Lista 4. Bases e Coordenadas

MTM5512 - Geometria Analítica

Exercício 1

Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

(a) Explique por que o conjunto $\mathcal{E} = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é uma base para V^3.

(b) Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AM}$ em relação à base acima.

Exercício 2

Seja $\mathcal{E} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ uma base ordenada de V^3 e $\vec{x}$ um vetor qualquer de V^3. Sabemos que existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{x} = (a, b, c)_{\mathcal{E}}$. Mostre que o conjunto

$$\{\vec{u} + \vec{x}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w} + \vec{x}\}$$

é LI se, e somente se, $a + b + c + 1 \neq 0$.

Exercício 3

Fixe uma base ordenada $\mathcal{E}$ de V^3. Encontre o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que, em cada um dos itens, os vetores sejam LD.

(a) $(3, 5, 1)_{\mathcal{E}}$, $(2, 0, 4)_{\mathcal{E}}$, $(1, m, 3)_{\mathcal{E}}$.

(b) $(1, 3, 5)_{\mathcal{E}}$, $(2, m + 1, 10)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 4

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada, $\vec{u} = (2, -2, -4)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (0, -1, -3)_{\mathcal{E}}$. Os vetores $\vec{w} = (1, -2, 3)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{x} = (4, 0, 13)_{\mathcal{E}}$ podem ser escritos como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Justifique sua resposta.

Exercício 5

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{u} = (1, 2, 2)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (m-1, 1, m-2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (m+1, m-1, 2)_{\mathcal{E}}$. Determine $m \in \mathbb{R}$, se possível, para que:

(a) $\vec{u}$ seja combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam LD.

Exercício 6

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3. Determine $m \in \mathbb{R}$, se possível, para que os vetores em cada item abaixo sejam LD.

(a) $(m, 1, m)_{\mathcal{E}}$, $(1, m, 1)_{\mathcal{E}}$.

(b) $(1 - m^2, 1 - m, 0)_{\mathcal{E}}$, $(m, m, m)_{\mathcal{E}}$.

(c) $(m, 1, m + 1)_{\mathcal{E}}$, $(1, 2, m)_{\mathcal{E}}$, $(1, 1, 1)_{\mathcal{E}}$.

(d) $(m, 1, m + 1)_{\mathcal{E}}$, $(0, 1, m)_{\mathcal{E}}$, $(0, m, 2m)_{\mathcal{E}}$.

Exercício 7

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3 e defina

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1.$$

Mostre que $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é uma base ordenada de V^3 e encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ em relação às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

Exercício 8

Sejam $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

(a) Para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ forma uma base ordenada de V^3?

(b) Encontre $m \in \mathbb{R}$, se possível, para o qual o vetor $\vec{u} = (1, 2, -1)_{\mathcal{E}}$ satisfaça $\vec{u} = (0, 1, 0)_{\mathcal{F}}$.

Exercício 9 ....

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_3$.

(a) Mostre que $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é uma base ordenada de V^3.

(b) Encontre m, se possível, para que os vetores $\vec{u} = (0, m, 1)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{v} = (0, 1, -1)_{\mathcal{F}}$ sejam LD.

Exercício 10 ....

Sejam $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ordenada de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

(a) Verifique que $\mathcal{F}$ é uma base ordenada de V^3.

(b) Encontre a matriz mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.

(c) Sendo $\vec{u} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, encontre a expressão do vetor $\vec{u}$ na base $\mathcal{F}$.

Exercício 11 ....

Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ duas bases ordenadas de V^3 e $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{E}} = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{F}}$. Suponha que

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_3 = 2y_1 + y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Determine, se possível, a matriz mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$.

Exercício 12 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3. Qual o valor de $x \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (3, -x, -2)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (3, 2, x)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (1, -3, 1)_{\mathcal{E}}$ sejam paralelos a um mesmo plano no espaço?

Exercício 13 ....

Seja $\mathcal{E}$ uma base ordenada de V^3.

(a) Para quais valores de $a, b \in \mathbb{R}$ os vetores $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ e $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + (a - b)\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ são LI em V^3?

(b) Encontrar uma base ordenada $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ de V^3 tal que se $\vec{u} = (1, 2, 3)_{\mathcal{E}}$, tenhamos $\vec{u} = (1, 0, 0)_{\mathcal{F}}$.

(c) Qual a relação deve haver entre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (1, \alpha, \alpha^2)_{\mathcal{E}}$ e $\vec{w} = (1, \beta, \beta^2)$ sejam LD?

Exercício 14 ....

Sejam $\mathcal{E}$ base ordenada de V^3, $\mathcal{F} = \{(1, 1, 1)_{\mathcal{E}}, (1, 2, 0)_{\mathcal{E}}, (1, 1, 0)_{\mathcal{E}}\}$ e $\mathcal{G} = \{(2, 1, -1)_{\mathcal{E}}, (3, 0, 1)_{\mathcal{E}}, (2, 0, 1)_{\mathcal{E}}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são bases ordenadas de V^3.

(b) Determine as matrizes mudança de base de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{G}$.

(c) Se $\vec{u} = (m, 2, 1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{v} = (1, 1, 1)_{\mathcal{F}}$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)_{\mathcal{G}}$, determine se possível $m \in \mathbb{R}$ para o qual os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não formem uma base ordenada de V^3.