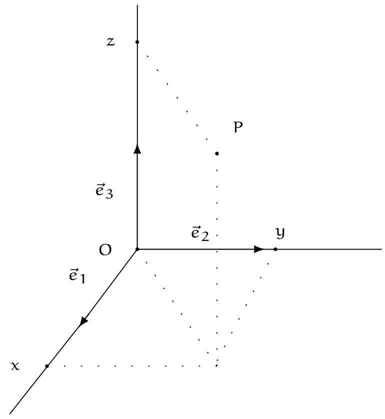
Observação 4.0.2 *Sejam* $\underline{P}$ *um ponto do espaço e* $\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$ *um sistema de coordenadas do espaço.*

Como o conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ *é uma base (ordenada) de* $\underline{V^3}$, *segue que o vetor* $\underline{\overrightarrow{OP}}$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores de* $\underline{\mathcal{E}}$, *ou seja, existe (únicos)*

$$x\,,y\,,z \in \mathbb{R}\,,$$

tais que (veja a figura abaixo):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \\ &= (x\,,y\,,z)_{\mathcal{E}}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$



Logo, a cada ponto $\underline{P}$ do espaço, está associada uma única tripla ordenada

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

formada por números reais, a saber, as coordenadas do vetor $\underline{\overrightarrow{OP}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, e reciprocamente, a cada tripla ordenada

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

formada por números reais, podemos associar um ponto $\underline{P}$ do espaço, de modo que o vetor $\underline{\overrightarrow{OP}}$ seja dado por (4.2).

Ou seja, existe uma relação biunívoca e sobrejetora entre os pontos do espaço e as triplas ordenadas formada por números reais, isto é, elementos de

$$\mathbb{R}^3 \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Com isto temos a:

Definição 4.0.4 *Os números reais $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, obtidos em (4.2), serão denominados* **coordenadas** *do ponto $\underline{P}$, relativamente ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O, \mathcal{E})}$.*

Neste caso, escreveremos:

$$P = (x, y, z)_\Sigma,$$

ou seja, identificamos o ponto $\underline{P}$ do espaço, com a tripla ordenada

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

formada por números reais.

Observação 4.0.3 *Quando* **não** *houver possibilidade de confusão da notação, escreveremos*

$$P = (x, y, z),$$

ao invés de escrever

$$P = (x, y, z)_\Sigma,$$

ou seja, omitiremos $\underline{\Sigma}$ na representação das coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O, \mathcal{E})}$.

O resultado que segue nos mostra como tornar-se-á mais simples operar com pontos e vetores, tendo fixado um sistema de coordenadas no espaço.

Proposição 4.0.2 *Sejam $\Sigma \doteq (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas do espaço, dois pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ do espaço, o vetor $\underline{\vec{v}}$ de $\underline{V^3}$, cujas coordenadas, em termos do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço e à base (ordenada) $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:*

$$A \doteq (x_1\,, y_1\,, z_1)_\Sigma\,, \quad B \doteq (x_2\,, y_2\,, z_2)_\Sigma\,, \quad \vec{v} \doteq (a\,, b\,, c)_\mathcal{E}\,. \tag{4.3}$$

e $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Então

1. *as coordenadas do vetor $\underline{\overrightarrow{AB}}$, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, serão dadas por:*
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - z_1)_\mathcal{E}\,. \tag{4.4}$$
2. *as coordenadas do ponto $\underline{A}$, em relação ao sistema de coordenadas $\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$ do espaço, serão dadas por:*
$$A + \alpha \cdot \vec{v} = (x_1 + \alpha\, a\,, y_1 + \alpha\, b\,, z_1 + \alpha\, c)_\Sigma\,. \tag{4.5}$$

Demonstração:

De 1.:

Observemos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= -\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ &\overset{\text{Def. (4.0.4) e (4.21)}}{=} -(x_1\,, y_1\,, z_1)_\mathcal{E} + (x_2\,, y_2\,, z_2)_\mathcal{E} \\ &\overset{\text{Prop. (3.7.2)}}{=} (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - z_1)_\mathcal{E}\,,\end{aligned}$$

obtendo assim a identidade (4.4).

De 2.:

Definamos o ponto

$$C \doteq A + \alpha \cdot \vec{v}\,. \tag{4.6}$$

Então, da Definição (4.0.4) e de (4.21), segue que

$$\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \vec{v}\,. \tag{4.7}$$

Suponhamos que as coordenadas do ponto $\underline{C}$, em relação ao sistema de coordenadas $\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$, sejam dadas por:

$$C = (x\,, y\,, z)_\Sigma\,. \tag{4.8}$$

Então

$$
\begin{aligned}
(x - x_1\,, y - y_1\,, z - z_1) &\overset{(4.8),\ (4.3)\ \text{e da Def. } (4.0.4)}{=} \overrightarrow{AC} \\
&\overset{(4.7)}{=} \alpha \cdot \vec{v} \\
&\overset{(4.3)}{=} \alpha \cdot (a\,, b\,, c)_{\mathcal{E}} \\
&\overset{\text{Prop. } (3.7.3)}{=} (\alpha\, a\,, \alpha\, b\,, \alpha\, c)_{\mathcal{E}}\,,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{cases}
x - x_1 = \alpha\, a \\
y - y_1 = \alpha\, b \\
z - y_1 = \alpha\, c
\end{cases},
$$

isto é,

$$
x = x_1 + \alpha\, a\,, \quad y = y_1 + \alpha\, b\,, \quad z = z_1 + \alpha\, c\,, \tag{4.9}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
A + \alpha \cdot \vec{v} &\overset{(4.6)}{=} C \\
&\overset{(4.8)\ \text{e}\ (4.9)}{=} (x_1 + \alpha\, a\,, y_1 + \alpha\, b\,, z_1 + \alpha\, c)_{\Sigma}\,,
\end{aligned}
$$

mostrando a validade da identidade (4.5), completando a demonstação do resultado.

□

Observação 4.0.4 *Lembremos que uma outra notação para o vetor $\overrightarrow{AB}$ (veja a Observação (3.5.3)) é*

$$
B - A\,.
$$

Olhando-se o item 1. da Proposição (4.0.2) acima, vemos que isto faz sentido, do ponto de vista analítico, ou seja, para obtermos as coordenadas de um vetor, em relação a uma base (ordenada) fixada, basta "subtrairmos" as correpondentes coordenadas dos pontos final e origem, do segmento orientado que representa o vetor, dados em relação ao sitema de coordenadas fixado (veja (4.4)).

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 4.0.2 *Seja $\Sigma \doteq (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ um sistema de coordenadas no espaço.*

Encontre as coordenadas do ponto $\underline{Q}$, do espaço, que é o simétrico do ponto $\underline{P}$ em relação ao ponto $\underline{M}$, onde as coordenadas destes pontos, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ fixado, são dadas por

$$
P \doteq (1\,, 0\,, 3)_{\Sigma} \quad e \quad M \doteq (1\,, 2\,, -1)_{\Sigma}\,. \tag{4.10}
$$

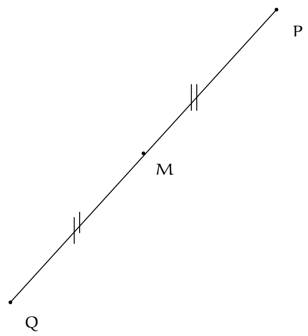
Resolução:

Sabemos que os três pontos

$$
\underline{P}\,, \quad \underline{M} \quad \text{e} \quad \underline{Q}
$$

deverão ser colineares e que (vide a figura abaixo)

$$
MP = MQ\,.
$$



Logo, deveremos ter:

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PM}\,, \tag{4.11}$$

pois estes dois vetores têm mesma direção, sentido e comprimento, ou seja, são iguais.

Mas

$$\begin{aligned} Q &\overset{\text{Def. (3.5.1)}}{=} M + \overrightarrow{MQ} \\ &\overset{(4.11)}{=} M + \overrightarrow{PM}\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mas, de (4.10) e da Proposição (4.0.2) item 1., temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &\overset{(4.4)}{=} (1-1\,, 2-0\,, -1-3)_{\mathcal{E}} \\ &= (0\,, 2\,, -4)_{\mathcal{E}}\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Logo, de (4.10), (4.13) e da Proposição (4.0.2) item 2., segue que

$$\begin{aligned} Q &\overset{(4.12)}{=} M + \overrightarrow{PM} \\ &\overset{(4.5)}{=} (1+0\,, 2+4\,, -1-5)_{\Sigma} \\ &= (1\,, 4\,, -5)_{\Sigma}\,. \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto Q, que é o ponto simétrico do ponto P, relativamente ao ponto M, serão dadas por

$$Q = (1\,, 4\,, -5)_{\Sigma}\,.$$

□

Observação 4.0.5

1. *Se o sistema de coordenadas $\Sigma \doteq (O\,, \mathcal{E})$ é ortogonal no espaço, então a distância entre dois pontos A e B, que indicaremos como $d(A\,, B)$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, são dadas por:*

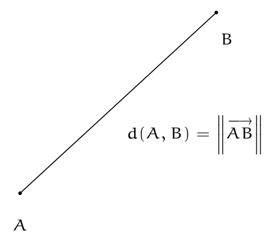
$$A \doteq (x_1\,, y_1\,, z_1)_{\Sigma} \quad e \quad B \doteq (x_2\,, y_2\,, z_2)_{\Sigma}\,, \tag{4.14}$$

pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d(A, B) = AB &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \\ &\overset{\text{Prop. (4.0.2)}}{=} \|(x_2 - x_1\,, y_2 - y_2\,, z_2 - z_1)_{\mathcal{E}}\| \\ &\overset{\text{Prop. (3.8.2)}}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}, \end{aligned}$$

ou seja

$$d(A\,,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{4.15}$$



2. *Podemos utilizar a expressão* (4.15) *para resolver o Exemplo* (4.0.2) *acima, agindo da seguinte forma:*

   Suponhamos que as coordenadas do ponto $\underline{Q}$*, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, seja dadas por:*

$$Q \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,. \tag{4.16}$$

   Notemos que, deveremos ter

$$d(Q\,,M) = d(P\,,M)$$

   que, por (4.15)*, é equivalente a,*

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + [z-(-1)]^2} \overset{(4.10)}{=} \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2 + [3-(-1)]^2}\,,$$

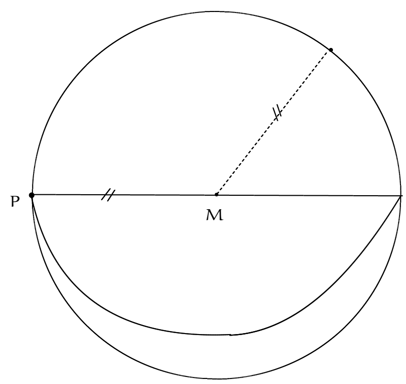
   ou seja, deveremos encontrar

$$x\,,y\,,z \in \mathbb{R}\,,$$

   que satisfazem a equação:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 21\,.$$

   Vale notar que esta equação é uma condição **<u>necessária</u>** *para que ponto* $\underline{Q}$ *tenha a propriedade requerida pelo Exemplo* (4.0.2)*, porém,* **<u>não</u>** *é* **<u>suficiente</u>***, pois as soluções da equação acima serão pontos de uma esfera de centro no ponto* $\underline{M}$ *e raio igual a* $d(P\,,M)$ *(veja a figura abaixo).*



Para completar, precisaríamos pedir que o ponto $\underline{Q}$ pertença à reta que contém os pontos (distintos) $\underline{P}$ e $\underline{M}$.

A questão é: como fazer isto?

Mais adiante, veremos como fazer isto.

Consideremos o:

Exemplo 4.0.3 *Seja $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ um sistema de coordenadas ortogonal do espaço.*

Verifique se os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ do espaço, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (2\,,6\,,-5)_\Sigma\,, \quad B \doteq (6\,,9\,,7)_\Sigma \quad C \doteq (5\,,5\,,0)_\Sigma \quad e \quad D \doteq (3\,,10\,,2)_\Sigma\,, \tag{4.17}$$

são vértices de um paralelogramo.

Resolução:

<u>1.o Modo:</u>

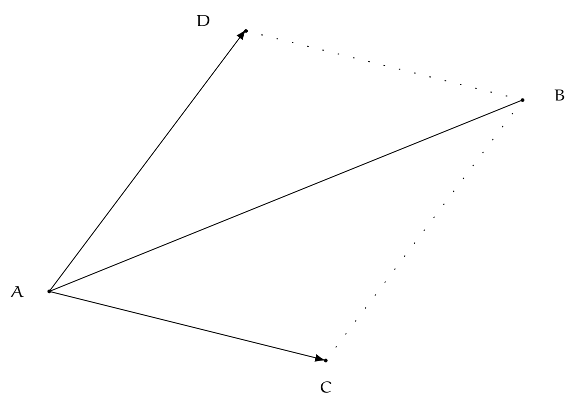
Observemos que, da Proposição (4.0.2) item 1., segue que

$$\overrightarrow{AB} \overset{(4.3)\text{ e }(4.17)}{=} (6-2\,,9-6\,,7-(-5))_\mathcal{E}$$
$$= (4\,,3\,,12)_\mathcal{E}\,, \tag{4.18}$$
$$\overrightarrow{AC} \overset{(4.3)\text{ e }(4.17)}{=} (5-2\,,5-6\,,0-(-5))_\mathcal{E}$$
$$= (3\,,-1\,,5)_\mathcal{E}\,, \tag{4.19}$$
$$\overrightarrow{AD} \overset{(4.3)\text{ e }(4.17)}{=} (3-2\,,10-6\,,2-(-5))_\mathcal{E}$$
$$= (1\,,4\,,7)_\mathcal{E}\,. \tag{4.20}$$

Com isto, notamos que os vetores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ (não são paralelos, veja a Observação (3.7.4) item 8.) e

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \overset{\text{Prop. }(3.7.2),(4.19)\text{ e }(4.20)}{=} (4\,,3\,,12)_\mathcal{E}$$
$$\overset{(4.18)}{=} \overrightarrow{AB}\,.$$

Assim, da Definição (3.3.1) de adição de vetores, segue que os pontos $\underline{A}$, $\underline{C}$, $\underline{B}$ e $\underline{D}$ formam um paralelogramo no espaço (veja a figura abaixo).



<u>**2.o Modo:**</u>

Como o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, é ortogonal, temos que:

$$
\begin{aligned}
d(A\,,B) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(6-2)^2+(9-6)^2+(7-(-5))^2} \\
&= \sqrt{16+9+144} \overset{\text{Exercício}}{=} 13\,; \\
d(A\,,D) &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&= \sqrt{(3-2)^2+(10-6)^2+(2-(-5))^2} \\
&= \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}\,; \\
d(B\,,C) &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \\
&= \sqrt{(5-6)^2+(5-9)^2+(0-7)^2} \\
&= \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}\,; \\
d(D\,,C) &= \left\|\overrightarrow{DC}\right\| \\
&= \sqrt{(5-3)^2+(5-10)^2+(0-2)^2} \\
&= \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}\,; \\
d(A\,,C) &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \\
&= \sqrt{(5-2)^2+(5-6)^2+(0-(-5))^2} \\
&= \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}\,; \\
d(D\,,B) &= \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \\
&= \sqrt{(6-3)^2+(9-10)^2+(7-2)^2} \\
&= \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, dos cálculo acima, segue que:

$$
d(A\,,D) = d(B\,,C) \quad \text{e} \quad d(A\,,C) = d(B\,,D)\,.
$$

Porém, isto <u>**não**</u> garante que os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ e $\underline{D}$ definem um paralelogramo.

Para tanto precisamos saber se eles pertecem a um mesmo plano, ou seja, se os vetores $\underline{\overrightarrow{AC}}$, $\underline{\overrightarrow{CB}}$ e $\underline{\overrightarrow{AD}}$ serão L.D. em $\underline{V^3}$.

Notemos que, da Proposição (4.0.2), temos que

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &\overset{(4.4)\text{ e }(4.17)}{=} (5-2\,,5-6\,,7-(-5))_{\mathcal{E}}\\
&= (3\,,-1\,,5)_{\mathcal{E}}\,,\\
\overrightarrow{CB} &\overset{(4.4)\text{ e }(4.17)}{=} (6-5\,,9-5\,,7-0)_{\mathcal{E}}\\
&= (1\,,4\,,7)_{\mathcal{E}}\,,\\
\overrightarrow{AD} &\overset{(4.4)\text{ e }(4.17)}{=} (3-2\,,10-6\,,2-(-5))_{\mathcal{E}}\\
&= (1\,,4\,,7)_{\mathcal{E}}\,.
\end{aligned}
$$

Logo, segue que os três vetores acima são L.D. em V^3, assim os pontos A, B, C e D são cooplanares, ou seja, serão vértices de um paralelogramo.

□

Na Observação a seguir, faremos um estudo análogo ao que fizemos no espaço, para o plano.

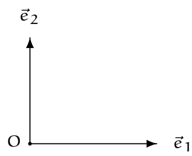
Introduziremos definições e propriedades, similares as que foram feitas no espaço, para o plano, e suas demonstrações serão deixadas como exercício para o leitor.

Observação 4.0.6

1. *Fixemos* O *um ponto do plano e* $\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ *uma base (ordenada) de* V^2.

   O par $(O\,,\mathcal{E})$ *será denominado* **sistema de coordenadas** *do plano (veja a figura abaixo), também indicado por*

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)\,.$$



   O ponto O *será dito* **origem do sistema de coordenadas** $\Sigma = (O\,,\mathcal{E})$.

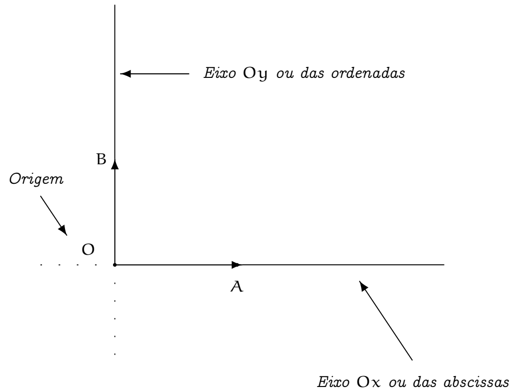
   Definindo-se os pontos

$$A \doteq O + \vec{e}_1\,, \qquad e \qquad B \doteq O + \vec{e}_2\,, \tag{4.21}$$

   as retas

$$\overleftrightarrow{OA} \qquad e \qquad \overleftrightarrow{OC}$$

   serão denominadas **eixos coordenados** *do sistema de coordenados* $\Sigma = (O\,,\mathcal{E})$, *ditos* **eixo** Ox **ou das abscissas** *e* **eixo** Oy **ou das ordenadas**, *respectivamente (veja a figura abaixo).*



2. *O sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O, \mathcal{E})}$ *será dito* **ortogonal**, *se a base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *for uma base ortonormal positiva (ordenada) de* $\underline{V^2}$.

3. *Sejam* $\underline{P}$ *um ponto do plano e* $\Sigma \doteq (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *um sistema de coordenadas do plano.*

   Como o conjunto $\underline{\mathcal{E}}$ *é uma base (ordenada) de* $\underline{V^2}$, *segue que o vetor* $\underline{\overrightarrow{OP}}$, *pode ser escrito como combinção linear dos vetores de* $\underline{\mathcal{E}}$, *ou seja, existe (únicos)*

   $$x, y \in \mathbb{R},$$

   tais que:

   $$\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 = (x, y)_{\mathcal{E}}. \tag{4.22}$$

   Logo a cada ponto $\underline{P}$ *do plano, está associado um único par ordenada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *formada por números reais, a saber, as coordenadas do vetor* $\underline{\overrightarrow{OP}}$, *em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$, *e reciprocamente, a cada par ordenada* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *formada por números reais, podemos associar um único ponto* $\underline{P}$ *do plano, de modo que o vetor* $\underline{\overrightarrow{OP}}$ *seja dado por (4.22).*

   Ou seja, existe uma relação biunívoca e sobrejetora entre os pontos do plano e os pares ordenados, formados por números reais, isto é, elementos de

   $$\mathbb{R}^2 \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

4. *Os números reais* $\underline{x}$, $\underline{y}$ *obtidos em* (4.22), *serão denominados* **coordenadas** *do ponto* $\underline{P}$, *relativamente ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma = (O, \mathcal{E})}$.

   Neste caso escreveremos

   $$P = (x, y)_{\Sigma},$$

   ou seja, identificamos o ponto $\underline{P}$ *do plano, com o par ordenado*

   $$(x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

   formada por números reais.

5. *Quando não houver possibilidade de confusão da notação, escreveremos*

$$P \doteq (x\,,y)\,,$$

ao invés de escrever

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma,$$

ou seja, omitiremos $\underline{\Sigma}$*, na representação das coordenadas do ponto* $\underline{P}$*, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *do plano.*

6. *Sejam* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)}$ *um sistema de coordenadas no plano, dois pontos* $\underline{A}$*,* $\underline{B}$ *do plano, o vetor* $\underline{\vec{v}}$ *de* $\underline{V^2}$*, cujas coordenadas, em termos do sistema de coordenadas dado e à base* $\underline{\mathcal{E} \doteq (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)}$ *de* $\underline{V^2}$*, são dadas por:*

$$A \doteq (x_1\,,y_1)_\Sigma\,,\quad B \doteq (x_2\,,y_2)_\Sigma\,,\quad \vec{v} \doteq (a\,,b)_\mathcal{E}\,. \tag{4.23}$$

e $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Então

(a) *as coordenadas do vetor* $\underline{\overrightarrow{AB}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^2}$*, serão dadas por:*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\,,y_2 - y_1)_\mathcal{E}\,. \tag{4.24}$$

(b) *as coordenadas do ponto* $\underline{A}$*, em relação ao sistema de coordenadas* $(O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ *do plano, serão dadas por:*

$$A + \alpha \cdot \vec{v} = (x_1 + \alpha\, a\,,y_1 + \alpha\, b)_\Sigma\,. \tag{4.25}$$

7. *Se o sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *é ortogonal no plano, então a distância entre dois pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$*, que indicaremos como* $\underline{d(A\,,B)}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do plano, são dadas por:*

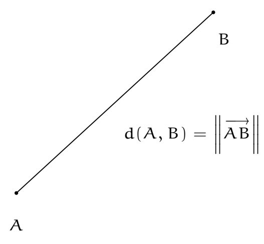
$$A \doteq (x_1\,,y_1)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (x_2\,,y_2)_\Sigma\,, \tag{4.26}$$

pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d(A\,,B) &= AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \|(x_2 - x_1\,,y_2 - y_2)_\mathcal{E}\| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(A\,,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{4.27}$$



Até aqui para a 1.a Prova

Capítulo 5

A Reta no Plano e no Espaço

11.a aula - 3.04.2014

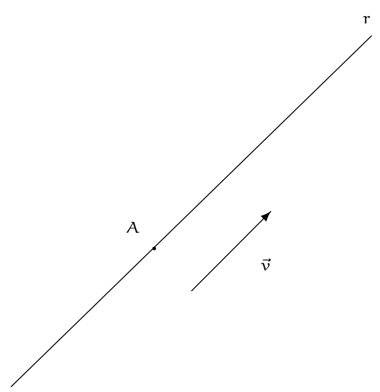
Neste capítulo faremos um estudo de retas no plano e no espaço.

Nosso objetivo será representar de modo analítico uma reta que no plano ou espaço.

Estudaremos, inicialmente, da reta do espaço e, no final, trataremos da reta no plano.

5.1 Equação Vetorial da Reta no Espaço (ou no Plano)

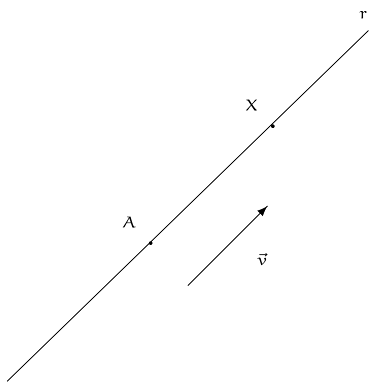
Geometricamente, um modo de caracterizarmos uma reta $\underline{r}$ no espaço (ou no plano) é dando um ponto $\underline{A}$, que pertença à reta $\underline{r}$ e uma direção, isto é, um vetor não nulo $\underline{\vec{v}}$ paralelo à mesma (veja a figura abaixo).



Deste modo, um ponto $\underline{X}$ do espaço (ou do plano) pertencerá a reta $\underline{r}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX} \quad \text{e} \quad \vec{v}$$

forem paralelos, que, pela Definição (3.6.1) item 2., é o mesmo que dizer que eles forem L.D. em $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$ - veja a figura abaixo).



De fato, se o ponto $\underline{X}$ pertence à reta $\underline{r}$, então deveremos ter:

$$\overrightarrow{AX} \parallel \vec{v}\,.$$

Reciprocamente, se

$$\overrightarrow{AX} \parallel \vec{v}\,,$$

então o ponto $\underline{X}$ pertencerá à reta $\underline{r}$, caso contrário, os vetores $\underline{\overrightarrow{AX}}$ e $\underline{\vec{v}}$ não seriam paralelos.

Logo, pela Proposição (3.6.1) (notemos que $\vec{v} \neq \vec{O}$), o ponto $\underline{X}$ pertence à reta $\underline{r}$ se, e somente se, existe um número real $\underline{\lambda}$, de modo que

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{v},$$

que pela Definição (3.5.1) é equivalente a escrever:

$$X = A + \lambda \cdot \vec{v}\,. \tag{5.1}$$

Logo, dado um número real $\underline{\lambda}$, o ponto $\underline{X}$, dado por (5.1), pertencerá à reta $\underline{r}$ e reciprocamente, se o ponto $\underline{X}$ pertence à reta $\underline{r}$, deverá existir um número real $\underline{\lambda}$, tal que (5.1) ocorrerá.

<u>Conclusão:</u> a reta $\underline{r}$ é o lugar geométrico dos pontos do espaço (ou do plano) que satisfazem a equação (5.1).

Com isto temos a:

Definição 5.1.1 *A equação (5.1), será denominada* **<u>equação vetorial da reta $\underline{r}$</u>** *e escreveremos:*

$$r : X = A + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.2}$$

O vetor não nulo $\underline{\vec{v}}$ (que nos fornece a direção da reta $\underline{r}$) será denominado **<u>vetor diretor da reta $\underline{r}$</u>** *.*

Observação 5.1.1

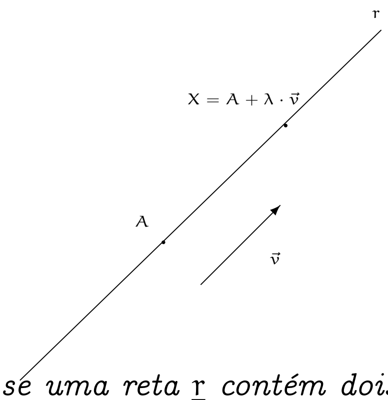
1. *A equação (5.1)* **<u>não</u>** *é a única equação vetorial da reta $\underline{r}$.*

   De fato, se tormarmos um outro ponto $\underline{B}$, que pertença à reta $\underline{r}$, ou um outro vetor $\underline{\vec{u}}$ (diferente do vetor nulo), que tem a direção da reta $\underline{r}$ (ou seja, é paralelo à reta $\underline{r}$), teremos uma outra equação vetorial para a reta $\underline{r}$, a saber:

$$X = B + \lambda \cdot \vec{u}, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

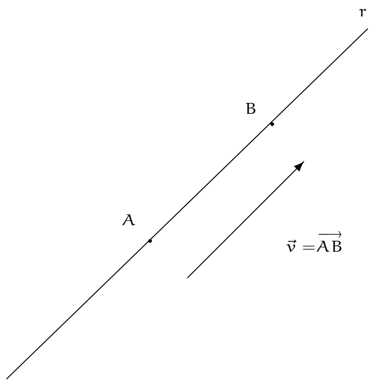
Ou seja, uma reta $\underline{r}$ do espaço (ou do plano) tem uma **infinidade** *de equações vetoriais que a representam.*

2. *É importante notar que na equação (5.1), quando o número real $\underline{\lambda}$, percorre o conjunto dos números reais, os respectivos pontos $\underline{X}$, que satisfazem a equação (5.1), percorrerão a reta toda, ou ainda, existe uma correspondênica biunívoca e sobrejetora (isto é, bijetora) entre os pontos da reta e pontos do espaço (ou do plano) que satisfazem à equação (5.1) (veja a figura abaixo).*



3. *Observemos também que, se uma reta $\underline{r}$ contém dois pontos distintos, que denotaremos por $\underline{A}$ e $\underline{B}$, então o vetor*
$$\overrightarrow{AB} \neq \vec{O},$$
nos fornecerá a direção da reta $\underline{R}$, isto é, será um vetor diretor da mesma (veja a figura abaixo).

   Neste caso, uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, será dada por:
$$X = A + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$



4. *O vetor que dá a direção de uma reta (isto é, o vetor diretor da mesma)* **não** *pode ser o vetor nulo.*

5. *Um outro modo de interpretarmos a equação (5.1) é encará-la como se ela descresse o movimento de uma partícula que se move sobre a reta $\underline{r}$, com velocidade (vetorial) $\underline{\vec{v}}$ (constante, diferente do vetor nulo) e o parâmetro $\underline{\lambda}$ indicaria o tempo após o início do movimento, sendo o ponto $\underline{A}$ a posição da partícula no instante $\underline{\lambda = 0}$ (conhecida como posição inicial).*

5.2 Equações Paramétricas da Reta no plano e no espaço

Trataremos, a seguir, de situações associadas à uma reta no espaço.

A situação de uma reta no plano, será tratada em uma observação, no final desta seção.

Fixemos um sistema de coordenadas

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

no espaço, e consideremos o ponto e o vetor, que tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, e à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, respectivamente, dados por :

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E}\,. \tag{5.4}$$

Com isto temos que, um ponto $\underline{X}$, que tem coordenadas em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, dado por:

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{5.5}$$

pertencerá à reta $\underline{r}$ se, e somente se, satisfaz a equação (5.1), para algum $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$, ou seja,

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z)_\Sigma &\overset{(5.1)}{=} (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma + \lambda \cdot (a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \\ &\overset{(4.5)}{=} (x_o + \lambda\,a\,,y_o + \lambda\,b\,,z_o + \lambda\,c)_\Sigma\,,\end{aligned} \tag{5.6}$$

para algum $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$, ou ainda,

$$r\ :\ \begin{cases} x = x_o + \lambda\,a \\ y = y_o + \lambda\,b \\ z = z_o + \lambda\,c \end{cases}, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.7}$$

Observemos que, $\underline{\vec{v} \neq \vec{O}}$, dado por (5.4), se, e somente se,

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\,.$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.2.1 *As equações (5.7) serão denominadas* **equações paramétricas da reta $\underline{r}$ (no espaço)**, *em relação ao sistema de coordenadas Σ.*

Observação 5.2.1

1. *Fixado um sitema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço, uma reta do espaço que contém o ponto, de coordenadas, em relação ao sitema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, dado por*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma$$

e tem a direção do vetor não nulo, de coordenadas, em relação à abse $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, dada por:

$$\vec{v} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E}\,,$$

tem por equação paramétricas o sistema linear (5.7).

Reciprocamente, dado um sistema linear, formado por três equações a quatro incógnitas reias,

$$x\,,y\,,z\,,\lambda$$

como em (5.7), onde

$$a^2+b^2+c^2\neq 0\,,$$

existe uma única reta $\underline{r}$ no espaço, cujas equações paramétricas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas pelo sistema linear (5.7), a saber, a reta que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sitema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma$$

e tem a direção do vetor não nulo $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{v} \doteq (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}}\,.$$

2. *Se fixarmos um outro sistema de coordenadas $\underline{\Sigma' \doteq (O'\,,\mathcal{E}')}$ do espaço, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$ poderão mudar pois, neste caso, mudará as coordenadas do ponto $\underline{A}$ e do vetor diretor $\underline{\vec{v}}$, em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, do espaço, e à base $\underline{\mathcal{E}'}$, de $\underline{V^3}$, respectivamente.*

3. *Além disso, se considerarmos um outro sistema de coordenadas $\underline{\Sigma' \doteq (O'\,,\mathcal{E}')}$ do espaço e considerarmos o mesmo sistema linear (5.7), este dará origem a uma outra reta $\underline{r'}$ que será, em geral, do ponto de vista geométrico, diferente da reta $\underline{r}$.*

   Para ilustrar, consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad , \quad \textit{para cada} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,. \tag{5.8}$$

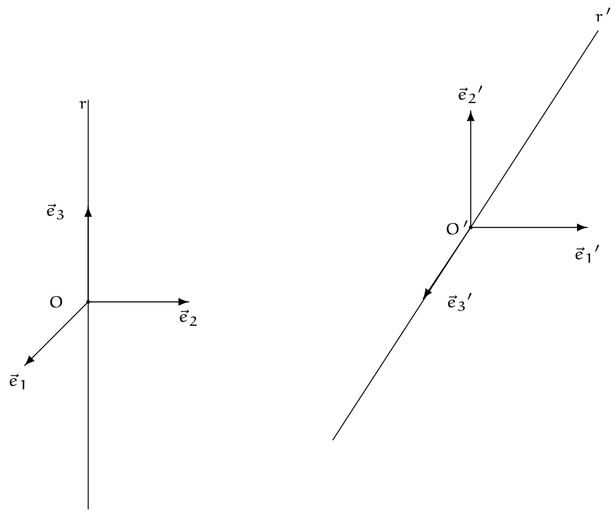
   Então, em relação aos dois sistema de coordenadas

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) \qquad e \qquad \Sigma' \doteq (O'\,,E')$$

   apresentado na figura abaixo, temos que as retas $\underline{r}$ e $\underline{r'}$, que têm equações paramétricas dadas pelo sistema linear (5.8), relativamente aos sistemas de coordenadas

$$\Sigma \qquad e \qquad \Sigma'\,,$$

   do espaço, respectivamente, serão retas diferentes no espaço.



4. *Fixado um sistema de coordenadadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço, se uma reta $\underline{r}$ contém os pontos distintos, que têm coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, dadas por:*

$$A \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma\,, \tag{5.9}$$

então, da Proposição (4.0.2), temos que

$$\vec{v} \doteq \overrightarrow{AB} \overset{(4.4)\ e\ (5.9)}{=} (\underbrace{x_2 - x_1}_{\doteq a}, \underbrace{y_2 - y_2}_{\doteq b}, \underbrace{z_2 - z_1}_{\doteq c})_\mathcal{E} \neq \vec{O}\,.$$

Notemos que o vetor $\underline{\vec{v}}$ será um diretor da reta $\underline{r}$ e assim as equações paramétricas da reta $\underline{r}$ tornar-se-ão:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda\,(z_2 - z_1) \end{cases} , \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.10}$$

5. *As equações paramétricas de uma reta* **não** *são determinadas de modo único, isto é, existe uma infinidade de equações paramétricas associadas a uma mesma reta.*

   Basta notar que, se escolhermos outro ponto da reta ou outro vetor diretor da mesma, as coordenadas destes, em relação ao sistema de coordenadas e base dadas, irão mudar, alterando assim equações paramétricas da reta considerada.

Para retas no plano, temos algo semelhante que será apresentado na observação a seguir.

Observação 5.2.2

1. *Fixemos um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)}$ do plano e consideremos o ponto e o vetor, cujas coordenadas, em relação ao sistema de cordenadas $\underline{\Sigma}$, do plano, e à base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^2}$, respectivamente, são dadas por :*

$$A \doteq (x_o\,,y_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,,b)_\mathcal{E}\,. \tag{5.11}$$

Com isto temos que, um ponto $\underline{X}$, que tem coordenadas em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do plano,, dado por:

$$X \doteq (x\,,y)_\Sigma \tag{5.12}$$

pertencerá à reta $\underline{r}$ se, e somente se, satisfaz a equação (5.1) para algum $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$, ou seja,

$$\begin{aligned}(x\,,y)_\Sigma &\overset{(5.1)}{=} (x_o\,,y_o)_\Sigma + \lambda\cdot(a\,,b)_\mathcal{E}\\ &\overset{(4.5)}{=} (x_o+\lambda\,a\,,y_o+\lambda\,b)_\Sigma\,,\end{aligned} \tag{5.13}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, ou ainda,

$$r\,:\begin{cases} x = x_o + \lambda\,a \\ y = y_o + \lambda\,b \end{cases}\,,\quad \textit{para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.14}$$

Observemos que, $\underline{\vec{v} \neq \vec{O}}$, dado por (5.11), se, e somente se,

$$a^2 + b^2 \neq 0\,.$$

2. *Com isto, diremos que as equações (5.14), serão as* **equações paramétricas da reta $\underline{r}$ (no plano)**, *em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do plano.*

3.

4. *Fixado um sistema de coordenadadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no plano, se uma reta $\underline{r}$ contém os pontos distintos, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do plano, são dadas por:*

$$A \doteq (x_1\,,y_1)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (x_2\,,y_2)_\Sigma\,, \tag{5.15}$$

então, da Observação (4.0.6) item 6., segue que:

$$\begin{aligned}\vec{v} &\doteq \overrightarrow{AB}\\ &\overset{(4.4)\ e\ (5.15)}{=} (\underbrace{x_2 - x_1}_{\doteq a}\,,\underbrace{y_2 - y_2}_{\doteq b})_\mathcal{E} \neq \vec{O}\,.\end{aligned}$$

Notemos que o vetor $\underline{\vec{v}}$, será um diretor da reta $\underline{r}$ e assim as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do plano, torna-se-ão:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda\,(y_2 - y_1) \end{cases}\,,\quad \textit{para cada}\quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.16}$$

5. *As equações paramétricas de uma reta do plano,* **não** *são determinadas de modo único, isto é, existe uma infinidade de equações paramétricas associadas a uma reta do plano.*

   Basta notar que, se escolhermos outro ponto da reta ou outro vetor diretor da mesma, suas, respectivas coordenadas destes, em relação ao sistema de coordenadas do plnao e base de $\underline{V^2}$, dadas, irão mudar, alterando assim equações paramétricas da reta.

5.3 Equações na Forma Simétrica da Reta

Trataremos, a seguir, da situação correspondente à uma reta no espaço.

A situação de uma reta no plano será tratada em uma observação, no final desta seção.

Fixemos um sistema de coordenadas

$$\Sigma = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

do espaço e consideremos o ponto $\underline{A}$ do espaço e o vetor (não nulo) $\underline{\vec{v}}$ de $\underline{V^3}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de cordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, e à base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, respectivamente, são dadas por :

$$A \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o)_\Sigma \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (a\,, b\,, c)_\mathcal{E}\,. \tag{5.17}$$

Deste modo, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$ que contém o ponto A e tem a direção do vetor $\vec{v}$ serão dadas por (5.7).

Suponhamos que

$$a\,, b\,, c \neq 0\,. \tag{5.18}$$

Deste modo, segue que:

$$\begin{cases} x - x_o = \lambda\, a \\ y - y_o = \lambda\, b \\ z - z_o = \lambda\, c \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja (de (5.18))}, \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_o}{a} \\ \\ \lambda = \dfrac{y - x_o}{b} \\ \\ \lambda = \dfrac{z - z_o}{c} \end{cases} \quad ,$$

ou ainda,

$$r \; : \; \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}\,. \tag{5.19}$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.1 *As equações (5.19), serão denominadas* **equações na forma simétrica da reta $\underline{r}$ (no espaço)**.

Observação 5.3.1

Conclusões: *uma reta $\underline{r}$ do espaço, pode ser representada de três modos diferentes (mas relacionados), a saber:*

1. *por uma equação vetorial:*

$$r : X = A + \lambda \cdot \vec{v}\,, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\underline{A \in r}$ e $\underline{\vec{v} \parallel r}$, com $\underline{\vec{v} \neq \vec{O}}$.

2. *fixado um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *no espaço, pelas equações paramétricas:*
$$r\,:\begin{cases} x = x_o + \lambda\,a \\ y = y_o + \lambda\,b \\ z = z_o + \lambda\,c \end{cases}, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$
onde
$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E}\,.$$

3. *fixado um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *no espaço, pelas equações na forma simétrica:*
$$r\;:\;\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c}\,,$$
onde
$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E})\,, \quad \textit{de modo que} \quad a,b,c \neq 0\,.$$

Fixemos um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço, para os exemplos abaixo:

Exemplo 5.3.1 *Encontre as equações vetorial, paramétricas e na forma simétrica (se possível) da reta* $\underline{r}$ *do espaço, que contém os pontos, cujas coordenadas, em relaçao ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, do espaço, são dadas por:*
$$A \doteq (1\,,0\,,1)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (0\,,1\,,0)_\Sigma\,. \tag{5.20}$$

Resolução:

Como a reta $\underline{r}$ contém os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ (que são distintos), um vetor diretor para a reta $\underline{r}$ será o vetor:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &\overset{(4.4)\text{ e }(5.20)}{=} (0-1\,,1-0\,,0-1)_\mathcal{E} \\ &= (-1\,,1\,,-1)_\mathcal{E}\,.\end{aligned} \tag{5.21}$$

1. Logo, uma equação vetorial para a reta da reta $\underline{r}$ será dada por:
$$r\,:\,X = A + \lambda\cdot\,\overrightarrow{AB}\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{5.22}$$
que, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, tornar-se-á:
$$r\;:\;(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,1)_\Sigma + \lambda\cdot(-1\,,1\,,-1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{5.23}$$

2. Logo, o ponto cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:
$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma$$
pertencerá à reta $\underline{r}$ se, e somente se, podemos encontrar $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$, de modo que, a equação (5.23) esteja satisfeita, ou seja, as equações paramétricas serão dadas por
$$r\,:\begin{cases} x = 1 + \lambda\,.\,(-1) \\ y = 0 + \lambda\,.\,1 \\ z = 1 + \lambda\,.\,(-1) \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.24}$$

3. Notemos que, de (5.21), temos:

$$a \doteq -1, \quad b \doteq 1 \quad \text{e} \quad c \doteq -1,$$

ou seja,

$$a, b, c \neq 0,$$

segue que, equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordeandas $\underline{\Sigma}$, do espaço, serão dadas por:

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1},$$

isto é,

$$r : 1 - x = y = 1 - z. \tag{5.25}$$

□

Temos também o:

Exemplo 5.3.2 *Dado o sistema linear, de três equações a quatro incógnitas reais:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2\lambda \end{cases}, \quad \textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.26}$$

determinar uma equação vetorial da reta $\underline{r}$*, cujas equações paramétricas são dadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, do espaço, pelo sistema linear acima.*

Verifique se o ponto $\underline{P}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, do espaço, são dadas por:*

$$P \doteq (4, 1, 0)_\Sigma, \tag{5.27}$$

pertence à reta $\underline{r}$*.*

Resolução:

Observemos que o sistema linear (5.26) acima, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \,.\, 0 \\ y = 2 + \lambda \,.\, 0 \\ z = 0 + \lambda \,.\, 2 \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.28}$$

Logo, se definirmos o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (1, 2, 0)_\Sigma$$

e o vetor $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{v} \doteq (0\,,0\,,2)_{\mathcal{E}} \neq \vec{O}\,,$$

então o sistema linear (5.28) acima, nos fornece as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, que contém o ponto $\underline{A}$ e tem a direção do vetor, não nulo, $\underline{\vec{v}}$.

Assim, uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por:

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,2\,,0)_\Sigma + \lambda \cdot (0\,,0\,,2)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, ou ainda,

$$X = A + \lambda \cdot \vec{v}\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Para o que o ponto, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espçao, são dadas por:

$$P \doteq (4\,,1\,,0)_\Sigma\,,$$

pertença à reta $\underline{r}$, deverá existir um número real $\underline{\lambda}$, de modo que

$$(4\,,1\,,0)_\Sigma = (1\,,2\,,0)_\Sigma + \lambda \cdot (0\,,0\,,2)_{\mathcal{E}}\,,$$

ou seja,

$$(4\,,1\,,0)_\Sigma = (1\,,2\,,2\,\lambda)_\Sigma\,.$$

Logo, devemos tentar resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 4 = 1 \\ 1 = 2 \\ 0 = 2\,\lambda \end{cases}.$$

Notemos que este sistema linear **não** tem solução, isto é, o ponto $\underline{P}$ **não** pertence à reta $\underline{r}$.

□

Temos tanbém o:

Exemplo 5.3.3 *Fixemos um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)}$ *e consideremos as seguintes equações:*

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{1-y}{2} = z + 1\,. \tag{5.29}$$

Pede-se:

1. *Mostre que as equações (5.29) acima, representam as equações, na forma simétrica, de uma reta* $\underline{r}$ *no espaço, em relação ao sistema de coordeandas* $\underline{\Sigma}$*, do espaço;*

2. *Encontre as equações na forma simétrica, vetorial e paramétricas da reta* $\underline{r}$*, em relação ao sistema de coordeandas* $\underline{\Sigma}$*, do espaço.*

Resolução:

Observemos que as equações (5.29) acima, podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-(-1)}{1}\,.$$

1. Deste modo as equações (5.29), vistas sob este novo ponto de vista, são as equações, na forma simétrica, de uma reta $\underline{r}$ no espaço, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espçao, são dadas por:

$$A \doteq \left(\frac{1}{2}\,,-1\,,-1\right)_{\Sigma}$$

e tem a direção do vetor $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E} \doteq \{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3\}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por

$$\vec{v} \doteq \left(\frac{3}{2}\,,-2\,,1\right)_{\mathcal{E}}\,.$$

2. As equações na forma simétrica da reta $\underline{r}$ serão dadas por:

$$r\,:\,\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-(-1)}{1}\,.$$

Uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por:

$$r\,:\,X=A+\lambda\cdot\vec{v}\,,\quad \text{para cada} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

que, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, de $\underline{V^3}$, será dada por:

$$(x\,,y\,,z)_{\Sigma}=\left(\frac{1}{2}\,,-1\,,-1\right)_{\Sigma}+\lambda\cdot\left(\frac{3}{2}\,,-2\,,1\right)_{\mathcal{E}}\,,\quad \text{para cada} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

As equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, serão dadas por:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\lambda\,\dfrac{3}{2} \\ y=-1+\lambda\,(-2) \\ z=-1+\lambda\,1 \end{cases}\,,\quad \text{para cada} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\,\lambda \\ y=-1-2\,\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}\,,\quad \text{para cada} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

$\square$

Podemos também definir, quando existirem, as equações paramétricas para uma reta no plano.

Na observação a seguir, introduziremos este conceito e daremos algumas propriedades do mesmo, que são análogas das de uma reta no espaço, e cuja verificação será deixada como exercício para o leitor

Observação 5.3.2

1. *Fixado um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)}$ *no plano, consideremos o ponto* $\underline{A}$ *e o vetor (não nulo)*$\underline{\vec{v}}$, *cujas coordenadas em relação ao sistema de cordenadas* $\underline{\Sigma}$, *do espaço e à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$, *de* $\underline{V^3}$, *respectivamente, são dadas por :*

$$A \doteq (x_o\,, y_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,, b)_\mathcal{E}\,. \tag{5.30}$$

Deste modo, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, *que contém o ponto* $\underline{A}$ *e tem a direção do vetor (não nulo)* $\underline{\vec{v}}$ *serão dadas por (5.14).*

Suponhamos que

$$a\,, b \neq 0\,. \tag{5.31}$$

Deste modo, segue que:

$$\begin{cases} x - x_o = \lambda\, a \\ y - y_o = \lambda\, b \end{cases} \quad , \quad \textit{ou seja (de (5.31))}, \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - x_o}{a} \\ \\ \lambda = \dfrac{y - x_o}{b} \end{cases} \quad ,$$

ou ainda,

$$r \ : \mathrm{frac} x - x_o a = \frac{y - y_o}{b}\,. \tag{5.32}$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.2 *As equações (5.32) serão denominadas* **equações na forma simétrica da reta $\underline{r}$ (no plano)**, *em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do plnao.*

Observação 5.3.3 **Conclusões:** *uma reta* $\underline{r}$ *do plano, pode ser representada de três modos diferentes (mas relacionados), a saber:*

(a) *por uma equação vetorial:*

$$r \ : \ X = A + \lambda \cdot \vec{v}\,, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\underline{A \in r}$ *e* $\underline{\vec{v} \parallel r}$, *com* $\underline{\vec{v} \neq \vec{O}}$.

(b) *fixado um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *no plano, pelas equações paramétricas:*

$$r : \begin{cases} x = x_o + \lambda\, a \\ y = y_o + \lambda\, b \end{cases} \quad , \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

onde

$$A \doteq (x_o\,, y_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,, b)_\mathcal{E} \neq (0\,,0)_\mathcal{E}\,.$$

(c) *fixado um sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ *no plano, pelas equações na forma simétrica:*

$$r \;:\; \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}\,,$$

onde

$$A \doteq (x_o\,, y_o)_\Sigma \quad e \quad \vec{v} \doteq (a\,, b)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{onde} \quad a\,, b \neq 0\,.$$

2. *Observemos que, no* **PLANO***, um ponto, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, do plano, são dadas por*

$$X \doteq (x\,, y)_\Sigma\,,$$

pertence à reta $\underline{B}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, do plano, são dadas por:*

$$A \doteq (x_o\,, y_o)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (x_1\,, y_1) \tag{5.33}$$

se, e somente se, os vetores (veja a Observação (4.0.6) item ?)

$$\overrightarrow{AX} \overset{(4.24)\ e\ (5.33)}{=} (x - x_o\,, y - y_o)_\mathcal{E} \quad e \quad \overrightarrow{AB} \overset{(4.24)\ e\ (5.33)}{=} (x_1 - x_o\,, y_1 - y_o)_\mathcal{E}\,,$$

sejam paralelos (ou L.D. em $\mathbb{R}^2$*), isto é, se, e somente se, (veja a Observação (3.7.4) item 11.)*

$$0 \overset{(3.42)}{=} \begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o \end{vmatrix} \overset{\textit{Exercício}}{=} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}\,,$$

ou seja,

$$X = (x\,, y)_\Sigma \in r \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,, \tag{5.34}$$

que é um resultado conhecido da Geometria Analítica Plana, estudada no 2.º Grau.

Na verdade a equação (5.34) acima nos fornece, o que foi conhecido na Geometria Analítica **Plana** *(tratado do 2.o grau) por* **equação geral da reta***.*

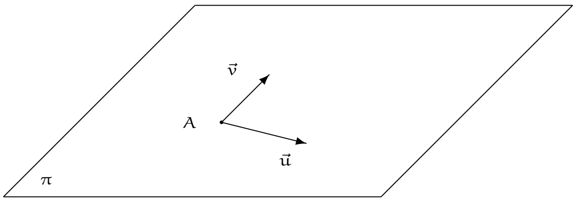
3. *No* **ESPAÇO***, uma reta,* **NÃO** *possui equação geral.*

Capítulo 6

O Plano no Espaço

Nosso objetivo nesta seção será dar uma caraterização analítica para um plano $\underline{\pi}$ no espaço.

Sabemos que o plano $\underline{\pi}$ fica, unicamente determinado, se conhecermos um ponto, que indicaremos por $\underline{A}$, do plano $\underline{\pi}$ e dois vetores, que indicaremos por $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, de $\underline{V^3}$, que sejam L.I. em $\underline{V^3}$ e são paralelos ao plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).



Assim, um ponto, que indicaremos por $\underline{X}$, do espaço, pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}, \quad \vec{u}, \quad \vec{v}$$

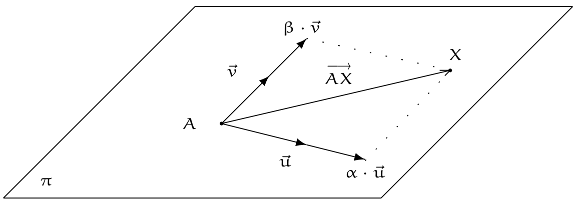
forem L.D. em $\underline{V^3}$, que é equivalente a dizer que eles são paralelos ao plano $\underline{\pi}$.

Como os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ e os vetores $\underline{\overrightarrow{AX}}$, $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ são L.D. em $\underline{V^3}$ (veja figura abaixo) então, do Corolário (3.6.1), segue que existem números reais

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$\overrightarrow{AX} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v},$$



ou, da Definição (3.5.1),

$$X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Com isto, podemos introduzir a:

Definição 6.0.3 *A equação (6.1) será denominada* **equação vetorial do plano π** *e escreveremos*

$$\pi \ : \ X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\,, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{6.1}$$

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ (que são L.I. em V^3 e paralelos ao plano π) serão ditos **vetores diretores do plano π**.

Observação 6.0.4

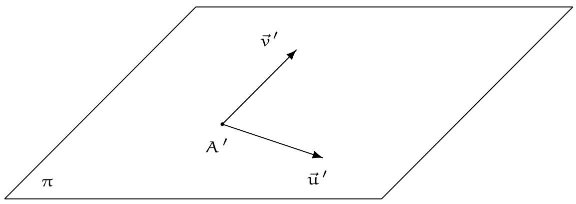
1. *Logo, um ponto X do espaço, pertencerá ao plano π se, e somente se, existirem números reais*
$$\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}\,,$$
tais que a equação (6.1) ocorre.

   Ou seja, o plano π é o lugar geométrico dos pontos do espaço que satisfazem a equação (6.1).

2. *Assim como no caso de uma reta no espaço, o plano π tem uma infinidade de equações vetoriais.*

   Para ver isto basta considerarmos, por exemplo, um outro ponto A' pertencente ao plano π e outros dois vetores $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$, que sejam L.I em V^3 e paralelos aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, respectivamente (logo, paralelos ao plano π - veja a figura abaixo).

   Deste modo teremos uma nova equação vetorial para o plano π, a saber :
$$\pi \ : \ X = A' + \alpha \cdot \vec{u}\,' + \beta \cdot \vec{v}\,'\,, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

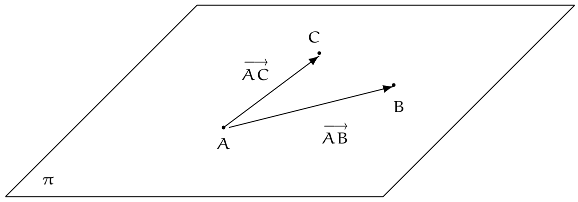


3. *Lembremos também que, um plano π do espaço, fica unicamente determinado se conhecermos três pontos não colineares, que indicaremos por A, B, C, que pertençam ao plano π.*

   Deste modo, os vetores
$$\overrightarrow{AB} \quad e \quad \overrightarrow{AC}$$
serão L.I. em V^3 (pois os pontos A, B, C não são colineares) e paralelos ao plano π (pois $A, B, C \in \pi$).

   Logo estes vetores poderão ser tomados como vetores diretores do plano π e portanto uma equação vetorial do plano π será dada por:
$$\pi \ : \ X = A + \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}\,, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{6.2}$$

   A figura abaixo ilustra a situação acima:



Fixemos um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)}$ no espaço e consideremos o ponto $\underline{A}$, pertencente ao plano $\underline{\pi}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, seja dadas por:

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \tag{6.3}$$

e os vetores diretores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, do plano $\underline{\pi}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E} \doteq \{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3\}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por::

$$\vec{u} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (m\,,n\,,p)_\mathcal{E}\,. \tag{6.4}$$

Então o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por :

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{6.5}$$

petencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, as coordenadas do $\underline{X}$, em rlação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, satisfaz a equação (6.1), para algum $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ números reais, que de (6.5), (6.3) e (6.4), é equivalente a:

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma + \alpha\cdot(a\,,b\,,c)_\mathcal{E} + \beta\cdot(m\,,n\,,p)_\mathcal{E}\,,$$

para algum

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

que é equivalente, ao sitema linear:

$$\begin{cases} x = x_o + \alpha\, a + \beta\, m \\ y = y_o + \alpha\, b + \beta\, n \\ z = z_o + \alpha\, c + \beta\, p \end{cases}, \tag{6.6}$$

para algum $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$.

Com isto, podemos introduzir a:

Definição 6.0.4 *As equações (6.6) serão denominadas* **equações paramétricas do plano** π.

Observação 6.0.5

1. *Assim como a equação vetorial, um plano pode ter uma infinidade de equações paramétricas, fixado um sistema de coordenadas no espaço.*

2. *Fixado um sistema de coordenadas, a um plano está associado sua equações paramétricas.*

   Reciprocamente, um sitema linear, de três equações a cinco incógnitas reais:

$$x\,,y\,,z\,,\alpha\,,\beta\in\mathbb{R}\,,$$

   do tipo (6.6), dá origem a um único plano do espaço, cujas equações paramétricas são dadas pelas equações do sistema linear, em relação ao sistema de coordenadas fixado, no espaço.

   Conclusão: *Fixado um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço, o lugar geométrico das soluções do sistema linear (6.6) é o plano $\underline{\pi}$ e reciprocamente.*

3. *Fixado um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço, se o plano $\underline{\pi}$ contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, não colineares, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma\,, \quad B \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \quad e \quad C \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma\,, \tag{6.7}$$

   então os vetores, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\overrightarrow{AB} \overset{(4.4)\ e\ (6.7)}{=} (x_1-x_o\,,y_1-y_o\,,z_1-z_o)_\mathcal{E} \ e \ \overrightarrow{AC} \overset{(4.4)\ e\ (6.7)}{=} (x_2-x_o\,,y_2-y_o\,,z_2-z_o)_\mathcal{E} \tag{6.8}$$

   serão vetores diretores do plano $\underline{\pi}$ (pois como os pontos do plano, são não colineares, segue que os vetores acima serão paralelos ao plano em L.I. em $\underline{V^3}$) e assim, as equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, serão dadas por:

$$\begin{cases} x = x_o + \alpha\,(x_1 - x_o) + \beta\,(x_2 - x_o) \\ y = y_o + \alpha\,(y_1 - y_o) + \beta\,(y_2 - y_o) \\ z = z_o + \alpha\,(z_1 - z_o) + \beta\,(z_2 - z_o) \end{cases}, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\,,\beta\in\mathbb{R}\,. \tag{6.9}$$

12.a aula - 8.04.2014

Para os quatro exemplos a seguir estará fixado um sistemas de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ no espaço.

Exemplo 6.0.4 *Encontre uma equação vetorial, as equacões paramétricas do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (-3\,,-7\,,1)_\Sigma \tag{6.10}$$

e é paralelo aos vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$, de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,,1\,,1)_\mathcal{E} \quad e \quad \vec{v} \doteq (-1\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,. \tag{6.11}$$

Resolução:

Notemos que os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a Observação (3.7.3) item 2.).
Com isto teremos:

1. Equação vetorial do plano $\underline{\pi}$:

$$X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Se as coordenadas do ponto $\underline{X}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x, y, z)_\Sigma,$$

de (6.10) e (6.11), segue que, a equação vetorial acima será equivalente a:

$$\pi : (x, y, z)_\Sigma = (-3, -7, 1)_\Sigma + \alpha \cdot (1, 1, 1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-1, 1, 0)_\mathcal{E}, \text{ para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

com isto temos uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço

2. Equações paramétrica do plano $\underline{\pi}$:

O ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por

$$X \doteq (x, y, z)_\Sigma$$

pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, satisfaz a equação vetorial do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço, obtida no item acima, ou seja:

$$\begin{cases} x = -3 + \alpha.1 + \beta.(-1) \\ y = -7 + \alpha.1 + \beta.1 \\ z = 1 + \alpha.1 + \beta.0 \end{cases},$$

para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} x = -3 + \alpha - \beta \\ y = -7 + \alpha + \beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

que são as equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, do espaço.

□

Exemplo 6.0.5 *Encontre a equação vetorial do plano $\underline{\pi}$, que contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (0, 1, 0)_\Sigma, \quad B \doteq (1, 0, 1)_\Sigma \quad e \quad C \doteq (0, 0, 1)_\Sigma. \tag{6.12}$$

Resolução:

Notemos que, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\overrightarrow{AB} \overset{(4.4) \text{ e } (6.12)}{=} (1-0\,,0-1\,,1-0)_{\mathcal{E}} = (1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}}\,,$$
$$\overrightarrow{AC} \overset{(4.4) \text{ e } (6.12)}{=} (0-0\,,0-1\,,1-0)_{\mathcal{E}} = (0\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.13}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a Observação (3.7.3) item 2.) e paralelos ao plano $\underline{\pi}$ (pois os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ pertencem ao plano $\underline{\pi}$).

Logo, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ podemos ser tomados como vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Assim, uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$ será dada por:

$$X = A + \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

Se as coordenadas do ponto $\underline{X}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_{\Sigma}\,,$$

de (6.12) e (6.13), segue que, a equação vetorial acima será equivalente a:

$$\pi \;:\; (x\,,y\,,z)_{\Sigma} = (0\,,1\,,0)_{\Sigma} + \alpha\cdot(1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}} + \beta\cdot(0,-1,1)_{\mathcal{E}}\,, \text{ para cada } \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, obtivemos uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

□

Exemplo 6.0.6 *Consideremos o sistema linear, de três equações a cinco incógintas reais, abaixo:*

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 \end{cases}\,, \tag{6.14}$$

onde $x\,,y\,,z\,,\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$.

Pede-se:

1. *o sistema linear acima pode ser considerado como as equações paramétricas de um plano $\underline{\pi}$, dado em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço ?*

   Caso afirmativo, coloque em uma forma mais conveniente para recolhecê-lo.

2. *Caso afirmativo o item acima, encontre uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$.*

3. *Caso afirmativo o item 1., verifique se o ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$P \doteq (-1\,,0\,,1)_{\Sigma} \tag{6.15}$$

   pertence ao plano $\underline{\pi}$.

Resolução:

De 1.:

O sistema linear (6.14) acima, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 0 + \alpha.1 + \beta.0 \\ y = 0 + \alpha.0 + \beta.1 \\ z = 1 + \alpha.0 + \beta.0 \end{cases} , \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

ou seja, são as equações paramétricas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, de um plano, que denotaremos por $\underline{\pi}$, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (0, 0, 1)_\Sigma \tag{6.16}$$

e tem como vetores diretores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1, 0, 0)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (0, 1, 0)_\mathcal{E} . \tag{6.17}$$

Notemos que os vetores acima são L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a Observação (3.7.3) item 2.).

De 2.:

Uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$ será:

$$\pi \ : \ X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \ \text{para cada} \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Se as coordenadas do ponto $\underline{X}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x, y, z)_\Sigma ,$$

de (6.16) e (6.17), segue que, a equação vetorial acima, será equivalente a:

$$\pi \ : \ (x, y, z)_\Sigma = (0, 0, 1)_\Sigma + \alpha \cdot (1, 0, 0)_\mathcal{E} + \beta \cdot (0, 1, 0)_\mathcal{E} , \text{para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{6.18}$$

De 3.:

Para o ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$P \doteq (-1, 0, 1)_\Sigma \tag{6.19}$$

pertencer ao plano $\underline{\pi}$, devem existir números reais $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, de modo que

$$P = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v},$$

ou, por (6.19), que

$$(-1, 0, 1)_\Sigma = \underbrace{(0, 0, 1)_\Sigma + \alpha \cdot (1, 0, 0)_\mathcal{E} + \beta \cdot (0, 1, 0)_\mathcal{E}}_{\overset{(4.5)}{=} (\alpha, \beta, 1)_\Sigma},$$

para algum $\underline{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$.

Logo devemos, tentar, resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -1 = \alpha \\ 0 = \beta \\ 1 = 1 \end{cases}, \quad \text{que é equivalente a:} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Portanto o ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.19), pertence ao plano $\underline{\pi}$, basta tomarmos

$$\alpha \doteq -1 \quad \text{e} \quad \beta \doteq 0$$

nas equações paramétricas (6.18) do plano $\underline{\pi}$, ou seja, $\underline{P \in \pi}$.

□

Exemplo 6.0.7 *Verifique se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são coincidentes (ou seja, iguais), cujas equações vetoriais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$\pi_1 \; : \; (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,1\,,0)_\mathcal{E} + \beta \cdot (0\,,1\,,0)_\mathcal{E} \tag{6.20}$$

$$\pi_2 \; : \; (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,1\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,2\,,1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (0\,,-1\,,1)_\mathcal{E}, \tag{6.21}$$

para $\underline{\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}}$.

Resolução:

Notemos que, o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \tag{6.22}$$

é um ponto do plano $\underline{\pi_1}$ se, e somente se, existem

$$\alpha_1\,,\beta_1 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned}(x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma &\overset{(6.20)}{=} (0\,,0\,,0)_\Sigma + \alpha_1 \cdot (1\,,1\,,0)_\mathcal{E} + \beta_1 \cdot (0\,,1\,,0)_\mathcal{E} \\ &\overset{(4.5)}{=} (\alpha_1\,,\alpha_1 + \beta_1\,,0)_\Sigma\,.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Por outro lado, o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X = (\alpha_1\,,\alpha_1 + \beta_1\,,0)_\Sigma \tag{6.24}$$

(que, por (6.23), pertence ao plano $\underline{\pi_1}$) pertencerá ao plano $\underline{\pi_2}$ se, e somente se, devem existir

$$\alpha_2\,,\beta_2 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$(\alpha_1\,,\alpha_1+\beta_1\,,0)_\Sigma \overset{(6.21)}{=} (1\,,1\,,0)_\Sigma + \alpha_2\cdot(1\,,2\,,1)_\mathcal{E} + \beta_2\cdot(0\,,-1\,,1)_\mathcal{E}$$
$$\overset{(4.5)}{=} (1+\alpha_2\,,1+2\,\alpha_2-\beta_2\,,\alpha_2+\beta_2)_\Sigma\,, \tag{6.25}$$

ou seja, devem existir números reais

$$\alpha_2\,,\beta_2\,,$$

que satisfaçam o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1+\alpha_2 \\ \alpha_1+\beta_1 = 1+2\,\alpha_2-\beta_2 \\ 0 = \alpha_2+\beta_2 \end{cases},$$

$$\text{isto é,}\qquad \begin{cases} \beta_2 = 1-\alpha_1 \\ 1-3\,\alpha_2 = \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \end{cases},$$

$$\text{ou ainda,}\qquad \begin{cases} \beta_2 = 1-\alpha_1 \\ \beta_1 = -2\,\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \end{cases}.$$

$$\text{ou seja,}\qquad \begin{cases} \beta_1 = -2+2\,\alpha_1 & (1) \\ \alpha_2 = -1+\alpha_1 & (2) \\ \beta_2 = 1-\alpha_1 & (3) \end{cases}. \tag{6.26}$$

<u>Conclusão:</u> o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.22), para pertencer aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, deverá satisfazer:

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma \overset{(6.25)}{=} (\overbrace{1+\alpha_2}^{\overset{(2)}{=}\alpha_1}\,,\overbrace{1+2\,\alpha_2-\beta_2}^{\overset{(2)\text{ e }(3)}{=}3\,\alpha_1-2}\,,\overbrace{\alpha_2+\beta_2}^{\overset{(2)\text{ e }(3)}{=}0})_\Sigma$$
$$\overset{(6.26)}{=} (\alpha_1\,,-3\alpha_1-2\,,0)$$
$$= (0\,,-2\,,0)_\Sigma + \alpha_1\cdot(1\,,2\,,0)_\mathcal{E}\,,\quad \text{para}\qquad \alpha_1\in\mathbb{R}\,, \tag{6.27}$$

ou seja, temos a equação vetorial de uma reta $\underline{r}$ que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (0\,,-2\,,0)_\Sigma\,,$$

e tem a direção do vetor $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{v} \doteq (1\,,2\,,0)_\mathcal{E}\,.$$

Portanto os planos **<u>não</u>** são coincidentes, são concorrentes, ou melhor:

$$\pi_1\cap\pi_2 = r\,,$$

onde $\underline{r}$ é uma reta, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordeandas $\underline{\Sigma}$ do espaço, é dada por (6.27).

Observação 6.0.6 *No próximo capítulo estudaremos, entre outros, o problema acima (ou seja, a posição relativa entre dois planos).*

Como veremos, o problema acima será tratado de uma forma mais simples.

6.1 Equação Geral de um Plano

Fixemos um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ e seja π um plano que contém o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (x_o, y_o, z_o)_\Sigma \tag{6.28}$$

e é paralelo aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, que são L.I. em V^3, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\mathcal{E}$ de V^3, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (m, n, p)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (r, s, t)_\mathcal{E} \,. \tag{6.29}$$

Sabemos que um ponto X, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$X \doteq (x, y, z)_\Sigma \tag{6.30}$$

do espaço, pertencerá ao plano π se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}, \quad \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}$$

são L.D. em V^3.

Notemos que, da Proposição (4.0.2) item 1., segue que, as coordenadas, em relação à base (ordenada) $\mathcal{E}$ de V^3, do vetor $\overrightarrow{AX}$, serão dadas por:

$$\overrightarrow{AX} \overset{(4.4)}{=} (x - x_o, y - y_o, z - z_o)_\mathcal{E} \,. \tag{6.31}$$

Logo, de (6.29), (6.31) e do Corolário (3.7.1), os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são L.D. em V^3 se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Desenvolvendo o determinante acima (pela 1.a linha), obteremos (veja o Apêndice (A)):

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_o) \begin{vmatrix} n & p \\ s & t \end{vmatrix} - (y - y_o) \begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix} + (z - z_o) \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} n & p \\ s & t \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix} z \\ &\quad + \left[- \begin{vmatrix} n & p \\ s & t \end{vmatrix} x_o + \begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix} y_o - \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix} z_o \right] . \end{aligned} \tag{6.32}$$

Definamos:

$$a \doteq \begin{vmatrix} n & p \\ s & t \end{vmatrix}, \quad b \doteq -\begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix}, \quad c \doteq \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix},$$

$$d \doteq -\begin{vmatrix} n & p \\ s & t \end{vmatrix} x_o + \begin{vmatrix} m & p \\ r & t \end{vmatrix} y_o - \begin{vmatrix} m & n \\ r & s \end{vmatrix} z_o. \tag{6.33}$$

Então a equação (6.32) acima, poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0. \tag{6.34}$$

Observemos que

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

isto é, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ são números reais, não simultaneamente nulos.

De fato, se

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0,$$

teríamos que os números reias

$$m, n, p \quad \text{e} \quad r, s, t,$$

deveriam ser proporcionais.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Neste caso, teríamos que os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ seriam L.D. em $\underline{V^3}$, o que seria um absurdo, pois eles são vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 6.1.1 *A equação (6.34) será denominada* **equação geral do plano π**, *em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, e escreveremos:*

$$\pi \ : \ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \tag{6.35}$$

onde $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ são dados por (6.33).

Observação 6.1.1 *Fixemos um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma = (O, \mathcal{E})}$.*

1. *Dada uma equação do 1.º grau em três variáveis reais, que denotaremos por $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, isto é, uma equação do tipo*

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \tag{6.36}$$

onde

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

afirmamos que existe um único plano (a menos de outros coincidentes a ele) que tem por equação geral, a equação (6.36), em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

De fato, para encontrar tal plano precisamos conhecer três pontos, não colineares, pertencentes ao plano.

Para isto observemos que como

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\,,$$

segue que os números reais

$$a\,,b\,,c\,,$$

não se anulam simultaneamente, isto é, pelo menos um desses números reais é diferente de zero.

Suponhamos que

$$a \neq 0\,.$$

Se

$$a = 0\,,$$

podemos usar as idéias abaixo para fazer o mesmo se

$$b \neq 0 \quad \text{ou} \quad c \neq 0\,.$$

Deixaremos o tratamento desses casos como exercício para o leitor.

Logo, como

$$a \neq 0\,,$$

da equação (6.36), segue que:

$$x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\,z - \frac{d}{a}\,. \tag{6.37}$$

Logo, considerando-se:

$$\begin{aligned}
y = z = 0\,, &\quad \text{temos, de (6.37), que} \quad x = -\frac{d}{a}\\
y = 0 \text{ e } z = 1\,, &\quad \text{temos, de (6.37), que} \quad x = -\frac{c}{a} - \frac{d}{a}\\
y = 1 \text{ e } z = 0\,, &\quad \text{temos, de (6.37), que} \quad x = -\frac{b}{a} - \frac{d}{a}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, os pontos, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq \left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)_\Sigma\,, \quad B \doteq \left(-\frac{c}{a} - \frac{d}{a}, 0, 1\right)_\Sigma \quad \text{e} \quad C \doteq \left(-\frac{b}{a} - \frac{d}{a}, 1, 0\right)_\Sigma\,, \tag{6.38}$$

satisfazem a equação (6.36).

Assim, da Proposição (4.0.2) item 1., segue que, as coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, dos vetores* $\overrightarrow{AB}$*,* $\overrightarrow{AC}$*, serão dadas por:*

$$\overrightarrow{AB} \overset{(6.38)\text{ e }(4.4)}{=} \left(-\frac{c}{a} - \frac{d}{a} - \left(-\frac{d}{a}\right), 0, 1\right)_\mathcal{E} = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)_\mathcal{E}\,, \tag{6.39}$$

$$\overrightarrow{AC} \overset{(6.38)\text{ e }(4.4)}{=} \left(-\frac{b}{a} - \frac{d}{a} - \left(-\frac{d}{a}\right), 0, 1\right)_\mathcal{E} = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)_\mathcal{E}\,. \tag{6.40}$$

Notemos que os vetores $\overrightarrow{\underline{AB}}$, $\overrightarrow{\underline{AC}}$ *são L.I. em* $\underline{V}^3$, *pois suas coordenadas não guardam uma mesma proporção.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por* (6.38), *são pontos não colineares do plano* $\underline{\pi}$, *e assim determinam um plano* $\underline{\pi}$ *no espaço.*

Encontremos a equação geral do plano $\underline{\pi}$*:*

Lembremos que um ponto $\underline{X}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por:*

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{6.41}$$

pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ *se, e somente se, os vetores*

$$\overrightarrow{AX} \overset{(6.38),(6.41)\ e\ (4.4)}{=} \left(x - \left(-\frac{d}{a}\right), 0\,, 0\right)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \overrightarrow{AB} \quad e \quad \overrightarrow{AC} \tag{6.42}$$

são L.D. em $\underline{V}^3$.

Logo, de (6.42), (6.39), (6.40) *e do Corolário (3.7.1), isto será equivalente a*

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x + \dfrac{d}{a} & y - 0 & z - 0 \\[2ex] -\dfrac{c}{a} & 0 & 1 \\[2ex] -\dfrac{b}{a} & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Apêndice (A)}}{=} \left(x + \frac{d}{a}\right) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -\dfrac{c}{a} & 1 \\[2ex] -\dfrac{b}{a} & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -\dfrac{c}{a} & 0 \\[2ex] -\dfrac{b}{a} & 1 \end{vmatrix} . \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} -x - \frac{d}{a} - \frac{b}{a} - z\frac{c}{a} .
\end{aligned}$$

Multiplicando-se a equação acima por

$$(-a) \neq 0\,,$$

obteremos:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

ou seja, a equação (6.36) *dada inicialmente.*

<u>Conclusão:</u> *o lugar geométrico das solução da equação (6.36) é o plano* $\underline{\pi}$, *em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, e reciprocamente.*

2. *De outro modo:*

   $\underline{\pi}$ é um plano no espaço se, e somente se, existem números reais $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, não todos nulos, tal que

$$\pi = \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\right\}\,,$$

   e assim obtemos uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

3. *Se o plano π contém os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, não colineares, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma\,,\quad B \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \quad \textit{e} \quad C \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma\,, \tag{6.43}$$

   então o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,,$$

   pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores, , cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\overrightarrow{AX} \overset{(6.43)\ e\ (4.4)}{=} (x - x_o\,,y - y_o\,,z - z_o)_\mathcal{E}\,,$$
$$\overrightarrow{AB} \overset{(6.43)\ e\ (4.4)}{=} (x_1 - x_o\,,y_1 - y_o\,,z_1 - z_o)_\mathcal{E}\,,$$
$$\overrightarrow{AC} \overset{(6.43)\ e\ (4.4)}{=} (x_2 - x_o\,,y_2 - y_o\,,z_2 - z_o)_\mathcal{E}$$

   são L.D. em $\underline{V^3}$ que, do Corolário (3.7.1), será equivalente a:

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o & z_2 - z_o \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6.44}$$

   Pelas propriedades de determinante (ver Apêndice (A)), o determinante acima será igual a

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_o & y_o & z_o & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   Logo o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma$$

   pertence ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_o & y_o & z_o & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6.45}$$

4. *Compare a identidade acima (que diz respeito a equação geral de uma plano no espaço) com a obtida na Observação (5.3.2) item 2. do Capítulo anteior (que dizia respeito a equação geral de uma reta no plano, a saber, a identidade (5.34)).*

5. *A equação (6.45) nos dá uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, quando conhecemos as coordenadas de três pontos, $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, não colineares, que pertencem ao plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.*

Para os quatro exemplos a seguir consideraremos um sistema de coordenadas $\underline{\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})}$ fixado.

Exemplo 6.1.1 *Encontre uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (1\,,0\,,1)_\Sigma \tag{6.46}$$

e é paralelo aos vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (2\,,1\,,-1)_\mathcal{E} \quad e \quad \vec{v} \doteq (-1\,,0\,,0)_\mathcal{E}\,. \tag{6.47}$$

Resolução:

Observemos que os vetores $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ (pois suas correspondentes coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, não guardam uma mesma proporção - verifique!).

1. Equação vetorial do plano $\underline{\pi}$:

   A equação vetorial do plano será dada por:

   $$X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$$

   ou seja, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, teremos:

   $$\pi\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (2\,,1\,,-1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-1\,,0\,,0)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

2. Equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$:

   O ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

   $$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,,$$

   pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, existem

   $$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

   tais que:

   $$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (2\,,1\,,-1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-1\,,0\,,0)_\Sigma\,,$$

que, de (4.5), é equivalente à:

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1+2\alpha-\beta\,,\alpha\,,1-\alpha)_\Sigma\,, \quad \text{para algum} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, as equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, serão dadas por:

$$\pi \ : \begin{cases} x = 1+2\alpha-\beta \\ y = \alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases} \quad , \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

3. Equações geral do plano $\underline{\pi}$:

   Um ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

   $$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,,$$

   pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores

   $$\begin{aligned} &\overrightarrow{AX} \overset{(6.46)\text{ e }(4.4)}{=} (x-1\,,y-0\,,z-1)_\mathcal{E} = (x-1\,,y\,,z-1)_\mathcal{E}\,, \\ &\vec{u} = (2\,,1\,,-1)_\mathcal{E}\,, \\ &\vec{v} = (-1\,,0\,,0)_\mathcal{E} \end{aligned}$$

   forem L.D. em $\underline{V^3}$, que, do Corolário (3.7.1), será equivalente a:

   $$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+y+0+z-1+0+0 = y+z-1\,,$$

   ou seja, uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

   $$\pi \ : \ y+z-1 = 0\,. \tag{6.48}$$

□

Observação 6.1.2 *Notemos que, na equação geral do plano $\underline{\pi}$ obtida no Exemplo acima, isto é,* (6.48)*, teremos*

$$a = 0\,, \quad b = 1\,, \quad c = 1 \quad e \quad d = -1\,.$$

Temos também o:

Exemplo 6.1.2 *Dado os sistema linear de três equações, a cinco incógnitas reias:*

$$\begin{cases} x = -1+2\,\alpha-3\,\beta \\ y = 1+\alpha+\beta \\ z = \alpha \end{cases} \quad , \quad para \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,, \tag{6.49}$$

pede-se:

1. *Verificar se o sistema linear de equações (6.49) acima, são equações paramétricas de um plano π do espaço, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço.*

2. *Caso afimativo, encontre uma equação vetorial e a equação geral do mesmo, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço.*

Resolução:

De 1.:

Observemos que o sistema linear (6.49) acima, pode ser colocado na seguinte forma:

$$\begin{cases} x = -1 + 2.\alpha + (-3).\beta \\ y = 1 + 1.\alpha + 1.\beta \\ z = 0 + 1.\alpha + 0.\beta \end{cases} \quad , \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{6.50}$$

Logo se definirmos o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (-1\,,1\,,0)_\Sigma\,. \tag{6.51}$$

e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\mathcal{E}$ de V^3, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (2\,,1\,,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (-3\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \tag{6.52}$$

então os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ serão L.I. em V^3 (pois um não é múltiplo do outro) e assim eles, juntamente com o ponto A, dão origem a um plano π, cujas equações paramétricas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, serão dadas pelo sistema (6.49) acima, isto é,

$$\pi\ :\ \begin{cases} x = -1 + 2\,\alpha - 3\,\beta \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases} \quad , \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

De 2.:

2.a Equação vetorial do plano π:

De (6.50), (6.51) e (6.52), uma equação vetorial do plano π será da forma:

$$\pi\ :\ X = A + \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$\pi\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (-1\,,1\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (2\,,1\,,1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-3\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

2.b Equação geral do plano π:

Notemos que ponto X, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,, \tag{6.53}$$

pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} &\overset{(6.53),(6.51)\text{ e }(4.4)}{=} (x-(-1)\,,y-1\,,z-0)_{\mathcal{E}} = (x+1\,,y-1\,,z)_{\mathcal{E}}\,,\\ \vec{u} &= (2\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\,,\\ \vec{v} &= (-3\,,1\,,0)_{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{6.54}$$

forem L.D. em $\underline{V^3}$, que, do Corolário (3.7.1), será equivalente a:

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\,(y-1) + 2\,z + 3z - (x+1) + 0\,,$$

ou seja:

$$\pi \ : \ -x - 3\,y + 5\,z + 2 = 0\,. \tag{6.55}$$

$\square$

Observação 6.1.3 *Notemos que, na equação geral do plano $\underline{\pi}$ obtida no Exemplo acima, isto é,* (6.55)*, teremos*

$$a = -1\,, \quad b = -3\,, \quad c = 5 \quad e \quad d = 2\,.$$

Outra situação é dado pelo:

Exemplo 6.1.3 *Obtenha a equação vetorial e as equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$, que possui equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, dada por:*

$$\pi \ : \ x + 2\,y + z - 1 = 0\,. \tag{6.56}$$

Resolução:

<u>1.o modo:</u>

Precisamos encontrar três pontos, não colineares, que pertençam ao plano $\underline{\pi}$, isto é, três pontos não colineares, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, satisfaçam a equação geral do plano (6.56).

Observemos que, substituindo-se os valores abaixo na equação geral do plano $\underline{\pi}$, obteremos os correspondentes valores para a variável restante e com isto, obtremos coordenadas de três pontos do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad x = y = 0\,, \quad \text{então, de (6.56), segue que} \quad z = 1\,, \quad \text{isto é,} \quad A \doteq (0\,,0\,,1)_{\Sigma} \in \pi\,,\\ &\text{se} \quad x = z = 0\,, \quad \text{então, de (6.56), segue que} \quad y = \frac{1}{2}\,, \quad \text{isto é,} \quad B \doteq \left(0\,,\frac{1}{2}\,,0\right)_{\Sigma} \in \pi\,,\\ &\text{se} \quad y = z = 0\,, \quad \text{então, de (6.56), segue que} \quad x = 1 \quad \text{isto é,} \quad C \doteq (1\,,0\,,0)_{\Sigma} \in \pi. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Com isto temos que os três pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, dados acima, pertencem ao plano $\underline{\pi}$, pois suas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, satisfazem a equação geral do plano $\underline{\pi}$.

Com isto temos os vetores, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\overrightarrow{AB} \overset{(6.57) \text{ e } (4.4)}{=} \left(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\right)_{\mathcal{E}}, \quad \overrightarrow{AC} \overset{(6.57) \text{ e } (4.4)}{=} (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}}, \tag{6.58}$$

seão vetores paralelos ao plano $\underline{\pi}$ e são L.I. em $\underline{V^3}$ (pois um não é múltiplo do outro).

Logo os dois vetores acima, podem ser considerados como vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Logo, uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$ será dada por:

$$X = A + \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

que, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot \left(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\right)_{\mathcal{E}} + \beta \cdot (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}}\,, \text{ para cada } \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{6.59}$$

Notemos que, um ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas,em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{6.60}$$

pertencerá ao plano ao $\underline{\pi}$ se, e somente se, existem

$$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot \left(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\right)_{\mathcal{E}} + \beta \cdot (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}}\,,$$

isto é,

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = \left(\beta\,,\frac{1}{2}\alpha\,,1-\alpha-\beta\right)_\Sigma\,,$$

ou seja, as equações paramétricas do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, serão dadas por:

$$\pi\ :\ \begin{cases} x = -\beta \\ y = \dfrac{1}{2}\alpha \\ z = 1-\alpha-\beta \end{cases}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

<u>2.o modo:</u>

Um outro modo, mais rápido, de obtermos uma equação vetorial do plano $\underline{\pi}$, é olharmos a equação geral do plano (6.56), como um sistema linear formado por uma equação, a três variáveis reias.

Em geral, para resolver um sistema desse tipo, damos valores a duas variáveis e obtemos o valor da terceira variável, em termos dos valores dados as duas primeiras.

Por exemplo, se considerarmos

$$x = \beta \quad \text{e} \quad y = \alpha\,,$$

na equação (6.56), obteremos

$$z = 1 - \alpha - 2\beta\,,$$

ou seja, as soluções do sistema linear serão da forma:

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha \\ z = 1 - 2\alpha - \beta \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

que nada mais é, que as equações paramétricas do plano π, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço.

Reescrevendo o sistema linear acima como:

$$\begin{cases} x = 0 + 0.\alpha + 1.\beta \\ y = 0 + 1.\alpha + 0.\beta \\ z = 1 + (-2).\alpha + (-1).\beta \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

estas serão as equações paramétricas o plano π, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço,

Notemos que o plano π, conterá o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (0\,,0\,,1)_\Sigma$$

e é paralelo aos vetores

$$\vec{u} \doteq (0\,,1\,,-2)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (1\,,0\,,-1)_\mathcal{E}\,.$$

Assim, uma equação vetorial do plano π será dada por:

$$\pi\ :\ X = A + \alpha\cdot\vec{u} + \beta\cdot\vec{v}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

que, em relação ao sistema de coordenadas Σ do espaço, será dada por:

$$\pi\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha\cdot(0\,,1\,,-2)_\mathcal{E} + \beta\cdot(1\,,0\,,-1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

□

Observação 6.1.4 *Observemos que as equações vetorias (e paramétricas) obtidas nos dois modos npo Exempo acima são diferentes.*

Porém elas representam um mesmo plano, a saber, o plano π do espaço. Por que?

Exemplo 6.1.4 *Encontre a equação vetorial da reta r, que é a intersecção dos planos π_1 e π_2, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas Σ, do espaço, são dadas por:*

$$\pi_1\ :\ x + y + z + 1 = 0\,, \tag{6.61}$$

$$\pi_2\ :\ x + y - z = 0\,. \tag{6.62}$$

Resolução:

Como veremos no próximo capítulo os plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são, realmente, concorrentes e assim a itensecção dos mesmos dará origem a uma reta $\underline{r}$.

1.º modo:

Para encontrarmos uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, basta determinarmos dois pontos da reta que sejam não coincidentes.

Para isto, no sistema linear (definido pelas equações gerais dos dois planos, isto é, (6.61) e (6.62)),

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases},$$

daremos valores a uma das variáveis e obteremos os valores das outras duas utilizando o sistema linear acima.

Por exemplo, se:

$$x=0\,, \quad \text{então,} \quad \begin{cases} y+z=-1 \\ y-z=0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad y=-\frac{1}{2}\,, z=-\frac{1}{2}\,, \quad \text{isto é,} \quad A \doteq \left(0\,,-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right)_\Sigma \in r\,;$$

$$y=0\,, \quad \text{então,} \quad \begin{cases} x+z=-1 \\ x-z=0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad x=-\frac{1}{2}\,, z=-\frac{1}{2}\,, \quad \text{isto é,} \quad B \doteq \left(-\frac{1}{2}\,,0\,,-\frac{1}{2}\right)_\Sigma \in r\,.$$

Logo os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ acima obtidos, cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são pontos distintos e, por construação, pertencem aos dois planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, isto é, pertencem à reta $\underline{r}$.

Logo o vetor

$$\overrightarrow{AB} \doteq \left(-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)_\mathcal{E}\,,$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$, cujas coordenadas são dadas em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$.

Assim a equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por :

$$X = A + \alpha \cdot \overrightarrow{AB}\,, \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

que, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$r\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = \left(0\,,-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\right)_\Sigma + \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{6.63}$$

2.º modo:

Observemos que as equações gerais dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, a saber:

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

nos fornecem um sistema linear de duas equações, a três incógnitas reais.

Em geral, para encontrarmos as soluções de um sistema linear desse tipo, atribuímos valores a uma das variáveis e obtemos as outras duas em termos da primeira como, por exemplo:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y + z = 1 - \alpha \\ y - z = -\alpha \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{1 - 2\,\alpha}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{ou ainda} \quad \begin{cases} x = 0 + 1.\alpha \\ y = \dfrac{1}{2} + (-1).\alpha \\ \\ z = \dfrac{1}{2} + 0.\alpha \end{cases}, \tag{6.64}$$

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo temos as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Logo, considerando-se o ponto, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq \left(0\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\right)_{\Sigma}$$

e o vetor, cujas coordenadas em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,, -1\,, 0)_{\mathcal{E}}\,,$$

segue, de (6.64), que uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por:

$$X = A + \alpha \cdot \vec{u}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

que, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:,

$$r \; : \; (x\,, y\,, z)_{\Sigma} = \left(0\,, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\right)_{\Sigma} + \alpha \cdot (1, -1, 0)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{6.65}$$

Observação 6.1.5 *As equações vetoriais* (6.63) *e* (6.65), *obtidas nas duas formas acima são diferentes.*

Porém o vetor de uma das equações vetoriais, é paralelo ao vetor da outra equação (a constante de multiplicação é -2), mostrando que eles são paralelos, como não poderia deixar de ser, pois representam uma mesma reta.

13.a aula - 10.04.2014 - 1.a Prova

14.a aula - 22.04.2014

6.2 Vetor Normal a um Plano

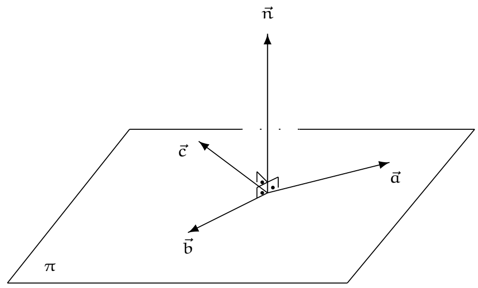
Nesta seção fixaremos um sistema de coordenadas

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

ortogonal no espaço (isto é, a base (ordenada) $\mathcal{E} \doteq \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal positiva de $\underline{V}^3$).

Com isto temos a:

Definição 6.2.1 *Seja $\underline{\pi}$ um plano do espaço. Um vetor, não nulo, que indicaremos por $\underline{\vec{n}}$, será dito* **vetor normal ao plano** $\underline{\pi}$, *se ele for ortogonal a todo vetor paralelo ao plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).*



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \parallel \pi$

Observação 6.2.1

1. *Suponhamos que os vetores*

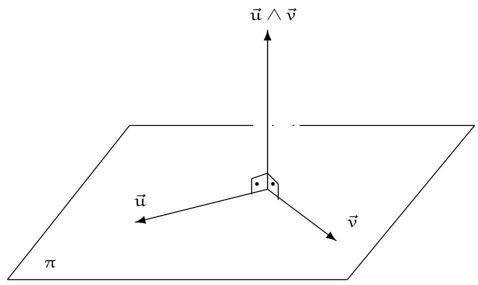
$$\vec{u} \quad e \quad \vec{v}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi}$ (em particular, são vetores L.I. em $\underline{V}^3$).

Logo, o vetor

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\,, \tag{6.66}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ pois, como os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, então, da Definição (3.12.1), o vetor $\underline{\vec{u} \wedge \vec{v}}$, será um vetor não nulo e deverá ser ortogonal aos vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ e portanto, a todo vetor paralelo ao plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).



Isto decorre do fato que, todo vetor paralelo ao plano $\underline{\pi}$ deve ser uma combinação linear dos vetores diretores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$ do plano $\underline{\pi}$.

2. *Consideremos o ponto* $\underline{A}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas (ortogonal)* $\underline{\Sigma}$*, são dadas por:*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma \tag{6.67}$$

pertencente ao plano $\underline{\pi}$ *e o vetor* $\underline{\vec{n}}$*, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal positiva* $\underline{\mathcal{E}}$*, são dadas por:*

$$\vec{n} \doteq (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.68}$$

um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$*.*

Notemos que, em particular, $\vec{n} \neq \vec{O}$*, isto é,*

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\,.$$

Então podemos obter a equação geral do plano $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, agindo da seguinte forma:*

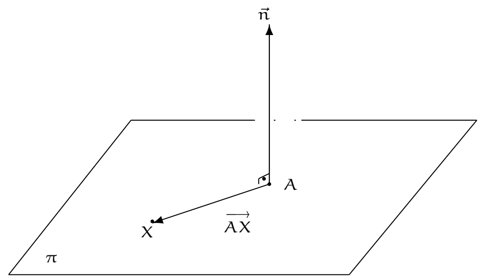
Um ponto $\underline{X}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, são dadas por*

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,, \tag{6.69}$$

pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ *se, e somente se, os vetores*

$$\overrightarrow{AX} \overset{(6.69)\ e\ (6.67)}{=} (x - x_o\,,y - y_o\,,z - z_o)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{n} \overset{(6.68)}{=} (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}} \tag{6.70}$$

são ortogonais (veja a figura abaixo).



Da Proposição (3.10.2), isto será equivalente à :

$$\overrightarrow{AX} \bullet \vec{n} = 0\,. \tag{6.71}$$

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *é ortonormal (e positiva) de* $\underline{V^3}$*, da Definição (3.10.2), segue que isto será o mesmo que:*

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(6.71)\ e\ (6.70)}{=} (x - x_o\,,y - y_o\,,z - z_o)_{\mathcal{E}} \bullet (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}} \\ &\overset{(3.100)}{=} a\,(x - x_o) + b\,(y - y_o) + c\,(z - z_o)\,, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,, \qquad \textit{onde} \qquad d \doteq -a\,x_o - b\,y_o - c\,z_o\,.$$

Conclusão: *se o vetor* $\underline{\vec{n}}$*, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{n} \doteq (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.72}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$*, então a equação geral do plano* $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, será dada por:*

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,, \tag{6.73}$$

onde $\underline{d}$ *é um número real a ser encontrado.*

Para encontrarmos a constante $\underline{d}$*, basta conhecermos um ponto* $\underline{A}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma\,, \tag{6.74}$$

que pertença ao plano $\underline{\pi}$*.*

Neste caso, como o ponto $\underline{A}$ *pertence ao plano* $\underline{\pi}$*, as coordenadas do ponto* $\underline{A}$ *deverão satisfazer a equação geral do plano* $\underline{\pi}$*, ou seja, (6.74), ou ainda:*

$$a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d = 0\,,$$

ou seja, teremos que ter

$$d = -a\,x_o - b\,y_o - c\,z_o\,. \tag{6.75}$$

Conclusão: *a equação geral do plano* $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, que contém o ponto* $\underline{A}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o)_\Sigma\,, \tag{6.76}$$

e que tem como vetor normal, o vetor $\underline{\vec{n}}$*, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{n} \doteq (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.77}$$

será dada por:

$$\pi\ :\ a\,x + b\,y + c\,z - a\,x_o - b\,y_o - c\,z_o = 0\,. \tag{6.78}$$

3. *Vale a recíproca da situação acima, isto é, dada a equação geral de um plano*

$$\pi\ : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ *do espaço, o vetor* $\underline{\vec{n}}$*, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{n} \doteq (a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.79}$$

(que é um vetor não nulo, pois se $a = b = c = 0$ *a equação acima não é uma equação!) será um vetor normal ao plano* $\underline{\pi}$*.*

De fato, mostremos que o vetor $\underline{\vec{n}}$*, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por (6.79), é ortogonal a todo vetor, que denotaremos por* $\underline{\vec{u}}$*, paralelo ao plano* $\underline{\pi}$*.*

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, é uma base (ordenada) ortonormal (positiva) de* $\underline{V^3}$*, segue, da Proposição (3.10.2), que isto será equiavelente a:*

$$\vec{n} \bullet \vec{u} = 0\,, \tag{6.80}$$

para qualquer vetor $\underline{\vec{u}}$ *paralelo ao plano* $\underline{\pi}$*.*

Sejam $\vec{u} \in V^3$*, um vetor paralelo ao plano* $\underline{\pi}$ *e o ponto* $\underline{A}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas (ortogonal)* Σ*, são dadas por:*

$$A \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \tag{6.81}$$

pertencente ao plano $\underline{\pi}$*.*

Lembremos que, da Proposição (3.2.2), existe um (único) ponto $\underline{B}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por:*

$$B \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma\,, \tag{6.82}$$

pertencente ao plano $\underline{\pi}$*, de modo que*

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} \\ &\overset{(6.81)(6.82)\ e\ (4.4)}{=} (x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - z_1)_\Sigma\,. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Mostemos que

$$\overrightarrow{AB} \bullet \vec{n} = 0\,,$$

Para isto observemos que como:

$$A = (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \in \pi \quad \textit{então, deveremos ter:} \quad a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \tag{6.84}$$

e

$$B = (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma \in \pi\,, \quad \textit{então, deveremos ter:} \quad a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 + d = 0\,. \tag{6.85}$$

Subtraindo-se (6.84) de (6.85), obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &= (a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 + d) - (a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d) \\ &= a\,(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1) + c\,(z_2 - z_1) \\ &\overset{(6.79),(6.83)\ e\ (3.100)}{=} \vec{n} \bullet \overrightarrow{AB}\,, \end{aligned}$$

que, pela Proposição (3.10.2) é, equiavelente a afirmar que o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por (6.79), é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

4. **Resumindo:** *Dado um sistema de coordenadas ortogonal*

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

do espaço, os coeficientes de

$$x\,,y\,,z$$

(nesta ordem!) de uma equação geral de um plano $\underline{\pi}$, dado em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são as coordenadas de um vetor $\underline{\vec{n}}$, que é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ (isto é, o vetor dado por (6.79)) e reciprocamente.

Nos exemplos abaixo estará fixado um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

no espaço.

Exemplo 6.2.1 *Encontre a equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (1\,,0\,,2)_\Sigma \tag{6.86}$$

e tem o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortogonal positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{n} \doteq (1\,,-1\,,4)_{\mathcal{E}} \tag{6.87}$$

como um vetor normal ao mesmo.

Resolução:

Da Observação (6.2.1) item 2., segue que, se o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.87), então uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$1.x + (-1).y + 4.z + d = 0\,, \quad \text{isto é,} \quad x - y + 4\,z + d = 0\,.$$

Para encontrarmos o valor da constante $\underline{d}$, utilizaremos o fato que o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas (6.86), deve pertencer ao plano $\underline{\pi}$.

Logo as coordenadas do ponto $\underline{A}$, dadas por (6.86), em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, deverão satisfazer a equação geral do plano, isto é,

$$1 - 0 + 4.2 + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad d = -9\,.$$

Portanto, uma equação geral do plano, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi\,:\,x - y + 4\,z - 9 = 0\,.$$

$\square$

Exemplo 6.2.2 *Obtenha a equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, que contém o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$A \doteq (0\,,1\,,2)_\Sigma \tag{6.88}$$

e tem como vetores diretores, os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonomal positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (4\,,1\,,2)_\mathcal{E} \quad e \quad \vec{v} \doteq (2\,,1\,,-2)_\mathcal{E}\,. \tag{6.89}$$

Resolução:

1.º modo:

Notemos que, se o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X = (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{6.90}$$

então, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AX}$, serão dadas por:

$$\overrightarrow{AX} \overset{(6.88),\,(6.90)\text{ e }(4.4)}{=} (x-0\,,y-1\,,z-2)_\mathcal{E}\,. \tag{6.91}$$

Portanto, o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.90), pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}\,, \quad \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$.

Pela Proposição (3.7.4), isto é equivalente à:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -4\,x + 12\,(y-1) + 2\,(z-2) \\ &= -4\,x + 12\,y + 2\,z - 16\,, \end{aligned}$$

ou seja, uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \;:\; -4\,x + 12\,y + 2\,z - 16 = 0\,.$$

Observemos que, da Observação (6.2.1) item 4., o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$\vec{n} \doteq (-1\,,1\,,2)_\mathcal{E}\,,$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

2.º modo:

Notemos que, da Observação (6.2.1) item 1., o vetor $\underline{\vec{u} \wedge \vec{v}}$, será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, é uma base (ordenada) ortonormal positiva de $\underline{V^3}$, da Proposição (3.12.1) e de (6.89), segue que

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} -4 \cdot \vec{e}_1 + 12 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3 \\ &= (-4\,,12\,,2)_{\mathcal{E}}\,. \end{aligned} \tag{6.92}$$

Logo, da Observação (6.2.1) item 1., uma equação geral do plano, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será dada por:

$$(-4).x + 12.y + 2.z + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad -4\,x + 12\,y + 2\,z + d = 0\,.$$

Para encontrarmos a constante $\underline{d}$, utilizaremos o fato que o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, dadas por (6.88), pertence ao plano $\underline{\pi}$.

Logo as coordenadas do ponto $\underline{A}$, deverão satisfazer a equação geral do plano, isto é,

$$-4.0 + 12.1 + 2.2 + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad d = -16\,.$$

Portanto a equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \ : \ -4\,x + 12\,y + 2\,z - 16 = 0\,.$$

□

Exemplo 6.2.3 *Obtenha uma equação geral do plano $\underline{\pi}$ do espaço, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, é dada por:*

$$\pi \ : \ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}} + \beta \cdot (1\,,1\,,0)_{\mathcal{E}}\,, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{6.93}$$

Resolução:

Observemos que, da equação vetorial (6.93) do plano $\underline{\pi}$, segue que o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (1\,,0\,,1)_\Sigma \tag{6.94}$$

pertence ao plano $\underline{\pi}$ e os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,,-1\,,1)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (1\,,1\,,0)_{\mathcal{E}} \tag{6.95}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

<u>1.º modo:</u>

Observemos que se o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,, \tag{6.96}$$

então o vetor $\overrightarrow{AX}$, terá coordenadas, em relação à base $\mathcal{E}$, dadas por:

$$\overrightarrow{AX} \overset{(6.96),(6.94)\text{ e }(4.4)}{=} (x-1\,,y-0\,,z-1)_\mathcal{E}\,. \tag{6.97}$$

Con isto, o ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.96), pertencerá ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}\,, \quad \vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$.

Como a base $\mathcal{E}$ é ortonormal, da Proposição (3.7.1), de (6.95) e (6.97), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + y + z - 1 + z - 1 + 0 - (x-1) \\ &= -x + y + 2z - 1\,. \end{aligned}$$

Portanto, uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \;:\; -x + y + 2z - 1 = 0\,.$$

Observemos que o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$\vec{n} \doteq (-1\,,1\,,2)_\mathcal{E}\,,$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

<u>2.º modo:</u>

Notemos que, da Observação (6.2.1) item 1., o vetor

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, é uma base (ordenada) ortonormal positiva de $\underline{V^3}$, da Proposição (3.12.1) e de (6.95), segue que

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\cdot\vec{e}_3 \\ &= (-1\,,1\,,2)_\mathcal{E}\,. \end{aligned}$$

Logo, da Observação (6.2.1) item 1., uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \ : \ (-1).x + 1.y + 2.z + d = 0 \,, \quad \text{ou seja,} \quad -x + y + 2\,z + d = 0 \,.$$

Para encontrarmos o valor da constante de $\underline{d}$, utilizaremos o fato que o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.94), pertence ao plano $\underline{\pi}$

Logo, as coordenadas do ponto $\underline{A}$, deverão satisfazer a equação geral do plano, isto é,

$$-1 + 0 + 2.1 + d = 0 \,, \quad \text{ou seja,} \quad d = -1 \,.$$

Portanto uma equação geral do plano, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \ : \ -x + y + 2\,z - 1 = 0 \,.$$

Observação 6.2.2 *Notemos que o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonomal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, dadas por:*

$$\vec{n} \doteq (-1\,, 1\,, 2)_{\mathcal{E}} \,,$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

6.3 Feixe de Planos

Terminaremos este capítulo exibindo uma maneira de se obter uma equação, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, fixado, para um **feixe de planos que contém uma reta** $\underline{r}$ dada, ou seja, a coleção de todos os planos, do espaço, que contém um reta $\underline{r}$.

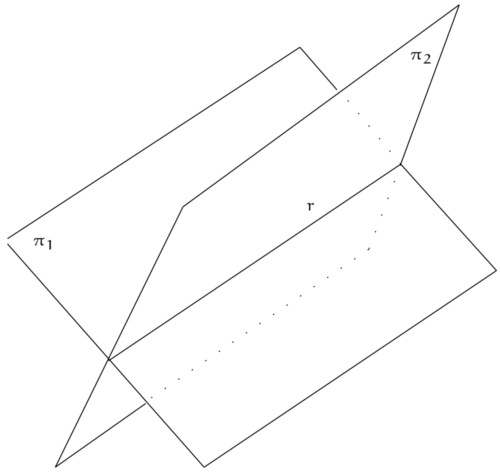
Consideremos uma reta $\underline{r}$, obtida da interseção de dois planos concorrentes $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ (veja a figura abaixo) cujas equações gerais, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$\pi_1 \ : \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0 \tag{6.98}$$

$$\pi_2 \ : \ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0 \,, \tag{6.99}$$

onde

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \neq 0 \,. \tag{6.100}$$



Dados dois números reais

$$\lambda\,,\gamma\,,$$

não ambos nulos, isto é, tais que

$$\lambda^2+\gamma^2\neq 0\,, \tag{6.101}$$

teremos que a equação do 1.o grau

$$\lambda\,[a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1]+\gamma\,[a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2]=0\,, \tag{6.102}$$

é uma equação geral de um plano do espaço, que indicaremos por $\underline{\pi_{\lambda\gamma}}$, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço.

De fato, pois a equação (6.102) pode ser reescrita na seguite forma:

$$(\lambda\,a_1+\gamma\,a_2)\,x+(\lambda\,b_1+\gamma\,b_2)\,y+(\lambda\,c_1+\gamma\,c_2)\,z+(\lambda\,d_1+\gamma\,d_2)=0\,, \tag{6.103}$$

e, de (6.100) e (6.101), segue que

$$\lambda\,a_1+\gamma\,a_2\,,\ \lambda\,b_1+\gamma\,b_2\,,\lambda\,c_1+\gamma c_2\,,$$

não são todos nulos.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observemos também que a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi_{\lambda\gamma}}$, cuja equação geral é dada por (6.103), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, para cada

$$\lambda\,,\gamma\in\mathbb{R}\,,\qquad \text{com}\qquad \lambda^2+\gamma^2\neq 0\,.$$

De fato, pois se um ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A\doteq(x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{6.104}$$

pertence à reta $\underline{r}$, suas coordenadas deverão satisfazer as equações gerais do plano $\underline{\pi_1}$ e do plano $\underline{\pi_2}$, a saber (6.98) e (6.98), dadas em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Logo, as coordenadas do ponto $\underline{A}$, dadas por (6.104), deverão satisfazer a equação (6.102), ou seja, a equação geral do palno $\underline{\pi_{\lambda\gamma}}$.

Por outro lado, se um plano $\overline{\pi}$, contém a reta $\underline{r}$, então devem existir

$$\lambda_o\,,\gamma_o \in \mathbb{R}\,,$$

não ambos nulos, tal que a equação geral do plano $\overline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, seja dada por:

$$(\lambda_o\,a_1 + \gamma_o\,a_2)\,x + (\lambda_o\,b_1 + \gamma_o\,b_2)\,y + (\lambda_o\,c_1 + \gamma_o\,c_2)\,z + (\lambda_o\,d_1 + \gamma_o\,d_2) = 0\,.$$

De fato, se uma equação geral do plano $\overline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, é dada por:

$$\overline{\pi}\ :\ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

devemos mostrar que, existem

$$\alpha_o\,,\beta_o \in \mathbb{R}\,,$$

não ambos nulos, tais que

$$\begin{cases} \lambda_o\,a_1 + \gamma_o\,a_2 = a \\ \lambda_o\,b_1 + \gamma_o\,b_2 = b \\ \lambda_o\,c_1 + \gamma_o\,c_2 = c \\ \lambda_o\,d_1 + \gamma_o\,d_2 = d \end{cases}\,,$$

sabendo-se que a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\overline{\pi}$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Conclusão: todo plano que contém a reta $\underline{r}$, obtida da interseção dos plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ concorrentes, cujas equações gerais são dadas por (6.98) e (6.99), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, terá equação geral da forma (6.102), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, para algum $\underline{\lambda}$ e $\underline{\gamma}$, não ambos nulos.

Definição 6.3.1 *A coleção de todos os planos que contém a reta $\underline{r}$ (isto é, os que têm equações gerais da forma (6.102), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, para $\underline{\lambda}$ e $\underline{\gamma}$ números reais, não ambos nulos) será denominado* **feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$**.

Nos exemplos abaixo está fixado um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma \doteq (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

do espaço.

Exemplo 6.3.1 *Encontre a equação geral do feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$, que tem equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, dada por:*

$$r\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,-1\,,0)_\Sigma + \alpha\cdot(2\,,-3\,,4)_{\mathcal{E}}, \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{6.105}$$

Resolução:

Da equação vetorial (6.105) da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, segue que se consideremos o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A \doteq (1\,,-1\,,0)_\Sigma\,, \tag{6.106}$$

então o ponto $\underline{A}$ pertencerá à reta $\underline{r}$ e o vetor $\underline{\vec{r}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (2\,,-3\,,4)_\mathcal{E} \tag{6.107}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Precisamos encontrar as equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, de dois planos, que denotaremos por $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ concorrentes, que contenham a reta $\underline{r}$.

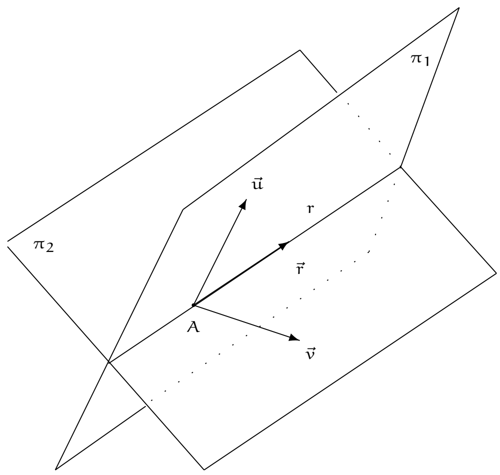
Escolhamos dois vetores

$$\vec{u} \quad \text{e} \quad \vec{v}\,,$$

tais que os vetores

$$\vec{r}\,,\ \vec{u}\,,\ \vec{v}$$

sejam L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo).



Por exemplo, se considerarmos os vetores, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) ortonormal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,,0\,,0)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (0\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \tag{6.108}$$

temos que os vetores

$$\underline{\vec{r}}\,,\ \underline{\vec{u}}\,,\ \underline{\vec{v}}$$

serão L.I. em $\underline{V^3}$.

Notemos que, os vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{u}}$, juntamente com o ponto $\underline{A}$, darão origem a um plano $\underline{\pi_1}$, que tem como vetor normal o vetor

$$\vec{r} \wedge \vec{u}$$

e que contém o ponto $\underline{A}$.

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ é uma base (ordenada) ortonormal positiva de $\underline{V^3}$, da Proposição (3.12.1), (6.107) e de (6.108), segue que:

$$\begin{aligned}\vec{r} \wedge \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 0 \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 - 3 \cdot \vec{e}_3 \\ &= (0\,,4\,,-3)_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned}$$

Logo, da Observação (6.2.1) item 1., segue que uma equação geral do plano $\underline{\pi_1}$ (que conterá a reta $\underline{r}$), em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será da da por:

$$\pi_1 \;:\; 0.x + 4.y + (-3).z + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad 4\,y - 3\,z + d = 0\,.$$

Como o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por (6.106), deverá pertences ao plano $\underline{\pi_1}$, suas coordenadas devem satisfazer a equação geral do plano $\underline{\pi_1}$, dada em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, isto é,

$$4.(-1) - 3.0 + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad d = 4\,.$$

Portanto uma equação geral do plano $\underline{\pi_1}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi_1 \;:\; 4\,y - 3\,z + 4 = 0. \tag{6.109}$$

Como os vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{v}}$ são L.I. em $\underline{V^3}$ eles, juntamente com o ponto $\underline{A}$, darão origem a um plano $\underline{\pi_2}$, que tem como vetor normal o vetor $\underline{\vec{r} \wedge \vec{v}}$ e que contém o ponto $\underline{A}$.

Como a base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, é uma base (ordenada) ortonormal positiva de $\underline{V^3}$, da Proposição (3.12.1), de (6.107) e de (6.108), segue que

$$\begin{aligned}\vec{r} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 3 \cdot \vec{e}_1 - 2 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ &= (3\,,-2\,,0)_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned}$$

Logo, da Observação (6.2.1) item 1., segue que uma equação geral do plano $\underline{\pi_2}$ (que conterá a reta $\underline{r}$), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi_2 \;:\; 3.x + (-2).y + 0.z + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad 3\,x - 2\,y + d = 0\,.$$

Como o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por (6.106), deverá pertences ao plano $\underline{\pi_2}$, suas coordenadas devem satisfazer a equação geral do plano $\underline{\pi_2}$, dada em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, isto é,

$$3.1 - 2.(-1) + d = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad d = -5\,.$$

Portanto uma equação geral do plano $\underline{\pi_2}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi_2 \ : \ 3\,x - 2\,y - 5 = 0\,. \tag{6.110}$$

Os dois planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, acima obtidos, são concorrentes e a intersecção deles é a reta $\underline{r}$.

A vertificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Logo umaa equação geral do feixe de planos, que contém a reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi_{\lambda\gamma} \ : \lambda\,[4\,y - 3\,z + 4] + \gamma\,[3\,x - 2\,y - 5] = 0\,,$$

onde

$$\lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

não são ambos nulos, ou ainda,

$$(3\,\gamma)\,x + (4\,\lambda - 2\,\gamma)\,y + (-3\,\lambda)\,z + (4\,\lambda - 5\,\gamma) = 0\,,$$

para $\underline{\lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}}$, não ambos nulos.

□

Para finalizar este capítulo, temos o:

Exemplo 6.3.2 *Encontrar uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, que contenha a reta $\underline{r}$ do Exemplo (6.3.1) acima, e seja ortogonal ao vetor $\underline{\vec{w}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:*

$$\vec{w} \doteq (-1\,,2\,,-1)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.111}$$

se existir.

Resolução:

Para que o plano $\underline{\pi}$ contenha a reta $\underline{r}$, ele deverá ter uma equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, a equação

$$\lambda\,[4\,y - 3\,z + 4] + \gamma\,[3\,x - 2\,y - 5] = 0\,,$$

onde $\underline{\lambda, \gamma \in \mathbb{R}}$ são não ambos nulos, ou ainda,

$$\pi \ : \ (3\,\gamma)\,x + (4\,\lambda - 2\,\gamma)\,y + (-3\,\lambda)\,z + (4\,\lambda - 5\,\gamma) = 0\,,$$

onde $\underline{\lambda, \gamma \in \mathbb{R}}$ não são ambos nulos.

Com isto, da Observação (6.2.1) item 1., temos que o vetor $\underline{\vec{n}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{n} \doteq (3\,\gamma\,, 4\,\lambda - 2\,\gamma\,, -3\,\lambda)_{\mathcal{E}} \tag{6.112}$$

deverá ser um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Por outro lado o plano $\underline{\pi}$, também pela Observação (6.2.1) item 1., deverá ortogonal ao vetor $\underline{\vec{w}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal positiva $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{w} \doteq (-1\,,2\,,-1)_{\mathcal{E}}\,, \tag{6.113}$$

isto é, o vetor $\underline{\vec{w}}$ é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Logo devemos encontrar

$$\lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

não ambos nulos, de modo

$$\vec{n} \parallel \vec{w}\,, \quad \text{ou seja, podemos encontrar } \delta \in \mathbb{R} \text{ tal que} \quad \vec{n} = \delta \cdot \vec{w}\,,$$

que, pela Proposição p3.7.3, é equivalente a, existir $\underline{\delta \in \mathbb{R}}$, tal que

$$\begin{cases} 3\gamma = -1.\delta \\ 4\lambda - 2\gamma = 2.\delta \\ -3\lambda = -1.\delta \end{cases} \quad , \quad \text{isto é,} \quad \lambda = -\gamma \neq 0\,.$$

Logo a equação geral do plano $\underline{\pi}$ procurado, em relação ao sistema de coordenadas Ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$\pi \;:\; (3\,\gamma)\,x + (-6\,\gamma)\,y + (3\,\gamma)\,z + (-9\,\gamma) = 0\,,$$

com

$$\gamma \neq 0\,.$$

Por exemplo, se tomarmos

$$\gamma = 1\,,$$

na equação acima. obteremos a seguinte equação geral para o plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortoognal $\underline{\Sigma}$ do espaço, para o plano procurado:

$$\pi \;:\; 3\,x - 6\,y + 3\,z - 9 = 0\,.$$

$\square$

Capítulo 7

Posições Relativas

Neste capítulo estudaremos as posições relativas de reta com reta (no espaço e no plano), reta com plano e plano com plano (no espaço), do ponto de vista da Geometria Analítica.

Começaremos estudando a posição relativa entre:

7.1 Reta e Reta

A seguir trataremos seguinte problema: dadas duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, saber dizer se elas são paralelas, concorrentes de um ponto ou reversas (no caso do espaço).

No caso delas serem paralelas, saber dizer se elas são coincidentes ou não.

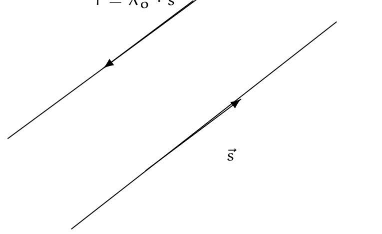
Para tanto, suponhamos que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ tenham por equações vetoriais, dadas por

$$r : X = R + \alpha \cdot \vec{r}, \text{ para cada } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s : X = S + \beta \cdot \vec{s}, \text{ para cada } \beta \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

onde $\underline{R}$, $\underline{S}$ são dois pontos do espaço (ou do plano, respectivamente) e $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{s}}$ são vetores (não nulos) de $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$, respectivamente).

Observemos que:

1. as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão paralelas se, e somente se, os vetores diretores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$ são paralelos, isto é, são L.D. em $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$, respectivamente) (veja a figura abaixo), ou ainda, existe um número real $\underline{\lambda_o}$, de modo que
$$\vec{r} = \lambda_o \cdot \vec{s}. \tag{7.2}$$



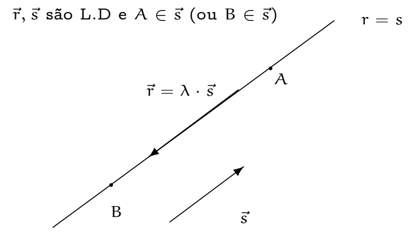
No caso das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serem paralelas, podemos ter duas situações, a saber:

1.(a) elas serão coincidentes se, e somente se, o ponto $\underline{R}$, que pertence à reta $\underline{r}$, pertencer à reta $\underline{s}$ ou, o ponto $\underline{S}$, que pertence à reta $\underline{s}$, pertencer a reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo), isto é, existe um número real $\underline{\beta_o}$, tal que

$$R = S + \beta_o \cdot \vec{s}\,, \tag{7.3}$$

ou ainda, existe um número real $\underline{\alpha_o}$, de modo que

$$S = R + \alpha_o \cdot \vec{r}\,. \tag{7.4}$$

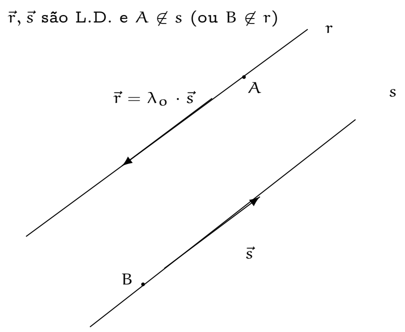


1.(b) elas serão paralelas, não coincidentes, se o ponto $\underline{R}$, que pertence à reta $\underline{r}$, não pertencer a reta $\underline{s}$ ou, o ponto $\underline{S}$, que pertence à reta $\underline{s}$, não pertencer a reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo), isto é, não existe um número real $\underline{\beta_o}$, tal que

$$R = S + \beta_o \cdot \vec{s}\,,$$

ou ainda, não existe um número real $\underline{\alpha_o}$, tal que

$$S = R + \alpha_o \cdot \vec{r}\,.$$



2. As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão concorrentes de um ponto se, somente se, elas forem não paralelas e forem coplanares, isto é, os vetores

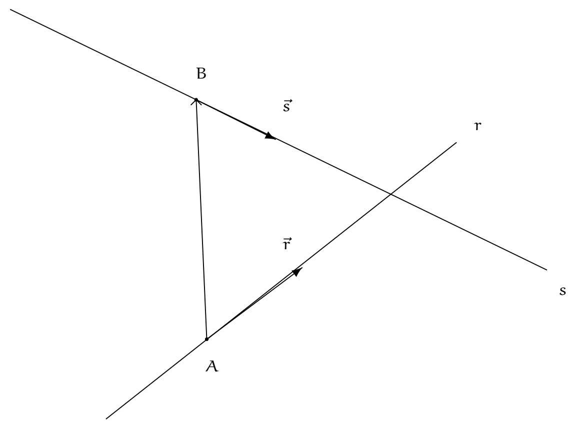
$$\vec{r}\,, \vec{s}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$, respectivamente) e os vetores

$$\overrightarrow{AB}\,, \vec{r}\,, \vec{s}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$, respectivamente - vide a figura abaixo).

$\vec{r}, \vec{s}$ são L.I e $\overrightarrow{AB}, \vec{r}, \vec{s}$ são L.D. em $\underline{V^3}$ (ou $\underline{V^2}$)

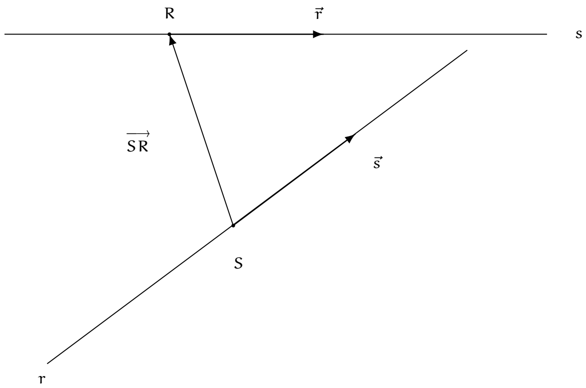


3. As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são reversas se, e somente se, o vetores

$$\overrightarrow{AB}\,, \vec{r}\,, \vec{s}$$

 são L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo).

 Notemos que no plano **<u>não</u>** existem retas reversas.



Logo podemos estabelecer o seguinte roteiro para estudarmos a posição relativa de duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ dadas, em termos de suas equações vetoriais, por:

$$r\,:\,X = R + \alpha \cdot \vec{r}\,,\ \text{para cada } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s\,:\,X = S + \beta \cdot \vec{s}\,,\ \text{para cada } \beta \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\underline{R}$, $\underline{S}$ são dois pontos do espaço (ou do plano, respectivamente) e $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{s}}$ são vetores (não nulos) de $\underline{V^3}$ (ou de $\underline{V^2}$, respectivamente).

Os vetores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$ podem ser L.D. ou L.I. em V^3 (ou de V^2, respectivamente).

1. se o vetores

$$\vec{r}\,, \quad \vec{s}$$

 são L.D. em $\underline{V^3}$ (ou de $\underline{V^2}$, respectivamente), podemos ter duas possibilidades:

 1.(a) se o ponto $\underline{R}$ pertence à reta $\underline{s}$, segue que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas coincidentes.

 De modo análogo, se o ponto $\underline{S}$ pertencer à reta $\underline{r}$, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas coincidentes;

1.(b) se o ponto $\underline{R}$ não pertencer à reta $\underline{s}$, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas paralelas, não coincidentes.

De modo análogo, se o ponto $\underline{S}$ não pertencer à reta $\underline{r}$, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas paralelas, não coincidentes.

2. se os vetores

$$\vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{s}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$ (ou de $\underline{V^2}$, respectivamente), teremos as seguintes situações:

2.(a) se estivermos no plano, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas concorrentes de um ponto do plano.

2.(b) se estivermos no espaço, teremos duas possibilidades, a saber:

2.b.1. se os vetores

$$\overrightarrow{SR}\,, \quad \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{s}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas concorrentes de um ponto do espaço;

2.b.2. se os vetores

$$\overrightarrow{SR}\,, \quad \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{s}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão retas reversas no espaço.

Com isto temos um modo analítico de verificar a posição relativa de duas retas do espaço (ou do plano, respectivamente), a saber:

Observação 7.1.1 *Para a discussão a seguir, consideraremos as questões relacionadas com duas retas no espaço.*

O caso da posição relativa de duas retas no plano, será tratado no final desta seção.

Fixaremos um sistema de coordenads

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

(não necessariamente ortogonal) no espaço e suponhamos que os pontos $\underline{R}$, $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$R \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma \quad e \quad S \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma \tag{7.5}$$

e os vetores $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \quad e \quad \vec{s} \doteq (m\,,n\,,p)_\mathcal{E}\,. \tag{7.6}$$

1. *As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão paralelas se, e somente se, os vetores*

$$\vec{r} \quad e \quad \vec{s}$$

são paralelos que, pela Proposição (3.7.4), é equivalente a existir um número real $\underline{\beta_o}$, tal que (ver (7.5))

$$\begin{cases} a = \beta_o\, m \\ b = \beta_o\, n \\ c = \beta_o\, p \end{cases},$$

ou, a existir um número real $\underline{\alpha_o}$*, de modo que (ver (7.5))*

$$\begin{cases} m = \alpha_o\, a \\ n = \alpha_o\, b \\ p = \alpha_o\, c \end{cases},$$

As retas $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *sendo paralelas, podemos ter as seguintes situações:*

1.a. serão coincidentes se, e somente se, existe um número real $\underline{\beta_o}$*, tal que (ver (7.5) e (7.6))*

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \beta_o\, m \\ y_1 = y_2 + \beta_o\, n \\ z_1 = z_2 + \beta_o\, p \end{cases}$$

ou, existe um número real $\underline{\alpha_o}$*, tal que*

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \alpha_o\, a \\ y_2 = y_1 + \alpha_o\, b \\ z_2 = z_1 + \alpha_o\, c \end{cases}.$$

1.b. serão paralelas e não coincidentes se, e somente se, **<u>não</u>** *existe um número real* $\underline{\beta_o}$*, tal que (ver (7.5) e (7.6))*

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \beta_o\, m \\ y_1 = y_2 + \beta_o\, n \\ z_1 = z_2 + \beta_o\, p \end{cases},$$

ou **<u>não</u>** *existe um número real* $\underline{\alpha_o}$*, tal que*

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \alpha_o\, a \\ y_2 = y_1 + \alpha_o\, b \\ z_2 = z_1 + \alpha_o\, c \end{cases}.$$

2. serão concorrentes de um ponto se, e somente se, **<u>não</u>** *existe um número real* $\underline{\lambda_o}$*, tal que (ver (7.5) e (7.6))*

$$\vec{r} = \lambda_o \cdot \vec{s} \quad e \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0\,.$$

3. serão reversas se, e somente se, (ver (7.5) e (7.6))

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Temos também a:

Observação 7.1.2

1. *Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são concorrentes, o único ponto $\underline{P}$, pertenecente a intersecção de ambas, pode ser obtido resolvendo-se o sistema constituído pelas equações vetoriais das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, isto é, encontrar um ponto $\underline{X}$ do espaço, ou ainda, números reais*

$$\alpha \quad e \quad \beta$$

tais que

$$\begin{cases} X = R + \alpha \cdot \vec{r}, \\ X = S + \beta \cdot \vec{s} \end{cases} . \tag{7.7}$$

2. *Podemos também fazer um estudo da posição relativa entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, analisando o número de soluções do sistema obtido pelas equações vetoriais das retas descrito acima.*

   Mais precisamente:

   2.a. *o sistema vetorial (7.7) acima tem uma única solução se, e somente se, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são concorrentes de um ponto (que será a única solução do sistema vetorial acima).*

   2.b. *o sistema vetorial (7.7) acima tem infinitas soluções se, e somente se, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são paralelas e coincidentes.*

   2.c. *o sistema vetorial (7.7) acima não tem soluções se, e somente se, ou as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são paralelas e não coincidentes ou as retas são reversas.*

Um outro modo de olharmos a posição relativa de duas retas é dado pela:

Observação 7.1.3 *Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma \doteq (O, \mathcal{E})$ (não necessariamente ortogonal) e considerando-se os pontos $\underline{A}$, $\underline{B}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$R \doteq (x_1, y_1, z_1)_\Sigma \quad e \quad S \doteq (x_2, y_2, z_2)_\Sigma \tag{7.8}$$

e os vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{s}}$, cujas coordenadas, em relação à (ordenada) base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (a, b, c)_\mathcal{E} \quad e \quad \vec{s} \doteq (m, n, p)_\mathcal{E} \tag{7.9}$$

(como na Observação (7.1.1)), então as questões acima podem ser colocadas da seguinte forma do ponto de vista de sistemas lineares.

1. *As retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são concorrentes se, e somente se, o sistema linear constituído pelas equações paramétricas das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ admite uma única solução, isto é, existe um único ponto $\underline{X}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:*

$$X \doteq (x, y, z)_\Sigma$$

e números reais

$$\alpha\,,\beta$$

tais que

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha\,a\,, \\ y = y_1 + \alpha\,b\,, \\ z = z_1 + \alpha\,c\,, \\ x = x_2 + \beta\,m\,, \\ y = y_2 + \beta\,n\,, \\ z = z_2 + \beta\,p \end{cases} . \tag{7.10}$$

O sistema linear acima tem $\underline{6}$ *equações lineares, com coeficientes reais, dados por*

$$a\,,\,,b\,,c\,,m\,,n\,,p$$

e $\underline{5}$ *incógnitas reais, a saber,*

$$x\,,y\,,z\,,\alpha\,,\beta\,.$$

2. *as retas são paralelas e coincidentes se, e somente se, o sistema linear* (7.10) *acima admite infinitas soluções.*

3. *as retas são paralelas e não coincidentes ou reversas se, e somente se, o sistema linear* (7.10) *acima não admite soluções.*

15.a aula - 24.04.2014

Nos dois exemplos abaixo consideraremos um sistema de coordenadas $\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E})$ do espaço (não necessariamente ortogonal) fixado.

Exemplo 7.1.1 *Estude a posição relativa das retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *que são dadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, da seguinte forma:*

$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,-1\,,1)_\Sigma + \alpha\cdot(-2\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para cada} \quad \alpha\in\mathbb{R}\,, \tag{7.11}$$

$$s\,:\,\begin{cases} x+y=3 \\ x+y-z=6 \end{cases} . \tag{7.12}$$

Resolução:

Observemos que a reta $\underline{s}$ está sendo dada como uma interseção de dois planos.

Encontremos uma equação vetorial associada a reta $\underline{s}$.

Para isto consideremos

$$y=\beta$$

no sistema linear (7.12) que determina a reta $\underline{s}$.

Deste modo, o sistema linear (7.12) tornar-se-á:

$$\begin{cases} x+\beta=3 \\ x+\beta-z=6 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x=3-\beta \\ y=\beta \\ z=x+\beta-6 \end{cases},$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} x=3+\beta\cdot(-1) \\ y=0+\beta\cdot 1 \\ z=-3+\beta\cdot 0 \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Logo uma equação vetorial da reta $\underline{s}$ será dada por:

$$s \;:\; (x,y,z)_\Sigma=(3,0,-3)_\Sigma+\beta\cdot(-1,1,0)_\mathcal{E}, \quad \text{para cada} \quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{7.13}$$

Logo os pontos $\underline{R}$, $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$R \doteq (1,-1,1)_\Sigma \quad \text{e} \quad S \doteq (3,0,-3)_\Sigma \tag{7.14}$$

pertencem às retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente e os vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{s}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (-2,1,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{s} \doteq (-1,1,0)_\mathcal{E} \tag{7.15}$$

serão vetores diretores das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

Notemos que os vetores

$$\vec{r}, \quad \vec{s}$$

são L.I em $\underline{V^3}$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, ou as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são concorrentes ou são reversas.

Para sabermos em que situação estamos, estudemos se os vetores

$$\overrightarrow{RS}, \quad \vec{r} \quad \vec{s}$$

são L.D. ou L.I. em $\underline{V^3}$.

Notemos que, da Proposição (4.0.2) e de (7.14), segue que

$$\overrightarrow{RS}=S-R=(2,1,-4)_\Sigma. \tag{7.16}$$

Deste modo, teremos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+0+4-8+0+1=-1\neq 0.$$

Logo, da Proposição (3.7.5), segue que os vetores

$$\overrightarrow{RS}, \quad \vec{r}, \quad \vec{s}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$, e assim, as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são retas reversas.

Exemplo 7.1.2 *Consideremos as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ cujas equações, dadas em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são:*

$$r \ : \ \begin{cases} x = m\,y - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \tag{7.17}$$

$$s \ : \ x = \frac{y}{m} = z\,, \tag{7.18}$$

onde $\underline{m}$ é um número real, não nulo.

Encontre, se possível, os valores do número real $\underline{m}$, de modo que:

1. *as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam retas paralelas e coincidentes;*

2. *as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam retas paralelas e não coincidentes;*

3. *as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ retas sejam concorrentes;*

4. *as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam rtas reversas.*

Resolução:

Encontremos as equações vetoriais das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$.

Comecemos pela reta $\underline{r}$.

Observemos que a reta $\underline{r}$ está sendo dada pela intersecção de dois planos, cujas equações gerais, s em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas.

Consideremos

$$y = \alpha$$

no sistema linear (7.17), que define a reta $\underline{r}$.

Deste modo, ele tornar-se-á:

$$\begin{cases} x = m\,\alpha - 1 \\ y = \alpha \\ = \alpha - 1 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = -1 + \alpha \cdot m \\ y = 0 + \alpha \cdot 1 \\ = -1 + \alpha \cdot 1 \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Logo uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$r \ : \ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (-1\,,0\,,-1)_\Sigma + \alpha \cdot (m\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{7.19}$$

A reta $\underline{s}$ está sendo dada por suas equações na forma simétrica, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Logo, se tomarmos

$$x = \beta\,,$$

nesta equações, obteremos:

$$\begin{cases} x = \beta \\ \dfrac{y}{m} = \beta \\ z = \beta \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta\, m \\ z = \beta \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 0 + \beta \cdot 1 \\ y = 0 + \beta \cdot m \\ z = 0 + \beta \cdot 1 \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Logo uma equação vetorial da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por:

$$s \ : \ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \beta \cdot (1\,,m\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{7.20}$$

Logo os pontos $\underline{R}$ e $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$R \doteq (-1\,,0\,,1)_\Sigma \quad \text{e} \quad S \doteq (0\,,0\,,0)_\Sigma \tag{7.21}$$

pertencem às retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente e os vetores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$, cujas coordenadas, em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (m\,,1\,,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{s} \doteq (1\,,m\,,1)_\mathcal{E} \tag{7.22}$$

serão vetores diretores das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

Com isto temos que:

1. as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão paralelas se, e somente se, existir $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$, tal que

$$\vec{r} = \lambda \cdot \vec{s}\,,$$

uue, por (7.22), é equivalente a:

$$(m\,,1\,,1)_\mathcal{E} = \overbrace{\lambda \cdot (1\,,m\,,1)_\mathcal{E}}^{=(\lambda\,,m\,\lambda\,,\lambda)_\mathcal{E}}\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} m = \lambda \\ 1 = \lambda m \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

$$\text{ou ainda,} \quad m = \lambda = 1\,.$$

As retas $\underline{r}$, $\underline{s}$ serão coincidentes se, e somente se,

$$m = 1$$

e o ponto

$$S = (0\,,0\,,0)_\Sigma \in s\,,$$

deverá pertencer à reta $\underline{r}$.

Para isto. deverá existir $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$, tal que

$$S = R + \alpha \cdot \vec{r}\,,$$

que, de (7.21) e (7.22), é equivalente à:

$$(0\,,0\,,0)_\Sigma = (-1\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,1\,,1)_\mathcal{E}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 0 = -1 + \alpha \\ 0 = \alpha \\ 0 = -1 + \alpha \end{cases}$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases},$$

o que é impossível.

Logo, **<u>não</u>** existe um número real $\underline{m}$, tal que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam paralelas e coincidentes.

2. Pelo que vimos acima, para serem paralelas e não coincidentes basta que

$$m = 1\,,$$

isto é, as equações vetorias das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, serão dadas por:

$$\begin{aligned} r\ &:\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (-1\,,0\,,-1)_\Sigma + \alpha \cdot (1,1,1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \\ s\ &:\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \beta \cdot (1\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \beta \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Notemos que, os vetores

$$\vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{s}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$ se, e somente se,

$$m \neq 1\,,$$

ou seja, neste caso as retas $\underline{r}$, $\underline{s}$ serão retas concorrentes ou serão retas reversas.

3. Notemos que, sendo os vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{s}}$ são L.I. em $\underline{V^3}$, isto é ,

$$m \neq 1\,,$$

para que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam concorrentes, é necessário e suficiente, que os vetores

$$\overrightarrow{RS}\,, \quad \vec{r}\,, \quad \vec{s}$$

sejam L.D. em $\underline{V^3}$.

Notemos que, da Proposição (4.0.2) e de (7.14), segue que

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (-1\,,0\,,1)_\Sigma\,. \tag{7.23}$$

Logo, pelo Corolário (3.7.1), deveremos ter:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 - 0 - m^2 + 1 + m - 0 = -m^2 + m\,, \end{aligned}$$

isto é,

$$m = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1\,.$$

Observemos que

$$m \neq 0$$

(das hipótese iniciais) e

$$m \neq 1$$

pois os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ devem ser L.I. em $\underline{V}^3$.

Assim **não** existe um número real $\underline{m}$, de modo que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam retas concorrentes.

4. Supondo que os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ são L.I. em $\underline{V}^3$, isto é , que

$$m \neq 1\,,$$

para que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam retas reversas, devemos ter os vetores

$$\overrightarrow{RS}\,, \quad \vec{r}\,, \quad \vec{s}$$

L.I. em $\underline{V}^3$, que pela Proposição (3.7.5), é equivalente à:

$$0 \neq \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + m\,,$$

isto é,

$$m \neq 0 \quad \text{e} \quad m \neq 1\,.$$

Assim para as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serem retas reversas, basta que

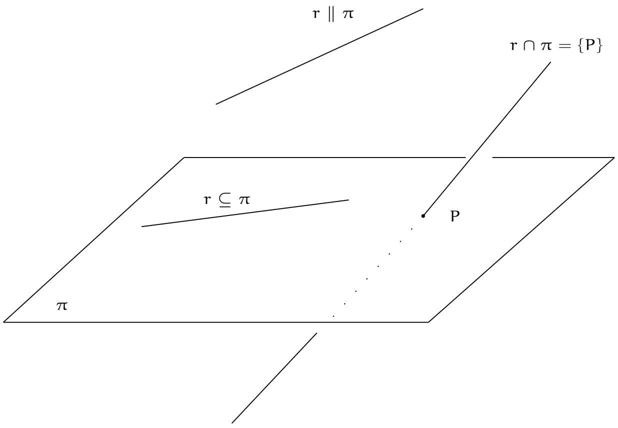
$$m \neq 0, 1\,.$$

7.2 Reta e Plano

Nesta seção vamos estudar as posições relativas entre uma reta $\underline{r}$ e um plano $\underline{\pi}$, ou seja:

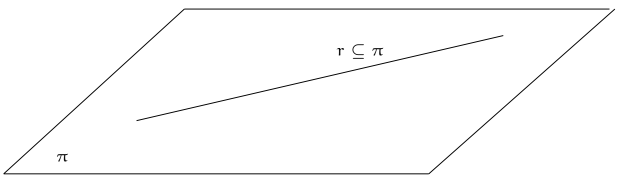
- se a reta $\underline{r}$ é paralela ao plano $\underline{\pi}$ e não está contida no mesmo;
- se a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$, em particular, a reta será paralela ao plano $\underline{\pi}$;
- se a reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ são concorrentes de um ponto, ou seja, se a reta $\underline{r}$ intercepta o plano $\underline{\pi}$ em um único ponto.

As figuras abaixo ilustram as situações acima.

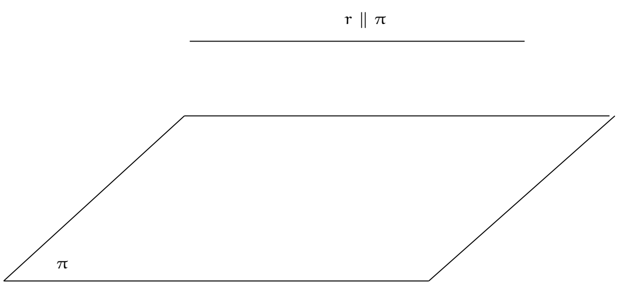


Observemos que:

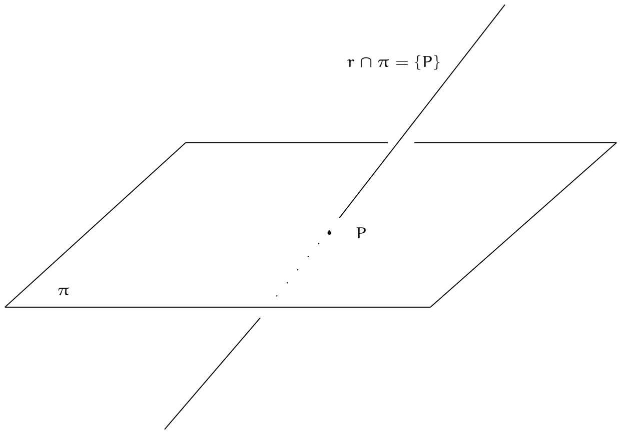
1. A reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, a intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$ tem infinitos pontos (veja a figura abaixo).



2. A reta $\underline{r}$ é paralela e não está contida no plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, a intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$ é vazia (veja a figura abaixo);



3. A reta $\underline{r}$ é concorrente ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, a intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$ é um único ponto (veja a figura abaixo).



Logo para estudarmos a posição relativa entre uma reta $\underline{r}$ e um plano $\underline{\pi}$, basta estudarmos o tipo da intersecção de ambos.

Suponhamos que a reta $\underline{r}$ tem por equação vetorial:

$$r : X = R + \alpha \cdot \vec{r}, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{7.24}$$

e o plano $\underline{\pi}$ tem equação vetorial:

$$\pi : X = A + \lambda \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \quad \text{para cada} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R} \tag{7.25}$$

onde os vetores

$$\vec{u}, \quad \vec{v}$$

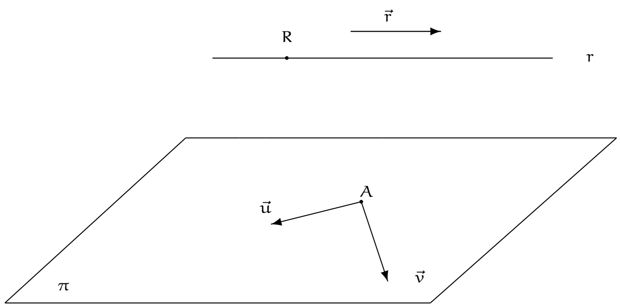
são L.I. em $\underline{V^3}$.

Observemos que:

1. A reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ serão paralelos se, e somente se, os vetores

$$\vec{r}, \quad \vec{u}, \quad \vec{v}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo) .



Neste caso para sabermos se a reta $\underline{r}$ está contida ou não no plano $\underline{\pi}$, basta verificarmos se o ponto $\underline{R}$, que pertence à reta $\underline{r}$, pertence ou não ao plano $\underline{\pi}$, isto é, se existem

$$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$$

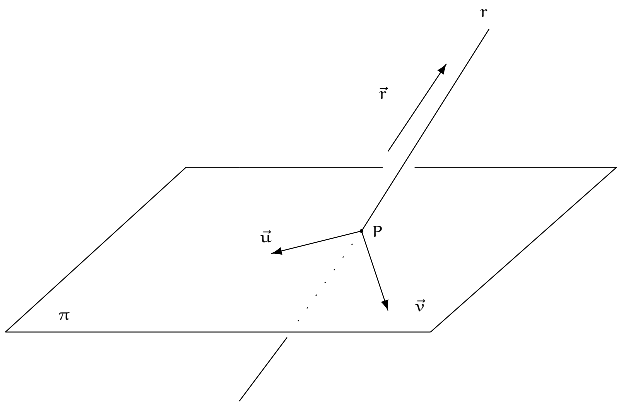
tais que

$$R = A + \lambda \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\,.$$

2. A reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ são concorrentes de um ponto se, e somente se, os vetores

$$\vec{r}, \quad \vec{u}, \quad \vec{v}$$

são L.I. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo) .



Para encontrarmos o ponto

$$r \cap \pi = \{P\}\,,$$

basta encontrarmos

$$\alpha\,,\lambda\,,\beta \in \mathbb{R}$$

tais que

$$R + \alpha \cdot \vec{r} = P = A + \lambda \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}\,.$$

Observação 7.2.1

1. *Fixemos um sistema de coordenadas* $\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$ *(não necessariamente ortogonal) no espaço.*

   Suponhamos que nas equações (7.24) e (7.25), as coordenadas dos pontos $\underline{R}$ *e* $\underline{A}$*, em relação aos sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, são dadas por:*

$$R \doteq (x_o\,,y_o\,,z_o) \quad e \quad A \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)\,, \tag{7.26}$$

   e as coordenadas dos vetores $\underline{\vec{r}}$, $\underline{\vec{u}}$, $\underline{\vec{v}}$*, em relação à base (ordenada)* $\underline{\mathcal{E}}$ *de* $\underline{V^3}$*, são dadas por:*

$$\vec{r} \doteq (m\,,n\,,p)_{\mathcal{E}}\,, \quad \vec{u} \doteq (u_1\,,u_2\,,u_3)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{v} \doteq (v_1\,,v_2\,,v_3)_{\mathcal{E}}\,. \tag{7.27}$$

   Então:

(a) A reta $\underline{r}$ *estará contida no plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

e existem

$$\lambda_o \, , \beta_o \in \mathbb{R}$$

tais que

$$(x_o \, , y_o \, , z_o)_\Sigma = (x_1 \, , y_1 \, , z_1)_\Sigma + \lambda_o \cdot (u_1 \, , u_2 \, , u_3)_\mathcal{E} + \beta_o \cdot (v_1 \, , v_2 \, , v_3)_\mathcal{E} \, .$$

(b) A reta $\underline{r}$ *será paralela ao plano* $\underline{\pi}$ *e não está contida no plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

e **<u>não</u>** *existem*

$$\lambda_o \, , \beta_o \in \mathbb{R}$$

tais que

$$(x_o \, , y_o \, , z_o)_\Sigma = (x_1 \, , y_1 \, , z_1)_\Sigma + \lambda_o \cdot (u_1 \, , u_2 \, , u_3)_\mathcal{E} + \beta_o \cdot (v_1 \, , v_2 \, , v_3)_\mathcal{E} \, .$$

(c) A reta $\underline{r}$ *será concorrente ao plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

2. *Se a reta* $\underline{r}$ *tem por equação vetorial (7.24) e o plano* $\underline{\pi}$ *tem por equação geral, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, a equação:*

$$\pi \, : \, a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \, , \tag{7.28}$$

onde

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \, ,$$

então a posição relativa entre a reta $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$*, pode ser estudada em termos do número de soluções do sistema linear:*

$$\begin{cases} x = x_o + \alpha \cdot m \\ y = y_o + \alpha \cdot n \\ z = z_o + \alpha \cdot p \\ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \end{cases} \tag{7.29}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z - m\,\alpha = x_o \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z - n\,\alpha = y_o \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z - p\,\alpha = z_o \\ a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + 0\cdot\alpha = -d \end{cases}, \tag{7.30}$$

ou seja, um sitema linear de de $\underline{4}$ *equações lineares, com coeficientes reais, a* $\underline{4}$ *incógntas reais, a saber:*

$$x\,, \quad y\,, \quad x\,, \quad \alpha\,.$$

Lembremos, do Apêndice (A), que:

(a) O sistema linear (7.30) tem infinitas soluções ou não tem solução se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -p \\ b & c & 0 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -p \\ a & c & 0 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & -p \\ a & b & 0 \end{vmatrix} - (-m).\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \\ &= n\,b + p\,c + m\,a = m\,a + n\,b + p\,c\,. \end{aligned}$$

<u>Conclusão:</u> *a reta* $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$ *são paralelos (contida ou não contida no plano) se, e somente se*

$$m\,a + n\,b + p\,c = 0\,. \tag{7.31}$$

(b) O sistema linear (7.30) tem uma única solução se, e somente se,

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = m\,a + n\,b + p\,c\,.$$

<u>Conclusão:</u> *a reta* $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$ *são concorrentes de um único ponto se, e somente se*

$$m\,a + n\,b + p\,c \neq 0\,. \tag{7.32}$$

Com isto temos o seguinte roteiro para se estudar a posição relativa entre uma reta $\underline{r}$ e um plano $\underline{\pi}$:

1. Encontre um vetor diretor $\vec{r}$ da reta $\underline{r}$, cujas coordenadas, em relação à bae (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (m\,, n\,, p)_{\mathcal{E}}$$

e uma equação geral do plano $\underline{\pi}$:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

2. Se

$$m\,a + n\,b + p\,c = 0\,,$$

ou a reta $\underline{r}$ é paralela, não está contida, ao plano $\underline{\pi}$, ou a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$.

Para decidirmos qual das duas situações acima ocorrerá, verficamos se o ponto $\underline{A}$, que pertence à reta $\underline{r}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, são dadas por:

$$A = (x_o\,, y_o\,, z_o)_\Sigma\,,$$

pertence ao plano $\underline{\pi}$, ou seja, se suas coordenadas satisfazem a equação geral do plano $\underline{\pi}$, ou ainda

$$a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d = 0\,.$$

Se o ponto $\underline{A}$ pertencer ao plano $\underline{\pi}$ teremos que a reta $\underline{r}$ estará contida no plano $\underline{\pi}$, caso contrário, a reta $\underline{r}$ é paralela ao plano $\underline{\pi}$, mas não está contida no plano $\underline{\pi}$.

3. Se

$$ma + nb + pc \neq 0$$

a reta $\underline{r}$ será concorrente ao plano $\underline{\pi}$.

Para obter as coordenadas do ponto de intersecção basta resolver o sistema linear determinado pelas equações paramétricas da reta e a equação geral do plano (ver (7.29)), dadas em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Observação 7.2.2 *Fixamos um sistema de coordenadas* **ortogonal**

$$\Sigma \doteq (O\,, \mathcal{E}) = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$$

no espaço e suponnha que a reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ são dadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, como em (7.24) e (12.42), respectivamente.

Lembremos que o vetor

$$\vec{n} \doteq (a\,, b\,, c)_\mathcal{E}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ e que

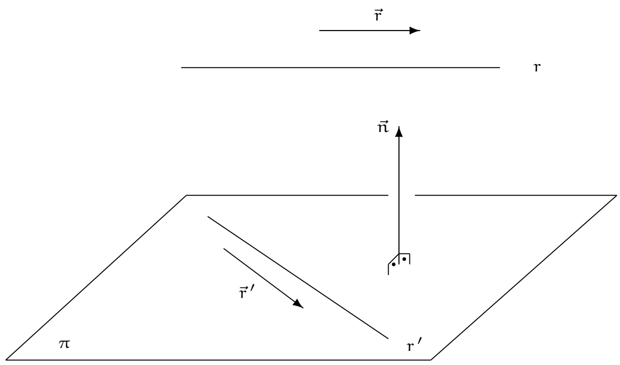
$$\vec{r} \bullet \vec{n} = m\,a + n\,b + p\,c\,.$$

Logo, nesta situação, a Observação (7.2.1) acima, pode ser colocada na seguinte forma:

1. *A reta $\underline{r}$ será paralela ou está contida no plano $\underline{\pi}$ se, e somente se*

$$\vec{r} \bullet \vec{n} = 0\,, \tag{7.33}$$

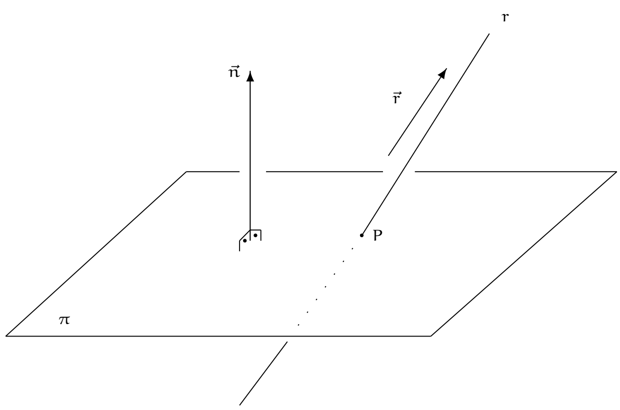
ou seja, um vetor diretor da reta $\underline{r}$ deverá ser ortogonal a um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ (vide a figura abaixo).



2. *A reta* $\underline{r}$ *será concorrente ao plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se*

$$\vec{r} \bullet \vec{n} \neq 0\,, \tag{7.34}$$

isto é, um vetor diretor da reta $\underline{r}$ *não poderá ser ortogonal a um vetor normal ao plano* $\underline{\pi}$ *(vide a figura abaixo).*



Consideremos os exemplos a seguir os:

Exemplo 7.2.1 *Fixemos um um sistema de coordenadas*

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

no espaço.

Estudar a posição relativa da reta $\underline{r}$ *e do plano* $\underline{\pi}$ *que são dados, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, por:*

$$r \;:\; \frac{x-1}{2} = y = z \tag{7.35}$$

$$\pi \;:\; (x\,,y\,,z)_\Sigma = (3\,,0\,,1)_\Sigma + \beta \cdot (1\,,0\,,1)_\mathcal{E} + \gamma \cdot (2\,,2\,,0)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para cada} \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,. \tag{7.36}$$

Resolução:

Encontremos uma equação vetorial para a reta $\underline{r}$.

Notemos que (7.35) são as equações, na forma simétrica, da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Para obteremos as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, basta fazer:

$$\frac{x-1}{2} = y = z = \alpha\,,$$

isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases},$$

$$\text{ou ainda,} \quad r \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \alpha \\ y = 0 + 1 \cdot \alpha \\ z = 0 + 1 \cdot \alpha \end{cases}, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{7.37}$$

ou seja, estas são as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

Definido-se o ponto $R \in r$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$R \doteq (1\,,0\,,0)_\Sigma \tag{7.38}$$

e o vetor $\vec{r} \parallel r$, cujas coordenadas, em relação à base $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (2\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \tag{7.39}$$

temos que uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será:

$$X = R + \alpha \cdot \vec{r}\,, \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (2\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{7.40}$$

Definamos o ponto $A \in \pi$ e os vetores $\vec{u}\,,\vec{v} \parallel \pi$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, e em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, respectivamente, são dadas por:

$$A \doteq (3\,,0\,,1)_\Sigma\,, \tag{7.41}$$
$$\vec{u} \doteq (1\,,0\,,1)_\mathcal{E}\,, \tag{7.42}$$
$$\vec{v} \doteq (2\,,2\,,0)_\mathcal{E}\,. \tag{7.43}$$

Estudemos a dependência linear dos vetores

$$\vec{r},\ \vec{u},\ \vec{v}\,.$$

Para isto, pelo Corolário (3.7.1), como

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 4 = 0\,,$$

segue que os vetores

$$\vec{r}\,,\vec{u}\,,\vec{v}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$.

Portanto, pela Observação (7.2.1) item 1., ou a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$ ou a reta $\underline{r}$ é paralela e não está contida no plano $\underline{\pi}$.

Para sabermos em que situação estamos basta verificar se o ponto $\underline{R}$ (que pertence a reta $\underline{r}$) também pertence ao plano $\underline{\pi}$, ou seja, devemos tentar encontrar

$$\beta\,,\gamma\in\mathbb{R}\,,$$

tais que

$$R = A + \beta\cdot\vec{u} + \gamma\cdot\vec{v}\,,$$

isto é,

$$(1\,,0\,,0)_\Sigma = (3\,,0\,,1)_\Sigma + \beta\cdot(1\,,0\,,1)_\mathcal{E} + \gamma\cdot(2\,,2\,,0)_\mathcal{E}\,,$$

$$\text{isto é,}\quad \begin{cases} 1 = 3 + \beta + 2\cdot\gamma \\ 0 = 0 + 0\cdot\beta + 2\cdot\gamma \\ 0 = 1 + \beta + 0\cdot\gamma \end{cases},$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \beta = -1 \end{cases},$$

que é um sistena linear impossível (isto é, não tem solução).

Logo o ponto $\underline{A}$ (que pertence a reta $\underline{r}$) não pertence ao plano $\underline{\pi}$, logo podemos concluir que a reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ são paralelos e a reta $\underline{r}$ não está contida no plano $\underline{\pi}$.

Exemplo 7.2.2 *Fixemos um um sistema de coordenadas* **ortogonal**

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

no espaço.

Determine os números reais $\underline{m}$, $\underline{n}$ para que a reta $\underline{r}$, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, dada por:

$$r\ :\ (x\,,y\,,z)_\Sigma = (n\,,2\,,0)_\Sigma + \alpha\cdot(2\,,m\,,m)_\mathcal{E}\,,\quad \textit{para cada}\quad \alpha\in\mathbb{R} \tag{7.44}$$

esteja contida no plano $\underline{\pi}$, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, é dada pr:

$$\pi\ :\ x - 3\,y + z - 1 = 0\,. \tag{7.45}$$

Resolução:

Definamos o ponto $\underline{A\in r}$ e o vetor $\underline{\vec{r}\parallel r}$, cujas coordenadas, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ e à base (ordenada) ortonormal (positiva) $\mathcal{E}$, respectivamente, são dadas por:

$$A \doteq (n\,,2\,,0)_\Sigma \quad \text{e} \quad \vec{r} \doteq (2\,,m\,,m)_\mathcal{E}\,. \tag{7.46}$$

Então a equação vetorial da reta $\underline{r}$ será da forma:

$$X = A + \alpha \cdot \vec{r}\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Como o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço é ortogonal, temos que o vetor

$$\vec{n} \doteq (1\,,-2\,,1)_{\mathcal{E}} \tag{7.47}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Logo, pela Observação (7.2.2), uma condição necessária para que a reta $\underline{r}$ esteja contida no plano $\underline{\pi}$ é que

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{r} \bullet \vec{n} \\ &= (2\,,m\,,m)_{\mathcal{E}} \bullet (1\,,-3\,,1)_{\mathcal{E}} \\ &= 2 - 3\,m + 1 = 2 - 2\,m\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$m = 1\,.$$

Logo se

$$m = 1\,,$$

sabemos que a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$ ou será paralela ao mesmo e não estará contida no plano $\underline{\pi}$.

Para a reta estar contida precisamos que, por exemplo, o ponto (veja (7.46))

$$A \doteq (n\,,2\,,0)_{\Sigma} \in r\,,$$

pertença ao plano $\underline{\pi}$ que, por (7.45), é equivalente à, suas coordeanadas satisfazer a equação geral do plano $\underline{\pi}$, ou seja:

$$n - 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 0\,, \quad \text{isto é,} \quad n = 7\,.$$

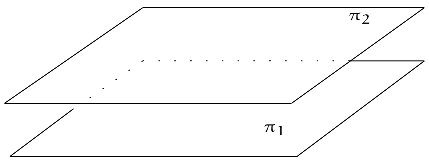
Logo a reta $\underline{r}$, para estar contida no plano $\underline{\pi}$, deverá ter equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, dada por:

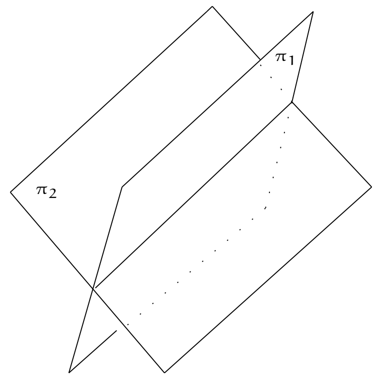
$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_{\Sigma} = (7\,,2\,,0)_{\Sigma} + \alpha \cdot (2\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para ca} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

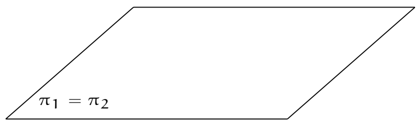
7.3 Plano e Plano

Nosso problema agora será estudar a posição relativa de dois planos, que denotaremos por $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$.

Ou seja, pretendemos saber se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são paralelos e distintos, coincidentes ou concorrentes (de uma reta - veja a figura abaixo).







Suponhamos que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ tenham por equações vetoriais dadas por:

$$\pi_1 \,:\, X = A_1 + \alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{v}_1\,, \quad \text{para cada} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R} \tag{7.48}$$

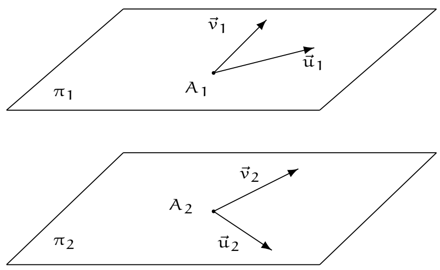
$$\pi_2 \,:\, X = A_2 + \lambda \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_2\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}\,. \tag{7.49}$$

Observemos que:

(PP1) Os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos (coincidentes ou distintos) se, e somente se, quaisquer três vetores do conjunto

$$\{\vec{u}_1\,,\vec{v}_1\,,\vec{u}_2\,,\vec{u}_3\}$$

são L.D. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo).



Neste caso para sabermos se os planos $\underline{\pi_1}$, $\underline{\pi_2}$ são coincidentes ou não, basta verificar se o ponto $\underline{A_1}$, que pertence ao plano $\underline{\pi_1}$, pertencerá ao plano $\underline{\pi_2}$ (ou o ponto $\underline{A_2}$, que pertence ao plnao $\underline{\pi_2}$, petencerá ao plano $\underline{\pi_1}$), isto é, se existem

$$\lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$A_1 = A_2 + \lambda \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{v}_2$$

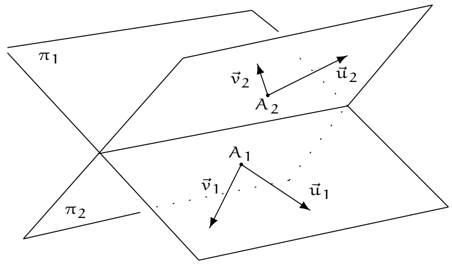
(ou existem $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$A_2 = A_1 + \alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{v}_1).$$

(PP2) Os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão concorrentes (de uma reta) se, e somente se, existem três vetores do conjunto

$$\{\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

que são L.I. em $\underline{V}^3$ (veja a figura abaixo).



Observação 7.3.1

1. *Fixemos um sistema de coordenadas (não necessariamente ortogonal)*

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,.$$

Suponhamos que nas equações vetoriais dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, (7.48) e (7.49), tenhamos as seguintes coordenadas para os pontos e os vetores envolvidos, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, e em relação à base (ordenada) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V}^3$:

$$A_1 \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma\,, \tag{7.50}$$
$$A_2 \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma\,, \tag{7.51}$$
$$\vec{u}_1 \doteq (m_1\,,n_1\,,o_1)_\mathcal{E}\,, \tag{7.52}$$
$$\vec{v}_1 \doteq (p_1\,,q_1\,,r_1)_\mathcal{E}\,, \tag{7.53}$$
$$\vec{u}_2 \doteq (m_2\,,n_2\,,o_2)_\mathcal{E}\,, \tag{7.54}$$
$$\vec{v}_2 \doteq (p_2\,,q_2\,,r_2)_\mathcal{E}\,. \tag{7.55}$$

Então:

(a) *De* **(PP1)** *acima e do Corolário (3.7.1), segue que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos (coincidentes ou distintos) se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & o_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & o_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

No caso acima, eles serão coincidentes se existirem

$$\lambda_2\,,\gamma_2 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$(x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma = (x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma + \lambda_2 \cdot (m_2\,,n_2\,,o_2)_\mathcal{E} + \gamma_2 \cdot (p_2\,,q_2\,,r_2)_\mathcal{E}$$

(ou existirem

$$\alpha_1\,,\beta_1 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$(x_2\,,y_2\,,z_2)_\Sigma = (x_1\,,y_1\,,z_1)_\Sigma + \alpha_1\cdot(m_1\,,n_1\,,o_1)_\mathcal{E} + \beta_1\cdot(p_1\,,q_1\,,r_1)_\mathcal{E}\,).$$

Caso contrário (isto é, se não existirem tais números reais) os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos e distintos.

(b) *De* **(PP2)** *acima e da Proposição* (3.7.5) *, segue que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão concorrentes (de uma reta) se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & o_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \textit{ou} \quad \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & o_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \textit{ou} \quad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

2. *Fixemos um sistema de coordenadas*

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,,$$

não necessariamente ortogonal.

Suponhamos que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são dados por suas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, por:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \; a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,, \\ \pi_2 &: \; a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0\,, \end{aligned}$$

onde

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\}\,.$$

Observemos que:

(a) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão coincidentes se, e somente se, os coeficientes*

$$a_2\,,b_2\,,c_2\,,d_2$$

são múltiplos dos coeficientes

$$a_1\,,b_1\,,c_1\,,d_1\,,$$

isto é, existe um número real $\lambda \neq 0$, de modo que

$$a_2 = \lambda\,a_1\,, \quad b_2 = \lambda\,b_1\,, \quad c_2 = \lambda\,c_1 \quad \textit{e} \qquad d_2 = \lambda\,d_1\,. \tag{7.56}$$

Neste caso, teremos que a equação geral do plano $\underline{\pi_2}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço, será dada por: tornar-se-á:

$$\pi_2 \;:\; (\lambda\,a_1)\,x + (\lambda\,b_1)\,y + (\lambda\,c_1)\,z + (\lambda\,d_1) = 0\,,$$

que, dividindo-se por $\lambda \neq 0$, obtem-se:

$$\pi_2 \;:\; a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,,$$

que é a equação geral do plano $\underline{\pi_1}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ do espaço.

(b) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos não coincidentes se, e somente se, os coeficientes*

$$a_2\,,b_2\,,c_2$$

são múltiplos dos coeficientes

$$a_1\,,b_1\,,c_1\,,$$

isto é, existe um número real $\lambda \neq 0$, tal que

$$a_2 = \lambda\,a_1\,, \quad b_2 = \lambda b_1 \quad e \quad c_2 = \lambda c_1\,,$$

mas

$$d_2 \neq \lambda\,d_1\,.$$

Neste caso temos que a equação geral do plano π_2 tornar-se-á:

$$\pi_2 \;:\; (\lambda\,a_1)\,x + (\lambda\,b_1)\,y + (\lambda\,c_1)\,z + d_2 = 0$$

e

$$d_2 \neq \lambda\,d_1\,.$$

(c) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão concorrentes, de uma reta se, e somente se, os coeficientes*

$$a_2\,,b_2\,,c_2$$

não são múltiplos dos coeficientes

$$a_1\,,b_1\,,c_1\,,$$

isto é, <u>não existe</u> um número real $\underline{\lambda}$, de modo que

$$a_2 = \lambda\,a_1\,, \quad b_2 = \lambda\,b_1 \quad e \quad c_2 = \lambda\,c_1\,.$$

3. *Resumindo, teremos as seguintes situações:*

(a) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão coincidentes se, e somente se, existe um número real $\lambda \neq 0$, tal que*

$$a_2 = \lambda\,a_1\,, \quad b_2 = \lambda\,b_1\,, \quad c_2 = \lambda c_1 \quad e \quad d_2 = \lambda\,d_1\,. \tag{7.57}$$

(b) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos não coincidentes se, e somente se, existe um número real $\lambda \neq 0$, tal que*

$$a_2 = \lambda\,a_1\,, \quad b_2 = \lambda\,b_1 \quad e \quad c_2 = \lambda\,c_1\,, \tag{7.58}$$

mas

$$d_2 \neq \lambda\,d_1\,. \tag{7.59}$$

(c) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ seão concorrentes de uma reta se, e somente se,* **não** *existe um número real λ, tal que*

$$a_2 = \lambda\, a_1\,, \quad b_2 = \lambda\, b_1 \quad e \quad c_2 = \lambda\, c_1\,. \tag{7.60}$$

4. *Se o sistema de coordenadas*

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

é **ortogonal**, *nosso trabalho será facilitado como veremos a seguir.*

Suponhamos que as equações gerais dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, sejam dadas por: sejam:

$$\pi_1 \ : \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,,$$
$$\pi_2 \ : \ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2 = 0\,,$$

onde

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,,2\}\,.$$

Logo os vetores, cujas coordenadas em relação à base (ordenada) orotonormal (positiva) $\underline{\mathcal{E}}$ de $\underline{V^3}$, são dadas por:

$$\vec{n}_1 \doteq (a_1\,,b_1\,,c_1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{n}_2 \doteq (a_2\,,b_2\,,c_2)_{\mathcal{E}} \tag{7.61}$$

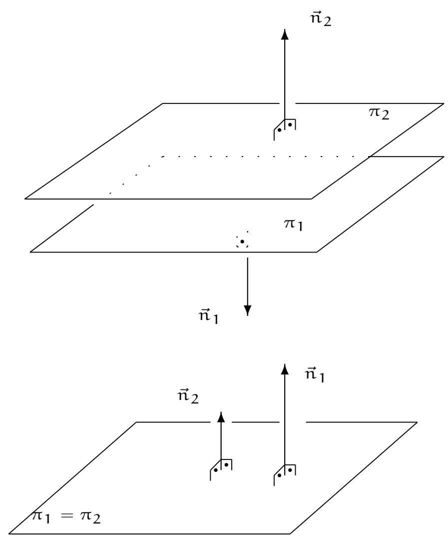
serão vetores normais aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente.

Com isto temos as seguintes situações:

(a) *os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão paralelos ou coincidentes se, e somente se, os vetores*

$$\vec{n}_1 \quad e \quad \vec{n}_2$$

são paralelos, isto é, são L.D. em $\underline{V^3}$ (veja a figura abaixo).



ou seja, existe um número real $\lambda \neq 0$*, tal que*

$$\vec{n}_2 = \lambda \cdot \vec{n}_1 \,,$$

isto é,

$$(a_2\,, b_2\,, c_2)_{\mathcal{E}} = \lambda \cdot (a_1\,, b_1\,, c_1)_{\mathcal{E}}\,,$$

ou ainda, as equações dos planos $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, serão da forma:*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,, \\ \pi_2 &: \ (\lambda\,a_1)\,x + (\lambda\,b_1)\,y + (\lambda\,c_1)\,z + d_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Assim, do item 2(a) desta Observação, segue que

i. *os planos serão coincidentes se, e somente se,*

$$d_2 = \lambda d_1\,,$$

ou seja, as equações gerias dos planos, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ *do espaço, serão da forma:*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0, \\ \pi_2 &: \ (\lambda\,a_1)\,x + (\lambda\,b_1)\,y + (\lambda\,c_1)\,z + (\lambda\,d_1) = 0\,. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 0$*, segue que:*

$$\pi_1\,, \pi_2 : \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,, \tag{7.62}$$

ou seja, os planos $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$ *terão a mesma equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço.*

ii. *os planos* $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$ *serão paralelos e não coincidentes se, e somente se,*

$$d_2 \neq \lambda\,d_1\,,$$

ou seja, as equações gerais dos planos $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do espaço, serão da forma:*

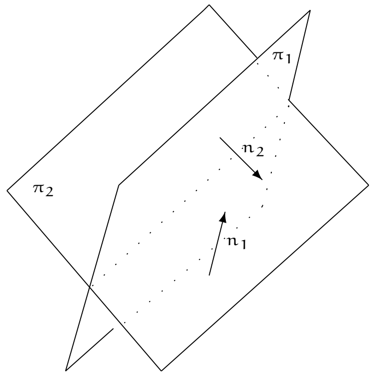
$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1 = 0\,, \\ \pi_2 &: \ (\lambda\,a_1)\,x + (\lambda\,b_1)\,y + (\lambda\,c_1)\,z + d_2 = 0\,, \\ &e \quad d_2 \neq \lambda\,d_1\,. \end{aligned} \tag{7.63}$$

(b) *os planos* $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$ *serão concorrentes (de uma reta) se, e somente se, os vetores* $\vec{n}_1$ *e* $\vec{n}_2$ *não são paralelos, isto é, são L.I. em* $\underline{V^3}$ *(veja a figura abaixo), ou seja, não existe um número real* $\lambda \neq 0$*, tal que*

$$\vec{n}_2 = \lambda \cdot \vec{n}_1 \,,$$

isto é,

$$(a_2\,, b_2\,, c_2)_{\mathcal{E}} = \lambda \cdot (a_1\,, b_1\,, c_1)_{\mathcal{E}}\,.$$



Para os dois exemplos abaixo fixaremos um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma \doteq (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

do espaço.

Exemplo 7.3.1 *Estude a posição relativa dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, cujas equação geral e vetorial, respectivamente, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:*

$$\pi_1 : x - y + 2z - 2 = 0\,, \tag{7.64}$$

$$\pi_2 : (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,0\,,3)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-1\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{7.65}$$

Se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ forem concorrentes de uma reta $\underline{r}$, encontrar uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ.

Resolução:

Sejam $A \in \pi_2$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$A \doteq (1\,,0\,,0)_\Sigma\,, \tag{7.66}$$

e $\vec{u}\,,\vec{v} \parallel \pi_2$, vetores diretores do plano $\underline{\pi_2}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,,0\,,3)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (-1\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,. \tag{7.67}$$

Para encontrar uma equação geral do plano $\underline{\pi_2}$, m relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, lembremos que um ponto

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{7.68}$$

pertence ao plano $\underline{\pi_2}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}\,,\vec{u}\,,\vec{v}$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$ que, de (7.66), (7.67), (7.68) e pelas Proposições ??? e ???, é equivalente à:

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} -3x - 4y + z - 1\,,$$

isto é, uma equação geral do plano $\underline{\pi_2}$, m relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, será dada por:

$$\pi_2 : -3\,x - 4\,y + z - 1 = 0\,. \tag{7.69}$$

Logo, de (7.64) e (7.69), segue que os vetores, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{n}_1 \doteq (1\,,-1\,,2)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 \doteq (-3\,,-4\,,1)_{\mathcal{E}} \tag{7.70}$$

serão vetores normais aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente.

Como os vetores

$$\vec{n}_1,\ \vec{n}_2$$

são L.I. em $\mathbb{R}^3$ (não são paralelos), da Observação (7.3.1) item 4., temos que os plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são concorrentes de uma reta r.

Encontremos uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonalΣ.

Para isto, basta estudarmos o sistema linear, obtido das equações gerais dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, ou seja, formado pelas equações (7.64) e (7.69):

$$\begin{cases} x - y + 2\,z - 2 = 0 \\ -3\,x - 4\,y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Tomando-se

$$x = \gamma\,,$$

no sistema linear aicma, segue que o sistema linear acima tornar-se-á:

$$\begin{cases} x = \gamma \\ -y + 2\,z = 2 - \gamma \\ -4\,y + z = 1 + 3\gamma \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = \gamma \\ y = -\gamma \\ z = 1 - 2\gamma \end{cases},$$

$$\text{ou,} \quad \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \gamma \\ y = 0 + (1-) \cdot \gamma \\ z = 1 + (-2) \cdot \gamma \end{cases}, \quad \text{para} \quad \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Definido-se o ponto R, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortoognal Σ, são dadas por:

$$R \doteq (0\,,0\,,1)_{\Sigma}$$

e o vetor $\vec{r}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (1\,,-1\,,-2)_{\mathcal{E}}\,,$$

temos que um equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortoognal Σ será dada por:

$$X = R + \gamma \cdot \vec{r}, \quad \text{para} \quad \gamma \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$r : (x\,,y\,,z)_{\Sigma} = (0\,,0\,,1)_{\Sigma} + \gamma \cdot (1, -1, -2)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para} \quad \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo 7.3.2 *Encontre o valor do número real $\underline{m}$, tal que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, cujas equações vetoriais e geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, respectivamente, são dadas por:*

$$\pi_1 \,:\, (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,1\,,0)_\Sigma + \alpha\cdot(m\,,1\,,1)_\mathcal{E} + \beta\cdot(1\,,1\,,m)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para} \quad \alpha\,,\beta\in\mathbb{R}\,. \tag{7.71}$$
$$\pi_1 \,:\, 2\,x + 3\,y + 2\,z + 3 = 0\,, \tag{7.72}$$

sejam paralelos e não coincidentes.

Resolução:

Notemos que o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$A \doteq (1\,,1\,,0)_\Sigma \tag{7.73}$$

é um ponto do plano $\underline{\pi_1}$ e os vetores, $\vec{u}$, $\vec{v}$, , cujas coordenadas, em relação à base $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (m\,,1\,,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (1\,,1\,,m)_\mathcal{E} \tag{7.74}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi_1}$, se

$$m \neq 1\,. \tag{7.75}$$

Para encontrar a equação geral do plano $\underline{\pi_1}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ lembramos que um ponto X, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por

$$X = (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{7.76}$$

pertencerá ao plano $\underline{\pi_1}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}\,,\vec{u}\,,\vec{v}$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$, que pelas Proposições ??? e ???, é equivalente à:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(m-1) - (y-1)\left(m^2-1\right) + z(m-1) \\ &= (m-1)x - \left(m^2-1\right)y + (m-1)z + m(m-1), \end{aligned}$$

isto é, uma equação geral do plano $\underline{\pi_1}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será dada por:

$$\pi_1 \,:\, (m-1)\,x - \left(m^2-1\right)\,y + (m-1)\,z + m(m-1) = 0\,. \tag{7.77}$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, segue, de (7.72) e (7.77), que os vetores $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, cujas coordenada, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, dados por:

$$\vec{n}_1 \doteq \left(m-1\,,m^2-1\,,m-1\right)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 \doteq (2\,,3\,,2)_\mathcal{E} \tag{7.78}$$

são vetores normais aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente.

Para que estes vetores sejam paralelos, basta que existe um número real λ tal que

$$\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2\,. \tag{7.79}$$

Notemos que, na situação acima, para os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ não sejam coincidentes, de (7.72) e (7.77), basta que

$$-\,m(m-1) \neq \lambda \cdot 3\,, \tag{7.80}$$

ou seja, de (7.75), (7.78), (7.79) e (7.80), deveremos ter:

$$\begin{cases} m-1 = 2\,\lambda \\ -(m^2-1) = 3\,\lambda \\ m-1 = 2\,\lambda \\ m(m-1) \neq 3\,\lambda \\ m \neq 1 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} m-1 = 2\,\lambda \\ 1-m^2 = 3\,\lambda \\ m(m-1) \neq -3\,\lambda \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m^2+3m-5=0 \\ \lambda = \dfrac{m-1}{2} \\ -m(m-1) \neq -3\lambda \\ m \neq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m = -\dfrac{5}{2} \\ m = 1 \\ \lambda = \dfrac{m-1}{2} \\ -m(m-1) \neq -3\lambda \\ m \neq 1 \end{cases} \quad .$$

Como

$$m \neq 1\,,$$

a única possibilidade seria

$$m = -\frac{5}{2}\,.$$

Neste caso

$$\lambda = \frac{m-1}{2} = \frac{-\dfrac{5}{2}-1}{2} = -\frac{7}{4}\,.$$

Com isto, deveremos ter

$$-m(m-1) = -\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}-1\right) = \frac{35}{4} \neq -\frac{21}{4} = 3\,\lambda\,.$$

Logo se

$$m = -\frac{5}{2}\,,$$

os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, , cujas equações vetoriais e geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, respectivamente, são dadas por (7.71) e (7.72), serão paralelos e distintos.

Capítulo 8

Perpendicularismo e Ortogonalidade

Ao longo de todo este capítulo fixaremos um sistema de coordenadas **ortogonal**

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,,$$

no espaço.

O objetivo deste capítulo é estudar a perpendicularidade ou ortogonalidade entre reta e reta, reta e plano, plano e plano.

Começaremos fazendo um estudo da perpendicularidade e da ortogonalidade entre duas retas no espaço (e no plano).

8.1 Reta e Reta

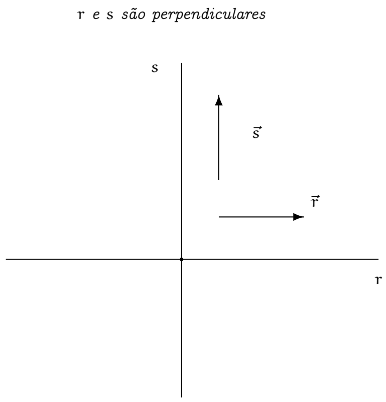
Para decidirmos se duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são ortogonais no espaço (ou no plano) basta verificarmos se seus correspondentes vetores diretores tem essa propriedade.

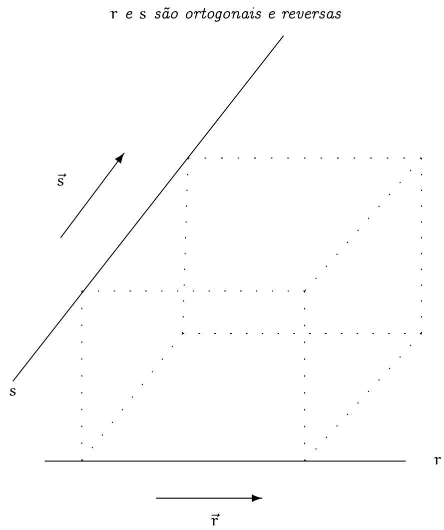
Observação 8.1.1 *Vale observar que duas retas ortogonais podem ser concorrentes.*

Neste caso diremos que elas são **perpendiculares**, *que denotaremos por*

$$r \perp s$$

Caso, contrário, se elas não forem concorrentes (ou seja, $r \cap s = \emptyset$*), diremos que elas são* **reversas**, *que será indicado por* $r \,\underline{|}\, s$ *(veja a figura abaixo).*





Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 8.1.1 *Verificar se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$*, cujas equações na forma simétrica e vetorial, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, dadas por*

$$r\,:\,\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{7}, \tag{8.1}$$

$$s\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma=(1\,,3\,,0)_\Sigma+\alpha\cdot(0\,,-7\,,5)_{\mathcal{E}}\,,\quad \textit{para}\quad \alpha\in\mathbb{R}\,, \tag{8.2}$$

são ortogonais.

Caso afirmativo, verifique se elas são perpendiculares ou reversas.

Resolução:

Notemos que, de (8.2), o ponto S, cujas coordenadas, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$S\doteq(1\,,3\,,0)_\Sigma \tag{8.3}$$

pertencerá à reta $\underline{s}$ e o vetor $\vec{s}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{s}\doteq(0\,,-7\,,5)_{\mathcal{E}} \tag{8.4}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{s}$.

Encontremos uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal Σ.

Para isto, dado um número real $\underline{\beta}$, basta fazermos, em aeqref8.1-a,

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z}{7}=\beta\,,$$

isto é,

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\beta\\ \dfrac{y-3}{5}=\beta\\ \dfrac{z}{7}=\beta\end{cases}\,,\quad\text{isto é,}\quad\begin{cases}x=1+2\,\beta\\ y=3+5\,\beta\\ z=7\,\beta\end{cases}\,,\quad\text{ou seja,}\quad\begin{cases}x=1+2\,\beta\\ y=3+5\,\beta\\ z=0+7\,\beta\end{cases}\,,\quad\text{para}\quad\beta\in\mathbb{R}\,. \tag{8.5}$$

Logo, de (8.5), segue que o ponto $\underline{R}$, cujas coordenadas, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$R \doteq (1\,,3\,,0)_\Sigma \tag{8.6}$$

pertencerá à reta $\underline{r}$ e o vetor $\vec{r}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (2\,,5\,,7)_\mathcal{E} \tag{8.7}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Logo, uma uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal Σ, será dada por :

$$X = R + \beta \cdot \vec{r}\,, \quad \text{para} \quad \beta \in \mathbb{R}\,,$$

isto é,

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,3\,,0)_\Sigma + \beta \cdot (2,5,7)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para} \quad \beta \in \mathbb{R}\,. \tag{8.8}$$

Para que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ sejam ortogonais é necessário, e suficiente, que os vetores

$$\vec{r}\,,\vec{s}$$

sejam ortogonais que, pela Proposição ?? (o sistema de coordenadas Σ é ortogonal), é equivalente à:

$$\vec{r} \bullet \vec{s} = 0\,.$$

Como

$$\vec{r} \bullet \vec{s} \overset{(8.4)\text{ e }(8.7)}{=} (0\,,-7\,,5)_\mathcal{E} \bullet (2\,,5\,,7)_\mathcal{E} = 0 - 35 + 35 = 0\,,$$

segue que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são ortogonais.

Como o ponto

$$R = S = (1\,,3\,,0)_\Sigma$$

é comum às duas retas segue que as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão perpendiculares.

Exemplo 8.1.2 *Encontre as equações paramétricas da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, que contém o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:*

$$A = (2\,,6\,,1)_\Sigma \tag{8.9}$$

e é perpendicular a reta $\underline{r}$, cujas equações paramétricas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por: :

$$r\,:\,\begin{cases} x = -3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3\alpha \end{cases}\,, \quad \textit{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{8.10}$$

Resolução:

Notemos que, de (8.10), segue que o ponto B, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$B \doteq (-3\,,0\,,0)_\Sigma \tag{8.11}$$

pertencerá à reta $\underline{r}$ e o vetor $\vec{r}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (1\,,1\,,3)_\mathcal{E} \tag{8.12}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Para encontrar uma equação vetorial da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, basta encontrar um vetor diretor $\vec{s}$ da mesma, cujas coordenadas, em relação à bas ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{s} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E}\,. \tag{8.13}$$

Como as retas $\underline{s}$ e $\underline{r}$ deverão ser perpendiculares, elas devem ser ortogonais, isto é, seus vetores diretodes, $\underline{\vec{s}}$ e $\underline{\vec{r}}$ devem ser ortogonais, ou seja,

$$\vec{s} \bullet \vec{r} = 0\,.$$

Assim deveresmo ter:

$$0 = \vec{s} \bullet \vec{r} \overset{(8.12)\text{ e }(8.13)}{=} a\,1 + b\,1 + c\,3\,,$$

ou seja,

$$a + b + 3\,c = 0\,,. \tag{8.14}$$

Como as retas $\underline{s}$ e $\underline{r}$ deverão ser perpendiculares, elas devem ser concorrentes, assim os vetores

$$\overrightarrow{AB}\,,\vec{r}\,,\vec{s}$$

devem ser L.D. em $\mathbb{R}^3$ que, pelas Proposições ??? e ???, será equiavelenete à:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -3-2 & 0-6 & 0-1 \\ 1 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} \\ &= -5\,(c - 3\,b) + 6\,(c - 3\,a) - 1\,(b - a) = -17\,a + 14\,b + c = 0\,. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Logo, de (8.14) e (8.16), segue deveremos ter:

$$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ -17a + 14b + c = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja (exercício),} \quad \begin{cases} a = \dfrac{41}{52}\lambda \\ b = \lambda \\ c = -\dfrac{31}{32}\lambda \end{cases}, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, para qualquer

$$\lambda \neq 0\,,$$

temos que o vetor, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, sejam dadas por:

$$\vec{s} = \left(\frac{41}{52}\lambda\,,\lambda\,,-\frac{31}{32}\lambda\right)_{\mathcal{E}}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{s}$.

Se escolhermos

$$\lambda = 1\,,$$

teremos que uma equação vetorial para a reta $\underline{s}$, em relação à ao sistema de coordenadas Σ, será dada por:

$$s\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (2\,,6\,,1)_\Sigma + \beta\cdot\left(\frac{41}{52}\,,1\,,-\frac{31}{32}\right)_{\mathcal{E}}\,,\quad \text{para}\quad \beta\in\mathbb{R}$$

e assim as sua equações paramétricas , em relação à ao sistema de coordenadas Σ, serão dada por:

$$s\,:\,\begin{cases} x = 2 + \dfrac{41}{32}\beta \\ y = 6 + \beta \\ z = 1 - \dfrac{31}{22}\beta \end{cases}\,,\quad \text{para}\quad \beta\in\mathbb{R}\,.$$

Para terminar esta seção deixaremos:

Exercício 8.1.1 *Encontre uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que é paralela ao plano $\underline{\pi}$, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas Σ, é dado por:*

$$\pi\,:\,2x - y + 3z - 1 = 0\,, \tag{8.16}$$

$$\tag{8.17}$$

é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$, onde os pontos A, B tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ

$$A \doteq (1\,,0\,,1) + \Sigma \quad e \qquad B \doteq (0\,,1\,,2)_\Sigma \tag{8.18}$$

e que intercepta a reta $\underline{s}$, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas Σ, é dado por:

$$s\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (4\,,5\,,0)_\Sigma + \alpha\cdot(3\,,6\,,1)_{\mathcal{E}}\,,\quad \textit{para}\quad \alpha\in\mathbb{R}\,. \tag{8.19}$$

Para o caso de perpendicularismo entre duas retas do plano temos a seguinte:

Observação 8.1.2

1. *Como no caso de retas do espaço, para sabermos se duas retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são ortogonais no plano, basta verificarmos se seus correspondentes vetores diretores tem essa propriedade.*

2. *Lembremos que dois vetores do plano são ortogonais se , e somente se, o produto escalar dos dois vetores for zero.*

3. *No plano não podemos ter retas reversas.*

8.2 Reta e Plano

Para verificarmos se uma reta $\underline{r}$ é perpendicular a um plano $\underline{\pi}$ é necessário e suficiente que um vetor diretor $\underline{\vec{r}}$ da reta r, seja paralelo a um vetor normal $\underline{\vec{n}}$, do plano $\underline{\pi}$.

Observação 8.2.1

1. *Sejam*

$$\vec{r}$$

um vetor diretor da reta $\underline{r}$ *e*

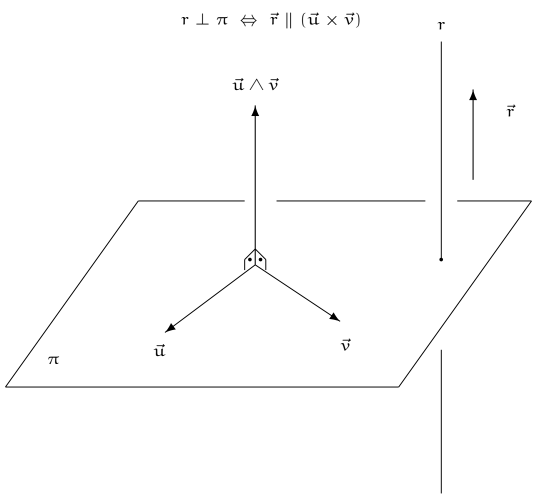
$$\vec{u}\,,\vec{v}$$

dois vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Notemos que a reta $\underline{r}$ *será perpendicular ao plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se, os vetores*

$$\vec{u}\wedge\vec{v} \quad e \quad \vec{r}$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$*, isto é, paralelos (veja a figura abaixo).*



2. *Se o plano* $\underline{\pi}$ *tem, em relação ao sistema de coordenadas orotognal* Σ*, um equação geral dada por:*

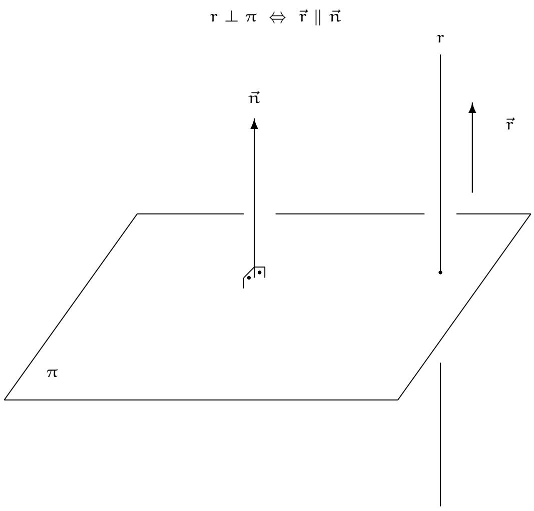
$$\pi\,:\,a\,x+b\,y+c\,z+d=0\,,$$

então, a reta $\underline{r}$ *será perpendicular ao plano* $\underline{\pi}$ *se, e somente se, os vetores*

$$\vec{n}\doteq(a\,,b\,,c)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{r}\doteq(r_1\,,r_2\,,r_3)_{\mathcal{E}}$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$*, isto é, paralelos, ou ainda, exista* $\lambda\neq 0$*, de modo que*

$$r_1=\lambda\,a\,,\quad r_2=\lambda\,b \quad e \quad r_3=\lambda\,c\,.$$



Exemplo 8.2.1 *Verifique se a reta $\underline{r}$, dada pela intersecção dos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, cujas equações gerais, em relaçaõ ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:*

$$r : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \tag{8.20}$$

é perpendicular ao plano $\underline{\pi}$, cuja equações geral, em relação ao sistema de coordenadas Σ, é dadas por:

$$\pi : 2x - 2y + 4z - 1 = 0 . \tag{8.21}$$

Resolução:

Encontremos uma equação vetorial para a reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ.

Para isto, dado um número real α, tomemos

$$y = \alpha$$

nas equações (8.20) da reta $\underline{r}$ (lembremos que ela está sendo dada como a intersecção de dois planos concorrentes) obteremos:

$$\begin{cases} x - \alpha - z = 0 \\ y = \alpha \\ x + \alpha = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} ,$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = 0 + (-1)\,\alpha \\ y = 0 + 1\,\alpha \\ z = 0 + (-2)\,\alpha \end{cases} , \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R} . \tag{8.22}$$

Logo o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por

$$A \doteq (0, 0, 0)_\Sigma \tag{8.23}$$

pertencerá à reta $\underline{r}$ e o vetor $\vec{r}$, cujas coordenadas, em relação à base orotonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (-1\,,1\,,-2)_{\mathcal{E}} \tag{8.24}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Assim uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por:

$$X = A + \alpha \cdot \vec{r}\,, \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

que, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será dada por:

$$r\,:\,(x,\,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (-1\,,1\,,-2)_{\mathcal{E}}\,, \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{8.25}$$

Temos que o vetor $\vec{n}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$\vec{n} \doteq (2\,,-2\,,4)_{\mathcal{E}} \tag{8.26}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Notemos que, de (8.24) e (8.26), segue que os vetores

$$\vec{r}\,,\vec{n}$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$ (pois $\vec{n} = 2 \cdot \vec{r}$).

Portanto segue que a reta $\underline{r}$ será perpendicular ao plano $\underline{\pi}$.

Para obter o ponto P, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$P \doteq (x, y, z) \tag{8.27}$$

de intersecção da reta $\underline{r}$ com o plano $\underline{\pi}$, precisaremos encontrar números reais

$$\alpha\,,x\,,y\,,z$$

que satisfazem o sistema linear (de 4 equações a 4 incógnitas) formado pelas equações paramétricas da reta $\underline{r}$ e a equação geral do plan $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, a saber:

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\,\alpha \\ 2x - 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases}.$$

A solução será (Exercício) será dada por:

$$\alpha = \frac{11}{9}\,, \quad x = -\frac{2}{9}\,, \quad y = \frac{11}{9}\,, \quad z = \frac{20}{9}\,,$$

ou seja, o ponto de intersecção da reta $\underline{r}$, com plano $\underline{\pi}$ será o ponto P, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, serão dadas por:

$$\left(-\frac{2}{9}\,,\frac{11}{9}\,,\frac{20}{9}\right)\,.$$

Exemplo 8.2.2 *Encontrar as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, que contém o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:*

$$A \doteq (1\,,-1\,,0)_\Sigma \tag{8.28}$$

e é perpendicular ao plano $\underline{\pi}$ cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, é dada por

$$\pi\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,-1\,,1)_\Sigma + \alpha\cdot(1\,,0\,,1)_\mathcal{E} + \beta\cdot(1\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,,\quad \textit{para}\quad \alpha\,,\beta\in\mathbb{R}\,. \tag{8.29}$$

Resolução:

Notemos que, de (8.29), segue que o ponto B, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$B \doteq (1\,,-1\,,1)_\Sigma \tag{8.30}$$

pertence ao plano $\underline{\pi}$ e os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{u} \doteq (1\,,0\,,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} = (1\,,1\,,1)_\mathcal{E} \tag{8.31}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Seja

$$\vec{r}$$

um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Como a reta $\underline{r}$ deverá ser perpendicular ao plano $\underline{\pi}$, os vetores

$$\vec{r}\,,\vec{u}\wedge\vec{v}$$

deverão ser L.D. em $\mathbb{R}^3$.

Em particular, o vetor

$$\vec{r} \doteq \vec{u}\wedge\vec{v}$$

poderá ser tomado como um vetor diretor da reta $\underline{r}$, pois os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são L.I. em $\mathbb{R}^3$, logo $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{O}$.

Como a base $\mathcal{E}$ é ortonormal, da Proposição ???, segue que

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\vec{e}_1 - 0\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 = (-1\,,0\,,1)_\mathcal{E}\,.$$

Logo uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será dada por:

$$X = A + \gamma\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\,,\quad \text{para}\quad \gamma\in\mathbb{R}\,,$$

isto é, em relação ao sistema de cooredenadas ortogonal Σ, teremos:

$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,-1\,,0)_\Sigma + \gamma\cdot(-1\,,0\,,1)_\mathcal{E}\,,\quad \text{para}\quad \gamma\in\mathbb{R}\,.$$

Portanto as equações paramétricas da reta $\underline{r}$ perpendicular ao plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de cooredenadas ortogonal Σ, serão dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 - \gamma \\ y = -1 \\ z = \gamma \end{cases}, \quad \text{para} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

8.3 Plano e Plano

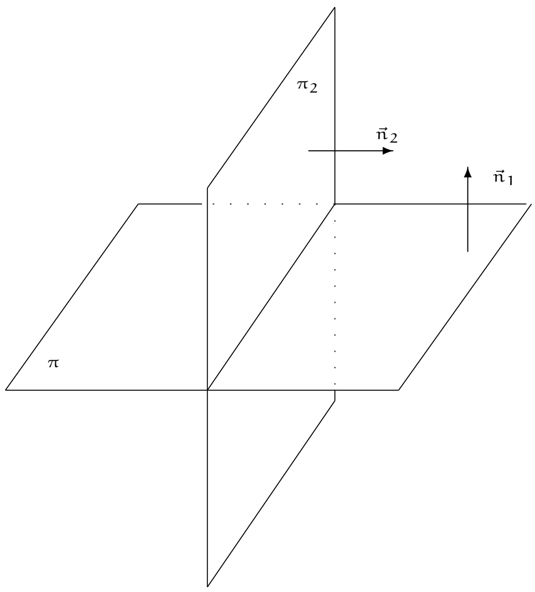
Para sabermos se dois planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são perpendiculares, indicado por

$$\pi_1 \perp \pi_2 ,$$

é necessário e suficiente que os vetores normais $\underline{\vec{n}_1}$ ao plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\vec{n}_2}$ ao plano $\underline{\pi_2}$ sejam ortogonais (veja a figura abaixo), isto é,

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = 0 .$$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$



Consderemos um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O , \mathcal{E})$ do espaço fixado.

Observação 8.3.1

1. *Se os planos* $\underline{\pi_1}$ *e* $\underline{\pi_2}$*, em relação ao sistema de coordenadas* Σ*, são dados por suas equações gerais:*

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \tag{8.32}$$
$$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 , \tag{8.33}$$

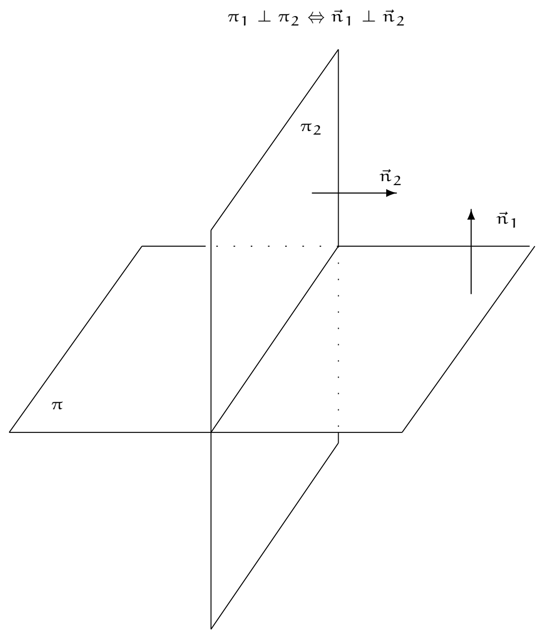
então os vetores, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$*, são dadas por:*

$$\vec{n}_1 \doteq (a_1 , b_1 , c_1)_{\mathcal{E}} \quad e \quad \vec{n}_2 \doteq (a_2 , b_2 , c_2)_{\mathcal{E}} \tag{8.34}$$

serão vetores normais aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente.

Assim os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão perpendiculares se, e somente se, os vetores $\underline{\vec{n}_1}$ e $\underline{\vec{n}_2}$ são ortogonais, isto é,

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = 0\,. \tag{8.35}$$



2. *Suponhamos que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, são dados por suas, respectivas, eequações vetoriais:*

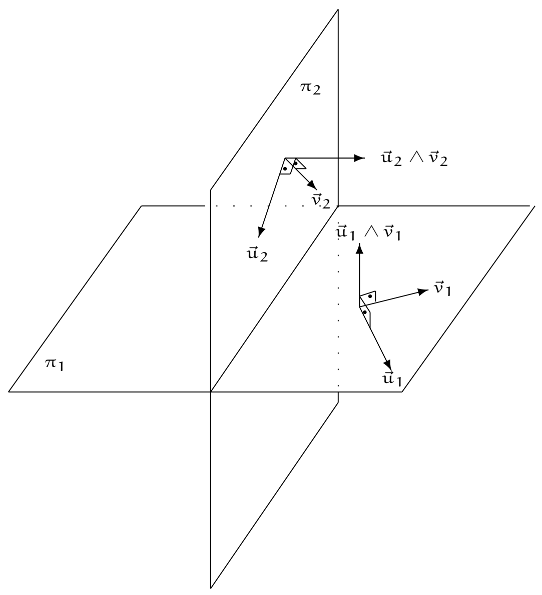
$$\pi_1 : X = A_1 + \alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{v}_1\,, \quad para \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,, \tag{8.36}$$
$$\pi_2 : X = A_2 + \gamma \cdot \vec{u}_2 + \delta \cdot \vec{v}_2\,, \quad para \quad \gamma\,,\delta \in \mathbb{R}\,. \tag{8.37}$$

Então os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão pependiculares se, e somente se, os vetores

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 \quad e \quad \vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2$$

são ortogonais (veja a figura abaixo), isto é,

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) \bullet (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2) = 0\,. \tag{8.38}$$



Lembremos que temos um sistema de coordenadas ortogonal Σ no espaço fixado.

Tratemos do:

Exemplo 8.3.1 *Verificar se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, cujas equações vetoriais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas, respectivamente, por:*

$$\pi_1 : (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,1\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (-1\,,0\,,-1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (4\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,, \tag{8.39}$$

$$\pi_2 : (x\,,y\,,z)_\Sigma = (3\,,1\,,1)_\Sigma + \gamma \cdot (1\,,-3\,,-1)_\mathcal{E} + \delta \cdot (3\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para} \quad \gamma\,,\delta \in \mathbb{R}\,, \tag{8.40}$$

são perpendiculares.

Resolução:

Notemos que, de (8.39) os vetores, $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{u}_1 \doteq (-1\,,0\,,-1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v}_1 \doteq (4\,,1\,,1)_\mathcal{E} \tag{8.41}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi_1}$ e, de (8.40), segue que os vetores, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{u}_2 \doteq (1,-3,1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 \doteq (3,1,0)_\mathcal{E} \tag{8.42}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi_2}$.

Logo os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ serão perpendiculares se, e somente se, o vetor $\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1$ for ortogonal ao vetor $\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2$, isto é,

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) \perp (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2)\ .$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ???, segue que

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2 + (-1) \cdot \vec{e}_3 = (1\,,-3\,,-1)_\mathcal{E}\,, \tag{8.43}$$

$$\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2 + 10 \cdot \vec{e}_3 = (1\,,-3\,,10)_\mathcal{E}\,. \tag{8.44}$$

Logo, de (8.43) e (8.44), segue que

$$(\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1) \bullet (\vec{u}_2 \wedge \vec{v}_2) = (1\,,-3\,,-1)_{\mathcal{E}} \bullet (1\,,-3\,,10)_{\mathcal{E}} = 0,$$

isto é, os plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são perpendiculares.

Como exercício deixaremos para o

Exercício 8.3.1 *Encontrar uma equação vetorial da reta obtida da intersecção dos planos π_1 e π_2, dados pelo Exemplo acima.*

Temos também o:

Exemplo 8.3.2 *Encontrar a equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, que contém o ponto A, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:*

$$A = (2\,,1\,,0)_{\Sigma} \tag{8.45}$$

e é perpendicular aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$\pi_1 \, : \, x + 2\,y - 3\,z + 4 = 0\,, \tag{8.46}$$
$$\pi_2 \, : \, 8\,x - 4\,y + 16\,z - 1 = 0\,. \tag{8.47}$$

Resolução:

$$\vec{n}_1 \doteq (1\,,2\,,-3)_{\mathcal{E}} \tag{8.48}$$

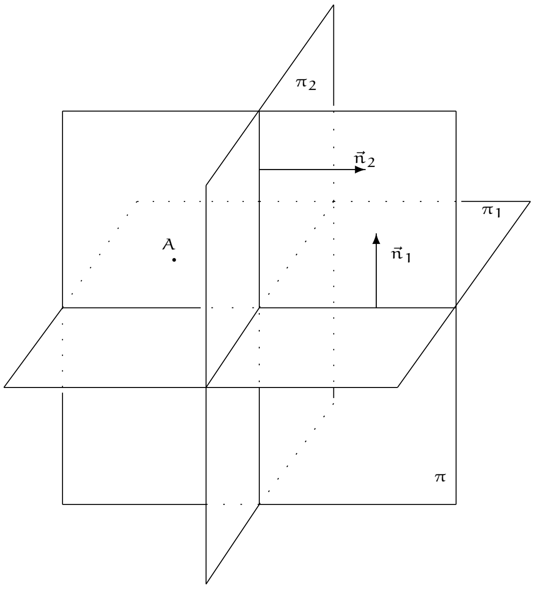
é um vetor normal ao plano $\underline{\pi_1}$ e, de (8.47), segue que o vetor $\vec{n}_1$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$\vec{n}_2 \doteq (8\,,-4\,,16)_{\mathcal{E}} \tag{8.49}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi_2}$.

Como o plano $\underline{\pi}$ deverá ser perpendicular ao plano $\underline{\pi_1}$, segue que o vetor $\underline{\vec{n}_1}$ deverá ser paralelo ao plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).

De modo semelhante, como o plano $\underline{\pi}$ deverá ser perpendicular ao plano $\underline{\pi_2}$, assim o vetor $\vec{n}_2$ deverá ser paralelo ao plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).



Mas os vetores

$$\vec{n}_1\,,\vec{n}_2$$

são L.I. em $\mathbb{R}^3$.

Logo eles podem ser utilizados como vetores diretores do plano $\underline{\pi}$ (ou ainda, o vetor $\vec{n} \doteq \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$).

Assim uma equação vetorial para o plano $\underline{\pi}$ será dada por:

$$X = A + \alpha \cdot \vec{n}_1 + \beta \cdot \vec{n}_2 \quad \text{para} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

ou, , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, teremos

$$\pi\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (2\,,1\,,0)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,2\,,-3)_\mathcal{E} + \beta \cdot (8\,,-4\,,16)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para} \quad \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrarmos a equação geral do plano $\underline{\pi}$, , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, basta lembrarmos que um ponto X, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$X \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma$$

pertence ao plano $\underline{\pi}$ se, e somente se, os vetores

$$\overrightarrow{AX}\,,\vec{n}_1\,,\vec{n}_2$$

são L.D. em $\mathbb{R}^3$, que pelas Proposições ??? e ???, é equivalente à:

$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & -4 & 16 \end{vmatrix}$$
$$= 20\,(x-2) - 40\,(y-1) - 20\,z = 20\,x - 40\,y - 20\,z\,.$$

Dividindo a equação acima por $\underline{20}$, obtemos uma equação geral do plano $\underline{\pi}$ que, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, será dada por:

$$\pi\,:\,x - 2\,y - z = 0\,.$$

Capítulo 9

Ângulos

Fixemos um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O, \mathcal{E})$$

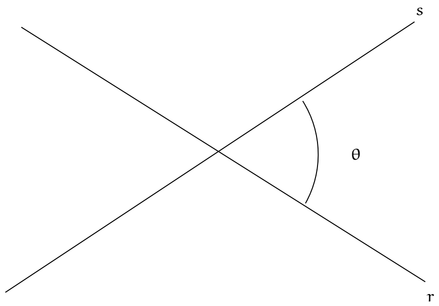
ao longo de todo este capítulo.

Nosso objetivo é encontrar o ângulo entre duas retas (no espaçoe no plano), uma reta e um plano e entre dois planos no espaço.

Começaremos pela questão relacionada com duas retas.

9.1 Ângulo entre duas Retas

Dadas as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, não necessariamente concorrentes, gostaríamos de encontrar a medida, em radianos, do ângulo agudo θ entre elas, ou seja $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ (veja a figura abaixo).



Para isto, suponhamos que os vetores

$$\vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{s}$$

são vetores diretores das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

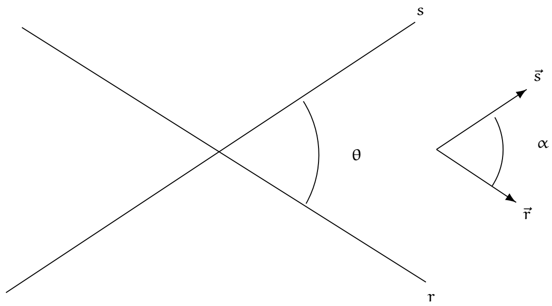
Suponhamos que a medida ângulo, em radianos, entre os vetores (não nulos) $\underline{\vec{u}}$ e $\underline{\vec{v}}$ é $\alpha \in [0\,,\pi]$.

Neste caso temos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|} \quad \text{para} \quad \alpha \in [0, \pi]\,. \tag{9.1}$$

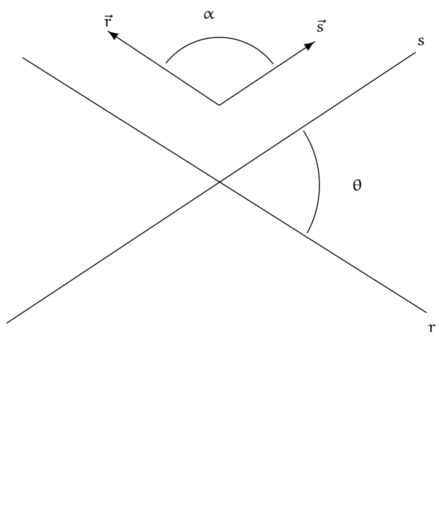
Notemos que, podemos ter duas possibilidades para o ângulo θ:

1. Se
$$\vec{r} \bullet \vec{s} \geq 0\,,$$
teremos, por (9.1), que
$$\cos(\alpha) \geq 0\,,$$
ou seja
$$\alpha \in \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$$
e assim (veja figura abaixo)
$$\theta = \alpha\,, \tag{9.2}$$
ou seja, o ângulo entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ será igual ao ângulo entre os seus vetores diretores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{r}$.



Neste caso, teremos:
$$\cos(\theta) = \cos(\alpha) \overset{(9.1)}{=} \frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}$$
$$\overset{\vec{r}\bullet\vec{s}\geq 0}{=} \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}\,. \tag{9.3}$$

2. Se
$$\vec{r} \bullet \vec{s} < 0\,,$$
teremos, por (9.1), que
$$\cos(\alpha) < 0\,,$$
ou seja , (veja figura abaixo)
$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}\,, \pi\right] \quad \text{e assim} \quad \theta + \alpha = \pi\,.$$



Neste caso, teremos

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \overset{(9.1)}{=} \frac{-\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}$$
$$\overset{\vec{r}\bullet\vec{s}\leq 0}{=} \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{s}\|}. \tag{9.4}$$

Portanto independente das escolhas dos vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente temos que o ângulo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ será dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{s}\|}, \quad \text{ou ainda,} \quad \theta = \arccos\left(\frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{s}\|}\right). \tag{9.5}$$

Consideremos os exemplos abaixo.

Exemplo 9.1.1 *Encontrar o ângulo entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ onde uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, é dada por:*

$$r,: (x, y, z)_\Sigma = (1, 1, 9)_\Sigma + \beta \cdot (0, 1, -1)_\mathcal{E}, \quad \textit{para} \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{9.6}$$

e a reta $\underline{s}$ é dada pela intersecção de dois planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$s : \begin{cases} x - 1 = y \\ z = 4 \end{cases}. \tag{9.7}$$

Resolução:

Observemos que, de (9.6) segue que o ponro $\underline{R}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$R \doteq (1, 1, 9)_\Sigma \tag{9.8}$$

pertence à reta $\underline{r}$ e o vetor $\vec{r}$, cujas as coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{r} \doteq (0, 1, -1)_\mathcal{E} \tag{9.9}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Encontremos uma equação vetorial da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ.

Para isto, tomando-se

$$y = \lambda$$

no sistema linear (9.7), que define a reta $\underline{s}$ (ela é dada pela intersecção de dois planos) temos:

$$\begin{cases} x - 1 = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}, \quad \text{ou seja,}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 1\,\lambda \\ y = 0 + 1\,\lambda \\ z = 4 + 0\,\lambda \end{cases}, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9.10}$$

Logo se considerarmos o ponto $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$S \doteq (1\,,0\,,4)_\Sigma \tag{9.11}$$

e o vetor $\underline{\vec{s}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{s} \doteq (1\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \tag{9.12}$$

de (9.10), (9.11) e (9.12), segue que uma equação vetorial para a reta $\underline{s}$ será dada por:

$$X = S + \lambda \cdot \vec{s}\,, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, de (9.11) e (9.12), teremos

$$s\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,4)_\Sigma + \lambda \cdot (1\,,1\,,0)_\mathcal{E}\,, \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{9.13}$$

Se $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ é o ângulo entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ então, de (9.5), segue que

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &\overset{(9.5)}{=} \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|} \\
&\overset{(9.9)\text{ e }(9.12)}{=} \frac{|(0\,,1\,,-1)_\mathcal{E} \bullet (1\,,1\,,0)|}{\|(0\,,1\,,-1)_\mathcal{E}\|\,\|(1\,,1\,,0)_\mathcal{E}\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Logo, o ângulo entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ será

$$\theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

Temos também o:

Exemplo 9.1.2 *Obtenha as coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal Σ, dos vértices $\underline{B}$ e $\underline{C}$ do triângulo equilátero ΔABC, sabendo-se que as coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal Σ, do vértice $\underline{A}$, seja, dadas por*

$$A \doteq (1\,,1\,,0)_\Sigma \tag{9.15}$$

e sabendo-se que o lado $\overline{BC}$ está contido na reta $\underline{r}$, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal Σ, é dada por:

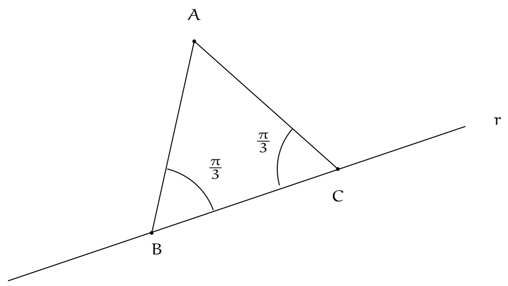
$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \lambda \cdot (0\,,1\,,-1)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{9.16}$$

Resolução:

Observemos que se o ponto P é um dos vértices (por exemplo, B ou C) do triângulo ΔABC a ser encontrado, como este ponto deve pertencer a reta $\underline{r}$, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas Σ, é dada por (9.16), deverá existir um número real $\underline{\lambda}$, tal que

$$P = (0\,,\lambda,\,-\lambda)_\Sigma\,. \tag{9.17}$$

Observemos também que como o triângulo é equilátero seus ângulos internos deverão ter medida $\frac{\pi}{3}$ radinanos, isto é, o ângulo entre a reta $\underline{r}$ e a reta que contém os pontos A e P (a saber, a reta $\overleftrightarrow{AP}$), devem fazer um ângulo de medida $\frac{\pi}{3}$ radianos (veja figura abaixo).



De (9.16), segue que um vetor diretor para a reta $\underline{r}$ é o vetor

$$\vec{r} \doteq (0\,,1\,,-1)_{\mathcal{E}} \tag{9.18}$$

e, de (9.15), (9.17) e da Proposição ???, segue que um vetor diretor para a reta $\overleftrightarrow{AP}$ será o vetor

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-1\,,\lambda - 1\,,-\lambda)_{\mathcal{E}}\,. \tag{9.19}$$

Como os sistema de coordenadas Σ é ortogonal, segue, de (9.5), que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\left|\vec{r} \bullet \overrightarrow{AP}\right|}{\|\vec{r}\|\,\left\|\overrightarrow{AP}\right\|} \\
&\overset{(9.18)\text{ e }(9.19)}{=} \frac{|0 + \lambda - 1 + \lambda|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}\,\sqrt{(-1)^2 + (\lambda - 1)^2 + (-\lambda)^2}} \\
&= \frac{|2\lambda - 1|}{\sqrt{2}\sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 2}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,,$$

que nos fornecerá as seguintes possibilidades:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1\,.$$

Com isto, de (9.17), obteremos os seguintes dois pontos:

$$B \overset{\lambda=2\text{ em }(9.17)}{=} (0\,,2\,,-2)_{\Sigma} \quad \text{e} \quad C \overset{\lambda=1\text{ em }(9.17)}{=} (0\,,1\,,-1)_{\Sigma}\,,$$

que serão os outros dois vértices procurados do triângulo ΔABC.

Observação 9.1.1 *Notemos que a expressão (9.5) serve para encontrar o ângulo entre duas retas que pertencem a um mesmo plano (no caso as retas são concorrentes).*

9.2 Ângulo entre Reta e Plano

Nosso objetivo é determinar uma expressão para o ângulo agudo θ, isto é,

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

entre uma reta $\underline{r}$ e um plano $\underline{\pi}$.

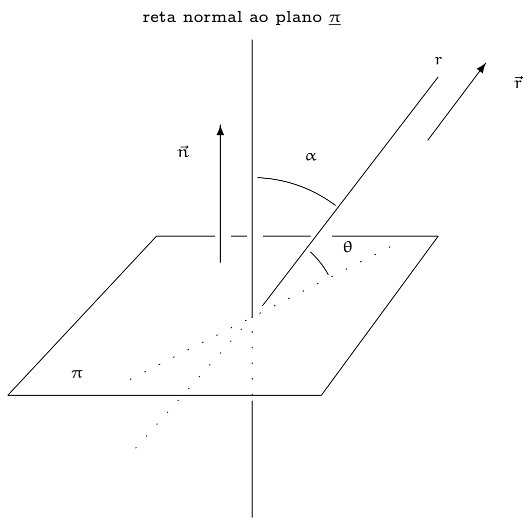
Suponhamos que o vetor $\vec{r} \neq \vec{O}$ é um vetor diretor da reta $\underline{r}$ e que o vetor $\vec{n} \neq \vec{O}$ é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Então podemos encontrar o ângulo $\underline{\alpha}$, entre a reta $\underline{r}$ e a reta normal ao plano, ou seja, que tem direção do vetor normal $\underline{\vec{n}}$ ao plano $\underline{\pi}$, a saber

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{n}\|}.$$

Observemos que (veja figura abaixo)

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{9.20}$$



Logo

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{n}\|} &= \cos(\alpha) \overset{(9.20)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta) - \operatorname{sen}(-\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}(\theta), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{n}\|} \quad \text{ou} \quad \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{n}\|}\right).$$

Vale observar que

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Observação 9.2.1 *Se temos as equações vetoriais da reta* $\underline{r}$*,*

$$r : X = A + \alpha \cdot \vec{r}, \ \textit{para } \alpha \in \mathbb{R},$$

e do plano $\underline{\pi}$

$$\pi : X = B + \beta \cdot \vec{u} + \cdot \gamma \vec{v}, \ \textit{para } \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

então o ângulo $\underline{\theta}$ *entre a reta* $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$ *será dada por:*

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \quad \textit{ou} \quad \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\vec{r} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}\right). \tag{9.21}$$

Consideremos nos exemplos abaixo, um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ fixado.

Exemplo 9.2.1 *Encontrar a medida do ângulo* $\underline{\theta}$*, entre a reta* $\underline{r}$ *e o plano* $\underline{\pi}$ *cujas equações, em relação ao sistema de coordenadas* Σ*, serão:*

$$r : (x, y, z)_\Sigma = (0, 1, 0)_\Sigma + \alpha \cdot (-1, 1, 0)_\mathcal{E}, \ \textit{para } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{9.22}$$

$$\pi : (x, y, z)_\Sigma = (0, 0, 10)_\Sigma + \beta \cdot (1, 0, 0)_\mathcal{E} + \gamma \cdot (0, 1, -1)_\mathcal{E}, \ \textit{para } \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{9.23}$$

Resolução:

Da equação (9.22), segue que o vetor

$$\vec{r} \doteq (-1, 1, 0)_\mathcal{E}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Da equação (9.23), segue que os vetores

$$\vec{u} \doteq (1, 0, 0)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v} \doteq (0, 1, -1)_\mathcal{E}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi}$.

Logo o vetor

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ???, segue que

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 - (-1) \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 = (0, 1, 1)_\mathcal{E}.$$

Portanto, de (9.21), segue que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{|\vec{r} \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|(-1, 1, 0)_\mathcal{E} \bullet (0, 1, 1)_\mathcal{E}|}{\|(-1, 1, 0)_\mathcal{E}\| \, \|(0, 1, 1)_\mathcal{E}\|} \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2}.$$

Logo o ângulo entre a reta $\underline{r}$ e o plano $\underline{\pi}$ será de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ radianos.

Exemplo 9.2.2 *Obtenha as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que contém o ponto*

$$A \doteq (1\,,1\,,1)_\Sigma \tag{9.24}$$

, é paralela ao plano $\underline{\pi_1}$ que tem equação geral, em relação ao sistema de coordenadas Σ, dada por:

$$\pi_1 \,:\, x + 2y - z = 0 \tag{9.25}$$

e forma ângulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianos com o plano $\underline{\pi_2}$ que tem equação geral, em relação ao sistema de coordenadas Σ, dada por

$$\pi_2 \,:\, x - y + 2z - 1 = 0\,. \tag{9.26}$$

Resolução:

Notemos que, das equações (9.25) e (9.26), segue que os vetores

$$\vec{n}_1 \doteq (1\,,2\,,-1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 \doteq (1\,,-1\,,2)_\mathcal{E} \tag{9.27}$$

serão vetores normais aos planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente.

Seja

$$\vec{r} \doteq (a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \neq \vec{O}\,, \tag{9.28}$$

um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Sabemos que a reta $\underline{r}$ será paralela ao plano $\underline{\pi_1}$ se, e somente se, os vetores

$$\vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{n}_1$$

forem ortogonais, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\vec{r}\perp\vec{n}}{=} \vec{r} \bullet \vec{n}_1 \\ &\overset{(9.28)\text{ e }(9.27)}{=} (a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \bullet (1\,,2\,,-1)_\mathcal{E} = a + 2b - c, \\ \text{isto é,} \quad & a + 2b - c = 0\,. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Por outro lado, sabemos que a reta $\underline{r}$ forma uma ângulo de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ radianos com o plano $\underline{\pi_2}$, ou seja, de (9.21), devermos ter

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}(\theta) &\overset{(9.21)}{=} \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{n}\|} \\ &\overset{(9.28)\text{ e }(9.27)}{=} \frac{|(a\,,b\,,c)_\mathcal{E} \bullet (1\,,-1\,,2)_\mathcal{E}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|a - b + 2c|}{\sqrt{6}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \text{isto é,} \quad \sqrt{18}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2} &= 2\,|a - b + 2c|\,. \end{aligned} \tag{9.30}$$

Logo de (9.29) e (9.30) os números reais a, b, c devem satisfazer o seguinte sistema (não linear):

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ \sqrt{18}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2\,|a - b + 2\,c| \end{cases} .$$

Substituindo

$$c = a + 2b$$

na 2.a equação obteremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \sqrt{18}\,\sqrt{a^2 + b^2 + (a + 2b)^2} = 2\,|a - b + 2\,(a + 2b)| \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{18}\,\sqrt{a^2 + b^2 + \left(a^2 + 4ab + 4b^2\right)} = 2\,|a - b + 2a + 4b| \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{18}\,\sqrt{2a^2 + 4ab + 5b^2} = 2\,|3a + 3b| \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{18}\,\sqrt{2a^2 + 4ab + 5b^2} = 6\,|a + b| \\ \Leftrightarrow \quad & 18\,\left(2a^2 + 4ab + 5b^2\right) = 36\,(a + b)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 18\,\left(2a^2 + 4ab + 5b^2\right) = 36\,\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 54b^2 = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$b = 0 .$$

Como $c = 2 - 2b$, segue que

$$c = a .$$

Logo, se $a \neq 0$, o vetor

$$\vec{r} = (a\,,0\,,a)_{\mathcal{E}}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$, em particular, o vetor $\vec{r} \doteq (1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}}$ (tomando-se $a = 1$).

Assim uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será dada por :

$$X = A + \alpha \cdot \vec{r}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$r : (x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,1\,,1)_\Sigma + \alpha \cdot (1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

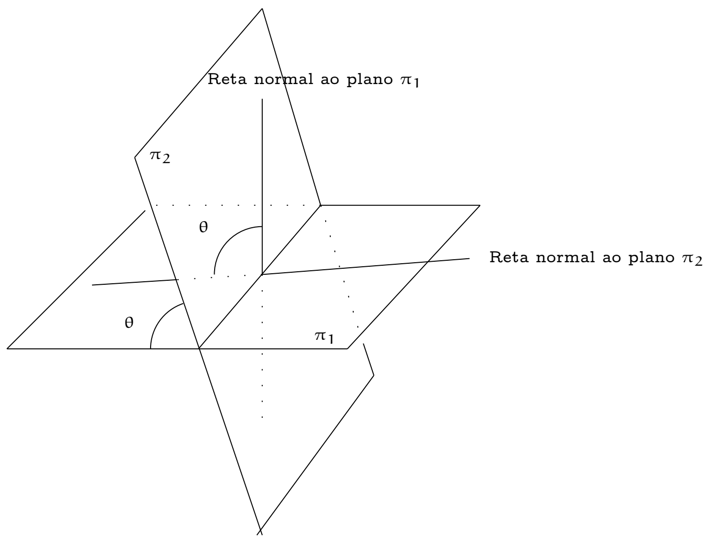
Portanto as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, serão dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = 1 + \alpha \end{cases}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

9.3 Ângulo entre dois Planos

O objetivo desta seção é encontrar a medida do ângulo agudo, entre dois planos dados.

Observemos que a medida do ângulo $\underline{\theta}$ entre os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ é igula a medida do ângulo entre as retas normais aos correspondentes planos (veja a figura abaixo).



Logo se os vetores

$$\vec{n}_1 \quad \text{e} \quad \vec{n}_2$$

são vetores normais aos plano $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, respectivamente, teremos:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}\right). \tag{9.31}$$

Consideremos nos exemplos abaixo, um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ fixado.

Exemplo 9.3.1 *Encontrar a medida do ângulo entre os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ dados, em relação ao sistema de coordenadas Σ, pelas equações:*

$$\pi_1 : (x, y, z)_\Sigma = (1, 0, 0)_\Sigma + \alpha \cdot (1, 0, 1)_\mathcal{E} + \beta \cdot (-1, 0, 0)_\mathcal{E}, \ \textit{para } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{9.32}$$
$$\pi_2 : x + y + z = 0. \tag{9.33}$$

Resolução:

Notemos que de (9.33), segue que o vetor

$$\vec{n}_2 \doteq (1, 1, 1)_\mathcal{E} \tag{9.34}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi_2}$.

Observemos também que, de (9.32), segue que os vetores

$$\vec{u}_1 \doteq (1, 0, 1)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \vec{v}_1 \doteq (-1, 0, 0)_\mathcal{E} \tag{9.35}$$

são vetores diretores do plano $\underline{\pi_1}$ (são L.I. em V^3).

Logo o vetor

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi_1}$.

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal segue, da Proposição ???, que

$$\vec{n}_1 \doteq \vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1 \overset{(9.35)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 = (0\,,-1\,,0)_{\mathcal{E}}\,,$$

ou seja, o vetor

$$\vec{n}_1 \doteq (0\,,1\,,0)_{\mathcal{E}} \tag{9.36}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi_1}$.

Logo a medida do ângulo $\underline{\theta}$, entre os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ deverá satisfazer a:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &\overset{(9.31)}{=} \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} \\
&\overset{(9.34)\text{ e }(9.36)}{=} \frac{|(0\,,-1\,,0)_{\mathcal{E}} \bullet (1\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}|}{\|(0\,,-1\,,0)_{\mathcal{E}}\|\;\|(1\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\|} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ radianos.}
\end{aligned}$$

Assim a medida do ângulo $\underline{\theta}$, entre os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ sérá

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Exemplo 9.3.2 *Encontre uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que contém a reta $\underline{r}$ e forma ângulo $\frac{\pi}{6}$ radianos com o plano $\underline{\pi_1}$ cujas equações, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:*

$$r\,:\,\begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \tag{9.37}$$

$$\pi_1\,:\,x + 2y - 3z + 2 = 0\,. \tag{9.38}$$

Resolução:

A reta $\underline{r}$ é dada pela intersecção dos planos $\underline{\pi_2}$ e $\underline{\pi_3}$, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por

$$\pi_2\,:\,x = z + 1\,,\quad \text{isto é,}\quad \pi_2\,:\,x - z - 1 = 0\,, \tag{9.39}$$

$$\pi_3\,:\,y = z - 1\,,\quad \text{isto é,}\quad \pi_3\,:\,y - z + 1 = 0\,. \tag{9.40}$$

Observemos que, de (9.39) e (9.40), segue que os vetores

$$\vec{n}_2 \doteq (1\,,0\,,-1)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \vec{n}_3 \doteq (0\,,1\,,-1)_{\mathcal{E}} \tag{9.41}$$

são vetores normais aos planos $\underline{\pi_2}$ e $\underline{\pi_3}$ e, além disso, são vetores L.I. em V^3 .

Logo os planos $\underline{\pi_2}$ e $\underline{\pi_3}$ são concorrentes da reta $\underline{r}$.

Assim o plano $\underline{\pi}$ deverá ser um dos planos do feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$, cuja equação (do feixe) será dada por:

$$\pi \,:\, \alpha\,(x - z - 1) + \beta\,(y - z + 1) = 0\,,$$

isto é:

$$\pi \,:\, \alpha\, x + \beta\, y + (-\alpha - \beta)\, z + (-\alpha + \beta) = 0\,, \tag{9.42}$$

onde $\alpha\,,\beta$ são números reais, tais que

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,.$$

Assim devemos encontrar $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$, de modo que a medida do ângulo do plano $\underline{\pi}$ com o plano $\underline{\pi_1}$ seja $\dfrac{\pi}{3}$ radianos.

Observemos que, de (9.42), segue que o vetor

$$\vec{n} \doteq (\alpha\,,\beta\,,-\alpha - \beta)_{\mathcal{E}} \tag{9.43}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$, se

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,.$$

De (9.41) temos que o vetor

$$\vec{n}_2 \doteq (1\,,2\,,-2)_{\mathcal{E}}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi_2}$

Logo deveremos ter

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{n}_1|}{\|\vec{n}\|\,,\|\vec{n}_1\|} \\
&\overset{(9.43)\text{ e }(9.41)}{=} \frac{|(\alpha\,,\beta\,,-\alpha-\beta)_{\mathcal{E}} \bullet (1\,,2\,,-3)_{\mathcal{E}}|}{\|(\alpha\,,\beta\,,-\alpha-\beta)_{\mathcal{E}}\|\,\|(1\,,2\,,-3)_{\mathcal{E}}\|} \\
&= \frac{|4\alpha + 5\beta|}{\sqrt{28}\,\sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}} \\
\text{isto é} \quad 21 &= \frac{(4\alpha + 5\beta)^2}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}\,, \\
\text{ou seja} \quad \alpha &= 4\beta\,, \quad \text{ou} \quad \beta = -5\alpha\,.
\end{aligned}$$

Substituindo

$$\alpha = 4\beta$$

em (9.42), obteremos

$$\pi \,:\, (4\beta)\, x + \beta\, y + (-4\beta - \beta)\, z + (-4\beta + \beta) = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad \beta(4\,x + y - 5\,z - 3) = 0\,.$$

Tomando-se

$$\beta = 1\,,$$

na equação acima, obteremos que o plano

$$\pi : 4\,x + y - 5\,z - 3 = 0$$

satisfaz as condições requeridas.

Substituindo

$$\beta = -5\alpha$$

em (9.42), obtemos

$$\pi : \alpha\,x + (-5\alpha)\,y + [-\alpha - (-5\alpha)]\,z + [-\alpha + (-5\alpha] = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad \alpha(x - 5\,y + 4z - 6) = 0\,.$$

Tomando-se

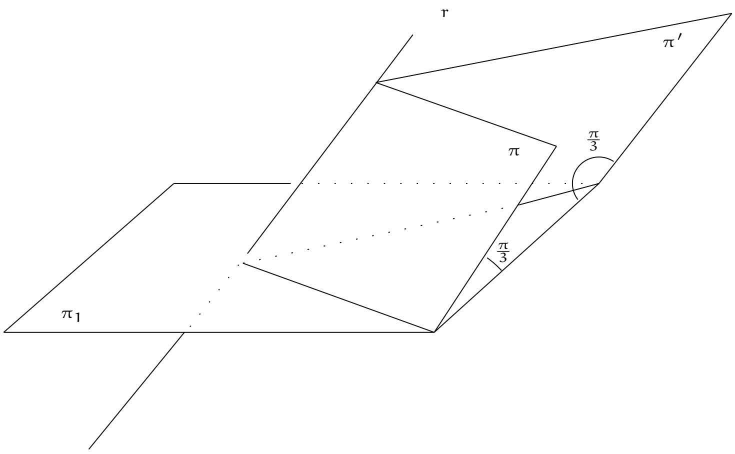
$$\alpha = 1$$

na equação acima, obteremos que o plano

$$\pi' : x - 5\,y + 4\,z - 6 = 0$$

também satisfaz as condições requeridas.

Geometricamente temos a situação exibida na figura abaixo



Capítulo 10

Distâncias

Neste capítulo trataremos de calcular as ditâncias entre ponto e ponto, ponto e reta, ponto e plano, reta e reta, reta e plano e plano e plano.

Ao longo de todo este capítulo estará fixado um sistema de cooredenadas ortogonal no espaço,

$$\Sigma = (O, \mathcal{E}) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,.$$

Trataremos das questões acima relacionadas no espaço e, no final da seção, trataremos das questões pertinentes para os casos no plano.

Começaremos tratando da:

10.1 Distância entre dois Pontos

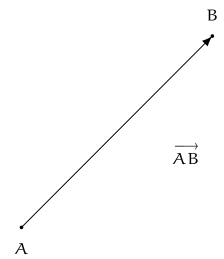
Suponhamos que os pontos

$$A \doteq (a_1, a_2, a_3)_\Sigma \quad \text{e} \quad B \doteq (b_1, b_2, b_3)_\Sigma \tag{10.1}$$

em relação ao sistema de coordenadas Σ fixado.

Definição 10.1.1 *A* **distância entre os pontos A e B**, *que será indicada por* $d(A, B)$ *será dada por*

$$d(A, B) \doteq \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\,. \tag{10.2}$$



Apliquemos isto ao:

Exemplo 10.1.1 *Verifique se o triângulo ΔABC é isóceles, onde*

$$A \doteq (-1, -3, 4)_\Sigma\,, \quad B \doteq (-2, 1, -4)_\Sigma \quad e \quad C \doteq (3, -11, 5)_\Sigma\,. \tag{10.3}$$

Resolução:

Calculemos:

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &\overset{(10.2) \text{ e } (10.3)}{=} \sqrt{[-2-(-1)]^2+[1-(-3)]^2+(-4-4)^2} = \sqrt{81} = 9\,,\\
d(A,C) &\overset{(10.2) \text{ e } (10.3)}{=} \sqrt{[3-(-1)]^2+[-11-(-3)]^2+(5-4)^2} = \sqrt{81} = 9\,,\\
d(B,C) &\overset{(10.2) \text{ e } (10.3)}{=} \sqrt{[3-(-2)]^2+[-11-1]^2+[5-(-4)]^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}\,.
\end{aligned}
$$

Como

$$d(A,B) = d(A,C)\,,$$

segue que o triângulo é isóceles, mas não é equilátero, pois

$$d(A,C) \neq d(B,C)\,.$$

Observação 10.1.1 *Para o caso análogo no plano temos que, fixado um sistema de cooredenadas ortogonal no plano,*

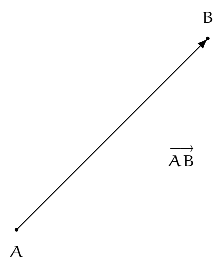
$$\Gamma = (O, \mathcal{E}) = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

a distância entre os pontos

$$A \doteq (a_1\,, a_2)_\Gamma \quad e \quad B \doteq (b_1\,, b_2)_\Gamma\,, \tag{10.4}$$

que será indicada por $d(A,B)$, *será dada por:*

$$d(A,B) \doteq \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\,. \tag{10.5}$$



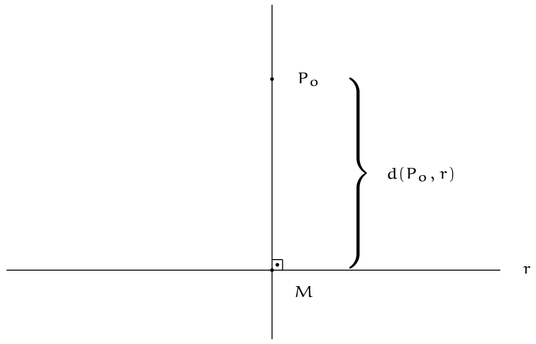
10.2 Distância de um Ponto a uma Reta

Nesta seção vamos encontrar uma expressão para a distância de um ponto $\underline{P_o}$ a uma reta $\underline{r}$, que será indicada por $d(P_o, r)$, no espaço, onde:

$$P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o)_\Sigma \quad \text{e} \quad r\,:\, X = R + \lambda \cdot \vec{r}\,, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{10.6}$$

No final da desta seção trataremos a questão análogo no plano.

Consideremos o ponto M, sobre a reta $\underline{r}$, de modo que a reta $\overleftrightarrow{MP_o}$ seja perpendicular a reta $\underline{r}$ no ponto $\underline{M}$ (veja a figura abaixo).

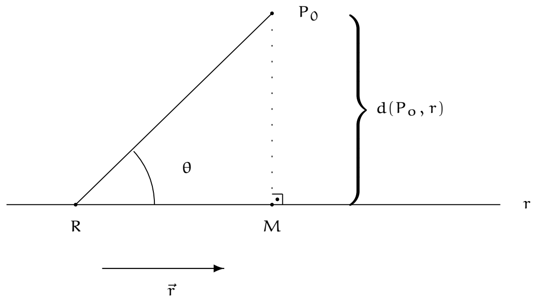


Definição 10.2.1 *N situação acima, a* **distância do ponto** $\underline{P_o}$ **à reta** $\underline{r}$*, será dada pelo comprimento do segmento geométrico* $\overline{MP_o}$*, isto é,*

$$d(P_o, r) = \left\|\overrightarrow{MP_o}\right\| . \tag{10.7}$$

Consideremos $\underline{R}$ um ponto sobre a reta $\underline{r}$, dada por (10.33).

Seja $\underline{\theta}$, a medida do ângulo entre os vetores $\overrightarrow{RP_o}$ e $\vec{r}$ (veja a figura abaixo).



Deste modo temos que:

$$d(P_o, r) = \left\|\overrightarrow{MP_o}\right\| \overset{\Delta RP_M \text{ é retângulo}}{=} \left\|\overrightarrow{RP_o}\right\| \operatorname{sen}(\theta) .$$

Por outro lado temos que:

$$\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\| = \left\|\overrightarrow{RP_o}\right\| \, \|\vec{r}\| \operatorname{sen}(\theta) ,$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{RP_o}\right\| \, \|\vec{r}\|} .$$

Logo substituindo este na identidade anterior, obtreemos que

$$d(P_o, r) = \left\|\overrightarrow{RP_o}\right\| \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{RP_o}\right\| \, \|\vec{r}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|} ,$$

ou seja,

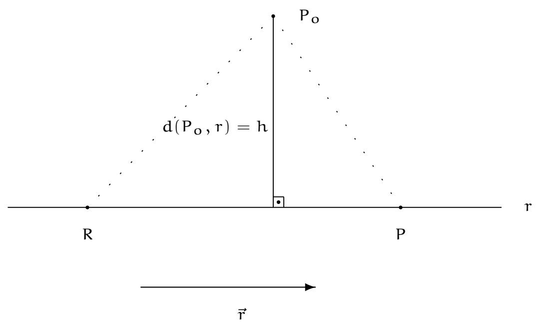
$$d(P_o, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|} , \tag{10.8}$$

onde $R \in r$.

Observação 10.2.1 *Um outro modo de encontrarmos uma expressão para a distância do ponto $\underline{P_o}$ à reta $\underline{r}$ é escolher $\underline{P}$, um ponto sobre a reta $\underline{r}$, distinto do ponto $\underline{R}$ e calcular o valor da altura, que denotaremos por $\underline{h}$, do triângulo ΔRP_oP, relativamente ao lado $\overline{RP}$.*

Este valor, $\underline{h}$ será a distância do ponto $\underline{P_o}$ à reta $\underline{r}$, isto é, (veja a figura abaixo)

$$d(P_o, r) = h\,.$$



Para encontrar a altura $\underline{h}$ do triângulo ΔRP_oP, lembremos que a área do triângulo ΔRP_oP, que denotaremos por $\mathcal{A}$, é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \overrightarrow{RP}\right\|\,. \tag{10.9}$$

Por outro lado a área do triângulo ΔRP_oP é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{RP} \cdot h = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{RP}\right\| \cdot h\,. \tag{10.10}$$

Logo, de (10.9) e (10.10), segue que

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{RP}\right\| \cdot h = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \overrightarrow{RP}\right\|, \quad \textit{isto é,} \quad h = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \overrightarrow{RP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{RP}\right\|}$$

$$\overset{(*)\,\overrightarrow{RP}=\alpha\cdot\vec{r}}{=} \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge (\alpha\cdot\vec{r})\right\|}{\|\alpha\cdot\vec{r}\|} = \frac{|\alpha|\,\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{|\alpha|\,\|\vec{r}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|},$$

onde, em (*) utilizamos o fato que os vetores $\overrightarrow{RP}$ e $\vec{r}$ são paralelos.

Portanto

$$d(P_o, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|},$$

exatamente igual a expressão (10.8).

Apliquemos isto ao:

Exemplo 10.2.1 *Calcule a distância do ponto*

$$P_o \doteq (0\,, -1\,, 0)_\Sigma \tag{10.11}$$

à reta $\underline{r}$ dada, em relação ao sistema de coordenadas Σ, por:

$$r : \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = z + 1 \end{cases} . \tag{10.12}$$

Resolução:

Encontremos uma equação vetorial para a reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ,.

Notemos que a reta $\underline{r}$ é dada pela interseção de dois planos (veja o sistema linear (10.12)).

Neste caso, considerando-se

$$y = \lambda$$

no sistema linear (10.12), obteremos: Com isto obteremos

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} , \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja, temos as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ.

Logo, uma equação vetorial para a reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será dada por:

$$r : (x, y, z)_\Sigma = (-1, 0, -1)_\Sigma + \lambda \cdot (2, 1, 1)_\mathcal{E}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{10.13}$$

Logo o ponto

$$R \doteq (-1, 0, -1)_\Sigma \tag{10.14}$$

pertence à reta $\underline{r}$ e o vetor

$$\vec{r} \doteq (2, 1, 1)_\mathcal{E} \tag{10.15}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Notemos que

$$\overrightarrow{RP_o} = P_o - R \overset{(10.14) \text{ e } (10.11)}{=} (1, -1, 1)_\mathcal{E}. \tag{10.16}$$

Portanto

$$d(P_o, r) \overset{(10.8)}{=} \frac{\left\|\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|(1, -1, 1)_\mathcal{E} \wedge (2, 1, 1)_\mathcal{E}\|}{\|(2, 1, 1)_\mathcal{E}\|}. \tag{10.17}$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ??, segue que

$$\overrightarrow{RP_o} \wedge \vec{r} \overset{(10.15) \text{ e } (10.16)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3 = (-2, 1, 3)_\mathcal{E}. \tag{10.18}$$

Logo, de (10.16) e (10.17), segue que

$$d(P_o, r) = \frac{\|(-2, 1, 3)_\mathcal{E}\|}{\|(2, 1, 1)_\mathcal{E}\|} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{84}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Portanto a distância do ponto $\underline{P_o}$ à reta $\underline{r}$, dadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, por (10.11) e (10.12), respectivamente, será igual a $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ u.c. (unidade de comprimento).

Um outro caso será:

Exemplo 10.2.2 *Obtenha equações do lugar geométrico, em relação ao sistema de coordenadas Σ, dos pontos do espaço que são equidistantes da reta $\underline{r}$, da reta $\underline{s}$ e do ponto $\underline{A}$, dado, em relação ao sistema de coordenadas Σ, por:*

$$A \doteq (1\,,0\,,1)_\Sigma\,, \quad r : x = y = z \quad e \quad s : x - y = z = x + y\,. \tag{10.19}$$

Resolução: Encontremos equações vetoriais das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ.

Notemos que (10.19) nos fornece as equações na forma simétrica da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que podemos ser vistas com a interseção de dois planos (dados por suas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas Σ), a saber, o sistema linear:

$$\begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}.$$

Considerando-se $y = \lambda$ no sistema linear acima obteremos:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

que serão as equações paramétricas da reta $\underline{r}$em relação ao sistema de coordenadas Σ.

Deste modo, o ponto

$$R \doteq (0\,,0\,,0)_\Sigma \tag{10.20}$$

pertencerá a reta $\underline{r}$ e o vetor

$$\vec{r} \doteq (1\,,1\,,1)_\mathcal{E} \tag{10.21}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{r}$, ou ainda, uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ será:

$$r : (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \lambda \cdot (1\,,1\,,1)_\mathcal{E}\,, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{10.22}$$

Notemos que (10.19) a reta $\underline{s}$ coms a interseção de dois planos (dados por suas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas Σ), a saber, o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y = z \\ x + y = z \end{cases}.$$

Logo, considerando-se

$$z = \beta$$

no sistema linear acima, obteremos

$$\begin{cases} x - y = \beta \\ x + y = \beta \\ z = \beta \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = \beta \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases}, \text{ para } \beta \in \mathbb{R},$$

Deste modo, o ponto o ponto

$$S \doteq (0,0,0) \tag{10.23}$$

pertencerá a reta $\underline{s}$ e o vetor

$$\vec{s} \doteq (1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}} \tag{10.24}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{s}$, isto é, uma equação vetorial da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, será:

$$s\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma + \beta\cdot(1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}}\,,\ \text{para } \beta\in\mathbb{R}\,. \tag{10.25}$$

Observemos que o ponto

$$A = (1\,,0\,,1)_\Sigma$$

pertence a reta $\underline{s}$.

Para verificarmos isto, basta tomarmos $\beta = 1$ na equação vetorial da reta $\underline{s}$ dada por (10.25).

Seja

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{10.26}$$

as coordenadas de um ponto, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que satisfaz as propriedades pedidas, isto é,

$$d(P,r) = d(P,s) = d(P,A)\,. \tag{10.27}$$

Com isto teremos que:

$$\overrightarrow{RP} = P - R \overset{(10.26)\text{ e }(10.20)}{=} (x-0\,,y-0\,,z-0)_{\mathcal{E}} = (x\,,y\,,z)_{\mathcal{E}}\,. \tag{10.28}$$

Sabemos que

$$d(P,r) \overset{(10.8)}{=} \frac{\left\|\overrightarrow{RP}\wedge\vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|} \overset{(10.28)\text{ e }(10.21)}{=} \frac{\|(x\,,y\,,z)_{\mathcal{E}}\wedge(1\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\|}{\|(1\,,1\,,1)_{\mathcal{E}}\|}\,.$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ???, segue que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RP}\wedge\vec{r} &\overset{(10.28)\text{ e }(10.21)}{=} \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x & y & z\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = (y-z)\cdot\vec{e}_1 - (x-z)\cdot\vec{e}_2 + (x-y)\cdot\vec{e}_3\\ &= (y-z\,,z-x\,,x-y)_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned} \tag{10.29}$$

Logo

$$d(P,r) \overset{(10.29)}{=} \frac{\|(y-z\,,z-x\,,x-y)_{\mathcal{E}}\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}}{\sqrt{3}}. \tag{10.30}$$

De modo semelhante, temos que:

$$d(P,s) = \frac{\left\|\overrightarrow{SP}\wedge\vec{s}\right\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\|(x-0\,,y-0\,,z-0)_{\mathcal{E}}\wedge(1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}}\|}{\|(1\,,0\,,1)_{\mathcal{E}}\|}.$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ???, segue que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SP} \wedge \vec{s} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y \cdot \vec{e}_1 - (x - z) \cdot \vec{e}_2 + (-y) \cdot \vec{e}_3 \\ &= (y\,, z - x\,, -y)_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} d(P, s) &= \frac{\|(y\,, z-x\,, -y)_{\mathcal{E}}\|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{y^2 + (z-x)^2 + (-y)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2\,y^2 + (z-x)^2}}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Finalmente, temos que

$$d(P, A) \overset{(10.26)\text{ e }(10.19)}{=} \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}\,. \tag{10.32}$$

Substituindo (10.30), (10.31) e (10.32) em (10.27) obteremos:

$$\frac{\sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2\,y^2 + (z-x)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2},$$

que é equivalente ao sistema (não-linear)

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2\,y^2 + (z-x)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \end{cases}.$$

Resolvendo-se o sistema acima (será deixado como exercício para o leitor), obteremos:

$$\begin{cases} z + x = 2 \\ y = -2 + \sqrt{6} \end{cases}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z + x = 2 \\ y = -2 - \sqrt{6} \end{cases}.$$

Considerando-se

$$x = \lambda$$

nos sistemas acima obteremos

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \sqrt{6} \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - \sqrt{6} \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas $\underline{r}$, $\underline{s}$ e do ponto $\underline{A}$ é formado por duas retas, que denotaremos por $\underline{r_1}$ e $\underline{r_2}$, que têm equações vetoriais, em relação ao sistema de coordenadas Σ, dadas por :

$$r_1 : (x, y, z)_\Sigma = \left(0, -2+\sqrt{6}, 2\right)_\Sigma + \lambda \cdot (1, 0, -1)_\mathcal{E} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : (x, y, z)_\Sigma = \left(0, -2-\sqrt{6}, 2\right)_\Sigma + \lambda \cdot (1, 0, -1)_\mathcal{E}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como exercício para o leitor temos o:

Exercício 10.2.1 *Obtenha uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, que é paralela a reta $\underline{s}$, está contida no plano $\underline{\pi}$ e dista $\dfrac{\sqrt{20}}{3}$ u.c. do ponto $\underline{A}$, dados, em relação ao sistema de coordenadas Σ, por:*

$$\begin{aligned} &s : (x, y, z)_\Sigma = (1, 1, 0)_\Sigma + \lambda \cdot (2, 1, 2)_\mathcal{E}, \ \textit{para } \lambda \in \mathbb{R}, \\ &\pi : x - 4y + z = 0, \\ &A \doteq (1, 0, 1)_\Sigma . \end{aligned}$$

Observação 10.2.2 *Para o caso análogo no plano, fixemos um sistema de cooredenadas ortogonal no plano,*

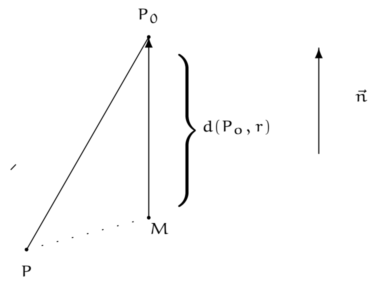
$$\Gamma = (O, \mathcal{E}) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2).$$

Com isto, a distância entre um ponto $\underline{P_o}$ a uma reta $\underline{r}$, que será indicada por $d(P_o, r)$, no plano, dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Γ, por :

$$P_o \doteq (x_o, y_o)_\Gamma \quad \textit{e} \quad r : X = R + \lambda \cdot \vec{r}, \ \textit{para } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{10.33}$$

onde o $\underline{R}$ pertence à reta $\underline{r}$ e o vetor $\vec{r} \neq \vec{O}$ é um vetor diretor da reta $\underline{r}$, pode ser obtida da seguinte forma:

Seja $\underline{P}$ um ponto da reta $\underline{r}$ e encontremos a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{PP_o}$ na direção do vetor normal unitário $\underline{\vec{n}}$ à reta $\underline{r}$ (veja a figura abaixo).



Notemos que, a norma da projeção acima será a distância $d(P_o, \pi)$.

Como os sistema de coordenadas Γ é ortogonal, de (3.132), segue que:

$$\begin{aligned} d(P_o, r) &\overset{\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \textit{ é unitário}}{=} \left\| \left(\overrightarrow{PP_o} \bullet \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \overrightarrow{PP_o} \bullet \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right| \underbrace{\left\| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\|}_{=1} = \frac{\left| \overrightarrow{PP_o} \bullet n \right|}{\|\vec{n}\|}, \end{aligned}$$

ou seja, a distância do ponto $\underline{P_o}$ *ao plano* $\underline{\pi}$ *será:*

$$d(P_o, r) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_o} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}, \tag{10.34}$$

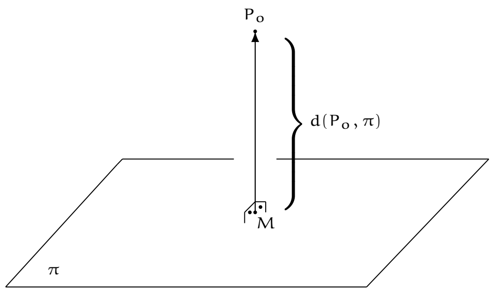
onde o vetor $\underline{\vec{n}}$ *é um vetor normal à reta* $\underline{r}$ *e o ponto* $P \in \pi$ *.*

10.3 Distância de um Ponto a um Plano

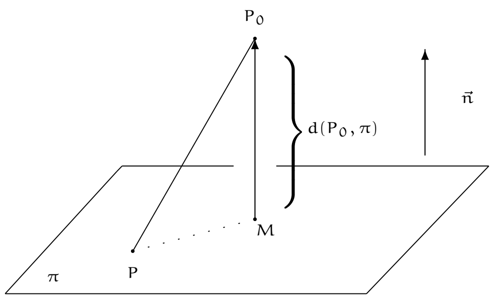
Nosso objetivo é encontrar uma expressão para a distância de um ponto a um plano, no espaço.

Temos a

Definição 10.3.1 *Seja* $\underline{P_o}$ *um ponto e* $\underline{\pi}$ *um plano no espaço, indicaremos a* **distância do ponto $\underline{P_o}$ ao plano $\underline{\pi}$**, *por* $d(P_o, \pi)$ *(veja figura abaixo).*



Seja $\underline{P}$ um ponto do plano $\underline{\pi}$ e encontremos a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{PP_o}$ na direção do vetor normal unitário $\underline{\vec{n}}$ do plano $\underline{\pi}$ (veja a figura abaixo).



Notemos que, a norma da projeção acima será a distância $d(P_o, \pi)$.

Como os sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição (3.10.3) e da Definição (3.10.3), segue que:

$$d(P_o, \pi) \overset{\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \text{ é unitário}}{=} \left\| \left(\overrightarrow{PP_o} \bullet \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\|$$

$$= \left|\overrightarrow{PP_o} \bullet \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right| \underbrace{\left\|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\|}_{=1} = \frac{\left|\overrightarrow{PP_o} \bullet n\right|}{\|\vec{n}\|},$$

ou seja, a distância do ponto $\underline{P_o}$ ao plano $\underline{\pi}$ será:

$$d(P_o, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_o} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}, \tag{10.35}$$

onde o vetor $\underline{\vec{n}}$ é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ e o ponto $P \in \pi$.

Observação 10.3.1

1. *Se uma equação geral do plano* $\underline{\pi}$ *é dada, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, por*

$$\pi : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

tem a seguinte propriedade:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\,,$$

isto é, o vetor normal ao plano

$$\vec{n} \doteq (a\,, b\,, c)_{\mathcal{E}}$$

for unitário, diremos que a equação acima é a **<u>equação geral do plano π na forma normal</u>**.

2. *Se a equação geral do plano* $\underline{\pi}$ *é dada, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal* Σ*, por:*

$$\pi : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$

está na forma normal, então a distância de um ponto $\underline{P_o}$ *ao plano* $\underline{\pi}$ *será dada por:*

$$d(P_o, \pi) = \left|\overrightarrow{PP_o} \bullet n\right|\,, \tag{10.36}$$

se $P \in \pi$*, pois*

$$\|\vec{n}\| = 1\,.$$

3. *Se temos as coordenadas ponto, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, dada por*

$$P_o \doteq (x_o\,, y_o\,, z_o)\,, \tag{10.37}$$

uma equaação geral do plano $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, é dada por:*

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \tag{10.38}$$

e o ponto $P \in \pi$ *tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, dada por*

$$P \doteq (x_1\,, y_1\,, z_1)\,, \tag{10.39}$$

então

$$\begin{aligned}
d(P_o, \pi) &= \frac{\left|\overrightarrow{PP_o} \bullet n\right|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|(x_1 - x_o\,, y_1 - y_o\,, z_1 - z_o)_{\mathcal{E}} \bullet (a\,, b\,, c)_{\mathcal{E}}|}{\|(a\,, b\,, c)_{\mathcal{E}}\|} \\
&= \frac{|a\,(x_1 - x_o) + b\,(y_1 - y_o) + c\,(z_1 - z_o)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|-[a\,x_o - b\,y_o - c\,z_o - (a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1)]|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\overset{P\in\pi \Leftrightarrow a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 = -d}{=} \frac{|-[a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o - (-d)]|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,
\end{aligned}$$

isto é, a distância do ponto $\underline{P_o}$ *ao plano* $\underline{\pi}$*, dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, por* (10.37) *e* (10.38)*, respectivamente, será dada por:*

$$d(P_o, \pi) = \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{10.40}$$

4. *Se a equação geral do plano* $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, estiver na forma norma, isto é,*

$$a^2 + b^2 + c^2 = \|\vec{n}\|^2 = 1\,,$$

a distância do ponto $\underline{P_o}$ *ao plano* $\underline{\pi}$*, dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, por* (10.37) *e* (10.38)*, respectivamente, será dada por:*

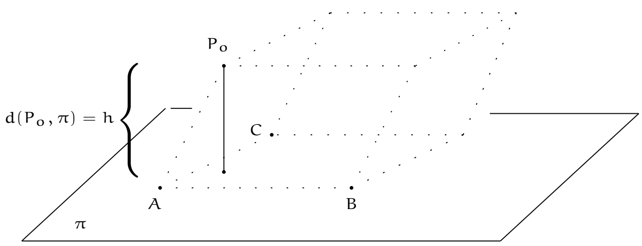
$$d(P_o, \pi) = |a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|\,. \tag{10.41}$$

5. *Um outro modo de calcularmos a distância do ponto* $\underline{P_o}$ *ao plano* $\underline{\pi}$ *seria:*

Escolhamos três pontos A, B, C*, não colineares, pertencentes ao plano* $\underline{\pi}$ *(veja a figura abaixo).*

Seja $\underline{h}$ *o valor da altura do paralelepípedo, relativa a base que está no plano* $\underline{\pi}$*, isto é, (veja a figura abaixo)*

$$h = d(P_o, \pi)\,.$$



Sabemos que o volume, que indicaremos por $\underline{\mathcal{V}}$, do paralelepípedo que tem como quatro dos seus pontos, A, B, C e P_o, pode ser dado em termos do produto misto, a saber:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \left|\left[\overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}\,, \overrightarrow{AP_o}\right]\right| \\ &= \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AP_o}\right|. \end{aligned} \tag{10.42}$$

Sabemos também que a área, que indeicaremos por $\underline{\mathcal{A}}$, da base do paralelepípedo acima, pode ser dada em termos do produto vetorial, a saber:

$$\mathcal{A} = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| . \tag{10.43}$$

Como o volume do paralelepípedo é dada por:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot h\,, \tag{10.44}$$

de (10.42), (10.43) *e* (10.44), *segue que*

$$\begin{aligned}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AP_o}\right| &\overset{(10.42)}{=} \mathcal{V} \overset{(10.44)}{=} \mathcal{A} \cdot h \\ &\overset{(10.43)}{=} \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| \cdot h\,. \end{aligned} \tag{10.45}$$

Como $h = d(P_o, \pi)$, *segue que*

$$d(P_o, \pi) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AP_o}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|}\,. \tag{10.46}$$

Observemos que, na cituação acima, o vetor

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$ e assim a expressão (10.46) é semelhante a (10.35).

Apliquemos estas idéias aos seguintes exemplos:

Exemplo 10.3.1 *Calcular a distância do ponto $\underline{P_o}$ ao plano $\underline{\pi}$ dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por*

$$P_o \doteq (1\,, 2\,, -1)_\Sigma \tag{10.47}$$

e

$$\pi \,:\, 3\,x - 4\,y - 5\,z + 1 = 0\,, \tag{10.48}$$

respectivamente.

Resolução:

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, segue, de (10.48), que o vetor

$$\vec{n} \doteq (3\,,-4\,,-5)_{\mathcal{E}} \tag{10.49}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Logo, de (10.40), teremos:

$$\begin{aligned} d(P_o,\pi) &\overset{(10.40)}{=} \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &\overset{(10.47)\text{ e }(10.48)}{=} \frac{|3\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + (-5)\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{50}\,\text{u.c.}. \end{aligned}$$

Portanto a distância do ponto $\underline{P_o}$ ao plano $\underline{\pi}$ será igual à $\dfrac{\sqrt{50}}{50}$ u.c. (unidades de comprimento).

Podemos aplicar também ao:

Exemplo 10.3.2 *Encontrar a equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, que contém a reta $\underline{r}$ e dista $\sqrt{2}$ u.c. do ponto $\underline{P_o}$, dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por*

$$r\,:\,(x\,,y\,,z)_\Sigma = (1\,,0\,,1)_\Sigma + \lambda\cdot(1\,,1\,,-1)_{\mathcal{E}}\,,\ \textit{para } \lambda\in\mathbb{R} \tag{10.50}$$

e

$$P_o \doteq (1\,,1\,,-1)_\Sigma\,, \tag{10.51}$$

respectivamente.

Resolução:

Como a reta $\underline{r}$ está contida no plano $\underline{\pi}$, temos que o plano $\underline{\pi}$ deverá pertencer ao feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$.

Para determinar a equação do feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$, precisaremos encontrar dois planos distintos que contenham a reta $\underline{r}$, ou ainda, descrever a reta $\underline{r}$ com a intersecção de dois planos concorrentes e distintos.

Para isto observemos que, de (10.50), segue que:

$$r\,:\,\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}\,,\ \text{para } \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

$$\text{como } \lambda = y \text{ teremos:}\quad r\,:\,\begin{cases} x = 1+y \\ z = 1-y \end{cases}\,,$$

$$\text{isto é,}\quad r\,:\,\begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}\,, \tag{10.52}$$

ou seja, a reta $\underline{r}$ está sendo descrita como a intersecção dos planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por:

$$\pi_1 : x - y - 1 = 0$$
$$\pi_2 : y + z - 1 = 0,$$

que são dois planos concorrentes e distintos (verifique!).

Logo a equação do feixe de planos que contém a reta $\underline{r}$ será dada por:

$$\alpha\,(x - y - 1) + \beta\,(y + z - 1) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \alpha x + (\beta - \alpha)\,y + \beta\,z + (-\alpha - \beta) = 0,$$

onde

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,.$$

Logo o plano $\underline{\pi}$ terá uma equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, da forma:

$$\pi : \alpha\,x + (\beta - \alpha)\,y + \beta\,z + (-\alpha - \beta) = 0 \tag{10.53}$$

onde

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,.$$

Como o sistema de coordendas Σ é ortogonal, sabemos que vetor

$$\vec{n} \doteq (\alpha\,, \beta - \alpha\,, \beta)_{\mathcal{E}} \tag{10.54}$$

será um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Mas

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = d(P_o, \pi) &\overset{(10.40)}{=} \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&\overset{(10.51)\text{ e }(10.54)}{=} \frac{|\alpha \cdot 1 + (\beta - \alpha) \cdot 1 + \beta \cdot (-1) - \alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - \alpha)^2 + \beta^2}} \\
&= \frac{|-\alpha - \beta|}{\sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{isto é,} \quad & 2\left(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2\right) = (\alpha + \beta)^2\,, \\
\text{ou seja,} \quad & 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & 3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 3\beta^2 = 0\,, \\
& 3(\alpha - \beta)^2 = 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha = \beta\,.$$

Assim, a equação geral do plano $\underline{\pi}$ procuradao será, dada, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por :

$$\begin{aligned}
& \pi : \alpha\,x + (\alpha - \alpha)\,y + \alpha\,z + (-\alpha - \alpha) = 0\,, \\
\text{ou seja,} \quad & \pi : \alpha\,x + \alpha\,z - 2\alpha = 0\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & \pi : \alpha\,(x + z - 2) = 0\,.
\end{aligned}$$

Tomando-se, por exemplo,

$$\alpha = 1\,,$$

segue que o plano $\underline{\pi}$ procurado, terá equação geral dada, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por :

$$\pi\,:\,x + z - 2 = 0\,.$$

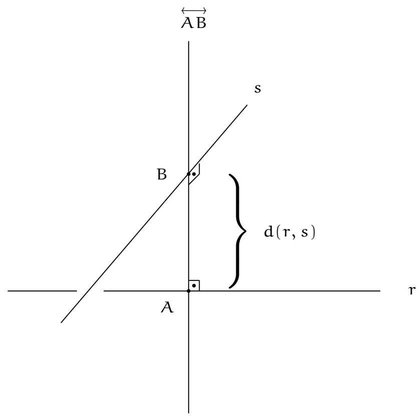
10.4 Distância entre duas Retas

Nesta seção obteremos uma expressão para a

Definição 10.4.1 **distância entre duas retas, $\underline{r}$ e $\underline{s}$** *do espaço, que será indicada por* $\underline{d(r,s)}$.

No final desta seção trataremos do caso em que as retas estão contidas em um plano.

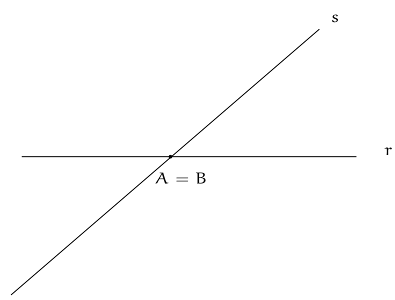
Observemos que a distância entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ será a distância entre os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ que pertencem as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente, onde a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é uma reta perpendicular as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (veja a figura abaixo).



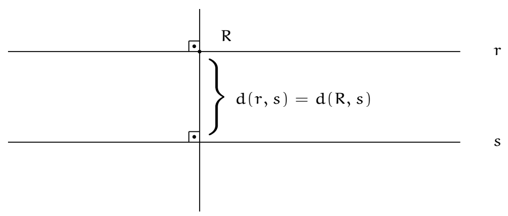
Poderemos ter as seguintes situações:

1. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são concorrentes os pontos $\underline{A}$ e $\underline{B}$ serão coincidentes e assim (veja a figura abaixo)

$$d(r,s) = 0\,. \tag{10.55}$$



2. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são paralelas (não coincidentes) e $\underline{R}$ é um ponto que pertence à reta $\underline{r}$, deveremos ter
$$d(r, s) = d(R, s)\,, \tag{10.56}$$
que vimos como calcular (veja (10.8)), ou ainda, se o ponto $\underline{S}$ pertence à reta $\underline{s}$, deveremos ter
$$d(r, s) = d(S, r)\,. \tag{10.57}$$
Neste caso, observamos que toda reta perpendicular à reta $\underline{r}$ será perpendicular a reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo).



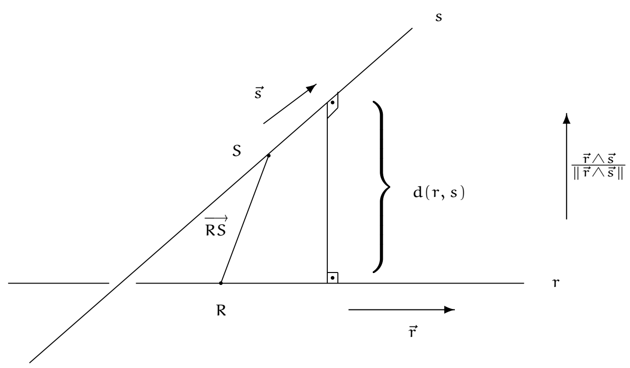
3. Se as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são reversas, consideremos $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$, dois vetores diretores das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.

   Observemos que, como as as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ são reversas, os vetores $\vec{r}, \vec{s}$ serão L.I. em V^3.

   Logo o vetor
$$\vec{r} \wedge \vec{s}$$
   será um vetor não nulo e ortogonal às retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (pois, como sabemos, o vetor $\vec{r} \wedge \vec{s} \neq \vec{O}$ é ortogonal aos vetores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$).

   Escolha um ponto $\underline{R}$ pertencente à reta $\underline{r}$ e um ponto $\underline{S}$ pertencente à reta $\underline{s}$.

   A norma da projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{RS}$, na direção do vetor unitário $\dfrac{\vec{r} \wedge \vec{s}}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}$, será igual a distância da reta $\underline{r}$ à reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo).



Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, segue, da Proposição (3.10.3) e da Definição (3.10.3), que a distância da reta $\underline{r}$ à reta $\underline{s}$ será dada por:

$$d(r,s) = \left| \frac{\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s})}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \right| ,$$

$$\text{ou seja,} \quad d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s})\right|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \qquad (10.58)$$

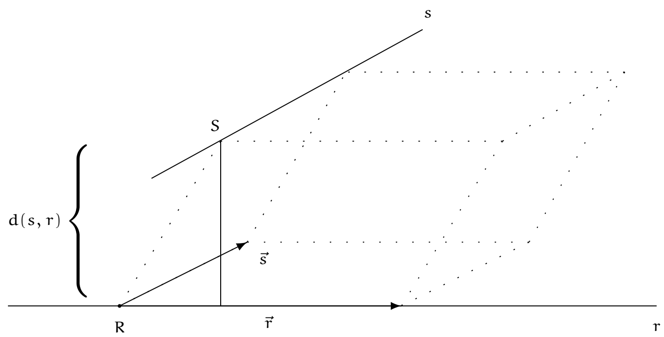
Observação 10.4.1

1. *Observemos que a expressão acima à esquerda, é o quociente entre os volume do paralelepípedo determinado pelos vetores*

$$\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS},$$

dividido pela área do paralelogramo determinado pelos vetores (veja a figura abaixo)

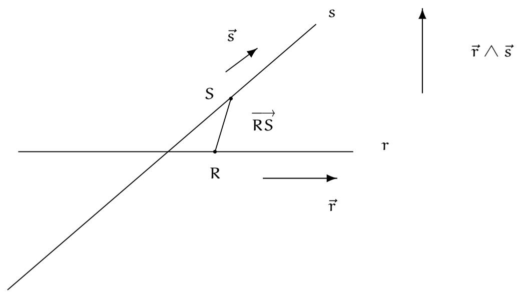
$$\vec{r}, \vec{s}.$$



Logo isto nos dará a altura do paralelepípedo que será a distância entre as retas reversas $\underline{r}$ e $\underline{s}$.

2. *A expressão acima também pode ser utilizada quando as retas são concorrentes. De fato, pois neste caso teremos (veja a figura abaixo)*

$$\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s}) = 0 .$$



Logo, utilizando a expressão (10.58), teremos que

$$d(r, s) = 0\,. \tag{10.59}$$

3. *Porém a expresão acima* **não** *serve para o caso em que as retas são paralelas (não coincidentes).*

   De fato, pois neste caso

   $$\vec{r} \wedge \vec{s} = \vec{O}$$

   (pois os vetores $\vec{r}, \vec{s}$ são L.D. em V^3) e sabemos que

   $$d(r, s) \neq 0\,,$$

   pois as retas são paralelas e não coincidentes.

4. *Resumindo: sejam $\vec{r}$, $\vec{s}$ vetores diretores das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, respectivamente.*

   (a) *Se os vetores $\vec{r}, \vec{s}$ são L.I. em V^3, temos que*

   $$d(r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s})\right|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}\,, \tag{10.60}$$

   onde os pontos $R\,, S$ são pontos da reta $\underline{r}$ e da reta $\underline{s}$, respectivamente.

   (b) *Se os vetores $\vec{r}, \vec{s}$ são L.D. em V^3, temos que*

   $$d(r, s) = d(R, s) \tag{10.61}$$

   onde o ponto $\underline{R}$ é um ponto da reta $\underline{r}$ ou

   $$d(r, s) = d(S, r) \tag{10.62}$$

   onde o ponto $\underline{S}$ é um ponto da reta $\underline{s}$.

Apliquemos as idéias acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 10.4.1 *Calcular a distância entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, dadas, , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por*

$$r\,:\,\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3\,z - 2 \end{cases} \tag{10.63}$$

e

$$s\,:\,\begin{cases} 3\,x - 2\,z + 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad ,. \tag{10.64}$$

Resolução:

Encontremos as equações vetoriais da reta $\underline{r}$ e da reta $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ.

Notemos que, tanto a reta $\underline{r}$ quanto a reta $\underline{s}$, são dadas como intersecção de dois planos (dados pelas equações em (10.63) e (10.64), respctivamente).

Uma equação vetorial para a $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ.

Considerando-se-se

$$z = \lambda$$

em (10.63), obteremos

$$r : \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 3\lambda - 2 \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = -1 + 1\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 0 + 1\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, o ponto, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$R \doteq (-1\,, -2\,, 0)_\Sigma \tag{10.65}$$

pertence à reta $\underline{r}$ e o vetor, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{r} \doteq (1\,, 3\,, 1)_\mathcal{E} \tag{10.66}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{r}$.

Assim sua equação vetorial será:

$$r : X = R + \lambda \cdot \vec{r}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uma equação vetorial para a $\underline{s}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ.

Considerando-se-se

$$z = \lambda$$

em (10.63), obteremos

$$r : \begin{cases} 3x - 2\lambda + 3 = 0 \\ y - \lambda - 2 = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = -1 + \dfrac{2}{3}\lambda \\ y = 2 + 1\lambda \\ z = 0 + 1\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, o ponto, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$S \doteq (-1\,, 2\,, 0)_\Sigma \tag{10.67}$$

pertence à reta $\underline{s}$ e e o vetor, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{s} \doteq \left(2\,, 1\,, \frac{2}{3}\right)_\mathcal{E} \tag{10.68}$$

será um vetor diretor da reta $\underline{s}$.

Assim sua equação vetorial será

$$s \,:\, X = S + \lambda \cdot \vec{s}\,, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Consideremos o ponto

$$R = (-1\,,-2\,,0)_\Sigma\,,$$

que pertence à reta $\underline{r}$ e o ponto

$$S = (-1\,,2\,,0)_\Sigma\,,$$

que pertence à reta $\underline{s}$.

Notemos que, de (10.66) e (10.68), segue que os vetores

$$\vec{r}\,,\vec{s}$$

são L.I. em V^3, logo as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ serão concorrentes ou reversas, ou seja, para calcular a distânicas entre elas poderemos utilizar a expressão (10.60), ou seja,

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s})\right|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}\,.$$

Mas

$$\overrightarrow{RS} = S - R \overset{(10.67) \text{ e } (10.65)}{=} (0\,,-4\,,0)_{\mathcal{E}} \tag{10.69}$$

e como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, da Proposição ???, segue que

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{s} &\overset{(10.66) \text{ e } (10.68)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \vec{e}_1 - \frac{1}{3} \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = \left(-2\,,-\frac{1}{3}\,,-1\right)_{\mathcal{E}}\,. \end{aligned} \tag{10.70}$$

Logo

$$\begin{aligned} d(r,s) &\overset{(10.60)}{=} \frac{\left|\overrightarrow{RS} \bullet (\vec{r} \wedge \vec{s})\right|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|} \\ &\overset{(10.69) \text{ e } (10.70)}{=} \frac{\left|(0\,,-4\,,0)_{\mathcal{E}} \bullet \left(-2\,,-\frac{1}{3}\,,-1\right)_{\mathcal{E}})\right|}{\left\|\left(-2\,,-\frac{1}{3}\,,-1\right)_{\mathcal{E}}\right\|} \\ &= \frac{4}{\sqrt{46}} = \frac{2\sqrt{46}}{23}\,. \end{aligned}$$

Logo a distância da reta $\underline{r}$ à reta $\underline{s}$ será igual à $\dfrac{2\sqrt{46}}{23}$ u.c. (unidades de comprimento).

Deixaremos para o leitor o seguinte:

Exercício 10.4.1 *Dados o ponto* $\underline{P_o}$*, o plano* $\underline{\pi}$ *e a reta* $\underline{s}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, por*

$$P_o \doteq (1\,,3\,-1)_\Sigma\,,$$

$$\pi : x + z - 2 = 0$$

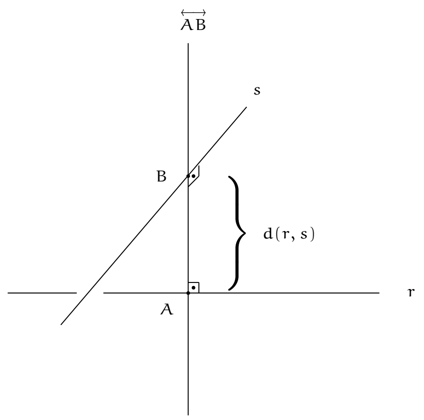
e

$$s : x - z = y + 2 = z - x + 4\,,$$

obtenha as equações paramétricas de uma reta $\underline{r}$*, , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* Σ*, que contenha o ponto* $\underline{P_o}$*, seja paralela ao plano* $\underline{\pi}$ *e dista* $3\,$u.c. *da reta* $\underline{s}$*.*

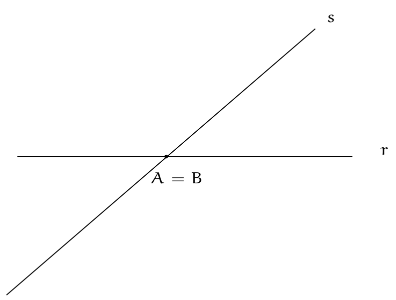
Para calcular a distância entre duas retas no plano temos a seguinte:

Observação 10.4.2 *Como no caso do espaço, no plano notamos que a distância entre as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *será a distância entre os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *que pertencem as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$*, respectivamente, onde a reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *é uma reta perpendicular as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *(veja a figura abaixo).*



No plano, poderemos ter as seguintes duas situações:

1. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são concorrentes os pontos* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *serão coincidentes e assim (veja a figura abaixo)*
$$d(r, s) = 0\,. \tag{10.71}$$



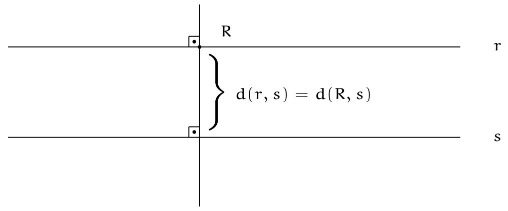
2. *Se as retas* $\underline{r}$ *e* $\underline{s}$ *são paralelas (não coincidentes) e* $\underline{R}$ *é um ponto que pertence à reta* $\underline{r}$*, deveremos ter*
$$d(r, s) = d(R, s)\,, \tag{10.72}$$

que vimos como calcular, ou ainda, se o ponto $\underline{S}$ pertence à reta $\underline{s}$, deveremos ter

$$d(r, s) = d(S, r)\,, \tag{10.73}$$

que podem ser encontradas utilizando-se (10.34).

Neste caso, observamos que toda reta perpendicular à reta $\underline{r}$ será perpendicular a reta $\underline{s}$ (veja a figura abaixo).



10.5 Distância de uma Reta a um Plano

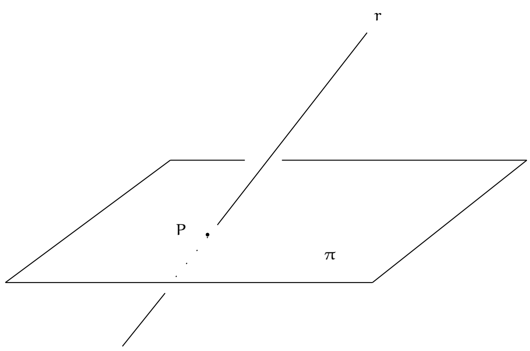
Nesta seção obtermos a

Definição 10.5.1 **<u>distância de uma reta $\underline{r}$ a um plano $\underline{\pi}$</u>**, *que indicaremos por* $d(r, \pi)$.

Temos duas possibilidades:

1. Se a reta $\underline{r}$ intercepta o plano $\underline{\pi}$, isto é, $r \cap \pi = \{P\}$ (veja a figura abaixo), teremos:

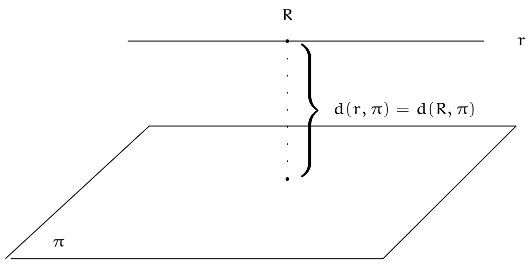
$$d(r, \pi) = 0\,. \tag{10.74}$$



2. Se a reta $\underline{r}$ é paralela (não contida) ao plano $\underline{\pi}$, escolhendo-se um ponto $\underline{R}$ pertencente à reta $\underline{r}$ deveremos ter (veja a figura abaixo)

$$d(r, \pi) = d(R, \pi)\,, \tag{10.75}$$

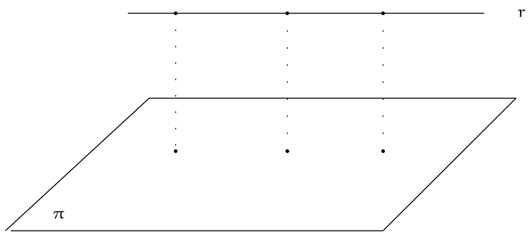
que aprendemos a calcular na seção 10.3.



Observação 10.5.1 *Resumindo, se $r \cap \pi \neq \emptyset$, temos que a distância da reta $\underline{r}$ ao plano $\underline{\pi}$, será igual a zero.*

No caso a reta $\underline{r}$ seja paralela (não contida) ao plano $\underline{\pi}$, a distância da reta $\underline{r}$ ao plano $\underline{\pi}$, será igual a distância de qualquer ponto da reta $\underline{r}$ ao plano $\underline{\pi}$.

Observemos que, neste segundo cao, todos os pontos da reta $\underline{r}$ estarão à uma mesma distância do plano $\underline{\pi}$, mas **nem todos** *os pontos do plano $\underline{\pi}$ estarão a uma mesma distância da reta $\underline{r}$.*



Consideremos os exemplos:

Exemplo 10.5.1 *Determinar a distância da reta $\underline{r}$ ao plano $\underline{\pi}$ dadas, em relação ao sistema de cooredenadas ortogonal Σ, por:*

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases} \tag{10.76}$$

e

$$\pi : x - 2y - z - 1 = 0 . \tag{10.77}$$

Resolução:

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, de (10.77), segue que o vetor

$$\vec{n} \doteq (1, -2, -1)_{\mathcal{E}} \tag{10.78}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi}$.

Notemos que o sistema linear equações (10.76) nos fornece a reta $\underline{r}$ como um intersecção de dois planos (cujas equações gerais, são as equações do sistema linear (10.76), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ).

Tomando-se

$$z = \lambda$$

no sistem linear (10.76), obteremos:

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 - \frac{1}{2}\lambda \\ z = 0 + 1\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja, o ponto $\underline{R}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$R \doteq (1, 1, 0)_\Sigma \tag{10.79}$$

pertence à reta $\underline{r}$ e o vetor $\underline{\vec{r}}$ cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)_\mathcal{E} \tag{10.80}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{r}$, isto é, uma equação vetorial da reta $\underline{r}$ será:

$$r : X = R + \lambda \cdot \vec{r}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$\vec{n} \bullet \vec{r} \overset{(10.78) \text{ e } (10.80)}{=} (1, -2, -1)_\mathcal{E} \bullet \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)_\mathcal{E} = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Logo, da seção 7.2 (veja a Observação (7.2.2)), sabemos que a reta $\underline{r}$ intercepta o plano $\underline{\pi}$, portanto

$$d(r, \pi) = 0.$$

Como exercíco para o leitor temos o:

Exercício 10.5.1 *Encontrar uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de cooredenadas ortogonal Σ, que contém os A, B e que dista $\underline{1}$ da reta $\underline{r}$, dados, em relação ao sistema de cooredenadas ortogonal Σ, por*

$$A \doteq (1, 1, -1)_\Sigma \quad e \quad B \doteq (2, 1, 1)_\Sigma \tag{10.81}$$

e

$$r : (x, y, z)_\Sigma = (1, 0, 2)_\Sigma + \lambda \cdot (1, 0, 2)_\mathcal{E}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{10.82}$$

10.6 Distância entre dos Planos

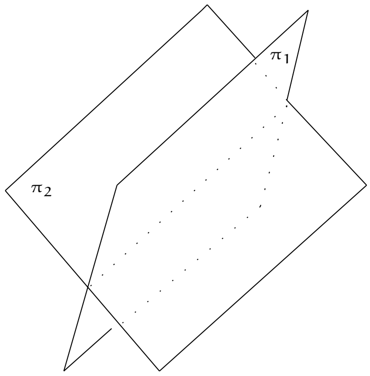
Nesta seção encontraremos uma expressão para a

Definição 10.6.1 <u>**distância entre dois planos** $\underline{\pi_1}$ **e** $\underline{\pi_2}$</u>*, que será indicada por* $d(\pi_1, \pi_2)$.

Temos duas possibilidades:

1. Se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são concorrentes, então teremos (veja a figura abaixo)

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0. \tag{10.83}$$



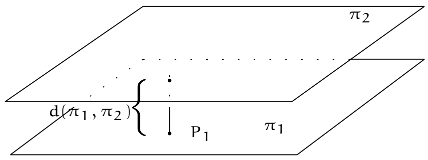
2. Se os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são paralelos (não coincidentes) e o ponto $\underline{P_1}$ pertence ao plano $\underline{\pi_1}$ (veja a figura abaixo), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)\,, \tag{10.84}$$

ou, se o ponto $\underline{P_2}$ pertence ao plano $\underline{\pi_2}$, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1)\,. \tag{10.85}$$

Lmebremos que a distânica de um ponto a um plano foi tratada anteriormente na seção 10.3.



Consideremos o seguinte:

Exemplo 10.6.1 *Calcular a distância do plano $\underline{\pi_1}$ ao plano $\underline{\pi_2}$, dados, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, por:*

$$\pi_1 : -3\,x - 6\,y - 9\,z + 6 = 0 \quad e \quad \pi_2 : x + 2\,y + 3\,z - 1 = 0\,. \tag{10.86}$$

Resolução:

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal segue, de (10.86), que o vetor $\underline{\vec{n}_1}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são:

$$\vec{n}_1 \doteq (-3\,,-6\,,-9)_{\mathcal{E}} \tag{10.87}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi_1}$ e o vetor $\underline{\vec{n}_2}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são:

$$\vec{n}_2 \doteq (1\,,2\,,3)_{\mathcal{E}} \tag{10.88}$$

é um vetor normal ao plano $\underline{\pi_2}$.

Notemos que, de (10.87) e (10.88) segue que,

$$\vec{n}_1 = -3 \cdot \vec{n}_2 \quad \text{e} \quad d_1 = 6 \neq 3 = -3\, d_2 \,.$$

Logo, da seção 7.3 (ou ainda, a Observação (7.3.1) item 7.), segue que os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são paralelos e distintos.

Portanto,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)\,,$$

onde o ponto $\underline{P_1}$ pertence ao plano $\underline{\pi_1}$.

Em particular, notemos que o ponto, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas orotognal Σ, são dadas por:

$$P_1 \doteq (2\,,0\,,0)_\Sigma \tag{10.89}$$

pertence ao plano $\underline{\pi_1}$ (verifque !).

Assim

$$\begin{aligned} d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) &\overset{(10.40),(10.89) \text{ e } (10.86)}{=} \frac{|2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}\,. \end{aligned}$$

Portanto a distância entre os planos $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ é igual a $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$ u.c. (unidades de comprimento).

10.7 Distâncias entre Conjuntos

Tudo o que vimos anteriormente pode ser olhado do seguinte ponto de vista geral:

Definição 10.7.1 *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois subconjuntos, não vazios, do espaço (ou do plano).*

Definimos a **distância entre os conjuntos Ω_1 e Ω_2**, *que será indicada por,* $d(\Omega_1, \Omega_2)$ *como sendo*

$$d(\Omega_1, \Omega_2) \doteq \inf\{d(P_1, P_2)\,;\, P_1 \in \Omega_1\,, P_2 \in \Omega_2\}\,. \tag{10.90}$$

Observação 10.7.1

1. *Observemos que o conjunto*

$$\{d(P_1, P_2)\,,;\, P_1 \in \Omega_1\,, P_2 \in \Omega_2\}$$

   é não vazio e limitado inferiomente por zero.

   Logo o ínfimo em (10.90) existe em $[0, \infty)$.

2. *Se*

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset\,,$$

   então

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 0\,.$$

De fato, pois existirá um ponto

$$P \in \Omega_1 \cap \Omega_2 .$$

Assim

$$d(P, P) = 0 , \quad \textit{mostrando que} \quad d(\Omega_1, \Omega_2) \leq 0 .$$

Mas, de (10.90) *temos que*

$$d(\Omega_1, \Omega_2) \geq 0 ,$$

o que implicará

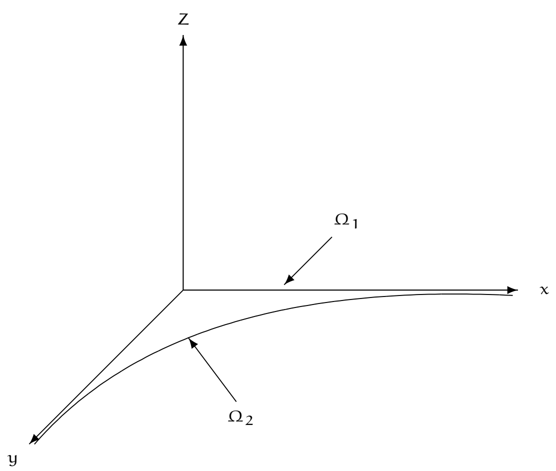
$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 0 .$$

3. **<u>Não</u>** *vale a recíproca do resultado acima, isto é, existem subcojuntos* Ω_1, Ω_2 *do espaço (ou do plano) tais que*

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 0 , \quad \textit{mas} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset .$$

Para ver um exemplo que isto pode ocorrer, consideremos um sistema de coordenadas orotognal Σ *no espaço e sejam (veja figura abaixo)*

$$\Omega_1 \doteq \{(x, 0, 0)_\Sigma ; x \in \mathbb{R}\} \quad e \quad \Omega_2 \doteq \left\{ \left(x, \frac{1}{x}, 0 \right)_\Sigma ; x > 0 \right\} .$$



Temos que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad e \quad d(\Omega_1, \Omega_2) = 0 .$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Capítulo 11

Mudança de Coordenadas

Em diversos problemas relacionados à Geometria, somos levados a mudar o sistema de coordenadas

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,,$$

dado inicialmente no espaço, para um novo sistema de coordenadas

$$\Sigma' = (O\,,\mathcal{F}) = \left(O'\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)\,,$$

mais conveniente, que venha facilitar a resolução do nosso problema.

Ao final de cada uma das seções, trataremos das situações análogas, para o plano.

Neste capítulo veremos como se alteram as coordenadas de pontos, ou mais geralmente lugares geométricos, quando mudamos o sistema de coordenadas no espaço (e no plano).

11.1 Mudança de Coordenadas no Espaço

Sejam

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3) \quad \text{e} \quad \Sigma' = (O\,,\mathcal{F}) = \left(O'\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

dois sistemas de coordenadas no espaço.

Utilizaremos a terna

$$(x\,,y\,,z)_\Sigma$$

para indicarmos as coordenadas de um ponto em relação ao sistema de coordenadas Σ (dito antigo, ou inicial) e a terna

$$(u\,,v\,,w)_{\Sigma'}$$

para indicarmos as coordenadas de um ponto em relação ao sistema de coordenadas Σ' (dito novo, ou final).

Como

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \left(\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right)$$

denotam duas bases de V^3, podemos obter a matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$, isto é, a matriz quadrada

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

onde,

$$\begin{cases} \vec{f}_1 & = a_{11} \cdot \vec{e}_1 + a_{21} \cdot \vec{e}_2 + a_{31} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 & = a_{12} \cdot \vec{e}_1 + a_{22} \cdot \vec{e}_2 + a_{32} \cdot \vec{e}_3 \, . \\ \vec{f}_3 & = a_{13} \cdot \vec{e}_1 + a_{23} \cdot \vec{e}_2 + a_{33} \cdot \vec{e}_3 \end{cases} \tag{11.2}$$

Suponhamos que as coordenadas da nova origem $\underline{O'}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ (isto, antigo), sejam dadas por:

$$O' \doteq (h\,,k\,,l)_\Sigma \, . \tag{11.3}$$

Deste modo, sabemos que (ver a Definição ??)

$$\overrightarrow{OO'} = (h, k, l)_{\mathcal{E}} \, . \tag{11.4}$$

Seja $\underline{P}$ um ponto qualquer do espaço.

Suponhamos que que as coordenadas da nova origem $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ (isto, antigo), sejam dadas por:

$$P = (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{11.5}$$

e que as coordenadas da nova origem $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ' (isto, novo), sejam dadas por:

$$P = (u\,,v\,,w)_{\Sigma'} \, , \tag{11.6}$$

que, pela Definição ???, é equivalente a:

$$\overrightarrow{OP} = (x\,,y\,,z)_{\mathcal{E}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{O'P} = (u\,,v\,,w)_{\mathcal{F}} \, . \tag{11.7}$$

Logo, em relação ao sistema de coordenadas Σ (antigo), teremos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \\ &\overset{(11.7)}{=} (x\,,y\,,z)_{\mathcal{E}} - (h\,,k\,,l)_{\mathcal{E}} \\ &= (x-h\,,y-k\,,z-l)_{\mathcal{E}} \, . \end{aligned} \tag{11.8}$$

Logo, da Proposição ???, segue que:

$$\left(\overrightarrow{O'P}\right)_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} \left(\overrightarrow{O'P}\right)_{\mathcal{F}} \, , \tag{11.9}$$

que, de (11.1) e (11.7), é equivalente à:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{pmatrix} \, , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = h + a_{11}\,u + a_{12}\,v + a_{13}\,w \\ y = k + a_{21}\,u + a_{22}\,v + a_{23}\,w \\ z = l + a_{31}\,u + a_{32}\,v + a_{33}\,w \end{cases} . \tag{11.10}$$

Com isto temos a:

Definição 11.1.1 *As equações de* (11.10) *serão denominadas* **equações de mudança de sistema de coordenadas, do sistema de coordenadass Σ para o sistema de coordenadas Σ'**.

Observação 11.1.1 *De (11.9), temos que*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix} , \tag{11.11}$$

cujas equações serão denominadas **equações de mudança de sistema de coordenadas, do sistema de coordenadas Σ' para o sistema de coordenadas Σ**.

Com isto podemos obter tanto

$$x\,,y\,,z\,, \quad \textit{em temos de} \quad u\,,v\,,w\,,$$

como também

$$u, v, w \quad \textit{em termos de} \quad x\,,y\,,z\,,$$

ou seja, encontrar as coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ (antigo), conhecendo-se as coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ' (novo), como também, encontrar as coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ' (novo) (utilizando-se (11.11)*), conhecendo-se as coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ (antigo) (utilizando-se* (11.10)*).*

Apliquemos as idéias acima aos exemplos seguintes:

Exemplo 11.1.1 *Encontrar as equações de mudança do sistema de coordenadas*

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

para o sistema de coordenadas

$$\Sigma' = (O'\,,\mathcal{F}) = \left(O'\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\,,\vec{f}_3\right) ,$$

onde

$$O' \doteq (1\,,2\,,-1)_\Sigma \tag{11.12}$$

e

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1 + 2\cdot\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases} . \tag{11.13}$$

Resolução:

Notemos que (11.13), pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + (-1) \cdot \vec{e}_3 \end{cases},$$

ou seja, a matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo, de (11.10), as equação de mudança de sistema de coordenadas, do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ para o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$ serão dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 + 1\,u + 0\,v + 1\,w \\ y = 2 + 0\,u + 0\,v + 2\,w \\ z = -1 + 0\,u + 1\,v + (-1)\,w \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = 1 + u + w \\ y = 2 + 2\,w \\ z = -1 + v - w \end{cases}. \tag{11.14}$$

Exemplo 11.1.2 *Considerando os sistemas de coordenadas do Exemplo (11.1.1) acima, obtenha as coordenadas do ponto $\underline{P}$ em relação ao sistema de coordenadas Σ', sabendo-se que as coordenadas do mesmo, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:*

$$P \doteq (2\,,1\,,-3)_\Sigma\,. \tag{11.15}$$

Além disso, obtenha as coordenadas do ponto $\underline{Q}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, sabendo-se que as coordenadas do mesmo, em relação ao sistema de coordenadas Σ', são dadas por:

$$Q \doteq (0\,,1\,,-1)_{\Sigma'} \tag{11.16}$$

Resolução:

Para obteremos as coordenadas do ponto $\underline{Q}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, sabendo-se que as coordenadas do mesmo, em relação ao sistema de coordenadas Σ', basta aplicarmos as equações (11.14) obtidas no Exemplo (11.1.1) acima, isto é, se as coordenadas do ponto $\underline{Q}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por

$$Q = (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{11.17}$$

então, suas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, devem satisfazer (11.14), ou seja (de (11.16), segue que $u = 0$, $v = 1$ e $w = -1$):

$$\begin{cases} x = 1 + 0 + (-1) = 0 \\ y = 2 + 2\,(-1) = 0 \\ z = -1 + 1 - (-1) = 1 \end{cases},$$

ou seja,

$$Q = (0\,,0\,,1)_\Sigma\,. \tag{11.18}$$

Por outro lado, se as coordenadas do ponto $\underline{P}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ', são dadas por

$$P \doteq (u\,,u\,,w)_{\Sigma'} \tag{11.19}$$

então, suas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas Σ, devem satisfazer (11.14), ou seja (de (11.16), segue que (com $x = 2$, $y = 1$ e $z = -3$), teremos que encontrar as soluções do sistema linear: linear:

$$\begin{cases} 2 = 1 + u + w \\ 1 = 2 + 2w \\ -3 = -1 + v - w \end{cases} \quad , \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} u = \dfrac{3}{2} \\ \\ v = -\dfrac{5}{2} \\ \\ w = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad .$$

A verificação desta última passagem será deixada como exercício para o leitor (veja o apêndice (B) para mais detalhes).

Com isto, teremos que

$$P = \left(\frac{3}{2}\,,-\frac{5}{2}\,,-\frac{1}{2}\right)_\Sigma\,. \tag{11.20}$$

Observação 11.1.2 *Como vimos na seção ???, temos que*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{F}\mathcal{E}} &= (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11.21}$$

onde última passagem será deixada como exercício para o leitor (veja o apêndice (A) para mais detalhes).

Logo, utilizando (11.11)*, no Exemplo* (11.1.1) *acima, de* (11.21) *e* (11.12)*,segue que*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (M_{\mathcal{E}\mathcal{F}})^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix} \overset{h=1,k=2,l=-1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,(x-1) - \frac{1}{2}\,(y-2) + 0\,(z+1) \\ 0\,(x-1) + \frac{1}{2}\,(y-2) + 1\,(z+1) \\ 0\,(x-1) + \frac{1}{2}\,(y-2) + 0\,(z+1) \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}\,y \\ \frac{1}{2}\,y + z \\ \frac{1}{2}\,y - 1 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

Portanto, como as coordenadas do ponto $\underline{P}$*, em relação ao sistema de coordenadas* Σ*, são dadas por:*

$$P = (2\,,1\,,-3)_{\Sigma}$$

temos, de (11.22) *(com* $x=2$*,* $y=1$ *e* $z=-3$*), que:*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ou seja

$$P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\Sigma'}$$

que coincide com o que foi obtido no Exemplo (11.1.2) acima (veja (11.20)).

Exemplo 11.1.3 *Baseado no Exemplo (11.1.1), encontre as equações da reta* $\underline{r}$ *e do plano* $\underline{\pi}$*, em relação ao sistema* Σ'*, sabendo-se que eles são dados, em relação ao sistema* Σ*, por:*

$$r : [(x, y, z)_\Sigma = (1, 1, 2)_\Sigma + \lambda \cdot (3, 1, -2)_\mathcal{E}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}]_\Sigma \tag{11.23}$$

e

$$\pi : [x - 3y + 2z - 2 = 0]_\Sigma . \tag{11.24}$$

Resolução:

Começaremos tratando da reta $\underline{r}$:

Do Exemplo (11.1.1), segue que

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{de (11.14), teremos:} \quad \begin{cases} 1 + u + w = 1 + 3\lambda \\ 2 + 2w = 1 + \lambda \\ -1 + v - w = 2 - 2\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{ou seja (Exercício),} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\lambda \\[2ex] v = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\lambda \\[2ex] w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{11.25}$$

que são as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, , em relação ao sistema de coordenadas Σ'.

Logo, uma equação vetorial da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ', será dada por:

$$r : \left[(x, y, z)_{\Sigma'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)_{\Sigma'} + \lambda \cdot \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_\mathcal{F}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\right]_{\Sigma'} .$$

Trataremos agora do plano $\underline{\pi}$:

Notemos que, do Exemplo (11.1.1), segue que

$$\begin{aligned} \pi &: x - 3y + 2z - 2 = 0, \\ \text{de (11.14), teremos:} &\quad (1 + u + w) - 3(2 + 2w) + 2(-1 + v - w) - 2 = 0 \\ \text{ou ainda (Exercício),} &\quad u + 2v - 7w - 9 = 0 . \end{aligned}$$

Logo, uma equação geral do plano $\underline{\pi}$, em relação ao sistema de cooredenadas Σ', será dada por:

$$\pi : [u + 2v - 7w - 9 = 0]_\Sigma .$$

Temos as:

Observação 11.1.3 *Quando o sistema de coordenadas*

$$\Sigma = (O', \mathcal{E}) = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

isto é, mudamos a origem do sistema de coordenadas para o ponto

$$O' \doteq (h, k, l)_\Sigma,$$

mas mantivemos a base

$$\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

as equação de mudança do sistema de coordenadas Σ *para o sistema de coordenadas* Σ' *ficarão na forma (veja* (11.10)*):*

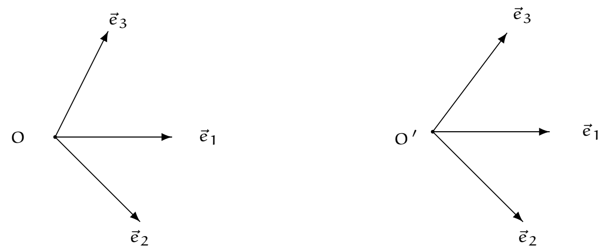
$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w \end{cases} . \tag{11.26}$$

Isto acontece pois, neste caso, a matriz de mudança de, da base $\mathcal{E}$ *para a própria, será a matriz identidade* I_3*.*

Com isto temos a:

Definição 11.1.2 *As equações (11.26) serão denominadas* **equações da translação do sistema Σ para o ponto O'**.

$$\Sigma = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \qquad \Sigma' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$



11.2 Mudança de Coordenadas no Plano

Tudo o que fizemos anteriormente no espaço, podemos adaptar para o plano, como vimos anteriormene, como as noões de comprimento, direção e sentido de segmento orientado no plano; classe de equipolência de segmentos orientados no plano; vetores no plano, isto é, V^2; comprimento, direção e sentido de vetores no plano, etc. .

Uma das poucas diferenças é que uma base de V^2, é formado por **dois** vetores L.I. em V^2 e portanto os elementos do plano, a saber, pontos e vetores, têm apenas duas coordenadas.

Consideremos dois sistemas de coordenadas no plano, a saber:

$$\Sigma = (O, \mathcal{E}) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{e} \quad \Sigma' = (O', \mathcal{F}) = \left(O', \vec{f}_1, \vec{f}_2\right), \tag{11.27}$$

onde

$$O' \doteq (h\,,k)_\Sigma\,. \tag{11.28}$$

Como no caso do espaço podemos obter os vetores da base $\mathcal{F}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{E}$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\cdot\vec{e}_1 + a_{21}\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{f}_1 = a_{12}\cdot\vec{e}_1 + a_{22}\cdot\vec{e}_2 \end{cases} \tag{11.29}$$

e como isto obter a **matriz de mudança de base, da base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ para a base $\mathcal{F} = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right)$**indexmatriz!de mundanaça de base em V^2, que é indicada por:

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{11.30}$$

Da Definição ?? e de (11.28), segue que

$$\overrightarrow{OO'} = (h\,,k)_\mathcal{E}\,,. \tag{11.31}$$

Seja $\underline{P}$ um ponto qualquer do plano.

Suponhamos que as coordenadas do ponto, em relação ao sistema de coordenadas Σ e em relação ao sistema de coordenadas Σ' , sejam dadas por:

$$P = (x\,,y)_\Sigma \quad \text{e} \quad P = (u\,,v)_{\Sigma'}\,, \tag{11.32}$$

respectivamente.

Da Definição ?? e de (11.32), segue que

$$\overrightarrow{OP} = (x\,,y)_\mathcal{E} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{O'P} = (u\,,v)_\mathcal{F}\,. \tag{11.33}$$

Logo, em relação ao sistema de coordenadas Σ, teremos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \\ &\overset{(11.33)}{=} (x\,,y)_\mathcal{E} - (h\,,k)_\mathcal{E} \\ &= (x-h\,,y-k)_\mathcal{E}\,. \end{aligned} \tag{11.34}$$

Por outro lado, em relação ao sistema de Σ', teremos

$$\overrightarrow{O'P} = (u\,,v)_\mathcal{F}\,.$$

Logo, segue da Proposição ???, que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{O'P}$ em relação as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, relaionam-se da seguinte forma:

$$\left(\overrightarrow{O'P}\right)_\mathcal{E} = M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}\left(\overrightarrow{O'P}\right)_\mathcal{F}\,, \tag{11.35}$$

que, de (11.34), (11.30) e (11.33), é o mesmo que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\,u + a_{12}\,v \\ a_{21}\,u + a_{22}\,v \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x = h + a_{11}\,u + a_{12}\,v \\ y = k + a_{21}\,u + a_{22}\,v \end{cases} . \tag{11.36}$$

Com isto temos a:

Definição 11.2.1 *As equações* (11.36)*, serão denominadas* **equações de mudança do Σ sistema de coordenadas para o sistema de coordenadas Σ'**.

A seguir estudaremos alguns casos particulares mudanças de sistemas de coordenadas no plano.

Começaremos pela:

11.2.1 Translação

Fixemos um sistema de coordenadas

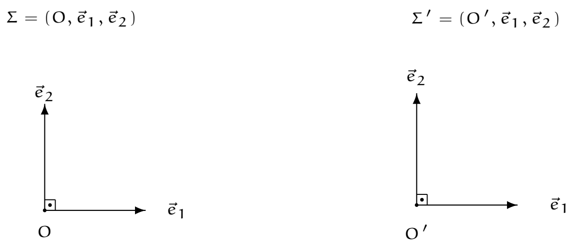
$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

ortogonal no plano, isto é, os vetores do $\vec{e}_1\,, \vec{e}_2$ são unitários e ortogonais.

Consideremos o sistema de coordenadas (orotogonal)

$$\Sigma' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)\,,$$

isto é, mudamos a origem do sistema de coordenadas Σ, mas mantivemos a base, ou seja, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.



Neste caso temos que, (11.28) tornar-se-á:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \end{cases} ,$$

ou seja, a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{E}$ para a própria, será a matriz identidade I_2.

Logo, as equação (11.36), tornar-se-ão

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}, \qquad (11.37)$$

que serão denominadas **equações da translação do sistema de coordenadas Σ**.

Consideremos o:

Exemplo 11.2.1 *Encontre as equações de uma translação do sistema de coordenadas*

$$\Sigma = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)\,,$$

de modo que a reta $\underline{r}$, cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas Σ, dada por

$$r\,:\,[(x\,,y)_\Sigma = (2\,,0)_\Sigma + \lambda\cdot(-3\,,1)_\mathcal{E}\,,\ \textit{para}\ \lambda \in \mathbb{R}]_\Sigma\,, \qquad (11.38)$$

contenha a nova origem $\underline{O'}$, do sistema de coordenadas

$$\Sigma' = (O'\,,\mathcal{E}) = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)\,,$$

sabendo-se que as coordenadas do ponto $\underline{O'}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ, são dadas por:

$$O' \doteq (-1\,,a)_\Sigma\,. \qquad (11.39)$$

Resolução:

De (11.37), as equações de mudança do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, para o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$ serão dadas por:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}.$$

De (11.39), temos que $h = -1$ e $k = a$, assim: $\begin{cases} x = -1 + u \\ y = a + v \end{cases}$. $\qquad (11.40)$

De (11.38), segue que, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, serão dadas por:

$$r\,:\,\begin{cases} x = 2 - 3\,\lambda \\ y = 0 + \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \qquad (11.41)$$

Substituindo-se (11.40) em (11.41), segue que

$$r\,:\,\begin{cases} -1 + u = 2 - 3\,\lambda \\ a + v = 0 + \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, serão dadas por:

$$\begin{cases} u = 3 - 3\,\lambda \\ v = -a + \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}\,. \qquad (11.42)$$

Para que a reta $\underline{r}$ contenha a (nova) origem

$$O' = (-1\,,a)_\Sigma\,,$$

deveremos ter

$$\begin{cases} 0 = u = 3 - 3\lambda \\ 0 = v = -a + \lambda \end{cases} \quad , \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ a = \lambda \end{cases} \quad .$$

Logo, devemos ter

$$a = 1\,,$$

isto é, a nova origem deverá ter coordenadas

$$O' = (-1\,,1)_\Sigma\,,$$

para que a reta $\underline{r}$ contenha a nova origem $\underline{O'}$, ou ainda, de (11.40), as equações de mudança da translação do sistema $\underline{\Sigma}$ para a nova origem $\underline{O'}$ serão dadas por:

$$\begin{cases} x = -1 + u \\ y = 1 + v \end{cases} \quad .$$

11.2.2 Rotação

Fixemos um sistema de coordenadas

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

ortogonal no plano.

Seja

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

um ângulo, medido em radianos, fixado.

Consideremos o sistema de cooredenadas

$$\Sigma' = (O\,,\mathcal{F}) = \left(O\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)\,,$$

isto é, mantivemos a origem, ou ainda,

$$O' = O = (0\,,0)_\Sigma\,, \tag{11.43}$$

mas mudamos da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$, que ser relacionam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \cos(\theta)\cdot\vec{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta)\cdot\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = -\operatorname{sen}(\theta)\cdot\vec{e}_1 + \cos(\theta)\cdot\vec{e}_2 \end{cases} \quad . \tag{11.44}$$

Observemos que os vetores

$$\vec{f}_1\,,\vec{f}_2$$

formam realmente uma base de V^2, isto é, eles são unitários e ortogonais, em particular, são L.I. em V^2.

Deixaremos a verifiação destes fatos como exercício para o leitor.
Logo a matriz de mudança de base, da base $\underline{\mathcal{E}}$ para a base $\underline{\mathcal{F}}$, será dada por :

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{11.45}$$

Logo, de (11.43), (11.45) e (11.36), segue que as equações

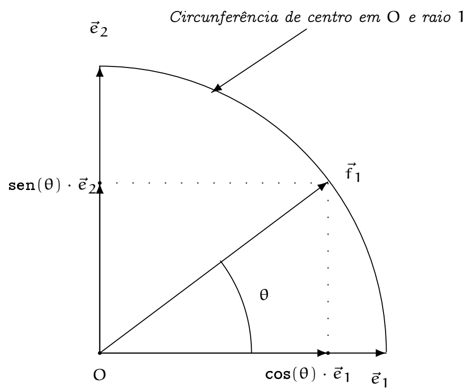
$$\begin{cases} x = \cos(\theta)\, u - \operatorname{sen}(\theta)\, v \\ y = \operatorname{sen}(\theta)\, u + \cos(\theta)\, v \end{cases}, \tag{11.46}$$

que serão denominadas <u>**equações, da rotação do ângulo θ, do sistema de coordenadas Σ**</u> .

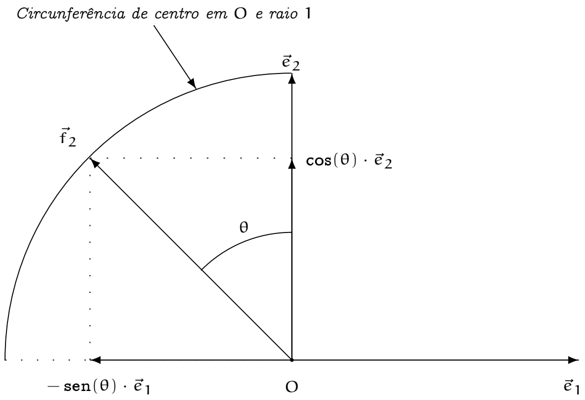
Observação 11.2.1

1. *Observemos que realmente as equações (11.46) produzem, geometricamente, uma rotaçao do ângulo $\underline{\theta}$.*

   Por exemplo, o vetor
   $$\vec{f}_1 = \cos(\theta) \cdot \vec{e}_1 + \operatorname{sen}(\theta) \cdot \vec{e}_2$$
   é obtido (na verdade um representante dele!), fazendo-se uma rotação do ângulo $\underline{\theta}$, no sentido anti-horário (sentido positivo), do vetor $\underline{\vec{e}_1}$ (veja figura abaixo).



   De modo semelhante, temos que o vetor
   $$\vec{f}_2 = -\operatorname{sen}(\theta) \cdot \vec{e}_1 + \cos(\theta) \cdot \vec{e}_2\,,$$
   pode ser obtido (na verdade um representante dele!) fazendo-se uma rotação de ângulo $\underline{\theta}$, no sentido anti-horário (sentido positivo), do vetor $\underline{\vec{e}_2}$ (veja figura abaixo).



2. *Resolvendo o sistema linear (11.46), em termos de $\underline{u}$ e $\underline{v}$, obteremos*

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,x + \operatorname{sen}(\theta)\,y \\ v = -\operatorname{sen}(\theta)\,x + \cos(\theta)\,y \end{cases} . \tag{11.47}$$

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *Deste modo, as equações (11.46) e (11.47), podem ser obtidas a partir da seguinte tabela:*

	u	v
x	$\cos(\theta)$	$-\operatorname{sen}(\theta)$
y	$\operatorname{sen}(\theta)$	$\cos(\theta)$

(11.48)

   Observemos que a 2.a coluna da tabela acima é a derivada, em relação à $\underline{\theta}$, da 1.a coluna.

Consideremos os:

Exemplo 11.2.2 *Em relação ao sistema de coordenadas*

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

do plano, temos que o ponto $\underline{P}$ tem coordendas dadas por

$$P \doteq (1\,,2)_\Sigma \tag{11.49}$$

e a reta $\underline{r}$ é dada por:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases} , \ \textit{para } \lambda \in \mathbb{R} . \tag{11.50}$$

Obtenha as coordenadas dos ponto $\underline{P}$ e as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ', obtido da rotação de um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$ radianos, do sistema de coordenadas Σ .

Resolução:

Notemos que, de (11.47), segue que as equções de mundança do sistema de coordenadas Σ' para o sistema de coordenadas Σ, serão dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,y \\ \\ v = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,x + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,y \end{cases},$$

ou seja,
$$\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\ \\ v = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}. \tag{11.51}$$

Para o ponto $\underline{P}$, de (11.49), teremos que

$$x = 1 \quad \text{e} \quad y = 2\,.$$

Substituindo-s em (11.51), obteremos:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}1 + \dfrac{1}{2}2 \\ \\ v = -\dfrac{1}{2}1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}2 \end{cases},$$

ou seja,
$$\begin{cases} u = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ v = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Logo

$$P = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)_{\Sigma'}.$$

Para a reta $\underline{r}$, teremos:

De (11.46), temos que,a s equações de mudança do sistema de coordenadas Σ para o sistema de coordenadas Σ' serão dadas por:

$$\begin{cases} x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,u - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\,v \\ \\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\,u + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\,v \end{cases},$$

ou seja,
$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u - \dfrac{1}{2}v \\ \\ y = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v \end{cases}. \tag{11.52}$$

Substiuuindo-se (11.52) nas equações paramétricas da reta $\underline{r}$, dadas em relação ao sistema de coordenadas Σ, (isto é, em (11.50)) obteremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,u - \dfrac{1}{2}\,v = 1 + 2\,\lambda \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,u + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,v = \lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{dou seja,} \quad \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\lambda \\[2ex] v = -\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R},$$

isto é, as equações paramétricas da reta $\underline{r}$, em relação ao sistema de coordenadas Σ', serão dadas por:

$$r : \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}\right)\lambda \\[2ex] v = -\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\lambda \end{cases}, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

11.3 Translações e Rotações no Plano na Equação: $A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$

Fixemos um sistema de coordenadas

$$\Sigma = (O\,,\mathcal{E}) = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

no plano

No próximo capítulo faremos um estudo detalhado das expressões que são da forma:

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0 \tag{11.53}$$

onde

$$A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F$$

são números reais fixados.

Nesta seção nosso objetivo será aplicar translações e rotações (mudança de sistema de coordenadas no plano desses dois tipos) à equação acima (ou seja, ao lugar geométrcio dos pontos que satisfazem a equação acima) para que, em relação aos novos sistemas de coordenadas no plano, a equação torne-se o mais simples possível (em relação a esses novos sistemas de coordenadas no plano).

Tentaremos duas possibilidades, para mundança do sistema de coordenadas no plano, a saber:

1.ª: Por meio de uma mudança de coordenadas no plano, do tipo translação, tentaremos obter uma equação do lugar geométrico (11.53) (em relação ao novo sistema de coordenadas) de tal modo que os coeficientes dos termos de 1.o grau sejam ambos nulos.

Mais precisamente tentaremos encontrar uma nova origem $\bar{O}$, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas Σ, sejam dadas por:

$$\bar{O} = (h\,,k)_\Sigma \tag{11.54}$$

de modo que, em relação ao novo sistema de coordenadas,

$$\bar{\Sigma} = \left(\bar{O}\,,\mathcal{E}\right) = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2) \tag{11.55}$$

a equação do lugar geométrico (11.53), em relação ao sistema de coordenadas $\bar{\Sigma}$, torne-se:

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,, \tag{11.56}$$

onde

$$\bar{A}\,,\bar{B}\,,\bar{C}\,,\bar{F}$$

são números reais que, provavelmente devem depender de

$$A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F\,,$$

como veremos a seguir.

Para ver se isto será possível, vamos substiuir as equações da translação (11.37), na equação (11.53).

Deste modo obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= A\,(u+h)^2 + B\,(u+h)\,(v+k) + C\,(v+k)^2 + D\,(u+h) + E\,(v+k) + F \\
&= A\,\left(u^2 + 2\,uh + h^2\right) + B\,(uv + uk + vh + hk) + C\left(v^2 + 2vk + k^2\right) + D\,(u+h) \\
&\qquad + E\,(v+k) + F \\
&= A\,u^2 + B\,uv + C\,v^2 + (B\,k + 2\,Ah + D)\,u + (B\,h + 2\,kC + E)\,v \\
&\qquad + \left(A\,h^2 + B\,hk + C\,k^2 + D\,h + E\,k + F\right)\,.
\end{aligned} \tag{11.57}$$

Comparando-se (11.57) e (11.56), segue que deveremos ter:

$$\begin{cases}
\bar{A} = A \\
\bar{B} = B \\
\bar{C} = C \\
0 = B\,k + 2\,Ah + D \\
0 = B\,h + 2\,kC + E \\
\bar{F} = A\,h^2 + B\,hk + C\,k^2 + D\,h + E\,k + F
\end{cases}\,. \tag{11.58}$$

Logo para encontrar as coordenadas da nova origem

$$\bar{O} = (h\,,k)_\Sigma\,,$$

devemos tentar resolver o sistema linear

$$\begin{cases} B\,k + 2\,Ah + D = 0 \\ B\,h + 2\,kC + E = 0 \end{cases} \tag{11.59}$$

onde

$$A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F$$

são os coeficientes reias da equação (11.53).

Se o sistema linear (11.59) tiver solução, resolvemos nosso problema, isto é, encontramos as coordenadas da nova origem

$$\bar{O} = (h\,,k)_\Sigma\,,$$

de tal modo que a equação do lugar geométrico cuja equação é (11.53), em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, torne-se (11.56), em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$.

Notemos que o sistema linear (11.59), pode ser colocado na seguinte forma matricial:

$$\begin{cases} 2\,Ah + B\,k = -D \\ B\,h + 2\,kC = -F \end{cases}\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{pmatrix} 2\,A & B \\ B & 2\,C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -F \end{pmatrix}. \tag{11.60}$$

Observemos também que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear acima é igual a :

$$\begin{vmatrix} 2\,A & B \\ B & 2\,C \end{vmatrix} = 4\,AC - B^2\,. \tag{11.61}$$

Assim, se o determinante acima for diferente de zero, sabemos (veja o apêndice (B)) que o sistema linear (11.59) terá uma única solução.

Se o determinante acima for nulo, podem existir infinitas solução ou nenhuma solução para o sistema linear (11.59) (veja o apêndice (B)).

Neste último caso (não existir solução), não será possível encontrar as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, para que, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, a equação do lugar geométrico determinada pela equação (11.53), torne-se uma equação do tipo (11.56).

Se o sistema (11.59) acima tem solução, isto é, se existir uma translação de modo que o lugar geométrico determinado pela equação (11.53), em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, torne-se equação, (11.56)), em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, observamos que:

(a) de (11.58), os coeficientes dos termos de 2.o graus **não** se alteram após a mudança do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ para o novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, ou seja,:

$$\begin{cases} \bar{A} = A \\ \bar{B} = B \\ \bar{C} = C \end{cases}. \tag{11.62}$$

Resumidamente, uma mudança de coordenadas do tipo translação **não** afeta os coeficientes de 2.o grau da equação (11.53).

(b) Definamos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F\,, \text{ para } (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{11.63}$$

ou seja, a função definida pelo lado esquerdo da equação (11.53).

Então, de (11.58), segue que

$$\bar{F} \overset{(11.58)}{=} A\,h^2 + B\,hk + C\,k^2 + D\,h + E\,k + F \overset{(11.63)}{=} f(h\,,k)\,, \tag{11.64}$$

isto é, o termo constante, $\bar{F}$, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, será dado por

$$\bar{F} = f(h\,,k)\,. \tag{11.65}$$

2.ª: Por meio de uma mudança de coordenadas, do tipo rotação no plano, tentaremos obter uma equação do lugar geométrico, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada (11.53), tenha o coeficiente do termo de 2.o grau misto nulo, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$.

Mais precisamente, tentaremos encontrar um ângulo de rotação

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

de tal modo que a equação do lugar geomátrico dado pela equação (11.53), em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, como:

$$A'\,u^2 + C'\,v^2 + D'\,u + E'\,v + F' = 0\,, \tag{11.66}$$

isto é,

$$B' = 0\,. \tag{11.67}$$

Substituindo (11.46) na equação (11.53), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= A\,[\cos(\theta)\,u - \operatorname{sen}(\theta)\,v]^2 + B\,[\cos(\theta)\,u - \operatorname{sen}(\theta)\,v]\,[\operatorname{sen}(\theta)\,u + \cos(\theta)\,v] \\
&\quad + C\,[\operatorname{sen}(\theta)\,u + \cos(\theta)\,v]^2 + D\,[\cos(\theta)\,u - \operatorname{sen}(\theta)\,v] + E\,[\operatorname{sen}(\theta)\,u + \cos(\theta)\,v] + F \\
&= A\,\left[\cos^2(\theta)\,u^2 - 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,uv + \operatorname{sen}^2(\theta)\,v^2\right] \\
&\quad + B\,\left[\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,u^2 + \cos^2(\theta)\,uv - \operatorname{sen}^2(\theta)\,uv - \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\,v^2\right] \\
&\quad + C\,\left[\operatorname{sen}^2(\theta)\,u^2 + 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,uv + \cos^2(\theta)\,v^2\right] \\
&\quad + D\,\cos(\theta)\,u - D\,\operatorname{sen}(\theta)\,v + E\,\operatorname{sen}(\theta)\,u + E\,\cos(\theta)\,v + F \\
&= \left[A\,\cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\,\operatorname{sen}(2\theta) + C\,\operatorname{sen}^2(\theta)\right]\,u^2 + [-A\,\operatorname{sen}(2\theta) + B\,\cos(2\theta) + C\,\operatorname{sen}(2\theta)]\,uv \\
&\quad + \left[A\,\operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\,\operatorname{sen}(2\theta) + C\,\cos^2(\theta)\right]\,v^2 + [D\,\cos(\theta) + E\,\operatorname{sen}(\theta)]\,u \\
&\quad + [E\,\cos(\theta) - D\,\operatorname{sen}(\theta)]\,v + F\,.
\end{aligned} \tag{11.68}$$

Logo, comparando-se (11.68) e (11.66), segue que deveremos ter:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2(\theta) + \dfrac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta) + C\,\text{sen}^2(\theta) \\[2ex] 0 = B' = (C - A)\,\text{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) \\[2ex] C' = A\,\text{sen}^2(\theta) - \dfrac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta) + C\cos^2(\theta) \\[2ex] D' = D\cos(\theta) + E\,\text{sen}(\theta) \\ E' = E\cos(\theta) - D\,\text{sen}(\theta) \\ F' = F \end{cases} . \tag{11.69}$$

Observemos que da última identidade acima, segue que uma mudança de coordenadas, do tipo rotação, **não** altera o termo independente de (11.53), isto é,

$$F' = F . \tag{11.70}$$

Baseado nas identidas acima, devemos tentar encontrar um ângulo

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

de modo que

$$(C - A)\,\text{sen}(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0 . \tag{11.71}$$

Notemos que:

I. Se

$$B = 0 ,$$

nada teremos a fazer, pois neste caso (11.53) o termo misto do 2.o grau terá coeficiente igual a zero.

II. Por outro lado, se

$$B \neq 0 ,$$

temos duas possibilidades:

II (a). Se

$$A = C , \tag{11.72}$$

então a equação (11.71), tornar-se-á:

$$\cos(2\theta) = 0 , \quad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} 2\theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} .$$

Neste caso, de (11.69) temos, em princípio, duas possibilidades, a saber:

$$
\text{se } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ teremos : } \begin{cases}
A' & = A\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\frac{\pi}{4}\right) + C\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 & \overset{C=A}{=} A + \frac{B}{2} \\
B' & = 0 \\
C' & = A\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\frac{\pi}{4}\right) + C\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 & \overset{C=A}{=} A - \frac{B}{2} \\
D' & = D\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + E\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 & = D\frac{\sqrt{2}}{2} + E\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\
E' & = E\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - D\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 & = E\,\frac{\sqrt{2}}{2} - D\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\
F' & = F
\end{cases}
$$

$$
\text{se } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ teremos : } \begin{cases}
A' & = A\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\frac{3\pi}{4}\right) + C\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 & \overset{C=A}{=} A - \frac{B}{2} \\
B' & = 0 \\
C' & = A\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\left(2\frac{3\pi}{4}\right) + C\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 & = A + \frac{B}{2} \\
D' & = D\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + E\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 & = D\,\frac{\sqrt{2}}{2} - E\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\
E' & = E\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - D\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
 & = E\,\frac{\sqrt{2}}{2} + D\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\
F' = F &
\end{cases}
$$

ou seja,

$$\text{se } \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ teremos : } \begin{cases} A' = A + \dfrac{B}{2} \\ B' = 0 \\ C' = A - \dfrac{B}{2} \\ D' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}D + \dfrac{\sqrt{2}}{2}E \\ \\ E' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}E - \dfrac{\sqrt{2}}{2}D \\ F' = F \end{cases}, \tag{11.73}$$

$$\text{se } \theta = \frac{3\pi}{4}, \text{ teremos : } \begin{cases} A' = A - \dfrac{B}{2} \\ B' = 0 \\ C' = A + \dfrac{B}{2} \\ D' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}D - \dfrac{\sqrt{2}}{2}E \\ \\ E' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}E + \dfrac{\sqrt{2}}{2}D \\ F' = F \end{cases}, \tag{11.74}$$

ou seja, escolhendo-se $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ em vez de $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ o que muda é a ordem dos coeficientes.

II (b). Se

$$A \neq C\,,$$

então a equação (11.71) tornar-se-á

$$-\,(C - A)\,\text{sen}(2\theta) = B\cos(2\theta)\,,$$

$$\text{isto é,} \quad \frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{B}{A - C}$$

ou seja,

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}\,, \tag{11.75}$$

$$\text{ou, equivalentemente,} \quad \theta = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{B}{A - C}\right). \tag{11.76}$$

Com este valor de

$$\theta \in [0, 2\pi)\,,$$

obtemos os coeficientes

$$A'\,, C'\,, D'\,, E'$$

por meio das equações (11.69) e assim

$$B' = 0 \quad \text{e} \quad F' = F .$$

Observação 11.3.1

1. *No caso em que*

$$A \neq C ,$$

observemos que

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{B}{A - C} = \frac{\dfrac{B}{A' - C'}}{\dfrac{A - C}{A' - C'}} ,$$

ou, equivalentemente,

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{B}{A' - C'} \quad e \quad \cos(2\theta) = \frac{A - C}{A' - C'} . \tag{11.77}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Notemos que*

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

foi o obtido, então os coeficientes

$$A' , C'$$

serão as raízes reais, que denotaremos por λ, da equação do 2.o grau

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{11.78}$$

De fato, notemos que

$$0 = \begin{vmatrix} A - \lambda & \dfrac{B}{2} \\ \\ \dfrac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (A - \lambda)\,(C - \lambda) - \frac{B^2}{4} = \lambda^2 - (A + C)\,\lambda - \frac{B^2}{4} + AC .$$

Logo, devemos mostrar que

$$A' \quad e \quad C'$$

serão as raízes da equação 2.o grau acima se, e somente se,

$$A' + C' = A + C \quad e \quad A'\,C' = -\frac{B^2}{4} + AC ,$$

ou seja a soma das raízes da equação do 2.o grau acima deverá ser igual a

$$A + C$$

e o produto deverá ser igual a

$$-\frac{B^2}{4} + AC .$$

Para isto, observemos que, de (11.69), segue que:

$$\begin{aligned}
A' + C' &= \left[A\ \cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\ \text{sen}^2(\theta)\right] + \left[A\ \text{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\ \cos^2(\theta)\right]\\
&= A\ \left[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right] + C\ \left[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right]\\
&= A + C ,\\
A'\,C' &= \left[A\ \cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\ \text{sen}^2(\theta)\right] \cdot \left[A\ \text{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\ \cos^2(\theta)\right]\\
&= \left\{A\ \left[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right] + \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + [C - A]\ \text{sen}^2(\theta)\right\}\\
&\quad \cdot \left\{[A - C]\ \text{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\ \left[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{A + \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) - [A - C]\ \text{sen}^2(\theta)\right\} \cdot \left\{[A - C]\ \text{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\ \text{sen}(2\theta) + C\right\} \quad (11.79)$$

Se

$$A = C , \quad \textit{isto é,} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \textit{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} ,$$

segue, de (11.79), que

$$\begin{aligned}
A'\,C' &= \left\{A + \frac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta) - [A - A]\,\text{sen}^2(\theta)\right\} \cdot \left\{[A - A]\,\text{sen}^2(\theta) - \frac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta) + A\right\}\\
&= \left\{A + \frac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta)\right\} \cdot \left\{A - \frac{B}{2}\,\text{sen}(2\theta)\right\}\\
&= AA - \frac{B^2}{4}\,\text{sen}^2(2\theta)\\
&\overset{\text{sen}(2\theta)=\pm 1}{=} AC - \frac{B^2}{4} ,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$A'\,C' = -\frac{B^2}{4} + AC , \quad \textit{se} \quad A = C ,$$

isto é,

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \textit{ou} \quad \theta + \frac{3\pi}{4} .$$

Portanto, se

$$A = C ,$$

teremos que

$$A' , C'$$

serão as raízes da equação do 2.o grau (11.78).

O caso que

$$A \neq C$$

será deixado como exercício para o leitor.

3. *A escolha sobre qual das raízes é $\underline{A'}$ e qual é $\underline{C'}$, depende da escolha do valor do ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ e está vinculado ao fato que*

$$\cos(2\theta) = \frac{A - C}{A' - C'} . \tag{11.80}$$

Na verdade, estará vinculado ao sinal da expressão acima ou seja, ao sinal da expressão (11.75), como veremos em exemplos a seguir.

Apliquemos as idéias acima ao

Exemplo 11.3.1 *Fazendo mudanças no sistema de coordenadas convenientes no plano (se possível), para a equação*

$$4\,x^2 - 24\,xy + 11\,y^2 + 56\,x - 58\,y + 95 = 0 \tag{11.81}$$

dada em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, tenha uma equação da forma

$$A'\,t^2 + C'\,w^2 + F' = 0 . \tag{11.82}$$

em relação ao novo sistema de coordenadas.

Resolução:

Começaremos tentando uma mudança do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, por meio de uma translação, para que em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\bar{\Sigma}}$, os coeficientes dos termos de 1.o graus sejam zero, ou seja, devemos tentar encontrar as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, que serão dadas por

$$\bar{O} = (h\,, k)_\Sigma \tag{11.83}$$

de modo que, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

os coeficientes dos termos de 1.o graus sejam zero.

As equações da translação serão dadas por:

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} . \tag{11.84}$$

Substituindo estas na equação (11.81), obteremos:

$$\begin{aligned}
0 &= 4\,(u+h)^2 - 24\,(u+h)(v+k) + 11\,(v+k)^2 + 56\,(u+h) - 58\,(v+k) + 95 \\
&= 4\lambda\left(u^2 + 2\,uh + h^2\right) - 24\,(uv + uk + hv + hk) + 11\,\left(v^2 + 2\,vk + k^2\right) + 56\,(u+h) \\
&\qquad - 58\,(v+k) + 95 \\
&= 4\,u^2 - 24\,uv + 11\,v^2 + (8\,h - 24\,k + 56)\,u + (-24\,h + 22\,k - 58)\,v \\
&\qquad + \left(4\,h^2 - 24\,hk + 11\,k^2 + 56\,h - 58\,k + 95\right) .
\end{aligned}$$

Logo devemos tentar encontrar números reais

$$h\,,k\,,$$

que venham a satisfazer o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 8\,h - 24\,k + 56 = 0 \\ -24\,h + 22\,k - 58 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,}\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -24 \\ -24 & 22 \end{pmatrix}}_{\doteq\mathcal{A}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 \\ 58 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\begin{vmatrix} 8 & -24 \\ -24 & 22 \end{vmatrix} = 8 \cdot 22 - 24^2 = -400 \neq 0\,,$$

logo a matriz $\mathcal{A}$ é inversível.

Portanto, do Apêndice (A), segue que

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -24 \\ -24 & 22 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -56 \\ 58 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja,}\quad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{-400} \begin{pmatrix} 22 & 24 \\ 24 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -56 \\ 58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}.$$

A verificação da última identidade será deixada como exercício para o leitor (veja o apêndice (A)).

Portanto

$$h = -\frac{2}{5} \quad \text{e} \quad k = \frac{11}{5} \tag{11.85}$$

e a equação (11.81), em relação ao novo sistema de coordenadas orotogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

onde

$$\bar{O} \doteq \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right), \tag{11.86}$$

tornar-se-á

$$\underbrace{4}_{\doteq\bar{A}}\, u^2 \underbrace{-24}_{\doteq\bar{B}}\, uv + \underbrace{11}_{\doteq\bar{C}}\, v^2 + \underbrace{20}_{\doteq\bar{F}} = 0\,. \tag{11.87}$$

Com isto temos que

$$\bar{A} \doteq 4\,,\ \bar{B} \doteq -24\,,\ \bar{C} \doteq 11\,,\ \bar{D} = \bar{E} \doteq 0 \quad \text{e} \quad \bar{F} \doteq 20\,. \tag{11.88}$$

Observação 11.3.2 *Como observado anteriormente (veja a página 319), os coeficientes dos termos de 2.o graus permaneceram inalterados e o coeficiente independente será dado por*

$$f(h\,,k) \overset{(11.85)}{=} f\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right) \overset{\textit{Exercício}}{=} 20\,,$$

onde

$$f(x,y) \doteq 4\,x^2 - 24\,xy + 11\,y^2 + 56\,x - 58\,y + 95\,, \; \textit{para} \; (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Tentaremos agora uma mudança de coordenadas no sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, do tipo rotação de ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, de modo que, em relação o novo sistema de coordenadas

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)\,,$$

o coeficiente do termo misto de 2.o grau da equação (11.87) seja igual a zero.

Como vimos anteriomente (veja página 321), as equações da rotação do sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$ serão dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}. \tag{11.89}$$

Substituindo estas equações, na equação (11.87) e simplificando (veja (11.69)), como (veja (11.88))

$$\bar{A} \neq \bar{C}\,,$$

segue que $\theta \in [0, 2\pi)$, será da forma:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A} - \bar{C}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{-24}{4 - 11}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{24}{7}\right) > 0\,, \end{aligned} \tag{11.90}$$

ou seja, não é um ângulo fácil de se encontrar.

Precisaríamos de uma tabela dos valores da tangente, razoavelmente completa, para podermos encontrar esse ângulo.

De qualquer modo, deveremos ter

$$2\theta \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \text{ou ainda,} \quad \theta \in \left(0\,,\frac{\pi}{4}\right)\,. \tag{11.91}$$

Obeservemos que como vimos anteiormente (na página 321), **sempre** existe uma tal rotação, ou seja, um ângulo $\underline{\theta}$.

A questão é saber quem serão os coeficientes

$$A'\,,C'\,,D'\,,E'\,,F'$$

(lembremos que $B' = 0$), da equação (11.87) em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$?

Para isto temos a Observação (11.3.1) item 2. .

Sabemos, daquela Observação, que

$$A' \quad \text{e} \quad C'$$

devem satisfazer a equação do 2.o grau:

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \dfrac{\bar{B}}{2} \\ \\ \dfrac{\bar{B}}{2} & \bar{C} - \lambda \end{vmatrix} \overset{(11.88)}{=} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & \dfrac{-24}{2} \\ \\ \dfrac{-24}{2} & 11 - \lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} \lambda^2 - 15\,\lambda - 100,$$

isto é, (Exercício) $\lambda = 20$ ou $\lambda = -5$.

Portanto ou

$$A' = 20 \quad \text{e} \quad C' = -5\,,$$

ou

$$A' = -5 \quad \text{e} \quad C' = 20\,,$$

que correspondem aos ângulos

$$\theta \quad \text{e} \quad \theta + \frac{\pi}{2}\,.$$

Lembremos que o termo independente não se altera, isto é, (veja (11.69))

$$F' = \bar{F} = 20\,. \tag{11.92}$$

Além disso, como (veja (11.88))

$$\bar{D} = \bar{E} = 0\,,$$

segue, de (11.69), que

$$D' = E' = 0\,. \tag{11.93}$$

Portanto temos duas possibilidades ou a equação (11.87), em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$ será:

$$20\,t^2 - 5\,w^2 + 20 = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad 4\,t^2 - w^2 + 5 = 0$$

ou será:

$$-\,5\,t^2 + 20\,w^2 + 20 = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad -\,t^2 + 4\,w^2 + 5 = 0\,.$$

Qual delas será?

Para reoslver isto, sem precisar calcular expliticamente o ângulo $\underline{\theta}$, dado por (11.90), notemos que, de (11.91), devferemos ter

$$2\theta \in \left(0\,, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Com isto, segue que

$$0 < \cos(2\theta) \stackrel{(11.80)}{=} \frac{\overline{A} - \overline{C}}{A' - C'}$$
$$\stackrel{(11.88)}{=} \frac{4 - 24}{A' - C'} = -\frac{20}{A' - C'}\,,$$

ou seja,

$$A' - C' < 0\,, \quad \text{ou ainda} \quad A' < C'\,.$$

Portanto, se

$$\theta \in \left(0\,,\frac{\pi}{4}\right)\,,$$

deveremos ter

$$A' = -5 \quad \text{e} \quad C' = 20\,,$$

ou seja, a equação (11.87), em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, será dada por:

$$-5\,t^2 + 20\,w^2 + 20 = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad -t^2 + 4\,w^2 + 5 = 0\,.$$

A equação acima é de uma hipérbole no plano, como veremos em capítulo mais adiante.

11.4 Coordenadas Polares no Plano

Notação 11.4.1 *Ao longo deste capítulo, utilizaremos a seguinte notação:*

$$\mathbb{R}^* \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Consideremos fixado um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,.$$

O semi-eixo positivo Ox denominaremos por **eixo polar**; a origem $\underline{O}$ será dita **origem polar** e neste caso teremos o **plano polar**.

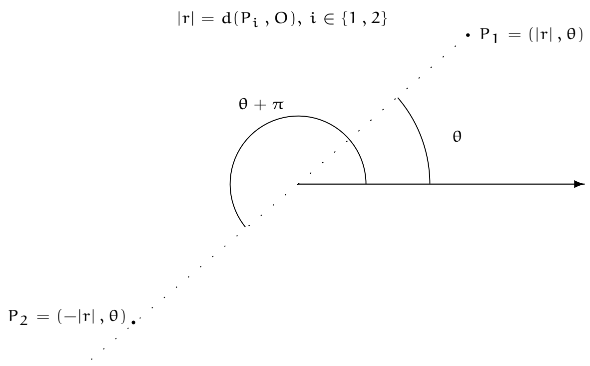
Dado um ponto $\underline{P}$ no plano, distinto da origem $\underline{O}$, podemos associar ao mesmo a um par ordenado

$$(r\,, \theta)\,,$$

de tal modo que $\underline{|r|}$ é a distância do ponto $\underline{P}$ à origem O e $\underline{\theta}$ é o ângulo, medido em radianos, que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ faz com semi-reta do eixo polar, onde $\underline{\theta}$ será positivo se estiver orientado no sentido anti-horário e negativo caso contrário.

Observemos que:

- se $\underline{r \in (0\,, \infty)}$, marcaremos o ponto $\underline{P}$ sobre o lado do ângulo $\underline{\theta}$;
- se $\underline{r \in (-\infty\,, 0)}$, marcaremos o ponto $\underline{P}$ sobre o lado do ângulo $\underline{\theta + \pi}$ (veja a figura abaixo).



Ao par ordenado

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

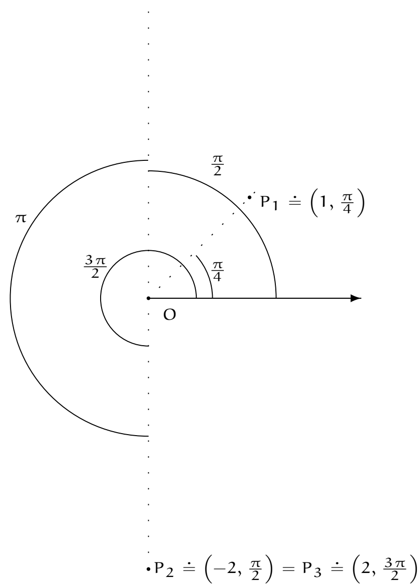
obtido acima, daremos o nome de **coordenadas polares (no plano) do ponto $\underline{P}$**.

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 11.4.1 *Localize, geometricamente, os pontos abaixo, que estão dados em coordenadas polares no plano, por:*

$$P_1 \doteq \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_2 \doteq \left(-2, \frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad P_3 \doteq \left(2, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Resolução:



Observação 11.4.1

1. *Os pontos $\underline{P_2}$ e $\underline{P_3}$ coincidem geometricamente e têm coordenadas polares (no plano) diferentes.*

   Em geral temos que se um ponto $\underline{P}$ tem coordenadas polares (no plano) dadas por

$$P \doteq (r, \theta),$$

então ele também terá coordenadas polares (no plano)

$$P = (r\,,\theta + 2\pi) \quad ou \quad P = (-r\,,\theta + \pi)\,,$$

donde concluímos que um ponto $\underline{P}$ poderá ter uma infinidade de representações em coordenadas polares (no plano).

Para evitar isto vamos restringir a variação do ângulo $\underline{\theta}$ a um intervalo de comprimento $\underline{\pi}$.

Tal intervalo poderá mudar de acordo com as nossas necessidades, por exemplo:

$$[0\,,\pi)\,,\ [-\pi\,,0)\,,\quad \textit{entre outros.}$$

2. *Nas condições acima, se um ponto $\underline{P}$ do palno dado, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, por*

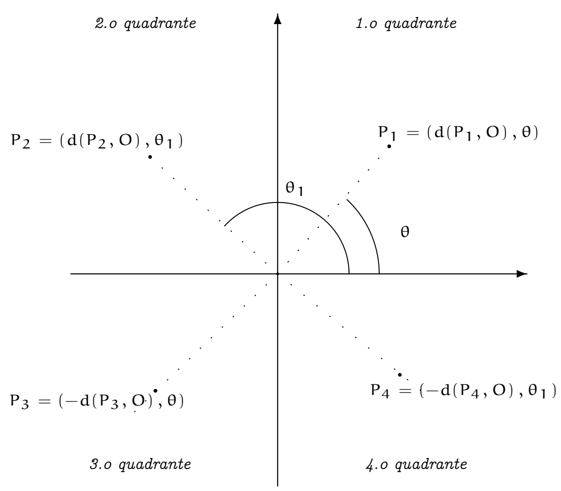
$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma\,,$$

em coordenadas cartesianas, pode ser representado, em coordenadas polares (no plano), da seguinte forma:

$$r \doteq \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\,, & \textit{se o ponto } \underline{P} \textit{ está no 1.o ou 2.o quadante} \\ -\sqrt{x^2+y^2}\,, & \textit{se o ponto } \underline{P} \textit{ está no 3.o ou 4.o quadante} \end{cases} \tag{11.94}$$

$$\theta \doteq \begin{cases} x \neq 0\,, & \textit{teremos } \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ x = 0\,, & \textit{teremos } \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \,. \tag{11.95}$$

A figura abaixo ilustra a situação acima, em coordenadas polares no plano.



3. *Por outro lado, dada as coordenadas polares de um ponto $\underline{P}$ no plano, a saber:*

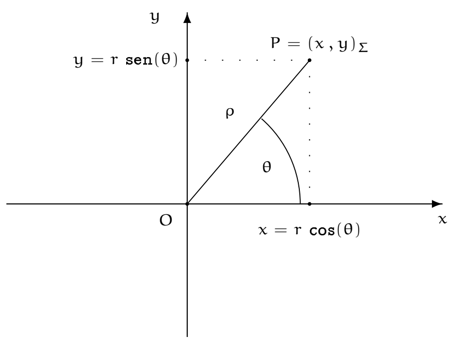
$$P \doteq (r\,,\theta)\,,$$

definindo-se;

$$\begin{cases} x \doteq r\cos(\theta) \\ y \doteq r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \tag{11.96}$$

temos as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) do ponto $\underline{P}$, serão dadas por (veja a figura abaixo)

$$P = (x\,,y)_\Sigma\,.$$



4. *Para simplifcar, diremos que*

$$P = (x\,,y)_\Sigma$$

são as **coordenadas cartesianas** *do ponto $\underline{P}$ do plano e que*

$$P = (r\,,\theta)$$

são as, respectivas, **coordenadas polares** *do ponto $\underline{P}$.*

Exemplo 11.4.2

1. *Encontre as coordenadas polares dos pontos abaixo, que são dados em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$):*

$$P_1 \doteq (-1\,,2)_\Sigma \quad e \quad P_2 \doteq (1\,,-1)_\Sigma\,.$$

2. *Encontre as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) dos pontos abaixo, que são dados em coordenadas polares:*

$$P_3 \doteq \left(1\,,\frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad P_4 \doteq \left(-2\,,-\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

3. *Represente, geometricamente, esse, quatro pontos.*

Resolução:

De 1.:

O ponto $\underline{P_1}$ pertence ao 2.o quadrante.

Logo, de (11.94) e (11.95), teremos:

$$r \overset{(11.94)}{=} \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \theta \overset{(11.95)}{=} \mathrm{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Portanto

$$P_1 = \left(\sqrt{5}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

em coordenadas polares no plano.

O ponto $\underline{P_2}$ está no 4.o quadrante.

Logo, de (11.94) e (11.95), teremos:

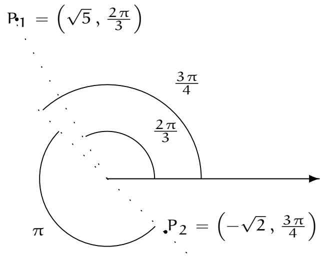
$$r = -\sqrt{1^2 + (-1)^2} = -\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Portanto

$$P_2 = \left(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

em coordenadas polares no plano.

Geometricamente, teremos:



<u>De 2.:</u>

De (11.96), para o ponto $\underline{P_3}$, temos que:

$$\begin{cases} x = 1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Portanto

$$P_3 = (0, 1)_\Sigma$$

em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$).

De (11.96), para o ponto $\underline{P_4}$, temos que

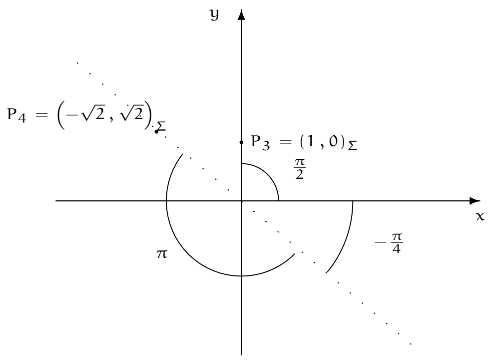
$$\begin{cases} x = -2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ y = -2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Portanto

$$P_4 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)_\Sigma$$

em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$).

Geometricamente, teremos:



Observação 11.4.2

1. *A cada ponto* $\underline{P}$*, dado em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal* $\underline{\Sigma}$*) por:*

$$P \doteq (x, y) \neq (0, 0),$$

estará associado um único par ordenado

$$(r, \theta),$$

ou seja, as suas coordenadas polares no plano, que são dadas por (11.95) (restrigindo-se o ângulo θ *a um intervalo de comprimeto* π*).*

Reciprocamente, a cada ordenado

$$(r, \theta),$$

que representa as coordenadas polares de um ponto $\underline{P}$ *do plano, estará associado um único ponto* $\underline{P}$*, dado em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal* $\underline{\Sigma}$*) por:*

$$P = (x, y)_\Sigma,$$

obtidas por (11.96) .

2. *As relações (11.96) e (11.95) são as equações de transformação de coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal* $\underline{\Sigma}$*)) em coordenadas polares no plano e vice-versa.*

3. *Podemos definir o gráfico de uma equação*

$$F(r, \theta) = 0,$$

dada em coordenadas polares no plano, como sendo o conjunto dos pares ordenados

$$(r, \theta)$$

do plano polar, que satisfazem a equação acima.

A seguir aplicaremos as técnicas acima para representar geometricamente, gráficos de equações, envolvendo coordenadas polares no plano.

Exemplo 11.4.3 *Represente geometricamente o gráfico da equação*

$$r = 1\,, \quad \textit{para} \quad \theta \in [0\,, 2\pi)\,, \tag{11.97}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi)$ será dada por

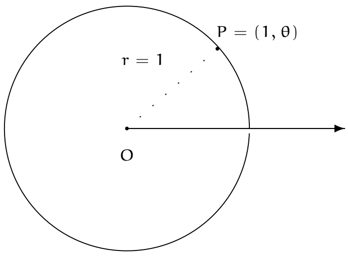
$$F(r\,,\theta) \doteq r - 1\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi)\,.$$

Se um ponto $\underline{P}$ é dado em coordenadas polares por

$$P \doteq (r\,,\theta)\,,$$

sabemos que $|r|$ é a distância de um ponto $\underline{P}$ à origem polar $\underline{O}$.

Logo, o gráfico da equação (11.97), dada em coordenadas polares no plano, é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam $\underline{1}$ unidade da origem polar $\underline{O}$, isto é, uma circunferência de centro na origem $\underline{O}$ e raio $r = 1$ (veja a figura abaixo).



Exemplo 11.4.4 *Represente geometricamente o gráfico da equação*

$$\theta = \frac{\pi}{4}\,, \quad \textit{para} \quad r \in \mathbb{R}^*\,, \tag{11.98}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi)$ será dada por

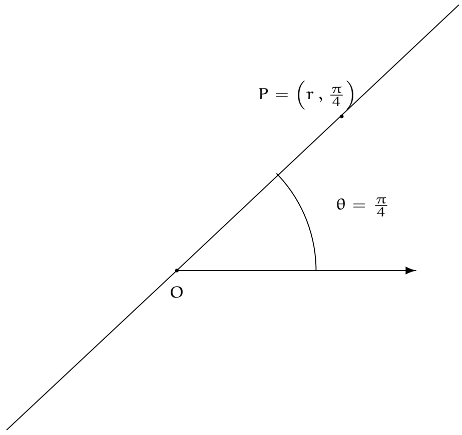
$$F(r\,,\theta) \doteq \theta - \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi)\,.$$

Sabemos que um ponto

$$P \neq O\,,$$

temos que $\underline{\theta}$ é o ângulo que o segmento de reta $\overline{OP}$ faz com o eixo polar.

Logo, o gráfico da equação (11.98), dada em coordenadas polares no plano, é o lugar geométrico dos pontos $\underline{P}$ do plano, de modo que o segmento de reta $\overline{OP}$ faz com o eixo polar que um ângulo constante de valor $\frac{\pi}{4}$, isto é, a reta $\overleftrightarrow{OP}$, menos a origem polar, onde o segmento $\overline{OP}$ forma ângulo $\frac{\pi}{4}$ com o eixo polar (veja a figura abaixo).



Observação 11.4.3 *Em algumas situações será facilitada a representação geométrica do gráfico da equação*

$$F(r,\theta) = 0\,, \quad \textit{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \tag{11.99}$$

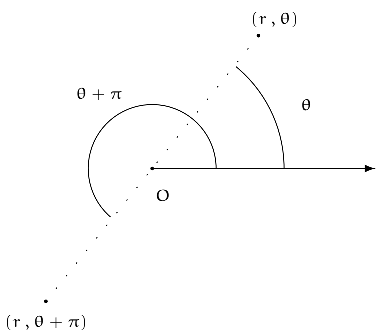
dada em coordenadas polares, se soubermos algumas propriedades da função $\underline{F}$*.*

A seguin, exibiremos algumas propriedades da função $\underline{F}$ *que poderão facilitar a representação geométrica do gráfico da equação (11.99), dada em coordenadas polares no plano.*

1. *Suponhamos que*

$$F(r\,,\theta+\pi) = F(r\,,\theta)\,, \quad \textit{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathcal{A}\,. \tag{11.100}$$

Então a representação geométrica do gráfico da equação (11.99), dada em coordenadas polares no plano, será simétrico em relação à origem polar (veja a figura abaixo).

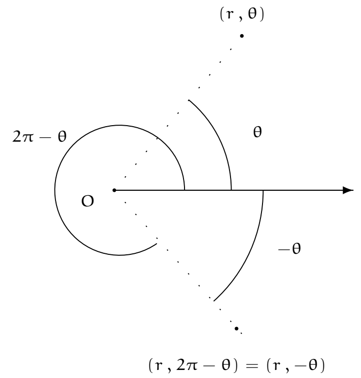


2.

3. *Suponhamos que*

$$F(r\,,\theta) = F(r\,,2\pi-\theta) \quad \textit{ou} \quad F(r,-\theta) = F(r,\theta)\,, \quad \textit{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathcal{A}\,. \tag{11.101}$$

Então a representação geométrica do gráfico da equação (11.99), dada em coordenadas polares no plano, será simétrico em relação ao eixo polar (veja a figura abaixo).

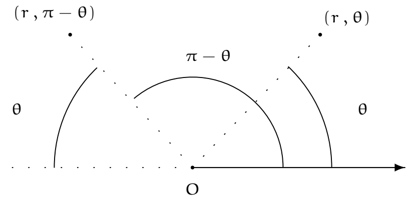


4. *Suponhamos que*

$$F(r\,,\theta) = F(r\,,\pi - \theta)\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathcal{A}\,. \tag{11.102}$$

no domínio da função F

Então a representação geométrica do gráfico da equação (11.99), dada em coordenadas polares no plano, será simétrico em relação à reta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$*, dada em coordenadas polares (veja a figura abaixo).*



Apliquemos as idéias acima aos:

Exemplo 11.4.5 *Seja* $a > 0$ *fixado. Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = a\,\cos(\theta)\,, \quad \text{para} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\,, \tag{11.103}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ será dada por

$$F(r\,,\theta) \doteq r - a\,\cos(\theta)\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\,. \tag{11.104}$$

Notemos que, para $(r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r\,,-\theta) &\overset{(11.104)}{=} r - a\,\cos(-\theta) \\ &\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta)}{=} r - a\,\cos(\theta) \overset{(11.104)}{=} F(r\,,\theta)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o gráfico da equação

$$F(r,\theta) = 0\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]\,,$$

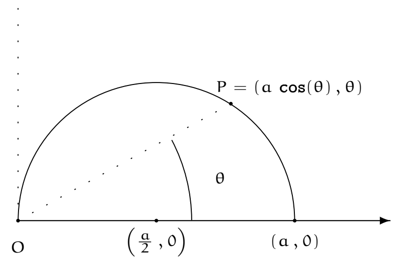
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.103), para

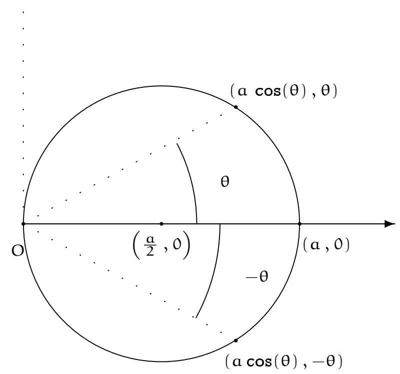
$$\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$$

e usarmos a simetria acima, para representarmos geometricamente o gráfico da mesma para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,0\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ (em coordenadas polares):



Usando que o gráfico é simétrico em relação ao eixo polar obteremos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ (em coordenadas polares):



Conclusão, obtivermos uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{a}{2}\,,0\right)$ e raio igual a $\frac{a}{2}$.

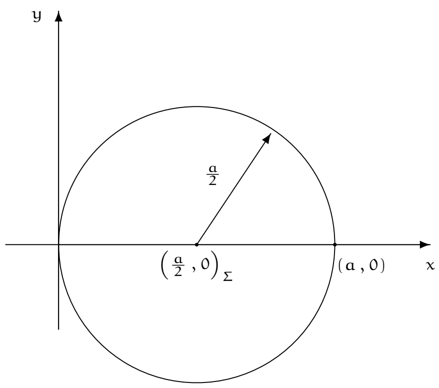
Observação 11.4.4 *Verifiquemos que a afirmação acima é de fato verdadeira.*

Para tanto, passando para coordenadas cartesianas, a equação (11.103) *tornar-se-á a equação da circunferência de centro no ponto* $\left(\frac{a}{2}\,,0\right)_\Sigma$ *e raio igual a* $\frac{a}{2}$ *(em coordenadas cartesianas).*

De fato, pois

$$r \overset{(11.103)}{=} a\cos(\theta) \quad \overset{\times r}{\Leftrightarrow} \quad r^2 = a\,r\cos(\theta)$$
$$\overset{r^2 \overset{(11.94)}{=} x^2+y^2,\, x \overset{(11.96)}{=} r\cos(\theta)}{\Leftrightarrow} x^2+y^2 = ax \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

que é a equação (em coordenadas cartesianas) de uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{a}{2}, 0\right)_\Sigma$ *e raio igula a* $\frac{a}{2}$ *(como ilustra a figura abaixo, em coordenadas cartesianas).*



Apliquemos as mesmas idéias ao:

Exemplo 11.4.6 *Seja $a > 0$ fixado. Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = -a\cos(\theta), \quad \textit{para} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \tag{11.105}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ será dada por

$$F(r, \theta) \doteq r + a\cos(\theta), \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \tag{11.106}$$

Notemos que, para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, teremos:

$$F(r, 2\pi - \theta) \overset{(11.106)}{=} r + a\cos(2\pi - \theta)$$
$$\overset{\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)}{=} r + a\cos(\theta) \overset{(11.106)}{=} F(r, \theta),$$

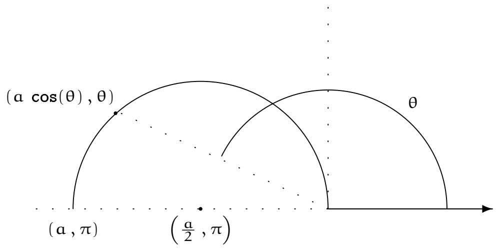
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r, \theta) = 0, \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

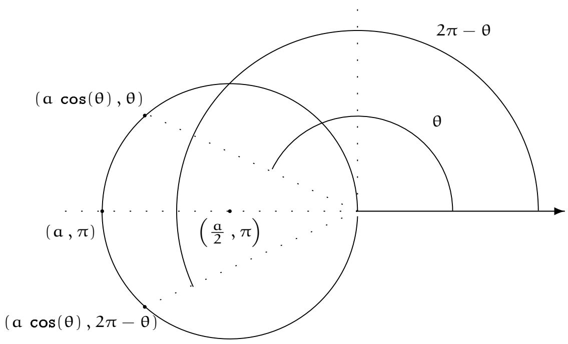
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.105), para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.105), para $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.105) (em coordenadas polares):



Conclusão, obtivermos uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{a}{2}, \pi\right)$ e raio igual a $\frac{a}{2}$.

Observação 11.4.5 *Verifiquemos que a afirmação acima é de fato verdadeira.*

Para tanto, passando para coordenadas cartesianas, a equação (11.105) *tornar-se-á a equação da circunferência de centro no ponto* $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)_\Sigma$ *e raio igual a* $\frac{a}{2}$ *(em coordenadas cartesianas).*

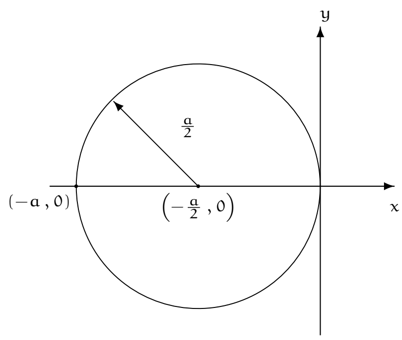
De fato,

$$r = -a\ \cos(\theta) \quad \overset{\times r}{\Leftrightarrow} \quad r^2 = -a\, r\ \cos(\theta)$$

$$\overset{r^2=x^2+y^2,\, x=r\cos(\theta)) \quad \overset{\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]}{\le} \quad 0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + y^2 = -a\, x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + ax + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

que é a equação (em coordenadas cartesianas) de uma circunferência de centro no ponto $\left(-\dfrac{a}{2}\,,0\right)$ *e raio igual a* $\dfrac{a}{2}$ *(como ilustra a figura abaixo, em coordenadas cartesianas).*



Apliquemos as mesmas idéias ao:

Exemplo 11.4.7 *Seja* $b > 0$ *fixado. Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = b\,\mathrm{sen}(\theta)\,, \quad \textit{para} \quad \theta \in [0\,,\pi]\,, \tag{11.107}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [0\,,\pi]$ será dada por

$$F(r\,,\theta) \doteq r - b\ \mathrm{sen}(\theta)\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,\pi]\,. \tag{11.108}$$

Notemos que, para $(r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,\pi]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r\,,\pi-\theta) &\overset{(11.108)}{=} r - b\ \mathrm{sen}(\pi-\theta) \\ &\overset{\mathrm{sen}(\pi-\theta)=\mathrm{sen}(\theta)}{=} r - b\ \mathrm{sen}(\theta) \overset{(11.108)}{=} F(r\,,\theta)\,, \end{aligned}$$

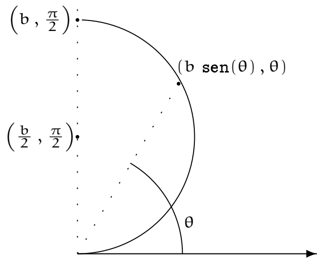
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r,\theta) = 0\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,\pi]\,,$$

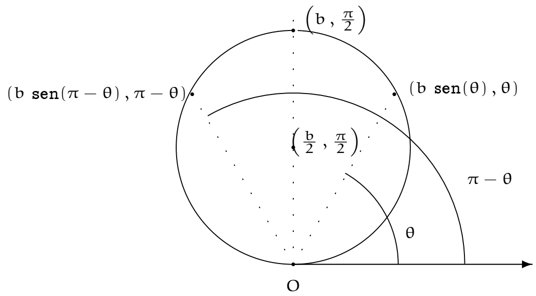
é simétrico em relação à reta que contém a origem polar $\underline{O}$ e é perpendicular ao eixo polar, ou seja, à reta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.107), para $\theta \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.107), para $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.107) (em coordenadas polares):



Conclusão, obtivermos uma circunferência de centro no ponto $\left(\dfrac{b}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right)$ e raio igual a $\dfrac{b}{2}$.

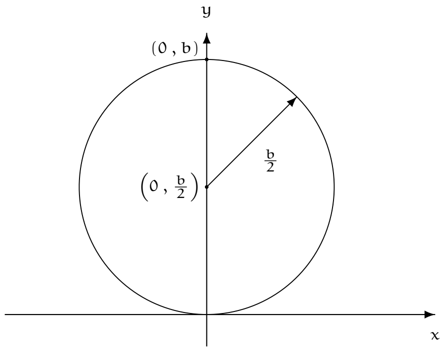
Observação 11.4.6 *Verifiquemos que a afirmação acima é de fato verdadeira.*

Para tanto, passando para coordenadas cartesianas, a equação (11.107) tornar-se-á a equação da circunferência de centro no ponto $\left(0\,,\dfrac{b}{2}\right)_{\Sigma}$ *e raio igual a* $\dfrac{b}{2}$ *(em coordenadas cartesianas).*

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
& r = b\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \overset{\times r}{\Leftrightarrow} \quad r^2 = b\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \\
& \overset{r^2=x^2+y^2,\,y=r\,\mathrm{sen}(\theta)}{\Leftrightarrow} \quad x^2+y^2 = b\,y \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-by=0 \\
& \Leftrightarrow (x-0)^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

que é a equação (em coordenadas cartesianas) de uma circunferência de centro no ponto $\left(0\,,\dfrac{b}{2}\right)_{\Sigma}$ *e raio igual a* $\dfrac{b}{2}$ *(como ilustra a figura abaixo, em coordenadas cartesianas).*



Apliquemos o mesmo para o:

Exemplo 11.4.8 *Seja $b > 0$ fixado. Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = -b \ \text{sen}(\theta) , \quad \textit{para} \quad \theta \in [\pi , 2\pi] , \tag{11.109}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [\pi , 2\pi]$ será dada por

$$F(r , \theta) \doteq r + b \ \text{sen}(\theta) , \quad \text{para} \quad (r , \theta) \in \mathbb{R}^* \times [\pi , 2\pi] . \tag{11.110}$$

Notemos que, para $(r , \theta) \in \mathbb{R}^* \times [\pi , 2\pi]$, teremos:

$$F(r , \pi - \theta) \overset{(11.110)}{=} r + b \ \text{sen}(\pi - \theta)$$
$$\overset{\text{sen}(\pi-\theta)=\text{sen}(\theta)}{=} r + b \ \text{sen}(\theta) \overset{(11.110)}{=} F(r , \theta) ,$$

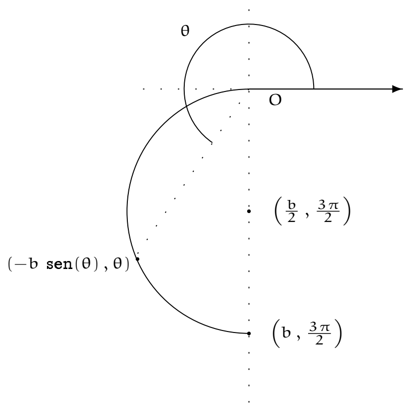
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r , \theta) = 0 , \quad \text{para} \quad (r , \theta) \in \mathbb{R}^* \times [\pi , 2\pi] ,$$

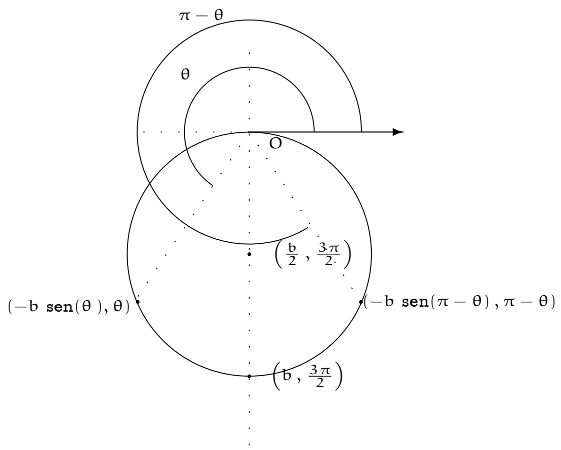
é simétrico em relação à reta que contém a origem polar $\underline{O}$ e é perpendicular ao eixo polar, ou seja, à reta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.109), para $\theta \in \left[\pi , \dfrac{3\pi}{2}\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.109), para $\theta \in \left[\dfrac{3\pi}{2} , 2\pi\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[\pi , \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.109) (em coordenadas polares):



Conclusão, obtivermos uma circunferência de centro no ponto $\left(\frac{b}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ e raio igual a $\frac{b}{2}$.

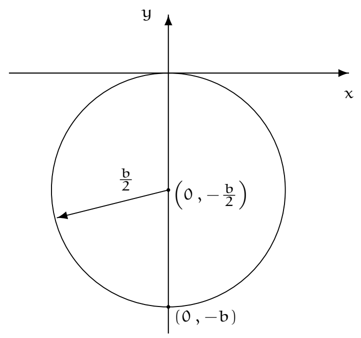
Observação 11.4.7 *Verifiquemos que a afirmação acima é de fato verdadeira.*

Na verdade, passando para coordenadas cartesianas, a equação (11.109) *é a equação da circunferência de centro no ponto* $\left(0, -\frac{b}{2}\right)_\Sigma$ *e raio igual a* $\frac{b}{2}$ *(em coordenadas cartesianas).*

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
r = -b\ \mathrm{sen}(\theta) \quad &\overset{\times r}{\Leftrightarrow} \quad r^2 = -b\, r\, \mathrm{sen}(\theta) \\
\overset{r^2=x^2+y^2,\, y=r\,\mathrm{sen}(\theta)}{\Leftrightarrow} \quad & x^2 + y^2 = -b\, y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + by = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-0)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

que é a equação (em coordenadas cartesianas) de uma circunferência de centro no ponto $\left(0, -\frac{b}{2}\right)_\Sigma$ *e raio igual a* $\frac{b}{2}$ *(como ilustra a figura abaixo em coordenadas cartesianas).*



Em geral temos a:

Observação 11.4.8 *Dados $a, b \geq 0$, não ambos nulos, podemos mostrar que a representação geométrica da equação*

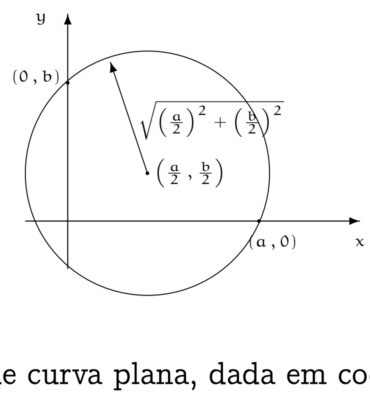
$$r = a\,\cos(\theta) + b\,\operatorname{sen}(\theta)\,, \tag{11.111}$$

para $\underline{\theta}$ variando em um intervalo conveniente, nos dá uma circunferência.

De fato, notemos que se $\theta \in [0\,, 2\pi]$ temos, passando para coordenadas cartesianas, que a equação (11.111), tornar-se-á:

$$\begin{aligned} r = a\,\cos(\theta) + b\,\operatorname{sen}(\theta) \quad &\overset{\times r}{\iff} \quad r^2 = a\,r\,\cos(\theta) + b\,r\,\operatorname{sen}(\theta) \\ \overset{r^2=x^2+y^2\,,\,x=r\,\cos(\theta)\,,\,y=r\,\operatorname{sen}(\theta)}{\iff} \quad &x^2 + y^2 = a\,x + b\,y \\ \iff \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\,, \end{aligned}$$

ou seja, em coordenadas cartesianas, temos um arco de circunferência de centro no ponto $\left(\frac{a}{2}\,, \frac{b}{2}\right)$ e raio igual a $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ (veja a figura abaixo).



Outro exemplo importante de curva plana, dada em coordenadas polares, é dado pelo:

Exemplo 11.4.9 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)\,, \quad para \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{3\pi}{2}\right]\,, \tag{11.112}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F: \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ será dada por

$$F(r, \theta) \doteq r - 1 - \text{sen}(\theta), \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \qquad (11.113)$$

Notemos que, para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, \pi - \theta) &\overset{(11.112)}{=} r - 1 - \text{sen}(\pi - \theta) \\ &\overset{\text{sen}(\pi-\theta)=\text{sen}(\theta)}{=} r - 1 - \text{sen}(\theta) \overset{(11.112)}{=} F(r, \theta), \end{aligned}$$

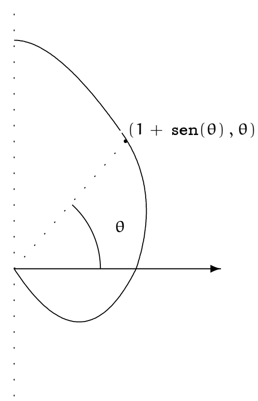
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r, \theta) = 0, \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

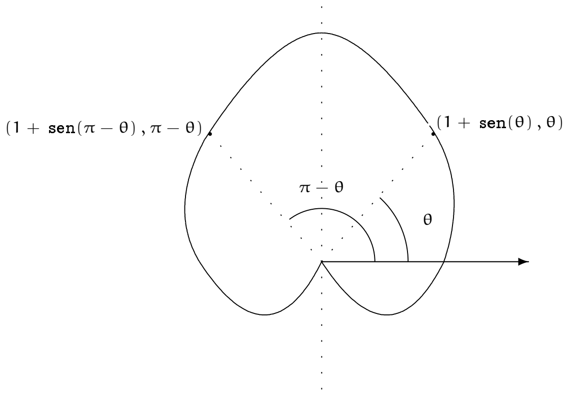
é simétrico em relação à reta que contém a origem polar $\underline{O}$ e é perpendicular ao eixo polar, ou seja, à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.112), para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.112), para $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.112) (em coordenadas polares):



Observação 11.4.9 *A curva acima é denominada* **cardióide**.

Uma outra cardióide é dada pelo:

Exemplo 11.4.10 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = 1 - \cos(\theta), \quad \textit{para} \quad \theta \in [-\pi, \pi], \tag{11.114}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [-\pi, \pi]$ será dada por

$$F(r, \theta) \doteq r - 1 + \cos(\theta), \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times [-\pi, \pi]. \tag{11.115}$$

Notemos que, para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times [-\pi, \pi]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, -\theta) &\overset{(11.115)}{=} r - 1 + \cos(-\theta) \\ &\overset{\cos(-\theta)=\cos(\theta)}{=} r - 1 + \cos(\theta) \overset{(11.115)}{=} F(r, \theta), \end{aligned}$$

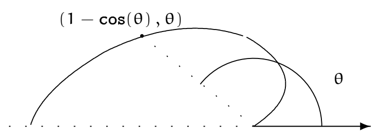
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r, \theta) = 0, \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times [-\pi, \pi],$$

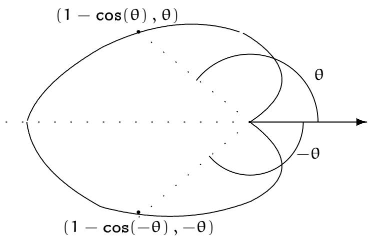
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.114), para $\theta \in [-\pi, 0]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.114), para $\theta \in [0, \pi]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in [-\pi, 0]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.114) (em coordenadas polares):



Um outro caso é dado pelo:

Exemplo 11.4.11 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = 1 + 2\,\cos(\theta)\,, \quad \textit{para} \quad \theta \in [0\,,2\pi]\,, \tag{11.116}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times [0\,,2\pi]$ será dada por

$$F(r\,,\theta) \doteq r - 1 - 2\,\cos(\theta)\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,2\pi]\,. \tag{11.117}$$

Notemos que, para $(r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,2\pi]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, 2\pi - \theta) &\overset{(11.117)}{=} r - 1 - 2\cos(2\pi - \theta) \\ &\overset{\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta)}{=} r - 1 - 2\,\cos(\theta) \overset{(11.117)}{=} F(r\,,\theta)\,, \end{aligned}$$

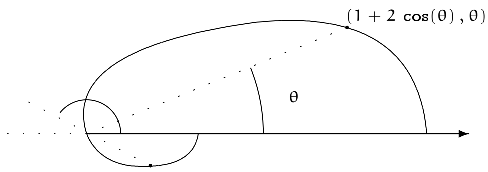
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r\,,\theta) = 0\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,2\pi]\,,$$

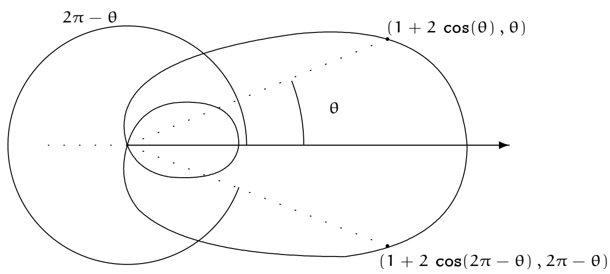
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.116), para $\theta \in [0\,,\pi]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.116), para $\theta \in [\pi\,,2\pi]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in [0\,,\pi]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.116) (em coordenadas polares):



Observação 11.4.10 *A curva acima é denominada* **limaçom**.

Exemplo 11.4.12 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = 3\cos(2\theta), \quad \textit{para} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{11.118}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ será dada por

$$F(r, \theta) \doteq r - 3\cos(2\theta), \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{11.119}$$

Notemos que, para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, -\theta) &\overset{(11.119)}{=} r - 3\cos(-2\theta) \\ &\overset{\cos(-2\theta)=\cos(2\theta)}{=} r - 3\cos(2\theta) \overset{(11.119)}{=} F(r, \theta), \end{aligned}$$

ou seja, o gráfico da equação

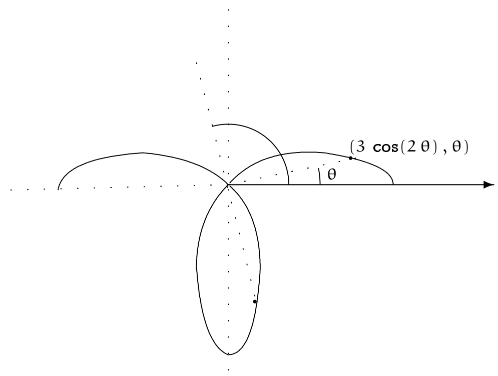
$$F(r, \theta) = 0, \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

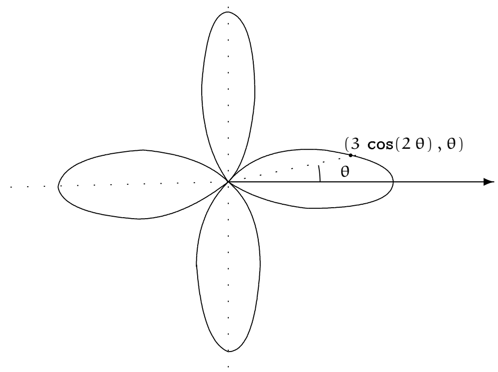
Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.118), para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.118), para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (em coordenadas polares):

Com isto obtemos a figura abaixo (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.118) (em coordenadas polares):



Observação 11.4.11 *A curva acima é conhecida como* **rosácea de quatro pétalas**.

Exemplo 11.4.13 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r = 3\cos(5\theta), \quad \textit{para} \quad \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{5}\right],. \tag{11.120}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times \left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$ será dada por

$$F(r, \theta) \doteq r - 3\cos(5\theta), \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[0, \frac{2\pi}{5}\right]. \tag{11.121}$$

Notemos que, para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, -\theta) &\overset{(11.121)}{=} r - 3\cos(-5\theta) \\ &\overset{\cos(-5\theta)=\cos(5\theta)}{=} r - 3\cos(5\theta) \overset{(11.121)}{=} F(r, \theta), \end{aligned}$$

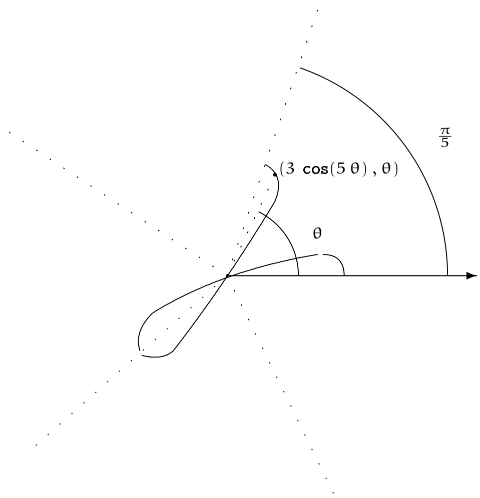
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r, \theta) = 0, \quad \text{para} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[0, \frac{2\pi}{5}\right],$$

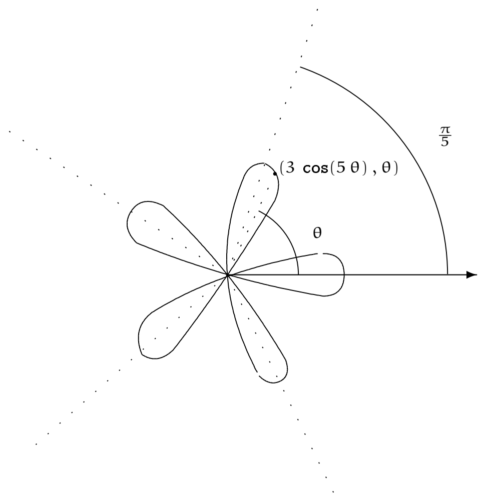
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.120), para $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{5}\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.120), para $\theta \in \left[\frac{\pi}{5}\,,\frac{2\pi}{5}\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{5}\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.120) (em coordenadas polares):



Observação 11.4.12

1. *A curva a cima é uma* **rosácea de cinco pétalas**.
2. *Dados,* $a > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, temos que a representação geométrica do gráfico de uma equação do tipo*

$$r = a\,\cos(n\,\theta)\,,\ \textit{para}\ \theta \in \left[0\,,\frac{2\pi}{n}\right] \qquad \textit{ou} \qquad r = a\,\mathrm{sen}(n\,\theta),\ ,\ \textit{para}\ \theta \in \left[0\,,\frac{2\pi}{n}\right]\,, \tag{11.122}$$

dada em coordenadas polares no plano, será uma **rosáceas de $2n$ pétalas**, *se n for par e* **rosáceas de n pétalas**, *se n for ímpar.*

A verificação destes fatos sera deixada como exercício para o leitor.

Outro exemplo importante é:

Exemplo 11.4.14 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r^2 = \cos(2\,\theta)\,, \quad \textit{para} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]\,, \tag{11.123}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Na verdade temos duas equações, a saber:

$$r = \sqrt{\cos(2\,\theta)}\,, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{e} \quad r = -\sqrt{\cos(2\,\theta)}\,, \text{ para } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]\,. \tag{11.124}$$

Vamos, primeiramente, encontrar a representação geométrica do gráfico da equação

$$r = \sqrt{\cos(2\,\theta)}\,, \quad \text{para} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]\,. \tag{11.125}$$

Neste caso, temos que a função $F : \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]$ será dada por

$$F(r\,,\theta) \doteq r - \sqrt{\cos(2\,\theta)}\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]\,. \tag{11.126}$$

Notemos que, para $(r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]$, teremos:

$$\begin{aligned} F(r, -\theta) &\overset{(11.126)}{=} r - \sqrt{\cos(-2\,\theta)} \\ &\overset{\cos(-2\,\theta)=\cos(2\,\theta)}{=} r - \sqrt{\cos(2\,\theta)} \overset{(11.126)}{=} F(r\,,\theta)\,, \end{aligned}$$

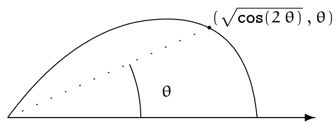
ou seja, o gráfico da equação

$$F(r\,,\theta) = 0\,, \quad \text{para} \quad (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \left[-\frac{\pi}{4}\,, \frac{\pi}{4}\right]\,,$$

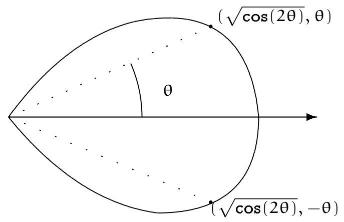
é simétrico em relação à reta que contém o eixo polar.

Logo basta representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.125), para $\theta \in \left[0\,, \frac{\pi}{4}\right]$, e usarmos a simetria acima para representarmos geometricamente o gráfico da equação (11.125), para $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}\,, 0\right]$.

Com isto obtemos a seguinte representação geométrica, para $\theta \in \left[0\,, \frac{\pi}{4}\right]$ (em coordenadas polares):



Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.125) (em coordenadas polares):

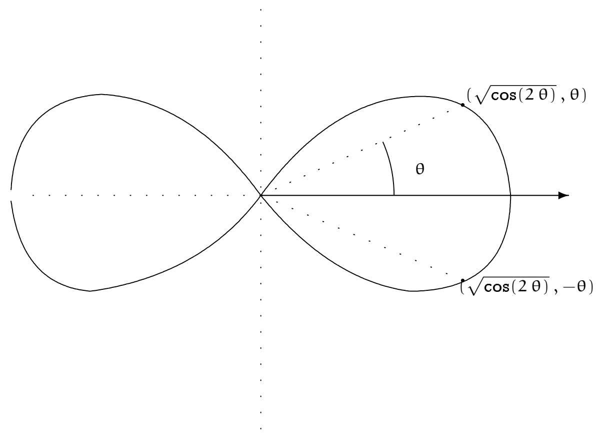


A representação geométrica do gráfico da equação

$$r = -\sqrt{\cos(2\,\theta)}\,, \quad \text{para} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \tag{11.127}$$

pode ser obtido da representação geométrica do gráfico da equação (11.125), observando-se que o primeiro é simétrico em relação ao segundo, relativamente a reta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Da simetria acima, obteremos a seguinte representação geométrica do gráfico da equação (11.123) (em coordenadas polares):



Observação 11.4.13 *A curva acima é conhecida como* <u>**lemniscata**</u>.

Para terminar temos o:

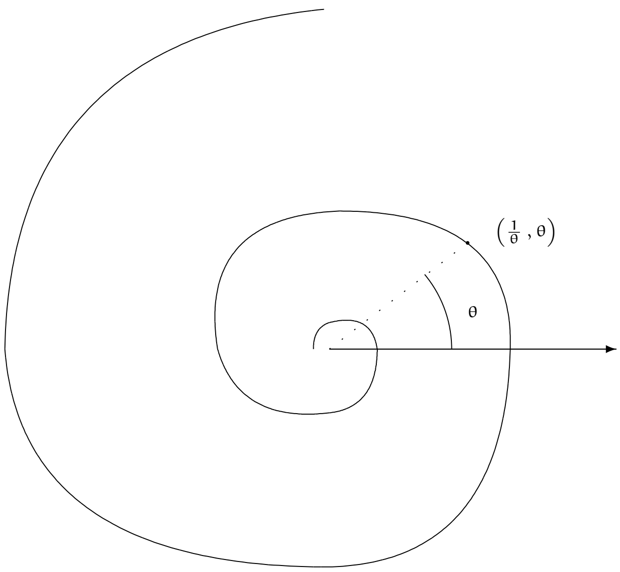
Exemplo 11.4.15 *Encontrar a representação geométrica do gráfico da equação*

$$r\,\theta = 1\,, \quad \textit{para} \quad \theta \in (r\,,\theta) \in \mathbb{R}^* \times [0\,,\infty)\,, \tag{11.128}$$

dada em coordenadas polares no plano.

Resolução:

Neste caso teremos a seguinte configuração geométrica:



Observação 11.4.14 *A curva acima é denominada* <u>**espiral de Arquimedes**</u>.

No espaço temos as seguintes mudanças de coordenadas mais importantes:

11.5 Coordenadas Esféricas (No Espaço)

Consideremos um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

no espaço e um ponto <u>P</u>, diferente da origem <u>O</u>, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas <u>Σ</u>, sejam dadas por:

$$P \doteq (x, y, z)_\Sigma \neq (0, 0, 0)_\Sigma . \tag{11.129}$$

Com isto, podemos encontrar

$$\rho \in (0, \infty), \quad \varphi \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi), \tag{11.130}$$

de modo que

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}, \tag{11.131}$$

ou seja,

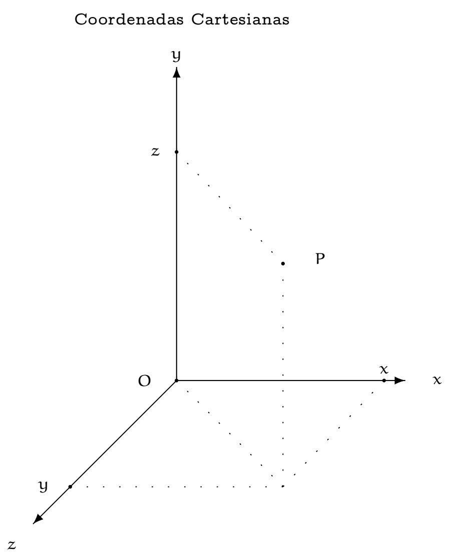
$$\begin{cases} \rho = d(P\,,O) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta : \begin{cases} \theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } \ y \in (0\,,\infty) \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{se } \ y \in (-\infty\,,0) \end{cases} & , \ \text{se } \ x = 0 \\ \operatorname{tg}(\theta) \doteq \dfrac{y}{x}, \ \text{se } \ x \neq 0 \end{cases} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \tag{11.132}$$

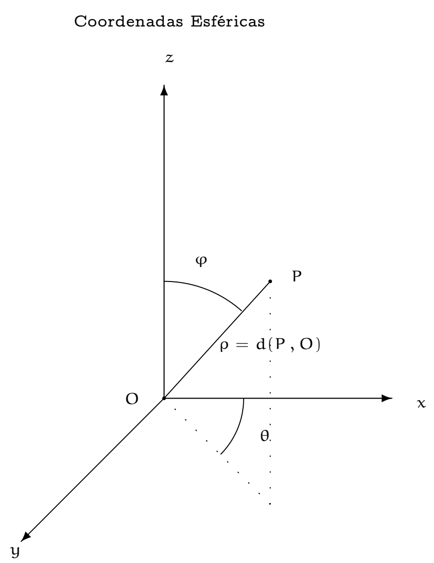
A terna

$$(\rho\,,\theta\,,\varphi)$$

será denominada **coordenadas esféricas (ou polares no espaço)** do ponto $\underline{P}$.

Geometricamente temos:





Observação 11.5.1 *Observemos que :*

- $\rho \in (0\,,\infty)$, *nos fornece a distância do ponto* $\underline{P}$ *à origem* $\underline{O}$,
- $\theta \in [0, 2\pi)$ *é a medida do ângulo, em radianos, que a projeção ortogonal do segmento* $\overline{OP}$, *no plano* xOy, *faz com o eixo* Ox,
- $\varphi \in [0, \pi]$ *é a medida do ângulo, em radianos, que o segmento* $\overline{OP}$ *faz com o eixo* Oz.

Desta forma a cada ponto do espaço podemos associar as suas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$*) ou suas coordenadas esféricas, que estão relacionadas por meio das equações (11.131) e (11.132).*

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 11.5.1

1. *Determinar as coordenadas esféricas dos pontos abaixo, dados em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$) por:*

$$\text{a) } P_1 \doteq (1\,,1\,,1)_\Sigma \quad \text{b) } P_2 \doteq (1\,,0\,,1)_\Sigma \tag{11.133}$$

2. *Determinar as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$) dos pontos abaixo, dados em coordenadas esfércias por:*

$$\text{a) } P_3 \doteq \left(2\,,\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{b) } P_4 \doteq \left(3\,,\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right) \tag{11.134}$$

Resolução:

De 1.:

a): Notemos que, de (11.133) item a), segue que

$$x = y = z = 1\,. \tag{11.135}$$

Logo, de (11.132), teremos:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \overset{(11.135)}{=} \sqrt{1^2+1^2+1^2} \\
&= \sqrt{3}\,, \\
\theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \overset{(11.135)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\,, \\
\varphi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \overset{(11.135)}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,.
\end{aligned}$$

Logo as coordenadas esféricas do ponto $\underline{P_1}$ serão dadas por:

$$P_1 = \left(\sqrt{3}\,,\frac{\pi}{4}\,,\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\,.$$

b): Notemos que, de (11.133) item b), segue que

$$x = z = 1 \quad \text{e} \quad y = 0\,. \tag{11.136}$$

Logo, de (11.132), teremos:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \overset{(11.136)}{=} \sqrt{1^2+0^2+1^2} \\
&= \sqrt{2}, \\
\theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \overset{(11.136)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{1}\right) = \operatorname{arctg}(0) \\
&= 0, \\
\varphi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \overset{(11.136)}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Logo as coordenadas esféricas do ponto $\underline{P_2}$ serão dadas por:

$$P_2 = \left(\sqrt{2}, 0, \frac{\pi}{4}\right).$$

De 2.:

a): Notemos que, de (11.134) item a), segue que

$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \tag{11.137}$$

Logo, de (11.131), teremos:

$$\begin{aligned}
x &= \rho\,\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) \overset{(11.137)}{=} 2\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 0, \\
y &= \rho\,\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) \overset{(11.137)}{=} 2\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}, \\
z &= \rho\cos(\varphi) \overset{(11.137)}{=} 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Logo as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$) do ponto $\underline{P_3}$ serão dadas por:

$$P = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

b): Notemos que, de (11.134) item b), segue que

$$\rho = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \tag{11.138}$$

Logo, de (11.131), teremos:

$$\begin{aligned} x &= \rho\ \text{sen}(\varphi)\ \cos(\theta) \overset{(11.138)}{=} 3\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y &= \rho\ \text{sen}(\varphi)\ \text{sen}(\theta) \overset{(11.138)}{=} 3\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ z &= \rho\ \cos(\varphi) \overset{(11.138)}{=} 3\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Logo as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$) do ponto $\underline{P_4}$ serão dadas por:

$$P = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Observação 11.5.2 *Uma equação (um curva ou um superfície do espaço) podem ter a representação geométrica do seu gráfico facilitado quando utilizamos coordenadas esféricas, em vez de representá-las geometricamente utilizando cooredenadas caretesianas(isto é, em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$), como veremos em alguns exemplos a seguir.*

Exemplo 11.5.2 *Representar geometricamente o gráfico da equação*

$$\rho = 1, \quad para \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi], \tag{11.139}$$

dada em coordenadas esféricas no espaço.

Resolução:

Notemos que, de (11.131), teremos:

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,\text{sen}(\varphi)\,\text{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}, \quad \text{de (11.139), segue que:} \quad \begin{cases} x = \text{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \text{sen}(\varphi)\,\text{sen}(\theta) \\ z = \cos(\varphi) \end{cases}. \tag{11.140}$$

Logo, se um ponto $\underline{P}$ no espaço, cujas coordenadas polares são dadas por

$$P \doteq (\rho, \theta, \phi),$$

satisfazem a equação (11.139), suas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), são dadas por

$$P = (x, y, z)_\Sigma,$$

deverão satisfzer a seguinte equação:

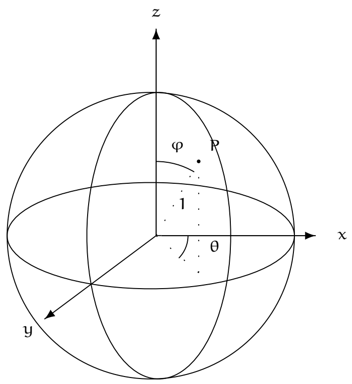
$$x^2 + y^2 + z^2 \overset{(11.140)}{=} [\operatorname{sen}(\varphi)\,\cos(\theta)]^2 + [\operatorname{sen}(\varphi)\,\operatorname{sen}(\theta)]^2 + [\cos(\varphi)]^2 \overset{\text{Exercício}}{=} 1\,,$$

ou seja, o ponto $\underline{P}$ deverá pertencer a esfera de centro na origem $\underline{O}$ e raio igual a $\underline{1}$.

Lembremos que, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, temos

$$d(P\,,O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

A representação geométrica da equação (11.139), dada em coordenadas esféricas, é exibida na figura abaixo:



Um outro caso é dado pelo:

Exemplo 11.5.3 *Representar geometricamente o gráfico da equação*

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{4} \\ \theta = 0 \end{cases} \quad , \quad \textit{para} \quad \rho \in (0\,,\infty)\,, \tag{11.141}$$

dada em coordenadas esféricas no espaço.

Resolução:

Notemos que, de (11.131), teremos:

$$\begin{cases} x = \rho\,\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \quad , \quad \text{de (11.141), segue que:} \quad \begin{cases} x = \rho\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\,\cos(0) \\ \\ y = \rho\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\,\operatorname{sen}(0) \\ \\ z = \rho\,\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

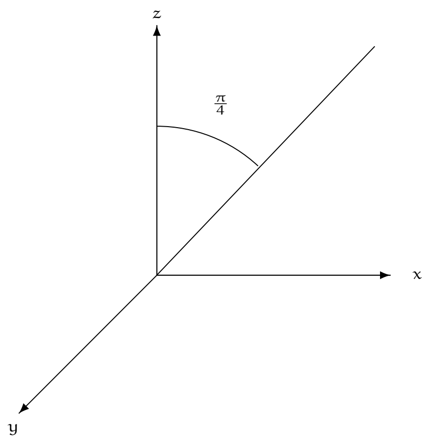
ou seja,
$$\begin{cases} x = \rho\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \\ z = \rho\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad . \tag{11.142}$$

para $\rho \in (0\,,\infty)$.

A representação geométrica gráfico do sistema de equações (11.141), dado em coordenadas esféricas no espaço, será a a semi-reta, dada em coordenadas cartesianas no espaço (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no espaço), por:

$$\begin{cases} x = z > 0 \quad (\text{pois } \rho > 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

contida no plano xOz (veja a figura abaixo).



Exemplo 11.5.4 *Representar geometricamente o gráfico da equação*

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \textit{para} \quad (\rho\,,\theta) \in (0\,,\infty) \times [0\,,2\pi)\,, \tag{11.143}$$

dada em coordenadas esféricas no espaço.

Resolução:

Notemos que, de (11.131), teremos:

$$\begin{cases} x = \rho \text{ sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \text{ sen}(\varphi) \text{ sen}(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}, \quad \text{de (11.143), segue que:} \quad \begin{cases} x = \rho \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\theta) \\ y = \rho \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ sen}(\theta) \\ z = \rho \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = \rho \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cos(\theta) \\ y = \rho \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ sen}(\theta) \\ z = \rho \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} . \tag{11.144}$$

para $(\rho, \theta) \in (0\,,\infty) \times [0\,,2\pi)$.

Logo, se um ponto $\underline{P}$ no espaço, cujas coordenadas polares são dadas por

$$P \doteq (\rho\,,\theta\,,\varphi)\,,$$

satisfazem a equação (11.143), suas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), são dadas por

$$P = (x\,,y\,,z)_\Sigma\,,$$

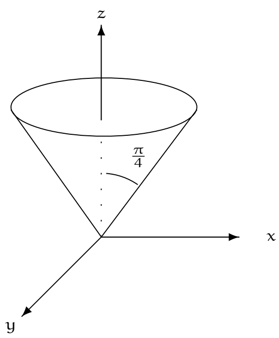
deverão satisfzer a seguinte equação:

$$x^2 + y^2 \overset{(11.144)}{=} \left[\rho\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos(\theta)\right]^2 + \left[\rho\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta)\right]^2 = \left[\rho\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 \overset{(11.144)}{=} z^2\,,$$

isto é,

$$z^2 = x^2 + y^2\,. \tag{11.145}$$

A representação geométrica do gráfico da equação (11.145), dada em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$) será o cone de revolução, obtido da rotação da semi-reta do Exemplo (11.5.3), em torno do eixo Oz (veja a figura abaixo).



11.6 Coordenadas Cilíndricas (No Espaço)

Consideremos um sistema de coordenadas ortogonal fixado n o espaço,

$$\Sigma = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,,$$

um ponto $\underline{P}$, diferente da origem $\underline{O}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \neq (0\,,0\,,0)_\Sigma\,. \tag{11.146}$$

Então podemos encontrar

$$\rho \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad \theta \in [0\,,2\pi)\,, \tag{11.147}$$

de modo que

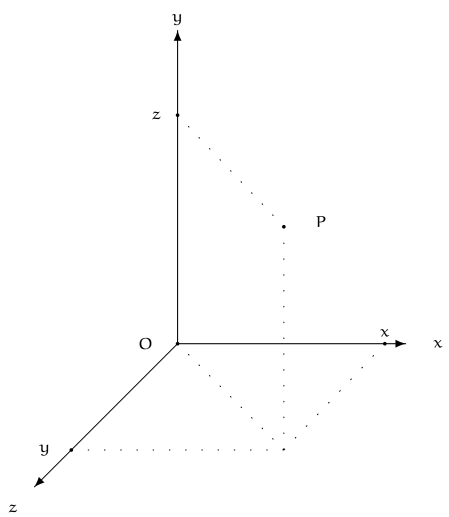
$$\begin{cases} x = \rho\,\cos(\theta) \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}, \tag{11.148}$$

ou seja,

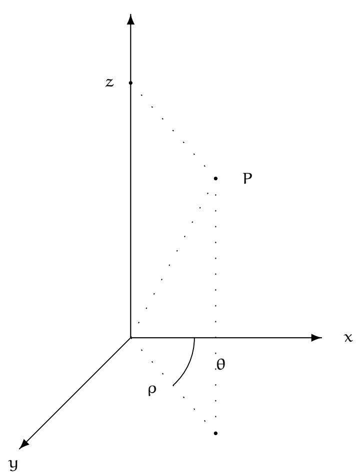
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } \; x = 0 \; \text{ e } \; y \in (0\,,\infty) \\ \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{se } \; x = 0 \; \text{ e } \; y \in (-\infty\,,0) \\ \\ \mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x}, & \text{se } \; x \neq 0 \end{cases} \end{cases}. \tag{11.149}$$

Geometricamente temos a seguinte situação:

Coordenadas Cartesianas



Coordenadas Cilíndricas



A terna

$$(\rho\,,\theta\,,z)$$

obtida em (11.149), será dita <u>**coordenadas cilídricas do ponto $\underline{P}$**</u> do espaço.

Observação 11.6.1 *Observemos que:*

- $\underline{\rho}$ *é a distância do ponto* $\underline{P}$ *a origem* $\underline{O}$*;*

- $\underline{\theta}$ *é a medida, em radianos, do ângulo entre a projeção ortogonal do segmento* $\overline{OP}$*, no plano* xOy*, com o eixo* Ox*.*

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 11.6.1

1. *Determine as coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordanadas ortogonal $\underline{\Sigma}$) do ponto $\underline{P_1}$ do espaço, cujas em coordenadas cilíndricas são dadas por:*

$$P_1 \doteq \left(3\,,\frac{7\pi}{4}\,,-2\right). \tag{11.150}$$

2. *Determine as coordenadas cilíndricas do ponto $\underline{P_2}$, cujas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordanadas ortogonal $\underline{\Sigma}$) são dadas por:*

$$P_2 \doteq (1\,,1\,,1)_\Sigma\,. \tag{11.151}$$

Resolução:

De 1.:

De (11.150), segue que

$$\rho = 3\,,\quad \theta = \frac{7\pi}{4} \quad \text{e} \quad z = -2\,. \tag{11.152}$$

Logo, de (11.148), temos que

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\cos(\theta) \overset{(11.152)}{=} 3\,\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 3\,\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2}\,, \\ x &= \rho\,\text{sen}(\theta) \overset{(11.152)}{=} 3\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 3\,\frac{-\sqrt{2}}{2}\,, \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ z &= z \overset{(11.152)}{=} -2\,. \end{aligned}$$

Logo as coordenadas cartesianas do ponto P_1 (isto é, em relação ao sistema de coordanadas ortogonal $\underline{\Sigma}$) serão dadas por:

$$P_1 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,,-2\right)_\Sigma\,.$$

De 2.:

De (11.151), segue que

$$x = y = z = 1\,. \tag{11.153}$$

Logo, de (11.149), temos que

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \overset{(11.153)}{=} \sqrt{1^2+1^2} \\ &= \sqrt{2}\,, \\ \theta &= \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \overset{(11.153)}{=} \text{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\,, \\ z &= z \overset{(11.153)}{=} 1\,. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas cilíndricas do ponto $\underline{P_2}$ serão dadas por:

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right).$$

Observação 11.6.2 *Em algumas situações, pode ser mais fácil representar geometricamente o gráfico de uma equação (um curva ou um superfície) em coordenadas cilíndricas, do que em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordanadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), como veremos nos exemplos a seguir.*

Exemplo 11.6.2 *Representar geometricamente o gráfico da equação*

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \textit{para} \quad (\rho, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \tag{11.154}$$

dada em coordenadas cilíndricas no espaço.

Resolução:

Logo, se um ponto $\underline{P}$ no espaço, cujas coordenadas cilíndricas são dadas por

$$P \doteq (\rho, \theta, z),$$

satisfazem a equação (11.154), suas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), são dadas por

$$P = (x, y, z)_\Sigma,$$

por (11.148), deverão satisfazer a seguinte equação:

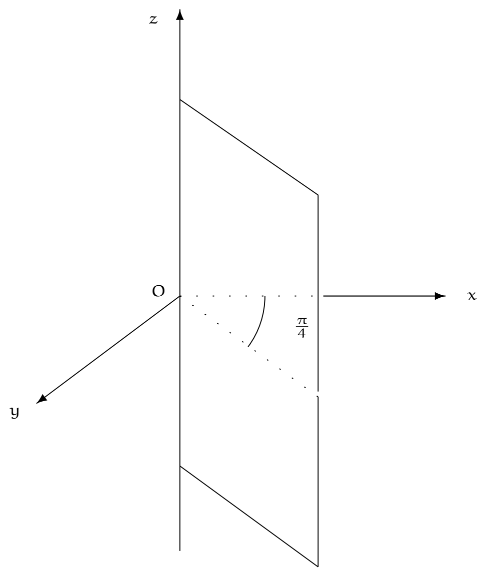
$$\begin{cases} x = \rho\,\cos(\theta) \\ y = \rho\,\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}, \quad \text{de (11.154), teremos} \quad \begin{cases} x = \rho\,\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y = \rho\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \\ z = z \end{cases}$$

ou seja, $$\begin{cases} x = \rho\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \rho\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z = z \end{cases},$$

para $\rho \in (0, \infty)$, ou seja, em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$) será o semi-plano

$$x = y, \quad \text{para} \quad y \in (0, \infty).$$

A representação geométrica gráfico da equação (11.154), da em coordenadas cilíndricas, é exibida na figura abaixo.



Temos também o:

Exemplo 11.6.3 *Representar geometricamente o gráfico da equação*

$$\rho = 3\,, \quad \textit{para} \quad (\theta\,, z) \in [0\,, 2\pi) \times \mathbb{R}\,, \tag{11.155}$$

dada em coordenadas cilíndricas no espaço.

Resolução:

Logo, se um ponto $\underline{P}$ no espaço, cujas coordenadas cilíndricas são dadas por

$$P \doteq (\rho\,, \theta\,, z)\,,$$

satisfazem a equação (11.155), suas coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), são dadas por

$$P = (x\,, y\,, z)_\Sigma\,,$$

por (11.148), deverão satisfazer a seguinte equação:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad , \quad \text{de (11.155), teremos}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cos(\theta) \\ \\ y = 3 \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \tag{11.156}$$

para $(\theta\,, z) \in [0\,, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Observemos que

$$x^2 + y^2 \overset{(11.156)}{=} [3\,\cos(\theta)]^2 + [3\,\mathrm{sen}\,(\theta)]^2$$
$$= 9\,,$$

ou seja, em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), será uma circunferência de centro no ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas cartesianas $\underline{\Sigma}$, serão dadas por

$$C \doteq (0\,,0\,,z)_\Sigma\,,$$

e com raio igual a

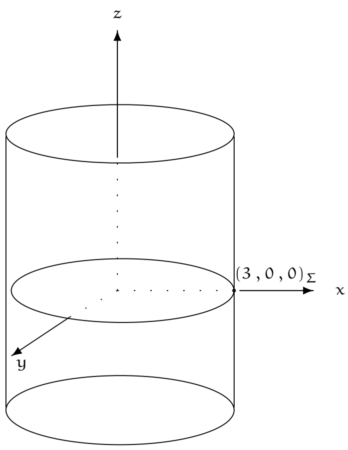
$$R \doteq 3$$

, contida no plano $z = const.$

Portanto, a representação geométrica da equação (11.155), dada em coordenadas cilíndricas, será o cilindro de revolução (isto é, circular reto) obtido da rotação da reta

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}\,,$$

dada em coordenadas cartesianas, em torno do eixo Oz (veja a figura abaixo).



Capítulo 12

As Cônicas

Fixemos um sistema de coordenadas ortogonal no plano,

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,.$$

Neste capítulo estudaremos a representação geométrica do gráfico da equação, dada em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, por :

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0 \tag{12.1}$$

onde

$$A\,, B\,, C\,, D\,, E\,, F$$

são números reais fixados.

Antes porém estudaremos três lugares geométricos, que são de grande importância no estudo da Geometria e que são, como veremos, casos particulares da equação (12.1), a saber:

Elipse, Hipérbole e Parábola.

Inciaremos com o estudo da:

12.1 Elipse

Começaremos pela:

Definição 12.1.1 *Consideremos num plano $\underline{\pi}$ do espaço, e dois pontos distintos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$, cuja distância entre eles é $\underline{2c}$, onde $c \in (0, \infty)$ está fixado, ou seja.*

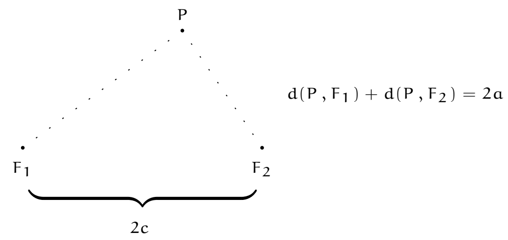
$$d(F_1\,, F_2) = 2\,c\,. \tag{12.2}$$

Seja $a \in [c, \infty)$ fixado.

O lugar geométrico dos pontos $\underline{P}$ que pertencem ao plano $\underline{\pi}$, que satisfazem a equação

$$d(P\,, F_1) + d(P\,, F_2) = 2\,a\,, \tag{12.3}$$

será dado o nome de <u>**elipse**</u>.



Observação 12.1.1

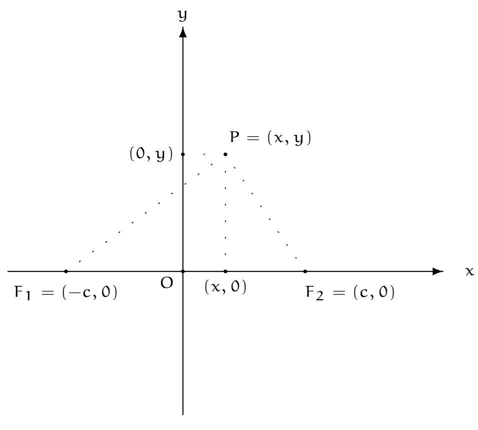
1. *A seguir vamos encontrar uma equação que descreverá analiticamente uma elipse, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ conveniente do plano $\underline{\pi}$.*

   Consideremos um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no plano $\underline{\pi}$, de modo que:

   - *o eixo Ox contenha os pontos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$;*
   - *a origem $\underline{O}$, do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, seja o ponto médio segmento $\overline{F_1F_2}$;*
   - *o eixo dos Oy seja a reta perpendicular ao eixo Ox pelo ponto $\underline{O}$ (ou ainda, a mediatriz do $\overline{F_1F_2}$).*

   Deste modo teremos que (veja figura abaixo)

$$F_1 = (-c\,,0)_\Sigma \quad e \quad F_2 = (c\,,0)_\Sigma\,. \tag{12.4}$$



Um ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma \tag{12.5}$$

satisfaz a relação (12.3) se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
& d(P\,,F_1) + d(P\,,F_2) = 2a\,, \\
\textit{ou seja,}\quad & d\left((x\,,y)_\Sigma\,,(-c\,,0)_\Sigma\right) + d\left((x\,,y)_\Sigma\,,(c\,,0)_\Sigma\right) = 2a \\
\textit{ou ainda,}\quad & \sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a \\
\textit{isto é,}\quad & \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\textit{ou ainda,}\quad & (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + [(x-c)^2+y^2] \\
\textit{ou seja,}\quad & 4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 4a^2 + \left(x^2-2xc+c^2\right) - \left(x^2+2xc+c^2+y^2\right) \\
\textit{ou seja,}\quad & 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc \\
\textit{isto é,}\quad & a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = \left(a^2-xc\right)^2 \\
\textit{ou ainda,}\quad & a^2\left[x^2-2xc+c^2+y^2\right] = \left(a^4-2a^2xc+x^2c^2\right) \\
\textit{isto é,}\quad & \left(a^2-c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right) \\
\textit{como,}\quad & a^2(a^2-c^2) \neq 0\,, \\
\textit{teremos:}\quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1\,. \qquad (12.6)
\end{aligned}
$$

Definindo-se:

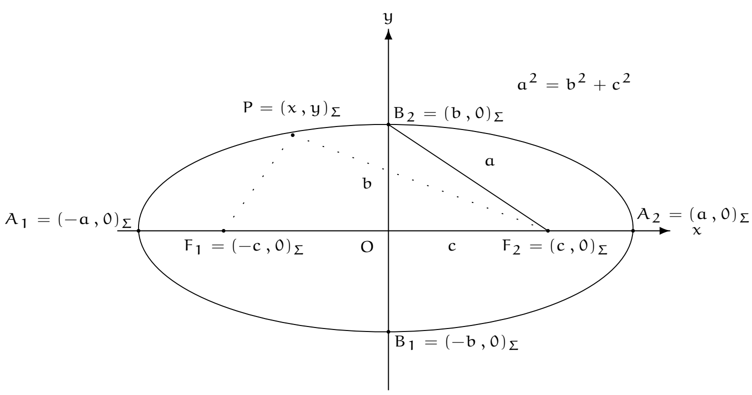
$$b \doteq \sqrt{a^2-c^2} \qquad (12.7)$$

podemos reescrever a equação (12.6), como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (12.8)$$

que será denominada **equação na forma reduzida da elipse** *em coordenadas cartesianas (isto é, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$).*

2. *A representação geométrica da equação (12.3), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura a seguir.*



3. *Podemos obter a representação geométrica de uma elipse, conhecendo-se $\underline{2\,c}$ e $\underline{2\,a}$.*

> *Pregando-se dois pregos em uma tábua, que distem $\underline{2c}$ unidades.*
>
> *Cada um desses dois pregos é um foco da elipse.*
>
> *Amarrando-se as pontas de um barbante, de comprimento $\underline{2a}$, em cada um dos pregos e esticando-se o barbante, a elipse será a coleção dos pontos que estão na corda do barbante esticado.*

Se considerarmos um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma'}$, de modo que:

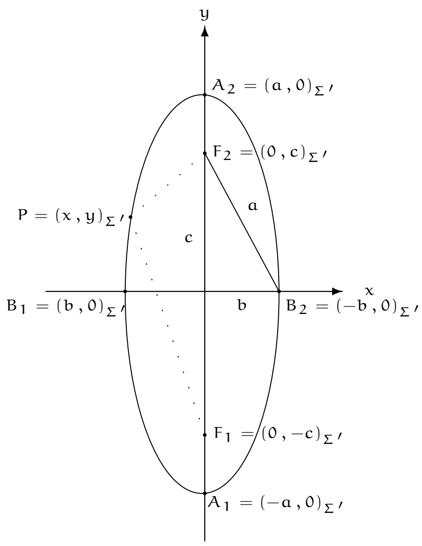
- *os pontos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$ pertecenm ao eixo Oy;*
- *eixo Ox seja a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$ (veja figura abaixo),*

então a equação da elipse na forma reduzida, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, será dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,. \tag{12.9}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Neste caso, a representação geométrica da equação (12.8), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma'}$, é dada pela figura a seguir.

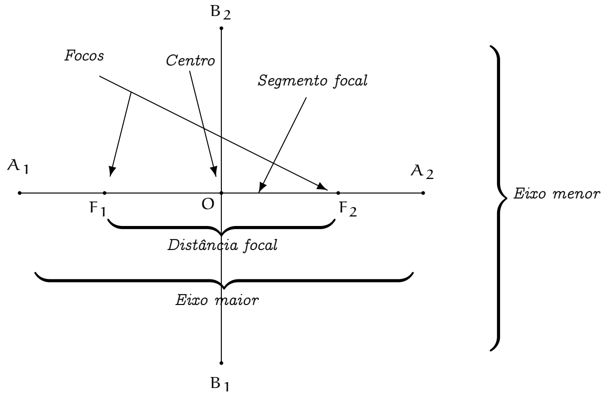


Notação 12.1.1 *Temos a seguinte nomenclatura para os elementos de uma elipse:*

- *Os pontos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$ serão ditos* **focos da elipse***;*
- *O número real positivo $\underline{2c}$ é denominado* **distância focal da elipse***;*
- *Os pontos $A_1\,, A_2\,, B_1\,, B_2$ serão ditos* **vértices da elipse***;*
- *O segmento $\overline{A_1A_2}$ será dito* **eixo maior da elipse***;*
- *O segmento $\overline{B_1B_2}$ será dito* **eixo menor da elipse***;*
- *O segmento $\overline{F_1F_2}$ será dito* **segmento focal da elipse***;*

- *O ponto* $\underline{O}$ *será dito* **centro da elipse**.

A figura a seguir ilustra so elementos intorduzidos aicma:



Consideremos o:

Exemplo 12.1.1 *Encontre a equação na forma reduzida, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do plano, e faça a representação geométrica do gráfico da elipse, sendo dados:*

1. *os focos* $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por*
$$F_1 \doteq (-4\,,0)_\Sigma\,, \quad F_2 \doteq (4\,,0)_\Sigma \tag{12.10}$$
o eixo maior medindo $\underline{12}$ *unidades.*

2. *os focos* $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por*
$$F_1 \doteq (0\,,-3)_\Sigma\,, \quad F_2 \doteq (0\,,3)_\Sigma \tag{12.11}$$
e o eixo menor medindo 8 unidades.

Resolução:

De 1.:

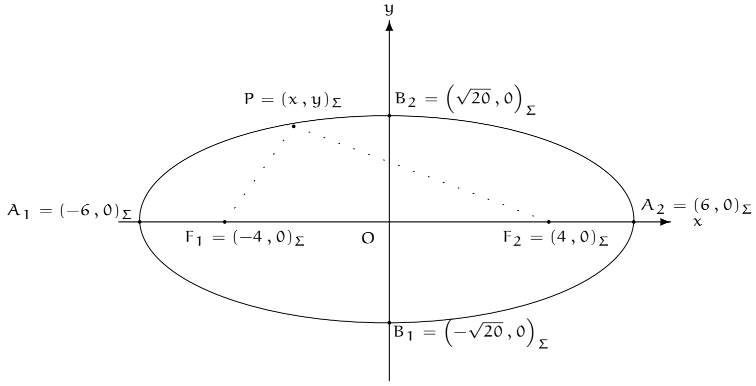
Como o eixo maior mede $\underline{12}$ unidades temos que
$$2\,a = 12\,, \quad \text{logo} \quad a = 6\,. \tag{12.12}$$

Como os focos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$ estão sobre o eixos Ox (veja (12.10)) e a origem $\underline{O}$ do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, está no ponto médio do segmento $\overline{F_1, F_2}$, teremos que
$$c = 4\,. \tag{12.13}$$

Assim
$$b^2 \overset{(12.7)}{=} a^2 - c^2 \overset{(12.12)\text{ e }(12.13)}{=} 6^2 - 4^2 = 20\,. \tag{12.14}$$

Portanto a equação na forma normal da elipse, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, será dada (veja (12.8)):
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{que, de (12.12) e (12.14), teremos:} \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1\,. \tag{12.15}$$

A representação geométrica da elise de equação (12.15), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela seguinte figura:



De 2.:
Como o eixo menor mede 8 unidades temos que

$$2\,b = 8\,, \quad \text{logo} \quad b = 4\,. \tag{12.16}$$

Como os focos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$ estão sobre o eixos Oy (veja (12.11)) e a origem $\underline{O}$ do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, está no ponto médio do segmento $\overline{F_1, F_2}$, teremos que

$$c = 3\,. \tag{12.17}$$

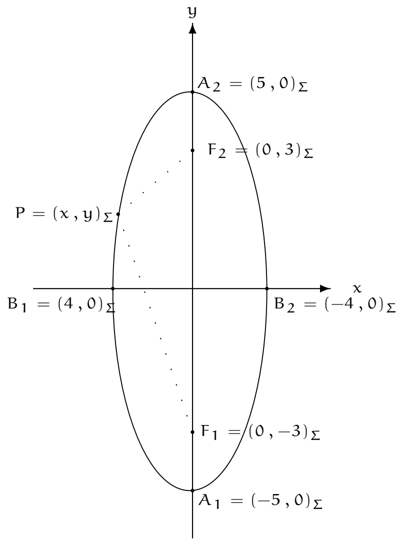
Assim (veja (12.7))

$$a^2 = b^2 + c^2\,, \quad \text{que, de (12.16) e (12.17), tornar-se-á:} \quad a^2 = 4^3 + 3^2\,,$$
$$\text{ou seja,} \quad a = 5\,. \tag{12.18}$$

Portanto a equação na forma normal da elipse, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, será dada (veja (12.9)), será:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,, \quad \text{que, de (12.16) e (12.18), teremos:} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1. \tag{12.19}$$

A representação geométrica da elise de equação (12.19), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela seguinte figura.



Observação 12.1.2 *Se os focos* $\underline{F_1}$ *e* $\underline{F_2}$ *coincidem, então curva obtida será uma circunferência de centro no ponto*

$$F_1 = F_2$$

e raio igual a $\underline{a}$

De fato, pois

$$2\,a = d(P\,,F_1) + d(P\,,F_2) = 2\,d(P\,,F_1)\,, \quad \textit{ou seja,} \quad d(P\,,F_1) = a\,.$$

Portanto uma circunferência é uma elipse, onde os focos coincidem.

12.2 Hipérbole

Uma outra curva plana importante é dada pela:

Definição 12.2.1 *Consideremos num plano* $\underline{\pi}$ *do espaço, dois pontos distintos* $\underline{F_1}$ *e* $\underline{F_2}$*, cuja distância entre eles é* $\underline{2\,c}$*, one* $c \in (0\,,\infty)$.

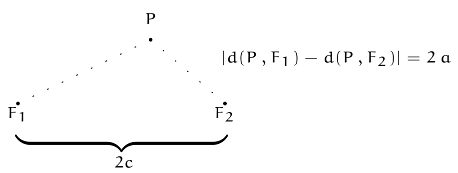
Seja $\underline{a}$ *um número real satisfazendo*

$$a \in (0\,,c)\,.$$

O lugar geométrico dos pontos $\underline{P}$*, pertencentes ao plano* $\underline{\pi}$*, que satisfazem a equação*

$$|d(P\,,F_1) - d(P\,,F_2)| = 2\,a \tag{12.20}$$

será denominado **hipérbole** *(veja a figura abaixo).*



Observação 12.2.1

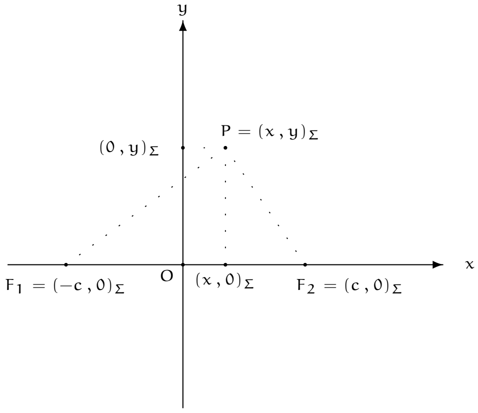
1. *A seguir vamos encontrar uma equação que descreverá analiticamente uma hipérbole, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal fixado no plano* $\underline{\pi}$.

   Consideremos um sistema de coordenadas orotgonal $\underline{\Sigma}$*, no plano* $\underline{\pi}$*, de modo que:*

   - *o eixo* Ox *contenha os pontos* $\underline{F_1}$ *e* $\underline{F_2}$*;*
   - *a origem* $\underline{O}$ *seja o ponto médio segmento* $\overline{F_1F_2}$*;*
   - *o eixo dos* Oy *seja a reta perpendicular ao eixo* Ox*, pelo ponto* $\underline{O}$ *(ou seja, é a mediatriz do segmento* $\overline{F_1F_2}$*).*

   Deste modo, teremos (veja a figura abaixo)

$$F_1 \doteq (-c\,,0)_\Sigma \quad e \quad F_2 \doteq (c\,,0)_\Sigma\,. \tag{12.21}$$



Um ponto $\underline{P}$, *cujas coordenadas, em relação aos sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por:*

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma \tag{12.22}$$

satisfaz a equação (12.20) se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& |d(P\,,F_1) - d(P\,,F_2)| = 2\,a \\
\textit{ou seja, } & |d((x\,,y)_\Sigma\,,(-c\,,0)_\Sigma) - d((x\,,y)_\Sigma\,,(c\,,0))_\Sigma| = 2\,a \\
\textit{isto é, } & |\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2\,a \\
\textit{ou ainda, } & \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\,a \\ \textit{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2\,a \end{cases} \\
\textit{ou seja, } & \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2\,a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \textit{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2\,a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{cases} \\
\textit{ou ainda, } & \begin{cases} (x+c)^2 + y^2 = 4\,a^2 + 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left[(x-c)^2 + y^2\right] \\ \textit{ou} \\ (x+c)^2 + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left[(x-c)^2 + y^2\right] \end{cases} \\
\textit{isto é, } & \begin{cases} \left(x^2 + 2\,xc + c^2\right) + y^2 = 4\,a^2 + 4\,a\,\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \qquad + \left(x^2 - 2\,xc + c^2\right) + y^2 \\ \textit{ou} \\ \left(x^2 + 2\,xc + c^2\right) + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\,\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \qquad + x^2 - 2\,xc + c^2 + y^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\textit{ou seja,} \quad \begin{cases} \left(x^2 + 2\,xc + c^2\right) + y^2 = 4\,a^2 + 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \qquad + \left(x^2 - 2\,xc + c^2\right) + y^2 \\ \textit{ou} \\ \left(x^2 + 2\,xc + c^2\right) + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \qquad + x^2 - 2\,xc + c^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\textit{isto é,} \quad \begin{cases} a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = c\,x - a^2 \\ \textit{ou} \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -\left(cx - a^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textit{ou ainda,}\quad & a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = \left(cx - a^2\right)^2 \\ \textit{ou seja,}\quad & a^2\left[\left(x^2 - 2\,xc + c^2\right) + y^2\right] = c^2\,x^2 - 2c\,xa^2 + a^4 \\ \textit{ou seja,}\quad & a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = \left(cx - a^2\right)^2 \\ \textit{isto é,}\quad & \left(c^2 - a^2\right)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \end{aligned}$$

$$a^2\left(a^2 - c^2\right) \neq 0\,,\ \textit{teremos:}\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1\,. \tag{12.23}$$

Definindo-se:

$$b \doteq \sqrt{c^2 - a^2} \tag{12.24}$$

Podemos reescrever a equação (12.23) *como*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{12.25}$$

que será denominada **equação na forma reduzida da hipérbole**.

2. *Observemos que*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1\,. \tag{12.26}$$

Se considerarmos uma mudança do sistema de coordenadas Σ no plano, para um novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$], por meio de uma tranalação, cujas equações são dadas por:

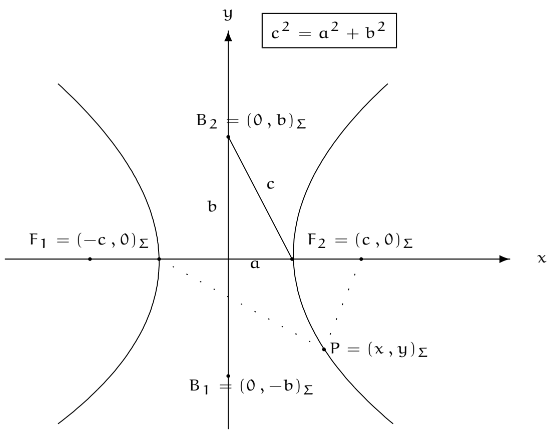
$$\begin{cases} u \doteq \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \\ \\ v \doteq \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases}, \tag{12.27}$$

então a equação (12.26) *tornar-se-á:*

$$u\,v = 1\,, \tag{12.28}$$

que é uma outra forma de descrevermos analiticamente uma hipérbole.

3. *A representação geométrica do gráfico da hipérbole de equação* (12.25), *em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ é dada pela figura abaixo:*



4. *Se tomarmos o sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma_1}$ *no plano, de modo que:*

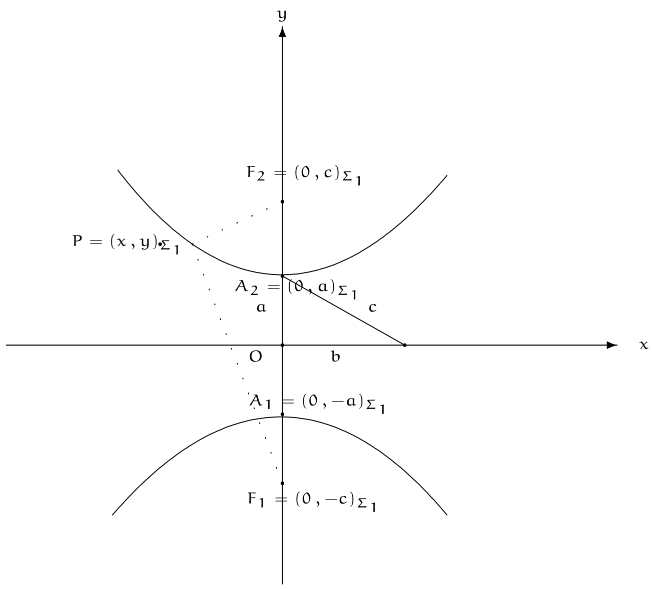
   - *os pontos* $\underline{F_1}$ *e* $\underline{F_2}$ *pertençam ao eixo* Oy*;*
   - *o eixo* Ox *seja a mediatriz do segmento* $\overline{F_1F_2}$ *(veja a figura abaixo)*

   então a equação da hipébole na forma reduzida, em relação a esse sistema de coordenadas ortogonal será dada por :

$$\frac{-x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\,. \tag{12.29}$$

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

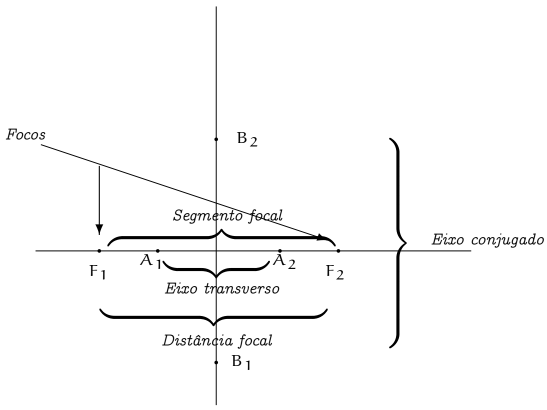
   Neste caso, a representação geométrica do gráfico da hipérbole de equação (12.25)*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma_1}$ *é dada pela figura abaixo:*



Notação 12.2.1 *Temos a seguinte nomenclatura para os elementos de uma hipérbole:*

- *Os pontos* $\underline{F_1}$ *e* $\underline{F_2}$ *serão ditos* **<u>focos da hipérbole</u>***;*

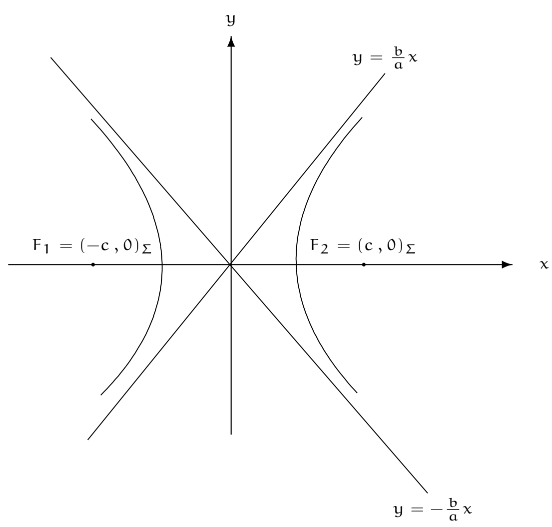
- *O número real positivo* $2c$ *é denominado* **distância focal da hipérbole**;
- *Os pontos* $\underline{A_1}$, $\underline{A_2}$ *serão ditos* **vértices da hipérbole**;
- *O segmento* $\overline{A_1A_2}$ *será dito* **segmento transverso da hipérbole**;
- *O segmento* $\overline{B_1B_2}$ *será dito* **segmento conjugado da hipérbole**;
- *O segmento* $\overline{F_1F_2}$ *será dito* **segmento focal da hipérbole**;
- *O ponto* $\underline{O}$ *será dito* **centro da hipérbole**.



Observação 12.2.2

1. *As retas*
$$y = -\frac{b}{a}x \quad e \quad y = \frac{b}{a}x \tag{12.30}$$
serão ditas **assíntotas** *do gráfico da hipérbole de equação* (12.25) *(será visto no Curso de Cálculo I como encontrar tais retas, por meio de limites).*

   A representação geométrica do gráfico da hipérbole de equação (12.25) *e de suas retas assítotas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *é dada pela figura abaixo:*



2. *De modo semelhante, as retas*

$$x = -\frac{b}{a}y \quad e \quad x = \frac{b}{a}y \tag{12.31}$$

serão ditas **<u>assíntotas</u>** *do gráfico da hipérbole de equação (??).*

Consideremos os:

Exemplo 12.2.1 *Encontrar a equação da hipérbole e de suas assíntotas e fazer a representação geométrica do gráfico da mesma, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, nos seguintes casos:*

1. *Os focos são $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por:*

$$F_1 \doteq \left(-\sqrt{13}\,,0\right)_\Sigma \quad e \quad F_2 \doteq \left(\sqrt{13}\,,0\right)_\Sigma \tag{12.32}$$

e o segmento transverso mede $\underline{6}$ unidades.

2. *Um foco é $\underline{F_1}$ tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por:*

$$F_1 \doteq \left(0\,,-\sqrt{11}\right)_\Sigma \tag{12.33}$$

a distância focal é igual a $\underline{2\sqrt{11}}$ unidades, o foco $\underline{F_2}$ pertence ao eixo Oy e o segmento conjugado mede $\underline{2\sqrt{7}}$ unidades.

<u>De 1.:</u>
Sabemos que

$$2\,a = d((A_1\,A_2) = 6\,, \quad \text{logo} \quad a = 3\,. \tag{12.34}$$

e, de (12.32), segue que

$$c = \sqrt{13}\,. \tag{12.35}$$

De (12.34), (12.35) e (12.24), teremos que:

$$b \overset{(12.24)}{=} \sqrt{c^2 - a^2} \overset{(12.34)\text{ e }(12.35)}{=} \sqrt{13 - 9} = 2\,. \tag{12.36}$$

Como os focos $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ pertecem ao eixo Ox e o eixo Oy é a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$, a equação reduzida da hipérbole será dada por (veja (12.25)):

$$1 \overset{(12.25)}{=} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \overset{(12.34)\text{ e }(12.36)}{=} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\,,$$

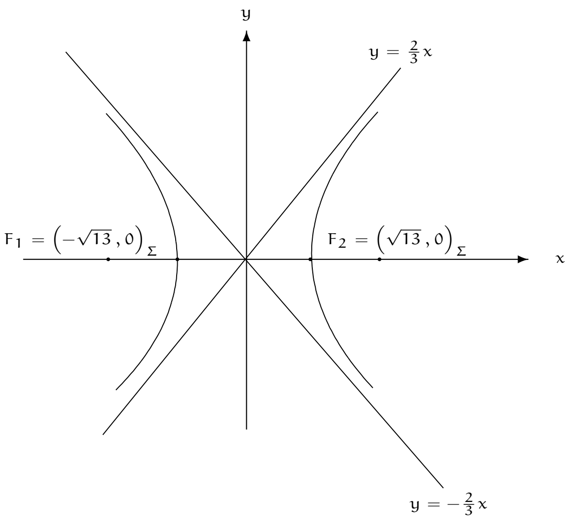
ou seja,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\,. \tag{12.37}$$

As equações das retas assíntotas terão equações dadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, por:

$$y \overset{(12.30)}{=} \pm\frac{b}{a}\,x\,, \quad \text{de (12.34) e (12.36), segue que:} \quad y = \frac{2}{-3}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{2}{3}\,x\,.$$

A representação geométrica do gráfico da hipérbole de equação (12.37) e de suas retas assítotas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo:



De 2.:

Sabemos que

$$2\,c = d(F_1\,, F_2) = 2\sqrt{11}\,, \quad \text{ou seja,} \quad c = \sqrt{11}\,. \tag{12.38}$$

Por outro lado,

$$2\,b = d(B_1\,, B_2) = 2\sqrt{7}\,, \quad \text{ou seja,} \quad b = \sqrt{7}\,. \tag{12.39}$$

Assim

$$a \overset{(12.24)}{=} \sqrt{c^2 - b^2} \overset{(12.38)\text{ e }(12.39)}{=} \sqrt{11-7} = 2\,. \tag{12.40}$$

Como os focos $\underline{F_1}$ e $\underline{F_2}$ pertencem ao eixo Oy e o eixo Ox é a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$, a equação reduzida da hipérbole será dada por (12.29), ou seja,:

$$1 \overset{(12.29)}{=} -\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} \overset{(12.39)\text{ e }(12.40)}{=} -\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4}\,,$$

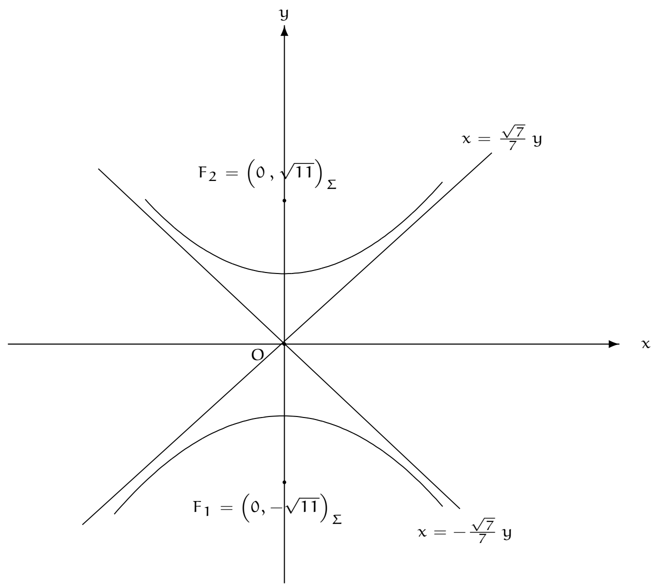
ou seja,

$$-\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1\,. \tag{12.41}$$

As equações das retas assíntotas terão equações dadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, por:

$$x = \pm\frac{b}{a}y\,, \quad \text{de (12.39) e (12.40), segue que:} \quad y = \frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{\sqrt{7}}{2}x\,.$$

A representação geométrica do gráfico da hipérbole de equação (12.41) e de suas retas assítotas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo:



12.3 Parábola

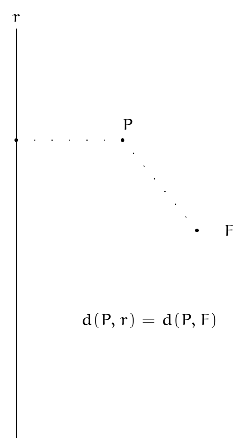
A seguir introduziremos uma terceira curva plana importante no estudo da equação (12.1).

Sejam $\underline{\pi}$ um plano, $\underline{r}$ uma reta contida no plano $\underline{\pi}$ e $\underline{F}$ um ponto do plano $\underline{\pi}$, que não pertença à reta $\underline{r}$.

Com isto temos a:

Definição 12.3.1 *O lugar geométrico dos pontos do plano $\underline{\pi}$, que são equidistantes da reta $\underline{r}$ e do ponto $\underline{F}$ será denominado* **parábola***, isto é, o conjunto dos pontos $\underline{P}$ pertencentes ao plnao $\underline{\pi}$, que satisfazem (veja a figura abaixo):*

$$d(P\,,F) = d(P\,,r)\,. \tag{12.42}$$

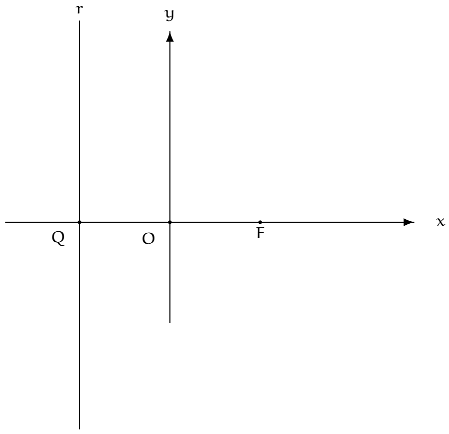


Observação 12.3.1

1. *Encontremos uma equação, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do plano $\underline{\pi}$, que descreva o lugar geométrico acima.*

   Para isto consideremos um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do plano $\underline{\pi}$, de modo que:

- *o eixo* Ox *contenha o ponto* $\underline{F}$;
- *o eixo* Ox *seja perpendicular a reta* $\underline{r}$;
- *eixo* Oy *seja a mediatriz do segmento* $\overline{QP}$, *onde o ponto* $\underline{Q}$ *é a intersecção da reta* $\underline{r}$ *com o eixo* Ox *(vide a figura abaixo).*



Seja

$$2\,p \doteq d(F\,,r) \quad (= d(F\,,Q))\,. \tag{12.43}$$

Neste caso, teremos

$$F \doteq (p\,,0)_\Sigma \tag{12.44}$$

e a reta $\underline{r}$ *terá equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *dada por:*

$$r\,:\,x = -p \qquad \textit{ou ainda,} \quad r\,:\,x + p = 0\,. \tag{12.45}$$

Assim, o ponto $\underline{P}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por:*

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma\,, \tag{12.46}$$

satisfaz (12.42) *(isto é pertencerá a parábola) se, e somente se, (veja a Observação ???)*

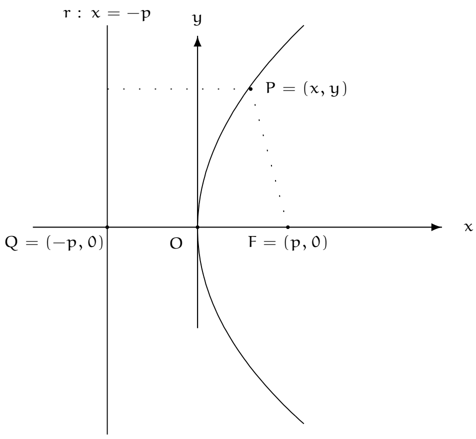
$$\begin{aligned}
& d(P,F) = d(P,r) \\
\textit{ou seja,} \quad & \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x+p|}{|1^2+0^2|} \\
\textit{isto é,} \quad & (x-p)^2 + (y-0)^2 = (x+p)^2 \\
\textit{ou ainda,} \quad & x^2 - 2p\,x + p^2 = x^2 + 2p\,x + p^2 \\
\textit{ou, equivalentemente,} \quad & y^2 = 4px\,,
\end{aligned}$$

ou, finalmente,

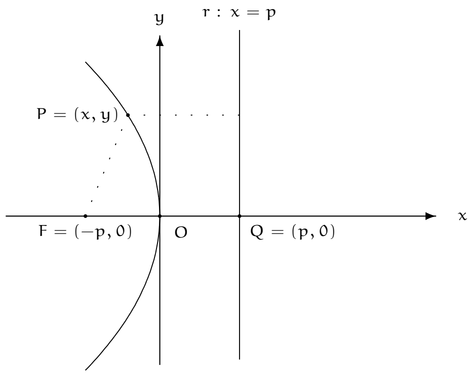
$$y^2 = 4p\,x\,, \tag{12.47}$$

que será denominada <u>**equação na forma reduzida da parábola**</u>.

A representação da equação (12.47), *em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *é dada pela figura abaixo (se* $p > 0$*):*



2. *Escolhendo-se o sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *como acima, poderemos ter a seguinte situação geométrica:*



Neste caso teremos que as coordenadas do ponto $\underline{F}$, *em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *serão dadas por:*

$$F \doteq (-p\,, 0)_\Sigma \tag{12.48}$$

e a equação geral da reta $\underline{r}$, *em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *será dada por:*

$$r\,:\, x = p \quad \textit{ou ainda,} \quad r\,:\, x - p = 0\,. \tag{12.49}$$

teremos que a equação da parábola, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *será dada por:*

$$y^2 = -4p\,x\,. \tag{12.50}$$

A representação da equação (12.47), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *é dada pela figura acima (se* $p > 0$*).*

3. *Se considerarmos um sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *do plano* $\underline{\pi}$, *de modo que:*

   - *o eixo* Oy *contenha o ponto* $\underline{F}$;
   - *o eixo* Oy *seja perpendicular a reta* $\underline{r}$;

- *eixo* Ox *seja a mediatriz do segmento* $\overline{QP}$*, onde o ponto* $\underline{Q}$ *é a intersecção da reta* $\underline{r}$ *com o eixo* Oy *(vide a figura abaixo)*,

segue que que as coordenadas do ponto $\underline{F}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, serão dadas por:*

$$F \doteq (0\,,p)_\Sigma \tag{12.51}$$

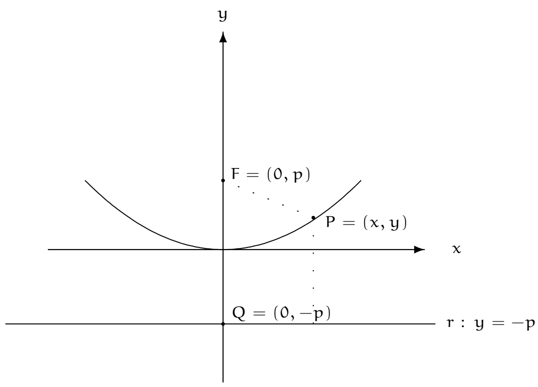
e a equação geral da reta $\underline{r}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, será dada por:*

$$r\,:\,y = p \quad \textit{ou ainda,} \quad r\,:\,y - p = 0\,. \tag{12.52}$$

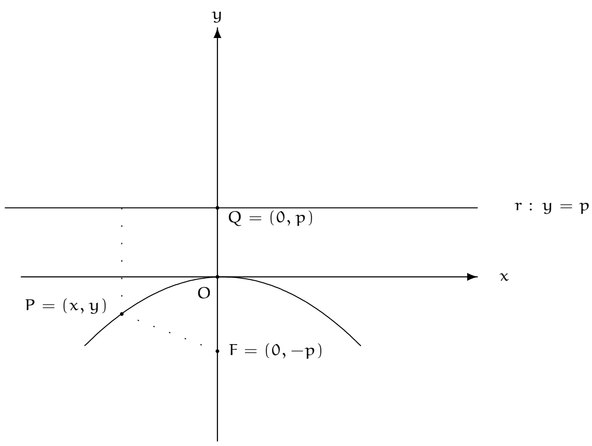
teremos que a equação da parábola, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, será dada por:*

$$x^2 = 4p\,y \tag{12.53}$$

A representação da equação (12.56), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dada pela figura abaixo (se* $p > 0$*):*



4. *Escolhendo-se o sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, como acima, poderemos ter a seguinte situação geométrica:*



Neste caso teremos que as coordenadas do ponto $\underline{F}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, serão dadas por:*

$$F \doteq (0\,,-p)_\Sigma \tag{12.54}$$

e a equação geral da reta $\underline{r}$*, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, será dada por:*

$$r : y = p \quad \textit{ou ainda}, \quad r : y - p = 0\,. \tag{12.55}$$

teremos que a equação da parábola, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, será dada por:*

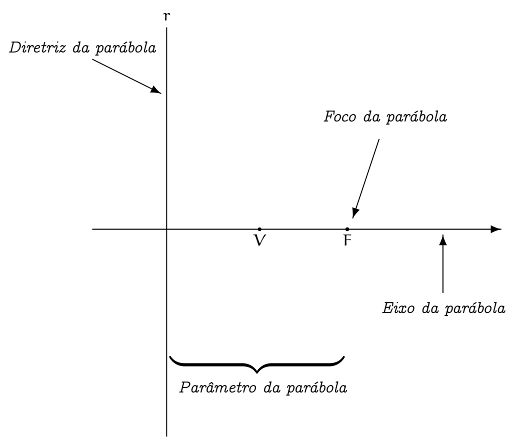
$$x^2 = -4p\,y \tag{12.56}$$

A representação da equação (12.47), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dada pela figura acima (se* $p > 0$*).*

Notação 12.3.1 *Temos a seguinte nomenclatura para os elementos de uma parábola:*

1. *O ponto* $\underline{F}$ *será dito* **foco da parábola***;*
2. *A reta* $\underline{r}$ *será denominada* **diretriz da parábola***;*
3. *O número real* $\underline{2\,p}$ *será dito* **parâmetro da parábola***;*
4. *A reta perpendicular à reta* $\underline{r}$*, que contém o foco* $\underline{F}$*, será dita* **eixo da parábola***.*
5. *O ponto* $\underline{V}$*, situado sobre o eixo da parábola, entre o foco* $\underline{F}$ *e a diretriz* $\underline{r}$*, que dista do foco* $\underline{F}$*, metade da distância do foco* $\underline{F}$ *à diretriz* $\underline{r}$*, será dito* **vértice da parábola***.*

A figura abaixo ilustra os elementos introduzidos acima.



Consideremos os:

Exemplo 12.3.1 *Encontre as equações e dê a representação geométrica dos gráficos, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, nos seguintes casos:*

1. *O vértice da parábola está na origem* $\underline{O}$ *e o foco* $\underline{F}$ *tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, dadas por*

$$F \doteq (8\,,0)_\Sigma\,. \tag{12.57}$$

2. *O foco $\underline{F}$ da parábola tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por:*

$$F \doteq (2\,,3)_\Sigma\,. \tag{12.58}$$

e a geratriz da parábola tem equação em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$r\,:\,x = 0\,. \tag{12.59}$$

Resolução:

De 1.:

Como as coordenadas do foco $\underline{F}$, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por (12.57), segue que o foco pertence ao eixo Ox e a origem é

$$O = (0\,,0)_\Sigma$$

será vértice da parábola.

Com isto teremos que

$$p = 8\,. \tag{12.60}$$

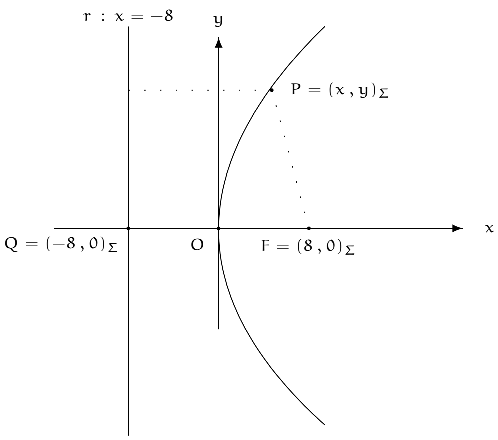
Logo a equação da parábola, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, será:

$$y^2 = 4p\,x\,, \quad \text{isto é,} \quad y^2 = 32\,x\,. \tag{12.61}$$

Notemos que, neste caso, a diretiz terá equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

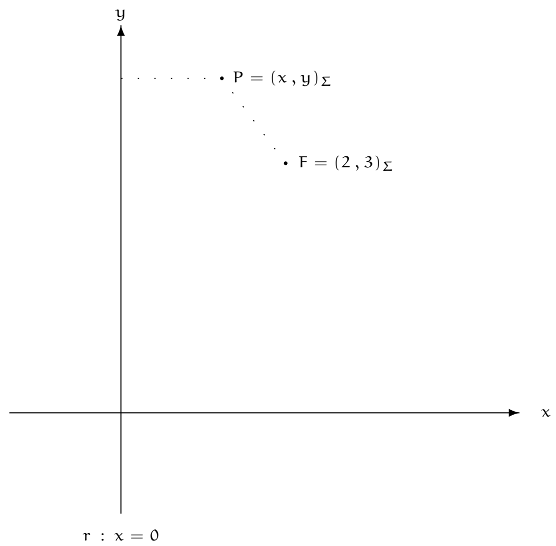
$$r\,:\,x = -8\,.$$

A representação da equação (12.60), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo:



De 2.:

Observemos que neste caso o foco $\underline{F}$ não pertence aos eixos Ox ou Oy (veja (12.59)), logo não podemos utilizar as equação estabelecidas nos itens da Observação (12.3.1) (veja a figura abaixo).



Para resolver o problema, utilizaremos a Definição de parábola (ou seja, (12.42)).

Assim, um ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ são dadas por:

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma \tag{12.62}$$

pertencerá a parábola (12.42)se, e somente se,

$$\begin{aligned} & d(P,F) = d(P,r) \\ \text{ou seja,} \quad & \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = |x| \\ \text{isto é,} \quad & (x-2)^2+(y-3)^2 = x^2 \\ \text{ou ainda,} \quad & \left(x^2-4x+4\right)+(y-3)^2 = x^2 \\ \text{ou seja,} \quad & (y-3)^2 = 4(x-1)\,, \end{aligned}$$

isto é, a equação da parábola, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ será dada por :

$$(y-3)^2 = 4(x-1)\,. \tag{12.63}$$

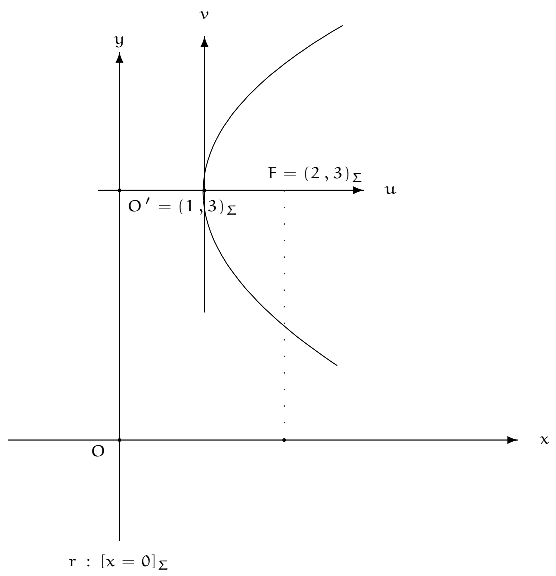
Se fizermos a mudança do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, para o sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma'}$, do tipo translação, cujas equações são dadas por:

$$\begin{cases} u \doteq x-1 \\ v \doteq y-3 \end{cases}$$

a equação (12.63) da parábola, em relação novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma'}$, será dada por :

$$v^2 = 4u\,. \tag{12.64}$$

Com isto, a representação da equação (12.63), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, será dada pela figura abaixo:



12.4 Cônicas

Consideremos um plano $\underline{\pi}$, um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ neste plano, e a equação

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0\,, \tag{12.65}$$

onde

$$A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F \in \mathbb{R}\,,$$

em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$.

Definição 12.4.1 *O lugar geométrico dos pontos* $\underline{P}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *dadas por*

$$P \doteq (x\,,y)_\Sigma \tag{12.66}$$

satisfazem a equaçõa (12.65) será denominada **cônica no plano** $\underline{\pi}$.

A equação (12.65) será dita **equação da cônica no plano** $\underline{\pi}$.

Consideremos alguns exemplos de cônicas:

Exemplo 12.4.1 *Fizemos um sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$ *no plano* $\underline{\pi}$.

1. *O* **conjunto vazio**

$$x^2 + y^2 + 1 = 0\,, \quad \textit{isto é,} \quad \emptyset\,,$$

é uma cônica.

Neste caso teremos:

$$A = C = F \doteq 1 \quad e \quad B = D = E = 0\,.$$

2. *O conjunto formado por* **<u>um ponto</u>**, *por exemplo*

$$x^2 + y^2 = 0\,, \quad \textit{isto é,} \quad \{(0\,,0)_\Sigma\}\,,$$

é uma cônica.

Neste caso teremos:

$$A = C \doteq 1 \quad e \quad B = D = E = F \doteq 0\,.$$

3. *O conjunto formado pelos pontos de* **<u>uma reta</u>**, *por exemplo:*

$$x^2 + 2\,xy + y^2 = 0\,,$$

Observemos que

$$0 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2\,, \quad \textit{ou seja,} \quad x + y = 0\,,$$

isto é, uma reta.

Neste caso teremos:

$$A = C \doteq 1\,, \quad B \doteq 2 \quad e \quad D = E = F \doteq 0\,.$$

4. *O conjunto formado pelos pontos de* **<u>duas retas paralelas e distintas</u>**, *por exemplo:*

$$x^2 + 2\,xy + y^2 + x + y = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que

$$0 = x^2 + 2\,xy + y^2 + x + y = (x + y)\,(x + y + 1)\,,$$

isto é,

$$x + y = 0 \quad ou \quad x + y + 1 = 0\,,$$

ou seja, duas retas paralelas e distintas.

Neste caso teremos:

$$A = C \doteq 1\,, \quad B \doteq 2\,, \quad D = E \doteq 1 \quad e \quad F \doteq 0\,.$$

5. *O conjunto formado pelos pontos de* **<u>duas retas concorrentes</u>**, *por exemplo:*

$$x^2 - y^2 = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que

$$0 = x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)\,,$$

isto é,

$$x + y = 0 \quad ou \quad x - y = 0\,,$$

ou seja, duas retas concorrentes.

Neste caso teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad C \doteq -1\,, \quad e \quad B = D = E = F \doteq 0\,.$$

6. *O conjunto formado pelos pontos de* **uma eplise**, *por exemplo:*

$$x^2 + 4\,y^2 - 1 = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que

$$0 = x^2 + 4y^2 - 1 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - 1\,,$$

isto é,

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1\,,$$

ou seja, uma elipse.

Neste caso teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad C \doteq 4\,, \quad F \doteq -1 \quad e \quad B = D = E \doteq 0\,.$$

7. *O conjunto formado pelos pontos de* **uma hipérbole**, *por exemplo:*

$$x^2 - y^2 - 1 = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que

$$0 = x^2 - y^2 - 1 = (x+y)(x-y) - 1\,. \tag{12.67}$$

Logo, considerando-se uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ *para o sistema para o sistema coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}'$, *por meio de uma translação, cujas equações são dadas por:*

$$\begin{cases} u \doteq x + y \\ v \doteq x - y \end{cases}\,,$$

em relação ao novo sistema coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}'$, *a equação* (12.67), *tornar-se-á:*

$$u\,v = 1\,,$$

ou seja, uma hipérbole.

Neste caso teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad C \doteq -1\,, \quad F \doteq -1 \quad e \quad B = D = E \doteq 0\,.$$

8. *O conjunto formado pelos pontos de* **uma parábola**, *por exemplo:*

$$4\,x^2 - y = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que a equação acima é equivalente à equação:

$$y = 4\,x^2\,,$$

ou seja, uma parábola.

Neste caso teremos:

$$A \doteq 4\,, \quad E \doteq -1 \quad e \quad B = C = D = F \doteq 0\,.$$

9. *O conjunto formado pelos pontos de* **uma circunferência***, por exemplo:*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$$

é uma cônica.

Observemos que a equação acima é equivalente à equação:

$$x^2 + y^2 = 1\,,$$

logo uma circunferência com centro na origem $\underline{O}$ e raio igual a$\underline{1}$, que é um caso particular de elipse.

Neste caso teremos:

$$A = C \doteq 1\,, \quad F \doteq -1 \quad e \quad B = D = E \doteq 0\,.$$

Observação 12.4.1

1. *Fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no plano $\underline{\pi}$, pode-se mostrar que uma equação do tipo (12.65) nos fornece somente um dos nove exemplos acima, isto é:*

   - *o conjunto vazio;*
   - *um ponto;*
   - *uma única reta;*
   - *duas retas paralelas e distintas;*
   - *duas retas concorrentes;*
   - *uma elipse, uma hipérbole;*
   - *uma hipérbole;*
   - *uma parábola;*
   - *uma parábola ou uma circunferência;*

   no plano que chamaremos de **cônicas básicas** *no plano $\underline{\pi}$.*

   A demonstração deste fato será omitida.

2. *As curvas acima podem ser obtidas da intersecção de um plano do espaço, com um cone circular reto, obtido da rotação de uma reta que forma* $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$*, com uma reta, em torno desta segunda.*

3. *O nome dado as curvas acima vêm do fato descrito no item acima, isto é, as curvas são ditas cônicas, pois podem ser obtidas da intersecção de planos com um cone circular reto.*

4. *O objetivo desta seção é dada uma equação do tipo (12.65), em relação a um sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, reconhecer a cônica como uma das nove acima e dar a representação geométrica do seu gráfico, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*.*

5. *Para isto utilizaremos as mudanças de variáveis estudadas no Capítulo 11 seção (11.3).*

   Na verdade daremos um roteiro para conseguirmos nosso objetivo.

12.5 Roteiro para Classificar uma Cônica

1.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)\,,$$

por meio de uma translação, os termos de 1.o grau que aparecem na equação (12.65).

Ou seja, tentar encontrar

$$\bar{O} \doteq (h\,,k)_{\Sigma}\,, \tag{12.68}$$

(as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) satisfazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}, \tag{12.69}$$

de modo que equação (12.65) torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\overline{\Sigma}}$)

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,. \tag{12.70}$$

Observação 12.5.1 *Como vimos anteriormente (veja a seção (11.3)), nem sempre será possível cumpri esse passo, ou seja, existir tal mudança de coordenadas.*

Supondo que cumprimos o 1.o passo, temos:

<u>**2.o Passo:**</u>

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação obtida do 1.o passo,.

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,,\pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}\,, \tag{12.71}$$

a equação (12.65), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, a equação

$$A'\,t^2 + C\,'w^2 + F' = 0\,. \tag{12.72}$$

<u>**3.o Passo:**</u>

Classificar a equação obtida em termos de uma das nove cônicas básicas e fazer a representação geométrica do seu gráfico, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma'}$ e, respectivamente, obteremos a mesma em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dado inicialmente.

Antes dos exemplos, introduziremos a seguinte:

Definição 12.5.1 *Fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no plano $\underline{\pi}$, diremos que a equação (12.65) é:*

1. *do tipo* <u>**elíptico**</u> *se*

$$\Delta \doteq B^2 - 4\,AC < 0\,; \tag{12.73}$$

2. *do tipo* <u>**parabólico**</u> *se*

$$\Delta \doteq B^2 - 4\,AC = 0\,; \tag{12.74}$$

3. *do tipo* <u>**hiperbólico**</u> *se*

$$\Delta \doteq B^2 - 4\,AC > 0\,. \tag{12.75}$$

Observação 12.5.2 *Fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no plano $\underline{\pi}$, pode-se mostrar que se a equação (12.65) é do tipo elíptico, então a cônica, definida pela equação (12.65),* **NÃO** *será, com certeza, uma hipérbole ou uma parábola (o que não implica que seja uma elipse).*

De modo análogo, se a equação (12.65) é do tipo parabólico, então a cônica definida pela equação (12.65) **NÃO** *será, com certeza, uma hipérbole ou uma elipse (o que não implica que seja uma parábola).*

E finalmente, se a equação (12.65) é do tipo hiperbólico, então a cônica definida pela equação (12.65) **NÃO** *será, com certeza, uma elipse ou uma parábola (o que não implica que seja uma hipérbole).*

Em todo os exemplos a seguir temos fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ no plano $\underline{\pi}$.

Exemplo 12.5.1 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$7\,x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 + 12\,x + 6\,y - 9 = 0\,. \tag{12.76}$$

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq 7\,x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 + 12\,x + 6\,y - 9\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y)_\Sigma \in \mathbb{R}^2\,. \tag{12.77}$$

Notemos que, neste caso (veja (12.65)), teremos:

$$A \doteq 7\,, \quad B \doteq -4\,, \quad C \doteq 4\,, \quad D \doteq 12\,, \quad E \doteq 6 \quad \text{e} \quad F \doteq -9\,. \tag{12.78}$$

Observemos que

$$\Delta = B^2 - 4\,AC \overset{(12.78)}{=} (-4)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 4 = -96 < 0\,, \tag{12.79}$$

logo, da Definição (12.5.1), segue que a cônica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (12.76), é do tipo elíptico (ou seja, não será uma hipérbole ou uma parábola).

<u>**1.o Passo:**</u>

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

do tipo translação, os termos de 1.o grau que aparecem na equação (12.76).

Ou seja, tentar encontrar

$$\bar{O} \doteq (h\,, k)_\Sigma\,, \tag{12.80}$$

(as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) satisfazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}, \tag{12.81}$$

de modo que equação (12.76) torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\overline{\Sigma}}$)

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,. \tag{12.82}$$

Do Capítulo 11 seção (11.3), o seguinte sistema linear (veja (11.59)), deverá possuir soluções $h\,,k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} B\,k + 2\,A h + D = 0 \\ B\,h + 2\,k C + E = 0 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} -4\,k + 8\,h + 12 = 0 \\ -4\,h + 14\,k + 6 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} h = 2 \\ k = 1 \end{cases}. \tag{12.83}$$

A resolução do sistema linear acima será deixada como exercício para o leitor (veja o Apêndice (B)).

Portanto, as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$, serão dadas por

$$\bar{O} \doteq (2\,,1)_{\Sigma}\,. \tag{12.84}$$

Logo fazendo a mudança sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ para o novo sistema de coordenadas ortogonal $\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$, do tipo translação, cujas equações são dadas por

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases}, \tag{12.85}$$

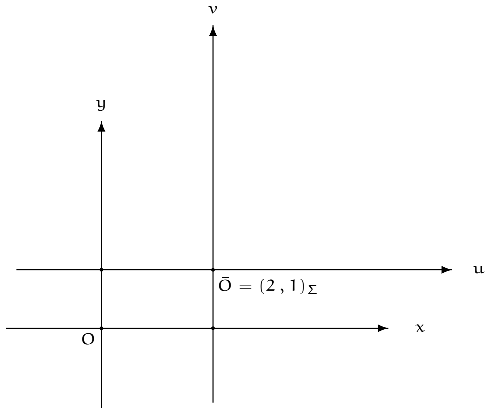
a equação (12.76) tornar-se-á, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$, na seguinte equação:

$$7\,u^2 - 4\,uv + 4\,v^2 - 24 = 0\,. \tag{12.86}$$

Lembremos que, de (11.58), segue que deveremos ter:

$$\bar{A} = A = 7\,,\ \bar{B} = B = -4\,,\ \bar{C} = C = 4\,,\ \bar{F} = f(h\,,k) \overset{(12.104)}{=} f(-2,-1) \overset{(12.77)}{=} -24\,. \tag{12.87}$$

A representação geométrica do novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$ (relativamente ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$), é ilustrado na figura abaixo:



2.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,, \vec{f}_1\,, \vec{f}_2\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação obtida do 1.o passo (isto é, (12.86)).

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,, \pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}, \tag{12.88}$$

a equação (12.86), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, a equação

$$A'\,t^2 + C\,'w^2 + F' = 0\,. \tag{12.89}$$

Para isto, como

$$\bar{A} \stackrel{(12.87)}{=} 7 \neq 4 \stackrel{(12.87)}{=} \bar{C}\,,$$

segue que $\underline{\theta}$ deverá satisfazer (veja (11.76)):

$$2\,\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A} - \bar{C}}\right) \stackrel{(12.87)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{7-4}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\,. \tag{12.90}$$

Notemos que

$$-\frac{4}{3} < 0\,,$$

assim podemos escolher o ângulo θ, de modo que

$$2\theta \in \left(\frac{\pi}{2}\,, \pi\right)\,, \tag{12.91}$$

pois

$$\operatorname{tg}(2\theta) \overset{(12.90)}{<} 0\,, \quad \text{logo,} \quad \theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Em particular, de (11.77), segue que

$$0 \overset{(12.91)}{>} \cos(2\theta) \overset{(11.77)}{=} \frac{\bar{A} - \bar{C}}{A' - C'} \overset{(12.87)}{=} \frac{7-4}{A' - C'} = \frac{3}{A' - C'}\,, \tag{12.92}$$

ou seja,

$$A' - C' < 0\,, \quad \text{isto é,} \quad A' < C'. \tag{12.93}$$

Sabemos, de (11.78), que os coeficientes

$$A' \quad \text{e} \quad B'$$

devem ser as raízes reais da equação do 2.o grau:

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \frac{\bar{B}}{2} \\ \frac{\bar{B}}{2} & \bar{C} - \lambda \end{vmatrix} \overset{(12.87)}{=} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Exercício}}{=} \lambda^2 - 11\,\lambda + 24\,,$$

$$\text{ou seja (Exercício),} \quad \lambda_1 = 8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3\,. \tag{12.94}$$

Logo , de (12.93) e (12.94) deveremos ter

$$A' = 3 \quad \text{e} \quad C' = 8\,. \tag{12.95}$$

Lembremos que, de (11.69), segue que

$$F' = \bar{F} = -24\,. \tag{12.96}$$

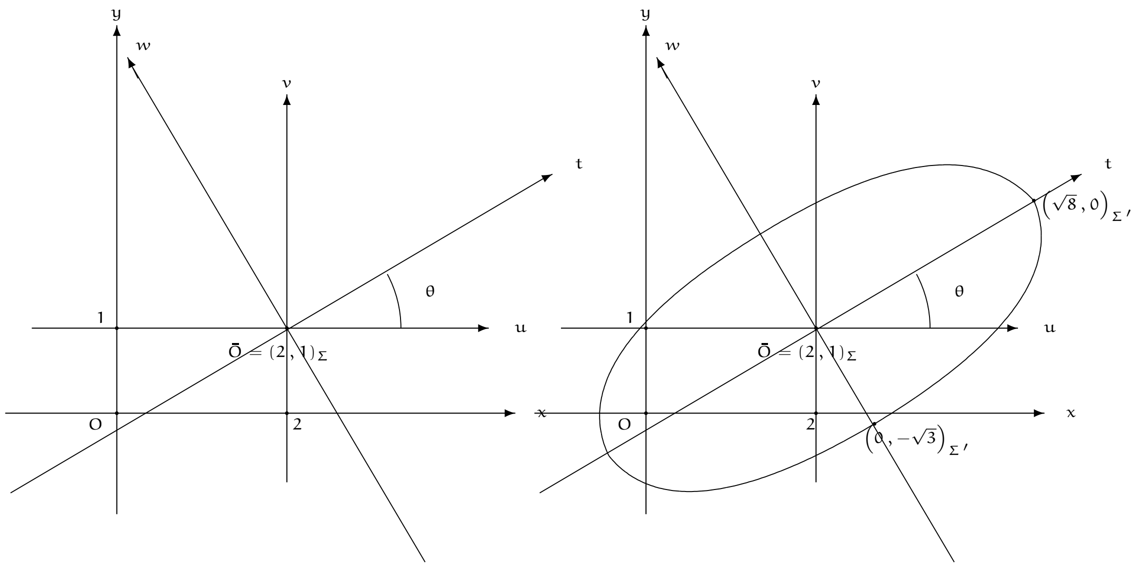
Portanto, de (12.95) e (12.96), segue que, em relação ao no novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, a equação (12.86) tornar-se-á:

$$3\,t^2 + 8\,w^2 - 24 = 0\,, \quad \text{dividindo-se por 24, obteremos:} \quad \frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

$$\text{ou seja,} \quad \frac{t^2}{\left(\sqrt{8}\right)^2} + \frac{w^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1\,,$$

ou seja, uma elipse.

Portanto, a representação geométrica do gráfico da cônica de equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (12.76), corresponde a seguinte figura abaixo.



Aplicar as mesmas idéias ao:

Exercício 12.5.1 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, é dada por:*

$$x^2 - 2\,xy + y^2 - 2\,x - 2\,y + 1 = 0\,. \tag{12.97}$$

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,, y) \doteq x^2 - 2\,xy + y^2 - 2\,x - 2\,y + 1\,, \quad \text{para} \quad (x\,, y)_\Sigma \in \mathbb{R}^2\,. \tag{12.98}$$

Notemos que, neste caso (veja (12.65)), teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad B \doteq -2\,, \quad C \doteq 1\,, \quad D \doteq -2\,, \quad E \doteq -2 \quad \text{e} \quad F \doteq 1 \tag{12.99}$$

Observemos que

$$\Delta = B^2 - 4\,AC \overset{(12.99)}{=} B^2 - 4AC = (24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 = -96 < 0\,, \tag{12.100}$$

logo, da Definição (12.5.1), segue que a cônica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, é dada por (12.97), é do tipo parabólico (ou seja, não será uma hipérbole ou uma elipse).

1.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

do tipo translação, os termos de 1.o grau que aparecem na equação (12.97).

Ou seja, tentar encontrar

$$\bar{O} \doteq (h\,,k)_\Sigma\,, \tag{12.101}$$

(as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) satisfazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}, \tag{12.102}$$

de modo que equação (12.97) torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$)

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,. \tag{12.103}$$

Do Capítulo 11 seção (11.3), o seguinte sistema linear (veja (11.59)), deverá possuir soluções $h\,,k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} B\,k + 2\,Ah + D = 0 \\ B\,h + 2\,kC + E = 0 \end{cases}, \quad \text{que de (12.99) é equiavlente à:} \quad \begin{cases} 2h - 2k - 2 = 0 \\ -2h + 2k - 2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 2h - 2k = 2 \\ 2h - 2k = -2 \end{cases}, \tag{12.104}$$

ou seja, o sistema é incompatível (isto é, não tem solução), ou seja, não existe uma translação de modo que, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\bar{\Sigma}}$, equação (12.97) tenha os coeficientes dos termos de 1.o grau iguais a zero.

A resolução do sistema linear acima será deixada como exercício para o leitor (veja o Apêndice (B)).

2.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação (12.97).

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,,\pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}, \tag{12.105}$$

a equação (12.86), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, a equação

$$A'\,t^2 + C\,'w^2 + D't + E'w + F' = 0\,. \tag{12.106}$$

Para isto, como

$$A = C \overset{(12.99)}{=} 1\,, \tag{12.107}$$

segue, de (11.72), que

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Vamos escolher

$$\theta = \frac{\pi}{4}\,. \tag{12.108}$$

Logo, das relações (11.73), segue que

$$\begin{cases} A' = A + \dfrac{B}{2} \overset{(12.98)}{=} 1 + \dfrac{-2}{2} = 0 \\ B' = 0 \\ \\ C' = A - \dfrac{B}{2} \overset{(12.98)}{=} 1 - \dfrac{-2}{2} = 2 \\ \\ D' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,D + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,E \overset{(12.98)}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2) = -2\sqrt{2} \\ \\ E' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,E - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,D \overset{(12.98)}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-2) = 0 \\ \\ F' = F \overset{(12.98)}{=} 1 \end{cases} \tag{12.109}$$

Logo, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}'$, a equação (12.97) tornar-se-á:

$$0\,u^2 + 2\,v^2 - 2\sqrt{2}\,u + 1 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad v^2 = 4\frac{\sqrt{2}}{4}\left(u - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\,, \tag{12.110}$$

Consideremos a seguinte mudança do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}'$, para o sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\bar{\Sigma}}$, por meio de uma translação, onde as equações destas, são dadas por:

$$\begin{cases} t \doteq u - \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ \\ w \doteq v \end{cases}\,, \tag{12.111}$$

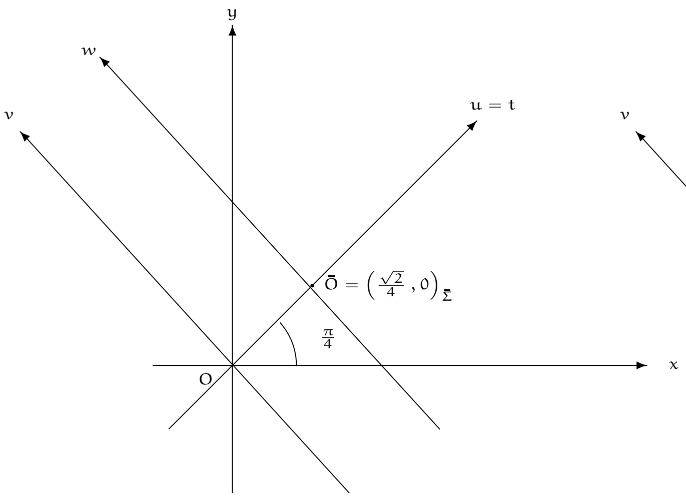
ou seja, a nova origem $\underline{\bar{O}}$ terá coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, dadas por:

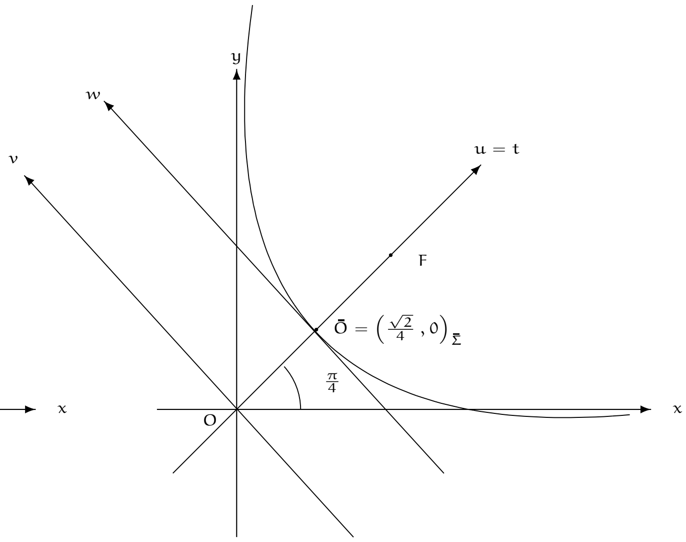
$$\bar{O} \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\,, 0\right)\,. \tag{12.112}$$

Com isto a equação (12.110), em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonla $\bar{\underline{\Sigma}}$, tornar-se-a:

$$w^2 = 4\frac{\sqrt{2}}{4}\,t\,. \tag{12.113}$$

Portanto, a representação geométrica do gráfico da cônica de equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (12.97), corresponde a seguinte figura abaixo.





Apliquemos as mesmas técnicas ao:

Exercício 12.5.2 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 - 6\,x + 12\,y + 8 = 0. \tag{12.114}$$

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y)_{\Sigma} \in \mathbb{R}^2 .e \tag{12.115}$$

Notemos que, neste caso (veja (12.65)), teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad B \doteq -4\,, \quad C \doteq 4\,, \quad D \doteq -6\,, \quad E \doteq 12 \quad \text{e} \quad F \doteq 8 \tag{12.116}$$

Observemos que

$$\Delta = B^2 - 4\,AC \overset{(12.116)}{=} B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0,\,, \tag{12.117}$$

logo, da Definição (12.5.1), segue que a cônica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (12.114), é do tipo parabólico (ou seja, não será uma hipérbole ou uma elipse).

1.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

do tipo translação, os termos de 1.o grau que aparecem na equação (12.114).

Ou seja, tentar encontrar

$$\bar{O} \doteq (h\,, k)_\Sigma\,, \tag{12.118}$$

(as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) satisfazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}, \tag{12.119}$$

de modo que equação (12.114) torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\overline{\Sigma}}$)

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,. \tag{12.120}$$

Do Capítulo 11 seção (11.3), o seguinte sistema linear (veja (11.59)), deverá possuir soluções $h\,, k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} B\,k + 2\,Ah + D = 0 \\ B\,h + 2\,kC + E = 0 \end{cases}, \quad \text{que de (12.116) é equivalente à:} \quad \begin{cases} 2\,h - 4\,k - 6 = 0 \\ -4\,h + 8\,k + 12 = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad 2\,h - 4\,k - 6 = 0\,, \tag{12.121}$$

assim o sistema é indeterminado (tem infinitas soluções).

A resolução do sistema linear acima será deixada como exercício para o leitor (veja o Apêndice (B)).

Escolhamos uma solução, por exemplo

$$h = 1 \quad \text{e} \quad k = -1\,. \tag{12.122}$$

Logo a mudança do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ para o novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$, por meio de uma translação, terá equações dadas por:

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 1 \end{cases}. \tag{12.123}$$

Portanto, as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$, serão dadas por

$$\bar{O} \doteq (1\,, -1)_\Sigma\,. \tag{12.124}$$

Logo fazendo a mudança sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$ para o novo sistema de coordenadas ortogonal $\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$, do tipo translação, cujas equações são dadas por

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 1 \end{cases}, \tag{12.125}$$

a equação (12.114) tornar-se-á, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\overline{\Sigma}$, na seguinte equação:

$$u^2 - 4\,uv + 4\,v^2 - 1 = 0 \tag{12.126}$$

Lembremos que, de (11.58), segue que deveremos ter:

$$\bar{A} = A = 1\,,\ \bar{B} = B = -4\,,\ \bar{C} = C = 4\,,\ \bar{F} = f(h\,,k) \overset{(12.122)}{=} f(1,-1) \overset{(12.115)}{=} -1\,. \tag{12.127}$$

<u>2.o Passo:</u>

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,, \vec{f}_1\,, \vec{f}_2\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação obtida do 1.o passo (isto é, (12.126)).

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,,\pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}, \tag{12.128}$$

a equação (12.126), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, a equação

$$A'\,t^2 + C'w^2 + F' = 0\,. \tag{12.129}$$

Para isto, como

$$\bar{A} \overset{(12.127)}{=} 1 \neq 4 \overset{(12.127)}{=} \bar{C}\,,$$

segue que $\underline{\theta}$ deverá satisfazer (veja (11.76)):

$$2\,\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A} - \bar{C}}\right) \overset{(12.127)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{1-4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\,. \tag{12.130}$$

Notemos que

$$\frac{4}{3} > 0\,,$$

assim podemos escolher o ângulo θ, de modo que

$$2\theta \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)\,, \tag{12.131}$$

pois

$$\operatorname{tg}(2\theta) \overset{(12.129)}{>} 0\,, \quad \text{logo,} \quad \theta \in \left(0\,,\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Em particular, de (11.77), segue que

$$0 \overset{(12.131)}{<} \cos(2\theta) \overset{(11.77)}{=} \frac{\bar{A}-\bar{C}}{A'-C'} \overset{(12.127)}{=} \frac{1-4}{A'-C'} = \frac{-3}{A'-C'}\,, \tag{12.132}$$

ou seja,

$$A'-C'<0\,, \quad \text{isto é,} \quad A'<C'\,. \tag{12.133}$$

Sabemos, de (11.78), que os coeficientes

$$A' \quad \text{e} \quad B'$$

devem ser as raízes reais da equação do 2.o grau:

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{A}-\lambda & \dfrac{\bar{B}}{2} \\ \dfrac{\bar{B}}{2} & \bar{C}-\lambda \end{vmatrix} \overset{(12.127)}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} \lambda^2 - 5\,\lambda\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 0\,. \tag{12.134}$$

Logo , de (12.133) e (12.134) deveremos ter

$$A' = 0 \quad \text{e} \quad C' = 5\,. \tag{12.135}$$

Lembremos que, de (11.69), segue que

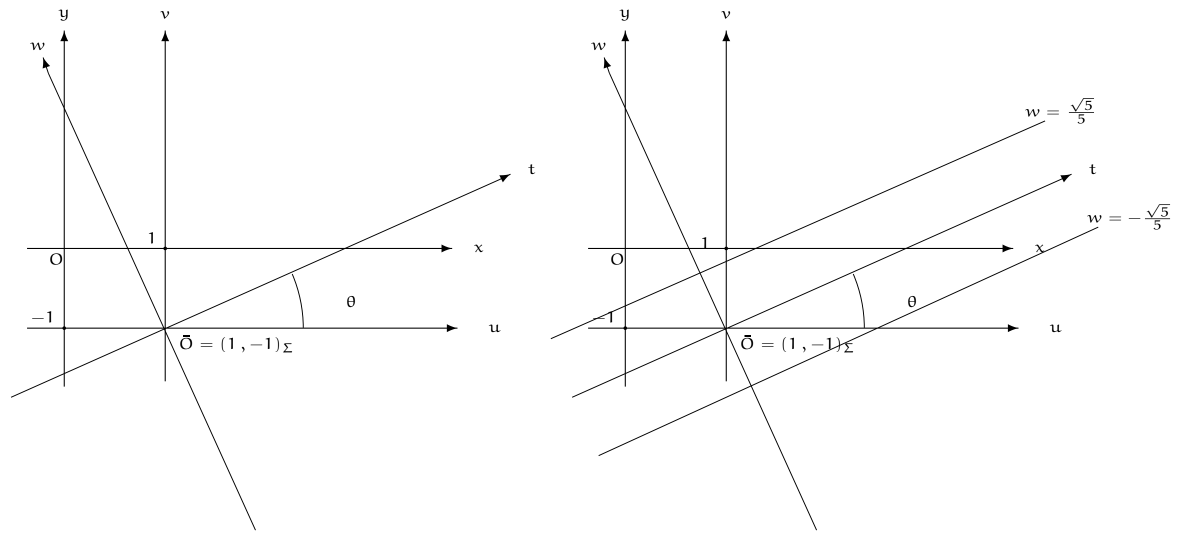
$$F' = \bar{F} = -1\,. \tag{12.136}$$

Portanto, de (12.135) e (12.136), segue que, em relação ao no novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, a equação (12.114) tornar-se-á:

$$0\,t^2 + 5\,w^2 - 1 = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad w = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\,,$$

isto é , um par de retas paralelas e distintas.

Portanto, a representação geométrica do gráfico da cônica de equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (12.114), corresponde a seguinte figura abaixo.



Apliquemos as mesmas técnicas ao:

Exercício 12.5.3 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$x^2 + 3\sqrt{3}\,xy + 4\,y^2 - 1 = 0\,. \tag{12.137}$$

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x\,,y) \doteq x^2 + 3\sqrt{3}\,xy + 4\,y^2 - 1\,, \quad \text{para} \quad (x\,,y)_\Sigma \in \mathbb{R}^2\,. \tag{12.138}$$

Notemos que, neste caso (veja (12.65)), teremos:

$$A \doteq 1\,, \quad B \doteq 3\sqrt{3}\,, \quad C \doteq 4\,, \quad D = E \doteq 0 \quad \text{e} \quad F \doteq -1\,. \tag{12.139}$$

Observemos que

$$\Delta = B^2 - 4\,AC \overset{(12.139)}{=} B^2 - 4AC = (3\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 11 > 0\,, \tag{12.140}$$

logo, da Definição (12.5.1), segue que a cônica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (12.137), é do tipo hiperbólico (ou seja, não será uma elipse ou uma parábola).

1.o Passo:

Na equação acima os coeficientes dos termos de 1.o grau são iguais a zero, logo podemos passar para o próximo passo.

2.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,, \vec{f_1}\,, \vec{f_2}\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação obtida do 1.o passo (isto é, (12.126)).

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,, \pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\, t - \operatorname{sen}(\theta)\, w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\, t + \cos(\theta)\, w \end{cases}, \qquad (12.141)$$

a equação (12.126), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, a equação

$$A'\, t^2 + C\,' w^2 + F' = 0\,. \qquad (12.142)$$

Para isto, como

$$A \overset{(12.139)}{=} 1 \neq 4 \overset{(12.139)}{=} C\,,$$

segue que $\underline{\theta}$ deverá satisfazer (veja (11.76)):

$$2\,\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A - C}\right) \overset{(12.139)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\,. \qquad (12.143)$$

Logo,

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad 2\theta = \frac{5\pi}{3}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6}\,. \qquad (12.144)$$

Escolhendo-se

$$\theta = \frac{\pi}{3}\,, \qquad (12.145)$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 > -\frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \cos(2\theta) \\ &\overset{(11.77)}{=} \frac{A - C}{A' - C'} \overset{(12.139)}{=} \frac{1-4}{A' - C'} = -\frac{3}{A' - C'}\,, \end{aligned}$$

logo

$$C' < A'\,. \qquad (12.146)$$

Sabemos que os coeficientes A' e B' devem ser raízes de

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} \overset{(12.139)}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - 5\,\lambda - \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \lambda_1 = \frac{11}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\,, \qquad (12.147)$$

serão as únicas soluções.

Logo, de (12.146), segue que

$$A' = \frac{11}{2} \quad \text{e} \quad C' = -\frac{1}{2}. \tag{12.148}$$

Lembremos que, de (11.69), segue que

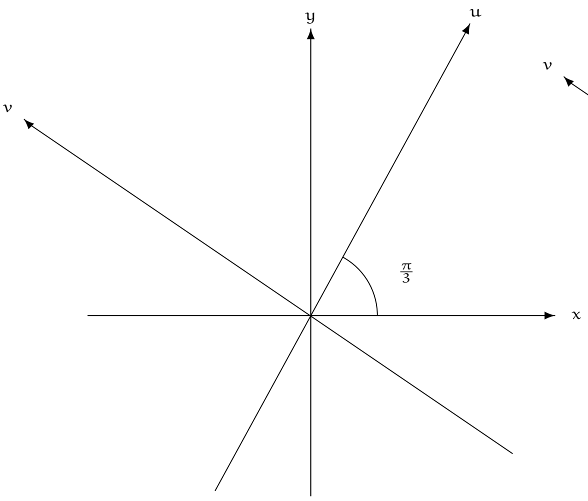
$$F' = F = -1. \tag{12.149}$$

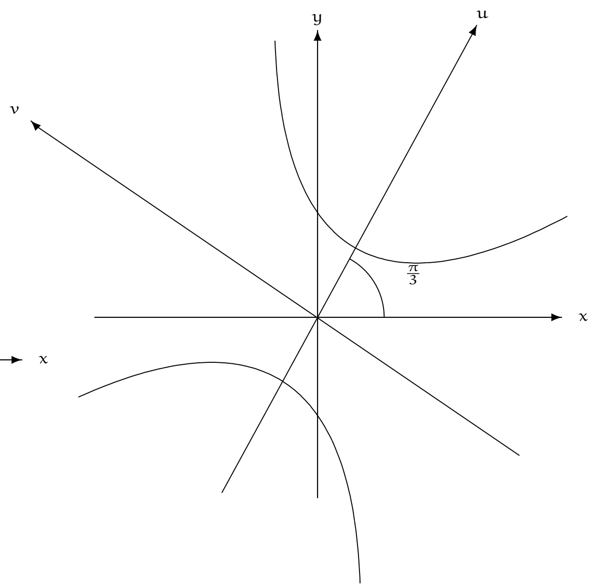
Portanto, de (12.148) e (12.149), segue que, em relação ao no novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, a equação (12.137) tornar-se-á:

$$\frac{11}{2}t^2 - \frac{1}{2}w^2 - 1 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{t^2}{\left(\frac{\sqrt{22}}{11}\right)^2} + \frac{w^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1,$$

isto é, uma hipérbole.

Portanto, a representação geométrica do gráfico da cônica de equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (12.137), corresponde a seguinte figura abaixo.





Apliquemos, novamente, as idéias acima, para o:

Exercício 12.5.4 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0. \tag{12.150}$$

Resolução:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) \doteq 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28, \quad \text{para} \quad (x, y)_\Sigma \in \mathbb{R}^2. \tag{12.151}$$

Notemos que, neste caso (veja (12.65)), teremos:

$$A \doteq 7\,, \quad B \doteq 6\,, \quad C \doteq -1\,, \quad D \doteq 28\,, \quad E \doteq 12 \quad \text{e} \quad F \doteq 28\,. \tag{12.152}$$

Observemos que

$$\Delta = B^2 - 4\,AC \overset{(12.152)}{=} (6)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-1) = 64 > 0 = 11 > 0\,, \tag{12.153}$$

logo, da Definição (12.5.1), segue que a cônica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (12.150), é do tipo hiperbólico (ou seja, não será uma elipse ou uma parábola).

1.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2)\,,$$

do tipo translação, os termos de 1.o grau que aparecem na equação (12.150).

Ou seja, tentar encontrar

$$\bar{O} \doteq (h\,, k)_\Sigma\,, \tag{12.154}$$

(as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$) satisfazendo

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}, \tag{12.155}$$

de modo que equação (12.150) torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\overline{\Sigma}}$)

$$\bar{A}\,u^2 + \bar{B}\,uv + \bar{C}\,v^2 + \bar{F} = 0\,. \tag{12.156}$$

Do Capítulo 11 seção (11.3), o seguinte sistema linear (veja (11.59)), deverá possuir soluções $h\,, k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} B\,k + 2\,Ah + D = 0 \\ B\,h + 2\,kC + E = 0 \end{cases}, \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} 14\,k + 6\,h + 28 = 0 \\ 6\,h - 2\,k + 12 = 0 \end{cases},$$
$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} h = -2 \\ k = 0 \end{cases}. \tag{12.157}$$

A resolução do sistema linear acima será deixada como exercício para o leitor (veja o Apêndice (B)).

Portanto, as coordenadas da nova origem $\underline{\bar{O}}$, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\overline{\Sigma}}$, serão dadas por

$$\bar{O} \doteq (-2\,, 0)_\Sigma\,. \tag{12.158}$$

Logo fazendo a mudança sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$ para o novo sistema de coordenadas ortogonal $\overline{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$, do tipo translação, cujas equações são dadas por

$$\begin{cases} x = u - 2 \\ y = v \end{cases}, \tag{12.159}$$

a equação (12.150) tornar-se-á, em relação ao novo sistema de coordenadas ortogonal $\overline{\Sigma}$, na seguinte equação:

$$7\,u^2 + 6\,uv - v^2 = 0\,. \tag{12.160}$$

Lembremos que, de (11.58), segue que deveremos ter:

$$\bar{A} = A = 7\,,\ \bar{B} = B = 6\,,\ \bar{C} = C = -1\,,\ \bar{F} = f(h\,,k) \overset{(12.158)}{=} f(-2,0) \overset{(12.151)}{=} 0\,. \tag{12.161}$$

2.o Passo:

Tentar zerar, por uma mudança do sistema de coordenadas ortogonal

$$\bar{\Sigma} = (\bar{O}\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$$

para um novo sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma' = \left(\bar{O}\,,\vec{f}_1\,,\vec{f}_2\right)\,,$$

por meio de uma, por meio de uma rotação, o termo de 2.o grau misto na equação obtida do 1.o passo (isto é, (12.126)).

Ou seja, obter um ângulo

$$\theta \in [0\,,\pi)\,,$$

medido em radianos, de modo que, tendo-se as equações de mudança dos sistemas de coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} u = \cos(\theta)\,t - \operatorname{sen}(\theta)\,w \\ v = \operatorname{sen}(\theta)\,t + \cos(\theta)\,w \end{cases}, \tag{12.162}$$

a equação (12.126), torne-se, em relação ao novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma'}$, a equação

$$A'\,t^2 + C\,'w^2 + F' = 0\,. \tag{12.163}$$

Para isto, como

$$\bar{A} \overset{(12.161)}{=} 7 \neq -1 \overset{(12.161)}{=} \bar{C}\,,$$

segue que $\underline{\theta}$ deverá satisfazer (veja (11.76)):

$$2\,\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{B}}{\bar{A}-\bar{C}}\right) \overset{(12.161)}{=} \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{7-(-1)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\,. \tag{12.164}$$

Notemos que

$$\frac{3}{4} > 0\,,$$

assim podemos escolher o ângulo θ, de modo que

$$2\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{12.165}$$

pois

$$\operatorname{tg}(2\theta) \overset{(12.129)}{>} 0, \quad \text{logo}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Em particular, de (11.77), segue que

$$0 \overset{(12.165)}{<} \cos(2\theta) \overset{(11.77)}{=} \frac{\bar{A} - \bar{C}}{A' - C'} \overset{(12.161)}{=} \frac{7 - (-1)}{A' - C'} = \frac{8}{A' - C'}, \tag{12.166}$$

ou seja,

$$0 < A' - C', \quad \text{isto é}, \quad C < A'. \tag{12.167}$$

Sabemos, de (11.78), que os coeficientes

$$A' \quad \text{e} \quad B'$$

devem ser as raízes reais da equação do 2.o grau:

$$0 = \begin{vmatrix} \bar{A} - \lambda & \frac{\bar{B}}{2} \\ \frac{\bar{B}}{2} & \bar{C} - \lambda \end{vmatrix} \overset{(12.161)}{=} \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} \lambda^2 - 6\lambda - 16,$$

$$\text{ou seja,} \quad \lambda_1 = 8 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -2. \tag{12.168}$$

Logo , de (12.167) e (12.168) deveremos ter

$$A' = 8 \quad \text{e} \quad C' = -2. \tag{12.169}$$

Lembremos que, de (11.69), segue que

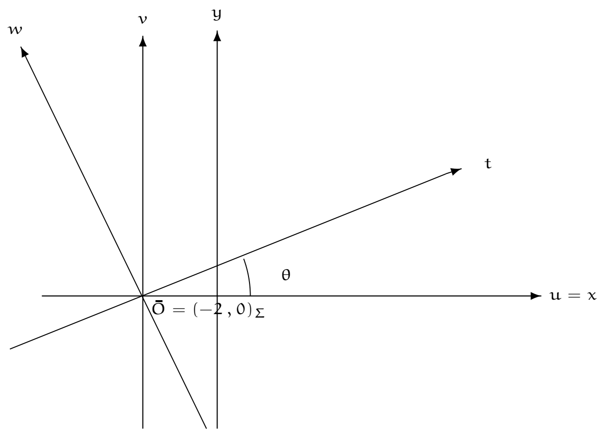
$$F' = \bar{F} = -1. \tag{12.170}$$

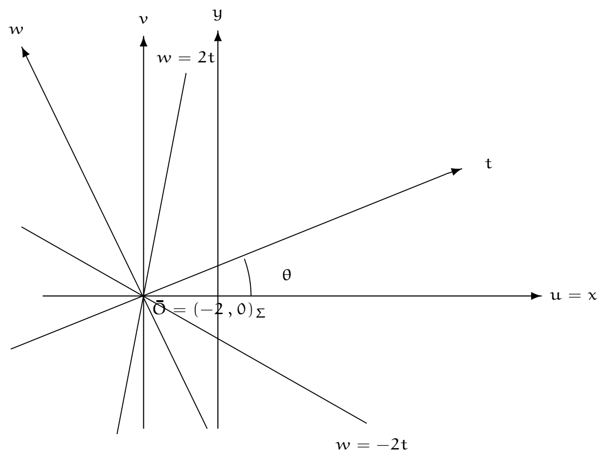
Portanto, de (12.169) e (12.170), segue que, em relação ao no novo sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}'$, a equação (12.150) tornar-se-á:

$$8\,t^2 - 2\,w^2 = 0 \quad \text{ou seja,} \quad \frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$
$$t^2 = \frac{1}{4} w^2 \quad \text{ou ainda,} \quad w = \pm 2\,t,$$

ou seja, um par de retas concorrentes.

Portanto, a representação geométrica do gráfico da cônica de equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (12.150), corresponde a seguinte figura abaixo.





Deixaremos para o leitor a resolução dos:

Exercício 12.5.5 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$3\,x^2 + 2\,xy + 3\,y^2 + 6\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y + 2 = 0\,. \tag{12.171}$$

Exercício 12.5.6 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$x^2 + 2\,y^2 - x - y + 1 = 0\,. \tag{12.172}$$

Exercício 12.5.7 *Classificar e fazer a representação geométrica do gráfico da cônica, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:*

$$x^2 + 2\,xy + y^2 + 2\,x - 2\,y - 1 = 0\,. \tag{12.173}$$

Capítulo 13

Superfícies

Neste capítulo estudaremos uma classe importante de superfícies no espaço denominadas quádricas.

Exibiremos vários exemplos e um resultado para a classificação destas.

13.1 Exemplos

Começaremos exibindo alguns exemplos de superfícies do espaço.

Fixemos um sistema de coordenadas orotogonal

$$\Sigma = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

no espaço.

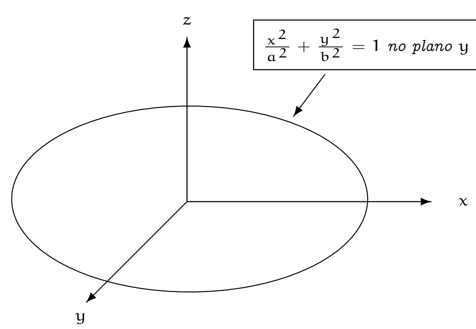
Exemplo 13.1.1 *Sejam* $a, b > 0$ *fixados. Encontrar uma equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, para a superfície de revolução gerada pela rotação da elipse, que tem equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{13.1}$$

que está contida no plano de equação geral

$$y = 0,$$

em torno do eixo Ox *(veja a figura abaixo).*



Resolução:

Suponhamos que o ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por

$$P \doteq \left(x\,,0\,,\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)_\Sigma \tag{13.2}$$

um ponto da elipse (13.1), contida no plano $y=0$, que o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por

$$A \doteq (x\,,0\,,0)_\Sigma\,, \tag{13.3}$$

o centro da circunferênca de rotação e o ponto $\underline{Q}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por

$$Q \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{13.4}$$

um ponto obtido quando aplicamos a rotação ao ponto $\underline{P}$, em torno do eixo Ox.

Observemos que, para que a situação acima ocorra, deveremos ter (veja a figura abaixo)

$$d(A\,,Q)=d(A\,,P)\,,\quad \text{que, de (13.3) e (13.4), é o mesmo que:}$$

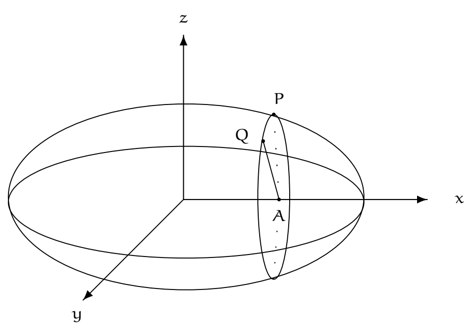
$$\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(0-0)^2+\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-0\right)^2}$$

$$\text{ou seja,}\quad y^2+z^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\,,$$

isto é, a equação da superfície procurada, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, será dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\,, \tag{13.5}$$

cuja representação geométrica do seu gráfico, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo.



Observação 13.1.1 *A superfície de equação (13.5), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é um caso particular de uma superfície denominada* **elipsóide**, *que será estudado na próxima seção.*

Introduziremos a:

Definição 13.1.1 *Dada uma superfície $\underline{S}$ do espaço e um plano $\underline{\pi}$, a intersecção da superfície $\underline{S}$ com o plano $\underline{\pi}$, isto é,*

$$S \cap \pi,$$

será denominada **traço da superfície $\underline{S}$, no plano $\underline{\pi}$***indexsuperfície!traço de uma.*

Observação 13.1.2 *O traço de uma superfície é representado por duas equações, a saber: a equação da superfície e a equação do plano, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$.*

Exemplo 13.1.2 *Encontre o tráco da superfície do Exemplo (13.1.1), com os planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por*

$$\pi_1 : x = k, \tag{13.6}$$
$$\pi_2 : y = l, \tag{13.7}$$
$$\pi_3 : z = m. \tag{13.8}$$

Resolução:

Observemos que:

- Se
$$k < -a \quad \text{ou} \quad k > a, \tag{13.9}$$
afirmamos que o traço da superfície com o plano de equação (13.6), será o conjunto vazio.

  De fato, se, por exemplo
$$k < -a, \tag{13.10}$$
segue, de (13.6) e (13.10), que
$$x^2 \overset{(13.6)}{=} k^2 \overset{(13.10)}{=} a^2, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x^2}{a^2} > 1. \tag{13.11}$$
Logo
$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}}_{\overset{(13.10)}{>} 1} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1,$$
ou seja, o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:
$$\pi_1 : x = k,$$
não interceptará a superfície $\underline{S}$, ou seja,
$$S \cap \pi_1 = \emptyset.$$
De modo análogo, podemos mostrar o caso que
$$k > a.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

De modo semelhante, afirmamos que se

$$l\,,m < -b \quad \text{ou} \quad l\,,m > b\,, \tag{13.12}$$

teremos que o traço da superfície com os planos (13.7) e (13.8), será o conjunto vazio.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

- Se

$$|k| = a \tag{13.13}$$

teremos que o traço da superfície com o plano (13.6) será o conjunto formado por um ponto.

De fato, se, por exemplo

$$k = -a\,, \tag{13.14}$$

segue, de (13.14) e (13.6), que

$$x^2 \overset{(13.6)}{=} k^2 \overset{(13.14)}{=} a^2\,, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x^2}{a^2} = 1\,. \tag{13.15}$$

Logo

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}}_{\overset{(13.15)}{=}1} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

se, e somente se,

$$y = z = 0\,, \quad \text{isto é,} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma = (-a\,,0\,,0)_\Sigma\,,$$

ou seja, o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$\pi_1 \,:\, x = -a\,,$$

interceptará a superfície $\underline{S}$ em um único ponto, a saber, o ponto

$$(-a\,,0\,,0)_\Sigma\,,$$

ou seja,

$$S \cap \pi_1 = \{(-a\,,0\,,0)_\Sigma\}\,.$$

De modo análogo, podemos mostrar o caso que

$$k > a\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

De modo semelhante, mostramos que se

$$|l| = |m| = b\,,$$

teremos que o traço da superfície com os planos de equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por (13.7) e (13.8) será o conjunto formado por um ponto.

- Se

$$|k| < a\,, \tag{13.16}$$

afirmamos que o traço da superfície com o plano (13.6) será uma circunferência, a saber:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \\ x = k \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right) \\ x = k \end{cases}, \tag{13.17}$$

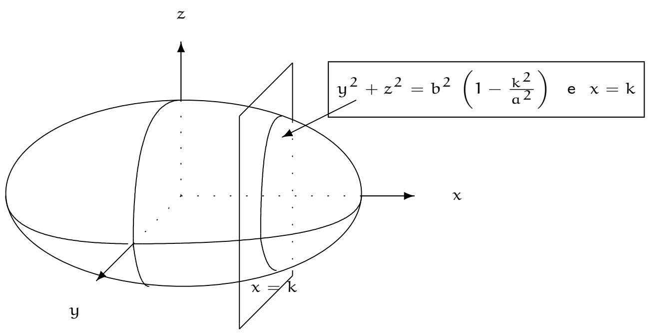
ou seja, a elipse de equação

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1\,,$$

no plano

$$x = k\,.$$

A representação geométrica da situação acima, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo:



Portanto,

$$S \cap \pi_1 = \left\{ (k\,, y\,, z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \right\}$$

- Se

$$|l|\,, |m| < a \tag{13.18}$$

temos que o traço da superfície com os planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por (13.7) e (13.8) serão elipses, a saber:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1 \\ y=l \quad (\text{ou } z=m) \end{cases}$$

isto é, $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1-\dfrac{l^2}{b^2} \quad \left(\text{ou } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{m^2}{b^2}\right) \\ y=l \quad (\text{ou } z=m) \end{cases},$$

ou ainda, $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)}+\dfrac{z^2}{b^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)}=1 \quad \left(\text{ou } \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)}=1\right) \\ y=l \quad (\text{ou } z=m) \end{cases},$$

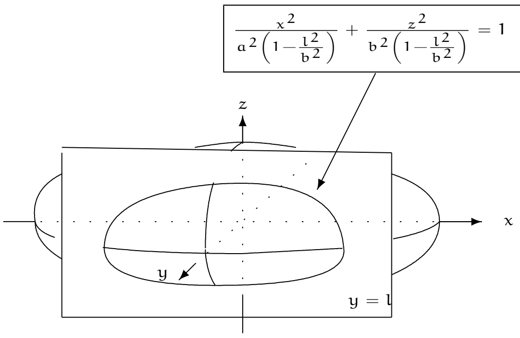
ou seja, uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{b^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)}=1 \quad \left(\text{ou } \frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)}=1\right),$$

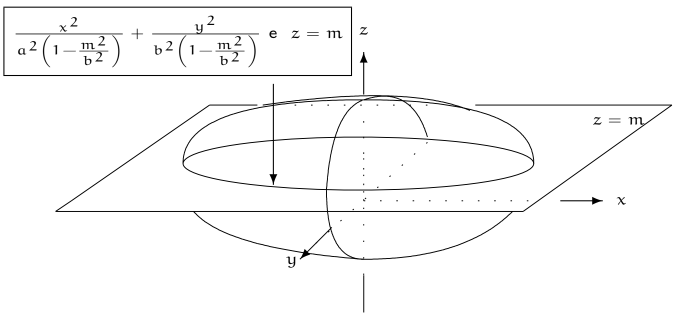
no plano

$$y=l \quad (\text{ou } z=m).$$

A representação geométrica da situação acima, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ é dada pela figura abaixo:



ou



Portanto

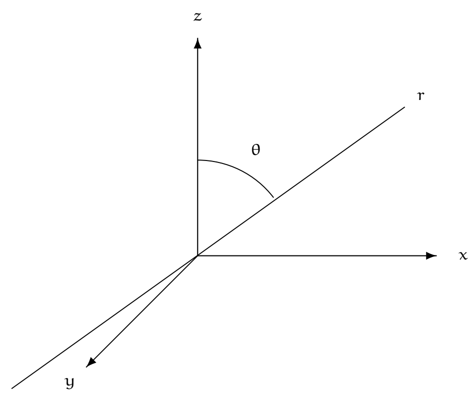
$$S \cap \pi_2 = \left\{ (x\,,l\,,z)_\Sigma \,;\, \frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{b^2\left(1-\dfrac{l^2}{b^2}\right)} = 1 \right\}$$

ou

$$S \cap \pi_2 = \left\{ (x\,,y\,,m)_\Sigma \,;\, \frac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{m^2}{b^2}\right)} = 1 \right\}$$

Consideremos agora o:

Exemplo 13.1.3 *Seja $\underline{r}$ uma reta passando pela origem $\underline{O}$, do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$ do espaço, que forma um ângulo $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ com o eixo Oz. Rotancionando-se a reta $\underline{r}$ em torno do eixo $\underline{Oz}$, obtemos um superfície $\underline{S}$. Encontre uma equação para esta superfície (vide a figura abaixo).*



Resolução:

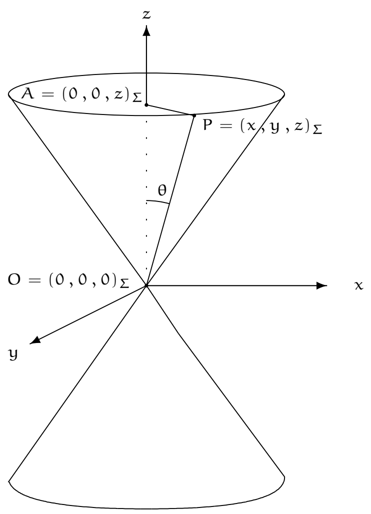
Se $\underline{P}$ um ponto da superfície $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas orotognal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{13.19}$$

e o ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas orotognal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$A \doteq (0\,,0\,,z)_\Sigma \tag{13.20}$$

a projeção ortogonal do ponto $\underline{P}$ sobre o eixo Oz (veja a figura abaixo).



Do triângulo ΔOPA, segue que:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{d(A, P)}{d(O, A)} = \frac{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2}}{\sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (z-0)^2}}$$

$$\text{ou seja,} \quad x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2(\theta)\, z^2 \,,$$

isto é, uma equação para a superfície $\underline{S}$, em relação ao sistema de coordenadas orotognal $\underline{\Sigma}$, será dada por:

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0 \,, \tag{13.21}$$

onde

$$k \doteq \operatorname{tg}(\theta) \,. \tag{13.22}$$

Observação 13.1.3 *A superfície acima é um caso particular de uma superfície denominada* **cone**.

Na verdade trata-se de um **cone de revolução**, *que será estudado na próxima seção.*

Exemplo 13.1.4 *Encontre os traços da superfície* S *de equação* (13.21), *dada em relação ao sistema de coordenadas orotognal* $\underline{\Sigma}$, *com os planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por:*

1. $\pi_1 : z = a$;

2. $\pi_2 : y = b \neq 0$;

3. $\pi_3 : y = 0$;

4. $\pi_4 : x = c \neq 0$;

5. $\pi_5 : x = 0$.

Resolução:

De 1.:

Notemos que, se

$$a = 0 \qquad (13.23)$$

teremos um ponto, a saber $(0\,,0\,,0)_\Sigma$.

De fato, pois, neste caso:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma = (0\,,0\,,0)_\Sigma\,.$$

Portanto, para $a = 0$, teremos:

$$S \cap \pi_1 = \{(0\,,0\,,0)_\Sigma\}\,.$$

Se

$$a \neq 0\,, \qquad (13.24)$$

teremos a seguinte situação:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ z = a \end{cases} ,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = k^2\,a^2 \\ z = a \end{cases} ,$$

ou seja, uma circunferência no plano

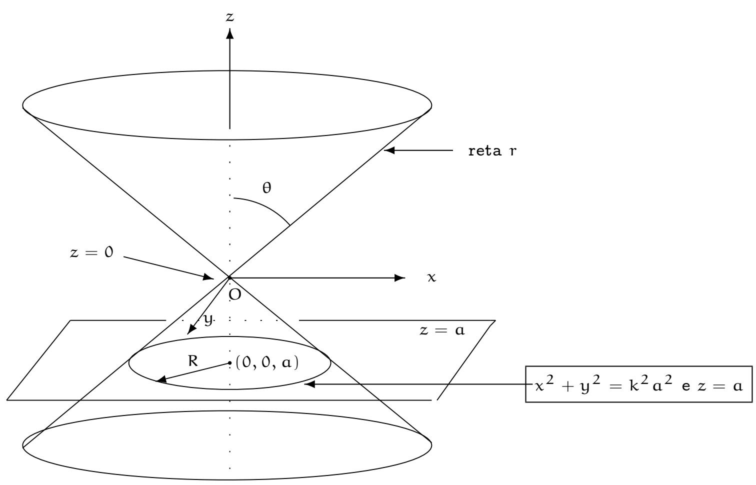
$$z = a\,,$$

(veja a figura abaixo), de centro no ponto

$$(0\,,0\,,a)_\Sigma$$

e raio igual a

$$R \doteq \sqrt{k^2 a^2} = |k\,a|\,.$$



Portanto, para $a \neq 0$, teremos:

$$S \cap \pi_1 = \left\{(x\,,y\,,b)_\Sigma\,;\, x^2 + y^2 = k^2\,a^2\right\}\,.$$

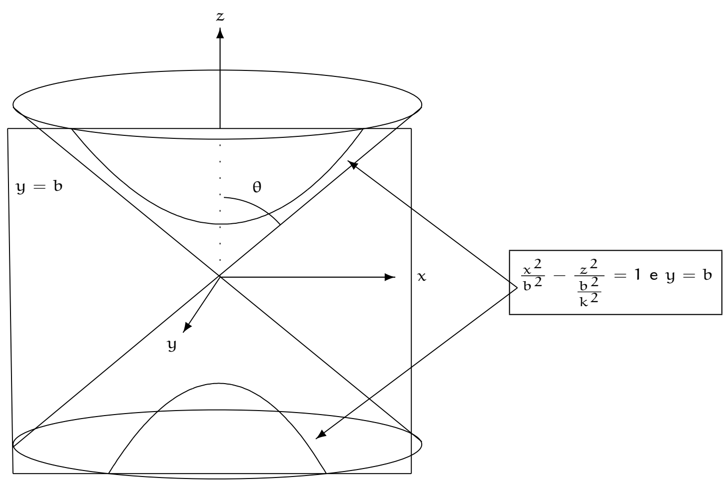
De 2.:
Neste caso teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ y = b \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 + b^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ y = b \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{\left(\dfrac{b}{k}\right)^2} = 1 \\ y = b \end{cases},$$

ou ainda, (veja a figura abaixo) uma hipérbole no plano

$$y = b\,.$$



Portanto

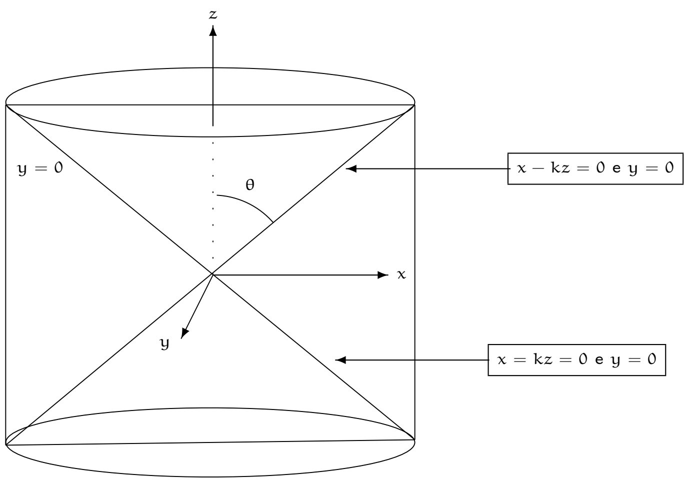
$$S \cap \pi_2 = \left\{(x\,,y\,,b)_\Sigma\,;\, \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{\left(\dfrac{b}{k}\right)^2} = 1\right\}.$$

De 3.:
Neste caso teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} (x + k\,z)\,(x - k\,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

ou seja, um para de retas concorrentes, que contêm a origem O, do sistema de coordenadas ortogonal Σ (veja a figura abaixo).



$$S \cap \pi_3 = \{(x\,, y\,, 0)_\Sigma\,;\, x = k\,z \text{ ou } x = -k\,z\}\,.$$

<u>De 4.:</u>

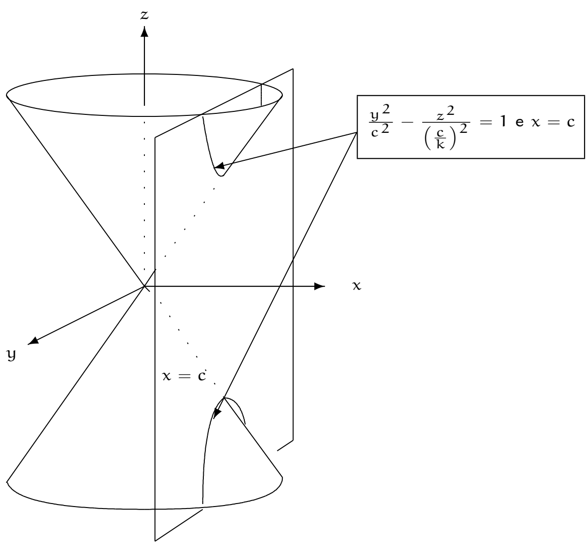
Nesta sistuação, teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ x = c \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} c^2 + y^2 - k^2\,z^2 = 0 \\ x = c \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{c^2} - \dfrac{z^2}{\left(\dfrac{c}{k}\right)^2} = 1 \\ x = c \end{cases},$$

ou seja, (veja a figura abaixo) uma hipérbole no plano

$$x = c\,.$$



$$S \cap \pi_4 = \left\{(x\,, y\,, 0)_\Sigma\,;\, \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{\left(\dfrac{c}{k}\right)^2} = 1\right\}.$$

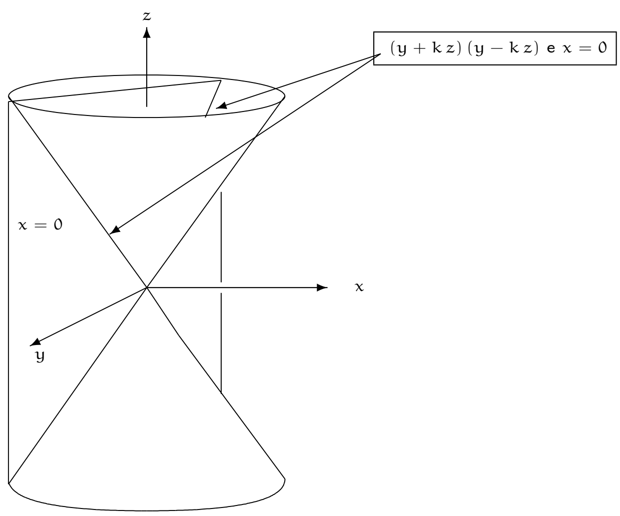
De 5.:

Neste caso, teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y^2 - k^2 z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} (y + k z)(y - k z) = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

ou seja, um par de retas no plano $x = 0$ (veja a figura abaixo).



$$S \cap \pi_5 = \{(x\,, y\,, 0)_\Sigma\,;\, y = -k z \text{ ou } y = k z\}\,.$$

Consideremos agora o:

Exemplo 13.1.5 *Fixado $a > 0$, encontrar a equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, para o lugar geométrico dos pontos $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por*

$$P \doteq (x\,, y\,, z)_\Sigma\,, \tag{13.25}$$

de modo que a distância do ponto $\underline{P}$ ao ponto $\underline{A}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por:

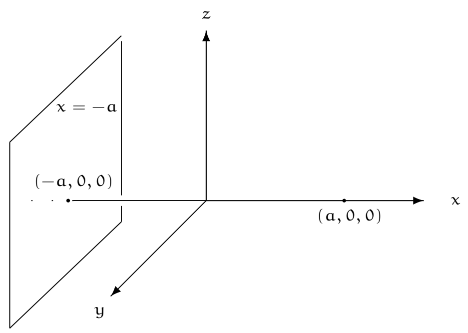
$$A \doteq (a\,, 0\,, 0)_\Sigma \tag{13.26}$$

seja igual a distância do ponto $\underline{P}$ ao plano $\underline{\pi}$, cuja equação geral, , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por:

$$\pi\,:\, x = -a\,. \tag{13.27}$$

Resolução:

A figura abaixo ilustra a situação:

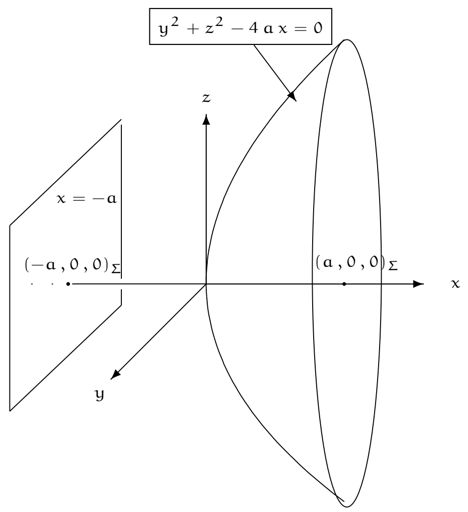


Temos que

$$d(P,\pi) = d(P,A)\,, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{|x+a|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}\,,$$
$$\text{isto é,} \quad (x+a)^2 = (x-a)^2+y^2+z^2\,,$$
$$\text{ou ainda,} \quad y^2+z^2-4a\,x = 0\,, \tag{13.28}$$

assim uma equação para a superfície procurada, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$.

A representação geométrica da superfície de equação (13.28), em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada pela figura abaixo.



Observação 13.1.4 *A supefície acima é um caso particular de uma superfície denominada* **parabolóise de revolução** *que será estudado na próxima seção.*

Exemplo 13.1.6 *Encontre os traços da superfície* $\underline{S}$ *do Exercício acima, com os planos, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, são dadas por:*

1. $\pi_1 : z = b$ *e* $\pi_2 : y = b$;

2. $\pi_3 : x = c < 0$;

3. $\pi_4 : x = 0$;

4. $\pi_5 : x = c > 0$.

Resolução:

De 1.:

Para o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$\pi_1 : z = b ,$$

teremos:

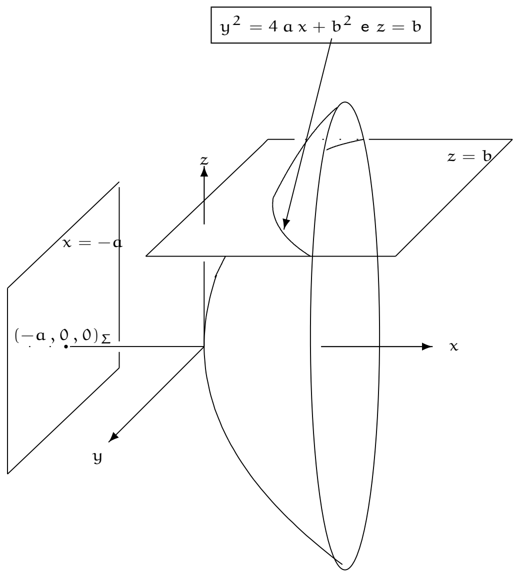
$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4\,a\,x = 0 \\ z = b \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y^2 = 4\,a\,x + b^2 \\ z = b \end{cases} ,$$

ou seja, a parábola de equação

$$y^2 = 4\,a\,x + b^2$$

no plano $\underline{\pi_1}$.

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Portanto

$$S \cap \pi_1 = \left\{(x\,,y\,,b)_\Sigma\,;\, y^2 = 4\,a\,x + b^2\right\} .$$

Para o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$\pi_2 : y = b ,$$

teremos:

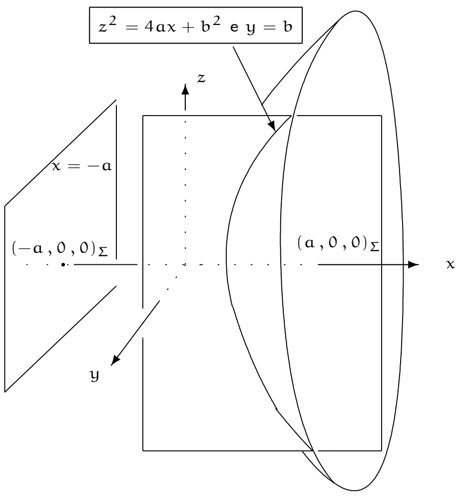
$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4\,a\,x = 0 \\ y = b \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} z^2 = 4\,a\,x + b^2 \\ y = b \end{cases} ,$$

ou seja, a parábola de equação

$$z^2 = 4\,a\,x + b^2$$

no plano $\underline{\pi_2}$.

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Portanto

$$S \cap \pi_2 = \left\{ (x\,, b\,, z)_\Sigma\,;\; z^2 = 4\,a\,x + b^2 \right\}$$

De 2.:

Para o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$\pi_3 \,:\, x = c < 0\,,$$

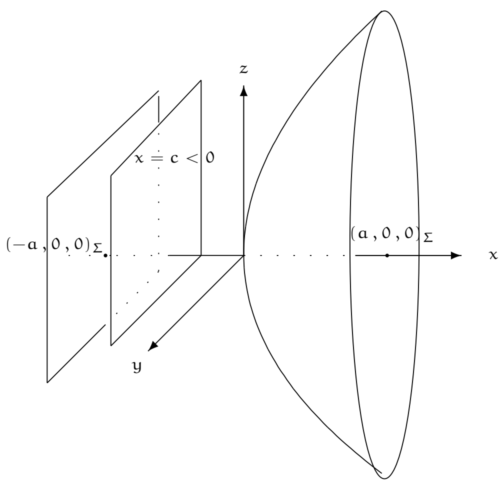
teremos:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4\,a\,x = 0 \\ x = c \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 4\,a\,c \overset{a>0 \text{ e } c<0}{<} 0 \\ x = c \end{cases},$$

logo teremos o conjunto vazio, ou seja, o traço da superfície S com o plano $\underline{\pi_3}$, com $c < 0$ será o conjunto vazio, ou ainda,

$$S \cap \pi_3 = \emptyset\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



De 3.:

Para o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$\pi_4 : x = 0,$$

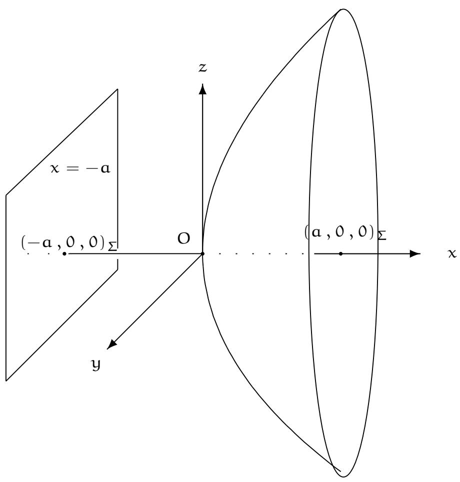
teremos:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 4\,a\,x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

ou seja, a origem $\underline{O}$, do sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \{(0\,,0\,,0)_\Sigma\}\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



De 4.:

Para o plano de equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por

$$\pi_5 : x = c > 0,$$

teremos:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = -4\,a\,x \\ x = c \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 4\,a\,c \overset{a,c>0}{>} 0 \\ x = c \end{cases},$$

ou seja, uma circunferênca no plano $\underline{\pi_5}$, com centro no ponto de coordenadas , em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dadas por

$$(c\,,0\,,0)_\Sigma$$

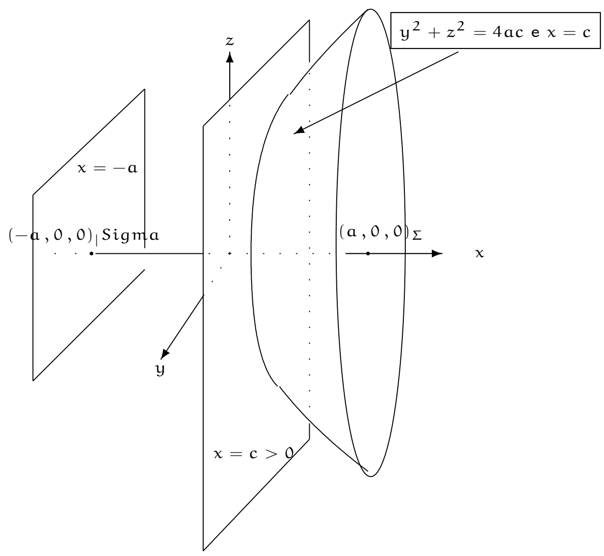
e raio igual a

$$R \doteq 2\sqrt{a\,c}\,,$$

ou ainda,

$$S \cap \pi_5 = \left\{(c\,,y\,,z)_\Sigma \,:\, y^2 + z^2 = 4\,a\,c\right\}\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



13.2 Quádricas

Fixemos um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)$$

no espaço.

Definição 13.2.1 *Ao lugar geométrico geométrica dos pontos* $\underline{P}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, dadas por*

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{13.29}$$

que satisfazem a equação do 2.o grau

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,xy + E\,xz + F\,yz + G\,x + H\,y + I\,z + J = 0 \tag{13.30}$$

daremos o nome de **quádrita**.

O gráfico da equação (13.30) *será denominado* **superfície quádrica**.

A seguir daremos alguns exemplos de superfícies quádritas importantes.
Começaremos pelo:

13.2.1 Elipsóide

Sejam

$$a\,,b\,,c > 0$$

fixados.

Consideremos a superfície quádrica $\underline{S}$ definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{13.31}$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq \frac{1}{a^2}, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad D = E = F = G = H = I \doteq 0 \quad \text{e} \quad J \doteq -1. \qquad (13.32)$$

Definição 13.2.2 *A superfície quádrica $\underline{S}$ acima será denominada* **elipsóide**.

A seguir daremos algumas propriedades do elipsóide, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada pela equação (13.31):

1. A superfície $\underline{S}$ acima, é simétrica em relação aos planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$\pi_1 : x = 0, \quad \pi_2 : y = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : z = 0.$$

De fato, notemos que

$$\text{se } P \doteq (x, y, z)_\Sigma \in S, \quad \text{então,} \quad \begin{cases} P_1 \doteq (-x, y, z)_\Sigma \in S \\ P_2 \doteq (x, -y, z)_\Sigma \in S \\ P_3 \doteq (x, y, -z)_\Sigma \in S \end{cases},$$

e este três pontos são os simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$, $\underline{\pi_2}$ e $\underline{\pi_3}$, respectivamente.

2. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_4 : z = \pm c$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = \pm c \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = \pm c \end{cases},$$

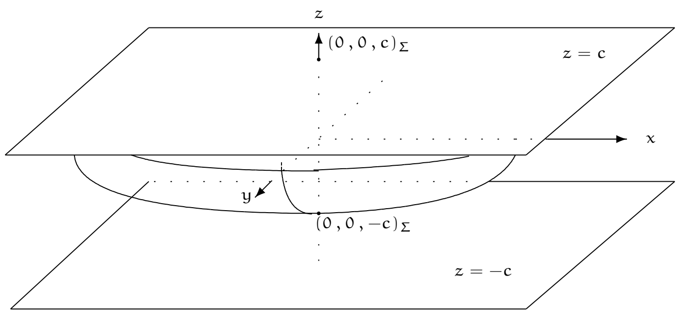
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_4}$ com a superfície $\underline{S}$ será o ponto

$$(0, 0, \pm c)_\Sigma,$$

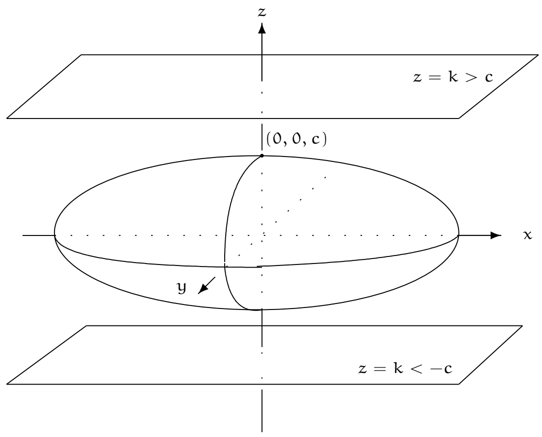
ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \{(0, 0, \pm c)_\Sigma\}.$$

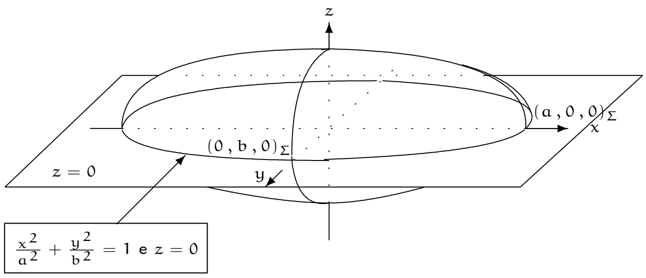
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



3. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_5 : z = k \,, \quad \text{onde} \quad |k| > c \,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \,, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \overset{k^2 > c^2}{<} 0 \\ z = k \end{cases} \,,$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície $\underline{S}$ será o conjunto vazio (veja figura abaixo), ou ainda
$$S \cap \pi_5 = \emptyset \,.$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



4. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_6 : z = 0 \,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \,, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \,,$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,,$$
contida no plano π_6, ou ainda,
$$S \cap \pi_6 = \left\{ (x \,, y \,, 0)_\Sigma \,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} .$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.1 *Vale observar que, na situação acima, se*

$$a = b\,,$$

então teremos a circunferência

$$x^2 + y^2 = a^2$$

contida no plano π_6*, com centro na origem* $O = (0\,,0\,,0)_\Sigma$ *e raio igual a*

$$R = a\,.$$

5. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_7 : z = k\,, \quad \text{onde} \quad |k| < c$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \overset{k^2<c^2}{>} 0 \\ z = k \end{cases}$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

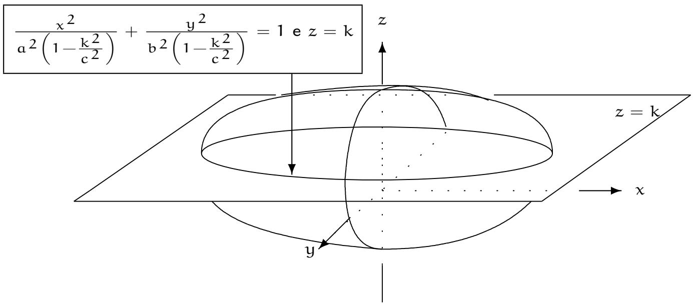
isto é, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$, será a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1\,,$$

contida plano $\underline{\pi_7}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_7 = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\ \frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.2 *Vale observar que se*

$$a = b\,,$$

então teremos a circunferência

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{k^2}{c^2}\right)\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_7}$, de centro no ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$C \doteq (0\,,0\,,k)_\Sigma$$

e raio igual a

$$R \doteq a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$$

De modo semelhante temos:

6. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_8 \,:\, x = \pm a\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

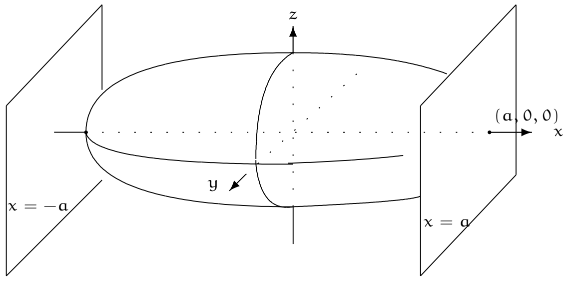
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = \pm a \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = \pm a \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad y = z = 0 \text{ e } x = \pm a\,, \tag{13.33}$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_8}$ com a superfície $\underline{S}$ será o ponto $(\pm a\,,0\,,0)_\Sigma$, ou ainda,

$$S \cap \pi_8 = \{(\pm a\,,0\,,0)_\Sigma\}\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



7. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_9 : x = k\,, \quad \text{onde} \quad |k| > a$$

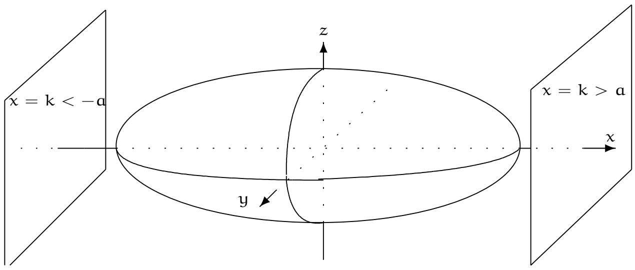
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \overset{k^2>a^2}{<} 0 \\ x = k \end{cases},$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_9}$ com a superfície $\underline{S}$ será o conjunto vazio, ou ainda,

$$S \cap \pi_9 = \emptyset\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



8. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{10} : x = 0$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases},$$

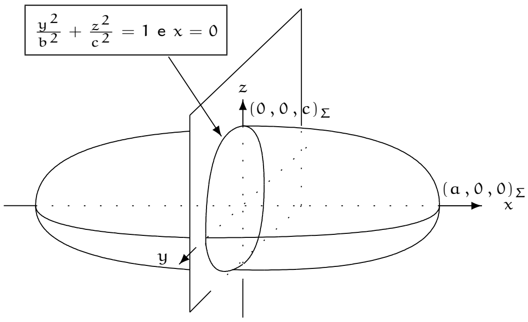
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{10}}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

contida no plano π_{10}, ou ainda,

$$S \cap \pi_{10} = \left\{ (0\,, y\, z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.3 *Vale observar que se*

$$c = b\,,$$

então teremos a circunferência

$$y^2 + z^2 = b^2\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_{10}}$*, de centro na origem*

$$O = (0\,,0\,,0)_\Sigma$$

e raio igual a

$$R \doteq b\,.$$

9. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{10} : x = k\,, \quad \text{onde} \quad |k| < c$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \overset{k<c^2}{>} 0 \\ x = k \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases},$$

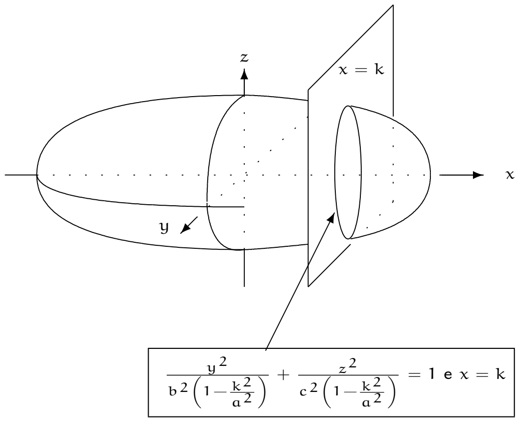
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{10}}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1$$

contida no plano π_{11}, ou ainda,

$$S \cap \pi_{11} = \left\{ (0\,,y\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.4 *Vale observar que se*

$$c = b\,,$$

então teremos a circunferência

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_{11}}$, de centro no ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$C \doteq (k\,,0\,,0)_\Sigma$$

e raio igual a

$$R \doteq b\sqrt{1 - \frac{k^2}{a^2}}\,.$$

Ou ainda:

10. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{12} : y = \pm b$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = \pm b \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = \pm b \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad x = z = 0 \text{ e } y = \pm b\,,$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{12}}$ com a superfície $\underline{S}$ será o ponto de coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dadas por:

$$(0\,,\pm b\,,0)_\Sigma\,,$$

ou ainda,

$$S \cap \pi_{12} = \{(0\,,\pm b\,,0)_\Sigma\}\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a representação geométrica da situação acima.

11. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

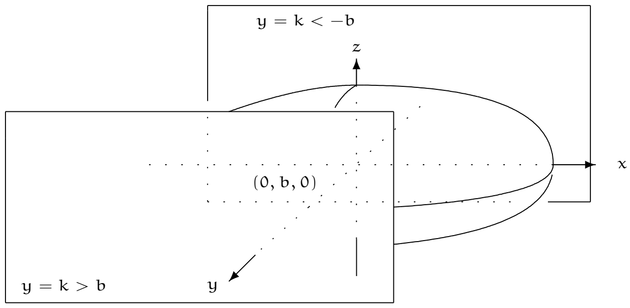
$$\pi_{13} : y = k\,, \quad \text{onde} \quad |k| > c\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \overset{k^2>c^2}{<} 0 \\ y = k \end{cases},$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{13}}$ com a superfície $\underline{S}$ será o conjunto vazio

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



12. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{13} : y = 0$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

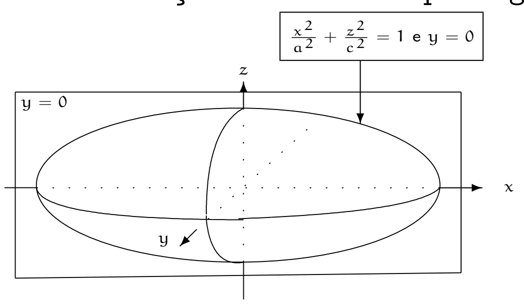
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{13}}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_{13}}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_{13} = \left\{ (x\,,0\,,z)_\Sigma \,;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.5 *Vale observar que se*

$$a = c\,,$$

então teremos a circunferência

$$x^2 + z^2 = a^2$$

contida no plano $\underline{\pi_{13}}$, *cujo de centro está na origem*

$$O = (0\,,0\,,0)_\Sigma$$

e o raio é igual a

$$R = a\,.$$

13. O traço com o plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{14} : y = k\,, \quad \text{onde} \quad |k| < c\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \overset{k^2<c^2}{>} 0 \\ y = k \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases} ,$$

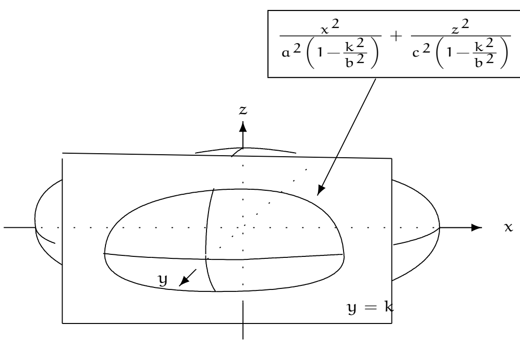
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_{14}}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1$$

contida no plano $\underline{\pi_{14}}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_{14} = \left\{ (x\,,k\,,z)_\Sigma\,; \; \frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.6 *Vale observar que se*

$$a = c\,,$$

então teremos a circunferência

$$x^2 + z^2 = a^2\left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)$$

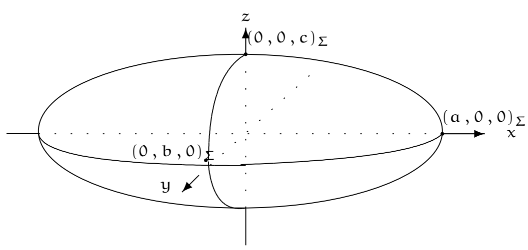
contida no plano $\underline{\pi_{14}}$*, com centro no, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$*, são dadas por :*

$$(0\,,k\,,0)_\Sigma$$

e o raio é igual a

$$R \doteq a\sqrt{1 - \frac{k^2}{b^2}}\,.$$

14. A representação geométrica gráfico do elipsóide, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



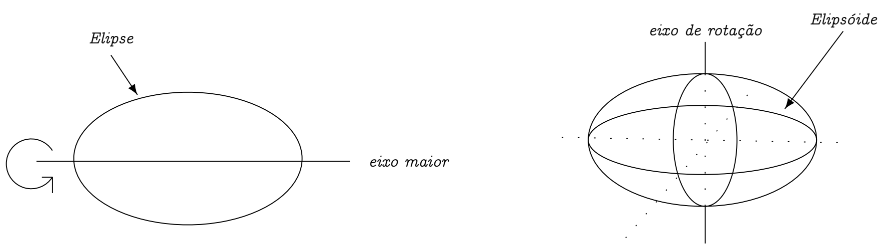
Observação 13.2.7

1. *Se dois dos números reais*

$$a\,,b\,,c$$

forem iguais, então a superfície de equação dada, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$*, por* (13.31)*, será dita de* <u>**elipsóide de revolução**</u>*, que pode ser obtida pela rotação de uma elipse em torno do seu eixo maior (ou menor).*

A representação geométrica gráfico do elipsóide de revolução é dada pela figura abaixo:



2. *Em particular, podemos obter um elipsóide de revolução, rotacionando-se a elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

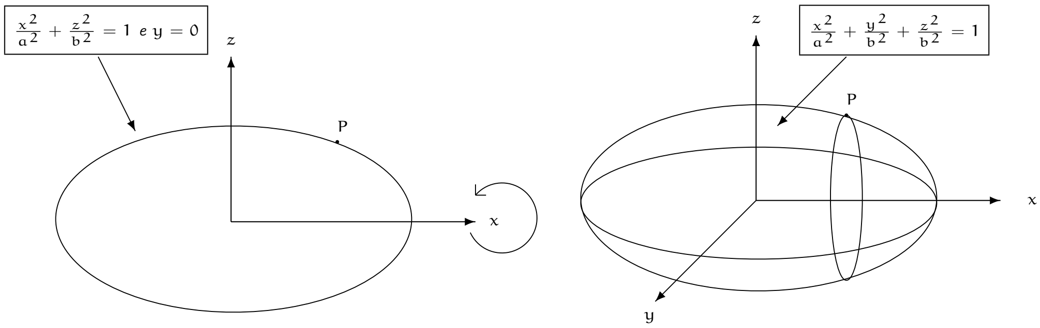
contida no plano cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, *é dada por*

$$\pi : y = 0 \,,$$

em torno do eixo Ox *(veja o Eexemplo (13.1.1)) e obter a seguinte equação para o mesmo, em relação ao sistema de coordenadas* $\underline{\Sigma}$,*:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \,. \tag{13.34}$$

A representação geométrica gráfico deste elipsóide de revolução, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *é dado pela figura abaixo:*



3. *Se*

$$a = b = c \,,$$

temos a superfície denominada **superfície esférica (ou esfera)**, *cujo centro localiza-se na origem*

$$O = (0\,,0\,,0)_\Sigma$$

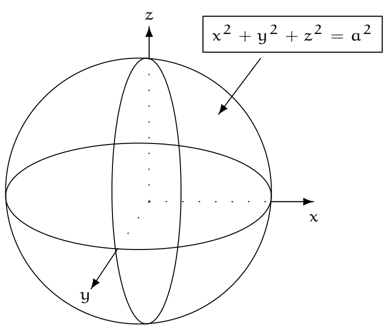
e seu raio será igual a

$$R \doteq a$$

cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *será dada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{13.35}$$

A representação geométrica gráfico da esfera acima, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *é dado pela figura abaixo:*

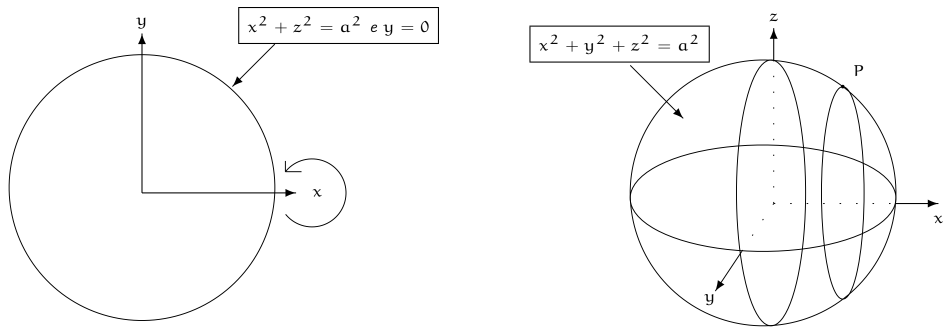


4. *A esfera acima também pode ser obtida, por exemplo, rotacionando-se a circunferência*

$$x^2 + z^2 = a^2$$

contida plano xOz*, em torno do eixo* Ox.

A representação geométrica gráfico desta esfera, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dado pela figura abaixo:*



5. *Em geral, basta rotacionarmos uma circunferência, contida em um plano, em torno de qualquer reta, que contenha seu centro, contida neste plano (veja a figura abaixo).*

13.2.2 Hiperbolóide de uma Folha

Sejam

$$a\,,b\,,c > 0$$

fixados.

Consideremos a superfície quádrica $\underline{S}$ definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \qquad (13.36)$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq \frac{1}{a^2}\,, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}\,, \quad C = -\frac{1}{c^2}\,, \quad D = E = F = G = H = I \doteq 0 \quad \text{e} \quad J \doteq -1\,. \qquad (13.37)$$

Definição 13.2.3 *A superfície* $\underline{S}$ *acima será denominado* <u>**hiperbolóide de uma folha**</u>.

Observação 13.2.8 *Observemos que a superfícies quádricas $\underline{S_1}$ e $\underline{S_2}$, definidas pelos gráficos das equações, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

também são hiperbolóides de uma folha.

Trata-se apenas de fazermos mudanças do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, para novos sistemas de coordenadas $\underline{\Sigma_1}$ e $\underline{\Sigma_2}$, cujas equações de mundança dos respectivos sistemas de coordenadas serão dadas por:

$$\begin{cases} x'=z \\ y'=y \\ z'=x \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=z \\ z'=y \end{cases}\,,$$

respectivamente.

Resumindo: a superfície quádrica $\underline{S}$, definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$A\,\frac{x^2}{a^2}+B\,\frac{y^2}{b^2}+C\,\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

onde

$$\begin{cases} A\doteq 1\,,\ B\ \doteq 1\ e\ C\doteq -1 \\ A\doteq -1\,,\ B\ \doteq 1\ e\ C\doteq 1 \\ A\doteq 1\,,\ B\ \doteq -1\ e\ C\doteq 1 \end{cases}$$

será um hiperbolóide de uma folha.

A seguir daremos algumas propriedades do hiperbolóide de uma folha de equação, em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (13.46):

1. A superfície S é simétrica em relação aos planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

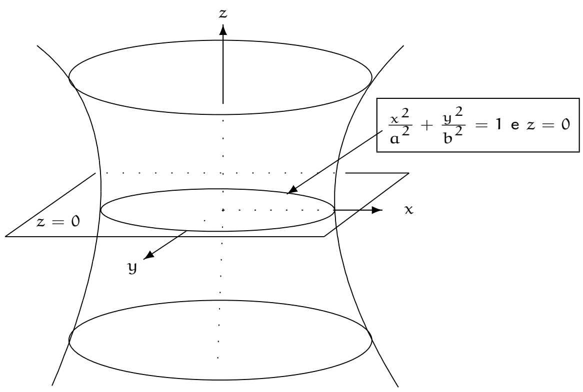
   $$\pi_1\,:\,x=0\,,\quad \pi_2\,:\,y=0\quad \text{e}\quad \pi_3\,:\,z=0\,.$$

   De fato, pois

   $$\text{se}\quad P\doteq(x\,,y\,,z)_\Sigma\in S\,,\qquad \text{teremos:}\quad \begin{cases} (-x\,,y\,,z)_\Sigma\in S \\ (x\,,-y\,,z)_\Sigma\in S \\ (x\,,y\,,-z)_\Sigma\in S \end{cases}$$

   e este três pontos são os pontos simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$,$\underline{\pi_2}$, $\underline{\pi_3}$, respectivamente.

2. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_4 : z = 0\,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} ,$$
isto é, o traço do plano $\underline{\pi_4}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
contida no plano $\underline{\pi_4}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_4 = \left\{ (x\,, y\,, 0)_\Sigma\,;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:

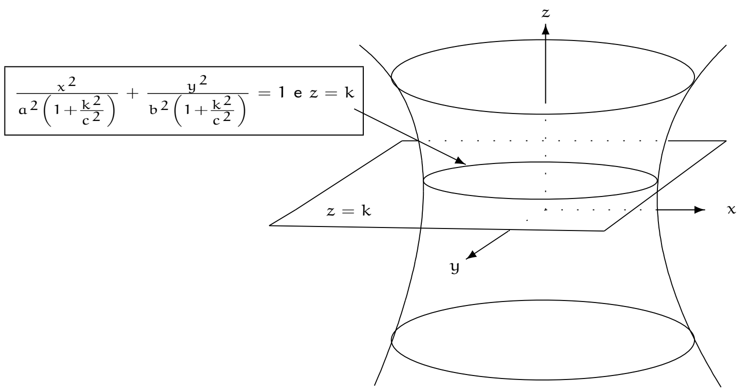


3. Em geral temos que, para $k \in \mathbb{R}$, traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_5 : z = k\,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} ,$$
o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse
$$\frac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1$$

contida no plano $\underline{\pi_5}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\; \frac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{c^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



De modo análogo temos que:

4. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_6 \,:\, y = 0\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad ,$$

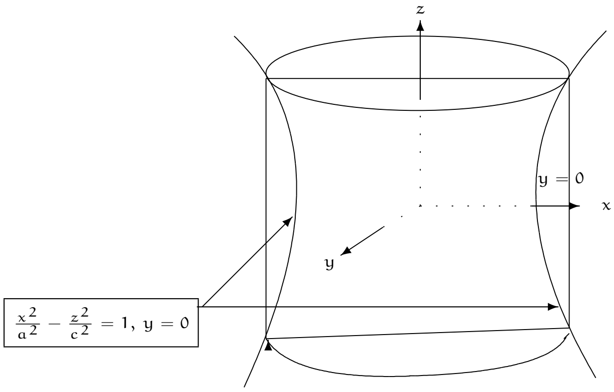
isto é, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

contida no plano $\underline{\pi_6}$, ou ainda,

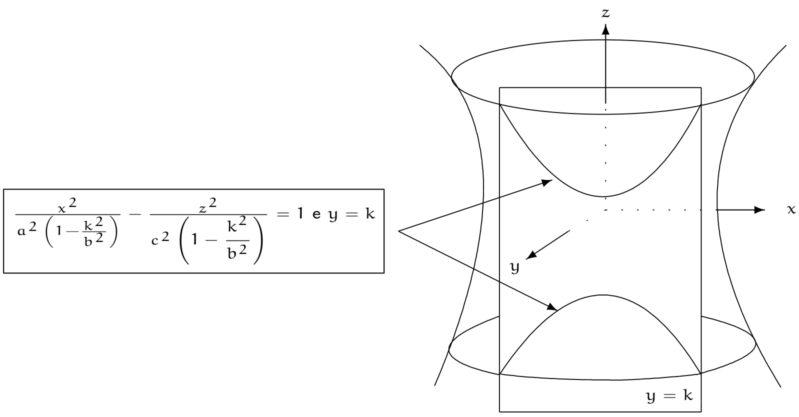
$$S \cap \pi_6 = \left\{ (x\,,0\,,z)_\Sigma\,;\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:

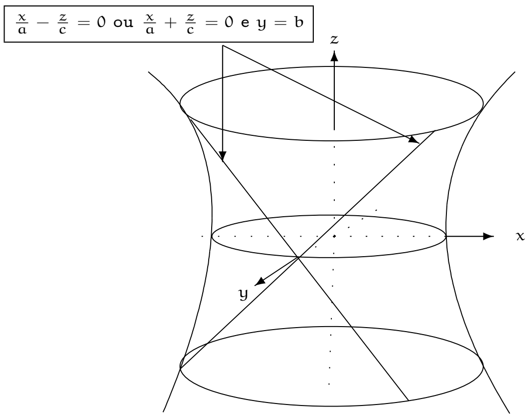


5. Se $k \neq b$, o traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_7 : y = k,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \; (\overset{k \neq b}{\neq} 0) \\ y = k \end{cases},$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole
$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1$$
contida no plano $\underline{\pi_7}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_7 = \left\{ (x\,,k\,,z)_\Sigma\,;\; \frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



6. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_8 \, : \, y = b \,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = b \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = b \end{cases} \quad ,$$
$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ y = b \end{cases} \quad ,$$
ou seja, o traço será o par de retas concorrentes
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$$
contidas no plano $\underline{\pi_8}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_8 = \left\{ (x\,,b\,,z)_\Sigma \,; \, \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \text{ ou } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \right\} .$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



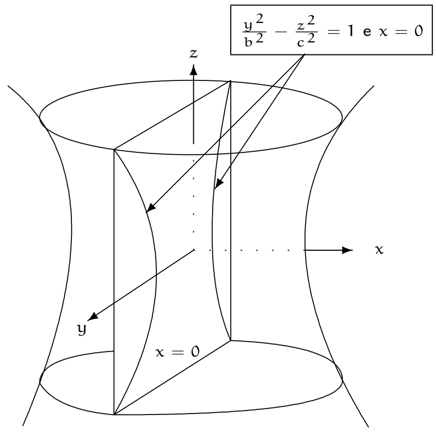
De modo semelhante temos:

7. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_9 \, : \, x = 0 \,,$$
com a superfície $\underline{S}$, será dada por:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad ,$$
ou seja, o traço será a hipébole
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

contida no plano $\underline{\pi_9}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_9 = \left\{ (0\,,y\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



8. Se $k \neq a$, o traço do plnao, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{10} \,:\, x = k\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \ (\overset{k \neq a}{\neq} 0) \\ x = k \end{cases},$$

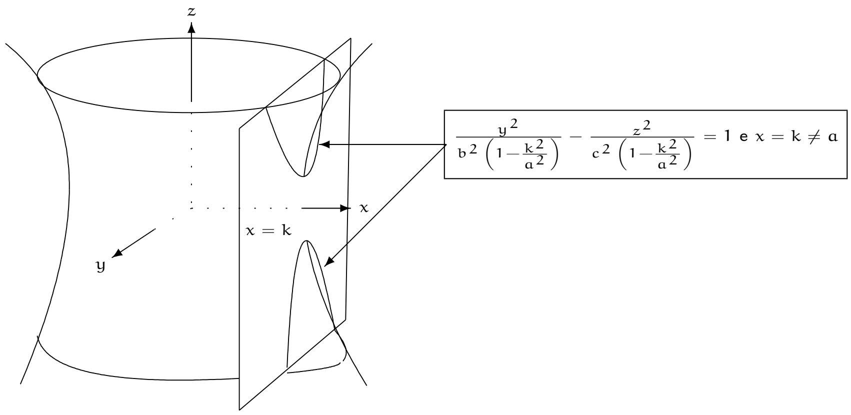
ou seja, o traço será a hipébole

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1$$

contida no plano $\underline{\pi_{10}}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_{10} = \left\{ (k\,,y\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



9. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_{11} : x = a\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, será dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = a \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = a \end{cases},$$

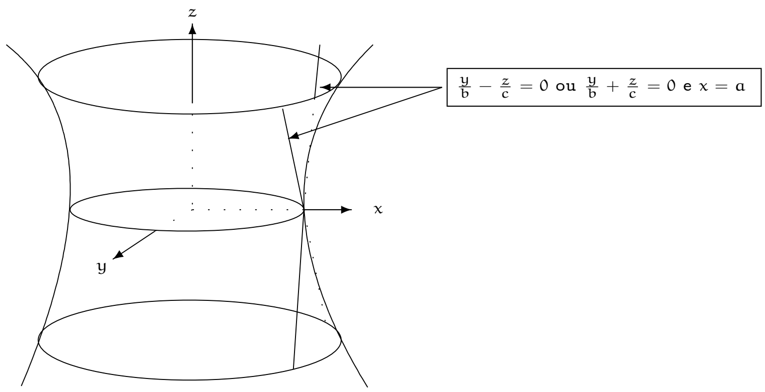
ou seja, o traço será o par de retas concorrentes

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

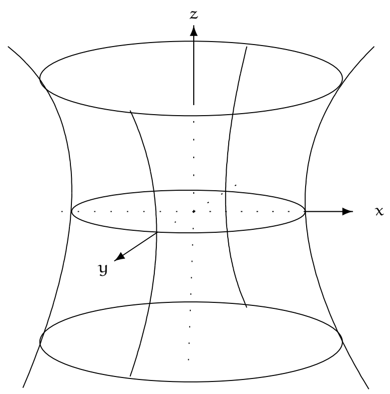
contida no plano $\underline{\pi_{11}}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_{11} = \left\{(a\,,y\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \text{ ou } \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0\right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



10. A representação geométrica do gráfico do hiperbolóide de uma folha, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



Observação 13.2.9 *Notemos que se*

$$a = b \quad e \quad k \in \mathbb{R}$$

então o traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, *é dada por*

$$\pi_{12} : z = k\,,$$

com a superfície $\underline{S}$, *será dada por:*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} > 0 \\ z = k \end{cases},$$

ou seja, o traço será a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

contida no plano $\underline{\pi_{12}}$, *de centro é o ponto* $\underline{C}$, *cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortognal* $\underline{\Sigma}$, *são dadas por:*

$$C \doteq (0\,,0\,,k)_\Sigma$$

e o raio é igual a

$$R \doteq a\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}\,,$$

ou ainda

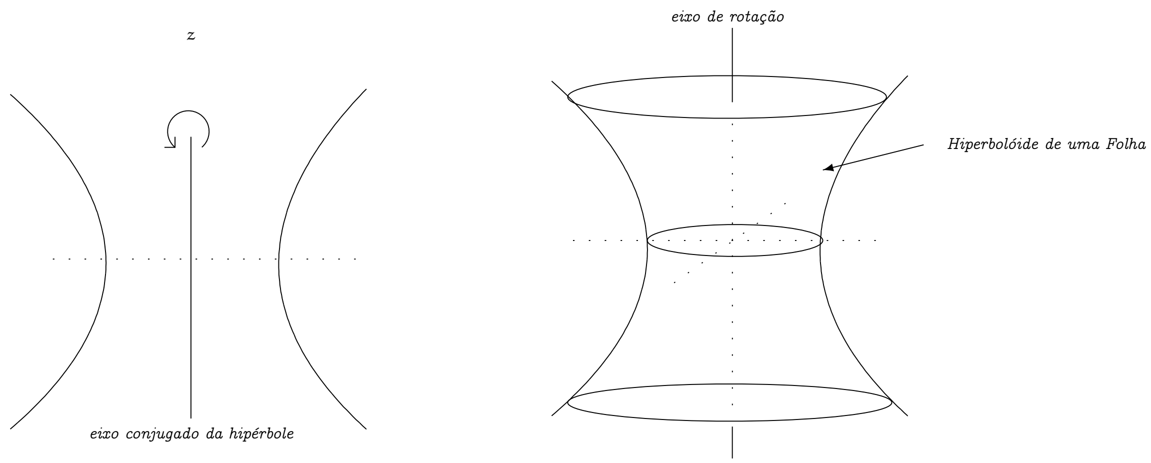
$$S \cap \pi_{12} = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \right\}.$$

Definição 13.2.4 *A superfície acima (isto é, com* $a = b$*) será uma superfície de revolução e denominada* **hiperólóide de uma folha de revolução**.

Observação 13.2.10

1. *Podemos obter a superfície acima (isto é, com* $a = b$*), fazendo a rotação da hipérbole*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
contida no plano $y = 0$*, em torno do eixo do seu eixo conjugado, no caso,* $z = 0$*.*

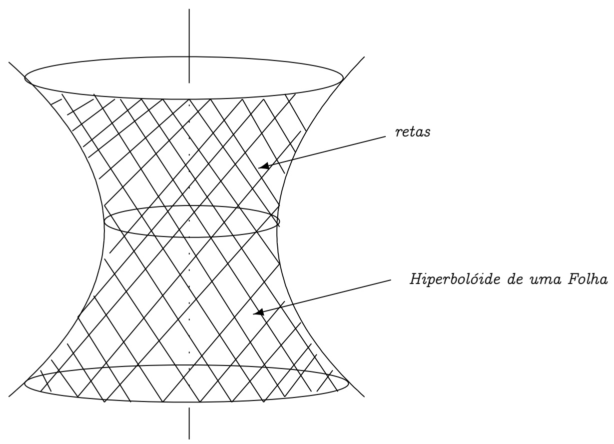
   A representação geométrica do gráfico desse hiperbolóide de uma folha de revolução, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dado pela figura abaixo:*



2. *Vimos no item 6. acima (página 445) que o traço do hiperbolóide de uma folha com o plano*
$$\pi_8 : y = b$$
nos fornece duas retas concorrentas.

   Pode-se mostrar que, na verdade, em todo ponto do hiperólóide de uma folha passam, exatamente, duas retas concorrentes que estão inteiramente contidas na superfície.

   A representação geométrica da situação acima descrita, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dado pela figura abaixo:*



3. *Superfícies que têm a propriedade descrita aicma (isto é, que em cada ponto da mesma temos, exatamente, duas retas concorrentes contidas na superfície) serão denominadas* **superfícies duplamente regradas***.*

4. *Um exemplo de superfície duplamente regrada é o hiperbolóide de uma folha.*

13.2.3 Hiperbolóide de duas Folhas

Sejam

$$a\,, b\,, c > 0\,.$$

Consideremos a superfície quádrica $\underline{S}$ definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{13.38}$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq -\frac{1}{a^2}\,, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}\,, \quad C = -\frac{1}{c^2}\,, \quad D = E = F = G = H = I \doteq 0 \quad \text{e} \quad J \doteq -1\,. \tag{13.39}$$

Definição 13.2.5 *A superfície $\underline{S}$ acima será denominado* **hiperbolóide de duas folhas**.

Observação 13.2.11 *Observemos que a superfícies quádricas $\underline{S_1}$ e $\underline{S_2}$, definidas pelos gráficos das equações, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

também são hiperbolóides de duas folhas.

Trata-se apenas de fazermos mudanças do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, para novos sistemas de coordenadas $\underline{\Sigma_1}$ e $\underline{\Sigma_2}$, cujas equações de mundança dos respectivos sistemas de coordenadas serão dadas por:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = x \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}\,,$$

respectivamente.

Resumindo: a superfície quádrica $\underline{S}$, definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$A\,\frac{x^2}{a^2} + B\,\frac{y^2}{b^2} + C\,\frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

onde

$$\begin{cases} A \doteq -1\,, \ B \ \doteq 1 \ e \ C \doteq -1 \\ A \doteq -1\,, \ B \ \doteq -1 \ e \ C \doteq 1 \\ A \doteq 1\,, \ B \ \doteq -1 \ e \ C \doteq -1 \end{cases}$$

será um hiperbolóide de duas folhas.

A seguir daremos algumas propriedades do hiperbolóide de duas folhas que tem equação, em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (13.38):

1. A superfície quádrica $\underline{S}$, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.38), é simétrica em relação aos planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$\pi_1 : x = 0\,, \quad \pi_2 : y = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : z = 0\,.$$

   De fato, pois

$$\text{se} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma \in S\,, \quad \text{segue que} \quad \begin{cases} (-x\,,y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,-y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,y\,,-z)_\Sigma \in S \end{cases}$$

   e este três pontos são os pontos simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$,$\underline{\pi_2}$, $\underline{\pi_3}$, respectivamente.

2. A superfície quádrica $\underline{S}$, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.38), não intercepta o plano π_2.

   Na verdade não intercepta nenhum plano, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por

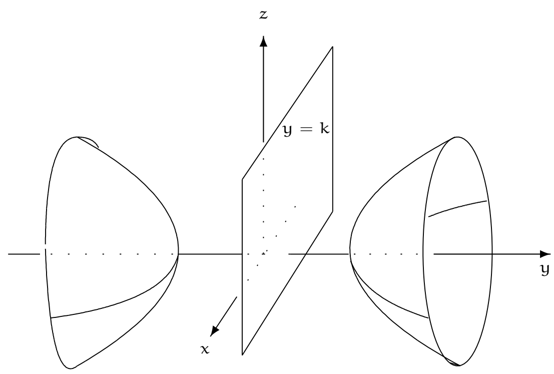
$$\pi_4 : y = k \quad \text{para} \quad |k| < b\,. \tag{13.40}$$

   De fato, pois o traço da superfície quádrica $\underline{S}$ com o plano $\underline{\pi_5}$, será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} \qquad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{b^2} - 1 \overset{k^2<b^2}{<} 0 \\ y = k \end{cases} \quad ,$$

   ou seja, o traço da superfície quádrica $\underline{S}$ com o plano $\underline{\pi_4}$ será o conjunto vazio (veja figura abaixo), ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \emptyset\,.$$



3. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_5 \, : \, y = \pm b \, ,$$

será:

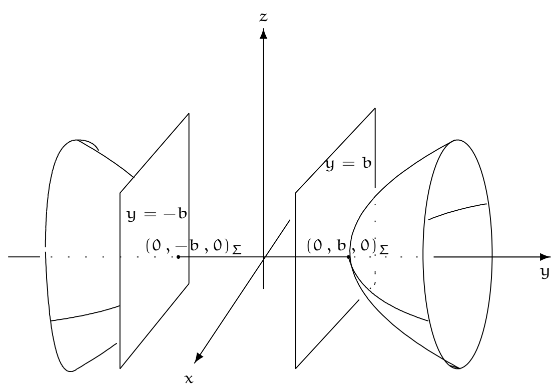
$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = \pm b \end{cases} , \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{b^2} - 1 = \dfrac{b^2}{b^2} - 1 = 0 \\ y = \pm b \end{cases}$$

ou ainda, $x = z = 0$ e $y = b$ ou $x = z = 0$ e $y = -b$,

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície quádrica $\underline{S}$ será o ponto $(0\,,\pm b\,,0)_\Sigma$, ou ainda,

$$S \cap \pi_5 = \{(0\,,\pm b\,,0)_\Sigma\} \, .$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



4. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_6 \, : \, y = k \, , \quad \text{para} \quad |k| > b \, ,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k \end{cases} , \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{b^2} - 1 \\ y = k \end{cases}$$

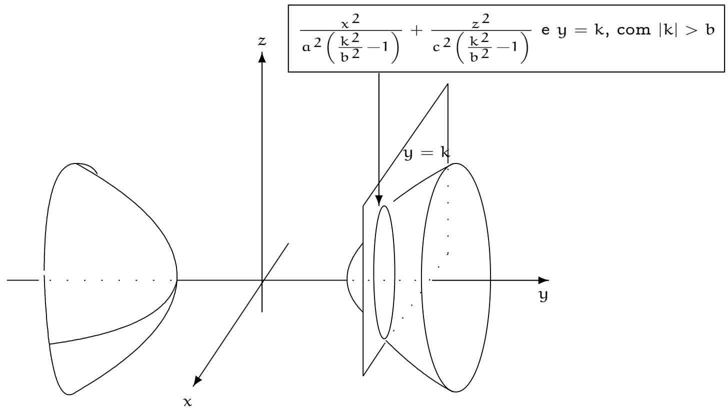
isto é, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)}=1$$

contida no plano $\underline{\pi_6}$, ou ainda,

$$S\cap\pi_6=\left\{(x\,,k\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)}=1\right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



5. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_7\,:\,z=k\,,\ \text{para } k\in\mathbb{R}\,,$$

será:

$$\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=k\end{cases},\quad\text{isto é,}\quad\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}$$

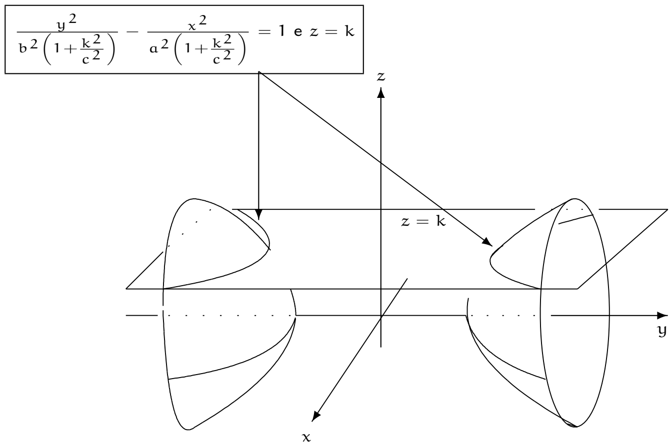
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1$$

contida no plano $\underline{\pi_7}$, ou ainda,

$$S\cap\pi_7=\left\{(x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{k^2}{c^2}\right)}=1\right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



6. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_8 \,:\, x = k\,, \text{ para } k \in \mathbb{R}\,,$$

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

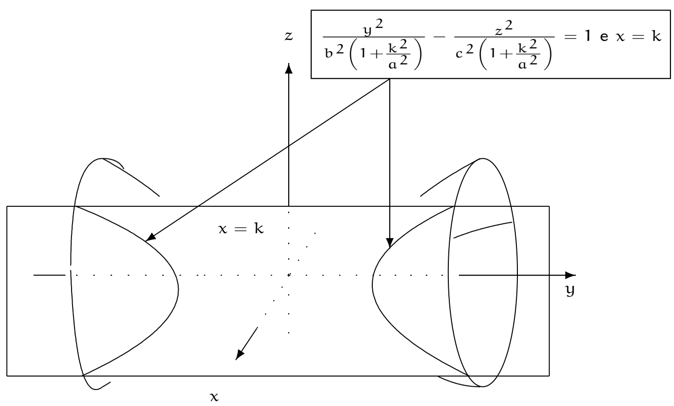
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_8}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole

$$\frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1$$

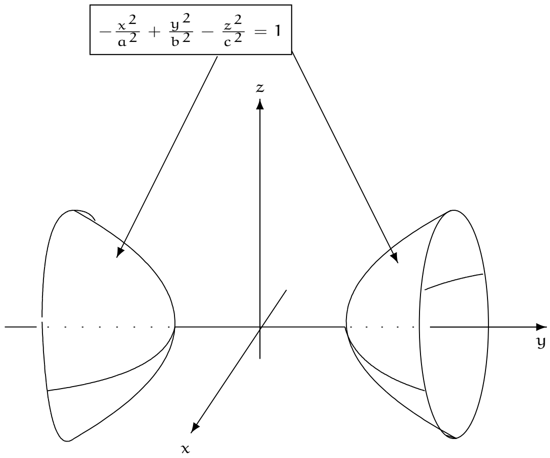
contida no plano $\underline{\pi_8}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_8 = \left\{ (k\,,y\,,z)_\Sigma\,;\ \frac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



7. A representação geométrica do gráfico do hiperbolóide de duas folhas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



Observação 13.2.12

1. *Se no hiperbolóide de duas folhas, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, é dada por* (13.38)*, tivermos*

$$c = a\,,$$

ou seja,

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1\,. \tag{13.41}$$

o traço da mesma com o plano

$$\pi_9 : y = k\,, \quad \textit{para} \quad |k| > b\,,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{a^2}=1 \\ y = k \end{cases} \quad , \quad \textit{isto é,} \quad \begin{cases} x^2+z^2 = a^2\left(\dfrac{k^2}{b^2}-1\right) \overset{k>b^2}{>} 0 \\ y = k \end{cases}$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_9}$ *com a superfície* $\underline{S}$ *a circunferência*

$$x^2+z^2 = a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)$$

contida no plano $\underline{\pi_9}$*, isto é, de centro no ponto* $\underline{C}$*, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, é dada por*

$$C \doteq (0\,,k\,,0)_\Sigma$$

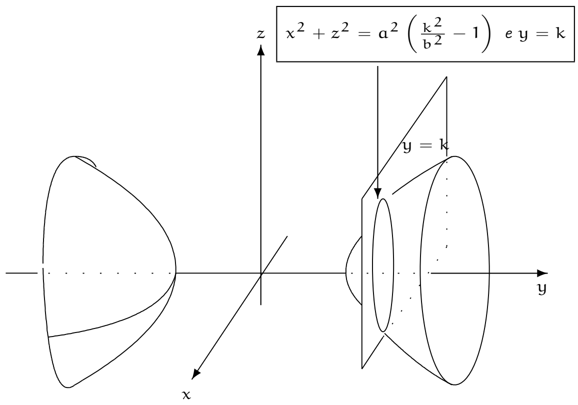
e cujo raio é igual a

$$R \doteq a\sqrt{\frac{k^2}{b^2}-1}$$

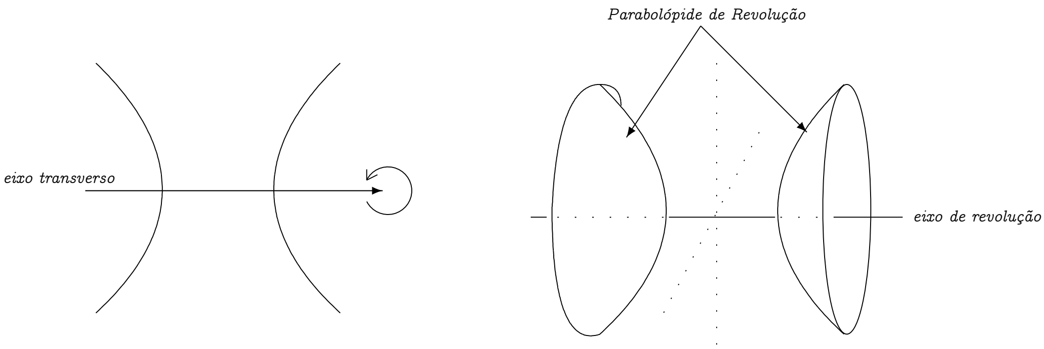
no plano $\underline{\pi_9}$*, ou ainda,*

$$S\cap\pi_9 = \left\{(x\,,k\,,z)_\Sigma\,;\, x^2+z^2 = a^2\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)\right\}\,.$$

A representação geométrica da superfície quádrica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$*, é dada por* (13.45)*, é exibida na figura abaixo:*



A superfície quádrica cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, *é dada por* (13.45), *será denominada* <u>**hiperbolóide revolução de duas folhas**</u> *e pode ser obtida pela rotação de uma hipérbole conveniente, em torno do seu eixo trasnverso (veja figura abaixo).*



13.2.4 Parabolóide Elíptico

Sejam

$$a\,,b\,,c > 0\,,$$

fixados.

Consideremos a superfície quádrica S definida pelo gráfico da equação, dada em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$, por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - c\,z = 0\,. \tag{13.42}$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq \frac{1}{a^2}\,, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}\,, \quad C = D = E = F = G = H = I \doteq 0 \quad \text{e} \quad I \doteq -c\,. \tag{13.43}$$

Definição 13.2.6 *A superfície* $\underline{S}$ *acima será denominado* <u>**parabolóide elíptico**</u>.

Observação 13.2.13 *Observemos que a superfícies quádricas* $\underline{S_1}$ *e* $\underline{S_2}$, *definidas pelos gráficos das equações, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *dada por:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - c\,y = 0\,,$$

ou

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - c\,x = 0\,,$$

também são parabolóides elípticos.

Trata-se apenas de fazermos mudanças do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, para novos sistemas de coordenadas $\underline{\Sigma_1}$ e $\underline{\Sigma_2}$, cujas equações de mundança dos respectivos sistemas de coordenadas serão dadas por:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases},$$

respectivamente.

Resumindo: a superfície quádrica $\underline{S}$, definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$A\,\frac{x^2}{a^2} + B\,\frac{y^2}{b^2} + C\,\frac{z^2}{c^2} + G\,x + H\,y + I\,z = 0\,,$$

onde

$$\begin{cases} A \doteq 1\,,\ B \doteq 1\,,\ C = G = H \doteq 0 \ \textit{e}\ I = -c \\ A = H = I \doteq 0\,,\ B \doteq 1\,,\ C \doteq 1 \ \textit{e}\ G = -c \\ A \doteq 1\,,\ B = G = I \doteq 0\,,\ C \doteq 1 \ \textit{e}\ H = -c \end{cases}$$

será um parabolóide elíptico.

A seguir daremos algumas propriedades do parabolóide elíptico que tem equação, em relação aos sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, dada por (13.42):

1. A superfície quádrica $\underline{S}$, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.42), é simétrica em relação aos seguintes planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

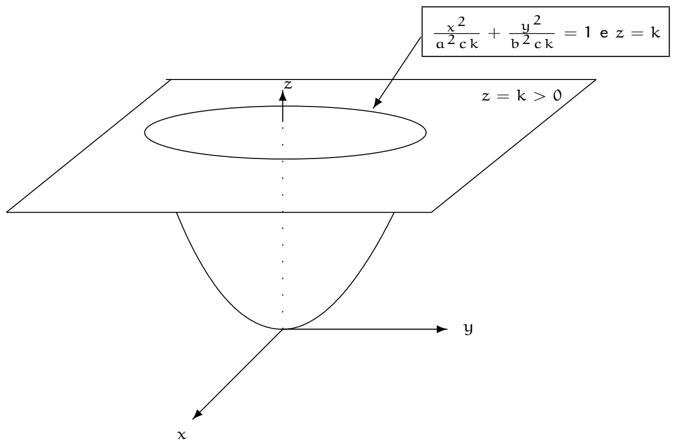
$$\pi_1 : x = 0\,, \quad \text{e} \quad \pi_2 : y = 0\,.$$

De fato, pois

$$\text{se} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma \in S\,, \quad \text{segue que} \quad \begin{cases} (-x\,,y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,-y\,,z)_\Sigma \in S \end{cases}$$

e este dois pontos são os pontos simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$,$\underline{\pi_2}$, respectivamente.

2. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_3 \,:\, z = k\,, \quad \text{para} \;\; k \in (0\,,\infty)\,,$$
será:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c\,k \overset{c\,,k>0}{>} 0 \\ z = k \end{cases}$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_3}$ com a superfície $\underline{S}$ será a elipse
$$\frac{x^2}{a^2ck} + \frac{y^2}{b^2ck} = 1$$
contida no plano $\underline{\pi_3}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_3 = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\, \frac{x^2}{a^2ck} + \frac{y^2}{b^2ck} = 1 \right\}.$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.14 *Se no parabolóide elíptico, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.42), tivermos*
$$a = b\,,$$
ou seja, ou seja,
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - c\,z = 0\,. \tag{13.44}$$
o traço da mesma com o plano
$$\pi_3 \,:\, y = k\,, \quad \textit{para} \;\; k > 0\,,$$
será:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - ck = 0 \\ z = k \end{cases}, \quad \textit{isto é,} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = cka^2 \overset{c\,,k>0}{>} 0 \\ z = k \end{cases}$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_3}$ com a superfície $\underline{S}$ será a circunferência

$$x^2 + y^2 = cka^2$$

contida no plano $\underline{\pi_3}$, isto é, de centro no ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$C \doteq (0\,,0\,,k)_\Sigma$$

e cujo raio é igual a

$$R \doteq a\sqrt{ck}\,.$$

3. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_4 : z = k\,, \quad \text{para} \;\; k \in (-\infty, 0)\,,$$

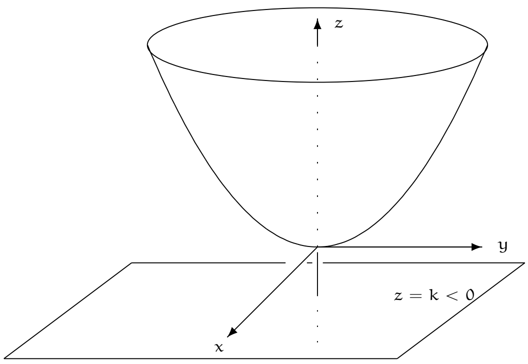
será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \overbrace{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}^{\geq 0} = c\,k \overset{c>0 \text{ e } ,k<0}{<} 0 \\ z = k \end{cases}$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_4}$ com a superfície $\underline{S}$ será o conjunto vazio, ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \emptyset\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



4. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_5 : z = 0\,,$$

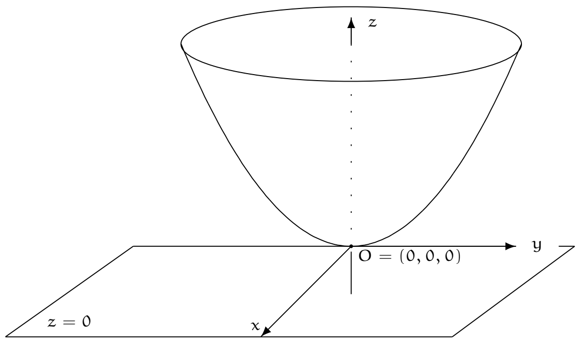
será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \overbrace{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}^{\geq 0} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ,$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície $\underline{S}$ será o conjunto formado pela origem $(0\,,0\,,0)_\Sigma$, ou ainda,

$$S \cap \pi_5 = \{(0\,,0\,,0)_\Sigma\}\,.$$



5. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_6 \,:\, x = k\,,\ \text{para } k \in \mathbb{R}\,,$$

será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = k \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = c\,z - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

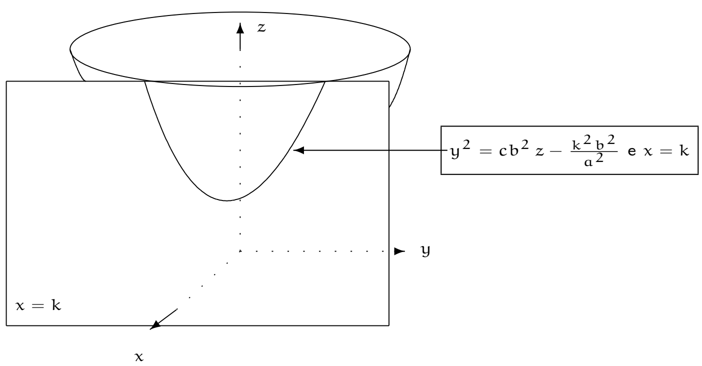
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola

$$y^2 = cb^2\,z - \frac{k^2b^2}{a^2}\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_6}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_6 = \left\{(k\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, y^2 = cb^2\,z - \frac{k^2b^2}{a^2}\right\}\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.15 *Em particular, se* $k = 0$*, teremos a parábola*

$$x^2 = cb^2\,z\,.$$

6. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_7 \,:\, y = k\,, \text{ para } k \in \mathbb{R}\,,$$

será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ y = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = k \end{cases},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = c\,z - \dfrac{k^2}{b^2} \\ x = k \end{cases},$$

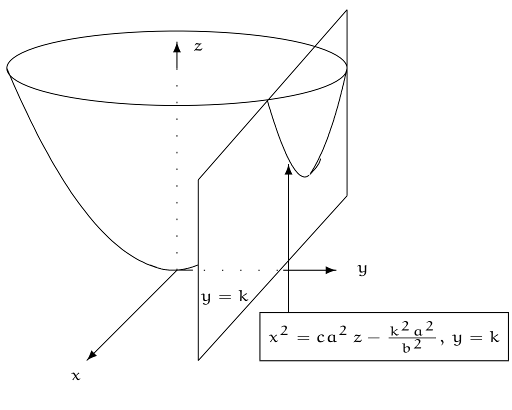
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola

$$x^2 = ca^2\,z - \frac{k^2a^2}{b^2}\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_7}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_7 = \left\{(k\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, x^2 = ca^2\,z - \frac{k^2a^2}{b^2}\right\}.$$

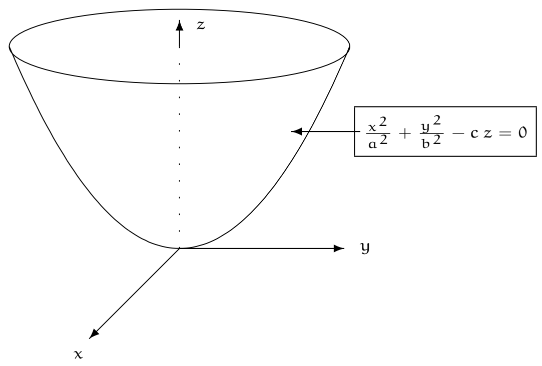
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



Observação 13.2.16 *Na situação acima, se* $k = 0$*, teremos a parábola*

$$x^2 = ca^2\,z\,.$$

7. A representação geométrica do gráfico do parabolóide elíptico, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



Observação 13.2.17

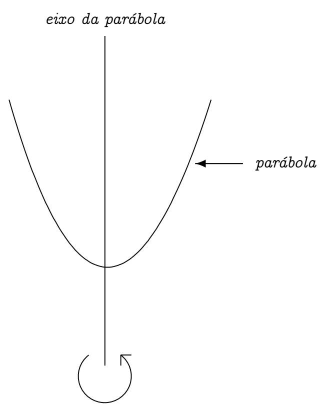
1. *Se no parabolóide elíptico, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *é dada por* (13.42), *tivermos*

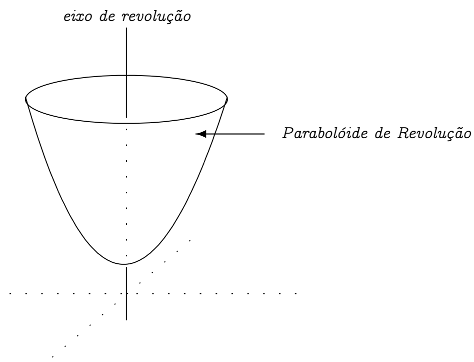
$$a = b\,,$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - c\,z = 0\,. \tag{13.45}$$

que será denominada **parabolóide de revolução** *e pode ser obtido pela rotação de uma parábola coveniente, em torno do seu eixo da própria parábola (veja a figura abaixo).*





13.2.5 Parabolóide Hiperbólico

Sejam

$$a\,, b\,, c > 0\,,$$

fixados.

Consideremos a superfície quádrica S definida pelo gráfico da equação, dada em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$, por:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - c\,z = 0\,. \tag{13.46}$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq -\frac{1}{a^2}, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}, \quad C = D = E = F = G = H = I \doteq 0 \quad \text{e} \quad I \doteq -c. \tag{13.47}$$

Definição 13.2.7 *A superfície quádrica* S *acima será denominado* **parabolóide hiperbólico (ou sela)** .

Observação 13.2.18 *Observemos que a superfícies quádricas* $\underline{S_1}$ *e* $\underline{S_2}$*, definidas pelos gráficos das equações, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, dada por:*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - c\,y = 0,$$

ou

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} - c\,x = 0,$$

também são parabolóides hiperbólicos.

Trata-se apenas de fazermos mudanças do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$*, para novos sistemas de coordenadas* $\underline{\Sigma_1}$ *e* $\underline{\Sigma_2}$*, cujas equações de mundança dos respectivos sistemas de coordenadas serão dadas por:*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases},$$

respectivamente.

Resumindo: a superfície quádrica $\underline{S}$*, definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$*, dada por:*

$$A\,\frac{x^2}{a^2} + B\,\frac{y^2}{b^2} + C\,\frac{z^2}{c^2} + G\,x + H\,y + I\,z = 0,$$

onde

$$\begin{cases} A \doteq -1, \; B \doteq 1, \; C = G = H \doteq 0 \text{ e } I = -c \\ A \doteq -1, \; B = G = I \doteq 0, \; C \doteq -1 \text{ e } H = -c \\ A = H = I \doteq 0, \; B \doteq -1, \; C \doteq 1 \text{ e } G = -c \end{cases}$$

será um parabolóide elíptico.

A seguir daremos algumas propriedades do parabolóide hiperbólico:

1. A superfície quádrica $\underline{S}$, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.42), é simétrica em relação aos seguintes planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$\pi_1 : x = 0, \quad \text{e} \quad \pi_2 : y = 0.$$

De fato, pois

$$\text{se} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma \in S\,, \quad \text{segue que} \quad \begin{cases} (-x\,,y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,-y\,,z)_\Sigma \in S \end{cases}$$

e este dois pontos são os pontos simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$,$\underline{\pi_2}$, respectivamente.

2. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_3 \, : \, z = 0\,,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{isot é,} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

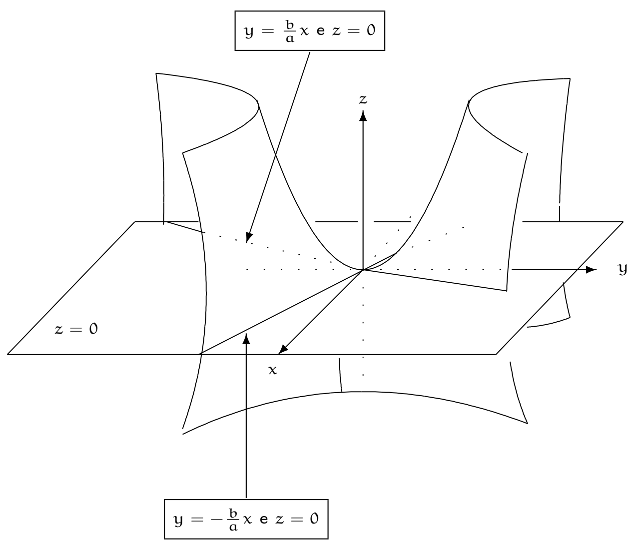
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_3}$ com a superfície $\underline{S}$ será um par de retas concorrentes, passando pela origem, cujas equações gerias (no plano $\underline{\pi_3}$) são dadas por:

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}x\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_3}$, ou ainda,

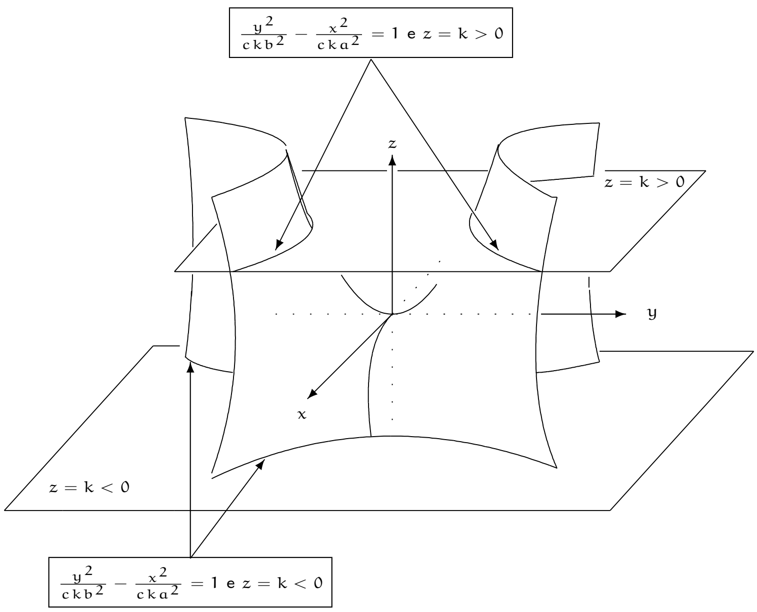
$$S \cap \pi_3 = \left\{ (x\,,y\,,0)_\Sigma\,;\, y = -\frac{b}{a}x \;\; \text{ou} \;\; y = \frac{b}{a}x \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



3. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_4 : z = k\,, \text{ para } k \neq 0\,,$$
será:
$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,k = 0 \\ z = k \end{cases}$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_4}$ com a superfície $\underline{S}$ será uma hipérbole dada por:
$$\frac{y^2}{ckb^2} - \frac{x^2}{cka^2} = 1\,,$$
contida no plano $\underline{\pi_4}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_4 = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma\,;\, \frac{y^2}{ckb^2} - \frac{x^2}{cka^2} = 1 \right\}\,.$$
Notemos que:
   - Se
   $$k > 0\,,$$
   o eixo transverso da hipérbole será paralelo ao eixo Oy;
   - se
   $$k < 0\,,$$
   o eixo transverso da hipérbole será paralelo ao eixo Ox.

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



4. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_5 \, : \, y = 0 \, ,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases}$$

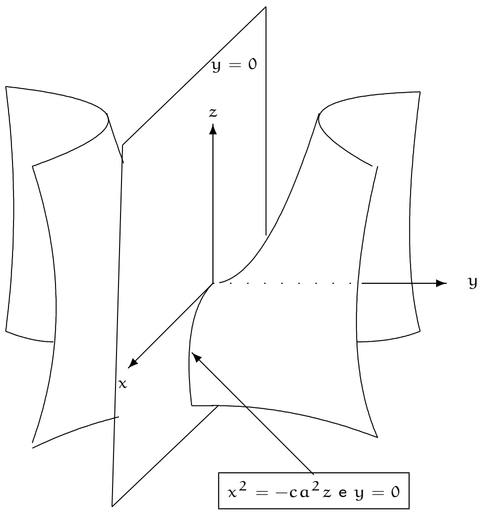
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola dada por:

$$x^2 = -c a^2 z \, ,$$

contida no plano $\underline{\pi_5}$ (com concavidade voltada para baixo, no plano $\underline{\pi_5}$) , ou ainda,

$$S \cap \pi_5 = \left\{ (x\,,0\,,z)_\Sigma \, ; \, x^2 = -c a^2 z \right\} \, .$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



5. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_6 \, : \, y = k \, , \ \text{ para } k \neq 0 \, ,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ y = k \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases}$$

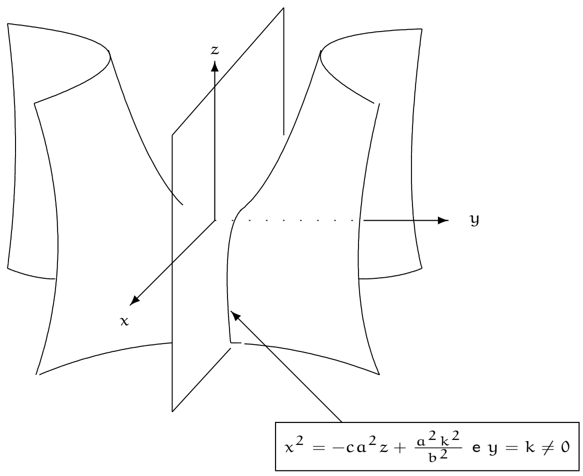
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola dada por:

$$x^2 = -c a^2 z + \frac{a^2 k^2}{b^2} \, ,$$

contida no plano $\underline{\pi_6}$ (com concavidade voltada para baixo, no plano $\underline{\pi_6}$) , ou ainda,

$$S \cap \pi_6 = \left\{ (x\,,k\,,z)_\Sigma\,;\, x^2 = -ca^2\,z + \frac{a^2k^2}{b^2} \right\}\,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



6. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_7\,:\,x = 0\,,$$

será:

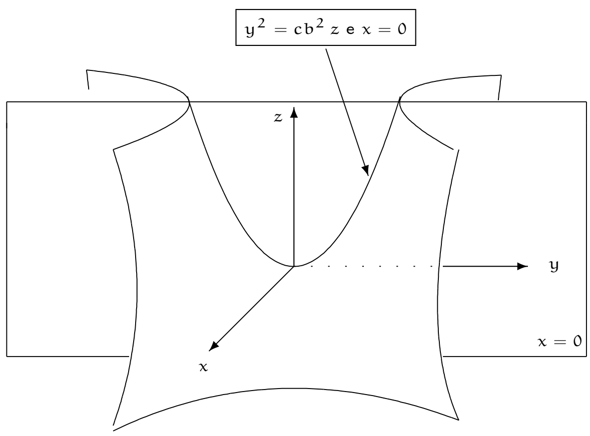
$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = 0 \end{cases}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ z = k \end{cases}$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola dada por:

$$y^2 = cb^2\,z\,,$$

contida no plano $\underline{\pi_7}$ (com concavidade voltada para cima, no plano $\underline{\pi_6}$) , ou ainda,

$$S \cap \pi_7 = \left\{ (0\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, y^2 = cb^2\,z \right\}\,.$$



7. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_8 : x = k\,, \text{ para } k \neq 0\,,$$

será:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - c\,z = 0 \\ x = k \end{cases}$$

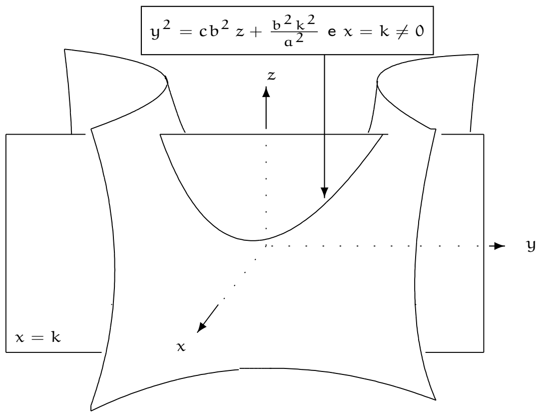
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_8}$ com a superfície $\underline{S}$ será a parábola dada por:

$$y^2 = cb^2\,z + \frac{b^2k^2}{a^2}\,,$$

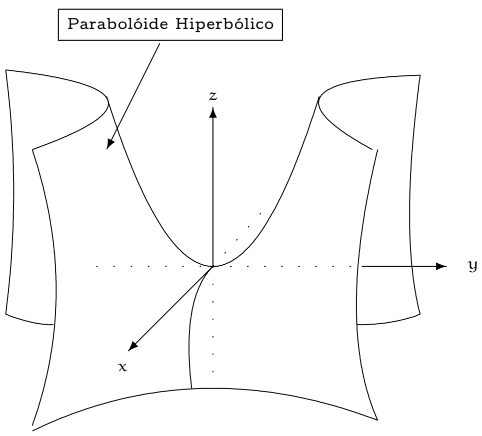
contida no plano $\underline{\pi_8}$ (com concavidade voltada para cima, no plano $\underline{\pi_8}$) , ou ainda,

$$S \cap \pi_8 = \left\{ (k\,, y\,, z)_\Sigma\,;\, y^2 = cb^2\,z + \frac{b^2k^2}{a^2} \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:

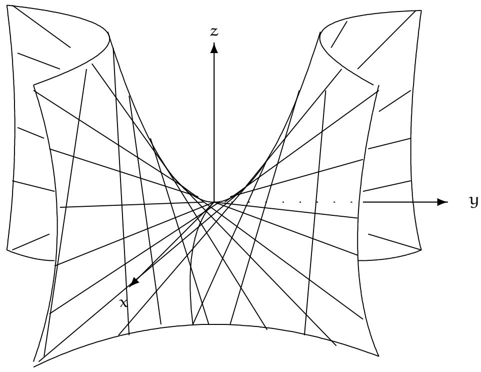


8. A representação geométrica do gráfico do parabolóide elíptico, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



Observação 13.2.19 *Sabemos que pela origem, que pertence ao parabolóide hiperbólico, passam duas retas inteiramente contidas na superfície (veja o item 2. da Observação acima).*

Pode-se msotrar que, na verdade, em cada ponto do parabolóide hiperbólico passam, exatamente, duas retas concorrentes naquele ponto, inteiramente contida na superfície, isto é, o parabolóide hiperbólico (assim como o hiperólóide de uma folha) é uma superfície duplamente regrada.



13.2.6 Cone Quádrico

Sejam

$$a\,,b > 0\,,$$

fixados.

Consideremos a superfície quádrica $\underline{S}$ definida pelo gráfico da equação, dada em relação ao sistema de coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$, por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \tag{13.48}$$

Neste caso teremos (veja (13.30))

$$A \doteq \frac{1}{a^2}\,, \quad B \doteq \frac{1}{b^2}\,, \quad C = -1 \quad \text{e} \quad D = E = F = G = H = I \doteq 0\,. \tag{13.49}$$

Definição 13.2.8 *A superfície quádrica $\underline{S}$ acima será denominado* **<u>cone quádrico</u>**.

Observação 13.2.20 *Observemos que a superfícies quádricas $\underline{S_1}$ e $\underline{S_2}$, definidas pelos gráficos das equações, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:*

$$-x^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 0\,,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 + \frac{z^2}{b^2} = 0\,,$$

também são cones quádricos.

Trata-se apenas de fazermos mudanças do sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, para novos sistemas de coordenadas $\underline{\Sigma_1}$ e $\underline{\Sigma_2}$, cujas equações de mundança dos respectivos sistemas de coordenadas serão dadas por:

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = y \\ z' = x \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases},$$

respectivamente.

Resumindo: a superfície quádrica $\underline{S}$, definida pelo gráfico da equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, dada por:

$$A\,\frac{x^2}{a^2} + B\,\frac{y^2}{b^2} + C\,\frac{z^2}{c^2} = 0\,,$$

onde

$$\begin{cases} A \doteq 1\,,\ B \ \doteq 1 \ e\ C \doteq -c^2 \\ A \doteq -a^2\,,\ B \doteq 1 \ e\ C \doteq 1 \\ A \doteq 1\,,\ B \ \doteq -b^2 \ e\ C \doteq 1 \end{cases}$$

será um parabolóide elíptico.

A seguir daremos algumas propriedades do cone quádrico:

1. A superfície quádrica $\underline{S}$, cuja equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dada por (13.38), é simétrica em relação aos planos coordenados, cujas equações gerais, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$\pi_1 : x = 0\,, \quad \pi_2 : y = 0 \quad \text{e} \quad \pi_3 : z = 0\,.$$

De fato, pois

$$\text{se} \quad (x\,,y\,,z)_\Sigma \in S\,, \quad \text{segue que} \quad \begin{cases} (-x\,,y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,-y\,,z)_\Sigma \in S \\ (x\,,y\,,-z)_\Sigma \in S \end{cases}$$

e este três pontos são os pontos simétricos do ponto $\underline{P}$, relativamente aos planos $\underline{\pi_1}$,$\underline{\pi_2}$, $\underline{\pi_3}$, respectivamente.

2. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_4 : z = 0\,,$$

será:

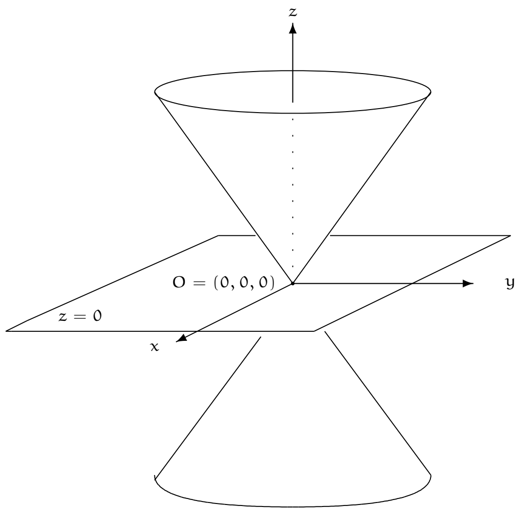
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ,$$

ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_4}$ com a superfície $\underline{S}$ será a origem $(0\,,0\,,0)_\Sigma$, ou ainda,

$$S \cap \pi_4 = \{(0\,,0\,,0)_\Sigma\} \,.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



3. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_5 \,:\, z = k \,, \text{ para } k \neq 0 \,,$$

será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ z = k \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k^2 \\ z = k \end{cases} ,$$

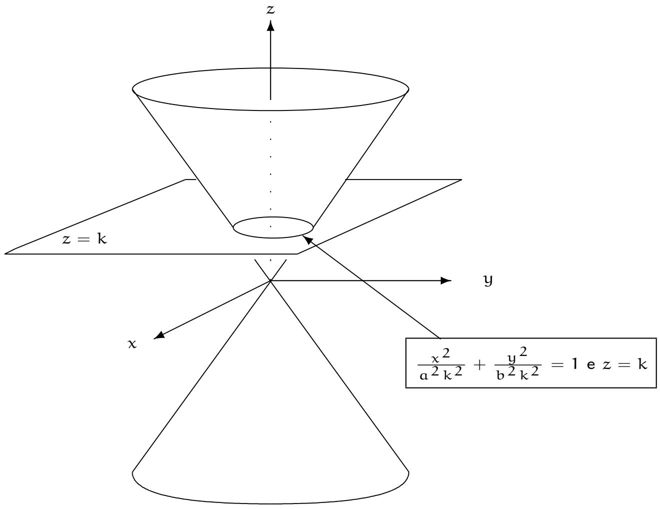
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_5}$ com a superfície $\underline{S}$ será uma elipse, dada por

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1 \,,$$

no plano $\underline{\pi_5}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_5 = \left\{ (x\,,y\,,k)_\Sigma \,;\, \frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1 \right\} .$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



4. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_6 : y = 0 ,$$

será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{isto é,} \quad \left(\frac{x}{a} - z\right)\left(\frac{x}{a} - z\right) = 0 \tag{13.50}$$

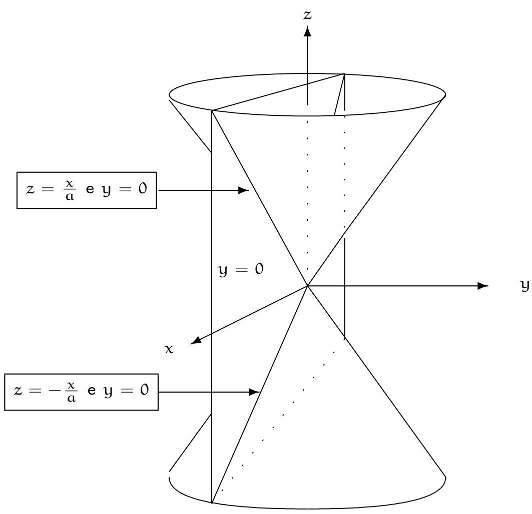
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_6}$ com a superfície $\underline{S}$ será um par de retas concorrentes da origem, dadas por:

$$z = \frac{x}{a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{x}{a} ,$$

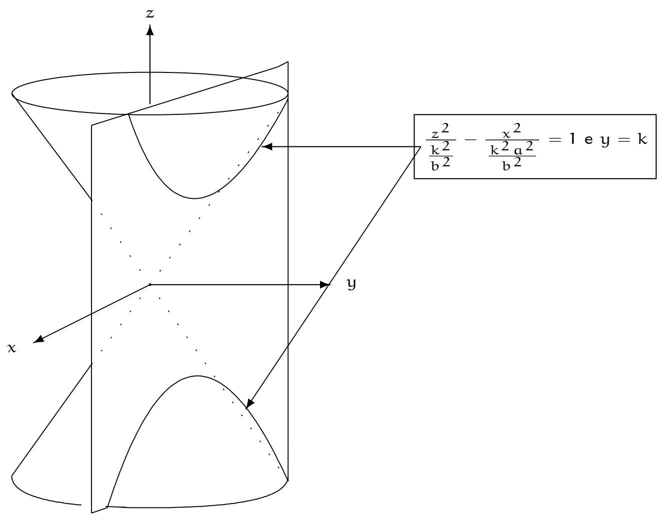
contidas no plano $\underline{\pi_6}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_6 = \left\{ (x , 0 , z)_\Sigma ; z = \frac{x}{a} \ \text{ ou } \ z = -\frac{x}{a} \right\} .$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



5. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_7 : y = k \quad \text{para} \quad k \neq 0\,,$$
será:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ y = k \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - z^2 = -\dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \quad ,$$
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_7}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole, dada por:
$$\frac{z^2}{\dfrac{k^2}{b^2}} - \frac{x^2}{\dfrac{k^2 a^2}{b^2}} = 1$$
contida no plano $\underline{\pi_7}$, ou ainda,
$$S \cap \pi_7 = \left\{ (x\,,k\,,z)_\Sigma\,;\; \frac{z^2}{\dfrac{k^2}{b^2}} - \frac{x^2}{\dfrac{k^2 a^2}{b^2}} = 1 \right\}.$$
A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



6. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por
$$\pi_8 : x = 0\,,$$
será:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad ,$$
$$\text{isto é,} \quad \left(\frac{y}{b} - z\right)\left(\frac{y}{b} - z\right) = 0 \tag{13.51}$$

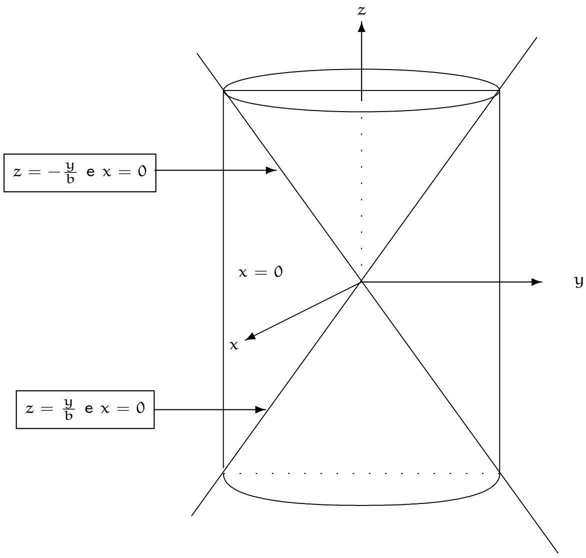
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_8}$ com a superfície $\underline{S}$ será um par de retas concorrentes da origem, dadas por:

$$z = \frac{y}{b} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{y}{b},$$

contidas no plano $\underline{\pi_8}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_8 = \left\{ (0\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, z = \frac{y}{b} \;\text{ ou }\; z = -\frac{y}{b} \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



7. O traço do plano, cuja equação geral, em relação ao sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$, é dada por

$$\pi_9 : x = k, \text{ para } k \neq 0,$$

será:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \\ x = k \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - z^2 = -\dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

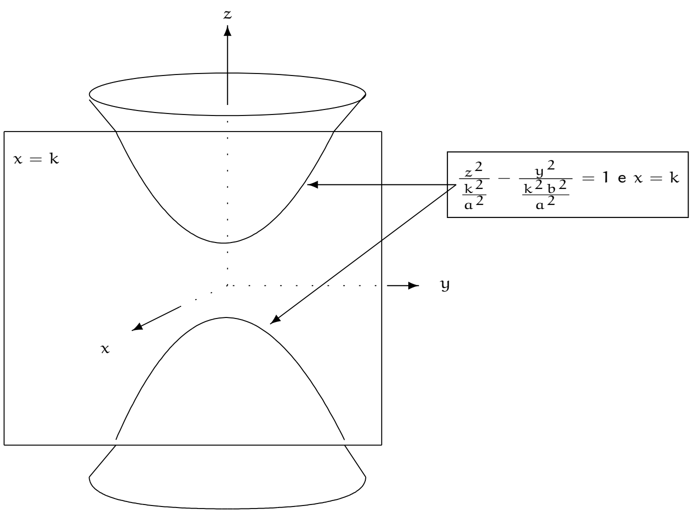
ou seja, o traço do plano $\underline{\pi_9}$ com a superfície $\underline{S}$ será a hipérbole, dada por:

$$\frac{z^2}{\frac{k^2}{a^2}} - \frac{y^2}{\frac{k^2 a^2}{a^2}} = 1$$

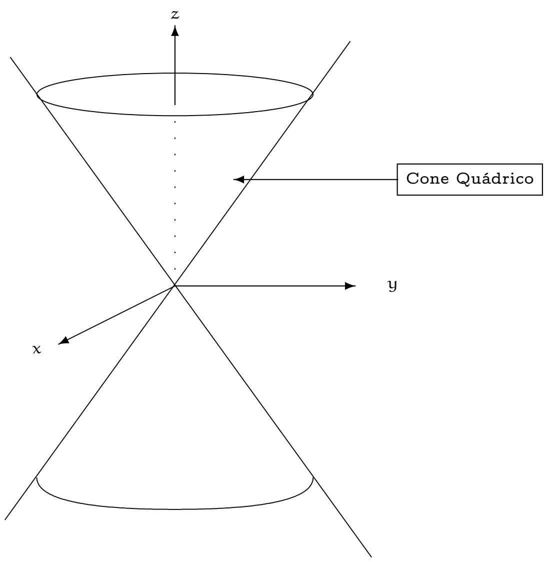
contida no plano $\underline{\pi_9}$, ou ainda,

$$S \cap \pi_9 = \left\{ (k\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, \frac{z^2}{\frac{k^2}{a^2}} - \frac{y^2}{\frac{k^2 a^2}{a^2}} = 1 \right\}.$$

A representação geométrica da situação acima é dada pela figura abaixo:



8. A representação geométrica do gráfico do parabolóide elíptico, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, é dado pela figura abaixo:



13.2.7 Cilindro Quádrico

Seja

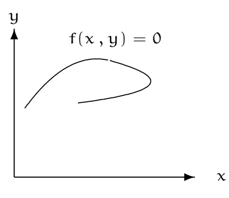
$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

uma função e suponhamos que a equação

$$f(x, y) = 0, \quad \text{para} \quad (x, y) \in \Omega$$

tem como gráfico uma curva no plano xOy.

A figura abaixo ilustra a representação geométrica do gráfico da curva acima.



Com isto podemos introduzir a:

Definição 13.2.9 *A superfície* $\underline{S}$ *formada pelos pontos* $\underline{P}$, *que têm coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas orotognal* $\underline{\Sigma}$, *dada por*

$$P \doteq (x, y, z)_\Sigma ,$$

de modo que sua projeção ortogonal sobre o plano xOy, *pertença ao gráfico da equação*

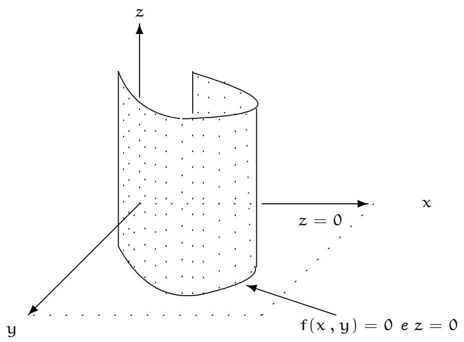
$$f(x, y) = 0, \quad \textit{para} \quad (x, y) \in \Omega ,$$

isto é,

$$S \doteq \{(x, y, z)_\Sigma \in \Omega \times \mathbb{R};\, f(x, y) = 0\}. \tag{13.52}$$

será denominada **superfície cilíndrica (ou cilindro)**.

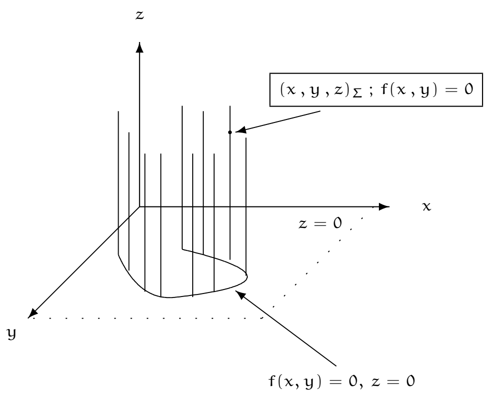
Na figura abaixo temos a representação geométrica da supefície cilíndrica que tem como base a curva dada geométricamente pela figura anterior.



Observação 13.2.21 *A superfície* $\underline{S}$ *acima definida, pode ser obtida geometricamente, movendo-se uma reta perpendicular ao plano* xOy, *sobre a curva que é a representação geométrica do gráfico de*

$$f(x, y) = 0, \quad \textit{para} \quad (x, y) \in \Omega .$$

Geometricamente teremos a seguinte situação:



Com isto temos a:

Definição 13.2.10 *Se a curva, cujo gráfico é dado por*

$$\{(x\,,y) \in \Omega\,;\, f(x\,,y) = 0\}$$

é uma cônica a contida no plano xOy*, a superfície* $\underline{S}$ *acima definida será denominada* **cilindro quádrico**.

Observação 13.2.22

1. *Notemos que um cilindro quádrico é uma superfície quádrica.*

   A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

2. *Com a Definição (13.2.10), fixado um sistema de coordenadas orotogonal* $\underline{\Sigma}$ *no espaço, as equações*

$$y = x^2\,, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad e \quad z^2 - x^2 = 1\,,$$

   representam no espaço, um cilindro parabólico no caso

$$f(x\,,y) \doteq y - x^2\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

   um cilindro elíptico, no caso

$$f(x\,,y) \doteq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1,\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

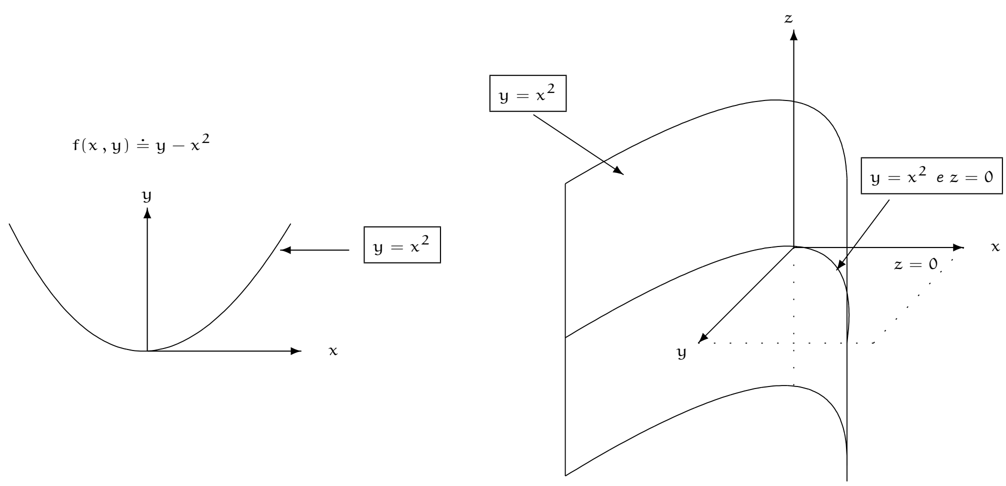
   e um cilindro hiperbólico, no caso

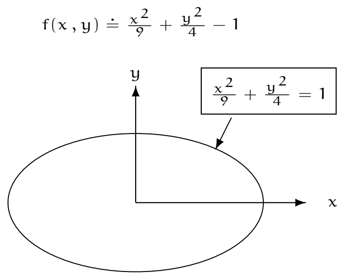
$$f(x,y) \doteq z^2 - x^2 - 1,\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

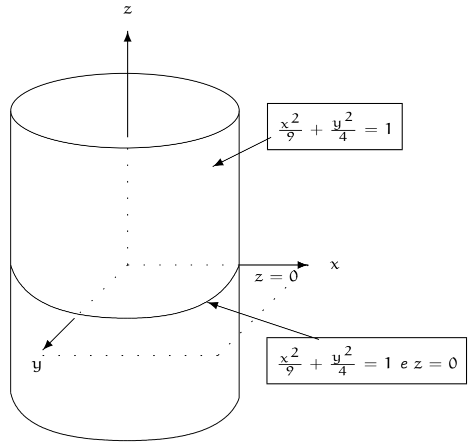
   respectivamente.

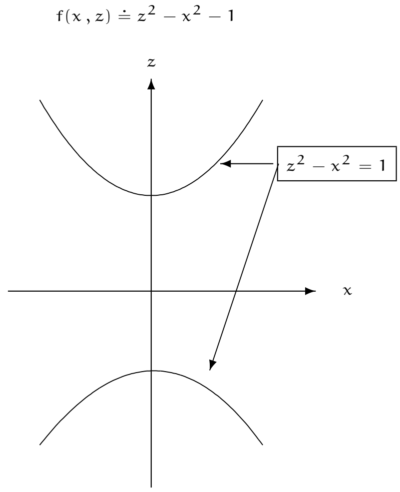
   Em particular, são exemplos de superfícies quádricas.

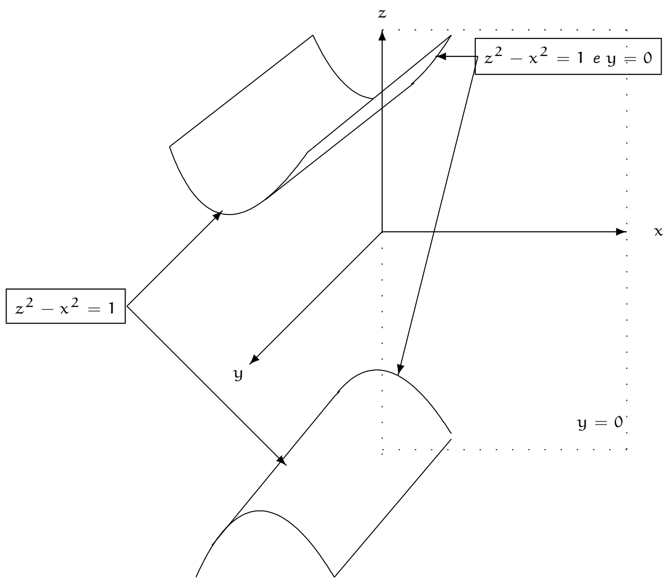
   As figuras abaixo nos fornecem as representação geométricas, em relação ao sistema coordenadas orotogonal $\underline{\Sigma}$ *no espaço fixado, dós cilindros quádricos acima considerados.*











3. *Observemos que num cilindro quádrico* $S \doteq \{(x\,,y\,,z)_\Sigma\,;\, f(x\,,y) = 0\,, \quad para \quad (x\,,y) \in \Omega)\}$ *temos que o traço no plano*

$$\pi_1 : z = k\,, \quad para \quad k \in \mathbb{R}$$

fixado, será a curva

$$\{(x\,,y) \in \Omega\,;\, f(x\,,y) = 0\}$$

no plano $\underline{\pi_1}$*.*

Além disso os traços nos planos

$$\pi_2 : x = k\,, \quad para \quad k \in \mathbb{R}$$

ou

$$\pi_3 : y = k\,, \quad para \quad k \in \mathbb{R}$$

fixado, serão retas, retas paralelas, perpendiculares ao plano xOy *(ou seja,* $z = 0$*) ou o conjunto vazio.*

4. *Para finalizar, temos seguinte resultado importante: Fixado um sistema de coordenadas orotognal* $\underline{\Sigma}$ *no espaço, a equação do 2.o grau (13.30) (isto é, uma*

quádrica) pode ser reduzida através de uma translação e rotações a ums das seguintes superfícies quádricas (que serão ditas básicas):

(a) *Elipsoide;*

(b) *Hiperbolóide de uma folha;*

(c) *Hiperbolóide de duas folhas;*

(d) *Parabolóide elíptico;*

(e) *Parabolóide hiperbólico;*

(f) *Cone quádrico;*

(g) *Cilindro quádrico;*

(h) *Conjunto vazio;*

(i) *Um ponto;*

(j) *Uma reta;*

(k) *Um plano;*

(l) *Um par de planos paralelos;*

(m) *Um par de planos concorrentes.*

Exibimos anteriormente exemplos para os casos (a) até (g).

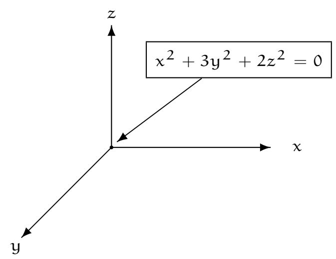
A seguir exibiremos exemplos para os últimos seis casos acima.

1. *Conjunto vazio:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0 .$$

2. *Um ponto:*

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 0 .$$

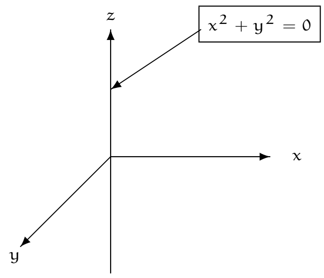


3. *Uma reta:*

$$x^2 + y^2 = 0 ,$$

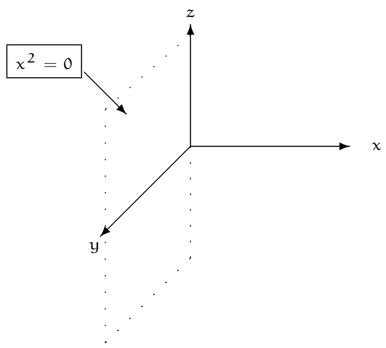
isto é,

$$x = y = 0 , \quad \textit{ou seja, o eixo } Oz .$$



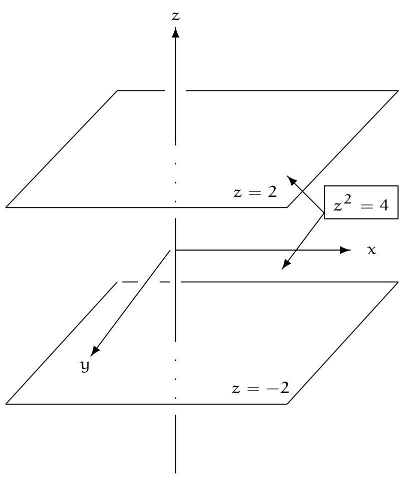
4. *Um plano:*

$$x^2 = 0\,, \qquad \textit{isto é, o plano } x = 0.$$



5. *Um par de planos paralelos:*

$$z^2 - 4 = 0\,, \quad \textit{isto é, } z = \pm 2.$$

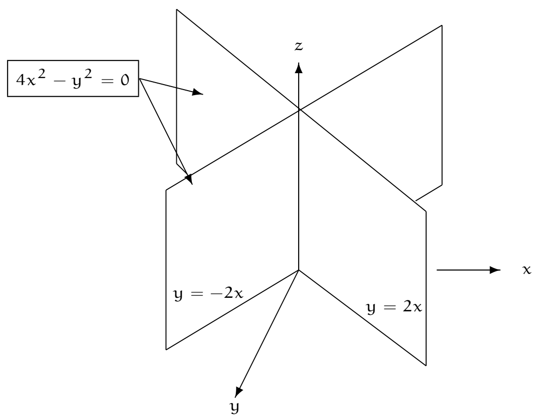


6. *Um par de planos concorrentes:*

$$4x^2 - y^2 = 0\,,$$

isto é,

$$(2x + y)\,(2x - y) = 0\,, \qquad \textit{ou seja,} \quad 2x + y = 0 \quad \textit{ou} \quad 2x - y = 0\,.$$



13.3 Exemplos

Para finalizar consideraremos alguns exemplos gerais.

Para tanto fixemos um sistema de coordenadas ortogonal

$$\Sigma = (O\,, \mathcal{E}) = (O\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3)$$

no espaço.

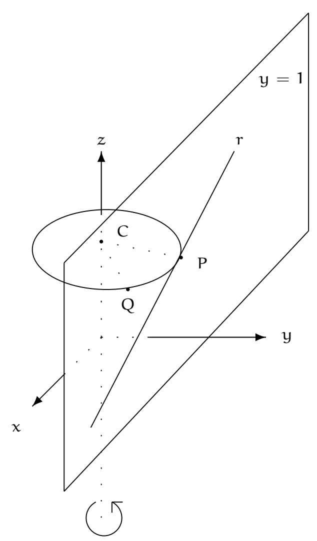
Exemplo 13.3.1 *Determinar uma equação para a superfície* $\underline{S}$, *obtida pela rotação da reta* $\underline{r}$, *cuja equação vetorial, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *é dada por*

$$r : (x\,, y\,, z)_\Sigma = (0\,, 1\,, 0)_\Sigma + \lambda \cdot (-1\,, 0\,, 1)_\mathcal{E}\,, \quad \textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.53}$$

em torno do eixo Oz.

Resolução:

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Seja $\underline{Q}$ um ponto da superfície $\underline{S}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por:

$$Q \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{13.54}$$

Consideremos o ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por:

$$C \doteq (0\,,0\,,z)_\Sigma \tag{13.55}$$

e $\underline{P}$ o ponto que pertence a reta $\underline{r}$ e ao plano $\underline{\pi}$ que é paralelo ao plano

$$z = 0\,,$$

contendo o ponto $\underline{Q}$

Como a superfície $\underline{S}$ é de revolução (veja a figura acima), segue que os pontos $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ estão sobre a circunferência de centro no ponto $\underline{C}$ e raio igual a

$$\overline{CQ} = \overline{CP}\,.$$

Como $\underline{P}$ pertence à reta $\underline{r}$ e ao plano $\underline{\pi}$, as coordenadas do mesmo, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por:

$$P = (-z\,,1\,,z)_\Sigma\,. \tag{13.56}$$

Notemos que a última coordenada do ponto $\underline{P}$ deverá ser igual a $\underline{z}$.

Deste modo teremos

$$\overrightarrow{CP} = P - C \overset{(13.56)\text{ e }(13.55)}{=} (-z-0\,,1-0\,,z-z)_\mathcal{E} = (-z\,,1\,,0)_\mathcal{E} \tag{13.57}$$

$$\overrightarrow{CQ} = Q - C \overset{(13.54)\text{ e }(13.55)}{=} (x-0\,,y-0\,,0)_\mathcal{E} = (x\,,y\,,0)_\mathcal{E}\,. \tag{13.58}$$

Como

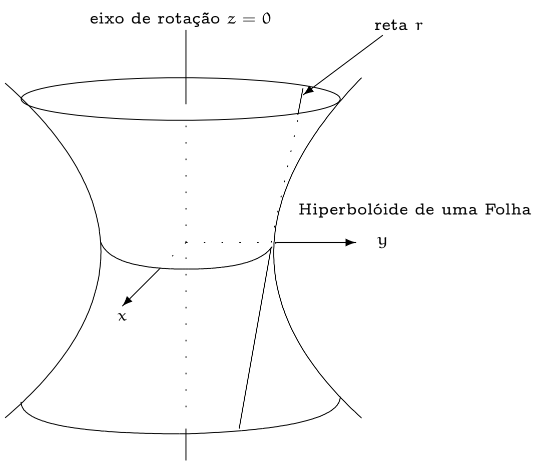
$$\overline{CP} = \overline{CQ}\,, \quad \text{ou seja,} \quad \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2\,,$$

de (13.57) e (13.58) (e do fato que o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ é ortogonal), segue que

$$(-z)^2 + 1^2 + 0^2 = x^2 + y^2 + 0^2\,, \quad \text{ou ainda,} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1\,,$$

portanto um hiperbolóide de uma folha de revolução (veja a seção (13.2.2)).

A representação geométrica da superfície quádrica acima é dada pela figura abaixo.



Exemplo 13.3.2 *Encontrar o lugar geométrico dos pontos do esapço que são equidistantes das retas r e s, cujas equações vetoriais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por*

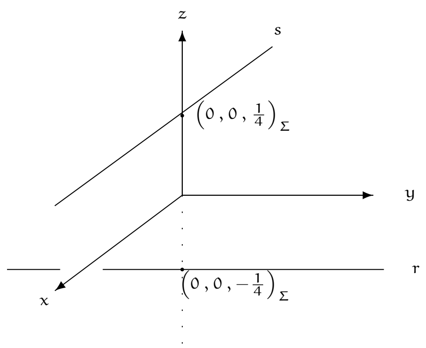
$$r : (x, y, z)_\Sigma = \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right)_\Sigma + \lambda \cdot (0, 1, 0)_\mathcal{E}, \quad \textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.59}$$

e

$$s : (x, y, z)_\Sigma = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)_\Sigma + \beta \cdot (1, 0, 0)_\mathcal{E}, \quad \textit{para} \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{13.60}$$

Resolução:

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Suponhamos que o ponto P, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$P \doteq (x, y, z)_\Sigma \tag{13.61}$$

pertencente ao lugar geométrico procurado.

Notemos que o ponto R, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$R \doteq \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right)_\Sigma \tag{13.62}$$

pertence a reta r, o vetor $\vec{r}$, cujas coordenadas em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{r} \doteq (0, 1, 0)_\mathcal{E} \tag{13.63}$$

é um vetor diretor da reta r, o ponto S, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal Σ, são dadas por

$$S \doteq \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)_\Sigma \tag{13.64}$$

pertence à reta s e o vetor $\vec{s}$, cujas coordenadas em relação à base ortonormal $\mathcal{E}$, são dadas por

$$\vec{s} \doteq (1, 0, 0)_\mathcal{E} \tag{13.65}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{s}$.

Notemos que

$$\overrightarrow{RP} = P - R \overset{(13.61) \text{ e } (13.62)}{=} \left(x\,,y\,,z+\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \tag{13.66}$$

$$\overrightarrow{SP} = P - S \overset{(13.61) \text{ e } (13.64)}{=} \left(x\,,y\,,z-\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}}. \tag{13.67}$$

Como o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ é ortogonal, sabemos que

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \frac{\left\|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{r}\right\|}{\|\vec{r}\|} \\ &\overset{(13.66) \text{ e } (13.63)}{=} \frac{\left\|\left(x\,,y\,,z+\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (0\,,1\,,0)_{\mathcal{E}}\right\|}{\|(0\,,1\,,0)_{\mathcal{E}}\|} \\ &= \frac{\left\|\left(x\,,y\,,z+\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (0\,,1\,,0)_{\mathcal{E}}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} \\ &= \left\|\left(x\,,y\,,z+\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (0\,,1\,,0)_{\mathcal{E}}\right\|. \end{aligned} \tag{13.68}$$

Novamente, como o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ é ortogonal, segue que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} \wedge \vec{r} &\overset{(13.66) \text{ e } (13.63)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z+\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left(z+\frac{1}{4}\right)\cdot\vec{e}_1 - 0\cdot\vec{e}_2 + x\cdot\vec{e}_3 \\ &= \left(-z-\frac{1}{4}\,,0\,,x\right)_{\mathcal{E}}. \end{aligned} \tag{13.69}$$

Logo, de (13.68) e (13.69), segue que

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \left\|\left(-z-\frac{1}{4}\,,0\,,x\right)_{\mathcal{E}}\right\| \\ &\sqrt{\left(-z-\frac{1}{4}\right)^2+0^2+x^2}. \end{aligned} \tag{13.70}$$

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned} d(P,s) &= \frac{\left\|\overrightarrow{SP} \wedge \vec{s}\right\|}{\|\vec{s}\|} \\ &\overset{(13.67)\text{ e }(13.64)}{=} \frac{\left\|\left(x\,,y\,,z-\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\right\|}{\|(1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\|} \\ &= \frac{\left\|\left(x\,,y\,,z-\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\right\|}{\|\sqrt{1^2+0^2+0^2}\|} \\ &= \left\|\left(x\,,y\,,z-\frac{1}{4}\right)_{\mathcal{E}} \wedge (1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}}\right\| . \end{aligned} \tag{13.71}$$

Como o sistema de coordenadas Σ é ortogonal, segue que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SP} \wedge \vec{s} &\overset{(13.67)\text{ e }(13.64)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z-\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot \vec{e}_1 - \left(z-\frac{1}{4}\right) \cdot \vec{e}_2 + (-y) \cdot \vec{e}_3 \\ &= \left(0\,,-z+\frac{1}{4}\,,-y\right)_{\mathcal{E}} . \end{aligned} \tag{13.72}$$

Logo, de (13.71) e (13.72), segue que

$$\begin{aligned} d(P,s) &= \left\|\left(0\,,-z+\frac{1}{4}\,,-y\right)_{\mathcal{E}}\right\| \\ &= \sqrt{0^2+(-z+\frac{1}{4})^2+(-y)^2} . \end{aligned} \tag{13.73}$$

Da definição do lugar geométrico, deveremos ter

$$d(P,r) = d(P,s)\,,$$

que, por (13.70) e (13.73), é o mesmo que

$$\sqrt{\left(-z-\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2 + x^2} = \sqrt{0^2+(-z+\frac{1}{4})^2+(-y)^2},$$

ou seja,

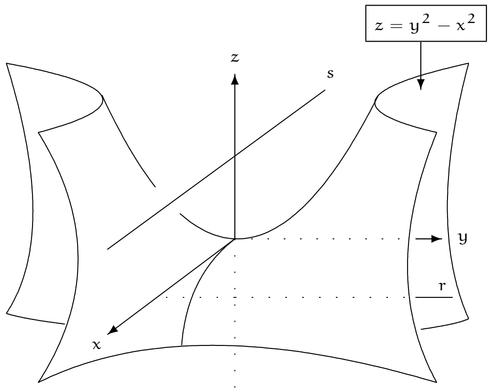
$$x^2 + \left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = y^2 + \left(z-\frac{1}{4}\right)^2$$

ou, equivalentemente, a

$$z = y^2 - x^2\,,$$

isto é, o lugar geométrico procurado é uma superfície quádrica, em particular, um parabolóide hiperbólico (veja a seção (13.2.5)).

A representação geométrica da superfície quádrica acima é dada pela figura abaixo.



Exemplo 13.3.3 *Encontrar o lugar geométrico dos pontos* $\underline{P}$ *do espaço, que satisfzem*

$$d(P\,,F) = 2\,d(P,\pi) \tag{13.74}$$

onde o ponto $\underline{F}$ *tem coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *dadas por*

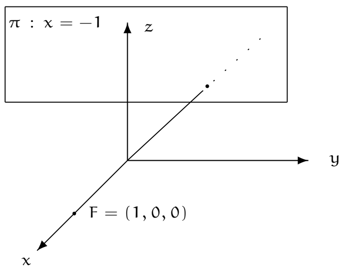
$$F \doteq (1\,,0\,,0)_\Sigma \tag{13.75}$$

e o plano $\underline{\pi}$ *tem equação geral, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal* $\underline{\Sigma}$, *dadas por*

$$\pi\,:\,x = -1\,. \tag{13.76}$$

Resolução:

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Conisderemos o ponto $\underline{P}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma \tag{13.77}$$

um ponto pertencente ao lugar geométrico procurado.

Sabemos que

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \left\|\overrightarrow{PF}\right\| = \|P - F\| \\ &\overset{(13.77)\text{ e }(13.75)}{=} \|(x-1\,,y-0\,,z-0)_\Sigma\| \\ &= \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} \end{aligned} \tag{13.78}$$

$$\begin{aligned} d(P,\pi) &\overset{(13.77)\text{ e }(13.76)}{=} \frac{|x-(-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} \\ &= |x+1|\,. \end{aligned} \tag{13.79}$$

Logo, da definição do lugar geométrico, deveremos ter:

$$d(P, F) = 2\, d(P, \pi)$$

que, de (13.78) e (13.79) será equivalente à:

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 + y^2 + z^2 = (2|x+1|)^2 \\ \text{isto é,}\quad &\left(x^2 - 2x + 1\right) + y^2 + z^2 = 4x^2 + 8x + 4\,, \\ \text{ou seja,}\quad &3x^2 + 10x + 3 - y^2 - z^2 = 0\,, \\ \text{ou ainda,}\quad &3\left(x^2 + \frac{10}{3}x + 1\right) - y^2 - z^2 = 0\,, \end{aligned}$$

equivalentemente:

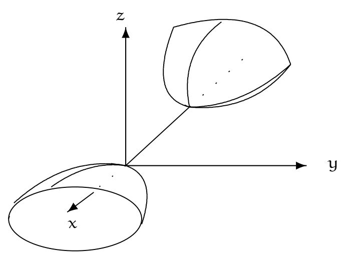
$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - y^2 - z^2 = 22\,.$$

Portanto

$$\frac{3}{22}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{22}y^2 - \frac{1}{22}z^2 = 1\,,$$

logo, uma superfície quádrica, em particular, um hiperbolóide de duas folhas (ver a seção (13.2.3)).

A representação geométrica da superfície quádrica acima é dada pela figura abaixo.



Exemplo 13.3.4 *Suponhamos que a parábola, cuja equação é dada por*

$$y = z^2\,,$$

contida no plano

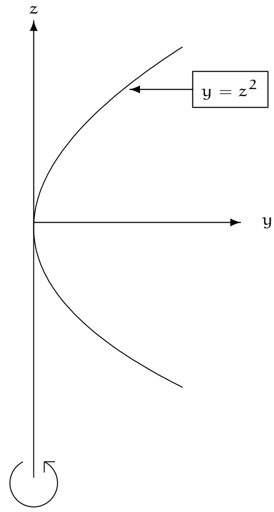
$$\pi_1 : x = 0\,,$$

é rotacionada em torno do eixo Oz.

Encontre a equação do lugar geométrico acima, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$. *Esta superfície é quádrica?*

Resolução:

A figura abaixo representa, geometricamente, a situação acima



Seja $\underline{P}$ um ponto pertencente ao lugar geométrico, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P \doteq (x\,,y\,,z)_\Sigma\,,. \tag{13.80}$$

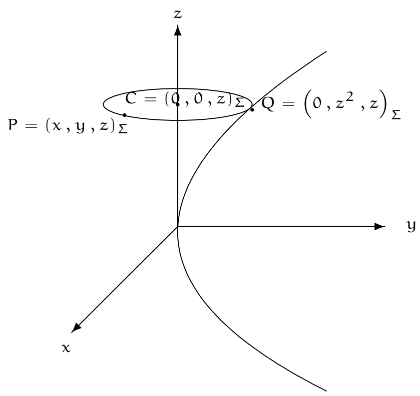
Consideremos o ponto $\underline{C}$, cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$C \doteq (0\,,0\,,z)_\Sigma \tag{13.81}$$

e o ponto $\underline{Q}$cujas coordenadas, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$Q \doteq \left(0\,,z^2\,,z\right)_\Sigma \tag{13.82}$$

que é o ponto obtido da intersecção do plano paralelo ao plano $z = 0$, que contém o ponto $\underline{C}$, com a parábola do plano $x = 0$ (veja figura abaixo).



Logo, da definição do lugar geométrico, sabemos que

$$d(C,P) = d(C,Q)\,, \quad \text{isto é,} \quad \left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|$$

ou ainda,

$$\|P - C\| = \|Q - C\|$$

Como o sistema de coordenadas $\underline{\Sigma}$ é ortogonalk, segue que, de (13.80), (13.81) e (13.82), que:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(z^2-0)^2+(z-z)^2}$$

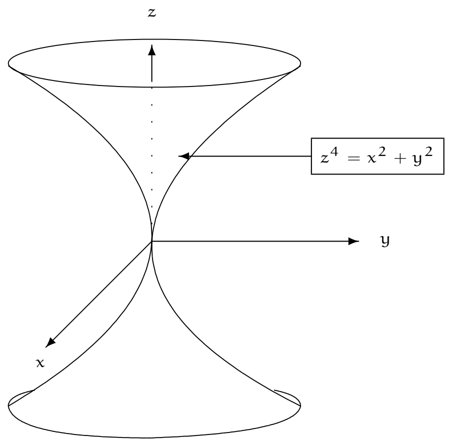
isto é, $x^2+y^2=z^4$,

ou ainda,

$$z^4 = x^2+y^2.$$

Portanto o lugar geométrico **não** é uma superfície quádrica.

A representação geométrica da superfície quádrica acima é dada pela figura abaixo.



Exemplo 13.3.5 *Encontre uma equação, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, para o cone de revolução gerado pela rotação da reta $\underline{r}$ em torno da reta $\underline{s}$, cujas equações vetoriais, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por*

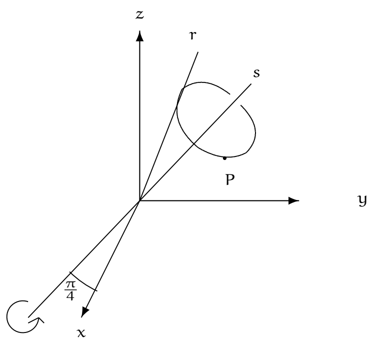
$$r : (x, y, z)_\Sigma = \lambda \cdot (1, 0, 0)_\mathcal{E}, \quad \textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.83}$$

e

$$s : (x, y, z)_\Sigma = \beta \cdot (1, 1, 0)_\mathcal{E}, \quad \textit{para} \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{13.84}$$

Resolução:

A figura abaixo ilustra a situação acima.



Notemos que o vetor $\underline{\vec{r}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\underline{\mathcal{E}}$, são dadas por:

$$\vec{r} \doteq (1\,,0\,,0)_{\mathcal{E}} \tag{13.85}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{r}$ e o vetor $\underline{\vec{s}}$, cujas coordenadas, em relação à base ortonormal $\underline{\mathcal{E}}$, são dadas por:

$$\vec{s} \doteq (1\,,1\,,0)_{\mathcal{E}} \tag{13.86}$$

é um vetor diretor da reta $\underline{s}$, e o ponto $\underline{V}$, cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$V = (0, 0, 0) \tag{13.87}$$

é o ponto de interseção das retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$ (pois pertence a ambas).

Logo o ângulo entre as retas $\underline{r}$ e $\underline{s}$, medido em radianos, será o ângulo entre os vetores $\underline{\vec{r}}$ e $\underline{\vec{s}}$ que será

$$\theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para os leitores.

Consideremos o ponto $\underline{P}$, , cujas coordenadas em relação ao sistema de coordenadas ortogonal $\underline{\Sigma}$, são dadas por

$$P = (x\,,y\,,z)_{\Sigma} \tag{13.88}$$

um ponto do cone procurado.

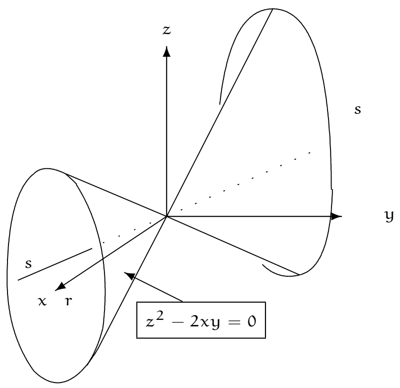
Assim o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{VP}$ e a reta $\underline{s}$ deverá ser igual a é $\frac{\pi}{4}$, isto é,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{VP} \bullet \vec{s}\right|}{\left\|\overrightarrow{VP}\right\|\,\|\vec{s}\|} = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{2}},.$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que a equação do cone será dada por:

$$z^2 - 2xy = 0\,.$$

A representação geométrica da superfície quádrica acima é dada pela figura abaixo.



$\boxed{\textbf{F I M - GA}}$

Apêndice A

Matrizes

A.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de um elemento que é de grande importância, em particular, no estudo da Álgebra Linear, a saber: Matrizes.

Lembraremos a definição, as operações, propriedades das mesmas e algumas aplicações que são, particularmente, importantes para o nosso contexto.

Introduziremos o escalonamento de matrizes e apresentaremos algumas aplicações desse processo para resolução des sistemas lineares (homogêneos e não homoêneos) e para inversão de matrizes.

No Apêndice (B) apresentamos o método de Crammer para resolução de sistemas lineares.

A.2 Definições Básicas

Definição A.2.1 *Uma* **matriz** *é uma tabela retangular de números reais ou complexos.*

Tais números são denominados **entradas** *da matriz.*

Uma matriz será sempre indicada por uma letra maiúscula: $A, B, C, \cdots$.

Uma matriz horizontal será denominada **matriz linha**.

Uma matriz vertical será dita **matriz coluna**.

A **ordem (ou tamanho) de uma matriz** *é o seu número de linhas pelo seu número de colunas.*

Observação A.2.1

1. *Em geral uma matriz, de tamanho* $n \times m$*, com entradas*

$$a_{ij}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1, \cdots, m\}$$

tem a seguinte forma:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times m}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ *são fixos.*

2. *No caso acima diremos que a matriz* A *tem* $\underline{n}$ **linhas** *e* $\underline{m}$ **colunas**.

3. *Quando* $n = m$ *a matriz* A *será dita* **quadrada de ordem** $\underline{n}$.

4. *No caso acima, as entradas*

$$a_{ii}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}$$

formarão, o que denominaremos de, **diagonal principal** *da matriz .*

Exemplo A.2.1 *A matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz (complexa) coluna, de tamanho 3×1.

Exemplo A.2.2 *A matriz*

$$B \doteq \begin{pmatrix} 10 & 50 & \pi & e \end{pmatrix}$$

é uma matriz (real) linha, de tamanho 1×4.

Exemplo A.2.3 *A matriz (real)*

$$C \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de tamanho 3×3, *logo quadrada de ordem* 3.

Notação A.2.1 *Denotaremos por*

$$M_{nm}(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m\,, \textit{ que tem todas as entradas números reais}\}$$

e de modo semelhante definimos

$$M_{nm}(\mathbb{C}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m \;\;, \textit{ que tem todas entradas números complexos}\}.$$

Quando

$$n = m\,,$$

dentotaremos $M_{nn}(\mathbb{R})$ *(ou* $M_{nn}(\mathbb{C})$*) simplesmente por* $M_n(\mathbb{R})$ *(ou* $M_n(\mathbb{C})$*), isto é,*

$$M_n(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de quadradas de ordem } \underline{n}\,, \textit{ que tem todas as entradas números reais}\}$$

e de modo análogo definimos $M_n(\mathbb{C})$.

Para simplificar a notação acima, denotaremos o conjunto acima por M_{nm}, *quando não for importante o tipo de entradas da matriz (se reais ou complexas).*

Nos exemplos acima teremos que

$$A \in M_{31}(\mathbb{C})\,, \quad B \in M_{14}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Definição A.2.2 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, *sejam* $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{pq}$.

Diremos que as matrizes A *e* B *são* **iguais**, *escrevendo* $A = B$, *se e somente se*

$$n = p\,, \quad m = q \quad e \quad a_{ij} = b_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \ldots, m\},$$

onde

$$A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad B \doteq (b_{ij})\,,$$

ou seja, duas matrizes são iguais serão iguais se, e somente se, têm o mesmo tamanho e as correspondentes entradas são iguais.

A.3 Operações com Matrizes

Definição A.3.1 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ *sejam* $A \in M_{nm}$, $B \in M_{pq}$.

Definiremos a **adição das matrizes** A **e** B, *indicada por* $A + B$, *se, e somente se,*

$$n = p\,, \quad m = q$$

e neste este caso, a matriz

$$C \doteq A + B \in M_{nm}$$

terá como entradas

$$c_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \cdots, m\}, \tag{A.1}$$

onde

$$A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad B \doteq (b_{ij})\,.$$

Observação A.3.1 *Notemos que, da Definição* (A.3.1) *acima, se*

$$A \doteq (a_{ij})\,, \quad B \doteq (b_{ij}) \quad e \quad C \doteq A + B\,,$$

então

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})\,.$$

Com isto temos:

Exemplo A.3.1 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

então

$$A + B \overset{(A.1)}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso temos as seguintes propriedades:

Proposição A.3.1

1. *O conjunto* M_{nm} *é fechado como a operação de adição definida acima, isto é, a soma de duas matrizes* $n \times m$ *é uma matriz* $n \times m$*;*

2. *A adição em* M_{nm} *é comutativa, isto é,*

$$A + B = B + A\,, \quad \textit{para cada} \quad A, B \in M_{nm}\,;$$

3. *A adição em* M_{nm} *é associativa, isto é,*

$$(A + B) + C = A + B + C\,, \quad \textit{para cada} \quad A, B, C \in M_{nm}\,;$$

4. *A adição em* M_{nm} *tem elemento neutro, isto é, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **matriz nula***, indicada por* O *tal que*

$$A + O = A\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{nm}\,;$$

A matriz O *é a matriz de ordem* $n \times m$ *cujas entradas são todas zero, isto é,*

$$O \doteq (0_{ij})\,, \quad \textit{onde} \quad 0_{ij} \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \cdots, m\}\,.$$

5. *A adição em* M_{nm} *adminte elemento oposto, isto é, se* $A \in M_{nm}$*, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **oposta** *da matriz* A*, denotada por* $-A$ *tal que*

$$A + (-A) = 0\,.$$

A matriz $-A$ *é a matriz de ordem* $n \times m$*, cujas entradas são os opostos das correspondentes entradas da matriz* A*, isto é, se*

$$A = (a_{ij})\,, \quad \textit{então} \quad -A \doteq (-a_{ij})\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição A.3.2 *Se* $A \doteq (a_{ij}) \in M_{nm}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) , então a matriz* $B \doteq (b_{ij}) \in M_{nm}$ *cujas entradas são:*

$$b_{ij} \doteq \alpha a_{ij}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, \cdots, m\}\,, \tag{A.2}$$

será denominada **produto do número real (ou complexo)** α **pela matriz** A *e indicada por* $\alpha \cdot A$*.*

Observação A.3.2 *Segue da Definição (A.3.2) acima, que se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\alpha \in \mathbb{C}$*) e* $(a_{ij}) \in M_{nm}$ *então*

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})\,.$$

Exemplo A.3.2 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\alpha = -2$, *então*

$$\alpha \cdot A \overset{(A.2)}{=} \begin{pmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição A.3.2 *Para* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) e* $A\,, B \in M_{nm}$ *temos:*

1. *O conjunto* M_{nm} *é fechado como a operação de muliplicação de número (real ou complexo) por matrizes definida acima, isto é, a multiplicação de um número (real ou complexo) por uma matriz* $n \times m$ *é uma matriz* $n \times m$*;*

2. *Vale a distributiva do produto de número real (ou complexo) pela soma de matrizes, isto é:*
$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B\,;$$

3. *Vale a distributiva da soma de números reais (ou complexos) pelo produto de matriz, isto é:*
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B\,;$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) pelo produto de matrizes, isto é:*
$$(\alpha\,\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)\,;$$

5. *Vale*
$$1 \cdot A = A\,;$$

6. *Vale*
$$0 \cdot A = O\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição A.3.3 *Sejam* $A \doteq (a_{ik}) \in M_{nm}$, $B \doteq (b_{kj}) \in M_{mp}$.

Definimos o **produto da matriz** A **pela matriz** B, *como sendo a matriz*

$$C \doteq (c_{ik}) \in M_{np}\,,$$

indicada por AB, *cujas entradas são dadas por*

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, \cdots, p\}. \tag{A.3}$$

Observação A.3.3

1. *Para podermos realizar o produto de duas matrizes, isto é,*

$$AB\,,$$

é necessário que o número de colunas da matriz A*, seja igual ao número de linhas da matriz* B*.*

2. *O produto* **não** *é comutativo, isto é, em geral*

$$AB \neq BA\,,$$

como mostra o seguinte exemplo:

Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

então

$$AB \stackrel{(A.3)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad BA\text{stackrel}(A.3){=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

ou seja, neste caso,

$$AB \neq BA\,.$$

3. *Este modo de definir produto de matrizes é útil em diversas situações.*

Entre outras, para transformarmos sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau em equações matriciais, como mostra o exemplo:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ z_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{cases} \qquad \text{é equivalente a:} \quad z = A \cdot y\,,$$

onde

$$z \doteq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad y \doteq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação da igualdade acima.

Temos as seguintes propriedades para o produto de matrizes:

Proposição A.3.3

1. *O produto de matrizes é associativo, isto é:*

$$A(BC) = (AB)C\,, \quad \text{para cada} \quad A \in M_{nm}\,,\ B \in M_{mp} \quad e\ C \in M_{pq}\,;$$

2. *Vale a distributiva do protudo de matrizes pela soma de matrizes, isto é:*

$$A(B+C) = AB + AC\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad B\,, C \in M_{mp}\,;$$

3. *Vale a distributiva da soma de matrizes pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(A+B)C = AC + BC\,, \quad \textit{para cada} \quad A\,, B \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad C \in M_{mp}\,;$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) por matrizes, isto é:*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)(B) = A(\alpha B), \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}(\ \textit{ou}\ \mathbb{C})\,,\ A \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad B \in M_{mp}\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto temos o seguinte exercício, cuja resolução deixaremos a cargo do leitor:

Exercício A.3.1 *Mostre que a matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é solução da equação

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0\,,$$

onde

$$A^n \doteq \underbrace{A \cdots A \cdots A}_{n-vezes}\,.$$

Definição A.3.4 *A matriz* $I_n \in M_n$ *cujas entradas são:*

$$a_{ij} \doteq \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \textit{para} \quad i \neq j \\ 1\,, & \textit{para} \quad i = j \end{cases}\,,$$

onde $i\,, j \in \{1, \cdots, n\}$*, será denominada* **matriz identidade** *de ordem* $\underline{n}$.

Com isto temos a:

Proposição A.3.4 *Se* $A \in M_{nm}$ *então*

$$I_n\, A = A\, I_m = A\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.3.4 *Para números reais (ou complexos) temos a seguinte propriedade: se* $\alpha \neq 0$*, então existe* α^{-1}*, tal que*

$$\alpha\,\alpha^{-1} = 1\,.$$

Para matrizes isto pode, em geral, **não** *ocorrer como mostra o seguinte exemplo:*
Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então **não** *existe uma matriz* $B \in M_2(\mathbb{R})$*, tal que*

$$AB = I_2\,. \tag{A.4}$$

De fato, se existisse a matriz

$$B \doteq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

tal que que vale (A.4), então deveríamos ter

$$AB \overset{(A.3)}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\,,$$

para qualquer $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$*, (ou* $\mathbb{C}$*) mostrando que isto é impossível.*

Em vista disso temos a seguinte definição:

Definição A.3.5 *Seja* $A \in M_n$*.*
Se existir uma matriz $X \in M_n$ *tal que*

$$A\,X = X\,A = I_n\,, \tag{A.5}$$

diremos que A é uma matriz **inversível**.
A matriz X será dita uma **matriz inversa** *da matriz A.*

Com isto temos o:

Exemplo A.3.3 *A matriz*

$$X \doteq \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz inversade da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pois

$$A\,X = X\,A \overset{\text{Exercício}}{=} I_1\,.$$

Temos agora a:

Proposição A.3.5 *(Unicidade da inversa de uma matriz quadrada) Se X e $\tilde{X} \in M_n$ são matrizes inversas da matriz $A \in M_n$ então*

$$\tilde{X} = X .$$

Demonstração:

Observemos que se X e $\tilde{X}$ são inversas da matriz A, então teremos, em particular, que

$$X A = I_n \quad (1) \qquad \text{e} \qquad I_n = A \tilde{X} \quad (2) .$$

Assim

$$X = X I_n \overset{(2)}{=} X(A \tilde{X}) = (X A)\tilde{X} \overset{(1)}{=} I_n \tilde{X} = \tilde{X} ,$$

ou seja,

$$X = \tilde{X} ,$$

como queríamos demonstrar do resultado.

∎

Observação A.3.5 *Logo se uma matriz quadrada admite uma matriz inversa, esta será única, com isto podemos introduzir a:*

Definição A.3.6 *Uma matriz $A \in M_n$ que adminte uma matriz inversa será dita* **não singular**.

Neste caso a matriz inversa da matriz A será denotada por A^{-1}.

Uma matriz $A \in M_n$ que **não** *admite matriz inversa será denominada* **singular**.

Com isto temos a:

Proposição A.3.6 *Sejam $A, B \in M_n$ matrizes não singulares.*

Então a matriz $AB \in M_n$ é uma matriz não singular e

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1} . \tag{A.6}$$

Demonstração:

Como A é uma matriz não singular segue que:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n . \tag{A.7}$$

Mas B também é uma matriz não singular assim

$$B B^{-1} = B^{-1} B = I_n . \tag{A.8}$$

Portanto,

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right) B \overset{(A.7)}{=} \left(B^{-1}I_n\right) B = B^{-1}B \overset{(A.3.8)}{=} I_n$$

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right) A^{-1} \overset{(A.3.8)}{=} (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} \overset{(A.7)}{=} I_n .$$

Portanto a matriz AB é não singular e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos o:

Corolário A.3.1 *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in M_n$ matrizes não singulares.*
Então a matriz

$$A_1 A_2 \cdots A_k \in M_n$$

é uma matriz não singular e

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}. \tag{A.9}$$

Demonstração:
Basta usar a Proposição (A.3.4) acima e indução matemática.
Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Observação A.3.6

1. *Mostramos na Proposição (A.3.4) acima, temos que o subconjunto das matrizes não singulares em M_n é fechado em relação ao produto de matrizes, ou seja, se A e $B \in M_{nn}$ são não singulares, então AB também será não singular.*

2. *Vimos num exemplo anterior que se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O,$$

mas

$$AB = O.$$

Observemos que tanto a amtriz A quanto a matriz B são matrizes singulares.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

*Se uma das duas fosse não singular isso **não** poderia ocorrer, como mostra o resultado a seguir.*

Proposição A.3.7 *Se $A \in M_n$ é uma matriz não singular e a matriz $B \in M_{np}$ é tal que*

$$AB = O \in M_{np},$$

então deveremos ter

$$B = O.$$

Demonstração:

Como a matriz A é uma matriz não singular então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \,. \tag{A.10}$$

Mas,

$$B = I_n B \overset{(A.10)}{=} \left(A^{-1}A\right) B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O\,, \quad \text{ou seja,} \quad B = 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Deixaremos para o leitor a resolução do:

Exemplo A.3.4 *Sejam* $A\,,B \in M_n(\mathbb{R})$ *tais que*

$$A\,B = I_n \,.$$

Mostre que

$$B\,A = I_n \quad \textit{e, portanto,} \quad B = A^{-1} \,.$$

Observação A.3.7 *Uma aplicação para as propriedades desenvolvidas acima seria considerar a equação matricial:*

$$A \cdot x = b\,, \tag{A.11}$$

onde

$$A \in M_n\,, \quad b \in M_{n1} \quad \textit{são dadas, e} \quad x \in M_{n1}$$

é uma matriz a ser encontrada (se existir).

Se A é uma matriz não singular então

$$x \doteq A^{-1} \cdot b$$

será a única solução da equação matricial (A.11).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Observemos que a equação matricial acima corresponde a um sistema linear de $\underline{n}$ equações algébricas lineares a $\underline{n}$ incógnitas.

Logo as correspontes entradas da matriz coluna $\underline{x}$ serão as (únicas) soluções do sistema linear associado À equação matricial (A.11).

Para finalizar esta seção, introduziremos a:

Definição A.3.7 *Dada uma matriz quabrada $A \doteq (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, definiremos o* **traço da matriz $\underline{A}$**, *denotado por $\operatorname{tr}(A)$, como sendo a soma de todos os elementos da diagonal principal da matriz $\underline{A}$, isto é,*

$$\operatorname{tr}(A) \doteq \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \tag{A.12}$$

Com isto temos o:

Exercício A.3.2 *Encontre o traço da matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Temos que

$$\operatorname{tr}(A) \overset{(A.12)}{=} \sum_{i=3}^{n} a_{ii} = 3 + 0 + 2 = 5 .$$

□

Temos as seguintes propriedades para o traço de matrizes:

Proposição A.3.8 *Sejam* $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A + B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \\ \operatorname{tr}(\alpha \cdot A) &= \alpha \operatorname{tr}(A), \\ \operatorname{tr}\left(A^t\right) &= \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Temos também o seguinte resultado:

Proposição A.3.9 *Sejam* $A \doteq (a_{ij}), B \doteq (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Então:

$$\operatorname{tr}\left(B^t A\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ij} .$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

A.4 Algumas matrizes importantes

Definição A.4.1 *Uma matriz quadrada* $A \in M_n$ *será dita ser* **matriz diagonal** *se*

$$a_{ij} = 0 , \quad \textit{para} \quad i \neq j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.13}$$

Uma matriz quadrada $A \in M_n$ *será dita* **triangular superior** *se*

$$a_{ij} = 0 , \quad \textit{para} \quad i > j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.14}$$

Analogamente, diremos que a matriz quadrada $A \in M_n$ *é* **triangular inferior** *se*

$$a_{ij} = 0 , \quad \textit{para} \quad i < j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.15}$$

Observação A.4.1

1. *Uma matriz diagonal* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

2. *Uma matriz triangular superior* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

3. *Uma matriz triangular inferior* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição A.4.1

1. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes diagonais então as matrizes*

$$A + B\,, \quad AB \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes diagonais, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

2. *Se a matriz* $A = (a_{ij})$ *é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal não contém* 0 *(isto é,* $a_{ii} \neq 0$*, para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$*), então a matriz* A *é uma matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz* A*) e além disso*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

3. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes tringulares superiores (inferiores, respectivamente) então as matrizes*

$$A + B\,, \quad AB \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes triangulares superior (inferior, respectivamente), onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

4. *Se a matriz* $A \in M_n$ *é triangular superior (inferior, repectivamente), cuja diagonal principal tem entradas não nulas, então a matriz* A *é uma a matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa da matriz* A *e além disso a matriz* A^{-1} *também será uma matriz triangular superior (inferior, repectivamente).*

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

A.5 Determinante

Definição A.5.1 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz quadrada.*
Se $n = 1$*, definimos o* **determinante da matriz A**, *denotado por* $\det(A)$*, como sendo*

$$\det(A) \doteq a_{11}. \tag{A.19}$$

Se $n > 1$*, para cada* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*, definamos a matriz* A_{ij}*, a matriz quadrada de ordem* $n-1$*, obtida da matriz* A*, retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz* A*, isto é,*

$$A_{ij} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

Assumindo que o determinante de uma matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ *já foi encontrado, definimos:*

$$\det(A) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|A_{1j}| \tag{A.21}$$

onde

$$|A_{1j}| \doteq (-1)^{1+j} \det(A_{1j}), \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.22}$$

O número

$$|A_{ij}|,$$

definido acima, será denominado **cofator do elemento** a_{ij} *da matriz* A.
A matriz

$$B = (|A_{ij}|),$$

será denominada **matriz cofatora da matriz** A *e denotada por* $\mathrm{cof}(A)$.

Com isto temos a:

Proposição A.5.1

1. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22},$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}. \tag{A.23}$$

2. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{A.24}$$

3. *Se* O *é a matriz nula, quadrada de ordem* $\underline{n}$, *então*

$$\det(O) = 0. \tag{A.25}$$

4. *Se* I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$, *então*

$$\det(I_n) = 1. \tag{A.26}$$

5. *Se* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *é um matriz diagonal, então*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn},. \tag{A.27}$$

6. *Se* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *é triangular superior (inferior, respectivamente), então*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}. \tag{A.28}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.5.1 *Poderíamos definir o determinante de uma matriz quadrada, por meio dos cofatores de qualquer coluna ou linha da matriz* A *que obteríamos o mesmo valor, isto é, para cada* $i_o \in \{1, \cdots, n\}$ *, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}|,$$

onde

$$|A_{i_o j}| \doteq (-1)^{i_o + j} \det(A_{i_o j}), \text{quad} \textit{para cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\},$$

ou, para $j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixado temos que*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} |A_{i j_o}|,$$

onde

$$|A_{i j_o}| \doteq (-1)^{i + j_o} \det(A_{i j_o}), \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

<u>**Conclusão:**</u> *para cada* $i_o, j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixados, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}| = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} |A_{i j_o}|.$$

A verificação deste fato é trabalhosa e será deixada como exercício para o leitor.

A seguir dexibiremos algumas propriedades importantes do determinante de uma matriz quadrada.

Para isto precisaremos da:

Definição A.5.2 *Dada uma matriz* $A \in M_n$ *podemos realizar as seguintes operações com suas colunas (ou linhas, respectivamente):*

i) trocar duas colunas (ou linhas, respectivamente);

ii) multiplicar uma coluna (ou linha, respectivamente) por um $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) não nulo;*

iii) adicionar uma coluna (ou linha, respectivamente) multiplicada por α *a outra coluna (linha, respectivamente).*

Tais operações serão denominadas <u>**operações elementares**</u> *sobre as colunas (ou linhas, respectivamente) da matriz* A.

Com isto temos a:

Proposição A.5.2 *Seja* $A \in M_n$.

Consideremos

$$B \doteq (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$$

e

$$C \doteq (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$$

onde, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, a_{*k} *denota a* j*-ésima coluna da matriz* A *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, \cdots, n\}$.

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{*k_o} = \beta\, b_{*k_o} + \gamma\, c_{*k_o}, \tag{A.29}$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C). \tag{A.30}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.5.2 *Vale um resultado análogo ao da Proposição (A.5.2) acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz, isto é, se*

$$B \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

e

$$C \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, a_{k*} *denota a* j*-ésima linha da matriz* A *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, \cdots, n\}$.

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{k_o*} = \beta\, b_{k_o*} + \gamma\, c_{k_o*}, \tag{A.31}$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C). \tag{A.32}$$

Como conseqüência da Proposição (A.5.2) acima, temos o:

Corolário A.5.1

1. *Se* $A \in M_n$, *então*

$$\det\left[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, \beta a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}\right] = \beta \det\left[a_{*1}, \cdots, a_{*n}\right]. \tag{A.33}$$

2. *Se* $A \in M_n$*, então*

$$\begin{aligned}\det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k} + c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ = \det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ + \det[a_{*k}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \,.\end{aligned} \tag{A.34}$$

Demonstração:

De 1. :

Basta tomar

$$\gamma = 0$$

na Proposição (A.5.2) acima.

De 2. :

Basta tomar

$$\beta = \gamma = 1$$

na Proposição (A.5.2) acima.

∎

Observação A.5.3

1. *O item 1. do Corolário (A.5.1) acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) multiplicada por uma constante, pode ser obtido multiplicando-se o determinante da matriz pela tal constante.*

2. *O item 2. do Corolário (A.5.1) acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) obtida da soma de duas colunas, pode ser obtido somando-se os determinante das matrizes que teêm cada uma das colunas que foramadicionadas.*

3. *Vale um resultado análogo ao do Corolário (A.5.1) acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz* A.

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Conseqüência do Corolário (A.5.1) acima, temos o:

Corolário A.5.2 *Seja* $A \in M_n$ *de modo que*

$$a_{*k_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{para algum} \quad k_o \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.35}$$

Então

$$\det(A) = 0 \,. \tag{A.36}$$

Demonstração:

Basta tomar

$$\beta = 0$$

no item 1. do Corolário (A.5.1) acima.

∎

Observação A.5.4

1. *O resultado acima nos diz que se uma coluna de uma matriz quadrada é nula, então o determinante da matriz será igual azero.*

2. *Vale um resultado análogo ao do Corolário (A.5.2) acima para uma linha da matriz A.*

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição A.5.3 *Seja $A \in M_n$. Então*

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*n}) = -\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*n}). \tag{A.37}$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Observação A.5.5

1. *O resultado acima nos diz que se trocarmos duas colunas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*

2. *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, se trocarmos duas linhas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Como conseqüência da Proposição (A.5.3) acima, temos o:

Corolário A.5.3 *Seja $A \in M_n$ tal que*

$$a_{*k_o} = a_{*j_o}, \quad \textit{para algum} \quad k_o, j_o \in \{1, \cdots, n\}, \tag{A.38}$$

isto é, se a matriz A tem duas colunas iguais.

Então

$$\det(A) = 0. \tag{A.39}$$

Demonstração:

Da Proposição (A.5.3) acima segue que se trocarmos a k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna o determinante da matriz obtida será menos o determinante da matriz A.

Mas a matriz obtida da troca da k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna é igual a própria matriz A.

Com isto teremos:

$$\det(A) = -\det(A)\,, \quad \text{ou seja,} \quad \det(A) = 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação A.5.6 *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, ou seja, se a matriz A tem duas linhas iguais então seu determinate é nulo.*

Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Como consequência da Proposição (A.5.2), temos o:

Corolário A.5.4 *Sejam $A \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $j \neq k$, para $j, k \in \{1, \cdots, n\}$.*

Então

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) = \det(A)\,,$$

ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida será igual ao da matriz inicial.

Demonstração:

Da Proposição (A.5.2), segue que

$$\begin{aligned}
&\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad\quad + \beta\, \underbrace{\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})}_{\overset{\text{Corolário (A.5.3)}}{=} 0} \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação A.5.7

1. *Valem um resultado análogo ao acima para a correspondente operaçao sobre as linhas da matriz A.*

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

2. *Resumindo: se $A \in M_n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) então:*

(i) trocar duas colunas (ou linhas) da matriz A, faz com que o determinante da matriz obtida, seja menos determinante da matriz A;

(ii) adicionar λ vezes uma coluna (ou linha) da matriz A a uma outra coluna (ou linha), faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz A;

(iii) multiplicar uma coluna (ou linha) da matriz A por λ, faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz A multiplicado por λ.

Além disso temos o seguinte resultado importante

Proposição A.5.4 *Sejam $A, B \in M_n$.*
Então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,. \tag{A.40}$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração da identidade acima.

∎

Uma outra operação que podemos fazer com uma matriz é:

Definição A.5.3 *Se $A \in M_{nm}$ definimos a* **matriz transposta da matriz** $A = (a_{ij})$, *denotada por A^t, como sendo a matriz $A^t = (b_{ij}) \in M_{mn}$, dada por*

$$b_{ij} \doteq a_{ji}\,, \quad \textit{par cada} \quad j \in \{1, \cdots, n\} \quad e \quad i \in \{1, \cdots, m\}. \tag{A.41}$$

Observação A.5.8

1. *A relação que existem entre uma matriz e sua matriz transposta é que as colunas da 1.a serão as linhas da 2.a e vice-versa.*

2. *É fácil verificar que se $m = n$, então*

$$A\,, A^t \in M_n\,.$$

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo A.5.1

1) Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

em particular, $A^t = A$.

Temos as seguintes propriedades para a transposição de uma matriz:

Proposição A.5.5 *Sejam* $A, B \in M_n$.
Então:

1. *temos que*
$$\left(A^t\right)^t = A\,; \tag{A.42}$$

2. *se* $m = n$,
$$\det(A^t) = \det(A)\,; \tag{A.43}$$

3. *temos que*
$$(A+B)^t = A^t + B^t; \tag{A.44}$$

4. *segue que*
$$(AB)^t = B^t\,A^t\,; \tag{A.45}$$

5. *temos que*
$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t\,; \tag{A.46}$$

6. *se a matriz* A *é uma matriz diagonal então*
$$A^t = A\,. \tag{A.47}$$

Em particular, temos
$$I_n{}^t = I_n\,.$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição A.5.4 *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$ *(isto é,* $A \in M_n$*).*
Diremos que a matriz A *é uma* <u>**matriz simétrica**</u> *se*

$$A^t = A\,. \tag{A.48}$$

Diremos que a matriz A *é uma* <u>**matriz anti-simétrica**</u> *se*

$$A^t = -A\,. \tag{A.49}$$

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo A.5.2

1. *A matriz*
$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$
é uma matriz simétrica, pois $A^t = A$.

   A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

2. *A matriz*
$$B \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
é uma matriz anti-simétrica, pois $B^t = -B$.

   A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Temos as seguintes propriedades para matrizes simétricas ou anti-simétricas:

Proposição A.5.6 *Sejam* $A\,, B \in M_{nn}$.

1. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* $A + B$ *também será uma matriz simétrica.*

2. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* $A + B$ *também será uma matriz anti-simétrica.*

3. *Se a matriz* A *é matriz simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz simétrica;*

4. *Se a matriz* A *é um matriz anti-simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz anti-simétrica;*

5. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* AB *também será uma matriz simétrica se, e somente se,*
$$AB = BA\,, \tag{A.50}$$
ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.

6. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* AB *será uma matriz simétrica se, e somente se, vale (A.50), ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.*

6. *Se a matriz* A *é uma matriz simétrica e a matriz* B *é uma matriz anti-simétrica então a matriz* AB *será uma matriz anti-simétrica se, e somente se,* $AB = BA$.

Demonstração:

Do item 1.:

Se as matrizes A e B são matrizes simétricas então

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B\,. \tag{A.51}$$

Como

$$(A+B)^t \overset{\text{Prop. (A.5.5) item 3.}}{=} A^t + B^t \overset{(A.51)}{=} A + B,$$

segue que a matriz $A + B$ será uma matriz simétrica.

Os outros itens serão deixados como exercícios para o leitor.

∎

Como uma aplicação de determinantes e de transposição de matrizes temos o seguinte resultado:

Proposição A.5.7 *Seja $A \in M_n$ uma matriz.*

A matriz A é uma matriz não singular se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0\,. \tag{A.52}$$

Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t \tag{A.53}$$

onde $\operatorname{cof}(A)$ é a matriz cofatora associada à matriz A.

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Com isto podemos resolver o:

Exemplo A.5.3 *Verifique se a matriz quadrada de ordem 3,*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

é um matriz não-singular.

Caso afirmativo encontre sua matriz inversa.

Resolução:

Observemos que:

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2(6-3) = 3\,,$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(-3+9) = -6\,,$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(-1+6) = 5\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}|A_{11}| + a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| \\ &= 3\cdot 3 + 2\cdot(-6) + (-1)\cdot 5 = 9 - 12 - 5 = -8 \neq 0\,. \end{aligned} \tag{A.54}$$

Logo, pela Proposição (A.5.7) acima, segue que a matriz A é um matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa A^{-1}.

Para encontrar a matriz A^{-1} calculemos:

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(6+1) = -7\,,$$

$$|A_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(9-3) = 6\,,$$

$$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(3+6) = -9\,,$$

$$|A_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(6+2) = 8\,,$$

$$|A_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5(9-1) = -8\,,$$

$$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6(6+2) = 8\,.$$

Portanto

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -7 & 6 & -9 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}. \tag{A.55}$$

Assim

$$\begin{aligned} A^{-1} &\overset{(A.53)}{=} \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t \\ &\overset{(A.54)\text{ e }(A.55)}{=} \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -6 & 6 & -8 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Para finalizar temos seguinte resultado, cuja demonstração será deixada como exercício para p leitor.

Proposição A.5.8 *Seja $A \in M_n$ uma matriz não singular (isto é, inversível). Então a amtriz A^t é uma matriz não singular, além disso, vale*

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t\,. \tag{A.56}$$

Uma outra aplicação de determinantes é para resolução de sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau, como veremos no Apêndice (B).

Apêndice B

Escalonamento de Matrizes e Sistemas Lineares

B.1 Definições Básicas

Consideraremos a seguir questões relacionadas com o sistema linear de $\underline{m}$ equações a $\underline{n}$ incógnitas não-homogêneo, a saber,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{B.1}$$

que na forma matricial pode ser escrito na seguinte forma:

$$A \cdot x = B\,, \tag{B.2}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,, \tag{B.3}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Definição B.1.1 *A matriz*

$$(a_{*1} \cdots a_{*n}\ \ b_*)$$

será denominada **matriz aumentada** *associada ao sistema não homogêno* (B.1)*.*

Uma solução *da equação matricial* (B.2) *(se existir) será uma matriz*

$$u \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n1}\,,$$

tal que

$$A \cdot u = B\,.$$

O conjunto de todas as soluções da equação matricial (B.1) *será denominado* **conjunto solução** *da equação matricial* (B.2).

Observação B.1.1 *Da identificação* (B.1) *com* (B.2), *segue que encontrar solução para o sistema linear* (B.1) *é equivalente a encontrar solução da equação matricial* (B.2).

Verifiquemos isto no:

Exemplo B.1.1 *Coloque o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases} \tag{B.5}$$

na forma matricial.

Resolução:

Notemos que o sistema liner (B.5) é equivalente a equação matricial

$$A \cdot x = b,$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a equação matricial acima tem como uma solução a matriz

$$u \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo uma solução do sistema linear (B.5), será:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = -1.$$

□

Observação B.1.2 *A matriz aumentada associada ao sistema do Exemplo* (B.1.1) *acima, será a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição B.1.2 *Diremos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são ditos **equivalentes** *se, e somente se:*

1. $A\,, C \in M_{mn}$;

2. $b\,, d \in M_{m1}$

3. *e as duas equações matriciais possuem o mesmo conjunto solução.*

Observação B.1.3 *Observemos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares associados às correspondentes equações matriciais são equivalentes (isto é, os sistemas associados possuem o mesmo conjunto solução).

Daremos a seguir alguns procedimentos para encontrar solução de sistemas lineares não homogêneos (e homogêneos).

O que faremos é resolver um sistema linear fazendo operações básicas no mesmo (ou seja, multiplicando-se as equações do mesmo por constantes não nulas, somando-se equações do mesmo, etc.)

Observe que a cada equação do sistema linear corresponde uma linha da matriz aumentada associada ao sistema linear dado.

Logo operações com as equações do sistema linear corresponderão as, correspondentes operações sobre as linhas da matriz aumentado associada ao mesmo e reciprocamente.

Para ilustrar consideraremos o sistema linear de equações do 1.o grau:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow A \cdot x = b, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_o \text{ (matriz aumentada)}$$

$$\Updownarrow (2^a - 2 \times 1^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5_x3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_1$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 1^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x_3 & = & -14 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_2$$

$$\Updownarrow (1^a + 2^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x3 & = & -14 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_3$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 2^a)$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_4$$

$$\Updownarrow (2^a \times (-1))$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & x_2 & +3x_3 & = & 7 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_5.$$

O sistema linear obtido acima é o mais simples (que pode ser obtido por meio da operações usuais sobre o sistema linear dado inicialmente) que é equivalente ao sistema original.

Para resolver o sistema linear acima bastará tomarmos, por exemplo:

$$x_3 \doteq \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

assim, das duas primeiras equações do sistema linear acima e à esquerda, obteremos:

$$x_1 \doteq 4 - 2\alpha \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 7 - 3\alpha.$$

Assim o conjunto solução do sistema linear dado incialmente será

$$\{(x_1, x_2, x_3) = (4 - 2\alpha\,, 7 - 3\alpha\,, \alpha), \text{ para cada } \alpha \in \mathbb{R}\,(\text{ ou } \mathbb{C})\}.$$

Observe que as operações que fizemos na matriz S_i para obter a matriz S_{i+1}, são operações elementares sobre as linhas (ver Definição (A.5.2)).

Para facilitar o entendimento do que virá mais adiante introduziremos a:

Definição B.1.3

1. *A operação de trocar duas linhas de uma matriz daremos o nome de operação do* **tipo I**.

2. *A operação de multiplicar uma linha por um número não nulo daremos o nome de operação do* **tipo II**.

3. *A operação de adicionar o múltiplo de uma linha a outra linha daremos o nome de operação do* **tipo III**.

Tais operações são, como já dissemos, operações elementares sobre as linhas da matriz (ver Definição (A.5.2)).

No Exemplo (B.1.1) acima, as operações elementares que realizamos são:

$$S_o \stackrel{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_1 \stackrel{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_2 \stackrel{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_3 \stackrel{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_4 \stackrel{(\text{tipo II})}{\longrightarrow} S_5.$$

Seja

$$I_m$$

a identidade de ordem $\underline{m}$.

Introduziremos também a:

Definição B.1.4

1. *Fazendo uma operação do tipo I na matriz I_m, obtemos uma matriz quadrada de ordem m, que chamaremos de* **matriz elementar do tipo I** *e será denotada por E_I.*
2. *Uma* **matriz elementar do tipo II** *é uma matriz quadrada de ordem $\underline{m}$, obtida da matriz I_m por uma operação do tipo II:*
3. *Uma* **matriz elementar do tipo III** *é uma matriz quadrada de ordem $\underline{m}$, obtida da matriz I_m por uma operação do tipo III.*

Observação B.1.4 *Dada uma matriz $A \in M_{mn}$, fazer uma operação do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente) é equivalente a multiplicar a matriz A por uma matriz do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente), isto é,*

$$A \stackrel{\textit{(operação elementar do tipo I)}}{\longmapsto} E_I\, A\,.$$

A demonstração destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Ilustraremos a propriedade acima com o seguinte exemplo:

Exercício B.1.1 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Trocando-se a 2.a linha da matriz A, pela 2.a linha menos duas vezes a 1.a obteremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \stackrel{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq B \tag{B.6}$$

A operação acima na matriz identidade I_3, nos fornece a seguinte matriz elementar do tipo III:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \quad \mathbf{E}_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

$$E_{III}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \stackrel{(B.6)}{=} B,$$

ou seja, as operações produzem a mesma matriz, como foi dito na Observação (B.1.4) *acima.*

Um resultado importante é dado pela:

Proposição B.1.1 *Uma matriz elementar de qualquer tipo é uma matriz não singular (isto é, é uma matriz inversível) e sua matriz inversa é do mesmo tipo que ela.*

Demonstração:

Será deixado como exercício para o leitor.

∎

Para ilustrar temos o:

Exemplo B.1.2 *Mostre que a matriz elementar (veja o Exemplo (B.1.1)).*

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admite uma matriz inversa e está é uma matriz elementar do tipo III

Resolução:

Observemos que

$$\det(E_{III}) = 1,$$

portanto a matriz E_{III} é uma matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa ${E_{III}}^{-1}$.

Além disso temos:

$${E_{III}}^{-1} = \frac{1}{\det(E_{III})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{2^a + 2 \times 1^a}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a matriz inversa da matriz E_{III}, também é uma matriz elementar do tipo III.

□

Definição B.1.5 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.

Diremos que a matriz A *é* **l-equivalente** *(ou equivalente por linhas) à matriz* B, *se a matriz* A *pode ser obtida da matriz* B *por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas da matriz* B.

Neste caso escreveremos

$$A \sim B.$$

Observação B.1.5

1. *Da Observação (B.1.4) segue que*

$$A \sim B \quad \textit{se, e somente se,} \quad A = E_s E_{s-1} \cdots E_1 B\,,$$

onde $E_1, \ldots, E_s$ *são matrizes do tipoI, II, ou III.*

2. *Sejam* $A, B, C \in M_{mn}$.

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que:

i) Reflexiva:

$$A \sim B, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{mn}\,;$$

ii) Simétrica:

$$\textit{se} \quad A \sim B\,, \quad \textit{então} \quad B \sim A\,;$$

iii) Transitiva:

$$\textit{Se} \quad A \sim B \quad \textit{e} \quad B \sim C\,, \quad \textit{então} \quad A \sim C\,.$$

isto é, $\sim$ *é uma* **relação de equivalência** *em* M_{mn}.

Um resultado importante sobre l-equivalênica é dado pela:

Proposição B.1.2 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.
Se $A \sim B$*, então existe um matriz* $P \in M_{mn}$ *não singular, tal que*

$$B = PA \quad \textit{ou, equivalentemente} \quad A = P^{-1} B\,.$$

Demonstração:
Segue da Proposição (B.1.1) e da Observação acima item 1., que basta definir

$$P \doteq E_s \cdots E_1\,,$$

finalizando a demonstração do resultado.

∎

A relação entre matrizes l-equivalentes e a equações matriciais equivalentes é dado pela:

Proposição B.1.3 *Sejam* $A, C \in M_{mn}$ *e* $b, d \in M_{m1}$.
A matriz $[A\, b]$ *é l-equivalente a matriz* $[C\, d]$*, em* $M_{m,n+1}$*, se, e somente se, a equação matricial*

$$A \cdot x = B$$

é equivalente a equação matricial

$$C \cdot x = d\,.$$

Demonstração:

Observemos que, da Proposição (B.1.2) acima, existe $P \in M_{mn}$ não singular, tal que

$$[C\, d] = P \cdot [A\, b] \quad \text{e} \quad [A\, b] = P^{-1} \cdot [C\, d].$$

Da Definição de produto de matrizes, segue que

$$C = P \cdot A, \quad d = Pb, \quad A = P^{-1} \cdot C \quad e \quad b = P^{-1} \cdot d. \tag{B.7}$$

Logo, se $u \in M_{n1}$ é solução da equação matricial

$$A \cdot x = b \quad \text{então, segue que} \quad A \cdot u = b,$$

assim

$$C \cdot u \overset{(B.7)}{=} (PA) \cdot u = P(A \cdot u) \overset{(B.7)}{=} P \cdot b \overset{(B.7)}{=} d.$$

Pportanto a matriz $u \in M_{n1}$ será solução da equação matricial $C \cdot x = d$.

Além disso, vale a recíproca.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração.

∎

Observação B.1.6 *Vale observar que o resultado acima pode ser aplicado para as matrizes aumentadas associadas a sistemas lineares, ou seja, as matrizes aumentadas são l-equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares são equivalentes.*

Como conseqüênica temos o:

Corolário B.1.1 *Se $A \sim B$ em M_{mn} e $x \in M_{n1}$ então as equações matriciais*

$$A \cdot x = O \quad e \quad C \cdot x = O$$

são equivalentes, onde O denota a matriz coluna de M_{m1}.

Demonstração:

Basta tomar

$$b = d = 0$$

na Proposição (B.1.3) acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Observação B.1.7 *No Exemplo (B.1.1) obtivemos, após as operações de l-equivalência sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja **forma** *nos facilitou a resolver o sistema linear inicial associado.*

Observemos que o sistema linear asscoiado a esta última matriz é o mais simples de ser resolvido e que é equivalente ao sistema linear dado inicialmente, cuja matriz aumentada é a matriz A.

A seguir daremos um nome as matrizes que tem essa **forma especial**.

Antes, porém temos a:

Definição B.1.6 *Dada uma matriz* $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$, *definimos o* **coeficiente líder da i-ésima linha**, *não-nula, que indicamos por* a_{i*}, *da matriz* A *como sendo o primeiro elemento não nulo dessa linha, escolhido da esquerda para a direita, isto é, é*

$$a_{i,j_o} \neq 0 \quad \text{onde} \quad j_o \in \{1, \cdots, m\}$$

é o menor índice com essa propriedade.

Agora estamos em condições de caracterizar a forma da matriz aumentada associada ao sistema linear mais simples obtido no Exemplo (B.1.1) (isto é, a matriz B):

Definição B.1.7 *Uma matriz* $A \in M_{mn}$ *é dita estar na* **forma escalonada reduzida por linhas**, *denotada por FERL, se ela tem as seguintes propriedades:*

i) *Todas as linhas nulas da matriz* A *ocorrem nas linhas inferiores da mesma;*

ii) *O coeficiente líder de uma linha não nula de* A *é* 1;

iii) *Em qualquer duas linhas não nulas da matriz* A, *o coeficiente líder pertencente a linha de baixo ocorrerá à direita do coeficiente líder da linha de cima;*

iv) *Uma coluna que contém um coeficiente líder deverá ter zeros nas outras entradas.*

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo B.1.3 *As matrizes:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *estão na FERL.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$ **não** *estão na FERL.*

   Os elementos destacados não cumprem as propriedades requeridas, no caso, as propriedades (iv) e (iii), respectivamente.

Com isto temos a:

Proposição B.1.4 *Toda matriz* $A \in M_{mn}$ *é l-equivalente a uma (única) matriz, que indicaremos por* A_R*, que está na FERL, isto é, existe* $P \in M_{mn}$ *não singular tal que*

$$A_R = PA\,.$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Em vez de exibirmos a demonstração da Proposição acima, daremos o método que seria utilizado na demonstração aplicado a um exemplo.

O método é denominado **Eliminação de Gauss-Jordan**:

Exemplo B.1.4 *Encontre o conjunto solução do sistema linear*

$$\begin{cases} & & -2x_3 & & +7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & +4x_2 & -10x_3 & +6x_4 & +12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +6x_4 & -5x_5 & = & -1 \end{cases} \tag{B.8}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$(A\,b) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.9}$$

Resolução:

O que faremos é realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada acima para obter a sua FERL.

Primeiro passo:

Trocar as linhas nulas da matriz $(A\,b)$ com outras linhas, não nulas, de modo que as linhas nulas ocorram nas linhas inferiores da nova matriz.

No nosso caso não há linhas nulas, logo não faremos nenhuma mudança na matriz aumentada $(A\,b)$.

Localize a **coluna** mais á esquerda que não seja totalmente nula .

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} \;\;\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array}$$

Segundo passo:

Trocar a primeira linha com uma outra, caso necessário, para que o primeiro elemento da coluna localizada no primeiro passo seja não nulo.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(trocamos a 1.}^{a}\text{ linha com a 2.}^{a}\text{ linha)}$$

Terceiro passo:

Se o primeiro elemento da coluna do segundo passo for $\underline{a}$, multiplicar a primeira linha por $\dfrac{1}{a}$ (para que o coeficiente líder da primeira linha da matriz obtida seja 1).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(1.^a \text{ linha } \times \frac{1}{2}\right)$$

Quarto passo:

Somar a primeira linha, multiplicada por constante, se for necessário, com as linhas de baixo, para obter zeros em todas as entradas abaixo do coeficiente líder da primeira linha.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \boxed{0} & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{0} & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad (3.^a \text{ linha } -2 \times 1.^a \text{ linha})$$

Quinto passo:

Separar a $1.^a$ linha da matriz acima e voltar ao Primeiro passo.

Aplicar o processo repetidas vezes para até a última linha não nula.

No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{\text{-5}} & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad \left(1.^a \text{ linha } \times \left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.^a \text{ linha } -5 \times 1.^a \text{ linha})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{-7}}{\mathbf{2}} & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \times 1.^a \text{ linha})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{2}} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Sexto passo:

Para finalizar, começando por uma linha não nula, somar cada linha multiplicada por constante com as outras linhas, para zerar as outras entradas acima do coeficiente líder.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(2.^a \text{ linha } + \frac{7}{2} \times 3.^a \text{ linha}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.^a \text{ linha } - 6 \times 3.^a \text{ linha })$$

$$(C\,d) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (1.^a \text{ linha } + 5 \times 2.^a \text{ linha }).$$

Observemos que a matriz $(C\,d)$ está na FERL.

Deixaremos a vertificação deste fato como exercício para o leitor.

O sistema linear asssociado à matriz $(C\,d)$ será:

$$\begin{cases} x_1 \;\; +2x_2 \;\; +3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Portanto se, por exemplo, considerarmos para cada $t, s \in \mathbb{R}$,

$$x_1 \doteq t, \quad x_2 \doteq s, \quad x_3 = 1, \quad x_5 \doteq 2, \quad \text{deveremos ter} \quad x_4 = \frac{7 - t - 2s}{3},$$

ou seja,

$$\left(t, s, 1, \frac{7 - t - 2s}{3}, 2\right),$$

será solução do sistema linear dado incialmente, para cada $t, s \in \mathbb{R}$, ou seja: o conjunto solução associado ao sistema linear (B.8) será:

$$S \doteq \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(t, s, 1, \frac{7 - t - 2s}{3}, 2\right) ; s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ou ainda, o conjunto solução da equação matricial (B.9), será

$$S = \left\{u \in M_{51} ; u = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \\ \frac{7 - t - 2s}{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{para cada} \;\; t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

Temos também a seguinte definição:

Definição B.1.8 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$, *definimos o* **posto da matriz** A, *denotado por* $\operatorname{rank}(A)$, *como sendo o número de linhas não nulas de sua FERL associada.*

Proposição B.1.5 *Se* $A \in M_{mn}$, *então*

$$\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m\,, n\}. \tag{B.10}$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Nas seções a seguir faremos algumas considerações sobre o sistema linear não homogênio

$$\text{(NH)} \quad A \cdot x = b\,, \quad \text{onde} \quad A \in M_{mn}\,,\ b \in M_{m1} \ \text{ e } \ x \in M_{n1}\,.$$

Na próxima seção começaremos estudando o sistema linear homogênio associado:

$$\text{(H)} \quad A \cdot x = 0 \quad (\text{isto é, } \ b = 0).$$

B.2 O Sistema Linear Homogênio

Observação B.2.1

1. *O sistema (H) tem sempre solução, a saber, a matriz identicamente nula,*
$$u = 0 \in M_{n1}\,,$$
que será denominada **solução trivial**;

2. *Pode-se mostrar que se* A_R *é a matriz na FERL, associada a matriz* A, *então a equação matricial*
$$A \cdot x = 0$$
será equivalente a equação matricial
$$A_R \cdot x = 0,$$
ou seja, resolver o sistema homogêneo é equivalente a resolver o sistema associado a matriz que está FERL.

3. *Observemos que se*
$$u\,, v \in M_{n1}$$
são soluções da equação matriical (H), então, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$), *a amatriz*
$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in M_{n1}$$
também será.

De fato, pois
$$A \cdot (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = A \cdot (\alpha \cdot u) + A \cdot (\beta \cdot v) = \alpha \cdot (\underbrace{A \cdot u}_{=0}) + \beta \cdot (\underbrace{A \cdot v}_{=0}) = 0\,.$$

4. *Mais geralmente, se*

$$u_1, \cdots, u_p \in M_{n1}$$

são soluções de (H) então, para cada $\alpha_1, \cdots, , \alpha_n \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), a matriz*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \in M_{n1}$$

também será solução, isto é, combinação linear de soluções da equação matricial (H), também será solução da equação matricial (H).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Apliquemos essas idéias ao:

Exemplo B.2.1 *Encontre o conjunto solução associado a equação matricial homogênea*

$$A \cdot x = 0\,,$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{35}. \tag{B.11}$$

Resolução:

Notemos que a matriz A está na FERL.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o sistema linear homogêneo associado à matriz A será dado por:

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \qquad\quad +3x_4 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad\quad +x_3 \quad -x_4 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +x_5 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, se, para cada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, considerarmos

$$x_2 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad x_4 = \alpha_2\,,$$

teremos que

$$\mathbf{u} \doteq \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

será uma solução da equação matricial homogênea dada incialmete e reciprocamente.

Portanto, qualquer solução $u \in M_{n1}$ da equação matricial (H) será dada por:

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2$$

onde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que os vetores u_1 e u_2 são l.i. em $M_{51}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_{51}(\mathbb{R})$).

Logo, esses vetores formam uma base para o espaço vetorial real $(W, +, \cdot)$, formado pelas soluções da da equação matricial (H).

Observação B.2.2 *Observemos que o posto da matriz A é 3, isto é,*

$$\text{rank}\,(A) = 3\,,$$

e a equação matricial (H) possui duas soluções que tem a propriedade acima, isto é, qualquer solução da equação matricial (H) pode ser obtida como combinação linear de u_1 e u_2.

Além disso, notemos

$$\dim(W) = 2 = \underbrace{5}_{\text{número de variáveis}} - \underbrace{3}_{\text{posto de } A}\,,$$

isto é , o número de soluções da a equação matricial (H) é igual ao número de variáveis do sistema linear menos o posto da matriz A.

Baseado nisto temos o:

Teorema B.2.1 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in M_{mn}$ de posto igual a $\underline{k}$.*

Então o conjunto das soluções da equação matricial homogênea

$$A \cdot x = 0$$

consiste dos

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-k} \cdot u_{n-k} \in M_{n1}\,,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $i \in \{1, \cdots, n-k\}$, sendo os elementos

$$u_i \in M_{n1} \setminus \{0\}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n-k\}$$

podem ser obtidos resolvendo-se o sistema linear associado a matriz na FERL associada a matriz A (são as $n-k$ soluções l.i. em $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$).

Em particular, se W é o subsepaço vetorial do espaço $(M_{n1}, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de M_{n1}) que contém todas a solução da equação matricial (H), segue que

$$\dim(W) = n - \text{rank}\,(a)\,. \tag{B.12}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.2.1 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se o posto da matriz A *igual a* $\underline{n}$ *(isto é,* $k = n$*, no Teorema* (B.2.1) *acima), então a única solução da equação matricial (H) será a matriz nula, isto é,*

$$u = O \in M_{n1}\,.$$

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, então posto de A *será igual a* $\underline{n}$*, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = n\,.$$

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (B.2.1) acima, temos que

$$\dim(W) = n - \underbrace{\operatorname{rank}(a)}_{=n} = 0\,.$$

Logo $W = \{O\}$, ou seja, a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, isto é, $u = O \in M_{n1}$.

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, então teremos que $W = \{O\}$, isto é, $\dim(W) = 0$.

Logo, do Teorema (B.2.1) acima, segue que

$$\underbrace{\dim(W)}_{=0} = n - p(a)\,, \quad \text{ou seja,} \quad \operatorname{rank}(a) = n\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Com isto temos o:

Corolário B.2.2 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se

$$m < n\,,$$

então o sistema (H) tem, pelo menos, uma solução não trivial.

Demonstração:

Se

$$k \doteq \operatorname{rank}(A)\,,$$

da Proposição (B.1.5), segue que

$$k \leq \min\{m\,, n\} \overset{m<n}{=} m < n\,,$$

ou seja,

$$k < n\,.$$

Do Corolário (B.2.1) acima, segue que existe solução, não identicamente nula, da equação matricial (H), como queríamos demonstrar.

∎

Analisemos os seguinte exemplos a seguir:

Exemplo B.2.2 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{32}\,.$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot u = O\,.$$

Resolução:

Neste caso temos que

$$m \doteq 2 \quad e \quad n \doteq 3\,.$$

Temos que $A \sim A_R$*, onde*

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto posto da matriz A *é igual a* 2*.*

Logo, pelo Teorema (B.2.1) *acima, existe uma* $(= n - \text{rank}\,(A) = 3-2)$ *solução, não nula, da equação matricial* $A \cdot u = O$*, que indicaremos por* $u_1 \in M_{31}$ *e qualquer outra solução* u *da equação matricial* $A \cdot u = O$*, será da forma*

$$u = \alpha \cdot u_1\,,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

Para encontrar a solução $u_1 \in M_{31}$*, basta resolver o sistema associado a matriz* A_R*, que deixaremos como exercício para o leitor.*

Exemplo B.2.3 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_{34}\,.$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot u = O\,.$$

Resolução:

Neste caso temos

$$m \doteq 3 < n \doteq 4 .$$

Logo, do Corolário (B.2.2) acima, podemos concluir que existe pelo menos uma solução não trivial da equação matricial $A \cdot u = O$.

Na verdade temos que $A \sim A_R$, onde

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, posto da matriz A é igual a 2.

Logo, pelo Teorema (B.2.1) acima, segue que existem duas $(= n - \text{rank}\,(A) = 4 - 2)$ soluções $u_1, u_2 \in M_{41}$, l.i. em $(M_{31}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, da equação matricial $A \cdot u = O$, tal que toda solução $u \in M_{31}(\mathbb{R})$ da equação matricial $A \cdot u = O$, será dada por

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2,$$

para algum $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Para encontrar as soluções $u_1\,, u_2 \in M_{31}(\mathbb{R})$, basta resolver o sistema associado a matriz A_R, que deixaremos como exercício para o leitor.

B.3 O Sistema Linear Não Homogênio

Trateremos nesta seção do sistema linear não homogêneo (NH)

$$Ax = b .$$

Começaremos introduzindo a:

Definição B.3.1 *A equação matricial*

$$A \cdot x = b$$

será dita **consistente** *se tem pelo menos uma solução.*

Se não tiver solução será dita **inconsistente** *.*

De modo semelhante, temos que um sistema linear será dito **consistente***, se ele adminte pelo menos uma solução, caso contrário, será dito* **inconsistente***.*

A seguir exibiremos dois sistemas lineares, um consistente e o outro incosistente.

Exemplo B.3.1 *O sitema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases}$$

é consistente, pois

$$x_1 \doteq 1\,, \quad x_2 \doteq 0 \quad e \quad x_3 \doteq -1$$

é uma solução do sistema linear.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo B.3.2 *O sitema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

é inconsistente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação B.3.1 *Lembremos que resolver a equação matricial (NH)*

$$A \cdot x = b$$

é equivalente a resolver a equação matricial

$$A_R \cdot x = b_R,$$

onde

$$A \sim A_R \quad e \quad b \sim b_R,$$

isto é, existe uma matriz $P \in M_{mn}$*, não singular, tal que*

$$A_R = PA \quad e \quad b_R = P\,b\,,$$

ou ainda,

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,.$$

Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que a matriz A *está na FERL, isto é,*

$$A = A_R \quad e \quad b = b_R\,,$$

pois os as equações matriciais associadas são equivalentes (isto é, têm o mesmo conjunto solução).

Suponhamos que o a equação matricial (NH) seja consistente, com $u \in M_{m1}$ *sendo uma solução do mesmo.*

Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, o posto da matriz* A*.*

Como a matriz A *está na FERL e* $\operatorname{rank}(A) = k$*, segue que a matriz* A *tem as últimas* $(m-k)$ *linhas são nulas.*

Portanto $(m-k)$ *equações do sistema linear associado a equação matricial (NH) tem a segunte forma:*

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_i\,, \textit{para cada} \quad i \in \{k+1, \cdots, m\}.$$

Logo

$$b_i = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{k+1, \cdots, m\},$$

ou seja:

Teorema B.3.1 *Se a matriz* $A \in M_{mn}$ *está na FERL e tem posto* $\underline{k}$, *então a equação matricial (NH) (ou o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) é consistente se, e somente se,*

$$b_{k+1} = \cdots = b_m = 0\,.$$

Em particular, se o posto da matriz A *for igual a* $\underline{m}$, *então a equação matricial (e portanto o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) será consistente.*

Demonstração:

A implicação $(\Rightarrow)$ é fruto da Observação (B.3.1) acima.

A demonstração da recíproca será deixada como exercício para o leitor.

∎

Se a matriz $A \in M_{mn}$ não está na FERL então temos o:

Teorema B.3.2 *Seja* $A \in M_{mn}$.

A equação matricial (NH) (portanto o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$*) é consistente se, e somente se, o posto da matriz aumentada* $(A\,b)$ *for igual ao posto da matriz* A, *isto é.*

$$\text{rank}\,(A\,b) = \text{rank}\,(A)\,.$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Façamos uma aplicação desse resultado ao seguinte exemplo:

Exemplo B.3.3 *O sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases}$$

é consistente ou inconsistente?

Resolução:

Observemos que

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (A\,b)$$

Logo os sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ *será consistente, pois ele admite como solução*

$$x_1 \doteq -1 \quad e \quad x_2 \doteq -1\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exeercício para o leitor.

Portanto é consistente.

Notemos também que

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,, \qquad onde \quad (A_R\,b_R) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A_R} \sim \mathbf{A}).$$

Deixaremos a verificação deste fato como exeercício para o leitor.

Assim temos que

$$\operatorname{rank}(A) = 2 = \operatorname{rank}(A\,b)$$

e como afirma o Teorema (B.3.2) acima, o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ *será consistente.*

Um outro resultado interessante é o:

Teorema B.3.3 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Suponhamos que a equação matricial $A \cdot x = b$ *(ou o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) seja consistente e que* $u_o \in M_{n1}$ *seja uma solução particular do mesmo.*

Então toda solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

será dada por

$$w = u_o + v \in M_{n1}\,,$$

onde $v \in M_{n1}$ *é uma solução da equação matricial homogênia associada, isto é, da equação matricial*

$$A \cdot y = 0\,.$$

<u>Conclusão:</u> *uma solução geral do sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$ *pode ser obtida de uma solução particular do mesmo somada com a solução geral do sistema linear homogêneo.*

Demonstração:

De fato, se $w \in M_{n1}$ uma solução da equação matricial

$$A \cdot x = b$$

e $u_o \in M_{n1}$ é solução particualr de

$$A \cdot x = b\,,$$

segue que

$$v \doteq w - u_o$$

será solução de

$$A \cdot y = 0\,,$$

pois

$$A \cdot v = A \cdot (w - u_o) = A \cdot w - A \cdot u_o = b - b = 0.$$

Logo a matriz

$$w = u_o + v\,,$$

será igual a solução particular de $A \cdot x = b$ somada como solução geral de

$$A \cdot y = 0\,.$$

Reciprocamente, se $v \in M_{n1}$ é solução da equação matricial

$$A \cdot y = O\,,$$

então a amtriz

$$w \doteq u_o + v$$

será solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

pois

$$A \cdot w = A \cdot (u_o + v) = A \cdot u_o + A \cdot v = b + O = b\,,$$

mostrando que a matriz $w \in M_{n1}$ será solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

completando a demonstração.

∎

Apliquemos isto ao:

Exemplo B.3.4 *Encontre o conjunto solução da equação matricial* $Ax = b$*, onde*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad b \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Podemos mostrar que

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,,$$

onde

$$\mathbf{A_R} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad b_R \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B.13}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto, pelo Teorema (B.3.2), segue que a equação matricial é consistente, pois de (B.13), *temos que*

$$\operatorname{rank}(A_R\, b_R) = 3 = \operatorname{rank}(A_R), \quad \textit{logo} \quad \operatorname{rank}(A\, b) = \operatorname{rank}(A).$$

Também pode-se mostrarque

$$u \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é uma solução da equação matricial $A_R \cdot x = b_R$*, portanto da equação matricial* $Ax = b$*.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que,

$$v \doteq \begin{pmatrix} -10\alpha \\ -3\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C})$$

é solução geral da equação matricial

$$A_R \cdot x = 0.$$

Logo, do Teorema (B.3.3) *acima, segue que qualquer solução da equação matricial (NH) será da forma*

$$w = u + \alpha \cdot v = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{para cad} \quad \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}),$$

isto é,

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 10\alpha \\ 3 - 3\alpha \\ 1 + 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}) \right\}$$

é o conjunto solução da equação matricial (NH).

Para completar nosso estudo sobre da equação matricial (NH) (ou dos sistema linear associado a matriz aumentada $(A\, b)$) temos os seguintes resultados:

Teorema B.3.4 *Sejam* $A \in M_{mn}$ $b \in M_{m1}$*.*

Suponhamos que a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b,$$

é consistente.

A equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b,$$

tem solução <u>*única*</u> *se, e somente se, posto da matriz* A *é igual a* $\underline{n}$*.*

Demonstração:

Suponhamos que a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b$$

tem solução única.

Então a equação matricial (H),

$$A \cdot y = O$$

tem solução única, a saber, a solução trivial $u = O \in M_{n1}$.

Logo posto da matriz A deverá ser igual a $\underline{n}$.

Reciprocamente, se posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, então a solução trivial $u = O \in M_{n1}$ deverá ser a única solução da equação matricial (H),

$$A \cdot y = O\,.$$

Portanto a equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

terá uma única solução, finalizando a demonstração.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.3.1 *Nas condições do Teorema* (B.3.4) *acima, se*

$$m \leq n\,,$$

existe uma única solução da quação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

se, e somente se, posto da matriz A *for igual a* $\underline{n}$*, isto é,*

$$m = n\,.$$

Demonstração:

Suponhamos que exista única solução da equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,.$$

Então, do Teorema (B.3.4) acima, segue que $\underline{n}$ será igual ao posto da matriz A.

Mas

$$n = \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m\,, n\} \leq m \leq n\,.$$

Portanto

$$\operatorname{rank}(A) = n \quad \text{e} \quad m = n\,.$$

Reciprocamente, se $\operatorname{rank}(A) = n$, segue do Teorema (B.3.4) acima, que existe única solução da equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

B.4 A Inversa de Matrizes Não Singulares

Para finalizar, exibiremos um método para encontrar a matriz inversa associada a uma matriz não singular, utilizando o matrizes elementares desenvolvidas na seção anterior.

Para ilustrar consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo B.4.1 *Observemos que a matriz quadrada de ordem* 4

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Exercício}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que está na FERL, portanto, o posto da matriz A *será igual a* 4.

Além disso,

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (1+1) = -4 \neq 0 .$$

Portanto a matriz A *é não singular, ou seja,* $\operatorname{rank}(A) = 4$ *e* A *é uma matriz inversível.*

Logo, neste exemplo, ocorreu uma relação entre o posto da matriz e a sua inversibilidade.

Isto ocorre em geral, como veremos no resultado a seguir:

Teorema B.4.1 *Seja* $A \in M_n$ *são equivalentes:*

1. A *é uma matriz não singular;*
2. *posto da matriz* A *é igual a* $\underline{n}$*;*
3. $A \sim I_n$*, isto é,* $A_R = I_n$*, onde a matriz* A_R *é a FERL da matriz* A.

Demonstração:

Mostremos que:

1. $\Rightarrow$ **2.** :

Se a matriz A é uma matriz não singular e

$$A \cdot u = O ,$$

então

$$u \doteq A^{-1} O = O ,$$

isto é, a única solução da equação $A \cdot y = O$ será a solução trivial $u = O$.

Logo, do Corolário (B.2.1), segue que o posto da matriz A dever ser igual a $\underline{n}$.

2. $\Rightarrow$ **3.** :

Se o posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, então não existe linhas nulas na matriz A_R (a FERL da matriz A) e cada linha de $A_R \in M_{nn}$ tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é,

$$A_R = I_n \, .$$

3. $\Rightarrow$ 1.:
Se

$$A_R = I_n \, ,$$

então, como $A \sim A_R$, existe $P \in M_{nn}$, matriz quadrada não singular, tal que

$$I_n = A_R = PA.$$

Portanto a matriz A é uma matriz não singular e $A^{-1} = P$, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.4.1 *Seja $A \in M_{nn}$.*
A matriz A é uma matriz não singular se, e somente se, ela é produto de matrizes elementares.

Demonstração:
Do teorema acima temos que $A = P^{-1}$.
Mas, da proposição (B.1.2), a matriz P é o produto de matrizes elementares, completando a demonstração.

∎

Observação B.4.1 *Este teorema nos dá um modo de encontrar a inversa de uma matriz quadrada que é uma matriz não singular.*

Ilustraremos o método com o seguinte exemplo:

Exercício B.4.1 *Encontrar a inversa da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:
Para encontrar a matriz inversa associada à matriz A (se existi!) agiremos da seguinte forma: consideremos a matriz

$$A : I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que faremos é fazer operações sobre as linhas da matriz A *para trasnformá-la (será possível!) na matriz identidade* I_4 *à direita.*

Todas as operações que fizermos na matriz A *faremos na matriz* I_4.

$$A : I_4 \overset{1.^a\ linha\ +4.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.^a\ linha\ -2.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & : & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{-1}{2})\times 3.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2.^a\ linha\ -3.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}\times 3.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.^a\ linha\ -4.^a\ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_4 : B).$$

Afirmação: $B = A^{-1}$, *isto é,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De fato, como $A \sim I_n$, *então*

$$I_n = PA\,,$$

logo

$$P\,(A : I_n) = ((P\,A) : P) = (I_n\,P) \Rightarrow (A : I_n) \sim (I_n : P)$$

mas, do Corolário (B.4.1) *acima,*

$$P = A^{-1}\,,$$

portanto $(A\,I_n) \sim (I_n\,A^{-1})$.

Observação B.4.2 *Podemos utilizar o escalonamento de matrizes para obter bases para subespaços de espaços vetorias de* $\mathbb{R}^n$.

Esse processo é desenvolvido nos primeiros capítulos destas notas.

B.5 Regra de Crammer

Para finalizar temos o:

Teorema B.5.1 ***(Regra de Cramer)***

Seja $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$.

A equação matricial

$$A \cdot x = b$$

tem uma única solução se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0\,,$$

ou seja, a matriz A *deverá ser não singular, isto é, inversível.*

Neste caso, a solução será dada por

$$u = (u_i)(= A^{-1} \cdot b)\,,$$

cujas componentes são dadas por

$$u_i \doteq \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}, \tag{B.14}$$

onde a matriz A_i, *é o determinante obtido da matriz* A, *trocando-se a i-ésima coluna* a_{*i}, *da matriz* A, *pela coluna da matriz* b.

Demonstração:

Deixaremos a verificação deste como exercício para o leitor.

∎

Apliquemos este resultado ao:

Exemplo B.5.1 *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Resolução:

Observemos que o sistema linear dado pode ser escrito como a seguinte equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\det(A) = -1 + 6 + 1 = 8 \neq 0\,.$$

Logo, do Teorema (B.5.1) matriz A é não singular.

Além disso, da regra de Cramer (isto é, (B.14)), teremos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 3 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4\,; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2\,;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2\,.$$

Portanto

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{A} \\[2ex] \dfrac{A_2}{A} \\[2ex] \dfrac{A_3}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

será a solução da equação matricial $A \cdot x = b$, ou seja,

$$x_1 \doteq \frac{1}{2}\,, \quad x_2 \doteq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_3 \doteq \frac{1}{4}$$

será a solução do sistema dado inicialmente.

As muitas das demonstrações deixadas como exercício ou omitidas, podem ser encontradas na bibliografia abaixo.

$\boxed{\textbf{F I M}}$

Referências Bibliográficas

[1] Boulos, P. & Boulos, V. - *Exercícios Resolvidos de Geometria Analítica*

[2] Boulos, P. & Oliveira, J.C. - *Geometria Analítica*

[3] Callioli, C.A & outros - *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*

Índice Remissivo