Lista 8. Posições Relativas, Ângulos e Distâncias – Gabarito

MTM5512 - Geometria Analítica

Para os Exercícios de 1 a 13, $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ é um sistema de coordenadas ortogonal no espaço, fixado.

Exercício 1

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa das retas r e s, cujas equações são dadas por

(a) $r\colon X = (1,-1,1)_\Sigma + \lambda(-2,1,-1)_\mathcal{E},\ \lambda \in \mathbb{R}$, e $\quad s\colon \begin{cases} y+z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases}.$

Solução: Paralelas e não-coincidentes.

(b) $r\colon \begin{cases} x-y-z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ e $\quad s\colon \begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ x+y-2z=0 \end{cases}.$

Solução: Concorrentes.

(c) $r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $\quad s\colon x = -y = \frac{z-1}{4}$.

Solução: Reversas.

Exercício 2

Dadas as retas

$$r\colon \begin{cases} x = my-1 \\ z = y-1 \end{cases} \qquad s\colon x = \frac{y}{m} = z \qquad t\colon\ -x+z = y = -z-1,$$

encontre os valores de $m \in \mathbb{R}$ de modo que

(a) r e s sejam paralelas e não-coincidentes;

Solução: $m = 1$.

(b) r, s e t sejam paralelas a um mesmo plano;

Solução: $m = 0$ ou $m = 1$.

(c) r e t sejam concorrentes;

Solução: Todo $m \in \mathbb{R}$.

(d) r e s sejam reversas.

Solução: $m \neq 0$ e $m \neq 1$.

Exercício 3

Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que as retas r e s dadas por $r\colon X = (1,\alpha,0)_\Sigma + \lambda(1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, e $s\colon \begin{cases} x = z-2 \\ y = \beta z - 1 \end{cases}$ sejam coplanares e obtenha nesse caso a equação geral do plano que as contém.

Solução:

(1) Se $\beta = 2$, r e s são paralelas e não-coincidentes. O plano que as contém é $\pi\colon (\alpha+1)x - 3y + (5-\alpha)z + 2\alpha - 1 = 0$.

(2) Se $\beta \neq 2$ as retas nunca serão coplanares.

Exercício 4 ....

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa da reta r e do plano π.

(a) $r\colon X = (1,1,0)_\Sigma + \lambda(0,1,1)_\mathcal{E},\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\pi\colon x - y - z = 2$.

Solução: Transversais (ou concorrentes).

(b) $r\colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $\pi\colon X = (0, \frac{1}{2}, 0)_\Sigma + \alpha(1, -\frac{1}{2}, 0)_\mathcal{E} + \beta(0,1,1)_\mathcal{E},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solução: r está contida no plano π.

Exercício 5 ....

Em cada um dos itens abaixo, estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2.

(a) $\pi_1\colon X = (1,1,1)_\Sigma + \alpha(0,1,1)_\mathcal{E} + \beta(-1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\pi_2\colon X = (1,0,0)_\Sigma + \alpha(1,-1,0)_\mathcal{E} + \beta(-1,-2,-2)_\mathcal{E}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solução: Transversais.

(b) $\pi_1\colon 2x - y + 2z - 1 = 0$ e $\pi_2\colon 4x - 2y + 4z = 0$.

Solução: Paralelos não-coincidentes.

Exercício 6 ....

Obtenha uma equação vetorial da reta s, que contém o ponto $P = (1,1,0)_\Sigma$, é paralela ou está contida no plano $\pi\colon 2x + y - z - 3 = 0$ e concorrente à reta $r\colon X = (1,0,0)_\Sigma + \lambda(-1,0,1)_\mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução: $\vec{s} = (1,1,0)_\Sigma + \lambda(1,-5,-1)_\mathcal{E}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, por exemplo.

Exercício 7 ....

Calcule o volume do tetraedro determinado pelas retas $r\colon x = z = 0$, $s\colon x = y = 0$, $t\colon x - 2y = z = 0$ e pelo plano $\pi\colon x + y + z - 5 = 0$.

Solução: $\frac{250}{6}$ unidades de volume.

Exercício 8 ....

Em cada um dos itens abaixo, verifique se as retas dadas são ortogonais. Em caso afirmativo, verifique se são perpendiculares.

(a) $r\colon X = (1,2,3)_\Sigma + \lambda(1,2,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, e $s\colon X = (2,4,4)_\Sigma + \lambda(-1,1,-1)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução: São ortogonais e perpendiculares.

(b) $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$ e $s\colon (1,3,0)_\Sigma + \lambda(0,-7,5)_\mathcal{E}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução: São ortogonais e perpendiculares.

(c) $r\colon x + 3 = y = \frac{z}{3}$ e $s\colon \frac{x-4}{2} = y - 4 = -z$.

Solução: São ortogonais e perpendiculares.

Exercício 9 . . . .

Encontre uma equação vetorial de reta paralela ao plano $\pi\colon 2x-y+3z-1=0$, perpendicular à reta que contém $A=(1,0,1)_\Sigma$ e $B=(0,1,2)_\Sigma$, e concorrente com a reta $s\colon X=(4,5,0)_\Sigma+\lambda(3,6,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solução: $r\colon X=(\frac{13}{5},0,-\frac{23}{5})_\Sigma+\lambda(4,5,-1)_\mathcal{E}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercício 10 . . . .

Encontre a equação geral do plano que contém o ponto $P=(0,1,-1)_\Sigma$ e é perpendicular à reta $r\colon X=(0,0,0)_\Sigma+\lambda(1,-1,1)_\mathcal{E}$, para $\lambda\in\mathbb{R}$.

Solução: $\pi\colon x-y+z+2=0$.

Exercício 11 . . . .

Encontre as coordenadas do ponto simétrico ao ponto $P=(1,4,2)_\Sigma$ em relação ao plano $\pi\colon x-y+z-2=0$.

Solução: $Q=(3,2,4)_\Sigma$.

Exercício 12 . . . .

Encontre o ponto simétrico do ponto $P=(1,1,-1)_\Sigma$ em relação à reta $r\colon \frac{x+2}{3}=y=z$.

Solução: $Q=\frac{1}{11}(15,-17,-3)_\Sigma$.

Exercício 13 . . . .

Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P=(4,0,1)_\Sigma$ sobre o plano $\pi\colon 3x-4y+2=0$.

Solução: $Q=(\frac{58}{25},\frac{56}{25},1)_\Sigma$.

Exercício 14 . . . .

Determine as coordenadas da projeção ortogonal da reta $r\colon x+1=y+2=3z-3$ sobre o plano $\pi\colon x-y+2z=0$.

Solução: -

Exercício 15 . . . .

Verifique se os planos abaixo são perpendiculares.

(a) $\pi_1\colon x+y-z-2=0$ e $\pi_2\colon 4x-2y+2z=0$.

Solução: Sim.

(b) $\pi_1\colon X=(1,-3,4)_\Sigma+\alpha(1,0,3)_\mathcal{E}+\beta(0,1,3)$, para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\pi_2\colon X=(0,0,0)+\alpha(1,1,6)_\mathcal{E}+\beta(1,-1,0)_\mathcal{E}$, para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Solução: Sim.

Exercício 16 . . . .

Um cubo tem diagonal AB onde $A = (1, 1, 0)_\Sigma$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})_\Sigma$, e uma de suas faces está contida na plano $\pi\colon x - y = 0$. Determine todos os seus vértices.

Solução: O cubo em questão é determinado pelos planos

$$\pi_1\colon x - y = 0, \quad \pi_2\colon x - y + 2 = 0, \quad \pi_3\colon x + y - 2 = 0,$$

$$\pi_4\colon x + y - 4 = 0, \quad \pi_5\colon z = 0 \quad \pi_6\colon z = \sqrt{2}.$$

Logo os vértices são $A = (1, 1, 0)_\Sigma$, $(2, 2, 0)_\Sigma$, $(1, 1, \sqrt{2})$, $(2, 2, \sqrt{2})$, $(0, 2, 0)_\Sigma$, $(0, 2, \sqrt{2})_\Sigma$, $(1, 3, 0)_\Sigma$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})_\Sigma$.

Exercício 17 . . . .

Encontre o cosseno do ângulo formado pelas retas $r\colon \begin{cases} \dfrac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ e $s\colon \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = z + 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

Solução: -

Exercício 18 . . . .

Calcule o ângulo (em radianos) entre os planos $\pi_1\colon 2x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_2\colon x - y + 3z - 10 = 0$.

Solução: $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{11}}\right)$.

Exercício 19 . . . .

Encontre a equação vetorial da reta que contém o ponto $P = (1, -2, 3)_\Sigma$ e que forma ângulos de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ radianos com os eixos Ox e Oy, respectivamente.

Solução: -

Exercício 20 . . . .

Calcule a medida (em radianos) dos ângulos entre a diagonal de um cubo e suas faces.

Solução: $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercício 21 . . . .

Calcule a distância do ponto $P = (0, -1, 0)_\Sigma$ à reta $r\colon \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 = 0 \end{cases}$.

Solução: -

Exercício 22 . . . .

Calcule a distância entre as retas $r\colon \frac{1-x}{2} = 2y = z$ e $s\colon x - 3 = \frac{y+1}{2} = z - 2$.

Solução: Note que r e s são reversas e $d(r,s) = \frac{30}{\sqrt{126}}$.

Exercício 23

Calcule a distância do ponto $P = (0, 0 - 6)_\Sigma$ ao plano $\pi\colon x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Solução: -

Exercício 24

Calcule a distância entre os planos $\pi_1\colon \begin{cases} x = 2 - \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\pi_2\colon 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Solução: $d(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Exercício 25

Obtenha as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes das retas $r\colon \begin{cases} x = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$, $s\colon \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ e $t\colon x - y = x + z = 1 + z$.

Solução: -

Exercício 26

Obtenha a equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)_\Sigma$ e $B = (0, 2, 1)_\Sigma$ e é equidistantes de $C = (2, 3, 0)_\Sigma$ e $D = (0, 1, 2)_\Sigma$.

Solução: $\pi\colon z - 1 = 0$ ou $\pi\colon x + y + 2z - 4 = 0$.

Exercício 27

Encontre as equações do lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao plano $\pi_1\colon 2x - y + 2z - 6 = 0$ são o dobro de suas distâncias ao plano $\pi_2\colon x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Solução: -

Exercício 28

Calcule a distância entre os planos $\pi_1\colon ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2\colon ax + by + cz + d_2 = 0$.

Solução:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$