Lista 8. Posições Relativas, Ângulos e Distâncias

MTM5512 - Geometria Analítica

Para os Exercícios de 1 a 13, $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ é um sistema de coordenadas ortogonal no espaço, fixado.

Exercício 1 ....

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa das retas r e s, cujas equações são dadas por

(a) $r\colon X = (1,-1,1)_\Sigma + \lambda(-2,1,-1)_\mathcal{E},\ \lambda \in \mathbb{R}$, e $\quad s\colon \begin{cases} y+z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}$.

(b) $r\colon \begin{cases} x-y-z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ e $\quad s\colon \begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$.

(c) $r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $\quad s\colon x = -y = \frac{z-1}{4}$.

Exercício 2 ....

Dadas as retas

$$r\colon \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \qquad s\colon x = \frac{y}{m} = z \qquad t\colon -x+z = y = -z-1,$$

encontre os valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que

(a) r e s sejam paralelas e não-coincidentes;

(b) r, s e t sejam paralelas a um mesmo plano;

(c) r e t sejam concorrentes;

(d) r e s sejam reversas.

Exercício 3 ....

Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que as retas r e s dadas por $r\colon X = (1,\alpha,0)_\Sigma + \lambda(1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, e $s\colon \begin{cases} x = z-2 \\ y = \beta z - 1 \end{cases}$ sejam coplanares e obtenha nesse caso a equação geral do plano que as contém.

Exercício 4 ....

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa da reta r e do plano π.

(a) $r\colon X = (1,1,0)_\Sigma + \lambda(0,1,1)_\mathcal{E},\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\quad \pi\colon x-y-z=2$.

(b) $r\colon \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ e $\quad \pi\colon X = (0,\frac{1}{2},0)_\Sigma + \alpha(1,-\frac{1}{2},0)_\mathcal{E} + \beta(0,1,1)_\mathcal{E},\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Exercício 5 ....

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2.

(a) $\pi_1\colon X = (1,1,1)_\Sigma + \alpha(0,1,1)_\mathcal{E} + \beta(-1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\pi_2\colon X = (1,0,0)_\Sigma + \alpha(1,-1,0)_\mathcal{E} + \beta(-1,-2,-2)_\mathcal{E}$, para $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(b) $\pi_1\colon 2x-y+2z-1=0$ e $\quad \pi_2\colon 4x-2y+4z=0$.

Exercício 6 ....

Obtenha uma equação vetorial da reta s, que contém o ponto $P = (1,1,0)_\Sigma$, é paralela ou está contida no plano $\pi\colon 2x+y-z-3=0$ e concorrente à reta $r\colon X = (1,0,0)_\Sigma + \lambda(-1,0,1)_\mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 7 ....

Calcule o volume do tetraedro determinado pelas retas $r\colon x = z = 0$, $s\colon x = y = 0$, $t\colon x - 2y = z = 0$ e pelo plano $\pi\colon x + y + z - 5 = 0$.

Exercício 8 ....

Em cada um dos itens abaixo, verifique se as retas dadas são ortogonais. Em caso afirmativo, verifique se são perpendiculares.

(a) $r\colon X = (1,2,3)_\Sigma + \lambda(1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, e $s\colon X = (2,4,4)_\Sigma + \lambda(-1,1,-1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$ e $s\colon (1,3,0)_\Sigma + \lambda(0,-7,5)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $r\colon x + 3 = y = \frac{z}{3}$ e $s\colon \frac{x-4}{2} = y - 4 = -z$.

Exercício 9 ....

Encontre uma equação vetorial de reta paralela ao plano $\pi\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$, perpendicular à reta que contém $A = (1,0,1)_\Sigma$ e $B = (0,1,2)_\Sigma$, e concorrente com a reta $s\colon X = (4,5,0)_\Sigma + \lambda(3,6,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 10 ....

Encontre a equação geral do plano que contém o ponto $P = (0,1,-1)_\Sigma$ e é perpendicular à reta $r\colon X = (0,0,0)_\Sigma + \lambda(1,-1,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 11 ....

Encontre as coordenadas do ponto simétrico ao ponto $P = (1,4,2)_\Sigma$ em relação ao plano $\pi\colon x - y + z - 2 = 0$.

Exercício 12 ....

Encontre o ponto simétrico do ponto $P = (1,1,-1)_\Sigma$ em relação à reta $r\colon \frac{x+2}{3} = y = z$.

Exercício 13 ....

Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (4,0,1)_\Sigma$ sobre o plano $\pi\colon 3x - 4y + 2 = 0$.

Exercício 14 ....

Determine as coordenadas da projeção ortogonal da reta $r\colon x + 1 = y + 2 = 3z - 3$ sobre o plano $\pi\colon x - y + 2z = 0$.

Exercício 15 ....

Verifique se os planos abaixo são perpendiculares.

(a) $\pi_1\colon x + y - z - 2 = 0$ e $\pi_2\colon 4x - 2y + 2z = 0$.

(b) $\pi_1\colon X = (1,-3,4)_\Sigma + \alpha(1,0,3)_\mathcal{E} + \beta(0,1,3)$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\pi_2\colon X = (0,0,0) + \alpha(1,1,6)_\mathcal{E} + \beta(1,-1,0)_\mathcal{E}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercício 16 ....

Um cubo tem diagonal AB onde $A = (1,1,0)_\Sigma$ e $B = (1,3,\sqrt{2})_\Sigma$, e uma de suas faces está contida na plano $\pi\colon x - y = 0$. Determine todos os seus vértices.

Exercício 17 ....

Encontre o cosseno do ângulo formado pelas retas $r\colon \begin{cases} \dfrac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ e $s\colon \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = z + 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

Exercício 18 ....

Calcule o ângulo (em radianos) entre os planos $\pi_1\colon 2x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_2\colon x - y + 3z - 10 = 0$.

Exercício 19 ....

Encontre a equação vetorial da reta que contém o ponto $P = (1, -2, 3)_\Sigma$ e que forma ângulos de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ radianos com os eixos Ox e Oy, respectivamente.

Exercício 20 ....

Calcule a medida (em radianos) dos ângulos entre a diagonal de um cubo e suas faces.

Exercício 21 ....

Calcule a distância do ponto $P = (0, -1, 0)_\Sigma$ à reta $r\colon \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 = 0 \end{cases}$.

Exercício 22 ....

Calcule a distância entre as retas $r\colon \frac{1-x}{2} = 2y = z$ e $s\colon x - 3 = \frac{y+1}{2} = z - 2$.

Exercício 23 ....

Calcule a distância do ponto $P = (0, 0 - 6)_\Sigma$ ao plano $\pi\colon x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Exercício 24 ....

Calcule a distância entre os planos $\pi_1\colon \begin{cases} x = 2 - \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\pi_2\colon 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Exercício 25 ....

Obtenha as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes das retas $r\colon \begin{cases} x = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$, $s\colon \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ e $t\colon x - y = x + z = 1 + z$.

Exercício 26 ....

Obtenha a equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)_\Sigma$ e $B = (0, 2, 1)_\Sigma$ e é equidistantes de $C = (2, 3, 0)_\Sigma$ e $D = (0, 1, 2)_\Sigma$.

Exercício 27 ....

Encontre as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao plano $\pi_1\colon 2x - y + 2z - 6 = 0$ são o dobro de suas distâncias ao plano $\pi_2\colon x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Exercício 28 ....

Calcule a distância entre os planos $\pi_1\colon ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2\colon ax + by + cz + d_2 = 0$.