多元函数微分学

多元函数

点集的基本概念

E 是一个点集，如果存在 $r > 0$ 使 $E \subset N(O, r)$ 那么 E 是一个**有界集**，否则是**无界集**。

E 是一个点集，M 是一个点，如果 $\forall \delta > 0$ 以下两个

- $N(M, \delta) \cap E \neq \varnothing$
- $N(M, \delta) \cap E^c \neq \varnothing$

那么 M 是 E 的一个**边界点**。边界点的集合称作**边界** ∂E。

如果 E 上所有的点都是内点，那么 E 是一个**开集**，连通的非空开集称为**开区域**。

如果 E 是开区域，那么 $\bar{E} = E \cup \partial E$ 是一个**闭区域**。

多元函数的极限

以下规则对多元函数的极限仍然成立

- 四则运算和复合函数的极限运算
- 极限和无穷小
- 保序性，保号性，夹逼准则
- 极限存在 --> 局部有界

以下规则不再成立

- 单调有界准则
- 洛必达法则

多元函数的连续性

若多元函数 f 在 X_0 有定义，有极限，且定义与极限相等，那么 f 在 X_0 连续。

多元初等函数在定义域内是连续的。

最值定理：若多元函数 f 在有界闭区域 D 上连续，那么 f 在 D 上有最大值、最小值。

介值定理：若多元函数 f 在有界闭区域 D 上连续，f 在 D 上有最大值 M、最小值 m，那么 $\forall m < \mu < M,\ \exists \xi \in D,\ f(\xi) = \mu$。

偏导数

全微分

如果函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全增量可以表示成

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

那么 f 在 (x,y) **可微**，$A\Delta x + B\Delta y$ 是 f 在 (x,y) 的**全微分**。

- 可微必可偏导，$f_x(x,y) = A, f_y(x,y) = B$
- 可偏导未必可微，如 $f(x,y) = (xy)/(x^2+y^2)$
- 可微必连续
- 可偏导且偏导连续，必可微

方向导数

方向导数描述了

$$\lim_{P\to P'} \frac{f(P)-f(P')}{|\vec{PP'}|}$$

若 $\vec{l}$ 的方向角是 α,β,γ，f 在 P 可微，那么 f 在这一点对 $\vec{l}$ 的导数存在

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = \nabla f \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, cos\gamma)$$

可以表示成梯度的投影。

隐函数微分

已知

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, v) = 0 \\ G(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, v) = 0 \end{cases}$$

确定 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $v(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x_i,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

几何应用

曲线

已知平面光滑曲线 $F(x,y)=0$，有

- 切线，$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$
- 法线，$F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

已知空间曲线 $x=\phi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

- 切向量 (ϕ',ψ',ω')

已知空间曲线 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$

- 切向量是 $\nabla F\times\nabla G$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

曲面

已知光滑曲面 $F(P)=0$ ，那么在 P_0 处

- 法向量 $\vec{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$
- 切平面 $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$

如果已知光滑曲面 $z=f(x,y)$ 那么

- 法向量 $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$

高阶偏导数

多元函数的极值和最值

如果 P 满足 $\nabla f(P)=0$，那么 P 是 f 的**稳定点/驻点**。稳定点与偏导数不存在的点合成**临界点**，极值点一定是临界点。不是极值点的临界点称为**鞍点**。

设 f 在 $N(P,\delta)$ 内有二阶连续偏导，记

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{vmatrix}$$

那么

- $H>0$，$f_{xx}(P)>0$，P 是极小值点

- $H > 0$，$f_{xx}(P) < 0$，P 是极小值点
- $H < 0$，P 是鞍点
- $H = 0$，没有结论

拉格朗日乘数法

在 $\phi(x,y) = 0$ 下，求 $f(x,y)$ 的极值，相当于求 $f(x,\psi(x))$ 的极值，有

$$\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}x} = f_x + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\phi_x}{\phi_y}$$

所以

$$\begin{cases} f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

我们定义拉格朗日函数 $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$，那么极值点满足 $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ 。