Lista 9. Cônicas – Gabarito

MTM5512 - Geometria Analítica

$\Sigma = (O, \mathcal{E})$ é um sistema de coordenadas ortogonal no plano, fixado.

Exercício 1 . . . .

Encontre a equação reduzida das seguintes elipses:

(a) os focos são os pontos $F_1 = (-5, 0)_\Sigma$, $F_2 = (5, 0)_\Sigma$ e dois dos vértices são os pontos $A_1 = (-13, 0)_\Sigma$ e $A_2 = (13, 0)_\Sigma$.

Solução: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

(b) os focos ocorrem nos pontos $F_1 = (0, -6)_\Sigma$ e $F_2 = (0, 6)_\Sigma$, e o eixo menor mede 17uc.

Solução: $\dfrac{4x^2}{289} + \dfrac{4y^2}{433} = 1$

(c) of focos são os pontos $F_1 = (-1, 0)_\Sigma$ e $F_2 = (1, 0)_\Sigma$, e o eixo maior mede $2\sqrt{2}$uc.

Solução: $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$

Exercício 2 . . . .

Na elipse, se $2c$ é a distância focal e $2a$ é a medida do eixo maior, então o valor

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

é chamado **excentricidade** da elipse. Encontre a equação na forma reduzida da elipse com dois vértices nos pontos $V_1 = (-5, 0)_\Sigma$, $V_2 = (5, 0)_\Sigma$ e excentricidade $\frac{3}{5}$.

Solução: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ ou $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{16y^2}{625} = 1$.

Exercício 3 . . . .

Em cada um dos itens abaixo, encontre os vértices, os focos e a excentricidade da elipse dada:

(a) $16x^2 + 25y^2 = 400$

Solução:
Vértices do eixo maior: $A_1 = (-5, 0)_\Sigma$, $A_2 = (5, 0)_\Sigma$.
Vértices do eixo menor: $B_1 = (0, -4)_\Sigma$, $B_2 = (0, 4)_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-3, 0)_\Sigma$, $F_2 = (3, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = \frac{3}{5}$.

(b) $x^2 + 9y^2 = 9$

Solução:
Vértices do eixo maior: $A_1 = (-3, 0)_\Sigma$, $A_2 = (3, 0)_\Sigma$.
Vértices do eixo menor: $B_1 = (0, -1)_\Sigma$, $B_2 = (0, 1)_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-2\sqrt{2}, 0)_\Sigma$, $F_2 = (2\sqrt{2}, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(c) $3x^2 + 4y^2 = 12$

Solução:
Vértices do eixo maior: $A_1 = (-2, 0)_\Sigma$, $A_2 = (2, 0)_\Sigma$.
Vértices do eixo menor: $B_1 = (0, -\sqrt{3})_\Sigma$, $B_2 = (0, \sqrt{3})_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-1, 0)_\Sigma$, $F_2 = (1, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = \frac{1}{2}$.

Exercício 4 . . . .

Encontre a equação reduzida da elipse que tem centro na origem, foco num dos eixos coordenados e contém os pontos $A = (3, 2)_\Sigma$ e $B = (1, 4)_\Sigma$.

Solução: $3x^2 + 2y^2 = 35$.

Exercício 5 . . . .

Encontre a equação reduzida da elipse que tem focos nos pontos $F_1 = (-3, 2)_\Sigma$ e $F_2 = (-3, 6)_\Sigma$, e a medida do eixo maior é 8uc.

Solução: $\dfrac{(x+3)^2}{12} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$

Exercício 6 . . . .

Em cada um dos itens abaixo a equação reduzida das hipérboles, onde:

(a) os focos são $F_1 = (-3, 0)_\Sigma$ e $F_2 = (3, 0)_\Sigma$, e os vértices são $A_1 = (-2, 0)_\Sigma$ e $A_2 = (2, 0)_\Sigma$.

Solução: $\dfrac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

(b) os vértices são $A_1 = (-15, 0)_\Sigma$ e $A_2 = (15, 0)_\Sigma$, e as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{4}{5}x$.

Solução: $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{144} = 1$

(c) $b = 4$, as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{3}{2}x$ e os focos estão sobre o eixo Oy.

Solução: $-\dfrac{x^2}{14} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

Exercício 7 . . . .

Em cada um dos itens abaixo, encontre os focos, a excentricidade $\frac{c}{a}$ e as assíntotas dadas por:

(a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$

Solução:
Vértices: $A_1 = (-12, 0)_\Sigma$, $A_2 = (12, 0)_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-13, 0)_\Sigma$, $F_2 = (13, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = \frac{13}{12}$.
Assíntotas: $y = \pm\frac{5}{12}x$

(b) $16x^2 - 25y^2 = 400$

Solução:
Vértices: $A_1 = (-5, 0)_\Sigma$, $A_2 = (5, 0)_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-\sqrt{41}, 0)_\Sigma$, $F_2 = (\sqrt{41}, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$.
Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{5}x$

(c) $3x^2 - y^2 = 3$

Solução:
Vértices: $A_1 = (-1, 0)_\Sigma$, $A_2 = (1, 0)_\Sigma$.
Focos: $F_1 = (-2, 0)_\Sigma$, $F_2 = (2, 0)_\Sigma$.
Excentricidade: $e = 2$.
Assíntotas: $y = \pm 3x$

Exercício 8 . . . .

Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação reduzida das parábolas, com vértice na origem, e:

(a) o foco é o ponto $F = (8, 0)_\Sigma$.

Solução: $y^2 = 32x$

(b) a diretriz é a reta $y - 2 = 0$.

Solução: $x^2 = 8y$

(c) o eixo é o Ox e um ponto da parábola é o $P = (5, 10)_\Sigma$.

Solução: $y^2 = 20x$

(d) dois pontos da parábola são $P_1 = (6, 18)_\Sigma$ e $P_2 = (-6, 18)_\Sigma$.

Solução: $x^2 = 2y$

Exercício 9 . . . .

Em cada um dos itens abaixo, encontre os vértices, os focos e as diretrizes das parábolas, dadas por:

(a) $y^2 = 16x$

Solução:
Vértice: $V = (0, 0)_\Sigma$
Foco: $F = (4, 0)_\Sigma$
Diretriz: $r: x + 4 = 0$

(b) $y^2 = 28x$

Solução:
Vértice: $V = (0, 0)_\Sigma$
Foco: $F = (7, 0)_\Sigma$
Diretriz: $r: x + 7 = 0$

(c) $x^2 + 40y = 0$

Solução:
Vértice: $V = (0,0)_\Sigma$
Foco: $F = (0,-10)_\Sigma$
Diretriz: $r\colon y - 10 = 0$

Exercício 10 . . . .

Em cada um dos itens abaixo, encontre a equação na forma reduzida da parábola, com focos e diretrizes dados por

(a) $F = (2,3)_\Sigma$ e $r\colon x = 0$

Solução: $(y-3)^2 = 4(x-1)$

(b) $F = (3,1)_\Sigma$ e $r\colon y + 3 = 0$

Solução: $(x-3)^2 = 8(y+1)$

(c) $F = (-4,-2)_\Sigma$ e $r\colon 2x + y = 3$

Solução: $x^2 - 4xy + 52x + 4y^2 + 26y + 91 = 0$ (solução num arquivo separado)

Exercício 11 . . . .

Classifique o tipo de cada uma das cônicas abaixo:

(a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 2 = 0$

Solução: $\Delta = -32 < 0 \Rightarrow$ tipo elíptico.

(b) $x^2 + 4y^2 + 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$

Solução: $\Delta = 11 > 0 \Rightarrow$ tipo hiperbólico.

(c) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 1 = 0$

Solução: $\Delta = 0 \Rightarrow$ tipo parabólico.

(d) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

Solução: $\Delta = -24 < 0 \Rightarrow$ tipo elíptico.

(e) $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

Solução: $\Delta = 64 > 0 \Rightarrow$ tipo hiperbólico.

Exercício 12 . . . .

Encontre um exemplo (diferente dos dados em aula) para cada um dos 9 tipos de cônicas.