

# Fysiikan perusteet

Teemu Hynninen  
Turun yliopisto

Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen -lisensillä.  
(<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.fi>).

# Sisällys

<b>Johdanto</b>	<b>7</b>
Fysiikka tieteenä ja oppiaineena . . . . .	8
Kuvat ja geometria . . . . .	11
Matemaattinen analyysi . . . . .	13
Yhteenvetö: Johdanto . . . . .	19
<b>I Mekaniikka</b>	<b>21</b>
<b>1 Liike</b>	<b>23</b>
1.1 Paikka, aika ja nopeus . . . . .	24
1.2 Liikeen graafinen esittäminen . . . . .	26
1.3 Paikan määrittäminen nopeuden avulla . . . . .	29
1.4 Suunnat ja vektorit . . . . .	31
1.5 Kierteenvyys . . . . .	33
Yhteenvetö: Liike . . . . .	41
<b>2 Säilymislait</b>	<b>45</b>
2.1 Säilyvät suureet . . . . .	46
2.2 Energia . . . . .	49
2.3 Energian laatu . . . . .	58
2.4 Liikevirta . . . . .	62
2.5 Massakeskipiste . . . . .	75
Yhteenvetö: Säilymislait . . . . .	81
<b>3 Voima ja työ</b>	<b>87</b>
3.1 Voima liikkeen muuttajana . . . . .	88
3.2 Voiman ja vastavoiman laki . . . . .	92
3.3 Voimien graafinen analyysi . . . . .	94
3.4 Vuorovaikutuksiin liittyviä voimia . . . . .	101
3.5 Voiman impulssi ja työ . . . . .	111
Yhteenvetö: Voima ja työ . . . . .	125
<b>4 Moniulotteinen liike</b>	<b>131</b>
4.1 Kolmiulotteinen avaruus . . . . .	132
4.2 Dynamikka . . . . .	134
4.3 Liikevirta . . . . .	139
4.4 Työ . . . . .	143
4.5 Kentät . . . . .	153
Yhteenvetö: Moniulotteinen liike . . . . .	162

<b>5 Pyörimislüike</b>	<b>165</b>
5.1 Ympyrälüike . . . . .	166
5.2 Pyörimislüike . . . . .	174
5.3 Momentti . . . . .	182
5.4 Kulmaliike . . . . .	190
5.5 Moniulotteinen pyörimislüike . . . . .	196
Yhteenvetö: Pyörimislüike . . . . .	201
<b>II Mekaniikasta termodynamikkaan</b>	<b>207</b>
<b>6 Suhteellisuus</b>	<b>209</b>
6.1 Tasainen ja kiihtyvä suhteellinen liike . . . . .	210
6.2 Klassinen suhteellisuus . . . . .	214
6.3 Liikemääärän ja energian suhteellisuus . . . . .	217
6.4 Suhteellisuusteoaria . . . . .	226
6.5 Avaruusaika . . . . .	238
6.6 Säilymislait suhteellisuusteoriassa . . . . .	248
Yhteenvetö: Suhteellisuus . . . . .	258
<b>7 Jatkuva aine</b>	<b>263</b>
7.1 Paine . . . . .	264
7.2 Virtausmekaniikkaa . . . . .	274
7.3 Lämpötila ja lämpöenergia . . . . .	279
7.4 Tilanmuuttujat . . . . .	295
Yhteenvetö: Jatkuva aine . . . . .	301
<b>8 Hiukkasista koostuva aine</b>	<b>305</b>
8.1 Kaasun hiukkasmalli . . . . .	306
8.2 Kaasujen ominaislämpökapasiteetti . . . . .	312
8.3 Mikro- ja makrotilat . . . . .	317
8.4 Entropia . . . . .	326
Yhteenvetö: Hiukkasista koostuva aine . . . . .	334
<b>9 Termodynamikka</b>	<b>337</b>
9.1 Kvasistaattiset prosessit . . . . .	338
9.2 Termodynamiiset perusprosessit . . . . .	342
9.3 Energian ja entropian muutokset . . . . .	346
9.4 Energian hyödynnettävyys . . . . .	357
Yhteenvetö: Termodynamikka . . . . .	367
<b>III Sähkömagnetismi</b>	<b>373</b>
<b>10 Sähkövaraus ja -kenttä</b>	<b>375</b>
10.1 Sähkövaraus . . . . .	376
10.2 Sähkökenttä . . . . .	384
10.3 Gaussin laki . . . . .	398
10.4 Potentiaali . . . . .	412
10.5 Sähkövaraksen ja -kentän manipulointi . . . . .	427
Yhteenvetö: Sähkövaraus ja -kenttä . . . . .	441
<b>11 Sähkövirta</b>	<b>449</b>
11.1 Sähkövirta . . . . .	450
11.2 Johtavuus ja resistanssi . . . . .	456
11.3 Virtapiirit . . . . .	463
11.4 Energia virtapiirissä . . . . .	480
Yhteenvetö: Sähkövirta . . . . .	488

<b>12 Magneettikenttä</b>	<b>493</b>
12.1 Magneetit . . . . .	494
12.2 Magneettikenttä . . . . .	497
12.3 Gaussin ja Ampèren lait magneettikentälle . . . . .	509
12.4 Dipolit . . . . .	515
Yhteenvetö: Magneettikenttä . . . . .	527
<b>13 Sähkömagnetismi</b>	<b>533</b>
13.1 Sähkömagneettinen induktio . . . . .	534
13.2 Sähkömagneettinen yhteisvuorovaikutus . . . . .	541
13.3 Induktanssi . . . . .	551
13.4 Sähkömagnetismin peruslait . . . . .	560
Yhteenvetö: Sähkömagnetismi . . . . .	566
<b>IV Klassiset ja kvanttimekaaniset aallot</b>	<b>571</b>
<b>14 Jaksollinen liike</b>	<b>573</b>
14.1 Harmoninen liike . . . . .	574
14.2 Harmonisen liikkeen dynamiikka . . . . .	581
14.3 Likimainen harmoninen liike . . . . .	587
14.4 Yhdistetty harmoninen liike . . . . .	592
14.5 Resonanssi . . . . .	602
Yhteenvetö: Jaksollinen liike . . . . .	610
<b>15 Aaltoliike</b>	<b>615</b>
15.1 Aaltoliike . . . . .	616
15.2 Aallon eteneminen . . . . .	619
15.3 Sinimuotoiset aallot . . . . .	625
15.4 Aallon kuljettama energia . . . . .	630
15.5 Aaltojen superpositio . . . . .	635
15.6 Väliaineet ja rajapinnat . . . . .	642
15.7 Aaltouhtälö . . . . .	661
Yhteenvetö: Aaltoliike . . . . .	664
<b>16 Moniulotteiset aallot</b>	<b>671</b>
16.1 Hajautuvat aallot . . . . .	672
16.2 Aallot ja väliaineet . . . . .	679
16.3 Interferenssi . . . . .	685
16.4 Optiikka . . . . .	693
Yhteenvetö: Moniulotteiset aallot . . . . .	719
<b>17 Kvanttimekaniikka</b>	<b>725</b>
17.1 Foton . . . . .	726
17.2 Kvanttimekaaniset hiukkaset . . . . .	734
17.3 Todennäköisyystulkinta . . . . .	739
17.4 Kvantittuminen . . . . .	753
17.5 Atomi . . . . .	770
Yhteenvetö: Kvanttimekaniikka . . . . .	785



# Johdanto

Tervetuloa opiskelemaan fysiikkaa! Ennen kuin käydään varsinaiseen asiaan, on syytä pohtia hiukan fysiikkaan ja fysiikan opiskeluun liittyviä yleisiä püürteitä sekä fysiikassa tarvittavia työskentelytapoja. Fysiikan opintojen tavoite ei nimittäin ole opettaa vain faktoja vaan luonnontieteellistä ajattelutapaa. Niinpä tämä johdantoluku ei ole vain johdanto tähän materiaaliin vaan myös fysiikan esittely tieteenä sekä johdanto fysiikan opintoihin. Johdannossa annetaan vinkkejä opintojen alkuun ja selitetään yleisiä teknikoita, joita tarvitaan kaikilla fysiikan alueilla.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla tieteellinen metodi
- määritellä käsitteet suure ja dimensio
- määrittää laskun lopputuloksen järkevä tarkkuus
- tehdä yksinkertaisia suuruusluokka-arvioita
- kuvalla fysiikalisten ongelmien ratkaisussa käytettäviä menetelmiä

## Fysiikka tieteenä ja oppiaineena

**Fysiikka** on luonnontiede, joka pyrkii selittämään luonnonilmiöitä kaikilla tasoilla alkeishiukkasten käyttäytymisestä koko maailmankaikkeuden toimintaan. Fysiikka tukee kaikkia muita luonnontieteitä ja fysikaalisten ilmiöiden kuvamiseen luotuja ideoita sovelletaan nykyään myös selittämään ilmiöitä, jotka eivät ennen ole kuuluneet fysiikan alaan. Fysiikassa ajattelu on usein minimalistista ja analyyttistä — monimutkaisista ilmiöistä rakennetaan mahdollisimman yksinkertaisia malleja, jotta ilmiöiden keskeiset piirteet ja selittävät tekijät voitaisiin selittää. Fysiikassa haluamme ymmärtää, miten luonto käyttää ja mitkä periaatteet luonnonilmiöitä ohjaavat.

Fysiikan opiskelussa tarkoitus ei ole omaksua suurta määrää tietoa lyhyessä ajassa. Fysiikassa on loppujen lopuksi varsin vähän keskeisiä periaatteita, jotka selittävät mitä moninaisimpia ilmiöitä. Siksi laatu korvaa määärän. Opinnoissa tavoitteena on huomata, mitkä lait ja periaatteet ovat yleispäteviä sekä oppia soveltamaan näitä periaatteita. Fysiikka on eksaktia, ja lait sekä määritelmät on hallittava täsmällisesti, jotta niitä pystyisi soveltamaan. Uusia asioita opiskeltaessa väärinkäsityksiä syntyy vältämättä. Virheistä ei pidä kuitenkaan lannistua vaan ottaa opiksi. Siksi fysiikan opinnoissa onkin ensisijaisen tärkeää testata omaa osaamistaan ja harjoitella, jotta mahdolliset virheet omassa ymmärryksessä paljastuisivat. Tämä vaatii opiskelijan aktiivista toimintaa, jota opettaja ei voi mitenkään korvata.

Tämä oppimateriaali on tarkoitettu opiskelijoiden ensisijaiseksi uuden informaation lähteeksi, ja siinä yritytään selittää asioita tasolla, jonka myös asiaan ensimmäistä kertaa tutustuva lukija voisi ymmärtää. Ajoittain teksti on kuvalevaa, jolloin tarkoitus on selittää keskeiset ideat yleisellä tasolla. Yleensä näitä osioita seuraa saman asian täsmällinen matemaattinen käsittely. Tällä tavalla pyritään antamaan ensin asioista yleiskuva ja antamaan esimerkkejä aiheeseen liittyvistä fysikaalisista ilmiöistä. Matematiikkaa puolestaan käytetään suureiden ja lakienvälisten täsmällisessä määrittelyssä ja määrellisten päättelyiden ilmaisemisessa. Yleensä molempia tarvitaan, ja tavallisesti on hyödyllistä tarkastella ilmiötä ensin puhtaasti fysikaalisesti, ilman matematiikan painolastia.

Koska fysiikka on eksakti tiete, fysiikan opinnoissa ei riitä se, että osaa nimetä suureita ja ilmiöitä. Tällainen tieto ei vielä ole ymmärrystä eikä sillä voi tehdä mitään hyödyllistä. Älä siis koskaan lukiessasi yritä opetella asioita ulkoa vaan pohdi, mitä lukemasi tarkoittaa. Toisaalta fysiikkaa ei myöskään opi pelkästään lukemalla vaan luetun ymmärtämistä pitää jatkuvasti testata väärinkäsitysten kitkemiseksi. Siksi opiskelu vaatii myös jatkuva harjoitteua. Opiskelkaa siis ahkerasti, kysykää, keskustelkaa ja ihmetelkää, kuinka maailma toimii!

### Tieteellinen metodi

**Tiede** on selkeästi tehokkain ihmisen kehittämistä tavoista kerätä tietoa. Tiede ei tarkoita tunnettuja tosiasioita tai viimeisintä teknikkaa, vaan tiede on *menetelmä*, jonka keskeiset ominaisuudet ovat *kriittisyys* ja *korjautuvuus*. Tiede ei ole erehtymätöntä, eikä tieteeltä myöskään vaadita varmuutta. Usein täytyy varmuutta asioista ei voida koskaan saavuttaakaan, ja ajatuksia, jotka ovat uskottavia mutteivat aukottomasti todistettuja, voivat olla hyödyllisiä. Tieteellisen tiedon pitää kuitenkin olla *perusteltua ja testattavaa*, ja jos tieteen väitteet osoittautuvat ristiriitaisiksi, väitettilä pitää joko korjata tai niistä pitää luopua.

Tieteellinen **teoria** ei tarkoita arvausta kuten puhekielellä termiä käytetään vaan ristiriidatonta tietorakennetta, joka kykenee selittämään ilmiötä. Esimerkiksi fysiikassa puhutaan painovoimateoriasta, mikä siis tarkoittaa painovoiman toimintaa kuvaavaa selitysmallia — ei spekulaatiota siitä, onko painovoima olemassa. Tieteellinen arvaus on **hypoteesi**. Jotta uusi väite voisi saavuttaa fysikaalisen teorian tason, sen pitää olla sekä sisäisesti ristiriidaton että kyettä kuvalemaan asioita, joita aiemmat teoriat eivät selitä. Tämä on mahdollista, jos väite käsitlee uusia ilmiöitä, joita ei ole aiemmin tutkittu, tai jos sen ennusteet jo tunnehuista ilmiöistä ovat erilaiset kuin vanhojen teorioiden. Jos väite johtaa täsmälleen samoihin päättelmiin kuin aikaisemmat teoriat, se ei ole varsinaisesti uusi teoria vaan vain uusi tapa ilmaista vanha teoria. Tällainenkin tieteen kehitys on toki tärkeää, sillä usein monimutkaisia ilmiöitä voidaan hahmottaa useilla tavoilla.

Fysiikka on kokeellinen tiete, ja luonto on fysiikan teorioiden viimeinen tuomari. Fysiikan teorian pitää siis kyetä ennustamaan jotakin, jota voidaan verrata kokeellisiin tuloksiin, ja teoreettisen sekä kokeellisen tiedon vertaaminen onkin fysiikassa keskeistä: Tarkastelemalla asioita vain teoreettisesti ei voida saada selville, kuvaleeko teoria todella luontoa. Toisaalta tekemällä kokeita saamme tietää miten luonto käyttää ja mitkä periaatteet ovat teorian toimivuuden testi, ja teorian on ideaalisesti tarkoitus selittää luonnon toiminta *kaikissa mahdollisissa tilanteissa*.

Oppiminen muistuttaa paljon tieteellistä prosessia. Teillä opiskelijoilla on omat käsityksenne siitä, kuinka maailma toimii ja kuinka fysiikan lait sitä ohjaavat. Nämä käsitykset ovat teidän oma “fysiikan teorianne”, joka perustuu osittain aikaisempaan kouluopetuksen ja osittain omiin kokemuksiinne. Fysiikan perusperiaatteet ovat loppujen lopuksi yksinkertaisia mutta usein abstrakteja ja niiden löytäminen pelkästään arkikokemuksen perusteella on lähes mahdotonta. Esimerkiksi ensimmäiset nykyfysiikan mukaan oikeat käsitykset kappaleiden liikettä ohjaavista mekanikan laeista keksittiin vasta 1600-luvulla, vaikka ihmiset ovat aina pohtineet

maailman toimintaa. Koska teidänkin tapanne ajatella maailmasta perustuu pitkälti kokemuksiin, todennäköisesti monet nykyisistä käsityksistänne fysiikasta ovat *vääriä*. Lisäksi fysiikka ulottuu alueille, joita ei normaalisti havaita, joten käsityksenne fysiikasta ovat myös *puutteellisia*. Fysiikan ymmärtäminen vaatiikin siis sekä puutteellisten ajattelumallien täydentämistä että väärrien ajatusten löytämistä ja korjaamista.

Fysiikka muodostaa kumuloituvan tietorakenteen, jossa uudet teoriat ja mallit pohjautuvat aikaisempaan tietoon. Siksi onkin aivan välttämätöntä aina pyrkiä ymmärtämään yksi aihe mahdollisimman hyvin ennen seuraavaan siirtymistä. Vaikka esimerkiksi lämpöilmiötä kuvaava termodynamiikka käsittää näennäisesti eri ilmiöitä kuin liikettä kuvaava mekanikka, moderni termodynamiikka kuvailee lämpöilmiötä suurten hiukkasjoukkojen mekanikan kautta. Niinpä termodynamiikan ymmärtäminen vaatii myös mekanikan hallintaa. Fysiikan opinnoissa on siis syttä edetä järjestelmällisesti ja pyrkiä ennen kaikkea ymmärtämään kukin aihe mahdollisimman hyvin ennen seuraavaan siirtymistä, sillä puutteellisesti omaksutut tai väärin ymmärretty ajattelumallit estäävät oppimisen myös jatkossa.

Onkin välttämätöntä, että jatkuvasti testaatte omia käsityksiänne ja pohditte, onko oma ajattelutapanne ristiriidassa kohtaamanne oppikirjatiedon kanssa. Perinteisesti opetus on perustunut siihen, että opettaja kertoo opiskelijoille mikä on vallitseva tieteellinen käsitys. Tämä on nopeaa, ja näin voidaan käydä läpi hyvin suuri määrä informaatiota hyvin lyhyessä ajassa. Ongelmana tässä opetustavassa on kuitenkin se, ettei pelkkä asioiden kuuleminen riitä muuttamaan tapaanne ajatella, vaan se korkeintaan opettaa ratkaisemaan oppikirjatehtäviä. Oppimisen tavoite ei kuitenkaan ole tehtävien ratkaiseminen vaan oikeiden ajattelumallien omaksuminen. Tämä puolestaan vaatii teiltä opiskelijoilta työtä. Ei riittää tutustua vain vallitsevaan fysiikan teoriaan, vaan on välttämätöntä tarkastella myös sitä tukevaa todistusaineistoa — koetuloksia ja teoreettista päättelyä — jotta voitte ymmärtää mihin väitteet perustuvat ja löytää ne itse. Niinpä tämäkään materiaali ei anna valmiita vastauksia kaikkeen, vaan pyrkii ensisijaisesti esittelemään sitä fysikaalista ajattelua, jolla vastaukset voidaan löytää.

Tehtävien tarkoitus puolestaan on antaa teille mahdollisuus testata omassa mielessänne olevaa käsitystä fysiikan laeista. Tätä varten tekstiin on sijoitettu aika-ajoin pohdintakysymyksiä, jotka liittyyvät välittömästi niihän edeltäneeseen asiaan. Kysymysten tarkoitus on herättää pohtimaan luetun merkitystä, sillä pelkkä lukeminen ei vielä johda oppimiseen. Älä koskaan ohita pohdintakysymystä ennen kuin osaat mielestääsi vastata siihen! Jos huomaat, ettet osaa vastata kysymykseen, lue edellinen kappale tai luku uudestaan ja etene vasta kun osaat vastata kaikkiin kysymyksiin. Väliin jätetty kysymys tarkoittaa mitä todennäköisimmin sitä, että jotakin tärkeää on jäänyt ymmärtämättä eikä sinulla ole vielä valmiuksia oppia seuraaviakaan aiheita.



**0.1** Taitava opiskelija varaa aina kaikkiin tehtäviin riittävästi aikaa. Jos kuitenkin huomaat ettei sinulla olekaan tarpeksi aikaa esimerkiksi tehdä moniosaisista tehtävää kunnolla, onko parempi vilkaista nopeasti kaikkiaasioita vai opiskella yksi asia kunnolla ja palata myöhemmin muuihin aiheisiin?

Myöskään virheitä ei pidä pelätä. Ette olisi opiskelemassa, jos jo tietäisitte kaiken. Väärinkäsitykset ovat tavallisista ja niiden korjaaminen voi olla hidasta, joten epäonnistumisia tapahtuu välttämättä. Tieteessä epäonnistumiset ovat jokapäiväisiä, eikä tiedettä edes tarvittaisi jos vastaukset olisivat selviä jo etukäteen. Monet suuret tieteelliset harppaukset ovatkin tapahtuneet juuri löydettäessä vallitsevan tieteellisen käsityksen kanssa ristiriitaisia ilmiöitä, sillä tällaiset ilmiöt ovat merkki vallitsevan tiedon puutteellisuudesta. Samoin kaikkein paras mahdollisuus oppia onkin huomata, että jokin ongelmista ratkeaaakin eri tavalla kuin mitä itse ajattelitte, koska silloin voitte pohtia, miten oma käsityksenne vaatii korjaamista tai täydentämistä. Epäonnistuminen on merkki siitä, että ette tiedä ja osaa vielä kaikkea. Epäonnistumisen syiden pohtiminen on tie uusien asioiden oppimiseen.

## Suureet

Fysiikka pyrkii selittämään millainen maailmankaikkeuden rakenne on ja miten sen osat käyttäytyvät. Tutkimuksen kohteet ulottuvat hyvin konkreettisista kuten kappaleiden liikkeestä hyvin abstrakteihin kuten informaatioon. Erityisesti fysiikassa maailmaa pyritään kuvaamaan mitattavissa olevien ominaisuuksien eli **suureiden** avulla, ja fysiikan teorioiden eräs tavoite on kuvata, kuinka suureet riippuvat toisistaan. Luonnontieteissä on käytössä suureiden **SI-järjestelmä** (ranskaa, 'Système International d'Unités'), joka määrittelee seitsemän perussuuretta ja näiden yksiköt — metrin, kilogramman, sekunnin, ampeerin, moolin, kelvinin sekä kandelan — ja muut suureet on ilmaistavissa näiden avulla. Järjestelmän tarkoitus on määritellä kaikki mitattavat suureet absoluuttisten luonnonvakioiden kautta, mikä onnistuikin lopulta riittävällä tarkkuudella vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksessa.

Fysiikassa suureille käytetään tavallisesti lyhennysmerkintänä yhden kirjaimen *symboluja*. Jotkin ovat vankeutuneet, ja esimerkiksi massan symboli on lähes aina *m*, kun taas toisille suureille käytetään eri läheteissä eri symbolleita. Jos sama symboli esiintyy useassa merkityksessä, symbolit erotellaan tavallisesti ala- tai yläindeksein tai muilla lisämerkinnöillä. Esimerkiksi usean kappaleen massoja voidaan merkitä

$m_1, m_2, m_3, \dots$  tai vaikkapa  $m, m', m''$ . Joillakin symboloilla on puolestaan on useita merkityksiä, joten pelkän symbolin perusteella ei voi koskaan päätellä matemaattisten lausekkeiden merkitystä. Suureita kuvaavat symbolit kirjoitetaan tavallisilla kursiivilla erotuksena muista lyhenteistä.

Fysikaalisilla suureilla on **laatu** eli **dimensio**, joka kertoo, millaista fysikaalista ominaisuutta suure kuvailee. Esimeriksi pituus, aika, lämpötila ja massa ovat erilaisia suureiden laatuja eli dimensioita. Laatuun liittyy myös aina **yksikkö**, ja suureilla laskettaessa kuhunkin suureeseen liittyvään symboliin ajatellaan sisältyvän sekä suureen suuruus että sen yksikkö. Esimeriksi massan yksikkö on kilogramma, ja voidaan kirjoittaa  $m = 1.0 \text{ kg}$  eli symboliin  $m$  sisältyy sekä suureen suuruus 1.0 että sen yksikkö, kg. Suureen yksikköä merkitään hakasuluin, esimeriksi  $[m] = \text{kg}$ . Dimensiollisten suureiden laskutoimituksissa on seuraavat perussäännöt:

- Yhteen- ja vähenneyslasku on mahdollinen vain samaa dimensiota olevien suureiden välillä, jolloin lopputuloksella on edelleen sama dimensio:  $a + b$  on määritelty jos ja vain jos  $[a] = [b]$  ja tällöin  $[a + b] = [a] = [b]$ . On siis järkevä laskea  $2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$ , mutta ei ole mielekästä laskea  $2 \text{ kg} + 1 \text{ m}$  (kilogramma + metri). Huomaa myös, että vaikka suureen arvo olisi nolla, sillä voi edelleen olla yksikkö. Esimeriksi  $1 \text{ kg} - 1 \text{ kg} = 0 \text{ kg}$ , eikä lopputulos ole pelkkä nolla ilman yksikköä.
- Kerto- ja jakolasku on mahdollinen eri dimensiota olevien suureiden välillä, jolloin lopputuloksesta saadaan jotakin uutta dimensiota oleva suure. Esimeriksi jos pituus (yksikkö metri, m) jaetaan ajalla (yksikkö sekunti, s), lopputuloksesta saadaan suure, jonka dimensio on pituus jaettuna ajalla ja yksikkö metri/sekunti ( $\text{m/s}$ ).
- Jos suure on jonkin muun alkeifunktion kuin polynomien tai juurifunktion argumentti, sen on oltava paljas luku (siis yksikötön suure): esim. eksponenttifunktio  $e^a$  on määritelty vain jos  $[a] = 1$ . Toisin sanoen jos lasketaan esimeriksi  $y = Ae^{kx}$ , missä suureen  $x$  yksikkö on m, on suureen  $k$  yksikön väittämättä oltava  $1/\text{m}$ , koska eksponenttifunktion sisällä olevan lausekkeen  $kx$  on oltava yksikötön. On silti sallittua laskea esim.  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ . Jos  $[x] = \text{m}$ , tällöin  $[x^{1/2}] = \text{m}^{1/2}$ .
- Yhtälöt pätevät vain jos niiden molemmilla puolella olevien lausekkeiden dimensio on sama:  $a = b$  on tosi vain jos  $[a] = [b]$ . Jotta yhtälö olisi tosi, tietenkin myös suureiden lukuarvon on oltava sama.

Koska yksiköiden yhdistelyssä on näinkin vahvat rajoitukset, **yksikkötarkastelu** on hyvä ja helppo apukeino fysikaalisessa päättelyssä. Jos laskussa rikotaan jotakin yllä mainituista ehdoista tai jos laskun lopputuloksen dimensio ei vastaa suuretta, jota sen tulisi esittää, jossakin on pakko olla karkea virhe.

### esimerkki 0.1

### Yksikkötarkastelu

Opiskelijat A, B ja C ovat laskeneet erään kappaleen nopeuden ja saaneet tulokset  $v_A = ax - x/t$ ,  $v_B = be^{at}$  ja  $v_C = be^{ax}$ , missä symbolien yksiköt ovat  $[x] = \text{m}$ ,  $[t] = \text{s}$ ,  $[a] = 1/\text{s}$ ,  $[b] = \text{m/s}$ . Mitkä tuloksista voivat olla oikein?

Tarkistetaan onko tulosten yksikkö oikea nopeuden yksikkö m/s. Opiskelijan A vastauksen yksikkö on

$$[v_A] = [a][x] - [x]/[t] = 1/\text{s} \cdot \text{m} - \text{m/s} = \text{m/s} - \text{m/s} = \text{m/s} \quad (1)$$

eli yksikkötarkastelun puolesta tulos voisi olla oikein. Opiskelijan B tulos on

$$[v_B] = [b][e^{at}] = \text{m/s} \cdot [e^{1/\text{s} \cdot \text{s}}] = \text{m/s} \cdot [e^1] = \text{m/s} \cdot 1 = \text{m/s}, \quad (2)$$

eli tämäkin tulos voisi olla oikein. Opiskelijan C vastauksen yksikkö puolestaan on

$$[v_B] = [b][e^{ax}] = \text{m/s} \cdot [e^{1/\text{s} \cdot \text{m}}] = \text{m/s} \cdot [e^{\text{m/s}}] = \text{määrittelemätön}. \quad (3)$$

Lauseke on mieletön, koska vastauksessa esiintyvan eksponenttifunktion argumentin yksikkö on m/s eikä täitä funktiota ole määritelty dimensiolliselle suurelle. Opiskelijan B vastauksessa esiintyi myös eksponenttifunktio, mutta silloin funktion argumentti oli paljas luku, kuten pitääkin.

Siiispä opiskelija A tai B voi olla oikeassa, mutta C on varmasti tehnyt virheen. Yksikkötarkastelu ei riitä kertomaan onko A tai B oikeassa, mutta sen avulla voi huomata selkeitä virheitä.



0.2 Jos suureen  $a$  yksikkö on  $\text{A}^2$  ja suureen  $b$  yksikkö on  $1/\text{A}$ , onko lauseke  $a - \frac{1}{b^2} \sin(ab^2)$  järkevä? Mikä on sen yksikkö?

### Mallit

Maaailma on monimutkainen. Tavallisetkin fysikaaliset ilmiöt syntyvät monien tekijöiden yhteisvaikutuksesta, ja fysiikan peruslakeja on vaikea ymmärtää vain tarkastelemalla luonnon toimintaa sellaisenaan. Usein fysiikan lakienvietyminen onkin vaatinut tarkoin valmisteltujen kokeiden toteuttamista, jotta muiden tekijöiden

vaikutus on saatu rajattua pois. Sama pätee myös fysiikan opinnoissa — tarkastelemme usein hyvin yksinkertaisia tilanteita, jotka eivät välttämättä ole todellisuuden kannalta kovin mielenkiintoisia, jotta tilanteen ymmärtäminen ei vaatisi liian monen tekijän huomioimista.

Toisaalta koska maailma on monimutkainen, todellisten fysikaalisten ilmiöiden ymmärtäminen vaatii lähes poikkeuksetta kykyä hahmottaa tilanteita, yhdistellä, tulkita ja soveltaa tietoa sekä löytää ilmiötä ja tapahtumia ohjaavista tekijöistä tärkeimmät. Tämä ei ole helppoa ja vaatii harjoitusta, minkä vuoksi myös monimutkaisen ongelmien ratkaisemisen harjoittelun on oleellinen osa fysiikan opiskelua. Ongelmanratkaisutaito on luonnollisesti hyödyllinen kaikilla elämän alueilla. Itse asiassa todelliset ongelmat ovat gleensä avoimia ja epämääräisiä, ja niihin voi olla monia erilaisia ratkaisuja. Siksi ei riitä harjoitella vain hyvin määriteltyjen tehtävien selvittämistä vaan myös avointen kysymysten pohdintaa.

Fysiikassa ongelmien ratkaiseminen tapahtuu **mallien** avulla. Malli on monimutkaisen tilanteen yksinkertaistus, johon otetaan mukaan vain välttämätön määrä informaatiota ja yksityiskohtia. Esimerkiksi kappaleita voidaan kuvata hyvin monimutkaisina osien yhdistelminä tai vain pisteinä, palloina tai kuutioina, jos oleellista on vain kappaleiden sijainti eikä niiden muoto (kuva 1). Yleensä kannattaa ensin muodostaa mahdollisimman yksinkertainen malli, johon tarpeen vaatessa lisätään yksityiskohtia, kunnes malli kykee selittämään tarkasteltavan ilmiön.

Koska mallit ovat epätäydellisiä, myös niiden ennusteet ovat epätarkkoja. Lisäksi hyvin usein yksinkertaisenkin mallien käyttäytyminen on mahdotonta ratkaista täydellisesti, jolloin turvaudutaan matemaattisiin likiarvoihin eli **approksimaatioihin**. Tällöin on syytä pitää kirja kaikista oletuksista, joita mallin muodostamisessa ja sen matemaattisessa käsittelyssä on tehty. Kun lopputulokseen lopulta päästään, tulee tarkistaa, pätevätkö tehdyt oletukset.



0.3 Haluat tutkia ihmisen ajattelua ja aivotoimintaa. Millaisia tietoa voitaisiin saada muodostamalla malli, jonka pienin yksikkö on (a) molekyyli, (b) hermosolu, (c) aivoalue, (d) ihminen, (e) ihmisyhteisö (esim. yritys tai valtio)?

## Kuvat ja geometria

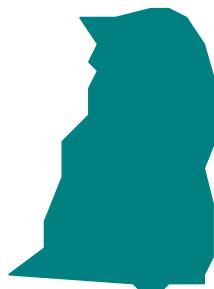
Kuvat ovat tieteellisessä kommunikoinnissa ensisijaisen tärkeitä. Monimutkaisia ajattelumalleja ja suurta määrää informaatiota on usein mahdotonta välittää ilman visualisointia, sillä useimmat ihmiset käsitlevät kuvallista tietoa paljon tehokkaammin kuin sanallista. Usein on suorastaan mahdotonta ymmärtää määrällistä informaatiota ennen kuin informaatiolle löytyy sopiva kuvallinen esitys. Opiskelussakin omien ajatusten kuvallinen ilmaisu voi olla tehokas oppimistapa. Kuvien muodostaminen vaatii nimittäin informaation käsittelyä, ja kun tieto on puettu kuvan muotoon, oleellisten piirteiden huomaaminen ja muistaminen on yleensä paljon helpompaa kuin tekstin muodossa olevan tiedon.

Myös monimutkaisen ongelmien ratkaisemisessa kuvalliset esitykset ovat tärkeitä ajattelun apuvälineitä. Kun asiantuntija alkaa ratkaista ongelmaa, hän yleensä aloittaa piirtämällä tilanteesta kuvan. Näin siksi, että kuvaan on helppo kerätä kaikki tilanteessa oleelliset seikat ja tunnettu informaatio muotoon, josta kokonaisuuden hahmottaa helposti. Yksityiskohtia ja asioiden välistä suhteita on niinikään helppo lisätä kuvaan. Fysiikassa mallien muodostaminen on yleensä helpointa juuri kuvien avulla. Monesti fysiikaalaisissa ongelmissa kappaleiden tai hiukkasten paikat ovat merkitykselliset, ja tällöin kuvan piirtäminen tilanteesta on lähes väältämätöntä.

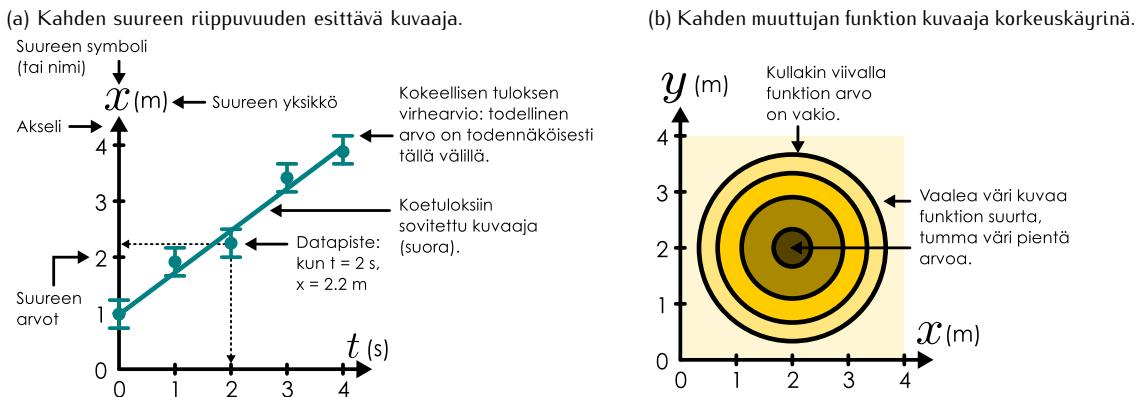
Fysiikassa ja muissakin luonnontieteissä **kuvajien** tulkitseminen on välttämätön taito. Yksinkertaisesta kuvajasta, jossa on piirretty jokin suure toisen suureen funktiona, voidaan usein suoraan päätellä esimerkiksi

Kuva 1: Erilaisia malleja kissalle.

(a) Yksityiskohtainen kuvaus. (b) Koon ja muodon kuvaus. (c) Koon ja sijainnin kuvaus. (d) Pelkän sijainnin kuvaus.



Kuva 2: Erilaisia kuvajia.



funktion ääriarvojen, raja-arvojen, derivaattojen, integraalien yms. johdannaisten käytätyminen, mikä voi laskemalla olla erittäin työlästä tai jopa mahdotonta. Asiantuntija tietää, miten suureet riippuvat toisistaan erilaisissa tilanteissa, jolloin hän voi hyvästää kuvajasta heti huomata olellisen tiedon. Siksi tieteellisessä esityksessä juuri kuvat ja kuvajat — ei teksti tai kaavat — ovat avainasemassa informaation välittämisessä.

Kuvaajien tulkitseminen ja piirtäminen ei kuitenkaan ole itsestään selvää, ja sitä pitää harjoitella. Kuvaajan tulkinnassa ensimmäinen askel on aina tarkistaa, mitä kuvataan. Jos kyseessä on tyypillinen kaksiulotteinen koordinaatistokuvaaja kuten kuvassa 2 (a), tämä tarkoittaa kuvajassa esitettyjen suureiden ja mittakaavan tarkistamista kuvaajan **akseleilta**. Tämän jälkeen voidaan alkaa tulkitsemaan varsinaista kuvaajaa. Riippuu kuitenkin aina tapauksesta, millaiset kuvaajan ominaisuudet ovat mielenkiintoiset. Ja toisaalta täysin samankäiset kuvaajat voivat esittää aivan erilaisia ilmiöitä, jos kuvattavat suureet eivät olekaan niissä samat. Niinpä kuvaajien tulkitseminen edellyttää ilmiöiden ja niihin liittyvän fysiikan aitoa ymmärtämistä — pelkkiin nykkisääntöihin nojaaminen ei aina onnistu.

Tässä materiaalissa esitetään dataa kuvaajien muodossa ja toisistaan riippuvien suureiden kuvailussa pyritään esittämään myös suureiden yhteydet graafisissa esityksissä. Lisäksi kuvaajien tulkintaan ja diagrammien piirtämiseen opastetaan. Kuvaajien käsitteilylle annetaan materiaalissa siis erityishuomiota, ja sitä on syytä opiskella.



0.4 Kuvassa 2 (a) on esitetty mittaustuloksia graafisesti. Arvooi kuvaajan perusteella, millä välillä suureen  $x$  todellinen arvo on, kun (a)  $t = 3$  s, (b)  $t = 6$  s.

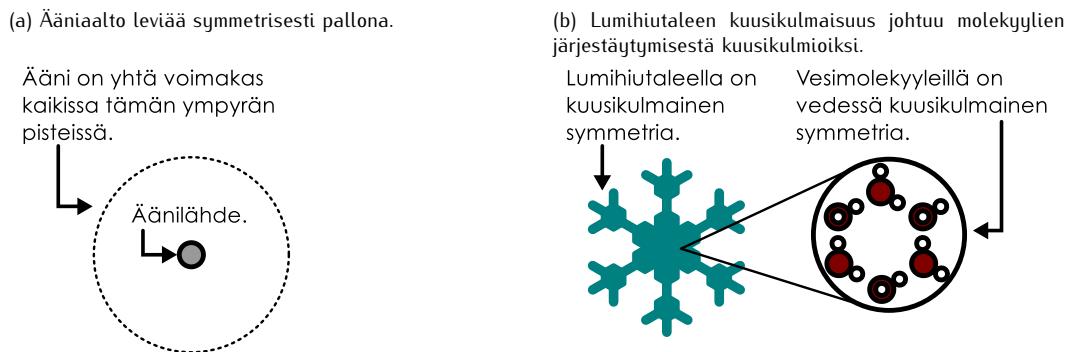
## Symmetria

**Symmetria** tarkoittaa tilannetta, jossa jotakin erityisasemassa olevaa suuretta voidaan muuttaa niin ettei mikään muu asia muutu. Esimerkiksi geometriassa neliö on symmetrinen  $90^\circ$  kierron suhteeseen (kuten myös  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  jne. kierron) sekä myös sen keskipisteen kautta kulkevien sivujen tai lävistäjien suuntaisten peilauksien suhteeseen, koska neliön käänäminen tällaisilla tavoilla tuottaa kuvion, joka on täsmälleen samanlainen kuin alkuperäinen neliö. Neliön tapauksessa symmetriat ovat epäjatkuvia eli diskreettejä, koska vain tietyt operaatiot pitävät kuvion muuttumattomana. Sitä vastoin esimerkiksi ympyrässä on jatkuva symmetria, koska ympyrää voi kiertää keskipisteestä ympäri minkä kulman verran tahansa ja ympyrä näyttää edelleen samalta.

Geometriset ja matemaattiset symmetriat ovat fysiikassa hyödyllisiä ongelmanratkaisun apuvälineitä. Esimerkiksi jos suure riippuu jostakin pisteestä mitatusta etäisyystä, on suureen oltava sama kaikissa pistessä, jotka ovat tästä pisteestä yhtä kaukana — siis ympyrän kehällä tai pallon pinnalla. Kuvassa 3 (a) on tästä esimerkki. Tyhjässä tilassa oleva äänilähde, esimerkiksi kaiutin, lähettää ääntä kaikkiin suuntiin yhtä voimakkaasti. Tällöin tilanne on symmetrinen suuntien suhteeseen, joten äänenvoimakkuus on sama kaikissa suunnissa kunhan etäisyys äänilähteestä on yhtä suuri. Toisin sanoen ajattelemalla läheen ympärille pallo, jonka keskipisteessä lähde on, äänen on oltava yhtä voimakas jokaisessa pisteessä tämän pallon pinnalla. Huomattaavaa tässä päättelyssä on se, että se ei vaadi tarkkaa tietoa äänen ominaisuuksista — ainoastaan oletuksen siitä, että äänen eteneminen on samanlaista eri suunnissa. Koska tämä oletus liittyy vain tilanteen symmetriaan, vastavaa päättelyä toimii mille tahansa vain suunnasta riippuvalle suurelle.

Tilanne voi olla myös päinvastainen: näemme, että jokin asia on symmetrinen, mutta emme tiedä miksi. Tällöin symmetria on vahva johtolanka siitä, että jossakin rakenteessa tai laissa on oltava vastaava symmetria.

Kuva 3: Geometrisia symmetrioita. Symmetria yhtäällä johtaa usein symmetriaan toisaalla.



Muun muassa mineraalit ja kiteet voivat olla hyvin symmetrisen muotoisia riippuen niiden atomien muodostamasta rakenteesta. Esimerkiksi kuvassa 3 (b) esitettyllä lumihiualeilla on kuusikulmainen symmetria, ja tämä symmetria johtuu jääkiteessä olevien vesimolekyylien muodostamasta rakenteesta, jossa molekyylit asettuvat muodostamaan kuusikulmioita.

Myös fysiikan *laiessa* on symmetrioita, ja itse asiassa juuri tällaiset symmetriat ovatkin eräitä fysiikan voimakkaimpia periaatteita. Esimerkiksi fysiikan peruslakien uskotaan olevan samanlaiset kaikkialla maailmankaikkeudessa: Jos rakennat koelaitteiston ja suoritat kokeen yhdessä paikassa, siirrät laitteiston toiseen täsmälleen samanlaiseen paikkaan (ts. paikkaan jossa olosuhteet ovat kaikin puolin samanlaiset), kaikkien samojen fysiikan lakiin pitäisi päteä ja kokeen tuloksen pitäisi olla täsmälleen sama kuin ennenkin. Tätä kutsutaan lakienvälistymisestä. Mikä tarkoittaa etteivät lait riipu mistään absoluuttisesta paikasta. Samoin jos koelaitteistolla tehdään sama koe tänään ja huomenna, tulosten pitäisi olla samat, koska fysiikan lait eivät riipu ajasta eli ne ovat symmetriset ajan muutoksen suhteen. Osoittautuu, että tällaiset symmetriat ovat erittäin tärkeitä, koska ne liittyvät säilymislakeihin, joista puhutaan tarkemmin luvussa 2.

Uusia ilmiöitäkin on löydetty puhtaasti tutkimalla, millaisia symmetrioita fysiikan lait toteuttavat. Esimerkiksi 1900-luvun alussa kehitettiin valolle aalto-hiukasmalli, foton. Aineelle kehitettiin tämän jälkeen vastaavanlainen aaltomekaaninen kuvaus tarkastelemalla hypoteesia, että valon ja aineen perusominaisuudet ovat samanlaiset — eli että niitä kuvaavat lait ovat symmetriset. Kyseessä oli teoreettinen arvaus, jonka kokeet osoittivat myöhemmin oikeaksi. Pyrkimys symmetriaan on osoittautunut niin vahvaksi periaatteeksi teoreettisen fysiikan kehityksessä, että monet teoreetiset fyysikot pitivät modernin fysiikan yhtenä pääasiallisena teorianäkymänä. Tällainen on mahdollista vain jos eri vuorovaikutukset voidaan kuvata samanlaisessa, symmetrisessä muodossa.



0.5 Hyvin pitkä, suora, ohut lanka väärähtee, jolloin sen jokainen piste toimii äänen läheenä. Ääni kuuluu yhtä voimakkaana kaikissa niissä avaruuden pisteissä, joiden etäisyys langasta on sama. Minkä muotoisen alueen tai pinnan tällaiset pisteet muodostavat?

## Matemaattinen analyysi

Matematiikkaa sanotaan luonnon kieleksi, millä tarkoitetaan sitä, että matemaattisilla menetelmillä voidaan kuvata luonnonilmiöitä erittäin tarkasti. Matematiikka on tärkeä apuneuvo kaikissa luonnontieteissä, mutta luonnontieteistä fysiikka käyttää matematiikkaa epäilemättä monipuolisimmin. Fysiikka ei kuitenkaan ole matematiikkaa. Aloittelevilla fysiikan opiskelijoilla on usein harhakäsitys, että laskeminen ja kaavat ovat fysiikan tärkein sisältö. Matematiikka on kuitenkin vain työkalu, joka mahdollistaa sellaiset määritelliset päättelyt ja täsmälliset ilmaisut, jotka ilman matematiikkaa olisivat erittäin vaikeita. Esimerkiksi ilmaisut "kapaleen kiilthyvyysvektorin ja massan tulo on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva kokonaivoimavektori" ja " $\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{m}\bar{a}$ " ovat merkitykseltään *samat*. Matemaattinen yhtälö on vain lyhyempi kirjoittaa, joten se ei rasita ihmisen muistia niin paljon kuin pitkä sanallinen selitys. Matemaattisia lausekkeita voidaan myös käsitellä matematiikan sääntöjen avulla uusien fysikaalien väitteiden johtamiseksi.

Yllä esitetyn väitteen sanallinen muotoilu on *fysikaalinen* tapa ilmaista asia kun taas kaava on *matemaattinen*, ja aina kun tutustut uuteen fysikaaliseen lakiin tai määritelmiin, on syytä ymmärtää *molemmat*. Fysikaalien lakienvälistymisestä on kuitenkaan erittäin tärkeää ymmärtää, että fysiikan peruslakien tarkkuus ei riitä, jos halutaan käsittelevät ja etenkin millaisissa tilanteissa ne pätevät. Fysiikan opintojen ydin onkin ymmärtää

millaiset periaatteet ja lait luonnon käyttäytymistä ohjaavat. Siksi laskutehtävissäkin oleellisinta on aina *perustella* mitä ja miksi lasketaan eikä vain laskea — varsinkin kun raaka laskeminen voidaan nykyään pitkälti antaa tietokoneiden tehtäväksi.

Laskemiselta ei kuitenkaan voi fysiikassa välttyä, koska fysiikka on eksakti luonnontiede, joka ei pyri kuvamaan luontoa vain laadullisesti eli **kvalitatiivisesti** vaan myös määrällisesti eli **kvantitatiivisesti**. Aina kun fysiikassa lasketaan, on tulosten tarkkuus ja oikeellisuus vielä erikseen arvioitava, koska fysikaalisia tilanteita kuvavat mallit ovat lähes aina puutteellisia ja laskissa voi tapahtua virheitä. Tällainen arvointi vaatii selkeästi enemmän fysikaalista kuin matemaattista taitoa. Yksiköiden tarkastamisen lisäksi laskujen tulosten järkevyyden pohdinnassa hyviä keinoja ovat suuruusluokka-arviot, erikoistapausten tarkastelu sekä raja-arvojen analysointi.

## Merkitsevät numerot

Laskimet ja tietokoneet käsittelevät lukuja aina tietyllä kiinteällä tarkkuudella, jota rajoittaa muisti. Lisäksi laskukoneet käsittelevät numeroita binääriesityksessä eli kakkosen potenssien avulla. Siispä kun laskukoneelle antaa luvun 10.0, se voi ymmärtää tämän esimeriksi muodossa  $1.000000 \cdot 10^1$ . Kun laskin suorittaa laskuja, se tuottaa uusia lukuja, jotka se tallentaa samalla tarkkuudella. Jos tuloksena saadaan luku, jonka desimaalit ovat pelkkiä nollia, laskin ymmärtää gleensä jättää ne näytämättä, mutta muuten kone saattaa tulostaa desimaaleja niin paljon kuin sen muistissa on.

Fysikaalisesti tässä ei kuitenkaan ole mitään järkeä. Jos luvut kuvavat fysikaalisten suureiden suuruksia, niitä ei voida tuntea tarkasti kuin joissakin erikoistapaussissa. Tavallisesti fysikaaliset lukuarvot ilmoitetaan aina sillä tarkkuudella kuin ne tunnetaan. Jos esimeriksi pituus on noin 1 m ja tämä tiedetään 1 cm eli 0.01 m tarkkuudella, on soveliasta ilmoittaa pituuden lukuarvoksi 1.00 m. Merkintä 1 m ei ole yhtä hyvä, koska tämä periaatteessa tarkoitaa, että pituus tunnetaan 1 metrin tarkkuudella, ja merkintä 1.000 m on suorastaan väärin, koska suureen arvoa ei tunneta näin tarkasti.

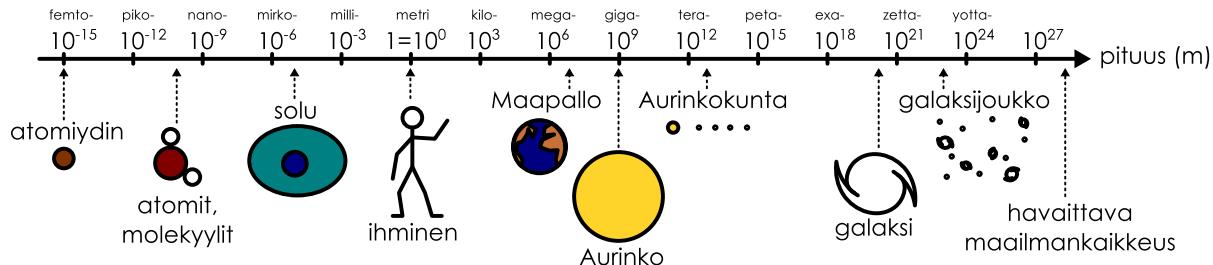
Merkinnässä 1.00 m yksi on luvun kokonaislukuosa, piste on desimaalierotin, ja sitä seuraavat kaksi nolla ovat **desimaalit**, eli luku on ilmoitettu kahden desimaalin tarkkuudella. (Tässä tekstissä käytetään erottimena pistettä, joka on kansainvälisti tavallisin min käytetty desimaalierotin, vaikka suomen kielessä normaalilisti erotin onkin pilkku.) Kaikki kolme numeroa kuitenkin sisältävät informaatiota: 1 tarkoittaa yhtä metriä ja seuraavat kaksi nolla nolla desि- ja senttimetriä. Nämä sanotaan, että luku on ilmoitettu kolmen **merkitsevän numeron** tarkkuudella. Luvussa, jossa ei ole lainkaan desimaaleja, merkitsevien numeroiden määrä voi olla epäselvä. Esimeriksi kirjoitusasu 100 m voi sisältää yhden, kaksi tai kolme merkitsevää numeroa riippuen siitä, ovatko nollat todella tarkalleen nollia vai onko lukuarvo pyöristetty. Jos merkitsevien numeroiden määrä halutaan ilmaista täsmällisesti, voidaan käyttää niin sanottua tieteellistä merkintätapaa eli kymmenen potensseja ja kirjoittaa  $1.00 \cdot 10^2$  m.

Kun fysikaalisilla suureilla lasketaan, loppululoskin olisi syytä ilmoittaa sillä tarkkuudella, mikä alkuperäisten lukuarvojen tarkkuudesta voidaan päätellä. Yleisesti ottaen tulosten tarkkuuden määräävät huonoimman tarkkuuden lukuarvot.

- Yhteen- ja vähennyslaskuissa tarkkuuden ilmaisevat lukujaan **desimaalit**. Jos esimeriksi lasketaan yhteen  $1.1 \text{ m} + 2.34 \text{ m}$  loppuloksen järkevä tarkkuus on  $3.4 \text{ m}$  eikä  $3.44 \text{ m}$ , koska lukuarvosta  $1.1$  ei tunneta toista desimaalia.
- Kerto- ja jakolaskuissa tarkkuuden ilmaisevat **merkitsevät numerot**. Jos esimeriksi kerrotaan  $0.11 \text{ m} \cdot 0.234 \text{ m}$ , loppuloksen järkevä tarkkuus on  $0.026 \text{ m}^2$ , jossa on kaksi merkitsevää numeroa, eikä esimeriksi  $0.02574 \text{ m}^2$ , joka on lukujaan tarkka tulo. Näin siksi, että  $0.11 \text{ m}$  edustaa pituutta, jonka todellinen arvo voi olla väliltä  $0.105 \dots 0.115 \text{ m}$  ja  $0.234 \text{ m}$  edustaa jotakin arvoa väliltä  $0.2335 \dots 0.2345 \text{ m}$ . Tällöin kertolaskun tulos voi todellisuudessa olla jotakin väliltä  $0.105 \cdot 0.02335 = 0.00245175 \dots 0.115 \cdot 0.02345 = 0.00269675$ . Toisin sanoen jo tuloksessa  $0.026 \text{ m}^2$  voi olla viimeinen numero väärin, eikä ole järkevä antaa vastausta vielä tätäkin suuremalla tarkkuudella.
- Kun lasku sisältää muita funktioita kuten potensseja, eksponenttifunktioita, logaritmja tai trigonometrisia funktioita, laskujen tarkkuuden analysointi vaatii periaatteessa erillisen tarkastelun. Tähän tutustutaan esimeriksi harjoitustöiden yhteydessä, jolloin on analysoitava todellisten mittaustulosten luotettavuutta. Karkeana arviona tällöinkin lienee parasta käyttää merkitsevien numeroiden lukumäärää sopivana tarkkuutena tuloksia ilmoittettaessa.

Kun lukuarvoja on syytä pyöristää, tämä tapahtuu normaalien pyöristyssääntöjen mukaisesti. Jos ensimmäinen poisjäävä numero on 5 tai suurempi, viimeinen mukaan otettava numero muutetaan yhtä suuremmaksi. Huomaa kuitenkin, että jos lasketaan välituloksia, nämä kannattaa tallentaa laskukoneeseen tai kirjoittaa muistiin mahdollisimman suurella tarkkuudella, koska lukujaan pyöristäminen monta kertaa laskun aikana johtaa helposti kumuloituviin pyöristysvirheisiin. Tietenkin aina kannattaa pyrkiä laskemaan *symbolilla* mahdollisimman pitkälle ja sijoittaa lukuarvot vasta lopuksi.

Kuva 4: Pituuden suuruusluokkia atomiyöntimestä maailmankaikkeuden kokoon. Akseli on logaritminen: kunkin pykälän on tuhat kertaa suurempi kuin edellinen. Akselilla näkyvät myös SI-järjestelmän etuliitteet.



0.6 Jos suureen  $a$  lukuarvo on 0.12 ja suureen  $b$  lukuarvo on 3.45, mikä on lausekkeen (a)  $1/b - a$ , (b)  $a^2 b$ , (c)  $b - a^2$  lukuarvo ja järkevä tarkkuus? Viimeisessä tapauksessa pitää tarkastella tarkkuutta erikseen kussakin laskutoimituksessa!

## Suurusluokat

Fysiikka käsittelee suureita, joiden kokoluokka ulottuu valtavan pienestä valtavan suureen, ja fyysikon on sytytä osata analysoida ilmiöitä kaikissa mittakaavoissa. Alun perin monet fysiikan alueet ovat kehittyneet pelkästään ihmisten havainnoiman mittakaavalta eli **makroskooppisen** mittakaavalta ilmiöitä ja suureita tutkimalla. Nykyään tunnetaan kuitenkin myös alkeishiukkisten mittakaavalta eli **mikroskooppisen** mittakaavalta fysiikka niin tarkasti, että makroskooppiset ilmiöt voidaan selittää pelkästään tarkastelemalla hiukkosten käyttäytymistä. Makroskooppiset lait kannattaakin usein opetella yhdessä vastaavien mikroskooppisten laien kanssa.

Edellä mainitut etuliitteet "femto" ja "zetta" ovat SI-järjestelmän määrittelemiä kertoimia, jotka yhdistetään suureen yksikköön sen murto-osan tai monikerran ilmaisemiseksi. Nämä ovat kuitenkin melko harvinaisia erittäin pienien ja suuren kokonsa vuoksi, ja tavallisempia pituuden mittoja ovat esimerkiksi kilometri eli tuhat metriä, ja millimetri eli metrin tuhannesosa. Kuvassa 4 on listattu muös SI-järjestelmän etuliitteitä.

SI-yläkäytöissä on tarkoitus käyttää myös SI-järjestelmän edustajia. Tämä on esimerkki siitä, että SI-järjestelmässä on määritelty ja määritetty SI-mittari tulostamisessa. Kuvassa 1 on tarkoitus myös SI-järjestelmän edustajia.

Suurusuoluokka-arvioita tekemällä saa itse asiassa ilmiöistä usein paremman näppituntuman kuin laskemalla laskuja tarkasti, koska oleelliset seikat helposti häviävät näkyvistä, kun yksityiskohtia on paljon. Siksi onkin erittäin hyödyllistä pystyä arvioimaan erilaisten ilmiöiden suuruusluokkia ja sitä kautta tunnistaa tilanteessa vaikuttavista ilmiöistä merkittävimmät. Tällöin voikin jättää vähemmän tärkeät seikat huomioimatta ainakin aluksi. Muutetenkin suuruusluokkien hahmottaminen ja arvointi on erittäin tärkeä yleistaito, josta on hyötyä kaiken toiminnan suunnittelussa taloudesta insinööritieteisiin.

Monimutkaistenkin asioiden suuruksia voi arvioida jakamalla tarkasteltava asia pienempiin osiin, joiden suuruudet voidaan arvata tai selvittää. Kukin arvioitu lukuarvo kannattaa ilmaista yhden merkitsevän luvun tarkkuudella, jotta varsinaiset laskut pysyvät helppoina. Lopputuloksessa kuitenkaan ei ole edes tällä yhdellä merkitsevällä numerolla merkitystä, koska laskuissa kertyneet epätarkkuudet ovat mitä todennäköisimmin suuremmat, joten lopputulos pyöristetään ja ilmoitetaan kymmenen potensseissa. Suuruusluokkalaskuissa päähuomio kohdistuukin näihin kymmenen potensseihin, joille päteväät normaalit potenssien laskusäännöt,

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}, \quad (10^a)^b = 10^{ab}, \quad \frac{1}{10^a} = 10^{-a}. \quad (4)$$

Lukuarvon ilmoittaminen kymmenen potensseissa tarkoittaa **logaritmisen asteikon** käyttämistä, sillä esimerkiksi  $10^3$  on kymmenen kertaa suurempi kuin  $10^2$ , joka on kymmenen kertaa suurempi kuin  $10^1$  ine. Toisin

sanoen asteikossa "pykälät" eivät ole tasaaisin välein vaan peräkkäisten välien suuruksien *suhde* on aina sama. Myös pyöristämisen toimii logaritmisessa asteikossa normaalista poiketen. Nyt perussääntö on se, että jos laskun lopputuloksen ensimmäinen numero on *kolme tai pienempi*, luku pyörristetään alaspäin, muuten ylöspäin. Kolme on pyörityksen rajana, koska esimerkiksi  $3 \cdot 10^4$  on kolme kertaa suurempi kuin  $10^4$ , mutta se on myös hieman alle yksi kolmasosa luvusta  $10^5$ . Niinpä logaritmisessa asteikossa  $3 \cdot 10^4$  ajatellaan olevan lähempänä arvoa  $10^4$  mutta  $4 \cdot 10^4$  on lähempänä arvoa  $10^5$ .

Suuruusluokkien arvointi on laskuteknisesti melko helppoa, mutta ongelmien paloittelu pienempiin osiin ja näiden arvointi voi joskus olla haastavaa, joten tätkin taitoa on sytä erikseen harjoitella.



0.7 Arvioi, montako a-kirjainta (ei ole väliä, onko kyseessä iso vai pieni kirjain) koko tässä tekstissä (noin 700 sivua) kaikkiaan on?

### esimerkki 0.2

### Maapallon ja atomin suuruusluokat

#### Monestako atomista Maapallo koostuu?

Maapallo on suuri ja atomit ovat pieniä, joten vastaus on mitä ilmeisimmin hyvin suuri, mutta kuinka suuri? Ongelmaa voi lähteä tutkimaan esimerkiksi seuraavien helpommin selvitettävien kysymysten kautta:

- Mikä on yhden atomin keskimääräinen massa?
- Mikä on Maapallon massa?
- Mikä on Maapallon tilavuus?
- Mikä on Maapallon keskimääräinen tiheys?

Maapallon massa tunnetaan kohtulaisen tarkasti, joten kyseisen arvon voisi tuki hakea suoraan. Harjoituksen vuoksi arvioidaan kuitenkin sekin erikseen.

Kivialineksen tiheys on joitakin tonneja kuutiometriä kohden, minkä voi tarkistaa mittamalla minkä tahansa kiven tilavuuden ja painon. Maan ytimessä ei ole kiveä, mutta tiheys ei silti muutu kovin paljon — geologisten lähteiden mukaan maan ytimen tiheys on hieman yli 10 tonnia kuutiometrissä. Arvioidaan siis Maan keskimääriseksi tiheydeksi  $\rho_{\text{Maa}} = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Metrin alkuperäinen määritelmä oli, että se on kymmenesmiljoonasota etäisyystä päiväntasaajalta pohjoisnavalle. Toisin sanoen Maan ympärysmitta on melko tarkasti 40000 km. Ympyrän ympärys on  $2\pi R \approx 6R$ , missä  $R$  on säde, joten Maan säde on tämän mukaan  $R_{\text{Maa}} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 10^7 \approx 7 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Tästä saadaan Maapallon tilavuudeksi  $V_{\text{Maa}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4R^3 \approx 4 \cdot 7^3 \cdot 10^{6 \cdot 3} \text{ m}^3 \approx 1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$  ja edelleen massaksi  $m_{\text{Maa}} = \rho_{\text{Maa}} V_{\text{Maa}} = 5 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . (Maan tunnettu massa on  $6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , joten tämä arvio on itse asiassa yllättäväkin hyvä!)

Atomimassayksikkö on  $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Tämä on likimain vetyatomien massa, mutta Maa ei koostu vedystä vaan raskaammista alkuaineista, joiden massat ovat joitakin kymmeniä atomimassayksiköitä. (Maassa yleisiä alkuaineita ovat mm. happi, pii ja rauta, joiden massat ovat noin 20 u, 30 u ja 50 u.) Arvioidaan siis atomien massaksi  $m_{\text{atomi}} = 3 \cdot 10^1 \text{ u} = 5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ . Näin ollen Maapallolla on atomeja

$$N_{\text{atomi}} = \frac{m_{\text{Maa}}}{m_{\text{atomi}}} = \frac{5}{5} \cdot 10^{24 - (-26)} = 1 \cdot 10^{50}. \quad (5)$$

Siis Maassa on noin  $10^{50}$  atomia. Kuinka paljon tämä on? Sadassa grammassa hiiltä on noin  $10^{25}$  atomia, ja tämän mukaan Maapallolla on noin  $10^{25} \cdot 10^{25}$  atomia. Maassa on siis suunnilleen yhtä monta 100 g yksikköä ainetta kuin sata grammaa ainetta sisältää atomeja.

### Erityistapaukset

Yksittäistapaukset, joissa suureiden lukuarvot tunnetaan, on usein helpompi ratkaista kuin johtaa yleisiä riippuvuuksia suureiden välille. Puhtaasti symbolilla tapahtuva laskeminen on kuitenkin fysiikassa tärkeää, koska siten saadaan tietää, mitkä tekijät vaikuttavat toisiinsa — eli jos jotakin muutetaan, mitkä muut asiat muuttuvat. Yksittäistapauksia voi kuitenkin käyttää testinä, kun halutaan tarkistaa johdettujen lausekkeiden oikeellisuutta. Usein nimitään on helppo keksiä erikoistapauksia, joissa tilanteet on erityisen helpo ratkaista: massat ovat yhtä suuret, nopeudet ovat yhdensuuntaiset, kappaleet ovat paikoillaan tms. Jos johdettu laki, jonka pitää kuvata ilmiötä kaikissa tapauksissa, on oikein, sen pitää luonnollisesti kuvata oikein myös kaikki yksittäistapaukset. Myös raja-arvot ja asymptootit ovat erikoistapauksia, ja yleisten ratkaisujen käyttäytyminen kannattaa aina tarkastaa, kun niissä esiintyvät suureet ovat hyvin pienet tai hyvin suuret.



0.8 Eräs suure riippuu toisesta suureesta  $t$  lausekkeen  $x(t) = 1 + \frac{2}{3+4t}$  mukaisesti. Mikä on suureen arvo, kun (a)  $t$  on nolla, (b)  $t$  on hyvin suuri?

## esimerkki 0.3

## Raja-arvot

Tehtävään oli tutkia tilannetta, jossa kaksi samanlaista kappaletta, joista ensimmäisen lämpötila on  $T_1$  ja toisen  $T_2 > T_1$ , tuodaan yhteen. Opiskelijat A, B ja C ratkaisivat ensimmäisen kappaleen lämpötilan ajan funktiona ja saivat erilaiset tulokset:

$$\begin{aligned}T_A(t) &= T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(1 - e^{-at}) \\T_B(t) &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 e^{-at} \\T_C(t) &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_1 - T_2)e^{-at}\end{aligned}$$

missä  $a$  on jokin positiivinen vakio. Mikä ratkaisuista voisi olla oikein?

Kappale on aluksi lämpötilassa  $T_1$  eli  $T(0) = T_1$ . Toisaalta kun odotetaan tarpeeksi kauan, kappaleiden lämpötilat tasottuvat, jolloin kahden samanlaisen kappaleen lämpötiloiksi tulee alkuperäisten lämpötilojen keskiarvo  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  eli  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ .

Kaikki opiskelijat ovat saaneet vastaukseensa eksponenttifunktion  $e^{-at}$ . Eksponenttifunktio nollasta on yksi,  $e^0 = 1$ , ja jos  $a$  on positiivinen, funktion lähestyy nolla kun  $t$  kasvaa,  $e^{-at} \rightarrow 0$ .

Opiskelijan A ratkaisussa lämpötila on aluksi  $T_A(0) = T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(1 - 1) = T_1$  ja se lähestyy arvoa  $T_A \rightarrow T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , kuten pitääkin — se voisi siis olla oikea tulos. Opiskelijan B ratkaisussa lämpötila on aluksi  $T_B(0) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$  ja lopuksi  $T_B \rightarrow \frac{1}{2}T_1$ . Nämä eivät ole oikean ratkaisun alku- ja loppuarvot, joten opiskelijan B on täytynyt tehdä laskussaan virhe. Opiskelijan C ratkaisussa lämpötila lähtee arvosta  $T_C(0) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_1 - T_2) = T_1$  ja päättyy arvoon  $T_C(t) \rightarrow \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , eli myös tällä ratkaisulla on oikeat raja-arvot ja se voi olla oikea tulos. Itse asiassa se on aivan sama tulos kuin opiskelijalla A, mutta kirjoitettuna vain eri muotoon.

Jotta voitaisiin lopullisesti selvittää, ovatko ratkaisut oikeat, pitäisi vielä tarkistaa, että vakiolla  $a$  on oikea arvo. Sitä ei kuitenkaan saada selville raja-arvoja tarkastelemalla, koska  $a$ :n arvo ei niihin vaikuta. Kuitenkin raja-arvotarkastelulla voitiin suoraan päättää, että ratkaisu B ei voi olla oikein. Huomaa vielä, että esimerkiksi yksikkötarkastelu ei tässä kohtaa olisi pystynyt erottelemaan ratkaisuja toisistaan, sillä myös ratkaisussa B on aivan oikeat yksiköt.

## Matemaattiset ohjelmistot

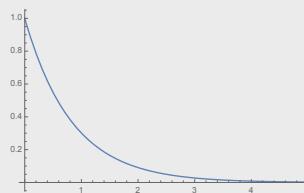
Fysiikka hyödyntää erittäin monipuolista matematiikkaa, ja monet matematiikan haarat ovat alunperin kehittyneet täyttämään fysiikan tarpeita. Jo fysiikan perusopinnoissa tarvitaan mm. differentiaalilaskentaa, vektoreita, lineaarialgebraa sekä todennäköisyyslaskentaa. Monesti teoreettisten tarkastelujen ymmärtäminen vaatii monipuolista matematiikan hallintaa, minkä vuoksi laskuteknikkaa on syytä harjoitella. Laskeminen on kuitenkin vaivalloista, eikä ole välttämätöntä aina tehdä kaikkia laskuja käsin, vaan laskuissa voi käyttää apuna matemaattisia ohjelmistoja ja laskimia. Tässä materiaalissa laskuesimerkkien yhteydessä annetaankin myös esimerkkejä, kuinka laskut voi suorittaa Mathematica-ohjelmiston avulla (ks. esimerkki 0.4). Kyseessä on symboliseen laskentaan tarkoitettu ohjelmisto, jonka ytimen päälle myös verkkopalvelu Wolfram Alpha rakentuu.

## esimerkki 0.4

## Mathematica

Mathematicassa ohjelman omat komennot alkavat aina isolla kirjaimella ja niiden argumentit kirjoitetaan hakasulkeisiin. Symbolien joukot kirjoitetaan aaltosulkeisiin. Komennot suoritetaan painamalla Shift+Enter. Alla on esimerkki Mathematica-koodista, jossa määritellään funktion  $f(x) = e^{-ax}$ , missä  $a = 1.2$ , ja piirretään sen kuvaaja välillä  $0 < x < 5$ .

```
Mathematica:
a = 1.2
f[x_] := Exp[-a x]
Plot[ f[x], {x, 0, 5} ]
```



0.9 Mene osoitteeseen [wolframalpha.com](http://wolframalpha.com) ja piirrä siellä funktion  $f(x) = \sin^2 x$  kuvaaja välillä  $[-\pi, \pi]$ . Määritä myös sen integraalfunktio.

## Ongelmanratkaisu

Fysiikan opinnoissa tärkeintä ei ole opetella ulkoa suurta määräää informaatiota vaan oppia soveltamaan melko pieniä määräää perusperiaatteita ja -lakeja. Siksi harjoittelu, ongelmanratkaisu ja tehtävien ratkominen ovat fysiikan opinnoissa tärkeitä, ja niihin tulee varata kohtuullisen suuri osa opiskeluun käytettävästä ajasta. Perinteisesti fysiikan opetuksessa on painotettu *laskutehtäviä*, joissa annetuissa tilanteissa ratkaistaan joitakin kysytyjä suureita. Nämäkin ovat tärkeitä, mutta fysiikaalisen ajattelun kehittymisessä on tärkeää harjoitella myös *konseptuaalista ajattelua* eli periaatteellista päättelyä, joka ei vaadi laskemista.

Periaatteellisen ajattelun hallinta on itse asiassa edellytys useimpien laskuja vaativien ongelmien ratkaisemiseksi. Vielä lukiotasolla useat laskutehtävät ratkeavat vain oikean kaavan valinnalla ja siihen lukuarvoja sijoittamalla. Todellisuudessa kiinnostavissa fysiikan ongelmissa tämä ei käytännössä koskaan onnistu, koska valmiit kaavat pätevät vain erittäin yksinkertaisissa ja ideaalisissa tilanteissa. Sen sijaan ongelmien ratkaiseminen vaatii aina tilanteen hahmottamista, siinä vallitsevien fysiikaalisten lakien ymmärtämistä sekä niitä kuvaavien matemaattisten relatioiden muodostamista, ja nämä askeleet vaativat juuri periaatteellisen eli konseptuaalisen ajattelun taitoja. Varsinaisen laskutoimitus on tehtävänratkaisussa vain matemaattinen harjoitus tehtävän lopuksi — fysiikkaa on ongelman pukeminen muotoon, johon matematiikan työkaluja voidaan soveltaa. Ohessa on esitelty eräs tapa lähteä järjestelmällisesti ratkaisemaan monimutkaista fysiikan tehtävää.

### Fysiikan laskutehtävien ratkaiseminen

1. **Tilanne** Useimmiten kannattaa aloittaa *piirtämällä kuva*, sillä kuva on erinomainen tapa kerätä yhteen saatavilla oleva tieto. Fysiikkassa usein tarkastellaan tilanteita, joissa kappaleiden tai hiukkasten paikat avaruudessa ovat merkitykselliset, jolloin kuva on luonnollinen tapa esittää tilanne, ja myös kappaleiden liikettä voi esittää kuvin tai kuvasarjoin. Fysiakaalisen ongelman hahmottamista auttaa myös *tunnustujen ja tuntemattomien suureiden listaaminen*. Todelliset ongelmat ovat yleensä avoimia, eikä silloin sanota suoraan, mitä pitäisi ratkaista. Tällöin kannattaa jo tässä vaiheessa pohtia, mitkä suuret voisivat olla kiinnostavia asetettuun kysymykseen vastaamisessa.
2. **Suunnitelma** Kaikkien monimutkaisten ongelmien ratkaiseminen — myös fysiakaalisten — kannattaa aina aloittaa *laatimalla suunnitelma* siitä, miten ongelma aiotaan ratkaista. Ongelmien ratkaiseminen vaatii yleensä tarkasteltavan tilanteen pilkkomista pienempiin, helpommin hallittaviin osiin, näiden osien erillistä analysointia ja lopuksi osiin yhdistämistä takaisin yhdeksi kokonaisuudeksi. Tällainen analyysi vaatii monenlaisen tiedon yhdistämistä, eivätkä pitkät päättelyketjut yleensä onnistu ilman kokonaiskuvaaa siitä, mihin kukin päättelyaskel on loppujen lopuksi johtamassa. Ongelmanratkaisu helpottuu huomattavasti, kun pohdit ensin yleisellä tasolla, kuinka ongelma voitaisiin ratkaista ilman kaikkien täsmällisten yksityiskohtien huomioimista.
3. **Ratkaisu** Kun suunnitelma on olemassa, voit toteuttaa sen. Jos suunnitelma on hyvin laadittu, tiedät jo valmiaksi mitä työvaiheita ratkaisuun kuuluu ja miksi kukin niistä on tarpeellinen. Ratkaisuvaiheessa voit keskittää kunkin suunnitelmassa mainitun askeleen toteuttamiseen ja huomioida kaikki suunnitelmavaiheessa sivuutetut yksityiskohdat. Jos ongelman ratkaiseminen vaatii matemaattisten työkalujen käyttöä, niihin liittyvät laskut voi toteuttaa vasta tässä vaiheessa. Jos kaikki menee hyvin, ongelman pitäisi ratketa, kunhan seuraat suunnitelmaasi ja olet huolellinen sen toteuttamisessa. Hyvätkään suunnitelmat eivät tietenkään aina onnistu, etkä välttämättä pääsekään ratkaisussa haluamaasi lopputulokseen. Tällöin sinun on syjä palata suunnitelmavaiheeseen muuttamaan suunnitelmaa.
4. **Arviointi** Monimutkaisten ongelmien analyysissä voi tapahtua helposti virheitä, joten *ratkaisun järkevyys pitää aina arvioida*. Muutenkin on erittäin tarpeellista osata arvioida kohtaamiesi väitteiden oikeellisuutta yksinkertaisin periaattein, koska maailma on täynnä mielettömiä väitteitä eikä sinulla ole aina mahdollista selvittää niitä yksityiskohdaisesti. Käy fysiakaalisen ongelmien arvioinnissa läpi ainakin seuraavat kysymykset: Oletko vastannut kaikkiin kysymyksiin? Toteuttaako ratkaisusi erikoistapaukset, joissa ratkaisu on ilmiselvä? Oletko käytänyt suureita johdonmukaisesti, eli ethän sekoita esimerkiksi skalaareja vektorereihin ja ovathan yksiköt oikein? Jos vastauksessasi on numeroarvo, onko siinä järkevä määrä merkitsevä numeroita ja onko vastauksesi suuruusluokka järkevä? Kaikkien näiden asioiden muistamiseksi käy muistisääntö *KEVYT*:
  - Kysymyksiin vastattu?
  - Erikoistapaukset ja raja-arvot oikein?
  - Vektorit ja skalarit oikein?
  - Yksiköt oikein?
  - Tarkkuus ja suuruusluokka oikein?

# Yhteenvetö: Johdanto

## Fysiikka tieteenä

- **Tiede** on menetelmä tiedon systemaattiseksi keräämiseksi.
- Luonnontieteellisten väitteiden on oltava testattavissa. Jos tieteellinen tieto osoittautuu ristiriitaiseksi, tieteen väitteitä on muokattava tai ne on korvattava uusilla. Tiede on itseään korjaava.

- **Fysiikka** on kokeellinen tiede, jossa väittämien ja teorian ennusteteiden oikeellisuuden mittarina on niiden yhteensopivuus kokeellisten havaintojen kanssa.

## Suureet ja yksiköt

- **Suure** on mitattavissa oleva ominaisuus. Suureilla on fysiikassa sekä **suuruus** että **dimensio**.
- **Yksikkötarkastelu** on hyvä keino tarkastaa suureiden yhteensovivuus. Suureen yksikköä merkitään hakasulkein, esim.  $[x] = \text{m}$  tarkoittaa, että suureen  $x$  laatu on pituus ja yksikkö metri.
- Kaksi suuresta voidaan laskea yhteen jos niillä on sama dimensio:  $a + b$  on määritelty vain jos  $[a] = [b]$ .

- Mitkä tahansa suureet voidaan kertoa keskenään.
- Suure voi olla useimpien funktion argumenttina vain, jos se on paljas luku: esim.  $e^a$  on määritelty vain jos  $[a] = 1$ .
- Yhtälöissä pitää aina olla sama yksikkö molemilla puolilla: esim.  $a = b$  on tosi vain jos  $[a] = [b]$ .

## Kuvat ja kuvaajat

- Kuvat ovat yleensä paras tapa esittää paljon informaatiota ymmärrettävässä muodossa. Kuvia voi käyttää sekä oman ajattelun tukena että muiden kanssa kommunikoinnissa.

- **Kuvaajat** ovat tärkeä tapa esittää tietoa ja dataa fysiikassa.
- **Kuvaajien akselit** kertovat esittävät suureet sekä niiden mittakaavan.

## Ratkaisustrategioita

- Fisikaalisten **ongelmien ratkaiseminen** etenee seuraavasti:
  - hahmotetaan **tilanne**
  - tunnistetaan vallitsevat **fisikaaliset periaatteet**
  - muodostetaan **matemaattinen malli**
  - **ratkaistaan** tarvittavat suureet
  - **arvioidaan** saadut tulokset
- **Tarkista** nämä:
  - **Kysymyksiin** vastattu?
  - Erikoistapaukset ja **raja-arvot** oikein?
  - Vektorit, skalaarit ja differentiaalit oikein?
  - **Yksiköt** oikein?
  - **Tarkkuus ja suuruusluokka** oikein?
- Numeeristen laskujen tulokset ovat yhtä tarkkoja kuin niissä käytettävien lukuarvojen huonoin tarkkuus:

- yhteenlaskussa tarkkuden määrästävät **desimaalit**
- kertolaskussa tarkkuuden määrästävät **merkitsevät numerot**
- **Suuruusluokka-arvio** voidaan muodostaa seuraavasti:
  - jaetaan ongelma pienempiin osiin
  - arvioidaan kukin tekijä muodossa  $a \cdot 10^b$ , missä  $a$ :lle riittää yhden numeron tarkkuus
  - lasketaan lopputulos käyttäen potenssien laskusääntöjä
$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}, (10^a)^b = 10^{ab}, \frac{1}{10^a} = 10^{-a}.$$
- pyörristetään lopputulos kymmenen potensseiksi siten, että luvut 2–3 pyörristetään alaspäin ja 4–9 ylöspäin

## Sanasto

- tiede (science)
- teoria (theory)
- hypoteesi (hypothesis)
- malli (model)
- fysiikka (physics)
- suure (quantity)
- dimensio (dimension)
- yksikö (unit)
- yksikkötarkastelu (dimensional analysis)
- SI-yksikköjärjestelmä (SI-units)
- kuvaaja (graph, plot)
- symmetria (symmetry)

- matematiikka (mathematics)
- merkitsevä numero (significant digit)
- desimaali (decimal)
- pyöristäminen (rounding)
- suuruusluokka (order of magnitude)
- logaritmisen asteikko (logarithmic scale)
- raja-arvo (limit)
- approksimaatio (approximation)
- kvalitatiivinen (qualitative)
- kvantitatiivinen (quantitative)
- mikroskoopinen (microscopic)
- makroskoopinen (macroscopic)

## Vastaukset pohdintakysymyksiin

- 0.1** Tähän ei ole yhtä oikeaa vastausta. Kumuloituvissa aineissa kuten fysiikassa täytyy yleensä edetä asia kerrallaan, koska monimutkaisemmat asiat perustuvat yleensä yksinkertaisempien asioiden soveltamiseen ja yhdistelyyn. Jos siis perusasioita ei osaa, edistyneempiä asioita ei voi mitenkään ymmärtää. Toki joskus voi olla perusteltua opiskella ensin suurempi kokonaisuus pintatasolla, jonka jälkeen voi palata pohtimaan yksityiskohtia, kun on jo jonkinlainen käsitys siitä, miten eri asiat liittyvät toisiinsa.
- 0.2** Etsin tarkastetaan, että sinin argumentti on paljas luku:  $[ab^2] = A^2/A^2 = 1$ . Se on, joten sini on hyvin määritelty ja siispä  $[\sin(ab^2)] = 1$ . Koko lausekkeen yksikkö on  $[a] - 1/[b^2][\sin(ab^2)] = A^2 - 1/(1/A)^2 = A^2$ .
- 0.3** Tällaisilla malleilla voidaan tutkia monenlaisia asioita, esimerkiksi
- (a) erilaisten aineiden vaikutusta hermosoluun toimintaan (neurokemia),
  - (b) informaation kulku hermosoluun kesken (neuroverkkotiede),
  - (c) aivoalueiden tehtäviä ja niiden toimintahäiriöiden vaikuttuksia (aivotutkimus),
  - (d) ihmisten käyttäytymistä ja siihen vaikuttavia tekijöitä (psykologia) ja
  - (e) joukkojen käyttäytymistä (peliteoria).
- 0.4** Kun  $t = 3$  s, kuvajan datapisteestä voidaan lukea  $x = 3.3 \pm 0.3$  m. Vielä parempi arvioi voitaisiin saada datapisteen kautta piirretyn suoran avulla, jonka perusteella  $x = 3.1 \pm 0.2$  m.
- Kun  $t = 6$  s, ei olla kuvajan alueella. Tällöin täytyy jatkaa kuvaan piirrettyä suoraa eli ekstrapoloida ja päätellä  $x$ :n arvo tätä kautta. Graafisesti voidaan piirtää jyrkin ja loivin suora, joka näyttää sopivan mittapisteisiin, ja arvioida  $x$ :n arvo hetkellä  $t = 6$  s näiden välün jäävien arvojen kautta.
- Laskennallisesti aikavälillä  $t = 0 \dots 4$  s  $x$  muuttuu arviolta  $2.8 \pm 0.6$  m, ja hetkellä  $t = 2$  s suora kulkee pisteen  $x = 2.5 \pm 0.1$  m kautta, joten hetkellä  $t = 6$  s voidaan  $x$ :n arvoksi arvioida  $x = 5.3 \pm 0.7$  m.
- 0.5** Hyvin pitkästä langasta yhtä kaukana olevat pisteet muodostavat sylinterin eli ympyrälieriön vaipan. Fysiikassa "hyvin pitkä" tarkoittaa yleensä sitä, että mallina käytetään äärettömän pitkää kappaletta, joten tässä voidaan ajatella langan (ja sylinteripinnan) jatkuvan äärettömyksiin.
- 0.6** Luvussa  $a = 0.12$  on kaksi merkitsevää numeroa ja luvussa  $b = 3.45$  on kolme.
- (a) Lasku  $1/b$  on jakolasku, joten sen järkevä tarkkuus on 3 merkitsevää numeroa,  $1/b = 0.290$ . Lasku  $1/b - a$  on vähennyslasku, joten sen järkevä tarkkuus määritetyy desimaaleista,  $0.290 - 0.12 = 0.17$ . (Huom. varsinaiset laskut kannattaa aina tehdä niin suurella tarkkuudella kuin mahdollista, ja vasta lopuksi tulos pyörristetään sopivan tarkkuuteen.)
  - (b)  $a^2b$  sisältää vain kertolaskua, joten sen tarkkuus on 2 merkitsevää numeroa,  $0.12^2 \cdot 3.45 = 0.050$ . (c) Laskun  $a^2$  tarkkuus on 2 merkitsevää numeroa,  $0.12^2 = 0.014$ . Laskun  $b - a^2$  tarkkuus määrityy desimaaleista,  $3.45 - 0.014 = 3.44$ . Huomaa, että tässä järkevä tarkkuus on kaksi desimaalia eikä kaksi merkitsevää numeroa, koska viimeinen laskutoimitus on vähennyslasku kaksi- ja kolmedesimaalisen luvun välillä.
- 0.7** A-kirjain on suomen yleisin kirjain. Arvioidaan karkeasti, että kaikista kirjaimista osuus  $n_a/\text{kirjain} = 10^{-1}$  on a-kirjaimia. Yhdellä rivillä on noin  $n_{\text{kirjain/rivi}} = 10^2$  kirjainta ja yhdellä sivulla on keskimäärin noin  $n_{\text{sivu}} = 4 \cdot 10^1$  riviä (kunkin sivun rivien määrä riippuu tieteenkin siitä, onko sivulla esim. kuvia). Materiaalia on noin  $n_{\text{sivu}} = 7 \cdot 10^2$  sivua, joten kaikkiaan a-kirjaimia on  $n_a = n_a/\text{kirjain} \cdot n_{\text{kirjain/rivi}} \cdot n_{\text{rivi}} \cdot n_{\text{sivu}} = 10^{-1} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^1 \cdot 7 \cdot 10^2 = 28 \cdot 10^4 \approx 10^5$ . Tässä materiaalissa on siis arviolta  $10^5 - 10^6$  a-kirjainta.
- 0.8** (a) Funktion arvo selviää suoralla sijoituksella,  $x(0) = 1 + 2/3 = 5/3$ . (b) Kun  $t$  on hyvin suuri, voidaan tarkastella raja-arvoa, kun  $t$  lähestyy ääretöntä. Siispä suurilla  $t$ :n arvoilla voidaan arvioida  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 + 2/\infty = 1 + 0 = 1$ .
- 0.9** Ohjelma osaa melko hyvin arvata, mitä haluat, joten voit kokeilla esimerkiksi kirjoittaa "plot sin^2 x from -pi to pi". Voit kuitenkin käyttää myös täsmällisiä Mathematica-kielen komentoja, jotka olisivat tässä "Plot[Sin[x]^2,x,-Pi,Pi]" (tulos on kuvaaja, jossa on kaksi maksimia) sekä "Integrate[Sin[x]^2,x]" (tulos on  $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$ ).

# Osa I

## Mekaniikka



# 1 Liike

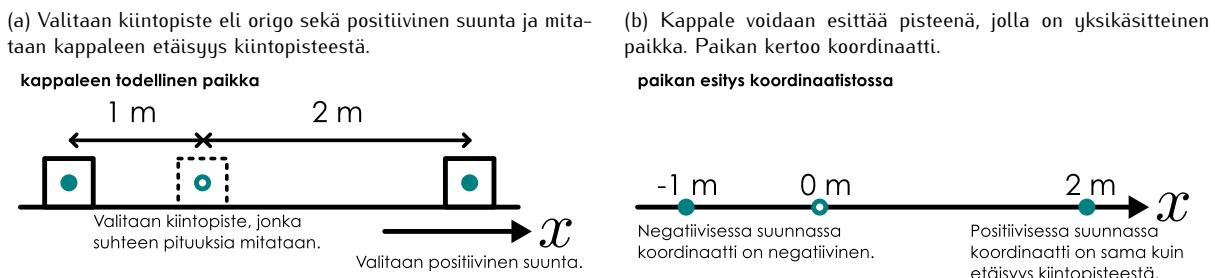
Mekaniikan keskeinen tutkimuskohde on kappaleiden liike sekä vuorovaikutusten ja liikkeen yhteys. Ensimmäinen askel mekaniikassa onkin siis liukkeen täsmällinen kuvaaminen. Aloitamme liukkeen tarkastelun yhdessä ulottuvuudessa ja myöhemmin yleistämme kuvausken kolmiulotteiseen avaruuteen. Tietenkin kappaleet liikkuvat todellisuudessa moniulotteisessa avaruudessa, mutta nün kauan kuin liike on ainakin likimain suoravii-vista, eli kappale liikkuu suoraa pitkin joko yhteen suuntaan tai edestakaisin, liikettä voi kuvata yksiulotteisena.

Lukiossa fysiikan matemaattinen käsitteily tapahtuu algebrallisesti, mikä tarkoittaa matemaattisten työkalujen rajoittuvan yksinkertaisiin laskutoimituksiin ja funktioihin. Näin ei kuitenkaan päästä juuri lukion oppimäärää pidemmälle vaan monimutkaisempien ilmiöiden matemaattinen analyysi vaatii kehittyneempiä matemaattisia työkaluja. Erityisesti muuttuvien suureiden analyysi vaatii derivaattojen ja integraalien eli differentiaalilaskennan käyttöä ja moniulotteisessa avaruudessa suuntien kuvaaminen edellyttää vektorien käsitteilyä. molemmat tekniikat esitellään jo tässä luvussa ja niiden käyttöä harjoitellaan ja syvennetään opintojen edetessä. Derointi ja integrointi ovat keskeisiä heti ja nütä käytetään jatkossa yleisesti. Vektoreihin syvennytään tarkemmin luvussa 4 tarkasteltaessa liikettä useassa ulottuvuudessa.

Tämän luvun opiskeltuaasi sinun tulee osata:

- määritellä paikkakoordinaatti sekä siirtymä koordinaatiston avulla
- määritellä nopeus ja kiihtyvyys sekä näiden skalaarikomponentit
- esittää liike kuvien ja kuvaajien avulla
- ratkaista paikka, nopeus ja kiihtyvyys derivointia tai integrointia käytäen
- esittää paikka, nopeus ja kiihtyvyys vektoreina

Kuva 1.1: Yhdessä suunnassa liikkuvan kappaleen paikka voidaan esittää koordinaattien avulla.



## 1.1 Paikka, aika ja nopeus

Liike yleisesti tarkoittaa sitä, että kappaleiden **paikat** muuttuvat. Paikka itsessään ei kuitenkaan ole fysiikalinen suure, jollei sitä voi mitata, ja tämä puolestaan vaatii, että on ensin valittava jokin **kiintopiste**, jonka suhteen paikkaa mitataan. Kiintopiste voi olla havaitseja itse tai sellaiseksi voidaan valita esimerkiksi jokin toinen kappale. Kun kiintopiste on valittu, voidaan mitata minkä tahansa kappaleen **etäisyys** tästä pisteesi. Etäisyys eli kiintopisteen ja kappaleen välisen **matkan** pituus on hyvin määritelty fysiikalinen suure. **Pituus** on itse asiassa fysiikan perussuure, ja sen yksikkö on metri (m). Perinteisesti pituus on mitattu pituusmitan avulla eli vertaamalla tutkittavaa pituutta tunnetun mittakappaleen pituuteen, ja metrin virallinen määritelmäkin perustui tähän periaatteeseen aina 1960-luvulle asti.

### Koordinaatisto

Paikka ja pituus (tai etäisyys) eroavat toisistaan yhdellä hyvin merkittävällä tavalla. Yleisesti on olemassa paljon pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana valitusta kiintopisteestä. Yksiulotteisessakin tapauksessa on aina kaksi pistettä, jotka ovat valitusta kiintopisteestä samalla etäisyydellä. Jotta paikka olisi yksikäsitteisesti määritelty, pitää etäisyyden lisäksi siis ottaa huomioon, missä *suunnassa* kiintopisteestä katsoen ollaan. Tämä huomioidaan käytämillä **koordinaatistoa** ja ilmoittamalla paikka **koordinaattien** avulla.

Koordinaatisto antaa kaikille avaruuden pisteille yksikäsitteisen numerosarjan eli koordinaatit, jotka ilmaisevat pisteiden paikkaa, ja kiintopistettä, jonka suhteen paikkoja mitataan, kutsutaan koordinaatiston **origoksi**. Tavallisia symboleja etäisyyksien avulla mitatuille koordinaateille ovat muun muassa  $x, y, z$ .

Koordinaatistot määrittelevät aina myös positiivisen ja negatiivisen suunnan kullekin koordinaatille siten, että avaruuden pisteet, jotka ovat origosta katsoen positiivisessa suunnassa, saavat positiivisia koordinaatteja, ja negatiivisessa suunnassa olevat pisteet saavat negatiivisia koordinaatteja. Yksiulotteisessa tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että kahdesta pisteestä, jotka ovat esimerkiksi etäisyydellä 1 m, toisen koordinaatiksi sovitaan  $x = 1 \text{ m}$  ja toisen  $x = -1 \text{ m}$ . Matematiikassa sanotaan, että avaruuden pisteet muodostavat reaaliakselin (jota merkitään  $\mathbb{R}$ ) tai  $x$ -akselin, jossa pisteitä on äärettömän tiheässä ja kullakin pisteellä on oma yksikäsitteinen reaalilukukoordinaattinsa.

Kappaleen **sürtymällä** tarkoitetaan sen paikan muutosta, ja tämän antaa loppu- ja alkukoordinaattien erotus (nimenomaan tässä järjestyksessä). Muutoksen symbolina käytetään fysiikassa suurta kreikkalaista delta-kirjainta,  $\Delta$ , eli merkitään

$$\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}. \quad (1.1)$$

Jos kappale on aluksi esimerkiksi pisteessä  $x_{\text{alku}} = 2.0 \text{ m}$  ja lopuksi pisteessä  $x_{\text{loppu}} = -1.0 \text{ m}$ , sen siirtymä on  $\Delta x = -3.0 \text{ m}$ . Tulos ei riipu siitä, ovatko kappaleen koordinaatit positiivisia vai negatiivisia — yhtä pitkälle ja samansuuntaiselle sürtymälle loppu- ja alkukoordinaattien erotus on aina sama. Toisin sanoen origon valinta ei saa vaikuttaa mittaustuloksiin.

Siirtymä ei kuitenkaan ole sama asia kuin kappaleen kulkema matka. Jos kappale nimitään liikkuu ensin yhteen suuntaan metrin ja sitten takaisin metrin, kappaleen kulkema matka on kaksi metriä mutta sen siirtymä on nolla metriä, sillä se on lopuksi samassa paikassa kuin lähtiessään. Tämä ero on syystä tiedostaa, koska on olemassa suureita, jotka riippuvat siirtymästä ja toisia jotka riippuvat kuljetusta matkasta.



- 1.1 Kappale on aluksi pisteessä  $x_0 = 1.0 \text{ m}$ . Siitä se siirtyy ensin pisteeseen  $x_1 = -2.0 \text{ m}$  ja sitten pisteeseen  $x_2 = 0.5 \text{ m}$ . (a) Mikä on kappaleen siirtymä? (b) Mikä on kappaleen kulkema matka? (c) Mitkä ovat kappaleen koordinaatit, siirtymä ja matka, jos origoksi (kiintopisteksi) valitaankin piste 2.0 m edellisestä origosta positiiviseen  $x$ -suuntaan?

## Alka ja nopeus

Aika on fysiikan perussuure, ja kaikilla on intuitiivinen käsitys siitä, mitä aika on. Aikahan kulkee tasaisesti eteenpäin, itsestään. Aika on fysikaalisesti erittäin mielenkiintoisen suure, mutta klassinen mekanikka ei juurikaan tutki ajan luonnetta. Sen sijaan mekanikkassa ajan todellakin ajatellaan olevan itsestään muuttuva suure, jonka suhteen muita suureita havainnoidaan. Ajan yksikkö on **sekanti (s)**. Sekunnin moderni määritelmä perustuu cesium-atomien lähetämän säteilyn ominaisuuksiin. Pituuden moderni määritelmä puolestaan perustuu valon nopeuteen tyhjiössä. Nykyisin metri on määritelty sen matkan pituudeksi, jonka valo kulkee ajassa  $1/299792458$  sekuntia.

Aivan kuten paikalle valitettiin kiintopiste, myös ajalle voidaan valita kiintopiste eli nollahetki, ja voimme määritellä ajan mitattavana suureena tämän hetken suhteen. Käytännössä tämän voidaan ajatella tapahtuvan nün, että nollahetkellä käynnistetään kello, ja tämän jälkeen ajan arvo mitattavana suureena määritellään kunakin hetkenä tämän kellon lukemaksi.

Kun kappale liikkuu, sen paikkakoordinaatti muuttuu ajan kuluessa, eli eri ajan hetkinä kappaleen paikalle mitataan eri arvot. Tätä voidaan matemaattisesti merkitä  $x(t)$ , jolloin sanotaan, että paikka  $x$  on ajan  $t$  **funktio**. Funktio on matematiikassa olio, jolle annetaan yksi tai useampi luku eli argumentti, ja funktilo palauttaa näitä vastaavan uuden luvun. Funktion  $x(t)$  tapauksessa funktiolle annetaan argumentti aika  $t$  ja funktilo kertoo mikä on kappaleen paikkakoordinaatti  $x$  tuona hetkenä. Mekaniikan perustehtäviä onkin selvittää, missä kappaleet milläkin ajan hetkellä ovat, eli mikä on kunkin kappaleen paikan funktilo  $x(t)$ .

Paikan muuttumista ajan kuluessa kuvaavat **nopeus**. Jos kappale siirryy yhden metrin yhdessä sekunnissa, kappaleen **keskimääräinen nopeus** on yksi metri sekunnissa ( $1 \text{ m/s}$ ) eli siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhde,

$$v_{x,\text{kesiarvo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Keskimääräinen nopeus riippuu kuitenkin yleensä siitä, kuinka pitkän ajanjakson  $\Delta t$  yli nopeutta mitataan.



**1.2** Juoksija harjoittelee juoksemalla edestakaisin 15.0 metrin matkan. Hän juoksee ensin matkan yhteen suuntaan ajassa 3.0 sekuntia, pysähtyy ja käännyy ajassa 0.5 sekuntia, ja juoksee takaisin lähtöpisteesensä ajassa 4.0 sekuntia. (a) Mikä on juoksijan nopeus menomatkalla? (b) Entä paluumatkalla? (c) Mikä on juoksijan keskimääräinen nopeus? (d) Entä keskimääräinen vauhti?

Tehdään sitten ajatuskoe: Oletetaan, että jonkin kappaleen paikka tunnetaan ajan funktiona mielivaltaisella tarkkuudella. Nyt jos määritämme kappaleen siirtymän eripituisilla aikaväleillä  $\Delta t = t_{\text{loppu}} - t$ , missä alkavälin alkuhetki  $t$  pysyy samana mutta loppuhetki  $t_{\text{loppu}} = t + \Delta t$  valitaan yhä lähempää alkuhetkeä, huomataan, että näin määritetty keskimääräinen nopeus  $\Delta x / \Delta t = [x(t+\Delta t) - x(t)] / \Delta t$  ei muutu mielivaltaisesti vaan lähestyy jotakin tiettyjä arvoja. Matemaattisesti tästä ominaisuutta kutsutaan raja-arvoksi, ja sen avulla määritellään kappaleen hetkellinen nopeus eri lyhyemmin pelkkä nopeus

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.3)$$

Tämä on suure, joka riippuu ajan hetkestä  $t$  eli toisin sanoen hetkellinen nopeus on ajan funktilo,  $v_x(t)$ , kuten kappaleen paikkakoordinaattikin. Alaindeksi  $x$  on tässä muistuttamassa, että kyseessä on nopeus suuntaan, jossa  $x$  kasvaa — *jos liike suuntautuu negatiiviseen  $x$ -suuntaan, myös nopeus  $v_x$  on negatiivinen*.

Yllä on käytetty äärellisten muutosten  $\Delta x$  ja  $\Delta t$  raja-arvoille lyhennysmerkintöjä  $dx$  ja  $dt$ . Näitä olisit kutsutan **differentiaaleiksi** (tai *infinitesimaaleiksi*), ja ne ovat keskeisiä työkaluja, kun analysoidaan muuttuvia suureita.

Nopeuden määritelmässä esiintyvä differentiaalien jakolasku eli suureiden erotusten osamäärä on nimeltään **derivaatta**. Tämän tuloksen käytännön merkitys nähdään esimerkissä 1.1. Fysikaalisesti derivaatta  $\frac{dx}{dt}$  ilmaisee kuinka paljon suure  $x$  muuttuu, kun suure  $t$  muuttuu. Jos tämä derivaatta on suuri eli nopeus on suuri, pienikin muutos ajassa aiheuttaa suuren muutoksen paikkakoordinaatissa.

Matematiikassa muuttujan  $x$  derivaatalle muuttujan  $t$  suhteen käytetään mm. pilkkumerkintää  $x'(t)$ , mutta fysiikassa derivaattoja merkitään hyvin yleisesti juuri differentiaalien suhteena  $dx/dt$ , koska differentiaaleilla laskemalla voidaan derivaattoja ja muita differentiaalilaskennan lausekkeita manipuloida helposti. Jatkossa näemme tästä runsaasti esimerkkejä, ja differentiaalimerkintöihin on syytä tututella mahdollisimman pian.



**1.3** Olkoon  $x = bt^2$  eli  $t = \sqrt{x/b}$ , missä  $b$  on vakio. Mitä on (a)  $dx/dt$  ja (b)  $dt/dx$ ? (c) Mitä nämä ovat, jos  $b = 2$ ,  $t = 1$  ja  $x = 2$ ?

## esimerkki 1.1

## Nopeus ja keskinopeus

Mäkeä alas vierivän pallon paikkaa ajan funktio  $x(t) = at^2$ , missä vakio  $a = 2.0 \text{ m/s}^2$ . Mikä on pallon keskinopeus hetkestä  $t = 3.0 \text{ s}$  alkavalla aikavälillä, jonka pituus on (a) 1 s, (b) 0.1 s, (c) 0.01 s, (d) 0.001 s. (e) Mikä on kappaleen nopeus hetkellä  $t = 3.0 \text{ s}$ ?

**SUUNNITELMA** Kappaleen keskinopeus aikavälillä  $t \dots t + \Delta t$  saadaan kappaleen tämän ajan kuluessa tekemän siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhteena. Kappaleen hetkellinen nopeus on sen paikan derivaatta ajan suhteen.

Keskinopeus on

$$v_{x,\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = a \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \quad (1.4)$$

ja hetkellinen nopeus on derivoimissäännön  $d(t^n)/dt = nt^{n-1}$  perusteella

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2at. \quad (1.5)$$

**RATKAISU** Sijoittamalla lukuarvot keskinopeuksiksi saadaan

	$\Delta t$	$v_{x,\text{keskiarvo}}$
(a)	1 s	14 m/s
(b)	0.1 s	12.2 m/s
(c)	0.01 s	12.02 m/s
(d)	0.001 s	12.002 m/s

(e) Kappaleen nopeus on  $v_x(3 \text{ s}) = 2 \cdot 2.0 \text{ m/s}^2 \cdot 3.0 \text{ s} = 12 \text{ m/s}$ .

Mathematica:

```
(* paikka ajan funktiona *)
x[t_] := a t^2

(* tallennetaan lukuarvot *)
lukuarvot = {t0 -> 3, a -> 2};

(* lasketaan keskinopeudet *)
Table[(x[t0 + dt] - x[t0])/dt /. lukuarvot, {dt, {1, 0.1, 0.01, 0.001}}]
{14, 12.2, 12.02, 12.002}

(* lasketaan nopeus derivoiden *)
v = D[x[t0], t0]
2 a t0
v /. lukuarvot
{12}
```

**ARVIOINTI** Ilmiselvästi keskinopeuksien raja-arvo lähestyy derivoiden laskettua nopeutta  $v_x = 12 \text{ m/s}$ . Tämä raja-arvo voidaan laskea tarkasti, sillä keskinopeuden lauseke sievenee muotoon

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = a \frac{t^2 + 2t(\Delta t) + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = a(2t + \Delta t). \quad (1.6)$$

Tämän raja-arvo on

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(2t + \Delta t) = 2at \quad (1.7)$$

eli sama kuin derivoimissäännöllä laskettu tulos. Nän tieteenkin pitääkin olla, koska kyseinen sääntö on johdettu vastavalla raja-arvotarkastelulla.

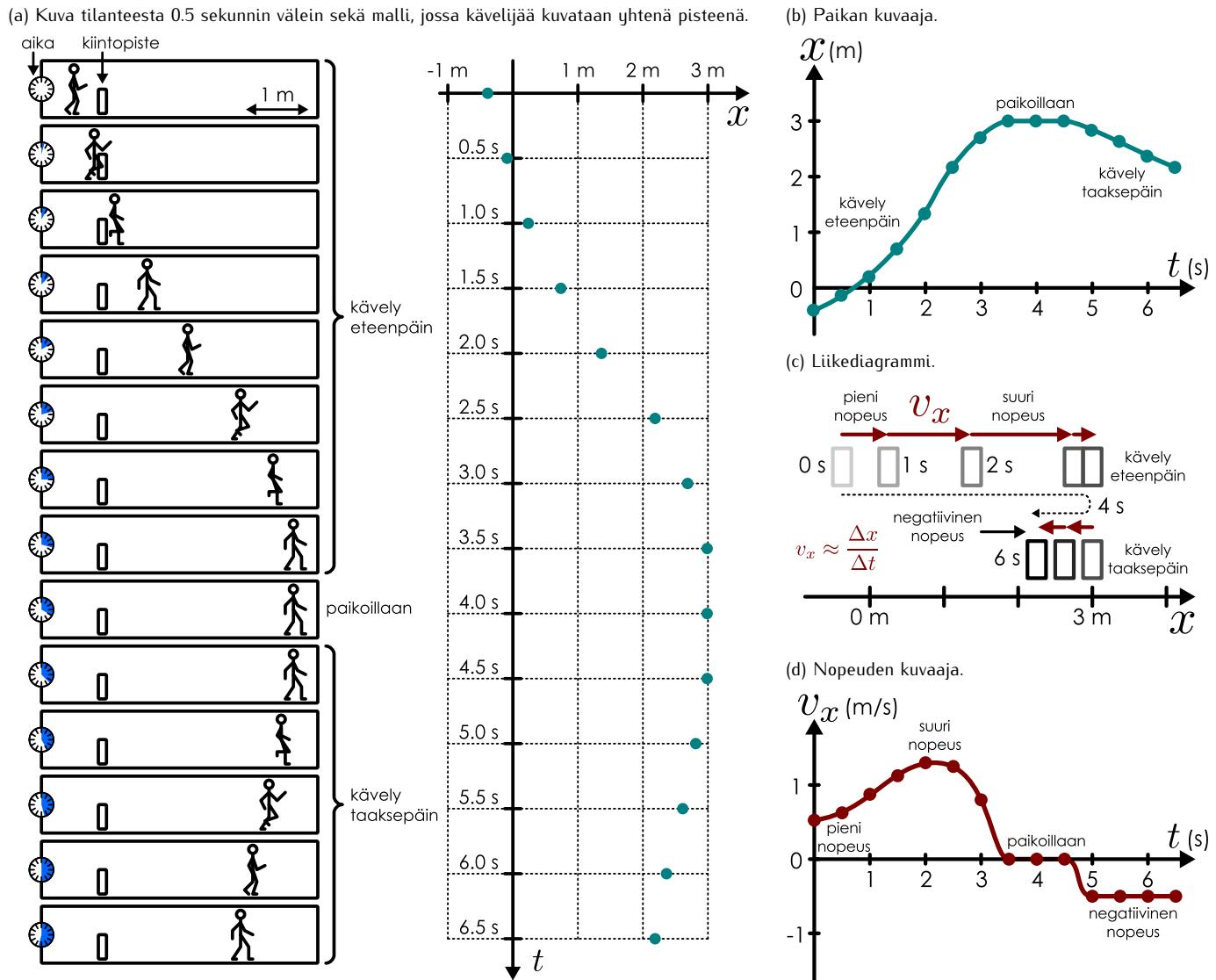
## 1.2 Liikkeen graafinen esittäminen

Monimutkaiset ilmiöt on melkein aina helpoin ymmärtää hyvän kuvan perusteella. Esimerkiksi selkeästä liikkeen kuvallisesta esityksestä voidaan yhdellä vilkaisulla päättää kappaleen kuljema matka, siirtymä, mahdolliset käännytymiset, nopeus, nopeuden muuttuminen yms. tietoa, jonka laskeminen esimerkiksi numeerisesta esityksestä voi olla hyvin työlästä. Tutustumme seuraavaksi tällaisten graafisten esitysten laatimiseen sekä niiden tulkitsemiseen. Vaikka tässä aiheena onkin liike, samanlaiset päätelyt osoittautuvat myöhemmin tärkeiksi myös muiden suureiden esittämisessä.

Tarkastellaan hyvin yksinkertaista esimerkkiä liikkeestä: kävelevää ihmistä. Kuvassa 1.2 (a) on esitetty sarja kävelijää esittäviä kuvia, joissa tämä kulkee ensin eteenpäin, pysähtyy ja kulkee sitten taaksepäin. Kuvat on otettu puolen sekunnin välein, ja ne yhdessä esittävät kävelijän liikkeen 6.5 s ajalta. Tällainen kuvasarja ei ole kuitenkaan paras tapa kuvata liikettä, koska se sisältää paljon turhaa informaatiota. Emme ole kiinnostuneita kävelijän tarkasta askelluksesta vaan liikkeestä yhtenä yksikkönä eli *kappaleena*, joten voimme tehdä tilanteesta yksinkertaistetun mallin, jossa kävelijää kuvaa vain yksi piste. Tämän pisteen liike on kuvausksem-

## LIIKE

Kuva 1.2: Eriisia tapoja esittää liike graafisesti. Tässä henkilö kävelee ensin oikealle, pysähtyy, ja palaa sitten jonkin matkaa vasemmalle.



me koko kävelijän liikkeestä. Valitsemalla vielä kuvasta kiintopisteen voimme kiinnittää koordinaatiston ja piirtää kävelijän paikkaa kuvaavan pisteenvaihdoksen tähän koordinaatistoon eri ajan hetkinä.

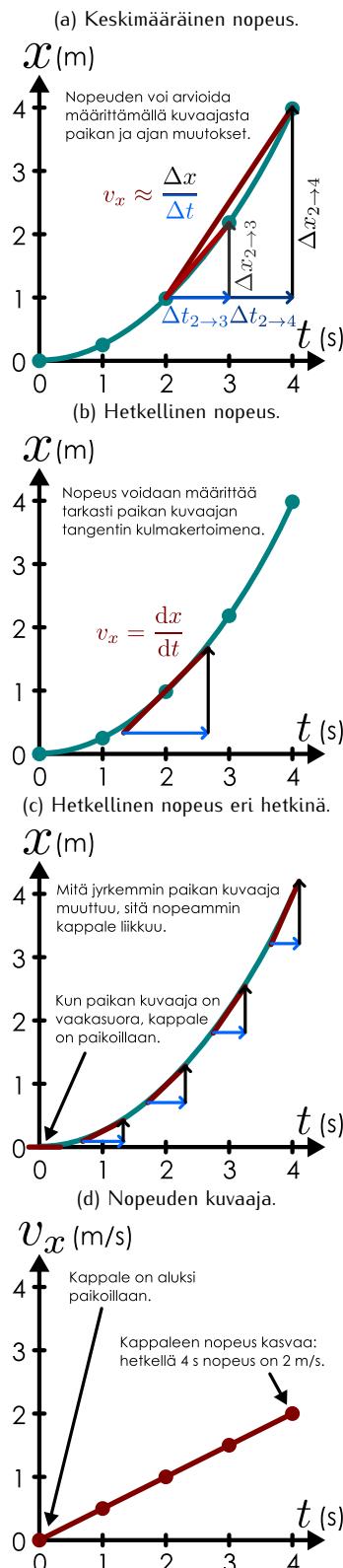
Edellä kuvattu malli on kävelijän *paikan kuvaaja*. Kuvajassa yksi akseli esittää paikkakoordinaattia ja toinen aikaa, ja kunkin kuvajan piste ilmaisee kävelijän paikan tietyllä ajan hetkellä. Periaatteessa kuvajissa akselit voi piirtää osoittamaan mihin suuntaan tahansa. Kuitenkin tällaisissa kuvajissa on tavallisesti tapana piirtää riippumaton suure vaaka-akselille ja tästä riippuva suure pystyakselille. Koska klassisessa mekanikaassa paikan ajatellaan riippuvan ajasta eli paikka on ajan funktio,  $x(t)$ , on siis tapana piirtää kuvaja niin, että paikkakoordinaatti  $x$  on pystyakselille ja aikakoordinaatti  $t$  on vaaka-akselille. Tämä kuvaja on esitetty kuvassa 1.2 (b). Tässä kuvajassa pisteiden muodostama kuvio on täsmälleen sama kuin kuvassa (a) paitsi että sitä on käännetty ja sen mittakaavaa on muutettu.

Näin konstruoitu kuvaja, jonka vaaka-akselina on aika  $t$  ja pystyakselina paikkakoordinaatti  $x$ , on kappaleen paikkaa kuvaavan matemaattisen funktion  $x(t)$  graafinen esitys. Tällaisessa esityksessä kappaleen ollessa paikoillaan aika muuttuu mutta paikkakoordinaatti ei, joten kuvaja on *vaakasuora viiva*  $x = \text{vakio}$ . Tällöin sanotaan kappaleen olevan **levossa**. Jos kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, sen  $x$ -koordinaatti kasvaa ajan kulkiessa ja kuvaja on siten *nouseva käyrä*. Vastaavasti kappaleen liikkumisen negatiiviseen suuntaan  $x$ -koordinaatti pienenee ja kuvaja on *laskeva käyrä*. Kuvajan leikatessa  $x$ -akselin kappaleen koordinaatti saa arvon nolla eli kappale on samassa paikassa kuin koordinaatiston määrittelevä kiintopiste. Muuta erityistä merkitystä paikkakoordinaatin nollapisteellä ei ole. Tässä tarkastellussa esimerkissä kävelijä eteenpäin ilmenee kuvajan nousemisena ylöspäin. Kun kävelijä on paikoillaan, kuvaja on vaakasuora. Lopuksi kävelijä kulkee takaperin, jolloin kuvaja laskee alas.



**1.4** Miltä kävelijän paikan kuvaaja näyttäisi, jos pisteessä  $x = 2$  m olisi teleportti, joka siirtäisi hänet välittömästi pisteeseen  $x = 3$  m? Koska teleportteja ei ole olemassaakaan, millaisia oikeat paikan kuvaajat siis eivät saa olla?

Kuva 1.3: Hetkellisen nopeuden määrittäminen graafisesti.



on myös  $x$ -akselin suuntaisen etäisyden  $\Delta x$  lähestyttävä nolla, jos kuvaaja on jatkuva eli jos kuvaaja ei ole yhtäkäistä hyppäystä (kuten fysiikalisessa liikkeessä ei ole). Jos kuvaaja on lisäksi sileä eli siinä

**Liikediagrammi** on toinen mahdollinen tapa esittää kävelijän liike. Tällöin valitaan sopivat ajan hetket tasaisin väliajoin ja piirretään samaan kuvaan kappaleen paikka kaikkina näinä hetkinä. Kuvassa 1.2 (c) on piirretty kävelijän liikkeen liikediagrammi, kun peräkkäisten kuvien väliseksi ajaksi on valittu yksi sekunti. Selkeyden vuoksi diagrammi on jaettu kahteen osaan sen mukaan tapahtuuko liike eteenpäin vai taaksepäin. Lopputulos muistuttaa pitkällä valotusajalla otettua valokuvaaa, jossa yhdessä kuvassa näkyy kappaleen **liikerata** pitkän ajan kuluessa.

Liikediagrammissa näkyy selkeästi kappaleen siirtymä kummakin aikaväillä. Yhdessä ulottuvuudessa tästä nähdään helposti tapahtuuko liike positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan. Erityisen käytökelpoinen liikediagrammi on kuitenkin liikkeen tapahtuessa tasossa, koska tällöin myös liikkeen suunta näkyy kuvasta suoraan. Tällaisiin liikediagrammeihin tutustumme luvuissa 4 sekä 5.

Kappaleen keskimääräinen nopeus (1.2) määriteltiin lyhyen jakson aikana tapahtuneen siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhteena. Siispä koska liikediagrammissa on piirretty kappaleen paikka tasaisin väliajoin, kappaleen keskinopeus kuvattujen ajan hetkien välillä on suoraan verrannollinen kappaleen kokemiin siirtymiin. Niinpä myös kappaleen keskinopeus voidaan arvioida liikediagrammin avulla piirtämällä nuolia kappaleen peräkkäisten paikkojen välillä. Näiden nuolien pituus on verrannollinen kappaleen nopeuteen ja nuolten suunta kuvaa kappaleen liikesuuntaa. Tässä tapauksessa nähdään suoraan, että kävelijä liikkuu aluksi eteenpäin ensin hitaasti ( pieni siirtymä), sitten nopeammin (suuri siirtymä) ja lopulta jälleen hitaammin kunnes pysähtyy. Kävellessään takaperin kävelijä liikkuu hitaasti likimain tasaisella nopeudella (siirtymät negatiiviseen suuntaan).

Liike voidaan luonnollisesti kuvata myös piirtämällä nopeus  $v_x(t)$  ajan funktio kuvan 1.2 (d) tapaan. Tällaisessa kuvaajassa kappaleen pysymistä paikoillaan kuvavat pisteet, joille  $v_x = 0$  m/s, ja kuvaajan vaakasuorat alueet esittävät yleisemmin liikettä, jossa nopeus ei muudu eli **tasaista liikettä**. Kuvaajan ollessa  $t$ -akselin yläpuolella  $v_x > 0$  m/s kappale liikkuu positiiviseen suuntaan ja kappaleen vauhti on sitä suurempi mitä korkeammalla nopeuden kuvaaja on. Vastaavasti kuvaajan ollessa  $t$ -akselin alapuolella kappale liikkuu negatiiviseen suuntaan. Nopeuden kuvaajan ja  $t$ -akselin leikkaaminen tarkoittaa siis kappaleen liikkeen **suunnan kääntymistä** ja leikkauspisteessä kappale on hetkellisesti paikoillaan. Tässä esimerkissä nopeus on aluksi positiivinen ja kasvava kuten liikediagrammissakin pääteliin. Kävelijän ollessa paikoillaan nopeuden kuvaaja on nollatasolla. Lopuksi kävelijä kulkee negatiiviseen suuntaan, joten nopeuden kuvaajakin kulkee nollatasolla alapuolella. Koska kävelijän nopeus on lopuksi likimain vakio, nopeuden kuvaaja on vaakasuora.

Nopeuden suuruus voidaan arvioida liikediagrammiin piirrettyjen siirtymien avulla, mutta koska liikediagrammiin piirretty nuolet kuvavat vain kappaleen keskinopeutta, tämä arvio on epätarkka. Nopeus voidaan kuitenkin määrittää täsmällisesti paikan kuvaajan avulla. Kappaleen nopeus määriteltiin yhtälössä (1.3) siirtymän ja ajan muutoksen suhteeseen raja-arvona. Paikan kuvaajassa kappaleen siirtymä on kahden pisteen välisen  $x$ -akselin suuntainen etäisyys (eli etäisyys pystysuunnassa) ja tästä vastaava ajan muutos on pisteen välisen  $t$ -akselin suuntainen etäisyys (eli etäisyys vaakasuunnassa). Tämä on havainnollistettu kuvassa 1.3 (a). Niinpä kappaleen keskimääräinen nopeus (1.2) on kuvaajan kahden pisteen kautta kulkevan sekantin eli leikkaajan kulmakerroin.

Raja-arvo, kun keskinopeus lasketaan yhä lyhyemmältä aikaväliltä,  $\Delta t \rightarrow 0$ , tarkoittaa graafisesti sitä, että  $t$ -akselin suuntainen etäisyys pienenee. Koska paikan kuvaaja yhdistää paikka- ja aikakoordinaatteja,

## LIIKE

ei ole teräviä piukkejä, voidaan sille piirtää **tangentti** eli sivuaja, joka koskettaa kuvaajaa täsmälleen yhdessä pisteessä ja on tässä pisteessä täsmälleen yhdensuuntainen kuvaajan kanssa (kuva 1.3 (b)). Tällöin rajalla  $\Delta t \rightarrow 0$  kuvaajalle piirretty sekantti lähestyy kuvaajan tangenttia. Koska kappaleen keskinopeus on sen kuvaajan sekantin kulmakerroin ja sekantti lähestyy graafisessa esityksessä tangenttia tarkasteltavan aikavälisen lähestyessä nollaa, täytyy tangentin kulmakertoimen olla keskinopeuksien raja-arvo. Keskinopeuden raja-arvo aikavälisen lähestyessä nollaa on kuitenkin määritelmän mukaisesti kappaleen nopeus  $v_x$ . Siispä kappaleen nopeus  $x$ -suunnassa on sen *paikan kuvaajan tangentin kulmakerroin*.

Tämä on järkevä tulos: kun kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, sen nopeus on positiivinen. Toisaalta tällöin kuvaaja on nouseva käyrä, jonka tangentin kulmakerroin on myös positiivinen. Vastaavasti kun kappale liikkuu negatiiviseen suuntaan, sen kuvaaja on laskeva käyrä, jonka tangentin kulmakerroin on negatiivinen ja samoin  $v_x$  on negatiivinen. *Mitä nopeammin kappale liikkuu, sitä jyrkempi paikan kuvaaja on.* Jos kappale on paikoillaan, sen nopeus on nolla, kuvaaja on vaakasuora, ja tangentin kulmakerroin on myös nolla.



**1.5** Kappale liikkuu siten, että sen nopeus aikavälillä  $0 \dots 1$  s on  $1$  m/s ja aikavälillä  $1 \dots 2$  s nopeus on  $2$  m/s. Miltä kappaleen paikan ja nopeuden kuvaajat näyttävät hetkellä  $t = 1$  s?

### 1.3 Paikan määrittäminen nopeuden avulla

Paikan ja nopeuden välisen yhteyden kertoo nopeuden määritelmä (1.3), josta nopeuden voi laskea, kun paikka tunnetaan eri ajan hetkinä. Graafisesti nopeuden voi lukea paikan kuvaajasta sen kulmakerroimen. Usein kuitenkin pitää selvittää missä kappale on kulloinkin, kun nopeus tunnetaan. Tarkastellaankin siis seuraavaksi, miten paikka voidaan määrittää laskemalla tai kuvaajan avulla nopeuden perusteella.

Yksinkertaisin tapaus on se, että nopeus  $x$ -suunnassa on *vakio*, jolloin se voidaan ilmaista kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhteena,  $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Kappale tienkenkin liikkuu sitä pidemmälle mitä kauemmin se liikkuu. Jos kappale on aluksi paikassa  $x_{\text{alku}}$ , se on ajan  $\Delta t$  jälkeen paikassa

$$x_{\text{loppu}} = x_{\text{alku}} + \Delta x = x_{\text{alku}} + v_x \Delta t. \quad (1.8)$$

Jos nopeus ei ole vakio vaan muuttuu, sitä ei voi enää ilmaista äärellisten muutosten avulla eikä yhtälö (1.8) enää toimi. Kuitenkin jos liikettä tarkastellaan *hyvin lyhyellä aikavälillä*  $\Delta t$ , voidaan nopeutta pitää tänä aikana likimain vakiona ja kappaleen siirtymä on

$$\Delta x_{t \rightarrow t+\Delta t} \approx v_x(t) \Delta t. \quad (1.9)$$

Tässä merkintä  $t \rightarrow t + \Delta t$  on muistuttamassa siitä, että kyseessä on matka, jonka kappale kulkee aikavälillä hetkestä  $t$  hetkeen  $t + \Delta t$  eikä kyseessä siis ole raja-arvo. Matka  $\Delta x_{t \rightarrow t+\Delta t}$  on hyvin lyhyt, koska aikaväli  $\Delta t$  on lyhyt.

Nyt kappaleen liike pidemmällä aikavälillä  $t_{\text{alku}} \rightarrow t_{\text{loppu}}$  voidaan jakaa hyvin moneen hyvin lyhyeen ajanjaksoon  $t_{\text{alku}} \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2, t_2 \rightarrow t_3, \dots, t_{N-1} \rightarrow t_{\text{loppu}}$ . Tällöin kappaleen *kokonaissiirtymä* saadaan laskemalla yhteen kaikki pienet siirtymät, jotka kappale kulkee kunkin lyhyen aikavälisen kuluessa,

$$\Delta x = \Delta x_{t_{\text{alku}} \rightarrow t_1} + \Delta x_{t_1 \rightarrow t_2} + \dots + \Delta x_{t_{N-1} \rightarrow t_{\text{loppu}}}. \quad (1.10)$$

Jos aikavälit ovat kaikki tarpeeksi lyhyitä, voidaan nopeutta pitää jokaisen aikana *erikseen* vakiona yhtälön (1.9) mukaisesti kuitenkin niin, että eri aikaväleillä nopeudella on eri arvot. Näin kappaleen kokonaissiirtymäksi saadaan

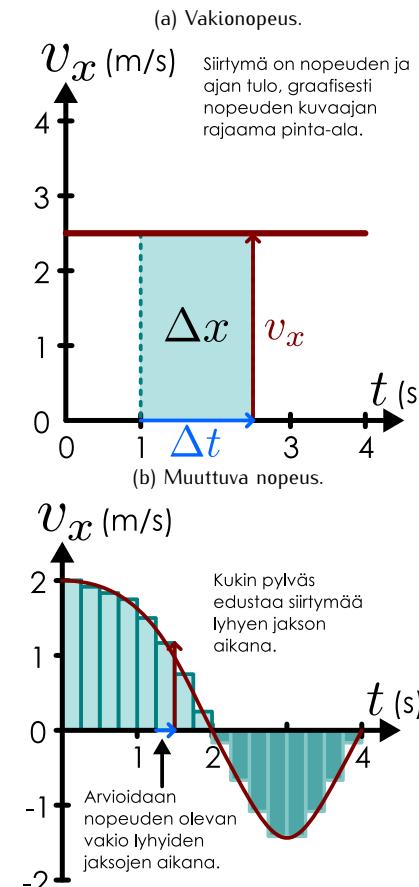
$$\Delta x \approx v_x(t_0) \Delta t + v_x(t_1) \Delta t + \dots + v_x(t_{N-1}) \Delta t. \quad (1.11)$$

Tässä on oletettu, että kaikki aikavälit ovat yhtä pitkät,  $\Delta t = (t_{\text{loppu}} - t_{\text{alku}})/N$ . Tämä ei ole välttämätöntä päätelyyn kannalta, mutta vähentää kirjanpidon tarvetta.



**1.6** Kappaleen keskinopeus on  $0.1$  m/s aikavälillä  $t = 0.0 \dots 0.2$  s,  $0.2$  m/s aikavälillä  $t = 0.2 \dots 0.4$  s,  $0.4$  m/s aikavälillä  $t = 0.4 \dots 0.6$  s ja  $0.7$  m/s aikavälillä  $t = 0.6 \dots 0.8$  s. Mikä on kappaleen kokonaissiirtymä?

Kuva 1.4: Siirtymän määrittäminen graafisesti nopeuden kuvaajan avulla.



Summa (1.11) on approksimaatio. Kuitenkin approksimaatiossa tehty virhe pienenee, kun tarkasteltava pitkä aikajakso  $t_{\text{alku}} \rightarrow t_{\text{loppu}}$  jaetaan yhä pienempiin osiin. Matemaattisesti tällöin otetaan raja-arvo, kun aikavälien  $\Delta t$  lukumäärä lähestyy ääretöntä ja niiden pituus lähestyy nollaa. Tämä on **integraalin** eräs määritelmä (ns. Riemannin summa), joten kappaleen siirtymäksi saadaan

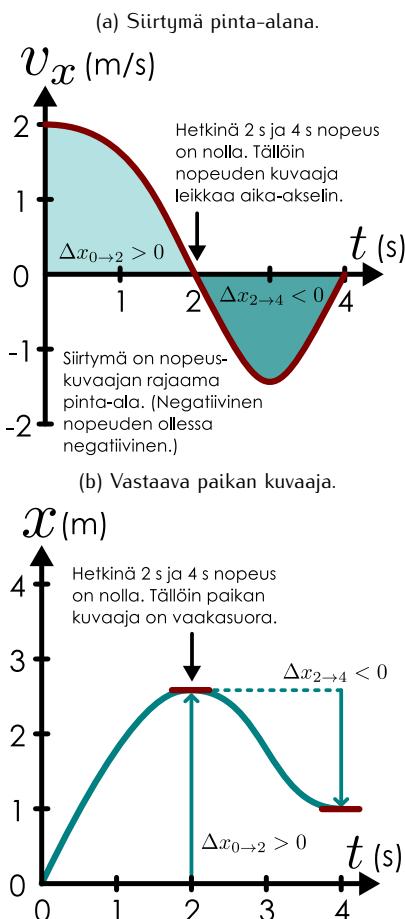
$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N v_x(t_i) \Delta t = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt. \quad (1.12)$$

Siirtymä ilmaisee paikan muutosta, joten jos halutaan tietää kappaleen paikka siirtymän jälkeen, on luonnollisesti huomioitava, mistä kappale lähti lükkeelle

$$x_{\text{loppu}} = x_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt. \quad (1.13)$$

Koska nopeus on paikan derivaatta ajan suhteeseen ja paikka on yllä esitetyn päättelyn mukaan nopeuden integraali ajan suhteeseen, samalla on johdettu yleisesti pätevä tulos: **Derivoointi ja integroointi ovat toistensa käänneisoperaatioita.** Toisin sanoen jos suuresta  $a$  saadaan suureesta  $b$  integroimalla, voidaan alkuperäiseen muuttujaan palata derivoimalla, ja päinvastoin.

Kuva 1.5: Siirtymä on nopeuden integraali.



Yllä esitetty päättely ei koske ainostaan paikkaa ja nopeutta, vaan samaa päättelytekniikkaa käytetään fysiikassa yleisesti tarkeastaessa muuttuvien suureiden vaikutusta pitkän ajan kuluessa. Päättelyn logiikka on tällöin aina seuraava:

- jaetaan aika hyvin lyhyisiin jaksoihin
- ajatellaan suureiden olevan näiden lyhyiden jaksojen aikana likimain vakioita
- määritetään vaikutus kunkin jakson aikana erikseen
- summataan lopuksi kaikki pienet tekijät yhteen, jolloin päädytään integroimaan ajan suhteeseen.

Päättely toimii, jos laskettava suure on osittavissa ajan suhteeseen. Silloinkin kun näin ei ole, osittelu voi toimia jonkin toisen suureen suhteeseen, jolloin tästä suureesta tulee integroimismuuttuja. Vastaavia esimerkkejä käsitellään jatkossa lisää.

Itse asiassa lasku onnistuu suoraan käyttämällä differentiaaleja ilman, että raja-arvoja täytyisi erikseen merkitä näkyviin. Nimittäin vaikka nopeus riippuisi ajasta, infinitesimaalisen jakson  $dt$  aikana muuttuvaakin nopeutta voidaan pitää vakiona. Tällöin voidaan muodollisesti kertoa nopeuden määritelmä (1.3) ajan differentiaalilla  $dt$ , jolloin saadaan tulos

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = v_x dt, \quad (1.14)$$

mikä on differentiaaleille tarkka yhtälö, ei approksimaatio. Differentiaalia  $dx$  voidaan sitten integroida, jolloin saadaan differentiaalien summa eli paikan muutos äärellisen ajan kuluessa

$$\Delta x = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} dx = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x dt. \quad (1.15)$$

Tällainen differentiaaleihin perustuva kirjoitustapa, jossa raja-arvojen ottaminen jätetään merkitsemättä, on fysiikassa hyvin yleinen. Tässä kohtaa voi tieteenkin herätä epäilyä, saako differentiaaleilla kertoa ja jakaa — ja vastaus on kyllä. Differentiaaleille voi

laskea aivan kuin ne olisivat normaaleja reaalilukuja. Jos tämä tuntuu hankalalta hyväksyä, laskun voi aina tehdä ensin äärellisillä muutoksilla joista otetaan vasta lopuksi raja-arvo, kun muutosten suuruus lähestyy nollaa. Käytännössä näin ei kuitenkaan fysiikassa koskaan tehdä, koska differentiaaleilla laskien samaan loppituloon päästään paljon helpommin.



**1.7** Selitä omiin sanoin, kuinka paikasta  $x(t)$  lasketaan nopeus  $v_x(t)$  ja päinvastoin. Keksi jokin esimerkifunktio  $v_x(t)$  (joka ei ole vakio) ja laske sitä vastaava paikan  $x(t)$ , kun  $x(0) = -1$  m. Tarkista laskusi johtamalla tästä paikan lausekkeesta nopeus.

## 1.4 Suunnat ja vektorit

Suureita, joita kuvaa vain suuruus, kutsutaan **skalaareiksi**. Tällainen suure voi saada arvokseen esimerkiksi kokonais- tai reaalilukuja sekä suureen dimensiota kuvaavan yksikön. Tällaisia suureita ovat esimerkiksi lämpötila, massa ja lukumääärä. On kuitenkin olemassa myös suureita, joihin liittyy enemmän ominaisuuksia kuin vain suuruus. Eräs tällainen suureiden luokka ovat suureet, joilla on suuruuden lisäksi suunta, ja näitä kutsutaan **vektoreiksi**. Koska esimerkiksi siirtymällä ja nopeudella on suunta, ne ovat vektorisuureita. Myös vektoreilla on fysiikassa dimensio ja yksikkö. Esimerkiksi nopeus on vektorisuure, jonka yksikkö on m/s. Aivan kuten skalaarisuureen "suuruuteen" kuuluu sekä lukuarvo (kuinka paljon) että yksikkö (mitä laatuja), myös vektorisuureilla yksikön voi ajatella kuuluvan osaksi vektorin "suuruutta", jolloin vektorin "suunta" on puhtaasti geometrinen ominaisuus, joka ainoastaan määrittelee suunnan avaruudessa.



**1.8** Mitkä näistä suureista ovat vektoreita ja mitkä skalaareita: nopeus, paikka, pituus, matka, siirtymä, lukumääärä, tilavuus, lämpötila?

Graafisesti vektorit esitetään tavallisesti *nuolina*. Nuolen suunta osoittaa vektorin suunnan ja nuolen pituus osoittaa vektorin suuruuden. Esimerkiksi siirtymän tapauksessa esitys on aivan konkreettinen: jos kappale siirtyy pisteestä A pisteeseen B, siirtymää voidaan esittää nuolella, joka osoittaa pisteestä A pisteeseen B. Jos siirtymän pituus eli pisteiden välinen etäisyys oli esimerkiksi 1 cm, siirtymää kuvaavan nuolen pituus on myös 1 cm. Toki jos tilanteesta pürrtetään kuva eri *mittakaavassa*, myös siirtymiä kuvaavien nuolien pituudet muuttuvat. Jos esimerkiksi 100 km kulkeneen auton siirtymä pürrtetään kartalle, jossa yksi senttimetri vastaa kymmentä kilometria luonnossa, siirtymää kuvaavan nuolen pituudeksi tulee 10 senttimetriä.

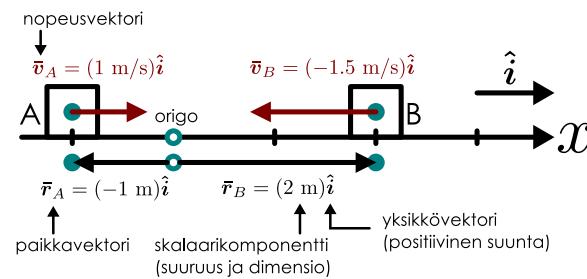
Muiden vektorisuureiden kohdalla suureen graafinen esitys nuolena on *abstrakti*: ei ole mitään yhtä ja oikeaa tapaa valita mittakaavaa esimerkiksi nopeusvektoreille. Jos esimerkiksi kappale liikkuu positiiviseen *x*-suuntaan nopeudella 1 m/s, nopeutta voidaan toki esittää nuolena, joka osoittaa positiiviseen *x*-suuntaan, mutta tämän nuolen pituus voidaan valita vapaasti. Esimerkiksi voidaan valita, että kuvassa tästä nopeutta esittää nuoli, jonka pituus on 1 cm. Tietenkin mittakaavan valinnan jälkeen *kaikki* samaa suuresta esittävät vektorit on piirrettävä samassa mittakaavassa niin että niiden suhteelliset pituudet vastaavat esitettyjen suureiden suuruuksia.

Vektorisuureiden välille voidaan määritellä monenlaisia laskutoimituksia, joista yksinkertaisin on *yhteenlasku*. Esimerkiksi jos kappale siirtyy ensin positiiviseen *x*-suuntaan yhden metrin ja sitten vielä kaksi metriä lisää, kappaleen kokonaissiirtymä on näiden summa, kolme metriä positiiviseen suuntaan. Koordinaatein tämä voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti  $\Delta x_{\text{kokonais}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1 \text{ m} + 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$ . Sen sijaan jos kappale siirtyy ensin metrin positiiviseen suuntaan ja sitten kaksi metriä negatiiviseen suuntaan, kappaleen kokonaissiirtymä on yksi metri negatiiviseen suuntaan eli  $\Delta x_{\text{kokonais}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1 \text{ m} - 2 \text{ m} = -1 \text{ m}$ . Graafisesti tämän voi esittää niihin, että ensimmäisessä tapauksessa siirtymiä kuvaavat samaan suuntaan osoittavat nuolet ja toisessa tapauksessa vastakkaisuuntaiset nuolet. Kummassakin tapauksessa näiden *summaa kuvaaa ensimmäisen nuolen alkupisteestä toisen nuolen kärkeen osoittava nuoli*.

Vektoriteita merkitään useilla tavoilla. Yleisesti käytettyjä merkintöjä ovat yläviiva tai nuoli vektorisuureen symbolin yllä,  $\bar{v}$ ,  $\vec{v}$ , tai symbolin kirjoittaminen lihavidulla,  $v$ . Tässä materiaalissa vektoriteita merkitään sekä yläviivalla että lihavoinnilla,  $\bar{v}$ . Yksiulotteisessa tapauksessa on olemassa vain kaksi mahdollista suuntaa: "eteenpäin" ja "taaksepäin" eli koordinaatistossa positiivinen ja negatiivinen suunta, jolloin vektorisuureiden matemaattisessa käsitellyssä varsinaisten vektorimerkintöjen käyttäminen ei ole välttämätöntä — suunnanhan voi ilmaista suureen etumerkin avulla, sillä esimerkiksi negatiiviseen *x*-suuntaan kulkevan kappaleen nopeus on negatiivinen. Kuitenkin kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa lüke voi suuntautua moneen eri suuntaan, joten vektorisuuren kuten nopeuden suuntaa *ei voi* määritellä pelkästään etumerkillä vaan tällöin suuntien matemaattiseen kuvaamiseen todella tarvitaan vektorilaskentaa. Suureiden vektoriluonteen huomioiminen on siis aivan välttämätöntä, ja on syytä alusta alkaen opetella käyttämään vektorimerkintöjä sekä erottamaan vektori- ja skalaarisuureet toisistaan.

Koordinaatistoissa esitettyjen vektorisuureiden käsitellyssä koordinaatiston **yksikkövektorit** ovat erinomaisia työkaluja. Nämä ovat vektoriteita, joiden pituus on yksi ja jotka ovat laaduttomia eli yksikötömiä. (Nimitys "yksikkövektori" ei siis viittaa fysiikalisten suureiden yksiköihin, vaan vektorien pituuteen, joka on aina yksi.) Ne ilmaisevat siis ainoastaan suuntaa. Vakiintunut symboli *x*-akselin suuntaiselle yksikkövektorille on  $\hat{i}$ . Tässä yläviivan korvaaminen "hatulla" osoittaa, että kyseessä on juuri yksikkövektori. Yksikkövektorin avulla

Kuva 1.6: Vektorien esittäminen skalaarikomponentti ja yksikkövektorin avulla.



mikä tahansa  $x$ -suuntainen vektori voidaan kirjoittaa skalaarin ja yksikkövektorin tulona. Esimerkiksi nopeus voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{v} = v_x \hat{i}, \quad (1.16)$$

missä  $v_x$  on vektorin **skalaarikomponentti** suunnassa  $x$ . Merkintä (1.16) esittää skalaarin  $v_x$  ja vektorin  $\hat{i}$  tuloa, joka on siis vektori  $\bar{v}$ . Vektorin ja skalaarin tulon määritelläänkin olevan uusi vektori, joka on yhdensuuntainen alkuperäisen vektorin kanssa, ja jonka pituus on tulossa esiintyvien skalaarin itseisarvon ja vektorin pituuden tulo. Jos kertova skalaari on negatiivinen, vektorin suunta käännyt ympäri.

Vektorin jaossa skalaarikomponenttiin ja yksikkövektoriin esiintyy jälleen ajatus siitä, että vektorisuureen suuruus on samanlainen ominaisuus kuin skalarisuuren suuruus (tässä  $v_x$ ) ja vektorin suunta (tässä  $\hat{i}$ ) on tästä riippumaton ominaisuus. Tämä on tärkeä oivallus, koska vektoreiden käsittely usein helpottuu huomattavasti, kun vektorien suuruudet ja suunnat käsitellään erillään yhtälön (1.16) tapaan.

Vektorin  $\bar{v}$  pituus positiiviseen  $x$ -suuntaan (eli suuntaan johon vektori  $\hat{i}$  osoittaa) on siis  $v_x$ . Jos vektori  $\bar{v}$  osoittaa samaan suuntaan kuin  $\hat{i}$ , skalaarikomponentti on positiivinen, ja jos vektori osoittaakin päinvastaiseen suuntaan kuin  $\hat{i}$ , skalaarikomponentti on negatiivinen. Vektorin pituutta merkitään yleensä samalla symbolilla kuin vektoria itseään, mutta ilman vektorimerkintää. Toisin sanoen vektorin  $\bar{v}$  pituus on  $v$ . Nopeuden tapauksessa vektorin pituutta kutsutaan myös *vauhdiksi*, joka on siis skalarisuure. Vektorin pituus on aina positiivinen luku, minkä vuoksi sitä kutsutaan matematiikassa myös vektorin **itseisarvoksi** ja merkitään  $v = |\bar{v}|$ . Vektorin skalaarikomponentti sen sijaan voi olla positiivinen tai negatiivinen vektorin suunnasta riippuen — toisin sanoen vektorin pituus ja skalaarikomponentti ovat eri asiat!



**1.9** Eräään vektorisuureen suuruus on 2.5 T (ei tarvitse tietää mikä tämä yksikkö on) ja vektori osoittaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Mikä on (a) vektorin pituus, (b) skalaarikomponentti, (c) itseisarvo, (d) vektorin suuntainen yksikkövektori, (e) vektori itse skalaarikomponentin ja yksikkövektroin avulla ilmaistuna?

Myös kappaleen paikka voidaan määritellä vektorina. Tämä voi vaikuttaa oudolta, koska paikallahan ei siinänsä ole suuntaa. Kuitenkin paikka mitataan koordinaatistossa origon suhteeseen, jolloin "paikan suunta" on se suunta, jossa paikka on origosta katsoen. Näin määritellään **paikkavektori**, joka on origosta tarkasteltavaan paikkaan osoittava vektori. Yksiulotteisessa tapauksessa paikkavektori osoittaa siis suuntaan  $\hat{i}$  eli positiiviseen  $x$ -suuntaan, kun paikan koordinaatti  $x$  on positiivinen, ja suuntaan  $-\hat{i}$  eli negatiiviseen  $x$ -suuntaan, kun paikan koordinaatti on negatiivinen. Paikkavektorin pituus on tarkasteltavan paikan etäisyys origosta. Tämähän kuitenkin tarkoittaa, että *paikkavektorin skalaarikomponentti on sama asia kuin paikkakoordinaatti*, joten yksiulotteisessa tapauksessa paikkavektori on yksinkertaisesti

$$\bar{r} = x \hat{i}. \quad (1.17)$$

Näin määriteltyä myös paikan muutokset eli siirtymät ovat vektoreita, sillä

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_{\text{loppu}} - \bar{r}_{\text{alku}} = x_{\text{loppu}} \hat{i} - x_{\text{alku}} \hat{i} = (x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}) \hat{i} = \Delta x \hat{i}. \quad (1.18)$$

Tässä käytettiin vektorien ja skalaarien kertolaskun laskusääntöjä, jotka ovat samanlaiset kuin tavallisen kertolaskun säännöt. Toisin sanoen voidaan laskea esimerkiksi  $x\bar{a} + y\bar{a} = (x+y)\bar{a}$ . Tulokseksi saatiiin, että paikkavektorin muutos on sama asia kuin paikkakoordinaatin (eli paikkavektorin skalaarikomponentin) muutos kerrottuna yksikkövektorilla, joka antaa vektorille suunnan. Varsinainen lasku voitiin siis tässä yksiulotteisessa tapauksessa suorittaa pelkästään vektorien skalaarikomponentteja käyttäen, koska kaikki vektorit ovat  $x$ -suuntisia ja niiden suunta  $\hat{i}$  voitiin ottaa yhtiseksi tekijäksi.

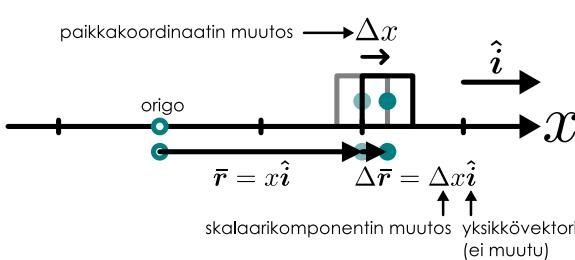
Kuva 1.7: Vektorin muutos skalaarikomponentin muutoksen ja yksikkövektorin tulona.

Aivan samoin kuin skalaarimuuttujan muutoksen raja-arvo kirjoitetaan differentiaalina muutoksen suuruuden lähestyessä nollaa, voidaan myös vektorisuurelle kirjoittaa differentiaali

$$d\bar{r} = dx \hat{i}, \quad (1.19)$$

missä differentiaali esiintyy vektorin skalaarikomponentissa. Siispä vektorin differentiaali on vektori, jolla on hyvin määritelty suunta ( $\hat{i}$ ), mutta jonka pituus on infinitesimaalisen lyhyt ( $dx$ ). Jos ajatus ääretömän lyhyestä muttei kuitenkaan nollan pituisesta vektorista tuntuu hankalalta, voit aina ajatella differentiaalin kuvaavan jotakin hyvin lyhyttä vektoria,

josta halutaan laskea raja-arvo. Oleellista on huomata, että kyseessä ei ole **nollavektori**. Nollavektori  $\bar{0}$  on nimittäin vektori, jonka pituus on nolla ja jolla siksi ei ole hyvin määriteltyä suuntaa. Vektorin differentiaalilla on yksikäsiteinen suunta.



## esimerkki 1.2

## Paikka- ja siirtymävektorit

Auto, jonka pituus on 1.8 m, on aluksi liikenemerkin takana perä 0.7 m etäisyydellä merkistä. Sitten auto pakittaa liikenemerkkin eteen niihin, että sen keula on 1.1 metrin päässä merkistä. Kiinnitä koordinaatisto ja määritä auton siirtymävektori tässä koordinaatistossa.

**TILANNE** Valitaan liikenemerkki kiintopisteeksi ja positiivinen suunta merkistä sen takapuolelle. (Huom. tämä on vain yksi mahdollinen valinta, ja koordinaatisto voitaisiin kiinnittää muillakin tavoilla.)

**SUUNNITELMA** Siirtymä on kappaleen paikan muutos, joten määritetään ensin auton paikka alussa ja lopussa. Tällöin siirtymä on vektori, joka osoittaa alkupisteestä loppupisteeseen. Paikkakoordinaatti pitää muistaa mitata aina samalla tavalla. Valitaan, että mitataan paikka aina auton keulasta.

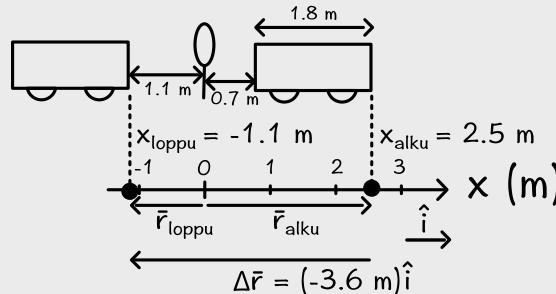
Jos kappaleen koordinaatit aluksi ja lopuksi ovat  $x_{\text{alku}}$  ja  $x_{\text{loppu}}$ , sen koordinaatin muutos on  $\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}$  ja siirtymävektori on  $\Delta \bar{r} = \Delta x \hat{i}$ .

**RATKAISU** Auton keula on aluksi etäisyydellä  $0.7 \text{ m} + 1.8 \text{ m} = 2.5 \text{ m}$  merkistä. Niinpä tässä koordinaatistossa auton paikkakoordinaatti on aluksi  $x_{\text{alku}} = 2.5 \text{ m}$ . Koordinaatti on positiivinen, koska auto on merkin takana. Auto siirtyy sitten pisteesseen  $x_{\text{loppu}} = -1.1 \text{ m}$ , merkin eteen. Kappaleen paikkavektori on aluksi  $\bar{r}_{\text{alku}} = x_{\text{alku}} \hat{i} = (2.5 \text{ m}) \hat{i}$  ja lopuksi  $\bar{r}_{\text{loppu}} = x_{\text{loppu}} \hat{i} = (-1.1 \text{ m}) \hat{i}$ .

Paikkakoordinaatin muutos on  $\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}} = (-1.1 \text{ m}) - 2.5 \text{ m} = -3.6 \text{ m}$  ja paikkavektorin muutos on  $\Delta \bar{r} = \Delta x \hat{i} = (-3.6 \text{ m}) \hat{i} = (3.6 \text{ m}) (-\hat{i})$ .

**ARVIOINTI** Kappale siirtyy kohti negatiivista  $x$ -suuntaa, joten koordinaatin muutos on negatiivinen ja muutosvektori osoittaa kohti negatiivista  $x$ -suuntaa eli suuntaan  $-\hat{i}$ .

Laskussa kaikki paikkavektoria käsittelevät suureet ovat vektoreita ja paikkakoordinaattia käsittelevät ovat skalaareita. Kaikissa yhtälöissä, joissa näitä vertaillaan, on skalaari kerrottu yksikkövektorilla  $\hat{i}$ , jotta yhtälön molemmilla puolilla olisi vektorisuure.



Tällaisia vektoridifferentiaaleja ja vektorisuureiden raja-arvoja tarvitaan, kun haluamme tietää miten vektorisuureet muuttuvat. Esimerkiksi nopeuden skalarikomponentti kirjoitettiin yhtälössä (1.3) paikkakoordinaatin muutoksen avulla, mutta yleisemmin **nopeusvektori** määritellään *paikkavektorin* muutoksen ja ajan muutoksen suhteena

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i}. \quad (1.20)$$

Nämä määritelty nopeus on siis vektori, joka osoittaa kappaleen liikenemisen suuntaan (vektori  $d \bar{r}$  osoittaa suuntaan, johon kappale siirtyy) ja jonka pituus on sama kuin kappaleen vauhti.



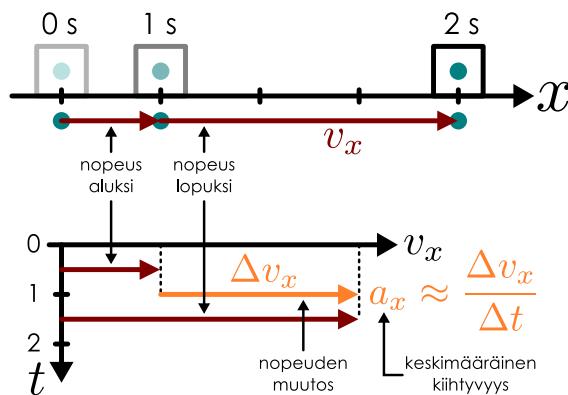
**1.10** Eräs kappale on aluksi 1.5 metrin päässä koordinaatiston origosta positiivisessa  $x$ -suunnassa ja sekunnin päästä 2.5 metrin päässä origosta negatiivisessa  $x$ -suunnassa. Mikä on (a) kappaleen paikkakoordinaatti, (b) paikkavektori aluksi ja lopuksi? Mikä on (c) keskinopeuden skalarikomponentti, (d) keskinopeusvektori tällä aikavälillä?

## 1.5 Kiihtyvyys

Jos kappaleen nopeus ei ole nolla, kappale liikkuu. Harvoin kappaleen nopeus on kuitenkaan vakio, ja usein onkin tarpeellista ilmaista myös miten nopeus muuttuu. Tätä ilmaiseva suure on nimeltään **kiihtyvyys**. Puhekielessä kiihtyvyydellä tarkoitetaan usein vauhdin kasvamista. Usein sanotaan, että esimerkiksi auto kiihdytää, kun sen vauhti lisääntyy, ja jarruttaa tai hidastaa, kun sen vauhti pienenee. Tämä on kuitenkin fysiikaalisesti epätäsmällistä kieltä. Fysiikassa ei puhuta lainkaan hidastumisesta vaan *kaikki liike, jossa nopeuden suuruus tai suunta muuttuu, on kiihtyvä liikettä*.

Kiihtyvyden ja nopeuden välistä yhteyttä on havainnollistettu kuvassa 1.8, johon on piirretty liikediagrammi kappaleen paikasta sekunnin välein kolmena eri ajan hetkenä. Ensimmäisen sekunnin aikana kappale siirtyy kuvassa oikealle eli positiiviseen  $x$ -suuntaan lyhyen matkan. Voimme kuvata kappaleen keskimääräisestä nopeutta tällä aikavälillä nuolella, joka osoittaa kappaleen lähtöpaikasta  $x(0 \text{ s})$  pisteesseen, jossa kappale on yhden sekunnin päästä,  $x(1 \text{ s})$ . Seuraavan sekunnin aikana kappale jatkaa liikettää oikealle, mutta nyt se kulkee paljon pidemmän matkan. Kappaleen keskinopeutta tällä aikavälillä kuvaava nuoli pistestä  $x(1 \text{ s})$  pisteesseen  $x(2 \text{ s})$ .

Kuva 1.8: Kiihtyvyys on vektori, joka osoittaa nopeuden muutoksen suunnan ja suuruuden.

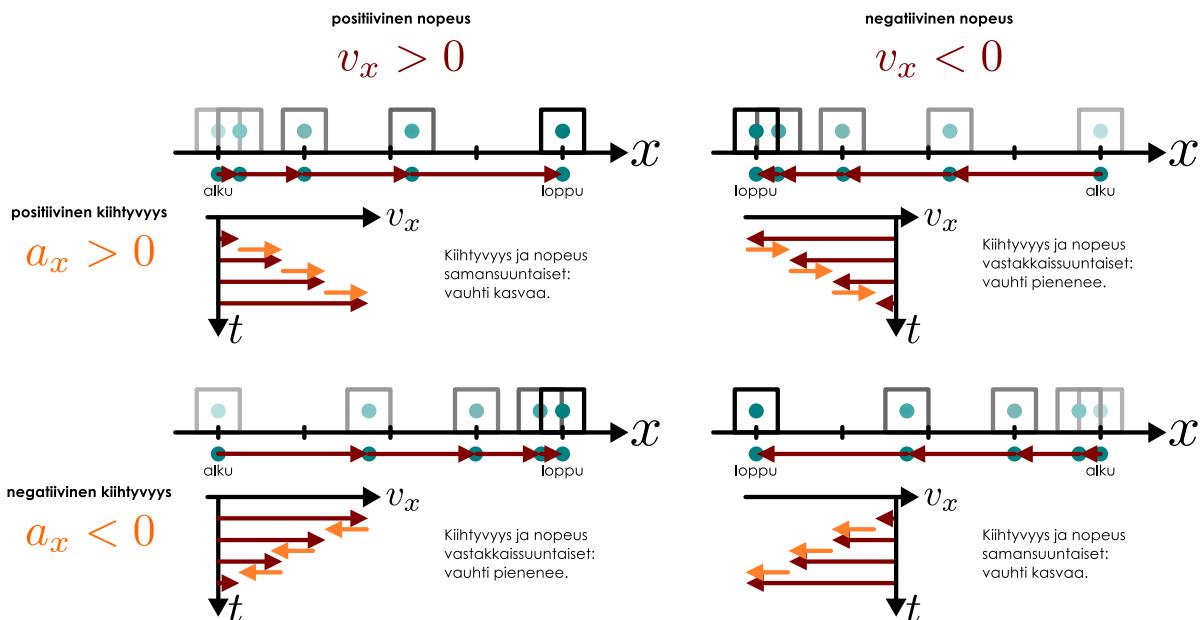


ja vauhti kasvaa, jolloin nopeusvektori pitenee. Näin ollen nopeutta kuvaavan nuolen kärki siirtyy kauemmas positiiviseen suuntaan ja nopeuden muutos  $\Delta v_x$  on positiivinen. *Kiihtyvyys on siis vektori, joka osoittaa nopeusvektorin muutoksen suuntaan.*

Huomaa erityisesti, että kiihtyvyys määritellään nimenomaan nopeuden eikä vauhdin muutoksen kautta. Jos nopeus muuttuu negatiiviseen suuntaan, kiihtyvyyskin on negatiivinen, eikä tämä suinkaan tarkoita sitä, että vauhdin täytyisi pienentyä kuten puhekielessä joskus epätäsmällisesti sanotaan. Tätä on havainnollistettu Kuvalassa 1.9, johon on taulukoidu neljä erilaista tilannetta. Kuvan kaikissa tilanteissa kappale on kiihtyvässä liikkeessä. Taulukon vasemmalla puolella kappaleen nopeus  $v_x$  on positiivinen, sillä kappale lükkuu positiiviseen  $x$ -suuntaan, ja taulukon oikealla puolella nopeus on negatiivinen. Taulukon ylärivillä kiihtyvyys  $a_x$  on positiivinen, sillä nopeus muuttuu positiiviseen suuntaan. Tämä näkyy siitä, että vierekkäin asetettujen nopeutta kuvaavien nuolten kärki siirtyy kuvassa oikealle ajan kuluessa. Taulukon alarivillä nopeutta kuvaavien nuolten kärjet siirtyytä ajan kuluessa vasemmalle eli negatiiviseen suuntaan, jolloin kiihtyvyyskin on siis negatiivinen. Kappaleen vauhti kasvaa taulukon vaseman yläkulman ja oikean alakulman tapauksissa eli silloin, kun kiihtyvyys osoittaa samaan suuntaan kuin nopeus.

Luonnollisesti kappaleet voivat liikkua myös niin että niiden lükkeen suunta muuttuu. Tällöinkin niiden nopeus muuttuu vaikka niiden vauhti pysyisi vakiona, koska tällöin nopeuden *suunta* muuttuu. Tällöin kiihtyvyysvektori osoittaa nopeusvektoria vastaan kohtisuoraan suuntaan. Tässä vaiheessa tarkastelemme kuitenkin vain liikettä yhdessä ulottuvuudessa, ja palaamme tutkimaan kaarevaa liikettä luvuissa 4 ja 5.

Kuva 1.9: Kiihtywyden ja nopeuden etumerkki määräytyy sen mukaan, osoittaako kiihtyvyys- ja nopeusvektori positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan.



Kappaleen nopeuden muutos näkyy kuvassa siten, että toinen nuoli on ensimmäistä selvästi pidempi. Voimme määrittää kappaleen keskimääräisen nopeuden muutoksen piirtämällä nopeutta kuvaavat nuolet vierekkäin ja piirtämällä tämän perusteella nopeuksien eroa kuvaavan nuolen. Kuvassa nopeudet  $v_x$  on piirretty punaisella ja nopeuden muutosta  $\Delta v_x$  kuvaava nuoli oranssilla.

Kappaleen keskimääräinen kiihtyvyys määritellään nopeuden muutoksen ja muutokseen kuluneen ajan suhteena,

$$a_{x,\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

Kuvan piirretty oranssi nuoli kuvaa siis nopeuden muutoksen lisäksi kappaleen kiihtyvyyttä. Tässä kuvassa nopeus osoittaa positiiviseen suuntaan

## LIIKE

Edellä tutkimamme suure on täsmällisesti ottaen vain keskimääritisen kiihtyvyyden skalaarikomponentti. Yleisesti kiihtyvyys määritellään vektorina, jolloin sen skalaarikomponentti tulee kertoa positiivista suuntaa kuvaavalla yksikkövektorilla,  $\bar{a} = a_x \hat{i}$ . Lisäksi jotta saisimme selville hetkellisen kiihtyvyyden keskimääritisen kiihtyvyden sijaan, meidän on otettava raja-arvo, kun ajan muutos lähestyy nolla. Nämä saamme kiihtyvyyden  $x$ -komponentille täsmällisen lausekkeen

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1.22)$$

ja kiihtyvyysvektorin määritelmä on

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (1.23)$$

Kiihtyvyys on siis matemaattisesti nopeuden derivaatta aivan kuten nopeus on paikan derivaatta (kuva 1.10). Kiihtyvyyden yksikkö on nopeuden yksikkö jaettuna ajan yksiköllä,  $[a_x] = [dv_x]/[dt] = (\text{m/s})/\text{s} = \text{m/s}^2$ , eli metri jaettuna sekunnin neliöllä.



**1.11** Kappaleen nopeus on aluksi 1.0 m/s positiiviseen  $x$ -suuntaan. Mikä on kappaleen (keskimääritinen) kiihtyvyysvektori, jos nopeus on yhden sekunnin kuluttua (a) 2.0 m/s positiiviseen suuntaan, (b) 1.0 m/s positiiviseen suuntaan, (c) 0.0 m/s, (d) 1.0 m/s negatiiviseen suuntaan, (e) 2.0 m/s negatiiviseen suuntaan?

Koska nopeus on paikan derivaatta ja kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, saadaan kiihtyvyys siis laskettua paikan avulla derivoimalla paikkaa ajan suhteeseen kaksi kertaa. Toisin sanoen kiihtyvyys on paikan toinen derivaatta ajan suhteeseen. Moninkertaisia derivaattoja voidaan merkitä esimerkiksi kahdella pilkulla  $a_x(t) = x''(t)$ . Fysiikassa kuitenkin käytetään yleisemmin differentiaalimerkintää, jolloin voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.24)$$

Tässä merkinnässä on syytä huomata, kuinka viimeisen lausekkeen osoittajassa on kaksoisdifferentiaali  $d^2$  ja nimitäjässä on differentiaalin neliö  $dt^2$ . Vaikka lausekkeessa esiintyykin toista potenssia muistuttavia symbolita, merkintä ei tarkoita, että tässä laskettaisiin toisia potensseja vaan että derivoointi suoritetaan kaksi kertaa. Vastaavasti voidaan määritellä myös korkeamman kertaluvun derivaattoja kuvamaan liikettä, mutta useimmiten paikka, nopeus ja kiihtyvyys riittävät.



**1.12** Kappaleen paikka on  $x(t) = (2.5 \text{ m/s}^3)t^3$ . Mitä ovat  
(a) kappaleen nopeus,  
(b) kappaleen kiihtyvyys?  
(c) Integroi kiihtyvyys ajan suhteeseen. Mitä saat?

Täsmälleen samalla tavalla kuin yhtälössä (1.12) lausutaan paikan muutos nopeuden integraalina, voidaan nopeus ilmaista kiihtyvyyden integraalina, mikä seuraa suoraan kiihtyvyyden määritelmästä nopeuden derivaattana. Voidaan siis aina kirjoittaa

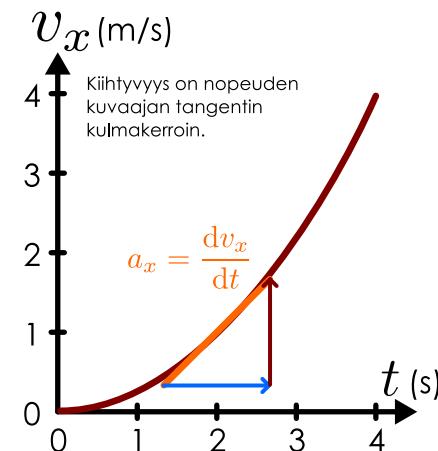
$$v_x(t) = v_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t a_x(t) dt. \quad (1.25)$$

Edelleen koska derivaatta vastaa graafisessa esityksessä kulmakerointia, kiihtyvyys on nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin. Vastaavasti integraali vastaa kuvaajan rajaaman pinta-alan määrittämistä, joten nopeuden muutos tietyllä aikavälillä voidaan määrittää kiihtyvyyden kuvaajan rajaamana pinta-alana (kuva 1.11).

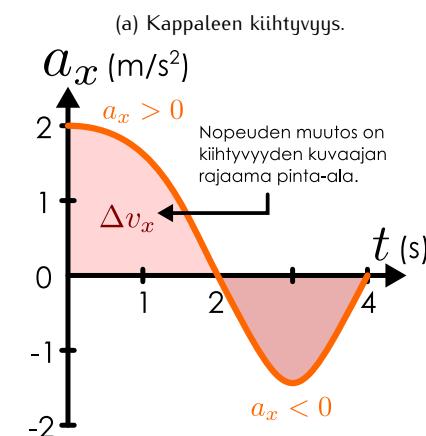


**1.13** Selitä omien sanoin, miten kiihtyvyys ja nopeus liittyvät toisiinsa. Selitä erityisesti, mitä positiivinen ja negatiivinen kiihtyvyys tarkoittavat. Keksi esimerkki funktiosta  $x(t)$ , johon liittyyvä nopeus on aina negatiivinen mutta kiihtyvyys on aina positiivinen, ja osoita laskemalla, että näin on.

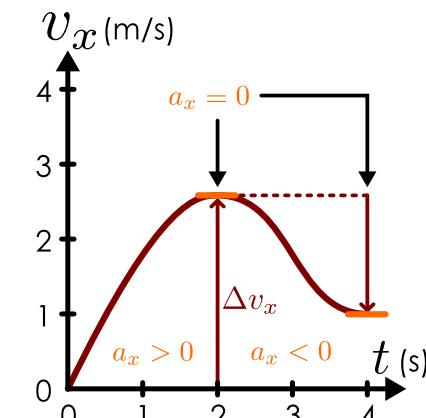
Kuva 1.10: Kiihtyvyys on nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin.



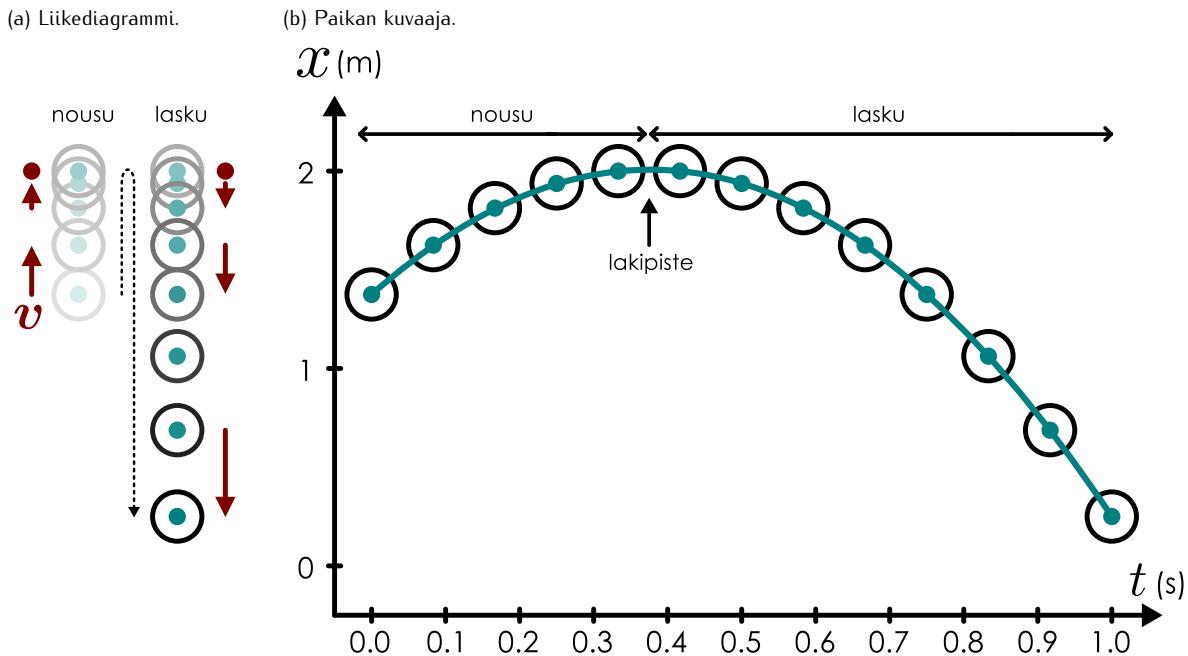
Kuva 1.11: Kiihtyvyyden kuvaajan rajaama ala kuvaa nopeuden muutosta.



(b) Saman kappaleen nopeus.



Kuva 1.12: Vapaa pudotus, jossa alkunopeus on ylöspäin.



## Putoamisliike

**Vapaa pudotus** on yksinkertainen esimerkki kiihtyvästä liikkeestä. Sillä tarkoitetaan liikettä, jonka kappale kokee kun sen annetaan pudota Maapallon painovoiman vaikutuksesta ilman muita kappaleen liikkeeseen vaikuttavia tekijöitä. Vaikka arkikielessä putoaminen tarkoittaa aina alas päin tapahtuvaa liikettä, fysiika-olosuhteissa ylöspäin heitetty tai ammuttu kappale on vapaassa pudotuksessa myös liikkessaan ylöspäin. Varsinainen heitto vaikuttaa tällöin kappaleen saamaan alkunopeuteen, mutta kun kappaleesta päästetään irti, sen liikerata määrytyy pelkästään painovoiman vaikutuksesta.

Tällainen liike on esitetty kuvassa 1.12. Suoraan ylöspäin heitetty kappale liikkuu vain pystysuoraa pitkin, jolloin  $x$ -akseliksi voidaan valita pystysuora suunta. Jos lisäksi positiiviseksi suunnaksi valitaan suunta ylöspäin,  $x$ -koordinaatti mittaa kappaleen korkeutta. Tässä koordinaatistossa ylöspäin heitetyn kappaleen nopeus on aluksi positiivinen. Kappaleen vauhti kuitenkin pienenee. Lopulta kappale saavuttaa liikeratansa korkeimman kohdan eli lakipisteen. Tässä pisteessä kappaleen pystysuuntainen nopeus on hetkellisesti nolla, minkä jälkeen kappale alkaa liikkua alas päin.

Voimme tutkia kappaleen kiihtyvyyttä liikediagrammin avulla tarkastelemalla kappaleen nopeuden muutosta. Kun kappale liikkuu ylöspäin, sen nopeusvektori osoittaa ylöspäin, mutta nopeutta kuvaavien nuolten pituus lyhenee, jolloin nopeuden muutoksen suunta on alas päin. Kiihtyvyysvektori siis osoittaa alas päin ja kiihtyvyys  $a_x$  on negatiivinen. Kappaleen liikkessa alas päin sen nopeusvektori osoittaa alas päin, ja koska vektorin pituus kasvaa, nopeus muuttuu nytkin alas päin. Kiihtyvyysvektori osoittaa alas siis myös kappaleen laskeutuessa.

Heiton lakipistettä on vielä suytä tarkastella erikseen. Juuri ennen lakipistettä kappaleen nopeusvektori osoittaa ylöspäin, ja juuri lakipisteen jälkeen nopeus osoittaa alas päin. Nopeusvektori on siis myös heiton lakipisteessä muuttumassa alas päin, ja niinpä kappale on kiihtyvässä liikkeessä myös lakipisteessä, ja kiihtyvyysvektori osoittaa tällöinkin alas päin. Kappaleen kiihtyvyysvektori osoittaa siis alas päin *kaikkialla* sen lento- ja liikeradalla. Valitussa koordinaatistossa kiihtyvyys on siis aina negatiivinen. On varsin tavallinen väärinkäsitys ajatella, että kappaleen kiihtyvyys olisi lakipisteessä nolla, mutta tämä on *vääriin*. Kappaleen *nopeus* on lakipisteessä hetkellisesti nolla, mutta nopeus muuttuu koko ajan, joten nopeuden muutosta mittaava *kiihtyvyys* ei ole nolla edes lakipisteessä.

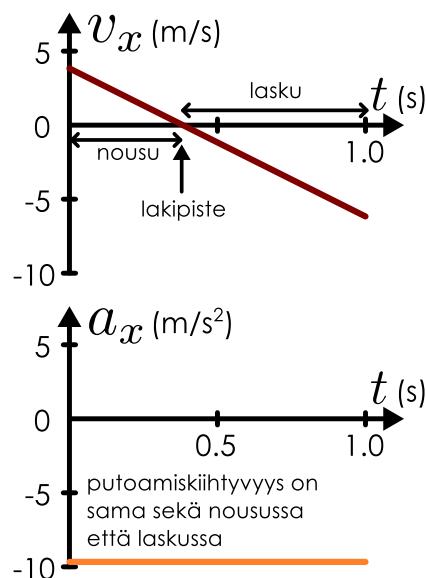


**1.14** Edellä tarkasteltu kappale osuu maahan ja pomppaa takaisin ylöspäin. Mihin suuntaan kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektorit osoittavat (a) juuri ennen maahan osumista, (b) kappaleen koskettaessa maata ja (c) juuri maasta irtoamisen jälkeen?

Kappaleen nopeus osoittaa siis aluksi ylöspäin ja lopuksi alas päin, ja kappaleen kiihtyvyys osoittaa koko ajan alas päin. Edellinen päättely ei kuitenkaan kertonut meille vielä mitään siitä, kuinka suuria nopeuksia ja kiihtyvyksiä kappale kokee. Nämä voidaan selvittää graafisesti kappaleen paikan kuvaajasta lähtien. Aloitetaan tutkimalla nopeutta.

## LIIKE

Kuva 1.13: Nopeus ja kiihtyvyys vapaassa pudotuksessa.



Nopeus määriteltiin paikan derivaattana, joten nopeus on graafisesti paikan kuvaajan tangentin kulmakerroin. Aluksi paikan kuvaaja nousee jyrkästi, jolloin nopeus on positiivinen ja vauhti suuri. Kun paikan kuvaaja loivenee, vauhti pienenee. Lakipisteessä paikan kuvaaja on vaakasuora, jolloin nopeus on nolla. Kun paikan kuvaaja alkaa laskea, nopeudesta tulee negatiivinen, ja mitä jyrkemmin paikan kuvaaja laskee, sitä suuremmaksi nopeuden itseisarvo muuttuu. Koska nopeus on aluksi positiivinen ja lopuksi negatiivinen, sen kuvaajan täytyy olla laskeva käyrä. Täsmällinen analyysi osoittaa, että nopeuden kuvaaja on itse asiassa *laskeva suora*. Tämä on piirretty kuvaan 1.13.

Kiihtyvyys on puolestaan nopeuden kuvaajan kulmakerroin, ja koska nopeuden kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on vakio, täytyy kappaleen kiihtyvyyden olla heittoliukkeessa *vakio*. Tätä vakiokiihtyvyttä kutsutaan **putoamiskiihtyvyydeksi**, ja sen aiheuttaa yksin painovoima eli Maan ja kappaleen välinen vuorovaikutus.

Ilmakehässä täyssin vapaa pudotus ei käytännössä ole mahdollinen, koska putoaminen ilman läpi vaikuttaa kappaleen liukkeeseen. Kuitenkin jos kappaleen ja ilman välinen vuorovaikutus ei ole merkittävä (esimerkiksi jos koe suoritetaan tyhjiössä), kappaleen kiihtyvyys todella on putoamisen aikana vakio. Maan muodosta ja pyörimisestä johtuen putoamiskiihtyvyyden arvo ei ole täsmälleen sama kaikkialla, mutta sen suuruus ei riipu kovin voimakkaasti paikasta. Putoamiskiihtyvyyden arvo on maanpinnalla likimain

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2. \quad (1.26)$$

Erityisesti jos mittaamme putoamiskiihtyvyyden tietystä paikassa, saamme saman tuloksen käytimmeä mittaamisessa mitä tahansa kappaletta. Esimerkiksi höyhen ja kivi putoavat ilmassa eri nopeuksilla, koska ilma vaikuttaa höyhenen liukkeeseen paljon voimakkaammin kuin kiven. Kuitenkin jos höyhen ja kivi pudotetaan tyhjiössä, ne todella putoavat täsmälleen yhtä nopeasti samalla vakiokiihtyvyyddellä  $g$ .



**1.15** Pudota kirja ja yksittäinen paperiarkki samaan aikaan. Putoavatko ne eri tavalla? Laita sitten paperiarkki kirjan päälle ja pudota ne yhdessä. Putoavatko ne nyt eri tavalla? Miksi?

Putoamiskiihtyvyys osoittaa aina alaspin eli edellä valitussa koordinaatistossa negatiiviseen suuntaan, joten tässä koordinaatistossa putoamiskiihtyvyysvektori on

$$\bar{g} = -g\hat{i} \quad (1.27)$$

ja kappaleen kiihtyvyuden  $x$ -komponentti on  $a_x = -g$ . Origo eli taso  $x = 0$  m voidaan valita vapaasti esimerkiksi maanpinnan tasolle tai kappaleen alkuperäiselle korkeudelle, mutta kun se on kerran valittu, valintaa ei tietenkään saa enää muuttaa.

Tässä erikoistapauksessa, jossa kiihtyvyys on vakio, nopeus on helppo ratkaista lausekkeesta (1.25), koska vakiofunktion integraali  $t$ :n suhteen on vakio itse kerrottuna  $t$ :llä. Jos vielä merkitään aikaa tarkastelun alkuperäisellä  $t_{alku} = 0$  s saadaan nopeudeksi ajan funktiona

$$v_x(t) = v_{x,alku} + \int_0^t -g dt = v_{x,alku} - g \Big|_0^t = v_{x,alku} - gt. \quad (1.28)$$

Tämä on tämälleen kuvaan 1.13 piirretyn laskevan suoran yhtälö.

Tästä voidaan ratkaista edelleen paikka ajan funktiona yhtälön (1.12) perusteella. Nopeus ei ole nyt vakio, mutta se on yksinkertainen polynomifunktio, jonka integrointi onnistuu helposti säännön  $\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$  avulla. Paikaksi saadaan siten

$$x(t) = x_{alku} + \int_0^t (v_{x,alku} - gt) dt = x_{alku} + \left[ v_{x,alku} t - \frac{1}{2} gt^2 \right]_0^t = x_{alku} + v_{x,alku} t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (1.29)$$

Nähdään, että kappaleen paikkakoordinaatti riippuu aikamuuttujan toisesta potenssista, joten paikan kuvaaja on alaspin aukeava paraabeli kuten jo näimme kuvassa 1.12. Tämä on kuitenkin totta *ainoastaan kun kiihtyvyys on vakio*. Yleisesti nopeus on ratkaistava yhtälöstä (1.25) ja paikka yhtälöstä (1.12). Nämä yhtälöt perustuvat suureiden määritelmien, jotka ne pätevät aina! Seuraavaksi harjoittelemme tasaisesti kiihtyvän liukkeen analyysiä esimerkissä 1.3. Luvun lopun esimerkissä 1.4 näytetään, kuinka ratkaistaan yleisempi tapaus, jossa kiihtyvyys ei ole vakio.

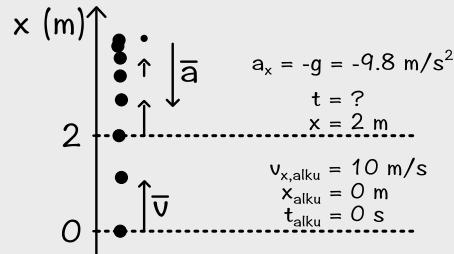
## esimerkki 1.3

## Heitetyn pallon lentorata

**Heitetään pallo ylöspäin alkunopeudella 10.0 m/s. (a) Millä hetkellä pallo on korkeudella 2.0 m heittokorkeudelta mitattuna? (b) Mikä on tällöin pallon nopeus?**

**TILANNE** Koska pallo heitettiin suoraan ylöspäin, se liikkuu ensin suoraan ylöspäin, pysähtyy sitten ja alkaa lopulta pudota suoraan alas päin. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin ja paikan nollakohta kappaleen lähtöpisteeeseen.

**SUUNNITELMA** Heitetty kappale on vapaassa putoamislukkessä koko lentonsa ajan. Tällöin sen liike on tasaisesti kiihtyvä ja kiihtyvyys on sama kuin putoamiskiihtyvyys.



Yhtälön (1.29) mukaan tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen paikka muuttuu ajassa  $t$  siirtymän

$$\Delta x = v_{x, \text{alku}} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (1.30)$$

missä  $a_x = -g$  on kappaleen kiihtyvyys ja  $v_{x, \text{alku}}$  kappaleen alkunopeus. Voimme toisaalta käääntää ongelman toisin päin ja kysyä, millöin kappale on siirtynyt matkan  $\Delta x$ . Tämä selviää ratkaisemalla yhtälöstä (1.30) aika.

Kun tiedämme pallon lentoajan, voimme selvittää pallon nopeuden tasaisesti kiihtyvän lükkeen nopeuden yhtälöstä (1.28),

$$v_x = v_{x, \text{alku}} + a_x t. \quad (1.31)$$

**RATKAISU** Lauseke (1.30) on toisen asteen yhtälö muuttujan  $t$  suhteen ja sen ratkaisu on

$$t = \frac{1}{a_x} \left( -v_{x, \text{alku}} \pm \sqrt{v_{x, \text{alku}}^2 + 2a_x \Delta x} \right). \quad (1.32)$$

Nyt siis alkunopeus on  $v_{\text{alku}} = 10.0 \text{ m/s}$ , kiihtyvyys  $a_x = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$  ja kysyttyin korkeutta  $\Delta x = 2.0 \text{ m}$ . Ratkaisuja saadaan kaksi,  $t = 0.2 \text{ s}$  sekä  $t = 1.8 \text{ s}$ . Sijoittamalla ajan lauseke (1.32) nopeuden lausekkeeseen (1.31) nopeudeksi saadaan

$$v_x = \pm \sqrt{v_{x, \text{alku}}^2 + 2a_x \Delta x} \quad (1.33)$$

ja edelleen lukuarvojen sijoittaminen antaa nopeuden arvot  $v_x = 7.8 \text{ m/s}$  sekä  $v_x = -7.8 \text{ m/s}$ .

Mathematica:

```
(* tallennetaan lukuarvat *)
lukuarvat = {v0 -> 10.0, a -> -9.8, deltax -> 2.0};

(* ratkaistaan aika *)
Solve[ deltax == v0 t + 1/2 a t^2, t]
{{t -> (-v0 + Sqrt[2 a deltax + v0^2])/a},
 {t -> -(v0 + Sqrt[2 a deltax + v0^2])/a}}

(* tallennetaan edellinen tulos muuttujaan 'ratkaisu' *)
aika = %

(* sijoitetaan ratkaistu aika nopeuden lausekkeeseen *)
nopeus = v0 + a t /. aika
{{Sqrt[2 a deltax + v0^2]}, -Sqrt[2 a deltax + v0^2]}}

(* tulostetaan ratkaisu uudestaan, nyt lukuarvojen kera *)
aika /. lukuarvat
nopeus /. lukuarvat
{{t -> 0.224751}, {t -> 1.81606}}
{{7.79744}, {-7.79744}}
```

**ARVIOINTI** Ratkaisujen fysiikalinen merkitys on selkeä: Ratkaisuista ajoista ensimmäinen on hetki, jolloin pallo on korkeudella 2.0 m matkalla *ylöspäin*. Tätä vastaava nopeus on positiivinen. Toinen ratkaisu on hetki, jolloin pallo on samalla korkeudella matkalla *alaspäin*, ja tästä vastaa negatiivinen nopeus. Huomaa, että tässä kysyttyin nimenomaan hetkeä jolloin pallo on *etäisyydellä* 2.0 m lähtöpisteestään — ei hetkeä jolloin pallon kuljema matka olisi 2.0 m — joten kumpikin ratkaisu on oikein. Pallon ollessa matkalla alaspäin se on luonnollisesti kulkenut pidemmän matkan.

Huomataan lisäksi, että pallon vauhti eli nopeuden suuruus on kummassakin tapauksessa *sama*. Näin selvästikin täytyy olla ratkaisun (1.33) perusteella riippumatta alkunopeudesta, kiihtyvyydestä ja tarkastelukorkeudesta.

Tarkistetaan vielä ratkaisujen yksiköt:

$$[t] = \frac{[v_{\text{alku}}] + \sqrt{[2a\Delta x] + [v_{\text{alku}}^2]}}{[a]} = \frac{\text{m/s} + \sqrt{\text{m/s}^2 \cdot \text{m} + (\text{m/s})^2}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{m/s} + \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = \text{s}. \quad (1.34)$$

$$[v_x] = \sqrt{[v_{\text{alku}}^2] + [2a\Delta x]} = \sqrt{(\text{m/s})^2 + \text{m/s}^2 \cdot \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2} = \text{m/s}. \quad (1.35)$$

## LIKE

Esimerkissä 1.3 johdettiin lauseke pystysuoraan heitetyn kappaleen nopeudelle tietyllä korkeudella, kun kappaleen lähtökorkeus ja -nopeus tunnetaan. Korottamalla saatu lauseke (1.33) puolittain neliöön ja merkitsemällä kappaleen nopeutta siirtymän  $\Delta x$  jälkeen  $v_{\text{loppu}}$  tulos voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$v_{x,\text{loppu}}^2 = v_{x,\text{alku}}^2 + 2a_x \Delta x, \quad (1.36)$$

jossa on päästy eroon neliöjuuresta ja plusmiinus-merkinnästä. Huomaan kuitenkin, että sekä positiivinen että negatiivinen loppunopeuden arvo toteuttaa yhtälön edelleen. Jos kirjoitamme edelleen  $\Delta(v_x^2) = v_{x,\text{loppu}}^2 - v_{x,\text{alku}}^2$ , yhtälö saa vielä tyylistettymän muodon

$$\Delta(v_x^2) = 2a_x \Delta x. \quad (1.37)$$

Toisin sanoen nopeuden neliön muutos on *yksiuotteisessa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä* aina suoraan verrannollinen kappaleen siirtymään. Tutkimme tämän tuloksen merkitystä tarkemmin luvussa 2.



**1.16** Edelleen olettaen ilmanvastus pieneksi, mikä on esimerkkin 1.3 pallon nopeus  $v_x$  (a) kun se on jälleen lähtökorkeudella, (b) heiton laki pisteessä? (c) Kuinka korkealle pallo nousee?

## esimerkki 1.4

## Juna

Juna liikkuu nopeudella  $v_{x,\text{alku}} = 150 \text{ km/h}$  alkaessaan jarruttaa. Tällöin junan nopeutta kuvaava ajan funktio  $v_x(t) = v_{x,\text{alku}} - bt + ct^2$  kunnes junta pysähtyy, minkä jälkeen nopeus on nolla. Vakioiden arvot ovat tässä  $b = 2.24 \text{ m/s}^2$  sekä  $c = 0.030 \text{ m/s}^3$ . (a) Milloin junta pysähtyy? (b) Kuinka pitkä on junan jarrutusmatka?

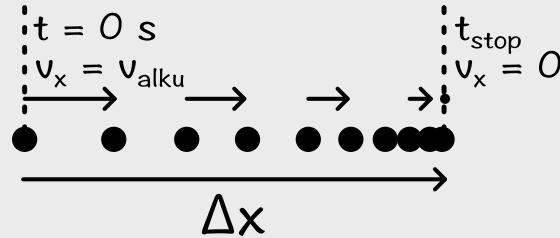
**TILANNE** Piirretään junan liikkeestä liikediagrammi. Merkitään junan pysähtymisen hetkeä  $t_{\text{stop}}$  ja junan kulkemaa matkaa  $\Delta x$ . Nämä ovat kysyttyjä suuret.

**SUUNNITELMA** Junta pysähtyy, kun sen nopeus saavuttaa arvon  $v_x = 0 \text{ m/s}$ . Junan kulkema matka voidaan määrittää nopeuden integraalina.

Laskuja varten on lisäksi syötä muuntaa alkunopeus yksikköihin m/s. Koska kilometri on 1000 metriä ja tunti on 3600 sekuntia, saadaan muunnos

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{10}{36} \text{ m/s}. \quad (1.38)$$

Siispä alkunopeus on  $v_{\text{alku}} = 150 \text{ km/h} = 150 \cdot 10/36 \text{ m/s} = 41.7 \text{ m/s}$ .



Pysähtymishetki on ratkaistavissa junan nopeuden lausekkeesta  $v_x(t_{\text{stop}}) = 0 \text{ m/s}$ . Ennen tätä junta ehtii kulkea matkan

$$\Delta x = \int_0^{t_{\text{stop}}} v_x dt. \quad (1.39)$$

**RATKAISU** (a) Junta pysähtyy, kun  $v_{x,\text{alku}} - bt_{\text{stop}} + ct_{\text{stop}}^2 = 0$ , mikä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisu on

$$t_{\text{stop}} = \frac{1}{2c} (b \pm \sqrt{b^2 - 4cv_{x,\text{alku}}}). \quad (1.40)$$

Sijoittamalla tähän lukuarvot saadaan mahdolliset ratkaisut 35.1 s sekä 39.5 s. Koska annettu nopeuden lauseke pätee vain siihen asti kunnes junta pysähtyy, ensimmäisen ajan hetken on oltava oikea ratkaisu. Siispä  $t_{\text{stop}} = 35 \text{ s}$ .

(b) Junan kulkema matka on

$$\Delta x = \int_0^{t_{\text{stop}}} (v_{x,\text{alku}} - bt_{\text{stop}} + ct_{\text{stop}}^2) dt = \left[ v_{x,\text{alku}} t - \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{3}ct^3 \right]_0^{t_{\text{stop}}} = v_{x,\text{alku}} t_{\text{stop}} - \frac{1}{2}bt_{\text{stop}}^2 + \frac{1}{3}ct_{\text{stop}}^3. \quad (1.41)$$

Lukuarvojen sijoitus tähän antaa ratkaisuksi  $\Delta x = 520 \text{ m}$ .

Mathematica:

```
(* nopeus ajan funktio *)
vx[t_] := valku - b t + c t^2

(* tallennetaan lukuarvot *)
kmh = 1000/3600;
lukuarvot = {valku -> 150 kmh, c -> 0.030, b -> 2.24};

(* ratkaistaan pysähtymishetki *)
stop = Solve[vx[tstop] == 0, tstop]
{tstop -> (b - Sqrt[b^2 - 4 c valku])/(2 c)},
```

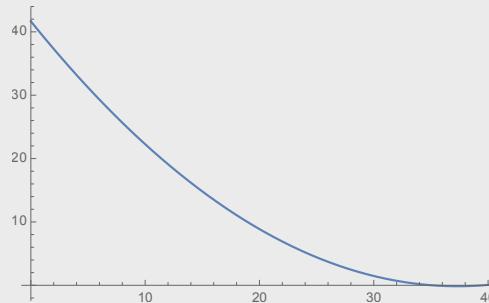
```

 $tstop \rightarrow (b + Sqrt[b^2 - 4 c valku])/(2 c)}$ 
stop /. lukuarvot (* sijoitetaan numeroarvot *)
{tstop \rightarrow 35.1223}, {tstop \rightarrow 39.5444}

(* ratkaistaan kuljettu matka *)
matka = Integrate[vx[t], {t, 0, tstop}]
-((b tstop^2)/2) + (c tstop^3)/3 + tstop valku
matka /. stop /. lukuarvot
{515.084, 514.652}

(* kuvaja *)
Plot[vx[t] /. lukuarvot, {t, 0, 40}]

```



**ARVIOINTI** Kuvaajasta voidaan lukea, että junan nopeus todellakin saavuttaa  $t$ -akselin eli arvon nolla kun  $t \approx 35$  s. Tämän jälkeen lauseke ei ole enää voimassa, mutta Mathematica piirtää funktion niin pitkälle kuin pyydetään. Tietokoneen antamat tulokset on siis aina aina tulkittava kriittisesti.

Junan kulkemaa matkaa edustaa kuvaajan alle jäänyt pinta-ala. Tätä voidaan arvioida karkeasti kolmiona, jonka kärjet ovat origossa sekä pisteissä (0 s, 40 m/s) sekä (30 s, 0 m/s). Tällaisen kolmion pinta-ala on  $\frac{1}{2} \cdot 30 \text{ s} \cdot 40 \text{ m/s} = 600 \text{ m}$ , mikä on jonkin verran enemmän kuin integroiden laskettu tarkka arvo, mutta selkeästi ratkaisun suuruusluokka on järkevä.

Ratkaisuilla on ajan ja pituuden yksiköt kuten pitääkin:

$$[t_{\text{stop}}] = \frac{1}{[c]}([b] + \sqrt{[b^2] + [cv_0]}) = s^3 / m(m/s^2 + \sqrt{m^2/s^4 + m/s^3 \cdot m/s}) = s^3 / m(m/s^2 + \sqrt{m^2/s^4}) = s^3 / m \cdot m/s^2 = s. \quad (1.42)$$

$$[\Delta x] = [v_0 t] + [bt^2] + [ct^3] = m/s \cdot s + m/s^2 \cdot s^2 + m/s^3 \cdot s^3 = m. \quad (1.43)$$



**1.17** Kun ilmanvastus huomioidaan, vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen kiilthyvyys noudattaa likimain lauseketta  $a_x(t) = -ge^{-t/\tau}$ , missä  $\tau$  on kappaleen koosta ja muodosta riippuva ilmanvastusta kuvava vakio. Jos kappale pudotetaan levosta korkeudelta  $x_{\text{alku}}$ , mikä on sen nopeus ja paikka ajan funktiona?

## LIIKE

# Yhteenveton Liike

## Differentiaalit ja vektorit

- Skalaari** on suure, jota kuvaavat pelkkä suuruus. Suuruuteen kuuluu fysiikassa sekä lukuarvo että yksikkö.
- Vektori** on suure, jolla on sekä suunta että suuruus. **Yksikkövektori** on vektori, jonka suuruus on yksi ja jolla ei ole yksikköä.
- Differentiaali** kuvaavat suureen infinitesimaalista eli äärettömän pienintä muutosta tai määritää.
- Derivaatta** kuvaavat suureen muutosnopeutta toisen suureen suhteeseen. Matemaattisesti se voidaan määritellä muutosten osamääränpäätä raja-arvona eli differentiaalien suhteena

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

- Integraali** kuvaavat pieniin osiin jaetun suureen kokonaismääriä. Matemaattisesti se voidaan määritellä summan raja-arvona

$$\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N v_x(t_i) \Delta t$$

- Integrointi ja derivoointi ovat toistensa käantäisoperaatiot

$$\int \frac{dy}{dx} dx = y + C, \quad \frac{d}{dx} \int y dx = y.$$

## Paikka ja nopeus

- Paikkavektori** on koordinaatiston origosta tarkastelupisteeseen osoittava vektori. Graafisesti se voidaan kuvata nuolena, jonka kanta on origossa ja kärki tarkastelupisteessä. Paikkavektorin **skalarikomponentti**  $x$ -suunnassa on pisteen  $x$ -koordinaatti. Lükkeen tapahtuessa *yhdessä ulottuvuudessa*  $x$ -akselin suunnassa kappaleen paikkavektori voidaan ilmaista kappaleen paikan koordinaatin sekä  $x$ -suuntaisen yksikkövektorin avulla

$$\bar{r} = x \hat{i}.$$

- Siirtymä** on paikan muutos

$$\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}, \quad \Delta \bar{r} = \bar{r}_{\text{loppu}} - \bar{r}_{\text{alku}}.$$

- Paikkavektorin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteeseen on **nopeus**

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

- Nopeuden skalarikomponentti  $x$ -suunnassa eli  $x$ -suuntainen nopeus on kappaleen  $x$ -koordinaatin derivaatta ajan suhteeseen

$$\bar{v} = v_x \hat{i}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

- Nopeusvektorin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteeseen on **kiertyvyys**

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

- Kiertyvyyden skalarikomponentti  $x$ -suunnassa eli  $x$ -suuntainen kiertyvyys on kappaleen  $x$ -suuntaisen nopeuden derivaatta ajan suhteeseen

$$\bar{a} = a_x \hat{i}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

- Putoavan kappaleen kiertyvyys on noin  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  suoraan alas päin.

## Graafinen esitys

- Lukediagrammissa** kappaleen paikka eri ajan hetkinä pörritetään samaan koordinaatistoon. Kappaleen nopeus voidaan arvioida siirtymien perusteella ja kiertyvyys nopeuden muutosten avulla.
- Kappaleen paikan kuvaajassa kunkin pisteen paikka pystysuunnassa esittää kappaleen paikkakoordinaatia ja paikka vaakasuunnassa aikakoordinaattia. Vastaavasti voidaan esittää minkä tahansa kahden suuren välinen riippuvuus.
- Kappaleen nopeus ilmenee paikkakoordinaatin **kuvajan tangenti**

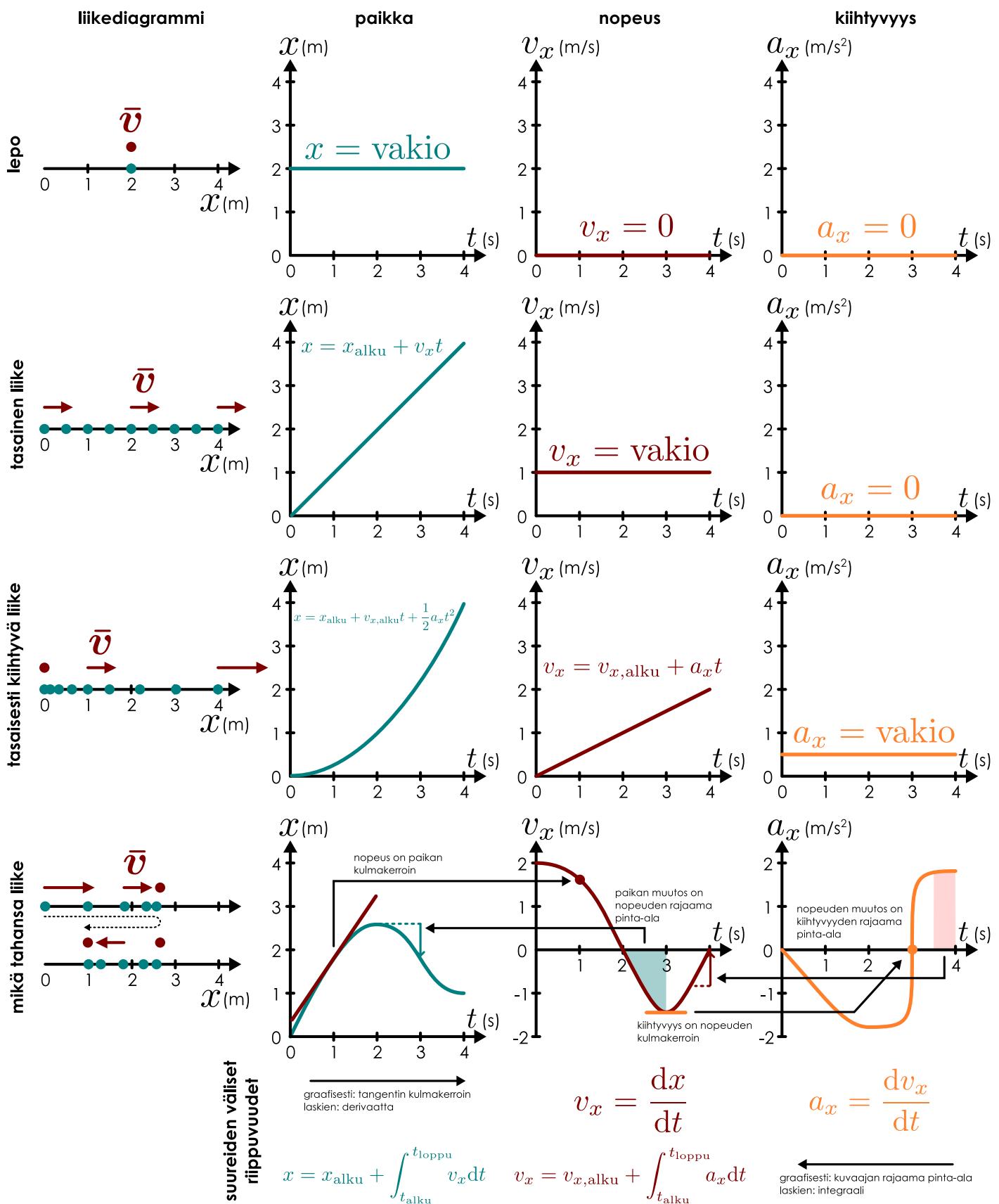
**tin kulmakertoimena.** Samoin kiertyvyys on nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin. Yleisesti derivaatta  $f'(t) = df/dt$  on kuvaajan  $f(t)$  tangentin kulmakerroin.

- Kappaleen siirtymä ilmenee nopeuden skalarikomponentin **kuvajan rajaamana pinta-alana**. Samoin nopeus on kiertyvyyden kuvaajan rajaama pinta-ala. Yleisesti integraali  $\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} f(t) dt$  on kuvaajan  $f(t)$  ja  $t$ -akselin välillä jäävä pinta-ala.

## Sanasto

- koordinaatti (coordinate)
- koordinaatisto (reference frame)
- akseli (axis)
- liike (motion, movement)
- paikka (position)
- kiuropiste (reference point)
- origo (origin)
- metri (meter)
- pituus (length)
- siirtymä (displacement)
- matka (distance)
- aika (time)
- sekanti (second)
- ajan hetki (instant)
- aikaväli (interval)
- nopeus (velocity)
- vauhti (speed)
- kiertyvyys (acceleration)
- lepo (rest)
- tasainen liike (uniform motion)
- tasaisesti kiertyvä liike (uniformly accelerated motion)
- vapaa pudotus (free fall)
- liikerata (trajectory)
- putoamiskiertyvyys (gravitational acceleration)
- differentiaali (differential)
- derivaatta (derivative)
- integraali (integral)
- tangentti (tangent)
- kulmakerroin (slope)
- pinta-ala (area)
- lukediagrammi (motion diagram)
- skalaari (scalar)
- vektori (vector)
- nollavektori (zero vector)
- yksikkövektori (unit vector)
- skalarikomponentti (scalar component)
- vektorin pituus (vector magnitude)
- itseisarvo (absolute value)
- paikkavektori (position vector)
- suoran sovitus (linear fit)

Kuva 1.14: Liikkeen erilaisia esitystapoja sekä liikettä kuvaavien suureiden riippuvuudet toisistaan. Taulukossa on esitetty erikseen erikoistapaukset, joissa paikka, nopeus tai kiihtyvyys ovat vakioita, sekä yleinen liike.



### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

- 1.1** (a) Siirtymä riippuu vain alku- ja loppupisteistä, joten  $\Delta x = x_2 - x_0 = 0.5 \text{ m} - 1.0 \text{ m} = -0.5 \text{ m}$ .  
 (b) Kuljettu matka on siirtymien itseisarvojen summa,  $s = |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| = 2.5 \text{ m} + 3.0 \text{ m} = 5.5 \text{ m}$ .  
 (c) Koordinaatit muuttuvat origon siirron verran, jolloin saadaan  
 $x_0 = -1.0 \text{ m}$ ,  $x_1 = -4.0 \text{ m}$  ja  $x_2 = -1.5 \text{ m}$ . Siirtymä ja kuljettu matka eivät riipu kiintopisteestä.
- 1.2** Nopeus on siirtymän ja kuluneen ajan suhde.  
 (a) Menomatkalla  $v_x = 15 \text{ m}/3 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$ .  
 (b) Paluumatkalla  $v_x = -15 \text{ m}/4 \text{ s} = -3.75 \text{ m/s}$ .  
 (c) Kokonaismatkalla siirtymä on nolla, joten keskimääräinen nopeus on  $v_{x,\text{kesiarvo}} = 0 \text{ m}/3 \text{ s} = 0 \text{ m/s}$ .  
 (d) Kokonaismatka on 30 m ja aikaa kuluu 7.5 s, joten keskivauhti on  $v_{\text{kesiarvo}} = 30 \text{ m}/7.5 \text{ s} = 4.0 \text{ m/s}$ . Keskivauhti on siis eri asia kuin keskinopeus, ja kumpikaan näistä ei ole nopeuden tai vauhdin kesiarvo.
- 1.3** (a)  $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2bt$ .  
 (b)  $\frac{dt}{dx} = t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{bx}}$ .  
 (c)  $\frac{dx}{dt} = 4$  ja  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$ . Huomaa, että  $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}$
- 1.4** Jos kappale siirtyy välittömästi paikasta toiseen, paikan kuvaajassa on epäjatkuvuus. Tässä tapauksessa kuvaaja siis saapuisi pisteeseen  $x = 2 \text{ m}$  ja hyppäisi epäjatkuvasti pisteeseen  $x = 3 \text{ m}$ . Koska teleportteja ei ole oikeasti olemassa, paikan kuvaaja ei siis saa olla epäjatkuva.
- 1.5** Nopeuden kuvaaja on välillä  $0 \dots 1 \text{ s}$  vaakasuora, joka kulkee korkeudella 1 m/s. Hetkellä  $t = 1 \text{ s}$  kuvaaja hyppää arvoon 2 m/s, ja kuvaaja on tämän jälkeen jälleen vaakasuora aikavälin  $1 \dots 2 \text{ s}$ . Nopeuden kuvaajassa on siis epäjatkuvuus, jos nopeus muuttuu yhtäkkiä. Paikan kuvaaja on puolestaan suora, jonka kulmakerroin on kappaleen nopeus. Paikan kuvaajan kulmakerroin on siis aluksi 1 m/s ja lopuksi 2 m/s. Kuvaaja on jatkuva hetkellä  $t = 1 \text{ s}$ , mutta siinä on kulma, koska kuvaajan jyrkyys muuttuu yhtäkkiä.
- 1.6** Ensimmäisellä välillä kappale siirtyy  $\Delta x_1 = v_x \Delta t = 0.1 \text{ m/s} \cdot 0.2 \text{ s} = 0.02 \text{ m}$ . Vastaavasti seuraavilla aikaväleillä kappale siirtyy  $\Delta x_2 = 0.04 \text{ m}$ ,  $\Delta x_3 = 0.08 \text{ m}$  ja  $\Delta x_4 = 0.14 \text{ m}$ . Kokonaissiirtymä on näiden summa,  $\Delta x = 0.28 \text{ m}$ .
- 1.8** Skalaareja ovat pituus, matka, lukumäärä, tilavuus ja lämpötila. Vektoreita ovat nopeus, paikka ja siirtymä. Huomaa, että pituus ja matka ilmaisevat vain etäisyksiä ilman suuntaa, joten ne ovat skalaareja. Paikka on vektori, koska se ilmaisee valitun pisteen origosta mitatun etäisyyden ja suunnan. Siirtymä on puolestaan paikan muutos, joka ilmaisee sekä siirrytyyn etäisyyden että siirron suunnan.
- 1.9** Merkitään tästä vektoria kirjaimella  $\vec{B}$ . (a) Pituus eli suuruus on  $B = 2.5 \text{ T}$ ,  
 (b) skalaarikomponentti  $B_x = -2.5 \text{ T}$ ,  
 (c) itseisarvo  $|\vec{B}| = B = 2.5 \text{ T}$ ,  
 (d) yksikkövektori  $\hat{\vec{B}} = \vec{B}/B = -\hat{i}$  ja  
 (e) vektori itse  $\vec{B} = B_x \hat{i} = (-2.5 \text{ T}) \hat{i}$
- 1.10** (a)  $x_{\text{alku}} = 1.5 \text{ m}$ ,  $x_{\text{loppu}} = -2.5 \text{ m}$ ,  
 (b)  $\vec{r}_{\text{alku}} = (1.5 \text{ m}) \hat{i}$ ,  $\vec{r}_{\text{loppu}} = (-2.5 \text{ m}) \hat{i}$ ,  
 (c)  $v_{x,\text{kesiarvo}} = (x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}})/\Delta t = -4.0 \text{ m}/1.0 \text{ s} = -4.0 \text{ m/s}$ ,  
 (d)  $\vec{v}_{x,\text{kesiarvo}} = (\vec{r}_{\text{loppu}} - \vec{r}_{\text{alku}})/\Delta t = (-4.0 \text{ m}) \hat{i}/1.0 \text{ s} = (-4.0 \text{ m/s}) \hat{i}$ .
- 1.11** (a) Nopeuden muutos  $\Delta v_x = v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}} = 2.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 1.0 \text{ m/s}$ , joten kiihtyvyys  $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = 1.0 \text{ m/s}^2$ .  
 (b)  $\Delta v_x = 1.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 0.0 \text{ m/s}$ ,  $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = 0.0 \text{ m/s}^2$ .  
 (c)  $\Delta v_x = 0.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -1.0 \text{ m/s}$ ,  $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -1.0 \text{ m/s}^2$ .  
 (d)  $\Delta v_x = -1.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -2.0 \text{ m/s}$ ,  $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -2.0 \text{ m/s}^2$ .  
 (e)  $\Delta v_x = -2.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -3.0 \text{ m/s}$ ,  $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -3.0 \text{ m/s}^2$ . Huomaa, että tapauksessa (d) vauhti ei muutu, mutta kiihtyvyys ei silti ole nolla. Tapauksessa (e) puolestaan vauhti kasvaa, mutta kiihtyvyys on negatiivinen.
- 1.12** (a) Nopeus on paikan derivaatta,  $v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t) = 3 \cdot (2.5 \text{ m/s}^3)t^2 = (7.5 \text{ m/s}^3)t^2$ .  
 (b) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta,  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = 2 \cdot (7.5 \text{ m/s}^3)t = (15.0 \text{ m/s}^3)t$ .  
 (c) Kiihtyvyyden integraali on  $\int (15.0 \text{ m/s}^3)t dt = \frac{1}{2}(15.0 \text{ m/s}^3)t^2 + C = (7.5 \text{ m/s}^3)t^2 + C$ . Tämä on sama kuin nopeus, kun integroimiskäsi valitaan nolla.
- 1.14** (a) Kappale putoaa alaspäin: nopeus ja kiihtyvyys osoittavat molemmat alaspäin.  
 (b) Kappale koskettaa maata: Nopeus on hetkellisesti likimain nolla. Kiihtyvyys osoittaa ylöspäin, koska kappaleen nopeusvektori osoittaa aluksi alas ja lopuksi ylös eli nopeuden muutos on ylöspäin. Koska nopeus muuttuu pomppussa hyvin nopeasti, kiihtyvyys on itseisarvoltaan suuri.  
 (c) Kappale liikkuu ylöspäin mutta on vapaassa pudotuksessa: nopeus osoittaa ylöspäin, kiihtyvyys alaspäin.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

**1.15** Erittäin kirja putoaa nopeasti ja paperi hitaasti, koska ilman ja paperin välinen vuorovaikutus muuttaa kevyen paperin liikettä paljon ja painavan kirjan liikettä vain vähän. Kun paperi putoaa kirjassa kiinni, putoavan paperin edessä ei ole putoamista hidastavaa ilmaa, ja tällöin paperi putoaa yhtä nopeasti kuin kirja, putoamiskiihtyvyydyllä  $g$ .

**1.16** (a) Kun pallo on lähtökorkeudella, sen siirtymä on nolla,  $\Delta x = 0$  m. Yhtälön (1.36) perusteella siis  $v_{x, \text{loppu}}^2 = v_{x, \text{alku}}^2$  eli pallon vauhti on sama kuin alussa. Koska pallo putoaa nyt alaspäin, sen nopeuden suunta on käantynyt eli  $v_x = -10.0$  m/s.

(b) Läkipisteessä pallo on hetkellisesti paikoillaan,  $v_x = 0$  m/s.

(c) Voimme sijoittaa yhtälöön (1.36) loppunopeudeksi nopeuden läkipisteessä (nolla) ja ratkaista tästä pallon siirtymän  $\Delta x$ . Saamme

$$\Delta x = -\frac{1}{2a_x} v_{x, \text{alku}}^2 = \frac{1}{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2} \cdot (10.0 \text{ m/s})^2 = 5.1 \text{ m.} \quad (1.44)$$

**1.17** Nopeus saadaan integroimalla kiihtyvyyttä ja paikka edelleen integroimalla nopeutta. Nopeus on

$$v_x(t) = v_{x, \text{alku}} + \int_0^t -ge^{-t/\tau} dt = g\tau(e^{-t/\tau} - 1) \quad (1.45)$$

ja paikka

$$x(t) = x_{\text{alku}} + \int_0^t g\tau(e^{-t/\tau} - 1) dt = x_{\text{alku}} + g\tau[\tau(1 - e^{-t/\tau}) - t]. \quad (1.46)$$

## 2 Säilymislait

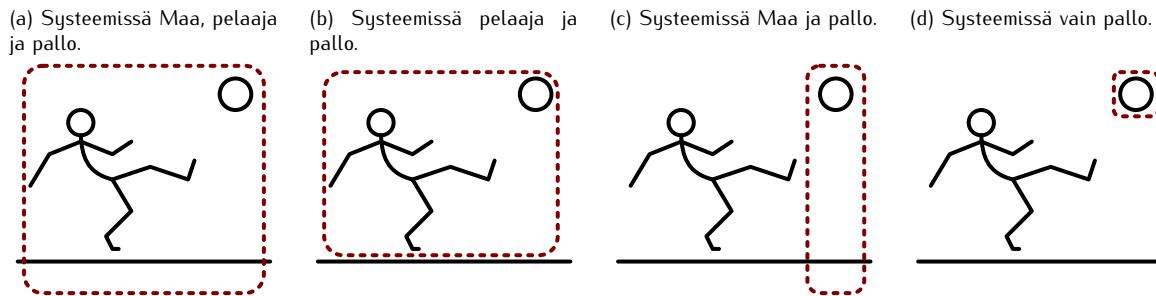
Olemme usein kiinnostuneita siitä, miten asiat muuttuvat, sillä muuttumattomille asioille ei tapahdu mitään. Jos suure ei muutu, voimme selvittää suureen arvon yhdellä ajan hetkellä, ja tiedämme automaattisesti suureen arvon kaikkina ajan hetkinä. Tällaiset suureet eivät vaikuta kovin kiinnostavilta. Kuitenkin fysiikan tärkeimmät ja voimakkaimmat lait koskevat nimenomaan suureita, jotka eivät muutu ajan kuluessa. Tällaisten suureiden sanotaan säilyvän. Säilyvät suureet ovat tärkeitä siksi, että koska niiden arvo ei voi muuttua, ne asettavat voimakkaita rajoituksia sille, mitä fysiikalissä prosesseissa voi ja ei voi tapahtua.

Tutkimme aluksi yleisesti, millaisia ominaisuuksia säilyvillä suureilla on. Tämän jälkeen tutustumme mekanikan kahteen tärkeimpään suureeseen: energiaan ja liikemäärään. Energia on fysiikan tärkein käsite, joka yhdistää kaikki fysiikan osa-alueet. Tarkasteltiinpa kappaleiden liikettä, aaltoa, lämpöä tai sähköä, energia on aina keskeisessä roolissa selittämässä mitä tapahtuu tai ylipäänsä mitä voi tai ei voi tapahtua. Liikemäärä puolestaan määrä sen, miten kappaleet ja kappaleiden joukot voivat liikkua. Liikemäärä esimerkiksi selittää sen arkisen havainnon, että raskaat kappaleet työttävät törmäyksissä kevyemmät pois tieltään kun taas kevyet kappaleet eivät kykene liikuttamaan raskaampia.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- määritellä systeemi ja rajata fysikalinen tilanne systeemiksi
- tunnistaa ekstensiiviset suureet sekä tavat joilla nämä voivat muuttua
- määritellä liike-energia, potentiaalienergia sekä sisäenergia
- määritellä liikemäärä ja massakeskipiste
- selittää, millaisessa systeemissä energia tai liikemäärä on vakio
- selittää energian säilymislaki ja ratkaista painovoiman ja jousten liikuttamien kappaleiden liike sen avulla
- selittää liikemäärän säilymislaki ja ratkaista kappaleiden liike törmäyksissä sen avulla

Kuva 2.1: Tilanne, jossa potkaistaan palloa, on rajattu erilaisiksi systeemeiksi. Systeemi on rajattu katkoviivalla.



## 2.1 Säilyvät suureet

### Systeemi

Fysikaalisten mallien muodostamisessa kantava ajatus on tilanteiden yksinkertaistaminen ja ongelmien pelkistäminen niin rajattuun muotoon, että tilanteisiin liittyvä fysiikka voidaan lopulta kuvata hyvin tarkasti yksinkertaisen periaatteiden ja lakienvälistä avulla. Tässä yksinkertaistamisessa täytyy valita kuinka tarkasti asioita kuvataan, mutta ennen muuta siinä on valittava *mitä* kuvataan. Kaikkea mahdollista ei voi ottaa kerralla huomioon, eikä se ole järkeväkään. Jos tarkoitus on esimerkiksi arvioida jalkapallokentällä potkaistun pallon lentorataa, voidaan hyvin jättää katsomossa istuvien ihmisten tekemiset huomioimatta. Kun tilanteesta siis muodostetaan fysikaalinen malli, katsot ja katsomo voidaan kokonaan unohtaa ilman että mallin ennusteet muuttuisivat. Toisin sanoen tilanteen tarkastelu voidaan rajata vain tiettyihin asioihin, joiden oletetaan olevan merkittäviä.

Fysiikassa sitä joukkoja kappaleita, hiukkasia tai muita fysikaalisia objekteja, joihin tarkastelu kohdistuu, kutsutaan **systeemiksi**. Kaikkea systeemin ulkopuolelle jätettyä kutsutaan systeemin **ympäristöksi**. Systeemin määritelmään ei sisälly mitään rajoituksia vaan mikä tahansa olioiden joukko, jonka voimme mielessämme erottaa muusta todellisuudesta, voidaan valita systeemiksi. Systeemin rajaus on tarvitse noudattaa mitään todellista fysikaalista rajapintaa vaan erotus systeemiin ja ympäristöön on täysin kuvitteellinen.

Yleensä systeemiin valitaan mukaan kaikki asiat, joiden käyttäytymisen tarkka tuntemus on välttämätöntä. Ympäristö ei tarvitse kuitenkaan olla merkityksetön vaan systeemi voi vuorovaikuttaa ympäristönsä kanssa. Nämä vuorovaikutukset pitää kuitenkin olla kuvattavissa ilman tarkkaa tietoa esimerkiksi systeemin ulkopuolisten kappaleiden paikoista. Systeemin rajaus ei tarvitse myöskään kohdistua kappaleisiin tai hiukkasiin vaan systeemiksi voidaan valita myös esimerkiksi jokin tietty tilavuus tai alue, jolloin tarkastellaan kaikkia kappaleita tai hiukkasia, jotka ovat kyseisen tilavuuden sisällä. Tällöin kappaleita voi tulla systeemiin tai poistua sieltä.

Esimerkiksi määritettäessä potkaistun pallon liikerataa pallo lienee syytä ottaa osaksi tarkasteltavaa systeemiä, sillä juuri pallon käyttäytymisestä ollaan kiinnostuneita. Potkun aikana pallo vuorovaikuttaa pelaajan kanssa ja lentonsa aikana se vuorovaikuttaa Maan ja ilman kanssa, joten nämäkin voidaan ottaa osaksi tarkasteltavaa systeemiä. Näin ei ole kuitenkaan välttämätöntä tehdä, sillä esimerkiksi Maa ei pallon lennon aikana liiku mihinkään eikä sen paikasta siis tarvitse pitää kirja. Maan jättäminen pois tarkasteltavasta systeemistä ei tietenkään poista Maan ja pallon välistä vuorovaikutusta mihinkään, vaan tällöin palloon kohdistuva painovoima on huomioitava systeemin ja sen ympäristön välisenä vuorovaikutuksena.

Systeemin valinta tapahtuu siis puhtaasti ajatustasolla, eikä se tienekään saa vaikuttaa tarkasteltavan tilanteen käyttäytymiseen, sillä luonto huomoi toiminnassaan aivan kaiken. Systeemien merkitys onkin toimia ajattelun apuvälineinä. Systeemin valinta on muistutus siitä, että systeemiin kuuluvista asioista on pidettävä kirjaa, eikä kerran valittua systeemiä saa vaihtaa kesken analyysin. On myös olemassa joukko hyvin vahvoja fysikaalisia menetelmiä, joita voi käyttää vain *tietynlaisissa systeemeissä* kuten pian opimme. Niinpä rajaamalla tarkasteltava systeemi juuri sopivasti voidaan ilmoittaa ymmärtää huomattavasti helpommin kuin huonosti valittua systeemiä tutkimalla.

### Ekstensiiviset suureet

Fysikaalisia suureita voidaan luokitella monin tavoin. Liikkeen tarkastelun yhteydessä tarkasteltiin jo skaalaareja ja vektoreita joista edellisillä ei ole suuntaa mutta jälkimmäisillä on. Toinen tärkeä luokittelu on jako **intensiivisiin ja ekstensiivisiin** suureisiin, mikä tarkoittaa karkeasti ilmaisten jakoa paikallisiin (aineen) ominaisuuksiin ja yleisiin (systeemin) ominaisuuksiin.

## SÄILYMSLAIT

Tarkastellaan esimerkinä muovailuvahasta tehtyä täysin tasalaatuista palloa. Mitataan vahapallon ominaisuuksia ja kirjataan nämä muistiin: esimerkiksi halkaisija, tilavuus, lämpötila, paino jne. — emme ole määritelleet vielä näitä suureita, mutta voit varmasti keksiä vielä paljon muitakin mitattavia ominaisuuksia. Leikataan tämän jälkeen pallo osiin ja mitataan nyt samat ominaisuudet jokaiselle osalle. Jotkin suuret kuten tilavuus ovat tietenkin kullekin pallon osalle pienempiä kuin koko pallolle, mutta toiset kuten lämpötila voivat olla pienissä osissa samat kuin alkuperäisessä pallossa.

Suureet, joille voidaan määritellä arvo erikseen kussakin pisteessä, ovat *intensiivisiä*. Erityisesti jos tällaisen suureen arvo on kaikkialla vakio alkuperäisessä pallossa, suurella on sama arvo myös missä tahansa palosta leikatussa pallassa. Esimerkiksi lämpötila on intensiivinen suure. Jos pallo on kauttaaltaan yhtä lämmi, sen kussakin osassa on sama lämpötila.

Tämä ei kuitenkaan päde kaikille suureille. Esimerkiksi alkuperäisestä palosta leikatun pienien palan tilavuus on välttämättä pienempi kuin koko pallon tilavuus. Erityisesti jos vaha ei puristu leikatessa merkittävästi kokoon, voimme pallon pilkkomisen jälkeen laskea yhteen kaikkien siitä leikattujen pienien osien tilavuudet ja näiden tilavuuksien summan täytyy olla yhtä suuri kuin alkuperäisen pallon tilavuus. Tätä ominaisuutta sanotaan *ekstensiivisyudeksi*. Toisin sanoen *kun kappale tai systeemi jaetaan osiin mielivaltaisella tavalla ja kustakin osasta mitataan suureen a arvo, suure on ekstensiivinen, jos näiden arvojen summa on sama kuin suureen arvo alkuperäisellä kappaleella tai systeemillä*. Ekstensiivisen suureen arvo on siis suoraan verrannollinen kappaleen kokoon kun taas intensiivisen suureen arvo ei sitä ole.

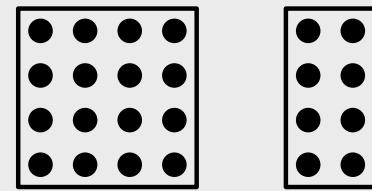
### esimerkki 2.1

### Ekstensiiviset ja intensiiviset suureet

Ovatko kappaleen tilavuus, kappaleen muodostavien hiukkosten lukumäärä sekä näiden hiukkisten tiheys eli hiukkosten määrä tilavuusyksikköä kohden intensiivisiä vai ekstensiivisiä suureita?

**SUUNNITELMA** Suure, joka ei muutu jaettaessa kauttaaltaan samalaisesta aineesta tehty kappale kahtia, on intensiivinen. Sen sijaan jos suureen arvo tällöin puolittuu, kyseessä on ekstensiivinen suure. Tilannetta voi havainnollistaa piirtämällä hiukkasista koostuvan kappaleen sekä kokonaisen että osissa.

koko kappale      puolikas



**RATKAISU** Jos kappaleen tilavuus on  $V$  ja puolitamme kappaleen, puolikkaan tilavuus on  $V/2$ , joten tilavuus on *ekstensiivinen*.

Jos kappale koostuu  $N$  hiukkasta ja puolitamme kappaleen, yhteen puolikkaaseen jää  $N/2$  hiukkasta, joten hiukkasmäärä on *ekstensiivinen*.

Hiukkosten lukumäärätihesy ilmaisee hiukkosten lukumäärän tilavuusyksikössä. Hiukkosten tiheys voi vaihdella kappaleessa, mutta keskimääräinen hiukkastiheys kappaleelle, joka koostuu  $N$ :stä hiukkasta ja jonka tilavuus on  $V$ , on

$$n = \frac{N}{V}. \quad (2.1)$$

Puolikkaan kappaleen hiukkastiheys on niinikään  $\frac{N/2}{V/2} = \frac{N}{V} = n$  eli sama kuin alkuperäisellä kappaleella. Hiukkastiheys on siis *intensiivinen*.

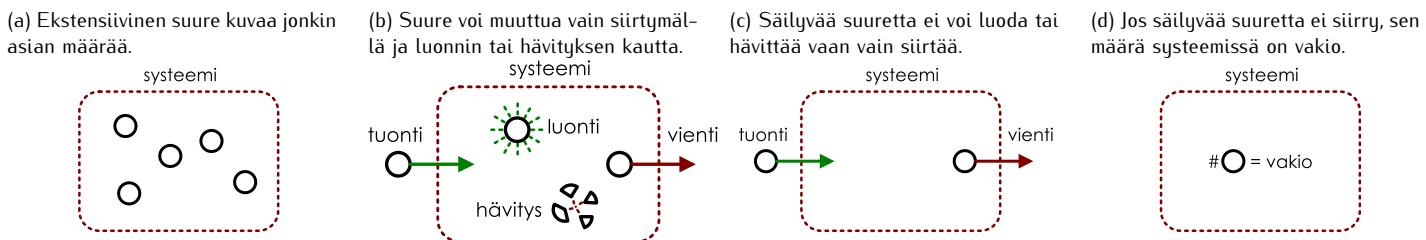
**ARVIOINTI** Itse asiassa jo huomio, että hiukkastiheys ei ole välttämättä vakio kappaleen sisällä kertoo, että kyseessä on intensiivinen suure, sillä vain intensiivisille suureille voidaan määritellä arvo eri paikoissa kappaleen sisällä. Ei ole mielekästä pohtia ekstensiivisen suuren kuten kappaleen tilavuuden arvoa kappaleen sisällä, koska tilavuus on koko kappaleen ominaisuus.

Intensiivisillä ja ekstensiivisillä suureilla käytetään samanlaisia symboleita, joten matemaattiset lausekkeet eivät suoraan kerro, ovatko suureet intensiivisiä vai ekstensiivisiä. Fysiikaalisesti intensiiviset ja ekstensiiviset ominaisuudet käyttäytyvät kuitenkin eri tavoin, eikä niitä voi yhdistellä miten sattuu. Esimerkissä 2.1 nähtiin, että kahden ekstensiivisen suuren suhde on intensiivinen. Vastaavasti koska intensiiviset suureet eivät riipu kappaleen koosta, myöskään intensiivisten suureiden tulot tai osamäärät eivät riipu kappaleen koosta ja myös ne ovat intensiivisiä suureita. Sen sijaan intensiivisen ja ekstensiivisen suuren tulo on ekstensiivinen. Esimerkiksi hiukkastiheyden (intensiivinen) ja tilavuuden (ekstensiivinen) tulona saadaan hiukkasmäärä (ekstensiivinen).



2.1 Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa intensiivisyys ja ekstensiivisyys. Ovatko seuraavat suureet intensiivisiä tai ekstensiivisiä: (a) nopeus, (b) pinta-ala, (c) tilavuuden ja nopeuden tulo?

Kuva 2.2: Systeemin sisältämän ekstensiivisen suureen muuttuminen.



## Muuttuvat ja muuttumattomat suureet

Fysiikassa usein halutaan tietää, miten suureet muuttuvat ajan kuluessa, ja riippuen suureen laadusta tämä voi tapahtua eri tavoin. Esimerkiksi kappaleen paikka muuttuu kappaleen liikkuessa. Ekstensiiviset suureet ovat kuitenkin erityisen tärkeitä, koska ne kuvaavat systeemin ominaisuuksia kokonaisuutena, joten tutkitaan nyt tällaisten suureiden muuttumista.

Ekstensiivinen suure mittaa aina jonkin asian *kokonaismäärää*. Esimerkiksi hiukkasten lukumäärä kuvailee niemensä mukaisesti monestako hiukkasta systeemi koostuu ja tilavuus kuvailee sen avaruuden määärää, jonka systeemi täyttää. Ekstensiivinen suure voikin muuttua neljällä eri tavalla: sitä voidaan tuoda systeemiin lisää, viedä pois, luoda tai hävittää. Yhtälönä tämän asian voi esittää muodossa

$$\Delta a_{\text{ekstensiivinen}} = \Delta a_{\text{tuonti}} + \Delta a_{\text{vienti}} + \Delta a_{\text{luonti}} + \Delta a_{\text{hävitys}}. \quad (2.2)$$

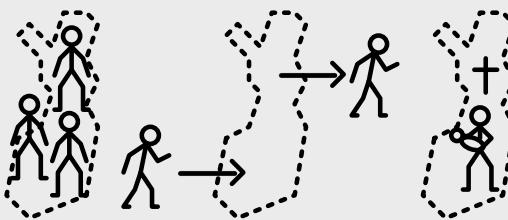
Näistä eri tavoista suuren tuominen systeemiin tai vieminen sieltä pois ovat selkeästi erilaisia tapahtumia kuin luominen ja hävittäminen, sillä tuotaessa tai vietäessä suuretta vain siirtyy ympäristön ja systeemin välillä kun taas luomisen ja hävittämisen yhteydessä suuren kokonaismäärä muuttuu.

### esimerkki 2.2

### Ihmisten määrä

**Tarkastellaan Suomessa asuvien ihmisten lukumäärää. Millaista systeemiä, ympäristöä ja suuretta tässä tarkastellaan? Millaisissa tapahtumissa tämän suuren kokonaismäärä muuttuu?**

Koska suure on rajattu Suomessa asuviin ihmisiin, tarkasteltu systeemi on Suomi ja sen ympäristö ovat kaikki muut maat. Tarkasteltava suure on ihmisten lukumäärä. Rajatulla alueella asuvien ihmisten lukumäärä on myös ekstensiivinen suure, sillä se riippuu tarkasteltavan alueen koosta. Esimerkiksi Etelä-Suomen läänissä asuu vähemmän ihmisiä kuin koko Suomessa, mutta koko Suomen väkiluku on sama kuin kaikkien lääniensä väkilukujen summa.



Ihmisten määrä Suomessa ei muutu ihmisten muuttaessa maan sisällä, sillä tällöin asukkaiden kokonaismäärä pysyy samana ihmisten vain siirtymessä paikasta toiseen. Ihmisten määrä voi muuttua maahanmuuton ja maastamuuton myötä, sillä tällöin ihmisiä siirtyy Suomen ja ulkomaiden välillä. Nämä edustavat suuren siirtymistä ympäristöstä systeemiin sekä systeemistä ympäristöön. Tällöinkään kuitenkaan systeemin (Suomen) ja ympäristön (ulkomaiden) yhteenlaskettu ihmisten kokonaismäärä ei muudu. Ihmisten määrä voi muuttua myös syntymien ja kuolemien kautta. Nämä edustavat suuren luontia ja hävittämistä, sillä niihin ihmisiin ei siirry minnekaan vaan ihmisten kokonaismäärä todella muuttuu.

Erityisen tärkeitä ovat ekstensiiviset suureet, joita ei voi luoda eikä hävittää, sillä näiden suureiden mittama asia voi ainoastaan siirtyä systeemin ja ympäristön välillä eikä sen kokonaismäärä voi muuttua. Fysiikassa tällaisten suureiden sanotaan *säilyvän*. Säilyvän suuren kokonaismäärän muutos systeemissä on

$$\Delta a_{\text{säilyvä}} = \Delta a_{\text{tuonti}} + \Delta a_{\text{vienti}}. \quad (2.3)$$

Nimitys "säilyvä" viittaa suureen kokonaismäärään, joka säilyy muuttumattomana. Myös vektorisuureet voivat olla ekstensiivisia säilyviä suureita, mikä tarkoittaa että myös suuren suunta pysyy aina samana.

Systeemin ollessa sellainen, että säilyvää suuretta ei voi siirtää systeemin ja ympäristön välillä eli  $\Delta a_{\text{tuonti}} = \Delta a_{\text{vienti}} = 0$ , suuren kokonaismäärän systeemissä ei voi muuttua,

$$\Delta a_{\text{säilyvä}} = 0 \quad (2.4)$$

## SÄILYMSLAIT

joten sen täytyy olla vakio

$$a = \text{vakio.} \quad (2.5)$$

Edelleen koska suureen derivaatta ajan suhteen on määritelty muutosten osamäärien kautta, myös suureen aikaderivaatta on siis aina nolla

$$\frac{da}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

Riippuu tilanteesta, mikä näistä tavoista esittää suureen säilyminen on käytökelpoisin, mutta joka tapauksessa on syytä tunnistaa näiden kaikkien ilmaisevan samaa asiaa.

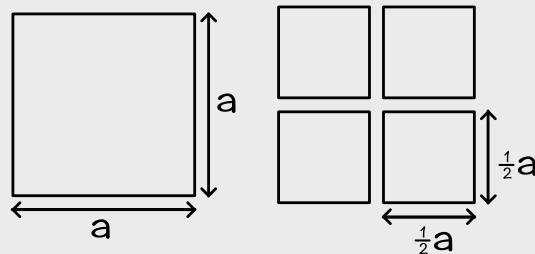
**Säilymslaki** on fysiikan laki, jonka mukaan fysiikaalinen suure säilyy eli suuretta ei voi luoda tai hävittää. Tällöin suuren *kokonaismäärä* ei muutu ajan kuluessa. Säilymslait ovat erittäin voimakkaita fysiikan periaatteita, koska niiden avulla systeemien käytös voidaan usein analysoida yksinkertaisesti pitämällä kirja säilyvien suureiden käyttäytymisestä ilman tarkkaa tietoa systeemin tapahtumista. Jos säilyvän suureen määrä lisääntyy jossakin, sen on välttämättä vähennettävä muualla yhtä paljon. Tai jos systeemi jaetaan osiin, osien on *yhteensä* sisällettävä täsmälleen yhtä paljon säilyvää suuretta kuin alkuperäinen systeemi sisälsi riippumatta jaon suorittamistavasta.

### esimerkki 2.3

### Paperin säilymslaki

Neliön muotoinen paperi leikataan neljään yhtä suureen neliön muotoiseen osaan kahdella alkuperäisten sivujen suuntaisella leikkauksella. Mikä on osien ympäryysmittojen ja pinta-alojen summa ennen ja jälkeen operaation? Entä jos paperi leikataan mielivaltaisen muotoisiin osiin?

**SUUNNITELMA** Neliön, jonka sivun pituus on  $a$ , ympäryysmitta on  $4a$  ja pinta-ala  $a^2$ . Kun paperi leikataan neljään osaan, saadaan neljä uutta neliötä, joiden sivujen pituudet ovat puolet alkuperäisestä.



**RATKAISU** Alkuperäisen neliön sivun pituus on  $a$ , ympäryysmitta  $4a$  ja pinta-ala  $a^2$ . Leikkauksen jälkeen on neljä neliön muotoista palaa, joiden kunkin sivun pituus on  $a/2$ . Näiden palojen ympäryysmitta on siis  $2a$  ja pinta-ala  $a^2/4$  ja palojen yhteenlaskettu ympäryysmitta on  $4 \times 2a = 8a$  ja pinta-ala  $4 \times a^2/4 = a^2$ . Palojen ympäryysmitta kasvoi mutta pinta-ala pysyi samana. Ympäryysmitta ei siis ole intensiivinen eikä ekstensiivinen suure eikä se säilynyt, mutta pinta-ala on ekstensiivinen säilyvä suure paperin leikkauksessa. (Kaksiulotteiselle kappaleelle pinta-ala on ekstensiivinen aivan samoin kuin kolmiulotteiselle kappaleelle tilavuus on ekstensiivinen suure.)

**ARVIOINTI** Jos paperi leikataan mielivaltaisiin osiin, osien ympäryysmitasta ei voida sanoa muuta kuin että ympäryysmitta kasvaa (tämän todistaminen jätetään lukijalle). Osien kokonaispinta-ala on kuitenkin aina sama  $a^2$  riippumatta siitä, kuinka paperi on leikattu. Tämä on esimerkki säilymslakien voimasta: Vaikkemme tiedä mitään muuta kuin että paperi on leikattu, silti voidaan olla varmoja, että osien kokonaispinta-ala ei ole muuttunut, mikä on hyvin voimakas reunaehdotus, miten paperi voi leikkauksessa käyttäytää.

Huomaa kuitenkin vielä, että paperin pinta-ala säilyy vain ideaalisessa leikkauksessa, ja pinta-alaa voidaan hävittää vaikkapa polttamalla paperi. Suureita, jotka säilyvät kaikissa mahdollisissa tapahtumissa on loppujen lopuksi hyvin vähän.



**2.2** Tarkastellaan seuraavia systeemejä ja suureita. Millä tavoilla suureet voivat muuttua? Mitkä suureista ovat säilyviä? (a) kasvien määrä puistossa, (b) ilman suhteellinen kosteus huoneessa, (c) rahan määrä lukeutussa kassakaapissa.

## 2.2 Energia

Kaikki tuntevat nykyään sanan "energia", koska **energia** fysiikaalisena suureena on niin keskeinen modernin yhteiskunnan toiminnassa. Karkeasti ilmaisten energian on jonkinlainen mittari sille, mitä kaikkea systeemi voi tehdä. Ruoka sisältää kemiallista energiota, josta saamme osan itsellemme syömällä. Tämän energian avulla pysymme lämpiminä, pystymme liikkumaan ja ylläpidämme elintoiointojamme. Käytämme myös koneita, jotka toimivat joko polttoaineiden kemiallisella energialla tai sähköisellä energialla. Tällainen arkinen käsitys energiasta on kuitenkin monin tavoin epätäsmällinen, ja seuraavaksi tutkimme, miten energian voisi määritellä täsmällisemmin ja miten energia toimii fysiikaalissa ilmiöissä.

## Energian säilymislaki

Puhekielessä sanotaan, että "liikunta kuluttaa energiaa". Tästä voi saada sellaisen käsityksen, että lihasten toiminta vaatii energiota ja että samalla tämä energiaa katoaa. Tämä ei kuitenkaan ole totta. Esimerkiksi ruokaan sitoutunut kemiallinen energia on molekyylien rakenteeseen varastoitunutta energiota. Liikuntasuorituksen aikana aineenvaihduntaan kuuluvat prosessit muuttavat kehoon varastoituneiden molekyylien rakennetta, jolloin niihin varastoitunut kemiallinen energia muuttuu. Liikuntasuorituksen aikana paljon energiota varastotivia molekyyjejä pilkotaan, jolloin niihin varastoituneen energian määärä pienenee. Energiaa siis "kuluu" liikuntasuorituksen aikana siinä mielessä, että kemiallinen energiavarasto hupenee.

Kemiallisten energiavarastojen kuluttamisella on kuitenkin myös muita vaikutuksia. Lihakset supistuvat, ja tällä tavalla niihen omistaja voi työntää itsensä tai muut kappaleet liukkeeseen. Lisäksi lihakset lämpenevät liikuntasuorituksen aikana. Herääkin siis kysymys, voisiko liukkeeseen ja lämpöön liittyä myös jonkinlaista energiota, ja voiko näitä erilaisia energian muotoja mitata samalla mittarilla (samalla yksiköllä). Osoittautuu, että vastaus on *kyllä*. Vaikka nämä ilmiöt ovat näennäisesti aivan erilaisia, niitä kaikkia voidaan mitata suurella nimeltä energia, jonka SI-yksikön nimaksi on annettu **joule** (James Joulen mukaan) ja symboliksi J.

Osoittautuu myös, että kun määrittelemme kemiallisen energian ja liike- sekä lämpöenergian mittarit sopivasti, lihasten toiminta lisää lämpö- ja liike-energiaa *täsmälleen yhtä paljon* kuin ne kuluttavat kemiallista energiota. Tässä mielessä lihakset eivät siis todellisuudessa *kuluta* energiota lainkaan vaan ne vain *muuttavat* energiota muodosta toiseen.

Tässä ei vielä sinänsä ole mitään ihmeellistä. Tietenkin saamme tuottua lihaksilla sitä enemmän liikettä ja lämpöä mitä enemmän ruokaa voimme käyttää. Ei siis ole mitenkään ihmeellistä, että voimme määritellä lihasten toimintaa kuvaavan suureen, joka kertoo paljonko liikettä ja lämpöä tietyllä ruokamäärellä saadaan aikaan. Erityiseksi tämän suureen tekee se, että *täsmälleen sama mittari toimii kaikissa muissakin prosesseissa*. Jos meillä on liikkuva kappale, jolla on liike-energiaa, ja vaikkapa pudotamme sen veteen, veden ja kappaleen lämpöenergia lisääntyy täsmälleen yhtä paljon kuin niiden liike-energia vähentyy. Jos poltamme ruoan, muutamme siihen varastoituneen kemiallisen energian suoraan lämpöenergiaksi, ja tällöin lämpöenergian määärä lisääntyy yhtä paljon kuin kemiallisen energian määärä vähentyy.

Vielä tärkeämpää on se, että tämä periaate on voitu yleistää kaikkiin muihinkin ilmiöihin. Voimme nimittäin lämmittää kappaletta myös esimerkiksi valaisemalla sitä kirkkaalla valolla. Tällöin kappaleen lämpöenergia kasvaa ilman, että sen kemiallinen energia tai liike-energia muuttuisi. Tällöin voimme kuitenkin määritellä uuden energian muodon, säteilyenergian (sillä valo on säteilyjä), jolloin lämpöenergian lisääntymisen voi selittää säteilyenergian vähentemisellä. Sähköjohtokin lämpenee, kun siinä kulkee sähkövirta. Tämän voimme selittää määrittelemällä sähkövirran kuljettaman sähköisen energian, jolloin johdon lämpeneminen selittyy sillä, että osa sen läpi kulkevan sähkövirran kuljettamasta sähköisestä energiasta muuttuu lämpöenergiaksi. Ja jos sähkövirta kulkee lampun läpi, lamppu lämpenee ja lähettilä valoa niin, että lampun lämpöenergian kasvu ja sen lähetämän säteilyenergian määärä on täsmälleen yhtä suuri kuin sähkövirran kuljettaman sähköenergian menetys lampussa. Aina, kun energiota on näytänyt katoavan tai syntyvänt itsestään, on löydetty jokin uusi energian muoto, joka on selittänyt havaitut muutokset. Vaikka energian eri muodot voivat lisääntyä ja vähentyä, ei tunneta ilmiöitä, joissa kaikkien eri energian muotojen summa eli **kokonaisenergia**

$$E_{\text{kokonais}} = E_{\text{liike}} + E_{\text{kemia}} + E_{\text{lämpö}} + E_{\text{säteily}} + E_{\text{sähkö}} + \dots \quad (2.7)$$

muuttuisi. *Systeemin* kokonaisenergia voi toki muuttua, sillä energiota voi siirtyä systeemiin ja sen ympäristöön välillä, mutta *systeemin ja sen ympäristön* yhteenlasketun kokonaisenergian täytyy olla aina vakio,

$$\Delta E_{\text{kokonais}} = 0. \quad (2.8)$$

Tämä tulos on **energian säilymislaki**. Se on kaiken fysiikan tärkeimpä periaatteita, jonka mukaan *energia ei voi luoda eikä hävitää*. Energian säilyminen on alunperin päättely kokeellisesti, mutta nykyisin sillä on myös vankka teoreettinen perusta.

- 2.3 (a)** Jos yhdessä hampurilaisessa on kemiallista energiota 2000 kJ, paljonko energiota kahdessa samanlaisessa hampurilaisessa on?
- (b) Jos yksi lamppu tarvitsee 5 J sähköenergiaa sekunnissa, paljonko kaksi samanlaista lamppua tarvitsee?
- (c) Perustele näiden kysymysten perusteella, onko energia ekstensiivinen vai intensiivinen suure.
- (d) Miten energian ekstensiivisyys tai intensiivisyys liittyy siihen, että energia on säilyvä suure?

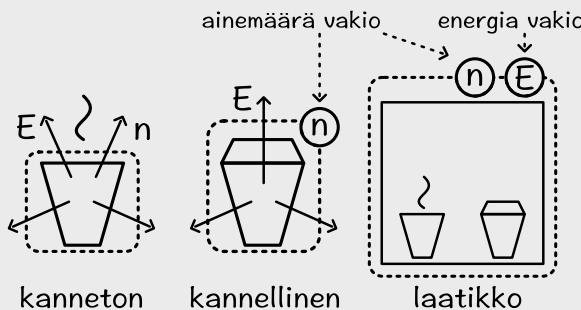
Energian säilymislaki on tärkeä useastakin syystä. Ensinnäkin energia on kaikkia fysiikan osa-aluetta yhdistävä fundamentali suure. Toiseksi energian säilyminen rajoittaa voimakkaasti sitä, mitä voi tapahtua. Jos käytettävissä on polttoainemääriä, johon on varastoitu 1000 kJ energiota, sillä ei voi kiidytä kulkuneuvoa nopeuteen, jossa liike-energia olisi tätä suurempi. Myös ikiliukkujat, jotka liikkuisivat ikuisesti ja joita voitaisiin samalla käyttää hyväksi jotenkin, ovat energian säilymisen vuoksi mahdottomia. Jos nimittäin systeemi kasvattaa ympäristönsä energiota, systeemin energian täytyy vähentyä. Kolmanneksi energian säilymislain avulla voidaan sopivasti valituissa systeemeissä päättää täsmälleen, miten systeemi käyttää energiota.

## esimerkki 2.4

## Systeemin valinta

Eristetyssä laatikossa on kaksi mukillista kuumaa vettä. Toinen mukeista on kannellinen pahvimuki, toinen kanneton. Millaisin tavan voidaan rajata systeemiksi? Onko systeemin ainemäärä tai kokonaisenergia vakioita?

**TILANNE** Laatikkoon kuuluu nyt kaksi mukia, niiden sisältämät vedet, ilma sekä laatikko itse. Mikä tahansa näiden yhdistelmä voidaan valita systeemiksi. Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta.



**SUUNNITELMA** Valitaan systeemiksi kanneton muki sekä sen sisältämä tilavuus. Tilavuus ei itsessään ole mikään kappale, mutta tällä tarkoitetaan systeemiin sisältävän kaiken sen aineen, joka kulloinkin on mukin sisällä. Koska vesi on kuumaa, siihen on varastoitunut lämpöenergiaa. Vesi kuitenkin jäähtyy, jolloin ilmeisesti sen sisältämän energian määärä pienenee,

$$\Delta E_{\text{systeemi}} = \Delta E_{\text{vesi}} + \Delta E_{\text{muki}} < 0. \quad (2.9)$$

Systeemin *kokonaisenergia siis ei ole vakio*. Koska mukissa ei ole kantta, kuumaa vettä muuttuu myös kaasuksi ja poistuu mukista kaiken aikaa ja niinpä mukin sisältämän nestemäisen veden määriä vähenee. Tilalle tulee ilmaa, mutta tarvitaan huomattavasti pienempi määriä ilmaa korvaamaan poistunut neste. Siispä tässä systeemissä myöskään *ainemäärä ei ole vakio*.

Valitaan systeemiksi sitten kannellinen muki sekä sen sisältö eli kuuma vesi. Koska mukissa on kansi, ei sieltä pääse pois vettä eikä ilmaa, joten systeemin sisältämä *ainemäärä on vakio*. Muistutukseksi tästä voidaan tilanteesta piirrettyyn kuvan merkitä systeemin rajojen yhteyteen merkintä  $n$  osoittamaan ainemäären olevan systeemissä vakio. Kuten kannettoman mukin tapauksessa, nytkin mukissa oleva vesi jäähtyy, sillä lämpöä pääsee virtaamaan mukin seinämien läpi ympäröivään ilmaan ja siis systeemin sisältämä *kokonaisenergia ei ole vakio*.

Tarkastellaan vielä systeemiä, johon kuuluu koko laatikon sisältö ja laatikko itse. Kun kuuma vesi mukeissa jäähtyy, sen energiota siirtyy laatikon sisältämän ilman ja laatikon itsensä lämpöenergiaksi. Jos laatikko on hyvin eristetty, lämpöenergia ei kuitenkaan pääse siirtymään laatikon ulkopuolelle. Tällöin veden sisältämä energiamäärä pienenee täsmälleen yhtä paljon kuin ilman ja laatikon sisältämä energia lisääntyy ja systeemin *kokonaisenergia on vakio*

$$\Delta E_{\text{systeemi}} = \Delta E_{\text{vesi}} + \Delta E_{\text{mukit}} + \Delta E_{\text{ilma}} + \Delta E_{\text{laatikko}} = 0. \quad (2.10)$$

Koska laatikko on tiivis, sieltä ei pääse ilmaa ulos ja myös systeemin *ainemäärä on vakio*.

Esimerkissä 2.4 tarkastellaan mahdollisia tapoja rajata systeemi ja systeemin kokonaisenergian huomataan joissakin tapauksissa olevan vakio ja toisissa ei. Jos systeemin ja sen ympäristön välillä voi siirtyä energiota ja ainetta, systeemiä kutsutaan **avoimeksi**. Esimerkissä 2.4 tällainen systeemi oli kanneton muki. Jos systeemistä ei voi siirtyä ainetta ympäristöön mutta energiota voi, systeemiä kutsutaan **suljetuksi**. Esimerkissä tällainen systeemi oli kannellinen muki. Systeemi, joka ei voi vaihtaa ainetta eikä energiota ympäristönsä kanssa, on **eristetty** systeemi, ja tällainen oli esimerkin eristetty laatikko.

Jos systeemi on eristetty, se ei voi saada energiota ympäristöstään eikä myöskään menettää sitä. Koska energian säilymislain mukaan energiota ei voi luoda eikä hävittää, energian kokonaismäären systeemissä on tällöin oltava vakio. Näin saadaan yleisen energian säilymislain erikoistapaus: **eristetyn systeemin kokonaisenergia on vakio kaikissa prosesseissa**,

$$\Delta E_{\text{eristetty}} = 0. \quad (2.11)$$

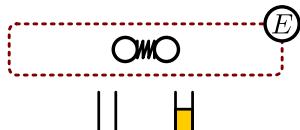


**2.4** Laihduttaminen on mahdollista liikkumalla paljon. Valitaan systeemiksi ihminen. Selitä, miten liikunta voi johtaa systeemin energian ja atomien määärän muuttumiseen.

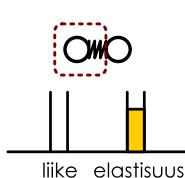
Eristetyn systeemin käyttäytyminen voidaan usein ennustaa varsin tarkasti pitämällä kirja energian eri muodoista, koska niiden summa ei muudu. Tätä kirjanpitotekniikkaa kutsutaan **energiaperiaatteeksi**. Jos nimittäin osaamme laskea systeemin kokonaisenergian määren yhdellä ajan hetkellä, tiedämme varmasti kokonaisenergian olevan *sama minä* tahansa muunakin aikana riippumatta siitä mitä systeemissä täsmälleen tapahtuu. Erityisesti jos systeemissä vain muutamat energian muodot muuttuvat, voidaan yhden energian lajin muutokset päättää tarkastelemalla *muiden* energian muotojen käyttäytymistä. On hyvin tavallista, että

Kuva 2.3: Energiadiagrammeja erilaisille systeemeille. Kuvissa (a) ja (b) kahden kappaleen välin puristettu jousi työntää kappaleet liukkeelle. Kuvissa (c) ja (d) ihmisen työntää laatikkoja.

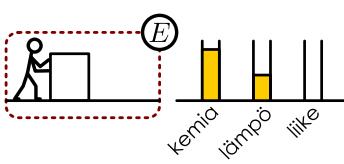
(a) Kokoon puristettuun jouseen varastoitunut elastinen energia muuttuu kappaleiden liikkeen energiaksi.



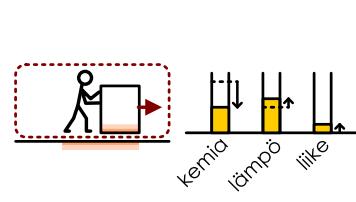
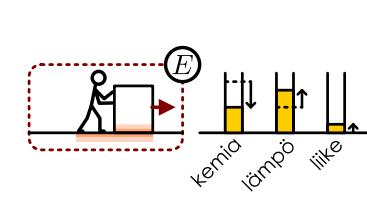
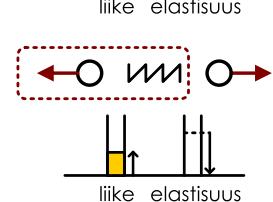
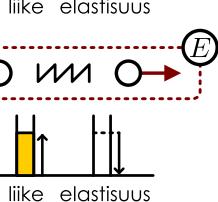
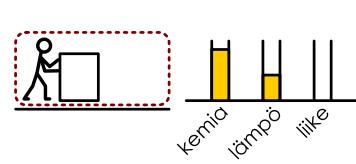
(b) Osa energiasta siirtyy toiselle kappaleelle, systeemin ulkopuolelle.



(c) Ihmisen varastoitunut kemiallinen energia muuttuu ihmisen ja kappaleen liikkeen ja lämmön energiaksi.



(d) Osa lämmöstä siirtyy maahan, systeemin ulkopuolelle.



joidenkin energian muotojen määrä on helppo määrittää kun taas toisiin muotoihin varastoitunut energia on vaikea mitata tai laskea. Tällöin voidaan päättää näiden hankalampienkin muotojen sisältämä energia tutkimalla helpommin havaittavia energian lajeja.

Tällaisissa tilanteissa **energiadiagrammi** on hyvä tapa havainnollistaa energian muotojen muutokset. Energiadiagrammi on graafinen esitys, jossa systeemin kokonaisenergian jakautuminen eri muotoihin esitetään esimerkiksi pylväskuvaajana. Tällaisen kuvallisen esityksen avulla on helpompi muistaa huomioida kaikki systeemissä ilmenevät energian muodot ja ennen kaikkea niiden avulla voi suoraan nähdä miten energian eri muodot muuttuvat.

Kuvassa 2.3 on esitetty tällaisia energiadiagrammeja erilaisille systeemeille. Ensimmäisessä esimerkissä jousi on puristettu kahden kappaleen väliin. Jousen puristamiseen (muodon muutokseen) liittyvä elastista energiaa, joka muuttuu kappaleiden liikkeen energiaksi päästettäessä jousi oikenemaan. Jos nämä kappaleet eivät vuorovaikuta muiden kappaleiden kanssa, energiota ei voi muuttaa miinhän muuhun muotoon ja systeemin kokonaisenergian täytyy olla vakio. Tällöin kappaleiden yhteen lasketun liike-energian on lopuksi oltava yhtä suuri kuin jouseen varastoitunut energia oli aluksi. Tämä ilmenee energiadiagrammissa siten, että jousen elastinen energia vähenee täsmälleen yhtä paljon kuin liike-energia kasvaa.

Edellinen tarkastelu onnistui siksi, että tarkastelimme eristettyä systeemiä. Systeemin valintahan on mieleväistä, joten samaa tilannetta voitaisiin tarkastella myös systeeminä, johon kuuluu ainoastaan yksi kappaleesta sekä jousi. Tällöin toinen kappale on osa ympäristöä. Tämä on aivan kelvollinen systeemin valinta, mutta koska jousi vuorovaikuttaa molempien kappaleiden kanssa, systeemin ja ympäristön välillä on nyt vuorovaikutus. Kummankin kappaleen nopeus muuttuu jousen vapautuessa, jolloin ympäristön kokonaisenergia muuttuu. Osa alunperin jouseen sitoutuneesta energiasta siis siirtyy systeemistä ympäristöön eikä systeemin kokonaisenergia ole nyt vakio.

Kolmannessa kuvassa on esitetty tilanne, jossa joku työntää lattialla olevan suuren laatikon liukkeelle. Tässä prosessissa työntäjä kuluttaa varastoimaansa kemiallista energiota lihastensa liikkumiseksi. Laatikko lähtee liukkeelle, jolloin sen liikkeen energia kasvaa. Samalla huomataan myös työntäjän, laatikon sekä lattian lämpenevän, mihin liittyy lämpöenergiaa. Kun kaikki liikkuvat ja lämpenevät kappaleet ovat mukana tarkasteltavassa systeemissä, ympäristöön jää ainoastaan asioita, joihin laatikon työntäminen ei vaikuta mitenkään. Energiaa ei siis siirry systeemistä ympäristöön ja systeemin kokonaisenergia on vakio. Prosessissa muuttuu toiseen kolme energian muotoa — liike-energia, lämpöenergia sekä kemiallinen energia — mutta näiden summa pysyy samana. Diagrammissa tämä ilmenee niihin, että kemiallinen energia vähenee yhtä paljon kuin lämpöön ja liukkeeseen liittyvät energiat yhteensä lisääntyvät.

Jos energiaperiaatetta käytetään, on aina oltava huolellinen systeemin valinnassa ja tarkistettava, että valitussa systeemissä energia on todella vakio. Jos nimittäin äskeisessä esimerkissä vaikkapa lattia jähetään systeemin ulkopuolelle, lattian lämmöksi muuttuva energia ei enää kuuluaan systeemiin eli systeemin kokonaisenergia pienenee vaikka systeemistä ja ympäristön yhteenlaskettu energia ei muutukaan.



2.5 Muovailuvahapallo heitetään seinään, johon se tarttuu kiinni. Kun pallo vielä liikkui ennen seinää osumista, sen liukkeeseen liittyi energiaa. Onko systeemin kokonaisenergia vakio, jos systeemi on (a) pelkkä vahapallo, (b) pallo ja seinä? (c) Millaisiin muotoihin pallon liikkeen energia saattoi muuttua?

## Liikkeen ja painovoiman energia

Edellä puhuimme energiaperiaatteesta yleisellä tasolla, mutta jotta energiaa voisi todella käyttää fysikaalisten prosessien analyysin työkaluna, meidän täytyy ensin määritellä erilaiset energian muodot täsmällisesti. Erityisesti haluamme laskea systeemien energiasisällön eri tilanteissa. Koska mekaanikassa tutkimme pääasiassa kappaleiden liikettä, keskitymme aluksi kappaleiden nopeuksista, paikoista ja muodoista riippuviin energian muotoihin.

Aloitetaan tutkimalla putoamislükettä, koska kappaleen 1.5 pohjalta osaamme jo analysoida vapaassa putoduksesta olevan kappaleen liikkeen. Erityisesti johdimme yhtälön (1.37) eli  $\Delta(v_x^2) = -2g\Delta x$ , jonka mukaan pystysuorassa vapaassa putoduksesta olevan kappaleen nopeuden neliön muutos  $\Delta(v_x^2)$  on aina verrannollinen kappaleen paikan muutokseen  $\Delta x$  riippumatta siitä, miltä korkeudelta kappale putoaa tai onko kappaleella alkunopeutta. Erityisesti tulos pätee riippumatta siitä, liikuuko kappale ylöspäin, alas päin tai kenties edestakaisin molempin suuntaan liikkeensä aikana.

Koska tutkimme nyt nimenomaan suureiden muutoksia, kerrataan muutamia muutosten laskusääntöjä. Ensinnäkin, jos  $k$  on vakio ja suure  $a$  muuttuu määrään  $\Delta a$  eli  $a_{\text{loppu}} = a_{\text{alku}} + \Delta a$ , tulo  $ka$  saa arvon  $k a_{\text{loppu}} = k(a_{\text{alku}} + \Delta a) = k a_{\text{alku}} + k \Delta a$ . Siispä tulon  $ka$  muutos on

$$\Delta(ka) = k a_{\text{loppu}} - k a_{\text{alku}} = k \Delta a. \quad (2.12)$$

Vakion ja muuttuvan suureen  $a$  tulon muutos on siis yhtä suuri kuin vakion ja  $a$ :n muutoksen tulo.

Samoin jos kaksi suuretta  $a$  ja  $b$  muuttuvat, niiden summa saa arvon  $a_{\text{loppu}} + b_{\text{loppu}} = a_{\text{alku}} + \Delta a + b_{\text{alku}} + \Delta b$ , ja näin ollen suureiden summan muutos on yhtä suuri kuin niiden muutosten summa,

$$\Delta(a + b) = (a_{\text{loppu}} + b_{\text{loppu}}) - (a_{\text{alku}} + b_{\text{alku}}) = \Delta a + \Delta b. \quad (2.13)$$

Käytäen näitä laskusääntöjä yhtälö (1.37) voidaan putoamislükeneen tapauksessa (kun putoaminen tapahtuu tyhjiössä tai kappaleen vuorovaikutusta sitä ympäröivän ilman kanssa ei huomioida) kirjoittaa muotoon

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2\right) = -\Delta(gx) \quad (2.14)$$

ja edelleen siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2 + gx\right) = 0, \quad (2.15)$$

mikä siis tarkoittaa sitä, että nopeuden neliön ja kappaleen paikkakoordinaatin summa, kertoimien  $1/2$  ja  $g$  kanssa, on *vakio*.

Näin johdettuna tulos voi vaikuttaa vain matemaattiselta tempulta, mutta se antaa meille viheen paljon syvällisemästä fysikaalisesta yhteydestä, joten pohditaan tulosta tarkemmin. Ensinnäkin tulos yhdistää kappaleen vauhdin ja sen korkeuden niin, että syntyy vakiona pysyvä lauseke. Toisaalta jos valitsemme systeemiksi putoavan kappaleen ja maapallon, tämä systeemi sisältää kaiken, mikä putoamisessa muuttuu (kappaleen nopeus ja sen etäisyys maasta). Putoaminen on siis prosessi, joka vaikuttaa vain valitun systeemin sisällä, ja niinpä energian säilymislain perusteella tämän systeemin kokonaisenergian täytyy myös olla vakiona pysyvä lauseke. Ehkä siis yhtälössä 2.15 esiintyvä lauseke liittyy systeemin kokonaisenergiaan!

Yhtälön ensimmäinen termi riippuu vain kappaleen nopeudesta, ja se on sitä suurempi, mitä nopeammin kappale liikkuu. Tämän termin voisi siis tulkita liittyvän kappaleen liikkeen energian. Yhtälön toinen termi puolestaan riippuu putoamiskiertyvyydestä ja kappaleen korkeudesta. Putoamiskiertyvyys on painovoiman ominaisuus, joten ilmeisesti tämä termi kuvaaa jotenkin *painovoimaan varastoituva energia*.

Yhtälössä (2.15) esiintyvä lauseke ei kuitenkaan voi kuvata systeemin energiota täsmälleen vaan se on ainoastaan siihen verrannollinen lauseke. Nopeus ja paikkakoordinaatti ovat nimitään *intensiivisiä* suureita, joten lausekkeen kuvaama suure on myös intensiivinen. Lausekkeen arvohan ei riipu mitenkään siitä, koostuuko tarkasteltava systeemi vaikkapa hiekanjyvästä vai kivenlohkareesta.

Energia on kuitenkin *ekstensiivinen* suure kuten kaikki säilyvät suuret. Jos meillä olisi esimerkiksi kaksi samanlaista, samalla nopeudella liikkuvaa kappaletta, niillä pitäisi olla kaksinkertainen energia yhteen kappaleeseen verrattuna. Samoin arkikokemuksesta tiedämme, että on raskaampaa nostaa monta kappaletta kuin vain yksi, koska kaksi kappaletta ovat yhdessä *painavammat* kuin yksi. Niinpä myös painovoiman energian täytyy riippua siitä, paljonko ainetta on. Yhtälöstä (2.15) puuttuu siis jokin kappaleen kokoon ja määrään liittyvä tekijä, joka kertoo tarkasteltavan aineen määrä. Tämä tekijä on kappaleen **massa**. Massa on SI-järjestelmän perussuure, jonka yksikkö on **kilogramma (kg)**.

Massalla on fysiikassa kaksi toisistaan täysin poikkeavaa roolia. Ensinnäkin massiiviset kappaleet ovat *painavia*, mikä tarkoittaa karkeasti ilmaisten sitä, että niiden nostaminen *ylöspäin* on vaikeaa. Arkikielessä yleensä puhutaankin kappaleen painosta, kun tarkoitetaan sen massaa. Toisaalta massiiviset kappaleet ovat

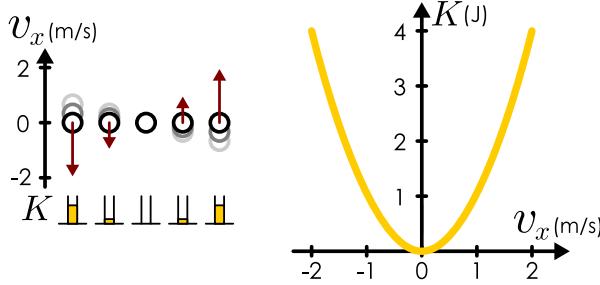
hitaita, mikä tarkoittaa karkeasti sitä, että suuren nopeuden antaminen kappaleelle on vaikeaa *mihin tahansa suuntaan*. Jälkimmäistä ominaisuutta eli massan hitautta kutsutaan fysiikassa **inertiaksi**. Nämä voivat vaikuttaa samankaltaisilta asioilta mutta niillä on täysin erilainen fysikaalinen merkitys. Nostaminen liittyy kappaleen *paikan muuttamiseen* ja erityisesti kappaleen siirtämiseen poispäin maanpinnasta (eli yhtälössä 2.15 suureen  $x$  muutokseen). Nostaminen on vaikeaa, koska maa ja kappale vuorovaikuttavat *painovoiman* eli **gravitaation** kautta, ja kappaleen siirtäminen poispäin varastoi energiaa gravitaatioluorovaikutukseen. Painava massa kuvailee tämän vuorovaikutukseen voimakkuutta. Kappaleen liikkeelle saaminen puolestaan liittyy *nopeuden muuttamiseen* (eli yhtälössä 2.15 suureen  $v_x$  muutokseen), mikä on aivan yhtä vaikeaa vaikka kappale olisi tyhjässä avaruudessa kaukana Maapallosta. Nykytietämyksen mukaan *inertia* ja painava massa ovat kuitenkin täsmälleen samat kaikilla hiukkasilla ja kappaleilla.



**2.6** Jos otat käteesi esimerkiksi kuulantyönnössä käytettävän painavan kuulan ja työnnät sen liikkeelle (a) suoraan vaakasuoraan tai (b) suoraan ylös, mikä massan ominaisuus pääasiassa rajoittaa nopeutta, jonka pystyt kuulalle antamaan?

Kuva 2.4: Liike-energia.

(a) Eri nopeudella liikkuvat kappaleet. (b) Liike-energia nopeuden funktiona.



Kappaleen liikkeeseen liittyy energiaa, joka riippuu kappaleen inertialta, sillä mitä suurempi on kappaleen inertia, sitä enemmän energiaa tarvitaan, jotta kappale saataisiin kiihdytettyä johonkin nopeuteen  $v_x$ . Niinpä kappaleen, jonka inertia on  $m$ , **liike-energia** eli **kineettinen energia**  $K$  on yhtälön (2.15) ensimmäinen termi kerrottuna kappaleen massalla  $m$ ,

$$E_{\text{liike}} = K = \frac{1}{2}mv_x^2. \quad (2.16)$$

Tästä yhtälöstä voimme yksikkötarkastelulla myös määrittää energian yksikön joulen Si-järjestelmän perusyksiköiden avulla lausuttuna,

$$J = [K] = [m][v_x^2] = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2. \quad (2.17)$$

Kertomalla koko yhtälö (2.15) kappaleen massalla saadaan siis varsinainen putoavan kappaleen energian säilymislaki

$$\Delta \left( \frac{1}{2}mv_x^2 + mgx \right) = 0. \quad (2.18)$$

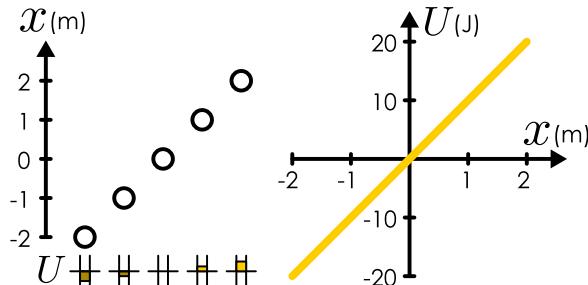
Yhtälön jälkimmäinen termi on kappaleen ja maan välisen painovoiman varastoima energia, jota kutsutaan fysiikassa **potentiaalienergiaksi** ja merkitään tavallisesti symbolilla  $U$

$$E_{\text{potentiaali}} = U = mgx. \quad (2.19)$$

Nimitys viittaa siihen, että tällä varastoidulla energialla voidaan esimerkiksi saada kappale liikkeelle — sillä on siis "potentiaalia" saada prosesseja tapahtumaan. Yhtälössä (2.19) massa ilmaisee sitä, että painavan kappaleen nostaminen vaatii paljon energiaa.

Kuva 2.5: Painovoiman potentiaalienergia.

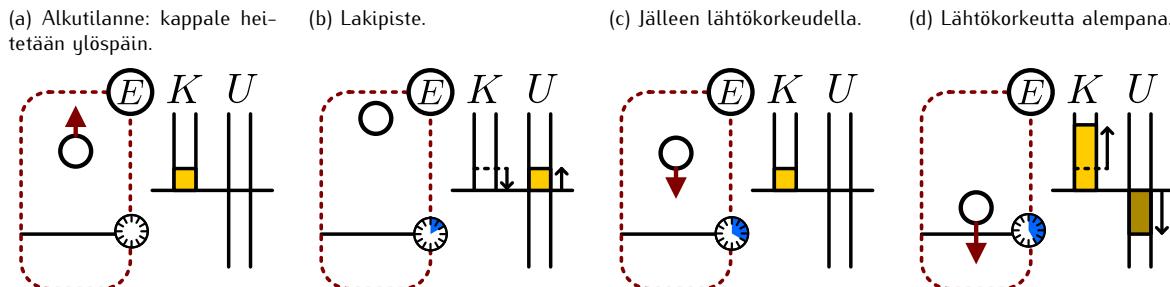
(a) Eri korkeudella olevat kappaleet. (b) Potentiaalienergia paikan funktiona.



Kuvassa 2.6 on esitetty jo aiemmin luvussa 1.5 analysoitu pystysuora heitto energiadigrammein. Heitetyn kappaleen sekä Maan sisältävän systeemin kokonaisenergia on heiton aikana vakio, sillä liike-energia on kappaleen liikkeen ominaisuus ja painovoiman potentiaalienergia on maan ja kappaleen vuorovaikutuksen varstoimaa energiaa. Nämä kuuluvat systeemiin, jossa ovat sekä kappale että maa.

Liike-energia riippuu kappaleen nopeuden neliöstä, joten se ei voi koskaan olla negatiivinen. Erityisesti *liike-energian etumerkki ei riipu nopeuden suunnasta kuten nopeuden skalaarikomponentti*. Potentiaalienergia puolestaan riippuu kappaleen koordinaatista pystysuunnassa. Koordinaatti kuitenkin mitataan

Kuva 2.6: Energiadiagrammi pystysuoralle heitolle.



aina jonkin küntopisteen suhteen, ja tämä küntopiste voidaan valita periaatteessa minne tahansa. Potentiaalienergia saa kohdassa  $x = 0 \text{ m}$  arvon nolla, joten küntopisteen valinta kiinnittää myös potentiaalienergian nollatasoon, ja tämän alapuolella *potentiaalienergia on negatiivinen*. Potentiaalienergian absoluuttisella arvolla ei olekaan mitään fysikaalista merkitystä, vaan ainoastaan potentiaalienergian *muutokset* ovat merkityksellisiä. Heittoliukkeen tapauksessa potentiaalienergian nollataso voidaan valita esimerkiksi kappaleen lähtöpisteeseen, mutta tämä ei ole ainoa mahdollinen valinta.

Jos potentiaalienergian nollakohdaksi valitaan kappaleen lähtöpiste, ylöspäin heitettylä kappaleella on aluksi liike-energia  $K = \frac{1}{2}mv_x^2$  eikä lainkaan potentiaalienergiaa. Ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergia kasvaa ja liike-energia pienenee niin, että kokonaisenergia on koko ajan vakio. Koska liike-energia ei voi saada negatiivisia arvoja, kappale pääsee täsmälleen niin korkealle, että kaikki sen alkuperäinen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi, jolloin sen nopeus on nolla. Tämän jälkeen kappale putoaa jälleen alas päin ja päästää takaisin lähtökorkeudelleen sen potentiaalienergia on jälleen nolla ja sen liike-energia on sama kuin alkuperäinen. Kappaleen vauhtikin on siis tällöin yhtä suuri kuin heiton alussa.

Kappaleen jatkaessa putoamistaan lähtötasona alapuolelle sen potentiaalienergia pienenee edelleen saaden nyt *negatiivisia* arvoja. Tässä ei ole mitään ihmeeillistä, sillä potentiaalienergian nollakohta riippui koordinaatiston origon valinnasta. Potentiaalienergian negatiiviset arvot eivät siten tarkoita fysikaalisesti sen enempää kuin paikkakoordinaatin negatiiviset arvot: ne ainoastaan kertovat siitä, että kappale on nyt liikkunut valitusta origosta negatiiviseen suuntaan. Oleellista on se, että liike-energia aina kasvaa täsmälleen yhtä paljon kuin potentiaalienergia pienenee. Kappaleen liikkeessä liike-energian kasvu ilmenee kappaleen nopeuden kasvamisenä. Kuitenkin koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, kappaleen nopeus kasvaa *hitaammin* kuin liike-energia.



**2.7** Miten kuvan 2.6 heittoliukkeen (i) energiadiagrammi ja (ii) pallon rata muuttuvat, jos

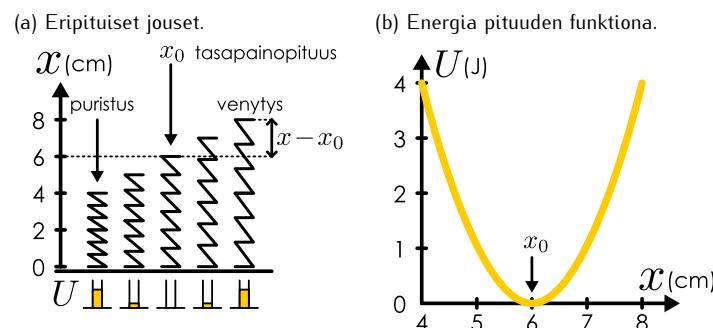
- pallon alkuopeus on kaksinkertainen,
- potentiaalienergian nollakohta valitaan heiton lakipisteeseen?
- vuorovaikutus ilman kanssa muuttaa osan pallon liike-energiasta lämpöenergiaksi heiton aikana?

## Elastinen energia

Kappaleen muodon muuttaminen on myös energioiden vaativa prosessi, ja toisaalta esimerkiksi puristetun jousen avulla voi laukaista kappaleen liikkeelle. Siispä mistä ilmeisimmin jousi tai mikä tahansa muu sopivasti taipuisa kappale kykee varastoimaan energiota muuttamalla muotoaan. Tälläista itsestään palautuvaa tai-puissutta kutsutaan fysiikassa **elastisuudeksi** ja jouseen varastoitunut energia on **elastista potentiaalienergiaa**. Kunhan jouta ei venytetä liikaa, *ideaalinen jousi* varastoikin kaiken sen puristamiseen tai venyttämiseen tarvitun energian ja voi vapauttaa sen takaisin liike-energiaksi.

Jos jouta ei puristeta eikä venytetä, se on niin sanotussa *lepopituudessaan*. Koska jousi ei tällöin pyri itsestään muuttamaan pituuttaan, tästä kutsutaan myös jousen *tasapainopituudeksi*. Jouta voidaan yleensä sekä puristaa lyhyemmäksi että venytää pidemmäksi, ja molemmat muutokset vaativat energiota, joten

Kuva 2.7: Elastinen potentiaalienergia.



jousen potentiaalienergia on *pienimmillään* jousen ollessa lepopituudessaan. Tästä syystä jousen potentiaalienergian nollakohdaksi yleensä valitaankin juuri jousen lepopituus. Itse asiassa ideaalisen jousen pituuden muuttaminen vaatii *yhtä paljon* energiota kuin kyseessä puristus tai venytys. Mitä enemmän jousen pituutta muutetaan, sitä enemmän energiota tarvitaan, eikä kyseessä itse asiassa ole edes suora verrannollisuus vaan suurien venymien aikaansaaminen on tavallisesti huomattavasti vaikeampaa kuin pienet.

Todellisen jousen potentiaalienergia voi riippua jousen pituudesta monimutkaisellakin tavalla. Kuitenkin yksinkertaisin matemaattinen funktio, jolla on edellä kuvatut elastisen potentiaalienergian ominaisuudet, on toisen asteen polynomi eli paraabeli. Niinpä jousten ja muidenkin elastisten kappaleiden varastoimaa potentiaalienergiaa kuvataan yleensä tällä yksinkertaisella mallilla,

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \quad (2.20)$$

jota kutsutaan myös *harmoniseksi potentiaalienergiaksi*. Tässä  $k$  on jousen jäykkyyttä kuvaava **jousivakio**,  $x$  on jousen pituus ja  $x_0$  sen lepopituus. Etäisyys  $x - x_0$  on siis jousen normaalista pituudesta mitattu venymä. Sen positiivinen arvo kuvailee jouksen venymistä pidemmäksi ja negatiivinen arvo puristumista lyhyemmäksi. Funktio  $U$  on nolla, kun venymä on nolla, ja se saa yhä suurempia positiivisia arvoja, kun jouta joko puristetaan tai venytetään. Tämä tarkoittaa jousen varastoivan yhä enemmän energiota mitä enemmän sitä puristetaan tai venytetään, kuten kuvasta 2.7 nähdään. Mitä suurempi jousivakio  $k$  on, sitä enemmän energiota jousen pituuden muuttaminen vaatii eli sitä *jäykempi* jousi on.



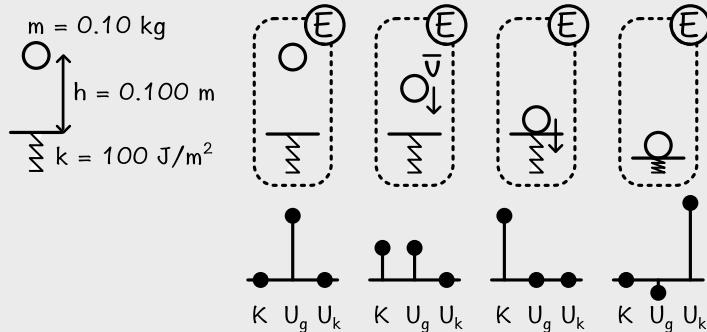
**2.8** Kirjoita omiin sanoin tüvistelmä siitä, miten kappaleen liike- ja potentiaalienergia (painovoima sekä elastisuus) voidaan laskea. Selitä myös, mikä on energiadiagrammi sekä miten esimerkiksi kappaleen nopeus voidaan ratkaista energiadiagrammin ja energiaperiaatteen avulla.

### esimerkki 2.5

### Gravitaation ja jousen energia

**Kappale pudotetaan levosta korkeudelta 0.100 m pystysuoran jousen päälle. Jousen jousivakio on 100 J/m<sup>2</sup> ja kappaleen massa 0.10 kg. Kuinka paljon jousi enimmillään puristuu?**

**TILANNE** Valitaan systeemiksi kappale, jousi ja Maa. Tällöin systeemin kokonaisenergia koostuu kappaleen liike-energiasta, painovoiman potentiaalienergiasta sekä jousen potentiaalienergiasta. Asetetaan vielä gravitaation potentiaalienergian nollakohta korkeudelle, jolla kappale juuri koskettaa joustaa. Püreätään putoamisesta energiadiagrammi helpottamaan kirjanpitoa eri energian muotojen muutoksille.



**SUUNNITELMA** Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Tällöin, koska ainoastaan kappale ja jousi liikkuvat putoamisen aikana, valitun systeemin kokonaisenergia on vakio eli liike-energian ja potentiaalienergian summa on lopussa, jousen puristettua sama kuin alussa, kappaleen lähiessä liikkeelle.

Aluksi kappale on paikoillaan, joten sillä on vain potentiaalienergiaa. Pudotuksen aikana osa potentiaalienergiasta muuttuu liike-energiaksi. Kun kappale putoaa jouseen päälle, jousi puristuu varastoiden kappaleen liike-energiaa potentiaalienergiaksi. Lopulta kappale pysähtyy ja jousi heittää kappaleen jälleen ylöspäin. Jousen maksimaalinen puristuma saavutetaan kappaleen pysähtyessä, ennen kuin jousi alkaa jälleen nostaa kappaleta ylöspäin. Kappaleen ollessa paikoillaan sen liike-energia on jälleen nolla, joten gravitaation ja jousen potentiaalienergoiden summan täytyy olla sama kuin liikkeen alussa. Erityisesti kappaleella on lopuksi hiukan negatiivista gravitaation potentiaalienergiaa, joten jousen potentiaalienergia on suurempi kuin kokonaisenergia oli alussa.

Kappaleen liike-energia on

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.21)$$

missä  $v$  on kappaleen nopeus. Kappaleen pudotessa sen gravitaatiopotentiaalienergia on

$$U_{\text{gravitaatio}} = mgx, \quad (2.22)$$

missä  $x$  on jousen yläpäästä mitattu pystysuora etäisyys. Jousi puristuu vasta kappaleen kohdateissa sen, joten jousen potentiaalienergia on

$$U_{\text{jousi}} = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

## SÄILYMSLAIT

Kappaleella on ennen pudotusta ainoastaan gravaation potentiaalienergia  $E_{\text{alku}} = mgh$ , missä  $h$  on kappaleen lähtöpisteen koordinaatti eli pudotuskorkeus. Energian säilymislaki saa näin ollen muodon

$$K + U_{\text{graviaatio}} + U_{\text{jousi}} = E_{\text{alku}} = mgh. \quad (2.24)$$

Kun jousi on puristunut ja kappale on jälleen pysähtynyt, kappaleen paikkakoordinaatti on negatiivinen,  $x < 0$ , ja tämä on myös jousen venymä, koska origoksi valittiin jousen tasapainoasema. (Eli jousen puristuma on  $-x > 0$ .) Kokonaisenergian säilyminen saa yhtälönä muodon

$$mgx + \frac{1}{2}kx^2 = mgh \quad (2.25)$$

huomioiden että liike-energia on nolla,  $K = 0$ , kun kappale on ratansa alimmassa pisteessä. Tästä voidaan ratkaista paikka  $x$ .

**RATKAISU** Kyseessä on toisen asteen yhtälö muuttujan  $x$  suhteeseen, jonka ratkaisut ovat

$$x = -\frac{gm}{k} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right). \quad (2.26)$$

Koska ratkaisun pitää olla negatiivinen, fysikaalisesti oikea valinta on

$$x = -\frac{gm}{k} \left( 1 + \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right), \quad (2.27)$$

sillä  $\sqrt{2hk/(gm) + 1} > 1$ .

Annetuilla lukuarvoilla kappaleen alimaksi paikaksi saadaan

$$x = -\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.10 \text{ kg}}{100 \text{ J/m}^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0.100 \text{ m} \cdot 100 \text{ J/m}^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.10 \text{ kg}} + 1} \right) = -0.055 \text{ m}. \quad (2.28)$$

Jousen maksimipuristuma on siis  $-x = 5.5 \text{ cm}$ .

```
Mathematica: (* energioiden lausekkeet *)
ualku = m g h;
ugrav = m g x;
ujousi = 1/2 k x^2;

(* ratkaistaan paikkakoordinaatti,
kun potentiaalienergia on sama kuin alussa *)
pohja = Solve[ ugrav + ujousi == ualku, x]
{{x -> (-g m - Sqrt[g m (2 h k + g m)])/k},
 {x -> (-g m + Sqrt[g m (2 h k + g m)])/k}}

(* sijoitetaan lukuarvot *)
pohja /. {g -> 9.8, m -> 0.1, k -> 100, h -> 0.1}
{{x -> -0.0551436}, {x -> 0.0355436}}
```

**ARVIOINTI** Ratkaisun järkevyyttä voidaan arvioida yksikkötarkastelulla:

$$[x] = \frac{[g][m]}{[k]} = \frac{\text{kgm/s}^2}{\text{J/m}^2} = \frac{\text{kgm/s}^2}{\text{kg/s}^2} = \text{m}. \quad (2.29)$$

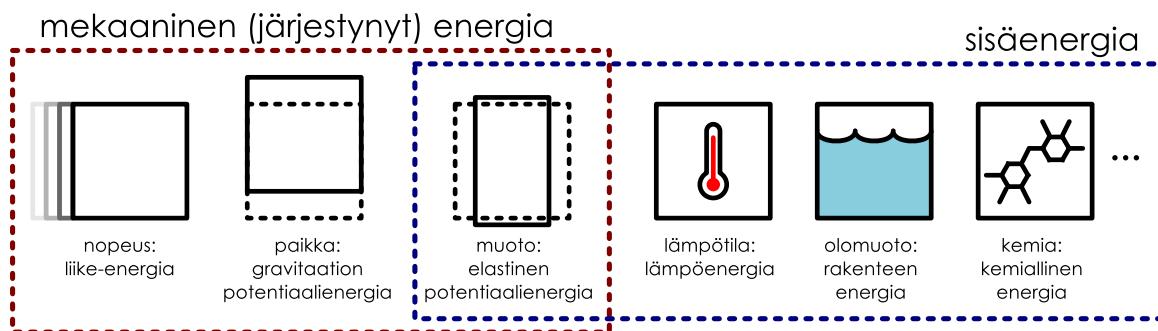
Ratkaisulla on siis pituuden yksikkö kuten pitääkin. Lisäksi nelijuurilausekkeen sisältämän termin  $\frac{2hk}{gm}$  täytyy olla paljas luku, koska se lasketaan yhteen ykkösen kanssa. Sitä se on, koska  $[h][k/(gm)] = \text{m} \cdot 1/\text{m} = 1$ .

Voimme tutkia myös ratkaisuna saadun lausekkeen raja-arvoja. Tarkastellaan tilannetta, jossa jousi on hyvin jäykki ( $k$  on suuri) tai kappale on hyvin kevyt ( $m$  on pieni). Jos jäykän jousen päälle pudotetaan kevyt kappale, jousi puristuu hyvin vähän ja kappale pomppaa välittömästi takaisin ilmaan. Tätä vastaa raja-arvo  $m/k \rightarrow 0$ , joka voidaan laskea kirjoittamalla ratkaisu muotoon

$$x = -\frac{gm}{k} \left( 1 + \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right) = -\frac{gm}{k} - \sqrt{\frac{2hgm}{k} + \frac{g^2m^2}{k^2}} \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

Hyvin jäykki jousi ei siis puristu, kuten pitääkin.

Kuva 2.8: Mekaaninen energia eli liike- ja potentiaalienergia on järjestynyttä energiota. Sisäenergiaa ovat kappaleen tilasta riippuvat energian muodot.



## 2.3 Energian laatu

### Mekaaninen energia ja sisäenergia

Kappaleen nostaminen ylöspäin lisää kappaletta potentiaalienergiaa, joten tämä on yksi mahdollinen tapa *varastoida energiota*. Tätä periaatetta voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi vesivoimalaitoksissa. Varastoimalla vettä esimerkiksi patoaltaaseen voidaan samalla varastoida energiota veden potentiaalienergiaksi. Tarvittaessa vettä voidaan sitten juoksuttaa padossa olevan voimalaitoksen läpi, jolloin veden potentiaalienergia muuttuu ensin veden liike-energiaksi. Liukkuva vesi puolestaan pyörittää generaattoreita, jolloin osa liike-energiasta muuttuu sähköiseksi energiaksi. Sähkon avulla energiota on helppo siirtää edelleen käytettäväksi muihin tarkoituksiin.

Myös elastisiin kappaleisiin voi varastoida energiota puristamalla, venyttämällä tai taivuttamalla niitä. Tätä tekniikkaa on käytetty iät ja ajat esimerkiksi jousipyssyissä, joissa jousta jännitetessä ampujan lihasten kemiallinen energia varastoituu jousen kaaren elastiseen muodonmuutokseen. Jousen vapautuessa tämä elastinen energia muuttuu nuolen liike-energiksi.

Kappaleiden liike-energialla ja edellä kuvatuilla potentiaalienergian eri muodoilla on se yhteinen piirre, että ne voidaan havaita makroskooppisesti. Voimme nähdä suoraan onko pallo korkealla vai matalalla, liikuuko se nopeasti vai hitaasti ja onko se mahdollisesti myös puristunut kasaan. Koska nämä energian muodot liittyvät makroskooppisten kappaleiden paikkaan, nopeuteen ja muotoon, niitä kutsutaan yhteisnimellä **mekaaninen energia**.

Mekaanisella energialla on toinenkin merkittävä erityispitire: mekaanisen energian eri lajit voivat muuttua helposti toisikseen. Esimerkiksi ylöspäin heitetyn pallon liike-energia muuttuu pallon potentiaalienergiksi pallon noustessa, koska pallon vauhti pienenee ja korkeus lisääntyy. Potentiaalienergia puolestaan muuttuu jälleen liike-energiksi pallon laskeutuessa alas päin. Pallon heitolle aikaisemmin päättely energian säilymlaki (2.18) voidaan siis kirjoittaa myös muotoon

$$E_{\text{kokonais}} = E_{\text{liike}} + E_{\text{potentiaali}} = K + U = \text{vakio}. \quad (2.31)$$

Yllä esitetyt periaatteet toimii myös muiden vuorovaikutusten kuin graviation kohdalla, *jos vuorovaikutukset voidaan kuvata potentiaalienergialla* eli funktiolla, joka kuvailee vuorovaikutuksen varastoimaa energiota ja riippuu ainoastaan kappaleiden paikoista, asennoista tai muodoista. Tämä on energian säilymlain tärkeä erikoistapaus: *Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa ainoastaan sellaisia vuorovaikutuksia, joihin liittyy potentiaalienergia, systeemin mekaaninen energia eli liike-energian ja potentiaalienergian summa  $K + U$  on vakio.*



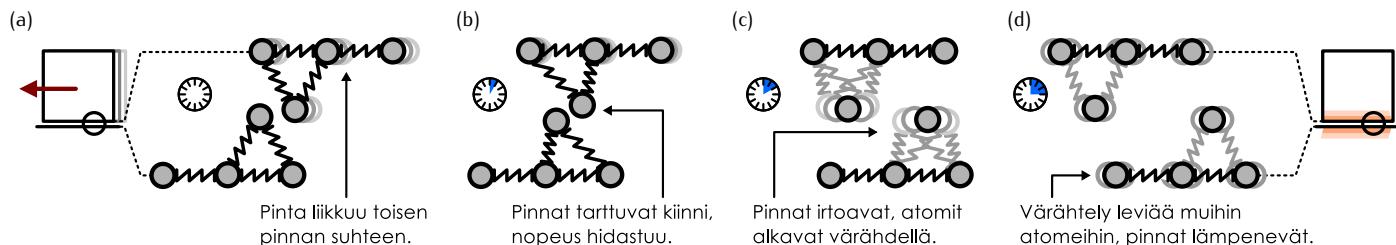
**2.9** Uimahyppääjä hyppää ponnahduslaudalle, ponnistaa tästä hyvin korkealle ilmaan tehdien voltin ja sukeltaa lopulta veteen. Millaisia energian muotojen muutoksia tähän prosessiin liittyy? Jos systeemi on hyppääjä, lauta sekä vesi, missä prosessin vaiheissa systeemin mekaaninen energia on ainakin likimain vakio?

Koska mekaanista energiota on helppo varastoida ja vapauttaa liikkeeksi, sen hyödyntäminen on melko yksinkertaista. Ennen höyrykoneiden keksimistä melkein kaikki laitteet kelloista purjelaivoihin perustuvatkin joko "lihasvoimaan" eli kemialliseen energiassa tai mekaaniseen energiassa. Kaikki energian muodot eivät kuitenkaan muutu vain toisikseen. Jos esimerkiksi muovailuvahasta tehty pallo putoaa lattialle, se pysähtyy lattiaan osuessaan, jolloin pallon liike-energia muuttuu muihin, ei-makaanisiin muotoihin. Seuraavaksi tarkastelemmekin millaisia muita muotoja energialla on ja millaisia ominaisuuksia energian eri muodoilla on.

Aloitimme energian tarkastelun luettelemalla energian muotoja kuten kemiallisen energian ja lämpöenergian. Nämä energian muodot poikkeavat mekaanisesta energiasta siinä, että ne liittyvät ilmiöihin, joita ei voi

## SÄILYMISLAIT

Kuva 2.9: Yksinkertainen malli kitkan toiminnasta kahden liikkuvan kappaleen rajapinnalla. Pallot kuvaavat atomeja ja niiden väliset "jouset" atomisidoksia.



suoraan nähdä. Kemiallinen energia on aineiden kemialliseen koostumukseen eli niiden molekyylien rakenteeseen varastoitunutta energiata. Lämpöenergia on puolestaan aineen kuumuuteen liittyvä energia. Näiden energiamuotojen mittaaminen vaatii siis enemmän tietoa kappaleista kuin vain missä ne ovat ja miten ne liikkuvat. Periaatteessa systeemin kaikkien energiamuotojen määrittäminen vaatisi sitä, että tunnemme systeemin kaikki ominaisudet mukaan lukien niiden sisäisestä rakenteesta riippuvat näkymättömät ominaisudet. Fysiikassa tälläista systeemin täydellistä kuvausta kutsutaan **tilaksi**. Toisin sanoen tilan käsite sisältää paikan ja nopeuden lisäksi *kaikki* systeemin fysikaaliset ominaisudet kuten kappaleiden muodon, kemiallisen koostumuksen, lämpötilan jne. Monet energian muodot liittyyvät systeemin tilaan, ja energian muutokset voivat ilmetä kappaleiden liikkeen muutosten lisäksi myös niiden tilan muutoksena.

Fysiikassa kappaleen tilaan liittyvä "näkymätöntä" energiata kuten kemiallista energiata ja lämpöenergiata kutsutaan **sisäenergiaksi**. Nimitys viittaa siihen, että tämä energia on "piilossa" kappaleen sisällä. Kappaleen makroskooppiseen liikkeeseen liittyvä liike-energia ei ole sisäenergiata kuten ei ole esimerkiksi painovoiman potentiaalienergiakaan, sillä nämä eivät riipu kappaleen sisäisistä ominaisuuksista. Elastinen energia sen sijaan voidaan laskea sisäenergiaksi, koska kappaleen puristaminen ja venytäminen muuttaa myös atomien keskinäisiä etäisyyskiä aineen sisällä, ja elastinen energia onkin itse asiassa näiden atomien välisen sidosten potentiaalienergiaa.

**2.10** Kappale on aluksi paikoillaan, mutta lähtee liikkeelle. Missä seuraavista tapauksista kappaleen saama liike-energia on peräisin jonkin toisen kappaleen mekaanisesta energiasta ja missä sisäenergiasta? (a) Kappale putoaa. (b) Kappale työnetään käsin liikkeelle. (c) Kappaleeseen törmää toinen kappale. (d) Kappaleen työntää liikkeelle puristunut jousi. (e) Kappaleen vieressä tapahtuu räjähdys.

## Energian epäjärjestyminen

Ota kirja, aseta se pöydälle ja työnnä se liukumaan pitkin pöydän pintaan. Todennäköisesti huomaat kirjan pysähdyvän melko nopeasti. Lükkuvalla kirjalla on aluksi liike-energiaa, mutta koska kirja pysähtyy, sen liike-energian täytyy olla lopuksi nolla. Jos sinulla olisi hyvin tarkka lämpömittari, voisit kuitenkin samalla havaita kirjan ja pöydän pinnan hieman lämpenevän. Kirjan liike-energia siis vähenee, ja pintojen lämpöenergia lisääntyy, joten prosessissa mekaanista liike-energiaa muuttuu kappaleiden lämpöenergiaksi eli sisäenergiaksi.

Tämän ilmiön selittää **kitka**, joka on koskettavien pintojen välinen vuorovaikutus. Kitka aiheutuu siitä, että toisiaan koskettavat pinnat pyrkivät tarttumaan mikroskooppisessa mittakaavassa toisiinsa kiinni (kuva 2.9). Jos kuitenkin kappaleet liikkuvat, nämä heikot sidokset eivät kuitenkaan välttämättä riitä saamaan kappaleita tarttumaan toisiinsa vaan sidokset vain hidastavat pintojen liukumista toistensa suhteesta. Nämä liikkuvien pintojen välillä syntyy jatkuvasti uusia sidoksia ja vanhoja sidoksia rikkoutuu. Tyypillisesti sidokset venyvät ennen rikkoutumistaan, jolloin pintojen rakenteessa tapahtuu pieniä elastisia muutoksia — ts. pinnat voivat venyä tai puristua mikroskooppisella tasolla, mihin varastoituu elastista energiata.

Kun pinnat sitten irtoavat toisistaan, nämä muodonmuutokset pääsevät yhtäkkiä palautumaan kuin jännitetty kuminauha, jonka toinen pää päästetään vapaaksi. Tämän seurauksena pintaan varastoitunut elastinen energia muuttuu pintojen atomien liike-energiaksi, ja atomit alkavat värähdellä. Pinnan atomien töni nopeasti myös muita atomeja liikkeelle ja niin tämä liike-energia alkaa levitä muuallekin kappaleeseen. Lopputen lopuksi suuri osa liukuvan kappaleen liike-energiasta on muuttunut värähtelevien atomien liike-energiaksi, mutta nyt atomit eivät enää liiku kaikki samaan suuntaan kuten aluksi vaan nyt ne värähtelevät satunnaisesti kaikissa suunnissa. Makroskooppisesti tämä ilmenee siten, että kappale pysähtyy ja *lämpenee*.

Ilman läpi kulkevan kappaleeseen kohdistuu samantyyppinen vuorovaikutus. Ilmassa kulkevan kappaleen on työnnettävä ilmaa pois edestään, jolloin kaasun molekyylit saavat kappaleelta liike-energiaa. Molekyylien edelleen törmällessä toisiinsa tämäkin liike-energia jakautuu satunnaisesti suurelle määrelle hiukkasia. Lopputuloksena kappaleen vauhti hidastuu ja ilma sekä kappaleen pinta lämpenevät.

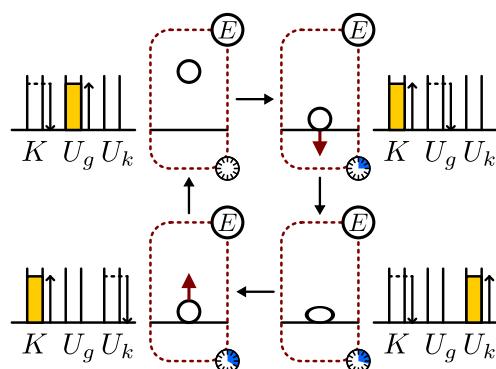


**2.11** Purjelaivoissa liikkuva ilma törmää purjeisiin työntäen laivan liikkeelle. Miten ilmanvastus tässä ilmenee? Millaisia energian muutoksia muodosta toiseen tähän prosessiin liittyy?

Atomien poukkoilu on normaalista täysin satunnaista eikä yksittäisiä atomeja voi havaita ilman huipputeknikkaa. Niinpä atomien *satunnaisen* liikkeen liike-energiaa ei makroskooppisella tasolla nähdä liikkeenä vaan se ilmenee *kuumutena*, joka on kappaleen *tilan* ominaisuus. Mikroskooppisessa mittakaavassa atomit tieteenkin vain liikkuvat tietämättä onko niiden liikkeen energia meidän mieletämme liike-energiaa vai lämpöenergiaa. Makroskooppisessa mittakaavassa liike ja kuumaus ovat kuitenkin täysin erilaisia ilmiöitä. Lämmin kappale voi olla paikoillaan eikä kylmä kappale tunnut lämpimämmältä vaikka se liikkuisi. Tämä ero on seurausta siitä, että atomit liikkuvat eri tavoin *toistensa suhteen*. Kun kappale liikkuu, sen kaikki atomit liikkuvat kollektiivisesti samaan suuntaan. Sen sijaan kuuman kappaleen atomit liikkuvat satunnaistiin. Toisin sanoen liikkuvassa kappaleessa atomien liike on *järjestynyt* kun taas kuumassa kappaleessa liike on *epäjärjestynyt*.

Mekaanisen energian muodot ovat järjestynytä energiota. Kaikki epäjärjestyneet energian muodot ovat sisäenergiaa. Elastinen energia kuten jousien energia on järjestynytä ja se riippuu kappaleen muodosta (siis tilasta), joten elastinen energia voidaan lukea sekä mekaaniseen energiaan että sisäenergiaan. Osoittautuu, että juuri energian järjestyneisyys on keskeinen tekijä, josta riippuu miten energian muodot voivat muuttua toisikseen ja millaiset prosessit ovat mahdollisia, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Kuva 2.10: Energian muutokset elastisen pallon pomppissa.

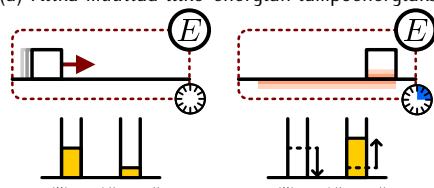


energian muodot ovat kaikki järjestyneitä ja ne voivat vapaasti muuttua toisikseen.

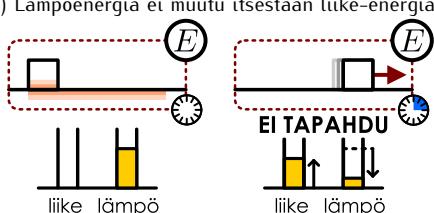
Tarkastellaan toisena esimerkinä jo äsknen tutkimamme pöydällä liukuvaa kirja (kuva 2.11). Kirjan ja pöydän pinnan välillä vaikuttava kitka muuttaa kirjan järjestyneen liike-energian epäjärjestyneeksi lämpöenergiaksi. Kuitenkin kun kirja on paikoillaan, se *ei koskaan* lähde itsestään liikkeelle niin, että sen ja pöydän lämpöenergia muuttuisi kirjan liike-energiaksi. Toisin sanoen *prosessi, jossa kitka pysyytää kirjan, voi tapahtua vain yhteen suuntaan*. Tällästa prosessia kutsutaan fysiikassa **irreversibiliseksi** (engl. 'irreversible', 'kääntämätön'). Vastaavasti prosessia, joka voidaan käänräää ajassa takaperin, kutsutaan **reversibiliseksi**.

Kuva 2.11: Energian muutos kappaleen liukuessa.

(a) Kitka muuttaa liike-energian lämpöenergiaksi.



(b) Lämpöenergia ei muudu itsestään liike-energiaksi.



Tarkastellaan kuvan 2.10 ideaalista elastista pomppia kumpipalloa. Pallon osuessa maahan se painuu hetkeksi kasaan, jolloin sen liike-energia varastoituu muodonmuutokseen liittyväksi elastiseksi potentiaalienergiaksi. Tämä potentiaalienergia palautuu pallon liike-energiaksi pallon palattessa takaisin alkuperäiseen muotoonsa, jolloin pallo pomppaa takaisin ylös yhtä suurella nopeudella kuin millä se osui lattiaan. Tämän jälkeen pallon liike-energia varastoituu pallon noustessa graviitaation potentiaalienergiaksi kunnes muuttuu jälleen pallon pudottessa takaisin liike-energiaksi. Jos pallo olisi täysin elastinen ja koe suoritettaisiin tyhjiössä niin ettei ilmanvastuskaan hidasta pallon liikkettä, pallo jatkaisi pomppimistään lopputonni liike-energian muuttuessa vuoroin elastiseksi ja vuoroin graviitaation potentiaalienergiaksi. Nämä mekaanisen

Irreversibiliteit prosessit voi tunnistaa kuvittelemalla prosessin tapahtuvan takaperin tai videoimalla prosessin ja katsomalla videon lopusta alkuun. Jos takaperin tapahtuva prosessi näyttää mahdottomalta, prosessi on irreversibilisti. Liukuvan kirjan pysähtyminen, näyttää takaperin siltä, että paikoillaan ollut kirja vain yhtäkkiä lähee liikkeelle lattian samalla viilentyessä, mitä ei todellisuudessa voi tapahtua. Sen sijaan video pomppivasta pallosta, jonka jokainen pomppu on yhtä korkea, näyttää täsmälleen samanlaiselta myös takaperin esitettyä. Prosessit, joissa mekaanisen energian muodot muuttuvat toisikseen, ovat yleensä reversiibeileitä ainakin jos prosessiin osallistuvien kappaleiden määrä on pieni. Epäjärjestyneen energian muotoja sisältävät prosessit ovat puolestaan tavallisesti irreversiibeileitä.

Koska makroskooppisella tasolla ei voida koskaan täysin välttää esimerkiksi kitkaa, täysin reversiibeileitä prosesseja on todellisuudessa olemassa vain atomien mittakaavassa. Niinpä järjestyneen energian muodot muuttuvat jatkuvasti epäjärjestyneiksi. Myös epäjärjestynyt energia voi muuttua takaisin järjes-

tyneeksi. Esimerkiksi räjähdyksessä kemiallinen energia muuttuu ensin lämpöenergiaksi ja sitten osa tästä lämpöenergiasta muuttuu edelleen kappaleiden liike-energiaksi. Tällä on kuitenkin rajoituksensa eikä *kaik-*

## SÄILYMISLAIT

Kea epäjärjestynyt energiaa voi koskaan palauttaa järjestyneeksi. Tässä mielessä epäjärjestynyt energia on järjestynyt energiaa huonompaa.

Epäjärjestyneen sisäenergian mittaaminen on usein vaikeampaa kuin mekaanisen energian, minkä vuoksi mekaanikassa usein prosesseja pidetään likimain reversiibeleinä — ts. vuorovaikutukset kuten kitka ja ilmanvastus jätetään usein huomioimatta — sillä tällöin mekaaninen energia on likimain vakio. Näin voi kuitenkin tehdä vain, jos esimerkiksi kitka on paljon heikompi kuin muut systeemissä vaikuttavat vuorovaikutukset. Luvussa 3 palaamme tarkastelemaan, kuinka energian muutoksia yhdestä muodosta toiseen voidaan tarkemmin analysoida. Lämpöenergian ominaisuuksia ja hyödyntämistä kuvaavaan *termodynamiikkaan* tutustumme luvussa 9.



**2.12** Mitkä seuraavista prosesseista ovat reversiibeit? (a) Kappale liukuu tasaisella nopeudella alas kaltevaa tasoa. (b) Kappale putoaa tyhjiössä. (c) Ruoka jäähtyy. (d) Täysin elastinen pallo törmää toiseen samanlaiseen palloon. (e) Täysin elastinen pallo törmää kymmenen samanlaisen pallon kasaan.

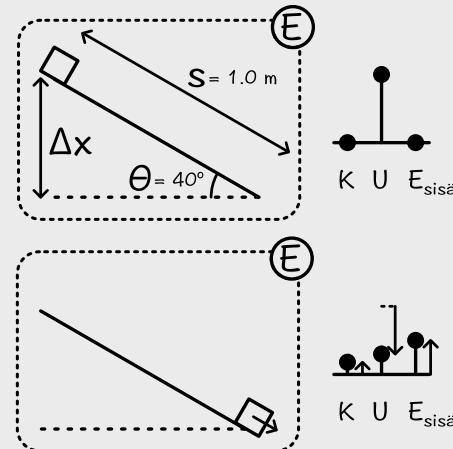
### esimerkki 2.6

### Dissipatiivinen vuorovaikutus

**Kappale (massa 0.350 kg) lähtee levosta liukumaan alas kaltevaa tasoa. Kuljettaan yhden metrin, kappale on saavuttanut nopeuden 1.5 m/s. Tason kaltevuuskulma vaakatasoon nähdyn on  $40^\circ$ . Kuinka paljon energiota on kulunut kappaleen ja sen ympäristön lämmittämiseen?**

**TILANNE** Valitaan systeemiksi kappale ja maan painovoimakenttä. Piirretään systeemin kuva ja prosessia kuvava energiadiagrammi. Merkitään kappaleen kulkuessa matkaa  $s = 1.0 \text{ m}$  ja tason kaltevuuskulmaa  $\theta = 40^\circ$ . Kappaleen massa on  $m = 0.350 \text{ kg}$  ja sen saama nopeus  $v_{\text{loppu}} = 1.5 \text{ m/s}$ .

**SUUNNITELMA** Systeemin potentiaalienergia pienenee ja liike-energia kasvaa kappaleen liikkuessa alaspäin. Kappaleeseen vaikuttavat dissipatiiviset vuorovaikutukset, kitka ja ilmanvastus, kuitenkin muuttavat samalla liike-energiaa lämpöenergiaksi. Systeemin kokonaisen energia ei ole vakio, mutta energian säilymislain perusteella systeemistä hävinneen mekaanisen energian täytyy muuttua muihin energian muotoihin, pääasiassa lämpöenergiaksi.



Kappale siirtyy pystysuoran etäisyyden  $\Delta x = -s \sin \theta$  ja sen potentiaalienergia pienenee tällöin määränpäin

$$\Delta U = mg\Delta x = -mgs \sin \theta. \quad (2.32)$$

Kappaleen liike-energia puolestaan kasvaa määränpäin

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\Delta(v^2) = \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2. \quad (2.33)$$

Lämmöksi muuttuu energia  $\Delta E_{\text{sisä}} = -\Delta E_{\text{mekaaninen}} = -\Delta U - \Delta K$ .

**RATKAISU** Lämmöksi muuttuu energiamäärä

$$\Delta E_{\text{sisä}} = mgs \sin \theta - \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2, \quad (2.34)$$

ja lukuarvojen sijoitus antaa tulokseksi  $\Delta E_{\text{sisä}} = 1.8 \text{ J}$ .

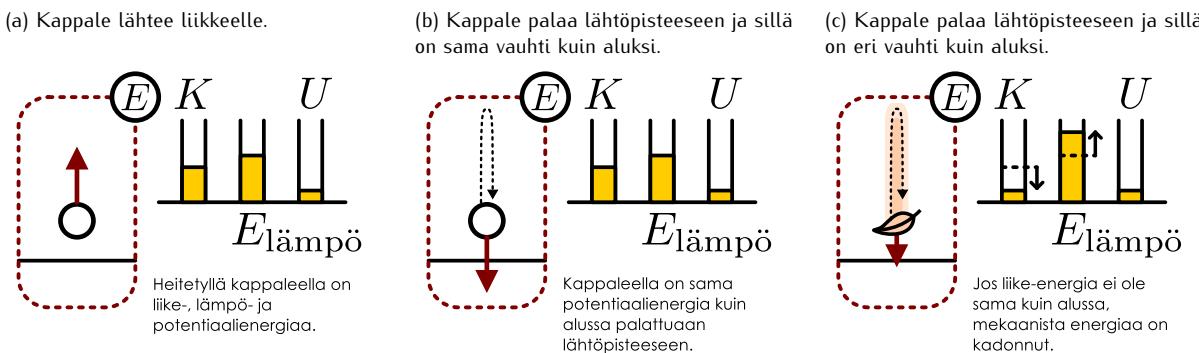
**ARVIOINTI** Tarkasteltaan, että ratkaisulla on energian yksikkö.

$$[\Delta E_{\text{sisä}}] = [mgs] + [mv^2] = \text{kg m/s}^2 \cdot \text{m} + \text{kgm}^2/\text{s}^2 = \text{J}. \quad (2.35)$$



**2.13** Selitä omin sanoin käsitteet järjestynyt ja epäjärjestynyt energia sekä sisäenergia. Selitä myös millaisia rajoituksia energian eri muotojen muutoksiin liittyy, ja miksi tästä seuraa se, että jotkin prosessit eivät voi tapahtua takaperin.

Kuva 2.12: Konservatiiviset ja dissipatiiviset vuorovaikutukset voi tunnistaa tarkastelemalla kappaleen liikettä suljettua reittiä pitkin.



## Konservatiivisuus

Painovoimaa ja elastisia vuorovaikutuksia, joihin liittyy potentiaalienergia, kutsutaan **konservatiivisiksi** vuorovaikutuksiksi, koska ne säilyttävät (engl. ‘conserve’) järjestyneen eli mekaanisen energian. Järjestynyt energiasta epäjärjestyneeksi muuttavat vuorovaikutukset kuten kitka ovat puolestaan **dissipatiivisia**, koska ne hukkaavat (engl. ‘dissipate’) mekaanista energiota. Konservatiivisilla vuorovaikutuksilla on fysikkassa erityisen tärkeä asema juuri siksi, että ne eivät muuta energian järjestyneisyyttä. Tutkitaan siis vielä, millaisia ominaisuuksia konservatiivisilla vuorovaikutuksilla on.

Tarkastellaan prosessia, jossa kappale liikkuu ja palaa lopuksi takaisin lähtöpisteesensä. Tämä tapahtuu esimerkiksi heitetäessä pallo suoraan ylöspäin, mutta periaatteessa kappale voi kulkea millaisen reitin tahtansa, kunhan se lopuksi päätyy takaisin lähtöpaikkaansa. Tällaista reittiä kutsutaan **suljetuksi**, koska reittiä pitkin pääretty viiva muodostaa suljetun silmukan.

Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, joita kuvaa *ainoastaan paikasta riippuva potentiaalienergia*, tämän potentiaalienergian on oltava suljetun reitin lopussa *sama* kuin alussa,  $U_{\text{loppu}} = U_{\text{alku}}$ , koska kappale palaa suljetulla reitillä lopuksi *samaan* pisteeseen kuin mistä lähti. Tämä nähdään kuvissa 2.12 (a) ja (b). Mekaanisen energian säilymisen perusteella kokonaisenergia ei muutu,  $K_{\text{loppu}} + U_{\text{loppu}} = \text{vakio} = K_{\text{alku}} + U_{\text{alku}}$ , joten myös kappaleen *liike-energian* ja siis vauhdin on oltava lopuksi sama kuin aluksi.

Päättelyn voi myös käydä ympäri. Jos on olemassa reitti, jota pitkin kulkien kappale voi palata takaisin lähtöpisteesensä niin, että sen vauhti *ei ole lopuksi sama kuin aluksi*, kappaleen liike-energian ja potentiaalienergian summa *ei ole aluksi sama kuin lopuksi*,  $K_{\text{loppu}} + U_{\text{loppu}} \neq K_{\text{alku}} + U_{\text{alku}}$ . Tällaisessa tapauksessa mekaanisen energian on täytynyt muuttua johonkin toiseen muotoon ja systeemissä täytyy vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Näin käy ylöspäin heitettylle kappaleelle, kun ilmanvastuksen liikettä hidastava vaiketus huomioidaan. Kuvassa 2.12 on tästä esitetty esimerkkinä höyhen, joka suurellakin alkuperäisellä ylöspäin heitettyä leijailee lopulta alas hyvin hitaasti. Prosessissa osa höyhenen alkuperäisestä mekaanisesta energiasta muuttuu heiton aikana ilman liikkeen energiaksi ja lopulta lämpöenergiaksi.



**2.14** Jos potentiaalienergia riippuu paikan lisäksi kappaleen muodosta, onko kappaleen potentiaalienergian muutos välittämättä nolla, jos kappale kulkee suljetun reitin? Jos ei ole, mitä muuta pitää vaatia?

## 2.4 Liikemäärä

Edellä opimme, että kappaleen liikkeeseen sitoutuneen energian määrä riippuu sekä kappaleen massasta että kappaleen vauhdista. Tämän näkee konkreettisesti esimerkiksi kolareissa. Massiivinen ja nopeasti liikkuva auto tekee törmätessään enemmän tuhoa kuin kevyt tai hidaskoska suurella autolla on ennen törmäystä enemmän liike-energiaa.

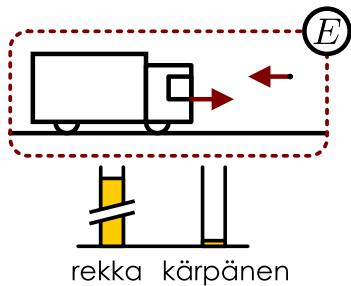
Energia yksinään ei kuitenkaan riitä selittämään, mitä törmäyksissä tapahtuu. Ajatellaanpa tilannetta, jossa rekka ja kärpänen liikkuvat vastakkaisiin suuntiin samalla vauhdilla ja törmäävät (kuva 2.13). Rekan liike ei varmasti muutu törmäyksessä havaittavasti, mutta kärpänen tai mitä siitä jääkään jäljelle jää todennäköisesti kiinni rekkaan. Rekan liike-energia on törmäyksen jälkeen likimain sama kuin ennen törmäystä, koska rekan nopeus ei juuri muutu. Kärpäsen nopeuden suunta vaihtuu, mutta sen vauhti ei muutu, joten kärpäsenkin liike-energia on likimain vakio.

Tuntuu itsestään selvältä, että rekka ja kärpänen eivät voi törmätä niin, että kumpikin kimpoaisi takaisin tulosuuntaansa samalla vauhdilla kuin saapuivat (kuva 2.13 (c)). On nimitäin aivan selvää, että kärpänen ei

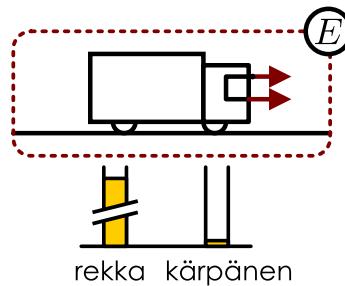
## SÄILYMLAIT

Kuva 2.13: Rekan törmäys kärpäseen. Molemmilla on sama nopeus, mutta massiivisen rekan liike-energia on paljon suurempi.

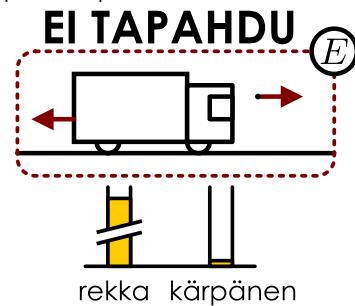
(a) Rekka ja käpänen kohtaavat.



(b) Käpänen jää kiinni rekkaan. Liike-energia on likimain vakio.



(c) Liike-energia olisi vakio myös jos kappaleet kimpoaisivat toisistaan.



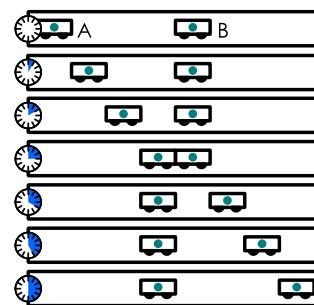
voi muuttaa rekan liikettä. Mutta *miksi?* Energian säilyminen ei tätä selitä, sillä jos rekan liukkeen suunta käänny ympäri mutta vauhti pysyy vakiona, rekan liike-energia ei muudu. Täytyy olla jonkin toinen selitys sille, miksi käpänen ei voi muuttaa rekan liikettä.

## Törmäykset

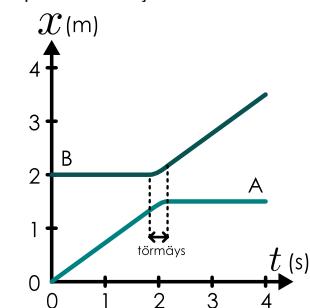
Ymmärtääksemme rekan ja käpäsen törmäyksen tutkimme seuraavaksi kappaleiden törmäyksiä kokeellisesti. Tätä varten hankimme suoran radan ja radalla lähes kitkattomasti liikkuvia vaunuja. Näihin vaunuuihin kohdistuvat dissipatiiviset vuorovaikutukset ovat niin heikot, että vaunujen liike-energia pysyy likimain vakiona ja vaunut siis kulkevat radalla vakionopeudella. Vaunuissa on myös joustavat puskurit, jolloin ne törmättessään kimpovat toisistaan elastisesti niin, että vaunujen muodostaman systeemin mekaaninen energia on likimain vakio. Annamme vaunujen törmätä tällä radalla ja mittaamme vaunujen liikkeen videoimalla. Voimme kokeen jälkeen palata tutkimaan törmäyksestä saatua kuvamateriaalia kuva kvaliteta (kuva 2.14 (a)) ja määritää näin vaunujen paikat tasaisin välajoin. Tämän perusteella voimme piirtää vaunujen paikan kuvajan (kuva 2.14 (b)).

Kuva 2.14: Vaunujen törmäyksen analyysi.

(a) Videoitu liike kuvasarjana.



(b) Tämän perusteella piirretty paikan kuvaja.

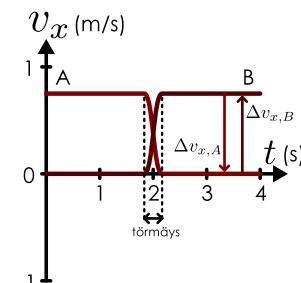


**2.15** Vaunu liikkuu aluksi negatiiviseen  $x$ -suuntaan vauhdilla  $2.0 \text{ m/s}$  ja lopuksi positiiviseen suuntaan vauhdilla  $1.0 \text{ m/s}$ . Mikä on (a) vauhdin muutos, (b) nopeuden muutos? (c) Millainen on vaunun nopeuden kuvaja?

Kun tiedämme kappaleiden paikan ajan funktiona, kappaleen nopeus selviää paikan derivaattana eli paikan kuvaajan tangentin kulmakertoimeksi. Kuvan 2.14 törmäävien vaunujen nopeuden kuvaaja on piirretty kuvaan 2.15. Kumpikin vaunu liikkuu tasaisesti sekä ennen törmäystä että törmäyksen jälkeen, joten nopeuden kuvaajat ovat vaakasuoria. Törmäyksessä vaunujen nopeus muuttuu äkillisesti, ja tämä näkyy nopeuden kuvaajien askelmaisena muodon. Kummankin vaunun nopeuden muutos näkyy nopeuden kuvaajaan piirtyvä askeleen korkeutena niin, että nopeuden muutos positiiviseen suuntaan vastaa kuvassa vasemmalta oikealle nousevaa askelmaa kun taas negatiivinen nopeuden muutos näkyy laskevana portaana. Muista kuitenkin, että positiivinen ja negatiivinen muutos eivät tarkoita vauhdin kasvua ja pienentämistä vaan nopeuden muuttumista positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan.

Kuvien 2.14 ja 2.15 törmäykskokeen alussa vaunu A liikkui ja vaunu B oli paikoillaan. Törmäyksessä vaunu A pysähtyy ja vaunu B saa saman nopeuden mikä vaunulla A aluksi oli. Vaunun A nopeuden kuvaaja siirryttää alas päin, eli vaunun aluksi positiivinen  $x$ -suuntainen nopeus pienenee ja muuttuu itse asiassa nollaksi, jolloin vaunun nopeuden muutos on  $\Delta v_{x,A} = v_{x,A,\text{loppu}} - v_{x,A,\text{alku}} = -v_{x,A,\text{alku}} =$

Kuva 2.15: Vaunujen nopeuden kuvaja.

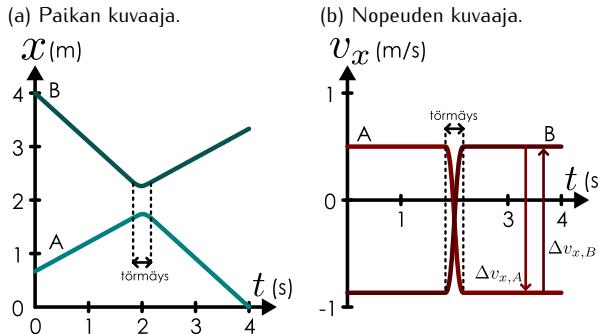


$-0.75 \text{ m/s}$ . Vaunun B kuvaja siirtyy puolestaan ylöspäin, joten vaunun nopeuden muutos on  $x$ -suuntainen,  $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,\text{loppu}} - v_{x,B,\text{alku}} = v_{x,B,\text{loppu}} = 0.75 \text{ m/s}$ . Nopeuksien muutosten suhde on siten

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00 \quad (2.36)$$

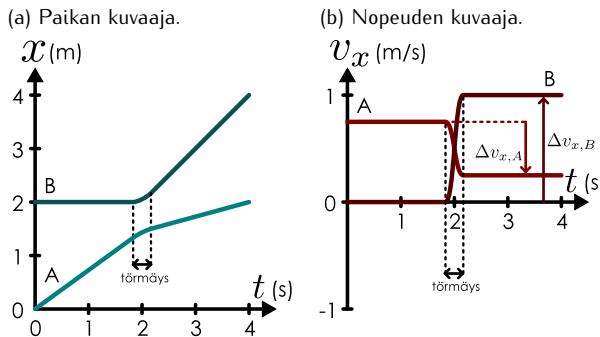
eli nopeudet muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin,  $\Delta v_{x,A} = -\Delta v_{x,B}$ .

Kuva 2.16: Lükkivien vaunujen törmäys.



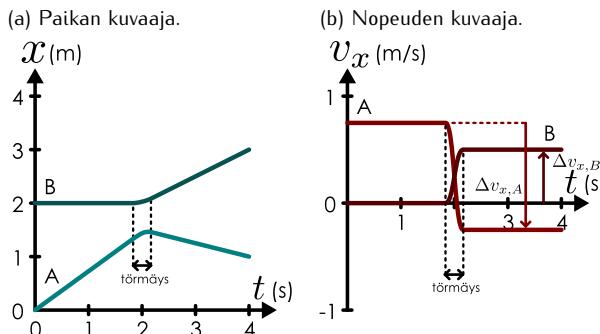
niin, että kiinnitämme vaunuun A toisen samanlaisen vaunun, jolloin vaunu A on käytännössä kooltaan kaksoisvaunuun B nähden. Kuvassa 2.17 nähdään, mitä näiden vaunujen törmäyksessä tapahtuu. Nyt vaunujen nopeuksien kuvaajat eivät enää olekaan symmetriset vaan kevyemmän vaunun B nopeuden muutos on itseisarvoltaan suurempi vaanun A verrattuna.

Kuva 2.17: Törmäys, kun  $m_A = 2m_B$ .



Vaunujen nopeudet muuttuvat siis vastakkaisiin suuntiin, mutta nyt kevyemmän vaunun nopeuden muutos on itseisarvoltaan kaksinkertainen.

Kuva 2.18: Törmäys, kun  $m_B = 2m_A$ .



$v_{x,A,\text{loppu}} = 0.50 \text{ m/s}$ . A:n nopeuden muutos on siis  $\Delta v_{x,A} = -1.00 \text{ m/s}$  (huomaa, että tämä on eri asia kuin A:n vauhdin muutos) ja B:n  $\Delta v_{x,B} = 0.50 \text{ m/s}$ . Nopeuksien muutosten suhde on nyt

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -2.00 \quad (2.38)$$

Toistetaan koe sitten niin, että molemmat kappaleet liikkuvat aluksi, jolloin saamme kuvan 2.16 mukaisen tuloksen. Huomaamme, että nopeuden kuvaaja näyttää täsmälleen samalta kuin kuvassa 2.15 paitsi että kappaleiden alkuperäiset loppunopeudet ovat erilaiset. Koe voidaan toistaa useita kertoja ja riippumatta kappaleiden alkuperäisnopeuksista tulos on sama: kummankin kappaleen nopeus on lopuksi sama kuin toisen kappaleen nopeus oli aluksi. Toisin sanoen kun kaksi *samanlaista* kappaletta törmää elastisesti, niiden nopeudet muuttuvat aina yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin.

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, kun kaksi erikokoista kappaletta törmää. Teemme tämän kuvan 2.16 mukaisen tuloksen. Huomaamme, että nopeuden kuvaaja näyttää täsmälleen samalta kuin kuvassa 2.15 paitsi että kappaleiden alkuperäiset loppunopeudet ovat erilaiset. Koe voidaan toistaa useita kertoja ja riippumatta kappaleiden alkuperäisnopeuksista tulos on sama: kummankin kappaleen nopeus on lopuksi sama kuin toisen kappaleen nopeus oli aluksi. Toisin sanoen kun kaksi *samanlaista* kappaletta törmää elastisesti, niiden nopeudet muuttuvat aina yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin.

Lasketaan täsmällisesti, kuinka paljon nopeudet muuttuvat. Raskaampi vaunu A on aluksi liikkeessä nopeudella  $v_{x,A,\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$ . Tämän vaunun nopeus törmäyksen jälkeen on  $v_{x,A,\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$ . Vaunu siis jatkaa matkaansa törmäyksen jälkeen edelleen positiiviseen  $x$ -suuntaan, mutta sen nopeuden muutos on negatiivinen,  $\Delta v_{x,A} = -0.5 \text{ m/s}$ . Kappale B puolestaan oli aluksi levossa ja se saa törmäyksessä nopeuden  $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,\text{loppu}} = 1.00 \text{ m/s}$ . Kappaleiden nopeuksien muutosten suhde on siis nyt

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -0.50. \quad (2.37)$$

Kokeillaan vielä, mitä tapahtuu päinvastaisessa tapauksessa eli kevyen vaunun törmäyksessä raskaaseen. Tätä varten irrotamme vaunusta A siitäkin äskettäin lättämämme ylimääräisen vaunun ja kiinnitämme tämän lisäkuorman vaunuun B. Nyt siis vaunu A on kooltaan vain puolet vaunusta B. Näiden vaunujen törmäys on esitetty kuvassa 2.18.

Vaunujen alkuperäiset nopeudet ovat samat kuin edellisessä kokeessa,  $v_{x,A,\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,B,\text{alku}} = 0.00 \text{ m/s}$ . Nyt kuitenkin kevyt vaunu A kimpoaa raskaasta vaunusta B takaisin, jolloin A:n loppunopeus on  $v_{x,A,\text{loppu}} = -0.25 \text{ m/s}$ . Raskas vaunu B lähee törmäykseen liukkeelle, mutta se saa vain nopeuden

## SÄILYMSLAIT

eli jälleen vaunujen nopeudet muuttuvat vastakkaisiin suuntiin ja *nopeuksien muutosten suhde on käännekkäinen verrannollinen kappaleiden kokoon tai täsmällisemmin niiden massaan.*

- 2.16** Vaunun A massa on 2 yksikköä ja vaunun B massa 5 yksikköä. Vaunujen nopeudet ovat alkuksi  $v_{x,A} = 3.00 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,B} = 0.20 \text{ m/s}$  ja vaunun A nopeus on lopuksi  $v_{x,A} = -1.00 \text{ m/s}$ . Ennusta, mikä on
- A:n nopeuden muutos,
  - B:n nopeuden muutos,
  - B:n loppunopeus.

Kaikki edellä esitettyt törmäyskokeet tehtiin vaunuilla, joissa oli elastiset puskurit. Tällöin vaunut törmäessään kimpoavat toisistaan ja törmäyksen sanotaan olevan *elastinen* eli *kimmoisa*. Tilanne on samanlainen kuin kuvassa 2.10 esityssä pallon pomppaamisessa. Törmäyksen alussa vaunujen puskurit joustavat, jolloin vaunujen liike-energiaa muuttuu puskureiden elastiseksi potentiaalienergiaksi. Tämä potentiaalienergia kuitenkin palautuu välittömästi vaunujen liike-energiaksi puskureiden palatessa takaisin alkuperäiseen muotoon sa. Koska täysin elastiseen muodonmuutokseen liittyvät vuorovaikutukset ovat konservatiiviset, kappaleiden muodostaman systeemin mekaaninen energia säilyy. Törmäyksen jälkeen puskurit ovat luovuttaneet kaiken potentiaalienergiansa takaisin vaunujen liike-energiaksi, joten *systeemin kokonaislle-energia törmäyksen jälkeen on sama kuin ennen törmäystä*

$$\frac{1}{2}m_A v_{A,\text{alku}}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,\text{alku}}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,\text{loppu}}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,\text{loppu}}^2. \quad (2.39)$$

Jos kuitenkin poistamme vaunuista puskurit ja korvaamme ne esimerkiksi muovailuhallalla, törmäykset eivät ole enää kimmomaisia eikä mekaaninen energia pysy niissä vakiona. Sen sijaan osa vaunujen liike-energiasta muuttuu törmäyksessä dissipatiivisten vuorovaikutusten takia epäjärjestyneeksi energiaksi kuten lämpöenergiaksi. Tälläista törmäystä kutsutaan *epäelastiseksi* eli *kimmottomaksi*. Epäelastisen törmäyksen ääritapauksessa vaunut tarttuvat törmäyksessä kiinni toisiinsa, ja tästä nimitetään *täysin epäelastiseksi* törmäyseksi. Esimerkiksi tennispalloista pyritään tekemään elastisia, jotta ne kimpoaisivat törmäessään maahan. Autojen rungot puolestaan suunnitellaan niin, että ne painuvat törmäyksessä kasaan ja absorboivat näin auton liike-energian, jolloin autot eivät kimpolevaan törmäävät mahdollisimman epäelastisesti.

Kuvassa 2.19 on esitetty vaunujen törmäyskoe, kun kaksi samanlaista vaunua törmää epäelastisesti. Vaunujen alkuunopeudet ovat samat kuin edellisissä kokeissa. Törmäyksen jälkeen vaunu A liikkuu edelleen samaan suuntaan kuin ennen törmäystä, mutta sen vauhti hidastuu niin, että vaunun loppunopeus on  $v_{x,A,\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$ . Vaunu B puolestaan saa nopeuden  $v_{x,B,\text{loppu}} = 0.50 \text{ m/s}$ . Vaunujen nopeuksien muutokset ovat siis  $\Delta v_{x,A} = -0.50 \text{ m/s}$  ja  $\Delta v_{x,B} = 0.50 \text{ m/s}$ , joten vaikka nopeudet muuttuvat vähemmän kuin kuvan 2.16 eläisessä törmäyksessä, muutosten suhde on nytkin

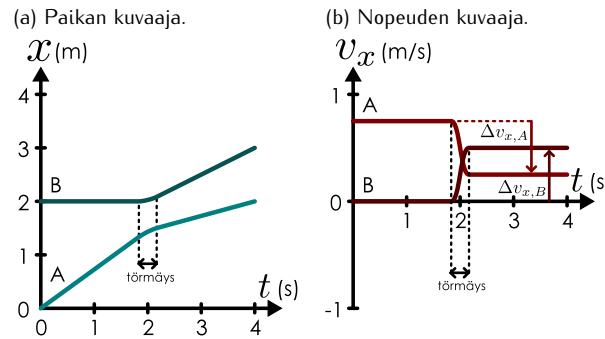
$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.40)$$

Se, mikä kummankin vaunun loppunopeus täsmälle on, riippuu törmäyksen epäelastisuuden asteesta eli siitä, kuinka suuri osuus vaunujen liike-energiasta muuttuu esimerkiksi lämpöenergiaksi tai poistuu systeemistä äänien välityksellä.

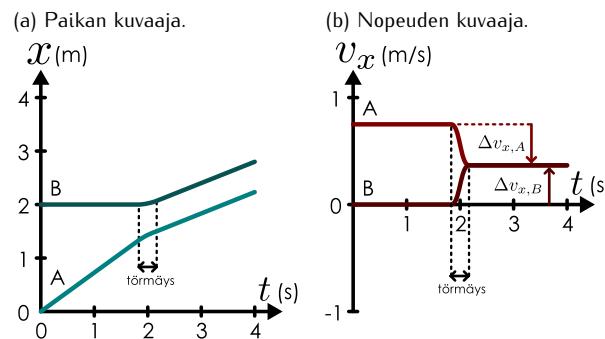
Ääritapaus, jossa vaunut tarttuvat toisiinsa kiinni eli törmäys on täysin epäelastinen, on esitetty kuvassa 2.20. Vaunujen alkuunopeudet ovat jälleen samat, mutta törmäyksen jälkeen kumpikin vaunu liikkuu nyt nopeudella  $v_{x,A,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{loppu}} = 0.375 \text{ m/s}$ . Vaunujen nopeuden muutos on siis  $\Delta v_{x,A} = -0.375 \text{ m/s}$  ja  $\Delta v_{x,B} = 0.375 \text{ m/s}$  eli tässäkin tapauksessa muutosten suhde on

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.41)$$

Kuva 2.19: Epäelastinen törmäys.



Kuva 2.20: Täysin epäelastinen törmäys.



Epäelastisessa törmäyksessä liike-energiaa muuttuu sisäenergiaksi, mutta on myös mahdollista, että sisäenergiaa muuttuu liike-energiaksi. Tämä on epäelastisen törmäyksen vastakohta, jota kutsutaan *räjähäväksi erotuksaksi*. Tällaisessa tilanteessa kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia *kasvaa*. Tästä on esimerkki kuvassa 2.21, jossa kaksi vaunua on aluksi kiinni toisissaan liikkuen samalla nopeudella. Sitten vaunujen välissä puristettu jousi päästetään oikenemaan, ja tämä työntää vaunut toisistaan erilleen. Kyseessä ei ole varsinaisesta räjähdyksistä, mutta systeemi toimii täysin samalla periaatteella kuin räjähävä kappale.

Ainoa ero on se, että tässä tapauksessa jousen potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi kun taas varsinaisissa räjähdyksissä gleensä kemiallinen energia muuttuu lämpö- ja liike-energiaksi.

Vaunujen massat ovat jälleen yhtä suuret. Nyt vaunujen alkunopeus on  $v_{x,A,alku} = v_{x,B,alku} = 0.50 \text{ m/s}$ , ja jousen työnettyä kappaleet erilleen kappaleen A nopeus on  $v_{x,A,loppu} = 0.125 \text{ m/s}$  ja kappaleen B nopeus on  $v_{x,B,loppu} = 0.875 \text{ m/s}$ . Nopeuden muutos on siten  $\Delta v_{x,A} = -0.375 \text{ m/s}$  sekä  $\Delta v_{x,B} = 0.375 \text{ m/s}$ , ja näiden suhde on tässäkin tapauksessa

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.42)$$

Voisimme jatkaa kokeita lopputomiin vaihdellen vaunujen massoja, alkunopeuksia ja niiden välissä olevia puskureita. Kuitenkin kaikissa kokeissa lopputulos on se, että vaunujen nopeudet muuttuvat vastakkaisiin suuntiin ja jos vaunuilla on eri massat, kevyemmän vaunun nopeus muuttuu enemmän. Täsmällisemmin nopeuden muutokset ovat käännekkäin verrannolliset vaunujen massoihin eli ne noudattavat aina sääntöä

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -\frac{m_B}{m_A}. \quad (2.43)$$

Tämä tulos pätee kaikille vaunupareille riippumatta niiden alkunopeuksista, massoista ja siitä, onko vaunujen välinen törmäys elastinen vai ei.



**2.17** Mikä on liike-energian muutos (a) kuvan 2.19 törmäyksessä, (b) kuvan 2.20 törmäyksessä ja (c) kuvan 2.21 erotuksessa, jos kummankin vaunun massa on 1.0 kg?

### Liikemääärän säilymislaki

Palataan nyt tarkastelemaan rekan ja käärpäsen törmäystä. Kokeellisesti havaitun tuloksen (2.43) perusteella kahden suoraan törmäävän kappaleen nopeudet muuttuvat käännekkäin verrannollisesti niiden inertioihin. Eri-tyisesti tämä tulos näyttää pätevän *aina* riippumatta siitä, miten kappaleet liikkuvat ennen törmäystä, mikä kappaleiden massojen suhde on tai onko törmäys elastinen vai epäelastinen. Koska rekan inertia on valtavan suuri, rekan nopeuden muuttaminen on hyvin vaikeaa. Käärpäsen inertia on puolestaan pieni, joten käärpäsen nopeutta on helppo muuttaa, ja näiden törmätessä rekan nopeus ei siis muudu juuri lainkaan mutta käärpäsen muuttuu.



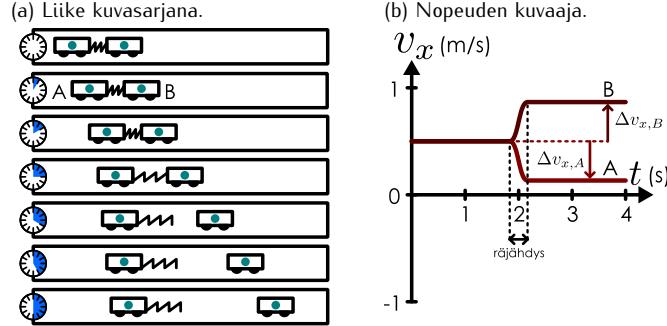
**2.18** Johda yhtälöstä (2.43), että jos rekan massa on paljon suurempi kuin käärpäsen, niin  $\Delta v_{x,rekka} \rightarrow 0$ .

Tässä on kyse pohjimmiltaan siitä, että rekan hidat massa eli inertia on suuri, jolloin rekan nopeuden muuttaminen on vaikeaa. Käärpäsen inertia on puolestaan pieni, joten käärpäsen nopeutta on helppo muuttaa. Liike-energia on jonkinlainen mittari sille, kuinka vaikeaa on kiihyttää paikoillaan oleva kappale liikkeeseen, mutta rekan ja käärpäsen törmäyksessä oli kyse siitä, kumman kappaleen nopeuden *suuntaa* on helpompi muuttaa. Tätä liike-energia ei kuva mitenkään, koska liike-energia riippuu vain nopeuden suuruudesta eikä lainkaan sen suunnasta.

Törmäyskokeiden perusteella kaikissa kahden kappaleen törmäyksissä pätee yhtälö (2.43),  $\Delta v_{x,A}/\Delta v_{x,B} = -m_B/m_A$ , jos kappaleet eivät vuorovaikuta voimakkaasti ympäristönsä kanssa, ja tämä sääntö antaa meille mahdollisuuden määritellä suure, joka huomioi sekä kappaleiden inertian että niiden liikkeen suunnan. Voimme nimittäin kirjoittaa yhtälön myös muotoon

$$m_A \Delta v_{x,A} = -m_B \Delta v_{x,B} \quad (2.44)$$

Kuva 2.21: Räjähävä erotus.



josta saadaan edelleen

$$\Delta(m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}) = 0. \quad (2.45)$$

Tämän perusteella lauseke  $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$  on kahden kappaleen törmäyksessä vakio!



**2.19** Perustele, miksi suure  $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$  on ekstensiivinen. Miksi tämä on tärkeää?

Koska suure  $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$  on ekstensiivinen ja se pysyy vakiona, kyseessä voi olla säilyvä suure. Osoittautuu, että näin juuri onkin. Tätä suuretta kutsutaan kappaleiden A ja B muodostaman systeemin liikemääräksi, ja se koostuu siis kappaleen A liikemääristä  $p_{x,A} = m_A v_{x,A}$  sekä kappaleen B liikemääristä  $p_{x,B} = m_B v_{x,B}$ . Koska nopeus on vektori, liikemääräkin on vektori, ja yleisesti yksittäisen kappaleen liikemääräksi määritellään

$$\bar{p} = m\bar{v}. \quad (2.46)$$

Systeemin kokonaisliikemäärä saadaan puolestaan laskemalla systeemin kaikkien osien liikemäärit yhteen,

$$\bar{p}_{\text{kokonais}} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i. \quad (2.47)$$

Yhdessä ulottuvuudessa tämä yksinkertaistuu muotoon

$$p_{x,\text{kokonais}} = p_{x,1} + p_{x,2} + \dots = \sum_i p_{x,i} = \sum_i m_i v_{x,i}, \quad (2.48)$$

ja tässäkin liikemäärän vektoriluonne ilmenee siinä, että nopeudet  $v_{x,i}$  ovat eri kappaleiden nopeuksien  $x$ -suunnan skalaarikomponentteja. Nopeuden ja liikemäään  $x$ -skalaarikomponentti on negatiivinen, jos kappale liikkuu negatiivisen  $x$ -akselin suuntaan. Nämä ollen systeemin *kokonaisliikemäärä voi olla nolla vaikka sen osat eivät olisi paikoillaan*, jos nämä osat liikkuvat vastakkaisiin suuntiin.



**2.20** Kappale liikkuu positiivisen  $x$ -akselin suuntaan nopeudella 4 m/s. Millä seuraavista on siihen verrattuna sama (i) liike-energia, (ii) liikemääri? (a) Kaksi kappaletta, jotka liikkuvat yhdessä positiiviseen suuntaan nopeudella 2 m/s. (b) Neljä kappaletta, jotka liikkuvat yhdessä positiiviseen suuntaan nopeudella 2 m/s. (c) Kappale, joka liikkuu negatiiviseen suuntaan nopeudella 4 m/s.

Edellä päätelimme kokeellisesti, että kahden kappaleen törmäyksessä kappaleiden kokonaisliikemäärä on vakio. Osoittautuu kuitenkin, että sama tulos pätee kaikissa sellaisissa systeemeissä, jotka eivät vuorovaikuta ympäristönsä kanssa (tai joissa vuorovaikutukset ympäristön kanssa kumoavat toisensa). Toisin sanoen *liikemäärä on säilyvä suure, jota ei voi luoda eikä hävittää*, ja jos systeemiin ei kohdistu vuorovaikutuksia, systeemin kokonaisliikemäärä on vakio,

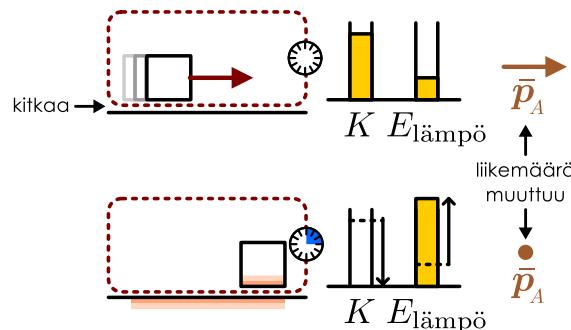
$$\Delta \bar{p}_{\text{kokonais}} = 0. \quad (2.49)$$

Tämä on liikemäään säilymislaki.

Liikemääri on energian jälkeen mekanikan tärkein suure, ja se kuvaaa nimensä mukaisesti systeemin tai kappaleen liikettä. Liikemäään säilyminen tarkoittaa siis sitä, että kappaleiden liike ei muutu ellei jokin ulkoinen vuorovaikutus niitä muuta. On tavallinen väärinkäsitys ajatella, että kappaleet pysähtyvät, jos niiden liikettä ei pidetä yllä. Tämä ajatus on kuitenkin väärä. Ajatus on uskottava, koska arkikokemuksen mukaan kaikki kappaleet pysähtyvät itsestään. Tämä johtuu kuitenkin siitä, että makroskoopisessa mittakaavassa vuorovaikutuksia kuten kitkaa ja ilmanvastusta ei voi koskaan välttää. Kappaleet pysähtyvät siksi, että nämä vuorovaikutukset muuttavat niiden liikemääriä ja liike-energiaa (kuva 2.22).

Kappaleiden liike kuitenkin muuttuu sitä hitaan min, mitä suurempi inertia kappaleella on, ja sitä nopeammin, mitä voimakkaampi vuorovaikutus liikkeen pyrkii pysäyttämään. Esimerkiksi jäällä kitka on hyvin heikko, ja niinpä jääkiekko voi liukua pitkään pysähtymättä. Avaruuden lähes täydellisessä tyhjiössä kappaleet liikkuvat käytännössä ikuisesti tai ainakin siihin asti kunnes törmäävät johonkin. Liikkeen perusominaisuus ei siis olekaan pyrkimys pysähtyä vaan *pyrkimys olla muuttumatta*.

Kuva 2.22: Kitka pysäyttää kappaleen.



Liikeettä ei voi myöskään muuttaa millaisella vuorovaikutuksella tahansa. Tarinoissa sankari saattaa ottaa itseään kirjaimellisesti niskasta kiinni ja vetää itsensä näin pystyyn. Tämä on hassua, koska näin ei tietenkään voi tehdä. Pystyyn voi nousta ottamalla tukea jostakin toisesta kappaleesta kuten maanpinnasta, mutta itseään ei voi vetää pystyyn niskasta nostaan. Samasta syystä lentoon ei voi nousta vetämällä kengänauhoista ylöspäin. Jonkin *toisen* voi toki nostaa näin ilmaan, mutta *ei itseään*.

Samantyyppinen ilmiö tapahtuu jäällä. Normaalisti kävely tai ajaminen on helppoa, koska voimme työntää itsemme liukkeelle maanpinnasta kitkan avulla ponnistaen. Hyvin liukkaalla pinnalla on kitkan puuttuessa kuitenkin vaikea päästää liukkeelle, pysähtyä tai käentyä, koska nämä kaikki toimet vaativat vuorovaikutuksen maanpinnan kanssa. Nämä havainnot osoittavat, että systeemi (tässä siis ihminen tai auto) voi lähteä liukkeelle, pysähtyä tai käentyä vain *vuorovaikuttamalla ympäristönsä* kanssa. Fysiikassa tällaisia systeemien ja sen ympäristön välisiä vuorovaikutuksia kutsutaan systeemin **ulkoisiksi vuorovaikutuksiksi**. Vastaavasti vuorovaikutukset, joiden kaikki osapuolet kuuluvat systeemiin, ovat systeemin **sisäisiä vuorovaikutuksia**.

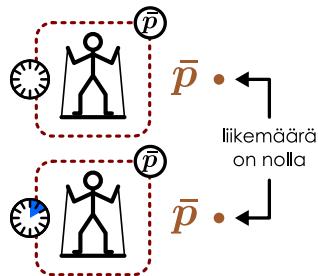
Liikekäärän säilymislain mukaan liukkeen muuttaminen vaatii aina ulkoisia vuorovaikutuksia. Tämä on luonnon perusperiaate, jonka mukaan *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin liikemääriä*. Systeemin sisäiset vuorovaikutukset voivat kyllä saada systeemin osat liukkeelle, mutta aina jos yhden systeemin osan liike muuttuu johonkin tiettyyn suuntaan, muiden osien liukkeen on muututtava vastakkaiseen suuntaan niin, että systeemin liikemääriä kokonaisuutena ei muuto. Sisäiset vuorovaikutukset voivat vaikuttaa systeemin ulkoisiin vuorovaikutuksiin ja sitä kautta ne voivat vaikuttaa systeemin liikkeeseen (esimerkiksi kävellessä lihaksissa vaikuttavat vuorovaikutukset muuttavat kehon asentoa, mikä puolestaan vaikuttaa jalkojen ja maan välistiin vuorovaikutuksiin). Tällöinkin kuitenkin ulkoiset vuorovaikutukset aiheuttavat lopulta systeemin liikemäärään muutokset (kävellessä kävelijää työntää jalan ja maanpinnan välinen kitkavuorovaiketus).



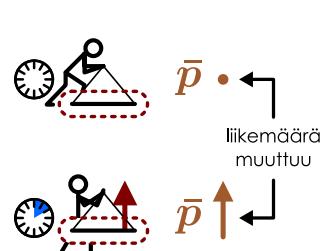
**2.21** Voivatko systeemin sisäiset vuorovaikutukset muuttaa systeemin kokonaisliike-energiaa (eli sen osien liike-energioiden summaa)? Entä systeemin kokonaisenergiaa?

Kuva 2.23: Systeemin liikemäären muuttaminen vaatii ulkoisen vuorovaikutuksen.

(a) Sisäinen vuorovaiketus.



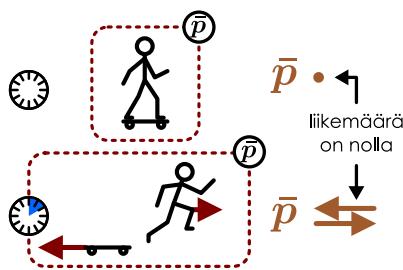
(b) Ulkoinen vuorovaiketus.



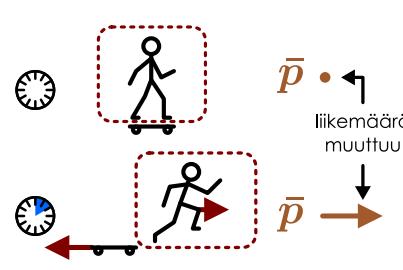
miksi valita pelkästään nostettava kappale. Kappale vuorovaikuttaa nostajan kanssa kosketuksen välityksellä ja maan kanssa painovoiman kautta, ja jos nostava vuorovaiketus on painovoimaa vahvempi, kappale nousee eli sen liike muuttuu. Tässä esimerkissä nostava vuorovaiketus on ulkoinen vuorovaiketus, joten sen on mahdollista muuttaa systeemin liikettä.

Kuva 2.24: Systeemin osien liikettä voi muuttaa sisäisellä vuorovaikutuksella.

(a) Sisäinen vuorovaiketus.



(b) Ulkoinen vuorovaiketus.



voi muuttaa systeemin liikettä kokonaisuudessaan. Systeemin osien liike toki muuttuu laudan ja lautailijan lähiessä liukkeelle. Systeemin kokonaisliikemääriä on kuitenkin lautailijan ja laudan liikemäärien summa, ja tässä tapauksessa lauta saa yhtä suuren mutta vastakkaissuuntaisen liikemäären lautailijaan verrattuna, jolloin kokonaisliikemääriä on hypynkin jälkeen nolla. Tässä mielessä systeemin liike ei siis muudu.

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 2.23. Kuvassa (a) on levy, joka kulmiin on kiinnitetty narut. Henkilö vetää naruista ylöspäin seisoen samalla levyn päällä. Levy ei tällöin tietenkään nouse, ja tämän voi selittää liikemäären säilymislain avulla. Jos nimittäin systeemiksi valitaan nostaja ja levy yhdessä, kaikki nostajan ja levyn väliset vuorovaikutukset ovat systeemin sisäisiä, eivätkä ne siis voi saada systeemiä liukkeelle.

Sen sijaan jos nostaja ei seiso kappaleen päällä kuten kuvassa 2.23 (b), nostaminen onnistuu. Tällöin voidaan systeemistä valita pelkästään nostettava kappale. Kappale vuorovaikuttaa nostajan kanssa kosketuksen välityksellä ja maan kanssa painovoiman kautta, ja jos nostava vuorovaiketus on painovoimaa vahvempi, kappale nousee eli sen liike muuttuu. Tässä esimerkissä nostava vuorovaiketus on ulkoinen vuorovaiketus, joten sen on mahdollista muuttaa systeemin liikettä.

Kuvassa 2.24 tarkastellaan puolestaan rullalautailijaa, joka hyppää pois laudaltaan. Aluksi lauta ja lautailija ovat molemmat paikoillaan. Hypätessään lautailija ponnistaa laudasta, jolloin lautailija lähtee liukkeelle eteenpäin ja lauta taaksepäin. Jos systeemiin sisällytetään sekä lauta että lautailija, ponnistus laudalta on systeemin sisäinen vuorovaiketus, joka ei

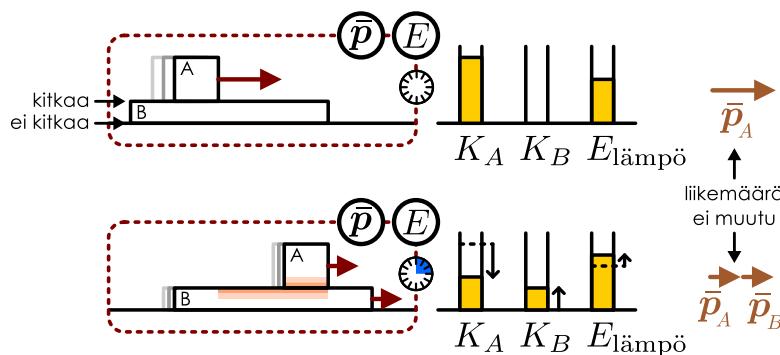
## SÄILYMSLAIT

Aivan yhtä hyvin systeemiksi olisi tässä tilanteessa voitu valita myös pelkkä lautailija kuten kuvassa 2.24 (b). Tällä valinnalla systeemin liikemääriä muuttuu, mutta nyt lautailijan vuorovaikutus laudan kanssa on systeemin *ulkoinen vuorovaikutus*, joten se voi muuttaa systeemin liikemääriä. Lauta on nyt puolestaan osa systeemin ympäristöä, joten systeemin liikemäären muuttuessa myös ympäristön liikemääriä muuttuu.

**2.22** Oletetaan, että meillä on kaksi eksoottista kappaletta, A ja B, joiden välillä vaikuttaa seuraavanlainen vuorovaikutus: jos kappaleet ovat lähempänä kuin 0.5 m toisistaan, B:hen kohdistuu vakiokiihtyvyys kohti A:ta (ts. A vetää B:tä puoleensa), mutta A:n liike ei muutu (B ei vedä A:tä puoleensa). Kiinnität kappaleen B kengänpohjisi ja pidät kappaletta A kädessäsi. (a) Valitaan systeemiksi sinä + A + B. Onko kuvattu vuorovaikutus systeemin sisäinen? (b) Mitä tapahtuu, kun tuot kappaleteen A lähelle kenkiäsi? (c) Onko tällainen vuorovaikutus mahdollinen?



Kuva 2.25: Kitka siirtää liikemääriä kappaelta toiselle.



rää eivätkä dissipatiiviset vuorovaikutukset voi muuttaa systeemin liikemääriä muihin muotoihin samaan tapaan kuin liike-energiaa. Sen sijaan jos vaikkapa kirja liukuu pöydällä ja pysähtyy pöydälle ja pöydältä edelleen maalle. Maapallo on kuitenkin niin suuri, että vaikka kirjan koko liikemääriä siirryttä maahan, maapallon liike ei muutu havaittavasti. Maapallon näkökulmasta kirja tai mikä tahansa ihmisen rakennelma on mitättömämpi kuin kärpänen rekkaan verrattuna.

Sen, että kitka ei hävitä liikemääriä vaan siirtää sen vain kappaelta toiselle, voi todeta seuraavalla kuvassa 2.25 esitetyllä kokeella. Asetetaan lähes kitkattomalle suoralle radalle pitkä kappaletta B ja tämän päälle toinen kappaletta A. Kappaletta B on aluksi levossa, mutta kappaletta A työntetään liukkeelle. Koska B on kitkattomalla radalla, sen alapintaan ei vaikuta kitka. A:n ja B:n välisellä pinnalla kitkaa kuitenkin on, ja tämä kitka pyrkii pysäyttämään pintojen liikkeen *toistensa suhteeseen*. Tämä tarkoittaa sitä, että kitka hidastaa kappaletta A liikettä mutta samalla se vetää kappaletta B liukkeelle. Lopputulos on se, että kappaletat päätyvät liikkumaan samalla nopeudella, ja tämä nopeus määräytyy liikemääriä säilymislain mukaisesti niin, että lopputilanteessa kappaletten A ja B liikemäärien summa on sama kuin kappaletten A liikemääri alkutilanteessa. Tässä kokeessa kitka on siis systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka siirtää liikemääriä kappaletta A kappaletelle B, mutta sekään ei voi hävittää liikemääriä. Tämä koe on myös esimerkki tilanteesta, jossa kitka ei pyri pysäyttämään kappaletta, sillä nyt kitka nimenomaan työntää kappaletta B liukkeelle. Kitka kuten muutkin dissipatiiviset vuorovaikutukset pyrkivät saamaan kappaletat liikkumaan samalla nopeudella, mutta tämä nopeus ei vältämättä ole nolla.



**2.23** Kirjoita tüivistelmä törmäyksistä ja säilyvistä suureista. Kuvaille elastiset ja epäelastiset törmäykset sekä räjähtävät erotukset. Selitä erityisesti milloin ja miksi liike-energia tai liikemääriä on vakio ja selitä, mikä näitä suureita voi muuttaa.

Lopuksi on vielä syytä täsmennää dissipatiivisten vuorovaikutusten ja liikemäären suhdetta. Oppime jo aikaisemmin, että dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat muuttaa liike-energian esimerkiksi lämpöenergiaksi, jolloin systeemin liike-energia voi vähentyä, vaikka energiata ei energian säilymislain mukaan voikaan hävittää. Tämä päätekee kuitenkin vain energialle. Liikemäärelläkin on olemassa muita muotoja kuin massiivisten kappaletiden liike, sillä esimerkiksi valollakin on pieni liikemääri. Lämpöön ja kuumuuteen ei kuitenkaan liity mitään liikemääriä eivätkä dissipatiiviset vuorovaikutukset voi muuttaa systeemin liikemääriä muihin muotoihin samaan tapaan kuin liike-energiaa. Sen sijaan jos vaikkapa kirja liukuu pöydällä ja pysähtyy pöydälle ja pöydältä edelleen maalle. Maapallo on kuitenkin niin suuri, että vaikka kirjan koko liikemääriä siirryttä maahan, maapallon liike ei muutu havaittavasti. Maapallon näkökulmasta kirja tai mikä tahansa ihmisen rakennelma on mitättömämpi kuin kärpänen rekkaan verrattuna.

Sen, että kitka ei hävitä liikemääriä vaan siirtää sen vain kappaelta toiselle, voi todeta seuraavalla kuvalla 2.25 esitetyllä kokeella. Asetetaan lähes kitkattomalle suoralle radalle pitkä kappaletta B ja tämän päälle toinen kappaletta A. Kappaletta B on aluksi levossa, mutta kappaletta A työntetään liukkeelle. Koska B on kitkattomalla radalla, sen alapintaan ei vaikuta kitka. A:n ja B:n välisellä pinnalla kitkaa kuitenkin on, ja tämä kitka pyrkii pysäyttämään pintojen liikkeen *toistensa suhteeseen*. Tämä tarkoittaa sitä, että kitka hidastaa kappaletta A liikettä mutta samalla se vetää kappaletta B liukkeelle. Lopputulos on se, että kappaletat päätyvät liikkumaan samalla nopeudella, ja tämä nopeus määräytyy liikemääriä säilymislain mukaisesti niin, että lopputilanteessa kappaletten A ja B liikemäärien summa on sama kuin kappaletten A liikemääri alkutilanteessa. Tässä kokeessa kitka on siis systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka siirtää liikemääriä kappaletta A kappaletelle B, mutta sekään ei voi hävittää liikemääriä. Tämä koe on myös esimerkki tilanteesta, jossa kitka ei pyri pysäyttämään kappaletta, sillä nyt kitka nimenomaan työntää kappaletta B liukkeelle. Kitka kuten muutkin dissipatiiviset vuorovaikutukset pyrkivät saamaan kappaletat liikkumaan samalla nopeudella, mutta tämä nopeus ei vältämättä ole nolla.

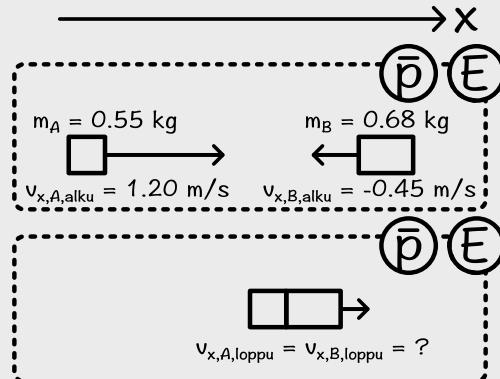
## esimerkki 2.7

## Epäelastinen törmäys

Kaksi kappaletta, joiden massat ovat 0.55 kg ja 0.68 kg, liikkuvat nopeuksilla 1.20 m/s positiiviseen ja 0.45 m/s negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Mikä on kappaleiden loppunopeus suoran törmäyksen jälkeen (kappaleet pysyvät  $x$ -akselilla), jos törmäys on täysin epäelastinen.

**TILANNE** Merkitään kappaletta indeksein A ja B, niiden massoja  $m_A = 0.55 \text{ kg}$  ja  $m_B = 0.68 \text{ kg}$  sekä nopeuksia  $v_{x,A,\text{alku}} = 1.20 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,B,\text{alku}} = -0.45 \text{ m/s}$ .

**SUUNNITELMA** Oletetaan törmäys niin nopeaksi, että ulkoiset vuorovaikutukset eivät ehdi sen aikana merkittävästi vaikuttaa kappaletten liikemääriin. Tällöin systeemin kokonaisliikemääriä on törmäyksessä vakio. Täysin epäelastisessa törmäyksessä kappaletit tarttuvat yhteen joten törmäyksen jälkeen kappaletten loppunopeudet ovat samat. Systeemin kokonaisenergia on vakio, mutta törmäyksessä vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia jotka muuttavat liike-energiaa sisäenergiaksi eikä liike-energia ole vakio.



Täysin epäelastisen törmäyksen jälkeen kappaletten nopeudet ovat samat

$$v_{x,A,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{loppu}} = v_{x,\text{loppu}}. \quad (2.50)$$

Liikemäärin säilyminen tarkoittaa puolestaan sitä, että kokonaisliikemääriä on oltava aluksi sama kuin lopuksi eli

$$m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}} = (m_A + m_B) v_{x,\text{loppu}}. \quad (2.51)$$

**RATKAISU** Voimme ratkaista loppunopeuden suoraan yhtälöstä (2.51), ja ratkaisuksi saadaan

$$v_{x,\text{loppu}} = \frac{m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}}}{m_A + m_B}. \quad (2.52)$$

Sijoittamalla numeroarvot saadaan loppunopeudeksi

$$v_{x,\text{loppu}} = 0.29 \text{ m/s}. \quad (2.53)$$

Mathematica:

```
(* ratkaistaan liikemäärin säilymisen yhtälö *)
ratkaisu = Solve[ mB (vloppu - vBalku) == -mA (vloppu - vAalku), vloppu]
{{vloppu -> (mA vAalku + mB vBalku) / (mA + mB)}}

(* sijoitetaan ratkaisuun lukuarvot *)
ratkaisu /. {mA -> 0.55, mB -> 0.68, vAalku -> 1.20, vBalku -> -0.45}
{{vloppu -> 0.287805}}
```

**ARVIOINTI** Loppunopeus on alkunopeuksien väliltä kuten pitääkin. Yksinkertaisin tapa tarkastaa tulos täsmällisesti on laskea liikemääriä ennen törmäystä sekä sen jälkeen. Kokonaisliikemääriä on aluksi  $p_{x,\text{alku}} = m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}} = 0.354 \text{ kgm/s}$  ja lopuksi  $p_{x,\text{loppu}} = m_A v_{x,A,\text{loppu}} + m_B v_{x,B,\text{loppu}} = 0.354 \text{ kgm/s}$ , joten liikemääriä on vakio. Siispä tulos toteuttaa liikemäärin säilymisehdon.

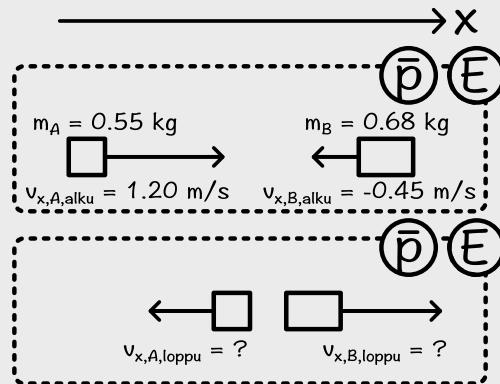
## esimerkki 2.8

## Elastinen törmäys

Kaksi kappaletta, joiden massat ovat 0.55 kg ja 0.68 kg, liikkuvat nopeuksilla 1.20 m/s positiiviseen ja 0.45 m/s negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Mikä on kappaleiden loppunopeus suoran törmäyksen jälkeen (kappaleet pysyvät  $x$ -akselilla), jos törmäys on elastinen?

**TILANNE** Tilanne on täsmälleen samanlainen kuin esimerkissä 2.7 paitsi ettei törmäys ole elastinen. Merkitään kappaleita indeksein A ja B, niiden massa m<sub>A</sub> = 0.55 kg ja m<sub>B</sub> = 0.68 kg sekä nopeuksia v<sub>x,A,alku</sub> = 1.20 m/s ja v<sub>x,B,alku</sub> = -0.45 m/s.

**SUUNNITELMA** Oletetaan jälleen törmäys niin nopeaksi, että ulkoiset vuorovaikutukset eivät ehdi sen aikana merkittävästi vaikuttaa kappaleiden liikemääriin. Tällöin systeemin kokonaisliikemääriä on törmäyksessä vakio. Elastisen törmäyksen tapauksessa myös systeemin kokonaisliike-energia on törmäyksessä vakio.



Liikemäärin säilyminen tarkoittaa kahden kappaleen tapauksessa sitä, että kappaleiden nopeuksien muutokset ovat kääntäen verrannolliset kappaleiden massoihin eli

$$\Delta v_{x,B} = -\frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A}. \quad (2.54)$$

Elastisessa törmäyksessä liike-energia on vakio

$$\frac{1}{2} m_A v_{x,A,alku}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,alku}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,loppu}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,loppu}^2. \quad (2.55)$$

**RATKAISU** Nopeudet voidaan ratkaista yhtälöistä (2.54) sekä (2.55). Periaatteessa lasku onnistuu ratkaisemalla liikemäärin säilymislain avulla esimerkiksi kappaleen B loppunopeus ja sijoittamalla tämä energian säilymislain yhtälöön. Loppuloksen saadaan toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisuna saadaan kappaleen A loppunopeus. Tämä voidaan sijoittaa takaisin liikemäärin säilymislakiin, jolloin saadaan myös kappaleen B loppunopeus. Lasku on kuitenkin varsin pitkä ja työläs, ja ratkaisu löytyy helpommin.

Termejä ryhmittelemällä liike-energian säilymislaki (2.55) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2} m_B (v_{x,B,loppu}^2 - v_{x,B,alku}^2) = -\frac{1}{2} m_A (v_{x,A,loppu}^2 - v_{x,A,alku}^2). \quad (2.56)$$

Tässä yhtälössä on kummallakin puolella neliöiden erotus, joka voidaan hajottaa laskusäännöllä

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \quad (2.57)$$

Huomioiden vielä, että  $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,loppu} - v_{x,B,alku}$ , liike-energian säilyminen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{2} m_B \Delta v_{x,B} (v_{x,B,loppu} + v_{x,B,alku}) = -\frac{1}{2} m_A \Delta v_{x,A} (v_{x,A,loppu} + v_{x,A,alku}). \quad (2.58)$$

Sijoittamalla tähän liikemäären säilymisen ehto (2.54) saadaan tulos

$$-\frac{1}{2} m_B \frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A} (v_{x,B,loppu} + v_{x,B,alku}) = -\frac{1}{2} m_A \Delta v_{x,A} (v_{x,A,loppu} + v_{x,A,alku}) \quad (2.59)$$

josta yhtaiset tekijät supistaan

$$v_{x,B,loppu} + v_{x,B,alku} = v_{x,A,loppu} + v_{x,A,alku}. \quad (2.60)$$

Tämä yllättävän yksinkertainen tulos siis sanoo, että kummankin kappaleen alku- ja loppunopeuden summa (tai keskiarvo) on sama. Tämä pätee kuitenkin vain yksilöitteisissä elastisissä törmäyksissä.

Yhtälöt (2.54) sekä (2.60) muodostavat yhtälöparin, josta loppunopeudet voidaan ratkaista. Esimerkiksi jälkimmäisen yhtälön mukaan kappaleen B loppunopeus on

$$v_{x,B,loppu} = v_{x,A,loppu} + v_{x,A,alku} - v_{x,B,alku} \quad (2.61)$$

ja tämän sijoitus ensimmäiseen antaa

$$v_{x,A,loppu} + v_{x,A,alku} - 2v_{x,B,alku} = -\frac{m_A}{m_B} (v_{x,A,loppu} - v_{x,A,alku}). \quad (2.62)$$

Sürtämällä kaikki kappaleen A loppunopeutta sisältävät termit yhtälön vasemmalle puolelle saadaan

$$\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_{x,A,loppu} = \left(\frac{m_A}{m_B} - 1\right) v_{x,A,alku} + 2v_{x,B,alku} \quad (2.63)$$

ja tästä edelleen kappaleen A loppunopeudeksi

$$v_{x,A,loppu} = \left( \frac{m_A - m_B}{m_B} v_{x,A,alku} + 2v_{x,B,alku} \right) / \left( \frac{m_A + m_B}{m_B} \right) = \frac{(m_A - m_B)v_{x,A,alku} + 2m_B v_{x,B,alku}}{m_A + m_B}. \quad (2.64)$$

Sijoitus takaisin yhtälöön (2.61) antaa kappaleen B loppunopeuden

$$v_{x,B,loppu} = \frac{(m_B - m_A)v_{x,B,alku} + 2m_A v_{x,A,alku}}{m_A + m_B}. \quad (2.65)$$

Sijoittamalla numeroarvot saadaan loppunopeuksiksi

$$v_{x,A,loppu} = -0.62 \text{ m/s}, \quad v_{x,B,loppu} = 1.0 \text{ m/s}. \quad (2.66)$$

Mathematica:

```
(* ratkaistaan energian ja liikemäärän säilymisen yhtälöpari *)
ratkaisu = Solve[{  
    mA vAloppu^2 + mB vBloppu^2 == mA vAalku^2 + mB vBalku^2,  
    mB (vBloppu - vBalku) == -mA (vAloppu - vAalku)  
},  
{vAloppu, vBloppu}]  
{vAloppu -> vAloppu, vBloppu -> vBloppu},  
{vAloppu -> ((mA - mB) vAalku + 2 mB vBalku) / (mA + mB),  
vBloppu -> (2 mA vAalku + (mB - mA) vBalku) / (mA + mB)}  
  
(* sijoitetaan ratkaisuun lukuarvot *)
ratkaisu /. {mA -> 0.55, mB -> 0.68, vAalku -> 1.20, vBalku -> -0.45}  
{vAloppu -> 1.2, vBloppu -> -0.45}, {vAloppu -> -0.62439, vBloppu -> 1.02561}}
```

**ARVIOINTI** Kappaleen A loppunopeus on negatiivinen ja kappaleen B positiivinen, joten kappaleet kääntyvät törmäyksessä ympäri mikä on järkevä. Yksinkertaisin tapa tarkastaa tulos täsmällisesti on laskea energia ja liikemäärä ennen törmäystä sekä sen jälkeen. Kokonaisenergiaksi saadaan aluksi

$$K_{alku} = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,alku}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,alku}^2 = 0.465 \text{ J} \quad (2.67)$$

sekä lopuksi

$$K_{loppu} = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,loppu}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,loppu}^2 = 0.465 \text{ J}, \quad (2.68)$$

joten liike-energia on vakio. Kokonaislukemäärä on aluksi

$$p_{x,alku} = m_A v_{x,A,alku} + m_B v_{x,B,alku} = 0.354 \text{ kgm/s} \quad (2.69)$$

ja lopuksi

$$p_{x,loppu} = m_A v_{x,A,loppu} + m_B v_{x,B,loppu} = 0.354 \text{ kgm/s}, \quad (2.70)$$

joten myös lukemäärä on vakio. Siispä tulos toteuttaa vaaditut fysikaaliset ehdot.

Tarkastellulla yhtälöllä on toinenkin ratkaisu, jonka Mathematica-ratkaisu löysi. Nimittäin jos kummankaan kappaleen nopeus ei muutu, liikemäärä ja liike-energia tienetenkin ovat vakiot. Yllä esitettyssä laskussa täitä ratkaisua ei löydetty, koska yhtälössä (2.60) on supistettu pois termi  $\Delta v_{x,A}$ , mikä on sallittua vain jos ko. termi ei ole nolla. Fysikaalisesti tämä ratkaisu tienetenkin tarkoittaa sitä, että kappaleet eivät törmää lainkaan, joten ratkaisu ei kelpaa. Yhtälöiden matemaattisessa käsitteilyssä on kuitenkin aina syytä olla tarkkana, jottei fysikaalisesti merkityksellisiä ratkaisuja unohdu.

## Impulssi

Edellä todettiin, että systeemin kokonaislukemäärä on vakio, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia. Usein on kuitenkin tarpeellista tarkastella systeemejä, joiden kokonaislukemäärä muuttuu. On siis tarpeen pystyä analysoimaan myös vuorovaikutusten lukemäärää muuttavaa vaikutusta.

Vuorovaikutuksen kykyä muuttaa systeemin lukemäärää mittaa suure nimeltä **impulssi**. Ympäristönsä kanssa vuorovaikuttavaan systeemiin kohdistuva impulssi määritellään *yhtä suureksi kuin systeemin liikemäärän muutos*

$$\bar{\mathbf{I}} = \Delta \bar{\mathbf{p}}. \quad (2.71)$$

Yhtälö (2.71) tarkoittaa impulssin olevan *yhtä suuri* kuin liikemäärän muutos, mutta nämä ovat fysikaalisesti *eri asioita*. Impulssi on *vuorovaikutuksen voimakkuutta* kuvaava suure kun taas liikemäärän muutos on *kappaleen liikkettä* kuvaava suure. Tämä määritelmä siis kertoo, kuinka *vuorovaikutus vaikuttaa liikkeeseen*. Se ei tarkoita sitä, että impulssi olisi kappaleiden liikkettä kuvaava suure.

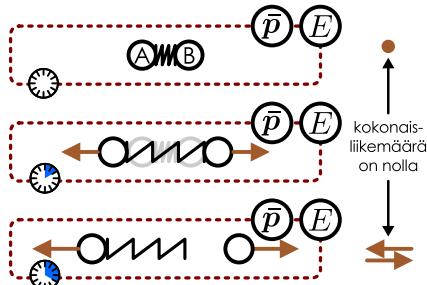


2.24 Miten voisit määrittää golfpalloon golflyönnin aikana kohdistuvan impulssin suuruuden?

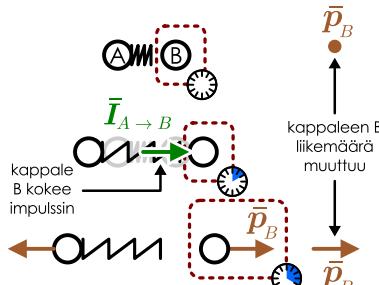
## SÄILYMLAIT

Kuva 2.26: Jousi työntää kaksi kappaletta erilleen. Kappaleiden kokonaislukemäärä on koko ajan nolla, mutta kappaleiden lukemäärät erikseen muuttuvat, sillä vuorovaikutus kohdistaa kumpaanakin kappaeseen impulssin.

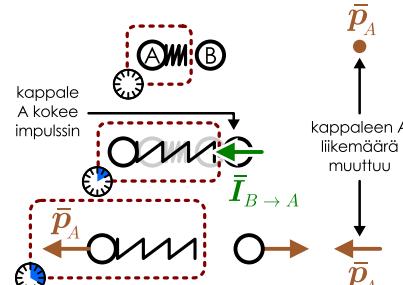
(a) Kahden kappaleten systeemin kokonaislukemäärä on vakio.



(b) Kappale A kohdistaa kappaeseen B impulsin jolloin B:n lukemäärä muuttuu.



(c) Myös kappalet A saa impulssin ja sen lukemäärä muuttuu.



Kuvassa 2.26 tarkastellaan kahden kappaleten, A ja B, yksinkertaista vuorovaikutusta erilaisin systeemi-rajauksin. Toisessa kappalessa on jousi, joka on aluksi puristunut kokoon. Vapautuessaan jousi työntää kappalet lükkeelle. Kappaleiden muodostamaan systeemiin ei kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia, joten sen kokonaislukemäärä on vakio. Merkitsemällä kappaleten lukemäärää  $\bar{p}_A$  ja  $\bar{p}_B$ , systeemin kokonaislukemäärä on näiden summa joka siis ei muudu,

$$\Delta \bar{p}_{\text{kokona}} = \Delta(\bar{p}_A + \bar{p}_B) = \Delta \bar{p}_A + \Delta \bar{p}_B = \bar{0}. \quad (2.72)$$

Kuitenkin jos systeemiksi valitaan vain toinen kappaletista, systeemin lukemäärä selvästiikään ei ole vakio. Systeemin lukemäärä muuttuu, koska nyt kappaleten välinen vuorovaikutus on ulkoinen vuorovaikutus, ja se kohdistaa systeemiin impulssin. Esimerkiksi kappaleten A kappaeseen B kohdistamaa impulssi on impulssin määritelmän (2.71) nojalla yhtä suuri kuin kappaleten B lukemäärän muutos

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = \Delta \bar{p}_B. \quad (2.73)$$

Koska myös kappaleten A lukemäärä muuttuu, myös siihen täytyy kohdistua vuorovaikutussa impulssi

$$\bar{I}_{B \rightarrow A} = \Delta \bar{p}_A. \quad (2.74)$$

Koska kappaleten lukemärien muutosten summa on lukemäärän säilymisen (2.72) perusteella nollavektori, näiden muutosten täytyy olla yhtä suuret ja vastakkaisuuntainen

$$\Delta \bar{p}_A = -\Delta \bar{p}_B. \quad (2.75)$$

Toisaalta, koska kummankin kappaleten saamaa impulssi on yhtä suuri kuin kappaleten lukemäärän muutos, kappaleten vuorovaikutussa saamien impulssien täytyy olla niihinäkin *yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen*

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = -\bar{I}_{B \rightarrow A}. \quad (2.76)$$

Päättelyn tulos oli siis seuraava: koska kahden vain keskenään vuorovaikuttavan kappaleten kokonaislukemäärä on lukemäärän säilymislain nojalla vakio, niiden keskinäiset vuorovaikutukset välttämättä kohdistavat impulssin *kumpaanakin* kappaeseen. Toisin sanoen vuorovaikutukset todella ovat vastavuoroisia — ei ole mahdollista, että vuorovaikutus kohdistuisi vain yhteen kappaeseen vaan molempien vuorovaikutusten osapuolten on koettava impulssi. Lukemäärän säilymlaki asettaa näin ollen voimakkaita rajoituksia sille, millaiset vuorovaikutukset ovat fysikaalisesti sallittuja. Huomaa vielä, että vaikka kuvassa 2.26 vuorovaikutus oli seurausta jousen elastisuudesta, tässä esitetyssä päättelyssä ei missään vaiheessa tarvinnut tietää vuorovaikutuksen ominaisuuksia. Niiinpä päättely toimi *mille tahansa* kahden kappaleten välselle vuorovaikutukselle.

**2.25** Muovailuvahasta tehty pallo putoaa lattialle ja pysähtyy hyvin nopeassa törmäyksessä. Jos pallon massa ja nopeus juuri ennen törmäystä tunnetaan, mitä voidaan päätellä (a) lattian palloon törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista, (b) painovoiman palloon törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista ja (c) pallon lattiaan törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista?

## esimerkki 2.9

## Liikuva laatikko

Laatikon (massa 0.20 kg) sisällä on jousi ja pallo, jonka massa on yhtä suuri kuin laatikon massa. Aluksi sekä laatikko että pallo ovat paikoillaan, ja jousi on puristettu kokoon niin, että jouseen on varastoitunut 20 J energiaa. Sitten jousi vapautetaan, jolloin se työntää pallon liukkeelle ja pallo alkaa kimpolla edestakaisin laatikon kahdesta vastakkaisesta sivusta. (Jousi itse ponnahtaa pois pallon tieltä.) Laatikko on vaakasuoralla lähes kitkattomalla pinnalla ja törmäykset ovat täysin elastiset. Millaisia impulsseja pallo ja laatikko toisilleen antavat? Miltä laatikon liike ulospäin näyttää?

**TILANNE** Valitaan systeemiksi pallo, jousi ja laatikko. Piirretään kappaleiden liikkeestä kuvasarja auttamaan tilanteen hahmottamista.

**SUUNNITELMA** Aluksi pallo ja laatikko ovat paikoillaan, joten niiden liike-energiasit ja liikemäärität ovat nollia. Jousella on potentiaalienergiaa. Kun jousi vapautuu, sen potentiaalienergia muuttuu pallon ja laatikon liike-energiaksi. Pallon ja laatikon muodostamaan systeemiin vaikuttaa ulkoinen gravitaatio sekä kosketusvuorovaikutus maanpinnan kanssa. Koska systeemi ei liiku pystysuunnassa, näiden vuorovaikutusten täytyy kuitenkin olla tasapainossa eikä systeemiin kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia, jotka vaikuttaisivat kappaleiden vaakasuuntaiseen liikkeeseen. Niinpä systeemin kokonaislukemääriä on vakio. Koska systeemi on aluksi paikoillaan, sen kokonaislukemääriä on nolla, ja siispä systeemin kokonaislukemääriä pitää olla nolla *aina*. Näin ollen pallon nopeuden muuttuessa myös laatikon nopeuden täytyy myös muuttua vastakkaiseen suuntaan, jotta systeemin kokonaislukemääri säilyisi nollana.

Merkitään pallon ja laatikon massaa  $m = 0.20 \text{ kg}$  ja niiden nopeuden skalarikomponentteja  $v_{x,\text{pallo}}$  ja  $v_{x,\text{laatikko}}$ . Tällöin niiden liikemäärität ovat

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{pallo}} = mv_{x,\text{pallo}} \hat{\mathbf{i}}, \quad \bar{\mathbf{p}}_{\text{laatikko}} = mv_{x,\text{laatikko}} \hat{\mathbf{i}}. \quad (2.77)$$

Systeemin kokonaislukemääriä on nolla koko liikkeen ajan

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{kokonaiss}} = \bar{\mathbf{p}}_{\text{pallo}} + \bar{\mathbf{p}}_{\text{laatikko}} = m(v_{x,\text{pallo}} + v_{x,\text{laatikko}}) \hat{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (2.78)$$

ja systeemin liike-energia on yhtä suuri kuin jouseen aluksi varastoitunut energia

$$K = \frac{1}{2}mv_{x,\text{pallo}}^2 + \frac{1}{2}mv_{x,\text{laatikko}}^2 = U_{\text{jousi, alk.}} \quad (2.79)$$

Törmäyksissä pallo ja laatikko kohdistavat toisiinsa impulssin. Kappaleen saama impulssi on yhtä suuri kuin kappaleen liikemääriä muutos,

$$\bar{\mathbf{I}} = \Delta \bar{\mathbf{p}}. \quad (2.80)$$

**RATKAISU** Yhtälön (2.78) mukaan systeemin kokonaislukemääriävektori on nollavektori. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorin pituus on nolla, eli

$$m(v_{x,\text{pallo}} + v_{x,\text{laatikko}}) = 0. \quad (2.81)$$

Koska kappaleiden massat eivät ole nollia, tämä toteutuu vain kun  $v_{x,\text{pallo}} = -v_{x,\text{laatikko}}$  eli kun kappaleet liikkuvat vastakkaisiin suuntiin itsesarvoiltaan yhtä suurilla nopeuksilla.

Voidaan siis päätellä, että jousen työntäessä pallon liukkeelle, se työntää myös laatikon liukkeelle vastakkaiseen suuntaan. (Tämä on räjähtävä erotus.) Samoin jokaisessa törmäyksessä pallon nopeuden vaihtaa ( $v_{x,\text{pallo}} \rightarrow -v_{x,\text{pallo}}$ ) myös laatikon nopeus vaihtaa suuntaa. Laatikko alkaa siis poukkoilemaan edestakaisin samalla nopeudella mutta vastakkaiseen suuntaan kuin sen sisällä liikkuva pallo.

Kappaleiden vauhti selviää nyt energiaperiaatteella. Merkitsemällä  $v = |v_{x,\text{pallo}}| = |v_{x,\text{laatikko}}|$  yhtälöstä (2.79) saadaan

$$v = \sqrt{U_{\text{jousi, alk.}}/m} = 10 \text{ m/s}. \quad (2.82)$$

Pallon vauhti on kussakin törmäyksessä vakio, mutta sen nopeus ei ole, koska liiken suunta muuttuu. Nopeuden muutos on suuruudeltaan

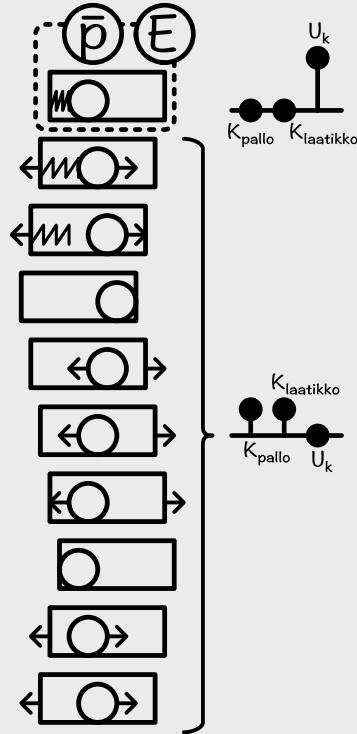
$$|\Delta v_{x,\text{pallo}}| = |v_{x,\text{pallo, loppu}} - v_{x,\text{pallo, alk.}}| = 2v = 20 \text{ m/s}. \quad (2.83)$$

Jos pallo on aluksi liikkeessä positiiviseen suuntaan, sen saama impulssi on

$$I_{x,\text{laatikko} \rightarrow \text{pallo}} = \Delta p_{x,\text{pallo}} = m\Delta v_{x,\text{pallo}} = -4.0 \text{ kgm/s}. \quad (2.84)$$

Laatikon saama impulssi on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen,  $I_{x,\text{pallo} \rightarrow \text{laatikko}} = -I_{x,\text{laatikko} \rightarrow \text{pallo}}$ .

**ARVIOINTI** Sekä pallo että laatikko liikkuvat, mutta edestakaisin. Kumpikaan ei pääse puolta laatikon mittaa kauemmaksi alkuperäiseltä paikaltaan, koska tällöin laatikko ja pallo jo törmäävät. Systeemin osat siis liikkuvat mutta systeemi itsessään ei lähde liukkeelle. Tämä on järkevä tulos, koska systeemiin vaikuttii vain sisäisiä vuorovaikutuksia, jotka eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemääriä.



## 2.5 Massakeskipiste

Esimerkissä 2.9 nähtiin, että vaikkei systeemin sisäinen vuorovaikutus voi saada systeemiä jatkuvaan suoravii-vaiseen liikkeeseen, se voi kuitenkin saada systeemin osat liikkumaan systeemin suhteen. Kokonaislukemäärä kertoo meille systeemin liiketilan, ja erityisesti kokonaislukemäärä on nolla systeemi on kokonaisuudena paikoillaan. Edelleen jos systeemi on paikoillaan, on luonnollista kysyä *missä* systeemi on. Kuitenkaan systeemin osien liikkumessa minkään yksittäisen kappaleen paikka ei ole hyvä tapa kuvata systeemin sijaintia. Ilmeisesti jonkinlainen keskiarvo eri kappaleiden paikoista olisi tähän tarkoitukseen parempi suure.

Massa on ekstensiivinen suure, joten systeemin kokonaismassa on sen kaikkien osien massojen summa. Jos systeemi koostuu esimerkiksi hiukkasista, joiden massat ovat  $m_1, m_2, \dots$ , kokonaismassa on

$$M = m_1 + m_2 + \dots = \sum_i m_i. \quad (2.85)$$

Jos nyt systeemin kokonaislukemäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{p}_{\text{kokona}} = M \bar{v}_{\text{cm}}, \quad (2.86)$$

eli systeemin kokonaismassan ja jonkin "keskiarvonopeuden"  $\bar{v}_{\text{cm}}$  tulona, tämä nopeus voisi olla hyvä mittari systeemin kollektiiviselle liikkeelle. (Lyhenteen 'cm' merkitys selviää pian. Se ei tarkoita senttimetriä.) Eri-tyisesti *paikoillaan* olevalle systeemille, jolle kokonaislukemäärä on nolla, tällaisen keskiarvoisen nopeuden pitäisi lausekkeen (2.86) mukaan olla *nolla*.

Rajoitutaan tarkastelemaan yksilöitteistä,  $x$ -suuntaista lükettä, jolloin voimme poimia kokonaislukemäärään (2.86)  $x$ -skalaarikomponentin ja kirjoittaa ilman vektoreita

$$p_{x,\text{kokona}} = M v_{x,\text{cm}}. \quad (2.87)$$

Systeemin keskiarvoisen nopeuden määrittelyminen onnistuu laventamalla kokonaislukemäärään lauseke (2.48) kokonaismassalla (2.85), jolloin voidaan kirjoittaa

$$p_{x,\text{kokona}} = M \left( \frac{m_1}{M} v_{x,1} + \frac{m_2}{M} v_{x,2} + \dots \right) = M \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}. \quad (2.88)$$

Lopputuloksena saadussa yhtälössä (2.88) summassa esiintyvä tekijät  $m_i/M$  ovat kunkin hiukkisen massan ja systeemin kokonaismassan suhde. Nämä ovat siis vain joitakin reaalilukuja, joten lausekkeessa esiintyvässä summassa yksinkertaisesti lasketaan yhteen kaikkien hiukkasten nopeudet kerrottuna kyseisen hiukkisen massan osuudella systeemin kokonaismassasta. Summa on siis hiukkasten nopeuksien *massoilla painotettu keskiarvo*. Näin kokonaislukemäärä on kirjoitettu systeemin kokonaismassan sekä hiukkasten nopeuksien painotetun keskiarvon tulona aivan kuten yhtälössä (2.88). Siispä tämä nopeuksien painotettu keskiarvo kuvailee systeemin kollektiivistä nopeutta

$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}. \quad (2.89)$$

Koska voimme nyt ilmaista systeemin nopeuden hyvin määritellyllä tavalla, seuraava askel on määritellä systeemin *paikka* yksikäsitteisesti. Teemme tämän käytämillä nopeuden määritelmää 1.20, jonka mukaan nopeus on paikkavektorin derivaatta. Jos nimittäin voimme kirjoittaa systeemin nopeuden muodossa

$$v_{x,\text{cm}} = \frac{dx_{\text{cm}}}{dt}, \quad (2.90)$$

missä  $x_{\text{cm}}$  on jokin hyvin määritetty paikkakoordinaatti, tämä koordinaatti on myös järkevä tapa määritellä systeemin paikka.

Edellä johdetussa nopeuden lausekkeessa (2.89) esiintyy hiukkasten nopeuksia, mutta voimme kirjoittaa nämä myös hiukkasten paikkakoordinaattien derivaattoina, jolloin saadaan

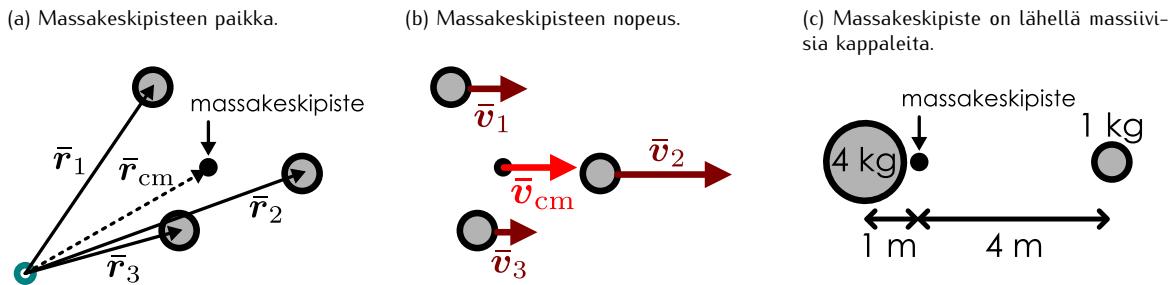
$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \frac{dx_i}{dt} = \frac{m_1}{M} \frac{dx_1}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{dx_2}{dt} + \dots \quad (2.91)$$

Edelleen summan derivoimissäädön  $\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2)$  perusteella tämä on sama asia kuin

$$v_{x,\text{cm}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 + \dots \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{m_i}{M} x_i \right). \quad (2.92)$$

Toisin sanoen on sama asia laskea ensin hiukkasten koordinaatit yhteen ja derivoida niiden summaa kuin derivoida erikseen jokaista koordinaattia ja laskea derivaatat yhteen.

Kuva 2.27: Massakeskipiste on kappaleiden paikkojen keskiarvo.



Edellä johdetussa viimeisessä lausekkeessa derivoitava summa  $\sum_i \frac{m_i}{M} x_i$  on nyt hiukkasten *paikkakoordinaattien massoilla painotettu keskiarvo* — siis jonkin avaruuden pisteen koordinaatti sekin. Näin keskiarvonopeus  $v_{x,cm}$  on kirjoitettu täsmälleen haluttuun muotoon (2.90) systeemin kokonaismassan ja koordinaatin derivaatan avulla. Niinpä voimme määritellä systeemin  $x$ -koordinaatiksi tämän hiukkasten koordinaattien keskiarvon

$$x_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} x_i \quad (2.93)$$

Samanlainen päätely toimii erikseen missä tahansa suunnassa ja sama määritelmä yleisesti vektorein kirjoittaen on

$$\bar{r}_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{r}_i. \quad (2.94)$$

Tätä kutsutaan systeemin **massakeskipisteeksi** ja nopeus

$$\bar{v}_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{v}_i \quad (2.95)$$

on systeemin **massakeskipistenopeus**. (Lyhenne 'cm' tulee englanninkielisestä termistä 'center of mass'.) Massakeskipistevektori on samaan tapaan määritelty vektori kuin paikkavektorikin, eli se on koordinaatiston origosta varsinaiseen massakeskipisteen osoittava vektori, jonka  $x$ -komponentti on  $x_{cm}$ .

Massakeskipisteen käsitteen avulla edellä esitettyt ilmaukset, joissa puhutaan "systeemin paikasta" tulevat täsmällisiksi. Kun systeemin paikaksi määritellään massakeskipiste ja systeemin nopeudeksi massakeskipisteen nopeus, systeemin kokonaislukemäärä voidaan kirjoittaa systeemin kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulona (2.86). Systeemi on siis paikoillaan täsmälleen silloin kun sen *massakeskipiste ei liiku*. Liikemäärän säilymislaki voidaan ilmaista myös niin, että *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa massakeskipisteen nopeutta*. Myös yksittäisten kappaleiden paikkakoordinaatille saadaan näin hyvä ja yksikäsitteinen määritelmä: Kappaleen paikaksi voidaan aina sopia kappaleen muodostavien *hiukkasten* massakeskipiste.



**2.26** Jos systeemissä on kaksi kappaletta, joiden massat ovat 1.0 ja 2.0 kg ja vauhdit 3.0 ja 1.0 m/s vastakkaisiin suuntiin, ja kappaleiden välinen etäisyys on 3 m, mikä on systeemin (a) kokonaismassa, (b) massakeskipistenopeus? (c) Missä on systeemin massakeskipiste?

## Massakeskipisteen energia

Massakeskipiste on hyödyllinen työkalu sekä energian että liikemäärän perustuvissa tarkasteluissa. Tutkitaan nyt, miten massakeskipisteen avulla voidaan laskea kappaleen tai systeemin energia.

Åskent opimme laskemaan hiukkasista koostuvan systeemin massakeskipisteen paikan ja nopeuden, mutta sama tekniikka toimii myös silloin, kun systeemi koostuu kokonaista kappaleista. Jos nimittäin määritämme ensin kunkin kappaleen massan ja massakeskipisteen, näiden kappaleiden muodostaman systeemin massakeskipiste saadaan kappaleiden massakeskipisteiden paikkojen painotettuna keskiarvona. Toisaalta jako kappaleisiin on aivan mielivaltainen, joten sama periaate pätee myös kappaleiden osille. Tämän idean avulla voimme etsiä massakeskipisteen myös epäsäännöllisen muotoisille kappaleille kuten kuvassa 2.28. Kuvan kappaleen muoto muistuttaa C-kirjainta, eikä ole lainkaan selvää, missä kappaleen massakeskipiste täsmälleen on. Voimme kuitenkin ajatella kappaleen koostuvan kolmesta suorakulmaisesta osasta. Jos kappale koostuu kauttaaltaan samanlaisesta aineesta, kunkin suorakulmaisen osan massa on verrannollinen osan kokoon ja

## SÄILYMISLAIT

kunink osan massakeskipiste on symmetrian perusteella osan keskipisteessä. Koko kappaleen massakeskipisten paikka saadaan puolestaan laskettua yhtälöllä 2.94 näiden kolmen osan massakeskipisteiden paikkakoordinaattien painotettuna keskiarvona. Tässä tapauksessa massakeskipiste on hieman kappaleen ulkopuolella, mutta ei kuitenkaan täsmälleen kappaleen sisään jäävän aukon keskellä.

Kun tunnemme kappaleen massan ja massakeskipisten paikan, voimme laskea helposti kappaleen painovoiman potentiaalienergian sen avulla. Jos nimittäin kappale koostuu osista, joiden massat ovat  $m_1, m_2$  jne. ja joiden koordinaatit pystysuunnassa ovat  $x_1, x_2$  jne., näiden osien potentiaalienergia on  $U_1 = m_1gx_1, U_2 = m_2gx_2$  jne. ja koko kappaleen potentiaalienergia on

$$U = m_1gx_1 + m_2gx_2 + \dots = g \sum_i m_i x_i. \quad (2.96)$$

Mutta toisaalta massakeskipisteen paikkakoordinaatti on yhtälön (2.93) perusteella  $x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$ , joten potentiaalienergian voi kirjoittaa kappaleen kokonaismassan ja massakeskipisteiden avulla muodossa

$$U = Mg x_{cm}. \quad (2.97)$$



- 2.27** Systeemi koostuu kahdesta osasta, joiden massat ovat 2.0 kg ja 3.0 kg. Kevyemmän osan massakeskipiste on korkeudella 0.5 m ja raskaamman 1.2 m. Mikä on systeemin (a) massakeskipisteiden korkeus? (b) kummankin osan potentiaalienergia? (c) massakeskipisteiden avulla laskettu potentiaalienergia?

Epäsäännöllisen muotoisen kappaleen potentiaalienergian voi siis laskea kahdella tavalla (kuva 2.29). Yksi tapa on jaka kappale osiin ja laskea kunkin osan potentiaalienergia erikseen, jolloin koko kappaleen potentiaalienergia on sen osien energioiden summa. Toinen tapa on määrittää ensin kappaleen massakeskipisten paikka. Kappaleella on nimittäin sama potentiaalienergia kuin pallolla, jolla on sama massa ja joka on samalla korkeudella kuin kappaleen massakeskipiste.

Systeemin *liike-energiaa ei kuitenkaan voi laskea yhtä yksinkertaisesti*. Jos systeemin kaikki kappaleet liikkuvat samaan suuntaan samalla nopeudella  $v_x$ , myös systeemin massakeskipiste nopeus on sama,  $v_{x,cm} = v_x$  ja tällöin systeemin liike-energia voidaan laskea massakeskipisteiden massan ja nopeuden avulla,

$$K = \frac{1}{2}m_1v_{x,1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2}^2 \dots = \frac{1}{2}m_1v_{x,cm}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,cm}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \dots)v_{x,cm}^2 = \frac{1}{2}Mv_{x,cm}^2. \quad (2.98)$$

Yleensä tämä ei kuitenkaan päde! Esimerkiksi jos systeemiin kuuluu kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa kappaletta, joilla on sama massa ja sama vauhti, niiden muodostaman systeemin massakeskipistenopeus on nolla, vaikka systeemillä selvästikin on liike-energiaa. Niinpä yleisesti pätee

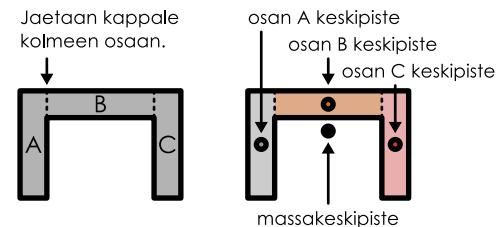
$$K_{\text{systeemi}} \geq \frac{1}{2}Mv_{x,cm}^2, \quad (2.99)$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain kun kaikilla kappaleilla on sama nopeus.

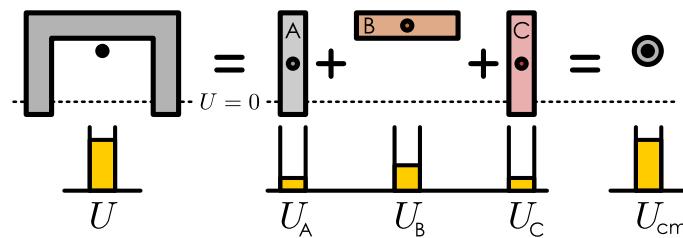


- 2.28** Edellisen kysymyksen systeemin kevyt kappale liikkui ylöspäin vauhdilla 1.5 m/s ja raskas kappale alaspäin vauhdilla 0.8 m/s. Mikä on systeemin (a) massakeskipisteiden nopeus? (b) massakeskipisteiden avulla laskettu liike-energia? (c) todellinen liike-energia?

Kuva 2.28: Epäsäännöllisen kappaleen massakeskipiste.



Kuva 2.29: Epäsäännöllisen kappaleen potentiaalienergia.



## Massakeskipisteen liike törmäyksessä

Tarkastellaan sitten systeemin massakeskipisteen käyttäytymistä tilanteessa kuten törmäyksessä, jossa systeemin liikemääriä on vakio. Kuvaan 2.30 on piirretty tällainen tilanne. Kyseessä on sama törmäys kuin kuvassa 2.17, jossa kappale A törmää aluksi levossa olleeseen kappaleeseen B, jonka inertia on puolet kappaleen A inertiastä. Nyt kuvan on kuitenkin piirretty myös systeemin massakeskipisteen liike.

Merkitään kappaleen B massa  $m_B = m$ , jolloin kappaleen A massa on  $m_A = 2m$  ja systeemin kokonaismassa on  $M = 3m$ . Jos kappaleen A koordinaatti on  $x_A$  ja kappaleen B  $x_B$ , massakeskipisteen  $x$ -koordinaatti on määritelmän (2.94) mukaisesti  $x_{cm} = \frac{1}{3m}(2mx_A + mx_B) = \frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}x_B$ . Tämä on piste, joka on kappaleiden A ja B paikkoja kuvaavien pisteiden välissä ja jakaa niiden yhdysjanan suhteessa 1 : 2. Toisin sanoen massakeskipiste on kaksoi kertaa niin kaukana kappaleesta B kuin kappaleesta A.

Piirtämällä massakeskipiste samaan tapaan jokaisella ajan hetkellä kappaleiden välillä näemme massakeskipisteen liikkeen törmäyksessä. Kuvasta nähdään suoraan, että massakeskipisteen paikkaa kuvaava suora eli massakeskipiste liikkuu *tasaisesti*. Myös nopeuden kuvaajassa massakeskipisteen nopeus on kappaleiden A ja B nopeuksien kuvaajien välissä, lähempänä kappaleen A nopeutta. Tässä graafissa massakeskipisteen nopeuden kuvaajaksi piirtyy vaakasuora viiva, mikä tarkoittaa massakeskipisteen nopeuden olevan vakio, kuten tasaisessa liikkeessä pitää ollakin. Erityisesti massakeskipisteen liike on tasaista myös törmäyksen aikana vaikka kummankin kappaleen nopeus tällöin muuttuu.

Systeemin massakeskipisteen nopeus kuvailee systeemin kollektiivista liikettä. Erityisesti massakeskipisteen nopeus kerrottuna systeemin kokonaismassalla on sama kuin systeemin kokonaisliikemääriä yhtälön (2.86) mukaisesti. Niinpä jos systeemin massakeskipiste liikkuu tasaisella nopeudella ja systeemin kokonaismassa on vakio, systeemin kokonaisliikemääriä on siis myös vakio. Juuri näin onkin törmäyksissä, joissa ulkoiset vuorovaikutukset eivät ole merkittäviä, ja massakeskipisteen tasainen liike on osoitus kokonaisliikemäären säilymisestä.

Massakeskipisteen liikkeen analysointia ja graafista esitystä voidaan myös käyttää kappaleiden törmäysten tutkimisen apuvälineenä. Kahden kappaleen massakeskipiste on nimittäin *aina* kappaleiden välissä — ei koskaan niiden yhdysjanan ulkopuolella. Niinpä kokonaisliikemäären ollessa vakio kappaleiden liikkeen on *aina* tapahduttava siten, että tasaisesti liikkuva massakeskipiste pysyy kappaleiden välissä.

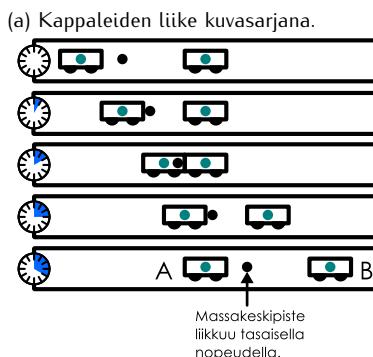


**2.29** Kaksi kappaletta liikkuvat vastakkaisiin suuntiin niin, että systeemin kokonaisliikemääriä on nolla. Kappaleet törmäävät. (a) Mitä voit päätellä kappaleiden liikemääristä ennen törmäystä? (b) Entä törmäyksen jälkeen, jos törmäys on täysin elastinen? (c) Entä jos törmäys on täysin epäelastinen?

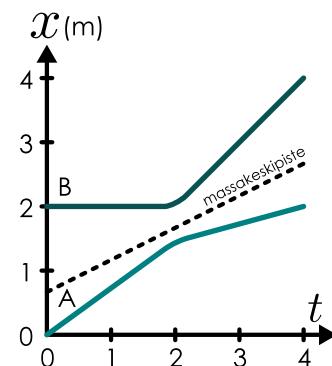
Massakeskipisteen nopeus ei muutu myöskään räjähdyksissä, jos räjähdyksen sinkoamat kappaleet eivät osu mihinkään. Esimerkiksi kun räjähtävä kappale on ennen räjähdyttä paikoillaan, räjähdyksessä liikkeelle lähtevien kappaleiden massakeskipiste pysyy paikoillaan myös räjähdyksen jälkeen. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että räjähdyks sinkoaa kappaleita yhtä paljon kaikkiin suuntiin. Vastaavasti liikkuvan kappaleen räjähtäessä sen osien massakeskipiste jatkaa samalla nopeudella kuin alkuperäinen kappale.

Esimerkiksi räjähtävän ilotulitusraketin massakeskipiste jatkaa räjähdyksen jälkeen samalla radalla kuin ennen räjähdyttä. Räjähdyttävän raketti on vapaassa pudotuksessa, joten sen osat jatkavat samalla vapaan pudotuksen liikeradalla, jolla rakettikin olisi liikkunut jollei olisi hajonnut osiin, kuten kuvassa 2.31. Toisin sanoen räjähdyks, joka on systeemin sisäinen vuorovaiketus, ei vaikuta massakeskipisteen liikkeeseen. Massakeskipisteen liikerata muuttuu ainoastaan, jos kappaleen hajoamisen osiin muuttaa kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia vuorovaikutustavia. Raketen tapauksessa ilmanvastus voi olla osiin hajonneelle raketille erilainen kuin ehjälle.

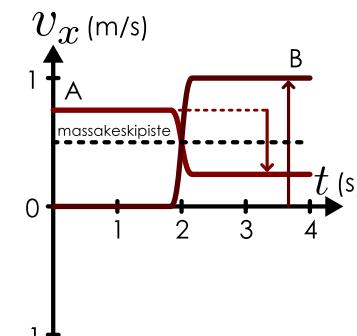
Kuva 2.30: Massakeskipiste liikkuu törmäyksissä tasaisesti. Tässä kappaleen A massa on kaksinkertainen kappaleeseen B verrattuna,  $m_A = 2m_B$ , joten massakeskipiste on kappaleiden välissä lähempänä A:tä.



(b) Kappaleiden paikan kuvaaja.



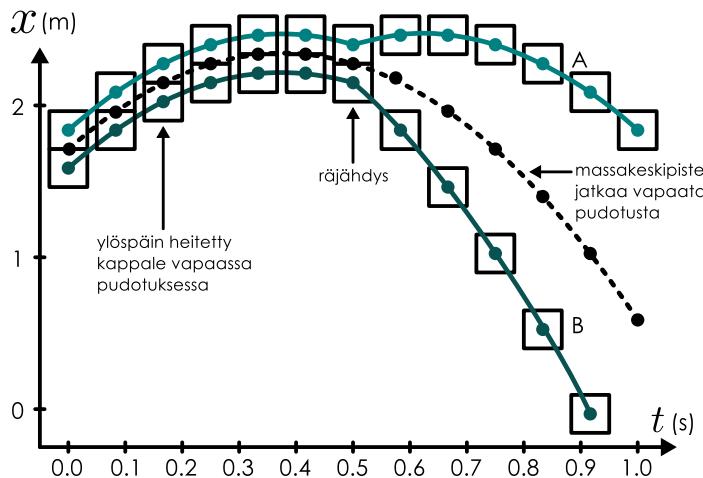
(c) Kappaleiden nopeuden kuvaaja.



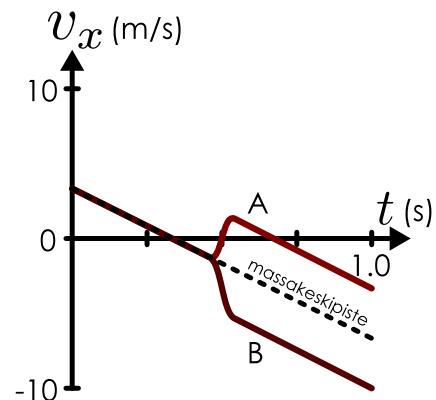
## SÄILYMISLAIT

Kuva 2.31: Vapaassa pudotuksessa oleva kappale räjähtää kahteen osaan. Osien massakeskipiste jatkaa vapaassa pudotuksessa eikä kappaleen hajoaminen vaikuta siihen.

(a) Kappaleiden osien sekä massakeskipisteiden liikerata.



(b) Osien ja massakeskipisteiden nopeus.



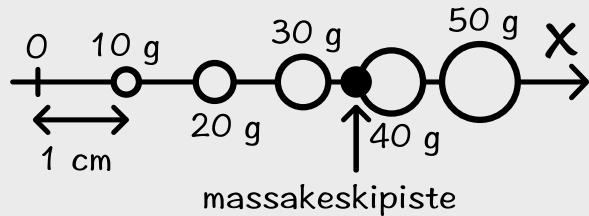
**2.30** Kirjoita tiivistelmä massakeskipisteiden ominaisuuksista. Keksi esimerkki systeemistä, jossa on vähintään kolme kappaletta (eri pisteissä, eri nopeudet) ja laske systeemin massakeskipisteen paikka ja nopeus. Selitä erityisesti, voiko systeemin liikemäärän, liike-energian tai potentiaalienergian päättelä suoraan massakeskipisteen ominaisuuksista.

### esimerkki 2.10

### Helminauhan massakeskipiste

Helminauhassa on erikokoisia helmiä. Ensimmäinen helmistä on massaltaan 10 g, toinen 20 g jne. niin että kunkin helmi on aina 10 g massiivisempi kuin edellinen. Nauhan massa on pieni helmiin verrattuna. Vierekkäisten helmien välinen etäisyys on 1.0 cm. Mikä on nauhan kokonaismassa ja missä on sen massakeskipiste nauhan ollessa suora, jos nauhassa on (a) 5 tai (b) 6 helmeä?

**TILANNE** Valitaan  $x$ -akseli nauhan suuntaiseksi ja olkoon origo 1 cm päässä ensimmäisestä helmosta.



**SUUNNITELMA** Systeemin kokonaismassa on sen kaikkien osien yhteenlaskettu massa. Massakeskipisteen  $x$ -koordinaatti on systeemin osien koordinaattien mäsoilla painotettu kesiarvo.

Helmiin välinen etäisyys on  $\Delta x = 1 \text{ cm}$  ja ensimmäisen helmen paikkakoordinaatti on valitussa koordinaatistossa  $x_1 = 1 \text{ cm}$ . Niinpä kunkin helmen paikkakoordinaatti on

$$x_i = x_1 + (i-1)\Delta x = i\Delta x, \quad (2.100)$$

missä indeksi  $i$  on helmen järjestysnumero.

Vierekkäisten helmien massojen ero on  $\Delta m = 10 \text{ g}$  ja ensimmäisen helmen massa on  $m_1 = 10 \text{ g}$ , joten kunkin helmen massa on

$$m_i = m_1 + (i-1)\Delta m = i\Delta m. \quad (2.101)$$

Helminauhan kokonaismassa on näillä merkinnöillä

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (2.102)$$

ja massakeskipisteen paikkakoordinaatti

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} x_i. \quad (2.103)$$

**RATKAISU** Nauhan kokonaismassa on

$$M = \sum_{i=1}^N i\Delta m = \Delta m \sum_{i=1}^N i. \quad (2.104)$$

Lausekkeessa esiintyy aritmeettinen summa

$$\sum_{i=1}^N i = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{1}{2}N(N+1). \quad (2.105)$$

Summan arvon voi päättää esimerkiksi huomaamalla, että summassa on  $N$  summattavaa, joiden keskiarvo on  $(N+1)/2$ . Kokonaismassaksi saadaan siis

$$M = \frac{1}{2}N(N+1)\Delta m. \quad (2.106)$$

Erikoistapauksessa  $N = 5$  kokonaismassaksi tulee

$$M_5 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)\Delta m = 15\Delta m = 150 \text{ g}. \quad (2.107)$$

Edellä johdettu yleinen lauseke (2.106) antaa saman tuloksen  $M_5 = 5 \cdot 6/2 \cdot \Delta m = 15\Delta m$  kuten pitääkin.

Massakeskipiste on puolestaan

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i = \frac{\Delta m \Delta x}{M} \sum_{i=1}^N i^2. \quad (2.108)$$

Tässä lausekkeessa esiintyy neliösumma, jonka laskeminen on huomattavasti vaikeampi tehtävä kuin edellä esitetyn aritmeettisen summan. Kyseessä on kuitenkin tunnettu pyramidilukujen jono, jonka summa tunnetaan ([http://en.wikipedia.org/wiki/Square\\_pyramidal\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Square_pyramidal_number)),

$$\sum_{i=1}^N i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1). \quad (2.109)$$

Massakeskipisteen paikaksi saadaan siis

$$x_{cm} = \Delta x \frac{N(N+1)(2N+1)/6}{N(N+1)/2} = \Delta x \frac{1}{3}(2N+1) \quad (2.110)$$

Erikoistapauksessa  $N = 5$  massakeskipisteen paikkakoordinaatti on

$$x_{cm,5} = \frac{1}{M_5} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5) = \frac{1}{M_5} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \Delta m \Delta x = \frac{55 \Delta m \Delta x}{15 \Delta m} = \frac{11}{3} \Delta x \approx 3.7 \text{ cm} \quad (2.111)$$

eli massakeskipiste on kolmannen ja neljännen helmen välissä (ks. kuva). Jälleen yleinen lauseke (2.110) antaa saman tuloksen  $x_{cm,5} = (2 \cdot 5 + 1)/3 \cdot \Delta x = 11/3 \cdot \Delta x$ .

```
Mathematica:
(* helmen massa ja paikkakoordinaatti i:n funktioina *)
m[i_] := i dm
x[i_] := i dx

(* nauhan kokonaismassa *)
M = Sum[m[i], {i, 0, N}]
dm N (1 + N) / 2

(* nauhan massakeskipisteen koordinaatti *)
xcm = 1/M Sum[m[i] x[i], {i, 0, N}]
dx (1 + 2 N) / 3

(* erikoistapaus N = 5 *)
{M, xcm} /. N -> 5
{15 dm, 11 dx / 3}
{M, xcm} /. {N -> 5, dx -> 1.0, dm -> 10}
{150, 3.66667}
```

**ARVIOINTI** Koska johdettu yleinen lauseke antoi saman tuloksen kuin erikoistapaus  $N = 5$ , lauseke vaikuttaa oikealta. Toki lisävarmistukseksi voitaisiin tarkastella muitakin erikoistapauksia. Nauhan pidentyessä eli  $N$  kasvaessa massakeskipiste siirtyy positiiviseen  $x$ -suuntaan, mikä on järkevää, koska nauhaan lisätään tällöin yhä raskaampia helmiä yhä kauemmas origosta. Toisaalta, koska nauhan kokonaispituus on  $L = N\Delta x$ , massakeskipisteen paikka suhteessa nauhan pituuteen ei kasva rajattaa,  $\frac{x_{cm}}{L} = \frac{2N+1}{3N} = \frac{2+1/N}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$ . Toisin sanoen massakeskipiste on etäisyydellä  $2L/3$  nauhan keveästä ja  $L/3$  nauhan raskaasta päästä. Tämäkin on järkevä tulos, koska massakeskipiste täytyy olla jossakin helmien välissä (ei nauhan ulkopuolella). Lisäksi massakeskipisteen täytyy olla lähempänä sitä päätä, jossa raskaat helmet ovat.

## Yhteenveton Säilymislait

### Systeemi ja säilyvät suureet

- Systeemi** tarkoittaa niiden asioiden joukkoa, johon tarkastelu on rajaattu.
- Ympäristö** on kaikki muu fysikaalinen todellisuus, joka ei kuulu kulloinkin valittuun systeemiin.
- Intensiivinen suure** kuvaa aineen tai kappaleen paikallista ominaisuutta. Sen arvo ei riipu systeemin koosta.
- Ekstensiivinen suure** kuvaa jonkin asian kokonaismääriä systeemissä. Ekstensiivisen suureen arvo on suoraan verrannollinen aineen määriään tai systeemin kokoon.
- Säilymislaki** on fysikaalinen laki jonka mukaan jotakin ekstensiivistä suuretta ei voi luoda eikä hävittää. Tällöin sanotaan, että suure **säilyy**.

- Avoin systeemi** voi vaihtaa energiota ja ainetta ympäristönsä kanssa, eli näitä voi siirtää systeemiin ja ympäristöön välillä.
- Suljettu systeemi** voi vaihtaa energiota mutta ei ainetta ympäristönsä kanssa.
- Eristetty systeemi** ei voi vaihtaa energiota eikä ainetta ympäristönsä kanssa.
- Vuorovaikutus** on kahden tai useamman fysikaalisen olion (kappaleen, hiukkasen, tms.) välinen vaikutussuhde.
- Systeemin ja sen ympäristön välistä vuorovaikutusta kutsutaan **ulkoiseksi vuorovaikutukseksi**. Systeemin osien väliset vuorovaikutukset ovat sisäisiä vuorovaikutuksia.

### Energia

- Energia** on kaiken fysiikan tärkein suure. Fysikaalisissa prosesseissa energia muuttuu muodosta toiseen, ja prosessi on mahdollinen vain jos systeemissä on siihen tarpeeksi energiaa.
- Kokonaisenergia** on kaikkien eri energian muotojen summa. Energiaa ei voi luoda eikä hävittää,

$$\Delta E_{\text{kokonaist}} = 0, \text{ eli } E_{\text{kokonaist}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **energian säilymislaki**.

- Systeemin kokonaisenergia *ei ole vakio*, jos systeemi voi vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa. *Eristetyn* systeemin kokonaisenergia *on vakio*.
- Kappaleen liikkeeseen liittyy **lüke-energia** eli **kineettinen energia**

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

missä  $m$  on kappaleen **inertia** eli **massa** ja  $v$  nopeus.

- Potentiaalienergia** on vuorovaikutusten varastoimaa energiota, joka riippuu ainoastaan kappaleiden paikoista. Painovoiman poten-

tiaalienergia on

$$U_{\text{painovoima}} = mgx,$$

- Elastisella kappaleella kuten jousella on potentiaalienergia

$$U_{\text{elastinen}} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

missä  $x$  on kappaleen pituus ja  $k$  on **jousivakio**.

- Mekaaninen energia** on lüke-energian ja potentiaalienergian summa. Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa vain **konservatiivisia** vuorovaikutuksia, systeemin mekaaninen energia on vakio.
- Systeemin **tilan** muista ominaisuuksista kuin paikasta ja nopeudesta riippuva energia **on sisäenergiaa**.
- Dissipatiiviset** vuorovaikutukset muuttavat järjestynyttä mekaanista energiota epäjärjestyneeksi energiaksi kuten lämpöenergiaksi.

### Liikemäärä

- Kappaleen **liikemäärä** on sen inertian (eli massan) ja nopeuden tulo

$$\bar{p} = m\bar{v}.$$

Yksilöllisessä tapauksessa liikemäärä on

$$p_x \hat{i} = mv_x \hat{i}.$$

- Systeemin **kokonaislukemäärä** on sen kaikkien osien (kappaleiden, hiukkasten) liikemäärien **vektorisumma**

$$\bar{p}_{\text{kokonaist}} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i v_{x,i} \hat{i}.$$

Liikemäärä ei voi luoda eikä hävittää

$$\Delta \bar{p}_{\text{kokonaist}} = \bar{0}, \text{ eli } \bar{p}_{\text{kokonaist}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **liikemäären säilymislaki**.

- Systeemin kokonaislukemäärä **on vakio**, jos siihen ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia tai jos ulkoiset vuorovaikutukset kumoavat toisensa. Jos systeemin lukemäärä muuttuu, ympäristöön lukemäärä on muuttava yhtä paljon mutta vastakkaiseen suuntaan.
- Jos systeemissä tai kappaleeseen vaikuttaa ulkoisia vuorovaikutuksia, sen liikemäärä voi muuttua. Systeemin lukemäären kokonaismuutos on yhtä suuri kuin systeemin saama **impulssi**

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}.$$

- Kahden kappaleen vuorovaikutuksessa kappaleiden saamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = -\bar{I}_{B \rightarrow A}.$$

## Massakeskipiste

- Systeemin paikkaa kuvaan sen **massakeskipiste** eli sen osien paikkojen massoilla painotettu keskiarvo

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{\mathbf{r}}_i,$$

missä  $M$  on systeemin kokonaismassa  $M = \sum_i m_i$ . Massakeskipisteen  $x$ -koordinaatti on

$$x_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} x_i.$$

- Systeemin kollektiivista liikettää kuvaan sen massakeskipisteen nopeus

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{\mathbf{v}}_i,$$

Massakeskipisteen nopeuden  $x$ -komponentti on

$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}.$$

- Systeemin kokonaislukemäärä on sen kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulo

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{kokonais}} = M \bar{\mathbf{v}}_{\text{cm}}.$$

- Painovoiman potentiaalienergia voidaan laskea kappaleen kokonaismassan ja sen massakeskipisteen korkeuden avulla,

$$U_{\text{painovoima}} = Mg x_{\text{cm}}.$$

- Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia, sen massakeskipisteen nopeus ei muutu.

## Sanasto

- systeemi (system)
- ympäristö (environment)
- avoin systeemi (open system)
- suljettu systeemi (closed system)
- eristetty systeemi (isolated system)
- intensiivinen suure (intensive quantity)
- ekstensiivinen suure (extensive quantity)
- säälymislaki (conservation law)
- hiukkasmäärä (particle number)
- tilavuus (volume)
- hiukkastihveys (particle density)
- vuorovaikutus (interaction)
- painovoima, gravaatio (gravity)
- massa (mass)
- inertia (inertia)
- kilogramma (kilogram)
- jousi (spring)
- harmoninen vuorovaikutus (harmonic interaction)
- kitka (friction)
- välialaineen vastus (drag, resistance)

- konservatiivinen vuorovaikutus (conservative interaction)
- dissipatiivinen vuorovaikutus (dissipative interaction)
- energia (energy)
- joule (joule)
- liike-energia, kineettinen energia (kinetic energy)
- potentiaalienergia (potential energy)
- sisäenergia (internal energy)
- mekaaninen energia (mechanical energy)
- reversiibeli prosessi (reversible process)
- irreversiibeli prosessi (irreversible process)
- liikemäärä (momentum)
- sisäinen vuorovaikutus (internal interaction)
- ulkoinen vuorovaikutus (external interaction)
- impulssi (impulse)
- massakeskipiste (center-of-mass)
- massakeskipistenopeus (center-of-mass velocity)
- törmäys (collision)
- elastinen, kimmoisa (elastic)
- epäelastinen (inelastic)
- räjähtävä erotus (explosive separation)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

- 2.1** (a) Nopeus on intensiivinen suure. Jos kappale liikkuu suoraviivaisesti nopeudella  $\vec{v}$ , sen mikä tahansa osa liikkuu myös tällä nopeudella. Toisaalta jos kappale ei ole jäykä, sen eri osat voivat liikkua eri nopeuksilla, joten nopeuden voi määritellä kappaleen eri osille erikseen, mikä on myös intensiivisen suuren ominaisuus.
- (b) Pinta-ala on kahdessa ulottuvuudessa ekstensiivinen ominaisuus. Jos nimittäin kaksiulotteisen kappaleen (esim. ohuen paperin) leikkää osiin, näiden osien pinta-ala on yhteensä sama kuin alkuperäisen paperin ala. Kolmessa ulottuvuudessa pinta-ala ei kuitenkaan ole ekstensiivinen eikä intensiivinen.
- (c) Tilavuus on ekstensiivinen suure ja nopeus on intensiivinen suure, joten niiden tulo on ekstensiivinen.
- 2.2** (a) Kasvien määrä on ekstensiivinen suure, joten se voi muuttua luomalla, hävittämällä, tuomalla tai viemällä. Luonti tarkoittaa uusien kasvien kasvua, hävittämisen kasvien kuolemaa. Tuonti tarkoittaa uusein kasvien tuomista ja istuttamista ja vienti kasvien korjaamista ja viemistä pois.
- (b) Kosteus voi muuttua ilmaan kuuluvan veden määrän muuttuessa, mutta toisaalta se voi muuttua myös esimerkiksi ilman lämpötilan muuttuessa. Veden määrä on ekstensiivinen suure, mutta suhteellinen kosteus ei ole, joten sitä ei voi muuttaa luomalla, hävittämällä, tuomalla ja viemällä.
- (c) Rahan määrä on ekstensiivinen suure, joten periaatteessa sitä voi muuttaa luomalla, hävittämällä, tuomalla ja viemällä. Rahaa ei varmasti synny kaapissa lisää. Lisäksi jos kassakaappi on hyvä ja se pysyy lukossa, sen pitäisi suojella rahoja hävitykseltä (esim. tulelta) eikä sieltä voi myöskään viedä tai sinne tuoda lisää rahaa. Tässä systeemissä rahan määrä on siis vakio.
- 2.3** (a) Kahdessa hampurilaisessa on 4000 kJ energiaa.
- (b) Kaksi lamppua tarvitsee 10 J energiaa sekunnissa.
- (c) Koska kahdessa samanlaisessa systeemissä on kaksinkertainen määrä energiota yhteen systeemiin verrattuna, energian määrä on siis suoraan verrannollinen systeemin kokoon. Energia on siis ekstensiivinen suure.
- (d) Intensiivinen suure voi olla vakio jossakin tilanteessa, mutta vain ekstensiiviset suuret voivat olla yleisesti säilyviä. Energia voi olla säilyvä suure vain koska se on ekstensiivinen.
- 2.4** Energia on säilyvä suure. Atomien määrä ei yleisesti ole, mutta liikuntasuorituksen aikana ei varmasti tapahdu mitään prosesseja, joissa aineen atomit hajoaisivat tai muuttuisivat, koska ihmisen ei ole ydinreaktori. Siispä ainoa tapa vähentää näitä suureita on poistaa niitä systeemistä. Liikuessa kemiallisen energian varastot muuttuvat osittain liike-energiaksi ja pääasiassa lämpöenergiaksi, ja lämpö voi siirtyä systeemistä ympäristöön itsestään. Atomien määrä muuttuu siksi, että liikuntasuorituksen aikana kehoon varastoituneet orgaaniset molekyylit muodostavat hapen kanssa pääasiassa vettä ja hiilidioksidia, jotka poistuvat elimistöstä. Laihtumisen kannalta tärkein mekanismi onkin se, että uloshengityksen kautta elimistöstä poistuu paljon hiilidioksidia. (Kasveissa prosessi tapahtuu toiseen suuntaan, kun kasvit sitovat itseensä ilman hiilidioksidia yhteyttäässään. Siksi kasvillisuuden suojelu on tärkeää ilmastonmuutoksen pysäytämiseksi.)
- 2.5** (c) Törmäyksessä osa pallon liike-energiasta muuttuu pääasiassa lämpöenergiaksi, josta osa siirryy seinään. Osa energiasta voi myös kulkeutua pois äänen mukana. Niinpä (a) pallon energia ei ole vakio ja (b) pallon ja seinän energia on likimain vakio.
- 2.6** (a) Vaakasuorassa työnnössä kuulan nopeutta rajoittaa vain inertia. Tämän huomaa esimerkiksi siitä, että vaakasuorassa työnnössä kuulan liike-energia muuttuu (riippuu inertialta) mutta potentiaalienergia ei (riippuu painosta). (b) Pystysuorassa työnnössä nopeutta rajoittaa sekä inertia että paino, sillä tällöin sekä liike- että potentiaalienergia muuttuvat.
- 2.7** (a) Jos alkunopeus on kaksinkertainen, pallolla on aluksi nelinkertainen liike-energia. Pallo siis nousee nelinkertaiselle korkeudelle (alkutasosta mitattuna).
- (b) Jos potentiaalienergian nollakohta valitaan laki pisteeeseen, pallon liike ei muutu mitenkään. Energiadiagrammeissa kaikki potentiaalienergiat kuitenkin siirtyvät kohti negatiivista.
- (c) Jos ilmanvastus muuttaa liike-energiaa lämpöenergiaksi, energiadigrammin täytyy lisätä lämpöenergiaa kuvava pylväs. Tämä pylväs kasvaa jatkuvasti heiton aikana, jolloin laki pisteeessä kappaleella täytyy olla vähemmän potentiaalienergiaa kuin kuvassa. Siispä pallo ei nouse yhtä korkealle ja putoava pallo ei saa yhtä suurta nopeutta.
- 2.9** Aluksi hyppääjän varastoima kemiallinen energia muuttuu liike-energiaksi. Liike-energia varastoituu hyppyn aluksi ponnahduslautaan ja siitä takaisin liike-energiaksi. Lennon aikana liike-energiasta osa muuttuu potentiaalienergiaksi (mutta ei kaikki, koska hyppääjä pyörii) ja siitä jälleen liike-energiaksi. Hyppääjän osuessa veteen hyppääjän liike-energiasta suurin osa siirryy veden liike-energiaksi ja lämpöenergiaksi. Mekaaninen energia on likimain vakio hyppääjän irrottua laudasta ja ennen hyppääjän osumista veteen.
- 2.10** (a) Energia on peräisin painovoiman potentiaalienergiasta, joka on mekaanista energiasta.
- (b) Energia on peräisin työntäjän varastoimasta kemiallisesta energiasta, joka on sisäenergiaa.
- (c) Energia on peräisin törmäävän kappaleen liike-energiasta, joka on mekaanista energiasta.
- (d) Energia on peräisin jouseen varastoituneesta elastisesta energiasta, joka on sekä mekaanista energiasta että sisäenergiaa.
- (e) Energia on peräisin räjähdyssaineeseen varastoituneesta kemiallisesta energiasta, joka on sisäenergiaa.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

**2.11** Ilmanvastus vastustaa purjeen ja ilman liikettä toistensa suhteen. Koska ilma virtaa eri nopeudella kuin purje liikkuu, ilmanvastus pyrkii saamaan nämä nopeudet samaksi. Ilman vauhti siis pienenee ja purjeen vauhti kasvaa. Tässä prosessissa ilman liike-energiaa muuttuu purjeen ja laivan liike-energiaksi sekä lämpöenergiaksi.

**2.12 (a)** Kappale ei voi liukua ylöspäin tasaisella nopeudella, joten ilmiö on irreversiibeli. Jos kappale liikkuu alas tasaisella nopeudella, siihen täytyy kohdistua kitkavoima tason suunnassa ylöspäin. Jos kappale liikkuisi vastakkaiseen suuntaan, kitkan täytyisi vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan.

**(b)** Kappale putoaa tasaisella kiertyvyydellä riippumatta siitä, onko se lükkeessä ylös- vai alas päin. Ilmiö on siis reversiibeli.

**(c)** Ruoka jäähtyy ja sitä ympäröivä ilma lämpenee. Ei ole mahdollista, että ruoka lämpenisi ja ilma jäähtyisi samalla, joten tämä on irreversiibeli prosessi.

**(d)** Elastinen törmäys voi tapahtua täsmälleen samalla lailla takaperin, joten kyseessä on reversiibeli prosessi.

**(e)** Jokainen törmäys on reversiibeli, joten periaatteessa prosessi on reversiibeli. Ts. jos pallojen nopeudet käännettäisiin törmäyksen jälkeen ympäri, 10 palloa palaisi yhteen kasaan ja vain yksi jäisi lükkelle. Kuitenkin pienikin muutos pallojen nopeuksissa johtaisi erilaiseen lopputulokseen, joten käytännössä prosessia ei voi toistaa takaperin.

**2.14** Ei ole. Jos esimerkiksi jousi on aluksi lepopituudessa ja se puristetaan kokoon sen kulkissa suljetun reitin, systeemin potentiaalienergia ei ole lopuksi sama kuin aluksi. Painovoiman potentiaalienergia ei tässä muutu, joten voimme päätellä painovoiman olevan konservatiivinen. Elastisen vuorovaikutuksen konservatiivisuus näkyi siinä, että jousen elastisen potentiaalienergian muutos on nolla, jos jousta puristetaan tai venytetään ja sitten se palautetaan alkuperäiseen pituuteen.

**2.15** Aluksi  $v_{x,\text{alku}} = -2.0 \text{ m/s}$  ja lopuksi  $v_{x,\text{loppu}} = 1.0 \text{ m/s}$ . Siispä

$$(a) \Delta v = v_{\text{loppu}} - v_{\text{alku}} = 1.0 \text{ m/s} - (-2.0 \text{ m/s}) = 3.0 \text{ m/s},$$

$$(b) \Delta v_x = v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}} = 1.0 \text{ m/s} - (-2.0 \text{ m/s}) = 3.0 \text{ m/s}.$$

**(c)** Kuvaaja on aluksi korkeudella  $-2.0 \text{ m/s}$  ja lopuksi  $1.0 \text{ m/s}$ . Kuvaajan muoto näiden välillä riippuu siitä, miten nopeuden muutos tapahtuu.

**2.16 (a)** Vaunun A nopeuden muutos on  $\Delta v_{x,A} = -4.00 \text{ m/s}$ .

**(b)** Edellisten kokeiden perusteella nopeuden muutos on kääntäen verrannollinen vaunujen massaan. Niinpä

$$\Delta v_{x,B} = -\frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A} = 1.60 \text{ m/s}. \quad (2.112)$$

**(c)** Tämän perusteella B:n loppunopeus on  $v_{x,B,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{alku}} + \Delta v_{x,B} = 1.80 \text{ m/s}$ .

**2.17 (a)** Aluksi liike-energia on noin  $0.281 \text{ J}$  ja lopuksi  $0.156 \text{ J}$ . Energian muutos on siis  $\Delta K = -0.125 \text{ J}$ .

**(b)** Liike-energia on aluksi sama kuin edellä. Lopuksi energia on  $0.141 \text{ J}$ , ja energian muutos on  $\Delta K = -0.141 \text{ J}$ . Koska tämä on täysin epäelastinen törmäys, liike-energia vähentyy enemmän kuin osittain epäelastisessa tapauksessa.

**(c)** Nyt liike-energia on aluksi  $0.125 \text{ J}$  ja lopuksi  $0.391 \text{ J}$ . Energian muutos on  $\Delta K = 0.266 \text{ J}$ . Räjähtävässä erotuksessa liike-energia lisääntyy.

**2.18** Yhtälön (2.43) mukaan

$$\Delta v_{x,\text{rekka}} = -\frac{m_{\text{kärpänen}}}{m_{\text{rekka}}} \Delta v_{x,\text{kärpänen}}. \quad (2.113)$$

Sen, että rekan massa on paljon kärpäsen massaa suurempi, voi ilmaista raja-arvona  $m_{\text{kärpänen}}/m_{\text{rekka}} \rightarrow 0$ , joten  $\Delta v_{x,\text{rekka}} \rightarrow 0$ . Kahden hyvin erimassaisen kappaleen törmäyksessä suuremman kappaleen nopeus ei siis juurikaan muutu.

**2.19** Tekninen perustelu: nopeus on intensiivinen suure, mutta massa on ekstensiivinen, joten näiden tulon  $mv_x$  on ekstensiivinen. Fysiikalinen perustelu: Tässä  $m_A v_{x,A}$  on A:n liikemäärä ja  $m_B v_{x,B}$  on B:n liikemäärä. Koska koko systeemin liikemäärä saadaan näiden summana, suureen täytyy olla ekstensiivinen. Vain ekstensiiviset suureet voivat olla säilyviä.

**2.20** Jos kappaleen massa on  $1 \text{ kg}$ , sen liike-energia on  $K = 8 \text{ J}$  ja liikemäärä  $p_x = 4 \text{ kgm/s}$ .

**(a)** Kappaleiden liike-energia on  $K = 4 \text{ J}$  ja liikemäärä  $p_x = 4 \text{ kgm/s}$ . Liikemäärä on sama mutta energia ei.

**(b)** Nyt  $K = 8 \text{ J}$  ja  $p_x = 8 \text{ kgm/s}$ . Energia on siis sama mutta liikemäärä ei.

**(c)** Nyt  $K = 8 \text{ J}$  ja  $p_x = -4 \text{ kgm/s}$ . Energia on siis sama mutta liikemäärä ei. Huomaa, että liikemäärä on vektorisuure, ja liikemäärän etumerkki muuttuu, kun kappaleen liikkeen suunta vaihtuu.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

**2.21** Sisäiset vuorovaikutukset voivat muuttaa systeemin osien liikettä. Esimerkiksi jos kahden levossa olevan kappaleen välissä on puristettu jousi, jousen oikeneminen voi työntää kappaleet liikkeelle. Kokonaistiikmäärä ei tällöin muutu, koska vastakkaisuuntainen muotokset liikemääressä kumoavat toisensa. Liike-energia ei kuitenkaan riipu liikkeen suunnasta, joten tässä prosessissa kappaleiden liike-energia kasvaa. Sisäinen vuorovaikutus voi siis muuttaa systeemin liike-energiaa. Sisäinen vuorovaikutus ei kuitenkaan voi energian säilymislain perusteella muuttaa systeemin kokonaisenergiaa. Kahden kappaleen ja jousen esimerkissä jousen potentiaalienergia pienenee täsmälleen yhtä paljon kuin kappaleiden liike-energia kasvaa, jolloin kokonaisenergia on vakio.

**2.22** (a) On. (b) Kappale A vetää B:tä ylöspäin mutta B ei vaikuta A:hän, joten kenkäsi alkavat nousta ylöspäin. Nouset siis lentoon. (c) Ei. Itseään ei voi nostaa ilmaan edes eksoottisilla kappaleilla. Ei siis voi olla kappaleita A ja B niin, että A vetää B:tä puoleensa mutta B ei vaikuta A:hän.

**2.24** Impulssi on määritelmän mukaisesti sama kuin kappaleen liikemääärän muutos. Pallon liikemäärä on aluksi nolla, joten jos mittaamme pallon nopeuden lyönnin jälkeen, voimme laskea tämän avulla pallon liikemääärän muutoksen, ja impulssin täytyy olla yhtä suuri.

**2.25** (a) Pallon liikemäärä on ennen törmäystä suoraan alas päin ja törmäyksen jälkeen nolla. Liikemäärä siis muuttuu ylöspäin ja lattia antaa pallolle impulssin ylöspäin. Impulssin suuruus on sama kuin pallon liikemääärän muutos.

(b) Koska törmäys on nopea, painovoima ei ehdi antaa pallolle merkittävää impulssia sen aikana. Törmäyksen aikana painovoima on paljon heikompi kuin pallon ja lattian välinen vuorovaikutus.

(c) Pallo antaa lattialle yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen impulssin kuin lattia pallolle. Pallo antaa siis lattialle impulssin alas päin.

**2.26** (a) 3 kg. (b) 0.33 m/s kevyemmän kappaleen liikkeen suuntaan. (c) Massakeskipiste on kappaleiden välisellä suoralla 2 m päässä kevyestä ja 1 m päässä raskaasta kappaleesta.

**2.27** (a) Massakeskipiste on korkeudella 0.92 m. (b) Osien potentiaalienergiat ovat  $U_A = 2.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} = 9.8 \text{ J}$  sekä  $U_B = 3.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1.2 \text{ m} = 35.28 \text{ J}$ . (c) Massakeskipisteen avulla laskettu potentiaalienergia on  $U = 5.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.92 \text{ m} = 45.08 \text{ J}$ . Tämä on sama kuin osien energoiden summa,  $U = U_A + U_B$ .

**2.28** (a) Massakeskipistenopeus on 0.12 m/s kevyemmän kappaleen liikkeen suuntaan. (b) Massakeskipisteen avulla laskettu liike-energia olisi  $0.5 \cdot 5.0 \text{ kg} \cdot (0.12 \text{ m/s})^2 = 0.036 \text{ J}$ . Tämä ei ole kuitenkaan systeemin liike-energia! (c) Kappaleiden liike-energiat ovat  $K_A = 2.25 \text{ J}$  ja  $K_B = 0.96 \text{ J}$ , joten systeemin liike-energia on  $K = K_A + K_B = 3.21 \text{ J}$ .

**2.29** (a) Kappaleilla täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärit. (b) Systeemin liikemäärä on vakio, joten kokonaisliikemäärä on myös törmäyksen jälkeen nolla. Niinpä kappaleiden nopeudet ovat törmäyksen jälkeenkin yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Elastiisessa törmäyksessä liike-energiakin on vakio, joten jos kappaleet liikkuvat suoralla, niiden vauhtien täytyy olla törmäyksen jälkeen samat kuin ennen törmäystä. Kappaleiden nopeusvektorit siis käännyvät ympäri. (c) Nytkin kappaleiden nopeudet ovat törmäyksen jälkeen samat mutta vastakkaisuuntainen. Täysin epäelastiisessa törmäyksessä kappaleet tarttuvat toisiinsa, joten kappaleiden täytyy jäädä törmäyksen jälkeen paikoilleen.

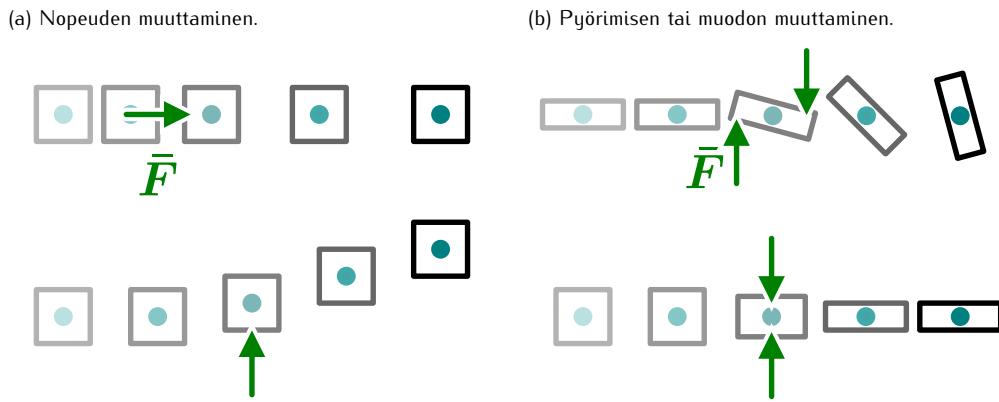


### 3 Voima ja työ

Energian ja liikemäärän käsitteet ovat tärkeitä kaikilla fysiikan osa-alueilla ja energian sekä liikemäärän säilymislait ovat yleispätevät. Mekaniikassa nämä lait voidaan kuitenkin muotoilla myös voiman käsitteen avulla Newtonin lakeina. Vaikka nykyään suuria säilymislakeja pidetään fysiikan peruslakeina, historiallisesti Newton muotoili nimeään kantavat lait ensin ja mekaniikassa säilymislait voidaan itse asiassa johtaa Newtonin laeista. Tässä luvussa tarkastellaankin mekaniikan lakeja voiman kautta. Voima on vuorovaikutuksia kuvaava suure, ja kuten edellisissä luvuissa opimme, vuorovaikutukset voivat muuttaa energiaa muodosta toiseen tai siirtää liikemäärää kappaleelta toiselle. Voiman avulla voidaankin suoraan määrittää, kuinka vuorovaiketus muuttaa kappaleiden energiaa ja liikemäärää. Voiman aiheuttamaa energian muutosta kuvaavaa suuretta kutsutaan työksi ja vastaava liikemäärän muutosta kuvaava suure on impulssi. Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- määritellä voima sekä sen avulla työ, impulssi ja teho
- selittää Newtonin lait sekä sanallisesti että matemaattisesti
- tunnistaa kappaleisiin vaikuttavat voimat ja piirtää vapaakkappalekuva
- määrittää vektoreiden komponentit sekä laskea vektoreita yhteen graafisesti
- ratkaista kappaleiden liike Newtonin lakien avulla
- määrittää konservatiivisen vuorovaikutuksen tuottama voima, kun potentiaalienergia tunnetaan
- määrittää muutokset kappaleen energiassa ja liikemäärässä työn ja impulssin avulla, kun kappaleeseen vaikuttava voima tunnetaan
- määrittää kappaleen tasapainotila suoraviivaisen liikkeen suhteen

Kuva 3.1: Voima kuvailee vuorovaikutusten suuruutta ja suuntaa. Voima voi vaikuttaa sekä kappaleen liikkeeseen että tilaan.



### 3.1 Voima liikkeen muuttajana

Usein mekaanikan ongelmia on helpoin ratkaista säilymislakien avulla, koska tällöin ei välttämättä tarvitse tietää täsmälleen miten prosessit tapahtuvat vaan lopputulos voidaan päättää suoraan alkutilanteesta. Esimerkiksi jos tiedetään, mistä kappale lähtee liikkeelle ja minne se päätyy, energiaperiaatteen avulla voi olla mahdollista päättää kappaleen loppunopeus tietämättä kappaleen tarkkaa rataa. Toisaalta monesti ollaan nimenomaisesti kiinnostuttu siitä, *miten* asiat tapahtuvat. Esimerkiksi jos kappaleen paikka ja sen kokemat vuorovaikutukset tunnetaan, voidaan haluta ennustaa, millaista rataa kappale kulkee. Tämä onnistuu Isaac Newtonin mukaan nimettyjen **Newtonin lakienv** avulla, sillä nämä lait kertovat miten vuorovaikutukset vaikuttavat kappaleiden liikkeeseen.

Newtonin laeissa vuorovaikutuksia kuvaava suure on **voima**. Voiman käsite on intuitiivisesti tuttu: Kun esimerkiksi työnnämme tai nostamme kappaleita, kohdistamme niihin voiman, joka *muuttaa niiden liikettä*. Jos pudotamme kappaleen, se on kiihyvässä liikkeessä kohti Maata, koska siihen vaikuttaa **painovoima**. Voimalla voi myös muuttaa kappaleiden ominaisuuksia kuten puristaa jousia tai taivuttaa rautalankaa uuteen muotoon. Kummassakin tapauksessa voimaa karakterisoi sekä suuruus — kuinka nopeasti kappale saadaan liikkeelle tai kuinka paljon jäykä kappale taipuu — että suunta — mihin suuntaan kappaleen nopeus muuttuu tai muoto taipuu. Voima on siis **vektori**. Voiman yksikkö on **newton (N)**.

Vaikka voiman käsite on intuitiivinen, sen täsmällinen fysikaalinen merkitys ei ole itsestäänselvä. Eräs tavallinen voimiin liittyvä harhaluulo on se, että voiman tuottaminen vaatii lihaksen tai moottorin kaltaisen laitteen. Tämä on ymmärrettävää, sillä voima liittyy liikkeeseen ja eläimet ja koneet ovat liikkuvat lihasten tai moottoreiden avulla. Ajatus on kuitenkin *vääriä*, sillä voimia voivat tuottaa myös elottomat kappaleet, jotka eivät itsestäänselvästi liiku. Jos puristamme jousen kokoon ja laitamme sen päälle kappaleen, jousi voi suoristuessaan työntää kappaleen liikkeelle. Tällöin jousi selvästikin kohdistaa kappaleeseen liikkeen muutoksen aiheuttavan voiman. Tai jos pääinvastoin pudotamme kappaleen jousen päälle, lükkuva kappale puristaa jousen kasaan ennen pysähymistään. Tällöin kappale kohdistaa jouseen muodonmuutoksen aiheuttavan voiman. Voiman tuottaminen ei siis vaadi lihaksia vaan kaikki kappaleet kohdistavat koskettaessaan toisiinsa voimia. Lihas- ja moottorien erikoisomaisuus onkin se, että ne pystyvät muuttamaan kemiallista *energiaa* mekaaniseksi energiaksi. Puhekielellä termejä energia ja voima käytetään sekaisin ja puhutaan esimerkiksi "vesivoimasta", kun tarkoitetaan virtaavan veden liike-energian hyödyntämistä. Fysiikassa voima ja energia toki liittyytä toisiinsa kuten tässä luvussa opitaan, mutta ne ovat silti aivan erilaiset suureet, joita ei pidä sekoittaa.

### Kokonaisvoima

Kappale voi vuorovaikuttaa samanaikaisesti useiden kappaleiden kanssa, jolloin kaikki nämä vuorovaikutukset voivat kohdistaa kappaleeseen voiman. Jos kappaleeseen kohdistuu useita samansuuntaisia voimia, ne vaikuttavat yhdessä voimakkaammin kuin yksinään. Esimerkiksi raskaan taakan nostaminen on sitä helpompaa mitä useampia nostajia on. Toisaalta jos kappaleeseen kohdistuu useita vastakkaisuuntaisia voimia, niiden vaikutus voi olla heikompi kuin yksittäisten voimien vaikutus. Tästä käy esimerkiksi vaikkapa käessä pideltävä esine, joka voidaan pitää paikoillaan kohdistamalla siihen ylöspäin suuntautuva voima, joka on yhtä suuri kuin esinettä alas päin vetävä painovoima.

Voimien yhteisvaikutus on täsmällisemmin seuraava: *usean voiman vaikutus kappaleen suoraviivaiseen liikkeeseen on sama kuin yhden voiman, joka saadaan laskemalla voimat vektorina yhteen*. Tätä voimien summaa kutsutaan kappaleeseen vaikuttavaksi **kokonaisvoimaksi**. Jos siis kappaleeseen vaikuttaa voimat  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  jne.,

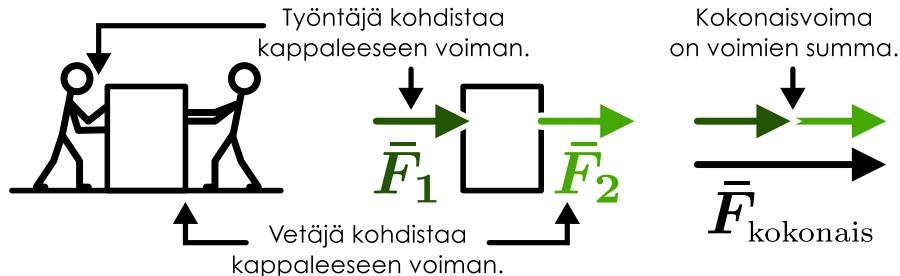
## VOIMA JA TYÖ

Kuva 3.2: Kappaleen liikkeen muutos riippuu siihen vaikuttavasta kokonaisvoimasta.

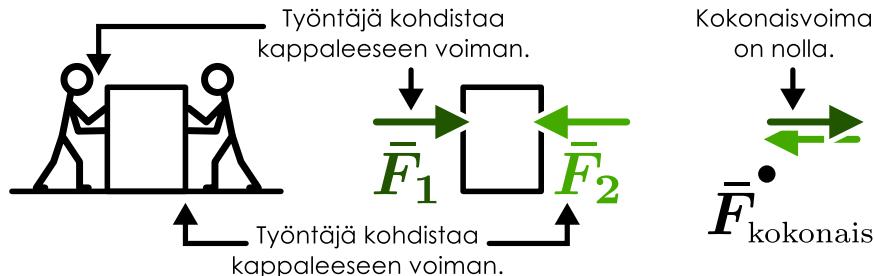
(a) Kappaleeseen vaikuttaa yksi voima, joka muuttaa sen liikettä.



(b) Usean voiman vaikutus kappaleen liikkeeseen on sama kuin näiden summan.



(c) Vastakkaiset yhtä suuret voimat kumoavat toisensa.



kokonaisvoima on

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = \sum_i \bar{F}_i. \quad (3.1)$$

Yksiulotteisessa tapauksessa tämä voidaan kirjoittaa skalaarikomponenttimuodossa

$$F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,1} + F_{x,2} + \dots = \sum_i F_{x,i}. \quad (3.2)$$

Tätä voimien yhteenlaskemisen periaatetta kutsutaan **voimien superpositioksi**. (Superpositio tarkoittaa kirjaimellisesti 'olla päälekkäin'. Fysiikassa superpositioperiaatteilla gleensä tarkoitetaan yhteenlaskusääntöjä.)

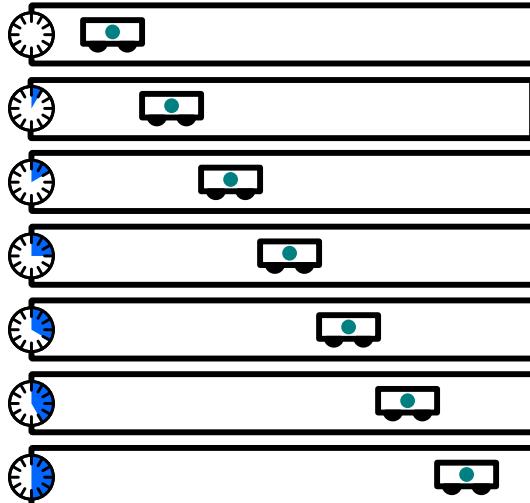
Vektorisuureena voiman suuruus on aina positiivinen. Kuitenkin jos esimerkiksi kappaleetta työnnetään koordinaatiston negatiiviseen suuntaan, voimavektori osoittaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan ja tällöin voiman *skalaarikomponentti*  $x$ -akselin suunnassa on negatiivinen. Jos siis kappaleeseen vaikuttaa monta samansuuntaista voimaa, voimat pyrkivät kaikki työntämään kappaleetta samaan suuntaan ja niinpä niiden yhteisvaikutusta kuvaava kokonaisvoima on *suurempi* kuin yksikään alkuperäisistä voimista. Matemaattisesti tämä ilmenee niin, että voimien skalaarikomponentit ovat kaikki joko positiivisia tai negatiivisia, jolloin niiden summa on itseisarvoltaan suuri. Sen sijaan jos voimat osoittavat eri suuntiin, ne pyrkivät työntämään kappaleita eri suuntiin ja yhteisvaikutusta kuvaava kokonaisvoima voi olla pienempi kuin yksikään sen muodostavista voimista. Tällöin joidenkin voimien skalaarikomponentit ovat positiivisia ja joidenkin negatiivisia ja niiden summa voi olla itseisarvoltaan kuinka pieni tahansa. Erityisesti jos voimien summa on nolla, niiden vastakkaisuuntiset vaikutukset ovat yhtä suuret eivätkä voimat muuta kappaleen liikettä *lainkaan*. Tällaisissa tapauksissa voimien sanotaan *kumoavan* toisensa. Huomaa kuitenkin, että tämä koskee vain voimien vaikutusta etenevään liikkeeseen. Vaikka kokonaisvoima olisi nolla, voimat voivat silti vaikuttaa esimerkiksi kappaleen pyörimiseen tai muotoon.



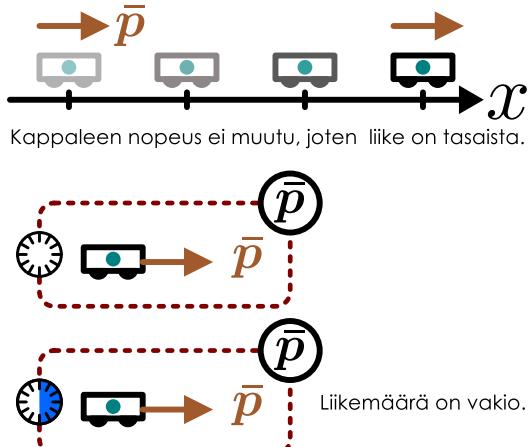
**3.1** Voiko kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima olla nolla, jos kappaleeseen kohdistuu (a) yksi, (b) kaksi, (c) kolme erisuuria voimaa, (d) kolme yhtä suurta voimaa?

Kuva 3.3: Jatkavuuden laki ilmaistuna sekä kappaleen liikkeen että liikemäären kautta. Jos kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla, kappaleen liikemääri ei muutu.

(a) Kuvasarja tasaisesti liikkuvan kappaleen liikkeestä.



(b) Liikediagrammi ja systeemin liikemääriä.



Jo liikemäärin säilymislain yhteydessä totesimme, että systeemin liike ei voi muuttua, ellei systeemiin vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia. Voiman käsitteen avulla voimme täsmennää tästä lakia: *jos systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten systeemiin kohdistama kokonaisvoima on nolla, systeemin liikemääri ei muutu*. Toisin sanoen systeemiin siis voi kohdistua ulkoisia vuorovaikutuksia, mutta jos ne kumoavat toisensa, kokonaisliikemääri ei muutu. Tätä tulosta kutsutaan Newtonin ensimmäiseksi laiksi eli **jatkavuuden laiksi**. Sen mukaan kappale, johon vaikuttava kokonaisvoima on nolla, jatkaa liikettään tasaisella nopeudella kuten kuussa 3.3. Modernissa fysiikkassa liikemäärin säilymislakia pidetään peruslakina ja jatkavuuden laki on sen seuraus, mutta historiallisesti jatkavuuden lain esitti Galilei jo ennen Newtonia ja liikemäärin käsitteen olemassaoloa.

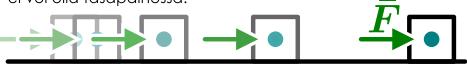
## Liikkeen tasapaino

Kuva 3.4: Liikkeen tasapaino.

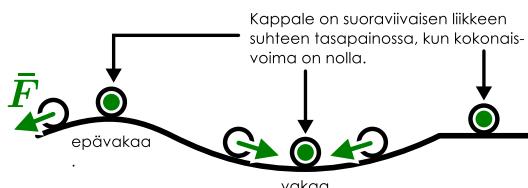
(a) Liikkuva kappale voi olla tasapainossa.



Kiintymässä liikkeessä oleva kappale voi olla levossa tai tasaisessa liikkeessä.



(b) Eriisia tasapainotiloja.



Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, kappaleen sanotaan olevan **tasapainossa** suoraviivaisen liikkeen suhteeseen. Arkikielessä tasapainolla tarkoitetaan yleensä tilannetta, jossa kappale pysyy paikoillaan kun siihen ei kosketa. Jos kappale pysyy paikoillaan, sen liikemääri on vakuotettu ja niinpä kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoimankin täytyy olla nolla. Fysiikaalisesti tasapaino on kuitenkin laajempi käsite, sillä myös tasaisessa liikkeessä olevaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla, joten *myös tasainen liike on tasapainotila* (kuva 3.4 (a)).

Jos tasapainossa oleva kappale on levossa, se pysyy paikoillaan. Tällöinkin voidaan erottaa erityyppisiä tasapainotiloja riippuen kappaleen käyttäytymisestä, jos se siirretään pois tasapainosta. **Vakaassa** eli stabiilissa tasapainossa kappale palaa takaisin tasapainopisteeseen itsestään. Tällainen tilanne on esimerkiksi kuopassa oleva pallo (kuva 3.4 (b)), joka vierii takaisin kuoppaan, jos sitä hieman siirretään. **Epämäärisessä** eli indifferentissä tasapainossa kappaleen kaikki läheiset tilat ovat tasapainotiloja, jolloin kappaleen siirtäminen aiheuttaa kappaleen asettumisen uuteen tasapainoon. Esimerkki tästä on pallo

vaakasuoralla pinnalla, joka jää paikoilleen uuteen kohtaan, jos sitä liikutetaan. **Epävakaassa** eli labiilissa tasapainossa kappaleen siirtäminen pois tasapainosta saa kappaleen etääntymään alkuperäisestä tasapainoasemastaan yhä kauemmas. Näin käy esimerkiksi mäen pääällä olevalle pallolle, joka vierii pois, jos se siirrytään pois täsmälleen mäen päältä.

Tasapainon käsite on fysiikassa yleinen, eikä se rajoitu vain kappaleiden liukkeeseen. Periaatteessa min-kä tahansa suureen voidaan sanoa olevan tasapainossa, jos sitä muuttavat tekijät kumoavat toisensa. Nyt määritellyn suoraviivaisen liikkeen tasapainon lisäksi määrittelemme myöhemmin vielä *pyörimislukkien* tasapainon, ja esimerkiksi lämpöopin yhteydessä käsitellään *termodynäamista* tasapainoa, jolla tarkoitetaan systeemin *tilan* tasapainoa eli tilannetta, jossa systeemin ominaisuudet kuten lämpötila eivät muutu.



**3.2** Missä seuraavista tilanteista olet tasapainossa ja miksi? (a) Seisot paikoillasi. (b) Rullalautailut suoraan vakiinopeudella. (c) Ponnistat maasta (et ole vielä ilmassa). (d) Olet hypännyt ilmaan.

Dynamiikan peruslaki

Kappaleen nopeus ja liikemäärä ovat siis vakioita, jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tämä kuitenkin tarkoittaa, että jos kappaleen nopeus ja liikemäärä muuttuvat, kappaleeseen täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima. Tämän kokonaisvoiman vaikutukseen kappaleen liikkeeseen kertoo täsmällisesti Newtonin toinen laki eli **dynamikan peruslaki**.

Totesimme jo aikaisemmin, että vuorovaikutuksen aiheuttamaa *kokonaismuutosta* kappaleen tai systeemin liikemäärässä kuvaan *impulssi*. Dynamikan peruslain mukaan *voima* kuvaaa liikemäärän muutoksen *nopeutta*. Täsmällisesti kappaleen liikemäärän muutosnopeus ajan suhteen on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva *kokonaivoima*,

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{p}}{dt}. \quad (3.3)$$

Tätä voidaan pitää voiman *määritelmänä*.

Tavallisesti kappaleiden massa on vakio, jolloin liikemääärän määritelmän (2.46) perusteella dynamiikan peruslaki voidaan kirjoittaa myös muotoihin

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{kokonais}} = m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = m\bar{\mathbf{a}}. \quad (3.4)$$

Tämä laki siis sanoo, että kappaleeseen vaikuttava voima muuttaa kappaleen nopeutta eli antaa sille kiertyvyyden. Erityisesti  $x$ -suunnassa voidaan kirjoittaa skalarikomponenteilla

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dt} = ma_x. \quad (3.5)$$

Kühytvyadden ja voiman välineen verrannollisuuskerroin on kappaleen inertia, mikä jälleen ilmentää sitä tosiseikkaa, että massiivisten kappaleiden liikettä on vaikea muuttaa.

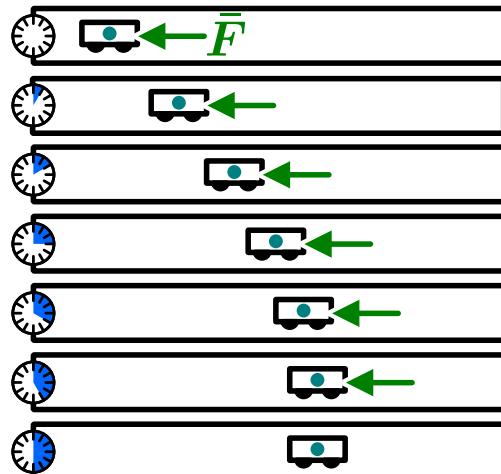
Yhtälö (3.3) antaa meille myös mahdollisuuden määritellä voiman yksikkö täsmällisesti. Jos yhden kilogramman massaiseen levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa yhden newtonin vakiovoima sekunnin ajan, kappale saa liikemäärän  $1 \text{ kgm/s}$ . Näin voidaan ilmaista voiman yksikkö SI-järjestelmän perusyksiköiden avulla,

$$N = [F] = \frac{[p]}{[t]} = \frac{\text{kgm/s}}{\text{s}} = \text{kgm/s}^2. \quad (3.6)$$

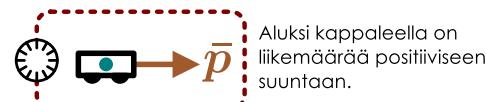
Dynamikan peruslakia sovellettaessa on ehdottoman tärkeää huomata, että kyseessä on vektorihtälö, jossa mukaan kappaleen *liikemäärä muuttuu aina siihen suuntaan, johon kokonaivoima osoittaa* eli toisin sanoen kappaleen *kiilthyvyys osoittaa aina samaan suuntaan kuin kokonaivoima* (kuva 3.6). Jos kappaleeseen kohdistuu voima, joka osoittaa sen nopeuteen nähdien vastakkaiseen suuntaan, kappaleen vauhti pienenee eli nopeus- ja liikemäärävektorit lyhentyvät. Jos kappaleeseen kohdistuu voima, joka osoittaa sen nopeuden suuntaan, kappaleen vauhti kasvaa. Moniuotteisessa tapauksessa on vielä sekä mahdollisuus, että kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa kohtisuoraan kappaleen liikettä vastaan, ja tällöin kappaleen nopeus *kääntyy*, mikä on sekä kiihtyvää liikettä. Voi tavallaan ajatella, että voima venyttää, puristaa tai kääntää liikemäärävektoria.

Kuva 3.5: Dynamiikan peruslaki.

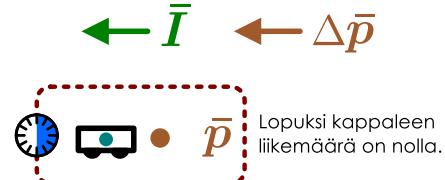
(a) Voima muuttaa kappaleen liikettä.



(b) Voima tuottaa impulssin.

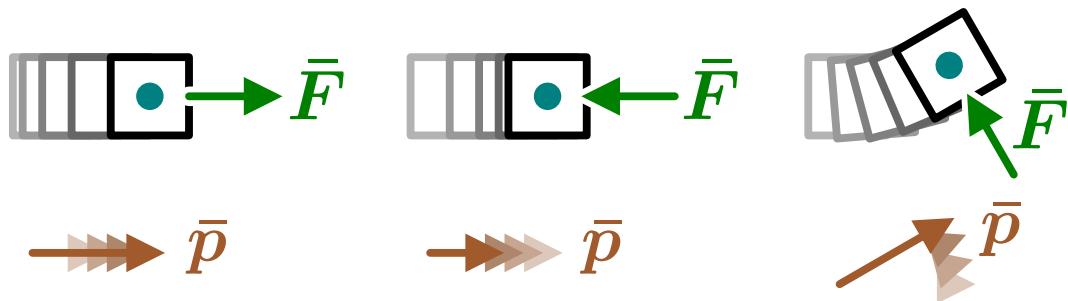


Kappaleeseen vaikuttava voima muuttaa liikemäärää. Liikemäärän kokonaismuutos on yhtä suuri kuin voiman antama impulssi.



Kuva 3.6: Kappaleen nopeus ja liikemäärävektorit muuttuvat voiman osoittamaan suuntaan.

- (a) Liikkeen suuntainen voima pidentää liikemäärävektoria.  
 (b) Liikkeen suuntaan vastakkainen voima lyhentää liikemäärävektoria.  
 (c) Liikettä vastaan kohtisuora voima kääntää liikemäärävektoria.



3.3 Jos kappale liikkuu negatiiviseen  $x$ -suuntaan ja sen vauhti hidastuu, millainen kokonaivoima kappaleeseen täytyy kohdistua? Jos voima on vakio sekä suunnaltaan että suuruudeltaan ja se vaikuttaa edelleen kappaleen pysähdyttäjä, miten kappale liikkuu? Vertaa tilannetta glosspain heitettyyn kappaleeseen.

## 3.2 Voiman ja vastavoiman laki

Newtonin kaksi ensimmäistä lakiä käsittelevät voimien vaikutusta kappaleiden liikkeeseen, mutta kolmas Newtonin mukaan laki käsitteliävoimia itseään. Se ei siis ole dynamiikkaa vaan *vuorovaikutusten luonnetta* koskeva laki. Tämä laki liittyy jo aikaisemmin tutkimiaamme liikemääriän säilymislakiin.

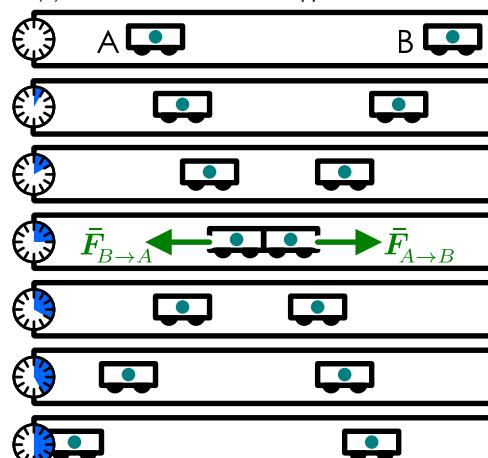
Liikemääriän säilymislain mukaan minkään systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemääriä. Sisäiset vuorovaikutukset voivat kyllä muuttaa systeemin osien liikettä — esimerkiksi kuvaassa 3.7 on esitetty kappaleiden A ja B törmäys, jossa kappaleet vuorovaikuttavat ja niiden nopeus muuttuu. Kuitenkin jos systeemiin valitaan molemmat kappaleet, systeemin kokonaislukemääri täytyy pysyä törmäyksessä vakiona. Edelleen, koska kappaleiden kokonaislukemääri on vakio, kappaleiden lukemäärien täytyy muuttua yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että kappaleiden välisen vuorovaikutukseen on pakko antaa kappaleille yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset impulssit yhtälön (2.76) mukaisesti.

Vaunujen törmätessä impulssin tuottaa vaunujen välinen kosketusvuorovaikutus, ja sitä voidaan kuvata impulssin sijaan myös voimien avulla. Vuorovaikutuksen kappaleisiin kohdistamat voimat muuttavat kappaleiden liikemääriä dynamiikan peruslain mukaisesti, ja koska kokonaislukemääri on tässä systeemissä *aina* vakio, kappaleiden lukemäärien on muututtava vastakkaisiin suuntiin *yhtä nopeasti*. Niinpä kappaleisiin kohdistuvien voimien on oltava *aina* suuruudeltaan yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset.

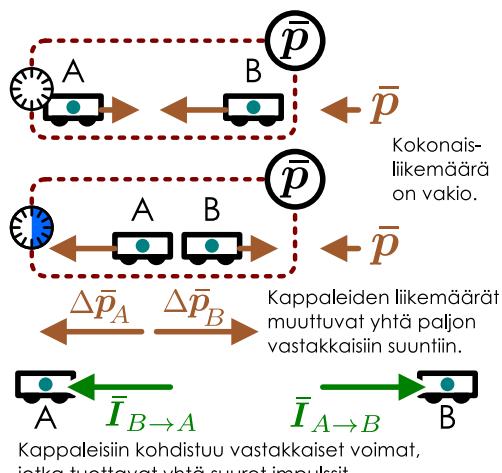
Tämä tulos ei riipu mitenkään siitä, millainen vuorovaikutus voiman tuottaa. Kahden kappaleen systeemissä kappaleiden välinen vuorovaikutus on *aina* systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka ei voi muuttaa systeemin kokonaislukemääriä. Niinpä edellinen vuorovaikutus pätee *kaikille* kahden kappaleen välisille vuorovaikuttaville. Ei ole myöskään mitään väliä, liikkuvatko vuorovaikuttavat kappaleet vai ovatko ne levossa. Toisin sanoen, jos

Kuva 3.7: Voiman ja vastavoiman laki.

- (a) Vuorovaikutus muuttaa kappaleiden liikettä.



- (b) Kokonaislukemääri ei muudu.

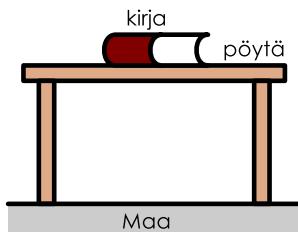


Kappaleisiin kohdistuu vastakkaiset voimat, jotka tuottavat yhtä suuret impulssit.

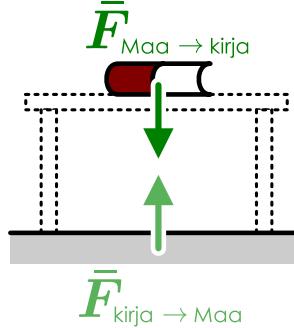
Kappaleisiin kohdistuu vastakkaiset voimat, jotka tuottavat yhtä suuret impulssit.

Kuva 3.8: Pöydällä olevan kirjan kokemien vuorovaikutusten voima-vastavoimaparit.

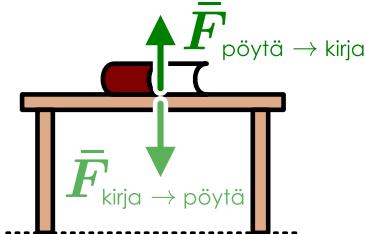
(a) Vuorovaikuttavat kappaleet.



(b) Gravitaatiovuorovaikutus.



(c) Kosketusvuorovaikutus.



kaksi kappaletta, A ja B, vuorovaikuttavat niin että kappaletta B kohdistaa vuorovaikutuksessa A:han voiman  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$ , vuorovaikutuksen täytyy kohdistaa kappaletta B yhtä suuri mutta vastakaissuuntainen voima eli ns. vastavoima

$$\bar{F}_{B \rightarrow A} = -\bar{F}_{A \rightarrow B}. \quad (3.7)$$

Tämä on Newtonin kolmas laki eli **voiman ja vastavoiman laki**.



**3.4** Jos jokaista voimaa kohti on aina olemassa toinen yhtä suuri mutta vastakaissuuntainen voima, miten mihinkään kappalettaan voi koskaan kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima?

Vastavoimien käsitettä on havainnollistettu kuvassa 3.8, jossa tarkastellaan pöydällä olevaa kirjaa. Kirjaan kohdistuu Maan vetovoima, joka pyrkii vetämään kirjaa kohti Maata. Kirja ei kuitenkaan putoa, koska pöydän pinta kannattelee sitä. Pöytä kohdistaa siis kirjaan kosketusvoiman, joka kumoaa painovoiman ja pitää kirjan tasapainossa. Tilanteessa kirjaan vaikuttaa siis kaksi vuorovaikutusta: gravitaatio kirjan ja Maan välillä sekä kosketus kirjan ja pöydän välillä. Kumpikin vuorovaikutus kohdistaa voiman sekä kirjaan että vuorovaikutuksen toiseen osapuoleen.

Gravitaatiovuorovaikutus kohdistaa kirjaan alas päin osoittavan voiman ja *Maahan ylöspäin osoittavan voiman*. Tämä Maahan kohdistuva voima on painovoima, jolla *kirja vetää Maata puoleensa*. Se on suuruudeltaan yhtä suuri kuin kirjaan kohdistuva painovoima mutta sen suunta on ylöspäin. On ehkä hiukan yllättävä, että pieni kirja kohdistaa suuren Maahan yhtä suuren voiman kuin Maa kirjaan. Tässä on kuitenkin kyse siitä, että vaikka kirja luo ympärilleen hyvin heikon painovoimakentän, Maan koko valtava massa tuntee tämän kentän ja yhteensä kirja kohdistaa Maahan kokonaisvoiman, joka on yhtä suuri kuin Maan voimakkaan painovoimakentän pieneen kirjaan kohdistama kokonaisvoima. Edelleen jos kirja pudotetaan, vaikka kumpaankin kappalettaan kohdistuu yhtä suuri voima, havaitsemme muutoksen vain kirjan liikkeessä, koska Maan inertia on niin suuri. Kuten kärpänen ei saa rekkaa liikkelle, koska rekan inertia on niin suuri, myöskaan kirja ei saa Maata liikkelle.

Kirjan ja pöydän välisen kosketusvuorovaikutus kohdistaa kirjaan voiman, jonka suunta on ylöspäin, ja pöytään yhtä suuren voiman, jonka suunta on alas päin. Toisin sanoen kirja *painaa pöytää alas päin*. Jos pöytä on jäykki ja kirja on kevyt, tätä ei juurikaan huomaa, mutta jos oikean pöydän päälle pinoaa paljon lastia, voi helposti huomata pöydän taipuvan. Tässä ilmiössä on kyse pöytään kohdistuvan voiman vaikutuksesta pöydän muotoon, ja mitä suurempi voima pöytää painaa alas päin, sitä enemmän pöytälevy taipuu.

Edellisessä esimerkissä voima ja vastavoima -pareja olivat siis Maahan ja kirjaan kohdistuvat gravitaatiovuorovaikutuksen voimat sekä pöytään ja kirjaan kohdistuvat kosketusvuorovaikutuksen voimat. On tavallinen väärinkäsitys ajatella voiman ja vastavoiman lain tarkoittavan samaan kappaletseen kohdistuvia toisensa kumoavia voimia, mutta näin ei suinkaan ole, sillä esimerkissä kirjaan kohdistuvat ja toisensa tasapainottivat voimat olivat kirjaan kohdistuva painovoima sekä kirjaan kohdistuva kosketusvoima. Nämä ovat siis *samaan kappaletseen kohdistuvia eri vuorovaikutusten tuottamia voima*. Vastavoiman laki sen sijaan puhuu aina *eri kappaaleisiin* kohdistuvista voimista, jotka ovat seurausta *samasta kappaaleiden välisestä vuorovaikutuksesta*.



**3.5** Mitkä ovat seuraavien voimien vastavoimat? (a) Voima jolla heität palloa. (b) Voima jolla maa vetää sinua puoleensa. (c) Voima jolla maapinta kannattelee sinua.

### 3.3 Voimien graafinen analyysi

#### Vapaakappalekuva

Jos systeemissä on useita vuorovaikuttavia kappaleita, kaikkiin kappaleisiin kohdistuvien voimavektoreiden piirtäminen yhteen kuvaan johtaa helposti hyvin monimutkaiseen ja vaikeasti tulkittavaan kuvaan. Kuitenkin jokaisen kappaleen liikkueeseen vaikuttavat vain kyseiseen kappaleeseen kohdistuvat voimat, joten kappaleiden liikkeen analysoimiseksi pitää pystyä erottelemaan mikä voima vaikuttaa mihinkin kappaleeseen. Tämä on usein helppointa **vapaakappalekuvan** avulla. Vapaakappalekuva on diagrammi, jossa systeemin jokainen yksittäinen kappale erotetaan omaksi kuvakseen ja kuhunkin kuvaan merkitään kaikki *kyseisen kappaleeseen* vaikuttavat voimat mutta ei muihin kappaleisiin vaikuttavia voimia. Nimitys "vapaakappale" viittaa siihen, että tässä esityksessä kappale piirretään erilleen kaikista muista kappaleista. Kappale ei siis ole fysikaalisesti "vapaa" siinä mielessä, että se vuorovaikuttaa muiden kappaleiden kanssa ja siihen kohdistuu vuorovaikutusten tuottamia voimia. Piirroksessa kappaleet kuitenkin piirretään toisistaan erilleen, jotta olisi selvää mihin kappaleeseen mikäkin voima vaikuttaa.

Voimat piirretään vapaakappalekuvaan nuolin, joiden pituus kuvaaa voiman suuruutta ja suunta voiman vaikuttussuuntaa. Jos kappaleen muodolla tai asennolla ei ole merkitystä, kappaleita voi kuvata pelkkänä massakeskipisteenä. Tällöin kaikki nuolet piirretään lähtemään kappalesta esittävästä pisteestä. Jos halutaan huomioida myös voimien vaikutus kappaleen asentoon, voimat piirretään niin että joko voimaa kuvavaan nuolen kärki tai kanta asetetaan pisteesseen, jossa voiman arvioidaan vaikuttavan. Suoraviivaisen liikkeen kannalta ei ole väliä, minne nuolet piirtää, mutta esimerkiksi pyörimislukkien kannalta tällä on merkitystä, joten voimat on syötä opettelu piirtämään oikeisiin paikkoihin. Tästä on myös se hyöty, että jo pelkästään voimavektorin paikan perusteella voi päätellä, mihin vuorovaikutukseen kukin voima liittyy. Kappaleet esimerkiksi vuorovaikuttavat kosketusvuorovaikutukseen kautta niissä paikoissa, joissa ne ovat kiinni toisisissa kappaleissa. Niinpä esimerkiksi maassa seisovan ihmisen jalkoihin täytyy kohdistua maanpinnan jalkoihin kohdistama kosketusvoima.

Kuvassa 3.9 on piirretty vapaakappalekuvat kuvaamaan ylöspäin suuntautuvaa hyppyä. Tilanteessa hyppääjä vuorovaikuttaa maanpinnan kanssa kosketusvoiman kautta ja koko Maapallon kanssa gravaation kautta. Jos olemme kiinnostuneet hyppääjän liikkeestä, periaatteessa riittää piirtää vapaakappalekuva vain hyppääjälle. Monimutkaisessa tilanteessa on kuitenkin helppo unohtaa jokin tilanteessa vaikuttava voima, joten on aina suositeltavaa piirtää vapaakappalekuviot *kaikille* prosessiin osallistuville kappaleille. Niinpä tässäkin kuvassa on piirretty vapaakappalekuvat sekä hyppääjälle että Maalle. Kaikkein tavanomaisin virhe vapaakappalekuvioiden laadinnassa on vastavoimien unohtaminen, ja siksi kannattaa myös aina varmistaa, että löytää jokaiselle piirtämälle voimalle vastavoiman. Esimerkiksi kuvassa 3.9 vastavoimaparit on yhdistetty katkoviivalla, mutta tämän voi tehdä myös luetteloimalla. Jos jollekin voimalle ei löydyy vastavoimaa, tämä on varma merkki siitä, että jokin voima on jäänyt piirtämättä.

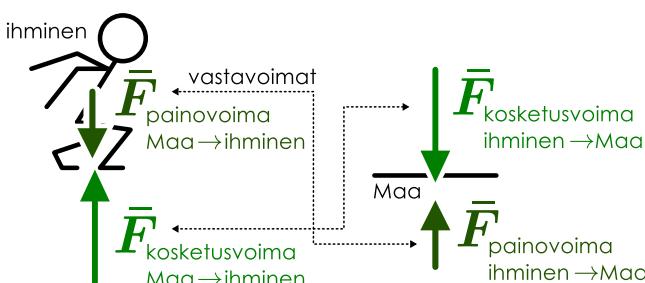
Vapaakappalekuvan piirtämisenä perusajatus on jälleen ongelman pilkkomisen mahdollisimman pieniin osiin ja näiden osien systemaattinen ratkaiseminen. On helpompi etsiä kappale kerrallaan kaikki vuorovaikutukset, joihin jokainen kappale osallistuu, kuin usean kappaleen systeemin kaikki vuorovaikutukset. Merkitsemällä kuvan kappaleeseen kohdistuvien vuorovaikutusten voimat, vapaakappalekuva toimii myös visuaalisen muistin ja hahmottamisen apuvälineenä, josta voi helposti nähdä, millaisia voimia kappaleeseen vaikuttaa. Kun kappaleeseen kohdistuvat voimat on löydetty, kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima voidaan määritellä piirtämällä vektoreita kuvavien nuolten summa *graafisten yhteenlaskusääntöjen* kautta. Näin voidaan arvioida ilman varsinaisia laskuja, mihin suuntaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima suuntautuu

Kuva 3.9: Yksinkertaisen tilanteen analyysi vapaakappalekuvan avulla. Hyppäävään ihmiseen kohdistuu painovoima ja maanpinnan kosketusvoima.

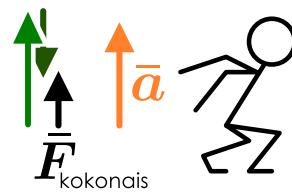
(a) Vuorovaikuttavat kappaleet.



(b) Hyppääjän ja Maan vapaakappalekuvat. Vastavoimaparit on yhdistetty nuolin.



(c) Kokonaisvoima on voimien summa ja kiilthyvyys kokonaisvoiman suuntaisen.



## VOIMA JA TYÖ

tai onko se mahdollisesti nolla. Esimerkiksi kuvan 3.9 (c) perusteella hyppääjään kohdistuva kokonaisvoima osoittaa ylöspäin, koska kappaletta ylös työntävä kosketusvoima on suurempi kuin alas vetävä painovoima. Edelleen, koska kokonaisvoima osoittaa ylöspäin, hyppääjän täytyy olla kiihtyvässä liukkeessa ylöspäin. Myös käanteinen päättely on mahdollinen: jos esimerkiksi tiedetään, että kappaletta on tasapainossa, siihen vaikuttavan kokonaisvoiman on oltava nolla. Tällöin vapaakappalekuvan avulla voidaan päätellä kuinka pitkiä ja minkä suuntaisia voimia kuvaavien nuolten pitäisi olla, jotta niiden summa olisi nolla.



**3.6** Onko kuvan 3.9 hyppääjä ponnistamassa vai laskeutumassa takaisin maahan hypyn jälkeen? Perustele tarkastelemalla erikseen kumpaakin tapausta!

Vaikka vapaakappalekuvan avulla voidaan päätellä kappaleen kiihtyvyys, vapaakappalekuvaan ei kuulu piirtää muita vektoreita kuin voimia. Toki voi olla hyödyllistä piirtää myös esimerkiksi kappaleen nopeus tai kiihtyvyysvektori samaan kuvaan, mutta sekaannusten välittämiseksi muut kuin voimavektorit on syytä piirtää selvästi erilleen kappaleesta. Vapaakappalekuvan perusteella usein määritetään kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima, ja jos kuvaan on merkitty muitakin suureita kuin voimia, voi helposti käydä niin, että tulee laskettua yhteen eri suureita. Fysiikassa ei kuitenkaan koskaan voi laskea yhteen suureita, joilla on eri yksiköt. Esimerkiksi nopeus- ja voimavektoreiden yhteenlaskussa ei olisi mitään järkeä.

Myös kokonaiselle systeemille tai useasta osasta koostuvalle kappaleelle voidaan piirtää vapaakappalekuvan kaltainen voimadiagrammi, jossa näkyvät kaikki systeemiin kohdistuvat voimat. Tällöin riittää kuitenkin piirtää ainoastaan systeemiin vaikuttavien *ulkoisten vuorovaikutusten* voimavektorit, koska systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi vaikuttaa systeemin liukkeeseen, kuten liikemäärään säilymislain yhteydessä todettiin.



**3.7** Ajatellaan kuvan 3.9 hyppääjä jaetuksi jalkoihin ja muuhun kehoon. Millaisen voiman jalat kohdistavat kehoon? Millaisen voiman keho kohdistaa jalkoihin? Millainen kokonaisvoikutus näillä voimilla on koko hyppääjän liukkeeseen? Millä voimalla on suurin vaikutus hyppääjän massakeskipisteen nopeuteen?

### Vapaakappalekuvan laatimininen

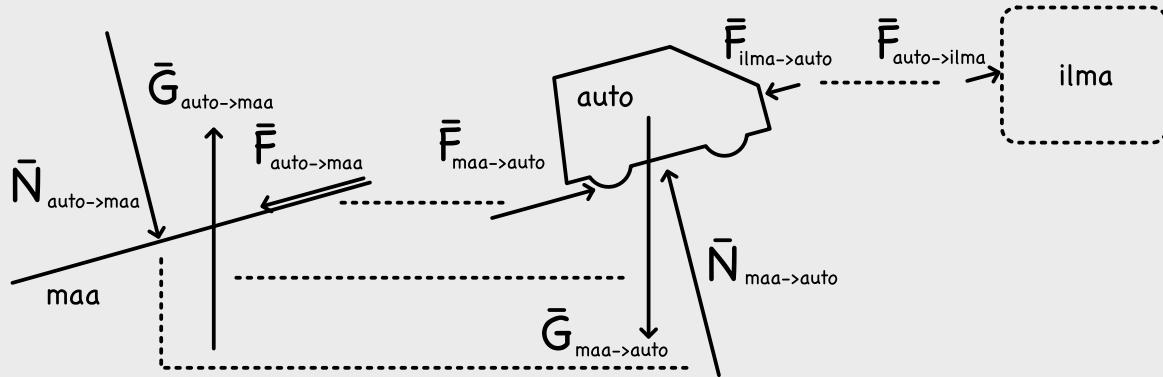
1. Piirrä erikseen kappaletta, jonka vapaakappalekuva halutaan piirtää.
2. Tunnista *ulkoiset vuorovaikutukset*, jotka kappaletta kokee. Kaikilla kosketuspinnilla voi vaikuttaa normaali- ja kitkavoima. Yleensä kappaleisiin vaikuttaa myös painovoima. Myöhemmin tutustutaan muihinkin vuorovaikutuksiin kuten nosteeseen ja sähkömagneettisiin vuorovaikutuksiin, jotka myös voivat kohdistaa kappaleeseen voiman.
3. Päättele jokaiselle vuorovaikutukselle, mihin suuntaan sen tuottama voima osoittaa ja mihin kohtaan vuorovaikutus kohdistuu. Piirrä jokaista voimaa kuvaava nuoli, joka osoittaa voiman vaikutussuuntaan ja jonka kärki tai kanta on voiman vaikutuspisteessä. Jos mahdollista, ryitä päätellä myös voimien keskinäiset suuruudet ja piirrä nuolet sitä pidemmiksi mitä suurempaa voimaa ne kuvaavat.
4. Nimeä voimia kuvaavat nuolet (vektorit). Jos esimerkiksi kappaletta A vuorovaikuttaa kappaletta B kanssa, voit nimetää vuorovaikutuksen kappaletseen A kohdistaman voiman  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$ .
5. Jos systeemissä on useita kappaleita, joille täytyy piirtää vapaakappalekuvat, toista vaiheet 1. – 4. kullekin kappaletta.
6. Merkitse jokaiselle voimalle, mikä on sen vastavoima. Voit tehdä tämän esimerkiksi yhdistämällä voima-vastavoimaparit katkoviivoin tai listaamalla parit. Muista, että voima ja vastavoima kohdistuvat aina eri *kappaleisiin*. Mikään vuorovaikutus ei voi tuottaa voimaa vain yhteen kappaletseen, joten jokaisella voimalla täytyy olla vastavoima. Tämän vaiheen tarkoitus on tarkistaa, ettei mitään voimia ole unohtunut.
7. Jos mahdollista, päättele voimien suhteelliset suuruudet kappaleten liikkeen reunaehtoiista. Esimerkiksi jos kappaletta liikkuu suoralla, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy osoittaa tämän suoran suuntaan. Erittäin jos kappaletta on paikoillaan, kokonaisvoiman on oltava nolla.
8. Voit piirtää kuhunkin kappaletseen kohdistuvaa kokonaisvoimaa ja kappaleten kiihtyvyyttä kuvaavat nuolet vapaakappalekuvan viereen, mutta älä piirrä niitä varsinaiseen vapaakappalekuvaan, sillä siihen on tarkoitus merkitä ainoastaan vuorovaikutusten kappalettiin kohdistamat voimat.

## esimerkki 3.1

## Vapaakappalekuva

**Auto ajaa loivaa mäkeä ylös kasvattaan vauhtiaan. Ilmanvastus on merkittävä. (a) Piirrä autolle vapaakappalekuva. (b) Etsi kaikille autoon kohdistuville voimille vastavoimat ja piirrä nekin kuvaan.**

**SUUNNITELMA** Päätellään ensin autoon kohdistuvat voimat. Painovoima vetää autoa suoraan alas päin. Koska auto ei kuitenkaan vajoa maan sisään, sen renkaisiin täytyy kohdistua maanpinnan kosketuksen tuottama voima, joka työntää autoa ylöspäin kohtisuorassa pintaan vasten. Koska auto liikkuu ylämäen suuntaan, ilmanvastuksen täytyy osoittaa liikettä vastaan eli alamäkeen (ellei ole hyvin voimakas myötätuuli, mutta oletetaan auton liikkuvan ilmaa nopeammin maan suhteen). Auton renkaisiin kohdistuu vierimisvastus, joka myös osoittaa auton liikettä vastaan. Lisäksi koska auton vauhti kasvaa, sillä täytyy olla kiihtyvyyttä ylämäen suuntaan. Tämän kiihtyvyyden se saa siitä, että moottori pyörittää renkaita, jotka maanpintaa vasten kitkan avulla ponnistaen työntävät autoa ylämäen suuntaan. Renkaathan pyörivät niin pisin, että ne tavallaan yrityvät työntää maanpintaa kulkusuuntaan nähdien taaksepäin, jolloin maanpinta työntää autoa eteenpäin.



**RATKAISU** Piirretään vapaakappalekuva autolle. Merkitään painovoimaa  $\bar{G}_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}}$ , koska maa kohdistaa painovoiman autoon. Samoin merkitään maanpinnan kosketuksen tuottamaa autoa kannattelevaa voimaa  $\bar{N}_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}}$ , ja renkaisiin kohdistuvaa voimaa, joka työntää autoa ylämäkeen,  $\bar{F}_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}}$ . Todellisuudessa nämä voimat kohdistuvat auton kaikkiin renkaisiin, mutta piirretään yksinkertaisuuden vuoksi vain yksi nuoli kuvaamaan kummankin voimen kokonaisvaikutusta. Täsmällisessä tarkastelussa on väliä, minne voimanuolet piirretään, mutta haluamme nyt piirtää mahdollisimman yksinkertaisen mallin, jossa tämä tarkkuus riittää.

Jätetään vierimisvastusta kuvava nuoli piirtämättä erikseen. Vierimisvastus olisi myös maanpinnan renkaisiin kohdistama pinnan suuntainen voima, mutta koska kuvassa on jo yksi tällainen voima, voimme ajatella, että vierimisvastuskin sisältyy voimaa  $\bar{F}_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}}$ . Näin kuvasta tulee yksinkertaisempi.

Piirretään kuitenkin ilmanvastus erikseen näkyviin, koska se syntyy ilman ja auton välisestä vuorovaikutuksesta eikä maan ja auton. Merkitään sitä  $\bar{F}_{\text{ilma} \rightarrow \text{auto}}$ . Koska autolla on kiihtyvyyttä ylämäen suuntaan, ilmanvastusta kuvavaan nuolen täytyy olla selvästi lyhyempi kuin ylämäen suuntaan osoittavan voimanuolen.

Kaikkien voimien vastavoimat löytyvät, kun vaihdetaan niiden alaindekseissä sanojen paikkoja. Toisin sanoen esimerkiksi maan autoon kohdistaman painovoiman  $\bar{G}_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}}$  vastavoima on auton maahan kohdistama painovoima  $\bar{G}_{\text{auto} \rightarrow \text{maa}}$ . Koska tämä voima kohdistuu maahan, sitä ei missään nimessä saa piirtää auton kuvaan vaan sitä varten kuvaan on lisättävä uusi kappale, maa, johon maahan kohdistuva painovoima piirretään. Yhdistetään voima-vastavoimapari vielä katkoviivalla.

Maahan kohdistuu myös voima  $\bar{N}_{\text{auto} \rightarrow \text{maa}}$ , jolla auton renkaat painavat maata (tämä voima tuottaa renkaanjäljet, jos auto ajaa pehmeässä maastossa), sekä voima  $\bar{F}_{\text{auto} \rightarrow \text{maa}}$ , jolla renkaat työntävät maanpintaa auton kulkusuuntaan nähdien taaksepäin (tämä voima viskoo irtonaista maata taaksepäin, jos renkaat jäävät pehmeässä maastossa sutiamaan).

Ilmanvastus on auton ja ilman välinen vuorovaikutus, joten se kohdistaa voimia autoon ja ilmaan. Niinpä lisätään kuvaan myös kappale kuvaamaan ilmaa, ja siihen kohdistuu ilmanvastusvoima  $\bar{F}_{\text{auto} \rightarrow \text{ilma}}$ . Tämä on se voima, jolla liikkuva auto työntää ilmaa pois tieltään.

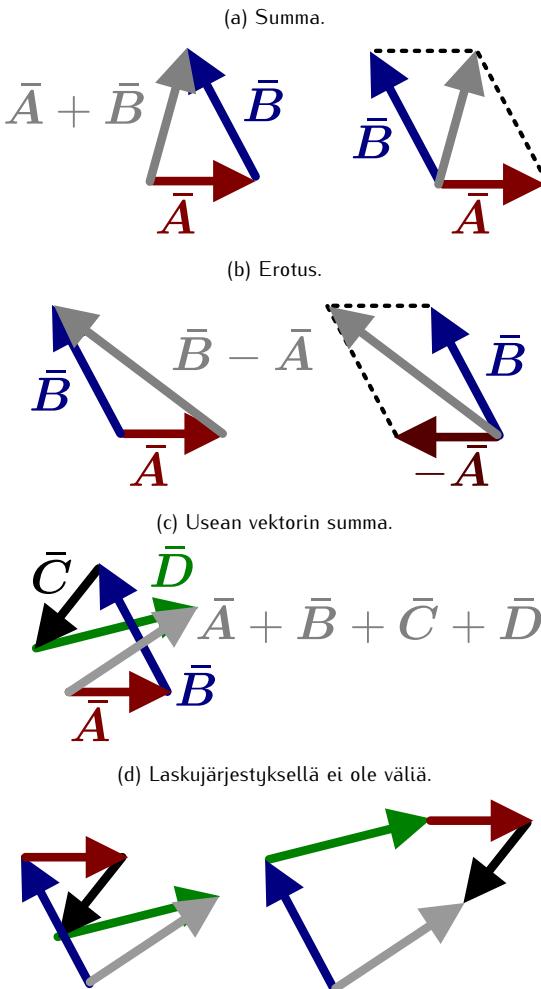
**ARVIOINTI** Kaikille autoon kohdistuville voimille löydettiin vastavoimat kuten pitääkin, ja kaikkia voima-vastavoimapareja kuvavat nuolet ovat yhtä pitkät ja vastakkaisuuntiset. Voimanuolten mittakaava vaikuttaa myös järkevältä. Auton paino on varmasti siihen kohdistuvista voimista suurin, sillä autoa on paljon helpompi liikuttaa maanpinnan suunnassa kuin nostaa ylöspäin.

## Vektorien graafinen yhteenlasku

Vapaakappalekuvaan nuolin piirrettyjen voimavektoreiden summa kuvaa kappaleeseen vaikuttavaa kokonaisvoimaa, ja Newtonin toisen lain mukaisesti kappaleen kiihtyvyys on verrannollinen tähän kokonaisvoimavektoriin. Vapaakappalekuvan graafinen tapa esittää vektoreita onkin hyvä tapa määrittää kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoimavektori.

Vektoreiden ollessa yhdensuuntaisia vektoreiden yhteenlasku onnistuu yksinkertaisesti laskemalla *saman-suuntaisten* vektoreiden pituudet yhteen ja vähtämällä niistä *vastakkaisuuntaisten* vektorien yhteenlaskettu pituus. Tähän perustuu myös vektorien skalaarikomponenteilla laskeminen, ja teknikka perustuu yksinkertaisesti siihen, että yhdessä ulottuvuudessa vektoreilla on vain kaksi mahdollista suuntaa. Kolmiulotteisessa avaruudessa vektoreilla on kuitenkin äärettömästi mahdollisia suuntia ja kaksi vektoria eivät yleensä ole yhdensuuntaiset. Vektoreiden ollessa *erisuuntaiset* vektoreiden suunnat onkin erikseen huomioitava. Tämä on mahdollista sekä graafisesti (geometrisesti) että algebrallisesti (analyyttisen geometrian keinoin). Nyt tarkastelemme graafista tapaa, joka on yleensä paras tekniikka tilanteiden hahmottamiseen ja arvioiden tekemiseen. Luvussa 4 perehdytään algebrallisiin vektorilaskennan menetelmiin, joita tarvitaan tarkemmassa laskennassa.

Kuva 3.10: Vektorien graafisia laskusääntöjä.



Nuolin piirretty vektorit lasketaan graafisesti yhteen siirtämällä vektorit peräkkäin niin, että kunkin vektoria kuvavaan nuolen pituus ja suunta pysyy muuttumattomana. Asettamalla kaksi vektoria  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$  niin, että nuolen  $\bar{B}$  kanta on samassa pisteessä kuin nuolen  $\bar{A}$  kärki, summavektoria  $\bar{A} + \bar{B}$  esittää nuolen  $\bar{A}$  kannasta nuolen  $\bar{B}$  kärkeen piirretty nuoli, kuten kuvassa 3.10 (a) on esitetty. Toinen tapa laskea vektorien summa on asettaa vektorien kannat samaan pisteesiin ja piirtää suunnikas, joka sivut ovat nämä vektorit. Tällöin summavektoria kuvaa suunnikkaan lävistäjä, joka lähtee alkuperäisten vektorien kantapisteestä ja päättyy suunnikkaan vastakkaiseen kulmaan.

Vektoreita voidaan myös vähtää toisistaan. Tällöin negatiivisena esitettävä vektori yksinkertaisesti käännetään ympäri ennen yhteenlaskua. Itse asiassa vektorien erotuslaskun merkitys onkin se, että ensin vähennettävä vektori kerrotaan luvulla  $-1$ , jolloin vektoria kuvava nuoli käännyt.

$$\bar{B} - \bar{A} = \bar{B} + (-\bar{A}) = \bar{B} + (-1)\bar{A}. \quad (3.8)$$

Tämä on esitetty kuvassa 3.10 (b).

Graafisesti voidaan todeta myös, että vektorien yhteenlaskussa pätee vaihdantalaki eli yhteenlaskettavien järjestystä saa muuttaa loppuloksen muuttumatta

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A} \quad (3.9)$$

kuten skalaarienkin yhteenlaskussa. Tämä on melko ilmeistä suunnikkaan perusteella esitetyn yhteenlaskusäännön avulla, koska summattavat vektorit ovat symmetrisessä asemassa tässä laskutavassa. Vähennyslaskussa laskujärjestyksellä kuitenkin on väliä, kuten skalaareilakin,

$$\bar{A} - \bar{B} = -(\bar{B} - \bar{A}) \neq \bar{B} - \bar{A}. \quad (3.10)$$

Samaan tapaan monta vektoria voidaan summata yhteen asettamalla ne peräkkäin yksi toisensa jälkeen, jolloin vektorien summa on ensimmäisen summattavan nuolen kannasta viimeisen kärkeen piirretty nuoli. Tässäkään tapauksessa summaukseen järjestyksellä ei ole merkitystä. Rüppumatta järjestyksestä, johon vektorit asetellaan, seuraamalla vektorien merkitsemää reittiä kulkien aina yhden vektorin kannasta kärkeen päättyään aina samaan loppupisteesiin.

Jos yhteen lasketaan siirtymävektoreita  $\Delta\vec{r}$ , kuvassa 3.10 (d) esitetty erilaiset järjestykset kuvaavat erilaisia *reittejä*. Minkä tahansa reitin voi ajatella muodostuvan pienten peräkkäisten siirtymien yhdistelmänä, ja kokonaissiirtymä reitin alkupisteestä loppupisteesiin saadaan reitin muodostavien siirtymävektoreiden summana. Jos vaihdamme siirtymien järjestyksen saamme tietenkin erilaisen reitin. Kuitenkin koska vektorien yhteenlaskussa järjestyksellä ei ole väliä, tällä tavalla muodostettu uusi reitti päättyy samaan pisteesiin kuin alkuperäinen reitti.

Laskettaessa yhteen voimavektoreita ei kuitenkaan ole olemassa mitään sääntöä, missä järjestyksessä nämä voimat pitäisi laskea yhteen, sillä kaikki voimat kohdistuvat kappaleeseen samanaikaisesti. Niinpä onkin fysiikaalisesti järkevää ja suorastaan välttämätöntä, että vektorien yhteenlaskussa järjestyksellä ei ole väliä. Voimavektorit voi siis laskea yhteen eli graafisessa ratkaisussa asettaa peräkkäin missä tahansa järjestyksessä eikä loppuloksesta saatava kokonaisvoima siitä muutu.

Erityisesti jos kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla, vektoriita kuvaavat nuolet muodostavat peräkkäin asetettuina kuvion, jossa viimeisen vektorin kärki on samassa pisteessä kuin ensimmäisen vektorin

kanta. Toisin sanoen *joko* vektoreita kuvaavat nuolet ovat vastakkaissuuntaiset ja eri suuntiin osoittavien nuolien yhteispituus on yhtä suuri *tai* nuolet muodostavat umpinainen silmukan. Jälkimmäisessä tapauksessa yhdenkään vektorin ei välttämättä tarvitse olla vastakkaissuuntainen minkään toisen vektorin kanssa vaan myös erisuuntaiset vektorit voivat summautua nollaksi.



**3.8** (a) Missä tapauksessa kahden vektorin summan pituuksien summa  $A + B$  on yhtä suuri kuin niiden pituuksien summa  $|\bar{A} + \bar{B}|$ ? (b) Onko mahdollista, että  $|\bar{A} + \bar{B}| = |\bar{A}|$  vaikka  $\bar{B}$  ei ole nollavektori? Jos on, keksi esimerkki jossa näin on.

## Vektorien jako komponentteihin

Vektoreiden yhteenlaskun periaatetta voidaan käyttää myös käänkesti vektorien yhdistämisen sijaan niiden hajottamiseksi osiin. Jos esimerkiksi ystäväsi rupustaa taulua seinälle ja sinun pitäisi antaa ohjeita taulun saamiseksi oikeaan kohtaan, on todennäköisesti molemille helpompaa käyttää ohjeissa suuntaa ylös–alas sekä vasen–oikea kuin neuvoo siirtämään taulua viistoon tietty matka tiettyyn suuntaan. Näin siksi, että jotkut suunnat kuten pysty- ja vaakasuunta ovat usein erityisasemassa ja helppo hahmottaa. Esimerkiksi pystysuunta määritellään sen mukaan mihin suuntaan painovoima vaikuttaa, ja vaakasuunta taas on tästä vastaan kohtisuora suunta. Fysiikailesti taulun siirtäminen askeleittain pysty- ja vaakasuunnissa tarkoittaa sitä, että siirtymä jaetaan pysty- ja vaakasuuntasiin osiin. Aivan vastaavasti mikä tahansa muukin vektorisuure kuten nopeus, liikemäärä tai voima voidaan jakaa osiin eli **vektorikomponentteihin** tai lyhyesti vain komponentteihin.

Komponenttijakoa on havainnollistettu kuvassa 3.11 (a), jossa vektorit  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$  on jaettu komponentteihin vaaka- ja pystysuunnissa, joita on merkitty alaindekseillä  $x$  ja  $y$ . Kuvassa vektori  $\bar{A}$  on valmiiksi vaakasuuntainen, joten sen  $x$ -suuntainen komponentti on vektori itse,  $\bar{A}_x = \bar{A}$ , ja  $y$ -suuntainen komponentti on nolla,  $\bar{A}_y = \bar{0}$ .

Vektori  $\bar{B}$  sen sijaan osoittaa viistoon, joten sen komponentit eivät ole nollia eivätkä sama kuin vektori itse. Kuten kuvasta nähdään, komponentit osoittavat yhtä pitkälle pysty- ja vaakasuunnissa kuin mitä vektori itse ulottuu ja niiden summa on alkuperäinen vektori itse

$$\bar{B}_x + \bar{B}_y = \bar{B}. \quad (3.11)$$

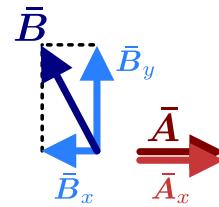
Vektorikomponentti  $\bar{A}_x$  ja skalaarikomponentti  $A_x$  lüttivät toisiinsa mutta eivät ole sama asia. Vektorikomponentti on nimensä mukaisesti *vektori* ja skalaarikomponentti on *skalaari*. Jos esimerkiksi vektorin  $x$ -vektorikomponentti osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan, vektorin  $x$ -skalaarikomponentti on sama kuin vektorikomponentin pituus,  $A_x = |\bar{A}_x|$ . Jos vektorin  $x$ -vektorikomponentti osoittaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan, vektorin  $x$ -skalaarikomponentti on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin vektorikomponentin pituus mutta *negatiivinen*,  $A_x = -|\bar{A}_x|$ . Matemaattisesti tämä voidaan esittää  $x$ -suuntaisen yksikkövektorin  $\hat{i}$  avulla

$$\bar{A}_x = A_x \hat{i}. \quad (3.12)$$

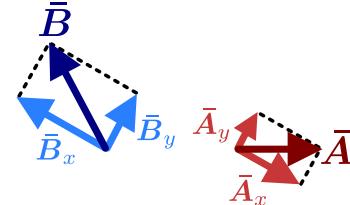
Komponenttijaon ei tietenkään tarvitse tapahtua juuri pysty- ja vaakasuunnissa, vaan mitkä tahansa suunnat voidaan valita komponenttijaon perustaksi. Esimerkiksi tarkasteltaessa kappaleita kaltevalla tasolla on usein kätevää valita koordinaatiston akselit tason pinnan suuntaisesti ja pintaan nähdien kohtisuoraan. Tällöin vektorin jako komponentteihin on tietkin erilainen kuin jaon tapahtuessa pysty- ja vaakakomponentteihin, kuten kuvassa 3.11 (b) nähdään. Kuitenkin riippumatta siitä missä suunnissa vektorin jako komponentteihin tehdään, komponenttien summan pitää aina olla alkuperäinen vektori yhtälön (3.11) mukaisesti.

Kuva 3.11: Vektorien jako komponentteihin.

(a) Vaaka- ja pystykomponentit.

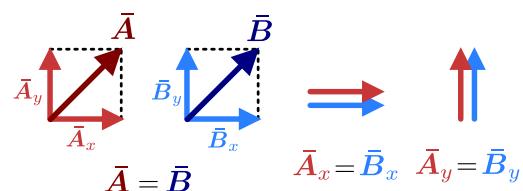


(b) Jaon voi tehdä missä suunnassa tahansa.

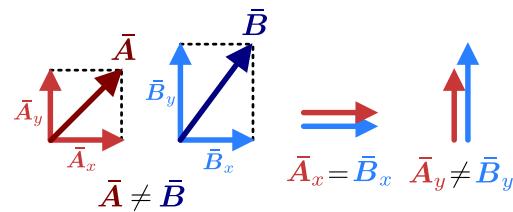


Kuva 3.12: Komponenttijaon yksikäsiteisyys.

(a) Samanlaisten vektoreiden komponenttit.



(b) Erilaisten vektoreiden komponenttit.



## VOIMA JA TYÖ

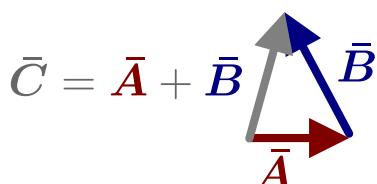
Ja huomaa myös, että vaikka vektorin voi jakaa komponentteihin äärettömän monella tavalla valitsemalla koordinaatiston akseleille eri suunnat, koordinaatiston valinnan jälkeen vektori voidaan jakaa komponentteihin koordinaattiakselien suunnissa *vain yhdellä tavalla*. Toisin sanoen kun koordinaatisto on valittu, vektoreiden komponenttijako on yksikäsitteinen. Tämän ominaisuuden ansiosta vektorien yhtäsuuruuden voi tarkistaa myös komponenttien kautta. Kaksi vektoria ovat samat jos ja vain jos niiden *kaikki* komponenttit ovat samat (kuva 3.12). Toisin sanoen  $\bar{A} = \bar{B}$  on totta täsmälleen silloin, kun  $\bar{A}_x = \bar{B}_x$  ja  $\bar{A}_y = \bar{B}_y$  (ja kolmessa ulottuvuudessa lisäksi  $\bar{A}_z = \bar{B}_z$ ).



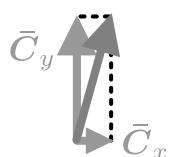
**3.9** Erääseen kappaleeseen vaikuttaa kaksi voimaa,  $\bar{F}_A$  ja  $\bar{F}_B$ . Voimalla A on komponentti 1.5 N positiiviseen x-suuntaan ja komponentti 1.1 N negatiiviseen y-suuntaan. Voiman B pituus on 2.0 N ja voimavektori osoittaa xy-koordinaatistossa yläviistoon vasemmalle niin, että voimavektorin ja x-akselin välinen kulma on  $150^\circ$ . Kuinka pitkät ovat kokonaisvoiman x- ja y-komponentit ja mihin suuntaan ne osoittavat?

Kuva 3.13: Vektorien yhteenlasku komponenteittain.

(a) Graafinen yhteenlasku.

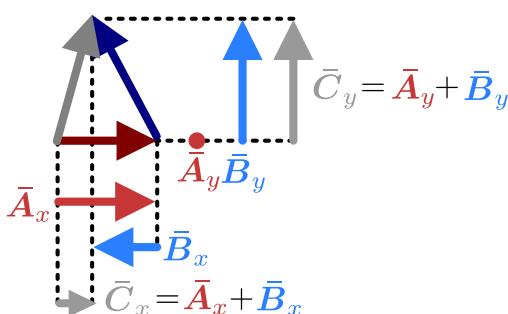


(b) Summan komponentit.



$$\bar{C} = \bar{C}_x + \bar{C}_y$$

(c) Komponenttien summa.



meriksi kaikki x-komponentit ovat keskenään *yhdensuuntaisia* ja yhdensuuntaisten vektoreiden yhteenlaskussa pitää ainostaan huomioida osoittavatko vektorit samaan vai vastakkaiseen suuntaan.

Myös vapaakkappaleiden analyysi usein helpottuu jakamalla voimat pysty- ja vaakasuuntaisiin komponentteihin. Esimerkiksi jos kappaleen tiedetään liikkuvan vain vaakasuunnassa, sen kiilthyvyysvektorin on joko oltava nolla tai osoittettava vaakasuoraan. Tällöin kiilthyvyden pystykomponentti on välittämättä nolla ja myös kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman pystysuuntaisen komponenttin on oltava nolla, koska kappaleen kiilthyvyys osoittaa samaan suuntaan kuin sen tuottava kokonaisvoima.



**3.10** Kirjoita omien sanojen ohjeet vapaakkappaleiden piirtämiseen sekä vektoreiden yhteenlaskuun ja komponenttijakoon. Keksi esimerkki, jossa on kolme toistensa kanssa vuorovaikuttavaa kappaleetta, piirrä sille vapaakkappalekuvio, ja määritä kuvion avulla kuhunkin kappaleeseen kohdistuvaa kokonaisvoimaa kuvaava nuoli.

Myös laskutoimitukset usein helpottuvat huomattavasti, kun vektorit jaetaan ensin komponentteihin. Esimerkiksi vektoreiden yhteenlasku voidaan helposti tehdä komponenttien avulla kuvan 3.13 tapaan. Jos nimittäin merkitään vektorien  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$  summaa symbolilla  $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$ , voidaan tämä vektori jakaa usealla tavalla osiin. Ensinnäkin *summavektorilla* on komponenttijako

$$\bar{C} = \bar{C}_x + \bar{C}_y. \quad (3.13)$$

Toisaalta *summattavat vektorit* voidaan jakaa erikseen komponentteihin ja näiden komponenttien summan voi järjestellä uudelleen,

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B} \\ &= (\bar{A}_x + \bar{A}_y) + (\bar{B}_x + \bar{B}_y) \\ &= (\bar{A}_x + \bar{B}_x) + (\bar{A}_y + \bar{B}_y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tässä siis  $\bar{A}_x + \bar{B}_x$  on x-suuntainen vektori ja  $\bar{A}_y + \bar{B}_y$  on y-suuntainen vektori. Vektorin komponenttijako on kuitenkin yksikäsitteinen, joten on vain yksi tapa esittää summavektori  $\bar{C}$  x- ja y-suuntaisten komponenttien summana. Niinpä summan  $\bar{A}_x + \bar{B}_x$  on oltava vektorin  $\bar{C}$  x-komponentti eli sen täytyy olla sama vektori kuin  $\bar{C}_x$ . Samoin voidaan päättää y-suunnassa, joten

$$\bar{C}_x = \bar{A}_x + \bar{B}_x, \quad \bar{C}_y = \bar{A}_y + \bar{B}_y. \quad (3.15)$$

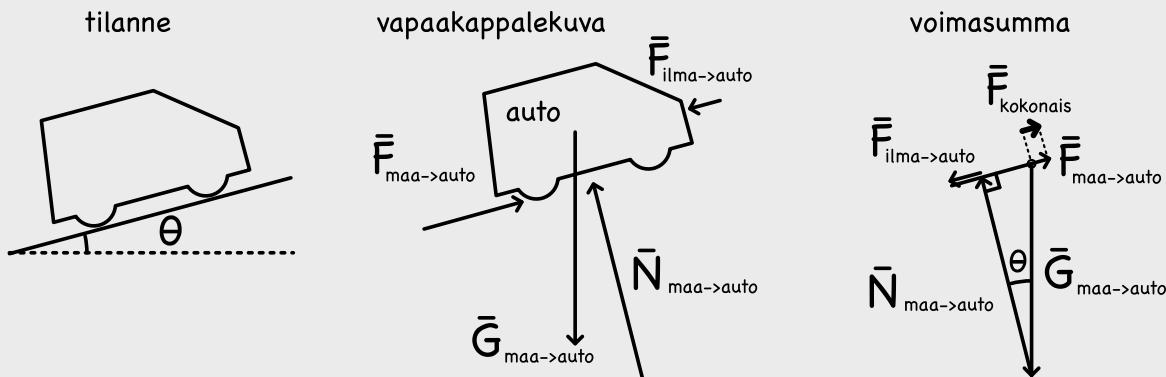
Tämä tarkoittaa, että vektorien summa voidaan laskea ja kamalla vektorit ensin komponentteihin, laskemalla sitten yhdensuuntaiset komponentit yhteen ja lopuksi yhdistämällä erisuuntaiset komponentit geometrisesti. Jos vektoriita on monta, tämä on helpoin tapa laskea, koska esimerkiksi kaikki x-komponentit ovat keskenään *yhdensuuntaisia* ja yhdensuuntaisten vektoreiden yhteenlaskussa pitää ainostaan huomioida osoittavatko vektorit samaan vai vastakkaiseen suuntaan.

## esimerkki 3.2

## Vektorien yhteenlasku

Auto ajaa loivaa mäkeä ylös. Mäen kaltevuuskulma on  $5^\circ$ . Auton massa on 980 kg. Maanpinta kannattelee autoa 9570 N kosketusvoimalla, renkaat työntävät autoa ylöspäin yhteensä 1070 N voimalla ja ilmanvastus vastustaa liikettä 60 N voimalla. Mikä on auton kiihtyvyys?

**TILANNE** Piirsimme auton vapaakkappalekuvan esimerkissä 3.1. Kopioidaan sieltä vain autoa kuvaava osuus tähän. Merkitään mäen kaltevuuskulmaa  $\theta = 5^\circ$ .



**SUUNNITELMA** Kiihtyvyuden aiheuttaa dynamiikan peruslain mukaisesti autoon kohdistuva kokonaisvoima,

$$a = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais}}, \quad (3.16)$$

ja tämä saadaan kaikkien autoon kohdistuvien voimien summana eli piirtämällä voimia kuvaavat nuolet peräkkäin. Lopuksi kokonaisvoimaa kuvaava nuoli voidaan lisätä kuvaan ensimmäisen summaan piirretyn nuolen kannasta viimeisen nuolen kärkeen osoittavana nuolena.

Nuolet voi piirtää mihin tahansa järjestykseen, mutta on kätevää piirtää ne niin, että kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio. Kolmion täytyy olla suorakulmainen, koska autolla ei voi olla merkittävää kiihtyvyyttä maanpinnan suuntaa vasten kohtisuoraan pintaan vasten ylöspäin. Muutenhan auto nousisi ilmaan tai vajoaisi maan sisään. Kolmion terävin kulma on sama kuin mäen kaltevuuskulma.

Kuvan perusteella kokonaisvoiman suuruus saadaan vähentämällä renkaiden tuottamasta työntövoimasta ilmanvastusvoima sekä painovoiman ja kosketusvoiman muodostaman kolmion lyhyemmän kateetin pituus. Tämä on järkevä, sillä renkaat työntävät autoa ylämäkeen kun taas ilmanvastus vastustaa liikettä ja painovoima vetää autoa alamäen suuntaan. Kolmion lyhyemmän kateetin pituus kertoo, kuinka voimakkaasti painovoima vetää autoa taaksepäin.

**RATKAISU** Kolmion hypotenuusan pituus on autoon kohdistuvan painovoiman suuruus

$$G_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}} = mg = 980 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 = 9600 \text{ N}. \quad (3.17)$$

Kolmion pidemmän kateetin pituus on likimain yhtä suuri, sillä se on autoa kannattelevan voiman suuruus,

$$N_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}} = 9570 \text{ N}. \quad (3.18)$$

Kolmion lyhyemmän kateetin pituus voidaan laskea trigonometrialla, ja se on

$$F_{\text{kateetti}} = G_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}} \sin \theta = 840 \text{ N}. \quad (3.19)$$

Näin ollen kokonaisvoiman suuruus on

$$F_{\text{kokonais}} = F_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}} - F_{\text{ilma} \rightarrow \text{auto}} - F_{\text{kateetti}} = 1070 \text{ N} - 60 \text{ N} - 840 \text{ N} = 170 \text{ N} \quad (3.20)$$

ja auton kiihtyvyys on

$$a = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais}} = \frac{170 \text{ N}}{980 \text{ kg}} = 0.17 \text{ m/s}^2 \quad (3.21)$$

**ARVIOINTI** Auton kiihtyvyys on siis pieni. Tavallisten autojen kiihtyvydet ovat putoamiskiihtyvyttä  $9.8 \text{ m/s}^2$  pienemmät, mutta tasaisella maalla nopeasti liikkeelle lähtevän auton kiihtyvyys voi olla selvästi yli  $1 \text{ m/s}^2$ . Tällaisen kiihtyvyden auto saisikin 1070 N työntövoimalla, jos ylämäkeen nostessa painovoima ei vetäisi autoa alamäen suuntaan.

## 3.4 Vuorovaikutuksiin liittyviä voimia

### Konservatiiviset voimat

Gravitaation tuottama voima eli painovoima osoittaa aina alas päin, sillä voimme määritellä suunnan "alas" tarkoittavan painovoiman vaikutussuuntaa. Vapaasti putoavan kappaleen liikkeessä tämä ilmenee niihin, että kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jossa kiihtyvyysvektori (1.27) osoittaa aina painovoiman vaikutussuuntaan eli alas päin. Toisaalta kuten luvussa 2 todettiin, painovoiman potentiaalienergia pienenee siirryttäässä alas päin, joten selvästikin putoava kappale pyrkii liikkumaan kohti pienenevää potentiaalienergiaa. Täsmällisemmin ilmaisten gravitaatiovuorovaikutus kohdistaa kappaleisiin voiman, joka osoittaa kohti pienenevää potentiaalienergiaa. Vastaavasti venytetty jousi pyrkii palaamaan tasapainopisteeseensa, joten jousi kohdistaa siihen kiinnitettyn kappaleeseen voiman, joka osoittaa aina kohti tasapainopistettä eli jousen potentiaalienergian minimiä. Tämä havainto pätee itse asiassa aina: *Konservatiivinen vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen voiman suuntaan, johon siirryttäässä vuorovaikutksen potentiaalienergia pienenee.* Todistamme seuraavaksi tämän väitteen ja tutkimme samalla sen merkitystä.

Määritellään ensin, mitä tässä tarkoitetaan potentiaalienergian muuttumisella. Tarkastellaan esimerkiksi painovoimakentässä liikkuva kappaletta, jonka massa on 1 kg ja määritellään positiivinen  $x$ -suunta ylöspäin. Jos kappale siirtyy ylöspäin yhden metrin,  $\Delta x = 1$  m, gravitaation potentiaalienergian muutos on  $\Delta U = mg\Delta x = 9.8$  J. Potentiaalienergian muutoksen suhde paikan muutokseen on siis  $\Delta U/\Delta x = mg = 9.8$  J/m. Toisaalta jos kappale liikkuu tämän matkan nopeudella  $v_x = 2.0$  m/s, tähän siirtymään kuluu aika  $\Delta t = \Delta x/v_x = 0.5$  s ja potentiaalienergian muutoksen suhde ajan muutokseen on  $\Delta U/\Delta t = v_x\Delta U/\Delta x = 19.6$  J/s. Toisin sanoen energia muuttuu ajan kullessa sitä nopeammin mitä enemmän energia muuttuu kappaleen siirtyessä ja mitä nopeammin kappale liikkuu. Täsmälleen samanlainen päätely toimii myös differentiaaleilla. Joten vaikka tarkasteltavat suureet eivät olisi vakioita kuten edellä, voimme aina kirjoittaa

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dU}{dx} = v_x \frac{dU}{dx}. \quad (3.22)$$

Kun puhumme suunnasta, jossa potentiaalienergia pienenee, tarkoitamme siis suuntaa johon liikuttaessa  $U$  pienenee kun paikkakoordinaatti  $x$  muuttuu. Jos tämä suunta on *positiivinen  $x$ -suunta*, tämä tarkoittaa sitä, että potentiaalienergia pienenee siirryttäässä positiviseen suuntaan. Toisin sanoen  $dU < 0$  J jos  $dx > 0$  m, jolloin  $dU/dx < 0$  J/m eli potentiaalienergian derivaatta paikan suhteeseen on *negatiivinen*. Graafisessa esityksessä tämä ilmenee siten, että potentiaalienergian kuvaaja on paikan funktiona laskeva käyrä, jossa derivaatan negativisuus näkyi negatiivisen tangentin kulmakertoimena. Vastaavalla päätelyllä derivaatta on *positiivinen* jos potentiaalienergia pienenee *negatiiviseen  $x$ -suuntaan* siirryttäässä, ja tällöin potentiaalienergian kuvaaja on nouseva käyrä.



**3.11** Miten edellä tarkastellun painovoimakentässä liikuvan kappaleen potentiaalienergia muuttuu ajan kullessa, jos kappaleen nopeus on 0.5 m/s alas päin? Mitkä ovat tällöin derivaattojen  $dU/dt$  ja  $dU/dx$  etumerkit? Miten suureiden etumerkit muuttuvat, jos positiivinen  $x$ -suunta valitaankin alas päin?

Tarkastellaan sitten kuinka kappaleen liike-energia muuttuu. Kun massa on vakio, liike-energian muutos riippuu vain kappaleen nopeuden neliön muutoksesta,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d(v_x^2)}{dt}. \quad (3.23)$$

Tässä esiintyvän nopeuden neliön derivaatan laskeminen onnistuu käyttäen yhdistetyn funktion derivaatan laskusääntöä  $\frac{d}{dt}[f(g(t))] = f'(g(t))g'(t)$ . Nimittäin valitsemalla ulkopuoliksi potenssin  $f(g) = g^2$  ja sisäfunktioksi nopeuden  $g(t) = v_x$  saamme yhdistetyksi funktiona nopeuden neliön,  $f(g(t)) = v_x^2$ , ja derivaatoiksi  $f'(g) = 2g$  sekä  $g'(t) = \frac{dv_x}{dt}$ . Niinpä laskussa tarvittava nopeuden neliön aikaderivaatta on

$$\frac{d(v_x^2)}{dt} = \frac{d}{dt}[f(g(t))] = 2v_x \frac{dv_x}{dt} \quad (3.24)$$

ja tämän perusteella liike-energian aikaderivaataksi saadaan

$$\frac{dK}{dt} = mv_x \frac{dv_x}{dt} = mv_x a_x. \quad (3.25)$$

Toisin sanoen koska liike-energia riippuu nopeuden neliöstä, sen muuttuminen ajan funktiona riippuu sekä kappaleen nopeudesta  $v_x$  että sen *kiihtyvyydestä  $a_x$* .



**3.12** Kappale, jonka massa on 1.000 kg, liikkuu nopeudella 3.000 m/s positiiviseen  $x$ -suuntaan. Kappaleen kiihtyvyys on vakio 0.500 m/s<sup>2</sup> negatiiviseen  $x$ -suuntaan. (a) Mikä on kappaleen liike-energian muutos 0.010 s aikana? (b) Mikä on liike-energian ja ajan muutoksen suhde  $\Delta K/\Delta t$ ? (c) Onko tulos sopusoinnissa yhtälön (3.25) kanssa?

Tarkastellaan sitten *kokonaisenergian* muuttumista sellaisessa systeemissä, johon tarkasteltava kappale sisältyy. Energian säilymislain yhteydessä opimme, että jos systeemissä vaikuttaa *ainoastaan konservatiivisia vuorovaikutuksia*, joiden yhteenlaskettu potentiaalienergia  $U(x)$  riippuu tarkasteltavan kappaleen paikasta  $x$ , systeemin *mekaaninen energia on vakio*. Tämä tarkoittaa sitä, että mekaaninen energia *ei muutu ajan kuluessa* eli sen derivaatta ajan suhteeseen on nolla,

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0. \quad (3.26)$$

Nyt sijoittamalla täähän edellä johdetut potentiaalienergian ja liike-energian derivaatat (3.22) ja (3.25) saadaan

$$mv_x a_x + v_x \frac{dU}{dx} = 0, \quad (3.27)$$

ja supistamalla tästä pois nopeus  $v_x$  sekä siirtämällä potentiaalitermi yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle

$$ma_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.28)$$

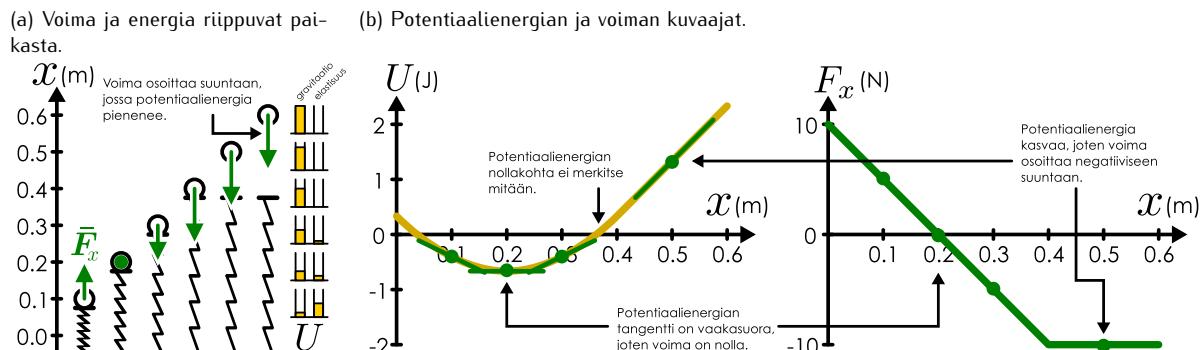
Mutta dynamiikan peruslain (3.5) mukaisesti massan ja kiihtyvyyden tulo on sama kuin kappaleeseen kohdistuva *kokonaisvoima*. Niinpä olemme päättelleet seuraavan tuloksen: jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman  $x$ -skalaarikomponentti on sama kuin systeemin potentiaalienergian  $x$ -derivaatan vastaluku. Erityisesti jokaisen konservatiivisen vuorovaikutuksen voima saadaan derivoimalla kyseisen vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa,

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.29)$$

Voima on siis verrannollinen potentiaalienergian derivaatan vastalukoon ja tämä derivaatta kuvaaa potentiaalienergian muuttumista *siirryttäessä* (paikan funktiona). Derivaatan ollessa itseisarvoltaan suuri energia muuttuu paljon lyhyellä matkalla ja voima on suuri. Vastaavasti jos potentiaalienergia on vakio, derivaatta ja samoin voima on nolla. Jos derivaatta on positiivinen, miinusmerkistä johtuen voima on negatiivinen eli se osoittaa kohti negatiivista  $x$ -suuntaa — siis pieneneväntä potentiaalienergian suuntaan — ja päinvastoin jos derivaatta on negatiivinen. Toisin sanoen, jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivinen vuorovaiketus, jonka potentiaalienergia riippuu vain  $x$ -koordinaatista, tämä vuorovaiketus kohdistaa kappaleeseen *voiman, joka osoittaa pieneneväntä potentiaalienergian suuntaan ja on sitä suurempi mitä nopeammin potentiaalienergia muuttuu*.

Vaikka edellä tehtyjä pääteliä havainnollistettiin gravaation ja jousen avulla, tulos ei riippunut mitenkään siitä, millainen funktio potentiaalienergia  $U(x)$  on. Niinpä kappaleet käyttäytyvät täähän tapaan kokies-saan *minkä tahansa* konservatiivisen vuorovaikutuksen. Potentiaalienergiafunktiot voivat olla jokius hyvin monimutkaisia, mutta kappaleisiin vaikuttavat voimat vetävät niitä aina kohti pieneneväät potentiaalienergiaa. Kappaleet siis käyttäytyvät samaan tapaan kuin mäkeen asetettu pallo, joka pyrkii vierimään kohti kuopan pohjaa, jossa sen potentiaalienergia minimoituu. Itse asiassa analogia minkä tahansa potentiaalienergian ja mäen välillä on nüün hyvä, että fyysikot yleisesti kutsuvat potentiaalienergiafunktion minimejä *potentiaali-kuopiksi* tai *-kaivoiksi*, vaikkei tarkasteltavana olisikaan gravaatiovuorovaiketus eikä kappaleen korkeudella olisi asian kanssa mitään tekemistä.

Kuva 3.14: Vuorovaikutuksen potentiaalienergian ja voiman välinen yhteyks kuvaajin esitettyynä. Voima osoittaa kohti pieneneväntä potentiaalienergian suuntaa ja sen suuruus on verrannollinen potentiaalienergian kuvaajan tangentin kulmakertoimeen.



Kuvassa 3.14 on piirretty potentiaalienergia ja sitä vastaava voima paikan funktiona systeemissä, joka on samanlainen kuin esimerkissä 2.5: pystysuorassa liikkuvan kappaleen alla on jousi. Kappaleen ollessa jousta korkeammalla siihen vaikuttaa vain gravitaatio ja potentiaalienergian kuvaaja on suora. Liikkuessaan alas-päin kappale puristaa jousta, jolloin jouseen varastoituu elastista potentiaalienergiaa ja potentiaalienergian kuvaaja on paraabeli. Kun potentiaalienergia kasvaa ylöspäin siirryttääessä, positiiviseen  $x$ -suuntaan, voima osoittaa alas-päin eli voiman  $x$ -komponentti on negatiivinen. Jousen puristuessa potentiaalienergia saavuttaa *minimin*, jolloin voima on *nolla*. Tätä alempana potentiaalienergia kasvaa alas-päin siirryttääessä ja voima osoittaa ylöspäin, positiiviseen  $x$ -suuntaan. Potentiaalienergian minimi on kappaleen *tasapainopiste*, sillä tässä pisteessä kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla.

Kuvassa 3.14 esitettyssä tilanteessa kappale on tasapainossa pisteessä  $x = 0.2$  m, jolloin gravitaation ja jousen siihen kohdistamat voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Voiman  $x$ -komponentin kuvaaja leikkää tällöin  $x$ -akselin, koska voima on nolla. Tällöin potentiaalienergian kuvaajan tangentti on *vaakasuora* joten tasapainopiste on siis potentiaalienergian kuvaajan minimikohdassa. Tämä on vakaa tasapainotila, koska jos kappaletta siirretään alas-päin, jousivoima kasvaa suuremmaksi kuin painovoima ja se pyrkii työtämään kappaleen takaisin ylöspäin. Vastaavasti jos kappaletta siirretään ylöspäin, jousivoima pienenee ja painovoima pyrkii vetämään kappaleen takaisin alas-päin. Voimat pyrkivät siis tuomaan kappaleen takaisin tasapainoasemaan (vrt. pallo kuopassa). Aivan samalla tavalla vaakasuora potentiaalienergian kuvaaja esittää epämääristä tasapainotilaan (vrt. pallo vaakasuoralla tasolla) ja potentiaalienergian maksimi on epävakaa tasapainotila (vrt. pallo mäen huipulla).



**3.13** Miksi kuvassa 3.14 voiman kuvaaja muuttuu laskevasta suorasta vaakasuoraksi? Miten kappaleen kohemat vuorovaikutukset liittyvät tähän? Miten tämä ilmenee potentiaalienergian kuvaajassa?

Kirjoitetaan vielä edelliset päättelyt matemaattiseen muotoon. Vapaasti putoava kappale on yhtälön (1.27) mukaisesti tasaisesti kiihyvässä liikkeessä putoamiskiihyvyydyllä  $\bar{a} = \bar{g} = -g\hat{i}$ , jos positiivinen  $x$ -suunta valitaan ylöspäin. Newtonin toisen lain (3.3) mukaisesti siihen täytyy silloin vaikuttaa kokonaisvoima

$$F_x = ma_x = -mg, \quad (3.30)$$

joka vapaassa pudotuksessa johtuu ainostaan painovoimasta eli gravitaatiosta. Toisin sanoen kappaleeseen kohdistuvan painovoiman suuruus on suoraan verrannollinen putoamiskiihyvyyteen sekä kappaleen massaan. Koska putoamiskiihyvyys osoittaa alas-päin, myös painovoima osoittaa aina alas-päin.

Voima voidaan päättellä myös potentiaalienergiasta. Painovoiman potentiaalienergian arvo on  $U = mgx$ , kun  $x$ -suunta valitaan ylöspäin, joten tähän vuorovaikutukseen liittyvän voiman on oltava yhtälön (3.29) mukaan

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -mg. \quad (3.31)$$

Saatiin siis sama tulos kuin putoamiskiihyvyyden kautta pääteltiin, kuten tietysti pitikin. Gravitaatiovoimaa merkitään usein isolla "G"-kirjaimella eli symbolilla  $\bar{G}$ .



**3.14** Gravitaation potentiaalienergian arvo riippuu siiitä, minkä suhtein korkeutta mitataan eli tässä  $x$ -koordinaatin nollakohdasta. Gravitaatiovoiman suuruus ei kuitenkaan riipu nollakohdasta. Miten toinen suuresta voi riippua nollakohdasta ja toinen ei?

Tarkastellaan sitten jousen tuottamaa voimaa. Luvussa 2 todettiin, että elastista potentiaalienergiaa voidaan kuvata melko hyvällä tarkkuudella mallilla  $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ , (2.20). Potentiaalienergian lausekkeessa  $x_0$  on piste, jossa energia on minimissään, ja  $x - x_0$  on etäisyys tästä pisteestä. Esimerkiksi jousen tapauksessa  $x_0$  on jousen luonnollinen pituus ja  $x - x_0$  on jousen venymä. Tälläista potentiaalienergiaa vastaa voima

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_0). \quad (3.32)$$

Voima on siis suoraan verrannollinen venymään ja verrannollisuuskerroin on jousivakio  $k$ . Tämä tulos tunneataan **Hookeen laki**na.

Muotoa (3.32) olevaa voimaa, joka on suoraan verrannollinen poikkeamaan tasapainopisteestä, kutsutaan yleisesti *harmoniseksi voimaksi*. Jos potentiaalienergian minimipisteestä poiketaan negatiiviseen  $x$ -suuntaan, poikkeama  $x - x_0$  on negatiivinen, ja voima osoittaa positiiviseen suuntaan, koska lausekkeessa (3.32) on miinusmerkki. Vastaavasti jos poikkeama on positiiviseen suuntaan, voima osoittaa negatiiviseen suuntaan. Toisin sanoen *voima osoittaa aina kohti potentiaalienergian minimiä eli tasapainopistettä*. Tämän ominaisuuden vuoksi harmoninen potentiaali on hyvä malli lähes kaikille *vakaille tasapainopisteille*: jos kappaletta siirretään pois tasapainopisteestään eli potentiaalienergian minimistä, siihen vaikuttaa aina voima, joka pyrkii siirtämään kappaleen takaisin tasapainoon. Jos siirtymä on kyllin pieni, voimaa voidaan yleensä approksimoida harmonisen voiman lausekkeella (3.32).

Huomaa, että jousen tapauksessa yhtälö (3.32) kuvaaa voimaa, jonka *jousi kohdistaa sitä venytävään tai puristavaan kappaleeseen*. Jos esimerkiksi pystysuoran jousen pääällä on kappale, jousi puristuu ja kohdistaa kappaleeseen ylöspäin osoittavan voiman. Kappale puolestaan kohdistaa vastavoiman lain mukaisesti jouseen alas päin osoittavan voiman, joka puristaa joustaa kasaan. Nämä voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen, joten jouseen kohdistuvaa voimaa kuvaavat muuten sama lauseke (3.32) mutta ilman miinusmerkkiä.

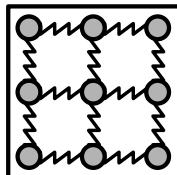


**3.15** Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä konservatiivisista voimista. Selitä erityisesti, miten voima ja potentiaalienergia liittyvät toisiinsa ja millainen voima ja energia gravitaatiolla ja jousilla on.

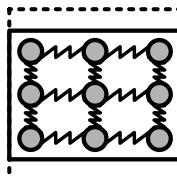
## Jännitysvoimat

Kuva 3.15: Elastisuus johtuu itsestään palautuvista muutoksista atomien paikoissa.

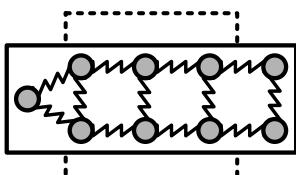
(a) Alkuperäinen muoto.



(b) Elastinen muodonmuutos.



(c) Plastinen muodonmuutos.



Kun poikkeamat tasapainosta ovat tarpeeksi pieniä, palauttava voima on useimmissa todellisissa tasapainoilmiöissä suoraan verrannollinen poikkeamaan kuten Hooken laissa. Tämä ei kuitenkaan enää päde jos poikkeamat ovat hyvin suuria — esimerkiksi jos jouta venytetään hyvin paljon se voi suoristua eikä enää toimi jousena. Näin käy siksi, että materiaalia muokkaavan voiman ollessa heikko materiaaleissa tapahtuu pieniä muodonmuutoksia, jotka pyrkivät palautumaan itsestään. Hyvin suuret voimat voivat kuitenkin aiheuttaa pysyviä muodonmuutoksia, jolloin jousi ei enää palaakaan alkuperäiseen muotoonsa. Voimia, jotka pyrkivät yhdessä muuttamaan kappaleen muotoa venyttämällä tai puristamalla, kutsutaan **jännitykseksi**. Jännitysvoimille käytetään usein symbolia  $\bar{T}$  (englanninkielisen termin 'tension' mukaan).

Ilmiön tarkka selitys vaatii melko syyvälistää ymmärrystä aineen mikroskooppisesta rakenteesta, mutta oleellisesti kyse on siitä, että künteissä aineissa atomit ovat järjestäytyneet säännöllisiin rakenteisiin ja kappaleiden muodonmuutokset vaativat tämän rakenteen muuttamista kuten Kuva 3.15. Jännityksen ollessa kyllin pieni atomit siirtyvät hieman lähemmäksi toisiaan tai kauemmaksi toisiaan, mutta aineen rakenne ei muutu. Niinpä atomien väliset vuorovaikutukset pyrkivät vetämään atomit takaisin alkuperäisille paikoilleen. Kuitenkin jos jännitys on tarpeeksi voimakas, atomien väliset sidokset voivat rikkoutua ja aineen rakenne muuttuu. Hauraan materiaalin tapauksessa tämä voi johtaa kappaleen hajoamiseen osiin, mutta on myös mahdollista, että atomit liittyvät välittömästi uusiin sidoksiin muodostaen uuden, *erilaisen rakenteen*. Tällöin materiaali ei rikkoudu mutta kappaleen muoto muuttuu. Koska samat atomit eivät ole enää sitoutuneet toisiinsa samoin kuin aikaisemmin, tällainen muodonmuutos ei palautu itsestään.



**3.16** Miten kuvan 3.14 potentiaalienergian ja voiman kuvaajat muuttuvat, jos jousivakio  $k$  kasvaa? Miten jousen jäykkyys tällöin muuttuu? Millainen voiman kuvaaja saadaan, jos jouta venytetään hyvin paljon?

Itsestään palautuvia aineen muodonmuutoksia, joita Hooken laki kuvailee yleensä hyvin, kutsutaan **elastisiksi** ja tälläissä tapauksissa vaikuttavaa jousivoimaa *elastiseksi voimaksi*. Pysyviä muodonmuutoksia puolestaan kutsutaan **plastisiksi**. Elastisen muodonmuutokset ovat reversiibeileitä prosesseja ja niihin sitoutunut potentiaalienergia vapautuu lähes täydellisesti kappaleen palatessa alkuperäiseen muotoonsa. Plastiset muodonmuutokset puolestaan ovat irreversiibeileitä ja niissä osa muodonmuutokseen tarvitusta energiasta väistämättä muuttuu epäjärjestyneeseen muotoon, pääasiassa lämpöenergiaksi.

Elastisuutta ja plastisuutta esiintyy kaikissa aineissa ja riippuu materiaalista, kuinka pienillä voimilla kappaleet ovat vielä elastisia. Esimerkiksi kuminauha on erittäin elastinen kun taas muovailuvalha on erittäin plastinen kappale. Monet kovat materiaalit kuten metallit ovat elastisia vaikka niitä puristettaisiin tai venytettäisiin melko suurellakin voimalla, koska niissä tapahtuvat muodonmuutokset ovat tavallisesti pienet. Vaikka siis kaikki kappaleet muuttavat jännitettyinä jonkin verran muotoaan, voidaan kovista materiaaleista tehtyjä kappaleita usein pitää likimain **jäykkinä** eli muotonsa säilyttävinä.



**3.17** Miksi teräsjousen muotoa on helppo muuttaa vaikka samasta teräksestä valmistettu tanko on hyvin jäykkiä?

Köydet, langat ja ketjut eivät ole jäykkiä puristettaessa, koska niiden rakenne sallii laskostumisen. Nekin kuitenkin vastustavat *venytystä*, ja usein yksinkertaisin tapa kuvata jännitettyä köyttä on olettaa, ettei sen

## VOIMA JA TYÖ

pituus muutu, vaikka sen päistä vedettäisiin. Köyden pituuden vakioisuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos köyden yksi pää siirtyy tietyn matkan, myös köyden toinen pää siirtyy yhtä pitkän matkan. Esimerkiksi jos köysi yhdistää kaksi kappaletta toisiinsa ja köysi pysyy jännitettyinä, kappaleten siirtymien täytyy aina olla yhtä pitkät. Tämä tarkoittaa samalla sitä, että myös kappaleten nopeuksien ja kiilthyvyysien täytyy olla yhtä suuret.

Lisäksi koska köyden massa on usein huomattavasti pienempi kuin muiden tarkasteltavien kappaleten, *massaton köysi* on hyvin yleisesti käytetty malli. Tarkastellaan tämän mallin merkitystä kuvan 3.16 esimerkin kautta, jossa laatikkoa nostetaan köydellä. Nostaja kohdistaa köyden yläpäähän voiman, joka vetää köyttä ylöspäin. Tämän vastavoima vetää *nostajaa* alaspäin. Köysi kohdistaa voiman myös *laatikkoon*, ja tämä voima vetää laatikkoa ylöspäin. Tämän vastavoima vetää köyttä alaspäin. Sekä köyteen että laatikkoon vaikuttaa lisäksi painovoima alaspäin.

Köyden ja laatikon roikkuessa paikoillaan niihin kumpaankin kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava nolla. Köyden laatikkoon kohdistaman voiman täytyy siis olla yhtä suuri kuin laatikon painovoima. Nostajan köyteen kohdistaman voiman puolestaan täytyy olla yhtä suuri kuin köyden painovoiman ja laatikon köyteen kohdistaman voiman summa. Jos köyden massa on pieni, köyden painovoima voidaan jättää huomioimatta ja tällöin *nostajan* köyteen kohdistaman voiman täytyy olla yhtä suuri kuin *laatikon* köyteen kohdistama voima.

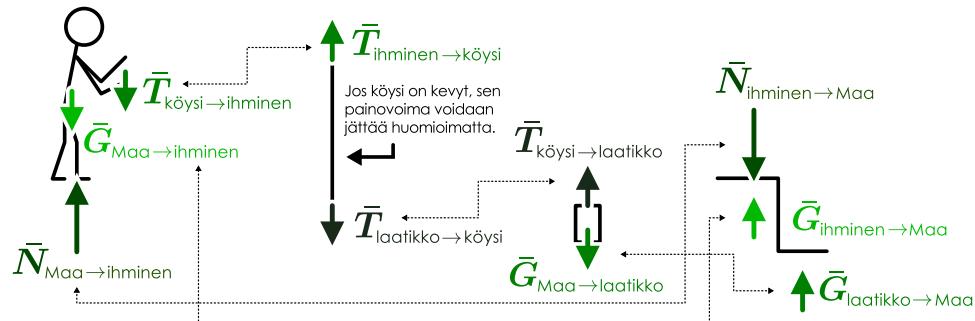
Jos nostaja kohdistaa köyteen *suuremman* voiman kuin laatikkoon kohdistuva painovoima, köysi ja laatikko saavat kiilthyvyden ylöspäin ja alkavat nousta. Köyden venymättömyys tarkoittaa tässä sitä, että laatikko nousee ylöspäin yhtä paljon kuin nostaja saa vedettyä köyttä ja sekä köysi että laatikko nousevat yhtä nopeasti. Erityisesti niillä on tällöin myös yhtä suuret kiilthyvydet. Kuitenkin koska laatikon massa on paljon suurempi kuin köyden, laatikkoon kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava paljon suurempi kuin köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman. Jos köyden massa on esimerkiksi yksi sadasosa laatikon massasta, köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava yksi sadasosa laatikkoon kohdistuvasta kokonaisvoimasta. Jos köyden massaa pidetään mitättömänä, köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava likimain *nolla* riippumatta köyden kiilthyvydestä. Niinpä tässäkin tapauksessa köysi kohdistaa laatikkoon yhtä suuren voiman kuin millä nostaja vetää köyttä. Tällaisissa tapauksissa sanotaankin, että köysi *välittää* nostajan voiman laatikkoon.

Kuva 3.16: Massaton köysi välittää siihen kohdistuvat voimat. Tämä tarkoittaa sitä, että jos köyttä vedetään sen päistä, köysi kohdistaa sitä vetäviin kappalettiin yhtä suuret voimat.

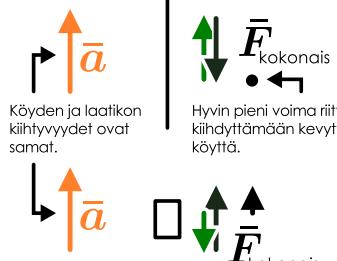
(a) Ihminen nostaa laatikkoa köydellä.



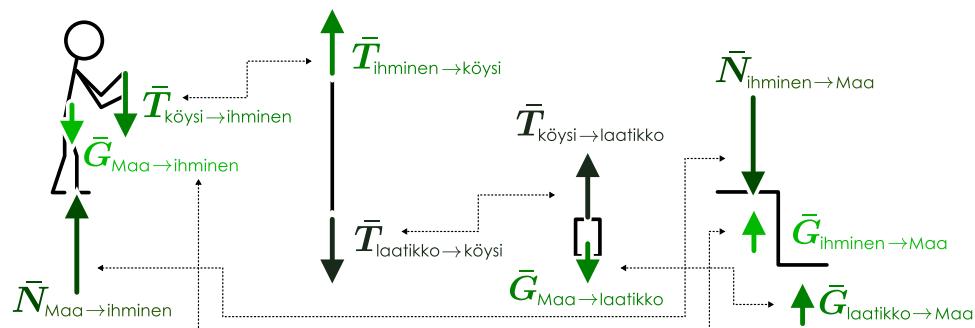
(b) Vapaakkappalekuvat laatikon ja köyden ollessa tasapainossa. Köyden pähin kohdistuvat jännitysvoimat ovat yhtä suuret, jos köyden painovoimaa ei huomioida.



(c) Jos laatikolla on kiilthyvyttä, myös köydellä on.



(d) Vapaakkappalekuvat laatikon ja köyden ollessa kiilthyvässä liikkeessä ylöspäin. Köyden pähin kohdistuvat jännitysvoimat ovat nytkin yhtä suuret.





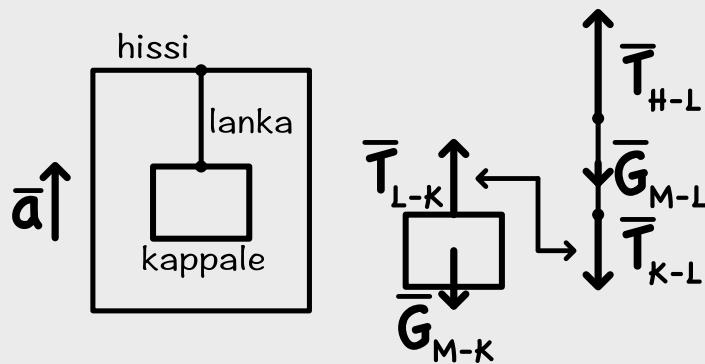
**3.18** Kuinka suuret voimat kohdistuvat edellä kuvatun esimerkin köyteen, jos köyttä vetää ylöspäin yksi nostaja köyden päästä ja toinen köyden keskikohdasta?

### esimerkki 3.3

### Jännitysvoima

Kappale (massa  $M$ ) roikkuu langan varassa (massa  $m$ ) hissin katosta. (a) Millaiset voimat kohdistuvat kappaleeseen ja lankaan kun hissi lähtee ylöspäin kiihyvyydessä  $a_x$ ? (b) Mitä voimista voidaan päättää, jos lanka on hyvin paljon kevyempi kuin kappale?

**TILANNE** Merkitään langan kappaleeseen kohdistamaa voimaa  $\bar{T}_{L \rightarrow K}$ , kappaleen lankaan kohdistamaa voimaa  $\bar{T}_{K \rightarrow L}$  ja hissin lankaan kohdistamaa voimaa  $\bar{T}_{H \rightarrow L}$ . Langan kappaleeseen kohdistama voima ja kappaleen lankaan kohdistama voima ovat voima-vastavoimapari. Hissin lankaan kohdistaman voiman vastavoima on langan hissiin kohdistama voima. Kappaleeseen vaikuttaa myös maan painovoima  $\bar{G}_{M \rightarrow K}$  ja lankaan  $\bar{G}_{M \rightarrow L}$ . Näiden vastavoimat kohdistuvat maapalloon. Valitaan positiivinen  $x$ -suunta ylöspäin.



**RATKAISU** (a) Kappaleeseen kohdistuu painovoima  $G_{x,M \rightarrow K} = -Mg$  sekä langan kiinnityskohdassa vaikuttava kosketusvoima  $T_{x,L \rightarrow K}$ , jotka ovat vastakkaisuuntainen. Kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima antaa kappaleelle kiihyvyyden, joten

$$F_{x,K,\text{kokonais}} = T_{x,L \rightarrow K} + G_{x,M \rightarrow K} = Ma_x \quad (3.33)$$

ja siis jännitysvoiman täytyy olla

$$T_{x,L \rightarrow K} = Ma_x - G_{x,M \rightarrow K} = M(a_x + g). \quad (3.34)$$

Lankaan kohdistuu kappaleen kosketusvoima  $T_{x,K \rightarrow L} = -T_{x,L \rightarrow K} = -M(a_x + g)$ , hissin kosketusvoima  $T_{x,H \rightarrow L}$  ja painovoima  $G_{x,M \rightarrow L} = -mg$ . Näiden summa on lankaan kohdistuva kokonaisvoima, joka antaa langalle kiihyvyyden, joten kappaleelle kiihyvyyden, joten

$$F_{x,L,\text{kokonais}} = T_{x,H \rightarrow L} + T_{x,K \rightarrow L} + G_{x,M \rightarrow L} = ma_x \quad (3.35)$$

ja jännitysvoima langan yläpäässä on siis

$$T_{x,H \rightarrow L} = ma_x - T_{x,K \rightarrow L} - G_{x,M \rightarrow L} = (M+m)(a_x + g). \quad (3.36)$$

(b) Langan yläpähän kohdistuu suurempi jännitysvoima kuin alapähän, koska alapähän kohdistuva voima oleellisesti vetää ylöspäin vain roikkuvaa kappaletta, mutta yläpähän kohdistuvan voiman täytyy vetää myös lankaa itseään. Näiden voimien suhde on

$$\frac{T_{x,H \rightarrow L}}{T_{x,L \rightarrow K}} = 1 + \frac{m}{M}. \quad (3.37)$$

Sen, että langan massa on hyvin pieni, voi matemaattisesti kuvata raja-arvona  $m/M \rightarrow 0$ , ja tällä rajalla langan pähin kohdistuvien jännitysvoimien suhteeksi saadaan  $T_{x,H \rightarrow L}/T_{x,L \rightarrow K} \rightarrow 1$ . Jos langan massa on siis pieni, jännitysvoima on langan kummassakin päässä yhtä suuri. Tähän tulokseen perustuu massattoman langan malli.

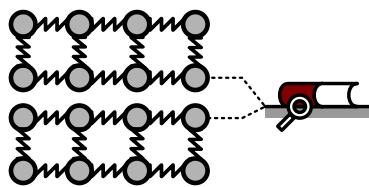
### Kosketus- eli normaalivoima

Jäykät kappaleet eivät kulje toistensa läpi, minkä vuoksi esimerkiksi maan pinta kannattelee sinua ja voit ottaa esineitä käsiisi. Syy tähän piilee jälleen aineen mikroskooppisessa rakenteessa (kuva 3.17). Kiinteiden aineiden mikroskooppisen rakenteen rikkominen vaatii paljon energiaa, elikä edes suuren rakennuksen paino riittää hajottamaan rakennusta kannattelevan maaperän atomirakennetta. Lisäksi vaikka atomit voivat muodostaa sidoksia ja vetää toisiaan puoleensa, hyvin lähelle toisiaan puristetut atomit hylkivät toisiaan. Niinpä yhteen puristettujen kappaleiden pintojen atomien väliset vuorovaikutukset estävät kappaleita kulkemasta toistensa läpi.

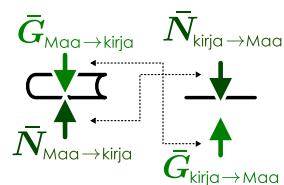
Tarkastellaan esimerkiksi maassa olevaa kirjaa. Kirjaan kohdistuu painovoima, joka pyrkii vetämään kirja kohti maata. Kirja ei kuitenkaan pääse liikkumaan, koska sen tiellä on maapinta. "Tiellä oleminen" ei ole kuitenkaan fysikaalinen vuorovaikutus, vaan pinnan täytyy kohdistaa kirjaan voima, joka kumoaa painovoiman kirja alaspäin vetävän vaikutuksen.

Kuva 3.17: Kosketusvoima syntyy pintojen puristuessa toisiaan vasten.

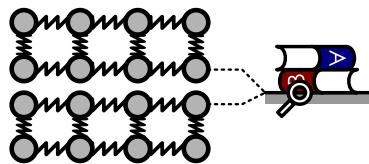
(a) Kirjan paino puristaa pintoja yhteen.



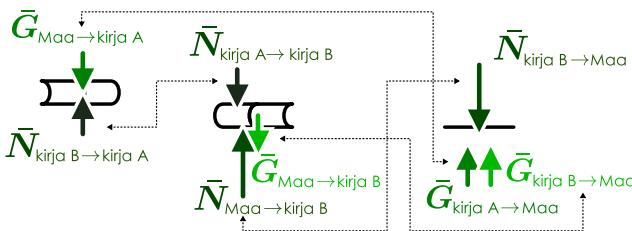
(b) Vapaakkappalekuva.



(c) Kaksinkertainen paino puristaa pintoja kovemmin.



(d) Vapaakkappalekuva.



sen normaalivoiman on oltava täsmälleen yhtä suuri kuin muiden kirjaan kohdistuvien alaspäin osoittavien voimien summa, jotta kirjaan kohdistuva kokonaisvoima olisi nolla.

Jos maassa on vain yksi kirja, kirjan ja maanpinnan välinen normaalivoima on voimakkuudeltaan yhtä suuri kuin kirjaan kohdistuva painovoima. Jos kirjoja on kaksi päällekkäin kuten kuvassa 3.17 (d), ylempi kirja (kuvassa A) painaa alempaa (kuvassa B) yhtä suurella kosketusvoimalla kuin kirjaan A kohdistuva painovoima. Alempi kirja B puolestaan painaa maapintaa kosketusvoimalla, joka on voimakkuudeltaan yhtä suuri kuin kirjan B painovoima ja kirjan A siihen kohdistama kosketusvoima *yhteensä*. Toisin sanoen mitä suurempi kirjapino kootaan, sitä suuremmalla kosketusvoimalla maapinnan täytyy pinoa kannatella ja sitä suuremmalla kosketusvoimalla pino painaa maata. Tämä on helppo havaita itsekin pitämällä kirjoja käessä: suurta kirjapinoa on raskas kannatella, koska se vaatii suuremman pystysuuntaisen kosketusvoiman kuin vain yhden kirjan pitely paikoillaan.

**3.19** Kuinka suuri normaalivoima seuraavissa tilanteissa kohdistuu kappaleeseen, jonka massa on 1.0 kg?

- (a) Kappale on paikoillaan olevan hissin lattialla. (b) Kappale on ylöspäin kiihtyvyyddellä  $1.0 \text{ m/s}^2$  nousevan hissin lattialla. (c) Kappale on ylöspäin tasaisella nopeudella  $2.0 \text{ m/s}$  nousevan hissin lattialla. (d) Kappale on alaspäin kiihtyvyyddellä  $3.0 \text{ m/s}^2$  laskeutuvan hissin lattialla.

## Kitka

Myös kitka on kosketusvoima, mutta normaalivoimasta poiketen kitka vaikuttaa koskettavien pintojen suuntaisesti. Luvussa 2 tarkastelimme jo kitkaa esimerkinä dissipatiivisesta vuorovaikutuksesta, joka syntyy kappaleiden pintojen tarttuessa mikroskooppisella tasolla toisiinsa kiinni. Tällöin tarkastelimme liukuvien kappaleiden välistä **liikekitkaa**. Kuitenkin myös toistensa suhteeseen paikoillaan olevat kappaleet tarttuvat toisiinsa hiukan kiinni, jolloin kyseessä on **lepopitka**.

Kokeellisesti voidaan todeta, että liukekitkan aiheuttama voima osoittaa kappaleiden pintojen liukuessa toistensa suhteeseen aina pinnan suhteellista liikkettä vastaan. Tavallisesti tämä tarkoittaa sitä, että kitka vaikuttaa kappaleen nopeuteen nähden vastakkaiseen suuntaan. Liukekitkan suuruus puolestaan ei juurikaan

Tämä tapahtuu nün, että kirjan ja maapinnan atomit alkavat *hylikä* toisiaan niiden jouluessa liian lähekkäin. Makroskooppisessa mittakaavassa tämä hylikiminen ilmenee vuorovaikutuksena, joka kohdistaa kirjaan voiman ylös-päin (maapinta kannattelee kirjaa) sekä maahan voiman alas-päin (kirja painaa maata). Nämä ovat vuorovaikutukseen liittyvä voiman ja vastavoiman lain (3.7) kuvamaa voimien pari. Koska kirjaan kohdistuva kosketusvoima ainoastaan estää kirjaan siirtymästä maan sisään, sen suunnan on oltava aina maan ja kirjan kosketuspinta vastaan kohtisuorassa. Kohtisuoria suuntia kutsutaan matematiikassa toistensa normaaleiksi, minkä vuoksi kosketusvoiman toinen nimitys on **normaalivoima** ja sen symbolina käytetään usein kirjainta  $\bar{N}$ .

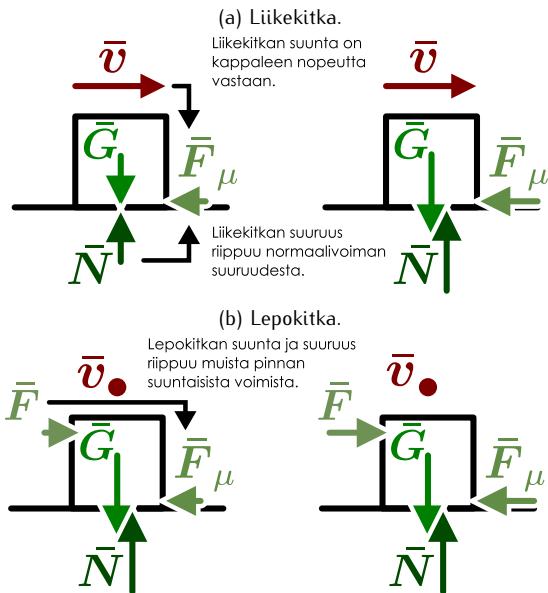
Kosketusvoima on siis *elastinen* vuorovaikuttus aivan kuten jousen tuottama voima niin kauan kuin pinnat eivät rikkoudu. Sekä kirjan että pöydän pinnat joustavat hieman niiden koskettaessa, ja vuorovaikutuksen voimakkuus riippuu kirjan täsmällisestä paikasta ja asennosta maapinnan suhteeseen. Kuitenkin koska vuorovaikutus syntyy atomien tasolla, voiman suuruus voi muuttua hyvin voimakkaasti kirjan siirtyesessä nanometrienkin matkan. Makroskooppisessa mittakaavassa on siis täysin mahdotonta määrittää normaalivoiman suuruus tarkastelemalla kirjan täsmällistä paikkaa. Sen sijaan normaalivoiman suuruus voi olla päättävässä siitä, että kappaleet eivät saa liikkua toistensa sisälle. Jos kirja on paikoillaan, kirjan ja maapinnan väl-

riipu kappaleiden muodosta eikä liikkeen nopeudesta vaan ainoastaan liikkuvien pintojen laadusta (liukkaudesta) sekä pintojen välisen normaalivoiman suuruudesta  $N$ . Pintojen liukkautta kuvaavat **liikekitkakerroin**  $\mu$ , jonka avulla kitkavoiman suuruus voidaan ilmaista muodossa

$$F_{\text{liukekitka}} = \mu N. \quad (3.38)$$

Erityisesti liikekitkan voimakkuus ei riipu pintojen kosketuspinta-alasta. Tämä on hieman yllättävää, mutta kyse on yksinkertaisesti siitä, että vaikka suurempi kosketuspinta-ala lisää kitkavoimaa, se johtaa myös pintoja yhteen puristavan voiman jakautumiseen suuremmalle pinta-alalle. Nämä vaikutukset kumovat toisensa, jolloin lopputuloksena kosketuspinta-ala ei vaikuta kitkavoimaan.

Kuva 3.18: Kitka vaikuttaa koskettavilla pinnoilla.

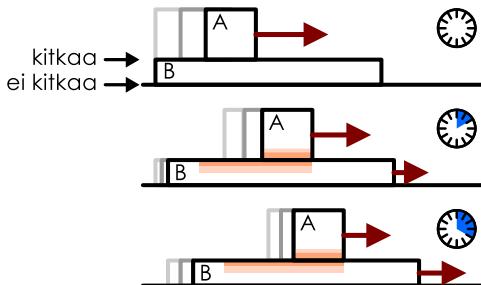


kuitenkaan käytännössä koskaan ole näin suuri vaan tämä on vain voiman *maksimisuuruus* eli raja jolloin kappaleet lähtevät liikkeelle. Lepokitkan suuruus pitää siis käytännössä päätellä aina epäsuorasti siitä ehdosta, että kappaleet eivät liiku toistensa suhteen aivan kuten normaalivoiman suuruus määräytyy siitä, etteivät kappaleet saa kulkea toistensa läpi.

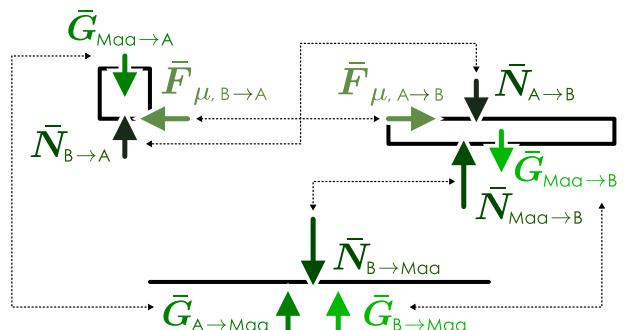
Liikekitkan suunnan päättelyssä on huomioitava, että liikekitka vaikuttaa aina pintojen suhteellista liikettää vastaan. Liikemääärän yhteydessä tarkasteltiin esimerkkiä, jossa kappale (A) liukui toisen kappaleen (B) pääällä ja työnsi sen liukuessaan likkeelle kitkan avulla, kuten kuvassa 3.19. Tässä tapauksessa kappale B lähti likkeelle kuvassa oikealle, joten myös kappaleen liukkeelle työntänyt kitkavoima osoitti oikealle eli samaan suuntaan kuin mihin kappale liikkui. Oleellista ei olekaan kappaleen nopeus vaan toistensa suhteinen liukuvien pintojen suhteelliset nopeudet. Koska kappale A liikkui oikealle *nopeammin* kuin kappale B, kappaleen A pinta liikkui kappaleeseen B verrattuna oikelle ja kappaleen B pinta liikkui kappaleeseen A verrattuna

Kuva 3.19: Kitkavoima vastustaa pintojen suhteellista liikettä. Tässä molemmat kappaleet liikkuvat oikealle, mutta A liikkuu oikealle nopeammin kuin B, joten *\*suhteessa* A:han\* B liukkuu vasemmalle.

(a) Liukuva kappale työntää toisen kappaleen liikkeelle.



(b) Vapaakkappalekuvat: Kappaleisiin A ja B kohdistuvat kitkavoimat ovat vastakkaisuuntaiset.



**vasemmalle.** Niinpä kappaleeseen A vaikutti kitkavoima vasemmalle ja kappaleeseen B oikealle. Nämä voimat ovat vastavoimapari, joten niiden täytyy osoittaa vastakkaisiin suuntiin, vaikka kyseisessä tapauksessa kummatkin kappaleet liikkuvat kuvassa samaan suuntaan, oikealle.



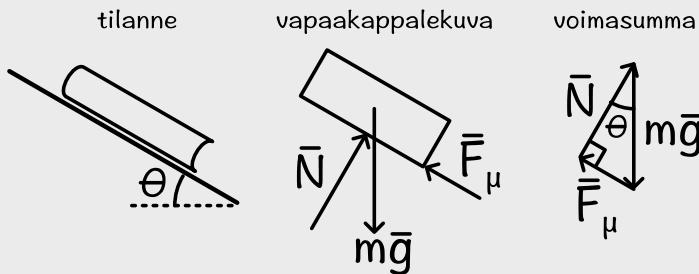
**3.20** Millainen voima muuttaa seuraavissa tapauksissa potkulautailijan ja hänen lautansa liikettä? (i) Mikä vuorovaikutus on kyseessä? (ii) Mikä kappale kohdistaa voiman lautailijaan ja lautaan? (iii) Mikä on voiman suunta? (iv) Miten voiman suuruus voitaisiin päätellä? (a) Lautailija seisoo toisella jalalla laudallaan ja potkaisee toisella jalallaan maasta vauhtia. (b) Lautailija jarruttaa astumalla laudan takapyyörän pääle, jolloin pyörä pyörii vähitellen hidastuen.

### esimerkki 3.4

### Levossa kaltevalla tasolla

**Kirja on pöydällä, jota aletaan kallistamaan. Mistä tekijöstä riippuu, kuinka jyrkkään kulmaan pöytälevy voidaan kallistaa ennen kuin kirja alkaa liukua? Valitse jotkin järkevät arvot näille tekijöille ja laske maksimikulma valitsemissasi arvoilla.**

**TILANNE** Piirretään kuva tilanteesta sekä kirjan vapaakappalekuva. Mahdollisia kirjaan vaikuttavia tekijöitä voisivat olla ainakin kirjan massa  $m$  sekä kirjan ja pöydän välinen lepokitkakerroin  $\mu_{\text{lepo}}$ . Merkitään pöydän kallistuskulmaa symbolilla  $\theta$ .



**SUUNNITELMA** Kirjaan vaikuttaa painovoima  $\bar{G} = m\bar{g}$  alas päin. Kirja ei putoa pöydän läpi, koska pöydän pinta kohdistaa kirjaan normaalivoiman  $\bar{N}$ . Tämä voima on kohtisuorassa pöydän pintaan vastaan, ja kuvista nähdään tämän suunnan olevan kulmassa  $\theta$  pystysuuntaan nähden. Koska kirja pysyy paikoillaan eli on tasapainossa, siihen täytyy vaikuttaa myös pinnan suuntainen lepokitka  $\bar{F}_\mu$  niin, että kirjaan vaikuttavien voimien summa on nolla.

Lepokitkan suuruus määräytyy tasapainoehdosta mutta kitkavoiman suuruus ei voi kasvaa rajattaa vaan sillä on kitkakertoimesta riippuva maksimiarvo. Pyödän kallistaminen heikentää pinnan tukivoimaa ja samalla kirjan paikoillaan pitämisen vaatii yhä suuremman kitkavoiman. Suurimmalla mahdollisella kallistuskulmalla  $\theta_{\max}$  kitkavoima saa maksimiarvonsa.

Piirretään voimien vektorisumma vapaakappalekuviolle merkityjen nuolten perusteella. Koska voimien summan täytyy olla nolla, voimia kuvaavien nuolten pitää muodostaa kolmio. (Asettamalla nuolet peräkkäin täytyy syntyä kuvio, joka palaa alkupisteeseensä.) Normaalivoima ja kitkavoima ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, joten kolmio on suorakulmainen. Lisäksi painovoiman ja normaalivoiman välinen kulma on  $\theta$ , joten kolmion muoto voidaan ratkaista geometrisesti.

Painovoimavektorin pituus on  $mg$ . Muiden vektorien pituus saadaan trigonometrialla,

$$N = mg \cos \theta \quad (3.40)$$

sekä

$$F_\mu = mg \sin \theta. \quad (3.41)$$

Kitkavoiman suuruuden maksimi riippuu normaalivoimasta sekä lepokitkakertoimesta

$$F_{\mu,\max} = \mu_{\text{lepo}} N. \quad (3.42)$$

**RATKAISU** Suurimmalla kallistuskulmalla pätee ehto

$$mg \sin \theta_{\max} = \mu_{\text{lepo}} mg \cos \theta_{\max}. \quad (3.43)$$

Tästä voidaan supistaa painovoima pois ja ratkaista kulma muistamalla trigonometrisen säntö  $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$  sekä käännefunktio  $\theta = \arctan x \Rightarrow \tan \theta = x$

$$\theta_{\max} = \arctan \mu_{\text{lepo}}. \quad (3.44)$$

Kallistuskulma riippuu siis ainoastaan kirjan ja pöydän välisestä lepokitkakertoimesta eikä lainkaan esimerkiksi kirjan massasta. Lepokitkakertoimet vaihtelevat huomattavasti. Esimerkkejä eri materiaalien välisistä kitkakertoimista voi helposti hakea vaikkapa verkosta. Joka tapauksessa pöytien pinnat ovat usein varsin liukkaat, joten järkevä arvo kitkakertoimelle voisi olla esimerkiksi  $\mu_{\text{lepo}} = 0.3$ . Tällöin kirja lähtee liikkeelle kallistuskulmalla  $\theta_{\max} \approx 0.3 \text{ rad} \approx 20^\circ$ .

**ARVIOINTI** Arkustangentti on kasvava funktio, joten mitä suurempi kitkakerroin on, sitä suurempaan kulmaan pöytä voidaan kallistaa, mikä on järkevä tulos. Laskettu kulma on kohtullisen pieni, mutta asiaahan voi myös helposti testata itse laittamalla kirja pöydälle ja kokeilemalla, paljonko pyötää pitää kallistaa, jotta kirja alkaisi liukua.

Kitkakerroin on yksikötön luku, joten se voi olla funtion argumentti. Lisäksi *kulma* on myös yksikötön suure,  $[\theta] = \text{rad} = 1$ , joten ratkaisulla on oikea yksikkö. Trigonometrisen funktion tulos on nimittäin paljas luku — funktio ei lisää tulokseensa yksikköä. Myöskään *aste* ei ole yksikkö vaan *muuntokerroin*. Täyskulma on nimittäin  $360^\circ = 2\pi$ , joten *aste* on

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0.01745 \dots \quad (3.45)$$

## esimerkki 3.5

## Liikkeellä kaltevalla tasolla

**Kirja lähtee levosta liukumaan alas kaltevaan tasoa. Tason kallistuskulma on  $36^\circ$ . Kuinka suuri on kirjan kiihtyvyys, jos kirjan ja pöydän väliset lepo- ja liikekitkakertoimet ovat 0.30 ja 0.20?**

**TILANNE** Piirretään kuva tilanteesta sekä kirjan vapaa-kappalekuva. Tilanne on muuten samankaltainen kuin esimerkissä 3.4, mutta nyt kirja liikkuu. Merkitään kaltevan tason suuntaa  $x$  ja tason normaalini suuntaa  $y$ .

**SUUNNITELMA** Kirjaan vaikuttaa painovoima  $\bar{G} = m\bar{g}$  ja normaalivoima  $\bar{N}$  viistoon ylöspäin. Koska kirja liikkuu, siihen vaikuttaa myös pinnan suuntainen liikekitka  $\bar{F}_\mu$ .

Normaalivoiman suuruus määräytyy ehdosta, että kirja ei saa liikkua pinnan sisään. Toisin sanoen pintaan vastaan kohtisuorassa suunnassa voimien summan täytyy olla nolla. Liikekitkan suuruus riippuu normaalivoiman suuruudesta sekä liikekitkakertoimesta  $\mu$ . Koska kirja lähtee liikkeelle levosta, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nollasta poikkeava. Lisäksi, koska mikään kirjaan kohdistuvista voimista ei riipu kirjan nopeudesta tai paikasta, tämän kokonaisvoiman täytyy olla vakio ja siispä myös kirjan kiihtyvyys on dynamiikan peruslain mukaisesti vakio.

Piirretään voimien vektorisumma vapaakappalekuvioon merkittijen nuolten perusteella ja jaetaan voimat pinnan suuntaisiin ja kohtisuorit komponentteihin.

Voimien pintaan vasten kohtisuorien komponenttien täytyy summautua nollaksi,

$$\bar{N}_y + m\bar{g}_y = \bar{0}, \quad (3.46)$$

koska kirja liikkuu pinnan suunnassa. Kirjaan vaikuttaa liikekitka (ei lepotikka), joten kitkavoiman suuruus riippuu normaalivoimasta sekä liikekitkakertoimesta

$$F_\mu = \mu N. \quad (3.47)$$

Kokonaisvoima on  $x$ -suuntaisten voimien summa

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_{x,\text{kokonais}} = \bar{F}_{\mu,x} + m\bar{g}_x \quad (3.48)$$

ja kiihtyvyys on

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{F}_{\text{kokonais}}. \quad (3.49)$$

**RATKAISU** Painovoiman komponenttien pituus voidaan päätellä kuvasta trigonometrisesti. Painovoima osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan ja negatiiviseen  $y$ -suuntaan, joten painovoiman skalaarikomponentit ovat

$$mg_x = |m\bar{g}_x| = mg \sin \theta \quad (3.50)$$

$$mg_y = -|m\bar{g}_y| = -mg \cos \theta. \quad (3.51)$$

Siispä normaalivoiman suuruuden on oltava

$$N = N_y = -mg_y = mg \cos \theta. \quad (3.52)$$

ja kitkavoiman suuruus on

$$F_\mu = \mu N = \mu mg \cos \theta. \quad (3.53)$$

Kitkavoima osoittaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan, joten sen skalaarikomponentti on negatiivinen

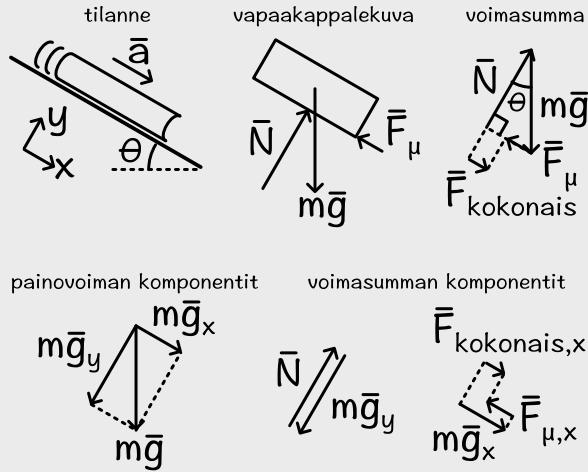
$$F_{\mu,x} = -|\bar{F}_{\mu,x}| = -\mu mg \cos \theta. \quad (3.54)$$

Kokonaisvoiman osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan ja sen suuruus on

$$F_{\text{kokonais}} = F_{\text{kokonais},x} = mg_x + F_{\mu,x} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta. \quad (3.55)$$

Kappaleen kiihtyvyys osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan ja sen suuruus on

$$a_x = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) = 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 36^\circ - 0.20 \cdot \cos 36^\circ) = 4.2 \text{ m/s}^2. \quad (3.56)$$



## 3.5 Voiman impulssi ja työ

### Voiman impulssi

Liikemääränpainossa toteimme, että vuorovaikutus voi muuttaa kappaleen liikemäärää antamalla sille impulssin. Dynamikan peruslain (3.3) mukaan puolestaan voima muuttaa kappaleen liikemäärää ajan kuluessa, joten voiman ja impulssin täyttyjä kuvata samaa asiaa — vuorovaikutuksen kykyä muuttaa liikemäärää. Suureiden eroon on ainoastaan se, että impulssi kuvailee vuorovaikutuksen tuottamaa liikemääränpainosta *jollakin aikavälillä* kun taas voima kuvailee vuorovaikutuksen tuottamaa liikemääränpainosta *yhällä ajan hetkellä*.

Dynamikan peruslain mukaisesti kappaleen liikemäärä muuttuu sitä enemmän, mitä suurempi kokonaivoima kappaleeseen kohdistuu ja mitä kauemmin tämä voima kappaleeseen vaikuttaa. Jos kappaleeseen kohdistuu vakiovoima  $\bar{F}$  ajan  $\Delta t$ , liikemääränpainos on  $\Delta \bar{p} = \bar{F} \Delta t$ . Toisaalta impulssi määriteltiin niin, että se on vuorovaikutuksen tuottama liikemääränpainos, joten vakiovoiman impulssi on siis

$$\bar{I}_{\text{vakiovoima}} = \Delta \bar{p} = \bar{F}_{\text{kokonaist}} \Delta t. \quad (3.57)$$

Skalaarikomponenttien avulla ilmaistuna sama asia on

$$I_{x,\text{vakiovoima}} = \Delta p_x = F_{x,\text{kokonaist}} \Delta t. \quad (3.58)$$

Jos voima ei ole vakio vaan riippuu ajasta, impulssia ei voida laskea voiman ja sen vaikutusajan tulona, mutta pitkäkin aikaväli voidaan jakaa pieniin osiin, joiden aikana voima on lähes vakio kuten kuvassa 3.20 (b). Kullakin lyhyellä aikavälillä  $\Delta t$ ) kappale saa tällöin pienisen impulssin

$$I_x \approx F_{x,\text{kokonaist}}(t) \Delta t \quad (3.59)$$

ja kappaleen saama kokonaismimpulssi saadaan laskemalla nämä yhteen

$$I_x \approx F_{x,\text{kokonaist}}(t_0) \Delta t + \dots + F_{x,\text{kokonaist}}(t_{N-1}) \Delta t. \quad (3.60)$$

Ottamalla raja-arvo, kun aikavälien pituus  $\Delta t$  lähestyy nolla tämä approksimaatio tulee tarkaksi ja summaus muuttuu integraaliksi

$$I_x = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokonaist}} dt. \quad (3.61)$$

*Impulssi on siis voiman integraali ajan suhtein.* Graafisesti impulssin  $x$ -skalaarikomponentti saadaan siis määrittämällä voiman  $x$ -komponentin *aikakuvaajan*  $F_x(t)$  ja aika-akselin rajaama pinta-ala (kuva 3.20 (a)).

Impulssi on vektorisuure, ja äskeisessä analyysissä johdettiin impulssin  $x$ -komponentin ja voiman  $x$ -komponentin välinen yhteys. Sama asia voidaan kirjoittaa yleisemmin ja helpommin käyttämällä differentiaaleja ja vektoriteita. Infinitesimaalisen lyhyen ajan  $dt$  aikana voima nimittäin antaa kappaleelle impulssin

$$d\bar{I} = d\bar{p} = \bar{F}_{\text{kokonaist}} dt. \quad (3.62)$$

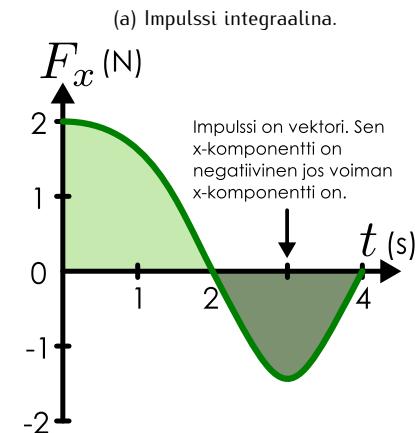
Kokonaismimpulssi saadaan laskemalla nämä pienet impulssit yhteen eli integroimalla

$$\bar{I} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F}_{\text{kokonaist}} dt. \quad (3.63)$$

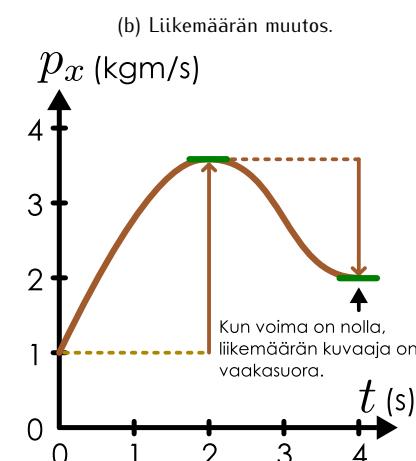
Tämä on impulssin ja voiman välinen yleinen yhteys, joka yksilöllisessä tapauksessa voidaan kirjoittaa  $x$ -skalaarikomponenttien avulla yhtälön (3.61) muotoon.

Luvussa 2 törmäysten tarkastelussa todettiin kappaleiden liikemäärien muuttuvan kappaleiden saamienviimpulssien takia. Kuvassa 3.21 on esitetty kahden kappaleen törmäys mukaan lukien kappaleisiin vaikuttavien voimien kuvaaja. Kuvan esimerkissä kappaleen A massa on kaksinkertainen kappaleen B massaan nähdien, sillä kappaleen A nopeuden muutos on törmäyksessä vain puolet kappaleen B vastaavasta. Kuitenkin koska systeemin liikemäärä on vakio, kummankin kappaleen liikemäärä pitää muuttua yhtä paljon mutta vastakkaiseen suuntaan eli kappaleet saavat yhtä suuret impulssit. Kappaleisiin kohdistuvien voimien kuvaajassa

Kuva 3.20: Impulssi on funktion ( $F(t)$ ) rajaama pinta-ala.



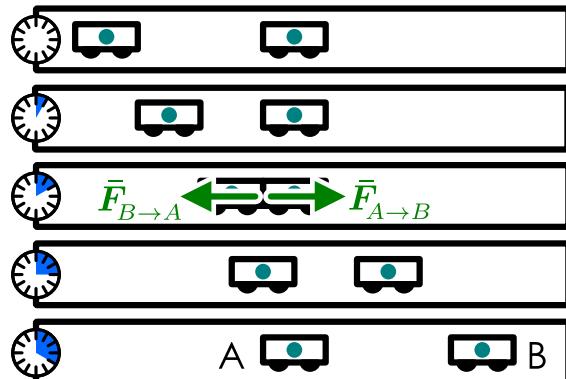
(a) Impulssi integraalina.



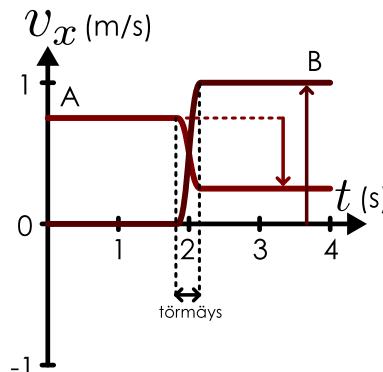
(b) Liikemääränpainos.

Kuva 3.21: Kappaleiden välinen vuorovaikutus törmäyksessä. Kappaleisiin vaikuttaa joka hetki yhtä suuri voima ja ne saavat yhtä suuret impulssit. Kappaleen A inertia on kuitenkin kaksinkertainen kappaleeseen B verrattuna.

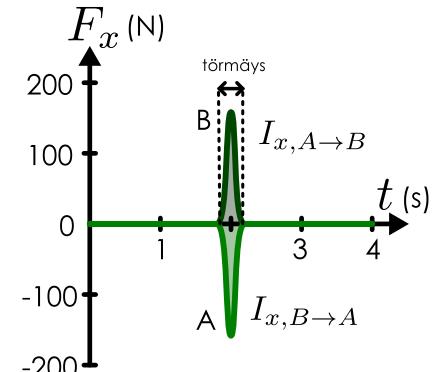
(a) Liikekuvasarja.



(b) Nopeuden kuvaaja.



(c) Voiman kuvaaja.



impulsi on kuvajan ja aika-akselin välin jäävä pinta-ala, joka on molemmilla kappaleilla itseisarvoltaan sama mutta vastakkaismerkkinen, koska kappaleisiin kohdistuvilla voimilla on eri etumerkit. Erot kappaleiden nopeuksien muutoksissa ovat seurausta kappaleiden erilaisista inertioista — kappaleiden saamat impulssit ovat yhtä suuret.

Impulssin ja voiman yhteyttä voidaan käyttää myös voiman arvioimiseksi, kun kappaleen saama impulssi tunnetaan. Jos nimittäin törmäys kestää ajan  $\Delta t$  ja voiman on tässä ajassa tuottava  $x$ -suuntainen impulsси  $I_x$ , voiman suuruuden on oltava keskimäärin  $F_x = I_x/\Delta t$  ja koska voima ei käytännössä ole kuitenkaan vakio sen maksimiarvo voi olla tätä selvästi suurempikin. Tästä syystä esimerkiksi kolarit ja korkealta putoaminen ovat vaarallisia. Liikemäärän *suuri* muutos vaatii suuren impulssin ja liikemäärän *nopea* muutos tarkoittaa impulssin tapahtuvan lyhyessä ajassa. Molemmat ehdot vaativat, että impulssin tuottava voima on suuri. Materiaalien kestäminen tai rikkoutuminen rasituksessa riippuu pääasiassa niihin kohdistuvan voiman suuruudesta (vrt. elastiset ja plastiset muodonmuutokset), joten nopea pysähtyminen suuresta vauhdista on vaaraksi nün esineille kuin elollisille olennollekin.

**3.21** Kappale (massa 1.0 kg) on vapaassa pudotuksessa. Valitaan positiivinen suunta alas päin.

- (a) Kuinka suuren impulssin gravitaatio antaa kappaleelle yhden sekunnin aikana?
- (b) Mikä on kappaleen liikemäärän muutos sekunnin aikana, jos alkunopeus on 2.0 m/s ylöspäin?
- (c) Entä jos alkunopeuden suunta on alas päin?

## Voiman tekemä työ

Kappaleeseen vaikuttava voima tuottaa impulssin ja muuttaa siten kappaleen liikemäärää, mutta jos kappaleen liikemäärä muuttuu, myös kappaleen *liike-energia* muuttuu. Niinpä voima pystyy muuttamaan liikemäärän lisäksi myös kappaleen *energiaa*. Siinä missä impulssi kuvaa voiman aiheuttamaa muutosta liikemäärässä, voiman aiheuttamaa muutosta energiassa kuvaa suure nimeltä **työ**. Esimerkiksi kuvassa 3.22 (a) työntetään vaunu, jolloin se lähtee liikkeelle suuntaan, johon voima sitä työntää. Tällöin vaunun liike-energia kasvaa ja fysiikassa sanotaan, että *voima tekee vaunuun työtä*. Vastaavasti kuvassa 3.22 (b) liikkuva vaunu pysäytetään työntämällä sitä vaunun liikkeeseen nähdien vastakkaiseen suuntaan. Tällöin vaunun energia vähentyy.

Kuvan 3.22 esimerkissä oleellista on se, että molemmissa tilanteissa vaunut *liikkuvat* ja voima vaikuttaa liikkeen suunnassa. Kun voima osoittaa vaunun liikkeen suuntaan, vaunun vauhti kasvaa ja siten myös sen liike-energia kasvaa. Kun voima osoittaa vastakkaiseen suuntaan liikkeeseen nähdien, vauhti pienenee ja liike-energia vähenee. Työ liittyy siis aina prosessiin, jossa kappale *liikkuu* ja voima on *liikkeen suuntainen*.

Yksinkertainen esimerkki tällaisesta prosessista, jossa voima vaikuttaa kappaleen liikkeen suunnassa, on kappaleen vapaa putoaminen suoraan alas päin (kuva 3.23 (a)). Tällöin kappaleeseen vaikuttaa vain painovoima, joka on suuruudeltaan vakio,  $G_x = -mg$ , missä positiivinen  $x$ -suunta on valittu ylöspäin. Toisaalta mekaanisen energian säilymislain perusteella putoavan kappaleen liike-energian muutos riippuu kappaleen kokeman pystysuuntaisen siirtymän pituudesta,

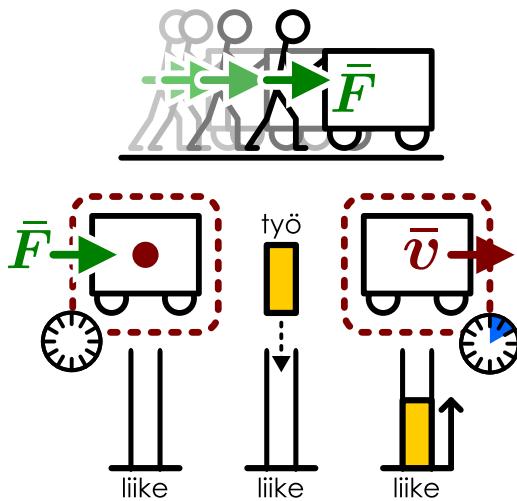
$$\Delta K = -\Delta U = -mg\Delta x = G_x \Delta x. \quad (3.64)$$

Toisin sanoen potentiaalienergiaa muuttuu liike-energiaksi määrä, jonka suuruus on voiman suuruuden ja kappaleen pystysuuntaisen siirtymän tulo. Toisin sanoen painovoima tekee kappaleeseen työtä, joka muuttaa

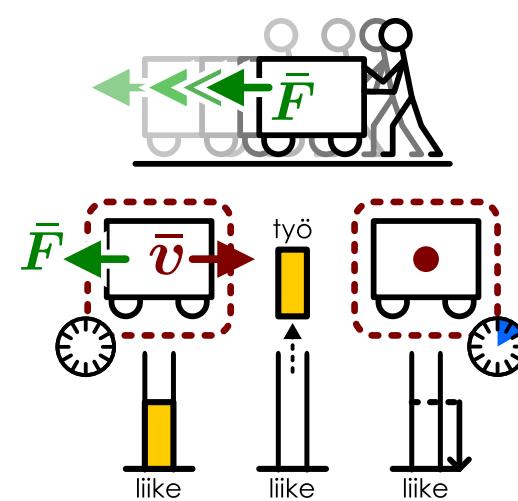
## VOIMA JA TYÖ

Kuva 3.22: Työ on positiivinen voiman osoittaessa liikkeen suuntaan ja negatiivinen voiman osoittaessa lükkeeseen nähden vastakkaiseen suuntaan.

(a) Kappale työntetään lükkeelle: positiivinen työ lisää kappaleen energiaa.



(b) Kappale pyysytetään: negatiivinen työ vähentää kappaleen energiaa.



vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa kappaleen liike-energiaksi. Voima voi siis sekä lisätä että vähentää kappaleen energiaa tekemällä työtä. Kuitenkin koska energia on säilyvä suure, työ ei voi luoda eikä hävittää energiota vaan ainoastaan muuttaa sitä muodosta toiseen tai siirtää kappaleelta toiselle. Voiman tekemä *työ siis mittaa kuinka paljon energiota muuttuu muodosta toiseen*.

Huomaa erityisesti, että edellinen päätteily päätee riippumatta siitä, liikkuuko kappale ylös- vai alas päin. Jos kappale putoaa alas päin, painovoima osoittaa samaan suuntaan kuin mihin kappale liikkuu ja voima tekee *positiivista* työtä kasvattaa kappaleen liike-energiaa (ja vähentää gravitaation potentiaalienergiaa). Jos kappale on heitetty ylös päin, painovoima osoittaa liukkeeseen nähden vastakkaiseen suuntaan ja tekee kappaleeseen *negatiivista* työtä vähentää kappaleen liike-energiaa (ja lisäten gravitaation potentiaalienergiaa). Työn etumerkki siis kuvailee siirtymän energian suuntaa: kappaleeseen (tai systeemiin) tehty positiivinen työ lisää kappaleen (tai systeemin) energiaa kun taas negatiivinen työ vähentää energiota.

Samanlainen päätteily toimii mille tahansa vakivoimalle: *voiman tekemä työ on suoraan verrannollinen voiman suuruuteen sekä kappaleen siirtymään*. *Työ on positiivinen, jos voima on samansuuntainen siirtymän kanssa, ja negatiivinen jos voima ja siirtymä ovat vastakaissuuntaiset*. Yhtälönä tämän asian voi ilmaista yksinkertaisesti niin, että työ on vakivoiman  $x$ -skalaarikomponentin ja  $x$ -suuntaisen siirtymän tulo,

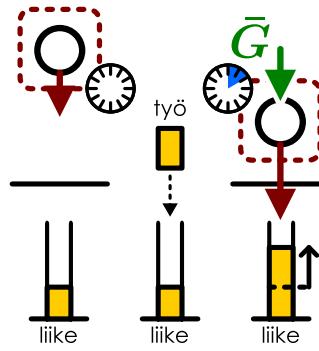
$$W = F_x \Delta x. \quad (3.65)$$

Voiman osoittaessa *samaan suuntaan* kuin mihin kappale liikkuu eli suureiden  $F_x$  ja  $\Delta x$  ollessa samanmerkkiset työ on *positiivinen*. Jos puolestaan voima osoittaa *vastakkaiseen suuntaan* kuin mihin kappale liikkuu, toinen suureista  $F_x$  ja  $\Delta x$  on negatiivinen ja toinen positiivinen, jolloin työ on *negatiivinen*. Vaikka voima ja siirtymä ovat vektoreita, työn määritelmässä esiintyy ainoastaan vektoreiden skalaarikomponentteja, joten työ on *skalaari* aivan kuten energiakin.

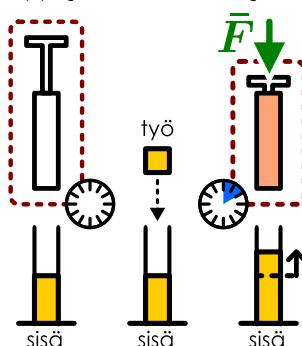
Työ siis joko lisää tai vähentää kappaleen energiota. Tämä on oleellinen ero impulssiin, joka on vektori ja jonka suunta osoittaa liikemäärävektorin muutoksen suunnan.

Kuva 3.23: Työ mittaa energian muutosta.

(a) Työ muuttaa liike-energiaa.



(b) Työ muuttaa sisäenergiaa.



- 3.22** Kuinka suuren työn teet, jos nostat 0.8 kg massan maasta 1.2 m korkeudelle (a) 1 sekunnissa, (b) 10 sekunnissa? (c) Entä jos nostat kymmenen samanlaista kappaleetta yhden kerrallaan, yhden sekunnissa? (d) Entä jos nostat kymmenen samanlaista kappaleetta kerralla 10 sekunnissa? (e) Entä jos kannattelet kappaleita tällä korkeudella 1 minuutin?

Putoavan kappaleen tapauksessa kappaleen potentiaalienergia ja liike-energia on helppo laskea kappaleen paikan ja nopeuden avulla, eikä työn laskeminen voiman kautta ole erityisen hyödyllistä. Työ kuitenkin ilmaisee *aina* vuorovaikutuksen aiheuttaman energiamuodon muutoksen suuruutta, ja niinpä työn avulla voidaan laskea myös sellaiset energian muutokset, joita ei voida päättää tarkastelemalla vain prosessin alku- ja lopputilaa. Esimerkiksi ilman puristaminen pumpulla vaatii voimaa ja voima tekee pumpussa olevaan ilmaan työtä (kuva 3.23 (b)). Työn tekeminen kasvattaa ilman ja pumpun energiota, ja koska prosessissa liike- tai potentiaalienergia eivät ilmeisesti muudu, työn on kasvatettava systeemin sisäenergiaa. Toisin sanoen ilma lämpenee, ja *lämpöenergian muutoksen on oltava yhtä suuri kuin voiman tekemä työ*. Erityisesti tällaisissa prosesseissa työ on huomattavan vahva työkalu, sillä sen avulla voidaan mekaanisten suureiden perusteella määrittää myös epäjärjestyneen sisäenergian muutoksia, joita voisi muuten olla mahdoton laskea.

Myös systeemin sisäiset vuorovaikutukset voivat tehdä työtä, mutta tällöin systeemin kokonaisenergia ei muudu vaan energia muuttaa muotoaan systeemin sisällä. Kuvan 3.24 esimerkissä laatikko nostetaan ylös-päin painovoimakentässä, mikä vaatii ylös-päin vaikuttavan voiman kohdistamisen kappaleeseen. Tämä nostava voima kumoaa laatikkoon kohdistuvan painovoiman. Nostava voima on laatikon noustessa samansuuntainen kuin liike eli voiman kappaleeseen tekemä työ on positiivinen. Kuitenkin nostajan ja laatikon välisen vuorovaikutuksen täytyy kohdistaa voima *myös nostajaan* ja voiman ja vastavoiman lain mukaisesti tämä voima on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen laatikkoon kohdistuvaan voimaan nähden. Koska tämä voima on vastakkaisuuntainen nostajan käsiin siirtymään nähden, se tekee nostajaan negatiivisen työn, joka on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin laatikko tehty positiivinen työ.

Laatikko nostaa ihmisen, ja prosessissa tehty negatiivinen työ kuluttaa häneen sitoutunutta kemiallista energiota. Samalla positiivinen työ lisää kappaleen ja Maan välisen gravitaatiovuorovaikutuksen potentiaalienergiaa. Toisin sanoen ihmisen sisäenergiaa muuttuu mekaaniseksi energiaksi, ja energian muutos on yhtä suuri kuin vuorovaikutuksen tekemä työ. Nostajalle tulee prosessissa myös lämminteli kemiallista energiota muuttuvan myös lämpöenergiaksi. Tätä muutosta ei *laatikon ja nostajan välisen vuorovaikutuksen tekemä työ* kuitenkaan mitata, sillä muutokset nostajan sisäenergassa johtuvat hänen sisäisistä vuorovaikutuksistaan.



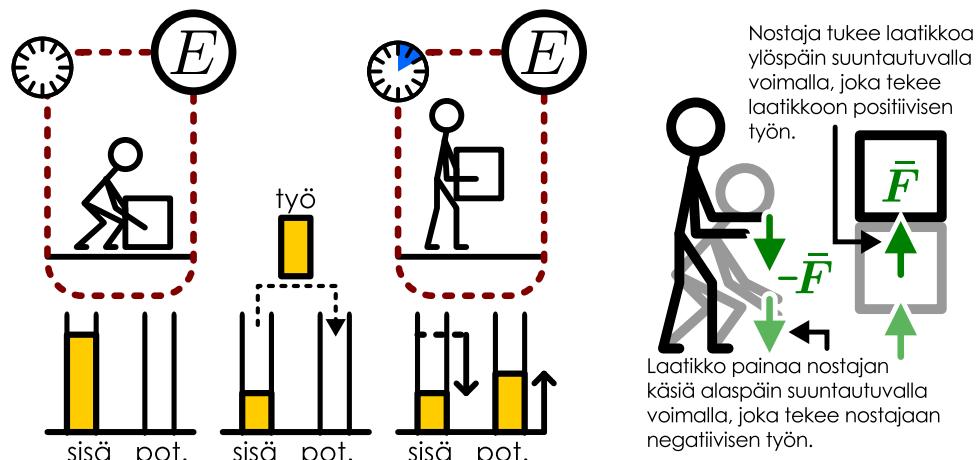
**3.23** Palloa heitetään ylös-päin vakivoimalla, jolloin pallo on kiihyvässä liikkeessä. Pallo saa heiton aikana (ennen kädestä irtoamista) liike-energian 2 J ja sen gravitaatiopotentiaalienergian muutos on 1 J. (a) Mikä on heittäjän palloon tekemä työ? (b) Mikä on painovoiman palloon tekemä työ? (c) Mikä on pallon heittäjään tekemä työ? (d) Miten heittäjän energia muuttuu heiton aikana? (e) Onko kokonaisenergia (likimain) vakio systeemissä, johon kuuluu heittäjä, pallo ja maapallon gravitaatio?

Painovoiman voimakkuus on maanpinnalla likimain vakio, mutta yleisesti voimat muuttuvat. Esimerkiksi kuvan 3.23 (b) pumpun tapauksessa vaaditaan sitä suurempia voimia mitä pienempään tilavuuteen ilma puristetaan. Tällöin voidaan käyttää samaa ositteluperiaatetta kuin aikaisemminkin muuttuvien suureiden analyysissä on käytetty. Kappaleen kulkema reitti jaetaan hyvin pieniin siirtymiin  $dx$ , joilla voiman  $x$ -komponentti  $F_x$  voidaan pitää vakiona. Tällöin kunkin pienien siirtymän matkalla voima tekee kappaleeseen työn

$$dW = F_x dx \quad (3.66)$$

Kuva 3.24: Systeemin sisäisten vuorovaikutusten tekemä työ muuttaa energiota muodosta toiseen, mutta systeemin kokonaisenergia ei muudu.

(a) Nostaja tekee työtä laatikkoon ja nostajan sisäenergiaa muuttuu gravitaation potentiaalienergiaksi. (b) Nostajan ja laatikon välisen vuorovaikutuksen kohdistaa molempien voimat.



## VOIMA JA TYÖ

ja koko matkalla pisteestä  $x_{\text{alku}}$  pisteeseen  $x_{\text{loppu}}$  tehty työ saadaan laskemalla nämä yhteen eli integroimalla voimaa *siirtymän* suhteen

$$W = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx. \quad (3.67)$$

Graafisesti työ on siis voiman paikkakuvaajan,  $F_x(x)$ , ja paikka-akselin rajaama pinta-ala.

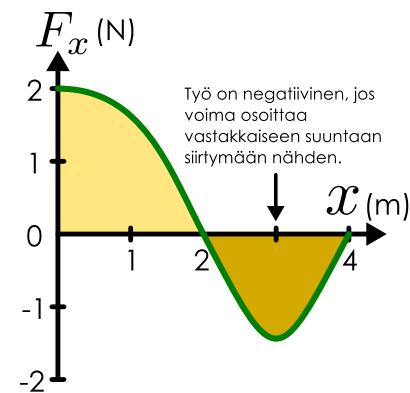
Työn määritelmä (3.67) muistuttaa impulssin lauseketta (3.63), sillä molemmat ovat *voiman integraaleja*. Kuitenkin työ on voiman integraali *paikan* suhteen ja se kertoo vuorovaikutuksen aiheuttaman muutoksen kappaleen *energiassa*. Impulssi sen sijaan on voiman integraali *ajan* suhteen ja se kertoo vuorovaikutuksen aiheuttaman muutoksen kappaleen *liikemäärässä*. Työ on *skalaari* aivan kuten energia ja impulssi on liikemäärästä tavoin *vektori*.

Työn ja impulssin eroa on havainnollistettu kuvassa 3.26. Kahteen kappaleeseen, joilla on erilaiset inertiat, vaikuttaa kumpaanakin samanlainen voima. Kappaleet ovat aluksi levossa ja voima kiihdyytää ne liikkeelle. Inertiaaltaan suurempi kappale kuitenkin kiihtyy hitaammin, joten sen nopeus on aina pienempi kuin pienemmän kappaleen. Kuitenkin koska voiman antama impulssi on suoraan verrannollinen siihen kuinka kauan voima kappaleisiin vaikuttaa, kappaleiden liikemääät muuttuvat yhtä nopeasti ja millä tahansa ajan hetkellä kummallakin on yhtä suuri liikemääriä. Kappaleisiin tehty työ sen sijaan riippuu siitä, kuinka pitkän matkan kappale on kulkenut voiman vaikutussuunnassa. Koska suurempi kappale liikkuu hitaammin, voima tekee siihen työtä hitaammin ja kyllakin ajan hetkellä sen liike-energia on pienempi kuin kevyen kappaleen. Kuitenkin valitaanpa mikä tahansa etäisyys lähtöpisteestä, kappaleiden liike-energia tällä etäisyydellä on sama. Raskaamman kappaleen nopeus on silti tällöinkin pienempi kuin kevyen kappaleen.

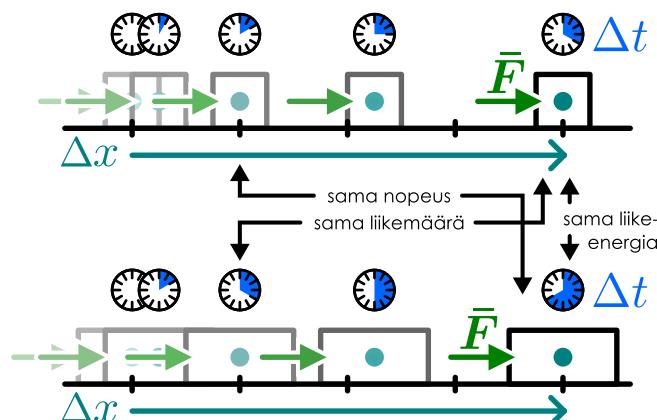
Esimerkki tällaisesta tilanteesta voisi olla vaikkapa heitto. Kevyt pallo on helpo heittää nopeasti, mutta se ei silti saa suurta liikemääriä, koska voima ehtii vaikuttaa siihen vain vähän aikaa. Raskaasta palloa puolestaan ei saa liikkeelle yhtä nopeasti eikä sen loppunopeus ole yhtä suuri, mutta sille voi antaa helpommin suuren liikemäärään, koska heittoliike kestää kauemmin. Koska heittoa rajoittaa käden pituus, samanlaisella heittotekniikalla, jos kumpaanakin palloon kohdistuu heiton aikana likimain yhtä suuri voima, kumpikin pallo saa kuitenkin heitossa yhtä suuren liike-energian.

Yleisesti, jos voima tunnetaan ajan funktiona, sen tuottama impulssi voidaan laskea integroimalla ajan suhteen ja näin voidaan määrittää kappaleen saama impulssi ja sen liikemääräntä muutos. Työtä sen sijaan ei voida laskea ratkaisematta ensin voimaa paikan funktiona. Jos sen sijaan voima tunnetaan paikan funktiona, sen tekemä työ voidaan laskea integroimalla paikan suhteen ja näin voidaan määrittää kappaleeseen tehty työ ja sen energian muutos. Impulssia sen sijaan ei voida laskea ratkaisematta ensin voimaa ajan funktiona.

Kuva 3.25: Työ on funktion ( $F(x)$ ) rajaama ala.



Kuva 3.26: Kahteen kappaleeseen vaikuttavat samanlaiset voimat antavat samat impulssit vaikuttuaan yhtä kauan ja tekevät yhtä suuren työn kappaleiden liikuttua yhtä pitkän matkan.



**3.24** Aluksi levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa vakiovoima  $F_x > 0$  N. Millainen kuvaaja saadaan, jos piirretään (a) kappaleen saama kokonaisimpulssi ajan funktiona,  $I_x(t)$ , (b) kappaleen saama kokonaisimpulssi paikan funktiona,  $I_x(x)$ , (c) kappaleeseen tehty työ paikan funktiona,  $W(x)$  ja (d) kappaleeseen tehty työ ajan funktiona,  $W(t)$ ?

## esimerkki 3.6

## Purjeveneet

**Kaksi ulkoisesti samanlaista purjevenettä lähtee levosta liikkeelle. Kumpaankin veneeseen vaikuttaa yhtä suuri liikkeen suuntainen kokonaivoima, joka on vakio. Veneistä toisen massa on kaksinkertainen toiseen nähden. Mikä on veneiden (a) liike-energian ja (b) vauhtien suhde niiden kuljettua sata metriä?**

**TILANNE** Koska veneiden massoja ja niihin kohdistuvia voimia ei tunneta, energioita ja nopeuksia ei voida ratkaista tarkasti. Sen sijaan voimme tarkastella niiden suhteellista suuruutta. Merkitään pienempää venettä A (massa  $m$ ) ja suurempaa B (massa  $2m$ ). Merkitään veneisiin vaikuttavaa voimaa  $F_{\text{kokonais}}$ , niiden kulkemaa matkaa  $\Delta x$  ja niiden loppunopeuksia  $v_A$  sekä  $v_B$ .

**SUUNNITELMA** Voima tekee veneisiin työtä, joka on verrannollinen voiman suuruuteen ja veneiden kulkemaan matkaan. Veneiden liike-energian muutos on sama kuin niihin tehty työ. Koska veneet ovat aluksi paikoillaan, niiden liike-energia on aluksi nolla. Siispä veneiden liike-energia lopuksi on yhtä suuri kuin niihin tehty työ.

Koska veneisiin kohdistuu vakiovoima, ne ovat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

**RATKAISU** (a) Voiman tekemä työ on  $W_{\text{kokonais}} = F_{\text{kokonais}} \Delta x$  ja tämä on siis sama kuin veneiden saama liike-energia,  $K = W_{\text{kokonais}}$ . Kuljettuaan yhtä pitkän matkan  $\Delta x$  veneisiin on tehty yhtä suuri työ. Siispä niiällä on myös sama liike-energia, koska niihin vaikuttaa yhtä suuri voima.

(b) Veenen A liike-energia on  $K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = W$ , joten sen loppunopeus on  $v_A = \sqrt{2W/m}$ . Koska veneen B massa on kaksinkertainen, sen loppunopeus on pienempi,  $v_B = \sqrt{W/m}$ . Nopeuksien suhde on

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{2W}{m}} / \sqrt{\frac{W}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m} \frac{m}{W}} = \sqrt{2}. \quad (3.68)$$

**ARVIOINTI** Veneiden saama liike-energia on yhtä suuri, mutta raskaamman veneen vauhti on pienempi. Näin täytyy olla, koska raskaalla veneellä on suurempi inertia. Huomaa myös, että veneiden liike-energia on sama kun ne ovat kulkeneet yhtä pitkät matkat. Raskaalta veneeltä tähän luonnollisesti kuluu enemmän aikaa.

Koska työ riippuu kappaleen siirtymästä, työ ja energia ovat usein parhaat tavat ratkaista kappaleen liike *paikan funktiona*. Jos liike halutaan ratkaista *ajan funktiona*, on helpointa käyttää dynamiikan peruslakia.

## Liikettä vastaan kohtisuora voima

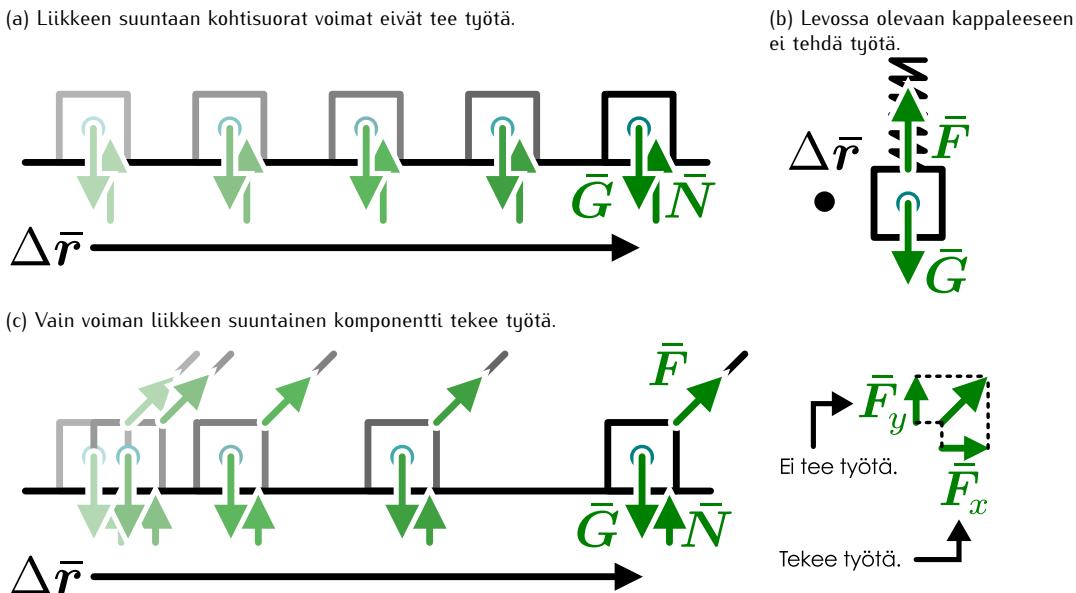
Edellä todettiin, että kappaleeseen vaikuttava voima tekee positiivisen työn kappaleen liikkuessa voiman suuntaan ja negatiivisen työn kappaleen liikkuessa voimaan nähden vastakkaiseen suuntaan. On kuitenkin myös mahdollista, että voima ei vaikuta liikkeen suunnassa vaan siihen nähden *kohtisuoraan*. Esimerkiksi kitkattomalla vaakasuoralla tasolla liikkuaan kappaleeseen vaikuttaa painovoima ja pinnan tukivoima, jotka ovat molemmat liikkeen suuntaan nähden kohtisuorassa (kuva 3.27 (a)). Tällaisen kappaleen potentiaalienergia ei muutu, koska kappale ei liiku pystysuunnassa. Kappale myös liikkuu tasaisella nopeudella, koska siihen kohdistuva kokonaivoima on nolla. Kappaleen liikkeeseen ei siis liity mitään energian muodon muutoksia eikä kappaleeseen tehdä työtä vaikka se liikkuu ja siihen vaikuttaa voima.

Energian näkökulmasta on ymmärrettävää, että tässä tapauksessa painovoima tai normaalivoima eivät voi tehdä työtä. Jos voimat nimittäin tekisivät kappaleeseen työtä, energiaa pitäisi muuttua muodosta toiseen. Kuitenkin gravitaation potentiaalienergia on vakio vaakasuorassa liikkeessä, eikä lattiassa tapahdu liikkeen aikana muutoksia. Koska energia ei muuta muotoaan kappaleessa eikä sen ympäristössä, prosessiin ei voi liittyä työtä.

Esimerkin päättelä on yleispätevä: *kappaleen liikkeen suuntaan nähden kohtisuorat voimat eivät tee kappaleeseen työtä*. Edelleen voimat, jotka eivät ole liikkeen suuntaisia eivätkä siihen nähden täsmälleen kohtisuorassa, voidaan aina jakaa liikkeen suuntaiseen ja kohtisuoraan komponenttiin (kuva 3.27 (c)). Tällöin voiman tekemä työ voidaan määrittää laskemalla erikseen kummankin komponentin tekemän työn ja summaamalla nämä yhteen, ja koska kohtisuoran komponenttiin työ on nolla, *ainoastaan voiman liikkeen suuntainen komponentti tekee työtä*.

Työ on nolla myös jos kappale *ei liiku*, sillä tällöin ei ole olemassakaan liikkeen suuntaista voiman komponenttia. Tämän voi havainnollistaa esimerkiksi tarkastelemalla jousesta roikkuvaa kappaleetta (kuva 3.27 (b)). Kappale vuorovaikuttaa sekä jousen että gravitaatiokentän kanssa, mutta kumman kaan vuorovaikutuksen potentiaalienergia ei muudu ellei kappaleen paikka muudu, eikä kappaleen liike-energiakaan muudu jos kappale on levossa. Energian muodot eivät siis muudu eikä mikään vuorovaikutuksista tee työtä. On tavallinen harhakäsitys ajatella pelkän voiman tuottamisen vaativan työtä, sillä painavien kappaleiden kannatteleminen väsyttää. Tällöin kyse on kuitenkin ihmisen fysiologian rajoitteista. Lihasvoiman ylläpitäminen esimerkiksi kappaleen kannattelemiseksi vaatii toki energiaa, mutta tämä energia ei siirry kappaleelle vaan muuttuu lihaksissa lämpöenergiaksi. Kappaleen energia ei muudu prosessissa eikä kappaleeseen tehdä työtä.

Kuva 3.27: Siirtymään nähdien kohtisuorat voimat eivät tee työtä.



3.25 Rullalauta rulla puoliympyrän muotoisen "half-pipen" puolelta toiselle. (a) Tuuttaako lautaan kohdistuvaa normaalivoima impulssin? (b) Tekeekö lautaan kohdistuvaa normaalivoima työtä?

## Työ ja mekaaninen energia

Kuten edellä huomasimme vapaassa pudotuksessa olevalle kappaleelle, painovoiman tekemä työ muuttaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Toisin sanoen painovoiman potentiaalienergian muutos on voiman tekemän työn vastaluku,  $\Delta U = -W$ , missä miihne ilmaisee sitä, että positiivinen työ johtaa potentiaalienergian vähenemiseen. Tämä on itseasiassa yleisesti totta kaikille konservatiivisille vuorovaikutuksille. Nimittäin kohdistuupa konservatiivinen vuorovaikutus mihin tahansa kappaleeseen tai systeemiin ja tämä vuorovaikutus tekee työtä, tämä työ kasvattaa kappaleen tai systeemin energiota. Energiaa ei kuitenkaan voi luoda vaan ainoastaan siirtää, joten tämän energian täytyy tulla vuorovaikutuksen varastoinasta potentiaalienergiasta.

Matemaattisesti tämä tulos on suora seuraus siitä, että voima on konservatiivisten vuorovaikutusten tapauksessa potentiaalienergian derivaatta paikan suhteen yhtälön 3.29 mukaisesti. Nimitään koska integrointi on derivoinnin käantelisoperaatio, *potentiaalienergian täytyy olla voiman integraali paikan suhteen*. Toisin sanoen  $x$ -suuntaisen vain paikasta riippuvan konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia voidaan laskea integroimalla vuorovaikutuksen tuottamaa voimaa paikan suhteen,

$$\int F_x dx = \int -\frac{dU}{dx} dx = - \int dU = -U(x) + U_0, \quad (3.69)$$

missä  $U_0$  on integrointivakio. Tällä vakiolla ei ole kuitenkaan fysikaalista merkitystä, sillä potentiaalienergialla ei ole absoluuttisia arvoja. Toisin sanoen potentiaalienergian nollakohta voidaan aina valita vapaasti ja ainoastaan potentiaalienergian muutokset ovat merkityksellisiä. Kuitenkin kun valinta on kerran tehty, sitä ei saa enää muuttaa. Jos esimerkiksi päätetään, että potentiaalienergia on nolla pisteessä  $x_0$ , eli  $U(x_0) = 0$ , määritetään potentiaalienergia yksikäsitteisesti kaikissa muissakin pisteissä, ja

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F_x dx = -W_{x_0 \rightarrow x}, \quad (3.70)$$

missä  $W_{x_0 \rightarrow x}$  tarkoittaa vuorovaikutuksen tekemää työtä kappaleen siirtyessä paikasta  $x_0$  paikkaan  $x$ . Tätä voidaan pitää potentiaalienergian *määritelmänä: konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutos kappaleen liikkumisessa on aina yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin vuorovaikutukseen liittyvän voiman kappaleeseen tekemä työ*.



3.26 Jousivoima on Hooken lain mukaisesti  $F_x = -k(x - x_0)$ . Johda lauseke jousen potentiaalienergialle yhtälöstä (3.70). Mitä saat, jos potentiaalienergian nollakohta onkin pisteessä  $x_1$ , joka on eri kuin jousen lepopiuttoa merkitsevä paikka  $x_0$ ?

Kappaleen liikkeen kannalta erityisen tärkeässä asemassa on siihen vaikuttavan *kokonaivoiman* tekemä työ, koska juuri kokonaivoima vaikuttaa kappaleen liikemääriin dynaamikan peruslain (3.3) mukaisesti. Koska kokonaivoima vaikuttaa liikkeeseen, voisi arvata kokonaivoiman tekemän työn aiheuttavan kappaleen liike-energian muutokset. Nämä juuri onkin.

Kun osoitimme aikaisemmin konservatiivisen voiman ja potentiaalienergian derivaatan yhteyden, saimme tuloksen (3.25), jonka mukaan liike-energian muutosnopeus on verrannollinen kappaleen nopeuteen ja kiihtyvyteen,  $dK/dt = ma_x v_x$ , ja koska kappaleen kiihtyvyys riippuu siihen vaikuttavasta kokonaivoimasta,  $a_x = F_{x,\text{kokona}}/m$ , tämä on voiman ja paikan muutoksen avulla lausuttuna

$$\frac{dK}{dt} = F_{x,\text{kokona}} \frac{dx}{dt}. \quad (3.71)$$

Koska derivointi ja integrointi ovat toistensa käänneisoperaatiot, liike-energian muutos äärellisellä aikavälillä saadaan tämän lausekkeen integraalina ajan suhteen

$$\Delta K = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{dK}{dt} dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokona}} \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokona}} dx. \quad (3.72)$$

Mutta tässä viimeinen lauseke on sama asia kuin kokonaivoiman kappaleeseen tekemä työ. Siispä *kappaleeseen vaikuttavan kokonaivoiman kappaleeseen tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos*

$$W_{\text{kokona}} = \Delta K. \quad (3.73)$$

Tämä tulos on nimeltään **työ-energiateoreema**.

Johdimme aikaisemmin liike-energialle lausekkeen  $K = \frac{1}{2}mv_x^2$  tarkastelemalla gravaatiota, mutta silloin kyseessä oli erikoistapaus. Nyt tarkastelimme yleisempää tapausta, jossa kappaleeseen vaikuttaa *mielivaltainen* kokonaivoima, joka voi riippua sekä ajasta että paikasta. Erityisesti kappaleeseen voi vaikuttaa sekä konservatiivisia että dissipatiivisia vuorovaikutuksia, ja yllä johdettu tulos pätee silti, sillä päättelyssä käytettiin ainoastaan dynaamikan peruslakia ja nopeuden ja työn määritelmiä. Niinpä vaikuttipa kappaleeseen *millaisia voimia tahansa*, niiden kappaleeseen tekemä kokonaistyö ilmenee aina kappaleen liike-energian muutoksena.

Koska työ-energiateoreema on yleispätevä, liike-energia voidaan *määritellä* sen avulla. Jos nimittäin levossa olevan kappaleen liike-energia on nolla ja kokonaivoima tekee siihen työn  $W_{0 \rightarrow v_x}$ , kappale saa työ-energiateoreeman mukaisesti liike-energian

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = W_{0 \rightarrow v_x}. \quad (3.74)$$

Kappaleen liike-energia on siis se kokonaistyö, joka kappaleeseen on tehty, kun se on kiihdytetty nopeutensa. Erityisen huomattavaa tässä on se, että tehty työ ei riipu esimerkiksi siitä, kuinka nopeasti kiihdytys tapahtuu tai onko kiihtyvyys  $a_x$  positiivinen vaan *ainoastaan* kappaleen saamasta loppunopeudesta.

Yhdistämällä edellä saadut tulokset, jonka mukaan konservatiivisten vuorovaikutusten tekemä työ ilmaisee vuorovaikutusten varastoiman potentiaalienergian muutosta,  $\Delta U = -W$ , ja kokonaivoiman tekemä työ ilmaisee kappaleen liike-energian muutosta,  $\Delta K = W$ , päädyimme tuttuun mekaanisen energian säilymis-lakiin: Jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, niiden yhdessä tekemä työ on aina yhtä suuri kuin potentiaalienergian muutos liike-energiaksi ja näiden summa on vakio

$$\Delta K + \Delta U = W - W = 0. \quad (3.75)$$

Päättelimme tuloksen jo aikaisemmin suoraan energian säilymislaista, mutta koska onnistuimme nyt johtamaan sen työn määritelmän avulla, tulos on osoitus siitä että nämä määriteltyt työt on järkevä suure joka todella kuvaa energiamuotojen muuttumista toisikseen.



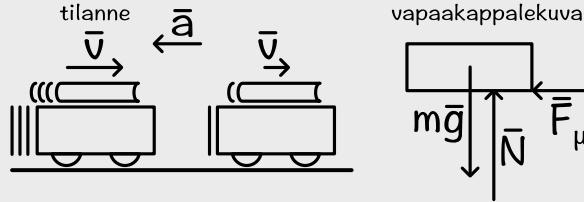
- 3.27** Kappaleen massa on 1.0 kg ja sitä nostetaan ylöspäin 15.0 N vakivoimalla 1.0 m matka. (a) Kuinka suuren työn nostava voima tekee? (b) Kuinka suuren työn painovoima tekee? (c) Kuinka suuren työn kokonaivoima tekee? (d) Mikä on gravaation potentiaalienergian muutos? (e) Mikä on kappaleen liike-energian muutos? (f) Miten edellä lasketut työt ja energioiden muutokset liittyvät toisiinsa?

## esimerkki 3.7

## Liikkuvan kappaleen lepotutka

**Kirja on liikkuvan auton kyydissä vaakasuoralla alustalla. Kuinka suuri kitkavoima kirjaan kohdistuu? Kuinka voimakkaasti auto voi jarruttaa niin että kirja pysyy auton suhteeseen paikoillaan?**

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva ja kirjan vapaa-kappalekuva. Kirja ja auto ovat molemmat kiihtyvässä liukkeessä. Merkitään kirjan massaa  $m$ , auton kiihtyvyttä  $\ddot{a}$  sekä lepo- ja liikekitkakertoimia  $\mu_{\text{lepo}}$  ja  $\mu$ .



**SUUNNITELMA** Jotta kirja pysyisi auton suhteeseen paikoillaan, sen täytyy liikkua aina samalla nopeudella kuin auto. Tällöin kirjan kiihtyvyyden pitää myös olla sama kuin auton kiihtyvyys, ja kirjaan täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima.

Kirjaan vaikuttaa painovoima, normaalivoima sekä kitka. Vaikka kappale ulkopuolisen havaitsijan mielestä liikkuu, kirjan ja alustan pinnat eivät liiku toistensa suhteeseen, joten kyseessä on lepotutka — ei liikekitka. Kitkavoiman suuruus määräytyy niin, että kirjan kiihtyvyys on sama kuin auton. Lepotutkan suurin mahdollinen arvo riippuu kirjan ja alustan välisen normaalivoiman suuruudesta sekä lepotutkakertoimesta.

Koska kirja ei liiku pystysuunnassa, siihen kohdistuva normaalivoima on yhtä suuri kuin painovoima

$$N = mg. \quad (3.76)$$

Kirjaan kohdistuva kokonaisvoima osoittaa siis vaakasuoraan ja koska tässä suunnassa vaikuttaa ainoastaan kitka, kokonaisvoiman täytyy olla sama kuin kitkavoima. Kokonaisvoiman suuruus voi siis olla korkeintaan kitkavoiman maksimi-suuruus

$$F_{\text{kokonais,max}} = F_{\mu,\text{max}} = \mu_{\text{lepo}} N. \quad (3.77)$$

Kirjan kiihtyvyyden skalaarikomponentti liikkeen suunnassa on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais},x} = \frac{1}{m} F_{\mu,x} = -\frac{1}{m} F_{\mu}. \quad (3.78)$$

Koska voiman suuruudella on maksimi, myös kiihtyvyyden itseisarvolla on maksimi

$$a_{\text{max}} = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais,max}}. \quad (3.79)$$

**RATKAISU** Kirjan kiihtyvyys voi olla korkeintaan

$$a_{\text{max}} = \frac{1}{m} \mu_{\text{lepo}} N = \mu_{\text{lepo}} g. \quad (3.80)$$

Kun auto jarruttaa kiihtyvyydellä  $a$ , joka on itseisarvoltaan tätä pienempi, lepotutkan voimakkuden on oltava

$$F_{\mu} = ma, \quad (a < a_{\text{max}}) \quad (3.81)$$

jotta kirja pysyisi paikoillaan. Jos auto jarruttaa kiihtyvyydellä, joka on suurempi kuin  $a_{\text{max}}$ , lepotutka ei ole riittävä pitämään kirjaa paikoillaan ja se alkaa liikkua. Tällöin kirjaan vaikuttaa liikekitka, joka riippuu normaalivoimasta

$$F_{\mu} = \mu N = \mu mg, \quad (a > a_{\text{max}}). \quad (3.82)$$

**ARVIOINTI** Huomaa, että tässä esimerkissä kirjan liike-energia pienenee, koska lepotutka tekee siihen negatiivista työtä. Joskus näkee väitetävän, että lepotutka ei voi tehdä työtä, koska se vaikuttaa vain paikoillaan oleviin kappaleisiin, mutta tämä ei ole totta. Lepotutka vaikuttaa tässä esimerkissä kirjaan, koska kirja ei liiku *auton suhteeseen*, mutta ulkopuolisen tarkastelijan näkökulmasta kirja liikkuu ja lepotutka tekee siihen työtä. Samalla kun kitka tekee kirjaan negatiivista työtä, se tekee autoon yhtä paljon positiivista työtä.

Mitä suurempi lepotutkakerroin on, sitä suuremmalla kiihtyvyydellä kirja pysyy auton suhteeseen paikoillaan. Tämä on järkevä, sillä jarruttavassa autossa sileillä, liukkaille pinnoilla olevat tavarat lähevät liukumaan helpommin kuin karkeilla.

## Moniosaislin systeemeihin tehty työ

Työ-energiateoreemassa tarkasteltiin yhden kappaleen liikkeen muuttumista siihen vaikuttavan kokonaisvoiman vaikutuksesta. Täsmälle sama päätely toimii myös systeemeille, kun kokonaisvoimanä käytetään systeemiin vaikuttavien *ulkoisten voimien summaa*, systeemin paikkana *massakeskipistettä*, systeemin massana sen *kokonaismassaa* ja systeemin nopeutena *massakeskipisteen nopeutta*. Tällöin siis työ-energiateoreeman mukaan, jos  $F_{x,\text{kokonais}}$  on systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien summa, systeemin massakeskipisteen avulla lasketulle liike-energialle pätee

$$\Delta \left( \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \right) = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokonais}} dx_{\text{cm}}. \quad (3.83)$$

Jos systeemi on yksi jäykä kappale, kappaleen ja sen massakeskipisteen liike ovat sama asia, jolloin massakeskipisteen avulla laskettu liike-energia on systeemin liike-energia. Opimme kuitenkin jo aikaisemmin, että tämä ei ole yleisesti totta, koska systeemi voi koostua eri tavoin liikkuvista osista. Niinpä moniosaisen systeemin liike-energian muutos *ei ole* sama asia kuin systeemiin vaikuttavan kokonaisvoiman ja systeemin massakeskipisteen siirtymän tulo.

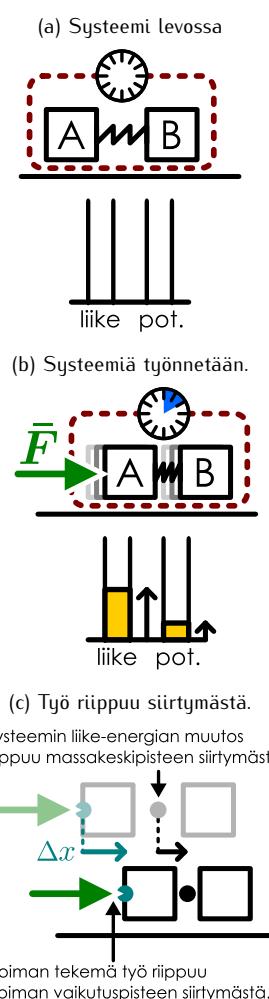
Lisäksi jos systeemi koostuu useista kappaleista tai se on kappale, jonka muoto voi muuttua, systeemi yleensä sisältää *muutakin* energiää kuin liike-energiaa. Työ on suure, joka mittaa energian muutosta, joten systeemiin tehdyn työn pitää vastata systeemin *kokonaisennergian* muutosta. Tutkitaan nyt, miten työ pitää määritellä, jotta tämä olisi totta.

Tarkastellaan yksinkertaista kuvan 3.28 esimerkkiä asian havainnollistamiseksi: Kitkattomalla suoralla radalla on kaksi samanlaista vaunuja, jotka on kytketty yhteen jousella. Vaunut ovat aluksi levossa, mutta sitten toista vaunuista aletaan työntää liikkeelle. molemmat vaunut eivät liiku heti yhtä nopeasti, sillä ensimmäisen vaunun työtäminen puristaa vaunujen välistä joustaa ja vasta puristuneen jousen toiseen vaunuun kohdistama voima työntää toisen vaunun liikkeelle. Siispä jousi puristuu prosessissa ja varastoi samalla potentiaalienergiaa. Systeemin energia kasvaa siis *enemmän* kuin mitä systeemin liike-energia kasvaa.

Voimme jälleen tarkastella erikseen systeemin sisäisiä ja ulkoisia voimia. Sisäiset voimat ovat nyt kappaleiden ja jousen väliset voimat, jotka muuttavat kappaleiden liike-energiaa ja jousen potentiaalienergiaa toisikseen. Ainoa systeemiin vaikuttava ulkoinen voima on ensimmäiseen kappaleeseen kohdistuva voima, jolla kappalella työnnetään. Tämän voiman kappaleeseen tekemä työ on työn määritelmän mukaisesti voiman liikkeen suuntaisen komponentin sekä *kappaleen siirtymän tulon*,  $W = F_{x,\text{kokonais}} \Delta x_{\text{kappale}}$ . Tämän täytyy olla siis myös ulkoisten voimien systeemiin tekemä työ ja systeemin *kokonaisennergian* muutoksen täytyy prosessissa olla yhtä suuri kuin tämä työ. Voiman tekemä työ on todellakin suurempi kuin massakeskipisteen liike-energian muutosta kuvaava suure  $F_{x,\text{kokonais}} \Delta x_{\text{cm}}$ , sillä jousen puristuessa ensimmäinen kappale siirtyy *pidemmän* matkan kuin massakeskipiste.

Vastaava päättelee pätee mille tahansa moniosaiselle systeemille. Systeemin massakeskipisteen liike-energian muutoksen voi aina laskea systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien summan ja massakeskipisteen siirtymän avulla, mutta systeemiin tehtyä työtä ei voi. Sen sijaan jokaisen voiman tekemä työ riippuu voiman *vaikutuspisteen siirtymästä*. Jos systeemin muoto muuttuu, eri voimien vaikutuspisteet voivat siirtää eri tavalla, ja tällöin kunkin voiman tekemä työ täytyy laskea erikseen. Erityisesti voimat, joiden vaikutuspiste ei liiku, eivät tee lainkaan työtä.

Kuva 3.28: Moniosaiseen systeemiin tehty työ.



**3.28** Selitä omien sanoin voiman tuottama impulssi ja työ sekä miten voit laskea nämä suureet. Selitä erityisesti, milloin suureet ovat positiivisia, negatiivisia tai nollia. Keksi esimerkki, jossa voima tai voimat tuottavat impulssin mutta niiden tekemä työ on nolla. Keksi myös esimerkki, jossa voimat tekevät työtä mutta niiden impulssi on nolla.

## esimerkki 3.8

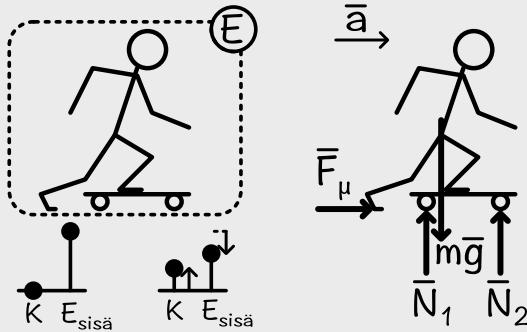
## Rullalauta

**Rullalautailija ottaa vauhtia potkaisemalla maasta (tasaisella maalla). (a) Minkä vuorovaikutuksen voima työntää lautailijan liikkeelle? (b) Mikä on tämän voiman tekemä työ?**

**TILANNE** Tarkastellaan systeeminä lautailijan ja rullalaudan yhdistelmää ja pürrretään näiden vapaakkappalekuva.

**SUUNNITELMA** (a) Systeemün kohdistuvat ulkoiset voimat ovat painovoima, maanpinnan tukivoima sekä maanpinnan ja kenkän välinen kitkavoima. Painovoima ja tukivoima ovat vastakkaisuuntainen ja kumoavat toisensa. Kitkavoima aiheuttaa lautailijalle vaakasuuntaisen kiilthyvyyden.

(b) Voima osoittaa liikkeen suuntaan, joten lautailijan tehty työ riippuu voiman suuruudesta ja potkun pituudesta. Potkun aikana kenkä on kuitenkin maan suhteeseen paikoillaan, joten *kitka ei tee lainkaan työtä*.



**ARVIOINTI** Voi olla outo tulos, että lautailijan liikkeelle työntävä voima ei tee lautailijaan työtä. Tämä kuitenkin johtuu siitä, että lautailija on moniosainen systeemi ja työtä tekevät *lautailijan jalan lihakset* eikä maan pinta. Työhän mittaa energian siirtymistä, eikä maasta siirry energiaa lautailijaan. Sen sijaan prosessissa muuttuu lautailijan varastoitunutta kemiallista energiota lämpö- ja liike-energiaksi. Voimien avulla ilmaisten tämä ilmenee niin, että potkun aikana lautailijan jalka liikkuu, joten jalan eri osiin vaikuttavat voimat tekevät mekaanista työtä.

Tavallinen intuitiivinen käsitys voimasta on se, että voimia voivat tuottaa vain elolliset olennot tai korkeintaan moottorien kaltaiset laitteet. Tämä on kuitenkin aivan väärä käsitys, sillä myös paikoillaan pysyvä lattia kohdistaa sen päällä seisovaan ihmiseen voimia kuten tässäkin esimerkissä. Voiman tuottaminen vaatii vain kappaleiden kosketuksen. Intuitiot on kuitenkin siinä mielessä oikeilla jäljillä, että paikoillaan pysyvä lattia ei pysty tekemään sen päällä seisovaan ihmiseen *työtä* eli *energiaa* ei siirry lattiasta ihmiseen.

### Dissipatiivisten voimien työ

Myös dissipatiiviset voimat tekevät työtä, mutta tämä työ ei voi varastoitua potentiaalienergiaksi, koska dissipatiivisia vuorovaikutuksia ei voi kuvata potentiaalienergialla. Kappaleiden liike-energian muuttuminen lämpöenergiaksi kitkan vaikutuksesta on tyypillinen dissipatiivisen vuorovaikutuksen tekemästä työstä. Esimerkiksi kuvassa 3.29 (a) laatikko työntetään pitkin maata. Tällöin työntäjä kohdistaa laatikkoon voiman laatikon liikkeen suuntaan ja liikekitka voiman vastakkaiseen suuntaan kuin mihin laatikko liikkuu. Siispä työntäjä tekee laatikkoon positiivista ja kitka negatiivista työtä. Työntäjän tekemä työ ilmenee hänen varastoituneen kemiallisen energian vähentymisenä ja laatikon liike-energian lisääntymisenä. Kitkan tekemä työ puolestaan ilmenee laatikon liike-energian vähennemisenä ja laatikon sekä lattian lämpöenergian lisääntymisenä. Lopputuloksena siis osa työntäjän käytämästä energiasta muuttuu laatikon liikkeeksi ja osa lämpöenergiaksi. Energiaa ei voi luoda, joten systeemin kokonaisenergia on silti vakio.

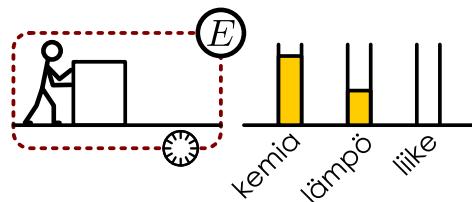
Dissipatiivisten vuorovaikutusten ollessa merkittävästi on systeemin valinnassa oltava erityisen huolellinen, jos tarkoitus on pitää kirjaa energian eri muotojen säilymisestä. Esimerkiksi lattialla liukuvaan kappaleeseen vaikuttava kitka muuttaa liike-energiaa lämpöenergiaksi eli sisäenergiaksi. Tämä sisäenergia kuitenkin jakaantuu *kaikkien* vuorovaikuttavien kappaleiden kesken, eikä *yhden* kappaleen sisäenergian muutos prosessin lopussa välttämättä ole yhtä suuri kuin dissipatiivisen voiman siihen tekemä työ. Esimerkiksi liukuvan kappaleen ja lattian välisen kitkan lämmittää sekä kappaleetta että lattiaa. Niinpä jos systeeminä tarkastellaan vain työntäjää ja liukuva kappaleita kuten kuvassa 3.29 (b), systeemin sisäenergian muutos *ei ole* yhtä suuri kuin laatikon liike-energian muutos, sillä osa tästä energiasta voi siirtyä systeemin ulkopuolelle, lattiaan. Tämän systeemin kokonaisenergia ei siis ole prosessissa vakio.

Itse asiassa on mahdollista, että systeemin kokonaisenergia ei ole vakio, vaikka kaikkien systeemiin kohdistuvien ulkoisten voimien tekemä työ olisi nolla. Osoittautuu nimittäin, että energiaa voi siirtyä työn lisäksi myös *lämpönä*, kuten vaikkapa kuuman kahvin jäähtyminen osoittaa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että koska lämpimien kappaleiden atomeilla on paljon epäjärjestynytä liike-energiaa, kylmän kappaleen kanssa kontaktissa olevan lämpimän kappaleen atomit alkavat töniä myös kylmän kappaleen atomeja nopeampaan liikkeeseen itse samalla hidastuen. Mikroskooppisessa mittakaavassa tämäkin voidaan selittää atomien välisen voimien tekemänä työnä, mutta makroskooppisesta näkökulmasta lämpöenergia näyttää tällöin siirtymän itsestään kappaleesta toiseen. Lämmön kautta tapahtuvaa energian siirtymistä ja tähän liittyviä lainalaisuuksia kuvaa *termodynamika*, johon tutustumme myöhemmin.

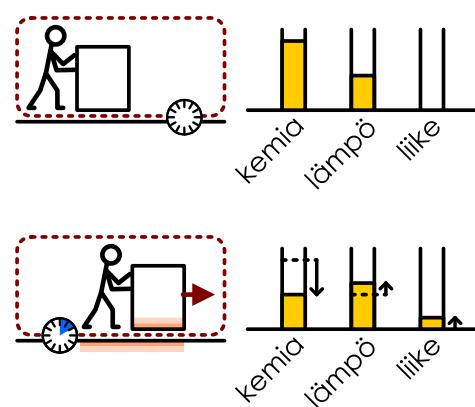
Energian säilymislain perusteella emme siis voi päättellä paljonko työntäjän, laatikon ja lattian sisäenergiat muuttuvat, joten vaikka tarkastelisimme systeemiä, johon nämä kaikki kuuluvat ja jonka energia on vakio,

Kuva 3.29: Systeemin ulkoiset dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat siirtää energiaa systeemistä ja ympäristöön välillä.

(a) Dissipatiivinen vuorovaikus systeemin sisällä: systeemin kokonaisenergia on vakio.



(b) Dissipatiivinen vuorovaikus systeemin reunalla: energiaa siirtyy systeemistä ympäristöön.



emme pysty suoraan päätelemään esimerkiksi laatikon saamaa liike-energiaa. Työn avulla voimme kuitenkin tämän selvittää. Laatikon työntäjältä saama liike-energia on nimitään täsmälleen yhtä suuri kuin työntäjän laatikkoon tekemä työ. Vastaavasti kitka kuluttaa laatikon liike-energiaa täsmälleen kitkavoiman tekemän työn verran. Niinpä voimme määrittää laatikon liike-energian muutoksen siihen kohdistuvien voimien tekemänä kokonaistyonä.

**3.29** Työntäjä kohdistaa laatikkoon 100 N vakivoiman ja laatikkoon vaikuttaa 80 N kitkavoima. Työntäjä työntää laatikkoa yhden metrin. (a) Paljonko laatikko saa työntäjältä liike-energiaa? (b) Paljonko laatikko menettää kitkan takia liike-energiaa? (c) Mikä on laatikon liike-energian muutos? (d) Mikä on työntäjän, laatikon ja lattian sisäenergian kokonaismuutos?

### esimerkki 3.9

### Dissipatiivinen työ

**Auto ajaa loivaa mäkeä ylös. Mäen kaltevuuskulma on  $5^\circ$ . Auton massa on 980 kg. Maanpinta kannattelee autoa 9570 N kosketusvoimalla, renkaat työntävät autoa ylöspäin yhteensä 1070 N voimalla ja ilmanvastus vastustaa liikettä 60 N voimalla. (a) Paljonko työtä voimat tekevät, kun auto kulkee 10 m? (b) Millaisia muutoksia energian eri muodoissa tapahtuu? Pürrä energiadiagrammi.**

**TILANNE** Tilanne on täsmälleen sama kuin esimerkissä 3.2. Merkitään jälleen mäen kaltevuuskulmaa  $\theta = 5^\circ$ , renkaiden työntövoimaa  $F_{\text{maa} \rightarrow \text{auto}} = 1070 \text{ N}$ , ilmanvastusta  $F_{\text{ilma} \rightarrow \text{auto}} = 60 \text{ N}$ , painovoiman komponenttia alamäen suuntaan  $G_{x,\text{maa} \rightarrow \text{auto}} = -840 \text{ N}$  ja auton siirtymää mäen suunnassa  $\Delta x = 10 \text{ m}$ .

**SUUNNITELMA** Ilmanvastus osoittaa auton liikettä vastaan, joten se tekee negatiivista työtä,

$$W_{\text{ilmanvastus}} = -F_{\text{ilma} \rightarrow \text{auto}} \Delta x = -600 \text{ J}. \quad (3.84)$$

Samoin painovoimalla on komponentti liikettä vastaan, joten sekin tekee negatiivista työtä,

$$W_{\text{painovoima}} = G_{x,\text{maa} \rightarrow \text{auto}} \Delta x = -8400 \text{ J}. \quad (3.85)$$

Voima, jolla maanpinta kannattelee autoa on puolestaan kohtisuorassa liikkeen suuntaa vastaan, joten se ei tee työtä lainkaan.

Voima, jolla renkaat työntävät autoa, osoittaa auton liikkeen suuntaan, mutta se ei vielä tarkoita, että tämä voima tekisi autoon työtä. Tämä voima nimitään vaikuttaa aina pisteessä, jossa renkaat koskevat maata, ja jos renkaat eivät sudi, renkaan pinta on maata koskettessaan hetkellisesti paikoillaan. Niinpä myöskaan tämä voima ei tee autoon työtä. Tilanne on sama kuin esimerkissä 3.8, jossa maanpinta ei tehnyt työtä jalkaan.

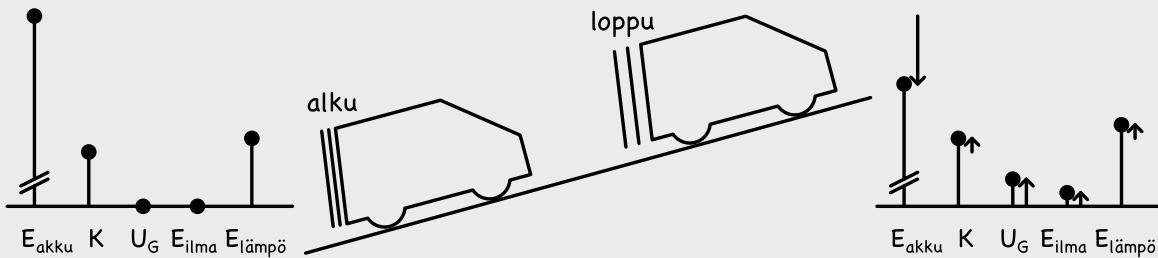
(b) Painovoiman tekemä työ muuttaa auton liike-energiaa painovoiman potentiaalienergiaksi. Ilmanvastuksen tekemä työ muuttaa auton liike-energiaa ilman liike-energiaksi ja lämpöenergiaksi. Lisäksi auton liikkeeseen lüttyy muitakin dissipatiivisia vuorovaikutuksia kuten kitkaa ja vieriämisvastusta, jotka muuttavat liike-energiaa lämpöenergiaksi. Jos kyseessä on polttomoottoriauto, polttovaineen palaminen muuttaa polttovaineen kemiallista energiasta lämpöenergiaksi, ja vain pieni osa tästä energiasta saadaan muutettua liike-energiaksi. Jos kyseessä on sähköauto, sen moottori muuntaa akkuun varastoitunutta sähköistä energiasta liike-energiaksi. Tällöinkin osa sähköisestä energiasta muuttuu väistämättä lämpöenergiaksi, mutta paljon suurempi osuus varastoituneesta energiasta saadaan muutettua liike-energiaksi kuin polttomoottorissa.

Autoon tehdään vain negatiivista työtä, joten sen kokonaisenergia pienenee,

$$\Delta E_{\text{auto,kokonais}} = W_{\text{ilmanvastus}} + W_{\text{painovoima}} = -9 \text{ kJ.} \quad (3.86)$$

Jos systeemiin otetaan mukaan myös autoa ympäröivä ilma ja maapinta sekä painovoima, niiden kaikkien yhteenä kokonaisenergia on energian säilymislain perusteella välittämättä vakio. Esimerkin 3.2 perusteella autolla oli pieni kiilthyvyys ylämäkeen, jolloin sen vauhti ja siis liike-energia kasvaa. Samalla myös painovoiman potentiaalienergia kasvaa ja auton, ilman sekä maan lämpöenergia kasvaa. Autoon varastoidun kemiallisen tai sähköisen energian täytyy siis vähentyä niihin paljon, että se riittää kattamaan täsmälleen kaikkien muiden energian lajien lisääntymisen. Pelkästään annetuilla tiedoilla emme kuitenkaan voi päätellä, kuinka suuret nämä muutokset ovat.

Hahmotellaan vielä energiadiagrammi alussa ja lopussa. Koska tarkkoja arvoja ei voi laskea, diagrammi ei ole välittämättä oikeassa mittakaavassa. Joka tapauksessa polttotoaineeseen tai akkuun varastoituneen energian täytyy olla hyvin suuri, koska sen täytyy riittää pitkillekin matkoille.



## Teho

Energian säilymislakia sovellettaessa ei usein väitetä kuinka nopeasti prosessit tarkalleen tapahtuvat, koska lopputulos voidaan päätellä suoraan loppu- ja alkutilan perusteella. Sen sijaan systeemien dynamiikkaa tarkasteltaessa tapahtumien nopeus voi olla hyvin kiinnostavaa. Koska prosesseja voidaan lähes aina kuvata energian muuttumisena muodosta toiseen, prosessien nopeutta voidaan kuvata tarkastelemalla kuinka nopeasti tämä tapahtuu. Tätä kuvaava suure on **teho**, joka määritellään energian (jonkin muodon) derivaattana ajan suhteeseen

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (3.87)$$

Tehon yksikkö on watti

$$W = [P] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{kg}\text{m}^2/\text{s}^3. \quad (3.88)$$

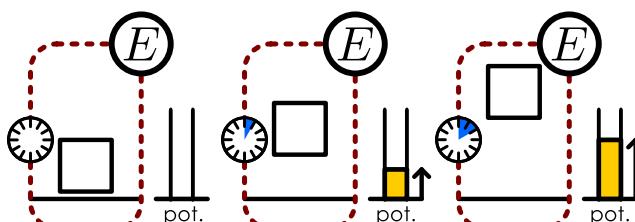
Voiman tekemän työn teho kuvailee sitä, kuinka nopeasti voiman kuvama vuorovaikutus muuttaa energiota muodosta toiseen. Esimerkiksi kappaleeseen vaikuttavan kokonaivoiman teho ilmaisee kuinka nopeasti kappaleen liike-energia muuttuu. Työn määritelmän mukaisesti  $x$ -suunnassa liikkuvaan kappaleeseen vaikuttavan liikkeen suuntaisen voiman teho on

$$P = \frac{dW}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} = F_x v_x. \quad (3.89)$$

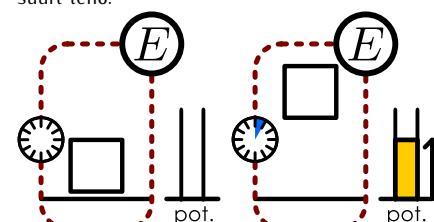
Siispä voima tekee kappaleeseen työtä sitä suuremalla teholla, mitä nopeammin kappale liikkuu. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että työ riippuu *matkasta*, jolla voima vaikuttaa, ja nopea kappale kulkee pitkän matkan lyhyessä ajassa. Esimerkiksi painovoimakentässä ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergia kasvaa sitä suuremalla teholla mitä nopeammin kappale nousee (kuva 3.30).

Kuva 3.30: Teho kuvailee energian muutoksen nopeutta.

(a) Kappaleen hitaaseen nostamiseen riittää pieni teho.



(b) Kappaleen nopeaan nostamiseen tarvitaan suuri teho.



Teho on keskeinen suure monissa energiansiirron käytännön sovelluksissa. Esimerkiksi jos auto pitää pystyä kiihdyttämään tiettyyn nopeuteen tiettyssä ajassa, sen moottorin on pystyttävä tuottamaan tähän vaadittava teho. Vastaavasti jarrutuksessa kitka lämmittää jarrupaloja yhtä suurella teholla kuin millä auton lüke-energia vähenee. Lämmittäessä rakennusta tiettyllä teholla pitää eristys mitoitaa niin, ettei rakenteiden kautta hukattu lämpöteho ole lämmitystehoa suurempi, sillä muuten rakennus jäähtyy. Tai päinvastoin jos tietokoneen prosessori kuumenee käytössä tiettyllä teholla, lämpöä on kyettävä siirtämään pois yhtä tehokkaasti tai muuten laite ylikuumenee.



**3.30** Liukuvaan laatikkoon kohdistuu 80 N kitkavoima. (a) Kuinka nopeasti laatikko voi työntää, jos käytetään yhden hevosvoiman eli n. 740 W teho? (b) Jos laatikko työnnetään 160 N voimalla, kuinka suurella teholla tehdään työtä laatikon ollessa lähdössä liikkeelle (ts. laatikko ei vielä liiku).

### esimerkki 3.10

### Moottorin teho

**Auton massa on 1400 kg. Kuinka suuri keskimääräinen teho vaaditaan, jos auton pitää pystyä kiihdyttämään nopeudesta 60 km/h nopeuteen 100 km/h seitsemän sekunnin aikana?**

**TILANNE** Merkitään auton massaa  $m = 1400 \text{ kg}$  ja alku- ja loppunopeutta  $v_{\text{alku}} = 60 \text{ km/h}$  sekä  $v_{\text{loppu}} = 100 \text{ km/h}$ . Olkoon kiihdytykseen tarvittu aika  $\Delta t = 7 \text{ s}$ .

**SUUNNITELMA** Kysytty teho on auton energian muutos jaettuna tähän muutokseen tarvitulla ajalla. Nopeudet on syytä muuttaa ensin SI-yksiköihin kertoimella  $\text{km/h} = \frac{10}{36} \text{ m/s}$ . (Ks. esimerkki 1.4).

Lüke-energian muutos on  $\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{\text{loppu}}^2 - v_{\text{alku}}^2)$  ja keskimääräinen teho  $P_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$ .

**RATKAISU** Lüke-energia alussa on  $K_{\text{alku}} = \frac{1}{2}mv_{\text{alku}}^2 = 194 \text{ kJ}$  ja lopussa  $K_{\text{loppu}} = \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2 = 540 \text{ kJ}$ . Lüke-energian muutos on siis  $\Delta K = 346 \text{ kJ}$  ja teho  $P = 49 \text{ kW}$ .

**ARVIOINTI** Moottoreiden yhteydessä käytetään tehon yhteydessä usein vanhanaikaista yksikköä hevosvoima, joka on noin 740 W. Tarvittava teho on siis  $P = 49400 \text{ W}/740 \text{ W/hv} \approx 67 \text{ hv}$ . Tämä ei ole polttomoottorille vielä kovin paljon, mutta kyseessä oli tarvittavan tehon keskiarvo, ja lisäksi moottorin tehosta vain pieni osa kuluu auton lüke-energian kasvattamiseen. Polttoaineen kemiallisesta energiasta vain osa voidaan muuntaa moottorissa mekaaniseksi energiaksi ja esimerkiksi ilmanvastuksen autoon kohdistama voima tekee siihen jatkuvasti negatiivista työtä, ja osa moottorin tehosta kuluu tämän työn kattamiseksi.

## Yhteenveto: Voima ja työ

### Differentiaalit ja vektorit

- Vektorisummeita voidaan graafisesti esittää nuolina, joiden pituus kuvailee suureen suuruutta ja suunta suureen suuntaa.
- Vektorisumma voidaan esittää graafisesti pürtämällä vektoreita kuvaavat nuolet peräkkäin. Tällöin vektorien summaa esittää ensimmäisen vektorin kannasta viimeisen vektorin kärkeen pürrettyt nuloil.
- Vektorin  $\bar{A}$  vektorikomponentti  $\bar{A}_x$  suuntaan  $\hat{i}$  on tähän suuntaan osittava vektori, joka ulottuu kyseisessä suunnassa yhtä pitkälle kuin vektori  $\bar{A}$ . Vektorin voi esittää eri suuntaisten vektorikompo-

nenttiin summana

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z. \quad (3.90)$$

- Vektorikomponentin pituus on yhtä suuri kuin vektorin skalaarikomponentin itseisarvo kyseiseen suuntaan

$$\bar{A}_x = A_x \hat{i}. \quad (3.91)$$

### Vapaakkappalekuva

- Voima** on suure, joka kuvailee vuorovaikutuksen vaikutusta kappaleen liikkeeseen ja muotoon. Voimalla on suuruus ja suunta eli se on *vektorisuure*.
- Vapaakkappalekuva** on graafinen esitys, johon merkitään kaikki yhteen kappaleeseen vaikutavat voimat.

- Kappaleeseen vaikuttava **kokonaivoima** on siihen vaikuttavien voimien **vektorisumma**

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \sum_i \bar{F}_i.$$

### Newtonin lait

- Jos kappaleeseen vaikuttava kokonaivoima on nolla, se liikkuu tasaisella nopeudella. Tämä on **jatkavuuden laki**.
- Kappaleen liikemääärän muutosnopeus on yhtä suuri kuin siihen vaikuttava kokonaivoima

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{p}}{dt}.$$

Tämä on **dynamikan peruslaki**.

- Jos kappaleet A ja B vuorovaikuttavat ja vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen A voiman  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$ , vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen B voiman  $\bar{F}_{A \rightarrow B}$ . Nämä voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen

$$\bar{F}_{A \rightarrow B} = -\bar{F}_{B \rightarrow A}.$$

Tämä on **voiman ja vastavoiman laki**.

### Vuorovaikutuksia

- Elastinen muodonmuutos (kuten jousi) tuottaa voiman, joka osoittaa aina kohti tasapainopistettä ja jonka suuruus on verrannollinen pituuden muutokseen

$$\bar{F}_{\text{elastinen}} = -k(x - x_0)\hat{i}.$$

- Gravitaatio tuottaa voiman, jonka suuruus on verrannollinen kappaleiden massaan ja suunta on aina alaspäin

$$\bar{F}_{\text{gravitaatio}} = m\bar{g} = -mg\hat{i}.$$

- Pinnan tukivoima eli **normaalivoima**  $\bar{N}$  on koskettaivien kappaleiden välinen voima, joka estää kappaleita liikkumasta toistensa lävitse. Normaalivoiman suunta on aina kohtisuoraan kosketuspintaa vastaan ja sen suuruus määrityy niin, että kappale ei saa liikkua pinnan läpi.

- Lükekitka** tuottaa voiman, joka pyrkii hidastamaan pinnalla liukuvan kappaleen nopeutta *pinnan suhteen*. Lükekitkan suuruus on suoraan verrannollinen pinnan ja kappaleen väliseen normaalivoimaan sekä pintojen **lükekikakertoimeen**  $\mu$  ja sen suunta on aina vastakkainen kappaleen pinnan suhteen mitattuun nopeuteen nähdien,

$$F_{\text{lükekikka}} = \mu N.$$

- Lepokitka** tuottaa voiman, joka pyrkii estämään kappaleiden välistä kosketuspintoja liikkumasta toistensa suhteen. Lepokitkan suuruus määrittyy ehdosta, että kappale ei saa liikkua alustansa suhteen. Lepokitkalla on kappaleen ja pinnan välistä normaalivoimasta sekä pintojen **lepotikitakertoimesta**  $\mu_{\text{lepo}}$  riippuva **maksimisuurus**,

$$F_{\text{lepotikitka}} \leq \mu_{\text{lepo}} N.$$

### Sanasto

- voima (force)
- vapaakkappalekuva (free body diagram)
- vektorisumma (vector sum)
- vektorikomponentti (vector component)
- yhdensuuntainen (parallel)
- kohtisuora (perpendicular)
- voimien superpositio (superposition of forces)
- Newtonin lait (Newton's laws)
- jatkavuuden laki (law of inertia)
- dynamikan peruslaki (Newton's equation of motion)
- voiman ja vastavoiman laki (law of action and reaction)
- jousivoima (spring force)
- Hooken laki (Hooke's law)
- jäykä kappale (rigid body)

- vakaa tasapaino (stable equilibrium)
- epämääräinen tasapaino (neutral equilibrium)
- epävakaa tasapaino (unstable equilibrium)
- elastisuus (elasticity)
- plastisuus (plasticity)
- jännitys (tension)
- normaalivoima (normal force)
- lepotikitka (static friction)
- lükekikakertoimisto (kinetic friction)
- kitkakerroin (coefficient of friction)
- potentiaaliakuoppa (potential well)
- työ (work)
- työ-energiatoreema (work-energy theorem)
- teho (power)

## Voima, työ ja impulssi

- Vuorovaikutuksen tekemä **työ** mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa muutosta energiassa.
- Vuorovaikutuksen tuottama **impulssi** mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa muutosta liikemääressä.
- Jos kappaleeseen vaikuttaa  $x$ -suuntainen **vakiovoima**  $\bar{F} = F_x \hat{i}$  ja kappale siirtyy  $x$ -suunnassa matkan  $\Delta x$ , voima tekee kappaleeseen **työn**

$$W = F_x \Delta x.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa  $x$ -suuntainen paikasta riippuva voima  $\bar{F} = F_x \hat{i}$  ja kappale liikkuu  $x$ -suunnassa pistestä  $x_{\text{alku}}$  pisteeseen  $x_{\text{loppu}}$ , voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx.$$

- Kappaleen liike-energian muutos on aina yhtä suuri kuin **kokonaisvoiman** kappaleeseen tekemä työ

$$\Delta K = W_{\text{kokonaistyö}}.$$

- Konservatiivinen vuorovaikutus, johon liittyy koordinaatista  $x$  riippuva potentiaalienergia  $U(x)$ , tuottaa voiman

$$\bar{F} = -\frac{dU}{dx} \hat{i}.$$

Tämä voima on vektori, jonka suunta on aina *pienenevän potentiaalienergian suuntaan* ja suuruus on *sitä suurempi mitä nopeammin potentiaalienergia muuttuu paikan suhteen*.

- Konservatiiviseen  $x$ -suuntaiseen voimaan  $\bar{F} = F_x \hat{i}$  liittyvä potentiaalienergia on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen kuin voiman kappaleeseen tekemä työ

$$U(x) = -W_{x_0 \rightarrow x} = - \int_{x_0}^x F_x dx.$$

- **Teho** on *energian muutosnopeutta* esittävä suure

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

- Suuntaan  $x$  nopeudella  $v_x$  liikkuvan kappaleeseen vaikuttava voima  $\bar{F} = F_x \hat{i}$  tekee kappaleeseen työtä teholla

$$P = F_x v_x.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa ajasta riippuva voima aikavälillä  $t_{\text{alku}} \dots t_{\text{loppu}}$ , kappaleen saama **impulssi** on dynamiikan peruslain mukaisesti

$$\Delta \bar{p} = \bar{I} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F} dt.$$

Impulssin  $x$ -suuntainen skalaarikomponentti saadaan vastaavasti voiman skalaarikomponentin integraalina

$$I_x = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x dt.$$

**Taulukko 3.1:** Voiman, työn ja impulssin ominaisuuksia. Huomaa, että koska voima ja impulssi ovat vektoreita, niiden skalaarikomponenttien merkki riippuu koordinaatistosta. Energia on skalaari, joten sen etumerkkiin koordinaatiston valinta ei vaikuta.

	voima	impulssi	työ
<b>tyyppi</b>	vektori	vektori	skalaari
<b>yhteys voimaan</b>	–	ajan integraali	paikan integraali
<b>muuttaa</b>	–	liikemäärä	energiaa
<b>positiivinen kun</b>	voima $x$ -suuntaan*	voima $x$ -suuntaan*	voima siirtymän suuntaan

\*: Pätee skalaarikomponentille  $F_x$  tai  $I_x$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

3.1 Jos kappaleeseen kohdistuu yksi voima (ei nolla), tämä on myös kokonaivoima, joka siis ei ole nolla. Jos voimia on kaksi tai useampia, on aina mahdollista, että voimien summa on nolla, koska vastakkaisuuntaiset voimat voivat kumota toisensa. Kaksi erisuuruista voimaa ei kuitenkaan voi kumota toisiaan. Samoin kolme yhtä suurta voimaa ei voi kumota toisiaan, jos voimat ovat yhdensuuntaiset. Kuitenkin jos voimat saavat osoittaa eri suuntiin, ne voivat kumota toisensa, kunhan voimien vektorisumma on nolla.

3.2 Tasapainotiloja ovat (a) ja (b), koska näissä liikut tasaisella nopeudella (joka on paikoilla seisoessa nolla) ja sinuun kohdistuva kokonaivoima on nolla. Tilat (c) ja (d) eivät ole tasapainossa. Ponnistuksessa olet kiihtyvässä liikkeessä ylöspäin, joten sinuun täytyy kohdistua kokonaivoima ylöspäin. Tämän voiman tuottaa jalkojen ja maanpinnan välinen kosketusvuorovaikutus. Ilmalennon aikana olet puolestaan kiihtyvässä liikkeessä alasläisenä, koska sinuun kohdistuu painovoima. Tämä pätee koko ilmalennon ajan ml. hypyn lakipteeessä, jossa nopeus on hetkellisesti nolla.

3.3 Kappaleeseen kohdistuvan kiihtyvyyden täytyy osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan, joten myös kokonaivoiman täytyy osoittaa tähän suuntaan. Siis  $F_x > 0$ . Jos voima on vakio, kappale on kiihtyvässä liikkeessä positiiviseen  $x$ -suuntaan myös pysähdyttäään, jolloin kappale saa siis positiivisen nopeuden, jonka itseisarvo kasvaa. Ts. kappale käantyy ympäri ja sen vauhti alkaa kasvaa.

3.4 Voima ja vastavoima kohdistuvat aina eri kappaleisiin. Jos kappaleeseen A kohdistuu voima  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$ , tämän vastavoima  $\bar{F}_{A \rightarrow B}$  kohdistuu kappaleeseen B. Jos nämä ovat ainot kappaleisiin kohdistuvat voimat, kappaleeseen A kohdistuu siis kokonaivoima  $\bar{F}_{B \rightarrow A}$  ja B:hen kokonaivoima  $\bar{F}_{A \rightarrow B}$  eikä näistä kumpikaan ole nolla. Voiman ja vastavoiman laki on aivan eri asia kuin tasapainoehdot!

3.5 (a) Kosketusvoima, jolla pallo painaa kättäsi.

(b) Painovoima, jolla sinä vedät maata puoleesi.

(c) Kosketusvoima, jolla sinä painat maanpintaa.

3.6 Tilannetta ei voi päättää kuvasta. Ponnistuksessa hyppääjän nopeus muuttuu nollasta ylöspäin osoittavaksi vektoriksi, joten hyppääjän kiihtyvyysvektori osoittaa nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin. Mutta laskeutumisessa nopeus muuttuu alasläisenä osoittavasta nollaksi, jolloin kiihtyvyysvektori osoittaa jälleen nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin. Kuva voi siis esittää sekä ponnistusta että laskeutumista. Voit todeta tämän itsekin. Tee tasajalkahyppy suoraan ylöspäin. Tunnet jalkapohjiesi puristuvan maanpintaa vasten normaalialia voimakkaammin sekä ponnistuksessa että laskeutumisessa.

3.7 Jalat kohdistavat kehoon voiman ylöspäin. Tämä voima työntää kehoa ylöspäin. Keho puolestaan kohdistaa voiman ja vastavoiman lain mukaisesti jalkoihin yhtä suuren voiman alasläisenä. Jos tarkastelemme systeeminä koko hyppääjää, näiden voimien kokonaivoimavaietus systeemiin on nolla, koska ne ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset. Voimat eivät siis muuta hyppääjän massakeskipisteen liikettä mitenkään. (Nämä ovat systeemin sisäisiä voimia, jotka eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemäärää.) Hyppääjän massakeskipiste läheee liikkeelle ylöspäin siksi, että jalkojen painuminen maanpintaa vasten voimistaa jalkojen ja maanpinnan välistä kosketusvuorovaikutusta. Maanpinta kohdistaa siis hyppääjän jalkoihin suuren voiman ylöspäin, ja tämä (ulkoinen) voima työntää hyppääjän liikkeelle ylöspäin.

3.8 (a)  $|\bar{A} + \bar{B}|$  on sama kuin  $A + B$  vain jos vektorit ovat samansuuntaiset.

(b) On. Vektorien pitää vain olla sopivassa asennossa niin, että niiden summavektori on yhtä pitkä kuin vektori  $\bar{A}$ . Esimerkiksi jos kummankin vektorin pituus on 1 ja vektorien välinen kulma on  $120^\circ$ , myös summavektorin pituus on 1.

3.9 Voiman A skalaarikomponentit ovat  $F_{x,A} = 1.5 \text{ N}$  ja  $F_{y,A} = -1.1 \text{ N}$ . Voiman B skalaarikomponentit voidaan puolestaan ratkaista trigonometrialla, jolloin saadaan  $F_{x,B} = (2.0 \text{ N}) \cos 150^\circ \approx -1.7 \text{ N}$  ja  $F_{y,B} = (2.0 \text{ N}) \sin 150^\circ = 1.0 \text{ N}$ . Kokonaivoiman skalaarikomponentit ovat siis  $F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,A} + F_{x,B} = -0.2 \text{ N}$  sekä  $F_{y,\text{kokonais}} = F_{y,A} + F_{y,B} = -0.1 \text{ N}$ . Kokonaivoiman  $x$ -komponentin pituus on siis  $0.2 \text{ N}$  ja se osoittaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Voiman  $y$ -komponentin pituus on puolestaan  $0.1 \text{ N}$  ja se osoittaa negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Kokonaivoimavektori osoittaa siis alaviistoon vasemmalle.

3.11 Nopeus on  $v_x = -0.5 \text{ m/s}$ , kun positiivinen suunta on ylöspäin. Tällöin potentiaalienergia muuttuu ajassa  $\Delta t = 1 \text{ s}$  määritän  $\Delta U/\Delta t = mg\Delta x/\Delta t = mgv_x = -4.9 \text{ J/s}$ . Siis  $dU/dt < 0$ . Potentiaalienergia kasvaa koordinaatin  $x$  kasvaessa, joten  $dU/dx > 0$ . Jos  $x$ -akseli osoittaa alasläisenä, potentiaalienergia pienenee koordinaatin  $x$ -kasvaessa, koska tällöin siirrytään alasläisenä,  $dU/dx < 0$ . Muutos ajan suhteeseen ei kuitenkaan muutu, koska alasläisen liikkuvan kappaleen potentiaalienergia pienenee riippumatta koordinaatiston valinnasta,  $dU/dt < 0$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**3.12** Nyt  $v_{x,\text{alku}} = 3.0 \text{ m/s}$  ja  $a_x = -0.5 \text{ m/s}^2$ . Ajassa  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$  nopeuden muutos on  $\Delta v_x = a_x \Delta t = -0.005 \text{ m/s}$ , joten nopeus tämän ajan kuluttua on  $v_{x,\text{loppu}} = 2.995 \text{ m/s}$ .

(a) Liike-energian muutos on siis

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{x,\text{loppu}}^2 - v_{x,\text{alku}}^2) = -0.0149875 \text{ J}. \quad (3.92)$$

(b) Tämän suhde ajan muutokseen on

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -1.49875 \text{ J/s}. \quad (3.93)$$

(c) Yhtälön (3.25) mukaan

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} \approx \frac{dK}{dt} = mv_x a_x. \quad (3.94)$$

jos nopeudelle käytetään sen alkuarvoa  $v_{x,\text{alku}} = 3.0 \text{ m/s}$ , yhtälö antaa suhteeksi  $-1.5 \text{ J/s}$ . Jos nopeudelle käytetään sen kesiarvoa tarkasteltavalla aikavälillä,  $v_{x,\text{kesiarvo}} = 2.9975 \text{ m/s}$ , suhteeksi saadaan  $-1.49875 \text{ J/s}$  eli täsmälleen sama tulos kuin kohdassa (b).

**3.13** Voiman kuvaaja on laskeva suora, kun kappaleeseen kohdistuu jousen tuottama voima, sillä tämän voiman suuruus riippuu jousen puristumasta ja siten myös kappaleen paikasta. Kun kappale kohoaa tarpeeksi korkealle, siihen kohdistuu enää painovoima, joka on vakio. Tällöin voiman kuvaaja on suora. Potentiaalienergian kuvaajassa tämä näkyy niin, että kun voiman kuvaaja on laskeva suora, potentiaalienergian kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Kun voiman kuvaaja on vaakasuora, potentiaalienergian kuvaaja on suora.

**3.14** Energian nollakohta ei voi vaikuttaa voimaan, koska painovoiman suuruus ei riipu siitä, miten valitsemme koordinaatiston. Se on aina vakio. Potentiaalienergia sen sijaan riippuu siitä, kuinka korkealle kappale nostetaan, joten se riippuu kiintopisteen valinnasta. Matemaattisesti kyse on siitä, että vaikka potentiaalienergiaan  $U$  lisättäisiin mikä tahansa vakio, tämä vakio ei vaikuta potentiaalienergian derivaattaan eli voimaan.

**3.16** Jos jousivakio on suuri, voiman kuvaaja on jyrkästi laskeva suora ja potentiaalienergian kuvaaja kapea, jyrkkäreunainen paraabeli. Tällöin jousi on jäykki. Jos jousta venytetään liikaa, se ei enää käyttäydy elastiisesti. Tällöin jousi ei vastusta enää venytystä voimalla, joka kasvaa pituuden lisääntyessä, vaan venytystä vastustava voima on tyypillisesti Hooken lain ennustamaa voimaa pienempi, mahdollisesti jopa jousen pituudesta riippumaton vakio. Voiman kuvaaja on siis laskeva suora vain tarpeeksi pienillä venymillä ja suurilla venymillä se voi muuttua esimerkiksi vaakasuoraksi.

**3.17** Ero johtuu kappaleen muodosta. Jousessa tanko muodostaa spiraalin, ja kun jousta puristetaan kokoon, spiraalin muodostava terästanko kiertyy mutta ei puristu kasaan. Teräs vastustaa puristusta voimakkaasti mutta kiertoa ja taivutusta paljon heikomin. Samasta syystä esimerkiksi paperiarkki on helppo repiä ottamalla kiinni arkin yhdestä reunasta kahdesta kohdasta ja vetämällä eri suuntiin, koska paperi ei pysty vastustamaan tälläista leikkaavaa repimistä kovin hyvin. Paperia on sen sijaan vaikea repiä ottamalla kiinni arkin vastakkaisista reunoiista ja vetämällä näitä reunuja erilleen, koska paperi vastustaa venytystä voimakkaasti.

**3.18** Merkitään köyden yläpähän kohdistuvaa vetävästä voimaa  $\bar{F}_A$  ja keskikohtaan kohdistuvaa voimaa  $\bar{F}_B$ . Jos köyden massa on hyvin pieni, voimme jättää köyteen kohdistuvan painovoiman huomioimatta ja köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla likimain nolla. Niinpä köyden alapähän täytyy kohdistua voima  $\bar{F} = -\bar{F}_A - \bar{F}_B$ . Köyden alapäässä kiinni olevaan kappaleeseen kohdistuu siis voima  $-\bar{F} = \bar{F}_A + \bar{F}_B$ . Köysi siis välittää molemmat sitä ylöspäin vetävät voimat sen päässä roikkuvaan kappaleeseen.

**3.19** (a) Kappale ei saa pudota hissin lattian läpi, joten kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla ja normaalivoiman täytyy kumota kappaleeseen kohdistuva painovoima. Siis  $N_x = -G_x = -mg = 9.8 \text{ N}$ , kun valitaan  $x$ -akseli ylöspäin.

(b) Kappaleeseen täytyy kohdistua kokonaisvoima  $F_x = N_x + G_x = ma_x = 1.0 \text{ N}$  ylöspäin. Siispä normaalivoiman pitää olla painovoimaa suurempi,  $N_x = F_x - G_x = 10.8 \text{ N}$ .

(c) Jos hissi liikkuu tasaisella nopeudella, kappale on tasapainossa ja siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tilanne on siis sama kuin kohdassa a,  $N_x = 9.8 \text{ N}$ .

(d) Laskussa kappaleeseen kohdistuu kokonaisvoima  $F_x = ma_x = -3.0 \text{ N}$ . Siispä normaalivoima on pienempi kuin painovoima,  $N_x = 6.8 \text{ N}$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**3.20 (a)** Liikettä muuttaa jalan ja maanpinnan välinen lepokitkavoima. Voiman lautailijaan kohdistaa siis maapinta. Voiman suunta on eteenpäin, jos jalalla työntetään taaksepäin, sillä lepokitka estää jalkaa liukumasta maapinnan suhteen. Voiman suuruus voitaisiin päätellä mittaamalla lautailijan kiilthyvyys.

(b) Jarrutuksessa vaikuttaa liikekitka lautailijan kengän ja pyörän välillä (koska pyörä edelleen pyörää ja pyörän pinta siis liikkuu kengän pinnan suhteen) sekä lepokitka pyörän ja maapinnan välillä (sillä pyörä ei liu'u maapinnan suhteen vaan vieri). Valitaan systeemiksi pyöräilijä ja potkulauta. Kengän ja pyörän välinen liikekitka on dissipatiivinen vuorovaikutus, joka muuttaa systeemin lüke-energiaa lämpöenergiaksi. Se on kuitenkin systeemin sisäinen vuorovaikutus, joten se ei voi muuttaa systeemin lükemäärä. Systeemin lükemäärä muuttaa pyörän ja maapinnan välinen lepokitka, joka on ulkoinen vuorovaikutus. On ehkä yllättävää, että energian ja lükemäären muutokset johtuvat eri voimista, mutta mieti mitä tapahtuu, jos potkulauta rullaisi hyvin liukkaalla jällä, jolla renkaan ja maapinnan välillä ei ole juurikaan kitkaa. Tällöin jarruttaminen pysäyttäisi kyllä renkaan pyörimisen (tämä muuttaa lüke-energiaa lämpöenergiaksi), mutta lautailija itsessään jatkaisi matkaansa suoraan jällä liukuen, koska systeemin sisäinen vuorovaikutus ei voi muuttaa systeemin lükemäärä.

**3.21** Kappaleeseen kohdistuu voima  $F_x = mg = 9.8 \text{ N}$ .

(a) Voima antaa impulssin  $I_x = F_x \Delta t = 9.8 \text{ Ns}$ .

(b, c) Lükemäären muutos on sama kuin impulssi,  $\Delta p_x = I_x = 9.8 \text{ Ns}$ . Tämä ei riipu alkunopeudesta.

**3.22 (a, b)** Vakiovoiman työ on voiman ja sen vaikutuspisteen voiman suuntaisen siirtymän tulo,  $W = F_x \Delta x = mg \Delta x = 9.4 \text{ J}$ . Tämä ei riipu siitä, kuinka nopeasti prosessi tapahtuu.

(c, d) Jos nostat kymmenen kappaletta, teet kymmenkertaisen työn,  $W = 94 \text{ J}$ .

(e) Jos voiman vaikutuspiste ei liiku, työtä ei tehdä,  $W = 0 \text{ J}$ . Kannattelu kyllä väsyttää, mutta tämä johtuu siitä, että jännitetty lihakset joutuvat käyttämään kemiallista energiaa myös staattisessa rasituksessa. Energia ei kuitenkaan tällöin muutu kannateltavan kappaleen potentiaalienergiaksi vaan lihasten lämpöenergiaksi, joten kappaleeseen ei tehdä työtä.

**3.23 (a)** Koska pallon kokonaisenergian muutos on 3 J, palloon tehdyn työn täytyy olla myös 3 J.

(b) Painovoima tekee palloon työn  $-1 \text{ J}$ . Tämä työ siis vähentää pallon liike-energiaa yhden joulen ja muuttaa sen painovoiman potentiaalienergiaksi, jolloin potentiaalienergia lisääntyy yhden joulen.

(c) Pallo tekee heittäjään työn  $-3 \text{ J}$ . Tämän työn tekee heittäjän palloon kohdistaman voiman vastavoima (paljon heittäjän käteen kohdistama voima).

(d) Heittäjään varastoitunutta kemiallista energiota muuttuu lämpöenergiaksi ja heittäjän käden liike-energiaksi. Kolme joulea energiota siirryy myös heittäjältä palloon. Työ mittaa juuri tästä energian siirtymää. Koska pallo saa heittäjältä energian, heittäjä tekee palloon positiivisen työn, ja koska heittäjä luovuttaa energian palolle, pallo tekee heittäjään negatiivisen työn.

(e) On, likimain. Energiaa siirryy heittäjältä pallolle, mutta systeemin kokonaisenergian määrä ei muudu. Tämä ei ole täsmälleen totta, koska systeemistä voi siirtää energian esimerkiksi äänenä ja lämpönä ympäröivään ilmaan.

**3.24** Kun voima on vakio, kappale on tasaisesti kiilthyvässä liikkeessä.

(a) Impulssi on voiman integraali ajan suhteen, ja kun voima on vakio, impulssi kasvaa lineaarisesti ajan kuluessa,  $I_x = F_x t$ . Kuvaaja on siis origon kautta kulkeva nouseva suora, jonka kulmakerroin on  $F_x$ .

(b) Kappaleen paikka on  $x = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2$ , joten pisteesseen  $x$  pääsyn kuluu aikaa  $t = \sqrt{2mx/F_x}$  ja impulssi on  $I_x = \sqrt{2mF_x}x$ . Kuvaaja on siis neljöjuuren kuvaajan muotoinen (sivulle aukeava paraabeli).

(c) Kappaleeseen tehty työ on suoraan verrannollinen siirtymään, joten  $W = F_x x$  ja kuvaaja on nouseva suora.

(d) Työn riippuvuus ajasta on nyt  $W = \frac{1}{2} \frac{F_x^2}{m} t^2$ , joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

**3.25 (a)** Tuottaa. Impulssi on voiman integraali ajan suhteen, ja maapinta kohdistaa lautaan voiman. Jos lauta on alussa ja lopussa paikoillaan, sen lükemäären muutos on nolla. Painovoima tuottaa lautanan prosessin aikana impulssin alaspäin, joten normaalivoiman täytyy tuottaa impulssi ylöspäin niin, että kokonaisimpulssi on nolla.

(b) Ei tee. Jos lattia ei jousta ja lauta liikkuu aina pinnan suuntaan nähdien kohtisuoraan, voima ja laudan siirtymän suunta ovat koko ajan toisiaan nähdien kohtisuorassa. Voiman komponentti liikkeen suunnassa on siis aina nolla eikä voima tee työtä. Tämä tarkoittaa sitä, että lautan tekee työtä vain painovoima, ja tämä työ muuttaa painovoiman potentiaalienergiaa laudan liike-energiaksi ja takaisin.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

**3.26** Integroidaan voima paikan suhteen. Jos valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi tasapainopiste  $x_0$ , saadaan

$$U(x) = - \int_{x_0}^x -k(x-x_0)dx = \left[ \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \right]_{x_0}^x = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2. \quad (3.95)$$

Tämä on harmonisen potentiaalienergian lauseke kuten pitääkin. Jos potentiaalienergian nollkohta ei ole tasapainopisteessä, potentiaalienergia on

$$U(x) = - \int_{x_1}^x -k(x-x_0)dx = \left[ \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \right]_{x_1}^x = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2. \quad (3.96)$$

Nyt energia tasapainopisteessä on  $U(x_0) = -\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$ , joten voidaan kirjoittaa

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2. \quad (3.97)$$

Tämä on harmonisen potentiaalienergian yleisempi lauseke, jossa huomioidaan se, ettei energian tarvitse välittämättä olla tasapainopisteessä nolla.

**3.27** (a) Nostava voima tekee työn  $W_F = F_x \Delta x = 15.0$  J.

(b) Painovoima tekee työn  $W_G = G_x \Delta x = -9.8$  J.

(c) Kokonaisvoima tekee työn  $W = W_F + W_G = 5.2$  J.

(d) Potentiaalienergian muutos on  $\Delta U = -W_G = 9.8$  J.

(e) Liike-energian muutos on  $\Delta K = W = 5.2$  J.

(f) Potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin painovoiman tekemän voiman työ, mutta vastakkaismerkkinen. Tämä johtuu siitä, että painovoima muuttaa kappaleen liike-energiaa vuorovaikutuksen potentiaalienergiaksi. Liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien tekemä työ yhteenä.

**3.29** (a) Laatikko saa energiaa siihen tehdyn työn verran, 100 J.

(b) Kitka kuluttaa mekaanista energiaa  $-80$  J.

(c) Liike-energian muutos on näiden summa, 20 J.

(d) Työntäjä menettää sisäenergiaa (kemiallista energiota) 100 J ja laatikko sekä lattia saavat sisäenergiaa (lämpöenergiaa) 80 J. Koko systeemin sisäenergia siis vähentyy 20 J. Tämän verran systeemin liike-energia kasvoi, joten kokonaisenergia on vakio.

**3.30** (a) Maksimivauhdilla kaikki työntävän voiman tekemä työ kuluu kitkan kautta lämpöenergiaksi, jolloin liike-energia on vakio. Kitkan teho on  $P = F_x v_x$ , ja tämän pitää olla siis itseisarvoltaan 740 W. Maksiminaopeus on siis  $v_x = 9.25$  m/s.

(b) Kun laatikko ei vielä liiku, siihen tehdään työtä teholla nolla riippumatta voiman suuruudesta. Työtä aletaan kuitenkin tehdä välittömästi, kun laatikko alkaa liikkua.

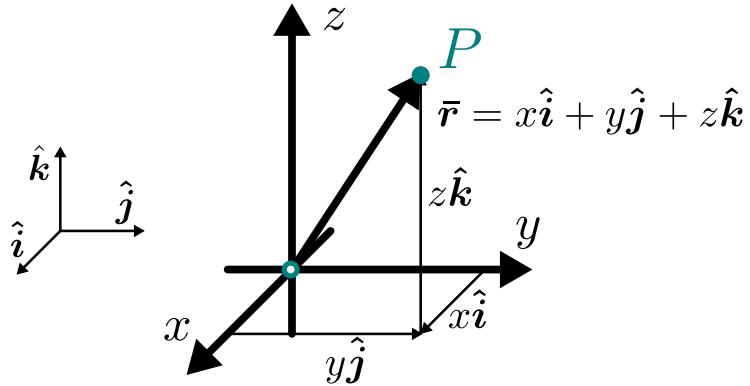
## 4 Moniulotteinen liike

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain suoraviivaista liikettä yhdessä ulottuvuudessa. Todellisuudessa kappaleet tieteenkin yleensä liikkuvat useammassa ulottuvuudessa. Onneksi tähän mennessä esitellyt fysiikaiset konseptit — energia, lükemäärä, voima, työ ja impulssi — toimivat useammassa ulottuvuudessa täsmälleen samoin kuin yhdessäkin ja kappaleiden liikkeen kuvaus onnistuu niiden avulla. Suurin muutos siirryttääessa useaan ulottuvuuteen tapahtuukin ilmiöiden matemaattisessa kuvauksessa, sillä kolmiulotteisessa avaruudessa vektorisuurteiden kuten nopeuden, lükemäärään ja voiman suunnat on välttämättä huomioitava. Olemme jo tutustuneet vektoreiden graafiseen käsittelyyn sekä vektorien esittämiseen komponenttien avulla. Tässä luvussa täydennämme kolmiulotteisessa avaruudessa tarvittavia vektorimatematikan työkaluja esittämällä vektorit kolmiulotteisessa koordinaatistossa ja ottamalla käyttöön vektorien pistetulon.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- esittää vektorit komponenteittain sekä laskea vektoreiden summa ja pistetulo karteesisessa koordinaatistossa
- ratkaista kappaleen liikerata useassa ulottuvuudessa, kun kappaleeseen vaikuttavat voimat tunnetaan ajan funktiona
- määrittää kappaleiden liike törmäyksessä
- määrittää kappaleeseen vaikuttava voima, kun sen potentiaalienergia tunnetaan
- määrittää kappaleeseen tehty työ, kun siihen vaikuttava voima tunnetaan paikan funktiona

Kuva 4.1: Karteesinen  $xyz$ -koordinaatisto sekä sen yksikkövektorit. Pisteen  $P$  paikkavektori on origosta pisteeseen osoittava vektori, joka voidaan esittää koordinaattiakselien suuntaisten komponenttien summana.



## 4.1 Kolmiulotteinen avaruus

Klassisessa mekaniikassa avaruutta pidetään muuttumattomana tyhjänä tilana, joka sisältää maailmankaikkeuden. Tämä avaruus on passiivinen näytämö, joka ulottuu tasaisesti äärettömyksiin kolmessa ulottuvudessa ollen kaikkialla samanlainen. Matemaattisesti tällaista tilaa sanotaan *kolmiulotteiseksi euklidiseksi avaruudeksi* (muinaisen kreikkalaisen matemaatikon Eukleideen mukaan), ja siinä pätevät koulusta tutut (euklidisen) geometrian säännöt, kuten että kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ . Modernin fysiikan mukaan juuri mitkään näistä oletuksista eivät ole täysin oikeat — avaruus ei todennäköisesti ole passiivinen, muuttumaton, tyhjä, tasainen eikä välttämättä edes kolmiulotteinen. Nämä poikkeamat intuitiivisesti tutusta avaruuden käsiteestä kolmiulotteisena tilana ovat kuitenkin ihmisen mittakaavassa täysin mahdottomia havaita, joten klassisessa mekaniikassa avaruutta voidaan pitää tyhjänä “laatikkona”.

Avaruuden kolmiulotteisuus sen sijaan on keskeinen ominaisuus myös klassisessa mekaniikassa. Kappaleet eivät liiku aina suoraa pitkin, ja onkin välttämätöntä laajentaa aiemmissa luvuissa käsitellyt yksiuotteen fyysikka kolmeen ulottuvuuteen. Onneksi kaikki tähän asti käsitellyt konseptit toimivat useassa ulottuvuudessa aivan samoin kuin yhdessäkin. Karkeasti sanoen kaikki tähän mennessä esitellyt skalarisuuriteita käsittelevät lait kuten energian säilymislaki toimivat kolmessa ulottuvuudessa aivan samoin kuin yhdessäkin. Myös vektorisuuriteita sisältävien lakin ja yhtälöiden merkitys on sama ulottuvuuksien määristä riippumatta. Esimerkiksi voiman tekemä työ kuvaa edelleen vuorovaikutuksesta johtuvaa energian muutosta. Joidenkin tällaisten suureiden matemaattista kuvausta täytyy kuitenkin laajentaa ottamaan huomioon tapaukset, joissa kaikki ei enää tapahdukaan yhdellä suoralla.

### Karteesinen koordinaatisto

Jo yksiuotteen liikkeen tapauksessa koordinaatiston käyttö osoittautui erinomaiseksi työkaluki. Tähän kuului positiivisen suunnan sekä kiintopisteen eli origon valinta, jonka jälkeen esimerkiksi kappaleiden paikka voitiin määritellä yksikäsitteisesti origon suhteeseen mitatun koordinaatin avulla. Lisäksi koordinaatistossa vektorisuurit kuten nopeus voitiin näppärästi ilmoittaa niiden skalaarikomponentin ja positiivista suuntaa edustavan yksikkövektorin avulla. Paikan kuvaaminen kolmiulotteisessa avaruudessa tapahtuu täsmälleen samalla periaatteella, mutta nyt toisistaan riippumattomia suuntia on kolme. Nämä suunnat voidaan valita monin tavoin, ja riippuu systeemin geometriasta, millainen valinta on hyödyllisin. Yksinkertaisin kolmiulotteinen koordinaatisto on kuitenkin sellainen, jossa positiivisiksi suunniksi valitaan kolme toisiinsa nähden kohtisuora, muuttumatonta suuntaa. Näitä suuntia kutsutaan tavallisesti  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suunniksi ja niiden suuntaisia yksikkövektoreita merkitään usein symbolilla  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  sekä  $\hat{k}$ . Tällaista koordinaatistoa kutsutaan **karteesiseksi koordinaatistikksi** (René Descartesin mukaan).

Kolmiulotteisessa avaruudessa pisteen  $P$  paikkaa kuvaa kolme koordinaattia  $(x, y, z)$ , ja ne ilmaisevat kuinka pitkä matka origosta pitää siirtää positiivisiin  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suuntiin, jotta saavuttaisiin pisteesseen  $P$ . Kuten yhdessä ulottuvuudessa, esimerkiksi koordinaatti  $x$  on positiivinen, jos pisteesseen  $P$  päästään siirtymällä positiiviseen  $x$ -suuntaan, ja negatiivinen, jos siirtymä täytyy tehdä negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Koordinaatin itseisarvo ei kuitenkaan kolmessa ulottuvuudessa ole sama asia kuin *etäisyys origosta*, koska pisteesseen  $P$  pääsemiseksi voidaan joutua siirtymään myös  $y$ - ja  $z$ -suunnissa. Koordinaatin  $x$  itseisarvo ilmaiseekin  $x$ -suuntaisen etäisyyden  $yz$ -tasosta eli siitä tasosta, johon origosta päästään siirtymättä lankaan  $x$ -suunnassa.

Koordinaatit voidaan määritellä myös pisteen  $P$  paikkavektorin  $\bar{r}$  avulla. Kyseessähan oli vektori, joka osoittaa origosta kyseiseen pisteeseen. Paikkavektori voidaan jakaa komponentteihin koordinaatiston mää-

rittelemissä suunnissa

$$\bar{r} = \bar{r}_x + \bar{r}_y + \bar{r}_z, \quad (4.1)$$

ja nämä komponentit esittävät eri suuntaisia siirtymiä, jotka johtavat yhdessä origosta pisteeeseen  $P$ . Vektorikomponenttien esittelyn yhteydessä kuitenkin todettiin, että vastaavat *skalaarikomponentit* kertovat itseisarvoltaan vektorikomponenttien pituuden ja etumerkillään niiden suunnan yhtälön (3.12) mukaisesti. Koordinaatit ilmaisevat siirtymien pituutta ja suuntaa juuri tällä tavalla, joten *koordinaatit ovat paikkavektorin skalaarikomponentit*

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (4.2)$$

Tämä on yhtälön (1.17) suora yleistys kolmeen ulottuvuuteen.

Pisteen  $P$  etäisyys origosta on paikkavektorin pituus eli itseisarvo. Koska koordinaatiston suunnat ovat toisiaan vastaan kohtisuorat, tämä pituus voidaan laskea geometrisesti. Vektorin pituus vastaa nimittäin sellaisen suorakulmaisen särmiön lävistäjän pituutta, jonka sivujen pituudet ovat  $x$ ,  $y$  ja  $z$ . Jakamalla geometria sopivasti kolmioihin ja käyttämällä Pythagoraan lausetta saadaan tulokseksi

$$r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.3)$$

Edellä esitettyt tulokset voidaan kaikki johtaa alkeisgeometriasta, sillä vektorit ja koordinaatit mittasivat todellisia fysikaalisia pituuksia. Kuitenkin samat tulokset pätevät *mille tahansa* vektoreille niiden yksiköistä riippumatta. Mikä tahansa vektorisuure  $\bar{A}$  voidaan jakaa komponentteihin

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad (4.4)$$

ja vektorin pituus voidaan laskea skalaarikomponenteista

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (4.5)$$

Voidaan ajatella, että geometria on koordinaatiston ja sen suuntaa ilmatsevien yksikkövektorien ominaisuus. Fysikaaliset yksiköt sisältävät vektorien skalaarikomponentteihin eivätkä vaikuta geometriasta johdettuihin laskusääntöihin.

#### esimerkki 4.1

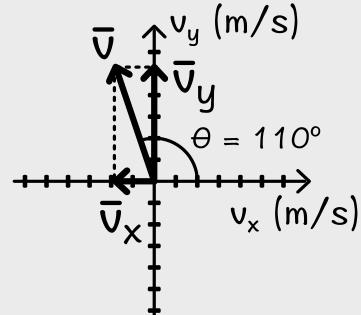
#### Vektorikomponentit

**Kappale liikkuu suoraa pitkin  $xy$ -tasossa. Kappaleen vauhti on 5.5 m/s ja sen liikesuunnan sekä  $x$ -akselin välinen kulma on  $110^\circ$  vastapäivään  $x$ -akselista mitattuna. Mitkä ovat kappaleen nopeuden karteesiset skalaari- ja vektorikomponentit?**

**TIANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään kappaleen nopeutta  $\bar{v}$  ja tehtävässä mainittua kulmaa  $\theta$ .

**SUUNNITELMA** Nopeusvektorin komponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnissa voidaan päättellä geometrisesti. Koska nopeus suuntautuu koordinaatistossa ylävasemmalle, nopeuden  $x$ -skalaarikomponentti on oltava negatiivinen ja  $y$ -komponentti positiivinen. Koska liike tapahtuu  $xy$ -tasossa,  $z$ -komponentti on ilmeisesti nolla.

**RATKAISU** Nopeuden skalaarikomponentti  $x$ -suunnassa on trigonometristen funktioiden yksikköympyrämääritelmän perusteella  $v_x = v \cos \theta$  ja vastaavasti  $y$ -suunnassa  $v_y = v \sin \theta$ . Vastaavasti vektorikomponentit ovat  $\bar{v}_x = v_x\hat{i} = v \cos \theta \hat{i}$  sekä  $\bar{v}_y = v_y\hat{j} = v \sin \theta \hat{j}$ . Lukuarvojen sijoitus antaa skalaarikomponenteiksi  $v_x = -1.9$  m/s sekä  $v_y = 5.2$  m/s.



**ARVIOINTI** Komponenteilla on oikeat etumerkit ja ne ovat molemmat itseisarvoltaan pienemmät kuin vauhti  $v$ , kuten pitääkin. Pürretyn kuvan perusteella skalaarikomponentteille lasketut arvot myös vaikuttavat järkeviltä. Voidaan vielä tarkistaa, että komponentteihin jaetun vektorin pituus on oikein,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5.5$  m/s.

Kuten luvussa 3.3 vektoreiden geometristen laskusääntöjen yhteydessä huomattiin, vektoreilla laskeminen on yleensä helpompaa komponenteittain. Tällöin rajoitettiin yksinkertaisuuden vuoksi kaksiulotteisiin esimerkkeihin. Kolmiulotteisessa avaruudessa geometriaan perustuva vektorien käsittely on usein suorastaan mahdotonta ja jako komponentteihin on monesti ainoa järkevä tapa laskea vektoreilla. Esimerkiksi vektorien yhteenlasku onnistuu komponenteittain, jolloin summavektorin skalaarikomponentit saadaan laskemalla summattavien skalaarikomponentit yhteen

$$\bar{A} + \bar{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}. \quad (4.6)$$

Toisin sanoen vektorien yhteenlasku voidaan laskutoimituksena hoitaa yksinkertaisesti laskemalla erikseen yhteen vektorien  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -skalaarikomponentit.



**4.1** Kappaleeseen vaikuttaa kaksi voimaa, A ja B. Voima A on suuruudeltaan 3.0 N ja osoittaa positiivisen  $x$ -akselin suuntaan. Voima B on suuruudeltaan 4.0 N ja osoittaa suuntaan, joka on  $60^\circ$   $x$ -akselista negatiivisen  $y$ -akselin suuntaan. Mikä on kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima komponenttein esitetynä?

Edellä avaruuden piste esitettiin kahdella eri tavalla, koordinaatein  $(x, y, z)$  sekä paikkavektorin  $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  avulla. Molemmissa esityksissä on täsmälleen yhtä paljon informaatiota ja kolmiulotteisen vektorin voikin aivan hyvin esittää matemaattisesti lukukolmikkona. Samaan tapaan minkä tahansa vektorin  $\bar{A}$  voi kuvata kolmikkona  $(A_x, A_y, A_z)$ . Matematiikassa tällainen vektorin esitys lukujoukkona on tavallinen ja käytännöllinen, koska matemaattisilla vektoreilla voi olla kuinka monta komponenttia tahansa. Fysiikassa kuitenkin käytetään yleensä avaruuden vektoreiden esittämisessä yksikkövektoreita, koska avaruuden vektoreiden komponenttiesitys riippuu käytettävästä koordinaatistosta, ja joskus on tarpeellista käyttää saman tilanteen analyysissa erilaisia koordinaattijärjestelmiä. Tällöin yksikkövektoreilla voidaan ilmaista mitä koordinaatistoa kulloinkin käytetään.



**4.2** Määritellään kaksi tason koordinaatistoa,  $xy$  ja  $x'y'$ , joista jälkimmäistä on kierretty  $45^\circ$  vastapäivään ensimmäisen suhteeseen. Koordinaatistojen yksikkövektorit ovat  $\hat{i}, \hat{j}$  ja  $\hat{i}', \hat{j}'$ . Mikä on vektorin  $\bar{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$  komponenttiesitys toisessa koordinaatistossa?

## 4.2 Dynamika

Luvussa 1 opimme määrittelemään kiihtyvyyden sekä laskemaan nopeuden ja siirtymän yhdessä ulottuvuudessa kiihtyvyyden integraaleina (1.12) ja (1.25). Toisaalta luvussa 3 esitellyn dynamiikan peruslain (3.3) mukaan kiihtyvyys on verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan voimaan. Yhdistämällä nämä tulokset on periaatteessa mahdollista ratkaista kappaleen paikka, kun kappaleeseen vaikuttavat voimat tunnetaan. Käytännössä tehtävä on kuitenkin vaikea, koska kappaleeseen vaikuttava voima voi riippua monesta tekijästä kuten ajasta, kappaleen paikasta tai nopeudesta sekä *muiden* kappaleiden paikoista. Itse asiassa osoittautuu, että jo kolmen keskenään vuorovaikuttavan kappaleen systeemi on joitakin erikoistapauksia lukuunottamatta mahdoton ratkaista analyttisesti (eli ratkaisua ei voi kirjoittaa yksinkertaisena funktiona — ratkaisu onnistuu toki numeerisesti tietokoneella). Kuitenkin siinä erikoistapauksessa, että kappaleeseen vaikuttavat voimat riippuvat *vain ajasta*, kappaleen liikerata voidaan laskea samaan tapaan kuin yhdessäkin ulottuvuudessa.

### Heittoliike

Ideaalinen heittoliike eli **ballistinen liike** on vapaan pudotuksen yleistys useampaan ulottuvuuteen. Luvussa 1.5 vapaa pudotus määriteltiin liikkeeksi, jossa kappaleella on vakiokihihtyyys  $\bar{g}$  alas päin. Samassa yhteydessä todettiin, että myös ylöspäin heitetty kappale on vapaassa pudotuksessa, sillä senkin *kiihtyvyys* on vakio ja osoittaa alas päin, vaikka nopeus suuntautuisikin ylöspäin. Putoavan kappaleen kiihtyvyyden aiheuttaa tietenkin gravitaatio, joka kohdistaa kappaleeseen painovoiman. Painovoima vaikuttaa kappaleeseen aina ja sen suuruus ja suunta ovat samat riippumatta kappaleen nopeuden suunnasta. Aivan samalla perusteella myös viistoon heitetty kappale on vapaassa pudotuksessa, sillä jos ilmanvastus ei ole merkittävä, kappaleeseen vaikuttaa ainoastaan painovoima ja kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alas päin. Ainoa ero pystysuoraan liikkeeseen nähdyn on nyt vain se, että kappaleella on nopeutta myös vaakasuunnassa eli voimaa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa pallo heitetään jollakin alkunopeudella  $v_{\text{alku}}$  kulmassa  $\theta$  vaakatasoon nähdien. Kappaleen liikkeen kuvamisessa ensimmäinen askel on koordinaatiston käännittäminen, ja se kannattaa tehdä nyt niin, että  $x$ -suunta osoittaa vaakasuoraan kappaleen liikkeen suuntaan ja  $y$ -suunta on ylöspäin (kuva 4.2). Kappaleen kiihtyvyys on tällöin liikkeen aikana vakio

$$\bar{a} = -g\hat{j}, \quad (4.7)$$

ja kappaleen alkunopeus voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa

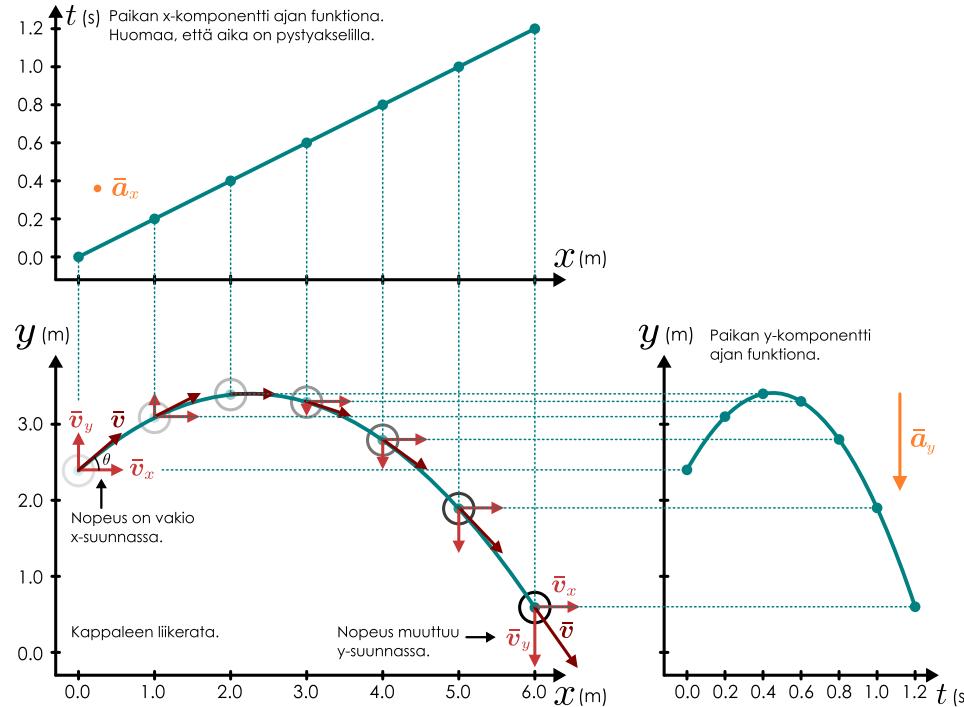
$$\bar{v}_{\text{alku}} = v_{x,\text{alku}}\hat{i} + v_{y,\text{alku}}\hat{j} = (v_{\text{alku}} \cos \theta)\hat{i} + (v_{\text{alku}} \sin \theta)\hat{j}. \quad (4.8)$$

Näiden tietojen avulla voidaan ratkaista kappaleen nopeus ajan funktiona. Ensinnäkin, koska kappaleella ei ole kiihtyvyttä vaakasuunnassa, sen *vaakasuuntainen nopeus ei muutu*. Kappale liikkuu siis  $x$ -suuntaan vakionopeudella

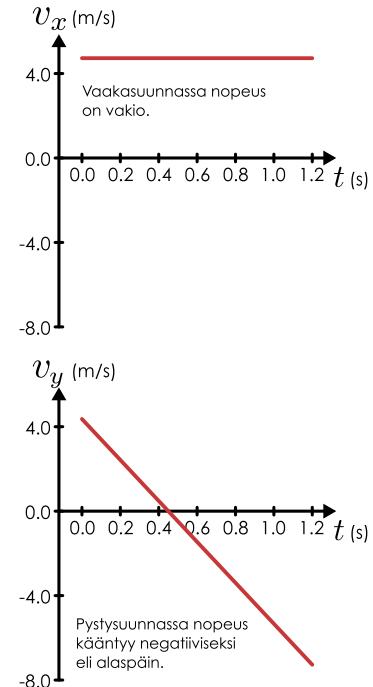
$$v_x = v_{x,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \cos \theta. \quad (4.9)$$

Pystysuunnassa kappaleen kiihtyvyys on vakio, joten *pystysuuntainen nopeus muuttuu täsmälleen samoin kuin suoraan ylöspäin heitettyllä kappaleella*: aluksi kappaleen nopeuden pystykomponentti on positiivinen

Kuva 4.2: Heittoliikkeen analyysi liikkeen komponenttiajoin avulla.

(a) Ratkaistaan nopeus ja paikka erikseen  $x$ - ja  $y$ -suunnissa liikeradan selvittämiseksi.

(b) Nopeuden skalaarikomponentit.



eli kappale liikkuu ylöspäin. Koska kappaleella on kiihtyvyyttä alaspäin, pystysuuntainen nopeus kuitenkin pienenee jatkuvasti ja nopeus käännyy pian alaspäin. Nopeuden skalaarikomponenttia kuvaava yhtälö (1.28) eli

$$v_y(t) = v_{y,\text{alku}} + \int_0^t a_y dt = v_{\text{alku}} \sin \theta - gt. \quad (4.10)$$

Nopeuksien komponenttien avulla voidaan edelleen ratkaista kappaleen paikkakoordinaatit. Nopeuden kuin komponentti nimittäin ilmaisee vastaavan paikkakoordinaatin muutumisvauhtia, joten koordinaatit saadaan Nopeuden skalaarikomponenttien integraaleina yhtälön (1.12) mukaisesti. Vaakasuunnassa nopeus on vakio, joten siirtymä on suoraan verrannollinen siihen käytettyyn aikaan

$$x(t) = x_{\text{alku}} + v_{x,\text{alku}} t. \quad (4.11)$$

Pystysuunnassa vastaavasti

$$y(t) = y_{\text{alku}} + v_{y,\text{alku}} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4.12)$$

Kappaleen rata muodostaa siis paraabelin kuten kuvasta 4.2 (a) ilmenee.

Kappaleen nopeusvektoria kuvaava nuoli voidaan muodostaa piirtämällä ensin nopeuden vektorikomponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnissa, jolloin varsinaisen nopeusvektori on näiden summavektori. Kuvan 4.2 (a) liikediagrammiin on piirretty nopeusvektori sekä nopeuden komponentit koordinaattiakselien suunnassa muutamina ajan hetkinä. Nopeuden  $x$ -komponentti on vakio, joten vaakasuora komponenttinuoli on aina yhtä pitkä. Nopeuden  $y$ -komponentti sen sijaan osoittaa ensin ylöspäin ja käännyy sitten osoittamaan alaspäin, koska kappaleen kiihtyvyys on alaspäin. Kiihtyvyshän osoittaa suunnan, johon nopeus muuttuu. Nopeusvektori itsessään on aina *radan tangentin suuntainen*. Tämä ei ole vain heittoliikkeen ominaisuus vaan tämä on aina totta, sillä *nopeusvektori osoittaa suuntaan, johon kappale liikkuu*.

**4.3** Hiihtäjä laskee alas mäkeä, jonka muoto muistuttaa ylöspäin aukeavaa paraabelia. Hiihtäjän vauhti on likimain vakio alamäen kääntyessä ylämäeksi (eli hänen ollessaan paraabelin pohjalla). (a) Muuttuuko hiihtäjän nopeuden suunta laskun tässä pisteessä? (b) Miten hiihtäjän nopeuden komponentit muuttuvat? (c) Millainen on hiihtäjän kiihtyvyysvektori? (d) Millainen on hiihtäjään kohdistuva kokonaisvoima?

## esimerkki 4.2

## Kantama

Missä kulmassa pallo tulee heittää, jotta sen kantama olisi mahdollisimman pitkä, jos pallon lähtövauhti ei riipu heittokulmasta? Oletetaan, että ilmanvastus on pieni ja että pallo lähee likimain maanpinnan tasolta.

**TILANNE** Merkitään pallon lähtökulmaa  $\theta$  ja sen lähtönopeutta  $\bar{v}_{\text{alku}}$ . Valitaan koordinaatisto siten, että pallo liikkuu  $xy$ -tasossa,  $x$ -akseli on vaakasuuntainen ja  $y$ -akseli pystysuuntainen. Asetetaan origo pallon lähtöpisteeseen.

**SUUNNITELMA** Jos ilmanvastusta ei huomioida, pallo on väliassa pudotuksessa. Tällöin sen liike  $x$ -suunnassa on tasaisista ja  $y$ -suunnassa tasaisesti kiihtyvä. Pallon kantama on sen  $x$ -suunnassa kulkeva matka ennen osumista maahan eli ennen kuin pallon  $y$ -koordinaatti saa arvon nolla. Pisin kantama löydetään etsimällä tämän maksimi lähtökulman suhteen esimerkiksi derivaatan nollakohtia tutkimalla.

Pallon alkunopeuden komponentit ovat  $v_{x,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \cos \theta$  ja  $v_{y,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \sin \theta$ . Pallon koordinaatit saadaan yhtälöistä (4.11) ja (4.12).

Pallo osuu maahan hetkellä  $t_{\text{loppu}}$ , jolle pätee  $y(t_{\text{loppu}}) = 0$  m. Kappaleen siirtymä  $x$ -suunnassa on silloin  $s = x(t_{\text{loppu}})$ .

**RATKAISU** Pallon maahanosumishetki ratkeaa yhtälöstä  $y(t_{\text{loppu}}) = v_{\text{alku}} t_{\text{loppu}} \sin \theta - \frac{1}{2} g t_{\text{loppu}}^2 = 0$  m. Tästä voidaan ratkaista aika

$$t_{\text{loppu}} = \frac{2v_{\text{alku}} \sin \theta}{g}. \quad (4.13)$$

Pallon  $x$ -koordinaatti on tuolloin

$$s = x(t_{\text{loppu}}) = v_{\text{alku}} t_{\text{loppu}} \cos \theta = \frac{2v_{\text{alku}}^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_{\text{alku}}^2 \sin 2\theta}{g}, \quad (4.14)$$

missä on käytetty trigonometrista sääntöä  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ .

Kantaman ääriarvot löytyvät sen derivaatan nollakohdista. Derivaatta pitää laskea luonnollisesti sen muuttujan suhteen, jonka suhteen maksimia etsitään, eli heittokulman. Derivoitaaan siis kantama,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{v_{\text{alku}}^2}{g} \frac{d}{d\theta} \sin 2\theta = \frac{v_{\text{alku}}^2}{g} 2 \cos 2\theta. \quad (4.15)$$

Tämä on nolla täsmälleen silloin kun funktio  $\cos 2\theta$  on nolla. Kosini on jaksollinen funktio, joten sillä on äärettömästi nollakohtia  $\cos \pi/2 = \cos 3\pi/2 = \cos 5\pi/2 = \dots = 0$ . Nyt voidaan kuitenkin tyytyä tarkastelemaan kulmia välillä  $\theta \in [0, 90^\circ] = [0, \pi/2]$ , ja tällöin nollakohtia on vain yksi,  $\cos(2 \cdot \pi/4) = \cos \pi/2 = 0$ .

Siispä kantamalla saavutetaan ääriarvon heittokulmalla  $\pi/4 = 45^\circ$ . Tämän täytyy olla myös maksimikantama, koska kulilla 0 ja  $90^\circ$  kantamaksi saadaan nolla, ja varmastikin viistoon heitetty pallo lentää tätä pidemmälle. Huomaa, että todellisissa pallopeleissä ilmanvastus on merkittävä, joten tulos ei ole lähimainkaan tarkka.

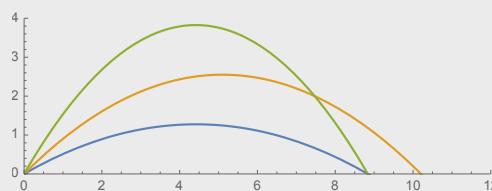
Mathematica:

```
(* koordinaatit ajan ja kulman funktiona *)
x[t_, theta_] := valku Cos[theta] t
y[t_, theta_] := valku Sin[theta] t - 1/2 g t^2

(* ratkaistaan maahan osumisen hetki *)
maassa = Solve[y[tloppu, theta] == 0, tloppu]
{{tloppu -> 0}, {tloppu -> (2 valku Sin[theta])/g}}
(* ratkaistaan kantama käytettäen toista ratkaisua *)
kantama = x[tloppu, theta] /. maassa[[2]] // Simplify (* sievennetään samalla *)
(valku^2 Sin[2 theta])/g

(* derivoitaaan kantama kulman suhteen ja etsitään maksimi *)
derivaatta = D[kantama, theta] // Simplify
(2 valku^2 Cos[2 theta])/g
ratkaisu = Solve[{derivaatta == 0, 0 < theta < Pi/2}, theta] (* väli [0, pi/2] *)
{{theta -> Pi/4} }

(* kappaleen rata kolmella heittokulmalla *)
rata[theta_] := {x[t, theta], y[t, theta]} /. {valku -> 10, g -> 9.8}
ParametricPlot[{rata[30 Degree], rata[45 Degree], rata[60 Degree]}, {t, 0, 2}, PlotRange -> {{0, 12}, {0, 4}}}
```



## Liike ajasta riippuvan voiman vaikuttaessa

Heittoliikkeen analyysissä huomattiin, että liike voitiin jakaa eri suuntaisiin komponentteihin ja nopeudet sekä paikka voitiin ratkaista näissä suunnissa erikseen toisistaan riippumatta. Matemaattisesti tämä perustuu siihen, että derivointi ja integrointi ovat *lineaarisia operaatioita* eli summan voi derivoida tai integroida termi kerrallaan. Lisäksi koska yksikkövektorit ovat vakioita, ne voidaan siirtää derivaattojen ja integraalien ulkopuolelle. Niinpä esimerkiksi nopeuden  $y$ -skalaarikomponentti voitiin laskea integroimalla kiihtyvyyden  $y$ -skalaarikomponenttia ajan suhteen. Yleisesti minkä tahansa vektorin derivaatta voidaan laskea karteesisessä koordinaatistossa komponenteittain,

$$\frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16)$$

ja vastaavasti integroinnille pätee

$$\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{\mathbf{A}} dt = \left( \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_x dt \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_y dt \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_z dt \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.17)$$

Kiihtyvyyden määritelmä (1.23) on siten komponenttimuodossa

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.18)$$

ja käänännopeus saadaan kiihtyvyyden integraalina

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t \bar{\mathbf{a}} dt, \quad (4.19)$$

mikä voidaan edelleen hajottaa komponentteihin yhtälön 4.17 avulla. Jos siis kiihtyvyyden skalaarikomponentit tunnetaan, nopeuden  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -skalaarikomponentit saadaan integroimalla erikseen kiihtyvyyden vastaavia komponentteja. Esimerkiksi  $x$ -suunnassa pätee

$$v_x(t) = v_{x,\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t a_x dt \quad (4.20)$$

ja muissa suunnissa saadaan täsmälleen samanlaiset tulokset. Kappaleen paikkakoordinaatit saadaan edelleen integroimalla nopeuden skalaarikomponentteja.

Kappaleen liikkeen ratkaisemiseksi täytyy siis tuntea sen kiihtyvyyden komponentit, ja ne saadaan ainakin periaatteessa ratkaistua dynamiikan peruslaista (3.3), joka komponenttimuodossa saa muodon

$$a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.21)$$

Komponenttijonon käyttäminen tässä tilanteessa voi vaikuttaa ongelman hankaloittamiselta, koska yhtälössä on nyt kuusi termiä, mutta yhtälön kumpikin puoli voidaan tulkita saman vektorin komponenttiesitykseksi. Koska vektorin komponenttit karteesisessä koordinaatistossa ovat *yksikäsitteiset*, lukukolmikon  $(a_x, a_y, a_z)$  pitää siis olla sama kuin lukujen  $(\frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}, \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}, \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}})$ . Siispä vektorimuotoinen yhtälö  $\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{F}}$  kokonais voidaan komponenttien avulla muuttaa kolmeksi skalaariyhtälöksi

$$a_x = \frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}, \quad a_y = \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}, \quad a_z = \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}}, \quad (4.22)$$

joista kiihtyvyyden komponentit voidaan ratkaista. Jos voima tunnetaan *ajan funktiona*, kiihtyvyyden komponentit voidaan suoraan integroida ajan suhteen nopeuden ja paikan ratkaisemiseksi, mistä on esimerkki 4.3 luvun lopussa. Jos voima riippuu muista tekijöistä kuten paikasta tilanne on huomattavasti hankalampi ja ratkaisua täytyy etsiä *differentiaaliyhtälöiden* avulla.



**4.4** Kappaleeseen (massa 1 kg) vaikuttavan kokonaisvoiman skalaarikomponentit riippuvat ajasta nün, että  $F_x$  on aluksi 2.0 N ja sekunnin päästä -1.0 N ja  $F_y$  on aluksi 2.0 N ja sekunnin päästä 4.0 N. Kumpikin komponentti muuttuu lineaarisesti ajan funktiona (eli niiden kuvaajat ovat suorat). Jos kappale liukkuu aluksi negatiiviseen  $x$ -suuntaan 1.0 m/s vauhdilla, mitkä ovat sen nopeuden komponentit sekunnin päästä?

## esimerkki 4.3

## Kuulapeli

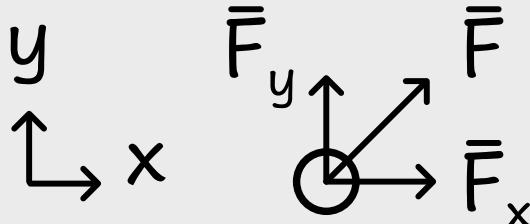
Kuulapelissä pyritään ohjaamaan pientä kuulaa (massa 10 g) labyrintissa kallistamalla pelilautaa, jolloin painovoima vetää kuulaa aina jyrkimmän laskun suuntaan. Pelaaja voi kahdesta nupista käänämällä vaikuttaa laudan kallistumaan ja samalla siis kuulaan kohdistuvan kokonaisvoiman kahdessa kohtisuorassa suunnassa  $x$  ja  $y$ . Millaisen reitin levosta lähevä kuula kulkee kahden sekunnin aikana, jos siihen vaikuttavan kokonaisvoiman  $x$ -suuntainen skaalaarikomponentti on  $F_x = At$  ja  $y$ -suuntainen  $F_y = B \sin Ct$ , missä  $A = 3.0 \cdot 10^{-4}$  N/s,  $B = 7.0 \cdot 10^{-4}$  N,  $C = 3.5 \text{ s}^{-1}$ ?

**TILANNE** Systeemiin kuuluu vain kuula, johon kohdistuvat voimat tunnetaan komponentteittain ajan funktiona.

**SUUNNITELMA** Kuulan kiilthyvyys, nopeus ja paikka voidaan ratkaista dynamiikan peruslain ja kiilthyvyyden määritelmän avulla, koska voima tunnetaan ajan funktiona. Kaikkien näiden vektorisureiden  $x$ - ja  $y$ -komponentit voidaan määrittää toisistaan riippumatta, koska voima ei riipu paikasta vaan ainoastaan ajasta.

Kun kuulaan vaikuttavan kokonaisvoiman skaalaarikomponentti suunnassa  $x$  on  $F_x$ , kuulan kiilthyvyys tässä suunnassa on  $a_x = F_x/m$ . Nopeus on kiilthyvyyden integraali  $v_x = v_{x,\text{alku}} + \int_0^t a_x dt'$  ja paikka on nopeuden integraali  $x = x_{\text{alku}} + \int_0^t v_x dt'$ . Tässä integroimismuutuja on selvyyden vuoksi merkity pilkulla,  $t'$ , erotuksena integraalin ylärajassa esiintyvästä niinikään aikaa esittävästä symbolista  $t$ . Suunnassa  $y$  pätevät täsmälleen samat yhtälöt. Lisäksi tiedetään, että kuulan alkunopeus on nolla,  $v_{x,\text{alku}} = 0$ ,  $v_{y,\text{alku}} = 0$  ja koordinaatiston origo voidaan valita kuulan lähtöpisteeseen, jolloin myös  $x_{\text{alku}} = 0$ ,  $y_{\text{alku}} = 0$ .

**RATKAISU** Nopeudeksi saadaan



$$v_x = \int_0^t \frac{F_x}{m} dt' = \frac{A}{m} \int_0^t t' dt' = \frac{1}{2} \frac{A}{m} t'^2 \quad (4.23)$$

$$v_y = \int_0^t \frac{F_y}{m} dt' = \frac{B}{m} \int_0^t \sin Ct' dt' = \frac{B}{mC} \left|_0^t\right. - \frac{1}{C} \cos Ct' = \frac{B}{mC} (1 - \cos Ct) \quad (4.24)$$

ja tästä edelleen paikaksi

$$x = \int_0^t \frac{1}{2} \frac{A}{m} t'^2 dt' = \frac{1}{6} \frac{A}{m} t^3 \quad (4.25)$$

$$y = \int_0^t \frac{B}{mC} (1 - \cos Ct') dt' = \frac{B}{mC} \left|_0^t\right. - \frac{1}{C} \sin Ct' = \frac{B}{mC^2} (Ct - \sin Ct). \quad (4.26)$$

Kuulan paikka millä tahansa ajan hetkellä  $t$  selviää sijoittamalla lukuarvot näihin lausekkeisiin. Kappaleen reitti voidaan piirtää valitsemalla aikoja tasaisin välein (esim.  $t = 0.0$  s,  $0.5$  s, ...), ratkaisemalla kappaleen koordinaatit näinä hetkinä ja piirtämällä pisteen koordinaatistoon. Reitin piirtäminen onnistuu myös tietokoneella.

Mathematica:

```
(* voimat *)
fx = a t; fy = b Sin[c t];
lukuarvot = {a -> 3*10^-4, b -> 7*10^-4, c -> 3.5, m -> 0.01};

(* nopeudet *)
vx = Integrate[fx/m, {t, 0, t}]
(a t^2)/(2 m)
vy = Integrate[fy/m, {t, 0, t}]
(b - b Cos[c t])/(c m)

(* paikkakoordinaatit *)
x = Integrate[vx, {t, 0, t}]
(a t^3)/(6 m)
y = Integrate[vy, {t, 0, t}]
(b (c t - Sin[c t]))/(c^2 m)

(* piirretään kuvaaja *)
viiva = ParametricPlot[{x, y} /. lukuarvot, {t, 0, 2},
AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{0, 0.05}, {0, 0.05}}]; (* reitti *)

(* lasketaan paikka tasaisin aikavälein *)
npisteet = 10; aika = 2;
koordinaatit = Table[{x, y} /. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}];
paikat = ListPlot[koordinaatit,
AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{0, 0.05}, {0, 0.05}}]

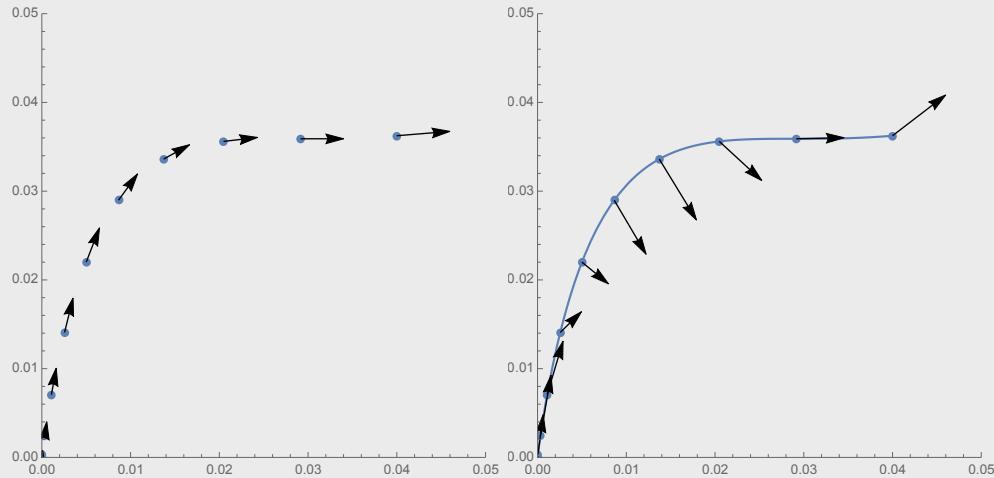
(* lasketaan nopeus ja voima tasaisin aikavälein *)
vskala = 0.1; fskala = 10;
nopeusvektorit = Graphics[
Table[{Arrow[{{x, y}, {x + vskala*vx, y + vskala*vy}}]}]
```

```

/. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}],
Axes -> True];
voimavektorit = Graphics[
Table[{Arrow[{fx, y}, {x + fiskaala*fx, y + fiskaala*fy}]}]
/. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}],
Axes -> True];

(* Piirretään yhdessä *)
Show[pisteet, nopeusvektorigr]
Show[viiva, pisteet, voimavektorit]

```



**ARVIOINTI** Kappaleeseen vaikuttaa koko ajan  $x$ -suunnassa positiivinen voima, joten se liikkuu tähän suuntaan kiihtyvällä nopeudella (ei kuitenkaan tasaisesti kiihtyvällä nopeudella, koska kiihtyvyys ei ole vakio). Suunnassa  $y$  voima on aluksi positiivinen ja sitten negatiivinen, joten kappale lähee lükkeelle positiiviseen  $y$  suuntaan mutta sitten tässä suunnassa pysähtyy, jolloin kappale siis liikkuu vain  $x$ -suuntaan.

Tarkistetaan myös paikkakoordinaattien yksiköt:

$$[x] = \frac{[A]}{[m]} [t^3] = \frac{\text{N/s} \cdot \text{s}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m/s}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} = \text{m} \quad (4.27)$$

$$[y] = \frac{[B]}{[mC^2]} [(Ct - \sin Ct)] = \frac{\text{N}}{\text{kg s}^{-2}} \cdot 1 = \frac{\text{Ns}^2}{\text{kg}} = \text{m}. \quad (4.28)$$

### 4.3 Liikemäärä

Liikemääräni säilymislaki muotoiltiin jo luvussa 2 vektorimuodossa, ja sen sisältö on useassa ulottuvuudessa täsmälleen sama kuin yhdessäkin ulottuvuudessa. Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia tai jos nämä vuorovaikutukset kumoavat toisensa, systeemin kokonaisliikemäärä on vakio. Lisäksi koska kokonaisliikemäärä on vektori, sekä sen suunta että suuruus pysyvät tällöin muuttumattomina. Yhdessä ulottuvuudessa suunnat ilmaistuun skalarikomponenttien etumerkkien avulla. Useammassa ulottuvuudessa liikemäärävektorit voidaan esittää joko graafisesti nuolien avulla tai komponentteittain.

Kuvassa 4.3 on esitetty kahden kappaleen törmäys tasossa sekä liikediagrammina että kuvaajina. Kappaleen B massa on kaksinkertainen kappaleen A massaan nähden. A liikkuu aluksi  $y$ -suuntaan ja B viistoon, jolloin sillä on nopeutta sekä  $x$ - että  $y$ -suunnissa. Liikediagrammin perustella selvästikin kummankin kappaleen nopeus muuttuu törmäyksessä sekä suunnaltaan että suuruudeltaan.

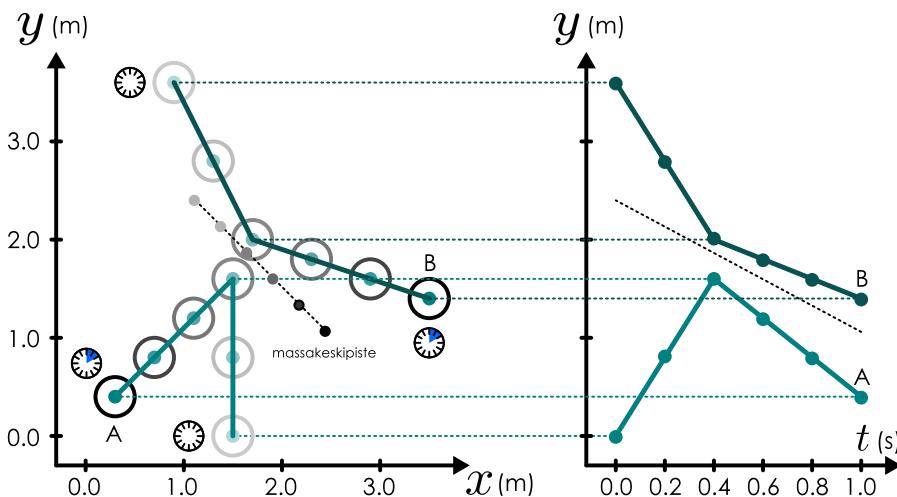
Kuvassa on esitetty myös erikseen kappaleiden paikkakoordinaattien ja nopeuskomponenttien kuvaajat ajan funktiona. Tarkastellaan ensin kuvassa 4.3 (a) esitettyä paikan  $y$ -komponenttia. Kappale A kulkee ensin positiiviseen  $y$ -suuntaan mutta kääntyy törmäyksessä negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Kappale B kulkee negatiiviseen  $y$ -suuntaan sekä ennen törmäystä että sen jälkeen, mutta sen vauhti pienenee törmäyksessä. Kappaleiden nopeuden  $y$ -komponentit voidaan määrittää  $y(t)$ -kuvaajien kulmakertoimista aivan kuten yksilotteisessakin tapauksessa, ja näin määritetyt nopeuden  $y$ -skalarikomponenttien kuvaajat on piirretty kuvaan 4.3 (b). Tämän perusteella kappaleen A  $y$ -suuntaisen nopeuden muutos on  $\Delta v_{y,A} = -6.0 \text{ m/s}$  ja kappaleen B  $\Delta v_{y,B} = 3.0 \text{ m/s}$ . Nopeuskomponenttien muutosten suhde on siis

$$\frac{\Delta v_{y,A}}{\Delta v_{y,B}} = -2.0 = -\frac{m_B}{m_A}. \quad (4.29)$$

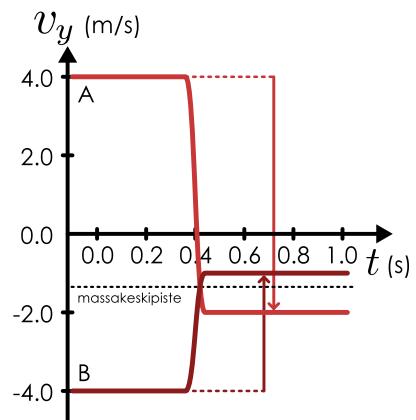
Toisin sanoen aivan kuten yksilotteisessakin törmäyksessä kappaleiden nopeuksien  $y$ -komponenttien muutosten suhde on kääntäen verrannollinen kappaleiden massojen suhteeseen yhtälön (2.43) mukaisesti. Mutta

Kuva 4.3: Kahden kappaleen törmäys tasossa. Kokonaislukemäärän komponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnissa ovat vakiot ja massakeskipisteen liike on tasaista.

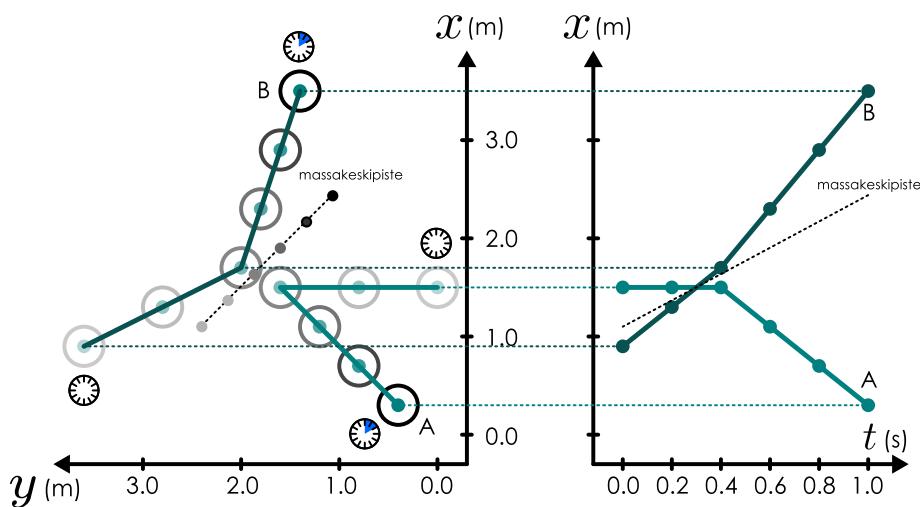
(a) Liikediagrammi  $xy$ -tasossa sekä  $y$ -koordinaatin kuvaaja ajan suhtein.



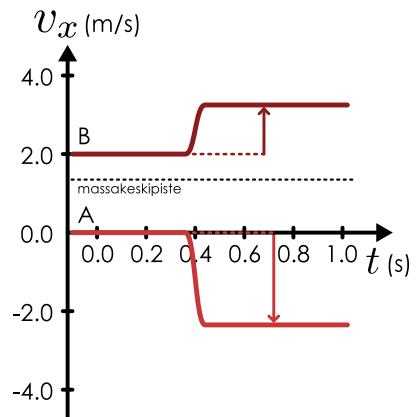
(b) Nopeuden  $y$ -komponentin kuvaaja.



(c) Liikediagrammi  $xy$ -tasossa sekä  $x$ -koordinaatin kuvaaja ajan suhtein. Liikediagrammi on käännetty  $90^\circ$  kuvan (a) nähtiin.



(d) Nopeuden  $x$ -komponentin kuvaaja.



tämä ehto on tarkoittti yhdessä ulottuvuudessa *liikemäärän olevan vakio*. Niinpä edellisen analyysin mukaan tässä törmäykssä *liikemäärän y-komponentti on vakio*.



4.5 Tee kuvan 4.3 mukainen liikediagrammi kappaleelle, joka liikkuu aluksi  $45^\circ$  kulmassa  $x$ -akseliin nähtiin ja törmää elastiesti  $y$ -akselin suuntaiseen seinään. Miltä näyttävät kappaleen paikkakoordinaattien ja nopeuden skalaarikomponenttien kuvaajat ajan funktiona?

Kuvassa 4.3 (c) on esitetty saman törmäyksen liikediagrammi sekä kappaleiden  $x$ -komponenttien kuvaajat. Huomaa, että liikediagrammi on nyt käännetty  $90^\circ$  kuvan (a) verrattuna, jotta sen  $x$ -akseli olisi pystysuuntainen kuten viereisessä paikkakoordinaatin kuvajassa. Kappaleen A nopeuden  $x$ -suuntainen komponentti on aluksi nolla ja törmäykssä kappale saa nopeutta negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Kappale B liikkuu positiiviseen  $x$ -suuntaan sekä ennen törmäystä että sen jälkeen, ja törmäykssä kappaleen vauhti *kasvaa*. Kappaleiden nopeuden  $x$ -skalaarikomponentit voidaan määritellä  $x(t)$ -kuvaajien kulmakertoimista ja nämä on esitetty kuvassa 4.3 (d). Tässä kappaleen A nopeuskomponentin muutos on  $\Delta v_{x,A} = -2.6 \text{ m/s}$  ja kappaleen B  $\Delta v_{x,B} = 1.3 \text{ m/s}$ . Siispä tässäkin suunnassa pätee

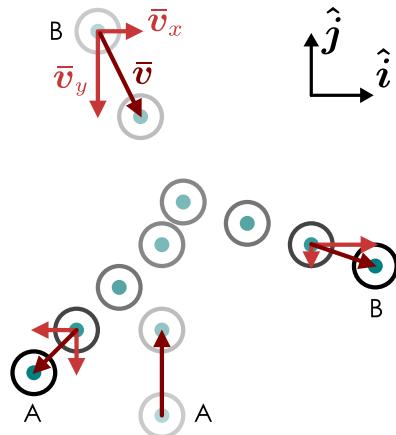
$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -2.0 = -\frac{m_B}{m_A}, \quad (4.30)$$

joten myös *liikemäärän x-komponentti on törmäykssä vakio*. Toisin sanoen yhdessä ulottuvuudessa aikaisemmin esitetty törmäysten analyysi toimii myös useassa ulottuvuudessa, kun kunkin koordinaatiston suunta eli nopeuden karteesinen komponentti käsitellään erikseen.

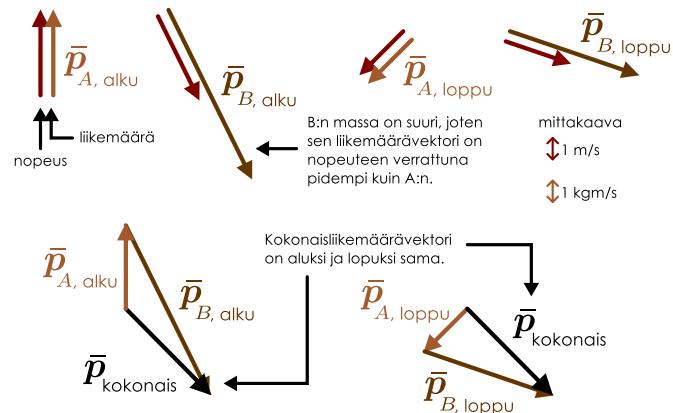
## MONIULOTTEINEN LIIKE

Kuva 4.4: Törmäävien kappaleiden liikemäärävektorit, jos kappaleen A massa on 1 kg ja kappaleen B 2 kg. Kokonaislukemäärävektori on sama alussa ja lopussa, mutta kappaleiden liikemäärät muuttuvat.

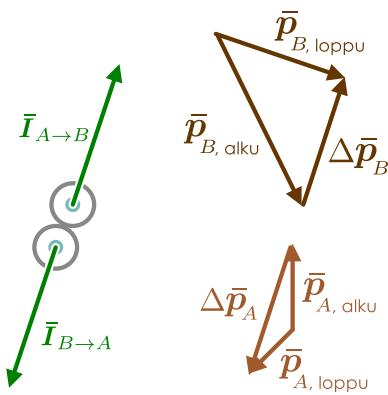
(a) Liikediagrammi ja kappaleiden nopeudet.



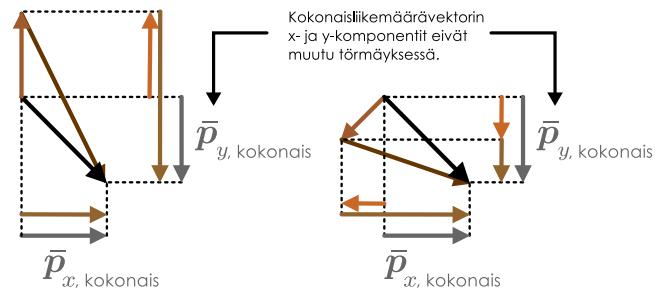
(b) Kappaleiden nopeus- ja liikemäärävektorit.



(c) Kappaleet saavat yhtä suuret mutta vastakkais-suuntaiset impulssit.



(d) Liikemäärän komponentit aluksi ja lopuksi.



Tulos voidaan selittää liikemäärän vektoriluonteen avulla. Kuvassa 4.4 on piirretty törmäyksestä liikediagrammi, jonka perusteella voidaan piirtää kappaleiden nopeusvektoreita kuvaavat nuolet sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Kappaleiden liikemäärävektoreita kuvaavat nuolet ovat samansuuntaiset näiden nopeusvektoreiden kanssa, mutta koska kappaleen B massa oli kaksinkertainen kappaleeseen A nähden, B:n liikemäärää kuvaavat nuolet on piirretty pituudeltaan kaksinkertaisiksi nopeuteen nähden siinä missä A:n liikemäärävektorit ovat kuvassa yhtä pitkät nopeusvektoreiden kanssa.

Selvästikään kummankaan kappaleen liikemäärä ei ole vakio törmäyksessä, mutta kokonaislukemäärä eli niiden vektorisumma on,

$$\bar{p}_{A, \text{alku}} + \bar{p}_{B, \text{alku}} = \bar{p}_{\text{kokonais}, \text{alku}} = \bar{p}_{\text{kokonais}, \text{loppu}} = \bar{p}_{A, \text{loppu}} + \bar{p}_{B, \text{loppu}}. \quad (4.31)$$

Graafisesti kokonaislukemäärä voidaan esittää piirtämällä kappaleiden liikemäärävektoreita kuvaavat nuolet peräkkäin, ja kuvasta nähdään että näin muodostetut kokonaislukemäärää esittävät nuolet ovat samat sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Tämä nuoli osoittaa itse asiassa aina systeemin massakeskipisteen liikkelen suuntaan, ja kokonaislukemäärän säilyminen tarkoittaa myös sitä, että massakeskipiste liikkuu koko ajan tasaisella nopeudella.

Toisaalta vektorit voidaan jakaa komponentteihin, jolloin kokonaislukemäärävektorin jokaisen komponentin pitää erikseen olla vakio

$$p_{x,A,\text{alku}} + p_{x,B,\text{alku}} = p_{x,A,\text{loppu}} + p_{x,B,\text{loppu}} \quad (4.32)$$

$$p_{y,A,\text{alku}} + p_{y,B,\text{alku}} = p_{y,A,\text{loppu}} + p_{y,B,\text{loppu}} \quad (4.33)$$

$$p_{z,A,\text{alku}} + p_{z,B,\text{alku}} = p_{z,A,\text{loppu}} + p_{z,B,\text{loppu}}. \quad (4.34)$$

Siispä aivan kuten vektorimuotoinen dynamiikan peruslaki (3.3) voitiin karteesisessa koordinaatistossa hajottaa kolmeen skalaariyhtälöön (4.22), myös liikemäärän säilymislaki on oikeastaan kolmen skalaariyhtälön ryhmä.

Aivan kuten yhdessä ulottuvuudessa, myös useassa ulottuvuudessa törmäys voi olla elastinen tai epäelastinen. Energia ei kuitenkaan ole vektori vaan skalaari ja niinpä liike-energia ei ole väältämättä vakio, jos tarkastellaan nopeuksien komponentteja vain yhdessä suunnassa. Esimerkiksi kuvan 4.3 tapauksessa  $x$ -suunnassa kappaleiden liike-energia näyttäisi kasvavan. Kokonaisenergia ei kuitenkaan lisäänty, sillä  $y$ -suunnassa kappaleiden liike-energia pienenee. Vaikka törmäys olisi täysin elastinen, kappaleiden loppunopeuksia ei voi ennustaa pelkästään niiden alkunopeuksien perusteella, koska nämä riippuvat myös asennosta, jossa kappaleet törmäävät toisiinsa.



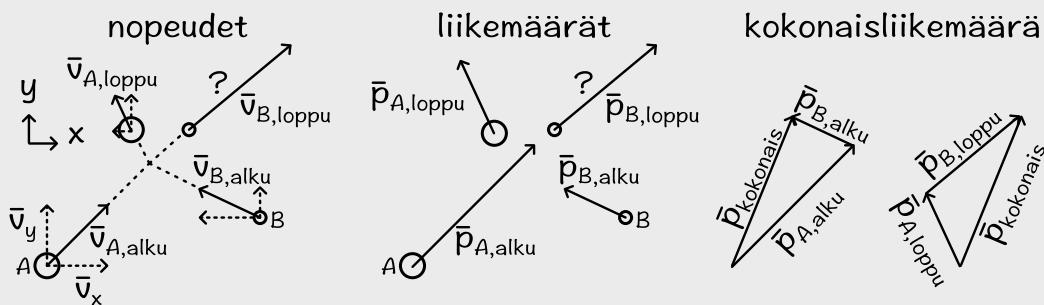
#### 4.6 Kuinka suuri osuus liike-energiasta muuttuu muihin muotoihin kuvan 4.3 törmäyksessä?

##### esimerkki 4.4

##### Törmäys tasossa

Kaksi kiekkoja, A (massa 180.0 g) ja B (massa 90.0 g), liikkuvat aluksi nopeuksilla  $\bar{v}_{A,alku} = (2.50 \text{ m/s})\hat{i} + (2.50 \text{ m/s})\hat{j}$  sekä  $\bar{v}_{B,alku} = (-2.50 \text{ m/s})\hat{i} + (1.25 \text{ m/s})\hat{j}$ . Kiekon A nopeus törmäyksen jälkeen on  $\bar{v}_{A,loppu} = (-0.75 \text{ m/s})\hat{i} + (1.50 \text{ m/s})\hat{j}$ . Mikä on (a) kiekon B nopeus, (b) kiekkojen saamat impulssit, (c) kokonaisliike-energian muutos törmäyksessä?

**TILANNE** Merkitään systeemiin kuuluvien kiekkojen massoja  $m_A = 180.0 \text{ g}$  ja  $m_B = 90.0 \text{ g}$ . Piirretään tilanteesta kuva nopeuksien ja suuntien hahmottamiseksi.



**SUUNNITELMA** Törmäyksessä systeemiin vaikuttavat ulkoiset voimat kumoavat toisensa, joten systeemin kokonaisliikemäärä on vakio. Tämän perusteella voidaan ratkaista kiekon B loppunopeus. Kummankin kiekon saama impulssi on yhtä suuri kuin kyseisen kiekon liikemäären muutos. Myös liike-energian muutos voidaan laskea kappaleiden nopeuksista.

Kokonaisliikemaara on vakio erikseen  $x$ - ja  $y$ -suunnissa

$$m_A v_{x,A,alku} + m_B v_{x,B,alku} = m_A v_{x,A,loppu} + m_B v_{x,B,loppu} \quad (4.35)$$

$$m_A v_{y,A,alku} + m_B v_{y,B,alku} = m_A v_{y,A,loppu} + m_B v_{y,B,loppu}. \quad (4.36)$$

Tästä voidaan ratkaista kiekon B loppunopeuden komponentit.

Kiekon A saama impulssi on

$$\bar{I}_{B \rightarrow A} = \Delta \bar{p}_A = m_A (\bar{v}_{A,loppu} - \bar{v}_{A,alku}) \quad (4.37)$$

ja vastaavasti kiekolle B. Impulssitkin kannattaa laskea komponenteittain.

Kokonaisliike-energian muutos on

$$\Delta K = K_{loppu} - K_{alku} = \frac{1}{2} m_A v_{A,loppu}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,loppu}^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A,alku}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,alku}^2. \quad (4.38)$$

**RATKAISU** Kiekon nopeuden skalaarikomponentit ovat

$$v_{x,B,loppu} = v_{x,B,alku} + \frac{m_A}{m_B} (v_{x,A,alku} - v_{x,A,loppu}) = 4.00 \text{ m/s} \quad (4.39)$$

$$v_{y,B,loppu} = v_{y,B,alku} + \frac{m_A}{m_B} (v_{y,A,alku} - v_{y,A,loppu}) = 3.25 \text{ m/s} \quad (4.40)$$

Kiekon A saaman impulssin komponentit ovat

$$I_{x,B \rightarrow A} = m_A (v_{x,A,loppu} - v_{x,A,alku}) = -0.585 \text{ Ns} \quad (4.41)$$

$$I_{y,B \rightarrow A} = m_B (v_{y,A,loppu} - v_{y,A,alku}) = -0.180 \text{ Ns} \quad (4.42)$$

ja vastaavasti kiekkoon B kohdistuu impulssi

$$I_{x,A \rightarrow B} = m_B(v_{x,B,\text{loppu}} - v_{x,B,\text{alku}}) = 0.585 \text{ Ns} \quad (4.43)$$

$$I_{y,A \rightarrow B} = m_B(v_{y,B,\text{loppu}} - v_{y,B,\text{alku}}) = 0.180 \text{ Ns.} \quad (4.44)$$

Liike-energia on ennen törmäystä

$$K_{\text{alku}} = \frac{1}{2}m_A(v_{x,A,\text{alku}}^2 + v_{y,A,\text{alku}}^2) + \frac{1}{2}m_B(v_{x,B,\text{alku}}^2 + v_{y,B,\text{alku}}^2) = 1.48 \text{ J} \quad (4.45)$$

ja törmäyksen jälkeen

$$K_{\text{loppu}} = \frac{1}{2}m_A(v_{x,A,\text{loppu}}^2 + v_{y,A,\text{loppu}}^2) + \frac{1}{2}m_B(v_{x,B,\text{loppu}}^2 + v_{y,B,\text{loppu}}^2) = 1.45 \text{ J} \quad (4.46)$$

joten liike-energiaa katoaa (muuttuu mm. lämpöenergiaksi). Liike-energian muutos on

$$\Delta K = K_{\text{loppu}} - K_{\text{alku}} = -0.03 \text{ J.} \quad (4.47)$$

Mathematica:

```
(* nopeusvektorit ja inertiat *)
vAalku = {2.5, 2.5}; vBalku = {-2.5, 1.25};
vAlloppu = {-0.75, 1.5}; vBloppu = {vxBloppu, vyBloppu};
mA = 0.180; mB = 0.090;

(* ratkaistaan liikemääräyhtälö *)
ratkaisu = Solve[mA vAalku + mB vBalku == mA vAlloppu + mB vBloppu, {vxBloppu, vyBloppu}]
{{vxBloppu -> 4., vyBloppu -> 3.25}};

(* impulssit *)
impulssiA = mA (vAlloppu - vAalku) /. ratkaisu
{{-0.585, -0.18}}
impulssiB = mB (vBloppu - vBalku) /. ratkaisu
{{0.585, 0.18}};

(* liike-energia *)
k[m_, v_] := 0.5 m v.v (* v.v on pistetulo, = v^2 *)
kloppu = k[mA, vAlloppu] + k[mB, vBloppu] /. ratkaisu
{1.44844}
kalkku = k[mA, vAalku] + k[mB, vBalku] /. ratkaisu
{1.47656}
kloppu - kalkku
{-0.028125}
```

**ARVIOINTI** Liikemäären vakioisuuden voi tarkistaa laskemalla kokonaisliikemäären sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Tuloksena saadaan molemmissa tapauksissa

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{kokonais}} = (0.225 \text{ kgm/s})\bar{\mathbf{i}} + (0.5625 \text{ kgm/s})\bar{\mathbf{j}} \quad (4.48)$$

joten kokonaisliikemäärä on todellakin vakio. Liike-energia vähenee hiukan, mikä on järkevä, sillä liike-energia ei voi törmäyksessä lisääntyä (kyseessä ei ole räjähtävä erotus). Kiekkojen saamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkais-suuntainen, kuten liikemäären säilymislain (tai voiman ja vastavoiman lain) perusteella pitääkin olla.

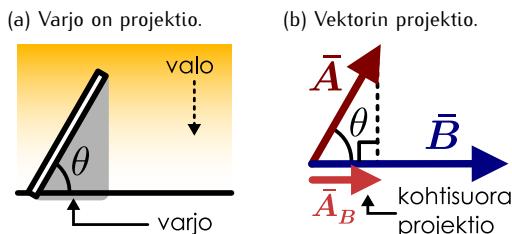
## 4.4 Työ

Yksiuotteisen liikkeen tapauksessa vakiovoiman kappaleeseen tekemä työ määritellään voiman liikkeen suuntaisen skalaarikomponentin ja voiman vaikutuspisteen siirtymän tulona. Vastaavasti muuttuvan voiman tekemä työ saadaan integroimalla liikkeen suuntaista voiman skalaarikomponenttia paikan suhteen. Työn määritelmä on kolmiulotteisessa avaruudessa sama kuin yhdessäkin ulottuvuudessa, mutta työn laskeminen on kuitenkin vaikeampaa, koska kolmessa ulottuvuudessa kappaleet voivat liikkua eri suuntiin. Työn laskemiseksi tarvitaan siis käytännöllinen laskentamenetelmä voiman liikkeen suuntaisen komponentin löytämiseksi liikkuipa kappale *mihin tahansa* suuntaan.

### Pistetulo

Pohditaan ensin yleisesti, miten minkä tahansa vektorin komponentti voitaisiin määrittää missä tahansa suunnassa. Aloitetaan tutkimalla varjoja. Ota kappale ja valaise sitä kohdevalolla niin, että kappaleen takana olevalle seinälle piirtyy varjo. Varjoon jäävät ne seinän pisteet, joihin matkalla ollut valo törmää kappaleeseen, joten varjon muoto on kaksiuotteinen kuva alkuperäisen kolmiulotteisen kappaleen muodosta. Varjoa kutsutaankin kappaleen **projektioksi**. Varjon muoto tietenkin muuttuu, jos kappaletta käännetään, mutta se muuttuu myös siinä tapauksessa, että valoa tai seinää käännetään. Projektio on siis kuvaus, joka riippuu sekä kuvattavasta kappaleesta että siitä, miten kuvaus tehdään.

Kuva 4.5: Kohtisuora projektio.



nusa on sauva itse ja sen viereinen kateetti on sauvan varjo. Niinpä varjon pituuden  $L_{\text{varjo}}$  ja sauvan pituuden suhde on niiden välisen kulman kosini,

$$\frac{L_{\text{varjo}}}{L_{\text{sauva}}} = \cos \theta, \quad (4.49)$$

ja varjon pituus on siis

$$L_{\text{varjo}} = L_{\text{sauva}} \cos \theta. \quad (4.50)$$

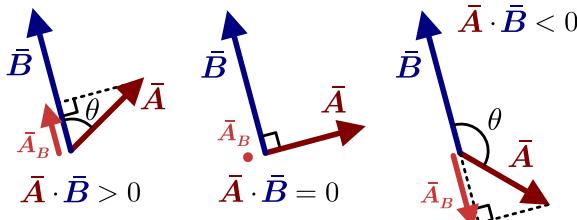
Koska tässä tilanteessa valo saapui kohtisuoraan seinään nähdyn, varjoa kutsutaan sauvan *kohtisuoraksi projektioksi*.

Vektorin komponentin löytäminen toisen vektorin suunnassa on matemaattisesti samanlainen ongelma kuin ohuen sauvan varjon pituuden laskeminen. Tarkastellaan esimerkiksi vektoria  $\bar{A}$ , jonka komponentin haluamme löytää vektorin  $\bar{B}$  suunnassa. Ajatellaan nyt vektorin  $\bar{A}$  tilalle ohut sauva, asetetaan seinä niin, että vektori  $\bar{B}$  on seinän pinnalla, ja suunnataan valo seinään nähdyn kohtisuoraan niin, että sauvan varjo pürttyy seinälle vektorin  $\bar{B}$  suuntaisesti. Seinälle pürttyvä varjo on nyt yhtä pitkä kuin vektorin  $\bar{A}$  kohtisuora komponentti vektorin  $\bar{B}$  suunnassa ja se on myös vektorin  $\bar{B}$  kanssa yhdensuuntainen. Tämä varjo on vektorin  $\bar{A}$  kohtisuora projektio vektorille  $\bar{B}$  eli vektorin  $\bar{A}$  kohtisuora komponentti vektorin  $\bar{B}$  suunnassa, ja merkitsemme sitä  $\bar{A}_B$  (samaan tapaan kuin vektorin  $\bar{A}$  projektioita  $x$ -akselille merkitään  $A_x$ ).

Vektorin projektiotien pituus selviää samanlaisella geometrialla kuin sauvan varjon pituus, joten sillä pätee yhtälöä (4.50) vastaava sääntö. Jos vektorien välinen kulma on  $\theta$ , vektorikomponentin pituus on vektorin  $\bar{A}$  pituus kerrottuna vektorien välisten kulman kosinilla

$$|\bar{A}_B| = |A \cos \theta|. \quad (4.51)$$

Kuva 4.6: Vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa.



ritellä myös sitä vastaavan skalaarikomponentin  $A_B$ . Tämä skalaarikomponentti on itseisarvoaan yhtä suuri kuin vektorikomponentin pituus  $|\bar{A}_B|$ , mutta skalaarikomponentin etumerkki riippuu projektiotien  $\bar{A}_B$  suunnasta. Skalaarikomponentti on positiivinen vektorikomponentin  $\bar{A}_B$  osoittaessa samaan suuntaan kuin  $\bar{B}$  ja negatiivinen näiden ollessa vastakkaissuuntainen. Onnesi kosinfunktio huolehtii tästä etumerkistä automaattisesti, sillä kosini muuttuu positiiviseesta negatiiviseksi kulman ylittäessä arvon  $\theta = 90^\circ = \pi/2$ . Niinpä skalaarikomponentille saadaan yksinkertainen esitys

$$A_B = A \cos \theta. \quad (4.52)$$

Aivan vastaavasti vektorin  $\bar{B}$  skalaarikomponentti vektorin  $\bar{A}$  suunnassa on

$$B_A = B \cos \theta. \quad (4.53)$$

Kolmiulotteisessa avaruudessa vektoreiden välisten kulmien määrittäminen alkeisgeometrian avulla on kuitenkin erittäin vaikeaa, joten yllä esitetty komponenttien määrittely ei kelpaa työkaluksi varsinaisiin laskuihin. Käytännössä nämä lasketaankin vektorien **pistetulon** avulla. Vektorien  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$  välinen pistetulon määritellään olevan **vektorien pituuskulman kosinin tulo**

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta, \quad (4.54)$$

## MONIULOTTEINEN LIIKE

ja nimensä mukaisesti sitä merkitään pisteellä. (Koska vektoreille voidaan määritellä monenlaisia kertolaskuja, pistettä ei saa jättää merkitsemättä!) Pistetulon tulos on skalaari, joten sitä kutsutaan myös *skalarituloksi*. Lisäksi pistetulo on erikoistapaus matematiikassa paljon yleisemmin määritelystä *sisätulosta*, joten tätäkin nimitystä käytetään.

Pistetulo voidaan kirjoittaa myös projektioiden avulla sijoittamalla projektiot skalaarikomponentin lauseke (4.52) tai (4.53) pistetulon määriteltyyn (4.54), jolloin saadaan

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB_A = A_B B. \quad (4.55)$$

Pistetulo on siis yhden vektorin pituuden ja toisen projektiot skalaarikomponentin tulo. Tästä seuraa suoraan, että projektiolle pätee

$$A_B = \frac{1}{B} \bar{A} \cdot \bar{B}. \quad (4.56)$$

Jos siis opimme tekniikan laskea pistetuloja helposti, kuten kohta teemme, voimme laskea vektorin projektiot toisen vektorin suunnassa helposti tällä säännöllä.

Pistetulolle pätevät pitkälti samanlaiset laskusäännöt kuin normaalille kertolaskullekin. Tekijöiden järjestyksellä ei ole merkitystä, sillä

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta = BA \cos \theta = \bar{B} \cdot \bar{A}. \quad (4.57)$$

Samoin pistetulon ja skalaarilla kertomisen järjestystä voi vaihtaa

$$c(\bar{A} \cdot \bar{B}) = cAB \cos \theta = (c\bar{A}) \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot (c\bar{B}). \quad (4.58)$$

Pistetulolle ja yhteenlaskulle pätee myös osittelulaki (eli summan kertomisen sääntö), sillä jos merkitään  $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$ , voidaan kirjoittaa (kuva 4.7)

$$(\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{D} = \bar{C} \cdot \bar{D} = C_D D = (A_D + B_D)D = A_D D + B_D D = (\bar{A} \cdot \bar{D}) + (\bar{B} \cdot \bar{D}). \quad (4.59)$$

Pistetulosta voi siis ottaa yhteen tekijän. Koska pistetulo on skalaari ja pistetulon tekijöiden pitää olla vektoreita, lauseketta  $(\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$  ei ole määritelty, sillä  $\bar{A} \cdot \bar{B}$  ei ole vektori vaan skalaari. Sen sijaan  $(\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$  on hyvin määritelty lauseke, joka tarkoittaa vektorin  $\bar{C}$  kertomista pistetulon  $\bar{A} \cdot \bar{B}$  avulla.



**4.7** Vektorin  $\bar{A}$  pituus on 1.5 ja sen suunta on  $xy$ -tasossa  $40^\circ$   $x$ -akselista vastapäivään. Vektorin  $\bar{B}$  pituus on 2.0 ja sen suunta on  $xy$ -tasossa  $20^\circ$   $x$ -akselista myötäpäivään. Vektorin  $\bar{C}$  pituus on 2.5 ja sen suunta on  $xy$ -tasossa  $50^\circ$   $x$ -akselista myötäpäivään. Mitä on (a)  $\bar{A} \cdot \bar{B}$ , (b)  $\bar{A} \cdot \bar{C}$ , (c)  $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C})$ , (d)  $(\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$ ?

Sääntö  $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$  tai  $B = 0$  ei päde pistetulolle. Pistetulo on nimittäin nolla jos jompikumpi tekijöistä on nollavektori tai jos vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{0} \text{ tai } \bar{B} = \bar{0} \text{ tai } \bar{A} \perp \bar{B}. \quad (4.60)$$

Tämä seuraa suoraan pistetulon määritelmiästä, sillä kohtisuorille vektoreille  $\cos \theta = 0$ . Tämä yksinkertaiselta tuntuva ominaisuus tekee pistetulosta hyvin voimakkaan työkalun, koska toisiaan vastaan kohtisuorat vektorit ovat varsin yleisiä ja niiden pistetulo on aina nolla riippumatta vektorien pituuksista. Erityisesti karteesiset yksikkövektorit ovat nimittäin toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten kunkin yksikkövektorin tulo itsensä kanssa on 1 ja tulot muiden yksikkövektorien kanssa ovat kaikki nollia

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (4.61)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0. \quad (4.62)$$

Niinpä kahden vektorin pistetulo voidaan kirjoittaa *komponenttimuodossa*

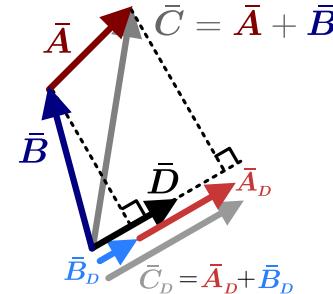
$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \quad (4.63)$$

$$= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + \dots + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \quad (4.64)$$

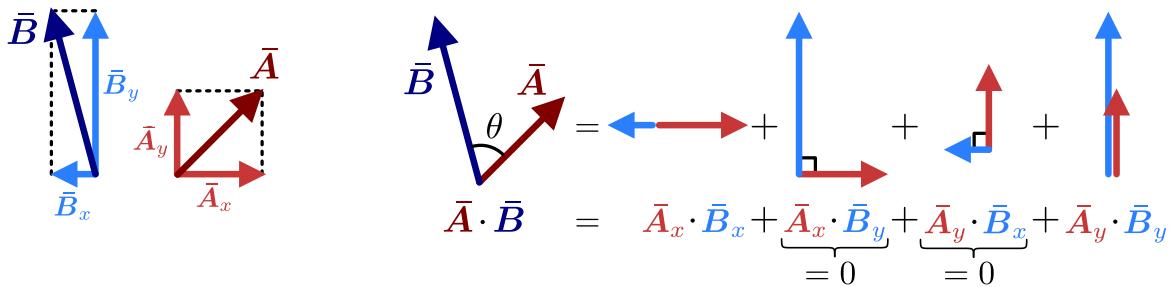
$$= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + \dots + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}. \quad (4.65)$$

Tässä on siis kirjoitettu molemmat vektorit komponenteittan ja kerrottu pistetulo auki. Näin saatavassa lausekkeessa on yhdeksän termiä, mutta näistä kuusi on nollia yksikkövektorien kohtisuoruuusehdon (4.62)

Kuva 4.7: Summan projektiot on projektiot summa.



Kuva 4.8: Vektoreiden pistetulo saadaan laskettua karteesisten komponenttien avulla kertomalla samansuuntaiset komponentit keskenään ja laskemalla nämä tulot yhteen.



vuoksi (esim.  $A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ ). Lopuissa kolmessa esiintyy kunkin yksikkövektorin tulo itsensä kanssa, mikä on 1 (esim.  $A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} = A_x B_x$ ). Tulos sievenee siis muotoon

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (4.66)$$

joten minkä tahansa kahden vektorin *pistetulo voidaan laskea yksinkertaisesti kertomalla vektoreiden x-, y- ja z-skalaarikomponentit keskenään ja laskemalla näin saadut luvut yhteen.*

Pistetulon laskeminen komponenteista on siis erittäin helppoa, ja niinpä pistetulon avulla voidaan laskea hyvin tehokkaasti sellaisia geometrisiä ominaisuuksia, joiden määritäminen kolmiulotteisessa avaruudessa olisi muilla keinoina hyvin hankalaa. Esimerkiksi kahden vektorin välinen kulma voidaan ratkaista pistetulon määritelmästä (4.54)

$$\cos \theta = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{AB} \quad (4.67)$$

ja vektorin skalaarikomponentti saadaan säännöllä (4.56).



**4.8** Mitä ovat vektorien  $\bar{A} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  sekä  $\bar{B} = 4\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$  (a) pituudet, (b) pistetulo, (c) välinen kulma?

#### esimerkki 4.5

#### Varjo

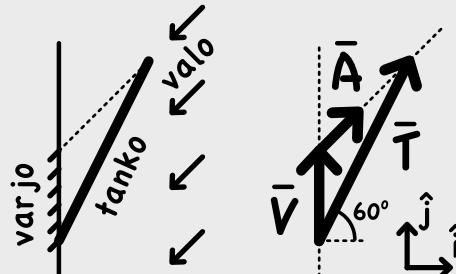
**Seinässä on vino lipputanko. Tangon pituus on 1.0 m ja se on  $30^\circ$  kulmassa seinään nähdyn. Aurinko paistaa  $45^\circ$  asteen kulmassa maahan ja seinään nähdyn niin, että tangon varjo seinällä on pystysuora. Kuinka pitkä varjo on?**

**TILANNE** Valitaan  $x$ -akseli vaakasuoraan poispäin seinästä ja  $y$ -akseli ylöspäin. Valo saapuu siis suunnasta  $\bar{A} = \hat{i} + \hat{j}$ . Määritellään tankoa kuvaava vektori  $\bar{T}$  ja varjota kuvaava vektori  $\bar{V}$ .

**SUUNNITELMA** Varjo on pystysuora, joten  $\bar{V} = V\hat{j}$ , missä  $V$  on varjon pituus. Tanko on  $60^\circ$  kulmassa  $x$ -akseliin nähdyn, joten  $\bar{T} = (1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ \hat{i} + (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ \hat{j}$ .

Jos tangon kärjestä piirretään suora valon suuntaan, tämä suora kohtaa seinän varjon kärkipisteessä. Toisin sanoen lipputankoa kuvaava vektori voidaan muodostaa lisäämällä vektoriin  $\bar{V}$  sopivan pituuden valon kulkuunsaan osoittava vektori  $a\bar{A}$ . Toisin sanoen jollakin  $a$  pätee

$$\bar{T} = \bar{V} + a\bar{A}. \quad (4.68)$$



**RATKAISU** Sijoittamalla vektorien lausekkeet yhtälöön (4.68) saamme komponenttimuotoisen yhtälön

$$(1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ \hat{i} + (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ \hat{j} = V\hat{j} + a(\hat{i} + \hat{j}) = a\hat{i} + (V + a)\hat{j}. \quad (4.69)$$

Yhtälön kummallakin puolella on  $x$ - ja  $y$ -komponentteihin jaettu vektori, ja koska komponenttijako on yksikäsiteinen, vektoriella täytyy olla samat komponentit. Siispä  $x$ -komponenteille saadaan yhtälö  $(1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ = a$  ja  $y$ -komponenteille  $(1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ = V + a$ . Ensimmäinen yhtälö kertoo meille suoraan tuntemattoman  $a$  arvon, ja tämän sijoitus jälkimmäiseen yhtälöön antaa varjon pituudeksi

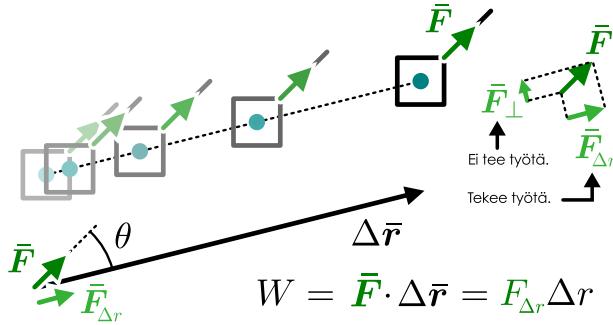
$$V = (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ - a = (1.0 \text{ m})(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ) = 0.366 \text{ m}. \quad (4.70)$$

**ARVIOINTI** Tangon kohtisuoran projektiion pituus seinällä olisi  $T_V = (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ = 0.866 \text{ m}$ . Nyt valo ei kuitenkaan saavu seinälle kohtisuoraan, joten kyseessä ei ole kohtisuora projektio. Kuvasta näemme, että varjon pituus on noin puolet tangon korkeudesta. Laskettu pituus on hieman pienempi kuin  $|T_V|/2$ , joten tulos on järkevä.

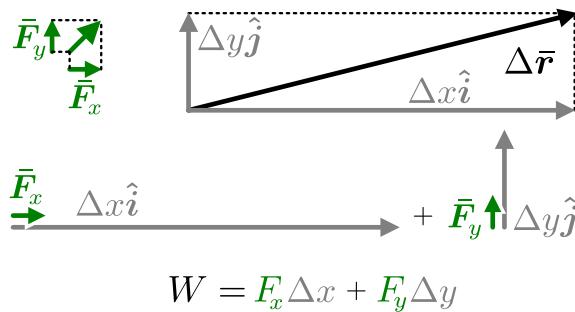
## Vakiovoiman tekemä työ

Kuva 4.9: Vakiovoiman tekemä työ.

(a) Työ on voiman ja siirtymän pistetulo.



(b) Työn lasku komponenteittain.



peutta, jolla energia siirtyy, eli jos vakiovoima tekee ajassa  $\Delta t$  työn  $W$ , sen keskimääräinen teho on

$$P_{\text{kesiarvo}} = \frac{W}{\Delta t} = \bar{F} \cdot \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \quad (4.75)$$

Hetkellinen teho saadaan raja-arvona kun aikaväli  $\Delta t$  lähestyy nollaa,

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{F} \cdot \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}. \quad (4.76)$$

Työn teho on siis voimavektorin ja nopeusvektorin pistetulo. Tämä on yleinen tulos joka pätee myös vaikkei voima olisi vakio, koska lauseke johdettiin differentiaalisen lyhyellä ajanjaksolla  $dt$ , jonka aikana muuttuvakin voimaa voidaan pitää vakiona.



**4.9** Miksi voimalle pätee  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  mutta kuitenkin  $W \neq \sqrt{(F_x \Delta x)^2 + (F_y \Delta y)^2 + (F_z \Delta z)^2}$ ?

## Viivaintegraali

Yhdessä ulottuvuudessa muuttuvan voiman tekemä työ laskettiin jakamalla kappaleen siirtymä infinitesimaaliin osiin, joilla voima on vakio, laskemalla kullekin pienellä siirtymällä tehty infinitesimaalinen työ ja summaamalla nämä yhteen — eli integroimalla paikan suhteen. Kolmessa ulottuvuudessa työ lasketaan samalla periaatteella, mutta asiaa hankaloittaa lisäksi se, että kappale ei välttämättä kulje suoraan vaan sen reitti voi olla kaareva. Kaarevakin reitin voi kuitenkin jakaa pieniin suoruihin osiin ja näin muodostunut murtoviiva lähestyy aidosti kaarevaa reittiä jaon tihentyessä.

Tarkastellaan kappaletta, joka kulkee pistestä  $\bar{r}_{\text{alku}}$  pisteesseen  $\bar{r}_{\text{loppu}}$  kaarevaa reittiä  $P$  pitkin (kuva 4.10). Jaetaan reitti pieniin suoruihin siirtymiin  $\Delta \bar{r}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$  niin, että nämä siirtymät yhdessä kulkevat reitin alusta loppuun

$$\bar{r}_{\text{loppu}} - \bar{r}_{\text{alku}} = \sum_{i=0}^N \Delta \bar{r}_i. \quad (4.77)$$

Kun siirtymät ovat kyllin lyhyet, kappaleeseen vaikuttava voima  $\bar{F}_i$  on likimain vakio kunkin siirtymän aikana. Tällöin kullekin siirtymällä voima tekee yhtälön (4.73) mukaisesti työn

$$W_i = \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{r}_i \quad (4.78)$$

Pistetulon avulla työn matemaattinen määritelmä yleistyy helposti kolmeen ulottuvuuteen. Kappaleeseen vaikuttavan voiman  $\bar{F}$  ollessa vakio ja kappaleen siirtymessä matkan  $\Delta \bar{r}$  voiman tekemä työ saadaan voiman *siirtymän suuntaisen komponentin* ja siirtymän pituuden tulona.

$$W = F_{\Delta r} \Delta r. \quad (4.71)$$

Voiman komponentti puolestaan voidaan kirjoittaa pistetulon avulla muodossa

$$F_{\Delta r} = \frac{1}{\Delta r} \bar{F} \cdot \Delta \bar{r}, \quad (4.72)$$

joten työ on yksinkertaisesti *voiman ja siirtymän pistetulo*

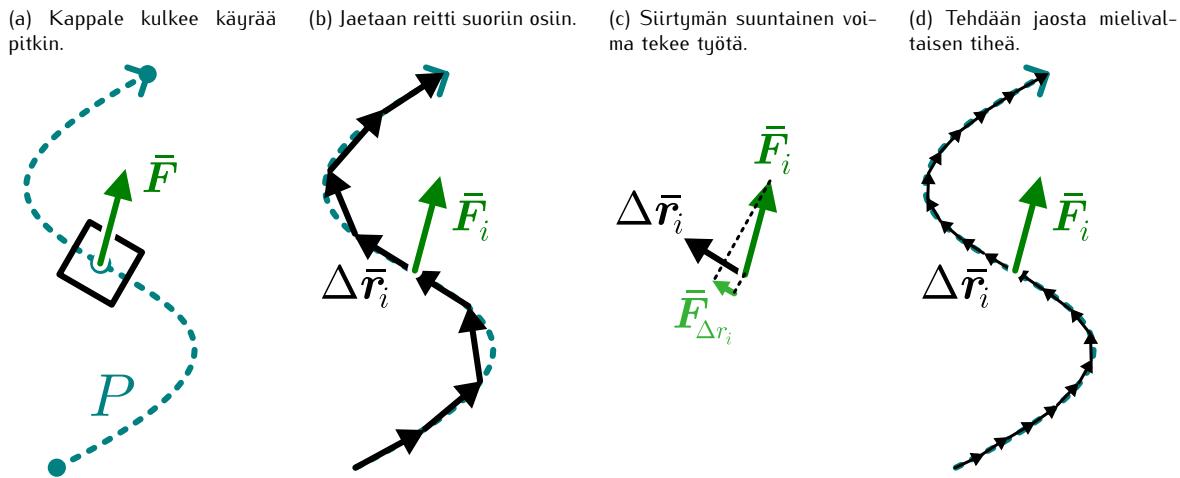
$$W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r}, \quad (4.73)$$

ja pistetulon komponenttiesityksen avulla tämän voi jakaa koordinaattiakselien suuntasiin osiin

$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \quad (4.74)$$

Vastaavalla tavalla voidaan määrittää myös voiman tekemän työn teho. Tehohan mittaa nopeutta, jolla energia siirtyy, eli jos vakiovoima tekee ajassa  $\Delta t$  työn  $W$ , sen keskimääräinen teho on

Kuva 4.10: Muuttuvan voiman tekemä työ käyräviivaista reittiä pitkin on voiman viivaintegraali.



ja kappaleeseen tehty kokonaistyö on näiden summa. Ottamalla raja-arvo, kun reitti jaetaan äärettömän lyhyisiin osiin, sekä reitin approksimaation että voiman vakioksi olettamisen virhe lähestyvät nolla ja saadaan työn tarkka arvo,

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_P \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.79)$$

Tämä on työn yleinen määritelmä.

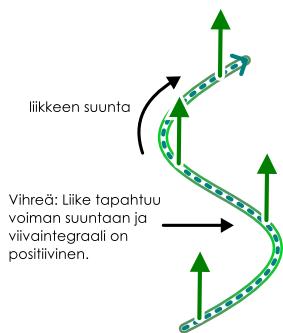
Yhtälössä esiintyvä lauseke on **viivaintegraali**, jossa integroidaan suuretta jotakin tiettyä avaruuden *reittiä* pitkin. Koska integroitavana on kahden vektorin pistetulo, joka on skalaari, lopputulos on myös skalaari. Yhdessä ulottuvuudessa viivaintegraaleja ei ole, koska liike on rajoitettu suoralle ja voi siten tapahtua korkeintaan edestakaisin. Siksi yhdessä ulottuvuudessa määritettyjen integraalien arvo riippuu alku- ja loppupisteestä. Kolmessa ulottuvuudessa lasketun viivaintegraalin arvo voi sen sijaan riippua myös siitä, mitä kautta alkupisteestä siirtyään loppupisteeseen.



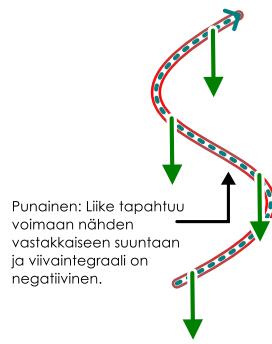
**4.10** Haluat kulkea luentosalista ruokalaan. Voit mennä sinne mitä reittiä haluat. Mitkä seuraavista suureista riippuvat valitsemastasi reitistä? (a) Matkan pituus, (b) oman gravitaatiopotentiaalienergiasa muutos, (c) kitkan ja ilmanvastukseen sinuun tekemä työ, (d) gravitaation sinuun tekemä työ?

Kuva 4.11: Eriaisia viivaintegraaleja. Polku ympäröivän viivan väri kertoo, onko liike samaan vai vastakkaiseen suuntaan voimaan nähdyn.

(a) Reitti voiman suuntaan.



(b) Reitti voimaa vastaan.



Viivaintegraalin fysikaalista merkitystä on pyritty havainnollistamaan kuvassa 4.11. Kuvassa (a) kappale liikkuu käyräviivaista polku pitkin ylöspäin ja siihen kohdistuu samalla ylöspäin vaikuttava voima. Koska liike on aina samaan suuntaan kuin voiman liikkeen suuntainen komponentti, viivaintegraali on *positiivinen* ja voima tekee koko matkan positiivista työtä kappaleeseen. Tämä on esitetty kuvassa kappaleen kulkema polku ympäröivällä vihreällä viivalla.

Tässä tarkasteltu voima *ei ole* kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima, koska kappaleen kiilthyvyys ei selvästi käään osoita ylöspäin. Tämän voi päättää siitä, että rata mutkittelee. Jos kiilthyvyys osoittaisi ylöspäin, rata olisi ylöspäin aukeava paraabeli. Kyseessä voi olla esimerkiksi tilanne, jossa ihminen kulkee nousevassa hississä edestakaisin ja tarkasteltu

voima on hänen kohdistuva hissin lattian tukivoima. Hissin matkustajaan kohdistava tukivoima pitää hänet ylöspäin nousevalla radalla ja tekee samalla matkustajaan työtä.

Kuvassa (b) on sama reitti, mutta nyt voima osoittaa alas päin. Tällöin voiman komponentti radan tangentin suunnassa osoittaa aina vastakkaiseen suuntaan kuin mihin kappale liikkuu, joten voiman tekemä työ on

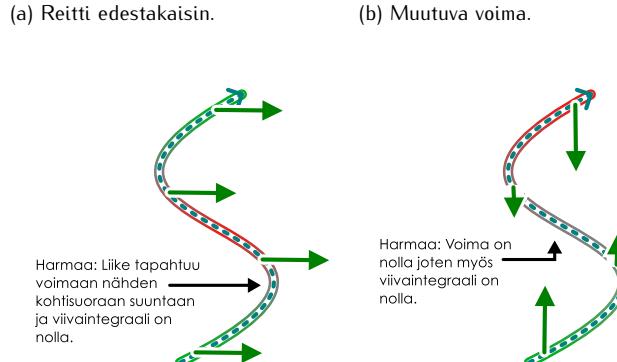
## MONIULOTTEINEN LIIKE

negatiivinen. Tämä on esitetty kuvassa rataa ympäröivänä punaisena viivanä. Tämä voima voisi olla samaiseen hissimatkustajaan vaikuttava painovoima. Painovoima tekee nousevaan kappaleeseen negatiivista työtä, koska se vähentää kappaleen liike-energiaa muuttaen sen vuorovaikutukseen varastointimaksi potentiaalienergiaksi.

Edellisissä esimerkeissä oli yksinkertaista päätellä, onko viivaintegraali positiivinen vai negatiivinen, koska liike tapahtui aina joko lähimain voiman suuntaan tai siihen nähden vastakkaiseen suuntaan. Yleisesti kuitenkin tilanne voi vaihdella kuten kuvassa 4.12. Kuvassa (a) kappale kulkee väillä voiman suuntaan eli kuvassa oikealle, jolloin voima tekee kappaleeseen positiivista työtä (vihreää). Väillä kappaile kuitenkin kääntyy ja alkaa kulkea voimaan nähden vastakkaiseen suuntaan, jolloin työ on negatiivinen (punainen). Kappaleen liikkuessa voiman suuntaan nähden kohtisuoraan, voima ei tee työtä lainkaan (harmaa). Kuvassa (b) puolestaan voima muuttuu kappaleen kulkies- sa, jolloin aluksi kappaleeseen tehdään positiivista ja lopuksi negatiivista työtä.

Koko matkan aikana tehty työ saadaan laskemalla positiivinen ja negatiivinen työ yhteen, ja tämä kokonaistyö on siis positiivinen, jos kappaleeseen tehdään enemmän positiivista kuin negatiivista työtä, ja päinvastoin negatiivinen, jos negatiivisen työn osuus on suurempi. Jos positiivista ja negatiivista työtä tehdään yhtä paljon, kokonaistyö on *nolla*. Tämä on myös viivaintegraalin fysikaalinen merkitys. Karkeasti ilmaisten viivaintegraali nimittäin mittaa sitä, osoittako integroitava vektorisuure kuljetulla polulla enemmän kulkusuuntaan vai sitä vastaan.

Kuva 4.12: Erilaisia viivaintegraaleja. Polku ympäröivän viivan väri kertoo, onko liike samaan vai vastakkaiseen suuntaan voimaan nähdyn.



Viivaintegraalin laskeminen on mahdollista myös tarkasti, jos sekä kappaleen reitti että siihen vaikuttava voima pystytään ilmoittamaan jonkin parametrin kuten kuljetun matkan tai ajan avulla. Esimerkiksi jos tiedetään kappaleeseen vaikuttava voima ajan funktiona,  $\bar{F}(t)$  sekä kappaleen paikka  $\bar{r}(t)$ , viivaintegraali voidaan muuttaa integraaliksi ajan suhteen

$$W = \int_P \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{\mathbf{F}}(t) \cdot \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{\mathbf{F}}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}}(t) dt. \quad (4.80)$$

Tämän voi puolestaan jakaa edelleen komponentteihin pistetulon laskusäynnön avulla, jolloin voidaan laskea erikseen voiman erisuuntaisten komponenttien tekemä työ.

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x v_x dt + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_y v_y dt + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_z v_z dt. \quad (4.81)$$

Näin monimutkaiselta näytänyt viivaintegraali on pilkottu kolmen tavallisen yhden muuttujan integraalin summaksi, ja näiden laskeminen onnistuu tavallisilla integrointisäännöillä. Esimerkissä 4.6 näytetään, miten tällainen lasku tehdään.

Edellisessä analyysissä työ, joka on voiman ja *siirtymän* pistetulo, muutettiin muotoon, jossa esiintyy voiman ja *nopeuden* pistetulo. Tämähän on kappaleeseen työtä tekevän voiman *teho*, ja se ilmaisee kuinka *nopeasti* energiaa siirtyy kappaleelle. Kappaleelle siirtynä kokonaisenergiamäärä eli kappaleeseen tehty työ on puolestaan teho (kuinka nopeasti energiaa siirtyy) kerrottuna ajalla (kuinka kauan energiaa siirtyy), jos teho on vakio. Jos teho ei ole vakio, kokonaistyö saadaan integroimalla tehoa ajan suhteen.

**4.12** Selitä omin sanoin, miten työ lasketaan kappaaleen liikkuessa kahdessa tai kolmessa ulottuvuudessa. Selitä erityisesti milloin pistetulo ja viivaintegraali ovat positiivisia, negatiivisia tai nollia.

## esimerkki 4.6

## Työ viivaintegraalina

Kuinka suuren työn kokonaisvoima tekee määritelmän mukaisesti esimerkin 4.3 kuulaan kahden sekunnin aikana?

**TILANNE** Kuulan liikerata, nopeus sekä kuulaan vaikuttavat voimat on ratkaistu komponenteittain esimerkissä 4.3. Tarkastelaan prosessia ajan välillä  $t_{\text{alku}} = 0$  ja  $t_{\text{loppu}} = 2$  s.

**SUUNNITELMA** Kuulaan tehty työ on määritelmän mukaisesti voiman viivaintegraali siirtymän suhteeseen. Jotta tällaisen integraalin voisi laskea, pitää kuitenkin tietää sekä kuulan paikka että siihen vaikuttava voima jonkin parametrin funktiona. Mahdollisia vaihtoehtoja ovat esimerkiksi kuljetun matkan pituus tai matkaan käytetty aika. Koska nyt tiedämme jo valmiiksi kaikki suuret ajan funktioita, on järkevästi esittää voima ja siirtymä ajan funktioina. Eriäisesti siirtymä voidaan ilmoittaa nopeuden ja ajan muutoksen tulona.

Työ on määritelmän mukaisesti

$$W = \int_{\bar{r}_{\text{alku}}}^{\bar{r}_{\text{loppu}}} \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.82)$$

Jos kuulan nopeus ajan hetkellä  $t$  on  $\bar{v}(t)$ , on kuulan siirtymä lyhyen ajan  $dt$  kuluessa nopeuden määritelmän mukaisesti  $d\bar{r} = \bar{v} dt$ . Työ voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F} \cdot \bar{v} dt. \quad (4.83)$$

Tämä voidaan päätellä myös työn tekemän tehon avulla, sillä teho on

$$P = \frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}, \quad (4.84)$$

joten työ saadaan integroimalla lauseketta  $dW = \bar{F} \cdot \bar{v} dt$ . Käytännössä lasku onnistuu hajottamalla pistetulo komponentteihin

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} (F_x v_x + F_y v_y) dt. \quad (4.85)$$

**RATKAISU** Lasketaan ensin  $x$ -suuntaisen voiman tekemä työ

$$W_{F_x} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x v_x dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{1}{2} \frac{A^2}{m} t^3 dt = \frac{1}{8} \frac{A^2}{m} (t_{\text{loppu}}^4 - t_{\text{alku}}^4). \quad (4.86)$$

Sijoittamalla lukuarvat saadaan  $W_{F_x} = 1.8 \cdot 10^{-5}$  J. Vastaavasti  $y$ -suunnassa

$$W_{F_y} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_y v_y dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{B^2}{mC} (1 - \cos Ct) \sin Ct dt. \quad (4.87)$$

Tässä integraalissa on kaksi termiä, joista ensimmäisen integraali on  $\int \sin Ct dt = -\frac{1}{C} \cos Ct + c$  ja toisen integrointi onnistuu esimerkiksi trigonometristen laskusääntöjen avulla  $\int -\cos Ct \sin Ct dt = \int -\frac{1}{2} \sin 2Ct dt = \frac{1}{4C} \cos 2Ct + c$ . Kaikkiaan siis

$$W_{F_y} = \left|_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{B^2}{mC^2} \left( \frac{1}{4} \cos 2Ct - \cos Ct \right) \right| = \frac{B^2}{mC^2} \left( \frac{1}{4} \cos 2Ct_{\text{loppu}} - \cos Ct_{\text{loppu}} \right) - \frac{B^2}{mC^2} \left( \frac{1}{4} \cos 2Ct_{\text{alku}} - \cos Ct_{\text{alku}} \right). \quad (4.88)$$

Sijoittamalla lukuarvat saadaan  $W_{F_y} = 1.2 \cdot 10^{-7}$  J.

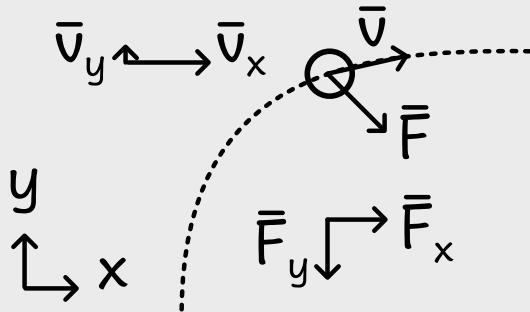
Kokonaistyö on näiden summa, ja koska  $y$ -suuntaisten voimien tekemä työ on huomattavasti pienempi kuin  $x$ -suuntaisten, kokonaistyö on kahden merkitsevän numeron tarkkuudella sama kuin pelkkä  $x$ -suuntaisen voiman komponentin tekemä työ  $W = W_{F_x} + W_{F_y} = 1.8 \cdot 10^{-5}$  J.

Mathematica:

```
(* voimat *)
fx = a t; fy = b Sin[c t];
lukuarvat = {a -> 3*10^-4, b -> 7*10^-4, c -> 3.5, m -> 0.01};
aika = {talku -> 0, tloppu -> 2}

(* nopeudet *)
vx = Integrate[fx/m, {t, 0, t}]
(a t^2)/(2 m)
vy = Integrate[fy/m, {t, 0, t}]
(b - b Cos[c t])/(c m)

(* työ *)
wx = Integrate[fx vx, {t, talku, tloppu}]
-((a^2 talku^4)/(8 m)) + (a^2 tloppu^4)/(8 m)
```



```

wx /. lukuarvot /. aika
0.000018
wy = Integrate[fy vy, {t, talku, tloppu}]
(b^2 (4 Cos[c talku] - Cos[2 c talku] - 4 Cos[c tloppu] + Cos[2 c tloppu]))/(4 c^2 m)
wy /. lukuarvot /. aika
1.21128*10^-7

(* kokonaistyö *)
w = wx + wy /.lukuarvot /. aika
0.0000181211

(* kuulan saaman liike-energian pitää olla sama kuin siihen tehty kokonaistyö *)
kx = 1/2 m vx^2 /. lukuarvot /. t->2
0.000018
ky = 1/2 m vy^2 /. lukuarvot /. t->2
1.21128*10^-7

```

**ARVIOINTI** Kuulan liike-energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin kuulaan tehty kokonaistyö. Sijoitus liike-energian lausekkeeseen osoittaa, että näin on

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ J} = W. \quad (4.89)$$

Tarkistetaan myös työn yksiköt:

$$[W_x] = \frac{[A^2]}{[m]} [t^4] = \frac{\text{N}^2/\text{s}^2}{\text{kg}} \text{s}^4 = \frac{\text{kg}^2 \text{m}^2/\text{s}^4}{\text{kg}} \text{s}^2 = \text{kgm}^2/\text{s}^2 = \text{J} \quad (4.90)$$

$$[W_y] = \frac{[B^2]}{[mC^2]} [\cos 2Ct] = \frac{\text{N}^2}{\text{kg s}^{-2}} \cdot 1 = \frac{\text{N}^2 \text{s}^2}{\text{kg}} = \text{J}. \quad (4.91)$$

## Konservatiivisuus

Aikaisemmin määritelimme konservatiivisiksi sellaiset vuorovaikutukset, joihin liittyy potentiaalienergia. Edelleen jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, mekaaninen energia on systeemissä vakiota, ja tämä ominaisuus tekee konservatiivisuudesta erittäin tärkeän teoreettisen työkalun. Lisäksi yhdessä ulottuvuudessa opimme myös, että potentiaalienergia voidaan määrittää konservatiivisen voiman tekemän työn kautta

$$\Delta U = -W_{\text{konservatiivinen}} = - \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx, \quad (4.92)$$

eli integraalina. Tämä tulos perustui siihen, että työ mittaa vuorovaikutuksen siirtämää energiota, ja konservatiivisen vuorovaikutuksen tapauksessa tämä energia tulee vuorovaikutuksen varastoimasta potentiaalienergiasta. Vastaavasti voima saadaan potentiaalienergian derivaattana,

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (4.93)$$

Seuraavaksi tarkastelemme, miten konservatiivisuus ilmenee kolmiulotteisessa avaruudessa.

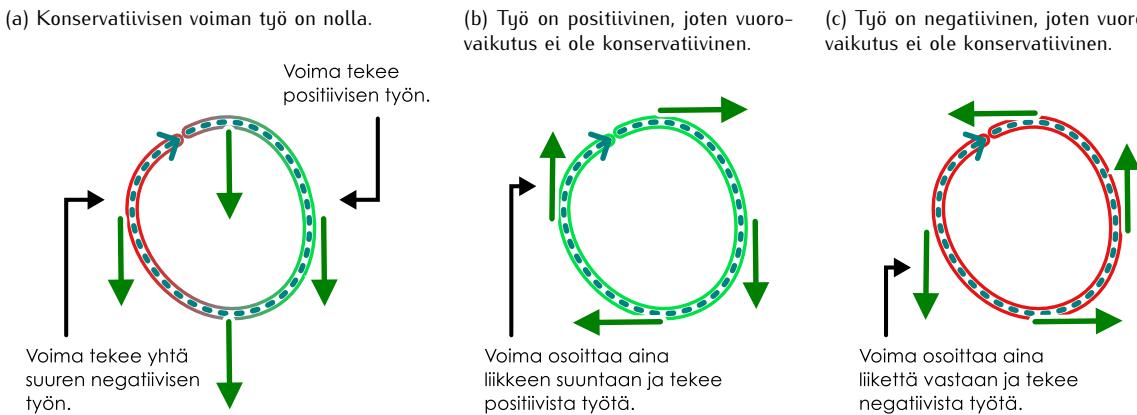
Myös kolmessa ulottuvuudessa potentiaalienergia määritellään niin, että konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutos missä tahansa prosessissa on tämän vuorovaikutuksen tekemän työn vastaluku  $\Delta U = -W_{\text{konservatiivinen}}$ . Potentiaalienergialla ei ole absoluuttista arvoa, mutta jos valitaan jokin piste  $\bar{r}_0$  potentiaalienergian nollakohdaksi, konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia missä tahansa pistessä  $\bar{r}$  on voiman tekemän työn vastaluku kappaleen siirtyessä nollapisteestä tähän tarkastelupisteeseen

$$U(\bar{r}) = -W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}}. \quad (4.94)$$

Kolmessa ulottuvuudessa on kuitenkin huomioitava, että kappale voi tehdä siirtymän  $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}$  mielivaltaista reittiä pitkin ja työ määriteltiin kolmessa ulottuvuudessa viivaintegraalina. Kuitenkin koska potentiaalienergia on paikan funktio, sillä täytyy olla pistessä  $\bar{r}$  jokin tietty yksikäsitteinen arvo. Niinpä yhtälö (4.94) on mielekäs vain jos työ  $W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}}$  saa saman arvon kulkipa kappale mitä tahansa reittiä pitkin. Tämä on kolmessa ulottuvuudessa konservatiivisuuden määritelmä: vuorovaikutus on konservatiivinen jos ja vain jos sen tekemä työ kappaleen siirtyessä minkä tahansa kahden pisteen välillä ei riipu reitistä, jota pitkin kappale kulkee.

Toinen tapa ilmaista sama asia on vaatia, että jos kappale kulkee suljetun reitin, konservatiivisen voiman siihen tekemän työn täytyy olla nolla. Näin siksi, että kuljettuaan suljetun reitin kappale palaa takaisin alkupisteesensä jolloin potentiaalienergian täytyy olla lopuksi sama kuin aluksi. Potentiaalienergian muutos kierroksen jälkeen, jonka täytyy olla sama kuin vuorovaikutuksen tekemä työ, on siis nolla  $W_{\text{suljettu}} = -\Delta U =$

Kuva 4.13: Viivaintegraali suljetulla reitillä.



0 J. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4.13 (a), jossa voima tekee silmukan kulkevan kappaleeseen yhtä paljon positiivista ja negatiivista työtä jolloin kokonaistyö on nolla.

Aina näin ei kuitenkaan välttämättä ole ja kappaleeseen tehty kokonaistyö voi olla nollasta poikkeava vaikka kappale kulkisi suljetun reitin. Näin on kuvissa 4.13 (b) ja (c), joissa molemmissa voima on aina yhdensuuntainen liikkeen kanssa — joko samansuuntainen, jolloin työ on positiivinen, tai vastakkaissuuntainen, jolloin työ on negatiivinen.

Täsmälle sama ajatus esiteltiin jo luvussa 2 tarkasteltaessa kappaleita, jotka kuljettuaan edestakaisen matkan palasivat samaan pisteeseen. Jos kappaleen mekaaninen energia säilyi, siihen tehty kokonaistyö oli nolla ja vuorovaikutukset olivat konservatiivisia. Jos puolestaan kappaleen mekaanista energiota oli muuttunut sisäenergiaksi tai päinvastoin, kappaleeseen täytyi vaikuttaa myös dissipatiivisia vuorovaikutuksia.



**4.13** (a) Kappaletta nostetaan ensin metri suoraan ylös ja sitten lasketaan metri alas. Millainen on painovoiman kappaleeseen tekemä työ? (b) Kappaletta työnnetään lattialla ensin metri eteenpäin ja sitten metri takaisin. Millainen on kitkan kappaleeseen tekemä työ? (c) Mitä tulokset kertovat voimien konservatiivisuudesta?

Tarkastellaan lopuksi vielä painovoimaa esimerkkinä konservatiivisesta vuorovaikutuksesta. Painovoimallaan on potentiaalienergia (2.19), joten painovoiman on sen perusteella oltava konservatiivinen vuorovaikutus. Perustelimme tämän aikaisemmin kuitenkin vain *pystysuoralle* liikkeelle. Kolmessa ulottuvuudessa kappaleet voivat kuitenkin liikkua myös *vaakasuunnassa*, ja jotta painovoima todella olisi konservatiivinen, sen tekemän työn täytyy olla nolla minkä tahansa suljetun reitin kulkeneeseen kappaleeseen. Päättelään nyt, että painovoiman tapauksessa näin todella tapahtuu.

Tarkastellaan ensin yksinkertaista tapausta — vapaata liikettä kaltevalla tasolla. Suora siirtymä kaltevalla tasolla voidaan jakaa pysty- ja vaakasuoran komponenttiin  $\Delta\bar{r} = \Delta\hat{x}\hat{i} + \Delta\hat{y}\hat{j}$ , jolloin painovoiman tekemä työ on

$$W = \bar{G} \cdot \Delta\bar{r} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta\hat{x}\hat{i} + \Delta\hat{y}\hat{j}) = -mg\hat{j} \cdot \Delta\hat{x}\hat{i} - mg\hat{j} \cdot \Delta\hat{y}\hat{j}. \quad (4.95)$$

Tässä kuitenkin painovoiman ja vaakasiirtymän pistetulo on nolla,  $-mg\hat{j} \cdot \Delta\hat{x}\hat{i} = -mg\Delta x(\hat{i} \cdot \hat{j}) = 0$ , joten työ riippuu ainoastaan *pystysuuntaisesta* siirtymästä

$$W = -mg\hat{j} \cdot \Delta\hat{y}\hat{j} = -mg\Delta y. \quad (4.96)$$

Tämä on sama tulos kuin pystysuorassa liikkeessä. Kaltevaa tasoa pitkin liikkuva kappale toki joutuu kulkemaan pidemmän matkan ja se käyttää tähän matkaan enemmän aikaa, mutta kappaleen saama energia on sama kuin suorassa pudotuksessa.

Tapaus, jossa kappale liikkuu pitkin käyräviivaista reittiä, voidaan analysoida edellisen tuloksen avulla. Mikä tahansa reitti voidaan nimittäin jakaa lyhyisiin osiin ja näitä osia voidaan pitää likimain suorina siirtyminä kuten kuvassa 4.14 (b) on esitetty. Tämä on tietenkin approksimaatio, jos kappale todellisuudessa kulkee käyräviivaista rataa, mutta mitä lyhyempiin osiin reitti jaetaan, sitä tarkemmin suorista siirtymistä koostuva reitti muistuttaa todellista käyrää.

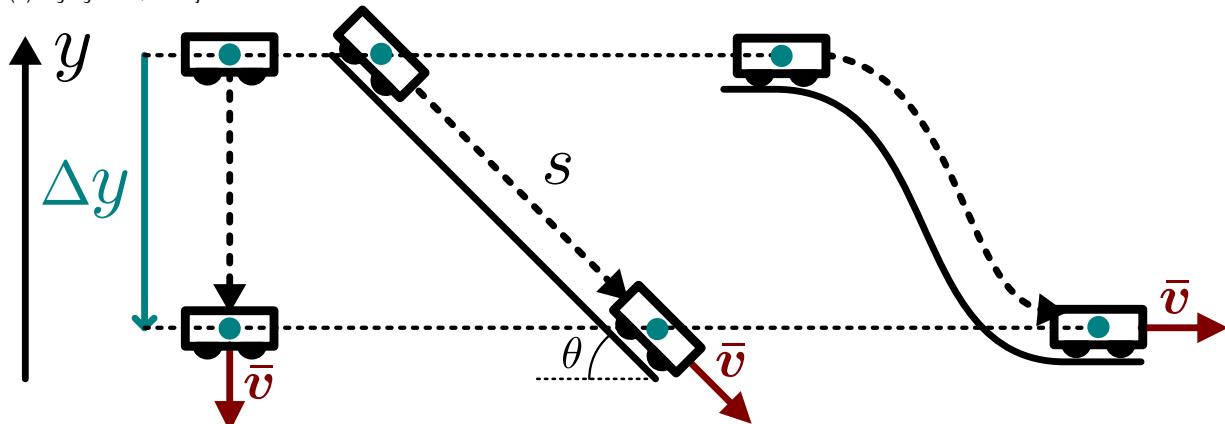
Kullakin lyhyellä siirtymällä kappaleeseen tehty työ riippuu vain kappaleen pystysuuntaisesta siirtymästä ja kokonaistyö saadaan laskemalla nämä yhteen. Koska massa ja putoamiskiertyvyys ovat tässä vakioita, tämä kuitenkin johtaa vain pystysuuntaisten siirtymien yhteenlaskuun. Kuvan 4.14 (c) esimerkissä reitti on jaettu neljään osaan, jolloin

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = -mg(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4) = -mg\Delta y_{\text{kokonais}}. \quad (4.97)$$

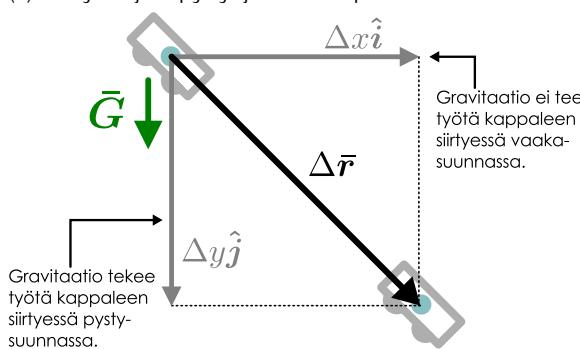
## MONIULOTTEINEN LIIKE

Kuva 4.14: Painovoima on konservatiivinen, koska sen kappaleeseen tekemä työ ei riipu kappaleen kulkemasta reitistä vaan vain pystysuunnista siirtymästä.

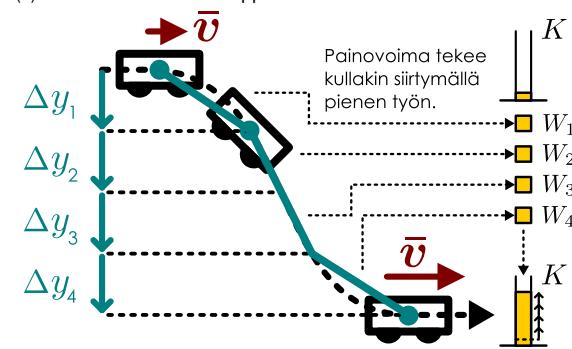
(a) Pystysuora, vino ja kaareva reitti.



(b) Siirtymän jako pysty- ja vaakakomponentteihin.



(c) Kaarevaa reittiä voi approksimoida murtoviivana.



Tulos on sama riippumatta siitä miten reitti jaettu osiin, joten sen täytyy päteä *mille tahansa* reitille, jonka loppu- ja alkupisteen välinen etäisyys on pystysuunnassa  $\Delta y$ . Näin on siis päättely, että *mitä tahansa reittiä* kappale kulkeaan painovoimakentässä, sen liike-energian muutos riippuu ainoastaan sen siirtymästä *pystysuunnassa*. Siispä gravitaatiota todella kuvaan ainoastaan kappaleen pystysuunnaisesta koordinaatista riippuva potentiaalienergia (2.19) ja vuorovaikutus on konservatiivinen.



**4.14** Päätteli edellä esitetyn perusteella vielä, että jos kappale kulkee suljetun reitin, painovoiman siihin tekemä työ on nolla. Selität, miksi tämä on tärkeää.

## 4.5 Kentät

### Kenttä vuorovaikutuksen välittäjänä

Vuorovaikutuksilla tarkoitetaan fysiikassa yleisesti kahden tai useamman olion välistä vaikutussuhdetta, joka ohjaa oloiden käyttäytymistä. Vuorovaikutukset tuottavat voimia ja niihin voi liittyä potentiaalienergiaa. Fysiikka tuntee neljä perusvuorovaikutusta, jotka ovat *gravitaatiovuorovaikutus* eli painovoima, *sähkömagneettinen vuorovaikutus*, *heikko vuorovaikutus* sekä *vahva vuorovaikutus*.

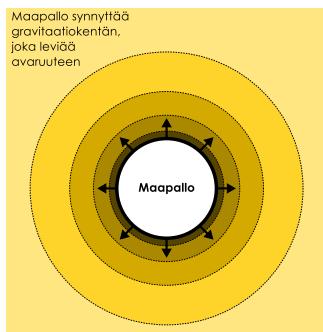
Heikko ja vahva vuorovaikutus vaikuttavat atomiydinten ja alkeishiukkasten mittakaavassa. Ne ovat äärimmäisen tärkeitä, sillä ne pitävät atomien ytimet koossa ja vaikuttavat ilmiöissä kuten radioaktiivisuudessa. Kuitenkaan makroskoopissa, arkielämän mittakaavassa niitä ei voi suoraan havaita, emmekä tässä materiaalissa käsittele lainkaan näitä vuorovaikutuksia.

Gravitaatio on kaikkien *massallisten* kappaleiden ja hiukkasten välinen vuorovaikutus, joka saa kappaleet vetämään toisiaan puoleensa. Ilmeisin esimerkki gravitaatiosta on se, että kappaleet putoavat kohti maata, sillä maapallo vuorovaikuttaa gravitaation kautta kaikkien massallisten kappaleiden kanssa vetäen niitä puoleensa.

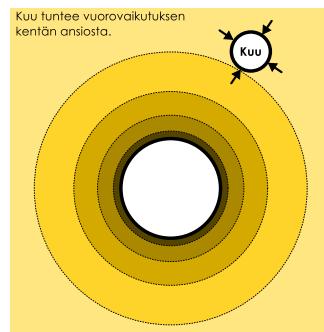
Sähkömagneettinen vuorovaikutus puolestaan vaikuttaa hiukkasiin, joilla on *sähkövaraukseksi* kutsuttu ominaisuus. Se pitää atomien elektronit ja ytimet toisisaan kiinni ja se voidaan havaita suoraan myös makros-

Kuva 4.15: Gravitaatiovuorovaikutuksen voi ajatella välittyyvän kappaleiden kesken gravitaatiokentän avulla.

(a) Maa synnyttää kentän.



(b) Kuu tuntee kentän.

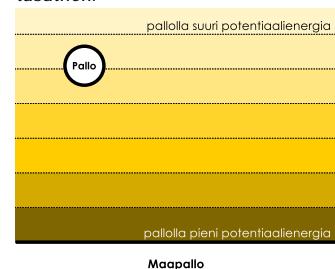


(c) Myös Kuu synnyttää kentän, jonka Maa tuntee.



Myös Kuu synnyttää ympärilleen oman gravitaatiokenttensä, ja Maa tuntee vuorovaikutuksen tämän kentän kautta.

(d) Lähellä Maan pintaan kenttä on tasainen.



Lähellä Maan pintaan planeetan pallomaisuutta ei huoma ja Maa on ikimain tasainen. Niinpä painovoimakenttäkin on "tasainen".

kooppisessa mittakaavassa sähköisesti varattujen, magneettisten ja virtaa kuljettavien kappaleiden vuorovaikutuksina. Tutustumme sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen tarkemmin luvusta 10 alkaen.

Myös esimerkiksi kemia, aineen makroskooppiset ominaisuudet ja arkipäiväiset vuorovaikutukset kuten kosketusvuorovaikutukset ovat pohjimmiltaan sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aikaansaamia. Ne ovat nimitätin kaikki seurausta atomeissa olevien elektronien vuorovaikutuksista ja kvanttimekaanisista ominaisuuksista. Kappaleet eivät esimerkiksi kulje toistensa läpi, koska niiden rakenteen hajottaminen edellyttäisi atomiydinien ja elektronien välisen sähkömagneettisen vuorovaikutuksen synnyttämien sidosten rikkomista, mikä vaatisi hyvin paljon energiota. Ainetta on toki mahdollista hajottaa, mutta se ei ole yleensä aivan helppoa.

Sähkömagneettinen vuorovaikutus voi saada hiukkaset joko hylkimään toisiaan tai vetämään toisiaan puoleensa. Gravitaatio puolestaan saa kappaleet aina vetämään toisiaan puoleensa. Mitä suurempi on kappaleiden massa, sitä voimakkaampi on niiden välinen gravitaatio. Gravitaatio on kuitenkin paljon heikompi kuin kaikki muut perusvuorovaikutukset (myös heikompi kuin "heikko" vuorovaikutus), joten tarvitaan valtavan suuria massakeskittymiä kuten tähtiä ja planeettoja, jotta gravitaation vaikutukset voitaisiin havaita. Planeettoja ja tähtiä kuitenkin on olemassa, ja niinpä hyvin suussa mittakaavassa gravitaatio on usein merkittävä vuorovaikutus. On ehkä yllättävä, että gravitaatio, joka tavallisesti tuntuu hyvin vahvalta vuorovaikutukselta onkin ylivoimaisesti heikoin luonnon vuorovaikutus. Tämä voi ymmärtää paremmin huomaamalla, että vaikka pitelisit kädessäsi vaikkapa painavaa kirjaa, jota vetää puoleensa *koko maapallon massa*, pieni alue sormiesi pinnalla pystyy kosketuksen kautta helposti vuorovaikuttamaan kirjan kanssa voimakkaammin ja nostamaan kirjan ylös. Ja kosketuksessakin välittyy vain sähkömagneettisen vuorovaikutuksen pieni sivujänne.

Monet arkipäiväiset vuorovaikutukset vaativat kappaleiden koskettamista, koska ne syntyvät kappaleiden pintojen atomien kohdateissa. Oleellisesti kysymys on siitä, että atomien elektronit eivät voi helposti kulkea toistensa läpi. Gravitaatio ja sähkömagneettinen vuorovaikutus kuitenkin toimivat vaikka vuorovaikuttavat hiukkaset olisivat *kuinka kaukana tahansa*, minkä vuoksi niitä kutsutaan **etävuorovaikutuksiksi**. Esimerkiksi maapallo on noin 150 miljoonan kilometrin päässä Auringosta, mutta silti Auringon ja Maan välinen gravitaatiovuorovaikutus pitää Maan Aurinkoa kiertävällä radalla. Herääkin kysymys, kuinka tällaiset etävuorovaikutukset ovat mahdollisia.

Gravitaation voidaan ajatella toimivan niin, että massalliset kappaleet synnyttävät ympärilleen **gravitaatiokentän** eli jonkinlaisen näkymättömän rakenteen, joka levittää kaikkialle avaruuteen ja vaikuttaa siellä muiden kappaleiden käyttäymiseen. Vastaavasti sähköinen vuorovaikutus toimii siten, että varatut hiukkaset synnyttävät avaruuteen **sähkökentän**, joka vaikuttaa toisten varattujen hiukkasten liikkeeseen. Koska kenttä levää avaruuteen, se mahdollistaa vuorovaikutukset mielivaltaisen pitkien etäisyyksien päästää ilman, että kentän kohtaava kappale tietäisi, millainen kappale kentän on synnyttänyt. Itse asiassa kenttä levää avaruuteen äärellisellä nopeudella, joten kentän synnyttänyt kappale on voinut jo siirtyä muualle, kun kentän tuottama vuorovaikutus lopulta tunnetaan. Fysiikassa tästä mekanismista sanotaan, että kenttä **välittää** vuorovaikutuksen kappaleiden välillä.

Matemaattisesti kenttä on avaruudessa määritelty paikan funktio. **Skalaarikenttä** on funktio, jolla on jokaisessa avaruuden pisteessä jonkin skalaariarvo eli suuruus. Vastaavasti **vektorikenttä** on funktio, jolla on jokaisessa avaruuden pisteessä vektoriarvo eli sekä suuruus että suunta. Gravitaatio- ja sähkökenttä ovat tärkeitä esimerkkejä fysikaalista kentistä, mutta periaatteessa mikä tahansa avaruudessa määritelty funktio voi olla kenttä.



**4.15** Keksi lisää esimerkkejä kentistä, jotka voidaan määritellä tavallisessa huoneessa. Ovatko esimerkkisi skalaari- vai vektorikenttiä?

## esimerkki 4.7

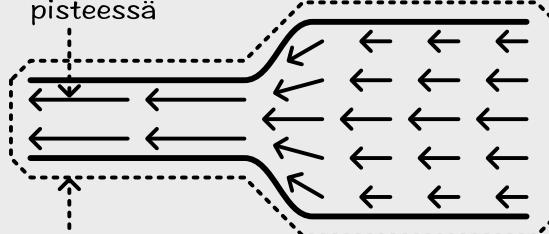
## Virtauskenttä

Putkessa virtaa kaasua. Virtausnopeus on vektorisuuressa, joka ilmaisee nopeuden, jolla kaasun molekyylit keskimäärin liikkuvat *yhdessä* avaruuden pisteessä. Periaatteessa kaasun virtausnopeus voidaan mitata missä tahansa pisteessä putken sisällä. Koska kaasu voi liikkua putken eri osissa eri nopeuksilla ja eri suuntiin, virtausnopeus riippuu mittauspisteestä.

Kaasun virtausta kokonaisuutena kuvaavat virtauskentät, joita sisältää tiedon kaasun nopeudesta *kaikissa* avaruuden pisteessä. Voidaan valita mikä tahansa piste putken sisältä, ja virtauskenttä kertoo, mikä on kaasun nopeus kyseisessä pisteessä. Se on siis paikan funktio eli kenttä. Koska virtausnopeus on vektori, kyseessä on vektorikenttä.

**virtausnopeus:**

kaasun nopeus *yhdessä*  
pisteessä



**virtauskenttä:**  
kaasun nopeus *kaikkialla*

Esimerkiksi gravitaation potentiaalienergia on *skalaarikenttä*, sillä kappaleen potentiaalienergia riippuu sen paikasta. Gravitaation kappaleeseen kohdistama voima on puolestaan *vektorikenttä*. Voimahan on vektori ja painovoima riippuu periaatteessa kappaleen paikasta. Lähellä maapintaa painovoima on vakio, mutta kaukana maapallosta näin ei enää ole. Gravitaatiovoima ja sen potentiaalienergia ovat kuitenkin lopujen lopuksi vain kaksi erilaista tapaa kuvata gravitaati vuorovaikutusta, joten ne liittyvät kiinteästä toisiinsa. Seuraava tavoiteemme onkin tutkia, miten näitä kenttiä kuvataan matemaattisesti. Erityisesti haluamme selvittää, miten konservatiivisen vuorovaikutuksen voima lasketaan, kun vuorovaikutuksen potentiaalienergia tunnetaan.

### Voiman määrittäminen potentiaalienergiasta

Potentiaalienergia määritellään voiman tekemänä työnä eli matemaattisesti integraalina. Yhdessä ulottuvudessa tämä tarkoitti toisaalta sitä, että konservatiivisen vuorovaikutuksen voima saatiin potentiaalienergian derivaattana, sillä derivointi ja integrointi ovat käänneisoperaatiot. Samanlainen periaate pätee myös kolmessa ulottuvuudessa, mutta aivan kuten työn määrittely vaati uudenlaisen integraalin, viivaintegraalin, voiman määrittäminen potentiaalienergian perusteella vaatii derivaatan määrittelyn useassa ulottuvuudessa.

Pohditaan aluksi, millaisia ominaisuuksia konservatiivisella voimalla pitäisi olla. Ajatellaan jälleen analogiaa mäessä vierivään palloon: Palloon kohdistuva kokonaisvoima osoittaa aina alämäkeen vetäen palloa tähän suuntaan. Lisäksi jyrkkään mäkeen asetettu pallo alkaa vierä nopeammin kuin loivaan rinteesseen tuottu pallo, joten jyrkässä mäessä palloon vaikuttava kokonaisvoima on suurempi. Tilanne on kuitenkin monimutkaisempia kuin yhdessä ulottuvuudessa, koska "alamäki" voi eri paikoissa osoittaa eri suuntiin. Pallon liikkumisessa tämä alamäen suunta todennäköisesti vielä muuttuu, jolloin palloon kohdistuvan voiman suunta myös muuttuu. Jotta tietäisimme minnepäin palloon vaikuttava voima missäkin vaikuttaa, meillä pitäisi olla jokin keinotekniikka, johon mäki kussakin pisteessä jyrkimmin laskee. Koska tämä riippuu vain mäen korkeuden muutoksesta, periaatteessa ongelman pitäisi olla ratkaistavissa kunhan tiedämme kuinka korkealla mäki kussakin pisteessä on. Tämä tehtävä gleistyy mielivaltaisen potentiaalienergian tapaukseen: jos tiedämme kappaleen potentiaalienergian avaruuden jokaisessa pisteessä, kuinka lasketaan suunta, johon kappaleeseen vaikuttava voima osoittaa — eli johon liukuttaessa potentiaalienergia pienenee nopeiten? Ja edelleen, kuinka nopeasti potentiaalienergia tuossa suunnassa muuttuu?

Suureen muutosta toisen suureen muuttuessa kuvaavat derivaatta, joten mitä ilmeisimmin edellä esitetty ongelma liittyy jotenkin derivaattoihin. Useassa ulottuvuudessa on kuitenkin mahdollista derivoida eri koordinaattien suhteiden, joten täytyy olla erityisen tarkkana sen suhteiden *millaisia* derivaattoja kulloinkin lasketaan. Erityisesti voi olla tilanne, jossa suureet riippuvat toisistaan ja yhden suureen muuttaminen vaikuttaa toisiin suureisiin.

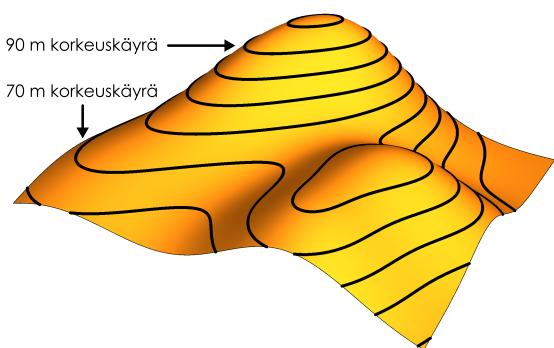
Usean muuttujan funktion määritellään **osittaisderivaatta** tavallisen derivaatan tapaan erotusosamääränä. Esimerkiksi funktion  $f(x, y, z)$  osittaisderivaattaa muuttujan  $x$  suhteen merkitään

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (4.98)$$

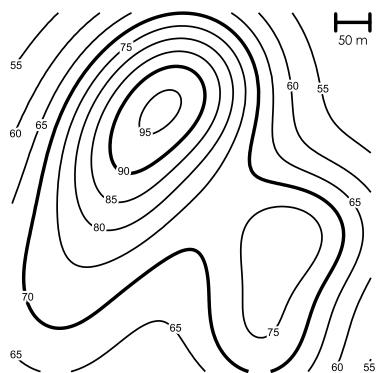
Huomattavaa tässä määritelmässä on se, että raja-arvo lasketaan erotuksesta, jossa ainoastaan *yhden* suureen, tässä  $x$ , annetaan muuttua ja kaikki muut ovat vakioita. Tällainen derivaatta lasketaan normaaleilla derivoimissäänöillä, mutta näitä sääntöjä sovelletaan ainoastaan derivoimismuuttujaan ja kaikki muut suureet käsitellään kuin ne olisivat vakioita.

Kuva 4.16: Maaston korkeus esimerkkinä usean muuttujan funktiosta. Korkeutta voidaan kuvata esimerkiksi korkeuskäyrillä ja korkeuden muuttumista paikan funktiona voidaan kuvata osittaisderivaatoilla ja gradientilla.

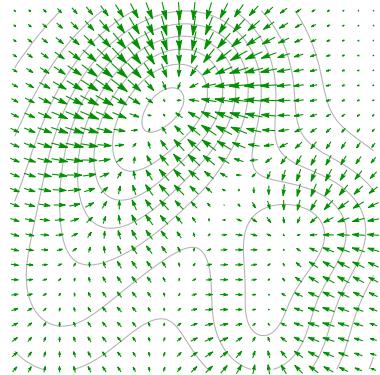
(a) Maaston muoto kahden kukan ympäristössä.



(b) Maaston muoto korkeuskäyrinä.

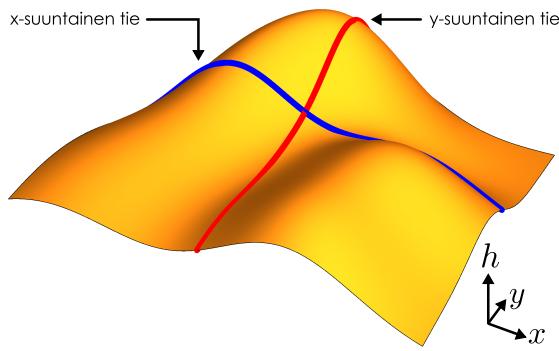


(c) Jyrkimmän nousun suunta ja jyrkyys eli gradientti.

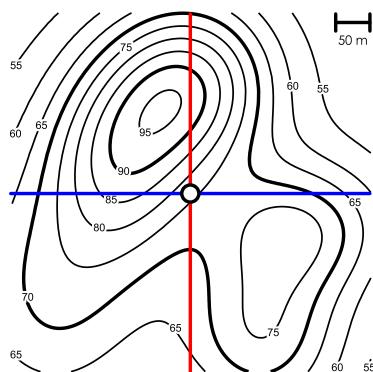


(d) Maaston profili

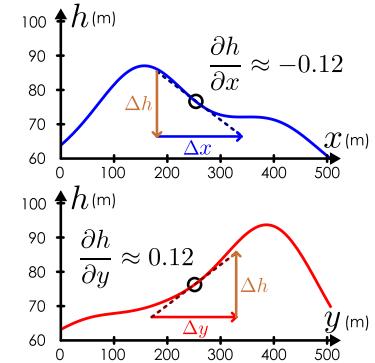
(x  
)- (sininen) ja  
(y  
)-suunnassa (punainen).



(e) Profilikuvaajien sijainti.



(f) Korkeuden osittaisderivaatat kulmaker-  
toimina.



Osittaisderivaatan käsitettä on havainnollistettu kuvalla (4.16), jossa on kuvattu epätasaisen maaston muoto  $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$  kokoisella alueella. Tässä tarkasteltava funktio on maan pinnan korkeus,  $h$ , joka on itä-länsi-suuntaisen koordinaatin  $x$  ja pohjois–etelä-suuntaisen koordinaatin  $y$  funktio,  $h(x, y)$ . Kuvissa (a) ja (b) maaston korkeus on kuvattu korkeuskäyrillä eli käyrillä, joilla korkeus on vakio. Esimerkiksi 70 m korkeuskäyrän kaikki pistet ovat 70 m merenpinnan yläpuolella. Kuvassa (d) maaston muoto on esitetty toisella tavalla pürtämällä maastoon  $x$ - ja  $y$ -suunnissa kulkevat viivat. Käytännössä nämä voisivat olla vaikkapa maastossa suoraan kulkevia teitä. Mittaamalla maaston korkeuden tällaista tietä pitkin saamme maaston poikkileikkauksen eli profilin yhdessä suunnassa. Nämä on piirretty kuvalle (f). Profilista voimme edelleen määrittää maaston jyrkyyden *kuljetun tien suunnassa*. Jos profililla esittävä kuvaaja on laskeva käyrä, kuten tässä  $x$ -suunnassa kuvattu profili (sininen kuvaaja) teiden risteypisteessä on, korkeus pienenee  $x$ :n funktiona (ts. tiessä on alämäki positiiviseen  $x$ -suuntaan). Laskun jyrkyys puolestaan selviää tarkastelemalla profilikuvaajan *tangentin kulmakerrointa*, joka kertoo paljonko korkeuden  $h$  arvo muuttuu koordinaatin  $x$  muuttuessa ja koordinaatin  $y$  pysyessä vakiona. Matemaattisesti tämä kulmakerroin on täsmälleen korkeuden  $h$  osittaisderivaatta  $x$ :n suhteeseen,  $\frac{\partial h}{\partial x}$ . Vastaavasti osittaisderivaatta  $y$ -koordinaatin suhteeseen on  $y$ -suuntaisen profiliin kuvaajan tangentin kulmakerroin, joka tässä esimerkissä on positiivinen, koska tarkastelupisteessä  $y$ -suuntainen tie nousee  $y$ -suuntaan kuljetaessa.

Usean muuttujan funktioille määritellään myös **kokonaisderivaatta**, joka edellä mainitulle funktiolle  $f(x, y, z)$  esimerkiksi muuttujan  $x$  suhteeseen on

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (4.99)$$

Tämä on selvästikin eri asia kuin pelkkä osittaisderivaatta. Ero on se, että siinä missä osittaisderivaatta ilmaisee funktion muutosnopeutta yhden muuttujan suhteeseen *jos kaikki muut muuttujat pysyvät vakiaina*, kokonaisderivaatta ottaa huomioon sen, että esimerkiksi suureen  $x$  muutos voi vaikuttaa myös suureiden  $y$  ja  $z$  arvoihin. Tätä eroa on havainnollistettu esimerkissä 4.8, jossa tarkastellaan jyrkyyttä tietyllä polulla.



**4.16** Määritellään funktiot  $f = xy$  ja  $y = x^2$ . Mitä ovat derivaatat  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  ja  $\frac{df}{dx}$ ? Saatko kokonaisderivaatalle saman tuloksen sekä yhtälöllä (4.99) että suoraan derivoimalla lauseketta  $f = xy = x^3$ ?

Kertomalla kokonaisderivaatan lauseke (4.99) differentiaalilla  $dx$  saadaan vielä funktion  $f$  **kokonaisdifferentaali**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \quad (4.100)$$

Tämä kertoo paljonko funktion  $f$  arvo muuttuu, jos sen argumentteihin tehdään differentiaiset muutokset  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ . Differentiaalimuodossa tämä on tarkka lauseke, mutta sitä käytetään usein myös approksimaationa äärellisten muutosten tapauksessa

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z. \quad (4.101)$$

#### esimerkki 4.8

#### Osittaisderivaatta

**Maaston korkeus riippuu erällä alueella paikasta funktion**  $h(x, y) = ax^2 - by^2$  **mukaisesti**, missä  $a = 0.2 \text{ m}^{-1}$ ,  $b = 0.1 \text{ m}^{-1}$ . Maastossa kulkee polku, jota kuvaavat yhtälö  $y = cx^2$ , missä  $c = 1.0 \text{ m}^{-1}$ . **Kuinka jyrkästi kulkija joutuu kiipeämään rinnettä, jos hän on pisteessä (1 m, 1 m) ja kulkee (a) x-suuntaan, (b) y-suuntaan tai (c) polku pitkin?**

**SUUNNITELMA** Rinteent jyrkyys tarkoittaa kuinka nopeasti maasto kohoaa sivusuunnassa lükuttaessa, ja tästä kuvaavat korkeuden derivaatta paikan suhteena. Jyrkyys  $x$ -suunnassa saadaan derivoimalla korkeutta koordinaatin  $x$  suhteeseen niin ettei  $y$  muudu ja vastaavasti  $y$ -suunnassa derivoimalla  $y$ :n suhteeseen pitäen  $x$ -koordinaatin vakiona. Polkuu pitkin siirryttäässä nousun voi laskea esimerkiksi derivoimalla korkeutta  $x$ -koordinaatin suhteeseen huomioiden, että  $y$  muuttuu samalla.

**RATKAISU** (a) Jyrkyys  $x$ -suuntaan on korkeuden osittaisderivaatta  $x$ :n suhteena

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2ax. \quad (4.102)$$

Kysytyssä pisteessä jyrkyys on siis 0.4 eli tähän suuntaan rinne kohoaa paikallisesti 40 cm siirryttäässä 1 m.

(b) Suuntaan  $y$  vastaavasti

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2by, \quad (4.103)$$

joka saa kysytyssä pisteessä arvon -0.2. Maasto siis laskee 20 cm yhden metrin matkalla.

(c) Polulla korkeuden muutoksen kertoo kokonaisderivaatta. Jos korkeutta derivoitaisi esimerkiksi  $x$ -koordinaatin suhteena, derivaatta kertoo maaston korkeuden muutoksen  $x$ -koordinaatin muutoksen suhteeseen kuljettaessa pitkin polkuu. Tämä voidaan laskea kokonaisderivaatan lausekkeella (4.99)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad (4.104)$$

josta osittaisderivaatat on jo ratkaistu. Polun lausekkeesta  $y = cx^2$  voidaan ratkaista  $y$ :n derivaatta

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \quad (4.105)$$

joten

$$\frac{dh}{dx} = 2ax + (-2by)(2cx) = 2ax - 4bc^2x^3. \quad (4.106)$$

Lukuarvojen sijoitus osoittaa, että tämä on nolla, eli polku kulkee kysytyssä pisteessä vaakasuoran.

Kokonaisderivaatan voi laskea myös sijoittamalla heti polun lausekkeen maaston korkeutta kuvaavaan funktion, jolloin saadaan *polun korkeutta* kuvaava funktio

$$h = ax^2 - bc^2x^4. \quad (4.107)$$

Tämän derivaatta on

$$\frac{dh}{dx} = 2ax - 4bc^2x^3 \quad (4.108)$$

eli sama tulos kuin yhtälössä (4.106) saatiin.

Mathematica:

```
(* polun ja maaston korkeuden yhtälöt *)
h[x_, y_] := a x^2 - b y^2
yPolku[x_] := c x^2
lukuarvot = {a -> 0.2, b -> 0.1, c -> 1}
paikka = {x -> 1, y -> 1}

(* osittaisderivaatat *)
xSuunta = D[h[x, y], x]
{x, a}
xSuunta /. lukuarvot /. paikka
{0.4}
```

```

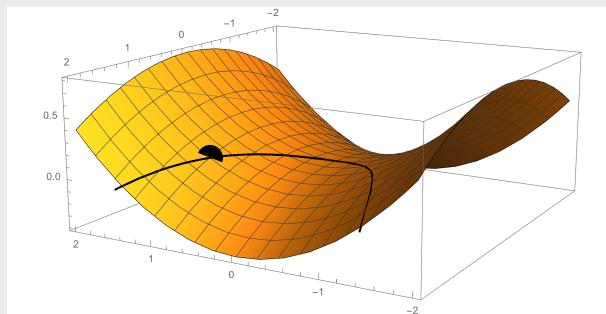
ysuunta = D[h[x, y], y]
{2 b y}
ysuunta /. lukuarvot /. paikka
{t-0.2}

(* kokonaisderivaatta sijoittamalla polun lauseke *)
kokonaism = D[h[x, ypolku[x]], x]
{2 a x - 4 b c^2 x^3}
kokonaism /. lukuarvot /. paikka
{t-0.}

(* kokonaisderivaatta suoraan *)
kokonaismB = Dt[h[x, y], x]
{2 a x + x^2 Dt[a, x] - y^2 Dt[b, x] - 2 b y Dt[y, x]}
(* Mathematica ei tiedä mitä a, b ja y ovat ellemme kerro. *)
kokonaismB /. y -> ypolku[x] /. lukuarvot
{0.4 x - 0.4 x^3}

(* piirretään kuva*)
pinta = Plot3D[h[x, y] /. lukuarvot, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
polku = ParametricPlot3D[
{x, ypolku[x], h[x, ypolku[x]]} /. lukuarvot,
{x, -2, 2},
PlotStyle -> {Black, Thick}];
piste = Graphics3D[{Black, PointSize[0.05],
Point[{1, 1, h[1, 1]} /. lukuarvot]}];
Show[pinta, polku, piste]

```



**4.17** Mikä on korkeuden muutos kuvan 4.16 esimerkissä, jos siirrytään merkitystä tarkastelupisteestä (a) 20 m pohjoiseen, (b) 20 m itään, (c) ensin 20 m pohjoiseen ja sitten saman verran itään, eli noin 30 m koilliseen? Arvioi muutos sekä kuvan korkeuskäyrien perusteella että yhtälön (4.101) avulla. Saatko likimain saman tuloksen?

Osittaisderivaatta sisä kertoo miten usean muuttujan funktio kuten kuvassa 4.16 maastonkorkeus muuttuu yhden koordinaattiakselin suunnassa liikuttaessa ja kokonaissdifferentiaali ilmaisee funktion kokonaismuutoksen kun kuljemme jonkin tietyn siirtymän. Haluaisimme kuitenkin vielä keinon selvittää, *mihin suuntaan kuljettaessa korkeus muuttuu kaikkein nopeimmin*, ja tästä varten määrittemme **gradientin**. Korkeuden gradientti on vektori, joka osoittaa aina maaston *jyrkimmän nousun suuntaan* ja jonka pituus kertoo *kuinka nopeasti korkeus muuttuu* tähän suuntaan kuljettaessa. Jyrkimmän nousun suunta selvästi riippuu siitä, missä pisteessä kulloinkin olemme, joten gradientti on myös paikan funktio. Se on siis matemaattisesti vektorikenttä.

Korkeuden gradientti on esitetty kuvassa 4.16 (c), jossa gradienttivektori on esitetty nuolin tasaisin välein valituissa maaston pisteissä. Kuvassa on esitetty taustalla myös korkeuskäyrät. Käyrät ovat kartalla sitä *lähempänä* toisiaan, mitä jyrkemmin maasto kohoaa tai laskee eli maaston jyrkkyys on käännekkäin verrannollinen korkeuskäyrien väliseen etäisyyteen kartalla. Eli jyrkkyys on suuri, jos korkeuskäyrät ovat *tihässä*. Niinpä myös gradienttivektorit, jotka ilmaisevat maaston jyrkyyttä, ovat *pitkiä* korkeuskäyrien ollessa lähellä toisiaan ja lyhyitä käyrien ollessa toisistaan kaukana. Erityisesti mäkiä huipuilla ja kuoppien pohjilla gradientti on nolla, koska maasto on paikallisesti tasainen eikä jyrkimmän nousun suuntaa ole. Maaston korkeus *ei muutu* myöskään kuljettaessa pitkin korkeuskäyrää, joten jyrkimmän nousun suunnan täytyy olla *korkeuskäriin nähdyn kohtisuorassa*. Niinpä gradientti on aina kohtisuorassa korkeuskäriä vastaan.

Gradientti voidaan määritellä mille tahansa skalaarikentälle, ja konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian gradientti on erityisen tärkeä, koska se on suoraan verrannollinen vuorovaikutuksen tuottamaan voimaan. Kolmiulotteisessa avaruudessa määritellyn potentiaalienergian tapauksessa pisteet, joissa potentiaalienergia on vakio, eivät yleensä muodosta käyriä vaan pintoja, ja näitä kutsutaan potentiaalienergian **tasa-arvopinnoiksi**. Samaan tapaan kuin korkeuden gradientti on kohtisuorassa korkeuskäriä vastaan ja osoittaa kohti jyrkintä nousua, potentiaalienergian gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintoja vastaan ja

## MONIULOTTEINEN LIIKE

osoittaa potentiaalienergian voimakkaimman kasvun suunnan. Koska voima osoittaa potentiaalienergian jyrkimmän *laskun* suuntaan ("alamäkeen"), voiman suunta on aina vastakkainen potentiaalienergian gradientin suuntaan nähdien.

Johdetaan lopuksi vielä tarkka matemaattinen sääntö potentiaalienergian gradientin laskemiseksi. Tarkastellaan potentiaalienergian muutosta kappaleen liikkuessa  $x$ -suunnassa infinitesimaalisen lyhyen matkan  $dx$ ,  $y$ -suunnassa matkan  $dy$  sekä  $z$ -suunnassa matkan  $dz$ . Tällöin kappaleen siirtymä on siis

$$d\bar{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}. \quad (4.109)$$

Jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivinen voima  $\bar{F}$ , se tekee siirtymässä kappaleeseen työn yhtälön (4.73) mukaisesti

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (4.110)$$

ja koska tämä työ siirtää vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa kappaleelle, potentiaalienergian muutos on

$$dU = -dW = -F_x dx - F_y dy - F_z dz. \quad (4.111)$$



**4.18** Jos kappaleeseen kohdistuva konservatiivinen voima on  $\bar{F} = (2.5 \text{ N})\hat{i} - (0.5 \text{ N})\hat{j}$  ja kappale kulkee siirtymän  $\Delta\bar{r} = (1.0 \text{ mm})\hat{i} + (2.0 \text{ mm})\hat{j}$ , mikä on potentiaalienergian muutos olettaen että voima on tällä matkalla likimain vakio?

Toisaalta potentiaalienergian *kokonaisdifferentiaali* on määritelmän (4.100) mukaisesti

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (4.112)$$

ja tämän pitää siis olla sama lauseke kuin (4.111). Huomaa, että yhtälö (4.111) on *fysikaalinen laki*, joka perustuu työn ominaisuuksiin kun taas yhtälö (4.112) on *matemaattinen laki*, joka perustuu osittaisderivaatan *määritelmään*.

Koska lausekkeet (4.111) ja (4.112) ovat samat, pitää kunkin differentiaalin  $dx$  jne. kertoimen olla kummassakin sama. Nyt nimittäin tarkastelimme potentiaalienergian muutosta mielivaltaisessa siirtymässä, joten voimme *valita* millainen tämä siirtymä on. Esimerkiksi jos tarkastellaan  $x$ -suuntaista siirtymää  $d\bar{r} = dx\hat{i}$ , pätee  $dy = dz = 0$  ja täytyy siis olla

$$dU = -F_x dx = \frac{\partial U}{\partial x} dx \quad (4.113)$$

mistä saadaan samanlainen yhtälö kuin yksilotteisessa tapauksessa, (3.29),

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (4.114)$$

Täsmälleen samoin voidaan valita  $dx = dz = 0$ , mistä voidaan päättää  $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ , ja  $dx = dy = 0$ , mistä seuraa  $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ . Voimavektorin skalaarikomponentit kussakin koordinaattiakselin suunnassa saadaan siis *osittaisderivoimalla potentiaalienergiaa kyseisen koordinaatin suhteeseen* ja siispä voimavektorin on oltava

$$\bar{F}_{\text{konservatiivinen}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\nabla U. \quad (4.115)$$



**4.19** Mihin suuntaan osoittaa korkeuden gradientti kuvan 4.16 esimerkin tarkastelupisteessä? Mitkä ovat gradienttivektorin  $x$ - ja  $y$ -skalaarikomponenttien etumerkit ja suhteelliset suuruudet? Miten ne liittyvät korkeuden osittaisderivaattoihin?

Yhtälössä (4.115) esiintyy uusi symboli  $\nabla$ , **nabla**, joka on lyhennysmerkintä yhtälössä esitettylle osittaisderivaattojen muodostamalle vektorille. Nabla ei itse ole skalaari, vektori tai funktio vaan **operaattori**. Kun nabla yhdistetään *skalaarikentän* eli avaruudessa määritellyn funktion  $U$  kanssa, tuloksena on uusi funktio  $\nabla U$ , jota kutsutaan  $U$ :n **gradientiksi**. Tällöin nablan sanotaan *operoivan* funktioon  $U$ . Gradientifunktio on määritelty kaikkialla avaruudessa mutta sen arvot ovat *vektoreita* eli  $\nabla U$  on *vektorikenttä*.



**4.20** Vuorovaikutuksen potentiaalienergia riippuu kappaleen paikasta yhtälön  $U(x, y) = (1.5 \text{ J/m}^2)x^2 - (4.0 \text{ J/m})y$  mukaisesti. Kappale on aluksi pisteesä  $(x, y) = (0.5 \text{ m}, 1.5 \text{ m})$ . (a) Mikä on kappaleeseen kohdistuva voima? (b) Mikä on kappaleen potentiaalienergian muutos, jos kappaleen paikka muuttuu siirtymän  $(\Delta x, \Delta y) = (-1.0 \text{ mm}, 2.0 \text{ mm})$ ?

## esimerkki 4.9

## Gradientti

Kappale on kiinnitetty lattiaan jousella (lepopituus 0.10 m ja jousivakio 100 N/m), jonka lattiassa kiinni oleva pää pääsee vapaasti käänymään kaikkiin suuntiin. Miten kappaleeseen vaikuttava voima riippuu kappaleen paikasta olettaen ettei kappale nouse lattialta?

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Valitaan origoksi jousen kiinnitetty pää. Merkitään  $r_0 = 0.10$  m (lepopituus) ja  $k = 100$  N/m (jousivakio).

**SUUNNITELMA** Kappaleeseen kohdistuu gravitaatio, pinnan tukivoima sekä jousen jäntytys. Gravitaatio ja tukivoima suuntautuvat aina pystysuuntaan ja kumoavat toisensa. Niinpä kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on yhtä suuri kuin jousen voima. Voiman voi määrittää suoraan Hooken laista tai vaihtoehtoisesti voimme laskea ensin potentiaalienergian ja määrittää voiman sen gradienttina.

Jousen potentiaalienergia on

$$U = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2, \quad (4.116)$$

missä etäisyys origosta on  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , sillä pystysuuntainen koordinaatti on vakio  $z = 0$ . Kappaleeseen vaikuttava voima on siten

$$\bar{F} = -\nabla U. \quad (4.117)$$

**RATKAISU** Lasketaan jousivoiman gradientti komponenteittain. Esimerkiksi  $x$ -suunnassa saadaan sisäfunktion derivoimis-säännöllä

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -k(r - r_0) \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.118)$$

ja vastaavasti muissa suunnissa. Etäisyyden  $r$  derivaatta puolestaan on

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}. \quad (4.119)$$

Koska  $r$  on symmetrisen koordinaattien suhteen,  $y$ -suunnassa saadaan täsmälleen samoin

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}. \quad (4.120)$$

Voiman  $z$ -komponentti on nolla. Jousivoimaksi saadaan siten Hooken lain mukainen tulos

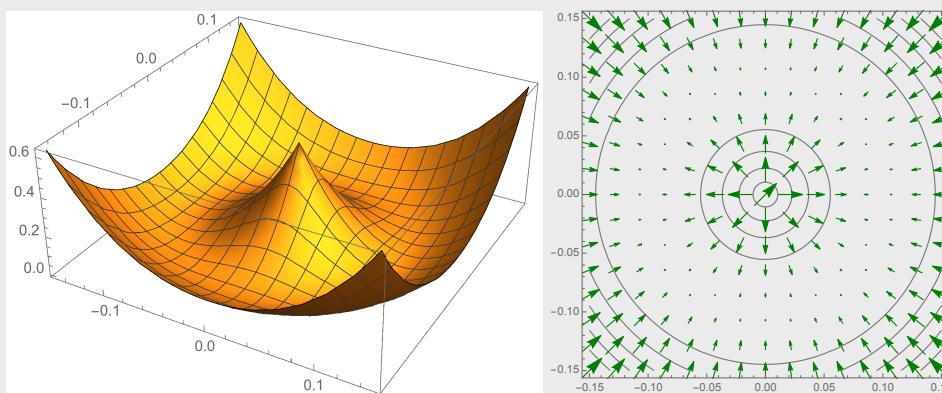
$$\bar{F} = -k \frac{(r - r_0)}{r} (x\hat{i} + y\hat{j}) = -k \frac{(r - r_0)}{r} \bar{r} = -k(r - r_0)\hat{r}. \quad (4.121)$$

Mathematica:

```
(* potentiaalienergia *)
u = 1/2 k (Sqrt[x^2 + y^2] - r0)^2
lukuarvot = {r0 -> 0.1, k -> 100}

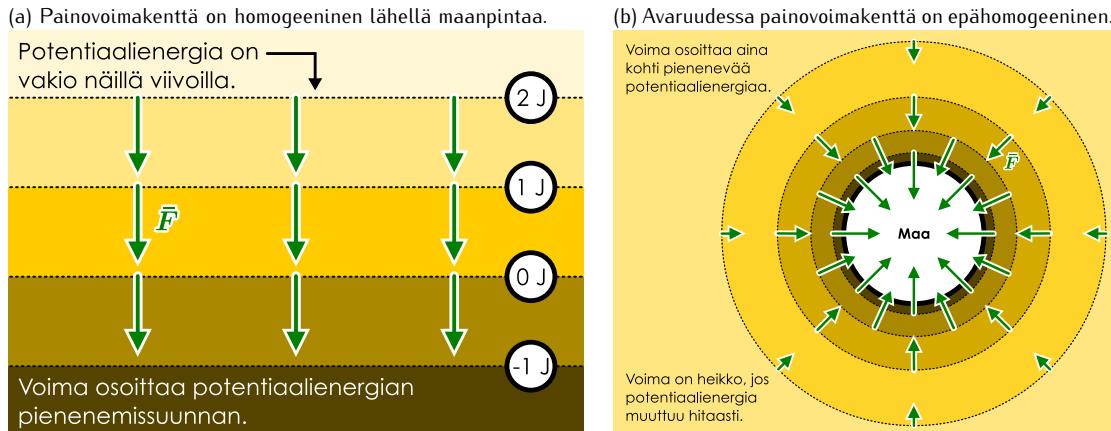
(* voima *)
voima = -Grad[u, {x, y}]
t(-(k x (-r0 + Sqrt[x^2 + y^2]))/Sqrt[x^2 + y^2]),
t(-(k y (-r0 + Sqrt[x^2 + y^2]))/Sqrt[x^2 + y^2])}
Simplify[voima /. Sqrt[x^2 + y^2] -> r] (* sievennetään *)
t(k (-r + r0) x)/r,
t(k (-r + r0) y)/r

(* kuvajat *)
voimat = VectorPlot[voima /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15},
VectorStyle -> RGBColor[0, 0.5, 0]];
potentiaali = ContourPlot[u /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15},
ContourShading -> None];
Plot3D[u /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15}]
Show[potentiaali, voimat]
```



## MONIULOTTEINEN LIIKE

Kuva 4.17: Voima osoittaa konservatiivisen potentiaalienergian pienenemissuunnan ja -nopeuden. Voima on kohtisuorassa potentiaalienergian tasa-arvopintoja vastaan ja sitä suurempi mitä lähempänä nämä ovat toisiaan.



Tarkastellaan vielä lopuksi painovoimaa fysikaalisena kentänä. Gravitaation tuottama voima on lähellä maapintaa massan ja putoamiskiertyvyyden tulo. Näistä massa on kappaleen ominaisuus ja putoamiskiertyvyys kentän ominaisuus. Gravitaatiokenttää voidaan siis kuvata myös **voimakenttänä**, jonka voimakkuus on kaikkialla sama,  $\bar{g}$ , ja itseasiassa puhuttaessa painovoimakentästä yleensä tarkoitetaan juuri tästä voimakenttää. Kentässä olevaan  $m$ -massaiseen kappaleeseen kohdistuu gravitaatiokentässä kaikkialla voima  $m\bar{g}$ , joka on kappaleen massan ja kentän voimakkuuden tulo. Tällaista voimakenttää, jonka tuottama **voima** on kaikkialla sama, kutsutaan **homogeeniseksi kentäksi**.

Koska voimakentän arvot ovat vektoriteita, kyseessä on vektorikenttä, ja koska gravitaatio on konservatiivinen vuorovaikutus, kenttään liittyvä voima voidaan laskea kenttään liittyvästä potentiaalienergiasta gradientin avulla. Gravitaation tapauksessa potentiaalienergia lähellä maapintaa riippuu vain korkeudesta, joten valitsemalla  $z$ -akseli osoittamaan ylöspäin gravitaation potentiaalienergia  $m$ -massaiselle kappaleelle on  $U = mgz$ . Gravitaation tuottama painovoima voidaan puolestaan määrittää laskemalla gradientti

$$\bar{G} = -\nabla U = -mg\nabla z = -mg \left( \frac{\partial z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{k} \right). \quad (4.122)$$

Lausekkeessa esiintyy korkeuden  $z$  osittaisderivaattoja eri koordinaattien suhteen, ja nämä on helppo laskea muistaen osittaisderivaatan määritelmä. Osittaisderivaattahan lasketaan niihin, että muiden muuttujien ajatelaan olevan derivoinnissa vakioita, ja vakion derivaatta on nolla, joten  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . Toisaalta koordinaatin derivaatta sen itsensä suhteen on yksi,  $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$ , joten

$$\bar{G} = -mg (0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k}) = -mg\hat{k}. \quad (4.123)$$

Nämä saatiin siis tuttu tulos, jonka mukaan painovoiman suunta on alas päin negatiivisen  $z$ -akselin suuntaan ja sen voimakkuus on vakio.

Painovoiman määrittämisen gradientin avulla ei ole erityisen mielenkiintoista, koska painovoima on vakio. Epähomogeniset kentät ovat kuitenkin fysiikassa yleisiä, ja näissä tilanteissa gradienttia tarvitaan voiman määrittämiseen, jos tunnetaan vain potentiaalienergia. Esimerkiksi maapallon painovoimakenttä vaikuttaa homogeniselta ainoastaan lähellä maapintaa. Avaruudesta katsoen planeetta näyttää pallolta ja maan gravitaatiokenttä onkin avaruudessa itse asiassa pallosymmetrinen. Gradienttia tarvitaan myös sähkövarausten synnyttämien **sähkökenttien** analyysissä, jota tarkastelemme luvussa 10. Sähköinenkin vuorovaikutus on konservatiivinen, joten myös siihen liittyy potentiaalienergia ja sen tuottama voima osoittaa aina kohti pieneneväät potentiaalienergian suuntaa.



**4.21** Selitä omiin sanoin, mitä kenttä tarkoittaa matematiikassa ja fysiikassa. Selitä erityisesti, miten konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia ja voima liittyvät toisiinsa ja miten voit laskea yhden kentän toisen.

## Yhteenveton: Moniulotteinen liike

### Differentiaalit ja vektorit

- Kolmiulotteinen koordinaatisto, jonka akselit  $x, y, z$  ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, on **karteesinen koordinaatisto**. Vektorit tässä koordinaatistossa voidaan kirjoittaa akselien suuntaisten *yleisvektoreiden* ja *skalaarikomponenttien* avulla

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}.$$

- Vektorin pituus saadaan Pythagoraan lauseesta

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

- Vektorisumma voidaan laskea komponenteittain

$$\bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}.$$

- Pistetulo** eli skalaritulo on kahden vektorin välinen kertolasku. Sen lopputulos on skalaari, ja tulon suuruus on vektorien pituuksien sekä niiden välisen kulman  $\theta$  kosinin tulo

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta.$$

Pistetulo voidaan laskea karteesisessa koordinaatistossa *vektorien komponenttien tulojen summana*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

- Vektorin komponentti minkä tahansa toisen vektorin suunnassa saadaan pistetulon avulla

$$A_B = \frac{1}{B} \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

- Kaksi vektoria ovat yhtä suuret jos ja vain jos sekä niiden pituudet että suunnat ovat samat. Karteesisessa koordinaatistossa tämä tarkoittaa sitä, että vektorien kaikki skalaarikomponentit ovat yhtä suuret

$$\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z.$$

- Vektorin derivaatta ja integraali voidaan karteesisessa koordinaatistossa laskea komponenteittain

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{i} + \frac{dA_y}{dt} \hat{j} + \frac{dA_z}{dt} \hat{k}$$

$$\int \bar{A} dt = \int A_x dt \hat{i} + \int A_y dt \hat{j} + \int A_z dt \hat{k}$$

- Osittaisderivaatta** on usean muuttujan funktion derivaatta yhden muuttujan suhteen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

- Gradientti** on derivaatan yleistys useaan ulottuvuuteen. Funktion  $f$  gradientti on *vektori*, joka osoittaa suuntaan, jossa funktion arvo kasvaa nopeimmin, ja sen pituus kertoo kuinka paljon funktion arvo muuttuu tähän suuntaan siirryttääessä. Karteesisessa koordinaatistossa gradientin skalaarikomponentti kussakin suunnassa on funktion osittaisderivaatta tähän suuntaan mitatun koordinaatin suhteen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}.$$

Symboli  $\nabla$ , **nabla**, on lyhennysmerkintä ylä esitettylle lausekkeelle.

- Viivaintegraali** on määrityn integraalin yleistys useaan ulottuvuuteen. Reittiä  $P$  pitkin laskettava integraali voidaan määritellä jakamalla reitti osiin ja antamalla jaon tulla äärettömän tihäksi

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \bar{A}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_P \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{A} \cdot \bar{v} dt.$$

### Liikemäärä ja dynamiikka

- Jos kappaleeseen vaikuttaa kokonaivoima  $\bar{F}_{\text{kokonais}}$ , kappaleen liiketyvyys on komponenteittain

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonais}}, \quad a_y = \frac{1}{m} F_{y,\text{kokonais}}, \quad a_z = \frac{1}{m} F_{z,\text{kokonais}}.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttava kokonaivoima tunnetaan *ajan funktiona*, kappaleen nopeus ja paikka voidaan ratkaista komponen-

teittain liiketyvyyden integraaleina.

- Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia, kokonaislukemäärä on vakio. Tällöin kokonaislukemäärävektorin kunkin komponentti on erikseen vakio

$$p_{x,\text{alku}} = p_{x,\text{loppu}}, \quad p_{y,\text{alku}} = p_{y,\text{loppu}}, \quad p_{z,\text{alku}} = p_{z,\text{loppu}}.$$

### Energia ja työ

- Jos kappaleeseen vaikuttaa *vakiovoima*  $\bar{F}$  ja kappale siirtyy matkan  $\Delta \bar{r}$ , voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r}.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa *mikä tahansa voima*  $\bar{F}$  ja kappale liikkuu pistestä  $\bar{r}_{\text{alku}}$  pisteesseen  $\bar{r}_{\text{loppu}}$  reittiä  $P$ , voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \int_P \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

- Liikkuvan kappaleeseen vaikuttava voima  $\bar{F}$  tekee työtä kappaleeseen teholla

$$P = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

- Vuorovaikutus on konservatiivinen jos ja vain jos siihen liittyvä voiman tekemä työ pistestä  $\bar{r}_{\text{alku}}$  pisteesseen  $\bar{r}_{\text{loppu}}$  siirtyväen kappaleeseen ei riipu reitistä, jonka kappale kulkee. Tällöin vuorovaikutuksen potentiaalienergia on

$$U(\bar{r}) = -W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}} = - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F}_{\text{konservatiivinen}} \cdot d\bar{r}.$$

- Konservatiivinen vuorovaikutus, johon liittyy potentiaalienergia  $U(x, y, z)$ , tuottaa voiman

$$\bar{F}_{\text{konservatiivinen}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}.$$

### Sanasto

- karteesiset koordinaatit (Cartesian coordinates)
- pistetulo, skalaritulo (dot product, scalar product)
- osittaisderivaatta (partial derivative)
- kokonaisdervaatta (total derivative)
- kokonaissdifferentiaali (total differential)
- gradientti (gradient)
- nabla (nabla, del, grad)

- operaattori (operator)
- viivaintegraali (line integral)
- potentiaalienergian tasa-arvopinta (equipotential surface)
- perusvuorovaikutus (fundamental interaction)
- kenttä (field)
- homogeeninen (homogeneous)
- heittoliike (projectile motion)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

**4.1** Voiman A komponentit ovat  $F_{x,A} = 3.0 \text{ N}$  ja  $F_{y,A} = 0.0 \text{ N}$ . Voiman B komponentit ovat  $F_{x,B} = (4.0 \text{ N}) \cos(-60^\circ) = 2.0 \text{ N}$  ja  $F_{y,B} = (4.0 \text{ N}) \sin(-60^\circ) = -3.46 \text{ N}$ . Kokonaisvoiman komponentit saadaan näiden summana,  $F_x = F_{x,A} + F_{x,B} = 5.0 \text{ N}$  ja  $F_y = F_{y,A} + F_{y,B} = -3.46 \text{ N}$ . Kokonaisvoima on siis

$$\bar{\mathbf{F}} = (5.0 \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-3.46 \text{ N})\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.124)$$

**4.2** Vektorin  $\bar{\mathbf{A}}$  pituuus on  $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  ja se on kulmassa  $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 0.927 = 53.1^\circ$  (vastapäivään)  $x$ -akseliin nähden. Koska  $x'$ -akseli on kulmassa  $45^\circ$   $x$ -akseliin nähden, vektori  $\bar{\mathbf{A}}$  on kulmassa  $\theta' = \theta - 45^\circ = 8.1^\circ$   $x'$ -akseliin nähden. Niinpä vektorin komponenttiesitys koordinaatistossa  $x'y'$  on

$$\bar{\mathbf{A}} = 5 \cos \theta' \hat{\mathbf{i}}' + 5 \sin \theta' \hat{\mathbf{j}}' = 4.95 \hat{\mathbf{i}}' + 0.71 \hat{\mathbf{j}}' \quad (4.125)$$

**4.3 (a)** Muuttuu. Nopeusvektori käantyy ylöspäin.

(b) Jos valitsemme  $x$ -suunnan vaakatasoon ja  $y$ -suunnan ylöspäin,  $x$ -komponentti on kuopan pohjalla likimain vakio ja  $y$ -komponentti muuttuu positiiviseen suuntaan.

(c) Kiühtyyysvektori osoittaa nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin.

(d) Kokonaisvoiman täytyy osoittaa samaan suuntaan kuin kiühtyyysvektorin.

**4.4** Kappaleen nopeuden muutos kussakin suunnassa saadaan kiühtyydyden vastaavan komponentin integraalin tai graafisesti kuvajajan rajaamana pinta-alana. Siis  $x$ -suunnassa

$$\Delta v_x = \frac{1}{m} \int F_x dt = 0.5 \text{ m/s} \quad (4.126)$$

ja  $y$ -suunnassa

$$\Delta v_y = \frac{1}{m} \int F_y dt = 3.0 \text{ m/s}. \quad (4.127)$$

Kappaleen alunopeus oli  $\bar{v}_{\text{alku}} = (-1.0 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$ , joten sen loppunopeuden komponentit ovat  $v_x = -0.5 \text{ m/s}$  ja  $v_y = 3.0 \text{ m/s}$ .

**4.5** Lüktogrammi näyttää sivuttain käännetyltä V-kirjaimelta, jonka kärki koskettaa seinää. Nopeuden  $y$ -komponentti on vakio, joten sen kuvaaja on vaakasuora ja  $y$ -koordinaatin kuvaaja on suora. Nopeuden  $x$ -komponentti käantyy törmäykssä ympäri, joten sen kuvaaja näyttää jyrkältä askelmalta ja  $x$ -koordinaatin kuvaaja on V:n muotoinen.

**4.6** Kappaleen A alunopeuden komponentit ovat likimain  $v_{x,A} = 0.0 \text{ m/s}$  ja  $v_{y,A} = 4.0 \text{ m/s}$ . Kappaleen B vastaavat nopeuden komponentit ovat  $v_{x,B} = 2.0 \text{ m/s}$  ja  $v_{y,B} = -4.0 \text{ m/s}$ . Jos A:n massa on esimerkiksi 1 kg (ja B:n massa on kaksinkertainen), kappaleiden liike-energia alussa oli  $K_A = 8.0 \text{ J}$  ja  $K_B = 20.0 \text{ J}$ . Lopuksi kappaleiden liike-energiat ovat siis  $v_{x,A} = -2.0 \text{ m/s}$ ,  $v_{y,A} = -2.6 \text{ m/s}$ ,  $v_{x,B} = 1.0 \text{ m/s}$  ja  $v_{y,B} = 3.3 \text{ m/s}$ . Kappaleiden liike-energiat ovat siis törmäyksen jälkeen noin  $K_A = 5.4 \text{ J}$  ja  $K_B = 11.9 \text{ J}$ . Systeemin kokonaisliike-energia oli siis aluksi  $K = 28 \text{ J}$  ja lopuksi  $K = 17.3 \text{ J}$ . Liike-energiasta muuttui lämpöenergiaksi ym. muotoihin noin 38 %.

**4.7 (a)** Vektoreiden  $\bar{\mathbf{A}}$  ja  $\bar{\mathbf{B}}$  välinen kulma on  $60^\circ$ , joten  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = AB \cos 60^\circ = 1.5 \cdot 2.0 \cdot 0.5 = 1.5$ .

(b) Vektorit  $\bar{\mathbf{A}}$  ja  $\bar{\mathbf{C}}$  ovat toisiinsa nähden kohtisuorassa, joten  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 0$ .

(c)  $\bar{\mathbf{A}} \cdot (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{C}}) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 1.5 + 0.0 = 1.5$ .

(d) Ensinnäkin  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 1.5$  on skalaari, joten laskun lopputulos on vektori  $1.5 \cdot \bar{\mathbf{C}}$ . Tämä on vektori, jonka pituuus on  $1.5 \cdot 2.5 = 3.75$  ja joka osoittaa samaan suuntaan kuin  $\bar{\mathbf{C}}$  eli  $50^\circ$   $x$ -akselista myötäpäivään.

**4.8 (a)**  $A = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = 3.74$  ja  $B = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = 8.77$ .

(b)  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-6) = 12$ .

(c)  $\theta = \arccos \frac{12}{3.74 \cdot 8.77} = 1.20 = 69^\circ$ .

**4.9** Voima on vektori, ja kaikkien vektorien pituuus saadaan Pythagoraan lauseen perusteella näiden karteesisten komponenttien neljöiden summan neljännen sivua. Työ sen sijaan on skalaari, jolla ei ole edes olemassa karteesisia komponentteja. Niinpä Pythagoraan lause, joka on siis geometrisen tuloksen, ei voi mitenkään päteä työlle. Työ on määritelty kahden vektorin pistetulona, joten työn voi kirjoittaa näiden vektorien komponenttien avulla, mutta pistetulossa karteesisten komponenttien tulot vain lasketaan yhteen. Pistetuloon ei kuulu neljäntä eikä neljännen ottoa.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

**4.10** Reitistä riippuvat matkan pituus ja dissipatiivisten vuorovaikutusten tekemä työ. Jos kuljet suoraan, matka on lyhyempi ja vähemmän rasittava kuin jos vaikkapa juokset ensin pari kertaa yliopiston ympäri. Gravitaation tekemä työ ja siihen liittyvä potentiaalienergian muutos sen sijaan eivät riipu kulkemastasi reitistä, vaan ainoastaan siitä, kuinka paljon korkeammalla tai matalalla ruokala on luentosalin verrattuna.

**4.11** Kuvan (a) viivaintegraali on positiivinen. Vaikka reitillä kuljetaan sekä voiman suuntaan että sitä vastaan, voiman suuntaan kuljetaan enemmän. Kuvan (b) integraali on nolla. Reitin alussa integraali on positiivinen, koska kuljetaan voiman suuntaan, mutta reitin lopussa integraali on negatiivinen siirtymän ollessa voimaa vastaan. Reitti ja voima ovat ainakin likimain symmetriset, joten integraalin positiivinen ja negatiivinen osuus melko tarkasti kumoavat toisensa.

**4.13 (a)** Nostettaessa painovoima tekee negatiivisen työn ja laskettaessa yhtä suuren positiivisen työn. Työ on siis kokonaisuudessaan nolla.

(b) Liikekitka tekee tässä prosessissa koko ajan negatiivista työtä.

(c) Kitka ei voi olla konservatiivinen vuorovaikutus, koska se teki kappaleeseen nollasta poikkeavan työn, kun kappale kulki suljetun reitin. Painovoima on konservatiivinen.

**4.14** Tekstissä pääteltiin, että gravitaation kappaleeseen tekemä työ riippuu ainoastaan kappaleen korkeuden muutoksesta. Otetaan nyt mielivaltainen suljettu reitti ja etsitään reitin korkein ja matalin piste. Olkoon näiden välinen korkeusero  $\Delta y$ . Kuljetaessa reitin ylimmästä pistestä alimpaan painovoima tekee positiivisen työn  $W_{\text{alas}} = mg\Delta y$ . Kun siten alimmasta pistestä palataan takaisin ylimpään pisteeeseen, painovoima tekee negatiivisen työn  $W_{\text{ylös}} = -mg\Delta y$ . Painovoiman tekemä kokonaistyö tällä suljetulla reitillä on siis  $W = W_{\text{alas}} + W_{\text{ylös}} = mg\Delta y - mg\Delta y = 0$ .

**4.15** Mikä tahansa intensiivinen suure, jolle voidaan määritellä arvo kussakin huoneen pisteessä, muodostaa matemaatisessa mielessä kentän. Esimerkiksi lämpötila, ilmanpaine ja korkeus ovat skalarikenttiä. Ilman virtausnopeus tai vaikkapa suunta kohti lähiintä lampua ovat vektorikenttiä.

**4.16**  $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x, \frac{dy}{dx} = 2x$  ja  $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = y + 2x^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2$ . Sama tulos saadaan suoraan derivoimalla lauseketta  $f = x^3$  kuten pitääkin.

**4.17 (a)** Tarkastelupisteessä maaston korkeus muuttuu pohjoiseen kuljetaessa jyrkkyydellä  $\partial h / \partial y \approx 0.12$  eli maasto nousee noin 12 cm jokaista pohjoiseen siirrytyä metriä kohden. Niinpä siirryttääessa  $\Delta y = 20$  m pohjoiseen noustaan  $\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y = 0.12 \cdot 20$  m = 2.4 m. (b) Itään kuljetaessa korkeus muuttuu jyrkkyydellä  $\partial h / \partial x \approx -0.12$  eli maasto laskee tähän suuntaan 12 cm metrillä. Korkeuden muutos on siis  $\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = -0.12 \cdot 20$  m = -2.4 m. (c) Korkeuden kokonaismuutos voidaan arvioida kokonaisdifferentiaalilla.

$$\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y = 2.4 \text{ m} - 2.4 \text{ m} = 0.0 \text{ m}. \quad (4.128)$$

Toisin sanoen koilliseen kuljetaessa korkeus ei tämän arvion mukaan juuri muudu. Näin todella on, sillä tarkastelupisteen ympäristössä korkeuskäyrät kulkevat koillisesta lounaaseen (yläoikealta alavasemalle).

**4.18** Vakiovoima tekee työn  $W = \bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \bar{\mathbf{r}} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (2.5 \text{ N}) \cdot (1.0 \text{ mm}) + (-0.5 \text{ N}) \cdot (2.0 \text{ mm}) = 1.5 \text{ mJ}$ . Potentiaalienergian muutos on siis  $U = -W = -1.5 \text{ mJ}$ .

**4.19** Gradientti osoittaa kuvan 4.16 (c) perusteella luoteeseen (ylävasemmalle). Korkeuden osittaisderivaatat ovat tarkastelupisteessä  $\partial h / \partial x \approx -0.12$  ja  $\partial h / \partial y \approx 0.12$ . Nämä ovat gradienttivektorin skalarikomponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnissa, joten komponentit ovat siis itseisarvoltaan likimain yhtä suuret, mutta  $x$ -komponentti on negatiivinen. Korkeusfunktion  $h$  gradientti on siis  $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} = -0.12 \hat{\mathbf{i}} + 0.12 \hat{\mathbf{j}}$ . Tämä on luoteeseen osoittava vektori, joten laskun tulos on sopusoinnussa kuvan kanssa.

**4.20 (a)** Lasketaan ensin potentiaalienergian osittaisderivaatat. Ensin  $x$ -suunnassa  $\partial U / \partial x = (3.0 \text{ J/m}^2)x$ , ja pisteessä (0.5 m, 1.5 m) tämä saa arvon 1.5 J/m. Sitten  $y$ -suunnassa  $\partial U / \partial y = -4.0 \text{ J/m}$ . Voima on siis  $\bar{\mathbf{F}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} = (-1.5 \text{ N}) \hat{\mathbf{i}} + (4.0 \text{ N}) \hat{\mathbf{j}}$ . (b) Potentiaalienergian muutos on helpoin laskea kokonaisdifferentiaalilla,  $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y = (1.5 \text{ J/m}) \cdot (-1.0 \text{ mm}) + (-4.0 \text{ J/m}) \cdot (2.0 \text{ mm}) = -9.5 \text{ mJ}$ . Energian muutoksen voi toki laskea myös "tarkasti", mutta tämä on vaivalloista. Ensin pitää määrittää kappaleen loppusijainti, joka on (0.499 m, 1.502 m). Sitten voimme laskea potentiaalienergian alussa ja lopussa, jolloin tulokseksi saadaan  $U_{\text{alku}} = U(0.5 \text{ m}, 1.5 \text{ m}) = -5.625 \text{ J}$  ja  $U_{\text{loppu}} = U(0.499 \text{ m}, 1.502 \text{ m}) = -5.6344985 \text{ J}$ . Muutos on näiden erotus,  $\Delta U = U_{\text{loppu}} - U_{\text{alku}} = -9.4985 \text{ mJ}$ . Ero kokonaisdifferentiaalilla laskettuun arvioon on luokkaa 0.01%, mikä on paljon vähemmän kuin annettujen lukuarvojen tarkkuus.

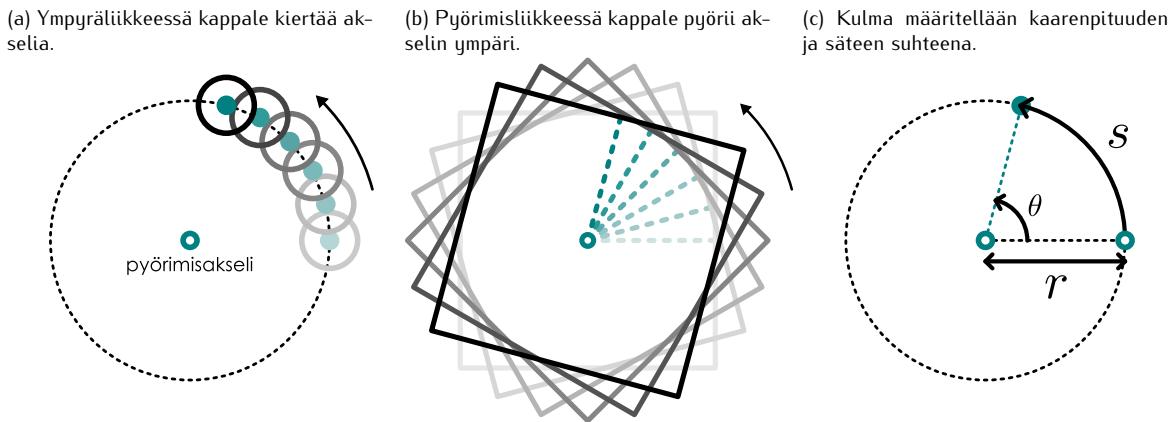
# 5 Pyörimisliike

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain etenevää liikettä, jossa kappaleiden paikka muuttuu mutta niiden asento ei. Liike on kuitenkin harvoin tällaista, ja tässä luvussa tutustummekin kappaleiden asennon muuttumiseen niiden pyöriessä. Pyöriminen on moniuolotieisen liukkeen erikoistapaus, sillä kappaleen pyöriessä kiinteän akselin ympäri sen jokainen piste liukkuu tasossa ympyräradalla. Itse asiassa aloitammekin pyörimisen tarkastelun nimenomaan tutkimalla tällaista ympyräliikettä. Näemme, että sekä ympyräliikettä että pyörimistä voidaan kuvata määrittelemällä kappaleen asentoa kuvaava kulma samaan tapaan kuin suoraviivaisessa liikkeessä määriteltiin paikkaa kuvaava koordinaatti. Tällöin useimmat pyörimistä kuvaavat mekanikan lait saavat täsmälleen saman muodon kuin yksiuolotieisen liukkeen lait kunhan suoraviivaisen liikkeen suureet korvataan vastaavilla pyörimisliukkeen suureilla. Lopuksi esitellään, kuinka tämä kuvaus yleistyy tapaukseen, jossa kappaleet voivat pyöriä erisuuntaisten akselien ympäri.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- esittää kappaleen paikka napakoordinaatistossa ja jakaa vektorit napakoordinatiston radiaali- ja tangenttikomponentteihin
- määritellä kulmaliiukkeen suureet: kulmanopeus ja -kiulityvyys, hitausmomentti sekä momentti
- määrittää ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeus- ja kiulityvysvektorit
- määrittää pyörimisen liike-energia ja momentin tekemä työ
- määritellä kulmaliiukemäärä ja kuvalla sen säilymislaki
- esittää kappaleen liike suoraviivaisen liukkeen ja pyörimisen yhdistelmänä ja ratkaista vierivän kappaleen liike
- laskea vektoreiden ristitulo ja ilmaista pyörimisliukkeen suureet vektorimuodossa

Kuva 5.1: Ympyrälükettä ja pyörimistä voidaan molempia kuvata kulmakoordinaatilla.



## 5.1 Ympyräliike

Kappaleen **pyöriessä** kiinteän **akselin** ympäri sen jokainen piste liikkuu ympyräradalla. Akseli voi olla todellinen kiinteä kappale kuten oven sarana, joka estää kappaleen muun liikkeen pyörimistä lukuun ottamatta. Toisaalta kappale voi pyöriä myös kuvitteellisen akselin ympäri kuten heitetty frisbee. Kummassakin tapauksessa kappaleen **pyörimisaksellilla** olevat hiukkaset pysyvät paikoillaan ja muut hiukkaset **kiertävät** tätä akselia ympyräradioilla. Myös kokonainen kappale voi olla **ympyrälükessä**, jolloin se kiertää pyörimisakselia. Ero pyrimisen ja ympyräliikkeen välillä onkin siinä, että pyrimisakseli on pyörimislükken tapauksessa kappaleen *sisällä* (tai kappale ainakin ympäröi sitä) ja ympyräliikken tapauksessa akseli on selkeästi kappaleen *ulkopuolella*. Pyriminen ja ympyräliike ovatkin siis kumpikin **kiertoliukkeen** muotoja. Aloitamme kiertoliukken tarkastelun ympyräliikkeestä. Ensimmäinen askel on jälleen liikkeen täsmällinen määrittely.

### Kulma ja napakoordinaatisto

Kuvailimme suoraviivaisen liikkeen luvussa 1 kiinnittämällä kiintopisteet origon ja mittaamalla kappaleen paikan tämän suhteeseen. Kiintopisteen lisäksi valitaan positiivinen suunta, jolloin kappaleen koordinaatti määritellään positiiviseksi sen siirtyessä origosta tähän suuntaan. Ympyräliike tapahtuu tasossa, joten se on kaksiluotesta. Samalla ympyräliike on rajottettua, sillä ympyrän pisteet ovat kaikki yhtä kaukana ympyrän keskipisteestä. Kappaleen paikka ympyräradalla voidaankin karakterisoida määrittämällä, missä kappale sijaitsee *ympyrän kaarella*. Ympyrän tapauksessa  $x$ - tai  $y$ -koordinaatin arvo yksin ei riitä tähän. Kappaleen paikka voidaan kuitenkin kuvata yhdellä koordinaatilla kiinnittämällä jokin kiintopiste ympyrän kaareelta ja mittaamalla matka  $s$ , joka täytyy kulkea *kaarta pitkin* kappaleen saavuttamiseksi. Kuten suoraviivaisessa liukkeessä piti valita positiivinen suunta paikkakoordinaatin yksikäsiteiseksi määrittämiseksi, myös ympyrän tapauksessa valitaan positiivinen ja negatiivinen suunta, jotta voidaan erottaa mihin suuntaan ympyrää kierretään.

Kaarenpituden mittaaminen ei välttämättä ole käytännössä helppoa, ja onkin käytännöllisempää mitata valitun kiintopisteen, ympyrän keskipisteen sekä kappaleen paikan määrittelemä **kulmakoordinaatti**. Tämä kulma on kaarenpituden  $s$  ja radan säteen  $r$  suhde (kuva 5.1)

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (5.1)$$

Tämä on itse asiassa **radiaanin** eli absoluuttisen kulmayksikön **määritelmiä**. Kappaleen kiertäessä kokonaisen kierroksen se kulkee matkan  $s = 2\pi r$ , jolloin kulma on määritelmiän mukaisesti  $\theta = 2\pi$ . Kahden kierroksen kiertäminen vastaa kulmaa  $\theta = 4\pi$  jne. Koska täysien kierrosten kiertäminen ei muuta kappaleen paikkaa, kulman  $2\pi$  monikerran lisääminen kappaleen paikkaa kuvavaan kulmakoordinaattiin ei muuta kappaleen paikkaa. Tällöin sanotaan, että kappaleen paikka on  **$2\pi$ -jaksollinen** kulmakoordinaatin suhteessa.

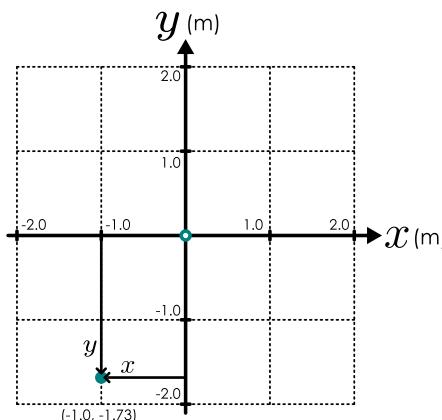


**5.1** Mikä on kulmakoordinaatti (välillä  $[0, 2\pi]$ ), jos akselin ympäri kierretään (a)  $3/4$  kierrosta vastapäivään, (b)  $1/3$  kierrosta myötäpäivään, (c)  $11/8$  kierrosta vastapäivään?

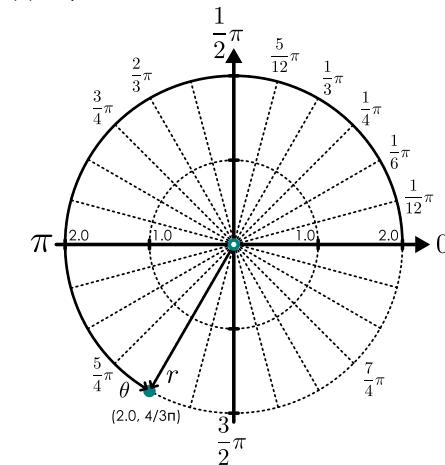
Kulmakoordinaattia ja kappaleen etäisyyttä origosta eli **radiaalikoordinaattia** voidaan käyttää kappaleen paikan määrittämiseksi muulloinkin kuin ympyräliukken tapauksessa, sillä jokaista tason pistettä vastaa yksikäsiteinen koordinaattipari  $(r, \theta)$ . Tätä kutsutaan **napakoordinaatistoksi**, ja se on yleensä kätevin tapa

Kuva 5.2: Karteesisen koordinaatiston ja napakoordinaatiston vertailu.

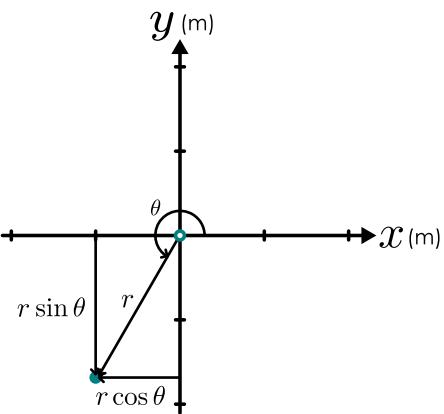
(a) Karteesinen koordinaatisto tasossa.



(b) Napakoordinaatisto.



(c) Muunnos koordinaattien välillä.



kuvata systeemejä, jotka ovat ympyräsymmetrisiä. Samaa kaksiulotteista tasoa voidaan tietenkin kuvata sekä kartesisilla että napakoordinaateilla, ja voi olla hyödyllistä esittää suureita molemmissa koordinaateissa. Yleensä tapana on valita kulmakoordinaatin kiintopisteeksi  $x$ -akseli ja positiiviseksi kiertosuunnaksi kierto vastapäivään. Näillä valinnoilla koordinaatistoja yhdistää muunnos (kuva 5.2)

$$x = r \cos \theta \quad (5.2)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (5.3)$$



5.2 (a) Mitkä ovat kappaleen karteesiset koordinaatit, jos sen etäisyys origosta on 2.0 m ja sen kiertokulma  $x$ -akselista on  $\frac{2}{3}\pi$ ? (b) Mitkä ovat kappaleen napakoordinaatit, jos sen karteesiset koordinaatit ovat  $(x, y) = (1.0 \text{ m}, -1.0 \text{ m})$ .

### Nopeusvektori napakoordinaatistossa

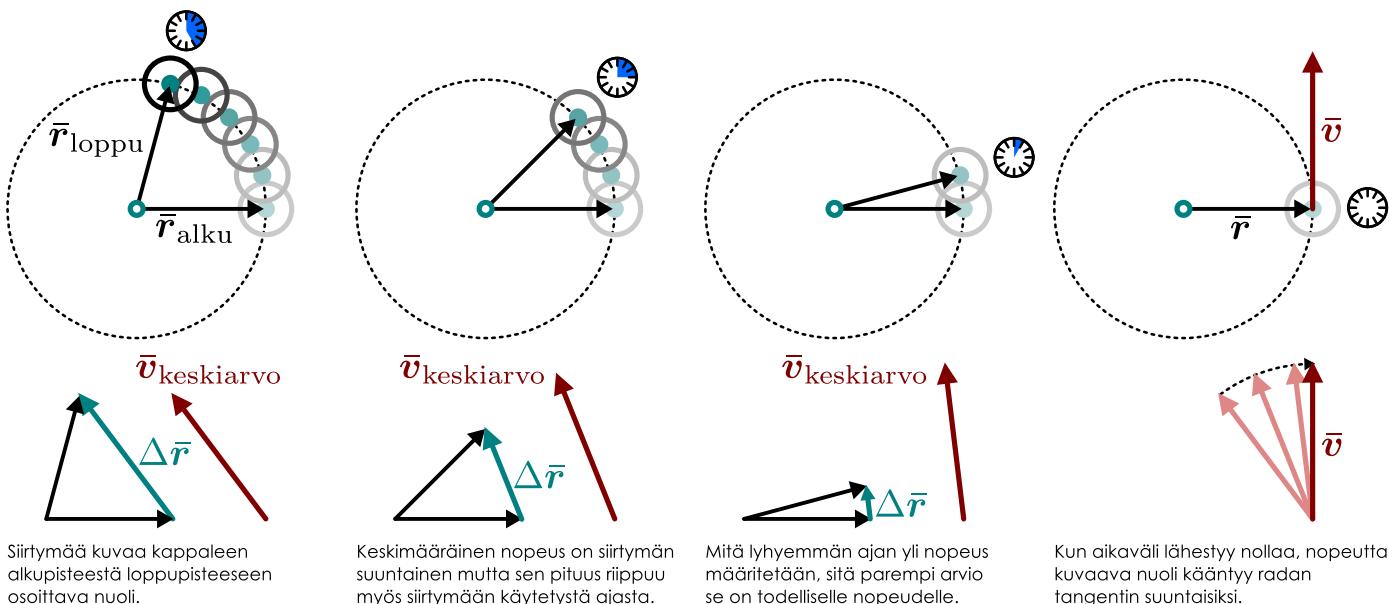
Matemaattisesti kappaleen nopeus määritellään paikkavektorin *derivaattana* yhtälön (1.20) mukaisesti. Toisin sanoen samoin kuin yhdessä ulottuvuudessa nopeus voidaan päättellä määrittämällä ensin kappaleen keskinopeus lyhyellä aikavälillä ja tarkastelemalla tämän keskinopeuden raja-arvoa, kun aikavälin pituus lähestyy nollaa. Keskimääräinen nopeus lasketaan valitsemalla kappaleen paikka kahtena lähekkäisenä ajan hetkenä ja mittaamalla kappaleen siirtymä näiden hetkien välillä kuten kuvassa 5.3, jolloin keskinopeus on siirtymä jaettuna siihen käytettyllä ajalla. Graafisesti siirtymävektori on kappaleen alkupisteestä sen loppupisteeseen osoittava nuoli. Valitsemalla paikat yhä lähempää toisiaan eli yhä lyhyemmän ajan välein tämä keskinopeus lähestyy kappaleen hetkellistä nopeutta, mikä graafisessa esityksessä ilmenee nopeusvektoria esittävän nuolen käännytymisenä osoittamaan *radan tangentin suuntaan*. Itse asiassa vastaavalla päättelyllä voidaan todeta nopeusvektorin olevan kappaleen liikeradan tangentin suuntainen aina — ei vain ympyräliikkeen tapauksessa, ja itse asiassa huomasimme jo heittoliikettä tarkastellessamme, että tasossa liikkuvan kappaleen nopeusvektori on aina kappaleen radan tangentin suuntainen. Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että nopeus ja radan tangentti kumpikin osoittavat aina suuntaan, johon kappale kyllakin hetkellä on liikkumassa.



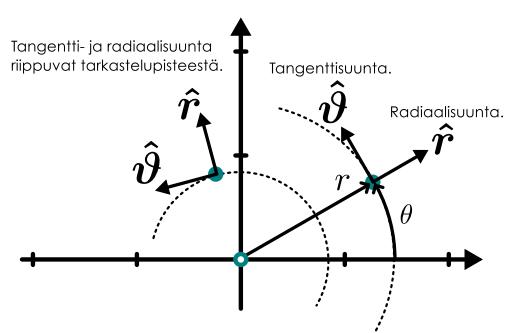
5.3 Miksi kuvassa 5.3 keskinopeutta kuvaavan vektorin pituus on eri kuvissa likimain sama vaikka siirtymävektorin pituus muuttuu?

Heittoliukkeen tapauksessa kappaleen liikkeen jako  $x$ - ja  $y$ -komponentteihin oli hyvä tappa ratkaista kappaleen paikka ja nopeus ajan funktiona. Tämä toimi erityisesti sen takia, että heittoliukkeessa kappaleen kiihtyvyys oli  $y$ -suuntainen. Ympyräliukkeen tapauksessa nopeusvektori osoittaa aina radan tangentin suuntaan, joten sen täytyy *pyöriä*, eikä nopeuden kumpikaan karteesinen komponentti ole vakio. Sen sijaan ympyräliukkeessa etäisyys origosta on vakio ja nopeus on aina radan tangentin suuntainen, joten tässä tapauksessa on kätevämpi jakaa vektorit  $x$ - ja  $y$ -komponenttien sijaan **tangenti- ja radiaalikomponentteihin**.

Kuva 5.3: Kappaleen nopeusvektori voidaan määrittää tarkastelemalla kappaleen siirtymää. Hetkellinen nopeus osoittaa aina radan tangentin suuntaan.



Kuva 5.4: Napakoordinaatiston yksikkövektorit riippuvat paikasta.



Tangenttikomponentti kuvailee vektorin komponenttia ympyrän tangentin suunnassa ja radiaalikomponentti kuvailee ympyrän keskipisteestä poispäin osoittavaa komponenttia. Periaatteessa tämä komponenttijako toimii täsmälleen samalla tavalla kuin vektorien jako komponentteihin karteesisessa koordinaatistossakin, mutta oleellinen ero on se, että tämä komponenttijako riippuu kappaleen sijainnista. Nämä on siksi, että ympyrän tangentti osoittaa eri suuntaan kaaren eri kohdissa ja samoin suunta poispäin ympyrän keskipisteestä riippuu paikasta. Tangenti- ja radiaalikomponentit voidaan esittää skalaarikomponenttien ja yksikkövektoreiden avulla kuten karteesisessakin koordinaatistossa, jolloin siis esimerkiksi nopeusvektori voidaan kirjoittaa muodossa

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\vartheta} \quad (5.4)$$

missä  $v_r$  on nopeuden skalaarikomponentti radiaalisuunnassa ja  $v_\theta$  tangentti-suunnassa. Koska ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeus on aina radan tangentin suuntainen, sen radiaalikomponentti täytyy olla aina nolla

$$v_r = 0. \quad (5.5)$$

Yllä esitettyssä komponenttijaossa yksikkövektori  $\hat{r}$  osoittaa poispäin origosta ja yksikkövektori  $\hat{\vartheta}$  osoittaa ympyrän tangentin suunnassa positiiviseen kiertosuuntaan (kuva 5.4). Koska tangentti- ja radiaalisuunnat riippuvat kappaleen paikasta, myös nämä yksikkövektorit muuttuvat kappaleen liikkuessa. Täsmällisemmin yksikkövektorit käännyvät yhtä nopeasti kuin kappale kiertää ympyrää.

**5.4** Ympyräraataa vastapäivään vauhdilla 3.0 m/s kiertävän kappaleen kulmakoordinaatti on  $\frac{3}{4}\pi$  ja radiaalikoodinaatti 2.0 m. (a) Mikä on kappaleen nopeusvektorin ja  $x$ -akselin välinen kulma? (b) Mikä on nopeusvektorin  $x$ -komponentti? (c) Mikä on nopeusvektorin tangenttikomponentti?

Jos kaksi kappaletta kiertää saman origon ympäri niin, että ne kulkevat täyden kierroksen samassa ajassa mutta eri etäisyyksillä, kauempaan origosta olevan eli suurempisäteistä ympyrää kiertävän kappaleen täytyy kulkea samassa ajassa pidempi matka. Siispä ympyräradalla kappaleen nopeus on tässä mielessä verrannollinen sen radan sääteeseen. Toisaalta mitä nopeammin kappale kiertää eli mitä nopeammin kulma  $\theta$  muuttuu, sitä suurempi on kappaleen nopeus. Tämän havainnon voi esittää täsmällisesti kulmakoordinaatin (5.1) määritelmän kautta. Jos kappale nimittäin kulkee kaarta pitkin matkan  $\Delta s$ , kulmakoordinaatin muutos on

$$\Delta\theta = \theta_{loppu} - \theta_{alku} = \frac{s_{loppu}}{r} - \frac{s_{alku}}{r} = \frac{\Delta s}{r}. \quad (5.6)$$

## PYÖRIMISLIIKE

Kuljetun matkan lähestyessä nolla kulma pienenee ja kappaleen kulkema reitti lähestyy suoraa. Suoraväisessä liikkeessä kappaleen nopeus on määritelmän mukaisesti kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhde, joten

$$v_\vartheta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r = \frac{d\theta}{dt} r. \quad (5.7)$$

Nopeus on siis verrannollinen radan säteeseen ja kulman  $\theta$  aikaderivaattaan eli muuttumisnopeuteen. Kulman  $\theta$  muutosnopeutta kutsutaan **kulmanopeudeksi** ja se määritellään kulmakoordinaatin derivaattana ajan suhteen samaan tapaan kuin nopeus  $x$ -suunnassa määritellään paikkakoordinaatin derivaattana ajan suhteen,

$$\omega_\theta = \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.8)$$

Kappaleen nopeus on sen avulla lausuttavissa muodossa

$$v_\vartheta = \omega_\theta r. \quad (5.9)$$



**5.5** Karuselli tekee kierroksen 20 sekunnissa ja matkustajat ovat 1.5 m ja 2.5 m päässä karusellin keskiakselista. Mitkä ovat matkustajien nopeus ja kulmanopeus?

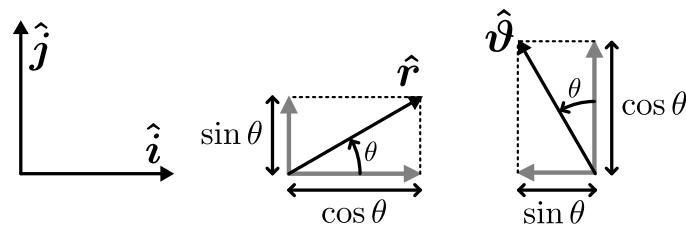
Samaan tulokseen päästäisiin myös vektorilaskulla. Ensinnäkin napakoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit voidaan esittää toistensa avulla muunnoksella

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (5.10)$$

$$\hat{\vartheta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (5.11)$$

Tämä muunnos perustuu kuvan 5.5 piirrettyyn geometriaan. Napakoordinaatista puolestaan voidaan siirtää karteesisiin koordinaatteihin muunnoksen (5.3)

avulla. Kappaleen nopeuden  $x$ - ja  $y$ -komponentit saadaan näiden koordinaattien derivaattoina, joten



Kuva 5.5: Muunnos napakoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston yksikkövektorien välillä.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\omega_\theta r \sin \theta \quad (5.12)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \omega_\theta r \cos \theta. \quad (5.13)$$

Tämän perusteella kappaleen nopeusvektori on siis

$$\bar{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = -\omega_\theta r \sin \theta \hat{i} + \omega_\theta r \cos \theta \hat{j} = \omega_\theta r (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \omega_\theta r \hat{\vartheta}, \quad (5.14)$$

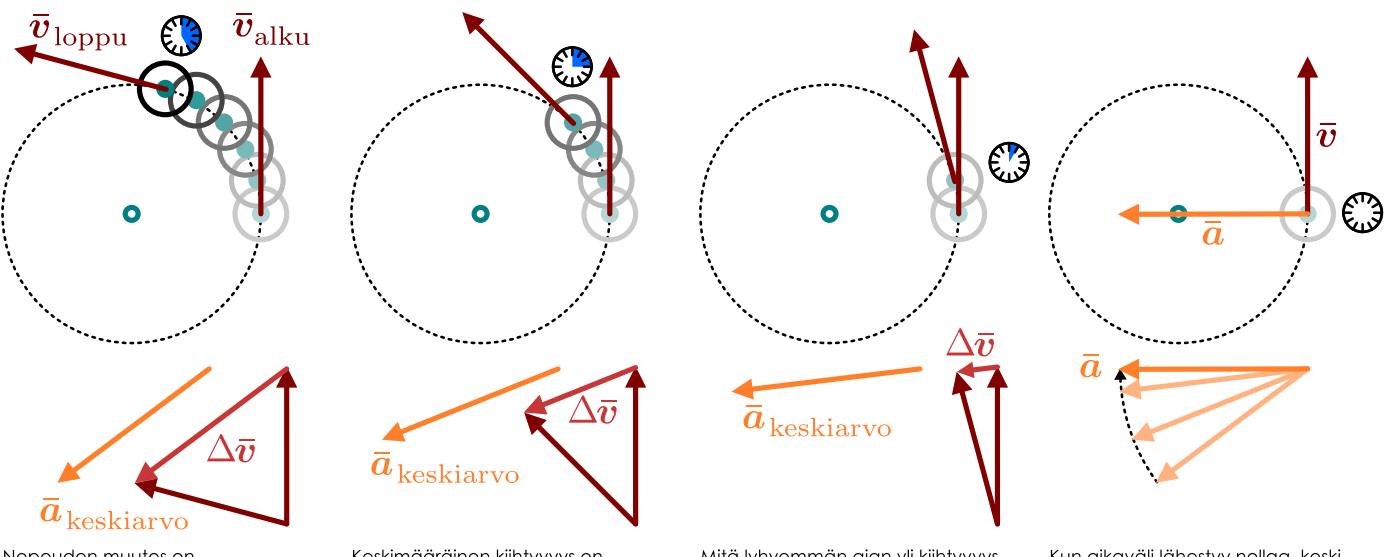
mikä on täsmälleen sama tulos kuin mitä edellä päätteliin geometrisesti.



**5.6** Tarkista muunnoksen (5.10) ja (5.11) järkeyys tarkastelemalla tapauksia (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = 0.1$  ja (c)  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ . Päättele erityisesti yksikkövektorien  $\hat{r}$  ja  $\hat{\vartheta}$   $x$ - ja  $y$ -komponenttien etumerkit geometrisesti ja vertaa muunnosyhtälöiden antamien tuloksiin.

Symbolit  $\theta$  ja  $\vartheta$  ovat molemmat sama kirjain, kreikkalainen 'theta', hiukan eri tavoin kirjoitettuna. Merkinässä  $v_\vartheta$  symboli kertoo, että kyseessä on nopeusvektorin komponentti yksikkövektorin  $\hat{\vartheta}$  suunnassa eli siis nopeuden tangentiaalinen komponentti. Kyseessä on siis aivan samanlainen merkintä kuin  $x$ -komponenttia tarkoittavassa tapauksessa  $v_x$ . Merkinässä  $\omega_\theta$  symboli puolestaan kertoo, että kulmanopeus on määritelty nimenomaan kulman  $\theta$  suhteen. Tarkastelemme aluksi vain tasossa tapahtuva ympyräliikettä, jonka kuvamiseen riittää yksi kulmakoordinaatti, mutta yleisesti pyöriminen voi tapahtua erisuuntaisten akselien ympäri, jolloin kuvauksen tätyy sisältää myös tieto *pyörimisakselin suunnasta*. Tällöin kulmaliike on määritellään *vektorina*, jonka suunta osoittaa pyörimisakselin suunnan. Merkintä  $\omega_\theta$  tarkoittaa siis täsmällisemmin sitä, että kyseessä on ainoastaan tämän kulmaliikekäärivektorin yksi komponentti. Vaikka molemmat symbolit liittyvät kulmaan  $\theta$ , kyseessä on kuitenkin eri komponenttijako, joten näille käytetään tässä eri symboleita. Pyörimisliikkeen vektorikuvaus esitellään tarkemmin luvussa 5.5.

Kuva 5.6: Kappaleen kiihtyvyysvektori voidaan määritellä tarkastelemalla kappaleen nopeuden muutosta. Hetkellinen kiihtyvyys osoittaa radan keskipisteen suuntaan, jos nopeus on vakio.



### Kiihtyvyys ympyräliikkeessä

Selvitetään seuraavaksi kappaleen kiihtyvyys ympyräliikkeessä ja tarkastellaan ensin tapausta, jossa kappaleen vauhti ei muutu eli kappaleen nopeuden itseisarvo on vakio. Intuitiivisesti voi helposti ajatella, että vakionopeudella ympyräraata kulkevalla kappaleella ei ole kiihtyvyyttä, mutta tässä sekoittuu kiihtyvyyden arkipäiväinen käytöö suureen täsmälliseen fysiikaan määritelmään. Kiihtyvyys nimittäin mittaa fysiikassa nopeuden muutosta, ja kuten edellä päättelimme, ympyräradalla kulkevan kappaleen nopeus muuttuu, koska nopeusvektori *kääntyy*. Niinpä kappaleella täytyy olla kiihtyvyyttä, joka osoittaa *nopeusvektorin muutoksen suuntaan*. Asiaa voi tarkastella myös jatkuvuuden lain kannalta. Jos kappaleeseen kohdistuva voima on nolla, se liikkuu *suoraan* tasaisella nopeudella. Jos kappale on *ympyräradalla*, siinä täytyy kohdistua nollasta poikkeava voima, joka aiheuttaa kappaleen kiihtywyden ja saa kappaleen radan poikkeamaan suorasta.

Kappaleen nopeusvektori on edellä tarkastellun perusteella aina sen liikeradan tangentin suuntainen. Toisaalta ympyräliikkeessä kappale kulkee ympyräradalla, jonka tangentti on aina kohtisuorassa ympyrän sädetä eli kappaleen paikkavektoria vastaan. Kappaleen liikkuessa vakiovahdilla se siis kiertää ympyrää vakiokulmanopeudella ja sekä paikkavektori että nopeusvektori pysyvät liikkeen aikana yhtä pitkinä ja *kääntyvät samalla kulmanopeudella*.

Kiihtyvyysvektori voidaan näin ollen määrittää nopeusvektorin muutoksen perusteella täsmälle samalla tavalla kuin nopeusvektori määritettiin paikkavektorista. Kuvassa 5.6 on piirretty kappaleen nopeusvektoreita kuvaavia nuolia sekä näiden muutoksia, joiden perusteella voidaan päätellä kappaleen keskimääräisen kiihtyvyys lyhyillä aikaväleillä. Kun tarkastellun aikavälin pituus lähestyy nolla, keskikihtyvyyttä kuvavat vektorit kääntyvät yhä tarkemmin *nopeusvektoria vastaan kohtisuoraan*. Tämä raja-arvo on kappaleen hetkellistä kiihtyvyyttä kuvava vektori, ja se selvästi osoittaa *kohti liikeradan keskipistettä* — siis suuntaan, johon nopeusvektori kääntyy. Koska kiihtyvyysvektori osoittaa kohti radan keskipistettä, sillä on ainoastaan radiaalikomponentti

$$\bar{a} = a_r \hat{r}. \quad (5.15)$$

Tätä kiihtyvyyttä kutsutaan **keskeiskihtyvyydeksi**, koska se suuntautuu kohti radan keskipistettä.

Voimme päätellä keskeiskihtyvyyden suuruuden samaan tapaan kuin nopeuden ja kulmanopeuden välisen yhteyden. Jos nimittäin kappaleen kulmakoordinaatti muuttuu määränpäin  $d\theta$ , sen siirtymä on

$$|d\vec{r}| = ds = rd\theta. \quad (5.16)$$

Kappaleen nopeusvektori kääntyy tällöin *yhtä paljon*, joten nopeuden muutos on aivan samalla päättelyllä

$$|d\vec{v}| = v_\vartheta d\theta. \quad (5.17)$$

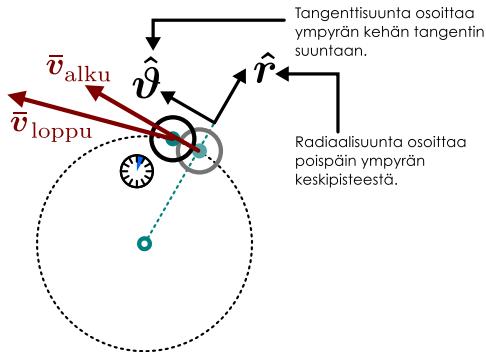
Yhdistämällä nämä tulokset voidaan kiihtyvyyden itseisarvo kirjoittaa muotoihin

$$|\bar{a}| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = v_\vartheta \frac{d\theta}{dt} = v_\vartheta \omega_\theta = \frac{v_\vartheta^2}{r} = \omega_\theta^2 r. \quad (5.18)$$

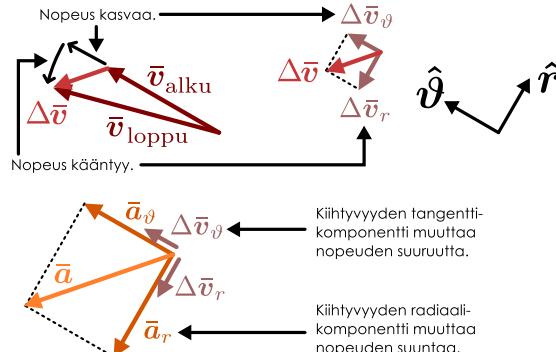
## PYÖRIMISLIIKE

Kuva 5.7: Kappaleen kiihtyvyyden radiaalikomponentti käänää nopeuden suuntaa ja tangenttikomponentti muuttaa nopeuden itseisarvoa.

(a) Nopeuden muutos, kun vauhti ei ole vakio.



(b) Nopeuden muutoksen ja kiihtyvyyden komponentit.



Koska tämä kiihtyvyys osoittaa aina kohti ympyrän keskipistettä ja vektorin radiaalikomponentti määritellään positiiviseksi osoittaessaan keskipisteestä poispäin, on kappaleen kiihtyvyyden radiaalikomponentti siis **negatiivinen**. Kiihtyvyysvektori on näin ollen komponenttimuodossa

$$\bar{a} = -\frac{v_\theta^2}{r}\hat{r} = -\omega_\theta^2 r \hat{r}. \quad (5.19)$$



**5.7** Karuselli tekee kierroksen 20 sekunnissa ja matkustajat ovat 1.5 m ja 2.5 m päässä karusellin keskiakselista. Mitkä ovat matkustajien kiihtyvyydet?

Kappaleella on siis ympyräliikkeessä aina kiihtyvyys kohti ympyrän keskipistettä, ja tämän keskeiskiihtyvyden suuruus yhdessä rataliukkeen vauhdin kanssa määräytyy ympyräradan säteen. Mitä suurempi keskeiskiihtyvyys on, sitä pienempää ympyrää kappale kulkee ja päinvastoin mitä pienempi kappaleen keskeiskiihtyvyys on, sitä suurempaa ympyrää kappale kiertää. Jos keskeiskiihtyvyys on *nolla*, radan säde on *ääretön*, eli kappale kulkee suoraan kuten sen jatkavuuden lain mukaan pitäisikin.

Kappaleella voi tieteenkin olla myös kiihtyvyyttä *radan tangentin suuntaan*, ja tämä vaikuttaa kappaleen liikkeeseen oleellisesti eri tavalla kuin keskeiskiihtyvyys. Kuten kappaleen kulkiessa suoraan myös ympyräradalla nopeuden suuntainen kiihtyvyys kasvattaa kappaleen vauhtia kun taas nopeuteen nähdyn vastakkaisuuntainen kiihtyvyys hidastaa vauhtia. Toisin sanoen *jos kappaleen kiihtyvyyden tangenttikomponentti ei ole nolla, kappaleen vauhti muuttuu*. Koska lüke suoralla on tavallaan ympyräliukkeen erikoistapaus, jossa ratasäde on ääretön, tangenttikihtyvyyden vaikutuksen kappaleen nopeuteen täytyy olla täsmälleen sama kuin yksilötteisen liikkeen tapauksessa eli toisin sanoen kiihtyvyyden tangenttikomponentin täytyy olla nopeuden tangenttikomponentin derivaatta,

$$a_\vartheta = \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{d\omega_\theta}{dt} r. \quad (5.20)$$

Tangenttikihtyvyys voitiin tässä kirjoittaa myös kulmanopeuden avulla, sillä ympyräradalla kulmanopeus ja nopeus ovat suoraan verrannolliset yhtälön (5.8) mukaisesti. Määritellään vielä **kulmakihtyvyys** kulmanopeuden aikaderivaattana

$$\alpha_\theta = \frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (5.21)$$

jolloin kiihtyvyyden tangenttikomponentti on suoraan verrannollinen kappaleen kulmakihtyvyyteen

$$a_\vartheta = \alpha_\theta r, \quad (5.22)$$

aivan kuten kappaleen nopeuden tangenttikomponentti on verrannollinen kappaleen kulmanopeuteen.

Kiihtyvyysvektori on siis kaikkiaan

$$\bar{a} = a_r \hat{r} + a_\vartheta \hat{\vartheta} = -\omega_\theta^2 r \hat{r} + \alpha_\theta r \hat{\vartheta}. \quad (5.23)$$

Vektorin pituus eli kiihtyvyyden itseisarvo saadaan Pythagoraan lauseesta aivan kuten karteesisessakin koordinaatistossa, koska radiaali- ja tangenttikomponentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorat,

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\vartheta^2}. \quad (5.24)$$



**5.8** Karuselli tekee täydessä vauhdissa kierroksen 20 sekunnissa ja siltä kestää 2 sekuntia saavuttaa tämä kulmanopeus levosta lähtiessään. Karusellin kulmakihtyvyys on tänä aikana likimain vakio. Matkustaja on etäisyydellä 1.5 m karusellin keskiakselista. Mikä on sekunnin kuluttua liukkeelle lähdöstä matkustajan (a) radiaalikihtyvyys, (b) tangenttikihtyvyys, (c) kihtyvyyden itseisarvo?

Voidaan siis tehdä seuraava yhteenvetö ympyräliukkeesta sekä kappaleen nopeus- ja kihtyvyysvektoreista:

- Nopeusvektori on *aina* radan tangentin suuntainen.
- Nopeuden suuruus on verrannollinen kulmanopeuteen ja ympyrän säteeseen.
- Kihtyvyysvektorilla on *aina* komponentti kohti ympyrän keskipistettä.
- Tämän keskeiskihtyvyyden suuruus on verrannollinen kappaleen nopeuden *neliöön*.
- Jos kappaleen vauhti muuttuu, sen kihtyvyysvektorilla on lisäksi komponentti radan tangentin suuntaan.
- Tämän tangenttikihtyvyyden suuruus on verrannollinen kappaleen kulmakihtyvyyteen ja ympyrän säteeseen.

Kappaleen kihtyvyyden tangentti- ja radiaalikomponenteilla on siis selkeästi toisistaan eroavat fysiika-aliset merkitykset: *radiaalikomponentti eli keskeiskihtyvyys liittyy ainoastaan kappaleen liikkeen suunnan muuttumiseen kun taas tangenttikomponentti liittyy ainoastaan kappaleen vauhdin muuttumiseen*. Koska kappaleen kihtyvyysvektori on dynamiikan peruslain mukaan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan koon-naisvoimaan, tulos voidaan tulkita myös voimien avulla: Kappaleeseen kohdistuvan voiman liikkeen suuntainen komponentti pyrkii muuttamaan kappaleen nopeuden suuruutta mutta ei vaikuta liikkeen suuntaan

$$F_\vartheta = ma_\vartheta = m\alpha_\vartheta. \quad (5.25)$$

Sen sijaan kappaleeseen kohdistuvan voiman liikettä vastaan kohtisuora komponentti pyrkii ainoastaan muuttamaan nopeuden suuntaa mutta ei vaikuta liikkeen vauhtiin

$$F_r = ma_r = -m\frac{v_\vartheta^2}{r}. \quad (5.26)$$

Ympyräliike on siis mahdollista vain jos kappaleeseen kohdistuu voima kohti ympyrän keskipistettä, ja mitä nopeammin kappale liikkuu tai mitä pienempi on sen radan säde, sitä suurempi voima vaaditaan pitämään kappale radalla.



**5.9** Kirjoita oman sanoisin tiivistelmä ympyräliukkeesta. Selitä erityisesti, mitä tarkoitetaan kulmanopeudella ja -kihtyvyydellä, sekä millaisia nopeus- ja kihtyvyysvektorit ovat ympyräliukkeessa. Taulukoi nämä suureet yhdistävät yhtälöt.

### esimerkki 5.1

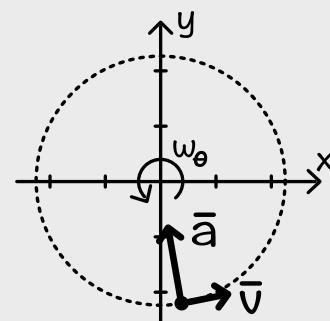
### Ympyräliike

Hiukkanen kiertää origoa ympyräradalla tasaisella vauhdilla  $v = 1.5 \text{ m/s}$  vastapäivään. Hiukkanen on erällä ajan hetkellä pisteessä  $(x, y) = (0.35 \text{ m}, -1.20 \text{ m})$ . Mikä on hiukkasen (a) radan säde, (b) kulmanopeus, (c) nopeusvektori, (d) kulmakihtyvyys, (e) kihtyvyysvektori? Esitä vektorit kartesisissä komponenteissa.

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva.

**SUUNNITELMA** Radan säde voidaan selvittää laskemalla hiukkasen etäisyyks origosta. Origokeskisellä ympyräradalla tämä on vakio.

Hiukkasen nopeusvektorin pituus on sama kuin hiukkasen vauhti ja se osoittaa radan tangentin suuntaan. Kulmanopeus puolestaan on vauhdin ja säteen suhde. Hiukkasen kihtyvyysvektori osoittaa kohti origoa ja kulmakihtyvyys on nolla, koska vauhti oli vakio. Kihtyvyyden suuruus riippuu vauhdin neliöstä ja radan säestä.



Etäisyys origosta on  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Radiaalinen yksikkövektori osoittaa origosta kohti hiukkasen paikkaa, joten se saadaan jakamalla hiukkasen paikkavektori origosta mitattulla etäisyydellä

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \bar{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\hat{i} + y\hat{j}). \quad (5.27)$$

Tangenttisuuntainen yksikkövektori on tästä vastaan kohtisuorassa

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y\hat{i} + x\hat{j}). \quad (5.28)$$

Hiukkasen kulmanopeus on  $\omega_\theta = v/r$  ja nopeusvektori  $\bar{v} = v\hat{\theta}$ . Hiukkasen kulmakihtyvyys on  $\alpha_\theta = 0$  ja kihihtyvyysvektori  $\bar{a} = -v^2/r\hat{r}$ .

**RATKAISU** (a) Sijoittamalla hiukkasen koordinaatit radan sääteksi saadaan  $r = 1.25$  m ja napakoordinaatiston yksikkövektorit ovat siis  $\hat{r} = 0.28\hat{i} - 0.96\hat{j}$  sekä  $\hat{\theta} = 0.96\hat{i} + 0.28\hat{j}$ .

(b) Kulmanopeus on  $\omega_\theta = 1.2 \text{ s}^{-1}$ , (c) nopeusvektori  $\bar{v} = (1.4 \text{ m/s})\hat{i} + (0.42 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ , (d) kulmakihtyvyys on nolla ja (e) kihihtyvyysvektori  $\bar{a} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (1.7 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ .

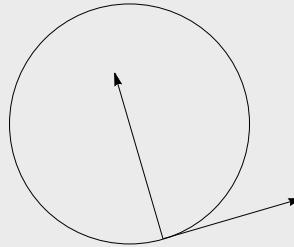
Mathematica:

```
(* paikka- ja yksikkövektorit *)
x = 0.35; y = -1.20; v = 1.5;
paikka = {x, y} (* paikkavektori *)
r = Sqrt[paikka.paikka] (* paikka.paikka on pistetulo *)
1.25
radiaali = 1/r paikka
{0.28, -0.96}
tangentti = 1/r {-y, x}
{0.96, 0.28}

(* nopeudet ja kihihtyvydet *)
omega = v/r
1.2
nopeus = v tangentti
{1.44, 0.42}
kihihtyvyys = -v^2 / r radiaali
{-0.504, 1.728}

(* tarkistus derivoimalla paikkavektoria *)
rvektori = {r Cos[omega t], r Sin[omega t]};
aika = Solve[rvektori == paikka, t]
{{t -> -1.0725}}
D[rvektori, t] /. aika (* nopeusvektori on paikan aikaderivaatta *)
{{1.44, 0.42}}
D[rvektori, {t, 2}] /. aika (* kihihtyvyysvektori on paikan toinen aikaderivaatta *)
{{-0.504, 1.728}}

(* kuva *)
nopeusnuoli = Graphics[Arrow[{paikka, paikka + nopeus}]];
kihihtyvyysnuoli = Graphics[ Arrow[{paikka, paikka + kihityvyys}]];
rata = Graphics[Circle[{0, 0}, r]];
Show[rata, nopeusnuoli, kihityvyysnuoli]
```



**ARVIOINTI** Pürretyn kuvan perusteella vektorit osoittavat oikeisiin suuntiin. Tarkistukseksi voimme myös ratkaista hiukkasen nopeuden ja kihihtyvyden ajan funktiona. Nopeus- ja kihihtyvyysvektori voidaan nimittäin laskea suoraan derivoimalla kappaleen paikkavektoria ajan suhteeseen (ks. Mathematica-koodi yllä). Kappaleen paikkavektori on

$$\bar{r} = r\hat{r} = r(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = r(\cos(\omega_\theta t) \hat{i} + \sin(\omega_\theta t) \hat{j}) \quad (5.29)$$

joten nopeus- ja kihihtyvyysvektorit ovat

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \omega_\theta r(-\sin(\omega_\theta t) \hat{i} + \cos(\omega_\theta t) \hat{j}) \quad (5.30)$$

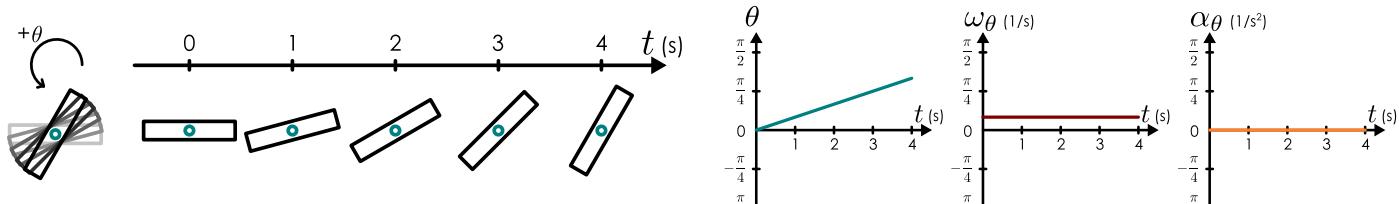
sekä

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \omega_\theta^2 r(-\cos(\omega_\theta t) \hat{i} - \sin(\omega_\theta t) \hat{j}). \quad (5.31)$$

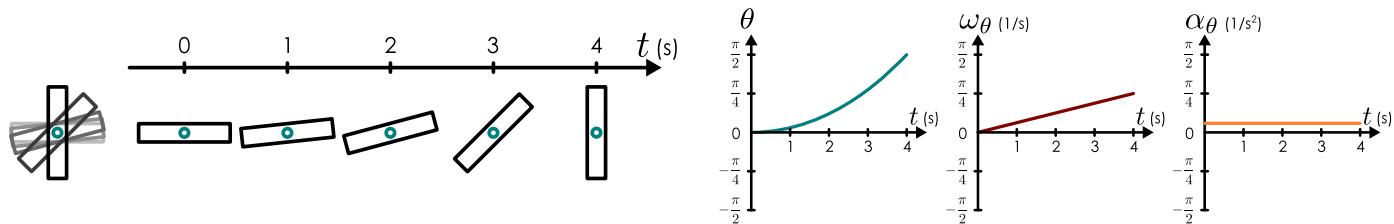
Kappale on tehtävässä annetussa paikassa esimerkiksi hetkellä  $t = -1.0725$  s, ja sijoittamalla tämän sekä muut lukuvariot derivoiden johdettuihin nopeuden ja kihihtyvyden lausekkeisiin saadaan samat tulokset kuin edellä tangentti- ja radiaalikomponenttien avulla laskien.

Kuva 5.8: Pyörivän kappaleen kulmakoordinaatin, -nopeuden ja -kihityyden kuvajat.

(a) Tasaisesti pyörivä kappale.



(b) Tasaisella kulmakihityydyllä pyörivä kappale.



## 5.2 Pyörimisliike

### Etenevä ja pyörivä liike

Pyörivän jäykän kappaleen asento voidaan määritellä kulmakoordinaatin avulla täsmälleen samoin kuin ympyräliikkeessäkin olevan kappaleen. Jos nimittäin kappaleen muoto ei muutu, sen jokainen piste käännytä kappaleen pyöriessä aina *yhtä suuren kulman*, ja niinpä voimme mitata kappaleen kiertokulman minkä tahansa sellaisen pisteen perusteella, joka ei ole pyörimisakseli. Tällöin asennon muutosta kuvaavalla kulmanopeus ja kulmanopeuden muutosta edelleen kulmakihityvyys aivan samoin kuin ympyräliikkeenkin tapauksessa, ja nämäkin ovat *samat* jokaiselle kappaleen hiukkaselle. Sen sijaan pyörimisakseliin nähden eri paikoissa olevien hiukkasten nopeudet ja kihityydet *eivät ole samat*, sillä mitä kauempana pyörimisakselistä hiukkanen on, sitä nopeammin sen täytyy liikkua. Niinpä pyörimislükkeen kuvaussa on mielekästä esittää liike pelkästään kulmamuuttujien  $\theta, \omega_\theta, \alpha_\theta$  jne. avulla.

Aivan kuten suoraviivaisen etenemislükkeen tapauksessa voidaan pyörimislükkeessäkin erottaa erikoistapauksia kuten tasainen pyörimisliike  $\omega_\theta = \text{vakio}$  ja tasaisesti kiihityvä pyörimisliike  $\alpha_\theta = \text{vakio}$ . Nämä on havainnollistettu kuvassa 5.8. Koska kulmanopeus (5.8) ja -kihityvyys (5.21) määritellään kulman derivaattona täsmälleen samoin kuin nopeus ja kihityvyys suoraviivaisessa liikkeessä, niille pätevät myös muut paikan-, nopeuden- ja kihityyden väliset relaatiot kuten integraaliesitykset

$$\Delta\theta = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \omega_\theta dt \quad (5.32)$$

$$\Delta\omega_\theta = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \alpha_\theta dt. \quad (5.33)$$

Tässä  $\Delta\theta$  on kappaleen asentoa kuvaavan kulman muutos eli **kierto** ja  $\Delta\omega_\theta$  on kappaleen kulmanopeuden muutos. Graafisesti kulmanopeus voidaan määrittää kulman kuvaajan tangentin kulmakertoimena ja samoin kulmakihityvyys on kulmanopeuden tangentin kulmakerroin. Kulmakoordinaatin muutos puolestaan on kulmanopeuden kuvaajan rajaama pinta-ala ja kulmanopeuden muutos saadaan kulmakihityyyden kuvaajan rajaamana pinta-alana.

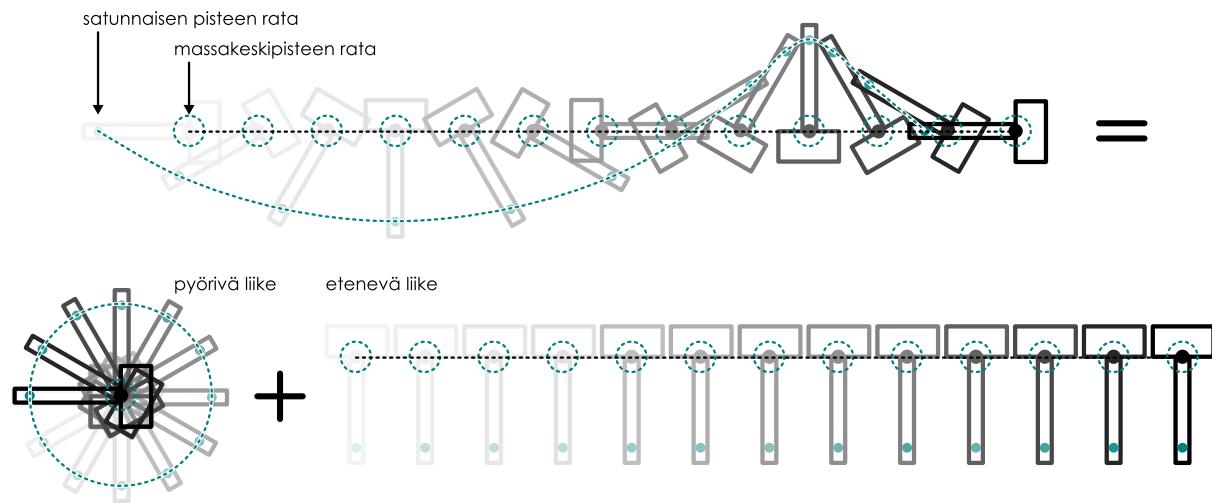
**5.10 (a)** Kuinka pitkän siirtymän kappale kulkee kahdessa sekunnissa, jos sen nopeus on aluksi  $v_x = 1.0 \text{ m/s}$  ja kihityvyys  $a_x = -0.4 \text{ m/s}^2$ ?

**(b)** Kuinka suuren kulman pyörivä kappale kiertyy kahdessa sekunnissa, jos sen kulmanopeus on aluksi  $\omega_\theta = 1.0 \text{ 1/s}$  ja kulmakihityvyys  $\alpha_\theta = -0.4 \text{ 1/s}^2$ ?

Liiinemääärän säilymislain perusteella kappale, johon vaikuttava kokonaisvoima on nolla, liikkuu tasaisella nopeudella tai on levossa. Erityisesti kappaleen massakeskipisteen nopeus on tällöin vakio — mahdollisesti nolla. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, etteivätkö kappaleen osat voisi liikkua massakeskipisteen suhteessa. Erityisesti kappale voi pyöriä massakeskipisteensä ympäri. Jos kappale on etenemislükkeen suhteessa paikoillaan mutta pyörii, sen massakeskipiste ei liiku mutta kappaleen jokainen hiukkanen on ympyräliikkeessä massakeskipisteen ympäri nopeudella  $v_\theta = \omega_\theta r$ , missä  $r$  on kunkin hiukkasen etäisyys massakeskipisteestä. Jos

## PYÖRIMISLIIKE

Kuva 5.9: Jäykän kappaleen mielivaltainen liike voidaan kuvata massakeskipisteen etenevän lükkeen ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvan pyörimisen yhdistelmänä.



kappale lisäksi liikkuu, sen *liike voidaan jakaa massakeskipisteen etenevään liikkeeseen sekä pyörimisliikeeseen massakeskipisteen ympäri*. Tällöin kappaleen kunkin hiukan voi kulkea varsin monimutkaistakin rataa, kuten kuvassa 5.9 on esitetty.

Oleellista tässä joossa etenevään ja pyörivään liikkeeseen on huomata, että pyörivällekin kappaleelle massakeskipisteen lükettä kuvavat mekanikan lait ovat *täsmälleen samanlaiset* kuin kappaleelle, joka ei pyöri. Toisin sanoen kappaleen etenemislükkeen kuvaus onnistuu käyttäen jo aikaisemmin opittuja lükemääränsä säilymislakia ja dynamiikan peruslakia. Kappaleen pyörimisen kuvaaminen puolestaan tapahtuu *täsmälleen samalla tavalla* riippumatta siitä, lükkääkö kappaleen massakeskipiste vai ei. Niinpä koska osaamme jo kuvata kappaleen suoraviivaisen lükkeen, jos vielä ymmärrämme kuinka paikoillaan olevan kappaleen pyöriminen tapahtuu, pystymme kuvaamaan kappaleen *minkä tahansa* lükkeen näiden kahden yhdistelmänä.



**5.11** Kuvan 5.9 vasaran merkity piste on etäisydellä 20 cm massakeskipisteestä. Jos vasaran massakeskipiste lükkuu tasaisella nopeudella 2.0 m/s ja sen kulmanopeus on  $6.5 \text{ s}^{-1}$ , mikä on merkityn pisteen suurin ja pienin nopeus?

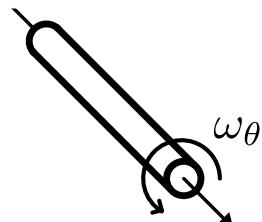
## Hitausmomentti ja pyörimisen liike-energia

Suoraviivaisen lukioiden laeissa kuten lükemäären säilymislaissa ja dynamiikan peruslaissa esiintyy kaikissa kappaleen *inertiaa* kuvava massa, joka kertoo kuinka vaikea kappaleen etenemislükettä on muuttaa. Myös pyörimislukioiden liittyy inertia, joka kertoo kuinka helppoja kappaleiden pyörimislukettä on muuttaa. Tätä pyörimisen inertian kutsutaan **hitausmomentiksi**.

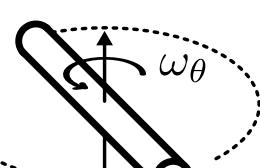
Hitausmomentti riippuu massasta, sillä aivan kuten massiivisia kappaleita on raskas työntää lukielle, niihin on myös raskas pyörittää. Hitausmomentti riippuu kuitenkin myös kappaleiden *muodosta*, minkä huomaa

Kuva 5.10: Jäykän sauvan hitausmomentti riippuu akselistä, jonka suhteeseen se määritetään.

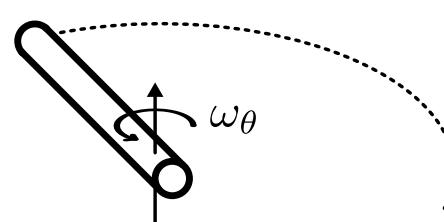
(a) Akseli sauvaan pitkin: pieni hitausmomentti.



(b) Akseli sauvan keskellä: suuri hitausmomentti.

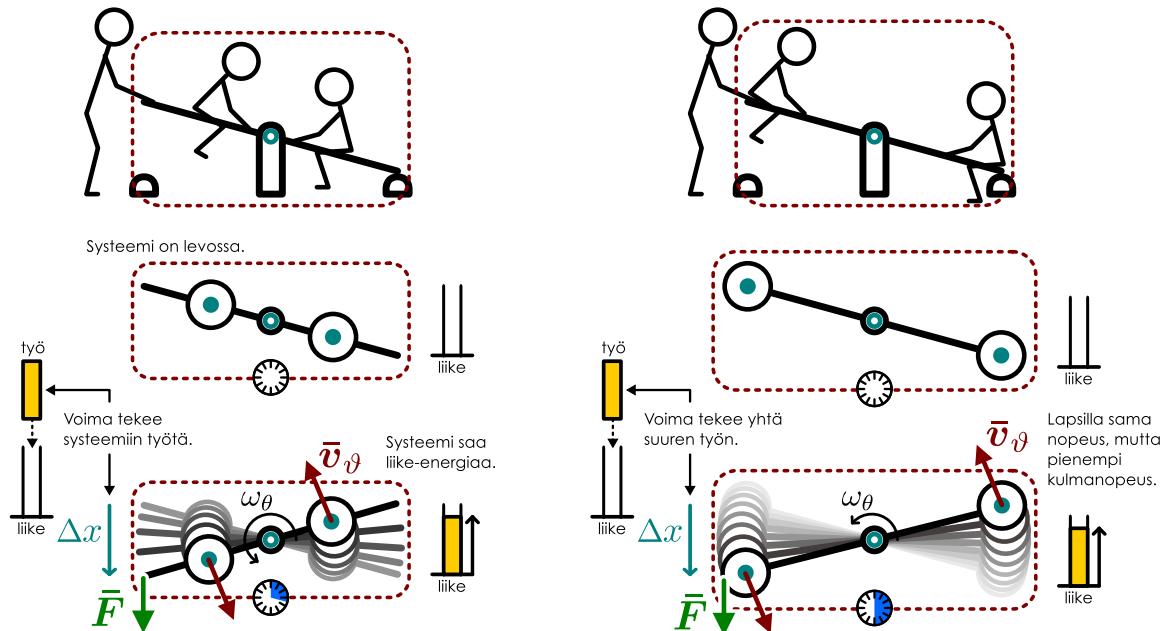


(c) Akseli sauvan päässä: hyvin suuri hitausmomentti.



Kuva 5.11: Keinulauta työnnetään vauhtiin, jolloin voiman tekemä työ lisää systeemin liike-energiaa. Voiman tehessä yhtä suuren työn laudalla istuvat lapset saavat yhtä suuret nopeudet.

(a) Lasten istuessa lähellä akselia lauta käännyy nopeasti. (b) Lasten istuessa kaukana akselista lauta käännyy hitaasti.



helposti pyörittämällä kahta yhtä massiivista mutta eri muotoista esinettä. Esimerkiksi pieni pallo on helppo saada pyörimään, mutta yhtä raskaan sauvan saaminen pyörimään on vaikeampaa.

Lisäksi hitausmomentti riippuu siitä, minkä akselin ympäri kappale pyörii. Esimerkiksi ohutta sauvaa on helppo pyörittää sen pituusakselin ympäri (kuva 5.10 (a)), mutta sauvan pyörittäminen tähän nähdyn kohitusauraan suuntaan on vaikeampaa (kuva 5.10 (b)). Ja sauvan pyörittäminen sen päästää on (kuva 5.10 (c)) on vielä vaikeampaa kuin sauvan pyörittäminen sen keskipisteen ympäri. Yleisesti kappaleen pyörittäminen on vaikeaa eli hitausmomentti on suuri, jos pyörivän kappaleen osat ovat kaukana pyörimisakselista, koska tällöin nämä osat joutuvat kiertämään pyörimisakselia suurella nopeudella.

Tarkastellaan tämän ymmärtämiseksi kuvassa 5.11 esitettävä systeemi, jossa kaksi lasta istuu hyvin kevyellä keinulaudalla. Keinulauta työnnetään liukkeelle toisesta päästä, jolloin lautan ja lasten muodostaman systeemin energia lisääntyy systeemiin tehdyn työn verran. Lapset ovat yhtä suuret ja istuvat yhtä kaukana akselista, joen toisen lapsen nostessa toinen laskeutuu yhtä paljon ja kaikkiaan systeemin potentiaalienergia on vakio. Jos lisäksi lautan vaikuttavat dissipatiiviset voimat ovat heikot (akseli on hyvin rasvattu), mekaanista energiota ei katoa ja kaikki systeemiin tehty työ lisää systeemin liike-energiaa. Lauta siis alkaa käännyä ja lapset liikkuvat kiihtyvällä vauhdilla.

Työnnetään keinulauta ensin liukkeelle niin, että lapset istuvat lähellä akselia. Toistetaan koe sitten niin, että lapset istuvat lautan päissä kaukana akselista. Molemmissa tapauksissa lautaa työnnetään samalla volla. Tällöin huomataan, että lauta käännyy huomattavasti *nopeammin* lasten istuessa *lähellä* akselia verrattuna tapaukseen, jossa lapset ovat kaukana akselista. Tämä tarkoittaa sitä, että pyörimislukkien muutosta vastustava *inertia* eli hitausmomentti on pienempi lasten istuessa lähellä akselia.

Tämä voidaan ymmärtää yksinkertaisesti energian säilymislain perusteella. Jos lauta on kevyt, systeemin liike-energia on ympyräradalla liikkuvien lasten liike-energiaa. Lisäksi jos kummassakin tilanteessa lautaa työnnetään samalla voimalla yhtä pitkä matka, systeemiin tehty työ on molemmissa tapauksissa *sama*. Niinpä systeemin saama liike-energia on molemmissa tapauksissa *sama* ja siten lasten *nopeuksien* on oltava kummassakin tapauksessa *samat*. Koska lapset kuitenkin istuvat eri etäisyyksillä lautan pyörimisakselista, lautan *kulmanopeus* ei ole sama.

Vivun kulmanopeuden  $\omega_\theta = v_\theta/r$ , lasten massojen  $m$  sekä lasten akselista mitatun etäisyyden  $r$  avulla ilmaistuna systeemin liike-energia on lasten liike-energoiden summa

$$K_{\text{rotaatio}} = 2 \left( \frac{1}{2} m v_\theta^2 \right). \quad (5.34)$$

Merkitsemällä lasten kokonaismassaa  $M = 2m$  liike-energia voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} M r^2 \omega_\theta^2 \quad (5.35)$$

## PYÖRIMISLIKE

eli *kulmanopeuden* nelion avulla. Tällöin kuitenkin liike-energian lausekkeessa esiintyy lasten massan lisäksi heidän istumapaikkojensa *pyörimisakselista mitatun etäisyyden neliö*. Määritellään nyt *r*-säteisellä *ympyräradalla liikkuvan massan hitausmomentiksi*

$$I_\theta = Mr^2. \quad (5.36)$$

Hitausmomentti riippuu akselista, jonka suhteen se mitataan, ja tässä alaindeksi  $\theta$  onkin muistuttamassa siitä, että käytössä on sama akseli jonka suhteen myös kulma  $\theta$  määriteltiin. Nyt kulmanopeuden avulla lausuttu liike-energia saa muodon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2. \quad (5.37)$$

Tämä lauseke on täsmälleen samanlainen kuin suoraviivaisen liikkeen liike-energian lauseke, kun nopeus korvataan kulmanopeudella ja inertia hitausmomentilla.



**5.12** Kahteen identtiseen palloon on kumpaan kiinnitetty hyvin kevyt lanka. Langoista pidempi on pituudeltaan kaksinkertainen lyhyempään nähdien. Palloja pyöritetään langan päästä kiinni pitäen niin, että kummallakin pallolla on sama vauhti, joka on likimain vakio. Kummalla pallolla on suurempi (a) hitausmomentti radan keskipisteen suhteen, (b) kulmanopeus, (c) liike-energia?

Yleensä kappaleen massa ei ole keskittynyt vain yhteen pisteeeseen kuten esimerkissä oletettiin, vaan massa on jakautunut koko kappaleeseen. Tarkasteltaessa kappaletta hiukkasten joukkona kokonaismassaa saadaan yhtälön (2.85) mukaisesti laskemalla kaikkien hiukkasten massat yhteen, koska massa on *ekstensiivinen suure*. Makroskooppisten kappaleiden hiukkasia ei tavallisesti voi havaita, ja siksi onkin usein kätevä ajatella kappaleiden koostuvan *jatkuvasta aineesta*. Tällöin kuitenkin voidaan kappale ajatella jaetuksi pieniin osiin, jolloin kappaleen kokonaismassaa saadaan laskemalla näiden osien massat yhteen. Osoittautuu, että myös hitausmomentti on *ekstensiivinen suure*, joten suuren kappaleen hitausmomenttikin voidaan laskea jakamalla kappale osiin, määrittämällä kunkin osan hitausmomentti (aina saman akselin suhteen) ja laskemalla nämä hitausmomentit yhteen.

Makroskooppisessä mittakaavassa massan jakautumista kuvaavat *intensiivinen suure tiheys*, joka kertoo paljonko massaa kappale sisältää tilavuusyksikköö kohden. Jos massa on tasaisesti jakautunut, kappaleen tiheys on vakio: massan ja tilavuuden suhde

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (5.38)$$

Jos massa on jakautunut epätasaisesti, tiheys ei ole vakio vaan riippuu paikasta. Tällöin tiheys missä tahansa pisteesä  $\vec{r}$  voidaan määritellä tarkastelemalla infinitesimaalisen pientä tilavuutta  $dV$  tämän pisteen ympärillä. Koska tilavuus on pistemäinen, tiheyttä voidaan pitää siinä vakiona. Jos tilavuus sisältää massan  $dm$ , tiheyden arvo tässä pisteesä on jälleen massan ja tilavuuden suhde

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (5.39)$$

Vastaavasti jos kappaleen tiheys tunnetaan, voidaan tilavuuden  $dV$  massa kirjoittaa muodossa

$$dm = \rho dV. \quad (5.40)$$

Kappaleen kokonaismassaa saadaan tällöin jakamalla koko kappale pieniin osiin kuvassa 5.12 (b) kuvattuun tapaan, laskemalla näiden osien massat sekä summaamalla massat yhteen. Infinitesimaalien massojen tapauksessa summaaminen tapahtuu integroimalla

$$m = \int dm = \int_V \rho dV. \quad (5.41)$$

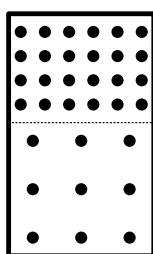


**5.13** Eräs sauva koostuu kolmesta osasta, joiden tiheydet ovat järjestyksessä  $800 \text{ kg/m}^3$ ,  $1000 \text{ kg/m}^3$  ja  $1300 \text{ kg/m}^3$  ja pituudet  $5.0 \text{ cm}$ ,  $15.0 \text{ cm}$  ja  $10.0 \text{ cm}$ . Sauvan poikkileikkausen pinta-ala on  $1.0 \text{ cm}^2$ . Mikä on sauvan massa?

Edellisessä tarkastelussa differentiaalin symbolia  $d$  käytettiin merkitsemään infinitesimaalisen pientä tilavuutta ja massaa. Tämän merkinnän tulkinta tässä tapauksessa on se, että kappale ajatellaan jaettavan osiin ja näiden osien koon annetaan lähestyä nollaa. Kyseessä ei siis ole tässä tapauksessa kappaleen tilavuuden tai massan *muutos*, kuten esimerkiksi merkinnässä  $v_x = dx/dt$ , sillä kappaleen koko ei muutu ajan kuluessa mihinkään. Ero merkinnän fysiikalisessa tulkinnassa johtuu siitä, että massa ja tilavuus ovat kappaleen *ekstensiivisiä* ominaisuuksia, jotka voidaan jakaa osiin, ja on mielekästä puhua pienien tilavuuden sisältämästä pienestä massasta. Paikka ja aika eivät ole ekstensiivisiä suureita, joten niiden tapauksessa differentiaali

Kuva 5.12: Kappaleen massa ja hitausmomentti voidaan määrittää kappaleen tiheyden avulla. Tällöin ajatellaan kappale jaetuksi pieniin osiin, joiden massa ja hitausmomentti voidaan laskea. Koko kappaleen massa ja hitausmomentti saadaan näiden summana.

(a) Hiukkasia koostuva kappale.

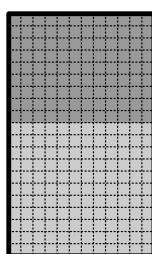


Paljon massaa pienessä tilavuudessa; suuri tiheys.

Vähän massaa suuressa tilavuudessa; pieni tiheys.

Kokonaismassa saadaan laskemalla hiukkasten massat yhteen.

(b) Jatkuvasta aineesta koostuva kappale.

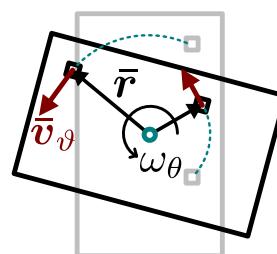


Suuri tiheys: tilavuusyksikössä paljon massaa.

Pieni tiheys: tilavuusyksikössä vähän massaa.

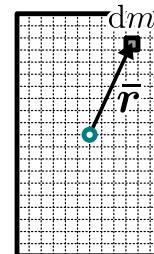
Kokonaismassa saadaan laskemalla osien massat yhteen.

(c) Pyörivä kappale.



Kappaleen pyöriessä sen kokin osa on ympyräliikkeessä.

(d) Kappaleen hitausmomentti.



Jaetaan kappale pieniin osiin dv, joiden massat ovat dm.

Kunkin osan hitausmomentti on dl = r^2dm.

Hitausmomentti on osien hitausmomenttien summa.

merkitsee suureen hyvin pientä muutosta. Kummassakin tapauksessa differentiaalimerkintä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että kyseinen suure on infinitesimaalisen pieni eli matemaattisesti laskussa otetaan raja-arvo suureen lähestyessä nolla.

Samantyyppisellä päätelyllä voidaan määrittää kappaleen hitausmomentti. Jos kappale pyörii paikoillaan pysyvän pyörimisakselin ympäri, sen hiukkaset liikkuvat eri nopeuksilla, mutta jokainen hiukkanen kiertää akselia *samalla kulmanopeudella* (kuva 5.12 (c)). Tällöin koko kappaleen pyörimiseen liittyvä liike-energia voidaan määrittää laskemalla kaikkien hiukkasten liike-energiat yhteen. Jos jätämme nyt hiukkasten satunnaisen liikkeen huomioimatta ja oletamme niiden todellakin pelkästään kiertävän akselia, kappaleen kokonaisliike-energia on

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}m_1v_{\theta,1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{\theta,2}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\theta,i}^2 \quad (5.42)$$

Kappaleen eri osat kuitenkin liikkuvat *eri nopeuksilla*, joten nopeus  $v_{\theta,i}$  on hiukkisen akselista mitatun etäisyyden  $r_i$  funktio eikä vakio. Niinpä kappaleen liike-energiaa ei voi ilmaista sen hiukkasten nopeuksien avulla tätä yksinkertaisemmassa muodossa. Kappaleen kaikki osat liikkuvat kuitenkin *samalla kulmanopeudella*  $\omega_\theta = v_{\theta,i}/r_i$ , joten tämä voidaan sijoittaa liike-energian lausekkeeseen ja ottaa summassa yhtiseksi tekijäksi

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}m_1\omega_\theta^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_\theta^2 r_2^2 + \dots = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega_\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_\theta^2. \quad (5.43)$$

Määrittelemällä jälleen kappaleen hitausmomentti

$$I_\theta = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2, \quad (5.44)$$

myös pyörivän kappaleen pyörimisen liike-energia voidaan kirjoittaa muodossa  $K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2$ . Toisin sanoen kappaleen hitausmomentti pyörimisakselin suhteeseen saadaan *laskemalla yhteen sen jokaisen hiukkisen hitausmomentti* (tämän saman akselin suhteeseen mitattuna). Hitausmomentti on siis *ekstensiivinen* suure kuten massakin.

Huomaa erityisesti, että yhtälö (5.36),  $I = mr^2$ , pätee ainoastaan kappaleille, joiden *kaikki* massa on keskittynyt etäisyydelle  $r$  pyörimisakselista. Jos näin ei ole, kyseistä sääntöä *ei voi käyttää* kappaleen hitausmomentin laskemiseksi. Sääntö pätee kuitenkin kappaleen jokaiselle hiukkaselle erikseen, ja koko kappaleen hitausmomentti saadaan laskemalla hiukkasten hitausmomentit yhteen.



**5.14** Käsipainossa on melko kevyt varsi ja sen kummassakin päässä on raskas massa. Jos painoa pyöritetään sen varteen näiden kohtisuoran akselin ympäri, onko tämä helpompaa akselin kulkissa painon keskipisteen vai toisen pään kautta? Mikä on näiden akseleiden suhteeseen laskettujen hitausmomenttien suhde?

Makroskooppisessa mittakaavassa hitausmomentti voidaan määrittää samalla periaatteella, mutta nyt kappaleita ei kannata ajatella jaetuksi hiukkasiin vaan pieniin osiin, joiden tilavuus on  $dV$  ja massa  $dm$ . Laskemalla näiden osien liike-energiat  $dK = \frac{1}{2}(dm)v^2$  yhteen päädytään integraaliin

$$K_{\text{rotaatio}} = \int \frac{1}{2}v_\theta^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v_\theta^2 dV. \quad (5.45)$$

## PYÖRIMISLIKE

Siirtymällä jälleen käyttämään kulmanopeutta tämä saa muodon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} \omega_\theta^2 \int_V \rho r^2 dV \quad (5.46)$$

ja integroitavaksi jäävät vain kappaleen materiaalista ja muodosta riippuvat suureet. Lopputuloksena saadaan siis jälleen sama pyörimisen liike-energian lauseke  $K = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2$  kuin yhtälössä (5.37), kun kappaleen hitausmomentiksi määritellään

$$I_\theta = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV. \quad (5.47)$$

Hitausmomentti on siis muuten samanlainen tiheyden integraali kuin kappaleen kokonaismassa (5.41) paitsi että hitausmomenttia määritettäessä tiheytä täytyy painottaa sen pyörimisakselista mitattu etäisyys neljällä.

Edellisissä tarkasteluissa osoitettiin, että kappaleen pyörimisen liike-energia voidaan *aina* esittää hitausmomentin ja kulmanopeuden avulla yhtälön (5.37) mukaisesti, olipa kyseessä pyörimis- tai ympyräliike. Lisäksi koska etenevä ja pyörivä liike voidaan erottaa toisistaan, myös kappaleen *liike-energia voidaan erotella* etenevän ja pyörivän liikkeen osuuksista

$$K = K_{\text{cm}} + K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2. \quad (5.48)$$

Tämä pätee jos kappale lükkuu ja pyörii samalla massakeskipisteensä ympäri, jolloin myös hitausmomenttina täytyy käyttää juuri massakeskipisteen suhteen laskettua hitausmomenttia. Jos kappale pyörii jonkin toisen, künneän akselin ympäri, sen pyörimisen energia voidaan laskea yksinkertaisesti käyttämällä tämän akselin suhteen määritettyä hitausmomenttia, joka on siis aina *suurempi* kuin massakeskipisteen suhteen laskettu hitausmomentti. Tällöin massakeskipisteen liikkeen energiasta ei kuitenkaan pidä laskea enää erikseen mukaan, koska se huomioidaan jo pyörimislukkeen energiassa suuremman hitausmomentin kautta.



**5.15** Oven massa on 30 kg, leveys 1.0 m, hitausmomentti saranoiden suhteen 10.0  $\text{kgm}^2$  ja hitausmomentti massakeskipisteen suhteen 2.5  $\text{kgm}^2$ . Ovi sulkeutuu tasaisella kulmanopeudella niin, että se käännytää neljänneskierroksen kahdessa sekunnissa. Mikä on (a) oven massakeskipisteen liike-energia, (b) pyörimisen liike-energia massakeskipisteen ympäri, (c) pyörimisen liike-energia saranoiden ympäri?

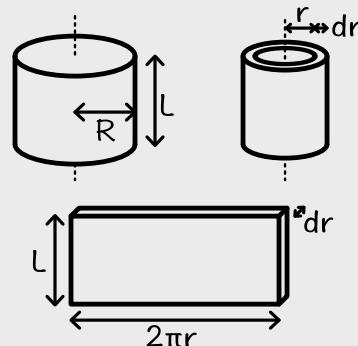
### esimerkki 5.2

### Hitausmomentti

**Laske homogenisen (tiheys vakio) sylinterin hitausmomentti sen keskiakselin suhteen. Ilmaise tulos sylinterin kokonaismassan  $m$ , korkeuden  $L$  ja säteen  $R$  avulla.**

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään akselista mitattua etäisyyttä  $r$ .

**SUUNNITELMA** Kappaleen jokaisen pisteen hitausmomentti riippuu pisteen massasta ja sen akselista mitatusta etäisyydestä. Sylinteri voidaan ajatella jaetuksi ohuisiin,  $dr$ -paksuisiin kuoruihin, jolloin kunkin kuoren kaikki hiukkaset ovat yhtä kaukana akselistä. Nämä tällaisen kuoren hitausmomentti saadaan kertomalla keskenään kuoren massa ja sen akselista mitattun etäisyyden neliö. Koko sylinterin hitausmomentti saadaan laskemalla kuorien hitausmomentit yhteen.



Yhden  $r$ -säteisen kuoren pinta-ala on sen korkeuden  $L$  ja ympärysmitan  $2\pi r$  tulo,  $A = 2\pi r L$ . Kuoren tilavuus voidaan arvioida sen pinta-alan  $A$  ja tästä vastaan kohtisuoran korkeuden  $dr$  tulona,

$$dV = 2\pi r L dr. \quad (5.49)$$

Tämä tilavuus voidaan laskea myös  $r$ -säteisen sylinterin tilavuuden  $V = \pi r^2 L$  kautta, sillä tilavuuden derivaatta säteen suhteeseen on  $\frac{dV}{dr} = 2\pi r L$  eli tilavuuden muutos säteen kasvaessa infinitesimalisen määrään  $dr$  on  $dV = 2\pi r L dr$ .

Kuoren massa on verrannollinen sylinterin tiheyteen. Koska tiheys on tässä vakio, se on yksinkertaisesti sylinterin kokonaismassan ja kokonaistilavuuden suhde  $\rho = m/V = m/(\pi R^2 L)$ . Ohuen kuoren massa on siten  $dm = \rho dV = \frac{2mr^3}{R^2} dr$ .

Kuoren hitausmomentti on näin ollen  $dI_\theta = r^2 dm = \frac{2mr^3}{R^2} dr$ . Ja koko sylinterin hitausmomentti saadaan laskemalla yhteen kaikkien kuorien hitausmomentit

$$I_\theta = \int dI_\theta = \int_0^R \frac{2mr^3}{R^2} dr. \quad (5.50)$$

**RATKAISU** Hitausmomentiksi saadaan

$$I_\theta = \int_0^R \frac{2mr^4}{4R^2} = \frac{1}{2}mR^2. \quad (5.51)$$

Mathematica:

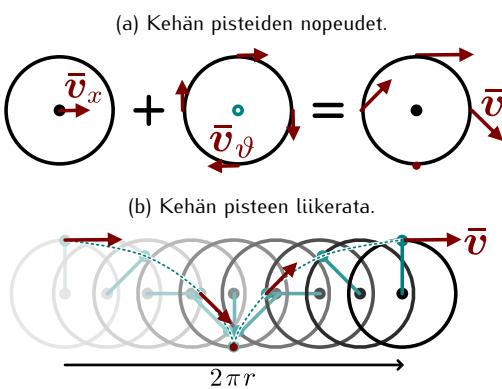
```
(* sylinterin tilavuus ja tiheys *)
V[r_] := Pi r^2 l; rho = m / V[R]; dVperdr = D[V[r], r]
2 l Pi r

(* hitausmomentti *)
i = Integrate[rho r^2 dVperdr, {r, 0, R}]
m R^2 / 2
```

**ARVIOINTI** Hitausmomentti on verrannollinen kappaleen massaan ja sen säteen neliöön kuten pitääkin. Tekijä  $1/2$  seuraa kappaleen muodosta, eikä sitä voi helposti päättää laskematta integraalia.

## Vieriminen

Kuva 5.13: Vierivän kappaleen liike.



Yleinen ja tärkeä erikoistapaus etenevän ja pyörivän liukkeen yhdistelmästä on **vieriminen** liukumatta. Lähes mikä tahansa pyöreä kappale nimitäin päätyy vierimään, jos sen annetaan liikkua vapaasti, ja esimerkiksi renkailla kulkevien ajoneuvojen liikkuminen perustuu renkaiden vierimiseen. Vierimisen *liukumattomuus* tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että pinnalla vierivän kappaleen pintaa koskettavat osat *eivät liiku* pinnan suhteen. Kappaleet voivat vieriä myös liukuen, mikä esimerkiksi renkaiden tapauksessa tarkoittaa sutimista tai lukkojarrutusta. Tällöin pinnat liukuvat toistensa suhteen ja niiden välillä vaikuttaa liukukitka. Kappaleiden vieressä liukumatta pinnat ovat paikoillaan toistensa suhteen ja niiden välillä vaikuttaa lepokitka.

Jos pinnat ovat paikoillaan toistensa suhteen, niiden molempien täytyy joko olla paikoillaan tai liikkua samalla

nopeudella. Esimerkiksi maata pitkin vierivän pallon täytyy liikkua niin, että sen maata koskettava piste on aina hetkellisesti paikoillaan. Tämä voi olla helpoin ymmärtää jakamalla pallon liike etenevään ja pyörivään osuuteen. Pallon massakeskipiste etenee nopeudella

$$\bar{v}_{cm} = v_x \hat{i}, \quad (5.52)$$

mutta samalla se pyörii niin että sen pinnan pisteen liikkuvat massakeskipisteen suhteeseen nopeudella

$$\bar{v}_{rotaatio} = -\omega_\theta r \hat{\vartheta}, \quad (5.53)$$

jos pallon säde on  $r$ . Kappaleen kunkin pisteen nopeus on näiden summa

$$\bar{v} = \bar{v}_{cm} + \bar{v}_{rotaatio}. \quad (5.54)$$

Erityisesti maata koskettavan pisteen pyörimisnopeus on  $\bar{v}_{rotaatio} = -\omega_\theta r \hat{\vartheta}$ , joten piste on paikoillaan jos

$$\bar{v} = (v_x - \omega_\theta r) \hat{i} = \bar{0}. \quad (5.55)$$

Näin on jos pallon nopeuden ja kulmanopeuden välillä pätee **vierimisehdo**

$$v_x = \omega_\theta r. \quad (5.56)$$

Lisäksi koska tämän täytyy päteä aina, nopeuden ja kulmanopeuden täytyy muuttua yhtä nopeasti, ja kiihykyksille pätee vastaava ehto

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\omega_\theta}{dt} r = \alpha_\theta r. \quad (5.57)$$



**5.16** Liukuhihna kulkee nopeudella 1 m/s lattian suhteen ja sen päällä vierii liukumatta pallo nopeudella 1 m/s lattian suhteen pääinvastaiseen suuntaan. Pallon säde on 10 cm. Mikä on pallon kulmanopeus?

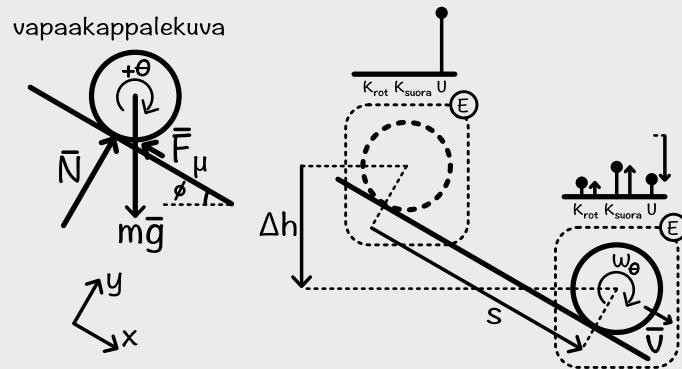
## esimerkki 5.3

## Vieriminen

**Pallo** (massa  $m$  ja säde  $R$ ) lähee vierimään liukumatta alas rinnettä, jonka kaltevuuskulma on  $\phi$ . (a) Kuinka suuri kitkavoima palloon vaikuttaa? (b) Mikä on pallon nopeus, kun se on kulkenut tasoa pitkin matkan  $s$ ?

**TILANNE** Piirretään pallolle vapaakkappalekuva ja energidiagrammi. Valitaan systeemiksi pallo ja painovoimakenttä.

**SUUNNITELMA** Palloon vaikuttaa painovoima sekä kosketus- ja kitkavoima sen kosketuspisteessä tason kanssa. Kitka on lepokitkaa, sillä pallo ei liu'u. Palloon kohdistuvat voimat voidaan jakaa pinnan suuntaisiin ( $x$ ) ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin ( $y$ ). Koska pallo liikkuu pinnan suunnassa, palloon kohdistuvan kokonaivoiman on oltava  $y$ -suunnassa nolla. Kokonaivoiman  $x$ -komponentti kiidhyttää pallon liikkeseen. Koska pallo ei liu'u, sillä on oltava kulmakihtyyvyys, joka saa pallon pyörimään. Tämän kulmakihtyyvyden tuottaa kitkavoiman momentti, sillä muiden voimien momentti pallon keskipisteen suhteeseen on nolla.



Kitka ja kosketusvoima eivät kuitenkaan tee palloon työtä, sillä voimien vaikutuspiste ei liiku. Tämä voi vaikuttaa oudolta, sillä pallohan liikkuu alas tasoa, mutta koska pallo vierii, sen pinnan pistet saapuvat tasolle kohtisuorassa tasoon nähdyn (vertaa kuvaan 5.13) ja tasoon koskettavat pallon pistet ovat aina tason suhteeseen paikoillaan. Niinpä systeemin kokonaisenergia on vakio. Aluksi pallolla on potentiaalienergiaa, ja tämä muuttuu prosessissa pallon suoraviivaisen ja pyöriävän liikkeen liike-energiaksi.

Palloon kohdistuvan kokonaivoiman  $x$ -komponentti on  $F_{x,\text{kokonais}} = mg \sin \phi - F_\mu$ . Palloon kohdistuva kokonaismomentti on puolestaan  $\tau_\theta = RF_\mu$ . Pallon etenevän liikkeen likeyhtälö dynamiikan peruslain mukaisesti on  $F_{x,\text{kokonais}} = ma_x$  ja vastaavasti pyörimiselle  $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$ .

Pallon kulkissa matkan  $s$  se laskeutuu matkan  $\Delta h = -s \sin \phi$ . Tällöin sen potentiaalienergian muutos on  $\Delta U = mg\Delta h = -mgs \sin \phi$ . Koska pallon vauhti kasvaa, sen liike-energia lisääntyy,  $\Delta K = \Delta K_{\text{etenevä}} + \Delta K_{\text{rotatoo}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I_\theta \omega_\theta^2$ . Energian säilymisestä seuraa  $\Delta K = -\Delta U$ .

Vierimisehdon mukaan pallon kulmanopeuden ja nopeuden välillä on yhteyks  $v_x = \omega_\theta R$  ja samoin kulmakihtyydyiden ja kiihtyydyiden välillä pätee  $a_x = \alpha_\theta R$ . Pallon hitausmomentti puolestaan on  $I_\theta = \frac{2}{5}mR^2$ , minkä voi laskea esimerkin 5.2 tapaan tai etsiä taulukosta.

**RATKAISU** (a) Lükeyhtälöt voi yhdistää vierimisehdon avulla

$$RF_\mu = \tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta = \frac{2}{5}mR^2 \alpha_\theta = \frac{2}{5}mRa_x = \frac{2}{5}RF_{x,\text{kokonais}} = \frac{2}{5}R(mg \sin \phi - F_\mu). \quad (5.58)$$

Tästä voidaan ratkaista kitkavoima

$$F_\mu = \frac{2}{7}mg \sin \phi. \quad (5.59)$$

(b) Liike-energian muutos on

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2 \frac{v_x^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_x^2. \quad (5.60)$$

Niinpä energian vakioisuudesta seuraa  $\frac{7}{10}mv_x^2 = mgs \sin \phi$  eli pallon saama nopeus on

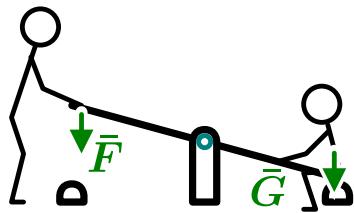
$$v_x = \sqrt{\frac{10}{7}gs \sin \phi}. \quad (5.61)$$

**ARVIOINTI** Huomaa, että ratkaisussa ei käytetty kitkakerrointa vaan kitkavoiman suuruus määritetti vierimisehdosta. Tällöin oletettiin, että lepokitka voi olla kyllin suuri estämään pallon liukumisen. Jos näin ei ole, pallo alkaa liukua ja palloon vaikuttaa liukukitka.

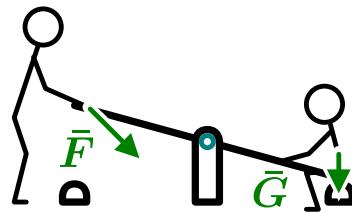
Helppojen erikoistapauksia ovat  $\phi = 0$  (vaakasuora taso) ja  $\phi = \pi/2$  (pystysuora taso). Kun taso on vaakasuora, pallon nopeus on  $v_x = 0$  m/s, mikä on järkevä, koska pallon nopeuden ei kuulua sen vieressä vaakatasossa. Kun taso on pystysuora, pallon nopeus on  $v_x = \sqrt{10gs/7}$ . Tämä on vähemmän kuin vapaassa pudotuksessa, jossa  $v_x = \sqrt{2gs}$ . Näin pitää olla, koska nyt osa potentiaalienergiasta kuluu pallon pyörimisen liike-energiaksi, jolloin suoraviivaisen liikkeen liike-energian täytyy olla pienempi kuin vapaassa pudotuksessa, jossa kaikki potentiaalienergia muuttuu suoran liikkeen energiaksi.

Kuva 5.14: Voiman kyky kääntää kappaletta riippuu voiman suuruudesta, suunnasta sekä vaikutuspisteestä. Kuvassa on esitetty kolme tapaa kääntää keinulautaa yhtä nopeasti.

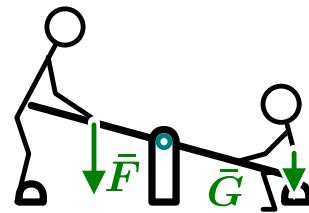
(a) Voima kaukana akselista.



(b) Viistoon kohti akselia osoittava voima.



(c) Voima lähellä akselia.



### 5.3 Momentti

Kappaleiden vuorovaikutuksia voidaan kuvata voiman, impulssin, työn tai potentiaalienergian avulla, ja näiden suureiden perusteella voidaan myös päätellä kuinka vuorovaikutukset vaikuttavat kappaleiden liikkeeseen. Vuorovaikutukset ovat vastuussa sekä kappaleiden etenevän että pyörivän liikkeen muutoksista, ja seuraavaksi tarkastelemme miten vuorovaikutusten tuottamat voimat vaikuttavat pyörimiseen. Pyörivien kappaleiden hiukkasethan ovat etenemisliikkeessä, jonka muutoksia voidaan kuvata voimien avulla, joten myös pyörimisen dynamiikka voidaan selittää tarkastelemalla hiukkasiin kohdistuvia voimia. Osoittautuu kuitenkin, että pyörimislükkeen tapauksessa kappaleiden dynamiikan kuvaus helpottuu, kun määrittelemme uuden suuren, **momentin**.

Nimitys momentti on hiukan huono, koska se viittaa mekanikkassa yleisesti pyörimiseen. Esimerkiksi hidausmomentti tarkoittaa pyörimisen hitautta eli inertiansi. Niinpä momenttia kutsutaankin joskus myös voiman momentiksi tai väentömomentiksi sekä annusten välttämiseksi. Kuitenkin pelkkä "momentti" viittaa aina juuri tähän vuorovaikutuksiin kuvavaan suureeseen, eikä sitä pidä sekoittaa muihin suureisiin, joiden nimessä sana momentti esiintyy.

#### Voiman momentti

Tarkastellaan jälleen keinulautaa, jolla istuu lapsi. Lapseen kohdistuu painovoima, joka pyrkii kääntämään laudan ja lapsen muodostaman systeemin niin, että lapsi liikkuu kohti maata. Jos nyt lapsi halutaan nostaa ylös laudan toiselta puolelta työntämällä, nostaja huomaa tämän onnistuvan helpoiten laudan päästää lautaa vasten kohtisuoraan työntäen (kuva 5.14). Työntäminen lähetää akselia tai vinosti laudan suuntaan nähdyn vaatii huomattavasti suurempaa voimaa. Toisin sanoen voiman kappaletta kääntävä vaikutus riippuu voiman suuruuden lisäksi voiman *suunnasta sekä paikasta, johon voima kohdistuu*.

Tämän kvalitatiivisen havainnon täsmantäminen onnistuu jälleen tarkastelemalla systeemin energiata ja siihen tehtyä työtä. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi prosessia, jossa lauta työnetään voimalla  $\bar{F}$  niin, että lapsi nousee ylös ja lauta kääntyy kulman  $\Delta\theta$ . Tällöin systeemin energia kasvaa määränpäin  $\Delta E$ . Jos dissipatiiviset voimat ovat heikot, mekaanista energiota ei katoa, ja näin ollen systeemin mekaanisen energian muutoksen on oltava yhtä suuri kuin systeemiin tehty työ,  $W = \Delta E$ .

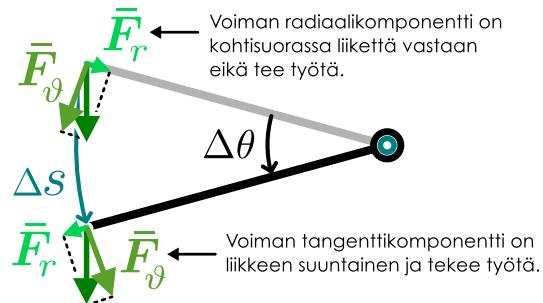
Lautaa kääntävä voima kohdistuu laudan pisteenseen, joka on etäisyydellä  $r$  akselista. Tämä piste kulkee laudan kääntyessä ympyrän kaaren muotoisista rataa ja tällöin *työtä tekee ainoastaan siirtymän suuntainen voiman komponentti* eli tässä tapauksessa voiman *tangenttikomponentti* (kuva 5.15). Jos voiman tangenttikomponentti on liikkeen aikana vakio, sen tekemä työ on yksinkertaisesti kuljetun matkan ja voiman liikkeen suuntaisen komponentin eli tangenttikomponentin tulo,

$$W = F_\vartheta \Delta s. \quad (5.62)$$

Yleisesti työ on voiman liikkeen suuntaisen komponentin integraali kuljetun matkan suhteeseen

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int F_\vartheta ds. \quad (5.63)$$

Kuva 5.15: Voiman radiaali- ja tangenttikomponentti.



## PYÖRIMISLIKE

Lisäksi koska voima vaikuttaa aina samalla etäisyydellä kappaleen pyörimisakselistä, voiman vaikutuspiste siirtyy kappaleen käännyessä kulman  $d\theta$  matkan

$$ds = rd\theta. \quad (5.64)$$

Jos tangenttikomponentti on vakio, tehty työ on siis

$$W = F_\theta r \Delta\theta \quad (5.65)$$

ja yleisesti

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} F_\theta r d\theta. \quad (5.66)$$

Tuloksesta nähdään, että laudan käännyessä lautanen tehty työ riippuu siihen kohdistuvan *voiman tangenttikomponentista* sekä *voiman vaikutuspisteen etäisyydestä pyörimisakseliin*. Jos esimerkiksi lautaa halutaan käänää lähempää akselia (eli  $r$  on pienempi), on käytettävä suurempaa voimaa, jotta laudan käännyessä yhtä suuren kulman saataisiin tehtyä yhtä suuri työ.

Tämä voiman tangenttikomponentin ja pyörimisakselistä mitatun etäisyyden tulo on *voiman momentti akselin suhteen*

$$\tau_\theta = rF_\theta. \quad (5.67)$$

Edellä esitetyn perusteella *vakiomomentti* tekee kappaleen käännyessä työn

$$W = \tau_\theta \Delta\theta, \quad (5.68)$$

ja *muuttuvan momentin* tapauksessa työ on yhtälön (5.66) mukaisesti

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} \tau_\theta d\theta. \quad (5.69)$$

Huomaa, että näin saatu momentin työn lauseke on täsmälleen samanlainen kuin voiman työn lauseke yksilotteisen liikkeen tapauksessa, kun voiman skalaarikomponentti liikkeen suunnassa on korvattu momentilla ja siirtymä kiertokulmalla.

Edelleen jos momentin aiheuttaa *konservatiivinen vuorovaikutus*, sen tekemä työ on vastakkaismerkkinen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutoksen kanssa

$$-dU = dW = \tau_\theta d\theta, \quad (5.70)$$

ja momentti on siten yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin potentiaalienergian derivaatta *kulman suhteen*

$$\tau_\theta = -\frac{dU}{d\theta} \quad (5.71)$$

aivan kuten *voima* on potentiaalienergian derivaatta *paikan* suhteen. Konservatiivisen voiman momentti pyrkii siis aina käantämään kappaleita suuntaan, johon potentiaalienergia pienenee, aivan kuten voima osoittaa pienenevän potentiaalienergian suuntaan.

Momentin yksikkö on

$$[\tau_\theta] = [r][F_\theta] = \text{Nm}, \quad (5.72)$$

mikä on periaatteessa sama kuin työn ja energian yksikkö, joule. Kuitenkin koska momentin luonne on täysin erilainen kuin työllä, momentin yksikköä ei koskaan kutsuta jouleksi, vaan se on "newtonmetri". Huomaa myös, että laskettaessa momentin tekemää työtä momentti kerrotaan kiertokulmalla  $\Delta\theta$ , jonka yksikkö on radiaani. Radiaani kuitenkin on vain kulman absoluuttiselle yksikölle annettu erikoisnimi, ja periaatteessa radiaani on

$$\text{rad} = \frac{[s]}{[r]} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \quad (5.73)$$

eli kulma on *yksikötön suure*. Niiinpä momentin ja kiertokulman tulon yksikkö,  $\text{Nm} \times \text{rad}$ , on dimensioltaan edelleen "newton kertaa metri", mutta koska tämä suure on momentin tekemä työ, sitä kutsutaan jouleksi eikä "newtonmetriksi".

Voiman akselia kohti osoittava komponentti ei tee työtä kappaleen käännyessä joten se ei voi myöskään vaikuttaa kappaleen pyörimiseen. Jos voimavektorin ja akselista voiman vaikutuspisteesseen osoittavan paikkavektorin välinen kulma on  $\phi$  (kuva 5.16), voiman skalaarikomponentti paikkavektoriin nähden *kohtisuorassa* suunnassa,  $F_{\perp r}$ , on

$$|F_\theta| = F \sin \phi = F_{\perp r}. \quad (5.74)$$

Toisaalta paikkavektorin voimaan nähdien kohtisuora skalaarikomponentti on

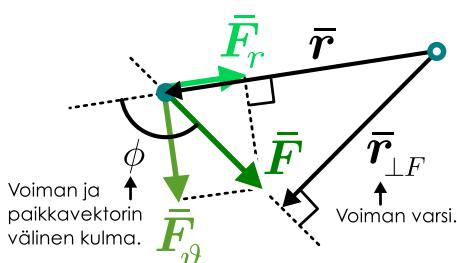
$$r_{\perp F} = r \sin \phi, \quad (5.75)$$

joten momentti voidaan kirjoittaa vaihtoehtoihin muotoihin

$$|\tau_\theta| = |r F_\theta| = r F \sin \phi = r F_{\perp r} = r_{\perp F} F. \quad (5.76)$$

Näitä vaihtoehtoisia esitystapoja käytettäessä on huomioitava, että momentilla on etumerkki. Jos momentti pyrkii kääntämään kappaletta kulman  $\theta$  kasvusuuntaan, momentti on positiivinen, ja päinvastaisessa tapauksessa negativinen. Paikkavektorin skalaarikomponenttia voimavektoria  $\bar{F}$  vastaan kohtisuorassa suunnassa,  $r_{\perp F}$ , kutsutaan *voiman varreksi* tai *vipuvarreksi*. Voiman momentti on siis sitä suurempi mitä pidempi on voiman varsi, ja siksi kappaleiden kääntäminen onnistuu pienelläkin voimalla kunhan voima vaikuttaa tarpeeksi kaukaa ja se osoittaa pyörimissuuntaan eikä kohti akselia.

Kuva 5.16: Momentin voi laskea voiman varren avulla.



kulmamuuttujat pitääkin määrittää saman kiintopisteenvaihteen!

Momentti määriteltiin yllä nimenomaan origon suhteeseen. Momenttia laskettaessa täytyy *aina* valita jokin kiintopiste, jonka suhteeseen voiman varsi tai voiman tangentisuunta määritellään. Kiintopisteen ei tarvitse olla koordinaatiston origossa, vaan sen voi valita vapaasti. Usein hyödyllisin valinta tälle kiintopistelle on joko kiinteä akseli, jonka ympäri kappale pyörii, tai kappaleen massakeskipiste, jos kappale liikkuu vapaasti. Kuitenkin kun kiintopiste on kerran valittu, *kaikkien voimien momentit pitää määrittää saman kiintopisteenvaihteen*, koska eri akseliteiden suhteeseen lasketut momentit eivät ole samat. Aivan samoin kappaleen *hitausmomentti* riippuu pisteestä, jonka suhteeseen se määritetään. *Kaikki*

- 5.17** Kappale on kiinnitetty kiinteään akseliin, joka on koordinaatiston origossa. Kappaleeseen kohdistuu voima  $\bar{F} = (2.0 \text{ N})\hat{i} + (2.0 \text{ N})\hat{j}$ , joka vaikuttaa pisteessä  $\bar{r} = (-3.0 \text{ m})\hat{i}$ . (a) Mikä on voiman suuruus? (b) Mikä on voiman vaikutuspisteen etäisyys origosta? (c) Mikä on voiman tangenttikomponentti? (d) Mikä on voiman varren pituus? (e) Mikä on voiman momentin suuruus? (f) Pyrkikö voima kääntämään kappaletta myötä- vai vastapäivään?

## Pyörimisen likeyhtälö

Momentti siis tekee kääntyvään kappaleeseen työtä aivan samoin kuin voima tekee työtä siirtymään kappaleeseen. Jos kappaleeseen kohdistuu vain yksi momentti, sen tekemän työn täytyy siirtää energiaa kappaleen liikkeeseen eli toisin sanoen momentin täytyy pystyä muuttamaan kappaleen pyörimislukkettä. Momentti siis vaikuttaa pyörimislukkeseen aivan samoin kuin voima vaikuttaa etenevään liikkeeseen, ja erityisesti pyörimislukkelle pitäisi päteä samantyyppinen laki kuin dynamiikan peruslaki,  $F_x = ma_x$ , kun voima, inertia ja kiihtyvyys korvataan vastaavilla kulmasuureilla: momentilla, hitausmomentilla sekä kulmakihtyvyydyllä. Seuraavaksi päätelemme, että näin todella on.

Kun kappaleeseen vaikuttaa useita voimia, ne kaikki kohdistavat kappaleeseen momentin ja *kokonaismomentti* on näiden summa

$$\tau_{\theta, \text{kokona}} = \tau_{\theta,1} + \tau_{\theta,2} + \dots = \sum_i \tau_{\theta,i}. \quad (5.77)$$

Kuten suoraviivaisenkin liikkeen tapauksessa kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman tekemä työ muuttaa kappaleen suoraviivaisen liikkeen liike-energiaa, *kokonaismomentin tekemä työ muuttaa kappaleen pyörimislukkien liike-energiaa*

$$\Delta K_{\text{rotaatio}} = W_{\text{kokona}}. \quad (5.78)$$

Niinpä momentin täytyy muuttaa kappaleen kulmanopeutta eli se *aiheuttaa kulmakihtyvyyden*.

Tarkastellaan ensin ympyräradalla kulkeva hiukkasta. Ympyräraata kulkevalla hiukkasella on aina keskeiskihtyvyyttä kohti radan keskipistettä, ja tämän kiihtyvyyden täytyy aiheuttaa hiukkaseen kohdistuvasta kohti radan keskustaa osoittavasta voiman radiaalikomponentista. Jos hiukkisen radan säde on  $r$ , siihen kohdistuvan kokonaivoiman  $\bar{F}_{\text{kokona}}$  radiaalikomponentin suuruus määrittyy yhtälön (5.26) perusteella, eikä tämä komponentti muuta hiukkisen vauhtia. (Tai toisin päin: hiukkaseen kohdistuvan voiman radiaalikomponentin suuruus määritää hiukkisen radan sääteen.) Kokonaivoiman tangenttikomponentti sen sijaan muuttaa yhtälön (5.25) mukaisesti hiukkisen vauhtia eli tuottaa hiukkaselle radan tangentin suuntaisen kiihtyvyyden

$$F_{\vartheta, \text{kokona}} = m a_\vartheta = m \alpha_\vartheta r. \quad (5.79)$$

## PYÖRIMISLIIKE

Koska kaikki yhteen hiukkaseen kohdistuvat voimat vaikuttavat samassa pisteessä yhtä kaukana pyörimisakselista,  $r_i = r$ , tämä yhtälö voidaan momentin avulla kirjoittaa muodossa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = r_1 F_{\theta,1} + r_2 F_{\theta,2} + \dots = r(F_{\theta,1} + F_{\theta,2} + \dots) = rF_{\theta,\text{kokonais}} = rma_{\theta} = mr^2\alpha_{\theta}. \quad (5.80)$$

Huomataan vielä, että  $I_{\theta} = mr^2$  on hiukkasen hitausmomentti, joten voidaan kirjoittaa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}. \quad (5.81)$$

Tämä on **pyörimisen lükeyhtälö**, kun **hitausmomentti on vakio**, ja tämäkin laki on täsmälleen samanlainen kuin vastaava suoraviivaisen liikkeen yhtälö  $F_x = ma_x$ , missä suureet on korvattu vastaavilla pyörimislükkeen suureilla.

Edellisessä analyysissä tutkimme pistemäistä kappaletta, mutta sama tulos pätee myös suuremmille kappaleille, mikä nähdään tutkimalla momentin vaikutusta pyörivän kappaleen energiaan. Jos kappaletti nimittäin käantyy pienien kulman  $d\theta$ , sen lüke-energia muuttuu momentin tekemän työn vaikutuksesta määrään

$$dW_{\text{kokonais}} = \tau_{\theta,\text{kokonais}} d\theta = dK = \frac{1}{2} I_{\theta} d(\omega_{\theta}^2). \quad (5.82)$$

Edelleen jakamalla tämä kulman differentiaalilla saadaan ratkaistua momentti

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{1}{2} I_{\theta} \frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\theta}. \quad (5.83)$$

Käytämällä kulmanopeuden määritelmää ja derivoinnin ketjusääntöä (eli differentiaaleilla lanttamista) nähdään lausekkeessa esiintyvän derivaatan olevan verrannollinen kulmakihtyvytteen

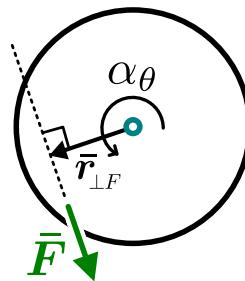
$$\frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\theta} = \frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\omega_{\theta}} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2\omega_{\theta} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2 \frac{d\omega_{\theta}}{dt} = 2\alpha_{\theta}. \quad (5.84)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.83) saadaan tulokseksi jälleen  $\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}$  eli lükeyhtälö (5.81).

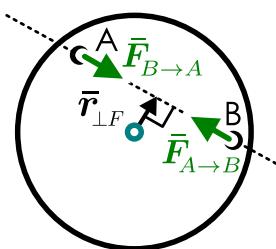
Pyörivän jäykän kappaletin tapauksessa kappaletseen kohdistuva kokonaismomentti voidaan määrittää laskemalla yhteen kaikkiin kappaletin osiin kohdistuvat momentit. Kappaletin sisäisten vuorovaikutusten voimien momentit eivät voi vaikuttaa kappaletin pyörimiseen, sillä jos kaksi kappaletin hiukkasta, A ja B, vuorovaikuttavat, niihin kohdistuu yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset voimat (kuva 5.18). Koska voimat ovat yhden-suuntaiset hiukkasten kautta kulkevan suoran kanssa, niillä täytyy olla yhtä suuret vpuvarret ja niinpä ne kohdistavat kappaletseen yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset momentit. Siispä näiden sisäisten vuorovaikutusten vaikutus kappaletin pyörimiseen kumoutuu, ja *ainoastaan ulkoisten vuorovaikutusten momentit muuttavat kappaletin kulmanopeutta*.

Yllä esitetyissä laskuissa oletettiin hitausmomentin  $I_{\theta}$  olevan *vakio*, ja näin johdettu lükeyhtälö pätee vain tässä erikoistapauksessa. Jäykkien kappaletten hitausmomentit toki ovat vakiot, mutta hitausmomentti voi kuitenkin helposti muuttua, jos pyörivä kappalet ei ole jäykkä tai tarkastellaan *liikkuvista osista* koostuvaa pyörivää systeemiä. Esittemme kaikissa tilanteissa pätevän pyörimisen yleisen lükeyhtölön luvun lopussa, kun tarkastelemme pyörimislükkeen esitystä kolmessa ulottuvuudessa.

Kuva 5.17: Momentti tuottaa kulmakihtyvyden.



Kuva 5.18: Sisäisten voimien momentit kumoutuvat.



- 5.18** Keinulaudalla istuu kaksi lasta, joiden massat ovat 15 kg sekä 20 kg. (a) Millainen kokonaismomentti lautan kohdistuu, jos kumpikin istuu 1.0 m etäisyydellä laudan akselista? (b) Jos laudan hitausmomentti akselin suhteeseen on 8.0  $\text{kgm}^2$  ja kummankin lapsen jalat ovat irti maasta, mikä on laudan ja lasten muodostaman systeemin kulmakihtyvyys? (c) Miten lasten pitäisi istua, jotta kulmakihtyvyys olisi nolla?

## esimerkki 5.4

## Lelu

**Hyrrässä on naru, josta se vedetään pyörimään.** Narun pituus on 45 cm, ja se on kiinni akselissa, jonka säde on 1.0 cm. Hyrrän hitausmomentti on  $2.5 \cdot 10^{-4}$  kgm<sup>2</sup>. Vedät narusta keskimäärin 9.0 N voimalla. (a) Kuinka suuren kulmakihtyvyyden hyrrä saa? (b) Kuinka suuren kulmanopeuden hyrrä saa? (c) Pyörivää hyrrä jarruttaa kitkan tuottama  $6.0 \cdot 10^{-4}$  Nm momentti. Kuinka kauan kestää, että hyrrä pysähtyy?

**TILANNE** Piirretään hyrrästä kuva ylhäältä katsoen. Merkitään hyrrän akselin sädettä  $r = 0.010$  m, hitausmomenttia  $I_\theta = 2.5 \cdot 10^{-4}$  kgm<sup>2</sup>, narun pituutta  $s = 0.45$  m, vetävää voimaa  $F = 9.0$  N ja jarruttavaa momenttia  $\tau_{\theta,\mu} = -6.0 \cdot 10^{-4}$  Nm.

**SUUNNITELMA** (a) Narua vetävä voima kohdistaa hyrrään momentin sen massakeskipisteen suhteeseen, ja momentin suuruus on voiman ja sen varren pituuden tulo. Voima on nyt akselin tangentin suuntainen, joten varren pituus on sama kuin akselin säde  $r$  ja momentti on

$$\tau_\theta = r_{\perp F} F = rF. \quad (5.85)$$

Tämä momentti tuottaa hyrrälle kulmakihtyvyyden

$$\alpha_\theta = \frac{1}{I_\theta} \tau_\theta. \quad (5.86)$$

(b) Koska tiedämme narun pituuden emmekä sitä vetevän voiman vaikutusaikaa, loppunopeus on helpoin laskea energiaperiaatteella. Voima osoittaa narun suuntaan ja sen vaikutuspiste siirtyy narun pituuden verran. Niinpä voima tekee naruun työn

$$W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r} = Fs. \quad (5.87)$$

Hyrrä oli aluksi levossa ja lähes kaikki voiman tekemä työ siirtyy hyrrän liike-energiaksi, joten vedon jälkeen liike-energia on

$$K = \frac{1}{2} I_\theta \omega_{\theta,\max}^2 = W, \quad (5.88)$$

mistä voidaan ratkaista kulmanopeus  $\omega_{\theta,\max}$ .

(c) Jälleen momentti tuottaa kulmakihtyvyyden, ja kulmakihtyvyys määritelmän mukaisesti on kulmanopeuden muutosnopeus. Nyt momentti on likimain vakio, joten myös kulmakihtyvyys on vakio,

$$\alpha_{\theta,\mu} = \frac{\Delta \omega_\theta}{\Delta t}. \quad (5.89)$$

Kulmanopeus muuttuu (b)-kohdassa lasketusta arvosta nollaan,  $\Delta \omega_\theta = -\omega_{\theta,\max}$ , ja tähän kuluu siis aika

$$\Delta t = -\frac{\omega_{\theta,\max}}{\alpha_{\theta,\mu}} \quad (5.90)$$

**RATKAISU** (a) Kulmakihtyvyydeksi saadaan

$$\alpha_\theta = \frac{rF}{I_\theta} = \frac{0.010 \text{ m} \cdot 9.0 \text{ N}}{2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2} = 360 \text{ s}^{-2}. \quad (5.91)$$

(b) Kulmanopeudeksi saadaan

$$\omega_{\theta,\max} = \sqrt{\frac{2Fs}{I_\theta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.0 \text{ N} \cdot 0.45 \text{ m}}{2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2}} = 180 \text{ s}^{-1}. \quad (5.92)$$

(c) Hyrrän pysähtyminen kestää tämän mallin mukaan

$$\Delta t = -\frac{I_\theta \omega_{\theta,\max}}{\tau_{\theta,\mu}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2 \cdot 180 \text{ s}^{-1}}{6.0 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}} = 75 \text{ s}. \quad (5.93)$$

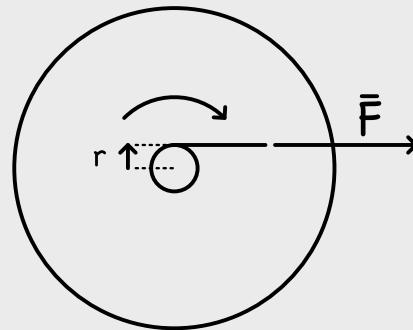
Tämä on kuitenkin aika, joka kestääsi hyrrän täydelliseen pysähtymiseen, jos sitä jarruttava hitausmomentti olisi vakio. Todellisuudessa hyrrä kaatuu selvästi tästä ennen, kun sen pyöriminen hidastuu.

**ARVIOINTI** Hyrrä pyörii mallin mukaan yli minuutin, mikä on aivan realistinen tulos.

Hyrrän kulmanopeus laskettiin kulmanopeuden absoluuttisissa yksiköissä radiaania sekunnissa. Joskus pyörivien kappaleiden pyörimisnopeuksia ilmoitetaan myös esimerkiksi yksiköissä kierrosta sekunnissa tai kierrosta minuutissa (englanniksi 'rounds per minute', rpm). Hyrrämme pyörimisnopeus olisi tällaisissa yksiköissä

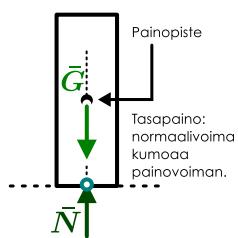
$$\frac{180 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s/min}}{2\pi \text{ rad/kierros}} = 1700 \text{ kierrosta/min.} \quad (5.94)$$

Tämäkin on aivan järkevä tulos, sillä hyrrät voivat pyöriä jopa yli 10000 kierrosta minuutissa.

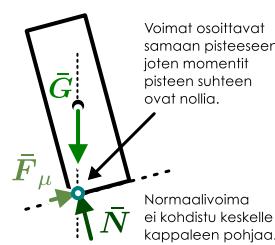


Kuva 5.19: Tasapainossa sekä kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima että kokonaismomentti on nolla.

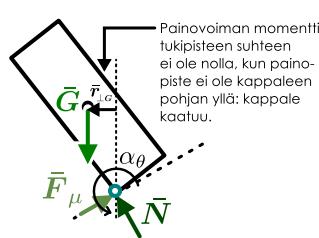
(a) Kappale on tasapainossa.



(b) Kaltevalla tasolla kappaletta tukeneva normaalivoima kohdistuu pohjan reunaan.



(c) Kappale kaatuu jos painopiste siirryttä sivuun pohjan päältä.



## Vapaakkappalekuva ja tasapaino

Vapaakkappalekuvat piirretään pyöriville kappaleille samalla tavalla kuin voiman yhteydessä opittiin, mutta koska voiman momentti riippuu voiman vaikutuspisteestä, on pyörimisen analysoimiseksi voimat piirrettävä niin, että niiden vipuvarsi on oikean mittainen. Koska vipuvari riippuu ainoastaan voiman kohtisuorasta etäisyystä pyörimisakseliin nähdien, ei ole väliä piirretäänkä voiman vaikutuspisteen voimaa kuvavaan nuolen kärki vai kanta, mutta voimanuolen on osoittettava oikeaan suuntaan ja nuolen on oltava oikealla etäisyydellä pyörimisakselista.

Tietenkään voimat eivät todellisuudessa kohdistu vain yhteen pisteesseen. Esimerkiksi painovoima vaikuttaa kappaleen *jokaiseen* hiukkaseen. Olemme kuitenkin aina piirtäneet kappaleeseen kohdistuvan painovoiman vapaakkappalekuviin *yhtenä massakeskipisteen vaikuttavana voimana*. Tämä on sallittua, koska tällainen voima vaikuttaa kappaleen etenemis- ja pyörimislükkeeseen täsmälle samoin kuin kappaleeseen todellisuudessa vaikuttava painovoima. Näin on, koska tämä kokonaivoima kohdistaa kappaleeseen yhtä suuren momentin *minkä tahansa pisteen suhteen laskettuna* kuin todellinen, kaikkiin hiukkasiin vaikuttava painovoima.

Todistetaan yllä esitetty väite. Jos kappale koostuu hiukkasia, joiden massat ovat  $m_i$ , kappaleeseen kohdistuu kokonaispainovoima

$$\bar{G} = \sum_i m_i \bar{g} = M \bar{g}. \quad (5.95)$$

Tämän voiman momentti saadaan laskemalla kaikkiin hiukkasiin kohdistuvien momenttien summa. Koska painovoima osoittaa aina alaspäin, sen voiman varsi on aina hiukkisen pyörimisakselista mitattu etäisyys vaakasuunnassa — merkitään tästä etäisyyttä tässä  $x$ -koordinaatilla. Siispä pisteessä  $x_i$  olevaan hiukkaseen kohdistuvan painovoiman momentti on  $\tau_i = x_i m_i g$ , ja koko kappaleeseen kohdistuva momentti on

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = \sum_i m_i x_i g. \quad (5.96)$$

Kappaleen massakeskipisteen  $x$ -koordinaatti  $x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$ , joten kokonaismomentti on yhtä suuri kuin massakeskipisteen asetetun kokonaispainovoiman momentti

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = M \left( \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \right) g = x_{cm} M g = x_{cm} G. \quad (5.97)$$

Niinpä tämän kokonaivoiman  $\bar{G}$  momentti on sama kuin kappaleeseen kohdistuvan todellisen painovoiman momentti, ja kokonaivoiman vaikutus kappaleen liikkeeseen on täsmälle sama kuin kappaleeseen todellisuudessa kohdistuvan voiman. Näin ollen voimme kuvata painovoimaa yhtenä massakeskipisteen vaikuttavana voimana, vaikka se todellisuudessa vaikuttaakin koko kappaleeseen.

Voimaa  $\bar{G}$ , jonka vaikutus on täsmälle sama kuin kappaleen kaikkiin hiukkasiin kohdistuvan painovoiman kutsutaan gravitaation **resultanttivoimaksi** ja pistettä, johon tämä painovoimaa kuvava yksittäinen voima kohdistuu, kutsutaan **painopisteeksi**. Homogeenisessa painovoimakentässä painopiste on sama kuin massakeskipiste, kuten edellä johdettiin.

Edellä esitetty tekniikka, jossa kappaleen eri puolille kohdistuva vuorovaikutusta kuvataan yhdellä resultanttivoimalla, toimii usein myös muille vuorovaikutuksille, mutta tällöin resultanttivoiman vaikutuspiste ei vältämättä ole massakeskipiste. Esimerkiksi pintojen välinen normaalivoima kohdistuu kaikkiin pisteisiin, joissa pinnat koskettavat, mutta sitäkin voidaan kuvata yhtenä resultanttivoimana, kunhan voiman suuruus, suunta ja vaikutuspiste valitaan niin että sekä sen kokonaivoima että -momentti ovat samat kuin todellisen vuorovaikutuksen tuottamat voima ja momentti.



**5.19** Tuuli kohdistaa purjeeseen voiman. Kuitenkin koska tuulen nopeus kasvaa ylöspäin nostessaan, voimakin on purjeen yläosissa suurempi kuin alaosissa. Oletetaan, että korkeudella  $z$  olevaan  $dz$ -korkuiseen purjeen osaan kohdistuu voima  $dF = azdz$ , missä  $a$  on jokin vakio. Purje ulottuu korkeudelta  $z = 0$  korkeudelle  $z = L$ . (a) Mikä on purjeeseen kohdistuva kokonaisvoima? (b) Mikä on purjeeseen kohdistuva kokonaismomentti purjeen alaosan suhteeseen? (c) Mille korkeudelle resultanttivoima kohdistuu?

Vapaakkappalekuva on erityisen hyödyllinen työkalu tasapainossa olevien kappaleiden voimien analyysissä. Kappalehan on etenevä liikkeen suhteen tasapainossa, jos siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, koska tällöin sen nopeus ei muutu ja kappale on joko levossa tai liikkuu tasaisella nopeudella. Kappaleen pyörimisen huomioiminen antaa kuitenkin lisää mahdollisia tapoja liikkua: kappale voi olla etenevä liikkeen suhteen tasapainossa, jolloin sen massakeskipisteen liike on tasaista, mutta sen pyörimisliike massakeskipisteen ympäri voi muuttua. Jos kappaleeseen vaikuttaa nollasta poikkeava kokonaismomentti, kappaleen kulmanopeus muuttuu, ja tämä on mahdollista vaikka kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima olisi nolla eli vaikka kappale olisi etenevä liikkeen suhteen tasapainossa.

Niinpä onkin välttämätöntä määritellä myös **pyörimisen tasapaino**. Kappaleen sanotaan olevan pyörimisliikkeen suhteen tasapainossa, jos siihen kohdistuva **kokonaismomentti on nolla**

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = 0. \quad (5.98)$$

Tällöin kappale joko ei pyöri lainkaan tai se pyörii *tasaisella kulmanopeudella*. Erityisesti jos kappale on täysin paikoillaan, se ei liiku eikä pyöri, ja tällöin sen on oltava samanaikaisesti tasapainossa sekä etenevä etä pyörivän liikkeen suhteen. Kappale voi kuitenkin olla tasapainossa sekä etenevä etä pyörivän liikkeen suhteen, jos se liikkuu ja pyörii tasaisella nopeudella ja kulmanopeudella. Esimerkiksi tasaisella nopeudella vierivä pallo on tasapainossa.

Tasapainoehojen avulla voidaan päättää levossa oleviin kappaleisiin kohdistuvien voimien suuruudet, koska mihin tahansa levossa olevaan kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman ja kokonaismomentin on oltava nolla. Tämä on tärkeä menetelmä esimerkiksi rakennustekniikassa, sillä sen avulla voidaan laskea mm. talojen rakenteisiin kohdistuvien voimien suuruuksia ja suunnitella tarvittavan kuormituksen kestäviä rakenteita.



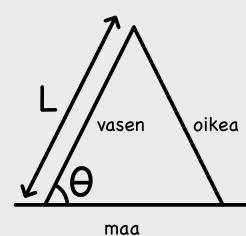
**5.20** Voiko kappale olla (i) tasapainossa etenevä mutta ei pyörivän liikkeen suhteen tai (ii) tasapainossa pyörivän mutta ei etenevä liikkeen suhteen, jos kappaleeseen kohdistuu (a) yksi voima, (b) kaksi samaan pisteeseeen kohdistuva voima, (c) kaksi eri pistesiin kohdistuva voimaa?

### esimerkki 5.5

### Korttitalo

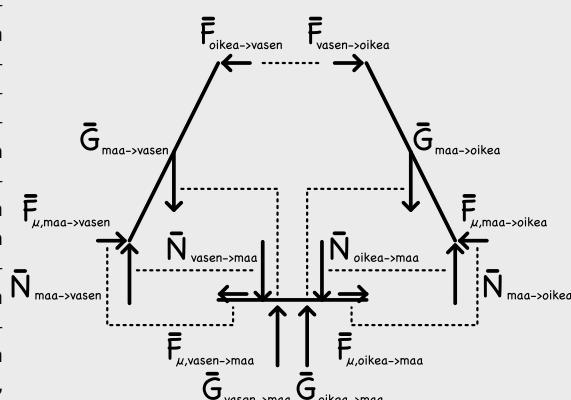
Rakennat korttitaloa perinteiseen tapaan asettamalla kortteja nojamaan toisiaan vasten symmetrisesti A-kirjaimen muotoon. Rakennat talo alustalle, jonka lepokitkerroin on  $\mu$ . Kuinka jyrkkään kulmaan kortit on asetettava, jotta kortit eivät ala liukua, jolloin A-kirjain romahtaa? (a) Johda symbolinen lauseke. (b) Laske kulma, kun  $\mu = 0.3$ .

**TILANNE** Piirretään kuva yhdestä korttiparista. Kutsutaan parin kortteja nimillä "vasen" ja "oikea". Oletetaan, että rakennamme tässä vaiheessa vain korttitalon pohjakerrosta eikä korttien päällä ole toisia kortteja. Merkitään kortin massa  $m$ , pituutta  $L$  ja kulmaa vaa-katasosta mitattuna  $\theta$ .



**SUUNNITELMA** Korttien täytyy pysyä tasapainossa. Ne ovat tasapainossa suoraviivaisen liikkeen suhteen, jos ja vain jos niihin kohdistuvien voimien summa on nolla. Erityisesti voimien  $x$ - ja  $y$ -komponenttien pitää molempien summautua erikseen nollaksi, jotta voimien vektorisumma olisi nolla. Kortit ovat pyörimisen suhteen tasapainossa, jos ja vain jos niihin kohdistuvien momenttien summa on nolla.

Piirretään korttien vapaakkappalekuvat. Oletetaan, että rakennelma on täysin symmetrinen, jolloin oikean ja vaseman kortin vapaakkappalekuvat ovat toistensa peilikuvat. Kumpaakin korttia vetää alaspiin maan painovoima ( $\bar{G}$ ). Ne eivät vajoa alustan sisään, koska niitä kannattelee pinnan kosketuksen tukivoima ( $\bar{N}$ ). Kortin ja alustan välillä vaikuttaa myös lepokitkavoima ( $\bar{F}_\mu$ ), joka estää korttien alareunoja lähtemästä liukumaan ulospäin ainakin niin kauan kun talo pysyy pystyssä. Yläreunastaan kortit koskettavat toisiaan, jolloin korttien välinen kosketusvoima ( $\bar{F}$ ) estää niitä kaatumasta toistensa lävitse. Koska oletimme yksinkertaisuuden vuoksi rakenteen täysin symmetriseksi, korttien välisen voiman täytyy olla vaakasuorassa. Muussa tapauksessa toiseen korttiin kohdistuisi yläviistoon ja toiseen alaviistoon osoittava voima. Tämä on toti todellisuudessa aivan mahdollista, mutta silloin rakennelma ei ole symmetrinen.



Tarkastellaan sitten pelkästään vasemman kortin voimatasapainoa. Korttiin kohdistuu kaksi pystysuuntaista ja kaksi vaakasuuntaista voimaa, jolloin voimien tasapaino toteutuu vain jos nämä voimat ovat keskenään yhtä suuret ja vastakkaisuuntainen. (Näinhän ei yleisesti tarvitsisi olla, koska nämä eivät ole toistensa vastavoimia.) Siispä, kun jätetään yksinkertaisuuden vuoksi pitkät alaindeksit kirjoittamatta, tasapainossa täytyy olla

$$N = G \quad (5.99)$$

ja

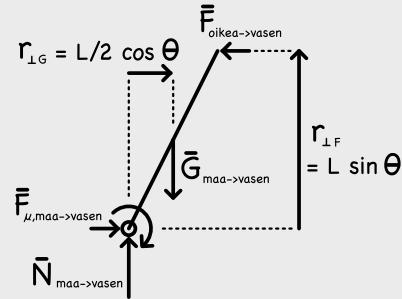
$$F = F_\mu. \quad (5.100)$$

Painovoiman suuruus tunnetaan,  $G = mg$  ja lepokitkakerroin antaa maksimin kitkavoiman suuruudelle,  $F_\mu \leq \mu N$ . Nyt halutaan kuitenkin selvittää ääritilanne, jossa kortit juuri ja juuri pysyvät pystyssä. Tässä tilanteessa lepokitkavoima on maksimissaan, ja epäyhälössä saavutetaan yhtäsuuruus,  $F_\mu = \mu N$ .

Pyörimisen tasapainoehtoa varten on määritettävä vielä voimien momentit. Yleisesti momentti on voiman suuruuden ja sen varren pituuden tulo,

$$\tau_\theta = Fr_{\perp F}. \quad (5.101)$$

Momentit voi laskea minkä tahansa akselin suhteeseen, ja niiden summan on oltava tasapainossa aina nolla. Tässä on kätevästi valita akseli kortin alareunaan. Näin siksi, että akseliin kohdistuvan voiman varren pituus  $r_{\perp F}$  ja siten myös momentti on nolla. Nyt kortin alareunaan kohdistuu kaksi voimaa, joten kun akseli valitaan tänne, tiedämme laskemattakin näiden voimien momenttien olevan nollia.



Jäljelle jää painovoima ja korttien välinen kosketusvoima. Painovoima vaikuttaa kortin keskipisteeseen, etäisyydellä  $L/2$  akselista, ja sen varren pituudeksi saadaan trigonometrialla

$$r_{\perp G} = \frac{1}{2}L \cos \theta. \quad (5.102)$$

Korttien välinen kosketusvoima vaikuttaa kortin yläpäässä etäisyydellä  $L$  akselista, ja tämän voiman varren pituus on

$$r_{\perp F} = L \sin \theta. \quad (5.103)$$

**RATKAISU** Vasempaan korttiin kohdistuva kokonaismomentti on nolla ja kortti tasapainossa, jos painovoiman ja korttien välisen kosketusvoiman momentit ovat yhtä suuret,

$$Gr_{\perp G} = |\tau_{\theta,G}| = |\tau_{\theta,F}| = Fr_{\perp F}. \quad (5.104)$$

Sijoittamalla edellä johdetut lausekkeet tähän yhtälöön saadaan tasapainoehto

$$\frac{1}{2}mgL \cos \theta = \mu mgL \sin \theta, \quad (5.105)$$

jonka ainoa tuntematon on kulma  $\theta$ . Jaetaan yhtälö vielä puolittain tekijöillä  $\cos \theta$  sekä  $\mu mgL$ , niin saamme

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}mgL}{\mu mgL} = \frac{1}{2\mu}. \quad (5.106)$$

Jos kitkakerroin on  $\mu = 0.3$ , kulmaksi tulee

$$\theta = \arctan \frac{1}{2\mu} = \arctan \frac{1}{0.6} = 1.030 \text{ rad} = 59^\circ. \quad (5.107)$$

**ARVIOINTI** Lopputulos on yllättävän yksinkertainen, mutta koska kaikkien voimien suuruus on verrannollinen korttien painoon ja voimien varsien pituudet ovat verrannolliset kortin pituuteen, nämä tekijät supistuvat lopputuloksesta pois. Korttitalo on siis statikan näkökulmasta ihan yhtä helppoa rakentaa minkä kokoisista korteista tahansa.

Kun kitkakerroin kasvaa,  $\frac{1}{2\mu}$  pienenee. Arkustangentti on aidosti kasvava funktio, joten myös  $\theta = \arctan \frac{1}{2\mu}$  pienenee. Tämä on järkevä, koska korttitalon rakentaminen on sitä helpompaa, mitä vähemmän kortit pääsevät liukumaan. Siispä suuren kitkakertoimen alustalla talo pysyy pystyssä pienemmällä kulmalla  $\theta$ .

Kitkakertoimella 0.3 kulmaksi saatäin likimain  $60^\circ$ , eli korteista voi tehdä suunnilleen tasavarsisen kolmion, ja se pysyy vielä pystyssä. Tulos on järkevä, mutta tässä analysoitiin vasta tilanne, jossa korttien pääällä ei ole kuormaa. Jos otetaan huomioon, että yleensä korttitaloissa kortteja ladotaan kerroksittain toistensa pääälle, vapaakkappalekuvaan pitää lisätä A-muodon pääällä olevien korttien paino, joka tuottaa korttien yläpähän niitä alas painavan voiman. Tällöin korttien pitää olla jyrkemmin pystyssä, jotta talo ei kaatuisi. (Voit itse ratkaista tämän hiukan monimutkaisemman tapauksen. Lopputulos on, että jos korttien pääällä on paljon painoa, ne pysyvät pystyssä kunhan kulma  $\theta$  on vähintään  $73^\circ$ .)

## 5.4 Kulmaliikemäärä

Suoraviivaista liikettä kuvaavista suureista liike-energian ohella liikemäärä on tärkein, ja liikemäärään säilymlaki on fysiikan tärkeimpiä peruslajeja. Pyörimisliikettä kuvaavaa liikemäärästä vastaava suure on **kulmaliikemäärä**, jota kutsutaan myös pyörimismääräksi tai liikemäärämomentiksi. Liikemäärään säilyminen oli yhtäpitävä sen havainnon kanssa, että systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa koko systeemin etenemislukettä vaan ainoastaan systeemin osien liikettä toistensa suhteen. Aivan vastaavasti *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin pyörimisliikettä kokonaisuutena* vaan ne voivat ainoastaan saada systeemin osat pyörimään toistensa suhteen. Tästä seuraa, että myös *kulmaliikemäärä on säilyvä suure*, ja tämän vuoksi se onkin energian ja liikemäärään ohella fysiikan tärkeimpiä käsittäitä.

Kulmaliikemääränsä säilymlaki on fysiikan peruslajeja, mutta jäykkiä kappaleiden liikkeen tapauksessa se voidaan johtaa jo aiemmin käsitellyistä energian ja liikemääränsä säilymlaeista tai Newtonin laeista. Seuraavaksi tarkastelemmekin kuinka kulmaliikemäärä määritellään ja millaisissa systeemeissä kulmaliikemäärä on vakio.

### Kappaleiden ja hiukkasten kulmaliikemäärä

Ennen kuin voimme puhua kulmaliikemääränsä säilymisestä, meidän on syytä määritellä kulmaliikemäärä. Lähikohtana tähän voimme käyttää pyörimisen lükeyhtälöä (5.81), jonka mukaan kappaleeseen kohdistuva momentti on aiheuttaa kappaleen kulmakiertyvyyden ja on yhtä suuri kuin hitausmomentin ja kulmakiertyvyyden tulo. Tämä on täysin analoginen suoraviivaisessa liukkeessä pätevän dynamikan peruslain kanssa, jonka mukaan voima on yhtä suuri kuin kappaleen inertian ja kiertyvyyden tulo tai tarkemmin *voima on sama kuin kappaleen liikemääränsä muutosnopeus*. Jotta kulmaliikemäärä ja momentin yhteys olisi samanlainen kuin voiman ja liikemäären yhteys, *momentin pitäisi siis olla sama kuin kulmaliikemääränsä muutosnopeus eli*

$$\tau_\theta = \frac{dL_\theta}{dt}, \quad (5.108)$$

missä  $L_\theta$  on kulmaliikemäärä saman akselin suhteen kuin minkä suhteen momentti on määritetty. Vertaamalla tästä jäljän kappaleen pyörimisen lükeyhtälöön näemme, että näin on *jos kulmaliikemäärä määritellään kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden tulona*,

$$L_\theta = I_\theta \omega_\theta, \quad (5.109)$$

sillä tällöin jälkille kappaleelle, jonka hitausmomentti on vakio, pätee

$$\tau_\theta = \frac{dL_\theta}{dt} = I_\theta \frac{d\omega_\theta}{dt} = I_\theta \alpha_\theta. \quad (5.110)$$

Tämäkin määritelmä on aivan analoginen liikemääränsä määritelmän kanssa, kun suoran liikkeen suureet liikemäärä, inertia ja nopeus on korvattu vastaavilla kulmasuureilla eli kulmaliikemäärellä, hitausmomentilla sekä kulmanopeudella.

Edellä esitetty määritelmä toimii aivan yhtä hyvin sekä pyöriville että ympyräliukkeessä oleville kappaleille, kun kulmaliikemäärä määritetään pyörimisakselin tai liikeradan keskipisteen suhteen, sillä tällöin kappaleella on hyvin määritelty kulmanopeus ja hitausmomentti.



**5.21** Kuu kiertää Maata niin, että siitä näkyy Maahan aina sama puoli. Toisin sanoen se pyörii oman akselinsa ympäri samalla kulmanopeudella kuin millä se kiertää Maata. Kumpaan liittyvä suurempi kulmaliikemäärä Maan keskipisteen suhteen — Kuun pyörimiseen vai sen kiertoliikkeeseen?

Tavallisesti kappaleet eivät kuitenkaan liiku ympyräradoilla — esimerkiksi planeettojen radat ovat ellipsejä — joten on syytä määritellä kulmaliikemäärä yleisesti *kaikenlaiselle* etenevälle liukkeelle. Tarkastellaan esimerkkinä tasaisessa liukkeessä olevaa hiukkasta, joka liikkuu suoraan vakionopeudella. Koska hiukkanen on tasaisessa liukkeessä, voimme olettaa, ettei siihen kohdistu ulkoisia voimia, ja tällöin palloon kohdistuva kokonaismomentti on nolla. Tällöin myös hiukkisen kulmaliikemääränpitää olla *vakio*.

Voisi olla houkuttelevaa määritellä suoraan liikkuvan hiukkisen kulmaliikemääräksi nolla, mutta tämä ei toimi. Haluamme nimitä määritellä kulmaliikemäären niin, että kyseessä on säilyvä suure liikemäären tapaan. Kuitenkin jos suoraan liikkuva kappale törmää toiseen, levossa olevaan kappaleeseen, on hyvin mahdollista, että toinen kappaleista tai ne kummatkin alkavat törmäyksen seurauksena pyöriä. Jos suoraan liikkuvan kappaleen kulmaliikemäärä olisi nolla mutta pyörivän kappaleen kulmaliikemäärä ei, kulmaliikemäärä muuttuisi tällaisessa törmäyksessä eikä se siis voisi mitenkään olla säilyvä suure. Niinpä myös suoraan liikkeeseen täytyy liittyä kulmaliikemäärä.

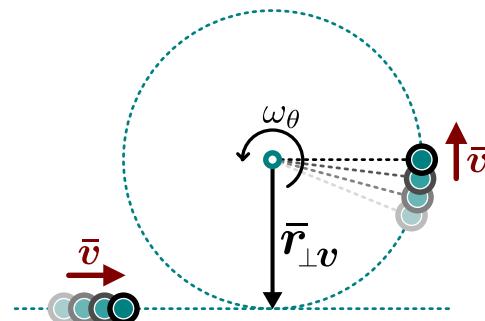
## PYÖRIMISLIIKE

Suoraan kulkevan hiukkasen kulmaliikemääärä määritelläänkin seuraavasti: *Jos hiukkanen liikkuu vauhdilla  $v$  pitkin suoraa, joka ohittaa valitun pyörimisakselin lähimillään etäisyydeltä  $r_{\perp v}$ , hiukkasen kulmaliikemääärä on yhtä suuri kuin akselia  $r_{\perp v}$ -säteisellä ympyräradalla kiertävän hiukkasen kulmaliikemääärä* (kuva 5.20). Jos piirräme suoran, joka kulkee hiukkasen kautta ja on hiukkasen nopeusvektorin suuntainen, etäisyys  $r_{\perp v}$  on tämän suoran etäisyys valitusta pyörimisakselistä.

Ympyräradalla hiukkasen hitausmomentti on  $I_{\theta} = mr_{\perp v}^2$  ja kulmanopeus  $\omega_{\theta} = v/r_{\perp v}$ , joten tämä kulmaliikemääärä on

$$|L_{\theta}| = |I_{\theta}\omega_{\theta}| = r_{\perp v}mv = r_{\perp v}p. \quad (5.111)$$

Kuva 5.20: Suora liike ja kiertoliike, joilla on sama kulmaliikemääärä.



Liikkuvan hiukkasen kulmaliikemäären matemaattinen lauseke on hyvin samanlainen kuin momentin lauseke, sillä momentti voidaan laskea voiman  $F$  ja voiman varren  $r_{\perp F}$  tulona, kun taas kulmaliikemääriä lasketaan liikemäären  $p$  ja liikemäären "varren"  $r_{\perp v}$  tulona. Lisäksi samoin kuin momentilla kulmaliikemäärelläkin on etumerkki: Kulmaliikemääriä on positiivinen jos ja vain jos liike tapahtuu positiiviseen kiertosuuntaan.



- 5.22** (a) Tasaisessa liikkeessä kulmaliikemäären pitää olla yhtälön (5.108) perusteella vakio. Osoita tämä.  
 (b) Riippuko suoraan kulkevan kappaleen kulmaliikemääriä pyörimisakselin valinnasta?  
 (c) Riippuko ympyräradalla olevan kappaleen kulmaliikemääriä pyörimisakselin valinnasta?  
 (d) Riippuko massakeskipisteen ympäri pyörivän kappaleen kulmaliikemääriä pyörimisakselin valinnasta?

Kulmaliikemääriä on ekstensiivinen suure, joten minkä tahansa kappaleen kulmaliikemääriä on sen hiukkasten kulmaliikemäärien summa. Lisäksi jäykkien kappaleiden kulmaliikemääriä voidaan määrittää laskemalla erikseen kappaleen massakeskipisteen rataliikkeen kulmaliikemääriä ja kappaleen pyörimisen kulmaliikemääriä massakeskipisteen ympäri. Tällöin kappaleen kokonaiskulmaliikemääriä saadaan näiden summana,

$$L_{\theta} = L_{\theta,\text{cm}} + L_{\theta,\text{rotaatio}}, \quad (5.112)$$

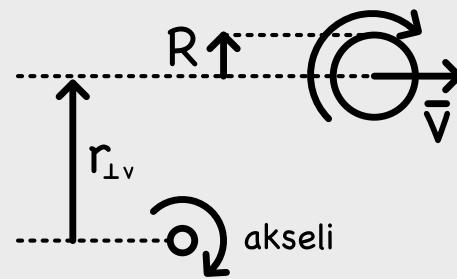
aivan samaan tapaan kuin kappaleen liike-energia voitiin laskea massakeskipisteen rataliikkeen energian ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvan pyörimisen liike-energian summana.

### esimerkki 5.6

### Kulmaliikemäärä

**Frisbee-kiekon sade on 12 cm ja massa 42 g. Kaverisi heittää kiekkoa niin, että se pyörii 8.5 kierrosta sekunnissa ja etenee suoraan 3.5 m/s vauhdilla. Kieko ohittaa sinut 1.3 m etäisyydeltä. Mikä on kiekon kulmaliikemääriä sinun suhteesi?**

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Tehtävässä ei kerrottu, kumpaan suuntaan kieko pyörii, joten on sytytä tarkastella erikseen kumpikin suunta, mutta piirretään kuvan vain toinen mahdollinen tapaus. Merkitään kiekon sädeksi  $R = 0.12 \text{ m}$ , sen massaksi  $m = 0.042 \text{ kg}$ , hitausmomenttia massakeskipisteen suhteeseen  $I_{\theta,\text{cm}}$ , kulmanopeutta  $\omega_{\theta,\text{cm}} = 2\pi \text{ rad/kierros} \cdot 8.5 \text{ kierros/s} = 53.4 \text{ s}^{-1}$ , vauhtia  $v = 3.5 \text{ m/s}$  ja ohitusetäisyyttä  $r_{\perp v} = 1.3 \text{ m}$ .



**SUUNNITELMA** Kiekolla on sekä etenevä että pyörivän liikkeen kulmaliikemääriä. Pyörivän liikkeen liikemääriä lasketaan kiekon massakeskipisteen suhteeseen, ja se on hitausmomentti ja kulmaliikemäären tulo,

$$L_{\theta,\text{rotaatio}} = I_{\theta,\text{cm}}\omega_{\theta,\text{cm}}. \quad (5.113)$$

Kiekon muotoisen kappaleen hitausmomentti on esimerkin 5.2 perusteella

$$I_{\theta,\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2, \quad (5.114)$$

ja vaikka Frisbee-kiekot eivät olekaan aivan ideaalisia, symmetrisiä kiekkoja, tämä malli riittää.

Etenevä liikkeen kulmaliikemääriä riippuu akselista, jonka suhteeseen se lasketaan. Kulmaliikemääriä on kiekon massakeskipisteen liikesuoran akselista mitatun lyhyimmän etäisyyden sekä kiekon liikemäären tulo,

$$L_{\theta,\text{cm}} = r_{\perp v}p = r_{\perp v}mv. \quad (5.115)$$

Kokonaiskulmaliikemäärä on näiden summa,

$$L_\theta = L_{\theta,\text{cm}} + L_{\theta,\text{rotaatio}}. \quad (5.116)$$

Tässä kuitenkin pitää huomioida pyörimissuunnat. Kuvassa positiivinen suunta on valittu myötäpäivään. Kiekko pyörii myötäpäivään ja ohittaa akselin kuvassa yläpuolelta liikkuen oikealle eli samaan suuntaan kuin myötäpäivään kiertäessä. Niinpä etenevän ja pyörivän liikkeen kulmaliikemäärit ovat molemmat kuvassa positiivisia ja niiden suuruudet lasketaan yhteen. Jos kiekko pyörisikin vastakkaiseen suuntaan, pyörivän liikkeen kulmaliikemäärä olisi negatiivinen. Erityisesti kulmaliikemäärellä olisi tällöin vastakkaiset etumerkit, ja kokonaiskulmaliikemäärä olisi niiden itseisarvojen erotus,

$$L_\theta = |L_{\theta,\text{cm}}| - |L_{\theta,\text{rotaatio}}|. \quad (5.117)$$

**RATKAISU** Kiekon pyörivän liikkeen kulmaliikemäärä on

$$L_{\theta,\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}mR^2\omega_{\theta,\text{cm}} = 0.016 \text{ kgm}^2/\text{s}, \quad (5.118)$$

ja etenevän liikkeen

$$L_{\theta,\text{cm}} = r_{\perp v}mv = 0.191 \text{ kgm}^2/\text{s}. \quad (5.119)$$

Yhteensä kuvan tilanteessa kulmaliikemäärä on

$$L_\theta = |L_{\theta,\text{cm}}| + |L_{\theta,\text{rotaatio}}| = 0.21 \text{ kgm}^2/\text{s}. \quad (5.120)$$

Jos kiekko pyöriikin vastakkaiseen suuntaan, kulmaliikemäärä on

$$L_\theta = |L_{\theta,\text{cm}}| - |L_{\theta,\text{rotaatio}}| = 0.17 \text{ kgm}^2/\text{s}. \quad (5.121)$$

**ARVIOINTI** Kiekon etenevän liikkeen kulmaliikemäärä on paljon suurempi kuin sen pyörimisen kulmaliikemäärä. Tässä ei ole mitään ihmellistä, sillä etenevän liikkeen kulmaliikemäärä on sitä suurempi, mitä kauempaa kappale akselin ohittaa. Tämä kulmaliikemäärä voi siis olla kuinka suuri tahansa. Erityisesti ei siis saa ajatella, että kulmaliikemäärä liittyy vain pyörimiseen.

Tehdäänpä vielä hiukan tarkempi vertailu. Kiekon pyöriessä sen ulkoreunan pistetet lükkivät massakeskipisteestä suureen nopeudella

$$v_\vartheta = \omega_{\theta,\text{cm}}R = 6.4 \text{ m/s}. \quad (5.122)$$

Jos kiekon koko massa olisi sen ulkoreunalla etäisyydellä  $R$  keskipisteestä ja kiertäisi sitä tällä vauhdilla, sillä olisi kulmaliikemäärä

$$L_\theta = Rmv_\vartheta = 0.032 \text{ kgm}^2/\text{s}. \quad (5.123)$$

Tämä on itse asiassa täsmälleen kaksinkertainen arvo verrattuna äsknen laskettuun pyörivän liikkeen kulmaliikemääräan  $L_{\theta,\text{rotaatio}} = 0.016 \text{ kgm}^2/\text{s}$ . Tämä johtuu siitä, että kiekon koko massa ei ole sen reunalla vaan massaa on jakautunut koko kiekon alueella, ja sen takia kiekon hitausmomentin lausekkeessa on kerroin  $\frac{1}{2}$ .

Joka tapauksessa pyörivän liikkeen kulmaliikemäärä on suuruusluokkaa

$$L_{\theta,\text{rotaatio}} \approx Rmv_\vartheta \quad (5.124)$$

ja etenevän liikkeen kulmaliikemäärä on

$$L_{\theta,\text{cm}} = r_{\perp v}mv. \quad (5.125)$$

Näiden suhde on siis

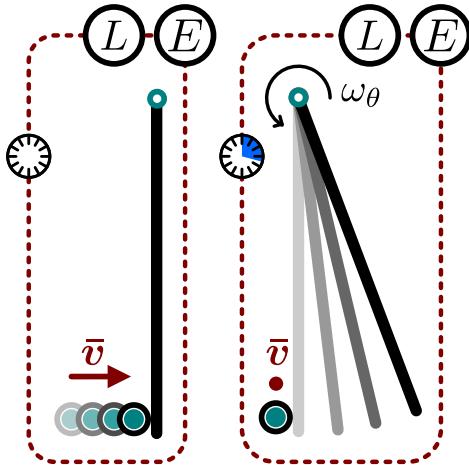
$$\frac{L_{\theta,\text{rotaatio}}}{L_{\theta,\text{cm}}} \approx \frac{Rv_\vartheta}{r_{\perp v}mv}. \quad (5.126)$$

Tässä esimerkissä kiekon ulkoreuna kiertää sen keskusta noin kaksinkertaisella nopeudella kuin millä kiekon keskipiste liikkuu, mutta kiekon säde on vain kymmenesosa etäisyydestä, jolla kiekko ohittaa akselin. Niinpä tämän arvion mukaan  $\frac{L_{\theta,\text{rotaatio}}}{L_{\theta,\text{cm}}} \approx \frac{1}{5}$  eli pyörimisen kulmaliikemäärä on selvästi pienempi kuin etenevän liikkeen kulmaliikemäärä. Aikaisemman laskumme mukaan itse asiassa  $\frac{L_{\theta,\text{rotaatio}}}{L_{\theta,\text{cm}}} \approx \frac{1}{10}$ , ja ero johtuu taas siitä, että hitausmomentin kerroin  $1/2$  jäettiin äskeisessä karkeassa arviossa huomioidottomaksi.

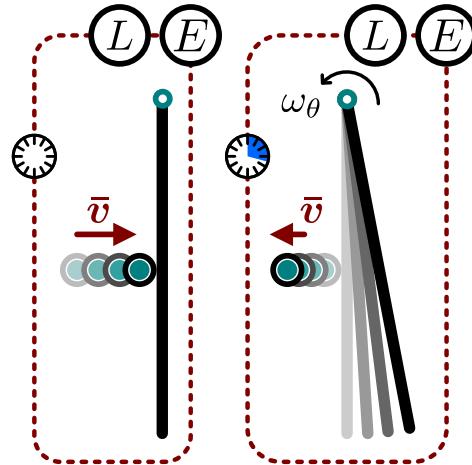
## PYÖRIMISLIIKE

Kuva 5.21: Pallon törmäys toisesta päästään saranoituun tankoon. Törmäys on erilainen riippuen pallon osumakohdasta.

(a) Pallo törmää tangon päähän ja jää paikoilleen. Tanko saa suuren kulmanopeuden.



(b) Pallo törmää tangon keskelle ja kimpooa takaisin. Tanko saa pienien kulmanopeuden.



## Kulmaliiikemääärän säilymislaki

Tutkitaan sitten kulmaliiikemääärän muutoksia törmäyksessä tarkastelemalla kuvassa 5.21 esitettyä koetta, jossa suoraan etenevä pallo törmää levossa olevaan tankoon elastisesti. Kun pallon alkunopeus on kokeessa valittu sopivasti niin, että pallo jää paikoilleen ja toisesta päästään kiinteään akseliin kiinnitettynä tanko alkaa pyöriä akselinsa ympäri pallon törmätessä tangon vapaaseen päähän.

Toistetaan koe sitten samalla pallolla ja tangolla niin, että pallolle annetaan sama alkunopeus mutta pallo osuukin nyt tangon keskelle. Tässä toisessa kokeessa saadaan *erilainen* tulos: pallo kimpaa takaisin ja tanko saa pienemmän kulmanopeuden kuin ensimmäisessä kokeessa. Toisin sanoen pallon osumakohdan etäisyys pyörimisakselista vaikuttaa kappaleiden liukkeeseen törmäyksen jälkeen. Tämä johtuu siitä, että törmäyksessä sekä palloon että tankoon kohdistuu voima, ja tämä voima käänää tankoa sitä helpommin mitä kauempana akselista se vaikuttaa. Niinpä pallon osuessa tangon vapaaseen päähän tanko saa suuremman nopeuden kuin jos pallo osuu tangon keskelle. Kuitenkin aivan kuten liikkuvien kappaleiden törmäykset oli helpoin ymmärtää liikemääärän säilymislain avulla, tämäkin törmäys kannattaa analysoida voimien sijaan säilymislakien avulla.

Valitaan tarkasteltavaksi systeemiksi vain tanko ja pallo. Tanko on toisesta päästään kiinni akselissa (ei kuulu systeemiin), joka voi kohdistaa systeemiin törmäyksen aikana varsin suuren voiman. Kuitenkin koska tangon akselissa kiinni oleva pää ei liiku, tämä voima ei tee tangon ja pallon muodostamaan systeemiin työtä. Niinpä systeemin *kokonaisenergia* on törmäyksessä vakio. Lisäksi koska törmäys on elastinen, energiota ei muutu epäjärjestyneisiin muotoihin ja systeemin *mekaaninen energia* on vakio. Toisaalta koska akseli kohdistaa systeemiin ulkoisen voiman, systeemin *kokonaisliiikemääärä ei ole vakio*. Vaikka törmäys olisi nopea, tästä akselin tankoon kohdistamaa voimaa ei voi jättää huomioimatta, sillä se voi olla suuruudeltaan samaa kokoluokkaa kuin pallon ja tangon väliset voimat.



**5.23** Miten pallon ja tangon käytös törmäyksessä muuttuu, jos tanko ei ole kiinni akselissa ja pallon tuottamaa voimaa lukuunottamatta siihen kohdistuvat ulkoiset voimat kumoavat toisensa (esim. tanko on jäällä)? Mitkä suureet ovat tällöin systeemissä vakiota ja miksi?

Oletetaan, että kaikki liikettä vastaan kohtisuorat voimat kuten painovoima ja normaalivoimat ovat aina tangon kanssa ja jätetään ne tarkastelussa huomioimatta. Tällöin pallo vuorovaikuttaa törmäyksessä ainoastaan tangon kanssa, ja tämä vuorovaikutus kohdistaa kumpaankin kappaleeseen yhtä suuren ja vastakkaisuuntaisen voiman

$$\bar{F}_{\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = -\bar{F}_{\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.127)$$

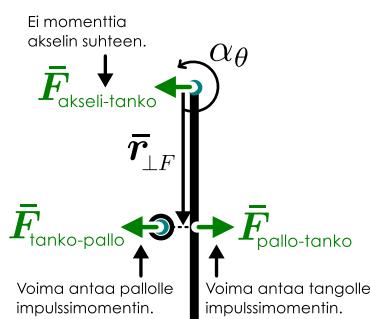
Lisäksi koska nämä voimat vaikuttavat yhtä kaukana pyörimisakselista, ne kohdistavat palloon ja tankoon yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset momentit

$$\tau_{\theta, \text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = -\tau_{\theta, \text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.128)$$

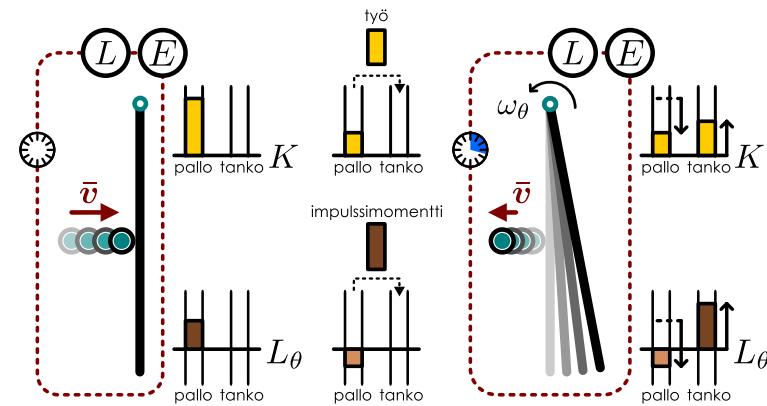
Tanko vuorovaikuttaa lisäksi myös akselin kanssa. Akselin tankoon kohdistaman voiman vaikutuspiste osoittaa kuitenkin kohti akselin keskipistettä, joten akselin suhteella mitattuna tämän voiman varsi on nolla. Jos akselissa ei vaikuta myöskään kitka (se on hyvin öljytty), akselin tankoon kohdistaman voiman *momentti on*

Kuva 5.22: Pallon ja tangon törmäyksen kuvaus voimien ja säilymislakien avulla.

(a) Palloon ja tankoon törmäyksen aikana vaikuttavat voimat.



(b) Systeemin mekaaninen energia ja kulmaliikemääriä ovat törmäyksessä vakiot.



*nolla* eikä se siis vaikuta tangon pyörimiseen. Koska myös käään palloon ei kohdistu ulkoisten vuorovaikutusten momenttia, *systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten kokonaismomentti on nolla*. Suoraviivaisen liikkeen tapauksessa *ulkoisten voimien* summan ollessa nolla systeemin kokonaislukemääriä ei voi muuttua. Nyt systeemiin kohdistuvien *ulkoisten momenttien* summa on nolla, joten systeemin kokonaiskulmaliikemääriä ei voi muuttaa vaan sen täytyy olla vakio. Sekä pallon että tangon kulmaliikemäärit kyllä muuttuvat, mutta pallon kulmaliikemäärin muutos on yhtä suuri ja vastakkainen tangon kulmaliikemäärin muutokseen nähdyn.

Käydään edellä esitetty päättely vielä läpi matemaattisesti. Tangon kulmanopeus muuttuu siihen törmäyksessä kohdistuneen voiman momentin  $\tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}$  vuoksi. Täsmällisemmin tämä on pyörimisen lükeyhtälön mukaan sama asia kuin tangon kulmaliikemäärin muutosnopeus

$$\frac{dL_{\theta,\text{tanko}}}{dt} = \tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}, \quad (5.129)$$

joten kulmaliikemäären kokonaismuutos saadaan tästä integroimalla ajan suhteen

$$\Delta L_{\theta,\text{tanko}} = \int \tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} dt. \quad (5.130)$$

Tämä muistuttaa suoraviivaisen liikkeen yhtälöä  $\Delta p_x = \int F_x dt = I_x$ , jonka vasen puoli on kappaleen lükeväärän muutos ja oikea puoli voiman impulssi. Voimmekin määritellä **impulssimomentti** momentin integraalina ajan suhteen,

$$J_{\theta} = \int \tau_{\theta} dt, \quad (5.131)$$

jolloin yhtälö (5.130) sanoo, että *tangon kulmaliikemäären muutos on yhtä suuri kuin siihen kohdistunut impulssimomentti*

$$\Delta L_{\theta,\text{tanko}} = J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}. \quad (5.132)$$

Impulssimomentti siis mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa kokonaismuutosta kappaleen kulmaliikemääressä samaan tapaan kuin impulssi mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa kokonaismuutosta kappaleen liikemääressä.

Vastaavasti pallon kulmaliikemäären muutoksen aiheuttaa tangon palloon kohdistama momentti ja kulmaliikemäären kokonaismuutos on yhtä suuri kuin pallon saama impulssimomentti

$$\Delta L_{\theta,\text{pallo}} = \int \tau_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} dt = J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.133)$$

Toisaalta voiman ja vastavoiman lain mukaisesti vuorovaikutus kohdistaa kumpaankin osapuoleen yhtä suuret mutta vastakkaiset momentit, joten

$$J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = \int \tau_{x,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} dt = - \int \tau_{x,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} dt = -J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.134)$$

Tanko ja pallo saavat siis törmäyksessä yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset impulssimomentit tangon akselin suhteen, ja näin ollen niiden kulmaliikemäärit muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin. *Systeemin kokonaiskulmaliikemäären muutos on siten nolla*

$$\Delta L_{\theta,\text{kokonaiss}} = (\Delta L_{\theta,\text{pallo}} + \Delta L_{\theta,\text{tanko}}) = (J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} + J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}) = 0. \quad (5.135)$$



**5.24** Kuvassa 5.21 esitettiin kaksi törmäyskoetta pallon ja tangon välillä. Kummassa tapauksessa (a) pallon saama impulssi on (itseisarvoltaan) suurempi, (b) tangon saama impulssimomentti on suurempi, (c) pallon saama impulssimomentti on suurempi?

Prosessissa siis kokonaisen energian lisäksi *kokonaiskulmaliikemääriä* on vakio, ja aivan vastaavanlainen päätely toimii aina kun systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten *kokonaismomentti on nolla*. Näin siksi, että systeemin sisäisissä vuorovaikutuksissa kappaleiden väliset voimat voivat kyllä muuttaa yksittäisten kappaleiden kulmaliikemääriä (aivan kuten pallon ja tangon esimerkissä molempien kappaleiden kulmaliikemäärit muuttuvat törmäyksessä) mutta tällöin kappaleiden kokonaiskulmaliikemäären muutoksen on oltava aina nolla (aivan kuten pallon ja tangon tapauksessa kappaleiden kulmaliikemäärit muuttuvat yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin). Systeemin ulkoiset vuorovaikutukset voivat muuttaa systeemin kokonaiskulmaliikemääriä, mutta se on mahdollista vain jos nämä vuorovaikutukset kohdistavat systeemiin nollasta poikkeavan momentin.

Tässä *johdimme* kulmaliikemäären säilymislain jälkille kappaleille lähtien vuorovaikutuksia kuvaavista voimista. Kuitenkin kuten energia ja liikemääräkin, kulmaliikemääriä on laajempi käsite kuin pelkkää kappaleiden mekaanista liikettä kuvavaa suure, ja niinpä *kulmaliikemäären säilymislakia* pidetään omana peruslakinaan. Sen mukaan kulmaliikemääriä ei voi luoda eikä hävittää. Kulmaliikemääriä voi siirtyä systeemiin ja sen ympäristön välillä vain jos systeemiin kohdistuu ulkoisen vuorovaikutuksen momentti — muutoin systeemin kulmaliikemääriä on vakio.



**5.25** Kirjoita omiin sanoisin tiivistelmä kulmaliikemääristä. Määrittele sekä pyörivän että etenevän liikkeen kulmaliikemääriä, selitä miten kulmaliikemääri voi muuttua, ja perustele täitä kautta, millaisessa systeemissä kulmaliikemääriä on vakio.

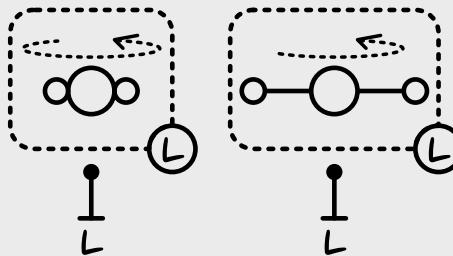
### esimerkki 5.7

### Kulmaliikemäären säilyminen

**Satelliitti pyörii pituusakselinsa ympäri nopeudella 1.62 radiaania sekunnissa. Satelliitin rungon hitausmomentti on 2.30 kgm<sup>2</sup>. Lisäksi satelliitissa on kaksi kevyttä "käsivartta", joiden päissä on 353 g massaiset mittalaitteet. Käsivarret ovat symmetrisesti satelliitin vastakkaisilla puolilla. Aluksi laitteet ovat etäisyydellä 12 cm satelliitin pyörimisakselista. Sitten käsivarret oikaistaan, jolloin mittalaitteet siirtyvät etäisyydelle 55 cm satelliitin pyörimisakselista. Mikä on satelliitin pyörimisnopeus tämän jälkeen?**

**TILANNE** Merkitään rungon hitausmomenttia  $I_\theta = 2.30 \text{ kgm}^2$ , laitteiden massaa  $m = 0.353 \text{ kg}$ , niiden etäisyyttä pyörimisakselista  $r_{\text{alku}} = 0.12 \text{ m}$  ja  $r_{\text{loppu}} = 0.55 \text{ m}$  ja satelliitin kulmanopeutta  $\omega_{\theta,\text{alku}} = 1.62 \text{ s}^{-1}$  ja  $\omega_{\theta,\text{loppu}}$ .

**SUUNNITELMA** Satelliitti ei vaikuta avaruudessa painovoimaa lukuunottamatta ulkoisia vuorovaikutuksia, ja painovoiman momentti satelliitin massakeskipisteen suhteeseen on nolla. Niinpä satelliitin kulmaliikemääriä on vakio. Satelliitin hitausmomentti kasvaa mittalaitteiden siirtymessä kauemmas sen pyörimisakselista, joten satelliitin pyörimisnopeuden täytyy samalla pienentyä.



Satelliitin kokonaishitausmomentti on aluksi  $I_{\theta,\text{kokonais,alku}} = I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2$  ja lopuksi  $I_{\theta,\text{kokonais,loppu}} = I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2$ . Satelliitin kulmaliikemääriä on  $L_\theta = I_\theta \omega_\theta$ , ja tämä on vakio.

**RATKAISU** Kulmaliikemäären vakioisuuden perusteella  $I_{\theta,\text{kokonais,alku}} \omega_{\theta,\text{alku}} = I_{\theta,\text{kokonais,loppu}} \omega_{\theta,\text{loppu}}$  eli

$$(I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2) \omega_{\theta,\text{alku}} = (I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2) \omega_{\theta,\text{loppu}}. \quad (5.136)$$

Tästä voidaan ratkaista kulmanopeus lopuksi

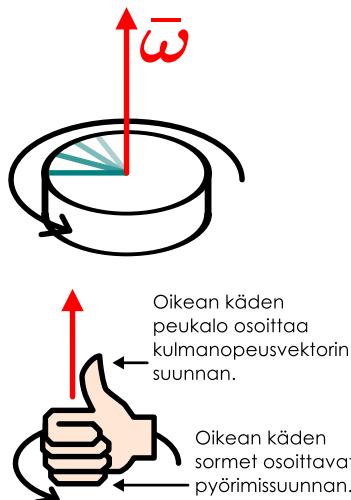
$$\omega_{\theta,\text{loppu}} = \frac{I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2}{I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2} \omega_{\theta,\text{alku}} = 1.49 \text{ s}^{-1}. \quad (5.137)$$

**ARVIOINTI** Jos laitteet siirtyisivät hyvin kauas, satelliitin hitausmomentti kasvaisi mielivaltaisen suureksi ja sen kulmanopeus lähestyisi nollaa. Tämä päätee johdetulle ratkaisulle, sillä  $\lim_{r_{\text{loppu}} \rightarrow \infty} \omega_{\theta,\text{loppu}} = 0 \text{ s}^{-1}$ .

## 5.5 Moniulotteinen pyörimisliike

### Pyöriminen kolmiulotteisessa avaruudessa

Kuva 5.23: Kulmanopeusvektori on pyörimisakselin suuntainen.



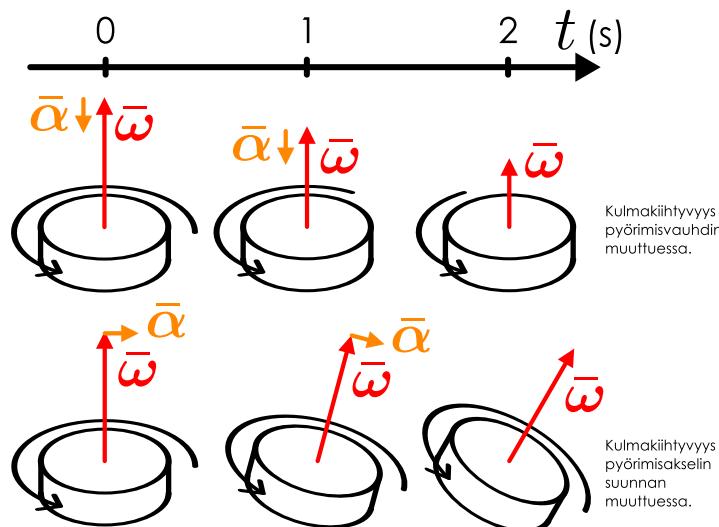
Edellä olemme käsitelleet pyörimistä vain tasossa. Tällöin pyörimisliikkeen lait ovat analogiset yksiuotteisen etenevän liikkeen kanssa, kun paikka-koordinaatti korvataan kulmakoordinaatilla. Kuitenkin aivan kuten etenevä liike voi todellisuudessa tapahtua eri suuntiin, kappaleet voivat myös pyöriä erisuuntaisten akseleiden ympäri. Etenevä liikettä voidaan kuvata nopeusvektorilla, jonka suunta kertoo liikkeen suunnan, ja samoin pyörimislükettä voidaan kuvata *kulmanopeusvektorilla*  $\bar{\omega}$ , jonka suunta osoittaa *pyörimisakselin suunnan* ja suuruus kulmanopeuden suuruuden. Jos esimerkiksi kappale pyöri karteesisen koordinaatiston  $xy$ -tasossa, sen pyörimisakseli ja kulmanopeusvektori on  $z$ -suuntainen.

Pelkkä pyörimisakselin suunta ei kuitenkaan riitä määrittelemään pyörimistä, koska kappale voi pyöriä akselin ympäri kahteen eri suuntaan. Pyörimisen tapahtuessa tasossa valittuun positiivinen kiertosuunta ja kulmanopeuden  $\omega_\theta$  etumerkki kertoii kumpaan suuntaan kappale pyörii. Samoin kolmessa ulottuvuudessa pitää valita pyörimiselle positiivinen suunta. Tämä tapahtuu niin sanotun **oikean käden säännön** avulla (kuva 5.23): Jos oikean käden sormet käännetään nyrkiin ja käsi asetetaan niin, että nämä sormet osoittavat kappaleen pyörimissuuntaan, kulmanopeusvektori osoittaa ojennetun peukalon suuntaan. Näin määritellen kulmanopeusvektorin suunta käännyy ympäri, jos kappaleen pyörimissuunta käännyy, eli kulmanopeusvektorin suunta kertoo kappaleen pyörimissuunnan. Itse asiassa tähän asti käytämämme skalaarinen kulmanopeus  $\omega_\theta$  on kulmanopeusvektorin *skalaarikomponentti*, joten vektorin suunnan käänäminen vaihtaa myös sen skalaarikomponentin etumerkin.



5.26 Mihin suuntaan osoittaa eteenpäin ajavan polkupyörän renkaan kulmanopeusvektori?

Kuva 5.24: Kulmakihtyvyys muuttaa pyörimisen suuruutta tai suuntaa.



pyörimisakseli käännyy.

Kun kulmanopeus on näin määritelty vektorina, monet muutkin kulmaliikkeen suureet voidaan määritellä vektoreina. Esimerkiksi kulmakihtyvyysvektori määritellään kulmanopeusvektorin derivaattana

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (5.138)$$

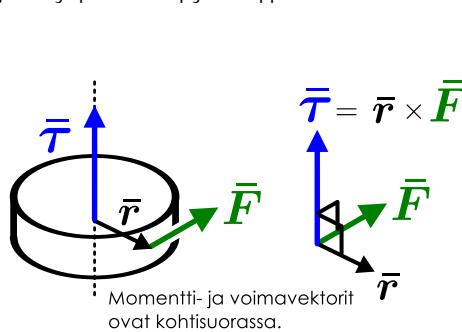
Kulmakihtyvyys on siis vektori, joka osoittaa kulmanopeusvektorin muutoksen suunnan aivan kuten kihtyvyys on vektori, joka osoittaa nopeuden muutoksen suunnan. Jos kulmakihtyvyys on kulmanopeusvektorin suuntainen, kulmanopeusvektori pitenee. Jos kulmakihtyvyys on kulmanopeudelle vastakkaisuuntainen, kulmanopeusvektori lyhenee. Ja jos kulmakihtyvyysvektori on kohtisuorassa kulmanopeusvektorin suuntaan nähdien, kulmanopeusvektori *käännyy*. Tällöin pyörimisliikkeen vauhti ei muutu, mutta

### Momentti ja ristitulo

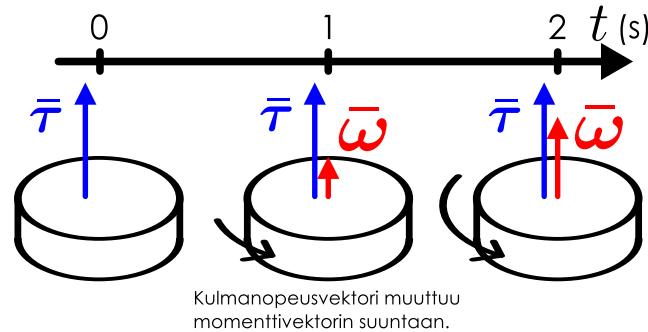
Joidenkin suureiden yleistys kolmeen ulottuvuuteen ei kuitenkaan ole aivan suoraviivaista. Tarkastellaan esimerkiksi pyörää, joka pyörii akselinsa ympäri ja jolle annetaan lisää vauhtia reunasta vetämällä. Pyörän kohdistuva voimavektori osoittaa tällöin pyörän *ulkoreunan suuntaan*. Pyörän kulmanopeusvektori kuitenkin osoittaa määritelmänsä mukaan *pyörimisakselin suuntaan* — siis eri suuntaan kuin voimavektori. Pyörän

Kuva 5.25: Momenttivektorin määrittely ristituloon avulla.

(a) Momenttivektori osoittaa sen akselin suuntaan, jonka ympäri voima pyrkii kappaletta käantämään.



(b) Kulmanopeusvektori muuttuu momenttivektorin suuntaan.



pyörimisvauhti lisääntyy, koska voima kohdistaa pyörään momenttiin, ja tällöin kulmanopeusvektorin pituuden täytyy kasvaa. Tarvitaan siis tapa yhdistää voima, momentti ja kulmaliikeväri vektoreina.

Idea on seuraava: Aivan kuten kulmanopeusvektorin suunta määriteltiin osoittamaan pyörimisakselin suuntaan, määritellään momenttivektorin  $\bar{\tau}$  suunta osoittamaan sen akselin suuntaan, jonka ympäri voima pyrkii kappaletta käantämään. Tarkastellun pyörän tapauksessa *momentti osoittaa tällöin pyörimisakselin suuntaan* ja kulmanopeusvektori muuttuu momenttivektorin osoittamaan suuntaan. Tällöin jälkän kappaleen pyörimisen likeyhtälöksi saadaan yksinkertaisesti

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = I \ddot{\alpha} = I \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (5.139)$$

Määritelläksemme momenttivektorin täsmällisesti tarvitsemme kuitenkin uuden vektorilaskennan työkalun, **ristituloon**.

Voiman momentti riippuu voiman suuruuden lisäksi sen viivavarren pituudesta. Niinpä voiman momentti voidaan määritellä vektorina muodossa

$$\bar{\tau} = (rF \sin \phi) \hat{e}, \quad (5.140)$$

missä yksikkövektori  $\hat{e}$  on kohtisuorassa sekä voimavektoria  $\bar{F}$  että pyörimisakselista voiman vaikutuspisteeseen osoittavaa paikkavektoria  $\bar{r}$  vastaan. Vektorin  $\hat{e}$  suunta on valittava niin, että kulmanopeudelle määritelty oikean käden säätö pätee. Siispä jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat pyörimissuunnan, johon voima pyrkii kappaletta käantämään, ojennettu peukalo osoittaa momenttivektorin suunnan (eli yksikkövektorin  $\hat{e}$  suunnan). Määritellään tämän perusteella paikka- ja voimavektoreiden ristitulo

$$\bar{r} \times \bar{F} = (rF \sin \phi) \hat{e}. \quad (5.141)$$

jolloin momenttivektori on yksinkertaisesti

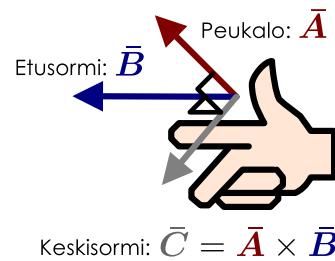
$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (5.142)$$

Ristitulo on kahden vektorin kertolasku ja laskutoimituksen tulos on uusi vektori, minkä vuoksi ristituloa kutsutaankin myös vektorituloksi. Tämän vektorin pituus on alkuperäisten vektorien pituuksien sekä niiden suuntien välisen kulman sinin tulo. Koska sinifunktio nollakulmasta tai oikokulmasta on nolla, kahden yhdensuuntaisen vektorin välinen ristitulo on nolla. Momentin tapauksessa tämä vastaa tapausta, jossa voimavektori osoittaa kohti pyörimisakselia. Tällöin voiman varsi on nolla ja niinpä myös momentti on nolla. Erityisesti minkä tahansa vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla.

Ristituloon suunta on molempia alkuperäisiä vektoreita vastaan kohtisuorassa niin, että oikean käden säätö toteutuu. Yleisesti kahden vektorin ristituloon suunta voidaan määritellä niin, että jos vektori  $\bar{A}$  osoittaa oikean käden peukalon suuntaan ja  $\bar{B}$  etusormen suuntaan, ristitulo  $\bar{A} \times \bar{B}$  osoittaa kämmentä vastaan kohtisuoraan asetetun keskisormen suuntaan. Tästä säännöstä seuraa suoraan, että **vektorien vaihtaminen keskenään käyttää ristitulovektorin**

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}. \quad (5.143)$$

Kuva 5.26: Ristitulo.

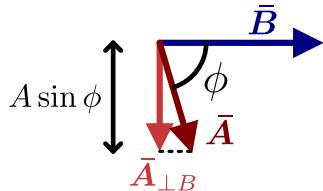


Matematiikassa tällaisesta ominaisuudesta sanotaan, että tulo on *antikommutatiivinen*. Useimmat muut normaalilin kertolaskun ominaisuudet toimivat ristitulollekin, mutta tulon tekijöiden järjestyksen vaihtaminen on siis kiellettyä.



**5.27** Eteenpäin ajava polkupyörä jarruttaa, jolloin renkaan yläosassa sijaitsevat jarrupalat kohdistavat renkaaseen sen pyörimislukettä hidastavan momentin. (a) Mihin suuntaan renkaan akselista katsoen jarrupalojen paikkavektori osoittaa? (b) Mihin suuntaan jarrupalojen renkaaseen kohdistama kitkavoima osoittaa? (c) Mihin suuntaan renkaaseen kohdistuvan momentin vektori osoittaa? (d) Miten renkaan kulmalikemäärvektori muuttuu?

Kuva 5.27: Vektorin kohtisuora komponentti.



Pistetulo on verrannollinen vektoreiden välisen kulman kosiniin, min-kä vuoksi vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa voidaan esittää pistetulon avulla. Ristitulo on verrannollinen vektoreiden välisen kulman siniin, joten ristitulon itseisarvon avulla voidaan esittää vektorin toista vektoria vastaan *kohtisuoran komponentin pituus*,

$$A_{\perp B} = A \sin \phi = \frac{1}{B} |\bar{A} \times \bar{B}|. \quad (5.144)$$

Tästä seuraa myös se, että ristitulon itseisarvo on yhtä suuri kuin sellaisen suunnikkaan pinta-ala, jonka sivut ovat vektorit  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$ .

Kuten pistetulo, ristitulokin voidaan laskea karteesisissa koordinaateissa. Karteesisten yksikkövektoreiden ristitulot ovat nimittäin

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad (5.145)$$

ja vektorin ristitulo itsensä kanssa on aina nolla

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \bar{0}, \quad (5.146)$$

joten kahden komponenteissa esitetyn vektorin ristitulo voidaan kertoa auki ja lopputulokseksi saadaan

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \quad (5.147)$$

$$= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + \dots \quad (5.148)$$

$$= A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + \dots \quad (5.149)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \quad (5.150)$$

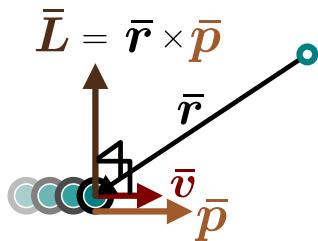


**5.28** Olkoot  $\bar{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  ja  $\bar{B} = -4\hat{i} - 1\hat{j} + 6\hat{k}$ . Mitä on (a)  $\bar{A} \cdot \bar{B}$ , (b)  $\bar{A} \times \bar{B}$ ?

## Kulmalikemäärä

Kuva 5.28: Suoran liikkeen kulmalikemäärä.

Kulmalikemäärä on kohtisuorassa hiukan nopeutta vastaan.



Momentin ohella myös etenevän liikkeen kulmalikemäären määritelmässä tarvittuun kahden vektorin, nopeuden ja paikan, toisaan vastaan kohtisuoria komponentteja, joten ristitulo sopii myös kulmalikemäären määrittelemiseen kolmessa ulottuvuudessa. Ensinnäkin paikkavektorin ja liikemäären ristitulon itseisarvo on

$$|\bar{r} \times \bar{p}| = |rp \sin \theta| = |r_{\perp} p| = |L_{\theta}|, \quad (5.151)$$

eli siis sama kuin kappaleen kulmalikemäären suuruus origon suhteen. Lisäksi ristitulon suunta on kohtisuorassa pyörimistaso vastaan, joten oikean käden säännön perusteella kulmalikemäärvektori osoittaa samaan suuntaan kuin kulmanopeusvektori. Niinpä *etenevän hiukan kulmalikemääräksi* määritellään yleisesti

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}. \quad (5.152)$$

*Pyörivän kappaleen kulmalikemäärä* voidaan kirjoittaa myös kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden avulla

$$\bar{L} = I \bar{\omega}. \quad (5.153)$$

## PYÖRIMISLIKE

Pyörimisen liikeyhtälön mukaan jäykän kappaleen kulmanopeuden muutosnopeus on verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaismomenttiin, joten pyörimisen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa myös kulmaliijemääärän avulla muodossa

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{L}}{dt}. \quad (5.154)$$

Toisin sanoen kappaleen *kulmaliijemääärän muutosnopeus on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva kokonaismomentti*. Tämä on totta yleisesti, sillä kulmaliijemääärän säilymislain mukaan systeemin tai kappaleen kulmaliijemäärä voi muuttua vain, jos kappaleeseen kohdistuu ulkoinen momentti. Erityisesti jos kappaleeseen tai systeemiin kohdistuva kokonaismomentti on nolla, sen kulmaliijemäärävektori on *vakio*.

Tuloksen voi johtaa myös derivoimalla hiukkasen kulmaliijemääärän määritelmää (5.152) ja käyttämällä kertolaskun derivoimissääntöä:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}. \quad (5.155)$$

Nyt kuitenkin paikkavektorin derivaatta ajan suhteeseen on nopeus  $\bar{v}$ , joka on yhdensuuntainen lijemääärän kanssa, joten ensimmäinen termi on nolla,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} = \bar{v} \times (m\bar{v}) = \bar{0}. \quad (5.156)$$

Lisäksi dynamiikan peruslain mukaan lijemääärän derivaatta ajan suhteeseen on yhtä suuri kuin kappaleeseen vaikuttava voima, joten jälkimmäinen termi on yhtä suuri kuin hiukkaseen vaikuttava momentti

$$\bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{\tau}_{\text{kokonais}}. \quad (5.157)$$

Niinpä kulmaliijemääärän muutosnopeuden on oltava yhtä suuri kuin hiukkaseen kohdistuva kokonaismomentti. Tulos voidaan yleistää kappaleille jakamalla kappaleet osiin ja laskemalla kaikkien osien kulmaliijemäärien muutokset yhteen.

Huomaa erityisesti, että liikeyhtälö  $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$  eli yhtälö (5.139) pätee vain, jos *kappaleen hitausmomentti on vakio*. Jos kappaleen hitausmomentti muuttuu esimerkiksi kappaleen muodon muuttuessa, kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti on sama kuin kappaleen kulmaliijemäären muutos eli yhtälö (5.154) *pätee*, mutta momentti *ei ole* sama kuin kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden muutoksen tulo, joten yhtälö (5.139) *ei päde*. Klassinen esimerkki tästä on piruettia tekevä taitoluistelija, jonka kulmanopeus hidastuu luistelijan levittäessä kätensä. Luistelijaan *ei vaikuta* tällöin merkittävää ulkoista momenttia joten myöskään hänen kulmaliijemäärensä ei muudu. Kuitenkin koska hänen hitausmomenttinsa kasvaa massan siirtymessä kauemmas pyörimisakselistä, kulmanopeuden on samalla pienennytävä, jotta kulmaliijemäärä pysyisi vakiona.



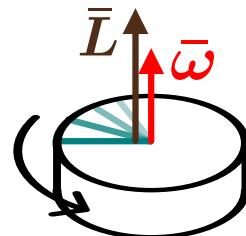
**5.29** Millainen momentti viistoon heitettyyn palloon kohdistuu heittoliikkeen aikana, jos akseli on kiinnitetty heittäjään? Miten pallon kulmaliijemäärä muuttuu heiton aikana? Entä jos akseli on kiinnitetty heiton laki-pisteeseen?

Kun levossa olevaan kappaleeseen kohdistuu nollasta poikkeava kokonaismomentti, kappale alkaa pyöriä. Tällöin kappale saa kulmaliijemäärä ja sen kulmaliijemäärävektori osoittaa samaan suuntaan kuin mihin momenttivektori osoitti. Kappale alkaa näin ollen pyöriä intuitiivisesti odotettuun suuntaan. Esimerkiksi kuvassa 5.25 kiekkoon kohdistuu sen sivun suuntainen voima, ja tämä voima tuottaa kiekon keskipisteen suuntaan momenttin, joka osoittaa kuvassa suoraan ylöspäin. Näin ollen kiekko alkaa pyöriä kuvassa ylöspäin osoittavan akselin ympäri, kuten odotettua.

Myös pyörivien kappaleiden liikettä voidaan muuttaa kohdistamalla niihin momentti, mutta tällaisten kappaleiden liikkeen muutokset ovat usein varsin epäintuitiivisia. Tästä on esimerkki kuvassa 5.30. Kuvassa kaksi palloa on yhdistetty toisiinsa jäykällä sauvalla, ja pallojen muodostama kappale pyörii massakeskipisteensä ympäri. Aluksi pyörimisakseli on kuvassa pystysuora. Sitten palloihin kohdistuu samanaikaisesti yhtä suuret, mutta vastakkaisuuntaiset voimat. Jos pallot olisivat paikoillaan, kumpikin niistä alkaisi liikkua siihen kohdistuvan voiman osoittamaan suuntaan. Nyt kuitenkin pallot ovat jo liikkeessä, joten kummankin pallon nopeusvektori muuttuu palloon kohdistuvan voiman osoittamaan suuntaan. Näin pallojen muodostaman kappaleen pyörimisakseli käännyy kuvassa hieman vasemmalle. Voimapari saa siis kappaleen pyörimisakselin käantymään eri suuntaan kuin mihin ne käantäisivät levossa olevaa kappaletta!

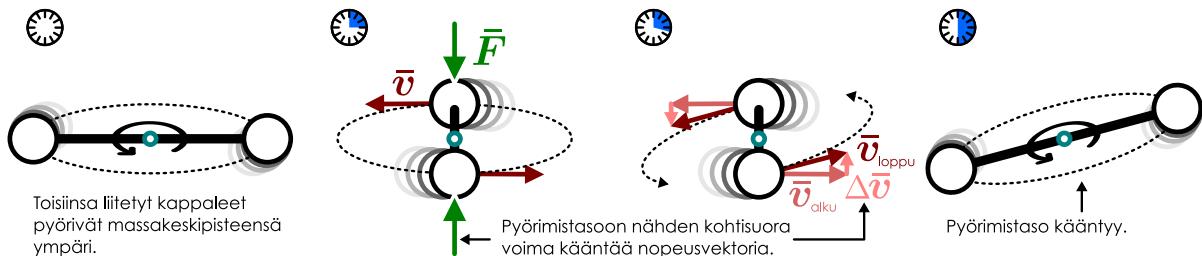
Kuva 5.29: Pyörimisen kulmaliijemäärä.

Kulmaliijemäärä on yhdensuuntainen kulmanopeuden kanssa.

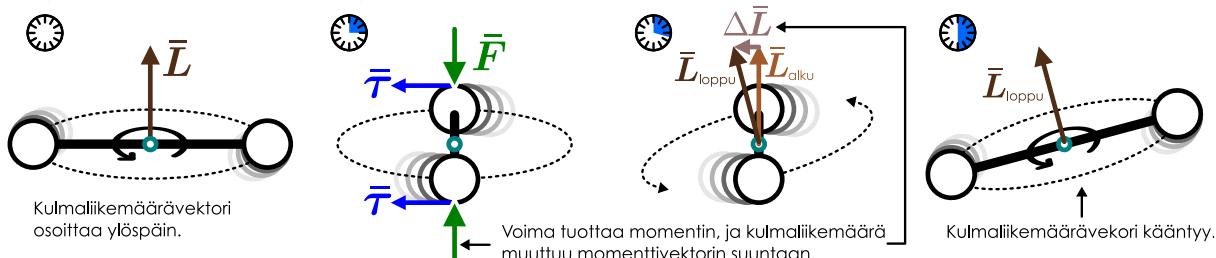


Kuva 5.30: Pyörivään kappaleeseen kohdistuvat voimat voivat kääntää kappaleen pyörimisakselin suuntaa. Akseli ei kuitenkaan välttämättä käännä samaan suuntaan kuin mihin kappale alkaisi pyöriä, jos se olisi aluksi levossa.

(a) Pyörimissuunnan muutoksen päättely voima- ja nopeusvektoreiden avulla.



(b) Pyörimissuunnan muutoksen päättely momentti- ja kulmaliikemäärävektorin avulla.



Tässä esimerkissä kappaleen liikkeen muutos voiitin päätellä helposti tarkastelemalla palloihin kohdistuvia voimia ja niiden vaikutusta pallojen nopeusvektoreihin, mutta usein tällainen analyysi on vaikeaa. Sen sijaan pyörimislukkettä kannattaa analysoida momentin ja kulmaliikemäärän avulla kuten kuvassa 5.30 (b). Aluksi kappaleen pyörimisakseli on pystysuorassa, joten kulmaliikemäärävektori osoittaa oikean käden säännön mukaisesti ylöspäin. Samoin oikean käden säännön mukaisesti kumpaankin palloon kohdistuva voima tuottaa kuvassa vasemmalle osoittavan momenttivektorin. Kulmaliikemäärä muuttuu kokonaismomenttivektorin osoittamaan suuntaan eli kuvassa vasemmalle, ja niinpä kappaleen pyörimisakseli käännyy hieman vasemmalle.



**5.30** Kirjoita oman sanoin tiivistelmä pyörimisen kolmiulotteisesta kuvauksesta. Selitä erityisesti miten momentti- ja kulmaliikemäärävektorien suunnat päätellään oikean käden säännöillä sekä miten ne laskeetaan ristituloon avulla.

### esimerkki 5.8

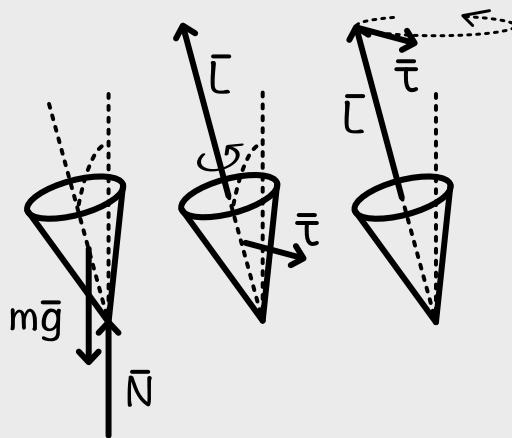
### Hyrrä

Miksei pyörivä hyrrä kaudu?

**SUUNNITELMA** Hyrrän kohdistuu maanpinnan tukivoima sekä painovoima. Jos hyrrä on hieman vinossa, nämä voimat kohdistavat hyrrän momentin. Oikean käden sääntö määräää momenttivektorin suunnan. Jos hyrrää katsotaan suunnasta, jossa se näyttää olevan vinossa vasemmalle, momenttivektori osoittaa kohti katsojaa.

Pyörivällä hyrällä on kulmaliikemäärää. Jos hyrrä pyörii ylhäältä katsoen vastapäivään, kulmaliikemäärävektori osoittaa ylöspäin.

Kulmaliikemäärävektorin muutosnopeus on sama kuin momenttivektori. Koska momenttivektori osoittaa vaakasuuntaan, kulmaliikemäärävektorin täytyy myös käännyä tähän suuntaan. Niinpä hyrrä ei kaudu maahan vaan käännyy pystysuunnan ympäri. Samalla hyrrän kohdistuva momenttivektori käännyy ja niinpä hyrrä kiertää kehää. Tätä liikkettä kutsutaan *prekessioksi*.



## Yhteenveton Pyörimisliike

### Vektorit

- Napakoordinaatisto** on kaksulotteinen koordinaatisto, jossa kunkin pisteen paikkaa kuvaavat *radiaalinen* eli etäisyys origosta,  $r$ , sekä  $x$ -akselin suhteenvastapäivään mitattu *kulmakoordinaatti*,  $\theta$ .
- Napakoordinaatiston yksikkövektorit eivät ole vakiot vaan kussakin avaruuden pisteessä määritellään *radiaaliyksikkövektori*  $\hat{r}(\theta)$ , joka osoittaa poispäin origosta, sekä *tangenttiyksikkövektori*  $\hat{\theta}(\theta)$ , joka osoittaa aina kulmakoordinaatin kasvusuuntaan.
- Vektorit voidaan jakaa radiaali- ja tangenttikomponentteihin

$$\bar{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}.$$

- Ristitulo** eli vektoritulo on kahden vektorin välinen kertolasku, jossa tulos on vektori. Tämän vektorin pituus on vektorien pituuksien sekä niiden välisen kulman  $\phi$  sinin tulo

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = AB \sin \phi.$$

Ristituloon suunta on alkuperäisiä vektoreita vastaan kohtisuoraan

$$\bar{A} \times \bar{B} \perp \bar{A}, \bar{B}$$

niin että ns. oikean käden sääntö pätee: jos oikean käden peukaloja etusormi osoittavat vektorien  $\bar{A}$  ja  $\bar{B}$  suuntiin, ristitulo osoittaa keskisormen suuntaan.

- Ristitulo voidaan karteesissa koordinateissa kirjoittaa komponenttimuodossa

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

- Vektorin toista vektoria vastaan *kohtisuora komponentti* voidaan laskea ristituloin avulla

$$A_{\perp B} = \frac{1}{B} |\bar{A} \times \bar{B}|.$$

### Pyörimisliike

- Ympyräradalla liikuvan tai kiinteän akselin ympäri pyörivän kappaleen asentoa voidaan kuvalta *kulmakoordinaatilla*. Ympyräradan tapauksessa tämä kiertokulma on kappaleen kulkeman matkan  $s$  ja ympyräradan säteen  $r$  suhde

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

- Kappaleen kulmanopeus  $\omega_\theta$  ja kulmakihtyyvyys  $\alpha_\theta$  ovat kiertokulman derivaatat ajan suhteena

$$\begin{aligned}\omega_\theta &= \frac{d\theta}{dt} \\ \alpha_\theta &= \frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.\end{aligned}$$

- Ympyräradalla olevan kappaleen nopeusvektori on aina radan tangenttiin suuntainen. Nopeuden tangentti- ja radiaalikomponentit ovat

$$\begin{aligned}v_\theta &= \omega_\theta r \\ v_r &= 0.\end{aligned}$$

- Ympyräradalla liikuvan kappaleen kiihtyyvyysvektorilla on aina komponentti *kohti ympyrän keskipistettä*. Tämän *keskeiskihtyyvyden* suuruus riippuu kappaleen nopeudesta  $v$  sekä radan sääteestä  $r$ . Jos kappaleella on kiihtyyvyden komponentti liukkeen suunnassa, sen kulmanopeus muuttuu. Tämä *tangenttikihtyyvyys* on verrannollinen kulmakihtyyvyteen.

$$\begin{aligned}a_r &= -\frac{v_\theta^2}{r} = -\omega_\theta^2 r \\ a_\theta &= \alpha_\theta r.\end{aligned}$$

- Liikkuvan kappaleeseen kohdistuvan voiman liikkeen suuntaisen komponentti muuttaa kappaleen nopeutta mutta ei vaikuta sen suuntaan kun taas lükettä vastaan kohtisuora komponentti muuttaa kappaleen suuntaa mutta ei vaikuta sen nopeuteen.
- Kolmessa ulottuvuudessa kulmanopeus on vektori, jonka suunta osoittaa pyörimisakselin suuntaan.

### Energia ja kulmaliikekemäärä

- Kappaleen **hitausmomentti** kuvailee kiertoliikkeen inertiansaa eli sen kykyä vastustaa pyörimislükkeen muutosta. Ympyräliikkeessä olevan  $m$ -massaisen hiukkasen hitausmomentti *ympyrän keskipisteen suhteeseen* on

$$I_\theta = mr^2.$$

- Kappaleen hitausmomentti saadaan laskemalla yhteen sen kaikkien hiukkasten hitausmomentti *pyörimisakselin suhteeseen*

$$I_\theta = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

missä  $r$  on infinitesimaalisen massan  $dm$  etäisyys pyörimisakselista,  $\rho$  on tiheys ja  $dV$  on infinitesimaalinen tilavuus.

- Pyörimislükkeen liike-energia on

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2.$$

- Pyörivän kappaleen **kulmaliikekemäärä** on

$$L_\theta = I_\theta \omega_\theta.$$

- Liikkuvan hiukkasen kulmaliikekemäären suuruus *origon suhteeseen* on

$$L_\theta = mv_\theta r = m\omega_\theta r^2 = \pm mvr_{\perp v}.$$

missä  $r_{\perp v}$  on kappaleen *nopeutta vastaan kohtisuora etäisyys origosta*. Kulmaliikekemäärellä on etumerkki: se on positiivinen kappaleen pyöriessä positiiviseen kiertosuuntaan.

- Kolmessa ulottuvuudessa kulmaliikekemäärä on vektori, jonka suunta osoittaa *pyörimisakselin suunnan* oikean käden säännön mukaisesti. Liikkuvan hiukkasen kulmaliikekemäärä on

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}.$$

ja pyörivän kappaleen

$$\bar{L} = I \bar{\omega}.$$

- Kulmaliikekemäärä on ekstensiivinen suure ja systeemin kokonaishkulmaliikekemäärä on sen kaikkien osien kulmaliikekemäärien summa. Kulmaliikekemäärä ei voi luoda eikä hävittää

$$\Delta \bar{L}_{\text{kokonaiss}} = \bar{0}, \text{ eli } \bar{L}_{\text{kokonaiss}} = \text{vakio}.$$

Tämä on *kulmaliikekemäären säilymislaki*.

- Systeemin kokonaishkulmaliikekemäärä on vakio, jos siihen vaikuttavien ulkoisten vuorovaikutusten momentti on nolla.

## Pyörivä ja etenevä liike

- Kappaleen liike voidaan jakaa massakeskipisteen etenemislukkeeseen ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvaan pyörimislukkeeseen.
- Kappaleen liike-energia jaettuna etenevään ja pyörivään osaan

$$K = K_{\text{cm}} + K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\theta}\omega_{\theta}^2.$$

- Kappaleen kulmalukemääärä jaettuna etenevään ja pyörivään osaan

$$L_{\theta} = L_{\text{cm},\theta} + L_{\text{rotaatio},\theta} = mv_{\theta,\text{cm}}r_{\text{cm}} + I_{\theta}\omega_{\theta} \quad (5.158)$$

- Kappale vierii pinnalla liukumatta, kun kappaleen pintaa kosketava piste on kosketushetkellä paikoillaan pinnan suhteeseen. Tällöin  $R$ -säteisen kappaleen pinnan suhteeseen mitattu etenemisnopeus ja kulmanopeus ovat toisiinsa verrannolliset,

$$v = \omega_{\theta} R$$

$$a = \alpha_{\theta} R.$$

## Momentti, työ ja impulssi

- Voima  $\bar{F}$ , joka vaikuttaa kappaleeseen pisteessä  $\bar{r}$ , kohdistaa siihen origon kautta kulkevan akselin suhteeseen **momentti**

$$|\tau_{\theta}| = |rF_{\theta}| = r_{\perp} F.$$

Momentti voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä, osoittaakö voima positiiviseen vai negatiiviseen kiertosuuntaan.

- Kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti on siihen kohdistuvien momenttien summa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \sum_i \tau_{\theta,i}.$$

- Pyörimisen likeyhtälö on

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{dL_{\theta}}{dt}.$$

Jäykän kappaleen, jonka *hitausmomentti on vakio*, likeyhtälö on

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}.$$

- Kappaleeseen vaikuttava *vakiomomentti* tekee kappaleen käännytessä työn

$$W = \tau_{\theta}\Delta\theta.$$

- Muuttuva momentti tekee työn

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} \tau_{\theta} d\theta.$$

- Kappaleeseen vaikuttava momentti kohdistaa kappaleeseen **impulssimomentti**

$$J_{\theta} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \tau_{\theta} dt,$$

ja kappaleen kulmalukemääärän muutos on yhtä suuri kuin sen saama kokonaismomentti

$$\Delta L_{\theta} = J_{\theta,\text{kokonais}}.$$

- Kolmessa ulottuvuudessa momenttin yleinen määritelmä on

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}.$$

ja yleinen pyörimisen likeyhtälö on

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{L}}{dt}.$$

## Sanasto

- ympyräliike (circular motion)
- pyörimislukke (rotational motion)
- kiertoliike (revolving motion)
- pyörimisakseli (axel of rotation)
- napakoordinaatit (polar coordinates)
- radiaalikoodinaatti (radial coordinate)
- kulmakoordinaatti (angular coordinate)
- tangenttihiityvyys (tangential acceleration)
- keskeiskihiityvyys (centripetal acceleration)
- kulmanopeus (angular velocity)

- kulmakihiityvyys (angular acceleration)
- hitausmomentti (rotational inertia)
- tilveys (density)
- momentti (torque)
- vieriminen (rolling)
- resultanttiivoima (resultant force)
- painopiste (center-of-gravity)
- kulmalukemäärä (angular momentum)
- impulssimomentti (angular impulse)

Taulukko 5.1: Yksiulotteista ja pyörivää liikettä kuvaavat suuret skalaarimuodossa.

suora liike		pyörivä liike	
paikkakoordinaatti	$x$	kulmakoordinaatti	$\theta$
nopeus	$v_x = \frac{dx}{dt}$	kulmanopeus	$\omega_{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
kühihiityvyys	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$	kulmakihiityvyys	$\alpha_{\theta} = \frac{d\omega_{\theta}}{dt}$
inertia	$m$	hitausmomentti	$I_{\theta} = \int r^2 dm$
liike-energia	$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2$	liike-energia	$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}I_{\theta}\omega_{\theta}^2$
liikemäärä	$p_x = mv_x$	kulmalukemäärä	$L_{\theta,\text{rotaatio}} = I_{\theta}\omega$
voima	$F_x$	momentti	$\tau_{\theta} = rF_{\theta}$
likeyhtälö	$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt}$	likeyhtälö	$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{dL_{\theta}}{dt}$
työ	$W = \int F_x dx$	työ	$W = \int \tau_{\theta} d\theta$
impulssi	$I_x = \int F_x dt$	impulssimomentti	$J_{\theta} = \int \tau_{\theta} dt$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

- 5.1 (a) Yksi kierros on kulma  $2\pi$ , joten  $3/4$  kierrosta on  $3/4 \cdot 2\pi = 3/2\pi$ .  
 (b)  $1/3$  kierrosta myötäpäivään vastaa  $2/3$  kierrosta vastapäivään, joten kulma on  $4/3\pi$ .  
 (c)  $11/8$  kierrosta johtaa samaan pisteeseen kuin  $3/8$  kierrosta, joten kulma on  $3/4\pi$ .
- 5.2 (a) Koordinaatit ovat  $x = (2.0 \text{ m}) \cos \frac{2}{3}\pi = -1 \text{ m}$  sekä  $y = (2.0 \text{ m}) \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3} \text{ m} \approx 1.732 \text{ m}$ .  
 (b) Pisteen etäisyys origosta on  $r = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (-1 \text{ m})^2} = \sqrt{2} \text{ m} \approx 1.414 \text{ m}$ . Tähän pisteeseen päästäään kiertämällä  $3/8$  kokonaisesta kierroksesta, joten kulmakoordinaatti on  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ .
- 5.3 Keskinopeus on siirtymän ja kuluneen ajan suhde. Vaikka siirtymä lyhenee kuvasarjassa vasemmalta oikealle, myös siirtymään kulunut aika lyhenee, jolloin näiden suhde ei juuri muutu.
- 5.4 (a) Ympyräradalla vastapäivään kiertävän kappaleen nopeusvektori on kohtisuorassa paikavektoriin nähdien niin, että nopeusvektorin kulma  $x$ -akseliin nähdien on  $90^\circ = \pi/2$  suurempi kuin paikkavektorin kulma. Niinpä nopeusvektorin kulma on  $\theta_v = \frac{5}{4}\pi$ .  
 (b) Kappaleen paikkavektori osoittaa origosta ylävasemmalle ja nopeusvektori osoittaa alavasemmalle. Nopeuden  $x$ - ja  $y$ -komponenttien täytyy siis olla negatiiviset. Täsmällisesti  $x$ -komponentti on  $v_x = v \cos \theta_v = (3.0 \text{ m/s}) \cos \frac{5}{4}\pi = -2.12 \text{ m/s}$ .  
 (c) Koska kappale liikkuu ympyrän tangentin suuntaan, sen nopeusvektorin tangenttikomponentti on sama kuin kappaleen vauhti,  $v_\theta = v = 3.0 \text{ m/s}$ .
- 5.5 Karuselli tekee kierroksen eli kulman  $\Delta\theta = 2\pi$  ajassa  $\Delta t = 20 \text{ s}$ , joten kulmanopeus on  $\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$ . Tämä on sama kummallekin matkustajalle. Kauempana akselista oleva matkustaja kuitenkin liikkuu nopeammin, sillä hän kulkee pidemmän ympyrän karusellin tehdessä kierroksen. Nopeudet ovat  $0.47 \text{ m/s}$  ja  $0.79 \text{ m/s}$ .
- 5.6 (a) Kun  $\theta = 0$ ,  $\hat{r} = \hat{i}$  ja  $\hat{\vartheta} = \hat{j}$ . Nämä pitääkin olla, koska tarkastelupiste on  $x$ -akselilla.  
 (b) Kun  $\theta$  on hyvin pieni, tarkastelupiste on siirtynyt hieman positiiviseen kertosuuntaan. Tällöin  $\hat{r}$  käännyttää hieman kohti positiivista  $y$ -suuntaa ja  $\hat{\vartheta}$  kohti negatiivista  $x$ -suuntaa. Kun  $\theta = 0.1$ , vektoreiksi saadaan  $\hat{r} \approx 0.995\hat{i} + 0.1\hat{j}$  sekä  $\hat{\vartheta} \approx -0.1\hat{i} + 0.995\hat{j}$ , joten näin todella käy.  
 (c) Kun  $\theta = \frac{2}{3}\pi$ , tarkastelupiste on käännyntänyt  $30^\circ$  ohi positiivisesta  $y$ -akselista. Radiaalivektorin täytyy osoittaa origosta ylävasemmalle, jolloin sillä on negatiivinen  $x$ -komponentti sekä positiivinen  $y$ -komponentti, ja näistä  $y$ -komponentti on itseisarvoaltaan suurempi. Vastaavasti tangenttivektori osoittaa alavasemmalle, joten tällä vektorilla sekä  $x$ - että  $y$ -komponentit ovat negatiiviset, ja  $x$ -komponentti on pidempi. Muunnosyhtälöt antavat vektoreiksi  $\hat{r} \approx -0.5\hat{i} + 0.866\hat{j}$  sekä  $\hat{\vartheta} \approx -0.886\hat{i} - 0.5\hat{j}$ , joten tulos on järkevä.
- 5.7 Kulmanopeus on  $\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$ . Matkustajilla on radiaalikihtyyvyys kohti karusellin keskustaa, ja tämän kihtyyvyden suuruus riippuu etäisyydestä. Kihtyydyt ovat  $0.148 \text{ m/s}^2$  ja  $0.247 \text{ m/s}^2$ .
- 5.8 Karusellin kulmanopeus muuttuu  $\Delta\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$  ajassa  $\Delta t = 2 \text{ s}$ , joten sen kulmakihtyyvyys on  $\alpha_\theta = \Delta\omega_\theta/\Delta t = \frac{1}{20}\pi \text{ s}^{-2} = 0.157 \text{ s}^{-2}$ . Tämä on kulmakihtyyvyys siis myös hetkellä  $t = 1 \text{ s}$ . Kulmanopeus on tällöin puolet lopullisesta kulmanopeudesta eli  $\omega_\theta = \alpha_\theta \frac{1}{2}\Delta t = \frac{1}{20}\pi \text{ s}^{-1} = 0.157 \text{ s}^{-1}$ . (a) Matkustajan radiaalikihtyyvyys on  $a_r = -\omega_\theta^2 r = 0.037 \text{ m/s}^2$ .  
 (b) Matkustajan tangenttikihtyyvyys on  $a_\vartheta = \alpha_\theta r = 0.236 \text{ m/s}^2$ .  
 (c) Kihtyyvyysvektorin pituus saadaan Pythagoraan lauseella,  $a = \sqrt{a_r^2 + a_\vartheta^2} = 0.239 \text{ m/s}^2$ .
- 5.10 (a) Siirtymä on  $\Delta x = v_{x,\text{alku}}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 = (1.0 \text{ m/s}) \cdot (2 \text{ s}) + 0.5 \cdot (-0.4 \text{ m/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = 1.2 \text{ m}$ .  
 (b) Kierto on  $\Delta\theta = \omega_{\theta,\text{alku}}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\theta(\Delta t)^2 = 1.2$ . Kierto lasketaan siis täysin samalla tavalla kuin yksiloteinen siirtymä.
- 5.11 Pisteen tangenttinopeus massakeskipiteen ympäri on  $v_\theta = \omega_\theta r = 1.3 \text{ m/s}$ . Piste saavuttaa siis suurimman nopeutensa silloin, kun sen tangenttinopeus on massakeskipiteen liukkeen suuntainen, ja pienimmän nopeutensa silloin, kun tangenttinopeus on massakeskipiteen liikettä vastaan. Nopeudet ovat siis  $0.7 \text{ m/s}$  ja  $3.3 \text{ m/s}$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

**5.12 (a)** Pidemmän langan pallon hitausmomentti on nelinkertainen lyhyempään lankaan verrattuna.

**(b)** Koska palloilla on sama vauhti, pidemmän langan pallon kulmanopeuden täytyy olla puolet lyhyeen lankaan verrattuna.

**(c)** Koska palloilla on sama vauhti, niillä on myös sama liike-energia.

**5.13** Sauvan kokonaismassa on sen osien massojen summa. Ensimmäinen osa:  $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 L_1 A = 4$  g. Toinen osa:  $m_2 = \rho_2 L_2 A = 15$  g. Kolmas osa:  $m_3 = \rho_3 L_3 A = 13$  g. Yhteensä  $M = m_1 + m_2 + m_3 = 32$  g.

**5.14** Pyörittäminen sauvan pään kautta kulkevan akselin ympäri on vaikeampaa, koska tällöin toinen massa on hyvin kaukana pyörimisakselista. Merkitään käspainon päässä olevia massoja  $m$  ja oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi ne pistemäisiksi. Merkitään massojen välistä etäisyyttä  $L$ . Yhden massan hitausmomentti painon keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on  $m(L/2)^2 = \frac{1}{4}mL^2$ , joten kahden massan hitausmomentti on  $I_{\theta,\text{keskipiste}} = \frac{1}{2}mL^2$ . Jos pyörimisakseli asetetaan käspainon päähän, toisen massan hitausmomentti on likimain nolla (koska sen etäisyys akselistä on lähes nolla), mutta toisen massan hitausmomentti on  $I_{\theta,\text{pää}} = mL^2$ . Niiinpä hitausmomentti pään suhteen on suurempi kuin keskipisteen suhteen. Tämä on yleisesti totta: hitausmomentti kappaleen massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on aina pienempi kuin hitausmomentti minkä tahansa muun samansuuntaisen akselin suhteen.

**5.15** Oven kulmanopeus on  $\omega_\theta = \frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1} = 0.785 \text{ s}^{-1}$  ja sen massakeskipiste, joka on etäisyydellä  $r = 0.5$  m saranasta, liikkuu vauhdilla  $v_{\text{cm}} = \omega_\theta r = 0.393 \text{ m/s}$ .

**(a)** Massakeskipisteen lükkeen energia on  $K_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 = 2.31 \text{ J}$ .

**(b)** Pyörimislükkeen energia massakeskipisteen ympäri on  $K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 = 0.77 \text{ J}$ . Tässä pitää käyttää hitausmomenttia massakeskipisteen suhteen.

**(c)** Pyörimislükkeen energia saranan suhteen on  $K = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 = 3.08 \text{ J}$ , missä energia lasketaan siis käyttäen hitausmomenttia saranan suhteen. Tämä on sama kuin massakeskipisteen rataliukkeen ja massakeskipisteen suhteen tapahtuvan pyörimislükkeen energoiden summa,  $K = K_{\text{cm}} + K_{\text{rotaatio}}$ . Kappaleen massakeskipisteen liike sekä pyöriminen massakeskipisteen ympäri voidaan aina erottaa ja näiden energiat voidaan laskea erikseen. Tällöin kappaleen kokonaisliike-energia on näiden summa. Kuitenkin jos kappale pyörii kiinteän akselin ympäri (tässä sarana), kappaleen kokonaisliike-energia saadaan myös laskemalla kappaleen pyörimisen liike-energia tämän kiinteän akselin suhteen.

**5.16** Pallo liikkuu nopeudella 2 m/s hihnan pinnan suhteen, joten pallon kulmanopeuden täytyy olla  $\omega_\theta = 2 \text{ m/s}/0.10 \text{ m} = 20 \text{ s}^{-1}$ . Huomaa, että vierimisehö  $v_x = \omega_\theta R$  pätee pallon ja hihnan suhteelliselle nopeudelle  $v_x = 2 \text{ m/s}$  mutta ei pallon varsinaiselle nopeudelle  $v_x = 1 \text{ m/s}$ .

**5.17** Kuvan pürtäminen auttaa tehtävän ratkaisua. Vastaukset ovat: (a)  $F = 2.83 \text{ N}$ , (b)  $r = 3.0 \text{ m}$ , (c)  $F_\vartheta = -2.0 \text{ N}$ , (d)  $r_{\perp F} = 2.12 \text{ m}$ , (e)  $|\tau_\theta| = |rF_\vartheta| = r_{\perp F}F = 6.0 \text{ Nm}$ , (f) Momentti käantää kappaletta myötäpäivään.

**5.18 (a)** Oletetaan, että lauta on likimain vaakatasossa, jolloin voiman varsi on sama kuin lasten etäisyys akselista. Tällöin lapset kohdistavat lautan vastakkaisuuntaiset momentit  $\tau_{\theta,A} = -147 \text{ Nm}$  sekä  $\tau_{\theta,B} = 196 \text{ Nm}$ , jolloin kokonaismomentti on  $\tau_\theta = \tau_{\theta,A} + \tau_{\theta,B} = 49 \text{ Nm}$ . (jos positiivinen kiertosuunta valitaan momentin suuntaan).

**(b)** Kulmakihtyvyys on  $\alpha_\theta = \tau_\theta/I_\theta = 6.1 \text{ s}^{-2}$ .

**(c)** Kulmakihtyvyys on nolla jos kokonaismomentti on nolla. Näin on, jos lasten painon tuottamat momentit kumoavat toisensa täsmälleen. Näin käy esimerkiksi siinä tapauksessa, että suurempi lapsi asettuu istumaan etäisyydelle 0.75 m akselista, koska tällöin hänenkin painonsa tuottaa momentin  $\tau_{\theta,B} = 147 \text{ Nm}$ .

**5.19 (a)** Purjeeseen kohdistuu kokonaisvoima  $F = \int dF = \int_0^L az dz = \frac{1}{2}aL^2$ , missä  $L$  on purjeen korkeus. Vakion  $a$  voi siis kirjoittaa kokonaisvoiman avulla muodossa  $a = 2F/L^2$ . (b) Purjeen pieneen osaan kohdistuva voima tuottaa momentin  $d\tau_\theta = zdF = az^2 dz$  purjeen alaosan suhteen. Kokonaismomentti on puolestaan  $\tau_\theta = \int d\tau_\theta = \int_0^L az^2 dz = \frac{1}{3}aL^3 = \frac{2}{3}FL$ . (c) Voima  $F$  tuottaisi saman momentin, jos se kohdistuisi korkeudelle  $z = \frac{2}{3}L$ , mikä on siis purjeen keskikohdan  $z = \frac{1}{2}L$  yläpuolella.

**5.20 (a) (i)** Kappale ei voi olla etenevä liikkeen suhteen tasapainossa. (ii) Se voi olla pyörimislükkeen suhteen tasapainossa, jos voima osoittaa kohti kappaleen massakeskipistettä.

**(b) (i)** Ei. Jos kappale on etenevä liikkeen suhteen tasapainossa, voimien täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset. Koska voimat vaikuttavat samaan pisteeseen, niiden momenttienkin täytyy kumota toisensa. Kappaleen täytyy siis olla myös pyörimislükkeen suhteen tasapainossa. (ii) Kyllä. Jos esimerkiksi molemmat voimat osoittavat kohti massakeskipistettä, kappale on pyörimislükkeen suhteen tasapainossa, mutta sen ei tarvitse olla etenemisen suhteen tasapainossa.

**(c) (i)** Kyllä. Näin on, jos voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset mutta ne eivät vaikuta samalla suoralla. (ii) Kyllä, kuten (b)-kohdassa.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

5.21 Kiertoliikkeeseen Maan ympäri liittyy paljon suurempi kulmaliiikemääriä. Kumpikin kiertoliike tapahtuu samalla kulmanopeudella, mutta kiertoliikkeen kulmaliiikemääriä riippuu Kuun hitausmomentista Maan keskipisteen suhteeseen kun taas pyörimisliikkeen kulmaliiikemääriä riippuu hitausmomentista Kuun keskipisteen suhteeseen. Kuun massa on melko lähellä Kuun omaa keskipistettä mutta hyvin kaukana Maan keskipisteestä, joten hitausmomentti Maan suhteeseen on valtavan paljon suurempi.

5.22 (a) Tasaisessa liikkeessä liikemääriä  $p$  on vakio ja koska liike tapahtuu suoralla, myös etäisyys  $r_{\perp v}$  on vakio. Niinpä myös näiden tulona laskettava kulmaliiikemääriä on vakio.

(b) Riippuu, koska etäisyys  $r_{\perp v}$  riippuu akselista. *Kaikki* kulmasuureet riippuvat akselin valinnasta!

(c) Riippuu. Huomaa erityisesti, että ympyrälükkeen kulmaliiikemääriä on vakio vain ympyrän keskipisteeseen asetetun akselin suhteesta.

(d) Ei riipu. Jos kappaleella on sekä etenevä että pyörivä liikettä, sen etenevän liikkeen kulmaliiikemääriä riippuu valitusta akselista mutta sen pyörvän liikkeen kulmaliiikemääriä on sama kaikkien akselien suhteesta.

5.23 Jos systeemiin ei kohdistu ulkoisia voimia, energian ja kulmaliiikemäären lisäksi myös systeemin kokonaisliikemääriä on vakio. Nyt siis törmäyksessä tanko saa impulssin ja se alkaa liikkua pallon alkuperäisen nopeuden suuntaan. Tanko alkaa myös pyöriä, mutta törmäyksen jälkeen tangon massakeskipisteen täytyy liikkua tasaisella nopeudella, joten tangon liikkeen on helpoin ajatella koostuvan massakeskipisteen tasaisesta liikkeestä sekä pyörimislükkeestä massakeskipisteen ympäri.

5.24 (a) Pallon nopeus muuttuu enemmän kuin kuvassa (b), joten impulssi on siinä suurempi.

(b) Tangon kulmaliiikemääriä muuttuu enemmän kuin kuvassa (a), joten impulssimomentti on siinä suurempi.

(c) Pallo saa yhtä suuren impulssimomentin kuin tanko, joten tämäkin on kuin (a) suurempi. Huomaa, että pallo saa suuremman impulssin kuin kuvassa (b), mutta koska voima vaikuttaa siinä lähevästä pyörimisakselia, sen tuottama impulssimomentti on pienempi.

5.26 Renkaan gläpuoli pyörii eteenpäin. Jos asetamme oikean käden sormet tähän suuntaan, peukalo osoittaa vasemmalle. Siispä kulmaliiikemäärävektori osoittaa liikkeen suuntaan vasemmalle.

5.27 (a) Paikkavektori osoittaa glöspään. (b) Renkaan gläosa liikkuu jarrupaloihin nähden eteenpäin, joten kitkavoima osoittaa taaksepäin. (c) Momenttivektori osoittaa oikean käden säännön perusteella kulkusuuntaan nähden oikealle. (d) Kulmaliiikemäärävektori muuttuu momentin suuntaan eli oikealle. Edellisessä kysymyksessä päättelimme kulmaliiikemäärävektorin osoittavan vasemmalle, joten vektori siis lyhentyy. Näin tietysti pitääkin tapahtua, koska renkaan pyöriminen hidastuu jarrutuksessa.

5.28 (a)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ , (b)  $\vec{A} \times \vec{B} = -9\hat{i} - 42\hat{j} - 13\hat{k}$

5.29 Palloon kohdistuu koko ajan painovoima alas päin, joten jos akseli valitaan heittäjään, painovoiman momentti akselin suhteeseen on itseisarvoltaan sitä suurempi, mitä kauemmas heittäjästä pallo on vaakasuunnassa edennyt. Pallon kulmaliiikemääriä on aluksi nolla, koska etäisyys  $r_{\perp v} = 0$ . Momentti muuttaa kulmaliiikemääriä jatkuvasti, joten kulmaliiikemäären itseisarvo kasvaa jatkuvasti ballistisen liikkeen aikana. Jos akseli sen sijaan on asetettu laki-pisteeseen, pallolla on aluksi kulmaliiikemääriä. Ennen kuin pallo saavuttaa laki-pisteen, painovoiman momentti on vastakkaisuuntainen pallon kulmaliiikemääriä nähden, joten kulmaliiikemääriä pienenee. Laki-pistessä kulmaliiikemääriä on nolla, koska etäisyys  $r_{\perp v} = 0$ . Tämän jälkeen momentin suunta vaihtuu ja pallon kulmaliiikemääriä alkaa jälleen kasvaa.



Osa II

Mekaniikasta termodynamikaan



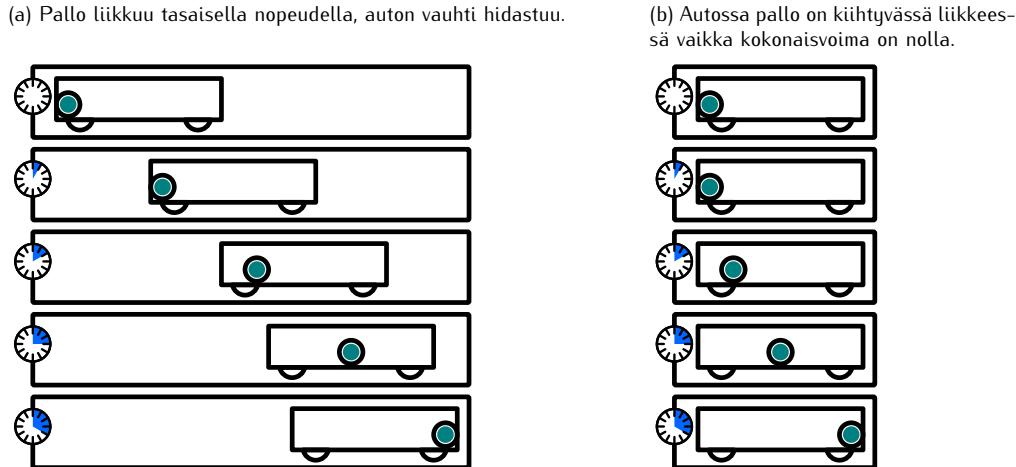
# 6 Suhteellisuus

Fysiikassa suhteellisuus tarkoittaa sitä, että joidenkin suureiden mitatut arvot riippuvat siitä, miten ne mitataan. Tässä ei ole sinänsä mitään ihmellistä, sillä esimerkiksi kappaleen paikkaa ilmaisevat koordinaatit mitataan aina jonkin kääntöpisteen suhteen, jolloin tämän kääntöpisteen muuttaminen luonnollisesti muuttaa myös näitä koordinaatteja. Tässä luvussa tutkimme erityisesti, millaiset suureet muuttuvat jos niitä mitataan toistensa suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa. Tällainen tarkastelu tekee joistakin ilmiöistä helpompiä käsitellä matemaatisesti, mutta ennen kaikkea suureiden suhteellisuus kuitenkin kertoo meille suureiden fysikaalisen luonteesta. Suureet, joiden arvot ovat kaikissa koordinaatistoissa samat, ovat perustavalla tavalla erilaisia verrattuna suureisiin, joiden arvot riippuvat mittajasta. Tämä tarkastelu johdattaa meidät lopulta suppeaan suhteellisuusteoriaan ja siihen päätelmään, että jopa intuitiivisesti absoluutiselta tuntuva aika on suhteellinen suure.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää ekvivalenssi- ja suhteellisuusperiaate
- määritellä inertiali- ja massakeskipistekoordinaatisto
- muuntaa yhdessä koordinaatistossa mitatut koordinaatit toiseen inertialikoordinaatiostoon
- määritää kappaleen massan ja sen hiukkasten satunnaisliikkeen sisäenergia
- kuvilla suhteellisuusteoreettisia ilmiöitä ja arvioida niiden merkittävyyttä eri koordinaatistoissa
- kuvilla epäinertiaalikoordinaatistoissa havaittavia ilmiöitä

Kuva 6.1: Tarkastellaan palloa, johon ei vaikuta voimia, jarruttavassa autossa (suorakaide). Ulkopuolisen havaitsijan mielestä Newtonin lait pätevä. Automatkustajan mielestä pallo on kiihtyvässä liikkeessä vaikkei siihen kohdistu voimaa.



## 6.1 Tasainen ja kiihtyvä suhteellinen liike

Luvussa 1 määrittelimme paikan fysikaalisena suureena koordinaatiston avulla. Valitsimme kiintopisteen eli origon, jonka suhteen paikkoja mittasimme, ja tällöin pystyimme ilmaisemaan paikan koordinaattien avulla. Havainnoidessamme liikettä arkisissa tilanteissa kiintopisteeksi valitaan usein jokin *Maapallon pinnan piste*, koska valtavan suuren kappaaleena Maa vaikuttaa meistä liikkumattomalta. Näin ei kuitenkaan tarvitse tehdä. Aivan yhtä hyvin kiintopisteeksi voidaan valita jokin *Maan suhteen liikkuva piste*. Erityisesti jos liikumme itse Maan suhteen tai teemme mittauksia liikkuvilla havaintovälineillä, on järkevää valita kiintopisteeksi *havaitsija*. Kuitenkin jos paikkaa mitataan eri kiintopisteiden suhteen, mittaustuloksina saadut koordinaatit ovat luonnollisesti erilaiset. Myös monet muut suureet saavat eri koordinaatistoissa eri arvot, ja tässä luvussa tutkimme, miten havaitsijan liike vaikuttaa hänen tekemiinsä havaintoihin.

### Inertiaalikoordinaatistot

Jos kappaaleeseen kohdistuva kokonaivoima on nolla, jatkavuuden lain perusteella kappaale liikkuu suoraan vakionopeudella. Toisaalta tällöin myös dynamiikan peruslain (3.3) perusteella kappaaleen liikemäärän muutosnopeus on nolla eli liikemäärä on vakio. Jatkavuuden lain voisi siis periaatteessa unohtaa kokonaan, koska se sisältyy jo dynamiikan peruslakiin. Se kuitenkin erotellaan omaksi laikseen kahdesta syystä. Ensinnäkin jatkavuuden lailla on historiallinen merkitys ja sen ymmärtäminen on ensimmäinen askel Newtonilaisen mekaniikan omaksumisessa. Ennen Galilein ja Newtonin tutkimuksia yleisesti vallalla oli *väärä* Aristoteleen näkemys, jonka mukaan kappalet pysähtyvät itsestään, jos niihin ei vaikuta mitään voimaa. Toiseksi on tilanteita, joissa Newtonin lait näennäisesti eivät pädekkää, ja jatkavuuden laki on yksinkertainen testi näiden tilanteiden tunnistamiseksi.

Jos esimerkiksi olet liikkuvassa autossa, joka yhtäkkiä jarruttaa, auton sisällä näyttää siltä, että tavarat alkavat yhtäkkiä liikkua eteenpäin kiihtyvällä nopeudella vaikkei niihin vaikuta mitään vuorovaikutuksia, kuten kuvassa 6.1 on havainnollistettu. Tämä johtuu siitä, että kappalet auton sisällä jatkavat suoraviivaista liikettäään jatkavuuden lain mukaisesti ja auto itsessään on kiihtyvässä liikkeessä. Auton mukana liikkuvan havaitsijan mielestä näyttää siltä, että jatkavuuden laki ei päde, vaikka auton ulkopuolella olevan havaitsijan mukaan laki pätee. Samoin myöskaän dynamiikan peruslaki ei auton sisällä näytä pätevän, koska palloon kohdistuva kokonaivoima on nolla, mutta pallon kiihtyvyys ei ole nolla.

Fysiikassa havaintojärjestelmää, jossa jatkavuuden laki pätee, kutsutaan **inertiaalikoordinaatistoksi**, ja tällaisessa koordinaatistossa Newtonin lait sekä säilymislait ovat voimassa. Jos jatkavuuden laki ei päde, kuten tässä auton mukana matkustavan havaitsijan mielestä tilanne on, kyseessä on **epäinertiaalikoordinaatisto**.

### Ekvivalenssiperiaate

Totesimme jo luvussa 2 mekaanista energiaa määrittellessämme, että massalla on fysiikassa kaksi roolia. Ensinnäkin massa vastustaa esineiden liikkeen muutosta, ja tämä ominaisuus on massan *inertia*. Toiseksi massat vuorovaikuttavat gravitaation välityksellä, mikä havaitaan *painona*. Massan inertia ilmenee esimerkiksi dynamiikan peruslaissa, jonka mukaan kappaaleeseen kohdistuva kokonaivoima aiheuttaa massaan käantäen

## SUHTEELLISUUS

verrannollisen kiihtyvyyden. Massan paino puolestaan ilmenee painovoimassa, joka on suoraan verrannollinen massaan.

Jos otamme kaksi kappaletta, voimme mitata niiden inertioiden suhteen törmäyskokeella liikemäären säilymislaikin perustuen. Toisaalta voimme ottaa painovoimaan perustuvan vaa'an, ja mitata kappaleiden massojen suhteiden sen avulla. Olivatpa kappaleet millaiset tahansa, *kumpikin koe antaa massojen suhteelle saman arvon*. Nämä havainnot tarkoittavat sitä, että kappaleiden *inertia ja painava massa ovat samat*. Periaatteessa näin ei tarvitsisi olla. Voisi aivan hyvin olla niin, että vaikka kahdelle kappaleelle mitattaisiin vaa'alla sama paino, niillä olisi silti eri kiihtyvyys saman kokonaisvoiman vaikuttaessa niihin. Kokeellisesti kuitenkin tiedetään erittäin tarkasti, että näin ei ole. *Samanpainoiset kappaleet kokevat aina saman kiihtyvyyden, jos niihin vaikuttaa sama kokonaisvoima*.



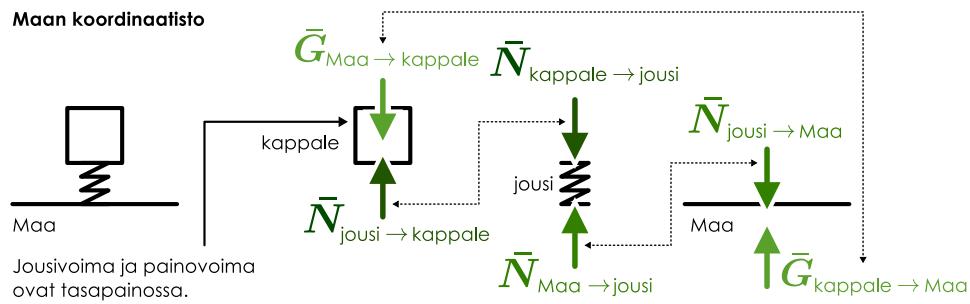
- 6.1** Oletetaan, että on olemassa oudosta aineesta tehty kappale, jonka inertia on 2 kg mutta sen painava massa on 1 kg. Mikä on kappaleen (a) potentiaalienergia 1 m korkeudella potentiaalienergian nollatasosta? (b) Liike-energia nopeudella 1 m/s? (c) Kiihtyvyys, kun kappaleeseen kohdistuu 1 N voima? (d) Kuinka suuren nopeuden kappale saa, jos se pudotetaan levosta 1 m korkeudelta?

Eräs tapa punnita kappaleen paino on asettaa se jousivaa'alle. Kappaleen ollessa tasapainossa siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, jolloin jousen täyttyy kohdistaa kappaleeseen sen painon kumoava kosketusvoima. Voiman ja vastavoiman lain mukaisesti kappale kohdistaa tällöin jouseen yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen kosketusvoiman, joka puristaa joustaa kokoon. Vaaka toimii yksinkertaisesti mittaanmallia jousen pituuden muutoksen.

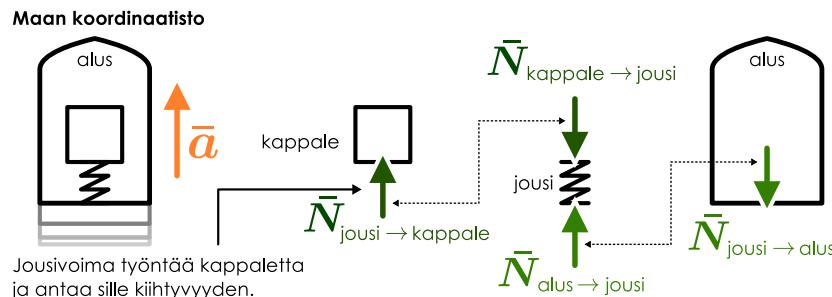
Edellä kuvailtu periaate painon mittamiseksi on esitetty kuvassa 6.2. Kuvassa on esitetty myös sama koejärjestely avaruusaluksessa, joka liikkuu tasaisella kiihtyvyydellä kaukana avaruudessa. Alus liikkuu alueessa, jossa painovoimakentän voimakkuus on nolla, joten kappaleeseen *ei kohdistu lainkaan painovoimaa*.

Kuva 6.2: Jousen päällä oleva kappale puristaa joustaa. Jos muita havaintoja ei voi tehdä, on mahdotonta tietää johtuuko tämä painovoimasta vai siitä, että koordinaatisto on kiihtyvässä liikkeessä.

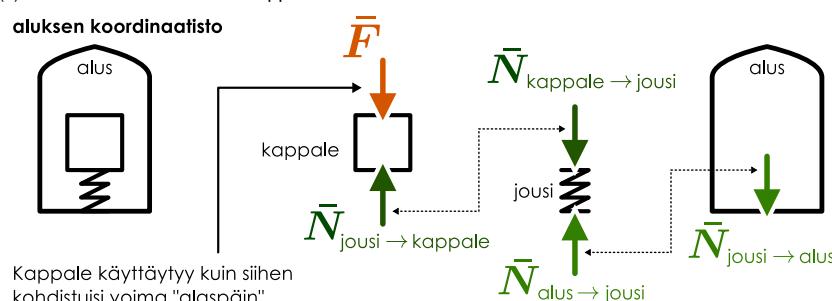
(a) Maassa oleva kappale.



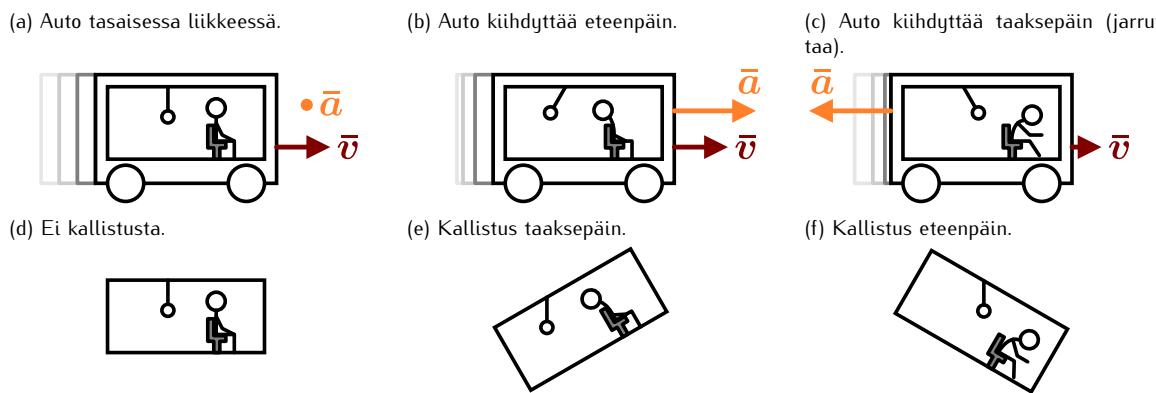
(b) Avaruusaluksessa oleva kappale Maan koordinaatistossa.



(c) Avaruusaluksessa oleva kappale aluksen koordinaatistossa.



Kuva 6.3: Liikkuvassa autossa tunnetaan kiihtyvyydestä johtuvia näennäisvoimia, jos auto on kiihtyvässä liikkeessä. Näitä näennäisvoimia ei voi erottaa painovoimasta, joten ajoneuvon kiihtyvä liike tuntuu samalta kuin kallistuma.



Kuitenkin koska kappale liikkuu aluksen mukana, se on kiihtyvässä liikkeessä ja siihen täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima. Koska kappale vuorovaikuttaa ainoastaan jousen kanssa, jousen täytyy kohdistaa kappaleeseen voima ja niinpä tässäkin tapauksessa jousi puristuu kasaan.

Jos raketin kiihtyvyys on sama kuin putoamiskiihtyvyys Maassa, jousi puristuu kummassakin tapauksessa täsmälleen yhtä paljon, ja tilanne näyttää Maassa olevan havaitsijan näkökulmasta täsmälleen samalta kuin avaruusaluksella matkustavan havaitsijan näkökulmasta. Avaruusaluksessa oleva havaitsija voi toki päätellä olevansa kiihtyvässä liikkeessä mittaamalla oman sijaintinsa muuttumista esimerkiksi tähtien suhteen. Jos havaitsija kuitenkaan ei havainnoin aluksen ympäristöä vaan tarkastelee vain aluksen sisältöä, hän ei voi mitenkään päätellä onko hän painovoimakentässä vai kiihtyvässä liikkeessä. Tämä tulos saadaan käytettiinpä painon mittaan *mitä tahansa menetelmää*. Toisin sanoen kiihtyvässä liikkeessä olevassa koordinaatistossa *havaitsija ei voi erottaa oman koordinaatiston tasaisesti kiihtyvää liikettä homogenisesta painovoimakentästä*. Tätä kutsutaan painovoiman ja kiihtyvyyden **ekvivalenssiperiaatteeksi**.

Avaruusaluksessa oleva kappale käyttää avaruusaluksen mukana matkustavan havaitsijan mielestä aivan kuin siihen vaikuttaisi aluksen kiihtyvyyteen nähden vastakkaisuuntainen voima, jonka suuruus on verrannollinen kappaleen massaan ja aluksen kiihtyvyyteen. Kyseessä ei kuitenkaan ole todellinen voima vaan **näennäisvoima**, koska sitä ei aiheuta mikään vuorovaikutus vaan havaitsijan koordinaatiston kiihtyvä liike.



## 6.2 Onko näennäisvoimilla vastavoimaa?

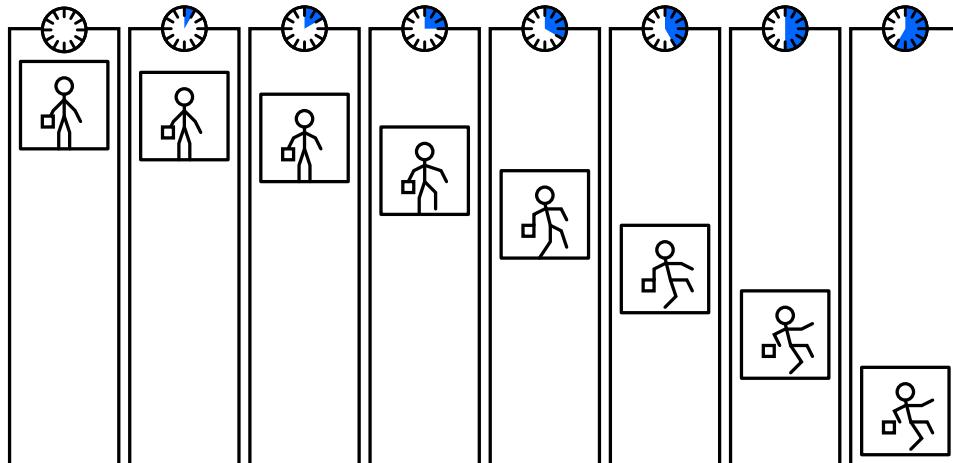
Arkisempi esimerkki samasta ilmiöstä on automatkustajan tuntemat auton liikkeen aiheuttamat näennäisvoimat kuten kuvassa 6.3. Auton liikkuessa vakionopeudella täysin suoraan sekä auto että matkustaja ovat tasaisessa liikkeessä eikä autossa havaita mitään näennäisvoimia. Jos auto ei täriise eikä matkustaja katso ulos, hän ei voi mitenkään *tuntea* liikkuuko auto vai onko se paikoillaan. Autot harvemmin liikkuvat tarpeeksi tasaisesti, jottei mitään liikettä tuntisi, mutta hitaasti liikkuvassa junassa tämän ilmiön voi havaita melko helposti. Jos asemalla lähtöä odottavan junan ikkunasta näkee toisen hitaasti liikkeelle lähevän junan, voi olla vaikea hahmottaa liikkuuko oma vai ikkunasta näkyvä junta.

Sen sijaan auton lisätessä tai vähentäessä vauhtia matkustaja havaitsee näennäisvoimia. Auton kiihdyytäessä suurempaan vauhtiin eli kiihtyvyuden osoittaessa *eteenpäin* matkustaja tuntee *taaksepäin* suuntautuvan näennäisvoiman, joka painaa häntä vasten istuimen selkänojaa. Aivan samoin jarruttavan auton kiihtyvyys osoittaa *taaksepäin*, jolloin matkustaja ja kaikki autossa olevat kappaleet kokevat auton koordinaatistossa *eteenpäin* suuntautuvan näennäisvoiman. Tilanne on näissä tapauksissa matkustajan kannalta täsmälleen samalainen kuin jos painovoimalla olisi komponentti auton liikkeen suunnassa taaksepäin tai eteenpäin. Tätä hyödynnetään esimerkiksi lentosimulaattoreissa, joissa kiihtyvyyden tunne tuotetaan simulaattoria kallistamalla. Simulaattorin sisällä oleva "matkustaja" ei erota painovoiman suunnan muutosta ajoneuvon kiihtyvästä liikkeestä.

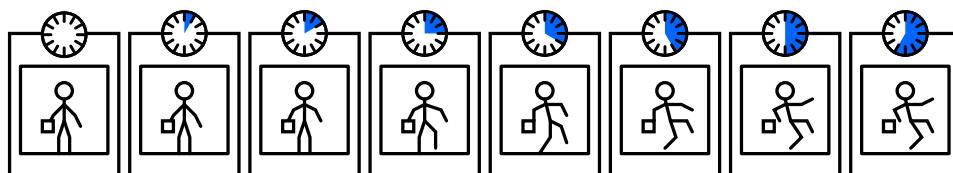
Koska auto on kiihtyvässä liikkeessä myös käännyessään, matkustaja tuntee kääntyvässäkin autossa näennäisvoiman, jota yleisesti kutsutaan keskipakoisvoimaksi. Keskipakoisvoima *ei ole oikea voima* vaan yksinkertaisesti seuraus siitä, että ympyräradalla kulkeva auto on kiihtyvässä liikkeessä *kohti liikeradan piirtämän ympyrän keskustaa*, ja tällöin auton mukana liikkova havaitsija tuntee omassa koordinaatistossaan *poispäin ympyrän keskustasta osoittavan näennäisvoiman*. Keskipakoisvoiman lisäksi pyörivissä koordinaatistoissa kuten Maapallon pinnalla liikkuiin kappaleisiin kohdistuu *Coriolis-näennäisvoima*, joka vaikuttaa esimerkiksi ilmakehän liikkeeseen ja siten sääilmöihin.

Kuva 6.4: Vapaassa pudotuksessa oleva havaitsi ja olevassa painottomassa tilassa.

(a) Kaikki vapaassa pudotuksessa olevat kappaleet liikkuvat samalla kiihtyvyydyllä.



(b) Vapaassa pudotuksessa olevassa koordinaatistossa kappaleet havaitaan painottamina.



**6.3** Auton sisällä on narulla kiinnitetty helium-ilmapallo. Mihin suuntaan se liikkuu auton lähtiessä liukkeelle ja jarruttaessa?

Ekvivalenssiperiaatteesta kannalta *vapaa pudotus* on erityisen mielenkiintoinen tilanne. Vapaassa pudotuksessa olevat kappaleet liikkuvat samalla kiihtyvyydyllä, jolloin vapaassa pudotuksessa oleva havaitsi näkee muiden vapaassa pudotuksessa olevien kappaleiden olevan paikoillaan tai liikkuvan tasaisella nopeudella aivan kuin ne leijuisivat. Vapaassa pudotuksessa olevan koordinaatiston kiihtyvyys on  $\bar{g}$ , joten kaikki koordinaatiston kappaleet käyttäytyvät ikään kuin niihin vaikuttaisi painovoiman kumoava näennäisvoima  $-m\bar{g}$ . Niinpä havaitsi ei ainoastaan *näe* kappaleiden leijuvan vaan hän myös *tuntee* itsensä painottomaksi. Toisin sanoen vapaassa pudotuksessa oleva koordinaatisto on *painottomassa tilassa*.

Tästä ilmiöstä johtuen esimerkiksi Maata kiertävällä avaruusasemalla ei tunneta painovoimaa. Kiertoralla oleva asema on toki kauempana maan pinnasta, mistä johtuen Maan painovoimakenttä on asemalla heikompi kuin maanpinnalla. Tämä ero on kuitenkin vain kymmenen prosentin luokkaa. Oleellista on se, että asema on Maata kiertäässään ympyräradalla ja siten jatkuvasti kiihtyvässä lükkeessä kohti Maata. Tämän kiihtyvyyden aiheuttaa ainoastaan Maan aseman kohdistama painovoima, joten asema on vapaassa pudotuksessa. Asema ei koskaan osu maahan, koska sen *maanpinnan suuntainen* nopeus on niin suuri — asema putoaa jatkuvasti Maasta “ohi” — mutta tällainenkin kiertorataliike on vapaata putoamista. Myös kaikki aseman sisällä olevat kappaleet ovat vapaassa pudotuksessa ja niinpä aseman koordinaatistossa ei havaita painovoimaa. Ilmiö on sama kuin kaartavassa autossa, jossa näennäinen keskipakoisvoima vetää matkustajia kohti auton ulkoreunaa. Avaruusasemalla näennäinen keskipakoisvoima osoittaa täsmälle painovoimaa vastaan ja näennäisesti painovoiman vaikutus kumoutuu.

**6.4** Avaruussukkula kiertää maata 300 km korkeudella, jossa putoamiskiihtyvyys on noin  $8.9 \text{ m/s}^2$ .

(a) Jos sukkulan pystysuuntainen nopeus on aluksi nolla, kuinka pitkän pystysuuntaisen matkan sukkula putoaa yhden sekunnin aikana?

(b) Maapallon säde on 6400 km. Kuinka pitkä matka sukkulan täytyy sekunnissa edetä maanpinnan suunnassa, jotta se olisi sekunnin putoamisen jälkeen edelleen samalla etäisyydellä maanpinnasta?

(c) Tarkista tulos tasaisen ympyräliukkeen normaalikiihtyvyyden lausekkeella.

## 6.2 Klassinen suhteellisuus

Toistensa suhteen kiihtyvässä liikkeessä olevissa koordinaatistoissa mekanikan lait eivät näennäisesti päde, koska koordinaatistojen kiihtyvyydestä johtuen kappaleet käyttäytyvät aivan kuin niihin vaikuttaisi voimia, joita ei tuota mikään vuorovaikutus. Tasaisella nopeudella liikkuvissa *inertiaalikoordinaatistoissa* mekanikan lait pätevät, ja tämän vuoksi juuri tasaisessa liikkeessä olevat koordinaatistot ovat mekanikkassa erityisasemassa. Jatkossa tarkastelemmekin ainoastaan *inertiaalikoordinaatistojen*. Lisäksi tasaisella nopeudella liikkuva havaitseja ei voi itse tuntea liikkuvansa, koska tasaisella nopeudella liikkuvassa koordinaatistossa ei havaita näennäisvoimia tai muita poikkeamia mekanikan laeista. Tällä havainnolla on sekä käytännöllistä että teoreettista merkitystä. Joskus fysikaalisia prosesseja on helpompi analysoida tarkastelemalla niitä juuri tietynä koordinaatistossa. Toisaalta jo se, että voimme tarkastella prosesseja useasta näkökulmasta, antaa mahdollisuuden ymmärtää niiden fysiikkaa paremmin.

Vaikka luonnonlait ovat *inertiaalikoordinaatistoissa* samanlaiset, kaikkia ilmiöitä ei havaita eri koordinaatistoissa samanlaisina eikä kaikille suureille mitata kaikissa koordinaatistoissa samoja arvoja. Pohdimmekin seuraavaksi, millaisille suureille eri havaitsejat mittaavat eri arvot ja miten eri koordinaatistoissa tehdyt mitaukset liittyvät toisiinsa.

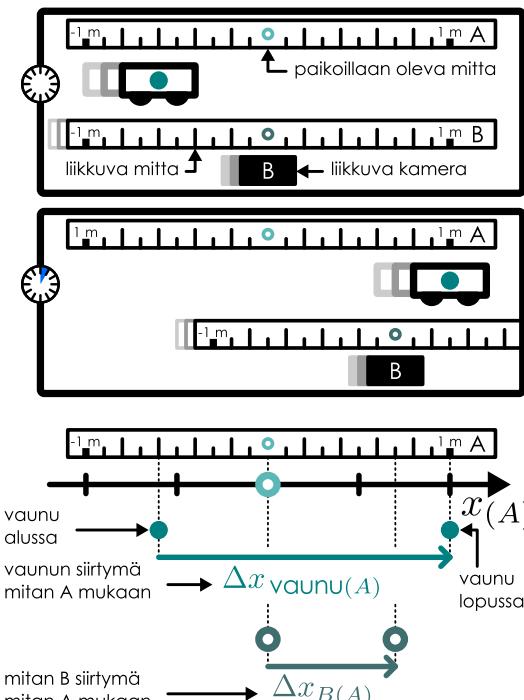
### Liikkuvat havaitsejät

Tehdään koe, jossa suoralla radalla liikkuvan vaunun liikettä kuvataan kahdella kameralla. Kuvassa 6.5 (a) on esitetty suoralla vaunun liike Maan suhteen paikoillaan olevan kameran (A) kuvamana. Kuvassa näkyy myös rataan kiinnitetty pituusmitta (A), jolla vaunun paikka voidaan mitata. Vaunun vieressä on toinen rata, jolla kulkee liikkuvaa kamerasi (B) ja tähän kameraan kiinnitetty toinen pituusmitta (B). Kuvassa 6.5 (b) on esitetty vaunun liike tämän toisen kameran kuvamana, ja koska mittaa B liikkuu yhtä nopeasti kuin kamera B, se näyttää pysyvän tämän kameran kuvamana paikoillaan. Kamerat on säädetty niin, että ensimmäinen kuvaa on otettu juuri silloin kun pituusmitat ovat samassa kohdassa liikkeen suunnassa. Toinen kuvaa on otettu yhden sekunnin tämän jälkeen. Kummankin kameran ottamat kuvat esittävät näin ollen samaa tilannetta mutta hiukan eri paikoista katsottuna.

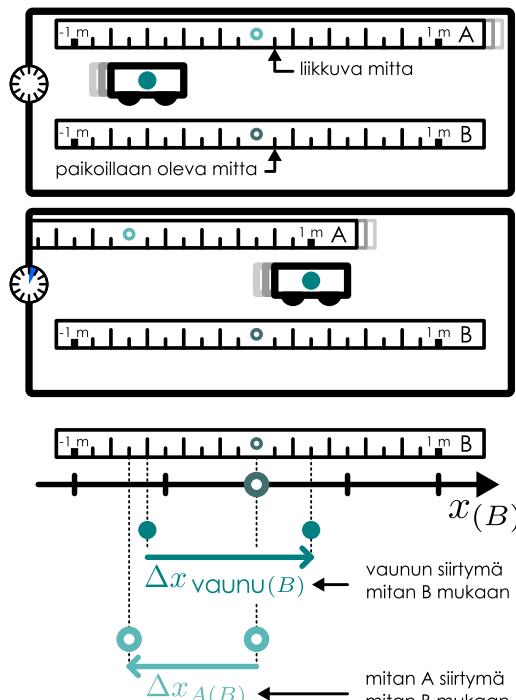
Maan suhteen paikoillaan olevan kameran näkökulmasta mittaa A on paikoillaan, joten vaunun paikka kameran suhteen voidaan lukea tästä mitasta. Kutsutaankin jatkossa kameran A näkökulmaa koordinaatistoksi A, ja tässä koordinaatistossa  $x$ -koordinaatin määrittelee mittaa A. Vastaavasti kameran B näkökulmaa olkoon koordinaatisto B, jossa  $x$ -koordinaatin määrittelee mittaa B. Merkitään vaunun paikkaa koordinaatistossa A

Kuva 6.5: Yksilotteinen liike kahden toistensa suhteen liikkuvan havaitsejan koordinaatistossa.

(a) Kameran A näkökulma.



(b) Kameran B näkökulma.



$x_{\text{vaunu}(A)}$  ja koordinaatistossa B  $x_{\text{vaunu}(B)}$ . Merkitään lisäksi *koordinaatiston B origon sijaintia koordinaatiston A origoon nähdyn*  $x_{B(A)}$ . Tässä siis sulkuihin on merkitty koordinaatisto, jonka suhteen paikkaa mitataan, ja sulkujen edessä on mitattava asia eli tässä tapauksessa vaunun tai koordinaatiston B (origon) paikka. Vastaavasti koordinaatiston A origon paikkakoordinaatti koordinaatistossa B on  $x_{A(B)}$ .

Valitaan koordinaatiston A origoksi mitan A keskipiste (merkity kuvaan ympyrällä) ja valitaan positiivinen  $x$ -akseli kuvassa oikealle. Nämä määritellyssä koordinaatistossa A vaunu on aluksi pisteessä  $x_{\text{vaunu}(A)} = -0.6 \text{ m}$  ja sekunnin päästä pisteessä  $x_{\text{vaunu}(A)} = 1.0 \text{ m}$ . Vaunu liikkuu siis yhdessä sekunnissa siirtymän  $\Delta x_{\text{vaunu}(A)} = 1.6 \text{ m}$ . Vaunun liike on tänä aikana likimain tasaista, joten vaunun nopeus on sama kuin sen keskinopeus,  $v_{x,\text{vaunu}(A)} = \Delta x_{\text{vaunu}(A)} / \Delta t = 1.6 \text{ m/s}$ . Liikkuvaan kameran kiinnitettä mittä on saman kuvan perusteella aluksi pisteessä  $x_{B(A)} = 0.0 \text{ m}$  ja lopuksi pisteessä  $x_{B(A)} = 0.7 \text{ m}$ , joten sen siirtymä on  $\Delta x_{B(A)} = 0.7 \text{ m}$ .

Koska liikkuva kamera B kulkee vaunun kanssa samaan suuntaan, tämän kameran näkökulmasta vaunu siirtyy sekunnissa *lyhyemmän* matkan. Vaunu on nimittäin aluksi pisteessä  $x_{\text{vaunu}(B)} = -0.6 \text{ m}$  ja sekunnin päästä pisteessä  $x_{\text{vaunu}(B)} = 0.3 \text{ m}$ , joten vaunun siirtymä on vain  $\Delta x_{\text{vaunu}(B)} = 0.9 \text{ m}$ . Niinpä tämän kameran koordinaatistossa vaunun nopeus on  $v_{x,\text{vaunu}(B)} = 0.9 \text{ m/s}$ . Maan suhteen paikoillaan pysyvä mittä puolestaan siirtyy *vasemmalle* eli negatiiviseen suuntaan siirtymän  $\Delta x_{A(B)} = -0.7 \text{ m}$ .

Tässä kokeessa vaunulle siis mitataan *eri nopeus* käyttämällä kahta eri mittaa, jotka liikkuvat toistensa suhteen. Maan suhteen paikoillaan pysyvä mittä on tavallinen valinta, mutta ei ole *mitään* syytä miksi liikkuvan mitan antamat tulokset olisivat jotenkin huonommat. Maa on usein luonnollinen valinta siksi, että mikään ihmisten tekemä koe ei voi muuttaa Maan liikettä Maan suuren inertian takia. Niinpä Maa *vaikuttaa* pysyvän aina paikoillaan. Maa on kuitenkin Aurinkoa kiertävä planeetta, joka ei Aurinkokunnan mittakaavassa ole paikoillaan. Myöskään Aurinko ei ole paikoillaan vaan kiertää Linnunrataa, joka puolestaan liikkuu toisten galaksien suhteen. Maahan kiinnitettä koordinaatisto ei siis ole mitenkään erityinen verrattuna Maan suhteen liikkuvaan koordinaatistoon. Eri koordinaatistoissa mitatut nopeudet ovat kaikki yhtä "oikein". Fysiikassa sanotaan, että nopeus on **suhteellinen** suure, mikä tarkoittaa sen riippuvan havaittajan lükkeestä.

Maan suhteen paikoillaan pysyvä ja liikkuva koordinaatisto ovat siis yhdenvertaisia eli *kumman tahansa* voidaan ajatella olevan paikoillaan ja toisen liikkuvan. Esimerkissä kameran A näkökulmasta kamera B liikkuu ja kameran B näkökulmasta Maa ja sen mukana kamera A liikkuvat, ja kumpikin näkökulma on yhtä hyvä. Voisi silti olla mahdollista, että on olemassa jokin avaruuden rakenteeseen liittyvä absoluuttinen koordinaatisto, jonka suhteen kaikkien muiden koordinaatistojen liikettä tulisi mitata. Vaunujen törmäyskoe ei sitä voi paljastaa, mutta periaatteessa voisi olla olemassa jokin ilmiö, joka käyttäytyisi tässä absoluuttisessa koordinaatistossa eri tavalla kuin muissa, sen suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa. Tätä ajatusta on fysiikassa pohdittu ja testattu sekä kokeellisesti että teoreettisesti, mutta nykyisen käsityksen mukaan *mitään absoluuttista koordinaatista ei ole olemassa*. Universumilla ei ole keskipistettä eikä nopeutta, jonka suhteen kapaleiden liikettä pitäisi mitata. *Kaikki* toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvat koordinaatistot ovat keskenään samanarvoiset, ja niissä havaitaan *täsmälleen samanlaiset fysiikan lait*. Tätä kutsutaan **suhteellisuusperiaatteeksi**. Tämän periaatteen mukaan ei ole olemassa *mitään* fysiikalista koetta, jonka avulla voisi kahdesta tasaisesti kulkevasta koordinaatistosta päättää toisen olevan absoluuttisesti paikoillaan ja toisen liikkuvan, vaan paikoillaan oleminen ja liikkuminen ovat suhteellisia, havaittijasta riippuvia ominaisuuksia.

## Galilei-muunnos

Minkä tahansa pisteen paikkakoordinaatti määritellään niin, että koordinaatin arvo on sama kuin koordinaatiaksielun suuntaan kuljettava siirtymä, kun origosta siirrytään tarkasteltavaan paikkaan. Erityisesti koordinaatti on negatiivinen, jos siirtymä tapahtuu negatiiviseen suuntaan. Esimerkiksi vaunun paikkakoordinaatti koordinaatistossa A saadaan mittaamalla siirtymä origosta paikkaan, jossa vaunu on, kuten kuvassa 6.6 on esitetty. Kuitenkin koska yksi siirtymä voidaan aina suorittaa osissa, vaunun koordinaatti koordinaatistossa A voidaan selvittää myös siirtymällä ensin origosta A origoon B ja sitten origosta B vaunuun. Tässä kuitenkin ensimmäinen siirtymä on *origon B koordinaatti A:ssa* ja toinen siirtymä on *vaunun koordinaatti B:ssä*. Niinpä eri koordinaatistoissa mitatuille koordinaateille pätee

$$x_{(A)} = x_{B(A)} + x_{(B)} \quad (6.1)$$

tai toisin päin tästä ratkaisten koordinaatti B:ssä,

$$x_{(B)} = x_{(A)} - x_{B(A)}. \quad (6.2)$$

Sama päätely toimii mille tahansa paikkakoordinaatille, ei vain vaunun paikalle, joten tästä on jätetty alaindeksi "vaunu" pois. Sen sijaan useita koordinaatistoja tarkasteltaessa pitää aina olla huolellinen siitä, minkä koordinaatiston suhteen paikkaa mitataan, joten koordinaatiston määrittelevää indeksiä ei saa unohtaa.

Kuvasta 6.6 huomataan myös, että koordinaatiston B paikka A:n suhteen on yhtä suuri mutta vastakkais-suuntainen kuin koordinaatiston A paikka B:n suhteen, eli

$$x_{B(A)} = -x_{A(B)}. \quad (6.3)$$

Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että jos siirrytään ensin A:sta B:hen ja sitten B:stä takaisin A:han, koko-näissä on nolla, joten täytyy päteä  $x_{B(A)} + x_{A(B)} = 0$  m.

Edellinen päättely toimii aina olivatpa koordinaatistot paikoillaan tai liikkeessä, mutta jos koordinaatistot *liikkuvat toistensa suhteen*, koordinaatistojen välinen siirtymä  $x_{B(A)}$  muuttuu ajan kuluessa. Erittyisesti jos koordinaatistot liikkuvat tasaisella nopeudella toistensa suhteen, on olemassa täsmälleen yksi ajan hetki jolloin niiden origot ovat samassa pisteessä ja niissä mitataan samat  $x$ -koordinaatit. Tällöin koordinaatiston B origon paikka koordinaatistossa A on *nolla* eli  $x_{B(A)} = 0$  m. Jos ajan nolla-hetkeksi  $t = 0$  s valitaan tämä hetki, koordinaatiston B nopeus koordinaatiston A suhteeseen on määritelmiän mukaisesti

$$v_{x,B(A)} = \frac{\Delta x_{B(A)}}{\Delta t} = \frac{x_{B(A)}(t) - x_{B(A)}(0)}{t - 0} = \frac{x_{B(A)}(t)}{t} \quad (6.4)$$

ja tämän perusteella B-origon paikka minä tahansa ajan hetkenä  $t$  on

$$x_{B(A)}(t) = v_{x,B(A)} t. \quad (6.5)$$

Näin ollen vaunun paikka koordinaatistoissa A ja B liittyy toisiinsa muunnoksella

$$x_{(B)} = x_{(A)} - v_{x,B(A)} t, \quad (6.6)$$

*jos koordinaatistot ovat ajan nollahetkellä samassa paikassa.* Sama päättely toimii myös kolmessa ulottuvudessa, jolloin saadaan vektorimuotoinen muunnos

$$\bar{r}_{(B)} = \bar{r}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)} t. \quad (6.7)$$

Tätä kutsutaan **Galilei-muunnokseksi**, ja se kertoo kuinka yhdessä koordinaatistossa mitatusta paikkakoordinaatista voidaan selvittää vastaava paikkakoordinaatti toisessa koordinaatistossa.



**6.5** (a) Miten kirjoitetaan Galilei-muunnos koordinaatistossa A mitatulle paikalle käyttäen A:n nopeutta B:n suhteeseen? (b) Miten nopeudet  $\bar{v}_{B(A)}$  ja  $\bar{v}_{A(B)}$  liittyvät toisiinsa?

Edelleen, koska nopeus määritellään siirtymän  $\Delta x$  ja siihen käytetyn ajan  $\Delta t$  suhteena, Galilei-muunnoksen mukaan nopeuksille pätee

$$v_{x,\text{vaunu}(B)} = \frac{\Delta x_{(B)}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta t} - v_{x,B(A)} \frac{\Delta t}{\Delta t} = v_{x,(A)} - v_{x,B(A)}. \quad (6.8)$$

Siispä kahdessa eri koordinaatistossa mitattujen *nopeuksien ero on sama kuin koordinaatistojen suhteellinen nopeus*. Sama päättely toimii myös jos siirtymät ovat infinitesimaalisen pienet eli jos siirtymät  $\Delta x$  korvataan paikan differentiaaleilla  $dx$ , jolloin samat tulokset saadaan hetkellisille nopeuksille keskinopeuksien sijaan. Päättely toimii myös kolmessa ulottuvudessa, jolloin skalarikomponenttien sijaan voidaan kirjoittaa vektoreilla

$$\bar{v}_{(B)} = \bar{v}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)}. \quad (6.9)$$



**6.6** Tarkista, että edellä johdetut muunno syhtälöt pätevät kuvan 6.5 vaunulle mitatuille paikoille ja nopeuksille.

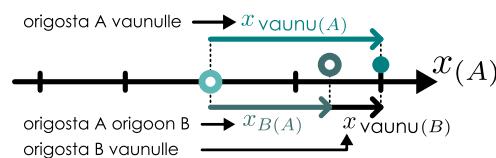
Edellä esitettyä tarkastelua, jossa kappaleelle mitataan eri paikkakoordinaatit ja nopeudet eri koordinaatistossa kutsutaan **Galilei-suhteellisuudeksi**. Tässä Galilein nimi viittaa siihen, että kyseessä on nimenomaan klassisen fysiikan sääntöjä noudattava koordinaatistomuunnos. Osoittautuu nimittäin, että tämä intuitiivisesti varsin ilmeiseltä tuntuva päättely pätee vain koordinaatistojen suhteellisen nopeuden ollessa pieni. Nopeuksien ollessa hyvin suuret Galilei-muunnos ei päde vaan tarvitaan *suhteellisuusteoriaa*, johon tutustumme luvussa 6.4.

Kuva 6.6: Paikan mittaus eri kiintopisteiden suhteeseen.

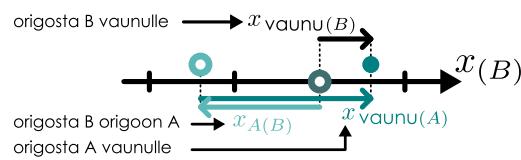
(a) Kappale ja kaksi mittaa.



(b) Mitan A koordinaatisto.



(c) Mitan B koordinaatisto.



## esimerkki 6.1

## Suhteellinen liike

Juna liikkuu aseman ohitse tasaisella nopeudella 10.0 m/s. Ohittaessaan asemalla olevan kyltin konduktööri on 3.0 m päässä junan keulasta. Konduktööri kulkee tasaisella nopeudella kohti junan perää niin, että 2.5 s päästä hän on etäisyydellä 10.5 m junan keulasta. (a) Mikä on konduktörin paikkakoordinaatti ja nopeus aluksi ja lopuksi, jos koordinaatiston kääntöpiste on junan keula ja positiivinen suunta kohti junan kulkusuuntaa? (b) Entä jos koordinaatiston kääntöpiste on aseman kyltti?

**TILANNE** Merkitään konduktörin paikkakoordinaattia ja nopeutta junan keulan suhteen mitattuna  $x_{K(J)}$  ja  $v_{x,K(J)}$  ja aseman kyltin suhteen mitattuna  $x_{K(A)}$  ja  $v_{x,K(A)}$ . Merkitään junan keulan vastaavia suureita  $x_{J(A)}$  ja  $v_{x,J(A)}$ . Olkoon hetki, jolloin konduktööri on kyltin kohdalla  $t_0 = 0.0$  s ja tarkasteluhetki  $t_1 = 2.5$  s.

**SUUNNITELMA** Tässä tarkastellaan kahta toistensa suhteenvaihdosta tasaisella nopeudella liikkuvaa koordinaatistoa (asema ja junan keula). Koska koordinaatistojen akselit ovat samat, saadaan konduktörin etäisyys asemasta laskettua määritelmällä ensin junan keulan etäisyys asemasta ja vähentämällä konduktörin etäisyys junan keulasta (koska konduktööri on keulasta nähdyn läheimpänä asemaa). Nyt junan koordinaatti on aseman suhteenvaihdosta positiivinen ja konduktörin koordinaatti junan keulan suhteenvaihdosta negatiivinen. Niinpä konduktörin paikkakoordinaatti aseman suhteenvaihdosta saadaan laskemalla yhteen junan koordinaatti aseman suhteenvaihdosta ja konduktörin koordinaatti junan suhteenvaihdosta.

Kun paikat tunnetaan, konduktörin nopeus saadaan siirtymän ja käytetyn ajan osamääränä, koska nopeus on vakio. Koordinaattien välinen yhteyts on

$$x_{K(A)} = x_{K(J)} + x_{J(A)} \quad (6.10)$$

ja nopeuksien välinen yhteyts on

$$v_{x,K(A)} = v_{x,K(J)} + v_{x,J(A)}. \quad (6.11)$$

**RATKAISU** (a) Konduktööri on alussa junan keulasta katsoen perään pään eli negatiiviseen suuntaan. Niinpä konduktörin paikkakoordinaatti junan keulan suhteen mitattuna on aluksi  $x_{K(J)}(t_0) = -3.0$  m ja lopuksi  $x_{K(J)}(t_1) = -10.5$  m. Konduktörin nopeus on vakio  $v_{x,K(J)} = [x_{K(J)}(t_1) - x_{K(J)}(t_0)]/2.5$  s = -3.0 m/s.

(b) Konduktörin paikka aseman suhteen on aluksi  $x_{K(A)}(t_0) = 0.0$  m, sillä konduktööri on tällöin juuri aseman kyltin kohdalla. Niinpä junan keulan koordinaatti on tällöin  $x_{J(A)}(t_0) = x_{K(A)}(t_0) - x_{K(J)}(t_0) = 3.0$  m. Junan siirtymä kahden ja puolen sekunnin aikana on  $\Delta x_{J(A)} = v_{x,J(A)}\Delta t = 25.0$  m, joten junan koordinaatti on lopuksi  $x_{J(A)}(t_1) = x_{J(A)}(t_0) + \Delta x_{J(A)} = 28.0$  m. Konduktörin paikka lopuksi on siten  $x_{K(A)}(t_1) = x_{K(J)}(t_1) + x_{J(A)}(t_1) = 17.5$  m. Konduktörin nopeus aseman suhteen on  $v_{x,K(A)} = [x_{K(A)}(t_1) - x_{K(A)}(t_0)]/2.5$  s = 7.0 m/s.

**ARVIOINTI** Konduktörin nopeus aseman suhteen voidaan laskea myös suoraan summaamalla yhteen konduktörin nopeus junan suhteen ja junan nopeus aseman suhteen  $v_{x,K(A)} = v_{x,K(J)} + v_{x,J(A)} = 7.0$  m/s. Tulos on sama kuin konduktörin siirtymän kautta laskettu nopeus, kuten pitääkin.



**6.7** Selitä omien sanoin mitä tarkoitetaan epäinertiaalisilla ja inertiaalisilla koordinaatistolla. Selitä myös, miksi joillekin suureille mitataan eri koordinaatistoissa eri arvot.

## 6.3 Liikemäärän ja energian suhteellisuus

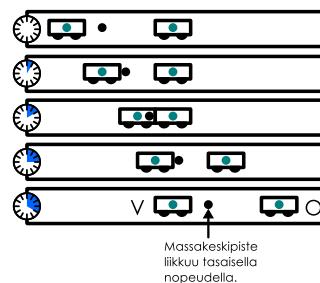
### Liikemäärän suhteellisuus

Opimme jo luvussa 2, että energia ja liikemäärä ovat säilyviä suureita, joita ei voi luoda eikä hävittää. Erityisesti eristetystä systeemissä energian määrä on vakio ja systeemissä, johon kohdistuva ulkoinen kokonaisvoima on nolla, liikemäärä on vakio. Oleellista näiden lakienv soveltamisen kannalta oli siis tarkasteltavan *systeemin* luonne. Näitä lakeja esiteltäessä emme kuitenkaan kiinnittäneet erityisesti huomiota siihen, millaisessa *koordinaatistossa* prosesseja tarkastellaan. Nyt onkin aiaka pohtia, muuttuvatko säilymislait jotenkin koordinaatistoa vaihdettaessa.

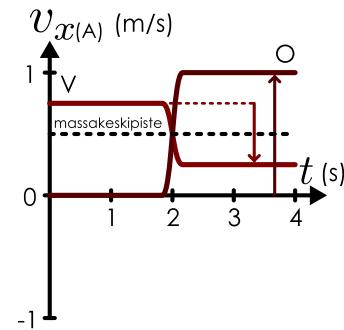
Tutkimme jo aikaisemmin liikemäärän ja energian säilymistä törmäyskokeilla, ja teemme niin nytkin. Kuvassa 6.7 on esitetty sama kahden vaunun törmäys kahdessa eri koordinaatistossa,

Kuva 6.7: Liikkuvien vaunujen törmäys laboratorion koordinaatistossa A.

(a) Liikediagrammi.



(b) Nopeuden kuvaaja.



A ja B. Vaunuja on merkitty kuvassa kirjaimin V (vasen) ja O (oikea), koska kirjaimet A ja B käytettiin jo koordinaatistojen merkitsemiseen.

Koordinaatistossa A vaunu O on aluksi levossa ja vaunu V liikkuu sitä kohti nopeudella  $v_{x,V(A),\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$ . Törmäyksessä vaunu V saa impulssin kuvassa vasemmalle eli negatiiviseen suuntaan ja sen nopeus törmäyksen jälkeen on  $v_{x,V(A),\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$ . Vaunun nopeuden muutos on siis  $\Delta v_{x,V(A)} = -0.5 \text{ m/s}$ . Vaunu O saa törmäyksessä impulssin kuvassa oikealle eli positiiviseen suuntaan, ja sen nopeudeksi tulee törmäyksen jälkeen  $v_{x,O(A),\text{loppu}} = 1.0 \text{ m/s}$ . Vaunun nopeuden muutos on siten niin ikään  $\Delta v_{x,O(A)} = 1.0 \text{ m/s}$ . Koska vaunun O nopeuden muutos on itseisarvoaltaan kaksinkertainen vaunuun V nähdyn, vaunun V täytyy siis olla inertialtaan kaksinkertainen O:hon verrattuna.

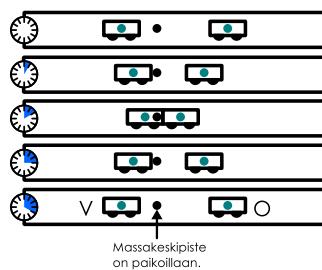
Kuvaan on piirretty myös vaunujen muodostaman systeemin massakeskipiste, joka on lähempänä massiivisempaa vaunua V. Massakeskipiste liikkuu kuvassa oikealle, eli sen nopeuden skalaarikomponentti on positiivinen. Massakeskipisteen nopeus voidaan laskea myös täsmälleen määritelmän (2.89) avulla huomioiden vaunujen inertioiden suhde,  $m_V = 2m_O$  ja kokonaismassa  $M = m_V + m_O = 3m_O$ . Tässä tapauksessa massakeskipisteen nopeudeksi saadaan

$$v_{x,\text{cm}(A)} = \frac{m_V}{M} v_{x,V(A)} + \frac{m_O}{M} v_{x,O(A)} = \frac{2}{3} v_{x,V(A)} + \frac{1}{3} v_{x,O(A)} = 0.5 \text{ m/s}. \quad (6.12)$$

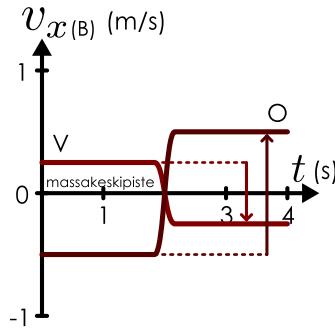
Systeemin kokonaislukemäärä on kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulo,  $p_{x,\text{kokonais}(A)} = M v_{x,\text{cm}(A)}$ , joten koska massakeskipisteen nopeus on positiivinen, systeemillä on myös positiivinen kokonaislukemäärä. Erittäin systeemin kokonaislukemäärä ei ole nolla. Lisäksi koska vaunuihin kohdistuva ulkoinen kokonaivoima on likimain nolla, systeemin kokonaislukemäärä on vakio ja massakeskipiste liikkuu vakionopeudella. Kumman kaan vaunun lukemäärä ei ole erikseen vakio, koska vaunut saavat törmäyksessä impulssin vuorovaikuttaessaan keskenään.

Kuva 6.8: Liikkuvien vaunujen törmäys massakeskipistekoordinaatistossa B.

(a) Liikediagrammi.



(b) Nopeuden kuvaaja.



positiiviseen  $x$ -suuntaan (kuva 6.8). Galilei-muunnoksen nopeuksien yhteenlaskusäännön (6.9) perusteella kaikille kappaleille mitatut nopeudet koordinaatistossa B ovat siis siirtyneet tämän verran negatiiviseen suuntaan verrattuna koordinaatistoon A. Kappale V siis liikkuu aluksi hitaammin oikealle ja sen liikkeen suunta kääntyy törmäyksessä ympäri toisin kuin koordinaatistossa A. Kappale O puolestaan ei ole tässä koordinaatistossa aluksi levossa vaan liikkuu negatiiviseen suuntaan ja tämänkin kappaleen nopeus kääntyy törmäyksessä ympäri.

Tämä nopeuksien muutos ilmenee kuvan 6.8 nopeuskuvajassa, joka on täsmälleen samanlainen kuin kuvan 6.7 koordinaatistossa A mitattu kuvaaja paitsi, että kaikki kuvaajat ovat siirtyneet koordinaatistossa B alaspin 0.5 m/s eli koordinaatistojen välisen nopeuden verran. Erittäin kummankin vaunun alku- ja loppunopeudet muuttuvat koordinaatistomuunnoksessa samalla tavalla, jolloin vaunun V nopeuden muutos törmäyksessä on

$$\Delta v_{x,V(B)} = v_{x,V(B),\text{loppu}} - v_{x,V(B),\text{alku}} = (v_{x,V(A),\text{loppu}} - v_{x,B(A)}) - (v_{x,V(A),\text{alku}} - v_{x,B(A)}) = \Delta v_{x,V(A)}. \quad (6.13)$$

Toisin sanoen vaunun V nopeuden muutokselle mitataan kummassakin koordinaatistossa sama arvo ja vastaava päättely toimii luonnollisesti myös vaunulle O. Edelleen, koska lukemäärä on verrannollinen kappaleen nopeuteen, kummankin vaunun lukemäären muutos on verrannollinen nopeuden muutokseen. Koska jokaisen kappaleen nopeuden muutos on sama kummassakin koordinaatistossa, myös kappaleiden lukemääret muuttuvat kaikissa koordinaatistoissa saman verran. Esimerkiksi vaunun V lukemäären muutos on

$$\Delta p_{x,V(B)} = m_V \Delta v_{x,V(B)} = m_V \Delta v_{x,V(A)} = \Delta p_{x,V(A)} \quad (6.14)$$

ja samoin vaunulle O  $\Delta p_{x,O(B)} = \Delta p_{x,O(A)}$ . Siispä vaikka systeemin lukemäärelle mitataan koordinaatistossa eri arvot, lukemäären muutokset ovat kaikkien havaitsijoiden mittauksissa samat. Erittäin tässä ta-

Ei ole kuitenkaan mitään syytä, miksi koe pitäisi analysoida juuri siinä koordinaatistossa, jossa rata on paikoillaan. Meidän ei myöskään tarvitse oikeasti havainnoida koetta liikkuvalla kameralla, sillä voimme aina Galilei-muunnoksen avulla määrittää miltä tilanne näyttäisi jos havaitsija liikkuisi. Toisin sanoen tilanne voidaan aina analysoida käyttäen mitä tahansa koordinaatistoa ja koordinaatistosta toiseen siirtyminen voidaan tehdä ajatuskokeena.

Valitaan nyt toiseksi tarkasteltavaksi koordinaatistoksi B sellaisen havaitsijan näkökulma, joka liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella  $v_{x,B(A)} = 0.5 \text{ m/s}$

paiksessa kokonaisliikemäären muutos on kaikissa koordinaatistoissa nolla eli systeemin *kokonaisliikemäärä on vakio riippumatta siitä, missä koordinaatistossa sitä mitataan*.

Koordinaatisto B on siten erikoinen, että siinä *massakeskipiste on paikoillaan*. Tämä myös tarkoittaa sitä, että koordinaatistossa B systeemin *kokonaisliikemäärä on nolla*, ja koska systeemissä on vain kaksi kappaletta täytyy kappaleiden liikemäärien olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Tämän erikoisomaisuuden vuoksi koordinaatistoa B kutsutaankin systeemin **massakeskipistekoordinaatistoksi** eli *nollaliikemääräkoordinaatistoksi*.

Koska massakeskipisteen liike ei muutu törmäyksessä, massakeskipiste on tässä koordinaatistossa paikoillaan myös törmäyksen jälkeen. Tämän ominaisuuden vuoksi liikemäären säilymislain soveltaminen törmäysten analysoinnissa on usein erityisen helppoa juuri massakeskipistekoordinaatistossa, koska törmäävien kappaleiden liikemäärien summan täytyy olla törmäyksen jälkeen *nolla*. Usein törmäyksiä tutkittaessa kannattaakin ensin siirtyä törmäävien kappaleiden muodostaman systeemin massakeskipistekoordinaatistoon, analysoida törmäys tässä koordinaatistossa, ja siirtyä sitten takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon.



**6.8** (a) Kaksi kappaletta tarttuu törmäyksessä toisiinsa kiinni. Mikä on kappaleiden nopeus törmäyksen jälkeen massakeskipistekoordinaatistossa?

(b) Hiukkanen hajoaa kahdeksi pienemmäksi hiukkaseksi, joiden massat ovat  $m_A$  ja  $m_B = 2m_A$ . Vertaa syntyvien hiukkasten liikemääriä massakeskipistekoordinaatistossa.

Edellisessä törmäysesimerkissä vaunujen muodostaman systeemin kokonaisliikemäärä oli törmäyksessä vakio kummassakin tarkastellussa koordinaatistossa, sillä systeemiin kohdistuneiden ulkoisten voimien summa oli molemmissa tapauksissa likimain nolla. Kappaleisiin kohdistuva painovoima ja radan niihin kohdistama normaalivoima eivät nimittäin riipu siitä, miten satumme kappaleita katsomaan. Kuitenkin tämän kokonaisliikemäären arvo on näissä koordinaatistoissa *eri suuri*: koordinaatistossa A kokonaisliikemäärä on *positiivinen* ja koordinaatistossa B se on *nolla*. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että liikemäärä riippuu nopeudesta ja nopeus on suhteellinen suure. Nämä myös *liikemäärä on suhteellinen suure*.

On toki olemassa myös suureita, joille kaikki havaitsevat samat arvot ja ovat riippumattomia siitä, kuinka niitä tarkastellaan. Esimerkiksi tässä törmäykokeessa on kaikissa koordinaatistoissa *kaksi* vaunua riippumatta siitä kuinka havaitseja liikkuvat vaunujen suhteeseen. Tällaisia asioita, jotka havaitaan kaikissa koordinaatistoissa samalla tavalla, kutsutaan **absoluuttisiksi**. Kuten säälyvien suureiden arvot ovat *vakiot* ajan muuttumisen suhteesta, absoluuttisten suureiden arvot ovat **invariantteja** (engl. invariant, 'muuttumaton') koordinaatiston vaihdosta suhteesta.

Absoluuttisuus on siis suhteellisuuden vastakohta, mutta kyseessä on täysin eri asia kuin suureen säälyvyys. Säälyvän suureen kokonaismäärä ei muutu *ajan kuluessa*, mutta eri havaitsejoiden mittaan tähän kokonaismäärä voi kuitenkin saada eri arvoja. Esimerkiksi törmäyksessä kokonaisliikemäärä on säälyvä suure — sitä ei voi luoda eikä hävittää. Havainto on puolestaan absoluuttinen, jos kaikki havaitsevat sen samalla tavalla, mutta absoluuttisen suureen ei tarvitse olla säälyvä. Esimerkiksi vaunujen lukumäärä on absoluuttinen suure, mutta se ei välttämättä ole säälyvä. Vaunuja voidaan nimittäin hajottaa ja koota, jolloin niiden kokonaismäärä muuttuu eikä kyseessä siis ole säälyvä suure. Kuitenkin jos vaunu hajoaa yhdessä koordinaatistossa, sen täytyy hajota *kaikissa* koordinaatistoissa. Ei ole esimerkiksi mahdollista, että yksi havaitseja näkee vaunun hajoavan törmäyksessä mutta toinen havaitseja ei.



**6.9** Törmäävä vaunu hajoaa, jos se kokee törmäyksessä liian suuren voiman. Koordinaatistossa A vaunun nopeus on pieni eikä se hajoa törmäyksessä. Koordinaatisto B liikkuu kuitenkin hyvin nopeasti A:n suhteesta, joten tässä koordinaatistossa vaunulla on hyvin suuri nopeus. Voiko vaunu hajota B:ssä? Mitä voidaan päätellä vaunuun kohdistuvista voimista eri koordinaatistossa?

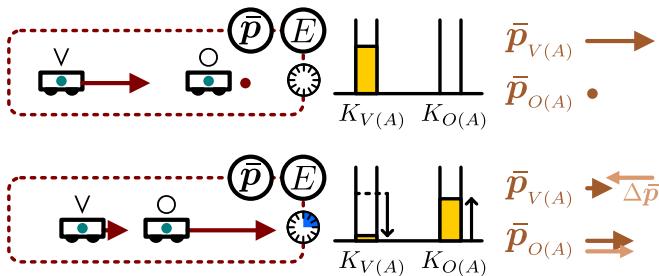
## Työn ja energian suhteellisuus

Liikemäärä on siis suhteellinen suure, koska se riippuu kappaleiden nopeudesta ja nopeus on suhteellinen. Myös kappaleiden liike-energia riippuu nopeudesta, joten mitä ilmeisimmin myös energia on suhteellinen suure. Tämä ilmenee kuvasta 6.9, jossa on piirretty edellisen esimerkin vaunujen energidiagrammit: koordinaatistossa A aluksi vaunu V kulkee suurella nopeudella ja lopuksi nopeasti liikkuvat vaunu O. Niinpä systeemillä on tässä koordinaatistossa paljon liike-energiaa. Lisäksi koska vaunut törmäävät elastisesti, kokonaisliike-energia on törmäyksessä vakio. Sen sijaan koordinaatistossa B kumpikin vaunu liikkuu melko hitaasti, jolloin liike-energia on pienempi. Tämän voi tarkistaa myös laskemalla. Jos esimerkiksi vaunun V massa on 2 kg ja vaunun O 1 kg (massojen suhde on 2), vaunujen liike-energioiden summa on koordinaatistossa A noin 0.6 J kun taas koordinaatistossa B se on 0.2 J. Systeemin kokonaisenergia on kummassakin koordinaatistossa vakio, koska vaunujen muodostama systeemi on likimain eristetty havaitsejan liikkeestä riippumatta.

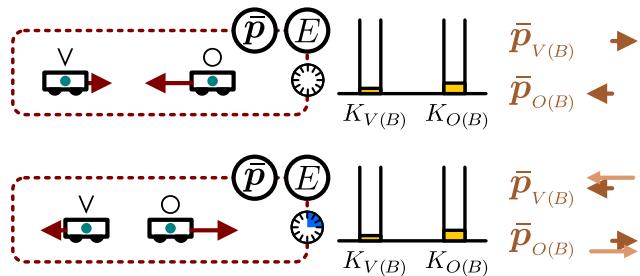
Energiadiagrammista nähdään myös, että vaikka systeemin kokonaisenergia on vakio kummassakin koordinaatistossa, yksittäisten kappaleiden liike-energioiden muutokset ovat *erilaiset* eri koordinaatistoissa. Koordinaatistossa A kappaleen V vauhti pienenee joten myös sen liike-energia vähenee. Samalla aluksi levossa

Kuva 6.9: Säilyvät suuret törmäävien vaunujen muodostamassa systeemissä.

(a) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa A.



(b) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa B.



olleen kappaleen O liike-energia lisääntyy. Koordinaatistossa B sen sijaan kummankin kappaleen nopeusvektori käännyy mutta kappaleiden vauhdit eivät muutu. Niinpä myös kummankin kappaleiden liike-energiat eivät muutu lainkaan. Tämä on selkeä ero liikemäärään verrattuna, sillä edellä päätteliin kaikkien havaittijoiden mittauksen kappaleiden liikemäärille samat muutokset. Sen sijaan kunkin yksittäisen kappaleen energian muutos riippuu valitusta koordinaatistosta.



**6.10** Tarkista laskemalla, että tässä törmäyskokeessa systeemin kokonaisenergia on kummassakin koordinaatistossa sama ennen törmäystä ja sen jälkeen.

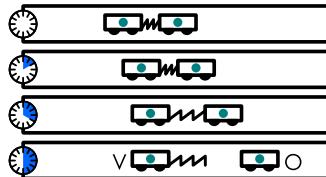
Tarkastellaan toisena esimerkkinä identtisiä vaunuja, joiden välillä on puristettu jousi (kuva 6.10). Vaunut on aluksi lukittu yhteen niin, että vaunujen keskinäinen etäisyys pysyy vakiona eikä jousi pääse oikenemaan. Vaunulle annetaan koordinaatistossa A alkunopeus positiiviseen  $x$ -suuntaan ja vaunujen liikkuessa niiden välinen lukitus aukaistaan, jolloin jousi työntää vaunut erilleen. Vaunujen alkunopeus oli valittu niin, että vasemmanpuoleinen vaunu V jää jousen vapauduttua paikoilleen. Oikeanpuoleinen vaunu O saa puolestaan lopuksi suuremman vauhdin kuin aluksi.

Jos valitaan systeemiksi vaunut ja jousi, alussa vaunujen liikkuessa yhdessä systeemin massakeskipiste liikkuu vaunujen mukana. Tämä tarkoittaa sitä, että vaunut ovat massakeskipistekoordinaatistossa (B) aluksi levossa. Vapautuva jousi työntää tässä koordinaatistossa vaunut liikkeelle. Tällöin prosessissa kummankin vaunun vauhti kasvaa. Koska tässä kokeessa vaunujen inertia oli yhtä suuri, vaunut saavat liikemäärän säilymislain nojalla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset nopeudet.

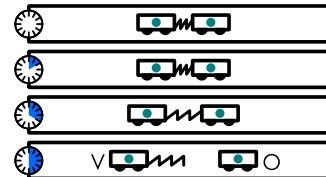
Prosessin energiadiagrammi on piirretty kuvaan 6.11. Jouseen on aluksi varastoitunut potentiaalienergiaa, joka muuttuu prosessissa vaunujen liike-energiaksi, mutta *energian jakautuminen riippuu koordinaatistosta*. Massakeskipistekoordinaatistossa B systeemi on täysin symmetrinen  $x$ -akselin suhteen. Koko koe näyttäisi täsmälleen samalta, vaikka koejärjestely käännettäisiin ympäri, joten ei ole mitään syytä mikä jompikumpi vaunuista saisi enemmän energiota ja suuremman vauhdin kuin toinen. Niinpä jousen potentiaalienergia siirtyy vaunuille ja jakautuu *tasan* niiden kesken. Tämä päättelä päätee kuitenkin vain siksi, että vaunut ovat identtiset eikä systeemi aluksi liiku mihinkään suuntaan.

Kuva 6.10: Vaunujen räjähävä erotus.

(a) Koordinaatisto A.



(b) Massakeskipistekoordinaatisto B.



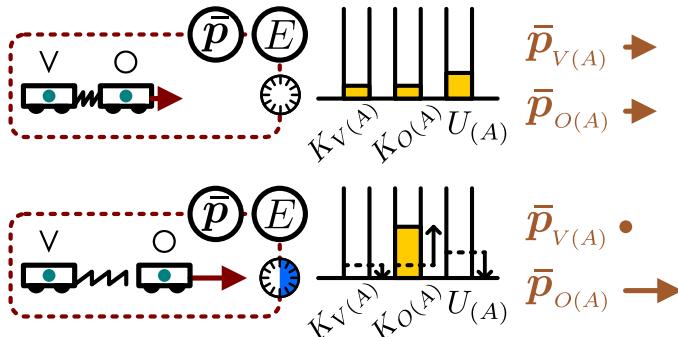
**6.11** Millaiset vauhdit vaunut saisivat massakeskipistekoordinaatistossa, jos vaunun V massa olisi kaksinkertainen vaunuun O nähden? Missä suhteessa liike-energia tällöin jakautuisi vaunujen kesken?

Koordinaatistossa A systeemi liikkuu positiiviseen suuntaan, joten tilanne ei ole symmetrinen eikä jousen energia jakaudu vaunuille tasana. Itse asiassa tässä koordinaatistossa kummallakin vaunulla on aluksi liike-energiaa, mutta lopuksi systeemin *kaikki* energia on siirtynyt vaunulle O. Toisin sanoen vaunu O saa prosessissa sekä kaiken jousen energian että myös kaiken vaunulla V alussa olleen liike-energian. Systeemin kokonaisenergia on tässäkin koordinaatistossa vakio, mutta energian jakautuminen tapahtuu eri koordinaatistoiissa täysin eri tavoin.

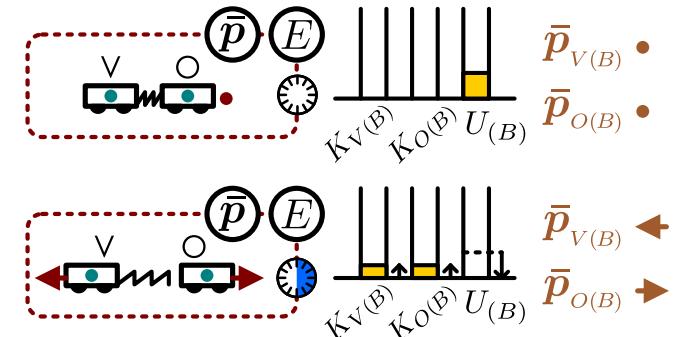
## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.11: Säilyvät suuret erkanevien vaunujen muodostamassa systeemissä.

(a) Systeemin energia ja liikemääriä koordinaatistossa A.



(b) Systeemin energia ja liikemääriä koordinaatistossa B.



Energia siirtyy vaunujen ja jousen välillä, koska jousivoima tekee vaunuihin työtä. Nämä jousen ja vaunujen väliset voimat on pürretty kuvan 6.12 vapaakappalekuviin. Kuvista on selkeyden vuoksi jätetty pois toisensa kumoavat painovoima ja radan vaunuihin kohdistama normaalivoima. Vaunut puristavat joustaa kokoon ja oietakseen jousen täytyy kohdistaa vaunuihin voimat, jotka työntävät niitä poispäin toisistaan. Jousen vaunuun kohdistama voima riippuu Hooken lain mukaisesti vain jousen puristumasta, ja erityisesti jos jousi on kevyt, se kohdistaa kumpaankin kappaleeseen *yhtä suuren voiman* samalla perusteella kuin kevyen köyden jännitysvoima on köyden kummassakin päässä *yhtä suuri*.

Koska jousivoima riippuu vain jousen pituudesta ja jousen pituus on kalkissa koordinaatistoissa sama, vaunuihin kohdistuvat voimat ovat *samat* kaikissa koordinaatistoissa. Toisin sanoen voima on *absoluuttinen suure*. Tämä pätee itse asiassa kaikille voimille. Päättelimme nimittäin jo aikaisemmin, että kaikki havaitsetti mittaavat samat *liikemäären muutokset*. Erityisesti jos ajassa  $dt$  kappaleen liikemäären muutos koordinaatistossa A on  $dp_{x,(A)}$ , sen liikemääri muuttuu *yhtä paljon* myös koordinaatistossa B. Niinpä kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman täytyy olla dynamikan perustella sama kummassakin koordinaatistossa,

$$F_{x,\text{kokonaís}(A)} = \frac{dp_{x,(A)}}{dt} = \frac{dp_{x,(B)}}{dt} = F_{x,\text{kokonaís}(B)}. \quad (6.15)$$

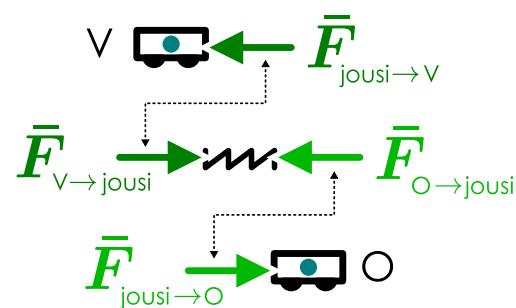


6.12 Onko impulssi suhteellinen vai absoluuttinen suure? Entä jousen potentiaalienergia?

Koordinaatistossa B kumpikin vaunu on aluksi paikoillaan, joten kumpikin vaunu alkaa kulkea siihen suuntaan, johon vaunuun kohdistuva voima osoittaa. Vaunu V liikkuu siis vasemmalle ja vaunu O oikealle, kuten kuvassa 6.13 (b) on kuvattu. Koska vaunuilla on aina *yhtä suuri* vauhti, ne liikkuvat jousen oikenemisen aikana *yhtä pitkän* matkan. Ja koska vaunuihin kohdistuu *yhtä suuret* voimat, jousi tekee *niihin* kumpaankin *yhtä suuren* työn. Nämä ollen tässä koordinaatistossa jousi siirtää kummallekin vaunulle *yhtä paljon* energiaa.

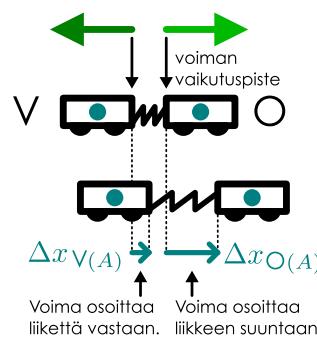
Koordinaatistossa A (kuva 6.13 (a)) sen sijaan vaunut liikkuvat aluksi kuvassa oikealle. Vaunu O liikkuu koko ajan oikeal-

Kuva 6.12: Vaunujen vapaakappalekuvat.

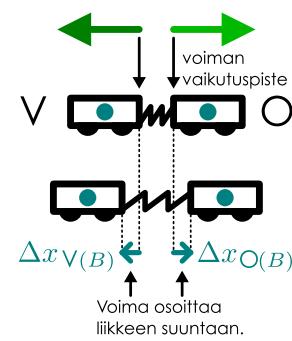


Kuva 6.13: Jousen vaunuihin tekemä työ riippuu vaunujen siirtymästä.

(a) Siirtymät koordinaatistossa A.



(b) Siirtymät koordinaatistossa B.



le eli samaan suuntaan kuin siihen kohdistuva voima, joten voima tekee siihen positiivisen työn. Koska vau nulla on koordinaatistossa A suurempi nopeus kuin koordinaatistossa B, vaunu ehtii tässä koordinaatistossa kulkea *pidemmän matkan* ja voima tekee siihen myös suuremman työn. Niinpä vaunun O liike-energia kasvaa koordinaatistossa A enemmän kuin koordinaatistossa B. Vaunu V sen sijaan pysähtyy prosessissa, mutta ennen sitä se ehtii siirtyä kuvassa oikealle. Vaunuun kohdistuva voima kuitenkin osoittaa kuvassa vasemmalle eli *vastakkaiseen suuntaan siirtymään* nähdyn. Niinpä tämä voima hidastaa vaunun vauhtia ja tekee siihen negatiivisen työn. Vaunun V liike-energia siis *pienenee* koordinaatistossa A. Kaikkiaan siis energiaa siirtyy vaunusta V jouseen ja jousesta edelleen vaunuun O. Systeemin kokonaisenergia kuitenkin pysyy vakiona.

Yhteenvetona siis voima ja liikemäären muutokset ovat absoluuttisia eli havaitsijasta riippumattomia suureita, vaikka liikemäärä itsessään on suhteellinen. Kuitenkin koska *siirtymä* on suhteellinen suure, voiman ja siirtymän tulo eli *työ*, on myös suhteellinen suure. Tämän takia yksittäisen kappaleen energian muutos on suhteellinen eli eri havaitsijat mittaavat erilaiset energioiden muutokset. Energia on silti säilyvä suure kaikissa koordinaatistoissa ja jos systeemi on eristetty yhdessä koordinaatistossa se on eristetty myös kaikissa muissa koordinaatistoissa.



- 6.13** Olet aluksi paikoillasi Maan suhteen ja lähdet sitten juoksemaan tasaisella nopeudella 5 m/s kohti yliopistoa. (a) Mikä on liike-energiasi omassa koordinaatistossasi aluksi ja lopuksi? (b) Mikä on yliopiston liike-energia omassa koordinaatistossasi aluksi ja lopuksi? (c) Säilyykö energia koordinaatistossasi?

### Sisäenergian absoluuttisuus

Jouseen varastoitunut potentiaalienergia riippuu ainoastaan jousen muodosta, mikä ei riipu koordinaatistosta. Toisin sanoen jos jousta puristetaan tietyllä voimalla yhdessä koordinaatistossa, tämä puristava voima on sama muissakin koordinaatistoissa, ja jousi puristuu kaikkien havaitsijoiden mielestä yhtä paljon. Liike-energia on eri koordinaatistoissa erilainen siksi, että kappaleiden havaitaan liikkuvan eri nopeuksilla, mutta jousi näyttää samalta kaikista havaitsijoista.

Monet muutkin kappaleiden ominaisuudet ovat absoluuttisia. Auton polttoainesäiliössä olevan polttoaineen määrä on kaikkien havaitsijoiden mielestä sama. Kuuma kappale on kuuma ja kylmä kappale on kylmä kaikkien havaitsijoiden mielestä. Samoin jos astiaan laitetaan vettä, sen täytyy olla kaikkien havaitsijoiden mielestä samassa olomuodossa — jäävä, vetenä tai kaasuna.

Näissä kaikissa tapauksissa kappaleen *tila* on kaikkien havaitsijoiden mielestä sama nopeutta lukuunottamatta. Tilaan liittyvän *sisäenergian* täytyy siis olla absoluuttinen suure. Auton polttoaineeseen on sitoutunut kemiallista energiota, ja tämän energian määrän täytyy olla kaikissa koordinaatistoissa sama koska polttoaineen määrä on. Lämpötilaan ja aineen olomuodon muutoksiin sitoutuu myös lämpöenergiaa, ja tämän energian määrän täytyy niihin ikään olla absoluuttinen.

Sisäenergialla on useita muotoja, joista yksi on hiukkosten *satunnaisliikkeeseen* sitoutunut liike-energia. Karkeasti ilmaisten mitä nopeammin aineen atomit ja molekyylit liikkuvat ja värihalevat, sitä enemmän niihin on sitoutunut liike-energiaa ja sitä kuumempaa aine on. Kuitenkin hiukkosten nopeus on suhteellinen suure, minkä pitäisi tämän ajatuksen mukaan vaikuttaa kappaleen havaittuun lämpötilaan. Kylmän kappaleen hiukkaset ovat kappaleen massakeskipistekoordinaatistossa B lähes paikoillaan. Tämän suhteen nopeudella  $\bar{v}_{A(B)}$  liikkuvassa koordinaatistossa A hiukkaset kuitenkin liikkuvat likimain nopeudella  $-\bar{v}_{A(B)}$ . Kappale kuitenkin havaitaan tässäkin koordinaatistossa yhtä kylmänä! Ainoa ero havainnoissa on se, että koordinaatistossa A kappale *liikkuu*. Mikä tahansa hiukkosten liike ei siis ilmene lämpötilana. Koordinaatistossa A kaikki hiukkaset liikkuvat samalla nopeudella, joten tähän liikkeeseen liittyvä energia on *järjestynyttä* liike-energiaa. Lämpöenergia liittygän vain hiukkosten *epäjärjestyneeseen satunnaisliikkeeseen*.

Tätä eroa on havainnollistettu kuvassa 6.14, jossa on eroteltu kappaleen makroskooppisesti havaittujen ominaisuuksien, liikkeen ja lämpötilan, ero hiukkosten liikkeen kannalta. Kappale on levossa, jos sen hiukkosten massakeskipiste ei liiku eli jos massakeskipistenopeus on nolla. Tämä on mahdollista jos hiukkaset ovat paikoillaan, jolloin kappale on kylmä, tai jos hiukkaset liikkuvat satunnaisesti vastakkaisiin suuntiin, jolloin kappale on kuuma. On toki vielä mahdollista, että kappale *pyörii* massakeskipisteensä ympäri tai että sen muoto muuttuu, mutta näitä vaihtoehtoja ei ole tässä yksinkertaisuuden vuoksi erikseen käsitelty.

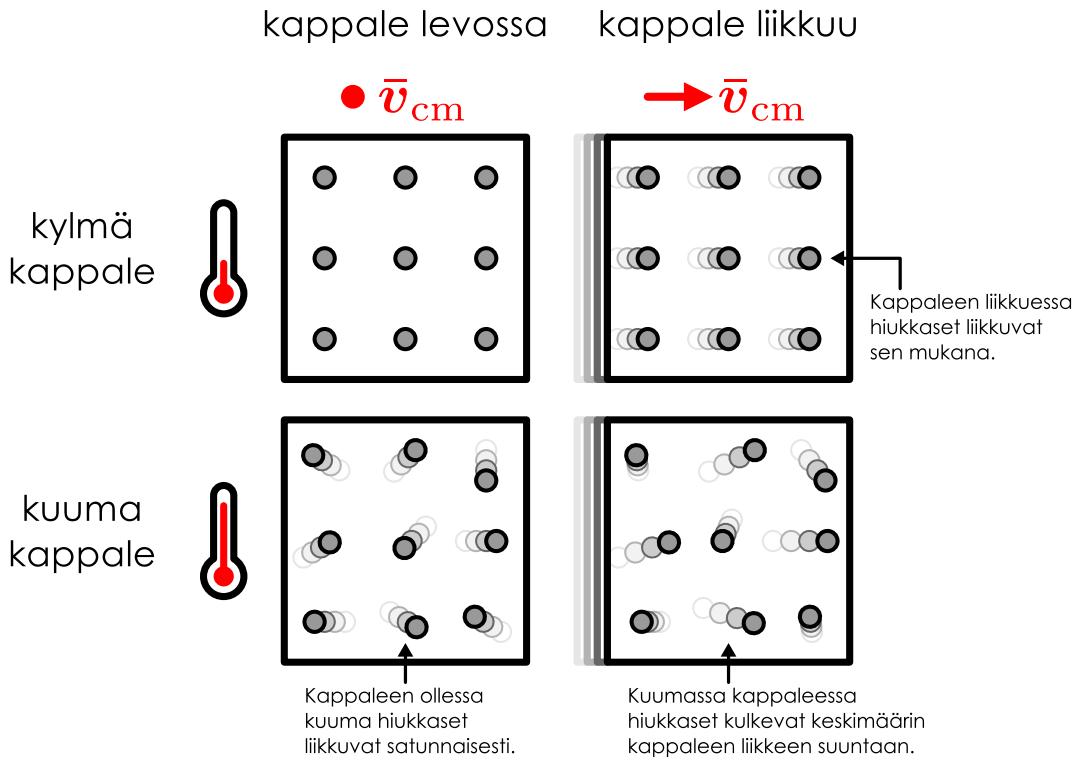
Toisessa koordinaatistossa sama kappale liikkuu. Jos kappale on kylmä, sen hiukkaset liikkuvat tällöin samaan suuntaan, mikä siis ilmenee kappaleen liikkeenä. Jos kappale on kuuma, sen hiukkaset liikkuvat edelleen satunnaisesti kappaleen sisällä sen massakeskipisteen suhteen. Kuitenkin tämän lisäksi hiukkaset liikkuvat kollektiivisesti kappaleen mukana. Toisin sanoen tällöin hiukkaset liikkuvat satunnaisesti, mutta niiden satunnaisten nopeuksien massoilla painotettu kesiarvo ei ole nolla kuten kappaleen ollessa levossa. Sen sijaan kappaleen liikkeen suuntaan liikkuu hiukan enemmän hiukkasia hiukan suuremmalla vauhdilla kuin pääinvastaiseen suuntaan, jolloin hiukkosten muodostama kappale liikkuu.



- 6.14** Junassa on jäälä. Juna on aluksi paikoillaan asemalla ja lähtee sitten liikkeelle. Kuinka junan liikkuminen muuttaa asemalla olevan havaitsijan koordinaatistossa jääen (a) molekyylien nopeusvektoreita, (b) molekyylien vauhteja, (c) lämpötilaa, (d) liike-energiaa?

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.14: Hiukkasten satunnainen liike ilmenee kappaleen lämpötilana ja niiden järjestätyynä liike kappaleen lükkeenä. Kappaleen nopeus riippuu koordinaatistosta, mutta kuuman kappaleen hiukkaset liikkuvat satunnaisesti kaikissa koordinaatistoissa.



Hiukkasten satunnaista liikettä ei makroskooppisessa mittakaavassa voi nähdä, joten siihen liittyvä liike-energia on kappaleen *sisäenergiaa*, ja mitä enemmän tähän satunnaisliikkeeseen liittyy energiota, sitä *kuumempaa* kappale makroskooppisesti havaitaan. Hiukkasten kollektiivinen liike sen sijaan nähdään myös makroskooppisesti kappaleen *lükkeenä*, johon liittyy mekaanista liike-energiaa. Liike-energia on suhteellinen suure, mutta kappaleen lämpötila ei ole, joten hiukkasten satunnaislükkeen energian pitäisi tämän perusteella olla riippumaton koordinaatistosta. Näin todella on, kuten seuraavaksi osoitetaan.

Olkoon koordinaatisto, jossa kappale liikkuu A, ja kappaleen massakeskipistekoordinaatisto B kuten kuvassa 6.15 on piirretty. Koska koordinaatisto B liikkuu kappaleen mukana, sen nopeus koordinaatiston A suhteen on siis sama kuin kappaleen nopeus koordinaatistossa A eli

$$\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{cm(A)}. \quad (6.16)$$

Jos siis yksittäinen hiukanen liikkuu nopeudella  $\bar{v}_{(B)}$  koordinaatistossa B, jossa kappale on levossa, se liikkuu koordinaatistossa A nopeudella

$$\bar{v}_{(A)} = \bar{v}_{(B)} + \bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{(B)} + \bar{v}_{cm(A)}. \quad (6.17)$$

Toisin sanoen hiukkasen nopeus tässä koordinaatistossa saadaan yhdistämällä hiukkasen nopeus *massakeskipisteen suhteen* sekä kappaleen makroskooppisesti havaittava massakeskipistenopeus.

Jos kappaleen kaikki hiukkaset luetteloidaan ja merkitään indeksiin  $i = 1, 2, 3, \dots$ , hiukkasten yhteenlaskeutu liike-energia koordinaatistossa A on

$$K_{\text{kokonais},(A)} = \frac{1}{2}m_1 v_{1(A)}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2(A)}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i(A)}^2. \quad (6.18)$$

Nopeuden neliö voidaan kirjoittaa komponenteittain Pythagoraan lauseen avulla muodossa

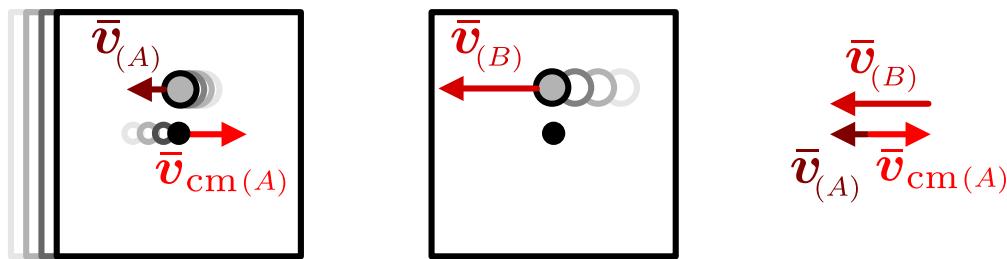
$$v_{i(A)}^2 = v_{x,i(A)}^2 + v_{y,i(A)}^2 + v_{z,i(A)}^2, \quad (6.19)$$

joten liike-energia voidaan laskea erikseen x-, y- ja z-suunnissa,

$$K_{\text{kokonais},(A)} = \sum_i \frac{1}{2}m_i(v_{x,i(A)}^2 + v_{y,i(A)}^2 + v_{z,i(A)}^2) = K_{x\text{-suunta},(A)} + K_{y\text{-suunta},(A)} + K_{z\text{-suunta},(A)}. \quad (6.20)$$

Kuva 6.15: Kappaleen hiukkisen liike voidaan jakaa kappaleen massakeskipisteen liikkeeseen sekä hiukkisen liikkeeseen massakeskipisteen suhteeseen.

- (a) Hiukkisen liike koordinaatistossa A, (b) Massakeskipistekoordinaatistossa B kappale ei liiku. (c) Hiukkisen nopeuden jako massakeskipisteen nopeuteen ja nopeuteen massakeskipisteen suhteeseen.



Jos vielä  $x$ -akseli valitaan kappaleen liikkeen suuntaan, hiukkasten nopeuden  $y$ - ja  $z$ -komponentit ovat *samat* koordinaatistoissa A ja B, ja siten näihin suuntiin liittyvä liike-energia on kummassakin koordinaatistossa yhtä suuri,  $K_{y\text{-suunta},(A)} = K_{y\text{-suunta},(B)}$  ja  $K_{z\text{-suunta},(A)} = K_{z\text{-suunta},(B)}$ . Nämä voimme rajoittua tarkastelemaan vain  $x$ -suuntaisen liikkeen energiasta

$$K_{x\text{-suunta},(A)} = \frac{1}{2}m_1v_{x,1(A)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(A)}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{x,i(A)}^2. \quad (6.21)$$



**6.15** Hiukkisen (massa 1.0 g) nopeus on koordinaatistossa A  $\bar{v}_{(A)} = (100 \text{ m/s})\hat{i} + (100 \text{ m/s})\hat{j}$ . Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella  $\bar{v}_{B(A)} = (10 \text{ m/s})\hat{i}$ . Mikä on kummassakin koordinaatistossa hiukkisen (a) nopeuden  $x$ - ja  $y$ -komponentit, (b) vauhti, (c)  $x$ - ja  $y$ -suuntaisen lükkeen liike-energia, (d) kokonaisliike-energia?

Koordinaatistossa A mitattu nopeuden neliö voidaan kirjoittaa yhtälön (6.17) perusteella massakeskipisteenoypeuden ja massakeskipisteen suhteeseen mitatun nopeuden avulla. Tuloksena saadaan

$$v_{x,i(A)}^2 = (v_{x,i(B)} + v_{cm(A)})^2 = v_{x,i(B)}^2 + 2v_{x,i(B)}v_{cm(A)} + v_{cm(A)}^2. \quad (6.22)$$

Tässä massakeskipistenopeuden symbolista on jätetty alaindeksi  $x$  pois, koska kappale liikkuu positiiviseen  $x$ -suuntaan. Tällöin massakeskipisteen nopeuden  $x$ -skalaarikomponentti on sama kuin massakeskipisteen nopeuden itseisarvo eli  $v_{x,cm(A)} = v_{cm(A)}$ . Tämän hajotelman sijoitus hiukkisen  $i$  liike-energian lausekkeeseen antaa

$$\frac{1}{2}m_i v_{x,i(A)}^2 = \frac{1}{2}m_i v_{x,i(B)}^2 + m_i v_{x,i(B)}v_{cm(A)} + \frac{1}{2}m_i v_{cm(A)}^2 \quad (6.23)$$

ja hiukkisten yhteenlasketuksi liike-energiaksi tulee

$$\begin{aligned} K_{x\text{-suunta},(A)} &= \left( \frac{1}{2}m_1v_{x,1(B)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(B)}^2 + \dots \right) + \\ &\quad (m_1v_{x,1(B)} + m_2v_{x,2(B)} + \dots)v_{cm(A)} + \\ &\quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \dots)v_{cm(A)}^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Tämän summan ensimmäinen osa on yksinkertaisesti *hiukkisten liike-energia koordinaatistossa B*,

$$K_{x\text{-suunta},(B)} = \left( \frac{1}{2}m_1v_{x,1(B)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(B)}^2 + \dots \right) = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{x,i(B)}^2. \quad (6.25)$$

Summan toinen osa puolestaan sisältää hiukkisten *liikemäärien summan koordinaatistossa B* eli kappaleen *kokonaisliikemäären*. Koordinaatisto B on kuitenkin massakeskipistekoordinaatisto, jossa *kokonaisliikemääri on nolla*. Nämä tämän termin täytyy olla nolla,

$$m_1v_{x,1(B)} + m_2v_{x,2(B)} + \dots = p_{x,1(B)} + p_{x,2(B)} \dots = p_{x,\text{kokonais}(B)} = 0. \quad (6.26)$$

Summan viimeinen osa on myös liike-energiaa muistuttava termi, mutta siinä esiintyy kappaleen massakeskipisteen nopeus sekä kaikkien hiukkasten massojen summa. Kuitenkin massakeskipisteen nopeus on sama

## SUHTEELLISUUS

asia kuin kappaleen makroskooppinen nopeus ja hiukkasten massojen summa on kappaleen kokonaismassa. Niinpä kyseessä on *kappaleen makroskooppiseen liikkeeseen liittyvä energia koordinaatistossa A*,

$$K_{\text{cm},(A)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \dots) v_{\text{cm}(A)}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\text{cm}(A)}^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}(A)}^2. \quad (6.27)$$

Nämä ollen hiukkasten liike-energoiden summa koordinaatistossa A on hiukkasten koordinaatistossa B mitattujen liike-energoiden summan sekä hiukkasten muodostaman kappaleen koordinaatistossa A mitattun makroskooppisen liike-energian summa,

$$K_{x\text{-suunta},(A)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{x,i,(B)}^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}(A)}^2 = K_{x\text{-suunta},(B)} + K_{\text{cm}(A)}. \quad (6.28)$$

Yhdistämällä tähän vielä hiukkasten  $y$ - ja  $z$ -suuntaisen liikkeen energiat, jotka ovat kummassakin koordinaatistossa samat, voidaan hiukkasten liikkeeseen liittyvä energia erotella kappaleen *mekaaniseksi liike-energiaksi*  $K_{(A)} = K_{\text{cm}(A)}$  sekä hiukkasten massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan satunnaisliikkeeseen vaaristoituneeksi epäjärjestyneeksi *sisäenergiaksi*

$$E_{\text{sisä}} = K_{x\text{-suunta},(B)} + K_{y\text{-suunta},(B)} + K_{z\text{-suunta},(B)}. \quad (6.29)$$

Hiukkasten liikkeen energia koordinaatistossa A on näillä merkinnöillä siis

$$E_{\text{kokonais},(A)} = K_{(A)} + E_{\text{sisä}} \quad (6.30)$$

ja koordinaatistossa B

$$E_{\text{kokonais},(B)} = E_{\text{sisä}}. \quad (6.31)$$

Toisin sanoen hiukkasten satunnaisliikkeeseen liittyvä sisäenergia on *sama* kaikissa koordinaatistoissa — se on absoluuttinen suure. Nämä pitääkin olla, koska tämä energia liittyy kappaleen lämpötilaan, joka on absoluuttinen. Hiukkasten liikkeen järjestynyt osuuus ilmenee kappaleen makroskooppisena liikkeenä, ja tämän liikkeen nopeus on suhteellinen suure. Erityisesti massakeskipistekoordinaatistossa kappale on paikoillaan, jolloin kaikki hiukkasten liike-energia on kappaleen sisäenergiaa.



**6.16** Systeemin muodostaa kaksi samanlaista hiukkasta (massa 1.0 g). Koordinaatistossa A hiukkaset liikkuvat positiiviseen  $x$ -suuntaan nopeuksilla  $v_{x,1(A)} = 150$  m/s ja  $v_{x,2(A)} = 120$  m/s. Systeemin massakeskipistekoordinaatisto on B. Mikä on kummassakin koordinaatistossa (a) hiukkasten kokonaislijke-energia, (b) massakeskipisteen liikkeen energia, (c) massakeskipisteen liikkeen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia?

### esimerkki 6.2

### Lämpöliike

Typikaasun  $\text{N}_2$  tiedetään sisältävän huoneenlämmössä noin 230 kJ/kg sisäenergiaa, josta 1/5 on molekyylien  $x$ -suuntaisen liikkeen liike-energiaa. Arvioi yhden hiukkasen keskimääräinen  $x$ -suuntainen vauhti ja liike-energia.

**SUUNNITELMA** Merkitään sisäenergiaa  $E_{\text{sisä}} = M e_{\text{sisä}}$ , missä  $M$  on kaasun massa ja  $e_{\text{sisä}} = 230$  kJ/kg. Merkitään  $x$ -suuntaisen liike-energian osuutta sisäenergiasta  $\eta = 1/5$ . Typpimolekyylin massa on  $m_{\text{N}_2} = 2 \cdot 14.01u = 46.52 \cdot 10^{-27}$  kg. Molekyylin liike-energia riippuu sen massasta, ja samoin kaasun sisältämien molekyylien lukumäärä on kaasun massa jaettuna yhden molekyylin massalla. Molekyyleillä on kaussa eri liike-energioita, mutta merkitään hakasulkeilla yhden molekyylin  $x$ -suuntaisen liikkeen liike-energian keskiarvoa  $\langle K_{\text{N}_2} \rangle$ . Tämä saadaan laskemalla kaikkien molekyylien liike-energiat yhteen ja jakamalla molekyylien lukumäärällä.

Kaassussa on  $N = M/m_{\text{N}_2}$  molekyylia. Yhden molekyylin liike-energia on  $K_{\text{N}_2,i} = \frac{1}{2} m_{\text{N}_2} v_{x,i}^2$  ja molekyylien keskimääräinen liike-energia on

$$\langle K_{\text{N}_2} \rangle = \frac{1}{N} (K_{\text{N}_2,1} + K_{\text{N}_2,2} + K_{\text{N}_2,3} + \dots) = \frac{1}{N} \sum_i K_{\text{N}_2,i}. \quad (6.32)$$

Toisaalta molekyylien kokonaislijke-energia on sisäenergian perusteella  $\sum_i K_{\text{N}_2,i} = \eta E_{\text{sisä}} = \eta M e_{\text{sisä}}$ .

**RATKAISU** Keskimääräinen liike-energia on  $\langle K_{\text{N}_2} \rangle = \frac{1}{N} \eta E_{\text{sisä}} = \frac{m_{\text{N}_2}}{M} \eta M e_{\text{sisä}} = \eta m_{\text{N}_2} e_{\text{sisä}} = 2.2 \cdot 10^{-21}$  J.

Hiukkasen keskimääräistä vauhtia ei voi näillä tiedoilla laskea, mutta hiukkisen nopeuden neliön keskiarvo sen sijaan ratkeaa. Tämä on

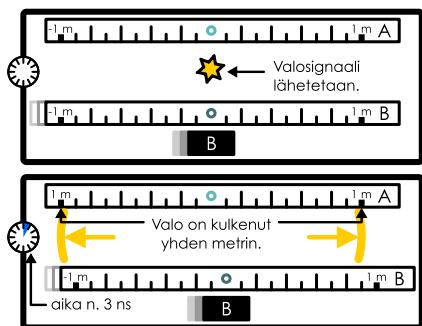
$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{2}{m_{\text{N}_2}} \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m_{\text{N}_2} v_{x,i}^2 = \frac{2}{m_{\text{N}_2}} \frac{1}{N} \sum_i K_{\text{N}_2,i} = \frac{2}{m_{\text{N}_2}} \langle K_{\text{N}_2} \rangle. \quad (6.33)$$

Arvioidaan hiukkasten vauhtia tämän neliöjuurella  $\langle |v_x| \rangle \approx \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{m_{\text{N}_2}} \langle K_{\text{N}_2} \rangle} = \sqrt{2\eta e_{\text{sisä}}} = 300$  m/s.

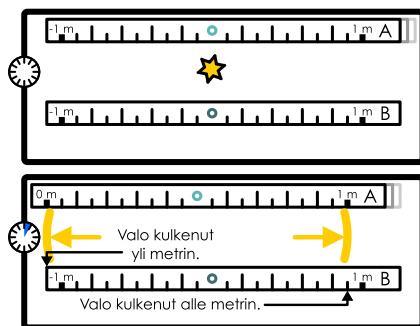
**ARVIOINTI** Tulos on ehkä yllättäväkin suuri. Se on kuitenkin järkevä, sillä äänen nopeus ilmassa on samaa luokkaa, noin 340 m/s, ja myös ääni kulkee ilman molekyylien yhteenliikkeen kautta.

Kuva 6.16: Valonnopeuden absoluuttisuus on ristiriidassa Galilei-suhteellisuuden kanssa.

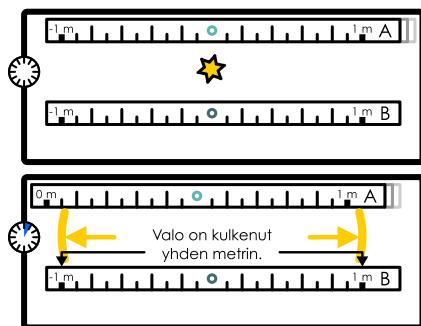
(a) Valo liikkuu koordinaatistossa A yhtä nopeasti kaikkiin suuntiin.



(b) Galilei-suhteellisuuden mukaan valo liikkuu eri suuntiin eri nopeuksilla koordinaatistossa B.



(c) Suhteellisuusteorian mukaan valo liikkuu yhtä nopeasti kaikissa koordinaatistoissa.



**EI TAPAHDU**

## 6.4 Suhteellisuusteoria

### Valonnopeuden absoluuttisuus

Sähkömagnetismin teorian kehittymisen myötä 1800-luvun lopussa selvisti, että valo on sähkömagneettinen aalto, jonka nopeus tyhjiössä on  $c = 299792458 \text{ m/s}$ . Nykyisin metri on määritetty valonnopeuden kautta, joten tämä on valonnopeuden *täsmällinen tarkka arvo*. (Yleensä kuitenkin arvio  $c \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  on täysin riittävä, ja tällä likiarvolla on helppo laskea.) Valon nopeuden arvo seuraa suoraan sähkömagnetismin peruslaeista, joten tämä nopeus on fundamentaali luonnonvakio. Tästä syystä tällä vakion avulla onkin erityinen nimi **valonnopeus** (yhdyssana).

Valon nopeuden mittaaminen on periaatteessa yksinkertaista: lähetämme valosignaalin ja mittaamme kuinka pitkän matkan se kulkee tiettyssä ajassa. Tällöin valon nopeus on valon kulkeman matkan suhde matkan kulkemiseen käytettyyn aikaan. Tällainen mittaus on esitetty kuvassa 6.16 (a), jossa valon havaitaan kulkevan kaikkiin suuntiin yhtä nopeasti. Yhden metrin kulkemiseen valolta kuluu noin 3.3 ns riippumatta siitä mihin suuntaan valo kulkee.

Kuvassa 6.16 (b) on esitetty sama tilanne toisessa koordinaatistossa B, joka liikkuu A:n suhteen positiiviseen  $x$ -suuntaan. Jos valo liikkuu koordinaatistossa A vauhdilla  $c_{(A)}$  kaikkiin suuntiin, koordinaatistossa B valo ehtii *Galilei-suhteellisuuden mukaan* liikkumaan positiiviseen  $x$ -suuntaan hieman lyhyemmin matkan, koska koordinaatisto B "ottaa valoa kiinni". Vastaavasti negatiivisessa  $x$ -suunnassa valo kulkee hieman pidemmän matkan, koska valosignaali ja koordinaatisto B liikkuvat vastakkaisiin suuntiin koordinaatistossa A. Siispä koordinaatistossa B valolle pitäisi mitata tämän mukaan eri nopeus tarkastelusuunnasta riippuen. Positiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevien valonsäteiden pitäisi liikkua tässä koordinaatistossa nopeudella  $c_{x,(B)} = c_{(A)} - v_{x,B(A)}$  eli hitaanmin kuin  $c_{(A)}$ , ja vastaavasti negatiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevien valonsäteiden nopeudeksi pitäisi koordinaatistossa B mitata  $c_{x,(B)} = -c_{(A)} - v_{x,B(A)}$  eli näiden valonsäteiden vauhti  $|c_{x,(B)}| = c_{(A)} + v_{x,B(A)}$  olisi suurempi kuin  $c_{(A)}$ .



**6.17** Mikä on koordinaatistojen välinen nopeus kuvassa 6.16? Jos Galilei-muunnos olisi oikein, mitä arvoja valonnopeudelle mitattaisiin koordinaatistossa B kuvan (b) mukaan?

Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että koordinaatisto A olisi erityisasemassa kaikkiin muihin koordinaatistoihin nähdyn. Valonnopeus olisi kaikissa suunnissa sama *vain* tässä koordinaatistossa ja kaikissa muissa A:n suhteen liikkuvissa koordinaatistissa valon havaittaiisiin kulkevan johonkin suuntaan nopeammin kuin toisiin. Voitaisiin siis ajatella, että A on absoluuttisesti paikoillaan oleva koordinaatisto ja kaikkien muiden koordinaatistojen liike A:n suhteen voitaisiin määrittää mitaamalla valon nopeutta. Tämä kuitenkin rikkoo suhteellisuusperiaatetta, jonka mukaan ei ole olemassa mitään luonnonlakia, joka havaittaiisiin toistensa suhteen tasaisesti liikkuvissa koordinaatistissa eri tavoin.

On siis kolme vaihtoehtoa: joko suhteellisuusperiaate on väärin, valonnopeus ei olekaan luonnonvakio (jolloin sähkömagnetismin peruslait olisivat väärin) tai Galilei-muunnos on väärin. Kokeellisissa mittauksissa on kuitenkin moneen otteeseen vahvistettu, että *valonnopeudelle mitataan kaikissa koordinaatistoissa sama arvo c kaikissa suunnissa*, kuten kuvassa 6.16 (c). Valonnopeus todella on luonnonvakio ja suhteellisuusperiaate on oikein. Niinpä ainoa vaihtoehto on se, että *Galilei-muunnos on väärin*. Galilei-suhteellisuus toki toimii erinomaisella tarkkuudella, kun koordinaatistojen suhteelliset nopeudet ovat huomattavasti pienemmät

kuin valonnopeus, joten normaalisti emme huomaa siinä mitään vikaa. Kuitenkin nopeuksien ollessa lähelä valonnopeutta koordinaatistojen välisen yhteyden *täytyy* olla erilainen, jotta valonnopeus olisi kaikissa koordinaatistoissa sama.

Tarvittavan koordinaatistomuunnoksen matematiikan kuvasivat 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa mm. Lorentz ja Poincaré, ja tämän kuvauksen viimeisteli fysiikaliseksi teoriaksi Einstein *suppeassa suhteellisuusteoriassa*. Nimitys "suppea" viittaa tässä siihen, että on olemassa myös yleinen suhteellisuusteoria. Suppea suhteellisuusteoria käsitlee pääasiassa suhteellisuusperiaatetta ja toistensa suhteen tasaisesti liikkuvia inertiaalikoordinaatistoja. Yleinen suhteellisuusteoria puolestaan perustuu ekvivalenssiperiaatteelle, ja se käsitlee kiertyvyyden ja painovoiman aiheuttamia ilmiöitä. Tässä materiaalissa käsittelemme ainoastaan suppeaa suhteellisuusteoriaa.

## Tapahtumat ja mittaaminen

Kuten jo Galilei-muunnoksen yhteydessä huomasimme, monet suureet ovat suhteellisia ja monet absoluuttisia. Niinpä prosessien kuvaaminen eri koordinaatistoissa vaatii erityistä huolellisuutta, sillä yhdessä koordinaatistossa tiettyllä tavalla tehty havainto voi olla toisessa koordinaatistossa aivan erilainen. Tarvitsemme siis jonkin yleisen menetelmän monimutkaisten prosessien analysoimiseksi eri koordinaatistoissa. Suhteellisuusteoriassa tämä onnistuu ajattelella prosessien koostuvan **tapahtumista**.

Tapahtumat määritellään suhteellisuusteoriassa asioiksi, joilla on *täsmällinen paikka ja täsmällinen aika*. Esimerkiksi on tapahtuma, että luet juuri tämän lauseen. Voit mitata paikkasi esimerkiksi Maapallon pituus- ja leveyspiirien suhteen ja tarkistaa ajan kellostaa, joka mittaa aikaa yhteisesti sovitun nollahetken suhteen. Sisäpä sillä, että juuri sinä luit edellisen lauseen ensimmäistä kertaa oli täsmällisesti määriteltäväissä oleva paikka ja aika, ja niinpä se on suhteellisuusteoreettinen tapahtuma. Matemaattisesti kukaan tapahtuma määrittelee siis aika- ja paikkakoordinaatin eli tapahtuma on *xyzt*-koordinaatiston *piste*.

Tapahtumat ovat keskeisessä asemassa siksi, että ne ovat absoluuttisia. Jos esimerkiksi lamppu syttyy tai lasi rikkoutuu yhdessä koordinaatistossa, lampun täytyy syttyä ja lasin rikkoutua myös kaikissa muissakin koordinaatistoissa. Koordinaatiston valinta nimittäin liittyy vain siihen, miten tapahtumia *havainnoidaan*, eikä se vaikuta itse tapahtumiin mitenkään. Niinpä koordinaatiston valinta ei voi vaikuttaa tapahtumien toteutumiseen. Yksittäinen tapahtuma ei välttämättä ole vielä kovin kiinnostava, mutta mikä tahansa prosessi voidaan ajatella erilaisten tapahtumien ketjuksi, jossa tapahtumat voivat olla toisten, niitä seuraavien tapahtumien aiheuttajia. Suhteellisuusteoreettisten tarkastelujen lähtökohtana onkin yleensä prosessien jako tapahtumiin, koska jokaisen tapahtuman täytyy varmasti tapahtua kaikissa koordinaatistoissa.

Prosessit voivat todellisuudessa kestää pitkiäkin aikoja ja niihin voi liittyä suuriakin etäisyysjä, mutta suhteellisuusteoriassa puhuttaessa tapahtumasta tarkoitetaan jotakin tiettyä ajan hetkeä ja paikkaa. Esimerkiksi "lamppu palaa" ei ole tapahtuma, koska lamppu voi palaa pitkän ajan. "Lamppu syttyy" ja "lamppu sammuu" kuitenkin ovat tapahtumia, koska syttymisen ja sammumisen voi ajatella ainakin likimain tapahtuvan tietynä ajan hetkenä ja lamppua voi pitää likimain yhdessä paikassa sijaitsevana kappaleena. Niinpä prosessia "lamppu palaa" kuvataan suhteellisuusteoriassa tapahtumien "lamppu syttyy" ja "lamppu sammuu" välin jäävänä jaksona.



**6.18** Heität pallon kymmenen metrin päähän. Millaisia tapahtumia voit määritellä tähän prosessiin liittyn? Jos tapahtuma "pallo on heiton lakipisteessä" valitaan paikan ja ajan nollapisteeksi,  $x$ -akseli asetetaan vaakatasoon heiton suuntaan ja  $y$ -akseli asetetaan ylöspäin, millaisia paikan ja ajan arvoja liittyy muihin keksimiisi tapahtumiin?

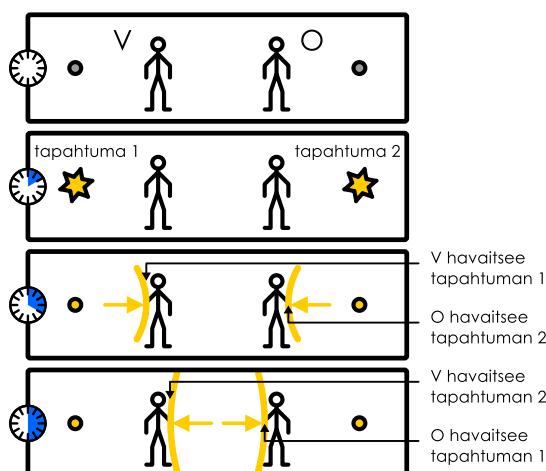
Suhteellisuudesta puhuttaessa usein käytetään ilmaisuja kuten "koordinaatistossa A havaitaan tapahtuma tiettyssä paikassa tiettyyn aikaan". Galilei-suhteellisuuden tapauksessa on melko selvä mitä tämä tarkoittaa, koska havaitseja voi esimerkiksi katsoa ja nähdä tapahtuman. Suhteellisuusteoriassa on kuitenkin syytä määritellä tarkemmin miten aikaa ja paikkaa mitataan, sillä valon äärellinen nopeus on tarkasteluissa keskeisessä asemassa. Jos havaitseminen tapahtuisi vain katselemalla, tieto kaukaisista tapahtumista saavuttaisi havaitsejan vasta valon saapuessa havaitsejan silmiin.

Kuvassa 6.17 (a) on esitetty tilanne, jossa kaksi havaitsejaa, V ja O, ovat paikoillaan samassa koordinaatistossa ja havaitsejoiden sivuilla sytyy samanaikaisesti lamput. Kutsutaan näiden syttymisiä tapahtumiksi 1 ja 2. Kumpikaan havaitseja ei voi vielä tässä vaiheessa tietää lampujen sytyneen, sillä lampuista lähtenyt valo ei ole vielä saapunut heidän luokseen. Koska havaitseja V on lähempänä tapahtumaa 1, tästä lähtenyt valo saavuttaa hänet ensin ja niinpä tämän havaitsejan näkökulmasta tapahtuma 1 näyttää tapahtuvan ensin. Vastaavasti havaitseja O on lähempänä tapahtumaa 2, joten hänen näkökulmastaan tapahtuma 2 näyttää tapahtuvan ensin. Siitä huolimatta lamput todellisuudessa sytyvät yhtä aikaa. Valon äärellinen nopeus siis vaikuttaa siihen mitä katselija näkee, mutta nyt *emme tarkastele sitä miltä tilanteet näyttävät vaan sitä mitä todella tapahtuu*. Niinpä tapahtumien havainnointi ei voi perustua vain katselemiseen.

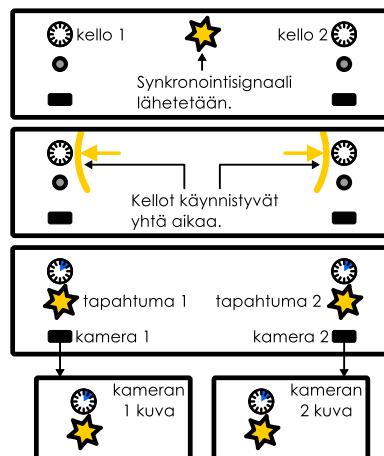
Tapahtumien 1 ja 2 ajat voidaan mitata niin, että tuodaan ennen koetta kummankin lampun luo kello ja kamera kuten kuvassa 6.17 (b). Kellot voidaan asettaa samaan aikaan esimerkiksi niin, että mitataan

Kuva 6.17: Jotta valon äärellinen nopeus ei vaikuttaisi mittaustuloksiin, suhteellisuusteoriassa avaruuden ajatellaan olevan täynnä mittalaitteita, jotka havainnoivat tapahtumia lähistöltään.

(a) Valonnopeuden äärellisyys vaikuttaa siihen mitä nähdään.



(b) Kellojen ja kameroiden avulla voidaan mitata tapahtumien tarkat ajat ja paikat.



niiden välisen janan keskikohta ja lähetetään siitä valosignaali kohti kumpaakin keloa. Tämä signaali saapuu kummallekin kelloolle samaan aikaan, ja jos kellot on asetettu käynnistymään valosignaalin saapuessa, ne näyttävät tämän jälkeen samaa aikaa eli kellot on *synkronoitu*. Tämän jälkeen kumpikin kamera kuva sekä vieressään olevaa lamppua että aikaa näyttää kelloa, jolloin lamppujen syttymishetket eli tapahtumien 1 ja 2 ajat tallentuvat. Koska kumpikin kamera on aivan lampun vieressä, lamppujen syttymiset havaitaan välistömästi eikä valon äärellinen nopeus vaikuta mittauksiin.

Kokeen jälkeen kummankin kameran ottamat kuvat voidaan tarkastaa, jolloin nähdään täsmälleen milloin lamput sytyivät. Tässä tapauksessa kamerat havaitsevat kellojen näyttävän täsmälleen samaa aikaa lamppujen sytyessä, joten tapahtumat 1 ja 2 ovat *samanaiset*. Tämä voidaan itse asiassa ottaa samanaikaisuuden määritelmäksi: kaksi tapahtumaa ovat samanaikaiset, jos niiden luona olevat synkronoidut kellot näyttävät tapahtumahetkellä samaa aikaa. Jos kellot näyttävät tapahtumien hetkillä eri aikoja, tapahtumat ovat *eriaikaiset* ja ensin tapahtuu luonnollisesti se tapahtuma, jolle kellon lukema on pienempi.

Periaatteessa samaa ajatusta voidaan käyttää yleisesti ajan ja paikan mittamiseen missä tahansa koordinaatistossa. Aluksi koordinaatistoon asetetaan säännöllisin välimatkoin kelloja ja kameroida, jotka ovat tässä koordinaatistossa paikoillaan. Kellot synkronoidaan niin, että ne kaikki näyttävät samaa aikaa ja jokaiseen keloon merkitään missä paikassa se on. Kun näin on tehty, kamerat käynnistetään ja jokaisen tapahtuman havaitsee sitä lähin kamera. Myöhemmin kameroiden kuvamateriaali voidaan analysoida, jolloin tapahtuman *paikka* voidaan päättää siitä, mikä kamera tapahtuman havaitsi. Kameran kello puolestaan tallentaa tapahtuman tarkan *ajan*. Nämä voimme myöhemmin varmistaa täsmälleen missä ja milloin mitäkin tapahtuu.

Jos tarkastelemme useita toistensa suhteita liikkuvia koordinaatistoja, edellä kuvattu järjestelmä pitää rakentaa jokaisessa koordinaatistossa erikseen. Mittauksiin tarvitaan siis useita toistensa suhteita liikkuvia kelloja ja kameroiden joukkoja, joista kukin on paikoillaan yhdessä tarkasteltavista koordinaatistoiista. Käytännössä tämä on hyvin hankalaa, mutta emme nyt olekaan tekemässä oikeita kokeita. Oleellista on se, että voimme ainakin periaatteessa mitata missä tahansa koordinaatistossa minkä tahansa tapahtuman täsmällisen paikan ja ajan. Seuraavaksi tarkasteltavissa ajatuskokeissa oletetaan tällaisen mittauslaitteiston olevan käytössä.



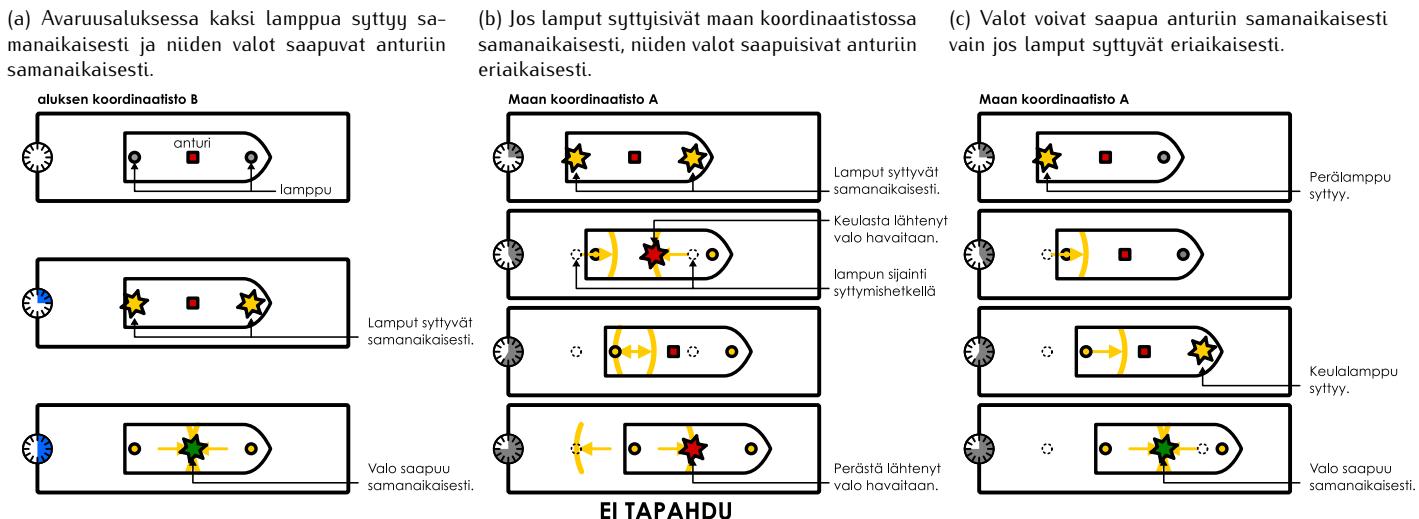
**6.19** Asetetaan  $x$ -akselille kelloja metrin välein ja säädetään kellot niin, että ne käynnistyvät vastaanottaes-  
saan lähettämämme valosignaalin. Signaali lähetetään koordinaatiston origosta, jossa oleva kello näyttää  
käynnistyessään täsmälleen ajan hetkeä nolla. Miten muiden kellojen ajat pitää ennen signaalin lähetämis-  
tä asettaa, jotta lopputuloksena kaikki kellot olisivat täsmälleen samassa ajassa?

### Samanaikaisuuden suhteellisuus

Pohditaan seuraavaa ajatuskoetta. Olkoon Maan koordinaatisto A ja Maan suhteeseen hyvin nopeasti suoraan tasaisella nopeudella liikkuvan avaruusaluksen koordinaatisto B. Aluksen keulassa ja perässä on lamput ja aluksen keskellä yhtä kaukana kummastakin lampusta on valoanturi, joka aktivoituu vain jos siihen saapuu valonsäde yhtä aikaa sekä aluksen keulasta että sen perästä. Toisin sanoen anturi aktivoituu vain jos sekä

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.18: Samanaikaisuus on suhteellista. Tapahtumat voivat olla yhdessä koordinaatistossa samanaikaiset ja toisessa eriakaiset.

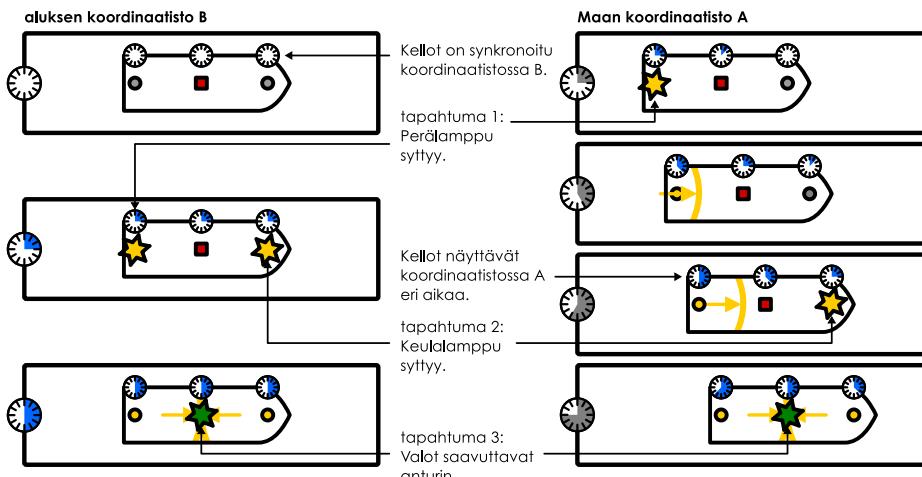


keulan etä perän lampujen lähetämä valo saapuu siihen samanaikaisesti. Jos anturi aktivoituu, se ampuu aluksesta luotaimen kohti Maata.

Avaruusaluksen koordinaatistossa B lamput on säädetty niin, että ne sytytysivät täsmälleen samanaikaisesti kuten kuvassa 6.18 (a). Tässä koordinaatistossa lamput sekä aluksen keskellä oleva anturi ovat paikoillaan, koska kyseessä on juuri aluksen koordinaatisto. Koska kumpikin lampaatti on yhtä kaukana anturista ja kummastakin lampusta lähtenyt valonsäde liikkuu yhtä nopeasti, valonnopeudella, valonsäteet saapuvat anturille samanaikaisesti, anturi aktivoituu, ja luotain lähetetään Maahan.

Jos luotain irtoaa aluksesta aluksen koordinaatistossa B, sen *täytyy* varmasti irrota aluksesta myös Maan koordinaatistossa A. Toisaalta koska luotaimen lähetäminen tapahtuu vain, jos avaruusaluksen lampujen lähetämät valonsäteet saavuttavat anturin samanaikaisesti, myös tämän täytyy olla absoluuttista. Siispä valonsäteet saavuttavat anturin samanaikaisesti myös koordinaatistossa A. Näin ei kuitenkaan tapahtuisi *jos lamput sytytysivät samanaikaisesti* koordinaatistossa A, mikä näkyy kuvassa 6.18 (b). Maan koordinaatistossa avaruusalus nimittäin liikkuu, jolloin sen keskellä oleva anturi liikkuu kohti aluksen keulaa. Koska lampujen lähetämisiltä säteltä kuluu jonkin aikaa ennen kuin ne ehtivät saavuttaa anturin, anturi ehtii siirtymästä hiukan lähemmäksi pistettä, jossa keulan lampaatti sytytessään oli ja hiukan kauemmaksi pistestä, jossa perän lampaatti sytytessään oli. Kummankin lampun lähetämä valo kulkee samalla vauhdilla, joten tässä tapauksessa *keulasta lähtenyt valo saavuttaisi anturin ensin*. Näin ollen valonsäteet saapuisivat anturiin *eri aikaan*, eikä anturi aktivoituisi. Tämä ei voi olla mahdollista, koska luotaimen lähetämisestä täytyy tapahtua kaikissa

Kuva 6.19: Koordinaatistossa B synkronoidut kellot näyttävät eri aikaa koordinaatistossa A, jossa ne liikkuvat. Liikkeen suunnassa ensimmäisenä kulkevat kellot ovat jäljessä niitä seuraavia kelloja.



koordinaatistoissa, joten *lamput eivät voi sytyä samaan aikaan koordinaatistossa A*.

Tapahtumien oikea järjestys koordinaatistossa A on esitetty kuvassa 6.18 (c). Jotta valonsäteet saavuttaisivat anturin samanaikaisesti myös koordinaatistossa A, jossa alus liikkuu, aluksen perässä olevan lampun täytyy sytytä *ensin*. Tällöin tämän lampun lähetämällä valolla on *enemmän aikaa* saavuttaa anturi kuin keulan lampusta lähteneellä valolla, ja valonsäteet todella saapuvat anturille yhtä aikaa.

Kuvassa 6.19 on esitetty sama tilanne niin, että alukseen on asetettu lamppujen ja anturin kohtiin synkronoidut kellot. Nämä kellot näyttävät, millä ajan hetkellä kukaan tapahtuma tapahtuu *aluksen koordinaatistossa*. Lampun sytyminen on tapahtuma, ja voimme havaita sen lampun luo asetettujen kameroiden avulla, jolloin havaitsemme myös lampun vieressä olevan kelon näyttämän ajan lampun sytytyessä. Kelon näyttämä ei kuitenkaan voi riippua siitä, miten tapahtuman havaitseva kamera liikkuu — jos lampun sytytymisen kuva on yksi aluksen suhteen paikoillaan oleva kamera sekä toinen Maan suhteen paikoillaan oleva kamera, kummankin kameran kuvassa kelon täytyy valon sytytyessä näyttää *samaa aikaa*. Erityisesti lamppujen kohdalla olevat kellot näyttävät siis myös Maan koordinaatistossa ajan, jolloin lamput sytytävät *aluksen koordinaatistossa*. Kuvassa 6.19 tämä näkyy niin, että lampun luona oleva kello näyttää lampun sytytyessä samaa aikaa kummassakin koordinaatistossa. Kuitenkin aluksen perässä oleva lamppu sytytyy Maan koordinaatistossa ensin, joten perässä oleva kello näyttää aluksessa mitattua lampun sytytymisaikaa ensin. Toisin sanoen Maan koordinaatistossa *aluksen perässä oleva kello on edellä aluksen keulassa olevaa keloa*. Niinpä se, mikä on yksi samanaikainen hetki aluksen koordinaatistossa, ei olekaan Maan koordinaatistossa yksi hetki. Sen sijaan tuon aluksessa koetun hetken tapahtumat ovat levittäytyneet Maan koordinaatistossa pitkälle ajanjaksolle.

Tämä ajatuskoe osoittaa, että *samanaikaisuus on suhteellista*. Valonsäiden saapuminen anturille on samanaikainen tapahtuma kummassakin koordinaatistossa, koska tämä tapahtuu sekä samassa paikassa että samaan aikaan. Sen sijaan lamppujen sytyminen on samanaikainen vain aluksen koordinaatistossa B, ja Maan koordinaatistossa A aluksen perässä oleva lamppu sytytyy ennen aluksen keulassa olevaa lampua. Yhdessä koordinaatistossa samaan aikaan mutta eri paikoissa havaittavat tapahtumat voivat tapahtua toisessa koordinaatistossa myös eri aikoihin.



**6.20** Käyvätkö aluksen liikkuvat kellot kuvan 6.19 mukaan Maan koordinaatistossa keskenään yhtä nopeasti? Entä kulkevatko aluksen liikkuvat kellot kuvassa yhtä nopeasti kuin Maan koordinaatiston oma kello?

## Ajan suhteellisuus

Edellä päätteliin, että ajan havaitseminen riippuu koordinaatistosta. Edelleen koska ajan mittaaminen vaatii kellojen käyttöä, eri koordinaatistossa havaitaan kellojen toimivan eri tavoilla. Jatketaan siis ajan suhteellisuuden pohdintaa tutkimalla kellojen käyttäytymistä eri koordinaatistossa kuten kuvassa 6.20. Tutkittavat koordinaatistot ovat jälleen Maa (A) sekä Maan suhteen liikkova avaruusalus (B). Maahan on tuotu kello A, joka on siis paikoillaan Maan koordinaatistossa. Toinen kello B on avaruusaluksen kyydissä, joten se liikkuu Maan koordinaatistossa. Sen sijaan avaruusaluksen koordinaatistossa kello B on paikoillaan ja kello A liikkuu.

Käytetään kokeessa kelloja, jotka perustuvat valon kulkuajan mittaamiseen. Kelloissa on lamppu ja valoanturi etäisyydellä  $L$  toisistaan. Kello toimii niin, että lamppu välähtää ja lähetää valosignaalin kohti anturia, ja anturin havaitessa valon kelon näyttämä siirryy eteenpäin. Jos lampun ja anturin välinen etäisyys on esimerkiksi  $L = 3 \text{ m}$ , lampun sytytymisen ja valon havaitsemisen välillä kuluu aika  $L/c = 10 \text{ ns}$ . Tämä on siis kelon mittamaa aikayksikkö.

Anturiin voidaan lüttää numeronäytöksi tai kellotaulu ja tämä voidaan asettaa päivittymään aina anturin aktivoitumisen. Myös lamppu voidaan kytkeä anturiin niin, että valon havaitseminen saa lampun välähtämään uudelleen. Näin uusi valosignaali lähetetään aina edellisen kuljettua kelon läpi ja kello mittaa aikaa laskemalla kuinka monta kertaa valo on sen läpi kulkenut (eli kuinka monta kertaa anturi on aktivoitunut). Näin mitattu aika voidaan lukea helposti kaikissa koordinaatistoissa keloon liitetystä näytöstä.



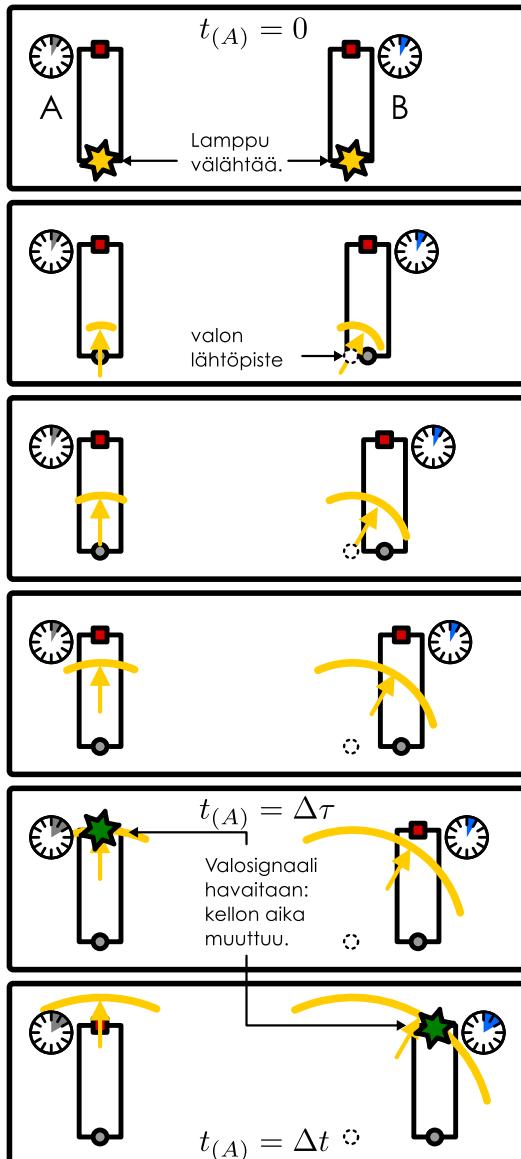
**6.21** Jos anturi ja lamppu ovat kelon eri puolilla etäisyydellä  $L$  toisistaan, voiko anturin aktivoituminen saada lampun välähtämään heti? Jos ei, kuinka pian anturin aktivoitumisen jälkeen lamppu voi aikaisintaan välähtää uudestaan?

Kuvassa 6.20 (a) on esitetty tällaisten kellojen A ja B toiminta Maan koordinaatistossa valosignaalin kulkiessa kerran läpi. Kello A on paikoillaan, joten siinä anturi ei liiku valon kulkiessa. Kello B sen sijaan liikkuu, ja erityisesti sen anturi liikkuu valon kulkiessa kauemmas pistestä, josta valosignaali lähti liikkeelle. Tällöin saavuttaakseen anturin valo joutuu kulkemaan *pidemmän matkan* kuin kellossa A, ja näin ollen kellolla B kuluu *kauemmin* yhden aikayksikön mittamaiseen. Itse asiassa kello B tarvitsee enemmän aikaa jokaisen aikayksikön mittamaiseen, joten *liikkova kello B käy hitaammin kuin levossa oleva kello A*. Tätä ilmiötä kutsutaan **aikadilataatioksi** (engl. dilation, 'laajeneminen'), koska liikkuvan kelon aika tavallaan "pitenee".

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.20: Kellon voi rakentaa mittamaalla aikaa, joka valolta kuluu lampusta anturiin kulkemiseen. Lükkivassa kellossa valo joutuu kulkemaan pittemmän matkan kuin kelon ollessa levossa, joten liikkuvaa kello jätettää.

(a) Levossa olevassa kellossa valo saavuttaa anturin aikaisemmin kuin liikkuvassa kellossa.



(b) Liikkuvassa kellossa valo kulkee viistoon.

Valo liikkuu kaikkiin suuntiin valonnopeudella.

$$\Delta r_{(A)} = c\Delta t$$

$$\Delta y_{(A)} = c\Delta\tau$$

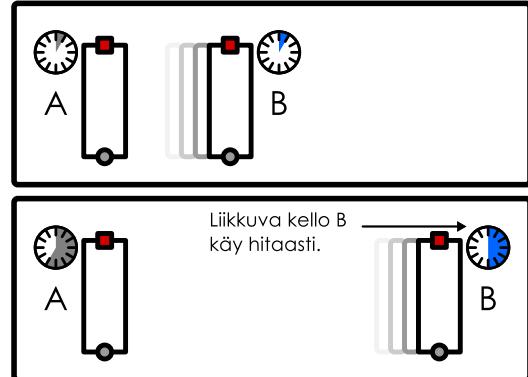
$$\Delta x_{B(A)} = v_{B(A)}\Delta t$$

Kelon kulkema matka riippuu kelon nopeudesta.

A diagram showing a small black square representing a source emitting light in all directions. The light rays are shown as dashed lines. A triangle is formed by three light rays. The horizontal distance between the source and the vertex of the triangle is labeled  $\Delta x_{B(A)}$ . The vertical distance is labeled  $\Delta y_{(A)}$ . The hypotenuse of the triangle is labeled  $\Delta r_{(A)}$ . The angle between the vertical axis and the hypotenuse is labeled  $c\Delta\tau$ .

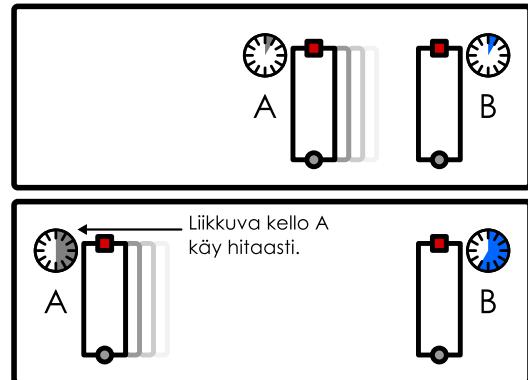
(c) Koordinaatistossa A kello B liikkuu.

Maan koordinaatisto A



(d) Koordinaatistossa B kello A liikkuu.

aluksen koordinaatisto B



6.22 Jos kelon sekuntiviisari siirryy 1.2 s välein, kuinka pitkän ajan kello mittaa yhdessä minuutissa?

Äkkiseltään tämä voisi ajatella tarkoittavan vain sitä, että kelon liike häiritsee sen toimintaa. Tästä ei kuitenkaan ole kysymys, sillä tämä tulos pätee vain koordinaatistossa A. Koordinaatistossa B kello B on paikoillaan ja kello A liikkuu, joten sama päättely voidaan toistaa tässä koordinaatistossa ja lopputulos on se, että koordinaatistossa B kello A käy hitaammin kuin kello B. Toisin sanoen se, mikä kello käy nopeammin ja mikä hitaammin on suhteellista. Jokaisessa koordinaatistossa nopeiten kävät levossa olevat kelloet ja kaikki liikkuvat kelloet kävät hitaammin. Se mikä kello on paikoillaan ja mikä liikkuu riippuu kuitenkin koordinaatiston valinnasta.

Mikä sitten on oikea tapa mitata aikaa, jos eri nopeuksilla liikkuvat kelloet mittaavat aikaa eri tavoin? Luonnollisin tapa on käyttää koordinaatistossa paikoillaan olevaa keltoa. Tavallaan voi ajatella, että koska kello ei liiku, suhteellisuudesta seuraavat ilmiöt eivät muuta sen toimintaa ja näin saadaan mitattua "oikea aika". Suhteellisuusteoriassa paikoillaan olevan kelon mittamaa aikaa kutsutaankin koordinaatiston **omiaikaksi**.

**naissaajaksi** ja sitä merkitään usein symbolilla  $\tau$  tavallisen ajan symbolin  $t$  sijaan tämän ajan erityisaseman korostamiseksi.

On myös psykologinen syy, miksi juuri paikoillaan olevan kellon aika on hyvä tapa mitata ajan kulumisesta. Nimittäin vaikka tässä tarkasteltiin vain valon kulkuun perustuvaa keloa, *kaikki* liikkuvat kelloit kokevat samanlaisen aikadilataation. Voimme nimittäin kiinnittää mihiin tahansa keloon jonkinlaisen osoittimen (esimerkiksi viisarin tai näytön), josta kellon käyminen voidaan lukea. Jos kelloit ovat levossa esimerkiksi Maan koordinaatistossa A, tässä koordinaatistossa niiden viisarit liikkuvat ja näytöt päivittyvät *yhtä usein* ja kelloit käyvät samalla nopeudella. Voimme lisäksi liittää Maan keloihin merkkivalon, joka syttyy jos kahden kelon näyttämät poikkeavat toisistaan. Jos kelloit toimivat kunnolla, tämä valo *ei syty* Maan koordinaatistossa. Koordinaatistossa B Maassa olevat kelloit liikkuvat ja *ainakin* edellä kuvattu valokello kokee aikadilataation ja käy Maassa hitaammin kuin avaruusaluksen oma kello. Jos nyt jokin toinen Maassa oleva kello kokisi *erilaisen* aikadilataation (tai *ei dilataatiota lainkaan*), se kävisi eri nopeudella Maan valokelloon nähden ja merkkivalo *sytyisi*. Valon syttyminen on kuitenkin tapahtuma, joten se on absoluuttinen. Niinpä koska valo ei syty Maan koordinaatistossa, se ei voi sytyä myöskään avaruusaluksen koordinaatistossa. Siispä mikään Maan kelosta ei voi käydä eri nopeudella Maan valokelloon verrattuna.

Kuitenkin *mikä tahansa ajasta riippuva prosessi voi toimia kellona*. Erityisesti *biologiset prosessit* riippuvat ajasta ja tapahtuvat tiettyllä nopeudella, joten myös ne kokevat aikadilataation. Tämä tarkoittaa sitä, että organismien elintoinimien havaitaan hidastuvan koordinaatistossa, joissa ne liikkuvat. Myös ihmisten vanhemisen ja ajattelun havaitaan hidastuvan, koska solujen toiminta ja hermoimpulssien kulku hidastuu. Niinpä esimerkiksi avaruusaluksen miehistö toimii Maan koordinaatistossa kuin hidastetussa elokuvassa. Maan koordinaatistossa *kaikki* liikkuvassa avaruusaluksessa tapahtuvat prosessit havaitaan tapahtuvan hitaammin kuin Maassa, joten voidaan aivan hyvin sanoa, että liikkuvassa aluksessa *aika hidastuu*. Avaruusaluksen koordinaatistossa sen sijaan miehistö toimii aivan normaalisti ja Maa liikkuu, joten tässä koordinaatistossa Maassa tapahtuvat prosessit toimivat hitaammin kuin vastaavat prosessit aluksessa. Jokainen on *omassa koordinaatistossaan* paikoillaan, eikä aikadilataatiota siis voi kokea omalla kohdallaan. Kaikki havaittijat kokevat siis omassa koordinaatistossaan kyseisen koordinaatiston *ominaisajan*.

Määritetään vielä kuinka paljon aikadilataatio vaikuttaa liikkuvan kellon käymiseen. Valon kulkema matka kummassakin kellossa on esitetty kuvassa 6.20 (b). Kellossa A lamppu ja anturi ovat paikoillaan ja valo kulkee matkan  $L = \Delta y_{(A)}$ . Merkitsemällä tähän kuluvalaa aikaa  $\Delta\tau$  (tämä kello on paikoillaan, joten se mittaa ominaisaikaa) valon kulkema matka on siis

$$\Delta y_{(A)} = c\Delta\tau. \quad (6.34)$$

Olkoon vastaavasti valosignaalin matka-aika kellossa B  $\Delta t$ . Jos kellon B nopeus on koordinaatistossa A  $v_{x,B(A)}$ , kello ehtii siirtyä sivusuunnassa ( $x$ -suunnassa) valon kulkissa matkan

$$\Delta x_{B(A)} = v_{x,B(A)}\Delta t. \quad (6.35)$$

Pystysuunnassa ( $y$ -suunnassa) lampun ja anturin etäisyys on sama kuin kellossa A,  $\Delta y_{(A)}$ . Niinpä valo joutuu kaikkiaan kulkemaan viistoon matkan, joka on pidempi kuin valon kellossa A kulkema matka. Koska valo kulkee kaikkiin suuntiin valonnopeudella — myös viistoon — tämä matka voidaan ilmaista valonnopeuden ja matkaan käytetyn ajan tulona

$$\Delta r = c\Delta t. \quad (6.36)$$

Toisaalta tämän matkan pituuden voi ratkaista kuvioon syntynytä kolmiosta Pythagoraan lauseella, jolloin saadaan

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x_{B(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 = v_{x,B(A)}^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta\tau)^2. \quad (6.37)$$

Saimme siis valon kulkemalle matkalle yhden esitysmuodon (6.36) valonnopeuden absoluuttisuudesta ja toisen muodon (6.37) geometriasta. Yhdistämällä nämä voimme eliminoida yhtälöistä matkan  $\Delta r$  ja ratkaista kellon B aikayksikön  $\Delta t$  ja kellon A aikayksikön  $\Delta\tau$  välisen yhteyden. Suora sijoitus antaa

$$c^2(\Delta t)^2 = v_{x,B(A)}^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta\tau)^2, \quad (6.38)$$

ja jakamalla valonnopeuden neliöllä sekä termejä ryhmittelemällä tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}\right)(\Delta t)^2 = (\Delta\tau)^2. \quad (6.39)$$

Kellon B aikayksiköksi (jonka pitää olla positiivinen) ratkeaa tästä

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}}}\Delta\tau. \quad (6.40)$$

## SUHTEELLISUUS

Tässä esiintyvää nopeudesta riippuvaa kerrointa kutsutaan **Lorentzin tekijäksi** ja sitä merkitään kreikkalaisella gamma-kirjaimella,

$$\gamma_{B(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}}}, \quad (6.41)$$

missä  $v_{x,B(A)}$  on koordinaatistojen välinen nopeus (eli liikkuvan kallon nopeus). Lorentzin tekijän avulla kellojen aikayksikköjen välinen yhteys voidaan siis kirjoittaa yksinkertaisemmin  $\Delta t = \gamma_{B(A)} \Delta \tau$ . Jos kallon nopeus on nolla eli kello on paikoillaan, Lorentzin tekijän arvo on yksi. Tällöin kallon mittaama aika on sama kuin koordinaatiston ominaisaika, kuten pitääkin. Kallon nopeuden kasvaessa tekijä kasvaa yhtä suuremmaksi eli  $\Delta t > \Delta \tau$ . Liikkuvan kallon näyttämän muuttumista pitää siis *odottaa kauemmin*, eli kello käy hitaasti.

Kallon nopeuden lähestyessä valonnopeutta neljöjuuren alla oleva lauseke lähestyy nollaa ja gamma lähestyy ääretöntä. Toisin sanoen mitä lähempänä valonnopeutta kello B liikkuu, sitä hitaammin se käy. Kellon B:n nopeuden *täytyy* olla pienempi kuin valonnopeus, koska muutoin gamma ei olisi reaaliluku. Tämä johtuu siitä, että jos kello B liikkuisi valonnopeutta nopeammin, valosignaali ei saavuttaisi *koskaan* kallon anturia. Kuitenkin koska signaali saavuttaa anturin koordinaatistossa B, sen *täytyy* saavuttaa anturi kaikissa muisakin koordinaatistoissa. Siispä kello B *ei voi liikkua valoa nopeammin* missään koordinaatistossa — kuten ei mikään muukaan massallinen kappale.



**6.23** Mikä on Lorentzin tekijän arvo, kun liikkeen nopeus on (a) 1000 m/s, (b)  $10^7$  m/s, (c)  $10^8$  m/s, (d)  $2.7 \cdot 10^8$  m/s. Miten tekijä näyttää käyttäytymän nopeuden muuttuessa?

## esimerkki 6.3

## Aikadilataatio

**Koordinaatistossa A on kaksi keloa. Kello A on paikoillaan ja kello B liikkuu nopeudella  $v_{x,B(A)} = 0.6c$ . Kuinka paljon aikaa on kulunut killon B mukaan, kun killon A mukaan on kulunut täsmälleen 1 sekunti?**

**SUUNNITELMA** Liikkuva kello B kokee suhteellisuusteoreettisen aikadilataation, jolloin se käy hitaammin kuin kello A. Sen, kuinka paljon hitaammin kello B käy, kertoo Lorentzin tekijä.

Jos kellosta A kuluu yhden sekunnin mittaamiseen aika  $\Delta \tau = 1$  s, kellosta B kuluu yhden sekunnin mittaamiseen tässä koordinaatistossa aika  $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ . Toisin sanoen jos kello B näyttää molemmat tässä koordinaatistossa nollaa samaan aikaan, kello A näyttää jo lukemaan  $t_{A(A)} = \Delta t$  kun kello B näyttää vasta aikaa  $t_{B(A)} = \Delta \tau$ .

**RATKAISU** Kellojen lukemien suhde on

$$\frac{t_{B(A)}}{t_{A(A)}} = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{\Delta \tau}{\gamma \Delta \tau} = \frac{1}{\gamma}. \quad (6.42)$$

Niinpä killon B lukema on

$$t_{B(A)} = \frac{1}{\gamma} t_{A(A)}. \quad (6.43)$$

Tässä tapauksessa  $\frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2} = 0.36$ , joten Lorentz-tekijän suuruus on

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = (0.64)^{-1/2} = 1.25. \quad (6.44)$$

Killon A näytäessä yhtä sekuntia kello B näyttää siis aikaa

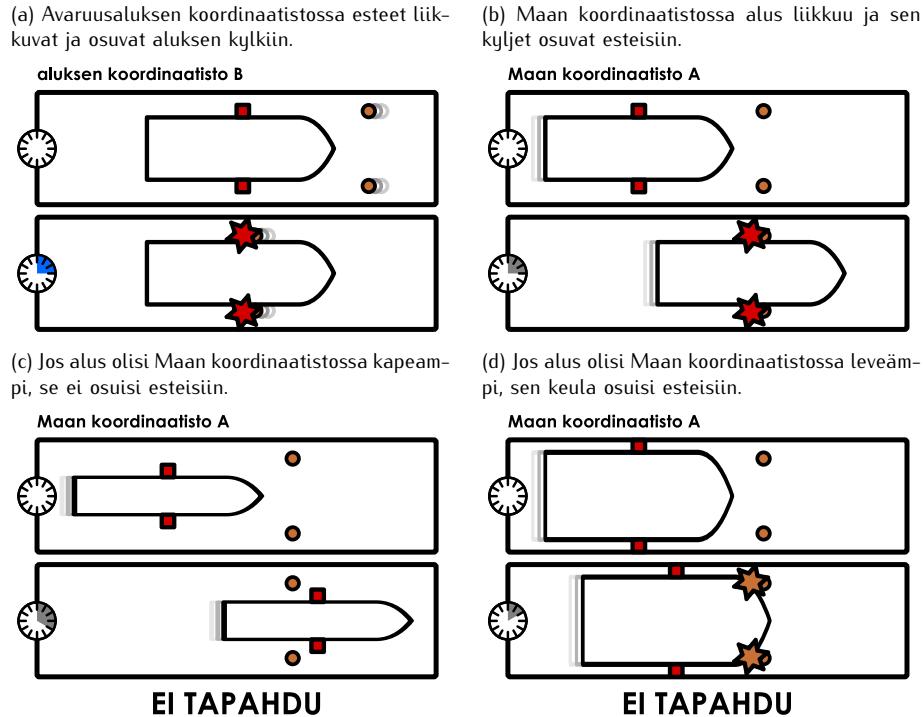
$$t_{B(A)} = \frac{1}{1.25} 1 \text{ s} = 0.8 \text{ s}. \quad (6.45)$$

**ARVIOINTI** Kello B käy hitaammin kuin kello A, kuten pitääkin. Huomaa, että aikadilataation yhtälö (6.40) kertoo kuinka paljon pidempi aika kellosta B kuluu tietyn ajan mittaamiseen. Tämä on *suoraan verrannollinen* Lorentzin tekijään eli kellosta B kestää kauemmin mitata yksi sekunti. Killon käymisnopeus on *kääntäen verrannollinen* Lorentzin tekijään eli kello B näyttää vähemmän kuin koordinaatistossa A kulunutta ominaisaikaa mittaava kello A.

## Pituuden suhteellisuus

Galilei-suhteellisuus ennustaa siis väärin, että valon nopeus riippuu koordinaatistosta, ja edelliset ajatuskokeet osoittavat, että ainoa tapa korjata tilanne on hylätä ajatus absoluuttisesta ajasta ja hyväksyä ajan olevan suhteellinen suure. Näin siksi, että nopeus mitataan kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhteena, jolloin mitattujen *aikojen* täytyy olla eri koordinaatistoissa erilaiset, jotta *nopeudet* olisivat samat. Toisaalta nopeus riippuu myös kuljetusta matkasta, joten suhteellisuus voi vaikuttaa myös havaittuihin *pituuksiin*.

Kuva 6.21: Avaruusalus lentää kahden Maan koordinaatistossa paikoillaan olevan esteen ohi. Jos aluksen kyljissä olevat ulokkeet osuvat esteisiin aluksen koordinaatistossa, niiden on osuttava esteisiin myös Maan koordinaatistossa.



Tarkastellaan ensin seuraavaa kuvassa 6.21 esitettyä ajauskoetta: Avaruusalus lentää kahden Maan koordinaatistossa paikoillaan olevan esteen välistä. Aluksen kyljissä on ulokkeet, joiden välinen etäisyys on täsmälleensama kuin esteiden välinen etäisyys ja niinpä ulokkeet ja esteet osuvat toisiinsa. Törmäysten täytyy tapahtua myös Maan koordinatistossa, jotka aluksen leveyden täytyy olla myös Maan koordinatistossa sama kuin esteiden välisten etäisyyden. Jos aluksen leveys olisi Maan koordinatistossa pienempi, alus lentäisi esteiden välistä, ja jos leveys olisi suurempi, esteet törmäisivät jo aluksen keulaan. Siispä toistensa suhteeseen liikkuvissa koordinatistoissa mitataan samat etäisydet *koordinatistojen liikkeeseen nähdyn kohtisuorassa suunnassa*.

Tässä kokeessa pituus mitattiin vertaamalla tunnetun matkan pituuteen (esteiden välineen etäisyyteen) eli periaatteessa käyttämällä pituusmittaa. Saman periaatteeen käyttäminen liikkuvien kappaleiden liikkeen suunnassa on kuitenkin hankala, joten mitataan avaruusaluksen pituus käyttämällä aluksen nopeuteen perustuvaa menetelmää, joka on esitetty kuvassa 6.22. Maahan asennetaan Maan koordinatistossa paikoillaan pysyvä mittausasema ja aluksen keulaan sekä perään asennetaan tunnistimet. Sitten aluksen annetaan lentää mittausaseman ohitse, jolloin asema rekisteröi ajat, jolloin aluksen keula ja perä ohittavat sen. Nämä ohitusprosessin määrittelee kaksi tapahtumaa: (1) aluksen keula ohittaa mittauspisteen ja (2) aluksen perä ohittaa mittausaseman. Ohitukseen kuluva aika on näiden tapahtumien välinen aikaero,

$$\Delta\tau = \tau_{\text{perä}} - \tau_{\text{keula}}. \quad (6.46)$$

Toisaalta ohitukseen kuluva aika on sitä pidempi mitä pidempi alus on ja sitä lyhyempi mitä nopeammin alus kulkee. Jos aluksen pituus on  $L$  ja vauhti  $v = v_{x,B(A)}$ , ohitukseen kuluva aika on

$$\Delta\tau = \frac{L}{v}. \quad (6.47)$$

Tässä käytetään nimenomaan koordinatiston todellista aikaa eli ominaisaikaa, koska nopeus määritellään aluksen kulkevan matkan ja koordinatistossa todellisuudessa kuluneen ajan suhteena. Niinpä ajan mittauksessa täytyy käyttää aina koordinatistossa levossa olevaa keloa. Tämä mittausperiaate toimii *missä tahansa koordinatistossa*, kunhan kaikki suuret ovat kyseisessä koordinatistossa mitattuja suureita.



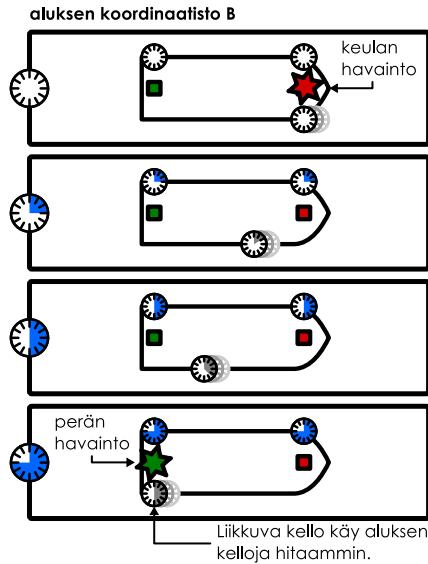
**6.24** Jos kuvan 6.20 (a) tilanteessa käytettäisiin ajan mittamiseen liikkuvaa kelloa B, millainen arvo saataisiin valonnopeudelle, kun valon kulkeman matkan pituus jaetaan tämän kelon mittamalla ajalla?

Jos alus liikkuu Maan koordinatistossa nopeudella  $v_{x,B(A)}$ , mittauspiste liikkuu aluksen koordinatistossa yhtä suurella mutta vastakkaisuuntaisella nopeudella  $v_{x,A(B)} = -v_{x,B(A)}$ , ja voimme merkitä tätä vauhtia

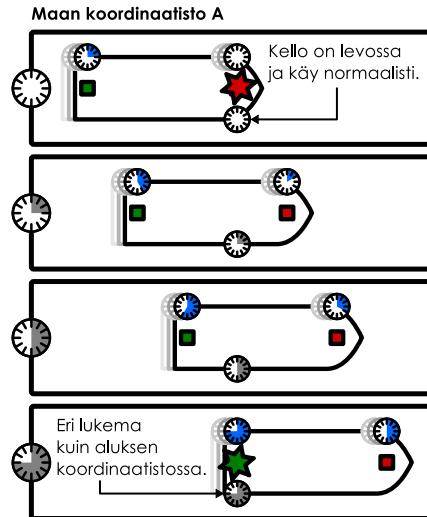
## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.22: Avaruusaluksen pituus voidaan mitata Maan koordinaatistossa kiinnittämällä havaintopiste ja mittaan malla milloin aluksen keula ja perä havaitaan tässä pisteessä. Mitä pidempi kappale on, sitä pidempi aika alukselta kuluu havaintopisteeseen ohitukseen.

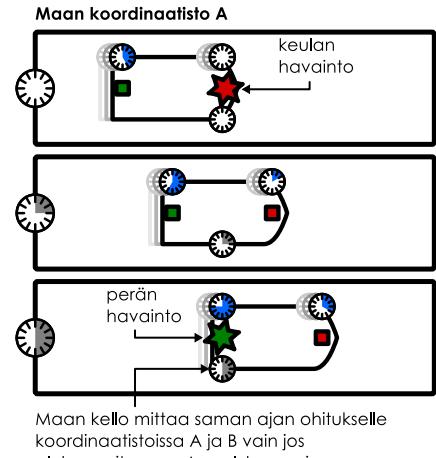
(a) Avaruusaluksen koordinaatistossa havainto-piste liikkuu ja ohittaa aluksen.



(b) Maan koordinaatistossa alus liikkuu ja ohittaa paikoillaan olevan havaintopisteensä.



(c) Aluksen pituus on lyhyempi koordinaatistoissa, joissa alus liikkuu.



**EI TAPAHDU**

yksinkertaisesti  $v = |v_{x,B(A)}| = |v_{x,A(B)}|$ . Niinpä jos aluksen pituus on sen omassa koordinaatistossa  $L_{(B)}$ , mittauspiste ohittaa sen *aluksen kellojen mukaan* ajassa

$$\Delta\tau_{(B)} = \frac{1}{v} L_{(B)}. \quad (6.48)$$

Tässä pitää käyttää mittamiseen nimenomaan aluksen kelloja, koska nämä kello ovat aluksen koordinaatistossa paikoillaan ja ne mittavat siis koordinaatiston ominaisikaa. Koska mittauspiste liikkuu aluksen koordinaatistossa, mittauspiste kello käy aikadilataation vuoksi aluksen kelloja hitaammin. Tämä kello käy mittauspiste ohituksen kuluessa ajan

$$\Delta t_{A(B)} = \frac{1}{\gamma} \Delta\tau_{(B)}, \quad (6.49)$$

joka on *vähemmän* kuin aluksen kellojen mittama aika.

Maan koordinaatistossa ohitukseen kuluu vastaavasti aika

$$\Delta\tau_{(A)} = \frac{1}{v} L_{(A)}, \quad (6.50)$$

mutta tässä koordinaatistossa ominaisikaa mittaa paikoillaan oleva *mittauspiste kello*, joka tässä koordinaatistossa käy normaalilla nopeudella. Jos nyt aluksen pituus olisi kummassakin koordinaatistossa sama,  $L_{(A)} = L_{(B)}$ , Maan koordinaatistossa ohitukseen kuluisi yhtä kauan kuin aluksen koordinaatistossa,  $\Delta\tau_{(A)} = \Delta\tau_{(B)}$ . Mittapiste kello siis kävisi Maan koordinaatistossa ohitukseen aikana saman verran kuin aluksen kello kävät aluksen koordinaatistossa. Perän saapuminen mittauspisteesseen on kuitenkin tapahduma, ja koska mittausaseman kello on samassa paikassa kuin mittauspiste, tämän kelon täytyy näyttää kaikissa koordinaatistoissa samaa aikaa perän ollessa mittauspisteen kohdalla. Voimmehan aina asentaa mittauspisteesseen ja aluksen perään kamerat, jotka kuvavat mittauspisteellä perän ollessa mittauspisteen kohdalla, eikä ole mahdollista, että kello näyttäisi eri aikaa eri kameroiden kuvissa.

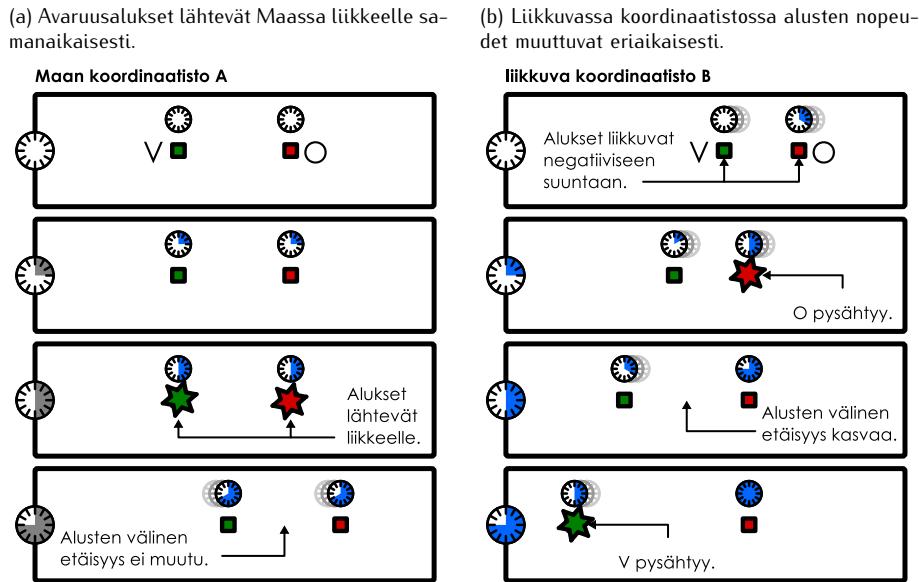
Kuitenkin äsknen päätelimme, että avaruusaluksen koordinaatistossa mittauspiste kello mittaa ohitukseen kuluessa ajan

$$\Delta\tau_{(A)} = \Delta t_{A(B)} = \frac{1}{\gamma} \Delta\tau_{(B)}, \quad (6.51)$$

eli vähemmän kuin äskeisen mallin mukaan Maan koordinaatistossa. Jos siis alus olisi molemmissa koordinaatistoissa yhtä pitkä kuten kuvaissa 6.22 (b), mittauspiste kello näyttäisi eri koordinaatistoissa eri aikaa aluksen perän ollessa mittauspistessä. Koska tämä ei ole mahdollista, *aluksen täytyy olla eri koordinaatistossa eri pituinen*.

Kerrataan vielä: aluksen koordinaatistossa mittauspiste kello käy hitaasti ja mittaa aluksen ohitukseelle lyhyemmin ajan kuin aluksen kello. Toisaalta mittauspiste kelon on mitattava kaikissa koordinaatistossa sama ohitusaika, joten Maan koordinaatistossa alus ohittaa mittauspisteen *lyhyemässä ajassa* kuin aluksen

Kuva 6.23: Pituuskontraktio havaitaan myös kappaleiden väliselle etäisyydelle. Tässä kahden aluksen nopeus muuttuu koordinaatistossa A samanaikaisesti mutta koordinaatistossa B eriaikaisesti.



omassa koordinaatistossa. Tämä on kuitenkin mahdollista vain jos *aluksen pituus on Maan koordinaatistossa lyhyempi kuin sen omassa koordinaatistossa*. Täsmällisemmin aluksen pituus Maan koordinaatistossa A on

$$L_{(A)} = v\Delta\tau_{(A)} = v\frac{1}{\gamma}\Delta\tau_{(B)} = \frac{1}{\gamma}L_{(B)} \quad (6.52)$$

eli liikkuvan aluksen pituus muuttuu *liikkeen suunnassa* Lorentzin tekijän määräämällä tavalla. Ilmiötä kutsutaan **pituuskontraktioksi** (engl. contract, 'supistua'), koska kappaleiden pituuskien havaitaan kutistuvan koordinaatistossa, joissa kappaleet liikkuvat. Riippuvuus on täsmälleen sama kuin liikkuvien kellojen käymisnopeudessa esiintyvä tekijä, koska pituus voidaan mitata eri koordinaatistojen kellojen avulla.

Edellisessä ajatuskokeessa pituuskontraktioon päätteliin seuraavan kellojen käyntinopeuksien suhteellisuudesta. Kuvassa 6.23 on puolestaan esitetty ajatuskoe, jossa pituuskontraktio nähdään seuraavan samanaikaisuuden suhteellisuudesta. Maassa (A) on aluksi levossa kaksi avaruusalusta, V ja O. Kummassakin aluksessa on synkronoitu kello, ja kellon näyttää aikaa kumpikin alus kiihdystää nopeasti liikkeelle. Maan koordinaatistossa alukset lähtevät siis liikkeelle samanaikaisesti ja saavat saman nopeuden  $v_{x,B(A)}$ , jolloin niiden välinen etäisyys on prosessissa vakio.

Tarkastellaan sitten samaa prosessia koordinaatistossa B, joka liikkuu nopeudella  $v_{x,B(A)}$  koordinaatiston A suhteeseen. Tämä koordinaatisto liikkuu siis samalla nopeudella kuin minkä alukset lopuksi saavat. Koska alukset olivat aluksi levossa koordinaatistossa A, koordinaatistossa B alukset ovat aluksi liikkeessä ja kiihdystyksen jälkeen alukset pysähtyvät. Siis alusten lepokoordinaatisto on aluksi A ja lopuksi B. Samanaikaisuuden suhteellisuuden perusteella alusten synkronoidut kelloit eivät kuitenkaan näytä samaa aikaa koordinaatistossa B vaan koordinaatiston liikkeen suunnassa kaukaisemmat kelloit ovat ajassa edellä läheväinä olevia kelloja. Tässä tapauksessa siis aluksen O kello on edellä aluksen V kelloon nähden. Tämä tarkoittaa kuitenkin sitä, että aluksen O kello saavuttaa *ensin* hetken, jolloin aluksen nopeus muuttuu, eli alus O pysähtyy ensin. Tämän jälkeen on aikajakso, jolloin alus O on levossa mutta alus V vielä liikkuu, ja tällöin alusten välinen etäisyys kasvaa. Alus V pysähtyy vasta kun sen kellon mukaan on aika kiihdystää, ja näin ollen koordinaatistossa B alusten lopullinen etäisyys toisistaan on *suurempi* kuin koordinaatistossa A. Tässäkin on kyseessä pituuskontraktio. Koordinaatisto B on alusten ja *niiden välisen matkan* lepokoordinaatisto, joten tässä koordinaatistossa alusten välinen etäisyys on suurimmillaan. Koordinaatistossa A alukset sekä niiden välillä liikkuvat, joten tässä koordinaatistossa alusten välinen etäisyys havaitaan kutistuneena.



**6.25** Miltä kuvan 6.23 prosessi näyttäisi koordinaatistossa A, jos avaruusalukset pysähtyisivät samanaikaisesti koordinaatistossa B? Havattaisiinko koordinaatistojen välillä pituuskontraktioita?

Yhteenvetona siis toistensa suhteeseen liikkuvien koordinaatistojen etäisydet eivät muutu liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa, mutta liikkeen suunnassa ne muuttuvat niin, että liikkuvat systeemit havaitaan liikkeen suunnassa lyhentyneinä. Tämä tarkoittaa sitä, että *minkä tahansa pituuden mittaus antaa suurimman*

tuloksen koordinaatistossa, jossa mitattava pituus on paikoillaan. Tätä pituutta kutsutaan **ominaispituudeksi** samaan tapaan kuin levossa olevan kellon mittamaa aika on ominaisaika. Ominaispituutta voidaan pitää kappaleiden todellisena pituutena siinä mielessä, että jokainen havaitsija on omassa koordinaatistossaan levossa ja mittaa siis omaksi pituudekseen juuri ominaispituutensa. Pituuskontraktio koskee sekä kappaleiden pituksia että niiden välistä etäisyysä eli toisin sanoen *kaikkia pituukseja*. Kysymys ei ole sitä, että liikkuvat kappaleet puristuisivat kasaan jonkin voiman vaikutuksesta, eikä myös kauempi siitä, että kappaleet ajautuisivat toisistaan kauemmas. Koska pituuskontraktio vaikuttaa kaikkiin liikkeen suuntaisiin etäisyyksiin, tämä tarkoittaa että *avaruus itse* ilmenee eri koordinaatistoissa eri tavoin.



**6.26** Avaruusalus on matkalla Maasta Alpha Centauriin 4 valovuoden päähän. Aluksen nopeus näiden tähtien suhteeseen on  $0.98c$ , jolloin  $\gamma \approx 5$ . (a) Kuinka kauan aluksen matka kestää Maan koordinaatistossa? (b) Kuinka paljon aikaa avaruusaluksen kello mukaan kuluu matkan aikana? (c) Kuinka nopeasti alus liikkuu omassa koordinaatistossaan? (d) Kuinka nopeasti Alpha Centauri liikkuu aluksen koordinaatistossa? (e) Kuinka pitkä matka Alpha Centauriin on aluksen koordinaatistossa? (f) Kuinka kauan matka kestää aluksen koordinaatistossa?

#### esimerkki 6.4

#### Myonit

Ilmakehän gläkerroksiin saapuva kosminen säteily tuottaa myoneja — hiukkasia joiden puoliintumisaika on  $1.6\mu\text{s}$ . (Toisin sanoen puolet kaikista hiukkista hajoaa tämän ajan kuluessa.) Hiukkaset syntyvät noin 10 km korkeudella ja niiden vauhti on  $0.98c$ . Jos tietynsä ajassa syntyy  $10^7$  myonia, kuinka monta hiukkasta havaitaan maan pinnalla?

**TILANNE** Merkitään myonien alkumäärää  $N_{\text{alku}} = 10^7$ , ilmakehän paksuutta Maan koordinaatistossa A  $L_{(A)} = 10 \text{ km}$  ja myonien puoliintumisaikaa niiden omassa lepokoordinaatistossa B  $t_{1/2,(B)} = \tau_{1/2} = 1.6\mu\text{s}$ . Myonien nopeus on  $v_{B(A)} = 0.98c$ .

**SUUNNITELMA** Hiukkasten määrä pienenee eksponentiaalisesti ajan kuluessa, ja maahan saapuvien hiukkasten määrää voidaan laskea kun tunnetaan aika, joka hiukkasilta kuluu matkaan ilmakehän läpi. Hiukkasten nopeudet ovat lähellä valonnopeutta, joten Maan koordinaatistossa A hiukkasten aika on hidastunut aikadilataation vuoksi ja hiukkaset säilyvät pidempään kuin omassa koordinaatistossaan. Myonien koordinaatistossa B puolestaan Maa ja ilmakehä kokevat pituuskontraktio, joten myonien matka on lyhyempi.

Kun aikaa kuluu yksi puoliintumisaika  $t = t_{1/2}$ , puolet hiukkista häviää eli  $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2}N_{\text{alku}}$ . Kahden puoliintumisajan jälkeen  $t = 2t_{1/2}$  hiukkasia on jäljellä neljäsosa,  $N(2t_{1/2}) = \frac{1}{2^2}N_{\text{alku}}$ , jne. Yleisesti ajan  $t$  jälkeen hiukkasia on jäljellä

$$N(t) = \frac{1}{2^{t/t_{1/2}}} N_{\text{alku}}. \quad (6.53)$$

Maan koordinaatistossa myonien hajoaminen on hidastunut ja niiden puoliintumisaika on pitkä,  $t_{1/2,(A)} = \gamma \tau_{1/2}$ . Myonien koordinaatistossa ilmakehän paksuus on lyhentynyt,  $L_{(B)} = \frac{1}{\gamma}L_{(A)}$ . Maan koordinaatistossa myonien matka-aika on  $\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v_{B(A)}} L_{(A)}$ . Myonien koordinaatistossa Maa liikkuu kohti myoneja nopeudella  $v_{A(B)} = v_{B(A)}$ , jolloin Maa saavuttaa myonit ajassa  $\Delta t_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} L_{(B)}$ .

**RATKAISU** Koordinaatistojen välinen Lorentz-tekijä on  $\gamma = \left(1 - \frac{v_{B(A)}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 5.0$ . Maan koordinaatistossa myonien matkaan kuluu aikaa

$$\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v_{B(A)}} L_{(A)} = \frac{10^4 \text{ m}}{0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 34\mu\text{s}, \quad (6.54)$$

ja myonien puoliintumisaika on  $t_{1/2,(A)} = 5.0 \cdot 1.6\mu\text{s} = 8.0\mu\text{s}$ , joten myonien joukko kokee matkallaan  $\Delta t_{(A)}/t_{1/2,(A)} = 4.25$  puoliintumista. Myoneja saapuu siis maahan

$$N_{(A)} = \frac{1}{2^{\Delta t_{(A)}/t_{1/2,(A)}}} N_{\text{alku}} = \frac{1}{2^{4.25}} 10^7 = 5 \cdot 10^5. \quad (6.55)$$

Myonien koordinaatistossa Maa saavuttaa myonit ajassa

$$\Delta t_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} L_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} \frac{1}{\gamma} L_{(A)} = \frac{0.2 \cdot 10^4 \text{ m}}{0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6.8\mu\text{s}, \quad (6.56)$$

joten myonit kokevat jälleen  $\Delta t_{(B)}/t_{1/2,(B)} = 4.25$  puoliintumista ja niitä saapuu maahan myös tässä koordinaatistossa  $N_{(B)} = 5 \cdot 10^5$ .

**ARVIOINTI** Molemmissa koordinaatistoissa saadaan sama tulos kuten pitääkin. Myonin saapuminen maan pinnalle on nimittäin tapahtuma, joten jokainen maahan saapuva myoni saavuttaa Maan kaikissa koordinaatistoissa.

Vertailun vuoksi voimme laskea myös paljonko myoneja epärelativistinen mekanikkalla ennustaa saapuvan maahan. Jos suhteellisuus jätetään huomioimatta, myonin matka-aika on  $\Delta t_{\text{klassinen}} = 34\mu\text{s}$  ja puoliintumisaika on  $t_{1/2,\text{klassinen}} = 1.6\mu\text{s}$ , joten puoliintumisia ehtii tapahtua  $\Delta t_{\text{klassinen}}/t_{1/2,\text{klassinen}} = 21.25$ . Tämän mukaan maahan pitäisi saapua vain  $N_{\text{klassinen}} = \frac{1}{2^{21.25}} 10^7 = 4$  myonia! Myoneja todella havaitaan maassa, joten tämä ilmiö on eräs epäsuora todiste suhteellisuusteorian oikeellisuudesta.

## 6.5 Avaruusaika

Suhteellisuusteoriassa siis sekä avaruus että aika ilmenevät eri koordinaatistoissa eri tavoin. Yhdessä koordinaatistossa samaa aikaa näyttävät kelloit näyttävätkin toisessa koordinaatistossa eri aikojen näytämä aika riippuu niiden paikasta. Samoin pituudet ilmenevät eri koordinaatistoissa eri tavoin. Suhteellisuusteoriassa avaruus ja aika ovatkin hyvin samankaltaisia ja toisiinsa perustavalla tavalla kytkeytyneitä suureita, minkä vuoksi usein ei puhutakaan erikseen avaruudesta ja ajasta vaan **avaruusajasta**, jossa aika ja avaruuden kolme suuntaa muodostavat yhdessä *neliulotteisen koordinaatiston*.

### Lorentz-muunnos

Galilei-suhteellisuuden mukaan toistensa suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa mitataan tapahtumille erilaiset paikkakoordinaatit, koska koordinaatiston kiintopisteet sijirtyvät toistensa suhteen ajan kuluessa. Tämän takia myös esimerkiksi kappaleiden nopeuksille mitataan erilaiset arvot. Jos tapahtuman paikkakoordinaatit tunnetaan yhdessä koordinaatistossa A, ne voidaan laskea toisessa koordinaatistossa B Galilei-muunnoksen (6.7) avulla.

Suhteellisuusteoriassa Galilei-muunnosta vastaava säädöntö koordinaattien muuntamiseksi koordinaatistossa toiseen on **Lorentz-muunnos**. Nopeuksien ollessa selkeästi valonnopeutta pienemmät Lorentz- ja Galileimuunnokset antavat samat tulokset, mutta koordinaatistojen liikuessa toistensa suhteen lähes valonnopeudella Galilei-muunnos ei toimi ja on käytettävä nimenomaan Lorentz-muunnosta, sillä *valonnopeus on Lorentz-invariantti* eli valonnopeuden arvo ei muudu Lorentz-muunnoksessa.

Lorentz-muunnos on seuraava: Valitaan kaksi koordinaatistoa A ja B niihin, että koordinaatistojen  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -akselit osoittavat samaan suuntaan. Annetaan B:n liukkuva A:n suhteen  $x$ -suuntaisella vakionopeudella  $v_{x,B(A)}$  ja valitaan koordinaatistolle myös sama origo. Tämä tarkoittaa sitä, että koordinaatiston A ajan hetkellä  $t_{(A)} = 0$  avaruuden pisteessä  $(x, y, z)_{(A)} = (0, 0, 0)$  havaittu tapahtuma tapahtuu myös koordinaatistossa B ajan hetkellä  $t_{(B)} = 0$  avaruuden pisteessä  $(x, y, z)_{(B)} = (0, 0, 0)$ . Nyt jos jollekin toiselle tapahtumalle mitataan koordinaatistossa A paikka- ja aikakoordinaatit  $(x_{(A)}, y_{(A)}, z_{(A)}, t_{(A)})$ , tälle tapahtumalle mitataan koordinaatistossa B koordinaatit

$$x_{(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)}) \quad (6.57)$$

$$y_{(B)} = y_{(A)} \quad (6.58)$$

$$z_{(B)} = z_{(A)} \quad (6.59)$$

$$t_{(B)} = \gamma_{B(A)} \left( t_{(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{(A)} \right). \quad (6.60)$$

Lorentz-muunnoksen mukaan tapahtumille mitataan siis eri koordinaatistoissa *koordinaatistojen liikkeen suunnassa* erilaiset paikkakoordinaatit kuten Galilei-muunnoksessaakin. Koordinaatin  $x$  muunnos on itse asiassa Lorentzin tekijää lukuunottamatta täsmälleen samanlainen kuin Galilei-muunnos. Liikettä vastaan kohtisuorat suunnat  $y$  ja  $z$  eivät muudu mitenkään. Oleellinen ero Galilei-muunnokseen on kuitenkin se, että Lorentz-muunnoksessa myös *aikakoordinaatit* muuttuvat koordinaatistoa vaihdettaessa.

Emme johda Lorentz-muunnosta, mutta perustelemme muunno syhtälöiden järkevyyden tarkastelemalla valosignaalin kulkua kahdessa eri koordinaatistossa. Signaalin kulun voi kuvata kahtena tapahtumanana: ensin valo lähtee, ja sitten se havaitaan. Valon lähtö voi tapahtua missä vain ja milloin vain, mutta oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että valosignaali lähetetään koordinaatiston A origosta. Toisin sanoen signaalin lähtö on tapahtuma, jonka koordinaatit ovat  $(0, 0, 0, 0)_{(A)}$ . Valon havaitseminen on myös tapahtuma, ja olkoon tämän koordinaatit  $(x_{(A)}, y_{(A)}, z_{(A)}, t_{(A)})$ .

Valon havaintopisteen etäisyysden neliö valon lähtöpisteestä on Pythagoraan lauseen mukaisesti

$$(\Delta r_{(A)})^2 = (\Delta x_{(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 + (\Delta z_{(A)})^2. \quad (6.61)$$

Toisaalta signaali kulkee valonnopeudella, joten valo kulkee matkan ajassa  $\Delta t_{(A)}$ , missä

$$\Delta r_{(A)} = c\Delta t_{(A)}. \quad (6.62)$$

Näin ollen signaalin lähdön ja havainnon koordinaattien erolle täytyy päteä

$$(c\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = 0. \quad (6.63)$$

Lauseketta

$$s_{(A)}^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - [(\Delta x_{(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 + (\Delta z_{(A)})^2] \quad (6.64)$$

kutsutaan tapahtumien väliseksi **avaruusaikaintervalliksi**, ja avaruusaikaintervalli saa siis arvon nolla tapahtumille, joita yhdistää valonnopeudella kulkeva signaali.



**6.27** Kuvan 6.20 kello B toimii lähetämällä ja vastaanottamalla valosignaalin. Kellon korkeus on  $L$  ja se liikkuu koordinaatistossa A nopeudella  $v_x$ . (a) Jos tapahtuma "valo lähtee" valitaan origoksi, mitkä ovat tapahtuman "valo havaitaan" koordinaatit koordinaatistossa A ja B? (b) Mikä on tapahtumien välinen avaruusaikaintervalli  $s^2$  A:ssa ja B:ssä?

Myös koordinaatistossa B havaitaan edellä kuvatut tapahtumat: ensin valosignaali lähtee ja sitten se havaitaan. Kuitenkin jos valonnopeus on kaikissa koordinaatistoissa sama, näitä tapahtumia täytyy yhdistää valonnopeudella kulkeva signaali myös tässä koordinaatistossa ja niinpä tapahtumien välisen avaruusaikaintervallin täytyy olla nolla myös koordinaatistossa B

$$s_{(B)}^2 = 0. \quad (6.65)$$

Valo lähtee myös koordinaatistossa B liikkeelle origosta, koska koordinaatistot oli valittu niin, että niihin origot ovat samat. Näin ollen tämän tapahtuman koordinaatit ovat  $(0, 0, 0, 0)_{(B)}$ . Valon havaitsemisen koordinaatit ovat puolestaan  $(x_{(B)}, y_{(B)}, z_{(B)}, t_{(B)})$ , missä koordinaatistoissa A ja B mitattuja koordinaatteja yhdistää Lorentz-muunnos (6.57) – (6.60). Valo havaitaan siis koordinaatistossa B ajan hetkellä  $t_{(B)} = \gamma_{B(A)}(t_{(A)} - \frac{1}{c^2}v_{B(A)}x_{(A)})$ , ja havaintopisteen  $x$ -koordinaatti on  $x_{(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{(A)} - v_{B(A)}t_{(A)})$ . Näiden tulosten sijoitus koordinaatistossa B mitattuun avaruusaikaintervallin lausekkeeseen ja sievennys osoittaa, että välimatka on *Lorentz-invariantti*,

$$s_{(B)}^2 = c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = s_{(A)}^2. \quad (6.66)$$

Toisin sanoen avaruusaikaintervallin  $s^2$  arvo on *sama* kaikissa toistensa suhteenvaihtuvissa inertialkoordinaatistoissa. Erityisesti jos tapahtumat ovat valosignaalin kulkureitillä, niiden välinen avaruusaikaintervalli on kaikissa koordinaatistoissa *nolla*, mikä tarkoittaa valon kulkevan tapahtumien välin valonnopeudella kaikissa koordinaatistoissa.



**6.28** Sijoita lausekkeet (6.57) sekä (6.60) koordinaatiston B avaruusaikaintervallin lausekkeeseen ja osoita, että sievennys antaa tulokseksi saman lausekkeen koordinaatistossa A mitattuna.

Jos koordinaatistojen välinen nopeus on pieni verrattuna valonnopeuteen, pääsee  $v_{x,B(A)}/c^2 \approx 0$ , ja tällöin myös Lorentzin tekijä on likimain yksi,  $\gamma_{B(A)} \approx 1$ . Tässä tapauksessa paikkakoordinaatin muunnosyhtälökseen saadaan

$$x_{(B)} \approx x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)} \quad (6.67)$$

ja aikakoordinaatin muunnokseksi puolestaan

$$t_{(B)} \approx t_{(A)} \quad (6.68)$$

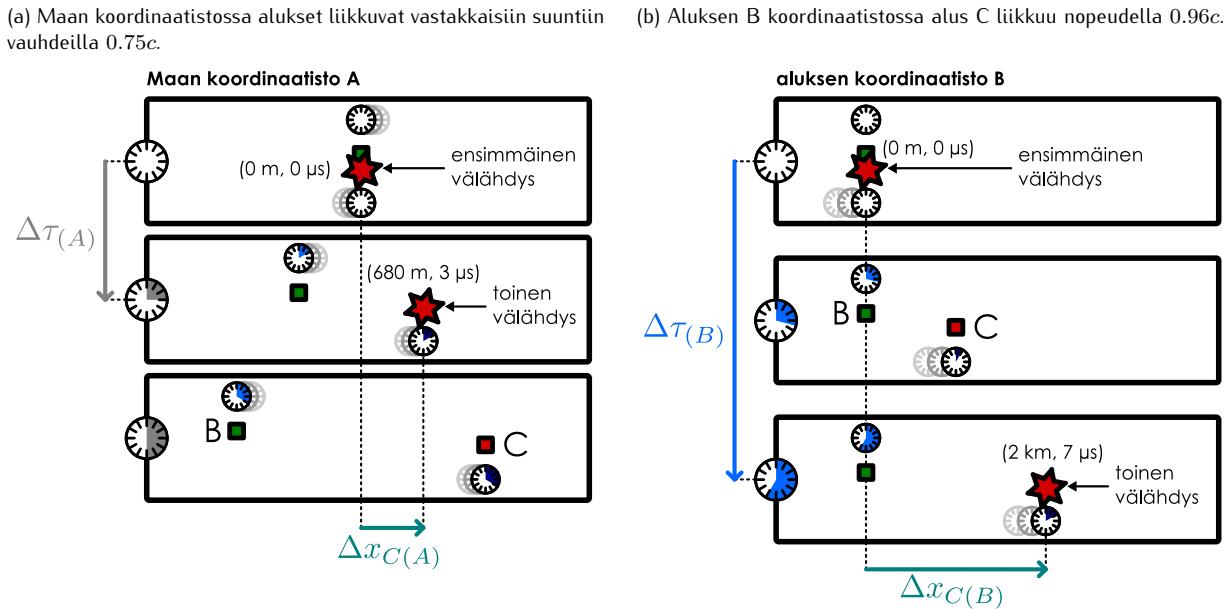
eli samat muunnosyhtälöt kuin Galilei-suhteellisuudessa. Koordinaatistojen liikkuessa hitaasti suhteellisuusteoria antaa siis saman tuloksen kuin klassinen mekanika. Näin tietysti pitääkin olla, koska Galilei-muunnos selvästikin toimii arkipäiväissä nopeuksissa ja suhteellisuusteoriasta tarvitaan vain tarkasteltaessa hyvin suuria nopeuksia. Nyrkkisääntönä suhteellisuusteoreettisten ilmiöiden tärkeyden voikin arvioida Lorentzin tekijän avulla: mitä enemmän tekijä poikkeaa yhdestä, sitä suurempi virhe tehdään Galilei-muunnosta käytettäessä Lorentz-muunnoksen sijaan.

Tutustuimme luvussa 6.4 suhteellisuusteoreettisiin ilmiöihin ajatuskokeilla, joissa ilmenevät samanaikaisuuden suhteellisuus, aikadilataatio sekä pituuskontraktio. Nämä ajatuskokeet oli suunniteltu erittäin yksinkertaisiksi, jotta kussakin tilanteessa ilmenisi jokin näistä ilmiöistä. Monimutkaisissa suhteellisuusteoreettisissa prosesseissa nämä ilmiöt kuitenkin tapahtuvat yhdessä, ja prosessien analyysi on yleensä hyvin vaikeaa pelkästään pohtimalla esimerkiksi aikadilataation ja pituuskontraktion vaikutusta erikseen. Lorentz-muunnos sen sijaan toimii varmasti. Niinpä varmin tapa analysoida suhteellisuusteoreettisia prosesseja eri koordinaatistoissa on määrittää prosessin keskeiset tapahtumat ja etsiä näiden tapahtumien koordinaatit jossakin tarkastelluista koordinaatistosta. Tällöin tapahtumien koordinaatit voi *aina* määrittää kaikissa muissa koordinaatistoissa Lorentz-muunnoksella, ja prosessin kulku on helppointa hahmottaa tarkastelemalla tapahtumien paikkoja ja aikoa.

### Nopeuksien yhteenlasku

Galilei-muunnoksen mukaan nopeudet ovat additiiviset eli eri koordinaatistoissa mitattujen nopeuksien erotus on sama kuin koordinaatistojen välinen nopeus. Suhteellisuusteoriassa valonnopeudelle mitataan kuitenkin kaikissa koordinaatistoissa sama arvo. Mikään kappale ei myöskään voi liikkua yli valonnopeudella. Niinpä mitattujen nopeuksien muuntuminen koordinaatistosta toiseen ei voi olla additiivinen.

Kuva 6.24: Lükkuvan avaruusaluksen nopeus voidaan mitata havaitsemalla aluksen paikka ajan hetkenä.



Tutkitaan nopeuksien muuntumista koordinaatistojen välillä tarkastelemalla kahta avaruusalusta, B ja C, jotka liikkuvat Maan koordinaatistossa A tasaisella vauhdilla vastakkaisiin suuntiin (kuva 6.24). Aluksen C keulassa on vilkkuva valo, joten voimme havainnoida aluksen lükkeen mittaan paikan ja ajat, joissa valo välähtää. Tämän jälkeen voimme mitata aluksen nopeuden määrittämällä kahden välähdyn välisen etäisyyden ja aikaeron, sillä nopeushan on määritelmän mukaisesti kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhde.

Asetetaan koordinaatiston A origo pisteeseen, jossa aluksen C valo välähtää ensimmäisen kerran. Olkoon valon ensimmäinen välähdys siis tapahtuma 1, jonka koordinaatit ovat  $(x_{1(A)}, t_{1(A)}) = (0 \text{ m}, 0 \mu\text{s})$ . Asetetaan myös avaruusalusten koordinaatistojen origot tähän pisteeseen, jolloin valon ensimmäisen välähdyn koordinaatit ovat  $(0 \text{ m}, 0 \mu\text{s})$  kaikissa koordinaatistoissa.

Valitaan koordinaatistojen positiivinen  $x$ -akseli aluksen C lükkeen suuntaan, jolloin alus B lükkää negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Alusten vauhdit ovat tässä esimerkissä  $0.75c$  ja aluksen C valo on säädetty välähtämään kahden mikrosekunnin välein *aluksen C oman kelon mukaan*. Valon toinen välähdys on siten tapahtuma 2, joka aluksen C koordinaatistossa tapahtuu pisteessä  $(x_{2(C)}, t_{2(C)}) = (0 \text{ m}, 2.0 \mu\text{s})$ . Tapahtuman paikkakoordinaatti on nolla, koska alus C on omassa koordinaatistossaan paikoillaan.

Maan nopeus koordinaatiston C suhteeseen on  $v_{x,A(C)} = -0.75c$ , koska Maa liikkuu aluksen C suhteeseen negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Niinpä Lorentz-muunnoksen perusteella valon toinen välähdys havaitaan Maan koordinaatistossa A paikassa

$$x_{2(A)} = \gamma_{A(C)}(x_{2(C)} - v_{x,A(C)}t_{2(C)}) = 1.51 \cdot (0 \text{ m} - (-0.75 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 680 \text{ m} \quad (6.69)$$

ajan hetkellä

$$t_{2(A)} = \gamma_{A(C)} \left( t_{2(C)} - \frac{1}{c^2} v_{x,A(C)} x_{2(C)} \right) = 1.51 \cdot (2.0 \cdot 10^{-6} \text{ s} - 0 \text{ s}) = 3.0 \mu\text{s}. \quad (6.70)$$

Koordinaatistossa A aluksen C nopeudeksi mitataan siis

$$v_{x,C(A)} = \frac{\Delta x_{C(A)}}{\Delta \tau_{(A)}} = \frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}} = \frac{680 \text{ m}}{3.0 \mu\text{s}} = 0.75c, \quad (6.71)$$

kuten pitääkin.

Voimme laskea Lorentz-muunnoksen avulla toisen välähdyn eli tapahtuman 2 paikan ja ajan myös koordinaatistossa B. Emme voi laskea näitä suoraan tapahtuman 2 koordinaatistossa C mitattujen paikan ja ajan avulla, koska emme tiedä koordinaatistojen B ja C suhteellista nopeutta. Tiedämme kuitenkin, että koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella  $v_{x,B(A)} = -0.75c$ , joten voimme laskea tapahtuman 2 koordinaatit äsken koordinaatistossa A määrittämme koordinaattien avulla. Nämä saamme valon toisen välähdyn paikaksi aluksen B koordinaatistossa

$$x_{2(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{2(A)} - v_{x,B(A)}t_{2(A)}) = 1.51 \cdot (680 \text{ m} - (-0.75 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 2050 \text{ m} \quad (6.72)$$

ja ajan hetkeksi

$$t_{2(B)} = \gamma_{B(A)} \left( t_{2(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{2(A)} \right) = 1.51 \cdot \left( 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ s} - \frac{-0.75}{3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 680 \text{ m} \right) = 7.1 \mu\text{s}. \quad (6.73)$$

Koordinaatistossa B aluksen C nopeudeksi mitataan siis

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{C(B)}}{\Delta t_{(B)}} = \frac{x_{2(B)}}{t_{2(B)}} = \frac{2050 \text{ m}}{7.1 \mu\text{s}} \approx 0.96c. \quad (6.74)$$

Vaikka koordinaatistossa A *alusten välinen etäisyys* kasvaa nopeudella  $1.5c$  eli valonnopeutta nopeammin, kumpikaan aluksista ei liiku valoa nopeammin. Koordinaatistossa B alus C liikkuu kuitenkin vain nopeudella  $0.96c$ , ja koska alus B on tässä koordinaatistossa paikoillaan, tämä on myös alusten välisen etäisyyden muuttumisen nopeus. Tässä tapauksessa nopeuksia ei voi vain laskea suoraan yhteen, koska suhteellisuusteoriassa avaruudelliset etäisyydet ja kellojen käynti riippuu koordinaatistosta. Koordinaatistossa B alus C liikkuu lähellä valonnopeutta, joten sen kello käy hyvin hitaasti ja kahden valon välähdyksen välillä kuluu yli kaksinkertainen aika koordinaatistoon A verrattuna. Toisaalta myös  $x$ -suuntaiset etäisyydet muuntuvat, joten aluksen C kulkema matka välähdysten välillä on koordinaatistossa B vain noin kolminkertainen koordinaatistossa A kuljettuun matkaan nähden.

Voimme johtaa samalla periaatteella yleisen nopeuksien yhteenlaskusäännön. Jos nimittäin kappale C liikkuu koordinaatistossa B nopeudella

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{C(B)}}{\Delta t_{C(B)}} = \frac{x_{2(B)}}{t_{2(B)}}, \quad (6.75)$$

voimme sijoittaa tähän Lorentz-muunnosyhtälöt (6.57) ja (6.60), jolloin nopeudeksi saadaan koordinaatistossa A mitattujen koordinaattien avulla ilmaistuna

$$v_{x,C(B)} = \frac{x_{2(A)} - v_{x,B(A)} t_{2(A)}}{t_{2(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{2(A)}}. \quad (6.76)$$

Edelleen supistamalla tämä ajan arvolla  $t_{2(A)}$ , nopeuden lauseke saa muodon

$$v_{x,C(B)} = \frac{\frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} \frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}}}. \quad (6.77)$$

Kuitenkin tässä lausekkeessa esiintyvä koordinaatistossa A mitattu paikan ja ajan suhde on määritelmän mukaisesti aluksen nopeus koordinaatistossa A,  $v_{x,C(A)} = x_{2(A)}/t_{2(A)}$ , joten koordinaatistossa B mitattu nopeus voidaan kirjoittaa koordinaatistossa A mitattujen nopeuksien avulla muodossa

$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} v_{x,C(A)}}. \quad (6.78)$$

Tämä on yleinen *yhdensuuntaisten nopeuksien yhteenlaskusääntö*, kun koordinaatistoja yhdistää Lorentz-muunnos.

Jos koordinaatistojen välinen nopeus tai aluksen nopeus on selkeästi valonnopeutta pienempi, yhdistettyjen nopeuksien lausekkeen (6.78) nimittäjä on  $1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} v_{x,C(A)} \approx 1$  ja nopeuden muunnos saadaan yksinkertaisesti säännöstää  $v_{x,C(B)} = v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}$ , joka on sama kuin Galilei-muunnoksen tulos. Kuitenkin jos sekä koordinaatistojen välinen nopeus että aluksen nopeus ovat lähellä valonnopeutta, tulos poikkeaa selvästi Galilei-muunnoksesta. Erityisesti koska alus liikkuu yhdessä koordinaatistossa valoa hitaammin, sen täytyy liikkua *kaikissa* koordinaatistoissa valoa hitaammin.



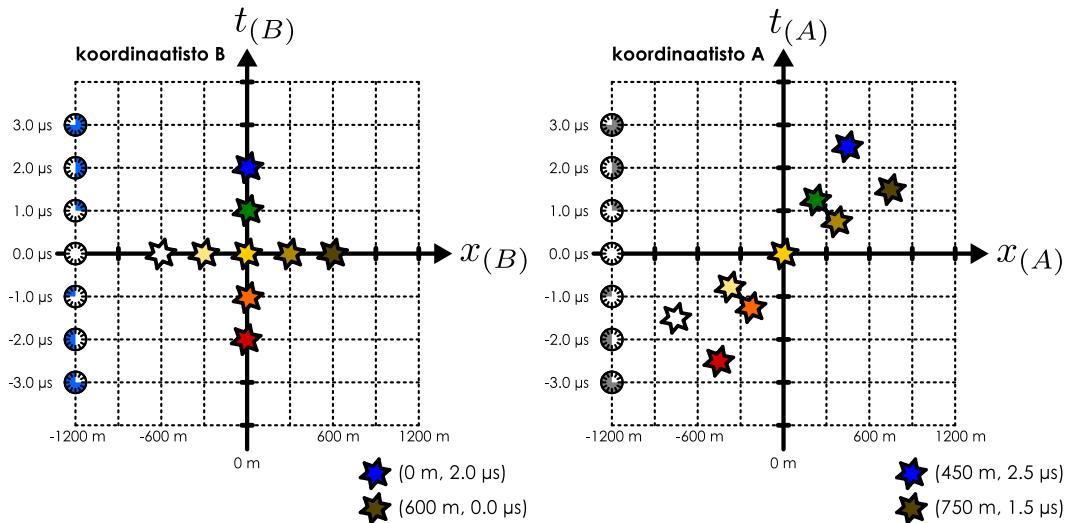
**6.29** Alus B liikkuu Maan koordinaatistossa nopeudella  $v_{x,B(A)} = -0.6c$  ja alus C nopeudella  $v_{x,C(A)} = 0.75c$ . Aluksen C valo välähtää koordinaatistossa A samoissa pisteissä kuin kuvassa 6.24. (a) Missä pisteissä valo välähtää koordinaatistossa B? (b) Laske C:n nopeus koordinaatistossa B matkan ja ajan suhteenä. (c) Laske C:n nopeus nopeuksien yhteenlaskusäännöllä.

## Avaruusajan graafinen kuvaus

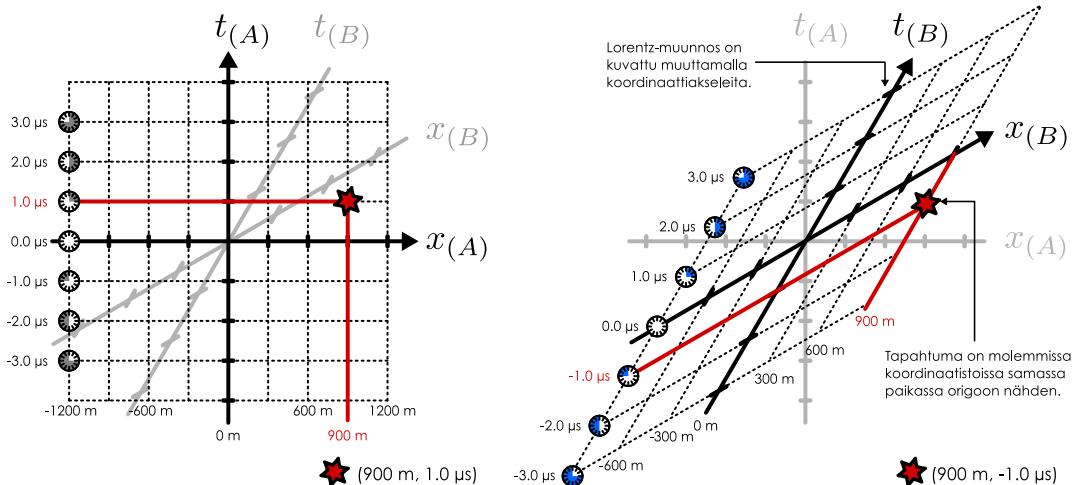
Jos tunnemme tapahtuman koordinaatit yhdessä koordinaatistossa, voimme Lorentz-muunnoksen avulla laskea koordinaatit muissa koordinaatistoissa, ja paras tapa analysoida prosessien kulkua on määrittää prosessiin liittyvien tapahtumien paikat ja ajat tarkasteltavissa koordinaatistoissa. Tapahtumien suhdetta toisiinsa on

Kuva 6.25: Tapahtumat voi kuvata kahdessa koordinaatistossa joko muuntamalla tapahtumien sijaintia koordinaatistossa tai muuttamalla koordinaatistoa itseään.

(a) Koordinaatistomuunnoksen kuvaus siirtämällä tapahtumia.



" (b) Koordinaatistomuunnoksen kuvaus muuntamalla koordinaatistoa.



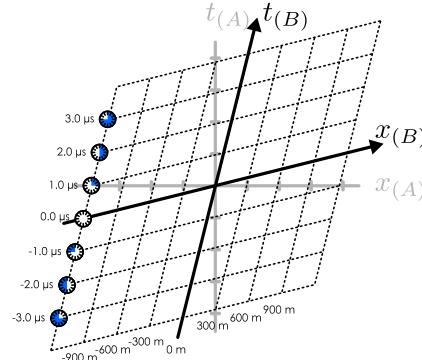
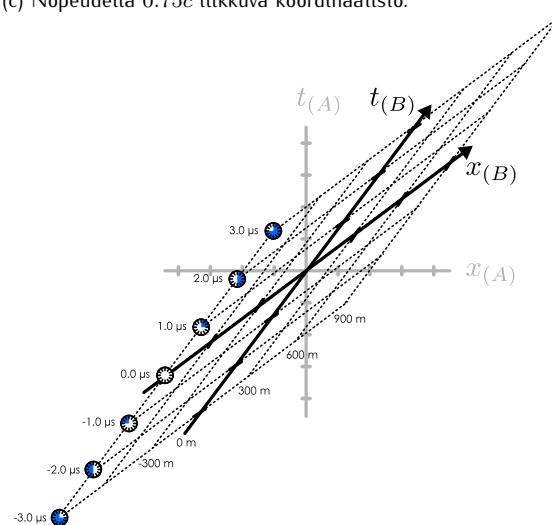
kuitenkin hyvin vaikea hahmottaa tarkastelemalla koordinaatteja vain numeroina. Niinpä usein onkin tarpeellista *piirtää* tapahtumat koordinaatistoon.

Tarkastellaan jälleen Maata (koordinaatisto A) sekä avaruusalusta (koordinaatisto B), joka liikkuu Maan suhteeseen nopeudella  $v_{x,B(A)} = 0.6c$ . Avaruusaluksen keskellä on lamppu, joka välähtää kerran mikrosekunnissa. Asetetaan aluksen koordinaatistossa origo tämän lampun kohdalle, joten näiden välähdysten paikkakoordinaatti on  $x_{(B)} = 0$  m. Koska alus liikkuu koordinaatistossa A, välähdykset eivät tapahdu samassa paikassa vaan mitä myöhemmästä välähdyksestä on kyse, sitä edempänä  $x$ -suunnassa se tapahuu koordinaatistossa A. Tämä on piirretty kuvaan 6.25 (a) punaisesta siniseen väritettynä tapahtumasarjana. Aika-akseli on tässä piirretty pystysuoraan ja paikka-akseli vaakasuoraan, joten koordinaatistossa B tapahtumat muodostavat pystysuoran jonon. (Tämä on tavallinen valinta akseleiden suunnille suhteellisuusteoriassa, mutta periaatteessa akseleiden järjestysksellä ei ole väliä.) Koordinaatistossa A tapahtumat muodostavat *vinon* suoran, koska alus liikkuu. Lisäksi koska aluksen kello käy Maan koordinaatistossa A pidempi kuin yksi mikrosekanti. Koordinaatistojen välinen Lorentz-tekijä on  $\gamma_{A(B)} = 1.25$ , joten välähdysten välinen aika on  $\Delta t_{(A)} = \gamma_{A(B)} \Delta t_{(B)} = 1.25 \mu\text{s}$ .

Koordinaatistojen välinen nopeus voidaan lukea esimerkiksi kuvaan sinisellä merkitystä tapahtumasta. Tapahtuman koordinaatit aluksessa ovat  $(0 \text{ m}, 2 \mu\text{s})_{(B)}$ , jolloin Lorentz-muunnoksen perusteella koordinaatit Maassa ovat  $(450 \text{ m}, 2.5 \mu\text{s})_{(A)}$ . Tämä tapahtuma on koordinaatiston B origossa, joten se kuvaa aluksen siirtymää Maan koordinaatistossa. Aluksen eli koordinaatiston B nopeus koordinaatistossa A on siten

$$v_{x,B(A)} = \frac{\Delta x_{B(A)}}{\Delta t_{(A)}} = \frac{x_{\text{sininen}(A)} - x_{\text{keltainen}(A)}}{t_{\text{sininen}(A)} - t_{\text{keltainen}(A)}} = \frac{450 \text{ m}}{2.5 \mu\text{s}} = 0.6c, \quad (6.79)$$

Kuva 6.26: Graafinen Lorentz-muunnos eri nopeuksilla liikkuvien koordinaatistojen välillä.

(a) Nopeudella  $0.25c$  liikkuva koordinaatisto.(c) Nopeudella  $0.75c$  liikkuva koordinaatisto.

kuten alunperin oletettiinkin.

Aluksessa on muitakin lampuja, ja lamput on ohjelmoitu väähätmään aluksen koordinaatistossa yhtä aikaa aluksen kellen näyttäässä nolla. Tämä on esitetty kuvassa 6.25 (a) koordinaatistoon B piirretynä keltaisten tapahtumien vaakarivinä. Samanaikaisuuden suhteellisuuden vuoksi nämä tapahtumat eivät kuitenkaan ole samanaikaiset koordinaatistossa A, vaan nämäkin tapahtumat muodostavat kuvaan *vinon* suoran. Aluksen liikkeen suunnassa taaimmainen väähdyys (valkoinen tapahtuma) tapahtuu Maan koordinaatistossa ensimmäisenä ja liikkeen suunnassa etummainen väähdyys (harmaa) tapahtuu viimeisenä.

Koordinaatistot on kuvassa piirretty niin, että aika-akselin yksikön suuruus on yksi mikrosekunti ja paikka-akselin yksikkö on 300 metriä, joka on valon yhdessä mikrosekunnissa kulkema matka. Toisin sanoen aika- ja paikka-akselien *mittakaavat ovat samat*, kun alka kerrotaan valonnopeudella. Kun mittakaava valitaan näin, tapahtumat siirtyytä Lorentz-muunnoksessa symmetrisesti. Koordinaatistossa B aika-akselillla havaitut (samanaikaiset) tapahtumat sijoittuvat koordinaatistossa A suoralle, joka on käännyttynyt ja venyntynyt koordinaatiston aika-akseliin nähdyn. Samoin koordinaatistossa B paikka-akselillla havaitut (samanaikaiset) tapahtumat sijoittuvat koordinaatistossa A suoralle, joka on käännyttynyt ja venyntynyt koordinaatiston paikka-akseliin nähdyn. Muunnoksen symmetrisyys ajan ja paikan suhteeseen näkyi siinä, että nämä suorat ovat käännyneet ja venyneet *yhtä paljon*.

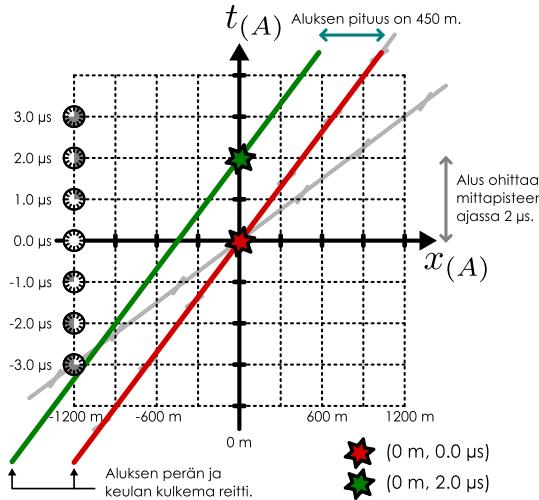
Edellä Lorentz-muunnos kuvattiin siten, että sekä Maalle että alukselle piirrettiin kummallekin *oma koordinaatistonsa*, ja tapahtumien paikat määritettiin näissä erikseen. Näin piirretty kuvat ovat erilaiset: koordinaatistossa B plus-kuvion muodostavat tapahtumat ovat koordinaatistossa A kapean X-kirjaimen muodossa. On kuitenkin myös toinen tapa esittää koordinaatistojen välinen muunnos graafisesti. Voimme nimittää antaa tapahtumien olla molemmissa koordinaatistoissa samoilla paikoilla ja *muuttaa koordinaatistoa itseään*.

Otetaan nyt lähtökohdaksi koordinaatisto A. Tiedämme, että kuvassa 6.25 (a) tapahtumasarja punaisesta siniseen on koordinaatiston B *aika-akselilla*  $t_{(B)}$  ja erityisesti tapahtumat ovat aksellilla yhden mikrosekunnin välein. Vastaavasti tapahtumasarja valkoisesta harmaaseen on koordinaatiston *paikka-akselilla*  $x_{(B)}$  300 metrin välein. Niinpä voimme *piirtää koordinaatiston A päälle toisen koordinaatiston B*, jonka aika-akseli kulkee tapahtumasarjan punainen-sininen kautta ja paikka-akseli tapahtumasarjan valkoinen-harmaa kautta. Lopputulos on esitetty kuvassa 6.25 (b). Näin piirtäen koordinaatiston B akselit tulevat vinoon, mikä voi vaikuttaa asioiden monimutkaistamiselta. Esityksen hyödyllisyys on kuitenkin siinä, että koordinaatistossa A määritetyt tapahtumat asettuvat näin automatisesti oikeille paikoilleen myös koordinaatistossa B. Toisin sanoen voimme piirtää yhden kuvan ja lukea siitä minkä tahansa tapahtuman koordinaatit kummassakin koordinaatistossa, A ja B.

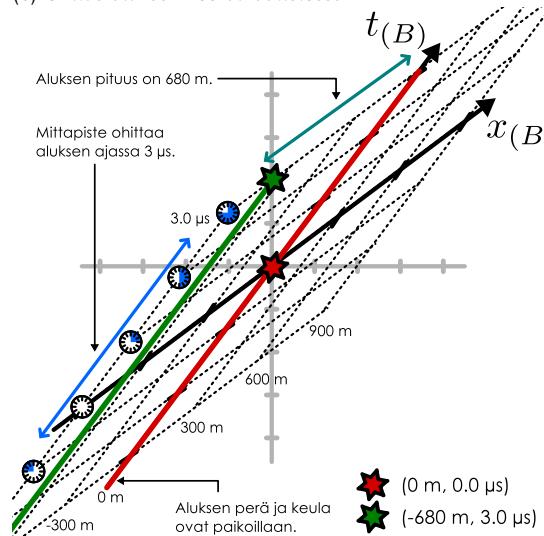
Tätä graafista esitystä kutsutaan **avaruusaika-diagrammiksi** tai **Minkowski-diagrammiksi**. Huomaa, että vaikka kuvan 6.25 (b) on piirretty kaksoi kuvajaa, nämä ovat muuten *täsmälleen sama kuva* paitsi että toisessa on korostettu koordinaatiston A akseleita ja toisessa koordinaatistoa B. Kuvassa esimerkkinä käytetyn tapahtuman  $(900 \text{ m}, 1 \mu\text{s})_{(A)}$  koordinaateiksi saadaan Lorentz-muunnoksella laskien  $(900 \text{ m}, -1 \mu\text{s})_{(B)}$ , mutta sama tulos voidaan myös lukea kuvasta. Koska koordinaatisto A on kuvassa suorakulmainen, tapahtuman koordinaatit voidaan lukea helposti etsimällä paikan ja ajan arvot pysty- ja vaakasuunnassa. Koordinaatisto B on kuitenkin vinoviivainen, joten siinä koordinaattien lukeminenkin tapahtuu "vinoon". Käytännössä tämä onnistuu piirtämällä tapahtumaa kuvavasta pisteestä koordinaattiakseleiden suuntaiset apuviivat (kuvas-

Kuva 6.27: Pituuskontraktio avaruusaikadiagrammissa.

(a) Ohitus Maan koordinaatistossa.



(b) Ohitus aluksen koordinaatistossa.



sa punaisella), jolloin paikka-akselin suuntainen apuviiwan leikkauispiste aika-akselilla kertoo tapahtuman aikakoordinaatin ja vastaavasti aika-akselin suuntainen apuviiwan leikkauispiste paikka-akselilla kertoo tapahtuman paikka-koordinaatin.



**6.30** Arvioi kuvan 6.25 (b) koordinaatistojen avulla tapahtuman  $(600 \text{ m}, 1 \mu\text{s})_{(B)}$  koordinaatit koordinaatistossa A. Tarkista tuloksesi laskemalla.

Diagrammi ei ole yksikäsitteinen siinä mielessä, että aivan yhtä hyvin koordinaatiston B akselit voitaisiin piirtää suorakulmaisiksi ja koordinaatiston A akselit vinoon. Tai vaihtoehtoisesti *molempien* koordinaatistojen akselisto voitaisiin piirtää vinovivaisiksi. Joka tapauksessa mitä lähevästä valonnopeutta koordinaatistojen välinen nopeus on, sitä enemmän koordinaattiakselit muuntuvat toistensa suhteeseen. Kuvassa 6.26 on esimerkkinä piirretty muunnos nopeuksilla  $0.25c$  sekä  $0.75c$ , kun koordinaatisto A on valittu suorakulmaiseksi. Mitä lähevästä valonnopeutta koordinaatiston B nopeus on A:n suhteen, sitä lähemmäksi  $45^\circ$  kulmaa koordinaattiakselit käantyvät ja sitä enemmän niiden mittakaava venyy. Valon kulkua kuvaavat diagrammissa täsmälleen  $45^\circ$  kulmassa kulkeva suora, koska koordinaattiakseleille valittiin tällainen mittakaava.

Kuvassa 6.27 on esimerkki avaruusaikadiagrammien käytöstä prosessien analyysissä. Diagrammi esittää täsmälleen samaa koetta kuin kuvassa 6.22, jossa avaruusalus ja Maassa oleva mittapiste ohittavat toisensa. Punainen viiva kuvailee aluksen keulasta olevan tunnisteen liikerataa ja vihreä viiva on aluksen perässä oleva tunniste. Maan koordinaatistossa alus liikkuu, joten nämä viivat ovat koordinaatiston akseleihin nähden vinossa. Aluksen pituus voidaan määrittää diagrammista lukemalla missä keula ja perä ovat *samalla ajan hetkellä* eli määrittämällä viivojen välisen etäisyyden  $x$ -akselin suunnassa. Tässä diagrammissa koordinaatisto A on piirretty suorakulmaiseksi, joten samanaikaiset tapahtumat ovat vaakasuorilla viivoilla. Niinpä aluksen pituus on Maan koordinaatistossa punaisen ja vihreän välisen vaakasuoran etäisyys,  $L_{(A)} = 450 \text{ m}$ .

Aluksen koordinaatistossa B aluksen keula ja perä ovat paikoillaan, joten niitä kuvavat viivat ovat yhdensuuntaiset koordinaatiston aika-akselin kanssa. Keulaa kuvava punainen viiva on suora  $x_{\text{keula}(B)} = 0 \text{ m}$  ja perää kuvava vihreä viiva on suora  $x_{\text{perä}(B)} = -680 \text{ m}$ . Aluksen pituus voidaan jälleen määrittää keulan ja perän välistenä etäisyytenä, joka on siis aluksen koordinaatistossa  $L_{(B)} = 680 \text{ m}$ . Alus on siis omassa koordinaatistossaan pidempi kuin Maan koordinaatistossa aivan kuten aikaisemmin päättelimme.

Diagrammiin on myös merkityt tapahtumina aluksen keulan ja mittapisteiden kohtaaminen (punainen) sekä aluksen perän ja mittapisteiden kohtaaminen (vihreä). Maan koordinaatistossa alus ohittaa mittapisteiden kahdessa mikrosekunnissa, mikä voidaan lukea näiden tapahtumien välisestä  $t_{(A)}$ -akselin suuntaisesta etäisyydestä. Sen sijaan aluksen koordinaatistossa mittapiste ohittaa aluksen *kolmessa* mikrosekunnissa, mikä ilmenee tapahtumien välisestä  $t_{(B)}$ -akselin suuntaisesta etäisyydestä.



**6.31** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä suhteellisuusteoriasta ja avaruusajasta. Selitä erityisesti, miten prosesseja kuvataan tapahtumien avulla ja kuinka koordinaatistosta siirrytään toiseen Lorentz-muunnokseen avulla.

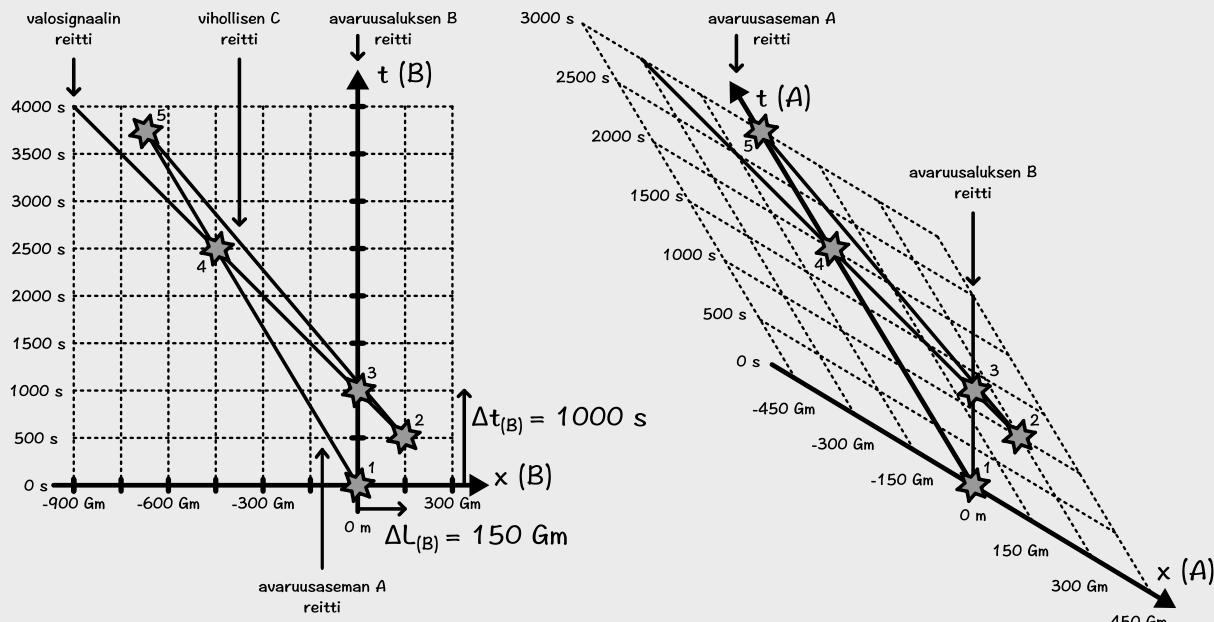
## esimerkki 6.5

## Avarusseikkailu

Scifi-elokuvassa avarusalus lentää avaruusaseman ohi tasaisella nopeudella  $0.6c$ . Kun aluksen kelon mukaan ohjuksesta on kulunut  $1000$  s, aluksesta havaitaan suoraan kohti asemaa nopeudella  $0.5c$  aseman suhteen kulkeva vihollisalus etäisyydellä  $150 \cdot 10^9$  m suoraan edessä. Alus lähetää välittömästi varoitukseen avaruusasemalle. Selvitä ohjaajalle, paljonko aikaa aseman asukkailla on evakuointiin.

**TILANNE** Merkitään asemaa A, avaruusalusta B ja vihollisalusta C. Aluksen nopeus on  $v_{x,B(A)} = 0.6c$  ja vihollisten nopeus on  $v_{x,C(A)} = -0.5c$ . Määritellään seuraavat tapahtumat ja piirretään kuva tapahtumasarjasta.

- 1: alus B ohittaa aseman A
- 2: valo lähteet vihollisaluksesta C (valo, joka aluksessa B havaitaan)
- 3: vihollisaluksesta lähtenyt valo havaitaan aluksessa B ja varoitus lähetetään
- 4: varoitus havaitaan asemalla A
- 5: vihollisalus C saapuu asemalle A



Asetetaan origo tapahtumaan 1, jolloin  $(x_1, t_1) = (0, 0)$  kaikissa koordinaatistioissa. Tällöin tapahtuman 3 ja tapahtuman 1 välinen aika aluksen koordinaatistossa B on  $\Delta t_{1 \rightarrow 3,(B)} = t_{3(B)} = 1000$  s. Vihollisalus havaitaan etäisyydellä  $\Delta L_{(B)} = 1.5 \cdot 10^{11}$  m aluksesta, mutta koska vihollisaluksesta lähteneeltä valolta kuluu aikaa saapua alukselle, tämä on vihollisten sijainti aluksen koordinaatistossa valon lähiessä vihollisaluksesta eli tapahtuman 2 hetkellä,  $x_{2(B)} = \Delta L_{(B)}$ .

Alus on aina oman koordinaatiston B origossa, joten tapahtuman 3 paikkakoordinaatti on nolla,  $x_{3(B)} = 0$ . Vastaavasti avaruusasema on oman koordinaatiston origossa, joten tapahtumien 4 ja 5 paikkakoordinaatit ovat nolla koordinaatistossa A,  $x_{4(A)} = x_{5(A)} = 0$ .

Koordinaatistossa B alus on paikoillaan joten sen reittiä kuvaava pystysuora viiva. Asema A liikkuu negatiiviseen suuntaan nopeudella  $0.6c$ , joten aseman reittiä kuvaava vino suora, joka siirtyy vasemmalle kolme pituusyksikköä ( $9 \cdot 10^{11}$  m) viiden aikayksikön ( $2500$  s) aikana. Vihollisaluksesta C alukseen B kulkeva valo ja edelleen aluksesta B asemalle A kulkeva valosignaali piirtävät koordinaatistoon  $45^\circ$  kulmassa kulkevan suoran. Aseman reitin ja valon reittien leikkauspiste on tapahtuma 4, jolloin asema vastaanottaa aluksen lähettämän viestin. Vihollisalus kulkee koordinaatistossa B hiukan valoa hitaammin, ja saavuttaa aseman kun aseman ja aluksen reitit leikkaavat. Aseman koordinaatistossa A alus C kulkee vauhdilla  $0.5c$ , joten se siirtyy  $x$ -suunnassa yhden yksikön ( $3 \cdot 10^{11}$  m) ajan edetessä kaksi yksikköä. (1000 s)

Selvitettäväänä on nyt tapahtumien 4 ja 5 välinen aikaväli aseman koordinaatistossa A,  $\Delta t_{4 \rightarrow 5,(A)} = t_{5(A)} - t_{4(A)}$ . Kuvan perusteella tämä on  $1000$  s. Tarkistetaan kuitenkin graafin ratkaisu laskemalla.

**SUUNNITELMA** Tapahtumia 2 ja 3 yhdistää vihollisaluksesta havainnon tekevään alukseen valonnopeudella kulkeva valosignaali, joten tapahtumien välisille koordinaateille pätee

$$\frac{\Delta x_{2 \rightarrow 3,(B)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 3,(B)}} = -c. \quad (6.80)$$

Samoin tapahtumia 3 ja 4 yhdistää valosignaali, joten vastaava yhteyksitee pätee myös näille koordinaateille

$$\frac{\Delta x_{3 \rightarrow 4,(B)}}{\Delta t_{3 \rightarrow 4,(B)}} = -c. \quad (6.81)$$

Tapahtumia 2 ja 5 puolestaan yhdistää aseman koordinaatistossa nopeudella  $v_{x,C(A)}$  kulkeva vihollisalus, joten näille pätee

$$\frac{\Delta x_{2 \rightarrow 5,(A)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)}} = -0.5c. \quad (6.82)$$

Jos tapahtuman koordinaatit tunnetaan yhdessä koordinaatistossa, koordinaatit toisessa koordinaatistossa saadaan Lorentz-muunnoksella. Koordinaatistosta B siirrytään koordinaatistoon A muunnoksella

$$x_{(A)} = \gamma_{A(B)}(x_{(B)} - v_{x,A(B)}t_{(B)}) \quad (6.83)$$

$$t_{(A)} = \gamma_{A(B)} \left( t_{(B)} - \frac{1}{c^2}v_{x,A(B)}x_{(B)} \right). \quad (6.84)$$

**RATKAISU** Koordinaatistossa B tapahtuman 2 ajaksi saadaan yhtälön (6.80) perusteella

$$t_{2(B)} = t_{3(B)} - \frac{1}{c}\Delta x_{2 \rightarrow 3,(B)} = t_{3(B)} - \frac{1}{c}\Delta L_{(B)} = 1000 \text{ s} - \frac{1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 500 \text{ s} \quad (6.85)$$

Koordinaatistojen A ja B välinen Lorentz-tekijä on

$$\gamma_{A(B)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25 \quad (6.86)$$

ja Lorentz-muunnoksen perusteella tapahtuman 2 koordinaatit aseman koordinaatistossa A ovat

$$x_{2(A)} = 1.25 \cdot (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} + 0.6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 500 \text{ s}) = 3.0 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (6.87)$$

$$t_{2(A)} = 1.25 \cdot \left( 500 \text{ s} + 0.6 \frac{1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right) = 1000 \text{ s}. \quad (6.88)$$

Vastaavasti tapahtuman 3 koordinaatit aseman koordinaatistossa ovat

$$x_{3(A)} = 1.25 \cdot (0 \text{ m} + 0.6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 1000 \text{ s}) = 2.25 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (6.89)$$

$$t_{3(A)} = 1.25 \cdot (1000 \text{ s} + 0 \text{ s}) = 1250 \text{ s}. \quad (6.90)$$

Aluksen B lähettämältä signaalilta kestää matkaan aseman koordinaatistossa A aika

$$\Delta t_{3 \rightarrow 4,(A)} = \frac{1}{c}\Delta x_{3 \rightarrow 4,(A)} = \frac{1}{c}x_{3(A)} = \frac{2.25 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 750 \text{ s}, \quad (6.91)$$

joten varoitus havaitaan ajan hetkellä

$$t_{4(A)} = t_{3(A)} + \Delta t_{3 \rightarrow 4,(A)} = 1250 \text{ s} + 750 \text{ s} = 2000 \text{ s}. \quad (6.92)$$

Vihollisalus puolestaan kulkee tapahtuman 2 ja 5 välisen matkan ajassa

$$\Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)} = \frac{1}{-0.5c}\Delta x_{2 \rightarrow 5,(A)} = \frac{1}{-0.5c}(-x_{2(A)}) = \frac{3.0 \cdot 10^{11} \text{ m}}{0.5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2000 \text{ s}, \quad (6.93)$$

joten alus saapuu asemalle hetkellä

$$t_{5(A)} = t_{2(A)} + \Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)} = 1000 \text{ s} + 2000 \text{ s} = 3000 \text{ s}. \quad (6.94)$$

Asemalla kuluu siis varoitukseen saapumisesta vihollisten saapumiseen aika

$$\Delta t_{4 \rightarrow 5,(A)} = t_{5(A)} - t_{4(A)} = 1000 \text{ s} = 16 \text{ min } 40 \text{ s}. \quad (6.95)$$

Kovin paljon valmistautumisaikaa ei siis jää.

**ARVIOINTI** Laskien saatiin sama tulos kuin graafisesti. Voimme vielä tarkistukseksi laskea tapahtumien 4 ja 5 koordinaatit aluksen koordinaatistossa B Lorentz-muunnoksella. Tulokset on esitetty alla taulukossa ja kaikki koordinaatit vastaavat koordinaatistoon piirrettyjä kuvaavia.

taapahduma	$x_{(A)}$	$t_{(A)}$	$x_{(B)}$	$t_{(B)}$
1	0 m	0 s	0 m	0 s
2	$3.0 \cdot 10^{11}$ m	1000 s	$1.5 \cdot 10^{11}$ m	500 s
3	$2.25 \cdot 10^{11}$ m	1250 s	0 m	1000 s
4	0 m	2000 s	$-4.5 \cdot 10^{11}$ m	2500 s
5	0 m	3000 s	$-6.75 \cdot 10^{11}$ m	3750 s

Lisäksi voimme näiden perusteella laskea eri kappaleiden nopeudet. Esimerkiksi vihollisaluksen C nopeus aluksen B koordinaatistossa on nopeuden yhteenlaskusäädön perusteella

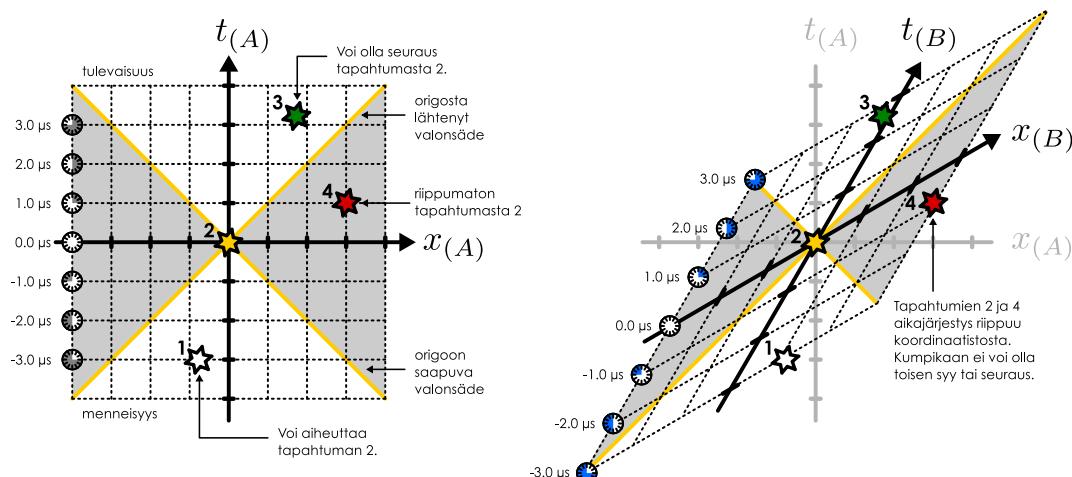
$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2}v_{x,C(A)}v_{x,B(A)}} = \frac{-0.5c - 0.6c}{1 + 0.5 \cdot 0.6} = -0.846c. \quad (6.96)$$

Vertaamalla tapahtumien 2 ja 5 koordinaatteja koordinaatistossa B saamme saman tuloksen

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{2 \rightarrow 5,(B)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 5,(B)}} = \frac{-8.25 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3250 \text{ s}} = -2.538 \cdot 10^8 \text{ m/s} = -0.846c. \quad (6.97)$$

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.28: Tapahtumien vuorovaikutus toisiinsa. Tapahtumien välillä voi olla syy-seuraussuhde vain jos valosignaali ehti kulkemaan tapahtumasta toiseen.



## Kausaliteetti

*Syy ja seuraus* eli *kausaliteetti* on tärkeä ajan kokemukseen liittyvä ilmiö. Jos tapahtuma 1 nimitään aiheuttavaa tapahtumaa 2 eli on sen syy, tapahtuman 1 täytyy tapahtua ensin. Kuitenkin tapahtumien aikajärjestys riippuu havaitsejan koordinaatistosta, joten herää kysymys voiko suhteellisuusteoria sekoittaa tapahtumien kausaaliset suhteet. Onko esimerkiksi mahdollista, että tapahtuma 1 aiheuttaa tapahtuman 2 yhdessä koordinaatistossa mutta tapahtuma 2 silti tapahtuu ennen tapahtumaa 1 jossakin toisessa koordinaatistossa?

Tätä kysymystä on havainnollistettu kuvassa 6.28, jossa on merkitty neljä tapahtumaa avaruusaikakoordinaatiistoon. Tapahtuma 2 on sijoitettu koordinaatiston origoon, ja koordinaatistossa A tapahtuma 1 havaitaan ennen tapahtumaa 2 ja tapahtumat 3 ja 4 sen jälkeen. Koordinaatistossa B tapahtumat 1, 2 ja 3 ovat samassa järjestyskäytävässä, mutta tapahtuma 4 tapahtuu ennen tapahtumaa 2.

Koordinaatistoihin on merkitty myös origon kautta kulkevien valosignaalien radat. Valonnopeudella kulkeva signaali piirtää koordinaatistossa  $45^\circ$  asteen kulmassa olevat suorat, joten nämä signaalit jakavat koordinaatiston neljään osaan. Origosta alas päin aukeavan valkoisen alueen kuvattu alue sisältää ne avaruusajan pisteet, joista voidaan lähettää valonnopeudella tai sitä hitaammin kulkeva signaali origoon. Tapahtuma 1 on tässä alueessa, joten siitä voi kulkea signaali tapahtumaan 2. Jos tapahtuma 1 on esimerkiksi valokatkaisijan käänntäminen, tapahtuma 2 voi olla tästä seuraava lampun sytytys. Erityisesti tapahtuma 1 voi siis olla tapahtuman 2 syy. Vastaavasti origosta ylöspäin aukeava valkoinen alue sisältää pisteet, joihin origosta lähetetty signaali voi ehtiä. Koska tapahtuma 3 on tässä alueessa, tapahtuma 2 voi olla tapahtuman 3 syy.

Origosta kummallekin sivulle on piirretty myös harmaa alue. Jos korkeintaan valonnopeudella kulkeva signaali lähtee liikkeelle jossakin tässä alueessa, se ei voi ehtiä origoon. Vastaavasti origosta lähetetty signaali ei voi saavuttaa harmaan alueen pisteitä. *Valonnopeus on kuitenkin informaation suurin mahdollinen nopeus*. Niinpä vaikka tapahtuma 4 tapahtuu koordinaatistossa A vasta tapahtuman 2 jälkeen, tieto tapahtumasta 2 ei voi mitenkään saavuttaa tapahtumaa 4 ajoissa eikä tapahtuma 2 voi olla tapahtuman 4 syy. Vastaavasti koordinaatistossa B tapahtuma 4 tapahtuu ennen tapahtumaa 2, mutta tieto tapahtumasta 4 ei voi ehtiä tapahtumaan 2, joten tapahtuma 4 ei voi aiheuttaa tapahtumaa 2. Tapahtumat 2 ja 4 voivat kyllä molemmat olla seurausta tapahtumasta 1, mutta niiden välillä ei voi olla keskinäistä syy-seuraussuhdetta.

Kuvassa origosta ylöspäin piirretty valkoinen alue kuvaa tapahtuman 2 *tulevaisuutta*. Tämän alueen tapahtumat havaitaan *kaikissa koordinaatistoissa* vasta tapahtuman 2 jälkeen, ja ne voivat olla seurausta tapahtumasta 2. Vastaavasti origosta alas päin piirretty valkoinen alue kuvaa tapahtuman 2 *mennetystä*. Tämän alueen tapahtumat havaitaan *kaikissa koordinaatistoissa* ennen tapahtumaa 2, ja ne voivat olla tapahtuman 2 syy. Harmaan alueen suhde tapahtumaan 2 on epämääriäinen. Olipa tapahtuma missä tahansa harmaalla alueella, on olemassa koordinaatistot, joista toisessa tämä tapahtuma havaitaan ennen tapahtumaa 2 ja toisessa tapahtuman 2 jälkeen. Mutta toisaalta harmaan alueen tapahtumat eivät voi vaikuttaa tapahtumaan 2, joten näiden aikajärjestyksen suhteellisuus ei riko kausaliteettia. Kahden tapahtuman syy ja seurauskuon suhde on siis absoluuttinen.

- 6.32** Otat laserosoitimen ja menet seisomaan pitkän muurin luon. Osoitat laserin muurin yhteen päähän ja sitten käänät laserin nopeasti osoittamaan muurin toiseen päähän. Määritellään tapahtumat 1: käänät lasersoitinta, 2: valopilkku muurissa lähtee liikkeelle ja 3: valopilkku saapuu perille. (a) Minkä tapahtumien välillä on syy-seuraussuhde? (b) Voiko tapahtumien aikajärjestys riippua koordinaatistosta? (c) Kuinka nopeasti valopilkku voi liikkua?

## 6.6 Säilymislait suhteellisuusteoriassa

Suhteellisuusteoreettisten prosessien analyysi ei ole aina helppoa, koska Lorentz-muunnos on matemaattisesti hankalampi ja erityisesti epäintuitiivisempi kuin klassinen Galilei-muunnos. Kuitenkaan usein ei ole tarpeellista analysoida prosessien kulkua yksityiskohtaisesti vaan säilymislakien ja systeemin alkutilan perusteella voimme päätellä paljon siitä, millainen systeemin lopputilan pitää olla. Energian ja liikemäään säilymislait pätevät myös suhteellisuusteoriassa, mutta kuten Galilei-muunnos on vain hitaissa nopeuksissa toimiva approksimaatio, myös klassiset liike-energian ja liikemäään lausekkeet pätevät vain kappaleiden ja hiukkasten liikkuessa hitaasti. Tehtäväämme onkin lopuksi tutkia miten nämä säilyvät suuret voidaan kuvata nopeuksien lähestyessä valonnopeutta.

### Liikemääärä

Kuvassa 6.29 on esitetty kahden kappaleen elastinen törmäys. Kappaleiden V (vihreä) ja P (punainen) massat ovat yhtä suuret ja kappaleet liikkuvat koordinaatistossa A aluksi yhtä suurilla vauhdilla vastakkaisiin suuntiin. Systeemin kokonaislukemäärä on siis nolla eli koordinaatisto A on kappaleiden massakeskipiste-koordinaatisto.

Koordinaatiston  $x$ -suunta on valittu niin, että kummankin kappaleen törmäyksessä saama impulssi on  $y$ -suuntainen ja koordinaatiston origon määrittelee kappaleiden törmäys (joka on tapahtuma). Kuvan esimerkissä kappaleen P alkuopeus on  $\bar{v}_{\text{alku},P(A)} = (0.6c)\hat{i} + (0.6c)\hat{j}$  ja kappaleen V  $\bar{v}_{\text{alku},V(A)} = -(0.6c)\hat{i} - (0.6c)\hat{j}$ . Törmäyksessä kummankin kappaleen nopeuden  $x$ -komponentti on vakio, ja koska myös kokonaislukemääri-energia on elastisessä törmäyksessä vakio, kappaleiden  $y$ -suuntaiset nopeuskomponentit kääntyvät ympäri. Kappaleiden nopeudet voidaan jälleen määrittää havaitsemalla kappaleet törmäyksen jälkeen. Kuvassa kappaleen V havaitseminen on tapahtuma pisteessä  $(x, y, t)_{V(A)} = (-900 \text{ m}, 900 \text{ m}, 5 \mu\text{s})$  ja kappaleen P havainto tapahtuu pisteessä  $(x, y, t)_{P(A)} = (900 \text{ m}, -900 \text{ m}, 5 \mu\text{s})$ .

Kummankin kappaleen mukana  $x$ -suunnassa kulkee kello, ja koska kellot liikkuvat koordinaatistossa A vauhdilla  $0.6c$ , ne käyvät koordinaatiston ominaisaikaa hitaammin. Tätä nopeutta vastaava Lorenzin tekijä on

$$\gamma(0.6c) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25, \quad (6.98)$$

joten kellot ehtivät mittaamaan *neljä mikrosekuntia* kun koordinaatistossa kuluu aikaa *viisi mikrosekuntia*. Niinpä sääätämällä kellot osoittamaan täsmälleen nollaa törmäyshetkellä, ne näyttävät siis aikaa  $4 \mu\text{s}$ , kun kappaleet havaitaan.

Tarkastellaan sitten samaa törmäystä koordinaatistossa B, joka liikkuu  $x$ -suunnassa A:n suhteen nopeudella  $v_{x,B(A)} = -0.6c$ . Koska koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen  $x$ -suunnassa samalla nopeudella kuin kappale V, kappaleen V nopeuden  $x$ -komponentti on tässä koordinaatistossa nolla,  $v_{x,V(B)} = 0$ . Tässäkin koordinaatistossa törmäys tapahtuu origossa, mutta kappaleiden havaintopisteiden koordinaatit muuttuvat Lorentz-muunnoksen määräämällä tavalla. Kappaleen V havaintopisteen  $x$ -koordinaatti on *nolla*, koska kappale ei liiku  $x$ -suunnassa. Sen  $y$ -koordinaatti on sama kuin koordinaatistossa A,  $y_{V(B)} = 900 \text{ m}$ , koska liikettä vastaan kohtisuorat etäisyysdet eivät muutu. Havaintoaikeita on kuitenkin

$$t_{V(B)} = \gamma_{B(A)} \left( t_{V(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{V(A)} \right) = 1.25 \cdot \left( 5 \cdot 10^{-6} \text{ s} - \frac{-0.6}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} (-900 \text{ m}) \right) = 4 \mu\text{s} \quad (6.99)$$

eli törmäyksestä kappaleen havaitsemiseen kestää koordinaatistossa B *vähemmän aikaa* kuin koordinaatistossa A.

Tämän voi ymmärtää tarkastelemalla koordinaatistossa A kappaleen V mukana kulkevaa keltoa. Kello mittaa koordinaatistossa A neljä mikrosekuntia törmäyksen ja kappaleen V havaitsemisen välillä. Kelon lukeman pitää kuitenkin olla sama, nolla, kaikissa koordinaatistoissa törmäyksen tapahtuessa ja samoin lukeman pitää olla sama, neljä mikrosekuntia, kappaleen V havainnon tapahtuessa. Kuitenkin tämä kello on koordinaatistossa B paikoillaan, joten se mittaa koordinaatiston ominaisaikaa. Niinpä koordinaatistossa B täytyy kulua neljä mikrosekuntia törmäyksen ja kappaleen V havaitsemisen välillä.

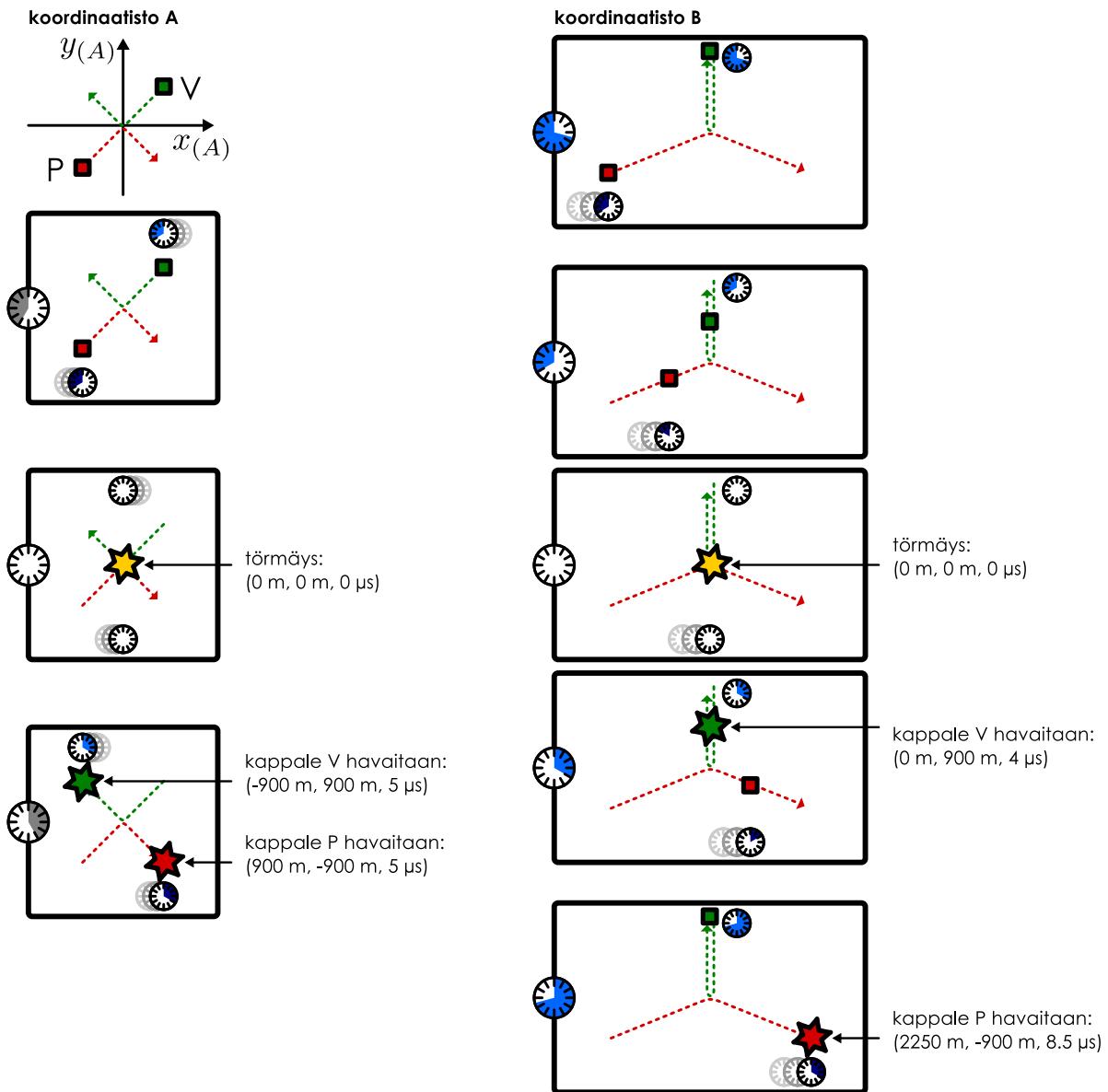
Vastaavasti voimme laskea kappaleen P havaintopisteen koordinaatit koordinaatistossa B, jolloin tulokseksi saadaan  $(x, y, t)_{P(B)} = (2250 \text{ m}, -900 \text{ m}, 8.5 \mu\text{s})$ . Nyt havaitaan törmäyksestä kappaleen P havaitsemiseen kuluvan ajan *pidentyvän* verrattuna koordinaatistoon A. Tämä johtuu siitä, että kappaleen P mukana  $x$ -suunnassa kulkeva kello liikkuu koordinaatistossa B vielä nopeammin kuin koordinaatistossa A, joten se käy vielä hitaammin. Koska kappaleen havainto tapahtuu kelon näyttäessä neljää mikrosekuntia, tätä täytyy odottaa koordinaatistossa B kauemmin kuin koordinaatistossa A.

Kappaleiden saama impulssi on kummassakin koordinaatistossa  $y$ -suuntainen, ja vain kappaleiden nopeuden  $y$ -komponentti muuttuu. Lisäksi koska törmäys on massakeskipistekoordinaatistossa symmetrinen,

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.29: Mitä nopeammin kappale liikkuu, sitä suurempi sen inertia on.

- (a) Kaksi samanlaista kappaletta törmää täysin elastiesti. (b) Törmäys koordinaatistossa, jossa toinen kappaletista ei liiku  $x$ -suunnassa.



$y$ -komponentit yksinkertaisesti kääntyvät ympäri. Nopeudet siis muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin,

$$\Delta v_{y,V(A)} = 2v_{y,\text{loppu},V(A)} = 1.2c = -2v_{y,\text{loppu},P(A)} = -\Delta v_{y,P(A)}. \quad (6.100)$$

Nämä pitää ollakin, koska systeemin liikemäärä on törmäyksessä vakio ja kappaleiden massat ovat yhtä suuret.

Koska koordinaatisto B lükkiu A:n suhteenvaihtoon  $x$ -suunnassa,  $y$ -komponentit kääntyvät ympäri myös tässä koordinaatistossa. Koordinaatistossa B kappaleiden nopeuksien muutokset ovat kuitenkin eri suuret. Kappaleen V nopeuden komponentit törmäyksen jälkeen ovat

$$v_{x,\text{loppu},V(B)} = \frac{\Delta x_{V(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{x_{V(B)}}{t_{V(B)}} = \frac{0 \text{ m}}{4 \mu\text{s}} = 0.0c \quad (6.101)$$

$$v_{y,\text{loppu},V(B)} = \frac{\Delta y_{V(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{y_{V(B)}}{t_{V(B)}} = \frac{900 \text{ m}}{4 \mu\text{s}} = 0.75c, \quad (6.102)$$

joten kappaleen nopeuden muutos törmäyksessä on

$$\Delta v_{y,V(B)} = 2v_{y,\text{loppu},V(B)} = 1.5c. \quad (6.103)$$

Kappaleen P nopeuden komponentit ovat puolestaan

$$v_{x,\text{loppu},P(B)} = \frac{\Delta x_{P(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{x_{P(B)}}{t_{P(B)}} = \frac{2250 \text{ m}}{8.5 \mu\text{s}} = 0.88c \quad (6.104)$$

$$v_{y,\text{loppu},P(B)} = \frac{\Delta y_{P(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{y_{P(B)}}{t_{P(B)}} = \frac{-900 \text{ m}}{8.5 \mu\text{s}} = -0.35c, \quad (6.105)$$

joten tämän kappaleen nopeuden muutos törmäyksessä on

$$\Delta v_{y,P(B)} = 2v_{y,\text{loppu},P(B)} = -0.7c. \quad (6.106)$$

Toisin sanoen kappale P, joka liikkuu tässä koordinaatistossa *nopeammin* kuin kappale V, käyttäätyy törmäyksessä kuin sillä olisi *suurempi inertia*.



**6.33** Mikä on kappaleen P nopeuden  $x$ -komponentti koordinaatistossa B nopeuden yhteenlaskusäennön (6.78) perusteella? Onko tulos sama kuin yllä laskettu arvo?

Ero mitatuissa nopeuksissa johtuu aikadilataatiosta. Kappaleiden mukana liikkuvat kellok kulkevat koordinaatistossa A samalla vauhdilla ja käyvät siis yhtä nopeasti, mutta koordinaatistossa B kappaleen P mukana kulkeva kello käy hitaasti. Tämä kello liikkuu koordinaatistossa B samalla nopeudella kuin kappale P liikkuu  $x$ -suunnassa,  $v_{x,P(B)} = 0.88c$ , joten kellon käynti on hidastunut tekijällä

$$\gamma_{\text{kello}(B)} = 2.125 \quad (6.107)$$

verrattuna kappaleen V mukana kulkevaan kelloon. Koska nopeus on matkan ja ajan suhde, ja kappaleiden  $y$ -suunnassa kulkemat matkat ovat kokeessa samat, kappaleen P  $y$ -suuntainen nopeus on koordinaatistossa B tekijän  $\gamma_{\text{kello}(B)}$  verran kappaleen V nopeutta pienempi, ja nopeuden muutosten suhde on siis

$$\frac{\Delta v_{y,V(B)}}{\Delta v_{y,P(B)}} = -\gamma_{\text{kello}(B)}. \quad (6.108)$$

Johdimme aikaisemmin tuloksen (2.43), jonka mukaan liikemääärän säilymisen seurauksena kahden kappaleen törmäyksessä nopeuden muutosten suhde on käänään verrannollinen kappaleiden inertioihin. Kummallakin kappaleella on tässä esimerkissä sama *massa*, mutta kokeen perusteella nopeasti liikkuvan kappaleen P *inertia* on koordinaatistossa B suurempi kuin hitaanmin liikkuvan kappaleen V *inertia* ja erityisesti inertioiden suhde on

$$\frac{m_{\text{inertia},P(B)}}{m_{\text{inertia},V(B)}} = -\frac{\Delta v_{y,V(B)}}{\Delta v_{y,P(B)}} = \gamma_{\text{kello}(B)}. \quad (6.109)$$

Toisin sanoen kappaleen *inertia* riippuu sen nopeudesta.

Koska kumpikin kappale liikkuu koordinaatistossa B, tämä tulos ei suoraan kerro kuinka yksittäisen kappaleen *inertia* riippuu sen nopeudesta. Kuitenkin klassisessa mekaniikassa kappaleiden massa ja *inertia* ovat samat, joten myös suhteellisuusteoriassa hitaasti kulkevan kappaleen inertian täytyy olla likimain sama kuin sen massa. Niinpä jos toistamme kokeen niin, että kappaleiden  $y$ -suuntaiset nopeudet ovat pienet verrattuna valonnopeuteen, kappale V on koordinaatistossa B lähes levossa,  $v_{V(B)} \approx 0$  ja kappale P liikkuu lähes suoraan  $x$ -suuntaan samalla nopeudella kuin sen vierellä kulkeva kello,  $v_{P(B)} \approx v_{x,P(B)} = v_{x,\text{kello}(B)}$ . Tällöin kappaleen V *inertia* on sama kuin sen massa,  $m_{\text{inertia},V(B)} \approx m$ , ja kappaleen P *inertia* on  $m_{\text{inertia},P(B)} = \gamma_{\text{kello}(B)} m_{\text{inertia},V(B)} \approx \gamma_{P(B)} m$ . Niinpä olemme päättelleet, että suhteellisuusteoriassa kappaleen *inertia* on *sen massan ja Lorentzin tekijän tulo*.



**6.34** (a) Mikä ovat kuvassa 6.29 (b) kappaleiden V ja P vauhti koordinaatistossa B? (b) Mitkä ovat näitä vauhtuja vastaavat Lorentzin tekijät? (c) Jos kappaleiden massa on 1 kg, mikä on niiden *inertia*? (d) Mikä on inertioiden suhde? Vertaa tästä kappaleiden nopeuden  $y$ -komponentin muutoksen suhteeseen.

Tämän päättelyn avulla voimme yleistää liikemääräni käsitteen suhteellisuusteoriaan. Kappaleen liikemäärä määriteltiin klassisessa mekaniikassa inertian ja nopeuden tulona, ja tämä sama määritelmä toimii edelleen kunhan huomioidaan inertian riippuvuus kappaleen nopeudesta,

$$\bar{p} = m_{\text{inertia}} \bar{v} = \gamma m \bar{v}. \quad (6.110)$$

Näin määritelty liikemäärä on säilyvä suure, ja jos systeemiin kohdistuvien ulkoisten voimien summa on nolla, systeemin kokonaisliikemäärä on vakio.

Tässä käytämme termiä *massa* ja symbolia  $m$  ilmaisemaan kappaleen *omassa koordinaatistossa* mitattua massaa ja inertiaa, jotka ovat siis yhtä suuret. Termillä *inertia* tarkoitetaan puolestaan liikemääärän määritelmässä esiintyvää nopeudesta riippuvaa suuretta  $m_{\text{inertia}} = \gamma m$ . Nämä eivät kuitenkaan ole yleisesti vaikintuneita nimityksiä, vaan joissakin lähteissä kappaleen lepokoordinaatistossa mitattua massaa kutsutaan *leponmassaksi* ja merkitään symbolilla  $m_0$  ja kappaleen inertiaa kutsutaan yleisesti massaksi. Oleellista on joka tapauksessa huomata, että kappaleen massaan ja inertiaan liittyy sekä invariantti ominaisuus (massa) että havaitsijan koordinaatistosta riippuva ominaisuus (inertia). Tutustuessasi uuteen tietoläheeseen on aina syytä tarkistaa, millä nimellä näitä kutsutaan!

## Energia

Klassisen mekaniikan liikemäärä siis yleistyy suhteellisuusteoriaan, kun huomioidaan inertian riippuvuus kappaleen nopeudesta. Inertia esiintyy kuitenkin liikemääärän ohella myös *liike-energian* lausekkeessa, joten mitä ilmeisimmin myös kappaleen liike-energian lauseke on suhteellisuusteoriassa erilainen kuin klassisessa mekaniikassa. Tässä tapauksessa kuitenkaan *ei riitä* vain vaihtaa klassisen mekaniikan liike-energian lausekkeeseen massan  $m$  tilalle suhteellisuusteoreettista inertiaa  $m_{\text{inertia}}$ . Viimeisenä tehtävävämmme onkin nyt johtaa liike-energialle yleinen lauseke suhteellisuusteoriassa.

Klassisessa mekaniikassa opimme, että *työ* kuvaa energian siirtymistä muodosta toiseen, eikä suhteellisuusteoria muuta tästä periaatetta mitenkään. Erityisesti kappaleen *liike-energia määriteltiin kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman tekemänä työnä*, kun kappale kiihytetään levosta nopeuteen  $v$ . Yksilotteisen liikkeen tapauksessa liike-energia on siis

$$K = W = \int F_{x,\text{kokonais}} dx. \quad (6.111)$$

Voima puolestaan määritellään *liikemäärän aikaderivaattana*,

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt}. \quad (6.112)$$

Nämä määritelmät pätevät myös suhteellisuusteoriassa, ja ainoa ero klassiseen mekaniikkaan verrattuna on liikemäärä määritelmä, jossa vakiona pysyvä massan sijaan on käytettävä nopeudesta riippuvaa inertiaa.

Lasketaan siis ensin suhteellisuusteoreettisen liikemääärän derivaatta ajan suhteen. Koska liikemääränsä lausekkeessa esiintyy sekä Lorentzin tekijä  $\gamma$  että nopeus  $v_x$ , jotka molemmat muuttuvat ajan kuluessa (koska kappale on kiihyvässä liikkeessä), voimme laskea tämän tulon derivoimissäänöllä,

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(\gamma mv_x)}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} mv_x + \gamma m \frac{dv_x}{dt}. \quad (6.113)$$

Edelleen Lorentzin tekijän derivaatta on yhdistetyn funktion derivoimissäänön perusteella

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{v_x}{c^2} \frac{dv_x}{dt}, \quad (6.114)$$

joten liikemääränsä aikaderivaatta on

$$\frac{dp_x}{dt} = \left[ \frac{\frac{v_x^2}{c^2}}{\left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{1/2}} \right] m \frac{dv_x}{dt} \quad (6.115)$$

$$= \left[ \frac{1}{\left( 1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right] m \frac{dv_x}{dt} \quad (6.116)$$

$$= \gamma^3 m \frac{dv_x}{dt}. \quad (6.117)$$

Tämä on samalla myös suoraan liukkuvaan kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt} = \gamma^3 m \frac{dv_x}{dt} = \gamma^3 m a_x. \quad (6.118)$$

Huomaa erityisesti, että  $F_{x,\text{kokonais}} \neq m_{\text{inertia}} a_x$  eli dynamiikan peruslain inertian ja kiihyvyyden avulla lausuttu muoto *ei päde* suhteellisuusteoriassa.



**6.35** Onko voima suhteellinen suure (a) Galilei-suhteellisuudessa, (b) suhteellisuusteoriassa?

Tämän perusteella kappaletta kiihdyyttävän kokonaisvoiman tekemä työ on

$$W = \int \frac{dp_x}{dt} dx = \int \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} m \frac{dv_x}{dt} dx. \quad (6.119)$$

Voimme tässä vaihtaa differentiaalien järjestyksen ja kirjoittaa

$$\frac{dv_x}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv_x = v_x dv_x \quad (6.120)$$

samoin kuin luvussa 3 klassisen mekaniikan liike-energiaa laskettaessa. Tämä vaihtaa integroimismuuttujaksi nopeuden, jolloin laskettavaksi jää integraali

$$W = \int \frac{mv_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv_x. \quad (6.121)$$

Integroitavan funktion  $f(v_x) = mv_x \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^n$  integraalifunktio on  $F(v_x) = -\frac{mc^2}{2(n+1)} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{n+1}$  ja tässä  $n = -3/2$ . Niinpä kun kappale kiihdytetään levosta nopeuteen  $v$ , siihen tehdään työ

$$W_{0 \rightarrow v} = \int_0^v mc^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dv_x = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (6.122)$$

Tämä on siis myös kappaleen suhteellisuusteoreettinen liike-energia

$$K = (\gamma - 1)mc^2. \quad (6.123)$$



**6.36** Derivoi edellä mainittu funktio  $F(v_x)$  ja osoita, että sen derivaatta on  $f(v_x)$ . Koska integrointi ja derivointi ovat käänteisoperaatiot, täytyy funktion  $f(v_x)$  integraalin olla siis  $F(v_x)$ .

Liike-energian lausekkeen voi kirjoittaa myös muotoon

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = m_{\text{inertia}} c^2 - mc^2. \quad (6.124)$$

Levossa kappaleen inertia ja massa ovat samat, joten levossa olevan kappaleen liike-energia on nolla kuten pitääkin. Liike-energian lauseke kuitenkin koostuu nopeudesta riippuvasta osuudesta  $\gamma mc^2$  sekä nopeudesta riippumattomasta  $mc^2$ , ja näilläkin on fysikaalinen merkitys. Tämä analyysi ei sitä todista, mutta vakiotermi on kappaleen *massasta riippuva sisäenergia*,

$$E_{\text{sisä}} = mc^2 \quad (6.125)$$

ja nopeudesta riippuva osuus on kappaleen *kokonaisenergia*

$$E_{\text{kokonais}} = m_{\text{inertia}} c^2 = \gamma mc^2. \quad (6.126)$$

Liike-energian lauseke (6.124) siis yksinkertaisesti kuvailee energian jakautumisen liike- ja sisäenergiaksi

$$K = E_{\text{kokonais}} - E_{\text{sisä}}. \quad (6.127)$$

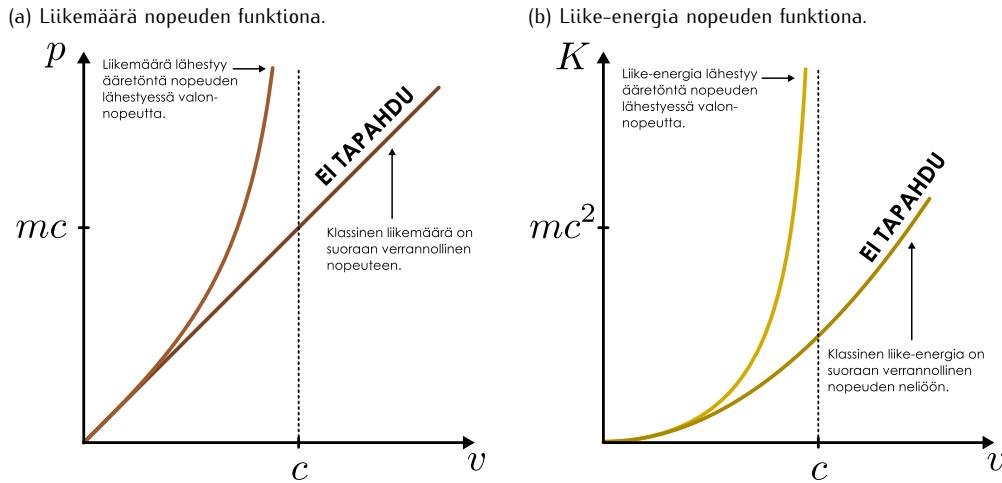


**6.37** Jos  $x$  on paljon yhtä pienempi, pätee sarjakehitelmä  $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}x$ . Kirjoita tämän avulla sarjakehitelmä Lorentzin tekijälle, kun  $x = v^2/c^2 \ll 1$ . Päättele edelleen, että nopeuden ollessa paljon valonnopeutta pienempi liike-energialle pätee klassinen lauseke  $K \approx \frac{1}{2}mv^2$ .

Tämä on suhteellisuusteorian kuuluisimpia tuloksia, jonka mukaan *kappaleen massaan liittyy energia  $mc^2$* , vaikka kappale olisi levossa. Tätä energiota kutsutaakin myös *lepoenergiaksi*. Massa on siis energian muoto ja toisaalta energia ilmenee massana. Koska näiden välinen verrannollisuuskerroin  $c^2$  on hyvin suuri luku, arkiisin prosesseihin liittyvät energiamäärität ovat liian pieniä, jotta massan muutoksia havaittaisiin. Sen sijaan

## SUHTEELLISUUS

Kuva 6.30: Kappaleen liikemääärän ja liike-energian riippuvuus nopeudesta suhteellisuusteoriassa (oikein) sekä klassisen mekaniikan mukaan (väärin).

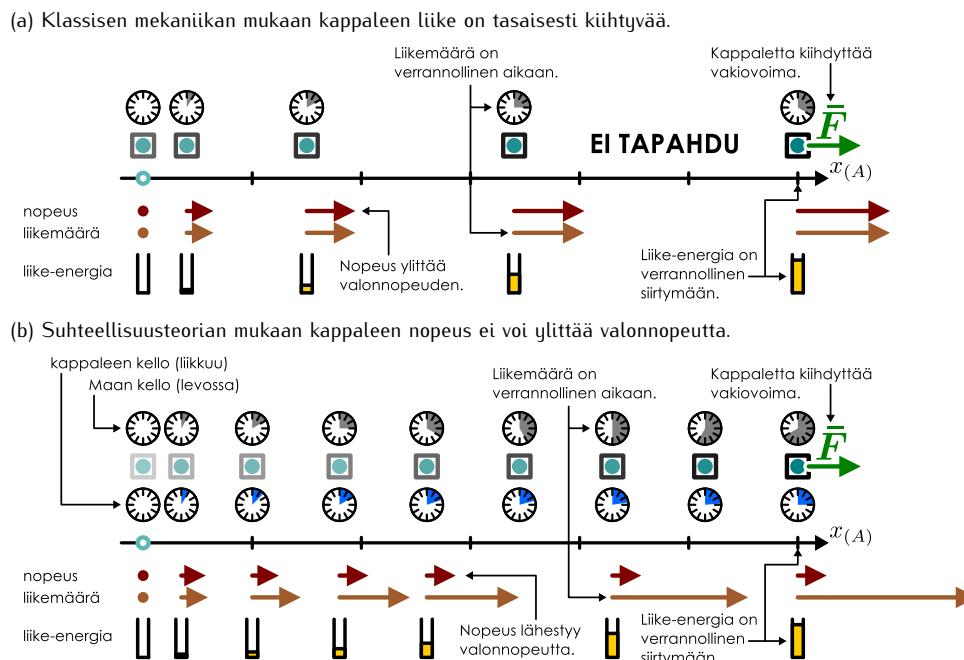


ydin- ja hiukkasfysiikassa tulos on aivan keskeinen, sillä esimerkiksi ydinreaktioissa ja hiukkasten hajoamisessa syntyvien hiukkasten kokonaismassa on tavallisesti *eri suuri* kuin alkuperäisten hiukkasten kokonaismassa, ja massojen erotukseen liittyvä energia siirtyy tällaisissa reaktioissa hiukkasten liike-energiaksi.

Kuvassa 6.30 on pürretty kappaleen liikemääärän itseisarvo ja liike-energia nopeuden funktiona sekä klassisen mekaniikan perusteella (väärin) että suhteellisuusteorian mukaisesti (oikein). Newtonin mekaniikassa liikemäärä on suoraan verrannollinen nopeuteen ja liike-energia nopeuden neliöön. Tämä pätee erittäin hyvin, kun nopeus on selkeästi valonnopeutta pienempi. Sen sijaan nopeuden lähestyessä valonnopeutta sekä liikemäärä että liike-energia kasvavat rajattaa. Tämä johtuu siitä, että kappaleen *inertia* kasvaa nopeuden kasvaessa ja lähestyy ääretöntä nopeuden lähestyessä valonnopeutta. Niinpä mitä lähempänä valonnopeutta kappale liikkuu, sitä suurempi työ sen *nopeuden* muuttamiseen tarvitaan, eikä massallista kappaletta voi koskaan saada liikkumaan valonnopeudella tai sitä nopeammin missään koordinaatistossa. Valonnopeus on siis universumin yleinen nopeusrajoitus: kappaleet eivät voi liikkua sitä nopeammin, eikä ole myöskään mielekästä tarkastella toistensa suhteen valoa nopeammin kulkevia koordinaatistoja.

Kappaleen nopeuden, liikemäären ja liike-energian muutosta on havainnollistettu myös lükediagrammein

Kuva 6.31: Vakiovoiman vaikutus aluksi levossa olevaan kappaleeseen.



kuvassa 6.31. Kuvassa on esitetty aluksi levossa olevan kappaleen liike vakiovoiman vaikuttaessa kappaleeseen jälleen sekä klassisen mekaniikan (a, *väärin*) että suhteellisuusteorian (b, *oikein*) perusteella. Klassinen kappale on koko ajan tasaisesti kiihtyvässä liukkeessä. Kappaleen nopeus ja liikemäärä ovat suoraan verrannolliset voiman *vaikutusaikaan*, sillä mitä kauemmin voima ehtii kappalella kiihdystää, sitä suuremman impulssin kappale saa. Kappaleen saama liike-energia puolestaan on verrannollinen *siirtymään*, sillä mitä pidemmän matkan kappale kulkee, sitä suuremman työn voima siihen tekee. Suhteellisuusteoriassa impulssi ja työperiaatteet toimivat täsmälleen samoin kuin klassisessa mekaniikassa. Kappaleen saama impulssi ja siis sen liikemäärä on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan kappalella kiihdystetään. Kappaleeseen tehty työ ja siten kappaleen liike-energia puolestaan on suoraan verrannollinen siihen, kuinka pitkän matkan kappale on kiihdystyneen aikana kulkenut. Ero klassiseen mekaniikkaan on vain sinä, että vaikka liikemäärä ja liike-energia kasvavat, nopeus ei voi koskaan ylittää valonnopeutta. Kappaleelle voidaan kuitenkin antaa mielivaltaisen suuri liikemäärä ja liike-energia.



**6.38** Vertaa kuvan 6.31 klassista (a) ja suhteellisuustoreettista (b) liikediagrammia. Kuvaan (a) piirretystä viimeisessä (oikeanpuolimaisessa) havaintopisteessä kappaleen nopeus, liikemäärä ja liike-energia ovat  $v_x$ ,  $p_x$  ja  $K$ . Missä kohtaa kuvan (b) liikeradalla kappaleella on sama nopeus, liikemäärä tai liike-energia?

### Energian ja liikemäärän yhteys

Näiden tulosten perusteella voimme myös johtaa yhteyden hiukkasten kokonaisenergian ja liikemäärän välille. Suoraan laskemalla näemme, että kokonaisenergian ja liikemäärän *neliöiden* erotukselle pätee

$$E_{\text{kokonais}}^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (c^2 - v^2). \quad (6.128)$$

Toisaalta Lorentzin tekijän neliö on

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad (6.129)$$

joten

$$E_{\text{kokonais}}^2 - p^2 c^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^4. \quad (6.130)$$

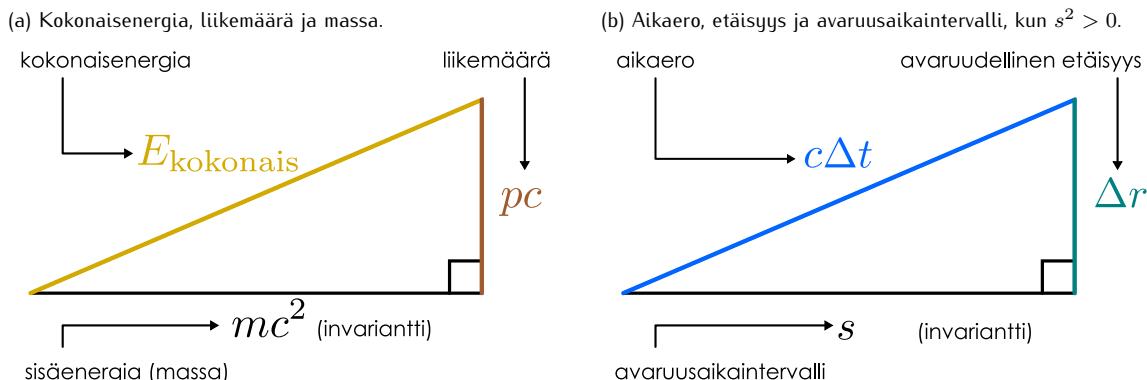
Kokonaisenergian ja liikemäärän neliöille pätee siis

$$E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 = E_{\text{sisä}}^2. \quad (6.131)$$

Relaatio on erityisen käytökkoinen siksi, että se ei sisällä hiukkasen nopeutta lainkaan. Sekä energia että liikemäärä riippuvat hiukkasen nopeudesta Lorenzin tekijän kautta, ja tämä sisältää matemaattisesti hankalan neliöjuurilausekkeen. Tuloksen (6.131) perusteella kokonaisenergian ja liikemäärän neliöiden välillä on kuitenkin yksinkertainen yhteyts. Niinpä esimerkiksi alkeishiuikkasprosessit, joissa sekä kokonaisenergia että liikemäärä ovat vakioita, on yleensä helpoin analysoida suoraan energian ja liikemäärän avulla ratkaisematta väillä hiukkasten nopeutta.

Lausekkeen (6.131) oikealla puolella esiintyy vain kappaleen massa ja valonnopeus, jotka ovat molemmat *invariantteja*. Niinpä myös lausekkeen vasemman puolen täytyy olla invariantti. Toisin sanoen vaikka kokonaisenergia  $E_{\text{kokonais}}$  ja liikemäärä  $p$  riippuvat koordinaatistosta, niiden neliöiden erotus  $E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2$

Kuva 6.32: Graafinen muistisääntö energian, liikemäärän ja massan yhteydelle. Suureiden arvot muodostavat kaikissa koordinaatistoissa suorakulmaisen kolmion, jonka sivu  $mc^2$  on kaikissa koordinaatistoissa sama.



## SUHTEELLISUUS

ei riipu. Sääntö muistuttaa Pythagoraan lausetta, ja sen voikin muistaa kuvassa 6.32 esitetyn suorakulmaisen kolmion avulla. Hiukkisen kokonaisenergia, liikemääri ja massa muodostavat suorakulmaisen kolmion *kaikissa* koordinaatistoissa, ja kolmion sisäenergiaa kuvavaan sivun pituus on kaikissa koordinaatistoissa *sama*.

Tulos muistuttaa avaruusaikaintervallin lauseketta

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = \text{invariantti}, \quad (6.132)$$

joka on niin ikään invariantti. Myös avaruusaikaintervallin lausekkeessa esiintyy suureiden neliötä, koska se johdettiin *avaruuden geometriasta* käyttäen Pythagoraan lausetta. Osoitamme vielä lopuksi, että energian ja liikemäären yhteyks voidaan johtaa suoraan avaruusaikaintervallin lausekkeesta, ja tämän vuoksi energian ja liikemäären välillä on Pythagoraan lauseen tapainen neliöllinen riippuvuus.

Hiukanen voidaan havaita koordinaatistossa A kahdessa avaruusaikakoordinaatiston pisteessä ja näiden havaintotapahtumien välille voidaan laskea avaruusaikaintervalli, joka siis ei riipu koordinaatistosta. Jos samalla mitataan havaintojen välinen ominaisaika hiukkisen omassa koordinaatistossa B,  $\Delta\tau_{(B)} = \frac{1}{\gamma_{B(A)}}\Delta t_{(A)}$ , intervallin paikkakoordinaateista riippuvat termit ovat verrannolliset hiukkisen liikemäären skalaarikomponentteihin

$$\left(\frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta\tau_{(B)}}\right)^2 = \left(\gamma_{B(A)} \frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta t_{(A)}}\right)^2 = (\gamma_{B(A)} v_{x,(A)})^2 = \left(\frac{p_{x,(A)}}{m}\right)^2 \quad (6.133)$$

ja ajasta riippuva osuus on verrannollinen hiukkisen kokonaisenergiaan

$$\left(c \frac{\Delta t_{(A)}}{\Delta\tau_{(B)}}\right)^2 = \left(c \gamma_{B(A)} \frac{\Delta t_{(A)}}{\Delta t_{(A)}}\right)^2 = (c\gamma_{B(A)})^2 = \left(\frac{E_{\text{kokonais},(A)}}{mc}\right)^2 \quad (6.134)$$

Niinpä avaruusaikaintervallin lausekkeen (6.132) kertominen termillä  $(mc)^2/(\Delta\tau_{(B)})^2$  antaa tuloksen

$$E_{\text{kokonais},(A)}^2 - p_{(A)}^2 c^2 = \text{invariantti}. \quad (6.135)$$

Tulos on sama kuin yhtälö (6.131), mutta tässä se johdettiin avaruusaikaintervallia tarkastellen. Tämä päätely osoittaa, että energian ja liikemäären suhde on suhteellisuusteoriassa hyvin samankaltainen kuin ajan ja paikan suhde. Siinä missä liikemäärä liittyy paikan muuttumiseen, energia liittyy kappaleen ajan muuttumiseen. Itse asiassa jos ajan ajatellaan olevan avaruusajan yksi ulottuvuus, kappaleen kokonaisenergiaa voi tavallaan pitää sen liikemäärvektorin "komponenttina" aikaulottuvuuden suunnassa.



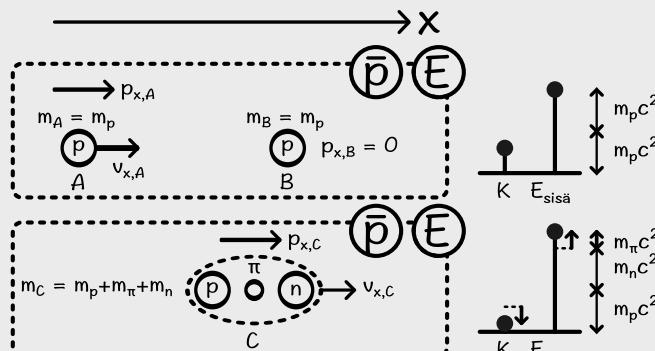
**6.39** Protoni liikkuu koordinaatistossa A vauhdilla  $0.6c$  ja on koordinaatistossa B levossa. Mikä on kummassakin koordinaatistossa protonin (a) sisäenergia, (b) liike-energia, (c) kokonaisenergia, (d) liikemääri, (e) lausekkeen  $E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2$  arvo?

### esimerkki 6.6

### Relativistinen törmäys

**Nopeasti liikkuva protoni törmää toiseen levossa olevaan protoniin. Törmäyksessä yksi protoni muutuu neutroniksi sekä pioniksi. Neutronin massa on likimain sama kuin protonin ja pionin massa on 0.149-kertainen protonin verrattuna. Törmäyksen jälkeen kaikki hiukkaset liikkuvat likimain samalla nopeudella. Mikä on protonin liike-energia ennen törmäystä?**

**TILANNE** Protonin massa on  $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$  kg, neutronin  $m_n \approx m_p$  ja pionin  $m_\pi = 0.149m_p$ . Merkitään aluksi liikkuvaa protonia indeksillä A ja levossa olevaa protonia indeksillä B. Koska hiukkaset liikkuvat lopuksi kaikki samalla nopeudella, voimme kuvata nytä yhtenä hiukkasena C, jonka massa on  $m_C = 2m_p + m_\pi = 2.149m_p$ . Pürrtetään kuva systeemistä ennen törmäystä ja sen jälkeen.



**SUUNNITELMA** Oletetaan ettei protoneihin kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia. Tällöin protonien ja pionin muodostaman systeemin kokonaisenergia ja kokonaistiikemääri ovat vakiot. Aluksi systeemin energia koostuu protonien lepoenergiasta ja protonin A liike-energiasta. Lopuksi systeemin energia koostuu yhdistetyn hiukkasen C lepo- ja liike-energioista.

Törmäyksessä systeemin massa kasvaa pionin massan verran, ja tähän massaan lütttyvän lepoenergian täytyy tulla protonin liike-energiasta. Liikemääärän säilymisen johdosta hiukkaset liikkuvat myös törmäyksen jälkeen, joten systeemillä on edelleen myös liike-energiaa.

Protonien energiat ja liikemääät liittyytä toisiinsa. Protonille A pätee

$$E_A^2 - p_A^2 c^2 = m_p^2 c^4 \quad (6.136)$$

ja protonille B, jonka liikemäärä on nolla,  $p_B = 0$ ,

$$E_B = m_p c^2. \quad (6.137)$$

Reaktiossa syntyyvä hiukkasen C energialle ja liikemääälle pätee

$$E_C^2 - p_C^2 c^2 = m_C^2 c^4 = (2.149 m_p)^2 c^4. \quad (6.138)$$

Näillä merkinnöillä kokonaisenergian vakioisuuden perusteella siias

$$E_A + E_B = E_C \quad (6.139)$$

ja liikemäään vakioisuudesta seuraa

$$p_A = p_C. \quad (6.140)$$

**RATKAISU** Säilymislakien perusteella voimme sijoittaa yhtälössä (6.138) hiukkasen C energian tilalle protonien A ja B kokonaisenergian (6.139) ja liikemäään tilalle hiukkasen A liikemäään (6.140). Nämä saadaan relaatio

$$(E_A + E_B)^2 - p_A^2 c^2 = (2.149 m_p)^2 c^4. \quad (6.141)$$

Tässä voidaan kertoa binomin neliö auki

$$(E_A + E_B)^2 = E_A^2 + 2E_A E_B + E_B^2, \quad (6.142)$$

jolloin saadaan

$$E_A^2 - p_A^2 c^2 + 2E_A E_B + E_B^2 = 2.149^2 m_p^2 c^4. \quad (6.143)$$

Tässä esiintyvät lausekkeet  $E_A^2 - p_A^2 c^2$  sekä  $E_B^2$  ovat kuitenkin yhtä suuret kuin  $m_p^2 c^4$ , joten hiukkasen B energia ja hiukkasen A liikemäärä voidaan eliminoida. Nämä saadaan yhtälö

$$2m_p c^2 E_A + 2m_p^2 c^4 = 2.149^2 m_p^2 c^4, \quad (6.144)$$

jossa ainoa tuntematon on hiukkasen A kokonaisenergia, jonka arvoksi ratkeaa

$$E_A = \frac{1}{2}(2.149^2 - 2)m_p c^2 = 1.309 m_p c^2. \quad (6.145)$$

Hiukkasen A *liike-energia* voidaan edelleen laskea vähentämällä kokonaisenergiasta lepoenergia,

$$K_A = E_A - m_p c^2 = 0.309 m_p c^2 = 0.309 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 4.73 \cdot 10^{-11} \text{ J}. \quad (6.146)$$

Mathematica:

```
(* massat ja hiukkanen B (asetetaan m_p = 1 ja c = 1) *)
mA = 1;
mB = 1;
mC = 2.149;
eneB = mB;
pB = 0;

(* E ja p ovat vakiot *)
eneC = eneA + eneB;
pC = pA + pB;

(* ratkaistaan E_A ja p_A relaation E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 avulla *)
ratkaisuA = Solve[{{
    eneA^2 - pA^2 == mA^2,
    eneC^2 - pC^2 == mC^2
}, {eneA, pA}}]
{{eneA -> 1.3091, pA -> -0.844834}, {eneA -> 1.3091, pA -> 0.844834}};

{eneC, pC} /. ratkaisuA[[2]]
{2.3091, 0.844834}

(* lukuarvot *)
mp = 1.7*10^-27;
c = 3*10^8;
kA = (eneA - 1) mp c^2 /. ratkaisuA[[2]]
{4.72924*10^-11}
```

**ARVIOINTI** Systeemin kokonaisenergia on  $E_A + E_B = 2.31m_p c^2$ , josta protonin A liike-energian osuus on  $0.31/2.31 = 0.13$ . Liike-energiaa muuttuu prosessissa pionin lepoenergiaksi  $\Delta E_{\text{sisä}} = 0.15m_p c^2$ , joten hiukkasten liike-energiaksi jää törmäyksen jälkeen  $K_C = K_A - \Delta E_{\text{sisä}} = 0.16m_p c^2$ . Siispä likimain puolet protonin liike-energiasta muuttuu pionin lepoenergiaksi (siis massaksi). Kaikki protonin liike-energia ei voi muuttua törmäyksessä pionin energiaksi, sillä liikemäären säilymislain takia hiukkasten täytyy olla törmäyksen jälkeen edelleen lükkeessä ja niillä on edelleen liike-energiaa.

Tarkistetaan, että liikemäärä ja energia säilyvät. Protonin A liikemäärä on aluksi

$$p_A = \sqrt{\frac{1}{c^2} E_A^2 - m_p^2 c^2} = \sqrt{1.309^2 - 1} m_p c = 0.845 m_p c \quad (6.147)$$

ja tämän täytyy olla siis myös hiukkasten kokonaisliikemäärä lopuksi,  $p_C = 0.845 m_p c$ . Voimme laskea hiukkasten kokonaisenergian törmäyksen jälkeen tämän liikemäären perusteella,

$$E_C = \sqrt{p_C^2 c^2 + (m_C c^2)^2} = \sqrt{5.332 m_p c^2} = 2.31 m_p c^2. \quad (6.148)$$

Tämä on sama kuin kokonaisenergia aluksi,  $E_C = E_A + E_B$ , joten kokonaisenergia on vakio ja säilymislait toteutuvat.

Hiukkasten nopeuksia ei kysytty eikä niitä tarvittu laskussa. Itse asiassa lasku olisi huomattavan vaikea, jos yrittäisimme ensin ratkaista nopeudet. Nyt kuitenkin kun hiukkasten energiat ja liikemäärit tunnetaan, voimme laskea myös hiukkasten nopeudet tilanteen hahmottamiseksi. Protoni B on aluksi levossa ja sen nopeus on nolla. Protonin A nopeus on helpoin laskea energian avulla, sillä hiukkasen Lorentz-tekijä on  $\gamma_A = E_A/(m_p c^2) = 1.309$  ja nopeus on siten

$$v_{x,A} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_A^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{1.309^2}} = 0.645 c. \quad (6.149)$$

Hiukkasjoukon C Lorentz-tekijä on puolestaan  $\gamma_C = E_C/(m_C c^2) = 2.309/2.149 = 1.075$  ja nopeus

$$v_{x,C} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_C^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{1.075^2}} = 0.366 c. \quad (6.150)$$

Hiukkasten nopeus on siis törmäyksen jälkeen hieman suurempi kuin puolet alkuperäisestä nopeudesta. Tämä on järkevä, sillä liikkuvan hiukkasjoukon massa on lopuksi likimain kaksinkertainen aluksi lükkeessä olleen protonin massaan verrattuna. Toisaalta protonin alkunopeus on niin suuri, että suhteellisuustoreettinen inertian kasvu täytyy huomioida. Systeemin liikemäärä aluksi ja lopuksi on sama,

$$p_{x,\text{alku}} = \gamma_A m_A v_{x,A} = 1.29 \cdot m_p \cdot 0.63c = 0.82 m_p c = 1.07 \cdot 2.14 m_p \cdot 0.36c = \gamma_C m_C v_{x,C} = p_{x,\text{loppu}}, \quad (6.151)$$

kuten pitääkin.



**6.40** Kirjoita omien sanojen tiivistelmä suhteellisuustoreettisesta liikemääristä ja energiasta. Pohdi, mitä samaa ja mitä erilaista näiden suureiden kuvaussessa on klassiseen mekanikkaan verrattuna. Taulukoi yhtälöt, jotka yhdistävät nopeuden, liikemäären ja kokonaisenergian.

## Yhteenveton: Suhteellisuus

### Suhteellisuus

- Suure on **suhteellinen**, jos sen arvo voi saada eri koordinaatistossa eri arvoja.
- Suure on **absoluuttinen** eli sen arvo on **invariantti**, jos se havaitaan samanlaisena kaikissa koordinaatistossa.
- **Suhteellisuusperiaatteen** mukaan kaikki luonnonlait havaitaan täsmälleen samanlaisina kaikissa toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvissa koordinaatistossa. Jos koordinaatistot A ja B liikkuvat toistensa suhteen, ei ole mahdollista määrittää absoluuttisesti kumpi on paikoillaan ja kumpi liikkuu.
- **Valonnopeus** eli valon nopeus tyhjiössä,  $c = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , on invariantti luonnonvakio, jolle mitataan sama arvo kaikissa koordinaatistossa.
- **Tapahtuma** on paikka-aikakoordinaatiston piste eli asia, jolla on täsmälliset paikka- ja aikakoordinaatit  $(x, y, z, t)$ .
- Jos koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen nopeudella  $v_{x,B(A)}$ , ja koordinaatistossa A havaitaan tapahtuma  $(x, y, z, t)_{(A)}$ , tapahtuman koordinaatit B:ssä ovat **Galilei-muunnoksen** mukaan

$$\begin{aligned} x_{(B)} &= x_{(A)} - v_{x,B(A)} t_{(A)} \\ y_{(B)} &= y_{(A)} \\ z_{(B)} &= z_{(A)} \\ t_{(B)} &= t_{(A)}. \end{aligned}$$

Galilei-muunnos pätee vain, jos koordinaatistot liikkuvat huomattavasti valoa hitaammin,  $v_{x,B(A)} \ll c$ .

- Jos  $x$ -suuntaan liikkuvan kappaleen nopeus koordinaatistossa A on  $v_{x,(A)}$ , sen nopeus koordinaatistossa B on Galilei-muunnoksen perusteella
- $v_{x,(B)} = v_{x,(A)} - v_{x,B(A)}$ .
- Koordinaatistojen välinen täsmällinen muunnos on **Lorentz-muunnos**, joka pätee myös nopeuksien lähestyessä valonnopeutta

$$\begin{aligned} x_{(B)} &= \gamma_{B(A)} (x_{(A)} - v_{x,B(A)} t_{(A)}) \\ y_{(B)} &= y_{(A)} \\ z_{(B)} &= z_{(A)} \\ t_{(B)} &= \gamma_{B(A)} \left( t_{(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{(A)} \right), \end{aligned}$$

missä esiintyy ns. *Lorentzin tekijä*

$$\gamma_{B(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}}}. \quad (6.152)$$

- Jos  $x$ -suuntaan liikkuvan kappaleen nopeus koordinaatistossa A on  $v_{x,(A)}$ , sen nopeus koordinaatistossa B on Lorentz-muunnoksen perusteella

$$v_{x,(B)} = \frac{v_{x,(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} v_{x,(A)}}.$$

- Lorentz-muunnoksen mukaan aika ja pituus ovat suhteellisia, toisistaan riippuvia suureita, jotka muodostavat yhdessä neliuotteisen **avaruusajan**.
- Lorentzin tekijä on yksi, kun koordinaatistot eivät liiku toistensa suhteen. Tekijä lähestyy ääretöntä koordinaatistojen nopeuksien lähestyessä valonnopeutta. Galilei-suhteellisuus on sitä parempi approksimaatio, mitä lähempänä tekijä on arvoa yksi.
- Kahden tapahtuman välinen **avaruusaikaintervalli** on neliöllinen etäisyys

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2].$$

Tämä suure on **Lorentz-invariantti**.

### Säilymislait

- Liikemäärä ja energia ovat säilyviä mutta suhteellisia suureita. Niitä ei voi luoda eikä hävitää, mutta niille mitataan eri koordinaatistossa erilaiset arvot.
- Kappaleen kokonaisenergia on sen makroskooppisen liikeenergian ja sisäenergian summa

$$E_{\text{kokonais}} = K + E_{\text{sisä}} \quad (6.153)$$

Liike-energia on suhteellinen suure, mutta sisäenergia on absoluuttinen suure. Esimerkiksi kappaleen lämpötila ei riipu koordinaatistosta, jossa sitä tarkastellaan.

- Hiukkasista koostuvan kappaleen hiukkasten liike voidaan jakaan järjestyneeseen massakeskipisteeseen liikkeeseen sekä hiukkasten satunnaisliikkeeseen massakeskipisteen suhteen. Järjestynyt osuus on kappaleen liike-energiaa ja epäjärjestynyt osuus sisäenergiaa (lämpöenergiaa).
- Nopeudella  $\bar{v}$  liikkuvan kappaleen tai hiukkisen liikemäärä on

$$\bar{p} = \gamma m \bar{v} = \frac{m \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.154)$$

- Kappaleen kokonaisenergia on

$$E_{\text{kokonais}} = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.155)$$

mikä koostuu liike-energiasta

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (6.156)$$

sekä sisäenergiasta

$$E_{\text{sisä}} = mc^2. \quad (6.157)$$

Siispä myös levossa olevalla hiukkasella on sen massaan liittyvä energiaa.

- Kappaleen kokonaisenergia, liikemäärä, massa ja sisäenergia riippuvat toisistaan

$$E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 = E_{\text{sisä}}^2. \quad (6.158)$$

Massa ja sisäenergia ovat Lorentz-invariantit.

### Sanasto

- koordinaatisto (reference frame)
- inertialkoordinaatisto (inertial frame)
- massakeskipistekoordinaatisto (center of mass frame)
- näennäisvoima (fictitious force)
- keskipakoisvoima (centrifugal force)
- painottomuus (weightlessness)
- suhteellinen (relative)
- absoluuttinen (absolute)
- invariantti (invariant)
- suppea suhteellisuusteo (special relativity)
- yleinen suhteellisuusteo (general relativity)
- ekvivalenssiperiaate (principle of equivalence)

- suhteellisuusperiaate (principle of relativity)
- valonnopeus (light speed)
- muunnos (transformation)
- tapahtuma (event)
- aikadilataatio (time dilation)
- pituuskontraktio (length contraction)
- samanaikaisuus (simultaneity)
- ominaisaika (proper time)
- ominaispituus (proper length)
- avaruusaika (spacetime)
- intervalli (interval)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

**6.1** Merkitään  $m_{\text{inertia}} = 2 \text{ kg}$  ja  $m_{\text{paineo}} = 1 \text{ kg}$ .

(a) Potentiaalienergia riippuu painavasta massasta,  $U = m_{\text{paineo}}gh = 9.8 \text{ J}$ .

(b) Liike-energia riippuu inertiasiasta,  $K = \frac{1}{2}m_{\text{inertia}}v^2 = 1 \text{ J}$ .

(c) Kiilthyvyys riippuu inertiasiasta,  $a = F/m_{\text{inertia}} = 0.5 \text{ m/s}^2$ .

(d) Energiaperiaatteella  $\Delta K = -\Delta U$  eli  $\frac{1}{2}m_{\text{inertia}}v^2 = m_{\text{paineo}}gh$  josta nopeudeksi saadaan  $v = \sqrt{2ghm_{\text{paineo}}/m_{\text{inertia}}} = 3.1 \text{ m/s}$ .

Tällaista kappaletta ei tietenkään ole, mutta esimerkiksi vakiosähkökentässä  $E$  olevan sähkövarauksen  $q$  potentiaalienergia etäisyydellä  $h$  potentiaalienergian nollatasosta on  $U = qEh$ . Jos tällainen varattu hiukkanen päästetään putoamaan sähkökentässä, se saa vauhdin  $v = \sqrt{2Ehq/m}$ . Varaus sähkökentässä on siis esimerkki tilanteesta, jossa hiukkasen potentiaalienergia ja liike-energia riippuvat eri ominaisuuksista, varauksesta ja massasta. Onkin yllättävä, että gravitaation potentiaalienergia riippuu samasta ominaisuudesta kuin hiukkasen liike-energia!

**6.2** Ei. Näennäisvoima ei aihedu vuorovaikutuksesta, joten ei ole olemassa mitään kappaleiden paria, joihin kumpaan vuorovaikutuksen pitäisi kohdistaa voima. Asian voi ajatella myös niin, että voiman ja vastavoiman laki seuraa liikemäären säilymislaista, mutta epäinertiaalikoordinaatistossa liikemäären säilymislaki ei näennäisesti päde. Niinpä voiman ja vastavoiman lainkaan ei tarvitse toteutua näennäisvoimille.

**6.3** Jarrutuksessa auton koordinaatisto käyttää ikään kuin painovoima vaikuttaisi viistosti alas ja eteenpäin kulkusuuntaan nähdien. Pallo pyrkii kohomaan painovoimaan nähdien vastakkaiseen suuntaan, joten se siirtyy taaksepäin. Tämä on ehkä hiukan epäintuitiivinen tulos, koska pallollakin on inertiaa, ja sen voisi kuvitella kokevan näennäisvoiman eteenpäin kuten muutkin kappaleet. Niin se kokeekin, mutta autossa oleva ilma kokee vielä suuremman näennäisvoiman eteenpäin, jolloin ilma virtaa jarrutuksessa auton etuosaan ja työntää kevyen heliumin taakseen auton takaosaan.

**6.4** (a) Sukkulalla voi ajatella olevan tasaisesti kiilthyvässä vapaassa pudotuksessa, joten se putoaa levosta sekunnissa matkan  $\Delta y = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 4.45 \text{ m}$ . (Huomaa, että nyt  $g = 8.9 \text{ m/s}^2$ .)

(b) Jos sukkulalla olisi nopeus  $v$  maanpinnan suuntaan ja se ei putoaisi alas, se kulkisi sekunnissa sivusuuntaisen matkan  $\Delta x = v\Delta t$ . Voimme piirtää suorakulmaisen kolmion, jonka yksi kärki (A) on maan keskipisteessä, toinen (B) sukkulan alkuperäisessä paikassa, ja kolmas (C) sukkulan paikassa siirtymän jälkeen. Kateettien AB pituus on  $L_{AB} = 6700 \text{ km}$  ja kateettin BC pituus on  $L_{BC} = \Delta x$ . Hypotenuusa AC on hieman kateettia AB pidempi,  $L_{AC} = \sqrt{L_{AB}^2 + L_{BC}^2} = \sqrt{L_{AB}^2 + (\Delta x)^2}$ . Kuitenkin koska sukkula todellisuudessa putoaa, se ei päädy pisteeeseen C vaan likimain matkan  $\Delta y = 4.45 \text{ m}$  tätä lähemmäs pistettä A. Nyt pitää siis ratkaista  $\Delta x$  nün, että  $L_{AC} = L_{AB} + \Delta y$ . Korottamalla tämä yhtälö puolittain neljöön ja sijoittamalla aikaisemmat tulokset saadaan  $L_{AC}^2 = L_{AB}^2 + (\Delta x)^2 = L_{AB}^2 + 2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2$  josta  $(\Delta x)^2 = 2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2$  eli  $\Delta x = \sqrt{2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{2L_{AB}\Delta y} \approx 7700 \text{ m}$ . Sukkulalla pitää siis liikkua sivusuuntaisella nopeudella 7.7 km/s, jotta se pysyisi vapaassa pudotuksessa jatkuvasti yhtä kaukana maasta (eli kiertoradalla).

(c) Ympyräliikkeessä  $a_r = -v^2/r$ . Edellä lasketulla nopeudella saadaan  $a_r = -(7700 \text{ m/s})^2/6700000 \text{ m} = 8.85 \text{ m/s}^2$ , mikä on juuri sukkulan putoamiskiilthyvyys.

**6.5** (a) Voimme aina vaihtaa koordinaatistojen nimiä, joten jos Galilei-muunnoksessa vaihdetaan kirjaimet A ja B keskenään, mikään ei muutu. Siispä päätee  $\bar{r}_{(A)} = \bar{r}_{(B)} - \bar{v}_{A(B)}t$ , ja tästä voidaan edelleen ratkaista paikka koordinaatistossa B, jolloin  $\bar{r}_{(B)} = \bar{r}_{(A)} + \bar{v}_{A(B)}t$ .

(b) Vertaamalla tästä tulosta yhtälöön (6.7) nähdään, että  $\bar{v}_{A(B)} = -\bar{v}_{B(A)}$ . Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos koordinaatisto A liikkuu koordinaatiston B suhteeseen nopeudella  $\bar{v}$ , koordinaatisto B liikkuu A:n suhteeseen nopeudella  $-\bar{v}$ .

**6.6** Kummassakin koordinaatistossa vaunu on hetkellä  $t = 0 \text{ s}$  pisteessä  $x_{(A)} = x_{(B)} = -0.6 \text{ m}$ , sillä koordinaatistojen origot ovat samassa paikassa. Hetkellä  $t = 1 \text{ s}$  vaunu on koordinaatistossa A pisteessä  $x_{(A)} = 1.0 \text{ m}$  ja koordinaatistossa B pisteessä  $x_{(B)} = 0.3 \text{ m}$ . Koordinaatiston B origo on pisteessä  $x_{B(A)} = 0.7 \text{ m}$ . Vaunun nopeudeksi mitataan  $v_{x,(A)} = 1.6 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,(B)} = 0.9 \text{ m/s}$ . Koordinaatistojen välinen nopeus on  $v_{x,B(A)} = 0.7 \text{ m/s}$ . Vaunun koordinaattien sijoitus paikan Galilei-muunnokseen antaa  $0.3 \text{ m} = 1.0 \text{ m} - 0.7 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s}$ , mikä on tosi yhtälö. Nopeuksien sijoitus nopeuden Galilei-muunnokseen antaa  $0.9 \text{ m/s} = 1.6 \text{ m/s} - 0.7 \text{ m/s}$ , mikä myös pätee. Galilei-muunnos siis toimii.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**6.8** Massakeskipistekoordinaatistossa systeemin kokonaisliikemäärä on nolla. (a) Toisiinsa tarttuneiden kappaleiden täytyy jäädä paikoilleen, jotta liikemäärä olisi nolla ja massakeskipiste levossa.

(b) Systeemi koostuu nyt kahdesta hiukkasesta, joten sen kokonaisliikemäärä on nolla vain jos hiukkasilla on yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärät,  $\bar{p}_A = -\bar{p}_B$ . Tämä ei riipu mitenkään syntyneistä hiukkasista.

**6.9** Vaunun hajoaminen on absoluuttinen tapahtuma, joten jos se ei tapahdu A:ssa, se ei varmasti tapahdu myöskään B:ssä. Niinpä vaunuun ei voi kohdistua suuria voimia myöskään koordinaatistossa B. Syg tähän on se, että vaikka vaunun nopeus on B:ssä suuri, nopeuden muutos on sama kummassakin koordinaatistossa.

**6.10** Koordinaatistossa A vaunun V energian muutos on  $\Delta K_{V(A)} = -0.5 \text{ J}$  ja vaunun O  $\Delta K_{O(A)} = 0.5 \text{ J}$ . Niinpä kokonaisliike-energian muutos on nolla. Koordinaatistossa B kumman kaan vaunun vauhti ei muutu, joten kokonaisliike-energia on tässäkin koordinaatistossa vakio.

**6.11** Massakeskipistekoordinaatistossa vaunujen täytyy saada yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärät,  $p_{x,V} = -p_{x,O}$ , jotta kokonaisliikemäärä olisi nolla. Kevyemmän vaunun täytyy siis saada suurempi vauhti. Ts. koska  $m_V v_{x,V} = -m_O v_{x,O}$  niin jos  $m_V = 2m_O$ , pitää olla  $v_{x,O} = -2v_{x,V}$ . Tällöin vaunujen liike-energoiden suhde on

$$\frac{K_O}{K_V} = \frac{\frac{1}{2}m_O v_{x,O}^2}{\frac{1}{2}m_V v_{x,V}^2} = \frac{m_O(2v_{x,V})^2}{2m_O v_{x,V}^2} = 2 \quad (6.159)$$

eli kevyempi vaunu saa kaksinkertaisen liike-energian.

**6.12** Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos, joka puolestaan riippuu massasta ja nopeuden muutoksesta. Nopeus on suhteellinen suure mutta nopeuden muutos on kaikissa inertialkoordinaatistoissa sama, joten impulssi on siis absoluuttinen suure Galilei-suhteellisuudessa. Tämän perusteella myös voima on absoluuttinen suure. Jousen potentiaalienergia puolestaan riippuu jousen pituudesta. Jousen päiden paikkakoordinaatit ovat suhteellisia, mutta niiden välinen etäisyys ei ole, joten jousen potentiaalienergiakin on absoluuttinen.

**6.13** (a) Omassa koordinaatistossasi olet aina paikoillasi, joten liike-energiasi on nolla (jos jätämme heiluvien käsiens ja jalkojen liike-energian huomioimatta). (b) Yliopisto oli aluksi paikoillaan, jolloin sen liike-energia oli nolla. Lopuksi yliopisto liikkui 5 m/s vauhdilla. Koska yliopiston massa on valtava, sen liike-energiakin on hyvin suuri. (c) Ei tietenkään. Mistä ihmeestä yliopiston saama valtava liike-energia voisi tulla? Selitys tähän on se, että et ole inertialkoordinaatistossa, jos kiihdytät levosta 5 m/s nopeuteen. Säilymislait eivät päde epäinertialkoordinaatistoiissa.

**6.14** (a) Kaikki nopeusvektori muuttuvat junan liikkeen suuntaan.

(b) Jääpalan massakeskipisteen suhteeseen samaan suuntaan liikkuvien molekyylien vauhti kasvaa. Vastakkaiseen suuntaan liikkuvien molekyylien vauhti pienenee.

(c) Lämpötila ei tietenkään muudu.

(d) Liike-energia kasvaa.

**6.15** (a) A:ssa  $v_{x,(A)} = 100 \text{ m/s}$  ja  $v_{y,(A)} = 100 \text{ m/s}$ . B:ssä  $v_{x,(B)} = 90 \text{ m/s}$  ja  $v_{y,(B)} = 100 \text{ m/s}$ .

(b) A:ssa  $v_{(A)} = 141.4 \text{ m/s}$  ja B:ssä  $v_{(B)} = 134.5 \text{ m/s}$ .

(c) Liike-energia on A:ssa  $K_{x-suunta,(A)} = \frac{1}{2}mv_{x,(A)}^2 = 5.0 \text{ J}$  ja samoin  $K_{y-suunta,(A)} = 5.0 \text{ J}$ . B:ssä  $K_{x-suunta,(B)} = 4.05 \text{ J}$  ja  $K_{y-suunta,(B)} = 5.0 \text{ J}$ .

(d) Kokonaisliike-energia on A:ssa  $K_{(A)} = 10.0 \text{ J}$  ja B:ssä  $K_{(A)} = 9.05 \text{ J}$ .

**6.16** Massakeskipisteen nopeus on  $v_{x,cm(A)} = v_{x,B(A)} = 135 \text{ m/s}$ . Hiukkasten nopeudet B:ssä ovat  $v_{x,1(B)} = 15 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,2(B)} = -15 \text{ m/s}$ .

(a) A:ssa liike-energiat ovat  $K_{1(A)} = 11.25 \text{ J}$  ja  $K_{2(A)} = 7.2 \text{ J}$ , joten kokonaisenergia on  $K_{(A)} = 18.45 \text{ J}$ . B:ssä puolestaan  $K_{1(B)} = K_{2(B)} = 0.1125 \text{ J}$  ja  $K_{(B)} = 0.225 \text{ J}$ .

(b) Massakeskipisteen liikkeen energia on A:ssa  $K_{cm(A)} = \frac{1}{2}Mv_{x,cm(A)}^2 = 18.225 \text{ J}$ . B:ssä massakeskipiste ei liiku, joten  $K_{cm(B)} = 0 \text{ J}$ .

(c) Massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia on A:ssa  $K_{(A)} - K_{cm(A)} = 0.225 \text{ J}$ . Tämä on sama myös B:ssä, jossa se on myös kokonaisenergia.

Tässä esimerkissä massakeskipisteen liikkeen energia vastaa mikroskooppisen systeemin liike-energiaa ja massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia sisäenergiaa. Kohdan (c) tulos vastaa tekstissä johdettua tulosta, jonka mukaan sisäenergia on invariantti.

**6.17** Kuvien välillä valo kulkee yhden metrin, joten niiden välillä kuluu aikaa  $\Delta t = \Delta x/c = 3.3 \text{ ns}$ . Koordinaatisto B kulkee tässä ajassa 0.1 m A:n suhteeseen, joten sen nopeus on  $v_{x,B(A)} = 0.1c$ . Jos kuva (b) olisi oikein, valo kulkisi kuvien välillä yhteen suuntaan matkan 1.1 m ja toiseen suuntaan matkan 0.9 m. Niinpä valolle mitattaisiin yhteen suuntaan nopeus  $1.1c$  ja toiseen  $0.9c$ , mikä on suhteellisuusperiaatteen mukaan väärin.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**6.18** Tapahtumia ovat erimeriksi "pallo irtoaa kädestä", "pallo on lakinistessä" ja "pallo osuu maahan". Välitussa koordinaatistossa tapahtuman "pallo irtoaa kädestä"  $x$ - ja  $y$ - ja  $t$ -koordinaatit ovat kaikki negatiiviset. Tapahtuman "pallo osuu maahan"  $x$ - ja  $t$ -koordinaatit ovat positiiviset mutta  $y$ -koordinaatti on negatiivinen.

**6.19** Jos kallon etäisyys origosta on  $s$ , signaalilta kestää aika  $\Delta t = s/c$  saavuttaa kello. Niinpä tällainen kello pitää asettaa tämän verran edelle origossa olevaa keloa, jotta kellot olisivat lopuksi samassa ajassa. Yhden metrin matkalla tämä aikaero on  $\Delta t = 3.3$  ns.

**6.20** Aluksen kellot kävät maan koordinaatistossa keskenään yhtä nopeasti, mutta ne ovat eri ajassa. Ne kävät kuvan perusteella myös hitaammin kuin maan kello, sillä koordinaatistossa A maan kello ja aluksen perän kello näyttävät molemmat aikaa "15 yli" kun viimeisessä kuvassa maan kello on ajassa "15 vaille" kun taas aluksen perän kello on vasta noin "20 vaille".

**6.21** Jos anturin ja lampun väillä on matkaa, tieto valon saapumisesta anturiin ei voi siirtyä välittömästi lamppuun. Tieto voidaan siirtää korkeintaan valonnopeudella, joten jos lampun väähdyksestä valon havaitsemiseen kuluu  $L/c$ , lampun seuraavaan väähdykseen kuluu vielä toiset  $L/c$ .

**6.22** Viisi ehtii minuutissa siirtyä  $60 \text{ s}/1.2 \text{ s} = 50$  kertaa, joten kello mittaa minuutissa tämän ajan. Kello siis jättää 10 sekuntia joka minuutti.

**6.23** Käytetään valonnopeudelle arvoa  $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . (a)  $\gamma = 1.0000$ , (b)  $\gamma = 1.0006$ , (c)  $\gamma = 1.06$ , (d)  $\gamma = 2.29$ .

**6.24** Jos valon kulku levossa olevan kallon läpi vaatii ajan  $\Delta\tau$ , kello siis mittaa tämän ajan valon kulkissa kerran sen läpi. Liikkuvassa kellossa valo joutuu kulkemaan matkan  $\Delta r = c\Delta t$ , mutta kello mittaa tällöin ajan vain ajan  $\Delta\tau$ . Valon nopeudelle saatasiin siis tämän kallon mukaan arvo  $v = \Delta r/\Delta\tau = c\Delta t/\Delta\tau$ . Koska  $\Delta t > \Delta\tau$ , valolle mitattaisiin tämän kallon mukaan suurempi nopeus kuin  $c$ . Aika pitää siis jokaisessa koordinaatistossa mitata nimenomaan levossa olevalla kelolla.

**6.25** Jos alukset pysähtyisivät B:ssä samanaikaisesti, alus V lähtisi liikkeelle koordinaatistossa A ennen alusta O. Nämä ollessa alusten välinen etäisyys olisi B:ssä vakio, mutta A:ssa liikkuvien alusten välinen etäisyys olisi pienempi kuin paikoillaan olevien, koska ensiksi liikkeelle lähtevä alus V ehtisi liikkua läheemmäs alusta O ennen O:n lähtöä liikkeelle. Koordinaatistojen väillä havaittaisiin samanlainen pituuskontraktio kuin kuvassa 6.23. Aluksi alusten välinen etäisyys olisi suurempi A:ssa (jossa alusten väli on paikoillaan), mutta lopuksi alusten väli olisi suurempi B:ssä (jossa alusten väli on paikoillaan). Alusten välinen etäisyys on suurimmillaan aina siinä koordinaatistossa, jossa alukset ovat levossa.

**6.26** (a) Noin 4 vuotta. (b) Liikkuvan aluksen kello käy maan koordinaatistossa hitaammin aikadilataation vuksi. Kallon käynti on hidastunut tekijän 1/5 verran, joten aikaa kuluu aluksessa noin 4/5 vuotta. (c) Omassa koordinaatistossaan alus on paikoillaan. (d) Alpha Centauri liikkuu nopeudella  $0.98c$ . (e) Matka on pituuskontraktioon vuoksi  $4/5$  valovuotta. (f) Aikaa kuluu noin  $4/5$  vuotta. Siis vaikka maan koordinaatistossa mikään ei voi päästä Alpha Centauriin nopeammin kuin 4 vuodessa, aluksen miehistön näkökulmasta matkan voi tehdä selvästi lyhyemmässä ajassa.

**6.27** (a) Tapahtuman "valo lähee" koordinaatit ovat  $(x, y, z)_1 = (0, 0, 0)$  kummassakin koordinaatistossa. Tapahtuman "valo havaitaan" koordinaatit ovat silloin B:ssä  $(x, y, z)_{2(B)} = (0, L, \tau)$  ja A:ssä  $(x, y, z)_{2(A)} = (v_x t, L, t)$ . Tässä  $\tau = L/c$  ja  $t = \gamma\tau$  aikadilataation perusteella.

(b) B:ssä tapahtumiin aikaeron nelio on  $(\Delta t_{(B)})^2 = \tau^2 = L^2/c^2$  ja A:ssa  $(\Delta t_{(A)})^2 = t^2 = \gamma^2\tau^2$ . B:ssä tapahtumiin välisten etäisyyden nelio on  $(\Delta r_{(B)})^2 = L^2$  ja A:ssa  $(\Delta r_{(A)})^2 = (vt)^2 + L^2 = (v_x\gamma L/c)^2 + L^2$ . Avaruusaikaintervalli on B:ssä siis  $s_{(B)}^2 = c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 = c^2(L/c)^2 - L^2 = 0$  ja A:ssa  $s_{(A)}^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = c^2\gamma^2(L/c)^2 - (v_x L/c)^2 - L^2 = \gamma^2(1 - v_x^2/c^2)L^2 - L^2$ . Mutta koska  $\gamma^2 = 1/(1 - v_x^2/c^2)$ , tämänkin lausekkeen arvo on itse asiassa  $s_{(A)}^2 = 0$ . Nämä pitää ollakin, koska  $s^2$  on invariantti eli sillä pitää olla sama arvo sekä A:ssa että B:ssä. Lisäksi avaruusaikaintervalli on *aina* nolla tapahtumille, joita yhdistää suoraan valonnopeudella kulkeva signaali.

**6.28** Sijoitus antaa

$$\begin{aligned}
 s_{(B)}^2 &= c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 \\
 &= c^2\gamma^2(t_{(A)} - \frac{v}{c^2}x_{(A)})^2 - \gamma^2(x_{(A)} - vt_{(A)})^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 \\
 &= \gamma^2c^2t_{(A)}^2 - 2\gamma^2t_{(A)}vx_{(A)} + \frac{v^2}{c^2}x_{(A)}^2 - \gamma^2x_{(A)}^2 + 2\gamma^2x_{(A)}vt_{(A)} - \gamma^2v^2t_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 \\
 &= \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})t_{(A)}^2 - \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})x_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2.
 \end{aligned} \tag{6.160}$$

Edelleen koska  $\gamma^2 = 1/(1 - \frac{v^2}{c^2})$ , päätee  $\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$  ja niinpä tämä sievenee muotoon

$$s_{(B)}^2 = t_{(A)}^2 - x_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 = s_{(A)}^2. \tag{6.161}$$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

**6.29 (a)** A:ssa välähdykset ovat tapahtumat 1:  $(x, t)_{(A)} = (0, 0)$  ja 2:  $(x, t)_{(A)} = (680, 3)$ , missä yksiköt ovat metrejä ja mikrosekunteja. Tapahtuman 1 koordinaatit B:ssä ovat  $(x, t)_{(B)} = (0, 0)$  ja tapahtuman 2 koordinaatit ovat

$$x_{2(B)} = \gamma(x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)}) = 1.25 \cdot (680 \text{ m} + 0.6 \cdot 300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 3.0 \mu\text{s}) = 1525 \text{ m} \quad (6.162)$$

$$t_{2(B)} = \gamma(t_{(A)} - \frac{1}{c^2}v_{x,B(A)}x_{(A)}) = 1.25 \cdot (3.0 \mu\text{s} + 0.6/300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 680 \text{ m}) = 5.45 \mu\text{s}. \quad (6.163)$$

**(b)** C:n nopeus on  $v_{x,C(B)} = 1525 \text{ m}/5.45 \mu\text{s} = 279.8 \text{ m}/\mu\text{s} = 0.93c$ .

**(c)** Yhteenlaskusääntö antaa

$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2}v_{x,B(A)}v_{x,C(A)}} = \frac{0.75c + 0.6c}{1 + 0.75 \cdot 0.6} = 0.93c \quad (6.164)$$

eli saman tuloksen kuin (b)-kohta, kuten pitääkin.

**6.30** Kuvan 6.25 (b) perusteella paikkakoordinaatin täytyy olla hieman yli 900 m ja ajan hieman alle 3  $\mu\text{s}$ . Lorentz-muunnos nopeudella  $v_{x,A(B)} = -0.6c$  antaa tarkoiksi koordinaateiksi

$$x_{(A)} = \gamma(x_{(B)} - v_{x,A(B)}t_{(B)}) = 1.25 \cdot (600 \text{ m} + 0.6 \cdot 300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 1.0 \mu\text{s}) = 975 \text{ m} \quad (6.165)$$

$$t_{(A)} = \gamma(t_{(B)} - \frac{1}{c^2}v_{x,A(B)}x_{(B)}) = 1.25 \cdot (1.0 \mu\text{s} + 0.6/300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 600 \text{ m}) = 2.75 \mu\text{s}. \quad (6.166)$$

**6.32 (a)** 1 (laserin käantö) aiheuttaa tapahtumat 2 ja 3 (pilkun lüke).

(b) Tapahtuma 1 on aina ennen tapahtumia 2 ja 3, mutta tapahtumienv 2 ja 3 järjestys riippuu koordinaatistosta.

(c) Pilkku voi liikkua mielivaltaisen nopeasti, myös nopeammin kuin valonnopeus. Tässä ei ole mitään ihmelistä, koska vaikka pilkku voi liikkua tapahtumasta 2 tapahtumaan 3 mielivaltaisen nopeasti (eikä pilkun lüke suinkaan ole tasaista), tapahtuma 2 ei "lähetä" pilkkua matkaan eikä tällä tavalla siis voi lähetää signaaliala tapahtumasta 2 tapahtumaan 3. Ei siis myöskään ole mitään ongelmaa siinä, että joissakin koordinaatistoissa 3 tapahtuu ennen tapahtumaa 2.

**6.33** Nyt  $x$ -suuntaiset nopeudet ovat  $v_{x,P(A)} = 0.6c$  ja  $v_{x,B(A)} = -0.6c$ . Nopeuksien yhteenlaskusäännöllä  $v_{x,P(B)} = (v_{x,P(A)} - v_{x,B(A)})/(1 + v_{x,B(A)}v_{x,P(A)}/c^2) = (0.6c + 0.6c)/(1 + 0.6^2) = 0.88c$ . Tämä on sama tulos kuin tekstillä. Huomaa, että  $y$ -suuntaisia nopeuksia ei voi laskea  $x$ -suuntaisten nopeuksien yhteenlaskusäännöllä!

**6.34 (a)** Kappaleen V vauhti on  $v_{V(B)} = 0.75c$ . Kappaleen P vauhti on puolestaan  $v_{P(B)} = \sqrt{v_{x,P(B)}^2 + v_{y,P(B)}^2} = 0.95c$ .

(b) Lorentzin tekijät ovat  $\gamma_{V(B)} = 1.512$  ja  $\gamma_{P(B)} = 3.213$ .

(c) Inertiaat ovat  $m_{\text{inertia},V(B)} = 1.512 \text{ kg}$  ja  $m_{\text{inertia},P(B)} = 3.213 \text{ kg}$ .

(d) Inertioiden suhde on  $m_{\text{inertia},P(B)}/m_{\text{inertia},V(B)} = 3.213/1.51 = 2.125$ . Tämä on täsmälleen sama kuin tekstillä laskettu kappaleiden nopeuden muutoksen suhde, joten suhteellisuusteorettisen inertian ja nopeuden tulona määritelty lükemäärä on törmäyksessä vakio.

**6.35** Galilei-suhteellisuudessa lükemäärä muutokset ovat absoluuttiset, joten voimakin on. Suhteellisuusteoriassa lükemäärä muutos on suhteellinen, koska lükemäärä riippuu nopeudesta epälinearisesti Lorentz-tekijästä johtuen. Niinpä voimakin on suhteellisuusteoressa suhteellinen suure. Osoittautuu kuitenkin, että jos kappale kulkee suoraan  $x$ -akselia pitkin ja siihen kohdistuu vain  $x$ -suuntainen voima (eli tilanne on täysin yksilotteinen), tämä voima on sama kaikissa  $x$ -suuntaan lükkivissä inertialkoordinaatistoissa. Toisin sanoen vaikka  $x$ -suuntaiselle voimalle saatiin hankalalta näyttävä lauseke  $F_x = \gamma^3 ma_x$ , tämä lauseke on itse asiassa yksilotteisessa lükkeessä invariantti.

**6.36**  $F'(v_x) = -mc^2/(2n+2) \cdot (n+1)(1-v_x^2/c^2)^n \frac{d}{dv_x}(1-v_x^2/c^2) = -\frac{1}{2}mc^2(1-v_x^2/c^2)^n \cdot -2v_x/c^2 = mv_x(1-v_x^2/c^2)^n$ .

**6.37**  $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ . Niinpä lüke-energialle pätee  $K = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{v^2}{2c^2} mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$ .

**6.38** Klassisen mallin nopeus ylittää valonnopeuden, mitä suhteellisuusteoressa ei voi tapahtua. Lükemäärä on yhtä suuri, kun voima on vaikuttanut yhtä kauan eli antanut saman impulssin. Lüke-energia on yhtä suuri, kun voima on tehnyt työtä yhtä pitkän säätymän yli.

**6.39** Protonin massa on  $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

(a)  $E_{\text{sisä}} = mc^2 = 1.50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$  kummassakin koordinaatistossa.

(b)  $K_{(A)} = (\gamma_{(A)} - 1)mc^2 = 3.75 \cdot 10^{-11} \text{ J}$  ja  $K_{(B)} = 0 \text{ J}$ .

(c)  $E_{(A)} = \gamma_{(A)}mc^2 = K_{(A)} + E_{\text{sisä}} = 1.88 \cdot 10^{-10} \text{ J}$  ja  $E_{(B)} = E_{\text{sisä}} = 1.50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ .

(d)  $p_{(A)} = \gamma_{(A)}mv_{(A)} = 3.76 \cdot 10^{-19} \text{ kgm/s}$  ja  $p_{(B)} = 0 \text{ kgm/s}$ .

(e)  $E_{(A)}^2 - (pc)^2 = 2.26 \cdot 10^{-20} \text{ J}^2 = E_{\text{sisä}}^2$  ja samoin  $E_{(B)}^2 - (pc)^2 = 2.26 \cdot 10^{-20} \text{ J}^2$ . Tämä lauseke on invariantti, joten sen täytyykin saada sama arvo kummassakin koordinaatistossa.

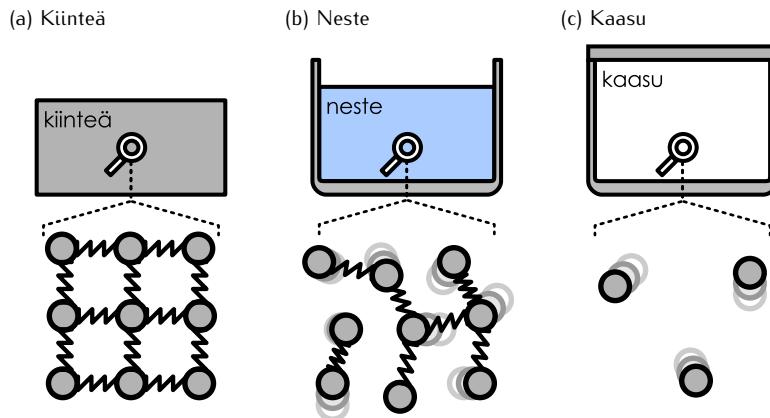
# 7 Jatkuva aine

Aine koostuu atomeista, mutta makroskooppisesta näkökulmasta tämä ei ole mitenkään ilmeistä. Ihmisen mittakaavassa yksittäisiä atomeja ei voi havaita vaan aineet vaikuttavat jatkuvilta ja itse asiassa monien ilmiöiden kuvaminen on paljon helpompaa, kun aineen ajatellaan olevan jatkuva materiaa erillisten atomien sijaan. Tässä luvussa tutustummekin jatkuvan aineen malliin. Kuvaamme tämän mallin avulla virtaavien aineiden eli nesteiden ja kaasujen käyttäytymistä yksinkertaisissa tilanteissa. Aloitamme myös lämpöoppia tutustumisen tutkimalla energian siirtymistä lämpönä ja sen vaikutusta aineiden lämpötilaan, paineeseen, tilavuuteen ja olomuotoon.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvilla aineen olomuotojen ominaisuuksia ja tulkita faasidiagrammia
- määritellä paine ja lämpötila sekä selittää, kuinka näitä suureita voidaan mitata
- kuvilla millaista on kokoonpuristumattoman nesteen pyörteeton virtaus ja määrittää paine tällaisessa virtauksessa
- selittää termodynamiikan pääsäännöt sanallisesti
- määritellä lämpö, lämpökapasiteetti ja latentilämpö sekä selittää kuinka näihin liittyvä energia voi siirtyä tai varastoitua
- määrittää lämpönä siirtymän energian teho, kun lämmönjohtavuus tunnetaan
- selittää, mikä on tilanyhtälö, ja määrittää kaasun tilanmuuttujien arvot ideaalikaasun tilanyhtälön avulla
- määrittää kappaleen koon muutos, kun sen lämpölaajenemiskerroin tunnetaan

Kuva 7.1: Aineen tavalliset olomuodot.



## 7.1 Paine

### Aineen olomuodot

Mekaniikassa tarkastelimme *kiinteästä aineesta* tehtyjen jäykkien kappaleiden liikettä. Maailma ei kuitenkaan koostu vain kiinteästä aineesta vaan myös *nesteistä* ja *kaasuista*. Kiinteä, neste ja kaasu ovat aineen **tavallisimmat olomuodot** (kuva 7.1). Esimerkiksi vesi voi esiintyä nestemäisenä vetenä, kiinteänä jääänä tai kaasumaisena höyryänä. Eri olomuodossa olevat aineet voivat myös sekoittua keskenään, ja tällaisia sekoitukseja kutsutaan *kolloideiksi*. Esimerkiksi huonekaluissa yleisesti pehmusteena käytetty vaahamuovi on kiinteän aineen (muovin) ja kaasun (ilman) yhdistelmä. Kermavaahto puolestaan on nesteiden (kerman, joka on veden ja rasvan sekoitus) ja kaasun (ilman) sekoitus.

On olemassa muitakin olomuotoja kuin edellä mainitut kiinteä, neste ja kaasu. Esimerkiksi tähdissä aine on *plasmaa*, jossa atomit ovat hajonneet ja ytimet sekä elektronit ovat toisistaan erillään. Aineilla voi myös olla useita tapoja esiintyä näissä olomuodoissa. Esimerkiksi grafiitti (lyijykynän kärki) ja timantti ovat kumpikin hiilen kiinteitä olomuotoja, mutta näillä on aivan erilaiset ominaisuudet. Fysiikassa olomuotaan yleisempi termi aineen tiettylle esiintymismuodolle onkin **faasi**. Grafiitti ja timantti ovat siis eri faaseja, vaikka kumpikin on kiinteää hiiltä. Joissakin tapauksissa eri faasit voivat olla hyvin samanlaisia ja erota vain jonkin tietyn ominaisuuden suhteen. Esimerkiksi tietyt raudan yhdisteet voivat olla magneettisia tai ei-magneettisia. Nämäkin ovat aineen eri faaseja.

Kiinteällä kappaleella on tietty ominainen koko ja muoto, jotka kappale säilyttää ellei jokin ulkoinen tekijä niitä muuta. Esimerkiksi jääkuutio pysyy kuution muotoisena vaikka sen pudottaisi pyöreäpohjaiseen lasiin. Nesteilläkin on tietty tilavuus, mutta niillä ei ole ominaista muotoa. Jos nelikulmaisesta lasista kaataa nestemäistä vettä pyöreäpohjaiseen lasiin, vesi mukautuu lasin muotoon. Vesi täyttää kummastakin lasista kuitenkin yhtä suuren tilavuuden. Kaasulla sen sijaan ei ole ominaista muotoa eikä tilavutta, vaan kaasut pyrkivät laajenemaan ja täyttämään niille annetun tilavuuden kokonaan. Jos esimerkiksi heliumilla täytetyn ilmapallon rikkoo, pallon sisällä ollut heliumkaasu pakenee ja levää pallon ympäristöön.

Mikroskooppisessa mittakaavassa eri olomuodot eroavat niiden atomien järjestäytymisessä. Kiinteissä aineissa atomit ja molekyylit ovat kiinnittyneet toisiinsa ja järjestyneet yleensä varsinkin säännölliseen rakenteeseen. Atomit eivät pääse liikkumaan toistensa suhteen ja siksi aine ei muuta helposti muotoaan. Nesteissäkin molekyylit kiinnittyvät toisiinsa ja ovat lähekkäin, mutta nesteissä molekyylit liikkuvat niin nopeasti, että niiden väliset sidokset voivat ajoittain rikkoutua, jolloin molekyylit pääsevät liikkumaan toistensa suhteen. Nesteellä on ominainen tilavuus, koska sen molekyylejä ei ole helppo puristaa lähemmäs toisiaan tai vetää toisistaan kauemmas. Nesteellä ei kuitenkaan ole ominaista muotoa, koska molekyylit pääsevät liikkumaan. Kaasuissa molekyylien väliset sidokset ovat hajonneet ja molekyylit ovat kauhana toisistaan. Nopeasti liikkuvat molekyylit pääsevät näin ollen levämään minkä muotoiseen ja kokoiseen astiaan tahansa.

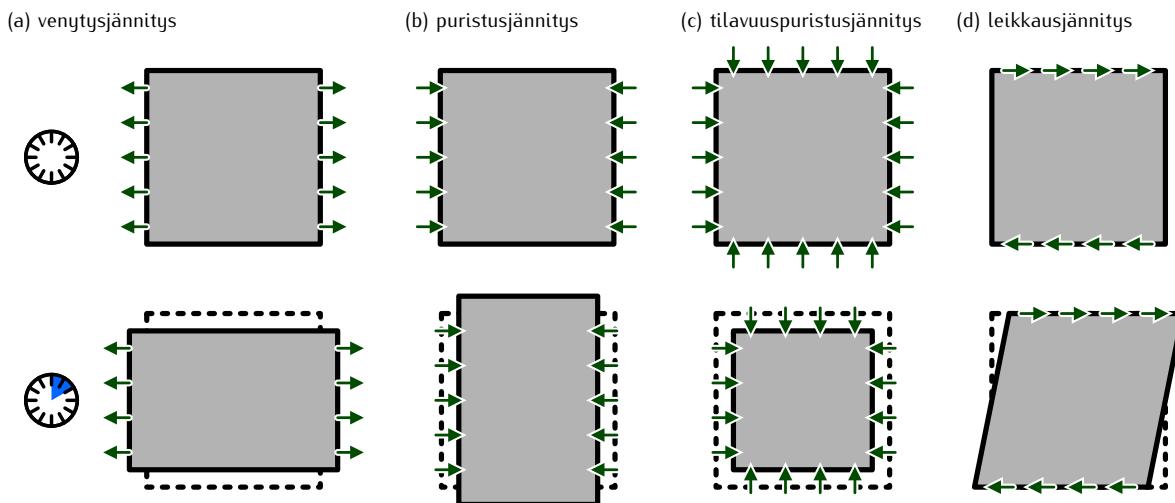


**7.1** Etsi tietoa veden faaseista. Onko vedellä olemassa erilaisia kiinteitä faaseja?

### Jännitys ja paine

Edelliset havainnot pätevät täsmälleen vain silloin kun aineeseen ei kohdistu suuria ulkoisia voimia. Kuiten mekanikan yhteydessä opimme, mitkään kiinteät aineet eivät ole täysin jäykkiä vaan niiden muotoa ja

Kuva 7.2: Jännitys saa kiinteän aineen muuttamaan muotoaan.



kokoa voidaan muuttaa *jännitysvoimien* avulla. Jos jännitysvoimat ovat heikot, kiinteiden kappaleiden muoto muuttuu elastisesti Hooken lain mukaan ja kappaleet pyrkivät palaamaan takaisin alkuperäiseen muotoonsa. Hyvin voimakas jännitys puolestaan johtaa plastisiin muodonmuutoksiin, jotka eivät enää itsestään palaudu. Aineiden kovuus ja pehmeys riippuukin siitä, kuinka herkästi ne muuttavat muotoaan jännityksessä.

Aineet reagoivat erityyppisiin jännitysvoimiin eri tavoin, kuten kuvassa 7.2. Jos kappaletta puristetaan vastakkaisilta puolilta, se pyrkii tavallisesti levämään muihin suuntiin eli litistymään. Tällöin kappaleen kokonaistilavuus muuttuu gleensä hyvin vähän. Tilavuutta voidaan muuttaa puristamalla kappaletta kaikista suunnista, mutta kiinteiden aineiden tilavuuden muuttaminen vaatii tavallisesti hyvin suuria jännitysvoimia.

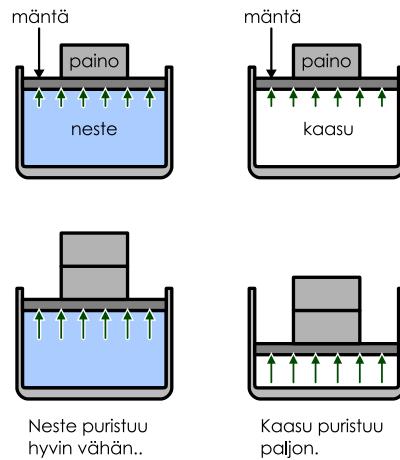
Kiinteitä kappaleita voidaan myös väentää kohdistamalla niihin voimia, joilla on eri vaikutussuorat. Esimerkiksi kuvassa 7.2 (d) kuutiota venytetään sen tahkojen suuntaisilla voimilla. Tätä kutsutaan leikkausjännitykseksi. Vaikka aine vastustaisi puristus- ja venytysjännitystä voimakkaasti, sitä voi silti olla helppo taivuttaa tai leikata. Esimerkiksi tavallista paperia täytyy venytää hyvin voimakkaasti ennen kuin paperi repeää, mutta paperia on silti helppo repiä, leikata ja taivuttaa.

Tarkastellaan seuraavaksi nesteiden ja kaasujen käyttäytymistä erilaisten jännitysvoimien vaikuttaessa. Voit tehdä tai kuvitella seuraavan kokeen. Aseta kämmenesi veden alle vastakkain mutta hieman irti toisistaan. Siirrä sitten käsiäsi läheemmäs toisiaan. Käsien liikkumessa tunnet kämmenissäsi veden niihin kohdistaman voiman, joka vastustaa käsiä liikkettä. Tässä kokeessa puristat vettä kahdelta vastakkaiselta puolelta, jolloin nesteeseen kohdistuu *puristusjännitys*. Tämä saa nesteen liikkumaan pois käsiestä välistä, ja nesteen kykyä vastustaa tätä virtausta kutsutaan *viskositeetiksi*. Veden viskositeetti on pieni eli vesi liikkuu helposti, kun taas esimerkiksi siirapin viskositeetti on suuri.

Kuitenkin kun pysäytät kätesi, voimaa ei enää tunnu. Jos olist puristanut jousta, jousi pyrkisi nyt työttämään kämmeniasi poispäin toisistaan. Vesi ei kuitenkaan tee näin, koska neste saa tilanteessa uuden muodon eikä pyri palautumaan alkuperäiseen muotoonsa. Jos teet saman kokeen ilmassa, tulos on sama. Voit toistaa saman kokeen myös niin, että liikutatkin käsiäsi kämmenien suunnassa pitäen kämmenien välisen etäisyyden vakiona. Tällöin veteen (tai ilmaan) kohdistuu *leikkausjännitys*. Tässäkin tapauksessa vesi (tai ilma) vastustaa hieman käsiä liikkettä, mutta se ei pyri vetämään käsiä takaisin alkuasentoon. Nesteet ja kaasut eivät siis ole elastisia puristus- tai leikkausjännityksen suhteeseen.

Jatketaan puristuskokeita täyttämällä tiivis, liukkuvalla männällä suljettu astia kuvan 7.3 tapaan. Männän päällä on paino, johon kohdistuva painovoima vetää mäntää alas. Tällöin mäntä kohdistaa astiassa olevaan nesteeseen voiman alas, ja tämän voiman vastavoima on nesteen mäntään kohdistama voima ylöspäin. Mäntä on tasapainossa, kun sitä alhaalta kannatteleva voima on yhtä suuri kuin sitä päältä alas päin työntävä voima.

Kuva 7.3: Nesteet ja kaasut käyttäytyvät puristuksessa eri tavoin. Nuolet kuvavat nesteen ja kaasun mäntään kohdistamaa voimaa.



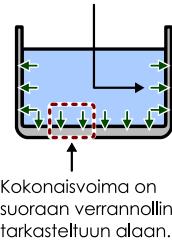
Painon lisääminen männän päälle kasvattaa mäntää alaspäin vetävää voimaa ja niinpä myös nesteen mäntään kohdistaman voiman täytyy tasapainossa olla sitä suurempi mitä enemmän lastia männän pällä on. Puristaminen työntää nestettä sivusuuntaan pois männän ja astian pohjan välistä, mutta koska astia on tiivis, neste ei pääse levämään myöskään sivuttain. Tämä tarkoittaa sitä, että astian seinämien täytyy kohdistaa nesteeseen sivusuuntainen voima, joka estää nestettä liikkumasta. Nesteeseen kohdistuu tässä tilanteessa sisätilavuuspuristusjännitys, jossa astian reunat kohdistavat siihen kaikki ala yhtä suuren astian ja nesteen rajapintaan nähdyn kohtisuoran voiman (kuva 7.4). Nesteet pyrkivät säilyttämään tilavuutensa, joten vaikka männän pällä olevaa massaa kasvatetaan ja vettä kokoon puristava voima kasvaa, veden tilavuus ei käytännössä juuri kaan muutu eikä mäntä liiku. Tätä ominaisuutta kutsutaan *kokoontumattomuudeksi*.



**7.2** Ota paperiarkki. Yritä repiä paperi vetämällä vastakkaisia sivuja toisistaan poispäin. Yritä sitten repiä paperi "normaalisti". Kumpi on helpompi tapa? Millaista jännitystä kohdistat paperiin kummassakin tapauksessa? Mitä voit siis päätellä paperin kyvystä vastustaa erilaisia jännityksiä?

Kuva 7.4: Paine jakautuu virtaavissa aineissa tasaiseksi.

Nesteet ja kaasut välittävät voiman kaikille pinnoille.



Kokonaivoima on suoraan verrannollinen tarkasteltuun alaan.

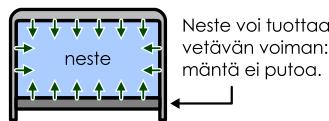
Kuvassa 7.3 on esitetty myös vastaava puristuskoe, kun astian sisällä on kaasua. Kaasukin pystyy kannattelemaan mäntää, mutta kaasulla ei ole ominaista tilavuutta vaan kaasun tilavuus riippuu puristusjännityksen suuruudesta. Kun männän pällä lisätään painoa, kaasu puristuu pienempään tilavuuteen. Mitä pienempään tilavuuteen kaasu puristetaan, sitä suuremman voiman se mäntää kohdistaa, ja näin saavutetaan lopulta uusi tasapainotila, jossa kaasun tilavuus on pienempi kuin ennen painon lisäämistä. Kaasut siis eivät ole kokoontumattomia.

Kaasujen ja nesteiden toisiin kappaleisiin kohdistamat voimat siis jakautuvat tasaisesti kaikkiin niitä koskettaviin pinnoille, ja nämä voimat ovat aina tarkastelupintaan vasten kohtisuorassa. Kuvassa 7.4 astian pohjan *jokaiseen pisteen kohdistuu pieni voima*, ja tämä voima on kaikissa pistessä suuruudeltaan sama. Näiden voimien summa on luonnollisesti kokonaivoima, jolla nesteen ja sen pällä olevan taakan massa painaa astian pohjaa. Jos tarkastelemme vain osaa astian pohjasta, tarkasteltavaan alueeseen kohdistuvan voiman täytyy olla pienempi kuin astian koko pohjan kohdistuvan voiman. Erityisesti koska pohjan kaikkiin pistesiin kohdistuu yhtä suuri voima, tarkasteltavaan alueeseen kohdistuvan voiman suuruuden täytyy olla suoraan verrannollinen tarkastelualueen pinta-alaan,  $F = \frac{A}{A_{pohja}} F_{pohja}$ . Esimerkiksi kuvassa 7.4 tarkasteltavaksi alueeksi on rajattu kolmannes astian pohjan pinta-alasta, ja tähän alueeseen kohdistuu kolmannes koko pohjaan kohdistuvasta voimasta. Sama asia voidaan ilmaista myös niin, että tarkasteltavaan alueeseen kohdistuvan voiman suhde alueen pinta-alaan on vakio,  $F/A = F_{pohja}/A_{pohja} = \text{vakio}$ . Tämä voiman ja sen vaikutusalan suhde on nesteen **paine** astian pohjalla

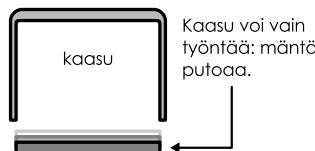
$$p = \frac{F}{A}. \quad (7.1)$$

Paineen yksiköllä on erikoisnimi pascal (Blaise Pascalin mukaan), joka on perusyksiköiden avulla kirjoitettuna  $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ .

Kuva 7.5: Nesteen paine voi olla negatiivinen.



Neste voi tuottaa vetävän voiman: mäntä ei putoaa.



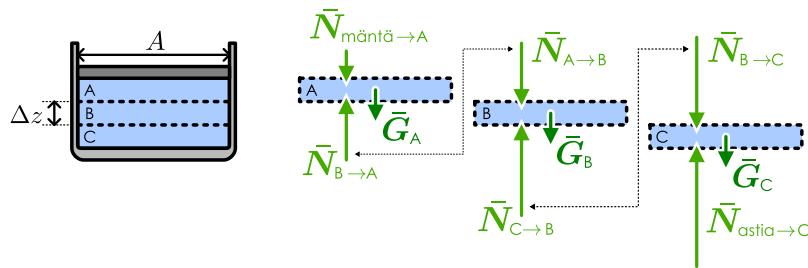
Kaasu voi vain työntää: mäntä putoaa.

Paine ja voima liittyvät toisiinsa, mutta ne ovat selkeästi eri suuret. Hyvin pienikin voima voi tuottaa suuren paineen, jos voima kohdistuu pienelle pinta-alalle. Vastaavasti suuri voima voi saada aikaan vain pieni paineen, jos voima jakautuu tarpeeksi suurelle pinta-alalle. Voima on vektorisuhue, jolla on aina suunta. Paine sen sijaan on skalaari, jolla on vain suuruus. Nestettä tai kaasua koskettavaan suoraan pintaan kohdistuu aina voima, jonka suunta on kohtisuoran pintaan vastaan (eli pinnan normaalinen suuntainen), ja jonka suuruus on nesteen tai kaasun paineen ja pinnan pinta-alan tulo. Esimerkiksi kuvan 7.4 astian kohdistuva voima riippuu sekä nesteen paineesta että astian muodosta. Nesteen paine sen sijaan ei riipu astiasta vaan ainoastaan siitä, kuinka kovasti nestettä puristetaan eli puristusjännityksestä. Paine on siis vain nesteen tai kaasun ominaisuus. Voima sen sijaan riippuu sekä paineesta että astiasta, sillä sama paine tuottaa erilaisiin kappaleisiin erilaiset voimat.

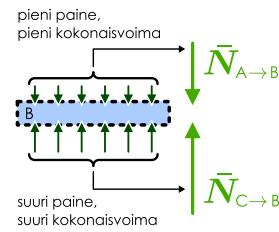
Kuvassa 7.5 on esitetty koe, jossa havaitaan toinenkin nesteiden ja kaasujen ero. Jos astia nimittäin käännetään ympäri, painovoima ei enää mäntää astian sisään vaan vetää sitä ulos. Kaasulla täytetystä astiasta mäntä liukuu tällöin ulos, mutta nesteellä täytetyssä astiassa mäntä pysyy paikoillaan kunhan se ei ole liian painava. Tämä johtuu siitä, että nesteissä molekyylien välillä on sidoksia, jotka vetävät molekyylejä yhteen ja vastustavat venytystä. Molekyylit voivat muodostaa sidoksia myös männän pinnan kanssa, jolloin

Kuva 7.6: Hydrostaattinen paine kasvaa syvemmälle siirryttääessä.

(a) Osiin jaetun nesteen vapaakkappalekuvat.



(b) Nestekappaleen pohjassa on suurempi paine.



ne kohdistavat mäntäänkin voiman, joka vastustaa männän vetämistä ulos. Kaasussa molekyylit sen sijaan eivät muodosta sidoksia eivätkä siten myöskään vedä toisaan puoleensa. Kaasu ei siis voi vetää mäntää astian sisään vaan vain työntää sitä ulos, ja niinpä ympäri käännetystä astiasta mäntä putoaa, jos mikään ulkoinen voima ei sitä kannattele.

Kuvien 7.4 ja 7.5 nesteellä täytetyjen astioiden seinämään kohdistuvien voimien suunnat ovat päinvastaiset, sillä kuvassa 7.4 painovoima työntää mäntää astian sisään ja kuvassa 7.5 se vetää mäntää ulos. Kummassakin tilanteessa nesteen paine välittää männän työntävän tai vetävän voiman astian kaikkiin seiniin. Kun nestettä puristetaan, paineen määritellään olevan positiivinen, ja kun nestettä venytetään, *paine on negatiivinen*. Kaasu voi tuottaa mäntään ainoastaan ulospäin työntävän voiman, joten *kaasun paineen täytyy olla aina positiivinen*. Jos kaasusäiliön mäntää vedetään ulospäin, kaasu laajenee itsestään täyttämään näin syntyneen tilan, jolloin kaasun tilavuus kasvaa ja paine pienenee pysyen kuitenkin aina positiivisena.

## Hydrostaattinen paine

Kuvan 7.4 astia ja sen sisältämä neste ovat levossa, joten niihin kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla. Muuttenhan kappaleet olisivat kiihyvässä liukkeessa. Astian ja nesteen välisten voimien täytyy siis olla astian vastakkaisilla seinämillä yhtä suuret ja vastakkaisuuntaiset, mikä tarkoittaa nesteen paineen olevan sama kummallakin seinällä. Toisin sanoen *puristusjännitys pyrkii leviämään nesteissä ja kaasuissa tasaisesti niin, että paine on kaikkialla yhtä suuri*. Tulosta kutsutaan *Pascalin laiksi*, mutta itse asiassa tämä ei yleensä ole täsmälleen totta. Edellisessä päättelyssä nimittiin oletettiin, että neste ei liiku ja että siihen ei kohdistu muita ulkoisia voimia kuin astian seinämien siihen kohdistamat voimat. Kumpikin näistä — nesteen liike tai ulkoiset voimat — muuttavat paineen jakautumista ja voivat johtaa siihen, että paine ei ole astiassa kaikkialla sama.

Erityisesti nesteillä ja kaasuilla on massa, joten niihin kohdistuu painovoima, ja tästä johtuen astiassa olevan nesteen *paineen täytyy olla pohjalla suurempi kuin pinnalla*. Nesteen voi nimittää aina ajatella koostuvan ohuista, toistensa päällä olevista "nestekappaleista", joista alempat kannattelevat ylempiään ja vastaavasti ylemmät puristavat alempiaan. Esimerkiksi kuvassa 7.6 neste on jaettu kolmeen osaan, joita on merkitty kirjaimin A, B ja C. Näistä ylimpään, osaan A, kohdistuu kolme pystysuuntaista voimaa. Männän kosketusvoima ja osaan kohdistuva painovoima vetävät kappaletta alas, ja osan B kosketusvoima kannatteelee kappaletta. Koska neste ei liiku, voimien summan täytyy olla nolla. Siispä osan B kosketusvoiman täytyy olla yhtä suuri kuin männän kosketusvoiman ja osan A painovoiman yhteensä. Toisaalta osan A kuhunkin pintaan kohdistuvan voiman täytyy olla yhtä suuri kuin nesteen paine kyseisellä pinnalla kerrottuna pinnan alalla. Tässä esimerkissä osan A ylä- ja alapinnat ovat yhtä suuret, mutta alapintaan kohdistuu suurempi voima, joten *nesteen paineen täytyy olla alapinnalla suurempi*.

Täsmälleen samalainen päättely toimii myös osille B ja C: kunkin osan alapintaan kohdistuvan voiman täytyy olla suurempi kuin osan yläpintaan kohdistuvan voiman, koska myös nesteen painovoima vetää näitä osia alas. Esimerkiksi osaa B painaa alas osan A kosketusvoima,  $\bar{N}_{A \rightarrow B}$ , ja sitä kannatteelee osan C kosketusvoima  $\bar{N}_{C \rightarrow B}$ . Lisäksi tästä vesimassaa vetää alas osan B paino  $\bar{G}_B$ , joten veteen kohdistuvien voimien summa on nolla jos

$$N_{C \rightarrow B} = N_{A \rightarrow B} + G_B. \quad (7.2)$$

Tässä esimerkissä astia on suoran lieriön muotoinen, joten kappaleen B ylä- ja alapintojen pinta-ala on sama, A. Kappaleen paino riippuu sen tilavuudesta, joka on tämän pinta-alan ja kappaleen korkeuden  $\Delta z$  tulo,

$$G_B = mg = \rho V g = \rho A \Delta z g. \quad (7.3)$$

Toisaalta veden kuhunkin pintaan kohdistuva voima voidaan ilmaista paineen ja pinta-alan tulona,  $N_B = pA$ , joten kappaleen ylä- ja alapinnan välillä täytyy olla paine-ero

$$\Delta p = \frac{\Delta N_B}{A} = \frac{1}{A}[N_B(z + \Delta z) - N_B(z)] = \frac{1}{A}(N_{A \rightarrow B} - N_{C \rightarrow B}), \quad (7.4)$$

joka voidaan voimatasapainoehdon (7.2) ja veden painon (7.3) perusteella kirjoittaa myös muotoon

$$\Delta p = -\frac{1}{A}G_B = -\rho\Delta zg. \quad (7.5)$$

Paine siis muuttuu pystysuuntaan sääryttääessä nopeudella

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g, \quad (7.6)$$

ja tässä miinusmerkki tarkoittaa sitä, että paine pienenee, kun  $z$ -koordinaatti kasvaa eli kun säärytään ylös-päin. Näin juuri pitääkin käydä, koska nesteen oma paino lisää painetta astian pohjalla. Erityisesti jos paine astian yläreunassa (veden pinnalla) on  $p_0$ , ja asetamme  $z$ -akselin nollakohdan tälle korkeudelle,  $p(0) = p_0$ , paine korkeudella  $z$  on

$$p(z) = p_0 + \Delta p = p_0 - \rho g \Delta z = p_0 - \rho g z. \quad (7.7)$$

Yhtälössä esiintyvä korkeudesta riippuva termi  $\rho g z$  kutsutaan **hydrostaattiseksi paineeksi** (kreikkaa, 'hydro' vesi; engl., 'static' liikkumaton).



**7.3** Tiivis suorakulmainen astia on täynnä nestettä. Astiaa työnnetään sivulta vakivoimalla, jolloin astia ja sen sisältö ovat tasaisesti kiilthyvässä lükkeessä (kiilthyvyys  $a_x > 0$ ). Miten tämä vaikuttaa paineen jakautumiseen nesteessä?

Myös kaasuilla on massaa, ja siksi myös kaasut tuottavat hydrostaattisen paineen. Erityisen tärkeä esimerkki tästä on *ilmapiine*, joka on seurausta siitä, että elämme valtavan "ilmameren" pohjalla. Avaruudessa vallitsee lähes täydellinen tyhjiö, joten paine avaruudessa on nolla. Maata ympäröivään ilmakehään ei siis kohdistu lainkaan ulkoista painetta, joka puristaisi ilmakehän kaasuja kasaan. Ainoa voima, joka estää ilmakehän kaasuja karkaamasta avaruuteen, onkin ilmakehään itseensä kohdistuva painovoima. Ilmakehän yläkerroksissa paine on hyvin pieni, mutta koska ilmakehä on varsin paksu ja sisältää hyvin suuren määän kaasua, ilmakehän kokonaismassa on suuri. Koko ilmakehään kohdistuva painovoima jakautuu Maan pinnalle, joka kannattelee ilman painoa, ja niinpä ilmakehän alaosissa täytyy olla merkittävä paine. Keskimääräinen ilmanpaine merenpinnan korkeudella onkin  $p_{\text{ilma}} = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$ . Nesteiden hydrostaattisen paineen tapaan myös ilmanpaine pienenee ylöspäin sääryttääessä. Kuitenkin koska ilma on kaasu, se ei ole nesteiden tapaan kokoonpuristumatonta. Yläilmakehäässä paine on pieni ja kaasu pääsee laajenemaan lähes vapaasti, joten kaasun tiheys on hyvin pieni. Ilmakehän alaosissa ylempien ilmakerrosten paino sen sijaan puristaa kaasua kasaan, ja siksi ilman tiheys kasvaa maanpintaan lähestyttääessä. Suurin osa ilmakehän massasta onkin keskittynyt ilmakehän alaoiin.



- 7.4** (a) Kuinka suuren voiman ilmanpaine kohdistaa  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  pinnalle?  
 (b) Kuinka suuri ilmamassa tällaisen pinnan päällä siis on?  
 (c) Arvioi koko ilmakehän massa ilmanpaineen ja Maan koon perusteella.

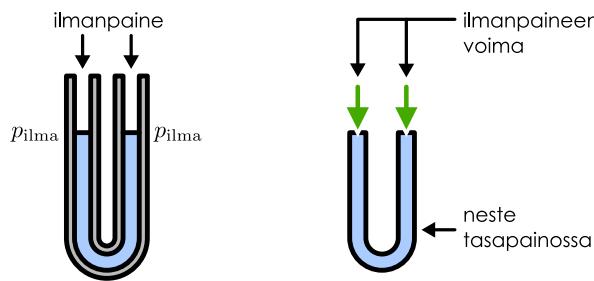
## Paineen sovelluksia

Edellä johdimme hydrostaattiselle paineelle lausekkeen suorassa astiassa. Tutkimme seuraavaksi astian muodon vaikutustua paineesseen kuvan 7.7 avulla. Kuva esittää symmetrisessä U-putkessa olevaa nestettä. Kuvassa 7.7 (a) putken kummassakin haarassa on sama ulkoinen paine, ilmanpaine  $p_{\text{ilma}}$ , joka työntää nestettä putkeen. Nesteen pintaan kohdistuu siis sama voima kummassakinhaarassa, ja neste on tasapainossa sen ollessa symmetrisesti pinta yhtä korkealla kummassakin putken haarassa.

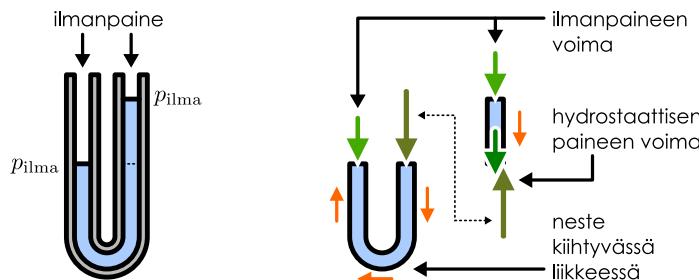
Jos nestepinta on haaroissa eri korkeudella, tilanne on kuten kuvassa 7.7 (b). Tässä tapauksessa neste voidaan ajatella jaetuksi kahdeksi kappaleeksi: symmetriiseen U:n muotoiseen osaan sekä putken oikeassahaarassa tämän U:n päällä olevaan osaan. Ulkoinen ilmanpaine on edelleen sama kummassakinhaarassa, joten ilmanpaine kohdistaa nytkin yhtä suuren voiman nesteen pintaan kummassakinhaarassa. U-putken vasemmassahaarassa tämä voima kohdistuu U:n muotoisen nestekappaleen pintaan, mutta oikean puoleisesahaarassa ilmanpaineen tuottama voima kohdistuu U:n päällä olevaan kappaleeseen. Tähän kappaleeseen kohdistuu myös painovoima, joten nyt U:n muotoisen nestekappaleen oikeanpuoleisen haaran päällä on yli-määristä painoa ja U-kappaleen oikeaa haaraa siis työntää putken sisään suurempi voima kuin vasenta

Kuva 7.7: U-putkessa olevan nesteen paine ja nestepatsaiden vapaakappalekuvat.

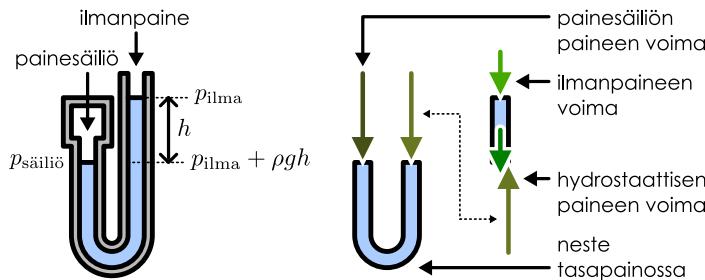
(a) Haaroissa sama ulkoinen paine: tasapainossa nesteen pinta yhtä korkealla kummassakin haarassa.



(b) Haaroissa sama ulkoinen paine: neste ei ole tasapainossa, jos pinta ei ole kaikkialla yhtä korkealla.



(c) Haaroissa eri paine: tasapainossa nesteen pinta on eri haaroissa eri korkeudella.



haaraa. U-kappaleeseen kohdistuvat voimat eivät siis ole tasapainossa, ja niinpä nesteen täytyy olla kilhyvässä liikkeessä. (Putken seinämät kohdistavat toki nekin nesteesseen voimia, joita ei ole kuvaan piirretty, mutta nämä eivät vaikuta nesteen virtaukseen putkea pitkin jos viskositeetti on pieni.) Tasapaino saavutetaan silloin, kun U-kappaletta työntää putken sisään yhtä suuri voima kummassakinhaarassa eli kun nesteen pinta on kummassakinhaarassa yhtä korkealla (kuva (a)).

On toki mahdollista työntää nestettä putkeen muuttamalla ulkoista painetta putken toisessahaarassa. Kuvaan 7.7 (c) putken vasemmanhaarana on säiliö, jonka painetta voidaan muuttaa. Kuvan tilanteessa säiliön paine on suurempi kuin ilmarpaine ja neste on tasapainossa sen pinnan ollessa oikeanpuoleisessahaarassa korkeammalla kuin vasemmalla. Tämäkin tilanne voidaan analysoida jakamalla neste kahteen kappaleeseen, joista toinen on symmetrinen, U:n muotoinen kappale. Koska neste on tasapainossa, U-kappaleen kumpaankin pintaan täytyy kohdistua yhtä suuri voima. Kappaleen vasemmassahaarassa tämänvoiman tuottaa säiliön paine  $p_{säiliö}$  ja oikeassahaarassa ulkoinen ilmarpaine sekä U-kappaleen päälläolevan nesteen hydrostaattinen paine,  $p_{ilma} + \rho gh$ , missä  $h$  on nesteen pinnankorkeuden ero haarojen välillä. Tasapainossaolevan U-kappaleen kummallakin pinnalla on sama paine, joten

$$p_{säiliö} = p_{ilma} + \rho gh. \quad (7.8)$$

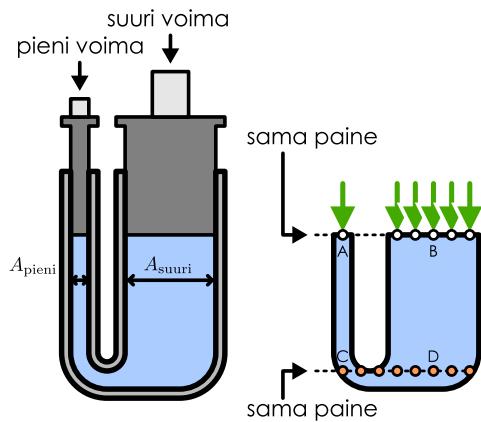
Koska paine työntää nesteitä ja kaasuja, nämä olomuodot saadaan virtaamaan tuottamalla paine-eroja. Nesteitä ja kaasuja kutsutaankin yhteisnimellä *virtaavat aineet* eli *fluidit*. Kuvan 7.7 (c) tilanteessa paine-ero nostaa nestettä putkeen, jolloin virtaus pysähtyy, mutta jos kyseessä olisi vaakasuora putki, putken suiden välinen paine-ero voisi tuottaa jatkuvan virtauksen.



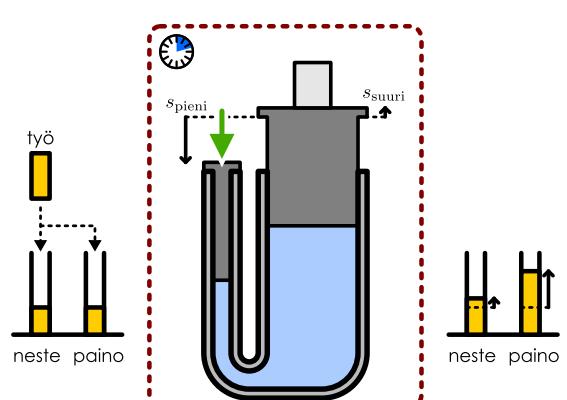
**7.5** Mehupillin toiminta perustuu siihen, että suu on pillin toisen pään sulkeva painesäiliö, jossa paine on pienempi kuin ulkoinen ilmarpaine. (a) Selitä mehupillin toiminta tämän perusteella ja vertaa sitä kuvaan 7.7 (c). (b) Vaikuttaako pillin pituus, leveys tai korkeus sen toimintaan?

Kuva 7.8: U-putkessa olevan nesteen paine ja nestepatsaiden vapaakappalekuvat.

(a) Tasapainossa nesteen paineen täytyy olla yhtä suuri kaikissa samalla korkeudella olevissa pisteissä.



(b) Pieneen mäntää tehdään työtä, jolloin suuri mäntä nousee.



U-putkea voidaan käyttää myös paineen mittaamiseen. Jos nimittäin nesteen pinta asettuu tasapainossa U-putken haaroissa eri korkeudelle, ulkoisen paineen täytyy olla putken eri haaroissa erilainen kuten kuvassa 7.7 (c). Tasapainossa nesteen kokonaispaineen täytyy olla sama kaikissa samalla korkeudella olevissa pisteissä, minkä perusteella voidaan määrittää nesteen pinnalla putken eri haaroissa vallitsevien paineiden erot mittamalla nestepintojen korkeuserot. Erityisesti jos paine U-putken toisessahaarassa tunnetaan, näin voidaan määrittää paine myös putken toisessa päässä. Jos esimerkiksi painesäiliön paine tunnetaan, ulkoinen ilmanpaine voidaan määrittää nestepatsaan korkeuden perusteella. Ensimmäiset nesteilmapuntarit perustuvatkin juuri tähän periaatteeseen.

Edellä tutkittiin symmetristä U-putkea, mutta tarkastellaan seuraavaksi miten putken epäsymmetria vaikuttaa systeemin käytätyymiseen. Tarkastellaan tästä varten kuvan 7.8 kaksiharaista, nesteellä täytettyä putkea. Putken vasen haara on kapea, ja sen poikkipinta-alaa on merkitty kuvassa  $A_{\text{pieni}}$ . Oikea haara on puolestaan leveä, ja sen poikkipinta-ala on  $A_{\text{suuri}}$ . Putken kummankin pään sulkee kevyt mäntä, joka pääsee liikkumaan helposti. Kuvassa 7.8 (a) systeemi on tasapainossa, mutta mäntiin ei silti kohdistu yhtä suuret voimat. Sen sijaan kapean putken päällä on *pieni* paino ja leveän putken päällä on *suuri* paino.

Kuvassa 7.8 (a) on merkitty astian pohjalla olevat pisteet C ja D, jotka ovat yhtä korkealla. Näiden pisteen välillä on vain nestettä, joten jos paine olisi esimerkiksi pisteessä D suurempi kuin pisteessä C, tämän paineron täytyisi työntää nestettä kohti pistettä C. Tällöin neste ei olisi tasapainossa vaan kiihyvässä liikkeessä. Nämä koska *neste on tasapainossa*, pisteissä C ja D on pakko olla *sama paine*,

$$p_C = p_D. \quad (7.9)$$

Toisaalta pisteen A ja C sekä B ja D välisen etäisyyden pystysuunnassa on sama. Nämä näiden pisteen välisen hydrostaattisesta paineesta johtuvan paineeron on oltava yhtä suuri,

$$\Delta p_{AC} = \Delta p_{BD}. \quad (7.10)$$

Nämä ollen myös pisteissä A ja B täytyy olla keskenään sama paine,

$$p_A = p_C + \Delta p_{AC} = p_D + \Delta p_{BD} = p_B, \quad (7.11)$$

vaikka nämä pisteet ovat putken eri haaroissa. Samaan tapaan voidaan päätellä, että *kaikissa* pisteissä, jotka ovat yhtä korkealla kuin piste A, on oltava sama paine. Nesteen tai kaasun hydrostaattinen paine ei siis riipu astian muodosta vaan hydrostaattinen paine on sama riippumatta siitä, onko neste leveässä, kapeassa, suorassa tai mutkittelevassa astiassa.

Koska paine on putken kummassakin haarassa sama, täytyy nesteen pintaan kohdistuvan *voiman* olla leveässä putkessa suurempi, sillä voimahan on paineen ja putken poikkipinta-alan tulo. Täsmällisesti leveässä putkessa neste kohdistaa mäntään voiman  $F_{\text{suuri}} = p_B A_{\text{suuri}}$  ja kapeassa putkessa voiman  $F_{\text{pieni}} = p_A A_{\text{pieni}}$ . Koska paine on kummassakin putkessa sama, voimien suhde on sama kuin pinta-alojen suhde,

$$F_{\text{suuri}} = F_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}}. \quad (7.12)$$

Neste siis väliittää siihen kohdistetun paineen, ja näin nestettä voidaan käyttää sekä voiman siirtämiseen että sen suuruuden muuttamiseen. Tätä kutsutaan *hydraulikaksi*, ja sitä sovelletaan yleisesti konetekniikassa.

Esimerkiksi autojen jarruissa käytetään hydraulista voimansiirtoa. Kuljettajan painaessa jarrupoljinta jarruneste välittää voiman tuottaman paineen jarruihin. Vaikka kuljettaja painaisi poljinta vain pienellä voimalla, näin syntyvä paine puristaa jarrupaloja suurella voimalla, koska jarrupolkimeen on liitetty pieni mäntä ja jarrupaloihin suuri.

Hydrauliikkaa käytetään myös työkoneissa kuten nostureissa ja kaivinkoneissa. Tällöin hydraulisessa järjestelmässä käytettävän nesteeseen tuotetaan pumpulla suuri paine, ja tämän paineen tuottaman voiman avulla tehdään työtä kuten nostetaan raskaita taakkoja. Kuvassa 7.8 (b) on tästä yksinkertaistettu esimerkki: kaksiharainen U-putki, jonka toinen haara on kapea ja toinen leveä. Kapeassa haarassa on mäntä, jota puristaa voima  $F_{\text{pieni}}$ . Leveässähaarassa olevan männän päällä puolestaan on nostettava taakka. Systeemiksi on tässä valittu putkessa oleva neste sekä nostettava taakka. Pienenen mäntää kohdistuva voima on systeemiin työtä tekevä ulkoinen voima.

Ulkoinen voima on tässä kyllin suuri painaakseen pieniä mäntiä sisään, jolloin suuri mäntä taakkoonne nousee ylöspäin. Kuitenkin koska neste on kokoonpuristumatonta, sen kokonaistilavuus ei saa muuttua. Pieni männän siirtyessä matkan  $s_{\text{pieni}}$  putken sisään, se työntää nestettä pienestä putkesta suureen. Nesteen pinnan pitää siis nousta suressa putkessa matka  $s_{\text{suuri}}$  niin, että suressa putkessa olevan nesteen tilavuus kasvaa yhtä paljon kuin pienessä putkessa olevan nesteen tilavuus pienentyi.

Nesteen tilavuuden muutos pienessä putkessa on  $\Delta V_{\text{pieni}} = -A_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}}$  ja vastaavasti suureessa putkessa nesteen tilavuus kasvaa määränpä  $\Delta V_{\text{suuri}} = A_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}}$ . Kokonaistilavuuden pitää olla vakio, joten  $\Delta V_{\text{suuri}} = -\Delta V_{\text{pieni}}$ , mistä saadaan mäntien siirtymiksi

$$s_{\text{suuri}} = s_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{suuri}}}. \quad (7.13)$$

Suuri mäntä siirtyy siis lyhyemmän matkan kuin pieni mäntä kuten kuvastakin nähdään.

Koska pieni mäntä liikkuu samaan suuntaan kuin mihin siihen kohdistuva voima osoittaa, voima tekee työtä mäntään ja niinpä kuvan 7.8 (b) systeemin energia kasvaa. Tämä energia muuttuu nesteen ja nostettavan taakan potentiaalienergiaksi (ja mahdollisesti myös liike-energiaksi). Jos nesteen paino on pieni verrattuna nostettavan taakan painoon, nesteen energian muutos on pieni verrattuna taakan energian muutokseen, ja tällöin ulkisen voiman tekemän työn täytyy olla likimain yhtä suuri kuin taakan potentiaalienergian muutos. Näin onkin, sillä pieneen mäntään kohdistuva voima tekee systeemiin työn  $W = F_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}}$  ja taakan energian muutos on puolestaan  $\Delta E = F_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}}$ . Voimien suuruksille pätee likimain yhtälö (7.12), joka oli seurausta siitä, että paine on kummassakin putkessa sama. Yhtälö ei päde täsmälleen, sillä mäntien siirtyessä niiden pintojen välille syntyy nesteen hydrostaattisesta paineesta johtuen paine-ero. Jos kuitenkin nesteen paino on pieni verrattuna taakan painoon, tämä ero ei ole merkittävä. Mäntien kulkemille matkoille puolestaan pätee aina yhtälö (7.13), kun neste on kokoonpuristumatonta. Näillä oletuksilla systeemiin tehty työ on sama kuin taakan energian muutos,

$$W = F_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}} = F_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}} s_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{suuri}}} = F_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}} = \Delta E. \quad (7.14)$$

Erityisesti jos nosto tapahtuu hitaasti eikä taakka saa kovin suurta liike-energiaa, suureen mäntään kohdistuva voima on sama kuin taakan paino,  $F_{\text{suuri}} = mg$ , ja systeemiin tehty työ muuttuu nostettavan lastin potentiaalienergiaksi,

$$W = \Delta E = \Delta U = mgs_{\text{suuri}}. \quad (7.15)$$



#### 7.6 Mihin energian muotoihin ulkisen voiman tekemä työ kuvassa 7.8 (b) muuttuu, jos

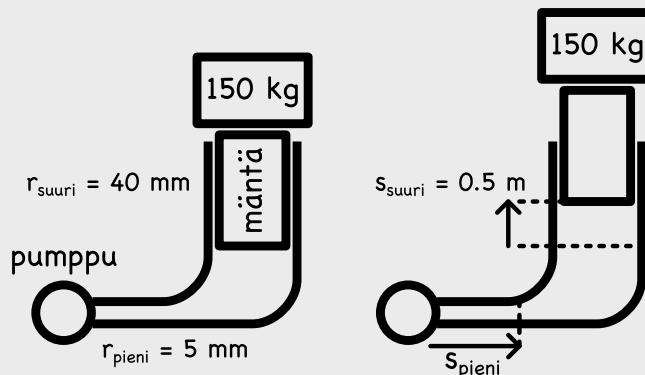
- (a) nesteen paino on merkittävä nostettavaan taakkaan verrattuna?
- (b) ulkoinen voima on suuri ja nosto tapahtuu nopeasti?
- (c) nesteen sijaan putkessa onkin kaasua (eli kyseessä on *pneumaattinen* laite)?

## esimerkki 7.1

## Hydrauliikka

Hydraulisen nosturin pumppu työntää nestettä putkeen, jonka säde on 5.0 mm. Neste työntää puolestaan mäntää putkessa, jonka säde on 40.0 mm. Mäntä nostaa 150 kg taakan 0.5 m korkeudelle 22 sekunnissa. (a) Mikä on pumpun teho, jos dissipatiiviset vuorovaikutukset ja nesteen oma liike- ja potentiaalienergia jätetään huomioimatta? (b) Kuinka suuri paine nesteeseen täytyy tuottaa? (c) Kuinka nopeasti neste virtaa pumpusta pieneen putkeen?

**TILANNE** Merkitään ohuen putken sädettä  $r_{\text{pieni}} = 0.005 \text{ m}$  ja paksun  $r_{\text{suuri}} = 0.040 \text{ m}$ . Putkien poikkipinta-alat ovat siis  $A_{\text{pieni}} = \pi r_{\text{pieni}}^2 = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$  ja  $A_{\text{suuri}} = \pi r_{\text{suuri}}^2 = 5.03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ . Taakan siirtymä on sama kuin männän siirtymä paksussa putkessa,  $s_{\text{suuri}} = 0.5 \text{ m}$ . Kulunut aika on  $\Delta t = 22 \text{ s}$ .



**SUUNNITELMA** Pumppu työntää nestettä, jolloin sen paine kasvaa, ja hitaasti virtaavassa nesteesä paine on kaikkialla sama. Paine puolestaan kohdistuu voiman kaikkiin nestettä ympäröiviin pintoihin, myös mäntään. Tämä voima työntää mäntää ja nostaa männän kannattelemaan taakan, jos voima on suurempi kuin taakan paino.

Taakan nostuessa sen graviitaation potentiaalienergia kasvaa, joten nosto vaatii työtä. Todellisuudessa myös nesteen potentiaalienergia muuttuu ja kitka kuluttaa mekaanista energiota lämpöenergiaksi, mutta jos näitä tekijöitä ei huomioida, tarvittava työ on yhtä suuri kuin taakan potentiaalienergian muutos.

Kun mäntä liikkuu putkessa, nesteen täytyy täytyy vapautuva tilavuus. Kummassakin putkessa siirtymän nesteen tilavuus saadaan putken pinta-alan ja siirtymän tulona. Pumppu siirtää ohueeseen putkeen yhtä suuren tilavuuden kuin mitä ohuesta putesta virtaa paksuun putkeen, joten ohuessa putkessa neste siirtyy pidemmän matkan kuin paksussa.

Jos nesteen paine on  $p$ , se tuottaa mäntään voiman

$$F = pA_{\text{suuri}}. \quad (7.16)$$

Jotta taakka nousisi, tämän voiman täytyy olla suurempi kuin taakkaan kohdistuva painovoima. Jos taakka nousee tasaisella nopeudella, voima on yhtä suuri kuin painovoima,  $F = mg$ , josta ratkeaa paineeksi

$$p = \frac{mg}{A_{\text{suuri}}}. \quad (7.17)$$

Potentiaalienergian muutos on  $W = \Delta U = mgs_{\text{suuri}}$  ja pumpun teho on työ jaettuna kuluneella ajalla

$$P = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7.18)$$

Putkeen siirtyy nestettä tilavuus  $\Delta V = A_{\text{suuri}}s_{\text{suuri}} = A_{\text{pieni}}s_{\text{pieni}}$ , josta saadaan nesteen siirtymäksi pienessä putkessa  $s_{\text{pieni}} = s_{\text{suuri}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}}$ . Nesteen virtausnopeus on siirtymä jaettuna kuluneella ajalla

$$v_{\text{pieni}} = \frac{s_{\text{pieni}}}{\Delta t}. \quad (7.19)$$

**RATKAISU** (a) Paine on

$$p = \frac{mg}{A_{\text{suuri}}} = 292000 \text{ Pa}. \quad (7.20)$$

(b) Pumpulta vaaditaan teho

$$P = \frac{mg s_{\text{suuri}}}{\Delta t} = 33 \text{ W}. \quad (7.21)$$

(c) Nesteen virtausnopeus ohuessa putkessa on

$$v_{\text{pieni}} = \frac{A_{\text{suuri}}s_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}\Delta t} = 1.5 \text{ m/s}. \quad (7.22)$$

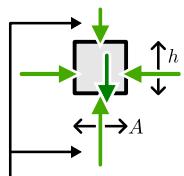
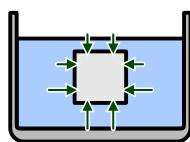
**ARVIOINTI** Koska energiota ei voi luoda, taakan nostaminen tälle korkeudelle vaatii aina saman verran energiota riippumatta siitä, miten nosto tehdään. Pumpulta vaadittava teho on kuitenkin sitä pienempi, mitä hitaammin nosto tapahtuu, ja vaadittava paine on sitä pienempi, mitä leveämpi on taakkaa nostava mäntä. Näin nostotyö saadaan tehtyä hyvin vaativatmallakin pumpulla.

## Noste

Hydrostaattinen paine on siis sekä kaasuissa että nesteissä sitä suurempi, mitä alempas siiirtyää. Tästä johtuen nesteen tai kaasun ympäröimän kappaleen alapintoihin kohdistuu suurempi paine kuin sen yläpintoihin. Edelleen, koska kappaleiden alapinnat ovat suuremmassa paineessa, niihin kohdistuu myös suurempi voima pinta-alayksikköä kohden kuin yläpintoihin. Paineen tuottama voima on kohtisuorassa kappaleen pintaan vastaan, joten ympäröivän nesteen tai kaasun paine kohdistaa yleisesti kappaleen alapintoihin ylöspäin osoittavan voiman ja vastavasti yläpintoihin alas päin osoittavan voiman. Paine-eroista johtuen näiden voimien ylöspäin osoittavat pystysuorat komponentit ovat alas päin osoittavia hieman suuremmat, ja niinpä *ympäröivä paine kohdistaa kappaleeseen ylöspäin suuntautuvan kokonaisvoiman*. Tätä voimaa kutsutaan **nosteeksi**.

Analysoidaan nosteen vaikutus ensin kuvaan 7.9 piirretyn suorakulmaisen kappaleen tapauksessa. Kuvan kappaleen kaikki sivut ovat vaaka- tai pystysuorat, ja niihin kohdistuvat voimat osoittavat kohtisuoraan kappaleen pintoja vastaan eli myös pysty- tai vaakasuuntaan. Vastakkaisiin sivuihin kohdistuvat vaakasuuntaiset voimat ovat yhtä suuret, joten ne kumoavat toisensa. Sen sijaan kappaleen alapintaan kohdistuu voima ylöspäin, ja koska alapinta on suora taso, tämän voiman suuruus on pinnan pinta-alan ja pinnalla vallitsevan paineen tulo,  $F_{\text{alapinta}} = p_{\text{alapinta}}A$ . Vastaavasti kappaleen yläpintaan kohdistuva voima on  $F_{\text{yläpinta}} = p_{\text{yläpinta}}A$ .

Kuva 7.9: Suorakulmaisen kappaleen neste.



Paine tuottaa kokonaisvoiman ylöspäin (noste).

Koska kappale oli suorakulmainen särmiö, ylä- ja alapintojen alat ovat samat. Pintojen välinen paine-ero johtuu puolestaan hydrostaattisesta paineesta, joten jos kappaleen korkeus on  $h$ , alapinnan paine on

$$p_{\text{alapinta}} = p_{\text{yläpinta}} + \rho gh. \quad (7.23)$$

Kappaleeseen kohdistuva paineesta johtuva kokonaisvoima eli neste on siis

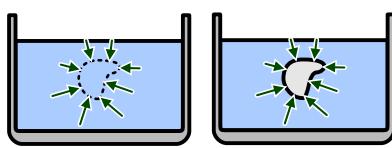
$$F_{\text{noste}} = F_{\text{alapinta}} - F_{\text{yläpinta}} = p_{\text{alapinta}}A - p_{\text{yläpinta}}A = \rho ghA. \quad (7.24)$$

Toisaalta kappaleen tilavuus on sen korkeuden ja pohjan alan tulo,  $V = Ah$ , joten kappaleeseen kohdistuva neste voidaan ilmaista myös kappaleen tilavuuden ja sitä ympäröivän nesteen tai kaasun tiheyden  $\rho$  avulla

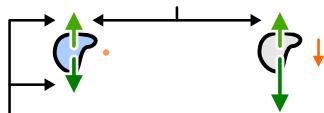
$$F_{\text{noste}} = \rho gV. \quad (7.25)$$

Tiheyden ja tilavuuden tulo on massa mutta nesteen lausekkeessa (7.25)  $\rho$  on *ympäröivän aineen* tiheys ja  $V$  on *kappaleen* tilavuus. Niinpä lausekkeessa esiintyvä tulo  $\rho V$  on massa, joka kappaleen tilavuutta vastaavalla määrällä nestettä tai kaasua olisi näissä olosuhteissa. Tätä kutsutaan *kappaleen syrjäyttämäksi* nesteeksi tai kaasukiksi. Massan tulo putoamiskiertyvyyden kanssa on puolestaan tämän aineen paino. Niinpä nesteen suuruus voidaan ilmaista myös *Arkhimedeen lakina*: Kaasun tai nesteen ympäröimään kappaleeseen kohdistuu voima (noste), jonka suunta on painovoiman suuntaan nähden vastakkainen ja jonka suuruus vastaa kappaleen syrjäyttämän kaasu- tai nestemäären painoa.

Kuva 7.10: Epäsäännöllisen kappaleen neste.



sama ympäristö: yhtä suuri neste



neste tasapainossa: neste ja painovoima yhtä suuret

Edellä johdimme nesteen suuruuden suorakulmaiselle kappaleelle tarkastelemalla kappaleen eri pintoihin kohdistuvia voimia. Mielivaltaisen muotoiselle kappaleelle nesteen laskeminen suoraan paineen tuottamien voimien avulla on hankalampaa, koska paine tuottaa aina pintaan vastaan kohtisuoran voiman. Jos kappale on erikoinen muotoinen, siihen kohdistuva voima pitäisi periaatteessa laskea jakamalla kappaleen pinta pieniin osiin, määrittämällä kuhunkin osaan kohdistuva voima, ja laskemalla nämä voimat vektoreina yhteen. Voimme kuitenkin päättää Arkhimedeen lain pätevän kaikille kappaleille niiden muodosta riippumatta yksinkertaisella ajatuskokeella, joka on esitetty kuvalla 7.10.

Kuvassa on kaksi astiaa. Toisessa on vain nestettä ja toisessa on nesteesseen upotettu kappale. Neste, jonka ominaisuudet ovat kauttaaltaan samanlaiset (painetta lukuunottamatta) pysyy astiassa paikoillaan, koska ei ole mitään syytä, miksi neste alkaisi virrata itsestään. Nestettä täynnä olevassa astiassa neste on siis kauttaaltaan paikoillaan, tasapainossa. Vaikka astia onkin täynnä vain vettä, voimme aina ajatuksissamme jakaa nesteen kahteen osaan: "nestekappaleeksi", joka on täsmälleen samanmuotoinen ja -kokoinen kuin toisessa astiassa oleva oikea kappale, ja tästä nestekappaletta ympäröiväksi nesteeksi. Koska nestekappale on tasapainossa, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla. Toisaalta nestekappaleeseen kohdistuu ainoastaan sen omasta massasta johtuva painovoima sekä ympäröivän nesteen neste. Koska kappale on tasapainossa, näiden voimien täytyy olla täsmälleen yhtä suuret ja vastakkaisuuntiset. Nesteen kuitenkin aiheuttaa kappaletta *ympäröivä neste*,

ja tästä se johtuu, että nestekappaleen ympäröivä neste on nestekappaleeksi, joka on täsmälleen samanmuotoinen ja -kokoinen kuin toisessa astiassa oleva oikea kappale, ja tästä nestekappaletta ympäröiväksi nesteeksi. Koska nestekappale on tasapainossa, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla. Toisaalta nestekappaleeseen kohdistuu ainoastaan sen omasta massasta johtuva painovoima sekä ympäröivän nesteen neste. Koska kappale on tasapainossa, näiden voimien täytyy olla täsmälleen yhtä suuret ja vastakkaisuuntiset. Nesteen kuitenkin aiheuttaa kappaletta *ympäröivä neste*,

ja tämä on täsmälleen samanlainen sekä nestekappaleen että oikean kappaleen tapauksessa. Niinpä oikeaan kappaleeseen täytyy kohdistua täsmälleen samanlainen neste kuin sitä vastaavaan nestekappaleeseen. Nämä ollen nosteen täytyy olla täsmälleen yhtä suuri ja vastakkaisuuntainen kuin kappaleen syrjäyttämää nestettä vastaavaan nestekappaleeseen kohdistuva painovoima.



**7.7** Kuution muotoisessa astiassa on aluksi vettä (tilanne 1). Sitten astiaan laitetaan langasta roikkuva pallo, joka on vettä tiheämpi (tilanne 2). Sitten lanka katkaistaan, jolloin pallo uppoaa astian pohjalle ja jää sinne paikoilleen (tilanne 3). Vertaa seuraavien voimien suuruutta sekä keskenään että eri tilanteissa: (a) pallon paino, (b) palloon kohdistuva neste, (c) astian pohjaan kohdistuva voima.

### esimerkki 7.2

### Vene

**Veneen pohja on likimain  $0.7 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$  muotoinen suorakaide. Kuinka syvälle vene keskimäärin vajoaa, jos veneen ja sen kuorman kokonaismassa on 550 kg?**

**TILANNE** Pohjan pinta-ala on  $A = 1.68 \text{ m}^2$ . Merkitään kuorman massaa  $m = 550 \text{ kg}$ . Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että on tyyntä ja vene vajoaa suoraan alas painiin, ettei pohja ole etäisyyskehällä. Veden tiheys on noin  $\rho_{\text{vesi}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**SUUNNITELMA** Veneeseen kohdistuu painovoima alas painiin ja veden neste ylöspäin (ilmaston neste on pieni). Tasapainossa nämä ovat yhtä suuret. Painovoima riippuu vain kuormasta, mutta neste riippuu siitä, paljonko vettä vene syrjäyttää. Täsmällisesti neste on yhtä suuri kuin sen vesimääriä paino, joka mahtuisi veneen vedenpinnan alapuolelleen tilavuuteen.

Veneen paino on  $G = mg$ . Neste on

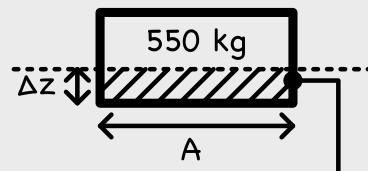
$$F_{\text{neste}} = \rho_{\text{vesi}} V g, \quad (7.26)$$

missä  $V = A\Delta z$  on veneen vedenpinnan alapuolelle jäävä tilavuus. Tasapainossa nämä ovat yhtä suuret,  $G = F_{\text{neste}}$ .

**RATKAISU** Tasapainoehdot on siis  $mg = \rho_{\text{vesi}} A \Delta z g$ , josta uppouumaksi ratkeaa

$$\Delta z = \frac{m}{\rho_{\text{vesi}} A} = 0.33 \text{ m}. \quad (7.27)$$

**ARVIOINTI** Vene on soutuveen suuruusluokkaa, ja sen kyydissä on kohtuullinen lasti, joten on aivan järkevää, että sen pohja uppoaa joitakin kymmeniä senttimetrejä.



**neste = pinnanalainen tilavuus  
x veden tiheys**



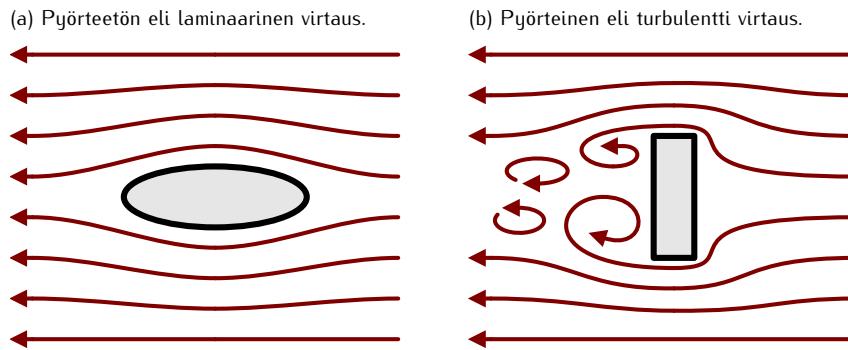
**7.8** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä paineesta ja sen sovelluksista. Selitä erityisesti mistä hydrostaattinen paine ja neste johtuvat.

## 7.2 Virtausmekaniikkaa

Edellisissä esimerkeissä tarkasteltiin levossa olevia nesteitä ja kaasuja. Nämä olomuodot voivat kuitenkin virrata, minkä vuoksi ne ovat varsin harvoin levossa, eivätkä edellä esitellyt tulokset tällöin päde. Nesteiden ja kaasujen liikettä kuvava **virtausmekaniikka** on kuitenkin yleisesti ottaen erittäin vaikea fysiikan osa-alue, koska virtaukset voivat olla hyvin monimutkaisia. Virtaavilla aineilla on erityisesti taipumus muodostaa **pyörteitä** niiden virratessa esteiden ohi ( tai kappaleiden liikkumessa niiden läpi), ja pyörteiden käytös on tavallisesti kaoottista ja nopeasti muuttuvaa.

Pyörteet ovat yleensä haitallisia käytännön sovelluksissa, koska pyörteet jarruttavat virtauksia ja lisäävät väliaineen vastusta. Tämä johtuu siitä, että pyörteisiin sitoutuu liike-energiaa, jonka virtaavan aineen viskoiteetti (sisäinen kitka) kuluttaa lopulta dissipatiivisesti lämpöenergiaksi. Kun esimerkiksi auto kulkee ilman läpi, se työntää ilmaa pois tieltään ja vastaavasti ilma kohdistaa autoon sen liikettä vastustavan ilmanvastusvoiman. Jos auto on **virtaviivainen**, ilman täytyy vain väistää liikkuvaa autoa, jolloin autosta siirrytään vain vähän energiota ilmaan ja ilmanvastus on pieni. Tällöin ilmavirta auton ympäri on pyörteeton eli **laminaarinen**. Kuvaan piirrettyt käyrät ovat **virtaviivoja**, ja ne on piirretty niin, että kummakin käyrällä virtaavan aineen nopeus on kussakin pisteesä käyrän tangentin suuntainen. Nimitys virtaviivainen tarkoittaa siitä,

Kuva 7.11: Virtauksen esitys virtauslinjoina. Käyrät kuvaavat virtaavan aineen hiukkasten kulkemia reittejä.



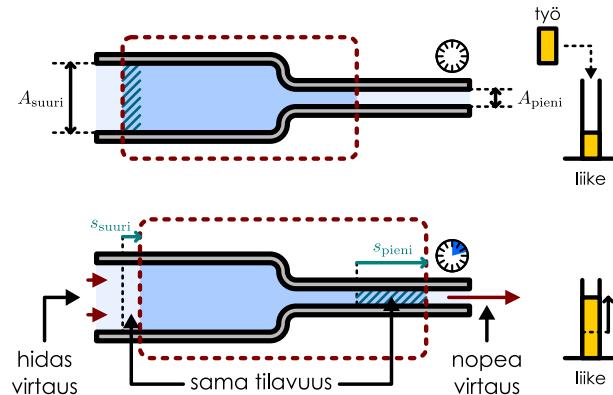
että kappaaleen muoto mukailee virtaviivoja mahdollisimman hyvin, jolloin virtaviivojen ei tarvitse taipua kovin paljon.

Jos auto sen sijaan ei ole virtaviivainen, sen liike synnyttää ilmaan pyörteitä, jolloin energiaa siirryy autosta ilmaan suurella teholla. Tällöin ilman virtaus on pyörteinen eli *turbulentti*, mistä kuva 7.11 (b) on esimerkki. Pyörteisten virtausten täsmällinen analyysi on niin vaikeaa, että emme yritä sitä tässä tehdä. Tarkastelemme siis vain täysin ideaalisia virtauksia, joissa ei ole lainkaan pyörteitä ja joihin ei lüty lainkaan dissipatiivisia vuorovaikutuksia.

Tarkastellaan kuvan 7.12 putkea esi-merkkinä kokoonpuristumattoman nesteen pyörteettömästä virtauksesta. Virtaus saapuu kuvassa vasemmalta, putken leveästä osasta ja kulkee oikealle, putken kapeaan osaan. Systeemiksi on valittu tietty nestemäärä putken sisällä, ja systeemi siis liikkuu nesteen virratessa. Koska neste on kokoonpuristumatonta, sen tilavuus ei muudu. Niinpä aivan kuten kuvassa 7.8 (b) nesteen pinnan täytyi siirtää kapeassa putkessa pidempi matka kuin leveässä, tässäkin tilanteessa systeemiksi rajattu vesimassa etenee kapeassa putkessa pidemmän matkan kuin leveässä putkessa.

Koska kyseessä on jatkuva, pyörteeton virtaus, nesteen nopeus on paksussa putkessa kaikkialla sama ja ajasta riippumaton,  $v_{suuri}$ . Samoin nopeus on kapeassa putkessa kaikkialla sama,  $v_{pieni}$ , mutta tämä nopeus ei ole sama kuin virtausnopeus leveässä putkessa. Koska nesteen täytyy kapeassa putkessa kulkea pidempi matka samassa ajassa, *neste siis virtaa kapeassa putkessa nopeammin kuin leveässä*. Tässä on kyse yksinkertaisesti siitä, että leveässä putkessa kulkeva neste ei pääse kapeaan putkeen ennen kuin kapeassa putkessa jo ennestään oleva neste siirtyy pois tieltä. Ilmiön näkee selkeästi esimerkiksi lääkeruiskussa, jossa nestettä työnnetään männällä kapean neulan läpi. Männän hidaskin työtäminen saa nesteen suihkuamaan neulasta suurella nopeudella.

Kuva 7.12: Nesteen virtaus kapenevan putken läpi. Tarkasteltavaksi systeemiksi on valittu rajallinen nestemäärä, joka liikkuu putken suhteeseen.



**7.9** Suuri joukko ihmisiä kulkee samaan suuntaan pitkin leveää tietä, joka muuttuu yhtäkkiä kapeaksi poluki. Miten tämä vaikuttaa joukon nopeuteen ja tiheyteen? Selitä miten ja miksi ihmiset käyttäytyvät samalla tai eri tavalla kuin neste.

Nesteen kulkema matka putken kussakin osassa on yhtälön (7.13) mukaisesti käantäen verrannollinen putken poikkipinta-alaan. Virtausnopeus on puolestaan nesteen kulkeman matkan suhde tähän käytettyyn aikaan, joten myös *virtausnopeus on käantäen verrannollinen putken poikkipinta-alaan*. Yhtälönä kirjoitettuna

$$v_{suuri} A_{suuri} = v_{pieni} A_{pieni}. \quad (7.28)$$

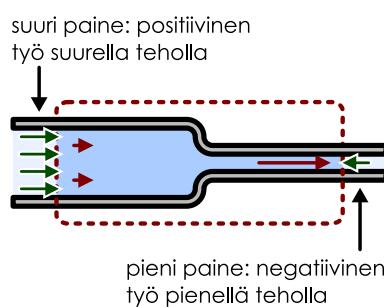
Tätä kutsutaan virtauksen *jatkuvuusyhtälöksi*, ja nimi viittaa siihen, että yhtälö kuvaaa jatkuva virtausta, joka pysyy kaikkialla samanlaisena vaikka aika kuluisi. Nesteen kulkeman matkan ja poikkipinta-alan tulo on putken läpi virranneen nesteen tilavuus,  $sA = V$ , ja nesteiden nopeuden ja poikkipinta-alan tulo on siten

putken läpi virranneen nesteen tilavuus aikayksikköä kohden,  $vA = sA/\Delta t = V/\Delta t$ . Yhtälö (7.28) siis sanoo, että putken jokaisen kohdan läpi pitää joka sekunti virrata yhtä paljon nestettä. Erityisesti jos putken yhdestä päästä tulee sisään tietty määärä nestettä, saman verran pitää poistua putken toisesta päästä. Tämä vaikuttaa melko itsestään selvältä, mutta ehto pätee vain jatkuvassa virtauksessa. Jos nimittäin putki on vaikkapa alussa *tyhjä*, aluksi putkeen tulee sisään vettä mutta vettä ei poistu sieltä lainkaan, koska putki vasta täytyy. Tällöin jatkuuusyhtälö ei päde — mutta toisaalta virtauskaan ei ole jatkuva, koska veden määärä putkessa muuttuu ajan kuluessa.



**7.10** Jatkuuusyhtälön (7.28) mukaan putken yhdestä päästä tulee sisään yhtä suuri tilavuus nestettä kuin toisesta poistuu. Kaasut voivat kuitenkin puristua kasaan, joten niiille jatkuuusehdo sanoo, että putkeen tulee yhtä paljon massaa kuin mitä sieltä poistuu. Johda kaasuvirtaukselle jatkuuusyhtälö poikkipinta-alan, virtausnopeuden ja tiheyden avulla.

Kuva 7.13: Paine tekee nesteeseen työtä.



Nesteen vauhti kasvaa sen siirtyessä leveästä putesta kapeaan, joten myös sen liike-energia kasvaa. Tämä kuitenkin tarkoitetaan sitä, että jonkin *ulkoisen voiman täytyy tehdä nesteeseen työtä*. Kuvan 7.12 esimerkissä putki on vaakasuora, joten painovoima *ei tee* nesteeseen työtä. Sen sijaan nestemassaa työntää eteenpäin kuvassa sen vasemmalla puolella oleva, oikealle virtaava neste, joka työntää edellään kulkevaa nestettä suurempaan vauhtiin. Systeemiin tekee siis työtä sitä *ympäröivän nesteen paineen tuottama voima*. Voiman tekemä työ on positiivinen, kun voiman vaikutuspiste liikkuu voiman osoittamaan suuntaan, joten positiivista työtä tekee tässä esimerkissä leveässä putkessa vaikuttavan paineen voima. Kapeassa putkessa *systeemi työntää edellään olevaa nestettä*, joten siellä ympäristön systeemiin tekemä työ on negatiivinen ja energiaa siirryy systeemistä ympäristöön.

Tässä esimerkissä systeemin kokonaisenergia kasvaa, joten positiivisen työn täytyy olla itseisarvoltaan suurempi kuin negatiivisen.

Emme nyt tiedä painetta putken eri osissa, joten emme voi sitä kautta

laskea paineesta johtuvan voiman tekemän työn suuruutta. Voimme kuitenkin käänrä tarkastelumme päävästaiseksi ja *määrittää paineen putken eri osissa* nesteeseen tehdyn työn perusteella. Jatkuuusehdon (7.28) nimittäin täytyy päteä joka tapuksessa, ja siitä voidaan suoraan päättää virtausnopeuden suhteellinen muutos putken kaventuessa. Otamme siis lähtökohdaksi sen, että nesteen virtausnopeus on tunnettu suure, ja haluamme määrittää paineen tämän perusteella.

Lasketaan ensin nesteen energian muutos. Koko systeemi siirryy ajan kuluessa, mutta jos tarkastelemme lyhyttä aikavälitä  $\Delta t$ , valtaosa nesteestä säilyttää saman virtausnopeuden. Merkitystä on vain sillä, paljonko *systeemiin kuuluvan nesteen määärä* kummassakin putken osassa muuttuu. Tämä nestemäärä on merkity kuvan 7.12 raidoittetun tilavuutena. Leveässä putkessa olevan nesteen tilavuus vähenyy yhtä paljon kuin kapeassa putkessa olevan nesteen määrä kasvaa, ja tämän tilavuuden  $\Delta V$  sisältämän nesteen massa on  $m = \rho\Delta V$ . Leveässä putkessa olevan nesteen liike-energia muuttuu siis määränpainossa  $\Delta K_{suuri} = -\frac{1}{2}mv_{suuri}^2$  ja kapeassa putkessa olevan nesteen liike-energia määränpainossa  $\Delta K_{pieni} = \frac{1}{2}mv_{pieni}^2$ . Kaikkiaan systeemin liike-energian muutos on siis

$$\Delta K = \Delta K_{suuri} + \Delta K_{pieni} = \frac{1}{2}m(v_{pieni}^2 - v_{suuri}^2). \quad (7.29)$$

Määritetään sitten systeemiin tehty työ, jonka täytyy olla yhtä suuri kuin systeemin energian muutos. Leveässä putkessa paine  $p_{suuri}$  kohdistaa nesteeseen voiman  $F_{suuri} = p_{suuri}A_{suuri}$ , joka tekee systeemiin työn

$$W_{suuri} = F_{suuri}s_{suuri} = p_{suuri}A_{suuri}s_{suuri} = p_{suuri}\Delta V. \quad (7.30)$$

Erityisesti huomataan, että *paineen tekemä työ voidaan ilmaista paineen ja tilavuuden muutoksen tulona*. Tulos osoittautuu vielä erittäin tärkeäksi luvussa 9, kun tutkimme laajenevien kaasujen tekemää työtä.

Paineen tuottama voima tekee työtä myös pienessä putkessa, mutta siellä paineen tuottama voima osoittaa liikkeen suuntaa vastaan ja tekee siis negatiivisen työn

$$W_{pieni} = -F_{pieni}s_{pieni} = -p_{pieni}\Delta V. \quad (7.31)$$

Systeemiin tehty kokonaistyö on näin ollen

$$W_{kokonais} = W_{suuri} + W_{pieni} = (p_{suuri} - p_{pieni})\Delta V. \quad (7.32)$$

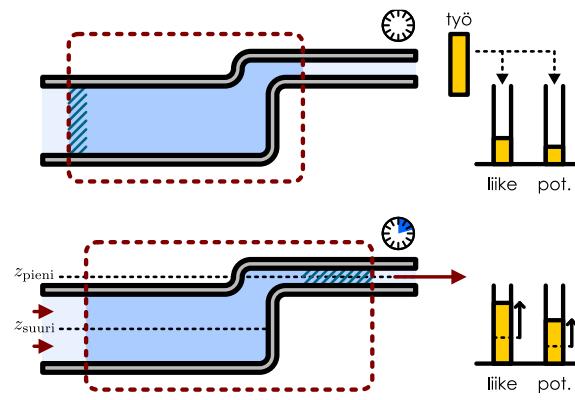
Tehty kokonaistyö riippuu siis leveässä ja kapeassa putkessa vallitsevasta *paine-erosta*. Jos paine olisi putkessa kaikkialla sama, systeemiin tehty työ olisi *nolla*. Näin ei kuitenkaan voi olla, koska nesteen liike-energia kasvaa, ja siispä putken eri osissa täytyy olla eri paine. Täsmällisemmin systeemiin tehdyn kokonaistyön täytyy olla positiivinen, joten *leveässä putkessa täytyy olla suurempi paine kuin kapeassa putkessa*,  $p_{suuri} > p_{pieni}$ .

## JATKUVA AINE

Edellisessä esimerkissä putki oli vaakasuora, mutta tieteenkin neste voi virrata myös pystysuunnassa kuten kuvassa 7.14. Tällöin myös nesteen potentiaalienergia muuttuu. Potentiaalienergian muutos voidaan määrittää tarkastelemalla sitä, paljonko *systeemiin kuuluva* nestettä siirtyy pystysuunnassa, ja jälleen on helpointa tutkia vain paljonko nesteen määrä muuttuu putken kummassakin osassa. Putken leveästä osasta poistuu massa  $m$  nestettä korkeudelta  $z_{\text{suuri}}$ , ja yhtä paljon nestettä tulee lisää kapeaan putkeen korkeudelle  $z_{\text{pieni}}$ . Nesteen potentiaalienergian muutos on silloin

$$\Delta U = mg(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.33)$$

Kuva 7.14: Nesteen virtaus putkessa, jonka paksuus ja korkeus muuttuvat.



Systeemin kokonaisen energian muutoksen täytyy nyt olla yhtä suuri kuin systeemiin tehty kokonaistyö,  $W_{\text{kokonaiss}} = \Delta K + \Delta U$ , ja sijoittamalla tähän edellä johdetut lausekkeet saadaan yhtälö

$$(p_{\text{suuri}} - p_{\text{pieni}})\Delta V = \frac{1}{2}m(v_{\text{pieni}}^2 - v_{\text{suuri}}^2) + mg(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.34)$$

Sürtynyt massa  $m$  ja tilavuus  $\Delta V$  riippuvat tarkasteltavan ajanjakson pituudesta, mutta niiden suhde eli nesteen tiheys  $\rho = m/\Delta V$  on vakio. Niinpä edellinen yhtälö voidaan jakaa puolittain tekijällä  $\Delta V$ , jolloin saadaan

$$p_{\text{suuri}} - p_{\text{pieni}} = \frac{1}{2}\rho(v_{\text{pieni}}^2 - v_{\text{suuri}}^2) + \rho g(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.35)$$

Tämä voidaan edelleen ryhmitellä niin, että putken leveää ja kapeaa puoliskoa kuvaavat termit ovat yhtäsuuruusmerkin eri puolilla,

$$p_{\text{suuri}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{suuri}}^2 + \rho g z_{\text{suuri}} = p_{\text{pieni}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{pieni}}^2 + \rho g z_{\text{pieni}}. \quad (7.36)$$

Nyt yhtäsuuruusmerkin molemmen puolin on kirjoitettuna sama lauseke erikseen putken leveälle ja kapealle osuudelle. Lausekkeella on siis putkessa sama arvo *kaikkialla*, eli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{vakio}. \quad (7.37)$$

Tätä tulosta kutsutaan **Bernoullin yhtälöksi** (Daniel Bernoulli mukaan), ja se kertoo kuinka virtaavan aineen paine, nopeus ja korkeus riippuvat toisistaan, kun kuljetaan virtauksen suunnassa.



**7.11** Vertaa kuvia 7.12 ja 7.14. Putken leveys on kummassakin kuvassa sama kuten myös paine ja nesteen virtausnopeus leveässä putkessa. Kummassa kuvassa on suurempi (a) virtausnopeus kapeassa putkessa, (b) systeemin liike-energian muutos, (c) systeemien tehty työ, (d) paine kapeassa putkessa? Perustele!

Edellisessä päätelyssä Bernoullin yhtälö johdettiin putkessa virtaavalle nesteelle, ja samalla tehtiin paljon oletuksia. Virtauksen piti olla jatkuva, kokoonpuristumatonta ja pyörteetöntä, eikä nesteessä saanut vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Nämä oletukset eivät yleensä päde, minkä vuoksi Bernoullin yhtälökään ei yleensä ole tarkka. Se on kuitenkin usein varsin hyvä approksimaatio, jolla voidaan kuvata myös esimerkiksi kaasujen virtauksia. Virtausten ei myöskään tarvitse olla rajoitettu putkiin kuten tarkastelemassamme esimerkissä, vaan yhtälön avulla voidaan arvioida paineen vaihteluita myös esimerkiksi ilmavirtauksissa. Tällöin pitää kuitenkin huomioida se, että Bernoullin yhtälö toimii vain samalla virtaviivalla oleville pisteille.



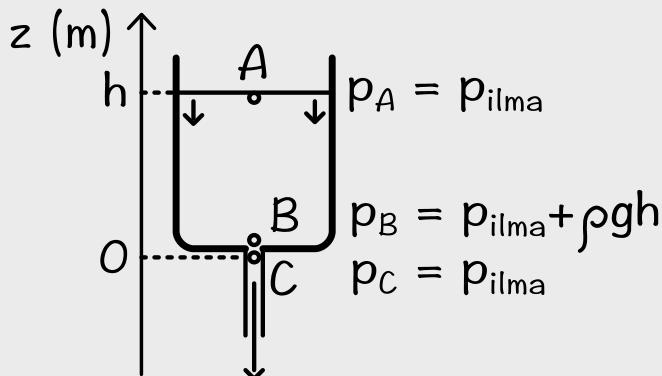
**7.12** Selitä perustellen päteekö Bernoullin yhtälö, kun  
 (a) vesi virtaa pumpun läpi (tarkastelupisteet ennen pumpua ja sen jälkeen),  
 (b) vesi putoaa vapaasti hanasta lavaaariin (tarkastelupisteet hanan suu ja vesinoro matkan puolivälissä),  
 (c) vesi virtaa joen pinnalla nopeasti mutta pohjalla hitaasti (tarkastelupisteet pinnalla ja pohjalla)?

## esimerkki 7.3

## Vuoto

Suuren vesisäiliön pohjassa on pieni reikä. Säiliö on ylhäältä katsoen ympyrän muotoinen. Sen säde on 0.40 m ja veden korkeus pohjasta 0.30 m. Reiän säde on 1.0 mm. Millä nopeudella vesi suihkuaa reiästä?

**TILANNE** Piirretään kuva säiliöstä. Merkitään kuvaan kolme tarkastelupistettä: A veden pinnalla, B säiliön pohjalla hieman reiän yläpuolella ja C säiliön ulkopuolella hieman reiän alapuolella. Merkitään säiliön sädettä  $r_{\text{säiliö}} = 0.40$  m, reiän sädettä  $r_{\text{reiä}} = 0.0010$  m ja veden korkeutta  $h = 0.30$  m. Asetetaan  $z$ -akseli niiin, että pisteiden B ja C korkeus on likimain nolla,  $z_B \approx z_C \approx 0$  m, jolloin pisteen A korkeus on siis sama kuin veden korkeus  $z_A = h = 0.30$  m. Veden tiheys on  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Säiliön ulkopuolella vallitsee ilmanpaine,  $p_{\text{ilma}} \approx 100 \text{ kPa}$ .



**SUUNNITELMA** Säiliössä olevan veden paino vetää vettä alaspin ja työntää sitä reiästä läpi. Tällöin säiliön pohjalla pisteessä B täytyy olla suurempi paine kuin säiliön pinnalla pisteessä A tai säiliön ulkopuolella pisteessä C, ja pisteiden B ja C välinen paine-ero työntää veden nopeaan liukkeeseen reiän läpi. Pisteessä A paineen täytyy olla sama kuin ilmanpaineen, koska tässä pisteessä neste kohtaa ilman. Myös piste C on hyvin lähellä nesteestä ja ilman rajapintaa, joten sielläkin paineen täytyy olla sama kuin ilmanpaineen. Pisteessä B paine sen sijaan on ilmanpaineen ja säiliössä olevan nesteen hydrostaattisen paineen summa. Näillä tiedoilla voimme laskea pisteiden B ja C välisen paine-eron.

Paineen ja virtausnopeuden yhteyden kertoo meille Bernoulliin yhtälö.

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{vakio.} \quad (7.38)$$

Siispä kun paine-ero pisteiden B ja C välillä tunnetaan, virtausnopeudet näissä pisteissä voidaan ratkaista.

Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että virtausnopeus pisteessä B on likimain nolla,  $v_B \approx 0$ . Todellisuudessa vesi kyllä virtaa alaspin myös säiliössä, mutta koska säiliön poikkipinta-ala on niin suuri reiään verrattuna, virtaus on säiliössä hyvin hidasta. Täsmällisesti virtauksen pitää toteuttaa jatkuvuusyhdyksellä

$$vA = \text{vakio.} \quad (7.39)$$

Piste B on säiliössä, joten siinä pinta-ala A on säiliön poikkipinta-ala. Piste C puolestaan on reiän alla, joten siinä pinta-ala A on reiästä tulevan vesisuuhun poikkipinta-ala eli reiän pinta-ala. Siispä näissä pisteissä virtausnopeuksien suhde on

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{A_{\text{reiä}}}{{A}_{\text{säiliö}}} = \frac{r_{\text{reiä}}^2}{r_{\text{säiliö}}^2} = 6.25 \cdot 10^{-6}. \quad (7.40)$$

Virtausnopeus on siis pisteessä B hyvin paljon pienempi kuin pisteessä C.

**RATKAISU** Paine pisteessä B on  $p_B = p_{\text{ilma}} + \rho gh$  ja pisteessä C  $p_C = p_{\text{ilma}}$ . Huomioimalla, että  $z_B$ ,  $z_C$  ja  $v_B$  ovat kaikki likimain nollia, Bernoullin yhtälön perusteella täytyy olla

$$p_B = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2. \quad (7.41)$$

Tästä voidaan ratkaista nopeus pisteessä C,

$$v_C = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_B - p_C)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho gh)} = \sqrt{2gh} = 2.4 \text{ m/s.} \quad (7.42)$$

**ARVIOINTI** Tarkasteltu säiliö ja reikä olivat arkipäivästä kokoluokkaa, joten varmastikaan veden nopeus ei voi olla satoja metrejä sekunnissa tai sitä suurempi. Tuloksen suuruusluokka on metrejä sekunnissa, mikä on järkevä.

Itse asiassa ratkaisuna saatu veden nopeus  $\sqrt{2gh}$  on täsmälleen sama kuin nopeus, jonka vapaasti putoava kappale saa pudottessaan matkan  $h$ . Nämä pitääkin olla, koska virtauksen voi ajatella tapahtuvan niin, että vesisäiliön pinnalta korkeudelta  $z = h$  poistuu vettä, jolloin vesisäiliön potentiaalienergia pienenee. Samalla yhtä paljon vettä siirtyy reiästä ulos korkeudelle  $z = 0$ .



**7.13** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä laminaarisista virtauksista. Selitä erityisesti, mitä tarkoittaa virtauksen jatkuuusehdo, mikä on Bernoullin yhtälö sekä miten ja millä oletuksilla näitä voidaan käyttää.

### 7.3 Lämpötila ja lämpöenergia

Lämpöön liittyvät ilmiöt ovat jokapäiväisiä ja niitä voidaan havaita monin tavoin. Kuuma tai kylmää kappaleita koskettamalla lämmön voi tuntea. Veden lämmittäminen saa sen kiehumaan ja muuttamaan olomuotoaan nesteestä kaasuksi, ja jäähdyttämällä veden voi puolestaan saada jäätymään kiinteäksi. Jotkin aineet sytyyvät tarpeksi lämmetessään palamaan, mikä on lisää lämpöä vapauttava kemiallinen reaktio. Tämän ansiosta palamisreaktiota voidaan käyttää kemiallisen energian muuttamiseksi lämpöenergiaksi ja edelleen mekaaniseksi energiaksi esimerkiksi polttoaineissa tai voimalaitoksissa.

Vaikka lämpöilmiöt ovat yleisiä, niiden tutkiminen ei ole yhtä helppoa kuin mekaanisten ilmiöiden, koska lämpöilmiöihin liittyviä suureita ovat vaikeampia havaita ja mitata kuin mekaanisia suureita kuten paikkaa ja nopeutta. Lisäksi lämpöilmiötä ohjaavien mekanismien suora havaitseminen on vaikeaa tai mahdotonta, koska lämpöä itsessään ei voi nähdä. Näistä syistä lämpöilmiötä opittiin ymmärtämään ja hyödyntämään huomattavasti myöhemmin kuin mekaanisia ilmiöitä.

Lämpöilmiöt syntyvät pohjimmiltaan atomitasolla. Näitä ilmiöitä kuitenkin alettiin tutkia jo ennen kuin aineen tiedettiin koostuvan atomeista, ja lämpöilmiöiden toiminta opittiin hallitsemaan varsin hyvin ilman atomimalliakin. Tässä luvussa aloitamme lämpöilmiöihin tutustumisen samaan tapaan kuin miten ilmiötä historiallisesti tutkittiin — tarkastelemalla kokeellisesti ilmiöihin liittyviä säännönmukaisuuksia.

#### Lämpötila

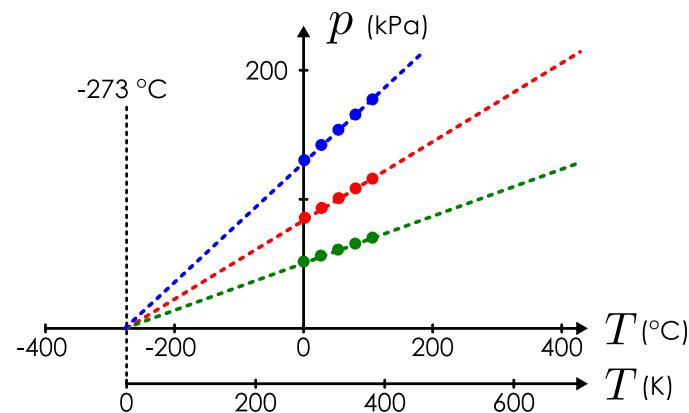
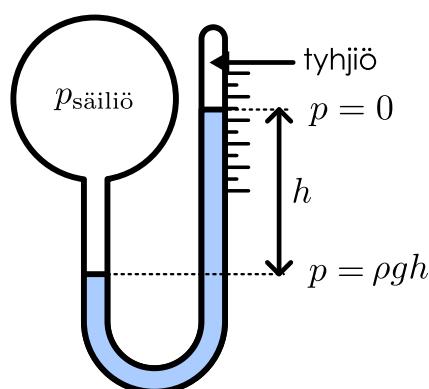
Opimme jo aikaisemmin, että lämpö liittyy aineiden varastoimaan lämpöenergiaan, joka on sisäenergian muoto. Mitä enemmän aineessa on lämpöenergiaa, sitä kuumempaa aine on. Historiallisesti lämpöilmiötä ei kuitenkaan alunperin kuvattu energian avulla vaan päinvastoin lämpöopin kehittymisen johti aikoinaan energian käsitteen ja energian säilymislain keksimiseen. Historiallisesti lämpöopin kehitys alkoikin pyrkimyksistä mitata "kylmyyttä" ja "kuumutta" eli **lämpötilaa**.

Emme vielä määrittele lämpötilaa täsmällisesti. Lämpötilan arkipäiväinen merkitys on kuitenkin se, että lämpötila on sitä korkeampi, mitä kuumempaa aine on, ja tämä intuitiivinen käsitys riittää näin aluksi. Lämpötilaa mitataan *lämpömittareilla*, ja periaatteessa mikä tahansa lämpötilasta jatkuvasti riippuva ilmiö voi toimia lämpömittarina, kunhan mittari ensin *kalibroidaan*. Jotta mittaukset olisivat vertailtavissa, lämpötilalle pitää myös sopia jokin mittayksikkö ja mittakaava. Suomessa ja muuallakin maailmassa yleisimmin käytetään *Celsius-asteikkoa* (Anders Celsiusin mukaan), jossa lämpötila  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  on asetettu veden jäätymispisteeseen ( $1\text{ atm}$  paineessa) ja lämpötila  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  veden kiehumispisteeseen. Tietenkin käytettävä lämpömittari on myös säädettävä niin, että se todella näyttää oikeita arvoja näissä lämpötiloissa.

Kaasulämpömittari on eräs yksinkertainen mutta silti varsin tarkka tapa mitata lämpötilaa. Tällainen mittari on esitetty kuvassa 7.15 (a). Mittari koostuu ohuesta U-putkesta, jossa on nestettä. Putken toisessa päässä on tunnettu paine — esimerkiksi jos putkessa on tyhjiö, paine on nolla. Toisessa päässä on puolestaan kaasusäiliö. Kuten kuvassa 7.7 nähtiin, paine-ero putken haarojen välillä kohdistaa nesteesseen voiman, joka työntää nestettä kohti pienempää painetta. Tässä siis kaasusäiliön paine työntää nestettä tyhjiön puolelle. Tasapainossa nesteessä on sama hydrostaattinen paine kaikissa yhtä korkealla olevissa pisteissä, ja näin nestepinnan korkeutta voidaan käyttää kaasusäiliön paineen mittarina.

Kuva 7.15: Kaasulämpömittari ja absoluuttinen lämpötila.

- (a) U-putkeen perustuva kaasulämpömittari. (b) Eri kaasujen paineen riippuvuuksien lämpötilasta. Ekstrapoloidut kuvaajat saavuttavat nollapaineen samassa lämpötilassa.



Jos kaasusäiliötä lämmitetään, kaasun havaitaan työntävän nestettä pidemmälle U-putkeen. Siispä *kaasun paineen täytyy kasvaa sen lämmetessä*. Tämä tarkoittaa myös sitä, että U-putken avulla voidaan mitata kaasun lämpötilaa. Jos kaasusäiliö ympäröidää jäävedellä, kaasu jäähtyy lämpötilaan  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ja näin saamme selville, millä korkeudella nesteen pinta on tässä lämpötilassa. Vastaavaan tapaan kaasusäiliö voidaan ympäröidä kiehuvalla vedellä, jolloin kaasu lämpenee lämpötilaan  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  ja neste U-putkessa nousee tätä lämpötilaa vastaavalle korkeudelle. Tämän jälkeen voimme määritellä muut lämpötilat niin, että lämpötilan muutos on suoraan verrannollinen nesteen pinnan korkeuden muutokseen. Toisin sanoen kaasun lämpötila on esimerkiksi  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  silloin, kun nesteen pinta on tasapainossa täsmälleen puolivälissä lämpötiloissa  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  ja  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  mitattuihin korkeuksiin nähden.

Kaasulämpömittarilla voidaan siis mitata kaasun paineen ja lämpötilan välinen riippuvuus. Kaasun paine ei tietenkään riipu pelkästään lämpötilasta vaan myös kaasun lajista ja määristä sekä kaasusäiliön koosta. (Jo kuvassa 7.3 nähtiin, että kaasun puristaminen pienentää kaasun tilavuutta ja kasvattaa sen painetta.) Kuvaassa 7.15 (b) on piirretty erilaisissa astioissa olevien erilaisten kaasujen paine lämpötilan funktiona. Kaikissa tapauksissa kaasun paine riippuu lineaarisesti lämpötilasta, mikä näkyy kuvassa siten, että mitatut paineen ja lämpötilan arvot asettuvat kullakin kaasulla nousevalle suoralle. Koska kaasut ovat erilaisia, kuvaajilla on eri kulmakertoimet.



**7.14** Se, että kaasun paine riippuu lineaarisesti lämpötilasta, johtuu tavastamme määrittellä lämpötila kaasulämpömittarin nestepatsaan korkeuden kautta. Selitä miksi!

Kun samassa kuvassa mittapisteiden kautta piirretään suorat ja näitä suoria jatketaan eli ekstrapoloidaan kohti yhä pienempiä lämpötiloja, suorien huomataan leikkaavan lämpötila-akselin samassa pisteessä, lämpötilassa  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Tämä on erittäin tärkeä havainto, sillä sen mukaan kaikkien kaasujen paine on suoraan verrannollinen *pisteen  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$  suhteeseen mitattuun lämpötilaan*. Celsiusasteikon nollakohta  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  on mielelvaltaisesti valittu, mutta tämän havainnon mukaan lämpötila-asteikon nollakohdaksi kannattaisikin valita piste  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Lämpötilaa  $T$ , jonka nollakohta on valittu näin, kutsutaan **absoluuttiseksi lämpötilaksi** ja piste  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$  on lämpötilan **absoluuttinen nollapiste**. Absoluuttisen lämpötilan SI-yksikkö on **kelvin**, K (Lordi Kelvinin mukaan). Kelvin-asteikon jakoväli on sama kuin Celsius-asteikon. Siispä 1 K lämpötilan muutos on yhtä suuri kuin  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  muutos. Asteikkojen ainoa ero onkin nollapisteiden valinta, ja celsius-asteissa annettu lämpötila saadaan muunnettua kelvineiksi yksinkertaisesti lisäämällä vakio 273.15.



**7.15** Jos kuvan 7.15 (b) tapainen kuvaaja piirrettäisiin pelkkää nestettä sisältävien lämpömittarien nesteen tilavuuden ja lämpötilan välille, leikkaisivatko mittauspisteiden kautta piirretyt suorat absoluuttisessa nollapisteessä?

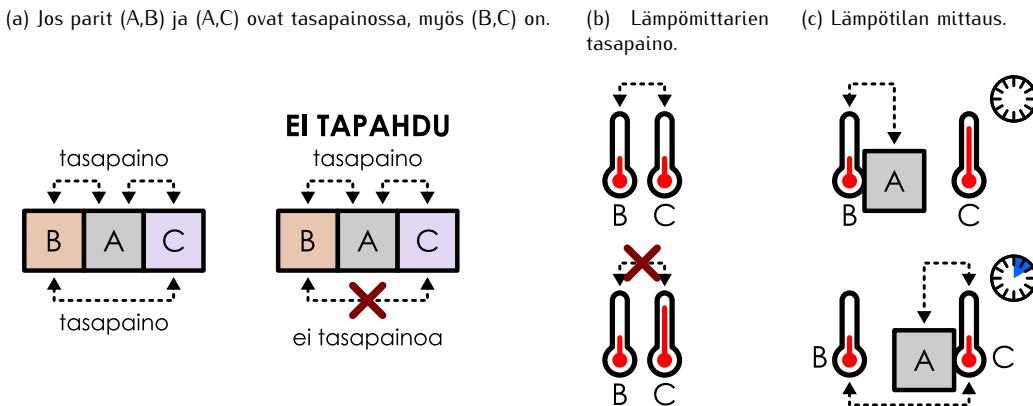
Tämä tulos ei tarkoita, että kaasulämpömittarit todella toimisivat näin kylmissä lämpötiloissa. Se kuitenkin tarkoittaa sitä, että tarpeeksi korkeissa lämpötiloissa minkä tahansa kaasun paine ja absoluuttinen lämpötila ovat toisiinsa suoraan verrannolliset. Jos tämä riippuvuus pärisi mielivaltaisen kylmissä lämpötiloissa, kaasun paine saavuttaisi arvon nolla lämpötilassa  $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Kaasun paine ei voi olla negatiivinen, joten tämä tulos viittaa pienimmän mahdollisen lämpötilan olemassaoloon (mutta ei todista sitä). Tämä kaasujen ominaisuuksia koskeva havainto oli ensimmäinen vihje siitä, että lämpötilalle on järkevä määritellä absoluuttinen asteikko. Myöhemmin on osoittautunut, että absoluutinen lämpötila on lämpöilmiöiden fysiikassa erittäin tärkeä suure, ja fysiikassa "lämpötilalla" tarkoitetaankin aina juuri absoluuttista lämpötilaa. Käytännössä siis lämpötilat ilmaistaan aina kelvineinä ellei erityisesti ole syytä käyttää jotakin muuta yksikköä.

## Nollas pääsääntö

Edellisessä tarkastelussa oletettiin asiaa erityisesti mainitsematta, että on olemassa yksi yleinen kuumuutta kuvava suure nimeltä lämpötila. Tämä on totta, mutta on syytä pohtia tämän oletuksen merkitystä. Tehdään ajatuskoe: Otetaan kappale (A), ja annetaan sen koskettaa kahta muuta kappaletta (B ja C) niin että nämä kappaleet eivät kosketa toisiaan (kuva 7.16 (a)). Jos toisiaan koskettavilla kappaleilla on eri lämpötilat, kuumat kappaleet alkavat *itsestään* jäähtyä ja kylmät lämmetä. Prosessi jatkuu jonkin aikaa, kunnes kappaleiden kuumuus ei enää muudu. Tällöin toisiaan koskettavien kappaleiden A ja B sekä A ja C sanotaan olevan *termodynamiassa tasapainossa*. Poistetaan nyt kappale A ja annetaan kappaleiden B ja C koskettaa toisiaan. Onko mahdollista, että toinen kappaleista alkaa lämmetä ja toinen viilentyä? Kumpikin kappaleista B ja C oli tasapainossa kappaleen A kanssa, mutta voiko olla niin, että B ja C eivät silti ole keskenään tasapainossa? Vastaus on *ei*. Jos kappaleet A ja B sekä A ja C ovat keskenään termodynamiassa tasapainossa, myös kappaleet B ja C ovat tasapainossa. Tätä lainalaisuutta kutsutaan **termodynamiikan nollanneksi pääsäännöksi**. Nimi tulee siitä, että termodynamiikan ensimmäinen ja toinen pääsääntö (joihin tutustumme pian) oli jo numeroitu ennen kuin tämän säännön merkitys oivallettiin. Sitä voi kuitenkin pitää näistä pääsäännöistä perustavimpana, koska sen ansiosta lämpötila on järkevä suure.

## JATKUVA AINE

Kuva 7.16: Termodynamiikan nollanen pääsäännön ansiosta lämpötila erottelee termodynaamiset tasapainotilat. Kappaleet ovat tasapainossa vain jos niillä on sama lämpötila.



Lämpötilan mittaaminen lämpömittarilla edellyttää sitä, että mittarin lämpötila on sama kuin mitattavan kappaleen lämpötila. Termodynamiisen tasapainon käsitteen ansiosta tämä on mahdollista. Jos nimittäin kappaleen annetaan koskettaa mittaria, mittari ja kappale hakeutuvat itsestään termodynamiiseen tasapainoon. Tällöin voimme sanoa, että kappaleen lämpötila on sama kuin mittarin näyttämä lämpötila. Tästä seuraa ensinnäkin se, että samaa lämpötilaa näyttävien lämpömittareiden täytyy olla keskenään termodynamiisessa tasapainossa (kuva 7.16 (b)). Toiseksi, jos kappale on tasapainossa yhden lämpömittarin kanssa, sen täytyy olla tasapainossa myös kaikkien muidenkin samaa lämpötilaa näyttävien mittareiden kanssa (kuva 7.16 (c)). Kolmanneksi, kaikki keskenään tasapainossa olevat kappaleet ovat tasapainossa myös samojen lämpömittareiden kanssa eli niillä on kaikilla sama lämpötila.

Lämpötilan avulla ilmaisten 0. pääsääntö sanoo siis sen, että jos  $T_A = T_B$  ja  $T_A = T_C$ , täytyy olla myös  $T_B = T_C$ . Tämä on tietenkin ilmeistä, kun nyt tiedämme lämpötilan olevan hyvin määritelty suure. Nollanen pääsäännön merkitys onkin siinä, että ilman sitä termodynamiasta tasapainoa ei voisi kuvata yhdellä luvulla  $T$  eli lämpötilalla. Samalla se antaa lämpötilalle syvällisemmän merkityksen kuin olla vain "kuumuuden mittari". *Lämpötila nimittäin erottelee termodynamiiset tasapainotilat*: kappaleet ovat tasapainossa keskenään vain jos niillä on sama lämpötila.



**7.16** Jos nollas pääsääntö ei olisi totta, kaksi toimivaa lämpömittaria voisi näyttää samalle kappaleelle eri lämpötiloja. (a) Selitä miksi. (b) Miksi tämä olisi ongelmallista lämpötilan määrittelyn kannalta?

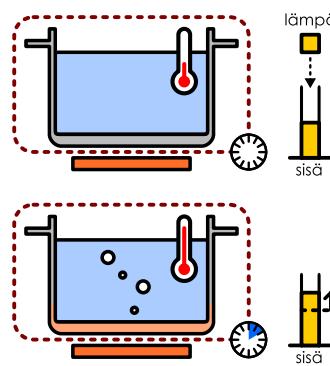
## Lämpönä siirtymä energia

Aineiden lämmittäminen vaatii energiota, ja kuumiin kappaleisiin on varastoitunut paljon sisäenergiaa. Sisäenergialla on kuitenkin monia muotoja, ja näistä vain jotkin ilmenevät kappaleiden kuumuuteena, "lämpöenergiana". Atomien satunnaisliikkeen energia havaitaan makroskoopisesti kuumuutena, kuten luvussa 6 nähtiin, ja muitakin tällaisia lämpöenergian muotoja on olemassa. Toisaalta esimerkiksi molekyylien kemiallisiin sidoksiin sitoutunut energia ei ilmene kuumuutena. Vaikkapa paristoon varastoituneen energian määrä ei suoraan vaikuta siihen, onko paristo kylmä tai kuuma.

Koska lämpötila riippuu kappaleen energiasta, lämpötilan muuttumiseen täytyy aina liittyä energian siirtymistä tai muuttumista muodosta toiseen. Esimerkiksi palaminen nostaa gleensä palavan aineen lämpötilaa, koska palaminen on kemiallinen prosessi, jossa aineeseen sitoutunut kemiallinen sisäenergia muuttuu lämpöenergiaksi. Myös esimerkiksi liukuvat pinnat läppenevät, kun kitka muuttaa mekaanista energiasta lämpöenergiaksi. Kuumalla keittolevyllä oleva kattilaan läppenee, kun lämpöenergiaa siirtyy suoraan levystä kattilaan.

Läpenemisprosessi on näissä tilanteissa kussakin erilainen. Palavassa aineessa aineen sisäenergia muuttuu muotoaan, mutta prosessi ei muuta aineen kokonaisenergiaa. Jos kappaleita työnnetään, siihen tehdään työtä, ja tämän vuoksi kappaleen kokonaisenergia lisääntyy. Työn tekeminen vaatii aina jonkinlaista makroskooppista vetämistä tai työntämistä, koska työ määriteltiin voimavektorin ja sen vaikutuspisteen siirtymän

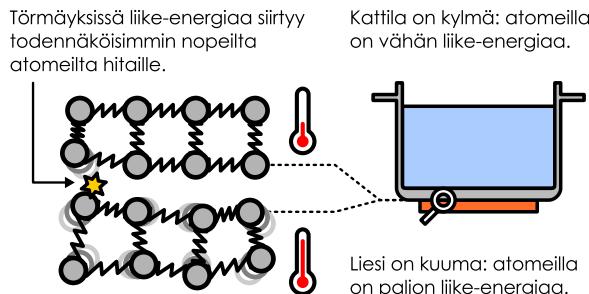
Kuva 7.17: Energiaa voi siirtää lämpönä.



tulona tai yleisemmin voiman viivaintegraalina. Jos kuitenkin kappale on paikoillaan eikä sen muoto muutu, kappaleeseen ei tehdä työtä. Keittolevyllä oleva kattila ei liiku eikä levy tee siihen työtä, mutta kuitenkin energiaa siirrytä kuumasta levystä viileämpään kattilaan. Tämä energia ei siirry työnä vaan **lämpönä**.

Lämpönä siirtyvää energiota merkitään tavallisesti symbolilla  $Q$ . Termi "lämpö" tarkoittaa fysiikassa niemenomaan prosessissa *siirtyvää* energiota aivan kuten työkin ilmaisee siirtyvää energiota eikä mitään tietyn energiamuotoa. Atomien satunnaisliukkeeseen varastoitunutta energiota voidaan kutsua lämpöenergiaksi  $E_{lämpö}$  tai mieluummin sisäenergiaksi  $E_{sisä}$ , mutta ei siis pelkäksi lämmöksi. Termit eivät pidä myöskään sekoittaa lämpötilaan  $T$ , jolla on jopa eri dimensio. Koska nämä lämpööpin termit ovat niin samankaltaiset, käytämme tässä tekstissä selvyyden vuoksi pidempää ilmaisua "lämpönä siirtyvä energia", kun tarkoitamme suuretta  $Q$ .

Kuva 7.18: Lämpö siirrytä atomitason vuorovaikutuksissa.



giaa havaitaan siirryvän vain yhteen suuntaan, liedestä kattilaan.

Tämä pätee yleisesti: jos eri lämpötiloissa olevat kappaleet koskettavat, *energia virtaa lämpönä aina itsestään korkeammassa lämpötilassa olevasta kappaleesta matalammassa lämpötilassa olevaan kappaleeseen eli kuumasta kylmään*. Tällöin kuumempi kappale jäähtyy ja kylmempi lämpenee, ja termodynamiikan tasapaino saavutetaan, kun kappaleilla on sama lämpötila. Se, että *tasapainotila on olemassa* ja että sitä kuva lämpötila, on termodynamiikan nollan pääsäännön seuraus. Se, että lämpö virtaa itsestään aina kuumasta kylmään eli että *systeemit pyrkivät tasapainoon* on puolestaan **termodynamiikan toinen pääsääntö**.

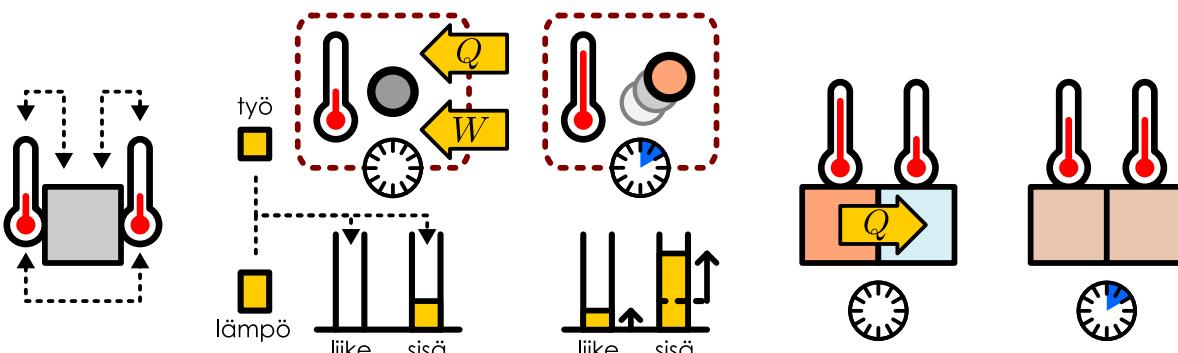
Työnä ja lämpönä siirtyvä energia on erilaista, kuten edellisessä esimerkissä nähtiin. Mekaaniseen työhön liittyy makroskooppista liikkettä, mutta lämpö siirrytä ilman näkyvää liikkettä, koska lämpöenergiaa siirtävät vuorovaikutukset tapahtuvat mikroskooppisessa mittakaavassa. Tämä ei ole kuitenkaan työn ja lämmön tärkein ero. Yleisesti fysiikassa *työ tarkoittaa hyvin järjestyneen energian siirtymistä, ja lämpö on epäjärjestyneen energian siirtymistä*. Mekaanisen työn lisäksi esimerkiksi sähköiset voimat voivat tehdä työtä liikkuihin sähköisiin hiukkasiin, vaikkei esimerkiksi sähköjohdossa kulkevan sähkövirran liikkettä makroskooppisesti näkään. Lämpönä energia puolestaan voi siirry esimerkiksi *johtumalla* kahden eri lämpötilassa olevan kappaleen koskettäessä kuten kattilan tapauksessa tai *säteilemällä* kaukaistenkin kappaleiden välillä. Kolmas tapa siirtää energiota lämpönä on yksinkertaisesti lämpimän aineen siirtäminen paikasta toiseen, jolloin aineen

Kuva 7.19: Termodynamiikan pääsäännöt.

(a) 0. pääsääntö: on lämpötila

(b) 1. pääsääntö: energiota voi siirtää työnä tai lämpönä

(c) 2. pääsääntö: lämpötilaeroit pyrkivät tasotumaan itsestään



sisältämä lämpöenergia siirtyy sen mukana.

Energian säilymislain perusteella minkä tahansa systeemin kokonaisenergian muutos missä tahansa prosessissa on yhtä suuri kuin systeemiin työnä ja lämpönä tuodun energian summa. Tämä energian säilymislain muoto on **termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö**. Meille energian säilymislaki on jo tuttu luvusta 2, mutta historiallisesti tämä laki on löydetty kokeellisesti ennen yleisen energian käsitteen keksimistä.



**7.17** Selitä termodynamiikan pääsäännöt oman sanoin. Keksi jokaisen lain kohdalla esimerkki selvästi mahdollomasta ilmiöstä tai koneesta, joka voisi olla mahdollinen, jos laki ei päti.

## Lämpökapasiteetti

Kappaleen lämpöenergian lisääminen nostaa sen lämpötilaa, ja kappale voi vastaanottaa energiaa sekä työnä että lämpönä. Lämpötilan muuttamiseen tarvittava energiamäärä riippuu kuitenkin sekä lämmittävästä aineesta että sen määrästä. Esimerkiksi saunaan olevan ilman lämmittäminen vaatii paljon vähemmän energiota kuin yhtä suuren vesisäiliön sisällön lämmittäminen. Ja tietenkin kahden saunan lämmittäminen vaatii kaksinkertaisen energiamäärän yhteen verrattuna.

Kappaleen tai systeemin kykyä varastoida lämpöenergiaa kuvaa **lämpökapasiteetti**. Suuri lämpökapasiteetti tarkoittaa sitä, että vaikka systeemiin tuodaan suuri määrä energiota lämpönä,  $Q$ , kappaleen lämpötilan muutos,  $\Delta T$  on silti pieni. Lämpökapasiteetti on näiden suureiden suhde,

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \quad (7.43)$$

ja tämä suhde on siis suuri, jos lämpötilan muutos on pieni lämpönä tuotuun energiamäärän verrattuna. Tai toisin päin käännettynä: lämpötilan muutokseen  $\Delta T$  vaadittava lämpömäärä voidaan laskea lämpötilan muutoksen ja lämpökapasiteetin suhteena,

$$Q = C\Delta T. \quad (7.44)$$

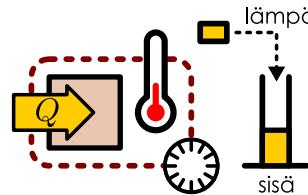
Mitä suurempi lämpökapasiteetti on, sitä enemmän energiota lämpötilan muutos vaatii.

Edelliset lausekkeet pätevät vain silloin, kun lämpökapasiteetti on vakio, koska tällöin kappaleen lämpötilan muutos on aina suoraan verrannollinen kappaleen lämpönä vastaanottaman energian määrään. Todellisuudessa lämpökapasiteetti voi kuitenkin riippua lämpötilasta, ja tällöin se määritellään täsmällisesti systeemin vastaanottaman lämmön derivaattana lämpötilan suhteeseen,

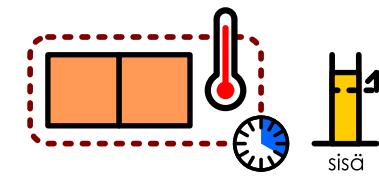
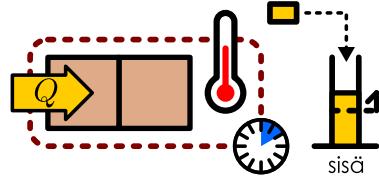
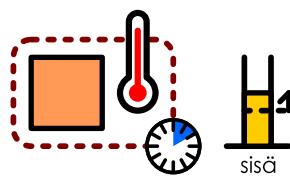
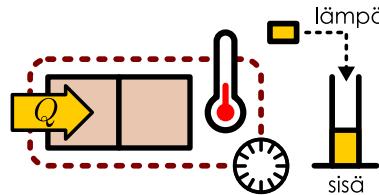
$$C = \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.45)$$

Kuva 7.20: Lämpökapasiteetti mittaa systeemin kykyä varastoida lämpönä vastaanotettua energiota.

(a) Pieni lämpökapasiteetti: pieni lämpömäärä muuttaa lämpötilaa paljon.



(b) Suuri lämpökapasiteetti: lämpötilan muuttaminen vaatii paljon energiota.



Vastaavasti lämpönä vastaanotettu kokonaisenergia voidaan laskea lämpökapasiteetin integraalina

$$Q = \int C dT. \quad (7.46)$$

Lämpökapasiteetti on *ekstensiivinen* suure, sillä mitä suurempi systeemi on, sitä enemmän siinä voi olla lämpöenergiaa varastoivaa ainetta. Aineiden ominaisuuksista puhuttaessa on usein hyödyllisempää tarkastella **ominaislämpökapasiteettia**, joka on *intensiivinen* suure. Ominaislämpökapasiteetti mittaa aineen kykyä varastoida lämpönä sääryvää energiota, ja jotta kyseessä olisi kappaleen koosta riippumaton suure, ominaislämpökapasiteetti määritellään jakamalla kappaleen lämpökapasiteetti kappaleen kokoa kuvaavalla suurella kuten massalla. Näin voidaan määritellä useita erilaisia ominaislämpökapasiteetteja. Yleisimmin käytetään massaa  $m$ , ainemäärää  $n$  ja hiukkosten lukumäärää  $N$  kohden laskettuja ominaislämpökapasiteetteja, jotka määritellään

$$c^m = \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial T}, \quad c^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T}, \quad c^N = \frac{1}{N} \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.47)$$

Erlaisille lämpökapasiteeteille ei ole vakiintuneita merkintätapoja, vaan eri kirjoissa käytetään eri merkityksissä pieniä ja suuria kirjaimia. Tässä materiaalissa suuri  $C$  merkitsee systeemin tai kappaleen kokonaislämpökapasiteettia ja pieni  $c$  aineen ominaislämpökapasiteettia. Symbolit  $m$ ,  $n$  ja  $N$  eivät ole tässä eksponentteja vaan yläindeksejä, joilla vain merkitään se ekstensiivinen suure, jolla kokonaislämpökapasiteetti on jaettu.

**Ainemäärä** tarkoittaa tässä samannimistä SI-perusyksikköä, joka on suoraan verrannollinen hiukkisten määriään. Ainemäärän yksikkö on **mooli**, joka on nykyisen määritelmän mukaan täsmälleen  $6.02214076 \cdot 10^{23}$  hiukkasta. Tätä lukua merkitään tavallisesti symbolilla  $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$  1/mol ja sitä kutsutaan *Avogadron vakioksi* (Amedeo Avogadron mukaan). Aineen hiukkisten lukumäärän  $N$  ja ainemäärän eli moolien määrä  $n$  välillä on siis yhteyks

$$N = n N_A. \quad (7.48)$$

Pohjimmiltaan ainemäärä siis mittaa aivan samaa asiaa kuin hiukkisten lukumäärä. Kuitenkin koska makroskooppisissa kappaleissa on suuruusluokkaa  $10^{23}$  hiukkasta, on näitä tarkasteltaessa usein kätevämpää puhua moleista kuin hiukkisten lukumääristä, koska näin saadaan pienempiä lukuarvoja. Mitään muuta eroa näillä suureilla ei ole.



**7.18** Veden ominaislämpökapasiteetti massayksikköä kohti on  $4.2 \text{ kJ/(kgK)}$  ja veden atomimassa on  $18 \text{ g/mol}$ . Mikä on tämän perusteella (a) yhden vesimolekyylin massa, (b) molekyylien määrä 1 kg vesimassassa, (c) ominaislämpökapasiteetti hiukkisten lukumäärää kohti, (d) ominaislämpökapasiteetti ainemäärää kohti.

## Olomuodon muutosten energia

Lämpötila ei ole ainoa asia, johon lämmittäminen vaikuttaa, sillä aineen sisäenergian muuttuminen voi myös muuttaa aineen olomuotoa. Esimerkiksi jään lämmittäminen saa sen sulamaan nestemäiseksi vedeksi, ja veden lämmittäminen edelleen saa sen lopulta kiehumaan ja muuttumaan kaasaksi. Sulaminen ja kaasuuntuminen ovat molemmat prosesseja, joissa aineeseen varastoituu sisäenergiaa, ja näille vastakkaiset jähmettyminen ja tiivistyminen ovat energiata vapauttavia prosesseja. Olomuodon muutoksiin liittyvä energiota kutsutaan yleisesti **latenttilämöksi** (latinaa 'latere', olla piilossa).

Latenttilämpö on lämpökapasiteetin tapainen suure, sillä kumpikin kuvaava systeemin kykyä varastoida energiota. Oleellinen ero näiden kahden välillä on kuitenkin se, että latenttilämpöön ei liity lämpötilan muutosta toisin kuin lämpökapasiteettiin. Olomuodon muutosten latenttilämpö kuvailee vain aineen rakenteen muutokseen liittyvää energiota. Esimerkiksi veden muuttuessa nesteestä kaasuki vesimolekyylien väliset sidokset rikkoutuvat, ja näiden sidosten rikkominen vaatii energiota. Kaasumaisen veden sisäenergia on siis suurempi kuin nestemäisen veden, vaikka nämä olisivat samassa lämpötilassa, ja latenttilämpö kuvailee tästä energiateroa. Jos sekä aineen olomuoto että sen lämpötila muuttuvat, prosessiin liittyvä energian muutos saadaan laskemalla erikseen olomuodon muutoksen energian latenttilämön kautta ja lämpötilan muutoksen energian lämpökapasiteetin avulla. Tällöin on kuitenkin huomioitava, missä olomuodossa aine kulloinkin on, sillä yleensä eri olomuodoilla on eri ominaislämpökapasiteetit. Vaatii siis eri määräni energiota ensin lämmittää vettä  $10 \text{ K}$  ja sitten keittää se kuin keittää vesi ensin ja sitten lämmittää kaasumaista vettä vielä  $10 \text{ K}$ .

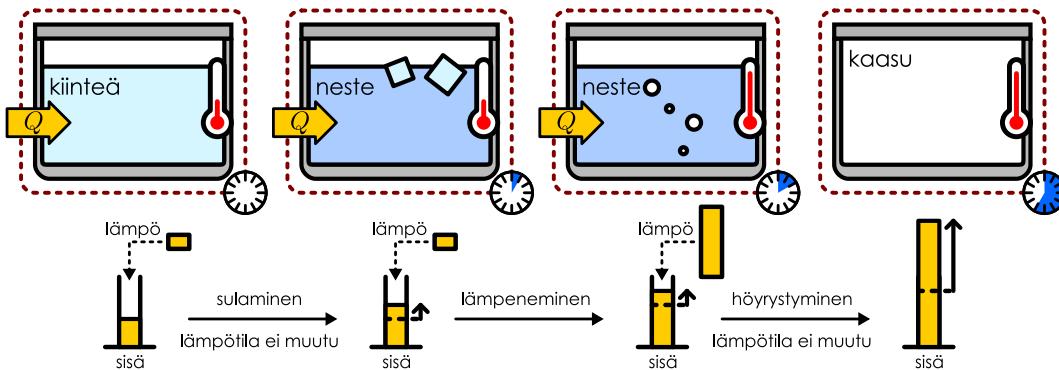
Aivan kuten voidaan erotella lämpökapasiteetti ja ominaislämpökapasiteetti, voidaan myös erottaa systeemin kokonaislatenttilämpö ja aineen ominaislatenttilämpö. Esimerkiksi latenttilämpö massayksikköä kohti määritellään

$$L = \frac{1}{m} Q, \quad (7.49)$$

missä  $m$  on systeemin massa ja  $Q$  sen lämpönä vastaanottama energia. Yleisesti lämmittäminen vaatii hyvin paljon energiota ja olomuotojen muutokset vaativat vielä enemmän energiota. Esimerkiksi nestemäisellä vedellä on suuri ominaislämpökapasiteetti, noin  $c^m = 4200 \text{ J/(kgK)}$ , joten 1 kg vesimassan lämmittäminen 1 K verran

## JATKUVA AINE

Kuva 7.21: Lämmitetyn veden muutos kiinteästä nesteeksi ja edelleen kaasuksi normaalipaineessa. Sulamisen aikana lämpö kuluu olomuodon muutokseen ja vesi on kiinteän ja nestemäisen aineen sekoitus lämpötilassa 273 K. Sulamisen jälkeen lämpö nostaa nesteen lämpötilaan. Lämpötilassa 373 K neste höyrystyy kaasuki.



vaatii energiaa 4200 J. Veden sulamisen latenttilämpö on puolestaan  $L = 334000 \text{ J/kg}$  ja höyrystymisen latenttilämpö valtavat  $L = 2260000 \text{ J/kg}$ !

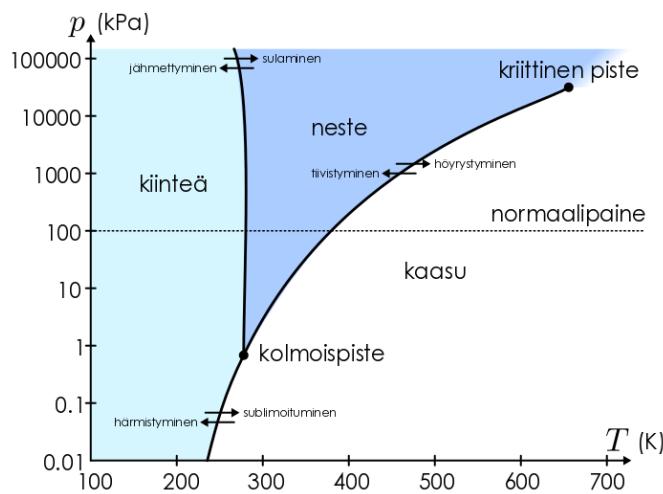


- 7.19** (a) Paljonko energiaa vaatii 10 g jääläpällä muuttaminen kaasuki sulattamalla, lämmittämällä ja kiehuttamalla? Kuinka suuri osuus energiasta kuluu kuhunkin vaiheeseen? (b) Jos jääläpalle annettaisiin yhtä paljon liike-energiaa, kuinka suuren vauhdin se saisi?

Aineen olomuoto riippuu sen lämpötilasta. Arkikielessä lämpötilaa, jossa aine jähmettyy ja sulaa, kutsutaan sulamispisteeksi, ja lämpötilaa, jossa se höyrystyy ja tiivistyy, kutsutaan kiehumispisteeksi. Tämä on kuitenkin vain osa totuudesta, sillä olomuoto riippuu muistakin ominaisuuksista kuin lämpötilasta. Esimerkiksi vesi kiehuu lämpötilassa 100 °C vain normaalipaineessa, ja tästä suuremmassa paineessa veden kiehuminen vaatii korkeaman lämpötilan.

Aineen olomuodon tai yleisemmin sen faasin riippuvuus useasta suureesta voidaan esittää *faasidiagrammin* avulla. Kuvassa 7.22 on piirretty esimerkkinä veden faasidiagrammi. Faasidiagrammi on koordinaatisto, jonka akseleinä ovat olomuotoon vaikuttavat suureet kuten tässä tapauksessa lämpötila ja paine. Kukin koordinaatiston piste kuvaa siis tiettyjä olosuhteita. Olosuhteet, joissa aine on kussakin olomuodossa, muodostavat koordinaatistoon tavallisesti yhtenäisiä alueita. Näitä erottavat käyrät, joilla kaksi eri olomuota voi esiintyä yhtä aikaa termodynamiassa tasapainossa. Jos olosuhteet muuttuvat niin, että niitä kuvaava piste kulkee diagrammissa tällaisen käyrän yli, tapahtuu olomuodon muutos eli *faasitransitio*.

Kuva 7.22: Veden faasidiagrammi. Huomaa, että paine on esitetty logaritmisella asteikolla.



käyrä päättyy niin sanottuun kriittiseen pisteesee. Jos lämpötila ja paine ovat tästä suuremmat, kaasun ja nesteen ominaisuudet muuttuvat vähitellen toisikseen.

Faasidiagrammi kertoo aineen olomuodon termodynamiassa tasapainossa. Toisin sanoen se kertoo mihin olomuotoon aine loppujen lopuksi muuttuu, jos odotetaan tarpeeksi kauan. Jos esimerkiksi vesilasiin laitetaan

Tavallisesti aineen ominaisuudet kuten tiheys ja ominaislämpökapasiteetti ovat kussakin olomuodossa lähes vakiot tai ne muuttuvat hitaasti ja jatkuvasti lämpötilan ja paineen funktiona. Eri olomuodoissa nämä ominaisuudet sen sijaan ovat tyypillisesti erilaiset. Niinpä olomuodon muutoksessa aineen ominaisuudet voivat muuttua epäjatkuvasti. Esimerkiksi kiehumalla kaasuki muuttuvan nesteen tiheys muuttuu huomattavasti vaikka sekä kiehuvan veden että höyrystyneen kaasun lämpötila olisi sama 373 K. Näin ei kuitenkaan tapahdu kaikkissa olomuotojen muutoksissa. Esimerkiksi hyvin korkeassa lämpötilassa ja paineessa muutos nestestä kaasuki tapahtuu vähitellen ilman selkeää faasitransitiota. Kuvan 7.22 faasidiagrammissa tämä näkyy siten, että neste- ja kaasufaasia erottava tasapaino-

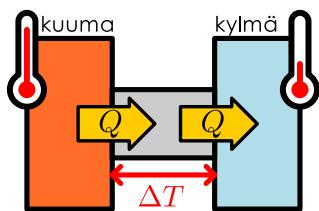
jääpalooja ja lasin ympäristön lämpötila on 300 K ja paine 100 kPa, jää sulaa ja loppujen lopuksi jäljelle jää vain nestettä. Jos ympäristön lämpötila onkin 260 K, lopputulos on pelkkää kiinteää jäättä. Lämpötilassa 273 K ja paineessa 100 kPa veden nestemäinen ja kiinteää olomuoto ovat tasapainossa, joten näissä olosuhteissa osa vedestä pysyy nesteenä ja osa kiinteänä.

Jos olosuhteet muuttuvat hitaasti, aine hakeutuu aina itsestään tasapainotilaansa ja on siis aina faasidiagrammin osoittamassa olomuodossa. Jos esimerkiksi nestemäistä vettä lämmitetään hitaasti, se pysyy nestemäisenä kunnes saavuttaa lämpötilan, jossa nestemäinen ja kaasumainen olomuoto ovat tasapainossa. Tällöin vesi ei enää lämpene vaan veden lämpönä vastaanottama energia saa nesteen höyrystymään. Lämmitys alkaa jälleen nostaa lämpötilaa vasta sitten, kun kaikki vesi on muuttunut kaasuksi.

Termodynäamista tasapainoaa ei kuitenkaan aina saavuteta heti. Esimerkiksi nestemäisen veden voi jäädyttää selvästi alempaan lämpötilaan kuin 273 K veden jäätymättä. Jäätyminen on nimittäin monimutkainen prosessi, joka ei välttämättä käynnisty heti. Jos siis vettä jäädytetään tehokkaasti, se voi säilyä nestemäisenä myös olosuhteissa, joissa sen faasidiagrammin mukaan pitäisi olla kiinteää. Tällöin nesteen sanotaan olevan alijäähtynytä. Tässä ei ole mitään ristiriitaa, sillä alijäähtyneenä neste ei ole termodynäamisessa tasapainossa, jota faasidiagrammi kuvaa. Jos odotetaan tarpeeksi kauan, jäätyminen kyllä jossakin vaiheessa käynnistyy, jolloin vesi jäätyy nopeasti ja saavuttaa näin tasapainon. Tilanne on hieman samanlainen kuin kuopan reunalla olevalla pallolla. Pallo olisi tasapainossa kuopan pohjalla, ja sinne pallo asettuuakin, jos se kuoppaan putoaa. Pallo kuitenkin voi pysyä kuopan reunalla putoamatta kuoppaan, jos sitä ei häiritä.

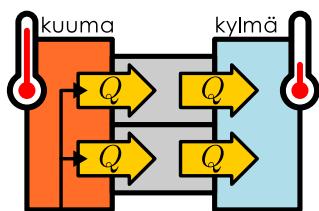
## Lämmönjohtavuus

Kuva 7.23: Jos kappaaleen reunat ovat eri lämpötiloissa, kappaaleen läpi siirrytää energiaa lämpönä johtumalla.



Johtumista tapahtuu aina, kun kaksi eri lämpötiloissa olevaa kappaletta koskettaa toisiaan. Koska kappaletit ovat eri lämpötiloissa, ne eivät ole termodynäamisessä tasapainossa, ja siksi niiden välillä täytyy siirtää energiota lämpönä. Toisen pääsäännön mukaisesti energia siirryttää lämpönen aina kuumasta kylmään, mutta tämän energian siirron nopeus eli teho riippuu tilanteesta. Energiaa siirryttää nopeasti, jos kappaleten lämpötilojen välillä on suuri ero, ja hitaasti lämpötilojen ollessa lähes samat. Lisäksi jotkin aineet johtavat lämpöä paremmin kuin toiset. Esimerkiksi metallit ovat hyviä *lämmönjohteita*, minkä voi huomata vaikkapa koskettamalla kuumaa metallikattilaa. Kattila tuntuu kuumalta, koska sen kuumasta pinnasta siirryttää energiota lämpönä koskettajan ihoon. Ihon lämmetessä kattilan pinta jäähtyy, mutta koska metalli on hyvä lämmönjohde, kattilan muista osista virtaa nopeasti lisää lämpöä kosketuskohaan. Näin kosketuspiste pysyy kuumana. Esimerkiksi puu sen sijaan on melko huono lämmönjohde eli se on *lämpöeriste*. Vaikka kattilassa olisi puinen kauha, jonka lämpötila on sama kuin kattilan, kauha ei koskettamassa tuntuisi lainkaan yhtä kuumalta kuin kattilan metallinen pinta. Tämä johtuu siitä, että koskettamassa kauhan kuumaa pinta kyllä hetken aikaa lämmittää koskettajan ihoa, mutta tällöin puu itsessään jäähtyy. Koska puu ei johda lämpöä kovin tehokkaasti, kosketuspiste pysyy jäädytystään yhtä lämpimänä kuin koskettajan iho eikä siis tunnu enää kuumalta.

Kuva 7.24: Kaksi kappaletta rinnakkain.



kaksi kappaletta rinnakkain:  
kaksinkertainen lämpövuo

Energiaa siirryttää nopeammin, mitä kuumempia kuumia säiliöitä on ja mitä kylmempi kylmä säiliö on. Täsmällisesti teho on suoraan verrannollinen lämpösäiliöiden väliseen lämpötilaeeroon

$$\Delta T = T_{\text{kuuma}} - T_{\text{kylmä}}. \quad (7.50)$$

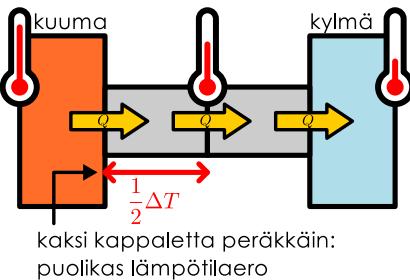
Toisin sanoen jos säiliöiden välillä lämpönä siirryvän energian kokonaismäärää merkitään  $Q$ , lämpövirran kuljettama teho on

$$P = \frac{dQ}{dt} = k\Delta T, \quad (7.51)$$

missä verrannollisuuskerroin  $k$  on *kappaaleen kokonaislämmönjohtavuus*.

Yhtälössä 7.51 esiintyvä kerroin  $k$  ei ole kuitenkaan *aineen* ominainen lämmönjohtavuus, koska se riippuu kappaleen koosta. Jos yhden kappaleen sijaan säiliöiden välillä olisikin kaksi kappaletta rinnakkain kuten kuvassa 7.24, nämä molemmat kuljettaisivat yhtä suuren lämpövirran säiliöstä toiseen. Tällöin teho olisi kaksinkertainen. Toisaalta kaksi vierekkäistä, samasta aineesta valmistettua kappaletta ei eroa mitenkään yhdestä kappaleesta, jonka poikkipinta-ala on kaksinkertainen. Siispä kappaleen poikkipinta-alan kaksinkertaistamisen täytyy myös kaksinkertaistaa kappaleen läpi johtuva teho eli siirtvyän tehon on oltava suoraan verrannollinen kappaleen poikkipinta-alaan.

Kuva 7.25: Kaksi kappaletta peräkkäin.



Jos säiliöiden välillä sen sijaan on kaksi peräkkäin asetettua kappaletta, siirtvyän tehon täytyy pienentyä. Tilannetta voidi verrata lämmittelyyn taloon. Talon sisällä on lämmin ja ulkona kylmä, jolloin energia pyrkii virtaamaan sisältä ulos talon rakenteita pitkin. Tämän estämiseksi seiniin laitetaan eristettä, ja siirtvyä lämpöteho on sitä pienempi, mitä paksumpi eristekerroks on. Lämpöä johtavan kerroksen paksuuden kasvattamisen täytyy siis pienentää kerroksen läpi virtaavan energian tehoa. Täsmällisesti teho on käänään verrannollinen lämpöä johtavan kappaleen paksuuteen. Tämän voi päätellä helposti kuvalta 7.25 avulla. Koska nyt lämpösäiliöiden välillä on kaksi kappaletta, lämpötilaero  $\Delta T$  jakautuu näille kappaleille. Tässä kappaleet ovat samanlaiset, joten symmetrian perusteella lämpötilaero kummankin kappaleen päiden välillä on puolet lämpösäiliöiden lämpötilojen eroista eli  $\frac{1}{2}\Delta T$ . Toisaalta koska johtumalla siirtvyän energian teho on yhtälön (7.51) mukaisesti verrannollinen tähän lämpötilaeroon, kappaleen päiden välisen lämpötilaeron puolittaminen puolittaa myös kappaleen läpi siirtvyän lämpövirran tehon. Teho on nyt siis  $P = k\frac{1}{2}\Delta T$ . Kahden samanlaisen kappaleen yhdistäminen peräkkäin on sama asia kuin kappaleen pituuden kaksinkertaistaminen, joten lämpöä johtavan kappaleen pituuden kaksinkertaistaminen lämmön virtaussuunnassa puolittaa kappaleen kokonislämmönjohtavuuden. Samanlainen päättely toimii yhdistettiinä kappaleita kuinka monta tahansa. Siispä kappaleen lämmönjohtavuuden täytyy olla käänään verrannollinen kappaleen pituuteen.

**7.20** Kahden kappaleen lämmönjohtavuudet ovat  $k_A = 1 \text{ W/K}$  ja  $k_B = 2 \text{ W/K}$ . Kappaleet asetetaan peräkkäin kahden lämpösäiliön välille (lämpötilat  $280 \text{ K}$  ja  $310 \text{ K}$ ), jolloin kappaleiden läpi kulkee energiota lämpöä tasaisena virtana. (a) Selitä, miksi kummankin kappaleen läpi täytyy kulkea lämpöä yhtä suurella teholla. (b) Mikä on tämän perusteella lämpötila kappaleiden välissä liitoskohdassa? (c) Millä teholla energia virtaa kappaleiden läpi? (d) Mikä on yhdistettyjen kappaleiden kokonislämmönjohtavuus?

Näin olemme päättelleet, että kappaleen kokonislämmönjohtavuus on suoraan verrannollinen kappaleen poikkipinta-alan  $A$  ja käänään verrannollinen kappaleen pituuteen  $L$ , eli

$$k = \lambda \frac{A}{L}. \quad (7.52)$$

Tässä esiintyvä verrannollisuuskerroin  $\lambda$  on aineen ominainen lämmönjohtavuus. Sijoittamalla tämä yhteys kappaleen kuljettamaa lämpötehoa kuvaavaan yhtälöön (7.51) saamme johtuen siirtvyän lämmön tehoksi

$$P = \lambda A \frac{\Delta T}{L}, \quad (7.53)$$

kun lämpö siirtyy kauttaaltaan samasta materiaalista valmistetun kappaleen läpi.

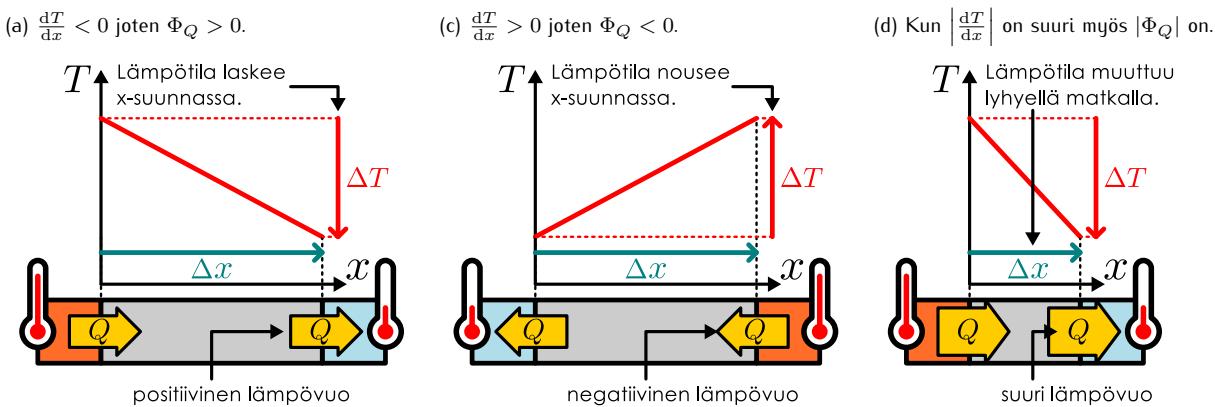
**7.21** Mikä on kappaleen kokonislämmönjohtavuuden  $k$  ja aineen ominislämmönjohtavuuden  $\lambda$  yksikkö? Erässä rakennusoppaassa kerrotaan, että ikkunan lämmönläpäisykerroin on  $1.0 \text{ W/(Km}^2\text{)}$ . Mitä tämä yksikkö kertoo ikkunan lämmönjohtavuudesta?

Edellä johdettu lämpötehon lauseke kuvailee kuumasäiliöstä kylmäsäiliöön siirtvyän energian määrää, mutta tämä lauseke ei huomioi mitenkään missä nämä säiliöt ovat tai mihin avaruuden suuntaan energia kulkee. Voimme kuitenkin yleistää tuloksen huomioimaan myös suunnat kuvan 7.26 tapaan kiinnittämällä koordinaatiston niin, että  $x$ -akseli osoittaa kappaleen pituussuuntaan eli suuntaan, jossa lämpötila muuttuu. Kappaleen pituus voidaan nyt kirjoittaa sen päiden  $x$ -koordinaattien erona,  $L = \Delta x$ . Tällöin lämpötehon lausekkeessa (7.53) esiintyvä osamäärä  $\Delta T/L$  saa muodon  $\Delta T/\Delta x$ . Määritellään myös lämpötilaero  $\Delta T$  niin, että se kertoo lämpötilan muutoksen nimenomaan siirryttäässä  $\Delta x$  positiiviseen  $x$ -suuntaan eli

$$\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x). \quad (7.54)$$

Kuvassa 7.26 (a) lämpötila pienenee  $x$ -suunnassa, joten  $\Delta T < 0$ . Lämpötilan kuvaaja on tässä tapauksessa laskeva suora ja  $\Delta T/\Delta x < 0$  on tämän suoran kulmakerroin. Kuvassa (b) lämpötila puolestaan kasvaa  $x$ -suuntaan siirryttäässä, joten kulmakerroin  $\Delta T/\Delta x > 0$ .

Kuva 7.26: Lämpövu kertoo sekä lämpönä siirtymisen energian tehon että kulkusuunnan. Lämpö siirtyy suuntaan, jossa lämpötila pienenee.



Lämpö siirtyy itsestään aina siihen suuntaan, jossa lämpötila on pienempi, joten kuvassa 7.26 (a) energiää siirtyy lämpönä positiiviseen  $x$ -suuntaan. Kuvassa (b) vastaavasti lämpö virtaa negatiiviseen suuntaan. Määritellään **lämpövuvo**  $\Phi_Q$  niin, että sen suuruus on sama kuin kappaleen läpi kulkevan lämpövirran kuljetettama teho,  $|\Phi_Q| = P$ , mutta sen etumerkki on positiivinen vain jos energia kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan. Nämä määriteltyynä lämpövuvo on siis kuvassa (a) positiivinen ja kuvassa (b) negatiivinen. Mutta tällöin lämpövuon etumerkki on aina *päinvastainen* lämpötilan kuvajen kulmakertoimeen  $\Delta T/\Delta x$  verrattuna. Lämpövuon lauseke on siis sama kuin siirtymän lämpötehon yhtälö (7.53), mutta koska yhtälössä esiintyvällä osamäärällä  $\Delta T/\Delta x$  on eri etumerkki kuin lämpövuolla  $\Phi_Q$ , yhtälöön täytyy lisätä miinusmerkki. Nämä ollen lämpövuvo on

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (7.55)$$

Mitä nopeammin lämpötila muuttuu *paikan suhteeseen* eli mitä jyrkempi on lämpötilan kuvaja, sitä suurempi on lämpövuvo ja sitä nopeammin energiää siirtyy lämpönä *ajan kuluessa* (kuva 7.26 (c)). Jos lämpötilan kuvaja ei ole suora, lämpövuokaan ei ole kaikkialla sama. Tällöin lämpö virtaa suurimmalla teholla alueilla, joilla lämpötila muuttuu paljon lyhyillä matkoilla eli joilla lämpötilan kuvajen kulmakertoimien  $\Delta T/\Delta x$  verrattuna. Lämpövuon lausekkeessa esiintyvä suoran kulmakerroin  $\Delta T/\Delta x$  pitää tällaisessa tapauksessa korvata käyrän tangentin kulmakertoimella eli derivaatalla  $dT/dx$ . Nämä lämpövuolle saadaan yleinen lauseke

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{dT}{dx}. \quad (7.56)$$



**7.22** Selitä omien sanojen, mitä tarkoittaa lämpökapasiteetti, latenttilämpö ja lämmönjohtavuus. Selitä erityisesti, mitä erilaisia tapoja näiden suureiden määrittelyyn on (esim. mitä tarkoittaa ominaislämpökapasiteetti ja pelkkä lämpökapasiteetti). Pohdi, mitkä suureet ovat intensiivisiä tai ekstensiivisiä.

## Differentiaaliyhtälöt

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa yhdistyvät edellä esiteltyt lämpönä siirtymää energiää koskevat fysiikaaliset konseptit: lämpötila, lämpökapasiteetti, energian siirtyminen lämpönä johtumalla ja systeemien pyrkimys termodynamiiseen tasapainoon. Esimerkinämme on kuvan 7.27 suljettu pahvinen kahvikuppi, jossa on aluksi kahvia lämpötilassa  $T_{\text{alku}} = 355$  K. Ilman lämpötila on  $T_{\text{ilma}} = 295$  K. Ympäristöään kuumempi kahvi jäähtyy itsestään, koska se pyrkii termodynamiiseen tasapainoon ympäristönsä kanssa. Tällöin energiää siirtyy lämpönä kahvikupista ympäristöön ja kahvi menettää sisäenergiaansa. Samalla kahvin lämpötila laskee, koska lämpötila ja sisäenergia riippuvat toisistaan. Prosessi jatkuu kunnes kahvi saavuttaa ympäristönsä lämpötilan.

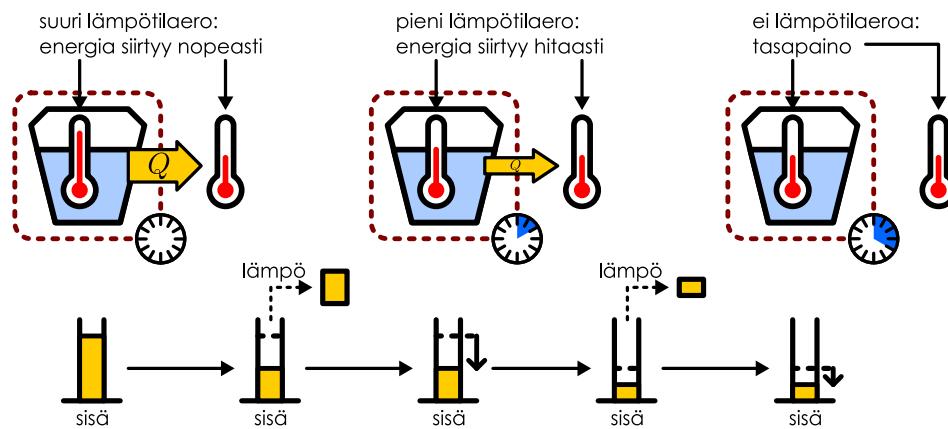
Jäähtymisprosessissa energia virtaa lämpönä pääasiassa johtumalla kupin seinämien läpi. Kupin lämmittäessä ilmaa sen ympärille syntyy ohut ilmakerros, jossa lämpötila muuttuu kupin pinnan lämpötilasta ympäriöivän ilman lämpötilaan. Myös tämä ohut ilmakerros toimii eristeenä, ja lämmön täytyy kulkea myös sen läpi. Jos kahvin lämpötila on  $T$ , lämpönä siirtymän energian teho on

$$P = k(T - T_{\text{ilma}}), \quad (7.57)$$

missä  $k$  on kupin ja sitä ympäriövän lämpimän ilmakeroksen kokonaislämmönjohtavuus. Tämä voi olla vaikea laskea, mutta tässä esimerkissä lämmönjohtavuuden arvo on tunnettu,  $k = 0.70$  W/K.

## JATKUVA AINE

Kuva 7.27: Kappaleesta siirtyy energiaa ympäristöön sitä nopeammin, mitä suurempi kappaleen ja ympäristön lämpötilaero on.



Lyhyessä ajassa dt kupista siirtyy ympäröivään ilmaan energiaa lämpönä määrä

$$dQ_{\text{ulos}} = Pdt. \quad (7.58)$$

Toisaalta koska kupista siirtyy energiaa pois lämpönä, sen lämpötila laskee. Siirryvän energian ja lämpötilan muutoksen suhde on kupin ja sen sisältämän kahvin kokonaislämpökapasiteetti  $C$ , joten

$$dQ_{\text{ulos}} = -CdT. \quad (7.59)$$



7.23 Miksi yhtälössä (7.59) on miinusmerkki?

Kupissa oleva kahvi on pääasiassa 0.2 kg vettä, joten lämpökapasiteetti on noin  $C = 840 \text{ J/K}$ . Voimme näin ollen yhdistää lämpötilan muutoksen siihen kuluvaan aikaan siirttyvän energian kautta,

$$-CdT = dQ_{\text{ulos}} = Pdt. \quad (7.60)$$

Tästä voidaan edelleen ratkaista lämpötilan muutos ja sijoittaa tehon  $P$  tilalle lauseke (7.57), jolloin saadaan

$$dT = -\frac{P}{C}dt = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}})dt. \quad (7.61)$$

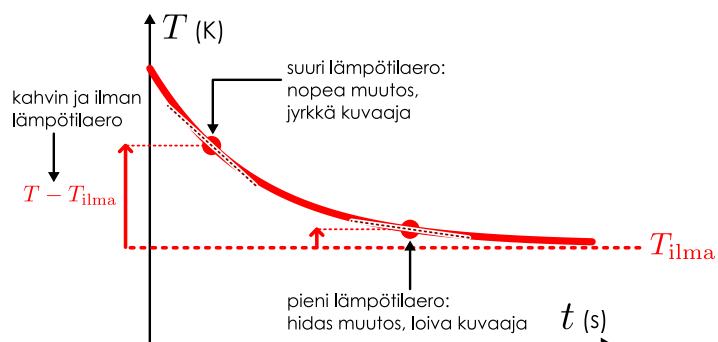
Yhtälön vasemmalla puolella on *lämpötilan muutos* lyhyessä ajassa ja sen oikealla puolella on ajan muutos kerrottuna *lämpötilasta riippuvalla tekijällä*.

Yhtälö siis kertoo meille sen, että lämpötilan muuttuminen riippuu lämpötilasta itsestään. Eritiisesti lämpötila muuttuu sitä nopeammin, mitä kuumempaa kahvi on. Kahvi siis jäähdyttää ensin nopeasti, koska kuumasta kahvista siirtyy energiaa lämpönä ympäristöön suurella teholla. Mitä pienemmäksi kahvin ja sitä ympäröivän ilman lämpötilaero käy, sitä pienemmäksi lämpövoisuus kahvista ilmaan käy ja sitä hitaammin kahvi jäähdyttää.

Tämä on esitetty graafisesti kuvaassa 7.28, johon on hahmoteltu kahvin lämpötila ajan funktiona. Ilman lämpötilaa, joka on vakio, kuva paksu vaakasuora katkoviiva. Kahvin ja ilman välistä lämpötilaeroa esittää puolestaan kuvaajan pystysuora etäisyys tästä katkoviivasta. Kahvin lämpötilan muutosnopeus näkyy kuvassa käyrän jyrkkyytenä eli tangentin kulmakertoimena. Koska kahvi jäähdyttää nopeasti ollessaan ympäröivää ilmaa kuumempaa, sen kuvaajan täytyy olla sitä jyrkempi, mitä kauempaana ilman lämpötilaa esittävästä katkoviivasta se on. Aluksi kuvaaja laskee jyrkästi, mutta mitä lähemmäksi katkoviivaa kuvaaja tulee, sitä loivemmaksi se käy.

Voisi ajatella, että jos yhtälöön (7.61) sijoitetaan kahvin alkulämpötilan  $T = T_{\text{alku}}$ , yhtälöstä voi laskea kahvin lämpötilan muutoksen, kun aika kuluu. *Tämä on kuitenkin väärin!* Jos kulunut aika on hyvin lyhyt, näin saadaan approksimaatio lämpötilan muutokselle, mutta lasku menee sitä enemmän väärin mitä pidempää

Kuva 7.28: Kuvaaja on sitä jyrkempi, mitä enemmän se poikkeaa arvosta  $T_{\text{ilma}}$ .



aikaa tarkastellaan. Tämä johtuu siitä, että kun vähän aikaa on kulunut, kahvin lämpötila  $T$  on muuttunut (ks. kuva 7.28). Tällöin ei enää päde  $T = T_{\text{alku}}$  eikä yhtälön oikean puolen arvo siis enää ole sama. Yhtälöstä ei siis voi suoraan laskea lämpötilan arvoa, vaan lämpötila on ratkaistava jollakin toisella menetelmällä.

**7.24** Eräälle kappaleelle  $k/C = 0.5 \text{ s}^{-1}$ . Kappaleen lämpötila on aluksi  $T_{\text{alku}} = 300 \text{ K}$  ja sen ympäristön lämpötila on  $T_{\text{ilma}} = 280 \text{ K}$ . (a) Paljonko kappaleen lämpötilan pitäisi muuttua yhtälön (7.61) mukaan yhdessä sekunnissa, jos oletetaan lämpötilan olevan koko tämän ajan  $T = T_{\text{alku}}$ ? (b) Mikä kappaleen lämpötilan pitäisi siis olla hetkellä  $t = 1 \text{ s}$  eli mitä on  $T(1)$ ? (c) Paljonko kappaleen lämpötilan pitäisi muuttua seuraavan sekunnin aikana, jos lämpötilan muutos lasketaan taas yhtälöstä (7.61) olettaen, että  $T = T(1)$ ? (d) Mikä olisi silloin kappaleen lämpötila hetkellä  $t = 2 \text{ s}$ ? (e) Mitä saataisiin kappaleen lämpötilaksi hetkellä  $t = 2 \text{ s}$ , jos lämpötilan muutos laskettaisiin neljässä askeleessa (eli lämpötilan ajateltaisiin olevan vakio aina puoli sekuntia kerrallaan)? (f) Kumpi malli on parempi?

Yhtälö (7.61) voidaan jakaa puolittain differentiaalilla  $dt$ , jolloin se saa muodon

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}}). \quad (7.62)$$

Tässä muodossa yhtälön vasemmalla puolella on *lämpötilan derivaatta* ja sen oikealla puolella on *lämpötila itse*. Tälläista yhtälöä, jossa esiintyy tuntematon funktio (tässä  $T(t)$ , lämpötila ajan funktiona) ja sen derivaattoja (tässä  $\frac{dT}{dt} = T'(t)$ , lämpötilan derivaatta ajan suhteen) kutsutaan **differentiaaliyhtälöksi**. Johdimme yhtälön yleisistä fysikaalisista periaatteista, joten sen täytyy päteä koko jäähtymisen ajan, kaikilla ajan hetkillä  $t$ . Siispä jos haluamme selvittää kahvin lämpötilan jollakin ajan hetkellä, meidän täytyy löytää funktion  $T(t)$ , joka toteuttaa tämän differentiaaliyhtälön kaikilla muuttujan  $t$  arvoilla. Kun funktio on selvillä, voimme laskea sen avulla lämpötilan  $T$  millä tahansa ajan  $t$  arvolla.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen yleisesti on vaikeaa, mutta tässä tapauksessa ratkaisu voidaan löytää monellakin tavalla. Jos tiedämme jo etukäteen, millainen funktio yhtälön voisi ratkaista, **yrite** on helpoin tapa ratkaista differentiaaliyhtälö. Jäähtyvän kahvin tapauksessa tiedämme, että kahvi on aluksi lämpötilassa  $T_{\text{alku}}$  ja sen lämpötila lähestyy vähitellen ympäröivän ilman lämpötilaa  $T_{\text{ilma}}$ . Lämpötilaa täytyy siis kuvata funktio, joka lähestyy vakioarvoa. Esimerkiksi eksponenttifunktio on tällainen, joten ratkaisu voisi olla

$$T(t) = a + be^{-t/c}, \quad (7.63)$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat jotkin vakiot. Tämä on siis *arvaus*. Meidän täytyy laskea funktion derivaatta ja sijoittaa funktion derivaattoineen differentiaaliyhtälöön (7.62) selvittääksemme, onko arvaus oikein. Jos on, voimme samalla ratkaista ainakin osan tuntemattomista vakioista  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tunnettujen fysikaalisten parameterien  $k$ ,  $C$ ,  $T_{\text{alku}}$  ja  $T_{\text{ilma}}$  avulla.

**7.25** (a) Mitkä ovat yritteessä 7.63 esiintyvien vakioiden yksiköt?  
 (b) Osoita, että jos  $c > 0$ , yrite lähestyy vakioarvoa, kun aika kuluu.  
 (c) Mikä on yritteen mukaan lämpötila aluksi ja pitkän ajan kuluttua vakioiden  $a$ ,  $b$  ja  $c$  avulla lausuttuna?

Derivoitaaan yrite siis kerran, jolloin saadaan

$$\frac{dT}{dt} = T'(t) = -\frac{b}{c}e^{-t/c} \quad (7.64)$$

Tämän derivaattafunktion ja alkuperäisen yritefunktion (7.63) sijoitus differentiaaliyhtälöön (7.62) tuottaa tavallisen yhtälön

$$-\frac{b}{c}e^{-t/c} = -\frac{k}{C}(a + be^{-t/c} - T_{\text{ilma}}). \quad (7.65)$$

Yhtälössä esiintyy nyt vakiotermejä ja eksponenttifunktioita, ja selkeyden vuoksi nämä kannattaa ryhmitellä yhtälön eri puolille, jolloin yhtälö saadaan kirjoitettua muotoon

$$b\left(\frac{k}{C} - \frac{1}{c}\right)e^{-t/c} = -\frac{k}{C}(a - T_{\text{ilma}}). \quad (7.66)$$

Nyt seuraa tärkeä päättelyaskel: Tarkasteltava differentiaaliyhtälö johdettiin fysikaalisista perusperiaatteista ja se kuvailee lämpötilan muutosta koko jäähtymisprosessin ajan. Sen täytyy siis olla voimassa kaikilla ajan hetkillä, ja sen ratkaisevan funktion  $T(t)$  täytyy toteuttaa yhtälö *kaikilla ajan t arvoilla*. Koska yritteen sijoitus differentiaaliyhtälöön tuotti tavallisen yhtälön (7.66), yrite toteuttaa differentiaaliyhtälön täsmälleen silloin kun tämä yhtälö on voimassa. Ja koska yritteet täytyy toteuttaa differentiaaliyhtälö *aina, kaikilla ajan hetkillä*, yrite on differentiaaliyhtälön ratkaisu jos ja vain jos yhtälö (7.66) toteutuu *aina, kaikilla ajan hetkillä*. Mutta yhtälössä (7.66) on vasemmalla puolella ajasta  $t$  riippuva funktio  $b(k/C - 1/c)e^{-t/c}$  ja oikealla puolella oleva lauseke  $-k/C(a - T_{\text{ilma}})$  on ajan suhteen *vakio*. Yhtälö voi olla voimassa kaikilla ajan  $t$  arvoilla vain,

## JATKUVA AINE

jos yhtälön vasen puoli on sama vakio kuin oikea puoli. Lauseke  $b(k/C - 1/c)e^{-t/c}$  on vakio muuttujan  $t$  suhteeseen vain jos  $k/C - 1/c = 0$  eli jos

$$c = \frac{C}{k}, \quad (7.67)$$

sillä silloin lauseke on *nolla*. Lausekkeen  $-k/C(a - T_{\text{ilm}})$  pitää siis niin ikään olla nolla, ja näin on jos

$$a = T_{\text{ilm}}. \quad (7.68)$$

Jos vakioilla  $a$  ja  $c$  on nämä arvot, yhtälö (7.66) sievenee muotoon  $0 = 0$ , joka on tietenkin totta olipa ajan  $t$  arvo mitä tahansa. Niiinpä olemme osoittaneet, että funktio (7.63) toteuttaa differentiaaliyhtälön (7.62) kaikilla ajan hetkillä, jos vakioille valitaan arvot  $a = T_{\text{ilm}} = 295$  K ja  $c = C/k = (840 \text{ J/K})/(0.7 \text{ W/K}) = 1200$  s. Differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis funktio

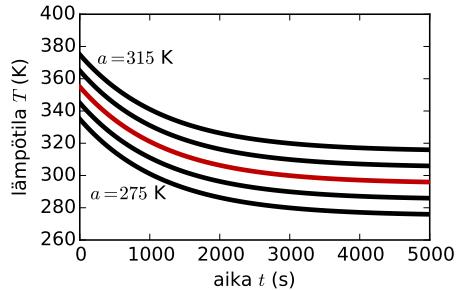
$$T(t) = T_{\text{ilm}} + be^{-\frac{k}{C}t}. \quad (7.69)$$

Pohditaan vielä ratkaistujen vakioiden merkitystä. Kuvassa 7.29 on piirretty yritteenä käytetty funktio (7.63) vakioiden  $a$ ,  $b$  ja  $c$  eri arvoilla. Kuvassa 7.29 (a) vakiolle  $a$  on annettu eri arvoja, jolloin lämpötilaa kuvaava funktio  $T(t)$  siirtyy pystysuunnassa. Vakio  $a$  kuvaakin lämpötilaa, jota funktio  $T(t)$  lähestyy ajan kuluessa. Tässä tapauksessa kahvi jäähtyy lopulta samaan lämpötilaan kuin sitä ympäröivä ilma, joten vakion  $a$  arvon täytyy olla sama kuin ulkoilman lämpötilan  $T_{\text{ilm}}$ .

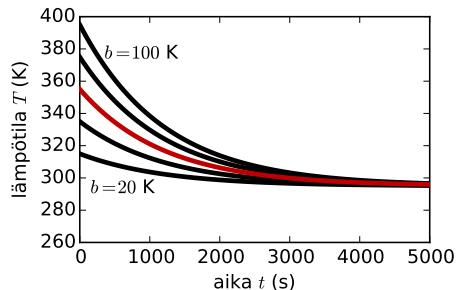
Kuvassa 7.29 (c) vakio  $c$  puolestaan saa eri arvoja. Tämä vaikuttaa siihen, kuinka nopeasti lämpötila muuttuu. Mitä pienempi  $c$  on, sitä nopeammin lämpötila lähestyy vakiota eli sitä nopeammin kahvi jäähtyy. Koska vakio  $c$  määräätää jäähtymisen nopeuden, sitä kutsutaankin ratkaisun **aikavakioksi**. Kahvi tietenkin jäähtyy sitä

Kuva 7.29: Parametrien  $a$ ,  $b$  ja  $c$  vaikutus funktioon  $T(t) = a + be^{-t/c}$ . Kuvissa (a)–(c) punainen käyrä on piirretty arvoilla  $a = 295$  K,  $b = 60$  K,  $c = 1200$  s ja kussakin kuvassa muutetaan vain yhtä parametria kerrallaan.

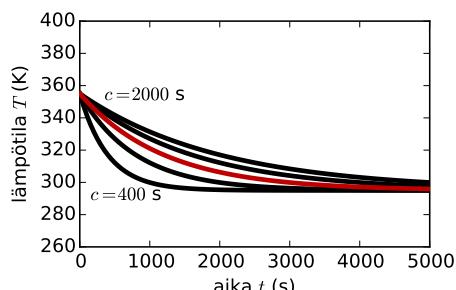
(a)  $a = 275, 285, 295, 305, 315$  K.



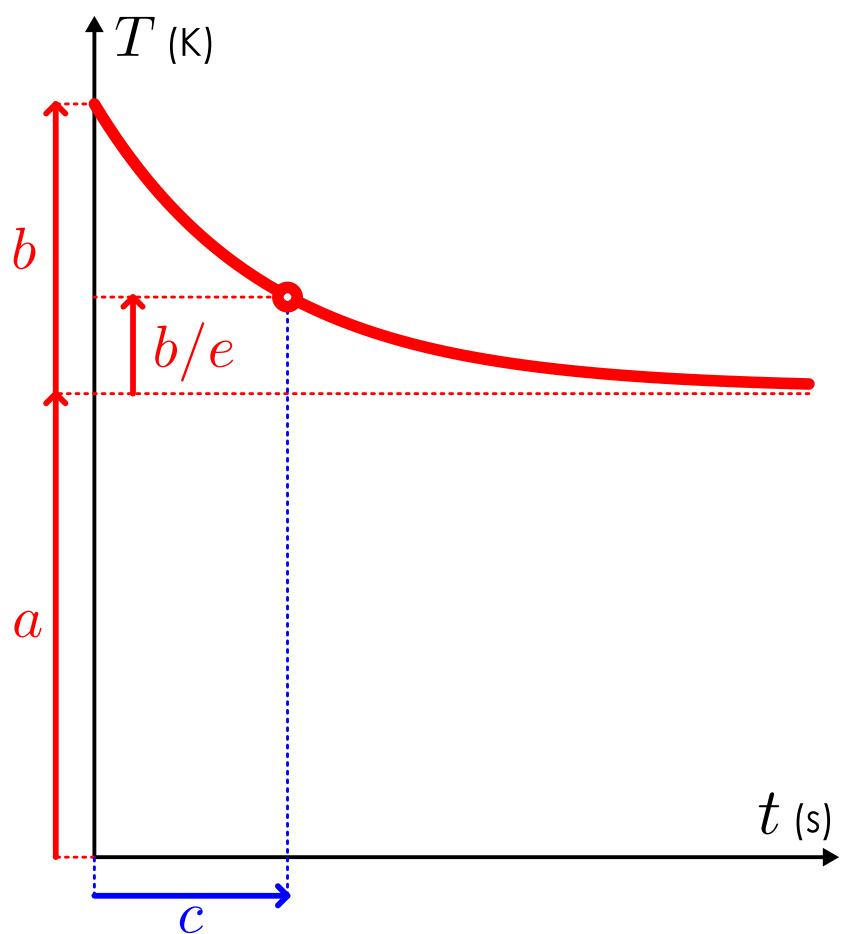
(b)  $b = 20, 40, 60, 80, 100$  K.



(c)  $c = 400, 800, 1200, 1600, 2000$  s.



(d) Kaikki parametrit.



nopeammin mitä paremmin sitä ympäröivä kuppi ja ilma johtavat lämpöä eli mitä suurempi on lämmönjohtavuus. Tässä tapauksessa aikavakio  $c$  on lämpökapasiteetin ja lämmönjohtavuuden suhde, joten suuri lämmänjohtavuus  $k$  tarkoittaa pientä aikavakiota. Tällöin siis ratkaisumme mukaan kahvin lämpötila lähestyy ilman lämpötilaa nopeasti, mikä on järkevä. Sitä vastoin jos lämpökapasiteetti  $C$  olisi suurempi — esimerkiksi jos kupissa olisi enemmän kahvia — myös vakio  $c$  olisi suurempi ja kahvi jäähtyisi hitaanmin. Fysikaalisesti tämä johtuu siitä, että suuri lämpökapasiteetti tarkoittaa systeemin varastoivan paljon energiaa. Suuremman energiamäärän siirtäminen vaatii enemmän aikaa, joten jäähtyminen olisi hitaampaa.

**7.26** Tarkastele kuvaan 7.29 (c) piirrettyjä funktioita.

- (a) Mikä on punaisen käyrän osoittama lämpötila hetkellä  $t = 1200$  s?
- (b) Laske tarkasti, mikä on kunkin piirretyn funktion arvo hetkellä  $t = c$  (huom. kussakin eri  $c$ ).
- (c) Kullakin käyrällä lämpötila muuttuu kaikkiaan 60 K pitkän ajan kuluessa. Kuinka suuri osuus tästä muutoksesta tapahtuu ajassa  $t = c$ ?

Kuvassa 7.29 (b) muuttuu vakion  $b$  arvo, ja selvästikin tämä vakio säätelee funktion  $T(t)$  alkuarvoa, sillä käyrät alkavat kuvassa eri kohdista. Tätä vakiota emme saaneet ratkaistua differentiaaliyhtälöstä, eikä sitä voikan sen perusteella ratkaista. Differentiaaliyhtälöön (7.62) nimitäin sisältyy tieto lämmönjohtavuudesta  $k$ , lämpökapasiteetista  $C$  ja ympäristön lämpötilasta  $T_{\text{ilma}}$ , mutta siinä ei ole tietoa kahvin lämpötilasta alussa. Vakion  $b$  ratkaisemiseen tarvitaan siis **alkuehto**. Tässä tapauksessa tiedämme, että kahvin lämpötila oli aluksi  $T(0) = T_{\text{alku}} = 355$  K, ja toisaalta ratkaisuna saadun lausekkeen (7.69) arvo alkuhetkellä on

$$T(0) = T_{\text{ilma}} + be^0 = T_{\text{ilma}} + b. \quad (7.70)$$

Siispä täytyy pätee  $T_{\text{ilma}} + b = T_{\text{alku}}$  eli

$$b = T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}. \quad (7.71)$$

Nämä kaikki yritteen tuntemattomat on ratkaistu ja kahvin lämpötilaksi ajan funktiona on saatu

$$T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t}. \quad (7.72)$$

**7.27** Mitkä vakioista  $a$ ,  $b$  ja  $c$  olisi voinut päätellä suoraan kahvin alkuperäisen ja lopullisen lämpötilan perusteella ratkaisematta differentiaaliyhtälöä? Miten?

On myös fysikaalisesti järkevä, ettei vakiota  $b$  voi ratkaista jäähtymistä kuvaavasta differentiaaliyhtälöstä. Yhden kahvikupillisen sijaan voisimme nimitäin aivan hyvin tarkastella kahta kupillista, jotka ovat muuten samanlaiset mutta aluksi eri lämpötiloissa. Jos kuitit ovat samanlaiset, niillä on sama lämmönjohtavuus ja lämpökapasiteetti, ja niinpä kummankin jäähtymistä kuvaava *sama* differentiaaliyhtälö (7.62). Niiden lämpötila siis lähestyy samaa arvoa samalla suhteellisella muutosnopeudella. Toinen kupeista on kuitenkin aluksi kuumempi, joten kupeilla täytyy olla jäähtymisen aikana eri lämpötila ja lämpötilaa kuvaava funktio. Differentiaaliyhtälön ratkaisuun (7.69) oli siis pakko jäädä yksi tuntematon vakio, jonka arvo määräytyy alkuehdon perusteella. Tätä vakiota lukuunottamatta differentiaaliyhtälön ratkaisu on silti yksikäsitteinen. Toisin sanoen ei ole olemassa mitään muuta funktiota kuin eksponenttifunktio, joka toteuttaisi tässä tarkastellun differentiaaliyhtälön.

**7.28** Eräälle kappaleelle  $k/C = 0.5 \text{ s}^{-1}$ . Kappaleen lämpötila on aluksi  $T_{\text{alku}} = 300$  K ja sen ympäristön lämpötila on  $T_{\text{ilma}} = 280$  K. (a) Mikä on kappaleen lämpötila hetkellä  $t = 2$  s? (b) Vertaa ratkaisua aikaisempaan kysymykseen, jossa lämpötilan muutoksia laskettiin askeleittain.

Nämä selvitimme kahvin lämpötilan millä tahansa ajan hetkellä kertovan funktion  $T(t)$  yritteellä. Jos haluamme tietää lämpötilan jollakin tiettyllä ajan hetkellä, voimme laskea sen tämän funktion avulla. Aina yritteillä ei ole kuitenkaan helppo keksiä, jolloin ratkaisua voidaan etsiä jollakin systemaattisella menetelmällä. **Separointi** eli toisistaan riippuvien suureiden eroteltu (engl. separate ‘erottaa’) on eräs tällainen menetelmä. Ratkaistaan sama differentiaaliyhtälö nyt myös tällä tavalla.

Otetaan lähtökohdaksi yhtälö (7.61), joka yhdistää lämpötilan ja ajan differentiaalit. Separoinnin idea on se, että kaikki lämpötilaa  $T$  sisältävät tekijät siirretään yhtälön vasemmalle puolelle ja kaikki aikaa  $t$  sisältävät tekijät yhtälön oikealle puolelle, minkä jälkeen yhtälön kumpikin puoli voidaan integroida erikseen vain ko. puolella esiintyvän suureen suhteeseen. Tämä ei aina ole mahdollista, mutta nyt se onnistuu jakamalla yhtälö (7.61) puolittain tekijällä  $T - T_{\text{ilma}}$ , jolloin saadaan

$$\frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} dt. \quad (7.73)$$

Tämän yhtälön vasemmalla puolella esiintyy symboli  $T$  ja sen differentiaali  $dT$  mutta ei symbolia  $t$ . Yhtälön oikealla puolella taas esiintyy differentiaali  $dt$  mutta ei symbolia  $T$ . Kun toisistaan riippuvat suureet  $T$  ja  $t$  on näin sepaorit, yhtälö voi integroidaa puolittain. On siis oikein kirjoittaa

$$\int_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} \int_0^t dt, \quad (7.74)$$

missä vasen integraali lasketaan muuttujan  $T$  suhteen ja oikea muuttujan  $t$  suhteen. Tässä on valittu määritetyt integraalit, jolloin ajan integroimisrajat ovat 0 ja  $t$  ja lämpötilan rajat ovat *lämpötilan arvot näillä ajan hetkillä* eli  $T(0) = T_{\text{alku}}$  ja  $T(t)$ . Näin alkuehto tulee automaattisesti huomioitua integraalien alarajassa. Jos yhtälössä (7.74) käytettäisiin määräämättömiä integraaleja, ratkaisuun jäisi integroimiskävio, joka pitäisi lopuksi ratkaista alkuehdosta samaan tapaan kuin vakio  $b$  määrittääessämme ratkaisun yritteen avulla.



**7.29** Mitä menee väärin, jos kirjoitetaan  $\int dT = -\frac{k}{C} \int (T - T_{\text{ilma}}) dt$ , lasketaan  $T = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}})t$  ja ratkaistaan tästä  $T = T_{\text{ilma}} \frac{kt/C}{1+kt/C}$ ?

Integraali ajan suhteen on helppo laskea,

$$-\frac{k}{C} \int_0^t dt = -\frac{k}{C} \Big|_0^t t = -\frac{k}{C} t. \quad (7.75)$$

Lämpötilan integrointi onnistuu integroimissäännöllä  $\int 1/(x-a) dx = \ln|x-a| + c$ , jolla saadaan

$$\int_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = \left|_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \ln |T - T_{\text{ilma}}| \right| = \ln |T(t) - T_{\text{ilma}}| - \ln |T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}| = \ln \frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}}. \quad (7.76)$$

Itseisarvot voi jättää pois, koska kahvin lämpötila on tässä tapauksessa aina korkeampi kuin sitä ympäröivän ilman. Näiden tulosten avulla yhtälö (7.74) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\ln \frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} t. \quad (7.77)$$

Tämä on periaatteessa differentiaaliyhtälön ratkaisu, mutta se on nyt muodossa, josta selviää aika  $t$ , kun lämpötila  $T$  tunnetaan. Ts. tämä yhtälö kertoo kauanko pitää odottaa, jotta kahvi jäähtyisi tiettyyn lämpötilaan. Haluamme nyt kuitenkin tietää lämpötilan  $T$  ajan funktiona, joten meidän on ratkaistava tästä  $T(t)$ .

Logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio, joten jos  $\ln x = y$  pätee myös  $x = e^y$  ja päinvastoin. Siispä täytyy päteä

$$\frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}} = e^{-\frac{k}{C} t}. \quad (7.78)$$

Tämän yhtälön kertominen puolittain tekijällä  $T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}$  antaa

$$T(t) - T_{\text{ilma}} = (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}) e^{-\frac{k}{C} t} \quad (7.79)$$

ja vakiotermin  $T_{\text{ilma}}$  lisääminen yhtälön kummallekin puolelle johtaa loppulokseen

$$T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}) e^{-\frac{k}{C} t}. \quad (7.80)$$

Tämä on täsmälleen sama kuin yritteellä etsitty ratkaisu (7.72). Näin pitää olla, koska ei ole tietenkään mitään väliä, miten ratkaisun etsii. Siksi differentiaaliyhtälöltä ratkaistaessa kannattaakin miettiä, miten pääsee helpoimalla. Jos ratkaisun osaa arvata, yritteen avulla arvauksen voi osoittaa oikeaksi. Separointia kannattaa yrittää, jos arvaaminen ei onnistu. Silloinkin ratkaisu kannattaa ehdottomasti aina tarkistaa sijoittamalla se alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön ja tutkimalla toteutuuko yhtälö.



**7.30** Selitä omin sanoin, mikä on differentiaaliyhtälö. Mikä on yrite, ja miten ratkaiset differentiaaliyhtälön, jos tiedät sopivan yritteen? Mikä on alkuarvo, ja miksi sellaisia tarvitaan?

## esimerkki 7.4

## Korkoa korolle

**Erään tilin tuotto on huikeat 125 % vuodessa. Jos tilillä on aluksi 100 euroa, paljonko siellä on vuoden päästä jos korko lasketaan (a) kerran vuodessa, (b) kerran kuukaudessa, (c) kerran sekunnissa, (d) jatkuvasti?**

**TILANNE** Merkitään tilillä kulloinkin olevaa rahamäärää  $M$ , jolloin siis aluksi tilillä on rahaa  $M_0 = 100$  e. Merkitään korkotekijää on  $p = 1.25$ , mikä vastaa siis 125 prosenttia.

**SUUNNITELMA** Jos korko lasketaan vain kerran vuodessa, rahamäärä kerrotaan yhden kerran tekijällä  $1 + p$ . Yleisesti jos korko lasketaan aikavälein  $\Delta t$ , korkoa maksetaan ajassa  $t_0 = 1$  a yhteensä  $n = t_0/\Delta t$  kertaa. Tämä tarkoittaa sitä, että rahamäärä kerrotaan tekijällä  $1 + p/n$  tänä aikana  $n$  kertaa. Jos korko poistettaisiin tililtä aina maksun jälkeen, kumpikin tapa tuottaisi vuodessa rahamäärään  $pM_0$ . Jos korko kuitenkin aina jää tilille, seuraavan koron maksun yhteydessä maksetaan korkoa myös aikaisemmin maksetulle korolle. Näin ollen tuotto on sitä suurempi mitä tiheämmin korkoa maksetaan.

Koron maksussa raha lisääntyy aina määrään

$$\Delta M = \frac{p}{n} M. \quad (7.81)$$

Ensimmäisen koron maksun jälkeen on siis rahaa

$$M_1 = M_0 + \Delta M = \left(1 + \frac{p}{n}\right) M_0. \quad (7.82)$$

Toisen maksun jälkeen rahaa on

$$M_2 = \left(1 + \frac{p}{n}\right) M_1 = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^2 M_0, \quad (7.83)$$

ja yleisesti  $n$  maksun jälkeen

$$M_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n M_0. \quad (7.84)$$

(Oletetaan, että korot lasketaan tarkasti eikä rahamäärää välillä pyöristetä.)

Jatkuvan koron tapaus tarkoittaa periaatteessa raja-arvoa  $n \rightarrow \infty$ . Toinen tapa ajatella asiaa on ilmaista rahamäärään muutujen välisen ajan  $\Delta t$  avulla muodossa

$$\Delta M = \frac{p}{n} M = \frac{p}{t_0} M \Delta t, \quad (7.85)$$

jolloin rahamäärään muutosnopeus on

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{p}{t_0} M. \quad (7.86)$$

Jatkuva korko tarkoittaa tässä maksujen välisen ajan lähestyvän nolla, jolloin äärellisten muutosten suhteesta tulee derivaatta,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{p}{t_0} M. \quad (7.87)$$

Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on rahamäärään kummakin ajan hetkellä kertova funktio  $M(t)$ . Ratkaistaan yhtälö yritteellä

$$M(t) = a + be^{t/c}. \quad (7.88)$$

**RATKAISU** (a) Kun korkoa maksetaan kerran, rahamääräksi tulee

$$M(1 \text{ a}) = (1 + p)M_0 = 225 \text{ e} \quad (7.89)$$

(b) Kuukausittain laskien  $n = 12$ . Rahamääräksi tulee

$$M(1 \text{ a}) = \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12} M_0 = 328.41 \text{ e} \quad (7.90)$$

(c) Vuodessa on  $n = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 36266400$  sekuntia. Rahamääräksi tulee siis

$$M(1 \text{ a}) = \left(1 + \frac{p}{36266400}\right)^{36266400} M_0 = 349.03 \text{ e} \quad (7.91)$$

(d) Yritteen derivaatta on  $M'(t) = \frac{b}{c}e^{-t/c}$ , ja tämän sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa

$$\frac{b}{c}e^{-t/c} = \frac{p}{t_0}(a + be^{t/c}). \quad (7.92)$$

Yhtälön voi ryhmitellä myös muotoon

$$b\left(\frac{p}{t_0} - \frac{1}{c}\right)e^{-t/c} = a\frac{p}{t_0}, \quad (7.93)$$

ja jotta tämä toteutuisi kaikilla ajan  $t$  arvoilla, yhtälön kummankin puolen täyttyy olla vakio. Yhtälön vasen puoli on vakio täsmälleen silloin, kun  $p/t_0 - 1/c = 0$  eli kun  $c = t_0/p$ , jolloin vasen puoli on nolla. Oikea puoli on myös nolla, jos  $a = 0$ . Vakio  $b$  ratkeaa alkuehdosta  $M(0) = M_0 = 100$  e, josta saadaan  $b = M_0$ . Yhtälön ratkaisu on siis funktio

$$M(t) = M_0 e^{\frac{p}{t_0}t}, \quad (7.94)$$

josta rahamääräksi vuoden päästä ratkeaa

$$M(1 \text{ a}) = M_0 e^{1.25} = 349.03 \text{ e} \quad (7.95)$$

Alla on ratkaistu tehtävä Mathematicalla ja piirretty tilillä oleva rahamäärä. Punainen piste saadaan tilittämällä korko kerran vuodessa. Siniset pisteet kuvaavat tuottoa, kun korko lasketaan joka kuukausi. Käyrä kuvailee jatkuvaan korkoon.

Mathematica:

```

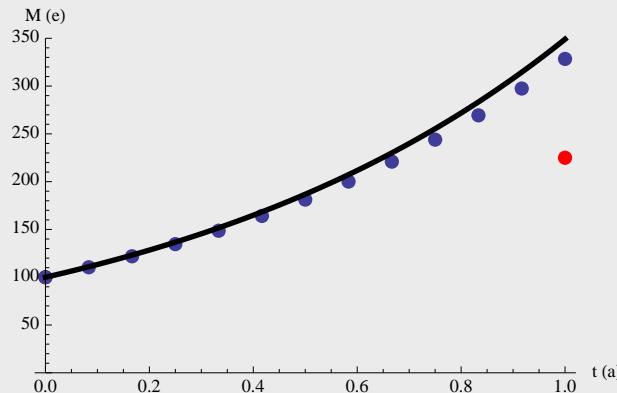
lukuarvot = {M0 -> 100, p -> 1.25, t0 -> 1};
Mi[n_, i_] := (1 + p/n)^i M0; (* i kpl koronlaskuja *)
Ma[n_] := (1 + p/n)^n M0; (* n kpl koronlaskuja *)

(* ratkaisut *)
{Ma[1], Ma[12], Ma[365*24*60*60], Limit[Ma[n], n -> Infinity]} /. lukuarvot
{225., 328.409, 349.034, 349.034}

(* ratkaistaan DY *)
dy = DSolve[{M'[t] == p/t0 M[t], M[0] == M0}, M, t];
M[t0] /. dy
M[t0] /. dy /. lukuarvot
{E^((p t)/t0) M0}
{349.034}

(* kuvaajat *)
vuosi = ListPlot[Table[{1/12 t, Mi[12, t] /. lukuarvot}, {t, 0, 1}],
  PlotStyle -> {PointSize[Large], Red},
  PlotRange -> {0, 350},
  AxesLabel -> {"t (a)", "M (e)"};
kk = ListPlot[Table[{1/12 t, Mi[12, t] /. lukuarvot}, {t, 0, 12}],
  PlotStyle -> PointSize[Large]];
jatkuva = Plot[M[t] /. dy /. lukuarvot, {t, 0, 1},
  PlotStyle -> {Thickness[0.01], Black}];
Show[{vuosi, kk, jatkuva}]

```



**ARVIOINTI** Rahamäärä on sitä suurempi, mitä useammin korko lasketaan, kuten pitääkin. Lisäksi (c)- ja (d)-kohdissa saatuiin sama tulos, mikä on järkevä, koska vuoden jakaminen 36266400 osaan ei poikkea paljonkaan sen jakamisesta äärettömän moneen osaan.

Kohdan (d) vastaus saataisiin myös raja-arvona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n M_0 = e^p M_0. \quad (7.96)$$

Tämä on sama tulos kuin differentiaalitähälön kautta laskettu ratkaisu, mutta tässä laskussa tarvitaan luvun  $e$  määritelämää raja-arvona. Historiallisesti luvun  $e$  ensimmäisiä sovelluksia ovat olleet juuri tälläisten korkoa korolle -ongelmien ratkaisut!

Huomaa myös, että jatkuvan koron tapauksessa rahamäärästä kuvailee eksponenttifunktio aivan kuten jäähtyvän kahvikupin lämpötilaakin. Tämä johtuu siitä, että differentiaalitähälöt  $M'(t) = \frac{p}{t_0} M(t)$  ja  $T'(t) = -\frac{k}{C} [T(t) - T_{ilm}]$  ovat kumpikin samaa muotoa: derivaatta = funktio + vakio, eli fysiikaan soveltuu muutosnopeus = suureen arvo + vakio. Tällaisessa tapauksessa suureen muutosta kuvailee aina eksponenttifunktio, täysin riippumatta siitä, mikä suure on kyseessä.

## 7.4 Tilanmuuttujat

Mekaniikassa hiukkasen tilan voi kuvata sen paikan ja liikemäären avulla, sillä jos hiukkasen massa tunnetaan, näiden suureiden perusteella on mahdollista määrittää esimerkiksi hiukkasen liike- ja potentiaalienergia. Jäykän kappaleen tila sisältää myös tiedon kappaleen kulmaliikeämästä, lämpötilasta ja kappaleeseen kohdistuvasta jännityksestä. Kaasun tilan kuvaaminen puolestaan vaatii tietoa muun muassa kaasun lämpötilasta, paineesta ja tilavuudesta. Lämpöopissa tällaisia tilan ominaisuuksia kuvaavia suureita kutsutaan **tilanmuuttujiksi**, ja lämpöilmiöiden ymmärtäminen tarkoittaakin yleensä nimenomaan tilanmuuttujien käytök-

sen tutkimista, sillä systeemin kaikkien tilanmuuttujien tunteminen kertoo meille millaisessa tilassa systeemi on.

Tilanmuuttujat siis kertovat systeemin ominaisuudet. On syytä kuitenkin erottaa toisistaan ekstensiiviset ja intensiiviset tilanmuuttujat. Esimerkiksi tilavuus ja ainemääri ovat ekstensiivisia tilanmuuttuja, sillä näiden arvo riippuu tarkasteltavan systeemin koosta. Jos esimerkiksi kauttaaltaan samanlainen kappale puolitetaan, kummankin puolikkaan ainemääri ja tilavuus on puolet alkuperäisestä. Sen sijaan paine ja lämpötila ovat intensiivisia tilanmuuttuja, sillä nämä suureet eivät muutu systeemin koon muuttuessa. Ekstensiiviset tilanmuuttujat kuvavat aina jotakin kokonaismääriä, ja niillä on systeemissä tyypillisesti yksikäsitteinen arvo. Esimerkiksi kannelliseen astiaan suljetulla kaasulla on käytettävissään astian määräämä tilavuus ja kaasu koostuu tietystä määristä ainetta. Intensiiviset tilanmuuttujat sen sijaan kuvavat aina jotakin paikallista ominaisuutta, ja niillä voi olla systeemin eri osissa eri arvot. Esimerkiksi lämmönjohtavuuden yhteydessä (kuva 7.26) tarkastelimme kappaleita, joiden päätt olivat eri lämpötiloissa ja joiden sisällä lämpötila muuttui paikasta toiseen siirryttäässä. Hydrostaattista painetta tutkiessamme (kuva 7.6) opimme paineen riippuvan korkeudesta. Intensiivisillä tilanmuuttujilla ei siis gleensä ole systeemissä vain yhtä arvoa vaan niiden arvo riippuu paikasta. Systeemien tilan kuvaminen yksinkertaistuu kuitenkin huomattavasti, jos myös jokaisella intensiivisillä tilanmuuttujalla on ainakin likimain sama arvo kaikkialla systeemissä, koska tällöin kutakin tilanmuuttuja kuvaa systeemissä vain yksi numeroarvo. Termodynamiosten tilojen tarkastelussa gleensä ole-tetaankin näin olevan, jos intensiivisten tilanmuuttujien paikkariippuvuutta ei ole erityisesti syytä huomioida. Silloinkin kun tämä ei ole totta, systeemi voidaan usein jakaa pienempiin osiin niin, että kussakin osassa jokaisella tilanmuuttujalla on yksi vakioarvo.

**7.31** Kuvaako seuraavissa systeemeissä kaikkia tilanmuuttuja vain yksi arvo koko systeemissä?



- (a) Suljetussa asiassa on kaasua vakiolämpötilassa.
- (b) Kappale on kahden lämpösäiliön välissä ja johtaa lämpöä.
- (c) Kaksi eri lämpötiloissa olevaa kappaletta koskettaa toisiaan.

Oletetaan siis systeemin olevan tilassa, jossa sen jokaisella tilanmuuttujalla on kaikkialla sama arvo. Esimerkiksi systeemissä on kauttaaltaan sama lämpötila. Tilanmuuttujien arvojen tunteminen kuvaa siis systeemin tilan, mutta tämä logiikka toimii myös käännekkäin. Tapahtuipa systeemille mitä tahansa, jos se palaa takaisin samaan tilaan kuin missä se aluksi oli, sen tilanmuuttujien täytyy saada samat arvot kuin mitä niillä oli aluksi. Jos esimerkiksi säiliössä olevaa kaasua jäähdyytetään ja sitten kaasu taas lämmitetään takaisin samaan lämpötilaan ja tilavuuteen kuin aluksi, kaasu palaa samaan tilaan kuin missä se alunperinkin oli. Tällöin luonnollisesti kaasun lämpötila palaa samaan arvoon kuin aluksi, mutta niin palaavat *kaikki muutkin* tilanmuuttujat. Ei ole mahdollista jäähdyttää ja lämmittää kaasua niin, että sillä olisi lopuksi esimerkiksi sama lämpötila ja tilavuus kuin aluksi mutta eri paine. Huomaa kuitenkin että kaikki suuret eivät ole tilanmuuttuja. Esimerkiksi mekaanisen kappaleen paikka on sen tilaa kuvava suure, mutta kappaleen kulkeman matkan pituus ei ole, sillä samaan paikkaan voi päästä monia eri reittejä pitkin. Samaan tapaan lämpötila on tilanmuuttuja, mutta lämpöön siirtynyt energia ei ole, koska kappaleen voi lämmittää tiettyyn lämpötilaan monella eri tavalla.

## Tilanyhtälöt

Mekaniikassa tilaa kuvavat suuret kuten kappaleen paikka ja nopeus ovat pääasiassa toisistaan riippumattomia. Yleensä kappaleen paikkaa ei voi päättää, jos tunnetaan kappaleen nopeus yhdellä hetkellä, sillä se, miten kappale yksittäisellä hetkellä liikkuu, ei mitenkään määritä sitä, missä kappale on. Lämpöilmiötä kuvavien tilanmuuttujien tapauksessa näin ei kuitenkaan ole. Suuret kuten paine, tilavuus ja lämpötila kaikki riippuvat toisistaan. Jos tilanmuuttujista muutama tunnetaan, kaikkien muiden arvot voidaan päättää tämän perusteella. Tälläista tilanmuuttujien keskinäistä riippuvuutta kuvavia matemaattisia lausekkeita kutsutaan **tilanyhtälöksi**.

Olemme jo näneet esimerkkejä tällaisista tilanmuuttujien välisistä riippuvuuksista, ja kuvaan 7.30 on koottu esimerkkejä prosesseista, joissa tilanmuuttujien väliset riippuvuudet näkyvät. Kuvassa (a) männällinen kaasusäiliö on ympäröity jään ja veden sekoituksella, jonka lämpötila on 273 K. Tämä pitää myös kaasun lämpötilan vakiona. Säiliön männän päällä oleva paino työntää mäntää säiliön sisään ja puristaa kaasua tuottaen paineen. Männän pääälle lisätään sitten painoa, jolloin mäntä liikkuu säiliön sisään kunnes kaasun paineen mäntää kohdistama voima tasapainottaa painovoiman. Painoa lisätään sen verran, että kaasun paine kaksinkertaistuu, jolloin huomataan kaasun tilavuuden puolittuvan alkuperäiseen verrattuna. Kaasun paineen kasvattaminen ainemäärän ja lämpötilan ollessa vakio siis pienentää kaasun tilavuutta. Kokeet osoittavat, että *kaasun tilavuus on käännekkäin verrannollinen sen paineeseen*. Yhtälönä tämän voi kirjoittaa esimerkiksi muodossa

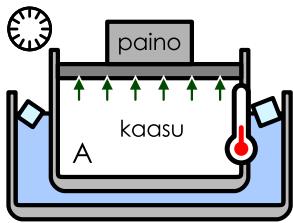
$$n, T = \text{vakio} \Rightarrow V = \frac{c_1}{p}, \quad (7.97)$$

missä  $c_1 = c_1(n, T)$  on jokin lämpötilasta ja ainemääristä riippuva vakio.

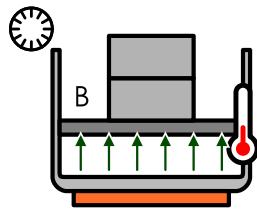
## JATKUVA AINE

Kuva 7.30: Kaasun tilanmuuttujien välisiä yhteyksiä erilaisissa prosesseissa. Vaikka tilanteet ovat erilaiset, kaasu on kuvissa vain neljässä eri tilassa, jotka on merkitty A, B, C ja D.

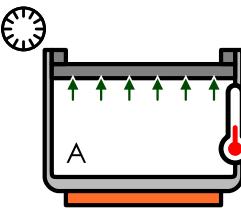
(a)  $n, T$  vakio:  $p$  kaksinkertaistuu ja  $V$  puolittuu.



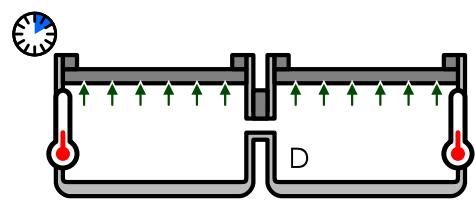
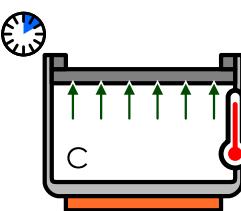
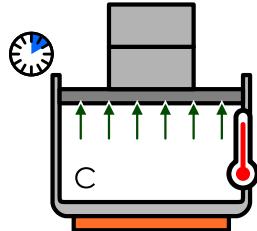
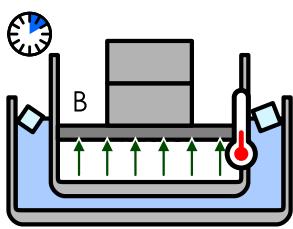
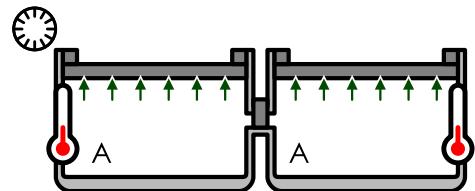
(b)  $n, p$  vakio:  $T$  ja  $V$  kaksinkertaistuvat.



(c)  $n, V$  vakio:  $T$  ja  $p$  kaksinkertaistuvat.



(d)  $p, T$  vakio:  $n$  ja  $V$  kaksinkertaistuvat.



Myös kuvaassa 7.30 (b) kaasu on männällisessä säiliössä, jonka pääällä oleva paino työntää mäntää ja tuottaa kaasun paineen. Nyt männän pääällä oleva paino pidetään vakiona, joten kaasun paineenkin täytyy pysyä vakiona. Kaasu on aluksi kylmää, mutta sitä lämmitetään kunnes sen lämpötila on kaksinkertaistunut alkuperäiseen verrattuna. Lämmittäminen pyrkii kasvattamaan kaasun painetta, mikä saa kaasun työntämään mäntää ylöspäin. Kaasu laajenee kunnes mäntää kohdistivat voimat ovat jälleen tasapainossa. Kaasun lämpötilan kasvattaminen ainemäärän ja paineen ollessa vakio siis kasvattaa kaasun tilavuutta. Täsmällisesti tilavuus on suoraan verrannollinen lämpötilaan,

$$n, p = \text{vakio} \Rightarrow V = c_2 T, \quad (7.98)$$

missä  $c_2 = c_2(n, p)$  on jokin paineesta ja ainemäärästä riippuva vakio.

Kuvassa 7.30 (c) kaasua lämmitetään niin, että säiliön tilavuus pidetään vakiona. Tällöin lämpötilan kaksinkertaistuessa paine kaksinkertaistuu, eli jos tilavuus pysyy vakiona, *kaasun paine on suoraan verrannollinen sen lämpötilaan*,

$$n, V = \text{vakio} \Rightarrow p = c_3 T, \quad (7.99)$$

missä  $c_3 = c_3(n, V)$  on tilavuudesta ja ainemäärästä riippuva vakio.

Kaasun ainemääräkin voi toki muuttua, ja tämän vaikutuksen voi päätellä kuvan 7.30 (d) kokeella. Oteaan nyt kaksi samanlaista säiliötä kuin edellisessä kokeessa. Kummassakin on yhtä paljon samaa kaasua samassa paineessa ja lämpötilassa. Säiliöiden välissä on suljettu venttiili, joten kyseessä on kaksi erillistä kaasusäiliötä. Sitten venttiili kuitenkin avataan, jolloin kaasut pääsevät leviämään kumpaan tahansa säiliöön ja loppituloksena on yksi kaasusäiliö, jonka tilavuus on kaksinkertainen kumpaan alkuperäiseen nähdyn. Samoin tämän säiliön sisällä on kaksinkertainen määrä kaasua kumpaan alkuperäiseen nähdyn. Kaasujen lämpötila tai paine eivät luonnollisesti muutu miihinkään, koska kummassakin säiliössä oli samaa kaasua täsmälleen samassa tilassa. Siispä tässä prosessissa lämpötila ja paine ovat vakiot ja *kaasun tilavuus on suoraan verrannollinen sen ainemäärään*,

$$p, T = \text{vakio} \Rightarrow V = c_4 n, \quad (7.100)$$

missä  $c_4 = c_4(p, T)$ .

Nämä kokeelliset tulokset voidaan yhdistää yhdeksi tilanyhtälöksi. Ensimmäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon  $pV = c_1(n, T)$ , ja sekä toinen että kolmas yhtälö toteutuu, jos  $c_1(n, T) = c_5(n)T$ , jolloin  $pV = c_5(n)T$ . Neljäskin yhtälö toteutuu, jos  $c_5(n) = Rn$ , missä  $R$  on vakio. Tällöin kaasun tilanmuuttuja  $p, V, n$  ja  $T$  yhdistäväksi tilanyhtälöksi saadaan

$$pV = nRT. \quad (7.101)$$

Tätä kutsutaan **ideaalikaasun tilanyhtälöksi**, ja se yhdistää kaasun tilaa kuvaavat suureet toisiinsa.

Nimitys "ideaalikaasu" viittaa siihen, että yhtälöön liittyy oletuksia, jotka eivät aina ole voimassa. Se on approksimaatio, joka pätee kaasun tiheyden ollessa pieni. Erityisesti jos kaasun lämpötila ja paine ovat lähekkäitä olosuhteita, joissa kaasu tiivistyy nesteeksi, tilanmuuttujat eivät enää noudata tätä tilanyhtälöä. Silloinkin

tilanmuuttujat kyllä riippuvat toisistaan, mutta tästä riippuvuutta kuvaamaan tarvitaan monimutkaisempi matemaattinen lauseke. Jos kuitenkin kaasun lämpötila on korkea, paine pieni ja tilavuus suuri niin, että ollaan kaukana tiivistymisolo-suhteista, tämä sama tilanyhtälö kuvaaa *kaikkia kaasuja*. Erityisesti vakiolle  $R$ , jota kutsutaan *kaasuvakioksi*, saadaan kokeellisesti sama arvo  $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$  kaikille kaasulle.

Koska ainemäärä on suoraan verrannollinen kaasun sisältämien hiukkasten lukumäärään, ideaalikaasun tilanyhtälön (7.101) voi kirjoittaa myös hiukkasten määrään  $N$  avulla ainemäärään  $n$  sijaan. Ainemäärä ja hiukkasten määrä välillä on yhteys  $n = N/N_A$ , ja tämän sijoitus tilanyhtälöön antaa  $pV = NTR/N_A$ . Tässä symbolit  $p$ ,  $V$ ,  $N$  ja  $T$  ovat kaasua kuvaavia tilanmuuttujia, ja  $R$  sekä  $N_A$  ovat vakioita. Erityisesti näiden vakioiden suhde on myös vakio. Tätä vakiota kutsutaan **Boltzmannin vakioksi** (Ludwig Boltzmannin mukaan) ja sillä on vakiintunut symboli

$$k_B = R/N_A = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (7.102)$$

Tämän vakion avulla ideaalikaasun tilanyhtälö voidaan siis kirjoittaa vaihtoehtoisin muotoihin

$$pV = nRT = Nk_B T. \quad (7.103)$$

Boltzmannin vakio on erittäin tärkeä fysiikan perusvakio, jonka syvämpi merkitys selviää seuraavissa luvuissa. Boltzmannin vakion arvo on tarkka, sillä vuoden 2019 SI-yksiköiden uudessa määrittelyssä lämpötilan yksikkö kelvin *määritellään* Boltzmannin vakion arvon kautta.

Vaikka kuvassa 7.30 on kuvattu neljä täysin erilaista prosessia, kaasu esiintyy kuvissa vain neljässä eri tilassa, jotka on merkitty kuvaan kirjaimin A, B, C ja D. Esimerkiksi kuvan (a) alkutilassa A kaasun tilavuus on suuri mutta paine, lämpötila ja ainemäärä ovat pienet. Kaasulla on kuitenkin sama ainemäärä, tilavuus ja lämpötila myös kuvan (c) alkutilassa. Tämä tarkoittaa ensinnäkin sitä, että kaasulla täytyy olla myös sama paine näissä tilanteissa, koska tilanyhtälö sitoo tilanmuuttujat toisiinsa. Jos kaasulla on kahdessa tilanteessa sama  $T$ ,  $V$  ja  $n$ , niillä on *pakko olla myös sama p*. Toiseksi tämä tarkoittaa sitä, että kaasu on näissä tilanteissa *täsmälleen samassa tilassa*, jota tässä on siis merkitty kirjaimella A. Kaasun ympäristö on toki kuvissa (a) ja (c) erilainen ja kaasun tila muuttuu kuvatuissa prosesseissa eri tavoin, mutta koska kaasujen kaikki tilanmuuttujat ovat näissä tapauksissa samat, kaasut itse ovat kuvissa esitettyinä ajan hetkinä samassa tilassa.



**7.32** Kuvassa 7.30 tilassa A lämpötila on  $T_A = 273 \text{ K}$ , tilavuus  $V_A = 0.010 \text{ m}^3$  ja paine  $p_A = 105 \text{ kPa}$ . Mitkä ovat kaikkien tilanmuuttujien  $T$ ,  $V$ ,  $p$  ja  $n$  arvot kaikissa kuvan tiloissa A, B, C ja D?

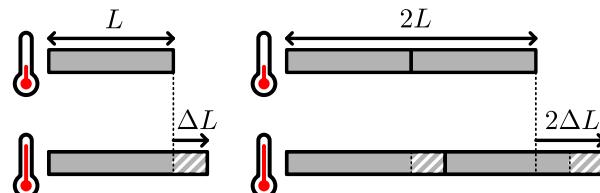
## Lämpölaajeneminen

Tilanyhtälöt eivät yhdistä tilanmuuttujien arvoja vain kaasuissa vaan tilanmuuttujat riippuvat toisistaan aineen *kaikissa* olomuodoissa. Riippuvuus on kuitenkin eri olomuodoissa erilainen. Jos neste tai kiinteä aine tuodaan suureen paineeseen, myös näiden olomuotojen tilavuus pienenee hieman. Yleensä nämä tilavuuden muutokset ovat kuitenkin niin pieniä ja vaativat niin suuren paineen, että nestetään ja kiinteitäaineita voi usein pitää kokoonpuristumattomina. Tarkkaan ottaen tilavuus ja paine (tai täsmällisemmin jännitys) riippuvat aina toisistaan. Samoin jos nestettää tai kiinteää ainetta lämmittää, niiden tilavuus yleensä kasvaa. Nestetään ja kiinteitäaineita kuvaavat tilanyhtälöt ovat kuitenkin yleensä huomattavasti monimutkaisempia kuin ideaalikaasun tilanyhtälö, emmekä yritä tässä johtaa mitään yleistä tilanyhtälöä näille olomuodoille. Tutkimme sen sijaan yhtä esimerkkiä tilanmuuttujien välisestä yhteydestä: kiinteän kappaleen koon ja lämpötilan välistä riippuvuutta eli **lämpölaajenemista**.

Tavallisesti kiinteiden aineiden tilavuus kasvaa niiden lämpötilan noustessa, jos ulkoinen paine ei muudu. Kuvassa 7.31 on esimerkkinä tästä pitkä ja kapea sauva, joka pitenee lämmetessään. Sauvan alkuperäistä pituutta on merkitty symbolilla  $L$  ja pituuden muutosta  $\Delta L$ . Kuvassa on myös toinen, pituudeltaan kaksinkertainen sauva, jonka pituuden muutos on kaksinkertainen lyhyempään sauvaan nähden, kun sauvojen lämpötilat muuttuvat yhtä paljon. Nämä täytyy olla, koska pitkän sauvan voi ajatella koostuvan kahdesta peräkkäin asetetusta lyhyestä sauvasta, ja jos kummankin lyhyen saavan pituuden muutos on  $\Delta L$ , ne yhdessä pitenevät määrään  $2\Delta L$ . Suhteellinen muutos eli pituuden muutoksen suhde alkuperäiseen pituuteen on siis kummassakin tilanteessa sama. Jos lämpötilan muutos  $\Delta T$  ei ole kovin suuri, sauvan pituuden suhteellinen muutos on suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen,

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T. \quad (7.104)$$

Kuva 7.31: Pitkän kiinteän kappaleen lämpölaajeneminen.



Tässä verrannollisuuskerroin

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T} \quad (7.105)$$

on pituuden lämpölaajenemiskerroin.

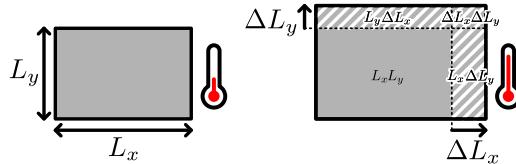
Jos lämpölaajenemiskerroin on suuri, pieni lämpötilan muutos riittää aiheuttamaan suuren muutoksen savian pituudessa. Yleensä lämpölaajenemiskertoimet ovat kuitenkin varsin pieniä, jolloin merkittävä koon muutos vaatii suuren muutoksen lämpötilassa. Tyypillisesti kiinteiden aineiden lämpölaajenemiskertoimet ovat suuruusluokkaa  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Lämpölaajenemiskertoimet eivät ole kuitenkaan vakioita vaan ne riippuvat lämpötilasta. Niinpä yhtälö (7.104) on vain approksimaatio, joka pätee sitä paremmin mitä pienempi lämpötilan muutos on. Yleisesti lämpölaajenemiskerroin määritelläänkin pituuden derivaattana lämpötilan suhteeseen,

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial T}. \quad (7.106)$$



**7.33** Selvitä, mikä on betonin pituuden lämpölaajenemiskerroin. Arvioi paljonko betonisen sillan pituudessa on eroa talven ja kesän välillä. Pitääkö tämä huomioida rakentamisessa?

Kuva 7.32: Tasomaisen kappaleen lämpölaajeneminen.



Jos kappale on tehty kauttaaltaan samasta materiaalista, sen koko muuttuu kaikissa suunnissa suhteellisesti yhtä paljon, jolloin kappaleen muoto ei muudu. Tätä on havainnollistettu kuvassa 7.32, jossa tarkastellaan suorakulmaisen levyn lämpölaajenemista. Levyn sivujen pituudet ovat aluksi  $L_x$  ja  $L_y$ , ja nämä pidentyvät lämpenemisen aikana suhteellisesti yhtä paljon, sivusuunnassa  $\Delta L_x = L_x \alpha \Delta T$  ja pystysuunnassa  $\Delta L_y = L_y \alpha \Delta T$ . Levyn pinta-ala on siis aluksi

$$A_{\text{alku}} = L_x L_y \quad (7.107)$$

ja lopuksi

$$A_{\text{loppu}} = (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y) = L_x L_y + L_x \Delta L_y + L_y \Delta L_x + \Delta L_x \Delta L_y. \quad (7.108)$$

Näiden termien kuvaamat pinta-alat on merkitty myös kuvaan 7.32. Kuvassa pituuden suhteellisia muutoksia on kuitenkin liioiteltu. Kuten edellä todettuun, pituuden suhteellinen muutos on kiinteiden aineiden lämpölaajenemisessa tavallisesti hyvin pieni. Niinpä pituuden muutokset  $\Delta L_x$  ja  $\Delta L_y$  ovat todellisuudessa huomattavasti pienemmät kuin alkuperäispituudet  $L_x$  ja  $L_y$ . Tästä johtuen myös pinta-alan  $\Delta L_x \Delta L_y$  täytyy olla todellisessa lämpölaajenemisessa hyvin pieni pinta-aloihin  $L_x \Delta L_y$  ja  $L_y \Delta L_x$  verrattuna. Näin voidaan approksimoida

$$A_{\text{loppu}} \approx L_x L_y + L_x \Delta L_y + L_y \Delta L_x. \quad (7.109)$$



**7.34** Metallilevyssä on keskellä aukko. Levyä lämmitetään, jolloin metalli lämpölaajenee. Miten aukon koko muuttuu?

Nyt pituuden muutokset voidaan kirjoittaa lämpölaajenemiskertoimen ja lämpötilan muutoksen avulla, jolloin loppupinta-alan lausekkeeksi saadaan

$$A_{\text{loppu}} = L_x L_y + L_x L_y \alpha \Delta T + L_y L_x \alpha \Delta T = A_{\text{alku}}(1 + 2\alpha \Delta T). \quad (7.110)$$

Pinta-alan suhteellinen muutos on siis

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{\text{loppu}} - A_{\text{alku}}}{A_{\text{alku}}} = 2\alpha \Delta T = \beta \Delta T, \quad (7.111)$$

missä  $\beta = 2\alpha$  on *pinta-alan lämpölaajenemiskerroin*. Tämän tuloksen mukaan pinta-alan suhteellinen muutos on verrannollinen lämpötilan muutokseen kuten pituudenkin suhteellinen muutos, mutta tämäkin on jälleen approksimaatio. Itse asiassa tämä tulos seuraa suoraan siitä, että jätimme pinta-alan  $\Delta L_x \Delta L_y$  huomioidottomaksi. Jos lämpötilan muutokset ovat suuria, tämä ei ole välttämättä enää perusteltua eikä pinta-alan muutos ole enää suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen.

Tilavuuden lämpölaajeneminen voidaan analysoida aivan vastaavalla tavalla. Lopputulos on se, että jos lämpötila ei muudu kovin paljon, tilavuuden suhteellinen muutos on

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta T = \gamma \Delta T, \quad (7.112)$$

ja tässä  $\gamma = 3\alpha$  on siis *tilavuuden lämpölaajenemiskerroin*.



**7.35** Mikä on ideaalikaasun tilavuuden lämpölaajenemiskerroin tilantuhtalon (7.103) mukaan?

### esimerkki 7.5

### Kitara

Eräässä kitarassa on teräskieli, jonka pituus on 610.0 mm. Kieli on vireessä, kun sitä jännittävä voima on 67.0 N. Kieli viritetään lämpötilassa  $0.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ja seuraavaksi kitaraa soitetaan paikassa, jossa lämpötila on  $30.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Mikä on nyt kielen jännitysvoima, jos kitaraa ei viritettä uudelleen? Kielen jousivakio on noin  $49.0\text{ kN/m}$ , ja voit olettaa sen pysyvän muuttumattomana. Teräksen pituuden lämpölaajenemiskerroin on noin  $12 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

**TILANNE** Merkitään kielen pituutta  $L = 610.0\text{ mm}$ , sen jousivakiota  $k = 49.0\text{ kN/m}$  ja tarvittavaa jännitysvoimaa  $F = 67.0\text{ N}$ . Lämpötilan muutos on  $\Delta T = 30.0\text{ K}$  ja lämpölaajenemiskerroin  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

**SUUNNITELMA** Jännittävä voima venyttää kieltä hiukan, jolloin jännitysvoima riippuu Hooken lain mukaisesti venymästä. Kielen lepopituus  $L_0$  on siis lyhyempi kuin kielen todellinen pituus  $L$ . Kun kieli lämpenee, se lämpölaajenee. Oletetaan, että kitaran kaula ei juuri lämpölaajene (tämä ei ole totta, mutta esimerkiksi puu lämpölaajenee vähemmän kuin teräs), jolloin kielen päättä on koko ajan kiinnitetty  $610\text{ mm}$  etäisyydelle toisistaan. Kielen todellinen pituus ei siis muutu. Kielen lepopituus kuitenkin kasvaa lämpölaajenemisen takia, jolloin kielen venymä pienenee ja niinpä myös venytämiseen tarvittava jännitysvoima pienenee.

Jännityksen tuottama venymä on

$$\Delta L_F = \frac{F}{k}. \quad (7.113)$$

Lämpölaajenemisen tuottama lepopituuden muutos on puolestaan

$$\Delta L_T = L_0 \alpha \Delta T. \quad (7.114)$$

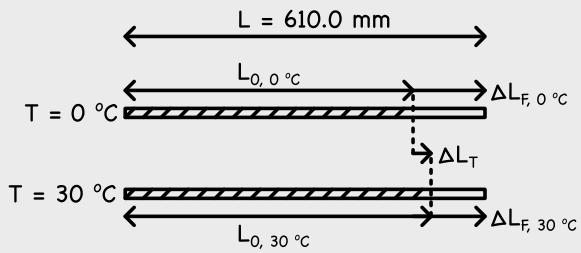
**RATKAISU** Kielen venymä on aluksi  $\Delta L_{F,0^{\circ}\text{C}} = F/k = 1.3\text{ mm}$ , joten lepopituus on aluksi noin  $L_{0,0^{\circ}\text{C}} = L - \Delta L_F = 608.7\text{ mm}$ . Kun kieli lämpenee, sen lepopituuden muutos on

$$\Delta L_T = L_0 \alpha \Delta T = 0.2\text{ mm}, \quad (7.115)$$

eli uusi lepopituus on  $L_{0,30^{\circ}\text{C}} = 608.9\text{ mm}$ . Jännitysvoiman tuottama venymä on nyt siis vain  $\Delta L_{F,30^{\circ}\text{C}} = 1.1\text{ mm}$ , joten jännitysvoima on

$$F_{30^{\circ}\text{C}} = k \Delta L_{F,30^{\circ}\text{C}} = 54\text{ N}. \quad (7.116)$$

**ARVIOINTI** Kielen jännitysvoima pienenee, mikä on järkevä. Jännitysvoiman muutos on noin 20 %, mikä vaikuttaa merkittävästi soittimen ääneen ja kitara pitää siis virittää uudestaan.



**7.36** Selitä oman sanoin, mitä tarkoitetaan tilamuuttujilla ja -yhtälöillä. Selitä, miten lämpötila, tilavuus ja paine riippuvat toisistaan kaasuissa ja kiinteissä aineissa.

## Yhteenvetö: Jatkuva aine

### Virtaavat aineet

- Kiinteä, neste ja kaasu** ovat aineen **olomuotoja**. Aineen erilaisia tapoja järjestäjä kutsutaan yleisesti **faaseiksi**.
- Faasidiagrammi** on koordinaatistossa, jossa on esitetty aineen tasapainofaasi eri olosuhteissa.
- Paine** on pintaan kohdistuvan voiman ja pinta-alan suhde,

$$p = \frac{F}{A}.$$

- Nesteet ja kaasut eli **fluidit** välittävät paineen kaikille koskettamilleen pinnoille.
- Nesteen tai kaasun ympäriömään kappaleeseen kohdistuu **noste**. Nosteen suunta on painovoimaa vastaan ja sen suuruus on sama kuin kappaleen syrjäyttämän fluidin paino

$$F_{\text{noste}} = \rho g V.$$

- Kokoontumaton jatkuva virtausta kuvaava **jatkuvuusyhtälö**,

$$vA = \text{vakio}, \quad (7.117)$$

jonka mukaan virtaavaa ainetta saapuu ja poistuu kaikkialla yhtä suuri tilavuus.

- Pöyriteettömässä kokoontumattomassa virtauksessa painetta kuvaava **Bernoulli yhtälö**, jonka mukaan **virtaviivalta** pätee

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{vakio}.$$

Tämän mukaan paine kasvaa siirryttäässä alaspäin ja virtausnopeuden pienentyessä.

### Lämpöilmiöt

- Lämpötila** on termodynamiasta **tasapainotila** kuvava suure. **Termodynamiikan 0. pääsäännön** perusteella kaikki keskenään tasapainossa olevat kappaleet ovat samassa lämpötilassa.
- Lämpötilalla on absoluuttinen asteikko, jonka nollapiste on 0 K eli  $-273.15^\circ\text{C}$ .
- Lämpö Q** on epäjärjestyneenä siirryvä energiavirtaus. **Termodynamiikan 1. pääsäännön** mukaan energiavirtaus voi siirtää sekä työön että lämpöön.
- Systeemin kykyä vastaanottaa energiavirtaus lämpöön kuvaa **lämpökapasiteetti**

$$C = \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.118)$$

Aineen vastavaa ominaisuus on **ominaislämpökapasiteetti**.

- Olomuodon muutoksiin liittyvä energiavirtaus kutsutaan **latenttilämmöksi**.
- Eri lämpötiloissa olevat kappaleet pyrkivät termodynamiiseen tasapainoon. Niinpä energiavirtaa itsestään aina korkeasta lämpötilasta matalaan kunnes lämpötilaeroit tasoittuvat. Tämä on **termodynamiikan 2. pääsääntö**.

- Jos kappaleen eri osat ovat eri lämpötiloissa, energia siirtyy lämpöön **johtumalla**. Siirryvä energiavirtaus kuvaa **lämpövuo**

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{dT}{dx}.$$

Tässä  $\lambda$  on aineen ominainen **lämmönjohtavuus**.

- Ainemäärä** kuvaa kappaleen sisältämien hiukkasten määrää. Yksi **mooli** tarkoittaa  $6.022 \cdot 10^{23}$  hiukkasta.
- Systeemin tilaa kuvavaa suureita kutsutaan **tilanmuuttujaksi**. Tilanmuuttujien välistä riippuvuutta kuvaa **tilanyhtälö**. Kaasulle pätee likimain *ideaalikaasun tilanyhtälö*

$$pV = nRT = Nk_B T.$$

Tässä vakio  $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$  on **kaasuvakio** ja  $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  on **Boltzmannin vakio**.

- Kiinteissä aineissa pituuden ja lämpötilan yhteyttä kuvaa **lämpölaajeneminen**

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T, \quad \frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

### Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälö** on yhtälö, jossa esiintyy funktio ja sen derivaattoja. Tämän ratkaiseminen tarkoittaa differentiaaliyhtälön toteuttavan funktion etsimistä.
- Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on monia menetelmiä:
  - Yrite** on ratkaisun arvaus. Se voidaan osoittaa oikeaksi sijoittamalla differentiaaliyhtälöön.
  - Separointi** soisitaan riippuvat muuttujat erotellaan ja integroidaan erikseen.

- Yhtälön

$$f'(t) + Af(t) + B = 0$$

ratkaisu on funktio

$$f(t) = -\frac{B}{A} + Ce^{-At}.$$

Tässä  $f$  ja  $t$  voivat olla mitkä tahansa toisistaan riippuvat suureet,  $A$  ja  $B$  ovat tunnetut vakiot, ja vakio  $C$  täytyy määritellä erillisen alkuehdon avulla.

### Sanasto

- olomuoto, faasi (phase)
- kiinteä (solid)
- neste (liquid)
- kaasu (gas)
- virtaava aine, fluidi (fluid)
- puristusjännitys (compressive stress)
- venytysjännitys (tensile stress)
- tilavuuspuristusjännitys (bulk stress)
- leikkausjännitys (shear stress)
- paine (pressure)
- kokoonpuristumaton (incompressible)
- noste (buoyancy)
- virtaus (flow)
- virtaviiva (streamline)
- pyörteeton, laminaarinen (laminar)
- pyörteellinen, turbulentti (turbulent)

- lämpötila (temperature)
- ainemäärä (amount of substance)
- mooli (mole)
- absoluuttinen nollapiste (absolute zero)
- tasapainotila (equilibrium state)
- lämpö (heat)
- latenttilämpö (latent heat)
- vuo (flux)
- lämmönjohtavuus (thermal conductivity)
- lämpökapasiteetti (heat capacity)
- lämpölaajeneminen (thermal expansion)
- tilanmuuttuja (state variable)
- tilanyhtälö (equation of state)
- differentiaaliyhtälö (differential equation)
- yrite (ansatz)
- alkuehko (initial condition)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

**7.1** Vedellä on useita erilaisia kiinteitä faaseja eli on olemassa monenlaista jäättä. Maapallolla näistä esiintyy vain yhtä, tavallista jäättä, mutta hyvin suussa paineessa ja matalissa lämpötiloissa vesimolekyilit voivat muodostaa monenlaisia rakenteita.

**7.2** Ensimmäinen koe kohdistaa paperiin venytysjännityksen. Paperin repiminen on tällä tavalla vaikeaa, joten paperi vastustaa venytystä hyvin. Normaali repiminen kohdistaa paperiin leikkausjännityksen, ja tälläista jännitystä paperin rakenne ei pysty vastustamaan ja niinpä paperi repeää helposti.

**7.3** Ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti astian koordinaatistossa havaitaan kiihtyvyydestä johtuva näennäisvoima. Tämä näennäisvoima vaikuttaa nesteeseen painovoiman tavoin, mutta voiman suunta on kiihtyvyydlle vastakkainen ja voiman suuruus on  $ma_x$  eikä  $mg$ . Niinpä näennäisvoima tuottaa nesteeseen sivusuuntainen hydrostaattisen paineen  $p(x) = p_0 - \rho_{\text{air}}ax$ . (Toki nesteeseen vaikuttaa myös todellisen painovoiman hydrostaattinen paine.) Paine on siis työnettäväällä sivulla suurempi kuin vastakkaisella sivulla.

**7.4 (a)** Ilmanpaine on noin  $p = 10^5$  Pa, joten se kohdistaa pinta-alaan  $A = 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} = 0.01 \text{ m}^2$  voiman  $F = pA = 1000 \text{ N}$ .

(b) Vastaavan voiman tuottaa massa  $m$ , jolla  $F = mg$  eli  $m = F/g \approx 100 \text{ kg}$ .

(c) Maan säde on noin  $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$ , joten maapallon pinta-ala on noin  $A = 4\pi R^2 = 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ . Koko pintaan ilmanpaine kohdistaa voiman  $F = pA = 5 \cdot 10^{19} \text{ N}$ , mikä vastaa ilmamassaa  $m = F/g = 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ .

**7.5 (a)** Pilli toimii niin, että imemällä tuotetaan alipaine pillin yläpähän. Tällöin mehulaisissa olevan mehun pintaan kohdistuva ilmanpaine tuottaa mehuun voiman, joka työntää mehua pilliä ylös. Suussa olevan ilman paine työntää mehua alaspin, mutta koska suussa paine on pienempi kuin ilmanpaine, tämä voima on mehua ylös työntävä painetta pienempi. Lisäksi mehun kohotessa pilliin, mehun oma paino vetää mehua alaspin. Mehu nousee niin korkealle, että suussa oleva paine ja pillissä olevan mehun hydrostaattinen paine ovat lasissa olevan mehun pinnan tasolla yhteensä yhtä suuret kuin ulkoinen ilmanpaine.

(b) Jos pilli on hyvin leveä, pillin sisään voi päästää ilmakuplia ja pilliin voi muodostua virtauksia. Periaatteessa kuitenkin mielivaltaisen leveä pilli tai putki voi toimia. Pilli ei kuitenkaan voi olla mielivaltaisen korkea. Jos pillin yläpähän imetään tyhjiö, paine siellä on nolla. Tällöin ulkoinen ilmanpaine voi työntää nesteen korkeintaan niin korkealle, että pilliin nousseen nestepatsaan hydrostaattinen paine pillin alapäässä on yhtä suuri kuin ilmanpaine,  $p_{\text{ilma}} = \rho g z_{\max}$ . Veden tapauksessa siis  $z_{\max} = p_{\text{ilma}}/(\rho g) \approx 10^5 \text{ Pa}/(10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2) = 10 \text{ m}$ . Mehua ei siis voi imeä pillillä 10 metriä korkeammalle.

**7.6 (a)** Jos nesteen paino on merkittävä, osa työstää kuluu nesteen potentiaalienergian kasvattamiseen.

(b) Jos nosto tapahtuu nopeasti, osa työstää kuluu taakan liike-energian kasvattamiseen.

(c) Kaasu ei ole kokoonpuristumatonta, jolloin osa työstää voi kulua kaasun puristamiseen, mikä lämmittää kaasua. Tosin, näin käy vain siinä tapauksessa, että aluksi putki itsessään kannattelee suurta mäntää. Jos mäntä lepää vain kaasun päällä, taakka on puristanut kaasun jo valmiaksi kasaan eikä kaasu puristu enempää. Tällöin laite toimii aivan samalla tavalla kuin hydraulinen laite.

**7.7 (a)** Pallon paino eli siihen kohdistuva painovoima on vakio,  $G_{\text{pallo}} = mg = \rho_{\text{pallo}} V_{\text{pallo}} g$ .

(b) Kappaleeseen kohdistuva neste riippuu kappaleen syrjäyttämän veden tilavuudesta, joten neste on tilanteessa 1 nolla ja muissa tilanteissa  $F_{\text{noste}} = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{pallo}} g$ . Noste on pienempi kuin pallon paino, koska kappale on vettä tiheämpi.

(c) Kaikissa tilanteissa astia joutuu kannattelemaan veden ja sen päällä olevan ilman painoa, ja tilanteessa 1 tämä on astian ja veden välinen kokonaivoima. Voit ajatella niin, että astian pohjalla vallitsee paine  $p = p_{\text{ilma}} + \rho_{\text{vesi}} gh_{\text{vesi}}$ , jolloin vesi kohdistaa astian pohjaan voiman  $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = pA = p_{\text{ilma}} A + \rho_{\text{vesi}} gh_{\text{vesi}} A = p_{\text{ilma}} A + \rho_{\text{vesi}} g V_{\text{vesi}} = p_{\text{ilma}} A + G_{\text{vesi}}$ . Astia kohdistaa vastavoiman lain mukaan veteen yhtä suuren voiman. Tilanteessa 2 vesi kohdistaa palloon nesteen ylöspäin, jolloin pallo kohdistaa veteen tämän vastavoiman alaspin. Niinpä nyt astian pohjaan kohdistuu voima  $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = p_{\text{ilma}} A + G_{\text{vesi}} + F_{\text{noste}}$ . Samaan tulokseen päästääsiin myös paineen kautta. Nyt nimittäin veden pinta on korkeammalla kuin tilanteessa 1, koska pallo syrjäyttää oman tilavuutensa verran vettä,  $V_{\text{pallo}} = A\Delta h_{\text{vesi}}$ . Niinpä  $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = pA = p_{\text{ilma}} A + \rho_{\text{vesi}} g(h_{\text{vesi}} + \Delta h_{\text{vesi}})A = p_{\text{ilma}} A + \rho_{\text{vesi}} g(V_{\text{vesi}} + V_{\text{pallo}}) = p_{\text{ilma}} A + G_{\text{vesi}} + F_{\text{noste}}$ . Tilanteessa 3 astian pohja joutuu kannattelemaan myös pohjalla makaavaa palloa. Niinpä astian pohjaan kohdistuu vedenpaineen voima sekä kappaleen ja astian välinen normaalivoima. Koska vesi ja pallo ovat levossa, astian pohjan täytyy kohdistaa niihin yhtä suuri voima kuin veden ja pallon paino yhteensä,  $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = p_{\text{ilma}} A + G_{\text{vesi}} + G_{\text{pallo}}$ . Voima on siis suurempi kuin tilanteessa 2.

**7.9** Todennäköisesti ihmisten kulkunopeus hidastuu polulla ja polun alkuun syntyy ruuhka. Ihmiset siis käyttäytyvät täysin päinvastoin kuin virtaava neste. Tämä johtuu siitä, että ihmisten virtaus ei ole tasainen eikä kokoonpuristumaton. Jos ihmisiä olisi niin paljon, että leveä tie olisi aivan täynnä, ihmiset joutuisivat jonottamaan polulle pääsyä. Tällöin ihmisten nopeus tiellä olisi pienempi kuin polulla, ja ihmisten virtaus käyttäytyisi samaan tapaan kuin virtaavan nesteen virtaus.

**7.10** Putken poikkileikkaus läpi kulkeva tilavuusvuoto (tilavuus/aika) on siis  $\Delta V = vA$ . Virtauksen kuljettamana massavuo (massa/tilavuus) on siis  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho vA$ . Jatkuvuusyhtälökseksi saadaan siis

$$\rho_{\text{suuri}} v_{\text{suuri}} A_{\text{suuri}} = \rho_{\text{pieni}} v_{\text{pieni}} A_{\text{pieni}} \quad (7.119)$$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

**7.11** Ainoa ero kuvissa on putken kapeamman pään korkeus. (a) Virtausnopeus pienessä putkessa määräytyy jatkuvuusyhälöstä, joten nopeus on sama kummassakin kuvassa. (b) Koska nopeus on sama, myös liike-energia on sama. (c) Kun putken loppupää on korkealla, nesteen potentiaalienergia kasvaa. Niinpä nesteeseen täytyy tehdä enemmän työtä kuvassa 7.14. (d) Koska nesteeseen tehdään enemmän työtä kuvassa 7.14, paine-ero putken pääiden välillä on tässä kuvassa suurempi. Niinpä paine kapeassa putkessa on pienempi kuvassa 7.14.

**7.12** (a) Ei. Pumppu tekee veteen työtä ja tuottaa sitä kautta ylimääräisen paine-eron.

(b) Pätee. Kyseessä on tasainen virtaus, vaikka neste ei olekaan putkessa.

(c) Ei. Valitut pistet eivät ole samalla virtaviivalla.

**7.14** Nesteen korkeus mittarissa on suoraan verrannollinen kaasusäiliönpaineeseen, joten mittari mittaa oikeastaan tätä painetta. Jos määrittelemme lämpötilan tämän lämpömittarin lukeman kautta, ja lukema mittaa painetta, paineen ja lämpötilan täytyy olla lineaarisesti verrannolliset.

**7.15** Ei. Nesteiden tilavuus riippuu lämpötilasta, mutta tilavuus ei ole suoraan verrannollinen absoluuttiseen lämpötilaan kuten kaasuilla. Se etttä kaasuilla ekstrapoloidut kuvaajat leikkaavat samassa pisteessä, ei ole mitenkään itsestään selvää.

**7.16** Jos 0. säntö ei pätsi, kappale voisi olla tasapainossa kahden eri lämpömittarin kanssa niin, että lämpömittarit eivät kuitenkaan olisi tasapainossa keskenään. Kuitenkin jos lämpömittarit eivät ole keskenään tasapainossa, ne näyttävät eri lämpötiloja. Jos siis tällainen tilanne olisi mahdollinen, kaksi erilaista periaatteessa toimivaa ja kalibroitua lämpömittaria näyttäisi kappaleelle erilaista lämpötilaa. Ja jos näin olisi, lämpötilaa ei voisi luotettavasti mitata. Itse asiassa lämpötila itsessään ei olisi järkevä suure.

**7.18** (a) Moolissa on  $N_A = 6.0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  molekyyliä, joten yhden molekyylin massa on  $m = 0.018 \text{ kg/mol}/N_A = 3.0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ .

(b) Kilogrammassa vettä on siis  $1 \text{ kg}/(3.0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) = 3.3 \cdot 10^{25} \text{ molekyyliä}$ .

(c) Ominaislämpökapasiteetti molekyyliä kohti on  $4.2 \text{ kJ/kgK}/3.3 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1} = 1.3 \cdot 10^{-22} \text{ J/K}$ .

(d) Ominaislämpökapasiteetti moolia kohti on  $4.2 \text{ kJ/kgK} * 0.018 \text{ kg/mol} = 76 \text{ J/molK}$ .

**7.19** (a) Oletetaan jäänen olevan jo lämpötilassa  $0^\circ\text{C}$ . Sulatus vaatii energian  $Q_{\text{sulaminen}} = mL = 0.010 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 3.34 \text{ kJ}$ , lämmitys  $Q_{\text{lämpeneminen}} = Cm\Delta T = 4.2 \text{ kJ/kgK} \cdot 0.010 \text{ kg} \cdot 100K = 4.2 \text{ kJ}$  ja kiehutus  $Q_{\text{höyristyminen}} = mL = 0.010 \text{ kg} \cdot 2260 \text{ kJ/kg} = 22.6 \text{ kJ}$ . Kaikkiaan energiaa vaaditaan  $Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sulaminen}} + Q_{\text{lämpeneminen}} + Q_{\text{höyristyminen}} = 30.1 \text{ kJ}$ . Tästä sulattamiseen kului 11 %, lämmittämiseen 14 % ja höyristämiseen 75 %.

(b) Jos kuutiolla olisi tämä liike-energia,  $K = \frac{1}{2}mv^2 = Q_{\text{kokonais}}$ , se saisi vauhdin  $v = \sqrt{2Q_{\text{kokonais}}/m} = 2500 \text{ m/s}$ . Tämä on valtava vauhti. Tarinan opetus on se, että lämpöilmiöihin liittyvät energiat ovat tavallisesti paljon suuremmat kuin mekaanisiin ilmiöihin liittyvät energiat.

**7.20** (a) Kappaleiden läpi voi toki kulkea erilaiset tehot, mutta silloin kappaleiden liitoskohtaan saapuvan energian ja sieltä poistuvan energian tehot eivät ole samat. Tällöin energian määrä liitoskohdassa joko lisääntyy tai vähenyy ja lämpötila muuttuu rajapinnalla. Lopujen lopuksi rajapinta asettuu lämpötilaan, jossa lämpöä siirtyy kummankin kappaleen läpi samalla teholla.

(b) Merkitään lämpötilaeroa A:n ja liitoskohdan välillä kappaleen A pääiden välillä  $\Delta T_A$  ja B:n vastaavasti  $\Delta T_B$ . Nyt siis  $P_A = k_A \Delta T_A = k_B \Delta T_B = P_B$ , josta  $\Delta T_A/\Delta T_B = k_B/k_A = 2$  eli  $\Delta T_A = 2\Delta T_B$ . Koska lämpötilaero lämpösäiliöiden välillä on  $\Delta T_A + \Delta T_B = 30 \text{ K}$ , täytyy olla  $\Delta T_A = 20 \text{ K}$  ja  $\Delta T_B = 10 \text{ K}$ . Lämpötila liitoskohdassa on siis 300 K.

(c) Energiaa siirtyy teholla  $P = P_A = P_B = k_A \Delta T_A = 20 \text{ W}$ .

(d) Kokonaislämmönjohtavuus on  $k = P/\Delta T = 20 \text{ W}/30 \text{ K} = 0.67 \text{ W/K}$ . Huomaa, että kokonaislämmönjohtavuus on pienempi kuin kumpikaan johtavuksista  $k_A$  tai  $k_B$ . Näin täytyy olla, koska kaksi peräkkäistä eristettä eristää paremmin kuin kumpikaan yksinään.

**7.21** Kokonaislämmönjohtavuus:  $[k] = [P]/[\Delta T] = \text{W/K}$ . Ominaislämmönjohtavuus:  $[\lambda] = [P][L]/([A][\Delta T]) = \text{W/Km}$ . Ikkunan lämmönjohtavuus on ilmoitettu pinta-alaa kohti, joten kyseessä on vakio  $a$  yhtälöstä  $P = aA\Delta T$ . Vakio kertoo, kuinka suuri teho ikkunan läpi kulkee ikkunapinta-alaa ja lämpötilaeroa kohden.

**7.23**  $dQ_{\text{ulos}}$  on systeemistä ulos virtaava energia. Jos systeemi jäähtyy, tämä on positiivinen, koska lämpöä siirryy ympäristöön.  $dT$  on systeemin lämpötila. Jos systeemi jäähtyy, tämä on negatiivinen. Niinpä  $dQ_{\text{ulos}}$  ja  $dT$  ovat erimerkkiset, ja koska  $C$  on positiivinen, yhtälöön tarvitaan miinusmerkki.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

**7.24** (a) Jos lämpötila olisi vakio, lämpötilan muutokseksi sekunnissa saataisiin  $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.5 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \text{ K} \cdot 1 \text{ s} = -10 \text{ K}$ .

(b) Tällöin siis olisi  $T(1) = 290 \text{ K}$ .

(c) Nyt  $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.5 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ K} \cdot 1 \text{ s} = -5 \text{ K}$ .

(d) Siis  $T(2) = 285 \text{ K}$ .

(e) Edellisessä mallissa lämpötilan muutos oli aina puolet kappaleen ja ympäristön välisestä lämpötilaerosta.

Jos aika-askeleen pituus on vain puoli sekuntia, lämpötilan muutos on  $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.25(T - T_{\text{ilma}})$  eli neljännes lämpötilaerosta. Niinpä tässä mallissa saataisiin  $T(0) = 300 \text{ K}$ ,  $T(0.5) = 295 \text{ K}$ ,  $T(1) = 291.25 \text{ K}$ ,  $T(1.5) = 288.4 \text{ K}$  ja  $T(2) = 286.3 \text{ K}$ .

(f) Mitä lyhyempää aika-askelta käytetään, sitä parempi tulos luonnollisesti saadaan. Siispä  $T(2) = 286.3 \text{ K}$  on parempi arvio kappaleen lämpötilalle kahden sekunnin kuluttua kuin  $T(2) = 285 \text{ K}$ . Täsmällinen lasku vaatii raja-arvoa, jossa aika-askeleen pituus lähestyy nolla.

**7.25** (a) Ensinnäkin eksponenttifunktio on yksikötön samoin kuin sen argumentti. Siksi pitää olla  $[c] = \text{s}$ . Yhtälön kummallakin puolella on oltava sama yksikkö, joten  $[T] = [a] + [b] = \text{K}$ , joten  $[a] = [b] = \text{K}$ .

(b) Jos  $c > 0$ ,  $e^{-t/c} \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Siispä  $T = a + be^{-t/c} \rightarrow a$ .

(c) Aluksi lämpötila on yritteen mukaan  $T(0) = a + be^0 = a + b$  ja lopuksi edellisen kohdan mukaan  $b$ . Vakiot  $a$  ja  $b$  voidaan siis ratkaista suoraan, alku- ja loppulämpötilojen perusteella. Vakiota  $c$  sen sijaan ei voi.

**7.26** Kysytty lämpötila on noin 318 K kaikissa tapauksissa. Vakio  $c$  on se aika, jossa systeemin ja ympäristön lämpötilaero muuttuu tekijällä  $e^{-1} = 0.368$ . Tässä lämpötilaero on aluksi 60 K, joten ajan  $c$  kuluttua eroksi jää  $0.368 \cdot 60 \text{ K} \approx 22 \text{ K}$ . Ympäristön lämpötila on tässä  $a = 295 \text{ K}$ , joten systeemin lämpötila on  $295 \text{ K} + 22 \text{ K} = 317 \text{ K}$

**7.27** Vakiot  $a$  ja  $b$ . Ks. vastaus 7.25.

**7.28** Lämpötila on ajan funktio  $T(t) = 280 \text{ K} + 20 \text{ K} \cdot e^{-0.5 \text{ s}^{-1} \cdot t}$ , joten  $T(2 \text{ s}) = 287.4 \text{ K}$ . Tehtävässä 7.18 saimme arviot 285 K ja 286.3 K jakamalla ajan yhden sekunnin ja puolen sekunnin askeleisiin. Todellinen ratkaisu on näitä hieman suurempi.

**7.29** Virhe tapahtuu integraalissa  $\int(T - T_{\text{ilma}})dt$ . Kysymyksen virheellinen lasku toimii vain, jos  $T - T_{\text{ilma}}$  on vakio. Nyt kuitenkin lämpötila on ajan funktio, jolloin pitää integroida ajasta riippuvaa funktiota  $\int[T(t) - T_{\text{ilma}}]dt$ . Tätä integraalia ei voi laskea tuntematta funktiota  $T(t)$ , joten differentiaaliyhtälöä ei voi ratkaista tällä tavalla. (Jos haluat lisäharjoitusta, voit sijoittaa integraaliin lausekkeen  $T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t}$  ja integroida. Tulokseksi pitäisi tulla  $\int(T - T_{\text{ilma}})dt = (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t} + c$ , missä  $c$  on integrointivakio. Tämä lasku antaa kyllä oikean loppituloksen, mutta näin ei tosiaan voi laskea ellei funktiota  $T(t)$  tiedetä jo etukäteen.)

**7.31** (a) Kyllä, jos kaasun lämpötila ja paine ovat likimain vakiot koko astiassa.

(b) Ei. Kappaleen päät ovat selvästi eri lämpötiloissa, jolloin yksi lämpötilan arvo ei voi kuvata koko systeemiä.

(c) Ei. Kappaleet ovat eri lämpötiloissa, jolloin yksi lämpötilan arvo ei voi kuvata koko systeemiä.

**7.32** Tilassa A ainemäärä on ideaalikaasun tilan yhtälön perusteella  $n = pV/(RT) = 0.46 \text{ mol}$ .

Tilassa B:  $n = 0.46 \text{ mol}$ ,  $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = 210 \text{ kPa}$  ja  $V = 0.005 \text{ m}^3$ .

Tilassa C:  $n = 0.46 \text{ mol}$ ,  $T = 546 \text{ K}$ ,  $p = 210 \text{ kPa}$  ja  $V = 0.010 \text{ m}^3$ .

Tilassa D:  $n = 0.92 \text{ mol}$ ,  $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = 105 \text{ kPa}$  ja  $V = 0.020 \text{ m}^3$ .

**7.33** Betonin pituuden lämpölaajenemiskerroin on luokkaa  $2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , joten jos talven ja kesän välillä voi olla esim. 50 K lämpötilaero, tämä tarkoittaa esim. 10 m pituisessa sillassa pituuseroa  $\Delta L = 1 \text{ cm}$ . Tämä on tarpeksi aiheuttamaan halkeamia, minkä vuoksi betonirakkenuksiin kuten siltoihin jätetään betoniosien välille rakoja.

**7.34** Levyn lämpölaajeneminen suurentaa levyn kaikkia mittoja samalla kertoimella, jolloin myös aukko laajenee, ja aukon laajenemista kuvaavat sama lämpölaajenemiskerroin kuin ympäröivää levyä.

**7.35** Ideaalikaasun tilan yhtälön mukaan  $V = \frac{1}{p}nRT$ . Niinpä jos kaasun lämpötila muuttuu määränpäin  $\Delta T$ , sen uudeksi tilavuudeksi tulee  $V + \Delta V = \frac{1}{p}nR(T + \Delta T) = V + \frac{1}{p}nR\Delta T$ . Siispä tilavuuden muutos on  $\Delta V = \frac{1}{p}nR\Delta T$  ja suhteellinen muutos on

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{nR\Delta T/p}{nRT/p} = \frac{1}{T}\Delta T. \quad (7.120)$$

Vertaamalla tästä yhtälöön  $\Delta V/V = \gamma\Delta T$  nähdään, että kaasun tilavuuden lämpölaajenemiskerroin on  $\gamma = 1/T$ .

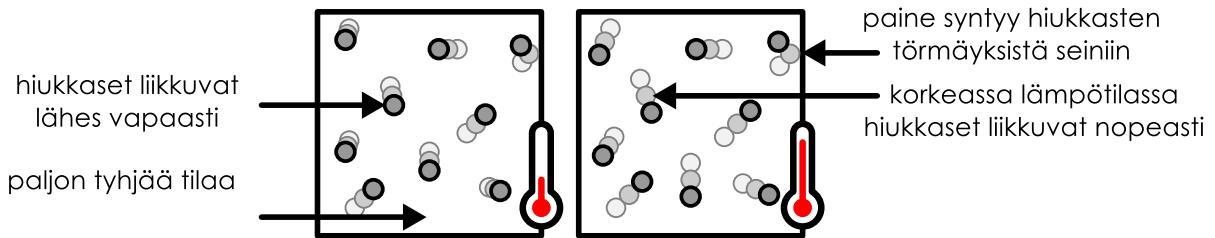
# 8 Hiukkasista koostuva aine

Edellisessä luvussa tutustuimme lämpöilmöihin käyttäen pelkästään jatkuvan aineen mallia. Opimme paljon siitä *miten* lämpöilmiöt käyttäytyvät, mutta emme kuitenkaan juuri voineet selittää *miksi* ilmiöt toimivat kuten toimivat. Tiedämme esimerkiksi, että energia pyrkii siirtymään itsestään aina kuumasta kylmään eikä koskaan päinvastoin, mutta syytä tähän jatkuvan aineen lämpööppi ei kerro. Aine ei kuitenkaan todellisuudessa ole jatkuvaan vaan se koostuu atomeista ja molekyyleistä — siis hiukkasista. Tässä luvussa tutkimmekin aineen hiukkasmallia ja opimme kuinka makroskooppiset lämpöilmiöt voidaan ymmärtää mikroskooppisten atomien ja molekyylien mekaniikan kautta. Makroskooppisessa mittakaavassa yksittäisiä hiukkasia ei voi havaita, mutta makroskooppiset suuret kuvastavat hiukkasjoukon *keskimääräisiä* ominaisuuksia. Keskiarvot käyttäytyvät oleellisesti eri tavoin kuin yksittäisten kappaleiden tai hiukkasten ominaisuudet, ja niille pätevät erilaiset lait kuin yksittäisille hiukkaille. Erityisesti hiukkasten keskimääräinen käyttäytyminen selittää, miksi lämpötilaeroit tasaantuvat itsestään ja systeemit pyrkivät termodynamiiseen tasapainoon. Tähän liittyy erityisen tärkeä uusi suure, entropia.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla, miten hiukkasten keskiarvoiset ominaisuudet liittyvät aineen makroskooppisiin suureisiin
- määritellä vapausaste ja määrittää molekyylin vapausasteiden määrä
- määrittää ideaalikaasun paine, sisäenergia, lämpötila ja ominaislämpökapasiteetti sen molekyylien ominaisuuksien avulla
- määritellä entropia hiukkasjoukon ominaisuuksien perusteella ja laskea yksinkertaisen systeemin entropia
- laskea ideaalikaasun entropia
- määritellä lämpötila entropian avulla

Kuva 8.1: Ideaalikaasumalli kuvaaa kaasua joukkona hyvin pieniä, törmälleviä hiukkasia, jotka eivät vuorovaikuta lähes ollenkaan.



## 8.1 Kaasun hiukkasmalli

Tutustuimme kaasujen tilanmuuttuihin ja niiden välisiä riippuuksia kuvavaan ideaalikaasun tilanyhtälöön jo aikaisemmin. Tällöin kuitenkin hyväksymme tilanyhtälön kokeellisena havaintona. Nyt tarkoituksemme on tutkia tarkemmin, miten kaasuja makroskooppisesti kuvaavat suuret kuten paine ja lämpötila syntyvät mikroskooppisten kaasuhiukkasten käytöksestä.

Aloitetaan määrittelemällä täsmällisesti, mitä oikein tarkoitetaan ideaalikaasulla. Kaasu on aineen olo-muoto, jossa molekyylien liike-energia on kyllin suuri rikkomaan niiden väliset sidokset. Niinpä kaasuissa molekyylit liikkuvat nopeasti, vuorovaikuttavat hyvin heikosti ja molekyylien väliset etäisyyset ovat molekyylien kokoon nähden suuret. *Ideaalikaasu* puolestaan on hyvin yksinkertainen kaasujen *malli*. Ideaalikaasun voi ajatella olevan kuin kokoelma äärimmäisen pieniä kumpalloja, jotka liikkuvat hyvin nopeasti ja pomppivat lakkamatta täysin elastisesti. Ideaalikaasumallissa tehdään seuraavat oletukset:

- Kaasu koostuu hiukkasista (atomeista tai molekyyleistä) joiden tilavuus on nolla.
- Hiukkaset vuorovaikuttavat vain törmätessään toisiinsa.

Ensimmäinen oletus tarkoittaa sitä, että jos kaasu on suljettu säiliöön, kaasumolekyyleillä on käytettävissään koko säiliön tilavuus. Todellisen kaasun tapauksessa näin ei ole, sillä molekyyleillä on pieni mutta nollaa suurempi koko ja etenkään kaasua ei voi puristaa mielivaltaisen pieneen tilavuuteen. Toinen oletus tarkoittaa puolestaan sitä, että molekyylien välillä ei ole pitkän kantaman vuorovaikutuksia, jotka vaikuttaisivat molekyylien liukkeeseen tai niiden energianaan. Vaikka ideaalikaasun molekyylit voivat periaatteessa törmällä, gleensä voi aivan hyvin ajatella, että kaasu on harvaa ja molekyylit törmäävät hyvin harvoin. Yksittäiset molekyylit voivat siis kulkea lähes vapaasti ja niiden voi ajatella liikkuvan kuin ne olisivat yksin säiliössään.

Ideaalikaasu kuvaaa todellisia kaasuja hyvin, kun kaasujen lämpötila on suuri tai paine on pieni, koska tällöin kaasumolekyylit liikkuvat nopeasti ja niillä on paljon tilaa, jolloin ne eivät juurikaan huomaa muita molekyylejä. Jos lämpötila sen sijaan on matala ja paine suuri, lähestytään olosuhteita, jossa kaasu nesteytyy, ja tällöin todellisten kaasujen käytös ei vastaa ideaalikaasun ennusteita. Ei olekaan mielekästä pohtia, mitkä kaasut noudattavat ideaalikaasumallia vaan missä *olosuhteissa* mikäkin kaasu käyttäytyy kuten ideaalikaasu.

Vaikka todelliset molekyylit ovat monimutkaisempia olioita kuin "äärimmäisen pienet kumpallot", ideaalikaasumallin avulla voidaan selittää monia todellisten kaasujen makroskooppisia ominaisuuksia pelkästään kaasun muodostavien hiukkasten mekanikan kautta. Makroskooppisista suureista tilavuuksista luonnollisesti kaasun sisältävän säiliön koko ja ainemäärä mittaa kaasun muodostavien hiukkasten määräät. Kaasun paine syntyy mallin mukaan hiukkasten törmäyksistä säiliön seiniin, ja lämpötila puolestaan mittaa hiukkasten liike-energiaa — siis vauhtia.

### Ideaalikaasun paine

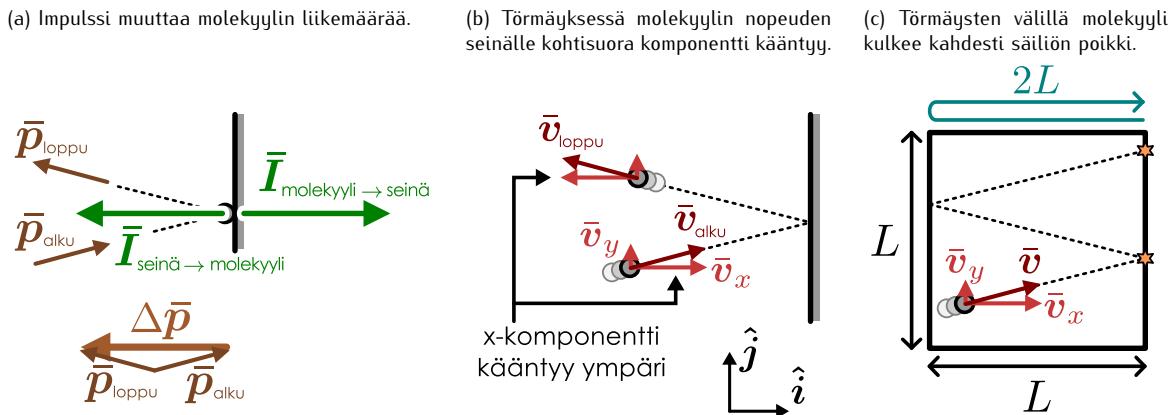
Tarkastellaan ideaalikaasua, joka on suljettu kuution muotoiseen säiliöön, missä sivun pituus on  $L$ . Kokeellisesti tiedämme, että kaasu kohdistaa säiliön seinään paineen, joka pyrkii työntämään seiniä ulospäin. Toisin sanoen kaasu vuorovaikuttaa säiliön seinien kanssa. Ideaalikaasussa vuorovaikutukset ovat törmäyksiä, joten paineen täytyy syntyä kaasun molekyylien törmäyksistä säiliön seiniin. Molekyylit ovat pieniä, joten yhdessä törmäyksessä seinä saa mitättömän impulssin. Toisaalta makroskooppisessa säiliössä on valtava määrä nopeasti liikkuvia molekyylejä, ja seinään kohdistuvien törmäysten yhteisvaikutus voi tuottaa suurenkin voiman ja sitä kautta paineen.

Tarkastellaan ensin yksittäisen molekyylin yhtä törmäystä seinään. Koska molekyyli ei pääse seinän läpi, seinän täytyy kohdistaa molekyylin törmäyksessä impulssi (kuva 8.2 (a))

$$\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}}, \quad (8.1)$$

## HIUKKASISTA KOOSTUVA AINE

Kuva 8.2: Törmätessään säiliön seinään kaasumolekyyli kohdistaa siihen impulssin. Nämä törmäykset synnyttävät kaasun paineen.



ja samalla molekyyli kohdistaa seinään yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen vastaimpulssin

$$\bar{I}_{\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = -\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}}. \quad (8.2)$$

Molekyyliin kohdistunut impulssi muuttaa molekyylin liikkeen suuntaa niin, että molekyyli kimpoaa takaisin säiliöön. Seinään kohdistunut impulssi puolestaan työntää seinää ulospäin.

Törmäyksen tarkkaa analyysiä varten asetetaan koordinaatisto niin, että säiliön seinä on  $yz$ -tasossa ja positiivinen  $x$ -suunta on kohti seinää. Oletetaan myös seinän olevan täysin sileä ja törmäyksien elastiset. Molekyylien mittakaavassa sileys ei ole järkevä oletus, mutta näin säästymme eri suuntiin tapahtuvien kimpoamisten huomioimiselta ja lopputulos on sama. Elastisuus puolestaan on järkevä oletus, koska jos kaasuhukkaset ovat atomeja tai jäykkää molekyylejä, niiden liike-energia ei voi muuttua sisäenergiaksi kuten makroskooppisten kappaleiden törmäyksissä.

Tämän mallin mukaan molekyylin saama impulssi osoittaa seinää vastaan kohtisuoraan, negatiiviseen  $x$ -suuntaan, ja niinpä myös molekyylin liikemäärään muutos on negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Liikemäärään  $y$ - ja  $z$ -komponentit ovat siis vakiot ja  $x$ -suuntainen komponentti vaihtaa suuntaa. Edelleen koska törmäys on elastinen, molekyylin liike-energia on törmäyksen jälkeen sama kuin ennen törmäystä eli molekyylin *vauhdin* on säilyttävä vakiona. Mutta vektorin  $\bar{v}$  pituus ja kaksi komponenttia voivat pysyä vakioina ainoastaan jos kolmannenkaan komponentin pituus ei muutu. Siispä nopeuden  $x$ -komponentin täytyy käännytyä ympäri (kuva 8.2 (b))

$$v_{x,\text{loppu}} = -v_{x,\text{alku}}. \quad (8.3)$$

Molekyylin liikemäärään muutos on siten

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_{\text{loppu}} - \bar{p}_{\text{alku}} = m\bar{v}_{\text{loppu}} - m\bar{v}_{\text{alku}} = m(v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}})\hat{i} = -2mv_{x,\text{alku}}\hat{i}. \quad (8.4)$$

Impulssin määritelmän (2.71) perusteella molekyylin liikemäärään muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin molekyylin saama impulssi, joten seinän saama impulssi on

$$\bar{I}_{\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = -\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}} = -\Delta\bar{p} = 2mv_{x,\text{alku}}\hat{i} = 2m|v_x|\hat{i}. \quad (8.5)$$

Viimeisessä yhtäsuurudessa on huomioitu se, että molekyylin nopeuden itseisarvo ei törmäyksessä muutu, joten molekyylin alkunopeuden  $x$ -skalaarikomponentti on sama kuin molekyylin nopeuden  $x$ -komponentin itseisarvo milloin tahansa.

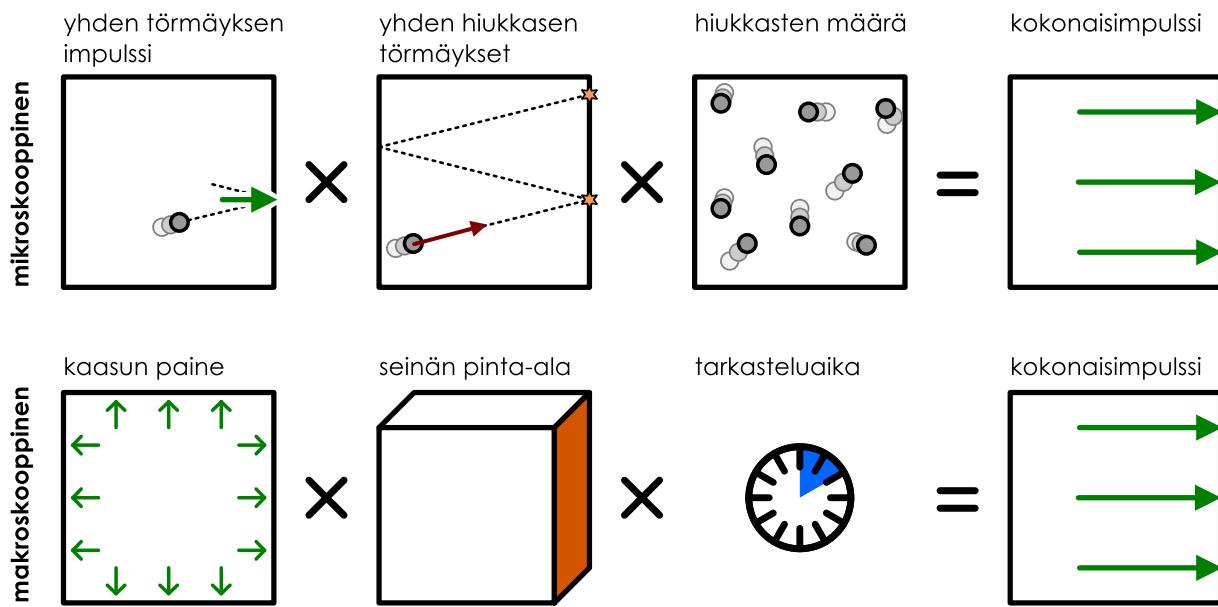
Koska seinään kohdistuva paine syntyy useiden törmäysten yhteisvaikutuksesta, arvioidaan seuraavaksi kuinka usein molekyyli törmää seinään. Koska molekyyli on säiliön sisällä, se kimpoilee edestakaisin säiliön kahden  $yz$ -suuntaisen seinän välissä vakiovauhdilla. Törmätyyään seinään kerran molekyylin täytyy kulkea vastakkaiselle seinälle ja takaisin ennen kuin se törmää samaan seinään uudestaan (kuva 8.2 (c)). Koska säiliön pituus  $x$ -suunnassa on  $L$ , molekyyli kulkee edestakaisen matkan  $2L$  säiliön poikki ajassa

$$\Delta t_{\text{osuma}} = \frac{2L}{|v_x|}. \quad (8.6)$$

Tämä molekyyli ehtii ajassa  $\Delta t$  törmätä samaan seinään

$$n_{\text{osuma}} = \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{osuma}}} = \frac{\Delta t |v_x|}{2L} \quad (8.7)$$

Kuva 8.3: Kaasun seinään kohdistaman impulssin mikroskooppinen ja makroskooppinen selitys.



kertaa. Kaikkiaan molekyyli tuottaa siis tässä ajassa kokonaisimpulssin

$$I_{x,\text{molekyyli}} = n_{\text{osuma}} I_{x,\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = \frac{\Delta t |v_x|}{2L} 2m |v_x| = \frac{m}{L} v_x^2 \Delta t. \quad (8.8)$$

Koska säiliössä on  $N$  molekyylia, seinään kohdistuva kokonaisimpulssi saadaan laskemalla näiden molekyylien törmäysten antamat impulssit yhteen. Jos merkitään molekyylejä indeksin 1, 2, jne., kokonaisimpulssi on

$$I_{x,\text{kokonais}} = I_{x,1} + I_{x,2} + \dots = \frac{m}{L} v_{x,1}^2 \Delta t + \frac{m}{L} v_{x,2}^2 \Delta t + \dots = \frac{m}{L} (v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots) \Delta t = \frac{m}{L} \Delta t \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2. \quad (8.9)$$

Tässä lausekkeessa esiintyy summa kaikkien kaasun hiukkasten nopeuksien  $x$ -komponenttien neliöistä, jota emme tietenkään voi sellaisenaan laskea. Tämä voidaan kuitenkin kirjoittaa yksinkertaisemmin *hiukkasten yli lasketun keskiarvon* avulla. Tällainen keskiarvo lasketaan määritelmän mukaisesti summaamalla yhteen suureen arvo jokaiselle hiukkaselle ja jakamalla hiukkasten lukumäärällä. Merkitsemme tässä tekstillä suuren keskiarvoa kulmasulkeilla

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} (v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2. \quad (8.10)$$

Kokonaisimpulssi voidaan tämän avulla ilmoittaa muodossa

$$I_{x,\text{kokonais}} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L} \Delta t. \quad (8.11)$$



**8.1** Sinulla on laatikossa 100 superpalloa (massa 50 g). Kaadat pallot maahan 2 m korkeudelta. Pallot pomppaavat likimain elastisesti osuessaan maahan. Kuinka suuren impulssin pallot antavat maanpinnalle törmäyksessä?

Makroskoopissa mittakaavassa hiukkasten seinään kohdistama voima on vakio, koska hiukkastörmäyksiä tapahtuu niin paljon, että keskimäärin seinään on aina törmäävässä yhtä paljon hiukkasia. Edelleen vakio-voiman impulssi on voiman kerrottuna voiman vaikutusajalla,  $I_x = F_x \Delta t$ , yhtälön (3.57) mukaisesti. Niinpä seinään kohdistuva voima on

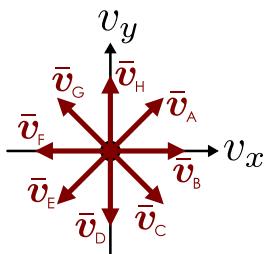
$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{I_{x,\text{kokonais}}}{\Delta t} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L} \quad (8.12)$$

ja edelleen paine on seinään kohdistuva voima jaettuna seinän pinta-alalla

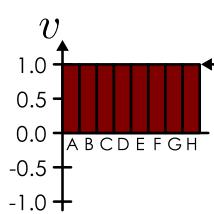
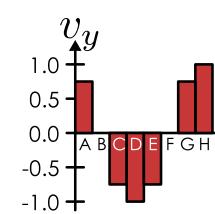
$$p = \frac{F_{x,\text{kokonais}}}{L^2} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L^3} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}, \quad (8.13)$$

Kuva 8.4: Vektorisuurteiden statistiikkaa. Kahdeksan yhtä pitkän mutta erisuuntaisen vektorin pituuden, skalaarikomponentin sekä näiden neliön jakaumat ja keskiarvot.

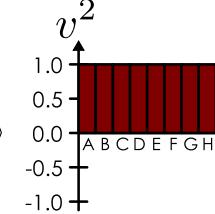
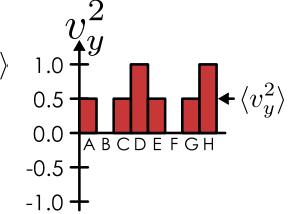
(a) Nopeusvektoreita.



(b) Vektorien pituudet.

(c)  $y$ -komponentit.

(d) Pituuksien neliöt.

(e)  $y$ -komponenttien neliöt.

missä on sijoitettu laatikon tilavuus  $V = L^3$ . Tarkastelimme tässä yksinkertaisuuden vuoksi kuution muotoista säiliötä, mutta koska kaasun paine jakautuu tasaisesti, säiliön *muodolla* ei loppujen lopuksi ole merkitystä vaan ainoastaan tilavuudella.



**8.2** Kaasun paine kasvaa, jos säiliön tilavuus pienenee tai molekyylien nopeus kasvaa. Selitä kuvan 8.3 gläriin kuvien perusteella, mihin asioihin säiliön koko ja molekyylien nopeus vaikuttaa. Selitä erityisesti miksi paine on suoraan verrannollinen molekyylien nopeuden neliöön (eikä esimerkiksi nopeuteen itseensä).

Kuvassa 8.3 on kuvallisesti esitetty edellä käytetty päättely sekä makroskooppisessa että mikroskooppisessa mittakaavassa. Mikroskooppisesti kaasun seinään kohdistama impulssi ja voima päätteliin laskemalla paljonko molekyylejä seinään törmää ja kuinka suuren impulssin ne antavat. Toisaalta makroskooppisesti sama asia ilmaistiin kaasun paineen ja säiliön koon perusteella, ja näin mikroskooppiset ja makroskooppiset suureet saatuivat yhdistetyä.

Tulosta voidaan kuitenkin edelleen sieventää. Keskiarvon ottaminen on *lineaarinen operaatio*, mikä tarjoittaa summan keskiarvon olevan sama kuin keskiarvojen summa,  $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ . Tämän voi päätellä suoralla laskulla

$$\langle a + b \rangle = \frac{1}{N}(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots) = \frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \dots) + \frac{1}{N}(b_1 + b_2 + \dots) = \langle a \rangle + \langle b \rangle. \quad (8.14)$$

Lisäksi nopeusvektorille pätee Pythagoraan lause  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , joten nopeuden neliöön keskiarvo on sama kuin nopeuden skalaarikomponenttien neliöiden keskiarvojen summa

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle. \quad (8.15)$$

Edelleen koska ei ole mitään syytä miksi molekyylit liikkuisvat mihinkään suuntaan nopeammin kuin toisiin, täytyy näiden komponenttien neliöiden keskiarvojen olla symmetrian perusteella samat,

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle, \quad (8.16)$$

ja niinpä nopeuden keskiarvo ja yhden komponentin keskiarvo ovat toisiinsa verrannolliset

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle. \quad (8.17)$$

Edellä esitettyä keskiarvoihin liittyvä päättely on havainnollistettu kuvassa 8.4, jossa on piirretty erisuuntaisten vektoreiden pituuksien ja skalaarikomponenttien jakaumia ja näiden perusteella laskettuja keskiarvoja. Esimerkki on *kaksilottainen*, joten siinä nopeuksien  $y$ -komponenttien neliöiden keskiarvoksi  $\langle v_y^2 \rangle$  saadaan puolet nopeuksien neliöiden keskiarvosta  $\langle v^2 \rangle$ . Kolmessa ulottuvuudessa nopeuden kunkin skalaarikomponentin neliöön keskiarvo on samalla periaatteella *kolmannes* nopeuden neliöiden keskiarvosta  $\langle v^2 \rangle$ .

Paineen lausekkeessa esiintyvä molekyylien *nopeuden x-komponenttien* neliöllinen keskiarvo voidaan siis korvata *nopeuden* neliöiden keskiarvolla lisäämällä samalla mukaan kerroin  $1/3$ ,

$$p = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V}. \quad (8.18)$$

Kaasun paine on siis verrannollinen molekyylien nopeuksien neliöiden keskiarvoon. Neliöllinen verrannollisuus johtuu edellä esitetyn mukaan siitä, että sekä molekyylitörmäysten lukumäärä että yhden törmäyksen antama impulssi ovat molemmat suoraan verrannollisia molekyylien nopeuteen. Keskiarvo  $\langle v^2 \rangle$  on hiukkasten statistiikassa niihin tärkeä, että sen neliöjuurrelle on annettu oma nimi, **neliöllinen keskinopeus eli rms-nopeus** (engl. *root-mean-square*)

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (8.19)$$

Rms-nopeus on tilastollinen tunnusluku, joka määritelmän mukaisesti saadaan

- laskemalla nopeuden neliö kaikille kaasun hiukkasille
- laskemalla nämä nopeuden neliöt yhteen
- jakamalla hiukkasten kokonaismäärellä ja
- ottamalla neliöjuuri.



**8.3** Systeemissä on kolme hiukkasta, joiden nopeusvektorit ovat  $\vec{v}_1 = (1 \text{ m/s})\hat{i} + (4 \text{ m/s})\hat{j}$ ,  $\vec{v}_2 = (-3 \text{ m/s})\hat{i} + (-2 \text{ m/s})\hat{j}$  ja  $\vec{v}_3 = (2 \text{ m/s})\hat{i} + (-2 \text{ m/s})\hat{j}$ . Mitä ovat seuraavat keskiarvot? (a)  $\langle v_x \rangle$ , (b)  $\langle v_y \rangle$ , (c)  $\langle \vec{v} \rangle$ , (d)  $\langle v \rangle$ , (e)  $\langle v_x^2 \rangle$ , (f)  $\langle v^2 \rangle$ , (g)  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .

Paine voidaan kirjoittaa rms-nopeuden avulla myös muodossa  $p = Nmv_{\text{rms}}^2/(3V)$ . Koska rms-nopeuden määritelmässä nopeudet korotetaan ensin neliöön ja vasta näiden summasta otetaan neliöjuuri, rms-nopeus on aina *suurempi tai yhtä suuri* kuin hiukkasten vauhtien keskiarvo  $\langle v \rangle$ . Tavallisesti keskinopeus ja rms-nopeus ovat kuitenkin samaa suuruusluokkaa.

### Ideaalikaasun lämpötila

Vertaamalla molekyylimallin perusteella johdettua paineen lauseketta (8.18) kokeellisesti löydettyyn ideaalkaasun tilanyhtälöön

$$pV = Nk_B T \quad (8.20)$$

nähdään heti, että makroskooppisen lämpötilan ja mikroskooppisten suureiden välillä täytyy päteä yhteys

$$k_B T = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} m v_{\text{rms}}^2. \quad (8.21)$$

Kaasun lämpötila kuten painekin on siis verrannollinen molekyylien rms-nopeuden neliöön. Kysymys on siitä, että lämpötila liittyy aineen *sisäenergiaan* — mitä kuumempi kappale on, sitä enemmän sisäenergiaa siihen on sitoutunut. Toisaalta ainakin osa kaasun sisäenergiasta on molekyylien liikkeen energiata, joten mitä nopeammin molekyylit liikkuvat, sitä kuumempi kappale on.

Molekyylien etenevä liikkeen liike-energoiden keskiarvo on

$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2, \quad (8.22)$$

joten lämpötila ja liike-energia ovat tämän perusteella *suoraan verrannolliset* toisiinsa,

$$k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle \quad (8.23)$$

tai päinvastoin

$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (8.24)$$

Yhtälössä esiintyvä Boltzmannin vakio  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  yksikkö on energia jaettuna lämpötilalla, joten tämän vakion fysikaalinen merkitys on muuntaa lämpötilan yksiköt energian yksiköiksi. Vakion numeerinen arvo puolestaan riippuu siitä, millaisia yksiköitä lämpötilalle ja energialle käytetään. Koska  $\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle$  on *yhden molekyylin* keskimääräinen liike-energia, joka on jouleissa hyvin pieni koska molekyylin massa on pieni, myös Boltzmannin vakio on SI-yksiköissä pieni.



**8.4** (a) Miksi yhtälössä (8.22) voitiin siirtää keskiarvo lausekkeen  $\frac{1}{2}mv^2$  ympäriltä sen sisälle? Toisin sanoen milloin on sallittua kirjoittaa  $\langle ab \rangle = a \langle b \rangle$ ? (b) Onko  $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$  yleisesti totta?

Liike-energian ja lämpötilan välinen verrannollisuuskerroin  $3/2$  on myös mielenkiintoinen. Liike-energia voidaan nimittää yhtälön (8.17) mukaisesti hajottaa liikkeen erisuuntaisten komponenttien osuiksiksi, koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön

$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle = \langle K_{v_x} \rangle + \langle K_{v_y} \rangle + \langle K_{v_z} \rangle, \quad (8.25)$$

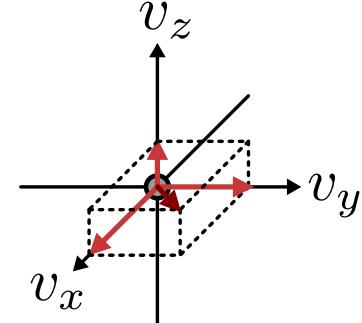
missä esimerkiksi  $\langle K_{v_x} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle$  on molekyylien  $x$ -suuntaisen liikkeen keskimääräinen energia. Edelleen koska kaasun hiukkasia liikkuu keskimäärin yhtä paljon eri suuntiin, näiden erisuuntaisten nopeuden komponenttien varastoimat energiat ovat *yhtä suuret*,

$$\langle K_{v_x} \rangle = \langle K_{v_y} \rangle = \langle K_{v_z} \rangle = \frac{1}{3} \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (8.26)$$

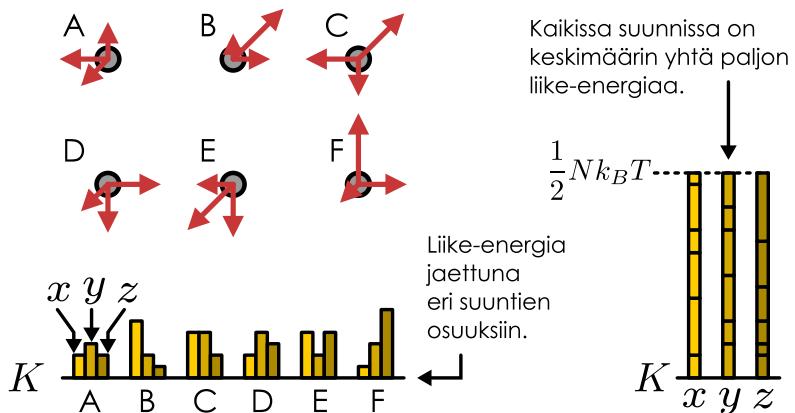
## HIUKKASISTA KOOSTUVA AINE

Kuva 8.5: Kaasun hiukkasilta on satunnaiset nopeudet, mutta jos liike-energia jaetaan erisuuntaisten nopeuden komponenttien osuuksiin, jokaisessa suunnassa hiukkasilta on yhtä paljon energiaa.

(a) Yhdellä hiukkasella on satunnaiset nopeudet.



(b) Yhdessä hiukkasilta on jokaisessa suunnassa yhtä paljon energiaa.



Toisin sanoen kolmiulotteisessa avaruudessa kaasun hiukkaset liikkuvat  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suunnissa, ja *jokaisessa suunnassa tapahtuvaan liikkeeseen liittyy lämpötilassa  $T$  keskimäärin energia  $\frac{1}{2}k_B T$  molekyyliä kohti*. Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.5. Periaatetta, jonka mukaan tietysti lämpötilassa kaikkiin eri energian muotoihin on varastoitunut keskimäärin yhtä paljon energiota, kutsutaan **energian ekvipartitioksi** (latinaa, equi = 'tasan', partitio = 'jako'). Tämä on hiukkasten fysiikassa erittäin tärkeä ja hyödyllinen periaate, ja tutkimme sitä tarkemmin luvussa 8.3.



**8.5** Mikä olisi yksiatomisen ideaalikaasun sisäenergian riippuvuus lämpötilasta, jos avaruudessa olisi neljä paikkaulottuvuutta?

Koska ideaalikaasun hiukkaset eivät vuorovaikuta lähes ollenkaan, *atomeista* koostuvan kaasun sisäenergia on *pelkästään* hiukkasten etenevän liikkeen energiota. Niinpä tällaisessa kaasussa yhden hiukkisen energia on keskimäärin  $\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle$  ja kaikkiaan  $N$  atomista koostuvan kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä,yksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T, \quad (8.27)$$

missä tekijä 3 on siis edellä esitetyn päättelyn perusteella *avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä*. Erityisesti huomataan, että *ideaalikaasun sisäenergia riippuu ainoastaan lämpötilasta ja ainemäärästä*. Vaikka kaasun painetta ja tilavuutta muutettaisiin, kaasuun varastoituneen energian määrä ei muutu, jos kaasun lämpötila pysyy vakiona.

Jos kaasu kuitenkin koostuu molekyyleistä eikä atomeista kuten useimmat todelliset kaasut, molekyyleillä voi olla *tämän lisäksi* muitakin energiota kuin pelkkää suoraviivaisen liikkeen energiota ja niinpä tällaisten kaasujen sisäenergia on samassa lämpötilassa *suurempi* kuin yhtälön (8.27) esittämä energia. Tällaisten kaasujen kykyä varastoida energiota tarkastelemme seuraavassa luvussa.



**8.6** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä ideaalikaasun hiukkasmallista. Kerro erityisesti, miten malli selittää paineen ja lämpötilan sekä mistä tekijöistä (hiukkasmäärä, hiukkasten massa, hiukkasten nopeus, säiliön tilavuus) nämä riippuvat.

## esimerkki 8.1

## Ideaalikaasun paine ja lämpötila

Kaasusäiliöissä A ja B on 2 mol heliumia He. Säiliön A tilavuus on  $0.02 \text{ m}^3$  ja säiliön B tilavuus on  $0.04 \text{ m}^3$ . Kaasuatomenien rms-vauhti on 1270 m/s. (a) Mikä on kaasun sisäenergia? (b) Mikä on kaasun lämpötila? (c) Mikä on kaasun paine?

**SUUNNITELMA** Heliumatomien massa on noin  $m_{\text{He}} = 4.00u = 6.64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Sisäenergia riippuu vain kaasuhuikkasten massasta ja nopeudesta, ja lämpötila on suoraan verrannollinen sisäenergiaan. Nämä suureet ovat siis samat kummassakin säiliössä. Paine sen sijaan riippuu näiden lisäksi säiliön tilavuudesta, joten säiliössä on eri paine.

Kaasuhuikkasia on noin

$$N = nN_A = 1.2 \cdot 10^{24}. \quad (8.28)$$

Yhden hiukkasen keskimääräinen energia on  $\langle K \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$  joten koko kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä}} = N \langle K \rangle. \quad (8.29)$$

Toisaalta sisäenergia on suoraan verrannollinen lämpötilaan

$$E_{\text{sisä}} = \frac{3}{2}Nk_B T, \quad (8.30)$$

joten lämpötila voidaan ratkaista tästä. Kaasun paine voidaan laskea relatiolla (8.18),

$$p = \frac{Nm v_{\text{rms}}^2}{3V}. \quad (8.31)$$

**RATKAISU** (a) Sisäenergia on  $E_{\text{sisä}} = 6.4 \text{ kJ}$ . (b) Lämpötilaksi ratkeaa

$$T = \frac{2E_{\text{sisä}}}{3Nk_B} = \frac{mv_{\text{rms}}^2}{3k_B} = 260 \text{ K}. \quad (8.32)$$

(c) Paine säiliössä A on  $p_A = 215 \text{ kPa}$  ja säiliössä B  $p_B = 108 \text{ kPa}$ .

**ARVIOINTI** Voimme tarkistaa tuloksen sijoittamalla lasketut arvot ideaalikaasun tilanyhtälöön. Paineen ja tilavuuden tulo on kummassakin säiliössä  $pV = 4310 \text{ J}$ . Lämpötilan, hiukkasmäärän ja Boltzmannin vakion tulo on samoin  $Nk_B T = 4310 \text{ J}$ . Tilanyhtälö  $pV = Nk_B T$  siis pätee.

Huomaa, että vaikka kaasuhuikkasten vauhti on huimat 1270 m/s, kaasun lämpötila on vain 260 K eli noin  $-13^\circ\text{C}$ . Heliumatomit kulkevat matalissakin lämpötiloissa hyvin nopeasti, koska niiden massa on niin pieni.

## 8.2 Kaasujen ominaislämpökapasiteetti

Lämpökapasiteetteja on makroskooppisesti melko helppo mitata, ja näin voidaan taulukoida ominaislämpökapasiteettien arvoja eri aineille. Näin tehtäessä huomataan kuitenkin, että ominaislämpökapasiteeteissa on säädönmukaisuutta. Esimerkiksi jalokaasujen kuten heliumin (He), neonin (Ne) ja argonin (Ar) vakiotilavuudessa ainemäärä kohti mitatut ominaislämpökapasiteetit ovat *samat*, noin  $c_V^n = 12.5 \text{ J/(molK)}$ . Vastaavasti monien tavallisten kaksiatomisten kaasujen kuten vedyn ( $\text{H}_2$ ), hapen ( $\text{O}_2$ ) ja typen ( $\text{N}_2$ ) ominaislämpökapasiteetit ovat keskenään likimain samat, noin  $c_V^n = 21 \text{ J/(molK)}$ . Makroskooppinen jatkuvan aineen malli ei kuitenkaan lainkaan selitä *miksi* näin on. Tässä luvussa käytämmekin aineen hiukkasmallia näiden havaintojen ymmärtämiseksi.



**8.7** Jos kahden kaasun ominaislämpökapasiteetti ainemäärä kohden on sama, ovatko myös kaasujen massaa tai hiukkasmäärä kohden lasketut ominaislämpökapasiteetit samat?

### Vapausasteet

Opimme juuri, että *yksiatomisista hiukkasista* koostuvan ideaalikaasun sisäenergia riippuu lämpötilasta yhtälön (8.27) mukaisesti,  $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = \frac{3}{2}Nk_B T$ . Jos tällaista kaasua lämmitetään, sen lämpötila nousee, koska kaasun sisäenergia kasvaa lämmön siirtymessä ympäristöstä kaasun. Eritiisesti, jos kaasua lämmitetään *vakiotilavuudessa*, kaikki tuotu lämpö  $Q$  siirtyy kaasun sisäenergiaksi,  $\Delta E_{\text{sisä}} = Q$ . Tällöin kaasun ominaislämpökapasiteetin täytyy määritelmän mukaisesti olla

$$c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{N/N_A} \frac{\partial E_{\text{sisä}}}{\partial T}, \quad (8.33)$$

## HIUKKASISTA KOOSTUVA AINE

missä on huomioitu, että ainemäärä  $n$  on hiukkasten lukumäärä jaettuna Avogadron luvulla (koska yhdessä moolissa on  $N_A$  hiukkasta). Derivoimalla sisäenergian lauseketta ja huomioimalla, että kaasuvakion  $R = 8.31 \text{ J}/(\text{molK})$ , Boltzmannin vakion  $k_B$  sekä Avogadron luvun välillä on yhteyks  $R = N_A k_B$ , saadaan hyvin yksinkertainen tulos

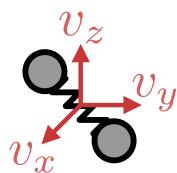
$$c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{N_A}{N} \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} N_A k_B = \frac{3}{2} R = 12.5 \frac{\text{J}}{\text{molK}}. \quad (8.34)$$

Tämän päättelyn mukaan atomeista koostuvan ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti ainemäärää kohti vakiotilavuudessa on  $c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{3}{2} k_B N_A = \frac{3}{2} R$ . Tuloksessa on paljon tärkeää huomattavaa. Ensinnäkään se ei riipu kaasun ominaisuuksista muuten kuin että kaasun oletettiin koostuvan atomeista (eikä molekyyleistä). Toiseksi, lasketun vakion arvo on erinomaisessa sopusoinnussa jalokaasujen kokeellisesti määritetyyn ominaislämpökapasiteetin kanssa. Jalokaasut koostuvat atomeista, koska niiden atomit eivät muodosta keskenään kemiallisia sidoksia, joten tässä käytetty ideaalikaasumalli mitä ilmeisimmin kuvaa jalokaasuja hyvin.



**8.8** Mikä on yksiatomisen ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti hiukkasten lukumäärää kohden,  $c_V^n$ ?

Kuva 8.6: Kolme suoran liikkeen vapausastetta.

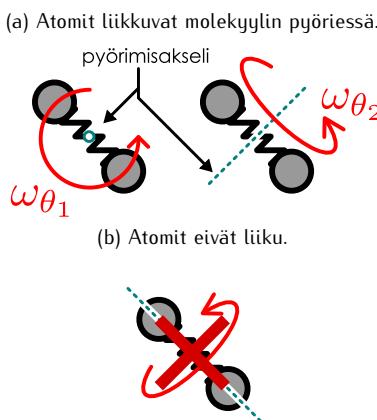


Kuitenkaan tämä tulos *ei* päde useampiatomisista molekyyleistä koostuville kaasille, joten siitä puuttuu vielä jotakin tärkeää. Kokeellisesti on havaittu, että monien kaksiatomisista molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetti on likimain  $c_{V,\text{kaksiatominen}}^n = 21 \text{ J}/(\text{molK}) = \frac{5}{2} k_B N_A = \frac{5}{2} R$ . Tämäkin on jälleen  $R/2$  monikerta, mutta nyt kerroin on 5 kun se yksiatomiselle kaasulle oli 3. Ilmeisesti siis kaasumolekyylien koko joitenkin vaikuttaa kaasun kykyyn varastoida energiaa.

Palataan vielä tarkastelemaan atomeista koostuvaa kaasua. Ideaalikaasumallin mukaan tällainen kaasu varastoi energiota *pelkästään atomien suoraviivaiseen liikkeeseen*. Erityisesti kaasun sisäenergian yhtälöä (8.27) johdetaessa huomattiin, että siinä esiintyvä kerroin 3 oli *avaruuden suuntien lukumäärä*, sillä atomien liikkeeseen  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suunnissa liittyi aina keskimäärin energia  $\frac{1}{2} k_B T$ . Yksiatomella kaasulla on siis *kolme erilaista tapaa varastoida energiota* atomiensa liikkeeseen. Koska kaksiatomisen kaasun ominaislämpökapasiteetissa vastaava kerroin näyttäisi olevan 5, vaikuttaa siltä, että tällaisella kaasulla on *viisi* tapaa varastoida energiota.

Vielä suuremmista molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetit ovat vielä suuremmat, joten ilmeisesti niillä on vielä enemmän näitä energian varastointin tapoja. Näitä molekyylin erilaisia tapoja vastaanottaa energiota kutsutaan **vapausasteiksi**.

Kuva 8.7: Kaksiatomilla molekyyleillä on kaksi pyörimisen vapausastetta. Pyöriminen pituusakselin ympäri ei varastoi energiota.



Energiaa on mikroskooppisakin mittakaavassa monessa muodossa, mutta ominaislämpökapasiteetin kannalta oleellista on tarkastella *mitkä energian lajit muuttuvat lämpötilan muuttuessa*. Esimerkiksi atomit koostuvat ytimistä ja elektroneista, joiden vuorovaikutukseen liittyy paljon energiota. Kuitenkin ellei kaasu ole erittäin kuumaa, atomien väliset törmäykset eivät yleensä ole tarpeeksi voimakkaita, jotta ne voisivat muuttaa atomien elektronirakennetta. Niinpä atomiydin ja elektronien välisen vuorovaikutuksen energia ei muudu vaikka lämpötila muuttuisi, eikä tällä energialla ole merkitystä ominaislämpökapasiteille. Atomit ovat myös lähes pistemäisiä, eivätkä niiden väliset törmäykset voi muuttaa atomien pyörimistä. Niinpä ainoastaan atomien suoraviivaisen liikkeen energia riippuu lämpötilasta ja yksiatomisen kaasun ominaislämpökapasiteetti mittaa tästä atomien liike-energian varastoitumista. Tästä juontuu myös nimitys **vapausaste**: atomi on "vapaa" liikkumaan kolmiulotteisen avaruuden kolmessa kohti-suorassa suunnassa, joten sillä on kolme *siirtymä- eli translaatiovapaustetta* (kuva 8.6).

Kaksiatomiset molekyylit sen sijaan voivat törmätessään myös muuttaa toistensa **pyörimistä**, ja erityisesti tällaisissa törmäyksissä voi molekyylien suoraviivaisen liikkeen energiota muuttua pyörimisen energiaksi ja päinvastoin. Niinpä myös molekyylien pyörimislükkeeseen varastoitunut energia riippuu lämpötilasta. Toisin sanoen molekyyleillä on myös pyörimiseen liittyviä **pyörimis- eli rotatiivapausasteita**. Koska kaksiatomisella molekyyllä on kokeellisesti viisi vapausastetta, joista kolme liittyytä suoraan liikkeeseen kuten atomeillakin, pyörimisen vapausasteita on ilmeisesti kaksi. Tämä voi olla yllättävä tulos. Molekyylinhän voisi ajatella voivan pyöriä  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -suuntaisten akseleiden ympäri, jolloin sillä olisi *kolme* pyörimisen vapausastetta. Kysymys on taas siitä, että molekyylien väliset törmäykset voivat kyllä saada molekyylin atomit kiertämään molekyylin massakeskipistettä (kuva 8.7 (a)), mutta ne *eivät voi* vaikuttaa molekyylin pyörimiseen pituusakselinsa ympäri (kuva 8.7 (b)). Niinpä kaksiatomisella molekyyllä on kolme suoran liikkeen ja kaksi pyörimisen vapausastetta.

Energian ekvipartitioperiaatteen mukaan pyörimisvapausasteisiin liittyy keskimäärin *yhtä suuri energia* kuin eteneväni liikkeen vapausasteisiin,  $\langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ , ja yhden molekyylin keskimääräinen pyörimisenenergia on

$$\langle K_{\text{molekyyli,rotaatio}} \rangle = \frac{1}{2}I_{\theta_1} \langle \omega_{\theta_1}^2 \rangle + \frac{1}{2}I_{\theta_2} \langle \omega_{\theta_2}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T. \quad (8.35)$$

Tällaisista molekyyleistä koostuvan kaasun sisäenergia on siis kaikkiaan

$$E_{\text{sisä,kaksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekyyli,translaatio}} \rangle + N \langle K_{\text{molekyyli,rotaatio}} \rangle = NN_{\text{vapaus}} \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{5}{2}Nk_B T, \quad (8.36)$$

ja sen ominaislämpökapasiteetti on

$$c_V^n, \text{kaksiatominen} = \frac{5}{2}k_B N_A = \frac{5}{2}R, \quad (8.37)$$

sopusoinnussa kokeellisen tuloksen kanssa.



**8.9** Montako translaatio- ja rotaatiovapausastetta on kolmiatomisella molekyyllillä, jonka atomit muodostavat  
(a) kolmion, (b) suoran?

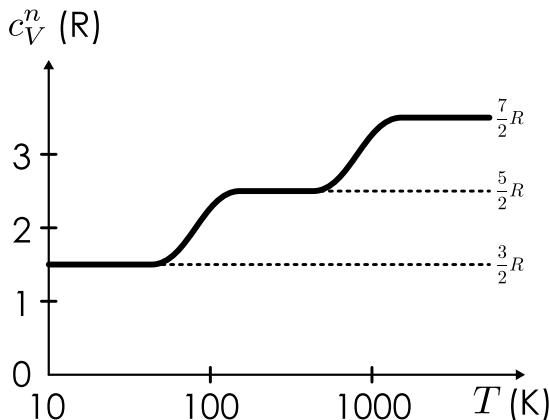
### Ominaislämpökapasiteetin riippuvuus lämpötilasta

Edellä jätettiin mainitsematta se, että kokeelliset ominaislämpökapasiteetin arvot oli mitattu huoneenlämmössä eli noin 300 K lämpötilassa. Lämpökapasiteetti ei monilla aineilla riipu kovin voimakkaasti lämpötilasta, mutta kaksiatomisten kaasujen tapauksessa ominaislämpökapasiteetti *muuttuu*, kun kaasun lämpötila on hyvin matala tai hyvin korkea, kuten kuvassa 8.8 on esitetty. Riippuu kaasusta, mikä lämpötila on "matala" ja mikä "korkea", mutta yleisesti matalissa lämpötiloissa kaasujen lämpökapasiteetti on *pieni*,  $c_V^n = \frac{3}{2}R$ , ja korkeissa lämpötiloissa *suuri*,  $c_V^n = \frac{7}{2}R$ . Näyttääsi siltä, että kylmässä kaasussa on vain *kolme* vapausastetta kun taas kuumassa kaasussa vapausasteita on *seitsemän*.

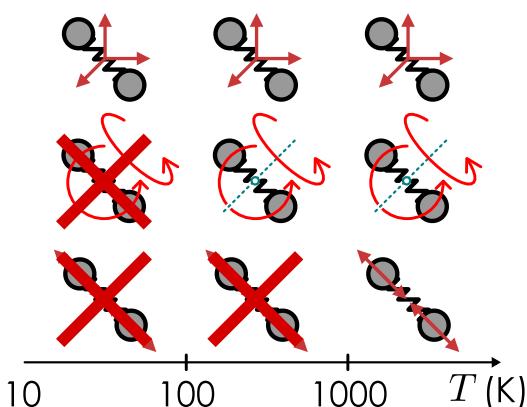
Tämän ilmiön selittäminen aiheutti fyysikoille pitkään ongelmia, ja itse asiassa sen ymmärtäminen vaatii *kvanttimekanikan*. Kvanttimekanikan mukaan tietysti olosuhteissa hiukkaset eivät voi liikkua miten tahansa vaan ainoastaan jotkin tavad liikkua ovat mahdollisia. Erityisesti hiukkasten liike-energia voi saada *vain joitakin tiettyjä arvoja*. Esimerkiksi kaksiatomisella molekyyllillä on olemassa tila, jossa se ei pyöri lainkaan, ja tällä tilalla on pyörimisen liike-energia  $K_0 = 0$  J. Tästä tilasta energia-asteikossa seuraavana on toinen tila, jossa molekyyli pyörii niin hitaasti kuin kvanttimekanikan säännöt sallivat ja sillä on liike-energia  $K_1$ . Edelleen tämän jälkeen tulevat tilat, joissa molekyyli pyörii aina hieman nopeammin ja joissa sen energia on aina suurempi,  $K_2, K_3$ , jne. Ero peräkkäisten tilojen energioissa on hyvin pieni. Huoneenlämmössä molekyyleillä onkin aina paljon energiota verrattuna peräkkäisten pyörimistilojen energioihin, ja niinpä molekyylien pyörimisenergia voi helposti muuttua molekyylien välissä törmäyksissä. Sen sijaan hyvin matalissa lämpötiloissa lähes kaikki molekyylit ovat pienimmän energian tilassa, jossa ne eivät pyöri. Molekyyleillä on tällöin niin vähän liike-energiaa, että niiden väliset törmäykset eivät ole tarpeeksi voimakkaita saamaan molekyylejä pyörimään nopeammin. Toisin sanoen törmäyksissä molekyylien välillä siirtyvät energiat ovat

Kuva 8.8: Kaksiatomisista molekyyleistä koostuvan kaasun ominaislämpökapasiteetti riippuu lämpötilasta.

(a) Ominaislämpökapasiteetti lämpötilan funktiona.



(b) Energiaa varastoivat vapausasteet eri lämpötiloissa.

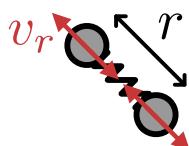


lähes aina pienemmät kuin hitaampien pyörimistilojen välinen ero energiassa  $\Delta K = K_1 - K_0$ , joten molekyylit eivät melkein koskaan pääse tilalle, jonka energia on  $K_1$ . Tällöin sanotaan pyörimisen vapausasteiden *jäätyväni*, koska niiden energia ei muutu eivätkä ne siis pysty varastoimaan energiaa. Suoraviivaisen lükkeen vapausasteet eivät jäädy, joten molekyyleille jäädä matalissa lämpötiloissa kolme vapausastetta ja niiden ominaislämpökapasiteetti on  $c_V^n = \frac{3}{2}R$ .

Kyseessä ei ole kuitenkaan vain erittäin matalien lämpötilojen ilmiö. Molekyyleillä on nimittäin jäätyneitä vapausasteita myös huoneenlämmössä! Laskiessamme kaksiatomisen molekyylin vapausasteita jätimme huomioimatta sen, että molekyylit ei ole jäykkiä kappale, vaan molekyylit muodostavat atomit voivat siirtää läheemmäs tai kauemmas toisistaan. Molekyyleissä atomeja sitoo yhteen *kovalenttiinen sidos*, joka on tyypillisesti erittäin vahva. Yksinkertaistaan voi kuitenkin ajatella, että atomien välissä on pieni, erittäin jäykki jousi, joka kiinnittää atomit toisiinsa. Jousen kiinnittämät atomit voivat *värähdellä* edestakaisin, ja tähän värähtelyliikkeeseen liittyy myös *värähtely- eli vibraatiovapausasteita*.

Molekyylien värähtelyllä on myös kvanttimekanikan määräämä pienimmän energian tila, jossa atomit värähtelevät niin vähän kuin mahdollista sekä tästä korkeamman energian tiloja, joissa liike on nopeampaa ja atomeja yhdistävä sidos (jousi) venyy enemmän. Näiden värähtelytilojen energiat ovat yleensä huomattavasti kauempana toisistaan kuin pyörimistilojen energiat, joten värähtelyyn liittyvät vapausasteet pysyvät jäätyneinä korkeammissa lämpötiloissa. Huoneenlämmössä monien kaasujen molekyylit ovat värähtelyn pienimmän energian tilassa eli ne värähtelevät niin vähän kuin mahdollista. Vasta useiden satojen kelvinien lämpötiloissa molekyyleillä on tarpeksi energiaa, jotta niiden väliset törmäykset voisivat muuttaa niiden värähtelyä.

**Kuva 8.9:** Kaksiatomisella molekyyllä on yksi tapa värähdellä.



Kaksiatominen molekyylit voi värähdellä vain yhdessä suunnassa: atomien kautta kulkevan suoran suunnassa niin, että atomien välinen etäisyys muuttuu (kuva 8.9). Värähtely kuitenkin poikkeaa suorasta lükkeestä ja pyörimisestä siinä suhteessa, että atomeja yhdistävä sidos rajoittaa liikkettä. Eritisesti molekyylin värähdellessä molekyylin atomeilla on sekä värähtelyyn liittyvää liike-energiaa että *sidoksen venytämiseen liittyvää potentiaalienergiaa*. Energian ekvipartitioperaatteen mukaisesti näihin *molempien* liittyy keskimäärin energia

$$\langle K_{\text{vibraatio,molekyylit}} \rangle = \langle U_{\text{vibraatio,molekyylit}} \rangle = \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (8.38)$$

joten vaikka värähtelytapoja on vain yksi, siihen liittyy kaksi tapaa varastoida energiata. Nämä voimme sanoa, että värähtelyyn liittyy *kaksi* vapausastetta: yksi liike-energian ja yksi potentiaalienergian vapausaste. Nämä ollen kaksiatomisella molekyyllä on korkeissa lämpötiloissa yhteensä  *seitsemän* vapausastetta, joihin se voi varastoida energiata: kolme liittymen etenevään liikkeeseen, kaksi pyörivään liikkeeseen, yksi värähtelevien atomien liikkeeseen ja yksi värähtelevän sidoksen venymiseen. Nämä ollen kaasun ominaislämpökapasiteetti on  $c_V^n = \frac{7}{2}R$ .



**8.10** Onko mahdollista, että värähtelyn liike-energiaan liittyvä vapausaste vastaanottaa energiata mutta potentiaalienergiaan liittyvä ei?

Suuremmistakin molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetit voidaan selittää samaan tapaan tarkastelemalla molekyylien vapausasteiden lukumäärää, ja yleisesti jos kaasussa on  $N$  molekyylit ja molekyyleillä on  $N_{\text{vapaus}}$  vapausastetta, kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä}} = N_{\text{vapaus}} N \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B T, \quad (8.39)$$

ja ominaislämpökapasiteetti

$$c_V^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} k_B N_A = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R. \quad (8.40)$$

Tämän mallin soveltamisessa on kuitenkin rajoituksensa. Vapausasteiden jäätyminen ja vapautuminen ei nimittäin tapahdu yhtäkkiäsi jossakin tietyssä lämpötilassa vaan vähitellen lämpötilan muuttuessa kuten kuvassa 8.8. Suurilla molekyyleillä on monia erilaisia tapoja värähdellä ja näiden vapausasteet voivat jäätyä eri lämpötiloissa, ja niinpä on tavallista, että jotkin vapausasteet voivat olla osittain jäätyneitä. Tällöin  $N_{\text{vapaus}}$  ei välttämättä ole kokonaisluku.

Sama idea toimii itse asiassa myös kiinteissä aineissa, joissa atomit muodostavat säännöllisiä rakenteita. Tällöin jokainen atomi voi nimittäin liikkua mihin tahansa avaruuden kolmesta suunnasta, mutta koska atomien välillä on sidoksia, atomien liikkeeseen liittyy aina sekä liike-energian että sidosten potentiaalienergian muutos. Tällöin atomeilla on *kuusi* vapausastetta: kolme liittymen liikkeeseen kolmessa ulottuvuudessa ja kolme liittymen sidosten venymiseen näissä suunnissa. Siispä tällaisen kiinteän aineen ominaislämpökapasiteetti on

$$c_V^n = 3k_B N_A = 3R. \quad (8.41)$$

Tämä tulos on ns. *Dulong-Petit-laki*, ja se pätee hyvin mm. monille metallille hyvin matalia lämpötiloja lukuunottamatta (jolloin kvanttimekaaniset ilmiöt ovat jälleen tärkeitä).



**8.11** Erään kaasun molekyylit ovat kolmiatomisia. Mikä on kaasun ominaislämpökapasiteetti lämpötilassa, jossa kaikki pyörimislukkeen vapausasteet ovat aktiivisia, yksi väärähtelytapa on puoliksi jäätynyt ja muut väärähtelyt ovat täysin jäätyneet?

### esimerkki 8.2

### Ideaalikaasun energia

**Kaasusäiliössä A on heliumia He ja säiliössä B typpeä N<sub>2</sub> 100 kPa paineessa ja 300 K lämpötilassa. Säiliöiden tilavuus on 1.0 m<sup>3</sup>. (a) Mikä on kaasun sisäenergia? (b) Mikä on yksittäisten molekyylien keskimääräinen suoraviivaisen liikkeen liike-energia? (c) Mikä on molekyylien rms-vauhti?**

**SUUNNITELMA** Helium on jalokaasu, joka koostuu yksittäisistä atoimeista. Näillä on kolme vapausastetta. Typpi koostuu kaksiatomisista molekyyleistä. Näillä on tässä lämpötilassa kolme suoraviivaisen liikkeen ja kaksi pyörimislukkeen vapausastetta.

Ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella kummankin kaasun ainemäärä on

$$n = \frac{pV}{RT} = 40 \text{ mol} \quad (8.42)$$

eli kaasuhiuksia on noin

$$N = nN_A = 2.4 \cdot 10^{25}. \quad (8.43)$$

Kaasun lämpötila ja sisäenergia ovat suoraan verrannolliset. Ekviartitiooperaatteenvaiheesta kuhunkin vapausasteeseen liittyy yhdessä molekyyllissä keskimäärin energia  $\frac{1}{2}k_B T$ . Kaasun sisäenergia on siis

$$E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}} N k_B T. \quad (8.44)$$

Kummassakin kaasussa jokaisella molekyyllillä on kolme suoran liikkeen vapausastetta, joten molekyylien suoraviivaisen liikkeen energia on

$$\langle K_{\text{suora}} \rangle = \frac{3}{2}k_B T. \quad (8.45)$$

Toisaalta liike-energia on  $\langle K_{\text{suora}} \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$ , joten rms-nopeus on

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{2}{m}\langle K_{\text{suora}} \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (8.46)$$

Heliumatomien massa on noin  $m_{\text{He}} = 4.00u = 6.64 \cdot 10^{-27}$  kg ja typpimolekyylien massa on  $m_{\text{N}_2} = 2 \cdot 14.01u = 46.5 \cdot 10^{-27}$  kg.

**RATKAISU** (a) Sisäenergia heliumissa on  $E_{\text{sisä, He}} = 150 \text{ kJ}$  ja typessä  $E_{\text{sisä, N}_2} = 250 \text{ kJ}$ .

(b) Yhden hiukkasen suoraviivaisen liikkeen energia on kummassakin kaasussa sama,  $\langle K \rangle = 6.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ .

(c) Heliumatomien rms-vauhti on  $v_{\text{rms, He}} = 1370 \text{ m/s}$  ja typpimolekyylien  $v_{\text{rms, N}_2} = 520 \text{ m/s}$ .

**ARVIOINTI** Samassa lämpötilassa olevissa kaasuissa hiukkasilla on yhtä paljon suoraviivaisen liikkeen energiavahtia. Tällöin kuitenkin kevyemmät heliumatomit liikkuvat nopeammin kuin raskaamat typpimolekyylit. Typpimolekyylit voivat lisäksi myös pyöriä, joten niillä on suoran liikkeen energian lisäksi pyörimislukkeen energiavahtia. Tämän vuoksi typpeen on varastoitunut kaikkiaan enemmän energiavahtia.

Tarkastelimme typpimolekyylien liikettää jo aikaisemmin tehtävässä 6.2. Tällöin arvioimme molekyylien  $x$ -suuntaisen liikkeen vauhdiksi noin 300 m/s. Toisaalta  $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$ , joten rms-nopeuden pitäisi tämän mukaan olla

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3\langle v_x^2 \rangle} \approx \sqrt{3} \cdot 300 \text{ m/s} = 520 \text{ m/s}. \quad (8.47)$$

Tehtävissä saamamme tulokset ovat siis sopusoinnussa.



**8.12** Selitä omin sanoin, mitä ovat vapausasteet. Miten ja miksi vapausasteet vaikuttavat kaasujen ominaisuuksiin? Mitkä tekijät määrittelevät, montako vapausastetta kaasulla on?

### 8.3 Mikro- ja makrotilat

Energian säilymislaista seuraa, että *eristetyssä* systeemissä kokonaisenergia on vakio, koska energiota ei pääse siirtymään systeemistä pois tai sinne sisään. Energia voi kuitenkin siirtyä systeemin sisällä. Esimerkiksi säiliössä olevan kaasun molekyylit liikkuvat, joten niillä on mikroskooppisessa mittakaavassa like-energiaa. Molekyylit voivat myös törmällä keskenään elastisesti, jolloin yksittäisten molekyylien energia voi muuttua. Jos siis kaasun kokonaisenergia on  $E_{\text{kokonais}}$ , tämä energiamäärä jakautuu kaasun molekyyleille ja tämä *energian jakautuminen* voi muuttua ajan kuluessa. Energian ekvipartitioperiaatteen mukaan kuhunkin vapausasteeseen liittyvöin tällöin *keskimäärin* yhtä paljon energiota, mutta kunkin yksittäisen molekyylin energia voi poiketa tästä keskiarvosta. Seuraavaksi tutkimme tarkemmin miten energia tällaisessa systeemissä täsmällisemmin jakautuu ja mitä siitä seuraa.

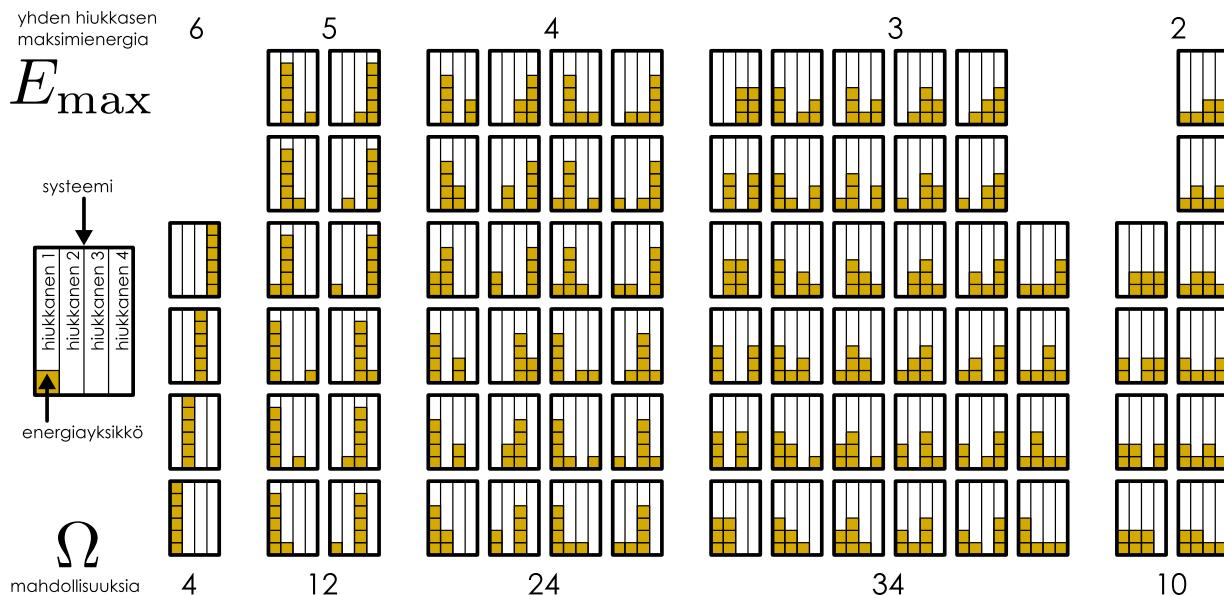
Tarkastellaan yksinkertaisena esimerkkinä systeemiä, jossa on 4 hiukkasta ja kullakin hiukkasella on yksi vapausaste. Kullakin hiukkasella voi olla energia  $0\epsilon, 1\epsilon, 2\epsilon, \dots$ , ja systeemin kokonaisenergia on  $E_{\text{kokonais}} = 6\epsilon$ , missä  $\epsilon$  on jokin pieni energiamäärä. Toisin sanoen systeemissä on kuusi yksikköä energiota, ja nämä yksiköt voidaan jakaa neljälle hiukkaselle miten tahansa. Kyseessä on vain yksinkertaistettu esimerkki, mutta kvanttimekaniikassa tilanne, jossa vain tietyt energian arvot ovat sallittuja, on aivan tavallinen. Niinpä esimerkki voisi aivan hyvin kuvata todellistakin systeemiä.

Koska systeemi on niin pieni, voimme yksinkertaisesti *taulukoida* kaikki mahdolliset tavat jakaa energia hiukkasten kesken. Kuva 8.10 on esitetty kaikki nämä mahdolisut, joita on yhteensä 84 kappaletta. Taulukossa systeemit on jaoteltu sen mukaan paljonko energiota yhdellä hiukkasella on maksimissaan, ja siitä nähdään, että noin puolessa systeemeistä korkeintaan puolet systeemin energiasta on yhdellä hiukkasella. Toisessa puolessa yhdellä hiukkasella on yli puolet systeemin kokonaisenergiasta.

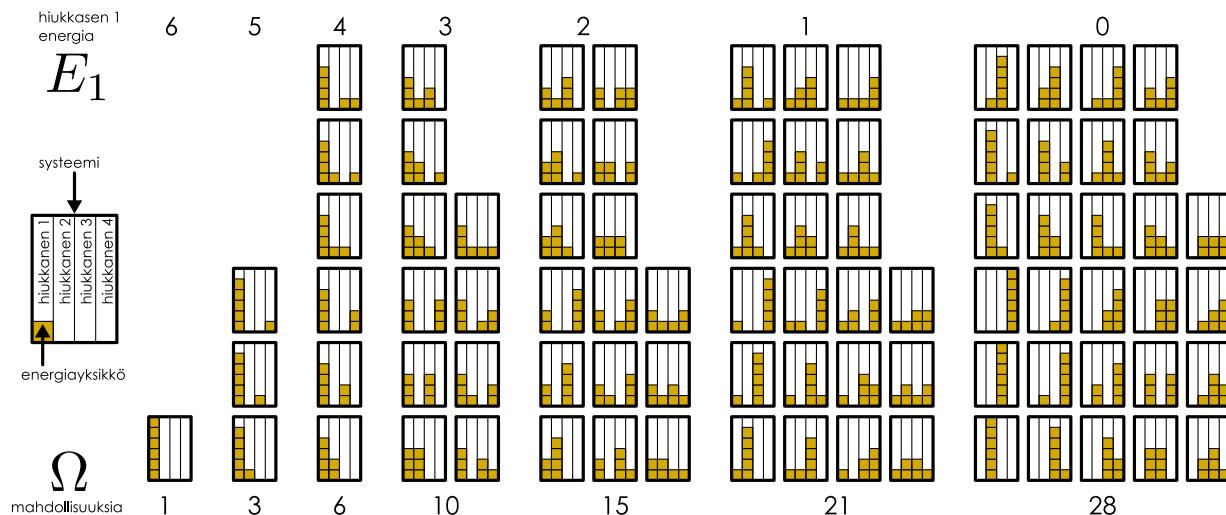
Olemme tähän mennessä puhuneet paljon *tilasta*, jolla tarkoitetaan kappaletta tai systeemiä kuvavien fysikaalisten suureiden joukkoa. Nyt on syttää laajentaa tilan käsitettä erottellemalla **makrotila** ja **mikrotila**. Mikrotilalla tarkoitetaan systeemin täydellistä kuvausta. Kaasun mikrotilaan esimerkiksi kuuluu tieto kaasun *kaikkien hiukkasten* paikoista, nopeuksista ja energioista. Makrotilalla puolestaan tarkoitetaan systeemin kuvausta makroskooppisesti havaittavien suureiden kuten lämpötilan ja paineen avulla. Esimerkiksi kuvaassa 8.10 kunkin erilaisen tapa jakaa energiayksiköt hiukkasten kesken on eri mikrotila ja systeemillä on siis 84 mahdollista mikrotilaa.

Jako makro- ja mikrotilan ominaisuuksiin ei ole yksikäsitteinen, vaan se riippuu siitä, mitä systeemistä pystytään suoraan havainnoimaan. Esimerkiksi jos edellä tarkasteltuun neljän hiukkisen systeemiin liitetään sensori, joka pystyy mittamaan paljonko energiota yhdellä hiukkasella maksimissaan on (mutta ei paljonko energiota kullakin hiukkasella täsmälleen on), ominaisuus "yhden hiukkisen maksimienergia",  $E_{\max}$ , on makrotilaa kuvaava suure. Tällöin systeemissä on 7 mahdollista makrotilaa —  $E_{\max} = 0\epsilon, 1\epsilon, 2\epsilon, \dots, 6\epsilon$ . Kuvaan 8.10 esittämässä taulukossa kukin systeemi (84 kpl) esittää eri mikrotilaa ja niiden ryhmät esittävät eri makrotiloja.

Kuva 8.10: Kaikki mahdolliset tavat jakaa 6 yksikköä energiota 4 hiukkaselle. Kukin laatikko kuvailee yhtä mahdolisutta, ja laatikon pylväät eri hiukkasia. Keltaiset neliöt ovat energiayksiköitä.



Kuva 8.11: Kaikki mahdolliset tavat jakaa 6 yksikköä energiaa 4 hiukkaselle. Kukin laatikko kuvaa yhtä mahdolisutta, ja laatikon pylväät eri hiukkasia. Keltaiset neliöt ovat energiayksiköitä.



**8.13** Kuvassa 8.10 on vain 5 eri makrotilaa vaikka tekstissä todettiin makrotiloja olevan 7. Mitkä makrotilat puuttuvat kuvasta ja miksi?

Makrotilaa voi vastata monta erilaista mikrotilaa. Esimerkiksi makrotilaa  $E_{\max} = 6\epsilon$  (kaikki energia yhdellä hiukkasella) vastaa neljä eri mikrotilaa (energia voi olla millä tahansa hiukkasista). Lisäksi eri makrotiloja vastaavien mikrotilojen määrä vaihtelee. Kaikkein eniten mikrotiloja, 34 erilaista, liittyy makrotilaan  $E_{\max} = 3\epsilon$ . Makrotilaan liittyvien mikrotilojen määrää kutsutaan *multiplisiteeksi* ja sitä merkitään usein kreikkalaisella omega-kirjaimella,  $\Omega$ .

Jos hiukkaset pääsevät vaihtamaan keskenään energiota vapaasti, jokaisen *mikrotilan* kuvassa 8.10 täytyy olla *yhtä todennäköinen*. Tällöin systeemin *todennäköisyys olla missä tahansa makrotilassa on sitä suurempi mitä enemmän mikrotiloja makrotilaan liittyy*. Todennäköisyyden perusmääritelmän mukaan makrotilan todennäköisyys on siihen liittyvien mikrotilojen lukumäärän (multiplisiteetin) ja kaikkien mahdolisten mikrotilojen lukumäärän suhde

$$P_{\text{makrotila}} = \frac{\Omega_{\text{makrotila}}}{\Omega_{\text{kaikki}}}. \quad (8.48)$$

Esimerkiksi todennäköisyys sille, että yksi hiukkanen saa kaiken systeemissä tarjolla olevan energian, on  $P(E_{\max} = 6\epsilon) = \frac{4}{84} \approx 0.048$ .



**8.14** Mikä on tässä esimerkissä kunkin makrotilan todennäköisyys? Mikä on näiden todennäköisyyskien summa?

## Energian ekvipartitio

Jatketaan saman esimerkin analysointia kuin edellä mutta valitaan nyt makrosuureeksi yhden tietyn hiukkisen energia — esimerkiksi hiukkisen 1,  $E_1$ . Tämä on järkevä tapa määritellä makrotila, jos hiukkisen 1 on erilainen kuin systeemin muut hiukkaset (esimerkiksi huomattavasti suurempi) ja pystymme jotenkin mittamaan juuri tämän hiukkisen energian mutta emme muiden hiukkisten energioita. Kutakin tällaista makrotilaa vastaavat mikrotilat on listattu kuvassa 8.11. Kuvassa on täsmälleen samat 84 mikrotilaa kuin kuvassa 8.10, mutta nyt ne on ryhmitelty uudelleen hiukkisen 1 energian mukaan. Näidenkin makrotilojen todennäköisyysdet saadaan yhtälöllä (8.48). Selkeästi mitä vähemmän energiota hiukkasella on, sitä todennäköisempi tila on kyseessä.

Yksittäisen hiukkisen mahdolisista energian arvoista  $E_1 = 0$  on kaikkein todennäköisin, sillä  $P(E_1 = 0) = \frac{28}{84} = 0.33$ . Kuitenkaan hiukkisen energian todennäköisesti ei ole nolla, koska todennäköisyys nollaan suurempaan energiaan on  $P(E_1 > 0) = 1 - P(E_1 = 0) = \frac{56}{84} = 0.67$ . Onkin kiinnostavaa tutkia, mikä on hiukkisten energioiden **odotusarvo** ( $\langle E_1 \rangle$ ). Odotusarvo nimittäin ennustaa satunnaismuuttujan kesiarvon, kun muuttuja mitataan monta kertaa. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että jos systeemin annetaan toimia vapaasti ja

hiukkisen 1 energiaa mitataan  $N$  kertaa, saadaan jotkin satunnaiset mittaustulokset  $(E_1)_1, (E_1)_2, (E_1)_3$ , jne. ja näiden *mittausten keskiarvo lähestyy satunnaismuuttujan odotusarvoa, kun mittausten lukumäärä kasvaa*

$$\langle E_1 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_1)_i. \quad (8.49)$$

Vaihtoehtoisesti *suuressa systeemissä* voidaan ajatella, että sama satunnainen ominaisuus määritetään yhtä aikaa monelle samanlaiselle hiukkaselle, ja tällöin myös näiden mittausten keskiarvo lähestyy satunnaismuuttujan odotusarvoa, kun hiukkasten lukumäärä kasvaa. Tätä eri hiukkaille laskettua keskiarvoa käytimme jo aikaisemmin ideaalikaasun tarkastelussa mm. yhtälössä (8.10). Vaikka periaatteessa keskiarvon laskeminen yli systeemin hiukkasten on eri asia kuin yhden hiukkisen ominaisuuksien keskiarvoistaminen ajan kullessa, kummatkin keskiarvot *lähestyvät samaa odotusarvoa mittausten määrän lähestyessä äretöntä*, ja niinpä esimerkiksi hiukkisen energian keskiarvon voi yleensä tulkita kummallakin tavalla.

Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo saadaan laskemalla kunkin mahdollisen tuloksen  $X_i$  ja sen todennäköisyyden  $P(X = X_i)$  tulojen summa,

$$\langle X \rangle = \sum_i P(X = X_i) X_i, \quad (8.50)$$

eli tässä esimerkissä

$$\langle E_1 \rangle = P(E_1 = 0) \cdot 0 + P(E_1 = \epsilon) \cdot \epsilon + P(E_1 = 2\epsilon) \cdot 2\epsilon + \dots + P(E_1 = 6\epsilon) \cdot 6\epsilon. \quad (8.51)$$

Lukemalla todennäköisyydet kuvan 8.11 taulukosta, saadaan odotusarvoksi yhden hiukkisen energialle

$$\langle E_1 \rangle = \frac{28}{84} \cdot 0 + \frac{21}{84} \cdot \epsilon + \frac{15}{84} \cdot 2\epsilon + \dots + \frac{1}{84} \cdot 6\epsilon = 1.5\epsilon. \quad (8.52)$$

Laskettu odotusarvo on siis täsmälleen yksi neljännes systeemin kokonaisenergiasta eli  $\langle E_1 \rangle = \frac{1}{4}E_{\text{kokonais}}$ . Toisin sanoen hiukkassa 1 on *keskimäärin* täsmälleen neljännes systeemin kokonaisenergiasta. Huomaa kuitenkin, että vaikka hiukkassa voi olla yhdellä ajan hetkellä mikä tahansa energia  $E_1 = 0, \epsilon, \dots, 6\epsilon$ , sillä *ei voi* tässä esimerkissä koskaan olla energiavaihto 1.5 $\epsilon$ . Odotusarvo ei siis kerro paljon energia hiukkassa on todennäköisimmin (todennäköisintä energia on  $E_1 = 0$ ). Sen sijaan jos systeemin antaa toimia vapaasti, hiukkaset vaihtavat keskenään energiota ja välillä hiukkisen 1 energia on enemmän kuin  $\frac{1}{4}E_{\text{kokonais}}$  ja välillä vähemmän. Odotusarvo kertoo paljon energia hiukkassa keskimäärin on ajan kuluessa.

Samanlainen päättely voidaan toistaa tarkastelemalla hiukkasia 2, 3 ja 4, ja koska tilanne on täysin symmetrinen hiukkasten vaihdon suhteeseen, jokaisen hiukkisen energian odotusarvon täytyy olla sama,  $\langle E_2 \rangle = \langle E_3 \rangle = \langle E_4 \rangle = \frac{1}{4}E_{\text{kokonais}}$ . Jokaisella hiukkassa on siis *keskimäärin* yhtä paljon energiota, ja energia siis *keskimäärin* jakautuu tasaisesti kaikkien hiukkasten tai tarkemmin sanoen kaikkien vapausasteiden kesken — tämä on energian ekvipartitioperiaate.



**8.15** Jos systeemissä on 200 hiukkasta ja 500 yksikköä energiota, paljonko energiota yhdellä hiukkassa on keskimäärin?

Edellä tarkastelimme energian jakautumista usean hiukkisen kesken, mutta käytännössä makroskooppisessa mittakaavassa ei havainnoida hiukkasia vaan systeemejä, ja niinpä onkin mielenkiintoisempaa tutkia, miten energia jakautuu kahteen osaan jaettuna systeemin osien välillä. Tilanne on tällöin erilainen kuin vain yksittäisiä hiukkasia tarkasteltaessa, koska energia voi jakautua myös systeemin osien sisällä. Tarkastellaan siis toisena esimerkinä 10 hiukkisen systeemiä, joka on jaettu kahteen osaan, A ja B, niin että osassa A on neljä yhden vapausasteen hiukkasta ja osassa B kuusi. Systeemin kokonaisenergia on 10 yksikköä ja valitaan makrotilan määritteleväksi suureksi osan A kokonaisenergia. Tällainen systeemi voisi kuvata esimerkiksi kahta hyvin pieniä kosketuksissa olevaa kappaletta, jotka voivat vaihtaa keskenään energiota.

Koska systeemissä on 10 yksikköä energiota, makrotiloja on 11:  $E_A = 0, E_A = \epsilon, \dots, E_A = 10\epsilon$ . Rajoitutaan aluksi tarkastelemaan ainoastaan osaa A. Tilannetta jossa osassa A ei ole lainkaan energiota vastaa vain yksi osan A mikrotila: sellainen jossa osan A millään hiukkassa ei ole energiota. Merkitään tästä  $\Omega_{A,0} = 1$ . Seuraava mahdollisuus on se, että osassa A on yksi yksikkö energiota, ja tällöin mahdollisia osan A mikrotiloja on 4, sillä tämä yksi yksikkö energiota voi olla millä tahansa osan A hiukkasta,  $\Omega_{A,1} = 4$ . Näin voidaan laskea kaikkia eri energioita  $E_A$  vastaavien osan A mikrotilojen lukumäärä. Tulokset on annettu taulukossa 8.1 sarakkeessa  $\Omega_A$ . Voit huomata, että tapauksessa, jossa osassa A on 6 yksikköä energiota, mikrotiloja on  $\Omega_{A,6} = 84$ . Nämä ovat kuvissa 8.10 ja 8.11 esitettyt mikrotilat.

Osa A ei kuitenkaan ole koko systeemi. Jos osan A energia on  $E_A$ , osan B kokonaisenergian täytyy olla  $E_B = E_{\text{kokonais}} - E_A$  ja myös tämä energia voi jakautua osan B hiukkasten kesken useilla tavoilla. Osan B mikrotilojen lukumäärät on niin ikään koottu taulukkoon 8.1.

Taulukko 8.1: Mikrotilojen lukumäärä systeemille, joka on jaettu osiin A (4 hiukkasta) ja B (6 hiukkasta), kun systeemin kokonaisenergia on 10 yksikköä.

A:n energia $E_A$	B:n energia $E_B$	A:n mikrotiloja $\Omega_A$	B:n mikrotiloja $\Omega_B$	mikrotiloja kaikkaan $\Omega$	todennäköisyys P
0	10	1	3003	3003	0.03
1	9	4	2002	8008	0.09
2	8	10	1287	12870	0.14
3	7	20	792	15840	0.17
4	6	35	462	16170	0.18
5	5	56	252	14112	0.15
6	4	84	126	10584	0.11
7	3	120	56	6720	0.07
8	2	165	21	3465	0.04
9	1	220	6	1320	0.01
10	0	286	1	286	0.00

Osien A ja B mikrotilojen lukumäärät eivät kerro energian jakautumisen todennäköisyyttä vaan tämä riippuu *koko systeemin* mikrotilojen määristä. Nämä mikrotilit voidaan kuitenkin muodostaa osien A ja B tiloja yhdistelmällä kuten kuvassa 8.12 on havainnollistettu makrotilalle, jossa osissa A on neljä ja osissa B kuusi energiayksikköä. Jos nimittäin osa A voi olla mikrotiloissa  $A_1, A_2$ , jne. ( $\Omega_A$  kpl.) ja osa B mikrotiloissa  $B_1, B_2$ , jne. ( $\Omega_B$  kpl.), koko systeemin tiloja ovat kaikki näiden yhdistelmät. Esimerkiksi jos osa A on mikrotilassa  $A_1$ , osa B voi olla mikrotiloissa  $B_1, B_2$  jne. On siis  $\Omega_B$  erilaista koko systeemin mikrotila, joissa osaa A edustaa mikrotila  $A_1$ . Vastaavasti on  $\Omega_B$  systeemin mikrotila, jossa A on mikrotilassa  $A_2$ . Näin voidaan käydä läpi kaikki  $\Omega_A$  osan A mikrotilaa ja kaikkiaan systeemin makrotilaan liittyy

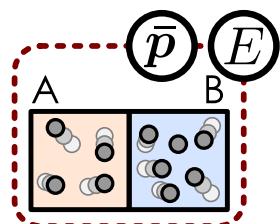
$$\Omega = \Omega_A \Omega_B \quad (8.53)$$

mikrotilaan.

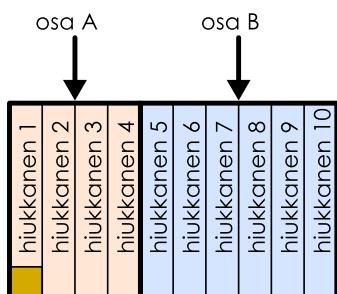
Todennäköisyyslaskennan kielellä sama asia voidaan ilmaista niin, että jos osalla A on  $\Omega_A$  erilaista mahdollista mikrotila, joiden todennäköisyydet ovat yhtä suuret, todennäköisyys löytää A mistä tahansa tietystä mikrotilasta  $A_i$  on  $P_A = 1/\Omega_A$ . Samoin todennäköisyys, että B on täsmälleen tietystä mikrotilassa  $B_j$

Kuva 8.12: Mahdolliset mikrotilit 10 hiukkisen systeemissä, joka on jaettu 4 hiukkisen (A) ja 6 hiukkisen osiin (B), kun osassa A on 4 yksikköä energiaa ja osassa B 6 yksikköä.

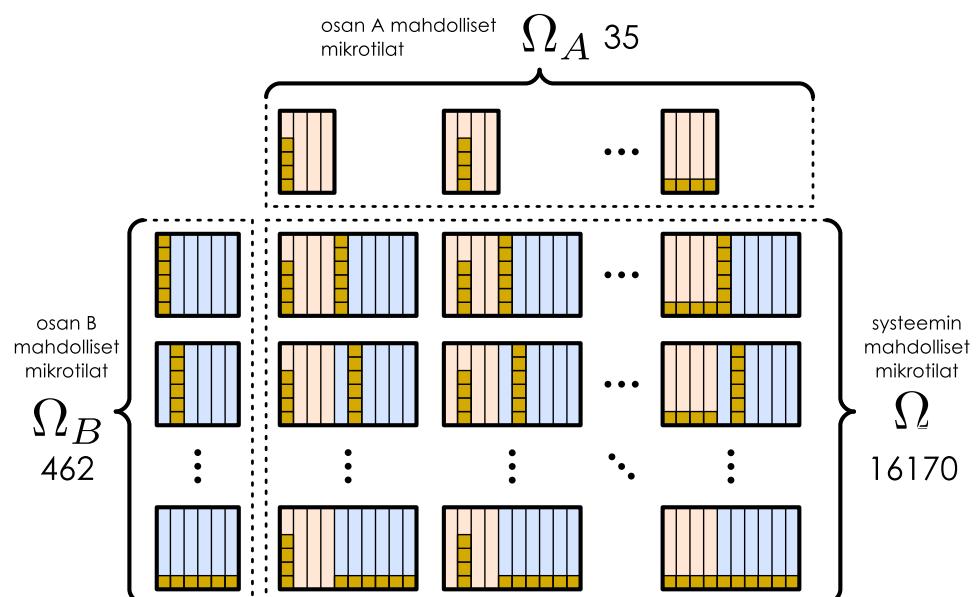
(a) Jaetaan systeemi kahteen osaan.



(b) Hiukkosten energoiden kuvaaja.



(c) Systeemin mikrotilit voidaan esittää osien A ja B mikrotilojen yhdistelminä.



## HUUKKASISTA KOOSTUVA AINE

on  $P_B = 1/\Omega_B$ . Jos osien A ja B mikrotilat ovat *toisistaan riippumattomat*, systeemin todennäköisyys olla täsmälleen siinä mikrotilassa, joka on tilojen  $A_i$  ja  $B_j$  yhdistelmä, on  $P = 1/\Omega = P_A P_B = 1/(\Omega_A \Omega_B)$ .

Taulukosta 8.1 nähdään, että osien A ja B mikrotilojen lukumäärät eli multiplisiteetit kasvavat osien sisältämän energian lisääntyessä. Kuitenkin koska koko systeemin mikrotilojen määrä riippuu osien A ja B multiplisiteettien tulosta, systeemin multiplisiteetillä on *maksimi*, kun  $E_A = 4\epsilon$  ja  $E_B = 6\epsilon$ . Toisin sanoen systeemi on kaikkein todennäköisimmin tilassa, jossa osassa A on neljä yksikköä energiaa ja osassa B kuusi. Tämä on järkevä, koska osa A sisälsi neljä hiukkasta ja osa B kuusi ja tasaukseen jokaisella hiukkalla on keskimäärin yksi yksikkö energiaa. Ekvipartitioperiaatteen mukaan osassa A täytyy olla *keskimäärin* neljä kymmenesosaa systeemin koko energiasta, ja koska tässä energian todennäköisyysjakama on likimain symmetrinen, myös jakauman maksimi (todennäköisin makrotila) on kohdassa  $E_A = 4\epsilon$ .



**8.16** Laske taulukon 8.1 sarakkeen  $\Omega$  avulla osan A energian odotusarvo  $\langle E_A \rangle$  ja vertaa tulosta ekvipartitioperiaatteeseen. Mikrotiloja on kaikkiaan  $\Omega_{\text{kaikki}} = 92378$  kpl.

## Tasapainotila

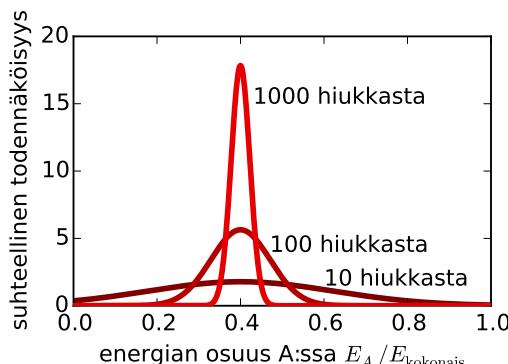
Taulukosta 8.1 nähdään myös, että osan A ei tarvitse välittämättä sisältää juuri energiota  $E_A = 4\epsilon$ . Tämä johtuu siitä, että osat A ja B vuorovaikuttavat ja energiota voi siirtyä niiden välillä. Yhdenkin energiayksikön siirtyminen osasta toiseen aiheuttaa suuren suhteellisen muutoksen, koska systeemi on niin pieni, ja niinpä energian jakauma voi poiketa tasaisesta huomattavasti.

Osan A sisältämän energian todennäköisyysjakama kuitenkin riippuu systeemin koosta. Kuvassa 8.13 (a) on piirretty todennäköisyysjakamat osassa A olevan energian määälle, kun systeemin koko on 10, 100 tai 1000 hiukasta ja systeemin kokonaisenergia on yksi yksikkö hiukkasta kohden. Osan A koko on kaikissa tapauksissa 40 % systeemin hiukkasista eli 4, 40 ja 400 hiukkasta. Kuvaajasta nähdään, että todennäköisyysjakamaan keskipiste on aina tilassa, jossa A:ssa on 40 % systeemin kokonaisenergiasta. Toisin sanoen energia on aina keskimäärin jakautunut osan A ja B välillä niin, että kummankin osan sisältämä energia on verrannollinen osan sisältämien hiukkasten määrään. Kuitenkin kun systeemi on pieni, todennäköisyysjakama on leveä ja on siis varsinkin tavallista, että energian jakauma poikkeaa odotusarvosta. Kuitenkin mitä suurempi systeemi on, sitä kapeammaksi todennäköisyysjakama muuttuu. Tämä tarkoittaa sitä, että suuret poikkeamat keskiarvosta tulevat hyvin epätodennäköisiksi. Sadan hiukkisen systeemissä osan A sisältämä energia on aina lähes varmasti 20 – 60 % systeemin kokonaisenergiasta, sillä muiden makrotilojen todennäköisyys on lähes nolla. Tuhanneen hiukkisen systeemissä A:ssa on lähes varmasti 30 – 50 % systeemin kokonaisenergiasta, ja mitä suuremmaksi systeemi kasvaa, sitä kapeammalle välille osan A energia jää.

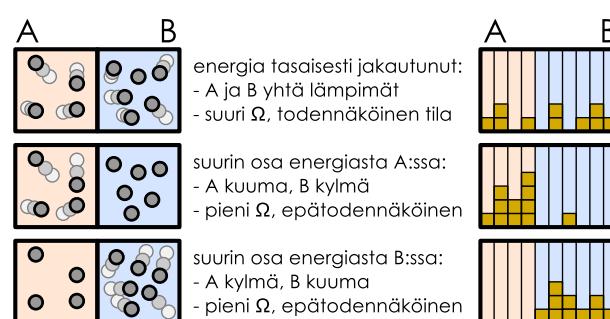
Todennäköisyysjakaman kaventuminen johtuu siitä, että systeemin koon kasvaessa mikrotilojen lukumäärä kasvaa käsittelemättömän nopeasti. Esimerkiksi tuhannen hiukkisen ja tuhannen energiayksikön systeemillä on luokkaa  $\Omega_{\text{kaikki}} = 10^{600}$  erilaista mikrotila! Tämän lisäksi mikrotilojen määrä kasvaa kaikkein nopeimmin juuri siinä makrotilassa, jossa energia on jakautunut tasaisesti ja muiden makrotilojen suhteellinen todennäköisyys lähestyy nollaa systeemin koon kasvaessa. Makroskooppisissa kappaleissa hiukkasten lukumäärä on Avogadron vakion  $N_A \approx 10^{23}$  suuruusluokkaa, jolloin tilan  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$  todennäköisyys on käytännössä yksi ja kaikkien muiden makrotilojen todennäköisyys on nolla. Toisin sanoen vaikka energiota voi virrata osasta A osaan B ja päinvastoin, suressa systeemissä olisi *äärimmäisen epätodennäköistä*, että energiota siirtyisi

Kuva 8.13: Energia jakautuu todennäköisimmin likimain tasauksen osien A ja B kokojen suhteessa. Mitä suurempi systeemi on, sitä epätodennäköisempää on, että energian jakautuminen poikkeaa tästä.

(a) Osan A sisältämä osuus energiasta erikokoisille systeemeille, kun osien kokojen suhde on 4:6.



(b) Mitä enemmän energiota systeemin osa sisältää, sitä kuumempi se on makroskooppisesti.



koskaan enemmän yhdestä osasta toiseen. Niinpä osien sisältämä energia pysyy vakiona. Koska systeemin osien energiat ovat tässä makrotilassa tasapainossa, sitä kutsutaankin **termodynäamiseksi tasapainotilaksi**.

Makroskooppisissa systeemeissä sisäenergia lütttyy systeemin lämpötilaan, ja tasapainotila edustaakin tällöin makrotilaan, jossa systeemin *lämpötila on kaikkialla sama*. Vastaavasti esimerkiksi tilassa, jossa osassa A on suhteellisesti enemmän energiota kuin osassa B, osa A on korkeammassa lämpötilassa kuin B. Tämän tilan todennäköisyys on nolla, mikä tarkoittaa sitä, että jos systeemin osat A ja B ovat samassa lämpötilassa (tasapainotila), systeemi ei koskaan itsestään muutu niin, että sen osista toinen lämpenisi toista kuumemaksi.



**8.17** Arvioi kuvan 8.13 (a) jakaumien perusteella, kuinka todennäköisesti osa A sisältää yli puolet systeemin kokonaisenergiasta, jos hiukkasia on 10, 100 tai 1000. (Muistathan todennäköisyyslaskennasta, että todennäköisyyttä kuvaava jakaumafunktion rajaama *pinta-ala*.)

### esimerkki 8.3

### Mikrotilat

Kappaleet A ja B ovat samaa materiaalia, mutta kappale B on kooltaan kolminkertainen kappaleeseen A verrattuna. Ts. kappale A koostuu  $N_A = N$  hiukkasesta ja kappale B  $N_B = 3N$  hiukkasesta. Kullakin hiukkasella on yksi vapausaste, jonka energia voi olla  $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots$  Kappaleiden muodostaman eristetyn systeemin kokonaisenergia on  $E_{\text{kokonais}} = 8N\epsilon$ , ja energia voi siirtyä vapaasti kaikkien hiukkasten välillä  $\epsilon$  kokoisina paketteina. Tutki seuraavia kysymyksiä, kun  $N = 1, 10, 100, 1000$ :

- Mikä on A:n energian odotusarvo,  $\langle E_A \rangle$ ?
- Mikä on A:n energian todennäköisön arvo?
- Montako mikrotila systeemillä kaikkiaan on?
- Millä todennäköisyydellä A:n energian poikkeama odotusarvosta on korkeintaan 5 % kokonaisenergiasta?

**SUUNNITELMA** Ekvipartitioperiaatteen mukaan A:ssa täytyy olla keskimäärin neljäsosa systeemin koko energiasta eli  $\langle E_A \rangle = \frac{1}{4}E_{\text{kokonais}} = 2N\epsilon$ . Huom. todennäköisön energia on tästä lähellä, mutta sen ei tarvitse olla täsmälleen sama kuin odotusarvo.

Todennäköisyksien laskemiseksi meidän on laskettava  $E_A$ :n todennäköisyysjakauma. Todennäköisyys sille, että A:n energia on  $E_A = N\epsilon$ , saadaan laskemalla monessako mikrotilassa A:lla on tämä energia ja jakamalla tämä kaikkien mahdollisten mikrotilojen lukumäärällä,

$$P(E_A = N\epsilon) = \frac{\Omega(E_A = N\epsilon)}{\Omega_{\text{kaikki}}}. \quad (8.54)$$

Tässä puolestaan mikrotilojen määrä selviää laskemalla erikseen, monellako tavalla  $N\epsilon$  yksikköä energiota voidaan jakaa  $N_A$  hiukkaselle,  $\Omega(N\epsilon, N_A)$ , sekä monellako tavalla loput  $8N - N\epsilon$  yksikköä voidaan jakaa  $N_B$  hiukkaselle,  $\Omega(8N - N\epsilon, N_B)$ . Koko systeemissä on tällöin energiota  $E_A = N\epsilon$  vastaavia mikrotiloja

$$\Omega(E_A = N\epsilon) = \Omega(N\epsilon, N_A)\Omega(8N - N\epsilon, N_B) \quad (8.55)$$

Haluamme laskea, kuinka monella tavalla  $N\epsilon$  yksikköä energiota voidaan jakaa  $N_{\text{vapaus}}$  vapausasteelle. Kyseessä on täsmälleen sama ongelma kuin jos haluaisimme selvittää monellako eri tavalla  $N\epsilon$  samanlaista palloa voidaan jakaa  $N_{\text{vapaus}}$  erilaiseen laatikkoon. Tämä on tunnettu kombinatorinen ongelma, jonka ratkaisu on

$$\Omega(N\epsilon, N_{\text{vapaus}}) = \frac{(N\epsilon + N_{\text{vapaus}} - 1)!}{N\epsilon!(N_{\text{vapaus}} - 1)!}. \quad (8.56)$$

Emme johda tulosta tässä, mutta voit etsiä sen itse hakemalla kombinatoriikan menetelmää nimeltä "stars and bars".

**RATKAISU** Ensimmäiset tapaukset voi laskea vielä käsin, mutta suuremmat systeemit on laskettava tietokoneella. Ratkaisun antava Mathematica-ohjelma on annettu alla tapauksessa  $N = 1000$ . Tässä on taulukoituna lopputulokset.

$N$	$\Omega_{\text{kaikki}}$	$\langle E_A \rangle (\epsilon)$	$\max P(E_A) : E_A (\epsilon)$	$P(E_A \notin [\langle E_A \rangle - \delta, \langle E_A \rangle + \delta])$
1	165	2	1	0.83
10	$3.8 \cdot 10^{31}$	20	19	0.50
100	$4.3 \cdot 10^{329}$	200	199	0.055
1000	$4.2 \cdot 10^{3314}$	2000	1999	$4.0 \cdot 10^{-9}$

Mathematica:

```
(* hiukkaset ja energia *)
n = 1000;
nA = n;
nB = 3n;
nEkokonais = 8n;

(* multiplisiteetti *)
omega[nE_, nH_] := (nE + nH - 1)!/(nE! (nH - 1)!)
omegaKaikki = omega[nEkokonais, nA + nB] // N
omegaA[nE_] := omega[nE, nA] omega[nEkokonais - nE, nB]
p[nE_] := omegaA[nE]/omegaKaikki
4.225569151121798*10^-3314
```

```
(* energian odotusarvo, todennäköisin energia *)
eAkeski = nEkokonais*nA/(nA + nB)
Maximize[{p[ne], eAkeski - 2 < ne < eAkeski + 2}, {ne}, Integers] // N
2000
{0.00594745, {ne -> 1999.} }

(* yli 5 prosentin poikkeaman todennäköisyys *)
1.0 - Sum[ omegaA[ne],
{ne, Ceiling[eAkeski - 0.05 nEkokonais], Floor[eAkeski + 0.05 nEkokonais]}]
]/omegaKaikki // N
3.97673*10^-9
```

**ARVIOINTI** Tarkastetaan laskemalla todennäköisyyksien summa

$$\sum_{n_\epsilon=0}^{8N} n_\epsilon P(E_A = n_\epsilon \epsilon) \quad (8.57)$$

sekä odotusarvo

$$\langle E_A \rangle = \sum_{n_\epsilon=0}^{8N} n_\epsilon \epsilon P(E_A = n_\epsilon \epsilon) \quad (8.58)$$

suoraan. Mathematicassa riittää komennot `Sum[p[ne], ne, 0, nEkokonais]` sekä `Sum[ne*p[ne], ne, 0, nEkokonais]`. Todennäköisyyksien summaksi saadaan kaikissa tapauksissa 1 ja odotusarvoksi  $2N_\epsilon \epsilon$  kuten pitääkin.

Tuloksista nähdään, kuinka systeemin koon kasvattaminen lisää mikrotilojen määrää aivan mielettömästi. Mikrotilojen määrä kasvaa voimakkaimin juuri odotusarvon ympäristössä, ja niinpä selvästi odotusarvosta poikkeavien energioiden todennäköisyys pienenee. Jo 4000 hiukkasen systeemissä todennäköisyys poiketa odotusarvosta on luokkaa  $10^{-8}$ , ja systeemin kasvaessa tämä todennäköisyys pienenee entisestään. Makroskooppisissa kappaleissa hiukkasia on niin paljon, että todennäköisyys mille tahansa mainittavalle poikkeamalle odotusarvosta on käytännössä nolla.

## Pyrkimys tasapainoon

Edellä tarkasteltu mikrotilojen lukumäärään perustuva päätely perustuu oletukseen, että kaikki mikrotilat ovat yhtä todennäköisiä, mikä päätee tasapainossa olevalle eristetyn systeemille. Systeemi voi kuitenkin ulkoisten vuorovaikutusten takia päätyä johonkin epätasapainotilaan. Esimerkiksi jos yhdistämme kappaleen A, jonka hiukkasilla on paljon energiota, sekä kappaleen B, jonka hiukkasilla energiota on vähän, päädytymme tilanteeseen, jossa systeemin osassa A on suhteellisesti enemmän energiota kuin mitä tasapainotilassa sillä kuuluisi olla. Käytännössä näin voidaan tehdä esimerkiksi yhdistämällä kuuma ja kylmä kappale. Jos systeemi tämän jälkeen eristetään ja sen annetaan kehittyä itsekseen, kappaleiden lämpötilojen voidaan havaita muuttuvan energian alkaessa virrata osasta A osaan B. Tämä prosessi jatkuu kunnes kappaleilla on *samat lämpötilit*, jolloin myös energia on keskimäärin jakautunut systeemissä tasaiseksi.

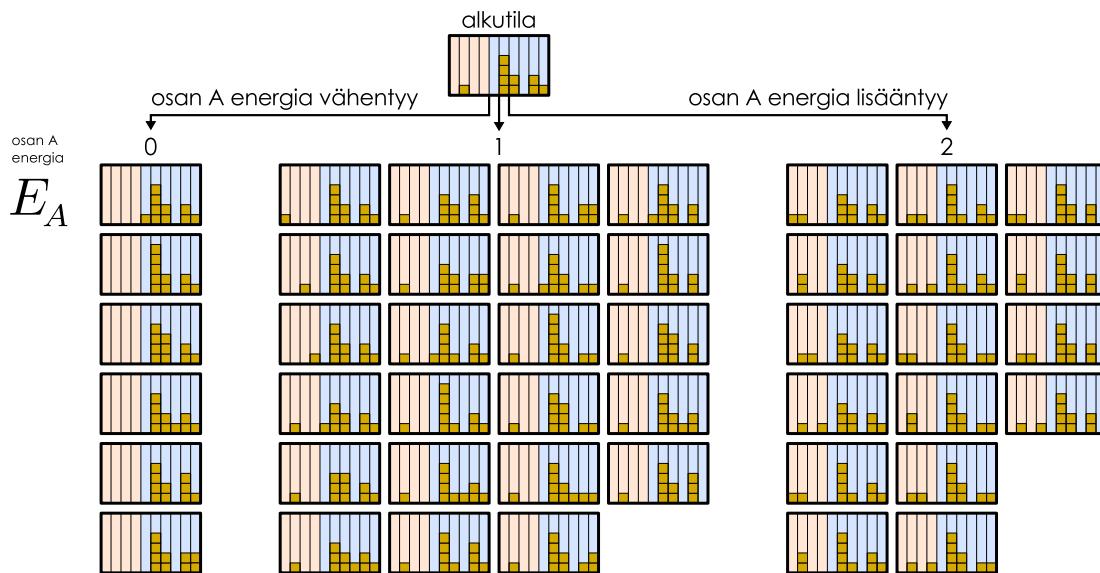
Todellinen fysikaalinen systeemi on aina jossakin tiettyssä mikrotilassa, eikä se voi hypätä siitä yhtäkkiä mihin tahansa toiseen mikrotilaan. Sen sijaan muutokset tapahtuvat askeleittain: hiukkaset voivat vuorovaikuttaa esimerkiksi törmäilemällä (kuten kaasussa), jolloin energiota siirtyy hiukkasetta toiselle, ja systeemin mikrotila hieman muuttuu. Makroskooppisissa systeemeissä näitä hiukkasten välisiä vuorovaikutuksia tapahtuu koko ajan ja jos systeemi on tasapainossa, vuorovaikutukset yhdessä siirtävät energiota systeemin eri osien välillä täsmälleen yhtä paljon kaikkiin suuntiin, eikä energian kokonaismäärä systeemin eri osissa muutu. Sen sijaan jos systeemi *ei ole tasapainossa*, tapahtumat, joissa systeemin tila muuttuu enemmän tasapainotilan kaltaiseksi, ovat *todennäköisempää* kuin tapahtumat, joissa systeemi siirtyy kauemmas tasapainosta. Niinpä epätasapainossa olevan systeemin tila muuttuu jatkuvasti enemmän tasapainotilan kaltaiseksi kunnes systeemi lopulta saavuttaa tasapainon.

Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.14 edellä tarkastellulle 10 hiukkasen systeemille. Kuvassa on esitetty eräs tila, jossa osan A energia on  $E_A = 0.1E_{\text{kokonais}}$  sekä kaikki mahdolliset tilat, joihin on mahdollista siirtää siirtämällä yksi energiayksikkö. Kuten kuvasta nähdään, on mahdollista, että osan A energia vähennee, säilyy samana tai lisääntyy. Kuitenkin koska alkutilassa osassa A on vähemmän energiota kuin tasapainossa, on *enemmän* tapoja muuttaa systeemiä niin että osan A energia lisääntyy kuin vähennee. Niinpä on todennäköisempää, että osa A vastaanottaa energiota osalta B eikä päinvastoin.

Arkinen esimerkki tästä ilmiöstä on toisiaan koskettavat kylmä kappale A ja kuuma kappale B. Kappaleiden ollessa kontaktissa niiden pintojen hiukkasten törmäyksissä siirtyy energiota hiukkasetta toiselle. Kuuman kappaleen B hiukkasilla on paljon energiota eli ne liikkuvat nopeasti, kun taas kappaleen A hiukkasilla on vähän energiota ja ne liikkuvat keskimäärin hitaammin kuin kappaleen B hiukkaset. Nopean ja hitaan hiukkasten törmäyksessä yleensä energiota siirtyy nopealta hiukkasetta hitaalle, joten on todennäköisempää, että kappaleen B hiukkaset menettävät energiota ja kappaleen A hiukkaset saavat sitä lisää. Makroskooppisesti tämä tarkoittaa kappaleen B lämpötilan laskevan ja kappaleen A lämpötilan nousevan.

Kuvan 8.14 esimerkissä kyseessä on pieni systeemi, joten energian on mahdollista siirtää myös osasta A osaan B, vaikka tämä onkin epätodennäköistä. Samoin kun kuuman ja kylmän kappaleen toisiaan koskettavien

Kuva 8.14: Kaikki mahdolliset mikrotilitat, joihin eräästä alkutilasta voi päästää antamalla kahden hiukkisen vaihtaa keskenään yhden energiayksikön. Koska systeemin osassa A on suhteellisesti vähemmän energioiden kuin osassa B, on todennäköisempää että A:n energia lisääntyy kuin vähentyy.



pintojen atomit törmällevät toisiinsa, joissakin törmäyksissä voi sattumalta käydä niin, että kylmän kappaleeen atomi luovuttaa energiota kuuman kappaleen atomille, jolloin energiota siirtyy kylmästä kappaleesta kuumaan. Kuitenkin valtaosa törmäyksistä on sellaisia, että niissä energiota siirtyy kuuman kappaleen atomeilta kylmän kappaleen atomeille. Makroskooppisessa systeemissä pintojen atomeita törmää jatkuvasti valtavat määräät toisiinsa, jolloin energiota siirtyy aina yhteensä enemmän kuumasta kappaleesta kylmään kuin toisin päin. Niinpä jos makroskooppisen systeemin osan A lämpötila on matalampi kuin osan B, energian täytyy *aina* siirtyä osasta B osaan A eli kuumasta kylmään eikä koskaan päinvastoin. Tällöin kuuma osa jäähtyy ja kylmä osa lämpenee. Vasta tasapainotilassa eli osien A ja B ollessa samassa lämpötilassa energiota siirtyy yhtä paljon kumpaankin suuntaan, jolloin kummankin osan kokonaisenergia ei enää muudu.

Tasapainotilassakin on periaatteessa mahdollista, että systeemi siirtyy hieman pois tasapainosta, mutta heti jos niin tapahtuu, systeemiä takaisin tasapainoon vievät tapahtumat ovat jälleen todennäköisempiä kuin systeemiä kauemmas tasapainosta vievät ja systeemi palaa välittömästi takaisin tasapainotilaan. Makroskooppisissa systeemeissä epätasapainotilojen todennäköisydet ovat niin pienet, että vaikka tasapainotilassa olevaa systeemiä seurataisiin koko universumin ikä, havaittavaa poikkeamaa tasapainotilasta ei nähtäisi (ks. esimerkki 8.4). Tämä tosiasia voidaan muotoilla seuraavaksi fysiikan laiksi: *Makroskooppinen eristetty systeemi pyrkii makrotilaan, jota vastaavien mikrotilojen lukumäärä  $\Omega$  on suuri mahdollinen. Tässä tilassa systeemi on tasapainossa. Eristetyn systeemin makrotila ei voi itsestään muuttua niin että makrotilaa vastaavien mikrotilojen lukumäärä pienenee.* Tämä on **termodynamiikan toinen pääsäntö** systeemin hiukkasten ja mikrotilan käsitteen avulla muotoiltuna.

Makroskooppisessa mittakaavassa tämä systeemin pyrkimys tasapainotilaan ilmenee prosessien *irreversibiliteitä*. Esimerkiksi kaksi eri lämpötilassa olevaa kappaletta pyrkivät samaan lämpötilaan, koska tämä on systeemin tasapainotila. Ei kuitenkaan koskaan käy niin, että samassa lämpötilassa olevista kahdesta kappaleesta toisen lämpötila alkaisi itsestään nousta ja toisen laskea. Ei ole myöskään mahdollista, ettei kappaleen hiukkasten satunnaisliukkeen epäjärjestynyt sisäenergia muuttuisi spontaanisti järjestyneeksi liike-energiaksi, koska on olemassa paljon mikrotiloja, joissa hiukkaset liikkuvat satunnaisiin suuntiin, ja vähän mikrotiloja, joissa kaikki hiukkaset liikkuvat samaan suuntaan. Esimerkiksi vedessä liukkuva pallo pysähtyy, koska pallon yhteen suuntaan liikkuvat atomit törmäävät vesimolekyyleihin, jolloin niiden kollektiivisen liikkeen liike-energia siirtyy vesimolekyylien satunnaiseksi liikkeeksi. Sen sijaan olisi äärimmäisen epätodennäköistä, että makroskooppisen kappaleen pinnalla olevat vesimolekyylit sattumalta liikkuisivat kaikki samaan suuntaan ja näin työntäisivät pallon liikkeelle. (Tämä on kuitenkin mahdollista hyvin pienille hiukkastille. Mikroskoopilla voidaan nähdä vedessä kelluvien mikroskooppisten hiukkasten poukkoilevan niihin törmäävien vesimolekyylien antamien impulssien johdosta. Ilmiötä kutsutaan *Brownin liikkeeksi*.)



**8.18** Kerro omin sanoin, mitä ovat mikro- ja makrotilit. Selitä tämän perusteella, miksi jotkin makrotilit ovat toisia todennäköisempiä. Perustele erityisesti, mitä tästä seuraa systeemien koon kasvaessa, ja miten tämä liittyy irreversibiliteileihin prosesseihin.

## esimerkki 8.4

## Itsestään liikkeelle

Jalkapallo kelluu paikoillaan täysin tyynessä vedessä. Palloa ympäröivät vesimolekyylit poukkoilevat satunnaisesti, ja periaatteessa voisi olla mahdollista, että molekyylit sattuisivat liikkumaan samaan suuntaan työntäen pallon liikkeelle. Arvioi, kuinka epätodennäköistä tämä on.

**SUUNNITELMA** Valitaan  $x$ -akseli johonkin mielivaltaiseen suuntaan ja tarkastellaan molekyylien todennäköisyyksiä liikkua positiiviseen ja negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Koska vesi ei virtaa, kullakin yksittäisellä molekyyllillä on yhtä suuri todennäköisyys liikkua mihin tahansa suuntaan. Nopeuden  $x$ -komponentti on siis positiivinen todennäköisyydellä  $p = 0.5$  ja negatiivinen yhtä suurella todennäköisyydellä. Millä tahansa hetkellä  $N$  molekyylistä hyvin tarkasti noin puolet liikkuu positiiviseen suuntaan ja puolet negatiiviseen suuntaan, jolloin niiden palloon kohdistamat impulssit kumoavat toisensa eikä pallo lähde liikkeelle. Periaatteessa on mahdollista, että jonakin hetkenä molekyylejä liikkuu enemmän vaikkapa positiiviseen  $x$ -suuntaan kuin negatiiviseen, jolloin molekyylit antaisivat pallolle impulssin  $x$ -suuntaan ja pallo lähtisi liikkeelle. Arviodaan, kuinka epätodennäköistä tämä on. Lasketaan, kuinka suurella todennäköisyydellä vähintään 50.01 % pallon pinnalla olevista molekyyleistä liikkuu positiiviseen tai negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Tämä määrä ei riitä vielä työtämään paloa havaittavasti liikkeelle, mutta jos tämä on hyvin epätodennäköistä, pallon lähteminen itsestään liikkeelle on vielä epätodennäköisempää.

**RATKAISU** Jalkapallon säde on luokkaa  $R = 10^{-1}$  m. Jos pallo kelluu niin, että puolet siitä on veden alla, vedessä olevan osan pinta-ala on  $A = 2\pi R^2 \approx 6 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup>. Vesimolekyylien välinen keskimääräinen etäisyys nestemäisessä vedessä on puolestaan luokkaa  $r = 3 \cdot 10^{-10}$  m, joten pallon pinnalla on keskimäärin yksi molekyyli noin pinta-alaa  $r^2$  kohden. Pallon pinnalla on siten noin

$$N = \frac{A}{r^2} = 7 \cdot 10^{17} \quad (8.59)$$

molekyyliä.

Oletetaan pallon pinnalla olevien molekyylien liike toisistaan riippumattomaksi ja tarkastellaan satunnaismuuttuja  $n$ : "tarkasteluhetkellä positiiviseen  $x$ -suuntaan liikkuvien molekyylien lukumäärä". Koska meillä on  $N$  molekyyliä, joista kukaan liikkuu positiiviseen suuntaan todennäköisyydellä  $p$ , positiiviseen suuntaan liikkuvien molekyylien lukumäärä  $n$  noudataa binomijakaumaa odotusarvolla  $\mu = Np$  ja hajonnalla  $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$ . Koska  $N$  on hyvin suuri, jakauma ei käytännössä poikkea lainkaan normaalijakaumasta, jolla on sama odotusarvo ja keskijointa.

Todennäköisyys sillä, että normaalijakautunut satunnaismuuttuja  $n$  poikkeaa odotusarvostaan enemmän kuin  $x$  keskijointaa, eli että  $|n - \mu| > x\sigma$ , pienenee nopeasti hajontojen määrän  $x$  kasvaessa. Esimerkiksi todennäköisyys sillä, että satunnaismuuttujan  $n$  arvo poikkeaa odotusarvosta enemmän kuin  $2.6\sigma$ , on  $P = 0.01$ . Arvo poikkeaa odotusarvosta yli  $3.9\sigma$  todennäköisyydellä  $P = 0.0001$  ja yli  $4.9\sigma$  todennäköisyydellä  $P = 0.000001$ . Kun  $x$  on suuri, satunnaismuuttuja poikkeaa odotusarvostaan enemmän kuin  $x$  keskijointaa todennäköisyydellä

$$P(|n - \mu| > x\sigma) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}. \quad (8.60)$$

Haluamme laskea todennäköisyyden sillä, että molekyyleistä yli 50.01 % liikkuu samaan suuntaan eli että  $n$  poikkeaa odotusarvostaan  $\mu = Np$  enemmän kuin 0.01 %. Siispä haluamme laskea todennäköisyyden  $P(|n - Np| > 0.0001N)$ . Keskijointa oli  $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$ , joten tämän poikkeaman voi kirjoittaa myös hajontojen monikertana  $0.0001N = x\sigma = x\sqrt{Np(1-p)}$ , mistä hajontojen määräksi ratkeaa

$$x = \frac{0.0001N}{\sqrt{Np(1-p)}} = 10^{-4} \sqrt{\frac{N}{p(1-p)}} \approx 10^5. \quad (8.61)$$

Odotusarvoisesti molekyylejä liikkuu yhtä paljon kumpaankin suuntaan. Yli 0.01 % poikkeamaa tästä tasajakaumasta vastaa 100000 keskijointaa. Tämä on mielettömän suuri poikkeamaa odotusarvosta, ja sen todennäköisyys on luokkaa  $P \approx 10^{-5} e^{-5 \cdot 10^9}$ . Luvun voi muuntaa  $e$ -kannasta 10-kantaiseksi logaritmilla, sillä  $\log P \approx -2 \cdot 10^9$ , joten

$$P \approx 10^{-2 \cdot 10^9} = 10^{-2000000000}. \quad (8.62)$$

Toisin sanoen  $P \approx 0.0000 \dots 0001$ , missä on siis noin 2000000000 nollaa!

**ARVIOINTI** Todennäköisyys on pieni, mutta eikö periaatteessa näin voisi käydä, kun tarpeeksi kauan odotetaan? Verrataanpa laskettua todennäköisyyttä maailmankaikkeuden kokoon ja ikään. Havaittavissa olevassa maailmankaikkeudessa on arvioitu olevan noin  $10^{80}$  atomia. Maailmankaikkeuden ikä on puolestaan noin 13 miljardia vuotta eli  $4 \cdot 10^{17}$  s. Molekyylien liikkeen aikaskaala on femtosekunnin luokkaa, joten voimme arvioida molekyylien osuvan pallon pintaan  $10^{-15}$  s välein. Havaittavissa maailmankaikkeudessa on siis varmasti vähemmän kuin  $10^{80}$  jalkapalloa ja vaikka pallot olisivat kelluneet vedessä maailmankaikkeuden syntyhetkestä alkaen, niittä ympäröivät molekyylit olisivat ehtineet törmätä niihin korkeintaan noin  $4 \cdot 10^{32}$  kertaa. Siispä jos koko maailmankaikkeus olisi täynnä vedessä kellovia jalkapalloja, edellä tarkasteltu tilanne olisi ehtinyt tapahtua korkeintaan noin  $M \approx 10^{112}$  kertaa. Tämä on mielettömän paljon mutta silti mitättömän vähän todennäköisyyteen  $P \approx 10^{-2000000000}$  verrattuna. Todennäköisyys sillä, että vesimolekyylien satunnaislukue olisi työntänyt kellovan pallon liikkeelle missään koko maailmankaikkeuden historian aikana, on tämän perusteella edelleen luokkaa  $MP \approx 10^{-2000000000+100} \approx 10^{-2000000000}$  eli käytännössä nolla. Ja samanlainen päätely toimii mille tahansa prosessille, jossa satunnaistesti järjestynyttä energiaa muuttuisi spontaanisti järjestyneeksi energiaksi. Vaikka tällaiset prosessit ovat mekaanisesti mahdollisia, niiden todennäköisyys on niin pieni, ettei niittä ole voinut tapahtua ikinä missään. Tämä on termodynamiikan toinen pääsääntö.

## 8.4 Entropia

Makroskooppisissa systeemeissä mikrotilojen määrittäminen on käytännössä täysin mahdotonta, koska atomien hiukkasten paikkoja ja nopeuksia on yleensä mahdoton mitata ja joka tapauksessa hiukkasia on aivan liian paljon niiden kaikkien havainnoimiseksi. Makrotila sen sijaan voidaan määrittää muutamia makroskooppisia suureita kuten lämpötilaa, painetta, ainemäärää ja tilavuutta mittamaalla. Makroskooppisten suureiden käytös kuitenkin pohjautuu mikroskooppisen maailman statistiikkaan, joten makroskooppisten ilmiöiden ymmärtämiseksi tarvitsisimme keinon liittää makroskooppiset suuret mikroskooppisiin. Erityisesti koska mikrotilojen lukumäärä kuvailee makrotilan todennäköisyyttä, olisi erittäin hyödyllistä löytää keino mitata mikrotilojen lukumäärää makroskooppisten suureiden avulla.

Tätä päämäärästä varten määrittelemme makroskooppisen suuren **entropia** makrotilaan liittyvien mikrotilojen lukumäärän logaritmina

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (8.63)$$

Logaritmi on aidosti kasvava funktio, joten kun mikrotilojen määrä  $\Omega$  kasvaa, myös entropia kasvaa, ja niinpä mikrotilojen lukumäärän maksimoituminen on sama asia kuin entropian maksimoituminen. Lisäksi vaikka mikrotilojen määrä on todellisissa systeemeissä käsittämättömän suuri, niiden logaritmit ovat paremmin hahmotettavissa ja näin määritellyn entropian arvot ovat helpommin käsittelyissä. Ja ennen kaikkea yhdistettäessä kaksi kappaletta yhdeksi systeemiksi systeemin mikrotilojen lukumäärä saadaan osien mikrotilojen lukumärien *tulona* yhtälön (8.53) mukaisesti. Logaritmin laskusäännön  $\ln ab = \ln a + \ln b$  perusteella systeemin kokonaisentropia saadaan kuitenkin sen osien entropoiden *summana*

$$S_{\text{kokonais}} = k_B \ln \Omega = k_B \ln \Omega_A \Omega_B = k_B \ln \Omega_A + k_B \ln \Omega_B = S_A + S_B. \quad (8.64)$$

tai yleisemmin

$$S_{\text{kokonais}} = \sum_i S_i. \quad (8.65)$$

Multipliteetin logaritmina määritelty entropia on siis *ekstensiivinen suure*.

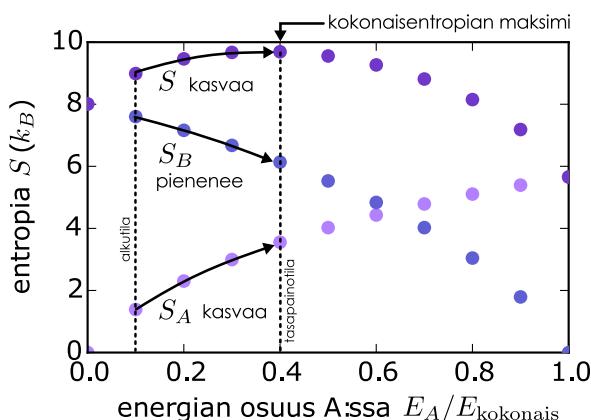


**8.19** Systeemi koostuu kolmesta osasta. Nämä osat ovat makrotiloissa, joihin liittyy  $\Omega_A = 7.0 \cdot 10^{100}$ ,  $\Omega_B = 1.5 \cdot 10^{200}$  sekä  $\Omega_C = 2.0 \cdot 10^{300}$  mikrotilaa. (a) Mikä on kunkin osan entropia? (b) Montako mikrotilaa systeemin makrotilaan kaikkiaan liittyy? (c) Mikä on systeemin kokonaisentropia?

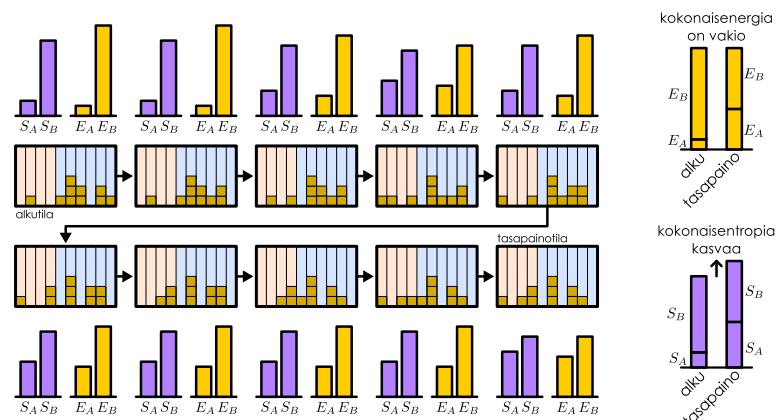
Usein entropiaa kutsutaan systeemin epäjärjestykseen mitaksi, koska yleensä on vain vähän tapoja järjestää systeemi säännönmukaisesti (esimerkiksi niin, että atomit ovat kaikki rivissä) mutta on paljon tapoja miten systeemi voi olla epäjärjestynyt (atomit miten sattuu). Täsmällisemmin kuitenkin entropia mittaa makroskooppisessa mittakaavassa *puuttuvaa informaatiota*. Jos makrotilan entropia on pieni, siinä liittyy vähän mikrotiloja ja pelkästään makrotilan perusteella tiedämme suunnilleen miten hiukkasten täytyy olla järjestyneet. Jos sen sijaan entropia on suuri, mahdollisia mikrotiloja on paljon emmekä tiedä millainen systeemi tarkalleen on makroskooppisessa mittakaavassa.

Kuva 8.15: Taulukossa 8.1 esitetyn systeemin entropia. Epätasapainossa olevan eristetyn systeemin tila siirtyy itsestään kohti tasapainotila, jolloin systeemin energia on vakio mutta entropia kasvaa.

(a) Entropia maksimoituu tasapainossa.

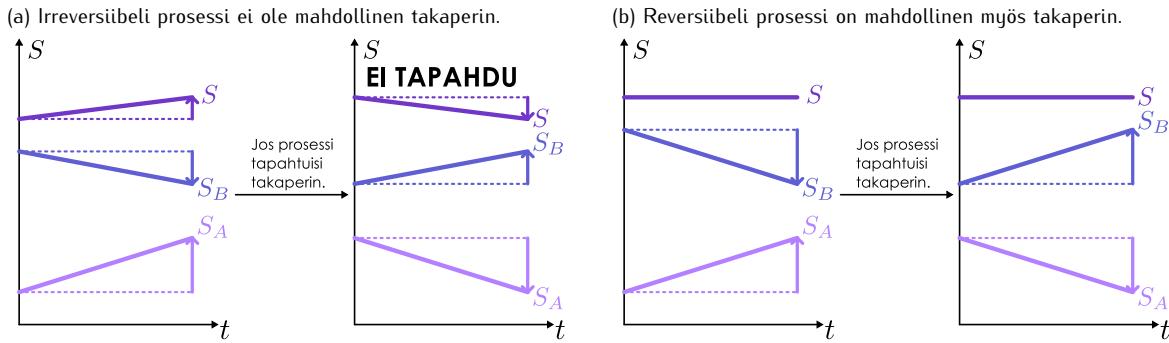


(b) Systeemin eräs mahdollinen reitti kohti tasapainoaa.



## HIUKKASISTA KOOSTUVA AINE

Kuva 8.16: Entropian muutos ja reversiibeliys. Jos eristetyn systeemin entropia kasvaa jossakin prosessissa, saman prosessin tapahtuminen ajassa takaperin pienentää entropiaa. Tämä ei ole mahdollista, joten tällainen prosessi on irreversiibeli. Jos entropia ei muutu, prosessi voi tapahtua myös ajassa takaperin. Avointen systeemien (osat A ja B) entropia voi vähentyä.



Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan eristetty systeemi kehittyy aina kohti makrotilaan, johon liittyy eniten mikrotiloja, ja tähän tasapainotilaan päässeeseen systeemin makrotila ei enää muudu. Sama asia voidaan entropian avulla lausua seuraavasti: *Makroskooppisen eristetyn systeemin entropia voi ainoastaan kasvaa. Systeemi on tasapainossa, kun sen entropia on maksimissaan, ja tällöin entropia ei muudu.*

$$\Delta S_{\text{eristetty}} \geq 0. \quad (8.66)$$

Kuvassa 8.15 on piirretty entropia samalle 10 hiukkasen systeemille kuin mitä taulukossa 8.1 analysoitiin numeerisesti. Kuvaan on piirretty erikseen osien A ja B entropiat sekä systeemin kokonaisentropia osan A sisältämän energian funktiona. Tasapainotilaan  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$  liittyy eniten mikrotiloja, joten myös sen kokonaisentropia on suurin. Makrotiloihin, joissa osan A energia on jotain muuta, liittyy aina pienempi kokonaisentropia.

Kummankaan osan A tai B entropia *ei ole* tasapainotilassa suurimmillaan vaan kummankin osan entropia kasvaa osan sisältämän energian kasvaessa. Jos systeemi on aluksi esimerkiksi tilassa  $E_A = 0.1E_{\text{kokonais}}$  (A on kylmä ja B kuuma), se alkaa spontaanisti kulkemaan kohti tasapainotilaan (A:lta ja B:llä sama lämpötila). Tällöin systeemin kokonaisentropia kasvaa, mutta osan B entropia *pienenee*. Tämä johtuu siitä, että jos tarkealemme systeeminä ainoastaan osaa B, tämä *ei ole eristetty systeemi* (vaan ainoastaan suljettu), sillä se vaihtaa energiota osan A kanssa. Energian siirtymässä osasta B osaan A eli B:n sisältämien energiayksiköiden vähentyessä B:n makrotilaan liittyvien mikrotilojen lukumäärä vähentyy. Näin siksi, että mitä enemmän energiayksiköitä B sisältää, sitä enemmän erilaisia tapoja niiden jakamiselle B:n hiukkasten kesken on olemassa. Siispä B:n menettäessä energiota myös sen entropia pienenee. Kuitenkin samalla osan A energia lisääntyy ja niinpä A:ta kuvaavien mikrotilojen määrä kasvaa, ja koska A:ssa oli aluksi niin vähän energiota, entropia kasvaa A:ssa *nopeammin* kuin se pienenee B:ssä. Tällöin eristetyn systeemin kokonaisentropia, joka on sen osien entropioiden summa, kasvaa. Tarinan opetus on siis se, että termodynamiikan toisen pääsäännön entropiaa koskeva muoto *pätee vain eristetylle systeemeille*. Avoimissa ja suljetuissa systeemeissä, joiden kokonaisenergia voi muuttua vuorovaikutuksissa ympäristön kanssa, entropia voi kasvaa, pienentyä tai olla vakio.



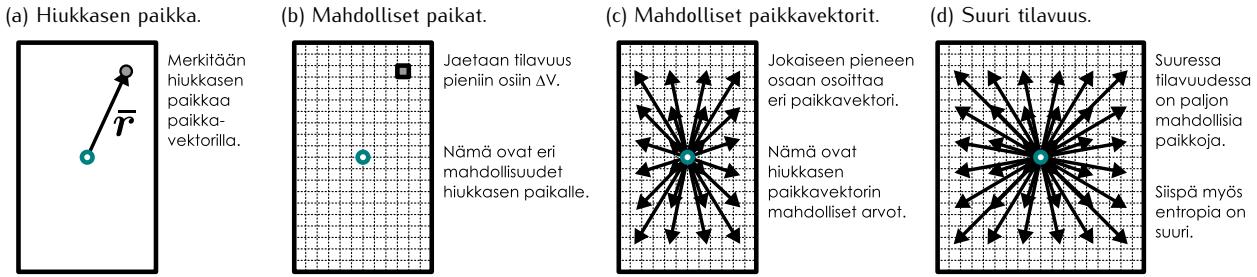
**8.20 (a)** Laske taulukon 8.1 perusteella osien A ja B entropiat sekä systeemin kokonaisentropia, kun (i)  $E_A = 0.3E_{\text{kokonais}}$ , (ii)  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ , (iii)  $E_A = 0.5E_{\text{kokonais}}$ . (b) Vertaa kuvaa 8.15. (c) Päteekö aina  $S_{\text{kokonais}} = S_A + S_B$ ?

Entropia antaa meille myös uuden keinon tarkastella reversiibeliyttä eli sitä, millaiset prosessit voivat tapahtua ajassa kumpaan suuntaan tahansa (kuva 8.16). Nimittäin jos prosessi johtaa makroskooppisen eristetyn systeemin entropia kasvuun, prosessin käänтaminen ajassa takaperin johtaisi eristetyn systeemin entropian pienentämiseen. Tämä on kuitenkin termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan mahdotonta, joten prosessi *ei voi tapahtua ajassa takaperin*. Siispä tällainen prosessi on *irreversiibeli*. Prosessit, joissa eristetyn systeemin entropia ei muutu, sen sijaan voivat tapahtua myös takaperin, ja ne ovat siis *reversiibeitä*.

### Entropian riippuvuus tilavuudesta

Edellä on tarkasteltu esimerkkejä, joissa systeemin mikrotila kuvattiin pelkästään hiukkasten energian avulla. Todellisuudessa tämä ei yleensä riitä, vaan mikrotila sisältää *kaiken* informaation systeemistä. Esimerkiksi kaasun tapauksessa tämä tarkoittaa sekä hiukkasten liikemäärien että niiden paikkojen tuntemista. Mikrotilat, joissa hiukkaset ovat samoissa paikoissa mutta liikkuvat eri nopeuksilla ovat *eri mikrotilat* ja ne voivat itse

Kuva 8.17: Yhden hiukkisen mahdolliset mikrotilitat riippuvat siitä, monessako eri paikassa hiukkisen voi olla, ja tämä riippuu sen tilavuuden suuruudesta, jossa hiukkisen on.



asiassa liittyä myös eri makrotiloihin. Aivan samoin mikrotilitat, joissa hiukkasten nopeudet ovat samat mutta hiukkaset ovat eri paikoissa, ovat eri makrotiloja. Seuraavaksi tarkastelemmekin mikrotilojen määrän ja siten entropian riippuvuutta hiukkasten mahdolisista paikoista ja systeemin makroskooppisesta tilavuudesta.

Otetaan esimerkkitapaukseksi säiliöön suljettu ideaalikaasu ja tarkastellaan aluksi kaasun yhtä hiukkasta. Hiukkisen voi tietenkin olla missä tahansa säiliön sisällä, mutta analyysin mahdolistamiseksi ajatellaan säiliön tilavuus  $V$  jaetuksi pieniin osiin  $\Delta V$ , joita on yhteensä  $M = \frac{V}{\Delta V}$  kappaletta. Koska yksi hiukkisen voi olla missä tahansa näistä osista, sillä on  $M$  mahdolista paikkaa, eli systeemillä on  $\Omega = M$  erilaista mikrotila. Jos hiukkasia on kaksi, ensimmäinen hiukkista voi olla missä tahansa  $M$  eri paikasta ja samoin toinen hiukkisen voi olla missä tahansa, joten kahden hiukkisen systeemillä on yhteensä  $\Omega = M^2$  mikrotila. Samalla päättelyllä  $N$  hiukkasta voivat olla  $\Omega = M^N$  eri mikrotilassa olettaen, että missä tahansa piennessä tilavuudessa  $\Delta V$  voi olla kuinka monta hiukkasta tahansa ja että hiukkaset ovat tunnistettavissa toisistaan. (Ensimmäinen oletus on yksinkertaistus, joka yleensä tehdään ideaalikaasumallissa. Se on hyvä approksimaatio kaasun ollessa harvaa, koska silloin kaasun hiukkosten kohtaaminen on harvinainen. Toinen oletus tarkoittaa sitä, että mikrotila, jossa hiukkaset A ja B ovat paikoissa  $\bar{r}_A$  ja  $\bar{r}_B$ , on eri mikrotila kuin se jossa hiukkaset ovat paikoissa  $\bar{r}_B$  ja  $\bar{r}_A$  — siis vaihdettu keskenään. Osoittautuu, että tämä oletus ei päde, mutta yksinkertaisuuden vuoksi emme tässä ota siitä seuraavia korjauksia huomioon.)

**8.21** Hyllyssä on kuusi tasoa ja kolme esineitä. Monellako erilaisella tavalla esineet voidaan asettaa eri tasolle, jos (a) esineet ovat erilaiset ja samalla tasolla saa olla monta esinetä (mutta samalla tasolla olevien esineiden järjestyksellä ei ole väliä), (b) esineet ovat täysin samanlaiset (niitä ei voi tunnistaa toisistaan) ja yhdellä tasolla saa olla vain yksi esine kerrallaan?

Tällöin systeemin entropia on määritelmän mukaisesti

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = k_B \ln M^N = N k_B \ln M, \quad (8.67)$$

missä on käytetty logaritmin laskusääntöä  $\ln a^b = b \ln a$ . Edelleen sijoittamalla tilavuusalkioiden lukumäärä

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = N k_B \ln \frac{V}{\Delta V}. \quad (8.68)$$

Nämä laskettu entropian arvo riippuu tilavuusalkion  $\Delta V$  koosta, joten näin emme saa entropialle täsmällistä arvoa. Periaatteessa tilavuusalkion koon voi valita mielivaltaisen pieneksi, jolloin alkioita on äärettömästi ja myös entropia on ääreton. Entropian muutokset säiliön tilavuuden muuttuessa ovat kuitenkin äärellisiä ja niillä on täsmällinen arvo. Jos nimittäin säiliön tilavuus on aluksi  $V_{\text{alku}}$  ja tilavuuden annetaan muuttua arvoon  $V_{\text{loppu}}$ , kaasumolekyylien käytössä oleva tilavuus muuttuu. Näin ollen kaasun entropia on aluksi  $S_{\text{alku}} = N k_B \ln \frac{V_{\text{alku}}}{\Delta V}$  ja lopuksi  $S_{\text{loppu}} = N k_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{\Delta V}$ . Entropian muutos tilavuuden muuttuessa on siten

$$\Delta S = S_{\text{loppu}} - S_{\text{alku}} = N k_B \left( \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{\Delta V} - \ln \frac{V_{\text{alku}}}{\Delta V} \right) = N k_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}. \quad (8.69)$$

Eertyisesti entropian muutos ei riipu mitenkään mielivaltaisesti valitusta tilavuusalkion koosta  $\Delta V$ , joten tämä muutos on hyvin määritelty pelkästään systeemin koon suhteellisesta muutoksesta riippuva suure.

Entropian muutos on positiivinen systeemin tilavuuden kasvaessa eli suuren tilavuuden täytävällä kaasulla on suuri entropia. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että suussa tilavuudessa kaasumolekyyleillä on suhteellisesti enemmän mahdolisia paikkoja kuin piennessä tilavuudessa. Entropialle ei tämän analyysin perusteella voitu antaa mitään absoluuttista arvoa, mutta voimme silti määritellä yhtälön (8.69) toteuttavan entropiafunktion

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = N k_B \ln \frac{V}{V_0}, \quad (8.70)$$

## HUUKKASISTA KOOSTUVA AINE

missä  $V_0$  on jokin tuntematon vakio. Edelleen koska entropian absoluuttisella arvolla ei makroskooppisessa mittakaavassa ole merkitystä vaan tavallisesti halutaan vain tietää milloin entropia on maksimissaan, voidaan tälle vakiolle käyttää esimerkiksi arvoa  $V_0 = 1 \text{ m}^3$ .



- 8.22** Säiliön tilavuus on  $1.0 \text{ m}^3$  ja siinä on 1 mooli kaasua. (a) Kuinka suuri on entropian muutos, jos kaasun tilavuus (i) kasvaa  $0.5 \text{ m}^3$  tai (ii) kaksinkertaistuu? (b) Onko tulos erilainen, jos säiliön alkutilavuus onkin  $0.1 \text{ m}^3$ ? (c) Onko tulos erilainen, jos yhtälön (8.70) vakion  $V_0$  arvo onkin  $V_0 = 0.1 \text{ m}^3$ ?

### Entropian riippuvuus energiasta

Aikaisemmassa systeemin osia A ja B käsitteleessä esimerkissä päättelimme osan A entropian kasvavan sen sisäenergian lisääntyessä. Samoin osan B sisäenergian kasvaessa tämän osan entropia kasvaa. Näin tapahtuu yleisesti: *systeemin entropia kasvaa sen sisäenergian kasvaessa*. Tämän perusteella kaasun tilavuuden lisäksi myös sen sisältämä energia vaikuttaa sen entropiaan. Analysoimme seuraavaksi millainen tämä riippuvuus on.

Pohjimiltaan kyse on aivan samanlaisesta päättelystä kuin tilavuudenkin tapauksessa. Kaasun molekyylien paikkavektoreiden muuttuminen tarkoittaa kaasun mikrotilan muuttumista, ja koska kaasun tilavuuden kasvaessa paikkavektoreilla voi olla enemmän erilaisia arvoja, myös mahdollisten mikrotilojen lukumäärä kasvaa. Näin ollen tilavuuden kasvaminen lisää entropiaa. Aivan samoin molekyylien *nopeusvektoreiden* muuttuminen tarkoittaa kaasun mikrotilan muuttumista, joten kaasun entropia kasvaa myös silloin, kun molekyylien nopeusvektorien mahdolliset arvot lisääntyvät.

Kaasumolekyylien nopeusvektoreiden suunnat ovat satunnaiset, koska kullakin ajan hetkellä jokainen molekyyli voi olla liikkeessä mihiin suuntaan tahansa. Nopeusvektoreilla on siis yhtä paljon erilaisia suuntia kaikissa tiloissa. Sen sijaan jos molekyylien keskimääräinen vauhti lisääntyy, nopeusvektoreilla on enemmän mahdollisia pituuksia (kuva 8.18). Suurempi vauhti puolestaan tarkoittaa suurempaa liike-energiaa. Siispä kaasun energian lisääntyessä molekyyleillä on enemmän mahdollisia nopeusvektoreita ja sitä kautta enemmän erilaisia mikrotiloja. Näin ollen myös entropia kasvaa.

Oletetaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisella molekyyllä voi olla mikä tahansa nopeus, jonka nopeusvektorin pituus on korkeintaan  $v_{\max} = av_{\text{rms}}$ , missä vakio  $a$  ilmaisee nopeuksien rms-keskiarvon  $v_{\text{rms}}$  ja maksimivahdin välistä suhdetta. Tämä tarkoittaa sitä, että jos asetamme molekyylien nopeusvektorien kannat koordinaatiston origoon, niiden päät ovat  $v_{\max}$ -säteisen pallon sisällä ja ne täyttävät tämän pallon tasaisesti. Tämä ei ole täsmälleen totta, mutta oikean nopeusjakauman käyttö ei muuta päättelyn kulkua eikä lopputulosta.



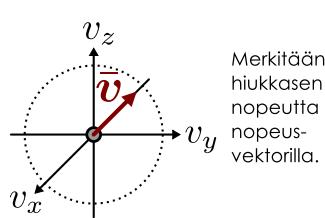
- 8.23** Paperille on piirretty ympyrä. Sinulla on joukko ohuita, eripituisia naukoja ja tehtäväsi on asettaa ympyrään mahdollisimman monta nauhaa niin, että jokaisen nauhan kanta on ympyrän keskipisteessä ja kaikkien naujojen kärjet ovat vähintään  $1 \text{ cm}$  päässä toisistaan. Montako nauhaa saat sopimaan ympyrään, jos ympyrän säde on (a)  $1 \text{ cm}$ , (b)  $2 \text{ cm}$ , (c)  $3 \text{ cm}$ . (d) Miten ympyrään mahtuvien naujojen määrä riippuu ympyrän säteestä?

Nyt voimme käyttää samaa päättelyä kuin edellä tilavuuden tapauksessa. Nopeusvektorit täyttävät nyt  $v_x, v_y, v_z$ -koordinaatistossa pallomaisen tilan (statistikassa fysiikassa täitä kutsutaan *nopeusavaruudeksi*), jonka "tilavuus" on pallon tilavuuden lausekkeen perusteella

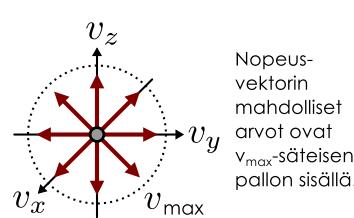
$$V_v = \frac{4}{3}\pi v_{\max}^3. \quad (8.71)$$

Kuva 8.18: Yhden hiukkasen mahdolliset mikrotilat riippuvat siitä, mitä erilaisia nopeuksia hiukkasella voi olla, ja tämä riippuu hiukkasen suurimmasta mahdollisesta liike-energiasta.

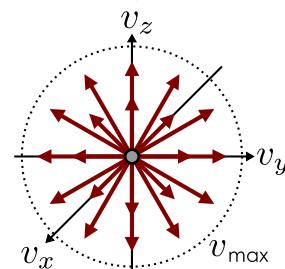
(a) Hiukkasen nopeusvektori.



(b) Mahdolliset nopeusvektorit.



(c) Suuri energia.



Kun hiukkasilla on paljon energiota, niillä voi olla suuret nopeudet ja paljon mahdollisia nopeuden arvoja.

Siispä myös entropia on suuri.

Toisaalta rms-nopeus riippuu kaasun hiukkasten liike-energiasta eli kaasun sisäenergiasta yhtälöiden (8.22),  $\langle K_{\text{molekylli}} \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$ , sekä (8.27),  $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekylli}} \rangle$ , mukaisesti. Niinpä voimme kirjoittaa maksiminopeuden  $v_{\text{max}}$  kaasun molekyylien liike-energian avulla

$$v_{\text{max}} = av_{\text{rms}} = a \left( \frac{2}{m} \langle K_{\text{molekylli}} \rangle \right)^{1/2} = a \left( \frac{2}{m} \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{1/2}, \quad (8.72)$$

joten nopeusvektorien täyttämän pallon "tilavuus" on

$$V_v = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \frac{a^3}{m^{3/2}} \left( \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{3/2}. \quad (8.73)$$

Entropian muutos noudattaa nyt täsmälleen samaa periaatetta kuin todellisenkin tilavuuden muuttuessa. Energian  $E_{\text{sisä,yksiatominen}}$  kasvaessa nopeusvektoreilla on enemmän mahdollisia arvoja ja entropia riippuu tilavuudesta  $V_v$  yhtälön (8.70) mukaisesti

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V_v}{V_{v,0}} = Nk_B \ln \left[ \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \frac{a^3}{m^{3/2} V_{v,0}} \left( \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{3/2} \right]. \quad (8.74)$$

Merkitsemällä logaritmin sisällä olevaa tuntematonta vakiota lyhyemmin  $\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi a^3 / (m^{3/2} V_{v,0}) = (N_0/E_0)^{3/2}$  ja käytämällä jälleen logaritmin laskusääntöä  $\ln a^b = b \ln a$  lauseke voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \left/ \frac{E_0}{N_0} \right.. \quad (8.75)$$

Lausekkeessa esiintyville vakioille voidaan jälleen valita jotkin sopivat arvot kuten  $E_0 = 1 \text{ J}$  ja  $N_0 = N_A$ .

Tuloksena saatu riippuvuus energiasta on samanlainen kuin yhtälön (8.70) kuvama riippuvuus tilavuudesta paitasi ettei eksponentti  $3/2$  on nyt siirtynyt kertoimeksi. Kerroin 3 on yhtälössä (8.71) esiintynyt avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä eli suoraviivaisen liikkeen *vapausasteiden lukumäärä*. Niinpä yhtälö (8.75) päteekin täsmälleen ottaen vain atomeista koostuvalle kaasulle ja moniatomisen kaasun tapauksessa kerroin 3 korvataan *vapausasteiden lukumäärällä*. Entropian energiasta riippuva osuus onkin näillä kaasuilla *suurempi* kuin yksiatomisella kaasulla. Tämä johtuu siitä, että jos molekyylit voivat pyöriä tai värähdellä, niillä on myös erilaisia tapoja pyöriä ja värähdellä. Niinpä moniatomilla molekyyleillä on enemmän eri tapoja liikkua kuin pelkillä atomeilla ja niiden entropiakin on siten suurempi.

## Entropia ja lämpötila

Atomeista koostuvan ideaalikaasun sisäenergia saadaan yhtälöstä (8.27),  $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = \frac{3}{2} Nk_B T$ , jonka mukaan sisäenergia ja lämpötila ovat toisiinsa suoraan verrannolliset. Niinpä tällaisen ideaalikaasun energiasta riippuva entropia (8.75) voidaan kirjoittaa lämpötilan avulla muotoon

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{\frac{3}{2} N_0 k_B T}{E_0} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}, \quad (8.76)$$

missä  $T_0$  on jälleen uusi tuntematon vakio, jolle voidaan valita arvoksi esimerkiksi 1 K.

Kaasun entropia riippuu siis yhtälön (8.70) mukaan sen tilavuudesta, koska mitä suuremmassa tilassa kaasun molekyylit saavat liikkua, sitä enemmän mahdollisia mikrotiloja  $\Omega_{\text{paikka}}$  niillä on. Toisaalta yhtälön (8.76) mukaan entropia riippuu myös lämpötilasta, koska korkeassa lämpötilassa kaasun molekyyleillä voi olla enemmän energiota ja sitä kautta myös enemmän mahdollisia nopeuteen liittyviä mikrotiloja  $\Omega_{\text{nopeus}}$ . Kaasun mikrotilan kuvaamiseen tarvitaankin sekä tietoa molekyylien nopeuksista että niiden paikoista, joten kaikkiaan kaasulla on

$$\Omega = \Omega_{\text{paikka}} \Omega_{\text{nopeus}} \quad (8.77)$$

mikrotila, kuten yhdelle hiukkaselle on havainnollistettu kuvassa 8.19. Kaasun entropia on siis kaikkiaan tilavuudesta riippuvan osuuden ja lämpötilasta riippuvan osuuden *summa*

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = k_B \ln \Omega = k_B \ln \Omega_{\text{paikka}} + k_B \ln \Omega_{\text{nopeus}} = S_{\text{ideaalikaasu,paikka}} + S_{\text{ideaalikaasu,nopeus}}, \quad (8.78)$$

eli auki kirjoitettuna

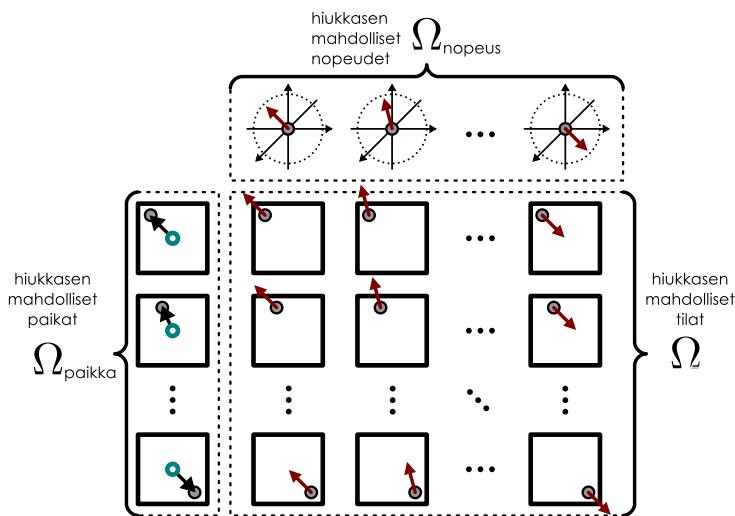
$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}. \quad (8.79)$$

Edelleen jos kaasu koostuu molekyyleistä, jotka voivat pyöriä tai värähdellä, lämpötilasta riippuvassa entropiassa täytyy kerroin 3 korvata molekyylien vapausasteiden lukumäärällä. Näin ideaalikaasun entropian lausekkeeksi saadaan lopulta

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}. \quad (8.80)$$

## HIUKKASISTA KOOSTUVA AINE

Kuva 8.19: Yhden hiukkasen mahdolliset tilat saadaan yhdistämällä hiukkasen mahdolliset paikat ja nopeudet.



**8.24** Miksei vapausasteiden lukumäärä vaikutta entropian tilavuudesta riippuvaan osuuteen?

## esimerkki 8.5

## Tasapaino

**Kaksi kaasusäiliötä on kiinni toissaan. Säiliössä A on 10 mol heliumia 300 K lämpötilassa, ja säiliössä B on 20 mol heliumia 330 K lämpötilassa. Säiliöt on eristetty ympäristöstään, mutta ne voivat vaihtaa keskenään energiaa. (a) Mihin lämpötilaan säiliöt lopulta asettuvat? (b) Miten kaasujen entropia muuttuu? Entä miten muuttuu kokonaisentropia?**

**SUUNNITELMA** Kyseessä on irreversiibeli prosessi, jossa lämpötilerot tasaantuvat. Säiliöt päätyvät siis loppujen lopuksi samaan lämpötilaan niin, että systeemin kokonaisenergia on vakio.

Oletetaan itse säiliöiden lämpökapasiteetit pieniksi. Koska säiliössä B on kaksinkertainen määrä kaasua, säiliössä A verrattuna, B:n lämpökapasiteetin täytyy olla kaksinkertainen. Niinpä A:n lämpötilan muutoksen täytyy olla prosessissa itseisarvoiltaan kaksinkertainen. Nämä ovat, jos  $\Delta T_A = 20 \text{ K}$  ja  $\Delta T_B = -10 \text{ K}$ , jolloin kumpikin säiliö päätyy loppulämpötilaan  $T_{\text{loppu}} = 320 \text{ K}$ .

Entropian muutokset voidaan laskea kaasun lämpötilasta riippuvaa entropiaa kuvaavasta lausekkeesta

$$\Delta S = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} n R \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (8.81)$$

**RATKAISU** (a) Loppulämpötila on siis 320 K.

(b) Pienemmän kaasusäiliön entropian muutos on

$$\Delta S_A = \frac{3}{2} \cdot 10 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/molK} \cdot \ln \frac{320 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 8.0 \text{ J/K} \quad (8.82)$$

ja suuremman

$$\Delta S_B = \frac{3}{2} \cdot 20 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/molK} \cdot \ln \frac{320 \text{ K}}{330 \text{ K}} = -7.7 \text{ J/K}. \quad (8.83)$$

Kokonaisentropian muutos on siis

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 0.3 \text{ J/K} \quad (8.84)$$

**ARVIOINTI** Lämpötilojen spontaani tasaantuminen on irreversiibeli prosessi, joten eristetyn systeemin entropian täytyy kasvaa sen aikana. Kumpikaan säiliö ei yksinään ole eristetty, joten säiliön B entropia voi aivan hyvin pienentyä. Yhdessä säiliöt kuitenkin muodostavat eristetyt systeemit, joten kokonaisentropian täytyy kasvaa, kuten tapahtuukin.

Itse asiassa kokonaisentropialla täytyy olla toisen pääsäännön mukaan tasapainotilassa maksimi, ja näin onkin. Jos nimittäin säiliöt olisivat aluksi lämpötilassa 320 K ja säiliön A lämpötilaa muutettaisiin  $\Delta T_A = 0.2 \text{ K}$  (jolloin  $\Delta T_B = -0.1 \text{ K}$ ), kokonaisentropian muutos olisi  $\Delta S = -0.037 \text{ mJ/K}$ . Entropia vähensi likimain yhtä paljon myös jos  $\Delta T_A = -0.2 \text{ K}$  ja  $\Delta T_B = 0.1 \text{ K}$ . Toisin sanoen tasapainolämpötilassa 320 K kaikki lämpötilojen muutokset laskisivat entropiaa, joten kyseessä täytyy olla entropian maksimi. Eristetyn systeemin kokonaisentropia ei voi itsestään pienentyä, joten kun kaasut ovat kerran saavuttaneet tasapainolämpötilan 320 K, lämpötilassa ei voi enää tapahtua muutoksia ellei jokin ulkoinen tekijä vaikuta systeemiin.

Kaasun entropia on siis sen ainemääärän, tilavuuden ja lämpötilan funktio. Erityisesti jos kaasulla on jokin tietty tilavuus ja lämpötila, sen entropia ei riipu siitä, miten kaasu on saanut lämpötilansa ja tilavuutensa vaan ainoastaan kaasun *makrotila*. Toisin sanoen entropia on *tilanmuuttuja*. Erityisesti jos kaasu käy läpi prosessin ja se palautetaan takaisin samaan tilaan kuin aluksi, kaasun entropia palaa samaan arvoon kuin aluksi riippumatta siitä, mitä kaasulle välillä tapahtui. Tämä ei ole myöskään ideaalikaasun ominaisuus vaan se pätee kaikille aineille.

Entropian, sisäenergian ja lämpötilan välillä on kuitenkin vielä paljon syvälli sempi yhteys. Tarkastellaan jälleen eristettyjä systeemiä, joka on jaettu kahteen osaan, A ja B. Nyt systeemi on kuitenkin makroskooppinen toisin kuin aikaisemmin tarkasteltu 10 hiukkisen systeemi. Kyseessä voi olla esimerkiksi kaasusäiliö, joka on jaettu kahtia lämpöä johtavan kalvon avulla.

Kuvassa 8.20 on esitetty systeemin ja sen muodostavien osien entropiat systeemin A sisäenergian funktiona (vrt. kuvan 8.15 (a)). Tasapainotilassa systeemin kokonaissentropia maksimoituu, mikä graafisesti tarkoittaa entropian kuvajan tangentin olevan vaakasuorassa. Matemaattisesti siis kokonaissentropian derivaatta energian suhteen on tasapainossa nolla

$$\frac{dS_{\text{kokonaiss}}}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} + \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}} = 0 \quad (8.85)$$

eli osan A ja osan B entropioiden derivaatat ovat tasapainossa yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset

$$\frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} = -\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}}. \quad (8.86)$$

Edelleen koska systeemin kokonaisenergia on vakio, osan B energia on  $E_{\text{sisä,B}} = E_{\text{kokonaiss}} - E_{\text{sisä,A}}$  ja niinpä osan B entropian derivaatta *osan B sisäenergian suhteen* on niin ikään vastakkaismerkkinen vastaavaan osan A energian suhteen laskettuun derivaattaan nähdien

$$\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}} \frac{dE_{\text{sisä,B}}}{dE_{\text{sisä,A}}} = -\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}}. \quad (8.87)$$

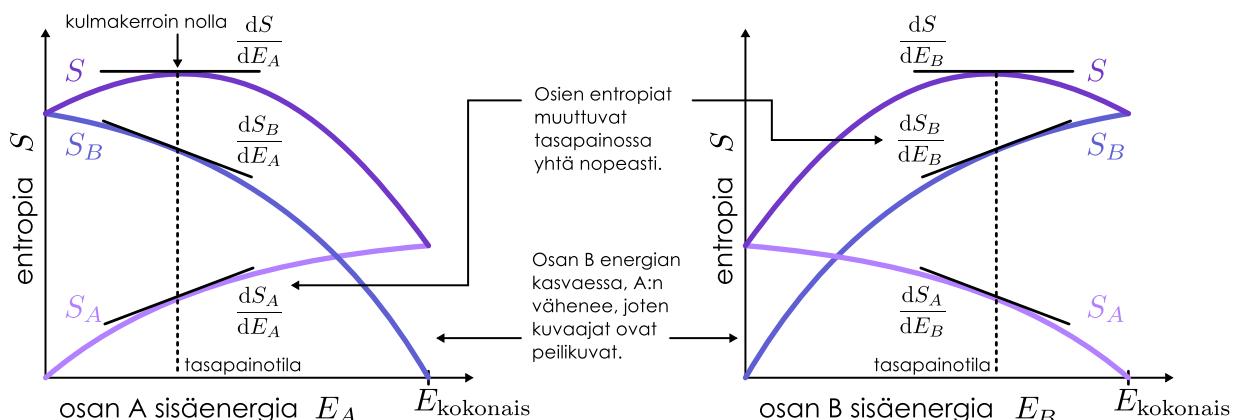
Niinpä tasapainoehto (8.86) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}}. \quad (8.88)$$

Siispä vaikka tasapainossa systeemin osien entropiat *eivät ole* yhtä suuret, osien entropiat *muuttuvat sisäenergian funktiona* yhtä nopeasti. Kuvajassa 8.20 tämä näkyy osien A ja B entropian kuvajien tangenttien yhtä jyrkinä kulmakertoimina.

Edelleen kuvajan 8.20 mukaan kummankin osan entropian kuvaja nousee sitä *voimakkaammin*, mitä *vähemmän* energiota sisältää. Makroskooppisesti kuitenkin suhteellisesti vähän energiota sisältävä osa on kylmä, eli sen *lämpötila on matala*. Niinpä näyttäisi siltä, että *mitä matalampi osan lämpötila on, sitä nopeammin osan entropia kasvaa sen sisäenergian lisääntyessä*. Lisäksi kokeellisesti tiedetään, että kaksi kappaletta ovat termodynaamisessa tasapainossa, kun niiden lämpötilat ovat samat, joten tasapainoehdon 8.88 perusteella osien A ja B *entropioiden muutosnopeuksien yhtäsuuruus* voidaan tulkita tarkoittavan osien *lämpötilojen yhtäsuuruutta*.

Kuva 8.20: Kahteen osaan jaetun systeemin entropia osien sisäenergioiden funktiona. Tasapainossa entropialla on maksimi, jolloin osien entropiat muuttuvat yhtä nopeasti.



## HUUKKASISTA KOOSTUVA AINE

Lasketaan esimerkin vuoksi entropian muutosnopeus ideaalikaasulle, kun kaasun sisäenergia muuttuu. Koska kaasun entropia riippuu myös tilavuudesta ja ainemääristä, tarkastellaan erityisesti entropian muutosta *tilavuuden ja ainemääärän ollessa vakiot*, mitä merkitään derivaatan alaindekseillä  $V, N$ ,

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{\partial}{\partial E_{\text{sisä}}} \left( \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{E_{\text{sisä}}}{E_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{N_{\text{vapaus}} N k_B}{E_{\text{sisä}}}. \quad (8.89)$$

Toisaalta koska kaasun sisäenergia on  $E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B T$ , tulos sievenee yksinkertaisesti muotoon

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{1}{T}. \quad (8.90)$$



**8.25** Koska ideaalikaasun lämpötila on verrannollinen kaasun sisäenergiaan, kaasun entropian derivaatan sisäenergian suhteen täytyy olla käännekkäin verrannollinen kaasun energiaan,  $\partial S / \partial E_{\text{sisä}} = a / E_{\text{sisä}}$ . Miten tämä näkyy kuvaan 8.20 funktion  $S_A(E_A)$  kuvaajassa?

Tämä yksinkertainen tulos on yhteensoviva edellä esitettyjen pohdintojen kanssa: Mitä pienempi on lämpötila, sitä nopeammin entropia muuttuu energian funktona eli sitä suurempi on entropian derivaatta. Tasa-painossa systeemin osien entropioiden derivaatat ovat samat, joten osat ovat samassa lämpötilassa.

Vaikka tässä tulos (8.90) johdettiin vain ideaalikaasulle, se pätee yleisesti. Historiallisesti, ennen aineen mikroskooppisen rakenteen selvittämistä, *entropia määriteltiin* hyvin samantyyppisen säännön kautta. Modernissa statisessä fysikassa asia on käännetty päinvastoin: tämä on nykyisin *lämpötilan määritelmä!*



**8.26** Selitä omin sanoin entropia. Selitä sekä miten entropia määritellään mikrotilojen kautta että miten entropian muutokset käytännössä lasketaan ideaalikaasulle. Miten entropia liittyy irreversiibeliyyteen ja toiseen pääsääntöön?

## Yhteenvetö: Hiukkasista koostuva aine

### Todennäköisyyslaskenta

- Jos satunnaismuuttujalla  $X$  on  $\Omega$  mahdollista arvoa, joiden todennäköisyydet ovat *yhtä suuret*, kunkin arvon todennäköisyys on  $P = \frac{1}{\Omega}$ . Jos tapahtumaan A kuuluu  $\Omega_A$  satunnaismuuttujan  $X$  arvoa, tapahtuman todennäköisyys on

$$P_A = \frac{\Omega_A}{\Omega}.$$

- Jos satunnaismuuttujan  $X$  mahdolliset arvot ovat  $X_i$  ja näiden todennäköisyydet ovat  $P(X = X_i)$ , satunnaismuuttujan **odotusarvo** on

$$\langle X \rangle = \sum_i P(X = X_i) X_i.$$

- Jos satunnaismuuttuja  $X$  mitataan  $N$  kertaa ja saadaan mittaus tulokset  $x_i$ , näiden keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa mit-

tausten määärän kasvessa

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \langle X \rangle.$$

- Kolmiulotteiselle satunnaisvektorille  $\vec{v}$ , jolle kaikki suunnat ovat yhtä todennäköiset, pätee

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

- Rms-nopeus** on nopeusvektorien neliöiden keskiarvon neliöjuuri

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

### Ideaalikaasu ja ominaislämpökapasiteetti

- Ideaalikaasu** on yksinkertainen malli kaasulle. Mallissa kaasun molekyylejä kuvataan törmäilevinä hiukkasina, kaasun paine on seurausta molekyylien törmäyksistä ja sisäenergia on molekyylien satunnaislukkeseen varastoitunutta energiasta.
- Vapausasteilla** tarkoitetaan atomien ja molekyylien erilaisia tapoja varastoida liike- tai potentiaalienergiaa. Näitä ovat mm. liikkeen ja pyörimisen *eri suunnat*.
- Pyörimisen ja värähtelyn vapausasteet *jäätyvät* matalissa lämpötiloissa, jolloin niihin ei varastoidu energiaa.
- Ekvipartitioperiaatteem** mukaan molekyyleillä on kussakin aktiivisessä vapausasteessa keskimäärin energia

$$\langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

- Ideaalikaasun paine on

$$p = \frac{Nm v_{\text{rms}}^2}{3V} = \frac{Nk_B T}{V},$$

sisäenergia

$$E_{\text{sisä}} = N_{\text{vapaus}} N \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B T$$

ja ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa

$$c_V^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N_A k_B = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R.$$

### Entropia

- Makrotila** tarkoittaa systeemin kuvausta makroskooppisten suureiden kuten lämpötilan, paineen ja tilavuuden avulla.
- Mikrotila** tarkoittaa systeemin kuvausta mikroskooppisten suureiden kuten hiukkasten paikojen ja liikemäärien avulla.
- Eristetyssä systeemissä** kaikkien mikrotilojen todennäköisyydet ovat yhtä suuret. Jos eristetyn systeemin makrotila A vastaa  $\Omega_A$  mikrotilaa, ja systeemillä on kaikkiaan  $\Omega_{\text{kaikki}}$  mikrotilaa, systeemin todennäköisyys olla makrotilassa A on

$$P_A = \frac{\Omega_A}{\Omega_{\text{kaikki}}}.$$

- Makrotilan **entropia** on sen mikrotilojen määärän logaritmi

$$S = k_B \ln \Omega.$$

- Entropia on siis sitä suurempi mitä enemmän mikrotiloja makrotilaan lüöttyy.
- Entropia on ekstensiivinen suure eli systeemin kokonaisentropia on sen osien entropioiden summa

$$S_{\text{kokonais}} = \sum_i S_i.$$

- Eristetty systeemi pyrkii muuttumaan itsestään niihin, että sen entropia kasvaa. Kun entropia on saavuttanut maksimin, systeemi on *tasapainotilassa*, jossa entropia on vakio. *Makroskoopisen eristetyn systeemin entropia ei voi koskaan vähentyä*.

$$\Delta S_{\text{eristetty}} \geq 0.$$

Tämä on *termodynamiikan toinen pääsääntö* entropian avulla lausuttuna.

- Suljettujen ja avointen** systeemien entropia voi vähentyä.
- Eristetyn systeemin prosessit, joissa entropia kasvaa, ovat *irreversiibleitä*. Prosessit joissa entropia on vakio, ovat *reversiibleitä*.
- Ideaalikaasun entropia on

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = N k_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{T}{T_0}.$$

- Lämpötila *määritellään* entropian muutoksena energian suhteella

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{1}{T}.$$

### Sanasto

- lämpö (heat)
- ideaalikaasu (ideal gas)
- yksiatominen (monatomic)
- kaksiatominen (diatomic)
- rms-nopeus (root-mean-square velocity)
- keskiarvo (average)
- satunnaismuuttuja (random variable)
- todennäköisyys (probability)
- odotusarvo (expectation value)
- ominaislämpökapasiteetti (specific heat capacity)
- vapausaste (degree of freedom)

- siirtyminen, translaatio (translation)
- pyöriminen, rotaatio (rotation)
- värähtely, vibraatio (vibration)
- ekvipartito (equipartition)
- mikrotila (microstate)
- makrotila (macrostate)
- multiplisiteetti (multiplicity)
- tilanmuuttuja (state variable)
- tasapainotila (equilibrium state)
- termodynamiikan 2. pääsääntö (2nd law of thermodynamics)
- entropia (entropy)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

**8.1** Kunkin pallon pystysuora nopeus selviää energiaperiaatteella, josta  $v_z = -\sqrt{2gh} = -6.26 \text{ m/s}$  (kun  $z$ -akseli on ylöspäin). Pallojen vaakasuuntaiset nopeudet voivat vaihdella, mutta tällä ei ole väliä. Yksittäisen pallon nopeuden muutos törmäyksessä on  $\Delta v_z = -2v_z = 12.5 \text{ m/s}$ , joten kunkin pallo saa maanpinnalta impulssin

$$I_{z,\text{maa} \rightarrow \text{pallo}} = m\Delta v_z = 0.63 \text{ kgm/s}. \quad (8.91)$$

Maanpinta saa törmäyksessä yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen impulssin, ja koska palloja on sata, kokonaisimpulssi on

$$I_{z,\text{maa, kokonais}} = -NI_{z,\text{maa} \rightarrow \text{pallo}} = -63 \text{ kgm/s}. \quad (8.92)$$

**8.2** Jos säiliön koko pienenee, hiukkasten tarvitsee kulkea lyhyempi matka törmäysten välillä, jolloin törmäyksejä tapahtuu enemmän ja paine kasvaa. Jos hiukkasten vauhti kasvaa, hiukkaset kulkevat törmäysten välisen matkan lyhyemmässä ajassa. Tämä aiheuttaa paineeseen ensimmäisen kertaluvun riippuvuuden hiukkasten nopeudesta. Lisäksi hiukkaset tuottavat törmäyksissä sitä suuremman impulssin mitä nopeammin ne liikkuvat, ja tämäkin on suoraan vauhtiin verrannollinen tekijä paineessa. Yhdessä nämä tekijät johtavat siihen, että paine on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

**8.3 (a)**  $\langle v_x \rangle = 0 \text{ m/s}$ ,

**(b)**  $\langle v_y \rangle = 0 \text{ m/s}$ ,

**(c)**  $\langle \vec{v} \rangle = \bar{0} \text{ m/s}$ , **(d)**  $\langle v \rangle = 3.519 \text{ m/s}$ , **(e)**  $\langle v_x^2 \rangle = 4.667(\text{m/s})^2$ , **(f)**  $\langle v^2 \rangle = 12.667(\text{m/s})^2$ , **(g)**  $v_{\text{rmm}} = 3.559 \text{ m/s}$

**8.4 (a)** Yhtälö  $\langle ab \rangle = a \langle b \rangle$  pätee, jos  $a$  on vakio. Lausekkeessa  $\frac{1}{2}mv^2$  tekijä  $\frac{1}{2}m$  on vakio, jos kaikki hiukkaset ovat samanlaisia ja niillä on sama massa. Tällöin pätee  $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}m \rangle v^2$ .

**(b)** Ei, tähän on helppo keksiä vastaesimerkkejä. Esimerkiksi jos  $a$  saa arvot 1 ja 2 sekä  $b$  arvot 3 ja 4, saadaan  $\langle a \rangle = 1.5$  ja  $\langle b \rangle = 3.5$ , mutta  $\langle ab \rangle = 5.5$  kun taas  $\langle a \rangle \langle b \rangle = 5.25$ . Keskiarvoa ei siis voi ottaa tulosta tekijä kerrallaan. Kaasumallin tapauksessa erityisesti  $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle \langle v \rangle = \langle v \rangle^2$ , joten  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \neq \langle v \rangle$ .

**8.5** Kaasulla on keskimäärin energia  $\frac{1}{2}Nk_B T$  jokaista liikkeen suuntaa kohden, joten neljässä ulottuvuudessa sisäenergia olisi  $4 \times \frac{1}{2}Nk_B T = 2Nk_B T$ .

**8.7** Ominaislämpökapasiteetti hiukkasten määrää kohden on sama, sillä  $n = N/N_A$ , missä  $N_A$  on kaikille aineille sama Avogadron vakio. Siispä  $c^N = \frac{1}{N}C = \frac{1}{nN_A}C = \frac{1}{N_A}c^n$ . Ominaislämpökapasiteetti massaa kohden sen sijaan ei ole sama, koska  $n = m/M$ , missä  $M$  on aineesta riippuva moolimassa. Niinpä  $c^m = \frac{1}{m}C = \frac{1}{nM}C = \frac{1}{M}c^n$ .

**8.8** Edellisen vastauksen perusteella siis  $c^N = \frac{1}{N_A}c^n$ , joten  $c_{V,\text{yksiatominen}}^N = \frac{3}{2}k_B$ . Yleisesti ainemäärää kohden lasketut tulokset saadaan muuttua hiukkasten lukumäärää kohden lasketuiksi arvoiksi, kun lausekkeissa korvataan kaasuvakio  $R$  Boltzmannin vakiolla  $k_B$ .

**8.9** Translaatiovapaustekijä on aina kolme. (a) Rotaatiovapaustekijä on kolme, kun molekyylit on aidosti kolmiulotteinen, koska tällöin molekyylit voi pyöriä kolmen kohtisuoran pyörimisakselin ympäri. (b) Rotaatiovapaustekijä on vain kaksi, jos molekyylit on suora. Tällöin molekyylit ei nimittään pääse pyörimään symmetria-akselinsa ympäri.

**8.10** Ei. Jos molekyylit pääsevät värähteleämään, sen liikkeeseen täytyy vaikuttaa jokin vuorovaikutus, joka vetää molekyylin atomeita aina takaisin kohti tasapainoasemaa. Tähän vuorovaikutukseen täytyy liittyä myös potentiaalienergiaa. Jos tällaista vuorovaikutusta ei ole, liike ei voi olla värähtelyä vaan suoraviivaista tai pyörivää liikettä.

**8.11** Oletetaan, että molekyylit eivät ole suoria (ks. vastaus 8.9), jolloin molekyyllillä on 3 translaatio- ja 3-rotaatiovapaustekijä. Kuhunkin värähtelytapaan liittyy kaksi vapausastetta (liike-energian ja potentiaalienergian), joten jos yksi värähtelytapa on puoliksi jäätynyt, se vastaa yhtä vapausastetta. Yhteensä vapausastetta on siis noin 7. Ominaislämpökapasiteetti on tällöin  $c_V^n = \frac{7}{2}R$

**8.13** Puuttuvat makrotilat ovat  $E_{\max} = 0\epsilon$  ja  $E_{\max} = 1\epsilon$ . Näitä puuttuvat, koska ei ole olemassa sellaista mikrotilaan, jossa yhdelläkään hiukkasella ei olisi vähintään kahta yksikköä energiasta.

**8.14** Todennäköisydet ovat  $P(E_{\max} = 6\epsilon) = 4/84 = 0.048$ ,  $P(E_{\max} = 5\epsilon) = 12/84 = 0.143$ ,  $P(E_{\max} = 4\epsilon) = 24/84 = 0.286$ ,  $P(E_{\max} = 3\epsilon) = 34/84 = 0.405$ ,  $P(E_{\max} = 2\epsilon) = 10/84 = 0.119$ .

**8.15** Kullakin hiukkasella on keskimäärin  $1/200$ -osa kokonaisenergiasta eli  $500/200 = 2.5$  yksikköä. Huomaa, että tämä on vain keskiarvo. Jos yhden hiukkasen energia voi saada vain arvot 0, 1, 2, 3 jne., yhdelläkään hiukkasella ei ole koskaan täsmälleen 2.5 yksikköä energiasta.

**8.16** Energian A odotusarvo on

$$\langle E_A \rangle = 0 \cdot P(E_A = 0) + 1 \cdot P(E_A = 1) + \dots + 10 \cdot P(E_A = 10) \quad (8.93)$$

$$= 0 \cdot \frac{3003}{92378} + 1 \cdot \frac{8008}{92378} + \dots + 10 \cdot \frac{286}{92378} = \frac{369512}{92378} = 4. \quad (8.94)$$

Ekvipartitioteoreeman mukaan energia jakautuu systeemin hiukkasiille tasaisiin osiin, joten osassa A pitääkin olla täsmälleen  $4/10$  systeemin kokonaisenergiasta.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

**8.17** Kun hiukkasia on 10, kuvaajan alle jäänyt pinta-ala on melkein puolet koko pinta-alasta eli todennäköisyys on hieman alle 0.5. Kun hiukkasia on 100, suurin osa pinta-alasta on kuvan keskikohdan vasemmalla puolella. Rajan  $E_A = 0.5E_{\text{kokonais}}$  oikealle puolelle jää noin kymmenys kokonaispinta-alasta, joten todennäköisyys on noin 0.1. Kun hiukkasia on 1000, kaikki pinta-ala on rajan vasemmalla puolella, joten todennäköisyys on nolla. Tässä on kysymys siitä, että kun systeemin koko kasvaa, osan A energian todennäköisyysjakauma kaventuu pisteen  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$  ympäristöön. Toisin sanoen mitä suurempi systeemi on kyseessä, sitä epätodennäköisemmin suuret poikkeamat ekipartitioteoreeman ennusteesta  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$  tulevat. Kun systeemi on makroskooppinen eli siinä on luokkaa  $10^{20}$  hiukkasta, osan A energia on mittaustarkkuuden rajoissa täsmälleen  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$  todennäköisygyllä yksi.

**8.19 (a)**  $S_A = 3.2 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$ ,  $S_B = 6.4 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$ ,  $S_C = 9.5 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$ .

(b) Mikrotiloja on  $\Omega = \Omega_A \Omega_B \Omega_C = 2.1 \cdot 10^{601}$ .

(c) Entropia on  $S = S_A + S_B + S_C = 1.9 \cdot 10^{-20} \text{ J/K}$ . Tämän voisi laskea myös mikrotiloista,  $S = k_B \ln \Omega = 1.9 \cdot 10^{-20} \text{ J/K}$ .

**8.20 (a) (i)**  $S_A = 3.00k_B$ ,  $S_B = 6.67k_B$ ,  $S_{\text{kokonais}} = 9.67k_B$ , (ii)  $S_A = 3.56k_B$ ,  $S_B = 6.14k_B$ ,  $S_{\text{kokonais}} = 9.69k_B$ , (iii)  $S_A = 4.03k_B$ ,  $S_B = 5.53k_B$ ,  $S_{\text{kokonais}} = 9.55k_B$ .

(b) Lasketut arvot vastaavat kuvan piirrettyjä pisteitä. Huomaa erityisesti, että  $S_A$  kasvaa, kun  $E_A$  kasvaa ja  $S_B$  pienenee. Kokonaisentropialla on kuitenkin maksimi, kun  $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ .

(c) Pätee. Yllä esitettyissä numeroissa on hiukan pyörityksistä johtuvaa epätarkkuutta, mutta tarkasti laskien yhtälö on voimassa.

**8.21 (a)** Jokainen esine voidaan asettaa toisista riippumatta kuudelle eri tasolle. Ensimmäisellä esineellä on siis 6 eri paikkaa. Toisella esineellä on myös 6 eri paikkaa, joten kahdella esineellä on yhteensä  $6^2 = 36$  järjestystä. Kolmannellakin esineellä on kuusi paikkaa, joten esineillä on yhteensä  $6^3 = 216$  järjestystä. Yleisesti  $N$  erilaista kappaletta voidaan asettaa  $M$  paikkaan  $\Omega = M^N$  tavalla.

(b) Ensimmäinen esine voidaan nyt asettaa 6 eri paikkaan. Toiselle jää sitten 5 eri paikkaa, koska se ei voi olla samalla hyllyllä kuin ensimmäinen. Yhteensä olisi siis  $5 \cdot 6 = 30$  järjestystä, jos esineet olisivat erilaiset. Kolmannella esineellä on vielä 4 mahdollista paikkaa, joten yhteensä järjestyksiä on  $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ . Lisäksi, koska esineitä ei voi tunnistaa, esineiden vaihtaminen keskenään ei tuota uusia järjestyksiä. Siispä tilanteet, joissa esimerkiksi esine 1 on ylimmällä hyllyllä ja esine 2 toiseksi ylimmällä, lasketaan samaksi tilanteeksi kuin jos 1 olisi toisiksi ylimmällä ja 2 ylimmällä hyllyllä. Kolme esinettä voidaan asettaa yhteensä 6 erilaiseen järjestykseen, joten edellinen tulos 120 pitää jakaa vielä 6:lla, jotta saadaan oikea lopputulos. Erilaisia järjestyksiä on siis kaikkiaan vain 20. Kysymys on sama kuin miten monella tavalla  $M$  tasosta voidaan valita  $N$  kpl. Yleisesti vastaus on  $\frac{M!}{N!(M-N)!}$ . Tämän tehtävän opetus on se, että statistiikka riippuu siitä, millaisia kappaleita tutkitaan. Tekstissä hiukkasia käsitellään kohdan (a) tapaan kuin ne olisivat toisistaan erotettavia. Fysiikassa hiukkaset ovat kuitenkin tavallisesti tunnistamattomia, joten itse asiassa yleensä pitäisi laskea kohdan (b) tapaan. Tämä on kuitenkin hieman monimutkaisempaa, joten yksinkertaisuuden vuoksi tulokset on johdettu kohdan (a) laskutavalla.

**8.22** Kaasun tilavuudesta riippuvan entropian muutos on  $\Delta S = Nk_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}} = nR \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}$ .

(a) (i)  $\Delta S = 3.37 \text{ J/K}$ , (ii)  $\Delta S = 5.76 \text{ J/K}$ .

(b) (i)  $\Delta S = 14.90 \text{ J/K}$ , (ii)  $\Delta S = 5.76 \text{ J/K}$ . Tilavuuden kaksinkertaistuessa entropia muuttuu siis yhtä paljon riippumatta alkuperäisestä tilavuudesta.

(c) Entropian muutos ei riipu vakiosta  $V_0$ .

**8.23 (a)** Ympyrään mahtuu 7 naulaa: Yhden hyvin lyhyen naulan kärki on likimain keskipisteessä ja 6 1 cm pituista naulaa voidaan asettaa  $60^\circ$  kulmiin toisiinsa nähdyn.

(b) Ympyrän keskelle voi asettaa samat 7 naulaa kuin kohdassa (a). Tämän lisäksi ympyrän kehälle mahtuu kahdentoinsta 2 cm -pituisen naulan kärjet. Yhteensä siis 19 naulaa.

(c) Ympyrän keskelle mahtuu samat 19 naulaa kuin kohdassa (b). Lisäksi kehälle mahtuu nyt 3 cm -pituisten naulojen kärkiä 18 kpl. Yhteensä siis 37 naulaa.

(d) Kun ympyrän säde kasvaa, ympyrän reunalle mahtuu aina enemmän ja enemmän lisää naulojen kärkiä. Niinpä naulojen määrä kasvaa nopeammin kuin ympyrän säde. Voit ajatella vaikkapa niin, että kunkin naulan kärjen kohdalle piirretään piste. Näiden pisteen tiheys on ympyrässä likimain vakio (jos nauloja on maksimimäärä), jolloin naulojen lukumäärän täytyy olla verrannollinen ympyrän pinta-alaan. Siispä likimain  $N_{\text{naula}} \propto r^2$ . (Kohdissa (a)–(c) itse asiassa  $N_{\text{naula}} = 1 + (3 \text{ cm}^{-1})r + (3 \text{ cm}^{-2})r^2$ , mutta tämä ei päde täsmälleen suurilla ympyröillä.)

Tehtävä liittyy nopeusvektoreiden entropiaan. Kaksiulotteiseen ympyrään mahtuvien nuolien määrä on verrannollinen ympyrän pinta-alan. Kolmiulotteiseen palloon mahtuvien nuolien määrä on puolestaan verrannollinen pallon tilavuuteen.

**8.24** Hiukkisen paikkaa kuvaa kolme koordinaattia täysin riippumatta siitä, voiko hiukanen esimerkiksi pyöriä. Niinpä entropian tilavuustermi ei riipu vapausasteiden määrästä. Periaatteessa molekyyllillä, joka voi olla eri asennoissa ja siis pyöriä, on suurempi entropia kuin pistemäisellä hiukkasella, koska myös molekyylin eri asennot luovat erilaisia tiloja. Molekyyllillä on kuitenkin aivan yhtä paljon erilaisia asentoja riippumatta siitä, kuinka suressa tilavuudessa se on, joten tämä osuuus esimerkiksi kaksiatomisen kaasun entropiasta on vakio, eikä sitä tarvitse huomioida entropian muutoksia laskettaessa.

**8.25** Derivaatta on kuvaajan kulmakerroin, joten kun energia kasvaa, kulmakertoimen täytyy pienentyä. Kuvaajasta nousee siis pienillä energioilla jyrkästi ja mitä suurempi sisäenergia systeemillä on, sitä loivemmin entropian kuvaaja kasvaa energian funktiona.

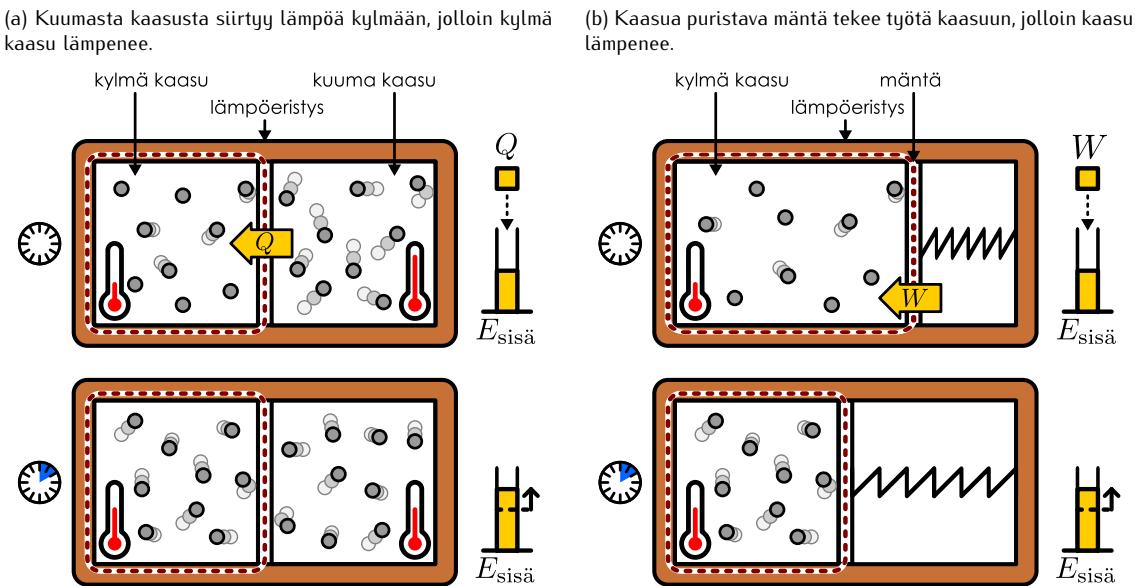
# 9 Termodynamiikka

Edellisissä luvuissa tutustuimme jatkuvaan ainetta kuvaaviin perussuureisiin kuten paineen ja lämpötilaan ja selitimme näiden suureiden käyttäytymistä tutkimalla jatkuvan ja hiukkasista koostuvan aineen malleja. Tässä luvussa yhdistämme nämä näkökulmat yhdeksi lämpöilmiöiden yleiseksi teoriaksi eli termodynamiikaksi ja tutkimme tämän sovelluksia. Termodynamiikka syntyi 1800-luvulla tarpeesta ymmärtää etenkin höyrykoneiden toimintaa, ja siksi nimenomaan energian muodonmuutosten kuvaaminen on termodynamiikan keskeinen tavoite. Höyrykoneet kuten modernit polttomoottoritkin toimivat tuottamalla polttoaineen avulla korkeita lämpötiloja ja muuttaen sitten osan tästä lämpöenergiasta mekaaniseksi energiaksi. Vastaavalaisia prosesseja tapahtuu yleisesti myös luonnossa. Esimerkiksi auringon lämmittäessä maata epätasaisesti syntyy lämpötilaeroja, ja ilmakehän säälmiöt saavat tätä kautta energiansa. Tällaisia epäjärjestynyttä energian järjestyneeksi mekaaniseksi energiaksi muuttavia prosesseja kutsutaan yleisesti lämpövoimakoneiksi, ja termodynamiikka kuvailee tällaisten prosessien toimintaa. Erityisesti osoittautuu, ettei epäjärjestynyttä energian voi muuttaa järjestyneeksi miten tahansa, ja termodynamiikka selittää millaisia rajoituksia tähän liittyy.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- muotoilla termodynamiikan pääsäännöt matemaattisesti
- määritellä kvasistaattinen, isoterminen, isokorinen, isobaarinen, isentrooppinen ja adiabaattinen prosessi sekä selittää ideaalikaasun tilanmuuttujien käyttäytymisen näissä prosesseissa
- laatia termodynamiisia prosesseja kuvaavia pV- ja entropiadiagrammeja
- määrittää lämpövoimakoneen tekemä työ ja hyötytuhde
- kuvilla Carnot'n kone ja arvioida lämpövoimakoneiden rajoituksia tämän koneen perusteella

Kuva 9.1: Systeemin kokonaisenergia voi muuttua jos systeemi vaihtaa energiaa ympäristönsä kanssa. Tämä voi tapahtua lämmön tai työn kautta.



## 9.1 Kvasistaattiset prosessit

### Ensimmäinen pääsääntö

Kuvassa 9.1 on tarkasteltu kahta prosessia, joissa toisessa systeemi vastaanottaa energian lämpönä ja toisessa työnä. Systeemi on kummassakin tapauksessa kaasusäiliö, ja koska säiliö on paikoillaan, systeemillä on vain sisäenergiaa, joka ilmenee kaasun lämpötilana. Alkutilanteessa kaasun lämpötila on matala molemissa esimerkeissä. Ensimmäisessä prosessissa kaasusäiliö on kosketuksissa toisen, kuumaa kaasua sisältävän säiliön kanssa, jolloin lämpöä virtaa kuumasta säiliöstä kylmään. Säiliöt on eristetty muusta ympäristöstään, joten kaikki kuuman kaasun menettämä energia siirrytään kylmään kaasun ja prosessi jatkuu kunnes kaasujen lämpötilat ovat samat. Prosessissa systeemin sisäenergia kasvaa täsmälleensä yhtä paljon kuin kaasun siirrytävä lämpöä.

Toisessa esimerkissä kaasusäiliön yksi sivu on liikkuva mäntä, jota jousi puristaa sisään. Säiliö on tässäkin tapauksessa lämpöeristetty muusta ympäristöstään, joten säiliön ja ympäristön välillä ei siirry lämpöä,  $Q = 0$ . Tällainen prosessi on *lämmönvaihdoton* eli **adiabaattinen**. Kaasun paine työntää mäntää ulospäin, joten mäntään kohdistuu sekä paineen tuottama työntövoima ulospäin että jousen tuottama voima sisäänpäin. Männän siirtyessä kaasun tilavuus pienenee ja sen paine kasvaa, ja tällöin myös ulospäin työntävä voima kasvaa. Samalla jousi oikenee, jousivoima heikkenee ja mäntä asettuu loppujen lopuksi asemaan, jossa jousivoima ja kaasun paineen tuottama voima ovat tasapainossa. Prosessin aikana jousen pituus muuttuu ja siihen sitoutunut elastinen potentiaalienergia vähenee. Jousivoima tekee kuitenkin mäntään työtä ja mäntä tekee edelleen kaasun työtä, joten jousen potentiaalienergia siirrytää työnä kaasun sisäenergiaksi.

Kummassakin prosessissa pätee energian säilymislaki eli termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö. Jos systeemi vaihtaa energian ympäristönsä kanssa, systeemin kokonaisenergian muutoksen täytyy olla aina täsmälleensä yhtä suuri kuin systeemin ja ympäristön välillä siirtyneen energian määrä, koska energian ei voi luoda eikä hävittää vaan vain siirtää. Systeemin energian muutos voidaan siis kirjoittaa systeemin vastaanottaman ja luovuttaman lämmön ja työn avulla muodossa

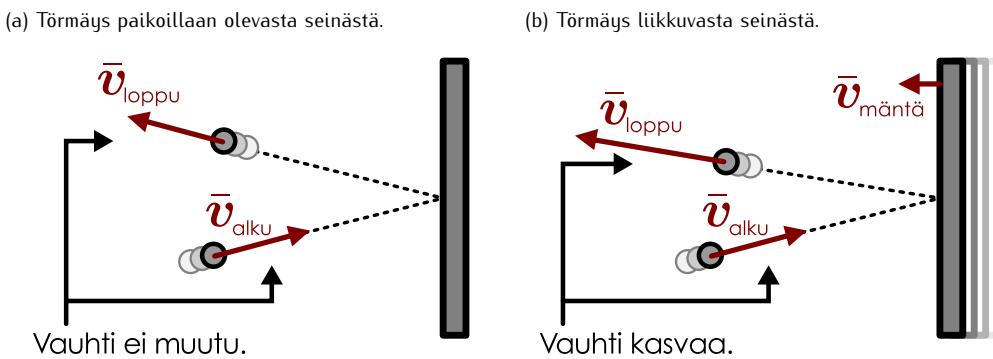
$$\Delta E_{\text{kokonais}} = Q_{\text{kokonais}} + W_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}} + W_{\text{sisään}} - W_{\text{ulos}}. \quad (9.1)$$

Tässä alaindeksi "sisään" viittaa systeemin vastaanottamaan energiaan ja "ulos" systeemin luovuttamaan energian. Monissa lähteissä lämmölle ja työlle käytetään vain symbolita  $Q$  ja  $W$ , jolloin pitää aina erikseen tarkistaa merkitsevätkö nämä systeemin saamaa vai luovuttamaa energian. Tässä esimerkissä kaasusäiliö oli kiinnitetty paikoilleen, joten sen liike- tai potentiaalienergia ei voi muuttua kummassakaan prosessissa. Niiinpä kaasun sisäenergia kasvaa riippumatta siitä, vastaanottaako kaasu energian lämpönä vai työnä. Edelleen koska kaasun lämpötila on suoraan verrannollinen kaasun sisäenergiaan, kaasun lämpötilan täytyy kasvaa kummassakin tapauksessa.

Olemme jo aikaisemmin nähneet esimerkkejä prosesseista, joissa työ muuttuu lämpöenergiaksi. Dissipatiiviset vuorovaikutukset kuten kitka toimivat juuri näin. Kuvan 9.1 (b) prosessissa ei kuitenkaan ole kyse

## TERMODYNAMIKKAA

Kuva 9.2: Kaasumolekyylin vauhti ei muutu sen kimmotessa paikoillaan olevasta seinästä, mutta vauhti muuttuu jos seinä liikkuu.



kitkasta vaan mekaaninen energia muuttuu lämpöenergiaksi kaasumolekyylien ja männän välissä *elastisessa* törmäyksissä kuten kuvassa 9.2 on havainnollistettu. Kun kaasumolekyyli törmää elastisesti paikoillaan olevaan seinään, sen nopeusvektori kääntyy mutta vauhti ei muutu. Sen sijaan liikkuvaan mäntään törmäävän molekyylin *vauhti kasvaa*, jos mäntä liikkuu kohti molekyylia. Aivan samaan tapaan tennispallo voi saada hyvin suuren nopeuden, kun sitä lyö mailalla "vastapalloon". Tällä tavalla liikkuva mäntä lisää kaasumolekyylien liike-energiaa (menettäen samalla itse energiota), ja molekyylien edelleen törmällessä keskenään tämä liike-energia jakautuu niiden kesken satunnaisesti. Niinpä kaasun sisäenergia kasvaa ja lämpötila nousee. Vastaavasti jos mäntä liikkuu törmäyshetkellä poispäin kaasumolekyylistä, molekyyli työntää törmäyksessä mäntää suurempaan vauhtiuin menettäen samalla itse omaa vauhtiaan. Tällöin kaasun sisäenergia pienenee ja männän liike-energia kasvaa.



**9.1** Molekyylin nopeus  $x$ -suunnassa on 200 m/s ja männän nopeus on  $-1$  m/s. Molekyyli törmää suoraan mäntää vasten. (a) Mikä on molekyylin alkunopeus koordinaatistossa, jossa mäntä on paikoillaan? (b) Mikä on molekyylin loppunopeus tässä koordinaatistossa? (c) Mikä on molekyylin loppunopeus alkuperäisessä koordinaatistossa, jossa mäntä liikkuu?

Jos mäntä liikkuu molekyylien suuntaan, se puristaa kaasua kokoon ja kaasun tilavuus pienenee. Jos taas mäntä liikkuu poispäin kaasumolekyyleistä, kaasu laajenee ja sen tilavuus kasvaa. Niinpä voimme yleisesti päätellä, että *kaasua puristettaessa pienempään tilavuuteen siihen tehdään työtä* kun taas *kaasun laajentuessa suurempaan tilavuuteen kaasu tekee työtä*. Tämä on oleellinen ero esimerkiksi kitkaan verrattuna. Jos kappaletta vedetään pitkin karkeaa pintaan, kitka muuttaa aina järjestynytä mekaanista energiota epäjärjestyneeksi lämpöenergiaksi. Männällisen kaasusäiliön avulla sen sijaan voi myös muuttaa lämpöenergiaa takaisin mekaaniseksi energiaksi.

### Kvasistaattisuus

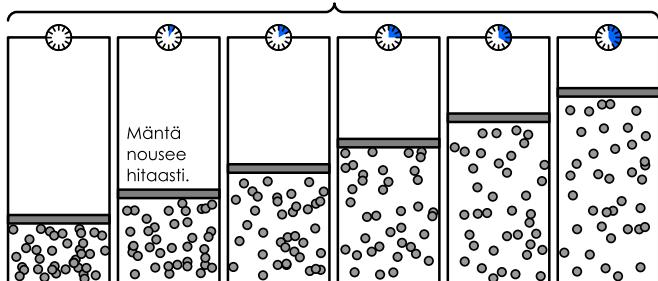
Kitkan vaikutuksesta hidastuvan kappaleen liike on aina irreversiibeli prosessi, koska kitka kuluttaa mekaanista energiota lämpöenergiaksi eikä koskaan muuta lämpöenergiaa takaisin mekaaniseksi energiaksi. Kaasun puristuminen tai laajeneminen sen sijaan voi olla reversiibeli tai irreversiibeli riippuen siitä, miten prosessi tapahtuu. Kuvassa 9.3 (a) on esitetty kaasun laajentuminen männän liukkuessa *hitaasti* poispäin kaasusta. Koska kaasumolekyylit liikkuvat hyvin nopeasti mäntään verrattuna, ne täyttävät säiliön tasaisesti koko prosessin ajan. Kaasun laajetessa sen paine voi muuttua, mutta jokaisella ajan hetkellä kaasun paine on likimain sama kaikkialla säiliön sisällä. Samoin lämpötila voi prosessin lopussa olla eri kuin alussa, mutta silti kullakin ajan hetkellä säiliön ylä- ja alapäällä on sama lämpötila. Tällainen likimain termodynamiassa tasapainossa tapahtuva prosessi on **kvasistaattinen** (kiasi- 'näennäinen', staattinen 'paikoillaan').

Kuvassa 9.3 (b) on esitetty samanlainen laajeneminen, mutta nyt mäntä liikkuu *nopeasti* kaasumolekyyleihin verrattuna. Tällöin säiliön tilavuus kasvaa nopeammin kuin kaasu ehtii laajentua ja säiliön yläosaan syntyy hetkeksi alue, jossa ei ole lainkaan kaasumolekyylejä eli siis tyhjiö. Nyt systeemi ei selvästi käännä ole prosessin aikana tasapainossa, koska paine säiliön alasassa on suurempi kuin säiliön yläosassa. Kaasusäiliön *ekstensiiviset* suureet kuten tilavuus ovat prosessin aikana hyvin määritellyt, mutta *intensiiviset* suureet kuten lämpötila ja paine ovat erilaiset säiliön eri osissa, joten ei ole mielekästä edes puhua "koko kaasun paineesta". Tämä prosessi ei siis ole myöskään kvasistaattinen, koska systeemi ei ole sen aikana tasapainossa.

Kuva 9.3: Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on aina likimain termodynamiikassa tasapainossa.

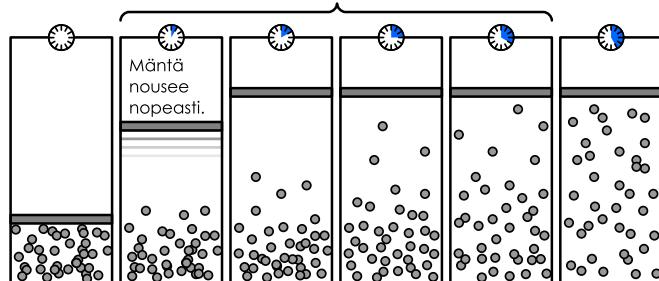
(a) Kvasistaattinen prosessi: kaasu laajenee hitaasti.

Tasapaino: kaasu täyttää säiliön tasaisesti koko prosessin ajan.



(b) Ei-kvasistaattinen prosessi: kaasu laajenee tyhjään tilaan.

Tasapaino Epätasapaino: kaasu ei ole tasaisesti jakautunut. Tasapaino



**9.2** Tarkastellaan systeeminä suljettua kaasusäiliötä. Millä seuraavista suureista on systeemissä aina jokin täsmällinen arvo ja millä tällainen arvo on olemassa vain tasapainossa? (a) paine, (b) tilavuus, (c) lämpötila, (d) ainemäärä, (e) entropia, (f) kokonaisenergia.

Hitaasti tapahtuvan kvasistaattisen laajenemisprosessin voi ajatella tapahtuvan myös käännekkäin, jolloin kaasu puristetaan hitaasti kokoon. Tällöin prosessi näyttää täsmälleen samanlaiselta kuin laajentuminen paitsi että se tapahtuu takaperin. Laajentuva kaasu tekee työtä, jolloin kaasun sisäenergia vähenee. Puristettaessa kaasun tehdyään työtä, jolloin kaasun sisäenergia kasvaa. Jos kaasun annetaan ensin laajentua ja sitten se puristetaan kasaan, systeemi päätyy täsmälleen samaan tilaan kuin mistä prosessi lähti liukkeelle. Prosessi on *reversiibeli*, koska se voi tapahtua samanlaisena alusta loppuun tai lopusta alkun.

Sen sijaan nopeasti tapahtunut laajeneminen ei voi tapahtua samanlaisena ajassa takaperin. Jos näin tapahtuisi, kaasumolekyylien pitäisi yhtäkkiä pakkautua säiliön alasaaan *ennen kuin mäntää puristetaan*. Yksittäinen molekyyli voi aina ajautua sattumaalta säiliön alasaaan, mutta on äärimmäisen epätodennäköistä, että makroskooppisen kaasun *kaikki* molekyylit yhtäkkiä sattuisivat päätyämään samalle puollelle säiliötä. Toki kaasun voi puristaa takaisin kokoon, mutta tällöin se ei päädy samaan tilaan kuin missä se prosessin alussa oli. Levitessään tyhjään tilaan kaasumolekyylit eivät törmää mäntään eivätkä siis myöskään tee työtä, joten nopeassa laajenemisessa kaasun sisäenergia ei muudu. Kaasun puristaminen kokoon kuitenkin vaatii työtä, joten jos kaasu puristetaan takaisin alkuperäiseen tilavuuteen, se päätyy tilaan, jossa sen sisäenergia ja siis lämpötila on suurempi kuin alkutilassa. Prosessi on siis *irreversiibeli*.

Prosessi ei voi olla reversiibeli ellei se ole kvasistaattinen. Tämä johtuu siitä, että ei-kvasistaattisessa prosessissa systeemi ei ole tasapainossa. Systeemi pyrkii aina tasapainoon eikä koskaan pois tasapainosta, ja niinpä poissa tasapainosta olevan systeemin täytyy kehittyä irreversiibelisti. Esimerkiksi tyhjään tilaan levitvä kaasu pyrkii täytämään kaasusäiliön tasaisesti, eikä kaasun levitminen säiliöön voi tapahtua takaperin. Kvasistaattiset prosessit eivät kuitenkaan välittämättä ole reversiibeileitä. Kuvaan 9.3 (a) kvasistaattinen prosessi on reversiibeli jos mäntä on kitkaton, mutta jos mäntää vaikuttaa kitka (kuten todellisuudessa aina tieteenkin vaikuttaa), tämäkin prosessi on irreversiibeli.



**9.3** Mitkä näistä prosesseista ovat kvasistaattisia tai reversiibeileitä? (a) Sokeri liukenee kahviin. (b) Kupissa oleva kahvi jäähtyy. (c) Ilmapallo laajenee ulkoisen ilmanpaineen pienentyessä. (d) Ilmapallo poksahtaa ja sen sisältämä helium levää ympäröivään ilmaan.

### Kvasistaattisen prosessin entropia

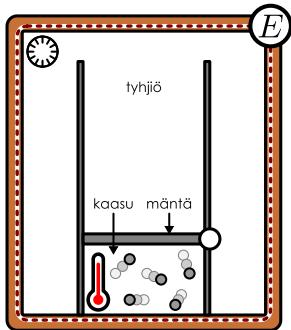
Seuraavaksi tarkastelemme entropian muutoksia kaasun laajentuessa. Tätä varten on kuitenkin syytä määritellä tarkemmin, millaista systeemiä kulloinkin tarkastelemme. Etenkin kaasusäiliön ympäristö vaikuttaa prosessien kulkuun, koska kaasu voi esimerkiksi vastaanottaa lämpöä riippuen säiliötä ympäröivän aineen ominaisuuksista. Tilanteen täsmentämiseksi laajennamme tarkasteltavia systeemejä kuten kuvissa 9.4 ja 9.5: ajatellaan, että kaasusäiliöiden ympärillä on suurempi, täysin eristetty ja tyhjä säiliö. Tämä suurempi säiliö muodostaa *eristetyn systeemin*, joten sen kokonaisenergian täytyy olla energian säilymislain perusteella vakio. Tyhjiöllä ei ole sisäenergiaa, joten kaasu ei siis vaihda myöskään ympäröivän säiliön kanssa lämpöä. Lisäksi termodynamikan toisen pääsäännön perusteella eristetyn systeemin entropia ei voi vähentyä, joten suuremman säiliön kokonaisentropian täytyy joko olla vakio tai kasvaa kaikissa prosesseissa.

Kuvassa 9.4 mäntä siirtyy nopeasti ylös ja kaasu saa laajentua vapaasti tyhjään tilaan. Männän nopea liike voidaan toteuttaa esimerkiksi pienellä moottorilla. Jos männän massa on hyvin pieni, tämä vaatii vain vähän

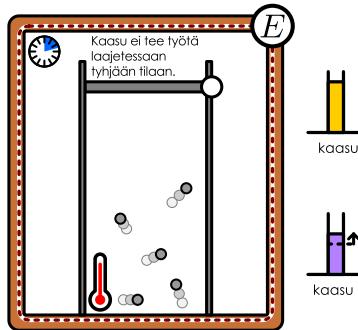
## TERMODYNAMIINKA

Kuva 9.4: Kaasun ei-kvasistaattinen adiabaattinen laajeneminen. Kaasu laajenee tyhjiään tilaan. Sen molekyylit eivät tällöin törmää liukkuvaan mäntään eikä niiden vauhti muutu. Siispä kaasun sisäenergia on vakio.

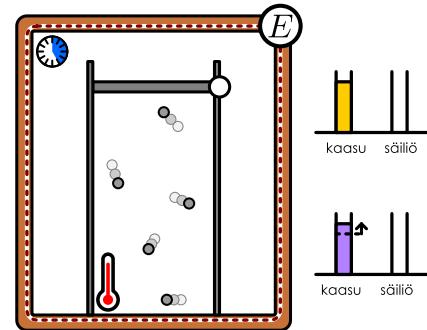
(a) Alkutila.



(b) Vapaa laajeneminen.

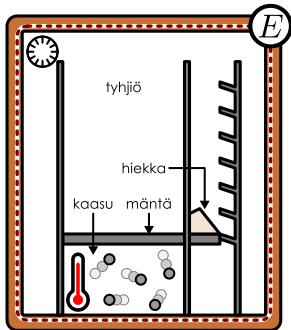


(c) Kaasun entropia on kasvanut.

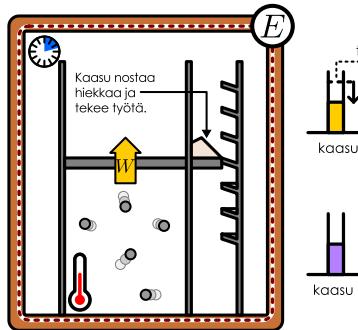


Kuva 9.5: Kaasun kvasistaattinen adiabaattinen laajeneminen. Kaasu laajenee työntämällä mäntää, mutta tästä jarruttaa männän päällä olevan hiekan paino. Hiekan valuessa pois kaasun paine työntää mäntää ja hiekkaa ylöspäin, jolloin kaasumolekyylit hidastuvat ja kaasun sisäenergia vähenee.

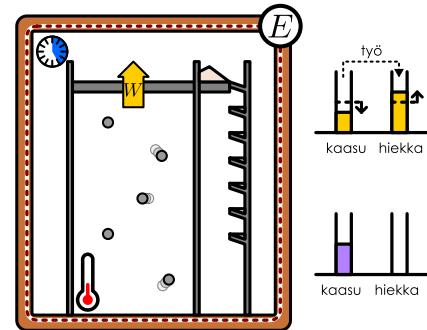
(a) Alkutila.



(b) Kaasu tekee työtä.



(c) Kaasun energia on pienentynyt.



energiaa ja männän liikkutamisen vaikutus systeemin entropiaan on pieni. Niinpä ei oikeastaan ole väliä, kuinka mäntä nostetaan, kunhan se vain tapahtuu nopeasti. Männän liikkuessa nopeasti molekyylit eivät ehdi törmätä siihen, jolloin kaasu ei tee laajetessaan mäntään työtä. Kaasun ympärillä on tyhjiö, jolla ei ole sisäenergiaa, joten kaasuun ei voi myös käään siirtää lämpöä. Niinpä kaasun sisäenergia ei prosessissa muutu. Kaasumolekyylit liikkuvat laajenemisen jälkeen yhtä nopeasti kuin alkuksi, kaasun lämpötila on lopuksi sama kuin alkuksi, ja kaasun entropian *lämpötilasta riippuva osuus* on vakio. Kaasun tilavuus kuitenkin kasvaa, joten entropian *tilavuudesta riippuva osuus* kasvaa. Niinpä kaasun *kokonaisentropia* kasvaa prosessissa,  $\Delta S_{\text{kaasu}} > 0$ . Tyhjiön mikrotila on aina sama, mitään ei ole missään, joten tyhjiön entropia on *nolla*. Näin ollen systeemin muiden osien entropia ei muutu,  $\Delta S_{\text{säiliö}} = 0$ , ja *systeemin kokonaisentropia kasvaa*,  $\Delta S_{\text{systeemi}} = \Delta S_{\text{kaasu}} + \Delta S_{\text{säiliö}} > 0$ . Näin pitää ollakin, koska prosessi on irreversiibeli ja eristetyn systeemin kokonaisentropian täytyy kasvaa irreversiibelissä prosessissa.

Kuvassa 9.5 on kuvattu vastaava prosessi, kun mäntä nousee hitaasti. Männän hidaski liike voidaan toteuttaa esimerkiksi kasaamalla männän pääälle hiekkaa ja antamalla sen valua hitaasti pois. Systeemi on tasapainossa, kun hiekan painon tuottama mäntää alas painava voima ja kaasun paineen ylöspäin työntävä voima ovat yhtä suuret. Kun hiekkaa valuu pois, mäntää alas painava voima heikkenee ja kaasu pääsee työntämään mäntää ylöspäin. Toisaalta laajenevan kaasun paine pienenee, jolloin systeemi saavuttaa heti uuden tasapainotilan ja prosessi on kvasistaattinen.

Männän noustessa kaasun tekemä työ siirtää kaasun sisäenergiaa hiekan potentiaalienergiaksi. (Kuvassa hiekkaa valuu kaasusäiliöön viereen asetettuun telineeseen. Näin hiekan potentiaalienergian muutos näkyy selkeästi eikä säiliön pohjalle putoava hiekkaa pääse lämmittämään säiliötä.) Nostaminen ei muuta hiekan entropiaa, koska hiekanjyvien tilavuus tai lämpötila ei muutu, joten tässäkin tapauksessa kaasua ympäröivän säiliön entropia on vakio,  $\Delta S_{\text{säiliö}} = 0$ .

Kaasun laajentuessa sen lämpötila laskee, mikä pienentää kaasun entropiaa, mutta samalla kaasun tilavuus kasvaa, mikä kasvattaa entropiaa. Niinpä ei ole itsestäänselvä, kuinka entropia kaikkiaan muuttuu. Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan kuitenkin reversiibleissä prosesseissa eristetyn systeemin kokonaisentropia on vakio. Tässä on kyseessä reversiibeli prosessi eristetyssä systeemissä, joten systeemin

kokonaisentropian täytyy olla tässä prosessissa vakio,  $\Delta S_{\text{kokonais}} = \Delta S_{\text{kaasu}} + \Delta S_{\text{säiliö}} = 0$ . Koska säiliön entropia ei muutu, myöskään kaasun entropia ei siis voi muuttua,  $\Delta S_{\text{kaasu}} = 0$ . Niinpä tässä tapauksessa kaasun lämpötilan ja tilavuuden muutokset muuttavat kaasun entropiaa täsmälleen yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin, jolloin kaasun kokonaisentropia on vakio.



**9.4** Miten kaasun entropia ja energia muuttuvat, kun kaasusäiliötä (a) lämmitetään, (b) jäädytetään, (c) puristetaan, (d) nostetaan, (e) kiihdytetään nopeaan liukkeeseen?

Edelliset prosessit ovat molemmat *adiabaattisia*, koska niissä ei siirrynyt lainkaan lämpöä. Hidas laajeneminen on lisäksi *kvasistaattinen*, koska siinä systeemi on aina likimain termodynamiikassa tasapainossa, ja tässä tapauksessa systeemin *entropia on vakio*. Tällaista vakioentropiassa tapahtuvaa prosessia kutsutaan **isentrooppiseksi** (kreikkaa, isos 'sama'). Samanlainen päättely voidaan toistaa mille tahansa muullekin systeemille, joka tekee työtä mutta ei vaihda lämpöä, ja lopputulos on sama: *systeemin entropia ei muutu kvasistaattisessa adiabaattisessa prosessissa*. Tämä pätee kuitenkin nimenomaan vain kvasistaattisille prosesseille. Kaasun nopea laajeneminen ei ole kvasistaattinen prosessi, ja siinä kaasun entropia kasvaa prosessin irreversiibeliyyden takia.

Tästä tuloksesta voimme myös päätellä, että kaasun entropia *ei voi olla vakio*, jos kaasu käy läpi kvasistaattisen prosessin, joka *ei ole* adiabaattinen. Jos nimittäin kaasua jäädytetään lämpötilaan, kaasun lämpötila laskisi prosessissa enemmän kuin adiabaattisessa prosessissa. Tällöin kaasun entropian lämpötilasta riippuva osuus pieneni enemmän kuin tilavuudesta riippuva osuus kasvaisi, ja niinpä kaasun kokonaisentropia pieneni. Vastaavasti jos kaasua lämmittääsiin, sen lämpötila laskisi vähemmän tai voisi jopa nousta prosessissa. Tällöin kaasun kokonaisentropia kasvaisi. Niinpä olemme päättelleet, että *kvasistaattisessa prosessissa systeemin entropia kasvaa, kun systeemi vastaanottaa lämpöä, ja pienenee, kun systeemi luovuttaa lämpöä*. Tässä on oleellista huomata, että entropia riippuu nimenomaan *lämpöön* siirtynestä energiasta mutta ei työstä. Adiabaattisesti ja kvasistaattisesti laajeneva kaasu tekee työtä, mutta sen entropia on silti vakio.



**9.5** Selitä omin sanoin, mitä tarkoittavat adiabaattinen, kvasistaattinen ja reversiibeli prosessi. Milloin kaasuprosessei on likimain jokin näistä? Miten entropia muuttuu näissä prosesseissa?

## 9.2 Termodynamiiset perusprosesit

Todelliset termodynamiiset prosessit ovat harvoin täsmälleen adiabaattisia, isentrooppisia tai kvasistaattisia, mutta tällaiset ideaaliset mallit ovat usein käyttökelpoisia. Esimerkiksi täydellistä lämpöeristystä ei ole olemassakaan. Kuitenkin jos systeemi on hyvin lämpöeristetty ja prosessi tapahtuu melko nopeasti, sen aikana siirrytään vain hyvin vähän lämpöä ja prosessia voidaan pitää likimain adiabaattisena. Prosesseja kannattaa aina kuvata mahdollisimman yksinkertaisilla malleilla, joten jos prosessi on melkein adiabaattinen, on yleensä helpointa ajatella prosessin olevan täydellisen adiabaattinen.

Tietenkään kaikkia prosesseja ei voi mitenkään pitää adiabaattisena, sillä monesti siirtyvä lämpö vaikuttaa oleellisesti prosessin kulkuun. Seuraavaksi tutustummekin termodynamiisten prosessien kuvaamiseen ja tutkimme muutamien tärkeiden kvasistaattisten prosessityyppien ominaisuuksia.

### PV-diagrammit

Jos systeemi on termodynamiikassa tasapainossa, tilanmuuttujat kuten lämpötila ja paine ovat samat kaikkialla systeemissä. Tällöin systeemin makrotilan voi kuvata yksinkertaisesti listaamalla sen tilanmuuttujien arvot. Lisäksi koska tilanmuuttuja yhdistää tilan yhtälö, systeemin tilan kuvamiseen riittää tuntea vain jotkin tilanmuuttujat. Esimerkiksi jos tunnemme tasapainossa olevan ideaalikaasun ainemääran, paineen ja tilavuuden, voimme määrittää kaasun lämpötilan, entropian ja sisäenergian näiden perusteella.

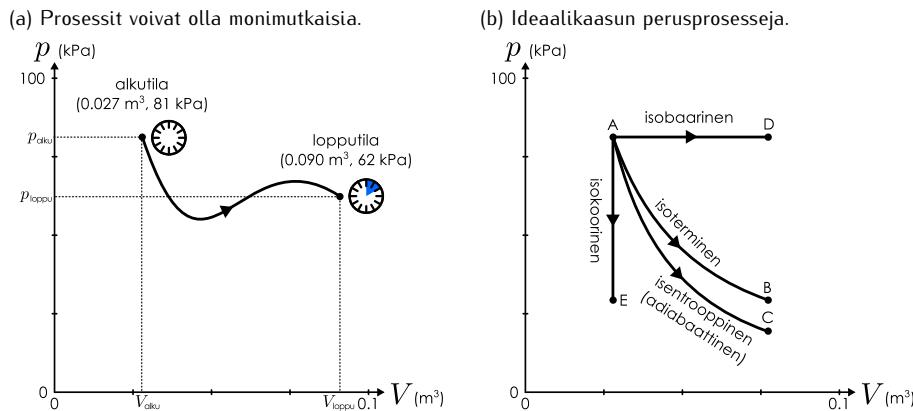


**9.6** Kahdessa kaasusäiliössä on 1.5 mol yksiatomista kaasua. Säiliön A tilavuus on  $0.030 \text{ m}^3$  ja paine 125 kPa, B:n  $0.034 \text{ m}^3$  sekä 105 kPa. Vertaa kaasujen (a) lämpötiloja, (b) entropioita, (c) sisäenergioita.

Termodynamiikassa prosessissa kaasun tila muuttuu, joten myös sen tilanmuuttujien arvot muuttuvat. Jos prosessi ei ole kvasistaattinen, intensiivisillä tilanmuuttujilla kuten paineella ei ole prosessin aikana yksikäsiteistä arvoa, joten pelkät tilanmuuttujat eivät riitä kuvamaan prosessin kulkua. Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on kuitenkin aina likimain tasapainossa ja myös esimerkiksi paineella on jokaisella hetkellä yksi ja sama arvo kaikkialla systeemissä. Tällaisessa tilanteessa prosessin kulku voidaan kuvata esittämällä tilanmuuttujien arvojen muuttuminen prosessin aikana. Jos esimerkiksi tarkastelemme suljetussa kaasusäiliössä tapahtuvaa kvasistaattista prosessia, kaasun ainemäärä on vakio ja kaasun *tilan kullakin hetkellä*

## TERMODYNAMIKKAA

Kuva 9.6: Kvasistaattisen prosessin  $pV$ -diagrammi. Jokainen koordinaatiston piste esittää tasapainotilaan. Kvasistaattinen prosessi koostuu tasapainotilojen sarjasta, jotka sitä kuvaa alkutilaa esittävästä pisteestä lopputilaan esittävään pisteeseen kulkeva käyrä.



määrittelee kaasun paine ja tilavuus. Tällaisen prosessin kulun voi esittää graafisesti yksinkertaisesti piirtämällä koodinaatiston, jonka akseleina on kaasun paine ja tilavuus, eli niin sanotun  **$pV$ -diagrammin** (kuva 9.6). Tällaisessa koordinaatistossa kaasun tilaa yhtenä ajan hetkenä kuvaa siihen **piste**, ja alkutilasta lopputilaan kulkevaa kvasistaattista prosessia kuvaa näitä tiloja vastaavia pisteitä yhdistävä **käyrä**. Periaatteessa diagrammissa ei ole väliä kumpi suure on pysty- ja kumpi vaaka-akselilla, mutta tavallisesti paine piirretään pystyakselille.



**9.7** Voiko ei-kvasistaattista prosessia kuvata  $pV$ -diagrammina? Jos voi, miten? Jos ei voi, miksi ei?

Periaatteessa termodynamiikan prosessi voi piirtää  $pV$ -diagrammiin millaisen käyrän tahansa. Jos kyseessä on esimerkiksi mäennällisessä säiliössä oleva kaasu, kaasun tilavuutta voidaan muuttaa siirtämällä mäntää. Kaasun paine puolestaan riippuu kaasun tilanyhtälön mukaisesti tilavuudesta ja lämpötilasta, ja jos säiliöt lämmitetään tai jäädytetään sopivasti, myös kaasun painetta voidaan muuttaa. Kunhan kaasua ei jäädytetä tai puristeta niin paljon, että se muuttuu nesteeksi, sen tilanmuuttuja voidaan ainakin periaatteessa ohjata kuten halutaan.

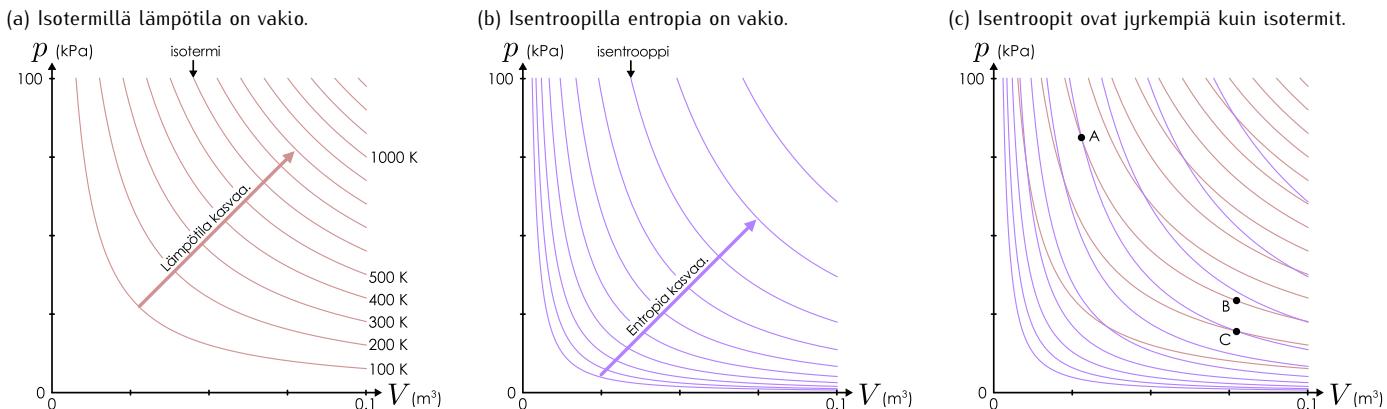
Yleensä ei kuitenkaan ole syytä tavoitella kovin erikoisia prosesseja, koska sellaiset vaativat monimutkaita ohjaamista. Adiabaattisen prosessin ohella tavallisia prosesseja ovatkin sellaiset, jossa jokin tilanmuuttujista pidetään likimain vakiona. Esimerkiksi kaasun tilavuus voidaan pitää vakiona lukitsemalla kaasusäiliön koko. Paine voidaan puolestaan pitää vakiona antamalla kaasusäiliön männän liikkua vapaasti. Jos nimittäin kaasun paine kasvaa suuremmaksi kuin ulkoinen paine, kaasu laajenee työntää mäntää ulospäin. Tällöin kaasun paine pienenee, kunnes se on tasapainossa ulkoisen paineen kanssa.



**9.8** Miten voidaan käytännössä toteuttaa prosessi, jossa kaasun lämpötila on vakio?

Vakiotilavuudessa tapahtuva prosessia kutsutaan **isokoriseksi**, vakiopaineessa tapahtuva **isobaariseksi** ja vakiolämpötilassa **isotermiseksi**. Kuvassa 9.6 (b) on esimerkki tällaisten prosessien  $pV$ -diagrammeista. Koska diagrammissa paine on pysty- ja tilavuus vaaka-akselilla, vakiotilavuudessa tapahtuva isokorista prosessia kuvaa pystysuora jana. Vastaavasti vakiopaineessa tapahtuva isobaarista prosessia esittää vaakasuora jana. Prosessilla on täsmällinen alku- ja lopputila, joten myös prosessin kuvaajalla on täsmällinen alku- ja loppupiste. Kuvaajat eivät siihen ole käytiä ilman alkua ja loppua kuten funktioiden kuvaajat.

Isotermisen prosessin kuvaamiseksi meidän täytyy tietää, kuinka paine riippuu tilavuudesta lämpötilan ollessa vakio. Tämä on kuitenkin helppo päätellä ideaalikaasun tilanyhtälöstä, jonka mukaan paineen riippuvuus muista tilanmuuttujista on  $p = \frac{1}{V} N k_B T$ . Toisin sanoen lämpötilan ja ainemäärän ollessa vakiot paine on **kääntäen verrannollinen tilavuuteen**, ja isotermistä prosessia kuvava käyrä on osa **hyperbeliä**. Tilanyhtälön perusteella itse asiassa kaikki samassa lämpötilassa olevat tilat ovat  $pV$ -diagrammissa samalla hyperbelikäyrällä eli **isotermillä**. Mitä korkeammasta lämpötilasta on kyse, sitä kauempaan koordinaatiston origosta hyperbeli kulkee (kuva 9.7 (a)). Tämä tulos pääsee luonnollisesti vain silloin, kun ideaalikaasumalli kuvaa todellisia kaasuja hyvin.

Kuva 9.7: Ideaalikaasun isotermejä ja isentrooppeja, kun  $N_{\text{vapaus}} = 5$ .

### Isentrooppi

Neljäs tärkeä erikoistapaus on isentrooppinen (eli kvasistaattinen ja adiabaattinen) prosessi. Kuten kuvan 9.5 esimerkissä huomattiin, isentrooppisessa laajenemisessa kaasu tekee työtä mutta ei vastaanota lämpöä. Tällöin kaasu menettää sisäenergiaansa ja sen lämpötila laskee. Vastaavasti isentrooppisessa puristuksessa kaasuun tehdään työtä, joten sen lämpötila nousee. Niinpä  $pV$ -kuvaajassa isentrooppisen prosessin alku- ja loppupisteet ovat eri isotermeillä niin, että suuremmassa tilavuudessa oleva piste on aleman lämpötilan käyrällä. Siispä prosessia kuvaava käyrä laskee jyrkemmin kuin isotermit. Aivan kuten samassa lämpötilassa olevat tilat muodostavat diagrammiin isotermien, samaa entropiaa vastaavat tilat piirtävät isentroopin. Mitä suurempaa entropiaa tarkastellaan, sitä kauempaan origosta isentrooppi kulkee. Isentrooppikäyriä on piirretty kuvaan 9.7 (b).



**9.9** Kuvassa 9.6 (b) pisteen A lämpötila on 300 K ja kaasulla on 5 vapaustavara. (a) Mikä on kaasuhiuksien lukumäärä ( tai ainemäärä)? (b) Mikä on kaasun lämpötila pistessä B ja C? (c) Laske entropian muutos prosessissa A → B ja A → C.

Ratkaisaan vielä isentrooppikäyrien muotoa kuvaava täsmällinen matemaattinen lauseke. Koska isentroopilla entropia on vakio, otamme lähtökohdaksi ideaalikaasun entropian lausekkeen (8.80). Ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella voimme korvata lausekkeessa esiintyvän lämpötilan paineen ja tilavuuden tulolla,  $T = pV/(Nk_B)$ , jolloin entropian riippuvuus paineesta ja tilavuudesta on

$$Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{pV}{p_0 V_0} = S_{\text{ideaalikaasu}} = \text{vakio} \quad (9.2)$$

Tässä  $p_0$ ,  $V_0$  ja  $S_{\text{ideaalikaasu}}$  ovat jotkin vakiot, joiden täsmällisiä arvoja emme tunne. Koska kaasun ainemäärä on vakio, voimme jakaa yhtälön puolittain tekijällä  $Nk_B$ , jolloin saadaan

$$\ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{pV}{p_0 V_0} = \text{vakio}. \quad (9.3)$$

Edelleen käytämällä logaritmin laskusääntöä  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$  voimme erotella lausekkeessa paineen ja tilavuuden

$$\ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{p}{p_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{V}{V_0} = \text{vakio}, \quad (9.4)$$

ja yhdistämällä kaikki tilavuutta sisältävät termit sekä jakamalla vielä tekijällä  $N_{\text{vapaus}}/2$  saadaan

$$\left( \frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} \right) \ln \frac{V}{V_0} + \ln \frac{p}{p_0} = \text{vakio}. \quad (9.5)$$

Tässä lausekkeessa esiintyvä vapaustasteiden lukumäärästä riippuva kerroin

$$\gamma = \frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}} \quad (9.6)$$

on kaasun **adiabaattivakio**, missä nimi luonnollisesti viittaa siihen, että tässä tarkasteltu isentrooppinen prosessi on myös adiabaattinen, jos se on kvasistaattinen.



**9.10** Mikä on adiabaattivakio, jos kaasu on (a) yksiatominen, (b) kaksiatominen ja värähtelyn vapausasteet ovat jäätyneet, (c) kaksiatominen ja kaikki vapausasteet ovat aktiiviset?

Huomioimalla vielä logaritmin laskusääntö  $b \ln a = \ln a^b$ , yhtälö (9.5) voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^\gamma + \ln\frac{p}{p_0} = \ln\frac{pV^\gamma}{p_0V_0^\gamma} = \text{vakio.} \quad (9.7)$$

Toisaalta koska eksponenttifunktio on logaritmifunktion käänteisfunktio, muotoa  $\ln a = b = \text{vakio}$  olevasta yhtälöstä voidaan ottaa puolittain eksponentti ja saadaan  $e^{\ln a} = a = e^b = \text{uusi vakio}$ . Niinpä tämä isentrooppia kuvaava yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{pV^\gamma}{p_0V_0^\gamma} = \text{vakio,} \quad (9.8)$$

ja koska  $p_0V_0^\gamma$  on myös jokin vakio, voimme kertoa yhtälön vielä tällä tekijällä ja saamme hyvin yksinkertaisen lopputuloksen

$$pV^\gamma = \text{vakio.} \quad (9.9)$$

Tämä on ideaalikaasun **adiabaattilaki**, joka siis kuvailee kaasun paineen ja tilavuuden välistä riippuvuutta kvasistaattisessa adiabaattisessa prosessissa, jossa entropia on vakio.



**9.11** Miten kaasun vapausasteiden lukumäärä vaikuttaa isentrooppikäyrän jyrkkyyteen  $pV$ -diagrammissa?

### esimerkki 9.1

### Isentrooppinen prosessi

Kaasusäiliössä on typpeä  $N_2$  lämpötilassa 350 K, paineessa 200 kPa ja tilavuudessa  $0.10 \text{ m}^3$ . Kaasu laajenee isentrooppisesti tilavuuteen  $0.15 \text{ m}^3$ . (a) Mikä on kaasun ainemäärä? (b) Montako vapausastetta kaasulla on? (c) Mikä on kaasun paine ja lämpötila lopuksi?

**TILANNE** Merkitään tilanmuuttuja alkutilassa  $(p_{\text{alku}}, V_{\text{alku}}, T_{\text{alku}}) = (200 \text{ kPa}, 0.10 \text{ m}^3, 350 \text{ K})$ . Lopputilasta tunnetaan  $V_{\text{loppu}} = 0.15 \text{ m}^3$ .

**SUUNNITELMA** Typpi on kaksiatominen kaasu, ja tässä lämpötilassa sen värähtelyn vapausasteet ovat jäätyneet, joten kaasulla on 3 suoran liikkeen ja 2 pyörimisen vapausastetta.

Oletetaan, että typpi käyttäätyy prosessissa ideaalikaasun tavoin, jolloin aina päätee tilanyhtälö

$$pV = Nk_B T = nRT. \quad (9.10)$$

Isentrooppinen laajeneminen on kvasistaattinen adiabaattinen prosessi, joten siinä päätee myös adiabaattilaki, jonka mukaan  $pV^\gamma$  on vakio. Erityisesti tämän lausekkeen arvo on koko ajan sama kuin aluksi, joten päätee

$$pV^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma, \quad (9.11)$$

missä adiabaattivakio on  $\gamma = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}$ .

**RATKAISU** (a) Ainemäärä pysyy vakiona, ja se on  $n = \frac{pV}{RT} = 6.9 \text{ mol}$ .

(b) Vapausasteita on  $N_{\text{vapaus}} = 5$ , ja tästä adiabaattivakioksi saadaan  $\gamma = 1.4$ .

(c) Loppupaine on adiabaattilain mukaan  $p_{\text{loppu}} = p_{\text{alku}} \frac{V_{\text{alku}}^\gamma}{V_{\text{loppu}}^\gamma} = 113 \text{ kPa}$ , jolloin lämpötila on tilanyhtälön perusteella  $T_{\text{loppu}} = \frac{p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}}{nR} = T_{\text{alku}} \frac{p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}}{p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}} = 298 \text{ K}$ .

**ARVIOINTI** Adiabaattisessa prosessissa ei siirry lämpöä, ja laajetessa kaasu tekee työtä, joten sen täytyy menettää sisäenergiaa ja lämpötilan täytyy pienentyä. Tulos on siis järkevä.



**9.12** Selitä omin sanoin, millaisia ovat ideaalikaasun isoterminen, isobaarinen, isokoorinen ja isentrooppinen prosessi. Millainen kuvaaja kullakin prosessilla on  $pV$ -koordinaatistossa. Jos tiedät ideaalikaasun alkupaineen ja -tilavuuden,  $p_{\text{alku}}$  ja  $V_{\text{alku}}$  sekä joko loppupaineen  $p_{\text{loppu}}$  tai -tilavuuden  $V_{\text{loppu}}$ , miten saat laskettua näistä suureista toisen lopputilassa? Selitä kullekin prosessille!

## 9.3 Energian ja entropian muutokset

### Prosessin tekemä työ

Systeemin sisältämä energia ja entropia riippuvat vain systeemin tilasta. Hiukkasten mikroskooppinen liike-energia riippuu niiden nopeuksista ja niiden potentiaalienergia riippuu niiden paikoista. Ja jos systeemin makroskooppiset ominaisuudet kuten paine ja tilavuus eivät muutu, myöskaän systeemin sisäenergia ei voi muuttua vaan sillä on tässä makrotilassa tietty vakioarvo, vaikka systeemin mikrotila jatkuvasti muuttuakin hiukkasten liikkuessa. Systeemin entropia puolestaan mittaa sitä, montako erilaista mikrotilaaa yhteen makrotilaan liittyy eli monellako tavalla hiukkaset voidaan järjestää niin, että systeemi näyttää makroskooppisesti aina samanlaiselta.

Erityisesti sisäenergia ja entropia eivät riipu siitä, miten systeemi on tilaan tuotu. Voimme esimerkiksi valmistella useita kaasusäiliöitä, joissa on kaikissa yhtä paljon samanlaista kaasua mutta eri lämpötila, paine ja tilavuus. Kaasuilla on tällöin luonnollisesti erisuuret sisäenergiat ja entropiat. Kuitenkin jos sitten säädämme jokaisen säiliön tilavuuden ja paineen samaksi, kaikki kaasut saavat automaattisesti saman lämpötilan, entropian ja sisäenergian riippumatta siitä, miten nämä säätö tehdään. Samoin jos systeemi on jossakin alkutilassa ( $V_{\text{alku}}, p_{\text{alku}}$ ) ja se käy läpi prosessin, joka siirtää sen toiseen tilaan ( $V_{\text{loppu}}, p_{\text{loppu}}$ ), muutos systeemin energiassa ja entropiassa riippuu vain näistä alku- ja lopputiloista eikä lainkaan prosessista, joka muutoksen aiheuttaa. Tämä pätee vaikka prosessi olisi irreversiibeli ja ei-kvasistaattinen.

Sama ei kuitenkaan päde prosessissa tehdylle työlle ja siirtyvälle lämmölle vaan nämä *riippuvat siitä, kuinka prosessi tapahtuu*. Kuvissa 9.8 ja 9.9 on tästä esimerkki. Kuvissa on kaksi kaasusäiliötä, joista kummassakin on luumakuva mäntä ja tämän männän päällä paino. Kuvassa 9.8 painona toimii yksi kiinteä kappale kun taas kuvassa 9.9 paino on hiekkaa. Kappaleen ja hiekkakasan massat ovat yhtä suuret. Säiliön ympärillä on tyhjiö, joten ulkoisen ilman paine ei purista mäntää sisään vaan mäntää painaa alas paina alaspäin ainoastaan sen päällä olevan kappaleen tai hiekan paino.

Ensimmäisessä prosessissa kaasua lämmitetään, jolloin lämpöä siirtyy kaasun ja kaasun sisäenergia kasvaa. Samalla kaasun paine pyrkii kasvamaan, jolloin kaasu työntää mäntää ylöspäin ja kaasu laajenee. Laajetessaan kaasu tekee mäntään työtä, mikä ilmenee männän päällä olevan massan kohoamisena ylöspäin. Koska lämmitys tapahtuu vähitellen, prosessi on kvasistaattinen ja systeemi on koko ajan likimain tasapainossa. Tämä tarkoittaa sitä, että kaasu laajenee aina juuri sen verran, että mäntää alas painava voima ja kaasun paineen sitä ylöspäin työntävä voima ovat aina yhtä suuret. Koska mäntää alas painava voima on tässä tapauksessa kappaleen painovoiman suuruinen ja siis vakio, täytyy myös kaasun paineen olla prosessin aikana vakio. Prosessissa siis kaasun paine on vakio mutta tilavuus kasvaa ja lämpötila nousee. Kaasun vastaanottamasta lämmöstä osa muuttuu kaasun sisäenergiaksi ja osa siirtyy kappaleen potentiaalienergiaksi kaasun tehessä siihen työtä.

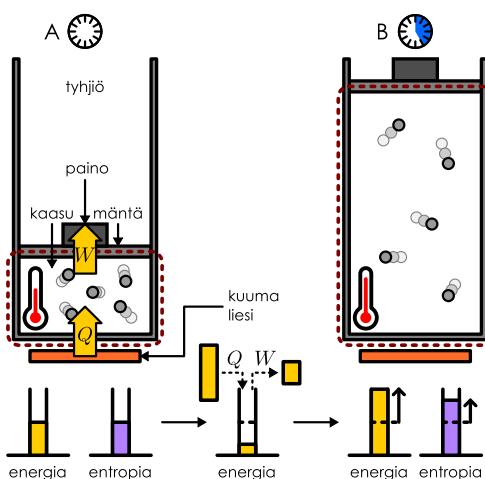


**9.13** Miksi kaasun paine pysyy kuvan 9.8 (a) prosessissa vakiona vaikka molekyylien nopeus kasvaa? Selitä tämä molekyylien liukkeen kautta käytämättä ideaalikaasun tilanyhtälöä.

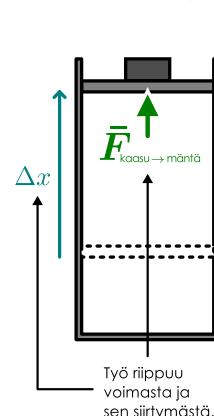
Toinen prosessi alkaa täsmälleen samoin kuin kuvan 9.5 prosessi. Kaasusäiliö on aluksi lämpöeristetty, joten kaasu ei voi vastaanottaa lämpöä. Sen sijaan männän päällä oleva hiekkavaluu vähitellen poistuu, jolloin

Kuva 9.8: Kaasu laajenee isobaarisesti. Laajeneva kaasu tekee työtä, ja samalla kaasua on lämmittettävä.

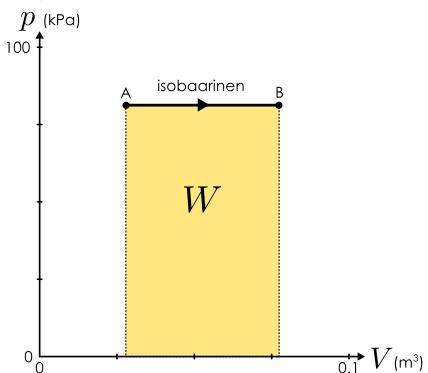
(a) Kaasua lämmitetään vakiopaineessa.



(b) Voiman tekemä työ.



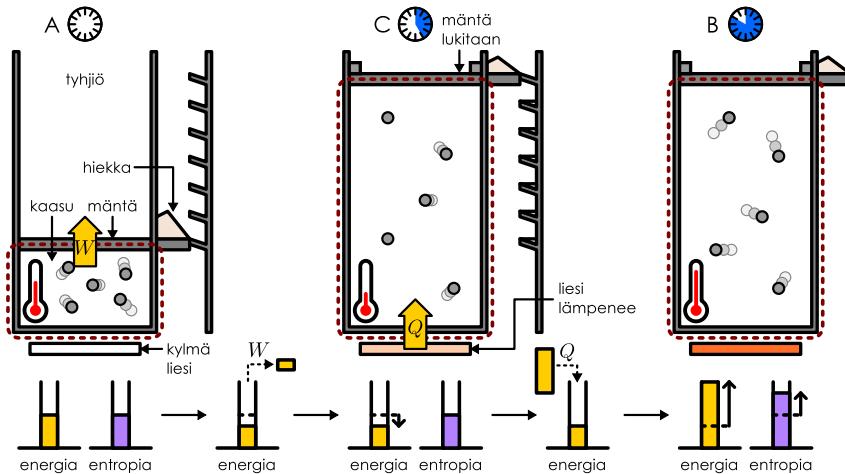
(c) Työtä kuvaava prosessin rajaama ala.



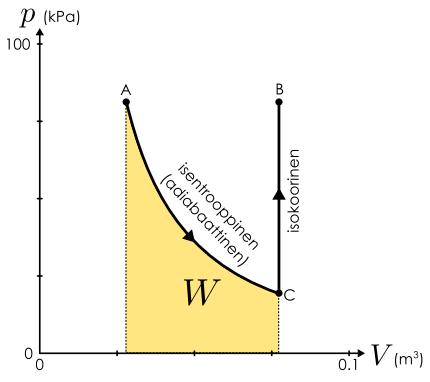
## TERMODYNAMIINKA

Kuva 9.9: Kaksivaiheinen prosessi, jossa kaasu ensin laajenee isentrooppisesti ja sitten lämpenee isokoriseksi.

(a) Kaasu laajenee ensin ja lämpenee sitten.



(b) Työ on pienempi kuin vakiopaineessa.



mäntää alas painava voima heikkenee ja kaasun paine työntää mäntää ylöspäin. Laajeneva kaasu tekee tällöin jälleen työtä ja nostaa hiekkaa ylöspäin. Samalla kaasun sisäenergia vähenee ja kaasun lämpötila laskee, mikä edelleen johtaa kaasun paineen pienemiseen. Prosessi on kvasistaattinen, joten kaasun paine muuttuu aina niin, että sen mäntää ylöspäin työntävä voima on yhtä suuri kuin hiekan painosta johtuva mäntää alas painava työntävä voima. Männän päällä ollut hiekka valuu säiliön vierellä olevaan telineeseen, jolloin se jää aina suunnille sille korkeudelle, jolla mäntä oli hiekan poistuessa sen päältä.

Männän annetaan nousta kummassakin prosessissa yhtä paljon, jolloin kaasut päätyvät samaan tilavuuteen. Ensimmäinen prosessi (kuva 9.8) tapahtui vakiopaineessa eli se oli isobaarinen ja niinpä sitä kuvaava  $pV$ -koordinaatistossa vaakasuora jana. Koska toinen prosessi (kuva 9.9) oli lämmönvaihdoton eli adiabaattinen, siinä kaasun paine ja lämpötila laskevat ja prosessin  $pV$ -kuvaaja seuraa isentrooppikäyrää. Jotta molemmat prosessit saataisiin tuotua samaan lopputilaan, voimme lukita toisessa prosessissa säiliön männän paikoilleen ja lämmittää säiliötä kunnes sen lämpötila on sama kuin ensimmäisen prosessin säiliön. Tätä prosessin vaihetta kuvaava  $pV$ -koordinaatistossa pystysuora jana.

Molemmat prosessit päätyvät samaan lopputilaan, jolloin niillä on lopussa sama lämpötila ja sisäenergia. Prosessit eivät kuitenkaan tehneet yhtä paljon työtä eikä säiliöiden lämmittäminen vaatinut yhtä paljon lämpöä. Isobaarisessa prosessissa kaasu nimittään nosti koko kappaleen yhtä korkealle kuin mäntä nousi, mutta adiabaatisessa prosessissa osa hiekasta valui prosessin aikana kaasusäiliön viereiseen telineeseen ja nousi siis lyhyemmän matkan ylöspäin. *Kiinteän kappaleen potentiaalienergia siis kasvoi enemmän kuin hiekan*, ja ilmeisesti kaasu teki adiabaatisessa prosessissa vähemmän työtä.

Voiman tekemä työ riippuu voiman suuruudesta ja suunnasta sekä voiman vaikutuspisteestä kulkemasta matkasta. Isobaarisessa prosessissa kaasun paineen mäntään kohdistama voima on koko ajan likimain yhtä suuri kuin männän päällä olevan kappaleen painovoima, joten voiman suuruus on vakio. Jos männän pinta-ala on  $A$ , paineen siihen kohdistama voima on siis

$$F_x = pA, \quad (9.12)$$

kun positiivinen  $x$ -suunta valitaan ylöspäin. Lisäksi jos mäntä liikkuu matkan  $\Delta x$ , tämän vakiovoiman tekemä työ on

$$W = F_x \Delta x = pA \Delta x = p\Delta V = p(V_{\text{loppu}} - V_{\text{alku}}), \quad (9.13)$$

missä  $\Delta V = A\Delta x$  on kaasusäiliön tilavuuden muutos.

Adiabaatisessa prosessissa kaasun paine pienenee tilavuuden kasvaessa. Tällöin myös paineen mäntään kohdistama voima pienenee männän liikuessa ja niinpä työ täytyy laskea voiman integraalina. Toisaalta jokaisella lyhyellä männän siirtymällä  $dx$  tehty työ on

$$dW = F_x dx = pAdx = pdV, \quad (9.14)$$

joten kaasun laajetessaan tekemä työ voidaan ilmaista *paineen integraalina tilavuuden suhteen*

$$W = \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} pdV. \quad (9.15)$$

Jos kaasu laajenee eli lopputilavuus on alkutilavuutta suurempi, integraali on positiivinen ja integraalin arvo todellakin ilmaisee kaasun tekemää työtä eli systeemistä poistuvan energian määrää. Jos kaasua puristetaan,

lopputilavuus on alkutilavuutta pienempi ja integraalin arvo on negatiivinen. Integraali kertoo siis edelleen systeemistä poistuvan energian määärän, sillä systeemin vastaanottessa energiaa siitä poistuva energiamäärä on negatiivinen. Systeemin työnä *vastaanottama* energia on siis

$$W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} p dV \quad (9.16)$$

riippumatta siitä laajeneeko vai supistuuko systeemi.



**9.14** Kaasusäiliön sisäinen paine on 120 kPa ja säiliön ulkopuolinen ilmanpaine on 100 kPa. Säiliön yksi seinä on mäntä, joka on aluksi lukittu paikoilleen. Lukitus avataan, jolloin säiliön sisällä oleva ylipaine kohdistaa mäntään suuremman voiman kuin ulkoinen paine ja mäntä alkaa liikkua ulospäin. Hetken päästä säiliön tilavuus on kasvanut  $0.01 \text{ m}^3$  ja paine sätöissä on enää 110 kPa. (a) Arvioi, paljonko työtä säiliön sisällä oleva kaasu on tehnyt? (b) Paljonko työtä säiliön ulkoinen ilmanpaine on tehnyt? (c) Paljonko säiliön sisältämän kaasun sisäenergia on muuttunut? (d) Muuttuvatko muut energian muodot? Jos muuttuvat, kuinka paljon?

Koska prosessi (b) on lämmönvaihdoton ja kvasistaattinen, paine riippuu siinä tilavuudesta adiabaattilain (9.9) mukaisesti,  $pV^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma$ . Paine on siis tilavuuden funktioina

$$p = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma V^{-\gamma}, \quad (9.17)$$

ja prosessissa tehty työ on

$$W_{\text{ulos}} = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} V^{-\gamma} dV \quad (9.18)$$

$$= p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \left| \frac{1}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \right|_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} \quad (9.19)$$

$$= p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left( V_{\text{loppu}}^{1-\gamma} - V_{\text{alku}}^{1-\gamma} \right) \quad (9.20)$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} \left( p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma V_{\text{loppu}}^{1-\gamma} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}} \right). \quad (9.21)$$

Tässä voi vielä huomata, että adiabaattilain perusteella  $p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma$ , joten kaasun tekemä työ sievenee muotoon

$$W_{\text{ulos}} = \frac{1}{1-\gamma} (p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}). \quad (9.22)$$

Tämä työ on aina *pienempi* kuin vastaavassa isobaarisessa prosessissa, jossa kaasun alkupaine ja tilavuuden muutos on sama.



**9.15** Kaasun vapausasteiden lukumäärä on 5. Kaasu on aluksi paineessa 100 kPa ja tilavuudessa  $0.02 \text{ m}^3$ . Kuinka suuren työn kaasu tekee laajetessaan kaksinkertaiseen tilavuuteen (a) isobaarisesti, (b) adiabaattisesti? (c) Kummassakaan tapauksessa työ on suurempi? Vertaa prosessien kuvajajiin *pV*-diagrammissa.

Graafisessa esityksessä integraali vastaa integraalifunktion rajaamaa pinta-alaa. Esimerkiksi työ, joka on voiman integraali siirtymän suhteen, on voimaa paikan funktiona kuvaavan käyrän ja *x*-akselin väliin jäävä pinta-ala. Samaan tapaan kaasun tekemä työ on paineen integraali tilavuuden suhteen, joten *kaasun tekemää työtä kuvaava pV-diagrammissa prosessia esittävä käyrän ja V-akselin väliin jäävä pinta-ala*. *V*-akseli onkin tapana asettaa diagrammissa vaakasuuntaan juuri siksi, että tällöin pinta ala on prosessin kuvajajan ja vaaka-akselin välinen ala. Jos akselit valitsisi toisin päin, työtä esittäisi kuvajajan ja pystyakselin välinen ala.

Edellä tarkasteltujen prosessien *pV*-diagrammien perusteella onkin selvää, että isobaarisen kvasistaattisen prosessin tekemän työn täytyy olla suurempi kuin adiabaattisen, jos kaasujen alku- ja lopputilavuudet ovat samat. Kuvassa 9.8 (c) kaasun isobaarisessa prosessissa tekemää työtä esittää värellisen suorakaiteen pinta-ala. Kuvassa 9.9 (b) on vastaava adiabaattisen prosessin kuvaja. Koska adiabaattisessa prosessissa kaasun paine pienenee, kuvaaja kulkee aina alempaan kuin vastaavan isobaarisen prosessin kuvaaja. Niinpä kuvaaja myös rajaa *pV*-diagrammissa pienemmän pinta-alan, mikä fysikaalisesti tarkoittaa kaasun tekevän vähemmän työtä kuin isobaarisessa prosessissa. Kuvassa 9.9 (b) esitetyn kaksivaiheisen prosessin jälkimmäisessä osassa (C → B) kaasua lämmitetään isokoorisesti eli vakiotilavuudessa. Tämän aikana prosessin *pV*-kuvaaja on pystysuora ja sen rajaama pinta-ala on *nolla*. Niinpä *isokorinen prosessi ei tee työtä lainkaan*.

Näissä prosesseissa tarkasteltu kaasusysteemi laajeni, joten se teki työtä ympäristöönsä. Työ siirsi kaasun sisäenergiaa kaasusäiliön päällä olevan kappaleen ja hiekan potentiaalienergiaksi. Vastaavasti *pV*-kuvaajassa kaasun laajeneminen ilmenee tilavuuden kasvuna. Toisin sanoen jos prosessin *pV*-kuvaajassa

lopputilan tilavuus on suurempi kuin alkutilan eli prosessi kulkee kuvassa vasemmalta oikealle, systeemi tekee työtä ympäristöönsä. Tilanne on päinvastainen, jos kaasun tilavuus pienenee: tällöin  $pV$ -diagrammissa prosessi kulkee oikealta vasemmalle ja kuvaajan rajaama pinta-ala esittää ympäristön kaasuun tekemää työtä.



**9.16** Tarkastele kuvien 9.8 ja 9.9 prosesseja. (a) Missä prosesseista  $A \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow C$  ja  $C \rightarrow B$  siirrytään lämpöönä suurin ja pienin energiamäärä?

### esimerkki 9.2

### Isoterminen prosessi

Ideaalikaasu on suljettu mänälliseen säiliöön, jota ei ole lämpöeristetty ja jonka ympärillä on vettä. Vesi on samassa lämpötilassa kuin kaasu alkutilassa. Kaasua puristetaan hitaasti pienempään tilavuuteen. (a) Paljonko työtä vaatii kaasun puristaminen alkutilavuudesta  $V_{\text{alku}}$  lopputilavuuteen  $V_{\text{loppu}}$ ? (b) Paljonko kaasun ja sen ympäristön välillä siirrytään lämpööä?

**SUUNNITELMA** Veden ominaislämpökapasiteetti on suuri, joten voimme olettaa kaasua ympäröivän veden pysyvän koko ajan samassa lämpötilassa. Puristaminen tekee kaasun työtä, joka kasvattaa kaasun sisäenergiaa ja pyrkii nostamaan sen lämpötilaan. Lämpöö kuitenkin pääsee siirtymään kaasun ja sitä ympäröivän veden välillä, joten vesi jäädyttää kaasua. Lisäksi koska puristaminen tapahtuu hitaasti, voimme olettaa systeemin olevan aina likimain tasapainossa ja kaasun samassa lämpötilassa veden kanssa, jolloin prosessi on kvasistaattinen ja isoterminen.

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaisesti kaasun paine ja tilavuus riippuvat toisistaan,

$$p = \frac{1}{V} N k_B T. \quad (9.23)$$

Kaasuun tehty työ puolestaan saadaan integroimalla painetta tilavuuden muutoksen suhteen,

$$W_{\text{sisään}} = W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} p dV. \quad (9.24)$$

Kaasun sisäenergia riippuu ainoastaan sen lämpötilasta, joten isotermisessä prosessissa lämpötila ja sisäenergia ovat vakiot,  $\Delta E_{\text{sisä}} = 0$ . Tällöin energian säilymisen perusteella kaasun täytyy luovuttaa prosessissa ympäristöönsä energiota lämpöönä yhtä paljon kuin se vastaanottaa työnä,  $Q_{\text{ulos}} = W_{\text{sisään}}$ .

**RATKAISU** Lasketaan tehty työ integroimalla.

$$W_{\text{sisään}} = -N k_B T \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} \frac{1}{V} dV = -N k_B T \left| \ln V \right|_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} = -N k_B T (\ln V_{\text{loppu}} - \ln V_{\text{alku}}) = N k_B T \ln \frac{V_{\text{alku}}}{V_{\text{loppu}}}. \quad (9.25)$$

Kaasu luovuttaa lämpöä yhtä paljon.

**ARVIOINTI** Puristettaessa alkutilavuus on suurempi kuin lopputilavuus, joten saatu työ on positiivinen. Näin pitääkin olla, koska puristuksessa kaasun tehdään työtä ja laskimme juuri kaasun työnä siirtynä energian määrän. Työtä pitää tehdä sitä enemmän mitä enemmän kaasua on ja mitä korkeampi sen lämpötila on. Tämä on järkevä, koska ainemäärän lisääminen tai lämpötilan nostaminen kasvattaa kaasun painetta.

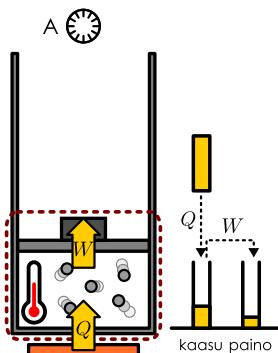
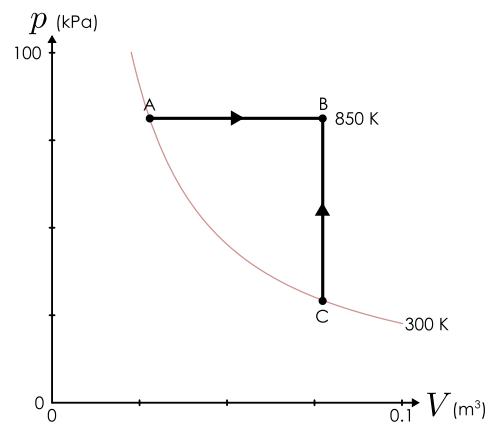
### Ominaislämpökapasiteetit

Lämpökapasiteetti kuvailee systeemin kykyä varastoida lämpöä siirtymään energiaksi ja erityisesti lämpötilan muutosten riippuvuutta vastaanotetusta lämmöstä. Mitä suurempi lämpökapasiteetti on, sitä enemmän systeemiin pitää tuoda lämpöä, jotta sen lämpötila muuttuisi tietyn määrän. Prosessissa siirtymä lämpö riippuu kuitenkin siitä, kuinka prosessi tapahtuu. Niinpä on mahdollista siirtää systeemi yhdestä lämpötilasta  $T_{\text{alku}}$  toiseen lämpötilaan  $T_{\text{loppu}}$  eri tavoin, ja näissä eri prosesseissa systeemin vastaanottama lämpö voi hyvin olla erilainen. Tämä tarkoittaa sitä, että lämpökapasiteetti ei ole vain systeemin vaan *systeemin ja prosessin yhteinen ominaisuus*.

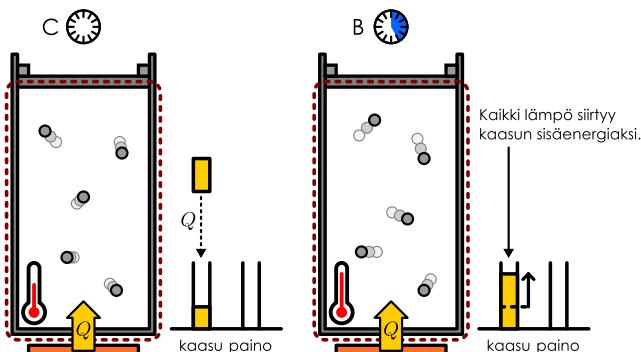
Lämpötilaa muuttavia prosesseja on äärettömästi erilaisia, ja niinpä systeemin lämpökapasiteettikin voisi periaatteessa saada äärettömästi erilaisia arvoja. Yksinkertaisuuden vuoksi lämpökapasiteetti yleensä määritellään kuitenkin vain joko *vakiotilavuudessa* tai *vakiopaineessa*. Merkittäessä lämpökapasiteettia symbolilla tämä ero ilmaistaan alaindeksillä, joka ilmoittaa kulhoinkin vakiona pidettävän suuren. Toisin sanoen lämpökapasiteettia vakiopaineessa merkitään symbolilla  $C_p$  ja vakiotilavuudessa  $C_V$ . Vastaavasti esimerkiksi ominaislämpökapasiteettia ainemäärää kohden vakiopaineessa merkitään  $c_p^n$  ja vakiotilavuudessa  $c_V^n$ . Jos aineen tilavuuden muutos sen lämpötilan muuttuessa on pieni, lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on likimain sama kuin vakiopaineessa. Esimerkiksi useimmat kiinteät aineet lämpölaajenevat kuumetessaan niin vähän, ettei ilmiöllä ole lämpökapasiteetin kannalta juuri merkitystä. Kaasujen tilavuus, paine ja lämpötila ovat sen sijaan vahvasti kytkeytyneet, joten kaasuilla eri tavoin mitatut ominaislämpökapasiteetit poikkeavat toisistaan merkittävästi.

Kuva 9.10: Ominaislämpökapasiteetin määrittäminen vakiopaineessa ja -tilavuudessa.

(a) Lämmitys vakiopaineessa.

(c)  $pV$ -diagrammi.

(b) Lämmitys vakiotilavuudessa.



**9.17** Miksei ole järkevää määritellä lämpökapasiteettia isotermisessä tai adiabaattisessa prosessissa?

Kuvassa 9.10 on esitetty prosessit, joilla kaasun ominaislämpökapasiteetti voidaan mitata sekä vakiopaineessa että vakiotilavuudessa. Kummassakin tapauksessa kaasu pidetään suljetussa säiliössä, jolloin sen ainemäärä on vakio. Säiliötä lämmitetään, jolloin kaasun siirtyy energiota lämpönä ja kaasun lämpötila kasvaa. Kuvassa (a) säiliössä on vapaasti liukkuva mäntä ja tämän päällä kappale, jonka paino tuottaa mäntää alas paini työntävän voiman. Prosessi on kvastistaattinen, joten systeemi on aina tasapainossa ja kaasun paine työntää mäntää ylöspäin yhtä suurella voimalla kuin millä kappale painaa sitä alas. Kaasun lämmetessä sen paine pyrkii kasvamaan ja kaasu laajenee, mutta toisaalta laajentuvan kaasun paine pienenee. Koska mäntää alas painava voima on vakio, kaasun paineen täytyy kuitenkin pysyä vakiona ja niinpä tilavuuden ja lämpötilan muutosten vaikutukset kaasun paineesseen kumoavat toisensa. Kuvassa (b) kaasusäiliön koko sen sijaan ei muutu. Niinpä kaasun lämmetessä sen tilavuus pysyy vakiona ja paine kasvaa.

Prosessien  $pV$ -diagrammit on piirretty kuvaan (c). Kaasujen alkulämpötila on sama, ja ne päättyvät myös lopuksi samaan lopputilaan. Kuitenkin koska toisessa prosessissa muuttuu paine ja toisessa tilavuus, kaasuilla on alkutilassa eri paine ja tilavuus. Koska prosessi A → B tapahtuu vakiopaineessa, sitä kuva vaakasuora jana. Prosessi C → B puolestaan tapahtuu vakiotilavuudessa, ja sitä kuva pystysuora viiva.

Ideaalikaasun sisäenergia on pelkästään sen molekyylien liike-energiaa, ja tämä liike-energia on suoraan verrannollinen lämpötilaan yhtälön (8.39) mukaisesti. Niinpä myös sisäenergian *muutos* on verrannollinen lämpötilan muutokseen,

$$\Delta E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2} N N_{\text{vapaus}} k_B \Delta T. \quad (9.26)$$

Kaasuilla on lopputilassa yhtä suuri sisäenergia, koska kummassakin prosessissa on sama lopputila, mutta niillä on täsmälleen sama sisäenergia myös alkutilassa, koska *lämpötila* on alkutilassa sama. Niinpä kaasun sisäenergian muutos on kummassakin prosessissa yhtä suuri.

Systeemin sisäenergia kasvaa, koska kaasu vastaanottaa lämpöä. Isokorisen prosessin tapauksessa *kaikki* kaasun vastaanottama lämpö siirtyy sen sisäenergiaksi eli

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisää}, V}. \quad (9.27)$$

Niinpä määritelmän mukaisesti kaasun ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on

$$c_V^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q_{\text{sisäänn},V}}{\partial T} = \frac{1}{n} \frac{\partial E_{\text{sisä}}}{\partial T}. \quad (9.28)$$

Kaasun lämpötilan muuttuessa sen vapausasteiden lukumäärä voi muuttua, jolloin myös lämpökapasiteetti muuttuu. Siksi lämpökapasiteetti määritellään täsmällisesti lämmön derivaattana lämpötilan suhteeseen. Jos kuitenkin kaasun vapausasteiden lukumäärä pysyy prosessissa vakiona, myös lämpökapasiteetti on vakio ja voimme laskea sen sisäenergian kokonaismuutoksen suhteen lämpötilan kokonaismuutokseen. Tällöin huomioiden yhteydet  $N = nN_A$  (hiukkasten määrä on sama kuin moolien määrä kerrottuna yhden moolin sisältämällä hiukasmäärällä) sekä  $R = N_A k_B$  tulokseksi saadaan

$$c_V^n = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{sisä}}}{\Delta T} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \frac{Nk_B}{n} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R, \quad (9.29)$$

mikä on sama tulos kuin jo aikaisemmin johdettu (8.40). Täsmällinen lasku derivaatan avulla antaa aivan saman loppituloksen, jos vapausasteiden määrä on vakio.

Sen sijaan isobaarisessa prosessissa kaasu tekee laajetessaan työtä ja tällöin kaasun sisäenergiaa muuttuu ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergiaksi. Kaasun sisäenergian muutos on tällöin

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisäänn},p} - W_{\text{ulos},p}. \quad (9.30)$$

Koska kaasun lämpötila muuttuu kummassakin prosessissa yhtä paljon, kaasun sisäenergian muutos on sama kuin isokoririsessa prosessissa. Osa systeemin energiasta siirtyy kuitenkin nousevan kappaleen potentiaalienergiaksi, joten *systeemiin täytyy vakiopaineessa tapahtuvassa prosessissa tuoda enemmän lämpöä kuin vakiotilavuudessa*. Tällöin myös ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa on suurempi kuin vakiotilavuudessa. Olettaen taas kaasun vapausasteiden pysyvän vakiona tämä on

$$c_p^n = \frac{1}{n} \frac{Q_{\text{sisäänn},p}}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{sisä}}}{\Delta T} + \frac{1}{n} \frac{W_{\text{ulos},p}}{\Delta T} = c_V^n + \frac{1}{n} \frac{W_{\text{ulos},p}}{\Delta T}. \quad (9.31)$$



**9.18** Oletetaan, että haluamme mitata kaasun lämpökapasiteetin prosessissa, jossa kaasua lämmitetään ja puristetaan samanaikaisesti. (a) Onko tämä kuvitteellinen lämpökapasiteetti suurempi, pienempi tai yhtä suuri kuin  $c_p^n$  tai  $c_V^n$ ? (b) Riippuuko tämä lämpökapasiteetti nopeudesta, jolla kaasua puristetaan? Jos riippuu, kuinka pieni tai suuri lämpökapasiteetti voi olla?

Laajetessaan tilavuuden  $\Delta V$  kaasu tekee aina työn  $W_{\text{ulos}} = p\Delta V$ . Lisäksi tässä tarkastellussa isobaarisessa prosessissa laajeneminen tapahtuu paineen ja ainemäärän pysyessä vakioina, joten ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella tilavuuden muutos on suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen  $\Delta V = \frac{1}{p}nR\Delta T$ , ja niinpä kaasun tekemä työ voidaan ilmaista myös lämpötilan muutoksen avulla muodossa

$$W_{\text{ulos},p} = nR\Delta T. \quad (9.32)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (9.31) saadaan yksinkertainen tulos

$$c_p^n = c_V^n + R. \quad (9.33)$$

Toisin sanoen vakiopaineessa ominaislämpökapasiteetti on suurempi kuin vakiotilavuudessa, koska laajeneva kaasu tekee laajentuessaan työtä ja systeemiin tuodun lämmön täytyy kattaa myös tähän työhön kuluva energia. Ideaalikaasun tapauksessa ero moolia kohden lasketuissa lämpökapasiteeteissa on täsmälleen kaasuvakion suuruinen.



**9.19** Mikä on hiukkasten määrää kohden määritettyjen ominaislämpökapasiteettien ero,  $c_p^N - c_V^N$ ?

Vakiotilavuudessa määritetyt lämpökapasiteetit (8.40) sekä ominaislämpökapasiteettien eron (9.33) perusteella ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa on näin ollen

$$c_p^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R + R = \left(1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}}\right) R. \quad (9.34)$$

Näimme samantyyppisen lausekkeen jo aikaisemmin adiabaattivakion (9.6) osoittajassa. Itse asiassa *adiabattivakio määritellään ominaislämpökapasiteettien suhteen*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}. \quad (9.35)$$

Koska kyseessä on suhde, ei ole väliä lasketaanko se kokonaislämpökapasiteeteille vai ominaislämpökapasiteeteille.

## esimerkki 9.3

## Lämpökapasiteetti

**Typhen ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa tavallisen huoneen lämpötilassa on  $29.2 \text{ J/(Kmol)}$ . Mikä on tällöin typhen (a) ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa? (b) adiabaattivakio? (c) vapausasteiden määrä? (d) Paljonko lämpöö tarvitaan, kun 1 mooli typpää lämmitetään vakiopaineessa 1 K? (e) Mikä on tällöin kaasun sisäenergian muutos?**

**TILANNE** Tunnetaan ominaislämpökapasiteetti  $c_p^n = 29.2 \text{ J/(Kmol)}$  ja lämpötilan muutos  $\Delta T = 1 \text{ K}$ . Kysytään suureita  $c_V^n$ ,  $\gamma$ ,  $N_{\text{vapaus}}$ ,  $Q$  sekä  $\Delta E_{\text{sisä}}$ . Kaasuvakio  $R = 8.314 \text{ J/(Kmol)}$ , Boltzmannin vakio  $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  ja Avogadron vakio  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**SUUNNITELMA** Oletetaan typhen käyttäytymisen ideaalikaasun tavoin. Tämä on järkevä oletus, koska typpi ei ole normaaliloissa lähelläkään nesteytymistä.

Lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on pienempi kuin vakiopaineessa, ja eron suuruus on ideaalikaasulla sama kuin kaasuvakio. Tämän perusteella voidaan laskea adiabaattivakio lämpökapasiteettien suhteena ja edelleen tämän perusteella vapausasteiden lukumäärä yhtälöstä  $\gamma = 1 + 2/N_{\text{vapaus}}$ .

Lämmitykseen tarvittava lämpömäärä saadaan laskettua suoraan lämpökapasiteetin  $c_p^n$  avulla. Lämpömäärä on suurempi kuin kaasun sisäenergian muutos, koska kaasu tekee tällöin työtä. Kuitenkin vakiotilavuudessa kaasun lämmitykseen käytettävä energia siirtyy kaikki kaasun sisäenergiaksi, joten kaasun sisäenergian muutos voidaan laskea lämpökapasiteetin  $c_V^n$  avulla.

**RATKAISU** (a) Lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on  $c_V^n = c_p^n - R = 29.2 \text{ J/(Kmol)} - 8.3 \text{ J/(Kmol)} = 20.9 \text{ J/(Kmol)}$ .

(b) Adiabaattivakio on  $\gamma = c_p^n/c_V^n = 29.2/20.9 = 1.40$ .

(c) Vapausasteiden lukumäärä on  $N_{\text{vapaus}} = \frac{2}{\gamma-1} = 2/0.40 = 5.0$ .

(d) Lämpöö tarvitaan  $Q_{\text{sisäänn,p}} = nc_p^n \Delta T = 1 \text{ mol} \cdot 29.2 \text{ J/(Kmol)} \cdot 1 \text{ K} = 29.2 \text{ J}$ .

(e) Sisäenergian muutos on sama kuin vastaavassa vakiotilavuudessa tapahtuvassa prosessissa, joten

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisäänn,V}} = nc_V^n \Delta T = 1 \text{ mol} \cdot 20.9 \text{ J/(Kmol)} \cdot 1 \text{ K} = 20.9 \text{ J}. \quad (9.36)$$

**ARVIOINTI** Typpi on kaksiatominen kaasu, ja tällaisen kaasun vapausasteiden lukumäärä normaaliloosuheteissa on tavallisesti 5, koska molekyyllillä on kolme suoran liikkeen vapausastetta ja kaksi pyörivän liikkeen vapausastetta. (Värähelyn vapausasteet eivät tässä lämpötilassa vastaanota energiaa.) Tämä tulos saatuiin myös tässä laskussa. Laskettu lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa voidaan myös tarkistaa taulukoista.



**9.20** Selitä omiin sanoihin, miten voit määrittää kaasuprosessin tekemän työn laskemalla tai kuvajasta lukeuttaa. Miten voit päätellä, tekeekö kaasu työtä vai tehdääkö kaasuun työtä? Entä miten voit laskea, paljonko lämpöö prosessissa siirtyy?

## esimerkki 9.4

## Adiabaattilaki

**Johda ideaalikaasun kvasistaattisen adiabaattisen prosessin adiabaattilaki ehdosta  $Q_{\text{kokonais}} = 0$  käyttämättä hyväksi entropian lauseketta.**

**TILANNE** Adiabaattilaki on kvasistaattisen adiabaattisen prosessin tilanmuuttuja yhdistävä laki. Historiallisesti adiabaattisuutta on tutkittu jo ennen entropian käsitteen keksimistä, joten on hyödyllistä tutkia kuinka adiabaattilaki voidaan päätellä energian säilymislaista ja ideaalikaasun tilanyhtälöstä ilman entropian käsittää.

**SUUNNITELMA** Adiabaattisessa prosessissa ei siirry lämpöö, joten kaasun sisäenergia muuttuu täsmälleen yhtä paljon kuin kaasuun tehdään työtä. Toisaalta kaasun sisäenergia on suoraan verrannollinen lämpötilaan, ja niinpä lämpötilakin muuttuu. Haluamme siis ilmaista kaasun lämpötilan ja tilavuuden muutosten välisen yhteyden, mikä onnistuu ideaalikaasun tilanyhtälön avulla. Koska suuret muutuvat prosessin aikana, prosessi pitää jakaamaan osiin, jolloin voimme laskea suureiden suhteellisen muutoksen kunkin osan aikana. Suureiden arvot missä tahansa prosessin vaiheessa saadaan tämän jälkeen laskemalla pienet muutokset yhteen eli integroimalla.

Kaasun sisäenergian muutos voidaan ilmaista vakiotilavuudessa määritellyn lämpökapasiteetin avulla, koska vakiotilavuudessa lämpökapasiteetti mittaa ainoastaan sisäenergian muutosta. Jos siis kaasun lämpötila muuttuu määränpäätteellä  $dT$ , sen energian muutos on

$$dE_{\text{sisä}} = nc_V^n dT. \quad (9.37)$$

Toisaalta tämän täytyy adiabaattisessa prosessissa olla energian säilymisen takia olla yhtä suuri kuin kaasuun tehty työ,

$$dE_{\text{sisä}} = dW_{\text{kokonais}} = -pdV. \quad (9.38)$$

Ideaalikaasun tilanyhtälön avulla voimme ilmaista paineen lämpötilan ja tilavuuden avulla. Koska yhtälöissämme esiintyy lämpötilan ja tilavuuden differentiaalit, on helpointa ratkaista ensin nimenomaan näiden välinen riippuvuus.

**RATKAISU** Sisäenergian muutos on siis lämpötilan ja tilavuuden avulla kirjoitettuna

$$nc_V^n dT = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV. \quad (9.39)$$

Tämän voi separoida, mikä tarkoittaa kaikkien lämpötilaan ja tilavuutta sisältävien tekijöiden súrtoa yhtälön vastakkaisille puollelle. Nämä saadaan

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V^n} \frac{dV}{V}. \quad (9.40)$$

Tässä esiintyvä vakio voidaan kirjoittaa adiabaattivakion avulla. Nimittäin  $R = c_p^n - c_V^n$  ja  $\gamma = c_p^n/c_V^n$ , joten

$$\frac{R}{c_V^n} = \frac{c_p^n - c_V^n}{c_V^n} = \frac{c_p^n}{c_V^n} - 1 = \gamma - 1. \quad (9.41)$$

Nämä ollen meillä on ratkaistavana differentiaalilhää

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}. \quad (9.42)$$

Yhtälö tarkoittaa sitä, että kaasun tilavuuden kasvaessa määrä dV lämpötila laskee määrä dT. (Koska vakio  $-(\gamma - 1)$  on aina negatiivinen, suuret muuttuvat eri suuntiin.) Ja mitä suurempi adiabaattivakio on, sitä suurempi on lämpötilan suhteellinen muutos verrattuna tilavuuden suhteelliseen muutokseen.

Suureiden arvot prosessin aikana saadaan ratkaistua laskemalla suureiden muutokset niiden alkuarvoista, ja tämä onnistuu laskemalla kaikki infinitesimaalisen pienet muutokset yhteen eli integroimalla. Tällöin kumpikin puoli yhtälöstä integroidaan nimenomaan sen muuttujan suhteen, jonka differentiaali siihen esitetyy (differentiaali ilmaisee minkä muuttujan muutoksia lasketaan yhteen). Nämä saadaan integrointisäännöön  $\int dx/x = \ln x$  sekä logaritmien laskusääntöjen  $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ ,  $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$  ja  $a \ln b = \ln b^a$  avulla

$$\int_{T_{\text{alku}}}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_{\text{alku}}}^V \frac{dV}{V} \quad (9.43)$$

$$\ln T - \ln T_{\text{alku}} = -(\gamma - 1)(\ln V - \ln V_{\text{alku}}) \quad (9.44)$$

$$\ln \frac{T}{T_{\text{alku}}} + (\gamma - 1) \ln \frac{V}{V_{\text{alku}}} = 0 \quad (9.45)$$

$$\ln \frac{TV^{\gamma-1}}{T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}} = 0. \quad (9.46)$$

Edelleen ottamalla tästä puolittain eksponenttifunktio saadaan tulos

$$\frac{TV^{\gamma-1}}{T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}} = e^0 = 1 \quad (9.47)$$

eli

$$TV^{\gamma-1} = T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}. \quad (9.48)$$

Tämä on vaihtoehtoinen muoto adiabaattilaille. Jos tulos halutaan kirjoittaa mieluummin paineen ja tilavuuden avulla yhtälön (9.9) muotoon  $pV^\gamma = \text{vakio}$ , muunnos onnistuu ideaalikaasun tilanyhtälön kautta. Nimittäin  $p = Nk_B T/V$ , joten

$$pV^\gamma = Nk_B TV^{\gamma-1} = Nk_B T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1} = p_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^\gamma. \quad (9.49)$$

## Entropia ideaalikaasuprosesseissa

Päättelimme jo aikaisemmin, että kvasistaattisessa adiabaattisessa prosessissa entropia ei muutu, mistä seuraavaan, että muunlaisissa kvasistaattisissa prosesseissa entropian täytyy muuttua. Entropia on energian ohella termodynamiikan tärkein suure, joten seuraavaksi on aika määrittää tarkemmin miten entropia muuttuu erilaisissa prosesseissa. Tarkastelemme jälleen ensimmäiseksi ideaalikaasuprosesseja.

Kuvassa 9.7 (b) esitettiin ideaalikaasun isentropopeja eri  $pV$ -diagrammin käyrä, joilla kaasun entropia on vakio. Jos kaasu käy läpi isentrooppisen prosessin, prosessin kuvaaja seuraa aina alkupisteen kautta kulkevaa isentrooppikäyrää. Vastaavasti jos kaasun tila muuttuu prosessissa niin, että tilaa kuvaava piste siirtyy pois isentroopilta, entropia muuttuu. Entropia kasvaa pisteen siirtyessä poispäin origosta ja pienenee pisteen siirtyessä kohti origoa. Tällä perusteella kaasun isobaarisessa ja isotermisessä laajenemisessa entropia kasvaa. Entropia kasvaa myös paineen kasvaessa isokoridisessa prosessissa. Yleisesti ideaalikaasun entropian

muutos missä tahansa prosessissa on yhtälön (8.80) perusteella

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \left( \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} \right). \quad (9.50)$$

Tilavuuden ollessa vakio entropian tilavuudesta riippuva osuus on vakio ja niinpä entropian muutos on yksinkertaisesti

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}, V} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = nc_V^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}, \quad (9.51)$$

missä on huomioitu ominaislämpökapasiteetin lauseke  $c_V^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R$  sekä yhteyks  $Nk_B = nR$ . Vastaavasti paineen ollessa vakio tilavuus on ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella suoraan verrannollinen lämpötilaan ja niinpä  $V_{\text{loppu}}/V_{\text{alku}} = T_{\text{loppu}}/T_{\text{alku}}$ . Tämän perusteella entropian muutos vakiopaineessa on

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}, p} = Nk_B \left( 1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \right) \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = nc_p^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (9.52)$$

Lämpötilan ollessa vakio entropian lämpötilasta riippuva osuus ei muutu, joten entropia riippuu ainoastaan tilavuudesta,

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}, T} = Nk_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}. \quad (9.53)$$

Kuitenkin esimerkin 9.2 ja yhtälön (9.25) mukaan isotermisessä prosessissa kaasu vastaanottaa lämmön

$$Q_{\text{kokonais}} = Nk_B T \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}, \quad (9.54)$$

joten entropian muutos vakiolämpötilassa voidaan ilmaista myös yksinkertaisesti muodossa

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}, T} = \frac{Q_{\text{kokonais}}}{T} \quad (9.55)$$

eli *entropian muutos on verrannollinen systeemin vastaanottaman lämmön määrään ja käänään verrannollinen systeemin lämpötilaan*.

Tämän tuloksen fysikaalinen merkitys on karkeasti seuraava: Lämpönä tuotu energia lisää systeemin epäjärjestynyttä energiota ja siten sen epäjärjestystä. Koska entropia puolestaan mittaa tätä epäjärjestyneisyyttä, entropian täytyy kasvaa systeemin vastaanottaessa lämpöä. Entropian muutos on käänään verrannollinen lämpötilaan siksi, että jos lämpötila on matala, systeemi on aluksi melko hyvin järjestyneessä tilassa ja pieni-kin lämpömäärä riittää lisäämään systeemin epäjärjestystä huomattavasti. Sen sijaan jos lämpötila on korkea, systeemi on jo valmiaksi epäjärjestyneessä tilassa eikä pieni lämpömäärä muuta tilannetta kovin paljon.

Ideaalikaasun kvastistaattisten perusprosessien ominaisuuksia on koottu taulukkoon 9.1. Taulukossa on listattu kaasun sisäenergian ja entropian muutokset, kaasuun lämpönä ja työnä tuotu energia sekä kaasun paine tilavuuden tai lämpötilan funktiona. Ideaalikaasun tilanyhtälö esiintyy isokoroiden ja isotermisen prosessin kohdalla, mutta tilanyhtälö pääsee myös isobaarisessa ja isentrooppisessa prosessissa vaikkei sitä olekaan erikseen listattu. Termodynamiikan pääsäännöt pätevät luonnollisesti *kaikissa* prosesseissa.

Taulukko 9.1: Ideaalikaasun perusprosessien ominaisuuksia.

prosessi	vakio	$p(V, T)$	$\Delta E_{\text{sisä}}$	$Q_{\text{kokonais}}$	$W_{\text{kokonais}}$	$\Delta S$
isokorinen	$V$	$p = \frac{Nk_B}{V_{\text{alku}}} T$	$Nc_V^N \Delta T$	$\Delta E_{\text{sisä}}$	0	$Nc_V^N \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}$
isobaarinen	$p$	$p = p_{\text{alku}}$	$Nc_V^N \Delta T$	$Nc_p^N \Delta T$	$-Nk_B \Delta T$	$Nc_p^N \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}$
isoterminen	$T$	$p = Nk_B T_{\text{alku}} \frac{1}{V}$	0	$Nk_B T \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}$	$-Q_{\text{kokonais}}$	$\frac{Q_{\text{kokonais}}}{T}$
isentrooppinen	$S$	$p = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^{\gamma} \frac{1}{V^{\gamma}}$	$Nc_V^N \Delta T$	0	$\Delta E_{\text{sisä}}$	0



**9.21** Tarkastele taulukkoa 9.1. (a) Miten ominaislämpökapasiteetit hiukkasta kohden  $c^N$  voi muuntaa ominaislämpökapasiteeteiksi ainemäärää kohden  $c^n$ ? (b) Miksi  $c_V^N$  esiintyy myös isobaarisen ja isentrooppisen prosessin riveillä, vaikka niissä tilavuus ei ole vakio? (c) Onko työ positiivinen vai negatiivinen, kun lämpötila kasvaa (i) isobaarisessa ja (ii) isentrooppisessa prosessissa? Miksi?

## Nesteiden ja kiinteiden aineiden entropia

Yhtälöä (9.50) voi käyttää ainoastaan kaasuille, joten sen avulla emme voi laskea nesteiden tai kiinteiden aineiden entropiaa. Näilläkin olomuodoilla entropian, lämpötilan ja lämmön välillä on kuitenkin yhtälöä (9.55) muistuttava yhteys. Lämpötila nimittäin *määriteltiin* yhtälössä (8.90) käytämällä entropian derivaattaa systeemin sisäenergian suhteen tilavuuden ja ainemäären ollessa vakiot. Nesteellä ja kiinteillä aineilla tilavuuden muutokset ovat yleensä pieniä, joten niille siis pätee tämän perusteella

$$\frac{dS}{dE_{\text{sisä}}} = \frac{1}{T}. \quad (9.56)$$

Lisäksi jos aineiden tilavuus tai muoto ei muutu, niihin ei voi myöskään tuoda energiaa työn avulla ja tällöin niiden sisäenergiaa voi muuttaa ainoastaan siirtämällä energiaa niihin tai niistä lämpönä,

$$dE_{\text{sisä}} = dQ_{\text{kokonais}}. \quad (9.57)$$

Siispä nesteiden ja kiinteiden aineiden vastaanottaaessa pienien lämpömääriäniiden entropian muutos on

$$dS = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.58)$$

Vaikka tässä yhtälö perusteltiin vain vakiotilavuudessa tapahtuville prosesseille, se pätee itse asiassa yleisesti *kvasistaattisissa prosesseissa*. Erityisesti yhtälö pätee myös ideaalikaasulle.

Systeemin entropian kokonaismuutos voidaan laskea integroimalla yhtälöä (9.58). Isoterminen prosessi on yksinkertaisin tapaus, sillä lämpötilan ollessa vakio voidaan laskea

$$\Delta S_T = \int dS = \int \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = \frac{1}{T} \int dQ_{\text{kokonais}} = \frac{Q_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.59)$$

Tämä on sama tulos kuin mitä ideaalikaasun entropian lausekkeen avulla johdettiin. Jos systeemin tilavuus on vakio, yhtälön (9.58) voi ilmaista lämpökapasiteetin avulla muodossa

$$dS = nc_V^n \frac{dT}{T}, \quad (9.60)$$

ja entropian kokonaismuutokseksi saadaan

$$\Delta S_V = nc_V^n \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} \frac{dT}{T} = nc_V^n \left| \ln T \right|_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} = nc_V^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (9.61)$$

Tämäkin on sama tulos kuin mitä ideaalikaasun isokoraiselle prosessille johdettiin, ja myös isobaarisen prosessin entropian muutos (9.52) voidaan johtaa samalla tavalla.

Entropia voidaan laskea samalla periaatteella myös aineen olomuodon muutoksissa. Esimerkiksi kiinteän aineen sulattaminen vaatii energiaa, jonka aine yleensä vastaanottaa pelkästään lämpönä. Sulamisen aikana systeemi koostuu kiinteän ja nestemäisen aineen sekoituksesta, ja prosessin edetessä kiinteän aineen osuus vähenee ja nesteen määrä lisääntyy. Jos prosessi on nopea, nesteen lämpötila voi olla sulamispistettä korkeampi ja kiinteän aineen lämpötila tästä matalampi, mutta jos prosessi on kvasistaattinen, systeemin täytyy olla koko ajan likimain tasapainossa ja siten kauttaaltaan samassa lämpötilassa. Tämän lämpötilan täytyy olla sulamislämpötila, koska kiinteä ja nestemäinen olomuoto voivat olla tasapainossa vain sulamislämpötilassa, ja niinpä *kvasistaattisen olomuodon muutoksen täytyy tapahtua vakiolämpötilassa*. Tällöin entropian muutos sulamisen aikana saadaan laskettua yhtälöllä (9.59), missä systeemin vastaanottama lämpö on olomuodon muutokseen tarvittava latenttilämpö,  $Q_{\text{sisää}} = Lm$ .



**9.22** Pakastimeen asetetaan 0.010 kg vettä lämpötilassa 18.0 °C. Vedestä tulee jääkuutio, joka saa lämpötilan –18.0 °C. Mikä on entropian muutos (a) veden jäähtyessä, (b) veden jäätyessä, (c) jään jäähtyessä, (d) yhteensä?

## esimerkki 9.5

## Sulamisen entropia

Otaan pakastimesta jääkuution (massa 10 g, lämpötila  $-18^\circ\text{C}$ ). (a) Mikä on jään entropian muutos, kun siitä tulee vettä (loppulämpötila  $0^\circ\text{C}$ )? (b) Mikä on ympäristön entropian muutos, jos ympäristön lämpötila on vakio  $20^\circ\text{C}$ ? (c) Mikä on entropian kokonaismuutos?

**TILANNE** Jäänen ominaislämpökapasiteetti on noin  $c_V^m = 2.1 \text{ J/gK}$  ja veden sulamisen latenttilämpö on  $L = 334 \text{ J/g}$ . Jäänen alkulämpötila on noin  $T_{\text{alku}} = 255 \text{ K}$  ja loppulämpötila  $T_{\text{loppu}} = 273 \text{ K}$ . Ympäristön lämpötila on  $T_{\text{ympäristö}} = 293 \text{ K}$ .

**SUUNNITELMA** Jääpalaa vastaanottaa energiaa lämpönä, joten prosessissa  $dQ_{\text{kokonais}}$  on jääpalalle koko ajan positiivinen ja palan entropia kasvaa. Ympäristö puolestaan luovuttaa energian lämpönä, joten ympäristön entropia pienenee. Molemmille entropian muutos on

$$S = \int \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.62)$$

**RATKAISU** (a) Palan lämpenemisessä entropian muutos on

$$\Delta S_{255 \text{ K} \rightarrow 273 \text{ K}} = \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} mc_V^m \frac{dT}{T} = mc_V^m \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = 1.4 \text{ J/K}. \quad (9.63)$$

Tässä on pakko integroida, koska lämpötila ei ole prosessissa vakio. Sulamisen aikana lämpötila sen sijaan on vakio, joten entropian muutos on yksinkertaisesti

$$\Delta S_{\text{sulaminen}} = \frac{Q_{\text{sulaminen}}}{T_{\text{loppu}}} = \frac{Lm}{T_{\text{loppu}}} = 12.2 \text{ J/K}. \quad (9.64)$$

Kaikkiaan jääpalan entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{jää}} = \Delta S_{255 \text{ K} \rightarrow 273 \text{ K}} + \Delta S_{\text{sulaminen}} = 13.6 \text{ J/K}. \quad (9.65)$$

(b) Ympäristön lämpötila on vakio, joten sen entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{ympäristö}} = -\frac{Q_{\text{kokonais}}}{T_{\text{ympäristö}}} = -\frac{mc_V^m(T_{\text{loppu}} - T_{\text{alku}}) + Lm}{T_{\text{ympäristö}}} = -12.7 \text{ J/K}. \quad (9.66)$$

(c) Entropian kokonaismuutos on

$$\Delta S_{\text{kokonais}} = \Delta S_{\text{jää}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} = 0.9 \text{ J/K}. \quad (9.67)$$

**ARVIOINTI** Prosessi on kokonaisuudessaan irrseversiibeli, sillä lämpimään huoneeseen jätetty jääpalaa muuttuu itsestään vesilammikoksi, mutta vesilammikko ei muutu itsestään jääpalaksi. Tämä näkyy myös siinä, että palan ja sitä ympäröivän huoneen kokonaistentropia kasvaa. Huonehan voisi olla eristetty systeemi, joten sen sisällä tapahtuvassa irreversiibelissä prosessissa entropian täytyy kasvaa.

Edellisissä tapauksissa prosessien oletettiin aina olevan kvasistaattisia, sillä yhtälö (9.58) pätee kvasistaattisissa prosesseissa. Esimerkiksi kuvassa 9.4 tarkastelimme kaasun laajenemista ei-kvasistaattisesti tyhjään tilaan. Tällöin kaasu ei vastaanota lainkaan lämpöä, joten koko prosessin ajan  $dQ = 0$ . Entropian muutos olisi tällöin yhtälön (9.58) mukaan myös nolla, mutta tämä on väärin, sillä tässä prosessissa kaasun entropia kasvaa.

Tämä on irreversiibleiden prosessien ominaisuus. Jos prosessi on kvasistaattinen ja reversiibeli, systeemin entropian muutos riippuu systeemin vastaanottamasta lämmöstä yhtälön (9.58) mukaisesti. Sen sijaan jos prosessi ei tapahdu kvasistaattisesti eli systeemi ei ole tasapainossa, prosessiin liittyy aina irreversiibileitä komponentteja, joissa entropia lisääntyy. Kaasun vapaan laajenemisen tapauksessa irreversiibelisyyt johtuu siitä, että kaasu voi levitä itsestään tyhjään tilaan, mutta se ei koskaan itsestään palaa takaisin pieneen tilavuuteen. Laajenemisessa kaasun entropia kasvaa eikä käänneinen prosessi, jossa entropia pienenisi itsestään, ole mahdollinen.

Entropian muutosta ei siis voi laskea irreversiibleille prosesseille suoraan kaavalla (9.58) integroimalla, koska tämä sisältää vain lämmön surtoon liittyvän entropian muutoksen. Entropia on kuitenkin vain systeemin tilasta riippuva tilanmuuttuja, joten ideaalikaasun tapauksessa voimme *aina* laskea kaasun entropian prosessin alussa ja lopussa käyttäen yhtälöä (8.80).

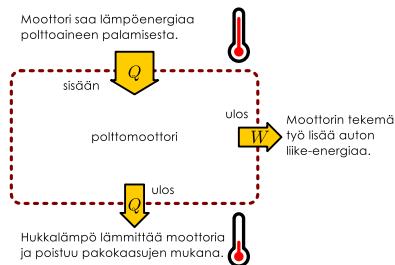


**9.23** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä entropian muutoksista erilaisissa prosesseissa. Selitä erityisesti, miten voit laskea entropian muutoksen kaasussa ja miten lasket sen muissa olomuodoissa.

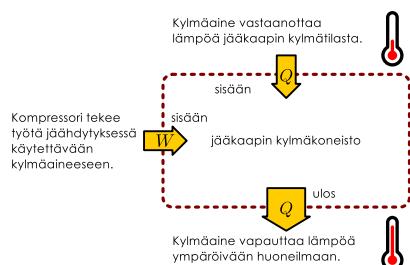
## 9.4 Energian hyödynnettävyys

### Kokonaisentropia

Kuva 9.11: Moottorin energiakaavio.



Kuva 9.12: Jääkaapin energiakaavio.



Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan eristetyn systeemin entropia ei voi pienentyä vaan sen täytyy kaikissa prosesseissa joko pysyä vakiona tai kasvaa. Entropia voi kuitenkin pienentyä systeemeissä, jotka eivät ole eristettyjä, koska entropia pienentyy systeemin luovuttaessa lämpöä. Esimerkiksi ideaalikaasun entropia pienenee, jos kaasu jäähtyy. Toinen pääsääntö ei siiksä päde suljetuille tai avoimille systeemeille. Kuitenkin jos koko maailmankaikkeus on eristetty systeemi, joka ei vaihda lämpöä minkään ulkopuolisen ympäristön kanssa, toinen pääsääntö pätee koko maailmankaikkeudelle. Siispä maailmankaikkeuden kokonaisentropia ei voi vähentyä ja kaikissa irreversiibleissä prosesseissa maailmankaikkeuden kokonaisentropia kasvaa.

Tarkastelimmepä millaista systeemiä tahansa systeemi ja sen ympäristö yhdessä kattavat periaatteessa koko maailmankaikkeuden. Niinpä vaikka systeemin entropia voi pienentyä systeemin luovuttaessa lämpöä, *systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia voi vain kasvaa*. Toisin sanoen jos prosessi pienentää systeemin entropiaa määrä  $\Delta S_{\text{systeemi}} < 0$ , systeemin ympäristön entropian täytyy välttämättä kasvaa samassa prosessissa vähintään määrä  $\Delta S_{\text{ympäristö}} = -\Delta S_{\text{systeemi}} > 0$ . Jos prosessi on reversiibeli, nämä muutokset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret ja kokonaisentropia on vakio

$$\Delta S_{\text{kokonais, reversiibeli}} = \Delta S_{\text{systeemi}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} = 0. \quad (9.68)$$

Jos prosessi on irreversiibeli, kokonaisentropian muutos on positiivinen

$$\Delta S_{\text{kokonais, irreversiibeli}} = \Delta S_{\text{systeemi}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} > 0. \quad (9.69)$$

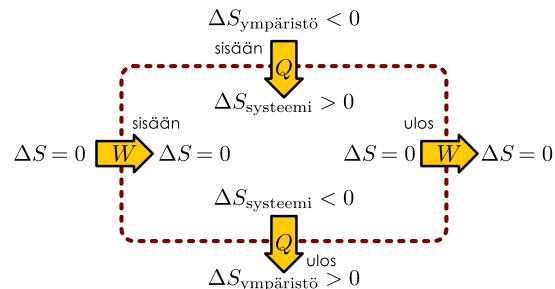
Systeemin vuorovaikutuksia ympäristönsä kanssa ja tämän vaikutusta energiaan voidaan esittää *energiasiirtokaavioilla*. Systeemi voi vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa joko työn tai lämmön kautta, ja prosessista riippuen energiaa voi siirtyä systeemiin tai systeemistä pois. Näitä eri mahdollisuuksia edustaa kaaviossa energiavirjoja kuvaavat nuolet. Kuvassa 9.11 on esitettyynä laite, joka vastaanottaa lämpöenergiaa ja muuntaa osan siitä työksi. Tämä voisi olla esimerkiksi polttomoottori, joka muuntaa osan palavan polttoaineen tuottamasta lämmöstä auton liike-energiaksi ja vapauttaa osan hukkalämpönä. Kuvassa 9.12 on puolestaan laite, johon tehdään työtä ja joka siirtää tämän avulla lämpöä kylmästä kuumaan. Tämä voisi olla esimerkiksi jääkaappi, johon kompressorit tekevät työtä ja joka tämän avulla jäähdittää kylmäsäiliötä.



**9.24** Millainen energiansiirtodiagrammi vastaa kuvan 9.10 prosesseja, joissa ominaislämpökapasiteetti mitataan vakiopaineessa ja -tilavuudessa.

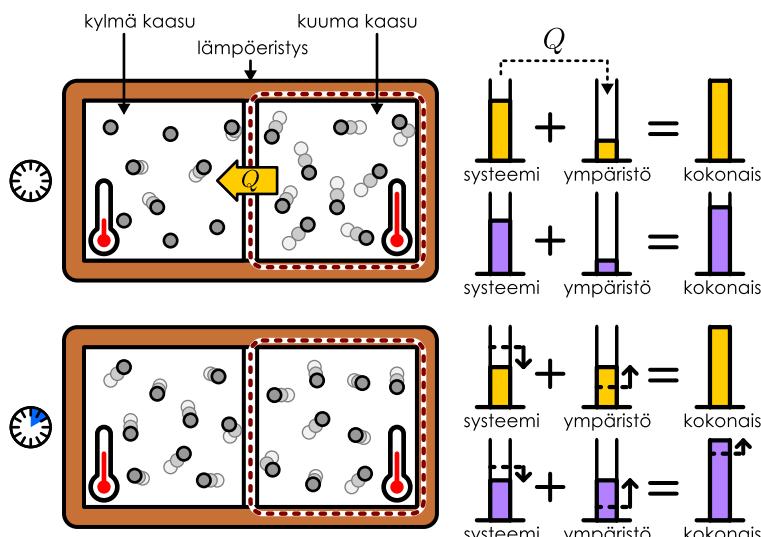
Kuvan 9.13 kaavioon on merkitty systeemin kaikki mahdolliset tavat vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa sekä näihin liittyvät entropian muutokset. Opimme jo aikaisemmin, että systeemiin tehty työ ei muuta sen entropiaa, joten työtä kuvaviin nuoliin ei liity lainkaan entropian muutosta. Sen sijaan lämmön siirtymässä systeemin ja ympäristön välillä molempien entropia muuttuu. Erityisesti lämmönsiirrossa *lämpöä luovuttavan puolen entropia pienenee ja lämpöä vastaanottavan puolen entropia kasvaa*. Huomaa myös, että kaavioon ei ole merkitty systeemin sisäisten prosessien aiheuttamia entropian muutoksia vaan ainoastaan systeemin ja sen ympäristön välisen energianvaihdon vaietus entropiaan. Systeemin entropia nimittäin kasvaa myös, jos sen sisällä tapahtuu irreversiibleitä prosesseja. Sisäiset prosessit eivät kuitenkaan toisen pääsäännön perusteella voi koskaan pienentää systeemin entropiaa.

Kuva 9.13: Entropian muutokset energian siirtymessä.

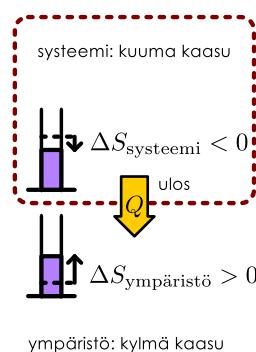


Kuva 9.14: Systeemin ja sen ympäristön entropian muutos. Systeeminä on tässä kuuma kaasu ja ympäristöä kylmä kaasu. Systeemin entropia pienenee, mutta ympäristön entropia kasvaa vielä enemmän ja kokonaisentropia lisääntyy.

(a) Prosessin energia- ja entropiadiagrammat.



(b) Energiansiirtokaavio.



**9.25** Tarkastele kuvien 9.5, 9.4 sekä 9.8 prosesseja. Miten systeemin, sen ympäristön sekä näiden yhteen laskettu entropia muuttuu kussakin prosessissa (kasvaa, pienenee, on vakio)? Muuttuuko systeemin entropia lämmönvaihdon tai sisäisten prosessien kautta?

Kuvassa 9.14 on yksinkertainen esimerkki lämmönsiirtoprosessista. Tässä tarkasteltava systeemi on säiliö täynnä kuumaa kaasua ja systeemin ympäristöä on toinen kylmää kaasua sisältävä säiliö. Prosessissa lämpöä siirtyy kylmän ja kuuman kaasusäiliön välillä, jolloin kuuma kaasu luovuttaa lämmön  $dQ$  kylmälle kaasulle. Koska prosessi tapahtuu vakiotilavuudessa, entropian muutos noudattaa yhtälöä (9.58), jonka mukaan kummankin kaasun entropian muutos on suoraan verrannollinen kaasun lämpönä vastaanottamaan energiamäärään ja käännekkäin verrannollinen kaasun lämpötilaan. Kylmä kaasu vastaanottaa lämmön  $dQ_{\text{kokonais}} = dQ$  lämpötilassa  $T_{\text{kylmä}}$ , joten sen entropian muutos on positiivinen eli entropia kasvaa,

$$dS_{\text{kylmä}} = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = \frac{dQ}{T_{\text{kylmä}}} > 0. \quad (9.70)$$

Kuuma kaasu sen sijaan luovuttaa lämpöä, joten sen vastaanottama lämpömäärä on negatiivinen,  $dQ_{\text{kokonais}} = -dQ$ , ja niinpä myös entropian muutos on negatiivinen eli entropia pienenee,

$$dS_{\text{kuuma}} = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = -\frac{dQ}{T_{\text{kuuma}}} < 0. \quad (9.71)$$

Prosessi jatkuu kunnes kaasut saavuttavat saman lämpötilan ja systeemi on tasapainossa ympäristönsä kanssa. Kaasujen lämpötilat muuttuvat prosessin aikana, mutta koko prosessin ajan kuuma kaasu jäähtyy ja kylmä kaasu lämpenee, jolloin kuuman kaasun entropia pienenee ja kylmän kasvaa. Koska lämpötilat eivät ole vakiot, entropian kokonaismuutos prosessin aikana pitää laskea integroimalla lausekkeita (9.70) ja (9.71) tai käytävällä yhtälöä (9.51). Kuitenkin koska kuuman säiliön lämpötila on koko prosessin ajan korkeampi kuin kylmän säiliön,  $T_{\text{kylmä}} < T_{\text{kuuma}}$ , kylmän kaasun entropian täytyy koko prosessin ajan muuttua nopeammin kuin kuuman kaasun. Näin ollen systeemin entropia pienenee prosessissa vähemmän kuin ympäristön entropia kasvaa ja systeemin sekä sen ympäristön kokonaisentropia kasvaa,

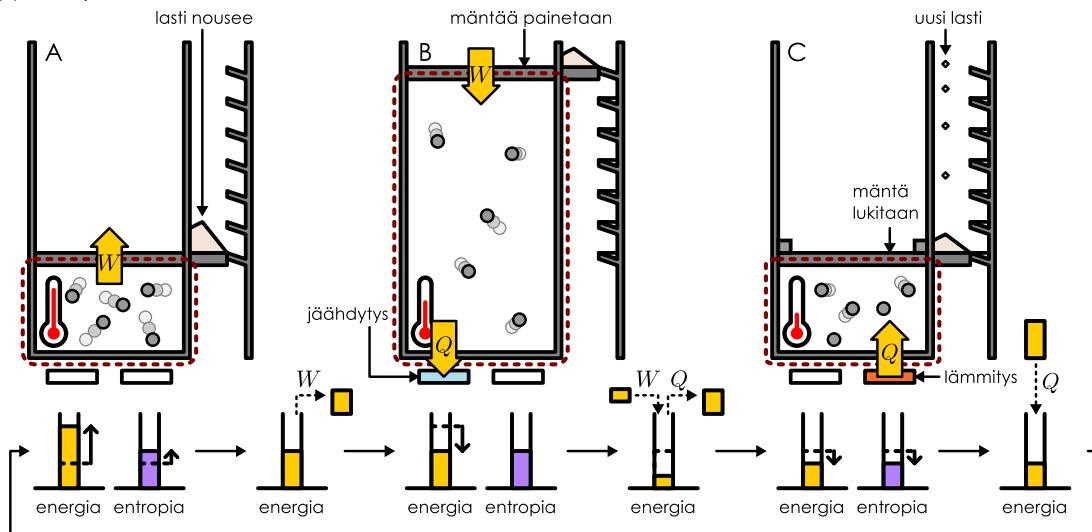
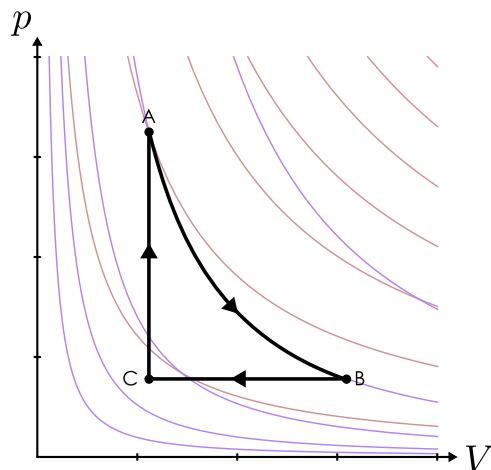
$$dS_{\text{kokonais}} = dS_{\text{kylmä}} + dS_{\text{kuuma}} = dQ \left( \frac{1}{T_{\text{kylmä}}} - \frac{1}{T_{\text{kuuma}}} \right) > 0. \quad (9.72)$$

**9.26** Onko kuvan 9.14 prosessi reversiibeli vai irreversiibeli? Oletetaan, että kylmää ja kuumaa kaasua on kumpaakin 1 mooli, kaasuilla on 5 vapausastetta, ja kaasujen alkulämpötilat ovat 300 K sekä 500 K, jolloin kaasujen lämpötila tasapainossa on 400 K. Laske kummankin kaasun entropian muutos sekä kaasujen kokonaisentropian muutos prosessissa.

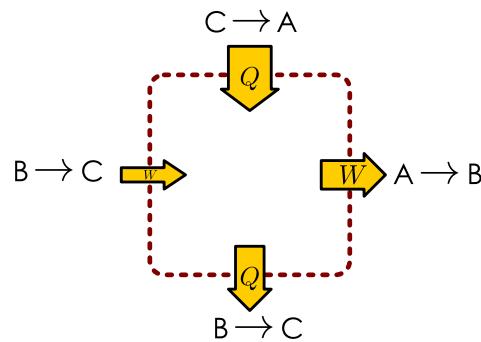
## TERMODYNAMIINKA

Kuva 9.15: Kolmivaiheinen kiertoprosessi. Prosessissa kaasu laajenee isentrooppisesti, supistuu isobaarisesti, ja lämpenee isokoriseksi.

(a) Kiertoprosessin vaiheet.

(b)  $pV$ -diagrammi.

(c) Energiansiirtokaavio.

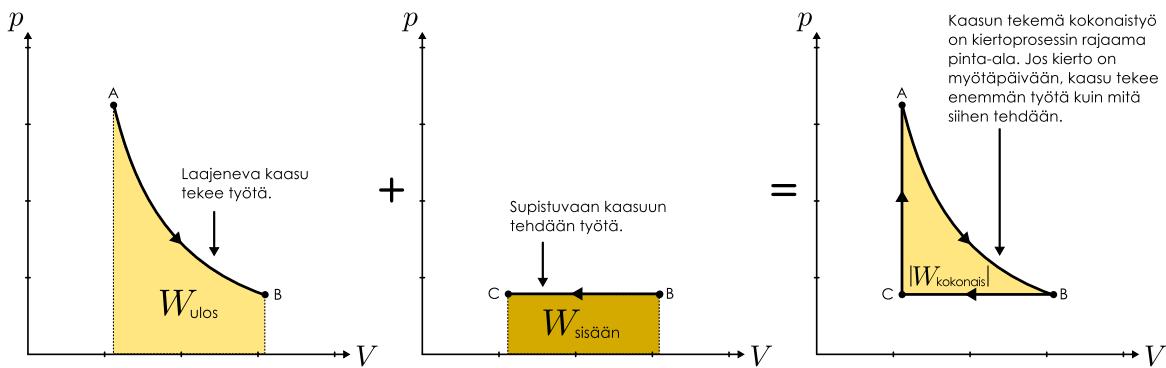


## Kiertoprosessit ja lämpövoimakoneet

Epäjärjestynyt lämpöenergiaa voidaan muuttaa järjestyneeksi mekaaniseksi energiaksi esimerkiksi antamalla kaasun laajentua isentrooppisesti. Tällöin kaasun epäjärjestynyt energia pienenee kaasun tehdessä työtä ympäristöönsä ja ympäristön järjestynyt energia voi kasvaa. Tällaisen prosessin voi kuitenkin toteuttaa sellaisenaan vain kerran, koska prosessin lopuksi kaasu on eri tilassa kuin aluksi eikä sen voi antaa laajentua loputtomäin. Jos prosessi halutaan toteuttaa uudestaan, kaasu on puristettava takaisin alkutilaansa.

Jos kaasun laajeneminen tapahtui kvasistaattisesti sekä adiabaattisesti ja kaasu puristetaan takaisin alkutilaan niin ikään kvasistaattisesti ja adiabaattisesti, kaasun täytyy tehdä puristettaessa täsmälleen yhtä paljon työtä kuin mitä se laajentuessaan teki. Tällöin prosessi vain muuntaa lämpöenergiaa ja mekaanista energiota edestakaisin toisikseen. Kaasu voidaan kuitenkin puristaa takaisin kokoon *eri tavalla* kuin miten se laajeni. Kuvassa 9.15 on esimerkki monivaiheisesta prosessista, jossa kaasu ensin laajenee isentrooppisesti tehden työtä ympäristöönsä (vaihe  $A \rightarrow B$ ). Sen jälkeen kaasu puristetaan takaisin alkutilavuuteensa isobaarisesti eli vakiopaineessa (vaihe  $B \rightarrow C$ ). Puristettaessa kaasuun lämpötila ja paine pyrkivät kasvamaan, jolloin kaasua täytyy samalla jäähdyttää, jotta paine pysyisi vakiona. Tämän jäähdytyksen takia kaasuun lämpötila on tilassa C pienempi kuin alkutilassa A, mutta kaasu voidaan lämmittää vakiotilavuudessa takaisin samaan lämpötilaan kuin missä se aluksi oli, jolloin systeemi palaa lopuksi takaisin alkutilaansa A.

Tällaista mekanismia kutsutaan **kiertoprosessiksi**, sillä prosessi suorittaa toimiessaan *kierron* eli *syklin*, jonka pääteeksi se palaa takaisin lähtötilaansa. Prosessin  $pV$ -kuvaajakin muodostaa tällöin suljetun silmukan, sillä sen täytyy palata lopuksi takaisin samaan pisteeseen mistä lähti. Koska kiertoprosessi palaa lopuksi alkutilaansa, se voidaan toistaa yhä uudestaan, ja tämän vuoksi polttooottorit ja kylmälaitteet yleensä perustuvatkin juuri kiertoprosesseihin.

Kuva 9.16: Kiertoprosessin tekemä työ on prosessin  $pV$ -diagrammissa rajaama pinta-ala.

Kuvan 9.15 kiertoprosessissa kaasun paine ja lämpötila ovat laajentumisvaiheessa suuremmat kuin supistumisvaiheessa, joten kaasu tekee laajentuessaan suurenman työn kuin mitä kaasuun tehdään sitä puristettaessa,  $W_{\text{sisääն}} < W_{\text{ulos}}$ . Niinpä kaasun tekemä kokonaistyö yhden kierron aikana on positiivinen eli toisin sanoen kaasuun tehty kokonaistyö on negatiivinen,  $W_{\text{kokonais}} = W_{\text{sisääն}} - W_{\text{ulos}} < 0$ . Kiertoprosessin tekemää työtä kuvaavat  $pV$ -diagrammissa prosessin kuvaajan sisään jäävä pinta-ala, kuten kuvassa 9.16 on havainnollistettu. Laajetessaan kaasu tekee työtä, jota kuvaavat laajenemisprosessia A → B kuvaavan käyrän alle jäävä pinta-ala. Supistumisen aikana kaasuun tehdään työtä, jota kuvaavat prosessin B → C alle jäävä ala. Kun nämä pinta-alat vähennetään toisistaan, jäljelle jää silmukan A → B → C → A sisään jäävä pinta-ala. Tässä tapauksessa kaasu laajenee korkeammassa paineessa kuin supistuu, jolloin kaasu tekee ympäristöönsä enemmän työtä kuin mitä kaasuun tehdään. Diagrammissa tämä näkyy siten, että kiertoa kuvaava silmukka kulkee myötäpäivään. Päinvastaisessa prosessissa kuvaaja kierrettäisiin vastapäivään, ja tällöin kaasuun tehtäisiin työtä enemmän kuin mitä kaasu tekee.

Systeemin sisäenergia ja entropia riippuvat ainoastaan sen tilasta, joten vaikka systeemin energia ja entropia voivat kiertoprosessin kuluessa muuttua, ne *palaavat aina takaisin alkuarvoihinsa kierron päätteeksi*,  $E_{\text{systeemi, loppu}} = E_{\text{systeemi, alku}}$ ,  $S_{\text{systeemi, loppu}} = S_{\text{systeemi, alku}}$ . Niinpä systeemin kokonaisen energian ja entropian muutos kierron jälkeen on *nolla*,  $\Delta E_{\text{systeemi}} = E_{\text{systeemi, loppu}} - E_{\text{systeemi, alku}} = 0 \text{ J}$  ja  $\Delta S_{\text{systeemi}} = S_{\text{systeemi, loppu}} - S_{\text{systeemi, alku}} = 0 \text{ J/K}$ . Näin täytyy olla riippumatta siitä millainen kiertoprosessi on kyseessä.



**9.27** Päteekö  $\Delta E_{\text{systeemi}} = 0 \text{ J}$  ja  $\Delta S_{\text{systeemi}} = 0 \text{ J/K}$  kiertoprosessille, johon kuuluu ei-kvasistaattisia prosesseja? Entä jos systeemissä vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia?

Tästä seuraa ensinnäkin se, että energian säilymislain perusteella systeemin tekemän kokonaistyön täytyy olla täsmälleen yhtä suuri kuin systeemin vastaanottaman kokonaislämmön,

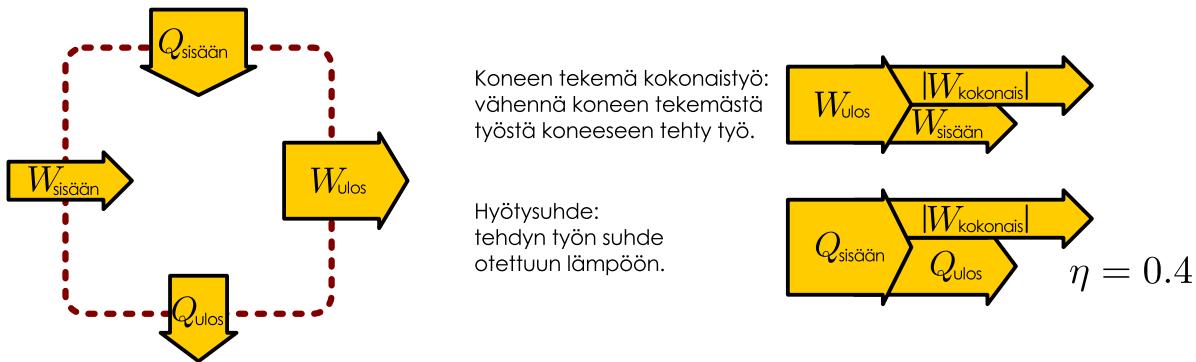
$$|W_{\text{kokonais}}| = -W_{\text{kokonais}} = Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sisääն}} - Q_{\text{ulos}}. \quad (9.73)$$

Tässä työ on merkityt itseisarvoihin siksi, että määrittelimme symbolin  $W_{\text{kokonais}}$  tarkoittavan *systeemiin tehtyä* työtä, jolloin *systeemin tekemä* työ on  $-W_{\text{kokonais}} = |W_{\text{kokonais}}|$ , kun kyseessä on työtä tekevä prosessi. Energiansiirtokaaviossa energian säilyminen näkyy niin, että *kiertoprosessia kuvaavassa kaaviossa systeemiin tulevien ja sieltä poistuvien energiarakenteiden pitää olla yhtä suuret*.

Lämpöä työksi jalostavia prosesseja kutsutaan **lämpövoimakoneiksi**. Koneen sisällä olevaa ainetta kuten kaasua, jonka tilan muutoksiin koneen toiminta perustuu, kutsutaan puolestaan koneen **toimivaksi aineeksi**. Nimestään huolimatta lämpövoimakoneen ei tarvitse olla kone vaan se voi olla millainen tahansa lämpöä työksi muuntava prosessi. Samoin lämpövoimakoneen lämmitys ja jäähdytys voivat olla millaisia tahansa lämpöä siirtäviä prosesseja. Esimerkiksi kuvan 9.15 laite on lämpövoimakone kuten myös kaikki polttoaineen lämpö-energian hyödyntämiseen perustuvat laitteet polttomoottoreista voimaloiden turbiineihin. Tällaisissa koneissa lämmitys tapahtuu yleensä niin, että koneen polttoaineessa tapahtuu lämpöä vapauttavia kemiallisia ( tai ydinfysikaalisia) reaktioita, jotka nostavat koneen sisällä olevan aineen lämpötilaa. Jäähdytys puolestaan voi tapahtua esimerkiksi johtamalla kuumat pakokaasut ulos koneesta tai vaikkapa ympäröimällä laite kylmällä vedellä. Lämpövoimakoneet ovat yleisiä myös luonnossa. Esimerkiksi Maapallon ilmasto ja sää ovat valtavia lämpövoimakoneita, jotka jatkuvasti muuntavat Auringosta säteilynä saapuvaa lämpöä ilman ja veden liikkeen mekaniseksi energiaksi. Säänen tapauksessa koneen jäähdytys perustuu siihen, että Maapallo lähetää jatkuvasti lämpöä avaruuteen infrapunasäteilynä.

Termodynamiikan pääsäännöt asettavat samanlaiset rajoitukset kaikkien lämpövoimakoneiden toiminnalle olipa kyseessä ihmisen rakentama laite tai luonnon prosessi. Koska lämpövoimakoneiden teknologinen

Kuva 9.17: Kokonaistyön ja hyötysuhteiden määrittäminen energiansiirtodiagrammista.



käyttötarkoitus on muuttaa lämpöä työksi, konetta voi pitää sitä parempana mitä suuremman osuuden vastaanottamastaan lämmöstä se pystyy muuttamaan työksi. Esimerkiksi auton moottori on taloudellinen, jos se pystyy kuljettamaan autoa pitkän matkan polttaen vain vähän bensiiniä. Tätä mittaa **hyötykuva**, joka on koneen tekemän kokonaistyön suhde koneen vastaanottamaan lämpöön ( $Q_{sisään}$ ) (kuva 9.17)

$$\eta = \frac{|W_{\text{kokonais}}|}{Q_{\text{sisään}}}.$$
(9.74)

Hyöty suhte ei tietenkään ole ainoa koneiden toimivuuden mittari, sillä hyöty suhteeltaan hyvä moottori ei välttämättä ole tehokas eli se ei välttämättä pysty tekemään paljon työtä lyhyessä ajassa.

Toiseksi, koska systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia ei voi koskaan vähentyä, *kiertoprosessi voi ainoastaan kasvattaa ympäristön entropiaa tai pitää sen vakiona*. Tämä ehto asettaa *rajoituksia sille, kuinka paljon eri muodoissa energiaa voi siirtyä*, mikä ilmenee energiansiirtodiagrammissa niin, että eri nuolet eivät voi olla minkä kokoisia tahansa. Esimerkiksi laite, joka pelkästään ottaisi lämpöä ja tekisi työtä on mahdoton, koska laitteen ottaessa lämpöä ympäristön entropia pienenee ja laitteen tehdessä työtä entropia ei muutu. Näin ollen laite pienentäisi ympäristön entropiaa, mikä ei ole toisen pääsäännön mukaan mahdollista. Lämpöä työksi muuntava kiertoprosessi ei siis voi toimia pelkästään lämmityksen avulla, vaan tällaisen kierron pitää välittämättä myös luovuttaa lämpöä ympäristöönsä. Kiertoprosessi ei siis voi koskaan muuntaa kaikkea lämpöä työksi, vaan lämpöä hyödyntävät laitteet välittämättä hukkaavat osan vastaanottamastaan lämmöstä.

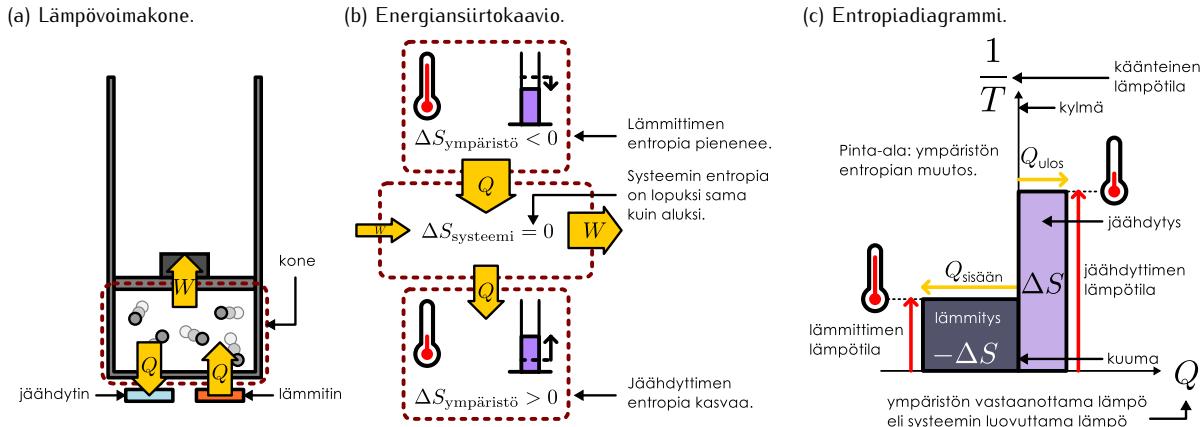
Koska lämpövoimakone ei voi luoda energiaa, hyötyuhde ei voi olla yli 1. Mutta itse asiassa termodynamiikan toinen pääsääntö rajoittaa hyötyuhdetta vielä paljon voimakkaammin, jolloin edes ideaalisen koneen hyötyuhde ei yleensä voi olla lähelläkään yhtä. Tämä johtuu siitä, että systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia ei voi koskaan vähenyä. Koska kiertoprosessissa koneen entropia palaa kierron lopuksi samaan arvoon kuin aluksi, *kiertoprosessi voi ainoastaan kasvattaa ympäristön entropiaa tai pitää sen vakiona.* Toisaalta lämpövoimakone muuttaa ympäristönsä entropiaa vain energian siirtyessä lämpönä koneen ja ympäristön välillä. Esimerkiksi laite, joka pelkästään ottaisi lämpöä ja tekisi työtä on mahdoton, koska laitteen ottaessa lämpöä ympäristön entropia *pienenee* ja laitteen tehdessä työtä ympäristön entropia *ei muutu*. Kokonaisuudessaan tällainen laite siis pienentäisi ympäristön entropiaa, mikä ei ole toisen pääsäännön mukaan mahdollista.

Sen sijaan ympäristön entropia kasvaa, kun energiaa siirryy lämpöön koneesta ympäristöön. Niinpä lämpöä vastaanottavan kiertoprosessin on *pakko* myös luovuttaa lämpöä ympäristöön, jotta ympäristön entropia ei vähentyisi. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että kone ei voi muuntaa kaikkea lämpöön saamaansa energiaa työksi, sillä sen on pakko luovuttaa osa takaisin ympäristöön hukkalämpöön. Näin ollen koneen hyötysuhteen täytyy olla selvästi alle 1.

Seuraava kysymys onkin, kuinka hyvä lämpövoimakoneen hyötyuhde voisi teoriassa olla. Tähän vastaaminen edellyttää koneen *ympäristön* entropian muutosten analysointia, koska koneen toimintaa rajoittaa nimenomaan termodynamiikan toisen pääsäännön asettama ehto, jonka mukaan *ympäristön* entropian täytyy olla sama tai suurempi koneen palatessa alkutilaansa kierron jälkeen. Kuvassa 9.18 on esitetty lämpövoimakonetta esittävä malli ja energiansiirtokaavio sekä koneen *ympäristön* entropian muutoksia esittävä entropiadiagrammi.

Koneen ympäristöksi voidaan entropiadiagrammissa huomioida vain lämmitin ja jäähdytin, sillä kone muuttaa ympäristönsä entropiaa ainoastaan lämmön siirtyessä koneen ja ympäristön välillä. Yleisesti lämmittimen ja jäähdyttimen lämpötilat voivat prosessin aikana muuttua, mutta tarkastellaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi konetta, jonka lämmitin on vakiolämpötilassa  $T_{\text{kuuma}}$  ja jäähdytin vakiolämpötilassa  $T_{\text{kylmä}}$ . Tällainen kone pieventää ympäristönsä entropiaa määränpäin  $\Delta S_{\text{ympäristö}} = -Q_{\text{sisään}}/T_{\text{kuuma}}$  vastaanottaaessaan lämpöä ja kasvattaa

Kuva 9.18: Kiertoprosessin entropiadiagrammi. Ympäristön entropia kasvaa prosessin luovuttaessa lämpöä ja pienenee prosessin vastaanottessa lämpöä. Entropian muutos on siirtymän lämmön ja ympäristön lämpötilan suhde.



ympäristön entropiaa määrä  $\Delta S_{ympäristö} = Q_{ulos}/T_{kylmä}$  luovuttaessaan hukkalämpöä. Entropiadiagrammissa näitä muutoksia voidaan kuvata pürtämällä koordinaatistoa, jonka vaaka-akselilla on siirtymä lämpö  $Q$  ja pystyakselilla lämpötilan käänneisluku  $1/T$ . Kumpaakin lämmönsiirtoprosessia kuvaaa tässä koordinaatistossa suorakaide, jonka leveys vastaa lämpönä siirtymän energian määriä ja korkeus lämpötilaa, jossa lämpö siirtyy. Tässä tosin korkeus kuvaaa käänneistä lämpötilaa eli kuviot ovat sitä korkeammat mitä matalampi lämpötila on. *Entropian muutosta kuvaava suorakaiteen pinta-ala*, joista koneen lämmitystä kuvaava pinta-ala vastaa ympäristön entropian pienemistä ja jäähdytystä kuvaava ala esittää ympäristön entropian kasvua. Koska ympäristön entropia voi kiertoprosessissa kokonaisuudessaan vain kasvaa, *jäähdytystä kuvaavan suorakaiteen pinta-alan täytyy olla vähintään yhtä suuri kuin lämmitystä kuvaavan suorakaiteen*.



**9.28** Laite, joka siirtäisi kiertoprosessilla lämpöä kylmästä kuumaan ilman että siihen tehtäisiin työtä, on mahdoton. Jääkaappi on kuitenkin aivan toimiva laite. (a) Millaiset ovat näiden laitteiden energiansiirtokaaviot ja entropiadiagrammit? (b) Perustele näiden avulla, miksi lämpö ei voi siirtää itsestään kylmästä kuumaan.

Tämä ehto asettaa voimakkaita rajoituksia lämpöön siirtymien energiamäärien ja lämpötilojen suuruksille. Jos kone toimii tiettyjen äärilämpötilojen  $T_{kuuma}$  ja  $T_{kylmä}$  välillä, sen täytyy jäähdytyksessä luovuttaa vähintään lämpömäärä

$$Q_{ulos, \min} = Q_{sisään} \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}, \quad (9.75)$$

jotta jäähdytystä kuvaavan suorakaiteen pinta-ala olisi entropiadiagrammissa ainakin yhtä suuri kuin lämmitystä kuvaavan suorakaiteen. Prosessin tekemä työ on täsmälleen sen vastaanottaman ja luovuttaman lämpömäärän erotus, joten kone voi tehdä työtä maksimissaan määrä

$$|W_{kokonais, \max}| = Q_{sisään} - Q_{ulos, \min} = Q_{sisään} \left(1 - \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}\right), \quad (9.76)$$

ja näin ollen minkä tahansa lämpövoimakoneen *paras mahdollinen hyötyuhde* on

$$\eta_{\max} = \frac{|W_{kokonais, \max}|}{Q_{sisään}} = 1 - \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}, \quad (9.77)$$

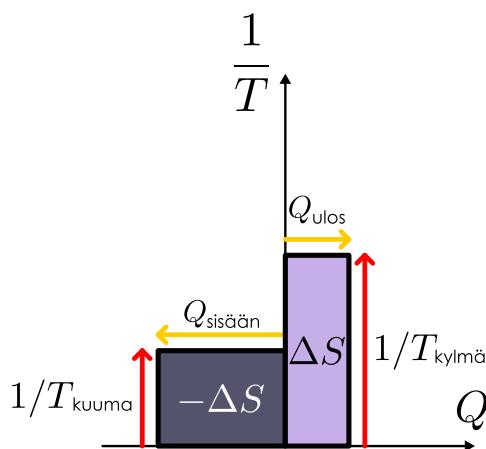
kun koneen lämmitin ja jäähdytin ovat vakiolämpötilassa  $T_{kuuma}$  ja  $T_{kylmä}$ . Jos lämpövoimakoneen lämmitys ja jäähdytys tapahtuvat lämpötiloissa, jotka eivät ole kovin kaukana toisistaan, koneen hyötyuhde on siis välttämättä huono, eikä tämä rajoitus riipu lainkaan siitä, miten kone käytännössä toimii. Lämpövoimakoneiden hyötyuhdetta voidaan kuitenkin parantaa lämmittämällä niitä kuumemmissa lämpötiloissa ja jäähdyttämällä kylmemmissä.

Todellisten lämpövoimakoneiden hyötyuhheet ovat tavallisesti paljon huonommat kuin tässä esitettty paras mahdollinen tapaus, koska todellisissa koneissa on aina myös dissipatiivisia vuorovaikutuksia, jotka lisäävät koneen entropiaa sen toimiessa. Koska koneen entropia palautuu kunkin kierron pääteeksi samaan arvoon kuin alkuksi, täytyy jäähdytyksen näin ollen pienentää koneen entropiaa ja lisätä sen ympäristön entropiaa *enemmän* kuin ideaalisessa tapauksessa (kuva 9.19). Esimerkiksi moottorissa vaikuttava kitka muuttaa mekaanista energiaa lämpöenergiaksi, jolloin moottorin kuumenemisen estämiseksi jäähdytyksen täytyy poistaa moottorista enemmän lämpöä kuin ideaalisessa kitkattomassa koneessa. Samalla moottori tekee vähemmän työtä ja sen hyötyuhde on huonompi. Entropiadiagrammissa tämä ilmenee niin, että jäähdytystä kuvaava suorakaide on pinta-alaltaan selkeästi *suurempi* kuin lämmitystä kuvaava suorakaide.

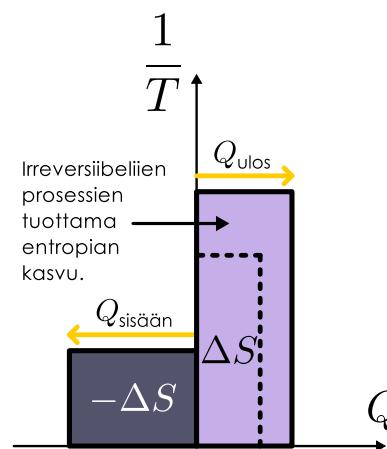
## TERMODYNAMIKKAA

Kuva 9.19: Lämpövoimakoneiden entropiadiagrammeja. Ideaalinen kone ei muuta ympäristön entropiaa, jolloin entropian muutoksia kuvaavat pinta-alat ovat yhtä suuret. Todellisessa koneessa tapahtuu irreversiileitä prosesseja, jolloin entropia kasvaa ja entropian kasvua kuvava pinta-ala on suuri. Entropiaa pienentävä kone on mahdoton.

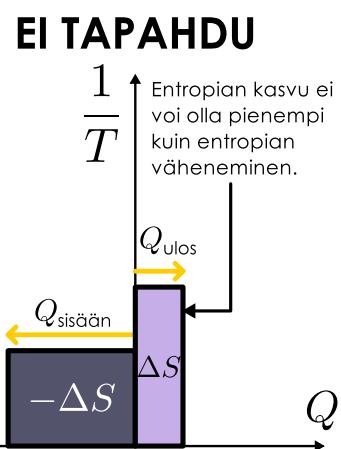
(a) Ideaalinen kone.



(b) Todellinen kone.



(c) Mahdoton kone.

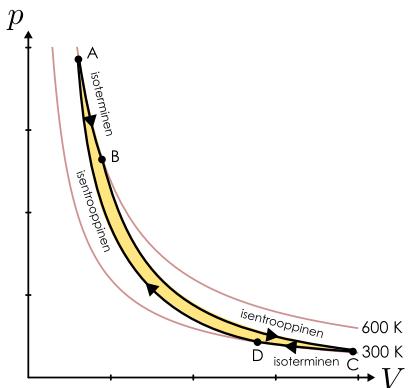


**9.29** (a) Miten kuvan 9.19 (a) entropiadiagrammi muuttuu, jos (i) jäähdytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu enemmän lämpöä, (ii) jäähdytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu vähemmän lämpöä, (iii) jäähdytys tapahtuu korkeammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu vähemmän lämpöä? (b) Mitkä näistä muutoksista ovat mahdollisia? (c) Miten nämä muutokset vaikuttavat koneen hyötysuhteeseen?

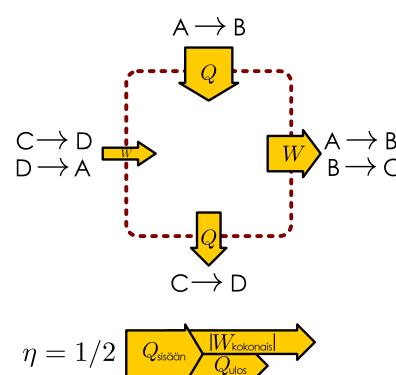
Tällaisen ideaalisen lämpövoimakoneen voi teoriassa toteuttaa esimerkiksi kuvassa 9.20 esitetyn kiertoprosessin avulla. Prosessissa kaasua lämmitetään ja jäähdytetään tuomalla kone vuorotellen kosketuksiin kuuman ja kylmän lämpösäiliön kanssa. Tilassa A koneen lämpötila on sama kuin kuuman lämpösäiliön,  $T_{kuuma}$ . Kone pidetään kiinni tässä lämpösäiliössä ja sen sisältämän kaasun annetaan laajeta isotermisesti (prosessi  $A \rightarrow B$ ), jolloin kone sekä vastaanottaa lämpöä että tekee työtä. Tämän jälkeen kone irrotetaan lämpösäiliöstä ja kaasun annetaan laajentua isentrooppisesti ( $B \rightarrow C$ ), jolloin se tekee työtä mutta ei vastaanota lämpöä. Kun kaasun lämpötila on saavuttanut kylmäsäiliön lämpötilan  $T_{kylma}$ , kone kiinnitetään kylmäsäiliöön ja kaasua puristetaan ensin isotermisesti ( $C \rightarrow D$ ) ja lopuksi vielä isentrooppisesti lämpösäiliöstä erillään ( $D \rightarrow A$ ). Tätä kiertoa kutsutaan **Carnot-kiertoprosessiksi** (Sadi Carnot'n mukaan), ja jos koneessa tapahtuvat prosessit ovat kvasistaattiset, siinä saavutetaan yhtälön (9.77) hyötyuhde, sillä kone vaihtaa lämpöä vain vakiolämpötilassa olevien lämpösäiliöiden kanssa.

Carnot-kierto on teoreettisesti tärkeä, koska siinä saavutetaan paras mahdollinen lämpötilojen  $T_{kylma}$  ja  $T_{kuuma}$  välillä toimivien koneiden hyötyuhde (9.77). Prosessi ei ole kuitenkaan tehokas, koska isotermiset prosessit ovat yleensä hitaita ja Carnot-prosessi tekee yhden kierron aikana melko pienien työn, mikä näkyy

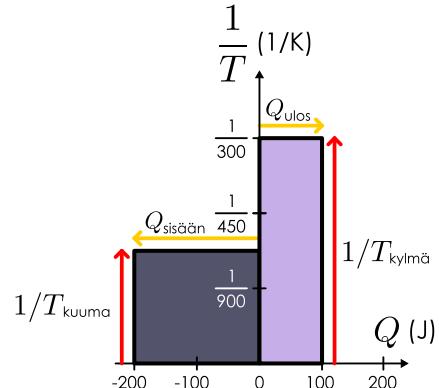
Kuva 9.20: Carnot-kiertoprosessilla saavutetaan paras mahdollinen hyötyuhde, kun prosessin äärilämpötilat on kiinnitetty.

(a)  $pV$ -diagrammi.

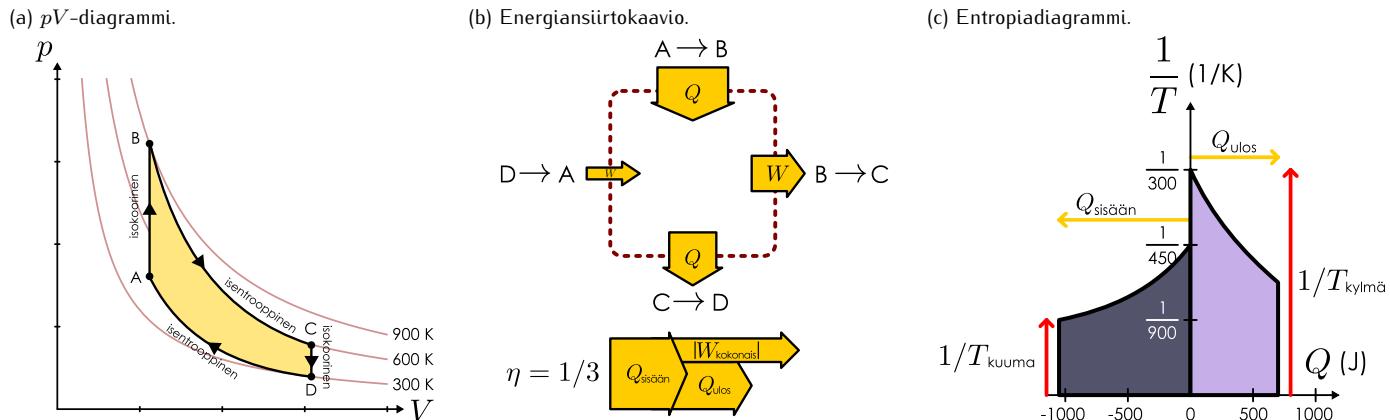
(b) Energiansiirtokaavio.



(c) Entropiadiagrammi.



Kuva 9.21: Otto-kiertoprosessilla voidaan saavuttaa parempi teho kuin Carnot-prosessilla, mutta sen hyötytuhde on välttämättä huonompi.



$pV$ -kuvaajan rajaaman pinta-alan pienuttena. Niinpä todellisissa moottoreissa käytetään muita kiertoprosesseja. Esimerkiksi isokooriset ja isobaariset prosessit voidaan toteuttaa käytännössä melko nopeasti ja niiden avulla saadaan muodostettua  $pV$ -diagrammissa suuremman pinta-alan rajaavia ja siis enemmän työtä yhden kierron aikana tekeviä prosesseja.

Kuvassa 9.21 on esitetty esimerkkinä *Otto-prosessi* (Nikolaus Otton mukaan), joka on melko hyvä malli tavallisten bensiinikäyttöisten polttomoottoreiden toiminnalle. Tässä prosessissa kaasun isentrooppinen laajentuminen ja supistuminen on yhdistetty isokoorisilla lämmitys- ja jäähdytysprosesseilla. Käytännössä tämä tapahtuu niin, että polttoaine palaa moottorin sylinterissä likimain vakiotilavuudessa ( $A \rightarrow B$ ), jolloin kuumat palokaasut laajenevat työntää mäntää ( $B \rightarrow C$ ), ja mäntää työntävä voima välitetään auton renkaita pyörityväksi momentiksi. Tämä laajeneminen on niin nopeaa, että lämpöä ei ehdi juurikaan siirtymään sylinterin ja moottorin muiden osien välillä, joten prosessi on likimain adiabaattinen. Sylinterin jäähdytys tapahtuu nopeasti likimain vakiotilavuudessa poistamalla sylinteristä kuumat pakokaasut ja korvaamalla ne uudella, kylmällä ilman ja polttoaineen seoksella ( $C \rightarrow D$ ). Lopuksi mäntä puristaa kaasut takaisin alkutilavuteen uutta polttoa varten ( $D \rightarrow A$ ).

Otto-kierrosto on tavallisesti paljon tehokkaampi kuin Carnot-kierrosto, sillä se voi tehdä paljon työtä lyhyessä ajassa. Otto-kierrosto ei kuitenkaan voi olla hyötysuhteeltaan parempi kuin Carnot-kierrosto, jos kierrosten äärilämpötilat ovat samat. Tämä johtuu siitä, että Otto-kierrossa lämmitys ja jäähdytys eivät tapahdu vakiolämpötilassa kuten Carnot-kierrossa vaan koneen toimivan aineen lämpötila kasvaa lämmityksen aikana ja pienenee jäähdyksen aikana.



**9.30** Tarkastele kuvan 9.21 Otto-kierrotoa esimerkin 9.6 pohjalta. Voit olettaa, että koneen toimivana aineena on kaksiatomista ideaalikaasua. (a) Mitkä ovat parametrit  $r$  ja  $s$  kuvassa esitetylle prosessille? (b) Paljonko kaasua moottorissa on? (c) Mikä on prosessin teoreettinen hyötytuhde?

Kuvan 9.20 esimerkissä Carnot-kierrosto tapahtuu lämpötilojen 300 K ja 600 K välillä, joten sen hyötytuhde on  $\eta = 1 - 300\text{ K}/600\text{ K} = 1/2$ . Kuvan 9.21 Otto-kierrosto tapahtuu lämpötilojen 300 K ja 900 K, mutta sen hyötytuhde on silti vain noin  $\eta \approx 1/3$ , kun vastaavalla lämpötilavälillä Carnot-kierron hyötytuhde olisi  $2/3$ .

Syy tähän selviää tarkastelemalla entropiadiagrammia. Jäähdytynksen aluksi Otto-koneen lämpötila on 600 K ja lopuksi 300 K. Jos ympäristön lämpötila olisi sama kuin koneen, ympäristön entropian kasvua esittävä kuvaus ei olisi enää suorakaide vaan likimain puolisunnikas. Vastaavasti lämmityksen aikana prosessin lämpötila muuttuu arvosta 450 K arvoon 900 K. Tästä johtuen Otto-prosessissa entropian lisääntymistä esittävä oikeanpuoleinen kuvaus on *matala* ja entropian vähentymistä esittävä vasemmanpuoleinen kuvaus on *korkea* vastaan Carnot-kierroon verrattuna. Edelleen, koska näistä kuvausista oikeanpuoleisen (entropian kasvun) on oltava pinta-alaltaan suurempi, sen on oltava siis myös suhteellisesti  *leveämpi* kuin Carnot-kierrossa. Kuvioiden leveys kuitenkin esittää koneen hukkalämpöä, joten Otto-kierron vastaanottamasta lämmöstä poistuu hukkalämpönä suurempi *osuus* kuin Carnot-kierrossa. Esimerkissä 9.6 on analysoitu täsmällisesti Otto-kierron vastaanottama ja luovuttama lämpö sekä kierron tekemä työ ja hyötytuhde.



**9.31** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä lämpövoimakoneesta. Määrittele hyötytuhde. Selitä, miten toinen pääsääntö rajoittaa lämpövoimakoneiden toimintaa sekä mitä erityistä on Carnot'n koneessa.

## esimerkki 9.6

## Otto-kierto

Otto-kiertoa suorittavan moottorin sylintereissä kaasun tilavuus vaihtelee välillä  $V_{\min}$  ja  $V_{\max} = rV_{\min}$ , missä  $r = 10$  on niin sanottu puristussuhde. Kaasun suurin paine ja lämpötila kierron aikana on  $p_{\max}$  ja  $T_{\max}$ . Polttoaineen palaessa kaasun lämpötila kasvaa kertoimella  $s = 2$ . Tarkastellaan täysin ideaalista moottoria, jonka kaikki prosessit ovat reversiibeleitä ja kaasu käyttää enemmän energian muodostusta kuin ideaalikaasu, jolla on 5 vapausastetta. (a) Mikä on kaasun paine, tilavuus, ja lämpötila (suhteessa näiden maksimi- tai minimiarvoihin), kierron ääripisteissä ( $pV$ -kuvaajan kulmissa)? (b) Paljonko lämpöä moottori vastaanottaa kierron aikana? (c) Paljonko lämpöä moottori luovuttaa kierron aikana? (d) Mikä on moottorin tekemä kokonaistyö kierron aikana? (e) Mikä on moottorin hyötytuhde? (f) Mikä on vastaavien äärlämpötilojen välillä toimivan moottorin suurin mahdollinen hyötytuhde?

**TILANNE** Otto-kierrossa kaasu käy läpi vuorotellen isokoorisia ja isentrooppisia prosesseja. Pürretään kierron  $pV$ -diagrammi ja energiansiirtokaavio. Merkitään kierron ääripisteitä kirjaimin A – D (sama järjestys kuin kuvassa 9.21). Pisteessä B kaasun lämpötila on maksimissaan, joten käytetään tämän pisteen paineen, tilavuuden ja lämpötilan arvoja vertailukohtana muille pisteille. Kaasun tilavuus on minimiin pisteissä A ja B,  $V_A = V_B = V_{\min}$ , ja maksimissaan pisteissä C ja D,  $V_C = V_D = V_{\max} = rV_B$ . Kaasu vastaanottaa lämpöä prosessissa A → B ja luovuttaa lämpöä prosessissa C → D. Kaasu tekee työtä prosessissa B → C ja kaasun tehäään työtä prosessissa D → A. Kaasun lämpötila muuttuu prosessissa A → B kertoimella  $s$  eli  $T_A = T_B/s$ . Ideaalikaasun tilanvaihtelun mukaisesti paine on vakiotilavuudessa suoraan verrannollinen lämpötilaan, joten myös paine muuttuu tassä prosessissa samalla kertoimella  $p_A = p_B/s$ .

Koska kaasulla on viisi vapausastetta, sen adiabaattivakio on  $\gamma = 1 + 2/5 = 1.4$ . Tämä vastaa kaksiatomista kaasua, jota ilmakin suurimmaksi osaksi on.

**SUUNNITELMA** Paine kussakin pisteessä voidaan ratkaista adiabaattilain avulla ja lämpötila edelleen paineen ja tilavuuden perusteella ideaalikaasun tilanvaihtelosta. Kun tilanmuuttujien arvot kussakin pisteessä tunnetaan, voimme laskea kussakin prosessissa lämpönä tai työnä siirtyneen energian esimerkiksi taulukon 9.1 avulla. Hyötytuhde taas saadaan näiden avulla tehdyn kokonaistyön suhteena vastaanotettuun lämpöön. Paras mahdollinen hyötytuhde saadaan myös laskettua suoraan prosessin äärlämpötilojen perusteella.

**RATKAISU** (a) Prosessissa B → C pätee adiabaattilaki  $pV^\gamma = \text{vakio}$ , joten

$$p_C = p_B V_B^\gamma / V_C^\gamma = \frac{1}{r^\gamma} p_B. \quad (9.78)$$

Vastaavasti prosessissa D → A

$$p_D = p_A V_A^\gamma / V_D^\gamma = \frac{1}{r^\gamma} p_A = \frac{1}{s r^\gamma} p_B. \quad (9.79)$$

Lämpötilat eri pisteissä ovat näin ollen tilanvaihteloon perustellut

$$T_A = \frac{p_A V_A}{N k_B} = \frac{\frac{1}{s} p_B V_B}{N k_B} = \frac{1}{s} T_B \quad (9.80)$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{N k_B} = \frac{r^{-\gamma} p_B r V_B}{N k_B} = \frac{1}{r^{\gamma-1}} T_B \quad (9.81)$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{N k_B} = \frac{\frac{1}{s} r^{-\gamma} p_B r V_B}{N k_B} = \frac{1}{s r^{\gamma-1}} T_B. \quad (9.82)$$

Selkeyden vuoksi lienee parasta taulukoida tilanmuuttujien arvot. Taulukkoon on myös sijoitettu lukuarvot  $r = 10$ ,  $s = 2$  ja  $\gamma = 1.4$ .

tila	$p/p_{\max}$	$V/V_{\min}$	$T/T_{\max}$
A	$\frac{1}{s} = 0.5$	1	$\frac{1}{s} = 0.5$
B	1	1	1
C	$\frac{1}{r^\gamma} = 0.04$	$r = 10$	$\frac{1}{r^{\gamma-1}} = 0.40$
D	$\frac{1}{s r^\gamma} = 0.02$	$r = 10$	$\frac{1}{s r^{\gamma-1}} = 0.20$

(b) Moottorin vastaanottama lämpö prosessissa A → B on

$$Q_{\text{sisäänn}} = n c_V^n (T_B - T_A) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.83)$$

ja numeroarvot sijoittaaan  $Q_{\text{sisäänn}} = 1.25 N k_B T_{\max}$ .

(c) Moottorin luovuttama lämpö prosessissa C → D on

$$Q_{\text{ulos}} = n c_V^n (T_C - T_D) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{\gamma-1}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.84)$$

eli  $Q_{\text{ulos}} = 0.50 N k_B T_{\max}$ .

(d) Moottorin tekemä kokonaistyö on

$$|W_{\text{kokonais}}| = Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.85)$$

eli  $|W_{\text{kokonais}}| = 0.75 N k_B T_{\max}$ .

(e) Hyötysuhde on

$$\eta = \frac{|W_{\text{kokonais}}|}{Q_{\text{sisään}}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}, \quad (9.86)$$

joka ei siis riipu prosessin ääriarvoista vaan ainoastaan puristussuhteesta. Tässä käytetyillä lukuarvoilla teoreettinen hyötysuhde on  $\eta = 0.60$ .

(f) Moottorin ylin lämpötila on  $T_B$  ja alin  $T_D$ . Hyötysuhteen paras mahdollinen arvo riippuu näiden suhteesta,

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{1}{sr^{\gamma-1}} = 0.80. \quad (9.87)$$

**ARVIOINTI** Todellisen moottorin hyötysuhde ei ole koskaan näin korkea, koska moottorissa vaikuttaa aina dissipatiivisia vuorovaikutuksia eikä lämmönvaihto ympäristön kanssa tapahdu reversibelisti. Lasku kuitenkin osoittaa, että ensinnäkään näillä parametreilla Otto-kierto ei voi *mitenkään* saavuttaa hyötysuhdetta, joka olisi parempi kuin 0.6. Toiseksi *mikään* vastaavien lämpötilojen välillä toimiva lämpövoimakone ei voi saavuttaa hyötysuhdetta, joka olisi parempi kuin 0.8.

Koska hyötysuhde mittaa tehdyn työn ja vastaanotetun lämmön suhdetta, se ei riipu tekijöistä, jotka kasvattavat molempia samassa suhteessa. Jos esimerkiksi kierron maksimilämpötilaa kasvatetaan mutta minimi- ja maksimitilauudet pysyvät samoina, tämä muuttaa prosessin ottamaa ja luovuttamaa lämpöä sekä sen tekemää kokonaistyötä samassa suhteessa, eikä hyötysuhde muutu.

Lisätarkistukseksi voimme laskea prosessin tekemän ja siihen tehdyn työn yhtälön (9.22) avulla. Laajentuessaan kaasu tekee työn

$$W_{\text{ulos}} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_B V_B - p_C V_C) = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \quad (9.88)$$

ja puristuksessa kaasuun tehdään työ

$$W_{\text{sisään}} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_D V_D - p_A V_A) = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \frac{1}{s}. \quad (9.89)$$

Kaasun tekemä kokonaistyö on siten

$$|W_{\text{kokonais}}| = W_{\text{ulos}} - W_{\text{sisään}} = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right). \quad (9.90)$$

Huomioimalla vielä, että  $\gamma - 1 = N_{\text{vapaus}}/2$  ja  $p_B V_B = N k_B T_B$ , tämän voi kirjoittaa myös muotoon

$$|W_{\text{kokonais}}| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.91)$$

ja tämä on sama tulos kuin mitä edellä saatün.

# Yhteenveton: Termodynamika

## Termodynamiiset prosessit

- Termodynamiikan ensimmäinen pääsäntö on energian säilymislaki: systeemin kokonaisenergian muutos on yhtä suuri kuin systeemin vastaanottama lämpö ja systeemiin tehty työ yhteensä.
- Termodynamiikan toisen pääsännön voi muotoilla esimerkiksi seuraavilla tavoilla:
  - Eristetyn systeemin kokonaisentropia ei voi vähenyä.
  - Systeemin ja sen ympäristön yhteen kokonaisentropia ei voi vähenyä.
  - Jatkuvasti toimiva laite, joka pelkästään ottaa lämpöä ja tekee työtä, on mahdoton.
  - Jatkuvasti toimiva laite, joka siirtää lämpöä kylmästä kuumaan ilman että siihen tehdään työtä, on mahdoton.
- Prosessi on **kvasistaattinen**, jos systeemi on prosessin aikana koko ajan likimain termodynamiisessa tasapainossa.
- Prosessi on **adiabaattinen**, jos systeemi ei vahda lämpöä.
- Prosessi on **isentrooppinen**, jos systeemin entropia on vakio.
- Prosessi on **isokorinen**, jos systeemin tilavaus on vakio.
- Prosessi on **isobaarinen**, jos systeemin paine on vakio.
- Prosessi on **isoterminen**, jos systeemin lämpötila on vakio.
- Lajentuva systeemi tekee työtä ympäristöönsä ja ympäristö tekee työtä supistuvaan systeemiin. Kvasistaattisessa prosessissa systeemiin tehty konosta työ on

$$W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{toppu}}} pdV.$$

- Systeemin lämmittäminen vakiopaineessa vaatii yleensä enemmän

energiaa kuin vakiotilavuudessa, koska vakiopaineessa systeemi laajenee lämmetessään ja tekee työtä ympäristöönsä. Ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa ja vakiopaineessa on

$$\begin{aligned} c_V^n &= \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R, \\ c_p^n &= c_V^n + R = \left(1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}}\right) R \end{aligned}$$

- Kvasistaattinen adiabaattinen prosessi on isentrooppinen. Jos kyseessä on ideaalikaasun prosessi, kaasun paine ja tilavuus noudattavat **adiabaattilakia**

$$pV^\gamma = \text{vakio},$$

missä **adiabaattivakio** on

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}.$$

- Reversiibeissä prosesseissa systeemin entropian muutos on suoraan verrannollinen systeemin vastaanottamaan lämpöön ja kääntäen verrannollinen sen lämpötilaan

$$dS = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}.$$

## Lämpövoimalkoneet

- Kiertoprosessi** on prosessi, joka palaa säännöllisesti takaisin alkutilaansa.
- Kiertoprosessin läpikäyneen systeemin tilanmuuttujat kuten sisäenergia ja entropia saavat kierroksien lopussa samat arvot kuin alussa, koska ne riippuvat vain systeemin tilasta. Prosessin tekemän työn ja sen vastaanottaman lämmön ei tarvitse kuitenkaan olla nolla.
- Kiertoprosessia suorittavan systeemin käydessä läpi yhden kierroksen systeemin entropia ei muudu ja ympäristön entropia joko ei muudu tai kasvaa.
- Lämpövoimakone** on prosessi, joka vastaanottaa ja luovuttaa lämpöä ja muuntaa osan lämmöstä työksi.

- Hyötyuhde** on lämpövoimakoneen tekemän työn suhde sen vastaanottamaan lämpöön

$$\eta = \frac{|W_{\text{kokonais}}|}{Q_{\text{sisää}}}.$$

- Jos lämpövoimakoneen minimi- ja maksimilämpötilat sen kierron aikana ovat  $T_{\text{kylmä}}$  ja  $T_{\text{kuuma}}$ , koneen hyötyuhde voi olla parhaimmillaan

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\text{kylmä}}}{T_{\text{kuuma}}}.$$

Tämä hyötyuhde saavutetaan ideaalisessa Carnot-kierrossa.

## Graafinen esitys

- Tasapainossa olevan systeemin tilaa voidaan kuvata  $pV$ -diagrammissa yhtenä pisteenä ( $V, p$ ). Epätasapainossa olevalle systeemille tämä ei onnistu, koska paine ei ole välittämättä koko systeemissä sama.
- Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on koko ajan likimain tasapainossa, joten systeemiä kuvaaa jokaisella ajan hetkellä jokin  $pV$ -koordinaatiston piste. Ajan kuluessa systeemin tila muuttuu, joten tämä piste siirtyy. Prosessia voi kuvata  $pV$ -diagrammissa tämän pisteen piirtämänä käyränä.
- Prosessin tekemää työtä esittää  $pV$ -käyrän rajaama pinta-ala.
- Energiansiirtoakaaviossa** systeemiin tai systeemistä siirtyyvä työtä

ja lämpöä kuvataan nuolin, joiden paksuus esittää siirtymän energian määärää.

- Entropiadiagrammi** kuvailee kiertoprosessin jäähdyttimen ja lämmittimen käänneistä lämpötilaa  $1/T$  niiden lämpönä vastaanottaman energian funktiona. Diagrammissa kuvaajien rajaama pinta-ala esittää ympäristön entropian muutosta, joka on jäähdyttimelle positiivinen ja lämmittimelle negatiivinen.
- Ympäristön kokonaisentropia ei voi kiertoprosessissa vähenyä, joten entropiadiagrammin jäähdytystä edustavan kuvion pinta-ala on oltava aina suurempi kuin lämmitystä kuvavan kuvion.

## Sanasto

- isokorinen (isochoric)
- isobaarinen (isobaric)
- isoterminen (isothermal)
- isentrooppinen (isentropic)
- adiabaattinen (adiabatic)
- adiabaattivakio (heat capacity ratio)
- kvasistaattinen (quasistatic)

- kierto (cycle)
- kiertoprosessi (cyclic process)
- lämpövoimakone (heat engine)
- toimiva aine (working substance)
- hyötyuhde (efficiency)
- kylmäkone, jäätkaappi (refrigerator)
- lämpöpumppu (heat pump)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

- 9.1** (a) Siirtymisen männän koordinaatistoon muuttaa kaikkien kappaleiden nopeuksia 1 m/s. Tässä koordinaatistossa molekyylin nopeus on siis alkuksi 201 m/s.  
 (b) Elastisessä törmäyksessä molekyylin nopeus kääntyy ympäri. Loppunopeus on siis -201 m/s.  
 (c) Siirtymisen alkuperäiseen koordinaatistoon muuttaa nopeuksia -1 m/s. Molekyylin loppunopeus on siis -202 m/s. Molekyylin vauhdin muutos oli siis kaksinkertainen männän nopeuteen verrattuna.
- 9.2** Täsmällinen arvo on ekstenitivisillä suureilla: tilavuus, ainemäärä, entropia ja kokonaisenergia. Intensiivisillä suureilla (paine ja lämpötila) voi olla yksi arvo säiliön yhdessä osassa ja toinen arvo toisessa osassa, jolloin suureilla ei ole systeemissä mitään yhtä täsmällistä arvoa. Tasapainossa säiliössä on kuitenkin kaikkialla sama paine ja sama lämpötila, jolloin voidaan puhua koko systeemin paineesta ja lämpötilasta.
- 9.3** (a) Prosessi on irreversiibeli, koska kahviin liuennut sokeri ei itsestään erottu kahvista ja kiteydy. Prosessi ei ole kvasistaattinen, koska sokerin konsentraatio ei ole kaikkialla sama ennen kuin kaikki sokeri on liuennut.  
 (b) Prosessi on irreversiibeli, koska kahvi ei itsestään ala lämmetä. Jos systeeminä tarkastellaan vain kahvia, prosessi voi olla likimain kvasistaattinen, jos kahvissa on aina kauttaaltaan sama lämpötila. Jos systeemi on kahvi ja sitä ympäröivä ilma yhdessä, prosessi ei ole kvasistaattinen, koska kahvi ja ilma eivät ole keskenään tasapainossa.  
 (c) Ilmapallon sisäinen paine on aina likimain yhtä suuri kuin ulkoisen paineen ja pallon kuoren jännityksen tuottama paine yhteensä. Niinpä prosessi on kvasistaattinen. Prosessi on myös reversiibeli, koska jos ilmanpaine kasvaa, pallo supistuu takaisin alkutilaan.  
 (d) Prosessi on selvästi irreversiibeli. Se ei ole kvasistaattinen, koska heliumin tiheys ei ole prosessin aikana kaikkialla sama.
- 9.4** (a) Energia ja entropia kasvavat.  
 (b) Energia ja entropia pienenevät.  
 (c) Jos kaasua ei samalla jäähdytetä eli jos prosessi on adiabaattinen, kaasun energia kasvaa, koska kaasuun tehdään työtä. Kaasun entropia on tällaisessa prosessissa vakio.  
 (d) Kaasun entropia ei muutu. Kaasuun itseensä varastoitunut energiakaan ei muutu, mutta kaasun potentiaalienergia painovoimakentässä kasvaa.  
 (e) Kaasun makroskooppinen liike-energia kasvaa. Kaasun sisäenergia ei muutu, joten myöskään sen entropia ei muutu.
- 9.6** (a) Kaasujen lämpötilat ovat ideaalikaasun tilanlyöntöön mukaisesti  $T_A = 300 \text{ K}$  ja  $T_B = 286 \text{ K}$ .  
 (b) Kaasun entropia riippuu vakioiden  $V_0$  ja  $T_0$  arvosta, mutta voimme laskea entropioiden erotu, joka ei riipu näistä. Kaasun A entropia on  $75.3 \text{ J/K}$  suurempi kuin kaasun B.  
 (c) Kaasujen sisäenergia on suoraan verrannollinen niiden lämpötiloihin,  $K_A = 5610 \text{ J}$  ja  $K_B = 5350 \text{ J}$ .
- 9.7** Jos prosessi ei ole kvasistaattinen, systeemin eri osissa voi olla eri paine prosessin aikana. Siispä systeemillä ei ole yhtä tiettyä paineen arvoa millään ajan hetkellä, eikä systeemin tilaa voi kuvata  $pV$ -diagrammin pisteenä. Prosessiakaan ei silloin voi kuvata  $pV$ -diagrammin käyränä. Jos prosessin alussa ja lopussa systeemi on tasapainossa, näitä pisteitä voi kuvata pisteinä, mutta prosessin kulkua näiden välillä ei voi piirtää diagrammiin.
- 9.8** Tähän on monia tapoja. Kaasusäiliön voi esimerkiksi ympäröidä aineella, jonka lämpötila pysyy hyvin tarkasti vakiona, kuten jäähivedellä. Jos prosessi sitten toteutetaan hyvin hitaasti, kaasun ja jääheden lämpötilat ehtivät aina tasaantua jolloin kaasu pysyy koko ajan samassa lämpötilassa kuin jäävesi.
- 9.9** (a) Piste A on  $(V, p)_A \approx (0.03 \text{ m}^3, 80 \text{ kPa})$ , joten ideaalikaasun tilanlyöntöön perusteella  $n = p_A V_A / (RT_A) = 0.96 \text{ mol}$ .  
 (b) Pisteet B ja C ovat  $(V, p)_B \approx (0.08 \text{ m}^3, 30 \text{ kPa})$  ja  $(V, p)_B \approx (0.08 \text{ m}^3, 20 \text{ kPa})$ . Niinpä  $T_B = p_B V_B / (nR) = 300 \text{ K}$  ja  $T_C = p_C V_C / (nR) = 200 \text{ K}$ . Koska prosessi  $A \rightarrow B$  on isoterminen, täytyy olla  $T_A = T_B$ , kuten onkin.  
 (c) Entropia voidaan laskea sijoittamalla kaasun tilavuus ja lämpötila ideaalikaasun entropian lausekkeeseen kussakin tilassa. Jos valitsemme  $V_0 = 1 \text{ m}^3$  ja  $T_0 = 1 \text{ K}$ , saamme  $S_A = 86 \text{ J/K}$ ,  $S_B = 94 \text{ J/K}$  ja  $S_C = 86 \text{ J/K}$ . Entropian muutos (joka ei siis riipu vakioista  $V_0$  tai  $T_0$  on kummassakin prosessissa  $\Delta S_{A \rightarrow B} = 8 \text{ J/K}$  sekä  $\Delta S_{A \rightarrow C} = 0 \text{ J/K}$ . Koska prosessi  $A \rightarrow C$  on isentrooppinen, entropian muutoksen pitääkin olla siinä nolla.
- 9.10** (a) Vapausasteita on kolme, joten  $\gamma = 5/3 \approx 1.7$ .  
 (b) Vapausasteita on viisi, joten  $\gamma = 7/5 = 1.4$ .  
 (c) Vapausasteita on seitsemän, joten  $\gamma = 9/7 \approx 1.3$ .
- 9.11** Jos vapausasteita on vähän, adiabaattivakio on suuri ja adiabaattia kuvaava käyrä  $p = p_0 V_0 V^{-\gamma}$  laskee jyrkästi  $V$ :n funktiona. Jos vapausasteita on paljon, adiabaattivakio lähestyy yhtä ja adiabaatti lähestyy isotermikäyrää.
- 9.13** Molekyylien nopeuden kasvaessa kunkin yksittäisen molekyylin törmäys tuottaa säiliön seiniin suuremman impulssin ja siis suuremman paineen. Kuitenkin säiliön tilavuuden kasvaessa törmäyksien välinen aika kasvaa, jolloin paine pienenee. Kun tilavuutta kasvatetaan sopivasti lämpötilan kasvaessa, nämä vaikutukset kumoavat toisensa täsmälleen.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**9.14 (a)** Prosesi on todennäköisesti nopea, jolloin lämpöä ei ehdi siirtää kaasusta ympäristöön. Tällöin prosessi on adiabaattinen, ja voisimme laskea työn adiabaattilain kautta. Yksinkertaisuuden vuoksi voimme kuitenkin arvioida, että kaasusäiliön paine muuttuu likimain lineaarisesti arvosta 120 kPa arvoon 110 kPa kaasun laajentuessa, jolloin kaasun paine tekee työn

$$W_{\text{kaasu}} = p_{\text{keskiarvo}} \Delta V \approx \frac{1}{2} (p_{\text{alku}} + p_{\text{loppu}}) \Delta V = 1150 \text{ J.} \quad (9.92)$$

(b) Ulkoinen paine on vakio, joten sen tekemä työ on

$$W_{\text{ulkoo}} = -p_{\text{ulkoo}} \Delta V = -1000 \text{ J.} \quad (9.93)$$

Tämä on negatiivinen, koska ulkoinen paine työntää mäntää sisään, mutta mäntä liikkuu ulospäin.

(c) Koska energiaa ei ehdi siirtää lämpönä, kaasun sisäenergia muuttuu vain työn kautta. Kaasu tekee työtä mäntään, jolloin kaasu menettää energiaa,

$$\Delta E_{\text{sisä}} = -W_{\text{kaasu}} = -1150 \text{ J.} \quad (9.94)$$

(d) Koska mäntään tehdään työtä, männän liike-energia muuttuu. Liike-energian muutos on sama kuin mäntään tehty kokonaistyö,

$$\Delta K = W_{\text{kaasu}} + W_{\text{ulkoo}} = 150 \text{ J.} \quad (9.95)$$

Tämän lisäksi mäntä tekee työtä ympäröivään ilmaan, mikä lisää ympäristön sisäenergiaa.

Huomaa, että tässä tapauksessa kaasun sisäenergian muutosta ei voidut laskea ulkisen paineen avulla, koska osa kaasun energiasta muuttui männän energiaksi. Kaasun ja männän kokonaisenergian muutos on kuitenkin yhtä suuri kuin ulkisen paineen mäntään tekemä työ.

**9.15 (a)** Isobaarisessa prosessissa paine on vakio. Työ on siis

$$W = p \Delta V = 100 \text{ kPa} \cdot 0.02 \text{ m}^3 = 2000 \text{ J.} \quad (9.96)$$

(b) Adiabaatisessa laajenemisessa kaasun paine pienenee adiabaattilain mukaisesti. Adiabaattivakio on  $\gamma = 1 + 2/5 = 7/5 = 1.4$ . Loppupaine on  $p_{\text{loppu}} = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^{\gamma} / V_{\text{loppu}}^{\gamma} = 37.9 \text{ kPa}$ . Kaasun tekemä työ on näin ollen

$$W = \frac{1}{1 - \gamma} (p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}) = -\frac{5}{2} (37.9 \text{ kPa} \cdot 0.04 \text{ m}^3 - 100 \text{ kPa} \cdot 0.02 \text{ m}^3) = 1210 \text{ J.} \quad (9.97)$$

(c) Isobaarisen prosessin kuvaaja on vaakasuora kun taas adiabaatisen prosessin kuvaaja on laskeva suora (ks. kuvat 9.8 ja 9.9). Työ on kuvaajan alle jäävä pinta-ala, joten adiabaatisen prosessin täytyy tehdä tässä vähemmän työtä kuin isobaarisen. Laskun tulos on siis järkevä.

**9.16** Prosesi  $A \rightarrow C$  on adiabaattinen, joten siinä ei siirry lankaan lämpöä. Kaasun alku- ja lopputilat ovat samat prosesseissa  $A \rightarrow B$  ja  $A \rightarrow C \rightarrow B$ , joten kaasun sisäenergian muutos on kummassakin tapauksessa sama. Kaasu kuitenkin tekee suuremman työn prosessissa  $A \rightarrow B$ , koska tämä on isobaarin prosessi (vrt. kysymys 9.13). Kaasun täytyy siis saada prosessissa  $A \rightarrow B$  energiaa lämpönä enemmän kuin prosessissa  $A \rightarrow C \rightarrow B$ . Ja koska lämpöä ei siirry prosessissa  $A \rightarrow C$  lankaan, koko tämän lämpömäärän täytyy siirtyä prosessissa  $C \rightarrow B$ . Niinpä energiota siirtyy prosessissa  $A \rightarrow B$  enemmän kuin prosessissa  $C \rightarrow B$ . Tämän näkee myös kuvien energiadiagrammeista, sillä lämpöä  $Q$  kuvava palkki on kuvassa 9.9 pienempi kuin kuvassa 9.8.

**9.17** Lämpökapasiteetti mittaa lämpönä siirtynä energian ja lämpötilan muutoksen suhdetta. Isotermiseen prosessiin lämpötilan muutos on nolla, jolloin tämä suhde on ääretön. Adiabaatisessa prosessissa ei puolestaan siirry energiota lämpönä, joten suhde on nolla.

**9.18** Jos kaasua puristetaan, siinä tehdään työtä. Tällöin kaasun sisäenergia kasvaa enemmän kuin vastavassa vakiotilavuudessa tapahtuvassa lämmitysprosessissa. Ts. jos kaasuun tuodaan lämpö  $Q$  vakiotilavuudessa ja kaasun lämpötilan muutos on  $\Delta T_V$ , tässä prosessissa lämpö  $Q$  ja työ  $W$  yhdessä muuttavat lämpötilaa enemmän  $\Delta T > \Delta T_V$ . Ominaislämpökapasiteetti on näin olle pienempi kuin vastavaa suurea vakiopaineessa,

$$c^n = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} < \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T_V} = c_V^n. \quad (9.98)$$

Siten se on myös pienempi kuin ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa,  $c^n < c_V^n < c_p^n$ .

Mitä nopeammin kaasua puristetaan, sitä suuremalla teholla siinä tehdään työtä ja sitä nopeammin kaasun lämpötila muuttuu. Jos kaasua puristetaan hyvin hitaasti, prosessi tapahtuu likimain vakiotilavuudessa ja  $c^n \approx c_V^n$ . Jos kaasua puristetaan hyvin nopeasti, siinä ei ehdi siirtää energiota lämpönä,  $Q \approx 0$ , jolloin näin määritellyt lämpökapasiteetti voi olla mielivaltaisen pieni. Itse asiassa lämpötila voi kasvaa, vaikka kaasua jäähdyytäisiin, jolloin lämpökapasiteetti olisi negatiivinen.

Tarinan opetus on se, että lämpökapasiteetti riippuu prosessista. Käytännössä lämpökapasiteetit on järkevä määritellä vain vakiotilavuudessa ja vakiopaineessa, koska muissa prosesseissa lämpökapasiteetti voi olla melkein mitä vain.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**9.19** Ainemäärä ja hiukkasmäärä kohden määritettyjen suureiden suhde on

$$\frac{c^N}{c^n} = \frac{1}{N} / \frac{1}{n} = \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}. \quad (9.99)$$

Niinpä hiukkasten määrä kohden lasketuille ominaislämpökapasiteeteille pätee

$$c_p^N - c_V^N = (c_p^n - c_V^n)/N_A = R/N_A = k_B. \quad (9.100)$$

Tämä on järkevä, koska kaasuvakio  $R$  mittaa lämpöön liittyvää energiota suhteessa ainemäärään kun taas Boltzmannin vakio  $k_B$  mittaa samaa energiota hiukkasta kohden.

**9.21 (a)** Kertomalla Avogadron luvulla  $N_A$ , ks. vastaus 9.17.

(b) Isokorisisessä prosessissä kaasu ei tee työtä, joten lämpökapasiteetti vakiopaineessa mittataan sisäenergian muutosta. Niinpä kaasun sisäenergian muutos saadaan missä tahansa prosessissa laskettua lausekkeesta

$$\Delta E_{\text{sisä}} = N c_V^N \Delta T. \quad (9.101)$$

Isokorisisessä prosessissa tämä energia siirtyy lämpöön. Isentrooppisessa prosessissa energia siirtyy puolestaan työnä. Isobaarisessa prosessissa kaasu tekee työtä, joten kaasun pitää vastaanottaa energiota kattamaan sekä sisäenergian muutos että tehty työ. Sääntö pätee myös isotermisessä prosessissa, mutta koska tässä prosessissa  $\Delta T = 0$ , on myös  $\Delta E_{\text{sisä}} = 0$ .

**9.22 (a)** Veden lämpökapasiteetti on noin  $C = c^m m = 42 \text{ J/K}$ . Niinpä entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{vesi}} = \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{jäätyminen}}} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_{\text{jäätyminen}}}{T_{\text{alku}}} = 42 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{273.15 \text{ K}}{291.15 \text{ K}} = -2.7 \text{ J/K}. \quad (9.102)$$

(b) Jäätyminen tapahtuu vakiolämpötilassa ja vapauttaa latenttilämmön  $Q_{\text{jäätyminen}} = -Lm = -3340 \text{ J}$ , joten

$$\Delta S_{\text{jäätyminen}} = \frac{Q_{\text{jäätyminen}}}{T_{\text{jäätyminen}}} = \frac{-3340 \text{ J}}{273.15 \text{ K}} = -12.2 \text{ J/K}. \quad (9.103)$$

(c) Jään lämpökapasiteetti on noin  $C = 21 \text{ J/K}$ . Siispä

$$\Delta S_{\text{jää}} = \int_{T_{\text{jäätyminen}}}^{T_{\text{loppu}}} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{jäätyminen}}} = 21 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{255.15 \text{ K}}{273.15 \text{ K}} = -1.4 \text{ J/K}. \quad (9.104)$$

(d) Kaikkiaan entropian muutos on

$$\Delta S = \Delta S_{\text{vesi}} + \Delta S_{\text{jäätyminen}} + \Delta S_{\text{jää}} = -16.3 \text{ J/K}. \quad (9.105)$$

**9.24** Vakiotilavuusprosessissa energiansiirtokaaviossa on vain yksi nuoli systeemin sisään,  $Q_{\text{sisään}}$ . Systeemin sisäenergian muutos on yhtä suuri kuin sen vastaanottama lämpö. Vakiopaineprosessissa systeemin sisään kulkee nuoli  $Q_{\text{sisään}}$  ja systeemistä ulos kulkee nuoli  $W_{\text{ulos}}$ . Työtä kuvava nuoli on pienempi kuin vastaanotettua lämpöä kuvava nuoli, koska tässäkin prosessissa systeemin sisäenergia kasvaa.

**9.25** Kuvan 9.5 prosessi on isentrooppinen, joten siinä systeemin entropia on vakio. Samoin ympäristön entropia on vakio, joten myös systeemin ja ympäristön kokonaisentropia on vakio.

Kuvan 9.4 prosessi on adiabaattinen mutta ei isentrooppinen, koska se ei ole kvasistaattinen. Ympäristön entropia ei muudu, mutta systeemin entropia muuttuu. Tämä johtuu systeemin sisällä tapahtuvasta irreversiibelistä prosessista (kaasu laajenee tyhjään tilaan). Kokonaisentropia siis kasvaa.

Kuvan 9.8 prosessissa systeemi lämmitetään isobaarisesti. Systeemin tilavuus ja lämpötila kasvavat, joten myös sen entropia kasvaa. Tämä entropian kasvu johtuu siitä, että lämpöä siirtyy ympäristöstä systeemiin. Toisaalta koska ympäristö luovuttaa lämpöä, ympäristön entropian täytyy pienentyä. Kokonaisentropia voi joko kasvaa tai pysyä vakiona, mutta toisen pääsäännön mukaan se ei voi pienentyä. Kokonaisentropia on likimain vakio vain jos lämmittäminen tapahtuu likimain reversiibelisti. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että systeemi lämmittävän lieden pitää olla koko ajan likimain samassa lämpötilassa kuin systeemi, jolloin systeemin lämmitys tapahtuu hitaasti lieden lämpötilaa nostamalla. Jos liesi on kuumempi kuin kaasu (kuten todellisessa lämmityksessä melko varmasti on), kyseessä on irreversiibeli prosessi, jossa lämpöä siirtyy kuumasta kylmään. Tällöin ympäristön entropia pienenee vähemmän kuin systeemin entropia kasvaa, jolloin kokonaisentropia kasvaa.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

**9.26** Tilanne on samankaltainen kuin esimerkissä 8.5. Nyt kaasujen lämpökapasiteetit ovat  $C = nc_V^n = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}}nR = \frac{5}{2}nR$ . Kuuman kaasun entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{kuuma}} = \int_{500 \text{ K}}^{400 \text{ K}} C \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}nR \ln \frac{4}{5} = -4.64 \text{ J/K} \quad (9.106)$$

ja kylmän kaasun

$$\Delta S_{\text{kylmä}} = \int_{300 \text{ K}}^{400 \text{ K}} C \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}nR \ln \frac{4}{3} = 5.98 \text{ J/K}. \quad (9.107)$$

Kokonaisuudeessaan kaasujen entropian muutos on

$$\Delta S = \Delta S_{\text{kuuma}} + \Delta S_{\text{kylmä}} = 1.34 \text{ J/K}. \quad (9.108)$$

Aluksi systeemi ei ole tasapainossa, koska kaasut ovat eri lämpötiloissa. Lämpötilojen tasaantuminen eli termodynamiiseen tasapainoon siirtyminen on irreversiibeli prosessi, joten kokonaisentropia kasvaa.

**9.27** Pätee, kun tarkastellaan kokonaisen kierroksen alku- ja loppupisteitä, jotka ovat siis sama tila. Näin täytyy olla siksi, että energia ja entropia ovat tilanmuuttuja, jotka siis riippuvat vain systeemin tilasta. Jos systeemi on lopuksi samassa tilassa kuin aluksi, sillä on lopuksi myös sama energia ja entropia kuin aluksi. Kierron aikana systeemin energia ja entropia voivat kyllä muuttua. Jos prosessit ovat irreversiibleitä tai niihin liittyy dissipatiivisia vuorovaikutuksia, systeemin entropia kasvaa kierron aikana enemmän kuin jos siihen liittyy vain reversiibleitä prosessja. Kuitenkin jotta systeemi saataisiin takaisin alkutilaan, systeemin täytyy vuorovaikuttaa ympäristön kanssa nün, että systeemin entropia pienenee. Käytännössä tämä tarkoitetaa sitä, että systeemiä täytyy jäähyttää, sillä systeemin entropia pienenee sen luovuttaessa lämpöä. Samalla ympäristön entropia kasvaa. Jos systeemin entropia on kasvanut irreversiibleissä prosesseissa paljon, tarvitaan tehokkaampaa jäähytystä ja tällöin ympäristön entropia kasvaa paljon. Näin irreversiibelit prosessit päätyvät lopuksi kasvattamaan ympäristön entropiaa.

**9.28** (a) Lämpöä kylmästä kuumaan siirtävän laitteen energiansiirtokaaviossa on kaksi nuolta, lämpö sisään kylmästä  $Q_{\text{sisään}}$  ja lämpö ulos kuumaan  $Q_{\text{ulos}}$ . Jos kone toimisi ilman työtä, kaaviossa nämä nuolet olisivat yhtä suuret. Entropiadiagrammissa olisi kaksi laatikkoa, jotka olisivat yhtä leveät (sama  $Q$ ). Kylmästä siirtyvä lämpöä kuvava laatikko olisi korkeampi (suurempi  $1/T$ ).

Jääkaapissa on lisäksi työtä kuvava nuoli koneen sisään  $W_{\text{sisään}}$ , jolloin energian säilymisen perusteella pitää olla  $Q_{\text{ulos}} = W_{\text{sisään}} + Q_{\text{sisään}}$ . Entropiadiagrammin laatikoista kylmästä siirtyvä lämpöä kuvava olisi korkea ja kapea (suuri  $1/T_{\text{kylmä}}$ , pieni  $Q_{\text{sisään}}$ ) kun taas lämpimään siirtyvä lämpöä kuvava olisi matala ja leveä (pieni  $1/T_{\text{kuuma}}$ , suuri  $Q_{\text{ulos}}$ ).

(b) Entropiadiagrammissa ympäristöstä koneeseen siirtyvä lämpöä kuvavan laatikon pinta-ala  $Q_{\text{sisään}}/T_{\text{kylmä}}$  kuvailee ympäristön entropian pienentymistä. Koneesta ympäristöön siirtyvä lämpöä kuvavan laatikon pinta-ala  $Q_{\text{ulos}}/T_{\text{kuuma}}$  puolestaan kuvailee ympäristön entropian kasvua. Ympäristön entropia ei voi kokonaisuudessaan pienentyä, joten laatikon, joka kuvailee lämmön siirtymistä koneesta ympäristöön, täytyy aina olla yhtä suuri tai suurempi kuin toinen laatikko. Koneessa, joka vain siirtää lämpöä kylmästä kuumaan, näin ei ole, koska laatikot ovat yhtä leveät mutta koneesta ympäristöön siirtyvä lämpöä kuvava laatikko on matalampi. Tämä kone ei siis ole mahdollinen. Jääkaapin tapauksessa tämä laatikko on matalampi, mutta sen pinta-ala voi silti olla laatikoista suurempi, koska laatikon leveys voi olla periaatteessa kuinka suuri vain, sillä jääkaappi luovuttaa ympäristöön enemmän lämpöä kuin mitä se ottaa.

**9.29** (a) Entropian kasvua kuvava laatikko muuttuu (i) korkeammaksi ja leveämäksi eli saadaan kuva (b), (ii) korkeammaksi ja kapeammaksi, (iii) matalammaksi ja kapeammaksi eli saadaan kuva (c).

(b) Rajoitus on se, että entropian kasvua kuvava laatikko ei saa olla pienempi kuin entropian pienentymistä kuvava laatikko. Muutos (i) on siis aina mahdollinen ja (iii) aina mahdoton. Muutos (ii) voi olla mahdollinen, jos laatikon pinta-ala ei pienene.

(c) Hyötyuhde paranee, jos kone hukkaa vähemmän lämpöä. Niinpä hyötyuhde heikkenee muutoksessa (i) ja paranee muutoksissa (ii) ja (iii). Ts. hyötyuhteen huonontaminen on aina mahdollista, mutta sen parantaminen tällä tavalla onnistuu vain, jos jäähytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa.

**9.30** (a) Lämpötila kasvaa palaessa kaksinkertaiseksi, joten  $s = 2$ . Tilavuus puolestaan kolminkertaistuu laajenemisprosessin aikana, joten  $r = 3$ .

(b) Kaasun adiabaattivakio on  $\gamma = 1.4$ . Kaasu luovuttaa yhtälön (9.84) mukaan Otto-kierrossa energiota hukkalämpöön määränpäin

$$Q_{\text{ulos}} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{\gamma-1}} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_{\max} = (241 \text{ K}) n R. \quad (9.109)$$

Entropiadiagrammin perusteella  $Q_{\text{ulos}}$  on noin 700 J, joten  $n = 0.35 \text{ mol}$ .

(c) Hyötyuhde on yhtälön (9.86) perusteella

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} = 0.36. \quad (9.110)$$

Entropiadiagrammin perusteella kone ottaa kierron aikana lämpöä noin 1100 J ja luovuttaa hukkalämpöä 700 J, joten koneen tekemä työ on 400 J. Hyötyuhde on siis  $\eta = 400/1100 = 0.36$ , mikä täsmää.



# Osa III

## Sähkömagnetismi



# 10 Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkö on tuttu arkinen termi. Monet laitteet toimivat nykyään sähköllä, ja koko modernin yhteiskunnan toiminta on riippuvainen sähköstä. Sähkön merkitys on siis kaikille tuttu, mutta sähkön toiminta ei. Sähkölaitteista ei nimittäin näe päältä *miten* sähkö vaikuttaa niiden toimintaan. Sähköisten ilmiöiden ymmärtäminen vaatiikin niiden systeemattista tutkimista.

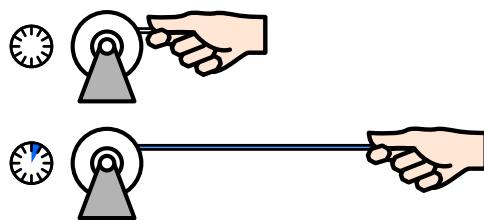
Tässä luvussa aloitamme sähköön liittyvien ilmiöiden opiskelun tarkastelemalla sähköiseksi varattuja kappaleita. Selvitämme mitä sähkövaraus on, ja miten sähkövaraukset vuorovaikuttavat keskenään sähkökentän välityksellä. Tutustumme myös erilaisiin tapoihin kuvata sähkökenttää ja määrittää varausten synnyttämän sähkökentän ominaisuudet. Lopuksi opimme, kuinka varausta voidaan siirtää paristoilla ja varastoida kondensaattoreihin.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

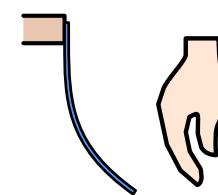
- selittää millä tavoilla kappaleet voivat olla varautuneet ja miten tämä vaikuttaa niiden väliseen sähköiseen vuorovaikutukseen
- laskea pisteverausten ja symmetristen varausjakaumien sähkökenttä, sähkövuo ja potentiaali Coulombin ja Gaussian lakienvälinen avulla
- selittää potentiaalin ja sähkökentän yhteys ja määrittää nämä kun sekä laskien että graafisesti, kun toinen tunnetaan
- laskea varaukseen kohdistuva voima ja sen potentiaalienergia sähkökentän ja potentiaalin avulla
- selittää miten erilaiset materiaalit käyttäytyvät sähkökentässä
- selittää pariston ja kondensaattorin toiminta sekä määritellä lähdejännite ja kapasitanssi

Kuva 10.1: Rullasta vedetyllä teipillä on sähkövaraus, sillä teippi vuorovaikuttaa sähköisesti toisten kappaleiden kanssa.

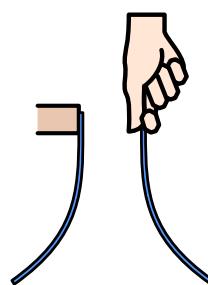
(a) Vedetään rullasta pätä teippiä.



(b) Käsi vetää teippiä puoleensa.



(c) Teipit hylkivät toisiaan.



## 10.1 Sähkövaraus

### Sähköinen vuorovaikutus

Kokeile seuraavaa: Revi paperista pieniä palasia. Kampaa sitten hiukiasi hetken aikaa ja tuo kampa paperipalojen yläpuolelle. Jos koe onnistuu, paperisilppu hyppää itsestään kiinni kampaan ja tarttuu siihen. Kappaleiden tarttuminen yhteen ei ole mitenkään erikoista, mutta merkittävää tässä kokeessa on se, että kampa vetää paperin itseensä kiinni *koskettamatta* sitä. Toisin sanoen paperin ja kamman välillä täytyy olla etävuorovaikutus, joka toimii vaikka vuorovaikutukseen osapuolet olisivat toisistaan erillään. Olemme tähän mennessä tutustuneet yhteen etävuorovaikutukseen, gravitaatioon. Mutta kampa ei selvästi käään vedä paperia puoleensa gravitaation avulla, koska se on siihen aivan liian pieni. Olemme havainneet uuden, **sähköisen vuorovaikutuksen**.

Havaittu vuorovaikutus voi vaikuttaa heikolta eikä kovin mielenkiintoiselta. Huomaa kuitenkin, että koska kampa vetää papereita ylöspäin, pienien kamman papereihin kohdistama sähköinen voima on suurempi kuin koko valtavan Maapallon nūhin kohdistama painovoima! Sähköinen vuorovaikutus onkin siis itse asiassa paljon voimakkaampi kuin painovoima ja ehdottomasti tarkemman tutkimisen arvoineen.

Tavallisesti kappaleet eivät kuitenkaan koe voimakkaita sähköisiä vuorovaikutuksia. Tässäkin kokeessa paperi hyppää kampaan kiinni vain, jos kammalla on juuri kammattu. Kampaanminen siis muuttaa kamman ominaisuuksia niin, että se alkaa vuorovaikuttaa sähköisesti. Kutsumme kappaleiden kykyä vuorovaikuttaa painovoiman kautta painavaksi massaksi. Samaan tapaan kappaleiden kyvylle vuorovaikuttaa sähköisesti on annettu nimeksi **sähkövaraus** tai usein lyhyemmin pelkkä *varaus*. Sähköisesti vuorovaikuttavilla kappaleilla on siis sähkövarausta, ja tällaisten kappaleiden sanotaan olevan *varattuja*. Kappaleita, joilla ei ole sähkövarausta, kutsutaan sähköisesti *neutraaleiksi*. Esimerkiksi edellisessä kokeessa kampaaminen tuottaa kampaan varauksen ja saa tällä tavalla kamman vuorovaikuttamaan sähköisesti. Jonkin ajan kuluttua kampa ei enää vedä paperisilppua puoleensa, joten sen sähkövaraus ilmeisesti katoaa ajan kuluessa. Tällöin varauksen sanotaan *purkautuvan*.

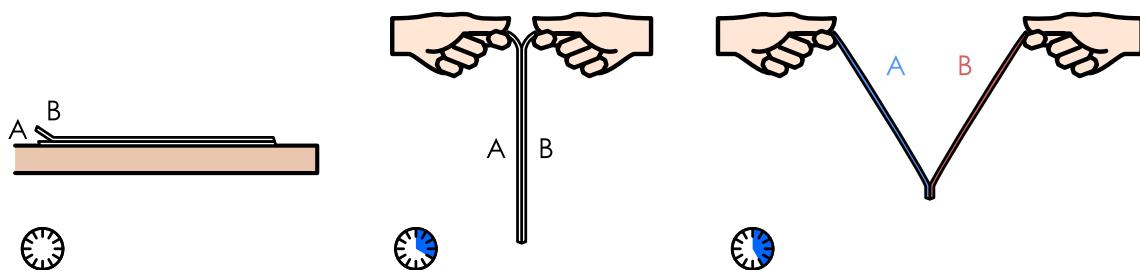
Jatketaan sähköisen vuorovaikutuksen tutkintaa ja käytetään seuraavissa kokeissa teippiä (esim. "Scotch Magic Tape" toimii hyvin). Vedä teippirullasta nopeasti pitkähkö (20 cm) pala teippiä ja kiinnitä se toisesta päästään esimerkiksi pöydän reunaan niin, että teippi roikkuu alaspäin kuten kuvassa 10.1. Jos tuot kätesi teipin lähelle, huomaat teipin kääntyvän kättäsi kohti. Teippi ja sen lähelle tuodut kappaleet vetävät siis toisiaan puoleensa. Tässäkin on kyseessä sähköinen vuorovaikutus, ja koska teipin lähelle tuodut kappaleet vetävät puoleensa teippiä mutta eivät toisiaan, juuri teipin täytyy olla sähköisesti varattu. Kokeen tulos on siis se, että *sähköisesti varattujen ja neutraalien kappaleiden välillä on attraktiivinen eli puoleensa vetävä vuorovaikutus*, kuten kamman ja paperinkin avulla jo havaittin.

Repäise sitten teippirullasta toinen samanlainen teipinpala. Pidä tästä teippiä kiinni toisesta päästä ja vie teippi lähelle ensimmäistä, pöytään kiinnitettyä teippiä (kuva 10.1 (c)). Nyt käy päinvastoin kuin edellisessä kokeessa. Teipit eivät käännyn toisiaan kohti vaan *toisistaan poispäin*. Toisin sanoen *kahden samanlaisen varatun kappaleen välillä on repulsiivinen eli pois työntävä vuorovaikutus*. Tämä on merkittävä ero painovoiman nähdyn. Painovoimahan on aina attraktiivinen vuorovaikutus eli kappaleet voivat ainostaan vetää toisiaan puoleensa painovoiman välityksellä. Sähköinen vuorovaikutus sen sijaan voi sekä olla attraktiivinen että repulsiivinen.

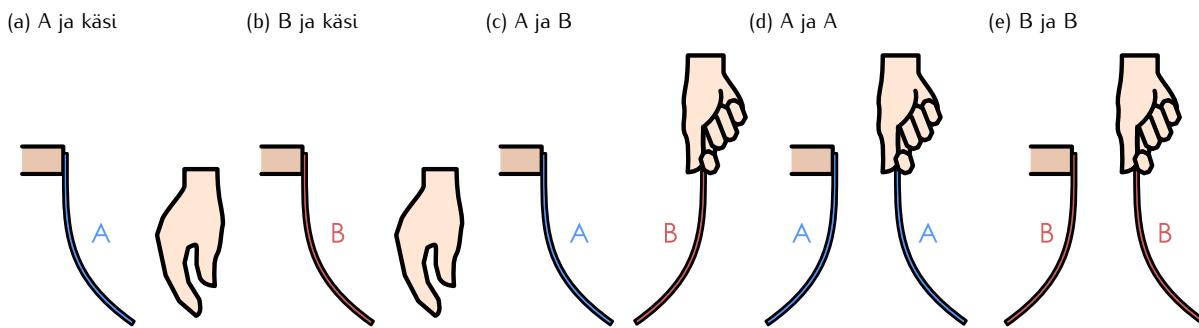
Jatketaan vielä tutkimusta. Seuraava askel vaatii hieman enemmän valmistelua kuten kuvassa 10.2 on näytetty. Vedä nyt varovasti pala teippiä ja kiinnitä se koko pituudeltaan sileän pöydän pintaan (kuitenkin niin että esimerkiksi yksi teipin kulma on irti, jotta saat teipin helposti irrotettua). Voit vielä hieroa teippiä kevyesti ylimääräisen varauksen poistamiseksi. Kutsutaan tästä teipiksi A. Ota sitten toinenkin pala teippiä

Kuva 10.2: Kahden eri tavoin varatun teipin valmistaminen.

- (a) Liimataan kaksi teippiä toisiinsa. (b) Irrotetaan teipit pöydästä. (c) Irrotetaan teipit nopeasti toisistaan.  
Tämä on helpointa pöydällä.



Kuva 10.3: Eri tavoin varautuneiden teippien vuorovaikutuksia.



niin ikään hitaasti vetäen ja kiinnitää se täsmälleen edellisen teipin päälle. Tämä on teippi B. Tämän jälkeen irrota alempi teippi A pöydästä ja lopuksi vedä teipit A ja B nopeasti irti toisistaan.

Voit testata ovatko teipit A ja B varautuneet samaan tapaan kuin aikaisemmin. Kiinnitä kumpikin teippi yhdestä päästään pöydän reunaan ja tuo kätesi teippien lähelle. Huomaat, että *kumpikin* teippi käännyy kättäsi kohti (kuva 10.3 (a) ja (b)). Sekä A että B ovat siis sähköisesti varattuja. Irrota sitten teippi B pöydästä ja tuo se teipin A viereen kuten kuvassa 10.3 (c). Huomaat, että nämä teipit vetävät toisiaan puoleensa! Ne käyttäytyvät siis päinvastoin kuin kaksi suoraan teippirullasta vedettyä teippiä, jotka pyrkivät kauas toisistaan. Kaksi samalla tavalla valmistettua teippiä ovat mitä ilmeisimmin myös samalla tavalla varautuneet, joten näiden kokeiden perusteella samalla tavalla varautuneet kappaleet kokevat repulsiivisen vuorovaikutuksen. Toisaalta koska teipit A ja B vuorovaikuttavat attraktiivisesti, *ne eivät voi olla samalla tavalla varattuja*. On siis olemassa *erilaisia* sähkövarauksia, ja *kahden eri tavoin varatun kappaleen välillä on attraktiivinen vuorovaikutus*.

Voit valmistaa lisää varattuja teippejä tai muita varattuja kappaleita ja testata, kuinka nämä vuorovaikuttavat A- ja B-tyypin teippien kanssa. Jos teet näin, huomaat kaikkien varattujen kappaleiden vetävän puoleensa toista teipeistä A tai B ja työntävän pois toista. Neutraalit kappaleet vetävät kumpaakin puoleensa, mutta *mikään* varattu kappale ei tee niin. Tämä on yleisesti tosi kokeellinen havainto. Jos meillä on kaksi eri tavoin varattua kappaleita kuten tässä teipit A ja B, kaikki muut varatut kappaleet kokevat näistä toisen kanssa attraktiivisen ja toisen kanssa repulsiivisen vuorovaikutuksen. Tämän kokeellisen faktan perusteella voimme päätellä, että *varausta on olemassa täsmälleen kahta lajia*, ja nämä vuorovaikuttavat siten, että samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan ja erilaiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Näitä sähkövarauksen lajeja kutsutaan **positiiviseksi** ja **negatiiviseksi** varaukseksi.

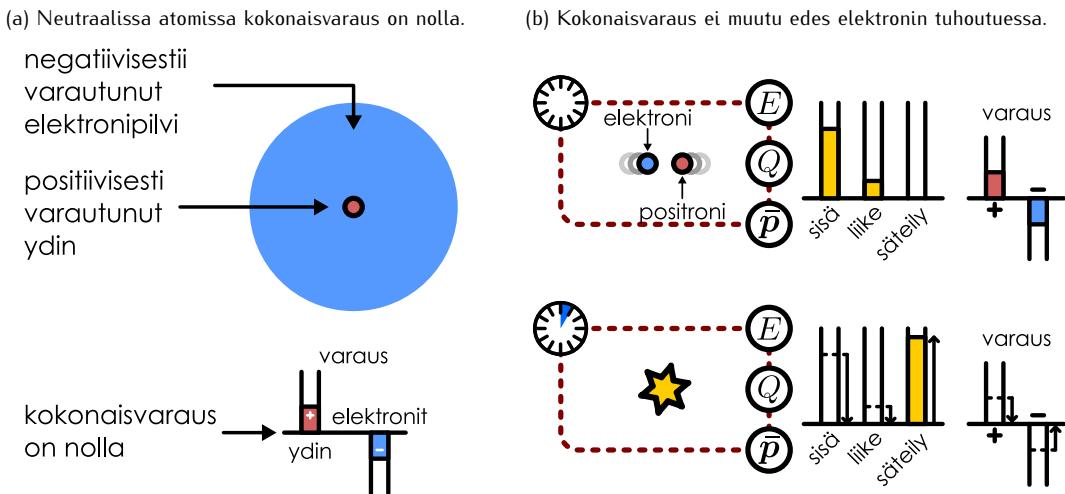


**10.1** Oletetaan, että löytyisi kappale, joka vetää puoleensa neutraaleja kappaleita ja kumpaakin teippiä A sekä B. Miten tämä havainto muuttaisi edellä esitettyä kahden varauksen mallia?

### Varauksen siirtyminen

Nykyään tiedetään, että aine koostuu sähköisesti varatuista hiukkasista. Atomit ovat rakentuneet ytimisistä ja niitä ympäröivien elektronien muodostamasta pilvimäisestä kuoresta. Atomiytimissä olevilla protoneilla

Kuva 10.4: Tavallinen aine koostuu positiivisesti varatuista protoneista ja negatiivisesti varatuista elektroneista. Näitä hiukkasia voi luoda ja hävittää, mutta kokonaisvarausta ei voi.



on positiivinen varaus ja ytimiä ympäröivällä elektroneilla on negatiivinen varaus. Protonien lisäksi ytimissä on myös neutroneja, jotka ovat nimensä mukaisesti sähköisesti neutraaleja. Varausten lajit on historiallisesti sovittu näin pään. Aivan yhtä hyvin voitaisiin sopia, että elektronin varaus on positiivinen ja protonin negatiivinen. Fysikaalisesti oleellista on se, että näiden hiukkasten varaukset ovat *eri lajia*.

Sähkövaraus on ekstensiivinen suure aivan kuten massakin. Toisin sanoen usean hiukkisen muodostaman systeemin **kokonaissähkövaraus** saadaan laskemalla systeemin sisältämien hiukkasten varaukset yhteen, ja systeemi vuorovaikuttaa sähköisesti sitä voimakkaammin, mitä enemmän se sisältää varausta. Lisäksi koska negatiivinen ja positiivinen varaus vuorovaikuttavat täsmälleen päinvastaisilla tavoilla, negatiivisen varauksen lisääminen positiivisesti varattuun systeemiin muuttaa systeemin kykyä vuorovaikuttaa sähköisesti samalla tavalla kuin positiivisen varauksen vähentäminen. Näin ollen on järkevää määritellä systeemin kokonaissähkövaraus  $Q_{\text{kokonais}}$  siten, että lasketaan yhteen systeemin sisältämä positiivinen varaus ja vähennetään siitä systeemin sisältämä negatiivinen varaus,

$$Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{positiivinen}} - |Q_{\text{negatiivinen}}|. \quad (10.1)$$

Juuri tämän ominaisuuden johdosta varauksen eri lajeja kutsutaankin positiiviseksi ja negatiiviseksi. Jos systeemissä on enemmän positiivista kuin negatiivista varausta, systeemi on kokonaisuudessaan positiivisesti varautunut. Samaten systeemi on negatiivisesti varautunut, jos siinä on enemmän negatiivista varausta kuin positiivista. Jos kumpaakin varauksen lajia on yhtä paljon, systeemi on neutraali.

Atomeissa on normaalista yhtä monta protonia ja elektronia, ja hyvin tarkkojen kokeellisten mittausten perusteella tällaiset atomit ovat aina täsmälleen neutraaleja (kuva 10.4 (a)). Tämä puolestaan tarkoittaa, että protonien ja elektronien sähkövarauksen täytyy olla itseisarvoltaan täsmälleen yhtä suuri. Tätä varauksen suuruutta kutsutaan **alkeisvaraukseksi**, ja sitä merkitään

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad (10.2)$$

missä C on SI-järjestelmän sähkövarauksen yksikkö **coulombi** (Charles Augustin de Coulombi mukaan). Vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksesta lähtien tämä on ollut coulombin virallinen määritelmä, ja niinpä yhtälö 10.2 on tarkka. Protonin varaus on siis  $e$  ja elektronin  $-e$ .



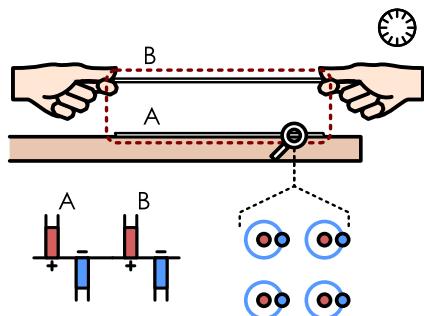
**10.2** Selvitä, onko yksi coulomb paljon vai vähän varausta. Arvioi sitten, paljonko 20 cm pituisessa teipissä on kaikkiaan atomeja, protoneja, ja elektroneja. Arvioi tämän perusteella, mikä on elektronien ja protonien lukumäärien suhde kuvan 10.1 negatiivisesti varattussa teipissä. Onko elektronien ylimäärä suuri vai pieni verrattuna neutraalissa teipissä olevien elektronien määrään?

Protonien ja elektronien varaus ei voi muuttua, vaan jokaisen protonin ja elektronin varaus on aina sama. Siispä kappaleen varausta ei voi muuttaa muuttamalla sen sisältämien hiukkasten varauksia. Varausta voi kuitenkin muuttaa *siirtämällä* protoneja tai elektroneja. Jos esimerkiksi atomi menettää tai saa lisää elektroneja, siinä jää ylimäärä joko positiivista tai negatiivista varausta, jolloin atomista tulee varattu **ioni**. Samaan tapaan makroskooppiset kappaleet voivat varautua saamalla tai menettämällä protoneja tai elektroneja. Jokaisen elektronin tai protonin lisäys tai menetys muuttaa ionin tai kappaleen kokonaisvarausta aina yhden

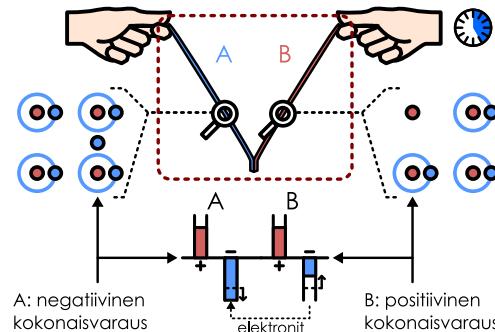
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.5: Varattujen teippien valmistuksessa sähkövarausta siirrytään teipistä toiseen.

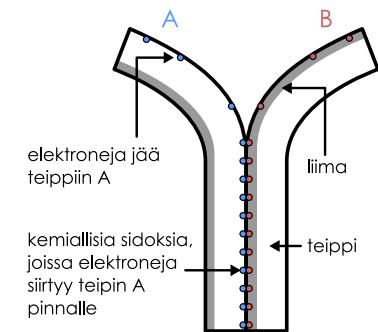
(a) Neutraalissa teipissä on yhtä monta protonia ja elektronia.



(b) Irrotuksessa osa elektroneista jää A-teippiin.



(c) Ylimääräinen varaus teipeissä.



alkeisvarauksen verran, joten kaikkien kappaleiden — niin mikroskooppisten kuin makroskooppistenkin — kokonaisvarauksen täytyy aina olla jokin alkeisvarauksen monikerta. Itse asiassa *kaikkien* luonnossa vapaasti havaittavien hiukkasten varaus on alkeisvaraus jollakin kokonaisluvulla kerrottuna (mahdollisesti myös nolla), joten alkeisvaraus todella on varauksen perusyksikkö.

Protonit ja elektronit ovat vakaita hiukkasia, jotka eivät tavallisesti häviä minnekään, joten varaus ei yleensä voi muuttua tälläkään tavalla. Tämä ei ole kuitenkaan yleisesti totta, sillä on olemassa hiukkasreaktioita, joissa alkeishiukkaset tuhoutuvat tai muuttuvat toisiksi hiukkasiksi. Protoneja ja elektroneja voi siis luoda ja hävittää, ja tällaisissa reaktioissa positiivisten ja negatiivisten varausten määrä voi muuttua. On esimerkiksi olemassa hiukanen nimeltä positroni (tämä on eri hiukanen kuin protoni), joka on ominaisuusiltaan muuten samanlainen kuin elektri ni paitasi että sen varaus on positiivinen, *e*. Kun elektroni ja positroni kohtaavat (kuva 10.4 (b)), voi tapahtua annihilaatioksi kusuttu reaktio, jossa kumpikin hiukanen häviää ja jäljelle jää vain säteilyä, jolla ei ole sähkövarausta. Tässä reaktiossa häviää sekä positiivinen että negatiivinen alkeisvaraus, joten varauksen eri lajit eivät erikseen säily. *Kokonaisvaraust* on kuitenkin edellä kuvattussa reaktiossa nolla sekä reaktion alussa että sen lopussa, joten se ei muutu. Itse asiassa kokonaisvaraus on muutumaton vakio *kaikissa* tunnetuissa reaktiossa. Pätee siis suuri *varausten säilymislaki*: kokonaissähkövarausta on säilyvä suure, jota ei voi luoda eikä hävittää. Systeemin kokonaisvarausta voi muuttaa ainoastaan siirtämällä varausta systeemiin ja sen ympäristön välillä, ja tavallisesti tämä tapahtuu siirtämällä elektroneja tai protoneja.

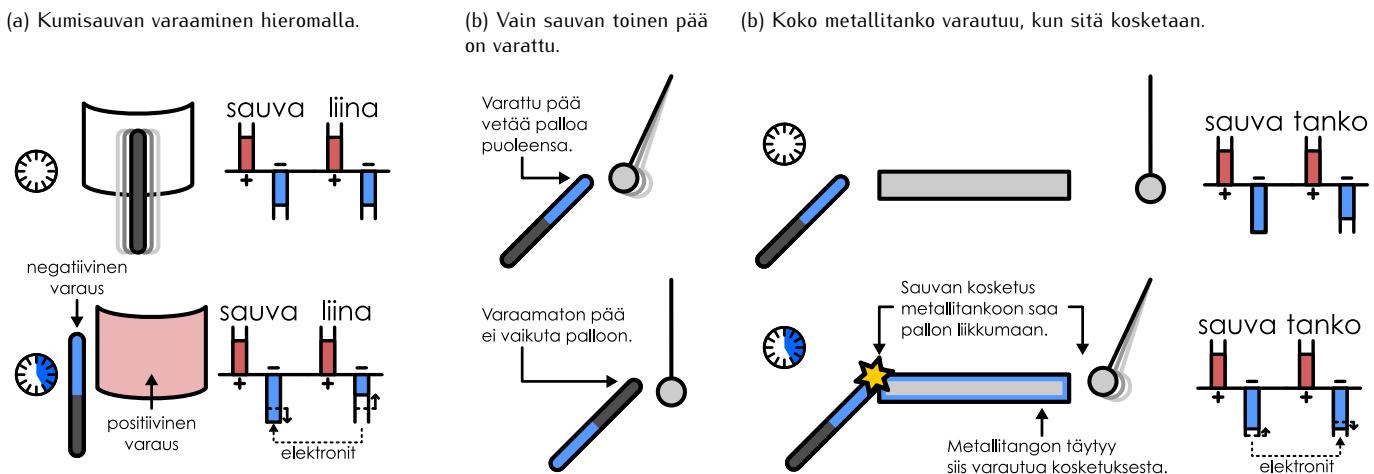
Varattuja hiukkasia kutsutaan yhteisesti *varaustenkuljettajiksi*, koska varaus liikkuu niiden mukana, ja *makroskooppisten kappaleiden varautuminen johtuu* *ainaa varaustenkuljettajien siirtymisestä*. Kappaleiden pintojen hierominen toisiaan vasten voi siirtää varattuja hiukkasia kappaleesta toiseen, jolloin kumpikin pinta varautuu. Tästä johtuu kamman varautuminen. Teippien tapauksessa liimapinnan rikkominen jättää pinnan eri puolille ylimääräisiä varauksia. Esimerkiksi varattujen teippien A ja B valmistus perustuu siihen, että hitaasti irrotetut teipit ovat lähes neutraalit, mutta kun kaksi teippiä revitään nopeasti irti toisistaan, toiseen teippiin jää hiukan enemmän positiivista ja toiseen negatiivista varausta (kuva 10.5).

Sähköisiä vuorovaikutuksia ei tavallisesti huomaa, koska yleensä aine on neutraalia tai ainakin likimain neutraalia. Edellisissä kokeissa käytetty varattu kampa ja teippi muuttuvat nekin varauamisen jälkeen melko pian sähköisesti neutraaleiksi. Tämä johtuu siitä, että erilaiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Esimerkiksi negatiivisesti varattu kappale vetää positiivisia kappaleita kuten ilmassa leijuvassa pölyssä olevia varattuja pölyhiutoja puoleensa. Kun positiiviset hiukkaset päätyvät negatiiviselle kappaleelle, kappaleessa oleva negatiivisen varauksen ylimäärä pienenee eli kappale muuttuu neutraalimmaksi. Vähitellen varaukset tasoittuvat ja kappaleesta tulee lopulta täysin neutraali ellei sitä varata uudestaan.

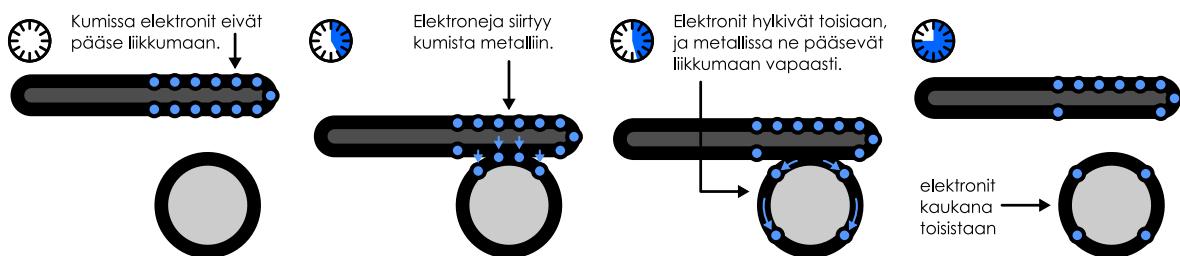
Varaus siis siirryttää varaustenkuljettajien mukana. Seuraavaksi haluammekin selvittää, miten varaustenkuljettajat käyttäytyvät erilaisissa materiaaleissa. Tutkitaan tästä varten kuvassa 10.6 esitettävää kokeita, joissa tarvitaan hieman enemmän välineitä kuin vain teippiä. Otetaan kuminen sauva ja hierotaan sen toista päättä kankaalla, jolloin varausta siirryttää sauvan sekä kankaan välillä ja kappaleet varautuvat. Tämä on samanlainen prosessi kuin hiusten kampaaminen, mutta kumisauvaan saadaan kerättyä varausta helpommin kuin kampaan. Ripustetaan pieni neutraali teräskuula roikkumaan langasta ja tuodaan kumisauva sen lähetulle. Varattu sauva ja neutraali pallo vetävät toisiaan puoleensa, mikä näkyy pallon siirtymisenä kohti sauvaa. Tämä koe osoittaa, että sauva on todella varautunut. (Koe onnistuu parhaiten ontolla kuulalla, koska umpiteräksinen kuula voi olla liian raskas.)

Käännetään sauva sitten ympäri ja tuodaan sauvan vastakkainen pää (jota ei hierottu kankaalla) lähetelle palloa. Nyt pallo ei liiku, joten sauvan tämän pään täytyy olla neutraali (kuva 10.6 (b)). Toisin sanoen vaikka sauvan yhdessä päässä on ylimääräistä varausta, varaus ei itsestään liiku sauvan läpi sen toiseen päähän.

Kuva 10.6: Varaus ei liiku kumissa, joten kumi on eriste. Metalli on johde, ja siinä varaus pääsee liikkumaan.



Kuva 10.7: Johteessa varaus levää aina kappaleen pinnalle, koska samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan.

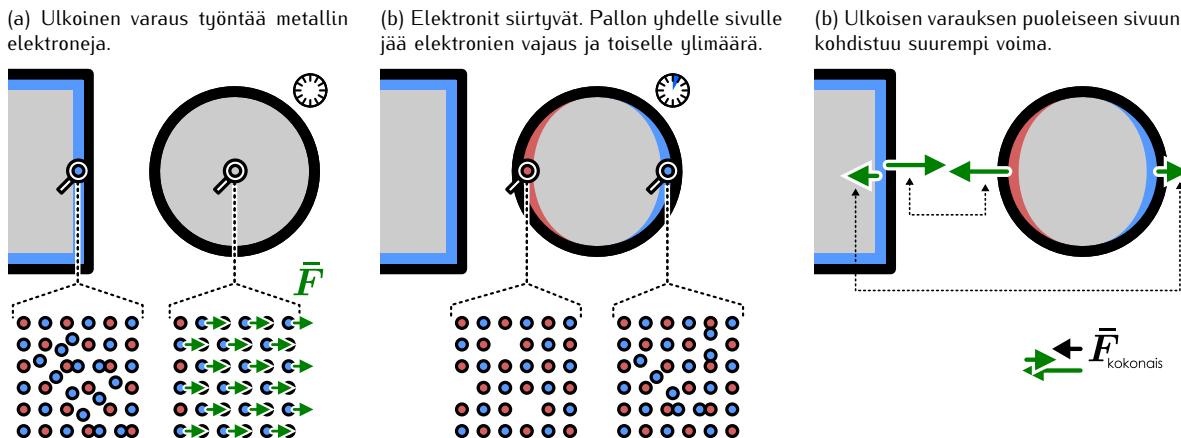


Otetaan seuraavaksi terästanko ja asetetaan se kuvan 10.6 (c) tapaan toinen pää metallikuulan lähelle. Kosketetaan sitten terästangon kuulaan nähden vastakkaisista päästä kumisauvan varatulla päällä. Tämä saa kuulan heilahtamaan kohti metallitankoa, mikä osoittaa metallitangon varautuneen koskettaessaan kumisauva. Varauksenkuljettajia siis siirtyy tankojen välillä niiden koskettaessa toisiaan. Erityistä tässä kokeessa on se, että metallitankoa kosketettiin kuulasta *kaukana* olevaan pähän, mutta kuulan heilahdus osoittaa metallitangon varautuneen myös kuulaa *lähellä* olevasta päästä. Toisin sanoen metallitangon yhden pään varaaminen saa myös sen toisenkin pään varautumaan. *Varaus siis liikkuu metallin läpi itsestään.*

Aineita, joissa varaus liikkuu helposti, kutsutaan **johteiksi**. Aineet, joissa varaus ei pääse liikkumaan, ovat puolestaan **eristeitä**. Kyseessä on samankaltainen jaottelu kuin aineiden jako lämmönjohteisiin ja lämpöeristeisiin, ja itse asiassa sähköä hyvin johtavat aineet tavallisesti johtavat hyvin myös lämpöä. Sähköisten johteiden ja eristeiden erot ovat kuitenkin yleensä paljon selkeämmät kuin lämmonjohteiden ja -eristeiden. Tämä johtuu siitä, että lämpöä siirtyy atomien värähtelyjen levitessä, mitä tapahtuu kaikissa aineissa. Sähkövarauksen siirtäminen vaatii kuitenkin varauksenkuljettajien siirtämista paikasta toiseen, mikä on mahdollista vain jos varatut hiukkaset pääsevät liikkumaan aineessa kohtuullisen helposti. Esimerkiksi metallit ovat hyviä johteita, koska niissä osa elektroneista ei ole kiinnittyntä mihinkään yksittäiseen atomeihin vaan nämä elektronit pääsevät liikkumaan aineen läpi kuljettaen varausta mukanaan. Myös monet nestemäiset liuokset ovat tavallisesti hyviä johteita, koska niissä on paljon ioneja, jotka pääsevät liikkumaan nesteessä ja kuljettaa näin varausta. Kumissa sen sijaan kaikki elektronit ovat sitoutuneet atomeihin ja molekyyleihin, eivätkä nämäkään pääse liikkumaan toistensa suhteen. Kumi on siis eriste, koska siinä kaikki varauksenkuljettajat on vangittu tiukasti paikoilleen.

Eristekappaleessa varaus voi asettua melkein miten vain, koska varauksenkuljettajat eivät pääse siinä liikkumaan. Jos esimerkiksi varatulla kumisauvalla kosketetaan kumipalloa, varausta siirtyy ainoastaan kappaleiden kosketuspintojen välillä. Tällä tavalla kumipalloon voi "asetella" varausta haluttuihin kohtiin. Johteessa tämä ei onnistu. Jos metallista palloa kosketetaan varatulla sauvalla, varauksenkuljettajia siirtyy jälleen kosketuspintojen välillä. Jos esimerkiksi neutraalia palloa kosketetaan negatiivisesti varatulla sauvalla, palloon siirtyy ylimääräisiä negatiivisesti varautuneita elektroneja kuten kuvassa 10.7. Kuitenkin koska elektroneilla on keskenään samanlainen varaus, niiden välillä on repulsiivinen vuorovaikus. Elektronit siis työntävät toinen toistaan kauemmaksi toisistaan. Metallissa elektronit pääsevät liikkumaan vapaasti, joten tämä työntävä

Kuva 10.8: Neutraali metallipallo polarisoituu ulkoisen varauksen lähellä.



voima saa ne liukkeelle. Elektronit pyrkivät levittymään metalliin, ja ne liikkuvat mahdollisimman kauas toisistaan. Pallossa tämä tarkoittaa sitä, että varaus jakautuu tasaisesti pallon pinnalle. Samalla periaatteella *kaikissa johteissa ylimääräinen varaus levittäätyy aina johteen pinnoille*.



**10.3** Sinulla on punaisia ja sinisiä kuulia. Oletetaan, että samanväriset kuulat hylkivät toisiaan ja eriväriset vetävät toisiaan puoleensa. Miten kuulat käyttäytyvät, jos laitat ämpäriin (a) vain punaisia kuulia, (b) yhtä paljon molempia kuulia, (c) enemmän sinisiä kuin punaisia kuulia? Kuulia on niin vähän, että ne pääsevät liikkumaan vapaasti.

## Polarisaatio

Vielä on selittämättä, miksi sähköinen voima vaikuttaa neutraalien ja varattujen kappaleiden välillä. Sähkövaraushan määriteltiin niin, että se kuvailee kappaleen kykyä vuorovaikuttaa sähköisesti. Tämän perusteella voisi ajatella, että neutraali kappale ei voi vuorovaikuttaa sähköisesti, koska sillä ei ole sähkövarausta. Tämä on kuitenkin väärä päätelmä, koska neutraalikin aine on täynnä sähkövarausta. Neutraaleissa kappaleissa positiivista ja negatiivista varausta vain on kumpaakin yhtä paljon. Tavallisesti positiivinen ja negatiivinen varaus jakautuvat aineeseen tasaisesti, jolloin erti varauksiin kohdistuvat sähköiset vuorovaikutukset kumoavat toisensa täydellisesti. Näin ei kuitenkaan tarvitse olla, koska varaus voi siirtyä myös neutraalin kappaleen sisällä.

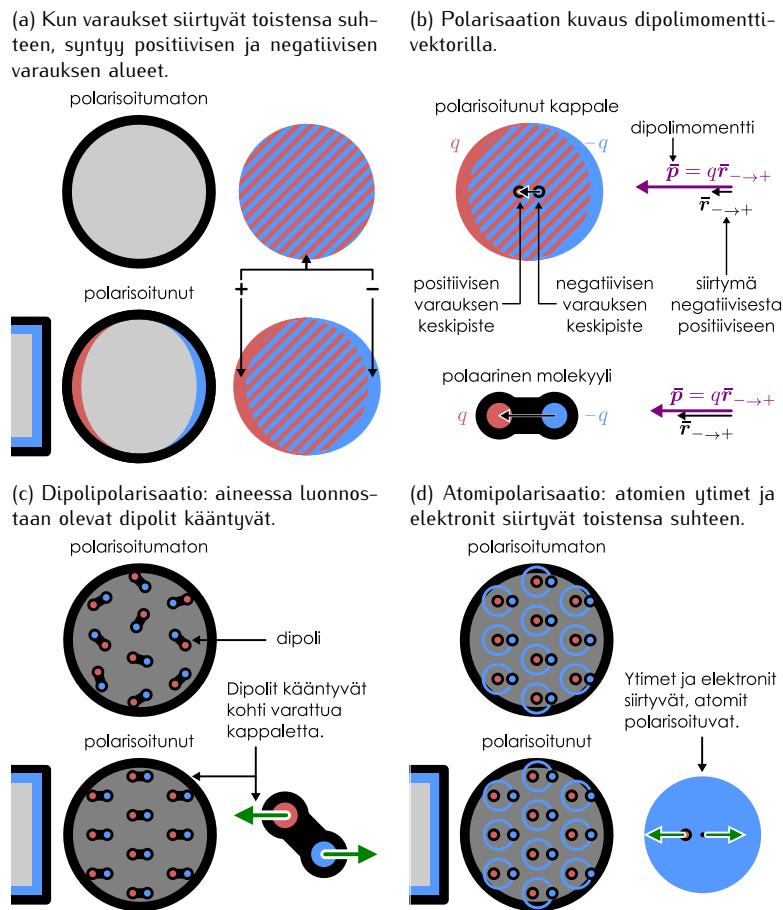
Jos negatiivisesti varautuneen terästangon pää tuodaan neutraalin teräspallon lähelle, tangon negatiivinen varaus vetää pallon sisäistä positiivista varausta puoleensa ja työntää negatiivista varauksta pois päin (kuva 10.8 (a)). Teräspallossa positiivisesti varautuneet atomiytimet eivät pääse juuriakaan liikkumaan, mutta elektronit pääsevät. Niinpä elektroneja alkaa siirtyä kohti pallon sitä puoliskoa, joka on kaukana varatusta tangosta. Tämä johtaa ylimääräisten elektronien kertymiseen pallon tangosta katsoen kaukaisemmalle sivulle, jolloin pallon tämä puoli varautuu negatiivisesti. Samalla tangonpuoleiselle sivulle jää vähemmän elektroneja kuin mitä siellä on protoneja atomiytimissä, jolloin tällä sivulla on ylimääräistä positiivista varausta (kuva 10.8 (b)). Pallon vastakkaiset sivut siis varautuvat vastakkaismerkkisesti, jolloin pallon sanotaan **polarisoituvan**.



**10.4** Kuvassa 10.8 (b) on esitetty, kuinka osa teräspallon elektroneista siirrytä pallon vasemmalta laidalta oikeaan laitaan. Mikseivät kaikki elektronit siirry pallon oikeaan laitaan?

Polarisoitunut pallo on edelleen kokonaisuudessaan neutraali, sillä siinä on yhtä paljon positiivista ja negatiivista varausta. Pallossa on kuitenkin positiivisesti ja negatiivisesti varautuneet alueet, jotka vuorovaikuttavat sähköisesti muiden varausten kanssa. Sähköinen vuorovaikutus toimii pitkienkin etäisyysien päästä, eikä varauksien välissä oleva aine estää vuorovaikutusta. Niinpä varattu tanko vuorovaikuttaa pallon kummankin varatun puliskon kanssa. Tässä tapauksessa pallon positiivisesti varautuneeseen sivuun kohdistuva voima osoittaa kohti negatiivisesti varattua tankoa ja negatiivisesti varautuneeseen sivuun kohdistuva voima osoittaa tangosta pois päin (kuva 10.8 (c)). Sähköinen vuorovaikutus on kuitenkin sitä voimakkaampi, mitä lähempiä näitä toisiaan sähkövaraauksia ovat. Koska polarisoituneen pallon positiivinen sivu on lähempiä negatiivisesti varattua tankoa, siihen kohdistuu suurempi sähköinen voima kuin pallon negatiiviseen sivuun. Näin ollen neutraaliin mutta *polarisoituneeseen palloon kohdistuu kokonaivoima kohti varattua tankoa*. Vastaavasti sauvaan kohdistuu voima kohti palloa.

Kuva 10.9: Polarisaatio johtuu aina positiivisen ja negatiivisen varauksen erottumisesta. Metalleissa elektronit pääsevät liikkumaan vapaasti. Eristeissä varauksenkuljettajat siirtyvät vain vähän. Polarisaation suunta ja voimakkuutta kuvaa dipolimomentti. Se on vektori, jonka suunta on negatiivisesta positiiviseen ja jonka suuruus on erotettujen varausten itsestarvon ja niiden välisen etäisyyden tulo.



**10.5** Miten neutraali metallipallo polarisoituu, jos sen vieressä on positiivisesti varautunut sauva? Millainen voima pallon eri osiin silloin kohdistuu ja millainen kokonaivoima palloon vaikuttaa? Millainen voima kohdistuu tällöin sauvaan?

Polarisaatiota voi kuvata myös kuvassa 10.9 (a) esitettyllä yksinkertaistetulla mallilla. Tässä mallissa neutraalin pallon ajatellaan koostuvan täsmälleen päällekkäin olevista positiivisen ja negatiivisen varauksen muodostamista palloista. Positiivinen pallo edustaa siis aineen atomiytimiä ja negatiivinen pallo sen elektroneja, mutta tässä mallissa aineen mikroskooppinen rakenne jätetään huomioimatta. Alue, jossa pallot ovat päällekkäin (kuvassa raidoitettu alue), on neutraali. Kun teräspallon lähellä ei ole muita varattuja kappaaleita, pallo on kauttaaltaan neutraali, joten se on kuvassa piirretty kokonaan raidalliseksi.

Pallon lähelle tuotu negatiivisesti varattu tanko kohdistaa positiivisesti varattuun palloon voiman kuvaan vasemmalle ja negatiivisesti varattuun palloon voiman oikealle. Tämä saa varatut pallot siirtymään toistensa suhteeseen, ja näin pallon reunoihin muodostuu positiivisen ja negatiivisen varauksen alueet. Kuvassa varattujen alueiden koko on liioiteltu, eikä palloon todellisuudessa muodostu alueita, joissa olisi pelkästään positiivista tai negatiivista varausta. Tässäkin yksinkertaisessa mallissa on silti oikea perusajatus, ja monesti on kätevää kuvata polarisaatiota tällaisella yksinkertaisella mallilla. Erityisesti malli kuvaa polarisaation voimakkuuden yksinkertaisella tavalla: *mitä enemmän positiivinen ja negatiivinen pallo ovat siirtyneet toistensa suhteeseen ja mitä suurempia pallojen varaukset ovat, sitä voimakkaammin pallo on polarisoitunut*.

Tällaista mallia, jossa polarisoitunutta kappaletta kuvataan kahtena toistensa suhteeseen siirtyneenä positiivisena ja negatiivisena varauksena, kutsutaan **dipoliksi** (kreikkaa di 'kaksi', poli 'napa', 'puoli'). Dipoli on erittäin tärkeä malli, koska vaikka sekä useimmat makroskooppiset kappaletit että mikroskooppiset atomit ja molekyylit ovat kokonaisuudessaan neutraaleja, ne voivat silti olla polarisoituneita. Tällöin niiden kokeema sähköistä vuorovaikutusta ei voi kuvata kokonaivarauksella (joka on nolla), vaan sitä täytyy kuvata polarisaation suunnan ja voimakkuuden kautta. Dipoli on yksinkertaisin tällaisia kappaaleita kuvava malli.

Matemaattisesti dipolin polarisaation suunta ja suuruutta kuvaa **dipolimomentti**, jota on havainnollistettu kuvassa 10.9 (b). Dipolimomentti on vektorisuure, jonka on sovittu osoittavan aina dipolin negatiivisesta päästä

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

kohti sen positiivista päättä. Dipolimomenttivektorin pituus on puolestaan dipolin muodostavien varausten itseisarvon ja niiden välisen etäisyyden tulo. Jos siis esimerkkimme varattujen pallojen varaukset ovat  $q$  ja  $-q$ , ja negatiivisen pallon keskipisteestä positiivisen pallon keskipisteesseen osoittava vektori on  $\bar{r}_{- \rightarrow +}$ , polarisaatiota kuvava dipolimomenttivektori on

$$\bar{p} = q\bar{r}_{- \rightarrow +}. \quad (10.3)$$



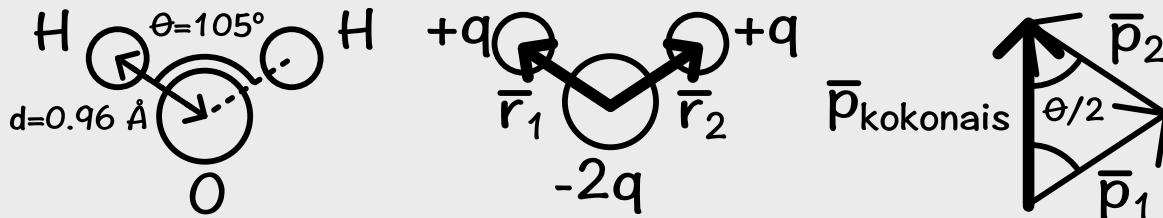
- 10.6** (a) Systeemissä on varaukset 1 nC pisteissä (0, 0) ja (1, 0) (nanometrejä) sekä varaukset  $-1$  nC pisteissä (1, 0) sekä (2, 0). Mikä on systeemin dipolimomentin suuruus? (b) Onko dipolimomentti tämän perusteella ekstensiivinen suure? (c) Jos kahdella systeemillä on sama dipolimomenttivektori, täytyykö systeemien varausten olla keskenään samanlaiset?

## esimerkki 10.1

## Vesimolekyylin dipolimomentti

Vesimolekyyli  $\text{H}_2\text{O}$  atomit muodostavat leveän V-kirjaimen muotoisen molekyylin, jossa sidosten pituus on  $0.096 \text{ nm}$  ja niiden välinen kulma on noin  $105^\circ$ . Happi on hyvin elektronegatiivinen alkuaine, joten happiatomi vetää elektroneja voimakkaasti puoleensa. Tästä johtuen happiatomi on lievästi negatiivisesti varautunut ja vedyt positiivisesti. Molekyylin dipolimomentiksi mitataan  $6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ . Mikä on happi- ja vetyatomien nimellinen varaus?

**TILANNE** Piirretään kuva molekyylistä. Merkitään sidosten pituuksia  $d = 9.6 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0.96 \text{ \AA}$  (tässä esiintyvä erikoisyksikkö  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$  on nimeltään ngström, Anders Ångströmin mukaan), sidosten välistä kulmaa  $\theta = 105^\circ$  ja vetyatomien varausta  $q$ . Symmetrian perusteella kummankin vedyn varauksen pitää olla sama, ja koska molekyyli on kokonaisuudessaan neutraali, hapen varauksen täytyy olla  $-2q$ . Molekyylin kokonaismomentti on  $p_{\text{kokonais}} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ .



**SUUNNITELMA** Ajatellaan hapen varauksen koostuvan kahdesta pisteverauksesta  $-q$ . Tällöin voimme yhdistää yhden näistä varauksista  $-q$  dipoliksi yhden vedyn varauksen  $q$  kanssa, ja toisen varauksen  $-q$  dipoliksi toisen vedyn varauksen  $q$  kanssa. Nämä systeemistä voi ajatella sisältävän kaksi dipolimomenttivektoria. Kahden pisteverauksen dipolimomentin suuruus on varausten itseisarvon  $q$  ja niiden välisen etäisyyden  $d$  tulo,  $p = p_1 = p_2 = qd$ , ja momenttivektorin suunta on negatiivisesta (hapesta) positiiviseen (vetyyn). Koko molekyylin dipolimomentti saadaan näiden vektoreiden summana.

**RATKAISU** Dipolimomenttivektorit muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka kanta on kokonaismomenttivektori. Kannan puolikkaan pituus saadaan kyljen pituuden avulla,

$$\frac{1}{2}p_{\text{kokonais}} = p \cos \frac{\theta}{2} = qd \cos \frac{\theta}{2}, \quad (10.4)$$

ja tästä voidaan ratkaista varaukseksi

$$q = \frac{p_{\text{kokonais}}}{2d \cos(\theta/2)} = \frac{6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}}{2 \cdot 9.6 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \cos 52.5^\circ} = 5.3 \cdot 10^{-20} \text{ C}. \quad (10.5)$$

**ARVIOINTI** Vetyatomin varaus on siis  $q = 0.3e$ , eli vedyltä puuttuu noin puoli elektronia. Atomista ei voi poistaa puolikasta elektronia, mutta nyt kovalenttisen sidoksen muodostavat elektronit ovat levittyneet sekä hapen että vedyn ympärille ja väliin, ja elektronit ovat keskimäärin lähempänä happea. Yksinkertainen dipolimalli, jossa varausten ajatellaan olevan pistemäisiä, ei siis tässä tapauksessa ole täsmälleen totta. Tulos on silti järkevä, koska vetyatomissa on vain yksi protoni, joten vedylle ei voi mitenkään antaa suurempaa varausta kuin  $e$ .

Johheet polarisoituvat voimakkaasti, koska niissä varaukset pääsevät liikkumaan helposti. Myös eristeet polarisoituvat vaikkakaan eivät yhtä paljon kuin johheet, sillä vaikka varauksenkuljetajat eivät pääse liikkumaan eristeen läpi, varaukset pääsevät eristeissäkin siirtymään pieniä matkoja. Jotkin eristemateriaalit koostuvat molekyyleistä, jotka ovat luonnostaan dipoleja. Tällaiset dipolit ovat tavallisesti käännyneet satunnaisiin asentoihin, jolloin keskimäärin kaikkialla on yhtä paljon positiivista ja negatiivista varausta ja makroskoopisessa mittakaavassa aine on neutraalia. Jos tällaisen materiaalin lähelle tuodaan negatiivinen varaus, se vetää puoleensa dipolien positiivisia pääitä ja työntää pois negatiivisia. Vaikkeivat dipolit pääsisikään siirtymään, tämä vuorovaikutus saa dipolit silti käänymään yhdensuuntaisiksi niin, että kaikkien molekyylien

positiivisesti varautunut pää osoittaa ulkoista negatiivista varausta kohti (kuva 10.9 (c)). Nämä aineen pinnalle kertyy pieni positiivinen varaus ulkoisen varauksen lähelle ja negatiivinen varaus vastakkaiselle pinnalle. Dipolimomenttivektoreiden avulla ilmaisten kaikkien molekyylien dipolimomentit kääntyvät osoittamaan samaan suuntaan, jolloin kappaleen kokonaisdipolimomentti saadaan laskemalla kaikkien mikroskooppisten dipolien dipolimomenttivektorit yhteen.

Jos eriste ei koostu dipoleista, yllä kuvattu polarisaatiomekanismi ei ole mahdollinen. Kaikki aine kuitenkin koostuu atomeista eli positiivisesti varatuista ytimistä ja niiden ympärillä olevista negatiivisesti varatuista elektroneista. Koska elektroneilla ja ytimellä on erilaiset sähkövaraukset, ne vetävät toisiaan sähköisesti puoleensa hyvin voimakkaasti. Nämä elektronit pysyvät kiinni ytimessä. Tavallisesti elektronit ovat levittyneet symmetrisesti ytimen ympärille niin, että atomi vaikuttaa ulospäin täysin neutraalilta. Jos kuitenkin atomin lähellä on sähkövaraus, tämä varaus kohdistaa ytimeen ja elektroneihin vastakkaiset voimat. Esimerkiksi kuvaassa 10.9 (d) negatiivisesti varautunut kappale vetää ydintä puoleensa ja työntää elektroneja pois päin. Elektronit eivät irtoa ytimestä ellei atomin lähellä oleva sähkövaraus ole hyvin suuri ja hyvin lähekkä atomia, mutta ydin ja elektronit kuitenkin siirtyyvät hieman toistensa suhteeseen. Nämä atomi itsessään polarisoituu muuttuen pieneksi dipoliksi. Tällä mekanismilla myös pelkästään neutraaleista atomeista koostuva eriste polarisoituu, kun sen lähelle tuodaan varattu kappale.



**10.7** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä sähkövarauksista. Millainen vuorovaikutus varausten välillä havaitaan? Mistä tiedetään varausta olevan täsmälleen kahta tyyppiä? Mikä on dipoli ja miten se vuorovaikuttaa varausten kanssa?

## 10.2 Sähkökenttä

### Pisteverausten välinen vuorovaikutus

Edellä tarkastelluissa kokeissa näimme, että sähkövaraukset kohdistavat toisiinsa voiman. Toistaiseksi kuitenkin selvitimme vasta sen, että samanlaiset varaukset kohdistavat toisiinsa repulsiivisen ja erilaiset varaukset attraktiivisen voiman. Nyt kuvaillemme tarkemmin, millainen sähkövarausten välinen voima on. Yleisesti varattujen kappaleiden väliset voimat riippuvat kappaleiden muodosta ja siitä, miten varaus on niissä jakautunut. Kokeellisesti kuitenkin havaitaan, että jos varatut kappaleet ovat pieniä niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, kappaleiden välinen voima ei riipu kappaleiden täsmällisestä muodosta vaan ainoastaan niiden välistä etäisyydestä ja varauksista. Tämän voi ajatella johtuvan siitä, että tarpeeksi kaukaa katsottuna min-kään äärellisen kokoinen kappaleen muotoa ei voi tarkkaan havaita vaan kaikki kappaleet näyttävät kaukaa vain yhdeltä pieneltä pisteeltä. Samaan tapaan minkä tahansa kahden äärellisen kokoinen varatun kappaleen väillä vaikuttava sähköinen voima on samanlainen kuin jos kummankin kappaleen kokonaisvarausten puristetaisiin yhteen pisteeseen, kunhan kappaleet ovat tarpeeksi kaukana toisistaan. Tämän havainnon ansiosta minkä tahansa tarpeeksi pienien varatun kappaleen voi ajatella olevan yksi varattu piste tai hiukanen. Tätä kutsutaan **pisteverausmalliksi**.

Pisteverausten välistä voimaa tutkittiin kokeellisesti jo 1700-luvulla. Tällöin havaittiin, että *kahden pisteverauksen välinen voima on suoraan verrannollinen varausten suuruuteen ja käantäen verrannollinen varausten välisten etäisyyden neljöön* (kuva 10.10 (a)). Jos varauksilla on sama merkki, voima työntää varauksia toisistaan pois päin. Jos sen sijaan toinen varaus on positiivinen ja toinen negatiivinen, voima vetää varauksia kohti toisiaan (kuva 10.10 (b)). Tämä tulos tunnetaan **Coulombin lakin**. Matemaattisesti laki voidaan ilmaista seuraavasti: Merkitään pisteverauksia A ja B ja niiden paikkavektoreita  $\bar{r}_A$  ja  $\bar{r}_B$ . Tällöin voiman suuruus on

$$F_{\text{pisteveraukset}} = k_\varepsilon \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2}, \quad (10.6)$$

missä verrannollisuuskerroin  $k_\varepsilon = 8.988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$  on ns. Coulombin vakio ja  $r_{A \rightarrow B} = |\bar{r}_B - \bar{r}_A|$  on varausten välinen etäisyys. Voiman suunnan voi puolestaan ilmaista varauksesta A kohti varausta B osoittavan yksikkövektorin avulla (kuva 10.10 (c)),

$$\hat{r}_{A \rightarrow B} = \frac{\bar{r}_{A \rightarrow B}}{r_{A \rightarrow B}} = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_A}{|\bar{r}_B - \bar{r}_A|}. \quad (10.7)$$

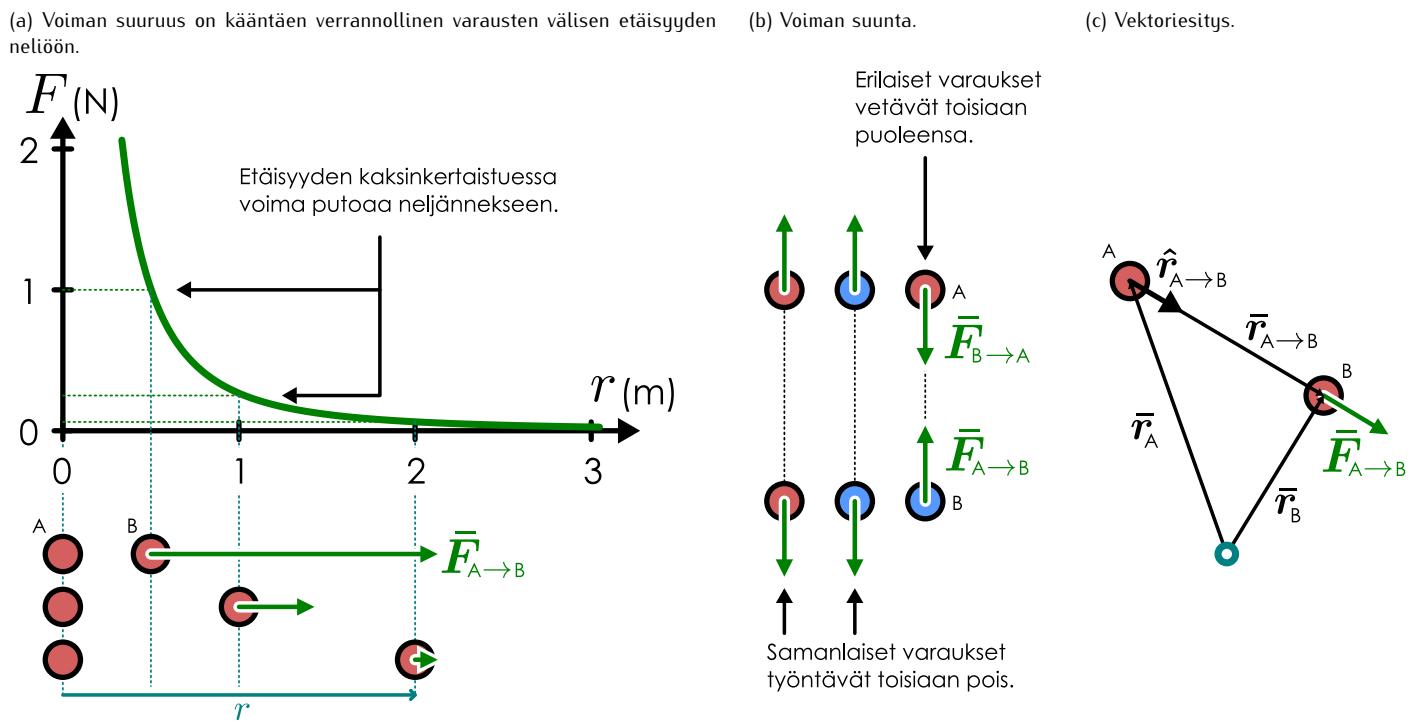
Yhdistämällä suuruus ja suunta saadaan varaukseen B kohdistuvan voimavektorin lausekkeksi

$$\bar{F}_{A \rightarrow B} = k_\varepsilon \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} \hat{r}_{A \rightarrow B}. \quad (10.8)$$

Varaukseen A kohdistuva voima on yhtä suuri mutta vastakkaissuuntainen,  $\bar{F}_{B \rightarrow A} = -\bar{F}_{A \rightarrow B}$ .

Coulombin laki on yksinkertainen ja helppo soveltaa, mutta siihen liittyy joukko oletuksia. Kuten jo mainittiin, laki pätee vain pisteverauksille. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että laki toimii vain silloin, kun

Kuva 10.10: Kahden pistevarausten välinen voima.



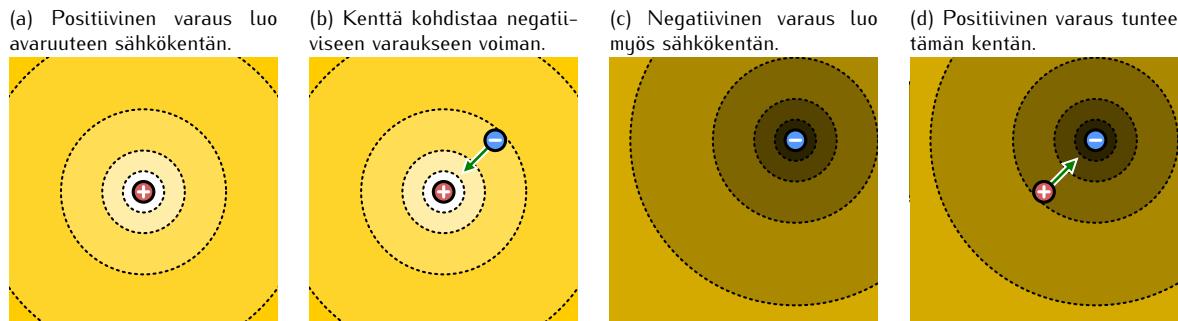
varattujen kappaleiden välinen etäisyys on paljon suurempi kuin kappaleiden halkaisija. Osoittautuu myös, että laki pätee tarkasti vain *paikollaan oleville varauksille*. Se on hyvä approksimaatio varausten liikkussa hitaasti, mutta nopeasti liikkuvien varausten väliset voimat eivät noudata Coulombin lakin.

- 10.8** Pistevaraukset (suuruus 1 nC) ovat tason pisteissä A: (1.0, 1.0) ja B: (-2.0, 3.0) (yksiköt metrejä).
- (a) Mikä on varausten välinen etäisyys?
  - (b) Mikä on pisteestä A pisteeseen B osoittava vektori (karteesisissa komponenteissa)?
  - (c) Mikä on pisteestä A pisteeseen B suuntaan osoittava yksikkövektori?
  - (d) Mikä on varaukseen B kohdistuvan voiman suuruus?
  - (e) Mikä on varaukseen B kohdistuva voimavektori?

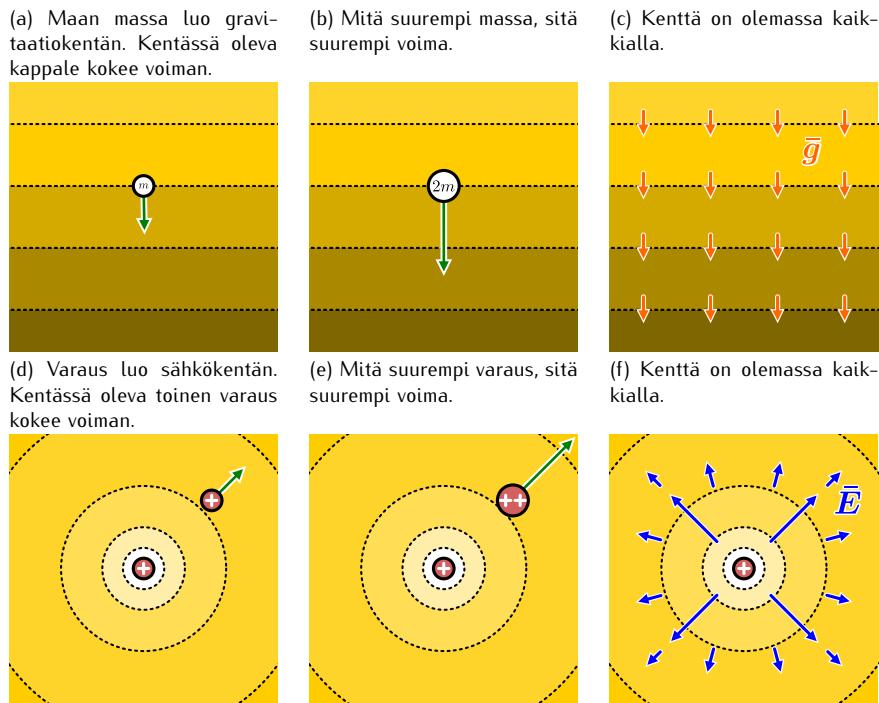
### Vuorovaikutuksen välittäjä

Sähköinen vuorovaikutus toimii periaatteessa äärettömän pitkien etäisyysien yli. Coulombin lain mukaisesti kahden pistevarausten välisen sähköisen voiman suuruus kyllä heikkenee etäisyyden kasvaessa, mutta se ei koskaan ole täsmälleen nolla. Tässä suhteessa vuorovaikutus toimii samaan tapaan kuin gravitaatio, joka sekä vaikuttaa mielivaltaisen kaukaa.

Kuva 10.11: Kenttä on malli, joka selittää vuorovaikutuksen välittymisen pitkien matkojen päähän.



Kuva 10.12: Sähköistä vuorovaikutusta ja gravaatiota voi kumpaankin kuvata kenttämällillä.



Esittelimme jo luvussa 4 gravaatiokentän idean selittämään, kuinka painovoima toimii pitkien etäisyyksienkin päästää. Tämän mallin mukaan massiiviset kappaleet kuten Maapallo luovat ympärilleen gravaatiokentän — jonkinlaisen muutoksen avaruuden ominaisuuksissa — ja tämä kenttä levää kaikkialle avaruuteen. Muut massiiviset kappaleet tuntevat tämän kentän ja niihin kohdistuu kentässä painovoima, joka riippuu kappaleiden painavan massan suuruudesta että kentän ominaisuuksista. Aivan samaan tapaan sähkövarausten voi ajatella synnyttävän sähkökentän, joka levää varauksista kaikkialle avaruuteen. Kuvalta 10.11 on havainnollistettu positiivisen ja negatiivisen varauksen vuorovaikutus tämän kenttämallin avulla. Positiivinen varaus luonut ympärilleen sähkökentän, joka on olemassa kaikkialla avaruudessa riippumatta siitä, onko avaruudessa muita varauksia. Kun tähän kenttään tuodaan toinen, negatiivinen varaus, tämä varaus tuntee kentän ja siihen kohdistuu kentässä sähköinen voima kohti kentän lähdettä eli positiivista varasta. Vastaavasti negatiivinen varaus synnyttää ympärilleen sähkökentän, ja tämä kenttä kohdistaa positiiviseen varaukseen voiman.

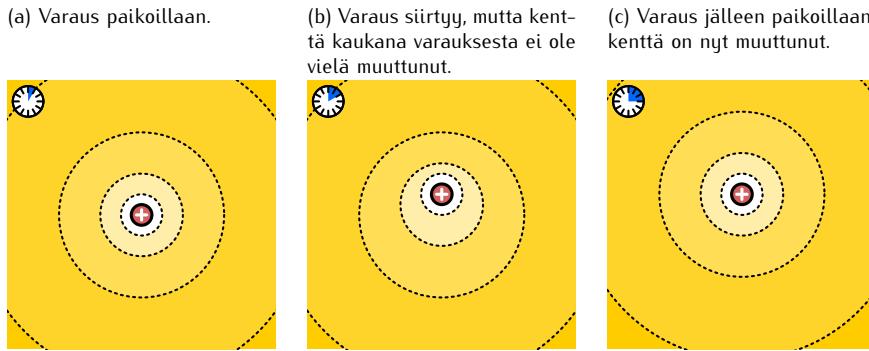
**10.9** Kuvalta 10.11 varausten luoma kenttää on piirretty niin, että positiivisen varauksen lähellä kenttää kuvaava vaalea väri ja negatiivisen varauksen lähellä tumma väri. Kenttään tuodaan (i) positiivinen tai (ii) negatiivinen varaus. Voiko varaukseen kohdistuvan voiman suunnan päättää jotenkin näistä väreistä? Riippuuko tulos jotenkin siitä, onko kentän luonut positiivinen vai negatiivinen varaus?

Kuvalta 10.12 on havainnollistettu sähkökentän ominaisuuksia vertailemalla gravaatio- ja sähkökenttiä. Kuvalta 10.12 (a) on piirretty gravaatiokenttä sekä kentässä oleva kappale, johon kohdistuu painovoima kuvalta alaspin, kohti kentän lähdettä eli Maapalloa. Kuvalta (b) on täsmälleen sama kenttä, mutta nyt kentässä on massaltaan kaksinkertainen kappale, johon kohdistuu tieteenkin kaksinkertainen voima pienemppään kappaleeseen verrattuna. Huomaa, että kuvan ei ole piirretty kentän synnyttänyttä massaa. Kyseessä voi olla Maapallon gravaatiokenttä, mutta sen ei tarvitse olla. Gravaatio vaikuttaa mielivaltaisen pitkien etäisyyksien päästää, eikä gravaatiokenttässä oleva kappale "tiedä" miten kenttä on syntynyt. Kappale reagoi vain siihen, millainen gravaatiokenttä juuri sen kohdalla sattuu kulloinkin olemaan.

Painovoimakentän tapauksessa kentän voimakkuutta voidaan kuvata putoamiskihtyvyydyllä  $\bar{g}$ . Jos kenttän tuodaan kappale, jonka massa on  $m$ , kappaleeseen kohdistuu painovoima  $\bar{G} = m\bar{g}$ . Putoamiskihtyvyyden suunta siis kertoo mihin suuntaan kentässä olevaan kappaleeseen kohdistuva painovoima osoittaa ja voiman suuruus on putoamiskihtyvyyden ja kappaleen massan tulo. Lähellä maanpintaa kappaleeseen kohdistuu kaikkialla yhtä suuri ja samaan suuntaan osoittava painovoima, joten putoamiskihtyvyyden  $\bar{g}$  täytyy olla kaikkialla sama eli kentän täytyy olla homogeninen (kuva 10.12 (c)). Planeettojen välisessä avaruudessa näin ei ole, joten yleisesti painovoimakentän voimakkuus ja suunta riippuu siitä, missä avaruuden pisteessä ollaan.

Kuvalta 10.12 (d) on piirretty samaan tapaan sähkökenttä positiivisen pistevarauksen ympäillä sekä tässä kentässä olevaan toiseen varaukseen kohdistuva voima. Kuvalta (e) on sama kenttä, mutta kentässä oleva

Kuva 10.13: Tieto varausten siirtymisestä etenee kentässä äärellisellä nopeudella.



varauston kaksinkertainen edelliseen kuvaan verrattuna, joten varaukseen kohdistuva voimakin on voimakkuudeltaan kaksinkertainen. Aivan kuten kappaleen massaan kohdistuu painovoimakentän  $\bar{g}$  suuntainen ja kentän voimakkuuteen verrannollinen voima, voimme määritellä myös sähkökenttää kuvaavan vektorikentän  $\bar{E}$  niin, että tässä kentässä levossa olevaan positiiviseen pistevaraukseen kohdistuu kentässä voima, jonka suunta on sama kuin sähkökentän  $\bar{E}$  suunta varauksen kohdalla ja jonka suuruus on varauksen suuruuden  $q$  ja kentän voimakkuuden tulo,

$$\bar{F} = q\bar{E}. \quad (10.9)$$

Sähkökentän yksikkö on tämän määritelmän mukaisesti  $[E] = [F]/[q] = \text{N/C}$ .

Negatiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa puolestaan sähkökenttään nähden vastakkaiseen suuntaan. Tämäkin on huomioitu määritelmässä (10.9), sillä jos varaus  $q$  on negatiivinen, vektorit  $\bar{F}$  ja  $\bar{E}$  ovat vastakkaisuuntaiset.

Coulombin lain mukaisesti kahden positiivisen pistevarauksen välillä vaikuttaa aina repulsiivinen vuorovaikutus, joten positiivisen pistevarauksen kenttään tuotuun toiseen positiiviseen pistevaraukseen kohdistuu aina voima poispäin kentän läheenä toimivasta varauksesta. Nämä positiivisen varauksen sähkökenttä osoittaa kaikki alla poispäin varauksesta. Lisäksi koska sähköinen voima heikkenee pistevarauksesta kauemmas siirryttääessä, myös sähkökentän täytyy olla sitä heikompi, mitä kauempana kentän läheestä ollaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.12 (f), jossa on piirretty kenttävektoreita muutamissa tarkastelupisteissä.

Coulombin laki ja tässä kuvattu kenttämalli voivat vaikuttaa saman asian sanomiselta kahdella eri tavalla. Kertoohan kumpikin malli meille, millainen voima kahden pistevarauksen välillä vaikuttaa. Malleissa on kuitenkin oleellisia fysikaalisia eroja. Jotta Coulombin lakia nimittäin voisi soveltaa, täytyy tietää täsmälleen missä pistevaraukset toistensa suhteeseen ovat. Coulombin laissa siis oletetaan implisiittisesti, että kaikki varaukset "tietävät" missä toiset varaukset ovat. Näin ajatellen varausten liikkuminen tuottaa kuitenkin ongelman. Jos Coulombin laki olisi totta myös liukkuville varauksille, yhden varauksen siirtäminen muuttaisi toiseen varaukseen kohdistuvaa voimaa heti riippumatta siitä, kuinka kaukana varaukset ovat toisistaan. Suhteellisuusteorian mukaan informaatio ei kuitenkaan voi edetä valonnopeutta nopeammin, joten *tämä ei voi olla mahdollista*. Niinpä Coulombin laki ei voi olla täsmällinen oikein, kun varaukset liikkuvat. Kenttämallissa tälläista ongelmaa ei ole. Varauksen siirtymisen nimittäin muuttaa varauksen luomaa sähkökenttää, ja tämä muutos voi edetä korkeintaan valonnopeudella, kuten kuvassa 10.13 on esitetty. Jos varaus siirtyy, hyvin kaukaisessa havaintopisteessä mitattu sähkökenttä ei voi muuttua ennen kuin tieto varauksen siirtymisestä saapuu kentän muutoksen mukana.



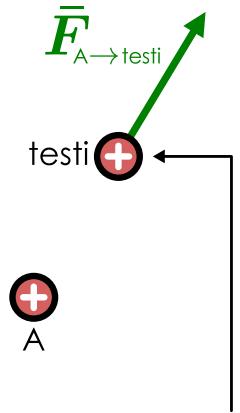
**10.10** Kun  $1 \text{ nC}$  pistevaraustuodaan avaruuden pisteeseen P, siihen kohdistuu voima  $\bar{F} = (300 \text{ nN})\hat{i} + (400 \text{ nN})\hat{j}$ . (a) Mikä oli sähkökenttä pisteessä P ennen kuin varaus tuotiin? (b) Jos tämän sijaan pisteeseen tuodaan  $-3 \text{ nC}$  varaus, millainen voima siihen kohdistuu?

## Sähkökentän vektorikenttäesitys

Sähkökenttä on periaatteessa olemassa avaruuden jokaisessa pisteessä riippumatta siitä, onko pisteessä sähkövarausta, johon kenttä kohdistaisi voiman. (Toki kenttä voi olla joissakin pisteissä nolla,  $\bar{E} = \bar{0}$ .) Sähkökenttän havaitseminen kuitenkin edellyttää varauksen tuomista kenttään, koska sähkökenttä kohdistaa kentässä oleviin varauksiin voiman, ja tämä voima voidaan mitata. Näin voimme siis määritellä ja mitata sähkökentän missä tahansa avaruuden pisteessä: Otetaan pieni varattu kappale, ideaalisesti pistevaraustu, jonka varauksen suuruus  $q_{\text{testi}}$  tunnetaan. Tätä kutsutaan *testivaraukseksi*, koska sen avulla testataan sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa. Asetetaan tämä testivaraus pisteeseen, jossa sähkökenttä halutaan selvittää, ja mitataan sitten

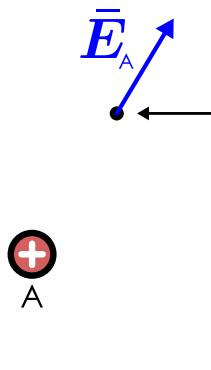
Kuva 10.14: Sähkökenttä voidaan mitata testivarausella. Tarkastelupisteessä olevaan testivaraukseen kohdistuu kentän suuntainen ja sen voimakkuuteen verrannollinen voima. Kenttä on olemassa kaikkialla, ja sen voi periaatteessa mitata kuinka monessa pisteessä tahansa. Kun kentän luo monta varausta, näiden tuottama sähkökenttä saadaan laskemalla yksittäisten varausten tuottamat kenttävektorit yhteen.

(a) Varaus A kohdistaa voiman testi-varaukseen.



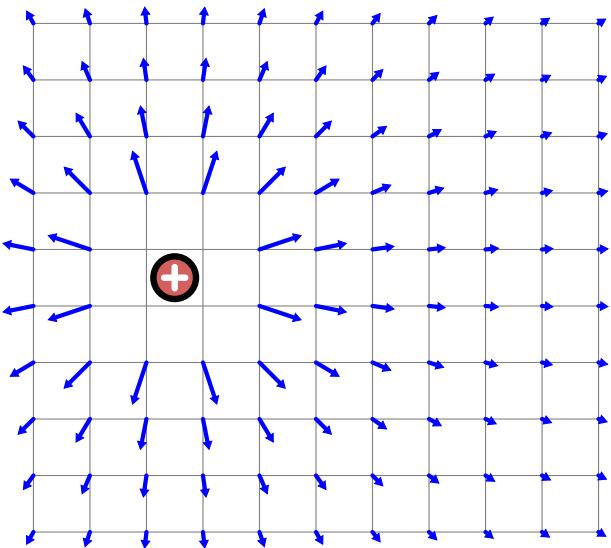
Jos tarkastelupisteeseen tuodaan testivaraus, A:n luoma sähkökenttä kohdistaa siihen voiman.

(b) Varaus A kenttä pisteessä.

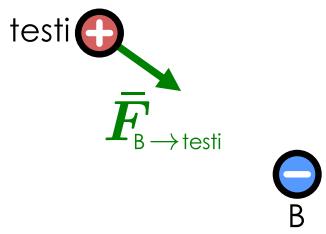


Kentän voimakkuus tarkastelupisteessä selviää jakamalla testivaraukseen kohdistuva voima sen varauksen suuruudella.

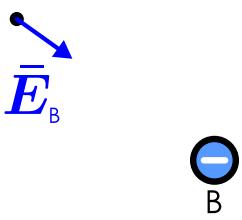
(c) Varaus A kentän vektorikuvaaja.



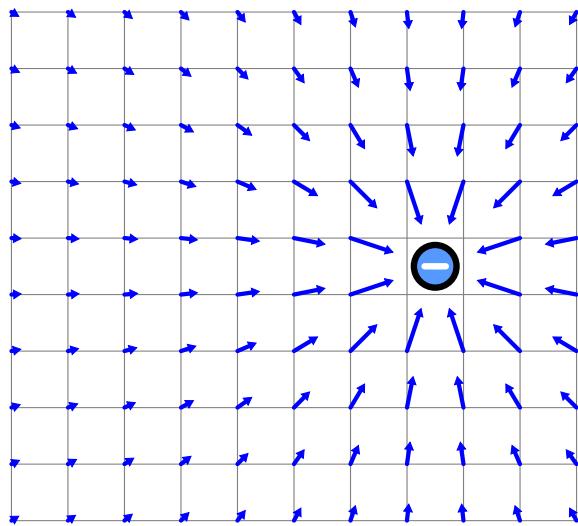
(d) Varaus B kohdistaa voiman testi-varaukseen.



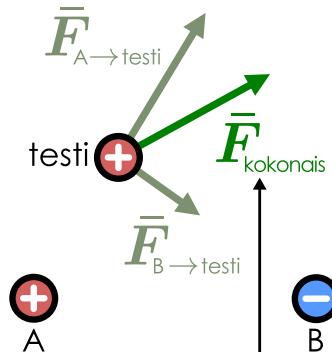
(e) Varaus B kenttä pisteessä.



(f) Varaus B kentän vektorikuvaaja.

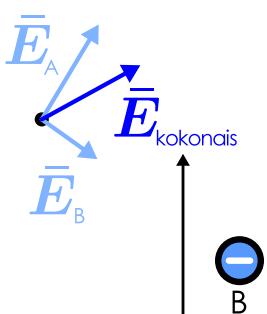


(g) Varausten yhdessä tuottama voima.



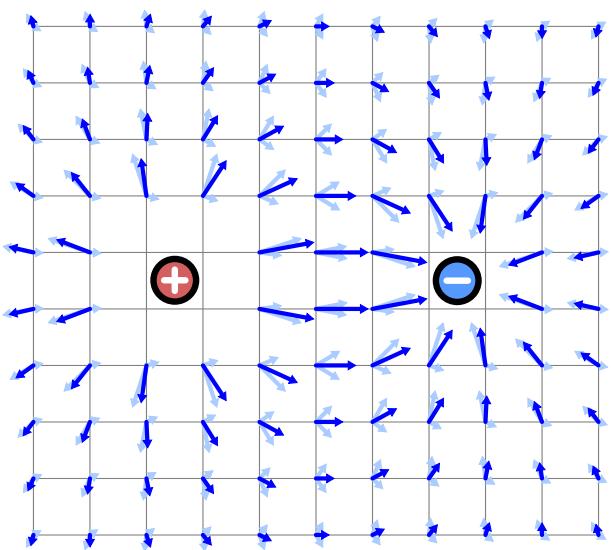
Testivaraukseen kohdistuva voima saadaan varausten A ja B siihen kohdistamien voimien vektorisummana.

(h) Varausten yhdessä luoma kenttä.



Sähkökentän täytyy siis myös olla varausten A ja B luomien kenttien summa.

(i) Varausten yhdessä luoman kentän vektorikuvaaja.



## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

varaukseen kohdistuva voima. Yhtälön (10.9) mukaisesti testivaraukseen kohdistuva voima on suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja havaintopisteessä vallitsevaan sähkökenttään, joten *sähkökentän täytyy kyseisessä pisteessä olla voiman ja varauksen suhde*,

$$\bar{E} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{\text{testi}}. \quad (10.10)$$

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvissa 10.14 (a) ja (b), joissa positiivisen varauksen A sähkökenttä mitataan havaintopisteessä. Kuvassa (a) havaintopisteeseen on asetettu testivaraus, johon kohdistuu voima. Kuvassa (b) on pürretty tämän voiman aiheuttava sähkökenttä, joka on siis yhdensuuntainen kuvassa (a) püurretyn voimavektorin kanssa ja osoittaa poispäin kentän luovasta varauksesta A.

Koska sähkökentän synnyttää tässä tapauksessa paikoillaan oleva pistevaraus A, voimme päätellä kentän voimakkuuden Coulombin lain avulla. Coulombin lakihan sanoo, että pisteessä olevaan testivaraukseen kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_{A \rightarrow \text{testi}} = k_{\epsilon} \frac{q_A q_{\text{testi}}}{r_{A \rightarrow \text{testi}}^2}. \quad (10.11)$$

Tämän perusteella varauksen A tuottama kenttä on havaintopisteessä voimakkuudeltaan

$$E_{\text{pistevaraus}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} F_{A \rightarrow \text{testi}} = k_{\epsilon} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow \text{testi}}^2}. \quad (10.12)$$

Pistevarauksen sähkökenttä on siis suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja käännekkääneen verrannollinen havaintopisteiden varauksesta mitattu etäisyyden neliöön.

Huomaa erityisesti, että tässä ei sanottu lainkaan, mikä testivarauksen suuruus on. Mitä suurempaa testivarausta käytetään, sitä suurempi voima siihin kohdistuu, joten sekä  $F_{A \rightarrow \text{testi}}$  että  $q_{\text{testi}}$  riippuvat kentän mittauksessa käytetyn varauksen suuruudesta. Kuitenkin koska voima on suoraan verrannollinen testivaraus suuruuteen, voiman ja varauksen suhde *ei riipu testivaraus suuruudesta*. Niinpä tämä määritelmä toimii, kunhan testivarausta voidaan pitää pistemäisenä.



**10.11** Kuinka voit mitata graviatatiokentän voimakkuuden ja suunnan paikoillaan olevan testimassan avulla? Millaisella mittavälineellä tämä käytännössä onnistuu? Vertaa tästä sähkökentän mittamiseen.

Sama mittaus voidaan toistaa niin monessa pisteessä kuin tarvitaan, ja näin voidaan selvittää sähkökenttää missä pisteessä tahansa. Kuvassa 10.14 (c) kenttä on määritetty kaksiluotettaiseen tasoon tasavälein asetetuissa pisteissä, ja kussakin pisteessä mitattu sähkökenttävektoria esittää havaintopisteeseen asetettu nuoli. Tällainen esitys on *vektorikenttäkuvaaja*. Kaikki kuvaajan sähkökenttävektorit on pürretty samassa mittakaavassa, joten nuolten pituus esittää kentän voimakkuutta kussakin pisteessä. Coulombin lain mukaisesti sähkökenttä heikkenee pistevarauksesta etäännystääressä, ja tämä näkyykin kuvaajassa niin, että lähellä pistevarausta nuolet ovat pitkät. Nuolten suunnat esittävät tienkenkin kentän suuntaa, ja osoittavat kaikkialla poispäin positiivisesta varauksesta. Kenttä on olemassa kaikkialla, myös kuvaajaan valittujen pisteiden välissä, mutta tienkenkään jokaiseen pisteeseen ei voi piirtää nuolua.

Kuvassa 10.14 (f) on esitetty samaan tapaan negatiivisen pistevarausten B sähkökenttä. Positiiviseen testivaraukseen kohdistuva voima osoittaa kohti negatiivista varausta, joten negatiivisen varauksen kenttä osoittaa kaikkialla *kohti* varausta. Muuten kenttä on samanlainen kuin positiivisen varauksen luoma kenttä.

Kuvassa 10.14 (g) on puolestaan määritetty testivaraukseen kohdistuva voima, kun sähkökentän luovat edellisten kohtien varaukset A ja B *yhdessä*. Varaus A kohdistaa testivaraukseen voiman  $\bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}}$  kuvassa yläviistoon oikealle aivan kuten kuvassa 10.14 (a), ja varaus B kohdistaa testivaraukseen  $\bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}$  voiman oikealle alaviistoon kuvan 10.14 (d) tapaan. Testivaraukseen kohdistuva kokonaisvoima on voimien superpositiooperaatteiden mukaisesti näiden voimien vektorisumma,

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}} + \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}. \quad (10.13)$$

Havaintopisteiden sähkökenttä saadaan määritelmän mukaisesti jakamalla tämä kokonaisvoima testivaraus suuruudella, joten sähkökenttä havaintopisteessä on

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}} + \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}. \quad (10.14)$$

Toisaalta varaus A loisi yksin kentän  $\bar{E}_A = \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}} / q_{\text{testi}}$  ja varaus B loisi yksin kentän  $\bar{E}_B = \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}} / q_{\text{testi}}$ , joten kokonaiskenttä on varausten yksin luomien kenttien vektorisumma,

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_A + \bar{E}_B \quad (10.15)$$

kuten kuvaan 10.14 (h) on piirretty. Sama periaate toimii riippumatta kentän tuottavien varausten lukumäärästä. Toisin sanoen *sähkökentälle pätee superpositiooperaate* samaan tapaan kuin voimalle.

Kuvassa 10.14 (i) on piirretty varausten A ja B luoman kokonaissähkökentän vektorikenttäkuvaaja. Edellä kuvattu superpositiooperaate pätee erikseen kussakin avaruuden pisteessä, ja kuvaajan jokaisessa pisteessä onkin esitetty sekä varausten A ja B erikseen luomat kentät vaaleina nuolina etä näiden superpositio eli kokonaissähkökenttää tummana nuolena. Vaaleat nuolet ovat täsmälleen samat kuin kuvajissa 10.14 (c) ja (f), joissa on piirretty varausten A ja B kentät erikseen. Usean varauksen synnyttämä sähkökenttää saadaan siis määritettyä selvitämällä ensin erikseen jokaisen varauksen *yksinään* tuottama kenttä kussakin avaruuden pisteessä ja laskemalla sitten nämä kenttävektorit *pisteittäin* yhteen.



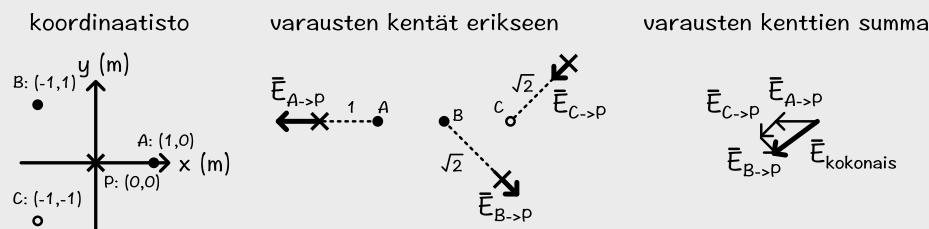
**10.12** Varaus 1 nC on tason pisteessä (0, 1) (metrejä) ja varaus -2 nC on pisteessä (2, 0). Mikä on sähkökenttävektori origossa?

### esimerkki 10.2

### Pistevarausten sähkökenttä

**Kolme varausta, A, B ja C, on asetettu pisteisiin A: (1, 0), B: (-1, 1), C: (-1, -1) (yksiköt metrejä).** Varausten suuruudet ovat A: 1.0 nC, B: 1.0 nC ja C: -1.0 nC. Mikä on näiden varausten yhdessä synnyttämä sähkökenttää origossa?

**TILANNE** Piirretään koordinaatisto ja merkitään varausten paikat. Merkitään myös havaintopiste P: (0, 0). Merkitään  $q = 1$  nC, jolloin  $k_e q \approx 9.0 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .



**SUUNNITELMA** Positiiviset varaukset tuottavat niistä poispäin osoittavan sähkökentän ja negatiiviset varaukset niitä kohti osoittavan kentän. Varausten yhdessä synnyttämä kenttä saadaan kaikkien varausten yksin tuottamien kenttien superpositiona eli vektorisummana.

Vektorimuodossa yhden varauksen kenttä on

$$\bar{E}_{i \rightarrow P} = k_e \frac{q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P}. \quad (10.16)$$

Kokonaiskenttää on näiden vektorisumma,  $\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_{A \rightarrow P} + \bar{E}_{B \rightarrow P} + \bar{E}_{C \rightarrow P}$ . Tämä summa on helpoin laskea etsimällä ensin kaikkien vektoreiden x- ja y-komponentit ja summaamalla nämä erikseen.

**RATKAISU** Lasketaan ensin etäisyys kustakin varauksesta origoon. Kahden pisteen  $i$  ja  $P$  välinen etäisyys on

$$r_{i \rightarrow P} = \sqrt{(x_P - x_i)^2 + (y_P - y_i)^2}, \quad (10.17)$$

joten  $r_{A \rightarrow P} = 1 \text{ m}$  ja  $r_{B \rightarrow P} = r_{C \rightarrow P} = \sqrt{2} \text{ m}$ . Varausten tuottamien sähkökenttien voimakkuudet ovat siis  $E_{A \rightarrow P} = 9.0 \text{ N/C}$  sekä  $E_{B \rightarrow P} = E_{C \rightarrow P} = 4.5 \text{ N/C}$ .

Päättelään sitten sähkökenttien suunnat. Varaus A on positiivinen, joten se tuottaa kentän itsestään poispäin eli kuvassa vasemmalle suuntaan  $\hat{r}_{A \rightarrow P} = -\hat{i}$ . Varaus B tuottaa myös kentän itsestään poispäin eli alaoikealle suuntaan  $\hat{r}_{B \rightarrow P} = (\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$ . Varaus C on sen sijaan negatiivinen, joten sen kenttä osoittaa kohti varasta suuntaan  $-\hat{r}_{C \rightarrow P} = (-\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$ . Varaukset tuottavat siis yksittäin sähkökentät  $\bar{E}_{A \rightarrow P} = (-9.0 \text{ N/C})\hat{i}$ ,  $\bar{E}_{B \rightarrow P} = (3.2 \text{ N/C})\hat{i} + (-3.2 \text{ N/C})\hat{j}$  sekä  $\bar{E}_{C \rightarrow P} = (-3.2 \text{ N/C})\hat{i} + (-3.2 \text{ N/C})\hat{j}$  ja kokonaiskenttää

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = (-9.0 \text{ N/C})\hat{i} + (-6.4 \text{ N/C})\hat{j}. \quad (10.18)$$

Mathematica:

```
(* vakiot *)
a = {1, 0}; b = {-1, 1}; c = {-1, -1}; p = {0, 0};
k = 8.988; qa = 1; qb = 1; qc = -1;

(* vektori A -> P, sen pituuus ja suunta *)
vec[a_, p_] := p-a
dist[a_, p_] := Sqrt[(p-a).(p-a)]
unit[a_, p_] := vec[a,p] / dist[a,p]

(* varauksen (suuruus qa, paikka a) kentta pisteessa p *)
e[a_, p_, qa_] := (k*qa / dist[a,p]^2) * unit[a,p]

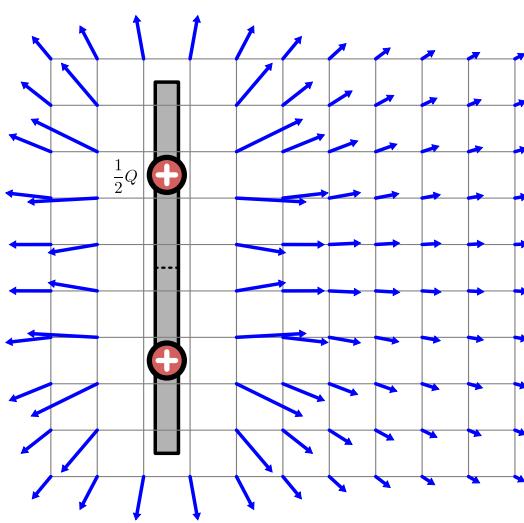
ekok = e[a, p, qa] + e[b, p, qb] + e[c, p, qc]
{-8.988, -6.35548}
```

**ARVIOINTI** Kuvan perusteella kokonaissähkökenttää kuvaava vektori osoittaa koordinaatistossa viistoon alavasemmalle. Sähkökentän x- ja y-skalaarikomponenttien pitää siis olla negatiiviset, kuten laskemamme tuloksen mukaan on. Lisäksi vektori osoittaa hieman enemmän negatiivisen x-akselin suuntaan kuin negatiivisen y-akselin suuntaan, joten x-komponentin pitää olla itseisarvoltaan suurempi, kuten onkin.

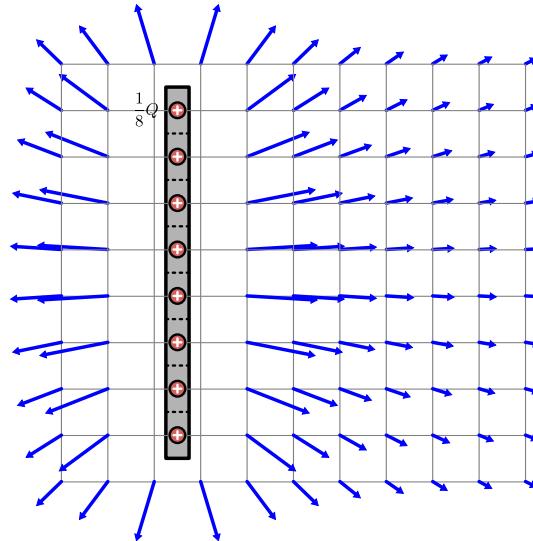
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.15: Suuren varatun kappaleen luoma sähkökenttä voidaan määrittää missä tahansa tarkastelupisteessä jakamalla kappale useaan pieneen osaan, laskemalla kunkin pieni osan tuottama kenttä tarkastelupisteessä ja summaamalla nämä kentät yhteen.

(a) Malli, jossa varattu tanko on jaettu 2 osaan.



(b) Malli, jossa varattu tanko on jaettu 8 osaan.



## Varatun kappaleen sähkökenttä

Coulombin lain esittelyn yhteydessä totesimme, että pisteverausmalli toimii vain silloin, kun varatut kappaleet ovat pieniä verrattuna niiden etäisyyteen havaintopisteestä. On kuitenkin usein tarpeellista selvittää sähkökenttä *lähellä* suurta varattua kappaletta, jolloin yksinkertainen pisteverausmalli ei toimi. Tällaisessakin tapauksessa voimme kuitenkin käyttää pisteverausmallia kuvaamaan varatun kappaleen *osia*. Tällöin kunkin osan luoman sähkökentän voi laskea pisteverausmallin perusteella, jolloin kappaleen synnyttämä kokonaissähkökenttä saadaan laskemalla nämä kentät vektoreina yhteen sähkökentän superpositiooperaation mukaisesti.

Tarkastellaan esimerkinä ohutta, tasaisesti varattua sauvalta. Merkitään sauvan pituutta symbolilla  $L$  ja sen kokonaisvarausta  $Q$ . Yksinkertaisin malli sauvan sähkökentälle on pisteverauksen  $Q$  sähkökenttä, mutta tämä malli kuvailee sauvan kenttää huonosti, jos tarkastelupisteen etäisyys sauvasta on pienempi kuin sauvan pituus. Astetta parempi malli saadaan, kun sauva ajatellaan jaetuksi kahteen osaan ja kumpaakin osaa kuvaataan pisteverauksena  $Q/2$ , jolloin sauvan kokonaisvarausta on edelleen  $Q$ . Tämä malli ja sen mukaan laskettu sähkökenttä on esitetty kuvassa 10.15 (a). Kaukana sauvasta kenttä ei juurikaan poikkeaa kuvaan 10.14 (c) piirretystä yhden pisteverauksen kentästä, mutta sauvan läheellä nämä kentät ovat selvästi erilaiset.

Mallia voi parantaa systemaattisesti jakamalla sauvan yhä useampaan osaan ja kuvaamalla jokaista osaa yhtenä pisteverauksena. Mitä pienempiä nämä osat ovat, sitä paremmin pisteverausmalli kuvailee niistä kutakin ja sitä paremmin malli kokonaisuutena toimii. Kuvaan 10.15 (b) on esimerkinä piirretty malli, jossa sauva on jaettu kahdeksaan osaan ja kunkin osan varaus on  $Q/8$ . Kuvaan on myös piirretty sähkökentän kuvaaja, joka on laskettu näiden kahdeksan pisteverauksen sähkökentän superpositiona. Lähellä sauvaa tämä kuvaaja (10.15 (b)) poikkeaa edellisestä, kahden pisteverauksen mallin ennustamasta kuvaajasta (10.15 (a)), ja kahdeksan varauksen malli on luonnollisesti tarkempi.

Matemaattisesti tämän osiin jakamisen voi ilmaista seuraavasti. Numeroidaan sauvan osat indeksillä  $i = 1, 2, \dots, N$  ja merkitään näiden osien paikkoja  $\bar{r}_i$  sekä varauksia  $\Delta q_i = Q/N$ , missä  $N$  on osien lukumäärä. Havaintopisteessä  $P$  kunkin yksittäisen osan tuottama sähkökenttä on pisteverausmallin mukaan

$$\bar{\mathbf{E}}_i = k_\epsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i \rightarrow P}. \quad (10.19)$$

Sähkökentän superpositiooperaation mukaisesti sauva tuottaa kokonaisuudessaan pisteessä  $P$  kentän

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{kokonais}} = \bar{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_2 + \dots = k_\epsilon \frac{\Delta q_1}{r_{1 \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow P} + k_\epsilon \frac{\Delta q_2}{r_{2 \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{2 \rightarrow P} + \dots = \sum_{i=1}^N k_\epsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i \rightarrow P}. \quad (10.20)$$

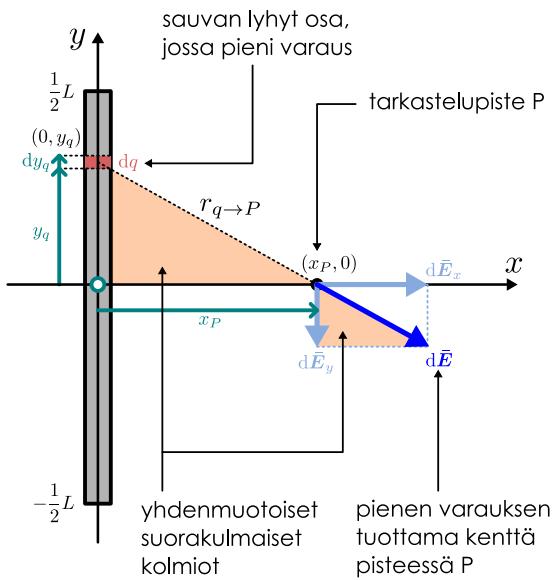
Tällaisen summan laskeminen ei ole vaikeaa, jos osia ei ole kovin monta. Lasku käy kuitenkin sitä työläämäksi, mitä useampaan osaan sauva jaetaan. Ja mitä lähempänä sauvaa sähkökenttää halutaan laskea, sitä pienempiin osiin sauva pitää jakaa. Yleisen lausekkeen johtaminen vaatiakin käytännössä raja-arvon laskemista, kun sauva jaetaan äärettömän moneen osaan,  $N \rightarrow \infty$ . Tällöin myös kunkin osan varaus lähestyy

nolla,  $\Delta q_i \rightarrow dq$ , jolloin päädytään laskemaan yhteen äärettömän monta infinitesimaalisen pienä lukua. Tällainen summan raja-arvo on *integraali*, joten voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{kokonais}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N k_\varepsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i \rightarrow P} = \int k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}. \quad (10.21)$$

Tässä muodossa integraalia ei kuitenkaan voi vielä laskea. Etäisyys kulloinkin tarkasteltavasta sauvan osasta tarkastelupisteeseen samoin kuin tarkastelupisteeseen osoittava yksikkövektori nimittäin riippuvat siitä, mitä sauvan osaa kulloinkin tarkastellaan. Integroinnin mahdollistamiseksi kaikki suureet, jotka saavat sauvan eri osissa eri arvon, pitää kirjoittaa samojen integrointimuuttujien avulla. Käytännössä integrointimuuttujaksi valitaan aina jokin sopiva koordinaatti tai koordinaatit, jos varattu kappale on kaksi- tai kolmiulotteinen.

Kuva 10.16: Sauvan pienen osan tuottaman sähkökentän laskemisessa tarvittava geometria.



tarkasteltavasta sauvan osasta (pisteverauksesta) havaintopisteeseen ja tämä voidaan laskea helposti Pythagoraan lauseella, sillä origo, varaus ja tarkastelupiste muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat  $x_P$  sekä  $y_q$  ja hypotenuusan pituus on  $r_{q \rightarrow P}$ . Siispä

$$r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2} = (x_P^2 + y_q^2)^{1/2}. \quad (10.23)$$

Sähkökentän lausekkeessa esiintyvä vektori  $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$  on puolestaan varauksesta tarkastelupisteeseen suuntaan osoittava yksikkövektori eli pistestä  $(0, y_q)$  pisteen  $(x_P, 0)$  suuntaan osoittava yksikkövektori. Tämä on helppoin laskea seuraavasti: Merkitään varauksen ja tarkastelupisteen paikkavektoreita  $\bar{\mathbf{r}}_q = y_q \hat{\mathbf{j}}$  ja  $\bar{\mathbf{r}}_P = x_P \hat{\mathbf{i}}$ . Varauksesta tarkastelupisteeseen osoittava vektori saadaan näiden avulla loppu- ja alkupisteiden paikkavektoreiden erotuksena, joten tämä vektori on

$$\bar{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \bar{\mathbf{r}}_P - \bar{\mathbf{r}}_q = x_P \hat{\mathbf{i}} - y_q \hat{\mathbf{j}}. \quad (10.24)$$

Vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan edelleen jakamalla vektori omalla pituudellaan, joten

$$\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}} = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}}. \quad (10.25)$$

Sijoittamalla nämä tulokset sähkökentän lausekkeeseen saamme sähkökenttävektorille esityksen karteesissä komponenteissa,

$$d\bar{\mathbf{E}} = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \left( \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}} \right) = k_\varepsilon \frac{dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} (x_P \hat{\mathbf{i}} - y_q \hat{\mathbf{j}}). \quad (10.26)$$

Sähkökentän  $x$ -skalaarikomponentti on siis

$$dE_x = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.27)$$

Lasketaan esimerkin vuoksi sauvan synnyttämä sähkökenttä sauvan keskipisteen kautta kulkevalla, sauvan pituussuuntaan nähdyn kohtisuoralla aksellilla. Asetetaan tästä varten koordinaatiston origo sauvan keskipisteeseen,  $y$ -akseli sauvan suuntaan ja  $x$ -akseli sauvaa vasten kohtisuoraan kuten kuvassa 10.16. Valitaan tarkastelupisteeksi  $P$   $x$ -akselin piste etäisyydeltä  $x_P$  sauvasta — siis koordinaatiston piste  $(x_P, 0)$ . Lasketaan ensimmäiseksi sähkökenttä, jonka yksi sauvan infinitesimaalisen lyhyt varattu osa tähän pisteesseen synnyttää. Olkoon tämä osa pistessä  $(0, y_q)$  ja olkoon sen pituus  $dy_q$  sekä varaus  $dq$ . Tässä alaindeksi  $q$  viittaa siihen, että kyseessä on nimenomaan varauksen  $y$ -koordinaatti. Koska tarkasteltu sauvan osa on hyvin pieni, sitä voidaan kuvata pisteverauksena, ja sen synnyttämä sähkökenttä voidaan laskea pisteverauksen sähkökentän lausekkeesta (10.12).

$$d\bar{\mathbf{E}} = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}. \quad (10.22)$$

Kyseessä on infinitesimaalisen pieni sähkökenttä, koska sen synnyttää infinitesimaalisen pieni varaus. Siksi merkitsemme  $d\bar{\mathbf{E}}$  eikä vain  $\bar{\mathbf{E}}$ .

Lausekkeessa esiintyvä symboli  $r_{q \rightarrow P}$  on etäisyys tarkasteltavasta sauvan osasta (pisteverauksesta) havaintopisteeseen ja tämä voidaan laskea helposti Pythagoraan lauseella, sillä origo, varaus ja tarkastelupiste muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat  $x_P$  sekä  $y_q$  ja hypotenuusan pituus on  $r_{q \rightarrow P}$ . Siispä

ja sen  $y$ -skalaarikomponentti on

$$dE_y = -k_\varepsilon \frac{y_q dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.28)$$

Kuvasta 10.16 nähdään, että kun  $x_P$  ja  $y_q$  ovat positiiviset, sähkökentän  $x$ -komponentin täytyy olla positiivinen ja  $y$ -komponentin negatiivinen, kuten tulokseksi saatuinkin.



**10.13** Jos tarkastelupiste olisikin  $(x_P, y_P)$ , missä  $y_P$  ei ole nolla, mikä olisi (a) etäisyys  $r_{q \rightarrow P}$ , (b) yksikkövektori  $\hat{r}_{q \rightarrow P}$  ja (c) sähkökentän komponentit  $dE_x$  ja  $dE_y$ ?

Sähkökentän komponentit voi päätellä myös kuvan 10.16 geometriasta laskematta yksikkövektoria, sillä sähkökenttävektori  $d\vec{E}$  sekä sen vektorikomponentit  $d\vec{E}_x$  ja  $d\vec{E}_y$  muodostavat suorakulmaisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen varauksen, origon ja tarkastelupisteen P muodostaman kolmion kanssa. Näiden kolmioiden sivujen pituuksilla täytyy olla samat suhteet, joten yhdenmuotoisuuden nojalla täytyy päteä

$$\left| \frac{dE_x}{dE} \right| = \left| \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \right|, \quad (10.29)$$

ja valitsemalla oikea etumerkki tästä seuraa

$$dE_x = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} dE. \quad (10.30)$$

Pistevarauksen sähkökentän voimakkuus on

$$dE = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (10.31)$$

joten sähkökentän  $x$ -komponentin täytyy olla

$$dE_x = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{r_{q \rightarrow P}^3} = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}, \quad (10.32)$$

eli sama tulos kuin mitä edellä johdettiin.

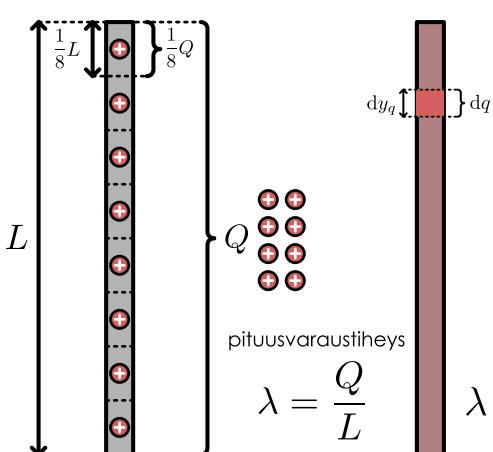


**10.14** Johda sähkökentän  $y$ -komponentille  $dE_y$  lauseke kolmioiden yhdenmuotoisuutta käyttäen. Tarkista, että saat saman tuloksen kuin yhtälössä (10.28).

Jotta nämä lausekkeet voitaisiin integroida, myös niissä esiintyvä differentiaalinen varaus  $dq$  täytyy ilmaista geometristen suureiden avulla. Kuten kuvissa 10.15 (a) ja (b) nähtiin, mitä lyhyempin osiin sauva jaetaan, sitä pienempi varaus kuhunkin osaan jää, koska sauva on tasaisesti varattu ja sen kokonaisvaraus on  $Q$ . Kun

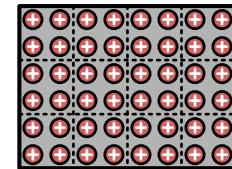
Kuva 10.17: Pituusvaraustiheys kuvailee kappaleen varausta pituusyksikköä kohti. Varauksen pinta-alaa kohden on pintavaraustiheys ja varaus tilavuutta kohden on tilavuusvaraustiheys tai vain varaustiheys.

(a) Tasaisesti varatun sauvan pituusvaraustiheys.

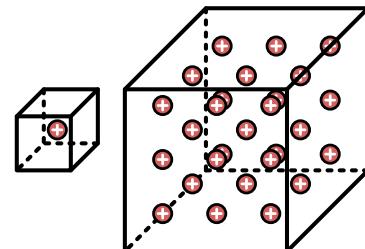


(b) Kuvan levyillä on sama pintavaraustiheys. Samoin laati-kolla on keskenään sama varaustiheys.

$$\text{pintavaraustiheys} \quad \sigma = \frac{Q}{A}$$



$$\text{varaustiheys} \quad \rho = \frac{Q}{V}$$



sauva jaettuun 8 yhtä suureen osaan, kuhunkin osaan jää varausta  $Q/8$ . Tämä johtuu siitä, että varaus on ekstensiivinen suure. Varausta kuvaava intensiivinen suure on **varaustiheys**,

$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad (10.33)$$

joka kertoo varauksen määrän tilavuusyksikköä kohti samaan tapaan kuin massatiheys  $\rho_m = m/V$  kertoo massan määrän tilavuusyksikköä kohti. Jos sauva on tasaisesti varattu, siinä on kaikkialla varausta yhtä tiheässä ja kunkin sauvan osan varaustiheys on sama riippumatta siitä, kuinka pieniin osiin sauva jaetaan. (Yleisesti varaustiheys voi kuitenkin riippua paikasta aivan kuten massatiheyskin, koska varausta voi olla yhtäällä tiheämässä kuin toisaalla.) Kääntäen, jos varatun kappaleen tai kappaleen osan tilavuus on  $V$  ja varaustiheys  $\rho$  on vakio, kappale sisältää kokonaisvarauksen

$$Q = \rho V. \quad (10.34)$$

Varaustiheys on käytökelpoinen suure, kun varaus on jakautunut koko kappaleen tilavuuteen. Jos kappale on ohut levy tai kappaleen sisältämä varaus on levinnyt vain kappaleen pinnalle (kuten johteissa on), **pituusvaraustiheys** eli varauksen määrä pinta-alaa kohden,

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (10.35)$$

on käytökelpoinempi suure. Yksilotteisessa kappaleessa kuten nyt tarkasteltavassa ohuessa sauvassa kannattaa puolestaan käsitellä **pituusvaraustiheyttä** eli varauksen määrää pituutta kohti,

$$\lambda = \frac{Q}{L}. \quad (10.36)$$

Nyt haluamme määrittää sauvan lyhyen osan sisältämän varauksen määrän, ja tämä onnistuu pituusvaraustiheyden avulla helposti. Tasaisesti varatessa sauvassa pituusvaraustiheys on kaikkialla sama, jolloin  $\Delta L$ -pituisen sauvan osan sisältämä kokonaisvaraus on

$$\Delta Q = \lambda \Delta L. \quad (10.37)$$

Samalla periaatteella infinitesimaalisen lyhyen  $dy_q$ -pituisen sauvan osan sisältämä kokonaisvaraus on

$$dq = \lambda dy_q = \frac{Q}{L} dy_q. \quad (10.38)$$



**10.15** Sauvan poikkipinta-ala on  $1.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  ja sen pituus on  $0.20 \text{ m}$ . Sauvan kokonaisvaraus on  $1.0 \text{ nC}$ , ja sauva on tasaisesti varattu. (a) Mikä on sauvan varaustiheys ja pituusvaraustiheys? (b) Paljonko varausta sisältää sauvan osa, jonka pituus on  $0.030 \text{ m}$ ?

Tämän tuloksen avulla voimme korvata sähkökentän lausekkeessa esiintyvän varauksen differentiaalin pituuden differentiaalilla, jolloin sähkökentän komponenteiksi saadaan

$$dE_x = k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.39)$$

sekä

$$dE_y = -k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.40)$$

Nyt lausekkeet ovat vihdoin muodossa, jotka voidaan integroida, koska kaikki tarkasteltavasta varauksesta riipuvat suureet (varauksen suuruus, varauksen etäisyys tarkastelupisteestä ja varauksesta tarkastelupisteen osoittavan yksikkövektorin suunta) on ilmaista koordinaattien  $x_P$  ja  $y_q$  avulla, ja lausekkeessa esiintyväksi differentiaaliksi on niin ikään vaihdettu  $dy_q$ . Koko sauvan synnyttämän sähkökentän  $x$ -komponentille saadaan näin ollen lauseke

$$E_x = \int dE_x = \int_{-L/2}^{L/2} k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.41)$$

Tämä on integraali *koordinaatin  $y_q$  ylitse*, ja koska tarkoitus on laskea yhteen kaikkien sauvan sisältämien varausten tuottamat sähkökentät,  $y_q$ -koordinaatin täytyy integroidessa kulkea sauvan yhdestä päästä toiseen. Tässä tapauksessa sauvan päät ovat pisteissä  $(0, -L/2)$  ja  $(0, L/2)$ , joten integroimisväliksi valitaan  $-L/2 \leq y_q \leq L/2$ .

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

Sähkökentän  $y$ -komponenttia ei tarvitse erikseen laskea, koska sen täytyy olla symmetrian perusteella nolla. Kuten kuvasta 10.16 nähdään, tarkastelupiste  $P$  on systeemin symmetria-akselilla. Symmetrian perusteella mikään ei muutu, jos koko systeemi käännetään pystysuunnassa ympäri niin, että  $x$ -akseli pysyy paikoillaan. Niinpä myös sähkökenttää symmetria-akselilla olevassa pisteessä  $P$  ei saa muuttua. Tämä tarkoittaa sitä, että sähkökenttää ei voi pisteessä  $P$  osoittaa ylöspäin eikä alas päin, koska systeemin käännytessä ylöspäin osoittava kenttävektori kääntyisi osoittamaan alas päin ja päinvastoin. Niinpä sähkökentän täytyy osoittaa täsmälleen vaakasuoraan, jolloin kentän  $y$ -komponentin täytyy olla nolla.



**10.16** Laske komponentti  $E_y$  integroimalla ja osoita tällä tavalla, että se todella on nolla.

Sähkökentän  $x$ -komponentti ei ole nolla, joten siinä esiintyvä integraali pitää todella laskea. Tässä tapauksessa integroitava funktio on muotoa  $f(y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}$  ja integrointi tapahtuu muuttujan  $y$  suhteessa. Funktion  $f$  integraalifunktio on  $F(y) = \frac{y}{x}(x^2 + y^2)^{-1/2}$ . Sähkökentän  $x$ -komponentiksi saadaan siis

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.42)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \left|_{-L/2}^{L/2} \frac{y_q}{x_P(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \right. \quad (10.43)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \left( \frac{L/2}{x_P(x_P^2 + (L/2)^2)^{1/2}} - \frac{-L/2}{x_P(x_P^2 + (-L/2)^2)^{1/2}} \right) \quad (10.44)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{L}{x_P(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}}. \quad (10.45)$$

Sähkökenttävektori pisteessä  $(x_P, 0)$  on näin ollen

$$\vec{E} = k_\varepsilon \frac{Q}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}} \hat{i}. \quad (10.46)$$



**10.17** Derivoi funktio  $F(y)$  muuttujan  $y$  suhteessa ja osoita, että tulos on  $f(y)$ . Tämä todistaa, että  $F$  on funktion  $f$  integraalifunktio, sillä integrointi ja derointi ovat käänteisoperaattot.

Selvästikään sauvan sähkökentän lauseke ei ole sama kuin pisteverauksen sähkökentän lauseke, joten pisteverausmalli ei ole riittävä kuvaamaan varattua sauvaa. Jos saavaa kuitenkin tarkastellaan hyvin kauaa, sitä ei voi erottaa pistestä, ja tällöin pisteverausmallin pitäisi toimia. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että jos etäisyys sauvasta on suuri verrattuna sauvan pituuteen, sauvan sähkökentän pitäisi olla likimain sama kuin sauvan keskipisteeseen asetetun pisteverauksen  $Q$  sähkökentän. Näin todella onkin, sillä jos  $x_P \gg L$  pätee likimain  $x_P^2 + L^2/4 \approx x_P^2$  ja edelleen  $x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4} \approx x_P$ . Tässä approksimaatiossa sauvan sähkökentän voimakkuudelle saadaan siten likimääriäinen lauseke

$$E \approx k_\varepsilon \frac{Q}{x_P^2}, \quad (10.47)$$

ja tämä on juuri pisteverauksen  $Q$  sähkökentän voimakkuus etäisyydellä  $x_P$ . Matematiikassa sanotaan, että lauseke  $E_{\text{sauva}} = k_\varepsilon \frac{Q}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}}$  lähestyy asymptootisesti lauseketta  $E_{\text{piste}} = k \frac{Q}{x_P^2}$ , ja se tarkoittaa näiden lausekkeiden suhteesta lähestyvän yhtä,  $E_{\text{sauva}}/E_{\text{piste}} \rightarrow 1$ , kun etäisyys  $x_P$  kasvaa. Tätä merkitään  $E_{\text{sauva}} \sim E_{\text{piste}}$ .



**10.18** Erään varausjakauman sähkökentän voimakkuus noudattaa funktiota  $E = a/r^3$ , missä  $a$  on jokin vakio. Voiko tämä funktio lähestyä asymptootisesti pisteverauksen sähkökentän lauseketta?

Tässä esimerkissä laskimme makroskooppisen kappaleen sähkökentän yhdessä pisteessä  $P$  jakamalla kappaleen osiin, käsittelyllä kutakin osaa pisteverauksena ja laskemalla kaikkien osien sähkökentät yhteen. Samalla periaatteella lasketaan myös kappaleeseen kohdistuva voima, jos tiedetään millaisessa sähkökentässä kappale on. Sähkökenttähän kohdistaa kentässä oleviin kappaleisiin voiman, joka riippuu sekä kentästä että varauksesta. Jos sähkökenttä on homogeeninen, voima on yksinkertaisesti kappaleen kokonaisvaraus kerrottuna sähkökentällä. Aivan samalla tavalla painovoima voidaan laskea homogeenisessa kentässä kappaleen massan ja gravitaatiokentän (eli putoamiskiertyvyyden) tulona. Jos sähkökenttää ei kuitenkaan ole homogeeninen, sähkökentän suuruus ja suunta voi vaihdella kappaleen eri osien välillä, ja näihin voi kohdistua varsinkin erilaiset voimat. Tällöinkin voimme jakaa kappaleen useisiin pieniin osiin ja ajatella sähkökentän olevan

paikallisesti likimain vakio kunkin osan kohdalla. Silloin jokaiseen osaan kohdistuva voima voidaan laskea erikseen osan varauksen  $dq$  ja osaa ympäröivän sähkökentän  $\bar{E}$  tulona,  $d\bar{F} = \bar{E}dq$ , ja kokonaisvoima on kaikkien näiden voimien summa eli integraali

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \int \bar{E}dq. \quad (10.48)$$



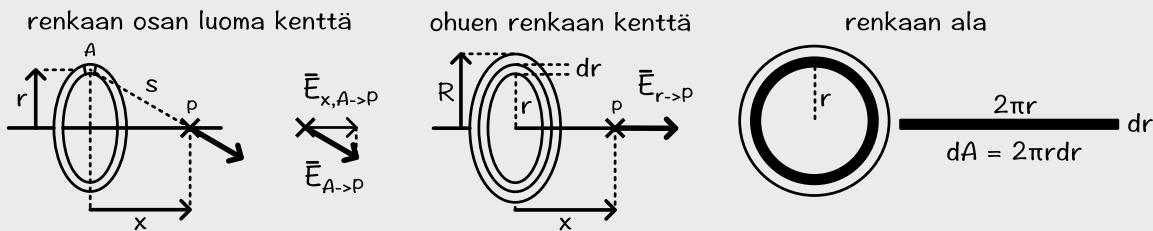
**10.19** Kirjoita oman sanoin tyytistelmä varausten luomista sähkökentistä. Miten sähkökenttä voidaan havaita? Millaisen kentän yksi pistevaraus luo? Miten lasket sähkökentän, jonka monta pistevarausta luo yhdessä? Miten lasket sähkökentän, jonka luo varattu kappale?

### esimerkki 10.3

### Kiekon sähkökenttä

Mikä on tasaisesti varatun kiekon (säde  $R$ , varaus  $Q$ ) sähkökenttä kiekon symmetria-akselille etäisyydellä  $x$  kiekon keskipisteestä?

**TILANNE** Lasketaan ensin ohuen renkaan (säde  $r$ , varaus  $q$ ) tuottama sähkökenttä renkaan symmetria-akselilla. Kun renkaan luoma kenttä tunnetaan, kiekon kenttä voidaan laskea jakamalla kiekko ohuksi renkaiksi ja summaamalla näiden renkaiden synnyttämät kentät yhteen. Alla on piirretty kuvat näistä tilanteista. Symmetria-akselilla ( $x$ ) oleva tarkastelelupiste on merkittyn symbolilla  $P$ . Renkaan jokainen piste on tästä yhtä kaukana, etäisyydellä  $s$ .



**SUUNNITELMA** Renkaan voi ajatella jaetuksi hyvin moneen pieneen osaan, jolloin kullekin osalle voidaan käyttää pisteverausmallia. Eri pisteiden luomat sähkökentät osoittavat eri suuntiin, mutta symmetrian perusteella näiden summana saatavan kokonaiskentän täytyy olla symmetria-akselin suuntainen. Niihin riittää laskea yhteen renkaan eri osien tuottaman sähkökentän akselin suuntainen komponentti.

Kiekko voidaan jakaa puolestaan ohuiksi renkaiksi. Edellisen päätelyn mukaan jokaisen renkaan tuottama kenttä on symmetria-akselin suuntainen, joten koko kiekon kenttä saadaan suoraan laskemalla yhteen sen muodostamien renkaiden sähkökentät.

Tarkastellaan renkaan osaa  $A$ , jonka pituus on  $dl$ . Koko renkaan kaaren pituus on  $L = 2\pi r$ , ja renkaan pituusvarausstiheys on  $\lambda = q/L$ , joten tämän osan varaus on

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi r} dl. \quad (10.49)$$

Pisteverausmallin mukaisesti varaus luo pisteeseen  $P$  sähkökentän, jonka voimakkuus on

$$dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2}. \quad (10.50)$$

Lisäksi etäisydet  $s = \sqrt{x^2 + r^2}$  ja  $x$  muodostavat suorakulmaisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen sähkökenttävektorin  $d\bar{E}_{A \rightarrow P}$  sekä sen symmetria-akselin suuntaisen komponentin  $d\bar{E}_{x,A \rightarrow P}$  muodostaman kolmion kanssa, joten näiden kolmioiden sivujen pituuksien suhteesta täytyy olla sama,

$$\frac{dE_{x,A \rightarrow P}}{dE_{A \rightarrow P}} = \frac{x}{s}, \quad (10.51)$$

mistä voidaan ratkaista sähkökentän  $x$ -komponentin pituus. Koko renkaan tuottama sähkökenttä on  $x$ -suuntainen ja se saadaan  $x$ -komponenttien integraalina, kun integroidaan koko renkaan ympäri.

Jaetaan sitten kiekko renkaisiin, ja tarkastellaan  $r$ -säteistä ja  $dr$ -paksuista rengasta. Kiekon pinta-ala on  $A = \pi R^2$  ja sen pintavarauastiheys on  $\sigma = Q/A$ , joten renkaan varaus on

$$dQ = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} dA. \quad (10.52)$$

Varaus riippuu siis renkaan pinta-alasta, ja tämä voidaan päättellä seuraavasti: Ajatellaan, että rengas katkaistaan jostakin kohdasta ja taivutetaan suoraksi. Näin muodostuu likimain suorakulmio, jonka korkeus on renkaan paksuus  $dr$  ja kannan leveys on renkaan ympärysmitta  $L = 2\pi r$ . Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo eli

$$dA = L dr = 2\pi r dr. \quad (10.53)$$

(Sama tulos saataisiin myös laskemalla funktion  $A(r) = \pi r^2$  derivaatta  $dA/dr = A'(r) = 2\pi r$ , josta  $dA = A'(r)dr = 2\pi r dr$ .) Nämä saadaan selville yhden renkaan varaus, ja tästä voidaan laskea edelleen renkaan tuottama sähkökenttä. Kokonaiskenttä saadaan laskemalla kaikkien renkaiden luomat kentät yhteen eli integroimalla koko kiekon yli.

**RATKAISU** Tarkastellun renkaan osan luoman sähkökentän voimakkuus on

$$dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{x^2 + r^2} dl, \quad (10.54)$$

ja sen  $x$ -skalaarikomponentti on

$$dE_{x,A \rightarrow P} = \frac{x}{s} dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dl. \quad (10.55)$$

Koko renkaan tuottama kenttä saadaan integroimalla muuttuja  $l$  renkaan ympäri eli arvosta  $l = 0$  arvoon  $l = L = 2\pi r$ . Koska renkaan kaikki pisteet ovat yhtä kaukana tarkastelupisteestä, integroitava funktio on vakio tämän muuttujan suhteen ja integraalin laskeminen on helppoa,

$$E_{\text{rengas}} = E_{x,A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10.56)$$

Tämän tuloksen avulla saamme laskettua kiekon sähkökentän. Tarkastellun  $dr$ -levyisen renkaan varaus on

$$dQ = Q \frac{2r}{R^2} dr, \quad (10.57)$$

joten sen luoma sähkökenttä on lausekkeen (10.56) perusteella

$$dE_{r \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{2xr}{R^2(x^2 + r^2)^{3/2}} dr. \quad (10.58)$$

Kokonaissähkökenttä saadaan integroimalla muuttujaa  $r$  koko kiekon yli eli arvosta  $r = 0$  arvoon  $r = R$ . Tässä integrointi onnistuu huomaamalla, että funktio  $f(r) = (x^2 + r^2)^{-1/2}$  derivaatta on  $f'(r) = -1/2 \cdot 2r \cdot (x^2 + r^2)^{-3/2}$ . Niinpä funktio  $-f'(r) = r(x^2 + r^2)^{-3/2}$  integraalin täyttyy olla  $-f(r) = -(x^2 + r^2)^{-1/2}$ , ja näin saamme tuloksen

$$E_{\text{kiekko}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xQ}{R^2} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xQ}{R^2} \Big|_0^R - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \quad (10.59)$$

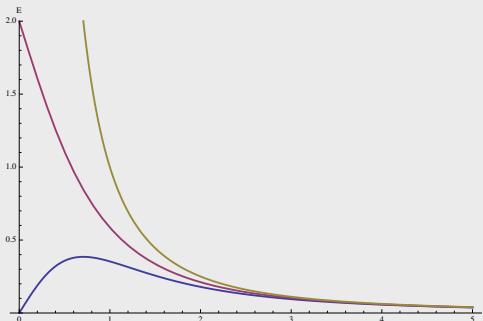
Mathematica:

```
(* vakiot *)
L = 2 Pi r; A = Pi R^2; s = Sqrt[x^2 + r^2]; lambda = q/L; sigma = Q/A;

(* pistevarausksen kentta, sen x-komponentti, renkaan kentta *)
dEpiste = k q/s^2 /. q -> lambda;
dEringas = x/s dEpiste;
eRengas = Integrate[dEringas, {l, 0, L}]
(k q)/(r^2 + x^2)^(3/2)

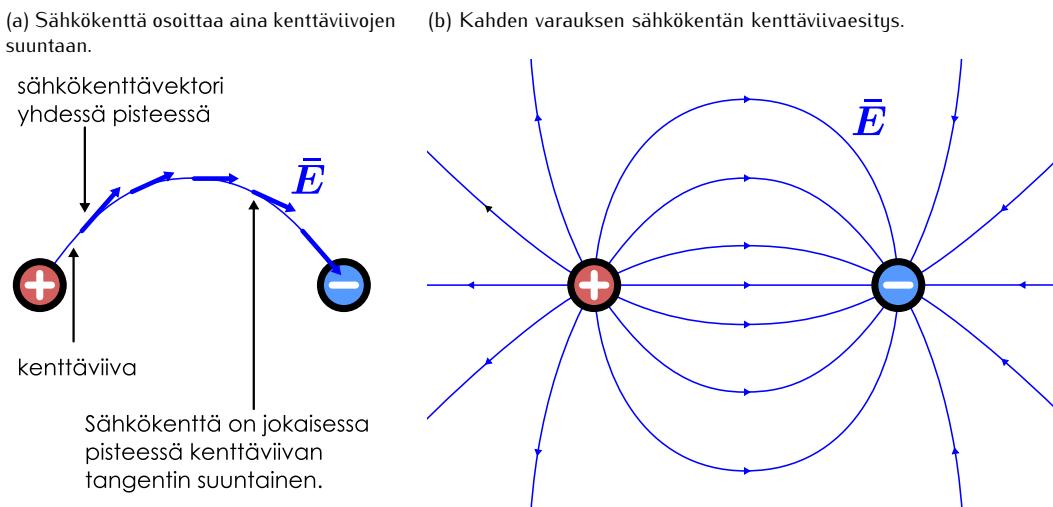
(* kiekon kentta *)
dEkiekko = eRengas /. q -> Q L/A;
eKiekko =
Integrate[dEkiekko, {r, 0, R},
Assumptions -> {x > 0, R > 0, k > 0, Q > 0}]
(2 k Q (1 - x/Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2

(* kentta etäisyyden funktiona *)
R = 1; k = 1; Q = 1; q = 1; r = 1;
Plot[{eRengas, eKiekko, 1/x^2}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {0, 2},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x", "E"}]
```



**ARVIOINTI** Yllä on piirretty ratkaisuna saadut renkaan ja kiekon sähkökenttien kuvaajat etäisyyden  $x$  funktiona sekä myös pistevarausksen kentän  $E_{\text{piste}} \sim 1/x^2$  kuvaaja. (Kaikille vakioille on kuvassa annettu yksinkertaisuuden vuoksi arvoksi 1.) Sekä renkaan että kiekon kentät lähestyvät tämän perusteella pistevarausksen kenttää etäisyyden  $x$  kasvaessa kuten pitääkin. Lisäksi kuvaajasta nähdään, että renkaan sähkökentän voimakkuus on nolla, kun  $x = 0$ . Nämä pitää olla, koska tällöin tarkastelupiste on kiekon keskipisteessä ja symmetrian perusteella tässä pistessä sähkökentän on oltava nolla.

Kuva 10.18: Sähkökentän esitys kenttäviivoilla.



### 10.3 Gaussin laki

Sähkökenttä on siis sähköistä vuorovaikutusta välittävä, koko avaruuden täyttävä rakenne, ja sähköisten ilmiöiden kuvamisen vaatii yleensä sähkökentän ominaisuuksien tuntemista. Tähän mennessä olemme opineet kuvaamaan pienien tai kaukana olevien varauksen kappaleiden sähkökenttää pistevaraumallilla ja Coulombin lailla sekä laskemaan suurten kappaleiden kentän jakamalla kappaleet pieniin osiin ja laskemalla kaikkien osien tuottamat kentät yhteen integraalina.

Coulombin lain yhteydessä kuitenkin toteimme, että laki pätee vain paikoillaan oleviin varauksiin. Seuraava askeleemme onkin tutkia, millainen laki sähkökenttää kuvailee yleisesti. Itse asiassa osoittautuu, että sähkökenttää kuvaavia peruslajeja on *kaksi*, ja tässä luvussa tutustumme niistä ensimmäiseen, **Gaussin lakiin** (Carl Friedrich Gaussian mukaan), jonka erikoistapaus Coulombin lakin on. Sähkökenttien toista peruslakia tutkimme aikanaan luvussa 13.

#### Sähkökentän kenttäviivaesitys

Kuvasimme aikaisemmin sähkökenttää vektorikenttäkuvaajilla, joissa sähkökenttävektoreita piirretään nuolina avaruuden eri pisteisiin kuvaamaan kussakin pisteessä vallitsevaa sähkökenttää. Tässä esityksessä nuolet piirretään tasaisin välein, joten nuolten määrä on vain valinta, joka ei itsessään kuva mitään. Nuolten pituus ja suunta sen sijaan kuvaavat sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa.

Voimme kuitenkin esittää sähkökentän muillakin tavoilla, ja **kenttäviivaesitys** on erityisen hyödyllinen. Kenttäviivojen ideaa on havainnollistettu kuvassa 10.18, jossa sähkökentän luovat positiivinen ja negatiivinen pistevaraust yhdessä. Kenttäviivaa aletaan piirtää positiivisesta varauksesta lähtien, ja jokaisessa pisteessä viiva etenee sähkökentän suuntaan. Kuvan 10.18 (a) tapauksessa tällä tavalla piirretty kenttäviiva päättyy lopulta negatiiviseen varaukseen, ja tänne kenttäviiva myös loppuu. Tämä on kenttäviivaesitykseen perusominaisuus: *kenttäviivat alkavat aina positiivisista varauksista ja päättyvät negatiivisiin varauksiin elleivät jatku äärettömyksiin*. Kenttäviivoilla ei saa koskaan olla "vapaalta päättä" vaan kenttäviivat voivat alkaa ja päättyä ainoastaan sähkövaraukiin.

Nämä piirtäen *sähkökenttä on kaikissa kenttäviivan pisteissä kenttäviivan tangentin suuntainen*. Yksi kenttäviiva ei tietenkään kuva sähkökenttää kuin pienessä avaruuden alueessa, mutta piirtämällä useita kenttäviivoja saadaan sähkökentälle luotua laajan alueen kattava esitys kuten kuvassa 10.18 (b). (Voit verrata täitä kenttäviivaesitystä kuvan 10.14 (i) vektorikenttäkuvaajaan, sillä molemmat esittävät täsmälleen samaa sähkökenttää.)

Kenttäviivojen kokonaismäärä kenttäviivaesityksessä on periaatteessa mielivaltainen. Esimerkiksi kuvan 10.18 (b) kenttäviivaesityksessä positiivisesta varauksesta lähtee 12 kenttäviivia ja negatiiviseen varaukseen päättyy samaten 12 kenttäviivia, mutta aivan yhtä positiivisesta varauksesta olisi voitu piirtää lähemään vaikkapa 10 kenttäviivia. Kenttäviivoja ei kuitenkaan pidä piirtää miten sattuu. Esimerkiksi pistevaraukseen sähkökenttä levää samanlaisena kaikkiin suuntiin, joten tällaisen sähkökentän kenttäviivaesityksenkin pitää olla symmetrinen. Varauksesta pitää siis lähteä joka suuntaan keskimäärin yhtä paljon kenttäviivoja.

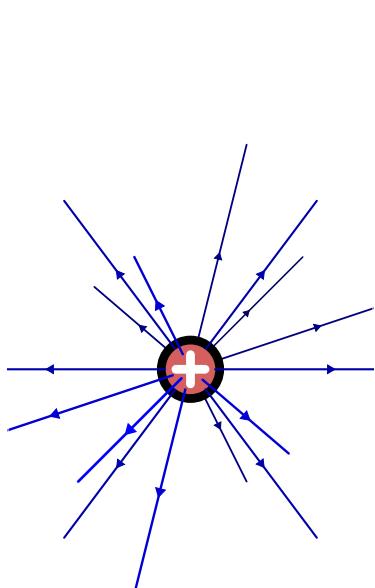


**10.20** Voiko kaksi kenttäviivaa koskettaa toisiaan muualla kuin alku- tai loppupisteessään? Voivatko viivat leikata toisensa?

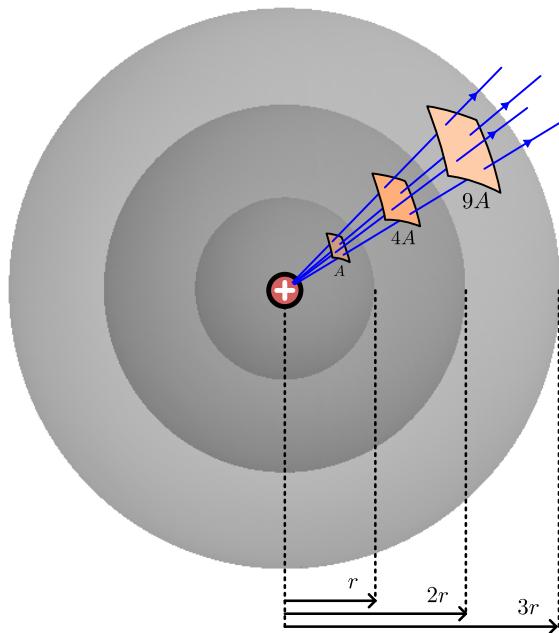
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.19: Pistevarauksen kenttäviivat hajaantuvat joka suuntaan. Jos kenttäviivat läpäisevät etäisyydellä  $r$  kohtisuoran pinnan  $A$ , etäisyydellä  $2r$  ne läpäisevät pinnan  $4A$ . Viivojen tiheys on siis kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon. Myös pistevarauksen sähkökentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon, joten viivojen tiheys on suoraan verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen.

(a) Kenttäviivoja kolmessa ulottuvuudessa.



(b) Kenttäviivojen tiheys pienenee kaukana pistevarauksesta.



Todellisuudessa sähkökenttä täyttää kolmiulotteisen avaruuden, joten periaatteessa kenttäviivaesityksetkin pitäisi piirtää kolmiulotteisiksi kuten kuvassa 10.19 (a). Tämä on kuitenkin hankala ja johtaisi usein liian monimutkaiseen kuvaan, joten piirräme yleensä kenttäviivaesitykset kaksiulotteisiksi. Tästäkin saa kohtulleen hyvän käsityksen kentän muodosta, jos tarkasteltava geometria ei ole kovin monimutkainen. Joissakin tapauksissa avaruuden kolmiulotteisuutta ei kuitenkaan voi jättää huomioimatta.

Positiivisen pistevarauksen sähkökenttä osoittaa kaikkialla suoraan varauksesta poispäin, joten pistevauruksen sähkökenttää kuvaavien kenttäviivojen täytyy olla suoria viivoja. Lisäksi koska kenttäviivat alkavat positiivisesta varauksesta eivätkä ne saa katketa tyhjässä avaruudessa, kenttäviivat jatkuvat äärettömyykiin ja niiden välinen etäisyys kasvaa sitä suuremmaksi mitä kauempana pistevauruudesta ollaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.19 (b), jossa pistevauruksen ympärille on piirretty erikokoisia pallopintoja. Yksinkertaisuuden vuoksi tähän kuvaan ei ole piirretty koko sähkökentän kenttäviivaesitystä vaan vain neljä kenttäviivaa, jotka kuvaavat ainostaan pientä osuutta pistevauruksen koko sähkökentästä. Mitä kauemmas varauksesta siirtyään, sitä suuremmalle pinta-alalle kenttäviivat levivät. Tämä näkyy kuvassa niin, että pallopinnoista on väritetty se osuus, jonka läpi juuri nämä kenttäviivat kulkevat. Jos siis viivat kattavat etäisyydellä  $r$  alan  $A$ , etäisyydellä  $2r$  ne ovat levineet alalle  $4A$  ja etäisyydellä  $3r$  alalle  $9A$  koska pallon pinta-ala on verrannollinen sen säteen nelioon.

**10.21** Oletetaan, että kuvan 10.19 (b) varauksesta lähtee kaikkiaan  $n_{\text{viiva}} = 360$  kenttäviivaa ja että  $r = 1 \text{ m}$ .

- (a) Montako kenttäviivaa läpätsee kunkin kuvanan piirretyn pallopinnan?
- (b) Mikä on kenttäviivojen tiheys  $n_{\text{viiva}}/A_{\text{pallo}}$  kullakin pallopinnalla?
- (c) Mikä on tämän perusteella kuavan piirretyn alan  $A$  suuruus?
- (d) Jos varauksen suuruus on  $Q$ , mikä on sähkökentän voimakkuus kullakin pallopinnalla?
- (e) Mikä on sähkökentän voimakkuuden ja kenttäviivojen tiheyden suhde kullakin pinnalla?

Kenttäviivojen levitessä yhä suuremmalle pinta-alalle niiden tiheys eli viivojen määrän  $n_{\text{viiva}}$  suhde viivojen läpäisemään pinta-alaan pienenee. Kuvassa 10.19 kenttäviivojen lukumäärä on  $n_{\text{viiva}} = 4$ , mutta viivojen läpäisemän pinnan ala riippuu siitä, kuinka kaukana pistevauruudesta kenttää tarkastellaan. Etäisyydellä  $r$  viivojen tiheys on  $4/A$ , mutta etäisyydellä  $2r$  tiheys on tästä vain neljännes,  $4/(4A) = 1/A$ . Toisaalta Coulombin lain perusteella myös pistevauruksen luoman sähkökentän voimakkuus pienenee neljänneksiin, kun etäisyys varauksesta kaksinkertaistuu, koska sähkökentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon. Tämä tarkoittaa siis sitä, että *kenttäviivojen tiheys on suoraan verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen*.

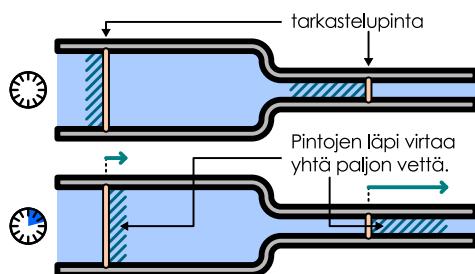
Tässä suhteessa kenttäviivaesitys on aivan erilainen kuin vektorikenttäesitys. Vektorikenttäkuvaajassa sähkökentän voimakkuus ilmenee nuolten pituudesta. Nuolten tiheys ja lukumäärä sen sijaan eivät merkitse mitään, koska nuolet piirretään tavallisesti tasaisin välein. Kenttäviivaesityksessä sen sijaan viivojen pituus on merkitysetön, koska viivat kulkevat joko positiivisista varauksista negatiivisiin tai vaihtoehtoisesti jatkuvat äärettömyyksiin. Sen sijaan *voimakasta sähkökenttää kuvaa se, että kenttäviivat kulkevat lähellä toisiaan.*

## Sähkövuo

Gaussin lain muotoilemiseksi tarvitsemme uuden sähkökenttää kuvavan käsitteen, **sähkövuo**. Sähkövuo on kuitenkin varsin abstrakti suure, joten ennen sen määrittelyä tutkimme yleisemmin mitä *vuo* tarkoittaa fysiikassa. Tavoitteenamme on saada jonkinlainen käsitys siitä, mitä vuo kuvaa ja miten se lasketaan. Tarkastellaan siis ensin sähkövuoon mekaanista analogiaa, virtausvuota.

Vuo tarkoittaa fysiikassa yleisesti *pinnan läpi virtaavan suureen määrää aikayksikköö kohti*. Kohtasimme vuon käsitteen jo lämpööpin yhteydessä luvussa 7, kun määrittelimme *lämpövuo* kuvamaan kappaleen läpi lämpönä siirtynä energian tehoa. Lämpövuoissa virtaavaa suurea on lämpönä siirtynä energia ja lämpövuo kerro sekä kappaleen poikkileikkauspinnan läpi virtaavan energian määrän aikayksikköö kohti ettei virtauksen suunnan. Lämpövuoja tarkasteltaessa virtaukselle määritellään aina *positiivinen suunta*, jolloin vuo on positiivinen, kun energiaa siirtyi tähän suuntaan. Tässä tapauksessa tarkastelupinta oli todellisen, fysiikaalisen kappaleen rajaama. Vuon voi kuitenkin määrittää aivan hyvin myös *kuvitteellisten pintojen läpi*.

Kuva 10.20: Nopea virtaus kuljettaa pienenkin pinnan läpi suuren vuon.



Kuvassa 10.20 on toinen esimerkki vuosta: putken läpi virtaavan nesteen määrää. Samaan tapaan kuin lämpövuo kuvaa pinnan läpi siirtynä energian määrää aikayksikössä, voidaan määritellä virtauksen tilavuusvuo,  $\Phi_V$ , joka kuvaa tarkastelupinnan läpi virtaavan nesteen tilavuutta aikayksikössä. Virtausmekaniikkaa tutkiessamme päättelimme, että pinta-alan  $A$  läpi virtaa ajassa  $\Delta t$  tilavuus

$$\Delta V = Av\Delta t, \quad (10.60)$$

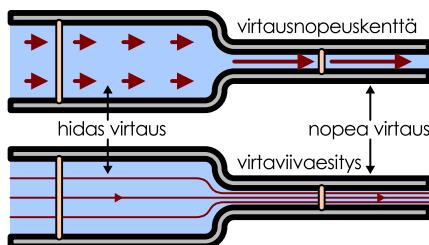
missä  $A$  on putken poikkipinta-ala ja  $v$  virtauksen nopeus. Tilavuusvuo putken läpi on siten

$$\Phi_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Av \quad (10.61)$$

eli *vuo on suoraan verrannollinen tarkasteltavan pinnan alaan ja virtauksen nopeuteen*.

Kuvaan on merkitty kaksi tarkastelupintaa, joiden kummankin läpi virtaa koko putken sisältö. Koska kyseessä on kokoonpuristumaton virtaus, kummankin pinnan läpi kulkee samassa ajassa yhtä paljon nestettä eli vuo kummankin pinnan läpi on yhtä suuri. Pintojen pinta-alat eivät ole yhtä suuret, mutta neste virtaa kapeassa putkessa nopeammin kuin leveässä niin, että pinta-alan ja virtausnopeuden tulo on vakio.

Kuva 10.21: Nopeuden kuvaus vektorikentänä ja virtaviivoina.



Nesteenvirtausnopeus on vektorikenttä. Voimme nimittää määrittää nesteenvirtausnopeuden, joka on vektori, erikseen jokaisessa avaruuden pisteessä. Tätä vektorikenttää on havainnollistettu kuvassa 10.21 kahdella tavalla. Ylemmassä kuvassa nopeus on piirretty vektorikenttäkuvaajana, joka on samanlainen graafinen esitys kuin sähkökentän vektorikenttäkuvaaja. Alempassa kuvassa virtaus on kuvattu virtaviivaesityksenä, joka piirretään samaan tapaan kuin sähkökentän kenttäviivaesitys. Neste liikkuu jokaisessa virtaviivan pisteessä virtaviivan tangenttiin suuntaan. Pyörteettömässä virtauksessa neste myös kulkee virratessaan virtaviivaa pitkin niin, että virtaviivalla virtauksen alkupäässä oleva vesimassa on samalla virtaviivalla myös virtauksen lopussa. Virtaviivat eivät voi jatkuvassa virtauksessa myöskään katketa, koska

nestettä ei saa kadota minnekään. Kuvassa tämä näkyy siten, että putken kapeassa osassa on yhtä monta virtaviivaa kuin leveässäkin. Nämä viivat ovat kapeassa putkessa vain lähempänä toisiaan.

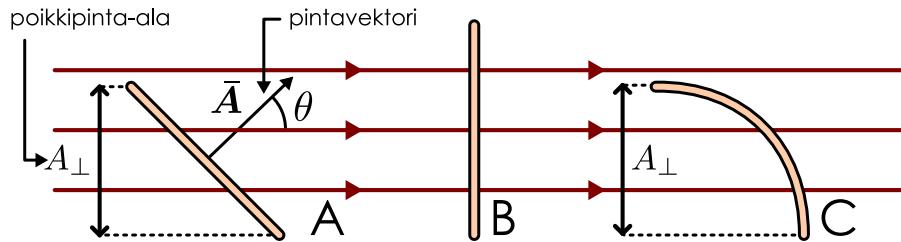
Kuvassa putken vasemmasta päästä saapuu sisään kolme virtaviivaa ja sen oikeasta päästä poistuu niin ikään kolme virtaviivaa. Toisaalta putken vasemmasta päästä saapuu yhtä paljon nestettä kuin sen oikeasta päästä poistuu. Tämä tarkoittaa sitä, että virtaviivojen lukumäärä on verrannollinen putken läpi virtaavan nesteenvirtauksen määrään aikayksikköö kohti. Mutta tämä on sama asia kuin virtauksen tilavuusvuo, joten *vuon täytyy olla suoraan verrannollinen tarkastelupinnan läpi kulkevien virtaviivojen lukumäärään*,

$$\Phi_V = an_{viiva}. \quad (10.62)$$

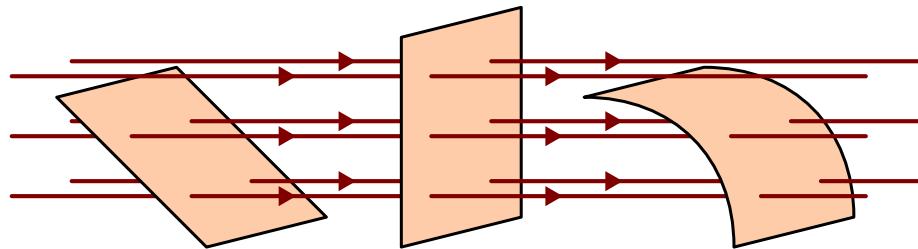
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.22: Vuo kuva pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrää. Kun virtaus on vakio, vuo on verrannollinen tarkastelupinnan poikkipinta-alaan.

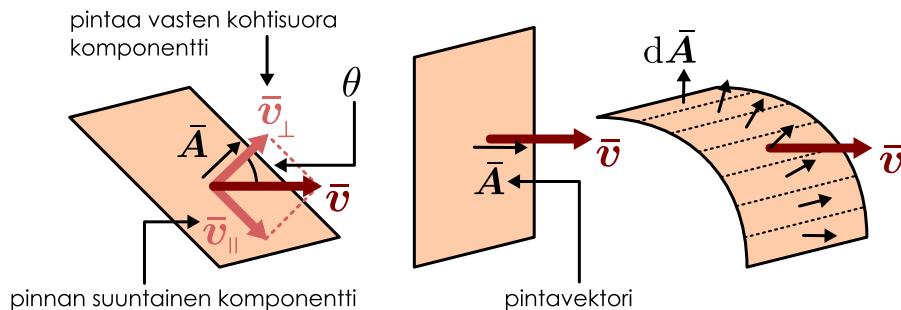
(a) Virtaviivojen ja pintojen kaksiulotteinen esitys.



(b) Virtaviivojen ja pintojen kolmiulotteinen esitys.



(c) Vuon laskeminen vektorien avulla.



Tässä vaku  $\Phi$  kuvaa sitä, kuinka suuren nestemäären virtausta kukaan virtaviiva kuvaa, ja sen arvo riippuu siitä, kuinka virtaviivavesitys on piirretty. Virtaviivojen *tiheys* ei kuvaa virtaavan aineen määrää vaan *virtauksen nopeutta*. Kapeassa putkessa virtaus on nopeaa ja virtaviivat ovat tiheässä, kun taas leveässä putkessa virtaus on hidasta ja virtaviivat ovat toisistaan kaukana.

**10.22** Kuussa 10.21 kukaan tarkastelupinnan läpäisevä virtaviiva kuvaa  $0.002 \text{ m}^3$  tilavuuden virtausta sekunnissa. Putken leveän osan poikkipinta-ala on  $0.015 \text{ m}^2$  ja kapean  $0.003 \text{ m}^2$ .

- (a) Paljonko nestettä putken läpi virtaa sekunnissa?
- (b) Mikä on nesteen virtausnopeus kummassakin putkessa?
- (c) Mikä on virtauksen tilavuus vuoden kummankin tarkastelupinnan läpi?

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin virtauksen vuota virtaukseen nähdyn kohtisuoran pinnan läpi, mutta edelliset havainnot voidaan yleistää myös tapauksiin, joissa virtaus ei suuntaudu kohtisuoraan pinnan läpi. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.22 (a). Kuvan on piirretty kolme erilaista tarkastelupintaa (A, B ja C) sekä virtausta kuvava virtaviivavesitys. Pinta B on kohtisuorassa virtaviivoja vastaan, joten sen läpi kulkee mahdollisimman suuri määärä nestettä ja siis mahdollisimman suuri vuo. Pinta A on yhtä suuri kuin B, mutta se on noin  $45^\circ$  asteen kulmassa virtaukseen nähdyn, joten pienempi osa virtauksesta osuu siihen ja kulkee sen läpi. Tämä näkyy kuvassa siten, että pinnan A läpi kulkee vain kaksi virtaviivaa kun pinnan B läpi viivoja kulkee kolme.

Pinta C on kaareva, mutta myös sen läpi kulkee kaksi virtaviivaa eli yhtä monta kuin pinnan A läpi. Vuo pintojen A ja C läpi onkin yhtä suuri. Tämä johtuu siitä, että pinnalla A ja C on sama virtauksen suuntaan nähdyn kohtisuora *poikkipinta-ala*  $A_{\perp}$ , ja vuo on suoraan verrannollinen nimenomaan tähän poikkipinta-alaan,

$$\Phi_V = A_{\perp} v, \quad (10.63)$$

eikä siis pinnan kokonaismuodon.

Suoralle pinnalle poikkipinta-alan määrittäminen onnistuu helpoiten pinnan *normaalisuunnan* (eli pintaan nähdien kohtisuoran suunnan) ja virtauksen suunnan väisen kulman  $\theta$  avulla. Jos pinnan normaali on virtauksen suuntainen, poikkipinta-ala on sama kuin pinnan todellinen ala ja vuo on suuri. Jos sen sijaan pinnan normaali on kohtisuorassa virtausta vastaan, virtaus on pinnan suuntainen eikä pinnan läpi kulje mitään. Tällöin vuo on nolla. Yleisesti suoran pinnan poikkipinta-ala on  $A_{\perp} = A \cos \theta$ , ja vuo on siten  $\Phi_V = Av \cos \theta$ . Saman voi kirjoittaa lyhyesti myös vektoreilla. Pintaa voidaan nimittää kuvata sitä vastaan kohtisuoraan asetetulla **pintavektorilla**  $\bar{A}$ , jonka pituus on sama kuin pinnan pinta-ala. Virtauksen nopeutta ja suuntaa kuvaa puolestaan vektori  $\bar{v}$ . Koska pistetulo määritellään vektoreiden pituksien ja niiden välisen kulman kosinin tulona, vuo on yksinkertaisesti pintavektorin ja nopeusvektorin pistetulo

$$\Phi_V = Av \cos \theta = \bar{v} \cdot \bar{A}. \quad (10.64)$$

Saman tuloksen voi päätellä myös tarkastelemalla virtausnopeusvektorin pinnan suuntaista komponenttia  $\bar{v}_{\parallel}$  ja pintaan nähdien kohtisuoraa komponenttia  $\bar{v}_{\perp}$  kuten kuvassa 10.22 (c). Pinnan suuntainen virtaus ei kuljeta nestettä pinnan läpi, joten se ei vaikuta lainkaan vuohon. Niinpä vuo riippuu ainoastaan pintaan kohtisuorasta komponentista  $\bar{v}_{\perp}$ , eli  $\Phi_V = Av_{\perp}$ . Mutta koska nopeuden kohtisuoran komponentin pituus on  $v_{\perp} = v \cos \theta$ , tämä johtaa samaan lopputulokseen kuin mitä edellä pääteltiin.

Jos pinta on kaareva kuten kuvan pinta C, sillä ei ole yksikäsitteistä normaalialia eikä pintavektoria  $\bar{A}$ . Vuon tällöinkin suoraan verrannollinen pinnan läpäisevien virtaviivojen määärää, mutta vuon täsmällinen laskeminen edellyttää pinnan jakamista pieniin osiin, vuon määritystä kullekin osalle erikseen, ja näiden laskemista yhteen. Esimerkiksi kuvassa 10.22 (c) Pinta C on jaettu osiin, joiden pintavektorit ovat  $d\bar{A}$ . Vuon kunkin osan läpi on  $d\Phi_V = \bar{v} \cdot d\bar{A}$ , ja kokonaivuo saadaan summaamalla nämä yhteen. Kun pinta jaetaan tällä tavalla äärettömän moneen osaan, päädyytään *pinta-integraaliin*

$$\Phi_V = \int \bar{v} \cdot d\bar{A}. \quad (10.65)$$

Yhteenvedona siis *virtauksen vuo* kuvaa pinnan läpi yhdessä aikayksikössä virtaavan nesteen tilavuutta ja se voidaan määrittää karkeasti laskemalla tarkasteltavan pinnan läpi kulkevien virtaviivojen lukumäärä. Suoran pinnan läpäisevä vuo voidaan laskea täsmällisesti pintaan kuvaavan pintavektorin ja virtausnopeusvektorin pistetulona. Sähkökenttä ei kuvaa aineen liikettä kuten virtaus, joten sähkökentän vuo eli *sähkövuo* ei kuvaa minkään siirtymän aineen määrästä. Sähkökenttä on kuitenkin matemaattisesti samanlainen vektorikenttä kuin virtausnopeuskenttäkin, joten voimme määritellä sähkövuo matemaattisesti täsmälleen samalla tavalla kuin virtauksen tilavuusvuon. Toisin sanoen *sähkövuo kuvaa pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrästä*,

$$\Phi_E = an_{\text{viiva}}, \quad (10.66)$$

samaan tapaan kuin virtauksen vuo kuvaa pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrästä. Tässä  $a$  on jokin kenttäviivasyytken tiheydestä riippuva vakio. Lisäksi *suoran pinnan läpi kulkevan homogenisen kentän sähkövuo määritellään täsmällisesti sähkökenttävektorin ja pintavektorin pistetulona*,

$$\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{A} = EA \cos \theta, \quad (10.67)$$

josta saadaan myös sähkövuo yksiköksi  $[\Phi_E] = [E][A] = \text{Nm}^2/\text{C}$ . Sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrään myös silloin kun pinnat ovat kaarevia tai kenttä on epähomogeenninen aivan kuten virtauksen tilavuusvuokin. Tällaisessa tapauksessa vuo määritellään täsmällisesti kentän pintaintegraalina

$$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{A}. \quad (10.68)$$



**10.23** Selitä omin sanoin, mitä ovat kenttäviivat ja vuo? Miten kenttäviivoilla kuvataan sähkökenttää? Vertaa virtaviivoihin. Mitä virtauksen ja sähkökentän vuo kuvaa, ja miten vuo liittyy virta- ja kenttäviivoihin?

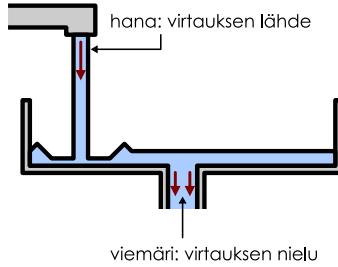
## Gaussin laki

Vuon käsitteen avulla voimme vihdoinkin muotoilla sähkökenttien Gaussin lain, mutta lain sisällön ymmärtämiseksi palaamme vielä sitä ennen tutkimaan virtauksia ja virtaviivasyyttejä. Tarkastellaan nyt esimerkkinä kuvan 10.23 lavuaaria, johon virtaa vettä hanasta ja josta poistuu vettä viemärin kautta. Oletetaan, että virtaus on tasaista ja hanasta saapuu vettä täsmälleen yhtä nopeasti kuin mitä viemäristä poistuu, jolloin veden määrä altaassa ei muutu. Kuvassa 10.23 (b) on esitetty veden virtauksen virtaviivasyytys altaan pohjan tasossa. Hana on merkitty kuvan vaaleana ympyränä. Tässä kohdassa altaaseen saapuu lisää vettä, joka virtaa

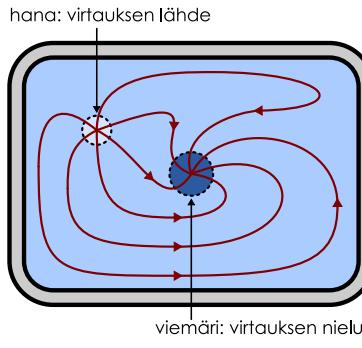
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.23: Tasainen virtaus lavuaarissa, jossa viemäriin kautta poistuu yhtä paljon vettä kuin hanasta saapuu eikä vettä kerry mihinkään. Lavuaarin tasossa virtauksen vuo hanaa ympäröivän suljetun pinnan sisältä ulos on yhtä suuri kuin hanasta saapuvan veden määrä aikayksikössä. Vuo viemäriä ympäröivän suljetun pinnan ulkoa sisään on yhtä suuri. Jos pinta ei ympäröi kumpakaan, pinnan läpi täytyy virrata sisään ja ulos yhtä paljon vettä ja vuo on nolla.

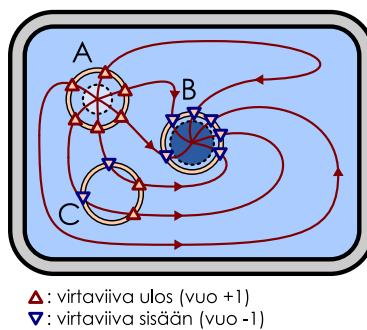
(a) Hana ja viemäri ovat veden lähte ja nielu.



(b) Virtaus lavuaarin tasossa.



(c) Vuo suljettujen pintojen läpi.



heti altaaseen saavuttuaan nopeasti pois saapumispisteestään. Tämä näkyy kuvassa siten, että tästä pistestä lähtee virtaviivoja. Viemäri on puolestaan merkitytä kuvaan tummana ympyränä. Vesi virtaa viemäriin ja poistuu sitä kautta altaasta, ja tämä näkyy kuvassa viemäriin päättynä virtaviivoina. Tämän takia hanaa, josta virtaviivat lähtevät, kutsutaankin virtauksen *lähteeksi*. Vastaavasti viemäriä, johon virtaviivat päättivä, kutsutaan virtauksen *nieluki*.

Kuvassa 10.23 (c) on piirretty sama virtaviivakuvio uudelleen, mutta nyt kuvaan on lisätty kolme pinta, A, B ja C. Pinnat eivät ole mitään todellisia fysikaalisia pintoja vaan altaassa vain kuvitellaan olevan tällaiset pinnat, joita voimme tarkastella virtauksen vuota. Toisin kuin aikaisemmin tarkastelemamme pinnat, nämä pinnat muodostavat suljetut ympyrät, ja koska kyseessä on kaksilottainen systeemi, kukaan pinnosta jakaa avaruuden kahteen osaan, pinnan sisä- ja ulkopuolelle (äärelliseen ja äärettömään alueeseen). Tällaisia kutsutaan **suljetuksi pinnoiksi**. Tasossa suljettu pinta on silmukan muodostama käyrä kuten ympyrä. Kolmiulotteisessa avaruudessa suljettu pinta on aukoton kuori kuten pallon pinta.

Kuten edellisessä luvussa opimme, virtauksen vuo minkä tahansa pinnan läpi on verrannollinen pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrään,  $\Phi_V = an_{viiva}$ , sillä kukaan virtaviiva esittää tiettyä virtaavan aineen määrää aikayksikössä. Ei ole kuitenkaan samantekoväärin, mihin *suuntaan* virtaviivat kulkevat, sillä vuo ilmaisee etumerkillään sen, mihin suuntaan virtaus tapahtuu. Vuon määrityksessä käytettäville pinnolle pitääkin aina määrällä *positiivinen läpäisy-suunta*, jolloin vuo on positiivinen, jos ainetta virtaa pinnan läpi tähän suuntaan eli jos virtaviivat läpäisevät pinnan positiiviseen suuntaan. Erityisesti jos pinnan läpi kulkee virtaviivoja vastakkaisiin suuntiin, positiiviseen suuntaan kulkevat virtaviivat lasketaan positiivisina ja vastakkaiseen suuntaan kulkevat virtaviivat puolestaan negatiivisina, jolloin kokonaisvuo on näiden summa

$$\Phi_V = a(n_{viiva,+} - n_{viiva,-}). \quad (10.69)$$

Jos pinta ei ole suljettu, positiivinen suunta voidaan valita vapaasti. Suljettujen pintojen tapauksessa yleinen käytäntö on kuitenkin se, että *positiivinen suunta valitaan aina sisältä ulos*. Nämä valitut vuo suljettun pinnan läpi ilmaisee aina pinnan sisältä ulos virtaavan aineen määrää. Kuvassa 10.23 (c) pinnan A sisältä ulos kulkee 6 virtaviivaa eikä sisään kulje ainuttakaan viivaa, joten tälle pinnalle  $n_{viiva,+} = 6$  ja  $n_{viiva,-} = 0$ . Oletetaan, että yksi virtaviiva kuvaa tässä  $a = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$  virtausta. Tällöin virtauksen vuo pinnan A sisältä ulos on

$$\Phi_{V,A} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (6 - 0) = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.70)$$

Tämä tarkoittaa fysikaalisesti sitä, että hanasta saapuu joka sekunti  $6.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$  (eli 0.6 desilitraa) vettä, joka virtaa pinnan A läpi muualle altaaseen. *Vuo suljettun pinnan A läpi kuvaa siis sitä, paljonko vettä pinnan sisällä oleva virtauksen lähde eli hana tuottaa*.

Pinnan B läpi kulkee myös 6 virtaviivaa, mutta nämä kulkevat kaikki ulkoa sisään eli negatiiviseen läpäisy-suuntaan. Niinpä tälle pinnalle  $n_{viiva,+} = 0$  ja  $n_{viiva,-} = 6$ , jolloin vuo pinnan sisältä ulos on

$$\Phi_{V,B} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (0 - 6) = -6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.71)$$

Vuo on negatiivinen, koska vesi virtaa pinnan ulkopuolelta sen sisään. Vuon itseisarvo puolestaan ilmaisee sen, paljonko vettä pinnan sisällä oleva virtauksen nielu eli viemäri poistaa altaasta.

Pinnan C sisällä ei ole hanaa eikä viemäriä, joten sen sisällä veden määrä ei lisääny eikä väheny. (Virtaus oletettiin tasaiseksi, joten vettä ei myöskään saa kertyä pinnan sisälle varastoon.) Toisin sanoen vesi vain virtaa pinnan rajaaman alueen läpi sisään yhdestä reunasta ja ulos toisesta. Tämä näkyy virtaviivakuviossa siinä, että pinnan ulkoa sisään kulkee kaksi virtaviivaa ja samoin pinnan sisältä ulos kulkee kaksi virtaviivaa. Tälle pinnalle siis  $n_{\text{viiva},+} = 2$  ja  $n_{\text{viiva},-} = 2$ , jolloin vuo pinnan läpi on

$$\Phi_{V,C} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (2 - 2) = 0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.72)$$

Nollavuo ilmaisee juuri sitä, että vettä virtaa pinnan läpi sisään ja ulos yhtä paljon eikä veden määrä pinnan sisällä siis muutu.



**10.24** Kuvittele kuvaan 10.23 (c) pinta, jonka sisällä ovat sekä hana että viemäri. Montako kenttäviivaa valitsemasi pinnan läpi kulkee sisään ja ulos? Mikä on vuo pinnan läpi? Mitä tämä kertoo pinnan sisältämistä lähteistä ja nieluista?

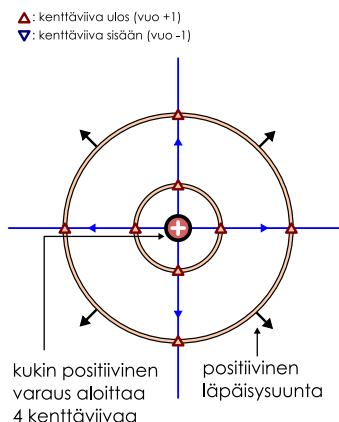
Yhteenvetona virtauksen vuo suljetun pinnan läpi on *positiivinen*, jos pinnan sisällä on virtauksen lähdet tai yleisemmin *enemmän lähteitä kuin nieluja*. Tällöin vuo kertoo, kuinka nopeasti virtaavan aineen määrä lisääntyy pinnan sisällä. Vastaavasti vuo on *negatiivinen*, jos suljetun pinnan sisällä on *enemmän nieluja kuin lähteitä*, ja vuon itseisarvo ilmaisee tällöin kuinka nopeasti ainetta poistetaan pinnan sisällä. Jos pinnan sisällä ei ole lähteitä tai nieluja tai jos näitä on yhtä paljon, vuo on nolla.

Samanlainen yhteys pätee myös sähkökentän lähteille ja nieluille sekä sähkövuolle, mitä on havainnollistettu kuvassa 10.24. Kuvassa (a) on positiivinen pisteveraus  $Q$  ja tämän sähkökentän kenttäviivaesitys. Tässä kenttäviivaesitys on piirretty niin, että varauksesta lähee neljä kenttäviivaa. Varauksen ympäälle on piirretty myös kaksi suljettua pintaa. Kuvan kaksiulotteisuuden takia pinnat on piirretty ympyröinä, mutta todellisuudessa tilanne on kolmiulotteinen ja piirretty pinnat esittävät onttoja pallokuoria, joiden sisällä varaus on. Varauksesta lähtevät virtaviivat jatkuvat suorina äärettömyksiin, joten kaikki neljä kenttäviivaa läpäisevät sekä pienemmän että suuremman tarkastelupinnan. Kummankin pinnan läpi kulkee siis neljä kenttäviivaa sisältä ulos,  $n_{\text{viiva},+} = 4$ , ja sähkövuo kummankin pinnan läpi on  $\Phi_E = a(n_{\text{viiva},+} - n_{\text{viiva},-}) = 4a$ , missä  $a$  on nyt jokin varauksen suuruudesta riippuva vakio.

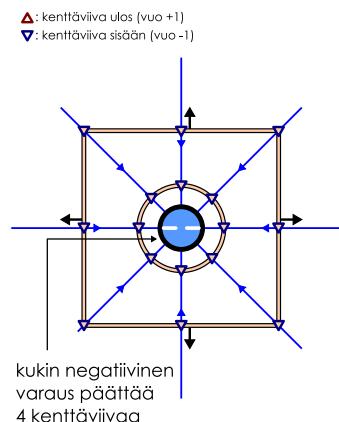
Kuvassa 10.24 (b) on negatiivinen pisteveraus  $-2Q$  ja tämän sähkökenttä samassa mittakaavassa kuin kuvassa (a). Koska varaus on negatiivinen, kenttäviivat kulkevat kuvan ulkoa keskelle ja päättvät varaukseen. Jos varaus olisi  $-Q$ , siihen päättynisi neljä kenttäviivaa aivan kuten kuvassa (a) positiivisesta varauksesta lähti neljä kenttäviivaa. Nyt varaus on kuitenkin suuruudeltaan kaksinkertainen kuvan (a) varaukseen verrattuna, joten sen luoman sähkökentän täytyy olla voimakkuudeltaan kaksinkertainen. Sähkökentän voimakkuus on kuitenkin verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen, joten kuvan (b) täytyy piirtää kenttäviivoja kaksinkertaissella tiheydellä kuvaan (a) verrattuna. Näin ollen kuvan tulee piirtää yhteensä kahdeksan kenttäviivaa. *Varatusta kappaleesta lähevien tai siihen päättvien kenttäviivojen lukumäärä siis kuvaan kappaleen kokonaismvarausta*. Kuvassa (b) varasta ympäriovien pintojen läpi kulkee 8 kenttäviivaa negatiiviseen suuntaan, ja vuo pintojen läpi on  $\Phi_E = -8a$ .

**Kuva 10.24:** Sähköiset kenttäviivat lähtevät aina positiivisista varauksista ja päättvät negatiivisiin varauksiin tai jatkovat äärettömyyksiin. Kenttäviivoja ei voi alkaa eikä loppua alueessa, jossa ei ole varasta. Tämän vuoksi suljetun pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen vuo on verrannollinen pinnan sisällä olevaan kokonaismvaraukseen.

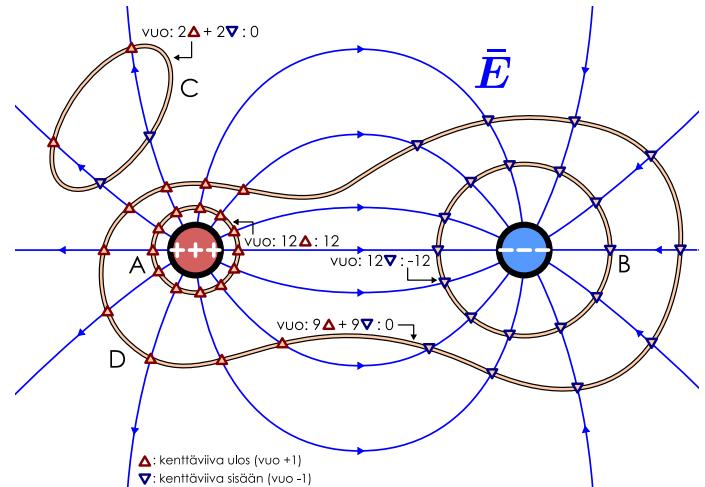
(a) Pinnan sisällä varaus  $+Q$ , vuo 4 kenttäviivaa.



(b) Pinnan sisällä varaus  $-2Q$ , vuo -8 kenttäviivaa.



(c) Kenttäviivojen vuo on aina  $n_{\text{viiva},+} - n_{\text{viiva},-} = 4Q_{\text{sisällä}}$ .





- 10.25** Kuvassa 10.24 (b) ulompi suljettu pinta on neliö (kolmessa ulottuvuudessa kuutio). Jos tämä pinta korvattaisiin pinta-alaltaan yhtä suurella pallopinnalla, miten muuttuisi  
 (a) pinnan läpäisevien kenttäviivojen määrä,  
 (b) pinnan läpäisevän sähkövuon suuruus?  
 (c) Entä jos varausta siirretään niin, että se pysyy kuution sisällä muttei ole enää keskellä?

Kuvassa 10.24 (c) on kahden varauksen  $3Q$  ja  $-3Q$  synnyttämä sähkökenttä sekä neljä erilaista suljettua pintaa. Nyt kenttäviivat eivät ole enää suoria viivoja, mutta ne noudattavat edelleen kenttäviivojen säntöjä, joiden mukaan viivat voivat alkaa vain positiivisista varauksista ja päättyä negatiivisiin varauksiin. Lisäksi kuten juuri päättelimme, kustakin varauksesta lähtevien kenttäviivojen määrä on verrannollinen varauksen suuruuteen. Tässä kuvassa varaukset ovat itseisarvoltaan kolminkertaiset kuvaan (a) nähdien, joten positiivisesta varauksesta lähtee 12 kenttäviivaa ja negatiiviseen varaukseen päättyy 12 kenttäviivaa, kolminkertainen määrä kuvaan (a) verrattuna.

Pinta A on positiivista varausta ympäröivä pallopinta, ja kaikki 12 tästä varauksesta lähtevää kenttäviivaa kulkevat pinnan läpi. Vuo pinnan läpi on siis  $\Phi_{E,A} = 12a$ . Samoin pinta B ympäröi negatiivista varausta ja sen läpi kulkee 12 kenttäviivaa ulkoa sisään. Vuo tämän pinnan läpi on  $\Phi_{E,B} = -12a$ . Pinta C on ellipsoidi, jonka sisällä ei ole varauksia. Pinnan läpi kulkee kaksi kenttäviivaa sisään ja kaksi kenttäviivaa ulos, jolloin kokonaivuo pinnan läpi on  $\Phi_{E,C} = (2 - 2)a = 0$ . Pinta D on jokin epäsäännöllisen muotoinen pinta, ja kumpikin varaus jää sen sisään. Tämän pinnan sisältä ulos kulkee 9 kenttäviivaa ja ulkoa sisään kulkee myös 9 kenttäviivaa. Niinpä vuo tämänkin pinnan läpi on  $\Phi_{E,D} = (9 - 9)a = 0$ .

Edelliset havainnot voidaan yhdistää seuraavasti. Jos suljetun pinnan sisällä on positiivinen kokonaivauraus, vuo pinnan läpi on positiivinen. Vastaavasti jos pinnan sisällä on negatiivinen kokonaivauraus, vuo pinnan läpi on negatiivinen. Lisäksi vuo on itseisarvoltaan sitä suurempi, mitä suurempi varaus pinnan sisällä on. Jos pinnan sisällä ei ole lainkaan varausta tai jos positiivista ja negatiivista varausta on yhtä paljon, vuo on nolla. Tämä johtuu siitä, että vuo laskee pinnan läpi kulkevia kenttäviivoja, ja kenttäviivat syntyvät varauksista. *Positiiviset varaukset ovat sähkökentän lähteitä* (vrt. hana), joista lähtee kenttäviivoja, ja *negatiiviset varaukset ovat sähkökentän nieluja* (vrt. viemäri), joihin kenttäviivat päättyvät. Jos vuo suljetun pinnan läpi on positiivinen, kenttäviivoja kulkee enemmän sisältä ulos kuin ulkoa sisään (vrt. nestettä virtaa ulos), ja niinpä pinnan sisällä täytyy olla *enemmän lähteitä kuin nieluja*. Kääntäen jos vuo on negatiivinen, kenttäviivoja kulkee enemmän ulkoa sisään (vrt. nestettä virtaa sisään) ja pinnan sisällä täytyy olla enemmän nieluja kuin lähteitä. Jos pinnan sisällä on yhtä paljon lähteitä ja nieluja, vuo on nolla.

Tämän päättelyn nojalla *suljetun pinnan ulkopuoliset varaukset eivät vaikuta pinnan läpi kulkevaan vuohon lainkaan*. Tämä johtuu siitä, että jos vaikkapa positiivinen varaus on pinnan ulkopuolella, varauksesta lähtevät kenttäviivat *joko* kulkevat kokonaan pinnan ohitse eivätkä läpäise sitä lainkaan *tai* ne kulkevat pinnan yhdeltä puolelta sisään ja toiselta puolelta ulos. Kenttäviivat muuttavat sähkövuota vain, jos ne alkavat tai päättyvät pinnan sisällä, ja tämä on mahdollista vain jos pinnan sisällä on varauksia.

Nämä havainnot yhdessä muodostavat *Gaussian lain*, jonka mukaan *suljetun pinnan läpi kulkeva sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan sisältämään kokonaivaraukseen*,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{sisällä}}. \quad (10.73)$$

Tässä esintyvä verrannollisuuskerroin  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$  on **sähkövakio** eli historialliselta nimeltään *tyhjiön permittivisyyys* (engl. ‘permeate’, läpäistä tai levitä — nimi viittaa siihen, että vakio kuvailee varauksen kykyä luoda ja levittää sähkökenttää avaruuteen).

Gaussian laki voi vaikuttaa oudolta, koska se puhuu sähkövuoista eikä sähkökentästä itsestään. Gaussian laista ei yleensä voikaan suoraan päättellä sähkökenttää yksittäisessä avaruuden pisteessä, sillä valittuinpä millainen suljettu pinta tahansa, on olemassa paljon erilaisia sähkökenttiä, jotka tuottavat saman sähkövuo. Gaussian lain soveltaminen ei olekaan yhtä suoravivaista kuin Coulombin lain. Gaussian laki on kuitenkin sähkökenttien fundamentaali laki, joka *pätee aina*.



- 10.26** Kirjoita tiivistelmä Gaussian laista. Selitä laki sekä sanoin että matemaattisesti. Mitä ovat lähteet ja nielut? Mitä laki sanoo sähkökentän kenttäviivasyyksestä?

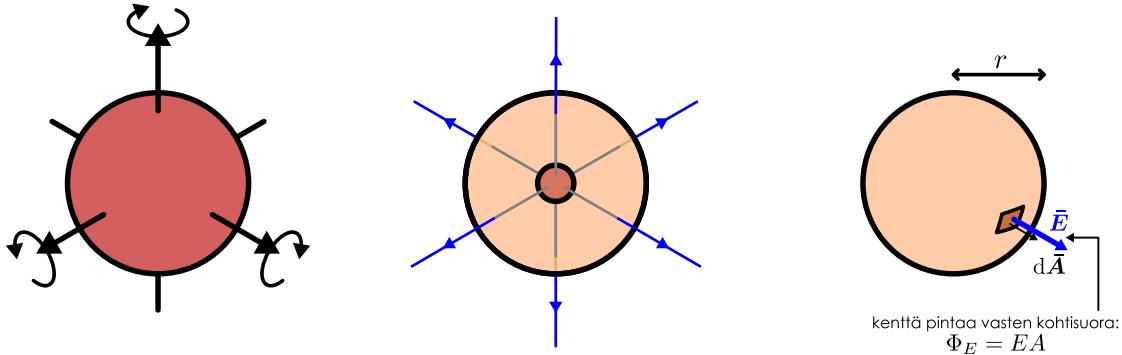
## Symmetrisiä sähkökenttiä

Sähkökentän päättely Gaussian lain perusteella on yleensä vaikeaa, mutta *symmetrisissä systeemeissä* sähkökenttä on itse asiassa paljon helpompi päättää Gaussian lain avulla kuin Coulombin lain kautta varausjakamia integroiden. Tutkitaan nyt muutaman esimerkin avulla, kuinka tämä tapahtuu.

Johdetaan ensimmäiseksi Coulombin laki Gaussian lain ja symmetrian avulla. Symmetria tarkoittaa sitä, että systeemiä voi muuttaa jollakin tavalla ja systeemi on muutoksen jälkeen täsmälleen samanlainen kuin aluksi.

Kuva 10.25: Pallosymmetrisen varausjakauman sähkökenttiä päättely Gaussian lain avulla. Valitaan Gaussian pinta aina nün, että pinnalla on sama symmetria kuin varausjakaumalla. Tällöin sähkökenttä on kaikkiella Gaussian pinta vastaan kohtisuora. Lisäksi kenttä on pinnalla suuruudeltaan vakio, joten vuo saadaan laskettua kertomalla keskenään kentän voimakkuus ja Gaussian pinnan pinta-ala.

- (a) Pallosymmetria: kiertosymmetria kaikkien akselien ympäri. (b) Varattu pallo ja pallomainen Gaussian pinta. (c) Gaussian pinnan ala on  $A = 4\pi r^2$ .



Esimerkiksi pallo on *kiertosymmetrinen* keskipisteensä suhteeseen, koska pallo pysyy samanlaisena vaikka sitä käännettäisiin minkä tahansa sen keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri (kuva 10.25 (a)). Tätä kutsutaan *pallosymmetriaksi*.

Pistevaraus on pallosymmetrinen systeemi, sillä pistevaraus näyttää aivan samalta kaikista suunnista ja asennoista tarkasteltuna. Kuvitellaan nyt varauksen ympärille suljettu pallopinta, jonka säde on  $r$  — Gaussian lain yhteydessä suljettuja pintoja kutsutaan *myös Gaussian pinnoiksi* — jonka keskipisteessä varaus on (kuva 10.25 (b)). *Gaussian lain mukaan* sähkövuon tämän pinnan läpi täytyy olla

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (10.74)$$

koska varaus  $Q$  on pinnan sisällä.

Toisaalta koska systeemi on pallosymmetrinen, sähkökentän täytyy kaikkiella osoittaa suoraan poispäin varauksesta. Lisäksi koska valittu Gaussian pinta on pallo, jonka keskipiste on samassa pisteessä kuin pistevaraus, sähkökentän täytyy olla kaikkiella kohtisuorassa pinta vasten (kuva 10.25 (c)). Sähkövuo määriteltiin sähkökenttävektorin pinta vasten kohtisuoran komponentin ja pinnan alan tulona, ja koska nyt kenttä on kaikkiella kohtisuorassa Gaussian pinta vasten, kentän pinta vasten kohtisuora komponentti on sama kuin kentän suuruus. Pallon pinta-ala puolestaan on  $A = 4\pi r^2$ , joten sähkövuo on määritelmän mukaan

$$\Phi_E = EA = 4\pi r^2 E. \quad (10.75)$$

Näin saimme sähkövulle kaksoisesta esitystapaa. Sähkövuo määritelmä on *matemaattinen säädötö*, joka kertoo miten vuo riippuu sähkökentästä sekä pinnan muodosta ja pinta-alasta. Gaussian laki sen sijaan on *fysiikaalinen laki*, joka yhdistää sähkövuo ja pinnan sisältämän varauksen. Kumpikin on totta, joten niiden perusteella johdettujen sähkökentän lauseiden täytyy olla yhtä suuret. Siispä valitulla Gaussian pinnalla täytyy olla  $Q/\epsilon_0 = 4\pi r^2 E$ , ja tästä voidaan ratkaista sähkökentän voimakkuudeksi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (10.76)$$

Näin olemme johtaneet paikoillaan olevan pistevarausen tuottaman sähkökentän voimakkuuden etäisyydellä  $r$  Gaussian laista.

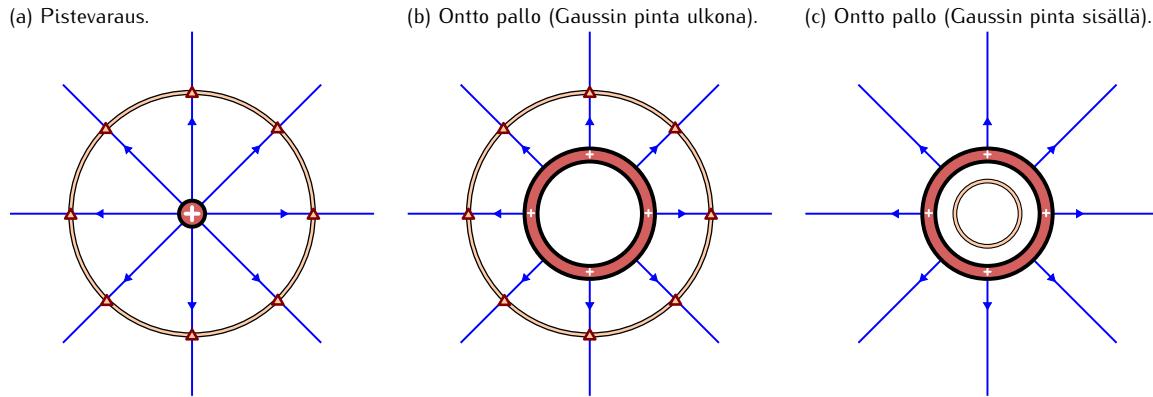
Tulos on sama kuin Coulombin laista johdettu pistevarausen sähkökentän lauseke (10.12). Pistevarausen sähkökenttä on suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja käännekkääneen verrannollinen etäisyyden nelioon. Ainoa ero on verrannollisuuskerroin, joka on Coulombin lain mukaan Coulombin vakio  $k$  ja Gaussian lain mukaan lauseke  $1/(4\pi\epsilon_0)$ . Nämä ovat kuitenkin samaa vakia, sillä

$$k_\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (10.77)$$

Coulombin laki ja Gaussian laki ovat siis sopisoinnissa, kun sähkökentän tuottaa paikoillaan oleva pistevaraus. Gaussian laki kuitenkin pätee aina toisin kuin Coulombin laki, joten *Coulombin laki on Gaussian lain*

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

Kuva 10.26: Pistevaraksen, varatun pallon ja ontton varatuun pallokuoren sähkökenttien täytyy olla samat kappaleiden ulkopuolella, koska niillä on samanlainen symmetria. Vuo palloa ympäröivän Gaussian pinnan läpi riippuu vain pallon kokonaisvarauksesta, ei lainkaan pallon koosta. Ontton pallon sisällä sen sijaan ei ole varausta, joten myös sähkövuo on täytyy olla siellä nolla.



**erikoistapaus.** Tästä syystä myös sähkövakiota  $\epsilon_0$  pidetään fundamentaalina luonnonvakiona, josta Coulombin vakioksi voidaan laskea, eikä toisin päin.

Tämä päättely antaa myös syyn sille, miksi etäisyys esiintyy Coulombin laissa juuri muodossa  $r^{-2}$ . Varausluoma sähkökenttä nimittäin jakautuu pallopinnalle, jonka pinta-ala on verrannollinen pallon säteen neljöön. Gaussian lain mukaan sähkövuo on sama riippumatta pallopinnan koosta, joten sähkökentän voimakkuuden täytyy pienentyä yhtä nopeasti kuin pinta-ala kasvaa. Eksponentti -2 johtuu siis geometriasta, ja tästä syystä sen täytyy olla kokonaisluku.



**10.27** Mikä olisi Gaussian lain mukaan pistevarausen sähkökenttä etäisyydellä  $r$ , jos maailmankaikkeus olisi 2-ulotteinen?

Äsknen tarkastelimme pistevarausta, mutta Gaussian laki päätee kaikille varauksille ja niiden luomille sähkökentille. Se, että edellisessä päättelyssä tarkasteltiin pistevarausta, ilmeni *ainoastaan* siinä, että systeemin oletettiin olevan *pallosymmetrinen*. Päättely toimiikin täsmälle samalla tavalla *kaikille pallosymmetrisille systeemeille* kuten palloille ja pallokuorille. Kuvassa 10.26 (a) ja (b) on verrattu pistevarausen ( tai pienien pallon) ja yhtä suuren varauksen sisältävän ontton pallokuoren sähkökenttiä. Kumpikin systeemi on pallosymmetrinen, ja kappaleiden ympärillä on yhtä suuret Gaussian pinnat. Koska varattujen kappaleiden kokonaisvaraus on yhtä suuri, kummankin Gaussian pinnan läpi täytyy kulkea yhtä suuri sähkövuo. Edelleen symmetrian vuoksi sähkökentän täytyy osoittaa kummassakin tapauksessa poispäin systeemin keskipisteestä, joten kenttä on Gaussian pinnalla kaikkiella kohtisuorassa pintaa vasten, ja näin ollen sähkökentän voimakkuuden täytyy olla sama kummallakin Gaussian pinnalla. Kummassakin systeemissä sähkökenttä on siis Gaussian pinnalla samansuuntainen ja yhtä voimakas, joten kentän täytyy olla *sama*. *Pallon tai pallokuoren sähkökenttä on siis täsmälle samanlainen kuin pallon keskipisteessä olevan pistevarausen kenttä.*

Tämä kuitenkin päätee vain pallon ulkopuolella. Kuvassa 10.26 (c) on tarkasteltu ontton pallokuoren kenttää pallon *sisällä*. Nyt Gaussian pinta on asetettu varatun pallon sisään, ja koska pallo on onto, Gaussian pinnan sisään ei jää lainkaan varausta. Siispä sähkövuo pinnan läpi on myös nolla. Vuo voisi olla nolla siksi, että pinnan läpi kulkee yhtä paljon kenttäviivoja sekä sisään että ulos, mutta symmetrian vuoksi tämä ei ole mahdollista. Siksi *sähkökentän täytyy olla nolla varatun pallokuoren sisällä*. Esimerkiksi metallipallon varautuessa varaus levää itsestään pallon pinnalle, joten pallon pinta muodostaa itsestään varatun pallokuoren, eikä pallon sisään jää lainkaan ylimääräistä varausta. Niinpä varatun metallipallon sisällä ei ole lainkaan sähkökenttää.



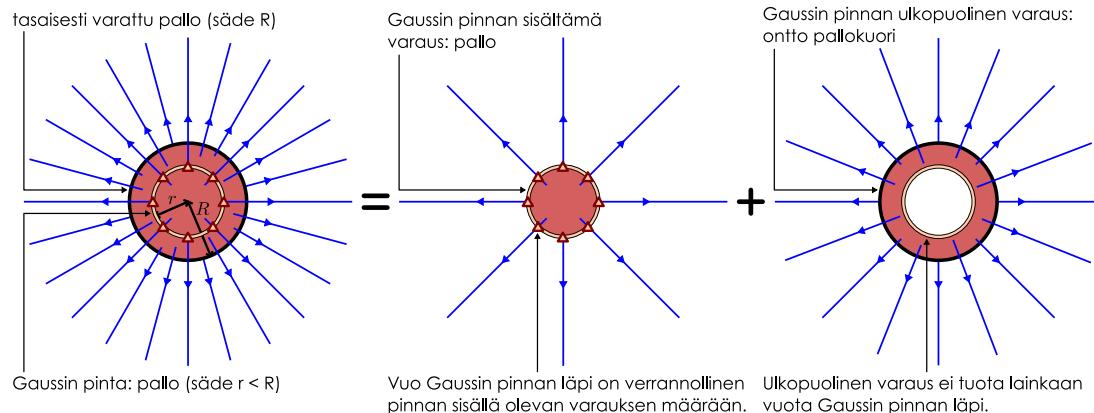
**10.28** Seuraako Gaussian laista, että sähkökenttä on nolla kaikkien onttojen varattujen kappaleiden sisällä? Jos seurailee, miksi? Jos ei, millä ehdolla kenttä on nolla varatun kappaleen sisällä?

Johde ei voi olla sisältä varattu, koska toisiaan hylkivät varauksenkuljetajat hakeutuvat aina johteen pinnalle mahdollisimman kauas toisistaan. Eristepalloissa varauksen ei kuitenkaan tarvitse välittämättä olla pallon pinnalla vaan eriste voi olla kauttaaltaan varautunut. Tällaisenkin pallon sähkökenttä voidaan määritellä Gaussian lain avulla, jos varaus on jakautunut palloon symmetrisesti. Tarkastellaan siis vielä esimerkkinä tasaisesti varautuneen pallon sähkökenttää.

Edellisten päättelyiden nojalla pallon ulkopuolella sähkökenttä on samanlainen kuin pistevarausen kenttä. Pallon sisällä kenttä on kuitenkin erilainen kuin johdepallon sisällä tai pistevarausen ympärillä. Tämän

Kuva 10.27: Sähkökenttä tasaisesti varatun pallon sisällä (säde  $R$ ). Valitaan Gaussian pinnaksi pienempi pallo (säde  $r$ ), jonka keskipiste on suuren pallon keskipisteessä. Gaussian lain mukaisesti sähkövuo tämän Gaussian pinnan läpi riippuu vain pinnan sisällä olevasta varauksesta, joten vuo voidaan laskea tuntumatta sähkökenttää. Symmetrian perusteella sähkökentän voimakkuus on pinnalla kaikilla sama, joten sähkökentän voimakkuus Gaussian pinnalla voidaan päätellä tunnetun sähkövuoon perusteella.

(a) Varauksen jako Gaussian pinnan sisä- ja ulkopuoliseen osuuteen.



(b) Vuon päättely kahdella tavalla.

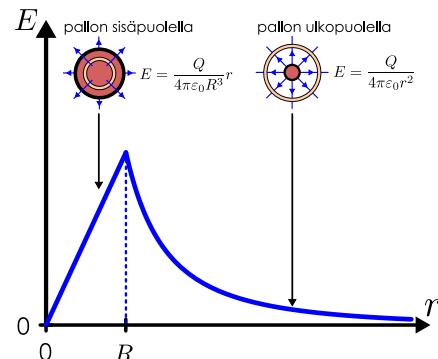
$$\begin{aligned} \text{koko pallo} & V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{Gaussian pinnan sisäpuoli} & V_{\text{Gauss}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ Q_{\text{Gauss}} &= Q \frac{V_{\text{Gauss}}}{V_{\text{pallo}}} \\ \text{Gaussian pinta} & A_{\text{Gauss}} = 4\pi r^2 \\ E & \end{aligned}$$

Gaussian laki:  $\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{Gauss}}$

vuo ilmaistuna varauksen ja kentän avulla: oltava samat

vuon määritelmä + symmetria

(c) Sähkökentän voimakkuus pallon keskipisteestä mitattuna etäisyyden funktiona.



pallon sisäisen sähkökentän saamme selville asettamalla pallon sisään Gaussian pinnan, jonka säde  $r$  on pienempi kuin varatun pallon säde  $R$  kuten kuvassa 10.27. Nyt voimme tarkastella erikseen Gaussian pinnan sisään ja sen ulkopuolelle jäävä varausta. Pinnan ulkopuolelle jäävä varaus muodostaa ontton pallokuoren, ja kuten juuri päättelimme, ontto varattu pallokuori ei luo sisäänsä lainkaan sähkökenttää. Niinpä Gaussian pinnan läpäisevän vuon tuottaa *pelkästään pinnan sisään jäävä varaus*.

Koko pallon tilavuus on  $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3$  ja koska pallo oli tasaisesti varattu, pallon varaustiheys on

$$\rho = \frac{Q}{V_{\text{pallo}}} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (10.78)$$

Gaussian pinnan sisään jää tilavuus  $V_{\text{Gauss}} = \frac{4}{3}\pi r^3$  ja varaus

$$Q_{\text{Gauss}} = \rho V_{\text{Gauss}} = Q \frac{V_{\text{Gauss}}}{V_{\text{pallo}}} = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (10.79)$$

Gaussian lain mukaan sähkövuo Gaussian pinnan läpi on siten

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{Gauss}} = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}. \quad (10.80)$$

Toisaalta Gaussian pinta-ala on  $A_{\text{Gauss}} = 4\pi r^2$  ja sähkökenttä on kaikilla pintaan vasten kohtisuorassa, joten vuo pinnan läpi on määritelmän mukaan

$$\Phi_E = EA = 4\pi r^2 E. \quad (10.81)$$

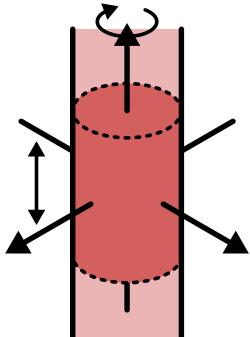
Tämän täytyy olla sama kuin Gaussian lain antama vuon lauseke, joten  $Qr^3/(\epsilon_0 R^3) = 4\pi r^2 E$ , ja tästä ratkeaa sähkökentäksi

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (10.82)$$

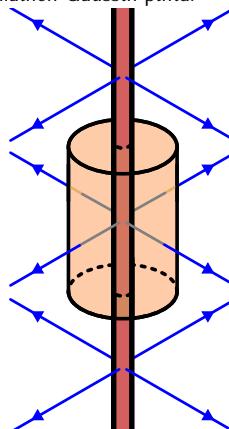
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.28: Sylinterisymmetrisen varausjakauman sähkökentän päättely Gaussian lain avulla. Valitaan Gaussian pinta aina niin, että pinnalla on sama kiertosymmetri kuin varausjakaumalla. Tällöin sähkökenttä on kaikkialla joko Gaussian pinnan suuntainen tai sitä vastaan kohtisuora. Kentän vuo poikkeaa nollasta vain niissä paikoissa, joissa se on Gaussian pintaan nähdyn kohtisuorassa. Lisäksi kenttä on näissä alueissa aina suuruudeltaan vakio, joten vuo saadaan laskettua kertomalla keskenään kentän voimakkuus ja sen alueen pinta-ala, jossa kenttä on kohtisuorassa pintaan vasten.

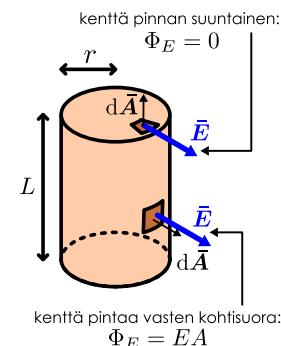
(a) Sylinterisymmetria: kierto- ja siirto-symmetria yhden akselin suhteessa.



(b) Äärettömän pitkä varattu sauva ja sylinterimäinen Gaussian pinta.



(c) Nollasta poikkeavan vuon tuottavan pinnan ala on  $A = 2\pi rL$ .



Pallon sisällä sähkökenttä ei siis heikkene pallon keskipisteestä mitatun etäisyyden  $r$  funktiona vaan kasvaa. Tämä johtuu siitä, että sähkökentän voimakkuuteen vaikuttaa kaksi kilpailvaa tekijää. Ensinnäkin mitä suurempi Gaussian pinnan sade on, sitä laajemmalle pinnalle sähkövuo levii. Tämä heikentää sähkökenttää käantäen verrannollisesti säteen neliöön,  $r^{-2}$ . Toisaalta mitä suurempi Gaussian pinnan sade on, sitä suurempi tilavuus ja varaus sen sisään jää. Tämä voimistaa sähkökenttää suoraan verrannollisesti säteen kuutioon,  $r^3$ . Kun nämä tekijät yhdistetään, jäljelle jää suora verrannollisuus säteeseen,  $r^{-2} \cdot r^3 = r$ . Jos sen sijaan koko varattu pallo on Gaussian pinnan sisällä, pinnan sisältämä kokonaivaraus ei riipu pinnan täsmällisestä koosta eli säteestä  $r$ . Tällöin sähkökentän voimakkuus heikkenee käantäen verrannollisesti Gaussian pinnan pinta-alaan eli sen säteen neliöön,  $r^{-2}$ .

Gaussian lain avulla voidaan päätellä myös sylinterisymmetrisen varatun kappaleen sähkökenttä. Sylinterisymmetria on esiteltty kuvassa 10.28 (a). Ympyräsylinteri on kiertosymmetrin sen keskeltä kulkevan akselin suhteessa. Äärettömän pitkä sylinteri on myös *siirtosymmetrinen* tämän akselin suunnassa, koska äärettömän pitkä sylinteri ei muuta sen akselin suuntaisessa siirrossa mitenkään. Lisäksi sylinteri on *peilaussymmetrinen* akselinsa suunnassa, koska systeemi ei muuta myöskään silloin, jos se peilataan pystysuunnassa keskikohtansa suhteessa. Äärettömän pitkiä sylintereitä ei tietenkään ole oikeasti olemassa, mutta äärettömyys on käytökeloinen malli hyvin suurille kappaleille. Jos esimerkiksi olet hyvin pitkällä, suoralla tiellä, et voi nähdä tien alku- tai loppupisteitä. Tällöin tie näyttää samalta kuin miltä äärettömän pitkä tie näyttäisi. Samaan tapaan jos haluamme määrittää sähkökentän esimerkiksi lähellä pitkän saulan pintaa, voi olla yksinkertaisempaa ajatella saulan olevan äärettömän pitkä, jolloin systeemi on ainakin likimain siirtosymmetrinen, vaikkei äärellinen systeemi sitä todellisuudessa tarkalleen ottaen ole.

Tarkastellaan siis hyvin pitkää ja ohutta varattua tankoa kuten kuvassa 10.28 (b). Jos ajattelemme tangon olevan äärettömän pitkä, systeemi on peilaus- ja siirtosymmetrinen tangon suunnassa. Tällöin sähkökentälä ei voi olla komponenttia pystysuunnassa vaan sähkökentän täytyy olla kaikkialla kohtisuorassa tangon symmetria-akseliin nähdyn.

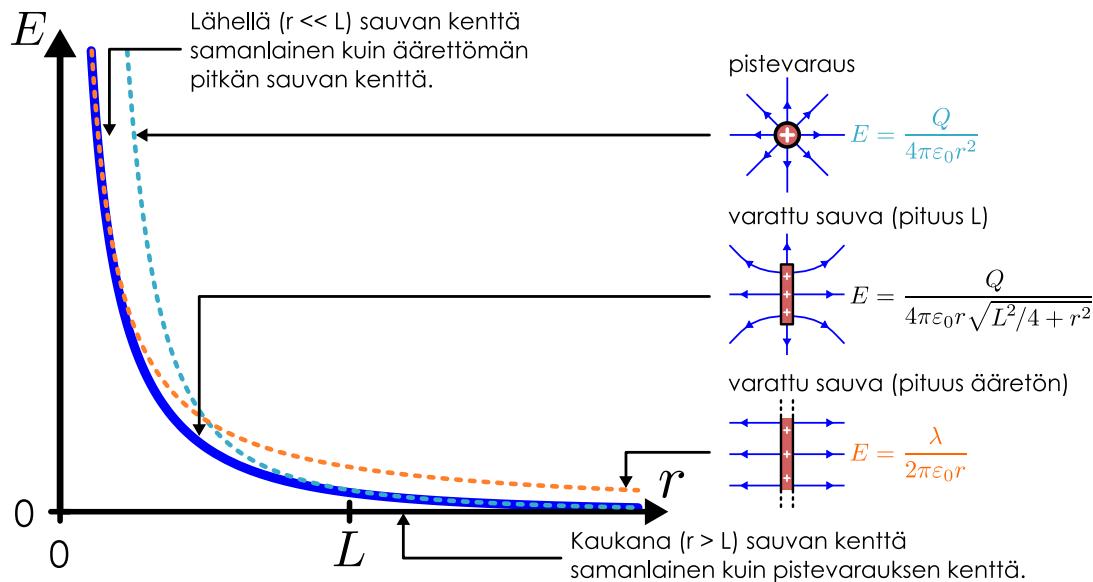
Valitaan nyt Gaussian pinnaksi umpinainen sylinteri, jonka pituus on  $L$  ja säde  $r$ , ja asetetaan pinta niin, että systeemin kiertosymmetria säilyy. Gaussian pinnan sisään jää tangosta pituus  $L$ , joten pinnan sisään jää varaus  $Q = \lambda L$ , missä  $\lambda$  on pituusvaraustihleys. Gaussian lain perusteella sähkövuo pinnan läpi on siten

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}. \quad (10.83)$$

Sähkökenttä on kaikkialla kohtisuorassa sylinterin muotoisen Gaussian pinnan vaippaa vasten, ja koska systeemi on kiertosymmetrinen, kentän täytyy olla tällä vaipalla myös kaikkialla yhtä voimakas (kuva 10.28 (c)). Niinpä vuo tämän vaipan läpi on sähkökentän voimakkuuden ja vaipan pinta-alan tulo. Sylinterin korkeus on  $L$  ja sen ympäryysmitta on ympyrän kaaren pituus  $2\pi r$ . Vaipan pinta-ala on sen korkeuden ja ympäryysmittan tulo,  $A = 2\pi rL$ , ja näin ollen vuo vaipan läpi on

$$\Phi_E = EA = 2\pi rLE. \quad (10.84)$$

Kuva 10.29: Sähkökenttä etäisyydellä  $r$  pisteverauksesta,  $L$ -pituisen varatun sauvan keskipisteestä ja äärettömän pitkän varatun sauvan akselilta. Kaukaa mikä tahansa äärellisen kokoinen kappale näyttää pisteeltä, joten lyhyen sauvan kenttä lähestyy pisteverauksen kenttää suurilla  $r$ . Toisaalta tarpeeksi läheltä katsoen lyhytkin sauva näyttää pitkältä, joten pienillä  $r$  lyhyen sauvan kenttä lähestyy äärettömän pitkän sauvan kenttää.



Gaussin pinta on umpinainen joten siihen kuuluu myös sylinterin pohja ja kansi. Näillä pinnolla sähkökenttä on kuitenkin kaikkialla pinnan suuntainen, joten sähkövuo näiden pintojen läpi on nolla, ja vuo sylinterin vaipan läpi on siten kokonaisvuo koko Gaussin pinnan läpi.

Yhdistämällä Gaussin lain ja sähkövuoon määritelmän antamat lausekkeet sähkövuolle saamme yhtälön  $\lambda L / \epsilon_0 = 2\pi r L E$ , ja tästä voimme ratkaista sähkökentän

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (10.85)$$

Lopputulos on samankaltainen kuin pisteverauksen ja pallon sähkökentän lauseke. Suurin ero on se, että pallon kentän lausekkeen nimitäjässä on pallon pinta-alaa kuvaava tekijä  $4\pi r^2$ , mutta varatun sauvan kentän lausekkeessa on ympyrän kaaren pituutta kuvaava tekijä  $2\pi r$ . Tämä johtuu siitä, että sylinterisymmetrisiin systeemiin on aivan samanlainen kuin kaksilottiseen, ympyräsymmetrisiin systeemiin. Niihin sylinterisymmetriassa sähkökenttä levää ympyrän kaarelle ja heikkenee säteen  $r$  funktiona yhtä nopeasti kuin ympyrän kaaren pituus kasvaa.

Kuvaan 10.29 on piirretty pisteverauksen, äärettömän pitkän sauvan, ja jo aikaisemmin laskemamme  $L$ -pituisen sauvan sähkökenttää eli lauseke (10.45), missä etäisyyttä sauvan keskipisteestä on nyt merkitty symbolilla  $r$  aikaisemmin käytetyn symbolin  $x_P$  sijaan. Kaukana äärellisen pituista sauvalta ei voi erottaa pisteverauksesta, jolloin sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti pisteverauksen sähkökenttää etäisyyden  $r$  kasvaessa. Vastaavasti hyvin läheltä katsoen äärellinen sauva vaikuttaa pitkältä, ja niinpä äärellisen sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti äärettömän pitkän sauvan kenttää, kun etäisyys sauvesta pienenee.

Erityisesti kuvaajasta nähdään, että sopivissa tilanteissa yksinkertaistetut mallit, joissa sauvan ajatellaan olevan piste tai äärettömän pitkä, ovat erittäin hyviä. Alue, jossa kumpikin yksinkertainen malli poikkeaa selvästi äärellisen sauvan mallista, on melko pieni. Toisaalta ei ole mitään etäisyyttä  $r$ , jossa kumpikin yksinkertainen malli toimisi hyvin. Yksinkertaisia malleja kannattaa siis käyttää silloin kun ne toimivat, mutta aina pitää ymmärtää milloin ja mikäkin malli toimii.



**10.29** Miksei äärettömän pitkän sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti pisteverauksen sähkökenttää pitkillä etäisyyksillä?

Pallo- ja sylinterisymmetrian ohella myös tasosymmetria on usein käytökkäinen, sillä suuret levyt ovat likimain tasosymmetrisiä. Itse asiassa *mikä tahansa sileä pinta* vaikuttaa tarpeeksi läheltä tarkasteltuna likimain äärettömältä, suoralta tasolta. Esimerkiksi maapallo on pyöreä pallo, mutta pinnalta katsoen planeetan pyöreyttä ei juurikaan huomaa vaan maapinta vaikuttaa valtavalta tasolta. Johdetaan siis vielä varatun tason sähkökenttä Gaussin lain ja tasosymmetrian avulla.

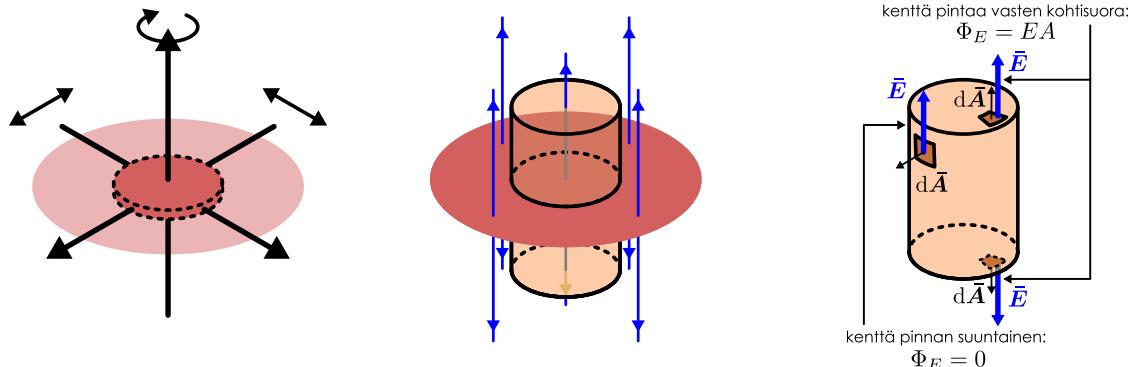
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.30: Tasosymmetrisen varausjakauman sähkökentän päättely Gaussian lain avulla.

(a) Tasosymmetria: kiertosymmetria yhden ja siirtosymmetria kahden akselin suhteeseen.

(b) Ääretön varattu taso ja sylinterimäinen Gaussian pinta.

(c) Nollasta poikkeavan vuon tuottavan pinnan ala on  $A = 2\pi r^2$ .



Ääretön taso on kiertosymmetrinen tason normaalinsuuntainen akselin ympäri sekä siirtosymmetrinen tason suunnassa (kuva 10.30 (a)). Tasaisesti varatun tason sähkökentälläkin pitää olla tämä symmetria, joten sähkökentällä ei voi olla komponenttia tason suunnassa vaan kentän täytyy osoittaa kohtisuoraan tason pintaan nähdien (kuva 10.30 (b)).

Valitaan Gaussian pinnaksi samanlainen sylinteri kuin mitä käytimme sylinterisymmetrisen systeemien analysoinnissa. Sylinterin korkeus on  $L$  ja säde  $r$ . Asetetaan pinta niin, että sylinterin pohja ja kanssi ovat yhdensuuntaiset varatun tason kanssa. Tällöin sylinterin sisään jää varatusta tasosta ympyrän muotoinen osa, jonka pinta-ala on  $A = \pi r^2$  ja joka sisältää varauksen

$$Q = \sigma A = \sigma \pi r^2, \quad (10.86)$$

missä  $\sigma$  on tason pintavaraustiheys. Gaussian lain mukaan vuo Gaussian pinnan läpi on siis

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}. \quad (10.87)$$

Sähkökenttä on pystysuuntainen ja siten sähkökentällä ei ole komponenttia sylinterin muotoisen Gaussian pinnan vaipan läpi. Niinpä sähkövuo vaipan läpi on nolla. Sähkökenttä on kuitenkin kohtisuorassa sylinterin pohjaa ja kantta vasten, joten vuo näiden läpi on kentän voimakkuuden ja pinta-alan tulo. Sylinterin pohjan ala on jälleen  $\pi r^2$ , ja koska pintoja on kaksi, pohja ja kanssi, kokonaispinta-ala on  $A = 2\pi r^2$ . Lisäksi jos Gaussian pinta on valittu niin, että varattu taso on täsmälleen sen keskellä, sähkökenttä on symmetrian johdosta varmasti yhtä voimakas kummallakin pinnalla. Niinpä sähkövuo Gaussian pinnan läpi on kaikkiaan

$$\Phi_E = EA = 2\pi r^2 E. \quad (10.88)$$

Yhdistämällä Gaussian lain ja vuon määritelmän avulla lasketut sähkövuo lausekkeet saamme yhtälön  $\sigma \pi r^2 / \epsilon_0 = 2\pi r^2 E$  ja tästä ratkeaa sähkökentän voimakkuudeksi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (10.89)$$

Sähkökenttä riippuu siis ainoastaan pintavaraustiheydestä mutta ei lainkaan siitä, kuinka kaukana pinnasta ollaan. Tämän olisi itse asiassa voinut päätellä jo kuvaan 10.30 (b) piirretystä kenttäviivaesityksestä. Sähkökenttää kuvaavat kenttäviivat ovat yhdensuuntaiset, jolloin niiden tiheyskin on vakio. Toisaalta kenttäviivaesityksessä sähkökentän voimakkuutta kuvaava nimenomaan viivojen tiheys, joten kentän voimakkuuden pitää olla vakio. Tulos on ehkä yllättävä, koska kentän kuvittelisi olevan aina sitä heikompi mitä kauempaan varauksesta ollaan. Näin ei kuitenkaan ole, koska tässä tarkasteltiin ääretöntä varattua tasoa ja ääretöntä taso näyttää äärettömältä riippumatta siitä, kuinka kaukaa sitä tarkastellaan. Äärellisen tason sähkökenttä kyllä heikkenee kaukana tasosta, kuten nähtiin esimerkissä 10.3.



**10.30** Selitä omin sanoin, millaisia symmetristen varattujen kappaleiden sähkökentät ovat. Kerro erityisesti, millaisia ovat pistevarausten, pallojen, sauvojen ja tasojen luomat kentät. Kuinka nopeasti kentät heikkenevät etäisyyden funktiona? Miten symmetrisen systeemin sähkökenttä voidaan päättää Gaussian lain avulla?

## esimerkki 10.4

## Gaussin laki

**Kuution (sivun pituus  $L$ ) kulmassa on pistevaraust  $q$ . Mikä on sähkövuo yhden varaukselle vastakkaisen kuution sivun läpi?**

**SUUNNITELMA** Kuvittele pistevaraukseen ympärille kuutio, jonka sivun pituus on  $2L$ . Gaussin lain mukaan vuo tämän kuution pinnan läpi sisältä ulos on

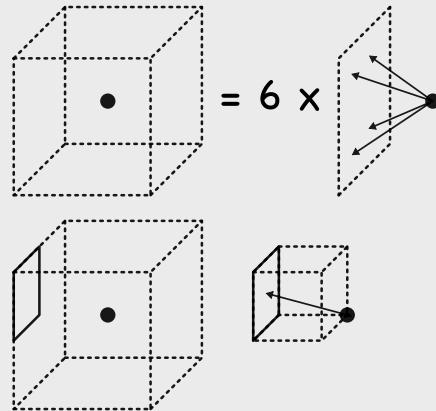
$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (10.90)$$

Jos varaus on kuution keskellä, vuo on symmetriarenkaalla sama kunkin sivun läpi, ja niinpä vuo yhden sivun läpi on kuudenes kokonaisvuosta,  $\Phi_{E,2L \times 2L} = \frac{1}{6\epsilon_0} q$ .

Tehtävässä tarkasteltava  $L$ -sivuinen kuutio saadaan, kun kuvittelemme kuutio jaetaan kahdeksaan osaan. Erityisesti suuremman kuution kunkin sivu (ala  $2L \times 2L$ ) tulee tällöin jaetuksi neljään osaan (ala  $L \times L$ ). Symmetriarenkaalla vuo kunkin tällaisen osan läpi on neljännes koko sivun läpäisevästä vuosta,

$$\Phi_{E,L \times L} = \frac{1}{4} \Phi_{E,2L \times 2L} = \frac{1}{24\epsilon_0} q. \quad (10.91)$$

Toisaalta tämä on juuri tehtävässä kysytty sivu, joten tämä on myös vastaus annettuun kysymykseen. Tulos ei riipu sivun pituudesta.



**ARVIOINTI** Jos varaus on origossa, tarkasteltavan sivun keskipiste on sopivasti valitussa koordinaatistossa ( $L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L$ ) (sivu on tällöin  $yz$ -suuntainen). Etäisyys varauksesta tähän pisteeseen on  $r = L\sqrt{3}/2$ , joten sähkökentän voimakkuus pisteessä on  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{3}{2}L^2} \approx 0.053 \frac{q}{\epsilon_0 L^2}$ . Kentän suuntainen yksikkövektori on  $\hat{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{k}})$ , jolloin kentän sivua vasten kohtisuoran komponentin pituus on  $E_\perp = \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = E\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \sqrt{\frac{2}{3}}E \approx 0.043 \frac{q}{\epsilon_0 L^2}$ . Jos kenttä olisi vakio, sähkövuo sivun läpi olisi  $\Phi_E = E_\perp L^2 \approx 0.043 \frac{q}{\epsilon_0}$ . Gaussin lain avulla saatu tarkka tulos  $\phi_E = \frac{q}{24\epsilon_0} \approx 0.042 \frac{q}{\epsilon_0}$  on tätä hyvin lähellä.

## 10.4 Potentiaali

### Sähköinen potentiaalienergia

Kun tunnemme sähkökentän, voimme laskea mihin tahansa varaukseen kohdistuvan voiman olipa varaus missä tahansa avaruudessa. Ja kun tiedämme varattuun kappaleeseen kohdistuvan voiman, voimme laskea sen liikeradan dynamikan peruslain avulla. Tämä ei kuitenkaan ole tavallisesti helpoin tapa tutkia varattujen kappaleiden ja hiukkasten liikettä, koska liikeratojen laskeminen voiman ja dynamiikan peruslain kautta on usein vaikeaa. Yleensä prosesseja on helpompi analysoida energiaperiaatteen avulla.

Sähkökenttä vaikuttaa varauksiin samaan tapaan kuin gravitaatiokenttä vaikuttaa massallisiin kappaleisiin, joten sähkökenttää liittyvä potentiaalienergiakin toimii samaan tapaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.31. Kuvissa (a) ja (b) massallinen kappale liikkuu homogeenisessa gravitaatiokentässä ylöspäin. Systeemiksi on valittu kappale ja gravitaatiokenttä, joten kentän potentiaalienergia kuuluu systeemiin. Potentiaalienergian nollakohta voidaan valita vapaasti, ja nollakohdaksi on valittu kuvassa (a) esitetty alkutilanne, jossa kappale on maanpinnalla. Painovoima pyrkii vetämään kappaleetta alas päin, joten kappaleen nostaminen ylöspäin on mahdollista vain, jos jokin ulkoinen voima nostaa kappaleetta ylöspäin. Tätä voimaa ei ole kuvaan piirretty, mutta voit vaikkapa ajatella, että ihmisen nostaa kappaleen ylös. Tällöin nostaja tekee kappaleeseen työtä, ja systeemin energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin systeemiin tehty työ.

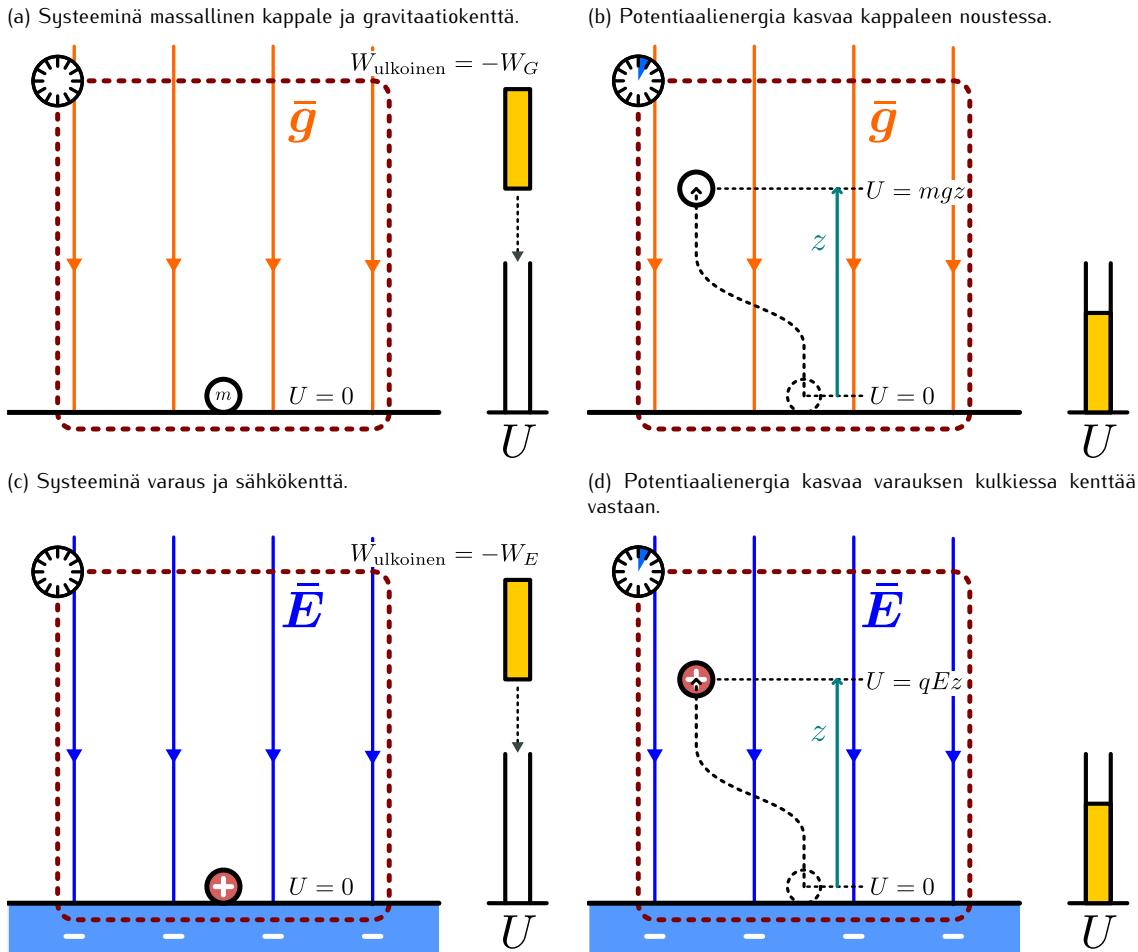
Mekaniikassa opimme, että homogeenisessa gravitaatiokentässä potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = mg\Delta z \quad (10.92)$$

massan  $m$  siirtyessä kenttää vastaan (eli ylöspäin) matkan  $\Delta z$  riippumatta siitä, mitä reittiä kappale kulkee. Kerrataan nyt, miksi näin on.

Kappale lähee liikkeelle levosta ja se myös pysähtyy nousun jälkeen, joten systeemin liike-energia on nolla sekä alussa että lopussa. Oletetaan myös dissipatiiviset vuorovaikutukset heikoiksi, jolloin systeemin sisäenergia ei muudu. Näin ollen prosessissa muuttuu ainoastaan potentiaalienergia, ja siksi potentiaalienergian

Kuva 10.31: Massa ja varaus homogeenisessa gravitaatio- ja sähkökenttässä.



muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin ulkoisen voiman systeemiin tekemän työn,

$$\Delta E_{\text{kokonais}} = \Delta U = W_{\text{ulkoinen}}. \quad (10.93)$$

Toisaalta jos systeeminä tarkastellaan *pelkästään kappaletta*, sekä nostava voima että gravitaatio ovat systeemin ulkoisia voimia. Kappaleen kokonaisenergian muutos on siis nostavan voiman ja painovoiman tekemien töiden summa,

$$\Delta E_{\text{kappale}} = W_{\text{ulkoinen}} + W_G. \quad (10.94)$$

Mutta koska kappale on levossa sekä prosessin alussa että sen lopussa, sen energian muutos prosessissa on *nolla*,  $\Delta E_{\text{kappale}} = 0$ . Niinpä nostava voima tekee tässä prosessissa yhtä suuren mutta vastakkaismerkkisen työn gravitaatioon verrattuna  $W_{\text{ulkoinen}} = -W_G$ . Tämän perusteella potentiaalienergian muutoksen täytyy olla yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen painovoiman tekemään työhön verrattuna.

$$\Delta U = W_{\text{ulkoinen}} = -W_G. \quad (10.95)$$

Tämän voi ajatella niin, että *jos* painovoimaa ei olisi, ulkoisen nostavan voiman tekemä työ työntäisi kappaleen liikkeeseen, jolloin se saisi liike-energiaa. Nyt painovoiman tekemä työ muuttaa tämän liike-energian kentän potentiaalienergiaksi. Painovoima siis vähentää *kappaleen* liike-energiaa, jolloin sen *kappaleeseen* tekemä työ on negatiivinen. Energia siirtyy kappaleesta kenttään itseensä, jolloin kentän potentiaalienergia lisääntyy.

Kappaleeseen kohdistuu maanpinnan lähellä painovoima

$$\bar{G} = -mg\hat{k} \quad (10.96)$$

alaspäin eli negatiiviseen  $z$ -suuntaan. Voima tekee kuitenkin työtä ainoastaan kappaleen siirtymessä voiman vaikutussuunnassa eli tässä tapauksessa  $z$ -suunnassa (kuva 10.32 (a)). Jos siis kappale siirtyy esimerkiksi vektorin

$$\Delta \bar{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \quad (10.97)$$

osoittaman reitin, painovoiman tekemä työ on yksinkertaisesti

$$W_G = \bar{G} \cdot \Delta \bar{r} = -mg\hat{k} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}) = -mg\Delta z \quad (10.98)$$

ja näin ollen potentiaalienergian muutos on  $\Delta U = mg\Delta z$ , kuten pitääkin.

Jos kappale kulkee käyräviivaisen reitin, reitti voidaan aina ajatella jaetullaksi infinitesimaalisen lyhyisiin suoriin osiin  $d\bar{r}$  (kuva 10.32 (b)). Tällöin potentiaalienergian muutos on kullakin osalla

$$dU = -dW = -\bar{G} \cdot d\bar{r} = mgdz, \quad (10.99)$$

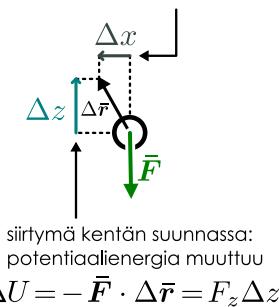
ja energian muutos koko prosessissa saadaan laskemalla nämä muutokset yhteen eli integroimalla

$$\Delta U = \int dU = \int_{z_{alku}}^{z_{loppu}} mgdz = mg(z_{loppu} - z_{alku}) = mg\Delta z. \quad (10.100)$$

Kuva 10.32: Potentiaalienergian muutos konservatiivisessa kentässä.

(a) Potentiaalienergia muuttuu vain siirtymässä kentän suuntaan.

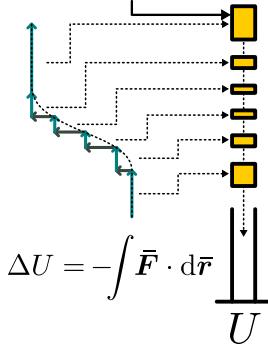
siirtymä kohti suoraan kenttää vastaan:  
potentiaalienergia ei muudu



$$\Delta U = -\bar{F} \cdot \Delta \bar{r} = F_z \Delta z$$

(b) Käyrä reitti jaettuna pieniin osiin.

potentiaalienergian muutos kussakin siirtymässä



$$\Delta U = -\int \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Kuvissa 10.31 (c) ja (d) on esitetty vastava prosessi, jossa varattu kappale siirtyy sähkökenttäässä. Prosessi toimii täsmälleen samalla tavalla kuin painovoimakenttäässä, sillä ainoa ero edelliseen tarkasteluun verrattuna on se, että varattuun hiukkaseen kohdistuu voima

$$\bar{F} = -qE\hat{k}, \quad (10.101)$$

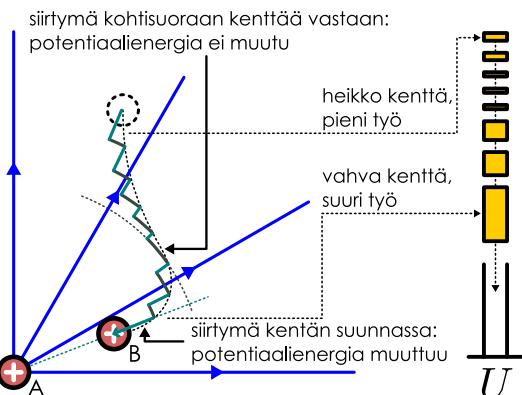
missä  $q$  on hiukkasen varaus ja  $E$  sähkökentän voimakkuus. Verrattuna painovoimaan tässä siis massa on korvattu varauksella (kummatkin kuvaavat kappaleen kykyä reagoida kenttään) ja putoamiskiertyys sähkökentän suuruudella (kummatkin kuvaavat kentän voimakkuutta).

Kappaleen siirtymässä kuvassa ylöspäin eli sähkökentän suuntaan vastaan sähköinen voima tekee kappaleeseen negatiivista työtä,  $W_E < 0$ , mikä siirtää energiaa kappaleesta sähkökenttään. Tämä energia varastoituu sähkökenttään potentiaalienergiana ja kappaleen siirtymässä matkan  $\Delta z$  kentän suuntaan vastaan kentän potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = -W_E = qE\Delta z. \quad (10.102)$$

Potentiaalienergian ja  $z$ -akselin nollakohta voidaan valita vapaasti, joten jos nollakohdaksi valitaan kuvan 10.31 (c) tilanne, kuvassa (d) systeemin potentiaalienergia on  $U = qEz$ .

Kuva 10.33: Potentiaalienergia pisteverauksen kentässä.



Edellinen tarkastelu pätee kuitenkin vain homogeenisessa sähkökenttäässä, jonka kentän suunta ja voimakkuus ovat kaikkialla samat! Useimmat sähkökentät eivät ole homogeenisia. Esimerkiksi pisteverauksen luoman sähkökentän suunta ja suuruus riippuvat siitä, missä pisteesä kenttää tarkastellaan, joten edellä johdettu sähköisen potentiaalienergian lauseke ei kuvaa kahden keskenään vuorovaikuttauksen pistemäisen hiukkasen potentiaalienergiaa. Potentiaalienergian määritelmä kentän tekemän työn vastalukuna,  $\Delta U = -W_E$ , kuitenkin pätee edelleen, ja voimme laskea pisteverausten potentiaalienergian sen avulla.

Tarkastellaan kahta pisteverausta, A ja B, joiden varaukset ovat  $q_A$  ja  $q_B$ . Varaus A pysyy paikoillaan ja varaus B siirtyy kuten kuvan 10.33 on piirretty. Koska varaus A on paikoillaan, siihen ei tehdä työtä.

Voimme siis laskea varausten välisen vuorovaikutuksen energian tarkastelemalla pelkästään hiukkaseen B kohdistuvan voiman tekemää työtä hiukkasen B siirtymässä. Kuvaan onkin piirretty vain varauksen A luoma sähkökenttä, joka kohdistaa voiman varaukseen B. Kenttä osittaa kaikkialla suoraan poispäin varauksesta A, joten voima tekee työtä vain varauksen B siirtymässä joko kohti varasta A tai siitä poispäin. Jos varaus B kiertäisi kehää varauksen A ympäri, se liikkuisi aina kohti suoraan siihen kohdistuvan voiman nähdien eikä voima tekisi silloin lainkaan työtä.



**10.31** Kuvassa 10.33 varaukset A ja B ovat positiivisia. Onko (i) sähköisen voiman tekemä työ ja (ii) potentiaalienergian muutos positiivinen vai negatiivinen, kun varaus B lähestyy varausta A? Entä jos toinen varauksista tai molemmat olisi negatiivisia?

Kuvassa varaus B kulkee käyräviivaista reittiä, jolla se sekä lähestyy varausta A että kiertää sen ympäri. Tällöin voimme jälleen ajatella reitin jaetusta lyhyisiin suoriin osiin. Lisäksi jokaisen osan voi jakaa edelleen kentän suuntaiseen ja kenttää vastaan kohtisuoraan komponenttiin, joista vain kentän suuntainen siirtymä vaikuttaa varaukseen B tehtyyn työhön. Jos siis varauksesta A varaukseen B osoittava vektori on  $\bar{r}_{A \rightarrow B}$ , varaukseen B tehty työ lyhyellä siirtymällä  $d\bar{r}_{A \rightarrow B}$  riippuu vain siirtymän komponentista *kohti tai poispäin varauksesta A*. Jos siis merkitsemme etäisyyttä varauksesta A varaukseen B  $r_{A \rightarrow B} = |\bar{r}_{A \rightarrow B}|$ , kullakin lyhyellä siirtymällä varaukseen B tehty työ riippuu vain tämän etäisyyden muutoksesta  $dr_{A \rightarrow B}$ . Nämä systeemin potentiaalienergian muutos kullakin lyhyellä siirtymällä on

$$dU = -dW = -\bar{F}_{A \rightarrow B} \cdot d\bar{r}_{A \rightarrow B} = -F_{r,A \rightarrow B} dr_{A \rightarrow B}, \quad (10.103)$$

missä  $F_{r,A \rightarrow B}$  on varauksen A varaukseen B kohdistaman voiman radiaalikomponentti eli poispäin A:sta osoittava komponentti.

Positiivinen pistevaraus A kuitenkin kohdistaa toiseen positiiviseen varaukseen B *aina* voiman itsestään poispäin, joten tämä radiaalikomponentti on sama kuin voiman suuruus, joka Coulombin lain mukaan on

$$F_{r,A \rightarrow B} = F_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2}. \quad (10.104)$$

Nämä systeemin potentiaalienergian muutos kullakin lyhyellä siirtymällä on

$$dU = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B} \quad (10.105)$$

ja potentiaalienergian kokonaismuutos saadaan laskemalla yhteen kaikki nämä pienet muutokset eli integroimalla

$$\Delta U = \int dU = \int_{r_{\text{alku}}}^{r_{\text{loppu}}} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B}. \quad (10.106)$$

Tässä integroimismuuttuja on nyt etäisyys varauksesta A varaukseen B ja integroitavassa funktiossa tämä esiintyy eksponentissa  $r_{A \rightarrow B}^{-2}$ . Tämän integrointi onnistuu säennöllä  $\int r^n dr = \frac{1}{n+1} r^{n+1} + C$ , missä nyt  $n = -2$ . Näin potentiaalienergian muutokseksi saadaan

$$\Delta U = \left| \int_{r_{\text{alku}}}^{r_{\text{loppu}}} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B} \right| = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{\text{loppu}}} - \frac{1}{r_{\text{alku}}} \right). \quad (10.107)$$

Tämä on siis potentiaalienergian *muutos* hiukkasen B siirtymessä etäisyydeltä  $r_{\text{alku}}$  etäisyydelle  $r_{\text{loppu}}$  varauksesta A. Emme saaneet potentiaalienergialle absoluuttista lauseketta, koska potentiaalienergian nollakohta voidaan aina valita mielivaltaisesti, eikä tässä laskussa nollakohtaa kiinnitetty minnekään. Pistevarauskia tarkasteltaessa on kuitenkin tavanomaista valita nollakohdaksi tilanne, jossa varaukset ovat *äärettömän kaukan* toisistaan. Tällä valinnalla potentiaalienergialle saadaan nimittäin lauseke

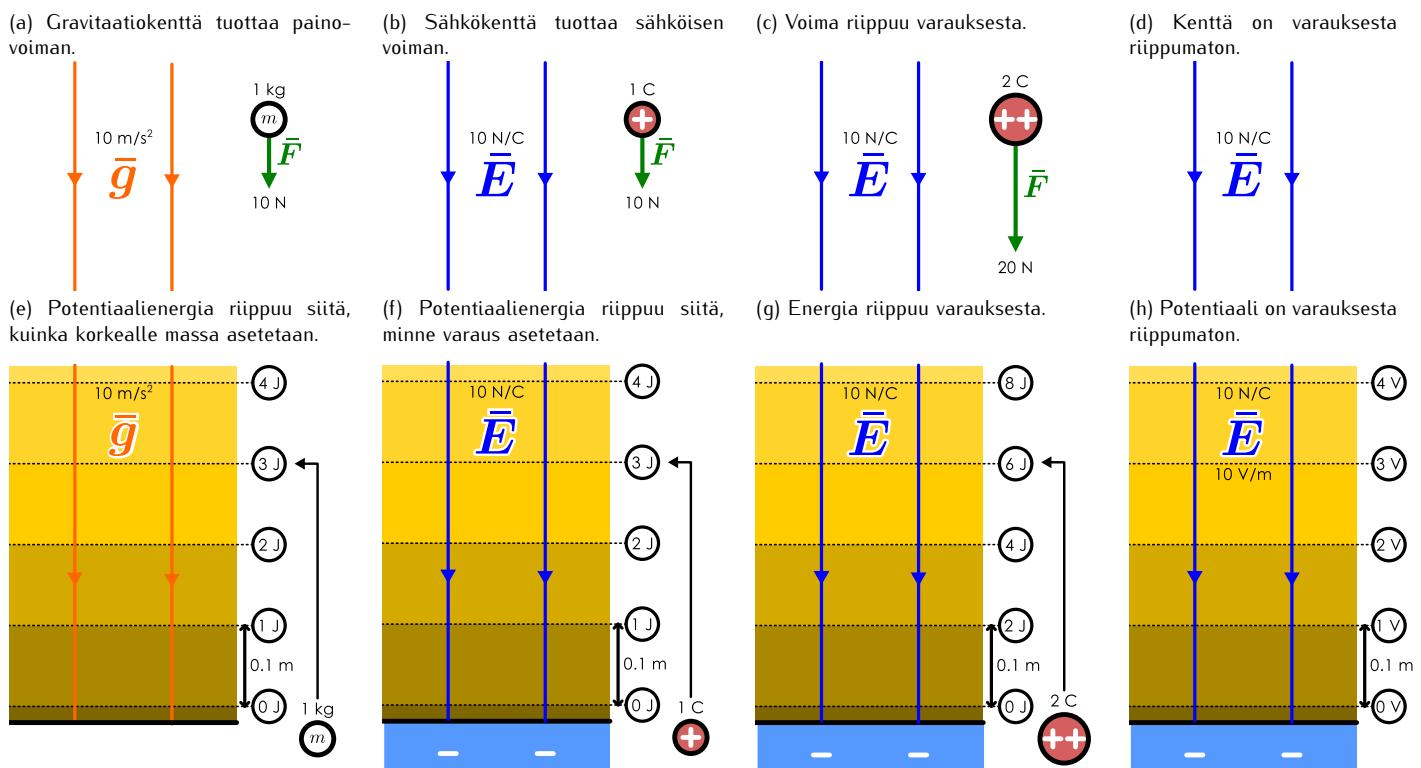
$$U_{\text{pistevaraus}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (10.108)$$

Tämä on siis kahden pistevarauksen A ja B välisen sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia varausten ollessa etäisyydellä  $r_{A \rightarrow B}$  toisistaan, *kun potentiaalienergia on nolla varausten ollessa äärettömän kaukan* toisistaan,  $\lim_{r_{A \rightarrow B} \rightarrow \infty} U_{\text{pistevaraus}} = 0$ .



- 10.32** (a) Tarkista, että lauseke (10.108) (i) antaa potentiaalienergiaksi nollan, kun varaukset ovat äärettömän kaukan toisistaan ja (ii) toteuttaa yhtälön (10.107).  
 (b) Kasvaako vai pieneneekö potentiaalienergia varausten lähestyessä toisiaan, jos varauksilla on (i) sama merkki tai (ii) eri merkki?  
 (c) Onko potentiaalienergia tällöin positiivinen vai negatiivinen?

Kuva 10.34: Sähkökenttässä olevaan varaukseen kohdistuu kenttää voima ja tällöin kentällä on potentiaalienergiaa. Nämä riippuvat kenttää olevan varauksen suuruudesta ja paikasta. Kenttä itsessään on kuitenkin olemassa vaikkei siellä olisikaan varaus. Kentän voimakkuus kuvaava voimaa, joka 1 C varaukseen kohdistuisi, jos se tuotaisiin kenttään. Potentiaali puolestaan kuvaava potentiaalienergiaa, joka systeemillä olisi, jos kenttään tuotaisiin varaus.



## Sähköinen potentiaali

Sähkökenttä, sähköinen voima ja sähköinen potentiaalienergia kuvavat kaikki omalla tavallaan sähköistä vuorovaikutusta, ja kuvassa 10.34 on esitetty yhteenvetö näiden suureiden välistä suhteista ja niiden analogiasta gravitaatioon. Aivan kuten gravitaatiokenttään tuotuun massaan kohdistuu painovoima (kuva (a)), sähkökenttään tuotuun varaukseen kohdistuu sähköinen voima (kuva (b)) kentän suuntaan. Voiman suuruus on massan tai varauksen ja kentän voimakkuuden tulo, joten mitä suurempi varaus sähkökenttään tuodaan, sitä suurempi voima siihen kohdistuu (kuva (c)). Tässä "sähkökenttä" tarkoittaa nimenomaan *muiden* varausten luomaa kenttää, johon ei lasketa mukaan piirretyn positiivisen varauksen kenttää. Toki jokainen varaus luo ympärilleen oman sähkökenttänsä, joka muuttaa avaruudessa vallitsevaa kokonaissähkökenttää. Varaus ei voi kuitenkaan vuorovaikuttaa itsensä kanssa, joten kuhunkin varaukseen kohdistuvan voiman tuottaa *kaikkien muiden* varausten yhdessä luoma sähkökenttä, johon varauksen omaa kenttää ei lasketa mukaan. Tämä muiden varausten luoma kenttä on luonnollisesti riippumaton kuvaan piirretystä varauksesta ja on olemassa avaruuden kaikissa pisteissä vaikkei niissä olisikaan varaus, johon kenttä kohdistaisi voiman.

Samanlainen analogia pätee energialle. Massan tuominen gravitaatiokenttään muuttaa kentän potentiaalienergiaa (kuva (e)), ja samoin varauksen tuominen sähkökenttään muuttaa tämän kentän energiota (kuva (f)). Kuvaan piirretynä esimerkissä molemmat kentät ovat homogeeniset, jolloin kentän suunta ja voimakkuus ovat kaikkialla samat. Tällöin massaan tai varaukseen kohdistuu kaikkialla samanlainen voima. Siitä huolimatta potentiaalienergia riippuu siitä, minne massa tai kappale asetetaan. Maan painovoimakentässä potentiaalienergia on sitä suurempi, mitä korkeammalle eli mitä kauemmas maanpinnasta massa asetetaan. Sähkökenttässä positiivisen varauksen potentiaalienergia on sitä suurempi, mitä kauemmas muista negatiivisista varauksista ja mitä läheemmässä muita positiivisia varauksia varaus asetetaan. Yleisesti gravitaation potentiaalienergia pienenee, kun massa siirtyy painovoimakentän suuntaan (alaspäin), ja potentiaalienergia kasvaa, kun massa siirtyy kenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan (ylöspäin). Samoin sähköinen potentiaalienergia pienenee positiivisen varauksen siirtyessä sähkökentän suuntaan ja kasvaa varauksen siirtyessä kenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Kuvaan (e) on merkitty katkoviivoin korkeudet, joille 1 kg massa pitää asettaa, jotta systeemin potentiaalienergia olisi 0 J, 1 J, 2 J jne., kun potentiaalienergian nollakohdaksi on valittu maapinta. Aivan samaan tapaan kuvaan (f) on piirretty katkoviivoin korkeus, jolle 1 C varaus täytyy asettaa, jotta systeemin potentiaalienergia olisi 0 J, 1 J, 2 J jne. Potentiaalienergia ei muutu, jos massaa tai varausta siirretään kenttään nähdyn kohtisuoraan, joten nämä katkoviivat ovat kuviissa vaakasuorat.

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

Aivan kuten sähköisen voiman suuruus riippuu kenttään tuodun varauksen suuruudesta, myös systeemin potentiaalienergia riippuu kenttään tuodun varauksen suuruudesta. Kuva (g) on muuten samanlainen kuin kuva (f) paitsi että kuvassa (g) sähkökenttään tuodaan kaksinkertainen varaus, 2 C. Potentiaalienergian nollakohta on valittu kummassakin kuvassa samaan tasoon, joten energiaksi 0 J kuvava viiva on kummassakin tilanteessa sama. Sähkökentän voimakkuus on kuvassa 10 N/C, joten 1 C varaukseen kohdistuu 10 N voima ja 2 C varaukseen 20 N voima. Tällöin 1 C varauksen potentiaalienergia muuttuu 0.1 m pystysuuntaisessa siirtymässä  $10 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J}$  mutta 2 C varauksen potentiaalienergian muutos on samalla matkalla  $20 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 2 \text{ J}$ . Potentiaalienergia riippuu siis kenttään tuodusta varauksesta: mitä suurempi on kappaleen varaus, sitä enemmän potentiaalienergia muuttuu kappaleen siirtyessä. Riippuvuus on samanlainen kuin sähköisen voiman ja sähkökentän välinen yhteys, sillä sähkökenttää kohdistaa varattuun kappaleeseen sitä suuremman voiman mitä suurempi kappaleen varaus on.

Usein emme kuitenkaan halua tietää varauksiin kohdistuvia voimia vaan pelkästään niiden energian. Edellisissä esimerkeissä laskimme varatun kappaleen potentiaalienergian määrittämällä ensin kappaleeseen kohdistuvan voiman sähkökentän perusteella ja sitten potentiaalienergian laskemalla tämän voiman tekemän työn. Olisi kuitenkin helpompaa, jos meillä olisi sähkökenttää kuvaava suure, josta systeemin potentiaalienergia voitaisiin laskea yhtä helposti kuin sähköinen voima voidaan laskea sähkökentstä. Kuten kuvista 10.34 (f) ja (g) nähtiin sähköinen potentiaalienergia on suoraan verrannollinen sähkökenttään tuodun varauksen suuruuteen (kunhan potentiaalienergian nollakohtaa ei muuteta). Systeemin potentiaalienergia voidaan siis kirjoittaa sähkökenttään tuodun varauksen suuruuden  $q$  ja verrannollisuuskertoimen  $V$  tulona,

$$U = qV. \quad (10.109)$$

Potentiaalienergia  $U$  riippuu paikasta, johon varaus  $q$  asetetaan, joten verrannollisuuskerroin  $V$  on itse asiassa *paikan funktio*  $V(x, y, z)$ , missä  $(x, y, z)$  ovat systeemiin tuodun varauksen koordinaatit. Funktio  $V$  ei kuitenkaan riipu mitenkään kenttään tuodun varauksen suuruudesta, joten se on *ainaostaan sähkökenttää kuvava suure*. Funktio  $V$  on nimeltään sähköinen **potentiaali**.

Aivan kuten sähkökenttään  $\bar{\mathbf{E}}$  pisteeseen  $(x, y, z)$  tuotuun varaukseen  $q$  kohdistuva voima saadaan varauksen ja kentän tulona,  $\bar{\mathbf{F}} = q\bar{\mathbf{E}}(x, y, z)$ , kenttään tuodun varauksen *potentiaalienergia saadaan varauksen ja kentän potentiaalin tulona*,  $U = qV(x, y, z)$ . Varausten energian laskeminen sähkökentän integraalina on vaikeaa, mutta energian laskeminen kertomalla varaus potentiaalin avulla tarkastelupisteessä on erittäin helppoa. Tämän vuoksi potentiaali onkin yleensä sähköisiä vuorovaikutuksia kuvaavista suureista tärkein ja laskissa käytökeloisin!

**10.33** Sähkökenttä, sähköinen voima, potentiaali ja potentiaalienergia kuvaavat kaikki sähköistä vuorovaikuttusta.



- (a) Mitkä näistä ovat skalaareja ja mitkä vektoreita?
- (b) Mitkä näistä voivat riippua kenttään tuodun varauksen suuruudesta?
- (c) Mitkä näistä voivat riippua kenttään tuodun varauksen paikasta?
- (d) Mitkä näistä poikkeavat nollasta, jos avaruudessa on vain yksi pisteveraus?

Kuvassa 10.34 (h) on esitetty sähkökentän potentiaali. Yhtälön (10.109) mukaisesti potentiaali saadaan jakamalla potentiaalienergia sähkövarauksella,

$$V = \frac{U}{q}, \quad (10.110)$$

Kuvassa (f) systeemin potentiaalienergia on 1 J, kun 1 C varaus on 0.1 m etäisyydellä potentiaalienergian nollatasosta. Niinpä potentiaali tällä etäisyydellä on  $1 \text{ J}/1 \text{ C} = 1 \text{ J/C}$ . Potentiaalin yksikölle on kuitenkin annettu oma erityinen nimi, *voltti* (Alessandro Voltan mukaan),

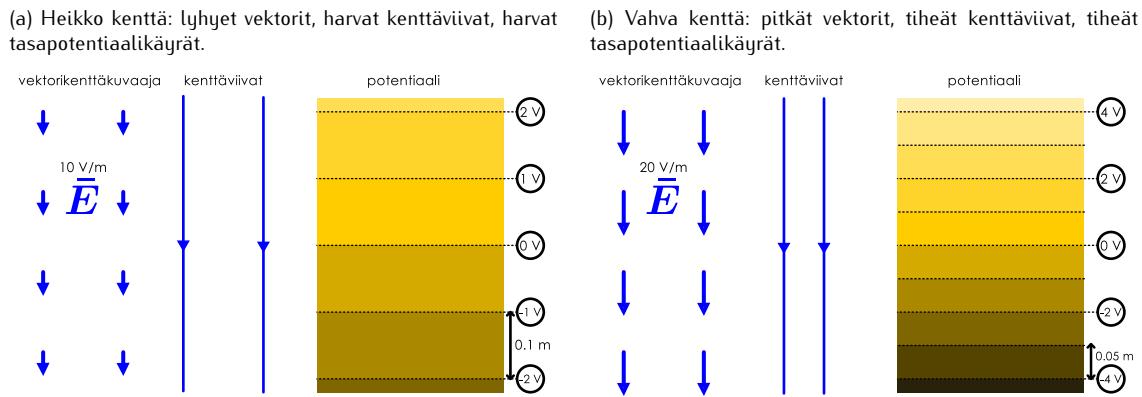
$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}. \quad (10.111)$$

Potentiaali on siis tarkastelupisteessä yksi voltti, jos systeemiin potentiaalienergia on yksi joule, kun tarkastelupisteeseen tuodaan yhden coulombin varaus. Vastaavasti kuvassa (g) potentiaalienergia on 2 J, kun 2 C varaus on 0.1 m etäisyydellä potentiaalienergian nollatasosta, joten tälläkin tavalla laskien potentiaaliaksi saadaan tarkastelupisteessä  $2 \text{ J}/2 \text{ C} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V}$ . Näin pitää olla, sillä potentiaali on vain kentän ominaisuus, joka ei riipu kenttään tuodusta varauksesta.



**10.34** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä potentiaalienergiasta ja potentiaalista. Mitä samaa on sähkö- ja gravitaatiokenttien potentiaalienergioissa? Miten potentiaali ja potentiaalienergia liittyvät toisiinsa?

Kuva 10.35: Sähkökentän esitys vektorikenttäkuvaajana, kenttäviivoina ja tasapotentiaalkäyrät. Potentiaalin nollakohta voidaan valita vapaasti.



### Potentiaalin ja sähkökentän yhteys

Vaikka määrittelimme potentiaalin systeemin potentiaalienergian kautta, potentiaalia ei käytännössä kannata laskea tästä kautta. Sähkökentän ja potentiaalin käyttökelpoisuus matemaattisina työkaluina perustuu pitkälti juuri siihen, että ne kuvavat kenttää vaikkei kentässä olisi varusta, johon kohdistuisi voima ja jolla olisi kentässä potentiaalienergiaa. Käytännössä yleensä halaummekin määrittää potentiaalin suoraan sähkökentän perusteella tai päinvastoin sähkökentän potentiaalin perusteella. Kuvasta 10.34 (h) voimme saada idean, kuinka tämä käytännössä onnistuu. Jos  $z$ -akseli on kuvassa ylöspäin, sähkökentän  $z$ -komponentti on

$$E_z = -10 \text{ N/C}. \quad (10.112)$$

Jos systeemiin tuotaisiin testivaraus  $q_{\text{testi}} = 1 \text{ C}$ , tähän kohdistuisi voima

$$F_{z,\text{testi}} = q_{\text{testi}} E_z = 1 \text{ C} \cdot (-10 \text{ N/C}) = -10 \text{ N}. \quad (10.113)$$

Jos testivarausta siirretään  $z$ -suuntaan matka  $\Delta z = 0.1 \text{ m}$ , systeemin potentiaalienergia muuttuu määräin

$$\Delta U = -W_E = -F_{z,\text{testi}} \Delta z = -q_{\text{testi}} E_z \Delta z = 10 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J}. \quad (10.114)$$

Nämä ollen systeemin potentiaali muuttuu tällä matkalla

$$\Delta V = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \Delta U = -E_z \Delta z = 10 \text{ N/C} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V}. \quad (10.115)$$

Testivaraus suuruus supistuu pois, jolloin potentiaalin muutos saadaan laskettua pelkästään sähkökentän ja siirtymän avulla. Tässä tapauksessa tarkastelupiste siirtyy kuvassa ylöspäin,  $\Delta z > 0$ , ja sähkökenttä osoittaa alas päin  $E_z < 0$ , jolloin potentiaalin muutos on positiivinen  $\Delta V > 0$ . *Potentiaali siis kasvaa, kun siirrytään sähkökenttään nähdien vastakkaiseen suuntaan tai toisin sanoen sähkökenttä osoittaa siihen suuntaan, johon siirryttääessä potentiaali pienenee.*



**10.35** Voidaanko mihin tahansa vektorikenttään liittää potentiaalin kaltainen funktio, jolla on se ominaisuus, että funktio pienenee aina, kun avaruudessa siirrytään kentän suuntaan? Jos ei voi, keksi esimerkki vektorikentästä, jossa tämä ei ole mahdollista.

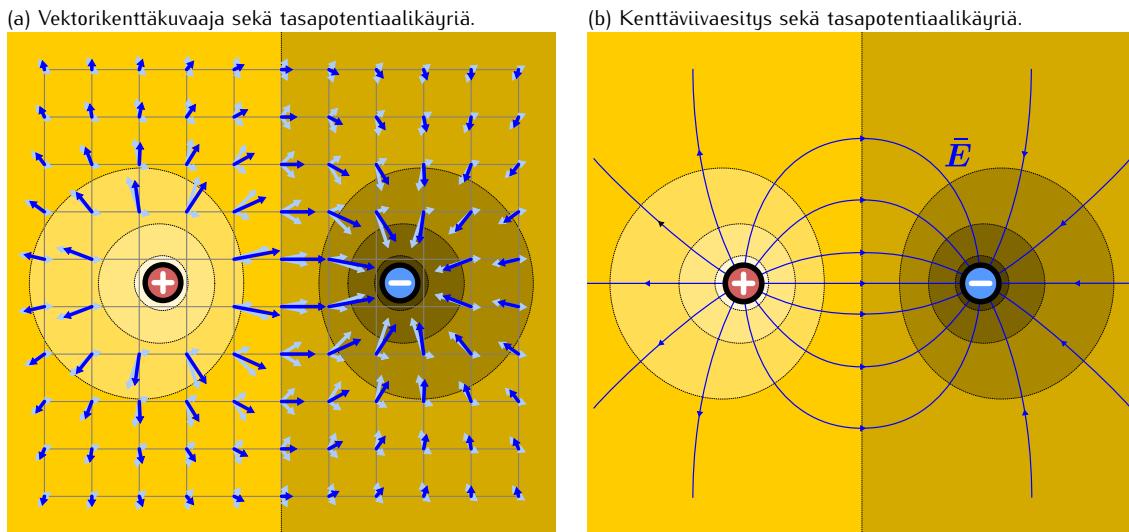
Potentiaalin muutos on yhtälön (10.115) perusteella suoraan verrannollinen siirtymän pituuteen ja sähkökentän voimakkuuteen, joten *potentiaali muuttuu sitä nopeammin, mitä suurempi sähkökenttä on*. Tästä yhtälöstä voi myös ratkaista sähkökentän  $z$ -komponentin, jolloin saadaan yhtälö

$$E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z} = -\frac{1 \text{ V}}{0.1 \text{ m}} = -10 \text{ V/m}. \quad (10.116)$$

Tästäkin muodosta nähdään, että mitä enemmän potentiaali muuttuu kuljettua matkaa kohti (suuri  $\Delta V$  ja pieni  $\Delta z$ ), sitä suurempi sähkökenttä täytyy olla. Yhtälö osoittaa myös sen, että "voltia per metriä" on kelvollinen sähkökentän yksikkö. Sähkökentällä voikin käyttää kahta erilaista yksikköä, jotka viittaavat sähkökentän eri rooleihin. Sähkökenttään  $E = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$  tuotun  $1 \text{ C}$  varaukseen kohdistuu  $1 \text{ N}$  voima. Toisaalta tässä sähkökentässä potentiaali muuttuu  $1 \text{ V}$ , kun sähkökentän suunnassa siirrytään  $1 \text{ m}$  matka.

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.36: Kahden varauksen sähkökentän ja potentiaalin esitys vektorikenttäkuvaajana, kenttäviivoina ja tasapotentiaalikäyrinä.



Kuvassa 10.34 (h) potentiaalia on kuvattu keltaisella väriillä. Värin sävy kuvailee potentiaalin arvoa siten, että kirkkaat ja vaaleat sävyt esittävät suurta potentiaalia ja tummat värit pientä potentiaalia. Koska potentiaalin nollakohta on kiinnitetty potentiaalienergian nollakohtaan, ja potentiaalienergian nollakohta on mielivaltainen, myös potentiaalin nollakohta on mielivaltainen. Toisin sanoen *potentiaalin arvon nolla voi periaatteessa valita minne tahansa*, eikä sillä ole mitään fysikaalista merkitystä. Siksi suuri ja pieni ovat potentiaalista puhuttaessa suhteellisia käsitteitä. Potentiaalilla ei ole mitään absoluuttista arvoa, mutta potentiaalin muutoksilla on. Voidaan siis sanoa, että potentiaali on yhtäällä suurempi kuin toisaalla, ja tästä siis on kuvattu kuvan värellä: potentiaali kasvaa siirryttääessä tummasta väristä vaaleaan.

Potentiaali on esitetty kuvassa myös katkoviivoin. Kuhunkin katkoviivaan on merkitty potentiaalin arvo, ja potentiaali saa siis jokaisella viivan pistelleä saman arvon. Näitä viivoja kutsutaan **tasapotentiaalikäyriksi**. Koska potentiaali muuttuu sähkökentän suuntaan lükuttaessa, se ei muutu sähkökenttää vasten kohtisuoraan kuljettaessa. Niinpä *tasapotentiaalikäyrät ovat aina kohtisuorassa sähkökentän suuntaan nähdyn*. Kuvassa tämä tarkoittaa sitä, että sähkökentän kenttäviivat leikkaavat tasapotentiaalikäyrät aina suorassa kulmassa. Koska tässä esimerkissä sähkökenttä kulkee pystysuoraan, tasapotentiaalikäyrät ovat vaakasuoria. Yleisesti kenttäviivat voivat olla kaarevia ja kulkea mihin suuntaan tahansa, ja tällöin tasapotentiaalikäyrätkin ovat kaarevia käyriä. Ja itse asiassa tasapotentiaalikäyrät ovat "käyriä" vain kaksiulotteisessa kuvassa. Sähkökentän kenttäviivat ovat kolmessakin ulottuvuudessa edelleen käyriä, ja potentiaali muuttuu näiden käyrien suuntaan kuljettaessa. Tällöin pistet, joissa potentiaali saa saman arvon, muodostavat *tasapotentiaalipintoja*. Asia voi jälleen olla helpoin ymmärtää gravitaatioanalogn kautta. Homogenisessa gravitaatiokentässä kappale saa saman potentiaalienergian kaikissa *yhtä korkealla* olevissa pisteissä. Jos meillä on vaikkapa tasainen, täysin vaakasuora pöytä, kappaleen potentiaalienergian on tuon pyödän päällä sama kaikialla. Tässä tapauksessa pyödän pinta on siis osa gravitaation tasapotentiaalipintaa.

Edellisten havaintojen perusteella potentiaali ei ole sähkökentästä riippumaton ominaisuus vaan se on *uusi tapa kuvata sähkökenttää*. Kuvaan 10.35 onkin tehty yhteenvetö, jossa verrataan eri tapoja esittää sähkökenttä. Vektorikenttäkuvaajassa nuolten pituus ja suunta kuvavat sähkökentän suuntaa ja voimakkuutta. Kenttäviivayksikössä viivojen suunta kuvaa kentän suuntaa, mutta kentän suuruutta kuvaa viivojen *tiheys*. Mitä lähempänä viivat ovat toisiaan, sitä voimakkaampi kenttä on kyseessä. Kentän voi kuitenkin kuvata myös tasapotentiaalikäyrien avulla. Tällöin sähkökentän suunta on aina *kohtisuoran tasapotentiaalikäyriä vastaan suuntaan, jossa potentiaali pienenee*, ja sähkökenttä on sitä voimakkaampi, mitä lähempänä toisiaan tasapotentiaalikäyrät ovat. Samat säännöt ilmenevät myös kuvassa 10.36, johon on piirretty kahden pisteverauksen kenttä. Lähellä varauksia ja varausten välissä kenttä on voimakkaimillaan, ja siellä kenttävektorit ovat pitkät ja kenttäviivat sekä tasapotentiaalikäyrät lähellä toisiaan. Vaikka kenttäviivat ja tasapotentiaalikäyrät ovat kuvassa käyräviivaisia, ne ovat silti kaikialla kohtisuorassa toisiinsa nähdyn.

**10.36** Selitä kuvan 10.36 perusteella, miten seuraavat sähkökentän ominaisuudet muuttuvat lähestyttäessä positiivista tai negatiivista varausta: (a) kenttäviivojen välinen etäisyys, (b) tasapotentiaalikäyrien välinen etäisyys, (c) potentiaalin arvo, (d) potentiaalin jyrkkyys (muutosnopeus siirryttääessä), (e) sähkökentän voimakkuus. Selitä myös miten nämä asiat liittyvät toisiinsa!

Nämä päättelyt voidaan tieteenkin lausua myös matemaattisesti. Yhtälön (10.115) mukaan potentiaalin muutos on sähkökentän ja kentän suuntaisen siirtymän tulon vastaluku,  $\Delta V = -E_z \Delta z$ , mutta tämä pätee

vain  $z$ -suuntaiselle vakiokentälle. Yleisesti, jos sähkökenttä on vakio mutta ei  $z$ -suuntainen, myös siirtymät  $x$ - ja  $y$ -suuntiin muuttavat potentiaalia, ja tämä muutos riippuu näiden siirtymien pituudesta ja sähkökentän  $x$ - ja  $y$ -komponenttien suuruudesta. Yhdistämällä potentiaalin muutokset eri suunnissa saadaan kokonaismuutos sievennettyä yksinkertaiseen muotoon

$$\Delta V = -E_x \Delta x - E_y \Delta y - E_z \Delta z = -\bar{\mathbf{E}} \cdot \Delta \bar{\mathbf{r}}. \quad (10.117)$$

Potentiaalin muutos on siis siirtymävektorin ja sähkökenttävektorin pistetulon vastaluku. Ja vielä yleisemmin, jos sähkökenttä ei ole vakio, siirtymä pitää jakaa lyhyisiin osiin  $d\bar{\mathbf{r}}$  ja potentiaalin muutos saadaan laskemalla nämä yhteen eli viivaintegraalina

$$\Delta V = - \int \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}. \quad (10.118)$$



**10.37** Mikä fysikaalinen merkitys on yhtälöissä (10.117) ja (10.118) esintyvillä miinusmerkeillä?

Kääntäen, yhtälön (10.116) mukaan sähkökenttä voidaan laskea potentiaalin muutoksen ja siirtymän suhteenvastalukuna,  $E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z}$ , mutta tämäkin pätee vain  $z$ -suuntaiselle vakiokentälle. Jos kenttä on  $z$ -suuntainen mutta kentän voimakkuus riippuu paikasta, täytyy tarkasteluvälin  $\Delta z$  antaa lähestyä nollaa, jolloin muutosten osamäärästä tulee derivaatta,

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (10.119)$$

Ja jos sähkökenttä ei ole  $z$ -suuntainen, potentiaali muuttuu myös  $x$ - ja  $y$ -suunnissa, jolloin sähkökentän kukin karteesinen skalaarikomponentti pitää laskea erikseen derivoimalla potentiaalia kyseisen koordinaatin suhteen,

$$\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = -\nabla V. \quad (10.120)$$

*Sähkökenttä saadaan siis määritelmällä potentiaalin gradientti.*

Luvussa 4 tutkimme konservatiivisen voiman ja potentiaalienergian yhteyttä, ja johdimme silloin aivan vastaavan tuloksen, jonka mukaan konservatiivisen vuorovaikutuksen tuottama voima saadaan laskettua potentiaalienergian gradientin vastavektorina. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että konservatiiviseen voimakenttään kuten painovoimaan liittyy potentiaalienergia, ja tämä potentiaalienergia riippuu siitä, missä kappale on. Kappaleen siirtäminen muuttaa potentiaalienergiaa, ja kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa aina siihen suuntaan, johon kappaletta siirtämällä potentiaalienergia pienenee nopeimmin. Esimerkkinä tästä käytimme mäkeä: mäen korkeudelle  $h$  voidaan myös laskea (kaksiulotteinen) gradientti  $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{\mathbf{j}}$ , ja tämä gradientti osoittaa aina suuntaan, jossa mäki kohoaa jyrkimmin. Gradientin vastavektori  $-\nabla h$  osoittaa puolestaan suuntaan, jossa mäki laskee jyrkimmin.

Mäen korkeus  $h$ , potentiaalienergia  $U$  ja potentiaali  $V$  ovat kaikki skalaarikenttiä, joiden gradientti osoittaa jyrkimmän kasvun suunnan ja gradientin vastavektori jyrkimmän laskun suunnan. Korkeuden gradientin vastavektori  $-\nabla h$  on jyrkimmän alamäen suunta, potentiaalienergian gradientin vastavektori on potentiaalienergiaan liittyvä voima,  $\bar{\mathbf{F}} = -\nabla U$ , ja potentiaalin gradientin vastavektori on sähkökenttä  $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla V$ . *Potentiaali onkin sähkökentälle samantyyppinen ominaisuus kuin korkeus on painovoimakentälle.* Korkealle asetettu massallinen kappale pyrkii putoamaan alas (siis suuntaan johon korkeus pienenee) ja vapaassa pudotuksessa oleva kappale saa pudotessaan sitä suuremman liike-energian mitä korkeammalta kappale putoaa (siis mitä suurempi on korkeuden muutos). Samaan tapaan korkeaan potentiaaliin asetettu positiivinen varaus pyrkii "putoamaan" suuntaan, johon potentiaali pienenee, ja se saa sitä suuremman liike-energian, mitä suurempi on potentiaalin muutos. Kartalla yhtä korkealla olevat pistet muodostavat *korkeuskäyrän*, ja jyrkimmän laskun suunta on aina kohtisuorassa korkeuskäyrää vastaan (kuvat 10.37 (a) ja (b)). Aivan samaan tapaan sähkökentän graafisessa esityksessä samassa potentiaalissa olevat pistet muodostavat *tasapotentiaalkäyrän tai -pinnan*, ja sähkökenttä on aina kohtisuorassa tasapotentiaalkäyrää vastaan (kuvat 10.37 (c) ja (d)). Tämä korkeuden ja potentiaalin välinen analogia on niin vahva, että fysiikassa puhutaankin tavallisesti korkeasta ja matalasta potentiaalista eikä suuresta tai pienestä.

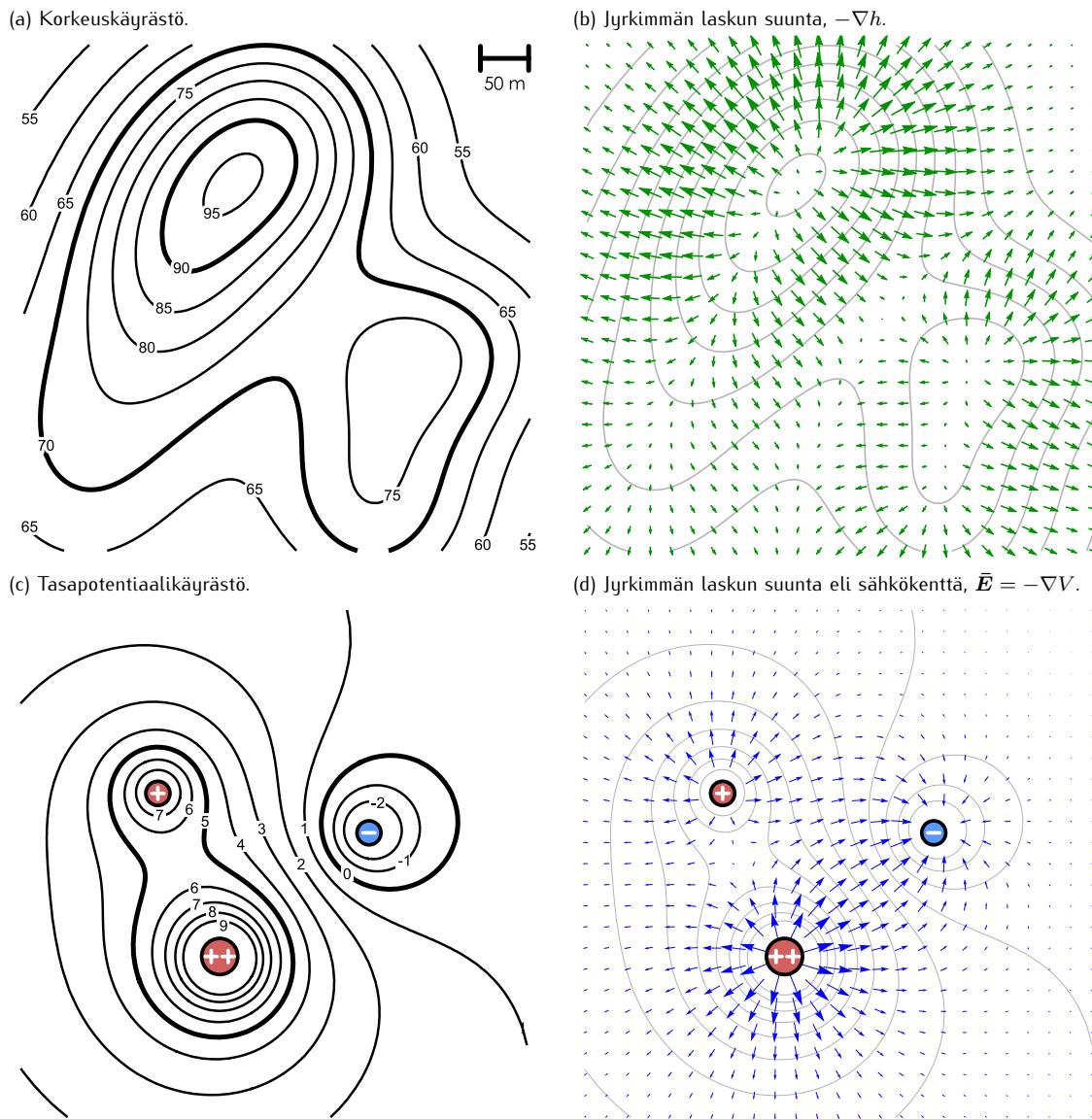


**10.38** Mihin suuntaan negatiivinen varaus pyrkii "putoamaan" (a) sähkökentän suhteen ja (b) potentiaalin suhteen?

Korkeutta, potentiaalienergiaa ja potentiaalia yhdistää myös se, että millään näistä ei ole absoluuttista nollakohtaa. Korkeuden nollatasoksi voidaan valita esimerkiksi merenpinnan taso, mutta tämä on vain yksi mahdollinen valinta. Samoin potentiaalin nollapisteeksi voidaan valita äärettömän kaukana oleva piste,

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.37: Maaston korkeus  $h$  esitetään kartioissa korkeuskäyrillä. Samalla tavalla potentiaali  $V$  esitetään tasapotentiaalikäyrillä ja -pinoilla. Varausten lähellä potentiaali muuttuu jyrkästi ja tasapotentiaalikäyrät olisivat hyvin lähellä toisiaan. Tämän vuoksi kuvasta on jätetty piirtämättä hyvin suuria ja pieniä potentiaaleja kuvaavat käyrät. Paksumalla viivalla piirrettyihin käyriin ei liity mitään erikoista. Nämä on piirretty paksulla viivalla vain siksi, että viivojen hahmottaminen olisi helpompaa.



mutta tämäkin on vain valinta. Korkeuden ja potentiaalin ero kahden pisteen välillä on kuitenkin absoluutinen. Esimerkiksi huoneen lattian ja katon "korkeuden" arvo riippuu siitä, valitaanko korkeuden nollataso merenpinnan tai vaikkapa lattian tasoon. Katon ja lattian välinen korkeusero ei kuitenkaan riipu nollatasosta valinnasta mitenkään. Aivan samaan tapaan minkään yksittäisen avaruuden pisteen A potentiaalilla  $V_A$  ei ole yksikäsiteistä arvoa, koska potentiaalin nollakohta voidaan valita. Kahden pisteen, A ja B, potentiaalien ero

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A \quad (10.121)$$

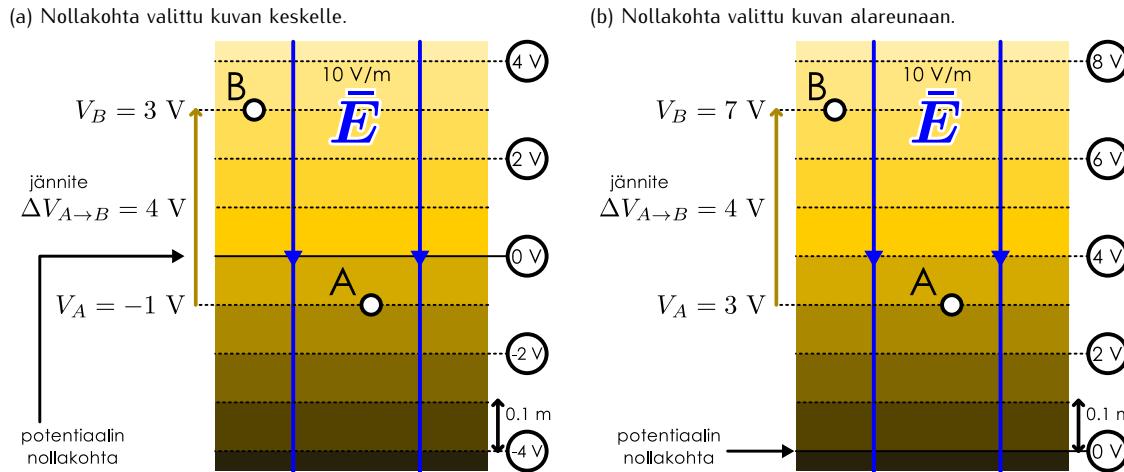
ei kuitenkaan riipu nollakohdan valinnasta mitenkään. Potentiaaliero on siis mitattavissa oleva suure, mutta potentiaali ei. Tämän vuoksi potentiaalierolle onkin annettu myös erikoisnimi **jännite**.

Potentiaali kertoo systeemin potentiaalienergian, kun systeemissä olevaan sähkökenttään tuodaan varaus  $q_{\text{testi}}$ . *Jännite puolestaan kertoo systeemin potentiaalienergian muutoksen, kun varaus siirretään pisteestä A pisteesseen B,*

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = q_{\text{testi}} V_B - q_{\text{testi}} V_A = q_{\text{testi}} (V_B - V_A) = q_{\text{testi}} \Delta V_{A \rightarrow B}. \quad (10.122)$$

Jännitteellä on sama yksikkö kuin potentiaalilla, voltti, ja jos pisteen A ja B välinen jännite on yksi voltti, systeemin potentiaalienergia muuttuu yhden joulen, kun yhden coulombin varaus siirryy pistestä A pistee-

Kuva 10.38: Potentiaalin arvot riippuvat nollakohdan valinnasta. Siksi yksittäisten pisteiden potentiaalien arvoilla ei ole fysiikalista merkitystä. Kahden pisteen potentiaalien ero eli jännite on kuitenkin nollakohdan valinnasta riippumaton suure.



seen B. Kun yksi *alkeisvaraus e* siirtyy yhden voltin jännitteeen yli, potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = e\Delta V = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (10.123)$$

Tätä energiamäärää kutsutaan **elektronivoltiksi** ja sitä merkitään  $1 \text{ eV} = e \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . Kyseessä on hyvin pieni *energian* yksikkö, mutta esimerkiksi atomiytimiin sitoutuneiden elektronien energiat ovat samaa suuruusluokkaa, ja siksi tämä yksikkö on tavallinen atomien ja alkeishiukkasten fysiikassa.



**10.39** Selitä oman sanoin, miten potentiaali ja sähkökenttä liittyvät toisiinsa. Mitä sähkökenttä kertoo potentiaalista tai sen muutoksesta ja mitä potentiaali kertoo sähkökentästä tai sen muutoksesta? Jos tunnet yhden, miten lasket toisen? Miksi potentiaalia voi pitää varaukselle hiukan samanlaisena suureena kuin korkeutta massalliselle kappaleelle?

### esimerkki 10.5

### Kenttä ja potentiaali

Pisteiden A ja B välinen etäisyys on 2.0 metriä. Pisteessä A potentiaali on 20 V. Sähkökenttä osoittaa pisteestä A kohti pistettä B. Kenttä ei ole vakio vaan se voimistuu pistettä B lähestyttäessä niin, että voimakkuus on pisteen A kohdalla 10 V/m ja pisteen B kohdalla 15 V/m. Mikä on pisteen B potentiaali?

**TILANNE** Valitaan origoksi piste A ja asetetaan  $x$ -akseli kohti pistettä B, jolloin  $x_B = 2.0 \text{ m}$ . Merkitään potentiaalia A:ssa  $V_A = 20 \text{ V}$ . Emme tiedä, miten sähkökentän voimakkuus muuttuu pisteiden välillä, joten tehtävää ei voi ratkaista täsmällisesti. Jotta saamme jonkinlaisen arvion, oletetaan kentän voimistuvan tasaisesti A:sta kohti B:tä siirryttäässä.

**SUUNNITELMA** Sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienemmissuunnan, joten potentiaali pienenee A:sta B:hen siirryttäässä ja B:n potentiaali on siis pienempi kuin A:n. Kentän voimakkuus kertoo potentiaalin muutoksen jyrkkyyden. Nyt sähkökentän voimakkuus pisteiden A ja B välillä on keskimäärin noin  $E_{x,\text{keskiarvo}} = 12.5 \text{ V/m}$ , joten potentiaali laskee keskimäärin 12.5 voltia jokaista metriä kohden kentän suuntaan kuljettaessa. Kahden metrin matkalla kokonaismuutos on siis 25 voltia, eli pisteen B potentiaali on

$$V_B = V_A + \Delta V_{A \rightarrow B} = V_A - E_{x,\text{keskiarvo}} \Delta x_{A \rightarrow B} = 20 \text{ V} - 12.5 \text{ V/m} \cdot 2 \text{ m} = -5 \text{ V}. \quad (10.124)$$

Täsmällisesti potentiaalin muutos saadaan sähkökentän integraalina.

**RATKAISU** Jos sähkökenttä muuttuu tasaisesti tarkastelupisteiden välillä, sitä kuvaava funktio  $E_x(x) = 10 \text{ V/m} + (2.5 \text{ V/m}^2)x$ , sillä tälle pätee  $E_x(x_A) = 10 \text{ V/m}$  ja  $E_x(x_B) = 15 \text{ V/m}$ . Potentiaali on siis

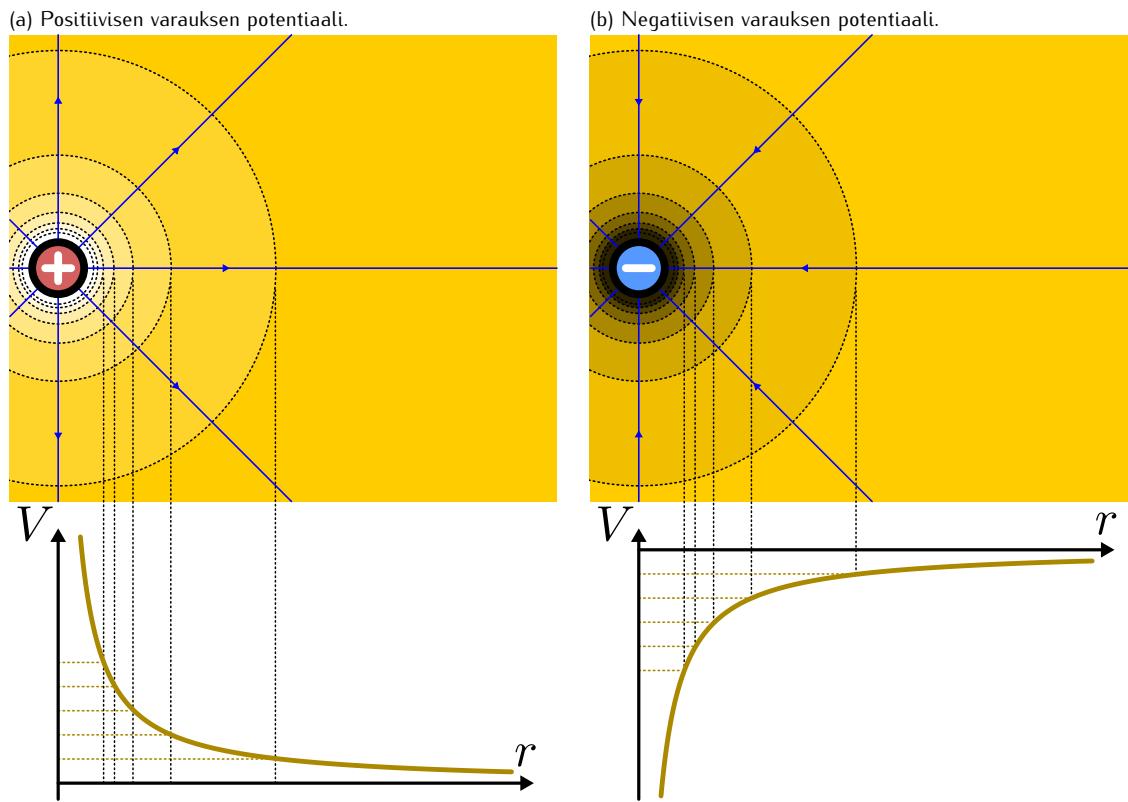
$$V(x) = V_A - \int_{x_A}^x E_x dx = 20 \text{ V} - (10 \text{ V/m})x - (1.25 \text{ V/m}^2)x^2, \quad (10.125)$$

mistä pisteen B potentiaaliksi ratkeaa  $V_B = V(x_B) = -5 \text{ V}$ .

**ARVIOINTI** Pisteiden A ja B väliseksi potentiaalieroksi saatuiin 25 volttia ensin yksinkertaisesti kertomalla sähkökentän voimakkuuden keskiarvo pisteiden välisellä etäisyydellä ja sitten hiukan monimutkaisemmin integroimalla sähkökentän lauseketta. Koska tulokset ovat samat, ne lienevät oikein. Huomaa erityisesti, että koska kenttä osoittaa A:sta kohti B:tä, potentiaalin täytyy olla B:ssä alempi kuin A:ssa.

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

Kuva 10.39: Pistevarauksen potentiaali esitettyynä sekä tasapotentiaalipinnoin etäisyyden funktiona, kun potentiaalin nollakohta on valittu äärettömän kauas. Positiivisen pistevarauksen lähellä potentiaali lähestyy ääretöntä ja negatiivisen varauksen lähellä negatiivista ääretöntä. Tämä näkyy tasapotentiaalikäyrissä niin, että tasaaisin välein piirretut käyrät ovat sitä lähempänä toisiaan, mitä lähempänä varausta ollaan.



### Varausten luoma potentiaali

Sähkökenttä ja potentiaali siis riippuvat toisistaan, ja kun niistä tunnetaan yksi, toinen voidaan laskea sen perusteella. Jos sähkökenttä tunnetaan, potentiaali saadaan laskettua viivaintegraalina yhtälön (10.118) mukaisesti. Jos taas potentiaali tunnetaan, sähkökenttä saadaan määritettyä gradienttina yhtälön (10.120) perusteella. Gradientin laskeminen tarkoittaa potentiaalfunktion derivointia eri koordinaattien suhteeseen, mikä on yleensä melko suoraviivaista. Integrointi voi puolestaan olla varsin vaikeaa, joten usein on helpompaa laskea sähkökenttä potentiaalistaa kuin päinvastoin potentiaali sähkökentstä. Potentiaalin avulla voidaan siis selvittää helposti sekä systeemin potentiaalienergia että sähkökenttä, ja niinpä *potentiaali on usein kaikkein käyttökelpoisin tapa kuvata varausten luomia sähkökenttiä*. Tämän vuoksi onkin syytä tutkia, kuinka voimme laskea varausten tuottaman potentiaalin suoraan selvittämättä ensin sähkökenttää.

Aloitetaan tutkimalla yhden pistevarauksen (A) systeemiä. Potentiaali kertoo meille mikä systeemin potentiaalienergia  $U$  olisi, jos systeemiin tuotaisiin toinenkin varaus  $q_{\text{testi}}$ , sillä

$$U = q_{\text{testi}}V. \quad (10.126)$$

Toisaalta jos varauksen A luo tuodaan testivaraus, systeemistä tulee kahden pistevarauksen systeemi, jonka potentiaalienergian osaamme jo laskea lausekkeen (10.108) avulla. Jos siis testivaraus asetetaan etäisyydelle  $r_{A \rightarrow \text{testi}}$ , systeemin potentiaalienergia on

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_A q_{\text{testi}}}{r_{A \rightarrow \text{testi}}}, \quad (10.127)$$

ja varauksen A luoma potentiaali on näin ollen

$$V = \frac{1}{q_{\text{testi}}} U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow \text{testi}}}. \quad (10.128)$$

Intuitiivisesti voisi arvata, että usean pistevarauksen potentiaali saadaan laskemalla yksittäisten varausten potentiaalit yhteen, ja näin todella on. Tämä johtuu sähkökenttien superpositioperiaatteesta. Jos nimittäin

systeemissä on useita sähkövaraauksia  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , ja kukaan varaus luo yksin sähkökentän  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  jne., näin luovat yhdessä sähkökentän

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_N = \sum_{i=1}^N \bar{E}_i. \quad (10.129)$$

Yhtälön (10.118) perusteella tähän sähkökenttään liittyvän potentiaalin muutos saadaan sähkökentän viivaintegraalina,

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = - \int \bar{E}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = - \int (\bar{E}_1 + \dots + \bar{E}_N) \cdot d\bar{r} = - \int \sum_{i=1}^N \bar{E}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.130)$$

Integraali on kuitenkin lineaarinen laskutoimitus, joten summan voi siirtää integraalin ulkopuolelle säännön  $\int(a+b)dx = \int adx + \int bdx$  avulla. Näin ollen potentiaalin muutoksen voi kirjoittaa myös muotoon

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = - \int \bar{E}_1 \cdot d\bar{r} - \dots - \int \bar{E}_N \cdot d\bar{r} = - \sum_{i=1}^N \int \bar{E}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.131)$$

Näin saimme jaettua usean varauksen yhdessä tuottaman sähkökentän integraalin osiin niin, että voimme laskea erikseen jokaisen varauksen yksin tuottaman sähkökentän integraalin. Nämä integraalit kuvaavat kuitenkin yhtälön (10.118) perusteella kunkin yksittäisen varauksen tuottamaa potentiaalin muutosta erikseen,

$$\Delta V_i = - \int \bar{E}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.132)$$

Niinpä kaikkien varaus yhdessä tuottaman potentiaalin muutokset saadaan laskettua kunkin varauksen yksinään tuottaman potentiaalin muutosten summana,

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_N = \sum_{i=1}^N \Delta V_i. \quad (10.133)$$

Tämä tulos pätee kaikille varauksille. Mutta erityisesti jos varaukset  $q_i$  ovat pistemäisiä ja potentiaalin nol-lakohtaan valitaan äärettömän kauas kaikista varauksista, kunkin pistevarauksen potentiaalille voidaan käyttää lauseketta (10.128), ja potentiaalille saadaan tarkastelupisteessä P lauseke

$$V_{\text{kokonais}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{q \rightarrow P}}, \quad (10.134)$$

missä  $r_{q \rightarrow P}$  on etäisyys varauksesta  $q_i$  tarkastelupisteeseen P.



**10.40** Varaus 1 nC on tason pisteessä (0, 1) (metrejä) ja varaus -2 nC on pisteessä (2, 0). Mikä on sähkökentän voimakkuus ja potentiaali origossa?

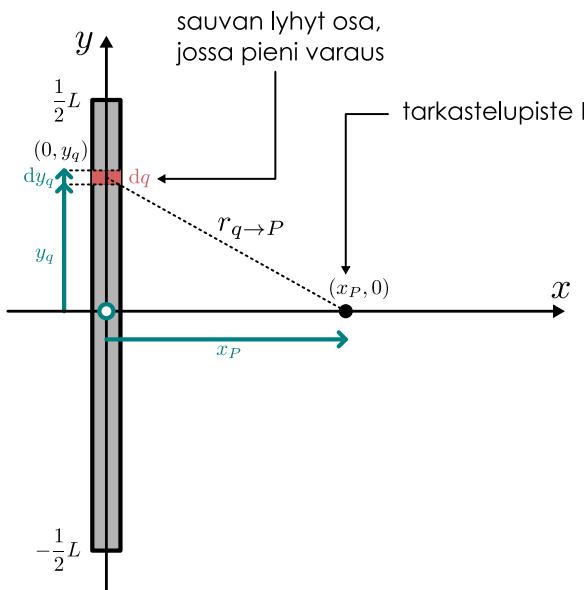
Tämän päättelyn perusteella voimme laskea myös suuren varattujen kappaleiden luoman potentiaalin samaan tapaan kuin niiden sähkökentänkin. Jos varattu kappale on pieni ja sitä tarkastellaan kaukaa, sille voidaan käyttää pistevarausmallia. Tällöin kappaleen luomaa potentiaalia kuvaava lauseke (10.128). Jos kappale on suuri, pistevarausmalli ei toimi, mutta kappale voidaan silti jakaa pieniin osiin, ja näitä osia voidaan kuvata pistevarauksina  $q_i$ . Tällöin voimme valita avaruudesta tarkastelupisteen, laskea kunkin pistevarauksen tuottaman potentiaalin tässä pisteessä erikseen, ja laskea lopuksi nämä potentiaalit yhteen. Kun osien määrä lähestyy ääretöntä ja niiden varaus nolla,  $q_i \rightarrow dq$ , summa muuttuu integraaliksi

$$V_{\text{kokonais}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}}. \quad (10.135)$$

Laskimme aikaisemmin luvussa 10.2 esimerkkinä L-pituisen sauvan sähkökentän jakamalla sauvan osiin ja laskemalla integroiden kaikkien osien tuottamat sähkökentät yhteen. Lasketaan nyt integroiden saman sauvan potentiaali sauvan keskipisteen kautta kulkevalla sauvaan nähden kohtisuoralla suoralla. Käytetään samaa geometriaa ja merkintöjä kuin aikaisemmin: y-askeli kulkee sauvan suuntaan ja origo on sauvan keskipisteessä. Tarkastelupisteen koordinaatit ovat  $(x_P, 0)$  ja varatun sauvan pienien osien koordinaatit  $(0, y_q)$ . Osan pituus on  $dy_q$  ja sen varaus on  $dq = \lambda dy_q = (Q/L)dy_q$ . Etäisyys varatusta osasta pisteeeseen P on

$$r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2}. \quad (10.136)$$

Kuva 10.40: Sauvan pienen osan tuottaman potentiaalin laskemisessa tarvittava geometria.



Sijoittamalla nämä tekijät lausekkeeseen (10.135) potentiaaliksi pisteessä P saadaan integraali

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy_q}{\sqrt{x_P^2 + y_q^2}}. \quad (10.137)$$

Funktion  $f(y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$  integraalifunktio on  $F(y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + y) + C$ , joten potentiaaliksi saadaan

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left|_{-L/2}^{L/2} \right. \ln \left( \sqrt{x_P^2 + y_q^2} + y_q \right) \quad (10.138)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[ \ln \left( \sqrt{x_P^2 + L^2/4 + L/2} \right) - \ln \left( \sqrt{x_P^2 + L^2/4} - L/2 \right) \right] \quad (10.139)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{\sqrt{x_P^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{x_P^2 + L^2/4} - L/2}. \quad (10.140)$$

Tämä on siis  $L$ -säteisen tasaisesti varatun sauvan potentiaali kohtisuoralla etäisyydellä  $x_P$  sauvan keskipisteestä.



**10.41** Derivoi funktio  $F(y)$  muuttujan  $y$  suhteeseen ja osoita, että tulos on  $f(y)$ . Tämä todistaa, että  $F$  on funktion  $f$  integraalifunktio, sillä integrointi ja derivointi ovat käänteisoperaatiot.

Laskussa esiintyvä integraali ei ole aivan helppo laskea, mutta integraalifunktion voi etsiä taulukkokirjoista tai laskea tietokoneella. Integraalin muodostaminen oli kuitenkin nyt huomattavasti helpompaa kuin sähkökenttää laskettaessa, koska *potentiaali on skalaari ja sähkökenttä on vektori*. Sähkökentien yhteenlaskussa täytyy huomioida sähkökenttävektorien komponentit, mutta potentiaalien yhteenlaskussa ei, koska potentiaalilla ei ole komponentteja. Tämä näkyy myös kuvissa 10.16 ja 10.40, joissa on esitetty sähkökentän ja potentiaalin laskussa tarvittava geometria. Sähkökentän määritysessä tarvittu kuva 10.16 on monimutkaisempi, sillä siihen on täytynyt piirtää myös vektoreiden komponentteja ja yhdenmuotoisia kolmioita.



**10.42** Sauvan sähkökenttä on  $x$ -akselilla symmetriana perustella  $x$ -suuntainen, ja sähkökentän  $x$ -komponentti pisteessä P on yhtälön (10.120) mukaisesti potentiaalin derivaatta tarkastelupisteen  $x_P$ -koordinaatin suhteeseen,  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x_P}$ . Laske sähkökenttä tämän säännön avulla ja vertaa aikaisemmin laskettuun tulokseen (10.45).

## esimerkki 10.6

## Kiekon potentiaali

Mikä on tasaisesti varatun kiekon (säde  $R$ , varaus  $Q$ ) potentiaali kiekon symmetria-akselille etäisyydellä  $x$  kiekon keskipisteestä?

**TILANNE** Kyseessä on sama tilanne kuin esimerkissä 10.3. Lasketaan jälleen ensin ohuen renkaan (säde  $r$ , varaus  $q$ ) tuottama potentiaali renkaan symmetria-akselilla. Kiekon potentiaali voidaan laskea jakamalla kiekko ohuksi renkaaksi ja summaamalla näiden renkaiden potentiaalit yhteen.

**SUUNNITELMA** Lasku tapahtuu samalla periaatteella kuin esimerkissä 10.3 paitsi että nyt laskemme potentiaalia sähkökentän sijaan. Koska potentiaali on skalaari, vektoreiden komponenteista ei tarvitse välittää.

Tarkastellaan renkaan osaa A, jonka pituus on  $dl$  ja varaus  $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi r} dl$ . Pistevaraumallin mukaisesti varaus luo pisteeseen P potentiaalin

$$dV_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s}. \quad (10.141)$$

Jaetaan sitten kiekko renkaisiin, ja tarkastellaan  $r$ -säteistä ja  $dr$ -paksuista rengasta, jonka varaus on

$$dQ = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} dA. \quad (10.142)$$

Kokonaispotentiaali saadaan laskemalla kaikkien renkaiden luomat potentiaalit yhteen eli integroimalla koko kiekon yli.

**RATKAISU** Tarkastellun renkaan osan luoma potentiaali on

$$dV_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dl. \quad (10.143)$$

Koko renkaan potentiaali saadaan integroimalla muuttuja  $l$  renkaan ympäri eli arvosta  $l = 0$  arvoon  $l = L = 2\pi r$ . Integroitava funktio on jälleen vakio, koska renkaan kaikki pistet ovat yhtä kaukana pisteestä P,

$$V_{\text{rengas}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + r^2}}. \quad (10.144)$$

Tämän tuloksen avulla saamme laskettua kiekon potentiaalin. Tarkastellun  $dr$ -levyisen renkaan varaus on

$$dQ = Q \frac{2r}{R^2} dr, \quad (10.145)$$

joten sen luoma potentiaali on lausekkeen (10.144) perusteella

$$dV_{r \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{2r}{R^2 \sqrt{x^2 + r^2}} dr. \quad (10.146)$$

Kokonaispotentiaali saadaan integroimalla muuttuja  $r$  koko kiekon yli eli arvosta  $r = 0$  arvoon  $r = R$ . Tässä integrointi onnistuu huomaamalla, että funktio  $f(r) = (x^2 + r^2)^{1/2}$  derivaatta on  $f'(r) = 1/2 \cdot 2r \cdot (x^2 + r^2)^{-1/2}$ , joten funktio  $f'(r) = r(x^2 + r^2)^{-1/2}$  integraalin täytyy olla  $f(r) = (x^2 + r^2)^{1/2}$ , ja näin saamme tuloksen

$$V_{\text{kiekko}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \Big|_0^R \sqrt{x^2 + r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( \sqrt{x^2 + R^2} - x \right). \quad (10.147)$$

Mathematica:

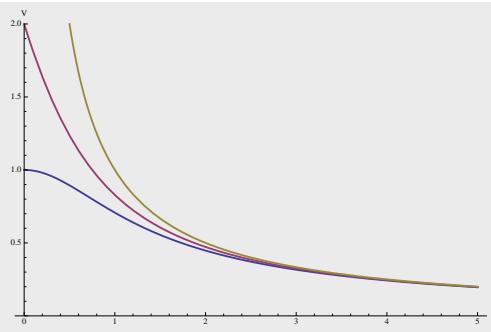
```
(* vakiot *)
L = 2 Pi r; A = Pi R^2; s = Sqrt[x^2 + r^2]; lambda = q/L; sigma = Q/A;

(* pistevaraus ja renkaan potentiaali *)
dVpiste = k q/s /. q -> lambda;
vRengas = Integrate[dVpiste, {l, 0, L}]
(k q)/Sqrt[r^2 + x^2]

(* kiekon potentiaali *)
dVkiekko = vRengas /. q -> Q L/A;
vKiekko =
Integrate[dVkiekko, {r, 0, R},
Assumptions -> {x > 0, R > 0, k > 0, Q > 0}]
(2 k Q (-x + Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2

(* sahkokentta *)
eKiekko = -D[vKiekko, x]
-((2 k Q (-1 + x/Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2)

(* potentiaali etäisyyden funktiona *)
R = 1; k = 1; Q = 1; q = 1; r = 1;
Plot[{vRengas, vKiekko, 1/x}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {0, 2},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x", "V"}]
```



**ARVIOINTI** Potentiaalin kuvaajasta nähdään potentiaalin heikkenevän asymptoottisesti nopeudella  $V \sim 1/x$ , kun  $x$  on suuri. Tämä on järkevää, koska kaukaa katsoen kiekko näyttää pistevaraukselta, jonka potentiaali on käänän verrannollinen etäisyyteen. Lisäksi sähkökenttä on potentiaalin gradientin vastavektori, ja erityisesti sähkökentän  $x$ -komponentti on potentiaalin  $x$ -derivaatan vastaluku,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (10.148)$$

Funktion  $V_{\text{kiekko}}$  derivaatta on

$$-\frac{\partial V_{\text{kiekko}}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + R^2)^{1/2} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \quad (10.149)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2 + R^2)^{-1/2} - 1 \right) \quad (10.150)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right), \quad (10.151)$$

mikä on sama funktio kuin esimerkissä 10.3 laskettu sähkökenttä  $E_{x,\text{kiekko}}$ . Niinpä laskettu sähkökenttä ja potentiaali vastaavat toisiaan kuten pitääkin. Huomaa myös, että on helpompi laskea potentiaali ja päättellä siitä sähkökenttä kuin laskea sähkökenttä ja päättellä siitä potentiaali.

## 10.5 Sähkövarausten ja -kentän manipulointi

Tähän mennessä olemme pääasiassa tutkineet sähkövarausten ja -kentien perusomaisuuksia sekä tapoja kuvata näitä suureita. Olemme oppineet määrittämään varausten luoman sähkökentän ja potentiaalin, ja tiedämme myös millaisen voiman sähkökenttä kohdistaa varattuihin kappaleisiin sekä mikä on tällöin sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia. Sähköisistä ilmiöistä olemme tutustuneet staattiseen varautumiseen, polarisaatioon sekä varautuneiden kappaleiden välisiin vuorovaikutuksiin.

Jotta sähköisistä ilmiöistä olisi joitain hyötyä, niitä pitää kuitenkin pystyä hallitsemaan. Tavoitteenaamme onkin oppia ymmärtämään, miten varaukset asettuvat erilaisissa materiaaleissa ja rakenteissa, ja millaisia sähkökenttiä näin voidaan luoda. Luvun pääteksi tutustumme yksinkertaiseen sähkötekniiseen komponenttiin, kondensaattoriin, jolla voidaan varastoida sähkövarausta ja sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa.

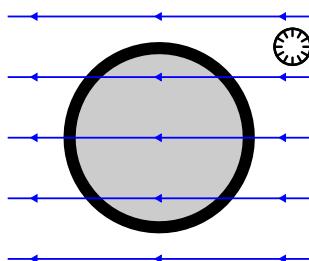
### Aineet sähkökentässä

Aloitimme sähköoppii tutustumisen tutkimalla varattujen ja neutraalien kappaleiden välisiä vuorovaikutuksia, jolloin havaitsimme varattujen kappaleiden vetävän puoleensa sekä vastakkaismerkkisesti varautuneita että neutraaleja kappaleita. Neutraalitkin kappaleet nimittäin polarisoituvat varatun kappaleen läheisyydessä niiden sisältämien positiivisten ja negatiivisten varausten siirtyessä, jolloin nekin kokevat sähköisen vuorovaikutuksen. Selitimme polarisaation alunperin tarkastelemalla erilaisten varausten välisiä voimia, mutta nyt tiedämme, että näitä voimia välittää sähkökenttä. Kappaleet ja materiaalit eivät siis oikeastaan polarisoidu siksi, että niiden lähellä on toinen, varattu kappale, vaan siksi että ne joutuvat tämän varatun kappaleen luomaan sähkökenttään. Polarisaatiota onkin parempi tarkastella nimenomaan sähkökentän ja aineen välisenä vuorovaikutuksena.

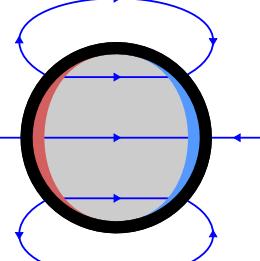
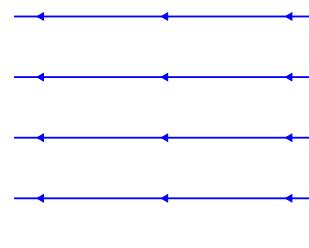
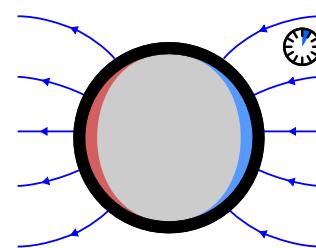
Kuvassa 10.41 on esitetty, kuinka johdekappale (metallikuula) reagoi ulkoiseen sähkökenttään, missä "ulkoinen" tarkoittaa sitä, että sähkökentän luo jokin kentässä olevasta kappaleesta riippumaton ja tarkasteltavan syteemin ulkopuolin varaus. Kun ulkoista sähkökenttää ei ole, kuula on täysin neutraali ja polarisoitumaton. Ajatellaan sitten, että kuulan ympärille luodaan yhtäkkiä homogeeninen sähkökenttä, joka ei ilmestymisensä jälkeen enää muutu. Sähkökenttä voisi syntyä esimerkiksi niin, että kuulan lähelle tuodaan nopeasti muita varauksia, mutta periaatteessa kentän syntytavalla ei ole mitään väliä, sillä kuula reagoi

Kuva 10.41: Johdekappale ulkoisessa kentässä. Kenttä liikuttaa varauksenkuljettajia ja johde polarisoituu. Varaukset ovat tasapainossa, kun johteen sisällä ei ole lainkaan sähkökenttää. Tällöin johteen polarisaation luoma kenttä kumoaa ulkoisen kentän johteen sisällä täydellisesti.

(a) Kenttä ilmestyy, varaus ei ole vielä siirtynyt.



(b) Varaus on siirtynyt, johteen sisällä ei ole kenttää.



vain kenttään tietämättä lainkaan, mistä kenttä on peräisin. Sähkökenttä läpäisee kuulan, jolloin sen vapaisiin varauksenkuljettajiin kohdistuu sähköinen voima. Metallikuulassa varauksenkuljettajat ovat elektroneja, joihin negatiivisesti varattuina hiukkasina kohdistuu voima sähkökenttään nähdien pääinvastaiseen suuntaan. Tähän suuntaan elektronit myös alkavat liikkua, jolloin kuulan vastakkaisille reunoille syntyy positiivisen ja negatiivisen varauksen alueet eli kuula polarisoituu.

Polarisoituvan kuulan positiivisesti ja negatiivisesti varatut reunat synnyttävät luonnollisesti myös oman sähkökenttänsä, ja kuulassa sekä sen ulkopuolella vallitseva kokonaissähkökenttä on alkuperäisen, ulkoisen sähkökentän ja polarisoituneen kuulan synnyttämien sähkökenttien superpositio. Kuvassa 10.41 ulkoinen sähkökenttä osoittaa oikealta vasemmalle, jolloin kuulan vasempaan reunaan kertyy positivista ja oikeaan reunaan negatiivista varausta. Näiden varausten synnyttämä sähkökenttä osoittaa positiivisesti varatusta reunasta negatiivisesti varattuun reunaan eli kuvassa vasemmalta oikealle, ulkoista sähkökenttää vastaan. Nämä kuulan polarisoituminen *heikentää sähkökenttää kuulan sisällä*. Koska aine on johde, varaukset liikkuvat siinä niin kauan kuin sen sisällä on sähkökenttä. Polarisaatio siis vahvistuu, jolloin sähkökenttä kuulan sisällä heikkenee entisestään. Tämä johtaa siihen, että *lopulta polarisaation tuottama sähkökenttä kumoaa ulkoisen kentän täydellisesti kuulan sisällä*. Tällöin varauksenkuljettajiin kohdistuva voima on nolla, eikä varausta siirry enempää.

Käytännössä tämä prosessi tapahtuu johteissa hyvin nopeasti. Esimerkiksi metallieissa on paljon vapaita elektroneja, ja elektronien pienikin siirtymä tuottaa varsin voimakkaan polarisaation ja sähkökentän. Niinpä ulkoiseen sähkökenttään tuotu metallikappale polarisoituukin lähes välittömästi. Lopputulos on kuitenkin aina sama: lopputen lopuksi *ulkoinen sähkökenttä ei pääse metallin tai minkään muunkaan johteen sisään*. Nimittäin niin kauan kuin metallin sisällä on sähkökenttä, sen elektroneihin kohdistuu voima, joka pitää elektronit liikkeessä. Kun elektronit lopulta löytävät tasapainon, metallin sisään ei voi jäädä sähkökenttää. Käytännössä tällainen tasapaino löytyy hyvin nopeasti.

Polarisoituneen kuulan varautuneet sivut tuottavat tienkin sähkökentän myös kuulan ulkopuolelle kuten kuvaan 10.41 (b) on piirretty. Täälläkin kenttäviivat lähevät positiivisista varauksista ja päättyyvät negatiivisiin varauksiin, mutta nyt kuulan ulkopuolelta kiertäen. Metallin ulkopuolella polarisaation tuottama kenttä ei kuitenkaan kumoaa ulkoista kenttää vaan muuttaa sitä vain hiukan. Itse asiassa kuvasta nähdään, että kokonaissähkökenttää kuvaavat kenttäviivat taipuvat kohti metallin pintaa. Nämä käy kaikissa johteissa, ja selitys on sama kuin sillä, miksei johteen sisällä voi olla sähkökenttää. Jos johtavan kappaleen pinnalla olisi nimittäin pinnan suuntainen sähkökenttä, tämä kenttä kohdistaisi pinnan varauksenkuljettejiin voiman, ja nämä lähisivät liikkeelle. Tasapainossa varauksenkuljettajat ovat kuitenkin myös pinnalla paikoillaan, joten *johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista sähkökenttää*.

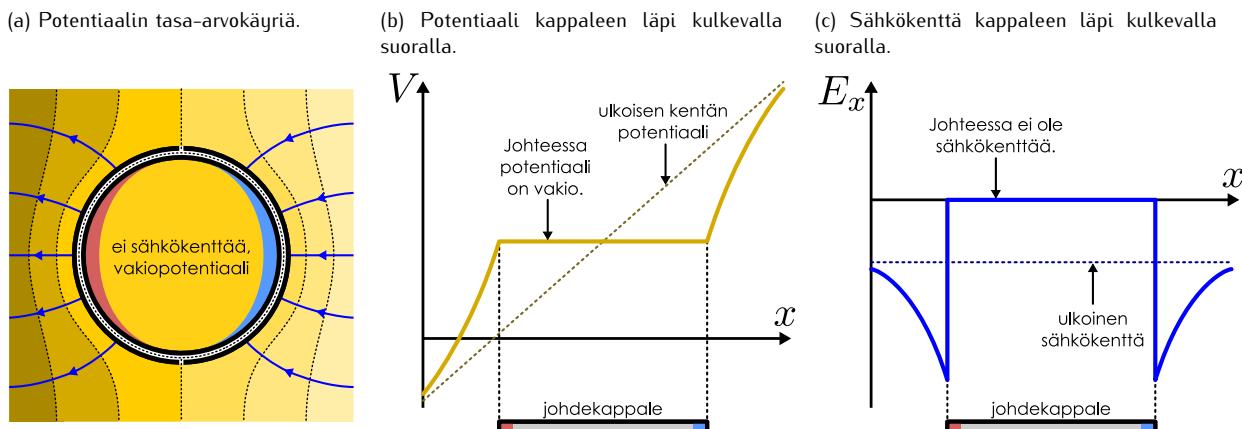


**10.43** Miksi johteen pinnalla sen ulkopuolella voi olla pintaa vasten kohtisuora sähkökenttä? Toisin sanoen, miksi yllä esitetty päättely, jonka mukaan johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista kenttää, ei päde pintaa vasten kohtisuoralle kentälle?

Edellä tarkasteltua sähkökenttää vastaava potentiaali on piirretty kuvan 10.42 (a) tasapotentiaalikäyrin. Sähkökenttä osoittaa aina pieneneväntä potentiaalin suuntaan, joten ulkoisen kentän potentiaali on kuvan vasemmassa reunassa pieni ja oikeassa reunassa suuri. Kun metalli on polarisoitunut, sähkökenttä sen sisällä on nolla. Toisaalta sähkökenttä kertoo potentiaalin muuttumisen suunnan, joten jos kenttää ei ole, potentiaalikäyrä ei muuta mihinkään suuntaan. *Johteessa potentiaali on siis vakio*. Potentiaalin ei kuitenkaan tarvitse olla nolla. Potentiaalin nollakohtahan on mielivaltainen, ja tässä tilanteessa nollakohdan voi valita muuallekin. Potentiaalin arvolla nolla ei ole mitään erityistä fysikaalista merkitystä, eikä se kerro sähkökentstä

## SÄHKÖVARAUS JA -KENTÄ

Kuva 10.42: Potentiaali ja sähkökenttä polarisoituneen joteen sisällä ja sen ympäristössä.



mitään. Erityisesti se, että potentiaali on nolla, ei tarkoita sähkökentän olevan nolla. Myös kään päinvastainen ei ole totta: nollakenttä ei tarkoita, että potentiaalin pitäisi olla nolla.

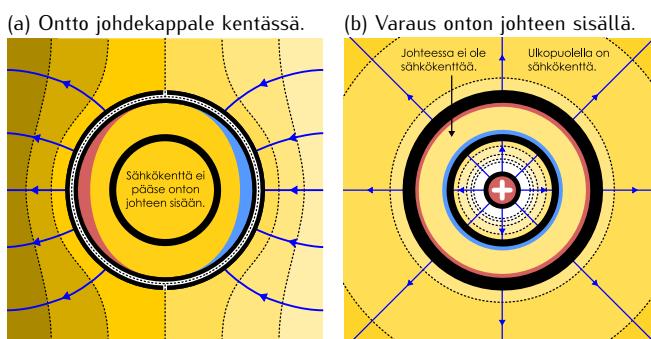
Kuvaan 10.42 (b) on piirretty potentiaalin profili kuulan läpi kulkevalla  $x$ -akselillla ja kuvaan 10.42 (c) sähkökentän komponentti tämän akselin suunnassa. Kuviin on piirretty katkoviivoin myös ulkoinen potentiaali ja sähkökenttä, ja nämä kertovat millainen kenttä olisi, jos metallikuula poistettaisiin. Kaukana kuulasta ulkoinen potentiaali ja todellinen potentiaali eivät poikkea paljonkaan toisistaan, koska polarisoituneen kuulan sähkökenttä heikkenee nopeasti kuulasta loittaaessa. Lähellä kuulaa potentiaali ja sähkökenttä kuitenkin poikkeavat ulkoisesta kentästä selvästi. Potentiaali on johteen sisällä vakio, joten sen kuvaaja on vaakasuora. Koska sähkökenttä on potentiaalin derivaatta, se voidaan määrittää graafisesti potentiaalin kuvaajasta tangentin kulmakertoimena. Vaakasuoralle kuvaajalle tämä on nolla, joten sähkökenttä on nolla johteen sisällä. Kuulan ulkopuolella lähellä johteen pintaa potentiaalin kuvaaja nousee jyrkästi, jolloin kuvaajan tangentin kulmakerroin on suuri ja sähkökenttä on siis ulkoista kenttää voimakkampi.

Potentiaalin kuvaaja muistuttaa vasemmalta oikealle kohoavaa mäkeä, ja potentiaalin sekä sähkökentän käytös voikin olla jälleen helpompi ymmärtää vertaamalla potentiaalia mäen korkeuteen ja sähkökenttää mäen jyrkkyyteen. Mäen korkeutta voidaan mitata vaikkapa merenpinnan suhteeseen, jolloin meren pinnalla korkeus on nolla. Jos ajattelemme potentiaalin kuvaajan esittävän mäkeä, merenpinta olisi siis  $x$ -akselilla. Selvästi kään rinteentä jyrkkyys meren pinnalla eli kuvaajan tangentin kulmakerroin ei kuitenkaan ole nolla. Potentiaalin jyrkkyyttä kuvaava sähkökenttä, joten myös kään sähkökenttän ei tarvise olla nolla, vaikka potentiaali olisikin nolla. Sen sijaan rinteentä jyrkkyys on nolla, kun mäessä on tasanne, sillä tasanteella korkeus on vakio. Samoin sähkökenttä on nolla, kun potentiaalin kuvaajassa on "tasanne" eli kun potentiaali on vakio.



**10.44** Mitataan korkeutta merenpinnan suhteeseen. Missä tilanteessa rinteentä jyrkkyys ja korkeus ovat yhtä aikaa nollia? Sitten meren pinta nousee. Miten korkeus ja rinteentä jyrkkyys muuttuvat? Millaista sähkökenttää ja potentiaalia nämä tilanteet vastaisivat?

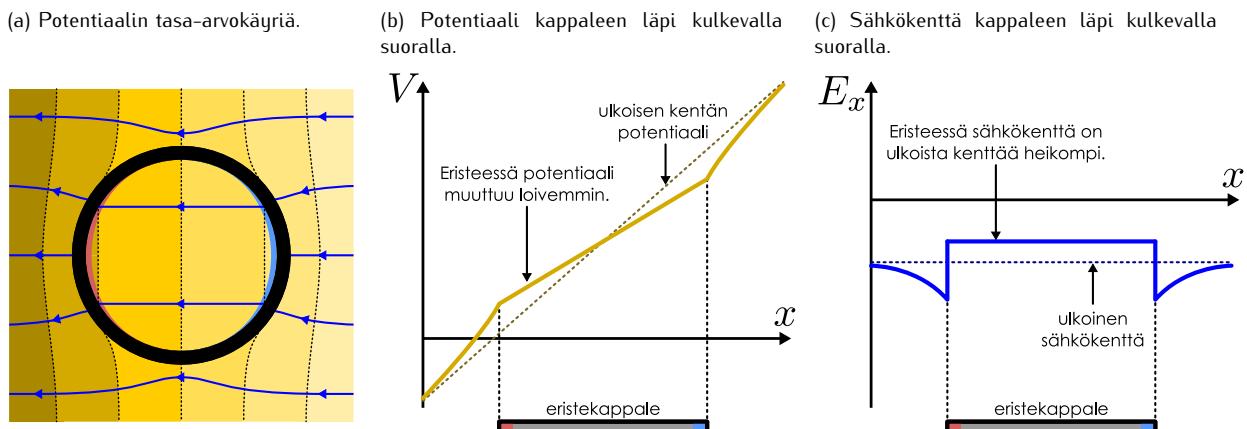
Kuva 10.43: Faraday'n häkki.



Siispä kun johdekappale on ulkiosessa sähkökenttää, johde polarisoituu aina niin, että sähkökenttä johteen sisällä häviää ja potentiaali on johteen sisällä kaikkialla vakio. Tämä tulos ei riipu mitenkään johteen muodosta, joten se pätee kaikenlaisille yhtenäisille johdekappaleille. Erityisesti tulos on voimassa myös *ontoille* kappaleille, ja tällä onkin itse asiassa tärkeä käytännön sovellus. Kuvaan 10.43 (a) on piirretty esimerkkinä ontto metallinen pallokuori ulkiosessa sähkökenttää. Pallo polarisoituu sähkökenttää, ja koska se on johde, varauksenkuljetajien täytyy asettua siinä niin, että metallissa ei ole sähkökenttää. Tällöin myös potentiaalin täytyy olla pallokuorella vakio. Jos

nyt pallon sisällä ei ole varauksia, ei ole mitään syytä, miksi potentiaali muuttuisi vakiopotentiaalissa olevan pallokuoren sisällä. Siispä **potentiaali on vakio myös pallokuoren sisällä**. Toisaalta potentiaalin ollessa vakio sähkökenttä on nolla, joten sähkökenttä on kuoren sisällä nolla. **Metallinen pallokuori siis estää ulkoisen**

Kuva 10.44: Potentiaali ja sähkökenttä polarisoituneen eristeen sisällä ja sen ympäristössä.



*sähkökentän pääsyn sisälleen.* Tätä ilmiötä kutsutaan *Faradayn häkiksi* (Michael Faradyn mukaan), ja sen avulla voidaan suojauduttaa ulkoisilta sähkökentiltä.

Faradayn häkkin sisällä voi toki olla sähkökenttiä, mutta näiden lähteiden täytyy olla häkin sisällä kuten kuussa 10.43 (b). Tässäkin tapauksessa pallokuoren täytyy olla vakiopotentiaalissa. Jos kuitenkin sähkökentän tuottava varaus on pallokuoren sisällä, polarisoituminen tapahtuu kuoren sisä- ja ulkopintojen välillä. Esimerkiksi kuussa pallon sisällä on positiivinen varaus, jolloin tämän varauksen sähkökenttä vetää kuoren sisäpinnalle negatiivisen varauksen ja ulkopinnalle jää vastavasti positiivinen varaus. Pallon sisäpinnan varaus tuottaa sähkökentän, joka kumoaa pallon sisällä olevan varauksen kentän täydellisesti johteen sisällä. Pallon ulkopinnan positiivinen varaus kuitenkin luo pallon ulkopuolelle samanlaisen kentän kuin mitä pallon sisällä oleva pisteverauskin tuottaa. Toisin sanoen pallon sisällä olevan varauksen synnyttämä sähkökenttä pääsee Faradayn häistikä ulos, vaikka ulkoinen kenttä ei pääsekaän häkkiin sisälle.

**10.45** Ajattele kuavaan 10.43 (b) Gaussian pinta, jonka sisään jää pallon sisäpinta mutta ei ulkopintaan.



- Mikä on sähkövuo tämän pinnan läpi?
- Mikä on pinnan sisältämä kokonaismvaraus?
- Mitä tämän perusteella voidaan päätellä pallon sisällä olevan varauksen ja pallon sisä- ja ulkopinnoille kerääntyneiden varausten suuruuksista?

Myös eristeet polarisoituvat ulkoisessa sähkökentässä, mutta koska niissä ei ole vapaasti liikkuvia varauksenkuljettajia, polarisaatio jää heikommaksi kuin johteissa. Eristeen polarisoitumisen tuottama sähkökenttä ei siis ole riittävä voimakas kumoamaan ulkoista sähkökenttää eristen sisältä, ja näin ollen ulkoinen sähkökenttä pääsee tunkeutumaan eristeiden sisään. Kokonaiskenttä on kuitenkin eristen polarisoitumisen takia aineen sisällä ulkoista kenttää heikompi kuten kuvaan 10.44 on piirretty.

Sähkökentän voimakkuutta eristeissä kuvataan aineen *suhteellisella permittiivisyydellä*, ja tästä suuretta merkitään tavallisesti symbolilla  $\kappa$  tai  $\epsilon_r$ . Suhteellinen permitiivisyyys voidaan määritellä niihin, että kun eriste tuodaan ulkoseen sähkökenttään  $\bar{E}_{\text{ulkoinen}}$ , eristen sisälle muodostuu sähkökenttä

$$\bar{E}_{\text{aine}} = \frac{1}{\kappa} \bar{E}_{\text{ulkoinen}}. \quad (10.152)$$

Tyhjiön suhteellinen permitiivisyyys on yksi, ja eristeillä suhteellinen permitiivisyyys on yhtä suurempi, koska niiden sisällä oleva kenttä on ulkoista kenttää heikompi. Mitä suurempi aineen suhteellinen permitiivisyyys on, sitä voimakkaammin aine polarisoituu ulkoisessa sähkökentässä ja sitä heikompi sähkökenttä aineen sisään pääsee.



**10.46** Permittiivisyydellä kuvataan yleensä eristeitä, mutta mikä olisi johteen permitiivisyyys?

## Varausten erottelu ja varastoiminen

Aloitimme sähköisiin ilmiöihin tutustumisen tarkastelemalla, kuinka kappaleita voidaan varata. Havaitsimme, että varausta voidaan siirtää kappaleesta toiseen esimerkiksi hieromalla kappaleita yhteen tai koskettamalla varatulla kappaleella neutraalia kappaletta. Nämä teknikat yhdistämällä voidaan kerätä hyvin suuriakin varauksia kuvan 10.45 tapaan. Kuvassa johdepallon sisäpintaa kosketaan varatulla sauvalla, jolloin varausta siirtyy sauvesta palloon. Ylimääräiset varauksenkuljettajat pyrkivät johteissa aina mahdollisimman kauas toisistaan, jolloin varaus kulkeutuu itsestään ontton johdekappaleen ulkopinnalle jättäen sisäpinnan neutraaliksi. Niinpä sauva voidaan varata uudelleen, ja kun sillä kosketetaan jälleen pallon sisäpintaa, varauksenkuljettaja siirtyy sauvesta pallon neutraaliin pintaan, vaikka pallo kokonaisuudessaan olisikin varattu. Samaan tapaan jatkaen palloon voidaan kerätä varsin suuri sähkövaraus. Samaan ideaan perustuu esimerkiksi *Van de Graaff -generaattori* (nimetty Robert Van de Graaffin mukaan), jossa varausta siirretään onttoon metallikappaleeseen liikkuvan varatun hihnan avulla.

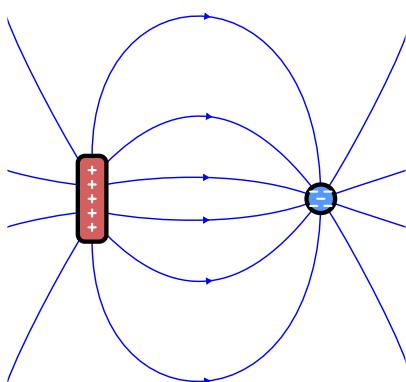
Tämä menetelmä ei kuitenkaan ole yleensä kovin käytännöllinen tapa varastoida varausta, koska suuren varausten tuottamat voimakkaat sähkökentät voivat olla vaarallisia. Lisäksi varauksen siirto tapahtuu tässä mekaanisesti, mikä on hidasta ja vaivalloista. On kuitenkin mahdollista varastoida suuria sähkövarauksia niin, että varausten synnyttämät sähkökentät saadaan samalla vangittua turvallisesti rajattuun tilaan. Lisäksi tämä varauksen varastointi on mahdollista tuottaa sähkökemiallisesti ilman mekaanista työtä ja kappaleiden siirtämistä, mikä on yleensä nopeaa ja tehokasta. Tutkitaan nyt, kuinka tämä onnistuu.

Sähkökentän kenttäviivaesityksessä kustakin kappaleesta lähtevien kenttäviivojen lukumäärä on Gaussian lain mukaisesti *aina* verrannollinen kappaleen omaan varaukseen. Muut kappaleet voivat kuitenkin vaikuttaa kenttäviivojen suuntaan ja tiheyteen. Erityisesti kun positiivisesti ja negatiivisesti varatut kappaleet ovat lähellä toisiaan, niiden sähkökentät vahvistavat toisiaan kappaleiden välissä ja heikentävät toisiaan muualla. Tämän vuoksi sähkökenttä keskittyy sitä voimakkaammin kappaleiden välille mitä lähempänä kappaleet ovat toisiaan, kuten kuvissa 10.46 (a) ja (b) nähdään. Tämä pätee kaikenmuotoisille kappaleille, mutta ilmiö on erityisen voimakas levyillä, sillä kaksi levyä voidaan asettaa niin, että niiden pinnat ovat lähellä toisiaan *kaikki*, jolloin niiden luoma sähkökenttä jää suurimmaksi osaksi levujen välille ja vain pieni osa kentästä pääsee karkaamaan muualle (kuva 10.46 (c)). Itse asiassa levujen sähkökenttä onkin keskittynyt levujen välille sitä täydellisemmin, mitä leveämpää levyt ovat ja mitä lähempänä ne ovat toisiaan. Suurille levyille voikin tavallisesti käyttää yksinkertaistettua mallia, jossa levujen sähkökenttä on keskittynyt *kokonaan* levujen välille.

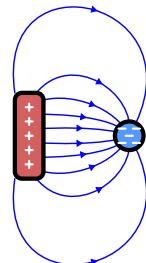
Suuria, lähellä toisiaan olevia levyjä voidaan varsin tarkasti kuvata äärettömän varatun levyn mallilla, ja

Kuva 10.46: Positiivisesti ja negatiivisesti varattujen kappaleiden välillä on sähkökenttä. Kappaleiden lähestyessä toisiaan kenttä voimistuu niiden välissä ja heikennee muualla. Varsinkin yhdensuuntaisten varattujen levujen kenttä on keskittynyt lähes pelkästään levujen välille.

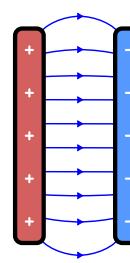
(a) Kappaleet kaukana toisistaan.



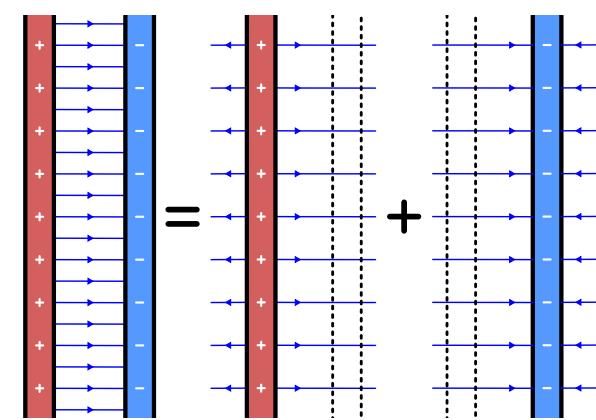
(b) Kappaleet lähekkäin.



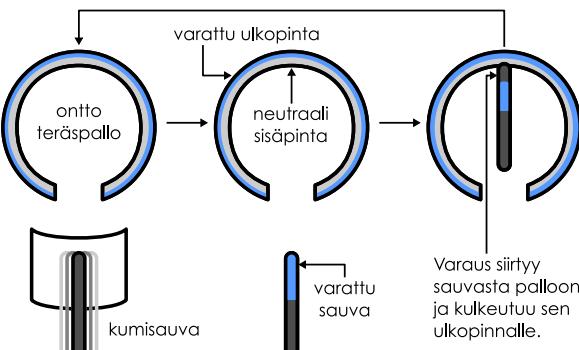
(c) Kaksi levyä lähekkäin.



(d) Kaksi hyvin leveää levyä lähekkäin.



Kuva 10.45: Staattisen varauksen varastoiminen.



tällaisten levyjen luoman sähkökentän ominaisuudet päättelimme jo aikaisemmin Gaussion lain avulla. Yksi varattu levy luo sähkökentän kummallekin puolelleen. Positiivisesti varatun levyn kenttä osoittaa kaikkialla levystä pois päin ja sen voimakkuus on vakio,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (10.153)$$

Negatiivisesti varatun levyn kenttä on muuten samanlainen, paitsi että se osoittaa kaikkialla kohti levyä. Kun kaksi tällaista levyä on vierekkäin, niiden kentät lasketaan yhteen (kuva 10.46 (d)). Levyjen välissä kummankin levyn erikseen luoma kenttä osoittaa positiivisesta levystä negatiiviseen, joten kentät vahvistavat toisiaan. Tässä alueessa kokonaiskentän voimakkuus on siten kaksinkertainen yksittäisen levyn luomaan kenttään verrattuna,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (10.154)$$

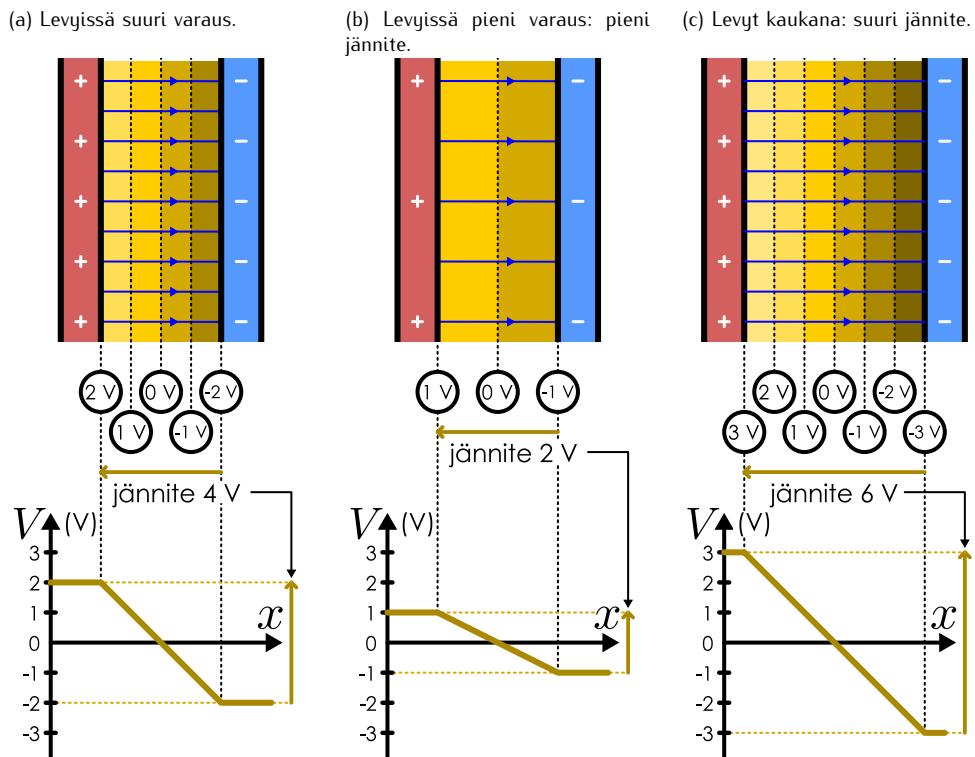
Kummassakin levyssä on itseisarvoltaan yhtä suuri varaustiheys, mutta negatiivisesti varautuneessa levysä varaustiheys on luonnollisesti negatiivinen. Tässä yhtälössä  $\sigma$  kuvaa kummankin levyn varaustiheyden itseisarvoa, joka on siis sama kuin positiivisesti varautuneen levyn varaustiheys.

Levyjen välisiin jäävän alueen ulkopuolella positiivisen ja negatiivisen levyn luomat sähkökentät osoittavat päinvastaisiin suuntiin, jolloin ne kumoavat toisensa täydellisesti. Niinpä levyjen välisen alueen ulkopuolella sähkökenttä on täsmälleen nolla eli äärettömän suuret levyt luovat sähkökentän *vain* väliinsä. Tämä tulos pääsee todellisille levyille sitä tarkemmin, mitä suurempia levyt ovat ja mitä lähempänä ne ovat toisiaan.

Tutkitaan sitten, miten levyjen varaus ja niiden välinen etäisyys vaikuttavat levyjen väliseen potentiaalieroon eli jännitteeseen. Tarkastellaan ensin kuva 10.47 (a). Levyjen varaus on esitetty kuvassa plus- ja miinus-symbolein, sähkökenttä kenttäviivoineen, ja potentiaali sekä välein että tasapotentiaalikäyrin. Sähkökenttä osoittaa positiivisesta varauksesta negatiiviseen, ja toisaalta sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienempien suuntaan, joten *potentiaalin täytyy laskea levyjen välillä positiiviselta levyltä negatiiviselle siirryttääessä*. Kuvan esimerkissä potentiaalin nollakohta on valittu levyjen väliin ja levyjen potentiaalit ovat 2 V sekä -2 V, jolloin levyjen välinen jännite on 4 V.

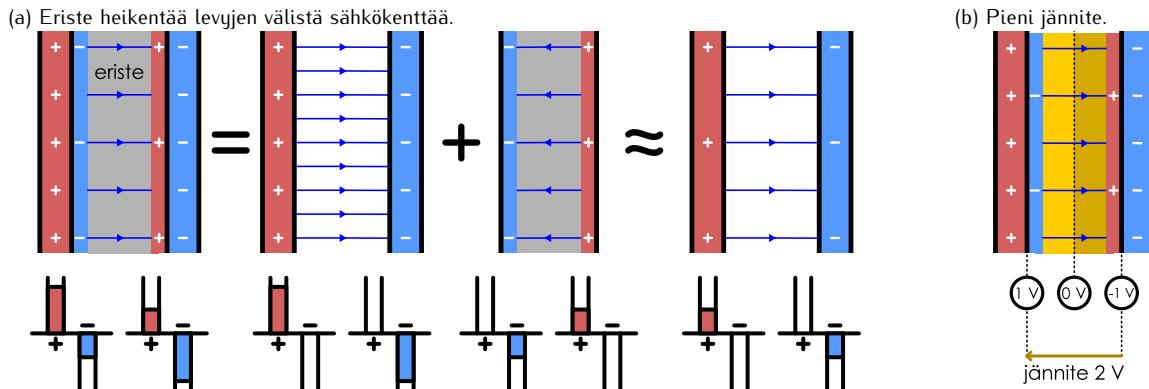
Kuvassa 10.47 (b) on muuten samanlaiset levyt, mutta nyt levyjen varaustiheys on vain puolet kuvaan (a) verrattuna. Gaussion lain mukaisesti levyistä lähtevien kenttäviivojen määrä on suoraan verrannollinen levyjen varaukseen (eli kuvassa plus- ja miinusmerkkien määrään), joten myös kenttäviivojen tiheys on kuvassa (b) vain puolet kuvan (a) vastaavasta. Toisaalta kenttäviivojen tiheys kuvaa sähkökentän voimakkuutta, joten kuvassa

Kuva 10.47: Potentiaali ja sähkökenttä kahden varatun levyn välissä. Mitä enemmän levyissä on varasta, sitä enemmän kenttäviivoja niistä lähtee. Toisaalta mitä tiheämässä kenttäviivat ovat, sitä voimakkaampi sähkökenttä on ja sitä jyrkemmin potentiaali muuttuu. Levyjen välinen jännite on siten verrannollinen levyjen varaustiheyteen ja levyjen väliseen etäisyyteen toisistaan.



## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.48: Kahden varatun levyn välin asetettu eriste polarisoituu. Tämä heikentää levijen välistä sähkökenttää ja pienentää levijen välistä jännitettä.



(b) sähkökentän voimakkuus on puolet siitä mitä kuvassa (a). Sähkökenttä kuvailee potentiaalin muutoksen jyrkkyyttä, joten kuvassa (b) potentiaali muuttuu samalla matkalla vain puolet siitä, mitä kuvassa (a), ja levijen välinen jännite on siis 2 V eli puolikas kuvaan (a) verrattuna. *Toisin sanoen levijen välisen jännite on suoraan verrannollinen niiden varaustiheyteen.*

Kuvassa 10.47 (c) levijen varaus on puolestaan sama kuin kuvassa (a), mutta levyt ovat nyt kauempana toisistaan. Levijen välinen sähkökenttä on kuvissa (a) ja (c) sama, joten myös potentiaali muuttuu niiden välillä yhtä jyrkästi. Pidemmällä matkalla potentiaali ehtii kuitenkin muuttua enemmän, joten levijen välinen jännite on kuvassa (c) suurempi kuin kuvassa (a).

Voimme koota edelliset tulokset myös matemaattiseksi lausekkeeksi. Valitaan  $x$ -akseli kohtisuoraan levijä vastaan, jolloin sähkökenttä on siis  $x$ -suuntainen. Sähkökenttä kuvailee potentiaalin jyrkkyttä, joten potentiaalin muutos matkalla  $\Delta x$  on

$$\Delta V = -E_x \Delta x. \quad (10.155)$$

Tässä miinusmerkki johtuu siitä, että sähkökentän osoittaaessa positiiviseen  $x$ -suuntaan potentiaali laskee tähän suuntaan kuljettaessa. Emme nyt kuitenkaan halua mitata potentiaalin muutosta  $x$ -akselin suunnassa vaan negatiivisesti varautuneelta levyltä positiiviselle levylle, joten voimme kirjoittaa potentiaalin muutoksen sähkökentän voimakkuuden  $E = |E_x|$  sekä levijen välisen etäisyyden  $d = |\Delta x|$  avulla muodossa

$$\Delta V = Ed. \quad (10.156)$$

Sähkökentän voimakkuus on yhtälön (10.154) mukaisesti suoraan verrannollinen levijen varaustiheyteen, joten

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (10.157)$$

Jännite on siis suoraan verrannollinen levijen varaustiheyteen ja niiden väliseen etäisyyteen aivan kuten kuvasarjassa 10.47 nähtiin. Varaustiheyden voi ilmaista myös levyn kokonaisvaraksen ja sen pinta-alan suhteena,  $\sigma = Q/A$ , joten jännitteen voi kirjoittaa myös näiden avulla muodossa

$$\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d. \quad (10.158)$$

Koska  $\sigma$  oli positiivisen levyn varaustiheys, myös  $Q$  on siis positiivisen levyn varaus.

Levijen väliseen jännitteeseen voi vaikuttaa myös lisäämällä levijen välin eristeen kuten kuvassa 10.48. Eriste polarisoituu levijen luomassa sähkökentässä, ja tällöin eristeen sisälle muodostuva kenttä on voimakkuudeltaan heikompi kuin levijen yksinään muodostama kenttä olisi. Heikommassa kentässä potentiaalikin muuttuu loivemmin, joten *eriste pienentää levijen välistä potentiaalieroa*. Yhtälön (10.152) mukaisesti eristeeseen muodostuva sähkökenttä on

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}, \quad (10.159)$$

ja näin ollen levijen välinen potentiaaliero on

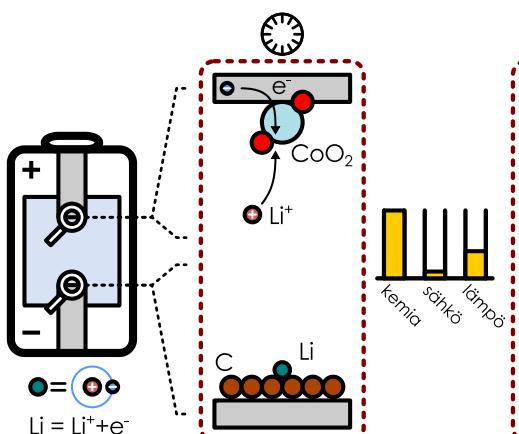
$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} d = \frac{Q}{A\kappa\epsilon_0} d. \quad (10.160)$$



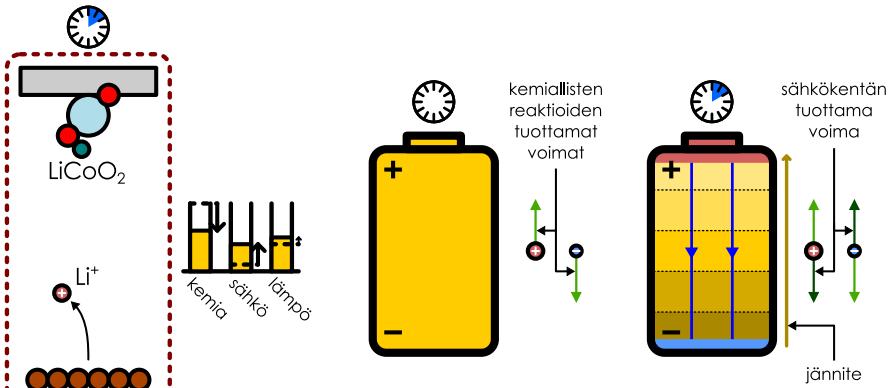
**10.47** Haluamme varastoida kahteen levyn mahdollisimman paljon varausta mutta pitää levijen välisen jännitteen ja sähkökentän mahdollisimman pieninä. Jos voimme muuttaa levijen kokoa, niiden välistä etäisyyttä sekä levijen välissä olevan aineen permittivisyyttä, miten nämä suureet kannattaa valita?

Kuva 10.49: Pariston toimintaperiaate. Positiivisella elektrodilla kemialliset reaktiot yhdistävät elektrodin elektroneja liuoksen positiiviisiin ionieihin. Negatiivisella elektrodilla reaktiot hajottavat neutraaleja molekyylejä vapaiksi elektroneiksi ja ioneiksi. Samalla kemiallista energiota muuttuu elektronien ja ionien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Kokonaisuudessaan paristo siis siirtää elektroneja positiiviselta navalta negatiiviselle. Tämä ylläpitää jännitettä pariston napojen välillä.

(a) Litiumioniakun perusreaktiot.



(b) Varauksen siirtyminen synnyttää potentiaalieron eli jännitteen pariston napojen välille.



### Jännitelähde

Edellä kuvatut kahden varaten levyn systeemit voitaisiin valmistaa keräämällä varausta kahteen levyyn ja asettamalla levyt vastakkain, jolloin varausten luoma sähkökenttä saataisiin vangittua levyjen väliin. Varausta ei kuitenkaan yleensä kerätä mekaanisesti kuten kuvassa 10.45 vaan on paljon tehokkaampaa ohjata varauksia nün, että ne siirtyvät levyille itse. Tämä on mahdollista **jännitelähteen** kuten pariston tai akun avulla. Paristoja ja akkuja on monenlaisia, mutta niiden kaikkien toiminta perustuu **sähköpariksi** kutsuttuun ilmiöön. Nimensä mukaisesti paristo on useiden sähköparien yhdistelmä.

Sähköparissa kaksi eri johdetta eli *elektrodia* yhdistetään ioneja sisältävällä liuoksella eli *elektrolyytilillä*. Elektrodeja kutsutaan myös sähköparin *navoiksi*. Elektrodien ja elektrolyytin kohdatessa niiden rajapinnoilla tapahtuu kemiallisia reaktioita, joissa positiiviset ionit ja elektronit voivat yhdistyä neutraaleiksi molekyyleiksi tai päinvastoin molekyylit voivat hajota ioneiksi ja elektroneiksi. Periaatteessa näitä elektroneja sitovia ja vapauttavia reaktioita voi tapahtua kummallakin elektrodilla, mutta koska elektrodit valmistetaan *eri materiaaleista*, varauksenkuljettajia sitovat reaktiot tapahtuvat *helpommin* yhdellä elektrodilla ja niitä vapauttavat reaktiot toisella. Lopputulos on se, että sähköparissa alkaa tapahtua itsestään kemiallisia reaktioita, joissa elektrodimateriaalit muuttuvat uusiksi kemiallisiksi yhdisteiksi vapauttaen samalla kemiallista energiota (eli atomien välisen kemiallisten sidosten potentiaalienergiaa). Tämä vapautuva energia muuttuu vapautuvien varauksenkuljettajien liike- ja potentiaalienergiaksi.

Kuvassa 10.49 (a) on piirretty tästä yksinkertaistettu kuva, jossa esimerkkinä on litiumioniakussa tapahtuva reaktio. Kuvassa ylemmäksi piirretyllä navalla elektrolyytissä olevat litium-ionit yhdistyvät elektrodilla olevien elektronien kanssa, jolloin litium-atomeja tarttuu elektrodiin reaktiossa



Samalla toisella elektrodilla litium-atomi hajoaa ioniksi ja vapaaksi elektroniksi. Elektroni siirtyy elektrodille ja ioni liukenee elektrolyyttiin reaktiossa



Kokonaisuudessaan elektrodeilla tapahtuu reaktio



Kuvassa ylemmäksi piirretyllä elektrodilla litiumionit sieppaavat elektroneja, jolloin elektrodille jää positiivisen varauksen ylimäärä. Kuvan alemmalla elektrodilla litiumatomit puolestaan luovuttavat elektronin ja jäljelle jääneet positiiviset ionit siirtyvät elektrolyytiliuokseen. Tälle elektrodlle siis kertyy negatiivista varausta. Kaikkiaan nämä kemialliset reaktiot siis siirtävät elektroneja ylemmältä, positiiviselta elektrodilta alemalle, negatiiviselle elektrodille ja litiumioneja negatiiviselta elektrodilta positiiviselle.



**10.48** Muuttuuko elektrolyytin koostumus paristossa tapahtuvissa reaktioissa?

Positiiviselle elektrodille kerääntyvä positiivinen varaus ja negatiiviselle elektrodille kertyvä negatiivinen varaus tuottavat pariston sisään sähkökentän, joka osoittaa positiivisesta varauksesta negatiiviseen. Kemialliset reaktiot siis pyrkivät siirtämään varausta negatiiviselta navalta positiiviselle, mutta sähkökenttä vetää varausta pääinvastaiseen suuntaan positiiviselta navalta negatiiviselle (kuva 10.49 (b)). Sähkökenttä siis vastustaa varauksen siirtymistä. Saman asian voi ilmaista myös potentiaalin kautta: sähkökenttä osoittaa potentiaalin laskun suuntaan, joten positiivisen elektrodon täytyy olla korkeammassa potentiaalissa kuin negatiivisen elektrodon. Elektrodien välille siis syntyy potentiaaliero eli jännite  $\Delta V$ , ja yhden elektronin siirtämiseen positiiviselta elektrodilta negatiiviselle liittyy sähköisen potentiaalienergian muutos

$$\Delta U = e\Delta V. \quad (10.164)$$

Varausten siirtäminen siis vaatii energiota, ja tämä energia on peräisin navoilla tapahtuneissa reaktioissa vapautuneesta kemiallisesta energiasta.

Mitä enemmän varausta parin navoille on kertynyt, sitä voimakkaampi sähkökenttä ja suurempi jännite paistossa on. Niinpä varauksen siirtäminen elektrodilta toiselle tulee sitä vaikeammaksi ja vaatii sitä enemmän energiota, mitä enemmän varausta on jo siirtynyt. Jossakin vaiheessa varauksen siirtäminen sähköparin läpi vaatii enemmän energiota kuin mitä kemiallisista reaktioista on saatavilla, ja tällöin kemialliset reaktiot sekä varauksen siirtyminen loppuu. Tämä tapahtuu viimeistään silloin, kun varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutos vastaa vapautuvan kemiallisen energian määrästä,

$$\Delta U = e\Delta V = -\Delta E_{\text{kemia}}. \quad (10.165)$$

Vapautuvan kemiallisen energian määärä riippuu luonnollisesti elektrodeilla tapahtuvista reaktioista, ja nämä puolestaan riippuvat sähköparissa käytetyistä materiaaleista.

Varauksenkuljettajien vastaanottaman energian suhdevta siirtymään varaukseen kutsutaan **lähdejännitteeksi** ja sitä merkitään

$$\mathcal{E} = \frac{-\Delta E_{\text{kemia}}}{e}. \quad (10.166)$$

Kun kaikki kemiallinen energia muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi, lähdejännitteeksi saadaan

$$\mathcal{E} = \frac{e\Delta V}{e} = \Delta V. \quad (10.167)$$

Tällöin lähdejännite on siis yhtä suuri kuin pariston napojen potentiaaliero. Tämä onkin paristojen perusoimaisuus: *paristoissa tapahtuvat kemialliset reaktiot pyrkivät siirtämään varausta pariston napojen välillä niin, että napojen välinen jännite pysyy vakiona, samana kuin pariston lähdejännite.*

Pariston napojen välinen jännite ei kuitenkaan ole *välttämättä* sama kuin sen lähdejännite, sillä dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat muuttaa osan vapautuvasta kemiallisesta energiasta myös lämpöenergiksi. Energiaa ei voi luoda, joten kemiallisen energian muutoksen täytyy kattaa myös tällaiset energian muutokset, jolloin vapautuvan kemiallisen energian määräntä täytyy olla suurempi kuin sähköisen potentiaalienergian muutos,

$$-\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta U + \Delta E_{\text{lämpö}} > \Delta U = e\Delta V. \quad (10.168)$$

Tällöin elektrodien välinen potentiaaliero jää lähdejännitettä pienemmäksi,

$$\mathcal{E} = \frac{-\Delta E_{\text{kemia}}}{e} > \Delta V. \quad (10.169)$$

Usein on kuitenkin hyödyllistä ajatella paristojen olevan täysin ideaalisia, jolloin dissipatiiviset vuorovaikutukset voidaan jäätää huomioimatta ja lähdejännite on sama asia kuin pariston napojen välinen jännite.



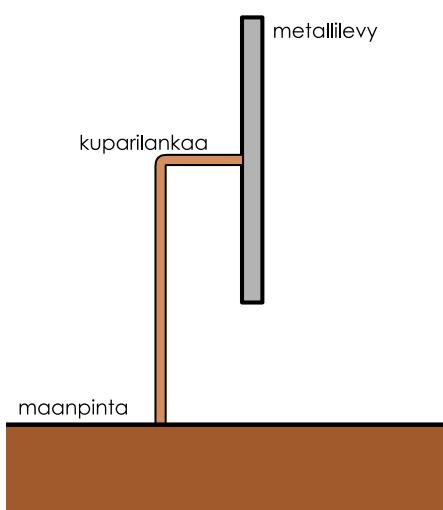
**10.49** Ideaalisen pariston lähdejännite on 9 V. (a) Mikä on pariston positiivisen navan potentiaali, jos sen negatiivisen navan potentiaali on 2 V? (b) Mikä on negatiivisen navan potentiaali, jos positiivisen navan potentiaali on 6 V? (c) Mikä on positiivisen navan potentiaali, jos negatiivinen napa on kytketty toisen 9 V pariston positiviseen napaan?

Paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot siis siirtävät varausta, ja niinpä paristojen ja muita vastaavia jännitelähteitä voidaan käyttää myös sähkövarauksen varastoinmiseksi toisiin johdinkappaleisiin. Tutkitaan, miten tämä tapahtuu käytännössä.

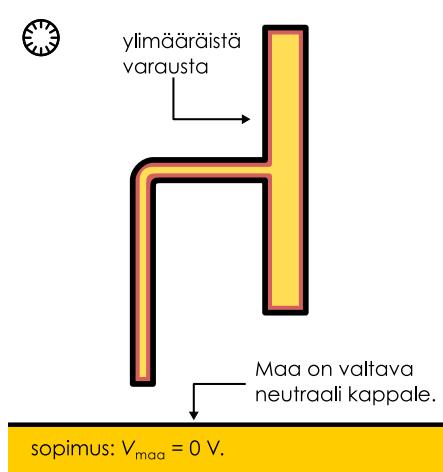
Kuten aikaisemmin huomasimme, varausta voidaan varastoida kahdelle lähekkäin asetetulle levylle. Otetaan siis kaksi metallilevyä, ja kiinnitetään levyihin johtavat kuparilangat, joita pitkin varausta voidaan siirtää. Aivan ensimmäiseksi levyt on syötä **maadoittaa** niissä mahdollisesti jo ennestään olevan varauksen poistamiseksi. Maadoittaminen tarkoittaa metallilevyn kiinnitetyn johtimen yhdistämistä maanpintaan, mikä on esitetty kuvassa 10.50. Maa on levyihin verrattuna käytännössä äärettömän suuri neutraali kappale, ja jos

Kuva 10.50: Johteen maadoittaminen. Maa on valtava neutraali kappale, joka voi helposti vastaanottaa tai luovuttaa paljon varauksenkuljettajia. Jos varattu johdekappale koskettaa maata, kaikki johteessa oleva ylimääräinen varaus siirryt maahan ja kappale neutraloituu. Tällöin johde saa myös saman potentiaalin kuin maa, ja tavallinen sopimus on valita potentiaalin nollakohta maahan,  $V_{\text{maa}} = 0 \text{ V}$ .

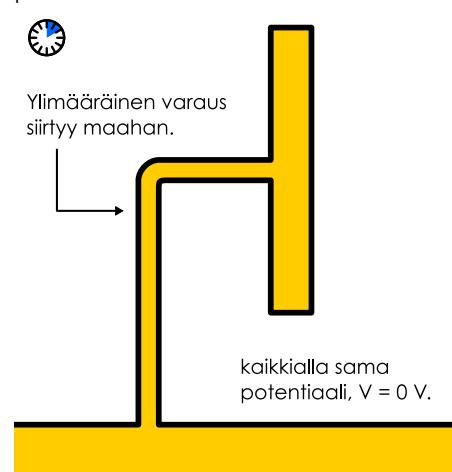
(a) Maadoittaminen.



(b) Johteen ja maan potentiaalit.



(c) Varaus siirryt maahan, ja johde saa saman potentiaalin kuin maa.



metallilevyissä oli alunperin ylimääräistä varausta, tämä varaus pääsee nyt siirtymään maahan, jolloin levynkin neutraloituvat. Samalla levyn ja kuperilangat saavat saman potentiaalin kuin maanpinta, sillä johteissa varausten tätyy asettua niin, että potentiaali on vakio. Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen, mutta on tavallista valita nollakohdaksi maa, jolloin *maadoitettujen levyjen potentiaali on 0 V*.

Asetetaan sitten levyn lähekkäin ja yhdistetään niihin kiinnitetty kuperilangat pariston vastakkaisiin napoihin (kuva 10.51 (a)). Koska levyn maadoitettiin, kummankin potentiaali on ennen paristoon kiinnittämistä nolla. Levyn välillä ei siis ole potentiaalieroa eikä myöskään sähkökenttää (kuva 10.51 (b)). Kun levy yhdistetään pariston positiiviseen napaan, tälle navalle kertynyt positiivinen varaus pääsee nyt siirtymään johtavaan kuperilankaan. Varaukset pyrkivät levymään johteiden pinnoille mahdollisimman kauas toisistaan, joten tämä varaus levää nyt kuperilangan sekä lankaan kiinnitetyn metallilevyn pinnalle. Lisäksi koska kuparin pintaala on pieni ja levyn suuri, suurin osa varauksesta kertyy levyn pinnalle. Samaan tapaan negatiiviselle navalle kerääntynyt negatiivinen varaus levää tähän napaan kiinnitettyyn kuperilankaan ja metallilevyn. Levyjen positiivinen ja negatiivinen varaus vetäävetäsi toisiaan puoleensa ja niinpä lähes kaikki varaus kertyy toisiaan lähellä oleville levyn pinnoille. Koska levyn ei vältä kosketa, varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle.

Varauksen siirtäminen pariston navoilta metallilevylle luonnollisesti vähentää navolle kertyneen varauksen määriä. Samalla kuitenkin pariston sisäinen sähkökenttä heikkenee, ja paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot käynnistyvät jälleen. Nämä reaktiot käynnistyvät aina, kun pariston napojen välinen todellinen jännite  $\Delta V$  putoaa pariston kemian määräämää lähdejännittettä  $\mathcal{E}$  pienemmiksi, ja pysähtyy jos todellinen jännite nousee yhtä suureksi kuin lähdejännite. *Paristo pyrkii siis aina säilyttämään napojensa välillä saman lähdejännitteen*. Tässä tilanteessa paristo siirtää jatkuvasti lisää elektroneja positiiviselta navaltaan negatiiviselle, jottei napojen välinen jännite laskisi. Positiiviselle navalle siis kertyy lisää positiivista varausta, joka kuitenkin pääasiassa siirryt tähän napaan yhdistetylle metallilevylle. Vastaavasti negatiiviselle navalle siirryt negatiivista varausta, joka niin ikään kulkeutuu napaan kiinnitettylle levylle. Käytännössä paristo pumpaa elektroneja positiiviseen napaan kiinnitetystä levyltä negatiiviseen napaan kiinnitetystä levylle.

Kun levylle kertyy varausta, niiden välille syntyy likimain homogeeninen sähkökenttä, ja sähkökenttään liittyy aina potentiaalin muutos. Levyn välille siis syntyy potentiaaliero eli jännite, ja tämä jännite kasvaa yhtälön (10.158) mukaisesti sitä suuremmaksi, mitä enemmän varausta levyllä on. Paristo jatkaa levyn varaan asti, kunnes levyt ovat samassa potentiaalissa kuin pariston navat (kuva 10.51 (c)). Tässä tilanteessa systeemi on jälleen tasapainossa: pariston napojen välinen jännite on sama kuin pariston lähdejännite ja kaikki johdekappaleet ovat kauttaaltaan vakiopotentiaalissa. Lopputuloksena saimme eroteltua metallilevylle positiivista ja negatiivista sähkövarausta pelkän kemiallisen energian avulla ilman mekaanista työtä, ja tämän varauksen tuottama sähkökenttä on turvallisesti vangittu levyn väliin.

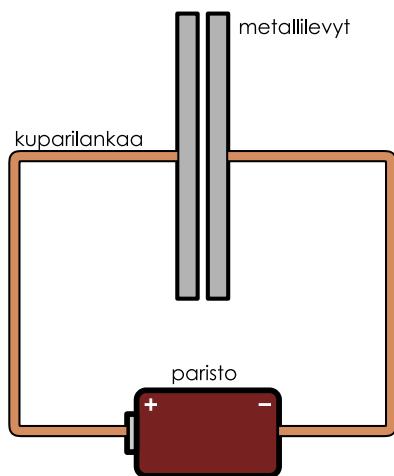


**10.50** Olkoot kuvan 10.51 levyn varaukset  $Q$  ja  $-Q$  ja niiden välinen jännite  $\Delta V = \mathcal{E}$ . Miten varaus ja jännite muuttuvat, jos (a) levynä siirretään kauemmas toisistaan tai (b) levyn väliltä asetetaan eristekappale, kun (i) kuperilangat on kiinni paristossa tai (ii) kuperilangat irrotetaan ensin paristosta?

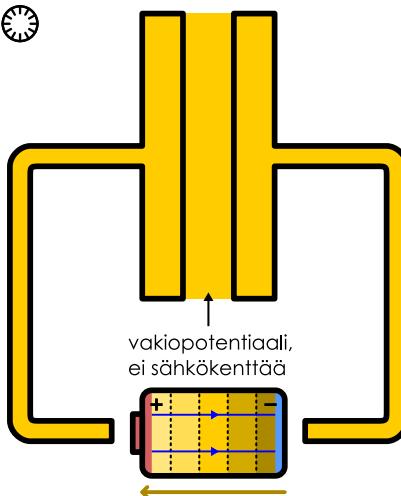
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.51: Levijen varoaminen paristolla. Aluksi levyt ovat samassa potentiaalissa. Johteissa varaus pyrkii asettumaan niihin, että potentiaali on johteen sisällä vakio. Niinpä pariston vastakkaisiin napoihin kiinnitetetyt levyt saavat samat potentiaalit kuin mitä pariston navoilla on. Nämä levyt joutuvat eri potentiaaleihin, jolloin niiden välissä on pakko olla muuttuva potentiaali ja siis sähkökenttä.

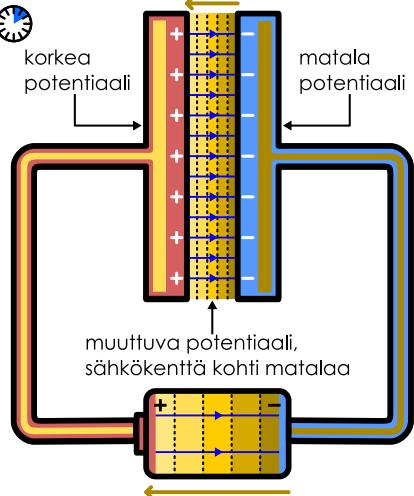
(a) Koetilanne.



(b) Aluksi levyt ovat vakiopotentiaalissa.



(c) Paristo siirtää varausta ja levyt saavat eri potentiaalit.



## Kapasitanssi

Kuvassa 10.51 esiteltty sähkövarausta varastoiva kahden levyn systeemi on yksinkertainen esimerkki **kondensaattoriksi** kutsutusta sähköisestä komponentista. Kondensaattori on tyypillisesti kahdesta johtimesta koostuva laite, joka varastoi itseensä sähkövarausta, kun johdinten eli päiden välillä on jännite. Tyypillisesti kondensaattori varastoi sitä enemmän varausta mitä suurempi jännite sen päiden välillä on. Kondensaattorin toimintaa kuvataankin siihen varastoidun sähkövarauksen  $Q$  ja johdinten välisen jännitteenvaihtelun  $\Delta V$  suhteella, jota kutsutaan **kapasitanssiksi**

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (10.170)$$

Kapasitanssin yksiköllä on erikoisnimi **faradi** (jälleen Michael Faraday mukaan)

$$[C] = [Q]/[V] = \text{C/V} = \text{F}. \quad (10.171)$$

Suuri kapasitanssi tarkoittaa sitä, että kondensaattori pystyy varastoimaan itseensä paljon varausta pienelläkin jännitteellä. Tämä on hyvä asia, sillä kondensaattorin tehtävä on juuri sähkövarausten varastointi. Suurten jännitteiden tuottaminen vaatii paljon energiota ja voi olla vaarallistakin, joten yleensä on sitä parempia, mitä pienemmällä jännitteellä kondensaattorit saadaan toimimaan. Kuten coulomb, myös faradi on erittäin suuri yksikkö, ja tyypillisten kondensaattoreiden kapasitanseja mitataan nano- ja mikrofaradeissa. Periaatteessa mitkä tahansa kaksi johdetta toimivat kondensaattorina, mutta elleivät kappaleet ole hyvin suuret tai hyvin lähellä toisiaan, niiden kapasitanssi on yleensä erittäin pieni.

Kondensaattorin varastoitu sähkövaraus pystytään yleensä vapauttamaan nopeasti — paljon nopeammin kuin mitä paristot siirtävät varausta — joten kondensaattoreita käytetään varauksen lähteenä laitteissa, joissa tarvitaan paljon varausta nopeasti. Joissakin laitteissa suuria kondensaattoreita käytetään myös väliaikaisina varauksen lähteenä esimerkiksi paristojen vaihtojen aikana. Kondensaattoreita käytetään myös muiden sähkölaitteiden suojaamisessa ja varausten liukkeen säätelyssä, koska ylimääräinen varaus voidaan väliaikaisesti varastoida kondensaattoreihin.

Kahden vierekkäisen levyn muodostama rakenne on *levykondensaattori*. Kuten edellä päättelimme, levykondensaattorissa levyjen välinen jännite riippuu levyjen varauksesta, pinta-alasta ja etäisyydestä sekä levyjen välisen aineen permittivisyydestä. Yhtälön (10.160) mukaisesti levyjen välinen jännite on

$$\Delta V = \frac{Q}{A\kappa\varepsilon_0} d, \quad (10.172)$$

joten kummallekin levylle varastoituneen sähkövarauksen itseisarvoksi voidaan tästä ratkaista

$$Q = \frac{1}{d} A\kappa\varepsilon_0 \Delta V. \quad (10.173)$$

Levykondensaattoriin kohdistuvan sähkövaihdon mukaisesti

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{d} A \kappa \epsilon_0. \quad (10.174)$$

Kapasitanssi on siis suuri ja kondensaattori on hyvä, jos levijen pinta-ala on suuri. Tämä johtuu siitä, että suurelle pinta-alalle levijnneen varauksen *varaustiheys* on pieni, jolloin kondensaattoriin sähkökenttä on heikko ja levijen välinen jännite on pieni. Kapasitanssia voi kasvattaa myös asettamalla levijen väliin eristettä, jonka permittiivisyys on suuri, koska tämäkin heikentää levijen välistä sähkökenttää. Kapasitanssi on myös sitä suurempi mitä lähempänä levyt ovat toisiaan. Tämä ei vaikuta levijen väliseen sähkökenttään eli potentiaalin muutoksen jyrkkyyteen, mutta lyhyellä matkalla potentiaali ei ehdi muuttua paljon, jolloin lähekkäisten levijen välinen potentiaaliero on pieni.



**10.51** (a) Jos levykondensaattori (levijen ala  $A = 0.01 \text{ m}^2$ , levijen etäisyys  $d = 0.001 \text{ m}$ , eristeen permittiivisyys  $\kappa \approx 1.1$ ) kestääsi mielivaltaisen suuria jännitteitä, kuinka paljon varausta se voisi enimmillään varastoida? (b) Entä jos levijen välillä oleva eriste hajoaa sähkökenttäässä  $E = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ ?

Oikeat sähkölaitteissa käytettävät kondensaattorit eivät ole yleensä levykondensaattoreita vaan niissä johteet voivat olla esimerkiksi ohuita eristeiden erottamia kalvoja, jotka on kierretty rullalle. Tällaisten kondensaattoreiden kapasitanssia ei voi laskea suoraan lausekkeesta (10.174) vaan yleisesti kapasitanssi selviää määritelmän (10.170) mukaisesti kondensaattorin varauksen ja jännitteen suhteesta. Kapasitanssi riippuu kuitenkin aina samoista perusperiaatteista: kapasitanssi on sitä suurempi mitä suurempi on kondensaattorin muodostavien johteiden pinta-ala, mitä lähempänä toisiaan johteet ovat, ja mitä parempi eriste niiden välillä on.

Suurten yksittäisten kondensaattoreiden valmistaminen on vaikeaa, mutta kondensaattoreita voidaan myös yhdistää niiden kapasitanssin kasvattamiseksi. Kuvassa 10.52 (a) on esitetty tilanne, jossa kaksi kondensaattoria on yhdistetty johtimilla toisiinsa ja paristoon. Kuvassa kondensaattoreiden vasemmanpuoleiset levyt on yhdistetty johtimilla sekä toisiinsa että pariston positiiviseen napaan, joten nämä levyt ovat samassa, korkeassa potentiaalissa. Kondensaattoreiden oikeanpuoleiset levyt on yhdistetty pariston negatiiviseen napaan, joten niilläkin on keskenään sama, matala potentiaali. Potentiaaliero eli jännite on näin ollen kummassakin kondensaattorissa sama,  $\Delta V$ . Tällaista tapaa yhdistää kondensaattorit toisiinsa kutsutaan *rinnankytkenäksi*.

Jos kondensaattoreiden kapasitanssit ovat  $C_1$  ja  $C_2$ , niiden varaukset ovat kapasitanssin määritelmän perusteella  $Q_1 = C_1 \Delta V$  sekä  $Q_2 = C_2 \Delta V$ . Yhteensä kondensaattoreihin on varastoitunut sähkövaraus

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V, \quad (10.175)$$

joten kapasitanssin määritelmän mukaisesti kondensaattorit muodostavat yhdessä laitteen, jonka kokonaiskapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2. \quad (10.176)$$

Rinnan kytkettyjen kondensaattoreiden kapasitanssit lasketaan siis suoraan yhteen, jolloin kondensaattorit toimivat yhdessä kuin yksi suuri kondensaattori. Sama periaate toimii riippumatta kondensaattoreiden määräästä, kunhan kaikki kondensaattorit kytketään rinnan. Tällä tavalla voidaan valmistaa hyvin suuren kapasitanssin kondensaattorikytkentöjä, joihin voidaan varastoida suuri sähkövaraus.

Kondensaattorit voi yhdistää toisellakin tavalla, kuten kuvassa 10.52 (c). Kuvassa vasemmanpuoleisen kondensaattorin yksi levy on yhdistetty pariston positiiviseen napaan ja sen toinen levy oikeanpuoleisen kondensaattorin levyn. Tämän kondensaattorin toinen levy on edelleen yhdistetty pariston negatiiviseen napaan. Tätä kutsutaan *sarjaankytkenäksi*. Tässä kytkenessä on nyt kolme toisistaan erillistä johdekappaletta: pariston positiiviseen napaan kytetty levy, pariston negatiiviseen napaan kytetty levy sekä *toisiinsa* kytetty levy, joita ei ole yhdistetty paristoon. Nämä kaikki voivat olla eri potentiaaleissa, joten kondensaattoreiden jännitteet eivät vältämättä ole yhtä suuret. Kondensaattoreiden varauksen sen sijaan täytyy olla yhtä suuri. Tämä johtuu siitä, että kun paristo siirtää varausta kytkenän uloimpiin levijihin, tämä varaus vetää puoleensa kytkenän keskelle jääneen kappaleen varauksia. Näin tämä keskimmäinen kappale polarisoituu, ja sen täytyy vielä polarisoitua niin, että kappaleen kokonaisvaraus on vakio, nolla. Niinpä yhdistetylle levylle kertyy toiselle positiivinen ja toiselle itseisarvoltaan yhtä suuri negatiivinen varaus. *Kaikilla* kondensaattorilevylillä on siis oltava tässä kytkenessä itseisarvoltaan yhtä suuri varaus,  $Q$ .

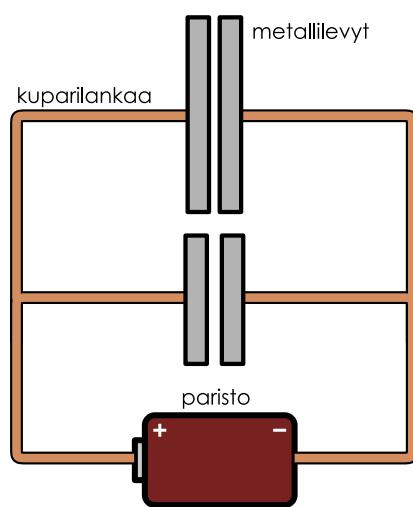
Jos siis kondensaattoreiden kapasitanssit ovat erillään  $C_1$  ja  $C_2$ , kondensaattoreiden jännitteiden pitää olla  $\Delta V_1 = Q/C_1$  ja  $\Delta V_2 = Q/C_2$ . Koska keskenään yhteen kytkettyjen levijen täytyy olla samassa potentiaalissa, potentiaaliero kytkenän päiden välillä saadaan laskemalla yhteen potentiaaliero kummankin kondensaattorin yli,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}. \quad (10.177)$$

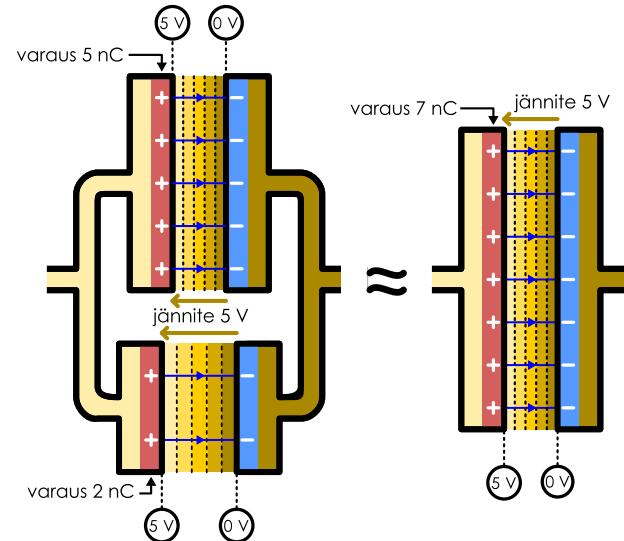
## SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.52: Kondensaattoreiden yhdistäminen. Vierakkain eli rinnan kytketyissä kondensaattoreissa on sama jännite, koska potentiaali on vakio toisiinsa yhdistetyissä johteissa. Peräkkäin eli sarjaan kytketyissä kondensaattoreissa on sama varaus, koska kondensaattoreiden välillä jäävän johteen kokonaisvarauksen täytyy olla nolla.

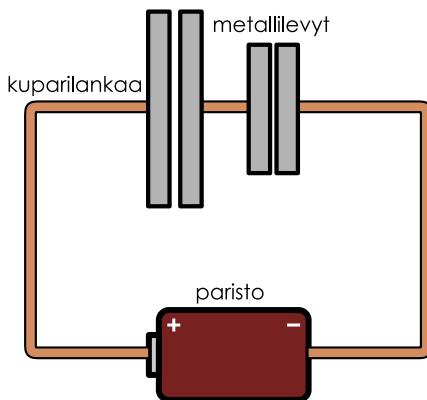
(a) Rinnankytentä.



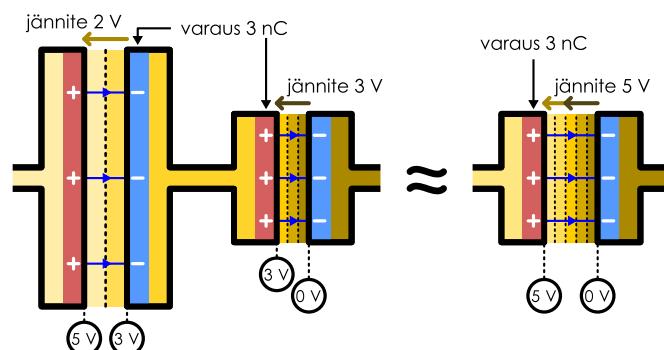
(b) Rinnankytettijen kondensaattoreiden potentiaali ja varaus.



(c) Sarjaankytentä.



(d) Sarjaankytettijen kondensaattoreiden potentiaali ja varaus.



Nämä kondensaattorit muodostavat siis yhdessä laitteen, jonka kapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (10.178)$$

Tulos sievenee yksinkertaisempaan muotoon laskemalla kapasitanssin käänneisluku,

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (10.179)$$

Toisin sanoen sarjaan kytkettyjen kondensaattoreiden kapasitanssien käänneisluvut lasketaan yhteen.

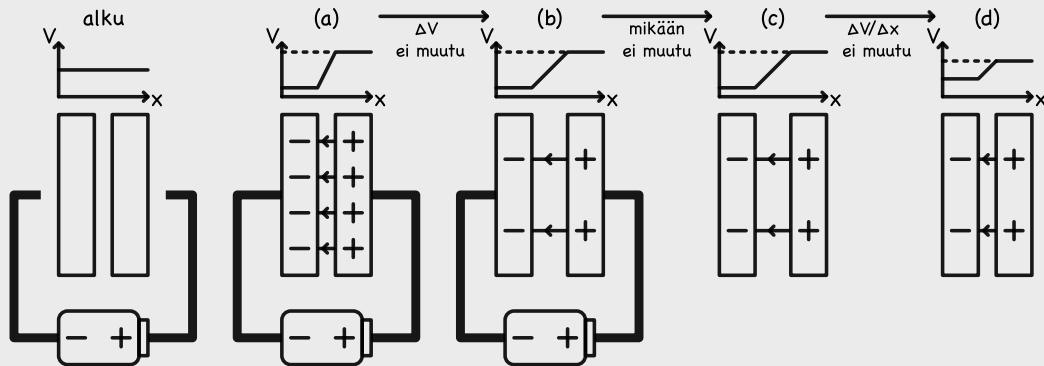


- 10.52** (a) Tarkista, että kuvan 10.52 kytkennät toteuttavat kapasitanssien yhteenlaskusäännöt.  
 (b) Parantaako sarjan- tai rinnankytentä kondensaattorien kykyä varastoida varausta?

## esimerkki 10.7

## Kondensaattorit

Kaksi metallilevyä muodostavat levykondensaattoriin. Levyjen ala on  $0.010 \text{ m}^2$  ja niiden välinen etäisyys 0.1 mm. Laske seuraavissa tapauksissa levyjen kapasitanssi, jännite ja varaus. (a) Levyt yhdistetään 100 V jännitelähteellä. (b) Levyt siirretään etäisyydelle 0.2 mm. (c) Paristo poistetaan, jolloin jää kaksi erillistä levää. (d) Levyt siirretään takaisin etäisyydelle 0.1 mm.



**SUUNNITELMA** Levykondensaattorin kapasitanssin voimme laskea yksinkertaisesti lausekkeella (10.174),

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{d} A \varepsilon_0. \quad (10.180)$$

Oletetaan, että levyjen välissä on ilmaa, jolle  $\kappa \approx 1$ .

Kun paristo yhdistää levyt, se pitää levyjen välisen jännitteen vakiona,  $\Delta V = \mathcal{E} = 100 \text{ V}$ . Tämän se tekee siirtämällä tarpeen mukaan varausta levyltä toiselle. Kun paristo poistetaan, varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle. Tällöin kondensaattorin varauksen täytyy olla vakio.

**RATKAISU** (a) Kapasitanssiksi saadaan noin  $C = 890 \text{ pF}$ . Jännitelähde pakottaa jännitteeksi  $\Delta V = 100 \text{ V}$ , jolloin kondensaattorin varaus on  $Q = C\Delta V = 89 \text{ nC}$ . Tämä tarkoittaa sitä, että yhdellä levyllä on varaus  $89 \text{ nC}$  ja toisella  $-89 \text{ nC}$ . Systeemi on kokonaisuudessaan neutraali.

(b) Paristo pitää jännitteen vakiona, joten nytkin  $\Delta V = 100 \text{ V}$ . Kapasitanssi pienenee levyjen etääntyessä, ja uusi kapasitanssi on  $C = 440 \text{ pF}$ . Kondensaattorin uusi varaus on  $Q = 44 \text{ nC}$ . Paristo siis pitää jännitteen vakiona siirtämällä varausta positiivisesti varatulta levyltä negatiivisesti varatulle levylle, jolloin kondensaattorin nimellisvaraus  $Q$  pienenee. Systeemin kokonaisvaraus on koko ajan nolla.

(c) Pariston poistaminen ei muuta mitään, koska varaus ei pääse poistumaan levyltä. Paristohan pyrkii vain pitämään napojensa välisen jännitteen vakiona, ja koska mikään muu asia ei muudu, levyjen jännite on sama 100 V kuin ennen pariston poistamista. Levyllä on siis edelleen  $\pm 44 \text{ nC}$  varaus ja kondensaattorin kapasitanssi on yhä  $440 \text{ pF}$ .

(d) Kun levyt siirretään takaisin alkuperäisille paikoilleen, kondensaattorin kapasitanssi kasvaa takaisin alkuperäiseen arvoonsa  $C = 890 \text{ pF}$ . Varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle, joten positiivisesti varatun levyn varaus on edelleen  $44 \text{ pC}$  ja negatiivisesti varautun levyn varaus on  $-44 \text{ pC}$ . Kondensaattorin nimellisvaraus on siis yhä  $Q = 44 \text{ pC}$  ja levyjen välinen jännite on  $\Delta V = Q/C = 50 \text{ V}$ .

**ARVIOINTI** Huomaa, että kondensaattorin kapasitanssi ei riipu siitä, onko kondensaattori kytketty paristoon vai ei. Siksi kapasitanssi on sama kohdissa (a) ja (d). Kapasitanssi kertoo kondensaattorin varauksen ja jännitteen suhteen, ja kapasitanssin muuttaminen muuttaa siis aina jompaakumpaa. Kun levyjä yhdistää paristo, jännite on vakio ja varauksen täytyy muuttua siirtämällä pariston läpi levyltä toiselle. Kun levyjä ei yhdistä mikään, varaus ei pääse siirtymään ja niinpä jännitteen täytyy muuttua.



**10.53** Selitä omin sanoin, millaisia komponentteja ovat ideaalinen paristo ja kondensaattori. Miten jännite ja kapasitanssi kuvaavat niiden toimintaa? Mistä tekijöistä pariston napojen välinen potentiaaliero riippuu? Entä kondensaattorin?

## Yhteenveton Sähkövaraus ja -kenttä

### Sähkövaraus ja -kenttä

- Sähkövaraus** kuvailee aineen kykyä kokea sähköisiä vuorovaikutukset. Varausta on kahta lajia, positiivista ja negatiivista.
- Protonin varaus on

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (10.181)$$

ja elektronin varaus on  $-e$ . Tämä on **alkeisvaraus**, ja kaikki luonnossa vapaasti esiintyvät sähkövaraukset ovat sen monikertoja.

- Sähkövarausta ei voi luoda eikä hävittää vain siirtää

$$\Delta q_{\text{kokonaiss}} = 0, \text{ eli } q_{\text{kokonaiss}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **varauskseen säilymislaki**.

- Varaukset luovat ympärilleen koko avaruuden täyttävän **sähkökentän**. Pistevaraukseen A sähkökenttä pisteessä P on *Coulombin lain* mukaan

$$\bar{E}_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow P}^2} \hat{r}_{A \rightarrow P},$$

missä  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$  on **sähkövakio**.

- Usean varauksen tuottama kokonaissähkökenttä saadaan laskeutuksella yhteen kunkin varauksen yksinään tuottama kenttä,

$$\bar{E}_{\text{kokonaiss}} = \sum_i \bar{E}_i.$$

Varatun kappaleen sähkökenttä voidaan laskea jakamalla kappale pieniin osiin, laskemalla kunkin osan luoma kenttä pistevarausmallin kautta ja laskemalla kaikkien osien tuottamat kentät yhteen.

- Sähkökentässä  $\bar{E}$  olevaan varaukseen  $q$  kohdistuu voima

$$\bar{F} = q\bar{E}.$$

- Sähkövuo** kuvailee pinnan läpäisevän sähkökentän määrää samaan tapaan kuin virtauksen tilavuusvuo kuvailee pinnan läpi aikayksikössä virtaavan nesteen tilavuutta.

- Vakiosähkökentän vuo suoran pinnan läpi on sähkökenttävektorin ja pintavektorin pistetulo,

$$\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{A}.$$

Yleisesti sähkövuo on sähkökentän pintaintegraali

$$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{A}.$$

- Sähkövuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on suoraan verrannollinen pinnan sisältämään kokonaissähkövaraukseen,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{sisällä}}.$$

Tämä on **Gaussin laki**, yksi sähkökenttien fundamentaaleista peruslaeista.

### Sähköinen potentiaalienergia ja potentiaali

- Sähkövarausten synnyttämä sähkökenttä on konservatiivinen ja siihen liittyy potentiaalienergia.
- Potentiaali kuvailee sähkökenttää samaan tapaan kuin korkeus kuvaa painovoimakenttää. Potentiaaliin  $V$  tuodun varauksen  $q$  potentiaalienergia on

$$U = qV.$$

- Potentiaalin muutos on sähkökentän viivaintegraali

$$\Delta V = - \int \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

ja sähkökenttä on potentiaalin gradientin vastavektori

$$\bar{E} = -\nabla V.$$

Sähkökenttä siis osoittaa potentiaalin jyrkimmän laskun suuntaan. Sähkökentän suuruus kertoo potentiaalin muutoksen kuljetusta matkaa kohti tässä suunnassa.

- Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen. Tavallisesti nollakohta valitaan äärettömän kauas tarkasteltavasta systeemistä tai **määritettuun** pisteeseen. Potentiaaliero eli **jännite** on fysikaalisesti mittavissa oleva suure, joka ei riipu nollakohdasta.
- Pistevaraukseen A potentiaali pisteessä P on

$$V_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow P}}.$$

- Usean varauksen tuottama kokonaispotentiaali saadaan laskemalla yhteen kunkin varauksen yksinään tuottama potentiaali,

$$V_{\text{kokonaiss}} = \sum_i V_i.$$

Varatun kappaleen potentiaali voidaan laskea jakamalla kappale pieniin osiin, laskemalla kunkin osan luoma potentiaali pistevarausmallin kautta ja laskemalla kaikkien osien tuottamat potentiaalit yhteen.

### Graafinen esitys

- Sähkökentän vektorikenttäkuvaajassa sähkökenttää kuvaavia nuolia piirretään tasaisin välein valittuihin avaruuden pisteisiin. Kunkin nuolen suunta ja pituus kuvaa sähkökentän suuntaa ja voimakkuutta kyseisessä pisteessä.
- Sähkökentän **kenttäviivavesityksessä** sähkökenttää kuvataan jatkuvin kenttäviivoineen. Kenttäviivasuusit yhdessä seuraavina sääntöinä:

  - Sähkökenttä on kenttäviivojen tangentin suuntainen.
  - Kenttäviivat eivät voi koskaan leikata toisiaan.
  - Kenttäviivat alkavat positiivisista varauksista ja päättyvät negatiivisiin varauksiin (tai jatkuvat äärettömyksiin). Kenttäviivat eivät voi katketa tai päättyä tyhjään avaruuteen.
  - Kustakin kappaleesta alkavien tai siihen päättyvien kenttäviivojen lukumäärä on suoraan verrannollinen kappaleen kokonaissvaraukseen.
  - Sähkökentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttä-

viivojen tihyteen (eli kääntäen verrannollinen viivojen väliin etäisyyskiin).

- Pinnan läpäisevä sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärään.

- Potentiaalia voi kuvata **tasapotentiaalikäyrillä ja -pinnilla**. Tasapotentiaalikäyrän kussakin pisteessä potentiaalilla on sama arvo.
- Kenttäviivasuksellä ja tasapotentiaalikäyrillä on seuraavat riippuvuudet:

- Kenttäviivat leikkaavat tasapotentiaalikäyrät kohtisuoraan.
- Kenttäviivat osoittavat suuntaan, jossa potentiaali pienenee.
- Mitä tihämmässä tasapotentiaalikäyrät ovat, sitä jyrkemmin potentiaali muuttuu, sitä voimakkaampi on sähkökenttä, ja sitä tihämmässä kenttäviivat kulkevat.

## Polarisaatio, lähdejännite ja kapasitanssi

- **Johde** on aine, jossa varauksenkuljettajat pääsevät liikkumaan helposti. **Eristeessä** varauksenkuljettajat on vangittu paikoilleen.
- Kaksi yhtä suurta mutta vastakkaisista varausta muodostavat yhdessä **dipolin**. Dipolin suuntaa ja kykyä kokea sähköisiä vuorovaikeutuksia kuvaa **dipolimomentti**

$$\bar{p} = q\bar{r} - \rightarrow +.$$

Neutraalitkin aineet polarisoituvat ulkoisessa sähkökentässä, jolloin ne kokevat sähköisen vuorovaikutuksen.

- **Johheet** polarisoituvat ulkoisessa kentässä täydellisesti, jolloin sähkökenttä niiden sisällä on nolla ja potentiaali vakio.
- **Eristeet** polarisoituvat ulkoisessa kentässä osittain, jolloin niiden sisään jää heikko kenttä

$$\bar{E} = \frac{1}{\kappa} \bar{E}_{\text{ulkoinen}},$$

missä  $\kappa$  on aineen **permittivisyys**.

- Paristot ja akut ovat **jännitelähteitä**, jotka pyrkivät aina pitämään napojensa välillä saman **lähdejännitteen**.
- **Kondensaattori** on sähkövarausta varastoiva laite. Sen toimintakyjä kuvaa **kapasitanssi**

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

- Levykondensaattoriin kapasitanssi on

$$C = \frac{1}{d} A \kappa \epsilon_0.$$

- Rinnan kytketyt kondensaattorit vastaavat yhtä kondensaattoria, jonka kapasitanssi on alkuperäisten kondensaattoreiden kapasitanssien summa,

$$C = \sum_i C_i.$$

- Sarjaan kytketyt kondensaattorit vastaavat yhtä kondensaattoria, jonka kapasitanssin käänneisluku on alkuperäisten kondensaattoreiden kapasitanssien käänneislukujen summa,

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

## Sanasto

- sähkövaraus (electric charge)
- johde (conductor)
- eriste (insulator, dielectric)
- varauksenkuljettaja (charge carrier)
- polarisaatio (polarisation)
- dipoli (dipole)
- sähkökenttä (electric field))
- pinta (surface)
- kenttäviiva (field line)
- lähde (source)
- nielu (drain)
- sähkövuo (electric flux)
- permittivisyys (permittivity)

- asymptootti (asymptote)
- sähköinen potentiaali (electric potential)
- tasapotentiaalikäyrä (equipotential line)
- jännite (potential difference)
- lähejännite (electromotive force)
- paristo (battery)
- elektroodi (electrode)
- elektrolyyti (electrolyte)
- maadoitus (grounding)
- kondensaattori (capacitor)
- kapasitanssi (capacitance)
- rinnankytentä (parallel connection)
- sarjaankytentä (serial connection)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

**10.1** Jos kappale vetää puoleensa neutraaleja kappaleita, sen täytyy olla sähköisesti varattu ( tai sitten olemme löytäneet jälleen uuden vuorovaikutuksen). Jos tämä varattu kappale vetää puoleensa teippejä A ja B, sen varauksen täytyy olla erilainen kuin kummankaan teipin. Niinpä tämä havainto tarkoittaisi, että sähköisiä varauksia onkin kolmea eri tyyppiä. (Näinhän ei kuitenkaan ole.)

**10.2** Coulomb on hyvin suuri sähkövaraus, joten varatun teipin varauksen täytyy olla tätä paljon, paljon pienempi. Teipin ainemäärä on noin 1 mol eli atomeja on luokkaa  $10^{23}$  kpl, ja näissä on noin kymmenkertainen määrä protoneja ja elektroneja,  $n_e = n_p = 10^{24}$ . Elektronin varaus on noin  $e = 10^{-19}$  C, joten kaikkiaan teippisä on positiivista ja negatiivista varausta luokkaa  $n_{ee} = 10^5$  C. Jos teipin kokonaismvaraus olisi esimerkiksi pikocoulombi eli  $\pm 10^{-12}$  C, tämä tarkoittaisi, että teippisä on noin  $n_{g\ell i} = 10^7$  elektronia lükää tai liian vähän. Vaikka tämä on monta elektronia, sen suhde elektronien kokonaismäärään on vain  $n_{g\ell i}/n_e = 10^{-17}$ . Toisin sanoen havaitsemme teippikokeessamme aivan minimaalisen poikkeaman elektronien ja protonien tasapainosta. Tämä osoittaa, kuinka voimakas sähköinen vuorovaikutus on.

**10.3** (a) Kuulat ajautuvat tasaisesti ämpärin reunolle, mahdollisimman kauas toisistaan. (b) Kuulat pyrkivät muodostamaan punaisten ja sinisten kuulien pareja. Ne voivat muodostaa esimerkiksi "shakkilautakuvion", jossa punaiset ja siniset kuulat vuorottelevat. (c) Kuulat jälleen muodostavat pareja ja mahdollisesti shakkilautakuvion, mutta koska sinisiä kuulia on enemmän, ylimääräiset siniset kuulat kerääntyvät kuvion reunolle. Näin sähkövarauksetkin käyttäytyvät johteissa: Jos kappaleessa on jompaakumpaa varausta toista enemmän, ylimääräiset varaukset kerääntyvät kappaleen pinnoille.

**10.4** Pallon sisällä olevat protonit muodostavat valtavan positiivisen sähkövarauksen, joka vetää elektroneja puoleensa. Toisen kappaleen sähkövaraus voi vetää tai työntää elektronit hieman pois normaaleilta paikoiltaan, mutta se ei mitenkään pysty erottamaan kaikkia elektroneja ja protoneja toisistaan.

**10.5** Positiivisesti varatun sauvan puolelle kerääntyy negatiivista varausta ja vastakkaiselle puolelle positiivista varausta. Sauva vetää puoleensa pallon kappaleen puoleista (negatiivista) sivua ja hylkii vastakkaista (positiivista) sivua. Palloon kohdistuva kokonaivoima on kohti sauvalle ja sauvalle kohdistuva voima on kohti palloa.

**10.6** (a) Tämän voi ajatella kahdella tavalla. Ensinnäkin voit ajatella, että systeemissä on kaksi dipolia, joiden varaukset ovat 1 nm etäisyydellä toisistaan. Kummankin dipolin dipolimomentti on siten erikseen  $1 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$ . Voit myös ajatella niin, että pisteen (1, 0) varaukset kumoavat toisensa, jolloin dipolin muodostavat vain pisteiden (0, 0) ja (2, 0) varaukset. Varausten välinen etäisyys on 2 nm, joten niiden dipolimomentti on  $2 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$ .

(b) Systeemin dipolimomentti on  $2 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$ , mutta toisaalta systeemin voi ajatella koostuvan kahdesta samansuuntaisesta dipolista, joiden kummankin dipolimomentti on  $1 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$ , joten ilmeisesti dipolimomentit voi laskea yhteen ja kyseessä on ekstensiivinen suure. (Näin todella on, mutta tässä pitää muistaa, että dipolimomentti on vektori. Kaksi vastakkaisuuntaista momenttia kumoaan toisensa.)

(c) Ei. Esimerkiksi  $\pm 2 \text{ nC}$  varaukset 1 nm päässä toisistaan muodostavat saman dipolimomentin kuin  $\pm 1 \text{ nC}$  varaukset 2 nm päässä toisistaan.

**10.8** (a) Siirtymän komponentit A:sta B:hen ovat  $\Delta x = -3.0 \text{ m}$  ja  $\Delta y = 2.0 \text{ m}$ , joten  $r_{A \rightarrow B} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 3.61 \text{ m}$ .

(b)  $\bar{r}_{A \rightarrow B} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} = (-3.0 \text{ m}) \hat{i} + (2.0 \text{ m}) \hat{j}$ .

(c)  $\hat{r}_{A \rightarrow B} = \bar{r}_{A \rightarrow B} / r_{A \rightarrow B} = (-0.83) \hat{i} + (0.55) \hat{j}$ .

(d) Coulombin lain mukaan  $F_{A \rightarrow B} = k \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} = 0.69 \text{ nN}$ .

(e)  $\bar{F}_{A \rightarrow B} = F_{A \rightarrow B} \hat{r}_{A \rightarrow B} = (-0.57 \text{ nN}) \hat{i} + (0.38 \text{ nN}) \hat{j}$ .

**10.9** (i) Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima kohti negatiivista varausta ja poispäin positiivisesesta varauksesta eli aina kohti tummaa väriä. (ii) Negatiiviseen varaukseen kohdistuu aina voima päinvastaiseen suuntaan eli kohti vaaleaa väriä. Tämä tulos ei riipu mitenkään siitä, millaiset varaukset kentän ovat luoneen. Myöhemmin opimme, että tällä tavalla kenttää kuvattaessa väri liittyy kentän potentiaaliaksi kutsuttuun ominaisuteen. Tässä kuvassa tämä potentiaali on sitä suurempi, mitä vaaleammalla värellä kenttä on kuvattu. Siispä se, että positiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa kohti tummaa väriä, tarkoittaa fysikaalisesti sitä, että positiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaali pienenee.

**10.10** (a) Sähkökenttä oli  $\bar{E} = \bar{F}/q = (300 \text{ N/C}) \hat{i} + (400 \text{ N/C}) \hat{j}$ .

(b) Voima on nyt  $\bar{F} = q \bar{E} = (-900 \text{ nN}) \hat{i} + (-1200 \text{ nN}) \hat{j}$ .

**10.11** Jos massan suuruus  $m$  tunnetaan, voimme mitata siihen kohdistuvan painovoiman  $\bar{G}$  esimerkiksi vaa'alla. Gravitaatiokentäksi (mittauspisteessä) saadaan näin ollen painovoiman ja massan suhde,  $\bar{g} = \bar{G}/m$ . Lähellä maanpintaa tämä on kaikkialla likimain sama putoamiskiertyvyys kohti maapallon keskipistettä, mutta avaruudessa painovoimakenttä ei ole vakio.

Sähkökenttä mitataan aivan samalla tavalla. Otetaan tunnettu varaus  $q$  ja mitataan siihen kohdistuva sähköinen voima  $\bar{F}$ , jolloin sähkökenttä mittauspisteessä on  $\bar{E} = \bar{F}/q$ .

**10.12** Piirrä kuva! Varaus 1 nC tuottaa origoon sähkökentän  $\bar{E}_1 = (-9.0 \text{ N/C}) \hat{j}$  ja  $-2 \text{ nC}$  kentän  $\bar{E}_2 = (4.5 \text{ N/C}) \hat{i}$ . Kokonaiskenttä on  $\bar{E} = (4.5 \text{ N/C}) \hat{i} + (-9.0 \text{ N/C}) \hat{j}$ . (Tätä ei kysytty, mutta kentän voimakkuus on noin  $E = 10.0 \text{ N/C}$ .)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

**10.13 (a)**  $r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + (y_P - y_q)^2}$ .

(b)  $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y_P - y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}}$ .

(c)  $dE_x = k \frac{x_P dq}{r_{q \rightarrow P}^3}$  ja  $dE_y = k \frac{(y_P - y_q) dq}{r_{q \rightarrow P}^3}$ .

**10.14** Geometriasta seuraa

$$\left| \frac{dE_y}{dE} \right| = \left| \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \right|, \quad (10.182)$$

jolloin etumerkin oikealla valinnalla

$$dE_y = -\frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} dE. \quad (10.183)$$

Kentän voimakkuus on

$$dE = k \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (10.184)$$

joten sähkökentän  $y$ -komponentiksi saadaan

$$dE_y = -\frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} k \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} = -k \frac{y_q dq}{r_{q \rightarrow P}^3} = -k \frac{y_q dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.185)$$

Saatiin siis sama tulos kuin yhtälössä (10.28) kuten pitikin.

**10.15 (a)** Sauvan tilavuus on  $V = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ , joten jos sauvan kokonaisvaraus on  $Q$ , sen varaustiheys on  $\rho = Q/V = 5.0 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3$ . Sauvan pituusvaraustiheys on  $\lambda = Q/L = \rho A = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}$ .

(b)  $L$ -pituisen osan varaus on  $q = L\lambda = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ . Voi laskea myös osan tilavuuden  $V = LA = 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ , jolloin sen varaus on  $q = \rho V$ . Näin saadaan tietenkin sama tulos, ja lasku on helpompi käytämällä suoraan pituusvaraustiheyttä.

**10.16** Funktion  $F(y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$  derivaatta  $y$ :n suhteeseen on  $f(y) = F'(y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y = -y/(x^2 + y^2)^{-3/2}$ . Niiinpä funktion  $f$  integraali on funktio  $F$  eli

$$\int \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} + C. \quad (10.186)$$

Näin saamme laskettua sähkökentän  $y$ -komponentin,

$$E_y = -k \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.187)$$

$$= -k \frac{Q}{L} \left| \frac{1}{(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \right|_{-L/2}^{L/2} \quad (10.188)$$

$$= -k \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}} - \frac{1}{(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}} \right) \quad (10.189)$$

$$= 0. \quad (10.190)$$

**10.17** Funktion  $F(y)$  derivaatta  $y$ :n suhteeseen on

$$F'(y) = \frac{1}{x} (x^2 + y^2)^{-1/2} + \frac{y}{x} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y \quad (10.191)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.192)$$

$$= \frac{x^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.193)$$

$$= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.194)$$

$$= f(y). \quad (10.195)$$

Siiispä  $F$  on funktion  $f$  integraalifunktio.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

**10.18** Ei voi. Asympoottinen käytös tarkoittaisi sitä, että  $\frac{E}{a/r^2} \rightarrow 1$ , mutta nyt  $\frac{E}{a/r^2} = \frac{1}{r} \rightarrow 0$ . Siis vaikka pisteverauksen kenttä ja nyt tarkasteltu kenttä kumpikin heikkenevät etäisyyden kasvaessa ja lähestyvä nolla,  $E = a/r^3$  lähestyy nolla nopeammin kuin pisteverauksen kenttä. Asympoottisuus ei siis tarkoita sitä, että funktion raja-arvo. Tällaisia kenttiä on myös olemassa, sillä sähköisen dipolin kentän voimakkuus heikkenee nopeudella  $E \sim 1/r^3$ .

**10.20** Ei voi kumpakaan. Kussakin pisteesä kentällä on yksikäsiteinen suunta, joten jos kenttäviivaa alestaan piirtämään yhdestä pisteestä, voidaan saada vain yksi käyrä (ellei kenttää muuteta). Jos viivat sivuavisat, yhdestä pisteestä lähtisi kaksi käyrää. Jos viivat risteäisivät, niiden risteyskohdassa ei olisi edes yksikäsiteistä viivan tangentin suuntaa.

**10.21** (a) Kaikki 360 viivaa.

(b) 1. pallo:  $360/4\pi(1 \text{ m})^2 = 28.6 \text{ m}^{-2}$ , 2. pallo:  $360/4\pi(2 \text{ m})^2 = 7.2 \text{ m}^{-2}$ , 3. pallo:  $360/4\pi(3 \text{ m})^2 = 3.2 \text{ m}^{-2}$ .

(c) Alan  $A$  läpi kulkee 1. pallossa 4 viivaa, joten  $A = 4/28.6 \text{ m}^{-2} = 0.14 \text{ m}^2$ .

(d) 1. pallo:  $E = \frac{kQ}{(1 \text{ m})^2}$ ,

1. pallo:  $E = \frac{kQ}{(2 \text{ m})^2}$ ,

2. pallo:  $E = \frac{kQ}{(3 \text{ m})^2}$ .

(e) Suhde on jokaisella pinnalla sama. Esim. 1. pallon arvoilla laskien  $\frac{kQ}{(1 \text{ m})^2} / \frac{360}{4\pi(1 \text{ m})^2} = \frac{kQ\pi}{90}$ .

**10.22** (a) Kolme virtaviivaa vastaa  $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$  virtausta.

(b) Leveässä putkessa  $v = \frac{0.006 \text{ m}^3/\text{s}}{0.015 \text{ m}^2} = 0.4 \text{ m/s}$  ja kapeassa  $v = \frac{0.006 \text{ m}^3/\text{s}}{0.003 \text{ m}^2} = 2.0 \text{ m/s}$ .

(c) Tilavuusvuo on sama kuin putken läpi virtaavan nesteen määrä aikajaksikossa,  $\Phi_V = 0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**10.24** Vastaus riippuu siitä, millaisen pinnan valitset. Kuitenkin kaikilla pinnoilla ulos ja sisään täytyy kulkea yhtä monta virtaviivaa, jolloin koko pinnan läpi kulkeva tilavuusvuo on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että pinnan sisällä on oltava yhtä paljon lähteitä ja nieluja. Huomaa, että tämä EI tarkoita sitä, että pinnan sisällä ei olisi lähteitä tai nieluja lainkaan.

**10.25** (a) Ei mitenkään. Pinnan läpi kulkisi silti 8 viivaa.

(b) Ei mitenkään. Sähkövuo on suoraan verrannollinen kenttäviivojen määrään.

(c) Ei vaikutusta, koska edelleen pinnan läpäisivi 8 viivaa. Varauksen siirtäminen kyllä muuttaisi sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa kuution kaikilla pinnoilla, mutta näiden muutosten täytyy täsmälleen kumota toisensa niin, että sähkövuo pysyy vakiona.

**10.27** Jos maailma olisi 2-ulotteinen, kenttäviivat leviäisivät vain kahteen eikä kolmeen ulottuvuuteen. Jos varauksen ympäri piirrettäisiin ympyrä, kaikki viivat läpäisisivät tämän ympyrän, ja niinpä viivojen tiheys olisi kääntäen verrannollinen tällaisen ympyrän kaaren pituuteen eikä pallon pinta-alaan. Siispä pisteverauksen kentän lausekkeessa pallon alla  $4\pi r^2$  pitäisi korvata ympyrän kaaren pituudella  $2\pi r$ , eli  $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$ . Juuri tämä tulos saadaan äärettömän pitkän varatun sauvan sähkökentälle, koska sauvan kenttä leviää sylinterisymmetrisesti.

**10.28** Ei. Pallokoren sisällä kentän saattoi päättää olevan nolla siksi, että varausjakauma on kuorella symmetrinen. Jos esimerkiksi vain toinen puoli pallosta on varattu, sen sisällä on sähkökenttä.

**10.29** Äärellisen kokoisten varattujen kappaleiden kenttä lähestyy aina pisteverauksen kenttää, kun mennään tarpeeksi kauas, koska mikä tahansa äärellinen kappale näyttää pistemäiseltä kyllin kaukaa katsottuna. (Esim. tähdet ovat aivan valtavia, mutta nekin näyttävät taivaalla pistemäisiltä.) Äärettömän pitkä sauva sen sijaan näyttää äärettömän pitkältä — ei siis pisteeltä —riippumatta siitä, kuinka kaukaa sitä tarkastelee. Niinpä äärettömän kappaleen kenttä ei ikinä lähesty pisteverauksen kenttää.

Tietysti äärettömiä kappaleita ei ole olemassakaan, mutta esimerkiksi ääretön sauva on hyvä malli niin kauan kuin sauva on selvästi pidempi kuin etäisyys, jolta sauvaa tarkastellaan.

**10.31** Varaukseen B kohdistuu voima poispäin A:sta. Niinpä (i) voiman tekemä työ on negatiivinen ja (ii) potentiaalienergian muutos on positiivinen. Jos toinen varaus olisi negatiivinen, tulos olisi päinvastainen. Jos molemmat varaukset olisivat negatiiviset, tulos olisi sama.

**10.32** (a) Näin on, koska  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$ .

(b, c) Jos varaukset ovat samat,  $q_A q_B > 0$ , joten myös  $U > 0$ . Tällöin varausten lähestyessä potentiaalienergia kasvaa. Jos etumerkit ovat erilaiset, potentiaalienergia on negatiivinen ja se siis pienenee.

**10.33** (a) Skalarit: potentiaalienergia, potentiaali. Vektorit: voima, sähkökenttä.

(b) Riippuvat testivarauksesta: potentiaalienergia, voima.

(c) Kaikki voivat riippua paikasta.

(d) Nollasta poikkeavat: sähkökenttä, potentiaali ja mahdollisesti potentiaalienergia. Koska varauksia on vain yksi, ei ole mitään toista varausta, jonka kanssa tämä varaus voisi vuorovaikuttaa. Niinpä voima ainakin on nolla. Potentiaalienergian nollakohdan voi valita vapaasti.

**10.35** Ei voi. Ainoastaan konservatiivisiin vektorikenttiin liittyy potentiaalia vastaava funktio. Mikä tahansa vektorikenttä, jossa on pyörre, on ei-konservatiivinen.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

- 10.36** (a) Viivojen välinen etäisyys pienenee.  
 (b) Tasapotentiaalikäyrien välinen etäisyys pienenee.  
 (c) Potentiaali kasvaa lähellä positiivista varausta ja pienenee lähellä negatiivista varausta.  
 (d) Potentiaalin jyrkkyys kasvaa.  
 (e) Sähkökentän voimakkuus kasvaa.

Kaikki täähän listatut ominaisuudet paitsi (c) ovat merkkejä sähkökentän voimakkuuden kasvusta. Voimakkaassa kentässä kenttäviivat ja tasapotentiaalikäyrät ovat tiheässä ja potentiaali muuttuu jyrkästi.

**10.37** Ilman miinusmerkkiä sähkökenttää osoittasi potentiaalin kasvun suuntaan. Miinus käantää suunnan niin, että kenttä osoittaa potentiaalin laskusuuntaan. Vastaavasti potentiaali pienenee kuljetaessa sähkökentän suuntaan.

**10.38** Negatiivinen varaus "putoaa" (eli siihen kohdistuu voima) vastakkaiseen suuntaan sähkökenttään nähdien eli kohti korkeaa potentiaalia.

**10.40** Jos valitaan potentiaalin nollakohta äärettömän kauas,  $1 \text{ nC}$  varaus tuottaa origoon potentiaalin  $V_1 = 9.0 \text{ V}$  ja  $-2 \text{ nC}$  potentiaalin  $V_2 = -9.0 \text{ V}$ . Kokonaispotentiaali on  $V = 0.0 \text{ V}$ . Huomaa, että tämä on sama tilanne kuin kysymyksessä 10.12, jossa totesimme, että sähkökentän voimakkuus origossa on noin  $E = 10.0 \text{ N/C}$ . Se, että potentiaalin arvo origossa sattuu olemaan nolla, ei tarkoita sitä, että sähkökentänkin pitäisi hävitä. Sähkökenttä riippuu potentiaalin muutoksen jyrkkydestä eikä sen arvosta.

**10.41** Derivaatta on

$$F'(y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2} + y) \quad (10.196)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} [\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2y + 1] \quad (10.197)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} \left( \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (10.198)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(y). \quad (10.199)$$

**10.42** Jätetään alaindeksi  $P$  pois. Merkitään  $f(x) = \sqrt{x^2 + L^2/4}$ , jolloin  $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + L^2/4}$ . Niinpä

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (10.200)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{f(x) + L/2}{f(x) - L/2} \quad (10.201)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{f(x) - L/2}{f(x) + L/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x) + L/2}{f(x) - L/2} \quad (10.202)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{f(x) - L/2}{f(x) + L/2} \frac{f'(x)[f(x) - L/2] - f'(x)[f(x) + L/2]}{[f(x) - L/2]^2} \quad (10.203)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{f(x) + L/2} \frac{f'(x)L}{f(x) - L/2} \quad (10.204)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{xL}{f(x)[f(x)^2 - L^2/4]} \quad (10.205)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2/4} \cdot (x^2 + L^2/4 - L^2/4)} \quad (10.206)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{x\sqrt{x^2 + L^2/4}}. \quad (10.207)$$

Tämä on sama lauseke kuin mitä aikaisemmin johdettiin sähkökentän superpositioperiaatteella.

**10.43** Johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista kenttää, koska tällainen kenttä saa varaukset liikkumaan niin kauan kunnes kenttää ei enää ole. Pinnalla voi kuitenkin olla pintaan nähdyn kohtisuora kenttä, koska pinta pysyytää varausten läukkeen. Ts. varaukset eivät pääse johteesta irti, jolloin ne eivät voi siirtyä loputtomiin vaikka pinnalla olisikin pinnan suuntainen kenttä.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

**10.44** Jyrkkyys ja korkeus ovat nollia vain, jos pinnan tasolla on tasainen maa. Kun meren pinta nousee, rinteen jyrkkyys pysyy tällä tasaisella maalla nollassa, mutta maan korkeudesta tulee negatiivinen. Korkeus vastaa potentiaalia ja jyrkkyys sähkökentän voimakkuutta. Alkutilanne vastaa siis tilannetta, jossa potentiaali on vakio, nolla ja sähkökenttä on myös nolla. Jälkimmäinen tilanne vastaa sitä, että sähkökenttä on nolla ja potentiaali vakio, mutta potentiaali ei ole enää nolla vaan negatiivinen. Tästä analogiasta on tarkoitus huomata, että sähkökenttä on nolla, kun potentiaali on vakio, mutta potentiaalin nollakohdan voi siirtää ilman että sähkökenttä siitä muuttuisi. Potentiaalin ei tarvitse olla nolla vaikka sähkökenttä olisi ja päinvastoin.

**10.45** (a) Nolla. (b) Gaussin lain perusteella nolla. (c) Pallon sisäpinnan varauksen täytyy olla yhtä suuri kuin pallon sisällä oleva varaus. Toisaalta varauksen säilymisen perusteella pallon sisä- ja ulkopintojen varauksen täytyy olla yhteenä nolla. Niinpä pallon ulkopinnalla täytyy olla täsmälleen yhtä suuri varaus kuin pallon sisällä.

**10.46** Ulkoinen kenttä ei pääse johteen sisään, joten  $E_{\text{aine}} = 0$ . Siispä  $\kappa = E_{\text{ulkoinen}}/E_{\text{aine}} = \infty$ .

**10.47** Levyistä kannattaa tehdä pinta-alaltaan mahdollisimman suuret ( pieni varaustihelsys, vaikka varaus olisikin suuri) ja ne kannattaa asettaa lähelle toisiaan ( pieni jännite, vaikka sähkökenttä olisikin suuri). Levyjen välissä kannattaa valita aine, jolla on suuri permittiivisyys ( heikko sähkökenttä, vaikka varaus olisikin suuri).

**10.48** Kokonaisuudessaan ei, ainakaan jos reaktiot ovat ideaaliset. Yhdellä elektrodilla liuoksesta poistuu litiumioneja ja toisella elektrodilla ioneja tulee yhtä paljon lisää. Sen sijaan reaktio kuluttaa elektrodimateriaaleja.

**10.49** (a) Paristo pitää napojensa välichen potentiaalieron vakiona, ja positiivisen navan potentiaali on korkeampi. Siis potentiaali on 11 V. (b) -3 V. Negatiivinen arvo ei tarkoita mittaan erikoista. (c) Tähän ei voi vastata. Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen, eikä kumpikaan paristo kiinnitä sitä.

**10.50** (a) (i) Paristo pitää levyjen välichen potentiaalieron eli jännitteenvaihtuvan samana. Toisaalta potentiaali muuttuu levyjen välissä, koska siellä on sähkökenttä. Jos jännite pysyy samana mutta levyjen välichen etäisyys kasvaa, sähkökentän täytyy heikentyä (koska kentän voimakkuus riippuu potentiaalin muutoksen jyrkkyydestä). Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että levyjen varauksen täytyy pienentyä, koska levyjen välichen kenttä on verrannollinen levyjen pintavaraustiheyteen. (ii) Levyjen varaus pysyy vakiona, koska varaus ei pääse irrallisilta levyltä minnekään. Tällöin levyjen välichen sähkökenttä pysyy vakiona, ja jos levyltä siirrytään toisistaan kauemmas, niiden välichen jännite kasvaa. (b) (i) Eriste polarisoituu ja heikentää näin sähkökenttää levyjen välissä. Paristo pyrkii pitämään levyjen välichen jännitteenvaihtuvan samana, joten myös sähkökentän täytyy pysyä samana. Niinpä pariston täytyy siirtää levylle lisää varausta. (ii) Varaus pysyy vakiona, jolloin eristeenväliäminen heikentää levyjen välistä sähkökenttää. Niinpä levyjen välichen jännitekin pienenee.

**10.51** (a) Jos kondensaattori ei ikinä hajoa, se voi varastoida äärettömästi varausta. Kondensaattorissa varaus ja jännite ovat suoraan verrannolliset.

(b) Sähkökenttä eristeessä on  $E = Q/(A\kappa\varepsilon_0)$ , joten maksimivaraus on

$$Q_{\max} = E_{\max} A \kappa \varepsilon_0 \approx 2.9 \cdot 10^{-7} \text{ C.} \quad (10.208)$$

Tätä ei kysytty, mutta maksimijännite, jonka kondensaattori kestää, on  $\Delta V_{\max} = E_{\max} d = 3000 \text{ V}$ .

**10.52** (a) Kuva (b): Erikseen jännite  $\Delta V = 5 \text{ V}$ , varaus  $Q_1 = 5 \text{ nC}$  ja  $Q_2 = 2 \text{ nC}$ . Kapasitanssit ovat siis  $C_1 = Q_1/\Delta V = 1 \text{ nF}$  sekä  $C_2 = Q_2/\Delta V = 0.4 \text{ nF}$ . Yhdessä  $\Delta V = 5 \text{ V}$  ja  $Q = 7 \text{ V}$ , joten  $C = Q/\Delta V = 1.4 \text{ nF} = C_1 + C_2$ . Kuva (d): Erikseen varaus  $Q = 3 \text{ nC}$ , jännite  $\Delta V_1 = 2 \text{ V}$  ja  $\Delta V_2 = 3 \text{ V}$ . Siispä kapasitanssit ovat  $C_1 = Q/\Delta V_1 = 1.5 \text{ nF}$  ja  $C_2 = Q/\Delta V_2 = 1.0 \text{ nF}$ . Yhdessä  $Q = 3 \text{ nC}$  ja  $\Delta V = 5 \text{ V}$ , joten  $C = Q/\Delta V = 0.6 \text{ nF}$ . Pätee

$$\frac{1}{0.6 \text{ nF}} = \frac{1}{1.0 \text{ nF}} + \frac{1}{1.5 \text{ nF}}. \quad (10.209)$$

(b) Rinnankytentä parantaa kondensaattorien kykyä varastoida varausta. Sarjaankytentä heikentää täitä.



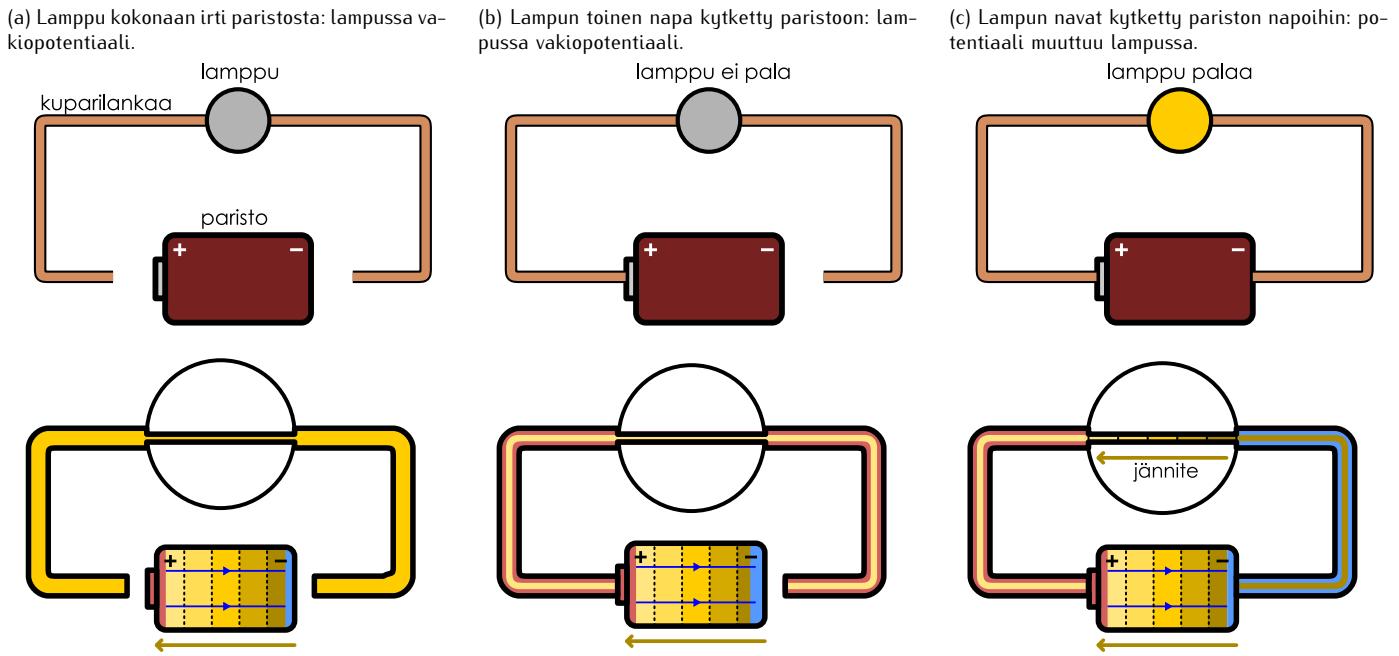
# 11 Sähkövirta

Tähän asti olemme tarkastelleet sähköstatuikkaa eli tilanteita, joissa sähkövaraaukset ovat tasapainossa. Toki esimerkiksi kappaleen tuominen sähkökenttään tai pariston kiinnittäminen kondensaattoriin siirtää varauksia, mutta tällöinkin varaukset järjestyvät hyvin nopeasti uuteen tasapainotilaan ja jäävät paikoilleen. Useimmat sähköisten ilmiöiden käytännön sovellukset kuitenkin perustuvat varaustenkuljettajien liikkumiseen, koska liikkuvan sähkövarauksen avulla voidaan siirtää hyvin järjestynyt energiataustain. Tuttummekin nyt liikkuvien varausten ja niitä kuvaavan sähkövirran perusominaisuksiin. Opimme myös analysoimaan yksinkertaisten paristoista, johteista, vastuksista ja kondensaattoreista rakennettujen laitteiden eli sähköpiirien toimintaa.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- Määritellä sähkövirta ja virrantiheys sekä laskea yksi kun toinen tunnetaan.
- Selittää Ohmin laki virrantiheydelle ja virralle sekä määritellä resistanssi ja johdavuus.
- Selittää Kirchhoffin säänöt ja soveltaa niitä piirianalyysissä.
- Tulkita piirikaaviota ja tunnistaa johteen, jännitelähteen, vastuksen, kondensaattorin ja maadoituksen symbolit.
- Ratkaista potentiaali ja virta paristoista, vastuksista ja kondensaattoreista koostuvissa tasavirtapiireissä.
- Ratkaista latautuvien ja purkautuvien kondensaattoreiden varaus ajan funktiona.
- Määrittää energian muutokset sähköisissä komponenteissa.

Kuva 11.1: Lampun kytkeminen paristoon. Lampussa on kaksi napaa, ja se ei pala, jos vain toinen navoista on kytketty paristoon. Vasta molempien napojen yhdistäminen saa lampun palamaan. Tällöin paristo tuottaa lampun napojen välille potentiaalieron eli jännitteen.



## 11.1 Sähkövirta

Opimme edellisessä luvussa, että johdekappaleen sisällä ei tavallisesti voi olla sähkökenttää. Jos johdekappaleen tuo sähkökenttään, tämä kenttä saa johteen polarisoitumaan, ja varaukset hakeutuvat sellaiseen tasapainotilaan, jossa sähkökenttää johteen sisällä on nolla. Tämä johtuu siitä, että sähkökenttää kohdistaa varauksenkuljetajiin niitä liukkeelle työntävän voiman, ja varaus pysyy liukkeessa, kunnes sähkökenttää katoaa johteen sisältä. Tavallisesti johteen potensiaalit polarisoituvat erittäin nopeasti, eikä ulkoinen sähkökenttää siis pääse tunkeutumaan johteen sisälle.

Ulkoinen sähkökenttää ei ole kuitenkaan ainoa tapa siirtää varausta johteissa, sillä paristo pyrkii ylläpitämään napojensa välillä lähdejännitteensä suuruista potentiaalieroja. Myös potentiaalieron avulla voidaan ohjata varauksen liikkettä, ja kuten varmasti tiedät, paristojen avulla voidaan käyttää monia sähkölaitteita. Paristokäytöisten laitteiden toiminnan ymmärtämiseksi tutkimme seuraavaksi kuvassa 11.1 esitettyä koetta, jossa tavallinen, vanhanaikainen hehkulamppu saadaan palamaan pariston avulla. Hehkulampussa on kaksi napaa hiukan samaan tapaan kuin paristossakin, joten otamme ensin kaksi kuparilankaa ja kiinnitämme kumpaankin lampun napaan yhden kuparilangan pään (kuva 11.1 (a)). Seuraavaksi otamme lankoja vapaista päästä yhden ja yhdistämme sen pariston positiiviseen napaan (kuva 11.1 (b)). Tässä vaiheessa lamppu ei vielä syty palamaan. Lopuksi otamme kuparilangojen viimeisen vapaan pään ja yhdistämme sen pariston negatiiviseen napaan (kuva 11.1 (c)). Nyt lamppu alkaa loistaa! Hehkulampu myös kuumenee loistaessaan, mutta kupariohjimet eivät tässä kokeessa juurikaan lämpene. Valon tuottaminen ja lampun lämpeneminen vaativat molemmat energiota, ja selvästikin ainoa energia varastoiva laite systeemissä on paristo, joten energian täytyy siirtyä paristosta sähköisesti johtimia pitkin lamppuun, jossa osa energiasta muuttuu lämpöenergiaksi ja osa poistuu lämpö- ja valosäteilyn mukana.

Kuvassa 11.1 on esitetty myös sähkövarauksen ja potentiaalin käytätyminen kokeen aikana. Paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot pyrkivät siirtämään varausta navalta toiselle, minkä vuoksi pariston positiivisella navalla on ylimääräistä positiivista varausta ja negatiivisella navalla negatiivista varausta. Kuparilangat ovat aluksi neutraaleja, joten niissä ei ole lainkaan ylimääräistä varausta. Ne ovat myös johtavia, joten potentiaalin täytyy olla niissä kaikkialla sama. Hehkulampun hehkulankakin on vain ohut, ympäristöltään suojuva johdin, joten sekin on aluksi samassa potentiaalissa kuin siihen yhdistetyt kuparilangat.

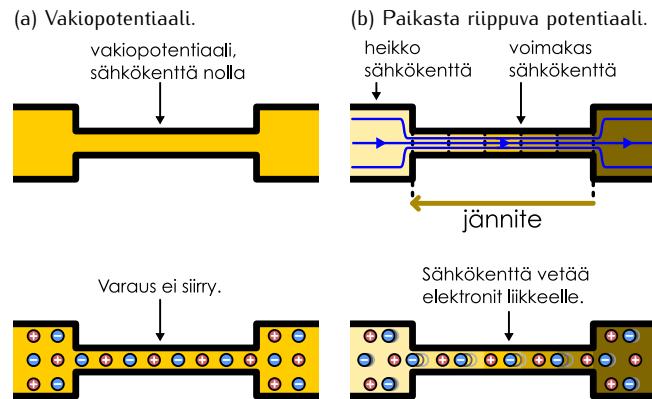
Kun yksi kuparilanka kiinnitetään pariston napaan, siihen siirtyy paristosta hyvin pieni sähkövaraus, ja *johdin saa saman potentiaalin kuin pariston napa*, johon johdin kytkettiin. Johdin toimii siis periaatteessa samalla tavalla kuin paristoon kiinnitetyt kondensaattorin levy, mutta kuparilangan kapasitanssi on erittäin pieni, joten langan potentiaalin muuttamiseen riittää äärimmäisen pieni sähkövaraus. Johtimen saama varaus on itse asiassa niin pieni, että johdinta voi aivan hyvin pitää edelleen likimain neutraalina. Erityisesti varausta siirtyy niin vähän ja niin nopeasti, että lamppu ei tähän reagoi.

## SÄHKÖVIRTA

Kun toinenkin kuparilanka kytetään pariston vastakkaiseen napaan, tämäkin lanka saa saman potentiaalin kuin pariston napa. Tähänkin kuparilankaan siirtyy paristosta hyvin pieni varaus, jolloin kuparilangat saavat pienet, vastakkaismerkkiset sähkövaraukset. Koko ajan paristo pyrkii pitämään napojensa välisen potentiaalieron vakiona, samassa arvossa kuin pariston kemian määräämä lähdejännite,  $\Delta V = \mathcal{E}$ . Toisaalta johtee pyrkivät pysymään kauttaaltaan samassa potentiaalissa eli pitämään päädensä välisen potentiaalieron nollassa,  $\Delta V = 0$  V, joten *pariston vastakkaisiin napoihin kytketyt kuparijohtimet saavat eri potentiaalit*. Edelleen koska lampun navat on yhdistetty näihin kuparijohtimiin, lampun napojen välille syntyy potentiaaliero eli jännite.

Lampun potentiaalin muuttaminen ei siis saanut lamppua palamaan, mutta potentiaaliero eli jännitteen tuottaminen lampun napojen välille sai. Tämä johtuu siitä, että potentiaalin arvo itsessään on merkityksetön, mutta potentiaalieroihin liittyy aina sähkökenttä. Jos lampun hehkulanka on kauttaaltaan samassa potentiaalissa, sen sisällä ei voi olla sähkökenttää. Tällöin langassa olevat varauksenkuljetajat ovat tasapainossa kuten kuvassa 11.2 (a). Potentiaalin nollakohta on vain valinta, joten ei ole väliä onko hehkulangan potentiaali 0 V tai vaikka 1000 V. Jos kuitenkin hehkulangan päät ovat *eri* potentiaaleissa, potentiaalin täytyy muuttua langan sisällä. Sähkökenttä osoittaa aina korkeasta potentiaalista matalaan potentiaaliin, joten tällöin *langan sisälä on sähkökenttä* (kuva 11.2 (b)). Tämä sähkökenttä kohdistaa langassa oleviin elektroneihin niitä liikkeelle vetävän voiman sähkökenttään nähden vastakkaiseen suuntaan, ja niinpä *elektronit alkavat liikkua hehkulangassa potentiaalin kasvusuuntaan*.

Kuva 11.2: Potentiaaliero luovuttaa sähkökentän ja virran.



### 11.1 Tarkastellaan kuvan 11.1 hehkulankaa.

- Mihin suuntaan sähkökenttä osoittaa hehkulangassa?
- Selitä sähkökentän synty ja suunta kuparijohdinten varausten avulla.

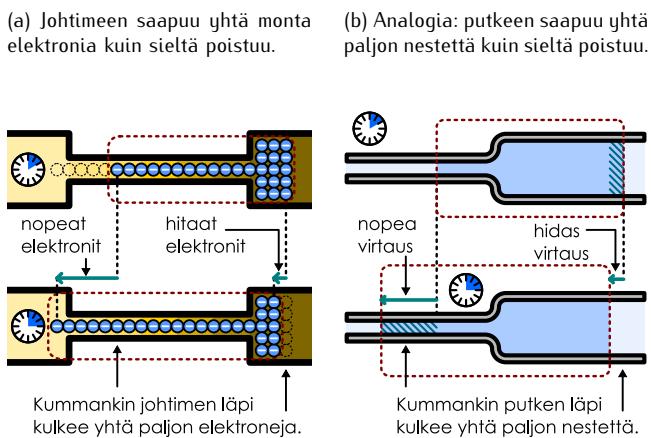
Sähkökenttä tekee hehkulangassa liukkuviin elektroneihin työtä, jolloin elektronien sähköinen potentiaalienergia muuttuu niiden liike-energiaksi. Positiivisesti varatuille hiukkasillehan potentiaali on samantapainen käsite kuin korkeus on painovoimakentässä oleville kappaleille, joten ne tavallaan "putoavat" korkeasta potentiaalista matalaan. Elektronit ovat kuitenkin negatiivisesti varautuneita hiukkasia, joten ne käytäytyvät pääinvastoin ja "putoavat" hehkulangan läpi matalasta potentiaalista korkeaan. Koska lanka on johde, elektronit pääsevät liukkumaan siihen helposti, mutta eivät kuitenkaan täysin vapaasti. Lankaa pitkin *liukkuviin elektroneihin kohdistuu nimitään langassa niiden liikettä vastustava dissipatiivinen vuorovaikutus*, joka muuttaa niiden liike-energian nopeasti lämpöenergiaksi samaan tapaan kuin ilmanvastus muuttaa putoavan kappaleen liike-energiaa lämpöenergiaksi. Nämä hehkulanka kuumenee, ja tarpeeksi kuumana metalli alkaa hehkuva, jolloin lamppu säteilee valoa.

Elektronit siis liikkuvat hehkulangassa ja lämmittävät sitä. Kuparijohtimet ja paristo eivät kokeessa juuri-kaan lämpene, joten ei ole ilmeistä, liukkuuko varaus myös niissä. Voimme kuitenkin epäsuorasti päätellä, että varaus ei voi siirtyä vain hehkulangassa vaan varauksenkuljetajien *täytyy* liikkua kaikissa toisiinsa yhdistetyissä johtimissa. Elektronit lähtivät alunperin liikkeelle hehkulangassa siksi, että kuparijohdinten künnyttäminen paristoon siirsi johtimiin hyvin pienien ylimäärän positiivista ja negatiivista varauusta. Tämä pieni ylimääräinen varaus synnyttää hehkulankaan sähkökentän ja potentiaalieron sekä saa siten langan elektronit liikkeelle. Pariston negatiiviseen napaan kiinnitetystä johtimessa on pieni ylimäärä elektroneja (negatiivinen varaus) ja pariston positiiviseen napaan kiinnitetystä johtimessa on pieni elektronien vajaus (positiivinen varaus). Elektronit siirtävät hehkulangassa nimenomaan negatiiviselta johtimelta positiiviselle, joten jos varausta siirtynisi ainoastaan hehkulankaa pitkin, negatiivisessa johtimessa oleva elektronien ylimäärä siirtynisi erittäin nopeasti korvaamaan positiivisen johtimen elektronivajausta. Tällöin kummastakin johtimesta tulisi jälleen neutraali ja ne saisivat saman potentiaalin. Varaus ei tietenkään enää kulkisi hehkulangassakaan eikä lamppu palaisi. Nämä tapahtuivat, jos toinen kuparijohdin irrotetaan paristosta, ja tällöin lamppu sammuu väliittömästi.

Paristoon kytetty lamppu kuitenkin loistaa jatkuvasti, joten johtimissa olevan pienen varausepätasapainon täytyy säilyä muuttumattomana niin kauan kuin johtimet on yhdistetty paristoon. Langassa kulkevat elektronit siirtävät *negatiivista* varausta negatiiviselta johtimelta positiiviselle, joten pariston täytyy siirtää *positiivista* varausta negatiiviselta johtimelta positiiviselle. Nämä tapahtuu, koska paristo pyrkii pitämään napojensa

välisen potentiaalieron vakiona, samana kuin mikä pariston lähdejännite on. Elektronien siirtyminen hehkulangan kautta johtimelta toiselle pienentää johdinten välistä potentiaalieroaa, jolloin pariston elektrodien kemialliset reaktiot käynnistyvät ja siirtävät kuparijohtimiin varausta korvaamaan hehkulangan kautta siirtynytä varausta. Systeemi saavuttaa hyvin nopeasti *tasaisen virtauksen tilan*, jossa varausta siirtyy johdinten välillä jatkuvasti pariston ja hehkulangan kautta täsmälleen yhtä nopeasti eikä johdinten varaus muutu.

Kuva 11.3: Varauksenkuljettajat liikkuvat kuin kokoonpuristumaton neste.



nia kuutiometrissä. Metallijohdin on siis "täynnä" elektroneja ja sen voikin ajatella toimivan kuin nestettä täynnä olevan putki (kuva 11.3). Jos haarrattoman putken yhdessä kohdassa oleva neste siirtyy, nesteen täytyy siirtää putkessa *kaikkialla*, koska yksikään nestepisara ei voi puristua kasaan, venyä tai kulkea toisten pisaroiden "läpi". Samaan tapaan elektronien siirtämisen metallisen johtimen yhdessä kohdassa on mahdollista vain, jos elektronit samalla siirtävät *kaikkialla* johtimessa. Lampun ja kuparijohdinten tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos negatiivisesta kuparijohtimesta siirtyy hehkulankaan tietty määrä elektroneja, hehkulangan toisesta päästä täytyy samanaikaisesti siirtyä positiiviseen johtimeen yhtä paljon elektroneja, ja samalla kaikki muutkin elektronit siirtävät hehkulangassa eteenpäin. Elektronit liikkuvat tällöin myös kuparijohtimissa, koska negatiivisen johtimen elektronien täytyy liikkua eteenpäin täyttämään hehkulankaan siirtyneiden elektronien jättämä tila, ja positiivisessa johtimessa olevien elektronien pitää siirtää tekemään tilaa hehkulangasta saapuville uusille elektroneille.

Pariston sisällä olevassa elektrolyytissä ei ole vapaita elektroneja, joten paristo *ei* kuljeta varausta johdinten välillä siirtämällä elektroneja. Sen sijaan elektrolyytissä on positiivisesti varautuneita ioneita, ja varaus kulkeekin pariston läpi niiden välityksellä. Elektronit siis kuljettavat *negatiivista* varausta johtimia pitkin pariston negatiiviselta navalta positiiviselle, ja samalla ionit kuljettavat täsmälleen yhtä paljon *positiivista* varausta pariston läpi negatiiviselta navalta positiiviselle. Negatiivisella elektrodilla neutraaleja molekyylejä hajoaa ioneiksi ja elektroneiksi, ja samalla positiivisella elektrodilla ionit ja elektronit yhdistyvät jälleen neutraaleiksi yhdisteiksi. Kaikkaan vapaiden elektronien ja ionien kokonaismäärä pysyy vakiona ja ainoastaan elektrodien kemiallinen koostumus muuttuu prosessissa.

Tällaista varauksenkuljettajien virtausta kutsutaan **sähkövirraksi**. Kun virtaus on tasainen, sähkövirta määritellään *siirtyneen kokonaivarauksen määrän*  $\Delta q$  suhteena *siirtoon kuluneeseen aikaan*  $\Delta t$ ,

$$i_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (11.1)$$

Jos virtaus muuttuu ajan kuluessa, hetkellinen sähkövirta saadaan tarkastelemalla infinitesimaalisen lyhyttä aikaa  $dt$ , jolloin virraksi saadaan siis varauksen derivaatta ajan suhteeseen

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (11.2)$$

Sähkövirran yksiköllä on erityisnimi **ampeeri** (André-Marie Ampèreen mukaan),

$$[i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{C}{s} = A. \quad (11.3)$$

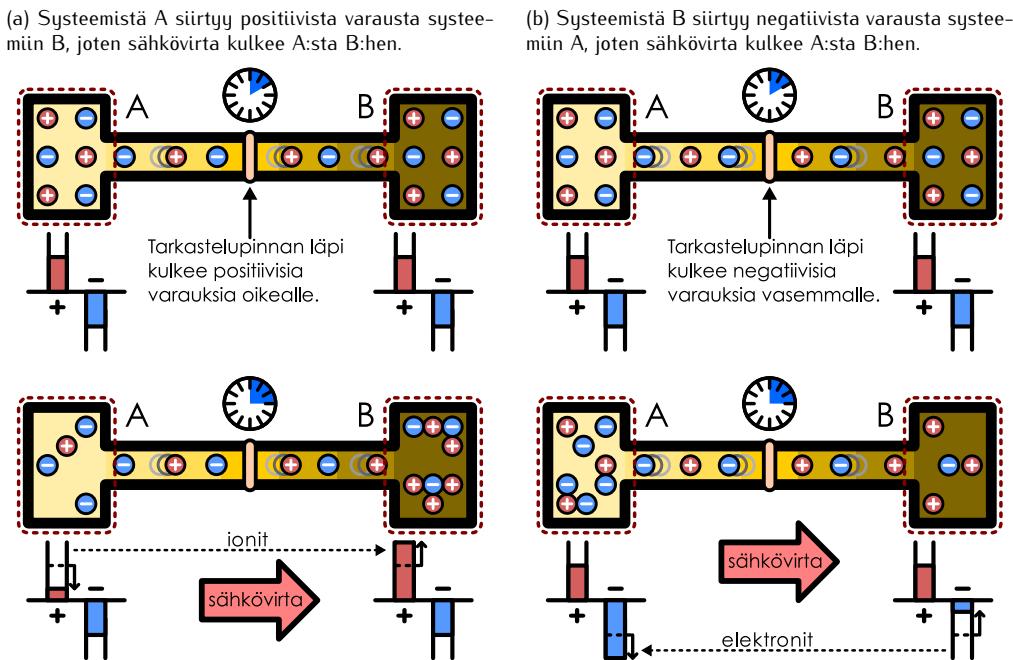
Vuoteen 2019 asti coulombi määriteltiin sähkövarauksena, jonka yhden ampeerin virta siirtää sekunnissa, ja ampeeri määriteltiin sähkövirran magneettisten ominaisuuksien kautta. Nykyään ampeeri on määritelmin mukaisesti sähkövirta, joka syntyy, kun yhdessä sekunnissa siirtyy yksi coulombi varausta.

Sähkövarausten tasainen virtaus muistuttaa hyvin paljon putkessa virtaavan kokoonpuristumattoman nesteen tasaista virtausta. Aivan kuten kokoonpuristumattoman nesteen tiheys ei voi muuttua, myöskään johtimissa liikkuvien elektronien tiheys ei saa muuttua. Jos nimittäin elektronien tiheys muuttuisi, jonnekin kerääntyisi enemmän tai vähemmän elektroneja, jolloin tämän alueen varaus muuttuisi. Tämä muuttuisi heti myös johteen potentiaalia ja sähkökenttää, jolloin varausten virtauskin muuttuisi. Johtimissa on hyvin, hyvin pieni sähkövaraus myös tasaisen virtauksen tilassa, mutta koska varaukset virtaavat tasaisesti, johdinten varauksen täytyy olla *muuttumaton*. Niinpä myös liikkuvien varausten tiheyden täytyy pysyä muuttumattomana.

Varauksenkuljettajien tiheys on metallissa tyypillisesti hyvin suuri. Esimerkiksi kuparissa on luokkaa  $10^{29}$  varausta kuljettavaa elektro-

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.4: Sähkövirta määritellään siirtyneen kokonaisvaraukseen ja siiroon kuluneen ajan suhteen.



**11.2** Laitteen A läpi kulkee keskimäärin yksi elektroni sekunnissa nopeudella 100 m/s. Laitteen B läpi kulkee kaksi elektronia sekunnissa nopeudella 1 m/s. Kumman laitteen läpi kulkee itseisarvoltaan suurempi sähkövirta?

Tätä sähkövirran määritelmää on havainnollistettu kuvassa 11.4. Kuvassa on tarkasteltu kahta systeemiä, A ja B, joiden välillä siirtyy varauksia. Kuvassa (a) systeemistä A siirtyy positiivisia varauksenkuljettajia systeemiin B, jolloin systeemin A kokonaisvaraus pienenee ja systeemin B kasvaa. Systeemistä A kulkee siis sähkövirta systeemiin B, ja virta on sitä suurempi mitä enemmän varausta siirtyy aikayksikössä. Samaan tapaan kuvassa (b) systeemistä B siirtyy negatiivisia varauksenkuljettajia systeemiin A, jolloin jälleen systeemin A kokonaisvaraus pienenee ja B:n kasvaa. Tässäkin tapauksessa *sähkövirta kulkee systeemistä A systeemistä B*, vaikka varauksenkuljettajat siirtyvät päävästaiseen suuntaan, koska sähkövirta mittaa nimenomaan *kokonaisvarauksen siirtymisen nopeutta* eikä suinkaan varauksenkuljettajien liikkeen nopeutta.



**11.3** Onko sähkövirta skalaari- vai vektorisuure?

Kuvan 11.4 esimerkeissä sähkövirta määritettiin systeemien A ja B varauksen muutoksen perusteella, mutta voimme määritellä sähkövirran myös yleisemmin. Kuvassa systeemejä A ja B yhdistää johdin, jota pitkin varauksenkuljettajat siirtyvät, ja voimme määrittää virran myös tarkastelemalla tämän johtimen läpi kulkevien varausten määräät. Kuvissa johtimen keskelle on piirretty tarkastelupinta (samanlainen kuin mitä käytimme vuon määrittelyyn luvussa 10), ja *tämän pinnan läpi täytyy kulkea yhtä paljon varausta kuin mitä systeemistä toiseen siirtyy*. Voimme siis määritellä johtimen läpi kulkevan sähkövirran tarkastelupinnan (johtimen poikkileikkauskiven) läpi kulkevana kokonaisvarauksesta  $\Delta q$  jaettuna tarkasteluajalla  $\Delta t$ .

Tämä ajatus on esitetty täsmällisemmin kuvassa 11.5, jossa on tarkasteltu metallijohtimessa kulkevien elektronien kuljettamaa varausta. Metalli on tietenkään täynnä sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta kuvan piirretty hiukkaset edustavat nyt ainoastaan liikkuvia ja siten varausta kuljettavia elektroneja. Kuvassa näitä elektroneja on piirretty 12 kpl yhden nanometrin pituiselle matkalle, joten varausta kuljettavien elektronien pituusvaraustiheys on nyt  $\lambda = q/L = -12e/1 \text{ nm}$ . Johtimen poikkipinta-ala on  $A = 1 \text{ nm}^2$ , joten elektronien varaustiheys on  $\rho = q/V = -12e/1 \text{ nm}^3$ . Kuten nähdään, pituus- ja tilavuusvaraustiheyskäy yhdistää seuraavaa relaatiota

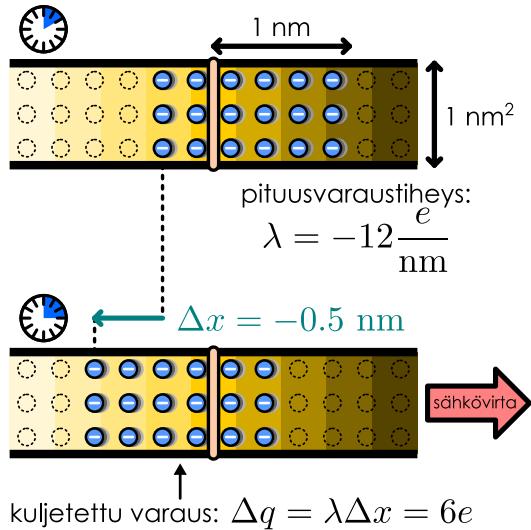
$$\lambda = \rho A, \quad (11.4)$$

joka pätee suorassa, tasapaksussa johtimessa.

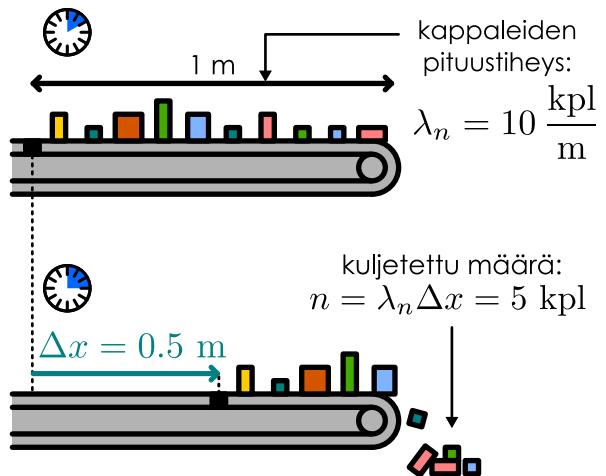
Kun aika kulkee eteenpäin pienen määrä  $\Delta t$ , elektronit ovat siirtyneet  $0.5 \text{ nm}$  matkan kuvassa vasemmalle. Valitaan positiivinen suunta oikealle, jolloin elektronien siirtymä on  $\Delta x = -0.5 \text{ nm}$ . Johtimeen on

Kuva 11.5: Sähkövaraus voidaan määritellä myös tarkastelupinnan (johtimen poikkileikkaus) läpi kulkevan varauksen avulla. Tämän varauksen määrä on suoraan verrannollinen varausta kuljettavien hiukkasten pituusvaraustiheyteen ja niiden kulkemaan matkaan.

(a) Sähkövirran siirtämä varaus on varauksenkuljettajien pituusvaraustiheyden ja näiden siirtymän tulon.



(b) Analogia: liukuhihnan siirtämien kappaleiden määrä on kappaleiden pituusstiheyden ja hihnan siirtymän tulon.



merkitty myös tarkastelupinta, ja tarkastellulla aikavälillä pinnan läpi on kulkenut kuusi elektronia oikealta vasemmalle. Pinnan läpi siirtynyt varaus on nyt siis

$$\Delta q = \lambda \Delta x = 6e. \quad (11.5)$$

Pinnan läpi kulkenut varaus on positiivinen, koska positiivinen suunta valittiin kuvassa oikealle, ja nyt meillä kulki negatiivista varausta vastakkaiseen suuntaan. Tämän perusteella myös sähkövirta kulkee positiiviseen suuntaan eli kuvassa oikealle, ja sen suuruus on  $i = \Delta q / \Delta t = 6e / \Delta t$ . Yleisesti, jos tarkastelupinnan läpi kulkee positiivinen kokonaivarauus, sähkövirran suunta on sama kuin varauksen kulkusuunta. Jos pinnan läpi kulkee negatiivinen kokonaivarauus, virran suunta on varausten liikkeen suuntaan nähdyn vastakkainen.

Asia voi olla helpompi sisäistää ajattelemana kuvassa 11.5 (b) esitetyä analogiaa liukuhihnalla kulkeviin kappaleisiin. Jos liukuhihnalla on jonossa esimerkiksi 10 kappaletta metrin matkalla, kappaleiden lukumäärän pituusstiheys on 10 kpl/m. Jos hihnan nopeus on puoli metriä sekunnissa, yhden sekunnin aikana hihna etenee puoli metriä ja kaikkiaan kappaletta saapuu tänä aikana hihnan päähän 5 kappaletta. Kappaleiden siirtonopeus on siis 5 kappaletta sekunnissa, mikä on kappaleiden tiheyden ja hihnan nopeuden tulo. Samaan tapaan johteen siirtämän varauksen määrä voidaan ilmaista johteessa liukuvien varauksenkuljettajien pituusstiheyden ja niiden siirtymän tulona.

Toinen hyvä analogia sähkövirralle on jo aikaisemmin mainittu nesteen virtaus putkessa. Jos putken poikkileikkaus on  $A$  ja putkessa virtaa nestettä nopeudella  $v_x$ , virtauksen tilavuusvuo putken läpi on  $\Phi_V = Av_x$  ja ajassa  $\Delta t$  putken läpi virtaa tilavuus

$$\Delta V = \Phi_V \Delta t = Av_x \Delta t. \quad (11.6)$$

Edelleen jos nesteen tiheys on  $\rho_m$ , putken läpi virtaa tässä ajassa massa

$$\Delta m = \rho_m \Delta V = \rho_m Av_x \Delta t. \quad (11.7)$$

Aivan samalla periaatteella jos varausta kuljettavien elektronien varaustiheys johtimessa on  $\rho$  ja ne kulkevat keskimäärin nopeudella  $v_{x,keskiarvo}$ , elektronit kuljettavat positiiviseen  $x$ -suuntaan johtimen läpi varauksen

$$\Delta q = \lambda \Delta x = \rho Av_{x,keskiarvo} \Delta t, \quad (11.8)$$

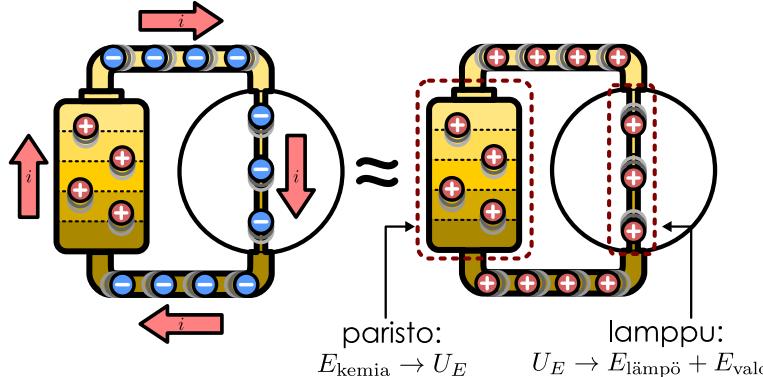
sillä  $\lambda = \rho A$  ja  $\Delta x = v_{x,keskiarvo} \Delta t$ . Johtimessa kulkeva sähkövirta on näin ollen suoraan verrannollinen varauksenkuljettajien varaustiheystiheyteen johdemateriaalissa, johtimen poikkipinta-alaan sekä varauksenkuljettajien keskinopeuteen,

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho Av_{x,keskiarvo}. \quad (11.9)$$

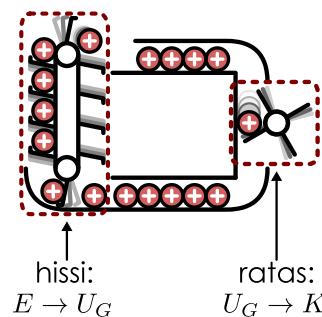
## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.6: Energian muutokset virtapiirissä sekä sitä vastaavassa mekaanisessa laitteessa. Paristo nostaa positiivista varausta korkeaan potentiaaliin ja muuntaa näin varastoimaansa kemiallista energiota varaustenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Lampussa tämä potentiaalienergia muuttuu lämpö- ja säteilyenergiaksi. Piiri toimii kuin laite, jossa hissi nostaa kuulia ylös, ja kuulat rullaavat alas omalla painollaan.

(a) Varausenkuljettajat kiertävät virtapiirissä kehää.



(b) Analogia: virtapiiri toimii kuin kuularata.



**11.4** Suorassa putkessa virtaa vettä vakionopeudella  $1.5 \text{ m/s}$ . Putken poikkipinta-ala on  $0.01 \text{ m}^2$ .

(a) Mikä on veden pituustiheys (massa metrin pituisen putken osan sisällä)?

(b) Paljonko vettä (yksiköissä kg) putkesta virtaa yhdessä sekunnissa?

Kuparijohtimessa kulkee elektroneja keskinopeudella  $0.15 \text{ mm/s}$ . Kuparissa on noin  $8.5 \cdot 10^{28}$  vapaata elektronia kuutiometrissä. Johtimen poikkipinta-ala on  $0.5 \text{ mm}^2$ .

(c) Mikä on elektronien pituusvaraustiheys?

(d) Paljonko varausta johtimen läpi kulkee yhdessä sekunnissa (eli mikä on sähkövirta)?

Tarkastelemassamme lamppuesimerkissä sähkövirtaa kuljettavat sekä positiiviset että negatiiviset varausenkuljettajat. Kupariohjimet ja lampun hehkulanka ovat metallia, joissa varausta kuljettavat negatiiviset elektronit. Elektronit kulkevat kohti korkeaa potentiaalia, jolloin sähkövirta kulkee päinvastaiseen suuntaan kohti matalaa potentiaalia. Pariston negatiivinen napa on matalassa potentiaalissa, joten *johtimissa sähkövirta kulkee siis positiiviselta navalta negatiiviselle*. Paristossa sen sijaan positiivisesti varautuneet ionit kulkevat negatiiviselta navalta positiiviselle, ja siispä *pariston sisällä kulkee sähkövirta negatiiviselta navalta positiiviselle*.

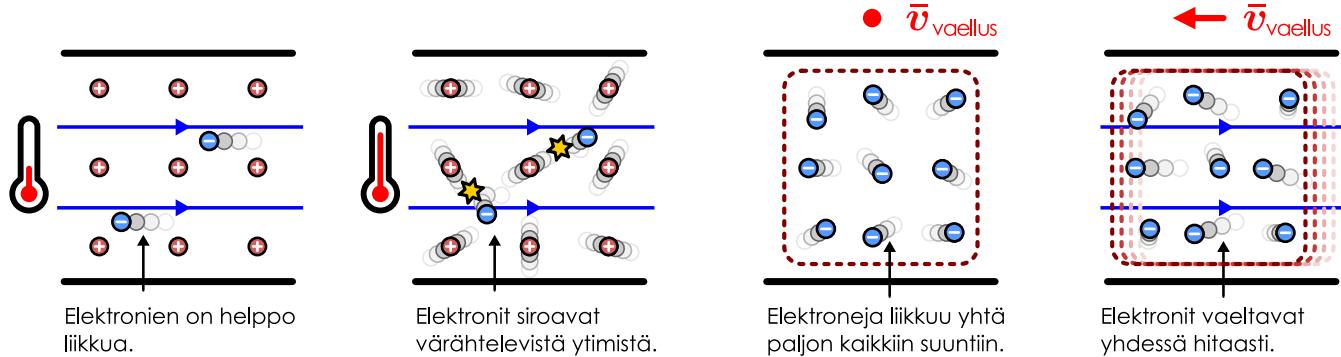
Varausenkuljettajien liike paristossa ja johtimissa on esitetty kuvassa 11.6 (a), ja samaan kuvaan on merkitty myös virran kulkusuunta, joka on kaikkialla *myötäpäivään*. Todellisuudessa varausenkuljettajat liikkuvat nuolten osoittamaan suuntaan vain pariston sisällä, ja suurimmassa osassa piiristä varausenkuljettajina toimivat *vastapäivään* liikkuvat, negatiivisesti varatut elektronit. Tällä ei ole kuitenkaan väliä, koska *piiri toimisi aivan samoin, vaikka piirissä todella kiertäisi positiivisia varausenkuljettajia myötäpäivään*. Siksi yleensä voidaan unohtaa, että varausta kuljettavat sekä ionit että elektronit. Sen sijaan voidaan ajatella yksinkertaisemmin, että *sähkövirta kiertää kehää*. Pariston sekä siihen kytkettyjen johdinten ja lampun sanotaankin muodostavan **virtapiirin**, koska sähkövaraus pyörii niissä ympäri kuin piirissä.

Virtapiirin toiminnan fysiikkaa voi olla helpompi ymmärtää vertaamalla sitä kuvassa 11.6 (b) kuvattuun mekaaniseen laitteeseen. Siinä missä virtapiirissä energiaa kuljetaan sähkövirta, piirin mekaanisessa vastineessa energia siirtyy liukkuvien kuulien mukana. Paristo on piirin energianlähte, joka muuntaa varastoimaansa kemiallista energiota varausten sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Piiri vastaavassa mekaanisessa koneessa pariston toimintaa vastaa kuulia nostava hissi, sillä se lisää kuulien potentiaalienergiaa gravitaatiokentässä. Lampussa sähköistä potentiaalienergiaa hyödynnetään valon tuottamisessa, vaikkakin suurin osa potentiaalienergiasta muuttuu lämpöenergiaksi. Koneessa lampun vastine on pyörivä ratas, joka muuttaa osan sen läpi kulkevien kuulien potentiaalienergiasta hyötykäyttöön rattaan liike-energiaksi.

**11.5** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä sähkövirrasta. Miten virta määritellään? Miksi pariston napojen yhdistäminen suljetuksi piiriksi saa virran kulkemaan ja millaisia varausenkuljettajia virtapiireissä liikkuu? Miten virta liittyy varausenkuljettajien määrään ja niiden liikkeeseen?

Kuva 11.7: Elektronit ovat sähkökentässä kiihtyvässä liikkeessä. Johteessa elektronit kuitenkin törmäävät atomiytimiin, jolloin osa elektronien energiasta siirrytä atomien satunnaisliukkeen energiaksi. Nämä elektronit järjestynyt liike kentän suunnassa muuttuu nopeasti satunnaisliukkeeksi. Lopputulos on se, että elektronien jouko liikkuu keskimäärin vakionopeudella, jonka suuruus on verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen.

(a) Elektronit siroavat atomiytimistä sitä enemmän, mitä voimakkaammin ytimet värähtelevät. (b) Vaellusnopeus on elektronien keskimääräinen nopeus.



## 11.2 Johtavuus ja resistanssi

### Ohmin laki

Hehkulamppu siis palaa täsmälleen silloin, kun sen napojen välillä on potentiaaliero, koska tällöin lampun läpi kulkee hehkulankaa lämmittävä sähkövirta. Totesimme aikaisemmin, että liikkuviin elektroneihin kohdistuu metallissakin ilmanvastusta muistuttava dissipatiivinen vuorovaikutus, joka muuttaa elektronien liike-energiaa lämpöenergiaksi. Seuraava tehtäväämme onkin tutkia tästä varauksenkuljettajia jarruttavaa vuorovaikutusta, ja aloitamme selittämällä, miksi liikkuviin elektroneihin kohdistuu niiden liikettä vastustava voima.

Potentiaalieroihin liittyy aina sähkökenttä, ja tämä sähkökenttä vetää johdinten elektronit liikkeelle. Jos elektronit olisivat sähkökentässä tyhjässä avaruudessa, niiden pitäisi olla kiihtyvässä liikkeessä. Lampun hehkulanka kuten muutkin metallit koostuvat kuitenkin elektronien lisäksi myös atomiytimistä. Metallissa varausta kuljettavat elektronit liikkuvat siis ydinten muodostamassa säännöllisessä rakenteessa eli *hilassa*, ja elektronit voivat vuorovaikuttaa ydinten kanssa. Nämä vuorovaikutukset voivat olla varsin monimutkaisia, emmekä tässä ala niitä tarkkaan analysoimaan. Yksinkertaistaen voimme kuitenkin ajatella, että *elektronit voivat törmätä ytimiin*.

Törmäykissä elektronien liikkeen suunta muuttuu, ja tavallisesti elektroneilta siirrytä liike-energiaa ytimille (kuva 11.7 (a)). Tätä kutsutaan elektronien **sironnaksi**. Lopputulos on se, että vaikka sähkökenttä pyrkii vetämään kaikkia elektroneja samaan suuntaan, sironnat muuttavat tämän järjestyneen liikkeen hyvin nopeasti elektronien sekä atomiytimien satunnaiseksi liikkeeksi, mikä havaitaan makroskooppisessa mittakaavassa metallin lämpenemisenä.

Sironnosten takia elektronien liike on johteessa pääasiassa satunnaista (kuva 11.7 (b)). Vaikka johteen sisällä olisi elektroneja tiettyyn suuntaan vetävä sähkökenttä, elektronit pääasiassa poukkoilevat sinne tänne. Elektronien joukon liikettä voidaan kuvata elektronien keskimääräisellä nopeudella (eli niiden massakeskipistenopeudella), jota kutsutaan myös elektronien **vaellusnopeudeksi**,  $\bar{v}_{\text{vaellus}}$ . Tavallisesti vaellusnopeus on hyvin pieni verrattuna yksittäisten elektronien keskimääräiseen vauhtiin.

**11.6** Koordinaatistossa A levossa olevassa pitkässä kuparitangossa kulkee sähkövirta. Virtaa kuljettavat vaellusnopeudella  $v_{x,\text{vaellus}} > 0 \text{ m/s}$  kulkevat elektronit.

(a) Kulkeeko virta positiiviseen vai negatiiviseen  $x$ -suuntaan?

Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella  $v_{x,B,(A)} = v_{x,\text{vaellus}}$ .

(b) Mikä on elektronien vaellusnopeus B:ssä?

(c) Kuljettavatko elektronit virtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

(d) Kuljettavatko atomiytimet virtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

(e) Kulkeeko liikkuvan tangon mukana sähkövirtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

Jos sähkökenttä häviää johteen sisältä, sironnat pysäyttävät elektronijoukon vaelluksen lähes välittömästi. Yksittäiset elektronit eivät tällöinkään pysähdyn, vaan ne päätyvät liikkumaan täysin satunnaisesti. Elektronien vauhti voi olla hyvin suuri, mutta nütä liikkuu yhtä paljon kaikkiin suuntiin, jolloin niiden vaellusnopeus on edelleen nolla. Tällöin varausta ei keskimäärin siirry mihinkään suuntaan, joten tällaiset elektronit eivät myöskään kuljeta sähkövirtaa mihinkään suuntaan.

## SÄHKÖVIRTA

Kun metalli on hyvin kylmä, atomiytimet ovat lähes paikoillaan ja elektronit törmäilevät ytiniin varsin harvoin. Kuitenkin mitä lämpimämpi metalli on, sitä enemmän ytimet väärtelevät ja sitä enemmän ydinten ja elektronien välisiä törmäyksiä tapahtuu. Elektronien vaellusnopeus on hyvin pieni yksittäisten elektro- nien keskimääräiseen vauhtiin verrattuna, joten vaellusnopeuden suuruus ei juurikaan vaikuta siihen, kuinka usein elektronit törmäävät ytiniin ja kuinka suuria impulsseja elektronit näissä törmäyksissä saavat. Kuitenkin mitä suurempi vaellusnopeus on, sitä todennäköisemmin kullakin yksittäisellä elektronilla on nopeuden komponentti vaellusnopeuden suuntaan, ja sitä todennäköisemmin *siihen kohdistuu törmäyksessä voima vaellusnopeuteen nähdyn vastakkaiseen suuntaan*. Niinpä yksittäiseen elektroniin kohdistuu sen kokemissa törmäyksissä keskimäärin voima

$$\langle \bar{F}_e \rangle = -a\bar{v}_{\text{vaellus}}, \quad (11.10)$$

missä  $a$  on jokin (metallin ominaisuuksista ja lämpötilasta riippuva) verrannollisuuskerroin. Kokonaisen elektronijoukon ( $n_e$  elektronia) vaellusta jarruttaa siis voima

$$\bar{F}_{\text{sirona}} = n_e \langle \bar{F}_e \rangle = -n_e a \bar{v}_{\text{vaellus}}. \quad (11.11)$$

Elektroneja kiipyttävä voima on puolestaan verrannollinen niiden kokonaisvaraukseen  $q = -n_e e$  ja sähkökenttään  $\bar{E}$ ,

$$\bar{F}_E = q\bar{E} = -n_e e \bar{E}. \quad (11.12)$$

Jos sähkökentän tuottama voima on suurempi kuin liikettä vastustava voima, elektronien vaellusnopeus kasvaa. Ja päinvastoin jos liikettä vastustava voima on sähkökentän voimaa suurempi, vaellusnopeus pienenee. Lopuksen lopuksi elektronijoukko saavuttaa tasapainotilan, jossa nämä voimat keskimäärin kumoavat toisensa,

$$\bar{F}_E + \bar{F}_{\text{sirona}} = -n_e e \bar{E} - a n_e \bar{v}_{\text{vaellus}} = 0. \quad (11.13)$$

Tämä tapahtuu täsmälleen silloin, kun elektronien vaellusnopeus on

$$\bar{v}_{\text{vaellus}} = -\frac{e}{a} \bar{E}. \quad (11.14)$$

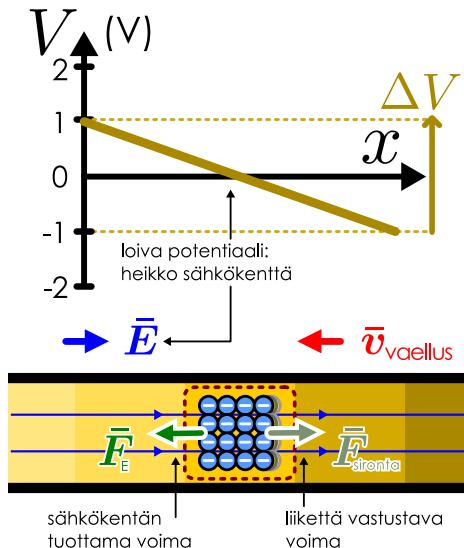
Toisin sanoen *elektronien vaellusvauhti on suoraan verrannollinen johteen sisäisen sähkökentän voimakkuuteen*.

Pohditaan tämän tuloksen merkitystä tarkastelemalla jälleen lampun hehkulankaa. Asetetaan  $x$ -akseli langan suuntaan ja merkitään langan pituutta  $\Delta x$  sekä poikkipinta-alaa  $A$ . Oletetaan myös langan koostuvan kauttaaltaan samasta metallista. Jos langan päiden välille tuotetaan potentiaaliero  $\Delta V$ , tämä luo lankaan sähkökentän

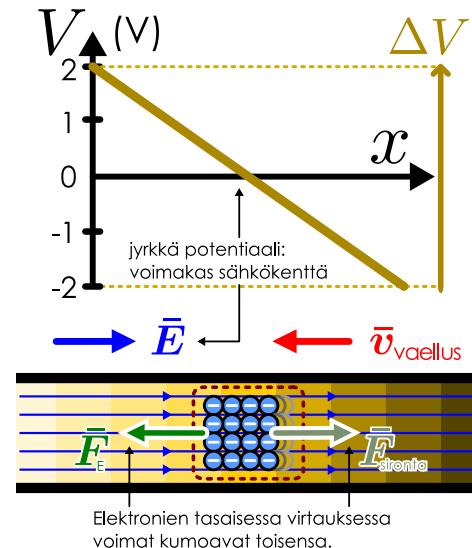
$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad (11.15)$$

**Kuva 11.8:** Metallin läpi kulkeviin elektroneihin kohdistuu sironnoista johtuen niiden liikettä vastustava voima. Kun metallissa on sähkökenttä, elektronit saavuttavat nopeasti sellaisen vaellusnopeuden, jolla sironojen tuottama voima kumoaa sähkökentän tuottaman voiman.

(a) Loivasti muuttuvassa potentiaalissa sähkökenttä on heikko ja vaellusnopeus pieni.



(b) Jyrkästi muuttuvassa potentiaalissa sähkökenttä on voimakas ja vaellusnopeus suuri.



joka siis osoittaa korkeasta potentiaalista kohti matalaa potentiaalia (kuva 11.8). Yhtälön (11.14) mukaan tämä sähkökenttä saa hehkulangan elektronit kulkemaan kohti korkeaa potentiaalia vaellusnopeudella

$$v_{x,\text{vaellus}} = \frac{e}{a} \frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad (11.16)$$

jolloin johtimessa kulkee sähkövirta päinvastaiseen suuntaan, korkeasta potentiaalista matalaan.

Johdimme jo aikaisemmin lausekkeen (11.9),  $i = \rho A v_{x,\text{keskiarvo}}$ , joka kertoo johtimessa kulkevan virran suuruuden johtimen ominaisuuksien ja varauksenkuljetajien keskimääräisen nopeuden perusteella. Yhtälössä esiintyvä keskimääräinen nopeus on nimenomaan vaellusnopeus,  $v_{x,\text{keskiarvo}} = v_{x,\text{vaellus}}$ , joten voimme sijoittaa sen paikalle lausekkeen (11.16), ja näin saamme johtimessa kulkevaksi sähkövirraksi

$$i = \frac{\rho e}{a} A \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.17)$$

Tämän yhtälön mukaan *johtimessa kulkeva sähkövirta  $i$  on suoraan verrannollinen johtimen päiden väliseen potentiaalieroona  $\Delta V$* . Yhtälössä esiintyvä verrannollisuuskerroin riippuu johdinmateriaalin ominaisuuksista: elektronien varaustiheydestä  $\rho$  sekä elektroneja hidastavan vuorovaikutuksen voimakkuutta kuvaavasta kertoimesta  $a$ . Nämä ominaisuudet voidaan yhdistää yhdeksi vakioksi

$$\sigma = \left| \frac{\rho e}{a} \right| = -\frac{\rho e}{a}, \quad (11.18)$$

jota kutsutaan johdinmateriaalin **johtavuudeksi**. (Tässä on miinusmerkki siksi, että elektronien varaustiheys on negatiivinen, mutta johtavuus on positiivinen vakio. Johtavuudelle käytetään usein samaa symbolia kuin pintavaraustiheydelle, mutta kyseessä on aivan erilainen suure.) Näin yhtälö (11.17) voidaan kirjoittaa hieman yksinkertaisempaan muotoon

$$i = -\sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.19)$$

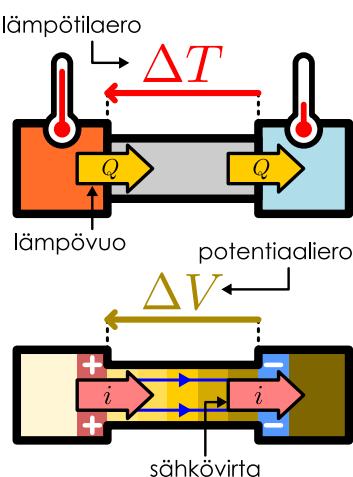
Sähkövirran ja potentiaalin muutoksen yhdistävä laki (11.19) on matemaattisesti samaa muotoa kuin lämmönjohtavuutta kuvaava yhtälö (7.55),

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (11.20)$$

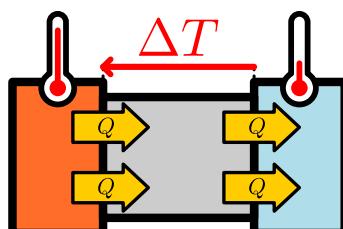
joka yhdistää lämpövuon, lämmönjohtavuuden ja lämpötilaeron. Lämmön- ja sähköjohtavuuden välillä onkin täsmällinen analogia (kuva 11.9). Lämmön siirtyminen johtumalla vaatii lämpötilaeron, ja lämpöä siirtyy sitä nopeammin, mitä jyrkemmin lämpötila muuttuu paikan funktiona ja mitä parempi lämmönjohde on kyseessä. Vastaavasti yhtälön (11.19) mukaan sähkövirran kulku johteessa vaatii potentiaalieron, ja sähkövarausta siirtyy sitä nopeammin, mitä jyrkemmin potentiaali muuttuu paikan funktiona ja mitä parempi sähköjohde on kyseessä. Lämpö siirtyy johtumalla korkeasta lämpötilasta kohti matalaa lämpötilaa, ja sähkövirta kulkee korkeasta potentiaalista kohti matalaa potentiaalia.

Kuva 11.9: Sähkö- ja lämmönjohtavuuden analogia.

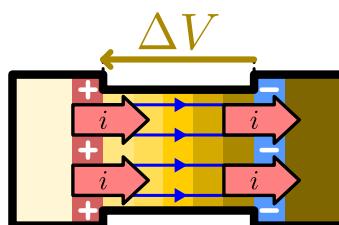
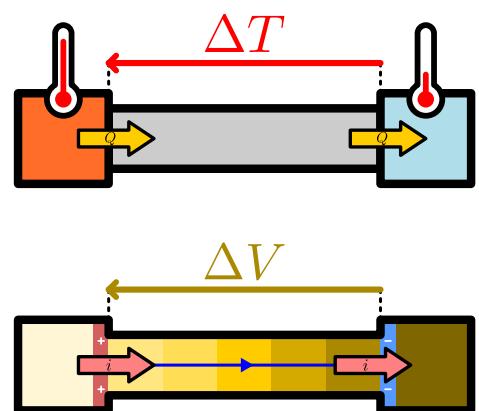
(a) Varaus (lämpö) virtaa kohti matalaa potentiaalia (lämpötilaa).



(b) Paksuun johteseen mahtuu suuri virta.



(c) Pitkässä johteessa potentiaali (lämpötila) muuttuu loivasti, jolloin virta on pieni.



## SÄHKÖVIRTA

Yhtälö (11.19) ei ole aina kovin käyttökelpoinen, koska siinä on mukana vielä johtimen pituus, poikkipintaala ja johtavuus, ja näitä voi olla vaikea määrittää esimerkiksi lampun hehkulangalle. Siksi on kätevämpää koota ne kaikki yhdeksi vakioksi

$$R = \frac{\Delta x}{\sigma A}, \quad (11.21)$$

jota kutsutaan johtimen **resistanssiksi**. Tämän vakion avulla yhtälö (11.19) voidaan kirjoittaa hyvin yksinkertaiseen muotoon

$$i = -\frac{1}{R} \Delta V, \quad (11.22)$$

jota kutsutaan *Ohmin laiksi* (Georg Ohmin mukaan). Resistanssin yksikkö on helppo päätellä Ohmin laista, mutta tällä yksiköllä on myös erikoisnimi **ohmi**, ja sitä merkitään suurella kreikkalaisella omega-kirjaimella,

$$[R] = \frac{[\Delta V]}{[i]} = \frac{V}{A} = \Omega. \quad (11.23)$$

Ohmin lain mukaan johtimen läpi kulkeva virta  $i$  on sitä suurempi, mitä suurempi potentiaaliero  $\Delta V$  johtimen päiden välillä on. Virran ja potentiaalieron välinen verrannollisuuskerroin on johtimen resistanssi, ja virta on siis sitä suurempi, mitä pienempi resistanssi on. Toisin sanoen *johteen päiden välille luotu potentiaaliero saa johteessa aikaan sähkövirran, ja resistanssi kuvailee johteen kykyä vastustaa tämän virran kulkuua*. Yhtälössä (11.22) esiintyvä miinusmerkki muistuttaa siitä, että kun johtimen läpi kuljetaan virran kulkusuuntaan (eli  $i$  on positiivinen), potentiaali pienenee (eli  $\Delta V$  on negatiivinen). Monissa lähteissä laki kirjoitetaan ilman tästä miinusmerkkiä, mutta tällöin on erikseen huolehdittava siitä, että potentiaalin muutos tulee laskettua oikein päin.

Ohmin laki pätee vain materiaaleille, joissa varauksenkuljetajien liikettä vastustaa niiden vaellusnopeuteen verrannollinen voima. Johteet kuten metallit ovat tällaisia, vaikkakin esimerkiksi metallien johtavuus on hyvin suuri, jolloin suuren metallikappaleiden resistanssi on hyvin pieni. Sähkötekniikassa komponentteja, joilla on resistanssia ja joita siis kuvaa Ohmin laki, kutsutaan **vastuksiksi**, koska ne vastustavat sähkövirran kulkuua. Huomaa kuitenkin, että Ohmin laki pätee *vain* vastuksille, eikä kyseessä siis ole yleispätevä virran ja potentiaalierojen välinen laki. Muissa komponenteissa sähkövirran ja jännitteen välinen riippuvuus on erilainen.



**11.7** Erään sähköisen komponentin navalle A saapuu 5 A sähkövirta ja navalta B poistuu 5 A sähkövirta. Mikä on potentiaaliero  $\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A$  napojen välillä, jos kyseessä on (a) ideaalinen johdin, (b) 10 V ideaalinen paristo (plusnapa B:n puolella), (c) 10 nF ideaalinen varaanmaton kondensaattori tai (d) 10  $\Omega$  ideaalinen vastus?

### esimerkki 11.1

### Virta ja vastus

Kupariohdimen pituus on 15.0 m ja säde 0.10 mm. Johtimen pääti yhdistetään ideaaliseen paristoon, jonka jännite on 1.5 V. (a) Mikä on johtimen resistanssi? (b) Kuinka suuri virta johtimen läpi kulkee? (c) Kuinka nopeasti elektronit vaeltavat?

**TILANNE** Kuparin johtavuus on  $\sigma = 6.0 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$  ja sähköä kuljettavien elektronien tiheys on kuparissa noin  $\rho_e = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , jolloin elektronien varaustiheys on  $\rho = \rho_e e$ .

**SUUNNITELMA** Johtimen resistanssi on suoraan verrannollinen johtimen pituuteen  $L$  ja käantäen verrannollinen sen poikkipinta-alaan  $A$  ja johtavuuteen,

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{L}{\sigma \pi R^2}. \quad (11.24)$$

Paristo tuottaa johtimen päiden välille potentiaalieron, jolloin johtimessa alkaa kulkea Ohmin lain mukaisesti sähkövirta

$$|i| = \frac{1}{R} \Delta V \quad (11.25)$$

korkeasta potentiaalista (pariston plusnapa) kohti matalaa potentiaalia (pariston miinusnapa). Virran voi kirjoittaa myös varauksen määrän ja sen nopeuden avulla muodossa  $i = \rho A v_{\text{vaellus}} = \rho_e e \pi R^2 v_{\text{vaellus}}$ , jolloin vaellusnopeudeksi ratkeaa

$$v_{\text{vaellus}} = \frac{i}{\rho_e e \pi R^2} : \quad (11.26)$$

**RATKAISU** (a) Resistanssi on  $R = 8.0 \Omega$ , (b) virta  $i = 0.19 \text{ A}$  ja (c) vaellusnopeus  $v_{\text{vaellus}} = 0.44 \text{ mm/s}$ .

**ARVIOINTI** Kupari on erinomainen johde, ja usein lyhytä kupariohdimia voikin pitää ideaalisina johtimina, joilla ei ole lainkaan vastusta. Tässä tarkasteltu johdin on kuitenkin pitkä ja hyvin ohut, joten sen resistanssi ei ole aivan mitätön. Huomaa myös, kuinka hitaasti elektronit vaeltavat.

## Virrantihleys

Sähkövirta kuvailee koko johtimen kautta kulkevan sähkövarauksen kokonaismäärää, mutta joskus on tarpeellista tietää tarkemmin, miten varauksenkuljettajat liikkuvat. Esimerkiksi jos virta kulkee eri materiaaleista koostuvan tai epäsäännöllisen muotoisen kappaleen läpi, varauksenkuljettajien tiheys sekä niiden vaellusnopeus saattavat olla eri paikoissa erilaiset, jolloin myös varausta siirtyy eri paikoissa eri nopeudella. Tällaisissa tapauksissa **virrantihleys** on käytökköinen suure varausten liukkeen kuvaamisessa.

Virrantihleys kuvailee varaustenkuljettajien siirtämän varauksen määrää aikaa ja pinta-alaa kohden. Esimerkiksi suorassa virtajohtimessa, jonka poikkipinta-ala on  $A$  ja jossa kulkee homogeeninen sähkövirta  $i$ , virrantihleys on

$$j_x = \frac{i}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (11.27)$$

Päättelimme jo aikaisemmin, että kun kytkimme lampun kuparijohtimilla paristoon virtapiiriksi, kaikkialla püriissä alkoi kulkea sama virta  $i$ . Kuitenkin koska lampun hehkulanka on hyvin ohut verrattuna kuparijohtimiin, hehkulangassa kulkee tällöin paljon suurempi virrantihleys kuin kuparissa. Tästä syystä hehkulanka kuumenee mutta kupari ei. Samalla periaatteella hyvin pienissä elektronisissa komponenteissa voi olla suuri virrantihleys, vaikka niissä kulkisikin vain hyvin pieni sähkövirta, ja tämä on otettava huomioon elektronisten laitteiden suunnittelussa.

Virrantihyden voi yhdistää myös varauksenkuljettajien määrään ja liikkeeseen. Suorassa johtimessa kulkeva sähkövirta on nimitäin yhtälön (11.9) mukaisesti verrannollinen varauksenkuljettajien varaustiheyteen  $\rho$ , niiden vaellusnopeuteen  $v_{x,\text{vaellus}}$  ja johtimen poikkipinta-alaan  $A$ . Toisaalta koska virrantihleys on sähkövirran ja johtimen pinta-alan suhde, virrantihyden täytyy olla verrannollinen vain varauksenkuljettajien varaustiheyteen ja nopeuteen,

$$j_x = \rho v_{x,\text{vaellus}}. \quad (11.28)$$

On tavallinen väärinkäsitys ajatella sähkövirran kuvaavan varauksenkuljettajien liukkeen nopeutta. Näinhän ei ole, vaan sähkövirta kuvailee siirtyneen varauksen kokonaismäärää. Varausta toki siirtyy sitä nopeammin mitä nopeammin varauksenkuljettajat liikkuvat, mutta virta riippuu myös johtimen poikkipinta-alasta, ja paksuman johtimen läpi voi kulkea suuri virta vaikka varauksenkuljettajat liikkuisivatkin siinä hitaasti (kuva 11.10). Virrantihyden voi sen sijaan ajatella todella kuvaavan varauksen liukkeen nopeutta. Sekin riippuu toki varaustiheydestä, mutta varaustiheys on johdinmateriaalista riippuva vakio, johon esimerkiksi johtimen koko tai muoto ei vaikuta mitenkään.



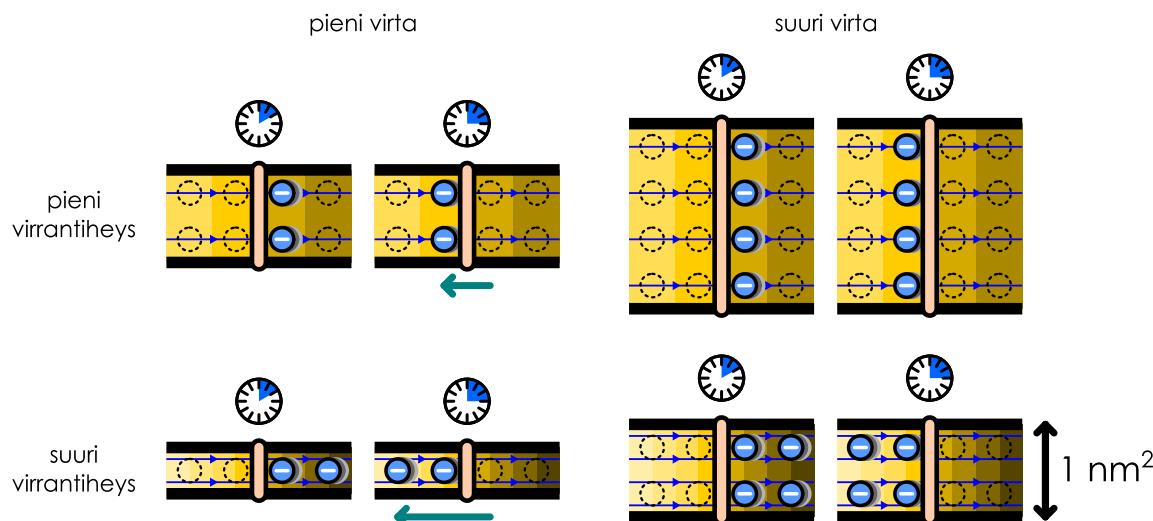
**11.8** (a) Kuvassa 11.10 kukin pallo on yksi elektroni ja vierekkäisten kuvien välinen aikaero on  $\Delta t = 1.0\mu\text{s}$ .

Mikä on (i) virta ja (ii) virrantihleys kussakin kuvassa?

(b) Mikä olisi virta johtimessa, jonka poikkipinta-ala on  $1\text{ mm}^2$  ja jossa on yhtä suuri virrantihleys kuin kuvissa?

Myös Ohmin lain voi kirjoittaa virrantihyden avulla kokonaivirran sijaan. Suoran johtimen läpi kulkevan virran voi nimitäin kirjoittaa yhtälön (11.19) perusteella potentiaalin muutoksen avulla, joten virrantihydekseksi

Kuva 11.10: Virta kertoo johtimen läpi kulkevan varauksen määrän. Virrantihleys on tämän varauksen määrä pinta-alayksikköö kohti, ja se on myös verrannollinen varauksenkuljettajien nopeuteen.



saadaan

$$j_x = \frac{i}{A} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.29)$$

Ja edelleen koska sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienemissuuntaan yhtälön  $E_x = -\Delta V / \Delta x$  mukaisesti, virrantiheyden täytyy olla verrannollinen sähkökenttään ja johtavuuteen,

$$j_x = \sigma E_x. \quad (11.30)$$

Tämä tulos pätee siis suorassa johtimessa, joka on  $x$ -akselin suuntainen. Yleisesti sama tulos pätee kaikkien koordinaattiakselien suunnissa, jolloin saamme yhtälön

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (11.31)$$

Tämä on *Ohmin laki virrantiheydelle*.

Kokonaista johdetta koskeva Ohmin laki (11.22) kertoi meille, että johtimen pääiden välinen potentiaaliero tuottaa johtimeen sähkövirran. Ohmin lain muoto (11.31) puolestaan osoittaa sen, että johtimessa oleva sähkökenttä synnyttää johtimeen virrantiheyden. Fysikaalisesti nämä ovat sama asia, mutta vain eri näkökulmasta. Kokonaisvirtaa koskeva muoto puhuu *koko johtimen* pääiden potentiaaleista ja johtimen läpi kulkevan varauksen kokonaismäärästä. Virrantiheyttä koskeva muoto puolestaan tarkastelee johtimen *yhtä pistettä* yhdistääseen tässä pisteessä vaikuttavan sähkökentän varauksenkuljetajien liikkeeseen tässä kyseisessä pisteessä.

### esimerkki 11.2

### Virta ja virrantiheys

**Eräs poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoinen johdin (säde  $R = 4.0 \cdot 10^{-4}$  m) ei ole kauttaaltaan samanlaista materiaalia, ja siiä virrantiheys riippuu keskiakselista mitatusta etäisyydestä  $r$  funktion  $j_x = ar^2$  mukaisesti ( $a = 3.0 \cdot 10^{12}$  A/m<sup>4</sup>). Kuinka suuri virta johtimessa kulkee?**

**TILANNE** Piirretään kuva johtimesta. Jaetaan johdin analyysiä varten kapeisiin renkaisiin, joiden paksuus on  $dr$ . Näiden renkaiden pinta-ala on  $dA = 2\pi r dr$ .

**SUUNNITELMA** Jos virrantiheys on vakio, virta on virrantiheyden ja johtimen poikkipinta-alan tulo. Nyt virrantiheys ei ole vakio, mutta voimme jakaa johtimen pieniin osiin, joissa virrantiheys on likimain vakio. Tällöin kunkin osan läpi kulkeva virta saadaan osan pinta-alan ja sen läpi kulkevan virrantiheyden tulona. Nyt virrantiheys riippuu vain sääteestä, joten johdin voidaan jakaa ohuisiin renkaisiin, ja virrantiheys kunkin renkaan läpi on likimain vakio. Kokonaisvirta koko johtimen läpi saadaan laskemalla kaikkien renkaiden läpi kulkeva virta yhteen.

Virta kunkin renkaan läpi on

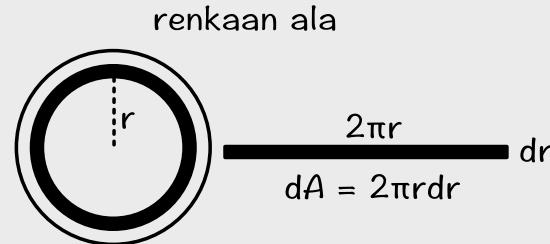
$$di = j_x(r)dA = 2\pi ar^3 dr \quad (11.32)$$

ja kokonaisvirta on integraali  $i = \int di$ .

**RATKAISU** Kokonaisvirta on siis

$$i = \int_0^R 2\pi ar^3 dr = 2\pi a \left[ \frac{1}{4}r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2}\pi a R^4 = 120 \text{ mA.} \quad (11.33)$$

**ARVIOINTI** Virrantiheyden maksimi on  $j_{x,\max} = aR^2 = 4.8 \cdot 10^5$  A/m<sup>2</sup> ja johtimen pinta-ala on  $A = \pi R^2 = 5.0 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>. Kokonaisvirran pitää siis olla samaa luokkaa mutta pienempi kuin  $i_{\max} = j_{x,\max} A = 240$  mA kuten onkin.



**11.9** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä resistanssista ja vastuksista. Määrittele johtavuus ja resistanssi. Selitä miksi ja miten vastuksessa virta ja jännite sekä toisaalta virrantiheys ja sähkökenttä ovat toisiinsa verrannolliset.

### Ideaalinen johde ja jännitelähde

Palataan vielä analysoimaan pariston, kuparijohdinten sekä lampun muodostamaa virtapiiriä, ja tarkastellaan sitä nyt erityisesti johtavuuden ja resistanssin näkökulmasta. Tämä piirihän toimii niin, että paristo pyrkii pitämään napojensa välisen potentiaalieron vakiona, jolloin vastakkaisiin napoihin kiinnitetty johtimet saavat eri

potentiaalit. Tämä saa aikaan potentiaaliero hehkulampun napojen välille, ja tämä potentiaaliero synnyttää hehkulankaan Ohmin lain mukaisen sähkövirran. Mutta toisaalta päättelimme jo aikaisemmin, että jos elektronit liikkuvat hehkulangassa, niiden täytyy liikkua myös kuparijohtimissa. Näin ollen myös kuparijohtimissa kulkee sähkövirta, ja koska kuparikin on johde, Ohmin laki pätee myös sille. Näin ollen myös kuparijohdinten päiden välillä pitäisi olla potentiaaliero, vaikka aikaisemmin väitimme näiden johdinten olevan kauttaaltaan samassa potentiaalissa. Tässä on ristiriita, joka kaipaa selvittämistä.

Piirissä liikkuvat elektronit käyttäytyvät kuin kokonpuristumaton neste, jolloin sekä kuparijohdinten että hehkulangan läpi täytyy kaikkialla kulkea yhtä paljon elektroneja (vrt. kuva 11.2). Hehkulanka on kuitenkin hyvin paljon ohuempi kuin kuparilangat, jolloin elektronien täytyy vaeltaa hehkulangassa selvästi nopeammin kuin kuparissa (vrt. nesteen nopeus ohessa ja paksussa putkessa). Elektronien vaellusnopeus on yhtälön (11.28) mukaisesti suoraan verrannollinen virrantiheteen, joten virrantihleys on hehkulangassa paljon suurempi kuin kuparissa,

$$j_{\text{hehkulanka}} \gg j_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.34)$$

Virrantihleys on puolestaan yhtälön (11.31) mukaan verrannollinen johteessa vaikuttavaan sähkökenttään, joten hehkulangassa täytyy olla selvästi voimakkaampi sähkökenttä kuin kuparijohtimissa

$$E_{\text{hehkulanka}} \gg E_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.35)$$

Toisaalta sähkökenttä kertoo potentiaalin jyrkkyyden, joten hehkulangassa potentiaalin täytyy muuttua paljon lyhyellä matkalla. Kuparijohtimessa sähkökenttä on heikko, joten potentiaali muuttuu pitkilläkin matkoilla vain vähän. Niinpä hehkulangan päiden välillä on suuri potentiaaliero, mutta kuparijohtimissa potentiaali on melkein sama johtimen kummassakin päässä.

Saman asian voi päättää myös suoraan sähkövirran kautta. Kuten sanottu, sekä kuparijohdinten että hehkulangan läpi täytyy kaikkialla kulkea yhtä paljon elektroneja. Tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että piirissä kulkee kaikkialla sama sähkövirta, koska sähkövirta mittaa nimenomaan siirtyneen varauksen määrää (eikä esimerkiksi elektronien vaellusnopeutta, joka ei ole sama kaikkialla). Siispä

$$i_{\text{hehkulanka}} = i_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.36)$$

Kuparijohtimet ovat kuitenkin huomattavasti paksummat, lyhyemmät ja paremmin johtavat kuin hehkulampun hehkulanka (joka on gleensä hyvin ohut ja pitkä, spiraalille kierretty wolframlanka), joten niiden resistanssi on paljon pienempi kuin hehkulangan,

$$R_{\text{hehkulanka}} \gg R_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.37)$$

Ohmin laki (11.22) pätee molemmille, ja jos ratkaisemme siiä potentiaalin muutoksen, saamme epäyhälön

$$\Delta V_{\text{hehkulanka}} = R_{\text{hehkulanka}} i_{\text{hehkulanka}} \gg R_{\text{kuparijohdin}} i_{\text{kuparijohdin}} = \Delta V_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.38)$$

Kuparijohtimet eivät siis ole täsmälleen vakiopotentiaalissa vaan niissä on jännite. Potentiaaliero kuparijohdinten päiden välillä on kuitenkin huomattavasti pienempi kuin lampun napojen välinen jännite, joten yksinkertaistettu malli, jossa kuparijohdinten ajatellaan olevan vakiopotentiaalissa, on varsin hyvä. Tämä malli vastaa approksimaatiota  $R_{\text{kuparijohdin}} = 0$ , ja sitä kutsutaan *ideaalisen johteen malliksi*. Ideaalisessa johteessa johtavuus on ääretön ja varaus pääsee liikkumaan täysin ilman resistanssia. Tällöin minkä tahansa sähkövirtan tuottamiseen riittää mielivaltaisen heikko sähkökenttä ja siten kuinka pieni potentiaaliero tahansa. Niinpä siinä missä todelliset johteet ovat vakiopotentiaalissa vain, jos niissä ei kulje sähkövirtaa, *ideaalisessa johteessa potentiaali on aina sama kaikkialla*. Jos virtapiirissä on komponentteja kuten lamppuja, joiden resistanssi on paljon suurempi kuin piirissä käytettävien johdinten, johtimet ovat likimain vakiopotentiaalissa. Tällöin on gleensä helpointa ajatella johdinten olevan ideaalisia, jolloin ne ovat täsmälleen vakiopotentiaalissa.

Myös paristoissa kulkeviin ionieihin kohdistuu väliaineen vastus niiden liikuessa elektrolyytissä, ja niinpä myös paristoilla on sisäistä resistanssia,  $R_{\text{sisäinen}}$ . Virran kulkissa pariston läpi tämä resistanssi aiheuttaa potentiaalin muutoksen pariston napojen välillä, ja Tästä syystä napojen välinen jännite vastaa lähdejännitettä vain silloin, kun pariston läpi ei kulje lainkaan sähkövirtaa. Virran kulkissa pariston läpi negatiiviselta navalta positiiviselle napojen välinen potentiaaliero on resistanssin vuoksi hieman lähdejännitettä pienempi,

$$\Delta V = \mathcal{E} - R_{\text{sisäinen}} i. \quad (11.39)$$

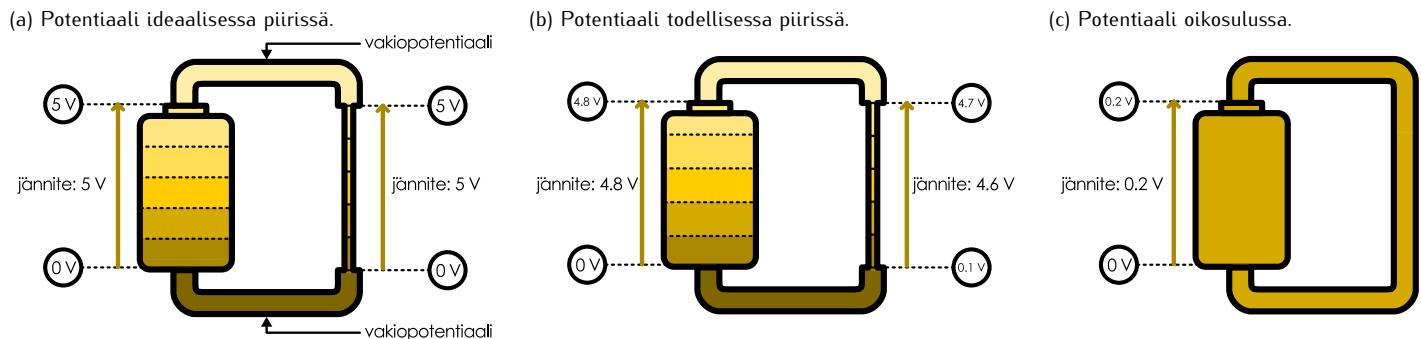
Tavallisesti paristojen sisäinen resistanssi on kuitenkin varsin pieni, joten sekin voidaan usein jättää huomiomatta. Tätä kutsutaan *ideaalisen jännitelähteen malliksi*. Ideaalinen jännitelähde pitää napojensa välisen potentiaalin *aina* täsmälleen samana.



**11.10** Luvussa 10.5 tarkastelimme energian muutoksia paristossa. Vertaa energiatarkastelua ja tässä esitettyä sisäisen resistanssin mallia. Miten resistanssi ilmenee luvun 10.5 tarkastelussa?

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.11: Ideaalisen johtimen ja jännitelähteen malli. Ideaalinen johdin on aina kauttaaltaan vakiopotentiaalissa. Ideaalisen pariston napojen välinen jännite on aina sama kuin pariston lähdejännite. Nämä ideaaliset mallit toimivat tavallisesti melko hyvin, mutta oikosulkulanteessa johdinten ja paristojen resistanssit ovat merkittävät.



Ideaalisen johteen ja jännitelähteen malli on havainnollistettu kuvassa 11.11. Kuvassa (a) on ideaalinen paristo, jonka napojen välinen jännite on täsmälleen 5 V. Potentiaalin nollatasoksi on valittu pariston negatiivinen napa, joten pariston positiivisen navan potentiaali on siis 5 V. Paristoon on kiinnitetty ideaaliset johtimet, joissa potentiaali on vakio. Niihin positiiviseen napaan kiinnitetty johdin on kauttaaltaan potentiaalissa 5 V ja negatiiviseen napaan kiinnitetty potentiaalissa 0 V. Johtimet on yhdistetty lamppuun, jonka hehkulangan päiden välinen potentiaaliero on siis sama kuin pariston, 5 V.

Kuvassa (b) on esitetty vastaava tilanne, kun paristo ja johtimet ovat epäidealiset. Pariston lähdejännite on yhä 5 V, mutta sen napojen välinen jännite on hieman tätä pienempi, 4.8 V. Paristoon kytketyt johtimet kaan eivät ole täysin vakiopotentiaalissa, vaan potentiaali muuttuu kummassakin johtimessa 0.1 V. Näin ollen hehkulangan päiden välinen potentiaaliero on 4.6 V, mikä on hieman vähemmän kuin mitä ideaalisten johdinten ja pariston malli ennusti. Riippuu tilanteesta ja vaaditusta tarkkuudesta, onko ideaalisten komponenttien malli tarpeeksi hyvä vai pitääkö paristojen ja johdinten resistanssi ottaa erikseen huomioon.

On kuitenkin eräs tilanne, jossa ideaalisten komponenttien malli ei koskaan toimi, ja tämä on esitetty kuvassa (c). Tässä kytkennässä pariston navat yhdistetään suoraan kiinni toisiinsa johtimilla. Tällöin paristo yrittää pitää napojensa välillä aina saman *potentiaalieron*, kun taas johdin yrittää pitää pariston navat *samanmaa potentiaalissa*. Ehdot on mahdoton toteuttaa samanaikaisesti, joten ideaalisten komponenttien malli johtaisi tässä tilanteessa ristiriitaan. Tätä tilannetta kutsutaan **oikosuluksi**. Ohmin lain (11.22) mukaan virapiirissä kiertävä sähkövirta on käänten verrannollinen piirin resistanssiin, ja ideaalisissa komponenteissa resistanssi on nolla, jolloin piirissä pitäisi kulkea äärettömän suuri *oikosulkuvirta*. Tämä ei ole tietenkään mahdollista, joten pariston ja johdinten pieni mutta nollaa suurempi resistanssi on otettava huomioon. Kuitenkin koska komponenttien resistanssi on hyvin pieni, oikosuljetussa piirissä kulkee hyvin suuri virta, jolloin potentiaaliero pariston napojen välillä on selvästi pienempi kuin lähdejännite.



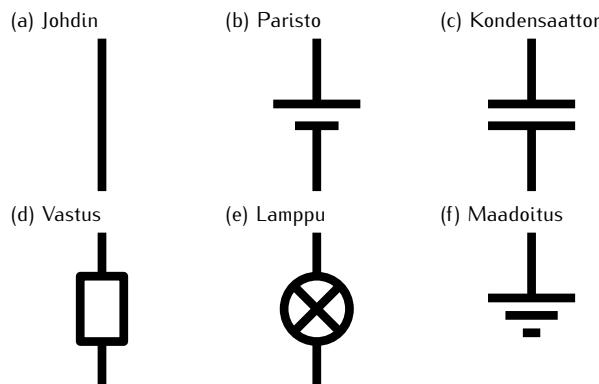
- 11.11** (a) Mihin muotoihin pariston varastoima kemiallinen energia muuttuu kuvan 11.11 (b) ja (c) tilanteissa  
 (i) paristossa ja (ii) johtimissa ja hehkulangassa?  
 (b) Kummassa tilanteessa kemiallista energiota muuttuu nopeammin (eli suuremmalla teholla)?  
 (c) Oikosulku voi olla vaarallinen. Selitä tämän perusteella miksi.

## 11.3 Virtapiirit

Sähköteknikassa ja elektronikaan käytetään monenlaisia komponentteja, ja niistä voidaan rakentaa monimutkaisia virtuja ja jännitteitä ohjaavia virtapiirejä. Tähän mennessä olemme tutustuneet johtimiin, kondensaattoreihin, jännitelähteisiin, vastuksiin, lamppuuihin sekä maadoituukseen, ja tietuenkin elektronisia komponentteja on olemassa paljon muitakin kuin tässä mainitut. Kerrataan näiden komponenttien ideaaliset ominaisuudet:

- Johtimen kaikki pistet ovat aina samassa potentiaalissa.
- Kondensaattoriin voi kulkea virta vain silloin, kun kondensaattorin varaus muuttuu, ja potentiaaliero kondensaattorin napojen välillä on suoraan verrannollinen varaukseen.
- Jännitelähteen napojen välillä on aina sama potentiaaliero.
- Vastuksen ja lampun läpi kulkee virta laskevan potentiaalin suuntaan. Virta on suoraan verrannollinen potentiaalieroona.
- Maadoituspisteen potentiaaliksi on sovittu nolla.

Kuva 11.12: Tavallisia sähköisten komponenttien symboleja.



Piirien rakenne esitetään tavallisesti *piirikaavioina*, joissa kutakin komponenttia kuvaa oma symbolinsa (kuva 11.12). Joistakin komponentteista on käytössä myös muita vaihtoehtoisia symboleita, mutta tässä materiaaliissa käytämme näitä. Seuraava tehtävämme onkin siirtyä yksittäisten komponenttien tarkastelusta tutkimaan piirien toimintaa.

## esimerkki 11.3

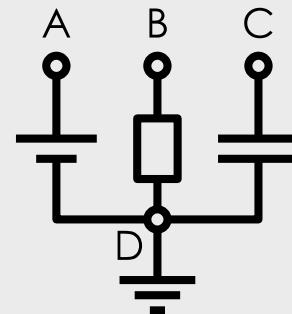
## Komponenttit

Paristo (9 V), vastus ( $4.5 \text{ k}\Omega$ ) ja kondensaattori (300 nF, ei varausta) on kytketty toisesta navastaan maahan kuten kuvassa. (a) Mikä on potentiaali piirin pisteissä A–D? (b) Mikä on virta kunkin komponentin läpi? (c) Komponenttien toisetkin navat (pisteet A–C) yhdistetään johtimella. Mitkä ovat tämän jälkeen potentiaalit ja virrat? (d) Pisteet A–C yhdistävää johdin poistetaan jälleen, jolloin kytkentä on jälleen sama kuin aluksi. Mitkä ovat nyt potentiaalit ja virrat?

**RATKAISU** Maadoituspisteen D potentiaaliksi on sovittu nolla, joten aina pätee  $V_D = 0 \text{ V}$ . Maadoitus ei tässä vaikuta piirin toimintaan millään muulla tavalla.

Paristo pitää napojensa välisen jännitteen vakiona, ja nyt plusnapa on kytketty pisteeseen A, joten  $\Delta V_{D \rightarrow A} = V_A - V_D = 9 \text{ V}$  ja siis aina  $V_A = 9 \text{ V}$ .

Vastuksen napojen välillä on jännite, jos vastuksen läpi kulkee virta, ja kondensaattorin napojen välillä on jännite, jos kondensaattorissa on varaus. Alkutilanteessa ei ole suljettua piiriä, joten virta ei voi kulkea (pisteeseen B ei voi kerääntyä varausta) ja siis  $V_B = 0 \text{ V}$ . Kondensaattorissa ei myöskään ole varausta, joten  $V_C = 0 \text{ V}$ . Virta on nolla kaikkialla.



Kun pisteet A, B ja C yhdistetään, ne saavat kaikki saman potentiaalin. Siispä  $V_A = V_B = V_C = 9 \text{ V}$ , koska paristo pitää pisteen A potentiaalin aina 9 volttia pisteen D potentiaalia korkeammalla. Nyt vastuksen päiden välillä on jännite, joten sen läpi kulkee virta

$$i_{B \rightarrow D} = -\frac{1}{R} \Delta V_{B \rightarrow D} = -\frac{1}{4.5 \text{ k}\Omega} (9 \text{ V} - 0 \text{ V}) = 2 \text{ mA.} \quad (11.40)$$

Virta kulkee siis pistestä B kohti pistettä D.

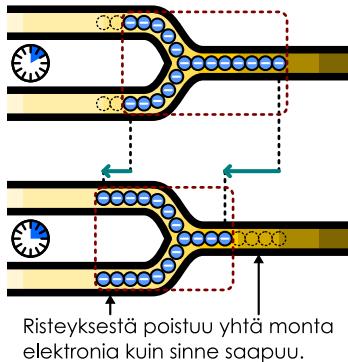
Kondensaattorin navat ovat nyt myös eri potentiaalissa, joten kondensaattorilla täytyy olla varaus  $Q = C\Delta V = 2700 \text{ nC}$ . Paristo siis siirtää positiivista varausta kondensaattorin yhdelle levylle ja negatiivista toiselle, kunnes yhden levyn varaus on  $+Q$  ja toisen  $-Q$ . Varautumisen aikana kondensaattoriin kulkee hyvin lyhyen hetken virta, mutta kun kondensaattori on varautunut niin että sen jännite on yhtä suuri kuin pariston jännite, varausta ei enää siirry eikä kondensaattoriin siis kulje virtaa. Virta kulkee siis vain pariston ja vastuksen läpi reittiä  $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ .

Kun pisteet A–C yhdistävää johdin jälleen poistetaan, kytkentä palaa samanlaiseksi kuin aluksi. Virta ei enää pääse kulkemaan, ja pisteen B potentiaali on jälleen sama kuin pisteen D potentiaali,  $V_B = 0 \text{ V}$ . Kondensaattori on kuitenkin edelleen varattu, sillä nyt pisteen C puoleinen kondensaattorin levy on täysin eristetty muista komponenteista eikä sinne varastoitunut sähkövarausta pääse poistumaan. Niinpä kondensaattorissa on edelleen varaus  $Q = 2700 \text{ nC}$ . Levyjen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero  $\Delta V_{D \rightarrow C} = Q/C = 9 \text{ V}$ . Pisteen C potentiaali on siis  $V_C = 9 \text{ V}$ . (Näin siis ideaalisessa kondensaattorissa. Todellisissa kondensaattoreissa levyjen välinen eriste ei ole täydellinen, jolloin varausta pääsee vähitellen siirtymään levyltä toiselle ja kondensaattorin varaus purkautuu.)

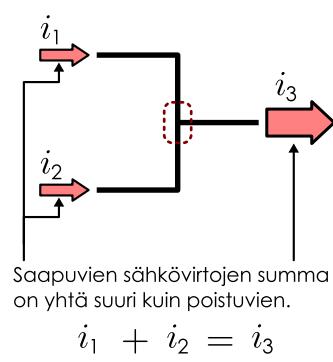
## Vastuskytkennät

Kuva 11.13: Kirchhoffin risteyssäännön mukaan johdinten risteykseen saapuvien virtojen summa on nolla.

(a) Elektroneja täytyy saapua ja poistua yhtä paljon.



(b) Risteyssääntö piirikaaviossa.



ei muutu. Jos siis johtimen yhdestä päästä saapuu elektroneja, niitä on poistuttava johtimen toisesta päästä yhtä paljon. Sama periaate pätee myös johdinten risteyksessä. Jos joitakin johtimia pitkin risteykseen saapuu elektroneja, niitä on poistuttava toisia johtimia pitkin aivan yhtä paljon. Muutoin risteykseen kertyisi elektronien ylimäärä tai vajaus ja risteys varautuisi. Koska sähkövirta kuvaa siirtyneen varauksen määrään, tämän periaatteen mukaisesti *risteykseen saapuvien ja sieltä poistuvien sähkövirtojen täytyy olla yhtä suuret*,

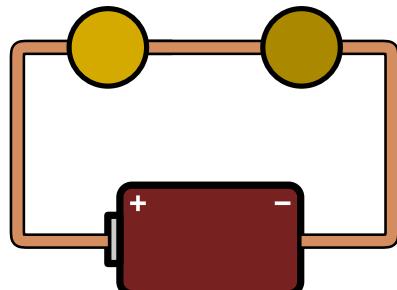
$$\sum_{\text{saapuva}} i = \sum_{\text{poistuva}} i \quad (11.41)$$

Tämä on **Kirchhoffin risteyssääntö** tai **virtasääntö** (Gustav Kirchhoffin mukaan).

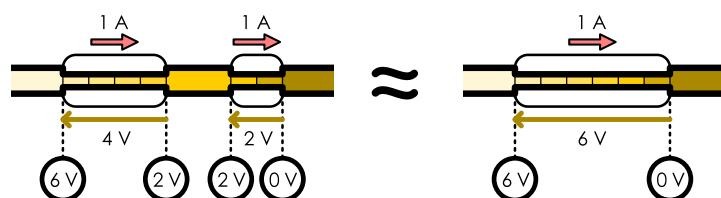
Risteyssäännön perusteella voimme johtaa vastuksille samankaltaiset yhteenlaskusäännöt kuin kondensaattoreille. Kun kaksi vastusta tai lamppua kytketään sarjaan kuten kuvassa 11.14 (a) ja (b), vastukset ja johtimet muodostavat sähkövirralle yhden katkeamattoman kulkuväylän. Sähkövirran pitää olla tällä väylällä kaikki sähkövirta, joten erityisesti kummankin vastuksen läpi täytyy kulkea sama virta  $i$ . Merkitään vastusten resistansseja  $R_1$  ja  $R_2$  sekä niiden napojen välillä olevaa potentiaalieroa  $\Delta V_1$  ja  $\Delta V_2$ . Sarjaankytkennessä nämä potentiaalierot ovat tavallisesti erisuuria. Joka tapauksessa potentiaaliero koko kytkennän yli on näiden summa,  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ . Tässä kytkennässä kokonaispotentiaalieron  $\Delta V$  määräää pariston lähdejännite, ja kytkennän läpi kulkeva virta riippuu tästä jännitteestä sekä kytkennän kokonaisresistanssista  $R$ .

Kuva 11.14: Vastusten yhdistäminen. Peräkkäin eli sarjaan kytketyissä vastuksissa kulkee sama virta, koska virtaavien elektronien tiheys on vakio.

(a) Sarjaankytentä.



(b) Sarjaankytettyjen vastusten potentiaali ja virta.

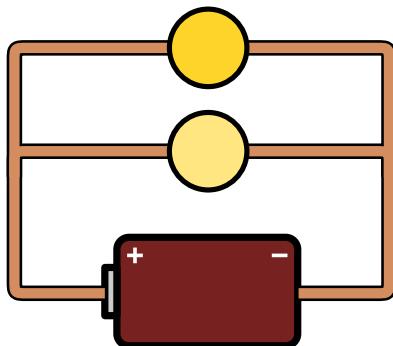


Monimutkaisten piirien analyysi perustuu tavallisesti piirien tarkastelemiseen osissa. Tavoite on yleensä piirin jakaminen niin pieniin osiin, että kuhunkin osaan kuuluu vain yksi sähkökomponentti. Tällöin näihin osiin voidaan soveltaa yksittäisten komponenttien toimintaa kuvaavia sääntöjä. Ja kun jokaisen yksittäisen osan toiminta tunnetaan, voidaan koko piirin toiminta päätellä niiden pohjalta.

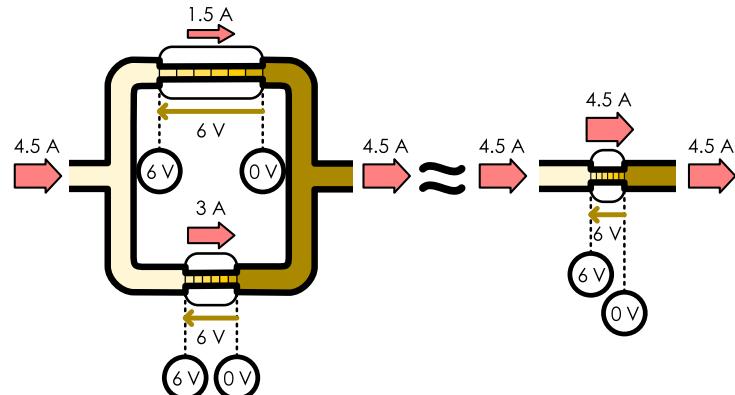
Sähkökomponenttien lisäksi piirien perusyksikköjä ovat **silmukat** ja **risteykset**. Risteys on kohta, jossa kolmen tai useaman johtimen päät kohtaavat toisensa eli johdin haarautuu kuten kuvassa 11.13. Päättelimme jo aikaisemmin, että kun piiri on tasaisen virtauksen tilassa, minkä tahansa suoran johtimen läpi kulkee kaikkialla yhtä suuri sähkövirta. Tasaisessa virtauksessahan elektronit liikkuvat kuin kokoonpuristumaton neste, jonka tiheys

Kuva 11.15: Vastusten yhdistäminen. Viereen eli rinnan kytketyissä vastuksissa on sama jännite, koska potentiaali on ideaalisissa johtimissa vakio.

(a) Rinnankytkentä.



(b) Rinnankytettijen vastusten potentiaali ja virta.



Ohmin lain mukaisesti,  $i = -\Delta V/R$ . Toisaalta potentiaalieron ja virran yhteys noudattaa Ohmin lakiä myös kummassakin vastuksessa erikseen, joten potentiaali muuttuu vastuksessa 1 määräni  $\Delta V_1 = -R_1 i$  ja vastuksessa 2  $\Delta V_2 = -R_2 i$ . Sarjaankytkentä toimii siis kokonaisuudessaan kuin yksi vastus, jonka resistanssi on

$$R = -\frac{\Delta V}{i} = -\frac{\Delta V_1}{i} - \frac{\Delta V_2}{i} = R_1 + R_2. \quad (11.42)$$

Sarjaankytettijen vastusten resistanssit lasketaan siis suoraan yhteen, ja sama periaate toimii riippumatta siitä, kuinka monta vastusta sarjassa on.

Kuvassa 11.15 (a) ja (b) on puolestaan esitetty kahden vastuksen rinnankytkentä. Tässä kytkennässä vastusten kuvassa vasemmanpuoleiset navat on yhdistetty keskenään johtimella, joten ne ovat samassa potentiaalissa. Samoin vastusten oikeanpuoleiset navat on kytketty yhteen samaan potentiaaliin. Niinpä potentiaaliero  $\Delta V$  on sama kummassakin vastuksessa. Kummankin vastuksen läpi kulkeva virta on käännekkäin verrannollinen vastuksen resistanssiin, joten virrat ovat  $i_1 = -\Delta V/R_1$  sekä  $i_2 = -\Delta V/R_2$ . Risteyssäännön perusteella koko kytkennän läpi kulkeva virta saadaan laskemalla eri reittejä kulkevat virrat yhteen, koska saapuvia virtuja jakautuu kytkennässä kulkemaan kummankin vastuksen läpi,  $i = i_1 + i_2$ . Toisaalta kytkennän voi ajatella toimivan kuin yksi vastus, jolloin virran voi esittää myös potentiaalieron ja kytkennän kokonaishistorian  $R$  avulla,

$$-\frac{1}{R}\Delta V = i = i_1 + i_2 = -\frac{1}{R_1}\Delta V - \frac{1}{R_2}\Delta V. \quad (11.43)$$

Potentiaaliero  $\Delta V$  voidaan supistaa tästä yhtälöstä pois, jolloin jäljelle jää

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (11.44)$$

Siispä rinnankytkennässä vastusten resistanssien käänneisluvut lasketaan yhteen.



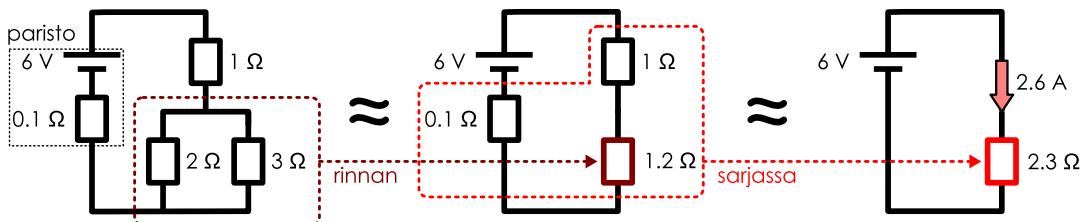
- 11.12** (a) Tarkista vastusten sarjaan- ja rinnankytkentäsäännöt kuvissa 11.14 ja 11.15.  
 (b) Mikä on kunkin lampun resistanssi?

Vastusten kytkentäsäännöt ovat samantyyppiset kuin kondensaattoreidenkin, mutta resistanssit käyttäytyvät sarjaan- ja rinnankytkennässä päinvastoin kuin kapasitanssit: resistanssit lasketaan suoraan yhteen sarjaankytkennässä ja kapasitanssit rinnankytkennässä. Pohjimmiltaan kyse on siitä, että *sarjaankytkennässä komponenttien jännitteet eli potentiaalierot lasketaan suoraan yhteen, mutta rinnankytkennässä summaataan sähkövaraukset tai -virrat*. Resistanssi on määritelty suoraan verrannolliseksi potentiaalieroona, joten resistanssit lasketaan sarjaankytkennässä suoraan yhteen. Kapasitanssi taas on suoraan verrannollinen varaukseen, joten kapasitanssit lasketaan yhteen rinnankytkennässä.

Vastuskentöjen korvaaminen yhdellä kokonaishistoriansilla on joskus helpoin tapa selvittää piirissä kulkeva kokonaivirta. Tätä tekniikkaa on havainnollistettu kuvassa 11.16, jossa halutaan selvittää paristosta ja kolmesta vastuksesta koostuvan piirin toiminta. Piirissä on kolme vastusta, joiden resistanssit ovat yhden ohmin kokoluokkaa. Pariston sisäinen resistanssi on  $0.1 \Omega$ , mikä on vain kertaluokkaa pienempi, joten myös pariston resistanssi on otettu huomioon. Tämä onnistuu kuvamalla paristo idealisen jännitelähteen sekä ideaalisen vastuksen sarjaankytkentänä. Nämä komponenttit kuvavat siis pariston lähejännitettä (tässä 6

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.16: Vastuskytkennän pelkistäminen kokonaisresistanssiksi. Paristo voidaan erottaa ideaaliseksi jännitelähteeksi (lähdejännite) sekä vastukseksi (sisäinen resistanssi). Rinnan- ja sarjaankytkettyt vastukset voidaan puolestaan yhdistää yhdeksi piirrin kokonaisresistanssia kuvavaksi vastukseksi. Kun kokonaisresistanssi on selvillä, pariston läpi kulkeva virta selviää suoraan Ohmin laista.



V) ja sisäistä resistanssia, ja yhdessä tämä kytkentä tuottaa yhtälöä (11.39) noudattavan virrasta riippuvan napajännitteen.

Kun pariston sisäinen resistanssi on erotettu omaksi komponentikseen, se ei poikkea mitenkään piirin muiden komponenttien resistansseista. Seuraava askel onkin vastusten resistanssien yhdistäminen yhdeksi, koko piiriä kuvaavaksi resistanssiksi. Tässä esimerkissä tämä onnistuu askeleittain. Ensin rinnankytkettyt  $2\ \Omega$  ja  $3\ \Omega$  ohmin vastukset voidaan kuvata kokonaisresistansilla  $R$ , jonka suuruus saadaan laskettua rinnankytentäsäännöllä (11.44),

$$R_{\text{rinnan}} = \left( \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} \right)^{-1} = \left( \frac{5}{6\ \Omega} \right)^{-1} = \frac{6}{5}\ \Omega = 1.2\ \Omega. \quad (11.45)$$

Tämän jälkeen piirissä on jäljellä kolme sarjaankytettyä vastusta, joiden kokonaisresistanssi saadaan sarjaankytentäsäännön (11.42) perusteella suoralla yhteenlaskulla

$$R_{\text{sarjassa}} = 1\ \Omega + 1.2\ \Omega + 0.1\ \Omega = 2.3\ \Omega. \quad (11.46)$$

Nyt kaikki piirin resistanssit on yhdistetty, joten tämä on koko piirin resistanssi. Piirissä kulkeva kokonaisvirta on Ohmin lain mukaisesti siis

$$|i| = \frac{1}{R} \Delta V = \frac{6\ \text{V}}{2.3\ \Omega} = 2.6\ \text{A}. \quad (11.47)$$

Kun virta tunnetaan, potentiaalierot on helppo laskea sarjaankytetyissä vastuksissa, ja edelleen kun potentiaalierot tunnetaan, on helppo laskea virta rinnankytetyissä vastuksissa. Näin voidaan tarvittaessa selvittää alkuperäisen piirin kaikkien komponenttien läpi kulkevat virrat ja niiden napojen väliset potentiaalierot.



**11.13** Mikä on kytkennän kokonaisresistanssi, jos kytket vastuksen  $R$  kanssa (a) sarjaan tai (b) rinnan ideaalisen johtimen? Selitä oman sanoin, mitä tulos tarkoittaa!

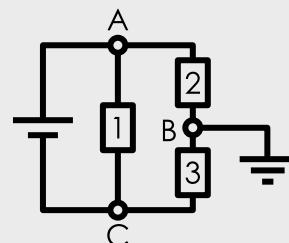
### esimerkki 11.4

### Vastuskytkentä

**Paristo ja kolme vastusta on kytketty piiriin kuten kuvassa. Pariston jännite on 6 V ja vastusten resistanssit ovat  $1\ \text{k}\Omega$ ,  $2\ \text{k}\Omega$  ja  $3\ \text{k}\Omega$ . Ratkaise potentiaali pisteissä A–C sekä virta kunkin komponentin läpi.**

**SUUNNITELMA** Maadoituspisteen potentiaali on sovitusti nolla, joten  $V_B = 0\ \text{V}$ . Paristo pitää napojensa välisen potentiaalieron vakiona, joten  $\Delta V_{C \rightarrow A} = 6\ \text{V}$ . Vastuksissa potentiaaliero ja virta ovat suoraan verrannolliset Ohmin lain mukaisesti,

$$\Delta V = -Ri. \quad (11.48)$$



Vastuksen 1 napojen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston jännite, joten sen läpi kulkeva virta voidaan ratkaista heti. Jotta saisimme selville vastusten 2 ja 3 läpi kulkevan virran, voimme laskea niiden kokonaisresistanssin vastusten yhteenlaskusäännöllä ja soveltaa Ohmin lakiä kuvitteelliseen vastukseen, jonka resistanssi on sama kuin vastusten 2 ja 3 resistanssit yhteen. Tämä virta kulkee sekä vastuksen 2 että 3 läpi, joten sen avulla voimme lopuksi laskea potentiaalin muutoksen kummassakin vastuksessa erikseen.

**RATKAISU** Virta vastuksen 1 läpi on

$$i_{1,A \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C} / R_1 = 6.0\ \text{mA}. \quad (11.49)$$

Vastukset 2 ja 3 on kytketty sarjaan, joten niiden kokonaisresistanssi saadaan suoraan summana  $R_{2+3} = R_2 + R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ . Virta näiden vastusten läpi on siis

$$i_{2,A \rightarrow B} = i_{3,B \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C}/R_{2+3} = 1.2 \text{ mA}. \quad (11.50)$$

Pariston kautta kulkeva virta jakautuu pisteessä A kahtia, joten Kirchhoffin risteyssäännön mukaisesti pariston läpi kulkevan virran täytyy olla näiden virtojen summa,  $i_{\text{paristo},C \rightarrow A} = i_{1,A \rightarrow C} + i_{2,A \rightarrow B} = 7.2 \text{ mA}$ .

Potentiaaliero vastuksen 2 päiden välillä on  $\Delta V_{A \rightarrow B} = -R_2 i_{2,A \rightarrow B} = -2.4 \text{ V}$ , eli pisteen A potentiaali on  $V_A = V_B + \Delta V_{B \rightarrow A} = V_B - \Delta V_{A \rightarrow B} = 2.4 \text{ V}$ . Vastaavasti potentiaaliero vastuksen 3 päiden välillä on  $\Delta V_{B \rightarrow C} = -R_3 i_{3,B \rightarrow C} = -3.6 \text{ V}$  joten pisteen C potentiaali on  $V_C = V_B + \Delta V_{B \rightarrow C} = -3.6 \text{ V}$ . Yhteenvetona siis  $V_A = 2.4 \text{ V}$ ,  $V_B = 0 \text{ V}$  ja  $V_C = -3.6 \text{ V}$ .

**ARVIOINTI** Pisteen A potentiaali on korkeampi kuin pisteen C kuten pitääkin, koska näitä pistiä erottaa paristo, ja A on kytketty pariston positiiviseen napaan. Pariston jännite on  $\Delta V_{C \rightarrow A} = V_A - V_C = 2.4 \text{ V} - (-3.6 \text{ V}) = 6.0 \text{ V}$  kuten pitääkin. Kytkenän kokonaisresistanssi on  $R_{1+2+3} = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1} = 0.83 \text{ k}\Omega$ , minkä perusteella kokonaisvirta on  $i_{A \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C}/R_{1+2+3} = 7.2 \text{ mA}$  eli sama kuin edellä laskettu virta pariston läpi.

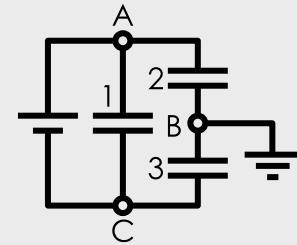
### esimerkki 11.5

### Kondensaattoriptykentä

Paristo ja kolme kondensaattoria on kytketty piiriin kuten kuvassa. Pariston jännite on 6 V ja kondensaattoreiden kapasitanssit ovat 1 nF, 2 nF ja 3 nF. Ratkaise potentiaali pisteissä A–C sekä kunkin kondensaattorin varaus.

**SUUNNITELMA** Maadoituspisteen potentiaali on sovitusti nolla, joten  $V_B = 0 \text{ V}$ . Paristo pitää napojensa välisen potentiaalieron vakiona, joten  $\Delta V_{C \rightarrow A} = 6 \text{ V}$ . Kondensaattoreiden läpi ei kulje virtaa, ja niissä potentiaaliero ja varaus ovat suoraan verrannolliset,

$$\Delta V = \frac{1}{C} Q. \quad (11.51)$$



Kondensaattorin 1 napojen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston jännite, joten sen varaus voidaan ratkaista heti. Jotta saisimme selville kondensaattoreiden 2 ja 3 varaukset, voimme laskea niiden kokonaiskapasitanssin kondensaattoreiden yhteenlaskusäännöllä ja soveltaa yhtälöä 11.51 kuvitteelliseen kondensaattoriin, jonka kapasitanssi on sama kuin kondensaattorien 2 ja 3 kokonaiskapasitanssi. Kondensaattoreissa 2 ja 3 on sama varaus, joten sen avulla voimme lopuksi laskea jännitteen kummassakin kondensaattorissa erikseen.

**RATKAISU** Kondensaattorin 1 varaus on

$$Q_1 = C_1 \Delta V_{C \rightarrow A} = 6.0 \text{ nC}. \quad (11.52)$$

Kondensaattorit 2 ja 3 on kytketty sarjaan, joten niiden kokonaiskapasitanssi saadaan käänteisarvojen summana  $C_{2+3} = (C_2^{-1} + C_3^{-1})^{-1} = 1.2 \text{ nF}$ . Näiden kondensaattoreiden varaus on siis

$$Q_2 = Q_3 = C_{2+3} \Delta V_{C \rightarrow A} = 7.2 \text{ nC}. \quad (11.53)$$

Kondensaattorissa 2 pisteen A puoleinen levy varautuu positiivisesti ( $q_{2,A} = 7.2 \text{ nC}$ ) ja pisteen B puoleinen levy negatiivisesti ( $q_{2,B} = -7.2 \text{ nC}$ ). Kondensaattorissa 3 pisteen B puoleinen levy varautuu positiivisesti ( $q_{3,B} = 7.2 \text{ nC}$ ) ja pisteen C puoleinen levy negatiivisesti ( $q_{3,C} = -7.2 \text{ nC}$ ). Kondensaattoreilla täytyy olla sama varaus, koska ne varautuvat niihin, ettei varusta siirry pisteen B kautta kondensaattorista 2 kondensaattoriin 3, ja siis ( $q_{2,B} = -q_{3,B}$ ).

Potentiaaliero kondensaattorin 2 levijen välillä on  $|\Delta V_{A \rightarrow B}| = \frac{Q_2}{C_2} = 3.6 \text{ V}$ , ja koska pisteen A puoleinen levy on positiivisesti varattu, sen täytyy olla korkeammassa potentiaalissa,  $\Delta V_{A \rightarrow B} < 0 \text{ V}$ . Siispä pisteen A potentiaali on  $V_A = V_B + \Delta V_{B \rightarrow A} = V_B - \Delta V_{A \rightarrow B} = 3.6 \text{ V}$ . Vastaavasti potentiaaliero kondensaattorin 3 levijen välillä on  $\Delta V_{B \rightarrow C} = Q_3/C_3 = -2.4 \text{ V}$  ja pisteen C potentiaali on  $V_C = V_B + \Delta V_{B \rightarrow C} = -2.4 \text{ V}$ . Yhteenvetona siis  $V_A = 3.6 \text{ V}$ ,  $V_B = 0 \text{ V}$  ja  $V_C = -2.4 \text{ V}$ .

**ARVIOINTI** Kytkenän kokonaiskapasitanssi on  $C_{1+2+3} = C_1 + C_{2+3} = 2.2 \text{ nF}$ , minkä perusteella kokonaisvaraus on  $Q = C_{1+2+3} \Delta V_{C \rightarrow A} = 13.2 \text{ nC}$ . Tämä on sama kuin pisteeseen A (tai C) kytkettyjen kondensaattorilevijen kokonaisvaraus  $Q = q_{1,A} + q_{2,A}$ , kuten pitääkin. Huomaa, että tässä piirissä on vain korvattu tehtävän 11.4 vastukset kondensaattoreilla, ja loppululos on monin tavoin erilainen.



**11.14** Miksi esimerkin 11.5 lopuksi laskettu kokonaisvaraus ei ole sama kuin kondensaattoreiden varausten summa, eli miksi  $Q \neq Q_1 + Q_2 + Q_3$ ?

## Piirianalyysi

Vastusten korvaaminen kokonaisresistanssilla toimii silloin, kun piirin voi palauttaa *yhdeksi silmukaksi*. Silmukka tarjoittaa tässä johdinten ja niiden yhdistämien komponenttien muodostamaa suljetta polkuja, jota pitkin kiertämällä päästään takaisin lähtöpisteeseen kuten kuvassa 11.17. Kaikkia piirejä ei kuitenkaan voi kuvata yhtenä silmukkana, sillä piirit voivat sisältää monimutkaisilla tavoilla haarautuvia johtimia, joiden muodostamia kytkentöjä ei voi välittämättä palauttaa sarjaan- ja rinnankytkenöiksi. Lisäksi piirit voivat koostua monenlaisista muistakin komponenteista pelkkien vastusten lisäksi. Tarvitsemme siis yleisemän tavan analysoida piirejä.

Palataan kuitenkin vielä tutkimaan yksittäistä silmukkaa. Voimme valita silmukasta minkä tahansa kohdan alkupisteeksi ja lähteä kiertämään silmukkaa ympäri. Yleensä silmukkaan kuuluu komponentteja, joiden napojen välillä on potentiaaliero, ja niinpä potentiaali muuttuu silmukkaa pitkin kuljettaessa. Potentiaali on kuitenkin paikan funktio, joten riippumatta siitä, millainen potentiaali on silmukan eri kohdissa, valitun alkupisteen potentiaali on se mikä on. Niinpä kun seuraamme koko silmukan ympäri ja palaamme takaisin alkupisteeseen, päädyimme takaisin samaan potentiaaliin kuin mistä aloitimme. Niinpä *suljettua silmukkaa pitkin kuljettaessa mitattujen potentiaalien muutosten täytyy summautua nollaksi*,

$$\sum_{\text{silmukka}} \Delta V = 0 \text{ V.} \quad (11.54)$$

Tämä on **Kirchhoffin silmukkasääntö** tai jännitesääntö.

Silmukka- ja risteyssääntö riittävät yhdessä paristoja, vastuksia ja kondensaattoreita kuvaavien sääntöjen kanssa minkä tahansa näistä komponenteista koostuvan piirin toiminnan kuvaamiseen. Kuvassa 11.18 (a) on esimerkki virtapiiristä sekä sen analysistä silmukoista ja risteysten avulla. Piirianalyysissä tavoite on ratkaista sekä potentiaali kaikissa piirin pisteissä että jokaisen johtimen ja komponentin läpi kulkeva virta, ja tästä varten potentiaalit sekä virrat pitää nimetä. Kuvassa 11.18 (b) onkin valittu piiristä joukko pisteitä, ja nämä on merkitty kirjaimin A–H. Tavoitteemme on laskea potentiaali näissä pisteissä. Kuvaan on myös piirretty joukko johtimien suuntaan osoittavia nuolia, jotka on merkitty numeroin 1–6. Toinen tavoitteemme on laskea nuolten suuntaan kulkeva virta kussakin johtimessa. Nuolten suunta pitää valita, mutta tällä valinnalla ei lopujen lopuksi ole mitään väliä. Jos virta kulkee johtimessa päinvastaiseen suuntaan kuin mihin nuoli oli valittu osoittamaan, tälle virralle saadaan ratkaisussa negatiivinen arvo.

Nyt voimme analysoida piirin kunkin komponentti, silmukka ja risteys kerrallaan. Aivan ensimmäiseksi kannattaa etsiä ilmiselvät yhteydet. Ensinnäkin piste G on maadoitettu, joten sen potentiaali on sopimuksen mukaisesti nolla,

$$V_G = 0 \text{ V.} \quad (11.55)$$

Toiseksi jos oletamme kaikki komponentit ideaalisiksi, kunkin johdin on vakiopotentiaalissa. Pisteitä E ja H yhdistää vain ideaalinen johdin, joten niiden potentiaalien täytyy olla samat,

$$V_E = V_H. \quad (11.56)$$

Huomaa myös, että joillakin kuvaan piirrettyillä nuolilla on sama numero. Yhtenäisessä johtimessa täytyy kulkea kaikkialla sama virta, joten myös *sarjaan kytkettyjen komponenttien läpi kulkee yhtä suuri virta*. Niinpä esimerkiksi numerolla 1 merkity virta kulkee sekä pariston että kahden vastuksen läpi.

Seuraavaksi voimme soveltaa kunkin komponentin tunnettuja ominaisuuksia. Esimerkiksi koska pisteiden F ja A välissä on paristo, niiden potentiaalieron täytyy aina olla sama kuin pariston lähdejännite,

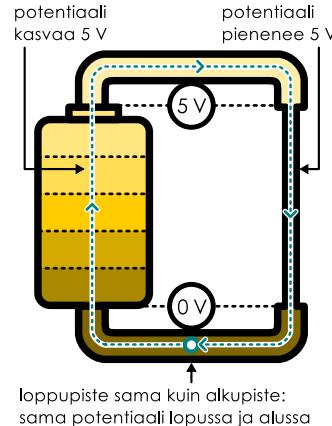
$$V_A - V_F = \Delta V_{F \rightarrow A} = \mathcal{E}. \quad (11.57)$$

Pisteitä A ja B puolestaan erottaa vastus, jonka läpi kulkee virta  $i_1$ , joten jos vastuksen resistanssi on  $R$ , näiden pisteiden välinen potentiaaliero on

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = -R i_1. \quad (11.58)$$

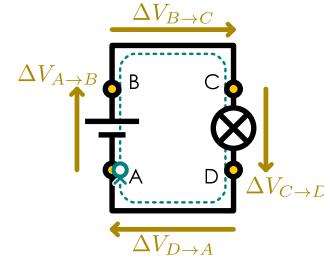
Kuva 11.17: Kirchhoffin silmukkasäännön mukaan potentiaalin muutos on nolla, kun kierretään kokonainen silmukka.

(a) Suljetun polun alussa ja lopussa on sama potentiaali.



loppupiste sama kuin alkupiste:  
sama potentiaali lopussa ja alussa

(b) Silmukkasääntö piirikaaviossa.

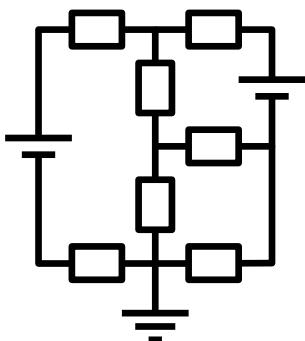


Potentiaalin muutosten summa on nolla.

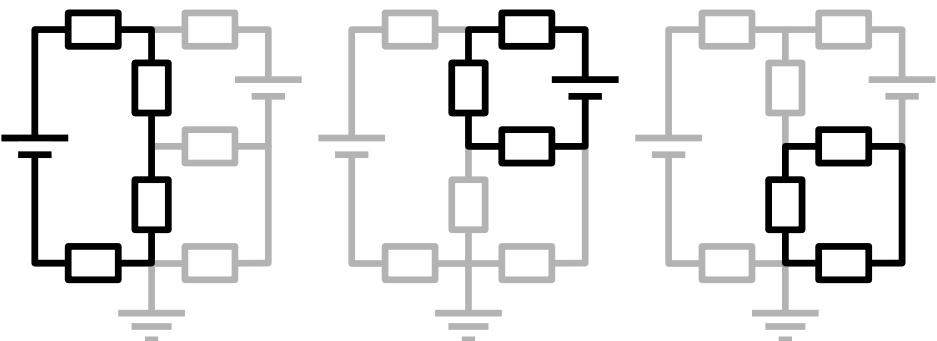
$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow A} = 0 \text{ V}$$

Kuva 11.18: Piirin jakaminen silmukoihin ja risteyksiin analyysiä varten.

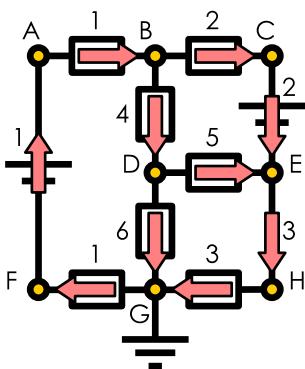
(a) Virtapiirin kaaviokuva.



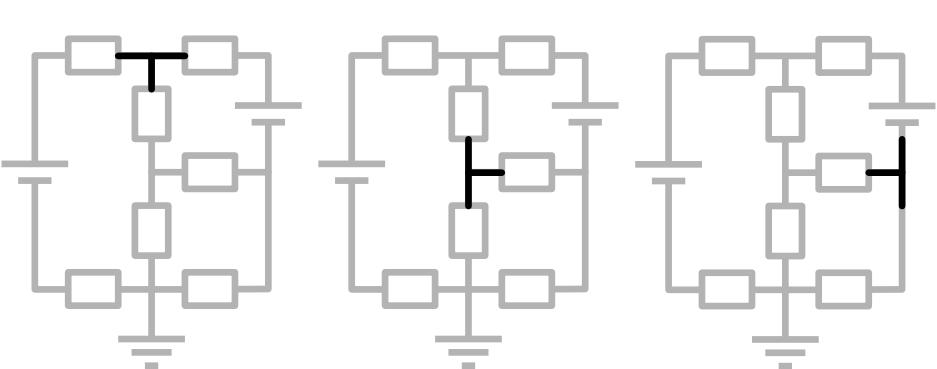
(c) Virtapiiristä valittuja silmukoita.



(b) Merkitään kirjaimilla potentiaaleja ja numeroilla virtajoja.



(d) Virtapiiristä valittuja risteyksiä.



Samaan tapaan voimme muodostaa lausekkeet kaikkien vierekkäisten (yhden komponentin erottamien) pisteen välisille potentiaalieroille.

Pelkkä komponenttien analyysi ei kuitenkaan riitä, vaan tarvitsemme myös risteys- ja silmukkasääntöjä (11.41) ja (11.54). Piiristä voidaan valita silmukoita hyvin monin tavoin, mutta yleensä kannattaa valita mahdollisimman pienet ja yksinkertaiset silmukat. Piirin kolme pienintä silmukkaa on esitetty kuvassa 11.18 (c). Kullekin silmukalle voidaan soveltaa silmukkasääntöä erikseen. Esimerkiksi ensimmäiselle kuvaan piirrettylle silmukalle pätee

$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow G} + \Delta V_{G \rightarrow F} + \Delta V_{F \rightarrow A} = 0 \text{ V.} \quad (11.59)$$

Tässä muodossa yhtälö ei ole vielä kovin hyödyllinen, mutta kukin yhtälössä esiintyvä potentiaaliero edustaa yhden komponentin jännitettä, joten voimme sijoittaa komponentteja kuvaavat lausekkeet tähän yhtälöön. Esimerkiksi  $\Delta V_{F \rightarrow A}$  on pariston jännite yhtälön (11.57) mukaisesti,  $\Delta V_{A \rightarrow B}$  on yhtälön (11.58) kuvaama vastuksen jännite jne. Lopujen lopuksi yhtälö (11.59) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{E} - 2Ri_1 - Ri_4 - Ri_6 = 0 \text{ V.} \quad (11.60)$$

Tässä silmukassa siis potentiaali kasvaa kuljetaessa pariston läpi virran 1 kulkusuuntaan, mutta potentiaali pienenee kuljetaessa vastusten läpi virtojen 1, 4 ja 6 kulkusuuntiin. Yhteensä potentiaalin täyttyy pienentää vastuksissa täsmälleen yhtä paljon kuin se kasvoi paristossa.

Yhtälössä (11.60) jännetteet on kirjoitettu komponenttien ominaisuuksien ja piirissä kulkevien virtojen avulla, joten tästä yhtälöä voidaan käyttää näiden tuntemattomien virtojen ratkaisemisessa. Kaksi muuta kuvaan 11.18 (c) piirrettyä silmukkaa voidaan analysoida samaan tapaan, ja näin saatavat yhtälöt on johdettu esimerkissä 11.6. Yhdessä nämä kolme silmukkaa käyvät läpi kaikki piirin johtimet ja komponentit, joten enempää silmukoita ei kannata etsiä. Piirissä on kyllä enemmänkin silmukoita. Esimerkiksi piirin "ulkoreunaa" kulkeva, virtojen 1, 2 ja 3 reittiä kulkeva polku on myös aivan kelvollinen silmukka, ja sillalle voidaan kirjoittaa silmukkasäännön perusteella oma jänniteyhtälönsä, joka on näennäisesti erilainen kuin 11.18 (c) kolmesta silmukasta saatuuihin yhtälöihin verrattuna. Tämä neljäs yhtälö ei kuitenkaan sisältää mitään uutta informaatiota, sillä sen voisi johtaa jo kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä. (Matematiikassa sanotaan, että nämä neljä yhtälöä olisivat toisiaan lineaarisesti riippuvaiset.) Yhteensä jännetesääntö antaa meille tässä esimerkissä siis täsmälleen kolme toisistaan riipumaton yhtälöä.

## SÄHKÖVIRTA

Piirissä on myös useita risteyksiä, mutta näistäkin riittää poimia vain niin monta, että saamme tarpeeksi yhtälöitä kaikkien virtojen ratkaisemiseksi. Tässä tapauksessa riittää kolme risteystä, ja kuvaan 11.18 (d) on valittu jotkin kolme risteystä. Kuvan ensimmäiseen risteykseen saapuu virta 1 ja sieltä lähtevät virrat 2 ja 4, joten risteyssäännön mukaan

$$i_1 = i_2 + i_4. \quad (11.61)$$

Muistakin risteyksistä saadaan yhtälöt samaan tapaan.

Risteyssäännön avulla saamme siis muodostettua yhtälöitä, jotka yhdistävät eri johtimissa kulkevat virrat toisiinsa. Silmukkasäännön perusteella saamme puoletaan johdettua piiriin komponenttien ominaisuuksia virtoihin yhdistäviä lausekkeita. Kun piiri käydään tällä tavalla järjestelmällisesti läpi, päädyymme loppujen lopuksi *yhtälöryhmään*, jonka avulla virrat voidaan ratkaista.

Yleisesti yhtälöryhmien ratkaiseminen perustuu tuntemattomien muuttujien systemaattiseen eliminointiin. Tarkastellaan esimerkkinä kahden yhtälön ryhmää

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 = a_3 \quad (11.62)$$

$$b_1 i_1 + b_2 i_2 = b_3, \quad (11.63)$$

missä  $i_1$  ja  $i_2$  ovat tuntemattomat muuttujat ja  $a$  sekä  $b$  ovat tunnettuja vakioita. Ryhmän ensimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista muodollisesti  $i_1$ , jolloin saadaan

$$i_1 = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2. \quad (11.64)$$

Tulos voidaan sitten sijoittaa ryhmän toiseen yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö pelkästään tuntemattomalalle  $i_2$ ,

$$b_1 \left( \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2 \right) + b_2 i_2 = b_3. \quad (11.65)$$

Nämä päästään yhdestä tuntemattomasta eroon, eli tässä tapauksessa kahden yhtälön ja tuntemattoman ryhmästä tuli yhden tuntemattoman yhtälö. Ratkaisuksi saadaan

$$i_2 = \left( b_2 - \frac{b_1 a_2}{a_1} \right)^{-1} \left( b_3 - \frac{b_1 a_3}{a_1} \right) = \left( \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1} \right)^{-1} \left( \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1} \right) = \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2}. \quad (11.66)$$

Tämä voidaan sijoittaa takaisin yhtälöön (11.64), jolloin saadaan selville myös  $i_1$ ,

$$i_1 = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{1}{a_1} \frac{a_3 a_1 b_2 - a_3 b_1 a_2 - a_2 a_1 b_3 + a_2 b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2}. \quad (11.67)$$

Yhtälöryhmien ratkaisemisessa voidaan käyttää myös lineaarialgebraa, ja tavallisesti etenkin hyvin suuret yhtälöryhmät ratkaistaan tietokoneilla matriisimuotoisina yhtälöinä. Esimerkiksi tässä esitetyn laskun voisi kirjoittaa matriisina muodossa

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (11.68)$$

Tarkastelemassamme virtapiirissä silmukka- ja risteyssäännöt antavat yhteensä *kuusi* toisistaan riippumattonta yhtälöä, ja näiden kuuden yhtälön perusteella saamme ratkaistua *kuusi* tuntematonta sähkövirtaa. Kun virrat tunnetaan, voimme helposti laskea potentiaalin piiriin jokaisessa pisteessä. Laskun yksityiskohdat on esitetty esimerkissä 11.6.



**11.15** Kirjoita oman sanoit tiivistelmä tasavirtapiireistä. Selitä erityisesti Kirchhoffin säännöt sekä miten niitä sovelletaan paristoista ja vastuksista koostuvien piirien analysoinnissa.

## esimerkki 11.6

## Virtapiiri

Mitkä ovat potentiaalit ja virrat kuvan 11.18 (b) püriin merkityissä pisteissä ja johtimissa? Kaikkien vastusten resistanssi on  $R$  ja paristojen jännite  $\mathcal{E}$ .

**TILANNE** Tarkasteltava tilanne on piirretty jo kuvaan. Käytetään myös kuvaan merkittäjä kirjaimia ja numeroita, ja merkitään potentiaaleja  $V_A$ ,  $V_B$  jne. ja virtoja  $i_1$ ,  $i_2$  jne.

**SUUNNITELMA** Oletetaan kaikki komponentit ideaalisiksi. Tällöin jokaisen pariston napojen välillä on lähejännitettä vastaava potentiaaliero ja jokaisen vastuksen napojen välinen potentiaaliero on Ohmin lain mukaisesti suoraan verrannollinen vastuksen läpi kulkevan virtaan. Erityisesti vastuksissa potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa. Kirchhoffin silmukkasääntö pätee jokaisessa johdinsilmukassa, mutta sitä riittää soveltaa kuvassa 11.18 (c) valittuihin silmukoihin. Samoin jokaisessa risteyksessä pätee Kirchhoffin risteyssääntö, ja sitä sovellaamme kuvan 11.18 (d) risteyksiin. Tuntelemattomia virtoja on kuusi, joten tarvitsemme kuusi yhtälöä. Näistä kaksi, (11.60) ja (11.61) johdettiin jo edellä. Kun virrat tunnetaan, potentiaalit voidaan ratkaista laskemalla potentiaaliero kussakin komponentissa.

Muodostetaan aivan ensin komponentteja kuvaavat yhtälöt. Tekstissä mainittu yhtälö (11.57) kuvaaa pariston 1 jännitettä. Vastaava yhtälö paristolle 4 on

$$V_E - V_C = \Delta V_{C \rightarrow E} = -\mathcal{E}. \quad (11.69)$$

Huomaa, että tämä potentiaaliero on *negatiivinen*, koska pariston positiivinen napa (symbolin pitkä viiva) on kytketty pisteeseen C ja negatiivinen napa (lyhyt viiva) pisteeseen E. Päinvastaiseen suuntaan potentiaaliero on positiivinen,  $V_C - V_E = \Delta V_{E \rightarrow C} = \mathcal{E}$ .

Yhtälö (11.58) kuvaaa puolestaan vastuksen 2 jännitettä. Vastaavat yhtälöt muille vastuksille ovat

$$V_F - V_G = \Delta V_{G \rightarrow F} = -Ri_1 \quad (11.70)$$

$$V_C - V_B = \Delta V_{B \rightarrow C} = -Ri_2 \quad (11.71)$$

$$V_G - V_H = \Delta V_{H \rightarrow G} = -Ri_3 \quad (11.72)$$

$$V_D - V_B = \Delta V_{B \rightarrow D} = -Ri_4 \quad (11.73)$$

$$V_E - V_D = \Delta V_{D \rightarrow E} = -Ri_5 \quad (11.74)$$

$$V_G - V_D = \Delta V_{D \rightarrow G} = -Ri_6. \quad (11.75)$$

Tarvitsemme näitä potentiaalieroja silmukkasäännön perusteella muodostettujen jänniteyhtälöiden muuttamiseksi virtoja kuvaviksi yhtälöiksi.

Tekstissä analysoitiin jo yksi silmukka, mistä saatiin yhtälö (11.60). Kulkemalla kuvan 11.18 (c) toinen silmukka ympäri myötäpäivään saadaan jännitteille yhtälö

$$\Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow E} + \Delta V_{E \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow B} = 0 \text{ V}, \quad (11.76)$$

ja sijoittamalla tähän edellä listatut potentiaalierojen lausekkeet yhtälö saadaan kirjoitettua virtojen avulla muotoon

$$-Ri_2 - \mathcal{E} + Ri_5 + Ri_4 = 0 \text{ V}. \quad (11.77)$$

Huomaa, että tässä pariston jännitteen edessä on miinusmerkki kun taas kahden vastuksen jännitteellä on plusmerkki. Koska silmukka kuljettiin myötäpäivään, siinä kuuluvan pariston läpi kuljettiin positiiviselta navalta negatiiviselle, jolloin potentiaali laskee. Kaksi vastuksista puolestaan ohitettiin nuolten 4 ja 5 kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, jolloin niissä potentiaali kasvaa (jos virta todella kulkee nuolen osoittamaan suuntaan).

Kuvan kolmannelle silmukalle pätee

$$\Delta V_{D \rightarrow E} + \Delta V_{E \rightarrow H} + \Delta V_{H \rightarrow G} + \Delta V_{G \rightarrow D} = 0 \text{ V}, \quad (11.78)$$

josta saadaan yhtälö

$$-Ri_5 + 0 \text{ V} - Ri_3 + Ri_6 = 0 \text{ V}. \quad (11.79)$$

Tässä silmukassa ei ole yhtään paristoa, mutta yksi vastuksista ohitetaan virran kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, joten siinä potentiaali kasvaa.

Yhtälö (11.61) saatin risteyssäännöllä. Kuvan 11.18 (d) kaksi muuta risteystä antavat virroille yhtälöt

$$i_4 = i_5 + i_6 \quad (11.80)$$

$$i_2 + i_5 = i_3. \quad (11.81)$$

**RATKAISU** Meillä on kuuden yhtälön ryhmä, (11.60), (11.61), (11.77), (11.79), (11.80) sekä (11.81), eli

$$2Ri_1 + Ri_4 + Ri_6 = \mathcal{E} \quad (11.82)$$

$$-Ri_2 + Ri_4 + Ri_5 = \mathcal{E} \quad (11.83)$$

$$-Ri_3 - Ri_5 + Ri_6 = 0 \text{ V} \quad (11.84)$$

$$i_1 - i_2 - i_4 = 0 \text{ A} \quad (11.85)$$

$$-i_4 + i_5 + i_6 = 0 \text{ A} \quad (11.86)$$

$$i_2 - i_3 + i_5 = 0 \text{ A} \quad (11.87)$$

Näistä yhtälöistä voimme ratkaista tuntemattomat kuusi virtaa normaaleilla yhtälöryhmien ratkaisumenetelmillä. Esimerkiksi kolmesta viimeisestä yhtälöstä voidaan ratkaista virrat  $i_1$ ,  $i_4$  ja  $i_3$  muiden virtojen avulla, ja tulokset voidaan sijoittaa kolmeen ensimmäiseen yhtälöön. Tämän jälkeen ensimmäisestä yhtälöstä ratkeaa virta  $i_6$ , sitten kolmannesta yhtälöstä  $i_3$  ja lopuksi toisesta yhtälöstä  $i_5$ . Nämä tulokset voidaan sijoittaa takaisin kolmeen viimeiseen yhtälöön, jolloin loputkin virrat ratkeavat.

Yhtälöryhmän voi kirjoittaa myös kompaktisti matriisina:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}/R \\ \mathcal{E}/R \\ 0A \\ 0A \\ 0A \\ 0A \end{bmatrix}. \quad (11.88)$$

Tämän matriisiyhtälön voi ratkaista käsin aivan samaan tapaan kuin yhtälöryhmän. Matriisiesityksessä on kuitenkin se etu, että tietokoneet ovat hyvin tehokkaita suurtenkin matriisiyhtälöiden ratkaisemisessa. Nyt ratkaisuki saadaan

$$i_1 = \frac{4}{24} \mathcal{E}, i_2 = -\frac{7}{24} \mathcal{E}, i_3 = -\frac{1}{24} \mathcal{E}, i_4 = \frac{11}{24} \mathcal{E}, i_5 = \frac{6}{24} \mathcal{E}, i_6 = \frac{5}{24} \mathcal{E}. \quad (11.89)$$

Virtojen avulla voimme ratkaista potentiaalierot vastuksissa, jolloin saamme vierekkäisten pisteiden välisiksi potentiaalieroiksi

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = -\frac{4}{24} \mathcal{E}, \quad V_F - V_G = \Delta V_{G \rightarrow F} = -\frac{4}{24} \mathcal{E} \quad (11.90)$$

$$V_C - V_B = \Delta V_{B \rightarrow C} = \frac{7}{24} \mathcal{E}, \quad V_G - V_H = \Delta V_{H \rightarrow G} = \frac{1}{24} \mathcal{E} \quad (11.91)$$

$$V_D - V_B = \Delta V_{B \rightarrow D} = -\frac{11}{24} \mathcal{E}, \quad V_E - V_D = \Delta V_{D \rightarrow E} = -\frac{6}{24} \mathcal{E} \quad (11.92)$$

$$V_G - V_D = \Delta V_{D \rightarrow G} = -\frac{5}{24} \mathcal{E}, \quad V_H - V_E = \Delta V_{E \rightarrow H} = 0V \quad (11.93)$$

$$V_A - V_F = \Delta V_{F \rightarrow A} = \mathcal{E}, \quad V_E - V_C = \Delta V_{C \rightarrow E} = -\mathcal{E}. \quad (11.94)$$

Yksittäisten pisteiden potentiaalit ratkeavat näiden potentiaalierojen avulla. Maadoituspisteen G potentiaali on nolla, joten esimerkiksi pisteen F potentiaali on  $V_F = V_G + \Delta V_{G \rightarrow F} = -\frac{4}{24} \mathcal{E}$ . Samaan tapaan voidaan ratkaista potentiaali kaikissa pisteissä, ja tulokseksi saadaan

$$V_A = \frac{20}{24} \mathcal{E}, V_B = \frac{16}{24} \mathcal{E}, V_C = \frac{23}{24} \mathcal{E}, V_D = \frac{5}{24} \mathcal{E}, V_E = -\frac{1}{24} \mathcal{E}, V_F = -\frac{4}{24} \mathcal{E}, V_G = 0V, V_H = -\frac{1}{24} \mathcal{E}. \quad (11.95)$$

Mathematica:

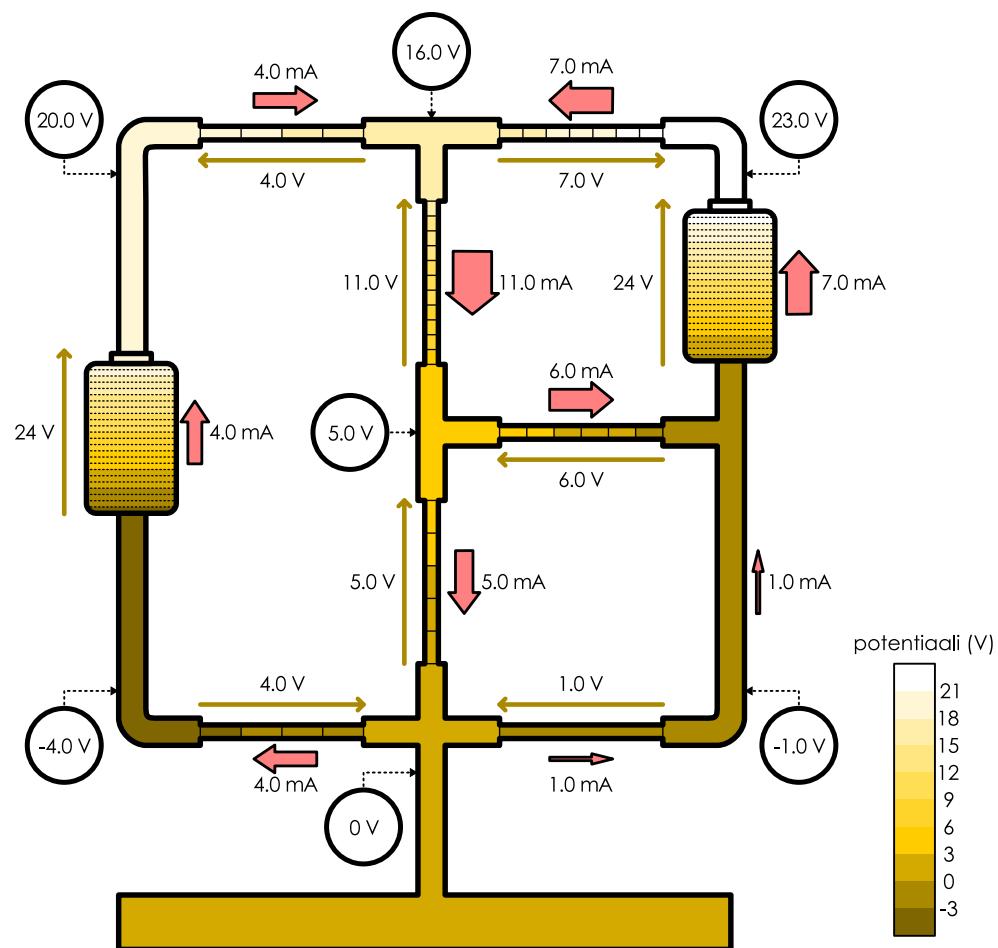
```
(* ratkaistaan virrat *)
m = { {2, 0, 0, 1, 0, 1},
      {0, -1, 0, 1, 1, 0},
      {0, 0, -1, 0, -1, 1},
      {1, -1, 0, -1, 0, 0},
      {0, 0, 0, -1, 1, 1},
      {0, 1, -1, 0, 1, 0} };
v = {e/r, e/r, 0, 0, 0, 0};
{i1, i2, i3, i4, i5, i6} = LinearSolve[m, v]
{e/(6 r), -(7 e)/(24 r), -(e/(24 r)), (11 e)/(24 r), e/(4 r), (5 e)/(24 r) }

(* ratkaistaan potentiaalit *)
Solve[{
    vb - va == -r i1,
    vf - vg == -r i1,
    vc - vb == -r i2,
    vg - vh == -r i3,
    vd - vb == -r i4,
    ve - vd == -r i5,
    vg - vd == -r i6,
    vh - ve == 0,
    va - vf == e,
    ve - vc == -e,
    vg == 0
}, {va, vb, vc, vd, ve, vf, vg, vh}]
{va -> (5 e)/6, vb -> (2 e)/3, vc -> (23 e)/24, vd -> (5 e)/24,
 ve -> -(e/24), vf -> -(e/6), vg -> 0, vh -> -(e/24)}
```

**ARVIOINTI** Voimme tarkistaa, että risteyssääntö toteutuu kaikissa risteyksissä. Esimerkiksi pisteeeseen G saapuu virta  $i_6 = \frac{5}{24} \mathcal{E}$  ja sieltä poistuu virrat  $i_1 = \frac{4}{24} \mathcal{E}$  ja  $-i_3 = \frac{1}{24} \mathcal{E}$ . (Huom. virran  $i_3$  etumerkki on ratkaisussa negatiivinen, joten tämän virran suunta arvattiin kuvassa 11.18 (b) väärin!). Nämille pätee  $i_6 = i_1 - i_3$ , joten risteyssääntö toteutuu kuten pitääkin. Samalla tavalla voidaan tarkistaa risteyssääntö kaikissa risteyksissä.

Voimme ottaa myös mitkä tahansa kaksi vierekkäistä pistettä ja tarkistaa niiden välisen potentiaalieron ja virran yhtensopivuuden. Esimerkiksi pisteen D ja E välinen potentiaaliero on  $\Delta V_{D \rightarrow E} = V_E - V_D = -\frac{1}{24} \mathcal{E} - \frac{5}{24} \mathcal{E} = -\frac{6}{24} \mathcal{E}$ , joten niiden välisen vastuksen läpi pitäisi kulkea virta  $i_5 = -\frac{1}{R} \Delta V_{D \rightarrow E} = \frac{6}{24} \mathcal{E}$ . Näin on, joten ratkaistut potentiaali ja virta ovat näissä pisteissä järkeväät. Kaikki vierekkäiset pisteet kannattaa tarkistaa samalla tavalla.

Kuva 11.19: Esimerkissä 11.6 laskettujen potentiaalien ja virtojen havainnollistus.



Esimerkissä 11.6 ratkaistiin kuvaan 11.18 virtapiirissä kulkevat virrat ja potentiaali piirin eri pisteissä. Tulos on piirretty kuvaan 11.19, kun paristojen lähdejännite on  $\mathcal{E} = 24$  V ja vastusten resistanssi on  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Laskuesimerkissä virroille  $i_2$  ja  $i_3$  saatuiin negatiiviset lukuarvot, mikä tarkoittaa näiden virtojen kulkevan vastakkaiseen suuntaan kuvaan 11.18 piirrettyihin nuoliin nähden. Kuvassa 11.19 näitä virtoja kuvaavat nuolet on piirretty virran kulkusuuntaan, joten nämä nuolet osoittavat siis näissä kahdessa kuvassa vastakkaisiin suuntiin. Nuolten paksuus osoittaa virtojen suuruuden.

Vastuksissa potentiaali laskee, kun siirrytään virran kulkusuuntaan, ja potentiaalin muutos on Ohmin lain mukaisesti suoraan verrannollinen virran suuruuteen. Kuvan 11.19 kilohmin vastuksissa yhden voltin potentiaaliero tuottaa yhden milliampeerin virran.

Jos piiriä ei olisi maadoitettu, yhdelläkään pisteellä ei olisi täsmällistä potentiaalin arvoa, koska potentiaalin nollakohta on mielivaltaisen. Tällöin voitaisiin laskea ainoastaan pisteen väliset potentiaalierot. Nyt kuitenkin maadoitettu johdin on samassa potentiaalissa kuin maa eli sen potentiaali on sopimuksen mukaisesti nolla, ja niinpä kaikilla piirin pisteillä on täsmällinen potentiaalin arvo.

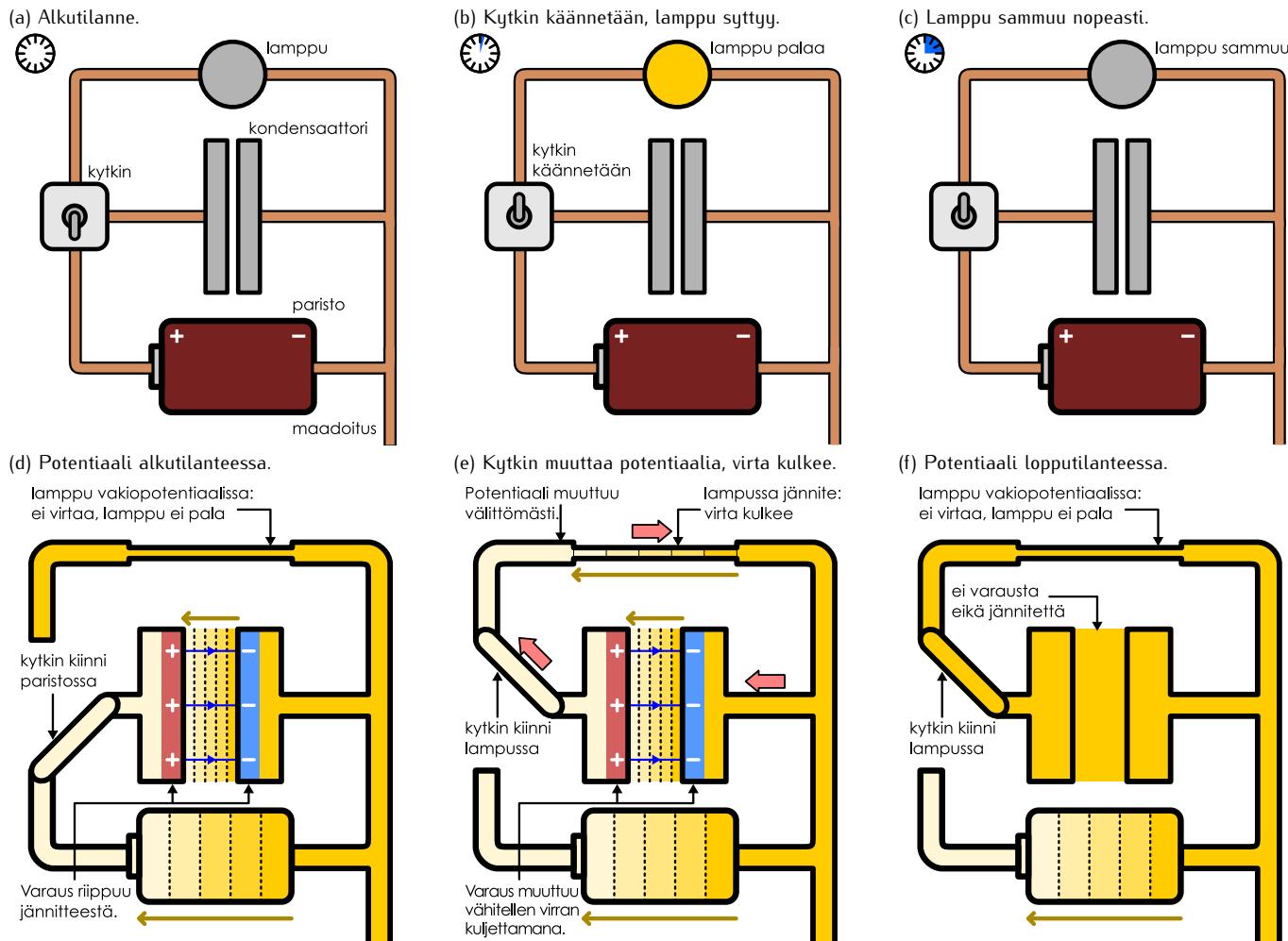
Maadoitetusta pisteestä kulkee virta vastusten kautta pisteen F ja H (kuva 11.18), joten näiden pisteen potentiaalin täytyy olla matalampi kuin maadoituspisteen. Toisin sanoen näiden pisteen potentiaalin täytyy olla negatiivinen. Tässä ei ole mitään ihmeellistä, koska potentiaalin nollakohdalla tai negatiivisilla arvoilla ei ole mitään fysikaalista merkitystä.



**11.16** Maadoitus tarkoittaa piirin yhdistämistä maahan johtimella. Kuvan 11.19 mukaan maadoitusjohtimessa ei kulje sähkövirtaa. (a) Jos maadoitusjohtimessa kulkisi jatkuva virta, mitä se tarkoittaisi piirin kokonaismuodolle? Selitä tämän perusteella, miksi maadoitusjohtimessa ei voi kulkea virtaa. (b) Päätös edellinen päätely, jos myös piirin piste A olisi yhdistetty maahan maadoitusjohtimella?

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.20: Kondensaattori latautuu ollessaan kytkettynä paristoon. Kondensaattori saa varauksen, jolla sen levijen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston lähdejännite. Kun ladatuun kondensaattoriin levyy yhdistetään lampun (vastuksen) napoihin, lampun navat saavat saman potentiaalieron. Tämä potentiaaliero synnyttää sähkövirran, ja näin varaus alkaa siirtymäksi lampun kautta kondensaattorilevyltä toiselle. Tällöin lampu palaa. Levyistä tulee nopeasti jälleen neutraalit, jolloin kondensaattori ja lampu ovat kauttaaltaan samassa potentiaalissa eikä virta kulje.



## Muuttuva virtapiiri

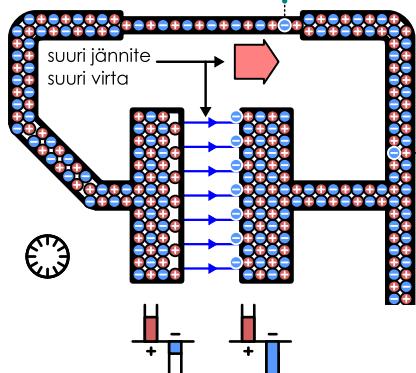
Edellä tarkastelimme tasaisia, samanlaisena pysyiä sähkövirtoja. Jos virtapiirissä ei tapahdu muutoksia, piiri saavuttaa nopeasti tasaisen virtauksen tilan, jossa virrat ja potentiaalit ovat ajasta riippumattomia. Jos piiri kuitenkin muuttuu, myös potentiaalit ja virrat muuttuvat ja riippuvat siitä ajasta. Tutkimme nyt esimerkkinä tällaisesta tilanteesta kuvan 11.20 paristosta, kondensaattorista ja lampusta koostuvaa piiriä, joka voisi olla vaikkapa yksinkertaistettu versio kameran salamavalosta. Kytkentää kutsutaan *RC-piiriksi*, koska sen toiminta riippuu lampun resistanssista  $R$  sekä kondensaattorin kapasitanssista  $C$ .

Pariston negatiivinen napa (kuvan oikea puoli) on kytketty kondensaattorilevyyn ja lampun toiseen napaan. Tämä puoli piiristää on myös maadoitettu, joten sen potentiaali on sopimuksen mukaan nolla. Kaikkien komponenttien vastakkaiset navat on yhdistetty kytkimeen, joka aluksi yhdistää pariston kondensaattoriin. Näistä kumpikaan ei ole yhteydessä lampuun. Alkutilanteessa kondensaattori on siis yhdistetty paristoon, jolloin paristo lataa kondensaattorin. Kondensaattorilevyjen välille tulee näin sama potentiaaliero kuin pariston napojen välille (kuva 11.20 (a) ja (d)), ja koska pariston negatiivisen navan potentiaali on nolla, positiivisella navalla potentiaalin täytyy olla positiivinen. Samoin kondensaattorin positiivisesti varatun levyn potentiaalin täytyy olla positiivinen. Lampu on kytketty vain yhdestä navastaan maadoitettuun piirin puoliskoon, joten potentiaali on koko lampussa nolla. Lampu ei pala, koska sen napojen välillä ei ole potentiaalieroa.

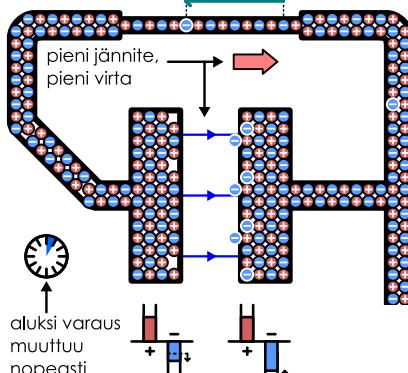
Sitten kytkin käännetään niin, että se yhdistää kondensaattorin ja lampun toisiinsa mutta ei paristoon (kuva 11.20 (b) ja (e)). Kytkin toimii ideaalisen johteen tavoin, joten kytkimen käänteminen yhdistää kondensaattorin positiivisesti varatun, positiivisessa potentiaalissa olevan levyn lampun napaan. Tämä lampun napa oli aikaisemmin nollapotentiaalissa, joten johde yhdistää nyt kaksi piirin osaa, jotka olivat aluksi eri potentiaaleissa. Ideaalisessa johteessa potentiaali on kuitenkin kaikkialla sama, joten kytkin pyrkii saamaan kon-

Kuva 11.21: Mitä suurempi potentiaaliero kondensaattorilevijen välillä on, sitä suurempi virta vastuksen läpi kulkee. Virta siirtää varausta levyltä toiselle, joten levijen välinen sähkökenttä heikkenee ja potentiaaliero pienenee. Tällöin myös virta pienenee. Varaus muuttuu siis aluksi nopeasti, mutta varauksen muuttuminen hidastuu nopeasti. Varausenkuljetajat eivät kuitenkaan kulje prosessissa levyltä toiselle. Sen sijaan kaikki johteiden elektronit siirtyvät vain lyhyen matkan. Tilanne on samantyypininen kuin nesteen virtaus kahden säiliön välillä.

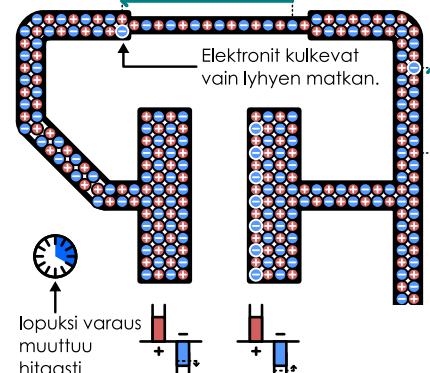
(a) Alkutilanne: levyissä suuri varaus, varaus muuttuu nopeasti.



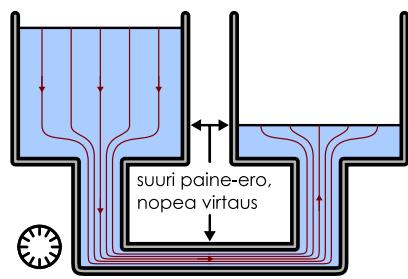
(b) Hetken päästä: levyissä pieni varaus, varaus muuttuu hitaasti.



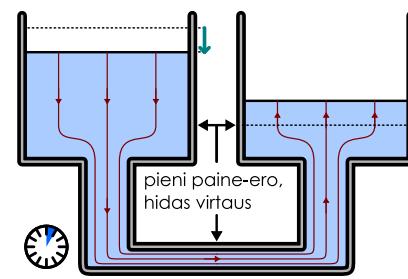
(c) Lopputilanne: levijen kokonaisvaraus nolla, piiri tasapainossa.



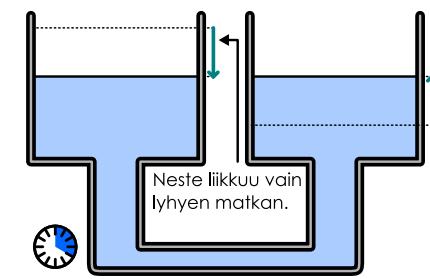
(d) Alkutilanne: neste selvästi eri korkeuksilla, nopea virtaus.



(e) Hetken päästä: neste hiukan eri korkeuksilla, hidaskin virtaus.



(f) Lopputilanne: nestepinnat samalla korkeudella, tasapaino.



densaattorilevyn ja lampun navan samaan potentiaaliin. Kondensaattorilevijillä on edelleen sähkövaraus, joka tuottaa levijen välisiin sähkökenttiin. Sähkökentässä potentiaali muuttuu, joten varattujen levijen välillä täytyy olla edelleen potentiaaliero. Kondensaattoriin negatiivisesti varattu napa on maadoitettu, joten sopimuksen mukaisesti sen potentiaali on aina nolla. Niinpä *positiivisesti varatun kondensaattorilevyn potentiaali ei voi muuttua heti* vaan sen täytyy olla positiivinen vielä kytkimen käänämisen jälkeenkin. Myös lampun maadoitettu napa pysyy nollapotentiaalissa, mutta lampun kytkimeen yhdistetyn navan potentiaalin muuttaminen vaatii vain sitä, että lampun hehkulankaan syntyy jännite. Tähän riittää hyvin pieni elektronien paikkojen muutos johtimissa, joten *lampun napa saa saman potentiaalin kuin kondensaattorilevy lähes välittömästi*.

Kun lampun napojen välillä on jännite, hehkulangassa täytyy olla sähkökenttä ja tämä kenttä vetää elektronit liukkelle. Lampussa alkaa siis kulkea sähkövirta. Piirissä on kaikkialla paljon sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta positiivisesti varautuneella levyllä on elektronien vajaus ja negatiivisella levyllä on ylimääräisiä elektroneja. Levijen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero, ja niinpä elektronit lähtevät liikkumaan negatiivisesti varatulta levyltä kasvavan potentiaalin suuntaan positiiviselle levylle.

**11.17** Jos kuvan 11.20 piirissä olisikin maadoitettu pariston positiivinen napa, mikä olisi potentiaali (i) kummallakin kondensaattorilevyllä ja (ii) lampun navoilla (a) ennen kytkimen käänämistä, (b) heti käänämisen jälkeen, (c) lopuksi? Pariston jännite on 6 V.

Kuvassa 11.21 on tarkasteltu kondensaattorin purkautumista varauksenkuljetajien näkökulmasta. Kuvassa (a) on esitetty tilanne heti kytkimen käänämisen jälkeen. Piirissä on kaikkialla paljon sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta positiivisesti varautuneella levyllä on elektronien vajaus ja negatiivisella levyllä on ylimääräisiä elektroneja. Levijen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero, ja niinpä elektronit lähtevät liikkumaan negatiivisesti varatulta levyltä kasvavan potentiaalin suuntaan positiiviselle levylle.

## SÄHKÖVIRTA

Varauksen siirto ei kuitenkaan tapahdu niin, että negatiivisesti varatulla levyllä olevat elektronit kulkisivat johdinta pitkin koko piirin ympäri positiivisesti varatulle levylle. Sen sijaan elektronit vaeltavat *kaikkialla* piirissä ja yksittäisten elektronien keskimääräinen siirtymä on hyvin pieni. Varausten tasoittumiseen riittääkin se, että kondensaattorilevyn elektronit siirtyvät vain hiukan, joten purkautuminen on kuitenkin ihmisten mittakaavassa tavallisesti varsin nopeaa. Elektronien liikkeen vastus syntyy siitä, että vaikka elektronit vaeltavat muualla piirissä hitaasti, ne joutuvat virtaamaan kapean hehkulangan läpi varsin nopeasti. Hehkulanka on siis elektronien virtauksen pullonaula.

Prosessia voi tarkastella jälleen myös nesteanalogian kautta kuten kuvissa 11.21 (d) – (f). Alkutilanteessa kondensaattorilevylle on varastoitunut eri määrä elektroneja, joita levyt toimivat hiukan samoin kuin kaksi nestesäiliötä, joissa ei ole yhtä paljon nestettä. (Huom. tämä analogia ei kuvaata kondensaattoria yleisesti.) Levijen yhdistäminen johtimella vastaa analogiassa sitä, että säiliöt yhdistetään putkella, ja ohutta hehkulankaa kuvaava hyvin kapea putki. Koska nestepinta on toisessa säiliössä korkeammalla kuin toisessa, hydrostaattinen paine säiliöiden pohjalla on erisuuri. Tämä paine-ero työntää nesteen liikkeeseen kohti säiliötä, jossa nesteen pinta on matalammalla. Kondensaattorin purkautumista vastaa tässä tilanteessa nestepintojen tasaantuminen. Kapea putki muodostaa kuitenkin virtaukseen pullonaulan, joten nestepintojen tasaantuminen tapahtuu vähitellen.

Mitä enemmän nestepinnat poikkeavat toisistaan, sitä suurempi paine-ero säiliöiden välillä on ja sitä nopeammin neste virtaa. Tällöin säiliöiden nestemäärät myös muuttuvat nopeasti. Kuitenkin kun pinnat ovat lähes samalla tasolla, paine-ero pienenee ja virtaus hidastuu. Nesteen pinta laskee siis täydemmässä säiliössä aluksi nopeammin kuin lopuksi, ja vastaavasti vähemmän täydessä säiliössä pinta nousee aluksi nopeasti ja sitten hitaammin. Nesteen ja varauksen virtaukset eivät käytädyt täsmälleen samoin, mutta samantapainen ilmiö tapahtuu myös kondensaattorin ja vastuksen muodostamassa piirissä. Aluksi kondensaattorilevylissä on paljon varasta ja niiden välinen potentiaaliero on suuri. Vastuksen napojen välinen potentiaaliero on yhtä suuri kuin kondensaattorin jännite, joten tällöin potentiaalin muutos on suuri myös vastuksessa, ja niinpä vastuksen läpi kulkee suuri virta. Koska virta siirtää varausta kondensaattorin levyltä toiselle, kondensaattorin varaus pienenee aluksi nopeasti. Kuitenkin sitä mukaa kun kondensaattorin varaus pienenee, myös potentiaaliero kondensaattorissa ja vastuksessa pienenee, ja siispä myös varausta siirtävän sähkövirran täytyy pienentyä. Mitä pienempi varaus kondensaattorissa siis on, sitä hitaammin varaus muuttuu.

Ratkaistaan nyt täsmällisesti piirissä kulkeva virta ja kondensaattorin varaus ajan funktiona. Kuvaan 11.22 on piirretty kytkentää kuvava piirikaavio ja siihen on merkitty neljä piiristä valittua pistettä A–D. Piste D on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina nolla,  $V_D = 0$  V. Paristo pitää pisteen B ja D välisen potentiaalieron vakiona, joten jos pariston lähdejännite on  $\mathcal{E}$ , pisteen B potentiaali on aina  $V_B = V_D + \Delta V_{D \rightarrow B} = \mathcal{E}$ . Pisteiden B ja D potentiaalit eivät siis muudu.

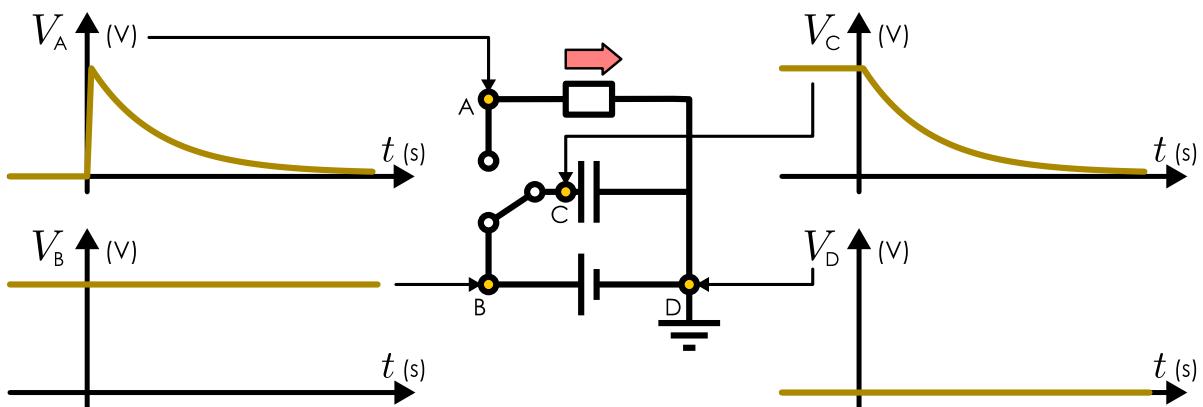
Pisteen C potentiaali on aluksi sama kuin pisteen B, koska kytkin yhdistää nämä pisteet. Toisaalta pistettä C erottaa pistestä D kondensaattori (kapasitanssi  $C$ ), jonka jännite on verrannollinen sen levijen varaukseen  $q$ ,

$$V_C = V_D + \Delta V_{D \rightarrow C} = \frac{q}{C}. \quad (11.96)$$

Aluksi levijen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston lähdejännite, joten kondensaattorin varauksen täytyy olla alussa

$$q_{\text{alku}} = C \Delta V_{D \rightarrow C} = C \mathcal{E}. \quad (11.97)$$

Kuva 11.22: Potentiaali ajan funktiona RC-piirin eri osissa. Kytkin käännetään ajan hetkellä nolla. Piste D on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina nolla. Paristo pitää pisteen B aina korkeassa potentiaalissa. Piste C on aluksi korkeassa potentiaalissa, mutta sen potentiaali lähestyy nollaa kondensaattorin purkautuessa. Piste A saa kytkimen käännyessä saman potentiaalin kuin piste C.



Kondensaattorin varaus ei muutu välittömästi kytkintä käännettäässä, joten myös käännettää sen jännite ei muutu. Niinpä pisteen C potentiaalin täytyy olla heti kytkimen käänämisen jälkeen edelleen  $\mathcal{E}$ . Lopuksi kondensaattorilevyjen varaus on nolla, jolloin ne päättyvät samaan potentiaaliin. Pisteen C potentiaalin täytyy siis lopuksi olla sama kuin pisteen D eli nolla.

Pistettä A erottaa pisteestä D vastus (resistanssi  $R$ ), joten näiden pisteen välinen jännite riippuu vastuksen läpi kulkevan sähkövirran  $i$  suuruudesta,

$$V_A = V_D + \Delta V_{D \rightarrow A} = Ri \quad (11.98)$$

Tässä sähkövirran positiivinen suunta on valittu pisteestä A kohti pistettä D, joten piste A on korkeammassa potentiaalissa kuin piste D, kun virta on positiivinen. Ennen kytkimen käänämistä pistet A ja D ovat samassa potentiaalissa ja vastuksen läpi kulkeva virta on nolla. Kun kytkin käännetään, piste A yhdistyy pisteesseen C, jonka potentiaali on kytkimen käänämisen jälkeen edelleen  $\mathcal{E}$ . Johdin tasaa pisteen A ja C potentiaalit lähes välittömästi, ja koska pisteen C potentiaali ei voi muuttua nopeasti, pisteen A potentiaaliksi pitää tulla  $\mathcal{E}$  lähes välittömästi kytkimen käänämisen jälkeen. Tällöin pisteen A ja D välille tulee potentiaaliero ja piirissä alkaa kulkea sähkövirta

$$i = \frac{1}{R} \Delta V_{D \rightarrow A} = \frac{1}{R} V_A. \quad (11.99)$$

Kun kytkin yhdistää pistet A ja C, näillä on aina sama potentiaali,  $V_A = V_C$ . Toisaalta pisteen C potentiaali riippuu kondensaattorin varauksesta yhtälön (11.96) mukaisesti, joten piirissä kulkeva virta riippuu kondensaattorin varauksesta,

$$i = \frac{1}{R} V_C = \frac{q}{RC}. \quad (11.100)$$

Toisaalta piirissä kulkeva sähkövirta ilmaisee varauksen siirtymisen nopeutta, joten yhtälön (11.2) mukaisesti

$$i = -\frac{dq}{dt}. \quad (11.101)$$

Yhtälössä on miinusmerkki, koska virran suunta on valittu positiiviselta levyltä negatiiviselle, jolloin positiivinen virta pienentää kondensaattorin varausta. Yhtälöt (11.100) ja (11.101) yhdistämällä saamme kondensaattorin varaukselle *differentiaaliyhälön*

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q. \quad (11.102)$$

Tämä on samankaltainen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhälö kuin aikaisemmin tarkastelemamme jäähtymistä kuvava yhtälö (7.62), ja se voidaan ratkaista samalla tavalla separoiden tai yritteellä. Jäähtymistä tutkiessamme opimme, että jos suureen muutosnopeus on suoraan verrannollinen suureeseen itseensä, suureen muuttumista ajan kuluessa kuvaavaksi eksponenttifunktio. Nyt kondensaattorin varauksen muutosnopeus on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen, joten varakseen täytyy noudattaa eksponenttifunktioita

$$q(t) = a + be^{-t/c}, \quad (11.103)$$

missä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat jotkin vakiot. Voimme siis käyttää tästä funktiota yritteenä ja sijoittaa sen differentiaaliyhälöön (11.102). Yritteen derivaatta on

$$\frac{dq}{dt} = q'(t) = -\frac{b}{c} e^{-t/c}, \quad (11.104)$$

joten sijoitus differentiaaliyhälöön antaa meille tavallisen yhtälön

$$\frac{b}{c} e^{-t/c} = \frac{1}{RC} (a + be^{-t/c}). \quad (11.105)$$

Erottelemalla ajasta riippuvat ja riippumattomat termit tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$b \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{RC} \right) e^{-t/c} = \frac{a}{RC}. \quad (11.106)$$

Yhtälön pitää toteutua kaikilla ajan hetkillä  $t$ , ja koska sen oikea puoli on vakio, myös vaseman puolen täytyy olla vakio. Vasemmalla puolella esiintyy kuitenkin ajasta riippuva eksponenttifunktio, joten vasen puoli voi olla vakio vain, jos eksponenttifunktion kerroin on nolla. Näin on, jos

$$c = RC. \quad (11.107)$$

Tällöin siis yhtälön vasen puoli on nolla, joten oikean puolen on myös oltava nolla, ja tästä ratkeaa  $a = 0$  C.

- !**
- 11.18** (a) Tarkista, että vakion  $c = RC$  yksikkö on sekunti. Miksi näin pitää olla?  
 (b) Jos  $a = 0$  ja  $b = 1$ , mikä on funktion (11.103) arvon suhteellinen muutos, kun aika  $t$  muuttuu arvosta 0 arvoon  $c$ ?  
 (c) Mikä on funktion suhteellinen muutos, kun  $t$  muuttuu arvosta  $c$  arvoon  $2c$ ?  
 (d) Vakiota  $c = RC$  kutsutaan piirin aikavakioksi. Miksiköhän?

Vakioa  $b$  ei voida ratkaista differentiaaliyhtälöstä vaan se täytyy päättää alku- ja loppuehdon perusteella. Tiedämme, että tässä piirissä kondensaattoriin varaus on aluksi  $q_{\text{alku}} = C\mathcal{E}$  ja lopuksi varaus on  $q_{\text{loppu}} = 0 \text{ C}$ . Valitaan siis ajan nollahetkeksi  $t = 0 \text{ s}$  hetki välittömästi kytkimen käänymisen jälkeen. Yritefunktio saa ajan hetkellä nolla arvon  $q(0) = a + b = b$ , joten saamme alkuehdon

$$q(0) = b = q_{\text{alku}} = C\mathcal{E}. \quad (11.108)$$

Nämä kaikki tuntemattomat vakiot on ratkaistu ja kondensaattorin varaukselle on saatu funktio

$$q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.109)$$

Voimme vielä tarkistaa, että ratkaisu lähestyy nolla ajan kuluessa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0 \text{ C} = q_{\text{loppu}}. \quad (11.110)$$

Tämäkin ehto toteutuu, joten ratkaisu on järkevä.

Kun varaus tunnetaan, sähkövirta ja potentiaalit eri pisteissä on helppo laskea. Kytkimen käänämisen jälkeen (eli kun  $t > 0$ ) potentiaali pisteessä A ja C on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen,

$$V_A(t) = V_C(t) = \frac{1}{C}q(t) = \mathcal{E}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.111)$$

Myös sähkövirta on verrannollinen varaukseen,

$$i(t) = \frac{1}{RC}q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.112)$$

- !**
- 11.19** (a) Mikä on yllä ratkaistujen lausekkeiden mukaan (i) pisteen A potentiaali ja (ii) piirissä kulkeva sähkövirta hetkellä  $t = 0$  ja pitkän ajan kuluttua?  
 (b) Päättelimme jo aikaisemmin differentiaaliyhtälöä ratkaisematta, miten potentiaalin ja virran täytyy muuttua kondensaattorin purkautuessa. Onko laskettu ratkaisu sopusoinnissa näiden päättelmiä kanssa?

### esimerkki 11.7

### Nopeat ja hitaat muutokset

**Paristo (6 V), vastukset ( $10 \text{ k}\Omega$ ), kondensaattori ( $1 \mu\text{F}$ ) ja kytkin muodostavat piirin kuten kuvassa. Aluksi kytkin on auki, sitten kytkin suljetaan, ja lopuksi se avataan jälleen. Mitkä ovat pisteiden A–D potentiaalit, virrat vastusten 1 ja 2 läpi sekä kondensaattorin varaus (a) aluksi, (b) heti suljemisen jälkeen, (c) jonkin aikaa suljemisen jälkeen, (d) heti avaamisen jälkeen ja (e) jonkin aikaa avaamisen jälkeen?**

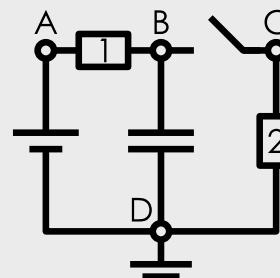
**SUUNNITELMA** Maadoituspisteen D potentiaali on sovittu nollaksi,  $V_D = 0 \text{ V}$ . Pariston napojen välinen potentiaaliero on aina 6 V, joten  $V_A = 6 \text{ V}$ . Vastuksessa potentiaaliero riippuu Ohmin lain mukaisesti virrasta

$$\Delta V_{\text{vastus}} = -Ri, \quad (11.113)$$

ja kondensaattorissa varauksesta

$$\Delta V_{\text{kondensaattori}} = \frac{Q}{C}. \quad (11.114)$$

Kun kytkin suljetaan, pistetä B ja C yhdistää ideaalinen johde, ja tällöin pistetut saavat saman potentiaalin lähes välittömästi. Kondensaattorin varaus ja siten myös sen jännite sen sijaan muuttuu vähitellen, koska varauksen siirtäminen vie aikaa.



**RATKAISU** (a) Aluksi piirissä ei kulje lainkaan virtaa, koska kondensaattori on latautunut ja kytkin on auki. Niinpä kummassakaan vastuksessa ei ole jännitettä. Siispä  $V_B = V_A = 6 \text{ V}$  ja  $V_C = V_D = 0 \text{ V}$ . Kondensaattorin jännite on  $|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 6 \text{ V}$ , joten kondensaattorissa on varaus  $Q = C|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 6 \mu\text{C}$ .

(b) Kondensaattorissa on edelleen sama varaus  $Q = 1 \mu\text{C}$ , joten kondensaattorin jännite on yhä 6 voltia ja siispä  $V_B = 6 \text{ V}$ . Vastuksen 1 päiden väillä ei siis ole jännetettä ja niinpä  $i_{1,A \rightarrow B} = 0 \text{ A}$ . Kytkin yhdistää pisteen B ja C, joten  $V_C = V_B = 6 \text{ V}$ . Vastuksen 2 päiden väillä on nyt jännite  $\Delta V_{C \rightarrow D} = -6 \text{ V}$ , joten sen läpi kulkee virta  $i_{2,C \rightarrow D} = 0.6 \text{ mA}$ . Tämä virta ei siis tule aluksi paristosta vaan kondensaattorista. Kondensaattori alkaa purkautua.

(c) Kondensaattorin purkautuessa potentiaalit ja virrat muuttuvat eksponentiaalisesti kunnes ne hetken kuluttua saavutavat uudet vakioarvot. Tällöin kondensaattorin varaus on jälleen vakio eikä kondensaattoriin kulje virtaa. Tämä tarkoittaa sitä, että virta kulkee vain vastusten läpi reittiä  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Tällöin kummankin vastuksen läpi kulkee sama virta ja koska resistanssit ovat yhtä suuret, potentiaali muuttuu kummassakin vastuksessa yhtä paljon. Siispä yhdessä vastuksessa jännetteen tätyy olla puolet pariston jännetestä,  $\Delta V_{A \rightarrow B} = \Delta V_{C \rightarrow D} = -\frac{1}{2}\Delta V_{D \rightarrow A} = -3 \text{ V}$ . Siispä pisteen B ja C potentiaalin tätyy olla  $V_B = V_C = 3 \text{ V}$ . Virta vastusten läpi on  $i_{1,A \rightarrow B} = i_{2,C \rightarrow D} = 0.3 \text{ mA}$ . Kondensaattorin jännite on  $|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 3 \text{ V}$ , joten kondensaattorin jää varaus  $Q = 3 \mu\text{C}$ .

(d) Kytkimen avaaminen katkaisee vastuksen 2 kautta kulkevan piirin, joten virta tämän vastuksen läpi katkeaa heti. Niinpä vastuksessa 2 ei ole jännetettä,  $\Delta V_{C \rightarrow D} = 0 \text{ V}$ , ja pisteen C potentiaali on  $V_C = V_D = 0 \text{ V}$ . Kondensaattorin varaus on yhä  $Q = 3 \mu\text{C}$ , joten kondensaattorin jännite on 3 voltia ja siis  $V_B = 3 \text{ V}$ . Vastuksen 1 päiden välinen potentiaaliero on  $\Delta V_{A \rightarrow B} = -3 \text{ V}$ , joten virta sen läpi on  $i_{1,A \rightarrow B} = 0.3 \text{ mA}$ . Tämä virta menee kondensaattoriin, joten kondensaattori alkaa jälleen varautua.

(e) Kun kondensaattori on jälleen varautunut, tilanne on sama kuin alussa. Alla on yhteenvedo tuloksista.

	$V_A$	$V_B$	$V_C$	$V_D$	$i_{1,A \rightarrow B}$	$i_{2,C \rightarrow D}$	$Q$
(a, e)	6 V	6 V	0 V	0 V	0.0 mA	0.0 mA	6 $\mu\text{C}$
(b)	6 V	6 V	6 V	0 V	0.0 mA	0.6 mA	6 $\mu\text{C}$
(c)	6 V	3 V	3 V	0 V	0.3 mA	0.3 mA	3 $\mu\text{C}$
(d)	6 V	3 V	0 V	0 V	0.3 mA	0.0 mA	3 $\mu\text{C}$

**ARVIOINTI** Taulukosta voidaan tarkistaa, että  $Q$  on sama kohdissa (a) ja (b) sekä (c) ja (d) kuten pitääkin, koska varaus muuttuu vähitellen. Potentiaalit  $V_A$  ja  $V_D$  ovat vakiot,  $V_B$  on suoraan verrannollinen varaukseen  $Q$  ja  $V_C = V_B$  tapauksissa (b) ja (c) eli kytkimen ollessa kiinni. Virta vastuksen 1 läpi on verrannollinen erotukseen  $V_A - V_B$  ja virta vastuksen 2 läpi erotukseen  $V_C - V_D$ .

Tässä piirissä nähdään, kuinka kondensaattoria voidaan käyttää vastuksen 1 suoajana. Koska kondensaattori estää pisteen B potentiaalin nopean muutoksen, myös käänen vastuksen 1 jännite ja sen läpi kulkeva virta eivät voi muuttua nopeasti. Tällä tavalla kondensaattoreita voidaan käyttää muutosten tasaamiseen ja herkkien komponenttien suojaamiseen.



**11.20** Kirjoita omiin sanoisiin tiivistelmä muutoksista vastusten ja kondensaattoreiden muodostamissa piireistä. Selitä erityisesti mitkä asiat voivat muuttua nopeasti (epäjatkuvasti) ja mitkä hitaasti (jatkuvasti) sekä miksi näin on. Miten ratkaiset tarkasti virran ja potentiaalit tällaisessa piirissä ajan funktiona?

## 11.4 Energia virtapiirissä

Sähköisten laitteiden ja virtapiirien toiminta perustuu potentiaalien ja virtojen ohjaamiseen, mutta jotta näillä laitteilla voitaisiin saada aikaan jotakin hyödyllistä kuten liikuttaa moottoreita tai tuottaa valoa, sähkövirran tätyy myös kuljettaa energiota. Opimme jo aikaisemmin, että esimerkiksi paristot muuttavat kemiallista energiota varauksenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi, mutta nyt tarkastelemme täsmällisemmin sähkövirtojen kuljettamaa energiota ja sen tehoa.

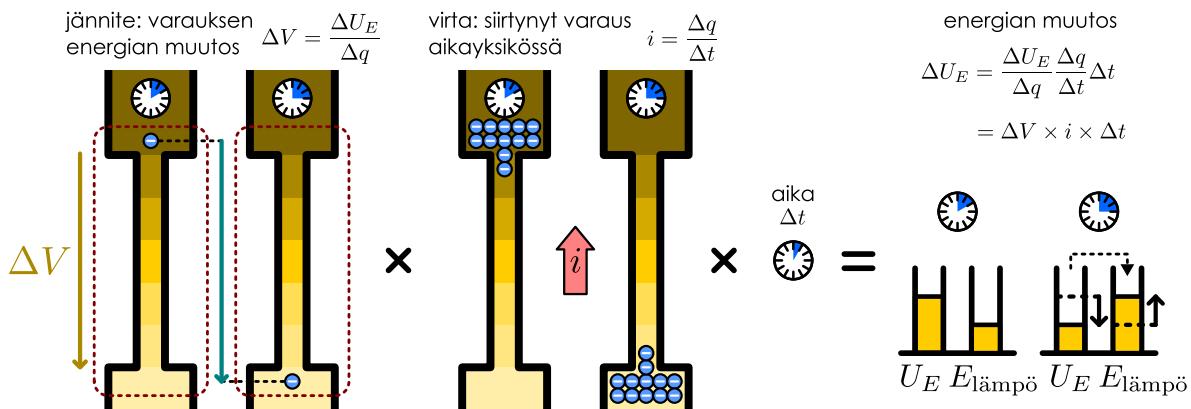
### Sähkövirran siirtämä energia

Virtapiireissä sähköä kuljettavien elektronien massa on hyvin pieni, ja vaikka niiden satunnaisliike on nopeaa, ne vaeltavat hyvin hitaasti. Niinpä elektronien vaellukseen liittyvä liike-energia on mitättömän pieni, eikä sähkövirran mukana siirtyvä energia liity käytännössä lainkaan elektronien liike-energiaan. Tässä mielessä sähkövirta on aivan *erilainen* kuin esimerkiksi nesteen virtaus, jota olemme käyttäneet sähkövirran analogiana. Nesteen virtauksessa siirtyy paljon massaa, ja virtaavan nesteen liike-energia voi olla hyvin suuri. Elektronienkin avulla voi kuitenkin siirtää paljon energiota, koska esimerkiksi metallissa on hyvin paljon vapaasti liikkuvia elektroneja, ja niiden *potentiaalienergia* voi muuttua niiden liikkumassa huomattavasti.

Potentiaali *määriteltiin* alunperin sähkövarauksen potentiaalienergian ja sen varauksen suhteena yhtälön (10.109),  $U_E = qV$ , mukaisesti. Tässä ideana oli se, että kun tiedämme potentiaalin jossakin pisteenä, saamme selville varatuun hiukkasen potentiaalienergian kyseisessä pisteenä yksinkertaisesti kertomalla potentiaalin arvon varauksen suuruudella. Virtapiireissä voimme määrittää potentiaalin kaikissa piirissä pisteyissä, joten tällä periaatteella on helppo laskea piirissä liikkuvien varauksenkuljettajien potentiaalienergia missä tahansa.

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.23: Varauksenkuljettajien potentiaalienergia muuttuu niiden kulkissa potentiaalieron ylitse. Sähkövirran kulkissa varauksia kulkee jatkuvasti. Sähköisen komponentin läpi kulkevan virran potentiaalienergian kokonaismuutos saadaan siis potentiaalieron, virran ja kuluneen ajan tulona.



Paikoillaan olevien varausten sähköinen potentiaalienergia ei muudu, joten ne eivät siirrä energiota. Varausten potentiaalienergia ei muudu myöskään silloin, kun ne liikkuvat vakiopotentiaalissa. Jos varaus kuitenkin siirtyy eri potentiaaliin, myös sen potentiaalienergia muuttuu, ja potentiaalienergian muutos on suoraan verrannollinen varauksen alku- ja loppupisteiden potentiaalien eroon,

$$\Delta U_E = q\Delta V. \quad (11.115)$$

Yleisemmin infinitesimaalisen pienien varauksen  $dq$  siirto potentiaalieron  $\Delta V$  yli muuttaa systeemin potentiaalienergiaa määrään

$$dU_E = dq\Delta V. \quad (11.116)$$

Tyypillisessä virtapiirissä paristo siirtää positiivisia ionia korkeampaan potentiaaliin, jolloin niiden potentiaalienergia kasvaa. Tällöin siis pariston varastoima kemiallinen energia muuttuu sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Vastuksissa puolestaan negatiiviset elektronit kulkevat aina kohti korkeaa potentiaalia, jolloin niiden potentiaalienergia pienenee. Tällöin elektronien potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi.

Riippumatta siitä, siirtyykö varaus ionien vai elektronien välityksellä, sähkövirta kuvailee aina kokonaisvarauksen siirtymistä. Nämä varauksenkuljettajien potentiaalienergia kasvaa, jos sähkövirta kulkee kohti kasvavaa potentiaalia, ja potentiaalienergia pienenee, jos virta kulkee kohti pienenevästä potentiaalia. Täsmällisemmin sähkövirta kertoo siirtyneen varauksen määräntuloon kulunutta aikaa kohti,

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (11.117)$$

joten sähkövirran avulla voidaan esittää potentiaalienergian muutos siihin kulunutta aikaa kohti eli energian muutoksen *teho*,

$$P = \frac{dU_E}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = i\Delta V. \quad (11.118)$$

Toisin sanoen jos sähköisen komponentin läpi kulkee virta  $i$  ja potentiaali muuttuu komponentin läpi kuljettaessa virran kulkusuunnassa määräntulo  $\Delta V$ , varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutosnopeus on virran ja potentiaalin muutoksen tulo.

Edellisessä päättelyssä käytettiin vain virran ja potentiaalin määritelmiä, joten se pätee *mille tahansa* sähköiselle komponentille riippumatta siitä, millaiseen muotoon potentiaalienergia muuttuu. Tilanne on samankainen kuin painovoimakentässä liikkuvilla kappaleilla: kappaleen gravitaatiopotentiaalienergia pienenee sen siirtymessä alas ja kasvaa sen siirtymessä ylös. Riippuu tieteenkin tilanteesta, millaisten muotojen välillä energia tällaisissa tapauksissa muuttuu. Vapaasti putoavalla kappaleella potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi, mutta esimerkiksi tasaisella nopeudella pitkin kaltevaan tasoa liukuvalla kappaleella kitka muuttaa potentiaalienergian lämpöenergiaksi. Jos ihmisen nostaa kappaleen ylös, hän muuttaa varastoimaansa kemiallista energiota kappaleen potentiaalienergiaksi. Jokaisessa tapauksessa potentiaalienergian muutos riippuu kuitenkin vain siitä, miten korkeus muuttuu niiden siirtymessä. Täsmälleen samalla tavalla sähkövarausten potentiaalienergian muutos riippuu vain siitä, paljonko potentiaali muuttuu niiden siirtymessä.

Jos ideaalisen pariston läpi kulkee virta  $i$  negatiiviselta navalta positiiviselle, potentiaalin muutos virran kulkusuunnassa on sama kuin pariston lähejännite,

$$\Delta V = \mathcal{E}, \quad (11.119)$$

ja niinpä paristosta siirtyy virtapiiriin varauksenkuljettajille energiaa teholla

$$P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = i\mathcal{E}. \quad (11.120)$$

Huomaa kuitenkin, että virran ei ole pakko kulkea paristossa tähän suuntaan. Esimerkiksi akkuja ladattaessa ne kytetään toisten jännitelähteiden kanssa pöriin "takaperin" niin, että niissä kulkee virta positiiviselta navalta negatiiviselle. Tällöin potentiaaliero virran kulkissa akun läpi on negatiivinen,

$$\Delta V = -\mathcal{E}, \quad (11.121)$$

ja varauksenkuljettajien energia muuttuu teholla

$$P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -i\mathcal{E}. \quad (11.122)$$

Energiaa siis siirtyy varauksenkuljettajilta akkuun teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{paristo}} = -P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\mathcal{E}. \quad (11.123)$$

Ladattavan akun tapauksessa virran ajaminen akun läpi "väärään suuntaan" käääntää kemiallisten reaktioiden suunnan, jolloin varauksenkuljettajien luovuttama energia muuttuu takaisin akun kemialliseksi energiaksi. Jos paristo ei ole ladattava, reaktioita ei voi käääntää virran avulla, ja tällöin varauksenkuljettajien luovuttama energia kuluu pääasiassa pariston lämmittämiseen.

Vastuksessa virta sen sijaan kulkee aina Ohmin lain mukaisesti potentiaalin laskusuuntaan,

$$i = -\frac{1}{R}\Delta V. \quad (11.124)$$

Niinpä varauksenkuljettajien potentiaalienergia aina pienenee vastuksessa. Varauksenkuljettajien energia muuttuu teholla

$$P_{\text{vastus} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -\frac{1}{R}(\Delta V)^2, \quad (11.125)$$

missä miinusmerkki siis tarkoittaa sähköisen potentiaalienergian pienenevän. Vastuksessa potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi, joten virta siis lämmittää vastusta teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{vastus}} = -P_{\text{vastus} \rightarrow \text{varaus}} = \frac{1}{R}(\Delta V)^2. \quad (11.126)$$

Ohmin lain mukaisesti potentiaalin muutos vastuksessa on

$$\Delta V = -Ri, \quad (11.127)$$

joten vastuksessa kuluvan tehon voi ilmaista myös virran avulla muodossa

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{vastus}} = Ri^2. \quad (11.128)$$

**11.21** Kuvissa 11.14 ja 11.15 oli kahden lampun rinnan- ja sarjaankytkenät.

- (a) Mitkä ovat lamppujen resistanssit?
- (b) Mikä on kussakin lampussa kuluva teho (kaikissa tapauksissa)?
- (c) Hehkulamppu on sitä kirkkaampi, mitä suurempi teho siinä kuluu. Järjestä lamput kirkkauden mukaan.
- (d) Kuinka suarella teholla pariston energia muuttuu?

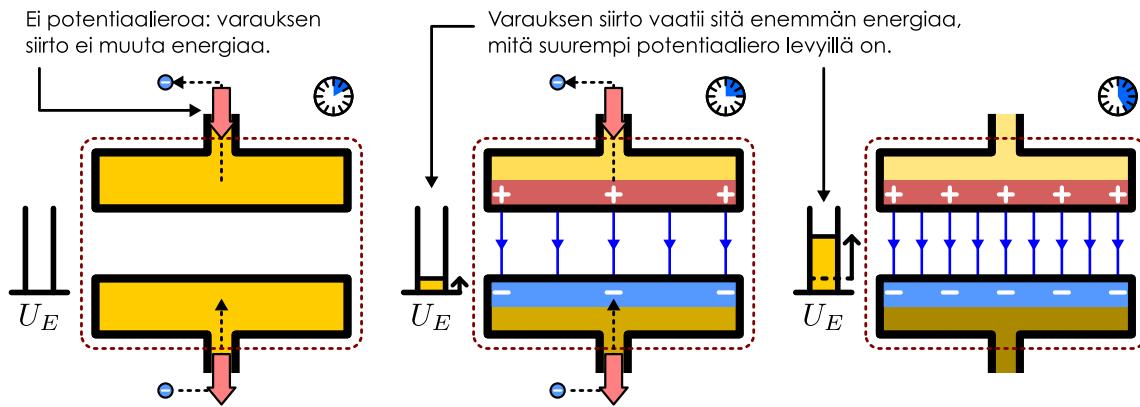
## Sähkökentän energia

Kun virtapiiri on tasaisen virtauksen tilassa, kondensaattoreiden läpi ei kulje sähkövirtaa. Tällöin niiden varaus ja energia ovat vakiot. Kondensaattorin latautuessa tai purkautuessa kondensaattorin varaus kuitenkin muuttuu. Kondensaattorin *läpi* ei tällöinkään varsinaisesti kulje sähkövirtaa, koska kondensaattorilevyjen välillä on eristettä. Kuitenkin esimerkiksi kondensaattorin latautuessa sen positiiviselle levylle saapuu sähkövirta ja sen negatiiviselta navalta lähee yhtä suuri sähkövirta. Kondensaattorin näkökulmasta varausta siirtyy sen matalassa potentiaalissa olevalta levyltä sen korkeassa potentiaalissa olevalle levylle, jolloin varauksen potentiaalienergia kasvaa. Latautuva kondensaattori siis *varastoi* varauksenkuljettajien sähköisestä potentiaalenergiaa. Vastaavasti kondensaattorin purkautuessa varausta siirtyy korkeasta potentiaalista matalaan potentiaaliin, jolloin varauksen potentiaalienergia pienenee.

Ulkoa katsoen kondensaattorin yhdelle navalle saapuu virta ja toiselta navalta lähee virta, joten vaikuttaa siltä kuin virta todella kulkisi kondensaattorin läpi. Kondensaattorin latautuessa tämä virta näyttäisi kulkevan

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.24: Kondensaattori varastoi potentiaalienergiaa, kun sille kerääntyy positiivista varausta korkeaan potentiaaliin ja negatiivista varausta matalaan potentiaaliin.



kondensaattorin positiiviselta levyltä eli korkeasta potentiaalista negatiiviselle levylle eli matalaan potentiaaliin, jolloin *näennäisesti* virta kulkee kondensaattorissa laskevan potentiaalin suuntaan. Potentiaaliero kondensaattorin levijen välillä on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen, joten

$$\Delta V = -\frac{1}{C}q. \quad (11.129)$$

Todellisuudessa kondensaattoriin saapuvien varauksenkuljettajien potentiaalienergia ei muutu, koska kondensaattoriin kytkeytetyt johtimet ovat samassa potentiaalissa kuin kondensaattorilevytkin. Kuitenkin jos ajattelemme virran todella kulkevan kondensaattorin läpi, varauksenkuljettajien potentiaalienergia näyttäisi tällöin pienenevän teholla

$$P_{\text{kondensaattori} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -\frac{1}{C}qi. \quad (11.130)$$

Toisin sanoen energiaa näyttäisi siirtyvän varauksenkuljettajilta kondensaattorille teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{kondensaattori}} = -P_{\text{kondensaattori} \rightarrow \text{varaus}} = \frac{1}{C}qi, \quad (11.131)$$

ja tämä energia siis varastoituu kondensaattoriin sähköisenä potentiaalienergiana (kuva 11.24). Kun kondensaattori sitten purkautuu, tämä potentiaalienergia näyttäisi palautuvan varauksenkuljettajille.

Kondensaattorin latautuessa sekä varaus että virta muuttuvat ajan kuluessa, mutta voimme jälleen käyttää virran ja varauksen välistä yhtälöä (11.2), jonka mukaan virta on varauksen aikaderivaatta,

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (11.132)$$

Tässä tapauksessa positiivinen virta tarkoittaa varauksen kasvavan, joten yhtälössä ei ole miinusmerkkiä. Tämän perusteella kondensaattorin energia muuttuu teholla

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{varaus} \rightarrow \text{kondensaattori}} = \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}. \quad (11.133)$$

Kun kondensaattorin varaus muuttuu infinitesimaalisen määrään  $dq$ , sen energian muutos on siis

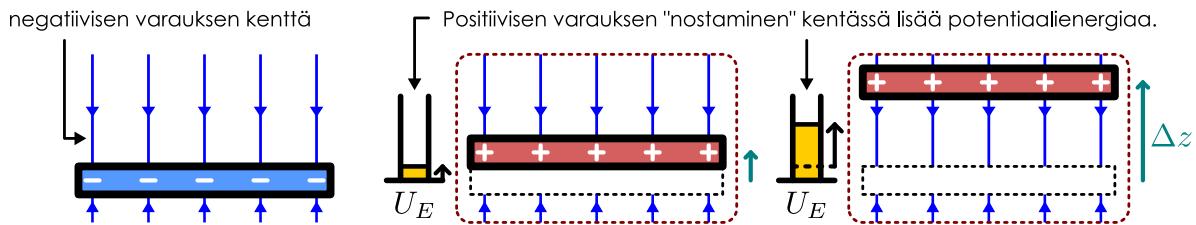
$$dU_E = \frac{1}{C}q dq. \quad (11.134)$$

Jos varamattoman kondensaattorin energia on nolla, varaukseen  $Q$  asti varatun kondensaattorin energia saadaan laskemalla yhteen kaikki pienet energian muutokset varauksesta  $q = 0$  varaukseen  $q = Q$  eli integroimalla,

$$U_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \left|_0^Q \frac{1}{2}q^2 \right| = \frac{Q^2}{2C}. \quad (11.135)$$

Kondensaattorin varastoima energia on siis verrannollinen sen varauksen neliöön. Tässä suhteessa kondensaattori toimii siis samaan tapaan kuin mekaaninen jousi. Levossa olevaa jousta on helppo venyttää, mutta venyttäminen tulee sitä vaikeammaksi, mitä enemmän jousi on jo venynyt, ja jouseen varastoitunut energia on

Kuva 11.25: Kondensaattoriin potentiaalienergian voi määrittää myös laskemalla kondensaattoriin keräämän positiivisen varauksen energian negatiivisen varauksen kentässä.



verrannollinen jousen venymän neliöön. Samalla tavalla varauksen lisääminen kondensaattoriin on sitä vaikeampaa, mitä enemmän varausta kondensaattorissa jo on, ja siksi kondensaattorin energia on verrannollinen sen varauksen neliöön. Lisäksi koska kondensaattorilevyjen välinen potentiaaliero on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen,

$$Q = C\Delta V, \quad (11.136)$$

varastoituneen energian voi kirjoittaa myös potentiaalieron avulla muodossa

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(C\Delta V)^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2. \quad (11.137)$$



**11.22** Tarkastellaan kuva 11.24. Levyjen välinen jännite on  $\Delta V = q/C$  ja kondensaattorin positiivisen levyn varaus muuttuu  $dq$  sekä negatiivisen  $-dq$ . Miksi siis  $dU_E = \frac{1}{C}qdq = \Delta V dq$  eikä  $dU_E = \Delta V dq + (-\Delta V)(-dq) = 2\Delta V dq$ ?

Pohditaan hiukan tämän tuloksen merkitystä. Kondensaattorihan varastoi energiaa siihen kerättyjen varausten sähköisenä potentiaalienergiana. Painovoimakentässä kappaleilla on sitä enemmän potentiaalienergiaa mitä korkeammalla ne ovat ja mitä suurempi niiden massa on, koska Maa ja kappaleet vetävät toisiaan gravitaation välityksellä puoleensa. Samaan tapaan kondensaattorin positiivinen ja negatiivinen varaus vetävät toisiaan puoleensa sähköisellä voimalla, joten niiden välisen sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian täytyy olla sitä suurempia mitä sähköiset varaukset ovat ja mitä kauemmaksi toisistaan ne ovat. Esi-merkiksi levykondensaattorin energia vastaa siis sitä energiota, mikä periaatteessa tarvittaisiin neutraalin levyn jakamiseksi kahteen varattuun levyn (varaukset  $Q$  ja  $-Q$ ) sekä näiden levysten erottamiseen toisistaan (kuva 11.25). Homogenisessa painovoimakentässä  $\vec{G} = -g\hat{k}$  massan  $m$  nostaminen korkeudelle  $\Delta z$  vaatii työn  $W = mg\Delta z$ . Samalla tavalla homogenisessa sähkökentässä  $\vec{E} = -E\hat{k}$  varauksen  $Q$  siirtäminen etäisyydelle  $\Delta z$  vaatii työtä

$$W = QE\Delta z. \quad (11.138)$$

Kondensaattorin varastoiman potentiaalienergian täytyy olla yhtä suuri kuin työ, joka kondensaattorin varausten  $Q$  ja  $-Q$  vetäminen erilleen toisistaan vaatii,  $U_E = W$ .

Levykondensaattorin sisäinen sähkökenttä on  $E = \sigma/(\kappa\varepsilon_0)$ , missä  $\sigma$  on levyjen varaustihleys, mutta tämä on positiivisen ja negatiivisen varauksen yhdessä tuottama kokonaiskenttä. Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima vain negatiivisen varauksen tuottamasta kentästä, joka on puolestaan kokonaiskenttää,

$$E = \frac{\sigma}{2\kappa\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\kappa\varepsilon_0}, \quad (11.139)$$

missä  $A$  on yhden levyn pinta-ala. Kondensaattorin varausten siirtäminen varastoi siis potentiaalienergian

$$U_E = W = \frac{\Delta z}{2A\kappa\varepsilon_0} Q^2. \quad (11.140)$$

Tämä on sama energia kuin aikaisemmin johdettu yhtälö (11.135), sillä levykondensaattorin kapaistanssi on yhtälön (10.174) mukaan

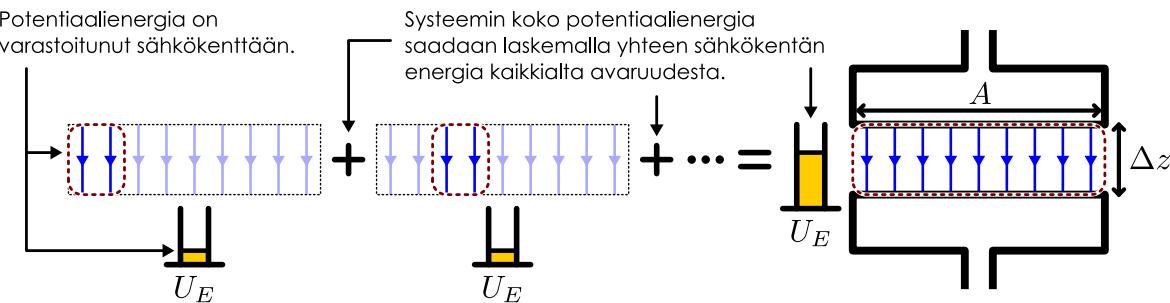
$$C = \frac{1}{\Delta z} A\kappa\varepsilon_0. \quad (11.141)$$



**11.23** Miksi edellä laskettuun tulokseen ei pidä listätä negatiivisen varauksen potentiaalienergiaa positiivisen varauksen kentässä?

## SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.26: Sähköinen potentiaalienergia varastoituu sähkökenttään. Energiaa on kaikkialla, missä sähkökenttää ei ole nolla, ja ideaalisessa levykondensaattorissa kenttä ja sen energia on vangittu levijin välissä.



Voimme tarkastella kondensaattorin varastoimaa energiota vielä kolmannestakin näkökulmasta. Sähköinen potentiaalienergia ei nimittäin ole oikeastaan varattujen hiukkasten potentiaalienergiaa vaan *sähköisen vuorovaikutuksen* potentiaalienergiaa. Niinpä sen sijaan, että ajattelisimme sähköisen potentiaalienergian olevan hiukkasten sijaintiin liittyvää energiota, on parempi ajatella sen olevan hiukkasten muodostamaan *sähkökenttää itseensä sitoutunutta energiasta*. Varaamaton kondensaattori ei luo lainkaan sähkökenttää, joten siihen ei ole varastoitunut myöskään energiota. Kun kondensaattoriin kerätään varausta, sen sisään syntyy myös sähkökenttä, ja mitä voimakkaampi tämä kenttä on, sitä enemmän energiota siihen liittyy.

Sähkökenttään liittyvä energia on helppo laskea tarkastelemalla suurta levykondensaattoria. Kondensaattorin varastoitunut potentiaalienergia on

$$U_E = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2, \quad (11.142)$$

mutta toisaalta kondensaattorilevijen välisen potentiaaliero on sähkökentän voimakkuuden  $E$  ja levijen välisten etäisyyden  $\Delta z$  tulo,  $\Delta V = E \Delta z$ . Niinpä kondensaattorin energian voi ilmaista sähkökentän voimakkuuden avulla muodossa

$$U_E = \frac{1}{2} C (\Delta z)^2 E^2. \quad (11.143)$$

Äärettömien levijen mallissa kondensaattorin sähkökenttä on levijen ulkopuolella nolla ja levijen välissä homogeeninen. Sähkökenttä on siis vangittu tilavuuteen  $V = A \Delta z$ , ja kenttä on siellä voimakkuudeltaan vakio, joten voimme määritellä **sähkökentän energiatiheden** jakamalla sähkökentän kokonaisenergian sen täytyttämällä tilavuudella (kuva 11.26)

$$u_E = \frac{U_E}{V} = \frac{1}{2A} C \Delta z E^2. \quad (11.144)$$

Näennäisesti tämä lauseke riippuu kondensaattorin ominaisuuksista, mutta sähkökentän energiatiheden pitäisi olla vain sähkökentän ominaisuus, joka ei riipu lainkaan siitä, millaisen kondensaattorin sisällä kenttä on. Näin onkin, mikä nähdään sijoittamalla yhtälöön kapasitanssin lauseke (11.141). Tällöin kondensaattorin kokoa kuvaavat suureet supistuvat pois, ja jäljelle jää lauseke

$$u_E = \frac{1}{2A} \left( \frac{1}{\Delta z} A \kappa \epsilon_0 \right) \Delta z E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2. \quad (11.145)$$

Erityisesti tyhjiössä  $\kappa = 1$  ja sähkökenttään sitoutuneen energian tiheys on

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (11.146)$$

Vaikka johdimme tuloksen käyttäen ideaalista levykondensaattoria, se pätee yleisesti. Toisin sanoen minkä tahansa varauksista koostuvan systeemin potentiaalienergian voidaan ajatella olevan varausten muodostaman kentän energiota, ja tämän energian määrä tilavuusyksikköö kohti on kaikkialla suoraan verrannollinen kentän voimakkuuden neliöön.

**11.24** Elektronit ovat jakautuneet tasaisesti pienien johdepallon pinnalle. Elektronit hylkivät toisiaan, joten systeemillä on potentiaalienergiaa. Sitten elektronit siirretään toisen suuremman johdepallon pinnalle, jolloin niiden välinen keskimääräinen välimatka kasvaa.

- (a) Kasvaakö vai pieneneekö elektronien välisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia?
- (b) Vertaa elektronien synnyttämää sähkökenttää alussa ja lopussa. Mitä eroa kentissä on?
- (c) Selitä potentiaalienergian muutos kentän muutoksen ja kentän energiatiheden kautta.

## esimerkki 11.8

## Latautuva kondensaattori

Jännitelähde (60 V), vastus (50 kΩ), kondensaattori (500 nF) ja kytkin muodostavat piirin kuten kuvassa. Aluksi kondensaattorissa ei ole varausta, mutta kytkimen suljemisen jälkeen kondensaattori latautuu. (a) Mitkä ovat pisteen A–D potentiaalit aluksi, heti kytkimen suljemisen jälkeen ja jonkin ajan kuluttua? (b) Ratkaise virta ja potentiaalit ajan funktiona. (c) Ratkaise teho ja energian kokonaismuutos kussakin komponentissa ajan funktiona. Mitä energian muotoja prosessiin liittyy?

**SUUNNITELMA** Piste C on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina  $V_C = 0$  V. Jännitelähde toimii kuin paristo ja sen napojen välillä on aina 60 voltin potentiaaliero,  $\Delta V_{D \rightarrow A} = 60$  V. Vastuksessa potentiaaliero on verrannollinen virtaan,  $\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ri_{A \rightarrow B}$  ja kondensaattorissa varaukseen  $|\Delta V_{B \rightarrow C}| = q/C$ .

Kun kytkin on auki, virta ei pääse kulkemaan ja vastuksen jännite on nolla. Samoin kondensaattori oli varaamaton, joten senkin jännite on nolla. Niiinpä ainoaa potentiaaliero on paristossa, eli  $V_A = V_B = 0$  V ja  $V_D = -60$  V.

Kun kytkin suljetaan, virta pääsee kulkemaan ja pisteen C ja D saavat saman potentiaalin,  $V_D = V_C = 0$  V. Pariston vuoksi pisteen A potentiaaliksi tulee siis  $V_A = 60$  V. Varaus jäätyy pisteen C ja D välille, joten hetkeksi, kun kytkimen suljemisen jälkeen kondensaattorin varaus on yhä nolla ja niiinpä sen jännitekin on nolla, eli  $V_B = 0$  V. Vastuksen pääden välillä on nyt potentiaaliero  $\Delta V_{A \rightarrow B} = -60$  V, joten virta sen läpi on  $i_{A \rightarrow B} = -\Delta V_{A \rightarrow B}/R = 1.2$  mA.

Virta siirtää varausta pisteeeseen C kiinnitetystä kondensaattorin levyltä pisteeeseen B kiinnitettylle levylle, jolloin kondensaattori latautuu. Tällöin kondensaattorilevyn välinen potentiaaliero kasvaa niihin, että levy B saa korkeamman potentiaalin. Lopulta piiri asettuu uuteen tasapainotilaan, jolloin kondensaattorin varaus on vakio eikä virta enää kulje. Pisteen C ja D potentiaali on koko ajan  $V_C = V_D = 0$  V ja pisteen A potentiaali on  $V_A = 60$  V. Kun virtaaa ei enää ole, vastuksen pääden välillä ei enää ole potentiaalieroja ja pisteen B potentiaali täytyy siis olla  $V_B = V_A = 60$  V. Kondensaattori saa siis lopuksi saman jännitteensä kuin paristo, jolloin siinä täytyy olla varaus  $q = C|\Delta V_{B \rightarrow C}| = 30 \mu\text{C}$ .

Voimme laskea suureet ajan funktiona kirjoittamalla Kirchoffin silmukkasäännön mukaisen jänniteyhtälön piirille, kun kytkin on suljettu:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow A} = -Ri - \frac{1}{C}q + \mathcal{E} = 0 \quad (11.147)$$

Koska piirissä kulkee kaikki sama virta, merkitään virtaa vastuksessa yksinkertaisesti  $i = i_{A \rightarrow B}$ . Virta kuljettaa positiivista varausta kondensaattoriin B-levylle ja negatiivista C-levylle, joten kondensaattorin varauksen muutosnopeus on  $i = \frac{dq}{dt}$ . Huomaa, että koska kondensaattorin B-levy saa positiivisen varauksen, potentiaali pienenee B:stä C:hен ja  $\Delta V_{B \rightarrow C} = -\frac{1}{C}q < 0$  V. Sijoittamalla virran ja varauksen välinen yhteys jänniteyhtälöön saamme varaukselle differentiaaliyhtälön

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E} \quad (11.148)$$

Varaus saadaan ajan funktiona tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuna, kun huomioidaan alkuehdo  $q(0) = 0$  C, jonka mukaan kondensaattorissa ei ole varausta kytkimen sulkeutuessa eli ajan hetkellä  $t = 0$  s. Virta saadaan edelleen varauksen aikaderivaattana ja pisteen B potentiaali on suoraan verrannollinen varaukseen.

Varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutoksen teho on kaikissa sähkökomponenteissa virran ja jännitteen tulo,  $P_{\text{varaus}} = i\Delta V$ , jolloin komponentin energian muutos on tämän vastaluku

$$P_{\text{komponentti}} = -P_{\text{varaus}} = -i\Delta V. \quad (11.149)$$

Virran kulkiessa paristo muuttaa kemiallista energiota elektronien potentiaalienergiaksi, jolloin pariston varastoima energia muuttuu teholla  $P_{\text{paristo}} = -i\Delta V_{D \rightarrow A} = -i\mathcal{E}$ . Vastus kuluttaa elektronien energiota lämpöenergiaksi teholla  $P_{\text{vastus}} = -i\Delta V_{A \rightarrow B} = Ri^2$ , jolloin vastus siis lämpenee tällä teholla. Kondensaattori varastoi energiota teholla  $P_{\text{kondensaattori}} = -i\Delta V_{B \rightarrow C} = i\frac{q}{C}$ . Energian kokonaismuutos kussakin komponentissa saadaan integroimalla tehoa ajan suhteen,

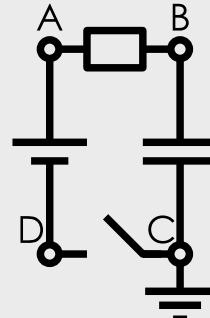
$$\Delta E_{\text{komponentti}} = \int_0^\infty P_{\text{komponentti}} dt. \quad (11.150)$$

**RATKAISU** (a) Tulokset on taulukoitu alla.

	$V_A$	$V_B$	$V_C$	$V_D$	$i$	$q$
alku ( $t < 0$ )	0 V	0 V	0 V	-60 V	0.0 mA	0 $\mu\text{C}$
heti ( $t = 0$ )	60 V	0 V	0 V	0 V	1.2 mA	0 $\mu\text{C}$
loppu ( $t \rightarrow \infty$ )	60 V	60 V	0 V	0 V	0.0 mA	30 $\mu\text{C}$

(b) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö yritteellä  $q(t) = a + be^{-t/c}$ . Yritteen sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa

$$-R \frac{b}{c} e^{-t/c} + \frac{a}{C} + \frac{b}{C} e^{-t/c} = \mathcal{E}, \quad (11.151)$$



ja tämä toteutuu kaikilla ajan hetkinä, kun ajasta riippuvien termien kertoimien summa on nolla,  $-R\frac{b}{c} + \frac{b}{C} = 0$ , ja kun yhtälön kummallakin puolella on sama vakiotermi,  $\frac{a}{C} = \mathcal{E}$ . Ratkaisu on  $c = RC$  ja  $a = C\mathcal{E}$ . Alkuehdosta saadaan vielä  $q(0) = a + b = 0$  eli  $b = -a = -C\mathcal{E}$ . Varaus, virta ja pisteen B potentiaali ovat siis

$$q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right), \quad i(t) = q'(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad V_B(t) = \frac{1}{C}q(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right). \quad (11.152)$$

(c) Paristo muuttaa kemiallista energiota elektronien potentiaalienergiaksi teholle  $P_{\text{paristo}} = -i\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ . Kaikkaan pariston varastoimaa energiaa kuluu

$$\Delta E_{\text{paristo}} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{RC}t} dt = C\mathcal{E}^2 \left|_0^\infty e^{\frac{1}{RC}t}\right. = C\mathcal{E}^2 = -1.8 \text{ mJ}. \quad (11.153)$$

Vastus muuttaa elektronien paristolta saamaa energiaa lämmöksi teholle  $P_{\text{vastus}} = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}$ , jolloin kokonaismuutos on

$$\Delta E_{\text{vastus}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{RC}t} dt = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = 0.9 \text{ mJ}. \quad (11.154)$$

Kondensaattori varastoi energiota teholle  $P_{\text{kondensaattori}} = i\frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{2}{RC}t})$ , ja kokonaisuudessaan kondensaattoriin varastoituu energiaa

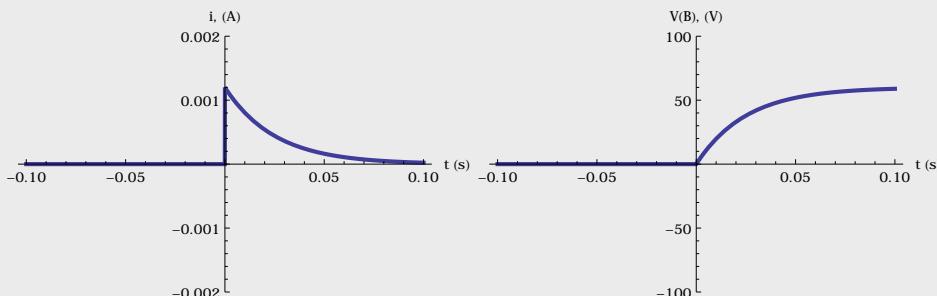
$$\Delta E_{\text{kondensaattori}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{2}{RC}t}\right) dt = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = 0.9 \text{ mJ}. \quad (11.155)$$

**Mathematica:**

```
(* ratkaistaan varaus differentiaaliyhtälöstä *)
lukuarvot = {e -> 60, R -> 50000, c -> 500*10^-9};
ratkaisu = DSolve[ {R q'[t] + q[t]/c == e, q[0] == 0}, q, t ];
q[t] /. ratkaisu[[1]] // Simplify
c e (1 - E^(-(t/(c R))) )

(* virta ja pisteen B potentiaali *)
i[t_] := If[ t < 0, 0, q'[t] /. ratkaisu[[1]] ]
vb[t_] := If[ t < 0, 0, q[t]/c /. ratkaisu[[1]] ]
Plot[ i[t] /. lukuarvot, {t, -0.1, 0.1 },
  PlotRange -> {-0.002, 0.002},
  PlotStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {"t (s)", "i, (A)" } ]
Plot[ vb[t] /. lukuarvot, {t, -0.1, 0.1 },
  PlotRange -> {-100, 100},
  PlotStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {"t (s)", "V(B), (V)" } ]

(* energia *)
Eparisto = Integrate[ -e i[t], {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
-c e^2
Evastus = Integrate[ R i[t]^2, {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
(c e^2)/2
Ekondensaattori = Integrate[ i[t] vb[t], {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
(c e^2)/2
{Eparisto, Evastus, Ekondensaattori, Eparisto + Evastus + Ekondensaattori} /. lukuarvot
t-0.00018, 0.0009, 0.0009, 0}
```



**ARVIOINTI** Tarkistetaan, että ratkaisuna saadut funktiot saavat oikeat alku- ja loppuarvot. Varaus on aluksi  $q(0) = 0$  C ja lopuksi  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = C\mathcal{E} = 30 \mu\text{C}$ . Virta on aluksi  $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.2 \text{ mA}$  ja lopuksi  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \text{ A}$ . Pisteen B potentiaali on aluksi  $V_B(0) = q(0)/C = 0 \text{ V}$  ja lopuksi  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_B(t) = \mathcal{E} = 60 \text{ V}$ . Kaikki siis toimii.

Energian pitää säilyä, joten vastuksen ja kondensaattorin täytyy kuluttaa energiota täsmälleen yhtä paljon kuin mitä paristo antaa. Näin tapahtuu. Itse asiassa täsmälleen puolet pariston antamasta energiasta varastoituu kondensaattoriin ja puolet muuttuu vastuksessa lämmöksi, eikä tämä rüpu komponenttien ominaisuuksista. Jos energiota ei haluta hukata lämmöksi, kondensaattori täytyy ladata jännitelähteellä, jonka jännitetä voidaan kasvattaa vähitellen.



**11.25** Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä energiasta virtapiireissä. Mistä riippuu sähköisen komponentin teho yleisesti? Selitä miksi! Miten teho lasketaan paristossa, vastuksessa ja kondensaattorissa? Miten määritetään kondensaattoriin varastoituneen energian?

## Yhteenveton Sähkövirkta

### Virta, resistanssi ja energia

- Sähkövirkta ilmaisee siirryvän varauksen määrää aikayksikössä,

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

- Virrantihveys ilmaisee sähkövirran pinta-alaa kohti. Jos virrantihveys on vakio ja  $x$ -suuntainen,

$$j_x = \frac{i}{A}.$$

Virrantihveys on varauksenkuljetteiden tiheyden ja niiden vaellusnopeuden tulo,

$$\bar{j} = \rho \bar{v}_{\text{vaellus}}.$$

- Jos johteessa on sähkökenttä ja siis muuttuva potentiaali, siinä kulkee virta. Ohmin lain mukaan virta on verrannollinen johtimen pääiden väliseen potentiaalieroona

$$i = -\frac{1}{R} \Delta V,$$

ja virrantihveys sähkökenttään

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

Tässä  $R$  on **resistanssi** ja  $\sigma$  **johtavuus**.

- Sarjaankytettujen vastusten resistanssit lasketaan yhteen

$$R = \sum_i R_i$$

ja samoin rinnankytettujen resistanssien käänneisluvut

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

- Potentiaalieron  $\Delta V$  yli kulkevan virran  $i$  potentiaalienergia muuttuu teholla

$$P = \frac{dU_E}{dt} = i \Delta V.$$

- Vastuksessa potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi teholla

$$P = \frac{1}{R} (\Delta V)^2 = Ri^2.$$

- Kondensaattori varastoi energian sähkökenttään. Kondensaattorin varastoima energia on

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2.$$

- Sähkökentän energiatihveys on

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

### Virtapiirit

- Oikosulku tarkoittaa sähköisen komponentin napojen yhdistämistä johtimella. Pariston napojen oikosulku tuottaa hyvin suuren oikosulkuvirran.
- Suorassa virtajohdimessa kulkee kaikkialla yhtä suuri virta. Usean johtimen risteykseen saapuvien virtojen summan on oltava sama kuin sieltä poistuvien virtojen,

$$\sum_{\text{saapuva}} i = \sum_{\text{poistuva}} i.$$

Tämä on *Kirchhoffin risteysääntö*.

- Potentiaalin muutosten summa on nolla kierrettäessä johdinsilmukan ympäri

$$\sum_{\text{silmukka}} \Delta V = 0 \text{ V}.$$

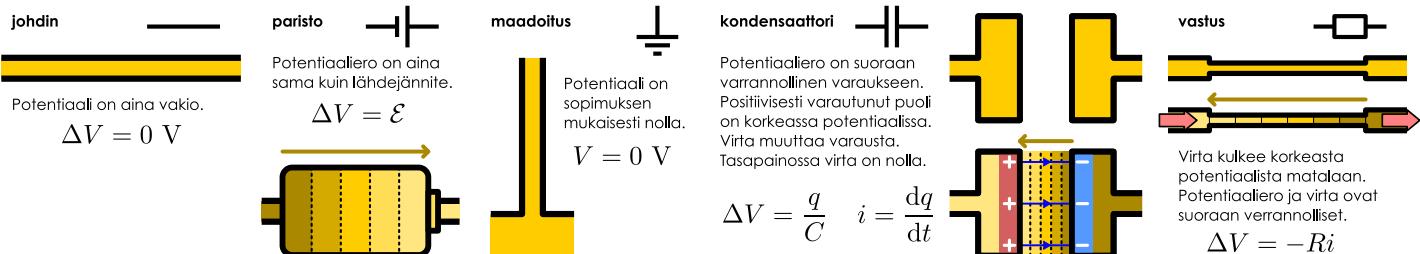
Tämä on *Kirchhoffin silmukkasääntö*.

- Virtapiirissä kulkevat virrat voidaan määrittää muodostamalla Kirchhoffin säätöjen avulla virtoja kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaisemalla se.
- Virtapiirin muuttuessa potentiaalit muuttuvat lähes välittömästi, mutta suurten kondensaattoreiden varausten muutos tapahtuu vähitellen.

### Sanasto

- virta (current)
- hehkulamppu (lightbulb)
- hehkulanka (filament)
- vastus (resistor)
- resistanssi (resistance)
- johtavuus (conductivity)
- sironta (scattering)
- vaellusnopeus (drift velocity)

- virrantihveys (current density)
- virtapiiri (electric circuit)
- oikosulku (short circuit)
- piirikaavio (circuit diagram)
- risteys (junction)
- silmukka (loop)
- kytkin (switch)



### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

**11.1** (a) Langan vasen pää on korkeassa ja oikea pää matalassa potentiaalissa, joten sähkökenttä osoittaa vasemmalta oikealle, potentiaalin pienemisen suuntaan.

(b) Pariston positiiviseen napaan kiinnitetyn kuparilangan pinnalle kerääntyy hyvin pieni positiivinen sähkövaraus. Negatiiviseen napaan kiinnitetyn langan pinnalle puolestaan kerääntyy hyvin pieni negatiivinen sähkövaraus. Nämä varaukset luovat positiivisesti varautuneesta puoliskosta negatiivisesti varautuneeseen puoliskoon osoittavan sähkökentän.

**11.2** Virta A:n läpi on itseisarvoltaan  $|i_A| = 1e/1 \text{ s} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A}$ . Virta B:n läpi on  $|i_B| = 2e/1 \text{ s} = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ A}$ . Siis  $|i_B| > |i_A|$ .

**11.3** Sähkövirta on skalaari. Sähkövirran tulee helposti mieltäneeksi suureksi, jolla on suunta, mutta sillä ei itse asiassa ole suuntaa. Sähkövirta on määritelty varauksen muutoksen avulla, ja varauksen muutos on vain positiivinen tai negatiivinen eli siis skalaari. Myöhemmin näemme vielä ilmiötä, joissa sähkövirralle tarvitaan todella suunta, mutta tällöin suunnan määrittelee aina jokin toinen vektori.

**11.4** (a)  $\lambda = \rho A = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.01 \text{ m}^2 = 10 \text{ kg/m}$ .

(b)  $\Delta m/\Delta t = \lambda v_x = 10 \text{ kg/m} \cdot 1.5 \text{ m/s} = 15 \text{ kg/s}$ .

(c)  $\lambda = \rho A = -enA = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = -6800 \text{ C/m}$ .

(d)  $i = \Delta q/\Delta t = -6800 \text{ C/m} \cdot 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = -102 \cdot 10^{-2} \text{ C/s} = -1.0 \text{ A}$ .

Huomasitko, että vaikka johtimessa kulkee varsin suuri sähkövirta (ampeeri on suuri yksikkö), elektronien keskimääräinen virtausnopeus on hyvin pieni, vain noin millimetri sekunnissa.

**11.6** (a) Koska elektronit liikkuvat positiiviseen  $x$ -suuntaan, tähän suuntaan siirryt negatiivista varausta. Sähkövirta kulkee siis päinvastaiseen suuntaan eli negatiiviseen  $x$ -suuntaan.

(b)  $v_{x,\text{vaellus},(B)} = 0 \text{ m/s}$ .

(c) Elektronit eivät kuljeta varausta, koska ne ovat keskimäärin paikoillaan.

(d) Atomiytimet liikkuvat B:ssä negatiiviseen  $x$ -suuntaan, ja koska niiden varaus on positiivinen, ne kuljettavat siis virtaa negatiiviseen  $x$ -suuntaan.

(e) Kulkee, negatiiviseen  $x$ -suuntaan. B:ssä virtaa kuljettavat atomiytimet.

**11.7** (a) Ideaalisessa johtimessa on vakiopotentiaali,  $\Delta V_{A \rightarrow B} = 0 \text{ V}$ . (b) Potentiaaliero pariston päiden välillä on vakio,  $\Delta V_{A \rightarrow B} = 10 \text{ V}$ . (c) Kondensaattorin jännite on verrannollinen varaukseen. Nyt varaus on nolla, joten jännite on nolla,  $\Delta V_{A \rightarrow B} = 0 \text{ V}$ . (d) Vastuksessa potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa, ja potentiaaliero on Ohmin lain mukaan  $\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ri_{A \rightarrow B} = -50 \text{ V}$ .

**11.8** (a) (i) Vasemmanpuoleisissa kuvissa johtimen poikki kulkee ajassa  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$  kaksi elektronia eli  $\Delta q = 2e = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Virta on siis  $i = \Delta q/\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ A}$ . Oikeanpuoleisissa kuvissa johtimen poikki kulkee neljä elektronia, joten virta on kaksinkertainen,  $i = 6 \cdot 10^{-13} \text{ A}$ . (ii) Ylemmissä kuvissa johtimen läpi kulkee 2 elektronia  $1 \text{ nm}^2$  pinta-alalla ja 4 elektronia  $2 \text{ nm}^2$  pinta-alalla, jolloin virrantiheys on  $j_x = \Delta q/(A\Delta t) = i/A \approx 3 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ . Alemissa kuvissa kulkee 2 elektronia  $0.5 \text{ nm}^2$  alan ja 4 elektronia  $1 \text{ nm}^2$  alan läpi, jolloin virrantiheys on  $j_x = 6 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ .

(b) Näillä virrantiheysillä johtimen läpi kulkisi virta  $i = j_x A = 3 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0.3 \text{ A}$  tai  $i = 0.6 \text{ A}$ . Nämä ovat aivan realistisia virtoja, joten kuvassa esitettyt virrantiheydet (n. 1 elektri mikrosekunnissa nelionanometrillä) ovat normaaleja tavallisissa sähköjohdoissa.

**11.10** Jännitelähteessä kemiallista energiota muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi sekä lämmöksi  $-\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta U + \Delta E_{\text{lämpö}} = e\Delta V + \Delta E_{\text{lämpö}}$ . Lähdejännite määriteltiin vapautuneen kemiallisen energian ja siirtymän varauksen suhteena, joten  $\mathcal{E} = -\frac{1}{e}\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta V + \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$  tai termejä siirtämällä  $\Delta V = \mathcal{E} - \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$ . Vertaanalla tästä yhtälön (11.39) näemme, että sisäisestä resistanssista johtuva jännitehöviö johtuu siitä, että resistanssi muuttaa osan pariston kemiallisesta energiasta lämmöksi,  $R_{\text{sisäinen}} i = \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$ .

**11.11** (a) Kuvassa (b) pariston kemiallinen energia muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi, ja tämä potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi pääasiassa hehkulangassa. Kuvassa (c) pariston kemiallinen energia muuttuu paristossa pääasiassa lämpöenergiaksi. Pieni osa energiasta muuttuu potentiaalienergiaksi, joka muuttuu edelleen johtimessa lämpöenergiaksi.

(b) Kuvan (c) ikosulussa piirrin resistanssi on pieni, jolloin piirissä kulkee suuri sähkövirta. Paristossa tapahuu siis paljon kemiallisia reaktioita, jolloin kemiallista energiota myös vapautuu suuremalla teholla.

(c) Oikosulussa paristo muuttaa kemiallista energiaansa lämpöenergiaksi suurella teholla, jolloin paristo lämpnee nopeasti. Tämä voi pahimillaan aiheuttaa jopa pariston räjähtämisen.

**11.12** Ylemmassä kuvassa lamppujen läpi kulkee virta  $i = 1 \text{ A}$  ja potentiaalierot ovat  $\Delta V_1 = -4 \text{ V}$  sekä  $\Delta V_2 = -2 \text{ V}$ . Resistanssit ovat siis  $R_1 = -\Delta V_1/i = 4 \Omega$  sekä  $R_2 = -\Delta V_2/i = 2 \Omega$ . Koko kytkennän virta on myös  $1 \text{ A}$  ja jännite  $\Delta V = -6 \text{ V}$ , joten  $R = -\Delta V/i = 6 \Omega = R_1 + R_2$ .

Alemissa kuvassa kummankin lampun jännite on  $\Delta V = -6 \text{ V}$ . Ylemmän lampun läpi kulkee virta  $i_1 = 1.5 \text{ A}$  ja aleman  $i_2 = 3 \text{ A}$ , joten lamppujen resistanssit ovat  $R_1 = -\Delta V/i_1 = 4 \Omega$  sekä  $R_2 = -\Delta V/i_2 = 2 \Omega$ . Koko kytkennän läpi kulkee virta  $i = i_1 + i_2 = 4.5 \text{ A}$ , joten resistanssi on  $R = -\Delta V/i = 1.333 \Omega$ . Pätee siis  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

**11.13** Ideaalisen johtimen resistanssi on nolla,  $R_j = 0 \Omega$ . (a)  $R_{\text{sarjaan}} = R + R_j = R$ . Sarjaankytkenässä johdin ei vaikuta resistanssiin. Tämä tarkoittaa sitä, että ideaalisessa piirissä resistanssi on keskitynyt vastuksiin eivätkä johtimet vaikuta tähän.

(b)  $R_{\text{rinnan}} = (1/R + 1/R_j)^{-1} = 1/\infty = 0$ . Rinnankytkenässä resistanssi on nolla eikä vastus vaikuta tähän mitenkään. Tämä johtuu siitä, että nyt vastus on oikosuljettu. Ts. sen navat on yhdistetty ideaalisella johtimella, jossa potentiaali on vakio. Vastuksessa ei siis voi olla potentiaalieroa eikä sen läpi kulje virtaa, joten se ei vaikuta virran kulkuun mitenkään. Asian voi ajatella myös niin, että jos vastus ja johde kytketään rinnan, virta voisi periaatteessa kulkea kumpaan tahansa reittiä, ja koska ideaalinen johdin ei vastusta virran kulkua lainkaan, kaikki virta kulkee johtimen kautta eikä vastuksen kautta kulje lainkaan virtaa.

**11.14** Paristo lataa kondensaattorit niin, että kondensaattoreiden 1 ja 3 C-puolen levyltä poistuu hieman varausta (sinne tulee lisää elektroneja eli negatiivista varausta) ja kondensaattoreiden 1 ja 2 A-puolen levylle tulee lisää varausta (sieltä poistuu elektroneja). Pariston läpi kulkevan varauksen määrä on siis sama kuin näiden levijen varauksen muutos,  $Q_1 + Q_2 = |\Delta q_{1,A} + \Delta q_{2,A}| = |\Delta q_{1,C} + \Delta q_{3,C}| = Q_1 + Q_3$ . Pisteeseen B kytkettyjen levijen varaus muuttuu, kun varausta siirtyy kondensaattorista 3 kondensaattoriin 2, mutta tämä varaus ei kulje pariston kautta. Nyt jos ajattelemme, että kondensaattorit 1, 2 ja 3 korvattaisiin yhdellä kondensaattorilla, tämän kondensaattorin latautuminen tarkoittaisi vain varauksen  $Q = Q_1 + Q_2 < Q_1 + Q_2 + Q_3$  siirtämistä sen levyltä toiselle. Se, että todellisessa kytkennässä varausta siirtyy kondensaattoreiden 2 ja 3 välillä ei "näy" kytkennän ulkopuolelle.

**11.16** (a) Jos piiri ja maan välillä kulkevassa johtimessa kulkee sähkövirta, varausta siirtyy piiriin ja maan välillä. Jatkuva virta tarkoittaisi kuitenkin sitä, että piiri alkaa varautua yhä enemmän ja enemmän. Mutta maahan yhdistetty virtapiiri nimenomaan ei voi varautua vaan piirissä mahdollisesti ollut ylimääräinen varaus poistuu maadoitusjohtoa pitkin maahan ja piiri pysyy sen jälkeen neutraalina. Jos siis piirissä oli alunperin varausta, maadoitusjohdossa kulkee hetken virta, kun tämä varaus siirtyy maahan, ja sen jälkeen johdossa ei voi kulkea virtaa.

(b) Jos piiristä on yhdistetty maahan kaksi pistettä, maadoitusjohdoissa voi kulkea virta. Jos nimittäin yhtä maadoitusjohtoa pitkin kulkee piiriin virta  $i$  ja toista pitkin piiristä kulkee pois yhtä suuri virta, piiri pysyy neutraalina. Itse asiassa näin tapahtuu, jos jokin piirin komponentti pyrkii luomaan potentiaalieron maadoitettujen pisteiden välillä. Koska kaikkien maadoitettujen pisteiden potentiaali on nolla, tämä johtaa oikosulkun.

**11.17** (a) Aluksi kondensaattorin levyt olisivat potentiaaleissa 0 V sekä -6 V. Lampun navat olisivat keskenään samassa potentiaalissa, -6 V. (b) Pariston napojen potentiaali ei muutu kytkimen käänämisenestä mitenkään, koska maadoituspisteen potentiaaliksi on valittu 0 V ja paristo pitää negatiivisen navan aina potentiaalissa -6 V. Kondensaattorin negatiivisesti varattu levy on puolestaan kytketty pariston negatiiviseen napaan, joten sen potentiaali on koko ajan niin ikään -6 V. Kondensaattorin varauksen muutos tapahtuu vähitellen, joten väliittömästi kytkimen käänämisen jälkeen kondensaattorin positiivinen levy on edelleen potentiaalissa 0 V. Kytkin yhdistää lampun navat kondensaattorin levyluihin, joten nyt lampun napojen potentiaalit ovat 0 V sekä -6 V. Lampun läpi kulkee nyt virta, koska sen napojen välillä on jännite.

(c) Lopuksi kondensaattori on purkautunut, jolloin sen levyt ovat samassa potentiaalissa -6 V. Myös lampun navat ovat tässä potentiaalissa.

**11.18** (a)  $[RC] = \Omega \cdot F = V/A \cdot C/V = 1/A \cdot As = s$ . Näin pitää olla mm. siksi, että eksponenttifunktio  $e^{-t/c} = e^{-\frac{1}{RC}t}$  eksponentin tätyy olla paljas luku ilman yksikköä, jolloin suureella  $RC$  tätyy olla sama yksikkö kuin suurella  $t$  eli ajalla.

(b) Aluksi funktio saa arvon  $q(0) = 1$  ja sitten  $q(c) = e^{-1} \approx 0.368$ . Suhteellinen muutos on siis  $[q(c) - q(0)]/q(0) = -0.632$  eli funktion arvo pienenee noin 63 %.

(c) Suhteellinen muutos on sama kuin (b)-kohdassa.

(d) Kondensaattori menettää varauksestaan 63 % jokaisen aikajaksolla  $\Delta t = c = RC$  aikana.

**11.19** (a) Aluksi potentiaali on  $V_A(0) = \mathcal{E}$  ja lopuksi  $V_A(t) \rightarrow 0$ . Virta on aluksi  $i(0) = \mathcal{E}/R$  ja lopuksi  $i(t) \rightarrow 0$ .

(b) Aluksi pisteen A potentiaali on sama kuin kondensaattorin ja pariston alkujännite ja lopuksi nolla, kun kondensaattori on tyhjä. Virta lähtee heti kulkemaan ja pienenee kondensaattorin varauksen vähentyessä. Ratkaisu toteuttaa nämä ehdot.

**11.21** (a) Resistanssit laskettiin kysymyksessä 11.12. Ne ovat  $R_1 = 4 \Omega$  ja  $R_2 = 2 \Omega$ .

(b) Teho on sarjaankytkenässä  $P_1 = R_1 i^2 = 4 W$  ja  $P_2 = R_2 i^2 = 2 W$  ja rinnankytkenässä  $P_1 = (\Delta V)^2/R_1 = 9 W$  sekä  $P_2 = (\Delta V)^2/R_2 = 18 W$ .

(c) Järjestys kirkkaimmasta himmeimpään on lamppu 2 rinnankytkenässä, lamppu 1 rinnankytkenässä, lamppu 1 sarjaankytkenässä, lamppu 2 rinnankytkenässä. Huomaa, että yhdessä tapauksessa lamppu 2 kirkkaampi, toisessa himmeämpi. Kirkkaus ei siis ole vain lampun ominaisuus.

(d) Sarjaankytkenässä pariston energian muutosteho on  $P = i\Delta V = 1 A \cdot -6 V = -6 W$  ja rinnankytkenässä  $P = 4.5 A \cdot -6 V = -27 W$ . Kummassakin kytkennässä paristo muuttaa kemiallista energiaa varausten potentiaalienergiaksi yhtä suurella teholla kuin millä lamput muuttavat potentiaalienergiaa valo- ja lämpöenergiaksi.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

**11.22** Levyjen potentiaali ei ole  $V = \pm\Delta V$  vaan tämä on levyjen potentiaalien ero. Ts. jos levyt ovat A (negatiivinen) ja B (positiivinen) ja levyjen potentiaalit ovat  $V_A$  sekä  $V_B$ , kondensaattorin jännite on  $\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A$ . Jos nyt levyltä A poistetaan varaus  $dq$ , levyn energian muutos on  $dU_A = -V_A dq$ . Ja kun levylle B lisätään varaus  $dq$ , energian muutos on  $dU_B = V_B dq$ . Koko kondensaattorin energian muutos on siis

$$dU = dU_B + dU_A = (V_B - V_A)dq = \Delta V dq. \quad (11.156)$$

**11.23** Idea tässä laskussa on se, että aluksi positiivinen ja negatiivinen varaus ovat yhdessä, ja ne vedetään toisistaan erilleen. Voimme valita koordinaatiston niin, että negatiivinen varaus pysyy paikoillaan ja positiivinen liikkuu. Kumpaankin varaukseen kohdistuu prosessissa voima. Tämä voima tekee negatiivista työtä positiiviseen varaukseen, koska varaus liikkuu voimaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, ja potentiaalienergia määritellään työn kautta,  $\Delta U = -W$ . Negatiiviseen varaukseen kuitenkaan ei tehdä työtä, koska siihen kohdistuvan voiman vaikutuspiste ei liiku. Niinpä potentiaalienergia voidaan laskea pelkästään positiivista varausta tarkastelemalla. Positiivinen varaus ei kuitenkaan ole mitenkään erikoissemassa, ja toisella koordinaatiston valinnalla potentiaalienergian laskussa pitäisi huomioida kummankin varauksen siirtymää.

**11.24** (a) Elektronit hylkivät toisiaan, joen niihin kohdistuu pallon pinnalla voima poispäin pallon keskustasta. Tämä tarkoittaa myös sitä, että elektronien potentiaalienergia pienenee elektronien siirtyessä poispäin pallon kesuksesta. Elektronien siirto suuren pallon pinnalle siis pienentää systeemin potentiaalienergiaa. (Tämän voi päättää myös pisteverausten potentiaalienergian lausekkeen avulla. Elektronien potentiaalienergia pienenee niiden välisen etäisyyden kasvaessa.)

(b) Pallokuoren kenttä on nolla pallon sisällä ja samanlainen kuin pisteverauksen kenttä pallon ulkopuolella. Niinpä elektronit luovat kummankin pallon pinnalla täsmälleen samanlaisen sähkökentän pallon ulkopuolelle. Pallon sisäpuolin linnevuus on tieteenkin suurella pallolla suurempi, jotka sähkökentätön alue on suurella pallolla suurempi.

(c) Sähkökenttää liittyy positiivinen potentiaalienergia. Niinpä sähkökenttämän alueen kasvattaminen pienentää systeemin potentiaalienergiaa. Siispä suuren varatun pallokuoren potentiaalienergian pitää olla pienempi kuin pienen pallokuoren.



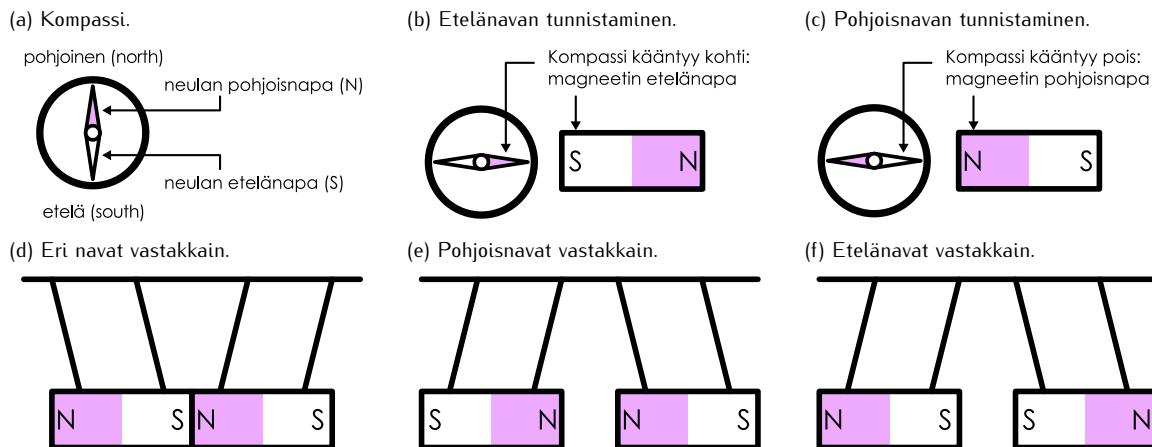
# 12 Magneettikenttä

Magneetit ovat kaikille tuttuja arkipäiväisiä esineitä. Magneettien tunnetuin erityisomaisuus on tietenkin se, että magneetit vetävät puoleensa joitakin mutta ei kaikkia materiaaleja. Esimerkiksi rautanaula tartuu magneettiin mutta muovikappale ei. Magneettisuus on onkin varsin erikoinen aineen ominaisuus, ja tässä luvussa tutkimme tämän ilmiön toimintaa.

Magnetismilla ja sähköllä ei ensialkuun vaikuta olevan mitään yhteystä. Magneetit ovat tavallisesti sähköisesti neutraaleja, joten magneettinen vuorovaikutus vaikuttaisi olevan eri asia kuin sähköinen vuorovaikutus. Osoittautuu kuitenkin, että sähköinen ja magneettinen voima ovat saman sähkömagneettisen vuorovaikutuksen eri ilmenemismuotoja. Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla magneettisten materiaalien rakenne ja selittää, miten magneetit vuorovaikuttavat
- määritellä magneettikenttä ja kuvalla millaisen kentän kestomagneetti ja virtajohdin tuottavat
- määrittää liukkuihin varauksiin ja sähkövirtoihin kohdistuva magneettinen voima
- selittää magneettikenttää kuvavat Biot'n ja Savartin, Gaussin sekä Ampéren lait ja laskea magneettikenttä niiden avulla
- kuvalla dipolin luoma kenttä ja laskea dipoliin kohdistuva momentti sekä dipolin energia ulkoisessa kentässä

Kuva 12.1: Magneeteilla on kaksi napaa, joita kutsutaan pohjois- ja etelänavoiksi. Nimet tulevat siitä, että kompassineulakin on magneetti, ja sen pohjoisnapa pyrkii käänymään pohjoiseen. Magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset navat hylkivät toisiaan.



## 12.1 Magneetit

Magneetista ilmiöstä varmasti yleisesti tunneituin on **magneettien** kyky vetää puoleensa joitakin materiaaleja kuten rautaa. Itse asiassa nimi "magneetti" tulee kreikkalaiselta Magnesian alueelta, jossa esiintyy tällaista rautaan tarttuvaa magneettista magnetiitti-mineraalia. Magneettien vanhin käytännön sovellus lienee puolestaan kompassi, jossa magneettinen nuoli pyrkii aina osoittamaan kohti pohjoista. Nykyisin magneetteja käytetään monissa laitteissa sähkömoottoreista läketieteellisiin instrumentteihin. Aloitamme kuitenkin magnetismin tutkimisen yksinkertaisista kestomagneeteista ja kompasseista.

Kompassineula pyrkii tavallisesti aina käänymään kohti pohjoista. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kompassia itsessään käännettäisiin, neulaan täytyy kohdistua voimia, joiden momentti väentää neulan osoittamaan pohjoiseen (kuva 12.1 (a)). Neulaan täytyy siis kohdistua jonkinlainen etävuorovaikutus. Kompassineula käännyy samaan suuntaan, vaikka neula tuotaisiin ulkoiseen sähkökenttään, joten kyseessä ei voi olla luvussa 10 tarkasteltu sähköinen vuorovaikutus. Sen sijaan jos kompassin lähelle tuodaan magneetti, tämä saa neulan käänymään (kuva 12.1 (b)). Kompassineulan ja magneetin välillä on siis vuorovaikutus, joka on *erilainen* kuin sähköinen vuorovaikutus, ja kutsumme tätä **magneettiseksi vuorovaikutukseksi**. Päättaviteemme tässä luvussa on selvittää tämän vuorovaikutuksen toimintaperiaate.

Koska kompassi reagoi magneettiin, voimme käyttää kompassia magneettisen vuorovaikutuksen havaitsemiseen. Jos jokin kappale saa kompassineulan käänymään, kappaleen täytyy vuorovaikuttaa neulan kanssa magneettisesti. Esimerkiksi kompassineulan pyrkimys kääntyä kohti pohjoista johtuu *neulan ja Maapallon välisestä magneettisesta vuorovaikutuksesta*.

Kompasseissa neulan pää on yleensä väritetty eri väreillä. Näin tehdään tieteenkin siksi, että jos neulan yksi pää osoittaa pohjoiseen, sen toinen pää osoittaa etelään, ja nämä suunnat täytyy tunnistaa. Pohjoiseen käännyy aina neulan *sama pää*, joten neulan päiden täytyy olla jollakin tavalla erilaiset. Sanotaankin, että neulalla on kaksi napaa. Pohjoiseen kääntyvä neulan päästä kutsutaan **pohjoisnavaksi** ja etelään kääntyvä **etelännavaksi**. Näitä merkitään tavallisesti kirjaimilla N (englannin tai ranskan sanojen north tai nord, 'pohjoinen', mukaan) sekä S (south tai sud, 'etelä').

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin kompassin reagointia sen lähellä olevaan sauvalmagneettiin. Ensimmäiseksi voimme tutkia, onko magneetillakin kaksi napaa kompassineulan tavoin. Tämä onnistuu kuvissa 12.1 (b) ja (c) esitetyllä kokeella. Kuvan (b) tilanteessa kompassin pohjoisnapa käännyy kohti magneettia, joten magneetti näyttäisi vetävän kompassin pohjoisnapaa puoleensa. Jos kuitenkin magneetti käännetään ympäri kuten kuvassa (c), kompassineulakin käännyy ympäri. Nyt magneetti siis vetääkin puoleensa kompassineulan etelännapaa. Erilaisilla magneeteilla pohjois- ja etelänapoja puoleensa vetävät alueet voivat olla eri paikoissa, mutta *kaikilla* magneeteilla saadaan sama tulos: magneetin yksi alue vetää puoleensa kompassin pohjoisnapaa ja toinen alue vetää puoleensa kompassin etelännapaa.

Kokeen voi selittää ajattelemalla pohjois- ja etelänavan käyttäytyvän kuin positiivisen ja negatiivisen varauksen. Tiedämme, että samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan ja erilaiset vetävät toisiaan puoleensa. Ehkä siis sauvalmagneetissakin on erikseen pohjois- ja etelännapa, ja ehkä sauvalmagneetin etelännapa vetää puoleensa kompassineulan pohjoisnapaa ja päinvastoin. Tämän mallin mukaan kompassineulan pohjoisnapa käännyy kohti magneettia, jos kompassin lähelle tuo magneettin etelänavan. Sen sijaan jos kompassin viereen tuo magneetin pohjoisnapa edellä, magneetti pääntää käännykkin kompassineulan etelännapaa.

## MAGNEETTIKENTTÄ

Tämä koe ei vielä kuitenkaan osoita tätä mallia oikeaksi. Kompassin avulla voimme todeta, että sauvamagneetissakin on kaksi erilaista napaa, mutta se ei vielä todista, että *erilaiset* navat vetävät toisiaan puoleensa. Voisihan aivan hyvin olla niin, että sauvamagneetin pohjoisnapa vetää kompassineulan pohjoisnapaa puoleensa. Kuvissa 12.1 (d) – (f) esitetyt kokeet kuitenkin osoittavat, että nimenomaan erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa. Voimme nimittäin ottaa kaksi sauvamagneettia ja etsiä niistä kompassin avulla samanlaiset navat. Voimme merkitä kumpaankin magneettiin neulan pohjoisnapaa puoleensa vetävän pään kirjaimella S ja neulan etelänapaa puoleensa vetävän pään kirjaimella N. Jos nyt asetamme sauvamagneetit niin, että toisen S-napa kohtaa toisen N-navan, magneetit tarttuvat toisiinsa (kuva (d)). Vastaavasti jos asetamme vastakkain kaksi N-napaa tai kaksi S-napaa, magneetit hylkivät toisiaan (kuvat (e) ja (f)). Tämä koe osoittaa, että nimenomaan magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset navat hylkivät toisiaan.



**12.1** Kuvitellaan, että magneetit toimisivatkin niin, että niiden samanlaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja erilaiset hylkivät toisiaan. Miten magneettisten napojen tunnistaminen nyt tapahtuisi ja mitä tapahtuisi kuvan 12.1 kokeissa? Selitä tämän perusteella, miksi tämä koe osoittaa, että todellisuudessa nimenomaan eri navat vetävät toisiaan puoleensa.

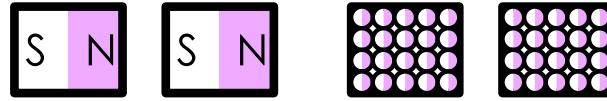
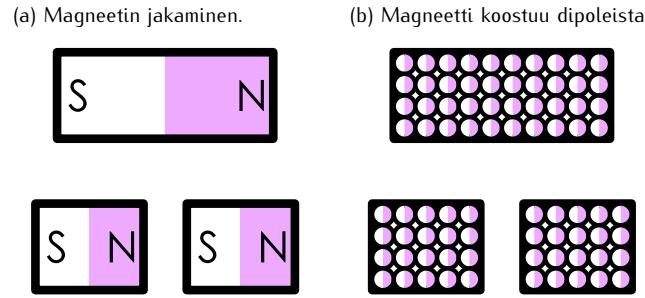
Magneettien N- ja S-napojen välillä oleva magneettinen vuorovaikutus näyttäisi siis toimivan samalla tavalla kuin positiivisten ja negatiivisten sähkövaurausten välillä vaikuttava sähköinen vuorovaikutus. Yhdessä suhteessa magneettien navat kuitenkin toimivat eri tavalla kuin varautuneet kappaleet. Kappaleella voi nimittäin olla positiivinen tai negatiivinen kokonaisvaraus, mutta ainakaan toistaiseksi *ei ole löydetty ainetta, joka voisi olla magneettisesti varautunut*. Toisin sanoen magneetissa täytyy *aina* olla sekä pohjois- että etelänapa. Ei ole mahdollista, että kappaleessa olisi vain yksi napa tai että napojen voimakkuus olisi erilainen. Vaikka sauvamagneetin leikkaisi keskeltä kahta, tuloksena ei ole erillisiä pohjois- ja etelänapoja vaan kaksi pienempää magneettia, joilla kummallakin on omat pohjois- ja etelänapansa (kuva 12.2).

Tämä johtuu siitä, että ainakaan mitkään toistaiseksi tunnetut hiukkaset eivät ole magneettisesti varautuneet. Kappaleethan varautuvat sähköisesti, jos niissä olevien positiivisten ja negatiivisten hiukkasten määrä muuttuu. Mutta koska ei ole olemassa magneettisesti varautuneita hiukkasia, kappaleitakaan ei voi varata magneettisesti. Sen sijaan monet hiukkaset ovat magneettisesti polarisoituneet. Esimerkiksi elektronilla on magneettinen pohjois- ja etelänapa ja hiukanen toimii kuin äärimmäisen pieni magneetti. Elektroni on siis **magneettinen dipoli**. Edelleen koska atomeissa on elektroneja, myös atomit ja niiden muodostamat rakenteet voivat polarisoitua magneettisesti. Elektronille magneettisuus on pysyvä ominaisuus, ja kaikkien elektronien magneettiset navat ovat yhtä voimakkaita. Elektronien magneettisten napojen asento voi kuitenkin muuttua, ja atomien sekä niiden muodostamien rakenteiden magneettisuus riippuukin pääasiassa siitä, millaisissa asennoissa elektronit ovat. Tavallisesti elektronit asettuvat aineessa pareittain niin, että kussakin parissa elektronit ovat täsmälleen vastakkaisissa asennoissa. Jos parin yhden elektronin pohjoisnapa on vaikkapa yläpuolella, toisella elektronilla pohjoisnapa on alapuolella. Tällöin elektronien magneettiset ominaisuudet kuomoavat toisensa eikä pari yhdessä ole magneettinen.

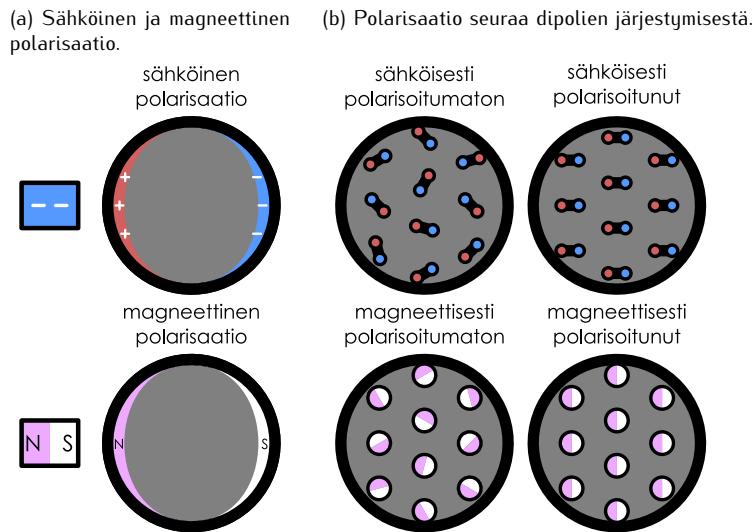
Magneettisissa aineissa näin ei kuitenkaan tapahdu vaan jotkin elektronit jäävät ilman pareja. Tällaisessa tapauksessa aineen atomeillakin on magneettiset pohjois- ja etelännavat eli atomitkin ovat magneettisia dipoleja. Tämäkään ei vielä tarkoita, että kyseinen aine olisi magneetti, sillä myös atomit voivat muodostaa pareja, joissa dipolit asettuvat vastakkaisiin suuntiin. Silloin atomien magneettiset dipolit kumoavat toisensa eikä materiaali ole makroskooppisessa mittakaavassa magneetti. Joissakin erikoisissa materiaaleissa atomien magneettiset dipolit kuitenkin pyrkivät käänymään samansuuntaisiksi, jolloin niiden magneettiset ominaisuudet vahvistavat toisiaan ja materiaali on *magneettisesti polarisoitunut*. Kaikki magneetit on tehty tällaisista aineista. Magneeteilla ei siis itse asiassa ole kahta suurta pohjois- ja etelänapaa, vaan magneetti koostuu valtavasta määrästä mikroskooppisia magneettisia dipoleja. Kun tällaisen magneetin jakaa kahteen osaan, kumpikin osa koostuu edelleen mikroskooppisista magneettisista dipoleista. Kumpikin osa on siis edelleen magneettisesti polarisoitunut, jolloin kummassakin on oma pohjois- ja etelänapansa.

Magneettiset materiaalit koostuvat siis mikroskooppisista magneettisista dipoleista, ja aine on magneettinen makroskooppisessa mittakaavassa, jos nämä dipolit käännyvät osoittamaan samaan suuntaan. Magneettinen aine muistuttaakin ominaisuksiltaan sähköisistä dipoleista koostuvaa eristemateriaalia. Jos sähködipo-

Kuva 12.2: Magneettisia napoja ei voi erottaa. Magneetin jakaminen luo kaksi uutta kaksinapista magneettia.



Kuva 12.3: Magneettisessa polarisaatiossa aineen mikroskooppiset magneettiset dipolit kääntyvät samansuuntaisiksi. Ilmiö on samankaltainen kuin sähköisistä dipoleista koostuvan aineen sähköinen polarisaatio.



lit ovat satunnaisissa asennoissa, aineella ei ole makroskooppisessa mittakaavassa sähköisesti varautuneita alueita. Sen sijaan jos dipolit kääntyvät samansuuntaisiksi, aine polarisoituu ja sen vastakkaisilla pinnoilla havaitaan makroskooppinen sähkövaraus. Tämä voidaan saada aikaan tuomalla aineen lähelle toinen, sähköisesti varattu kappale, jonka luoma sähkökenttä vetää dipoleja samaan suuntaan ja polarisoi aineen.

Joissakin aineissa dipolit järjestyvät itsestään osoittamaan samaan suuntaan, jolloin aine on aina magneettisesti polarisoitunut. On kuitenkin myös magneettisia materiaaleja, joissa magneettiset dipolit ovat normaalisti epäjärjestyneet ja osoittavat satunnaisiin suuntiin. Tällainen aine ei ole magneetti, mutta sekin voidaan polaroida magneettisesti tuomalla sen lähelle magneetti, joka vetää aineen sisäiset dipolit samansuuntaisiksi. Tällöin aineen vastakkaisilla pinnoilla havaitaan magneettiset navat samaan tapaan kuin sähköisesti polarisoituneen kappaleen pinnoilla havaitaan vastakkaismerkkiset sähkövaraukset (kuva 12.3).

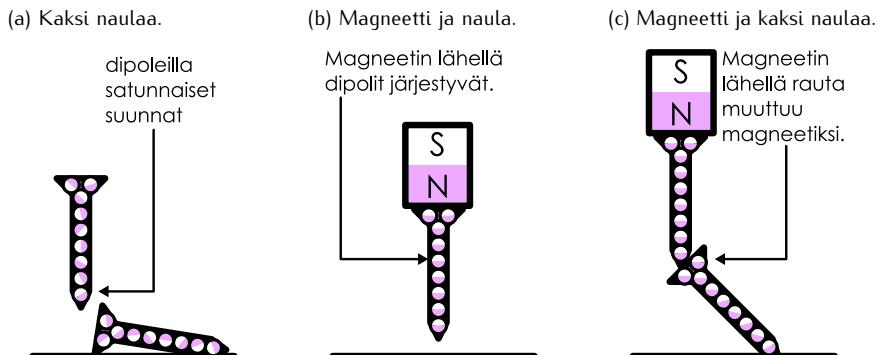
Kaikki magneettiset aineet eivät polarisoidu yhtä voimakkaasti. Jotkin aineet voivat polarisoitua magneettisesti magneetin lähellä mutta menettävät magneettisuutensa heti, kun magneetti poistetaan. Jotkin aineet kuten rauta kuitenkin polarisoituvat voimakkaasti ja voivat säilyttää osan magneettisesta polarisaatiostaan vielä senkin jälkeen, kun magneetti on viety pois niiden luota. Magneettinen materiaali voi siis muuttua itsekin magneetiksi toisen magneetin läheisyydessä, mitä kutsutaan **magnetoitumiseksi**.



**12.2** Selitä omin sanoin, miten magneettiset aineet vuorovaikuttavat. Mitä ovat N- ja S-navat ja miten ne liittyvät aineen mikroskooppiseen rakenteeseen?

Kuvassa 12.4 on esitetty magnetoitumisen havainnollistava koe magneeteilla ja rautanauloilla. Rauta on magneettinen materiaali, jonka atomit muodostavat magneettisia dipoleja. Rautanaulat eivät kuitenkaan nor-

Kuva 12.4: Magneetit vetävät puoleensa magneettisia materiaaleja kuten rautaa, koska nämä materiaalit magnetoituvat toisten magneettien lähellä muuttuen itsekin magneeteiksi.



## MAGNEETTIKENTTÄ

maalisti ole itse magneetteja, koska niiden dipolit osoittavat yleensä eri suuntiin. Niinpä kaksi rautanaulaa eivät tartu toisiinsa vaikka ne asetettaisiin vierekkäin. Jos kuitenkin rautanaulan lähelle tuodaan magneetti, tämä magneetti saa naulan sisäiset magneettiset dipolit käänymään samansuuntaisiksi, jolloin naula magneettoiutuu. Kuvassa (b) magneetin pohjoisnapa on kohti naulaa, jolloin naulan polarisoituminen luo sen yläpäähän magneettisen etelänavan ja alapäähän pohjoisnavan. Magneetin pohjoisnapa vetää naulan etelänapaa puoleensa, jolloin naula tarttuu magneettiin. Magneettiin kiinnittyneen rautanaulan on nyt itsekin magneetti, joten jos se viedään toisen naulan viereen, naulat tarttuvat yhteen (kuva (c)).

Jos magneetti ja naula irrotetaan, osa magneettisista dipoleista naulan sisällä pääsee käänymään ja näin naulan magneettinen polarisaatio heikkenee. Tällöin toinen naula todennäköisesti irtooa. Naula voi kuitenkin säilyttää osan magneettisesta polarisaatiostaan, jolloin kevyempi esine kuten paperiliitin saattaa siihen vielä tarttua. Vähitellen naulan magnetoituma kuitenkin häviää, kun satunnainen lämpöliike sekoittaa dipolien suunnat. Naulasta voidaan siis tehdä väliaikaisesti magneetti, mutta se ei pysy magneettina ilman että toinen magneetti vetää sen dipoleita jatkuvasti samansuuntaisiksi. Sellaisia magneettisia materiaaleja, jotka magnetoituvat itsestään ja pysyvät magneetteina kutsutaankin *kestomagneeteiksi*.



**12.3** Magneettisessa rakennussarjassa on teräskuulia ja sauvalamme. Yhden kuulan yläpuolelle kiinnitetään magneetti niin, että kuula on kiinni S-navassa. Kun tämän kuulan alapuolelle tuodaan toinen teräskuula, kuulat tarttuvat yhteen. Mitä tapahtuu, jos ylempään kuulaan kiinnitetään toinenkin magneetti niin, että kuulan yläosaan koskee (a) S-napa tai (b) N-napa? Entä jos aleman kuulan alaosaan kiinnitetään magneetin (c) S-napa tai (d) N-napa?

## 12.2 Magneettikenttä

### Magneettiset kenttäviivat

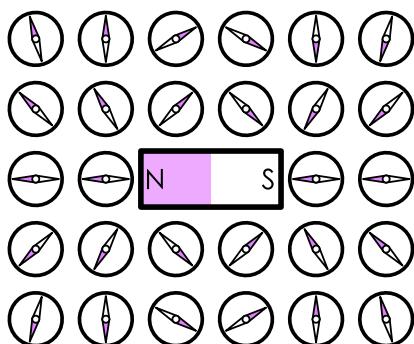
Koska magneettinen vuorovaikutus on etävuorovaikutus, sitä voidaan kuvata kenttämallilla samaan tapaan kuin sähköistä vuorovaikutusta kuvataan sähkökentällä. Toisin sanoen voimme ajatella, että kahden magneetin välistä magneettista vuorovaikutusta välittää **magneettikenttä**. Yksi magneetti synnyttää ympärilleen magneettikentän, ja tässä kentässä olevaan toiseen magneettiin kohdistuu kentässä magneettinen voima.

Sähkökenttä määriteltiin niin, että jos otamme testivaraukseen ja mittaamme siihen kohdistuvan sähköisen voiman, sähkökentän voimakkuuden täytyy olla mitatun voiman ja varauksen suuruuden suhde. Emme kuitenkaan voi mitata magneettikenttää tällä tavalla, koska magneettisia varauksia ei ole olemassa. Voimme silti käyttää jälleen kompassia magneettikentän havaitsemisessa. Kompassi ei kerro meille kentän voimakkuutta, mutta voimme määritellä magneettikentän suunnaksi kussakin avaruuden pisteessä sen suunnan, johon kompassineulan pohjoisnapa pyrkii kyseisessä pisteessä käänymään. Esimerkiksi kuvassa 12.5 (a) sauvalamme on ympäröity kompassilla, joista kukaan osoittaa omalla kohdallaan vallitsevan magneettikentän suunnan. Näemme kuvasta, että kompassit kääntyvät kaikki alla likimain niin, että kompassineulojen etelännavat ovat kohti magneetin pohjoisnapaa ja neulojen pohjoisnavat osittavat puolestaan kohti magneetin etelänapaa. Samalla periaatteella voimme mitata kentän suunnan käytännössä missä tahansa pisteessä.

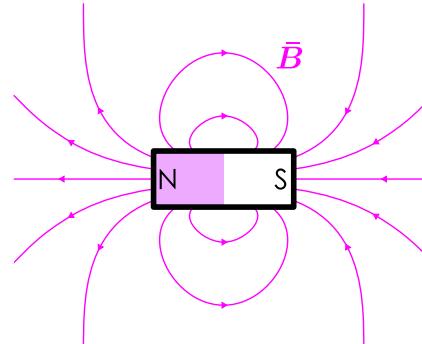
Magneettikenttä voidaan esittää kenttäviivoilla samaan tapaan kuin sähkökenttäkin, ja magneettikentän kenttäviivojen täytyy olla jatkuvia käyriä sähkökentän kenttäviivojen tapaan. Voimme aloittaa kenttäviivan

Kuva 12.5: Magneettikentän havaitseminen. Määritellään magneettikentän suunnaksi kompassineulan osoittama pohjoissuunta. Magneettikenttää kuvavat kenttäviivat kulkevat kaikki alla kompassin näyttämään suuntaan.

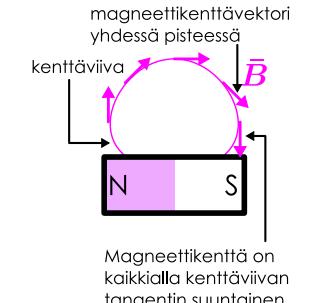
(a) Kompassit sauvalamme ympärillä.



(b) Kenttäviivaesitys.



(c) Kenttä on kenttäviivan suuntainen.



püirtämisen periaateessa mistä tahansa pisteeestä. Mittaus kompassilla kertoo meille kentän suunnan, jolloin kenttäviivan püirtäminen voidaan aloittaa kompassinuolen osoittamaan suuntaan. Kun viivaa on piirretty hyvin lyhyt matka, voimme mitata kentän suunnan uudelleen viivan kärkipisteessä ja muuttaa viivan suuntaa tämän mukaisesti. Näin jatkaen püritty katkeamaton käyrä, jonka tangentti osoittaa kaikkialla kompassineulan osoittamaan suuntaan. Piirtämällä useita viivoja sopivilta etäisyyksiltä alkaen saadaan koko kenttää kuvava kenttäviivaesitys kuten kuvassa 12.5 (b). Näin määritellään magneettikenttä on jokaisella kenttäviivan pisteellä viivan tangentin suuntainen (kuva 12.5 (c)). Osoittautuu myös, että magneettikentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen aivan sähkökentälläkin on.



**12.4** Kompassien kyky osoittaa pohjoiseen perustuu siihen, että Maapallon ydin on valtava magneetti. Selitä kuvan 12.5 avulla, mihin suuntaan Maan magneettikenttä osoittaa maanpinnalla (a) pohjoisella ja (b) eteläisellä pallonpuoliskolla sekä (c) missä maapallon magneettiset N- ja S-navat ovat.

### Liikkuvien varausten magneettisuus

Kaikki tähän asti oppimamme asiat magneettisesta vuorovaikutuksesta ovat olleet täysin analogisia sähköisen vuorovaikutuksen kanssa. Magneetin navat toimivat kuin positiiviset ja negatiiviset varaukset. Napojen välinen vuorovaikutus toimii samaan tapaan kuin sähköinen vuorovaikutus, ja sitä välittävä magneettikenttää voi kuvata samanlaisella kenttäviivaesityksellä kuin sähkökenttää. Pitkään ajateltiinkin, että sähkö ja magnetismi ovat samanlaisia mutta aivan erillisiä ilmiöitä. Tämä käsitys kuitenkin muuttui, kun virtajohdinten havaittiin vaikuttavan kompasseihin. Täsmällisemmin havaittiin, että virtajohtimen lähellä olevan kompassin neula kääntyy, kun johtimessa kulkee sähkövirta. Tämä oli ensimmäinen todiste sähköisten ja magneettisten ilmiöiden välisestä yhteydestä.

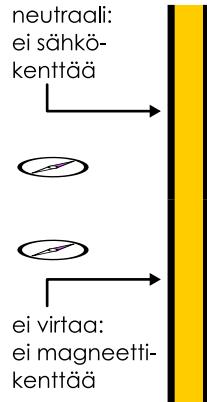
Kuvassa 12.6 nähdään, kuinka johtimen magneettikenttä voidaan havaita kompassilla. Kuvassa (a) on pitkä, suora johdin, jossa ei kulje virtaa. Johtimen ympärille on asetettu komasseja, mutta tässä vaiheessa nämä kompassit osoittavat tavalliseen tapaan pohjoiseen. Johdin on neutraali, joten se ei synnytä sähkökenttää, ja koska johdin ei vaikuta kompasseihin, se ei ilmeisesti synnytä myöskään magneettikenttää.

Kuvassa (b) on esitetty johdin ja kompassit, kun johtimessa kulkee virta. Virta voidaan saada esimerkiksi yhdistämällä johtimen päät paristoon, jolloin johtimen pääiden välille syntyy potentiaaliero ja johtimen sisään sähkökenttää. Kuvassa sähkökenttää osoittaa ylöspäin jolloin kenttä vetää johtimessa olevat elektronit liikkeelle alaspäin ja johtimessa kulkee sähkövirta ylöspäin eli kentän suuntaan. Johtimen ympärillä olevien kompassien nuolet kääntyvät virran kulkijessa, ja näiden nuolten osoittama suunta näyttää kiertävän johtimen ympäri. Tämän perusteella *virta synnyttää johdinta kiertävän magneettikentän*. Tätä havaintoa kutsutaan *Ørstedin laiksi* (Hans Christian Ørstedin mukaan). Kuvassa johtimen ympärille on piirretty vain yksi magneettikenttää kuvaava kenttäviiva, mutta koska systeemi on johtimen pituussuunnassa symmetrinen, magneettikentän täytyy kiertää johdinta kaikkialla.

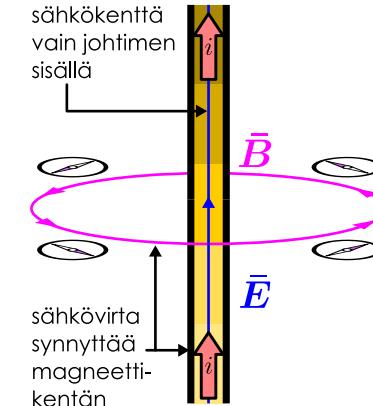
Tässä esimerkissä virta kulkee kuvassa ylöspäin, jolloin sitä kiertää magneettikenttä "vastapäivään" eli kuvassa vasemmalta oikealle johtimen edessä ja oikealta vasemmalle johtimen takana. Jos virran suunta kääntäisiin ympäri, myös kompassinuolet kääntyisivät ympäri ja siis myös magneettikenttä kiertäisi johdinta vastakkaiseen suuntaan. Virran kulkusuunnan ja magneettikentän kiertosuunnan välisen yhteyden muistaa

Kuva 12.6: Virtajohtimen magneettikenttä.

(a) Kun virta ei kulje, johdin ei luo magneettikenttää.



(b) Virta synnyttää pyörteisen magneettikentän.

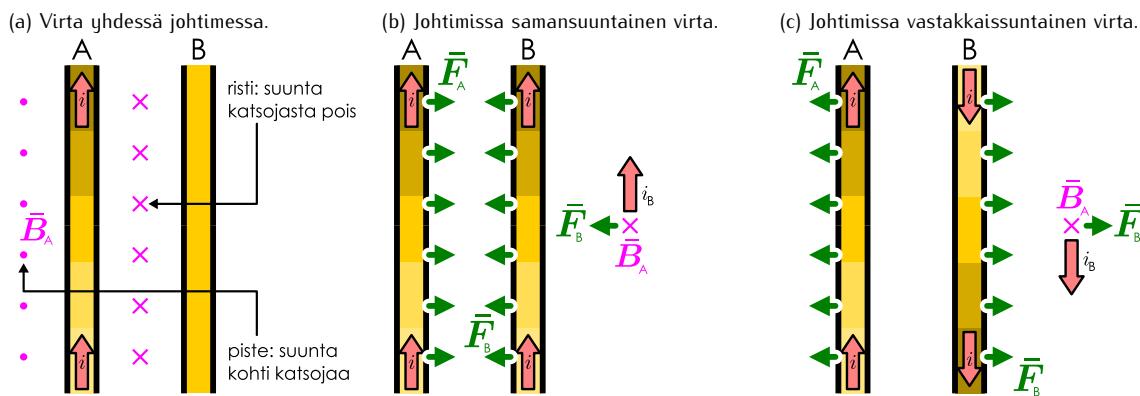


(c) Oikean käden sääntö.



## MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.7: Virtajohtimien välinen magneettinen voima. Johtimiin kohdistuu voima vain, jos kummassakin johtimessa kulkee virta. Voiman suunta ja suuruus riippuu myös virtajohdinten asennoista.



helpoiten kuvassa (c) esitettyllä oikean käden säännöllä. Jos oikean käden peukalo asetetaan osoittamaan virran kulkusuuntaan, koukistetut sormet osoittavat virran synnyttämän magneettikentän kiertosuunnan.

Magneettikentän voi siis synnyttää kestomagneettiin lisäksi myös virtajohtimella. Toisaalta ulkoisessa magneettikentässä olevaan kestomagneettiin kohdistuu voima, joten seuraavaksi on selvittää, kohdistuuko myös virtajohtimeen voima, kun johdin tuodaan magneettikenttään. Tämä voidaan selvittää kuvan 12.7 kokeen avulla. Kuvassa on kaksi yhdensuuntaista pitkää johdinta, A ja B. Kuvassa (a) johtimessa A kulkee virta, ja johtimen ympärillä on samanlainen pyörteinen magneettikenttä kuin kuvassa 12.6 (b). Nyt kenttä on kuitenkin esitetty hieman eri tavalla. Sen sijaan että kuvaan olisi piirretty kokonaisen silmukan piirtävä kenttäviiva, magneettikenttä on esitetty vain kuvan tasossa. Magneettikenttä kiertää johdinta A oikean käden säännön mukaisesti niin, että kentän suunta on johtimen A vasemmalla puolella kohti katsojaa. Tästä kenttä kulkee johtimen edestä ja kiertää takaisin kuvan tasoon niin, että kenttä osoittaa johtimen oikealla puolella poispäin katsojasta. Kuvassa katsojaa kohti osoittavaa kenttää on kuvattu pistellä, jotka esittävät katsojaa kohti osoittavien nuolten kärkiä. Katsojasta poispäin osoittavaa kenttää on kuvattu risteillä, jotka esittävät katsojasta poispäin osoittavien nuolten kantoja.

Vaikka johtimen A ympärillä on kuvassa (a) magneettikenttä, johtimeen B ei silti kohdistu voimaa, koska siinä ei kulje sähkövirta. Tilanne kuitenkin muuttuu, kun myös johdin B yhdistetään paristoon ja siinäkin alkaa kulkea sähkövirta (kuva (b)). Kummassakin johtimessa kulkee virta samaan suuntaan, ja kumpaankin johtimeen kohdistuu voima. Toisin sanoen *magneettikentässä olevaan virtajohtimeen voi kohdistua voima, kun johtimessa kulkee virta*. Itse asiassa ampeerin vanha määritelmä SI-yksikkönä perustui tähän ilmiöön. Ampeeri nimitti määriteltyiin aikaisemmin niin, että kun kaksi pitkää yhdensuuntaista johdinta asetetaan metrin päähän toisistaan ja kummassakin kulkee samansuuntainen yhden ampeerin virta, kumpaankin johtimeen kohdistuu  $2 \cdot 10^{-7}$  N voima metrin pituutta kohden.

Tarkkojen kokeellisten mittausten mukaan tällaisten yhdensuuntaisten virtajohdinten välinen magneettinen voima on itse asiassa suoraan verrannollinen kummassakin johtimessa kulkevan sähkövirran suuruuteen  $i_A$  ja  $i_B$  sekä johdinten pituuteen  $L$  ja käänä verringollinen johdinten väliseen etäisyyteen  $r_{A \rightarrow B}$ ,

$$F_{A \rightarrow B} = k_\mu L \frac{i_A i_B}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (12.1)$$

Tässä ampeerin määritelmän mukaisesti verrannollisuuskerroin on  $k_\mu = 2.000 \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>.



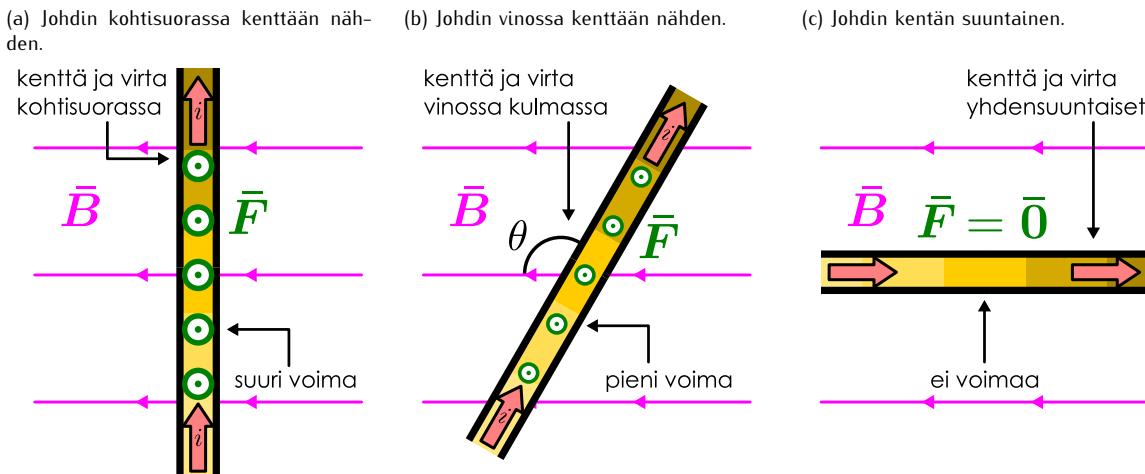
**12.5** Tarkista vakion  $k_\mu$  yksikkö ja arvo ampeerin vanhan määritelmän avulla.

Voimme ajatella, että johdin A luo ympärilleen magneettikentän  $\bar{B}_A$  ja tämä kenttä kohdistaa voiman toisessa johtimessa B kulkevaan virtaan. Lisäksi johtimen jokaiseen pisteesseen kohdistuu tässä symmetriana perusteella yhtä suuri voima. Tämän mallin perusteella johtimeen B kohdistuva voima olisi kentän  $B_A$  voimakkuuden, johtimen pituuden  $L$  ja virran  $i_B$  tulo,  $F_{A \rightarrow B} = B_A i_B L$ , jolloin johtimen A synnyttämän magneettikentän voimakkuuden täytyy olla

$$B_A = \frac{1}{i_B L} F_{A \rightarrow B} = k_\mu \frac{i_A}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (12.2)$$

*Suoran johtimen magneettikentän voimakkuus heikkenee siis käänä verrannollisesti johtimesta mitattuun etäisyyteen.*

Kuva 12.8: Virtajohtimeen kohdistuva magneettisen voiman suuruus riippuu johtimen ja kentän välisestä kulmasta.



Magneettikentän yksiköllä on erikoisnimi **tesla** (Nikola Teslan mukaan) ja sitä merkitään symbolilla T. Yhtälön (12.2) perusteella tesla on SI-perusyksikköjen avulla ilmaistuna

$$T = [B] = [k_\mu] \frac{[i]}{[r]} = \frac{\text{N A}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2}. \quad (12.3)$$

Siispä sekä sähköistä että magneettista vuorovaikutusta voi kuvata kentämallilla, jossa vuorovaikutukseen yksi osapuoli luo avaruuteen kentän ja toinen osapuoli tuntee tässä kentässä voiman. Magneettinen voima on kuitenkin monimutkaisempi kuin sähköinen voima, sillä siinä missä varattuun hiukkaseen kohdistuva sähköinen voima riippuu vain varauksen suuruudesta sekä sähkökentästä, virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima riippuu johtimessa kulkevan virran suuruuden ja magneettikentän lisäksi myös siitä, missä asennossa johdin on magneettikenttää nähden.

Kuvassa (b) johtimen A synnyttämä magneettikenttä  $\vec{B}_A$  osoittaa johtimen B kohdalla katsojasta pois-päin, virta kulkee kuvassa ylöspäin ja voima kohdistuu kuvassa vasemmalle. Tässä tapauksessa johtimet siis vetävät toisiaan puoleensa. Voima ei siis osoita magneettikentän suuntaan eikä edes virran kulkusuuntaan vaan *kohtisuoraan* näihin kumpaankin nähden. Kuvassa (c) johtimen A luoma magneettikenttä osoittaa saman suuntaan kuin kuvassa (b), mutta johtimessa B kulkee virta vastakkaiseen suuntaan, jolloin johtimeen B kohdistuu voima päinvastaiseen suuntaan kuin kuvassa (b), ja johtimet hylkivät toisiaan.

Täsmällisemmin johtimeen kohdistuva voima riippuu *virran kulkusuunnan ja magneettikentän suunnan välisestä kulmasta*. Kokeellisesti voidaan havaita, että voima on suurimmillaan, kun virtajohdin on kohtisuorassa magneettikenttää nähden. *Voima on sen sijaan nolla, jos virta kulkee samaan tai vastakkaiseen suuntaan kuin magneettikenttä*. Itse asiassa voiman suuruus riippuu virran  $i$  ja kentän  $\vec{B}$  suunnan välisen kulman  $\theta$  sinistä (kuva 12.8),

$$F_{\text{johdin}} = |iLB \sin \theta|. \quad (12.4)$$

Lauseke (12.4) kertoo meille pitkään suoraan johtimeen vaikuttavan voiman suuruuden, mutta ei suuntaa. Voiman suunnan päättelyyn on kuitenkin olemassa oma oikean käden säätönsä. Jos nimittäin kuvassa 12.7 (b) asetetaan oikean käden ojennettu peukalo virran kulkusuuntaan ja etusormi magneettikentän suuntaan, johtimeen kohdistuvan voiman suunta osoittaa koukistetun keskisormen suunta. Sama säätö pätee myös kuvassa (c).



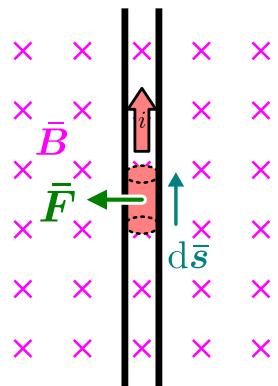
**12.6** Virtajohtimen viereen tuodaan magneetti (a) S-napa johtimeen pään, (b) N-napa johtimeen pään, (c) johtimen suuntaiseksi N-napa virran kulkusuuntaan. Kohdistuuko johtimeen voima? Jos kohdistuu, mihin suuntaan (virran kulkusuuntaan nähden)?

Näimme vastaavan oikean käden säännon luvussa 5 pyörimislükkeen tarkastelun yhteydessä. Määrittelimme nimittäin silloin kahden vektorin *ristikulon* suunnan niin, että jos vektori  $\vec{A}$  osoittaa peukalon suuntaan ja vektori  $\vec{B}$  etusormen suuntaan, ristikulon  $\vec{A} \times \vec{B}$  osoittaa keskisormen suuntaan. Tämän perusteella magneettisen voiman suunta voidaan ilmaista ristikulon avulla, kun *voima määritellään virran kulkusuuntaan osoittavan vektorin sekä magneettikenttävektorin ristikulona*. Tämän lisäksi magneettisen voiman suuruus on yhtälön (12.4) perusteella verrannollinen kentän voimakkuuteen, virran suuruuteen ja näiden suuntien välisen kulman sinin aivan kuten vektoreiden ristikulokin on.

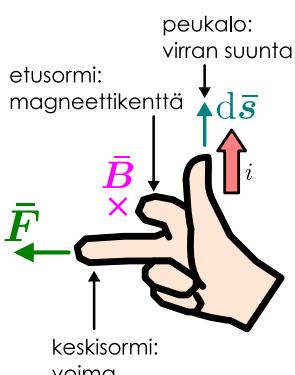
## MAGNEETTIKENTTÄ

Kuva 12.9: Virtajohdin magneettikentässä.

(a) Johtimen osaan kohdistuva voi- ma.



(b) Oikean käden säätö.



Ainoa ongelma tässä on se, että sähkövirta ei ole vektori vaan skalaari, joten siitä ei voi suoraan ottaa ristituloa. Ristituloon laskemiseksi on siis määriteltävä jokin toinen virran kulkusuuntaa osoittava vektori. Tässä voidaan käyttää virrantihettä, joka on vektori, tai vaihtoehtoisesti virtajohdimen suuntaan osoittavaa vektoria. Koska lausekkeessa (12.4) esiintyy johtimen pituus, on kätevä määritellä johdinvektori  $\bar{L}$ , joka on yhdensuuntainen johtimen kanssa osoittäen virran kulkusuuntaan ja jonka pituus on sama kuin johtimen pituus  $L$ . Tämän vektorin avulla voimme ilmaista kentässä  $\bar{B}$  olevalaan suoraan johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman suunnan ja suuruuden yksinkertaisella vektorilausekkeella

$$\bar{F}_{\text{johdin}} = i \bar{L} \times \bar{B}. \quad (12.5)$$

Tämä lauseke pätee suoralle johtimelle, joka on homogeenisessa magneettikentässä. Jos johtimessa on mutkia tai jos kenttä ei ole kaikkialla vakio, lauseketta ei voi käyttää sellaisenaan. Tällöin johdin voidaan kuitenkin jakaa lyhyisiin osiin, joita voidaan pitää likimain suorina ja joiden kohdalla magneettikenttää voidaan pitää likimain vakiona. Jos tällaisen osan suuntaa ja pituutta kuvaava vektori  $d\bar{s}$ , osaan kohdistuva voima on

$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = id\bar{s} \times \bar{B}, \quad (12.6)$$

ja koko johtimeen kohdistuva voima saadaan laskemalla kaikkiin sen osiin kohdistuvat voimat yhteen. Tämä laki ja siiä esitetyt suureet on piirretty kuvaan 12.9 (a). Ristituloon liittyvä oikean käden säätö on esitetty puolestaan kuvassa 12.9 (b).

Virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman voi laskea myös virrantiheden  $\bar{j}$  avulla. Virrantihedyt on vektori, joka osoittaa johtimen suuntaan eli samaan suuntaan kuin vektori  $d\bar{s}$ , ja virrantihedyt on suuruudeltaan virran  $i$  ja johtimen poikkileikkauksen pinta-alan  $A$  suhde (jos virrantihedyt johtimessa on vakio),  $j = \frac{1}{A}i$ . Jos tarkastelemme  $ds$ -pituisista johtimen osista, tämän osan tilavuus on  $dV = Ads$  ja niihin virrantihedyt voi kirjoittaa muodossa

$$\bar{j} = \frac{1}{A}i \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{dV}id\bar{s} \quad (12.7)$$

Tämän perusteella magneettisen voiman lausekkeessa esiintyvä virran ja johtimen suuntaisen vektorin tulo voidaan kirjoittaa muotoon

$$id\bar{s} = \bar{j}dV. \quad (12.8)$$

Toisaalta yhtälön (11.28) mukaisesti virrantihedyt voi ilmaista varauksenkuljettajien varaustiheyden  $\rho$  ja niihin vaellusnopeuden  $\bar{v}_{\text{vaellus}}$  avulla muodossa

$$\bar{j} = \rho \bar{v}_{\text{vaellus}}. \quad (12.9)$$

Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (12.8) ja huomioimalla, että johtimen tilavuuden ja sen varaustiheyden tulo on sama asia kuin johtimessa kulkevien varauksenkuljettajien varaus,  $\rho dV = dq$ , saadaan virran ja vaellusnopeuden välille yhtälö

$$id\bar{s} = \bar{v}_{\text{vaellus}} \rho dV = \bar{v}_{\text{vaellus}} dq. \quad (12.10)$$

Kun vielä sijoitamme tämän tuloksen johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman lausekkeeseen (12.6) saamme ilmaistua voiman varauksenkuljettajien vaellusnopeuden avulla

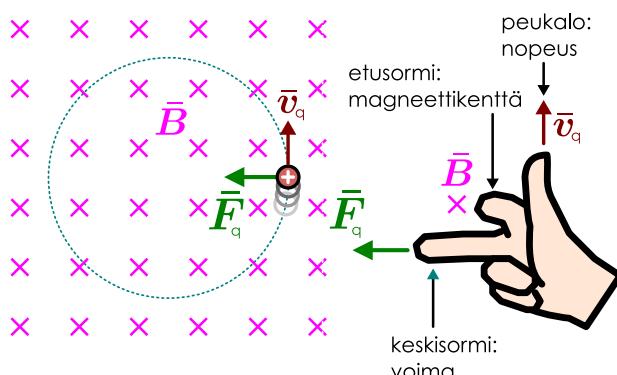
$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = dq \bar{v}_{\text{vaellus}} \times \bar{B}. \quad (12.11)$$

Tämän perusteella voimme tulkita virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman syntynyt itse asiassa siitä, että *liikkuiin varauksiin kohdistuu magneettikenttässä voima*.

- 12.7** Kuparissa on noin  $10^{29}$  virtaa kuljettavaa elektronia kuutiometrissä. Tarkastellaan kuparijohtimen osaa, jonka pituus on  $10^{-3}$  m ja poikkipinta-ala  $10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Johtimessa kulkee 1 A virta kohtisuorassa 1 T magneettikenttään nähdyn. Mitä on
- johtimeen kohdistuvan voiman suuruus,
  - johtimessa kulkevien elektronien lukumäärä, kokonaivaraus ja vaellusnopeus,
  - yksittäiseen elektroniin kohdistuvan voiman suuruus?

Kuva 12.10: Liikuva varaus magneettikentässä.

(a) Varauksen kohdistuva voima. (b) Oikean käden sääntö.



yksittäiseen hiukkaseen kohdistuu magneettinen voima, kun hiukkanen liikkuu magneettikentässä. Yhtälössä (12.11) tarkasteltiin infinitesimaalisen lyhyttä johtimen osaa, joten siinä esiintyi infinitesimaalisen pieni varaus  $d\bar{F}$ . Varattu hiukkasen varaus on kuitenkin yleensä jokin tunnettu vakio,  $q$ . Samoin yhdellä hiukkasella ei ole vaellusnopeutta vaan vain sen oma nopeus  $\bar{v}_q$ . Tekemällä nämä muutokset johtimelle pätevästä yhtälöstä (12.11) saadaan yksittäiseen hiukkaseen kohdistuvaa magneettista voimaa kuvaava yhtälö

$$\bar{F}_q = q\bar{v}_q \times \bar{B}. \quad (12.12)$$

Kuvassa 12.10 (a) on esimerkki magneettikentässä liikkuvasta positiivisesti varatusta hiukkasta ja kuvassa (b) on oikean käden sääntö voiman suunnan määrittämiseksi. Tämä sääntö on sama kuin virtajohtimeen kohdistuvaa voimaa kuvaava sääntö, kunhan virran kulkusuunta korvataan positiivisen varauksen liikkeen suunnalla. Kuvassa hiukkasen nopeus ja magneettikenttä ovat kohtisuorassa, jolloin hiukkaseen kohdistuva voima on suurimmillaan. Magneettinen voima osoittaa *aina* kohtisuoraan sekä varauksen liikkeen suuntaa että magneettikenttävektoria vastaan. Koska kuvan 12.10 (a) hiukkaseen kohdistuu vain magneettinen voima, hiukkasen kiertyvyyden täytyy olla kohtisuorassa sen nopeutta vastaan, jolloin hiukkanen on *ympyräliikkeessä*.



**12.8** Millaista rataa varattu hiukkanen kulkee homogeenisessa magneettikentässä, jos sen nopeuden ja magneettikentän välinen kulma on aluksi  $45^\circ$ ?

Jos varattu hiukkanen on sekä sähkö- että magneettikentässä, siihen kohdistuu samanaikaisesti sekä sähköinen voima (10.9) että magneettinen voima (12.12). Sähkö- ja magneettikenttiä *ei voi* laskea yhteen, mutta voimat voi, joten varattuun hiukkaseen kohdistuvan voiman yleinen lauseke on

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (12.13)$$

Tätä kutsutaan **Lorentzin voimalaaksi** (Hendrik Lorentzin mukaan).

Edellisessä analyysissä käsiteltiin nimenomaan *positiivisesti varattua hiukkasta* kuten esimerkiksi protonia. Virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima riippuu nimenomaan virran kulkusuunnasta eikä varauksenkuljetajien liikkeen suunnasta. Kuitenkin koska elektronit kulkevat virran kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, kuvan 12.10 (b) oikean käden sääntö ei voi pätee niille. Päinvastoin *negatiivisesti varattuihin hiukkasiin kohdistuva voima osoittaa juuri vastakkaiseen suuntaan kuin mitä oikean käden sääntö ennustaa*. Lauseke (12.13) kuitenkin pätee sekä positiivisesti että negatiivisesti varatuille hiukkaille, sillä jos hiukkasella on negatiivinen varaus,  $q < 0$ , tämä vaihtaa lausekkeen etumerkin ja siten käänää voimavektorin suunnan.



**12.9** Hiukkasen varaus on  $1 \text{ nC}$  ja sen nopeus on  $\bar{v} = (2.0 \text{ km/s})\hat{i} + (3.0 \text{ km/s})\hat{j}$ . Mikä on hiukkaseen kohdistuva voima, kun hiukkanen on sähkökentässä  $\bar{E} = (100 \text{ V/m})\hat{j} + (400 \text{ V/m})\hat{k}$  ja magneettikentässä  $\bar{B} = (0.50 \text{ T})\hat{k}$ ?

Virtajohtimessa varausta kuljettavien elektronien liike on pääasiassa satunnaista, jolloin elektroneja liikkuu yhtä paljon kaikkiin suuntiin. Myös satunnaisesti liikkuvien elektronien kohdistuu magneettikentässä voima, mutta koska magneettinen voima riippuu elektronien liikkeen suunnasta, eri elektroneihin kohdistuvat voimat osoittavat nekin satunnaisiin suuntiin. Satunnaisesti liikkuvien elektronien joukkoon kohdistuu näin ollen keskimäärin yhtä paljon voimia kaikkiin suuntiin, ja näin ollen elektroneihin kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Kokonaisvoima poikkeaa nollasta vain elektronien vaeltaessa yhdessä samaan suuntaan, ja tästä syystä johtimeen kohdistuva voima riippuu elektronien vaellusnopeudesta.

Tämä pätee siis makroskooppiselle johtimen osalle, joka sisältää paljon varauksenkuljettavia. Kuitenkin aivan samalla periaatteella myös

## Magneettikentän superpositio

Johdimme aikaisemmin sähkökentälle superpositioperiaatteen, jonka mukaan useiden varausten yhdessä syntämä kenttä voidaan laskea jokaisessa avaruuden pisteessä määrittämällä ensin erikseen kunkin varauksen yksinään luoma sähkökenttä tässä pisteessä ja laskemalla kaikkien varausten sähkökentät vektoreina yhteen. Tämä periaate seurasи siitä, että sähkökenttä määriteltiin testivaraukseen kohdistuvan voiman kautta, ja voimille pätee vastaava superpositioperiaate. Koska myös magneettikenttä voi kohdistaa liikkuihin varauksiin voiman, voimme samalla periaatteella päätellä, että voimien superpositioperiaatteen takia myös magneettikentille täytyy päteä superpositioperiaate. Toisin sanoen usean virtajohtimen ( tai virtajohtimen osan) yhdessä tuottama magneettikenttä saadaan laskettua missä tahansa tarkastelupisteessä määrittämällä ensin jokaisen johtimen yksinään tuottama magneettikenttä tässä pisteessä ja laskemalla sitten nämä kentät vektoreina yhteen.

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 12.11, johon on piirretty virtajohdinten magneettikenttiä sekä yksittäisessä tarkastelupisteessä että säännöllisin välein valituissa pisteissä vektorikenttäkuvaajana. Kuvissa (a) ja (b) on vain yksi johdin (A), jossa virta kulkee katsojaa kohti. Oikean käden säännön perusteella tällaisen virran synnyttämä magneettikenttä kiertää johdinta vastapäivään. Tämä näkyy kuvassa (a) siinä, että kenttävektori on kohtisuorassa johtimesta tarkastelupisteeseen piirrettyyn suoraan nähden. Tämä on totta kaikissa pisteissä, jolloin kuvassa (b) kenttää kuvavat nuolet muodostavat johdinta kiertävän pyörteen. Lisäksi lausekkeen (12.2) perusteella kentän voimakkuus on käännetäen verrannollinen johtimesta mitattuun etäisyteen, mikä ilmenee vektorinuolten pituuksissa. Kuvissa (c) ja (d) on myös yksi johdin (B), jossa virta kulkee katsojasta pois päin. Tämän johtimen kenttä on muuten samanlainen kuin kuvien (a) ja (b) johtimen kenttä paitsi että nyt kenttä kiertää johdinta kuvassa myötäpäivään.

Kuvaan (e) on piirretty kuvien (a) ja (c) johdinten yhdessä muodostama kenttä tarkastelupisteessä. Johtimen A kenttää kuvava vektori osoittaa yläviistoon vasemmalle samoin kuin kuvassa (a), ja johtimen B kenttävektori osoittaa yläviistoon oikealle kuten kuvassa (c). Magneettikenttä tarkastelupisteessä on näiden vektorisumma, joka on tässä tapauksessa likimain ylöspäin osoittava vektori. Kuvaan (f) on piirretty samalla periaatteella lasketut kenttävektorit jokaisessa kuvajan pisteessä. Nähdään, että johdinten välissä kummankin johtimen kenttä osoittaa samaan suuntaan, jolloin kentät vahvistavat toisiaan ja kenttää kuvavat pitkät nuolet. Johdinten ulkopuolella kuvan vasemmassa ja oikeassa laidassa johdinten kentät ovat likimain vastakkaisuuntainen, joten kentät heikentävät toisiaan. Kokonaisuudessaan johtimet muodostavat magneettikentän, joka kulkee voimakkaana johdinten välistä ja kiertää kummankin johtimen ympäri.

Kuvassa 12.11 tarkasteltiin vain suorien virtajohdinten kenttiä, mutta superpositioperiaate pätee kaikille magneettikentille riippumatta kentän synnyttäjästä. Erityisesti jos virtajohtimet eivät ole suoria vaan käyräviäisia, emme voi päätellä niiden magneettikenttiä suoran virtajohtimen kentän lausekkeesta (12.2). Sen sijaan tällaisten johdinten magneettikenttä täytyy määrittää jakamalla johdin pieniin osiin, laskemalla kunkin osan yksinään tuottama kenttä tarkastelupisteessä ja lopuksi summamalla kentät vektoreina yhteen kenttien superpositioperiaatteen mukaisesti. Tätä varten on kuitenkin ensin selvitettävä, millaisen kentän *lyhyt* virtajohtimen osa synnyttää.

Voimme päätellä joitakin lyhyen johtimen magneettikentän ominaisuuksia tutkimalla suoran johtimen kenttää. Pitkä johdin on nimittäin hyvin monen lyhyen johtimen yhdistelmä, joten pitkän johtimen kentän täytyy syntyä lyhyiden johdinten kentien superpositiona. Ensinnäkin pitkän, suoran johtimen magneettikenttä on verrannollinen johtimessa kulkevan virtaan *i*, joten myös jokaisen tällaisen johtimen osan yksinään tuottaman kentän täytyy olla. Toiseksi *lyhyessä* johtimessa on sitä enemmän liikkuvaa varausta mitä pidempi johdin on, joten johtimen luoman kentän voimakkuuden täytyy olla suoraan verrannollinen johtimen pituuteen ds. Kolmanneksi pitkän johtimen kenttä kiertää johdinta oikean käden säännön mukaisesti, joten myös lyhyiden johdinten täytyy tuottaa niitä kiertävää kenttää. Neljänneksti pitkän johtimen kentän voimakkuus heikkenee käännetäen verrannollisesti johtimesta mitattuun etäisyteen. Tästä seuraa, että myös jokaisen johtimen osan tuottaman kentän voimakkuuden täytyy riippua osasta mitatusta etäisyydestä. Tästä ei kuitenkaan seuraa, että voimakkuuden pitäisi olla käännetäen verrannollinen osasta mitattuun etäisyyteen, koska tämä verrannollisuus voi muuttua, kun lasketaan yhteen äärettömän monen lyhyen osan tuottama kenttä.

Itse asiassa osoittautuu, että lyhyen johtimen magneettikenttä heikkenee käännetäen verrannollisesti osasta mitatun etäisyyden *neliöön* aivan samalla tavalla kuin pistevaraukseen sähkökenttä heikkenee. Jos tarkasteltava lyhyt johdin on pisteessä, jonka paikkavektori on  $\bar{r}_q$ , ja magneettikenttä halutaan määrittää pisteessä P, jonka paikkavektori on  $\bar{r}_P$ , vektori johtimesta pisteeseen P on

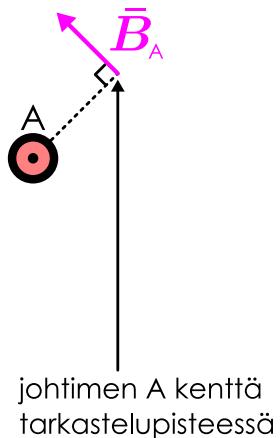
$$\bar{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_P - \bar{r}_q. \quad (12.14)$$

Etäisyys johtimesta tarkastelupisteeseen on siis  $r_{q \rightarrow P} = |\bar{r}_{q \rightarrow P}|$  ja johtimen luoman magneettikentän voimakkuus riippuu tästä etäisyydestä funktion  $1/r_{q \rightarrow P}^2$  mukaisesti. Ei ole sattumaa, että pistemäisen varauksen sähkökenttä ja pistemäisen johtimen magneettikenttä heikkenevät yhtä jyrkästi, mutta tässä vaiheessa emme pysty vielä perustelemaan, miksi näin täytyy olla.

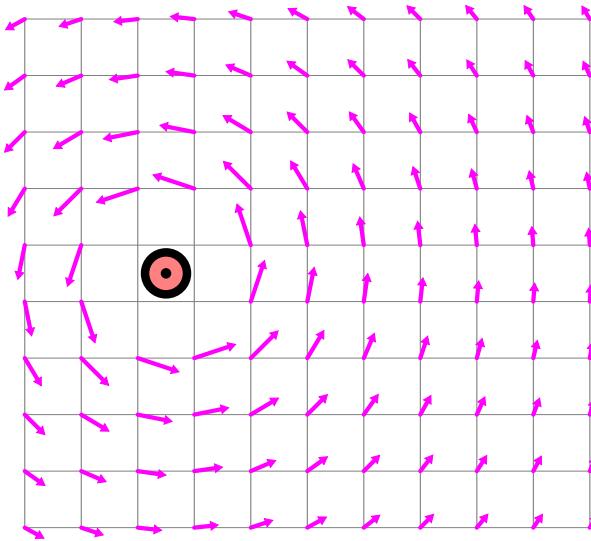
Lisäksi osoittautuu, että lyhyen johtimen tuottaman kentän voimakkuus riippuu myös tarkastelupisteen suunnasta suhteessa johtimen suuntaan. Kenttä on kaikkein voimakkain johtimen suuntaan nähden kohti-

Kuva 12.11: Virtajohtimia ympäröivän magneettikentän vektorikenttäkuvaaja. Kun kentän luo monta johdinta, näiden tuottama magneetikenttä saadaan laskemalla yksittäisten johdinten tuottamat kenttävektorit yhteen.

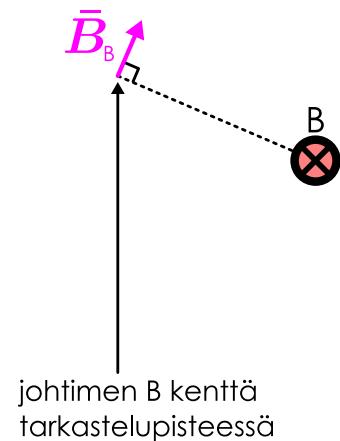
(a) Johtimen A kenttä yhdessä pisteessä.



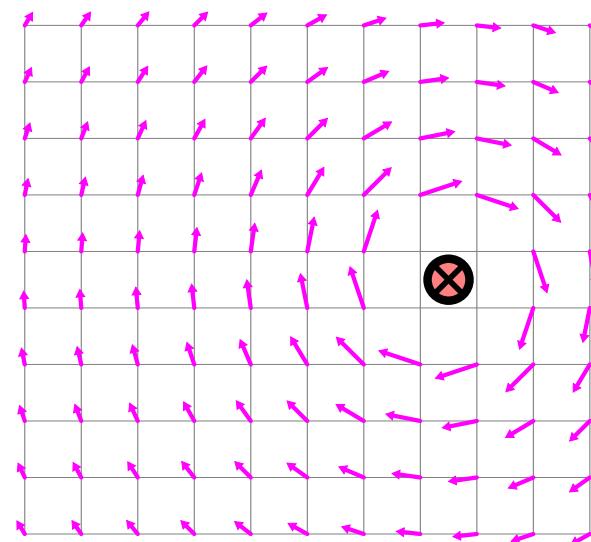
(b) Johtimen A kentän vektorikuvaaja.



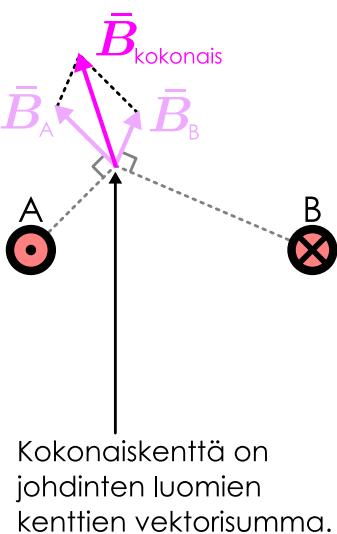
(c) Johtimen B kenttä pisteessä.



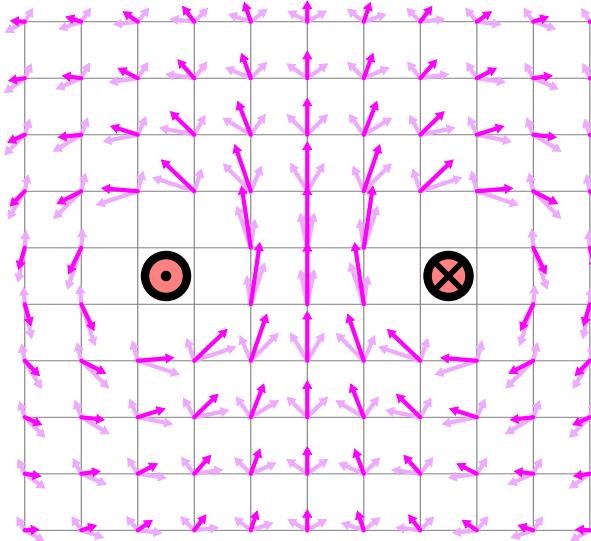
(d) Johtimen B kentän vektorikuvaaja.



(e) Johdinten yhdessä luoma kenttä.



(f) Johdinten yhdessä luoman kentän vektorikuvaaja.



## MAGNEETTIKENTTÄ

suorassa tasossa ja *nolla* johtimen kautta kulkevalla, johtimen suuntaisella suoralla. Täsmällisesti kentän voimakkuus on verrannollinen johtimen suunnan  $d\bar{s}$  ja johtimesta tarkastelupisteeeseen osoittavan vektorin  $\hat{r}_{q \rightarrow P}$  välisen kulman  $\theta$  sinii. Yhdistämällä kaikki nämä ominaisuudet lyhyen johtimen magneettikentän voimakkuudeksi pisteessä P saadaan

$$dB_P = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i}{r_{q \rightarrow P}^2} \sin \theta ds. \quad (12.15)$$

Tässä verrannollisuuskerroin on juuri  $\frac{1}{2} k_\mu = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  eikä  $k_\mu$ , minkä perustelemme hieman myöhemmin.

Edellä esitelty lauseke ei kuitenkaan vielä huomioi magneettikentän suuntaa. Koska magneettikenttä on johdinta kiertävä pyörre, kenttävektorin  $\bar{B}_P$  täytyy olla kohtisuorassa sekä johtimen suuntaa osoittavaa vektoria  $d\bar{s}$  että johtimesta tarkastelupisteeeseen osoittavaa vektoria  $\hat{r}_{q \rightarrow P}$  vastaan. Ristituloilla on tämä ominaisuus ja lisäksi ristituloon sisältyy valmiiksi näiden vektoreiden välisen kulman sini, joten magneettikenttä pisteessä P voidaan kirjoittaa vektorimuodossa näppärästi ristitulon avulla muodossa

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P, \text{johdin}} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{id\bar{s} \times \hat{r}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (12.16)$$

missä ristitulossa esiintyy johtimesta tarkastelupistettä kohti osoittava *yksikkövektori*  $\hat{r}_{q \rightarrow P}$ . Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** (Jean-Baptiste Biot'n ja Félix Savartin mukaan).

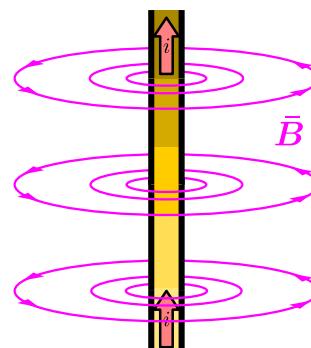
Koska virta on varausten liikettä, liikkuvan pisteverauksen täytyy tuottaa samanlainen magneettikenttä kuin mitä hyvin lyhyt virtajohdin synnyttää. Voimme jälleen muuttaa lyhyttä johdinta kuvaavan yhtälön pisteverausta kuvaavaksi yhtälöksi sijoitukseilla (12.10) eli korvaamalla virran ja johtimen pituutta osoittavan vektorin tulon  $id\bar{s}$  hiukkasen varauksen ja nopeuden tulolla  $q\bar{v}_q$ . Näin ollen liikkuvan varatun hiukkasen magneettikentälle saadaan lauseke

$$\bar{B}_{q \rightarrow P, \text{varaus}} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{q\bar{v}_q \times \hat{r}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}^2}. \quad (12.17)$$

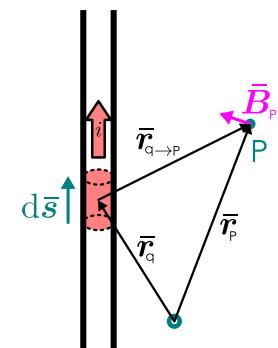


**12.10** Tarkista ristitulon oikean käden säennöllä, että lausekkeen (12.17) antama magneettikenttä osoittaa samaan suuntaan kuin kuvaan 12.13 (b) piirretty nuoli.

(a) Kenttäviivaesitys.

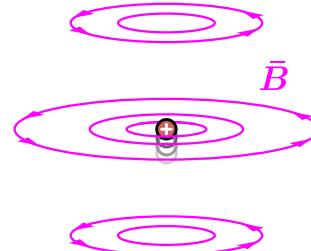


(b) Kenttä pisteessä P.

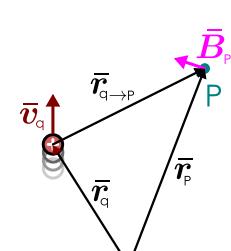


Kuva 12.12: Suoran johtimen magneettikenttä.

(a) Kenttäviivaesitys.



(b) Kenttä pisteessä P.



### esimerkki 12.1

### Magneettinen ja sähköinen voima

**Kaksi varattua hiukkasta, A: 2 nC ja B: 3 nC on koordinaatiston pisteissä A: (1, 2, 3) ja B: (2, 3, 3) (yksiköt metrejä).** Varausten nopeudet ovat  $\bar{v}_A = (2.0 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{i} + (5.0 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}$  ja  $\bar{v}_B = (1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{j} + (-0.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}$ . Laske varaukseen A kohdistuva voima.

**TILANNE** Merkitään hiukkasten varauksia  $q_A = 2 \text{ nC}$  ja  $q_B = 3 \text{ nC}$ . Paikkavektori B:stä A:han on  $\bar{r}_{B \rightarrow A} = \bar{r}_A - \bar{r}_B = (-1 \text{ m})\hat{i} + (-1 \text{ m})\hat{j}$ . Tämän pituus on  $r_{B \rightarrow A} = \sqrt{(-1 \text{ m})^2 + (-1 \text{ m})^2} = \sqrt{2} \text{ m} \approx 1.41 \text{ m}$  ja sen suuntainen yksikkövektori on  $\hat{r}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{r_{B \rightarrow A}} \bar{r}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{i} - \hat{j}) \approx -0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}$ .

**SUUNNITELMA** Lasketaan ensin sähkö- ja magneettikenttä, jonka B luo varauksen A kohdalle. Kun nämä tunnetaan, voimme laskea varaukseen A kohdistuvan voiman.

Sähkökenttä on Coulombin lain mukaan

$$\bar{E}_{B \rightarrow A} = k_\epsilon \frac{q_B}{r_{B \rightarrow A}^2} \hat{r}_{B \rightarrow A} \quad (12.18)$$

ja magneettikenttä Biot'n ja Savartin lain mukaan

$$\bar{B}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{q_B \bar{v}_B \times \hat{r}_{B \rightarrow A}}{r_{B \rightarrow A}^2}. \quad (12.19)$$

Lorentzin voima on

$$\bar{F}_A = q_A(\bar{E}_{B \rightarrow A} + \bar{v}_A \times \bar{B}_{B \rightarrow A}). \quad (12.20)$$

**RATKAISU** Sähkökentäksi saadaan

$$\bar{E}_{B \rightarrow A} = (13.48 \text{ V/m})(-0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}) = (-9.53 \text{ V/m})\hat{i} + (-9.53 \text{ V/m})\hat{j} \quad (12.21)$$

ja magneettikentäksi

$$\bar{B}_{B \rightarrow A} = (1.5 \cdot 10^{-17} \text{ Ts/m})[(1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{j} + (-0.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}] \times [-0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}] \quad (12.22)$$

$$= (1.5 \cdot 10^{-16} \text{ Ts/m})[(-3.54 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{i} + (3.54 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{j} + (1.06 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}] \quad (12.23)$$

$$= (-5.30 \cdot 10^{-10} \text{ T})\hat{i} + (5.30 \cdot 10^{-10} \text{ T})\hat{j} + (1.59 \cdot 10^{-9} \text{ T})\hat{k}. \quad (12.24)$$

Hiukkaseen kohdistuva sähköinen voima on

$$\bar{F}_{A,E} = q_A \bar{E}_{B \rightarrow A} = (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{i} + (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{j} \quad (12.25)$$

ja magneettinen voima on

$$\bar{F}_{A,B} = q_A \bar{v}_A \times \bar{B}_{B \rightarrow A} = (-5.30 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{i} + (-1.17 \cdot 10^{-10} \text{ N})\hat{j} + (2.12 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{k}. \quad (12.26)$$

Kokonaisvoima on siis

$$\bar{F}_A = \bar{F}_{A,E} + \bar{F}_{A,B} = (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{i} + (-1.92 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{j} + (2.12 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{k}. \quad (12.27)$$

Huomaa, että vaikka hiukkasten nopeus on hyvin suuri, magneettinen voima on paljon heikompi kuin sähköinen voima. Yleensä näin onkin. Kuitenkin jos sähköistä voimaa ei ole — esimerkiksi jos magneettikentän luo sähköisesti neutraali virtajohdin — magneettinen voima voi olla erittäin merkittävä.

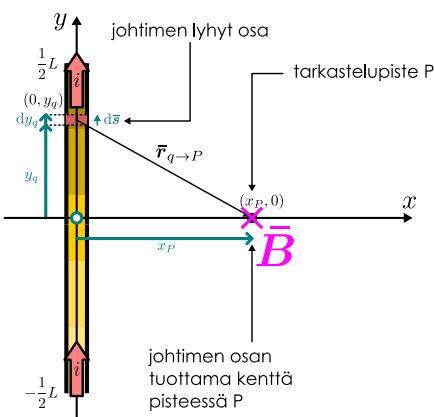
Mathematica:

```
(* vakiot *)
ke = 1/(4 Pi 8.854*10^-12); km = 2*10^-7;
qa = 2*10^-9; qb = 3*10^-9; va = {2, 0, 5}*10^7; vb = {0, 1.5, -0.5}*10^7;
rvec = {-1, -1, 0}; r = Sqrt[rvec.rvec]; ruv = rvec/r;

(* sähkö- ja magneettikenttä *)
e = ke qb/r^2 ruv
b = 0.5 km qb Cross[vb, ruv]/r^2
{-9.53294, -9.53294, 0}
{-5.3033*10^-10, 5.3033*10^-10, 1.59099*10^-9}

(* voima *)
fe = qa e
fm = qa Cross[vb, b]
f = fe + fm
{-1.90659*10^-8, -1.90659*10^-8, 0}
{-5.3033*10^-11, -1.16673*10^-10, 2.12132*10^-11}
{-1.91189*10^-8, -1.91826*10^-8, 2.12132*10^-11}
```

Kuva 12.14: Johtimen lyhyen osan tuottaman magneettikentän laskemisessa tarvittava geometria.



Emme pysty tässä vaiheessa perustelemaan, miksi lyhyen virtajohtimen ja pistemäisen varauksen magneettikenttä riippuu paikasta juuri tällä tavalla — palaamme tähän myöhemmin. Sen sijaan osoitamme Biot'n ja Savartin lain olevan ainakin uskottava johtamalla sen avulla suoran virtajohtimen magneettikentän lausekkeen, jonka tunnemme kokeellisesti. Tämä ei suoranaisesti osoita lakia oikeaksi, mutta se on kuitenkin todiste lain järkevydestä ja sopusoinnusta kokeellisten tulosten kanssa.

Lasketaan ensin  $L$ -pituisen suoran johtimen magneettikenttä johtimen keskipisteen kautta kulkevassa, johtimen suuntaan nähdien kohtisuorassa tasossa. Lasku tapahtuu samalla periaatteella kuin vastaan varatun sauvan sähköisen lasku, jonka teimme luvussa 10. Asetamme kuvan 12.14 mukaisesti koordinaatiston origon johtimen keskipisteesseen ja  $y$ -akselin kulkemaan johtimen suuntaiseksi niin, että virta kulkee positiiviseen  $y$ -suuntaan. Tarkastelupiste  $P$ , jossa magneettikenttä lasketaan, asetetaan pisteesseen  $(x_P, 0)$ . Jaamme johtimen  $dy_q$ -pituisiin osiin, ja kulloinkin tarkastelussa olevan osan paikka olkoon  $(0, y_q)$ . Ideana on jälleen laskea johtimen kaikkien osien tuottama magneettikenttä tarkastelupisteessä ja laskea nämä sitten superpositioperiaatteen mukaisesti yhteen. Tätä varten kaikki paikasta

## MAGNEETTIKENTTÄ

riippuvat suureet pitää ensin kirjoittaa muuttujan  $y_q$  avulla, jolloin yhteenlasku onnistuu integraalina muuttujan  $y_q$  suhteen. Koska johdin ulottuu  $y$ -akselin väliin  $[-L/2, L/2]$ , tämä on myös integroitava väli.

Johdimen osan pituutta ja suuntaa osoittava vektori on

$$d\bar{s} = dy_q \hat{j}, \quad (12.28)$$

koska kunkin osan pituus on  $dy_q$  ja johdin on  $y$ -akselin suuntainen (virta positiiviseen suuntaan). Vektori johtimen osasta tarkastelupisteeseen P on puolestaan

$$\bar{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_P - \bar{r}_q = x_P \hat{i} - y_q \hat{j}. \quad (12.29)$$

Tämän pituus on  $r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2}$  ja vektorin suuntainen yksikkövektori on  $\hat{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_{q \rightarrow P} / r_{q \rightarrow P}$ . Johtimen osa tuottaa pisteesseen P siis lausekkeen (12.16) mukaan magneettikentän

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{idy_q \hat{j} \times (x_P \hat{i} - y_q \hat{j})}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (12.30)$$

Tässä lausekkeessa esiintyvä ristitulo voidaan kertoa auki. Yksikkövektoreille pätee  $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$  ja  $\hat{j} \times \hat{j} = \bar{0}$ , joten

$$\hat{j} \times (x_P \hat{i} - y_q \hat{j}) = x_P (\hat{j} \times \hat{i}) - y_q (\hat{j} \times \hat{j}) = -x_P \hat{k}. \quad (12.31)$$

Näin magneettikentän lauseke sievenee muotoon

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P} = -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (12.32)$$



- 12.11** (a) Osoita, että minkä tahansa kahden yhdensuuntaisen vektorin ristitulo on nollavektori.  
 (b) Olkoon  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$  ja  $\bar{b} \times \bar{c} = 2\bar{a}$ . Mitä on  $\bar{b} \times (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ ?

Tämän lausekkeen mukaan magneettikentän suunta ei riipu koordinaatista  $y_q$ . Tämä tarkoittaa sitä, että johtimen *jokainen* osa tuottaa pisteesseen P magneettikentän suuntaan  $-\hat{k}$ . Niinpä vektoreiden suuntaa ei tarvitse erikseen tarkastella ja lopputuloksen täytyy myös osoittaa suuntaan  $-\hat{k}$ . Koko johtimen magneettikenttä saadaan nyt integroimalla lauseke 12.32 muuttujan  $y_q$  suhteen,

$$\bar{B} = -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (12.33)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \left|_{-L/2}^{L/2} \right. \frac{y_q}{x_P (x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \quad (12.34)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \left( \frac{L/2}{x_P (x_P^2 + (L/2)^2)^{1/2}} - \frac{-L/2}{x_P (x_P^2 + (-L/2)^2)^{1/2}} \right) \quad (12.35)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu \frac{iL}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}} \hat{k}. \quad (12.36)$$

Tuloksena saatu lauseke on *täsmälleen* samaa muotoa kuin vastaavan varatun sauvan sähkökentän lauseke (10.45) muuten paitsi että nyt tangon varauksen on korvannut johtimessa kulkevan virran ja johtimen pituuden tulo, sähkökenttään liittyvä vakio  $k$  on korvattu magneettikentän vakiolla  $k_\mu/2$  ja kentän suunta on nyt  $-\hat{k}$  eikä  $\hat{i}$ .

Kun johtimen pituuden  $L$  annetaan lähestyä ääretöntä, saadaan raja-arvona äärettömän pitkän johtimen magneettikentän lauseke. Tämä raja-arvo on

$$\bar{B} = \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} k_\mu \frac{i}{x_P \sqrt{x_P^2/L^2 + 1/4}} \hat{k} = -k_\mu \frac{i}{x_P} \hat{k}. \quad (12.37)$$

Tässä  $x_P$  on johtimesta mitattu etäisyys, ja voimme merkitä sitä selvyyden vuoksi myös symbolilla  $r$ . Tämä lasku osoittaa, että Biot'n ja Savartin laista (12.16) seuraa se, että äärettömän pitkän ja suoran virtajohtimen magneettikentän voimakkuus etäisyydellä  $r$  on

$$B = k_\mu \frac{i}{r}, \quad (12.38)$$

mikä on sama kuin kokeellisesti tunnettu tulos (12.2). Laskusta käy myös ilmi, miksi Biot'n ja Savartin laissa (12.16) olevan verrannollisuuskertoimen pitää olla juuri  $\frac{1}{2} k_\mu$ . Jos kerroin olisi  $k_\mu$ , pitkän johtimen magneettikentän voimakkuudesta tulisi kaksinkertainen oikeaan tulokseen verrattuna.

## esimerkki 12.2

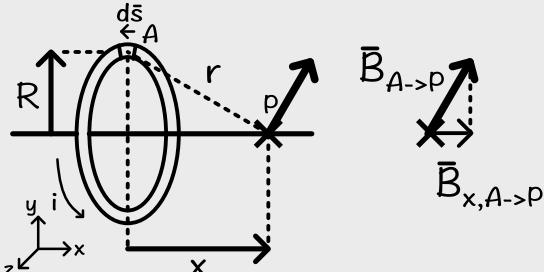
## Virtasilmukan magneettikenttä

Virtajohdin muodostaa  $R$ -säteisen ympyrän. Johtimessa kulkee virta  $i$ . Mikä on magneettikentän voimakkuus ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla ympyrän tasoon nähdyn kohtisuoralla akselilla etäisyydellä  $x$  ympyrästä?

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Jaetaan kiekko lyhyisiin osiin, joiden pituutta ja suuntaa merkitään vektoreilla  $d\bar{s}$ . Kiekon jokainen piste on yhtä kaukana tarkastelupisteestä, joten merkitään tästä etäisyyttä  $r$ . Asetetaan  $x$ -akseli kulkemaan kiekon keskipisteen kautta ja origo kiekon keskelle. Valitaan tarkastelupisteeksi P piste  $(x, 0, 0)$ .

## renkaan osan luoma kenttä

**SUUNNITELMA** Johtimen kiekon lyhyt osa tuottaa ympärilleen magneettikentän Biot'n ja Savartin lain mukaisesti. Magneettikenttä tarkastelupisteessä voidaan laskea kaikkien johtimen osien tuottamien kenttien superpositiona eli käytännössä integraalina. Virtajohtimien eri osien tuottamat magneettikentät ovat erisuuntaiset, mutta symmetrian perusteella niiden  $y$ - ja  $z$ -komponenttien täytyy kumota toisensa. Siispä riittää tarkastella vain kentän  $x$ -komponenttia.



Tarkastellaan pisteessä  $(0, R, 0)$  (A) olevaa johtimen osaa. Biot'n ja Savartin lain mukaan osa tuottaa magneettikentän

$$d\bar{B}_{A \rightarrow P} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i d\bar{s} \times \hat{r}_{A \rightarrow P}}{r_{A \rightarrow P}^2} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}, \quad (12.39)$$

missä johtimesta tarkastelupisteeseen osoittava vektori on

$$\bar{r}_{A \rightarrow P} = \bar{r} = x\hat{i} - R\hat{j} \quad (12.40)$$

ja sen pituus on

$$r_{A \rightarrow P} = r = \sqrt{x^2 + R^2}. \quad (12.41)$$

Tässä käytettiin myös aina pätevää yhtälöä  $\hat{r}/r^2 = \bar{r}/r^3$ . Johdin on pisteessä A z-suuntainen, ja jos virta kiertää kuavan merkityyn suuntaan, virta kulkee positiiviseen z-suuntaan, jolloin

$$i d\bar{s} = i d\hat{s} \hat{k}. \quad (12.42)$$

Koko johtimen kenttä saadaan integroimalla renkaan ylitse, ja symmetriasta johtuen riittää tarkastella x-komponenenttia,

$$B = B_x = \int d\bar{B}_x. \quad (12.43)$$

**RATKAISU** Tarkasteltu johtimen osa tuottaa kentän

$$d\bar{B} = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{\hat{k} \times (x\hat{i} - R\hat{j})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{x(\hat{k} \times \hat{i}) - R(\hat{k} \times \hat{j})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{x\hat{j} + R\hat{i}}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds, \quad (12.44)$$

sillä  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$  ja  $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ . Tämän x-skalaarikomponentti on

$$dB_x = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (12.45)$$

Kokonaiskenttä saadaan tämän lausekkeen integraalina, ja koska integroitava lauseke ei riipu johtimen pituudesta  $s$ , lasku on helppo. Integointi tapahtuu johtimen osien pituuskien suhteen, jolloin lopputulokseksi saadaan johtimen kokonaispituus  $L = 2\pi R$ .

$$B_x = \int dB_x = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = k_\mu \frac{\pi i R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.46)$$

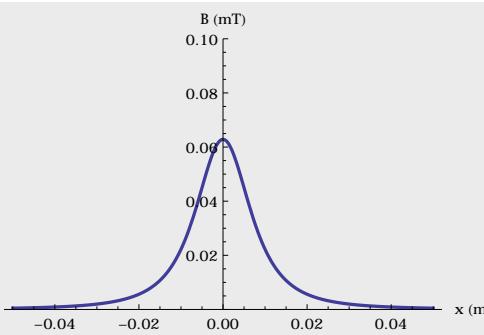
Mathematica:

```
(* vektorit *)
rVec = {x, -R, 0};
r = Sqrt[rVec.rVec];
rUnit = rVec/r;
kUnit = {0, 0, 1};

(* johtimen osan kentta ja sen x-komponentti *)
dB = kmu/2 i Cross[kUnit, rVec]/r^3;
dBx = dB[[1]];
(i kmu R)/(2 (R^2 + x^2)^(3/2))

(* koko renkaan kenttä *)
b = Integrate[dBx, {s, 0, 2 Pi R}]
(i kmu Pi R^2)/(R^2 + x^2)^(3/2)

(* kentta paikan funktiona *)
Plot[1000 b /. {R -> 0.01, kmu -> 2*10^-7, i -> 1}, {x, -0.05, 0.05},
PlotRange -> {0, 0.1},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (m)", "B (mT)"}]
```



**ARVIOINTI** Saatu lauseke on melko monimutkainen, mutta ylläpiirretyn kuvajen perusteella kenttä on voimakkaimillaan renkaan keskipisteessä  $x = 0$ , ja kentän voimakkuus pienenee renkaasta kauemmas siirryttäässä kuten pitääkin.

Voimme tarkastella kentän voimakkuutta renkaan keskipisteessä erikoistapauksena. Tässä pisteessä magneettikentän voimakkuudeksi saadaan  $B_x = \pi k_\mu i R^2 / (R^2)^{3/2} = \pi k_\mu i / R$ . Kenttä on siis renkaan keskellä käantäen verrannollinen renkaan sätteeseen. Biot'n ja Savartin lain mukaan renkaan jokaisen osan luoman kentän voimakkuus on käantäen verrannollinen sateen neljöön,  $B \sim R^{-2}$ , mutta toisaalta kenttä on suoraan verrannollinen johtimen pituuteen,  $B \sim L = 2\pi R$ , koska pitkässä johtimessa on enemmän liikkuvia varauksia. Näiden tekijöiden yhteisvaikutuksesta kentän pitää olla käantäen verrannollinen ympyrän sätteeseen,  $B \sim R^{-2} \cdot R = R^{-1}$ . Tulos on siis järkevä.



**12.12** Selitä omiin sanoin, millaisia magneettikenttiä virtajohtimet ja liikkuvat varaukset luovat. Miltä kentät näyttävät? Millainen oikean käden sääntö niihin liittyy? Miten lasket johtimen osan tai liikkuvan varauksen luoman kentän yhdessä pisteessä? Miten lasket kokonaisen johdinsilmukan luoman kentän?

## 12.3 Gaussian ja Ampèren lait magneettikentälle

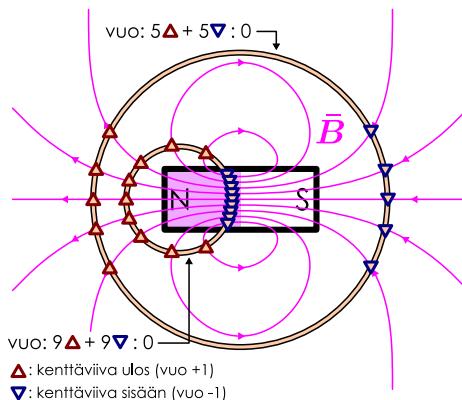
Biot'n ja Savartin laki magneettikentille on hyvin samantyypinen kuin Coulombin laki sähkökentille. Näiden lakienvälinen ero on se, että Coulombin laki soveltuu vain tasaisiin sähkökenttiin, kun taas Biot'n ja Savartin laki soveltuu kaikkiin sähkökenttiin. Varausten synnyttämien sähkökenttien todellinen peruslaki on *Gaussian laki sähkökentille*. Samaan tapaan myös Biot'n ja Savartin laki pätee täsmälleen vain systeemeille, joissa kulkee tasainen, ajassa muuttumaton virta. Todelliset peruslait sähkövirtojen ja liikkuvien varausten synnyttämille magneettikentille ovat **Gaussian ja Ampèren lait magneettikentille** (Carl Friedrich Gauss ja André-Marie Ampère mukaan).

### Gaussian laki magneettikentille

Gaussian laki sähkökentille sanoo, että sähkövuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisältämän sähkövarauksen kokonaismäärää. Tämä johtuu siitä, että sähkövuo mittaa pinnan läpi kulkevia kenttäviivoja lukumäärää, ja sähkökentän kenttäviivat voivat alkaa vain positiivisista varauksista ja päättyä vain negatiivisiin varauksiin. Jos suljetun pinnan sisältä tulee ulos enemmän kenttäviivoja kuin sinne menee sisään, pinnan sisällä täytyy olla enemmän viivojen lähteitä eli positiivisia varauksia kuin viivojen nieluja eli negatiivisia varauksia.

Magneettikentän kenttäviivaesitykselle pätee samat säännöt kuin sähkökentän kenttäviivaesitykselle. Kenttä osoittaa kaikkialla kenttäviivojen suuntaan ja kentän voimakkuus on suoraan verrannollinen viivojen tiheyteen. Kenttäviivat eivät voi myöskään alkaa tai päättyä tyhjään avaruuteen vaan ainoastaan varauksiin. Totesimme kuitenkin aikaisemmin, että *magneettisia* varauksia ei ole olemassa tai ainakaan niitä ei ole vielä löydetty luonnosta, joten *magneettiset kenttäviivat eivät voi päättyä*

Kuva 12.15: Magneettivuo suljetun pinnan läpi on aina nolla.



minnekään vaan ne joko jatkuvat äärettömyyksiin tai muodostavat suljettuja silmukoita. Tämä pätee myös kestomagneeteille, joissa on näennäisesti erilliset pohjois- ja etelännavat, sillä magneettiset kenttävivat eivät pääty magneettisiin napoihin vaan ne muodostavat napojen kautta kulkevia silmukoita kuten kuvassa 12.15.

Koska minkään suljetun pinnan sisällä ei voi olla magneettikentän lähteitä tai nieluja, *jokaisen suljetun pinnan läpi täytyy kulkea yhtä monta magneettista kenttäviivaa ulos ja sisään*. Pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärä kertoo magneettikentän vuon tai lyhyemmin **magneettivuon**  $\Phi_B$  pinnan läpi, joten *magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla*,

$$\Phi_B = 0. \quad (12.47)$$

Tämä on Gaussin laki magneettikentille.

Magneettivuo lasketaan magneettikentästä samalla tavalla kuin sähkövuo laskettiin sähkökentästä. Homogenisen kentän vuo tasomaisen pinnan läpi on kentän voimakkuuden, pinnan alan ja kentän sekä pinnan normaalilin välichen kulman kosinin tulo,

$$\Phi_B = BA \cos \theta = \bar{B} \cdot \bar{A}. \quad (12.48)$$

Jos kenttä ei ole vakio tai pinta ei ole suora taso, vuo saadaan pintaintegraalina

$$\Phi_B = \int \bar{B} \cdot d\bar{A}. \quad (12.49)$$

Magneettivuo yksiköllä on erikoisnimi weber (Wilhelm Weberin mukaan) sekä symboli Wb,

$$Wb = [\Phi_B] = [B][A] = \text{Tm}^2. \quad (12.50)$$

Itse asiassa monissa lähteissä vektorikenttää  $\bar{B}$  ei kutsuta "magneettikentäksi" vaan sille käytetään nimeä **magneettivuon tiheys**. Tässä materiaalissa kuitenkin  $\bar{B}$ -kenttää yksinkertaisuuden vuoksi vain magneettikentäksi.



**12.13** Miksi kuvassa 12.15 magneettivuo pienemmän pinnan läpi on nolla, vaikka se ympäröi magneetin pohjoisnavan? Jos magneetin N- ja S-navat korvattaisiin positiivisella ja negativisella varauksella, millainen olisi sähkövuo pinnan läpi? Miksi tulokset ovat erilaiset?

### Ampèren laki magneettikentille

Gaussin laki magneettikentille on luonnon peruslaki aivan kuten Gaussin laki sähkökentillekin. Se pätee aina kaikille magneettikentille olipa kentän synnyttänyt virtajohdin tai kestomagneetti. Sen avulla ei kuitenkaan ole gleensä mahdollista määritää magneettikentän voimakkuutta, koska se ei millään tavalla yhdistä kenttää sen luojan ominaisuuksiin. Esimerkiksi virtajohtimen magneettikentän voimakkuus riippuu johtimessa kulkevan virran voimakkuudesta, mutta Gaussin laki ei mitenkään riipu johtimen virrasta. Magneettikentillä täytyy siis olla olemassa *toinenkin* peruslaki, joka yhdistää magneettikentän ja sen synnyttävän sähkövirran.

Tämä toinen peruslaki on *Ampèren laki*, jota on havainnollistettu kuvasarjassa 12.16. Kaikissa kuvissa tarkastellaan samaa suoraa virtajohdinta, jossa kulkee sähkövirta kohti katsojaa. Kuten jo aikaisemmin opimme, tämän johtimen kenttä kiertää virtajohdinta oikean käden säännön mukaan eli kuvassa vastapäivään. Lisäksi tiedämme magneettikentän voimakkuuden heikkenevän johtimesta etäännystääessä.

Koska magneettikenttä muodostaa pyörteen johtimen ympärille, magneettikenttä ei ole konservatiivinen vektorikenttä. Tämä tarkoittaa ensinnäkin sitä, että ei ole olemassa magneettista skalaaripotentiaalia, jonka gradienttina magneettikenttä voitaisiin laskea. Toisin sanoen *ei* ole olemassa funktiota  $V_B$ , jolle pärisi  $\bar{B} = -\nabla V_B$ . Lisäksi tämä tarkoittaa sitä, että jos laskemme magneettikentän viivaintegraalin johdinta kiertävällä suljetulla polulla, tulos *ei* ole nolla. Kuvassa (b) on kuvattu tästä esimerkkinä viivaintegraali  $r$ -säteistä ympyrää pitkin. Koska reitti kierretään vastapäivään eli samaan suuntaan kuin mihin magneettikenttä kiertää, viivaintegraali on positiivinen. Jos reitti kierretäisiin myötäpäivään, viivaintegraali olisi negatiivinen.

Täsmällisemmin valittu integroitireitti on tässä kuvassa kaikkialla etäisyydellä  $r$  johtimesta, joten magneettikentän voimakkuus on reitillä vakio,

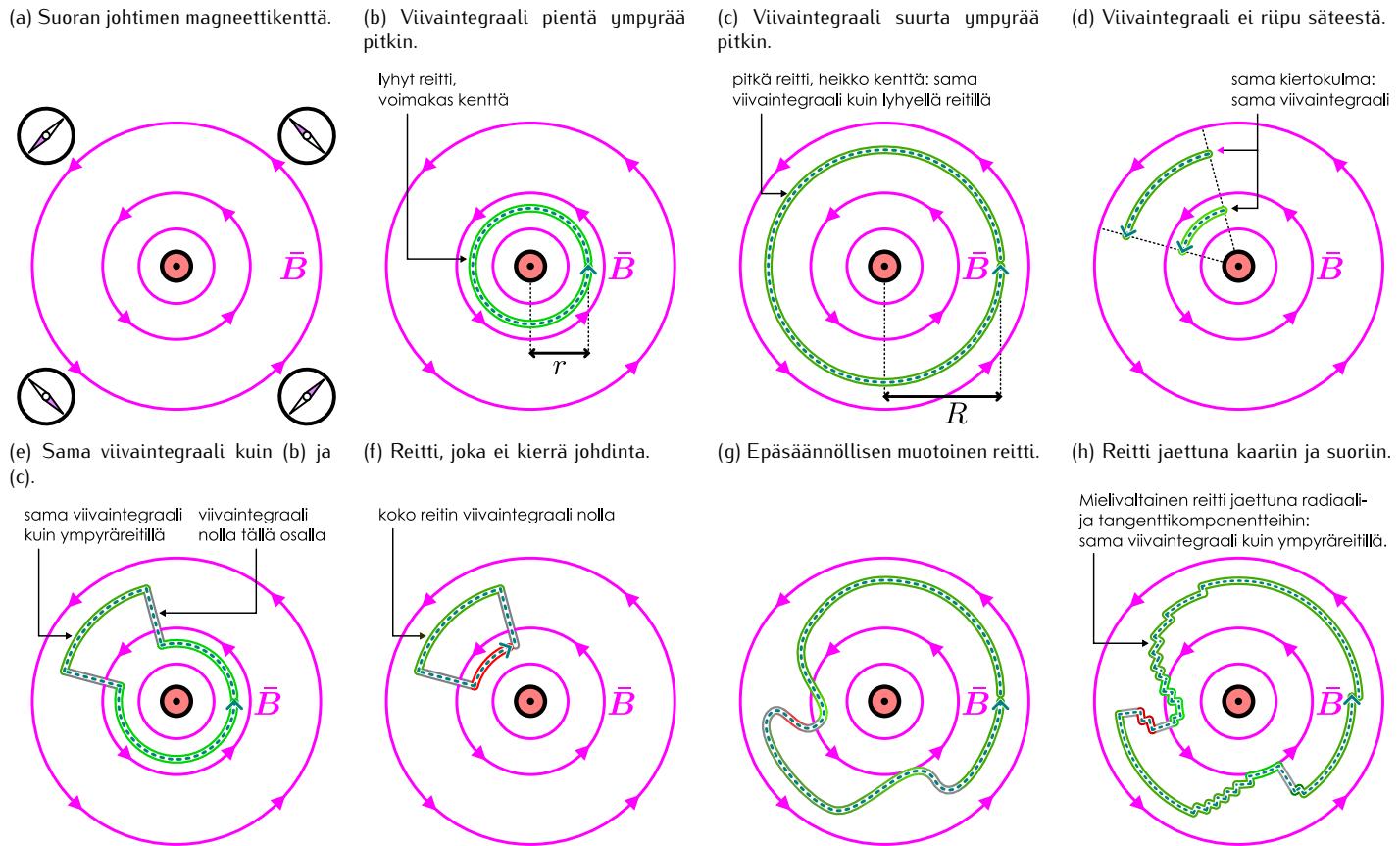
$$B = k_\mu \frac{i}{r}. \quad (12.51)$$

Lisäksi kenttä osoittaa kaikkialla reitin tangentin suuntaan, joten viivaintegraali on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden  $B$  ja reitin pituuden  $L = 2\pi r$  tulo,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = BL = k_\mu \frac{i}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi k_\mu i. \quad (12.52)$$

## MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.16: Magneettikenttä muodostaa pyörteen virtajohtimen ympärille, joten kentän viivaintegraali johdinta kiertävällä reitillä on positiivinen, jos johdin kierretään kentän suunnassa. Viivaintegraalin arvo ei kuitenkaan riipu siitä, millainen tämä reitti täsmälleen on.



Tässä pieni ympyrä integrointimerkissä on muistutus siitä, että viivaintegraali lasketaan *suljettua* reittiä pitkin. Sillä ei ole mitään muuta merkitystä.

Huomionarvoista tuloksessa on erityisesti se, että sen mukaan magneettikentän *viivaintegraalin arvo ei riipu valitun reitin säädestä*. Esimerkiksi kuvassa (c) reitiksi on valittu suurempi ympyrä, jonka säde on  $R$ . Tämä reitti on pidempi kuin kuvassa (b), mutta samalla magneettikenttä reitillä on heikompi, ja nämä tekijät kumoavat toisensa täydellisesti. *Viivaintegraalin arvo riippuu kuitenkin reitin läpi kulkevan virran i suuruudesta*.

Magneettikentän viivaintegraali on siis sama millä tahansa ympyrällä, jonka keskipisteessä johdin on. Tämä tarkoittaa myös sitä, että jos laskemme viivaintegraalin kahta sellaista ympyränkaarta pitkin, jotka kiertävät johtimen ympäri yhtä suuren kulman kuten kuvassa (d), tuloksen pitää olla kummallakin kaarella sama. Näin siksi, että kumpikin kaari erottaa yhtä suuren osuuden kokonaisesta ympyrästä.

Toisaalta viivaintegraali on nolla, kun integroimisreitti kulkee kohtisuoraan kenttää vastaan, koska tällöin  $\bar{B} \cdot d\bar{r} = 0$ . Niinpä jos esimerkiksi kuvan (b)  $r$ -säteisestä ympyräreitistä erotetaan kuvan (d) pienempää kaarta vastaava osuus ja korvataan se vastaavalla  $R$ -säteisellä kaarella kuten kuvassa (e), viivaintegraalin arvo ei muutu, sillä kaarta pitkin lasketun integraalin arvo ei operaatiossa muutu ja toisaalta integraali on nolla kaaret yhdistävillä suorilla. Siispä myös kuvan (e) reittiä pitkin lasketun viivaintegraalin arvo noudattaa yhtälöä (12.52).

**12.14** Johdin on  $xy$ -tason origossa ja siinä kulkee 1 A virta  $z$ -suuntaan. Mitä ovat (i) magneetikentän komponentti reitin suunnassa, (ii) reitin pituus ja (iii) kentän viivaintegraali, kun reitti on  
 (a) origokeskisen ympyrän kaari pisteestä  $(1, 0)$  pisteeseen  $(0, 1)$  vastapäivään (yksiköt metrejä),  
 (b) origokeskisen ympyrän kaari pisteestä  $(0, 2)$  pisteeseen  $(2, 0)$  myötäpäivään,  
 (c) suora pisteestä  $(1, 0)$  pisteeseen  $(2, 0)$ ?

Samalla periaatteella voimme päätellä viivaintegraalin arvon myös kuvassa (f) esitettyllä reitillä, jossa kuvan (d) kaaret on yhdistetty yhdeksi suljetuksi poluki. Nyt lyhyempi kaari kuljetaan kenttään nähdien vastakkaiseen suuntaan, joten integraali sitä pitkin on negatiivinen. Toisaalta integraalin itseisarvo on kaarilla edelleen yhtä suuri, ja kaaria yhdistävillä suorilla integraali on nolla, joten kaikkiaan *viivaintegraali on tällä polulla nolla*. Toisaalta tämän reitin läpi ei kulje lainkaan sähkövirtaa, joten tämäkin tulos on sopusoinnussa yhtälön (12.52) kanssa.

Itse asiassa tulos (12.52) pätee *millä tahansa* reitillä riippumatta siitä, kiertääkö se johtimen vai ei. Mitä tahansa reittiä voidaan nimittää approksimoida johdinta kiertävällä kaarilla ja johtimesta poispäin osoittavilla suorilla, jolloin sama päättely toimii edelleen. Esimerkiksi kuvan (g) epäsäännöllisen muotoinen reitti voidaan jakaa kaariin ja suoriin kuvan (h) tapaan. Käyräviivaisia reittejä voi kuvata tällaisella suorista ja kaarista koostuvalla reitillä mielivaltaisen tarkasti. Toisaalta viivaintegraalin arvo on verrannollinen reitin läpi kulkevan virran suuruuteen *millä tahansa* kaarista ja suorista koostuvalla reitillä. Niinpä viivaintegraalin täytyy riippua vain sen läpi kulkevan virran suuruudesta myös kuvan (g) käyrällä reitillä.

Kuvassa 12.16 tarkasteltiin vain yhden johtimen kenttää, mutta periaate yleistyy myös systeemeihin, joissa on useita virtajohtimia. Kuvassa 12.17 on esimerkki systeemistä, jossa on kaksi suoraa johdinta, ja näissä johtimissa kulkee samansuuruinen virta vastakkaisiin suuntiin. Näimme tällaisen kentän jo kuvassa 12.11 magneettikentän superposition tarkastelun yhteydessä. Kenttä kulkee voimakkaana johdinten välistä ja käännyy sitten kiertämään kummankin johtimen ympäri.

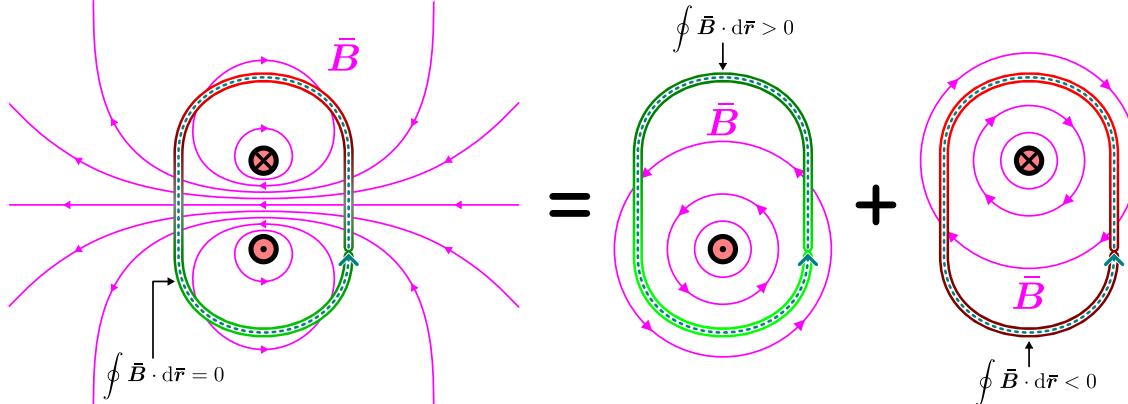
Kuvassa 12.17 (a) tarkastellaan magneettikentän viivaintegraalia reitillä, joka kiertää molemmat johtimet vastapäivään. Alemmassa johtimessa kulkee virta kohti katsojaa, joten tämän johtimen ympäri magneettikenttä on pyörre reitin suuntaan. Niinpä viivaintegraali on reitin alasosassa positiivinen. Ylemmässä johtimessa virta kulkee kuitenkin pois katsojasta, joten oikean käden säännön mukaan magneettikenttä kiertää tätä johdinta myötäpäivään, reitin kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Niinpä viivaintegraalin arvo on reitin yläosassa negatiivinen. Positiiviset ja negatiiviset osuudet kumoavat tällöin toisensa ja viivaintegraali on kokonaisuudessaan nolla. Tämä on sopusoinnussa yhtälön (12.52) kanssa, sillä vaikka reitin läpi kulkee virtaa kahta johdinta pitkin, nämä johtimet kuljettavat virtaa eri suuntiin. Reitin läpi siirryy siis yhtä paljon varausta kumpaankin suuntaan, jolloin *kokonaisvirta on nolla*.

Päättelään vielä täsmällisesti, että viivaintegraalin täytyy olla nolla millä tahansa reitillä, jonka läpi kulkee yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset virrat  $i_A$  ja  $i_B$ . Kentien superpositioperiaatten mukaisesti kahden johtimen magneettikenttä on kaikkialla johdinten yksinään tuottamien kenttien summa,

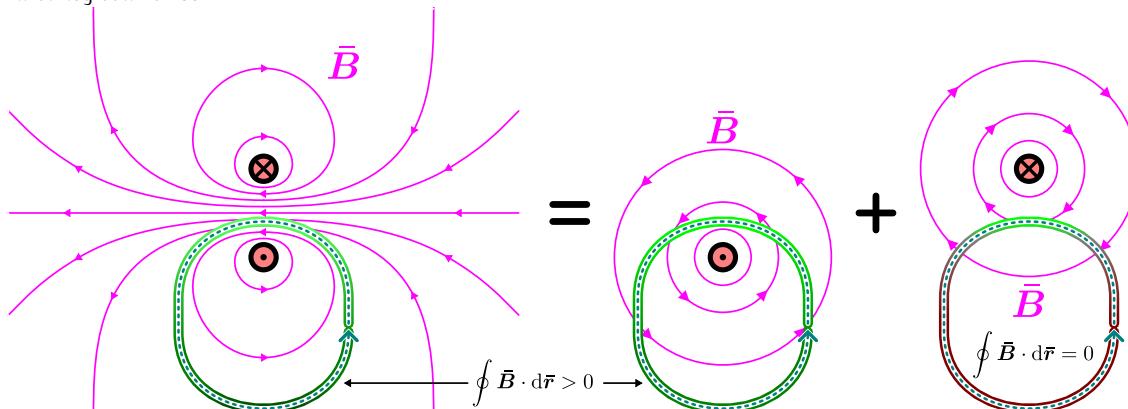
$$\bar{B}_{\text{kokonais}} = \bar{B}_A + \bar{B}_B. \quad (12.53)$$

Kuva 12.17: Amp'è=latexren laki virtajohtimille. Magneettikentän viivaintegraali suljettua reittiä pitkin riippuu ainoastaan reitin läpi kulkevasta kokonaisvirrasta. Kokonaiskentän viivaintegraalin voi määrittää myös laskemalla jokaisen johtimen yksinään tuottaman kentän viivaintegraalin ja laskemalla nämä yhteen.

(a) Reitin läpi kulkeva kokonaisvirta on nolla, joten viivaintegraali on nolla.



(b) Reitin läpi kulkee nollasta poikkeava virta, joten viivaintegraali ei ole nolla. Reitin ulkopuolelle jäävät virrat eivät vaikuta viivaintegraalin arvoon.



## MAGNEETTIKENTTÄ

Toisaalta integraalin voi laskea termi kerrallaan, joten

$$\oint \bar{B}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = \oint (\bar{B}_A + \bar{B}_B) \cdot d\bar{r} = \oint \bar{B}_A \cdot d\bar{r} + \oint \bar{B}_B \cdot d\bar{r}. \quad (12.54)$$

Niinpä viivaintegraalin voi laskea tarkastelemalla erikseen jokaisen johtimen yksinään luoman kentän viivaintegraaleja ja summaamalla nämä yhteen. Tiedämme myös, että kumpikin johdin tuottaa yksinään kentän, jonka viivaintegraali riippuu vain johtimen läpi kulkevan virran suuruudesta yhtälön (12.52) mukaisesti,

$$\oint \bar{B}_A \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu i_A \quad (12.55)$$

$$\oint \bar{B}_B \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu i_B, \quad (12.56)$$

joten kokonaiskentän viivaintegraali on

$$\oint \bar{B}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu (i_A + i_B) = 2\pi k_\mu i_{\text{kokonais}}. \quad (12.57)$$

Kuvassa 12.17 (a) viivaintegraali valitulla reitillä on alemman johtimen kentässä positiivinen ja ylemmän kentässä negatiivinen, jolloin kokonaiskentän integraali on nolla. Vastaavasti kuvassa (b) integrointireitti kiertää vain alemman johtimen, jolloin alemman johtimen kentän integraali on positiivinen ja ylemmän johtimen kentän integraali on nolla. Näin ollen kokonaiskentän integraali on sama kuin jos ylempää johdinta ei olisi lainkaan.

Sama päätely toimii olipa virtajohtimia kuinka monta. Tulos yleistyy myös tapauksiin, joissa johtimet eivät ole suorat. Integroimisreitinkään ei itse asiassa tarvitse olla tasokäyrä, vaan mikä tahansa suljettu reitti kelpaa, kunhan reitillä on olemassa sisäpuoli, jotta reitin läpi kulkeva virta voidaan määrittää yksikäsitteisesti. *Ampèren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali suljetulla reitillä pitkin on aina suoraan verrannollinen reitin läpi kulkevaan kokonaissähkövirtaan,*

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (12.58)$$

Tässä virran ja viivaintegraalin suunnat valitaan jälleen oikean käden säännöllä. Jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat integrointireitin suuntaan, ojennettu peukalo osoittaa sähkövirran positiivisen suunnan.

Laissa esiintyvä verrannollisuuskerroin  $\mu_0$  on **magneettivakio**, jonka historiallinen nimi on *tyhjiön permeabiliteetti*. Vertaamalla yhtälöitä (12.52) ja (12.58) näemme, että magneettivakion ja aikaisemmin mm. Biot'n ja Savartin laissa esiintyneen vakion  $k_\mu$  välinen yhteys on

$$k_\mu = \frac{\mu_0}{2\pi}. \quad (12.59)$$

Koska Ampèren laki on yleispätevä laki ja Biot'n ja Savartin laki vain sen erikoistapaus (samaan tapaan kuin Gaussian laki on sähkökentien fundamentaali laki ja Coulombin laki sen erikoistapaus), magnetismia kuvavissa laeissa käytetään yleisesti nimenomaan magneettivakioita  $\mu_0$ . Edelleen koska ampeerin määritelmä antoi vakiolle  $k_\mu$  arvon  $2.0 \cdot 10^{-7}$  N/A<sup>2</sup>, magneettivakion arvo on likimain

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (12.60)$$

Vanhassa SI-järjestelmässä tämä arvo oli täsmällinen. Koska nykyään ampeeri määritellään vakion  $e$  kautta, arvo ei ole enää aivan täsmällinen, mutta se on edelleen erittäin tarkka likiarvo.

Gaussian ja Ampèren lait ovat luonteeltaan geometrisia. Gaussian laki sanoo, että kentän ominaisuudet mielivaltaisella suljetulla pinnalla riippuvat pinnan sisällä olevista kentän lähteistä. Mitä enemmän pinnan sisällä on kentän lähteitä, sitä enemmän pinnan sisältä ulos kulkee kenttäviivoja, ja tästä mittaa kentän vuo pinnan läpi. Viivaintegraali suljetulla reitillä mittaa puolestaan kentän pyörteisyyden voimakkuutta. Ampèren lain mukaan siis magneettikentän pyörteisyyss millä tahansa suljetulla reitillä riippuu reitin läpi kulkevasta sähkövirrasta, ja tämän voi tulkita tarkoittavan sitä, että *sähkövirrat toimivat kentän pyörteiden keskuksina*. Ampèren laki siis kertoo yleisesti sen, että minkä tahansa alueen reunalla on sitä voimakkaampi pyörre, mitä voimakkaampi pyörteen keskus alueen sisällä on.

**12.15** Tarkastellaan magneettikenttää suljetulla reitillä, joka muodostaa *xy*-tasoon *r*-säteisen origokeskisen ympyrän. Suora virtajohdin kulkee origon kautta, ja johtimessa kulkee virta  $i$  suuntaan  $(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$ .

(a) Mikä on reitin läpi kulkeva kokonaisvirta?

(b) Mikä on magneettikentän viivaintegraali reitin ympäri?

(c) Voiko tämän perusteella päätellä magneettikentän voimakkuuden reitillä? Jos voi, miten? Jos ei voi, miksi?



## esimerkki 12.3

## Ampèren laki

Eräs poikkileikkauseltaan ympyrän muotoinen johdin (säde  $R$ ) ei ole kauttaaltaan samanlaista materiaalia, ja siinä virrantihesys riippuu keskiakselista mitatusta etäisyydestä  $r$  funktion  $j_x = ar^2$  mukaisesti. Mikä on johtimen tuottaman magneettikentän voimakkuus etäisyyden  $r$  funktiona?

**TILANNE** Kyseessä on samanlainen johdin kuin esimerkissä 11.2.

**SUUNNITELMA** Ampèren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali millä tahansa suljetulla reitillä on verrannollinen reitin läpi kulkevan sähkövirtaan. Nyt tilanne on lisäksi sylinterisymmetrinen, joten magneettikentän täytyy muodostaa johtimen keskiakselia kiertäviä pyörteitä ja kentän voimakkuus voi riippua vain johtimen keskipisteestä mitatusta etäisyydestä  $r$ . Jos valitsemme integroimisreitiksi  $r$ -säteisen ympyrän, jonka keskipiste on johtimen keskiakselilla, magneettikentän täytyy olla kaikkialla reitin tangentin suuntainen ja voimakkuudeltaan vakio,  $B(r)$ . Näin ollen kentän viivaintegraali on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja reitin pituuden tulo. Toisaalta Ampèren lain mukaan integraalin arvo riippuu vain polun läpi kulkevasta virrasta, mistä voi ratkaista kentän voimakkuuden. Jos koko johdin kulkee integroimispolun läpi ( $r > R$ ), Ampèren laissa esiintyvä virta on sama kuin johtimessa kulkeva kokonaisvirta. Jos integroimispolku kulkee johtimen sisällä ( $r < R$ ), täytyy huomioida vain polun läpi kulkeva osuus virrasta.

Ampèren lain mukaan siis

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (12.61)$$

Magneettikentän viivaintegraali  $r$ -säteisen reitin ympäri on

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = 2\pi r B. \quad (12.62)$$

Esimerkissä 11.2 laskettiin, että johtimen  $R$ -säteisen osuuden läpi kulkee sähkövirta

$$i(R) = \frac{1}{2}\pi a R^4. \quad (12.63)$$

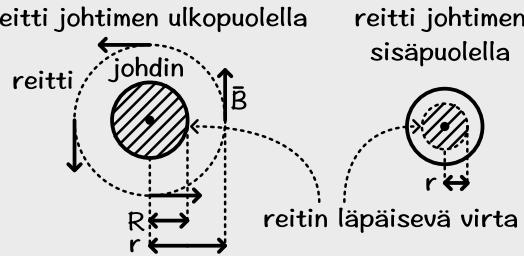
**RATKAISU** Jos  $r > R$ , integroimispolun läpi kulkee virta  $i_{\text{kokonais}} = i(R)$ . Tällöin Ampèren laista saadaan  $2\pi r B = \mu_0 i(R)$  eli

$$B = \frac{\mu_0 i(R)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 a R^4}{4r}. \quad (12.64)$$

Jos  $r < R$ , integroimispolun läpi kulkee virta  $i_{\text{kokonais}} = i(r)$ . Nyt siis

$$B = \frac{\mu_0 i(r)}{2\pi r} = \frac{1}{4}\mu_0 a r^3. \quad (12.65)$$

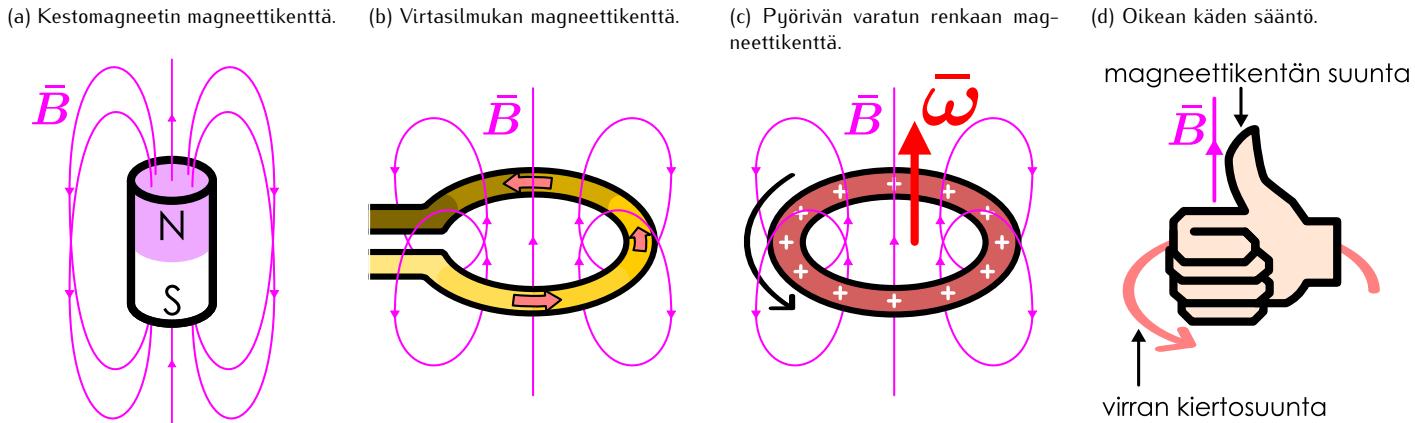
**ARVIOINTI** Johtimen ulkopuolella kenttä olisi voitu laskea myös pitkän suoran johtimen kentän lausekkeesta, ja lopputulos on se, että kentän voimakkuus on käännetään verrannollinen etäisyyteen  $r$ . Johtimen sisällä kenttä kasvaa etäisyyden  $r$ -funktiona. Johtimen keskipisteessä kentän voimakkuus on nolla, kuten symmetrian perusteella pitääkin olla. Sijoittamalla  $r = R$  nähdään myös, että kumpikin yhtälö antaa johtimen pinnalla saman tuloksen  $B(R) = \frac{1}{4}\mu_0 a R^3$  kuten niiden pitääkin.



**12.16** Selitä omin sanoin Gaussian ja Ampèren lait magneettikentille. Selitä erityisesti, miten Ampèren lain avulla voidaan päätellä magneettikenttä symmetrisessä systeemissä.

## MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.18: Samantyppinen magneettikenttä kulkee magneetin, virtasilmukan ja pyörivän varatun kappaleen läpi.



## 12.4 Dipolit

Ampèren lain mukaan magneettikentän pyörteet syntyvät sähkövirtojen ympärille. Mutta toisaalta magneettikenttiä voi luoda sähkövirtojen lisäksi myös kestomagneeteilla, joissa ei ainakaan makroskooppisessa mittakaavassa kulje sähkövirtaa. Tämä on selvästikin ristiriita. Joko Ampèren laki ei pädekaän magneeteille vaan niitä kuvaa jokin toinen laki *tai* magneettienkin kyky luoda magneettikenttiä löytyy pohjimmiltaan mikroskooppisiin sähkövirtoihin. Luvun alussa opimme kestomagneettien magneettisuuden olevan peräisin siitä, että elektronit toimivat magneettisten dipolien tavoin, ja nyt tavoitteemme on selvitää, miten nämä dipolit todella käyttäytyvät.

## Virtasilmukan magneettikenttä

Kuvaan 12.18 (a) on piirretty kestomagneetin magneettikenttä. Kenttä on voimakkaimmillaan magneetin sisällä (ei näy kuvassa), missä kenttä osoittaa S-navalta N-nolle. Magneetin ulkopuolella magneettikenttä levää N-navalta kaikkiin suuntiin kiertäen lopulta takaisin S-nolle. Kestomagneetin magneettikenttä muodostaa siis silmukoita, joiden keskuksia ovat magneetin kyljissä. Kentällä täytyy olla tällainen muoto, koska magneettisen Gaussin lain mukaan magneettikentän kenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita. Jokaisen magneetin läpi kulkevan kenttäviivan täytyy siis jatkuva äärettömyyksiin tai tehdä silmukka magneetin ympärille.

Samanlainen kenttä on mahdollista tuottaa myös sähkövirralla, sillä Ampèren lain mukaan virta toimii magneettikentän pyörteiden keskuksena. Jos siis teemme virtajohtimesta *silmukan* kuten kuvassa 12.18 (b), magneettikenttä muodostaa virtajohtimen ympärille samanlaisia pyörteitä kuin kestomagneetissa. Kuvassa silmukan jokaisessa pistessä kulkeva virta tuottaa silmukan keskelle ylöspäin osoittavan magneettikentän, joten kentän superpositiooperaation mukaan silmukan keskellä on voimakas ylöspäin suuntautuva magneettikenttä (vrt. kuva 12.11 (c)). Silmukan ulkopuolella on puolestaan heikko magneettikenttä, joka osoittaa kuvassa alas paini aivan kuten kestomagneetissakin.

Silmukaksi kierretyn johtimessa magneettikentän synnyttää ympyrää kiertävä sähkövirta. Toisaalta sähkövirta on varauksenkuljetusten järjestynyttä liikkettä, joten myös liikkeessä olevat varatut kappaleet kuljettavat sähkövirtaa ja synnyttävät ympärilleen magneettikentän. Erityisesti varattu kappaleen *pyöriessä* siinä olevat varaukset liikkuvat ympyräradalla, joten pyörivät varaukset muodostavat virtasilmukoita ja nämä virtasilmukat synnyttävät magneettikentän. Esimerkiksi kuvan 12.18 (c) varattu rengas pyörii keskipisteensä ympäri, jolloin se synnyttää aivan samanlaisen magneettikentän kuin vastaava johdin, jossa kulkee sähkövirta.



**12.17** Varattu tanko, jonka varaustiheys on  $10.0 \text{ kC/m}^3$ , poikkipinta-ala  $2.0 \text{ mm}^2$  ja pituus  $2.0 \text{ cm}$  taivutetaan täydelliseksi ympyräksi. Näin syntynyt rengasta pyöritetään kulmanopeudella  $500 \text{ s}^{-1}$  keskipisteensä ympäri. (a) Kuinka suuri sähkövirta pyörivän renkaan mukana kulkee? (b) Mikä on magneettikentän voimakkuus renkaan keskellä?

Virtasilmukoiden ja pyörivien varattujen kappaleiden magneettikentän suunnan muistamiseksi on olemassa oma oikean käden sääntönsä, joka on esitetty kuvassa 12.18 (d). Kun oikean käden sormet kierretään osoittamaan virran kulkusuuntaan tai positiivisesti varatun kappaleen pyörimissuuntaan, peukalo osoittaa magneettikentän suunnan silmukan tai kappaleen keskellä. Samanlainen oikean käden sääntö pätee pyörivän kappaleen pyörimissuunnan sekä sen kulmanopeus- tai kulmaliijemäärävektorin välillä (kuva 5.23), joten

pyörivän positiivisesti varatun kappaleen magneettikenttä läpäisee siis kappaleen suunnassa, johon kappaleen kulmanopeus- ja kulmalükemäärävektorit osoittavat.



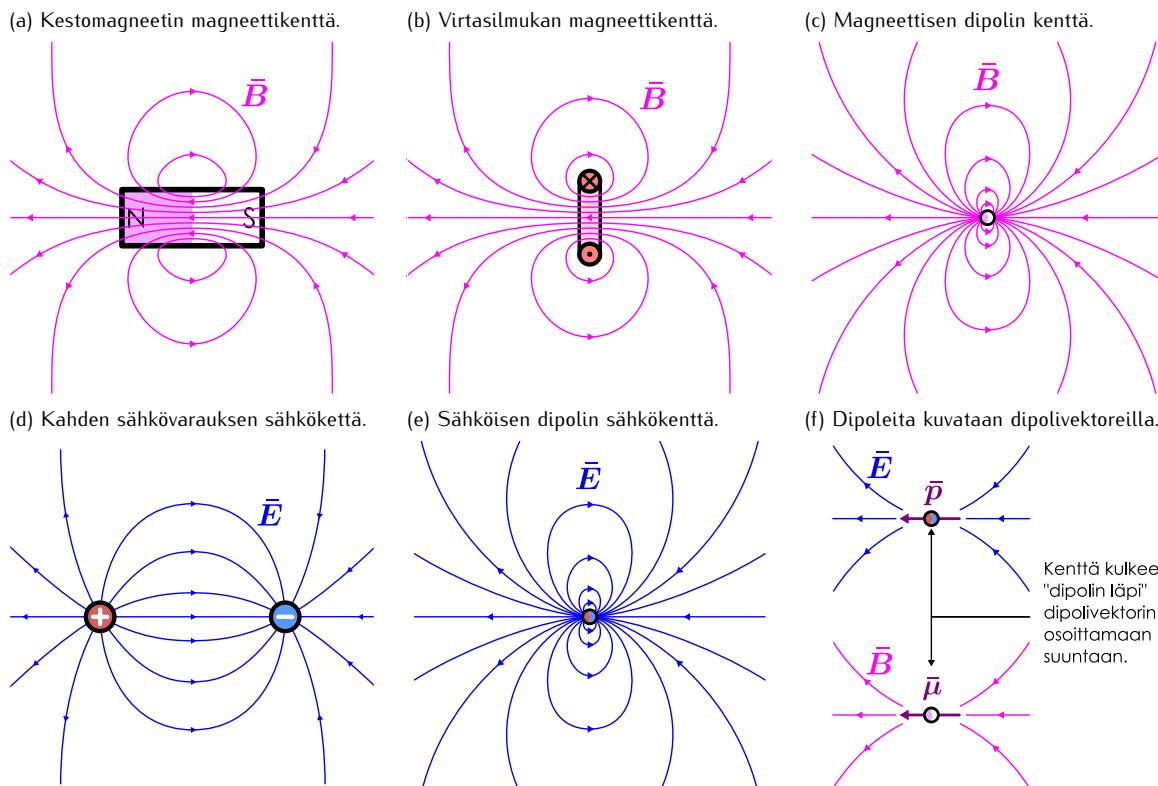
**12.18** Katsot negatiivisesti varatun renkaan läpi ja rengas pyörii sinun näkökulmastasi myötäpäivään. Mihin suuntaan renkaan synnyttämä magneettikenttä osoittaa renkaan keskellä?

## Magneettiset ja sähköiset dipolit

Kestomagneetin, virtasilmukan ja pyörivän varatun kappaleen magneettikentät ovat siis samantyyppiset, vaikka magneettikentän täsmällinen muoto riippuu tieteenkin kentän tuottavan kappaleen muodosta samalla lailalla kuin sähköisesti varatun kappaleen tuottaman sähkökentän muoto riippuu varatun kappaleen muodosta. Opimme kuitenkin sähkökenttiä tutkiessamme, että minkä tahansa varatun kappaleen sähkökenttä on täsmälleen samanlainen kuin pisteverauksen kenttä, kun kappalesta tarkastellaan tarpeksi kaukaa, koska kaukaa katsoen kappaleiden yksityiskohtaista muotoa ei voi havaita. Aivan samalla tavalla minkä tahansa kestomagneetin, virtasilmukan tai pyörivän varatun kappaleen täsmällinen muoto on merkityksetön, kun niiden muodostamaa magneettikenttää tarkastellaan hyvin kauhaa. Esimerkiksi kuvan 12.19 (a) on piirretty kestomagneetin magneettikenttää magneetin kautta kulkevassa tasossa ja vastaavasti kuvan 12.19 (b) on piirretty virtasilmukan magneettikenttää silmukan halkaisevassa tasossa. (Puolel silmukasta on siis kuvan piirretyn tason takana ja puolel sen edessä.) Kuvan 12.19 (c) on puolestaan piirretty *pistemäisen magneettisen dipolin kenttä*. Magneetin ja silmukan kentät ovat kappaleiden lähellä hieman erilaiset, mutta tarpeeksi kauhaa tarkasteltuna sekä kestomagneetin että virtasilmukan kentät ovat täsmälleen samanlaiset kuin pistemäisen dipolin kenttä. Tai vaihtoehtoisesti, jos kestomagneetti tai virtasilmukka kutistettaisiin mielivaltaisen pieniksi, niihin kummankin magneettikenttää tulisi täsmälleen samanlainen kuin pistemäisen dipolin kenttä.

Luvun alussa opimme, että elektronit ovat mikroskooppisia magneettisia dipoleja ja että kestomagneettien magneettisuus johtuu elektronien muodostamien dipolien järjestymisestä yhdensuuntaisiksi. Nyt voimme selettää, miksi näin on. Atomeissa olevien elektronien liikkeen tarkka ymmärtäminen vaatii kvantimekanikkaa, johon tutustumme vasta luvussa 17. Oleellista atomien magneettisuuden kannalta on kuitenkin se, että elektronit voivat *kiertää* atoimydintä, jolloin niillä on *kulmalükemäärä*. Tämän lisäksi elektroneilla on sisäistä kulmalükemäärä. Ja koska elektroni on negatiivisesti varautunut hiukkanen, sen kiertoliike muodostaa mik-

**Kuva 12.19:** Kestomagneetin ja virtasilmukan kentät ovat keskenään samankaltaiset. Kauhaa katsoen kummankin kenttä on täsmälleen samanlainen kuin magneettisen dipolin kenttä. Se on puolestaan täsmälleen samanlainen kuin sähköisen dipolin synnyttämä sähkökenttä.



## MAGNEETTIKENTTÄ

roskooppisen virtasilmukan. Näin elektroni synnyttää ympärilleen dipolin magneettikentän, jonka suunnan ja voimakkuuden määrää elektronin kulmaliike määrän suunta ja suuruus.

Makroskooppisessa mittakaavassa atomit ja elektronit ovat aina erittäin pieniä, joten magneettisia atomeja voidaan makroskooppisessa mittakaavassa pitää pistemäisinä magneettisina dipoleina, joiden magneettikenttä on kuvan 12.19 (c) muotoinen. Kestomagneeteissa on valtava määrä näitä dipoleja, joten niiden kenttä on kaikkien näiden dipolien kentien superpositio.



**12.19** Päteekö Ampèren laki myös kestomagneeteille, jos otetaan magneettisissa atomeissa pyörivien elektronien kuljettamat mikroskooppiset sähkövирrat huomioon?

Magneettiset "dipolit" ovat siis pohjimmiltaan virtasilmukoita eivätkä suinkaan kahden magneettisen navan yhdistelmiä. Tässä mielessä magneettisia napoja ei oikeastaan ole olemassakaan. Virtasilmukoita kuitenkin kutsutaan magneettisiksi dipoleiksi, koska ne käyttäytyvät samalla tavalla kuin sähköiset dipolit, jotka todella koostuvat kahdesta navasta. Kuvassa 12.19 (d) on kuvattu sähköisen dipolin sähkökenttä dipolin sisällä. Sähkökentän kenttäviivat lähtevät positiivisesta varauksesta ja päättyvät negatiiviseen varaukseen, joten kenttä kulkee kaikkialla positiivisesta navasta negatiiviseen. Magneetin magneettikenttä kulkee magneetin ulkopuolella N-navasta S-napaan, joten ulkopuolelta tarkastellen magneetin N-napa toimii kuin sähköisen dipolin positiivinen varaus ja S-napa kuin negativinen varaus. Magneetin sisällä magneettikenttä kuitekin kulkee S-navasta N-napaan eli päinvastaiseen suuntaan kuin sähköisessä dipolissa. Sähköisen ja magneettisen dipolin sisäinen rakenne on siis aivan erilainen. Kaukaa tarkasteltuna dipolin sisäistä kenttää on kuitenkin mahdoton havaita. Jos sähköinen dipoli kutistetaan hyvin pieneksi tai jos suurta dipolia tarkastellaan hyvin kaukaa, sen sähkökenttä vastaa aina kuvaa 12.19 (e) piirrettyä pistemäisen sähköisen dipolin kenttää. Tämä sähkökenttä on muodoltaan *täsmälleen samanlainen* kuin kuvan 12.19 (c) pistemäisen magneettisen dipolin kenttä. Edelleen jos magneettisia varauksia todella olisi olemassa, tällaisten varausten muodostaman dipolin magneettikenttää ei voisi mitenkään erottaa mikroskooppisen virtasilmukan magneettikentstä. Ja koska virtasilmukoita ei voi erottaa aidoista magneettista dipoleista, voimme aivan hyvin ajatella niiden olevan S- ja N-navoista koostuvia magneettisia dipoleja vaikkeivat ne sitä todellisuudessa olekaan.

Edellisissä esimerkeissä tarkasteltiin täsmällisesti ottaen vain kenttien muotoa. Kaikilla pistemäisillä dipoleilla on samanmuotoinen kenttä, mutta kentän voimakkuus riippuu kuitenkin dipolin voimakkuudesta. Jos esimerkiksi sähköisen dipolin muodostavien varausten suuruudet kaksinkertaistetaan, myös sähkökentän voimakkuus kaksinkertaistuu kaikkialla, mutta kentän muoto ei muutu. Vastaavasti jos virtasilmukassa kulkevan sähkövirran suuruus kaksinkertaistetaan, magneettikentän voimakkuus kaksinkertaistuu.

Luvussa 10 määrittelimme sähköisen dipolin suuntaa ja voimakkuutta kuvaavan *dipolimomenttivektorin*  $\vec{p}$ . Tämän vektorin suunta määriteltiin niin, että vektori osoittaa dipolin negatiivisesta varauksesta kohti positiivista varausta. Kuvassa 12.19 dipolin positiivinen napa on kuvassa vasemmalla, joten dipolimomenttivektori osoittaa kuvassa määritelmän mukaan oikealta vasemmalle.

Dipolimomenttivektorin suunnan ja dipolin luoman kentän suunnan välinen yhteyts näkyjä puolestaan kuvassa 12.19 (f). Sähkökenttä lähtee positiivisesta navasta ja päättyy negatiiviseen napaan, joten dipolin ulkopuolella kenttäviivat näyttävät "suihkuavan" dipolin positiivisesta navasta kuvassa oikealta vasemmalle. Kenttä myös päättyy negatiiviseen napaan ikään kuin napa "imisi" kenttäviivoja itseensä, jolloin kenttäviivat saapuvat dipoliin osoittaa kuvassa niin ikään oikealta vasemmalle. *Sähkökenttä siis lähtee dipolista ja saapuu dipoliin dipolimomenttivektorin osoittamassa suunnassa.*

Voimme määritellä samalla tavalla myös **magneettisen dipolimomenttivektorin**, jonka suunta osoittaa suunnan, jossa magneettikentän kenttäviivat läpäisevät dipolin, ja jonka suuruus määrää magneetikentän suuruuden. Tätä magneettista dipolimomenttivektoria merkitään tavallisesti symbolilla  $\vec{\mu}$ . (Symboli on sama kuin magneettivakion symboli, mutta nämä ovat aivan eri suuret.) Virtasilmukan magneettikenttä läpäisee silmukan kuvan 12.18 (d) oikean käden säännön mukaisesti ja dipolimomenttivektori osoittaa silmukan läpäisevän magneetikentän suuntaan, joten sama oikean käden sääntö pätee myös dipolimomentin suunnalle. Toisin sanoen *jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat silmukassa kulkevan virran kiertosuunnan, ojennettu peukalo osoittaa silmukkaa kuvaavan magneettisen dipolimomenttivektorin suunnan*.

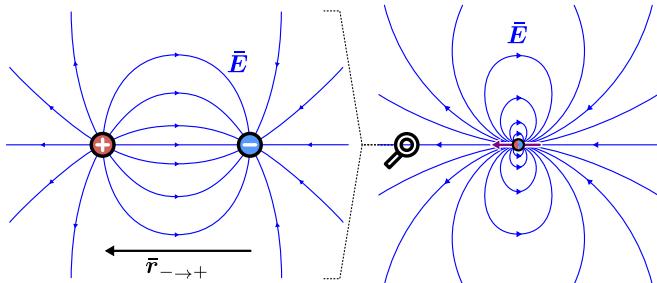


**12.20** Neliön muotoisessa virtasilmukassa kulkee elektroneja. Silmukan kärjet ovat pisteissä  $(1, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-1, -1, 0)$  ja  $(1, -1, 0)$ , ja virran kiertosuunta on sama kuin pisteiden järjestys edellä. (a) Mihin suuntaan silmukan magneettinen dipolimomenttivektori osoittaa? (b) Mihin suuntaan silmukan magneettikenttä osoittaa pisteessä (i)  $(0, 0, 0)$ , (ii)  $(0, 0, 2)$ , (iii)  $(2, 0, 0)$ ?

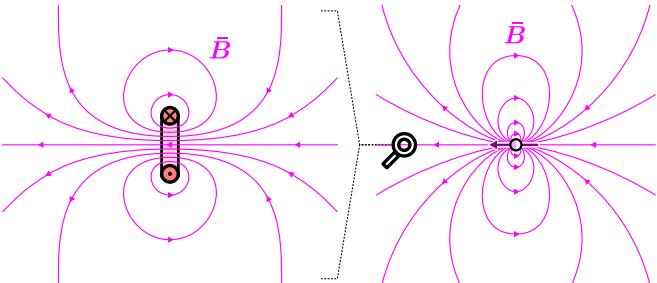
Sähköisen dipolin luoman sähkökentän voimakkuus on verrannollinen dipolin muodostavien varausten suuruuteen  $q$ , mutta dipolin sähkökentän voimakkuus riippuu kuitenkin myös varausten välisestä etäisyydestä  $r_{-\rightarrow+}$  kuten kuvissa 12.20 (a) ja (b) on havainnollistettu. Mitä lähempänä toisiaan varaukset ovat, sitä voimakkaammin niiden luoma sähkökenttä keskittyy varausten välille, mikä näkyy kenttäviivojen siirtymisenä. Gaussin lain mukaan kenttäviivojen kokonaismäärä ei muutu, mutta kuvassa (b) suurin osa kenttäviivoista on

Kuva 12.20: Sähköisen dipolin dipolimomentti riippuu varausten suuruudesta ja niiden välisestä etäisyydestä. Magneettisen dipolin dipolimomentti riippuu virran suuruudesta ja silmukan koosta.

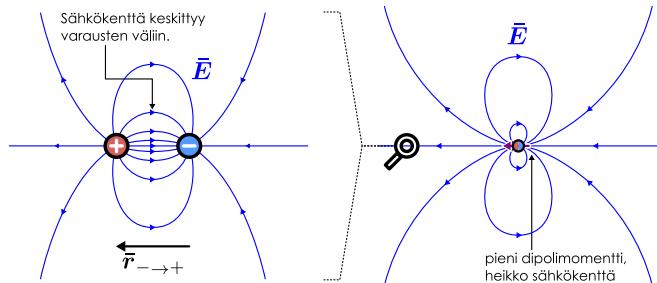
(a) Suuri sähköinen dipolimomentti.



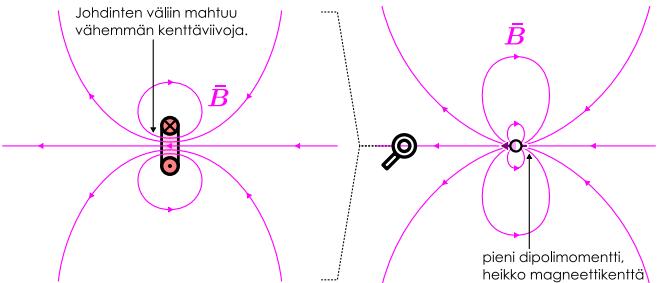
(c) Suuri magneettinen dipolimomentti.



(b) Pieni sähköinen dipolimomentti.



(d) Pieni magneettinen dipolimomentti.



varausten välissä. Tällöin *dipolista poispäin suuntautuvien kenttäviivojen määrän täytyy vähentyä*, mikä tarjoittaa kaukana dipolista havaitun sähkökentän heikentyvän. Sähködipolin sähkökenttä siis heikkenee, kun dipolin muodostavat varaukset lähestyvät toisiaan, ja esimerkissä 12.4 osoitetaan vielä täsmällisellä laskulla, että sähkökentän voimakkuus kaukana dipolista on suoraan verrannollinen varausten väliseen etäisyyteen.

Näiden tulosten perusteella kaksi dipolia tuottaa samanlaisen sähkökentän, jos dipolin muodostavien varausten suuruuden ja niiden välisen etäisyyden tulo on yhtä suuri. Mutta toisaalta tämä tulo on yhtälön (10.3) mukaisesti sähköisen dipolimomentti,  $p = qr_{-\rightarrow+}$ . Siispä *dipolin sähkökentän voimakkuus on suoraan verrannollinen sen dipolimomentin suuruuteen*. Tämän ominaisuuden ansiosta dipolimomentti on hyvä suure kuvamaan dipolin ominaisuuksia.

Magneettisen dipolin kentän voimakkuuden pitäisi samaan tapaan olla verrannollinen magneettisen dipolimomentin suuruuteen. Virtasilmukan magneettikentän voimakkuus on tieteenkin verrannollinen silmukassa kulkevan virran voimakkuteen, mutta kentän voimakkuus riippuu myös silmukan koosta kuten kuvista 12.20 (c) ja (d) nähdään. Magneettiset kenttäviivat muodostavat pyörteitä vailla alkua ja loppua, joten kaikki virtasilmukan magneettikentän kenttäviivat kulkevat myös silmukan läpi. Suuresta silmukasta "mahtuu" läpi enemmän kenttäviivoja, joten karkeasti mitä suurempi silmukka on kyseessä, sitä enemmän kenttäviivoja sen magneettikentässä on. Toisaalta magneettikentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen, joten kaukana virtasilmukasta suuren silmukan kentän täytyy olla pienempi silmukan kenttää voimakkaampi.

Täsmällisesti virtasilmukan magneettinen dipolimomentti on verrannollinen silmukan rajaamaan *pinta-alaan*. Jos virtasilmukka on rajoitettu tasoon (eli se ei muodosta kolmiulotteista käyrää), silmukan magneettisen dipolimomentin *määritellään* olevan vektori, jonka suuruus on silmukassa kulkevan sähkövirran  $i$  ja silmukan pinta-alan  $A$  tulo,

$$\mu = iA. \quad (12.66)$$

Vektori osoittaa oikean käden säännön mukaisesti kohtisuoraan silmukan tasoon nähdien. Merkitsemällä silmukan tasoon nähdien kohtisuoraa vektoria eli tason normaalivektoria  $\hat{n}$ , dipolimomentivektoriksi saadaan

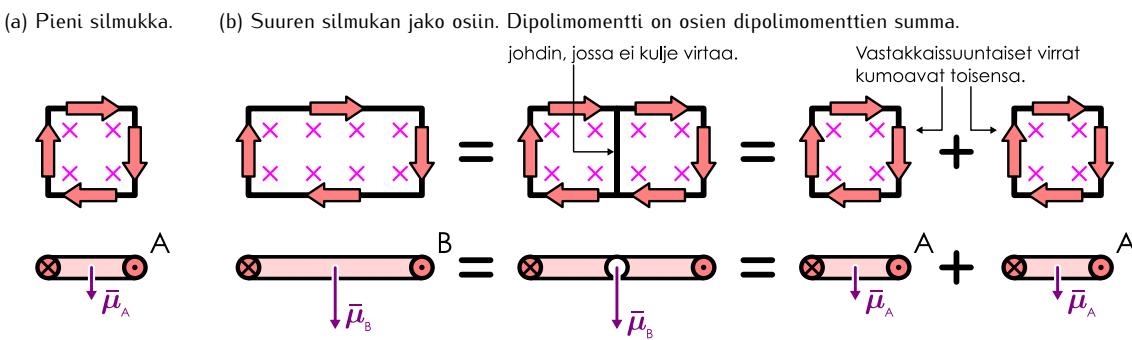
$$\bar{\mu} = iA\hat{n}. \quad (12.67)$$

Kuvassa 12.21 on havainnollistettu, miksi dipolimomentin täytyy riippua nimenomaan silmukan pinta-alasta eikä esimerkiksi sen reunan pituudesta. Kuvassa (a) on pieni virtasilmukka A, jonka dipolimomentti olkoon  $\bar{\mu}_A$ . Kuvassa (b) on toinen, pinta-alaltaan kaksinkertainen silmukka B, jossa kulkee yhtä suuri virta kuin kuvan (a) silmukassa. Tämän silmukan dipolimomentti on  $\bar{\mu}_B$ . Koska kuvan (b) silmukka on suurempi, siinä on enemmän liukkuavia varausenkuljettajia ja niinpä se luon voimakkaamman magneettikentän ja sillä täytyy olla suurempi dipolimomentti.

Silmukka A on muodoltaan neliö ja silmukka B on suorakaide. Jos silmukan A sivun pituus on  $L$ , sen reunan pituus on  $4L$  ja pinta-ala  $L^2$ . Vastaavasti silmukan B reunan pituus on  $6L$  ja ala  $2L^2$ . Toisin sanoen

## MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.21: Suuren virtasilmukan magneettikenttä on samanlainen kuin usean pienien silmukan kentät. Näin ollen virtasilmukan magneettinen momentti on suoraan verrannollinen silmukan pinta-alaan.



vaikka silmukan B pituus on vain puolitoistakertainen silmukkaan A nähdyn, sen pinta-ala on kaksinkertainen. Osoitamme nyt, että *suuremman silmukan B dipolimomentti on kaksinkertainen pienempään silmukkaan A verrattuna*. Tästä seuraa, että dipolimomentti on verrannollinen nimenomaan silmukan pinta-alaan eikä sen reunan pituuteen.

Magneettikentän pyörteitä synnyttävät vain virtaa kuljettavat johtimet, joten jos silmukan B keskelle lisättäisiin virtajohdin, jossa ei kulje virtaa, silmukan magneettikenttä ja siten myös dipolimomentti pysyisi muuttumattomana. (Kyseessä on ajatuskoe, joten ei nyt välitetä siitä, miksi virta kulkee silmukassa ja miksi se ei kulje silmukkaan lisätyssä johtimessa.) Toisaalta sähkövirta mittaa siirtymän varauksen kokonaismäärää, joten johtimessa kulkeva virta on nolla sekä silloin, kun johtimessa ei liiku lainkaan varausta, että silloin, kun varauksia liikkuu yhtä paljon kumpaankin suuntaan. Ei ole myöskään magneettikentän kannalta mitään eroa, ovatko varauksenkuljettajat johtimessa paikoillaan vai liikkuvat niitä yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin, koska eri suuntiin kulkevat virrat tuottaisivat magneettikenttään vastakkaisiin suuntiin kiertävät pyörteet, jotka kumoaisivat toisensa täydellisesti. Niinpä voimme aivan hyvin ajatella, että silmukkaan B lisätyssä johtimessa kulkee virta yhtä aikaa kumpaankin suuntaan.

Silmukan B keskelle lisättä johdin jakoi silmukan kahteen pienempään osaan, jotka ovat täsmälleen yhtä suuret kuin silmukka A. Jos nyt ajattelemme, että johtimessa kulkee toisiaan virta kumpaankin suuntaan eli kuvalta sekä ylös- että alas päin, voimme aivan hyvin ajatella kuvalta alas päin kulkevan virran olevan osa kuvan vasemmanpuolesta silmukkaa ja ylöspäin kulkevan virran kuuluvan oikeanpuoleiselle silmukalle. Nämä ajatellen silmukan B kummassakin puoliskossa kiertää sähkövirta, jolloin suuri silmukka B onkin itse asiassa kahden A-silmukan yhdistelmä. Suussa silmukassa B ei tietenkään tarvitse olla keskellä sen kahteen osaan jakavaa virtajohdinta, mutta *suuren silmukan B magneettikentän täytyy tämän päättelyn perusteella olla täsmälleen samanlainen kuin kenttä, jonka kaksi pienempää silmukkaa A yhdessä tuottaisi*. Edelleen koska silmukan synnyttämän magneettikentän voimakkuus on verrannollinen silmukan dipolimomenttiin, silmukan B magneettisen dipolimomentin täytyy olla kaksinkertainen silmukan A magneettiseen dipolimomenttiin nähden.

Täsmälleen samanlainen päättely toimii riippumatta silmukan muodosta. *Mikä tahansa silmukka voidaan jakaa pienempiin osiin*, jolloin suuren silmukan magneettinen dipolimomentti on sen osien dipolimomenttien summa. Dipolimomentti on siis ekstensiivinen suure, ja koska kaksiulotteiselle kappaleelle pinta-ala on eksensiivinen ominaisuus, dipolimomentin täytyy olla verrannollinen silmukan pinta-alaan. Tämä periaate toimii myös silloin, kun silmukka ei ole kaksiulotteinen. Tällöinkin silmukka voidaan jakaa osiin, joista jokinen on ainakin likimain tasomainen. Näille osille voidaan määrittää dipolimomenttivektorit erikseen yhtälön (12.67) perusteella, ja koko silmukan dipolimomenttivektori saadaan laskemalla sen osien dipolimomentit yhteen vektoreina.

**12.21** Virtasilmukka muodostuu seuraavien pisteiden välisistä suorista:  $(0, 1, -1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(2, -1, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$  ja  $(0, -1, -1)$  (yksiköt millimetrejä). Silmukassa kulkee 5 A virta ja virran kiertosuunta on sama kuin pisteiden järjestys edellä.

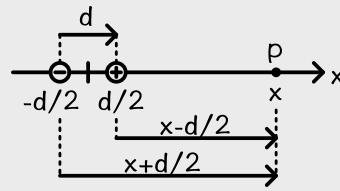
- (a) Mikä on silmukan dipolimomenttivektori karteesisissa komponenteissa?
- (b) Mikä on dipolimomentin suuruus?

## esimerkki 12.4

## Sähköisen dipolin kenttä

**Laske sähköisen dipolin kentän voimakkuus dipolin kautta kulkevalla dipolimomenttivektorin suuntaisella suoralla.**

**TILANNE** Sähköinen dipoli muodostuu kahdesta erimerkkisestä sähkövarauksesta,  $q$  ja  $-q$ , joiden välinen etäisyys on  $r_{- \rightarrow +}$ . Merkitään kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi lyhyemmin  $r_{- \rightarrow +} = d$ , jolloin dipolimomentti on siis  $p = qd$ . Asetetaan dipolin keskipiste origoon ja  $x$ -akseli dipolimomenttivektorin suuntaan, jolloin varaukset ovat siis pisteissä  $x_- = -\frac{1}{2}d$  ja  $x_+ = \frac{1}{2}d$ . Tarkastelupiste  $P$  on piste  $(x, 0, 0)$ , missä  $x \gg d$ .



**SUUNNITELMA** Sähkökentän täytyy olla systeemin symmetriasta johtuen pisteessä  $P$   $x$ -suuntainen, joten riittää määrittää kentän  $x$ -komponentti. Tämä on kaikkein helppointa nyt, että lasketaan ensin kentän potentiaali  $x$ -akselilla, jolloin sähkökentän  $x$ -komponentti selviää derivoimalla potentiaalia. Jos halutaan selvittää ideaalisen, pistemäisen dipolin kenttä, voidaan lopuksi vielä tarkastella ratkaisun asymptottista käytöstä, kun tarkastelupisteet etäisyys dipolista on paljon suurempia kuin dipolin koko,  $x \gg d$ .

Pistevaraukseen potentiaali on

$$V_{q \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{q \rightarrow P}}, \quad (12.68)$$

ja dipolin kokonaispotentiaali on pistevaraukseiden potentiaalien summa,  $V_P = V_{+ \rightarrow P} + V_{- \rightarrow P}$ . Sähkökentän  $x$ -komponentti saadaan potentiaalin derivaatasta  $x$ -koordinaatin suhteen,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (12.69)$$

**RATKAISU** Etäisyys positiivisesta varauksesta tarkastelupisteeseen on  $r_{+ \rightarrow P} = x - x_+ = x - \frac{1}{2}d$  ja negativisesta  $r_{- \rightarrow P} = x - x_- = x + \frac{1}{2}d$ . Niinpä potentiaali pisteessä  $P$  on

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x - d/2} - \frac{1}{x + d/2} \right). \quad (12.70)$$

Lauseke sievenee, kun murtoluvut lavennetaan samannimisiksi ja muistetaan yhtälö  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ , sillä

$$\frac{1}{x - d/2} - \frac{1}{x + d/2} = \frac{(x + d/2) - (x - d/2)}{(x - d/2)(x + d/2)} = \frac{d}{x^2 - d^2/4}. \quad (12.71)$$

Kun vielä huomioidaan dipolimomentin lauseke  $p = qd$ , potentiaaliksi saadaan

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^2 - d^2/4}. \quad (12.72)$$

Jos tarkastelupiste on hyvin kaukana,  $x^2 \gg d^2$  ja  $x^2 - d^2/4 \approx x^2$ . Näin pistemäisen dipolin potentiaaliksi saadaan

$$V_P \sim \frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (12.73)$$

Sähkökenttä pisteessä  $P$  on puolestaan

$$E_{x,P} = -\frac{\partial V_P}{\partial x} \sim \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3}. \quad (12.74)$$

Mathematica:

```
(* dipolin potentiaali *)
q = p/d;
v = 1/(4 Pi eps0) q (1/(x - d/2) - 1/(x + d/2));
vDipoli = Limit[v, d -> 0]
p/(4 eps0 Pi x^2)

(* dipolin kentta *)
eDipoli = -D[vDipoli, x];
p/(2 eps0 Pi x^3)
```

**ARVIOINTI** Dipolin sähkökentän voimakkuus on saamamme tuloksen mukaan kääntäen verrannollinen etäisyyden kuutioon,  $E_x \sim x^{-3}$ . Tämä on järkevä, koska dipoli on sähköisesti neutraali ja siksi sen sähkökentän täytyy heikentyä jyrkemmin kuin pistevarauksen sähkökentän,  $E_x \sim x^{-2}$ .

## esimerkki 12.5

## Magneettisen dipolin kenttä

**Laske magneetisen dipolin kentän voimakkuus dipolin kautta kulkevalla dipolimomenttivektorin suuntaisella suoralla.**

**TILANNE** Magneettiset dipolit ovat pieniä virtasilmukoita, joten voimme käyttää tässä dipolin mallina jo esimerkissä 12.2 tarkastelemamme ympyrän muotoista johdinta. Johdinsilmukan sade on  $R$ , joten sen rajaama pinta-ala on  $A = \pi R^2$ . Silmukka kuvaa ideaalista, pistemäistä dipolia, kun sen koko lähestyy nolla,  $R \rightarrow 0$ .

**SUUNNITELMA** Virtasilmukan magneettisen dipolimomentin suuruus on silmukan pinta-alan ja silmukassa kulkevan virran tulo, ja dipolimomentti on kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan.

Ympyräjohtimen dipolimomentin suuruus on siis

$$\mu = iA = \pi iR^2. \quad (12.75)$$

Esimerkissä 12.2 silmukan magneettikentän voimakkuudeksi silmukan läpi kohtisuoraan kulkevalla aksellilla (eli dipolimomenttivektorin suunnassa) saatuun

$$B = k_\mu \frac{\pi iR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.76)$$

Magneettikentän lausekkeessa esiintyy jo valmiina dipolimomentin voimakkuuden lauseke  $\mu = \pi iR^2$ , joten voimme kirjoittaa kentän voimakkuuden dipolimomentin suuruuden avulla. Lisäksi voimme käyttää yhtälöä  $k_\mu = \frac{\mu_0}{2\pi}$ , jotta saamme kentän lausekkeen kirjoitettua magneettivakion avulla. Ideaalisen, pistemäisen dipolin kenttä saadaan tarkastelemalla asymptoottia  $x \gg R$ , jolloin silmukan koko on siis paljon pienempi kuin tarkastelupisteen etäisyys silmukasta.

**RATKAISU** Magneettikentän lauseke sievenee muotoon

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.77)$$

Kun kenttää tarkastellaan kaukana virtasilmukasta,  $x^2 \gg R^2$ , voidaan approksimoida  $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = x^3$ . Niinpä magneettikentälle saadaan asymptoottinen muoto

$$B \sim \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3}. \quad (12.78)$$

Tämä on siis ideaalisen magneettisen dipolin kenttä dipolin symmetria-aksellilla.

**ARVIOINTI** Esimerkissä 12.4 johdimme sähköisen dipolin sähkökentälle lausekkeen  $E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3}$  ja nyt saimme magneettisen dipolin magneettikentälle lausekkeen  $B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3}$ . Nämä ovat aivan samanlaiset funktiot. Täsmällisemmin, jos sähköisen dipolin kentän lausekkeessa korvataan sähkövakio  $1/\epsilon_0$  magneettivakiolla  $\mu_0$  ja sähköinen dipolimomentti  $p$  magneettisella dipolimomentilla  $\mu$ , saadaan magneettisen dipolin kentän lauseke. Kaukaa tarkasteltuna virtasilmukan kenttä on siis todellakin täsmälleen samanlainen kuin todellisen kaksinapaisen dipolin kenttä. Tästä nähdään myös se, että magneettisen dipolimomentin määrittely virran ja pinta-alan tulona on vastaa täsmälleen sähköisen dipolimomentin määritelmää varausten suuruuden ja niiden välisen etäsyden tulona.

## Dipolit ulkoisessa kenttässä

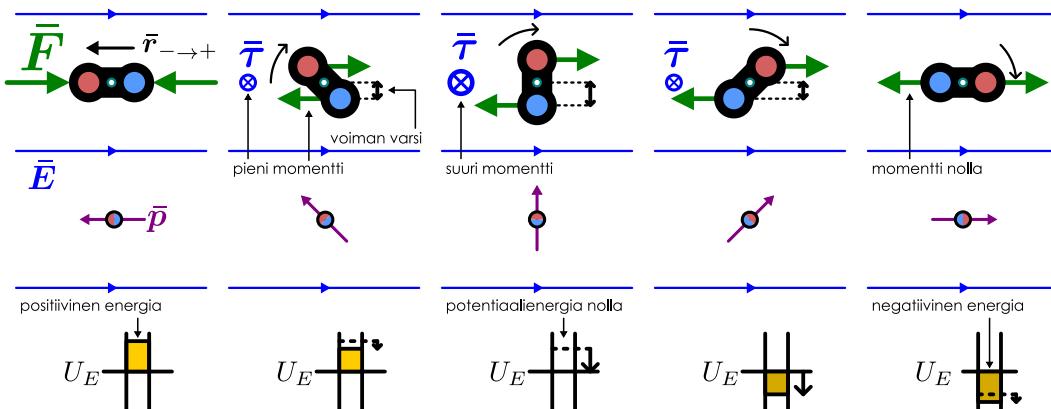
Sähköiset ja magneettiset dipolit tuottavat siis ympärilleen samanlaiset sähkö- ja magneettikentät. Kuitenkin jotta virtasilmukoita voisi todella pitää magneettisina dipoleina, niiden pitää myös reagoida ulkoiseen magneettikenttään samalla tavalla kuin sähköiset dipolit reagoivat ulkoiseen sähkökenttään. Osoitamme vielä, että näin todella tapahtuu.

Kuvaan 12.22 (a) on piirretty sähköinen dipoli homogeenisessa sähkökentässä. Dipolin positiiviseen varauksen kohdistuu voima kentän suuntaan ja sen negatiiviseen varaukseen kohdistuu yhtä suuri voima kenttään nähden vastakkaiseen suuntaan, koska varaukset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret. Koska nämä voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaisuuntainen, *dipoliin kohdistuva kokonaisvoima on nolla*. Homogeeninen sähkökenttä ei siis vaikuta dipolin suoraviivaiseen liikkeeseen. Sen sijaan kenttä vaikuttaa dipolin asentoon. Dipolin positiivisen navan potentiaalienergia on sitä pienempi, mitä kauemmas varaus pääsee siirtymään kentän suuntaan (vrt. kappale siirtyy painovoimakentässä alas päin), ja vastaavasti negatiivisen navan potentiaalienergia pienenee sen siirtymässä kenttää vastaan.

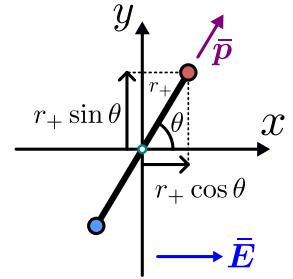
Valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi dipolin keskipiste. Tällöin dipolin potentiaalienergia on nolla dipolin ollessa kohtisuorassa kenttää vastaan kuten kuvasarjan 12.22 (a) keskimmäisessä tilanteessa. Dipolin potentiaalienergia kasvaa, jos dipolin negatiivista napaa käännetään kentän suuntaan ja potentiaalienergia pienenee, kun positiivinen napa käännyttää kentän suuntaan. Koska dipolimomenttivektori osoittaa negatiivisesta varauksesta positiiviseen, tämä tarkoittaa potentiaalienergian olevan suurimmillaan (positiivinen) dipolimomenttivektorin ollessa kenttään nähden vastakkaisuuntainen. Potentiaalienergia on pienimmillään (negatiivinen) dipolimomenttivektorin ollessa kentän suuntainen. Dipoli pyrkii käänymään asentoon, jossa

Kuva 12.22: Sähköiseen dipoliin kohdistuu ulkoisessa sähkökenttässä momentti, joka pyrkii käantämään dipolimomentin kentän suuntaiseksi. Homogenisessa kentässä dipoliin kohdistuva kokonaisvoima on kuitenkin nolla.

(a) Sähköinen dipoli homogenisessa sähkökenttässä.



(b) Varausten koordinaatit.



potentiaalienergia minimoituu, joten *ulkoisessa kentässä oleva dipoli pyrkii siis käantymään niin, että sen dipolimomenttivektori on kentän suuntainen*.

Merkittää vapausten välistä etäisyyttä jälleen  $r_{-\rightarrow+}$  ja dipolimomenttivektorin sekä sähkökentän välisyyttä kulmaa  $\theta$ . Kiinnitetään lisäksi koordinaatisto kuten kuvassa 12.22 (b), jossa origo on asetettu dipolin keskipisteeseen ja  $x$ -akseli sähkökentän suuntaan. Positiivisen varauksen etäisyyys dipolin keskipisteestä on nyt  $r_+ = \frac{1}{2}r_{-\rightarrow+}$  ja yksinkertaisella trigonometrialla positiivisen varauksen koordinaateiksi saadaan  $(x_+, y_+) = (r_+ \cos \theta, r_+ \sin \theta)$ . Varauspotentiaalienergia on näin ollen

$$U_+ = -E_x q x_+ = -\frac{1}{2} E_x q r_{-\rightarrow+} \cos \theta = -\frac{1}{2} E p \cos \theta. \quad (12.79)$$

Energia riippuu vain varauksen  $x$ -koordinaatista, koska sähkökenttä on  $x$ -suuntainen,  $E = E_x$ . Lisäksi varauksen suuruus ja dipolin pituus on tässä kirjoitettu dipolimomentin avulla käyttäen yhtälöä (10.3) eli  $p = qr_{-\rightarrow+}$ .

Samalla tavalla negatiivisen navan potentiaalienergiaksi saadaan

$$U_- = -E_x (-q) x_- = -\frac{1}{2} E p \cos \theta, \quad (12.80)$$

sillä navan varaus on  $-q$  ja sen  $x$ -koordinaatti on  $x_- = -r_- \cos \theta = -\frac{1}{2}r_{-\rightarrow+} \cos \theta$ . Kaikkiaan dipolin potentiaalienergia on siis

$$U_E = U_+ + U_- = -E p \cos \theta. \quad (12.81)$$

Tuloksen voi esittää vielä tiiviimmin vektoreina, sillä kulma  $\theta$  oli sähkökenttävektorin  $\bar{E}$  ja dipolimomenttivektorin  $\bar{p}$  välinen kulma. Niinpä yhtälössä (12.81) esiintyy itse asiassa vektoreiden välisen pistetulon määritelmä, ja potentiaalienergia voidaan kirjoittaa muotoon

$$U_E = -\bar{p} \cdot \bar{E}. \quad (12.82)$$

Tämä funktio saa miniminsä vektoreiden ollessa yhdensuuntaiset ja maksiminsa vektoreiden ollessa vastakaissuuntaiset, kuten pitääkin.

Dipolin pyrkimystä käantymään kentän suuntaiseksi voidaan kuvata myös siihen kohdistuvien voimien momentilla dipolin keskipisteen suhteen. Voiman momentti riippuu sekä voiman suuruudesta että sen varren pituudesta eli pyörimisakselista mitatusta voimaan nähdyn kohtisuorasta etäisyydestä. Tässä dipolin napoihin kohdistuvat voimat ovat  $x$ -suuntaiset, joten kumpaankin napaan kohdistuvan voiman varren pituus on yksinkertaisesti kyseisen navan  $y$ -koordinaatin suuruus. Näin ollen positiiviseen napaan kohdistuvan voiman momentti on suuruudeltaan

$$\tau_{\theta,+} = -F_{x,+} y_+ = -F_+ r_+ \sin \theta = -\frac{1}{2} E q r_{-\rightarrow+} \sin \theta = -\frac{1}{2} E p \sin \theta \quad (12.83)$$

Momentti on negatiivinen, kun  $0 < \theta < \pi/2$ , koska näillä kulmilla voima pyrkii käantämään dipolia myötäpäivään eli suuntaan, jossa kulma  $\theta$  pienenee. Negatiiviseen napaan kohdistuvaksi momentiksi saadaan samanlaisella päättelyllä niin ikään

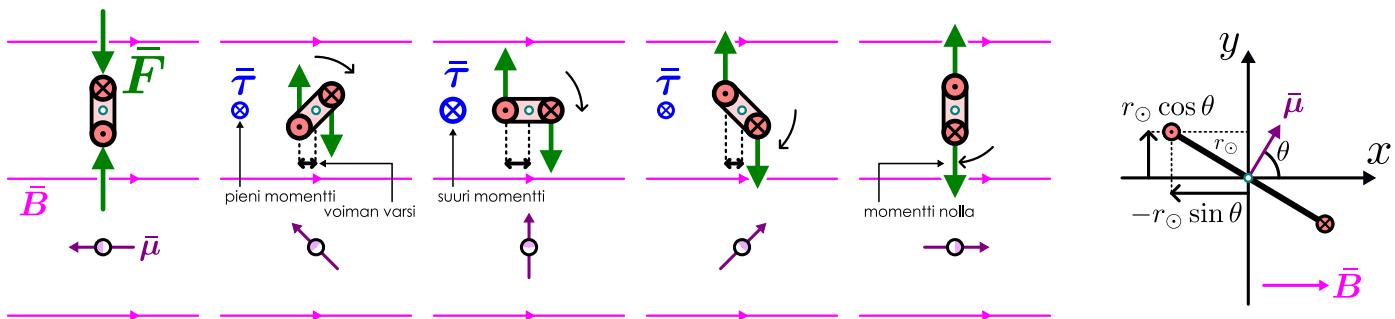
$$\tau_{\theta,-} = -\frac{1}{2} E p \sin \theta. \quad (12.84)$$

## MAGNEETTIKENTTÄ

Kuva 12.23: Magneettiseen dipoliin kohdistuu ulkoisessa magneettikenttässä momentti, joka pyrkii käänämään dipolimomentin kentän suuntaiseksi. Homogenisessa kentässä dipoliin kohdistuva kokonaivoima on kuitenkin nolla.

(a) Magneettinen dipoli homogenisessa magneettikenttässä.

(b) Johdinten koordinaatit.



Dipolia käänvävän kokonaismomentin suuruus on siis

$$\tau_\theta = \tau_{\theta,+} + \tau_{\theta,-} = -Ep \sin \theta. \quad (12.85)$$

Täsmällisesti voiman momentti on vektori, jonka suunta määräytyy oikean käden säännön mukaan. Jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat suunnan, johon voima pyrkii dipolia käänämään, momenttivektori osoittaa ojennetun peukalon suuntaan. Kuvassa 12.22 voiman momentti siis osoittaa katsojasta poispäin. Sama asia voidaan ilmaista myös kirjoittamalla momenttivektori ristituloona

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}. \quad (12.86)$$



**12.22** Potentiaalienergia määritellään momentin tekemän työn kautta  $U = -W = - \int \tau_\theta d\theta$ . Tarkista, että yhtälö (12.85) antaa tämän perusteella oikean tuloksen (12.81).

Tutkitaan sitten vastaavaa magneettista dipolia eli virtasilmukkaa ulkoisessa homogenisessa magneettikenttässä. Kuvasarjassa 12.23 (a) on esitetty tällainen virtasilmukka ja siihen kohdistuvat voimat. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi neliön muotoista silmukkaa, jonka sivun pituus on  $L$  ja jossa kulkee virta  $i$ . Virtasilmukka on piirretty kuvan niin, että kaksi sen sivuista on kuvan tasoon nähdyn kohtisuorat, ja yksinkertaisuuden vuoksi näkyviin on piirretty vain nämä sivut sekä niihin kohdistuvat magneettiset voimat.

Kuvasarjan vasemmanpuoleisimmassa kuvassa ylemmässä johtimessa virta kulkee pois katsojasta ja alempassa kohti katsojaa, jolloin oikean käden säännön perusteella magneettinen dipolimomenttivektori osoittaa kuvassa vasemmalle, magneettikenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Johtimissa kulkee yhtä suuret virrat, joten niihin kohdistuu myös yhtä suuret voimat. Täsmällisesti silmukan yhteen sivuun kohdistuvan voiman suuruus on

$$F = iLB, \quad (12.87)$$

koska johdin on kohtisuorassa magneettikenttään nähdyn. Lisäksi koska virrat kulkevat vastakkaisiin suuntiin, niihin kohdistuvat voimat osoittavat myös vastakkaisiin suuntiin. Oikean käden säännön perusteella johtimeen, jossa virta kulkee kohti katsojaa, kohdistuva voima osoittaa ylöspäin. Vastaavasti johdin, jossa virta kulkee katsojasta pois, kokee alas päin osoittavan voiman.

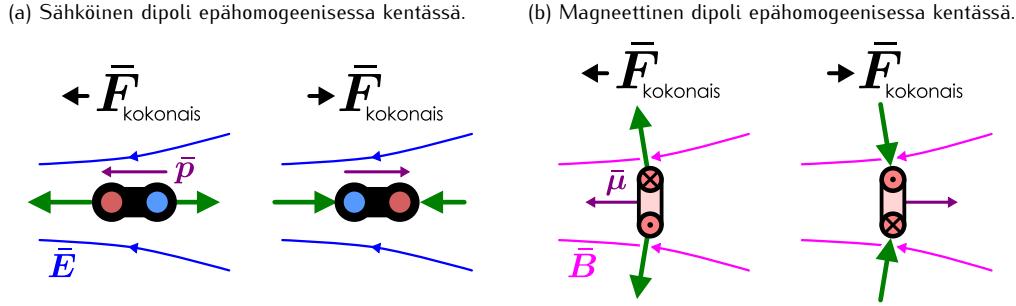
Seuraavassa kuvassa silmukka käännyt hieman myötäpäivään, jolloin dipolimomenttikin käännyt osoittamaan yläviistoon vasemmalle. Tällöin johtimiin kohdistuvat voimat tuottavat silmukkaan voiman momentin, joka pyrkii käänämään silmukkaa kuvassa myötäpäivään. Silmukkaan kohdistuva momenttivektori osoittaa siis katsojasta pois päin aivan kuten kuvan 12.22 (a) sähköiseen dipoliin kohdistuva voiman momentti. *Magneettinen voima pyrkii siis käänämään silmukan sellaiseen asentoon, että silmukan dipolimomenttivektori osoittaa samaan suuntaan kuin ulkoinen magneettikenttä.*



**12.23** Mihin suuntiin osoittavat kuvassa 12.23 (a) piirtämättä jätettyihin silmukan sivuihin kohdistuvat voimat? Tuottavatko nämä silmukkaa käänvävän voiman momentin?

Momentin suuruuden voimme päättää jälleen künnyttämällä koordinaatiston  $x$ -akselin kentän suuntaan ja asettamalla origon silmukan keskipisteeseen kuten kuvassa 12.23 (b). Merkitään lisäksi magneettisen dipolimomenttivektorin ja magneettikentän välistä kulmaa  $\theta$  ja etäisyyttä origosta johtimiin  $r_\odot = \frac{1}{2}L$ . Näillä

Kuva 12.24: Epähomogenisessa sähkökentässä sähköiseen dipoliin kohdistuu nollasta poikkeava kokonaisvoima. Samoin epähomogenisessä magneettikentässä magneettiseen dipoliin kohdistuu voima.



merkinnöillä virtaa kohti katsoja kuljettavan johtimen koordinaatit ovat  $(x_{\odot}, y_{\odot}) = (-r_{\odot} \sin \theta, r_{\odot} \cos \theta)$ . Koska tähän johtimeen kohdistuva voima osoittaa  $y$ -suuntaan, voiman momentti on

$$\tau_{\theta, \odot} = F_{y, \odot} x_{\odot} = -iLBr_{\odot} \sin \theta = -\frac{1}{2}iL^2B \sin \theta = -\frac{1}{2}\mu B \sin \theta, \quad (12.88)$$

missä virran ja silmukan sivun pituuden neliö on korvattu silmukan magneettisen dipolimomentin suuruudella,  $\mu = iL^2$ , dipolimomentin määritelmän (12.67) mukaisesti.

Toisessa johtimessa kulkee virta poispäin katsojasta ja siihen kohdistuu voima negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Tähänkin johtimeen kohdistuva voima tuottaa momentin

$$\tau_{\theta, \odot} = -\frac{1}{2}\mu B \sin \theta, \quad (12.89)$$

ja silmukkaan kohdistuva kokonaismomentti on siis

$$\tau_{\theta} = \tau_{\theta, \odot} + \tau_{\theta, \odot} = -\mu B \sin \theta. \quad (12.90)$$

Vektorimuodossa sama yhtälö voidaan kirjoittaa dipolimomentin ja magneettikentän ristituloona,

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}. \quad (12.91)$$

Tulos (12.91) on täsmälleen sama kuin vastaavalle sähköiselle momentille johdettu momentin yhtälö (12.86), paitsi että sähköinen dipoli  $\bar{p}$  ja sähkökenttä  $\bar{E}$  on nyt korvattu magneettisella dipolilla  $\bar{\mu}$  ja magneettikentällä  $\bar{B}$ . Magneettinen dipoli käyttääsiis homogenisessa magneettikentässä täsmälleen samalla tavalla kuin sähköinen dipoli käyttääsiis homogenisessa sähkökentässä. Tästä seuraa myös suoraan, että magneettisen dipolin potentiaalienergiaa magneettikentässä täytyy kuvata yhtälöä (12.82) vastaava lauseke

$$U_B = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}. \quad (12.92)$$

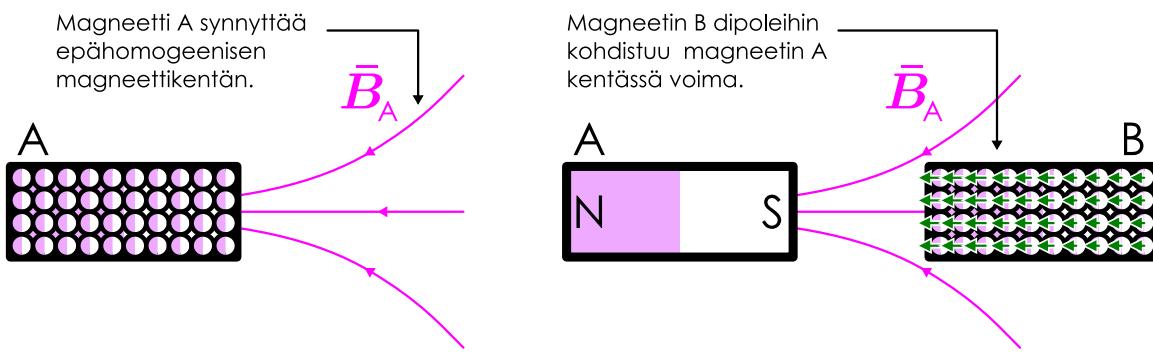
**12.24** Selvitä jonkin sähkömoottorin toiminnan pääperiaate (moottoreita on erilaisia). Miten virtasilmukkaan kohdistuvaa magneettisen voiman momenttia voidaan hyödyntää sähkömoottorissa?

Edellisissä esimerkeissä dipolit olivat homogenisessa kentässä, mutta yleensä sähkö- ja magneettikentät ovat epähomogenisia eli paikasta riippuvia kuten kuvassa 12.24. Homogenisessa kentässä sähköisen dipolin napoihin ja virtasilmukan sivuihin kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaisuuntaiset, mutta epähomogenisessa kentässä näin ei tarvitse olla. Dipolit pyrkivät käänymään kentän suuntaisiksi epähomogenisessa kentässä samaan tapaan kuin homogenisakin kentässä. Kuitenkin toisin kuin homogenisessa kentässä, epähomogenisessa kentässä dipoliin kohdistuvan kokonaisvoiman ei tarvitse olla nolla. Esimerkiksi kuvassa 12.24 (a) sähköinen dipoli on sähkökentässä, jonka voimakkuus riippuu paikasta. Tällöin voimakkaassa kentässä olevaan napaan kohdistuu suurempi voima kuin heikossa kentässä olevaan napaan. Kuvassa kenttäviivat lähestyvät toisiaan vasemmassa reunassa, joten kenttä voimistuu kuvassa oikealta vasemmalle siirryttääseen. Kun dipolin positiivinen napa on vasemmalla, siihen kohdistuu suurempi voima kuin negatiiviseen napaan, ja tällöin dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa sähkökentän suuntaan eli kuvassa vasemmalle. Toisaalta jos dipoli käännetään ympäri, negatiiviseen napaan kohdistuu suurempi voima ja dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa kuvassa oikealle. Dipoliin siis kohdistuu epähomogenisessa sähkökentässä voima, jonka suunta riippuu dipolin asennosta.

## MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.25: Kestomagneettien eli magneettisten dipolien välinen voima.

(a) Magneetti synnyttää ympärilleen epähomogenisen magneettikentän.  
 (b) Epähomogenisessa kentässä toiseen magneettiin kohdistuu voima.



**12.25** Mihin suuntaan dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa, jos sähkökenttä osoittaa vasemmalle, sähkökentän voimakkuus kasvaa siirryttäässä oikealle, ja dipolimomenttivektori osoittaa (a) vasemmalle, (b) oikealle? (c) Yhtälö  $U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  pääte myös epähomogenisessa kentässä. Päätttele sen avulla, että dipoliin voi kohdistua nollasta poikkeava voima, jos  $\vec{E}$  ei ole vakio.

Kuvassa 12.24 (b) on virtasilmukka eli magneettinen dipoli epähomogenisessa magneettikentässä. Tässäkin kuvassa kenttä osoittaa vasemmalle ja kenttä voimistuu siirryttäässä vasemmalle. Erityisesti magneettiset kenttäviivat eivät ole yhdensuuntaiset vaan ne lähestyvät toisiaan kuvan vasemmassa reunassa. Niinpä silmukan vastakkaisiin sivuihin kohdistuvat voimat eivät ole vastakkaisuuntaiset. Esimerkiksi kuvan (b) ensimmäisessä esimerkissä silmukan ylemmässä johtimessa kulkee virta kasojasta poispäin, jolloin siihen kohdistuu voima vasemmalle gläviistoon. Alempassa johtimessa kulkee virta kohti katsojaa, ja siihen kohdistuu voima vasemmalle alaviistoon. Näiden voimien pystysuuntaiset komponentit kumoavat toisensa, mutta niiden vaakasuuntaiset komponentit vahvistavat toisiaan, jolloin silmukkaan kohdistuva kokonaisvoima osoittaa vasemmalle. Jos silmukka käännetään toisin päin, ylempään johtimeen kohdistuva voima osoittaa alaviistoon oikealle ja alempaan johtimeen kohdistuva voima osoittaa gläviistoon oikealle. Tällöin johtimeen kohdistuva kokonaisvoima osoittaa oikealle. Magneettiseenkin dipoliin kohdistuu siis epähomogenisessa magneettikentässä voima, jonka suunta riippuu dipolin asennosta. Ja kuten kuvista 12.24 (a) ja (b) nähdään, sähköisiin ja magneettisiin dipoleihin kohdistuvat voimat riippuvat dipolin suunnasta ja kentän muodosta samalla tavalla.

Tämä on pohjimmiltaan syg siihen, että magneetit voivat kohdistaa voiman toisiinsa. Kestomagneetit ja magneettiset materiaalit koostuvat magneettisista dipoleista, jotka luovat ympärilleen epähomogenisen magneettikentän ja kokevat voiman toisten magneettien luomassa epähomogenisessa magneettikentässä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 12.25. Kuvan (a) magneetin (A) N-napa on sen vasemmassa reunassa ja S-napa oikeassa, jolloin magneetin luoma magneettikenttä kulkee kuvassa oikealta vasemmalle. Magneettikenttä heikkenee siirryttäässä magneetista poispäin, mikä näkyy hajaantuvina kenttäviivoina. Kuvassa (b) magneetti A viereen on tuotu toinen magneetti B. Tämänkin magneetin N-napa on sen vasemmassa reunassa ja S-napa oikeassa reunassa. Tämä tarkoittaa sitä, että magneetin sisäisten mikroskooppisten dipolien dipolimomenttivektorit osoittavat kuvassa vasemmalle. Näiden dipolien näkökulmasta tilanne on siis samanlainen kuin kuvan 12.24 (b) esimerkissä, jossa kenttä ja dipolimomentit osoittavat vasemmalle ja lisäksi kenttä vahvistuu oikealta vasemmalle siirryttäässä. Kuhunkin dipoliin kohdistuu tällöin pieni voima vasemmalle, kohti magneettia A, ja magneettiin B kohdistuva kokonaisvoima on näiden summa. Niinpä magneettiin B kohdistuu suuri kokonaisvoima vasemmalle, jolloin magneetti A siis vetää magneettia B puoleensa.



**12.26** Kuvan 12.25 (b) magneetti A käännetään ympäri ja magneetti B pysyy samassa asennossa. Piirrä kuva 12.24 vastaava kuva magneetin B yhdelle magneettiselle dipoliille ja päätttele tämän perusteella, millainen voima yksittäiseen dipoliin kohdistuu. Selitä tämän perusteella, miksi magneetti A käänäminen muuttaa magneettiin B kohdistuvaa voimaa.

## esimerkki 12.6

## Dipoli ulkoisessa kentässä

Eräään magneettisen dipolin dipolimomenttivektori on  $\bar{\mu} = (1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}$ . Dipoli on homogeenisessa sähkökentässä  $\bar{E} = (2.0 \text{ kV/m})\hat{i} + (3.0 \text{ kV/m})\hat{k}$  ja magneettikentässä  $\bar{B} = (-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}$ . (a) Mikä on dipolin potentiaalienergia? (b) Mikä on dipoliin kohdistuvan voiman momentti (vektori)?

**TILANNE** Tilanne on kolmiulotteinen, mutta dipolimomenttivektori on  $xy$ -tasossa ja magneettikenttäkin poikkeaa vain vähän tästä tasosta, joten pürrtetään kuva systeemistä  $xy$ -tasossa.

**SUUNNITELMA** Dipolin potentiaalienergia saadaan dipolimomentin ja magneettikentän pistetulona,

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}. \quad (12.93)$$

Dipoliin kohdistuva voiman momentti saadaan dipolimomentin ja magneettikentän ristituloona,

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B} \quad (12.94)$$

Sähkökenttä ei vaikuta magneettiseen dipoliin.

**RATKAISU** Potentiaalienergiaksi saadaan

$$U = -[(1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}] \cdot [(-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}] = -0.4 \text{ J} \quad (12.95)$$

ja momentiksi

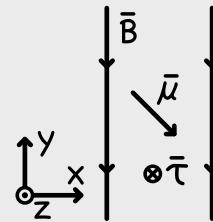
$$\bar{\tau} = [(1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}] \times [(-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}] = (-0.1 \text{ Nm})\hat{i} + (-0.1 \text{ Nm})\hat{j} + (-0.4 \text{ Nm})\hat{k} \quad (12.96)$$

**Mathematica:**

```
mu = {1, -1, 0};
b = {0, -0.4, 0.1};
u = -mu.b
tau = Cross[mu, b]
{-0.4
-0.1, -0.1, -0.4}
```

**ARVIOINTI** Magneettinen dipoli pyrkii käänymään niin, että sen dipolimomentti on ulkoisen magneettikentän suuntainen. Tämä tarkoittaa sitä, että potentiaalienergian pitää pienentyä momentin kääntyessä magneettikentän suuntaan. Käytimme potentiaalienergian laskussa yhtälöä, joka on johdettu asettamalla potentiaalienergian nollataso tilanteeseen, jossa dipolivektori on kohtisuorassa magneettikenttään nähdyn, ja kuvasta nähdään, että nyt dipolimomentilla on komponentti kentän suuntaan. Siispä potentiaalienergian pitää olla nollatasoa pienempi eli negatiivinen, kuten onkin.

Samaten voimme kuvasta päätellä oikean käden säännöllä, että dipolia kentän suuntaiseksi käännevän väantömomenttivektorin täytyy osoittaa kuvan sisään eli negatiiviseen  $z$ -suuntaan. Lasketun momenttivektorin  $z$ -komponentti on negatiivinen, joten tämäkin tulos on järkevä.



**12.27** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä sähköisistä ja magneettisista dipoleista. Millaisen kentän dipolit luovat ympärilleen? Miten dipolit käyttäytyvät ulkoisessa kentässä, jos kenttä on homogeinen tai epähomogeinen? Selitä tämän perusteella, miksi magneettien N- ja S-nauat vuorovaikuttavat kuten tekevät.

# Yhteenveton Magneettikenttä

## Magneetit ja dipolit

- Virtasilmukat ja pyörivät varatut kappaleet toimivat kuin **magneettiset dipolit**. Virtasilmukan dipolimomentti on

$$\bar{\mu} = iA\hat{n},$$

missä vektorin suunnan määritellään oikean käden sääntö (sormet virran suuntaan, peukalo dipolimomentin suuntaan).

- Dipolin magneettikenttä kulkee dipolin läpi dipolimomentin suunnassa ja kentän voimakkuus on suoraan verrannollinen dipolimomentin suuruuteen.
- Magneettiset dipolit pyrkivät kääntymään ulkoisen magneettikentän suuntaisiksi ja sähköiset dipolit ulkoisen sähkökentän suuntaisiksi. Sähköisen dipolin potentiaalienergia sähkökentässä on

$$U = -\bar{p} \cdot \bar{E}$$

ja siihen kohdistuva momentti on

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}.$$

Magneettisen dipolin potentiaalienergia on vastavasti

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}$$

ja siihen kohdistuva momentti on

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}.$$

- Homomeenisessä kentässä dipoliin kohdistuva kokonaivoima on nolla. Epähomomeenisessä kentässä dipoliin voi kohdistua nollasta poikkeava kokonaivoima.
- Magneettiset aineet koostuvat mikroskooppisista magneettisista dipoleista. **Magneeteissa** nämä dipolit ovat samansuuntaisia, jolloin niiden magneettiset ominaisuudet vahvistavat toisiaan.
- Magneettiset dipolit eivät todellisuudessa koostu erillisistä **magneettisista navoista**, mutta ne käyttäytyvät aivan kuin koostuisivat. Näitä näennäisiä magneettisia napoja kutsutaan pohjois- (N) ja etelännavaksi (S). Aivan kuten sähkövöraukset, erilaiset magneettiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset hylkivät toisiaan.

## Magneettikenttä ja magneettinen voima

- Magneettikentän** voi esittää vektorikenttäkuvaajana tai kenttäviivaesityksenä aivan kuten sähkökentänkin. Magneettisilla kenttäviivoilla ei voi koskaan olla alkua eikä loppua vaan ne muodostavat aina silmukoita tai jatkuvat äärettömyyskseen.
- Liikkuvat varaukset ja sähkövörit synnyttävät magneettikenttään pyörteitä, joiden suunnan voi päättää oikean käden säännöllä (sormet kentän suuntaan, peukalo virran suuntaan).
- Biot'n ja Savartin lain mukaan liikkuvan varauksen magneettikenttä on

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Lyhyen virtajohtimen magneettikenttä on

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\bar{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Tässä  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  on **magneettivakio**.

- Magneettikentien **Gaussian lain** mukaan magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on aina nolla,

$$\Phi_B = \oint \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0.$$

Tämä johtuu siitä, että erillisiä magneettisia napoja ei ole löydetty.

- Ampéren lain** mukaan magneettikentän viivaintegraali suljetulla reitillä on verrannollinen reitin läpi kulkevan sähkövirran,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonaish}}.$$

- Liikuvaan varattuun hiukkaseen kohdistuu sähkö- ja magneettikentässä voima

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}).$$

Neutraaliin virtajohtimeen kohdistuu voima

$$d\bar{F} = id\bar{s} \times \bar{B}.$$

Voiman suunnan voi päättää oikean käden säännöllä (peukalo virran suuntaan, etusormi kentän suuntaan, keskisormi voiman suuntaan).

## Sanasto

- magneetti (magnet)
- kestomagneetti (permanent magnet)
- kompassi (compass)
- pohjoisnapa (north pole)
- etelännapa (south pole)

- magnetoituminen (magnetization)
- magneettikenttä (magnetic field)
- pyörre (vortex)
- magneettivuo (magnetic flux)
- permeabiliteetti (permeability)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

**12.1** Jos samanlaiset navat vetäisivät toisiaan puoleensa, kompassin N-puoli kääntyisi kohti magneettin N-napaa ja S-puoli kohti S-napaa. Siispä kokeen magneettin N- ja S-navat olisivatkin juuri toisin päin. Tässäkin tapauksessa kuvassa (d) olisi S- ja N-napa vastakkain (vain eri päin), kuvassa (e) olisi vastakkain kaksi S-napaa ja kuvassa (f) kaksi N-napaa. Nähtäisiin jälleen, että magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset hylkivät toisiaan. Eli alkuperäinen oletus siitä, että samanlaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ei toimi.

**12.3** Kuulaan kiinnitetyt yksi S-napa magnetoit kuulan niin, että sen sisällä mikroskooppiset magneettiset dipolit kääntyvät N-napa ylöspäin ja S-napa alaspäin. Kuula siis polarisoituu magneettisesti ja sen S-napa on alhaalla. Kuula on nyt itsekin magneetti. (a) Kun kuulan yläosaan kiinnitetään toinen S-napa, polarisaatio voimistuu ja kuulasta tulee voimakkaampi magneetti. Alempi kuula pysyy kiinni. (b) Kun kuulan yläosaan kiinnitetään N-napa, kuulan polarisaatio muuttuu niin, että sen sisäisten dipolien N-napa osoittaa kohti ensimmäistä magneettia ja S-napa toista magneettia. Jos kumpikin magneetti on kiinni kuulan yläosassa, dipolit siis kääntyvät kuulan sisällä sivuttain. Kuula on edelleen magneettisesti polarisoitunut, mutta sen magneettiset navat ovat nyt kuulan yläosassa, jolloin kuulan alaosaa ei ole magneettisesti polarisoitunut. Toinen kuula putoaa. (c) Ylempi kuula on siis magneetti, jonka S-napa on sen alaosassa. Tämä polarisoii myös aleman kuulan niin, että sen yläosassa on N-napa. Näin kuulat tarttuvat toisiinsa. Jos aleman kuulan alaosaan kiinnitetään magneettin S-napa, aleman kuulan polarisaatio kääntyy. Nyt kuulien kosketuspisteessä on kummankin kuulan S-napa, ja samanlaiset magneettiset navat hylkivät toisiaan. Alempi kuula putoaa. (d) Jos aleman kuulan alaosan kiinnitetään magneettin N-napa, aleman kuulan polarisaatio vahvistuu ja magneettiset kuulat vetävät toisiaan puoleensa yhä voimakkaammin. Alempi kuula pysyy kiinni.

**12.4** Kompassineula kääntyy magneettikentän kenttävivojen suuntaan niin, että N-napa osoittaa kentän suuntaan. Kenttä osoittaa siis likimain pohjoiseen sekä pohjoisella että eteläisellä pallonpuoliskolla. (Kentällä on lisäksi myös komponentti pystysuunnassa). Tällaisen kentän luo magneetti, jonka S-napa on maapallon pohjoisnavalla ja N-napa etelännavalla. (Siis päinvastoin kuin nimistä voisi luulla.)

**12.5** Yksiköille täytyy päteä

$$[k_\mu] = [F][r]/[i^2][L] = \text{N/A}^2. \quad (12.97)$$

Lukuarvo puolestaan selviää sijoittamalla  $i = 1 \text{ A}$ ,  $r = 1 \text{ m}$ ,  $L = 1 \text{ m}$  sekä  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ , mistä

$$k_\mu = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot 1 \text{ m}/(1 \text{ A})^2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/A}^2. \quad (12.98)$$

**12.6** (a) Magneettikenttä osoittaa kohti magneettia, kohtisuoran johtimen suuntaan nähdien. Johtimeen kohdistuu virran suuntaan näden kohtisuora voima, jonka suunta selviää oikean käden säänöllä. Jos katsomme tilannetta niin, että johdin on pystysuora, virta kulkee ylöspäin ja magneetti on meistä katsoen johtimen oikealla puolella, kenttä osoittaa oikealle ja voima meistä poispäin.

(b) Kenttä on nyt vastakkaisuuntainen edelliseen kohtaan näden, joten voimakin on vastakkainen. Nyt voima osoittaa siis meitä kohti.

(c) Kenttä osoittaa johtimen kohdalla likimain johtimen suuntaisesti virran suuntaan näden vastakkaiseen suuntaan. Virran suuntasessa kentässä johtimeen ei kohdistu voimaa.

**12.7** (a) Koska kenttä ja johdin ovat kohtisuorassa, voiman suuruus on yksinkertaisesti

$$F = isB = 1 \text{ A} \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1 \text{ T} = 10^{-3} \text{ N}. \quad (12.99)$$

(b) Elektroneja on

$$N_e = 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} = 10^{20} \quad (12.100)$$

ja niiden varaus on

$$q = -eN_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{20} = 16 \text{ C}. \quad (12.101)$$

Johtimen läpi kulkee varausta nopeudella  $i = \lambda v_{\text{vaellus}} = \frac{q}{s} v_{\text{vaellus}}$ , joten vaellusnopeus on

$$v_{\text{vaellus}} = is/q = 1 \text{ A} \cdot 10^{-3} \text{ m}/16 \text{ C} = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}. \quad (12.102)$$

(c) Yksittäiseen elektronin kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_e = ev_{\text{vaellus}}B = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \cdot 1 \text{ T} = 10^{-23} \text{ N}. \quad (12.103)$$

Koko johtimeen kohdistuva voima saadaan tietenkin laskemalla yhteen elektroneihin kohdistuvat voimat,

$$F = N_e F_e = 10^{20} \cdot 10^{-23} \text{ N} = 10^{-3} \text{ N}. \quad (12.104)$$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**12.8** Hiukkasella on nyt nopeuden komponentti kentän suuntaan sekä kenttään nähdien kohtisuoraan. Kentän suuntainen liike ei vaikuta magneettiseen voimaan. Kenttää vastaan kohtisuora nopeuden komponentti puolestaan tuottaa voiman, joka on kohtisuorassa kenttää vasten, joten se ei voi vaikuttaa hiukkasen kentän suuntaiseen nopeuden komponenttiin. Niinpä hiukkasen nopeuden komponentti kentän suunnassa on väkio. Kenttää vastaan kohtisuorassa tasossa hiukkanen on ympyrälükkeessä. Kun nämä liikkeet yhdistetään, lopputulos on spiraalin muotoinen rata, joka siis seuraa magneettikenttää kiertyen kenttäviivojen ympäri.

**12.9** Sähköinen voima on

$$\bar{\mathbf{F}}_E = q\bar{\mathbf{E}} = (1.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{j}} + (4.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{k}}. \quad (12.105)$$

Magneettinen voima on

$$\bar{\mathbf{F}}_B = q\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} = (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-1.0 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{j}}. \quad (12.106)$$

Kokonaisvoima on

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_E + \bar{\mathbf{F}}_B = (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-9.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{j}} + (4.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{k}}. \quad (12.107)$$

**12.10** Nuoli osoittaa kuvassa viistosti kuvan sisään. Kenttävektorin pitää olla vektorien  $d\bar{s}$  ja  $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$  ristituloon suuntainen. Nyt  $d\bar{s}$  osoittaa kuvassa ylöspäin ja  $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$  osoittaa pääasiassa oikealle (hieman viistoon ylös ja kuvan sisään). Jos asetamme nyt peukalon ylöspäin eli  $d\bar{s}$  suuntaan ja etusormen oikealle eli  $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$  suuntaan, keskisormi osoittaa kuvan sisään kuten pitääkin.

**12.11** (a) Ristitulovektorin pituus on  $|\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}}| = AB \sin \phi$ , missä  $\phi$  on vektorien välinen kulma. Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset,  $\phi = 0$  tai  $\phi = \pi = 180^\circ$ , jolloin  $\sin \phi = 0$ . Niinpä ristituloon pituus on nolla, jolloin kyseessä on nollavektori.

(b) Suoralla laskulla

$$\bar{\mathbf{b}} \times (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}}. \quad (12.108)$$

Näistä  $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = -\bar{\mathbf{c}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} = 2\bar{\mathbf{a}}$  ja (a)-kohdan mukaisesti  $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$ , joten

$$\bar{\mathbf{b}} \times (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}) = 2\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}. \quad (12.109)$$

**12.13** Magneettiset kenttäviivat ovat katkeamattomia myös magneetin sisällä, jolloin jokainen pinnan ulkoa sisään kulkeva kenttäviiva kulkee myös pinnan sisältä ulos. Niinpä kokonaisvuon pinnan läpi on nolla. Jos N korvattaisiin positiivisella varauksella, sähkövuo pinnan läpi olisi positiivinen. Tämä johtuu siitä, että sähköiset kenttäviivat lähtevät positiivisista varauksista. Magneettiset kenttäviivat eivät kuitenkaan lähde N-navoista.

**12.14** (a) Kentän voimakkuus on  $B = k_{mu}i/r = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$  ja se osoittaa reitin suuntaan, joten tämä on myös kentän reitin suuntaisen komponentin suuruus. Reitin pituus on  $L = 0.5\pi r = 1.6 \text{ m}$  ja viivaintegraali  $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = BL = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ Tm}$ , koska kenttä on kaikkialla reitin suuntainen.

(b) Nyt kentän voimakkuus on puolet äskisestä ja reitin pituus kaksinkertainen. Kenttää osoittaa kuitenkin vastakkaiseen suuntaan reittiin nähdien, joten viivaintegraali on  $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = -BL = -3.1 \cdot 10^{-7} \text{ Tm}$ .

(c) Nyt kenttää on kohtisuorassa reittiä vastaan, joten sen komponentti reitin suunnassa on nolla. Reitin pituus on 1 m ja viivaintegraali on  $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = 0 \text{ Tm}$ .

**12.15** (a) Tilanne on nyt sellainen, että johdin kulkee reitin läpi vinossa. Johtimen ja reitin määräämän tason välisellä kulmalla ei ole kuitenkaan mitään väliä, koska johdin kuljettaa reitin läpi virran 1 A riippumatta kulmasta. Muista, että virta ei ole vektori vaan skalaari, joka mittaa siirtynyttä varausta. Yhden ampeerin virta siirtää yhden coulombin varauksen johtimen päiden välillä, ja jos johdin kulkee reitin läpi, koko tämä varaus siirtyy reitin läpi riippumatta siitä, onko johdin suorassa tai vinossa.

(b) Magneettikentän viivaintegraali on siis

$$\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm}. \quad (12.110)$$

(c) Ei voi. Koska johdin on vinossa, kenttää ei ole tutkitulla reitillä voimakkuudeltaan vakio eikä edes reitin suuntainen. Niinpä kentän voimakkuutta ei voi laskea jakamalla viivaintegraalin arvoa reitin pituudella.

## Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**12.17** (a) Virrantiheys on varaustiheyden ja nopeuden tulo,  $j = \rho v$ , ja virta on virrantiheden ja poikkipinta-alan tulo,  $i = jA = \rho Av = \lambda v$  eli pituusvaraustiheyden ja nopeuden tulo. Renkaan ympärysmitta on  $L = 2\pi r$ , joten sen säde on  $r = L/(2\pi) = 0.32$  cm. Siispä renkaan pyöriessä sen osat liikkuvat nopeudella  $v = \omega r = 1.6$  m/s. Virta on siis

$$i = \rho Av = 1.0 \cdot 10^4 \text{ C/m}^3 \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 1.6 \text{ m/s} = 3.2 \cdot 10^{-2} \text{ A.} \quad (12.111)$$

(b) Jaetaan rengas  $dL$ -pituisiin osiin. Kukin osa on renkaan keskipisteestä etäisyydellä  $r$ . Osat kiertävät keskusta samaan suuntaan niin, että kunkin osan suunta  $d\bar{\mathbf{L}}$  on kohtisuorassa osasta renkaan keskukseen osoittavaan vektoriin nähdien. Niinpä ne tuottavat kaikki magneettikentän renkaan normaalilin suuntaan (siis samaan suuntaan), jolloin kokonaiskenttä saadaan laskemalla yhteen kaikkien renkaan osien luomat kentät (skalaareina, koska vektorit ovat samansuuntaisia). Yhden osan kenttä on

$$dB = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\bar{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idL}{r^2}, \quad (12.112)$$

joten koko renkaan kenttä saadaan integroimalla renkaan ympäri

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} \int_0^{2\pi r} dL = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2} \rho A \omega = 6.3 \cdot 10^{-6} \text{ T.} \quad (12.113)$$

**12.18** Rengas kuljettaa sähkövirtaa vastapäivään, koska se on negatiivisesti varattu. Oikean käden säännön mukaisesti magneettikenttä osoittaa siis kohti sinua.

**12.19** Jos elektronien magneettisuuden ajatellaan johtuvan niiden klassisesta kiertoliikkeestä, Ampèren laki pätee myös kestomagneeteille, joiden magneettisuus johtuu juuri elektronien magneettisuudesta. (Osoittautuu kuitenkin, että elektroneilla on myös sisäinen kvanttimekaaninen kulmalülikemääriä, joka on niiden magneettisuuden pääasiallinen syy. Tätä magneettisuutta ei voi selittää pelkästään klassisen fysiikan avulla.)

**12.20** (a) Kannattaa piirtää kuva. Jos silmukkaa katsotaan positiivisen  $z$ -akselin suunnasta ("ylhäältä alas") virta kulkee vastapäivään, jolloin dipolimomenttivektori osoittaa kohti katsojaa eli positiiviseen  $z$ -suuntaan,  $\bar{\mu} = \mu\hat{k}$ .

(b) Magneettikenttä osoittaa  $z$ -akselilla kaikkialla positiiviseen  $z$ -suuntaan, joten tämä on kentän suunta pisteissä (i) ja (ii),  $\bar{\mathbf{B}} = B\hat{k}$ . (Kenttä on voimakkaimillaan origossa.) Piste (iii) on  $xy$ -tasossa eli dipolin "vieressä". Koska dipolin kenttä muodostaa silmukoita, kentän täytyy osoittaa tässä pisteessä negatiiviseen  $z$ -suuntaan,  $\bar{\mathbf{B}} = -B\hat{k}$ .

**12.21** Kannattaa taas piirtää kuva. Silmukan voi jakaa kahteen osaan: Määritellään silmukka A pisteiden  $(0, 1, 0)$ ,  $(2, 1, 0)$ ,  $(2, -1, 0)$  ja  $(0, -1, 0)$  avulla. Tämä silmukka on neliön muotoinen ja sen sivun pituus on 2 mm, joten silmukan ala on  $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ . Silmukan normaali osoittaa oikean käden säännön mukaisesti negatiiviseen  $z$ -suuntaan, joten silmukan dipolimomentti on

$$\bar{\mu}_A = iA_A \hat{n} = (-2 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{k}. \quad (12.114)$$

Määritellään silmukka B pisteiden  $(0, 1, -1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$  ja  $(0, -1, -1)$  avulla. Tämän silmukan ala on  $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  ja sen normaali osoittaa positiiviseen  $x$ -suuntaan.

$$\bar{\mu}_B = iA_B \hat{n} = (1 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{i}. \quad (12.115)$$

(a) Silmukat A ja B muodostavat yhdessä kysymyksessä tarkasteltavan silmukan, joten koko silmukan dipolimomentti saadaan silmukoiden A ja B dipolimomenttien vektorisummana

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_A + \bar{\mu}_B = (1 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{i} + (-2 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{k} \quad (12.116)$$

(b) Dipolimomentin suuruus lasketaan Pythagoraan lauseella

$$\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_z^2} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ Am.} \quad (12.117)$$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

12.22 Valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi  $\theta = \pi/2$  eli tilanne, jossa dipolimomenttivektori on kohtisuorassa kenttää vasten. Tällöin dipoliin tehty työ dipolin kääntyessä kulmaan  $\theta$  on

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -Ep \sin \theta d\theta = Ep \left| \cos \theta \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} = Ep(\cos \theta - 0) = Ep \cos \theta. \quad (12.118)$$

Potentiaalienergia on siis

$$U = -W = -Ep \cos \theta \quad (12.119)$$

kuten pitikin.

12.23 Kun dipolimomentti on kenttää vasten kohtisuorassa, piirtämättä jätetyt sivut ovat kentän suuntaiset. Niihin ei siis kohdistu voimaa lainkaan. Kun dipolimomentti on kentän suuntainen, piirtämättä jätetyt sivut ovat kenttään nähden kohtisuorat ja niihin siis kohdistuu magneettinen voima. Tämä voima osoittaa kuitenkin aina joko kohti silmukan keskustaa tai keskustasta pois päin, jolloin voimien momentti silmukan keskipisteen suhteen on nolla.

12.24 Moottoreita on erilaisia. Sähkömoottorin toiminta perustuu yleisesti siihen, että moottorissa on magneetteja ja johdinsilmukoita, joissa kulkeva virtaa voidaan säädellä. Kun silmukka on magneettikentässä sopivassa asennossa, siihen kohdistuu voiman momentti, joka pyrkii käänämään sitä. Nämä sähköinen energia muutetaan mekaaniseksi energiaksi ja moottori saadaan pyörimään. Useimmissa moottorimalleissa silmukkaan kohdistuva momentti pyrkisi vain käänämään silmukan tiettyyn asentoon, jos siinä kulkisi vakiovirta. Siksi virran suunta käännetään ympäri jokaisen puolikkaan kierroksen välein, jolloin magneettinen voima pyrkii käänämään silmukkaa aina samaan suuntaan.

12.25 (a) Positiivinen varaus on nyt vasemmalla ja negatiivinen oikealla. Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima vasemmalle ja negatiiviseen oikealle. Mutta koska kenttä heikkenee vasemmalle siirryttääessä, positiiviseen varaukseen kohdistuu pienempi voima. Niinpä kokonaisvoima osoittaa oikealle.

(b) Vastaavalla päättelyllä kokonaisvoima osoittaa vasemmalle.

(c) Kohdassa (a) dipolimomentti on kentän suuntainen, joten potentiaalienergia on negatiivinen. Voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaalienergia pienenee, ja tässä tapauksessa potentiaalienergia pienenee, kun se muuttuu yhä enemmän negatiiviseksi. Niinpä voima osoittaa suuntaan, jossa sähkökenttä voimistuu eli oikealle. Kohdassa (b) potentiaalienergia on positiivinen, joten voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaalienergia muuttuu vähemmän positiiviseksi. Tämä on suunta, jossa sähkökenttä heikkenee. Siispä voima osoittaa vasemmalle.

12.26 Kun A käännetään ympäri, magneettikentän suunta vaihtuu. Magneetin B dipolit ovat edelleen samaan suuntaan kuin ennenkin eli niiden dipolimomentit osoittavat vasemmalle. Jos dipolimomentit ajatellaan virtasilmukoiksi, silmukan yläreunaan kohdistuu voima alaviistoon oikealle ja silmukan alareunaan kohdistuu voima yläviistoon oikealle. Kokonaisvoima osoittaa siis oikealle. Niinpä tässä asennossa magneetit hylkivät toisiaan.



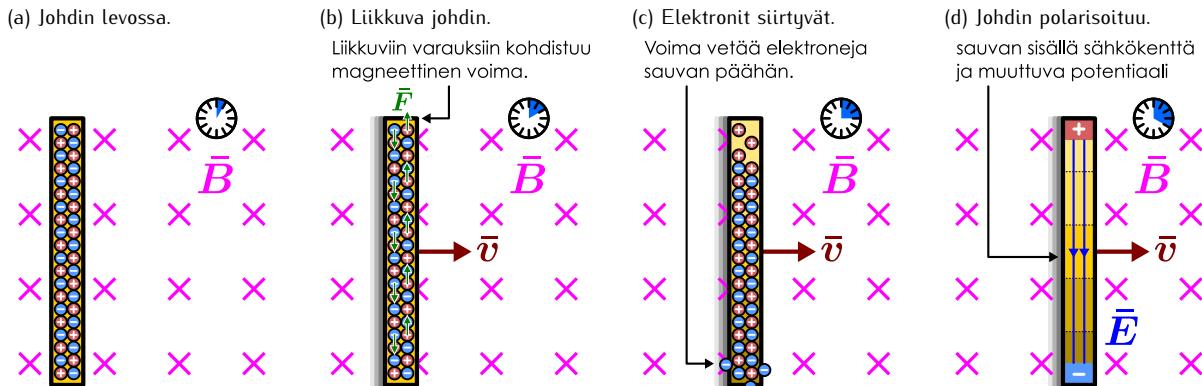
# 13 Sähkömagnetismi

Edellisessä luvussa opimme, että liikkuvat sähkövaraukset luovat ympärilleen pyörteisen magneettikentän. Sähkövaraukset voivat siis vuorovaikuttaa sekä sähköisesti että magneettisesti, mikä osoittaa näiden ilmiöiden liittyvän toisiinsa. Tässä luvussa jatkamme sähkön ja magnetismin yhteyden tutkimista ja tutustumme uusiin ilmiöihin kuten sähkömagneettiseen induktioon. Opimme, että pohjimmiltaan sähköinen ja magneettinen vuorovaikutus ovat yhden ja saman sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ilmenemismuotoja. Tätä vuorovaikutusta välittää sähkömagneettinen kenttä, jonka ilmeneminen sähkö- ja magneettikenttinä riippuu tavastamme havainnoida sitä. Lisäksi havaitsemme, että kentän muuttuessa sen sähköinen ja magneettinen osuus vaikuttavat toisiinsa. Kun pääsemme luvun loppuun, olemme viimeinkin löytäneet kaikki Maxwellin yhtälöiksi kutsutut klassisen sähkömagnetismin peruslait.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- määrittää virtajohtimeen indusoitua lähdejännite johtimen liikuessa tai magneettikentän muuttuessa
- selittää, kuinka sähkö- ja magneettikentät muuntuvat koordinaatistoa vaihdettaessa
- kuvalla kämin toiminta ja määritellä keskinäis- ja itseinduktanssi
- määritellä ja laskea magneettikentän energiatihleys
- selittää Faradayn lain perusteella, kuinka muuttuva magneettikenttä vaikuttaa sähkökenttiään
- selittää Maxwellin lain perusteella, kuinka muuttuva sähkökenttä vaikuttaa magneettikenttiään
- selittää Maxwellin yhtälöt sanallisesti ja muotoilla ne matemaattisesti

Kuva 13.1: Magneettikenttässä liikkuvan johtimen induktio. Johtimen mukana liikkuihin elektroneihin kohdistuu magneettikenttässä voima, joka saa ne liikkumaan. Johdin polarisoituu, ja tasapainossa elektroneihin kohdistuva magneettinen sekä sähköinen voima kumoavat toisensa.



## 13.1 Sähkömagneettinen induktio

Tähän mennessä olemme jo oppineet, että liikkuvat sähkövaraukset ja sähkövirrat luovat ympärilleen magneettikentän ja toisaalta liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikenttässä voima. Tätä ilmiötä hyödynnetään esimerkiksi *sähkömoottoreissa*, joissa akkujen varastoima kemiallinen energia muuttuu ensin elektronien potentiaalienergiaksi ja edelleen elektronien liükkeen ja magneettisen voiman kautta johdinten liike-energiaksi.

Myös käänneinen prosessi on mahdollinen. Osoittautuu nimitään, että magneettikenttässä liikkuvien johdinten liike-energia voidaan muuttaa elektronien potentiaalienergiaksi. Tämä ilmiö on nimeltään **sähkömagneettinen induktio**, ja sitä hyödynnetään etenkin *sähkögeneraattoreissa*, joissa mekaanisen liükkeen avulla synnytetään jännitteitä ja sähkövirtoja.

### Liikkuvan johtimen induktio

Kuvassa 13.1 on havainnollistettu induktioilmiö mahdollisimman yksinkertaisessa tilanteessa. Kuvassa metallinen saava liikkuu homogenisessa magneettikenttässä. Sauva on asetettu kuvassa pystysuuntaiseksi, saava liikkuu vasemmalta oikealle, ja magneettikenttä osoittaa kuvan sisään, katsojasta poispäin. Sauva, sen liukkeen suunta sekä magneettikenttä ovat siis kaikki kohtisuorassa toisiinsa nähdyn.

Kuvassa (a) sauva on vielä levossa, jolloin sen sisältämiin varauksiin ei kohdistu magneettista voimaa. Sauva on neutraali, joten varaukset ovat jakautuneet tasaisesti sauvan sisällä. Kuvassa (b) sauva alkaa liikkua, jolloin sen sisältämät varaukset liikkuvat sen mukana. Liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikenttässä magneettinen voima, ja oikean käden säännön mukaisesti positiivisiin varauksiin kohdistuu kuvassa voima ylöspäin ja negatiivisiin varauksiin alas.

Sauva on metallia, joten positiiviset varaukset eli atomiytimet eivät pääse liikkumaan, mutta negatiiviset varaukset eli elektronit pääsevät. Niiinpä magneettinen voima vetää elektroneja kuvassa alas, jolloin saavan yläpäähän jää positiivisen varauksen ylimäärä ja sen alapäähän kerääntyy negatiivisen varauksen ylimäärä kuten kuvassa (c).

Sauva siis polarisoituu, ja tämä polarisaatio synnyttää positiivisesta varauksesta negatiiviseen osoittavan sähkökentän. Sauvan sisään syntyvä kenttä on piirretty kuvaan (d), ja se osoittaa siis kuvassa ylhäältä alas. (Myös saavan ulkopuolelle syntyy sähkökenttä, mutta tästä ei ole kuvaan piirretty.) Varausten synnyttämä sähkökenttä osoittaa aina potentiaalin laskusuuntaan, joten potentiaalin täyttyy siis olla saavan positiivisesti varatussa päässä (kuvassa yläpää) korkeampi kuin saavan negatiivisesti varatussa päässä (kuvassa alapää).

Edellinen esimerkki osoittaa, että *potentiaaliero voi tuottaa liikuttamalla johdinta magneettikenttässä*, ja täälläistä *indusoitunutta jännitettä* voi myös hyödyntää, kuten kuvan 13.2 esimerkistä nähdään. Tässä kuvassa sauva on asetettu metallisille kiskoille, joita pitkin se pääsee vapaasti liikkumaan sivusuunnassa. Kiskot on yhdistetty toisesta päästään vastuksella, jolloin sauva, kiskot ja vastus muodostavat piirin. Vastus voi olla esimerkiksi lamppu, jolloin piirissä kulkeva sähkövirta havaitaan lampun sytytymisenä.

Sauva liikkuu kuvassa vasemmalta oikealle, jolloin sen pääiden välille indusoituu potentiaaliero. Aivan kuten kuvassa 13.1 (d), sauvan yläpäähän indusoituu korkea potentiaali ja alapäähän matala potentiaali. Kumpikin kisko on samassa potentiaalissa kuin kiskoon koskettava sauvan pää, joten myös kiskojen välille syntyy potentiaaliero. Erityisesti kiskoja yhdistävän vastuksen pääiden välille syntyy potentiaaliero, jolloin vastuksen läpi alkaa kulkea sähkövirta korkeasta potentiaalista kohti matalaa, ja näin sauva, kiskot sekä vastus muodostavat suljetun virtapiirin, jossa liikkova sauva toimii jännitelähteenä.

**13.1** Tarkastele kuvan 13.2 tilannetta sauvan elektronien näkökulmasta.

- (a) Mihin suuntaan sauvan elektroneihin kohdistuva magneettinen voima osoittaa?
- (b) Mihin suuntaan elektronien pitäisi tämän mukaan alkaa piirissä kiertää?
- (c) Mihin suuntaan sähkövirran pitäisi siis alkaa kulkea?

Magneettikentässä liikkuvan johdinkappaleen päiden välille induoituu siis potentiaaliiero, jota voidaan käyttää jännitelähteenä pariston tapaan. Paristossa kemialliset reaktiot tekevät varauksenkuljettajiin työtä siirtäen positiivista varausta matalasta potentiaalista korkeaan, jolloin paristoon varastoitunutta kemiallista energiota muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi. Tätä potentiaalienergiaa voidaan edelleen muuttaa muihin muotoihin esimerkiksi lampuilla tai sähkömoottoreilla. Liikkuvan sauvan ei ole varastoitunut kemiallista energiota kuten paristoon, mutta sauvalla on liike-energiaa, ja *induktio muuttaakin sauvan liike-energian varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi*.

Sauvassa kulkee sähkövirta, jolloin siihen kohdistuu myös magneettinen voima. Voiman suunta voidaan päättää oikean käden säännöllä: kun kuvassa virta kulkee ylöspäin (peukalo) ja magneettikenttä osoittaa pois katsojasta (etusormi), voima osoittaa kuvassa vasemmalle (keskisormi). Erityisesti koska johdin on suora, siihen kohdistuva voima on yhtälön (12.6) perusteella

$$\bar{F} = i\bar{L} \times \bar{B}, \quad (13.1)$$

missä  $\bar{L}$  on sauvan suuntainen virran kulkusuuntaan osoittava vektori. Tämän vektorin pituus vastaa sitä osuutta sauvasta, jossa kulkee sähkövirta, eli tässä tapauksessa kiskojen välistä etäisyyttä. Vaikka saava olisi tätä pidempi, virta kulkee vain kiskojen välillä ja vain tähän osaan sauvasta kohdistuu voima.

Sauvan kohdistuva voima osoittaa siis sauvan liikkeeseen nähdien vastakkaiseen suuntaan, jolloin se tekee sauvan negatiivisen työn. Jos sauvan siirtymä on  $\Delta\bar{r}$ , sauvan tehty työ on

$$W_{\text{sauva}} = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r} = i\bar{L} \times \bar{B} \cdot \Delta\bar{r}, \quad (13.2)$$

ja tämän verran saava siis menettää mekaanista energiota liikuessaan tämän siirtymän. Kuvan 13.3 tapauksessa kaikki vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, jolloin vektorien kertolasku antaa tulokseksi yksinkertaisesti vektorien pituuskilometri tulon

$$W_{\text{sauva}} = -iLB\Delta r. \quad (13.3)$$

Yleisesti kuitenkin saavan, lükkeen ja magneettikentän suunnat voivat olla mitä tahansa, jolloin työ täytyy laskea vektorien avulla.

**13.2** (a) Mihin suuntaan (i) sähkövirta kulkisi ja (ii) sauvan kohdistuva voima osoittaisi kuvassa 13.3, jos saava kulkisikin oikealta vasemmalle?

(b) Vaikuttaisiko tämä sauvan tehdyn työn etumerkkiin tai energian muutoksiin?

Sauvan menettämä energia ei voi kadota vaan sen täytyy muuttua toisiin muotoihin. Erityisesti jos saavan resistanssi on pieni, energiota ei sauvassa muutu lämpöenergiaksi vaan ainostaan varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi, jolloin varauksenkuljettajien saaman potentiaalienergian täytyy olla yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen sauvan tehtyyn työhön nähdien,

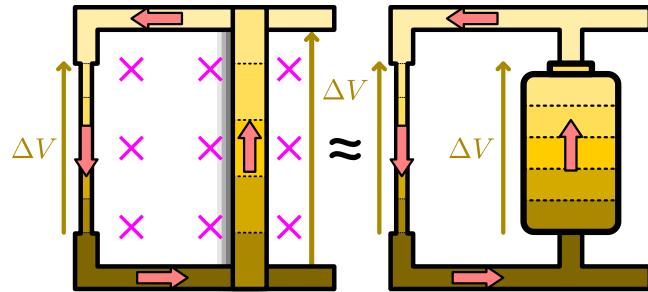
$$\Delta U_E = W_E = -W_{\text{sauva}} = -i\bar{L} \times \bar{B} \cdot \Delta\bar{r} = i\bar{B} \times \bar{L} \cdot \Delta\bar{r}. \quad (13.4)$$

Tässä miinusmerkistä päästää eroon vaihtamalla tekijöiden järjestystä säännön  $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$  mukaisesti.

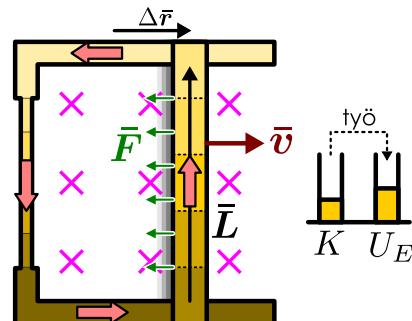
Sauvan läpi kulkeva virta mittaa sauvan läpi siirtyvän kokonaivarauksen määräät kulunutta aikaa kohden,  $i = \Delta q / \Delta t$ , joten sähköisen potentiaalienergian muutos voidaan kirjoittaa myös siirtyneen varauksen avulla muodossa

$$\Delta U_E = \frac{\Delta q}{\Delta t} \bar{B} \times \bar{L} \cdot \Delta\bar{r} = \Delta q \bar{B} \times \bar{L} \cdot \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \Delta q \bar{B} \times \bar{L} \cdot \bar{v}, \quad (13.5)$$

Kuva 13.2: Liikkuvan sauvan päiden välille induoituu potentiaaliiero, ja johdin toimii samaan tapaan kuin paristo.



Kuva 13.3: Johtimeen kohdistuu sen liikettä vastustava magneettinen voima.



missä  $\vec{v} = \Delta\vec{r}/\Delta t$  on sauvan nopeus, joka oletettiin tässä vakioksi.

Paristojen toimintaa tarkastellessamme määrittelimme pariston lähdejännitteen siten, että jos paristo antaa sen läpi kulkevalle varaukselle  $\Delta q$  potentiaalienergian  $\Delta U_E$ , pariston lähdejännite on

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta U_E}{\Delta q}. \quad (13.6)$$

Samalla tavalla magneettikentässä liikkuvan sauvan läpi kulkevan varauksen potentiaalienergia kasvaa, jolloin sauvan jännite saadaan jakamalla yhtälö (13.5) siirtyneen varauksen määrällä. Siispä jännite on

$$\mathcal{E} = \bar{B} \times \bar{L} \cdot \vec{v}. \quad (13.7)$$

Koska kuvan 13.3 esimerkissä nämä vektorit ovat kohtisuorat, sauvan jännitteeksi saadaan yksinkertaisesti

$$\mathcal{E} = BLv, \quad (13.8)$$

mutta yleisesti vektorien suunnat pitää huomioida yhtälön (13.7) mukaisesti.



- 13.3** Magneettikentän voimakkuus on 1 T ja metallisauvan pituus 1 m sekä nopeus 1 m/s. Mikä on sauvaan indusoitunut jännite, kun
- (a) sauva liikkuu pituussuunnassaan,
  - (b) kentän suunta on  $\hat{i}$ , sauvan suunta  $(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$  ja nopeuden suunta  $(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$ ?

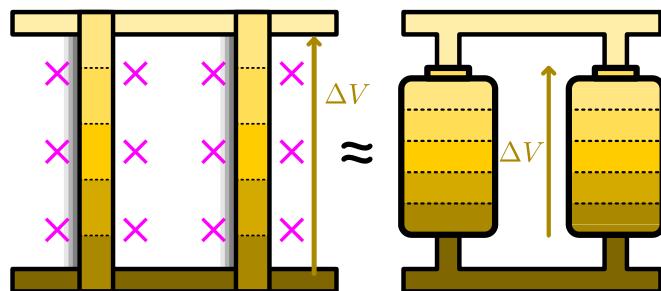
Vaikka edellisessä tarkastelussa laskimme sauvan läpi kulkevan varauksen saaman energian magneettisen voiman lausekkeen avulla, magneettinen voima ei itse asiassa tee liikkuihin varauksiin koskaan työtä, koska magneettinen voima on *aina* varausten lükkeen suuntaan nähdyn kohtisuorassa. Täsmällisesti työtä sauvassa kulkevaan varaukseen tekee sähköinen voima, joka vetää varauksenkuljetajia liikkuvan sauvan mukana ja kohdistaa niihin sauvan lükkeen suuntaisen voiman. Sähkövirta ei kuitenkaan ala kulkea ellei sauva ole magneettikentässä, koska magneettinen voima käääntää sauvan mukana liikkuvat elektronit kulkemaan sauvan pituussuunnassa.

## Faradayin induktiolaki

Yhtälö (13.7) kuvaa magneettikentässä liikkuvan suoraan johtimeen indusoituvan jännitteen johtimen nopeuden, pituuden ja asennon avulla. Jos piiri koostuu useista eri suuntasista tai eri suuntiin liikkuvista johtimista, voimme periaatteessa määrittää kuhunkin johtimeen indusoituvan jännitteen erikseen ja päätellä tästä kautta potentiaalin piirin eri pisteissä. Tämä voi kuitenkin olla varsin hankala, joten nyt tarvitteenamme onkin löytää jokin helpompi tapa määrittää muuttuvaan piiriin indusoituvan jännitteen suuruus.

Tarkastellaan vielä kiskoilla liikkuvia johtimia. Kuvan 13.4 esimerkki on muuten samanlainen kuin aikaisemmin tutkimamme kuvan 13.2, paitsi että nyt piirissä on liikkuvan sauvan ja vastuksen sijaan kaksi liikkuvaa sauvaaa. Nyt kumpaanakin sauvaan indusoituu yhtä suuri jännite, jolloin piirin kiskot ovat kyllä keskenään eri potentiaaleissa, mutta piirissä ei silti kulje sähkövirtaa, koska induktiojännitteet kumovat toisensa kierrettäessä piiri ympäri. Piirissä kulkee siis virta vain silloin, kun kiskoihin kiinnitettyjen johdinten välinen etäisyys muuttuu.

Kuva 13.4: Kahteen samalla nopeudella liikkovaan yhtä pitkään johtimeen indusoituu homogeenisessa magneettikentässä yhtä suuret jännitteet. Virta ei kulje.



- 13.4** Kuvassa 13.4 piirissä kulkee virta  $i$  vastapäivään, kun oikeanpuoleinen sauva liikkuu nopeudella  $\vec{v}$  ja vasemanpuoleinen on paikoillaan. Millainen jännite piirin eri osiin indusoituu ja millainen virta piirissä kulkee, jos vasemanpuoleinen sauva liikkuukin nopeudella (a)  $2\vec{v}$  tai (b)  $-\vec{v}$ ?

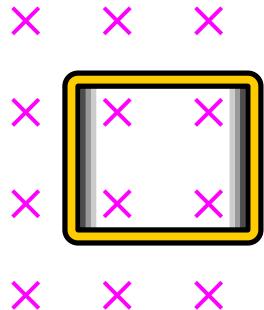
Johdinten etäisyyden muuttuminen tarkoittaa kuitenkin myös sitä, että *piirin rajaama pinta-ala muuttuu*. Jos johdinten välinen etäisyys on  $x$ , piirin pinta-ala on  $A = Lx$ . Edelleen jos etäisyys muuttuu vauhdilla  $v_x = \Delta x/\Delta t$ , piirin rajaaman pinta-alan muutosnopeus on

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = L \frac{\Delta x}{\Delta t} = Lv_x. \quad (13.9)$$

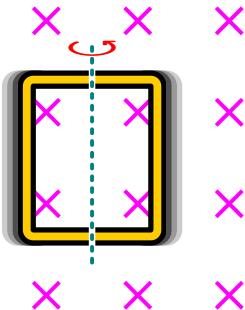
## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.5: Silmukan läpi kulkeva magneettivuo voi muuttua monella tavalla. Silmukan koko tai asento voi muuttua, silmukka voi siirtää erilaiseen magneettikenttään, tai magneettikenttä itsessään voi muuttua.

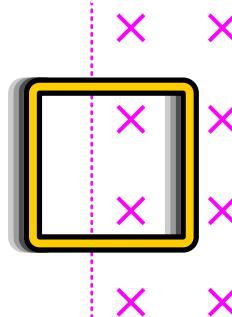
(a) Silmukan koko muuttuu.



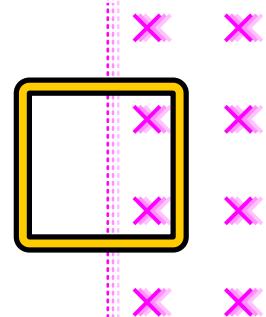
(b) Silmukan asento muuttuu.



(c) Silmukka liikkuu epähomogeeneissa magneettikenttässä.



(d) Magneettikenttä muuttuu.



Sauvaan indusoituvan jännitteen voi näin ollen kirjoittaa yhtälön (13.8) mukaisesti muotoon

$$\mathcal{E} = BLv_x = B \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (13.10)$$

Tässä magneettikenttä on homogeeninen ja muutumaton sekä kohtisuorassa piirin rajaamaa pintaa vasten, joten kentän ja piirin alan tulo on sama asia kuin *piirin läpäisevä magneettivuo*,

$$\Phi_B = \bar{B} \cdot \bar{A} = -BA. \quad (13.11)$$

Tässä miinusmerkki tulee siitä, että positiivinen suunta piirin läpi on valittu kuvassa kohti katsojaa. Magneettikenttä osoittaa kuitenkin katsojasta pois päin, jolloin se siis läpäisee pinnan negatiiviseen läpäisyysuuntaan ja magneettivuo on negatiivinen. Syy tähän valintaan selviää hetken päästää.

Magneettivuon muutos on edellisen päättelyn perusteella

$$\Delta\Phi_B = \Delta(\bar{B} \cdot \bar{A}) = \bar{B} \cdot \Delta\bar{A} = -B\Delta A, \quad (13.12)$$

koska nyt  $\bar{B}$  on vakio, ja piiriin indusoitunut jännite (13.10) voidaan esittää magneettivuon avulla muodossa

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \quad (13.13)$$

Tässä tapauksessa liike oli tasaista, jolloin magneettivuon muutosnopeus ja induktiojännite ovat vakiot. Yleisesti muutosten ei tienekään tarvitse olla tasaisia, jolloin on tarkasteltava infinitesimaalisia aikavälejä ja induktiojännitteksi saadaan

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.14)$$

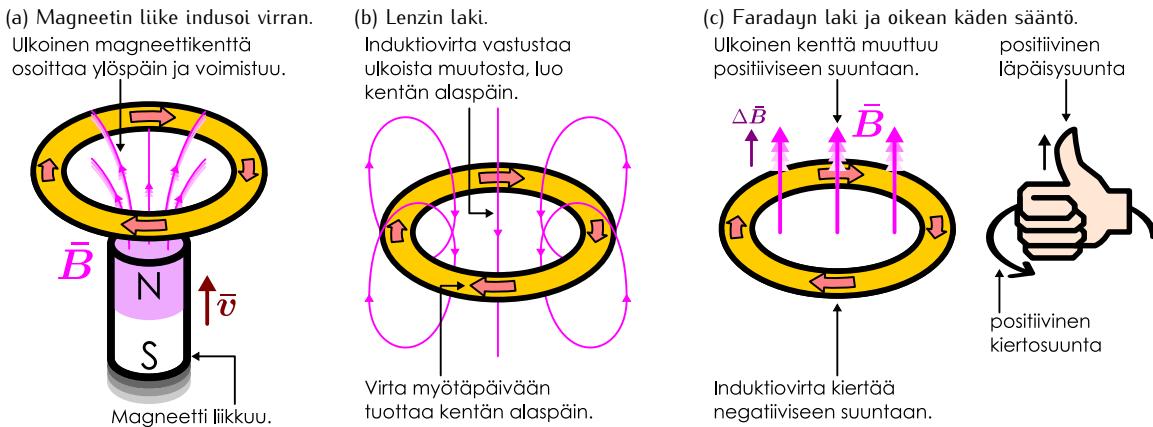
Tämä tulos on **Faradayn induktiolaki** (taas Michael Faraday mukaan). Johdimme tämän lain liukkavan johdimen induktiolain avulla tarkastelemalla ainoastaan yhtä erikoistapausta, mutta itse asiassa laki on yleispätevä. Mihin tahansa johdinsilmukkaan indusoituu jännite, kun sen läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, ja jännitteen suuruuden voi päättää Faradayn induktiolain avulla.

Magneettivuo mittaa karkeasti ilmaisten johdinsilmukan läpi kulkevien magneettikentän kenttäviivojen lukumäärää, joten silmukan läpäisevä *magneettivuo muuttuu silloin, kun silmukan läpi kulkevien kenttäviivojen määrä muuttuu*. Tämä voi tapahtua erilaisilla tavoilla kuten kuvassa 13.5 on havainnollistettu. Äsknen analysoimassamme esimerkissä *johdinsilmukan kokoa muutettiin* (kuva (a)). Magneettivuo voi kuitenkin muuttua myös *silmukan käentyessä*, koska tämä muuttaa sen läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärää (kuva (b)). Vuo voi muuttua myös silloin, kun *silmukka liikkuu epähomogeenisessa kenttässä*, koska kenttäviivojen tiheys muuttuu kentän voimakkuuden muuttuessa, ja tällöinkin piirin läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärä muuttuu (kuva (c)). Ja sekin on mahdollista, että piiri itsessään ei muudu mitenkään, mutta *magneettikentän voimakkuus tai suunta muuttuu* (kuva (d)), sillä tämäkin muuttaa piirin läpi kulkevien kenttäviivojen määrää. Induktion havaitaan tapahtuvan kaikissa näissä tilanteissa ja noudattavan Faradayn induktiolakia.

Jos johdinsilmukan resistanssi on  $R$  tai se on kytketty virtapiiriin, jonka kokonaisresistanssi on  $R$ , indusoitunut jännite tuottaa Ohmin lain mukaisesti *induktiovirran*, jonka suuruus on

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.15)$$

Kuva 13.6: Induktiovirran suunnan voi päätellä Lenzin tai Faradayn lailla. Lenzin lain mukaan induktiovirta vastustaa induktion tuottavaa muutosta. Faradayn lain mukaan induktiovirta kulkee negatiiviseen suuntaan, jos magneettivuo muuttuu positiiviseen suuntaan.



Induktiovirran suunnan voi päätellä usealla tavalla. Esimerkiksi kuvassa 13.2 magneettinen voima vetää johtimen elektroneja lükkumaan myötäpäivään, jolloin virran täytyy kulkea kuvassa vastapäivään. Toisaalta koska induktio muuttaa lükkivan johtimen liike-energiaa varauksen potentiaalienergiaksi ja edelleen vastuksesta lämpöenergiaksi, virran täytyy kulkea sellaiseen suuntaan, että lükkivaan johtimeen kohdistuva voima vastustaa johtimen liikkettä ja tekee siihen negatiivisen työn. Näin täytyy itse asiassa tapahtua *aina* riippumatta siitä millainen muutos silmukassa tai magneettikentässä induktion saa aikaan. Jotta energia säilyisi, *induktion tuottaman virran täytyy aina kulkea niin, että virta vastustaa sitä muutosta, joka induktion aiheuttaa*. Jos induktion aiheuttaa johtimen liike, induktiovirta kulkee niin, että johtimiin kohdistuu niiden liikkettä vastustava voima. Jos induktion aiheuttaa ulkoisen magneettikentän muutos, induktiovirta kulkee niin, että virran itsensä tuottama magneettikenttä pyrkii kumoamaan ulkoisen kentän muutoksen. Tätä periaatetta kutsutaan **Lenzin laiksi** (Heinrich Lenzin mukaan).



13.5 Mihin suuntaan induktiovirta kulkee kuvan 13.5 esimerkeissä Lenzin lain mukaan?

Lenzin lain kautta voimme perustella myös sen, miksi valitsimme kuvassa 13.2 positiivisen läpäisy suunnan nimenomaan kohti katsojaa, jolloin magneettivolle saatuiin negatiivinen arvo. Induktio tuottaa lükkivan sauvan päiden välille potentiaalieron niin, että kuvassa ylempänä oleva pää on korkeassa potentiaalissa ja alempana oleva pää matalassa potentiaalissa. Potentiaali siis kasvaa sauvalta pitkin siiressä kuvassa alhaalta ylös, jolloin sauvaan indusoitunut jännite on positiivinen tässä suunnassa. Toisaalta kun sauva kuljetaan alhaalta ylös, sauvan, kiskojen ja vastuksen muodostamaa piiriä kuljetaan vastapäivään. Tämä tarkoittaa siis sitä, että *piiriin indusoitunut jännite on positiivinen, kun piiri kierretään vastapäivään*. Toki vastuksenkin päiden välillä on potentiaaliero, mutta tämä ei ole *indusoitunut* jännite vaan tämä potentiaaliero johtuu vastuksen läpi kulkevasta virrasta ja resistanssista. Induktio tuottaa jännitteiden vain lükkivaan sauvaan.

Valitsimme siis kuvassa 13.2 positiivisen kiertosuunnan piiriin vastapäivään, jotta saimme induktio-jännitteelle positiivisen arvon. Kuitenkin kuten Ampèren lain yhteydessä opimme, *positiivinen kiertosuunta suljetun reitin ympäri ja positiivinen läpäisy suunta reitin läpi on sovittu riippumaan toisistaan oikean käden säännön mukaisesti*. Kun oikean käden koukistetut sormet osoittavat positiivisen kiertosuunnan, peukalo osoittaa positiivisen läpäisy suunnan. Jos oikean käden sormet asetetaan kuvassa 13.2 virran suuntaan, peukalo osoittaa kohti katsojaa, joten *jos valitsemme positiivisen kiertosuunnan vastapäivään, positiivisen läpäisy suunnan täytyy osoittaa kohti katsojaa*.

Oikean käden säännön ja Lenzin lain käyttöä induktiovirran suunnan päätelyssä on havainnollistettu kuvassa 13.6. Tarkasteltavana systeeminä on nyt metallirengas ja sauvamagneetti, ja induktio tuotetaan liikuttamalla magneettia kohti rengasta. Magneetti lähestyy rengasta alhaalta, N-napa edellä, joten sen tuottama magneettikenttä kulkee renkaan läpi alhaalta ylös voimistuen magneetin liikkuesssa. Lenzin lain mukaan silmukkaan indusoituu muutosta vastustava induktiovirta. Nyt ulkoinen kenttä vahvistuu, joten *induktioviran täytyy luoda renkaan sisään ulkoista magneettikenttää heikentävä magneettikenttä*. Näin tapahtuu silloin, kun virta kulkee kuvassa myötäpäivään, joten tähän suuntaan virran siis täytyy kulkea (kuva (b)).

Virran suunta voidaan päätellä myös Faradayn induktiolain ja oikean käden säännön perusteella. Jos nyt valitsemme positiivisen kiertosuunnan renkaan ympäri vastapäivään kuten kuvassa (c), positiivinen läpäisy suunta on kuvassa ylöspäin oikean käden säännön mukaisesti. Kun valitsemme näin, magneettikenttä läpäisee renkaan positiiviseen suuntaan, joten *magneettivuo on positiivinen*. Koska magneettikenttä voimistuu, mag-

## SÄHKÖMAGNETISMI

neettivuo kasvaan ja erityisesti *magneettivuo muutos on positiivinen*. Faradayin induktiolaisissa (13.14) olevan miinusmerkin mukaan magneettivuo positiivinen muutos tarkoittaa kuitenkin negatiivista induktiojännitettä, joten *induktiovirran täytyy kulkea negatiiviseen suuntaan* eli kuvalassa myötäpäivään. Tulos on tieteenkin sama kuin mitä edellä päätteli Lenzin laista. Voin aikinkin sanoa, että Lenzin laki tarkoittaa samaa kuin Faradayin laissa esiintyvä miinusmerkki.



**13.6** Päättele induktiovirran suunta kuvalan 13.6 tilanteessa, jos magneetti on paikoillaan ja rengas liikkuu vasemmalle (a) Lenzin lailla ja (b) Faradayin lailla.

Huomaa, että Faradayin laissa esiintyy nimenomaan magneettivuo muutos ajan suhteen eikä magneettivuo *suuruuden* muutos. Magneettivuo on skalaari mutta se voi kuitenkin olla negatiivinen. Vuon etumerkki riippuu positiivisen läpäisyssuunnan valinnasta samaan tapaan kuin esimerkiksi nopeuden  $x$ -komponentin etumerkki riippuu  $x$ -akselin suunnan valinnasta. Nopeus  $v_x$  on positiivinen, jos kappale liikkuu positiiviseen  $x$ -suuntaan, ja negatiivinen, jos kappale liikkuu negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Akselin suunnan valinta on periaatteessa mielivaltainen, mutta kun valinta on kerran tehty, sitä ei saa enää muuttaa.

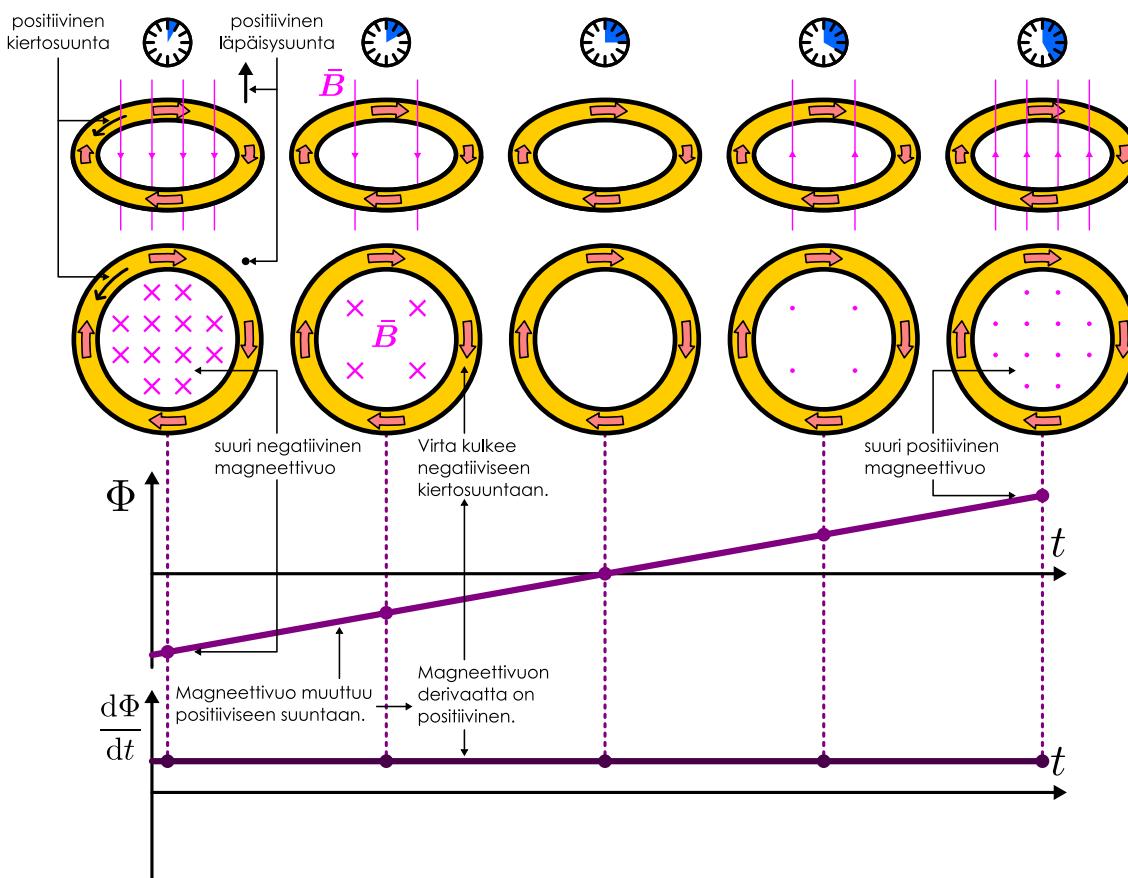


**13.7** Kappale liikkuu negatiiviseen  $x$ -suuntaan ja sen vauhti kasvaa. Mikä on (a) nopeuden  $v_x$ , (b) kiihydyiden  $a_x$ , (c) nopeuden muutoksen  $dv_x/dt$  etumerkki?

Samalla tavalla *magneettivuo muutoksen etumerkki kuvailee sitä, muuttuuko vuon positiiviseen vain negatiiviseen suuntaan*. Magneettivuo muutos on positiivinen silloin, kun positiiviseen suuntaan kulkeva magneettikenttä voimistuu, sillä tällöin positiivinen magneettivuo muuttuu vielä positiivisemmaksi. Vuon muutos on kuitenkin positiivinen myös silloin, kun negatiiviseen suuntaan kulkeva magneettikenttä heikkenee, sillä tällöin negatiivinen vuon muutos on negatiivisempi.

Tätä sääntöä on havainnollistettu kuvassa 13.7, jossa magneettikenttä muuttuu negatiivisesta positiiviseksi ja vuon muutos on siis koko ajan positiivinen, vaikka vuon suuruus alkuksi pieneneekin. Kuvan on piirretty myös vuon kuvaja  $\Phi_B(t)$  ajan funktiona, ja tämä kuvaja on nouseva suora. Vuon muutosnopeus  $\Phi'_B(t) = d\Phi_B/dt$  on

Kuva 13.7: Faradayin induktiolaki. Kun silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu positiiviseen suuntaan, silmukkaan indusoitava sähkövirta kulkee negatiiviseen kiertosuuntaan.



vuon kuvaajan kulmakerroin, ja se on kuvan esimerkissä siis positiivinen vakio. Edelleen koska magneettivuon muutosnopeus on positiivinen, indusoitunut jännite on Faradayn lain mukaan negatiivinen, ja induktiovirran täytyy kiertää silmukassa negatiiviseen kertosuuntaan.



**13.8** Mihin suuntaan induktiovirta kulkee kuvan 13.5 esimerkeissä Faradayn lain ja oikean käden säännön mukaan?

### esimerkki 13.1

### Generaattori

**Neliön muotoinen johdinsilmukka (sivun pituuus  $L$ ) pyörii kulmanopeudella  $\omega$  sivunsa suuntaisen akselin ympäri. Silmukka on homogeenisessa, pyörimisakseliin nähden kohtisuorassa magneettikenttää  $\bar{B}$ . Millainen jännite silmukkaan indusoituu?**

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään silmukan normaalilta ja magneettikentän välistä kulmaa  $\theta$ . Tämä on siis myös silmukan tason ja magneettikenttää vastaan kohtisuoran tason välinen kulma. Jännite riippuu ajasta, joten valitaan ajan nollahetki niin, että  $\theta(0) = \theta_{\text{alku}} = 0$ .

**SUUNNITELMA** Induktiojännite riippuu Faradayin induktiolain mukaisesti silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutosnopeudesta. Koska magneettikenttä on homogeninen, magneettivuo on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja silmukan kenttää vastaan kohtisuoran pinta-alan tulo, koska vuo mittaa silmukan läpi kulkevan vuon suuruutta.

Silmukan pinta-ala on  $L^2$ , mutta sen kenttää vastaan kohtisuora pinta-ala on vain

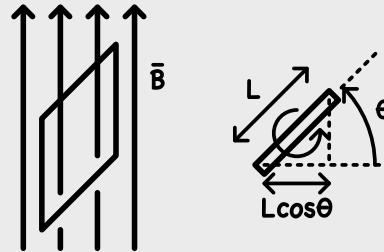
$$A_{\perp B} = L^2 \cos \theta. \quad (13.16)$$

Magneettivuon muutosnopeudesta riippuva jännite on siis

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{dA_{\perp B}}{dt}. \quad (13.17)$$

Pinta-alan derivaatan laskussa pitää tietää, että pyörimislukitsemisessä kulma riippuu ajasta,

$$\theta = \omega t + \theta_{\text{alku}} = \omega t. \quad (13.18)$$



**RATKAISU** Jännitteeksi saadaan

$$\mathcal{E} = -BL^2 \frac{d}{dt} \cos \omega t = BL^2 \omega \sin \omega t. \quad (13.19)$$

**ARVIOINTI** Magneettivuon maksimi on  $\Phi_{B,\max} = BL^2$  mikä saavutetaan silloin, kun silmukan normaalilta osoittaa kentän suuntaan. Vuon minimi on  $\Phi_{B,\min} = -BL^2$ , mikä tarkoittaa silmukan normaalilta osoittavan kenttään nähden vastakkaiseen suuntaan. Silmukalla on siis positiivinen läpäisyysuunta, ja silmukan kääntyminen ympäri muuttaa vuon negatiiviseksi. Silmukka kääntyy ympäri (kulman  $\Delta\theta = \pi$ ) ajassa  $\Delta t = \Delta\theta/\omega = \pi/\omega$ , ja tällöin sen vuon muutos on  $\Delta\Phi_B = \Phi_{B,\min} - \Phi_{B,\max} = -2BL^2$ . Keskimääräinen jännite on siis

$$\mathcal{E}_{\text{keskiarvo}} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{2}{\pi} BL^2 \omega \approx 0.6BL^2 \omega. \quad (13.20)$$

Ratkaisuna saatu funktio  $BL^2 \omega \sin \omega t$  saa tarkastellun puolen kierroksen aikana arvoja väliltä  $[0, BL^2 \omega]$ , ja sen keskiarvon pitää olla melko lähellä välin keskikohtaa. Koska näin on, tulos vaikuttaa järkevältä.

Äsknen tarkasteltiin vain sitä puolua kierroksesta, jolla jännite on positiivinen. Kaikkiaan jännite kuitenkin vaihtelee sinimuotoisesti välillä  $[-BL^2 \omega, BL^2 \omega]$ . Tätä kutsutaan vaihtojännitteeksi, ja tällä periaatteella toimivalla generaattorilla voidaan tuottaa vaihtovirtaa, jonka suunta vaihtuu tasaisin väliajoin.

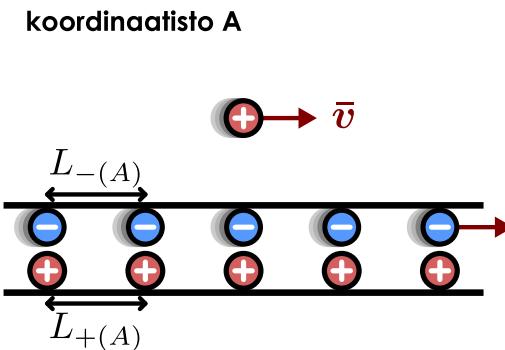


**13.9** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä sähkömagneettisesta induktiosta. Millaisissa tilanteissa induktio voi synnyttää sähkövirran? Selitä, miten voit päätellä induktiovirran suunnan. Selitä myös ainakin yksi tapa laskea induktiojännitteen suuruus.

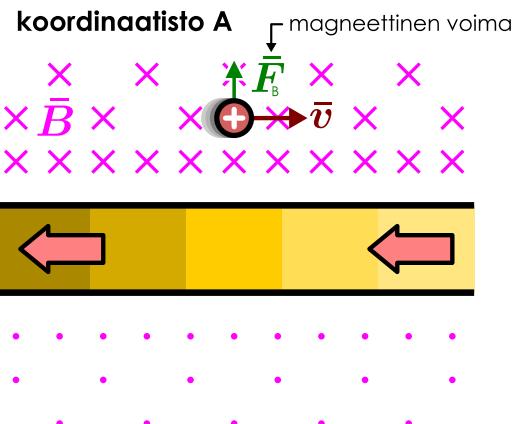
## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.8: Koordinaatistossa A neutraalissa virtajohdimessa kulkee elektronien kuljettama virta ja johtimen vierellä liikkuu positiivisesti varattu hiukkasan. Liikkuvan hiukkaseen kohdistuu johtimen magneettikentässä magneettinen voima.

(a) Hiukkasan ja johtimen elektronit liikkuvat.



(b) Liikkuvan hiukkaseen kohdistuu johtimen magneettinen voima.



## 13.2 Sähkömagneettinen yhteisvuorovaikutus

Tähän mennessä olemme oppineet, että sähkövirtojen avulla voidaan luoda magneettikenttiä ja toisaalta magneettikenttiä avulla voidaan luoda sähkövirtoja. Tämä osoittaa sähkön ja magnetismin liittyvän läheisesti toisiinsa, mutta näiden ilmiöiden yhteys on vielä paljon syvämpi kuin mitä tähän asti olemme nähneet. Sähköinen ja magneettinen vuorovaikutus eivät vain ole sukua toisilleen, vaan oikeastaan ne *ovat sama asia* vain hieman eri näkökulmista tarkasteltuina. Fysiikassa sähköistä ja magneettista vuorovaikutusta ei pidetää kään omina erillisinä ilmiöinään vaan puhutaan vain yhdestä **sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta**, jonka ilmenemismuotoja sähköinen ja magneettinen voimakin ovat. Seuraavaksi opimme, miksi näin on.

### Sähköinen vai magneettinen voima?

Kuvassa 13.8 (a) tarkastellaan virtajohdinta sekä sen vieressä kulkeavaa hiukkasta. Johdin koostuu levossa olevista positiivisesti varatuista atomiytimistä sekä kuvassa oikealle nopeudella  $\bar{v}$  liikkuvista negatiivisesti varatuista elektroneista. Johtimen vieressä olevalla hiukkasella on positiivinen varaus ja se liikkuu johtimen suuntaan samalla nopeudella kuin elektronit johtimessa.

Johdin on neutraali, joten ytimien ja elektronien varausten täytyy kumota toisensa täydellisesti. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että ydinten varaus on yksi alkeisvaraus,  $e$ , jolloin ytimiä ja elektroneja täytyy olla johtimessa yhtä tiheässä. Tällöin johdinta voi kuvata yksinkertaisella mallilla, jossa ytimet muodostavat positiivisten varausten jonon, jossa hiukkasten välinen etäisyys on  $L_+$ . Vastaavasti elektronit muodostavat negatiivisten varausten jonon, ja niiden välinen etäisyys on  $L_-$ . Koska johdin on neutraali, nämä etäisydet ovat yhtä pitkät,  $L_+ = L_-$ .

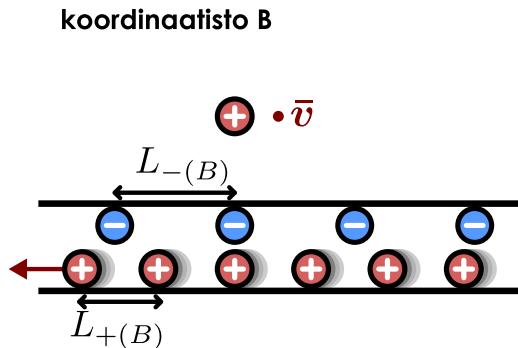
Koska negatiiviset elektronit kulkevat kuvassa oikealle, johtimessa kulkee sähkövirta vasemmalle, ja tämä virta luo johtimen ympärille pyörteisen magneettikentän kuten kuvassa 13.8 (b). Oikean käden säädön perusteella magneettikenttä osoittaa johtimen yläpuolella poispäin katsojasta, ja koska hiukkasan kulkee oikealle, siihen kohdistuvan magneettisen voiman täytyy osoittaa ylöspäin.

Tähän asti tilanne ei poikkea mitenkään edellisessä luvussa tarkastelemistamme tilanteista, mutta tutkitaan pa seuraavaksi, miltä tilanne näyttää *positiivisen hiukkisen lepokoordinaatistossa (B)* (kuva 13.9). Omassa koordinaatistossaan hiukkasan ei liiku, joten sen nopeus on nolla. Myös elektronit ovat tässä koordinaatistossa paikoillaan, mutta atomiytimet sen sijaan liikkuvat nyt kuvassa vasemmalle nopeudella  $-\bar{v}$ , koska johdin itsessään liikkuu.

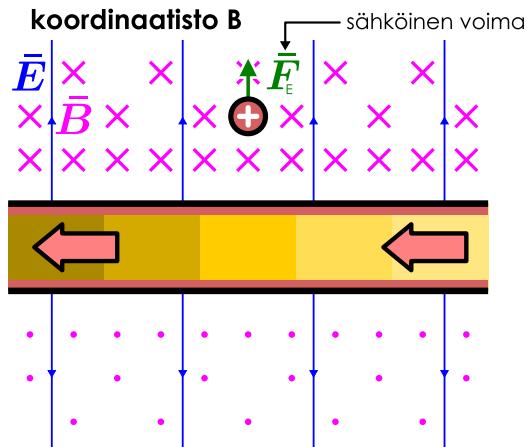
Tässäkin koordinaatistossa johtimessa kulkee virta vasemmalle, sillä nyt positiivinen varaus siirryy tähän suuntaan. Niinpä johdin luo tässäkin koordinaatistossa ympärilleen pyörteisen magneettikentän. *Johtimen vierellä kulkevan varattuun hiukkaseen ei kuitenkaan voi kohdistua magneettista voimaa, koska hiukkasan ei liiku, ja magneettinen voima kohdistuu vain liikkuihin hiukkasiin!* Toisaalta koska johtimen lepokoordinaatistossa (A) hiukkaseen kohdistui voima johtimesta poispäin, hiukkasan täytyy olla tässä koordinaatistossa kiihtyvässä liukkeessä, jolloin se lähtee loittonemaan johtimesta. Mutta silloin hiukkasan täytyy olla kiihtyvässä liukkeessä poispäin johtimesta myös koordinaatistossa B, joten *hiukkaseen täytyy kohdistua voima myös tässä koordinaatistossa*. Voima ei kuitenkaan voi olla magneettinen, vaan sen täytyy syntyä jollakin toisella mekanismilla.

Kuva 13.9: Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteessa samalla nopeudella kuin hiukkasan, joten koordinaatistossa B hiukkasan on levossa. Tässä koordinaatistossa johdin on varattu, ja hiukkaseen kohdistuu sähköinen voima.

(a) Hiukkasan levossa, johdin liikkuu.



(b) Levossa olevaan hiukkaseen kohdistuu vain sähköinen voima.



Tämän näennäisen ristiriidan ratkaisu on esitetty kuvassa 13.9 (a). Atomiytimet olivat koordinaatistossa A levossa, mutta koordinaatistossa B ytimien muodostama jono liikkuu. Suhteellisuusteorian mukaan liikkuvan jonon kokee *pituuskontraktio*, jolloin jonossa kulkevien hiukkasten välistet etäisyyset havaitaan koordinaatistossa B lyhentyneinä ja ydinten tiheys on näin ollen koordinaatistossa B suurempi kuin koordinaatistossa A. Vastaavasti elektronien muodostama jono on koordinaatistossa B levossa, joten elektronit kokevat pituuskontraktioon koordinaatistossa A, ja elektronien tiheys on koordinaatistossa B pienempi kuin koordinaatistossa A.



**13.10** Koordinaatistossa A johtimen elektronit ovat levossa etäisyydellä  $L$  toisistaan. Johdin yhdistetään paristoon, jolloin elektronit lähevät vaeltamaan likimain samanaikaisesti.

(a) Pysähtyvätkö elektronit samanaikaisesti koordinaatistossa B? Vertaa kuvaa 6.23.

(b) Selitä tämän perusteella, miksi elektronit ovat koordinaatistossa B kauempaan toisistaan.

Varattujen hiukkasten muodostaman jonon pituusvaraus on hiukkasten varauksen  $q$  ja niiden välisen etäisyyden  $L$  suhde,

$$\lambda = \frac{q}{L}, \quad (13.21)$$

ja koska hiukkasten sähkövaraus on invariantti suure, hiukkasten välisten etäisyyksien suhteellisuus tarjoittaa myös johtimen varaustiheyden olevan suhteellinen. Erityisesti koska koordinaatistossa B positiiviset varaukset ovat tiheämässä kuin negatiiviset, *johtimen täytyy olla tässä koordinaatistossa positiivisesti varautunut*, ja niinpä se luo ympärilleen johtimesta poispäin osoittavan sähkökentän kuten kuvassa 13.9 (b). Koordinaatistossa B johtimen vierellä olevaan hiukkaseen kohdistuu siis *sähköinen voima*, jolloin hiukkasan on myös tässä koordinaatistossa kiihtyvässä liikkeessä. Mitään ristiriitaa ei siis ole, mutta koordinaatiston A magneettinen voima ilmeneekin koordinaatistossa B puhtaasti sähköisenä voimanana!

Lasketaan vielä hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruus kummassakin koordinaatistossa. Oletetaan, että *tarkasteltavat nopeudet ovat huomattavasti valonnopeutta pienemmät,  $v \ll c$* . Suhteellisuusteoriassa voima on suhteellinen suure, mutta klassisessa suhteellisuudessa voima on absoluuttinen. Niinpä jos koordinaatistot liikkuvat toistensa suhteeseen hitaasti, johtimen vierellä kulkevaan *hiukkaseen pitää kohdistua kummassakin koordinaatistossa yhtä suuri voima*.

Oletetaan, että varattu hiukkasan on protoni, jonka varaus on siis  $e$ . Koordinaatistossa A hiukkaseen kohdistuu magneettinen voima, ja koska hiukkasan liikkuu tarkasteluhetkellä kohtisuoraan kenttään nähdyn, voima on suuruudeltaan

$$F_{(A)} = |e\bar{v} \times \bar{B}_{(A)}| = qvB_{(A)}. \quad (13.22)$$

Voimme tässä olettaa, että varattu hiukkasan etäisyys johtimesta,  $r$ , on paljon suurempi kuin varattujen hiukkasten välinen etäisyys johtimen sisällä mutta silti paljon pienempi kuin johtimen pituus. Tällöin meidän ei tarvitse huomioida johtimen sisällä liikkuvia elektroneja yksitellen vaan voimme käyttää äärettömän pitkän suoran johtimen mallia magneettikentän laskemisessa. Suoran johtimen magneettikentän voimakkuus etäisyydellä  $r$  on yhtälön (12.2) mukaisesti

$$B_{(A)} = \frac{\mu_0 i_{(A)}}{2\pi r}, \quad (13.23)$$

joten hiukkaseen kohdistuva voima on

$$F_{(A)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{evi_{(A)}}{r}. \quad (13.24)$$

Koska elektronien välinen etäisyys on  $L_{-(A)}$  ja ne kulkevat vauhdilla  $v$ , johtimen poikkileikkaus läpi kulkee yksi elektri eli varaus

$$\Delta q_{(A)} = -e \quad (13.25)$$

ajassa

$$\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v} L_{-(A)}. \quad (13.26)$$

Elektronien kuljettaman sähkövirran suuruus on siis

$$i_{(A)} = \left| \frac{\Delta q_{(A)}}{\Delta t_{(A)}} \right| = \frac{1}{L_{-(A)}} ev \quad (13.27)$$

ja varattuun hiukkaseen kohdistuva voima on

$$F_{(A)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^2 v^2}{r L_{-(A)}}. \quad (13.28)$$

Koordinaatistossa B johdinta voidaan vastaavaan tapaan kuvata äärettömän pitkänä varattuna sauvana, jonka sähkökenttä noudattaa Gaussin lain perusteella yhtälöä (10.85),

$$E_{(B)} = \frac{\lambda_{(B)}}{2\pi \epsilon_0 r}, \quad (13.29)$$

missä  $\lambda_{(B)}$  on sauvan pituusvaraustiheys. Sähkökenttä kohdistaa varattuun hiukkaseen voiman

$$F_{(B)} = e E_{(B)} = \frac{e \lambda_{(B)}}{2\pi \epsilon_0 r}, \quad (13.30)$$

ja tämän pitäisi olla sama kuin hiukkaseen koordinaatistossa A kohdistuva magneettinen voima.

Varaustiheyden laskemisessa tarvitsemme suhteellisuusteoriaa, vaikka koordinaatistojen A ja B välisen nopeus on hyvin pieni. Ydinten välinen etäisyys koordinaatistossa B on

$$L_{+(B)} = \frac{1}{\gamma_{B(A)}} L_{+(A)} \quad (13.31)$$

ja elektronien välinen etäisyys on puolestaan

$$L_{-(B)} = \gamma_{B(A)} L_{-(A)}. \quad (13.32)$$

Sauvan varaustiheys koordinaatistossa B on näin ollen

$$\lambda_{(B)} = \lambda_{+(B)} + \lambda_{-(B)} = \frac{e}{L_{+(B)}} - \frac{e}{L_{-(B)}} = \frac{e}{L_{-(A)}} \left( \gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \right) \quad (13.33)$$

ja hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruudeksi saadaan

$$F_{(B)} = \frac{e^2}{2\pi \epsilon_0 r L_{-(A)}} \left( \gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \right). \quad (13.34)$$



- 13.11** (a) Miten tekijä  $\gamma - 1/\gamma$  muuttuu, kun  $v$  kasvaa?  
 (b) Onko  $\lambda_{(B)}$  tämän perusteella siis positiivinen vai negatiivinen?  
 (c) Vertaa laskun tulosta kuvaan 13.9.

Lauseke ei näytä samalta kuin koordinaatistossa A laskettu voima (13.28), mutta voimme vielä sieventää sitä kirjoittamalla Lorentzin tekijät koordinaatistojen välisen nopeuden  $v_{B(A)} = v$  avulla. Koska oletimme tämän nopeuden olevan pieni, voimme käyttää approksimaatioita

$$\gamma_{B(A)} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (13.35)$$

sekä

$$\frac{1}{\gamma_{B(A)}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}, \quad (13.36)$$

jolloin lausekkeen (13.34) viimeinen termi sievenee muotoon

$$\gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.37)$$

Nämä ollen koordinaatistossa B hiukkaseen kohdistuvalle sähköiselle voimalle saadaan lauseke

$$F_{(B)} \approx \frac{e^2 v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r L_{-(A)}}. \quad (13.38)$$



**13.12** Laske tekijät  $\gamma$  ja  $1/\gamma$  sekä täsmällisesti että approksimaatioilla (13.35) ja (13.36), kun  $v$  on (a)  $0.5c$ , (b)  $0.1c$ , (c)  $0.01c$ , (d) Toimiiko approksimaatio? Voiko lauseketta (13.38) pitää tarkkana, kun  $v \ll c$ ?

Hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruus noudattaa siis koordinaatistossa A lauseketta (13.28) ja koordinaatistossa B lauseketta (13.38), ja koska voiman pitää olla kummassakin koordinaatistossa sama (kun koordinaatistojen välisen nopeuden on pieni), näiden lausekkeiden täytyy olla arvoltaan samat,  $F_{(A)} = F_{(B)}$ , eli

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^2 v^2}{r L_{-(A)}} = \frac{e^2 v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r L_{-(A)}}. \quad (13.39)$$

Lausekkeet ovatkin muuten samat paitsi että koordinaatistossa A vaikuttava magneettinen voima riippuu magneettivakiosta  $\mu_0$  kun taas koordinaatistossa B mitattu sähköinen voima riippuu sähkövakiosta  $\epsilon_0$  ja valonnopeudesta  $c$ . Koska lausekkeiden täytyy olla samat, näille vakioille täytyy päteä ehto

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (13.40)$$

tai toisin kirjoittaen

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (13.41)$$



**13.13** (a) Sijoita lukuarvot yhtälöön (13.41) ja tarkista, että se pätee.  
 (b) Tee yhtälölle myös yksikkötarkastelu.

Tämä ajatuskoe on monella tavalla merkittävä. Sen mukaan sähkö- ja magneettikenttiä kuvaavat vakiot määritävät myös valonnopeuden, mikä vihjaa valon liittyvän sähkömagnetismiin. Tämä tarkastelu osoittaa myös sen, että *sähkö- ja magneettikenttä ovat suhteellisia suureita*. Tässä esimerkissä koordinaatistossa A sähkökenttä on kaikkialla nolla ja hiukkaseen kohdistuva voima on pelkästään magneettinen, kun taas koordinaatistossa B on sähkökenttä ja hiukkaseen kohdistuva voima on puhtaasti sähköinen. Johtimen varaukset vuorovaikuttavat johtimen rinnalla olevan hiukkasen kanssa kaikissa koordinaatistoissa, mutta riippuu näkökulmasta, onko tämä vuorovaikutus mielestämmeksi sähköinen vai magneettinen.

### Sähkömagneettisen kentän suhteellisuus

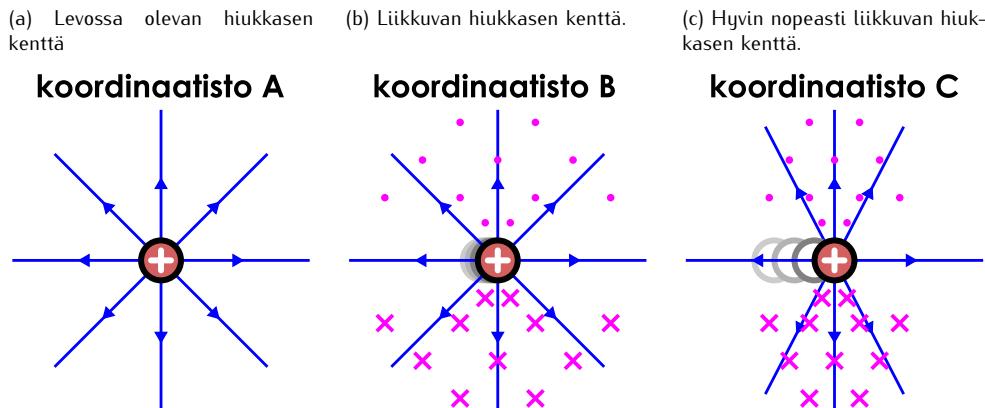
Kuvissa 13.8 ja 13.9 johtimen ja varatun hiukkasen välillä on *sähkömagneettinen vuorovaikutus*, jota välittää *sähkömagneettinen kenttä*. Me kuvamme sähkömagneettista kenttää suureilla  $\vec{E}$  ja  $\vec{B}$ , jotka on määritelty niin, että  $\vec{E}$  kohdistaa voiman *kaikkiin* varattuihin hiukkasiin ja  $\vec{B}$  kohdistaa voiman *vain* liikkuviin hiukkasiin. Yhdessä koordinaatistossa liikkuva varaus voi kuitenkin olla toisessa koordinaatistossa levossa, joten sähkömagneettisen kentän jaon suureisiin  $\vec{E}$  ja  $\vec{B}$  täytyy olla eri koordinaatistoissa erilainen. Tässä mielessä siis sähköisyyys ja magneettisuus todella ovat yhden ja saman sähkömagneettisuuden ilmenemismuotoja, ja riippuu näkökulmasta, määritelläänkö voima sähköiseksi vai magneettiseksi.

Esimerkiksi pistevaraus luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän, jolla voi olla sekä sähköinen että magneettinen luonne riippuen koordinaatistosta. Varauksen lepokoordinaatistossa sähkömagneettinen kenttä on puhtaasti sähköinen, ja kentän sähköistä luonnetta kuvaavat Coulombin laki (kuva 13.10 (a)). Koordinaatistoissa, joissa varaus liikkuu, kentällä on myös magneettinen luonne, jota kuvaavat Biot'n ja Savartin laki (kuva 13.10 (b)).

Tämä myös selittää, miksi pistevaraus sähkö- ja magneettikenttien on pakko riippua etäisyydestä samalla tavalla. Pistevaraus luo Coulombin lain mukaisesti ympärilleen sähkökentän, jonka voimakkuus on käantäen verrannollinen etäisyyden neliöön,  $E \sim r^{-2}$ . Mutta jos tämä sähkömagneettinen kenttä ilmenee toisessa koordinaatistossa myös magneettisena, tämän magneettisen osan voimakkuuden täytyy niin ikään olla käantäen verrannollinen etäisyyden neliöön,  $B \sim r^{-2}$ . Tästä syystä Biot'n ja Savartin laissa (12.17) on samalainen  $r$ -riippuvuus kuin Coulombin laissa.

## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.10: Sähkömagneettisen kentän suhteellisuus. Varattu hiukkasan luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän. Eri koordinaatistoiissa sähkömagneettisen kentän jakautuminen sähköiseen ja magneettiseen osuuteen havaitaan kuitenkin eri tavoin.



**13.14** Millaisen sähkökentän pitkä varattu sauva luo? Entä millaisen magneettikentän luo pitkä virtajohdin? Mitä samaa kentissä on ja miksi niiden pitää olla tällä tavalla samanlaiset?

Johdetaan nyt varauksen luomalle sähkö- ja magneettikentälle täsmällinen yhteyks. Jos varattu hiukkasan on levossa koordinaatiston A origossa, sen sähkökenttä on Coulombin lain mukaan tässä koordinaatistossa

$$\bar{E}_{(A)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (13.42)$$

Toisaalta jos koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen nopeudella  $\bar{v}_{B(A)}$ , varattu hiukkasan liikkuu koordinaatistossa B nopeudella  $\bar{v}_{(B)} = -\bar{v}_{B(A)}$ . Ollessaan koordinaatiston origossa hiukkasan luo siis Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikentän

$$\bar{B}_{(B)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{(B)} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{B(A)} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.43)$$

Toisaalta voimme laventaa tämän lausekkeen sähkövakiolla, jolloin magneettikentäksi saadaan

$$\bar{B}_{(B)} = -\frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{B(A)} \times \hat{r}}{r^2} = -\mu_0\epsilon_0\bar{v}_{B(A)} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = -\mu_0\epsilon_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}, \quad (13.44)$$

joten magneettikentän ja sähkökentän välille saadaan yhteyks

$$\bar{B}_{(B)} = -\epsilon_0\mu_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.45)$$

Jos sähkökentän luo monta sähkövarausta yhdessä, niiden kaikkien kentät muuntuvat samalla tavalla. Tämä tarkoittaa sitä, että koordinaatistossa A havaittu sähkökenttä havaitaan siis todellakin koordinaatistossa B sekä sähkö- että magneettikentänä.

Muunnosyhtälö (13.45) pätee kuitenkin vain siinä tapauksessa, että koordinaatistossa A on vain sähkökenttä eikä lainkaan magneettikenttää. Jos koordinaatistossa A on pisteverauksen luoman sähkökentän lisäksi myös magneettikenttää  $\bar{B}_{(A)}$ , tämä kenttä vaikuttaa edelleen myös koordinaatistossa B. Kokonaisuudessaan magneettikentän muunnos koordinaatistoa vaihdettaessa noudattaa yhtälöä

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0\mu_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.46)$$

**13.15** Tarkastellaan kolmea koordinaatistoa A, B ja C. Varattu hiukkasan on levossa koordinaatistossa A, ja tässä koordinaatistossa havaitaan vain hiukkasen sähkökenttä. Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen nopeudella  $\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}$  ja koordinaatisto C liikkuu A:n suhteen nopeudella  $\bar{v}_{C(A)} = 2\bar{v}$ , missä  $v \ll c$ .

- (a) Millainen magneettikenttä havaitaan koordinaatistoissa B ja C Biot'n ja Savartin lain mukaan?
- (b) Millainen magneettikenttä koordinaatistoissa B ja C pitäisi olla yhtälön (13.46) perusteella, kun muunnos lasketaan koordinaatiston A suhteen?
- (c) Millainen magneettikenttä koordinaatistossa C pitäisi olla yhtälön (13.46) perusteella, kun muunnos lasketaan koordinaatiston B suhteen?
- (d) Ovatko tulokset sopusoinnussa eli näyttääkö yhtälö (13.46) pätevän?

Yhtälö (13.46) pätee, kun koordinaatistojen välinen nopeus ei ole kovin suuri. Kyseessä on siis **magneettikentän Galilei-muunnos**. Yhtälö ei kuitenkaan päde enää silloin, kun koordinaatistojen välinen nopeus on suuri, koska tällöin avaruudelliset etäisyysdet muuttuvat suhteellisuusteooreettisen pituuskontraktion takia, ja tämä muuttaa myös sähkömagneettista kenttää. Lähellä valonnopeutta kulkevan varatun hiukkisen sähkö- ja magneettikentät muistuttavatkin kuvaan 13.10 (c). Kentät eivät ole pallosymmetriset vaan liukkeen suunnassa "litistyneet", jolloin Coulombin laki sekä Biot'n ja Savartin laki eivät enää päde.



**13.16** Selitä, miksi Coulombin laki ei päde kuussa 13.10 (c) mutta Gaussin laki pätee. Perustele kuvan avulla!

Edellisessä esimerkissä tutkimme pisteverauksen luoman kentän muuttumista, mutta kenttämallin hienous on siinä, että yleensä meidän ei tarvitse tietää, *millaiset* varaukset kentän ovat luoneet. Voimmekin siis käyttää yhtälöä (13.46) magneettikentän laskemiseksi koordinaatistossa B, vaikka emme tietäisi kääni, milloiset varaukset ovat luoneet koordinaatistossa A havaitut kentät. Kuitenkin jotta voisimme määrittää koko sähkömagneettisen kentän muutoksen koordinaatistoa vaihdettaessa, meidän pitää lisäksi tietää, kuinka sähkökenttä muuttuu, ja seuraava tehtävämme on siis määrittää sähkökentän Galilei-muunnos.

Tarkastellaan ensin kuvaan 13.11 (a), joka olkoon koordinaatisto A. Kuussa on positiivisesti varattu hiukkanen sähkökentässä  $\bar{E}_{(A)}$  ja magneettikentässä  $\bar{B}_{(A)}$ . Sähkökenttä osoittaa kuussa suoraan oikealle ja kohdistaa hiukkaseen sähköisen voiman

$$\bar{F}_{\text{sähkö},(A)} = q\bar{E}_{(A)}. \quad (13.47)$$

Magneettikenttä osoittaa kuussa katsojasta poispäin. Hiukkunen liikkuu sähkökentän suuntaan nopeudella  $\bar{v}_{(A)}$ , jolloin siihen kohdistuu magneettinen voima

$$\bar{F}_{\text{magneetti},(A)} = q\bar{v}_{(A)} \times \bar{B}_{(A)}. \quad (13.48)$$

Kuussa sähköinen voima osoittaa suoraan oikealle ja magneettinen voima suoraan ylöspäin, jolloin hiukkaseen kohdistuva kokonaivoima

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(A)} = \bar{F}_{\text{sähkö},(A)} + \bar{F}_{\text{magneetti},(A)} = q(\bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{(A)} \times \bar{B}_{(A)}) \quad (13.49)$$

osoittaa kuussa yläviistoon oikealle.

Kuussa 13.11 (b) on sama tilanne hiukkisen lepoonkoordinatistossa B. Koordinaatistojen välinen nopeus on sama kuin hiukkisen nopeus A:ssa,  $\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{(A)}$ , ja oletetaan jälleen tämän nopeuden olevan pieni verrattuna valonnopeuteen. Tällöin hiukkaseen kohdistuvan voiman täytyy olla kummassakin koordinaatistossa sama,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(A)} = \bar{F}_{\text{kokonais},(B)}. \quad (13.50)$$

Kokonaivoimavektori osoittaa siis tässäkin kuussa yläviistoon.

Koordinaatistossa B hiukkanen on levossa, jolloin siihen ei kohdistu lainkaan magneettista voimaa. Kokonaivoiman täytyy siis olla puhtaasti sähköinen,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(B)} = \bar{F}_{\text{sähkö},(B)} = q\bar{E}_{(B)}, \quad (13.51)$$

ja sähkökentän täytyy osoittaa samaan suuntaan kuin hiukkaseen kohdistuvan voiman. Jotta lausekkeet (13.49) ja (13.51) olisivat samat, **sähkökentän Galilei-muunnoksen** täytyy noudattaa yhtälöä

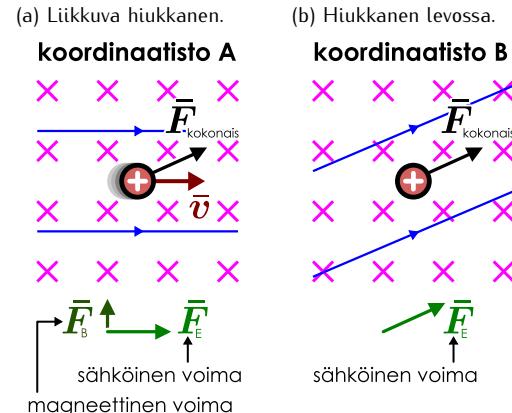
$$\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}. \quad (13.52)$$

Yhtälöt (13.46) ja (13.52) kertovat, miten sähkömagneettisen kentän sähköinen ja magneettinen osuus muuttuvat koordinaatistoa vaihdettaessa. Yhtälöt eivät ole yleispäteviä vaan ne toimivat vain koordinaatistojen välisten nopeuksien ollessa pienet. Yleiset, suhteellisuusteooreettiset muunno syhtälöt ovat hieman monimutkaisemmat, emmekä esittele niitä tässä. Oleellista on kuitenkin ymmärtää, että eri koordinaatistossa havaitaan erilaiset sähkö- ja magneettikentät, ja näiden kenttien välillä on täsmällinen yhteyts.



**13.17** Kuussa 13.8 on magneettikenttä. Päätteli yhtälöstä (13.52), mihin suuntaan sähkökenttä osoittaa koordinaatistossa, joka liikkuu kuussa oikealle. Vertaa kuvaan 13.9.

Kuva 13.11: Sähkömagneettinen kenttä havaitaan eri koordinaatistossa eri tavoin.



## esimerkki 13.2

## Suhteellinen kenttä

Koordinaatistossa A on sähkökenttä  $\bar{E}_{(A)} = (100 \text{ V/m})\hat{i} + (200 \text{ V/m})\hat{j}$  ja magneettikenttä  $\bar{B}_{(A)} = (0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}$ . Varaus 1.0 C liikkuu koordinaatistossa nopeudella  $\bar{v}_{(A)} = (-250 \text{ m/s})\hat{j}$ . (a) Millainen voima hiukkaseen kohdistuu? (b) Koordinaatisto B liikkuu A:n suhteen nopeudella  $\bar{v}_{B(A)} = (50 \text{ m/s})\hat{i}$ . Millainen sähkö- ja magneettikenttä B:ssä on? (c) Millainen voima hiukkaseen kohdistuu B:ssä?

**SUUNNITELMA** Hiukkaseen kohdistuva Lorentzin voima on

$$\bar{F} = \bar{F}_E + \bar{F}_B = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (13.53)$$

Koordinaatiston B kentät voidaan laskea muunnoksilla

$$\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)} \quad (13.54)$$

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0 \mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.55)$$

**RATKAISU** (a) Koordinaatistossa A sähköinen ja magneettinen voima on

$$\bar{F}_{E(A)} = (1 \text{ C})[(100 \text{ V/m})\hat{i} + (200 \text{ V/m})\hat{j}] = (100 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} \quad (13.56)$$

$$\bar{F}_{B(A)} = (1 \text{ C})(-250 \text{ m/s})\hat{j} \times [(0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}] = (50 \text{ N})\hat{i} + (25 \text{ N})\hat{k}. \quad (13.57)$$

Kokonaisvoima on näiden summa,  $\bar{F}_{(A)} = (150 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}$ .

(b) Koordinaatistossa B kentät ovat  $\bar{E}_{(B)} = (100 \text{ V/m})\hat{i} + (210 \text{ V/m})\hat{j}$  ja  $\bar{B}_{(A)} \approx (0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}$ . Magneettikentälle tämä on likiarvo, mutta tekijä  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  on niin pieni, että se voidaan tässä jättää huomioimatta.

(c) Varauksen nopeus B:ssä on  $\bar{v}_{(B)} = \bar{v}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)} = (-50 \text{ m/s})\hat{i} + (-250 \text{ m/s})\hat{j}$ . Voimat ovat nyt siis  $\bar{F}_{E(B)} = (100 \text{ N})\hat{i} + (210 \text{ N})\hat{j}$ ,  $\bar{F}_{B(B)} = (50 \text{ N})\hat{i} + (-10 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}$  ja kokonaisvoima on

$$\bar{F}_{(B)} = (150 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}. \quad (13.58)$$

**ARVIOINTI** Kummassakin koordinaatistossa saadaan sama kokonaisvoima kuten pitääkin. (Ainakin likimain. Käytetty Galilei-muunnos ei ole tarkka.) Tämän voiman jakautuminen sähköiseen ja magneettiseen osuuteen on kuitenkin eri koordinaatistoissa erilainen.



**13.18** Selitä omin sanoin, miksi eri koordinaatistoissa havaitaan erilaiset sähkö- ja magneettikentät. Jos tunnet kentät yhdessä koordinaatistossa, miten lasket kentät muissa koordinaatistoissa? Miksi on järkevää puhua sähkömagneettisesta kentästä eikä vain erikseen sähköisestä ja magneettisesta kentästä?

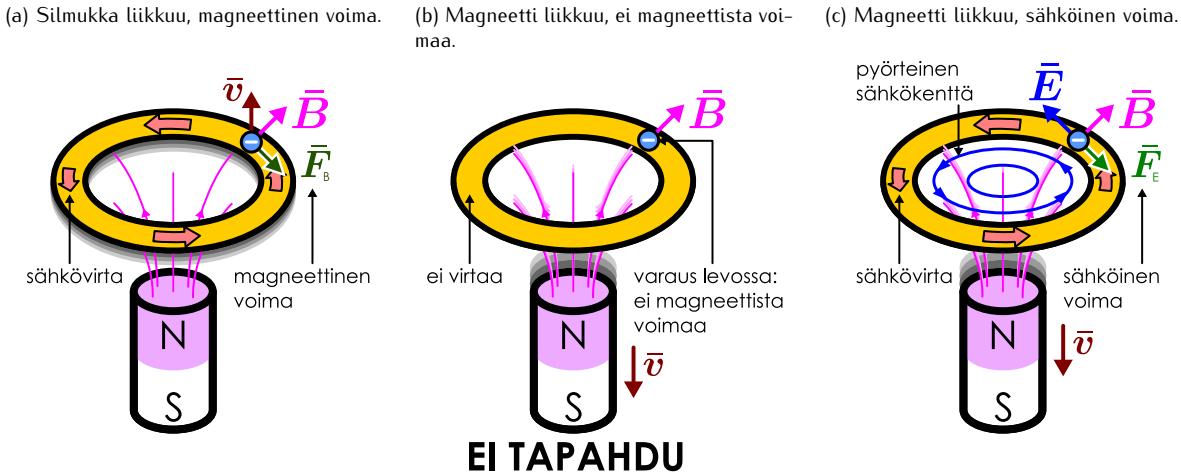
## Faradayn laki sähkökentille

Palataan nyt takaisin tutkimaan induktioilmiötä sähkömagneettisen kentän suhteellisuuden näkökulmasta. Opimme jo aikaisemmin, että johdinsilmukkaan indusoituu jännite ja sähkövirta, kun johtimen läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, ja kuvassa 13.12 (a) on tästä esimerkki: metallinen rengas on sauvalmagnetin luomassa epähomogeenisessa magneettikentässä. Magneettikenttä läpäisee renkaan kuvassa alhaalta ylöspäin, ja jos valitsemme positiivisen läpäisyysuunnan kentän suuntaan, magneettivuo on siis positiivinen. Tämä valinta tarkoittaa samalla sitä, että positiivinen kiertosuunta renkaan ympäri on oikean käden säännön mukaan vastapäivään. Rengas liikkuu kuvassa ylöspäin, jolloin se siirtyy heikkompaan magneettikenttään ja magneettivuo renkaan läpi pienenee muuttuen negatiiviseen suuntaan. Koska vuon muutos on negatiivinen, renkaaseen indusoituu Faradayn induktiolain (13.14) mukaisesti positiivinen jännite ja positiiviseen suuntaan kiertävä induktiovirta.

Virtaa kuljettavien elektronien näkökulmasta virta syntyy siksi, että liikkuva rengas vetää elektroneja mukanaan, jolloin liikkuihin elektroneihin kohdistuva magneettinen voima vetää ne liikkeelle renkaan suunnassa. Kuvaan 13.12 (a) on piirretty tästä esimerkinä yksi elektroni, jonka nopeusvektori osoittaa ylöspäin. Magneettikenttävektori osoittaa elektronin kohdalla yläviistoon taaksepäin kohtisuoraan metallirenkaan tangenttiin nähdyn, joten elektronin kohdista magneettinen voima osoittaa oikean käden säännön mukaisesti renkaan suuntaan kuvassa myötäpäivään. Systeemi on sylinterisymmetrinen, joten tarkasteltiinpa mitä tahansa renkaan elektronia, magneettinen voima osoittaa aina renkaan suuntaan myötäpäivään, ja tähän suuntaan elektronit siis alkavat kulkea. Virta kulkee elektronien liikkeeseen nähdyn vastakkaiseen suuntaan eli vastapäivään.

Voimme kuitenkin tarkastella samaa tilannetta myös renkaan mukana liikkuvassa koordinaatistossa, jossa magneetti liikkuu renkaasta poispäin kuten kuvissa 13.12 (b) ja (c). Koska induktioilmiö tapahtui koordinaatistossa, jossa rengas liikkuu, sen täytyy tapahtua myös tässä koordinaatistossa, jossa rengas on paikoillaan.

Kuva 13.12: Suhteellisuus sähkömagneettisessa induktiossa. Rüppuu koordinaatistosta, lükkää johdinsilmukka vai magneetti. Kummassakin koordinaatistossa kuitenkin havaitaan sähkövirta. Niinpä silmukan lepokoordinaatistossa täytyy olla pyörteinen sähkökenttä.



Tässä koordinaatistossa induktio ei kuitenkaan johtu renkaan liikkeestä kohti heikompaa magneettikenttää, koska rengas on paikoillaan. Sen sijaan magneettikentän voimakkuus renkaan kohdalla heikkenee, sillä magneetti siirtyy kauemmas renkaasta. Tässäkin koordinaatistossa magneettivuo renkaan läpi siis heikkenee, ja Faradayin induktiolaki selittää induktion johtuvan renkaan läpi kulkevan magneettivuon muutoksesta.

Elektronien näkökulmasta tilanne on kuitenkin erilainen verrattuna koordinaatistoon, jossa rengas liikkuu. Nyt rengas ja sen elektronit ovat nimittäin aluksi levossa, joten *niihin ei voi kohdistua magneettista voimaa*. Jos tässä koordinaatistossa olisi vain magneetin tuottama magneettikenttä kuten kuvassa 13.12 (b), elektroneihin ei kohdistuisi lainkaan voimaa, eivätkä ne siis myöskaan lähtisi liikkeelle! Koska elektronit kuitenkin lähtevät kiertämään rengasta myös tässä koordinaatistossa, *niihin täytyy kohdistua sähköinen voima*, joka pitää ne liikkeessä. Erityisesti elektroneihin kohdistuvan sähköisen voiman täytyy vetää niitä renkaan suunnassa myötäpäivään, joten renkaan kohdalla täytyy olla renkaan suuntaan vastapäivään osoittava sähkökenttä. Kuva 13.12 (b) on siis väärin, ja renkaan lepokoordinaatiston täytyy olla kuvan 13.12 (c) mukainen.



**13.19** Olkoon kuva 13.12 (a) koordinaatisto A ja kuva (c) koordinaatisto B. Selitä sähkökentän muunnosyhälön (13.52) perusteella, miksi koordinaatistossa B täytyy olla kuvassa esitetyn kaltainen sähkökenttä.

Sähkömagneettisen kentän suhteellisuuden takia induktioilmiö syntyy siis eri koordinaatistoissa eri tavoilla. Kun johtimet liikkuvat, niissä olevat varauksenkuljettajat liikkuvat johdinten mukana ja kokevat magneettisen voiman. Kun johtimet ovat paikoillaan, niissä olevat varaukset eivät voi kokea magneettista voimaa. *Muuttuvien magneettikenttiin kuitenkin liittyy sähkökenttä*, ja varauksenkuljettajiin kohdistuu tässä sähkökentässä sähköinen voima.

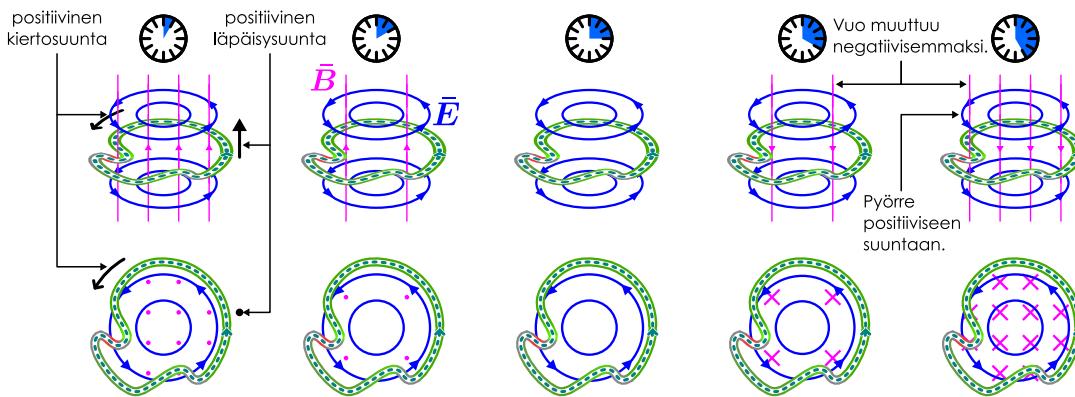
Aikaisemmin olemme tarkastelleet vain sähkövarausten luomia sähkökenttiä, joita kuvaavat Gaussin laki. Tämän mukaan positiiviset sähkövaraukset ovat sähkökentän lähteitä eli kenttäviivojen alkupisteitä ja negatiiviset varaukset ovat sähkökentän nieluja eli kenttäviivojen loppupisteitä. Kaikki näkemämme kentät ovat lähteneet positiivisista varauksista ( tai äärettömyyksistä) ja loppuneet negatiivisiin varauksiin ( tai äärettömyyksiin). Kuvan 13.12 (c) kenttä *ei kuitenkaan ole tällainen*. Koska tämä sähkökenttä vetää elektroneja liikkumaan metallirenkaan ympäri, kentän täytyy osoittaa renkaan tangentin suuntaan. Tällöin *kenttäviivat kuitenkin muodostavat renkaan suunnassa kiertävän pyörteen*. Sähkövarausten luomat sähkökentät ovat aina konservatiivisia ja siis *pyörteettomiä*, mutta tämä muuttuvaan magneettikenttään liittyvä sähkökenttä muodostaa *pyörteen*. Kenttä on siis erilainen kuin varauksista lähtevät sähkökentät, ja sitä täytyy kuvata jokin uusi fysiikaalinen laki. Tämä laki on nimeltään **Faradayn laki sähkökentille**.

Voimme johtaa Faradayn lain sähkökentille Faradayn induktiolain avulla. Tarkastellaan tästä varten mieelialtaisen muotoista johdinsilmukkaa omassa lepokoordinaatistossaan. Silmukkaan induoituu jännite, jos magneettivuo sen läpi muuttuu ajan kuluessa,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (13.59)$$

ja koska silmukka on tässä koordinaatistossa paikoillaan, vuon muutos voi johtua vain muuttuvasta magneettikentästä.

Kuva 13.13: Faradayin laki: muuttuva magneettikenttä luu pyörteisen sähkökentän.



Indusoitunut jännite tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos varaus  $q$  kiertää silmukan ympäri positiiviseen kiertosuuntaan, sen energian täytyy muuttua määräni

$$\Delta E = q\mathcal{E}. \quad (13.60)$$

Toisaalta varaukset saavat energiansa siitä, että muuttuvaan magneettikenttään liittyvä pyörteinen sähkökenttä tekee silmukassa oleviin varauksenkuljettajiin työtä. Erityisesti jos varaus  $q$  kulkee kerran silmukan ympäri, siihen tehty työ saadaan varaukseen kohdistuvan sähköisen voiman viivaintegraalina,

$$W = \oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = \oint q\bar{E} \cdot d\bar{r}. \quad (13.61)$$

Varauksen energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin siihen tehdyin työn,

$$\Delta E = W, \quad (13.62)$$

jojen muuttuvan magneettivuon ja sähkökentän viivaintegraalin välillä täytyy olla yhteyts

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \mathcal{E} = \frac{1}{q}\Delta E = \frac{1}{q}W = \oint \bar{E} \cdot d\bar{r}. \quad (13.63)$$

Huomaa, että nyt jännite on positiivinen, kun silmukassa kuljetaan sähkökentän suuntaan. Tavallisesti jännitteellä tarkoitetaan potentiaalieroaa, jolloin sähkökenttä osoittaa pienenevän potentiaalin suuntaan. Esimerkiksi vastuksissaan virta kulkee sähkökentän suuntaan ja potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa, jolloin potentiaali siis pienenee sähkökentän suuntaan siirryttääessä ja jännite on negatiivinen. Samoin tapahtuu kondensaattoreissa. *Potentiaali liittyy kuitenkin aina varausten luomiin konservatiivisiin sähkökenttiin.* Muuttuvan magneettikentän luoma pyörteinen sähkökenttä ei ole konservatiivinen eikä sitä voi kuvata potentiaalin avulla. Niinpä tähän asti pätenyt säätö, jonka mukaan sähkökenttä osoittaa aina potentiaalin pienemissuuntaan, ei enää pädekkään tarkasteltaessa pyörteisiä sähkökenttiä.

Tässä tarkastelussa magneettivuo laskettiin jonkin mielivaltaisen muotoisen suljetun, levossa olevan johdin-silmukan läpi ja viivaintegraali laskettiin kiertämällä kyseinen silmukka kerran ympäri. Mutta johdinsilmukka oli tässä analyysissä vain ajattelun apuväline. Todellisuudessa muuttuva magneettikenttä luu ympärilleen pyörteisen sähkökentän riippumatta siitä, onko kentässä johdinsilmukkaa vai ei. Edellä kuvattu yhtälö (13.63) päätee siis *mille tahansa todelliselle tai kuvitteelliselle suljetulle polulle*.

Yhteenvedona Faradayin laki sähkökentille sanoo siis seuraavaa. Muuttuvaan magneettikenttään liittyy pyörteinen sähkökenttä, jonka suunta on oikean käden säännölle vastakkainen: Jos oikean käden peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suunnan, sähkökentän pyörre osoittaa koukistettuihin sormiin nähdien vastakkaiseen suuntaan. Jos avaruuteen valitaan millainen tahansa muuttumaton suljettu polku, *polkuu kiertävän sähkökentän viivaintegraali on aina yhtä suuri kuin polun läpi kulkevan magneettivuon muutosnopeus*,

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.64)$$

Tämä on Gaussin lain tapaan sähkömagneettisen kentän peruslaki, joka pääsee kaikissa koordinaatistoissa sekä klassisessa fysiikassa että suhteellisuusteoriassa.

Faradayin lakia on havainnollistettu kuvassa 13.13. Kuvassa magneettikenttä osoittaa aluksi ylöspäin (kohti katsojaa). Kenttä kuitenkin ensin heikkenee ja muuttuu sitten vastakkaisuuntaiseksi voimistuvaksi kentäksi.

Kentän muutoksen suunta on kuvasarjassa koko ajan alaspäin (katsojasta pois päin), jolloin muuttuva magneettikenttä luo vastapäivään kiertävän pyörteisen sähkökentän. Kentät ovat tyhjässä avaruudessa, eikä kuvalla siis ole mitään varauksia, joihin kentät voisivat kohdistaa voimia. Kuvaan on kuitenkin piirretty kuvitteellinen polku, jonka kiertosuunta on valittu vastapäivään. Koska sähkökenttä muodostaa vastapäivään kiertävän pyörteen, kentän viivaintegraali tällä polulla on positiivinen. Faraday laki sanoo, että sähkökentän viivaintegraalin tällä polulla (kuten millä tahansa muullakin suljetulla polulla) täytyy olla yhtä suuri kuin polun läpi kulkevan magneettivon muutosnopeus.



**13.20** Miten kuva 13.13 muuttuisi, jos magneettivon muutos tapahtuisi kaksinkertaisella nopeudella eli jos ensimmäisen ja viidennen kuvan välillä kulunut aika puolittuisi? Miten tämä muuttuisi sähkökentän viivaintegraalia ja kenttäviiväesitystä?

### esimerkki 13.3

### Faraday laki

Sylinterin muotoisessa alueessa (säde 0.10 m) on magneettikenttä, mutta alueen ulkopuolella magneettikenttää ei ole. Kenttä on alueessa homogeeninen, ja kentän voimakkuus on aluksi 0.035 T. Kentän voimakkuus kuitenkin muuttuu tasaisesti ja ajan 0.050 s kuluttua kenttä on yhtä voimakas mutta vastakkaisuuntainen. Mikä on sähkökentän voimakkuus sylinterin pinnalla?

**TILANNE** Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään sylinterin sädeksi  $r = 0.10 \text{ m}$ , magneettikentän alkovoimakkuutta  $B = 0.035 \text{ T}$  ja kentän käantymiseen kuluvaa aikaa  $\Delta t = 0.050 \text{ s}$ . Valitaan kentän alkuperäinen suunta positiiviseksi suunnaksi. Kuvalla tämä suunta on kohti katsojaa.

**SUUNNITELMA** Muuttuvaan magneettikenttään liittyy Faraday lakiin mukainen pyörteinen sähkökenttä, ja induktiivinen sähkökenttä sylinterin reunan ympäri on yhtä suuri kuin sylinterin läpäisevän magneettivon muutosnopeus. Koska systeemi on sylinterisymmetrisen, sähkökentän voimakkuuden täytyy olla sylinterin pinnalla vakio, ja kentän on myös oltava pinnan tangettiin suuntainen, jolloin viivaintegraalin arvo on sama kuin kentän voimakkuuden ja sylinterin ympärysmitan tulo.

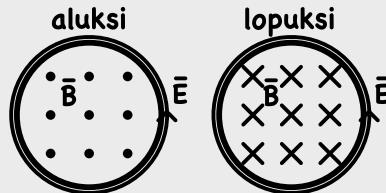
Magneettivuo on homogenisen kentän tapauksessa kentän voimakkuuden ja tarkasteltavan pinnan kenttään nähden kohtisuoran alan eli tässä sylinterin poikkipinta-alan tulo. Nyt kentän voimakkuus muuttuu tasaisesti positiiviseksi negatiiviseksi, joten magneettivuo muuttuu positiiviseksi negatiiviseksi. Faraday ja Lenzin lakiin mukaan induktiivisen sähkökentän täytyy siis muodostaa pyörre positiiviseen suuntaan (kuvalla vastapäivään).

Magneettivuo on aluksi  $\Phi_B = AB = \pi r^2 B$ , ja koska lopuksi vuo on  $-\Phi_B$ , vuon muutos on  $\Delta\Phi_B = -2\Phi_B = -2\pi r^2 B$ . Faraday lakiin mukaan sähkökentän viivaintegraali on

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (13.65)$$

ja toisaalta sylinterisymmetrian ja viivaintegraalin määritelmän perusteella

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = LE = 2\pi r E. \quad (13.66)$$



**RATKAISU** Sähkökentän voimakkuudeksi sylinterin pinnalla ratkeaa

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{Br}{\Delta t} = \frac{0.035 \text{ T} \cdot 0.10 \text{ m}}{0.050 \text{ s}} = 0.070 \text{ V/m}. \quad (13.67)$$

**ARVIOINTI** Ratkaisuna yksiköksi saadaan sähkökentän yksikkö

$$[E] = \frac{[B][r]}{[t]} = \frac{\text{Tm}}{\text{s}} = \frac{\text{kgm}}{\text{As}^3} = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (13.68)$$

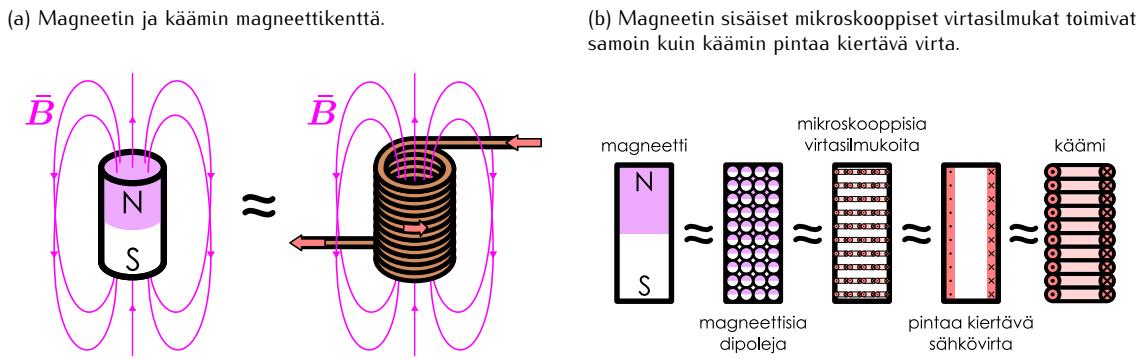
Indusoitunut sähkökenttä on hyvin heikko. Jos sylinterin pintaa kiertäisi metallinen rengas, renkaan pituus olisi noin  $L = 2\pi r = 0.6 \text{ m}$  ja tämä kenttä tuottaisi renkaaseen jänniteen  $\mathcal{E} = EL = 40 \text{ mV}$ . Todellisuudessa merkittävästi induktioiden läpäisevät sähkökenttää ja se saadaan kentän aikaan niin, että yhden renkaan sijaan johdin kierretään useille kierroksille, jolloin kuhunkin kierrokseen induktiivat jännitteet lasketaan yhteen. Tässä tilanteessa sata kierrostila riittäisi tuottamaan kokonaisjänniteen  $100 \cdot 40 \text{ mV} = 4 \text{ V}$ , mikä on aivan järkevä kokoluokka. Seuraavaksi tutkimme tarkemmin tällaisten silmukoille kierrettyjen johdinten induktio-ominaisuksia.



**13.21** Selitä omin sanoin Faraday laki sähkökentille. Milloin sähkökenttä voi olla pyörteitä? Miksi tämä riippuu valitusta koordinaatistosta? Miten tämä liittyy induktioon?

## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.14: Hyvin monelle kierrokselle kierretty virtajohdin muodostaa käämin eli kelan. Käämin magneettikenttä on samanlainen kuin sauvamagneetin kenttä.



### 13.3 Induktanssi

Induktioilmiö on teknologisesti erittäin tärkeä, koska sen avulla voidaan muuntaa makroskooppisten kapaleiden liukkeen energiaa varauksenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Nykyisin merkittävä osa kaikesta ihmisten tuottamasta energiasta muutetaankin induktioon perustuvilla generaattoreilla sähköiseen muotoon.

Induktion teknologinen merkitys ei kuitenkaan rajoitu vain generaattoreihin, sillä kaikki sähkövirrat synnyttäävät magneettikenttiä ja kaikki muuttuvat magneettikentät synnyttävät pyörteisiä sähkökenttiä. Siispä muuttuvat sähkövirrat voivat synnyttää sähkökenttiä, jotka voivat muuttaa sähkövirtoja, ja näin siis *sähkövirrat voivat vaikuttaa toisiinsa ja itseensä*. Tätä ominaisuutta kutsutaan **induktanssiksi**, ja tutustumme seuraavaksi sen vaikutukseen virtapiireissä.

### Käämit

Yksittäinen virtajohdin ei tavallisesti voi tuottaa kovin voimakasta magneettikenttää, sillä voimakkaiden magneettikenttien tuottaminen vaatii hyvin suuria sähkövirtoja. Monta rinnakkain kulkeva johdinta voivat kuitenkin tuottaa toisiaan vahvistavat magneettikentät, jolloin niiden yhdessä luoma kenttä voi olla varsin voimakas. Myös johdinsilmukalla voidaan tuottaa melko voimakas kenttä, koska silmukan eri osien tuottamat magneettikentät vahvistavat toisiaan silmukan sisällä.

Jos haluamme luoda voimakkaan magneettikentän, voimme hyödyntää kumpaakin ilmiötä kiertämällä johtimen rullalle kuten kuvassa 13.14 (a) on näytetty. Näin syntyy **käämi** eli **kela**. Kyseessä on sähköinen komponentti, joka luo sisälleensä voimakkaan magneettikentän. Käämi on tässä mielessä hiukan samantyypinen komponentti kuin kondensaattori, joka luo sisäänsä sähkökentän.

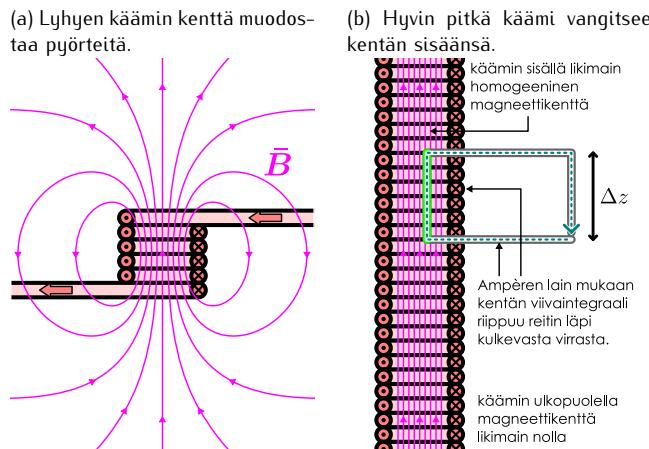
Käämin jokaisen kierroksen voi ajatella muodostavan yhden johdinsilmukan, jonka magneettikenttä noudattaa oikean käden sääntöä kuten opimme jo kuvasta 12.18. Koska silmukat ovat käämissä lähekkäin, niiden magneettikentät vahvistavat toisiaan synnyttäen käämin läpi kulkevan voimakkaan magneettikentän. Magneettikentän kenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita, joten käämin läpi kulkenet kenttäviivat kiertävät käämin ulkopuolella takaisin lähtöpisteesensä. Käämin sisällä kulkee yhtä monta kenttäviivaa kuin sen ulkopuolelle, joten kenttäviivojen *tihleys* on käämin sisällä suuri ja sen ulkopuolella pieni.

Käämin magneettikenttä on itse asiassa hyvin samanlainen kuin samankokoisen sauvamagneetin magneettikenttä, kuten kuvasta 13.14 nähdään. Tämä ei ole sattumaa. Sauvamagneetin magneettisuushan on magneetin sisältämien lukemattomien mikroskooppisten magneettisten dipolien ansiota, ja näiden dipolien voi ajatella olevan mikroskooppisia virtasilmukoita. Magneetin sisällä vierekkäisiin virtasilmukoihin liittyvät sähkövirrat kulkevat vastakkaisiin suuntiin, jolloin niiden vaikutus magneettikenttään likimain kumoutuu. Magneetin pinnalla näin ei kuitenkaan käy, koska pinnalla olevilla virtasilmukoilla ei ole vierustoveria yhdellä puolellaan. Niinpä virtasilmukat tuottavat yhdessä likimain samanlaisen kentän kuin mitä magneetin pintaan kiertävä sähkövirta tuottaisi. Käämissä todella kiertää sähkövirta, joten käämin magneettikentän täytyy olla samankaltainen kuin samanmuotoisen magneetin magneettikentän.

Lyhyen käämin magneettikentän täsmällinen laskeminen on melko työlästä aivan kuten pienien kondensaattorin sähkökentän laskeminen. Tästä syystä todellisille kondensaattoreille käytetään usein äärettömän suuren kondensaattorin mallia, jonka mukaan kondensaattorin sähkökenttä on homogeeninen ja rajoitunut täsmälleen kondensaattorilevyjen väliin. Samaan tapaan äärettömän pitkän käämin magneettikenttä on paljon yksinkertaisempi kuin lyhyen käämin kenttä, ja siksi hyvin pitkän käämin mallia käytetään myös oikeille käämeille, kun se on mahdollista. Kuvaan 13.15 on piirretty lyhyen ja pitkän käämin magneettikentät, ja

vaikka käämin ulkopuolella lyhyen käämin kenttä on monimutkainen (kuva (a)), käämin sisällä se on hyvin samankaltainen kuin pitkänkin käämin kenttä (kuva (b)).

Kuva 13.15: Lyhyen ja hyvin pitkän käämin magneettikenttä.



Kuvassa integroimispoluksi on valittu suorakaide, jonka pystysivut ovat kentän suuntaiset ja vaakasivut kenttään nähdyn kohtisuorat, joten viivaintegraali voi olla nollasta poikkeava vain polun pystysivulla.

- 13.22** (a) Riippuuko kuvan 13.15 (b) polun läpi kulkeva kokonaisvirta polun vaakasuuntaisesta leveydestä?  
 (b) Mikä on viivaintegraali pitkin polun vaakasuoria sivuja?  
 (c) Mikä on viivaintegraali pitkin polun pystysuoria, käämin ulkopuoleista sivua, jos tämä sivu on hyvin kaukana käämistä? Entä jos sivu on lähellä käämiä?  
 (d) Perustele tämän perusteella, miksi magneettikentän täytyy olla käämin sisällä homogeeni ja käämin ulkopuella nolla.

Yllä esitetyn päätelytehtävän lopputulos on se, että magneettikentän täytyy olla käämin ulkopuolella täsmälleen nolla ja käämin sisällä homogeeni. Äärettömän pitkä käämi siis vangitsee magneettikentän sisäänsä aivan kuten äärettömän suuri kondensaattori vangitsee sähkökentän sisäänsä. Tällöin viivaintegraali kuvan 13.15 (b) polku pitkin on nolla kaikkialla muualla paitsi käämin sisällä kulkevalla sivulla. Tämä sivu on magneettikentän suuntainen, joten viivaintegraali sitä pitkin on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja sivun pituuden tulo,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = B\Delta z, \quad (13.71)$$

ja niinpä Ampéren lain mukaan

$$B\Delta z = \mu_0 Ni. \quad (13.72)$$

Tästä voidaan ratkaista edelleen käämin sisäinen magneettikenttä

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.73)$$

Käämin kenttä on siis suoraan verrannollinen käämisseen kulkevan virran voimakkuuteen sekä kierrosten määriin pituusyksikköö kohden,  $N/\Delta z$ . Kentän voimakkuus ei riipu esimerkiksi käämin silmukoiden säteestä.

- 13.23** Miten käämin magneettikentän kenttiäviivaesitys muuttuu, jos käämin (a) halkaisija, (b) pituus, (c) kierrosten tiheys tai (d) virta kaksinkertaistuu, kun muut suureet pysyvät vakioina?

## Keskinäisinduktanssi

Käämien avulla voidaan siis tuottaa voimakkaita magneettikenttiä, ja näiden kenttien voimakkuus on suoraan verrannollinen käämisseen kulkevan sähkövirran voimakkuuteen. Niinpä kun käämisseen kulkeva sähkövirta muuttuu, käämin luoma magneettikenttäkin muuttuu, ja tällä tavalla voidaan tuottaa induktiojännite *toiseen käämiin*. Toisin sanoen virran kulun muuttuminen yhdessä käämisseen voi muuttaa virran kulkua täysin erillisessä käämisseen.

Magneettikentän voimakkuus pitkän käämin sisällä voidaan ratkaista Ampéren laista. Kuvaan 13.15 (b) on valittu tästä varten sulkettu polku, jonka leveys käämin suunnassa on  $L$ . Jos käämin muodostavassa johtimessa kulkee virta  $i$  ja käämisseen on  $N$  kierrosta pituudella  $L$ , polun läpi kulkee kokonaisvirta

$$i_{\text{kokonais}} = Ni. \quad (13.69)$$

Toisaalta Ampéren lain mukaan magneettikentän viivaintegraalin polun ympäri kuljetaessa täytyy olla verrannollinen tähän virtaan,

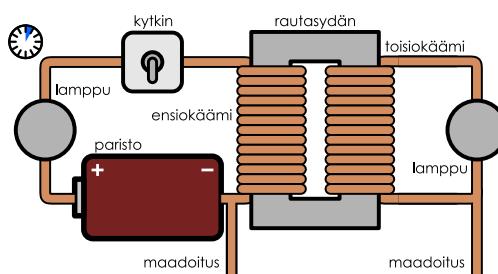
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (13.70)$$

Koska äärettömän pitkä käämi on sylinterisymmetrisen, sen magneettikentällä ei voi olla missään radiaalikomponenttia vaan kentän täytyy osoittaa kaikkialla käämin pituussuuntaan. Ku-

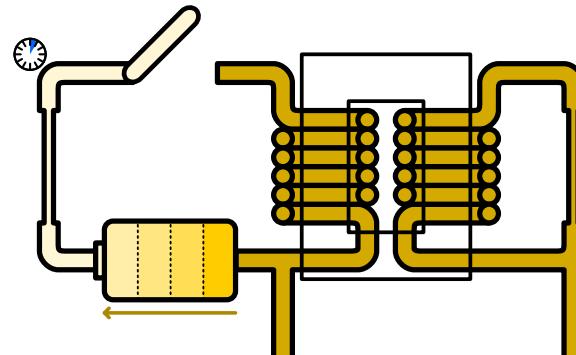
## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.16: Keskinäisinduktanssi. Yhdessä käämistä kulkeva muuttuva virta luo muuttuvan magneettikentän, joka indusoi jännitteen toiseen käämään.

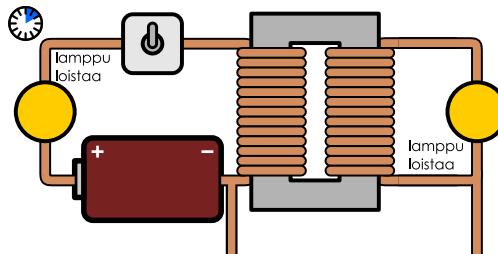
(a) Kytkin auki, lamput eivät pala.



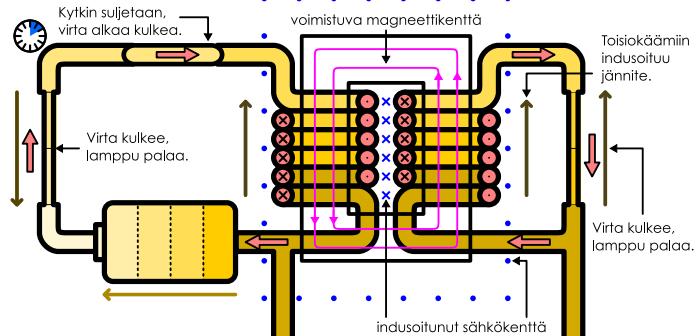
(d) Potentiaali toisioppiressä vakio.



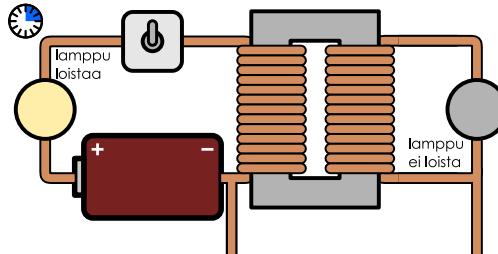
(b) Kytkin suljetaan, molemmat lamput palavat.



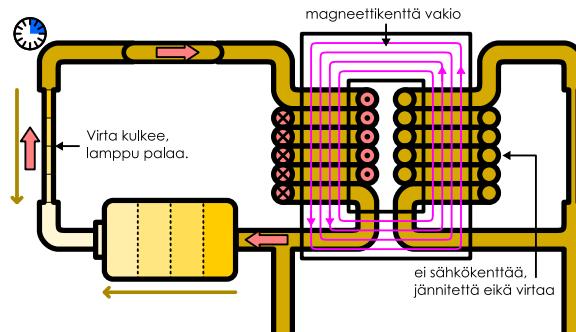
(e) Toisiokämiin indusoituu jännite.



(c) Hetken päästä vain ensiöppiiriin lamppu palaa.



(f) Potentiaali toisioppiressä vakio.



Kuvassa 13.16 on esimerkki tästä ilmiöstä. Kuvassa on paristosta, lampusta, kytimestä sekä käämistä koostuva sähköpiiri, jota kutsutaan *ensiöppiiriksi*. Kuvassa on myös toinen, pelkästä käämistä ja lampusta koostuva püri, joka on nimeltään *toisioppiiri*. Käämit on kiedottu yhteen raudasta valmistetun renkaan eli rautaytimen ympärille, mutta johdinten pinnoilla on eristettä niin, että käämiseissä kulkeva sähkövirta ei pääse kulkemaan tätä rautaydintä pitkin.

Aluksi ensiöppiirin kytkin on auki, jolloin püriissä ei kulje virtaa (kuva (a)). Kun kytkintä käännetään, virta alkaa kulkea, mikä saa ensiöppiirissä olevan lampun loistamaan (kuva (b)). Samalla kuitenkin *lamppu syttyy myös toisioppiirissä*, joka ei ole suorassa yhteydessä paristoon. Hetken päästä toisioppiirin lamppu sammuu ja lopulta vain ensiöppiirin lamppu palaa (kuva (c)).

Tarkastellaan ilmiön ymmärtämiseksi pürien virtoja ja potentiaaleja sekä käämien luomia sähkö- ja magneettikenttiä. Paristo ylläpitää ensiöppiirissä potentiaalieroaa, mutta aluksi kytkin on auki, jolloin käämi on vakiopotentiaalissa (kuva (d)). Toisioppiiri on tällöin kauttaaltaan samassa potentiaalissa. Kun kytkin suljetaan, ensiöppiirissä ja erityisesti sen käämisseissä alkaa kulkea virta (kuva (e)). Mitä suurempi virta käämisseissä kulkee, sitä voimakkaamman magneettikentän se synnyttää, ja koska käämin sisällä on rautakappale, käämin magneettikenttä saa raudan magnetoitumaan. Magnetoituminen voimistaa käämin luomaa magneettikenttää entisestään ja lisäksi rautakappale pyrkii magnetoitumaan niin, että magneettikenttä pysyy pääasiassa sen sisällä. Ensiöppiirin käämi synnyttää siis rautakappaletta pitkin kiertävän magneettikentän, joka voimistuu ajan kuluessa ja ensiöppiirissä kulkevan virran kasvaessa.

Rautasydän ohjaa tämän voimistuvan magneettikentän toisioppiirissä olevan käämin läpi, jolloin tämän kää-

min jokaiseen silmukkaan indusoituu Faradayin induktiolain mukaisesti jännite. Yhteen silmukkaan indusoitunut jännite voi olla melko pieni, mutta koska silmukat ovat käämässä peräkkäin, niihin indusoituneet jännitteet summautuvat yhteen ja lopputuloksena käämään voi indusoitua suuri jännite. Indusoitunut jännite tuottaa potentiaalieron toisiokäämässä olevan lampun napojen välille, jolloin lampun läpi kulkee sähkövirta ja lamppu loistaa.

Hetken päästä ensiöpürissä kulkeva virta saavuttaa maksiminsa, minkä jälkeen myöskään magneettikenttä ei enää muudu (kuva (f)). Induktio edellyttää muuttuvaa magneettivuota, joten vaikka toisiopiirin läpi kulkee voimakas magneettikenttä, tähän kenttään liittyvä magneettivuo ei enää muudu ajan kuluessa eikä toisiopiirin kääminkään siis indusoidu enää jännitettä. Toisiopiiri on nyt jälleen vakiopotentiaalissa, siinä ei kulje sähkövirta, eikä piirin lamppu loista.



### 13.24 Mitä havaitaan ja miksi, jos ensiöpürin kytkin jälleen avataan?

Tämä koe osoittaa, kuinka toisiopiiriin voidaan indusoida jännite muuttamalla ensiöpürissä kulkevaa sähkövirtaa, ja tätä ominaisuutta kutsutaan **keskinäisinduktanssiksi**. Ilmiötä hyödynnetään esimerkiksi muuntajissa, joissa ensiöpürissä muuttuva jännite tuottaa muuttuvan jännitteenvyö toisiopiiriin. Jännitteiden suhde riippuu piirien keskinäisinduktanssista, joten sopivalla muuntajalla voidaan muuttaa suuri jännite pieneksi tai päinvastoin.

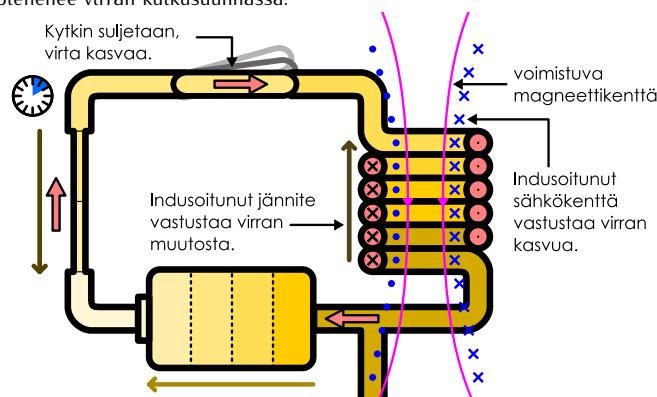
## Itseinduktanssi

Keskinäisinduktanssi vaikuttaa kahden erillisen johtimen välillä, mutta induktanssi on tärkeä ilmiö myös yksittäisissä kääméissä. Käämässä kulkeva sähkövirta nimittäin tuottaa magneettikentän käämin itsensä sisään, ja jos virta muuttuu, myös magneettikenttä muuttuu. Tällöin käämin läpäisevä magneettivuo muuttuu, ja käämään indusoituu Faradayin induktiolain mukaisesti jännite. *Käämi itse voi siis luoda muuttuvan magneettikentän, joka indusoi siihen itseensä jännitteen.* Tätä kutsutaan **itseinduktanssiksi**.

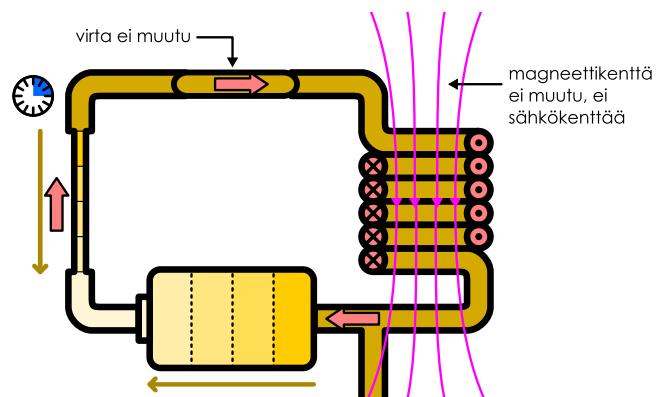
Itseinduktanssi-ilmiö on havainnollistettu kuvassa 13.17, jossa tarkastellaan vain kuvan 13.16 ensiöpürin. Piiriin kuuluu siis paristo, lamppu, kytkin ja käämi, mutta käämin vieressä ei ole toista käämiä. Kytkin on aluksi auki, jolloin piirissä ei kulje sähkövirtaa. Kuvassa (a) kytkin suljetaan ja virta alkaa kulkea piirin ympäri. Erityisesti käämässä kulkeva virta luo käämin läpi kulkevan magneettikentän. Kuvassa virta kulkee käämässä niin pään, että magneettikenttä osoittaa alaspaan. Lisäksi koska virta kasvaa (virta oli aluksi nolla), magneettikentän täytyy voimistua, jolloin magneettikentän muutoksen suunta on myös alaspaan. Tähän muuttuvaan magneettikenttään liittyy pyörteinen sähkökenttä, jonka suunta on oikean käden sääntöön nähden vastakkainen. Ts. jos oikean käden peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suuntaan eli alaspaan, sähkökenttä kiertää päinvastaiseen suuntaan kuin oikean käden sormet. Tämä tarkoittaa sitä, että sähkökenttä kiertää käämässä päinvastaiseen suuntaan virran kulkusuuntaan nähdyn. Niinpä sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, ja varauksenkuljettajien energia pienenee niiden kulkiessa käämin läpi. Tämä tarkoittaa myös sitä, että käämässä on negatiivinen jännite eli potentiaali pienenee, kun käämin läpi kuljetaan virran kulkusuunnassa.

Kuva 13.17: Itseinduktanssi. Kun virta alkaa kulkea käämässä, se synnyttää muuttuvan magneettikentän ja indusoi pyörteisen sähkökenttän, joka vastustaa aina virran kasvua.

(a) Virta kasvaa, sähkökenttä vastustaa virran kasvua, potentiaali käämässä pienenee virran kulkusuunnassa.



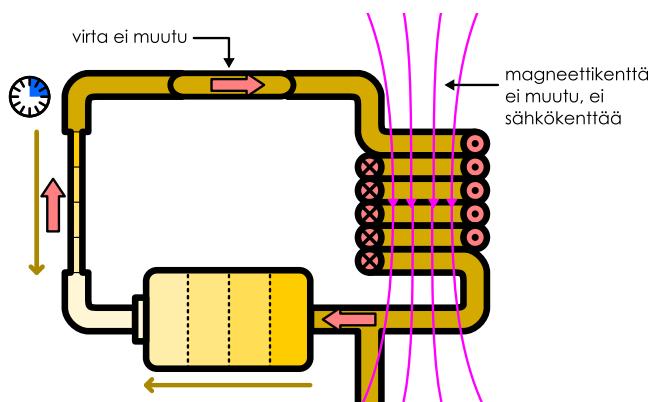
(b) Virta vakio, ei sähkökenttää, potentiaali käämässä vakio.



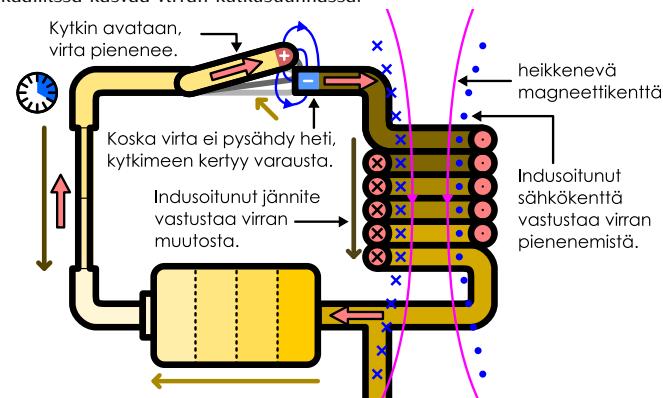
## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.18: Itseinduktanssi. Kun virta pienenee käämissä, se synnyttää muuttuvan magneettikentän ja indusoi pyörteisen sähkökentän, joka vastustaa virran pienemistä.

(a) Virta vakiota, ei sähkökenttää, potentiaali käämissä vakiota.



(b) Virta pienenee, sähkökenttää vastustaa virran pienemistä, potentiaali käämissä kasvaa virran kulkusuunnassa.



**13.25** Perustele se, että kuvan 13.17 (a) käämissä on virran kulkusuuntaan kuljettaessa negatiivinen jännite (a) Lenzin lailla, (b) Faradayin induktiolalla.

Kuvassa (a) on siis virran kulkusuuntaan kuljettaessa positiivinen jännite paristossa ja negatiivinen jännite sekä lampussa että käämissä. Toisin sanoen potentiaali kasvaa, kun siirrytään pariston läpi, mutta se pienenee, kun siirrytään lampun ja käämin läpi. Lampussa potentiaalin muutos noudattaa Ohmin lakiä ja on suoraan verrannollinen lampun läpi kulkevan sähkövirran. Käämissä potentiaalin muutos ei kuitenkaan riipu virran suuruudesta itsestään, koska virran kulkua ei vastusta resistanssi. (Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että käämi on tehty ideaalisesta johteesta.) Sen sijaan virran kulkua käämissä vastustaa käämiin indusoitunut sähkökenttä, joka riippuu magneettikentän muutosnopeudesta. Magneettikentän muutosnopeus puolestaan riippuu siitä, kuinka nopeasti käämissä kulkeva virta muuttuu, joten *käämin jännitteet täytyy riippua käämissä kulkevan virran muutosnopeudesta*.

Kuvan (a) tilanteessa virta kasvaa. Mitä enemmän aikaa kuluu, sitä suuremmaksi virta tulee, ja sitä suurempi potentiaaliero lampun napojen välille tulee. Potentiaalin muutoksen lampussa ja käämissä on kuitenkin oltava aina yhtensä yhtä suuri kuin pariston tuottama jännite, koska Kirchhoffin silmukkasäännön mukaisesti potentiaalin täytyy palata takaisin alkuarvoonsa, kun piirin ympäri kuljetaan yksi kokonainen kierros. Siispä virran kasvaessa lampun jännite kasvaa ja käämin jännitteet täytyy pienentyä. Lopulta päädytään kuvan (b) tilanteeseen, jossa virta on saavuttanut maksimiarvonsa. Tällöin virta ei enää muudu, jolloin käämiinkään ei enää indusoitu jännittettä. Tässä tilanteessa pariston ja lampun napojen välillä on itsesaroltaan yhtä suuret potentiaalierot ja käämin navat ovat samassa potentiaalissa.

Jos kytkin sitten avataan, piiri käyttäätyy kuten kuvassa 13.18. Jos piirissä ei olisi käämiä, sähkövirran kulku lakkaisi välittömästi. Käämin läpi kulkeva virta ei voi kuitenkaan muuttua mielivaltaisen nopeasti, koska mitä nopeammin virta muuttuu, sitä suurempi jännite käämiin indusoituu. Lisäksi Lenzin lain mukaisesti indusoituneen jännitteet täytyy aina vastustaa induktion tuottavaa muutosta eli käämin tapauksessa virran muutosta, joten *käämi aina vastustaa sähkövirran muutoksia*. Kun muut muutokset piirissä aiheuttavat sähkövirran kasvun, käämin induktanssi vastustaa virran kulkua. Jos taas piirin muut komponentit pyrkivät pienentämään virtaa, käämi vastustaa virran pienemistä ja pyrkii ylläpitämään virran kulun.



**13.26** Induktanssin voi ajatella antavan sähkövirralle inertialaa. Selitä miksi.

Magneettikenttä käämissä osoittaa alas päin myös kuvassa 13.18, koska virran suunta on sama kuin kuvassa 13.17. Kuitenkin koska virta pienenee, magneettikentän *muutoksen* suunta on ylöspäin, ja niinpä magneettikenttää liittyvä pyörteinen sähkökenttä kiertää nyt vastakkaiseen suuntaan kuin kuvassa 13.17. Erityisesti sähkökenttä kiertää kuvassa 13.18 samaan suuntaan kuin mihin sähkövirta käämissä kulkee, jolloin sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin positiivista työtä ja työntää niitä eteenpäin. Näin induktanssi pyrkii pitämään varauksenkuljettajat liukkeessa vaikka kytkimen avaaminen pyrkii pysäyttämään virran kulun.

Kytkimen aukaisu on tässä vaiheessa jo katkaissut virtapiirin, joten varaukset eivät pääse kiertämään piirin ympäri. Kuitenkin koska käämi estää virran välittömän pysähtymisen, jonkin verran varausta siirtyy vielä kytkimen avaamisen jälkeenkin. Tämä tarkoittaa sitä, että kytkimen toiselle puolle kerääntyy hieman positiivista varausta ja toiselle negatiivista varausta, jolloin kytkin toimii kuin hyvin pieni kondensaattori. Jos

käämin itseinduktanssi on pieni, varausta kertyy vain vähän, ja tämä varaus siirryy pian takaisin alkuperäiselle paikalleen. Jos käämin itseinduktanssi on suuri, varausta voi kertyä paljon. Tällöin kytkimeen voi syntyä niin suuri jännite ja niin voimakas sähkökenttä, että ilman eristävyys häviää. Tällöin ilmastakin tulee hetkellisesti johde ja varaukset pääsevät tasottumaan siirtymällä kytkimen läpi ilman halki. Tätä kutsutaan *läpilyönniksi*, ja se nähdään kytkimen läpi iskevään pienenä "salamana".

Johdetaan vielä käämin itseinduktanssia kuvaava matemaattinen laki. Kuvataan käämiä hyvin pitkän käämin mallilla (13.73), jonka mukaan käämin sisällä oleva magneettikenttä on likimain homogeeninen ja voimakkudeltaan

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i, \quad (13.74)$$

missä  $N$  on nyt käämin kierrosten kokonaismäärä ja  $\Delta z$  on käämin pituus. Jos käämin yhden silmukan pinta-ala on  $A$ , magneettivuo tällaisen silmukan läpi on

$$\Phi_B = BA = \frac{NA}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.75)$$

Käämin jokainen kierros muodostaa johdinsilmukan, jolloin Faradayn induktiolain perusteella yhteen kierrokseen indusoituu jännite

$$\mathcal{E}_{\text{kierros}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{NA}{\Delta z} \mu_0 \frac{di}{dt} \quad (13.76)$$

ja koko käämiin indusoitua jännite on

$$\mathcal{E} = N\mathcal{E}_{\text{kierros}} = -\frac{N^2 A}{\Delta z} \mu_0 \frac{di}{dt}. \quad (13.77)$$

Indusoitunut jännite on siis suoraan verrannollinen käämin läpi kulkevan virran muutosnopeuteen eli aikaderivaattaan. Yhtälössä esiintyvä verrannollisuuskerroin on käämin ominaisuuksista riippuva vakio, jota kutsutaan käämin itseinduktanssiksi tai vain **induktanssiksi** ja merkitään symbolilla  $L$ . Induktanssin avulla lausuttuna käämiin indusoitunut jännite eli potentiaaliero käämin pääiden välillä on siis

$$\Delta V = \mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}. \quad (13.78)$$

Induktanssin yksiköllä on erikoisnimi **henry**, ja sitä merkitään symbolilla  $H$ , jonka yhteys muihin SI-yksiköihin on

$$H = [L] = \frac{[V][t]}{[i]} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}. \quad (13.79)$$



**13.27** Selitä yhtälössä (13.78) esiintyvän miinusmerkin fysikaalinen merkitys.

Yhtälöiden (13.77) ja (13.78) perusteella pitkän, suoran käämin induktanssi on

$$L = \frac{N^2 A}{\Delta z} \mu_0. \quad (13.80)$$

Tämä tulos pätee kuitenkin vain pitkälle suoralle käämille, ja käämin muodon muuttaminen muuttaa myös sen induktanssia aivan kuten kondensaattorin muodon muuttaminen muuttaa kondensaattorin kapasitanssia. Yhtälö (13.78) kuitenkin pätee yleisesti, ja induktiojännite on verrannollinen virran muutosnopeuteen kaikissa käämeissä.



**13.28** Käämin säde on 1 cm, pituus 5 cm ja käämissä on 500 kierrosta.

- (a) Arvioi käämin induktanssi pitkän käämin mallilla.
- (b) Kuinka suuri jännite käämiin indusoituu, jos virta kasvaa nollasta yhteen ampeeriin 10 millisekunnissa?
- (c) Kumpi käämin napa on tällöin korkeammassa potentiaalissa (se, josta virta saapuu, vai se, josta virta poistuu)?

## esimerkki 13.4

## LR-piiri

**Kuvan 13.17** piirin pariston jännite on  $\mathcal{E}$ , lampun resistanssi  $R$  ja käämin induktanssi  $L$ . Miten piirissä kulkeva virta muuttuu ajan funktiona, kun kytkin suljetaan?

**TILANNE** Tilanne on sama kuin kuvassa 13.17. Piirretään piirikaavio. Oletetaan kaikki komponentit ideaalisiksi. Merkitään piirissä kulkevaa virtaa  $i(t)$ . Alkutilanteessa virta on nolla,  $i(0 \text{ s}) = 0 \text{ A}$ , eikä virta voi muuttua yhtäkkiä epäjatkuvasti, koska käämi vastustaa virran nopeita muutoksia.

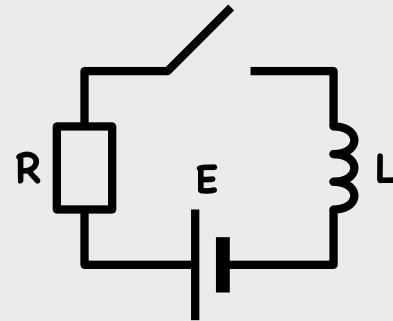
**SUUNNITELMA** Potentiaaliero pariston napojen välillä on vakio. Potentiaaliero lampun napojen välillä riippuu Ohmin lain mukaisesti resistanssista ja virrasta. Ja potentiaaliero käämin napojen välillä riippuu induktanssin määritelmän mukaisesti induktanssista sekä virran muutosnopeudesta. Kirchhoffin silmukkasäännön perusteella potentiaali palaa takaisin alkuarvoonsa, kun tehdään kierros koko piirin ympäri.

Potentiaaliero paristossa on  $\Delta V = \mathcal{E}$ , vastuksessa  $\Delta V = -Ri$  ja käämissä  $\Delta V = -Ldi/dt$ . Jänniteyhtälö saa siis muodon

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0, \quad (13.81)$$

joten virtaa kuvaan differentiaaliyhtälö. Yritetään ratkaista tämä yritteellä

$$i(t) = a + be^{-ct}. \quad (13.82)$$



**RATKAISU** Yritteiden derivaatta on

$$\frac{di}{dt} = i'(t) = -bce^{-ct}, \quad (13.83)$$

joten differentiaaliyhtälö saa muodon

$$\mathcal{E} - R(a + be^{-ct}) + Lbce^{-ct} = 0. \quad (13.84)$$

Ajasta riippuvien ja vakiotermien erottelulla yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$b(Lc - R)e^{-ct} = -\mathcal{E} + Ra, \quad (13.85)$$

ja tämä toteutuu kaikilla  $t$  vain jos yhtälön kumpikin puoli on nolla. Vasen puoli on nolla, jos

$$c = \frac{R}{L}, \quad (13.86)$$

ja oikea puoli on nolla, jos

$$a = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.87)$$

Lisäksi alkuehdon  $i(0 \text{ s}) = 0 \text{ A}$  perusteella  $a + b = 0 \text{ A}$ , joten täytyy olla

$$b = -a = -\frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.88)$$

Piirissä kulkeva virta on siis

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (13.89)$$

**ARVIOINTI** Ratkaisuna saadun lausekkeen yksikkö on ampeeri ja eksponenttifunktion argumentti on yksikötön kuten pitääkin,

$$[i] = \frac{[\mathcal{E}]}{[R]} = \frac{\text{V}}{\Omega} = \text{A}, \quad [R][t] = \frac{\Omega}{\text{H}} \text{s} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \text{s} = 1. \quad (13.90)$$

Aluksi virta on nolla, koska käämi estää virtaa muuttumasta liian nopeasti. Ajan kuluessa virta kuitenkin lähestyy vakiota

$$i \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - 0) = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.91)$$

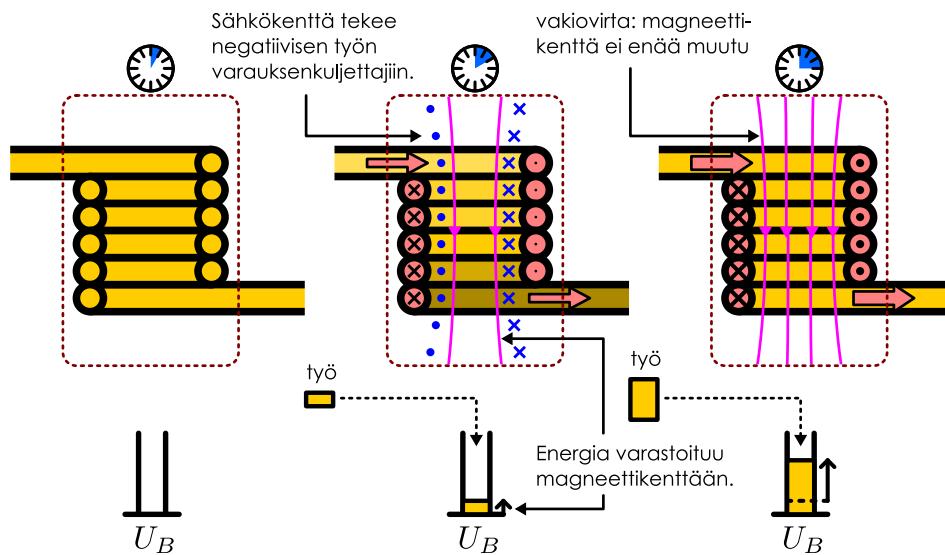
Tämä on järkevää, koska piirin täytyy asettua loppujen lopuksi tilaan, jossa jännite käämissä on nolla (koska virta ei muudu), jolloin potentiaaliero lampussa on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin paristossa,  $Ri = \mathcal{E}$ .

Se, kuinka nopeasti virta lähestyy tästä arvoa, riippuu eksponenttifunktiossa esintyvästä vakiosta  $L/R$ . Mitä suurempi induktanssi käämillä on ja mitä pienempi resistanssi lampulla on, sitä kauemmin kestää saavuttaa maksimivirta.



**13.29** Selitä omin sanoin, mikä on käämi ja miten keskinäis- sekä itseinduktanssi kuvaavat käämin toimintaa. Miten suuren induktanssin käämi vaikuttaa virtapiirin toimintaan?

Kuva 13.19: Virran kasvaessa käämin luoma magneettikenttä voimistuu, ja muuttuva magneettikenttä luo virran kulkua vastustavan pyörteisen sähkökentän. Sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, jolloin varauksenkuljettajien energia pienenee. Tämä energia varastoituu käämin magneettikenttään.



### Magneettikentän energia

Käämien suhde sähkövirtaan ja magneettikenttään on monella tavalla samankaltainen kuin kondensaattoreiden suhde sähkövaraukseen ja sähkökenttään. Kondensaattoreilla voidaan varastoida ja säädellä sähkövarausta, ja koska kondensaattoreiden jännite riippuu niiden varauksesta, kondensaattoreilla voidaan estää jännitteen nopeat vaihtelut. Käämeillä voidaan puolestaan säädellä sähkövirtoja, sillä käämit vastustavat virtojen nopeita muutoksia.

Kondensaattorit luovat sisälleensä sähkökentän ja varastoivat energiota tähän kenttään. Käämit puolestaan luovat sisälleensä magneettikentän, ja voisi kuvitella, että magneettikenttäänkin varastoituu energiaa, jos kerran sähkökenttääkin sitä sisältyy. Osoitamme nyt, että näin todella on ja määritämme myös paljonko energiota magneettikenttään täsmälleen varastoituu.

Tarkastellaan kuvan 13.19 käämiä. Käämin läpi ei aluksi kulje lainkaan virtaa, mutta ajan kuluessa käämin läpi kulkeva virta kasvaa ja samalla käämin magneettikenttä voimistuu. Lopulta virta saavuttaa jonkin maksimiarvon, minkä jälkeen se on vakio eikä magneettikenttä enää muudu. Kun virta kasvaa, magneettikenttä käämin sisällä voimistuu, ja tähän muuttuvaan magneettikenttään liittyy myös pyörteinen sähkökenttä, joka vastustaa virran kasvua. Jokin ulkoinen tekijä kuitenkin kasvattaa virtaa induktanssista huolimatta, jolloin varaus kulkee käämin läpi sähkökenttään nähden vastakkaiseen suuntaan ja *kenttä tekee varaukseen negatiivista työtä*. Varauksen energia siis pienenee, mikä näkyy myös siitä, että varaus kulkee käämisen laskevan potentiaalin suuntaan.

Energia ei voi kuitenkaan kadota mihinkään, joten jos käämin läpi kulkeva varaus menettää energiota, *käämin energian täytyy lisääntyä*. Ideaalisesta johteesta tehdystä käämisenä ei ole lainkaan resistanssia, joka muuttaisi energiota lämpöenergiaksi tai muihin epäjärjestyneisiin muotoihin, joten energia ei voi poistua käämistä. Niinpä käämin täytyy varastoida energiota.

Toisaalta ainoat muutokset käämisenä ovat kasvava virta ja voimistuva magneettikenttä. Pelkkä sähkövirta ei juurikaan varastoi energiota, koska varauksenkuljettajien vaellusnopeus on normaalistaan hyvin pieni ja tähän lüttymä lüke-energia on mitätön. Ainoa mahdollisuus on siis se, että *energia varastoituu käämin magneettikenttään*, ja magneettikentän varastoiman energian täytyy olla yhtä suuri kuin käämin läpi kulkevan varauksen menettämä energia.



- Mihin suuntaan sähkökenttä kulkee käämisenä (virran suuntaan nähen), jos virta pienenee?
- Miten energia tällöin siirryt käämin ja varauksenkuljettajien välillä?
- Miten käämin energia siis muuttuu ja mistä tämä energia tulee?

Lasketaan siis, paljonko energiota varaus luovuttaa käämille virran muuttuessa. Virtapiirejä tutkiessamme opimme, että kun virta  $i$  kulkee potentiaalieron  $\Delta V$  yli, virtaa kuljettavien hiukkasten energia muuttuu yhtälön (11.118) mukaisesti teholla

$$P = i\Delta V. \quad (13.92)$$

Käämissä potentiaaliero virran kulkusuunnassa riippuu induktanssin määritelmän (13.78) mukaisesti virran muutosnopeudesta, joten käämin läpi kulkevan varauksen energia muuttuu teholla

$$P_{\text{käämi} \rightarrow \text{varaus}} = i \cdot \left( -L \frac{di}{dt} \right). \quad (13.93)$$

Ja koska teho kuvailee energian muutosnopeutta, varauksenkuljettajien energian kokonaismuutos on

$$\Delta E_{\text{varaus}} = \int P_{\text{käämi} \rightarrow \text{varaus}} dt \quad (13.94)$$

Tehon lausekkeen (13.93) sijoitus tähän integraaliin antaa energian muutokseksi

$$\Delta E_{\text{varaus}} = \int -L i \frac{di}{dt} dt = -L \int_{i_{\text{alku}}}^{i_{\text{loppu}}} i di = -L \left| \frac{1}{2} i^2 \right|_{i_{\text{alku}}}^{i_{\text{loppu}}} = -\frac{1}{2} L (i_{\text{loppu}}^2 - i_{\text{alku}}^2). \quad (13.95)$$

Käämi varastoi kaiken tämän energian, joten käämin energian muutos on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen varauksen energian muutokseen nähdien.

$$\Delta E_{\text{käämi}} = -\Delta E_{\text{varaus}} = \frac{1}{2} L (i_{\text{loppu}}^2 - i_{\text{alku}}^2). \quad (13.96)$$

Jos alkutilanteessa ei kulje lainkaan virtaa,  $i_{\text{alku}} = 0$  A, ja käämissä ei ole tällöin myöskään magneettikenttää. Käämin magneettikentän energia on tällöin nolla. Jos nyt käämin läpi kulkeva virta muuttuu nollasta arvoon  $i_{\text{loppu}} = i$ , ja käämiin syntyy magneettikenttää, tähän kenttään varastoituneen energian täytyy olla

$$E_{\text{käämi}} = \frac{1}{2} L i^2. \quad (13.97)$$

Tulos ei riipu siitä, kuinka nopeasti virta muuttuu vaan ainoastaan virran lopullisesta arvosta. Näin täytyy olla, koska käämi varastoi kaiken energiansa magneettikenttäänsä, ja käämin kentän voimakkuus riippuu vain käämin läpi kulkevan virran suuruudesta.



- 13.31** Tarkastele kuvala 13.19. Virta kasvaa käämissä tasaisesti, joten toisessa kuvassa virta on  $i = \frac{1}{2} i_{\text{loppu}}$  ja kolmannessa  $i = i_{\text{loppu}}$ .
- Mikä on käämiin varastoimien energoiden suhde,  $E_2/E_3$ ?
  - Selitä sähkökentän tekemän työn avulla, miksi energia muuttuu enemmän 2. ja 3. kuvan välillä kuin 1. ja 2. kuvan välillä.

Lauseke (13.97) seuraa induktanssin määritelmää, ja se pääsee kaikille käämeille. Erityisesti se pääsee pitkille, suorille käämeille, joiden induktanssia kuvala lauseke (13.80). Tällaisen käämin energia on siis

$$E_{\text{käämi}} = \frac{N^2 A}{2\Delta z} \mu_0 i^2. \quad (13.98)$$

Toisaalta tällaisen pitkän käämin kenttä on vangittu käämin sisään ja kentän voimakkuus on yhtälön (13.73) mukaan vakio,

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.99)$$

Erityisesti kentän voimakkuuden neliö on

$$B^2 = \frac{N^2}{(\Delta z)^2} \mu_0^2 i^2, \quad (13.100)$$

Joten käämin energian (13.97) voi kirjoittaa myös käämin magneettikentän voimakkuuden avulla,

$$E_{\text{käämi}} = \frac{A \Delta z}{2\mu_0} \frac{N^2}{(\Delta z)^2} \mu_0^2 i^2 = A \Delta z \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.101)$$

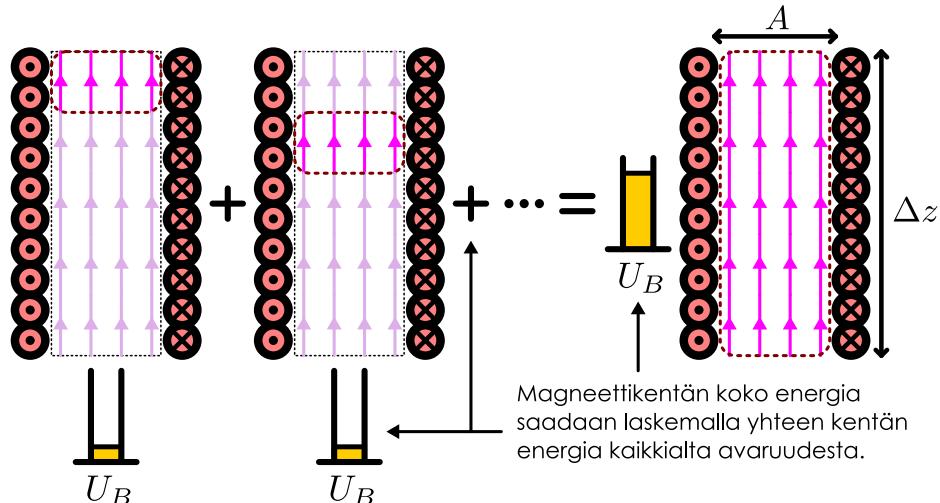
Tässä lausekkeessa esiintyy käämin itsensä ominaisuuksista enää silmukoiden pinta-ala  $A$  sekä käämin pituus  $\Delta z$ , joiden tulo on *käämin tilavuus*,

$$V_{\text{käämi}} = A \Delta z. \quad (13.102)$$

Niinpä käämin energia on

$$E_{\text{käämi}} = V_{\text{käämi}} \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.103)$$

Kuva 13.20: Magneettikenttään liittyy energiaa aivan kuten sähkökenttääkin. Energiaa on kaikilla missä kenttääkin on, ja kentän kokonaisenergia saadaan laskemalla yhteen kenttään varastoitunut energia kaikkialta avaruudesta.



Tuloksen tulkinta on seuraava. Käämin energia on varastoitu sen magneettikenttään, ja magneettikenttä on pitkän käämin sisällä homogeeninen. Niinpä magneettikenttään varastoitunut energia on levinnyt tasaisesti käämin rajaamaan avaruuteen, ja kentän koko energia saadaan laskemalla yhteen kentän energia kaikkialta avaruudesta (kuva 13.20). Magneettikenttään varastoituneen *energian tiheys* on siten kenttään varastoituneen kokonaisenergian ja kentän täyttämän tilavuuden suhde,

$$u_B = \frac{E_{\text{käämi}}}{V_{\text{käämi}}}. \quad (13.104)$$

Siispä magneettikentän energiatihedyn täytyy olla yhtälön (13.103) perusteella

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.105)$$

Johdimme tässä magneettikentän energiatihedyn tarkastelemalla hyvin pitkää käämiä, mutta magneettikenttä varastoi toki energiaa samalla tiheydellä olipa kenttä käämin sisällä tai jossakin muualla. Niinpä energiatihedyn lausekkeen (13.105) täytyy päteä yleisesti.



**13.32** Vertaa sähkökentän energiatihettä (11.146) ja magneettikentän energiatihettä (13.105).

- (a) Mitä yhteistä lausekkeissa on?
- (b) Jos sähkökentän voimakkuus on  $E$ , kuinka voimakkaalla magneettikentällä on yhtä suuri energiatiheds?
- (c) Jos magneettikentän voimakkuus on 1 T, kuinka voimakkaalla sähkökentällä on yhtä suuri energiatiheds?

## 13.4 Sähkömagnetismin peruslait

Olemme tutustuneet moniin tärkeisiin sähkömagneettisiin ilmiöihin, ja on olemassa vielä paljon enemmän mielenkiintoisia ilmiöitä, joita emme tässä materiaalissa käsittele. Nyt on kuitenkin aika päättää tutkimusmatkamme sähkömagneettisten ilmiöiden parissa ja koota yhteen oppimamme.

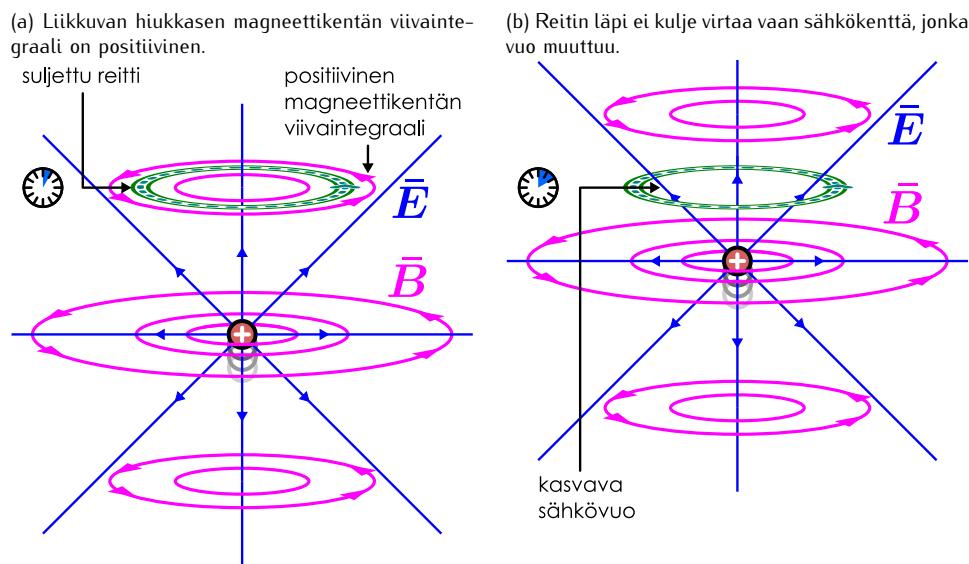
Monet käsittelemämme lait pätevät erikoistapauksissa. Coulombin laki pätee vain hitaasti liikkuville rauksille ja Ohmin laki pätee vain vastuksissa. Muutama laki on kuitenkin erikoisasemassa, sillä ne ovat *ainaa* päteviä peruslakeja, joista muut lait voidaan johtaa. *Gaussian laki sähkö- ja magneettikentille* sekä *Faradayin laki sähkökentille* ovat tällaisia peruslakeja. Yksi peruslaki meiltä kuitenkin vielä puuttuu. Viimeinen tehtävämme onkin johtaa tämä neljäs sähkömagneettisen kentän peruslaki ja koota yhteen kaikki sähkömagnetismin peruslait.

### Maxwellin laki magneettikentille

Sähkömagneettisten kenttien neljäs peruslaki liittyy Ampèren lakiin magneettikentille eli yhtälöön (12.58). Tämän lain mukaan magneettikentän viivaintegraali suljettua reittiä pitkin on suoraan verrannollinen reitin

## SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.21: Lükkiva varaus luo pyörteisen magneettikentän. Magneettikentän viivaintegraali suljetulla reitillä ei ole nolla, vaikka reitin läpi ei kulje lainkaan virtaa. Reitin läpi kuitenkin kulkee muuttuva sähkövirtaus.



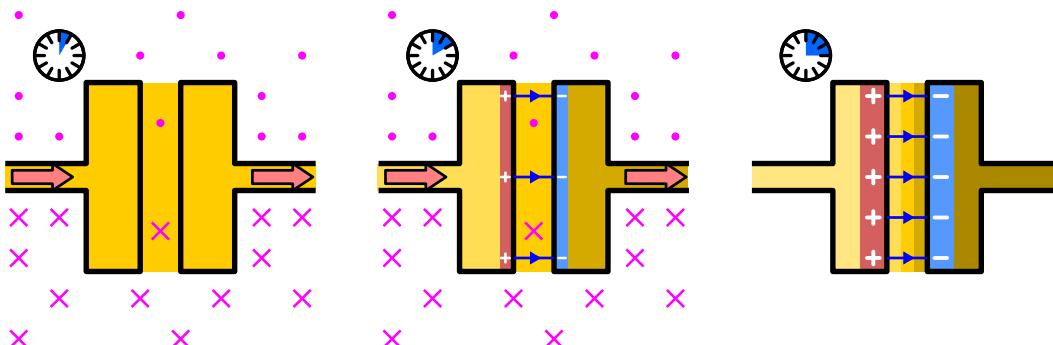
läpi kulkevan kokonaismuutoksen. Ampèren laki pätee virtajohtimille, mutta se ei voi mitenkään kuvata esimerkiksi lükkuvien sähkövarausten magneettikenttiä. Lükkiva varattu hiukkanen luo Biot'n ja Savartin lain mukaisesti ympärilleen pyörteisen magneettikentän. Jos siis valitsemme integroimispolun, joka muodostaa suljetun reitin kentän suunnassa, magneettikentän integraalin tällä polulla täytyy olla positiivinen. Tämä tilanne on piirretty kuvaan 13.21. Polun läpi ei kuitenkaan varmasti kulje sähkövirtaa, koska magneettikentän syntyy vain yksi lükkiva hiukkanen ja avaruus on muuten tyhjä. Selvästi kuitenkin Ampèren laki ei siis päde tässä tilanteessa.

Ampèren laki ei ole sinänsä väärin, mutta se on *puutteellinen*. Sähkövirrat luovat magneettikenttään pyörteitä, ja Ampèren laki kuvaa tästä. Tavallisesti sähkövirrat kuitenkin kulkevat suljetuissa virtapiireissä, jolloin varauksenkuljetajat lükkivat mutta kokonaismuutos ei missään muutu. Kuvassa 13.21 siirtymä varaus luo magneettikenttään pyörteitä, ja tästä Ampèren laki ei pysty kuvamaan. Ampèren lakiin pitää siis lisätä jotakin, jotta se voisi kuvata *kaikkia* tapauksia.

Kuvassa 13.21 valitun reitin läpi ei kulje lainkaan varausta, mutta hiukkasan *sähkökenttä läpäisee sen*. Jos hiukkanen olisi paikoillaan, se syntyy sähkökentän mutta ei loisi magneettikenttää pyörteitä, joten sähkökentän olemassaolo itsessään ei riitä luomaan magneettikenttää. Nyt varaus kuitenkin lükkää ja tarvitsee reittiä paikoillaan, joten *reitin läpäisevän sähkövirtauksen muutus*. Tässä tilanteessa magneettikentän viivaintegraali ei siis liity reitin läpi kulkevan varauksen määriin vaan reitin läpäisevän sähkövirtauksen muutokseen. Tätä magneettikenttää ja muuttuvan sähkövirtauksen välistä yhteyttä kuvaa **Maxwellin laki** (James Clerk Maxwellin mukaan).

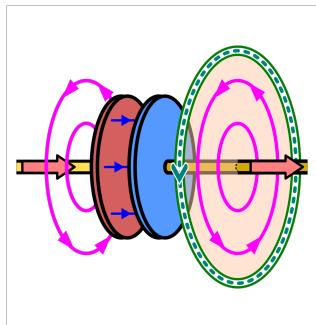
Kuva 13.22: Latautuvaan kondensaattoriin kulkee sähkövirta, ja sitä ympäröi magneettikenttä. Kondensaattorilevijen välissä oleva sähkökenttä voimistuu niin kauan kuin virta kulkee ja kondensaattorin varaus kasvaa.

(a) Kondensaattori alkaa latautua. (b) Kondensaattori latautuu. (c) Kondensaattori täysin latautunut.

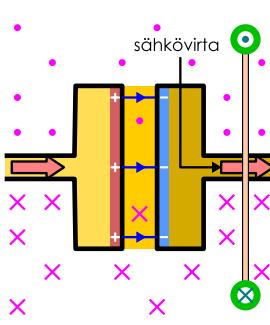


Kuva 13.23: Amp'è=latexren lain mukaan magneettikentän integraali pinnan reunan ympäri on verrannollinen pinnan läpi kulkevaan kokonaisvirtaan. Voimme valita useita pintoja, joilla on sama reuna, mutta joiden läpi kulkee erilaiset virrat. Amp'è=latexren laki pitää siis laajentaa. Virran lisäksi myös muuttuva sähkökenttä toimii magneettikentän pyörteen keskuksena.

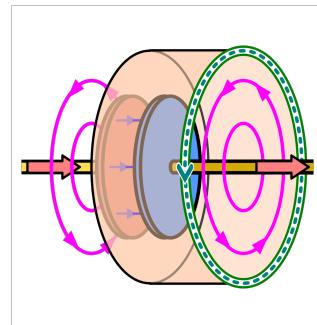
(a) Virtajohdin kulkee pinnan läpi.



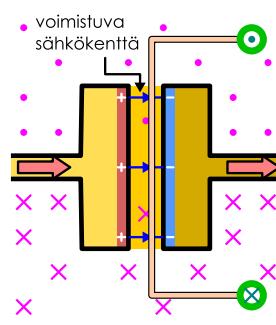
(b) Toinen kuvakulma.



(c) Pinta kulkee kondensaattorilevyn välissä.



(d) Toinen kuvakulma.



13.33 (a) Miten valitun reitin läpäisevän sähkövuon muutos näkyi kuvalta 13.21?

(b) Mihin suuntaan sähkövuon muuttuu?

(c) Millaista oikean käden säätöä sähkövuon muutos ja magneettikentän pyörre noudattavat?

Voimme muotoilla Maxwellin lain täsmällisesti tarkastelemalla kuvan 13.22 latautuvaa kondensaattoria. Kondensaattorilevyihin on kiinnitetty suorat, hyvin pitkät johtimet, ja kondensaattori on aluksi ilman varausta. Kuvassa (a) johtimissa alkaa kulkea sähkövirta, joka kuljettaa positiivista varausta yhdelle kondensaattorilevylle ja negatiivista varausta toiselle, jolloin kondensaattori latautuu. Kuvassa (b) kondensaattoriin on varastoitunut jonkin verran varausta, mutta virta kulkee edelleen ja kondensaattorin varaus kasvaa yhä. Kuvassa (c) virta ei enää kulje, ja kondensaattoriin on varastoitunut paljon sähkövarausta. Tällöin myös sähkökenttä kondensaattorilevyjen välissä on voimakas.

Kun virta kulkee, se synnyttää johdinta kiertävää magneettikentän pyörteitä. Jos valitsemme johdinta kiertävän suljetun polun kuten kuvassa 13.23 (a), magneettikentän viivaintegraali tästä reittiä pitkin on positiivinen. Tämän reitin läpi kulkee myös sähkövirta, ja Ampèren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevaan kokonaisvirtaan.

Nyt meidän täytyy kuitenkin määritellä täsmällisesti, mitä Ampèren laissa tarkoitetaan, kun puhutaan suljetun reitin läpi kulkevasta virrasta. Kuvassa 13.23 (a) reitti on ympyrä, ja voimme ajatella että reitin keskellä on ympyrän muotoinen pinta (piirretty kuvaan oranssina). Tai toisin päin, voimme ensin valita ympyrän muotoisen pinnan ja määritellä sen jälkeen tästä pintaan rajaavan suljetun reitin kiertämällä pinnan ympäri sen reunaa pitkin. Kumpikin ajattelutapa johtaa siihen, että meillä on täsmällisesti määritelty pinta ja sitä rajaava reitti. *Tällöin sanomme virran kulkevan reitin läpi, jos se kulkee reitin rajaaman pinnan läpi.*

Edellä valitsimme pinnaksi ympyrän, mutta tämä ei ole kuitenkaan ainoa mahdollinen valinta. Tarkasteltavan pinnan ei nimittäin tarvitse olla tasomainen, vaan voimme valita minkä muotoisen pinnan tahansa, kunhan tarkastelemamme suljettu reitti kulkee pinnan reunaa pitkin. Nyt reittämme on ympyrä, joten reitin rajaamaksi pinnaksi voidaan valita ympyrän sijaan myös esimerkiksi puolipallo tai vaikkapa toisesta päästään avoin sylinteripinta (eli ämpärin muotoinen pinta). Jos magneettikentän synnyttää katkeamaton virtajohdin, Ampèren laki pätee näille kaikille riippumatta valitun pinnan muodosta.

Kuvassa 13.23 kondensaattori kuitenkin katkaisee virtajohtimen, ja voimme valita juuri sellaisen pinnan, jonka pohja kulkee kondensaattorilevyjen välisestä. Tällainen pinta on piirretty kuvien 13.23 (c) ja (d). Tällä pinnalla on sama reuna kuin kuvien 13.23 (a) ja (b) ympyrällä, joten magneettikentän viivaintegraalin tämän pinnan ympäri täytyy olla kummassakin kuvassa sama. Kondensaattorilevyjen välissä ei kulje sähkövirtaa, joten *virta pinnan läpi on nolla*. Sen sijaan kondensaattorilevyjen välissä on voimistuva sähkökenttä, joten *sähkövuon pinnan läpi muuttuu virran kulkiessa*.

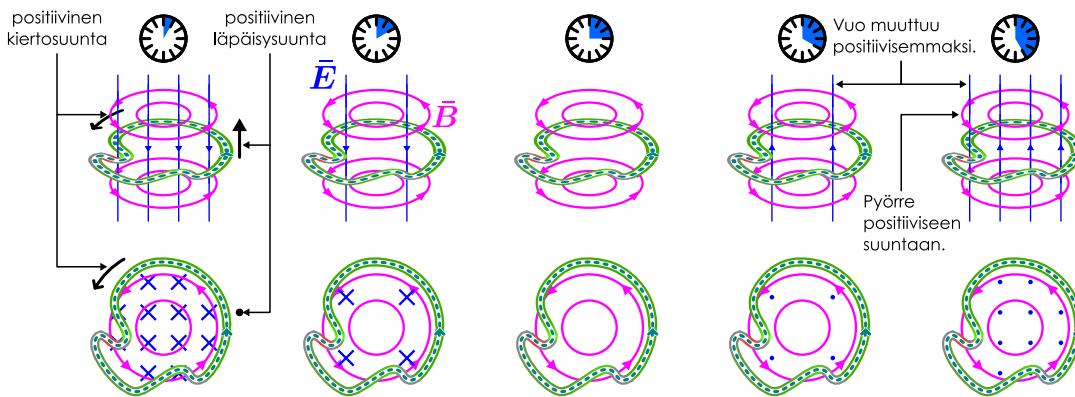
Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kondensaattorin levyt ovat hyvin lähellä toisiaan niiden leveysten nähdessä, koska tällöin kondensaattoria voidaan kuvata äärettömän suuren kondensaattorin mallilla. Toisin sanoen oletamme, että kondensaattorin sähkökenttä on levyjen välissä homogeeninen ja nolla levyjen ulkopuolella. Kentän voimakkuus tällaisessa kondensaattorissa on Gaussin lain ja yhtälön (10.154) perusteella

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{A\epsilon_0} \quad (13.106)$$

eli kenttä on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen  $q$ .

Kondensaattorin varaus muuttuu, koska kondensaattorilevyille kulkee virta, ja virta on määritelty varauksen muutoksen nopeutena,  $i = dq/dt$ . Niinpä yhtälön (13.106) derivoointi antaa kondensaattorin sähkökentän

Kuva 13.24: Maxwellin laki: muuttuva sähkökenttä luon pyörteisen magneettikentän.



muutosnopeuden ja kondensaattoriin kulkevan virran välille yhteyden

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\epsilon_0} \frac{dq}{dt} = \frac{i}{A\epsilon_0}. \quad (13.107)$$

Tästä lausekkeesta voidaan myös ratkaista sähkövirta sähkökentän derivaatan funktiona,

$$i = A\epsilon_0 \frac{dE}{dt}. \quad (13.108)$$

Tarkasteltava pinta kulkee kondensaattorilevyjen välin jäävän raon poikki, joten kaikki kondensaattorilevyjen väliset sähkökentän kenttäviivat läpäisevät tarkastelupinnan. Siis koko levyjen välinen sähkövuo kulkee tarkastelupinnan läpi. Edelleen koska sähkökenttä on kondensaattorilevyjen välissä vakio ja muualla nolla, sähkövuo on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja *levyjen* pinta-alan tulo,

$$\Phi_E = EA. \quad (13.109)$$

Toisaalta kondensaattoriin kulkeva virtaa kuvaavassa yhtälössä (13.108) esiintyy levyjen pinta-alan ja sähkökentän muutosnopeuden tulo, jonka täytyy tämän perusteella olla sama asia kuin sähkövuoon muutosnopeus, koska levyjen pinta-ala ei muutu,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}(EA) = \frac{dE}{dt}A. \quad (13.110)$$

Siispä kondensaattorilevyjen välinen sähkövuo muuttuu sitä nopeammin mitä voimakkampi virta johtimissa kulkee,

$$i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.111)$$



**13.34** Selitä, miksi sekä yhtälössä (13.108) että (13.109) esiintyvä ala  $A$  on kondensaattorilevyjen ala eikä tarkastelupinnan ala.

Kerrataanpa: Kuvioon 13.23 on piirretty sama latautuva kondensaattori, jota ympäröi kaikissa kuvissa sama pyörteinen magneettikenttä. Kaikiin kuvioon on myös piirretty sama suljettu reitti, jota pitkin laskettu magneettikentän viivaintegraali on positiivinen ja jolla täytyy olla sama arvo kaikissa kuvissa. Ainoa ero kuvissa on se, että kuvassa (a) reitti rajoittaa suoraa ympyräpintaa, jonka läpi kulkee virta  $i$  eikä lainkaan sähkökenttää, kun taas kuvassa (c) reitti on sylinderin muotoisen pinnan reuna, ja tämän pinnan läpi kulkee muuttuva sähkökenttä eikä lainkaan sähkövirtaa.

*Ampèren lain* mukaan reittiä pitkin lasketun viivaintegraalin arvon voi ilmaista kuvan (a) pinnan läpi kulkevan sähkövirran avulla muodossa.

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i. \quad (13.112)$$

Toisaalta *Maxwellin lain* mukaan tämän saman viivaintegraalin voi ilmaista kuvan (c) pinnan läpi kulkevan sähkövuoon avulla. Jos sijoitamme yhtälön (13.111) Ampèren lakiin, saamme magneettikentän viivaintegraalin ja sähkövuoon välille yhtälön

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.113)$$

Tämä on Maxwellin lain täsmällinen muotoilu: *magneettikentän viivaintegraali pinnan reunaa pitkin on suojaan verrannollinen pinnan läpi kulkevan sähkövuoon muutosnopeuteen, ja verrannollisuuskerroin on sähkö- ja magneettivakioiden tulo.*



**13.35** Vertaa Faradayn lokia (13.64) ja sähkökentän Galilei-muunnosta (13.52). Vertaa sitten Maxwellin lokia (13.113) sekä magneettikentän Galilei-muunnosta (13.46). Mitä huomaat? Osaatko selittää, miksi näiden laken välillä on yhteyts?

Maxwellin laki on havainnollistettu kuvaan 13.24 tilanteessa, jossa ei ole lainkaan varauksia vaan ainoastaan muuttuva sähkökenttä. Kuvaan on piirretty suljettu reitti, ja reitin positiivinen kiertosuunta on kuvassa vastapäivään. Tällöin positiivinen läpäisy suunta on reitin läpi on oikean käden säännön mukaisesti ylöspäin (kohti katsojaa). Sähkövuo muuttuu kuvassa positiiviseen suuntaan, jolloin Maxwellin lain mukaisesti magneettikentän viivaintegraali on myös positiivinen. Magneettikenttä kiertää siis positiiviseen suuntaan eli kuvassa vastapäivään.

Ampèren lain mukaan sähkövirrat voivat toimia magneettikentän pyörteiden keskuksina, ja Maxwellin lain mukaan myös muuttuvat sähkökentät ovat magneettikentän pyörteiden keskuksia. Edellisessä esimerkissä sovelsimme näitä lakeja pintoihin, joista toisen läpi kulki vain sähkövirta ja toisen läpi vain muuttuva sähkövuo. Yleisesti pinnan läpi voi tieteenkin kulkea sekä sähkövirta että muuttuva sähkökenttä, jolloin *kumpaanakin* lüttyy magneettikentän pyörre. Tällöin magneettikentät lasketaan superpositioperiaatteen mukaisesti yhteen, jolloin pinnan reunaa pitkin laskettu magneettikentän integraali saadaan laskemalla Ampèren ja Maxwellin lakiennusteet *yhteen*,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.114)$$

Tämä on **Ampèren ja Maxwellin laki magneettikentille**, sähkömagneettisten kentien viimeinen peruslaki.



**13.36** Vertaa Faradayn lokia sähkökentille sekä Ampèren ja Maxwellin lokia magneettikentille.

- (a) Mitä yhteistä ja mitä eroa lakienv matemaattisessa muodossa on?
- (b) Miten nämä erot vaikuttavat lakienv kuvauamien pyörteisten kentien suuntiin?

## Maxwellin yhtälöt

Maxwellin lain magneettikentille löysi James Clerk Maxwell 1800-luvun puolivälissä. Muut sähkömagnetismin peruslait tunnettiin jo tuolloin, joten Maxwellin työn myötä klassinen sähkömagnetismin teoria valmistui, ja tästä syystä sähkömagnetismin peruslakeja kutsutaan yhdessä **Maxwellin yhtälöiksi**. Ne ovat klassisessa sähkömagnetismissa yhtä tärkeää asemassa kuin esimerkiksi Newtonin lait ovat klassisessa mekaanikassa, ja Maxwellin yhtälöiden löytyminen on fysiikan historian merkittävimpää saavutuksia.

Erityisesti Faradayn sekä Ampèren ja Maxwellin lakienv löytymisen myötä ymmärrettiin, että sähkömagneettinen kenttä ei ole vain varausten luoma vaan *sähkö- ja magneettikenttä voivat vaikuttaa toinen toisiinsa myös tyhjässä avaruudessa*. Jos sähkömagneettiseen kenttään tuotetaan muutos vaikkapa siirtämällä varattua hiukkasta, muutos sähkökentässä vaikuttaa magneettikenttään, ja muutos magneettikentässä vaikuttaa vastaavasti sähkökenttään. Näin sähkö- ja magneettikentät päätyvät loputtomasti muuttamaan toinen toistaan senkin jälkeen kuin muutoksen alulle pannut varaus on jälleen pysähtynyt. Maxwell osoitti, että tämä prosesi johtaa siihen, että kerran alkuun saatettu muutos etenee sähkömagneettisessa kentässä valonnopeudella, ja että valo itsessään on tällainen sähkömagneettisessa kentän etenevä muutos eli sähkömagneettinen aalto. Me todistamme tämän asian Faradayn ja Maxwellin lakienv avulla aalto-oppia ja optiikkaa tutkiessamme luvussa 16.

Päättämme nyt sähköopin kertaamalla Maxwellin yhtälöiden eli sähkömagnetismin peruslakien sisällön. Lakeja on neljä:

- *Gaussian laki sähkökentille*, yhtälö (10.73),

$$\Phi_{E,\text{suljettu}} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{sisällä}}. \quad (13.115)$$

- *Gaussian laki magneettikentille*, yhtälö (12.47),

$$\Phi_{B,\text{suljettu}} = 0. \quad (13.116)$$

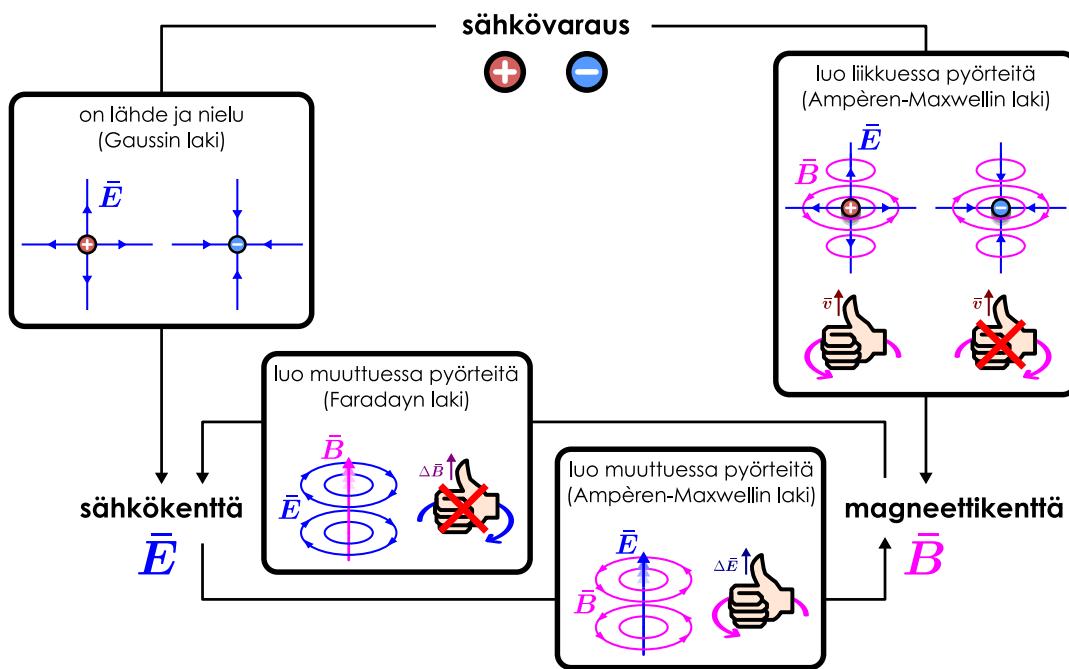
- *Faradayn laki sähkökentille*, yhtälö (13.64),

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.117)$$

- *Ampèren ja Maxwellin laki magneettikentille*, yhtälö (13.114),

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.118)$$

Kuva 13.25: Maxwellin yhtälöt eli sähkömagnetismin peruslait kaaviona.



Sähkökenttiä Gaussian lain mukaan sähkövuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi riippuu vain pinnan sisältämästä kokonaivarauksesta. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että *positiiviset varaukset toimivat sähkökentän lähteinä ja negatiiviset sen nieluina*. Jos suljetun pinnan sisällä on enemmän positiivisia varauksia kuin negatiivisia, pinnan sisällä alkaa enemmän sähköisiä kenttäviivoja kuin loppuu, jolloin ylimääräisten viivojen täytyy kulkea pinnan sisältä ulos. Vastaavasti jos pinnan sisällä on enemmän negatiivista varausta kuin positiivista, pinnan sisään kulkee enemmän kenttäviivoja kuin sieltä ulos. Sähkövuo mittaa pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrää, joten sähkövuo ja pinnan sisältämä kokonaivaraus ovat suoraan verrannolliset.

Magneettisen Gaussian lain mukaan magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että *magneettisia varauksia ei ole olemassa*, joten magneettiset kenttäviivat eivät voi alkaa mistään eikä päättyä minnekään, jolloin suljettujen pintojen läpi täytyy aina kulkea sisältä ulos yhtä paljon kenttäviivoja kuin ulkoa sisään. Periaatteessa ei ole mitään syytä, miksei magneettisia varauksia voisi olla olemassa, mutta ainakaan toistaiseksi ei tunneta hiukkasia, joilla olisi magneettinen varaus. Jos tällaisia hiukkasia joskus löydetään, magneettinen Gaussian laki muuttuu samanlaiseksi kuin sähköinen Gaussian laki. Toisin sanoen silloin laki sanoisi, että suljetun pinnan läpi kulkeva magneettivuo on verrannollinen pinnan sisältämään magneettiseen varaukseen.

Faraday'n laki sähkökentille sanoo, että sähkökentän viivaintegraali minkä tahansa suljetun reitin ympäri on yhtä suuri kuin reitin läpi kulkevan magneettivuo muutosnopeus. Tämä tarkoittaa sitä, että *muuttuvat magneettikentät toimivat sähkökentän pyörteiden keskuksina*, jolloin magneettikentän muutos luo sähkökenttään pyörteen. Pyörteen suunta on oikean käden säännölle vastakkainen: jos peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suunnan, sähkökentän pyöre kiertyy päinvastaiseen suuntaan kuin sormet.

Ampéren ja Maxwellin laki on samanlainen laki magneettikentille kuin mitä Faraday'n laki on sähkökentille. Sen mukaan magneettikentän viivaintegraali minkä tahansa suljetun reitin ympäri on verrannollinen reitin läpi kulkevan sähkövirran sekä sähkövuoon muutokseen. Toisin sanoen *sekä sähkövirrat että muuttuvat sähkökentät toimivat magneettikentän pyörteiden keskuksina*. Magneettikentän pyörteet noudattavat oikean käden sääntöä. Jos siis oikean käden peukalo osoittaa virran ja sähkökentän muutoksen suunnan, magneettikentän pyörteet kulkevat koukistettujen sormien suuntaan.

Sen lisäksi että Maxwellin yhtälöt ovat yleispäteväät, ne ovat myös *kattavat* sähkömagneettisten kenttien lait. Toisin sanoen klassisten sähkömagneettisten kentten kuvaamiseen ei tarvita mitään muita lakeja näiden lisäksi. Kun Maxwellin yhtälöihin lisätään vielä varattuihin hiukkasiin kohdistuva sähköistä voimaa kuvaava *Lorentzin voimalaki* (12.13), pystymme periaatteessa kuvaamaan näiden lakien avulla kaikki klassiset sähkömagneettiset ilmiöt ja johtamaan niistä kaikki muut sähköopin lait.



**13.37** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä sähkömagnetismin peruslaeista. Selitä Maxwellin yhtälöt ja Lorentzin voimalaki sanoin ja kirjoita ylös niitä kuvavat yhtälöt. Täydennä kuvan 13.25 käsitekartta niihin, ettei se sisältää myös Lorentzin voimalain.

## Yhteenveton Sähkömagnetismi

### Induktio ja induktanssi

- Magneettikentässä liikkuvaan johtimeen indusoituu jännite
$$\mathcal{E} = \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{v}}.$$
- Jos johdinsilmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu, silmukkaan indusoituu jännite

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Tämä on **Faradayin induktiolaki**.

- Induktiojännitteet ja -virran suunnan voi päättää **Lenzin laista**, jonka mukaan induktiojännite aina vastustaa muutosta, joka aiheuttaa induktion.
- Käämi** on sähköinen komponentti, joka voidaan valmistaa kiertämällä johdin silmukoille. Käämiin indusoituu jännite, kun sen läpäisevä magneettivuo muuttuu.

- Käämin läpi kulkeva muuttuva sähkövirta indusoii käämiin itseensä jännitteen

$$\mathcal{E} = \Delta V = -L \frac{di}{dt},$$

missä  $L$  on käämin **induktanssi**.

- Käämi varastoi energiaa magneettikenttään. Käämin energia on

$$E = \frac{1}{2} Li^2.$$

- Magneettikentän energiatihleys on

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

### Sähkömagneettinen kenttä

- Sähkömagneettista vuorovaikutusta välittää **sähkömagneettinen kenttä**, joka ilmenee sähkökenttänä  $\bar{\mathbf{E}}$  ja magneettikenttänä  $\bar{\mathbf{B}}$ . Nämä ovat kuitenkin suhteelliset eli eri koordinaatistoissa mitataan erilaiset sähkö- ja magneettikentät. Kentien Galileimuunnokset ovat

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_{(B)} &= \bar{\mathbf{E}}_{(A)} + \bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{B}}_{(A)} \\ \bar{\mathbf{B}}_{(B)} &= \bar{\mathbf{B}}_{(A)} - \varepsilon_0 \mu_0 \bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{E}}_{(A)}.\end{aligned}$$

- Muuttuvan magneettikenttään lüttyy pyörteinen sähkökenttä. Sähkökentän pyörrettä mittaa kentän viivaintegraali suljetulla reitillä, ja tämä on yhtä suuri kuin reitin läpäisevän magneettivuon muutosnopeus,

$$\oint \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Tämä on **Faradayin laki sähkökentille**.

- Sekä sähkövirtaan että muuttuvan sähkökenttään lüttyy pyörteinen magneettikenttä. Magneettikentän pyörrettä mittaa kentän viivaintegraali suljetulla reitillä, ja tämä on verrannollinen reitin läpäisevään virtaan ja sähkövuon muutosnopeuteen,

$$\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Tämä on **Ampéren ja Maxwellin laki magneettikentille**.

- Sähkömagnetismin peruslait eli **Maxwellin yhtälöt** ovat:
  - Gaussian laki sähkökentille
  - Gaussian laki magneettikentille
  - Faradayin laki sähkökentille
  - Ampéren ja Maxwellin laki magneettikentille

### Sanasto

- sähkömagneettinen (electromagnetic)
- induktio (induction)
- käämi (coil, inductor)
- ensiöpöri (primary circuit)
- toisiopöri (secondary circuit)

- generaattori (generator)
- induktanssi (inductance)
- muuntaja (transformer)
- Maxwellin yhtälöt (Maxwell's equations)

Taulukko 13.1: Sähkömagnetismin peruslait taulukkona. Miten pyörteiset ja pyörteettömät kentät syntyvät, ja mitkä lait näitä kuvavat $\zeta$ =latex

kentän luo	sähkökenttä		magneettikenttä	
	pyörteeton	pyörteinen	pyörteeton	pyörteinen
varaus levossa	Gauss	-	-	-
varaus liikkeessä	Gauss	-	-	Ampère-Maxwell
vakio $\bar{\mathbf{E}}$	-	-	-	-
muuttuva $\bar{\mathbf{E}}$	-	-	-	Ampère-Maxwell
vakio $\bar{\mathbf{B}}$	-	-	-	-
muuttuva $\bar{\mathbf{B}}$	-	Faraday	-	-

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

13.1 (a) Elektronit liikkuvat sauvan mukana kuvassa oikealle ja magneettikenttä osoittaa kuvan sisään. Koska elektronit ovat negatiivisia, niihin kohdistuu voima vastakkaiseen suuntaan kuin mihin oikean käden sääntö ennustaa eli kuvassa alaspäin.

(b) Elektronit alkavat kulkea kuvassa myötäpäivään.

(c) Virta kulkee siis vastapäivään.

13.2 (a) Jos sauvan suunta vaihtuu, myös virran suunta ja voiman suunta käänny ympäri. Siispä virta kulkee myötäpäivään ja voima osoittaa oikealle. (b) Ei. Kun kaikki vektorit käännyvät ympäri, pistetulo ei muuttu. Siispä työ on edelleen negatiivinen. Näin tietysti pitää ollakin, koska prosessissa mekaanista energiota muutuu

13.3 (a) Kun sauva liikkuu pituussuunnassaan, jännite indusoituu sen sivujen välille. Jos sauva on kapea, tämä jännite on hyvin pieni. Sauvan päiden välillä jännitettä ei ole.

(b) Jännite lasketaan vektorikolmitulona

$$\mathcal{E} = \bar{B} \times \bar{L} \cdot \bar{v} \quad (13.119)$$

$$= (1 \text{ T})\hat{i} \times (1 \text{ m}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}) \cdot (1 \text{ m/s}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) \quad (13.120)$$

$$= (1 \text{ Tm}) \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k} \cdot (1 \text{ m/s}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k}) \quad (13.121)$$

$$= (1 \text{ V}) \frac{1}{2} \quad (13.122)$$

$$= 0.5 \text{ V.} \quad (13.123)$$

13.4 Oikeanpuoleinen sauva liikkuu siis kaikissa tapauksissa oikealle nopeudella  $v$ , jolloin sen kuvassa ylempi pää on korkeammassa potentiaalissa. (a) Vasemmanpuoleisen sauvan pää on korkeassa potentiaalissa, koska sauvan nopeus on kaksinkertainen, sen jännitekin on. Tämä saa virran kulkemaan myötäpäivään. (b) Vasemmanpuoleisen sauvan ylempi pää on matalassa potentiaalissa. Nyt silmukassa kulkee kaksinkertainen virta vastapäivään.

13.5 (a) Magneettivuo kasvaa, joten induktiovirta pyrkii tuottamaan magneettikentän, joka vastustaa vuon kasvua. Kenttä osoittaa siis kohti katsojaa ja virta kulkee vastapäivään.

(b) Magneettivuo pienenee. Virta kulkee myötäpäivään.

(c) Vuo kasvaa, virta kulkee vastapäivään.

(d) Vuo kasvaa, virta kulkee vastapäivään.

13.6 (a) Jos rengas liikkuu sivuttaan, se kulkee pois voimakkaan magneettikentän alueesta ja magneettivuo suuruus siis pienenee. Induktiovirta pyrkii kasvattamaan magneettivuota. Indusoitunut magneettikenttä osoittaa siis ylöspäin eli induktiovirta kulkee vastapäivään.

(b) Valitaan positiivinen läpäisyssuunta ylöspäin, jolloin positiivinen kiertosuunta on vastapäivään. Nyt magneettivuo muuttuu negatiiviseen suuntaan, joten virta indusoituu positiiviseen suuntaan eli vastapäivään.

13.7 Nopeus ja nopeuden muutos osoittavat molemmat negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Siispä  $v_x < 0$  ja  $a_x = dv_x/dt < 0$ .

13.8 Valitaan positiivinen läpäisyssuunta pois päin katsojasta jolloin positiivinen kiertosuunta on myötäpäivään.

(a) Vuo on positiivinen ja kasvaa eli muutos on positiivinen. Siispä jännite on negatiivinen ja virta kulkee negatiiviseen suuntaan eli vastapäivään.

(b) Nyt vuo muuttuu negatiiviseen suuntaan, joten virta kulkee positiiviseen suuntaan.

(c) Vuo muuttuu positiiviseen suuntaan, virta kulkee vastapäivään.

(d) Vuo muuttuu positiiviseen suuntaan, virta kulkee vastapäivään.

13.10 A:ssa elektronit ovat aluksi paikoillaan ja lähtevät liikkeelle samanaikaisesti. B:ssä elektronit liikkuvat aluksi johtimen mukana ja pysähtyvät pariston kytkemisen takia. Kunkin elektronin nopeuden muutos voidaan ajatella omaksi tapahtumakseen. Jos A:ssa nämä tapahtumat ovat samanaikaiset, ne eivät ole sitä B:ssä elleivät ne tapahdu samassa paikassa (koordinaatistojen liikkeen suunnassa). B:ssä johtimen liikkeen suunnassa takimaiset elektronit pysähtyvät ensin ja liikkeen suunnassa etumaiset elektronit viimeisenä. Siispä takana tulevat elektronit pysähtyvät ensimmäisenä ja niiden edellä kulkevat ehtivät kulkea niistä kauemmas ennen pysähtymistään. Niinpä elektronien välinen etäisyys on B:ssä suurempi kuin A:ssa. Huomaa, että koordinaatistojen välinen nopeus on hyvin pieni ja niinpä nämä suhteellisuusteoreettiset ilmiöt ovat erittäin heikkoja. Sähköinen vuorovaikutus on kuitenkin niin voimakas, että nämä äärimmäisen pienetkin vaikutukset tuottavat havaittavan sähkömagneettisen voiman.

13.11 (a) Kun  $v$  kasvaa, myös  $\gamma$  kasvaa. Niinpä  $1/\gamma$  pienenee ja  $-1/\gamma$  kasvaa. Siispä koko lauseke  $\gamma - 1/\gamma$  kasvaa.

(b) Kun  $v$  on nolla,  $\gamma = 1$  ja  $\gamma - 1/\gamma = 0$ . Kun  $v$  kasvaa, tämä tekijä kasvaa ja tulee siis positiiviseksi. Pituusvaraustiheys  $\lambda_{(B)}$  on tähän verrannollinen, joten se on positiivinen.

(c) Tämä täsmää kuvan kanssa. Johdin on koordinaatistossa B positiivisesti varattu.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**13.12** (a) Kun  $v = 0.5c$ , tarkasti laskien saadaan likiarvot  $\gamma = 1.1547$  ja  $1/\gamma = 0.8660$ . Approximaatio antaa  $\gamma \approx 1.125$  ja  $1/\gamma \approx 0.875$ .

(b) Kun  $v = 0.1c$ , saadaan  $\gamma = 1.00504$ ,  $1/\gamma = 0.99499$  ja  $\gamma \approx 1.005$ ,  $1/\gamma \approx 0.995$ .

(c) Kun  $v = 0.01c$ , saadaan  $\gamma = 1.00005$ ,  $1/\gamma = 0.99995$  ja  $\gamma \approx 1.00005$ ,  $1/\gamma \approx 0.99995$ .

(d) Approximaatio tulee selvästikin sitä paremmaksi, mitä pienempi  $v$  on, ja jos siis  $v \ll c$ , approximaatiota voi pitää tarkkana.

**13.13** Vakiot ovat  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  C/Vm ja  $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6}$  N/A<sup>2</sup>. Näiden tulo on  $\epsilon_0\mu_0 = 1.113 \cdot 10^{-17}$  CN/VmA<sup>2</sup>, missä yksiköt sievenevät muistamalla relaatiot C = As ja N/C = V/m. Näiden avulla saadaan

$$\frac{CN}{VmA^2} = \frac{sN}{VAm} = \frac{sC}{Am^2} = \frac{s^2}{m^2} \quad (13.124)$$

Tämän neliöjuuri on  $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3.336 \cdot 10^{-9} \frac{s}{m}$  ja tämän käänneisluku on  $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ . Tämä on valonnopeus kuten pitkin.

**13.14** Äärettömän pitkän suoran sauvan sähkökenttä on käänneinen verrannollinen sauvasta mitattuun etäisyteen  $E \sim r^{-1}$ . Pitkän, suoran virtajohitimen magneettikenttä on myös käänneinen verrannollinen johtimesta mitattuun etäisyteen  $B \sim r^{-1}$ . Nämä täytyy olla, koska jos siirrymme koordinaatistoon, jossa saava liikkuu pituussuunnassaan, liikkuva saava kuljettaa sähkövirtaa ja toimii kuin virtajohdin. Voidaan ajatella, että saava luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän, jonka voimakkuus heikkenee käänneinen verrannollisesti sauvasta mitattuun etäisyteen. Sauvan lepokoordinaatistossa tämä kenttä havaitaan puhtaasti sähkökentänä, mutta koordinaatistossa, jossa saava liikkuu, kentällä on myös magneettinen luonna.

**13.15** (a) Koordinaatistossa B varaus liikkuu nopeudella  $\bar{v}_{q(B)} = \bar{v}_{A(B)} = -\bar{v}_{B(A)} = -\bar{v}$ . Vastaavasti C:ssä varauksen nopeus on  $\bar{v}_{q(C)} = -2\bar{v}$ . Kentät ovat siis

$$\bar{B}_{(B)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \bar{B}_{(C)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q2\bar{v} \times \hat{r}}{r^2} = 2\bar{B}_{(B)}. \quad (13.125)$$

(b) Koordinaatistossa A on sähkökenttä  $\bar{E}_{(A)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$  ja magneettikenttä nolla. Koordinaatistossa B sähkökenttä muuntuu myös magneettikentäksi,

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)} \quad (13.126)$$

$$= 0 - \epsilon_0\mu_0 \bar{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (13.127)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.128)$$

Mikä on sama tulos kuin mitä Biot'n ja Savartin laki antoi. Samalla tavalla koordinaatistossa C saadaan sama kenttä kuin (a)-kohdassa. (Huom. koordinaatistoissa B ja C on likimain sama sähkökenttä kuin A:ssa, kun  $v \ll c$ .)

(c) Koordinaatiston C nopeus B:n suhteeseen on  $\bar{v}_{C(B)} = \bar{v}$ . Niinpä

$$\bar{B}_{(C)} = \bar{B}_{(B)} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v}_{C(B)} \times \bar{E}_{(B)} \quad (13.129)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (13.130)$$

$$= -2\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.131)$$

Tämä on sama tulos kuin mitä aikaisemmin laskettiin.

(d) Kaikilla laskutavilla saatiin sama tulos, joten muunno syhtälö näyttää järkevältä.

**13.16** Coulombin lain mukaan pisteverauksen sähkökenttä on pallosymmetrinen eli kaikissa suunnissa yhtä voimakas. Kuvaan piirretty kenttä ei kuitenkaan ole tällainen, koska kentän voimakkuus on verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen ja selvästikin kenttäviivojen tiheys riippuu kuvassa suunnasta. Coulombin laki ei siis enää päde, kun varaus liikkuu hyvin nopeasti. Gaussian laki sen sijaan sanoo oleellisesti sen, että varauksesta lähtevien kenttäviivojen lukumäärä on verrannollinen varauksen suuruuteen. Varauksen suuruus on invariantti, nopeudesta riippumaton suure. Vaikka kenttäviivojen suunta muuttuu varauksen nopeuden kasvaessa, niiden lukumäärä ei muutu, joten viivojen määrä on myös invariantti. Viivojen määrän ja varauksen suuruuden välinen suhde on siis aina sama ja Gaussian laki pätee. Tästä syystä Gaussian laki onkin sähkökenttien peruslaki mutta Coulombin laki ei ole.

**13.17** Koordinaatiston A yläosassa magneettikenttä osoittaa poispäin katsojasta ja alaosassa kohti. Jos koordinaatisto B liikkuu oikealle, ristiitulo  $\bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}$  osoittaa oikean käden säännön mukaan kuvan yläosassa ylöspäin ja alaosassa alaspäin. Niinpä B:ssä täytyy muunno syhtälön mukaan olla tällainen sähkökenttä kuten kuvan 13.9 perusteella onkin.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**13.19** A:ssa on magneettikenttä, joka osoittaa renkaan kohdalla yläviistoon poispäin renkaan keskustasta. Koordinaatisto B liikkuu A:n suhteen ylöspäin. Tarkastellaan nyt ristituloa  $\vec{v}_{B(A)} \times \vec{B}_{(A)}$ . Kuvan piirretyn elektronin kohdalla siis  $\vec{v}_{B(A)}$  osoittaa ylöspäin (suuntaan  $\hat{k}$ , jos kiinnitämme koordinaatiston niin, että  $x$ -suunta on kohti katsojaa,  $y$ -suunta oikealle ja  $z$ -suunta ylöspäin) ja  $\vec{B}_{(A)}$  viistoon ylös, oikealle ja taaksepäin (siis likimain suuntaan  $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ). Oiken käden säännön mukaan näiden ristitulovektori on vaakasuuntainen ja se osoittaa viistoon takavasemmalle (sillä  $\hat{k} \times (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -\hat{k} \times \hat{i} + \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{j} - \hat{i}$ ). Sähkökenttä osoittaa siis B:ssä renkaan suuntaan ylhäältä katsoen vastapäivään. Ja koska systeemi on sylinterisymmetrinen, samanlainen päätely toimii missä tahansa renkaan pisteessä. Sähkökentän kenttäviivojen täytyy siis muodostaa renkaita kuten kuvass (c).

**13.20** Jos magneettivuo muuttuu nopeammin, derivaatta  $d\Phi_B/dt$  on suurempi ja Faradayn lain mukaan myös sähkökentän viivaintegraali on suurempi. Sähkökentän pitäisi siis olla voimakkaampi, jolloin kuvan täytyisi piirtää enemmän ja tihemmin sähköisiä kenttäviivoja.

**13.22** (a) Ei. (b) Koska käämi on äärettömän pitkä, sen kentän täytyy olla sylinterisymmetrinen. Tämä tarjoittaa sitä, että magneettikentän radiaalikomponentti on joko nolla tai kaikkialla samansuuntainen. Kummassakin tapauksessa vaakasuuntaisten sivujen viivaintegraaliksi tulee yhtensä nolla. (c) Kaukana käämistä kenttä on likimain nolla, joten viivaintegraali on nolla. Niinpä viivaintegraali poikkeaa nollasta vain käämin sisällä. Toisaalta koska polun läpi kulkeva virta ei riipu polun leveydestä, näin täytyy tapahtua riippumatta siitä, kuinka kaukana käämistä polku kiertää. Siispä käämin ulkopuolella viivaintegraalin täytyy olla nolla mitä tahansa polkua pitkin. (d) Jos viivaintegraali on käämin ulkopuolella nolla kaikilla poluilla, kentän täytyy olla nolla. Vastaavalla päätelyllä viivaintegraalin arvo ei riipu myöskään siitä, mihin kohtaan pystysuora polku asetetaan käämin sisällä, joten kentän täytyy olla käämin sisällä kaikkialla yhtä voimakas.

**13.23** Kenttäviivaesityksessä viivojen tiheys on verrannollinen kentän voimakkuuteen. Jos käämi on pitkä, sen sisällä kenttä ei riipu käämin täsmällisestä halkaisijasta eikä pituudesta. Kenttä on verrannollinen sekä silmukoiden tiheyteen että virtaan, joten kummankin kaksinkertaistaminen kaksinkertaistaa kentän voimakkuuden ja siten kenttäviavaesityksessä viivojen tiheys ja lukumäärä niihin ikään kaksinkertaistuvat.

**13.24** Kytkimen avaaminen katkaisee virran kulun ensökäämässä nopeasti. Tällöin magneettikenttä käämeissä heikkenee nopeasti, mikä indusoii toisiokäämiin jännitteen ja virran pääinvastaiseen suuntaan kuin kytkintä suljetaessa. Tämä virta saa toisiopüriin lampun syttymään hetkeksi.

**13.25** (a) Kytkin suljetaan, jolloin virta kasvaa. Lenzin lain mukaan induktio vastustaa sen synnyttää ilmiötä, joten käämiin indusoituu virtaa vastustava jännite. Jännite on siis negatiivinen.

(b) Valitaan positiivinen läpäisy-suunta alaspäin, jolloin positiivinen kiertosuunta on virran kulkusuunta. Nyt kasvava virta tuottaa positiivisen, kasvavan magneettivuon, joten Faradayn lain mukaan käämiin indusoituu negatiivinen jännite.

**13.26** Esimerkiksi vastuksessa virta voi muuttua lähes välittömästi, koska elektronit itsessään vaeltavat hitaasti ja niiden massa on pieni, joten elektronien virralla itsellään ei ole inertiaa. Induktanssi kuitenkin estää virtaa muuttumasta nopeasti, koska, käämiin indusoituvia jännite pyrkii aina vastustamaan virran muutosta. Induktanssi toimii siis virralle samaan tapaan kuin inertialle. Mitä suurempi inertia, sitä vaikeampaa kappaleen liikkeen muuttaminen on ja sitä enemmän aikaa se vaatii. Mitä suurempi induktanssi käämillä on, sitä vaikeampaa käämin läpi kulkevan virran muuttaminen on.

**13.27** Münus tarkoittaa sitä, että indusoitunut jännite aina vastustaa virran muutosta Lenzin lain mukaisesti. Jos käämin läpi kulkeva virta muuttuu positiiviseen suuntaan, indusoitunut jännite on negatiivinen, jolloin se pyrkii muuttamaan virtaa negatiiviseen suuntaan. Jos virta muuttuu negatiiviseen suuntaan, jännite on positiivinen ja se pyrkii muuttamaan virtaa positiiviseen suuntaan. Kummassakin tapauksessa induktiojännite siis pyrkii muuttamaan virtaa vastakkaiseen suuntaan kuin mihin virta todella muuttuu, jolloin virta siis muuttuu hitaammin kuin miten se muuttuisi ilman induktanssia.

**13.28** (a) Mallin mukaan

$$L = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2 \cdot \frac{500^2 \pi (0.01 \text{ m})^2}{0.05 \text{ m}} = 2.0 \text{ mH.} \quad (13.132)$$

(b) Virran keskimääräinen muutosnopeus on

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{1 \text{ A}}{0.01 \text{ s}} = 100 \text{ A/s,} \quad (13.133)$$

jolloin jännite on keskimäärin

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0.2 \text{ V.} \quad (13.134)$$

(c) Koska virta kasvaa, käämiin indusoituu negatiivinen jännite. Siispä potentiaali pienenee käämässä virran suunnassa eli korkeammassa potentiaalissa on käämin se päät, josta virta saapuu.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

**13.30** (a) Jos virta pienenee, indusoitunut sähkökenttä pyrkii kasvattamaan virtaa. Sähkökenttä osoittaa siis virran kulkusuuntaan.

(b) Sähkökenttä tekee liukkuviin varauksenkuljettajiin positiivista työtä. Energiaa siis siirrytään käämistä varauksenkuljettajiille.

(c) Käämin energia pienenee, koska käämin magneettikenttään varastoitunutta energiota siirrytään varauksenkuljettajiille. Samalla magneettikentän voimakkuus pienenee.

**13.31** (a) Käämin energia on verrannollinen virran neliöön, joten  $E_3 = 4E_2$  eli  $E_2/E_3 = 1/4$ .

(b) Käämin indusoitunut sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, jolloin varauksenkuljettajien energia pienenee ja käämin energia kasvaa. Sähkökentän tekemän työn teho on verrannollinen sekä kentän voimakkuuteen että käämin läpi kulkevan virtaan. Jos virta kasvaa tasaisesti, indusoitunut sähkökenttä on voimakkuudeltaan vakio, mutta virta ei. Kahden ensimmäisen kuvan välillä virta on keskimäärin  $\frac{1}{4}i_{\text{loppu}}$  ja kahden viimeisen kuvan välillä  $\frac{3}{4}i_{\text{loppu}}$ . Niinpä tehty työkin on ensimmäisellä puoliskolla neljännes kokonaistyöstä ja jälkimmäisellä puoliskolla kolme neljännestä. Tämä näkyy myös kuvan energiadiagrammissa.

**13.32** (a) Kumpikin energiatilheys riippuu kentän voimakkuuden neliöstä ja kyseiseen kenttään liittyvästä luonnonvakiosta  $\epsilon_0$  tai  $\mu_0$ .

(b) Pitää siis olla  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2$ , josta magneettikentäksi ratkeaa

$$B = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = \frac{1}{c} E. \quad (13.135)$$

(c) Kääntäen edellinen yhtälö saadaan

$$E = cB = 3.0 \cdot 10^8 \text{ V/m}. \quad (13.136)$$

Tämä on voimakas sähkökenttä, mutta huomaa että 1 T on myös hyvin voimakas magneettikenttä.

**13.33** (a) Aluksi reitin läpi kulkee yksi kenttäviiva, sitten kolme. Sähkövuo on verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärään, joten vuon itseisarvo selvästikin kasvaa.

(b) Kiertosuunta on valittu kuvassa vastapäivään, joten positiivinen läpäisy suunta on oikean käden säännön mukaan ylöspäin. Sähkökenttä kulkee reitin läpi ylöspäin, joten sähkövuo on positiivinen, ja koska vuon itseisarvo kasvaa, vuo muuttuu positiiviseen suuntaan (eli kuvassa ylöspäin).

(c) Esimerkiksi näin: kun oikean käden peukalo osoittaa sähkövuo muutoksen suuntaan, koukistetut sormet osoittavat magneettikentän pyörteen suunnan.

**13.34** Aluksi tarkastellaan kondensaattoria itseään, jolloin ala on luonnollisesti kondensaattorilevyjen ala. Sitten tarkastellaan sähkövuo valitun pinnan läpi. Valitun pinnan ala on suurempi kuin kondensaattorilevyjen ala, mutta sähkökenttä on nolla kaikkialla muualla paitsi kondensaattorilevyjen välissä. Kun sähkökenttä on kondensaattorin sisällä vakio, vuo saadaan laskettua kentän voimakkuuden ja sen alueen pinta-alan tulona, missä sähkökenttä on nollasta poikkeava. Tämän alueen ala on sama kuin kondensaattorilevyjen ala, ei koko tarkastelupinnan ala.

**13.35** Faradayn lain mukaan  $\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  ja vastaava Galilei-muunnos on  $\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}$ . Maxwellin laki sanoa puolestaan  $\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  ja muunnos on  $\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0 \mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}$ . Huomataan, että vuon derivaatan edessä oleva kerroin on etumerkkiä vaille sama kuin vastaavassa Galilei-muunnoksessa esitytyvä kerroin.

Syy tähän on oleellisesti se, että sähkömagneettinen kenttä on suhteellinen, ja niinpä myös kenttien viivaintegraalit ja vuot ovat suhteelliset. Jos esimerkiksi liikutamme metallirengasta magneetin lähellä, renkaaseen indusoituu jännite ja virta, jotka havaitaan kaikissa koordinaatistoissa. Magneetin koordinaatistossa on vain magneettikenttä, ja ilmiö syntyy magneettisen voiman vaikuttaessa varauksenkuljettajiin. Renkaan koordinaatistossa magneetti liikkuu. Magneettinen voima ei voi saada virtaa kulkemaan, koska varauksenkuljettajat ovat tässä koordinaatistossa aluksi keskimäärin paikoillaan. Niinpä tässä koordinaatistossa täytyy olla sähkökenttä. Galilei-muunnos kertoo, miten renkaan koordinaatiston sähkökenttä riippuu magneetin koordinaatiston magneettikentästä. Sama havainto sisältyy myös Faradayn lakiin, sillä magneetin koordinaatistossa magneettivuo minkä tahansa paikoillaan olevan polun läpi on vakio, jolloin sähkökenttä ei ole pyörteitä. Renkaan koordinaatistossa sen sijaan liikkuva magneetti tuottaa muuttuvan magneettivuon ja siten pyörteisen sähkökentän. Täsmälleen samalla tavalla yhdessä koordinaatistossa havaittuun sähkökenttään liittyy muissa koordinaatistoissa myös magneettikenttä, ja sekä Galilei-muunnos että Maxwellin laki kuvavat tätä. Huomaa kuitenkin, että Faradayn sekä Ampèren ja Maxwellin lait ovat yleispäteviä kun taas tässä esitetyt Galilei-muunnokset ovat vain lähimmäärin oikein.

**13.36** (a) Esim. Faradayn laissa ei ole vakiotermiä kun Ampèren laissa on (virta). Faradayn laissa vuon derivaatan kerroin on negatiivinen kun taas Maxwellin laissa kerroin on positiivinen ja numeroarvoltaan hyvin pieni.

(b) Koska magneettivuon kerroin on Faradayn laissa negatiivinen, muuttuvan magneettikentän tuottama sähkökenttä pyörre ei noudata oikean käden sääntöä. (Ts. jos magneettikenttä muuttuu oikean käden peukalon suuntaan, sähkökenttä pyörre on sormien osoittamalle suunnalle vastakkainen.) Sen sijaan Maxwellin laissa vuon kerroin on positiivinen, joten muuttuva sähkökenttä tuottaa pyörteen magneettikenttään oikean käden säännön mukaisesti.

## Osa IV

# Klassiset ja kvanttimekaaniset aallot



## 14 Jaksollinen liike

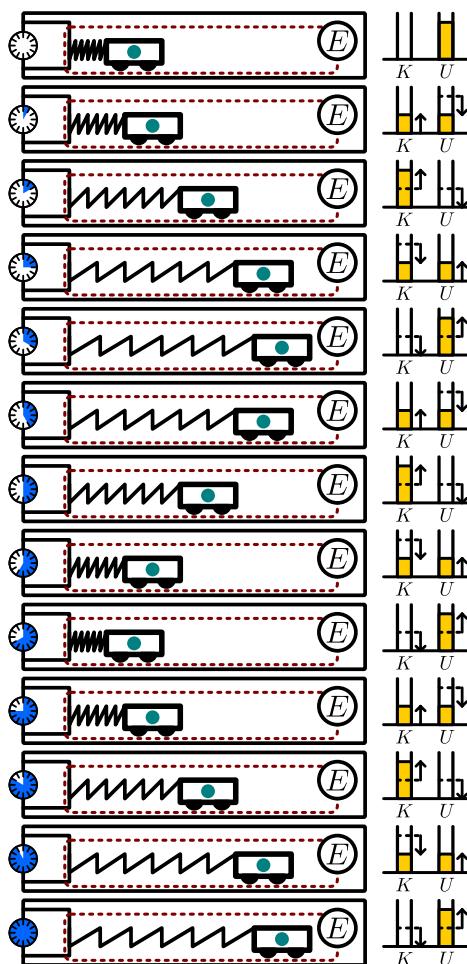
Jaksollisella liikkeellä tarkoitetaan kaikkea liikettä, joka palaa säännöllisesti takaisin alkutilaansa ja toistuu sitten täsmälleen samanlaisena uudelleen. Kappaleet voivat yleensä liikkua miten tahansa, jolloin niiden liike ei ole jaksollista, mutta jaksollinen liike on itse asiassa luonnossa erittäin yleistä: heilurin heilahdus, kitaran kielen värähely, Kuun kiertoliike, moottorin sykli ja molekyylin värähely ovat kaikki esimerkkejä jaksollisesta liikkeestä. Ja vaikka nämä esimerkit vaikuttavat fysikaalisina systeemeinä hyvin erilaisilta, kaikkien näiden prosessien jaksollista luonnetta voidaan kuvata hyvin samankaltaisin menetelmin. Tässä luvussa tarkastelemmekin erilaisia tapoja kuvata jaksollista liikettä. Erityisesti tutkimme jaksollisen liikkeen yksinkertaisinta erikoistapausta eli harmonista liikettä ja opimme, että kaikki jaksollinen liike voidaan esittää harmonisen liikkeen mallin avulla.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

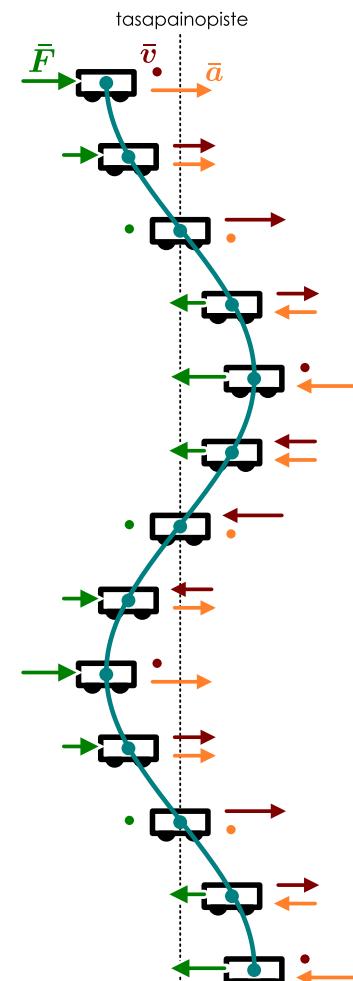
- määrittää harmonisen värähtelyn amplitudi, vaihe, taajuus, kulmataajuus, jaksonaika sekä kokonaisenergia
- kuvata harmonista värähtelyä graafisesti vaiheenosittimella sekä kuvaajin
- määritellä kompleksiluvut ja selittää kuinka harmonista liikettä voidaan kuvata kompleksiluvuilla
- selittää miksi harmonisen värähtelyn malli kuvaaa niin monia systeemejä ja määrittää värähtelevän systeemin ominaisuudet, kun voima tai potentiaalienergia tunnetaan
- määrittää harmonisten komponenttien yhdistelmänä syntynyt liikkeen rata
- määrittää vaimennetun värähtelijän liikerata ja energia
- määritellä resonanssi sekä kuvalla värähtelijän käyttäytyminen resonanssissa

Kuva 14.1: Jousen päässä liikkuva kappale on yksinkertainen jaksollisen liikkeen malli.

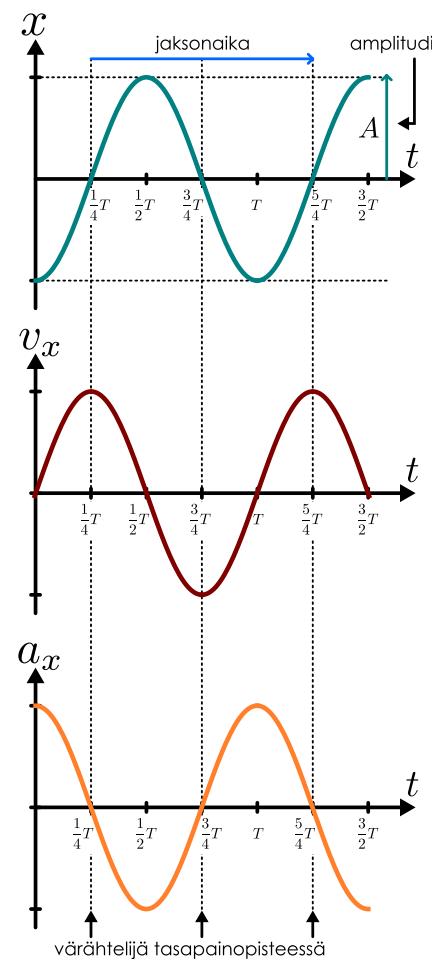
(a) Systeemin energia muuttuu potentiaalienergiasta liike-energiaksi ja takaisin.



(b) Voima-, nopeus- ja kihiityvyysvektorit.



(c) Paikka, nopeus ja kihiityvyys.



## 14.1 Harmoninen liike

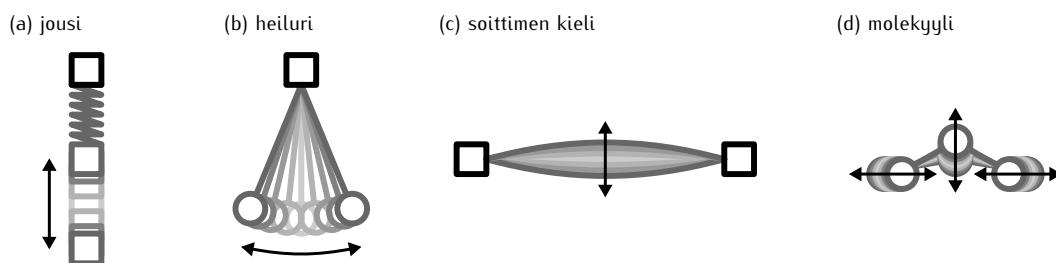
### Värähtelyn perusmalli

Jaksollisessa liikkeessä systeemi palaa säännöllisin väliajoin takaisin alkutilaan ja toistaa samaa liikettä yhä uudestaan. Tyypillinen esimerkki tällaisesta liikkeestä on heilurin heilahtelu tai jouseen kiinnitetyn kappaleen värähtely, joka toistuu kerta toisensa jälkeen samanlaisena. Tällainen liike on **värähtely** eli **os-killaatiota**, jossa liikkuva kappale kulkee *edestakaisin* tasapainoasemansa ympäillä. Esimerkiksi heilurilla on ollut aikoinaan suuri teknologinen merkitys kelloissa, koska aikoinaan heilurin heilahduksien laskemiseen perustuneet kelloot ovat olleet tarkin tapa mitata aikaa. Nykyään näin ei enää ole, mutta modernitkin kellot perustuvat yleensä jonkinlaisen värähtelyliikkeen toistojen laskemiseen. Värähtelyliike on myös luonnossa erittäin yleistä. Jos esimerkiksi lyöt kaksi kappaletta yhteen, kuulet yleensä äänen. Tämä johtuu siitä, että kappaleiden pinnat hieman joustavat osuissaan yhteen. Jos muodonmuutos on pieni ja siis elastinen, kappaleet pyrkivät takaisin alkuperäiseen muotoonsa ja värähtelevät hetken tämän tasapainoasemansa ympäillä. Kappaleen pinnan värähtely saa edelleen ilman värähteleämään, mikä kuullaan lopulta äänénä.

Aloitamme harmonisen liikkeen tutkimisen tarkastelemalla kuvassa 14.1 esitettävä kitkattomalla radalla liikuvaa jouseen kiinnitettyä vaunua. Oletetaan vaunuun kohdistuvien dissipatiivisten vuorovaikutusten olevan heikkoja, jolloin vaunun ja jousen muodostaman systeemin kokonaisenergia on likimain vakio. Tavoitteemme on ymmärtää vaunun liikettä tutkimalla vaunuun kohdistuvia voimia ja systeemin energian muutoksia muodosta toiseen.

Aluksi vaunua siirretään hieman pois tasapainoasemastaan, jolloin jousi puristuu kasaan. Sitten vaunu vapautetaan ja se pääsee liikkeelle. Koska jousi on puristunut ja pyrkii oikenemaan tasapainopituuteensa, se kohdistaa vaunuun voiman ja työntää vaunua kohti tasapainoasemaa. Tällöin jouseen varastoitunut

Kuva 14.2: Harmonisia väärähtelijöitä.



potentiaalienergia alkaa muuttua vaunun liike-energiaksi. Jousi kohdistaa vaunuun kuvassa oikealle positiiviseen  $x$ -suuntaan osoittavan voiman kunnes vaunu saavuttaa tasapainoasemansa ja jousi lepopituutensa. Tässä vaiheessa jousen potentiaalienergia on nolla, joten *kaikki potentiaalienergia on muuttunut vaunun liike-energiaksi*. Todellisuudessa tienlenkin osa potentiaalienergiasta muuttuu kitkan ja ilmanvastuksen vaikeutuksesta lämpöenergiaksi, mutta oletamme tässä yksinkertaisuuden vuoksi, että tämä osuus on hyvin pieni.

Koska systeemin koko energia on nyt liike-energiaa, vaunun vauhdin täytyy olla tässä vaiheessa maksimissaan. Vaunu ei siis pysähdy tasapainoasemaansa vaan jatkaa matkaansa sen *ohi*. Tällöin vaunu vetää jousen päättä mukanaan ja jousi alkaa venyä lepopituuttaan pidemmäksi. Jousi kohdistaa tässä vaiheessa vaunuun negatiiviseen  $x$ -suuntaan osoittavan voiman, joka hidastaa vaunun nopeutta ja tekee vaunuun negatiivista työtä, mutta vaunu ei silti pysähdy heti vaan vasta vähitellen liike-energian muuttuessa taas jousen potentiaalienergiaksi. Vaunu pysähtyy vasta kaiken liike-energian muuttuttua potentiaalienergiaksi, mikä tapahtuu jousen venymän ollessa yhtä pitkä kuin jousen puristuma oli vaunun lähiessä liikkeelle.

Tämän jälkeen liike toistuu päinvastaisena. Jousi vetää vaunua negatiiviseen  $x$ -suuntaan ja vaunu saa nopeuden negatiiviseen suuntaan. Systeemin kaikki energia on muuttunut vaunun liike-energaksi vaunun ollessa tasapainoasemassa, jolloin vaunu jatkaa jälleen matkaansa tasapainopisteeseen ohi ja pysähtyy systeemin kokonaisenergian muuttuttua kokonaan jousen potentiaalienergiaksi, mikä tapahtuu vaunun ollessa jälleen lähtöpisteessään. Vaunun matkaa alkutilastaan takaisin samaan tilaan kutsutaan yhdeksi väärähtelyn **jaksoksi** eli **periodiksi**, ja liike toistuu tämän jälkeen uudestaan alusta.

Samanlainen potentiaali- ja liike-energian vuorottelu voi tapahtua missä tahansa systeemissä, jos systeemissä on *vaka tasapainopiste*. Vaka tasapainopiste on nimittäin potentiaalienergian minimi, ja jos systeemiä hiukan poikkeutetaan tästä tasapainosta, sen potentiaalienergian on pakko olla suurempi kuin tasapainossa. Jos systeemi päästetään sitten vapaaksi, seuraa samanlainen energian muotojen vuorottelu kuin tässä esitettyssä esimerkissä. Vakaat tasapainopisteet ovat erittäin yleisiä, sillä kaikki jäykät kappaleet ovat hieman elastisia ja käyttäytyvät aivan samoin kuin esimerkin jousi. Myös esimerkiksi heiluri tai kuopassa oleva pallo on vakaassa tasapainossa, ja niinpä nekin voivat väärhdellä.

Jos mekaanista energiota ei muutu prosessissa lainkaan lämpöenergiaksi, prosessi jatkuu samanlaisena ikuisesti. Tämä ei ole makroskooppiselle systeemille mahdollista vaan esimerkiksi jouseen kiinnitettynä vaunu väliittämättä pysähtyy ennen pitkää kitkan ja ilmanvastuksen vaikutuksesta. Tämä yksinkertainen malli voi kuitenkin kuvata myös esimerkiksi atomien väärähtelyä molekyyleissä. Atomien liikkeeseen ei vaikuta dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joten tällainen väärähtely voi jatkua periaatteessa ikuisesti.



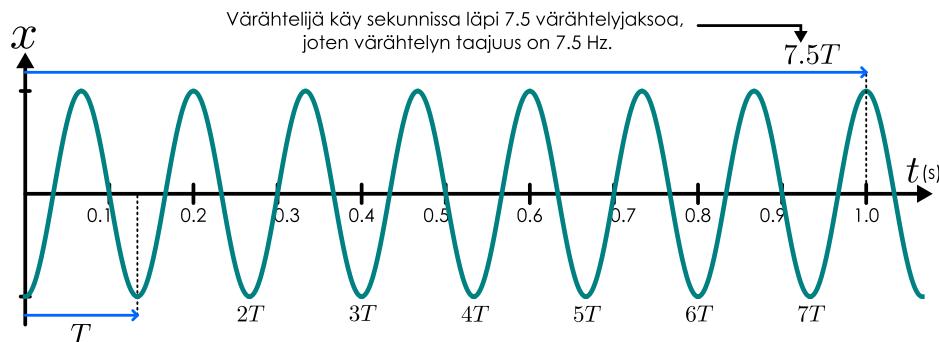
**14.1** Keksi lisää esimerkkejä jaksollisesta liikkeestä, joka tapahtuu tasapainopisteiden ympärillä. Keksi myös esimerkki jaksollisesta liikkeestä, joka ei tapahdu tasapainopisteiden ympärillä.

### Harmonisen liikkeen kuvajat

Tarkastellaan seuraavaksi vaunun paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden kuvajia (kuvat 14.1 (b) ja (c)). Koordinaatiston origoksi on tässä valittu vaunun tasapainopiste. Aluksi vaunu on tasapainopisteeseen nähdyn negatiivisessa suunnassa, joten sen  $x$ -koordinaatti on negatiivinen. Vaunu on myös aluksi levossa, joten paikan kuvaajan tangentti kulmakertoimen täytyy olla aluksi nolla. Kuvaaja siis alkaa vaakasuorana mutta käantyy välittömästi ylöspäin jousen työntäessä vaunu suurempaan vauhtiin. Vaunun vauhti on maksimissaan tasapainopisteessä, joten kuvaaja noussee tässä kohtaa jyrkimmin. Tasapainopisteiden ohitettuaan vaunu hidastuu, joten kuvaaja loivenee kunnes vaunu lopulta saavuttaa liikkeen toisen ääripään ja sen suunta vaihtuu. Suunnan vaihtuessa on hetki, jolloin vaunu ei enää liiku positiiviseen suuntaan mutta ei myöskään vielä negatiiviseen suuntaan, jolloin vaunu on hetkellisesti paikoillaan. Tällöin kuvaajan tangentti on vaakasuora.

Ideaalisen jousen vaunuun kohdistama voima on symmetrinen tasapainopisteeseen suhteeseen, joten vaunun ollessa tiettyllä etäisyydellä tasapainopisteestään siihen kohdistuu aina yhtä suuri voima riippumatta siitä,

Kuva 14.3: Taajuus mittaa sekunnin aikana tapahtuvien väärhdysten lukumäärää.



millä puolella tasapainopistettä vaunu on (eli olipa jousi puristettu tai venytetty). Tämän takia vaunun vauhti pienenee tasapainopisteen ohituksen jälkeen samalla tavalla kuin se kasvoi ennen tasapainopisteen ohitusta, ja niinpä paikan kuvaaja on symmetrinen tasapainopisteen suhteen. Samalla periaatteella kappaleen liike yhdestä ääriasemasta toiseen tapahtuu aivan samalla tavalla riippumatta siitä kumpaan suuntaan vaunu liikkuu, ja kuvaaja on symmetrinen myös ääriarvopisteiden suhteen. Näin kuvaaja piirtää aaltoilevan käyrän, joka periaatteessa toistuu samanlaisena äärettömyyksiin.

Väärtelevän kappaleen ääriaseman etäisyyttä tasapainosta kutsutaan **amplitudiksi** ja sitä merkitään tavallisesti symbolilla  $A$ . Vaunun nopeuden kuvaajassa toinen ääriarvoista on siis  $x = A$  ja toinen  $x = -A$ . Tämä kuitenkin pätee vain koska koordinaatiston nollakohta on asetettu vaunun tasapainopisteeseen. Jos näin ei ole, amplitudi voidaan silti määrittää lukemalla kuvaajasta ääriarvopisteiden koordinaatit, sillä näiden välinen etäisyys on  $2A$  riippumatta koordinaatiston origosta. Jos siis ääriarvopisteet ovat  $x_{\max}$  ja  $x_{\min}$ , amplitudi on  $A = (x_{\max} - x_{\min})/2$ .

Yhteen edestakaiseen liikkeeseen kuluu aikaa nimittäen puolestaan **jaksonajaksi** ja sitä merkitään symbolilla  $T$ . Jaksonajan voi lukea paikan kuvaajasta esimerkiksi valitsemalla kaksi peräkkäistä ajan hetkeä, joissa vaunu on ääriasemassa  $x = -A$  ja määritämällä näiden välisen aikaeron. Jaksonajan voi määrittää myös tarkastelemalla hetkiä, jolloin vaunu on tasapainoasemassa, mutta jaksonaika *ei ole* kahden peräkkäisen tällaisen hetken välisen aikaero. Jos nimittäin vaunu on ensin tasapainoasemassa liikkeessä positiiviseen suuntaan, seuravaan kerran saapuessaan tähän pisteeseen vaunu liikkuu negatiiviseen suuntaan. Toisin sanoen vaunu käy yhden jakson kuluessa kahdesti tasapainopisteessä liikkuen eri suuntiin. Jakso on kulunut vasta silloin, kun vaunu on jälleen tasapainoasemassa ja liikkuu samaan suuntaan kuin aluksi.

Jaksonajan voi ilmaista myös ilmoittamalla *montako jaksoa väärhtelijä ehtii käymään läpi yhden sekunnin aikana*, ja tästä kuvaava suure on **taajuus**. Taajuus on jaksonajan käänneisluku,

$$f = \frac{1}{T}. \quad (14.1)$$

Nimittäin jos yhteen väärhdykseen kuluu esimerkiksi sadasosasekunti,  $T = 0.01$  s, väärhtelijän taajuus on sata "käänteissekuntia"  $f = 100 \text{ s}^{-1}$ . Toisaalta sataan tällaiseen väärhdykseen kuluu yhteensä täsmälleksi sekunti, joten taajuus toisiaan mittaa sekunnissa tapahtuvien väärhdysten määrää. Taajuuden yksikölle on annettu erikoisnimi **herts** (Heinrich Hertzin mukaan), ja sen symboli on Hz.



**14.2** Väärhtelijän paikan kuvaaja leikkää  $t$ -akselin 500 kertaa yhden sekunnin aikana. Mikä on väärhtelyn taajuus?

Vaunun nopeuden kuvaaja lähtee liikkeelle nollasta, koska vaunu on aluksi paikoillaan. Jousivoima työntää vaunun liikkeelle, jolloin vaunun nopeus kasvaa ja nopeuden kuvaaja on nouseva. Vaunu saavuttaa suurimman vauhtinsa tasapainopisteessä, joten nopeuden kuvaajassa on maksimi vaunun ollessa tasapainopisteessä. Tasapainopisteen ohituksen jälkeen jousi vetää vaunua negatiiviseen suuntaan, joten nopeuden kuvaaja laskee. Koska paikan kuvaaja on symmetrinen tasapaino- ja ääripisteiden suhteen, myös nopeuden kuvaajan täytyy olla näiden pisteiden suhteen symmetrinen. Lisäksi koska vaunun liike toistuu täsmälle samanlaisena jaksonajan  $T$  välein, myös kappaleen nopeuden täytyy palata takaisin alkuarvoonsa ajan  $T$  välein ja nopeuden kuvaajan täytyy toistaa samaa muotoa ajan  $T$  välein aivan kuten paikan kuvaajankin. Näin ollen nopeuden kuvaajan täytyy olla muodoltaan likimain samanlainen kuin paikan kuvaaja. Itse asiassa osoittautuu, että harmonisessa liikkeessä nopeuden kuvaaja on amplitudia lukuunottamatta *täsmälle saman muotoinen* kuin paikan kuvaaja. Kuvaajat eroavat kuitenkin siinä, milloin ne leikkaavat nollatason. Tässä esimerkissä nopeus on nolla ajan hetkellä  $t = 0$  kun taas vaunu on tasapainopisteessä ajan hetkellä  $t = T/4$ . Nopeuden kuvaaja on

siis samanlainen kuin paikan kuvaja, mutta sitä on siirretty aika-akselilla negatiiviseen suuntaan jaksonajan neljänneksen.

Vaunun kiihtyvyys aiheutuu ainoastaan jousen vaunuun kohdistamasta voimasta, joka Hooken lain mukaan on suuruudeltaan suoraan verrannollinen vaunun poikkeamaan tasapainosta ja osoittaa aina kohti tasapainopistettä. Aluksi jousi on puristunut ja vaunun  $x$ -koordinaatti on negatiivinen, jolloin jousi kohdistaa vaunuun positiiviseen  $x$ -suuntaan osoittavan voiman. Vaunun liikkumassa kohti tasapainopistettä jousivoima heikkenee ja vaunun kiihtyvyys lähestyy nolla. Vaunun ohitettua tasapainopisteeseen eli sen  $x$ -koordinaatin ollessa positiivinen jousi venyy ja vetää vaunua negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Jos siis vaunun paikkakoordinaatti  $x$  on negatiivinen, sen kiihtyvyyden  $x$ -komponentti on positiivinen, ja vastavasti paikan ollessa positiivinen kiihtyvyys on negatiivinen. Vaunun kiihtyvyyden kuvajan täyttyy näin ollen olla muodoltaan samanlainen kuin paikan kuvajan paita etä kiihtyvyys on positiivinen paikan ollessa negatiivinen ja päinvastoin.

Toisaalta kiihtyvyyden kuvaja voidaan johtaa myös nopeudesta. Nopeushan kuvaa paikan muutosta ja kiihtyvyys puolestaan nopeuden muutosta, joten kiihtyvyyden kuvaja saadaan nopeuden kuvajasta täsmälleen samalla päättelyllä kuin nopeuden kuvaja paikan kuvajasta. Nämä koska nopeuden kuvaja on samanlainen kuin paikan kuvaja mutta ajan  $T/4$  siirrettynä, kiihtyvyyden kuvajan täyttyy olla samanlainen kuin nopeuden kuvaja siirrettynä ajassa  $T/4$ . Toisin sanoen kiihtyvyyden kuvaja on samanlainen kuin paikan kuvaja siirrettynä ajassa  $T/2$  eli puoli jaksoa. Toisaalta kuvajan symmetrian vuoksi tämä puolen jaksonajan siirto vastaa kuvajan peilaamista  $t$ -akselin suhteen. Siispä myös tämä päättely osoittaa, että kiihtyvyys ja paikka ovat suoraan toisiinsa verrannolliset mutta vastakkaismerkkiset.



**14.3** Kuvan vaunun paikkakoordinaatti on positiivinen ja sen nopeus on negatiivinen. Mihin suuntaan muuttuu vaunun (a) paikka, (b) nopeus, (c) kiihtyvyys?

Kuvaajien muoto on toivottavasti jo ennestään tuttu, sillä ne muistuttavat trigonometristen sini- ja kosinofunktioita eli yleisesti *sinimuotoisten funktioiden* kuvaajia. Itse asiassa ne eivät vain muistuta näitä kuvaajia vaan idealisen jouseen kiinnitetyn kappaleen paikan kuvaja on *täsmälleen sinimuotoinen* funktio, minkä todistamme matemaattisesti hieman myöhemmin. Tälläistä sinimuotoista jaksollista liikettä kutsutaan yleisesti **harmoniseksi** liikkeeksi ja jouseen kiinnitetty vaunu on *harmoninen värähtelijä* eli *harmoninen oskillaatori*. Harmoninen liike on jaksollisen liikkeen perusmuoto. Kuten jo aiemmin totesimme, harmoninen liike on tärkeä malli siksi että likimain harmoninen liike on luonnossa erittäin yleistä. Harmoninen liike on tärkeää myös siksi, että sen kautta voidaan analysoida myös monimutkaisempia jaksollisen liikkeen muotoja. Siksi tavoitteemme tässä luvussa onkin ymmärtää juuri harmonista liikettä ja oppia kuvaamaan jaksollista liikettä yleisesti sen avulla.

## Vaihe

Tasainen ympyräliike on myös esimerkki jaksollisesta liikkeestä, sillä myös ympyräraataa kiertävä kappale palaa säännöllisesti lähtöpisteesensä aloittaakseen uuden kierroksen. Ympyräliike on fysiikaalisesti erilaista kuin värähtely, sillä värähtelevä kappale liikkuu edestakaisin tasapainopisteenvälinä välillä pysähtyen ja suuntaansa vaihtuen kun taas tasaisessa ympyräliikkeessä oleva kappale liikkuu jatkuvasti samalla vauhdilla. Jaksollisena liikkeenä ympyräliike ja värähtely ovat kuitenkin hyvin samanlaisia. Kuvassa 14.4 on esitetty tästä ilmentävä koe, jossa tutkitaan jouseen kiinnitettyä vaunua sekä pyörivää kiekkoa. Kiekko on kiinnitetty tappi, jonka liikkeestä voidaan helposti nähdä, kuinka kiekkoo pyörivä kiekko. Kiekon pyörimisnopeus on säädetty niin, että kiekko tekee yhden kierroksen täsmälleen samassa ajassa kuin vaunu kulkee kerran edestakaisin, jolloin kiekko ja vaunu tekevät jaksollista liikettä samalla taajuudella.

Koelaitteiston vieressä on valo, joka heijastaa laitteiston varjon viereiselle seinälle. Vaunu liikkuu valon tulosuuntaan nähdyn kohtisuorassa suunnassa, joten sen varjon liike näyttää täsmälleen samalta kuin oikean vaunun liike. Levystä sen sijaan nähdään vain siihen kiinnitetyn tapin varjo. Kulkiessaan ympyrää tappi liikkuu välillä kohti valoa tai valosta pois päin, mutta tästä liikettä varjo ei näytä. Sen sijaan varjo ilmentää vain tapin liikettä valon tulosuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Varjon liikettä kutsutaankin tapin liikkeen **projektioksi**.

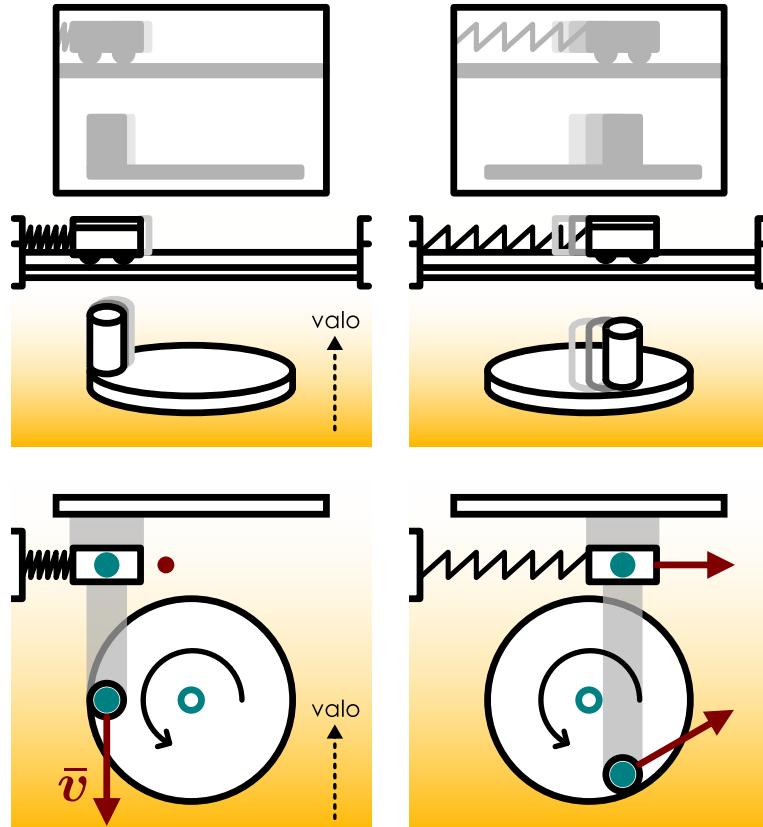
Kokeessa huomataan, että tapin ja heilurin *varjot* liikkuvat edestakaisin täsmälleen samalla tavalla. Varjojen vauhdit ovat suurimmillaan liikkumavälin keskellä ja liikkeen ääripäissä varjot hidastuvat ja pysähtyvät hetkellisesti vaihtaessa suuntaansa. Toisin sanoen *harmonisen värähtelijän jaksollinen liike on täsmälleen samanlaista kuin tasaisen ympyräliukkeen projektiön jaksollinen liike*. Kaikki jaksollinen liike ei tällästä. Esimerkiksi kilparataa kiertävän kilpa-auton liike on myös ainakin likimain jaksollista, jos auto kiertää radan aina yhtä nopeasti samoja ajolinjoja käytäen, mutta auton liikeradan projektio ei varmastikaan liiku samalla tavalla kuin harmoninen värähtelijä.



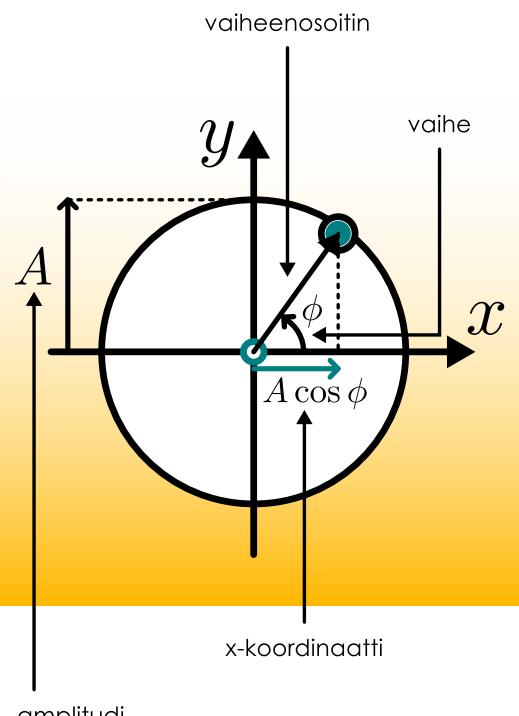
**14.4** Millaista liikettä tekee neliörataa kulkevan lelun varjo, jos valo tulee neliön sivun suuntaiseksi? Onko liike jaksollista tai harmonista?

Kuva 14.4: Harmoninen väärätelijä ja ympyräliikkeessä olevan kappaleen projektiot liikkuvat täsmälleen samalla tavalla.

(a) Varjot liikkuvat identtisesti.



(b) Liikettä kuvaava vaiheenosoitin.



Ympyräliikkeen projektiot liike on harmonista, koska se on sinimuotoista. Jos pyörivän kiekon esimerkissä asetamme origon kiekon keskipisteeseen ja asetamme  $y$ -akselin valon kulkusuuntaan, tapin varjon paikan määritetään tapin  $x$ -koordinaatti. Kun vielä merkitsemme symbolilla  $\phi$  kiekon kiertymäkulmaa asennosta, jossa tappi on  $x$ -akselilla, tapin  $x$ -koordinaatille saadaan napakoordinaattiesitys

$$x(t) = A \cos \phi(t) \quad (14.2)$$

missä  $A$  on tapin etäisyys kiekon keskipisteestä. Jos kiekko pyörii vakiokulmanopeudella  $\omega$ , kiertokulman riippuu ajasta on

$$\phi(t) = \omega t + \phi_{\text{alku}} \quad (14.3)$$

ja niinpä tapin varjon paikkaa kuvaava sinimuotoinen ajan funktio  $x = A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}})$ . Päättelimme jo aikaisemmin jouseen kiinnitetyn vaunun lükkeen olevan niin ikään sinimuotoista, joten jos kiekon kulmataajuus säädetään oikein, tapin varjo liikkuu täsmälleen samalla tavalla kuin jouseen kiinnitetty väärätelevä vaunu.

Tapin varjon  $x$ -koordinaatin minimi- ja maksimiarvot ovat  $-A$  ja  $A$ , joten etäisyys  $A$  on varjon lükkeen amplitudi. Kulma  $\phi$  on puolestaan lükkeen **vaihe** ja jaksollisen liikkeen yhteydessä kulmanopeutta  $\omega$  kutsutaan **kulmataajuudeksi**. Koska vaihe kuvailee kiekon kiertokulmaa, vaiheen muutos  $\Delta\phi_{\text{jakso}} = 2\pi$  vastaa yhtä kokonaista kierrosta. Toisaalta koska kiekon yhteen pyörähdykseen kuluva aika on sama kuin sen varjon lükkeen jaksonaika  $\Delta t_{\text{jakso}} = T$ , kulmataajuuden ja jaksonajan välillä on yhteys

$$\omega = \frac{\Delta\phi_{\text{jakso}}}{\Delta t_{\text{jakso}}} = \frac{2\pi}{T}. \quad (14.4)$$

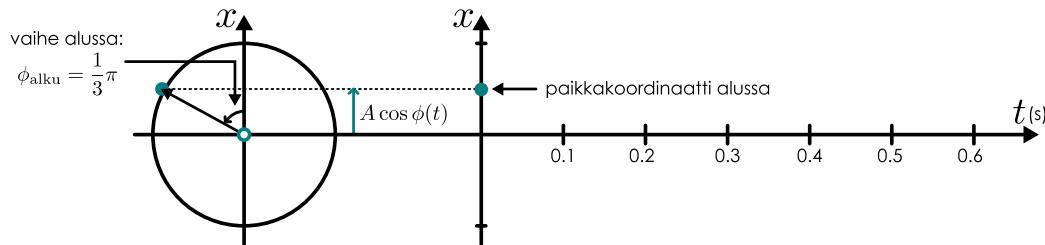
Edelleen koska taajuus on jaksonajan käänteisluku,  $f = 1/T$ , pätee myös

$$\omega = 2\pi f. \quad (14.5)$$

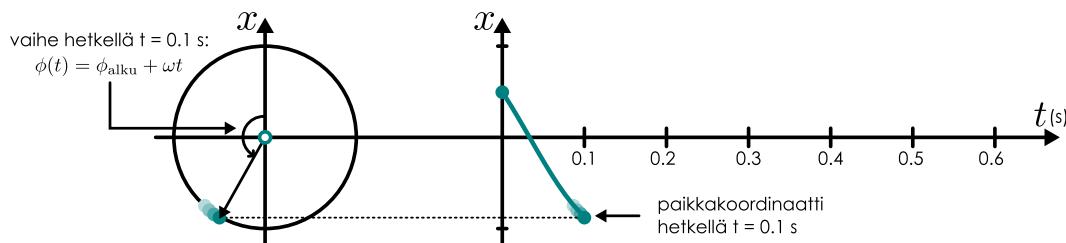
Nimitys kulmataajuus oikeastaan viittaa siihen, että  $\omega$  liittyy sekä ympyräliikkeen että kappaleen kulmanopeuteen ja kappaleen projektiotaan. Kulmataajuuden dimensio on sama kuin taajuuden. Kulmataajuuden yksikkönä ei kuitenkaan ole tapana käyttää hertsia vaan tämä on varattu nimenomaan taajuuden yksikköksi. Kulmataajuuden yksikkönä käytetään vastaavaa SI-perusyksikköä 1/s.

Kuva 14.5: Pyörivä vaiheenosoitin piirtää harmonisen liikkeen kuvaajan. Huomaa, että tässä  $(x)$ -akseli on piirretty pystyn.

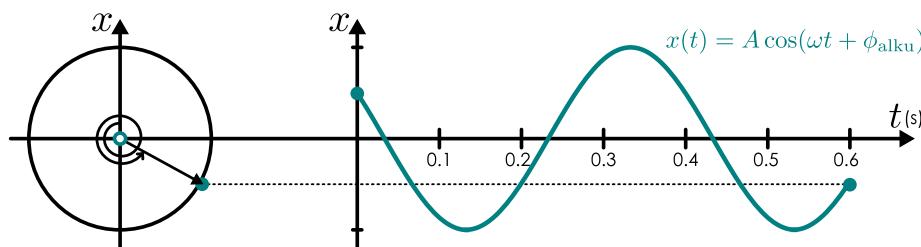
- (a) Vaiheen alkuarvo määrittelee vaiheenosittimen asennon hetkellä ( $t=0$ ).  
 $\phi_{alku} = \frac{1}{3}\pi$ .



- (b) Ajan kulkissa vaiheenosoitin käänny ja sen  $(x)$ -komponentti piirtää kuvaajan.



- (c) Vaiheenosittimen pyöriessä piirtyy sinimuotoinen kuvaaja.



14.5 Ympyräliikettä tekevä kappale kiertää sekunnissa kulman  $\pi/3$ . (a) Mikä on kappaleen kulmanopeus? (b) Kauanko kappaleella kestää kiertää kokonainen kierros? (c) Mikä on kappaleen projektion taajuus ja jaksonaika?

Harmonisen liikkeen muodon piirtämiseksi riittää tietää värähtelyn amplitudi sekä jaksonaika tai taajuus. Amplitudi kertoo kuinka "korkea" kuvaaja on ja jaksonaika puolestaan määritää kuvaajan "leveyden". Tämä ei kuitenkaan riitä kertomaan missä kohtaa värähtelyjaksoa värähtelijä kulloinkin on. Esimerkiksi kiekon tapin varjon amplitudi kertoo millä välillä varjo liikkuu, mutta varjo voi silti olla yhdellä ajan hetkellä missä tahansa liikkeensä ääripäiden välillä. Ja vaikka tietäisimmekin varjon olevan esimerkiksi täsmälleen ääripäiden keskellä "tasapainopisteessä", tämä ei vielä kerro *kumpaan suuntaan* varjo liikkuu. Vaihe kuitenkin määrittelee täsmällisesti sekä varjon paikan että sen nopeuden. Jos esimerkiksi varjon vaihe on neljänneskierroksen eli  $\phi = \frac{1}{4}\Delta\phi_{jakso} = \frac{1}{2}\pi$ , sen paikkakoordinaatti on  $x = A \cos(\pi/2) = 0$  eli varjo on täsmälleen liikkeensä ääripäiden puolivälissä. Toisaalta koska kiekko pyörii kuvan mukaan ylhäältä katsoen vastapäivään ja se on kiertänyt neljänneskierroksen, kiekkoon kiinnitettä tappi on kiekon keskipisteestä katsoen positiivisessa  $y$ -suunnassa (kuvaissa siis keskipisteen yläpuolella) ja liikkeessä negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Varjon ollessa samassa paikassa mutta liikkeessä *positiiviseen*  $x$ -suuntaan tapin täytty olla kiekon keskustaan nähdien negatiivisessa  $y$ -suunnassa (kuvaissa keskipisteen alapuolella) eli asemassa, jossa kiekko on kiertänyt kolme neljänneskierrosta. Tällöin vaihe on siis  $\phi = \frac{3}{4}\Delta\phi_{jakso} = \frac{3}{2}\pi$ .

Tässä nähty pyörimisen ja värähtelyn välinen yhteys osoittautuu myös hyvin tärkeäksi apuvälineeksi harmonisen liikkeen analyysissä. Koska pyörivän kiekon projektio liikkuu harmonisesti, voimme kuvata harmonista värähtelyä pyörimislukkeen avulla. Olipa kyseessä millainen harmoninen värähtelijä tahansa, voimme aina kuvitella samalla taajuudella pyörivän kiekon ja analysoida sen liukkeen. Käytännössä tämä onnistuu niin,

että piirräme  $xy$ -tasoon nuolen, jonka pituus esittää väärhtelyn amplitudia, ja kuvitteleme nuolen pyörivän kulmataajuudella  $\omega = 2\pi f$ . Tällöin väärhtelijän vaihetta kuvaan nuolen  $x$ -akselista mitattu kulma ja väärhtelijän paikkaa kuvaan nuolen  $x$ -koordinaatti.



**14.6** Mihin suuntaan ympyrärataa kulkevan kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektorit osoittavat? Miten nämä liittyvät kappaleen projektiotaan nopeuteen ja kiihtyvyyteen?

Tällaista harmonisen väärhtelyn graafista esitystä kutsutaan **vaiheenosoittimeksi**. Vaiheenosoitimen pyöriessä vakiokulmanopeudella sen kärki kulkee ympyräradalla. Vaiheenosoitimen kärjen  $x$ -koordinaatti liikkuu tällöin harmonisesti. Kuvassa 14.5 on esitetty, kuinka tämän harmonisen liukkeen kuvaja voidaan helposti piirtää vaiheenosoitimen avulla. Tässä vaihe on aluksi  $\phi_{alku} = \frac{1}{3}\pi$  eli kuudesosakierroksen. Tämä tarkoittaa, että alkuperäellä  $t = 0$  vaiheenosoitin on jo valmiiksi kiertynyt kulman  $\phi_{alku} = \frac{1}{3}\pi$   $x$ -akseliin nähdyn. Väärhtelijän paikka on tällöin  $x_{alku} = A \cos \phi_{alku} = \frac{1}{2}A$ . Ajan kuluessa vaihe muuttuu, mutta voimme määrittää väärhtelijän paikan minä tahansa ajan hetkenä  $t$  laskemalla ensin vaiheen tuona hetkenä, piirtämällä täitä vastaavan vaiheenosoitimen ja määrittämällä sen avulla graafisesti väärhtelijän  $x$ -koordinaatin. Sama tekniikka toimii myös takaperin: jos tiedämme väärhtelyn amplitudin sekä väärhtelijän paikan ja liukkeen suunnan, voimme piirtää näitä vastaavan vaiheenosoitimen ja päättää sen avulla väärhtelyn vaiheen varsinaisesti laskematta mitään. Toki ongelman voi ratkaista myös laskemalla, mutta tämä vaatii trigonometristen käyntifunktioiden käyttöä sekä funktioiden jaksollisuuden huomioimista, mikä on varsin työlästä ja virheellistä.



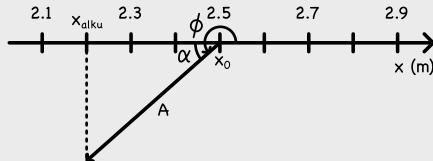
**14.7** Harmonisen väärhtelijän amplitudi on 1.00 m ja jaksonaika 1.00 s. Ajan hetkellä  $t = 0$  väärhtelijän poikkeama tasapainopisteestä on  $x = 0.80$  m ja väärhtelijä liikkuu kohti positiivista  $x$ -suuntaa. (a) Mikä on väärhtelijän vaihe? (b) Millä ajan hetkellä väärhtelijä on seuraavan kerran pisteessä  $x = -1.00$  m?

### esimerkki 14.1

### Vaiheenosoitin

Kappale väärtelee harmonisesti amplitudilla 0.400 m pisteen  $x_0 = 2.500$  m ympärillä. Ajan hetkellä  $t = 0$  s kappale on pisteessä  $x_{alku} = 2.200$  m ja sen nopeus on  $v_{x,alku} = 0.100$  m/s. Mikä on väärhtelijän (a) vaihe ja (b)  $x$ -koordinaatti ajan hetkellä  $t = 5.00$  s?

**TILANNE** Kuvataan väärhtelyä vaiheenosoitimella. Osoittimen pituus on amplitudi  $A = 0.4$  m, sen kanta on tasapainopisteessä  $x_0 = 2.50$  m ja sen kärjen  $x$ -koordinaatti on  $x_{alku} = 2.20$  m. Vaiheenosoitin pyörii positiiviseen suuntaan eli kuvassa vastapäivään. Koska nopeus on positiivinen, vaiheenosoitimen kärjen täytyy olla liukkeessa positiiviseen suuntaan ja osoittimen täytyy siis osoittaa alaviistoon.



**SUUNNITELMA** Ratkaistaan ensin vaihe, joka on positiivisen  $x$ -akselin ja vaiheenosoitimen välinen kulma. Osoittimen ja negatiivisen  $x$ -suunnan välinen kulma  $\alpha$  ratkeaa kuvasta trigonometrialla,

$$\cos \alpha = \frac{x_0 - x_{alku}}{A}, \quad (14.6)$$

ja vaihe saadaan lisäämällä tähän puoli kierrosta  $\phi_{alku} = \pi + \alpha$ . Vaihe ajan funktio on  $\phi(t) = \omega t + \phi_{alku}$ , missä kulmataajuus  $\omega$  on tuntematon.

Kappaleen paikkakoordinaatti on vaiheenosoitimen kärjen  $x$ -koordinaatti,

$$x(t) = x_0 + A \cos \phi(t), \quad (14.7)$$

ja kappaleen nopeus on tämän derivaatta,  $v_x(t) = x'(t) = -A \sin \phi(t) \cdot \phi'(t) = -A\omega \sin \phi(t)$ . Tästä saadaan ratkaistua kulmataajuus, minkä jälkeen voimme laskea vaiheen ja paikan funktioista  $\phi(t)$  ja  $x(t)$ .

**RATKAISU** Vaihe on alussa (radiaaneissa)  $\phi_{alku} = \pi + \arccos \frac{0.30 \text{ m}}{0.40 \text{ m}} = 3.864$ . Nopeuden lausekkeesta puolestaan ratkeaa kulmataajuus

$$\omega = \frac{v_x(0)}{-A \sin \phi(0)} = \frac{0.10 \text{ m/s}}{(-0.40 \text{ m}) \cdot \sin 3.864} = 0.378 \text{ s}^{-1}. \quad (14.8)$$

Vaihe hetkellä  $t = 5$  s on siis  $\phi(5 \text{ s}) = (0.378 \text{ s}^{-1}) \cdot (5 \text{ s}) + 3.864 = 5.75$  ja paikka  $x(5 \text{ s}) = x_0 + A \cos \phi(5 \text{ s}) = 2.85$  m.

**ARVIOINTI** Kappaleen jaksonaika on  $T = 2\pi/\omega = 16.6$  s. Viisi sekuntia on hieman alle kolmannes tästä eli vaiheenosoitin kiertyy viidessä sekunnissa noin kolmanneskierröksen. Kuvasta voimme päätellä, että vaiheenosoitin päätyy tällöin osoittamaan lähes vaakasuoraan oikealle, joten kappaleen paikan täytyy olla lähellä ääripistettä  $x = 2.90$  m.



**14.8** Selitä omin sanoin, mitä on harmoninen väärähely. Mikä on vaihe ja miten liikettä kuvataan vaiheeno-soittimella? Mitä ovat taajuus, kulmataajuus, jaksonaika, amplitudi?

## 14.2 Harmonisen liikkeen dynamiikka

### Harmoninen liikeyhtälö

Edellisessä luvussa tutkimme harmonisen väärähelyn ominaisuuksia mutta perustelimme tulokset vain periodillisellä tasolla. Seuraavaksi tutkimme täsmällisesti harmonisen liukkeen matemaattista kuvausta.

Määrittelimme harmonisen väärähelyn sinimuotoiseksi liukkeeksi, jota kuvaa funktio

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.9)$$

Ensimmäinen tehtäväemme onkin tutkia millaisessa tilanteessa kappaleen paikkaa kuvaa tällainen funktio. Samalla todistamme, että esimerkinä käytämämme jouseen kiinnitetty vaunu todella liikkuu harmonisesti.

Jos kappaleen paikkaa kuvaa funktio 14.9, voimme laskea sen nopeuden määritelmän mukaisesti paikan aikaderivaattana. Derivoitaisäänön  $\frac{dx}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$  perusteella harmonisesti väärätelevän kappaleen nopeus on siis ajan funktiona

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.10)$$

Huomaa, että kulmamuuttujat pitää aina ilmaista *radiaaneissa*, joka on absoluuttinen kulman yksikkö! Esimerkiksi kulmataajuus täytyy käsitellä yksiköissä radiaania sekunnissa eli 1/s. Jos kulmataajuuden esittää esimerkiksi muodossa astetta sekunnissa, yllä esitetystä lausekkeesta saa väärän lukuarvon kappaleen nopeudelle.

Kiertyvyys saadaan puolestaan nopeuden derivaattana säännön  $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$  avulla, joten

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.11)$$

Paikan ja kiertyvyyden lausekkeet ovat siis *samat* lukuunottamatta kiertyvyyden lausekkeessa esiintyvä termiä  $-\omega^2$ , joten harmoniselle liukkeelle täytyy päteä yhtälö

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0). \quad (14.12)$$



**14.9** Piirrä kuvaajat edellä lasketuille funktioille  $x$ ,  $v_x$  ja  $a_x$ , kun kaikki fysikaliset parametrit saavat esimerkiksi arvon 1. Miten derivointi muuttaa funktioiden  $\sin t$  ja  $\cos t$  kuvajia? Vertaa tulosta kuvaan 14.1.

Tämä differentiaaliyhtälö on *harmoninen liikeyhtälö*. Yhtälön johto perustui ainoastaan oletukseen, että väärätelijän paikkaa kuvaa sinimuotoinen funktio (14.9). Niinpä harmoninen liikeyhtälö (14.12) on sinimuotisten funktioiden yleinen ominaisuus, joka pätee mille tahansa kappaleelle, jonka liike on harmonista ja jota kuvaa sinimuotoinen funktio. Myös käänneinen tulos on totta: jos kappaleen kiertyvyydelle ja paikalle pätee harmoninen liikeyhtälö (14.12), kappaleen *täytyy* joko olla levossa tai väärhdellä harmonisesti kulmataajuudella  $\omega$ , koska tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on funktio (14.9).

Tarkastellaan sitten jälleen kuvan 14.1 jouseen kiinnitettyä vaunua harmonisen liukkeen esimerkin ja analysoidaan nyt vaunun liike matemaattisesti. Tavoitteenamme on johtaa kappaleen kiertyvyydelle ja paikalle muotoa (14.12) oleva liikeyhtälö, koska jos pystymme tähän, todistamme samalla vaunun liukkeen olevan harmonista väärähelyä. Tämä onnistuu tarkastelemalla vaunuun kohdistuvia voimia.

Jousi kohdistaa Hooken lain mukaisesti vaunuun voiman

$$F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}} = -k(x - x_0) \quad (14.13)$$

missä  $k$  on jousen jousivakio ja  $x_0$  on vaunun tasapainopisteenvaakaus. Koska koordinaatiston origo asetettiin juuri tasapainopisteeseen,  $x_0 = 0$ . Hooken lain minkäli puolestaan kuvaa sitä, että voima osoittaa aina kohti tasapainoasemaa. Esimerkiksi vaunun siirtyessä tasapainopisteestä positiiviseen suuntaan eli jousen venyessä voima osoittaa negatiiviseen suuntaan. Vaunuun kohdistuu myös painovoima ja pinnan normaalivoima, mutta nämä kumoavat toisensa. Lisäksi dissipatiiviset voimat kuten kitka oletettiin hyvin heikoiksi, joten vaunuun kohdistuva kokonaisvoima on sama kuin jousen vaunuun kohdistama voima,  $F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}}$ . Niinpä dynamiikan peruslain mukaisesti vaunun kiertyvyys on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonais}} = -\frac{k}{m} x. \quad (14.14)$$

Tämä yhtälö sanoo, että vaunun kokema kiihtyvyys on suoraan verrannollinen vaunun paikkakoordinaatin arvoon, mutta vastakkaisuuntainen. Sama tulos pääteliin sanallisesti jo liikkeen kuvajajä päärettäessä, sillä tällöin totesimme vaunun kiihtyvyyden kuvajan olevan paikan kuvajan peilikuva  $t$ -akselin suhteen, mikä siis matemaattisesti vastaa  $x$ -kuvajan kertomista negatiivisella vakiolla.

Jouseen kiinnitetyn vaunun likeyhtälö (14.14) ja harmoninen likeyhtälö (14.12) ovat siis samanlaiset paitsi että toisessa esiintyy vakio  $\omega^2$  ja toisessa vakio  $k/m$ . Mutta tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että vaunun paikkaa kuvaavan funktion  $x(t)$  on oltava muotoa (14.9), missä kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14.15)$$

Periaatteessa myös negatiivinen ratkaisu olisi mahdollinen, mutta koska sinimuotoiset funktiot ovat symmetrisiä, tämä antaa saman ratkaisun vaunun paikalle kuin positiivinen arvo. Tavallisesti kulmataajuudelle hyväksytäänkin vain positiivisia arvoja aivan kuten taajuus ja jaksonaikakin ovat positiivisia suureita.



**14.10** Eräs kappale on kiinnitetty akseliin ja sen hitausmomentti tämän akselin suhteen on  $I_\theta$ . Kun kappalella kierretään kulma  $\theta$ , siihen kohdistuu momentti  $\tau_\theta = -\kappa\theta$ , missä  $\kappa$  on ns. torsiovakio. Jos kappale päästetään kierron jälkeen vapaasti liikkumaan, se alkaa pyörähdellä edestakaisin. Kuinka pitkä aika yhteen edestakaiseen heilahdukseen kuluu?

Kulmataajuuden lausekkeessa (14.15)  $k$  ja  $m$  ovat jousen ja vaunun ominaisuuksia. Mitä suurempi jousivakio on, sitä jäykempi jousi on ja sitä voimakkaammin se vetää ja työntää vaunua kohti tasapainoa. Tämä saa vaunun värähtelemään nopeammin ja kulmataajuus on suuri. Toisaalta mitä suurempi inertia vaunulla on, sitä vaikeampi jousen on muuttaa vaunun liikettä. Siispä massiivinen vaunu liikkuu hitaasti ja sen kulmataajuus on pieni. Liikkeen amplitudi ja vaihe alkukhetkellä sen sijaan eivät ratkea likeyhtälöstä. Tämä on järkevä, koska voimme laittaa vaunun värähtelemään eri tavoin. Jos venytämme jousta paljon ja päästämme vaunun liikkeelle, vaunun amplitudi on suuri. Toisaalta voimme venyttää jousta myös hyvin vähän, jolloin vaunu värähtelee pienellä amplitudilla. Tai vaihtoehtoisesti voimme tönäistää vaunun liikkeelle, jolloin vaunu ei ole aluksi värähdysliikkeen ääriasennossa eikä vaihe alkukhetkellä ole nolla. Amplitudi ja vaihe alkukhetkellä riippuvat siis siitä, kuinka vaunu saatetaan liikkeelle. Ne riippuvat tilanteen *alkuehdoista*.

Tämä tarkoittaa myös sitä, että värähtelyn kulmataajuuteen *ei voi vaikuttaa* esimerkiksi venytämällä jousta enemmän tai antamalla vaunulle alkuvauhtia, koska kulmataajuus riippuu *vain* jousen jäykkyydestä ja vaunun inertialasta. Lisäksi koska jaksonaika on käänten verrannollinen kulmataajuuteen, myös jaksonaika riippuu vain jousesta ja vaunusta. Nämä jos valmistamme useita samanlaisia värähtelijöitä ja asetamme ne värähtelemään eri amplitudeilla, *kaikki samanlaiset värähtelijät värähtelevät samalla taajuudella*. Jos värähtelijän amplitudi on suuri, se joutuu kulkemaan pitkän matkan, mutta toisaalta mitä kauempaan tasapainopisteestä värähtelijä kulkee, sitä suurempi voima siihen kohdistuu ja sitä suuremman kiihtyvyyden ja nopeuden se saa. Harmonisessa värähtelijässä nämä tekijät täsmälleen kumoavat toisensa, jolloin värähtelijältä kuluu yhteen jaksoon aina yhtä pitkä aika riippumatta amplitudista. Tämä ominaisuus pääsee kaikille harmonisille värähtelijöille. Myös esimerkiksi heilurin jaksonaika on riippumaton heilahuksen laajuudesta ja kielisoittimen kielen värähtelytaajuus on riippumaton siitä, kuinka voimakkaasti kieletä vedetään. Tämä on tärkeää harmonisen värähtelyn ominaisuus, koska sen ansiosta esimerkiksi heilurikellon tai muun värähtelyihin perustuvan kelon käyntinopeus ei riipu heilurin heilahuksen amplitudista.

## Harmonisen liikkeen energia

Harmonisen värähtelijän käytös perustuu siihen, että värähtelijä liikkuu vakaan tasapainopisteeseen ympärillä ja siihen kohdistuu aina kohti tasapainoasemaa osoittava voima, jonka suuruus on suoraan verrannollinen värähtelijän etäisyyteen tasapainopisteestä. Sama asia voidaan ilmaista myös systeemin potentiaalienergian avulla, sillä kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa aina kohti pienenevän potentiaalienergian suuntaa. Esimerkiksi ideaalisen jousen potentiaalienergia on

$$U_{\text{jousi}} = - \int_{x_0}^x F_x dx = \int_{x_0}^x k(x - x_0) dx = \frac{1}{2} k(x - x_0)^2. \quad (14.16)$$

Harmonisen värähtelijän potentiaalienergia on siis paikan funktiona paraabeli. Potentiaalienergiassa on minimi tasapainopisteen kohdalla ja energia on verrannollinen tasapainopisteestä mitattu etäisyyden *neliöön*.

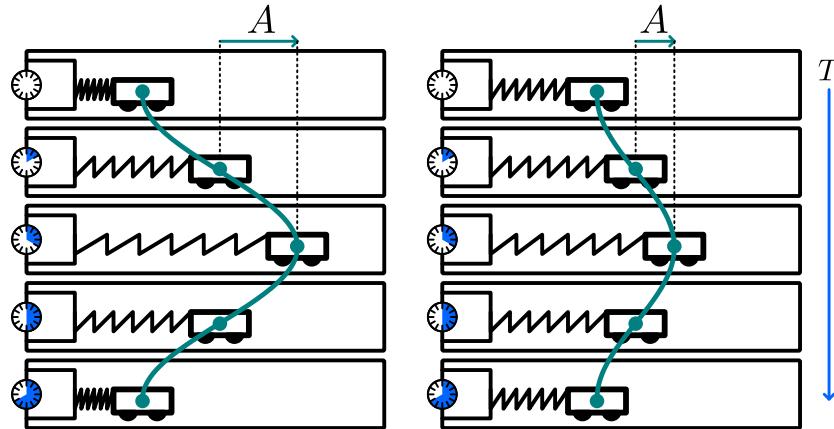
Harmonisesti värähtelevän systeemin energia vaihtelee potentiaali- ja liike-energian välillä kuten kuvassa 14.1 esitettiin. Esimerkiksi jousen ja vaunun muodostaman systeemin kokonaisenergia on pelkkää liike-energiaa tasapainopisteessä ja pelkkää potentiaalienergiaa värähtelyn ääripisteissä vaunun ollessa maksimitäisyydellä tasapainopisteestä. Värähtelyn laajuutta mittaa amplitudi, joten tämä maksimitäisys on  $x_{\max} = A$  ja systeemin suurin mahdollinen potentiaalienergia on

$$U_{\max} = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} kA^2. \quad (14.17)$$

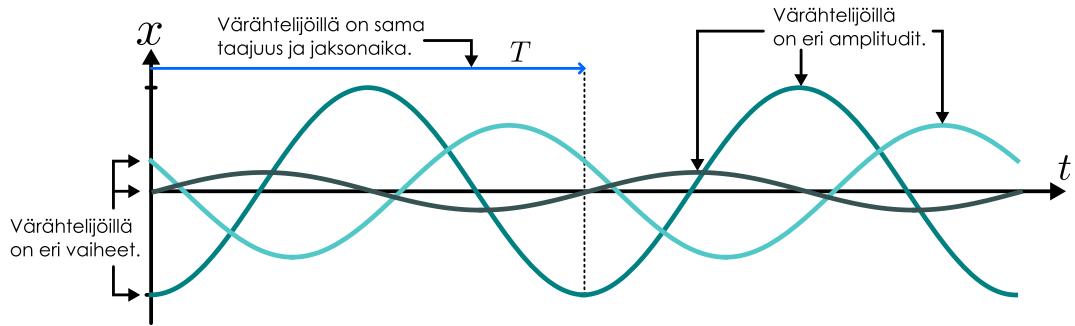
## JAKSOLLINEN LIIKE

Kuva 14.6: Harmoninen väärähtelijä voidaan saada väärähtelemään eri amplitudilla ja eri vaiheissa, mutta sen taajuus ja jaksonaika riippuvat väärähtelijän ominaisuuksista.

(a) Jos jouseen kiinnitettynä vaunu lasketaan liikkeelle eri pisteistä, väärähtelyn amplitudi muuttuu mutta jaksonaika ei.



(b) Kaikki samanlaiset väärähtelijät väärätelevät samalla taajuudella vaikka niillä olisi eri vaiheet ja amplitudit.



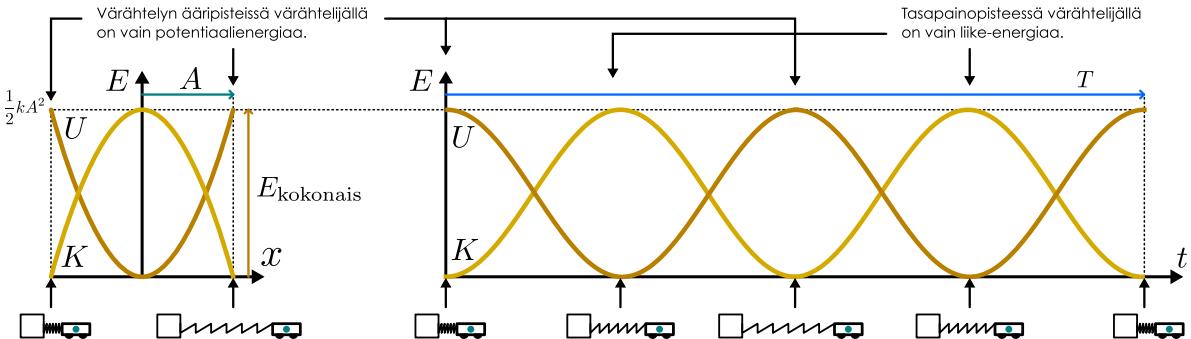
Edelleen koska systeemin energia on näissä pisteissä pelkkää potentiaalienergiaa, tämä on myös systeemin kokonaisenergia,

$$E_{\text{kokonais}} = U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2. \quad (14.18)$$

Voimme johtaa saman tuloksen myös suoraan aikaisemmin ratkaistusta vaunun paikan ja nopeuden lausekkeista. Jouseen kiinnitetyn vaunun liike-energia on nimittäin vaiheen funktiona

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \phi = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \phi, \quad (14.19)$$

Kuva 14.7: Harmonisen väärähtelijän potentiaalienergia ja liike-energia paikan ja ajan funktioina.



mihin on sijoitettu kulmataajuuden lauseke (14.15). Jousen potentiaalienergia on puolestaan

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \phi, \quad (14.20)$$

joten trigonometristen funktioiden perusyhteyden  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$  perusteella systeemin kokonaisenergia on

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (14.21)$$

kuten pitääkin.

Harmonisen värähtelijän kokonaisenergia on siis suoraan verrannollinen *amplitudin neliöön*. Tämä on totta kaikille harmonisille värähtelijöillä, koska harmonisten värähtelijöiden potentiaalienergia on aina verrannollinen tasapainopisteestä mitatun poikkeaman neliöön. Värähtelijän ei kuitenkaan tarvitse olla kiinni jousessa, joten energiasta ei välttämättä kuvaaa jousivakio vaan jokin muu systeemiä kuvaava vakio. Esimerkiksi koska jousivakion ja kulmataajuuden välillä on yhteys  $k = m\omega^2$ , jouseen künnyitetyn kappaleen kokonaisenergian voi kirjoittaa vaihtoehtoiseen muotoon

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (14.22)$$

Tämä muoto pätee kaikille liikkuvista kappaleista koostuville värähtelijöille.



**14.11** (a) Montako kertaa harmonisen värähtelijän potentiaali- ja liike-energia ovat yhtä suuret jakson aikana? (b) Mikä on värähtelijän vaihe näinä hetkinä ja millainen vaiheenositoit kuvaa näitä tilanteita? (c) Mikä on tällöin värähtelijän paikkakoordinaatti ja nopeus?

## Kompleksiluvut

Osoittautuu, että harmonista liikettä on matemaattisesti kaikkein helpoin kuvata käyttämällä **kompleksilukuja**. Kompleksiluvut eivät suinkaan ole välttämättömiä värähtelyliikkeen kuvaamiseksi vaan reaaliluvut ovat tässä aivan riittävä. Tässä materiaalissa käytämme jatkossakin pääasiassa reaalifunktioita värähtelyjen ja aaltojen kuvaamiseen, mutta esittemme kuitenkin värähtelyjen kompleksiesityksen idean. Lisäksi opimme luvussa 17, että kvanttimekanikaassa reaaliluvuilla *ei enää selviä* vaan kompleksilukuja tarvitaan välttämättä, ja tästäkin syystä on hyvä tutustua kompleksilukuihin jo nyt.

Kompleksiluvut muistuttavat matemaattisesti reaalilukuja. Ainoa lisäys reaalilukuihin on se, että kompleksilukuihin sisällytetään ns. **imaginääriyksikkö**  $i$ , jolla on reaaliluvulle mahdoton ominaisuus

$$i^2 = -1. \quad (14.23)$$

Ei ole syytä pohtia mitä tämä tarkoittaa, sillä imaginääriyksikkö ei ole määrä ilmaiseva reaaliluku vaan vain matemaattinen olio, jolle on sovittu tällainen laskusääntö. Kun hyväksymme tällaisen säänön käytön, voimme yleisesti määritellä kompleksiluvut muotoa

$$z = x + iy \quad (14.24)$$

olevina lukuina, missä  $x$  ja  $y$  ovat reaalilukuja. Näitä reaalilukuja kutsutaan kompleksiluvun  $z$  *reaaliosaksi* ja *imaginääriosaksi*, ja niitä voidaan merkitä esimerkiksi  $\text{Re}[z] = x$  sekä  $\text{Im}[z] = y$ . Kompleksiluvuille pätevät täsmälleen samanlaiset laskusäännöt kuin reaaliluvuillekin. Nütä voi summata, vähentää, kertoa, jakaa, korottaa potenssiin jne. Kertolaskuissa pitää vain aina muistaa käyttää sääntöä (14.23).

Kompleksiluvuille on määritelty yhtäsuuruus niin, että kaksi kompleksilukua  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  ovat samat jos ja vain jos niiden reaaliliike- ja imaginääriosat ovat samat,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ja } y_1 = y_2. \quad (14.25)$$

Kompleksiluvuille *ei kuitenkaan ole määritelty järjestystä*. Ei siis voida sanoa, että luku  $z_1$  olisi suurempi tai pienempi kuin  $z_2$ .

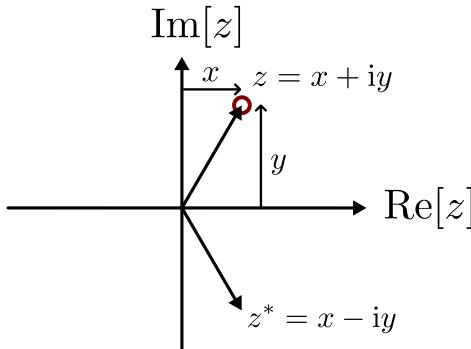
Kompleksiluvut voivat algebrallisesti tuntua oudoilta, mutta niillä on hyvin selkeä geometrinen tulkinta. Kompleksilujen voidaan nimittää ajatella olevan kaksiulotteisen koordinaatiston pisteitä, kun koordinaatiakselina ovat reaaliliike- ja imaginääriosat. Tätä kutsutaan **kompleksitasoksi**, ja kompleksilukua  $z = x + iy$  vastaa tämän tason piste  $(x, y)$  tai vaihtoehtoisesti origosta tähän pisteesseen osoittava vektori  $x\hat{i} + y\hat{j}$ . Tässä esityksessä imaginääriyksikkö on sama asia kuin kompleksitason piste  $(0, 1)$  tai  $y$ -suuntainen yksikkövektori  $\hat{j}$ . Nämä ajatellen imaginääriyksikköä ei tunnu toivottavasti niin kummalliselta — se yksinkertaisesti erottelee kompleksiluvun “ $y$ -komponentin”.

Koska kompleksiluvut voidaan ajatella tason vektoreiksi, on luonnollista määritellä kompleksiluvun itseisarvoksi tämän vektorin pituus

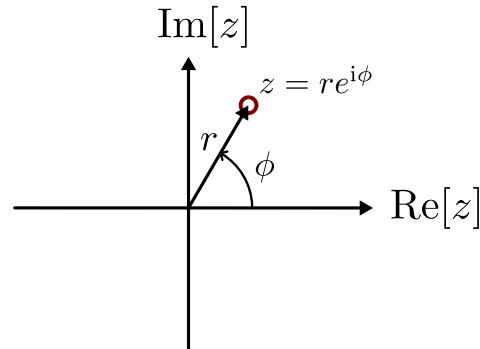
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (14.26)$$

Kuva 14.8: Kompleksilukujen esitys tason vektoreina. Vaaka-akseli kuvaa luvun reaali- ja pystyakseli imaginääriosaa.

(a) Kompleksiluku ja sen konjugaatti.



(b) Kompleksiluvun napakoordinaattiesitys.



Tämä on usein helpoin laskea luvun  $z = x + iy$  kompleksikonjugaatin

$$z^* = x - iy \quad (14.27)$$

avulla, sillä

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (14.28)$$

Kompleksikonjugoinnissa siis imaginääriosan etumerkki vaihtuu, ja kompleksiluvun itseisarvon neliö saadaan luvun ja sen konjugaatin tulona. Graafisesti konjugointi tarkoittaa luvun peilaamista reaaliakselin suhteeseen, kuten kuvassa 14.8 (a).

Alkeisfunktioit määritellään kompleksiluvuille yleensä *sarjakehitelmien* avulla. Sarja tarkoittaa matematiikassa päättymätöntä summaa eli laskutoimitusta, jossa lasketaan yhteen äärettömän monta lukua. Emme tietenkään todellisuudessa voi laskea yhteen äärettömän monta lukua, mutta yleensä niin ei ole tarkoituskaan. Sen sijaan sarjojen avulla halutaan usein kirjoittaa matemaattisia funktioita uuteen, helpommin käsiteltävään muotoon.

Esimerkiksi eksponenttifunktio määritellään kompleksiluvuille päättymättömänä summana

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \frac{(i\phi)^5}{5!} \dots \quad (14.29)$$

Tämä ei ole käytännön laskemisen kannalta kovin kätevää, mutta voimme tämän esityksen avulla tehdä uusia pääteliä. Jos nimittäin yllä esitetty lauseke sievennetään huomioiden imaginääriyksikön neliön olevan  $i^2 = -1$ , saadaan tulos

$$e^{i\phi} = \left( 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} \dots \right) + i \left( \phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \dots \right). \quad (14.30)$$

Tässä suluissa olevat lausekkeet ovat kuitenkin kosini- ja sinifunktioiden sarjakehitelmät. Näin saadaan johdettua tärkeää **Eulerin kaava** (Leonhard Eulerin mukaan) kompleksiselle eksponenttifunktiolle,

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \quad (14.31)$$

Tämän mukaan *kompleksisen eksponenttifunktion reaali- ja imaginääriosat ovat kulman  $\phi$  kosini ja sini*, joten kompleksiluku  $e^{i\phi}$  esittää siis komplexitasoston pistettä  $(\cos \phi, \sin \phi)$ .

Jos  $\phi = 0$ , tämä on piste  $(1, 0)$ . Jos  $\phi = \pi/2$ , kyseessä on piste  $(0, 1)$ . Yleisesti olipa  $\phi$  mikä tahansa reaaliluku,  $e^{i\phi}$  kuva origosta etäisyydellä 1 olevaa pistettä. Nämä pisteet siis muodostavat yhdessä komplexitasoston *yksikkömpyrän*, ja täsmällisemmin kompleksiluku  $z = e^{i\phi}$  esittää komplexitasoston yksikkövektoria, jota on kierretty komplexitasossa kulma  $\phi$  vastapäivään.

Yleisesti mikä tahansa kompleksiluku voidaan kirjoittaa napakoordinaattien avulla muodossa

$$z = re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad (14.32)$$

missä  $r = |z|$  on luvun itseisarvo ja kulmaa  $\phi$  kutsutaan kompleksiluvun *vaihekulmaksi*. Tämän luvun kompleksikonjugaatti on

$$z^* = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r[\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)] = re^{-i\phi}. \quad (14.33)$$

Konjugointi siis vaihtaa kompleksiluvun vaihekulman etumerkin, kuten myös komplexitasoston graafisen esityksen perusteella voi päätellä.



**14.12** Vertaa kuvia 14.4 (b) sekä 14.8 (b). Miten kompleksiluvun  $z = re^{i\phi}$  ominaisuudet vastaavat vaiheeno-soittimen ominaisuuksia ja edelleen harmonisen väärähtelijän ominaisuuksia?

Kahden napakoordinaatein kirjoitetun luvun  $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$  sekä  $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$  tuloksi saadaan suoralla laskulla

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1 + \phi_2)}. \quad (14.34)$$

Toisin sanoen kompleksilukujen kertolaskun graafinen tulkinta on se, että lukujen *itseisarvot kerrotaan keskenään ja vaihekulmat lasketaan yhteen*. Esimerkiksi kertominen  $i$ -llä yksinkertaisesti käantää kompleksiluvun vektoriesitystä kulman  $\frac{\pi}{2}$  (eli  $90^\circ$ ) vastapäivään ja yleisemmin kertominen tekijällä  $e^{i\phi}$  käantää vektoria kulman  $\phi$ .



**14.13** (a) Mitkä ovat kompleksilukujen  $a = 1 + 2i$  ja  $b = -2 + i$  (i) reaaliosuuus, (ii) imaginääriosuuus, (iii) vaihekulma ja (iv) itseisarvo? (b) Entä luvun  $a + b$ ? (c) Entä luvun  $ab$ ?

Opimme juuri kuvaamaan harmonista liikettä *vaiheenosoittimella* eli origon ympäri pyörivällä vektorilla, jonka *projektilo* eli  $x$ -komponentti valittiin kuvaamaan harmonista liikettä. Kompleksisen eksponenttifunktion  $e^{i\phi}$  voi niin ikään ajatella esittäväni origon ympäri pyörivää vektoria, joten voimme aivan yhtä hyvin *kuvata harmonista liikettä ottamalla siitä x-komponentin eli reaalikomponentin  $\operatorname{Re}[e^{i\phi}] = \cos \phi$* . Tämä voi vaikuttaa vain asioiden hankaloittamiselta, mutta juun idea on siinä, että voimme tehdä kaikki laskut ensin eksponenttifunktioilla ja erottaa reaaliosan vasta lopuksi. Tavalliselle eksponenttifunktiolle tutut laskusäännöt pätevät myös kompleksiselle eksponenttifunktiolle, ja kompleksisilla eksponenttifunktioilla laskeminen on helpompaa kuin trigonometrisillä funktioilla. Muun muassa derivoointi onnistuu tutulla eksponenttifunktion derivoimis-säännöllä

$$\frac{d}{dt} e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})} = i\omega e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}. \quad (14.35)$$

Myös kahden eksponenttifunktion yhdistäminen onnistuu eksponenttien laskusäännöillä. Esimerkiksi

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \Delta\phi)} = e^{i\omega t} + e^{i\omega t} e^{i\Delta\phi} = e^{i\omega t} (1 + e^{i\Delta\phi}). \quad (14.36)$$

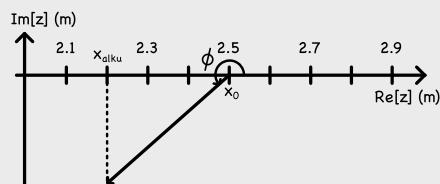
Trigonometrisillä funktioilla vastaava lasku  $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \Delta\phi)$  olisi huomattavasti hankalampi. Tämän luvun loppupuolella on muutama laskuesimerkki, joissa väärähtelyjä analysoidaan kompleksiluvuilla.

### esimerkki 14.2

### Vaiheenosoitin kompleksilukuna

**Kappale väärtelee harmonisesti amplitudilla 0.400 m pisteen  $x_0 = 2.500$  m ympärillä. Ajan hetkellä  $t = 0$  s kappale on pisteessä  $x_{\text{alku}} = 2.200$  m ja sen nopeus on  $v_{x,\text{alku}} = 0.100$  m/s. Miten kappaleen liike kuvataan kompleksiluvulla?**

**TILANNE** Tämä on täsmälleen sama tilanne kuin esimerkissä 14.1, jossa ratkaisimme vaiheksi alkuhetkellä  $\phi_{\text{alku}} = 3.864$ . ja kulmataajuudeksi  $\omega = 0.378 \text{ s}^{-1}$ .



**RATKAISU** Voimme kuvata väärähtelyä kompleksifunktioilla

$$z(t) = x_0 + Ae^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})} = (2.5 \text{ m}) + (0.4 \text{ m})e^{i[(0.378 \text{ s}^{-1})t + 3.864]}, \quad (14.37)$$

kun ajattelemme tämän funktion reaaliosan kuvaavan kappaleen todellista paikkaa,

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = x_0 + A\operatorname{Re}[e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}] = x_0 + A\operatorname{Re}[\cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}) + i\sin(\omega t + \phi_{\text{alku}})] = x_0 + A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.38)$$

Vastaavasti kappaleen nopeus on tämän kompleksifunktion derivaatan reaaliosa,

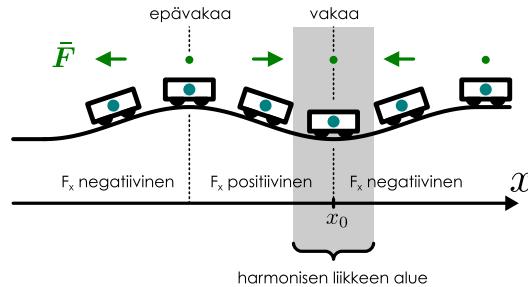
$$v_x(t) = \operatorname{Re}[z'(t)] = \omega A \operatorname{Re}[ie^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}] = \omega A \operatorname{Re}[i\cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}) - \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}})] = -\omega A \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.39)$$

**ARVIOINTI** Päädyimme samaan paikan funktoon kuin aikaisemmin. Tässä kompleksiesityksestä ei ollut erityisemmin iloa, mutta näemme myöhemmin esimerkkejä, joissa kompleksiluvuilla laskeminen on helpompaa kuin reaaliluvuilla.

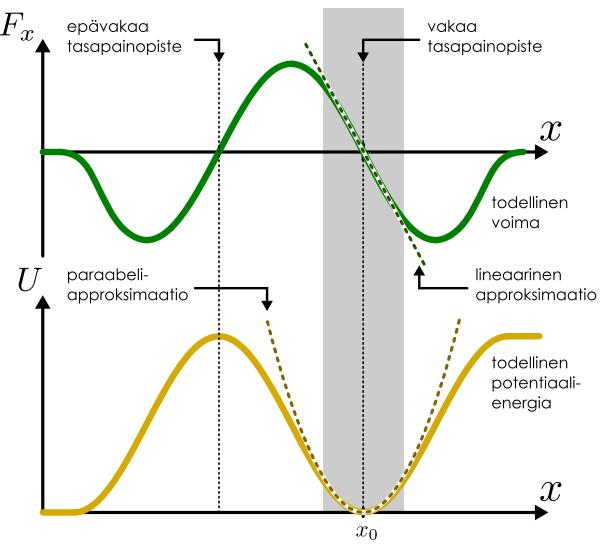
## JAKSOLLINEN LIIKE

Kuva 14.9: Lähellä vakaata tasapainopistettä voima on likimain verrannollinen poikkeamaan ja potentiaalienergia poikkeaman neljöön. Tällöin kappaleen liike on likimain harmonista.

(a) Vaunuun kohdistuvat voimat epätasaisessa maastossa.



(b) Voiman  $x$ -skalaarikomponentti ja potentiaalienergia painkan funktioina.



**14.14** Kirjoita oman sanoin tiivistelmä harmonisen väärähtelyn matemaattisesta kuvauksesta. Millainen funktio kuvailee väärähtelijän paikkaa, nopeutta ja kiihtyvyyttä? Miten nämä liittyvät kompleksilukuihin? Mistä ominaisuuksista mekaanisen väärähtelijän kulmataajuus, amplitudi, vaihe ja kokonaisenergia riippuvat? Mitkä näistä ovat väärähtelijän omia ominaisuuksia ja mitkä riippuvat siitä, millaista väärähtely on?

### 14.3 Likimain harmoninen liike

#### Pienet poikkeamat

Hooken laki on ideaalinen jousen malli. Todellisen jousen jännitysvoima on suoraan verrannollinen jousen pituuden muutokseen vain venymän tai puristuman ollessa kyllin pieni. Jos jousta venytetään liikaa, se oikenee eikä enää palaa takaisin alkuperäiseen muotoonsa, koska materiaalissa tapahtuu plastisia muodonmuutoksia. Niinpä jouseen kiinnitetty kappalekin väärähtelee harmonisesti ainoastaan väärähtelyn amplitudin ollessa kyllin pieni. Toisaalta jos amplitudi on pieni, Hooken laki on erittäin hyvä malli jousille ja samoin harmoninen väärähtely on erittäin hyvä malli jouseen kiinnitetylle kappaleelle.

Samaa ideaa voidaan soveltaa muihinkin systeemeihin. Kuvassa 14.9 on esimerkki, jossa vaunu asetetaan epätasaiseen maastoon. Vaunulla on tasapainopiste kaikissa niissä pisteissä, joissa maanpinta on vaakasuora, mutta näistä vain kuopan pohjalla oleva tasapainopiste on vakaa, sillä vaunuun kohdistuva voima osoittaa kohti tasapainoa ja pyrkii palauttamaan vaunun takaisin tasapainoon vain sen ympäristössä. Jos siis vaunun siirtää rinteeseen ja päästää irti, se rullaa alamäkeen ja jää heilahtelemaan edestakaisin kuopan pohjalle samaan tapaan kuin jouseen kiinnitetty vaunu heilahtelee jousen tasapainoaseman ympäillä. Tämä näkyy voiman kuvaajassa niin, että vakaan tasapainopisteen  $x_0$  kohdalla voima muuttuu positiivisesta negatiiviseksi ja laskeva kuvaaja leikkää  $x$ -akselin. Potentiaalienergian kuvaajassa on puolestaan tasapainopisteessä minimi.



**14.15** Miten kappale käyttää lähellä pistettä, jossa siihen kohdistuvaa voimaa kuvaava  $x$ -akselin leikkaava nouseva suora? Millainen on kappaleen potentiaalienergian kuvaaja tällöin?

Kuopassa oleva vaunu on siis väärähtelijä, koska se liikkeelle lähdettyään kulkee edestakaisin. Seuraava kysymys on, voiko vaunun liikettä kuvata *harmonisena* väärähtelijänä? Aikaisemmin jo päättelimme, että harmoniseen väärähtelijään kohdistuva voima on suoraan verrannollinen väärähtelijän tasapainosta mitattuun poikkeamaan. Jousen tapauksessa verrannollisuuskerroin on jousivakio, mutta yleisemmin voidaan kirjoittaa  $F_x = -m\omega^2 x$ , missä jousivakio on korvattu väärähtelijän massalla ja kulmataajuudella. Tällaisen funktion kuvaaja on *laskeva suora*. Toisaalta väärähtelijän potentiaalienergia on verrannollinen poikkeaman neljöön,  $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , ja tämän funktion kuvaaja on *ylöspäin aukeava paraabeli*. Koska maaston muoto voi olla

millainen tahansa, vaunuun kohdistuvan voiman kuvaaja ei ole täsmälleen suora eikä potentiaalienergia paraabeli, jolloin vaunu *ei ole* harmoninen väärätelijä. Jos vaunu ei kuitenkaan siiрretä kuopan pohjalta kovin paljon, siihen kohdistuvan voiman kuvaaja on likimain suora eli voima on likimain suoraan verrannollinen poikkeamaan. Samoin vaunun potentiaalienergian kuvaaja on tällöin likimain paraabelin muotoinen. Toisin sanoen vaunu käyttäätyy kuin harmoninen väärätelijä, *jos sen liikkeen amplitudi on tarpeeksi pieni* eikä vau- nu siiรry liian kauas tasapainopisteestä. Tätä harmonisen liikkeen aluetta on merkity kuvassa 14.9 harmaalla taustalla.

Sama periaate pätee käytännössä kaikille systeemeille, joissa on vakaa tasapainopiste. Jos systeemiä poikkeutetaan tasapainosta vain *vähän*, systeemiä *tasapainoon palauttavat voimat ovat likimain verrannolliset systeemin poikkeamaan*. Samoin systeemin *potentiaalienergia on likimain verrannollinen poikkeaman neliöön*. Tällöin systeemi käyttäätyy likimain harmonisen väärätelijän tavoin, ja juuri tämän takia harmonisen väärätelijyn malli on niin tärkeä — likimain harmonisesti vääräteleviä systeemejä on kaikkialla. Riippuu luon- nollisesti tilanteesta, mikä on “vähän”. Tulessa huojuva pilvenpiirtäjä voi väärhdellä harmonisesti, vaikka sen huipu siirtyisi useita metrejä, kun taas väärätelevien molekyylien tapauksessa harmonisen väärätelijyn malli toimii atomien siirtymien ollessa nanometrien osien pituusluokkaa.

## Harmoninen approksimaatio

Kuvassa 14.9 esitettiin graafisesti *harmoninen approksimaatio*, jossa kappaleeseen kohdistuvan voiman kuvaajaa arvioitiin laskevalla suoralla. Suora leikkaa  $x$ -akselin tasapainopisteessä  $x_0$  ja sen kulmakerroin on tässä pisteessä yhtä suuri kuin kappaleeseen todellisuudessa vaikuttavan voiman kuvaajan kulmakerroin. Tar- kempaa analyysiä varten haluamme seuraavaksi muotoilla tämän ajatuksen matemaattisesti. Tämä onnistuu *sarjakehitelmien avulla*.

Sarjakehitelmiä on monenlaisia, mutta nyt määrittelemme ainoastaan niin sanotun **Taylorin sarjan** (Brook Taylorin mukaan): Olkoon  $f(x)$  funktio, jolle haluamme muodostaa sarjakehitelmän. Merkitään tästä sarjaa  $s(x)$ . Funktion Taylorin sarja pisteen  $x_0$  ympäristössä on päättymätön summa

$$s(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (14.40)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \quad (14.41)$$

Tässä  $f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}$  tarkoittaa siis funktion  $n$  kertaluvun derivaatan arvoa pisteessä  $x = x_0$ .

Taylorin sarjan jokainen termi riippuu etäisyystä  $x - x_0$ , joka esiintyy yhä korkeammissa potensseissa mitä pidemmälle sarjassa edetään. Näitä etäisyysksiä painotetaan funktion  $f$  derivaatoilla, joiden arvo lasketaan pisteessä  $x_0$ . Sarjakehitelmä on luonnollisesti järkevä vain jos funktiota  $f$  voi derivoida monta kertaa.

Taylorin sarjan perusidea on se, että funktiolla  $f$  ja sarjalla  $s$  on pisteessä  $x_0$  samat derivaatat. Tämä nähdään suoralla laskulla. Esimerkiksi sarjan ensimmäinen derivaatta on

$$s'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f'''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (14.42)$$

ja pisteessä  $x = x_0$  tämä saa arvon

$$s'(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0)(x_0 - x_0) + \frac{1}{2}f'''(x_0)(x_0 - x_0)^2 + \dots = f'(x_0) + 0 + 0 + \dots = f'(x_0). \quad (14.43)$$

Vastaavasti derivoimalla toisen kerran saadaan tulos  $s''(x_0) = f''(x_0)$  ja niin edelleen.

Riippuu funktiosta, onko Taylorin sarja hyödyllinen. On olemassa funktioita, joille Taylorin sarja antaa ää- rettömiä tuloksia, mutta monille tavallisille funktioille sarja suppenee, kun  $x$  on tarpeeksi lähellä pistettä  $x_0$ . Tämä tarkoittaa sitä, että mitä enemmän sarjassa esiintyy termejä lasketaan yhteen, sitä lähempänä alkuperäistä funktiota  $f(x)$  summa on. Jos sarja suppenee, sen termien täytyy tulla yhä pienemmiksi ja pienemiksi. Jos jo muutaman ensimmäisen termin summa on tarpeeksi lähellä funktiota  $f(x)$ , koko sarja voidaan approksimoida vain sarjan muutamalla ensimmäisellä termillä. Näin saadaan systemaattinen ja fysikkassa erittäin hyödyllinen tapa approksimoida funktioita *polynomella*

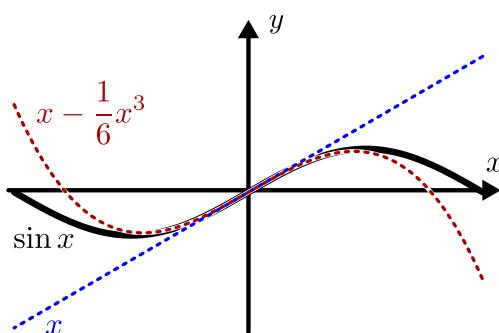
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \dots \quad (14.44)$$

Kuvassa 14.10 on piirretty esimerkinä sini- ja kosinifunktioiden kaksi ensimmäistä polynomiapproksimaatiota origon ympäällä eli kun  $x_0 = 0$ . Esimerkiksi sinifunktion  $f(x) = \sin x$  ensimmäinen derivaatta on  $f'(x) = \cos x$ , joten sinin yksinkertaisin approksimaatio origon lähellä on

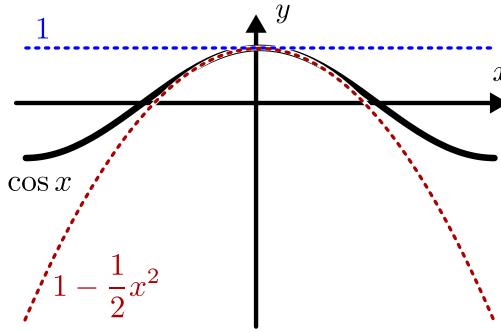
$$\sin x \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot (x - 0) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x, \quad (14.45)$$

Kuva 14.10: Trigonometristen funktioiden ensimmäiset polynomiapproksimaatiot origossa.

(a) Sinin approksimaatioita.



(b) Kosinin approksimaatioita.



mikä on piirretty kuvaan origon kautta kulkevana nousevana suorana. Samoin kompleksilukujen yhteydessä mainittu eksponenttifunktion sarjaesitys (14.29) on sama kuin funktion pisteen  $x_0 = 0$  ympärillä kehitetty Taylorin sarja.



**14.16** Millainen on sinin approksimaatio pisteen  $x_0 = \pi/2$  ympärillä, kun mukaan otetaan  $x$ :n toinen potenssi?

Taylorin sarjan avulla voimme laskea myös harmonisen approksimaation kappaleeseen vaikuttavalle voimalle ja kappaleen potentiaalienergiälle. Jos nimittäin kappaleella on vakaa tasapainopiste  $x_0$ , kappaleeseen kohdistuvan voiman täytyy olla tässä pisteessä nolla,  $F_x(x_0) = 0$ . Samoin kappaleen potentiaalienergialla täytyy olla tässä pisteessä minimi, ja potentiaalienergian kuvaajan tangentin kulmakertoimen eli ensimmäisen derivaatan pitää olla nolla,  $U'(x) = 0$ . Nämä ovat fysikaaliseksi sama ehto, koska voima on potentiaalienergian derivaatan vastaluku,  $F_x(x) = -U'(x)$ . Niinpä kappaleeseen kohdistuvaa voimaa voidaan arvioida tasapainopisteen ympärillä polynomilla

$$F_x(x) \approx F_x(x_0) + F'_x(x_0)(x - x_0) = F'_x(x_0)(x - x_0). \quad (14.46)$$

Esimerkiksi jouselle voiman kuvaajan kulmakerroin on jousivakio, joten  $F'_x(x_0) = -k$  ja tuloksena saadaan Hooken laki  $F(x) = -k(x - x_0)$ . Vastaavasti kappaleen potentiaalienergialle saadaan approksimaatio

$$U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 = U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (14.47)$$

Esimerkiksi jouselle  $U''(x) = -F'_x(x) = k$  ja potentiaalienergialle saadaan tuttu lauseke  $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ . Jos siis voimalle ja potentiaalienergialle voidaan tehdä tällaiset approksimaatiot ja pysytää alueella, jolla approksimaatiot ovat kyllin tarkkoja, systeemi on harmoninen ja sen liike on harmonista väärähtelyä. Ei ole mitään väliä, millaiset vuorovaikutukset voiman ja potentiaalienergian tuottavat.



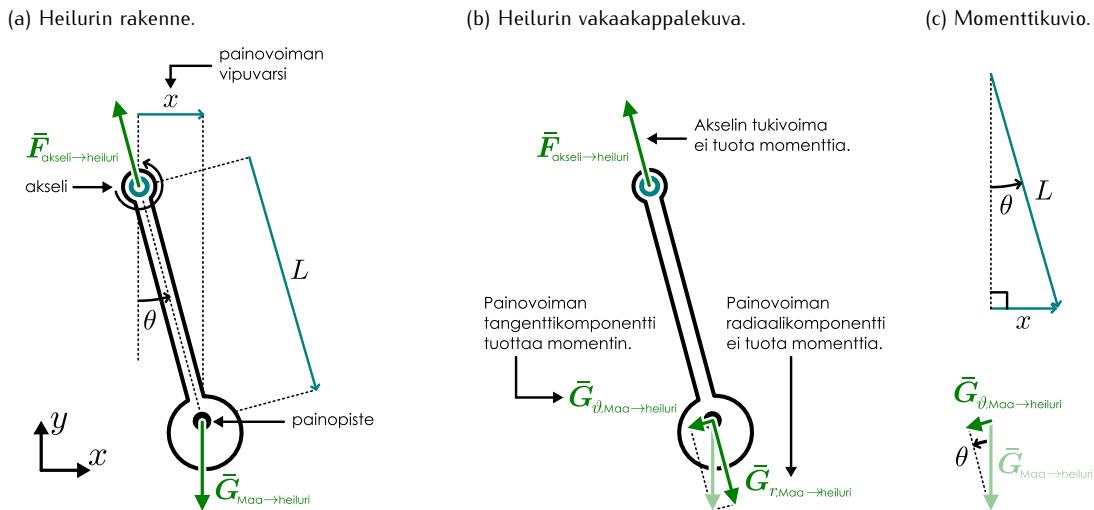
**14.17** Eräään kappaleen potentiaalienergiaa kuvaava funktio  $U(x) = a/x + bx$ , missä  $a = 1$  Jm ja  $b = 1$  J/m. (a) Missä on kappaleen vakaa tasapainopiste  $x_0$ ? (b) Mikä on potentiaalienergia harmonisessa approksimaatiossa? (c) Kuinka suuri on potentiaalienergian ja approksimaation ero pisteessä  $x = x_0 + \Delta x$ , missä poikkeama tasapainosta on (i)  $\Delta x = 0.1$  m tai (ii)  $\Delta x = 0.5$  m?

## Heiluri

Heiluri on mikä tahansa tukipisteestä tai akselista roikkuva kappale, joka pääsee käänymään vapaasti tämän akselin ympäri. Jos kappaleen painopiste on akselin alapuolella, painovoima pyrkii käänämään kappaleen asentoon, jossa sen painopiste on täsmälleen akselin alapuolella. Tällöin painovoiman momentti akselin suhteeseen on nimitäin nolla, joten kyseessä on kappaleen tasapainoasento *pyörimisen suhteeseen*.

Heiluri on harmonisen väärähtelyn ensimmäisiä teknisiä sovelluksia. Jo Galilei aikoinaan huomasi heilurin jaksonajan olevan riippumaton heilahduksen laajuudesta (amplitudista), mikä johti aikanaan heilurikellon keksimiseen. Heilurikelloit eivät nykyään ole enää erityisen tärkeitä, mutta heilurit kävät yhä erinomaisesti harmonisen väärähtelyn ominaisuuksien tutkimiseen, koska heilurin liike on helppo nähdä ja eri taajuudella vääräteleviä heilureita on helppo valmistaa.

Kuva 14.11: Heiluri on pyörimisakselista vapaasti roikkuva kappale.



Tutkimme kuvassa 14.11 esitettyä jäykästä kappaleesta koostuvaa heiluria. Olkoon heilurin massa  $m$ , hitausmomentti  $I_\theta$  ja painopisteen etäisyys pyörimisakselista  $L$ . Akseli kannattelee kappaletta, joten se kohdistaa kappaleeseen voiman. Tämä voima kuitenkin osoittaa kohti akselia, joten sen momentti akselin suhteen on nolla eikä se pyri kääntämään heiluria mihinkään suuntaan. Heiluriin kohdistuu myös painovoima  $G_y = -mg$ . Painovoima ei riipu heilurin asennosta, mutta painovoiman heiluriin kohdistama momentti riippuu. Jos heiluria on poikkeutettu tasapainoasemasta kiertokulma  $\theta$ , sen painopiste on siirtynyt sivusuunnassa etäisyydelle

$$x = L \sin \theta \quad (14.48)$$

tasapainoasemastaan, kuten kuvan 14.11 (c) kuviosta voidaan päätellä. Momentin suuruus on voiman ja sen vipuvarren pituuden tulo, ja tässä tapauksessa voima pyrkii kääntämään kappaleen takaisin tasapainoasemaan eli negatiiviseen  $\theta$ -suuntaan. Siispä momentin  $\theta$ -komponentti on

$$\tau_\theta = xG_y = -mgL \sin \theta. \quad (14.49)$$

Vaihtoehtoisesti momentti voidaan laskea määrittämällä painovoiman tangenttikomponentti akselin suhteen, sillä voimien radiaalikomponentit eivät tuota momenttia. Tämä komponentti on  $G_\theta = -mg \sin \theta$ , joten momentiksi saadaan tälläkin päättelyllä  $\tau_\theta = LG_\theta = -mgL \sin \theta$ . Niinpä heilurin pyörimisen likeyhtälö  $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$  voidaan kirjoittaa muotoon

$$I_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta. \quad (14.50)$$

Tämä yhtälö muistuttaa harmonista likeyhtälöä (14.12), missä paikkakoordinaatin  $x$  sijaan esiintyy kulma  $\theta$ , mutta erona harmoniseen yhtälöön heilurin likeyhtälössä esiintyy sinifunktio. Voimme kuitenkin kirjoittaa tälle approksimaation sarjakehitelmien avulla, sillä  $\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \approx \theta$ , ja tämä arvio on hyvä, jos  $\frac{1}{6}\theta^3 \ll \theta$  eli jos heilurin heilahduskulma on pieni. Tällöin heilurin heilahtelua kuvaa likimain likeyhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I_\theta} \theta. \quad (14.51)$$

Tämä on harmoninen likeyhtälö kulmalle  $\theta$ , joten heilurin kulma muuttuu harmonisesti kulmataajuudella

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_\theta}}. \quad (14.52)$$

Huomaa, että tämä on nimenomaan heilurin värähtelyä kuvava kulmataajuus, joka on täysin eri asia kuin kappaleen liikkeen kulmanopeus  $\omega_\theta$ . Kulmataajuus on värähtelyä kuvavan vaiheenosittimen kulmanopeus, joka on siis vakio. Kappaleen kulmanopeus sen sijaan oskilloi harmonisesti aivan kuten jouseen kiinnitetyn kappaleen nopeus.

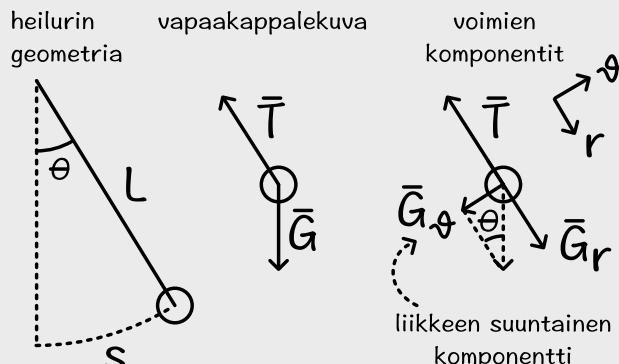
**14.18** Heiluri koostuu kappaleesta, jonka massa on  $m = 0.10 \text{ kg}$ , painopisteen etäisyys akselista  $L = 0.10 \text{ m}$  ja jonka hitausmomentti on  $I_\theta = 2mL^2$ . Heiluri nostetaan kulmaan  $\theta = \pi/10 = 18^\circ$  ja päästetään liikkumaan vapaasti. (a) Mikä on heilurin kulmataajuus? (b) Mikä on heiluriin kohdistuva momentti lähtöhetkellä? (c) Mikä on heilurin kulmanopeus tasapainoasemassa?

## esimerkki 14.3

## Matemaattinen heiluri

Nämä sanottu matemaattinen heiluri koostuu kevyestä langasta ja siihen kiinnitetystä pienestä massiivisesta kappaleesta. Mikä on heilurin kulmataajuus?

**TILANNE** Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään langan pituutta  $L$  ja kappaleen massaa  $m$ . Langan massa oletetaan hyvin pieneksi. Kun kappale on siirtynyt tasapainopisteestä matkan  $s$  ympyrärataa pitkin, lanka muodostaa kulman  $\theta = \frac{s}{L}$  pystysuuntaan nähden. Kappaleeseen kohdistuu vain painovoima ja langan kosketusvoima. Langan voima osoittaa aina langan suuntaan kohti kappaleen liikeradan keskipistettä ja painovoima suoraan alaspäin.



**SUUNNITELMA** Voimme ratkaista heilurin liikkeen kahdella tavalla. Yksi tapa on laskea heilurin hitausmomentti ja käyttää lauseketta (14.52) kulmataajuuden laskemiseksi. Toinen tapa on ajatella kappale ympyräradalle vangituksi hiukkaseksi ja määrittää kappaleen liike tutkimalla siihen kohdistuvia voimia. Jos voimme johtaa kappaleelle harmonisen likeyhtälön, voimme siitä päättää suoraan sen liikkeen kulmataajuuden.

**RATKAISU** Ensimmäinen tapa: Jos kappalella pidetään pistemassana, sen hitausmomentti langan yläpään suhteeseen on

$$I_\theta = mL^2. \quad (14.53)$$

Tämän perusteella heilurin kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_\theta}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (14.54)$$

Toinen tapa: Ainoastaan painovoima kohdistaa kappaleeseen voiman komponentin sen liikeradan suunnassa. Tämä painovoiman tangenttikomponentti on kuvan perusteella

$$G_\vartheta = -mg \sin \theta. \quad (14.55)$$

Tässä on miinusmerkki, koska jos kulma on positiivinen, painovoima osoittaa kulman pienemisen suuntaan (kohti tasapainoasemaa). Kappaleen kiihtyvyys ympyräradan tangentti suunnassa on siten

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a_\vartheta = \frac{1}{m} F_{\vartheta, \text{kokonais}} = -g \sin \theta. \quad (14.56)$$

Tämä ei ole harmoninen likeyhtälö, mutta jos heiluri väärätelee pienellä amplitudilla, voimme tehdä jälleen pienen kulman approksimaation  $\sin \theta \approx \theta = \frac{s}{L}$  ja saamme harmonisen likeyhtälön

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s, \quad (14.57)$$

missä kulmataajuuden paikalla on vakio

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (14.58)$$

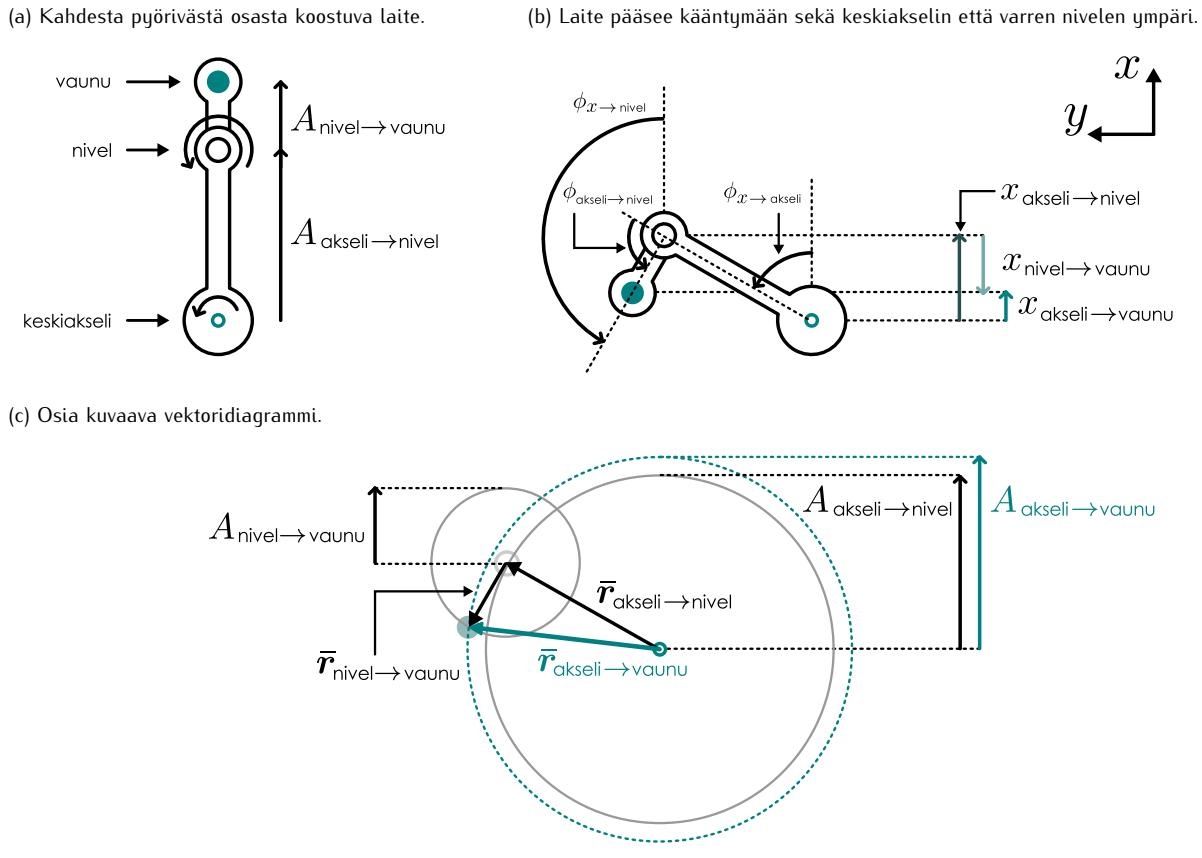
**ARVIOINTI** Kumpikin laskutapa antoi saman tuloksen kulmataajuudelle kuten tietysti pitääkin. Laskettaessa voimilla joudimme tekemään pienen kulman approksimaation, mutta sama approksimaatio sisältyy jo valmiiksi heilurin kulmataajuuden lausekkeeseen (14.52), joten kumpikaan laskutapa ei ole toista tarkempi.

Tuloksen mukaan heilurin taajuus riippuu vain langan pituudesta ja putoamiskiihtyvyydestä, mutta ei lainkaan heilurin massasta. Näin käy samasta syystä kuin miksi erimassaiset kappaleet putoavat yhtä nopeasti: suurimassaiseen kappaleeseen kohdistuu suuri painovoima, mutta sen liikkeen muuttaminen myös vaatii suuren voiman, ja nämä vaikutukset kumoavat toisensa.



**14.19** Kirjoita omien sanojen tiivistelmä likimain harmonisesta liikkeestä. Millaisissa tilanteissa liike on lähes harmonista? Millainen voima ja energia näissä systeemeissä on? Mikä on Taylorin sarja ja millainen approksimaatio voimalle ja energialle saadaan likimain harmonisessa systeemissä?

Kuva 14.12: Kaksi pyörimislukkettä yhdistävä laite.



## 14.4 Yhdistetty harmoninen liike

Harmonisen liikkeen malli kuvailee yleisesti kaikkia *pieniä värähtelyitä*, koska mikä tahansa värähtelevä systeemi on likimain harmoninen lähellä vakaata tasapainoasemaa. Kaikki jaksollinen liike ei kuitenkaan ole puhtaasti harmonista, joten yksinkertainen harmonisen liikkeen malli ei ole riittävä kuvaamaan kaikkia värähtelyjä. Osoittautuu kuitenkin, että *mikä tahansa jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten värähtelyjen yhdistelmänä*. Niinpä kun osaamme analysoida harmonisen liikkeen ja tiedämme miten harmoniset värähtelyt voidaan yhdistää, pystymme kuvaamaan kaiken jaksollisen liikkeen.

Tällaiset yhdistetyt harmoniset värähtelyt ovat yleisiä. Jouseen kiinnitetty kappale värähtelee yhdellä tiellä taajuudella, mutta jos useampi kappale yhdistetään jousin, niiden muodostama systeemi voi värähdellä *useilla eri tavoilla yhtä aikaa*. Näillä erilaisilla värähtelyillä on yleensä myös eri taajuudet, jolloin systeemi värähtelee useilla taajuuksilla yhtä aikaa ja systeemin osien liike on näiden värähtelyiden yhdistelmä. Erikoisesti jäykät kappaleet koostuvat monista keskenään vuorovaikuttavista atomeista, joten jäykät kappaleet itse voivat värähdellä useilla eri tavoilla samanaikaisesti.

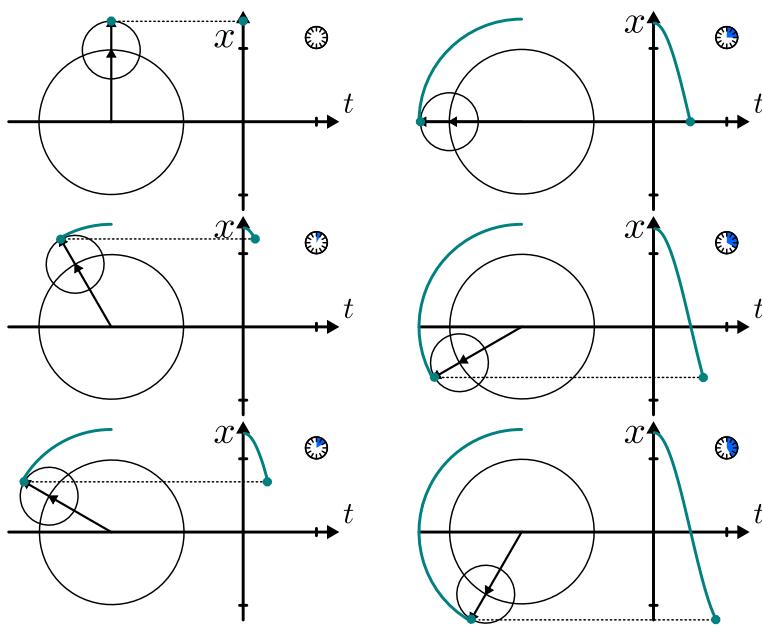
Näitä yhdistettyjä värähtelyjä voi myös kuulla. Värähtelevän kappaleen pinta nimittäin työntää ympäröivää ilmaa, joka alkaa myös värähtelemään *samoilla taajuuksilla* kuin millä kappale värähtelee. Nämä värähtelyt alkavat liikkua *aaltoina*, mihin tutustumme tarkemmin luvussa 15. Aaltojen saapuessa korvaan ne saavat korvan tärykalvon värähtelemään jälleen *samoilla taajuuksilla*. Tämä on *ääntä*, ja kuulo perustuu fysikaalisesti juuri siihen, että tärykalvo värähtelee *samoilla taajuuksilla* kuin änen läheenä toimivat kappaleet. Erityisesti voimme kuulla useita ääniä samanaikaisesti, koska korvan tärykalvo pystyy värähtelemään kaikkien sinne saapuvien äänten taajuuksilla yhtä aikaa ja aivot pystyvät erottelemaan tästä liikkeestä sen alunperin synnyttäneet värähtelyt.

### Värähtelyjen yhteenlasku

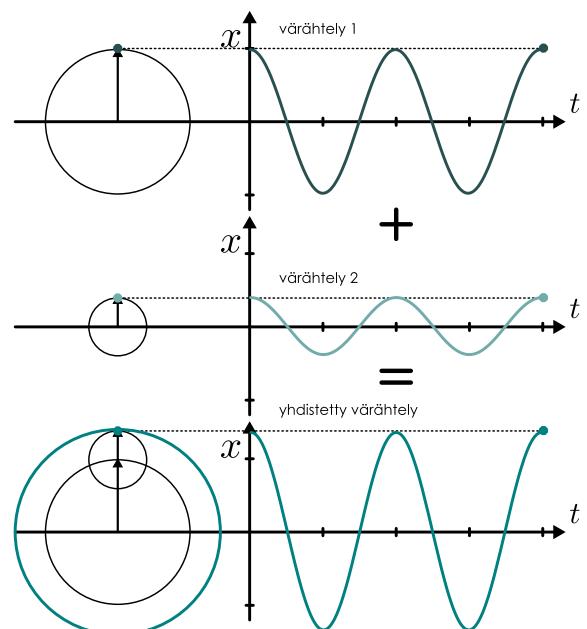
Aloitetaan yhdistettyjen värähtelyjen tutkiminen tarkastelemalla yksinkertaisinta mahdollista tapausta: kahden värähtelyn yhdistelmää. Esimerkkinä tällaisesta yhdistetystä harmonisesta liikkeestä tarkastelemme kuvassa 14.12 kaavakuvalta esitettävää huvipuistolaitetta. Laitteessa on pitkä "käsivarsi", jonka päässä matkustajan vaunu on. Tämä varsi pyörii tasaisella kulmanopeudella maahan kiinnitetyn keskiakselin ympäri kuin

Kuva 14.13: Samalla kulmataajuudella pyörivät ja samassa vaiheessa olevat vaiheenosittimet.

(a) Vaiheenosittimet pyörivät yhtä nopeasti ja piirtävät ympyrän.

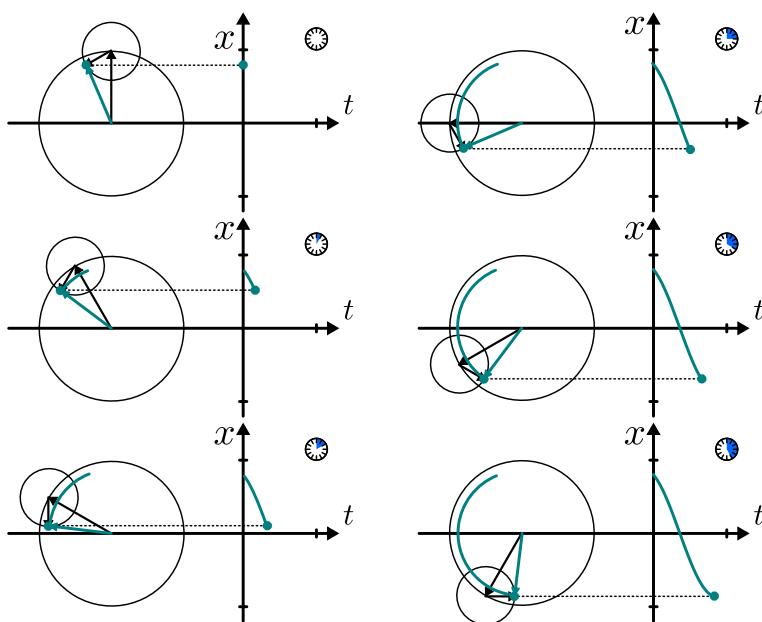


(b) Kahden harmonisen liikkeen summa, kun taajuudet ja vaiheet ovat samat.

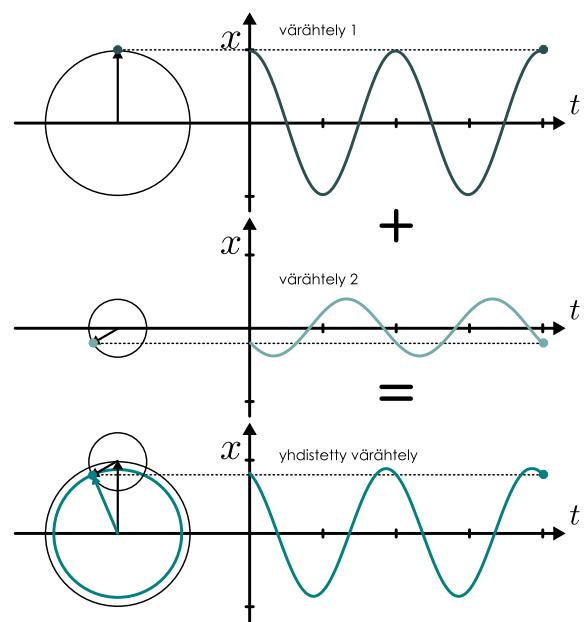


Kuva 14.14: Samalla kulmataajuudella pyörivät ja eri vaiheissa olevat vaiheenosittimet.

(a) Vaiheenosittimet pyörivät yhtä nopeasti ja piirtävät ympyrän.

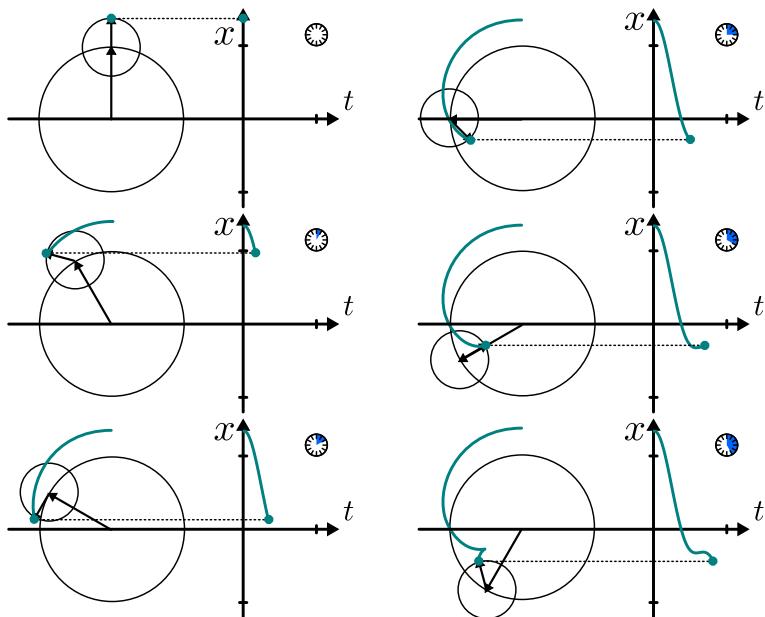


(b) Kahden harmonisen liikkeen summa, kun taajuudet ovat samat.

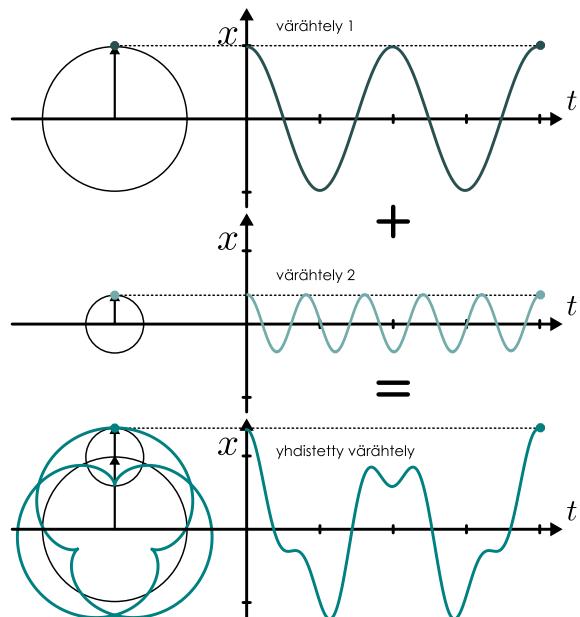


Kuva 14.15: Eri kulmataajuksilla pyörivät vaiheenosottimet.

(a) Vaiheenosottimet pyörivät eri nopeuksilla eivätkä piirrä ympyrää.



(b) Kahden erittäjisen harmonisen liikkeen summa.



karuselli, mutta lisäksi varressa on niveli ja härveli pyörii tasaisesti myös tämän nivelen ympäri. Matkustajan kannalta oleellista on luonnollisesti varren päässä olevan istuimen liike.

Koska tasaisen ympyräliikkeen projektiot ovat harmonisia liikkeitä, nivelen  $x$ -koordinaatti liikkuu harmonisesti. Samoin matkustajan vaunu liikkuu nivelen suhteeseen harmonisesti  $x$ -suunnassa. Vaunun liike keskiakselin ja maan suhteen on puolestaan näiden liikkeiden yhdistelmä kuten kuvassa 14.12 on piirretty, joten *vaunun x-koordinaatin liike on kahden harmonisen liikkeen yhdistelmä*. Siispä vaikka tässä esimerkissä ei ole kysymys värähtelystä, vaunun projektiot liukenevat vastaan tasmalleen yhdistetynä värähtelyä.

Merkitään  $x$ -suuntaista siirtymää akselista niveleen  $x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}}$  ja nivelestä vaunuun  $x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}$ . Siirtymä akselista vaunuun on näiden summa, sillä voimme aina siirtää ensin akselista niveleen ja edelleen nivelestä vaunuun kuten kuvassa 14.12. Siispä

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}. \quad (14.59)$$

Kuvassa on merkitty myös laitteen asennon määritteleviä kulmia. Kulma  $x$ -suunnasta laitteen akselin ja nivelen määriäälle suoralle on  $\phi_{x \rightarrow \text{akseli}}$  ja  $x$ -suunnasta nivelen ja vaunun kautta kulkevalle suoralle  $\phi_{x \rightarrow \text{vaunu}}$ . Käsivarren akselista niveleen mitattu osuuden pituus puolestaan on  $A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}}$  ja vastaavasti etäisyys nivelestä vaunuun on  $A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}$ . Perustrigonometrian avulla voidaan siis päätellä, että edellä mainitut  $x$ -suuntaiset siirtymät ovat

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} = A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{akseli}} \quad (14.60)$$

$$x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} = A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{nivel}} \quad (14.61)$$

ja edelleen näiden perusteella matkustajan  $x$ -koordinaatti on

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{akseli}} + A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{nivel}}. \quad (14.62)$$

Matkustajan liike on siis kahden harmonisen liikkeen yhdistelmä eli matemaattisesti kahden sinimuotoisen funktion summa. Tehtävämme on nyt selvittää, milläistä lükettä matkustajan  $x$ -koordinaatti tekee. Samalla opimme yleisen tekniikan harmonisten liikkeiden yhdistelmän analysoimiseksi.

**14.20** Kappale värähtelee yhtä aikaa amplitudilla 5.0 mm sekä amplitudilla 2.0 mm ja erällä ajan hetkellä värähtelyiden vaiheet ovat  $\pi/3$  sekä  $3\pi/2$ . (a) Millainen vaiheenosotinkuvio kuvailee kappaleen yhdistettyä värähtelyä tällä hetkellä? (b) Mikä on kappaleen poikkeama tasapainosta?

Voimme kuvata karusellia yksinkertaisemmin piirtämällä vain kaksi nuolta. Ensimmäinen nuolista kuvailee siirtymää akselista niveleen ja toinen siirtymää nivelestä matkustajaan. Toisin sanoen matkustajan paikkavektori

saadaan laskemalla vektoreina yhteen nivelen paikkavektori akselin suhteen ja matkustajan paikkavektori nivelen suhteen. Toisaalta laitteen pyöriessä myös nämä nuolet pyörivät, joten ne ovat samalla laitteen osien  $x$ -suuntaista liikettä kuvaavat *vaiheenosoitimet, jotka lasketaan yhteen kuin vektorit*. Kuvassa 14.13 on esitetty matkustajan liike tätä mallia käyttäen, kun laitteen niveli ei kierry lainkaan ja varsi on koko ajan suora. Tällöin vaiheenosoitimet ovat aina yhdensuuntaiset ja ne pyörivät yhtä nopeasti, mikä siis tarkoittaa laitteen kaikkien osien pyöriessä samalla kulmataajuudella. Matkustajan paikkaa esittää kuviossa viimeisen vaiheenosoitimen kärki, joka piirtää nuolten pyöriessä ympyrän aivan kuten yksinkertaisen harmonisen liikkeen tapauksessa. Tämän ympyrälükkeen projektio  $x$ -suuntaan on myös harmonista liikettä, jonka amplitudi on yksinkertaisesti vaiheenosoitimien pituuksien summa.

Kuvassa 14.14 on puolestaan piirretty laitteen liike, jos niveli ei kierry mutta varsi ei myöskään ole suora. Varsi pyörii siis jälleen muotoaan muuttamatta, mutta nyt matkustajan paikka kesiakselin suhteeseen on erilainen kuin kuvan tapauksessa 14.13. Erityisesti matkustajan vaunu on nyt lähempänä akselia eikä se ole alkuperätkin suoraan akselistä  $x$ -suuntaan. Laitteen pyöriessä matkustaja kulkee edelleen ympyrärataa, mutta radan säde on pienempi. Matkustajan liikkeen  $x$ -komponentti liikkuu harmonisesti, koska rata on ympyrä, mutta liikkeen *amplitudi on pienempi kuin sen muodostavien harmonisten liikkeiden amplitudien summa*. Myöskään liikkeen *vaihe alussa ei ole nolla*. Tällaisen yhdistetyn harmonisen liikkeen amplitudia ja vaihetta on varsin vaikea ratkaista yhtälöstä (14.62), mutta geometrisesti se onnistuu helposti vaiheenosoitinkuvista. Nimittäin koska matkustajan vaunu liikkuu ympyräradalla, sen liikettä voi kuvata *yhdellä vaiheenosoitimella, joka on alkuperäisten vaiheenosoitinten vektorisumma*

$$\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = \bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + \bar{r}_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}. \quad (14.63)$$

Edelleen matkustajan  $x$ -suuntaisen liikkeen amplitudi on tämän vaiheenosoitimen pituus

$$A = |\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}}| = |\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + \bar{r}_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}| \quad (14.64)$$

ja matkustajan liikkeen vaihe alkuperätkin on tämän vaiheenosoitimen ja  $x$ -suunnan välinen kulma.

Edelliset päättelyt pätevät yleisesti, koska mitä tahansa harmonista liikettä voidaan kuvata vaiheenosoitimina. Jos kaksi *samantajuista* harmonista liikettä yhdistetään, niiden summa on edelleen harmoninen. Yhtälöin ilmaisten kahden sinimuotoisen funktion summa on edelleen sinimuotoinen funktio,

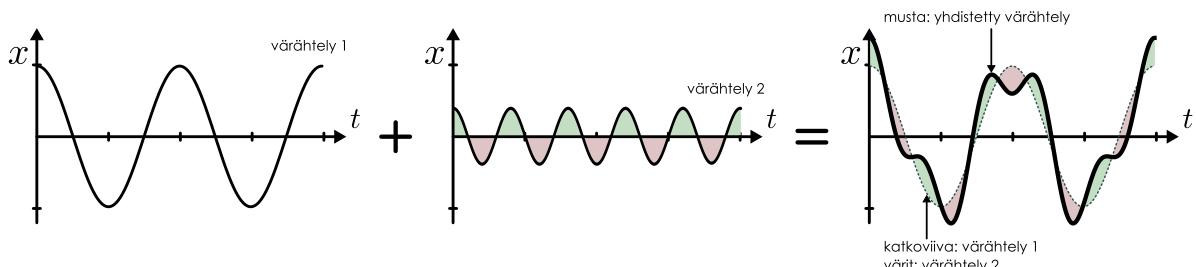
$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) = A_{\text{summa}} \cos(\omega t + \phi_{\text{summa}}), \quad (14.65)$$

*jos funktioiden kulmataajuus  $\omega$  on sama*. Tämän summan amplitudi ja vaihe voidaan määrittää piirtämällä vaiheenosoitinkuvio, jossa yhdistettyjä liikettä kuvaava vaiheenosoitin on alkuperäisten väärähtelyjen vaiheenosoitinten vektorisumma. Toisin sanoen alkuperäiset vaiheenosoitinnuolet piirretään kuviossa peräkkäin ja yhdistetyt liikkeen vaiheenosoitinta kuva kuvion keskipisteestä viimeisen nuolen kärkeen osoittava nuoli.

**14.21** Kappale väärähtelee yhtä aikaa amplitudilla 5.0 mm sekä amplitudilla 2.0 mm, ja erällä ajan hetkellä kappaletta kuvaava vaiheenosoitinkuvio koostuu suoraan vasemmalle osoittavasta pitkästä nuolesta ja suoraan alaspäin osoittavasta lyhyestä nuolesta. (a) Mitkä ovat tällöin alkuperäisten väärähtelyiden vaiheet? (b) Mikä on yhdistetyt väärähtelyn vaihe ja amplitudi?

Tietenkin on myös mahdollista, että kahden harmonisen liikkeen *kulmataajuudet eivät ole samat*. Karuseliesimerkissämme tämä tarkoittaa tilannetta, jossa niveli pyörii ja laitteen käsivarren asento muuttuu. Kuvassa 14.15 on esitetty matkustajan liike tässä tapauksessa, kun varren loppupää nivelestä matkustajan vaunuun kiertää  $x$ -suunnasta mitattuna kaksi ja puoli kierrosta samassa ajassa kuin varren alkupää kesiakselista niveleen kiertää yhden kierroksen. Nyt *vaiheenosoitinkuvion muoto ei pysy samana*, joten matkustaja ei kulje ympyräradalla eikä matkustajan liikkeen projektio ole harmonista. Siispä jos kahden harmonisen liikkeen *kulmataajuudet ovat eri suuret*, näiden liikkeiden yhdistelmä *ei ole harmonista liikettä*.

Kuva 14.16: Laskemalla kahden väärähtelijän kuvaajan arvot pistettäin yhteen saadaan niiden yhdistetyn väärähtelyn kuvaaja.



Usean harmonisen liikkeen yhdistelmän kuvajan voi piirtää vaiheenosottimien avulla myös vaiheenosottimien kulmataajuksien ollessa eri suuret kuten kuvassa 14.15, mutta tämä ei itse asiassa ole kovin helpoa, koska vaiheenosotinkuvion muoto ei pysy vakiona. Kuvassa 14.16 onkin esitetty toinen tapa yhdistetyn liikkeen kuvajan piirtämiseksi, kun kahden värähtelijän, 1 ja 2, liikkeen kuvajat tunnetaan. Yhdistetyssä liikkeessä  $x$ -koordinaatti kullakin ajan hetkellä  $t$  saadaan laskemalla yhteen kahden harmonisen värähtelijän  $x$ -koordinaatit tällä kyseisellä hetkellä. Graafitsesti tämä tarkoittaa sitä, että jos värähtelijän 2 paikka on tiettyllä hetkellä positiivinen (kuvassa vihreä väri), yhdistetyn liikkeen kuvaja kulkee tällä hetkellä korkeamalla kuin värähtelijän 1 kuvaja. Vastaavasti jos värähtelijän 2 paikka on negatiivinen (kuvassa punainen väri), yhdistetyn liikkeen kuvaja kulkee matalammalla kuin värähtelijän 1 kuvaja. Yhdistetyn värähtelyn kuvajan voikin ajatella koostuvan hitaan värähtelyn kuvajasta, jonka "päällä" on toinen, nopeamman värähtelyn kuvaja.

## esimerkki 14.4

## Usean värähtelijän summa

- (a) Mikä on värähtelyn kulmataajuus ja amplitudi, kun yhdistetään  $n = 5$  harmonista värähtelijää, joilla on kaikilla sama kulmataajuus  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$  ja amplitudi  $A = 1.0 \text{ V/m}$ , mutta joiden vaiheet poikkeavat toisistaan  $\Delta\phi = \pi/12$ ?  
(b) Johda amplitudille yleinen lauseke.

**SUUNNITELMA** Koska värähtelijöillä on sama kulmataajuus, niiden yhdiselmäkin värähtelee harmonisesti tällä samalla kulmataajuudella. Yhdistettyä värähtelyä kuvavaa vaiheenosoitin saadaan periaatteessa laskemalla alkuperäisten värähtelijöiden vaiheenosottimet vektoreina yhteen, jolloin yhdistetyn värähtelyn amplitudi on sitä kuvavan vaiheenosottimen pituus.

Püretään vaiheenosotinkuvio. Indeksoidaan värähtelijät alaindeksillä  $i = 1, 2, \dots, n$ . Valitaan ajan nolla hetki niin, että ensimmäisen värähtelijän vaihe on silloin nolla,  $\phi_{\text{alku},1} = 0$ . Seuraavan värähtelijän vaihe alkuperäellä on silloin  $\phi_{\text{alku},2} = \Delta\phi$  ja yleisesti värähtelijän  $i$  vaihe on  $\phi_{\text{alku},i} = (i-1)\Delta\phi$ .

Periaatteessa voisimme laskea vaiheenosottimien summan geometrisesti, mutta se on varsin hankala. Kuitenkin sen sijaan että ajattelemme nuolet geometrisiksi vektoreiksi, tässä tilanteessa osoittautuu paljon hyödyllisemmäksi ajatella nuolten kuvavan kompleksilukuja kompleksitasossa. Kutakin värähtelijää kuvaa siis funktio

$$z_i(t) = A e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku},i})} = A e^{i\omega t} e^{i(i-1)\Delta\phi} \quad (14.66)$$

ja näiden summa on  $z_{\text{summa}} = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ . Yhdistetyn värähtelyn amplitudi on tämän pituus eli itseisarvo  $A_{\text{summa}} = |z_{\text{summa}}|$ .

**RATKAISU** Värähtelijöiden summa on

$$z_{\text{summa}}(t) = z_1(t) + z_2(t) + \dots + z_n(t) = A e^{i\omega t} (1 + e^{i\Delta\phi} + e^{2i\Delta\phi} + \dots + e^{(n-1)i\Delta\phi}). \quad (14.67)$$

Tässä ajasta riippuva tekijä voidaan erotella jokaisesta termistä laskusäännöllä  $e^{A+B} = e^A e^B$  ja ottaa yhtiseksi tekijäksi.

Seuraavaksi sivennämme lausekkeen käyttämällä paria matemaattista kikkaa, joita et ehkä olisi tullut itse ajatelleeksi. Ensinnäkin yllä kirjoitetussa summassa lasketaan yhteen termejä, joiden suhde on aina  $Z = e^{i\Delta\phi}$ . Tämä on geometrinen summa, jolle pätee laskusääntö  $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{n-1} = \frac{Z^n - 1}{Z - 1}$ , ja nün saamme tuloksen

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{e^{ni\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} e^{i\omega t}. \quad (14.68)$$

Nyt voimme edelleen kirjoittaa  $e^{ni\Delta\phi} - 1 = (e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-ni\frac{\Delta\phi}{2}}) e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}}$  ja  $e^{i\Delta\phi} - 1 = (e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}}) e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}$ , jolloin siis

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-ni\frac{\Delta\phi}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}}} e^{(n-1)i\frac{\Delta\phi}{2}} e^{i\omega t}. \quad (14.69)$$

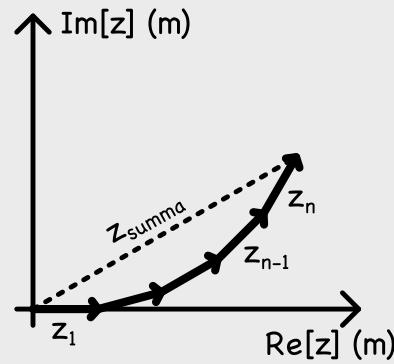
Tämä on hyödyllistä siksi, että Eulerin kaavasta seuraa

$$e^{iz} - e^{-iz} = [\cos z + i \sin z] - [\cos(-z) + i \sin(-z)] = [\cos z + i \sin z] - [\cos z - i \sin z] = 2i \sin z, \quad (14.70)$$

joten saamme lopputulokseen

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{\sin n\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} e^{i[\omega t + (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}]} \quad (14.71)$$

Tämä kompleksiluku on muotoa  $z_{\text{summa}}(t) = r e^{i\phi(t)}$ , missä  $r = A \frac{\sin n\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}$  ja  $\phi(t) = \omega t + (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}$ . Toisin sanoen sen pituus eli itseisarvo on vakio,  $|z| = r$ , se pyörii kulmataajuudella  $\omega$  ja sen vaihe alussa on  $\phi_{\text{alku}} = (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}$ .



Tämä lasku siis todistaa algebrallisesti sen mitä päättemme jo geometrisesti: kun yhdistämme värähtelijötä, joilla on sama kulmataajuus, tuloksena on uusi värähtelijä, jolla on yhä tämä sama kulmataajuus. Tässä tapauksessa yhdistetyn värähtelyn amplitudi on

$$A_{\text{summa}} = |z_{\text{summa}}| = A \frac{\sin n \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}. \quad (14.72)$$

Jos värähtelijöitä on  $n = 5$  ja niiden alkuperäiset amplitudit ovat  $A = 1.0 \text{ V/m}$  sekä vaihe-erot  $\Delta\phi = \pi/12$ , summa-amplituksi saadaan  $A_{\text{summa}} = A \sin \frac{5}{24}\pi / \sin \frac{1}{24}\pi \approx 4.66 \text{ V/m}$ .

**ARVIOINTI** Summa-amplitudi on hieman pienempi kuin viiden alkuperäisen värähtelijän amplituiden summma,  $4.66 < 5.0$ . Kuvan perusteella tämä on järkevä, sillä kuvassa etäisyys origosta viimeisen nuolen kärkeen on selvästikin vähemmän kuin 5 nuolen pituutta mutta enemmän kuin 4.

Tämä esimerkki on melko monimutkainen, eikä ole tarkoituskaan, että osaisit tehdä sen itse. Lasku on kuitenkin syvätä lukea läpi kahdesta syystä. Ensinnäkin tämä on esimerkki kompleksilukujen käytöstä ja niiden hyödyllisyystä. Lisäksi lopputulos osoittautuu hyödylliseksi. Tutkimme nimittäin juuri tällaisia vaiheenosoitinkuvioita aikanaan luvussa 16.4 tiettyjen optisten ilmiöiden yhteydessä!



**14.22** Millainen vaiheenosoitinkuva esimerkissä 14.4 saataisiin, jos (a)  $n = 5$  värähtelijän vaihe-ero olisi  $\Delta\phi = \frac{2}{5}\pi$  tai (b)  $n = 24$  värähtelijän vaihe-ero olisi  $\Delta\phi = \frac{1}{12}\pi$ ? Päättely yhdistetyn värähtelyn amplitudi graafisesti ja tarkista esimerkissä johdetulla lausekkeella. Millaista värähtelyä siis on?

## Lähes samantaaajuiset värähtelyt

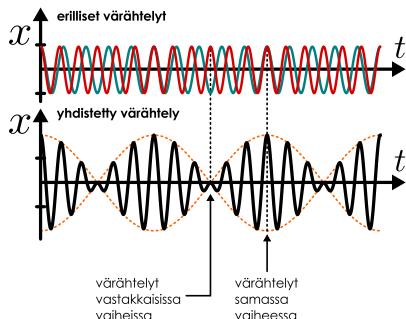
Yhdistelemällä harmonisia värähtelyjä voidaan siis tuottaa jaksollista liikettä, joka ei ole harmonista. Täsmälleharmonisten värähtelyjen yhdistemä on harmonista *vain* jos värähtelyillä on täsmälleen sama taajuus. Harvoin kuitenkaan värähtelyillä on *täsmälleen* samat taajuudet. Tutkimme seuraavaksi, miten yhdistetty värähtely poikkeaa puhtaasta harmonisesta liikkeestä, jos alkuperäisten värähtelyjen taajuudet ovat hyvin lähellä toisiaan.

Kuvassa 14.17 (a) on esitetty kuvaajat kahdelle lähes samantaajuiselle värähtelijälle sekä näiden yhdistelmälle. Yhdistetty värähtely (musta käyrä) muistuttaa harmonista värähtelyä, jonka taajuus on likimain sama kuin alkuperäisten värähtelijöiden taajuus. Yhdistetyn värähtelijän *amplitudi* kuitenkin niihin ikään värähtelee. Kuvassa tästä amplitudia on kuvattu oranssilla käyrällä, jota kutsutaan *verhokäyräksi*. Signaalinkäsittelyssä sanotaan, että verhokäyrä *moduloi* mustaa käyrää säätelemällä sen korkeutta. Fysiikassa tästä ilmiötä, jossa kahden lähes samantaajuisen värähtelyn yhdistelmän amplitudi vaihtelee, kutsutaan *huojunnaksi*.

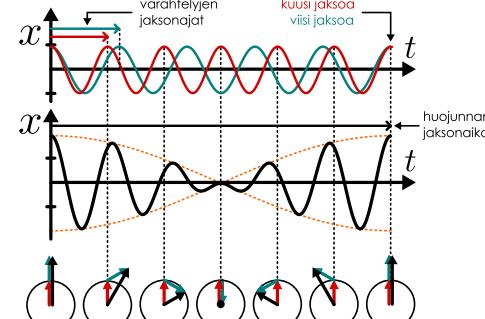
Huojunnan dynamiikka näkyy paremmin kuvassa 14.17 (b), jossa aika-akselia on venytetty kattamaan täsmälleen yhden huojuntajakson. Alkuperäisten värähtelijöiden ollessa samassa vaiheessa yhdistetyn värähtelijän amplitudi on suuri ja vastaavasti värähtelijöiden ollessa vastakkaisissa vaiheissa yhdistetty amplitudi on pieni. Koska alkuperäisillä värähtelijöillä on hieman eri taajuudet, ne ajautuvat ajan kuluessa eri vaiheisiin. Niinpä yhdistetyn värähtelyn amplitudi vaihtelee suuren ja pienen välillä. Huojunnan jaksonaika on huomattavasti pidempi kuin alkuperäisten värähtelyjen jaksonajat eli toisin sanoen huojuntataajuus on alkuperäisten värähtelijöiden taajuuskoria pienempi. Esimerkissä punaisella piirretty värähtelijä ehti käymään kuusi värähdysjaksoa yhden huojuntajakson aikana.

Kuva 14.17: Lähes samantaajuiset värähtelyt johtavat yhdistettynä huojuntaan eli yhdistetyn värähtelyn amplitudin värähtelyyn.

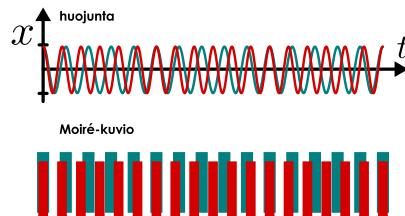
(a) Kahden värähtelijän kuvaajat ja näiden yhdistelmän kuvaaja.



(b) Yksi huojuntajakso.



(c) Kahden erilevyisen viivaston yhdistäminen tuottaa tummia ja vaaleita alueita.



Kuvan on myös merkity väärähtelyjen vaiheenosottimet niinä hetkinä, joina punaisella piirretty väärähtelijä on käynyt täsmälleen yhden jakson. Toinen, turkoosilla piirretty väärähtelijä väärähtelee hieman punaista väärähtelijää hitaan ja sen vaiheenosotin kiertää punaista hitaan. Toisin sanoen turkoosi vaiheenosotin jää punaisesta jälkeen. Kun punainen nuoli on pyörähtänyt yhden kokonaisen kierroksen, turkoosi nuoli on ehtinyt kääntyä vasta vajaan kierroksen. (Muista, että valitsimme vaiheenosottajien pyörivän positiiviseen kiertosuuntaan vastapäivään.) Jokaisella kieroksella turkoosi nuoli jää yhä enemmän jälkeen, kunnes lopulta nuolet osoittavat jälleen samaan suuntaan, koska *punainen nuoli on kiertänyt yhden kierroksen enemmän*. Kuvan esimerkissä tämä tapahtuu, kun punainen väärähtelijä on ehtinyt käydä kuusi jaksoa ja turkoosi viisi eli täsmälleen yhden jakson vähemmän. Jos alkuperäisten väärähtelijöiden taajuudet ovat  $f_{\text{hidas}}$  ja  $f_{\text{nopea}}$ , ne osuvat samaan vaiheeseen jaksollisesti *huojuntataajuudella*

$$f_{\text{huojunta}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}, \quad (14.73)$$

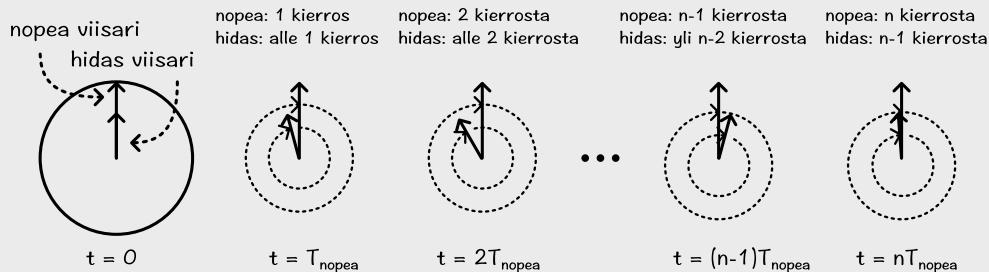
mikä osoitetaan esimerkissä 14.5.

### esimerkki 14.5

### Rikkinäinen kello

Eräässä rikkinäisessä kellossa kaksi viisaria kiertää kellotaulua nopeasti. Toinen viisareista liukkuu hieman toista nopeammin. Nopeamman viisarin kiertoaika on  $T_{\text{nopea}}$  ja hitaan  $T_{\text{hidas}}$ . (a) Kuinka kauan kestää, että nopeampi viisari ohittaa hitaan kieroksella? (b) Nopeampi viisari ohittaa hitaan säännöllisesti. Mikä on ohitusten taajuus?

**TILANNE** Kellon viisarit vastaavat kahden likimain samantajuisen väärähtelijän vaiheenosottimia. Kyseessä on siis samanlainen tilanne kuin kuvassa 14.17. Merkitään aikaa, jonka jälkeen viisarit ovat jälleen samansuuntaiset,  $T_{\text{ohitus}}$ , ja nopean viisarin tekemien kierosten määrää tässä ajassa  $n$ .



**SUUNNITELMA** Oletetaan viisarien olevan aluksi samansuuntaiset. Kun nopea viisari on kiertänyt yhden kierroksen, hidas viisari on hieman sitä jäljessä. Hidas viisari jää jokaisella kieroksella lisää jälkeen, jolloin lopulta nopea viisari ohittaa sen kieroksella. Jos viisarit ovat likimain yhtä nopeita, nopeampi viisari joutuu kiertämään monta kierrosta ennen kuin se tavoittaa hitaan viisarin. Kierrosten lukumäärän ei tarvitse olla kokonaisluku, sillä voi aivan hyvin käydä niin, että nopea viisari kiertää esimerkiksi  $n = 10.4$  kierrosta samassa ajassa kuin hidas viisari kiertää  $n - 1 = 9.4$  kierrosta. Toisin sanoen viisareiden ei tarvitse osoittaa alkuperäiseen suuntaan niiden jälleen kohdattessa. Joka tapauksessa nopeampi viisari tavoittaa hitaan täsmälleen silloin kun hidas viisari on kiertänyt yhden kierroksen vähemmän kuin nopea. Nopea viisari siis tekee tässä ajassa  $n$  kierrosta ja hidas  $n - 1$ , ja tähän kuluu kaikkiaan siis aikaa

$$T_{\text{ohitus}} = nT_{\text{nopea}} = (n - 1)T_{\text{hidas}}. \quad (14.74)$$

**RATKAISU** Yhtälöstä (14.74) voidaan edelleen ratkaista

$$n = \frac{T_{\text{hidas}}}{T_{\text{hidas}} - T_{\text{nopea}}}. \quad (14.75)$$

Sijoittamalla tämä tulos takaisin lausekkeen (14.74) alkuosaan saadaan ajaksi

$$T_{\text{ohitus}} = \frac{T_{\text{nopea}}T_{\text{hidas}}}{T_{\text{hidas}} - T_{\text{nopea}}}. \quad (14.76)$$

Ottamalla tästä puolittain käänteisluvut voidaan tulos kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{T_{\text{ohitus}}} = \frac{1}{T_{\text{nopea}}} - \frac{1}{T_{\text{hidas}}}. \quad (14.77)$$

Taajuuden ja jaksonajan yhteyden  $f = 1/T$  perusteella tämä on kuitenkin sama asia kuin

$$f_{\text{ohitus}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}. \quad (14.78)$$

**ARVIOINTI** Täytyy olla  $T_{\text{hidas}} > T_{\text{nopea}}$  ja  $f_{\text{hidas}} < f_{\text{nopea}}$ , joten lasketut ratkaisut ovat positiivisia kuten pitääkin. Kuvassa 14.17 on  $n = 6$ . Jos nopeamman väärähtelyn jaksonaika on esim.  $T_{\text{nopea}} = 1.0$  s, täytyy hitaan väärähtelyn jaksonajan olla  $T_{\text{hidas}} = \frac{6}{5}T_{\text{nopea}} = 1.2$  s ja huojunnan jaksonajan  $T_{\text{ohitus}} = 6.0$  s, mikä on sopusoinnussa tässä laskettujen tulosten kanssa.



**14.23** Millaista yhdistetty värähtely on, jos alkuperäisten värähtelyiden taajuudet ovat täsmälleen samat? Miten huojunta käyttäätyy, kun alkuperäisten värähtelyiden taajuudet poikkeavat toisiaan hyvin vähän? Mitä tapahtuu, kun taajuudet lähestyvät toisiaan?

Huojunnan voi kuulla. Jos korvaan saapuu kaksi lähes samantaaajuista ääntä, niiden yhdistelmä saa korvan tärykalvon värähtelemään ja värähtelyn amplitudi vaihtelee huojuntataajuudella. Tavalliset ihmisen kuulemat äänet saavat korvan värähtelemään satojen tai tuhansien hertsien taajuuksilla. Niinpä jos korvaan saapuu esimerkiksi 399.9 Hz ja 400.1 Hz taajuiset äänet, nämä saavat tärykalvon värähtelemään 400 kertaa sekunnissa huojuntataajuuden ollessa 0.2 Hz. Ääni aistitaan niin, että korvaan saapuvien värähdysten *amplitudi* havaitaan äänen voimakkuutena (suuri amplitudi vastaa voimakasta ääntä) kun taas *taajuus* määritetään äänen *korkeuden* (suuri taajuus vastaa korkeaa ääntä). Aistimus on tällöin sellainen, että kuulija kuulee 400 Hz taajuutta vastaavan äänen, ja tämän äänen voimakkuus vaihtelee viiden sekunnin jaksoissa.

Huojuntaa vastaavan ilmiön voi myös nähdä kuten kuvassa 14.17 (c). Asettamalla pääallekäin kaksi läpinäkyvää kuvioita, joissa on säennöllisin mutta hiukan eripituisin välein raitoja, kuvioiden nähdään yhdessä muodostavan säennöllisin välimatkoineen tummia ja vaaleita alueita. (Ilmiö on helppo nähdä esimerkiksi katsottaessa sopivan aidan tai säleikön läpi, jos niiden takana on jokin raidallinen esine.) Tätä kutsutaan *moiré-kuvioksi*, ja kyseessä on oleellisesti aivan samanlainen ilmiö kuin huojunnassa vaikkei asiaan liitykään liikettä. Kuvaan vaaleat alueet syntyvät kuvioiden ollessa "samassa vaiheessa", jolloin toinen kuvioista on piilossa toisen takana ja kuviossa olevat aukot ovat pääallekäin. Tummat alueet puolestaan syntyvät kuvioiden ollessa "vastakkaisissa vaiheissa", jolloin yhden kuvion aukot peittivät toisen kuvion alle.



**14.24** Vastaako moiré-kuvion tumma alue huojunnassa suuren vai pienen amplitudin aluetta?

## Harmoninen analyysi

Olemme nyt päättelleet, että kahden samantaajuisen harmonisen liikkeen yhdistelmä on edelleen harmonista liikettä samalla taajuudella. Jos taajuudet poikkeavat hieman toisistaan, yhdistetty liike on likimain harmonista, mutta huojunnan vuoksi värähtelyn amplitudi muuttuu. Toisaalta kuvan 14.16 perusteella kahden harmonisen värähtelyn yhdistelmä ei ole harmonista, jos värähtelyjen taajuudet poikkeavat selvästi toisistaan. Harmonisia värähtelyitä yhdistämällä voidaan siis tuottaa myös muutakin kuin harmonista liikettä. Tähän asti olemme tutkinneet millaista liikettä kahden harmonisen värähtelyn yhdistäminen tuottaa, mutta onkin aiheellista pohtia päinvastoin *millaista liikettä voidaan kuvata yhdistämällä harmonisia värähtelyjä*. Ehkä hieman yllättäen osoittautuu, että *kaikki jaksolliset liikkeet voidaan esittää harmonisten värähtelyiden yhdistelmänä*. Tämän tuloksen perusteella pystymme kuvamaan *mitä tahansa värähtelyä* kunhan osaamme kuvata harmonista liikettä.

Emme todista tätä väitettä. Kuitenkin *Fourier'n lauseena* tunnettu matemaattinen sääntö sanoo, että *mitä tahansa jaksollinen funktio voidaan esittää sinimuotoisten funktioiden summana* eli **Fourier-sarjana**. Jos meillä siis on jaksollinen funktio  $x(t)$ , joka kuvaa kappaleen liikettä, tämä funktio voidaan aina kirjoittaa summana

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t]. \quad (14.79)$$

Vaihtoehtoisesti tämä sarja voidaan esittää esimerkiksi muodossa

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (14.80)$$

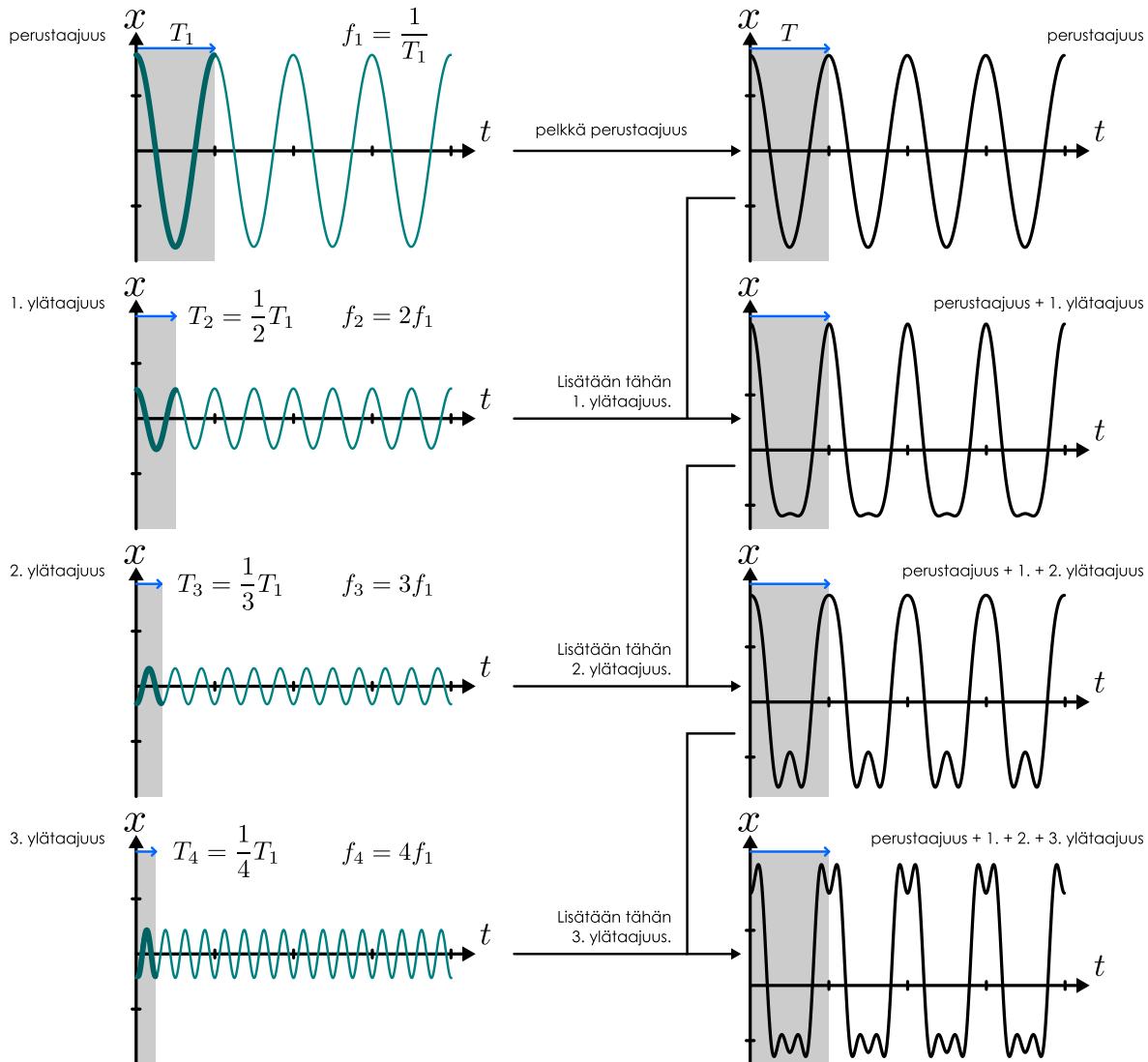
koska kahden harmonisen funktion summa on edelleen harmoninen, *jos niiden taajuudet ja aallonpituudet ovat samat*. Jos nimittäin  $A^2 = a^2 + b^2$  ja  $\tan \phi = -b/a$ , pätee  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , minkä perusteella yllä esitetty summat ovat sama asia.



**14.25** Piirrä kuvan 14.14 kaltainen vaiheenosoitinkuvio harmonisten funktioiden  $3 \cos(\omega t)$  sekä  $4 \sin(\omega t) = 4 \cos(\omega t - \pi/2)$  yhdistelmälle. Määritä kuvion avulla vakiot  $A$  ja  $\phi$  niin, että pätee  $3 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .

Erityisesti jos funktio  $x(t)$  jaksonaika on  $T$ , summa voidaan kirjoittaa käyttäen ainoastaan sinimuotoisia funktioita, joiden jaksonajat ovat  $T_1 = T$ ,  $T_2 = T/2$ ,  $T_3 = T/3$  jne. Näin siksi että jos jaksollinen funktio palaa takaisin lähtöarvoonsa ajan  $T_n = \frac{1}{n}T$  jälkeen, funktio palaa takaisin lähtöarvoonsa myös ajan  $T$  välein. Mikä tahansa tällaisten funktioiden summa on siten jaksollinen jaksonajalla  $T$ . Sama asia voidaan ilmaista myös niin, että ensimmäisen summattavan funktion taajuus on  $f_1 = 1/T_1$ , jolloin toisen funktion taajuus

Kuva 14.18: Mielivaltainen jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten lükkien yhdistelmänä.



on  $f_2 = 2f_1$ , kolmannen  $f_3 = 3f_1$  jne. (Itse asiassa funktio  $x(t)$  voidaan koostaa yhdistämällä harmonisia värähtelyitä myös siinä tapauksessa, että funktio ei ole jaksollinen. Tällöin kuitenkin summassa voi esiintyä mitä tahansa taajuuksia.) Tällaisten harmonisten värähtelyiden yhdistelmän taajuus on sama kuin summan ensimmäisen värähtelyn taajuus, minkä vuoksi tästä ensimmäistä taajuutta kutsutaakin värähtelyn **perustajuuudeksi**. Seuraavat taajuudet ovat **harmonisia ylätajuuksia**, ja ne ovat siis perustajuuuden monikertoja. Yhdessä näitä sinimuotoisia värähtelyjä kutsutaan jaksollisen liikkeen **harmonisiksi komponenteiksi**.

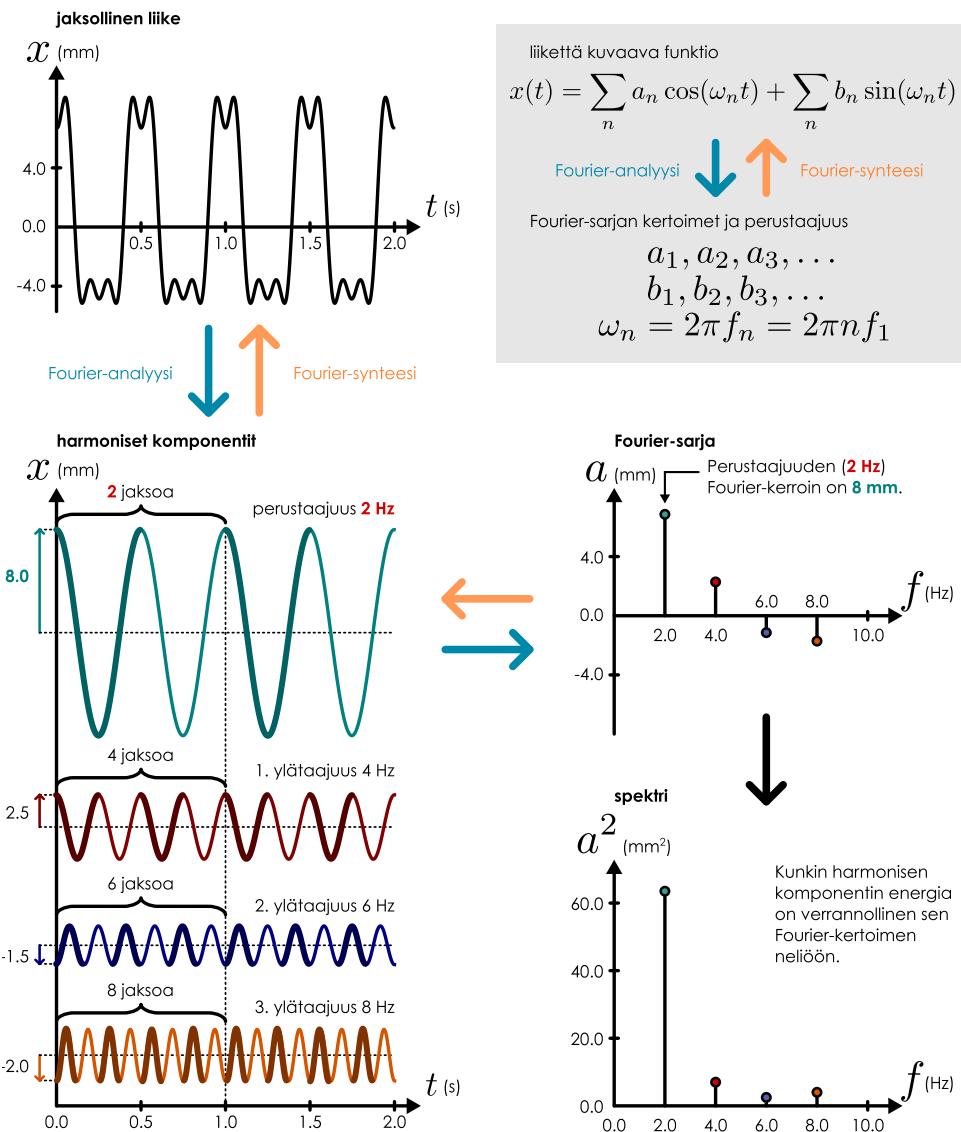
Kuvassa 14.18 on esitetty esimerkkinä neljän harmonisen värähtelyn yhteenlasku kuvaajina. Kuvan vasemalla puolella on summattavien funktioiden kuvaajat ja kuvan oikealla puolella on näiden summa, kun funktiot lasketaan yhteen yksi kerrallaan. Perustajuuudella värähtelevän funktion jaksonaika on  $T_1$ , ensimmäisen ylätajuuden puolet tästä jne. Funktioiden summan taajuus on kuitenkin aina sama kuin värähtelyn perustajuuus  $f = f_1$  ja sen jaksonaika on  $T = T_1$ .

Yhtälössä (14.79) esiintyvät kertoimet  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ja  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ovat funktion **Fourier-kertoimet**. Jos tuntemme jaksollisen funktion Fourier-kertoimet ja perustajuuuden  $f_1$ , voimme laskea funktion arvon minä tahansa ajan hetkenä Fourier-sarjan (14.79) avulla. Myös käänneinen on totta: olipa meille *millainen tahansa* jaksollinen funktio  $x(t)$ , on olemassa Fourier-kertoimet, joiden avulla funktio voidaan kirjoittaa Fourier-sarjana. Lisäksi osoittautuu, että nämä kertoimet ovat **yksikäsiteiset**, eli on olemassa vain yhdet kertoimet, joilla Fourier-sarja toimii. Toisin sanoen kutakin jaksollista funktiota vastaa täsmälleen yksi Fourier-kertoimien joukko, ja jokaista Fourier-kertoimien joukkoa vastaa täsmälleen yksi jaksollinen funktio. Fourier-kertoimien sisältyy yhtä paljon informaatiota kuin alkuperäiseen funktioon.

Fourier-kertoimien selvittämistä kutsutaan **Fourier-analyysiksi**, ja siinä on kyse jaksollisen funktion ja-

## JAKSOLLINEN LIIKE

Kuva 14.19: Jaksollisen liikkeen jakoa harmonisiin komponentteihin kuva Fourier-sarja. Spektri puolestaan kertoo harmonisten komponenttien suhteelliset energiat.



kamisesta *harmonisiin komponentteihin*. Käänteinen operaatio eli funktion rekonstruointi Fourier-kertoimien perusteella on puolestaan *Fourier-synteesiä*. Tämä on havainnollistettu kuvassa 14.19. Samassa kuvassa on esitetty Fourier-kertoimet myös graafisena esityksenä kuvajana, jonka vaaka-akselilla on kunkin Fourier-sarjassa esiintyvän komponentin taajuus ja pystyakselilla komponenttien Fourier-kertoimet. Jos Fourier-kerroin on positiivinen, se on sama kuin kyseisen komponentin amplitudi. Kuitenkin toisin kuin amplitudi, Fourier-kertoimet voivat olla myös negatiivisia. Tässä esimerkissä kaikki harmoniset funktiot ovat kosinifunktioita, joten ne vastaavat Fourier-kertoimia  $a_1, a_2, a_3$  sekä  $a_4$ . Kertoimet  $b_n$  ovat kaikki nollia.



- 14.26 (a) Mitä ovat funktion  $x(t) = (1.1 \text{ m}) \cos[(0.6 \text{ s}^{-1})t] + (0.3 \text{ m}) \cos[(1.2 \text{ s}^{-1})t]$  Fourier-kertoimet ja perustaaajuus? (b) Funktion Fourier-kertoimet ovat  $a_0 = 0.2 \text{ m}$ ,  $a_1 = 2.1 \text{ m}$  sekä  $a_2 = 1.3 \text{ m}$  (muut nollia) ja perustaaajuus  $f_1 = 2.0 \text{ Hz}$ . Mikä on funktion arvo ajan hetkellä  $t = 0.25 \text{ s}$ ?

Fourier-analyysi on erittäin voimakas matemaattinen työkalu, jolla on paljon sovelluksia sekä fysiikassa että teknologiassa. Jätämme Fourier-sarjojen matemaattisen teorian kuitenkin tässä vaiheessa matematiikan kursseille ja tarkastelemme sen sijaan tämän tuloksen fysikaalista merkitystä. Tulos on merkittävä ensinnäkin siksi, että olemme tässä luvussa jo oppineet kuvamaan ideaalista harmonista väärähtelyä. Jos siis joudumme analysoimaan epäharmonista jaksollista liikettä, Fourier-sarjojen avulla voimme aina kuvata tämän liikkeen harmonisten väärähtelyjen summaa, ja osaamme analysoida tämän summan jokaisen termin käyttäytymisen erikseen. Myös aaltoliikkeen tapauksessa luvussa 15 nähdään, että sinimuotoisten aaltojen käyttäytyminen

on helppo kuvata ja joskus muiden aaltojen liikkeen ymmärtäminen vaatii niiden esittämistä sinimuotoisten aaltojen summana. Toinen syy Fourier-analyysin tärkeyteen on se, että luonnossa on monia prosesseja, jotka perustuvat harmonisten komponenttien erotteluun. Esimerkiksi *kuulo* toimii näin. Korvaan saapuvat äänet saavat tärykalvon värähtelemään yhtä aikaa useilla taajuksilla ja tuottaessaan kuuloaistimuksen aivot tekevät tälle värähtelylle Fourier-analyysin. Toisin sanoen aivot tunnistavat mitä taajuksia korvaan saapuneissa värähtelyissä on sekä laskevat näiden värähtelyjen amplitudit. Eri taajuudet kuullaan äänien korkeusina ja amplitudien neliöt voimakkuuksina. Erityisesti aivot pystyvät näin erottelemaan erilaiset äänet kuten musiikin, puheen ja ympäristön äänet toisistaan. Jos tärykalvon värähtelyä ei voisi erottella harmonisiin komponentteihin, äänet sekoittuisivat emmekä voisi erottaa eri lähteistä tulevia äniä toisistaan.

Fourier-kertoimien etumerkkejä *ei voi kuulla*. Ne voidaan toki määrittää esimerkiksi mittaamalla ilman värähtelyä mikrofonilla ja analysoimalla värähtelyliiken tietokoneella, mutta kuulo erottelee vain harmonisten komponenttien amplitudit — ei niiden vaiheita. Tarkemmin sanoen äänensä kuultavan värähtelyn voimakkuus riippuu värähtelyn *energiasta*. Kunkin harmonisen komponentin energia on puolestaan verrannollinen sen *amplitudin neliöön* joka on sama kuin *Fourier-kertoimen neliö*. Äänensä tapaan myös valo on aaltoliikettä, ja valostakin voidaan erottella eri taajuudella värähtelevät komponentit eli *eri värit*. Käytännössä tämä voidaan tehdä niin, että valkoisen valon annetaan kulkea prisman tai hilan läpi, jolloin valo hajaantuu eri suuntiin kulkeviin eri väreihin. (Miksi näin tapahtuu selitetään luvuissa 15 ja 16.) Kunkin värin *kirkkaus* on tällöin verrannollinen kyseisen harmonisen komponentin energian eli *amplitudin neliöön*.

Nämä esimerkit osoittavat, että tavallisesti värähtelyn vaikutus riippuu sen sisältämien harmonisten komponenttien taajuudesta ja energiasta. Niinpä Fourier-kertoimien  $a_n$  sijaan monimutkaisista yhdistetyistä värähtelyistä kuvataan usein ilmoittamalla mitä taajuksia värähtely sisältää ja mitkä ovat näiden taajuksien amplitudien neliöt,  $a_n^2$ , kuten kuvassa 14.19. Tällästa esitystä kutsutaan **spektriksi**. Spektri siis kertoo sekä taajuudet, joita yhdistämällä kyseinen jaksollinen funktio on muodostettu, että näihin taajuksiin liittyvät energiat.



**14.27** Kirjoita omiin sanoisiin tiivistelmä yhdistetyistä värähtelyistä. Millainen liike saadaan yhdistämällä kaksi värähtelijää, joilla on sama taajuus, lähes sama taajuus tai selvästi erilainen taajuus? Miten näitä tilanteita kuvataan vaiheenoitimi ja Fourier-analyysin avulla?

## 14.5 Resonanssi

Luvun alussa analysoimme harmonista värähtelyä, kun värähtelijää ei kohdistu lainkaan dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Tällöin värähtelevän systeemin mekaaninen energia on vakio. Makroskooppisille kappaleille tämä ei kuitenkaan voi koskaan olla täsmälleen totta, sillä dissipatiivisia vuorovaikutuksia kuten kitkaa ja ilmanvastusta ei voi koskaan täysin välittää. Päättämekin värähtelyliikkeen tarkastelun tutkimalla kuinka värähtelijät käyttäytyvät, kun niihin vaikuttaa tällaisia vuorovaikutuksia.

### Vaimennettu värähtely

Jos harmoniseen värähtelijään kohdistuu dissipatiivinen vuorovaikutus kuten ilmanvastus, tämä vuorovaikutus siirtää värähtelijän mekaanista energiota ympäristöön värähtelijän liikkessa. Tällöin värähtely vähitellen hidastuu ja sen amplitudi pienenee, jolloin värähtelijä kulkeutuu kohti tasapainopisteitä. Tätä kutsutaan **vaimennetuksi värähtelyksi**.

Dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat tuottaa erilaisia voimia. Esimerkiksi kitkavoiman suuruus ei riipu kappaleen nopeudesta kun taas hitaasti liikkuaan kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus riippuu. Mitä nopeammin kappale nimitään liikkuu, sitä voimakkaammin ilmanvastus jarruttaa sen liikettä. Kitka ja ilmanvastus siis vaimentavat värähtelyä eri tavoin, mutta lopputulos on kummankin vuorovaikutuksen tapauksessa sama: värähtelijä pysähtyy. Analysoimme tässä tilanteen, jossa värähtelyä vaimentaa nimenomaan ilmanvastus, koska tällaiset nopeudesta riippuvat vastusvoimat ovat usein värähtelyä vaimentavista vuorovaikutuksista merkittävämmät.

Ilmanvastus kohdistaa liikkuaan kappaleeseen voiman, jonka suunta on kappaleen liikettä vastaan ja jonka suuruus on suoraan verrannollinen kappaleen vauhtiin (ainakin vauhdin ollessa pieni). Yhtälönä tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_{x,\text{ilmanvastus}} = -bv_x = -b \frac{dx}{dt}, \quad (14.81)$$

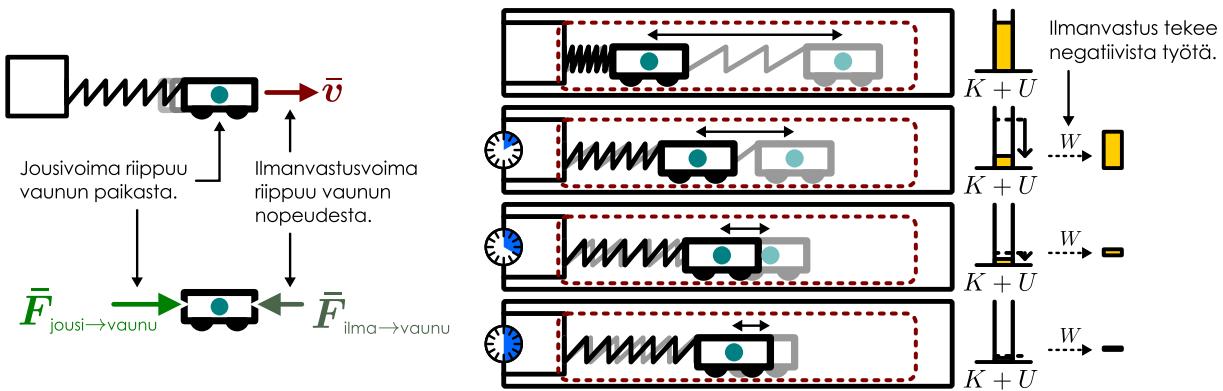
missä  $b$  on *vaimennuskerroin*, joka riippuu mm. kappaleen koosta ja muodosta. Jos kyseessä on esimerkiksi jouseen kiinnitettävä vaunu, vaunuun kohdistuva kokonaivoima on jousivoiman ja ilmanvastusvoiman summa, ja kappaleen kiertyvyys on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonais}} = \frac{1}{m} (F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}} + F_{x,\text{ilma} \rightarrow \text{vaunu}}). \quad (14.82)$$

## JAKSOLLINEN LIIKE

Kuva 14.20: Jouseen kytketyn vaunun käytös ilmanvastuksen ollessa merkittävä. Ilmanvastuksen tekemä työ siirtää värähtelijän energiota ympäristöön.

(a) Vaimennettuun värähtelijään kohdistuvat voimat. (b) Värähtelyn amplitudi pienenee mekaanisen energian vähentyessä.



Tähän voidaan sijoittaa kiihtyvyyden määritelmä paikan derivaattana sekä voimien lausekkeet, jolloin päädytään muotoon

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x. \quad (14.83)$$

Tämä on *vaimennetun värähtelijän likeyhtälö*.

Jos vaimennuskerroin on pieni, kappale värähtelee mutta värähtelyn amplitudi pienenee. Differentiaaliyhälön ratkaisuna saadaan tällöin

$$x(t) = A e^{-t/(2\tau)} \cos(\omega_{vaimennettu} t + \phi_{alku}), \quad (14.84)$$

missä kosinifunktio kuvailee värähtelyä ja eksponenttifunktio amplitudin vaimentumista (ks. esimerkki 14.6). Voimmekin pitää funktiota

$$A_{vaimennettu} = A e^{-t/(2\tau)} \quad (14.85)$$

vaimennetun värähtelyn amplitudina. Värähtelijän kulmataajuus ratkeaa likeyhtälöstä, ja se on

$$\omega_{vaimennettu} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (14.86)$$

Amplitudifunktio puolestaan sisältää *aikavakion*, jonka arvoksi ratkeaa myös likeyhtälöstä

$$\tau = \frac{m}{b}. \quad (14.87)$$

Vakiot  $A$  ja  $\phi_{alku}$  eivät ratkea likeyhtälöstä, vaan nämä riippuvat värähtelijän alkutilasta kuten vastaavat suuret vaimentamattomakin värähtelijän tapauksessa.



**14.28** Laske vaimennetun värähtelijän paikan (14.84) ensimmäinen ja toinen derivaatta ajan suhteeseen (nopeus ja kiihtyvyys). Sijoita nämä värähtelijän likeyhtälöön (14.83) ja osoita, että yhtälö todella toteutuu.

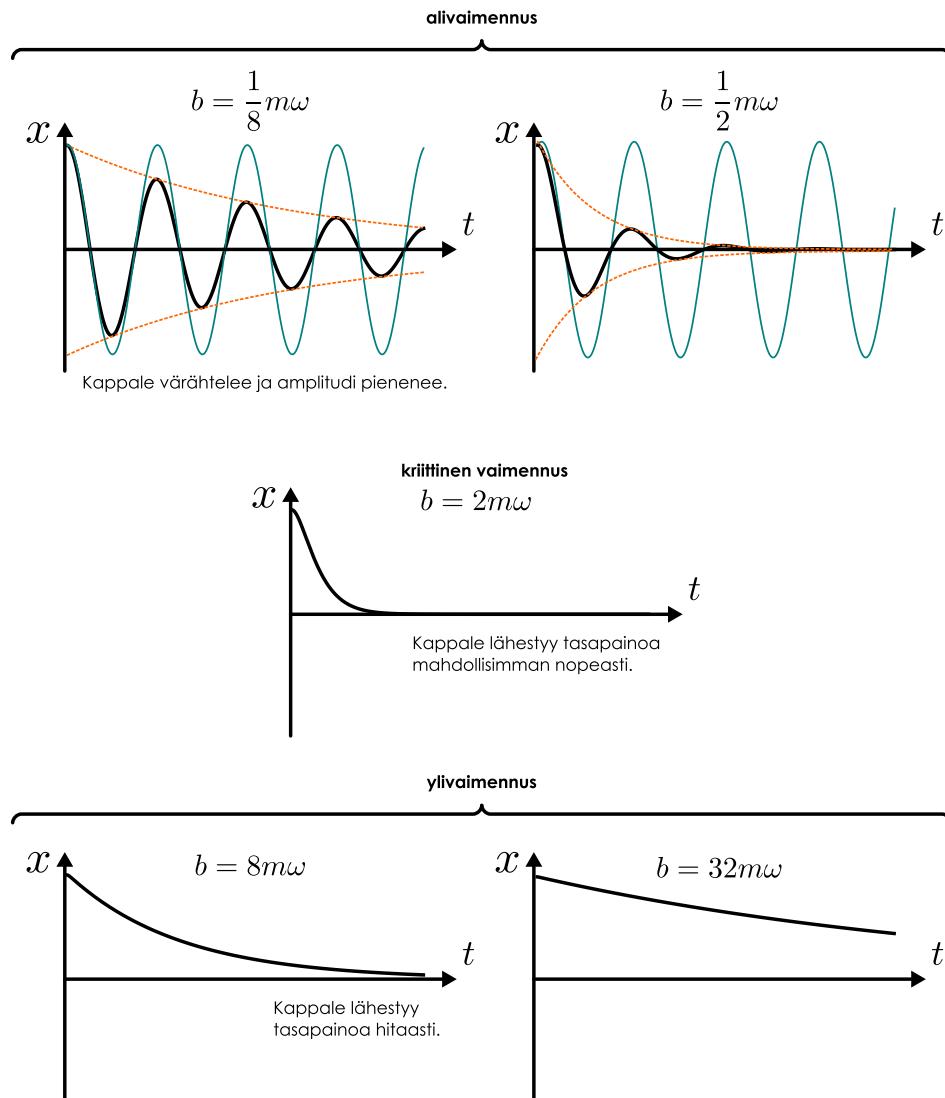
Oskillaattorin energia on vaimennettunakin likimain verrannollinen sen amplitudin neliöön, joka siis pienenee eksponentiaalisesti. Niiinpä oskillaattorin energiota ajan funktiona kuvaa likimain lauseke

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_{vaimennettu}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 e^{-t/\tau} = E_{alku} e^{-t/\tau}. \quad (14.88)$$

Värähtelijän mekaaninen energia vähentyy siis likimain eksponentiaalisesti niin, että aina ajan kuluessa jakson  $\tau$ , energia putoaa osuuteen  $e^{-1} \approx 0.37$  alkuperäisestä arvostaan. Tämä ei ole täsmälleen totta, koska mekaaninen energia kuluu ilmanvastuksen tehdessä kappaleeseen negatiivista työtä, ja tämän työn teho riippuu kappaleen vauhdista. Niiinpä värähtelijä menettää energiota suurella teholla liikkuesseen nopeasti ja pienellä teholla värhdyslükkeen hitaassa vaiheessa. Värähtelijän energia kuitenkin pienenee *keskimäärin* funktion (14.88) kuvaamalla tavalla.

Edellistä tapausta, jossa vaimennuskerroin  $b$  on pieni, kutsutaan *alivaimennukseksi*. Tällainen pieni vaimennus ei estä värähtelijää liikkumasta edestakaisin, mutta se johtaa siis ajan myötä pienenevään amplitudiin. Mitä suurempi vaimennuskerroin on, sitä nopeammin värähtelijän liike-energia muuttuu lämpöenergiaksi ja

Kuva 14.21: Vaimennetun värähtelijän paikka ajan funktiona vaimennuskertoimen eri arvoilla, kun värähtelijä on aluksi paikoillaan. Alivaimennetuissa tapauksissa turkoosi käyrä kuvaavat vastaan vaimentamattoman värähtelijän liikettä ja oranssi käyrä vaimennetun värähtelijän amplitudia.



sitä nopeammin värähtelyn amplitudi pienenee. Lausekkeen (14.86) mukaan vaimennus myös pienentää kulmataajuutta. Jos vaimennuskerroin on nolla, kyseessä on vaimentamaton värähtelijä ja  $\omega_{vaimennettu} = \omega$  kuten pitääkin. Vaimennuskertoimen kasvaessa kulmataajuus kuitenkin pienenee, mikä tarkoittaa siis jaksonajan pitenevän. Nämä käy siksi, että ilmanvastus pyrkii jatkuvasti jarruttamaan värähtelijän liikettä, ja niinpä värähtely hidastuu, jos ilmanvastus on merkittävä.

Vaimennuskertoimen ollessa  $b = \sqrt{4km} = 2m\omega$  värähtelyn kulmataajuus on lausekkeen (14.86) mukaan *nolla*, eli kappale ei enää värähtele lainkaan, koska ilmanvastus jarruttaa sitä liian voimakkaasti. Tätä tilannetta kutsutaan *kriittiseksi vaimennukseksi*, ja itse asiassa tällöin ratkaisu (14.84) ei enää päde. Tällöin kappale nimitään liikkua kohti tasapainoa ja *jää sinne*. Jos vaimennuskerroin on vielä tätkin suurempi on kyseessä *ylivaimennus*. Tällöinkään kappale ei värähtele vaan liikkua kohti tasapainoa. Värähtelijä lähestyy tasapainosemansa kaikkein nopeimmin vaimennuksen ollessa kriittinen, ja mitä enemmän vaimennuskerroin poikkeaa kriittisestä arvosta, sitä hitaammin värähtelijä lähestyy tasapainoa. Alivaimennuksessa kappale jää värähtelemään tasapainon ympärille joksikin aikaa, koska heikot vastusvoimat kuluttavat värähtelijän mekanista energiota hitaasti. Tällöin tasapainoa lähestytään sitä hitaammin mitä pienempi vaimennuskerroin on. Ylivaimennuksessa vastusvoimat ovat suuret, mutta kappaleen *nopeus* on tällöin pieni, joten tässäkin tapauksessa värähtelijän mekaninen energia muuttuu lämpöenergiaksi hitaasti, ja kappale kulkee kohti tasapainoa sitä hitaammin, mitä suurempi vaimennuskerroin on.

Vaimennusta ei voi makroskoopissa mittakaavassa välittää, mutta sen voimakkuutta voidaan jossakin määrin kontrolloida. Värähtelyyn perustuvissa laitteissa kuten soittimissa värähdysten halutaan kestävän

pitkään, jolloin vaimennuksen pitäisi olla heikkoa ja aikavakion suuri. Sen sijaan esimerkiksi auton jousituksen ei pidä jäädä väärätelemään jokaisen kuopan jälkeen ja niinpä iskunvaimentimissa yritetään päästää lähelle kriittistä vaimennusta, jolloin jousitus palaa tasapainoon mahdollisimman nopeasti.



**14.29** Äänirauta soi taajuudella 262 Hz ja sen väärähtelyn amplitudi putoaa viidessä sekunnissa kolmasosaan. (a) Mikä on ääniraudan aikavakio? (b) Kuinka monta jaksoa äänirauta ehtii väärätelemään sinä aikana kun se menettää 95 % mekaanisesta energiastaan?

### esimerkki 14.6

### Vaimennettu väärähtelijä

**Johda vaimennetun väärähtelijän paikka ajan funktiona.**

**SUUNNITELMA** Vaimennetun väärähtelijän lükeyhtälö on

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx. \quad (14.89)$$

Tehdään ratkaisuyrite  $x = Ae^{ct}$ , sijoitetaan tämä lükeyhtälöön ja ratkaistaan sen perusteella vakio  $c$ .

**RATKAISU** Yritteen derivaatat ovat  $\frac{dx}{dt} = cAe^{ct}$  sekä  $\frac{d^2x}{dt^2} = c^2Ae^{ct}$ , ja näiden sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa yhtälön

$$mc^2 Ae^{ct} = -bcAe^{ct} - kAe^{ct}. \quad (14.90)$$

Tästä voidaan supistaa pois eksponenttifunktio, joten jäljelle jää toisen kertaluvun yhtälö vakiolle  $c$

$$mc^2 + bc + k = 0, \quad (14.91)$$

ja tämän ratkaisut ovat

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \quad (14.92)$$

Nyt on kolme vaihtoehtoa. Jos  $b > \sqrt{4km}$  eli jos vaimennuskerroin on suuri, vakiolla  $c$  on kaksi mahdollista reaaliarvoa. Tällöin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} = A_1 e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4km}}{2m}t} + A_2 e^{-\frac{b+\sqrt{b^2-4km}}{2m}t}, \quad (14.93)$$

missä  $A_1$  ja  $A_2$  ovat alkuehdoista riippuvat vakiot. Tämä on ylivaimennettu väärähtelijä, joka siis lähestyy eksponentiaalisesti tasapainoaa.

Jos  $b = \sqrt{4km}$  eli jos väärähtelijä on kriittisesti vaimennettu, vakiolla  $c$  on vain yksi mahdollinen arvo. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä täytyy olla toinenkin ratkaisu, ja tässä tapauksessa osoittautuu, että  $x = te^{ct}$  on myös yhtälön ratkaisu. (Voit tarkastaa tämän sijoittamalla differentiaaliyhtälöön.) Lükeyhtälön ratkaisu on siis

$$x = A_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + A_2 te^{-\frac{b}{2m}t}. \quad (14.94)$$

Mielenkiintoisin tapaus on  $b < \sqrt{4km}$  eli alikriittinen vaimennus, koska tällöin vakiolla  $c$  on kaksi *kompleksista ratkaisua*

$$c = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (14.95)$$

Kumpikin juuri johtaa loppujen lopuksi samaan fysikaaliseen ratkaisuun, joten voimme tässä valita esimerkiksi plusmerkin. Väärähtelijän paikkaa esittää tällöin funktio  $x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t}$ . Koska kyseessä on kompleksinen ratkaisu, voimme valita myös vakion  $A$  kompleksiluvuksi. Voimme kirjoittaa sen eksponenttimuodossa,  $A = ae^{i\phi_{alku}}$ , jolloin ratkaisuksi saadaan

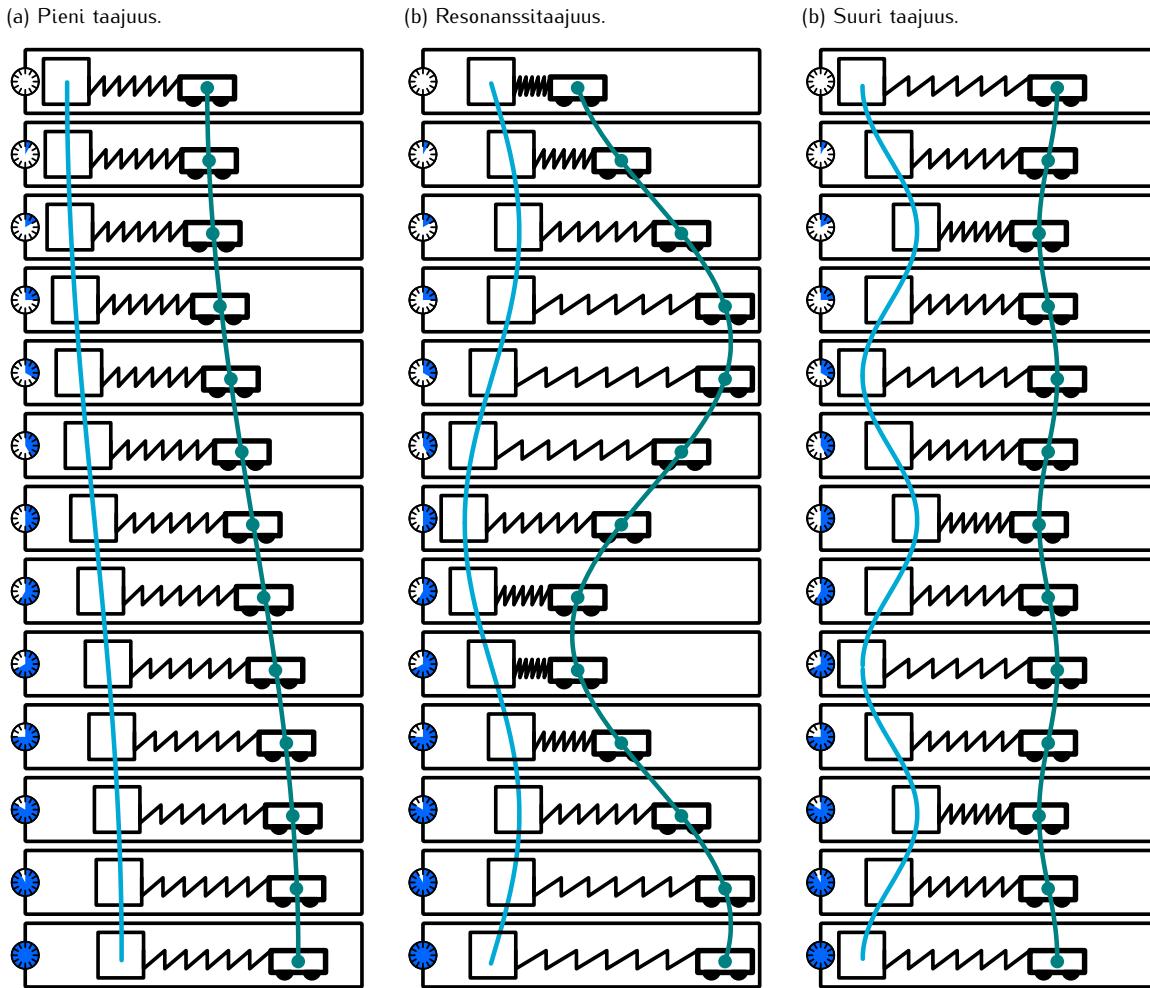
$$x = ae^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t + \phi_{alku}\right)}. \quad (14.96)$$

Kompleksifunktio ei sellaisenaan tietenkään kuvaan väärähtelijän paikkaa, mutta voimme jälleen poimia ratkaisun reaaliosan, joka on myös lükeyhtälön ratkaisu. Siispä todellista väärähtelijää kuvaan reaalifunktio

$$x = ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_{vaimennettu} t + \phi_{alku}), \quad (14.97)$$

missä  $\omega_{vaimennettu} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ . Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleiseen ratkaisuun täytyy kuulua kaksi vapaata parametria, jotka tässä ovat  $a$  sekä  $\phi_{alku}$  joten tämä on yleinen ratkaisu.

Kuva 14.22: Jouseen kiinnitetyn vaunun liike, kun jousen toinen pää on kiinni harmonista liikettä tekevää kappaleessa. Vaunun amplitudi on suuri, jos kappaleen liukkuksen taajuus on lähellä vaunun luonnollista taajuutta.



### Pakotettu väärähtely

Kaikki makroskooppisten kappaleiden väärähtelyt ovat enemmän tai vähemmän vaimennettuja, joten väärähtelemään saatettu kappale ennen pitkää pysähtyy. Monesti kuitenkin väärähtelijöiden halutaan jatkavan väärähtelyään, jolloin niiden väärähtelyä täytyy pitää yllä ulkoisen voiman avulla. Esimerkiksi keinumista voi jatkaa niin pitkään kuin haluaa, vaikka kitka ja ilmanvastus hidastavatkin keinun liikettä, kunhan keinussa ottaa vauhtia. Väärähtelyä on helpoin tuottaa ja ylläpitää väärähtelevällä voimalla, jonka väärähtelytaajuus on mahdollisimman lähellä väärähtelijän omaa luonnollista väärähdystaajuutta, koska väärähtelijän on helpoin vastaanottaa energiaa juuri tällä taajuudella. Esimerkiksi keinun liike jää kovin pieneksi, jos vauhtia yrittää ottaa liian nopealla tai hitaalla taajuudella, mutta täsmälleen keinun luontaisella taajuudella otettu vauhti saa keinun heilahtelemaan yhä suuremmalla amplitudilla. Tätä kutsutaan **resonanssiksi** väärähtelyn tuottajan ja energian vastaanottavan väärähtelijän välillä.

Resonanssi toimii väärähtelyn vahvistajana, sillä pienin väärähtely voi resonoidessaan siirtää ajan kullessa suuren määrän energian toisiin väärähtelijöihin. Se myös on erittäin yleinen ilmiö, eikä kyseessä ole vain mekaanisten väärähtelijöiden ominaisuus, vaan resonanssia tapahtuu kaikissa väärähtelevissä systeemeissä virrapiireistä atomeihin. Resonanssi voi olla sekä hyödyllinen että haitallinen. Esimerkiksi pyörivän moottorin tärinä voi resonoida muiden kappaleiden kanssa saaden ne väärähteleämään ja pitämään ääntä. Voimakas resonanssi voi saada kappaleet väärähteleämään jopa niin voimakkaasti, että ne rikkoutuvat. Toisaalta resonanssin avulla voidaan vahvistaa väärähtelyjä, ja esimerkiksi kuultavat äänet syntyvät yleensä jonkinlaisen resonanssin kautta. Resonanssin avulla voidaan myös poimia useita taajuuksia sisältävästä spektristä yksittäisiä taajuuuksia, koska resonanssissa vain resonanssitaajuutta lähellä olevat taajuudet vahvistuvat. Monien instrumenttien ja mittalaitteiden toiminta perustuukin resonanssiin.

Totesimme aikaisemmin, että harmonisessa liikkeessä kappale väärähtelee aina samalla taajuudella riippumatta väärähtelyn vaiheesta ja amplitudista. Tämä on kuitenkin totta vain, jos kappale päästetään liikkeelle ja sen annetaan väärhdellä itsekseen. Jos kappaleen liikettä jatkuvasti ohjataan ulkoa, se voidaan luonnollisesti

## JAKSOLLINEN LIIKE

saada liikkumaan miten tahansa. Eritäisesti jos kappaleen värähtelyä ylläpitävän ulkoisen voiman suuruus ja suunta vaihtelee harmonisesti, kappale alkaa värähtelemaan *samalla taajuudella kuin ajava voima riippumatta siitä, mikä sen oma luonnollinen värähtelytaajuus on*. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi kulmataajuudella  $\omega_{\text{ulkoinen}}$  pyörivään moottoriin koskevat kappaleet alkavat värähtelemaan myös kulmataajuudella  $\omega_{\text{ulkoinen}}$  riippumatta kappaleiden ominaisuuksista. Kappaleiden lükettä kutsutaan tällöin **pakotetuksi värähtelyksi**, koska ulkoinen voima pakottaa ne värähtelemaan tietyllä taajuudella.

Pakotettua värähtelyä on havainnollistettu kuvassa 14.22, jossa vaunu on kiinnitetty jousella harmonisesti liikkuvaan kappaleeseen. Oletetaan, että tämä toinen kappale on paljon vaunua raskaampi tai osa jotain suurempaa laitetta niin, että jousen kappaleeseen kohdistaman voiman vaikutus kappaleen lükkeeseen on mitätönt. Tällöin raskas kappale puristaa ja venytää joustaa ja toimii vaunun värähtelyä ylläpitävänä energian lähteenä. Kuvassa 14.22 (a) raskas kappale lükkuu *hitaasti*, jolloin ulkoinen voiman *taajuus on pieni* verrattuna vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnolliseen taajuuteen,  $\omega_{\text{ulkoinen}} < \omega$ . Tällöin vaunu liikkuu kappaleen mukana värähden pienellä amplitudilla, eikä jousen tarvitse paljon puristua tai venyä, koska vaunun liikuttaminen hitaasti (pienellä kihitysvyödellä) ei vaadi suurta voimaa.

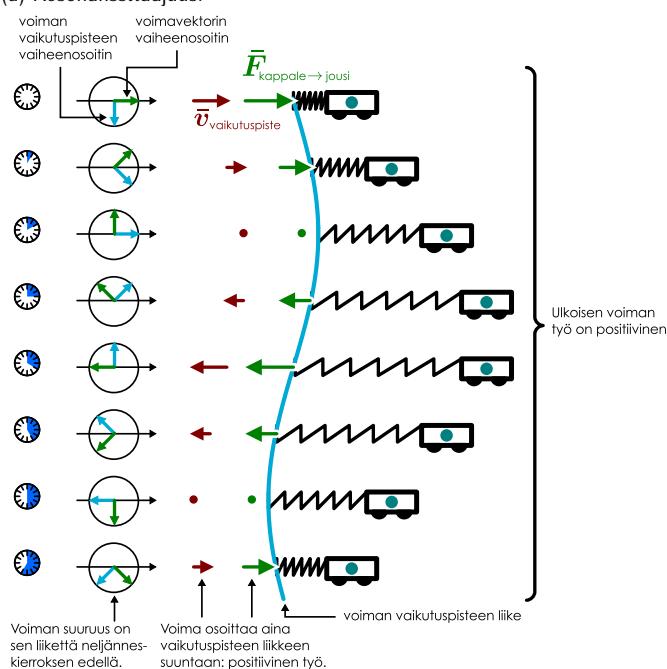
Kuvassa 14.22 (c) raskas kappale lükkuu puolestaan *nopeasti*, jolloin ajavan voiman *taajuus on suuri* verrattuna vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnolliseen taajuuteen,  $\omega_{\text{ulkoinen}} > \omega$ . Tällöinkään vaunu ei liiku kovin paljon. Jotta vaunu alkaisi liikkua johonkin suuntaan, siihen täytyy kohdistua voima samaan suuntaan tarpeeksi kauan. Nyt vaunuun kohdistuvan voiman suunta muuttuu jatkuvasti, jolloin vaunun kihitysyden suunta vaihtelee ja vaunu värähtelee pienellä amplitudilla pysyen lähes paikoillaan.

Kuvassa 14.22 (b) raskas kappale lükkuu likimain vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnollisella taajuudella,  $\omega_{\text{ulkoinen}} \approx \omega$  eli kyseessä on resonanssi. Tässä tapauksessa vaunu värähtilee *suurella amplitudilla*. Resonanssissa vaunun liike seuraa raskasta kappaletta noin neljännesjakson perässä. Tällöin kappale "vetää joustaa perässään" eli täsmällisemmin kappaleen jouseen kohdistama voima osoittaa aina saman suuntaan kuin mihin voiman vaikutuspiste liikkuu (kuva 14.23). Nämä ollen ulkoinen voima tekee jousen ja vaunun muodostamaan värähtelijään jatkuvasti *positiivista työtä*, ja värähtelijän energia lisääntyy.

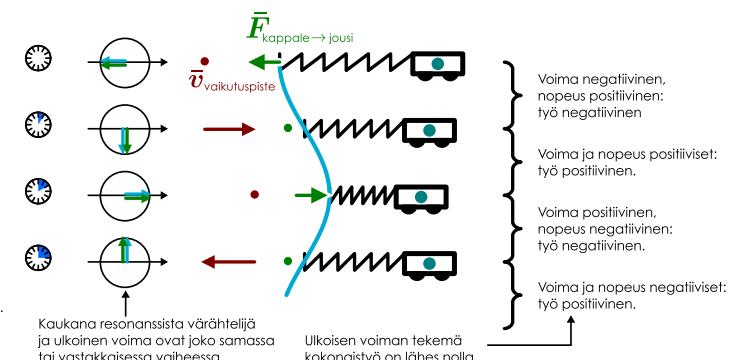
Jos raskas kappale värähtelee selvästi eri taajuudella kuin vaunun luonnollinen taajuus, vaunu lükkuu joko likimain samassa tai vastakkaisessa vaiheessa kappaleeseen verrattuna. Tällöin jouseen kohdistuva ulkoinen voima osoittaa ajoittain samaan ja ajoittain vastakkaiseen suuntaan voiman vaikutuspisteen liikkeen suuntaan nähdien, ja näin ollen voima tekee välillä positiivista ja välillä negatiivista työtä. Lopputulos on se, että kaukana resonanssista ulkoinen voima tekee kappaleeseen lähes yhtä paljon positiivista ja negatiivista työtä eikä värähtelijälle näin ollen siirry paljonkaan energiaksi.

**Kuva 14.23:** Resonanssissa ulkoinen voiman ja värähtelijän paikan liikkeessä on neljännesjakson ero, jolloin voima osoittaa aina liikkeen suuntaan ja tekee positiivista työtä. Kaukana resonanssista voima ja värähtelijä ovat likimain samassa tai vastakkaisessa vaiheessa, jolloin ulkoinen voima tekee vuoroin positiivista ja negatiivista työtä.

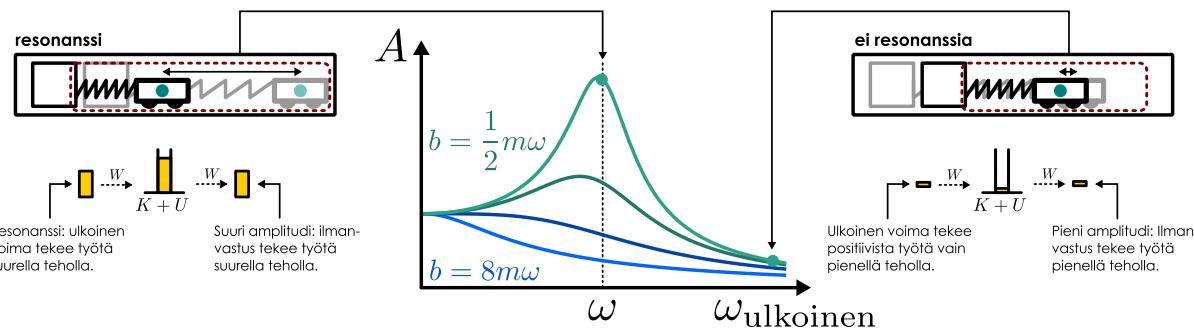
(a) Resonanssitaajuus.



(b) Ulkisen voiman taajuus suurempi kuin resonanssitaajuus.



Kuva 14.24: Kappaleen amplitudi asettuu niin, että ulkoisen voiman ja dissipatiivisten voimien tekemät työt kumoavat toisensa. Resonanssissa ulkoisen voiman tekee työtä suurella teholla, jolloin myös värähtelyn amplitudi kasvaa kunnes vastusvoimat kuluttavat energiota samalla teholla.



- 14.30** Tee samanlainen analyysi kuin kuvassa 14.23 tilanteelle, jossa ulkoisen voiman taajuus on huomattavasti pienempi kuin resonanssitaajuus (kuva 14.23 (a)). (a) Mihin suuntaan ulkoisen voiman ja sen vaikutuspiste osoittavat värähdysen eri vaiheissa? (b) Mikä on voiman ja sen vaikutuspisteen liukkeen välinen vaihe-ero? (c) Milloin voima tekee positiivista ja milloin negatiivista työtä?

Kuvassa 14.24 on esitetty pakotetun värähtelijän amplitudi ulkoisen voiman kulmataajuuden funktiona eri vaimennuskertoimien arvoilla. Amplitudia kuvaava matemaattinen lauseke on johdettu esimerkissä 14.7. Lasku olisi reaaliluvuilla jälleen varsin työläs, mutta kompleksiluvuilla se onnistuu melko helposti. Kuitenkaan itse lasku tai edes sen lopputulos ei ole kovin tärkeää, vaan oleellista on ymmärtää, mitä tulos tarkoittaa.

Jos vaimennuskerroin  $b$  on pieni, värähdysamplitudi kasvaa voimakkaasti ulkoisen taajuuden  $\omega_{ulkoinen}$  lähestyessä resonanssitaajuutta eli vaimentamattoman värähtelijän luontaisa värähtelytaajuutta  $\omega$ , koska resonanssissa ulkoisen voiman pumpaa värähtelijään koko ajan lisää energiaa ja niinpä värähtelyn amplitudi pääsee kasvamaan yhä suuremmaksi ja suuremmaksi. Toisaalta amplituden kasvaessa myös dissipatiivisten voimien tekemä negatiivinen työ kasvaa, kunnes ulkoisen voiman ja dissipatiivisten voimien työt tasapainottavat toisensa. Mitä pienempi vaimennuskerroin  $b$  on eli mitä heikompia dissipatiiviset voimat ovat, sitä suuremmaksi amplitudi kasvaa, mikä näkyi kuvaajassa yhä korkeampana *resonanssipiikkinä*. Itse asiassa jos värähtelijä on ylivaimennettu eli  $b$  on suuri, resonanssipiikkiä ei synty lainkaan. Kuvaajasta nähdään myös, että kaukana resonanssista värähtelijän amplitudi ei juurikaan riipu vaimennuskertoimesta. Tämä johtuu siitä, että jos ulkoisen voiman ja värähtelijän eivät ole resonanssissa, ulkoisen voiman tekee värähtelijään sekä positiivista että negatiivista työtä ja niinpä värähtelijän energia ei pääse milloinkaan kasvamaan kovin suureksi riippumatta siitä onko värähtelijä vaimennettu vai ei.



- 14.31** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä vaimennetuista ja pakotetuista värähtelijöistä. Mitä tarkoittaa ali- ja ylikrüttinen vaimennus ja miten värähtelijä näissä tilanteissa käyttäätyy? Miten pakotettu värähtelijä liikkuu ja mitä tarkoitetaan resonanssilla?

### esimerkki 14.7

### Resonanssiampelidi

**Johda lauseke pakotetun värähtelijän amplitudille, kun värähtelijään vaikuttaa ulkoinen voima  $F_x(t) = F \cos(\omega_{ulkoinen}t)$ .**

**SUUNNITELMA** Tilanne on samankaltainen kuin esimerkissä 14.6, paitsi että nyt liikehtälöön pitää lisätä ulkoista voimaa kuvava termi. Lasketaan taas kompleksiluvuilla, joiden reaaliasiiden tulkitaan kuvavan varsinaista ratkaisua. Tällöin ulkoista voimaa kuvaava termi  $F e^{i\omega_{ulkoinen}t}$ , koska  $\text{Re}[F e^{i\omega_{ulkoinen}t}] = F \cos(\omega_{ulkoinen}t)$ . Värähtelijää kuvaaa siis nyt differentiaaliyhtälö

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F e^{i\omega_{ulkoinen}t}. \quad (14.98)$$

Tehdään harmonista värähtelyä kuvaava yrite  $x = A e^{i\omega t + \phi}$ , sijoitetaan tämä liikehtälöön ja ratkaistaan sen perusteella vakio  $A$ .

**RATKAISU** Yritteen derivaatat ovat  $\frac{dx}{dt} = i\omega A e^{i\omega t} e^{i\phi}$  sekä  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\phi}$ , ja näiden sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa yhtälön

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\phi} + ib\omega A e^{i\omega t} e^{i\phi} + kA e^{i\omega t} e^{i\phi} = F e^{i\omega_{ulkoinen}t}. \quad (14.99)$$

Tästä muodosta nähdään suoraan, että jotta yhtälö toteutuisi kaikilla ajan hetkillä, täytyy olla  $\omega = \omega_{\text{ulkoinen}}$ , koska vain silloin voimme supistaa kaikki ajasta riippuvat tekijät  $e^{i\omega t}$  pois. Värähtelijän täytyy siis värähdellä ulkoisen voiman määräämällä taajuudella eikä omalla luontaisella värähtelytaajuudellaan.

Supistuksen jälkeen jäljelle jää yhtälö

$$Ae^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k) = F. \quad (14.100)$$

Tiedämme, että kaikki suuret yhtälössä ovat positiivisia reaalilukuja. Erityisesti  $F$  ja  $A$  ovat positiiviset, joten myös lausekkeen  $e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)$  täytyy olla positiivinen ja reaalinen. Kulma  $\phi$  täytyy siis valita sopivasti niin, että tämä ehto toteutuu. Toisaalta jos lauseke on positiivinen ja reaalinen, sen arvo on sama kuin sen itseisarvo,  $z > 0 \Rightarrow z = |z|$ . Eksponenttifunktion itseisarvo on yksi,  $|e^{i\phi}| = 1$  ja suluissa olevan lausekkeen itseisarvo on Pythagoraan lauseen mukaisesti  $|(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2) + ib\omega_{\text{ulkoinen}}| = \sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}$ , joten näiden tulon itseisarvo on

$$e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k) = |e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)| = \sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}. \quad (14.101)$$

Nämä saamme ratkaistua amplitudiksi

$$A = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}}. \quad (14.102)$$

Huomioimalla vielä, että värähtelijän luontainen värähtelytaajuus on  $\omega_{\text{luontainen}} = \sqrt{k/m}$ , tulos voidaan sieventää muotoon

$$A = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_{\text{luontainen}}^2 - \omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_{\text{ulkoinen}}^2}}. \quad (14.103)$$

**ARVIOINTI** Amplitudi on sitä suurempi, mitä pienempi lauseke  $(\omega_{\text{luontainen}}^2 - \omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_{\text{ulkoinen}}^2$  on. Erityisesti amplitudi kasvaa hyvin suureksi, jos vaimennuskerroin  $b$  on pieni ja jos ulkoisen voiman kulmataajuus on lähellä värähtelijän luontaista taajuutta  $\omega_{\text{ulkoinen}} \approx \omega_{\text{luontainen}}$ . Juuri tästä on resonanssi: kun ulkoinen voima muuttuu likimain samalla taajuudella kuin millä värähtelijä luonnostaan pyrkii värähtelemaan, värähtelijä pystyy vastaanottamaan paljon energiaa ja sen amplitudi kasvaa suureksi.

Voimme ratkaista voiman ja värähtelijän vaihe-eron  $\phi$  ehdosta, että lausekkeen  $e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)$  pitää olla positiivinen reaaliluku. Erityisesti resonanssitaajuudella  $\omega_{\text{ulkoinen}} = \omega_{\text{luontainen}} = \sqrt{k/m}$  lauseke sievenee muotoon  $e^{i\phi}ib\omega_{\text{ulkoinen}}$  ja tämä on positiivinen reaaliluku vain jos  $e^{i\phi} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$  eli kun  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Värähtelijän liike täytyy siis olla resonanssissa neljännesjakson ulkoista voimaa jäljessä. Näinhän juuri todettiin kuvassa 14.23.

Pieni lisähuomautus: tämä ei ole tarkastellun differentiaalitaiton yleinen ratkaisu. Jos alamme heiluttaa värähtelijää, se ei heti ala värähdellä samalla taajuudella kuin millä sitä heilutetaan, eikä värähtelijä resonanssissaakaan saa heti valtavaa amplitudia, vaan siihen kuluu jonkin verran aikaa. Tämä ei sisällä ratkaisumme. Ratkaisumme kertoo vain lopputilan, johon pakotettu värähtelijä ajan myötä päätyy.



**14.32** Miten jouseen kiinnitetyn vaunun resonanssikäyrä muuttuu, jos muut ominaisuudet pidetään vakiona mutta (a) vaunun massa kasvaa, (b) jousen jousivakio kasvaa, (c) sekä massa että jousivakio kasvavat niin että niiden suhde pysyy samana? Tarkastele resonanssipiükkin leveyttä, korkeutta ja paikkaa.

## Yhteenvetö: Jaksollinen liike

### Harmoninen liike

- Kappaleen liike on **jaksollista** ja liikkeen **jaksonaika** on  $T$ , jos kappale toistaa samaa liikettä ja palaa takaisin alkutilaan ajan  $T$  välein. Liike, jonka kappale suorittaa ajan  $T$  kuluessa on **jaksosuoritus**.
- Jaksollisen liikkeen **taajuus** on

$$f = \frac{1}{T}.$$

Taajuus ilmaisee montako jaksota tapahtuu yhden sekunnin aikana ja sen yksikkö on **hertsia**.

- Harmoninen värähtely** on jaksollista liikettä, jota kuvaavat ajan funktioita sinimuotoisina funktioina:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0).$$

Vakio  $A$  on **amplitudi**, joka ilmaisee värähtelijän suurimman etäisyyden tasapainoasemasta. Funktio

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0$$

on värähtelyn **vaihe**, ja siinä esiintyvä vakio

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

on värähtelyn **kulmataajuus**.

- Harmonista värähtelyä voidaan kuvata **vaiheenosottimella**. Vaiheenosoitin on  $xy$ -tasossa nuoli, jonka kanta on origossa ja joka pyörii kulmanopeudella  $\omega$  (joka on sama kuin harmonisen värähtelijän kulmataajuus). Nuolen pituus ilmaisee liikkeen amplitudin ja nuolen  $x$ -akselista mitattu kulma ilmaisee liikkeen vaiheen. Vaiheenosottimen projektio  $x$ -akselilla kuvailee harmonisesti liikkuvan kappaleen paikkaa.
- Mikä tahansa systeemi, jossa on vakaa tasapainopiste, käyttää tyypillisesti harmonisen värähtelijän tavoin ollessaan tarpeksi lähellä tästä tasapainopistettä.
- Harmonisessa värähtelyssä systeemin mekaaninen energia muuttuu jatkuvasti potentiaalienergiasta liike-energiaksi ja takaisin.

- Harmonisen värähtelijän kokonaisenergia on verrannollinen sen amplitudin neliöön. Jouseen kiinnitetyn kappaleen tapauksessa energia on

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

- Harmonisen värähtelijän taajuus ei riipu värähtelyn amplitudista vaan ainoastaan värähtelijän ominaisuuksista. Jouseen kiinnitetyn kappaleen kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

ja heilurin

$$\omega = \sqrt{mgL/I_\theta}.$$

Pistemäisen massan muodostaman heilurin kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{g/L}.$$

- Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä (jos kappale toteuttaa yhden, se toteuttaa kaikki muutkin) ja ne kaikki pätevät kulmataajuuden  $\omega$  liikkuvalle harmoniselle värähtelijälle:

– Kappaleeseen kohdistuva voima on verrannollinen kappaleen etäisyyteen tasapainosta ja sen suunta on kohti tasapainoa

$$F_{x,\text{kokonais}} = -m\omega^2 x.$$

– Kappaleen kiiltovyys on verrannollinen kappaleen etäisyyteen tasapainosta ja sen suunta on kohti tasapainoa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

– Kappaleen potentiaalienergia on verrannollinen kappaleen tasapainosta mitattu etäisyyden neliöön

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

### Yhdistetty harmoninen liike

- Jos kaksi samantajuista harmonista värähtelyä yhdistetään, niiden summa on edelleen harmonista värähtelyä samalla taajuudella. Yhdistelmän amplitudi ja vaihe voidaan määritellä vaiheenosottimella.
- Jos kaksi lähes samantajuista harmonista värähtelyä yhdistetään, niiden summa on likimain harmonista värähtelyä, jonka taajuus on alkuperäisten värähtelijöiden taajuuskseen keskiarvo. Jos alkuperäiset taajuudet ovat  $f_{\text{nopea}} > f_{\text{hidas}}$ , yhdistetyn värähtelyn amplitudi vaihtelee taajuudella

$$f_{\text{huojunta}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}.$$

Tätä kutsutaan **huojunnaksi**.

- Kaikki jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten värähtelijoiden yhdistelmänä eli jaksollisen liikkeen voidaan jakaa **harmonisiin komponentteihin**, joiden taajuudet ovat tämän jaksollisen liikkeen *perustajuuden*  $f_1$  monikertoja eli *harmonisia ylätaajuuksia*  $f_n = nf_1$ . Liikkeen jakoa harmonisiin komponentteihin kutsutaan **Fourier-analyysiksi**.
- Harmonisista komponenteista koostuvan liikkeen **spektri** ilmaisee kuhunkin komponenttiin liittyvän energian komponentin taajuuden funktiona.

### Resonanssi

- Makroskooppisiin värähtelijöihin kohdistuu aina dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joiden vaikutuksesta värähtelijä menettää mekaanista energiota ja värähtely lopulta lakkaa. Tämä on **vaimennettua värähtelyä**.
- Välitaineen vastus on usein merkittävin värähtelyä vaimentava vuorovaikuttaja. Se kohdistaa värähtelijään voiman, jonka suunta on värähtelijän liikettä vastaan ja jonka suuruus on verrannollinen värähtelijän nopeuteen.
- Jos vaimennus on heikkoa eli värähtelijä on *alivaimennettu*, värähtelyn amplitudi pienenee hitaasti.
- Jos vaimennus on voimakasta eli värähtelijä on *ylivaimennettu*, se ei värähtele lainkaan vaan palaa hitaasti tasapainoon.

- Näiden välissä on *kriittinen vaimennus*, jolloin värähtelijä lähestyy tasapainoasemaa mahdollisimman nopeasti.
- Jos harmoniseen värähtelijään kohdistuu ulkoinen harmonisesti muuttuva voima, värähtelijä alkaa värähtelemään samalla taajuudella kuin ulkoinen voima. Tätä kutsutaan **pakotetuksi värähtelyksi**.
- Jos ulkisen voiman taajuus on lähellä värähtelijän luontaista taajuutta, ulkoinen voima pystyy siiirtämään värähtelijään tehokkaasti energiota ja värähtelyn amplitudi kasvaa. Tätä kutsutaan **resonanssiksi**.

## Sarjat ja kompleksiluvut

- Funktion  $f$  Taylorin sarja s pisteen  $x_0$  ympärillä on summa

$$s(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

- Funktion  $f$  ja sarjan  $s$  derivaatoilla on pisteessä  $x_0$  samat arvot.
- Seuraavat sarjakehitelmät pätevät kaikilla  $x$ :n arvoilla

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \dots \end{aligned}$$

- Jaksollisen funktion  $f$  Fourier-sarja on summa

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t].$$

Vakiot  $a_0, a_1, \dots$  ja  $b_1, b_2, \dots$  ovat funktion Fourier-kertoimet ja funktiot  $\cos \omega_n t$  ja  $\sin \omega_n t$  funktion harmoniset komponentit. Näiden taajuudet ovat perustajuiden monikertoja,

$$\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n f_1.$$

- Kompleksiluku voidaan kirjoittaa reaali- ja imaginääriosan summana  $z = x + iy$ . Luvun voi tulkitä esittäväksi kompleksitason pistettä  $(x, y)$ .
- Kompleksiluvun konjugaatti on luku, jossa imaginääriosan etumerkki on vaihdettu  $z^* = x - iy$ . Tämä on siis kompleksitason piste  $(x, -y)$ .
- Kompleksiluvun itseisarvon neliö voidaan kirjoittaa muodossa  $|z|^2 = zz^*$ . Tämä kuvailee pisteen  $(x, y)$  etäisyyttä kompleksitasosta origosta.
- Kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätee Eulerin kaava

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Tämä on siis kompleksitason yksikköympyrän piste  $(\cos \phi, \sin \phi)$ .

- Kompleksiluku voidaan kirjoittaa napakoordinaattiesityksessä  $z = re^{i\phi}$ , missä  $r = |z|$  on luvun itseisarvo ja  $\phi$  sen väikekulma. Tämä kuvailee pistettä, jonka etäisyys origosta on  $r$  ja jonka paikkavektorin kulma reaaliakselin suhteeseen on  $\phi$ .
- Kahden kompleksiluvun kertolasku tuottaa kompleksiluvun, jonka itseisarvo on alkuperäisten itseisarvojen tulo ja väikekulma on alkuperäisten väikekulmien summa

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1 + \phi_2)}.$$

- Kompleksisen eksponenttifunktion  $A e^{i\phi(t)}$  reaaliosa kuvailee harmonista liikettä.

## Sanasto

- jaksollinen (periodic)
- harmoninen (harmonic)
- väähely (vibration)
- oskillaatio (oscillation)
- jakso (cycle)
- amplitudi (amplitude)
- jaksonaika (period)
- taajuus (frequency)
- kulmataajuus (angular frequency)
- vaihe (phase)
- vaiheenosoitin (phasor)
- heiluri (pendulum)
- huojunta (beats)
- verhokäyrä (envelope)
- perustajuuus (fundamental frequency)

- glätaajuus (harmonic frequency)
- Fourier-kerroin (Fourier coefficient)
- spektri (spectrum)
- ääni (sound)
- vaimennettu (damped)
- alivaimennus (underdamping)
- ylivaimennus (overdamping)
- kriittinen (critical)
- pakotettu (forced)
- resonanssi (resonance)
- sarja (series)
- kompleksiluku (complex number)
- imaginääriyksikkö (imaginary unit)
- kompleksikonjugaatti (complex conjugate)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

**14.1** Tähän voi keksiä paljon erimerkkejä. Tasapainopisteen ympärillä: kuopan pohjalla edestakaisin vierivä pallo, heiluri, värähtelevä tanko. Ei tasapainopisteen ympärillä: pomppiva pallo, pyörivä rengas, kilparataa tasaisella vauhdilla kiertävä auto.

**14.2** Kuvaaja leikkaa  $t$ -akselin kahdesti yhden jakson aikana (kerran alhaalta ylös ja kerran ylhäältä alas). Niinpä värähtelijä kulkee sekunnissa 250 jaksoa eli taajuus on  $f = 250$  Hz.

**14.3** (a) Paikan muutosnopeus on sama kuin nopeus, joten paikka muuttuu negatiiviseen suuntaan. (b) Nopeuden muutosnopeus on sama kuin kiihtyvyys. Kiihtyvyys on puolestaan paikalle vastakkainen, joten se on negatiivinen. Nopeus muuttuu siis negatiiviseen suuntaan. (c) Vaunun paikka muuttuu negatiiviseen suuntaan eli kohti nollaa. Siispä myös vaunun kiihtyvyys muuttuu kohti nollaa. Koska kiihtyvyys on negatiivinen, se muuttuu siis positiiviseen suuntaan.

**14.4** Kun lelu liikkuu valon suunnassa, varjo pysyy paikoillaan. Kun lelu liikkuu valon suuntaan kohtisuoraan, varjo liikkuu yhtä nopeasti kuin lelu. Varjo siis liikkuu edestakaisin niin, että se on vuorotellen paikoillaan ja vuorotellen tasaisessa liukkeessä. Liike on jaksollista mutta ei harmonista.

**14.5** (a)  $\omega = \Delta\theta/\Delta t = \pi/3 \text{ s}^{-1} \approx 1.05 \text{ s}^{-1}$ .

(b) Koko kierros on  $2\pi$ , joten kierrokseen kuluu aikaa 6 sekuntia.

(c) Projektion kulmataajuus on sama kuin kappaleen kulmanopeus. Sen jaksonaika on kierroseen kuluva aika eli  $T = 6$  s ja taajuus on  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 0.167$  s.

**14.6** Ympyräradalla nopeus on aina ympyrän tangentin suuntainen ja se osoittaa kiertosuuntaan. Jos vauhti on vakio, kiihtyvyys osoittaa kohti ympyrän keskipistettä. (Jos vauhti ei ole vakio, kiihtyvyydyllä on myös tangenttikomponentti.) Projektion nopeus- ja kiihtyvyysvektorit ovat täsmälleen samat kuin ympyrätaraa kiertävän kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektoreiden projektiot (eli  $x$ -komponentit).

**14.7** (a) Tämä ratkeaa helpoiten piirtämällä vaiheenosoitin. Koska kappaleen koordinaatti on  $x = 0.80$  m, tämän täytyy olla myös vaiheenosottimen  $x$ -komponentti. Vaiheenosottimen pituus on sama kuin amplitudi, 1.00 m. Tästä ratkeaa vaiheenosottimen ja  $x$ -akselin väliseksi kulmaksi trigonometrialla 0.6435. Lisäksi koska kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, vaiheenosoitin on juuri käänymässä  $x$ -akselin suuntaiseksi (se ei ole juuri ohittanut  $x$ -akselia). Tämä tarkoittaa sitä, että vaiheeksi voi valita  $\phi = -0.6435$ . (Tähän tulokseen voi myös lisätä  $2\pi$  tai sen monikerran, joten myös esim.  $\phi = 5.6397$  käy vastaukseksi.

(b) Kysyttyssä pisteeessä vaihe on  $\phi = \pi + n2\pi$ . Värähtelijä saavuttaa tämän pisteen, kun vaihe on muuttunut  $\Delta\phi = \pi - (-0.6435) = 3.785$ . Tähän kuluu aikaa  $\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = 0.60$  s.

**14.9** Kuvaajat kannattaa piirtää tietokoneella. Sinimuotoisten funktioiden derivoointi "siirtää" niitä aika-akselilla neljännesjakson kohti negatiivista suuntaa. Esim. sinillä on huippu kohdassa  $t = \pi/2$  kun taas kosinin huippu on kohdassa  $t = 0$ . Tämä nähdään myös kuvassa 14.1.

**14.10** Tämä on ns. torsioheiluri. Sen pyörimisen likeyhtälö on

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{I_\theta}\tau_\theta = -\frac{\kappa}{I_\theta}\theta, \quad (14.104)$$

joka on samaa muotoa kuin harmoninen likeyhtälö  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ , missä kulmataajuus on  $\omega = \sqrt{\kappa/I_\theta}$ . (Huom. kulmataajuus  $\omega$  on eri asia kuin kappaleen kulmanopeus  $\omega_\theta$ . Kulmataajuus on vakio, mutta kulmanopeus muuttuu harmonisesti.) Kappale siis pyörii edestakaisin harmonisesti, ja yhden heilahduksen jaksonaika on

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa}{I_\theta}}. \quad (14.105)$$

**14.11** (a) Neljä kertaa. (b) Värähtelijän vaihe on  $(\pi/4 + n\pi/2$  eli vaiheenosoitin osoittaa viistoon  $45^\circ$  asteen kulmassa  $x$ - ja  $y$ -akseleliin nähdien. (c) Paikkakoordinaatti on  $x = A/\sqrt{2} = 0.707A$  ja kappaleen vauhti on myös  $v = 0.707v_{\max}$ , jolloin  $U = K = E_{\text{kokonais}}/2$ .

**14.12** Kompleksiluvun itseisarvo  $|z| = r$  vastaa vaiheenosottimen pituutta eli värähtelijän amplitudia. Eksponentin imaginääriosa  $\phi$  vastaa vaiheenosottimen  $x$ -akselista mitattua kulmaa eli värähtelijän vaihetta. Jos kyseessä on harmoninen värähtelijä, vaihe on muotoa  $\phi = \omega t + \phi_{\text{alku}}$ , jolloin siis kompleksiluvussa eksponentti muuttuu lineaarisesti ajan kuluessa. Tällöin kompleksiluku  $z = re^{i\phi}$  kiertää ympyrää origon ympäri, mikä vastaa sitä, että vaiheenosoitin pyöriti ympäri vakiokulmanopeudella  $\omega$ . Kompleksiluvun reaaliosa ja vaiheenosottimen  $x$ -komponentti värähtelevät tällöin harmonisesti, ja juuri tämän tulkitaan kuvavaan varsinaisen värähtelijän liikettä.

**14.13** (a)  $\text{Re}[a] = 1$ ,  $\text{Re}[b] = -2$ ,  $\text{Im}[a] = 2$ ,  $\text{Im}[b] = 1$ ,  $\phi_a \approx 1.107$ ,  $\phi_b \approx 2.678$ ,  $|a| = |b| = \sqrt{5}$ . (b)  $a + b = -1 + 3i$ , joten  $\text{Re}[a + b] = -1$ ,  $\text{Im}[a + b] = 3$ ,  $\phi_{a+b} \approx 1.893$  ja  $|a + b| = \sqrt{10}$ .

(c)  $ab = -4 - 3i$ , joten  $\text{Re}[ab] = -4$ ,  $\text{Im}[ab] = -3$ ,  $\phi_{ab} = 3.785$  ja  $|ab| = 5$ .

Huom.  $\text{Re}[a + b] = \text{Re}[a] + \text{Re}[b]$  ja  $\text{Im}[a + b] = \text{Im}[a] + \text{Im}[b]$  mutta  $\phi_{ab} = \phi_a + \phi_b$  ja  $|ab| = |a||b|$ .

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

**14.15** Jos kappaleen  $x$ -koordinaatti on tasapainopistettä pienempi, kappaleeseen kohdistuu voima negatiiviseen suuntaan eli poispäin tasapainosta. Jos koordinaatti taas on tasapainoa suurempi, voima on positiivinen eli jälleen poispäin tasapainosta. Tämä on siis epästabili tasapainopiste, ja pienikin häiriö saa kappaleen poistumaan tasapainopisteestä. Potentiaalienergian kuvaaja on alas päin aukeava paraabeli.

**14.16** Nyt siis  $f(x) = \sin x$  joten  $f(\pi/2) = 1$ ,  $f'(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$  ja  $f''(\pi/2) = -\sin \pi/2 = -1$ . Taylorin sarjan alku on siis

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (14.106)$$

Tämä approksimaatio on alas päin aukeava paraabeli, sillä sinillä on maksimi pisteessä  $\pi/2$ . Itse asiassa tämä on sama kuin kosinin sarjakehitelmä origon ympäristössä, koska  $\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$ .

**14.17** (a) Vakaa tasapainopiste on potentiaalienergian minimi, ja sen tätyy olla derivaatan nollakohdassa,  $U'(x_0) = b - a/x_0^2 = 0$  eli  $x_0 = \sqrt{a/b} = 1$  m.

(b) Potentiaalienergian toinen derivaatta on  $U''(x) = 2b/x^3$  joten  $U''(x_0) = 2 \text{ J/m}^2$  ja harmoniseksi approksimaatioksi saadaan

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 = 2 \text{ J} + (1 \text{ J/m}^2)(x - 1 \text{ m})^2. \quad (14.107)$$

(c) Approksimaatio ja tarkka lauseke antavat potentiaalille pisteesä 1.1 m arvot 2.00909 sekä 2.01, eli näiden ero on noin 0.001. Pisteessä 1.5 vastaavat arvot ovat 2.167 ja 2.25, joten ero on 0.083. Approksimaatio toimii sitä paremmin, mitä lähempänä pistettä  $x_0$  ollaan.

**14.18** (a) Kulmataajaus on  $\omega = \sqrt{mgL/I_\theta} = \sqrt{g/(2L)} = 7 \text{ s}^{-1}$ .

(b) Momentti on  $\tau_\theta = mgL \sin \theta = 0.03 \text{ Nm}$ .

(c) Tämä on helpoin laskea energiaperiaatteella. Jos potentiaalienergia tasapainossa on nolla, potentiaalienergia on aluksi  $U_{\text{alku}} = mgL(1 - \cos \theta) = 0.0048 \text{ J}$ . Tasapainopisteessä tämä energia on muuttunut liike-energiaksi,  $K = \frac{1}{2}I_\theta \omega_\theta^2 = U_{\text{alku}}$ , josta kulmanopeudeksi saadaan  $\omega_\theta = \sqrt{2U_{\text{alku}}/I_\theta} = \sqrt{g(1 - \cos \theta)/L} = 2.2 \text{ s}^{-1}$ . Huomaa, että heilurin kulmataajaus (värähtelyn jaksollisuutta kuvaava suure) on vakio, mutta sen kulmanopeus (heilurin pyörimislukkettä kuvaava suure) ei ole.

**14.20** (a) Vaiheenosoitteiden pituudet ovat 5 mm ja 2 mm. Ensimmäinen on  $60^\circ$  asteen kulmassa  $x$ -akseliin nähden ja toinen osoittaa negatiiviseen  $y$ -suuntaan.

(b) Poikkeama saadaan laskemalla vaiheenosoitteiden  $x$ -skalaarikomponentit yhteen. Nämä ovat 2.5 mm ja 0 mm, joten kokonaispoikkeama on 2.5 mm.

**14.21** (a) Vaiheet ovat  $\pi/2$  ja  $3\pi/2$ . (b) Yhdistetyn värähtelyn vaihe ja amplitudi luetaan vaiheenosoitteiden summan suunnasta ja pituudesta. Summa on vektori  $(-5.0 \text{ mm})\hat{i} + (-2.0 \text{ mm})\hat{j}$ . Tämän pituus eli amplitudi on 5.4 mm ja sen kulma  $x$ -akselista eli vaihe on  $\phi = 3.522$ .

**14.22** (a) Vaiheenosoitimet muodostavat suljetun viisikulmion. Viimeisen osoittimen kärki on ensimmäisen osoittimen kannassa, joten osoittimen vektorisumma on nolla. Yhdistetyn värähtelyn amplitudikin on siis nolla eli mitään värähtelyä ei tapahdu. Värähtelyt siis kumoavat toisensa, mitkä on aivan mahdollista. Sama tulos saadaan myös yhtälöstä (14.72), koska nyt  $\sin n\Delta\phi/2 = \sin 2\pi = 0$ . (b) Nyt vaiheenosoitimet muodostavat suljetun 24-kulmion eli likimain ympyrän. Niiden summa on jälleen nolla eli yhdistetyn värähtelyn amplitudi on nolla.

**14.23** Jos taajuudet ovat täsmälleen samat, niiden yhdistelmä on myös harmonista värähtelyä samalla taajuudella. Jos taajuudet ovat hyvin lähellä toisiaan, huojuntataajaus on hyvin pieni eli huojunta tapahtuu hitaasti. Kun taajuudet lähestyvät toisiaan, huojuntataajaus lähestyy nollaa eli huojunnan jaksonaika lähestyy ääretöntä, mikä tarkoittaa värähtelyn lähestyvän täysin harmonista värähtelyä, kuten pitääkin.

**14.24** Tummassa alueessa kuviot ovat "vastakkaisissa vaiheissa", joten tumma alue vastaa huojunnan pienien amplitudin aluetta.

**14.25** Vaiheenosoitteiden summan pituus on 5 ja sen kulma  $x$ -akselista mitattuna on  $-0.927$  (nuoli osoittaa  $xy$ -tasossa oikealle alaviistoon), joten  $A = 5$  ja  $\phi = -0.927$ .

**14.26** (a) Kertoimet ovat 1.1 m sekä 0.3 m. Peruskulmataajaus on  $\omega_1 = 0.6 \text{ s}^{-1}$ , joten perustataajaus on  $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 0.095 \text{ Hz}$ .

(b) Kysytty arvo on

$$(0.2 \text{ m}) + (2.1 \text{ m}) \cos(2\pi \cdot (2.0 \text{ Hz}) \cdot (0.25 \text{ s})) + (1.3 \text{ m}) \cos(4\pi \cdot (2.0 \text{ Hz}) \cdot (0.25 \text{ s})) = 0.2 \text{ m} - 2.1 \text{ m} + 1.3 \text{ m} = -0.6 \text{ m}. \quad (14.108)$$

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

**14.28** Derivaatat ovat

$$v_x(t) = x'(t) = -Ae^{-t/(2\tau)} \left( \frac{1}{2\tau} \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi) \right). \quad (14.109)$$

$$a_x(t) = x''(t) = Ae^{-t/(2\tau)} \left[ \left( \frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{\tau} \sin(\omega t + \phi) \right]. \quad (14.110)$$

Lükeyhtälön oikea puoli sievenee muotoon

$$-\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x = Ae^{-t/(2\tau)} \left[ \left( \frac{b}{2m\tau} - \frac{k}{m} \right) \cos(\omega t + \phi) + \frac{b\omega}{m} \sin(\omega t + \phi) \right] \quad (14.111)$$

Jotta tämä olisi sama kuin yllä laskettu  $a_x$ , kuten differentiaaliyhtälön mukaan pitää olla, täytyy lausekkeiden kosini- ja sinitermienv kertoimien olla samat eli  $\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 = \frac{b}{2m\tau} - \frac{k}{m}$  ja  $\frac{\omega}{\tau} = \frac{b\omega}{m}$ . Jälkimmäinen yhtälö toteutuu, kun  $\tau = m/b$ , ja tämän sijoitus ensimmäiseen yhtälöön antaa  $\frac{b^2}{4m^2} - \omega^2 = \frac{b^2}{2m^2} - \frac{k}{m}$ , josta ratkeaa  $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$ . Kulmataajuudeksi on tapana valita positiivinen juuri.

**14.29 (a)** Amplitudia kuvaa lauseke  $A(t) = A_{\text{alku}} e^{-t/(2\tau)}$ , ja nyt  $A(5 \text{ s}) = A_{\text{alku}}/3$  eli  $e^{-(5 \text{ s})/(2\tau)} = 1/3$ , josta  $-(5 \text{ s})/(2\tau) = -\ln 3$  ja edelleen  $\tau = (5 \text{ s})/(2 \ln 3) = 2.276 \text{ s}$ .

(b) Energiaa kuvaa lauseke  $E(t) = E_{\text{alku}} e^{-t/\tau}$  ja nyt tarvitaan aika  $t$ , jolloin  $E(t) = 0.05E_{\text{alku}}$ . Siispä  $e^{-t/\tau} = 0.05$  eli  $t = -\tau \ln 0.05 = 6.817 \text{ s}$ . Tässä ajassa värähtelijä ehtii tehdä  $ft = 262 \text{ Hz} \cdot 6.817 \text{ s} = 1786$  värähdystä.

**14.30** Tässä voi käyttää kuvaa 14.22 apuna. Kun taajuus on pieni, jousi on puristunut kappaleen ja vaunun ollessa kuvan vasemmassa laidassa. Jousi on venynyt kappaleen ja vaunun ollessa kuvan oikeassa laidassa. Tilanne on siis päinvastainen verrattuna tilanteeseen, jossa taajuus on suuri. Nyt voiman vaikutuspisteenvaiheenosoitin (sininen nuoli) ja voiman vaiheenosoitin (vihreä nuoli) osoittavat koko ajan likimain vastakkaisiin suuntiin. Lopputulos on sama kuin suurella taajuudella: voima tekee puolet ajasta positivista ja toisen puolen negatiivista työtä, jolloin värähtelijän energia ei juuri muutu.

**14.32 (a)** Kun massa kasvaa, ominaistaajuus pienenee, sillä raskas kappale värähelee hitaammin,  $\omega \sim 1/\sqrt{m}$ . Niinpä resonanssipiikki siirryy kuvassa vasemmalle. Tulo  $m\omega$  kuitenkin kasvaa, joten suhde  $b/(m\omega)$  pienenee eli resonanssipiikistä tulee kapeampi ja korkeampi.

(b) Jos jousivakio kasvaa, ominaistaajuus kasvaa, sillä jäykä jousi saa kappaleen värähtelemään nopeammin,  $\omega \sim \sqrt{k}$ . Niinpä resonanssipiikki siirryy kuvassa oikealle. Nytkin tulo  $m\omega$  kasvaa, joten resonanssipiikistä tulee kapeampi suhteessa ominaistaajuuteen. (Jäykkää joustaa on kuitenkin vaikeampi venyttää ja puristaa, joten amplitudi itse asiassa pienenee kaikilla ulkoisilla taajuuksilla.)

(c) Nyt ominaistaajuus  $\sqrt{k/m}$  ei muutu, joten resonanssipiikki pysyy samassa paikassa. Tulo  $m\omega$  kasvaa, joten piikistä tulee nytkin kapeampi.

# 15 Aaltoliike

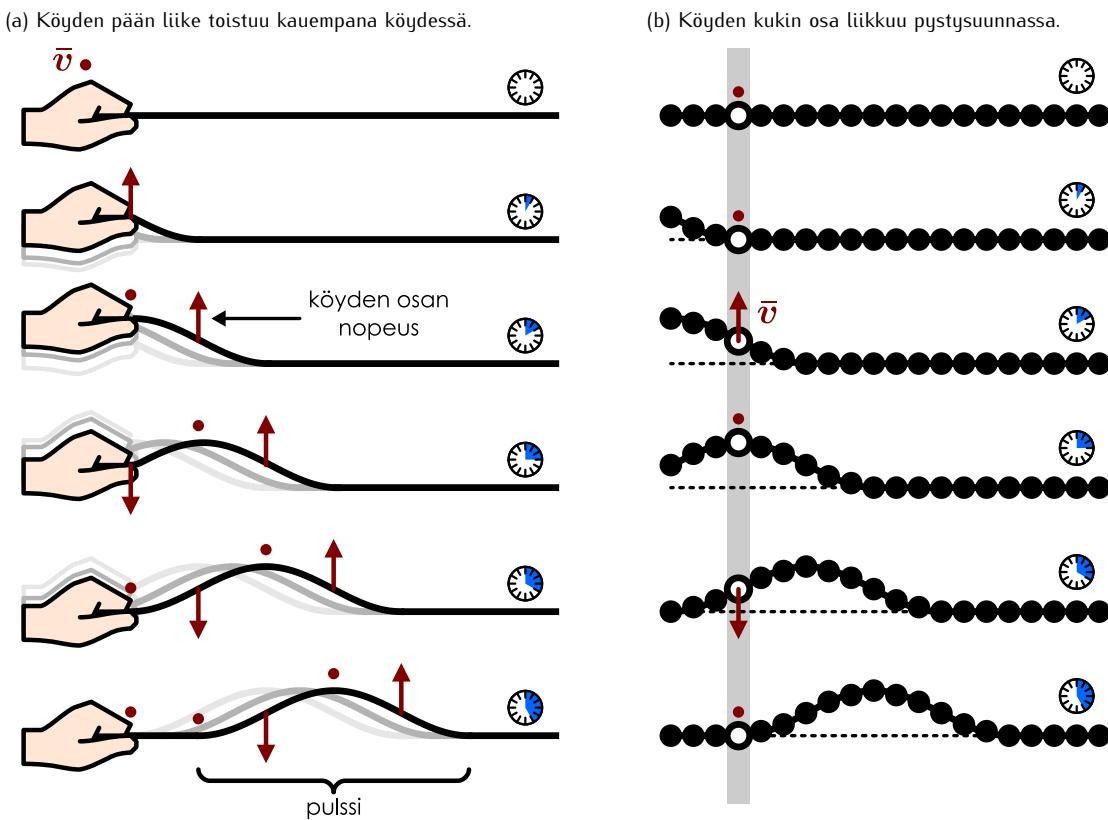
Aallot ovat tuttu ilmiö. Esimerkiksi veteen heitetty kivi synnyttää veden pintaan aaltoja, jotka levivät osumakohdasta katsoen joka suuntaan. Meille ihmisille aallot ovat erityisen tärkeitä siksi, että tärkeimmät aistimme näkö ja kuulo perustuvat valon ja äänien havaitsemiseen, ja nämä ovat kummakin aaltoja. Aaltojen liike muistuttaa joiltakin ominaisuuksiltaan kappaleiden tai hiukkasten liikkettä, mutta joissakin suhteissa aallot käyttäytyvät aivan eri tavoin kuin kappaleet. Aallot esimerkiksi näyttävät liikkuvan jollakin täsmällisellä nopeudella kuten kappaleet, mutta kaksi vastakkaisiin suuntiin kulveva aaltoa voi kulkea toistensa läpi, mitä jälkät kappaleet eivät voi tehdä.

Vaikka esimerkiksi valo, ääni ja veden pinnalla kulkevat aallot ilmenevät aisteillemme eri tavoin, kaikkien näiden aaltojen käytöstä ohjaavat pohjimmiltaan samanlaiset lait. Tässä luvussa tutkimmekin aaltojen yleisiä ominaisuuksia. Aloitamme aaltoihin tutustumisen tarkastelemalla yhdessä ulottuvuudessa liikkuvia aaltoja, sillä monia aalloille tyypillisiä ilmiöitä voidaan havaita jo tässä yksinkertaisessa tapauksessa.

Tämän luvun opiskeltuaasi sinun tulee osata:

- kuvata aallon muoto ja väliaineen yksittäisen pisteen liike ajan funktiona, kun aallon aaltofunktio tunnetaan
- määritellä yksilotteisen sinimuotoisen aallon taajuus, kulmataajuus, aallonpietuus, aaltoluku ja vaihe sekä muodostaa aallon aaltofunktio
- määrittää päälekäisten aaltojen muoto superpositioperiaatteella
- määrittää rajapinnalta heijastuvan ja sen läpäisevän aallon aaltofunktiot
- määrittää seisovien aaltojen muoto ja sallitut taajuudet
- kuvilla seisovat aallot ja aaltopulssit sinimuotoisten aaltojen superpositiona
- määrittää sinimuotoisen aallon teho
- kuvilla Doppler- ja dispersioilmiöt
- tunnistaa aaltoyhtälö ja perustella, mitkä aaltoliikkeen ominaisuudet se määräät

Kuva 15.1: Köyden nopea heilautus tuottaa aaltoplussin.



## 15.1 Aaltoliike

### Liikkuvat häiriöt

Urheilutapahtuman katsomossa kulkeva aalto on hauska esimerkki aaltoliikkeestä. Katsomossa ihmiset tavallisesti istuvat paikoillaan, mutta ”yleisöaallossa” katsojat nousevat seisomaan hetkeksi heti, kun heidän vieressään istuva nousee, ja istuuutuvat, kun vierustoveri istuu. Koska reagointi toisten liukkeeseen tapahtuu hitaasti, syntyy katsomoon liikkuva seisovien ihmisten alue. Toinen, mekaaninen esimerkki aalosta on köysi, jonka pään nopea heilautus synnyttää köydessä etenevän ”mutkan” kuten kuvassa 15.1.

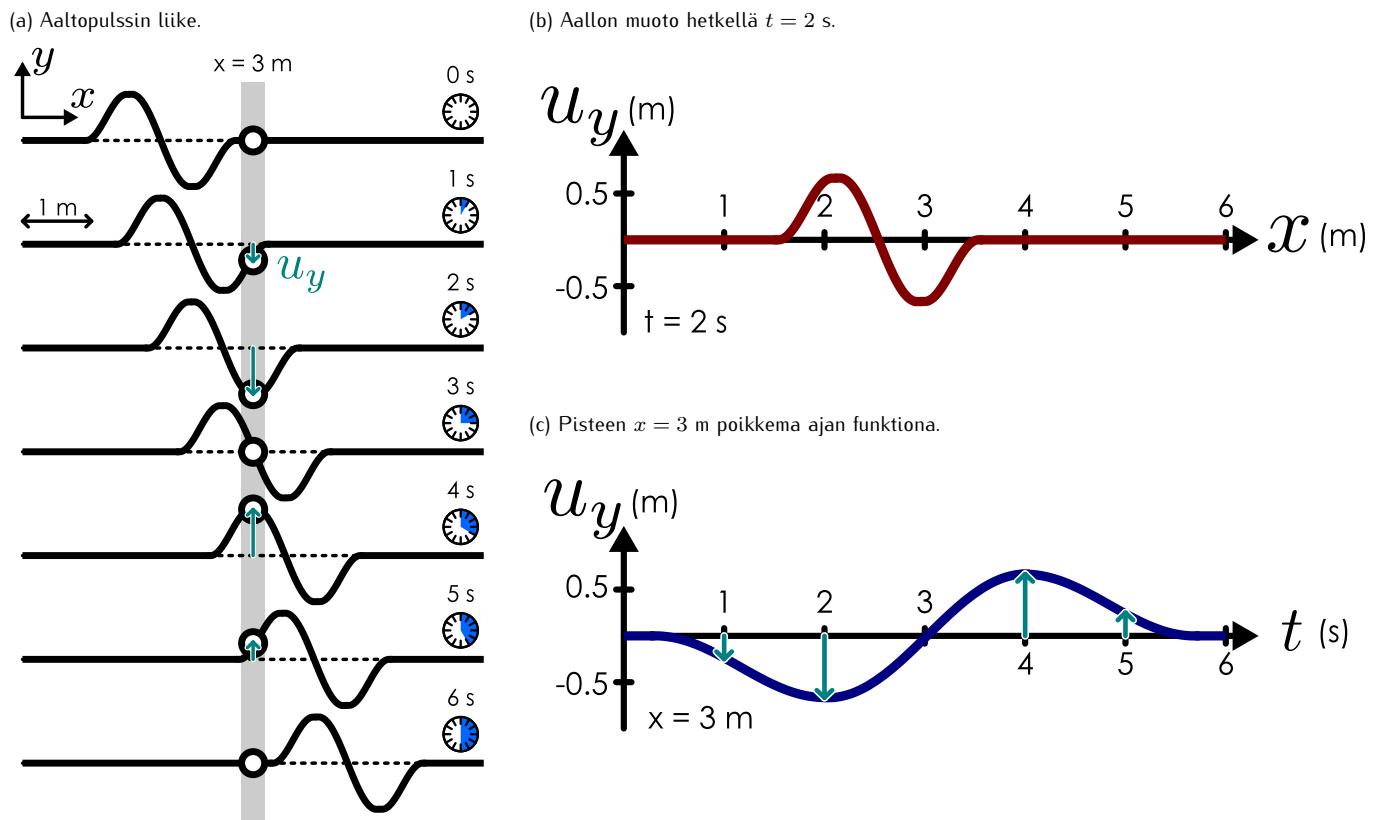
Katsomon normaali tila on se, että kaikki istuvat. Samoin esimerkiksi kireäksi vedetty köysi on suora. Kuitenkin aallon kulkissa katsomossa tai köydessä systeemi on paikallisesti pois tasapainosta: katsojat seisovat istumisen sijaan ja köysi on mutkalla. Aalto on siis paikallinen *poikkeama tasapainosta* eli *liikkuva häiriö*. Aaltoa voikin syntyä nimenomaan sellaisiin materiaaleihin ja systeemeihin, joissa tällaiset poikkeamat tasapainosta kerran synnytyyä pyrkivät itsestään liikkumaan. Aaltoa kuljettavaa ainetta kuten katsomon ihmisiä joukkoja tai köytä kutsutaan tällöin aallon *väliaineeksi*.

Aallot voivat kuljettaa energiaa ja liikemääriä, mutta ne eivät *kuljeta ainetta* ainakaan pitkiä matkoja. Esimerkiksi aallon liikkuessa katsomon ympäri liikkeessä on seisovien ihmisten alue, mutta yksikään ihminen ei liiku aallon mukana. Kukaan katsoja on aallon kuljettua hänen ohitseen edelleen samalla paikalla kuin missä hän oli aluksikin. Aalto ei siis synny siksi, että joukko ihmisiä kiertäisi katsomoa, vaan siksi että *eri ihmiset* nousevat vuorollaan seisomaan. Samaan tapaan aallon kulkissa köydessä köyden osat siirtyvät köyden pituussuuntaan nähdyn kohtisuoraan, mutta aallon kuljettua köysi palautuu suoraksi ja köyden osat palaavat tasapainoasemaan.

Aallot ovat tämän vuoksi aina kollektiivisia ilmiöitä. Yksi ihminen voi nousta seisomaan ja istuutua, mutta hän ei voi tehdä aaltoa, sillä aalto vaatii joukon ihmisiä, jotka reagoivat toistensa liukkeeseen. Samoin köydessä liikkuva aalto syntyy, kun köyden eri osat poikkeavat vuorollaan tasapainosta.

Tutkitaan tarkemmin kuvan 15.1 köydessä kulkevaa aaltoa. Köysi on aluksi suora, mutta sitten sen toista päätä heilautetaan nopeasti ylös ja alas. Köysi ei ole jäykkiä kappale, joten heilautuksen ollessa nopea köysi ei pysy suorana vaan ainoastaan köyden pää ehtii seurata heilautusta muun köyden pysyessä suunnilleen suorana. Köyden voi ajatella koostuvan useista lyhyistä, elastisista osista. Köyden pään nopea siirtäminen saa köyden *venymään*, jolloin köyden pää vetää vieressään olevaa köyden osaa puoleensa venytetyn jousen tapaan. Tämä elastinen voima vetää köyden seuraavan osan lükkeelle, jolloin tämä alkaa vetää perässään

Kuva 15.2: Aallon graafinen esitys aaltofunktion avulla.



seuraavaa osaa jne. Näin köyteen syntynyt häiriö — siis aalto — alkaa liikkua köyden pituussuunnassa, ja liikettä ylläpitävät köyden osien väliset vuorovaikutukset. Jos köysi on kauttaaltaan samanlainen, nämä vuorovaikutukset ovat kaikkien köyden osien välillä samanlaiset. Näin kukin köyden osa itse liikkeeseen päästyään vetää seuraavan osan lükkeelle aina yhtä nopeasti, ja niinpä *aalto etenee köydessä vakionopeudella*, joka riippuu köyden ominaisuuksista. Köysi itsessään ei kuitenkaan kulje pituussuunnassaan minnekään vaan kukin köyden osa liikkuu ainoastaan kohtisuoraan köyden pituuteen nähden.

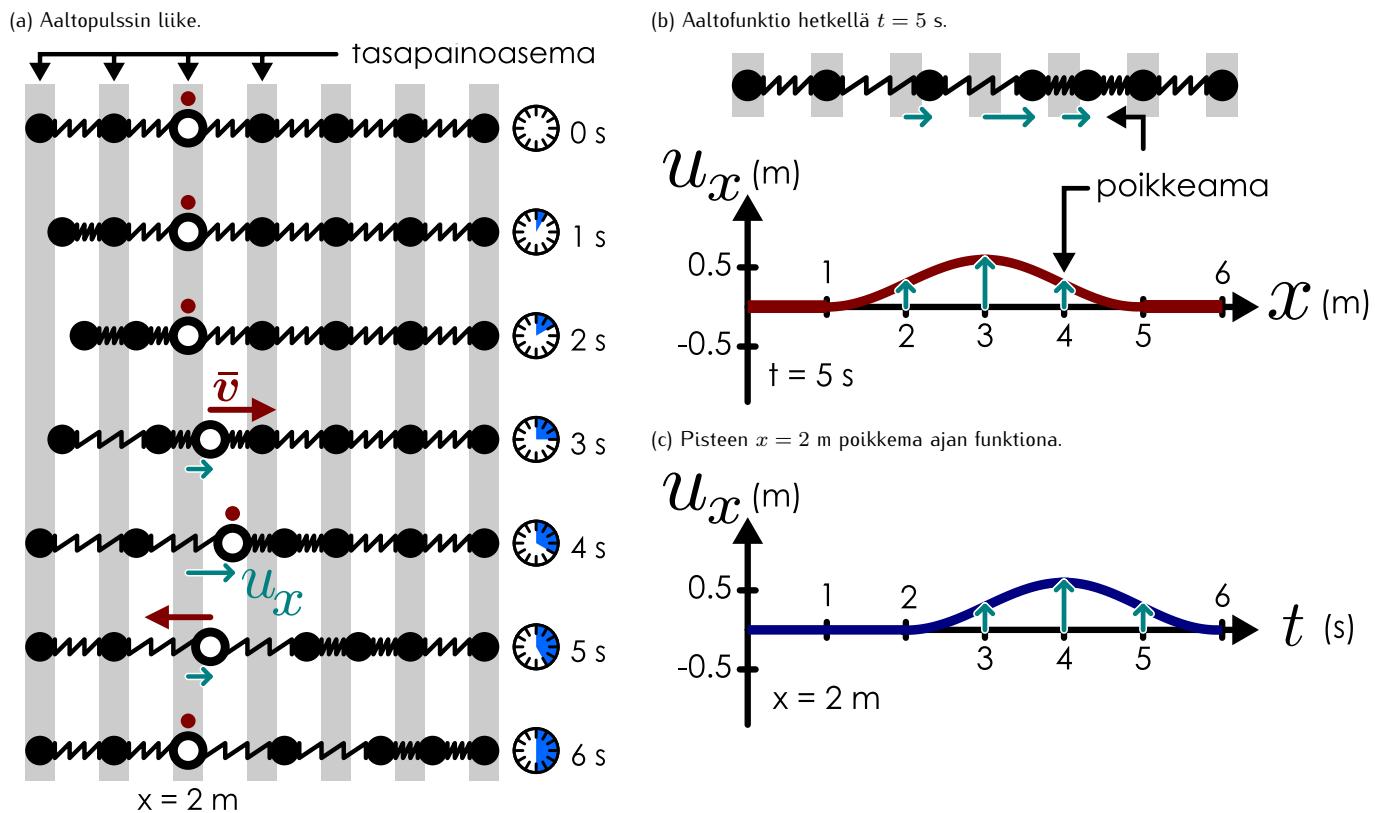
Kun köyttä heiluttanut käsi palaa heilahduksen jälkeen takaisin lähtöpisteesseen, se vetää myös köyden pään takaisin lähtöpaikkaansa. Nyt köyden pää vetää viereessään olevaa köyden osaa alas päin, tämä vetää edelleen seuraavaa osaa jne., ja näin köysi palautuu suoraksi. Tässä vaiheessa heilautuksen synnyttämä häiriö on kuitenkin ehtinyt jo siirtymä kauas lähtöpisteestään, ja se etenee itsestään vaikkei köyttä enää liikuteta lainkaan. Koska heilautus tehtiin vain kerran ja tämän jälkeen köyden pää pysäytettiin, myös synnytneessä aallossa on vain yksi kumpu eli *aallonharja*. Tällaista pieneenalueeseen rajattua aaltoa kutsutaan **aaltopulssiksi**.

### Aallon graafinen esitys

Kuvassa 15.2 on tutkittu tarkemmin köyden yksittäisen osan liikettä aaltopulssin kulkiessa köydessä. Kun aallon eturintama saavuttaa tarkasteltavan pisteen  $x = 3 \text{ m}$ , piste alkaa liikkua alas päin eikä se enää ole köyden tasapainoasemaa vastaavassa paikassa. Tämän jälkeen tarkastelupiste siirtyy tasapainoaseman yläpuolelle, ja lopuksi piste palaa tasapainoon. Kuvassa symbolilla  $u_y$  merkitty siirtymä on pisteen  $y$ -suuntainen **poikkeama** tasapainosta. Poikkeama on positiivinen, kun köysi on siirtynyt positiiviseen  $y$ -suuntaan ja negatiivinen siirtymän ollessa negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Mitä enemmän köysi on siirtynyt pois tasapainosta, sitä suurempi poikkeama on itseisarvoltaan.

Köyden muotoa esittävää funktiota kutsutaan **aaltofunktioksi**, ja se kertoo köyden kunkin osan poikkeaman tasapainoasemasta jokaisella ajan hetkellä. Koska poikkeama riippuu sekä ajasta  $t$  että paikasta  $x$  (kun valitaan  $x$ -akseli köyden suuntaiseksi), kyseessä on yksiuotuisen aallon tapauksessa matemaattisesti kahden muuttujan funktio  $u_y(x, t)$ . Kuvan 15.2 on piirretty tämän funktion kuvaaja sekä paikan funktiona ajan hetkenä  $t = 2 \text{ s}$  (b) että ajan funktiona tarkastelupisteessä  $x = 3 \text{ m}$  (c). Kun aaltofunktio piirretään **paikan funktiona** pitäen aika vakiona, saadaan näkyville *köyden muoto* yhtenä ajan hetkenä. Sen sijaan piirrettäessä **aaltofunktio ajan funktiona** yhdessä pisteessä tuloksena on *köyden yksittäisen pisteen poikkeaman kuvaaja*.

Kuva 15.3: Pitkittäinen aaltoliike.



Ajan ja paikan suhteiden piirretut aaltofunktiot ovat selvästikin toistensa peilikuvat, minkä voi näinikään päätellä kuvan 15.2 perusteella. Aaltopulssin oikeassa reunassa on *aallonpohja* eli siellä köysi on siirtynyt negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Aallon vasemmassa reunassa on puolestaan *aallonharja*. Aallon muotoa esittävässä kuvajassa 15.2 (b) on siis aallonharja vasemmalla ja -pohja oikealla. Koska aalto kulkee oikealle, aallonpohja saapuu tarkastelupisteeseen ensin, ja niinpä tarkastelupisteen liikettä esittävässä kuvan 15.2 (c) funktiona piirtyy ensin (vasemmalle) aallonpohja ja vasta sitten (oikealle) aallonharja. Kuvassa 15.2 (c) kuvaajan muoto on siis käännytynyt ympäri kuvaajaan (b) verrattuna.

**15.1** Jos kuvan 15.2 (b) ja (c) kaltaiset kuvaajat piirretäisiin negatiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevalle aalloille, olisivatko paikan ja ajan suhteiden piirretut kuvaajat keskenään samanlaiset vai peilikuvat?

Köydessä etenevä aalto on **mekaaninen aalto**, koska se syntyy köyden atomien mekaanisen liikkeen kautta. Se on myös **poikittainen** aalto, koska siinä poikkeamat tasapainosta tapahtuvat aallon liikkeen suuntaan nähdyn poikittaiseen suuntaan. Aallot voivat olla myös **pitkittäisiä**, jos poikkeamat tapahtuvat niissä aallon liikkeen suuntaisesti. Esimerkiksi ääni on pitkittäinen aalto, sillä ilmassa kulkevissa ääniaalloissa ilman molekyyleit siirtyvät aallon kulkusuunnassa vuoroin eteenpäin ja vuoroin taaksepäin muodostaen korkean ja matalan paineenalueita. Pitkittäisiä aaltoja syntyy myös kiinteissä aineissa, ja kuvassa 15.3 pitkittäistä aaltoliikettä onkin kuvattu yksinkertaisella mallilla, jossa kiinteän aineen atomeja kuvataan toisiinsa jousin yhdistettyinä palloina. Kun systeemini ensimmäistä hiukkasta työnnetään eteenpäin, sen edessä oleva jousi puristuu kohdistuen seuraavaan hiukkaseen työntävän voiman. Tämä saa toisen hiukkisen liikkeelle, mikä johtaa seuraavan jousen puristumiseen jne.

**15.2** Mikä on kuvan 15.2 aallon etenemisnopeus? Entä kuvan 15.3?

Voimme määritellä myös pitkittäiselle aalloille poikkeamaa kuvaavan aaltofunktion  $u_x(x, t)$ . Kyseessä on jälleen funktio, joka kertoo paljonko tasapainotilassa pisteessä  $x$  olevat hiukkaset ovat siirtyneet  $x$ -suunnassa hetkellä  $t$ . Myös tämän aaltofunktion voi piirtää kuvaajana kuten kuvassa 15.3 on esitetty, mutta tässä tapauksessa kuvaajan muoto ei tietenkään vastaa aallon muotoa yhtä kirjaimellisesti kuin poikittaisen aaltoliikkeen tapauksessa. Nyt kuvaaja piirtyy ylöspäin  $y$ -suuntaan vaikka hiukkaset ovat siirtyneet todellisuudessa  $x$ -suunnassa.

## AALTOLIIKE

Ilmassa kulkevien ääniaaltojen tapauksessa aaltofunktioilla voi kuvata molekyylien siirtymiä, mutta yhtä hyvin ääniaaltoja kuvaavana aaltofunktiota voi käyttää ilman painetta  $p(x, t)$ , koska hiukkasten liikkuessa myös ilman paine muuttuu. Lisäksi on olemassa myös muita kuin mekaanisia aaldoja. Valo nimittäin on *sähkömagneettisen kentän aalto*, jossa aaldo muodostavat suureet ovat sähkö- ja magneettikenttä. Sähkömagneettista aaltoa kuvaavana aaltofunktiota käytetäänkin yleensä sähkökenttää  $\vec{E}(x, t)$ . Aaltofunktion kuvajana voi toki laatia myös paineelle ja sähkökentälle, mutta tällöin pitää olla erityisen tarkkana kuvajaa tulkittaessa.



**15.3** (a) Kuvassa 15.3 pitkittäisen aallon aaltonfunktio on piirretty symmetrisenä pulssina, vaikka systeemiä esittävässä kuvissa aalto ei näytä symmetriseltä. Selitä miksi näin on. (b) Millainen aaltonfunktion kuvaaja olisi, jos aalto synnyttäisiin vetämällä ensimmäistä hiukasta vasemmalle?

## 15.2 Aallon eteneminen

### Aallon nopeus

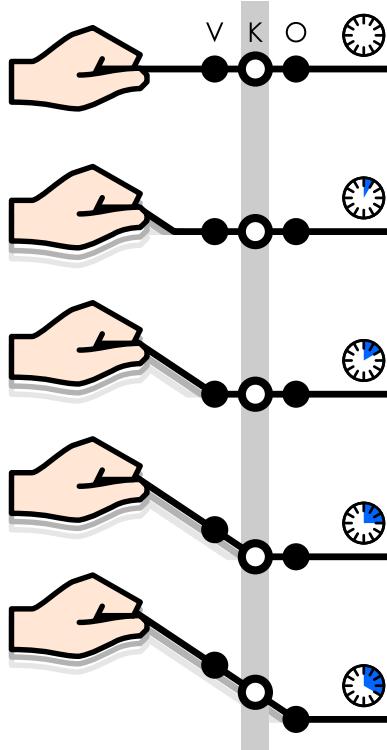
Edellä tarkastelimme köydessä kulkevien aaltopulssien kuvaamista ja käytöstä, mutta emme vielä selittäneet *miksi* aalto etenee kuten etenee. Vaikka köyden osat liikkuvat pystysuunnassa, aaltopulssi itsessään liikkuu köyttä pitkin, ja yleensä aaltoliikettä tarkasteltaessa halutaan ymmärtää nimenomaan aallon liikettä väliaineen osien sijaan. Tutkimmekin seuraavaksi aallon nopeuden, muodon ja köyden ominaisuuksien riippuvuutta toisistaan.

Kuvassa 15.4 tarkastellaan köyttä, jonka päästä vedetään ylöspäin vakionopeudella  $v_{y,pää}$ . Näin tehtäessä köyden pää vetää köyden seuraavaa osaa ylöspäin, tämä vetää edelleen seuraavaa osaa ja niin pois päin. Näin syntyy köydessä etenevä poikkeama tasapainosta eli aalto, ja koska köyden kunkin osa saa saman nopeuden  $v_{y,pää}$ , köysi on muodoltaan kalteva suora. Aaltopulssilla ei ole kuvassa loppua, koska köyden päästä ei kuvasarjassa vielä tuoda takaisin tasapainoasemaan, mutta aallolla on selkeä "alkupiste", jossa köyden kulma muuttuu. Tämä piste siirtyy köydessä eteenpäin ajan kuluessa, joten *aallon nopeus* voidaan mitata tämän pisteen siirtymän ja kuluneen ajan suhteesta.

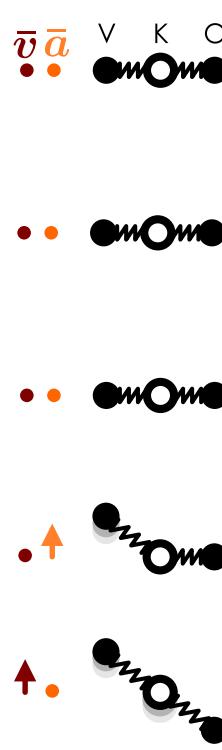
$$v_{x,\text{aalto}} = \frac{\Delta x_{\text{aalto}}}{\Delta t}. \quad (15.1)$$

**Kuva 15.4:** Köyden päästä vedetään ylöspäin vakionopeudella. Tarkastellaan köyteen merkittävä pistettä "K"(keskellä) ja sen viereisiä osia "V"(vasen) ja "O"(oikea).

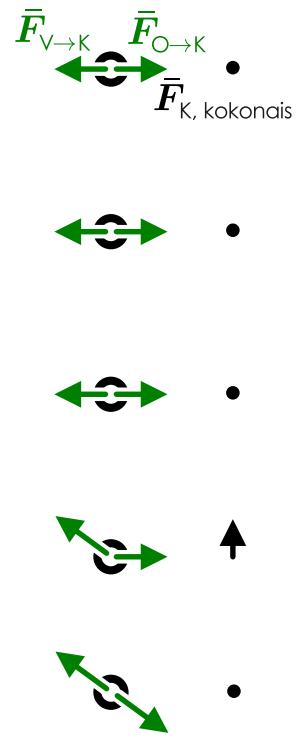
(a) Aalto liikkuu köydessä.



(b) Pisteen K nopeus ja kiilthyvyys.



(c) Pisteen K vapaakkappalekuva.



Köysi on makroskooppisessa mittakaavassa jatkuva, mutta se ei ole täysin venymätön. Itse asiassa jotta köydessä voisi kulkea aalto, köyden täytyy olla jännitetty eli suoraksi vedetty. Tällöin köysi myös välttämättä hieman venyy. Kuvassa 15.4 (b) köyttä kuvataan yksinkertaistetulla mallilla, jossa köysi ajatellaan jaetuksi pieniin jousiin yhdistettyihin kappaleisiin. Kukin kappale kuvailee köyden lyhyen osan massaa ja jouset köyden elastisuutta. Erityisesti kuvassa tarkastellaan kolmea pistettä V (vasen), K (keski) ja O (oikea), joiden välinen etäisyys on  $\Delta x$ . Koska köysi on jännitetty, kappaleiden väliset jouset ovat aina hieman venyneet ja pisteet V ja O vetävät keskipistettä K aina puoleensa. Tällöin jousien pisteeseen K kohdistamien voimien suuruus on sama kuin köyden jännitysvoiman  $\bar{T}$  suuruus

$$F_{V \rightarrow K} = F_{O \rightarrow K} = T. \quad (15.2)$$

Köyden ollessa suora nämä voimat kumoavat toisensa ja pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima  $\bar{F}_{\text{kokonais},K}$  on nolla. Pisteen K kiilthyvyys on tällöin nolla ja se pysyy levossa.

Kuvasarjassa on esitetty köyden muoto ajan  $\Delta t$  välein. Ensinnäkin köysi on suora, mutta kun sen pää siirryttää ylöspäin, köydessä etenee kolmion muotoinen aalto. Kolmannessa kuvassa — olkoon tämä ajan hetki  $t$  — köyden taitoskohta eli aaltopulssin alkupiste on piste V kohdalla ja köysi on pisteen K kohdalla vielä suora. Neljännessä kuvassa hetkellä  $t + \Delta t$  taitoskohta on siirtynyt pisteen K kohdalle. Tässä tapauksessa aalto on siis edennyt matkan  $\Delta x$  ajassa  $\Delta t$ , joten aallon nopeus on  $v_{x,\text{aalto}} = \Delta x / \Delta t$ . Köyden päättä on samassa ajassa vedetty ylöspäin siirtymä  $\Delta u_{y,\text{pää}} = v_{y,\text{pää}} \Delta t$ . Viidennessä kuvassa hetkenä  $t + 2\Delta t$  köyden taitoskohta on siirtynyt pisteen O kohdalle, jolloin köysi on keskimmäisen pisteen K kohdalla jälleen suora — ei kuitenkaan enää vaakasuora.

Kuvaan 15.4 (c) on piirretty pisteen K vapaakkappalekuva eri ajan hetkinä. Aallon lähestyessä pistettä K tämän viereinen piste V alkaa ensin siirtymään ylöspäin. Koska piste K on vielä tällöin tasapainoasemassa, täytyy pisteen V ja K välisen jousen käantyä ja venyä. Tällöin siis pisteen V ja K välisen jousen tarkastelu-pisteeseen K kohdistama jännitysvoima myös käantyy yläviistoon ja voimistuu. Koska pisteet K ja O ovat vielä tasapainoasemassa, näiden pisteen välisen jousen pisteeeseen K kohdistama jännitysvoima osoittaa vaakasuoraan. Voimien  $\bar{F}_{V \rightarrow K}$  ja  $\bar{F}_{O \rightarrow K}$  x-suuntaisten komponenttien täytyy kumota toisensa, koska piste K liikkuu vain y-suunnassa. Niiinpä näiden komponenttien täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen,  $\bar{F}_{x,V \rightarrow K} = -\bar{F}_{x,O \rightarrow K}$ . Kuitenkin ainoastaan voimalla  $\bar{F}_{V \rightarrow K}$  on nollasta poikkeava komponentti y-suunnassa eli pystysuunnassa, joten pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima on pisteen V ja K välisen jousen tuottaman voiman y-komponentti,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},K} = \bar{F}_{y,V \rightarrow K}. \quad (15.3)$$

Pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa siis ylöspäin. Niiinpä piste K saa pystysuoran kiilthyvyyden ja alkaa seuraavaksi itse liikkua ylöspäin, koska piste V vetää sitä mukanaan. Näin aalto etenee.

Seuraavaksi piste K vetää pisteen O mukanaan ylös ja pulssi liikkuu jälleen eteenpäin. Toisaalta K:n vetäessä pistettä O ylöspäin piste O vetää K:ta alaspaan, ja tämä kohdistaa pisteeeseen K voiman komponentin alaspaan. Pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa kuitenkin ylöspäin niin kauan kuin pystysuora etäisyys pisteen V ja K välillä on suurempi kuin pisteen K ja O väliillä, koska tällöin piste V vetää K:tä ylöspäin voimakkaammin kuin O vetää sitä alaspaan. Hetkellä  $t + 2\Delta t$  ja siitä eteenpäin nämä etäisyyset ovat kuitenkin yhtä suuret, koska köysi on suora, joten pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima on tällöin nolla ja pisteen kiilthyvyys on siten myös nolla. Piste K nopeus on edelleen ylöspäin, joten piste jatkaa liikettää tähän suuntaan vakionopeudella.

Piste K oli aluksi levossa ja aallon saavutettua pisteen sen nopeus on  $v_{y,\text{pää}}$  eli sama nopeus, jolla köyden päättä vedetään ylöspäin. Niiinpä pisteen liikemäärän muutos prosessin aikana on

$$\Delta p_{y,K} = m_K \Delta v_{y,K} = m_K v_{y,\text{pää}}. \quad (15.4)$$

Tämän liikemäärän muutoksen aiheuttaa pisteeeseen kohdistuvan kokonaisvoiman impulssi,  $I_{y,K} = \Delta p_{y,K}$ . Toisaalta impulssi on pisteeeseen kohdistuvan kokonaisvoiman integraali ajan suhteen. Pisteeeseen K kohdistuva voima ei ole vakio sen lähtiesä liikkeelle, mutta impulssi on likimain pisteeeseen kohdistuvan voiman ja tarkasteluhetkien välisen aikajakson pituuden tulo eli

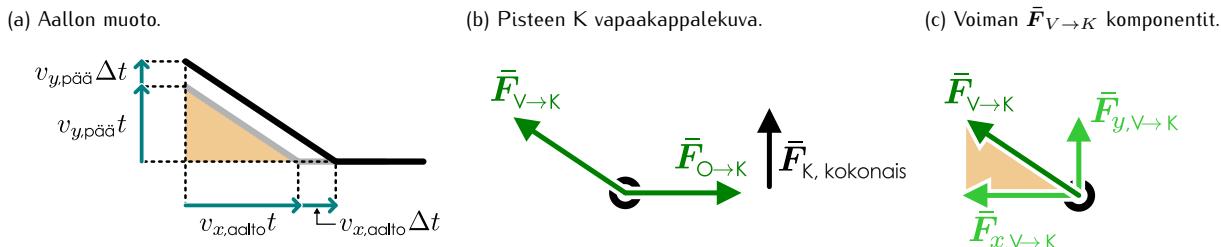
$$I_{y,K} = F_{y,\text{kokonais},K} \Delta t = F_{y,V \rightarrow K} \Delta t. \quad (15.5)$$

Hetkellä  $t + \Delta t$  eli köyden taitoskohdan ollessa pisteen K kohdalla piste V siis vetää pistettä K voimalla

$$F_{y,V \rightarrow K} = \frac{I_{y,K}}{\Delta t} = \frac{p_{y,K}}{\Delta t} = m_K \frac{v_{y,\text{pää}}}{\Delta t} = \frac{m_K}{\Delta x} v_{y,\text{pää}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu v_{y,\text{pää}} v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.6)$$

Tässä on otettu käyttöön uusi vakio  $\mu = m_K / \Delta x$ . Pituus  $\Delta x$  on mallissa käytetty köyden lyhyen osan pituus ja  $m_K$  on tällaisen osan massa, joten tämä vakio kertoo, paljonko massaa köydessä on pituusyksikköä kohti. Toisin sanoen  $\mu$  on köyden pituustiheys.

Kuva 15.5: Aallon muodon ja pisteeseen K kohdistuvien voimien yhteys.



Koska köyden jännitysvoima osoittaa aina köyden suuntaisesti, hetkellä  $t + \Delta t$  voimavektorin  $\bar{F}_{V \rightarrow K}$  täytyy osoittaa yläviistoon samassa kulmassa kuin minkä köysi aaltopulssissa muodostaa. Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.5: voimavektorien rajaama oranssi kolmio on yhdenmuotoinen aaltopulssin muotoa kuvavaan oranssin kolmion kanssa. Edelleen koska yhdenmuotoisten kolmioiden sivujen pituuden suhteet ovat samat, voimme kirjoittaa kolmioiden kateettien avulla

$$\frac{F_{y,V \rightarrow K}}{F_{x,V \rightarrow K}} = \frac{v_{y,pää} \Delta t}{v_{x,aalto} \Delta t} = \frac{v_{y,pää}}{v_{x,aalto}}. \quad (15.7)$$

Tähän voidaan sijoittaa edellä johdettu lauseke (15.6). Lisäksi köyden jännitys sen ollessa tasapainossa on sama kuin köyteen kohdistuva vaakasuuntainen voima,  $|F_{x,V \rightarrow K}| = |F_{x,O \rightarrow K}| = T$ . Näillä merkinnöillä yhtälö saa muodon

$$\frac{\mu}{T} v_{y,pää} v_{x,aalto} = \frac{v_{y,pää}}{v_{x,aalto}}. \quad (15.8)$$

Tästä voidaan edelleen supistaa pois köyden pään nopeus  $v_{y,pää}$  sekä ratkaista aallon nopeus  $v_{x,aalto}^2 = \frac{T}{\mu}$ . Tässä tapauksessa aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan, joten nopeus on positiivinen. Aalto voisi kuitenkin kulkea myös negatiiviseen suuntaan, jolloin nopeus olisi negatiivinen mutta itseisarvoltaan yhtä suuri. Yleisesti *aallon vauhti jännitetyssä köydessä* on

$$v_{aalto} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (15.9)$$

Usein puhuttaessa aallon nopeudesta tarkoitetaankin täsmällisemmin aallon vauhtia.



**15.4** Köyden toinen pää on kiinnitetty seinään ja toinen pää on sinulla kädessä. Haluat synnyttää köyteen aallon heiluttamalla köyden päätä. Miten voit vaikuttaa syntyvän aallon etenemisnopeuteen?

Edellä johdetun tuloksen mukaan aalto kulkee sitä nopeammin mitä suurempi jännitys köydessä on ja mitä kevyempi köysi on pituusyksikköö kohti. Tämä on järkevä, sillä köyden jännitys synnyttää köytä takaisin tasapainoasemaan vetävän voiman, jolloin suurempi jännitys saa köyden osat reagoimaan nopeammin niiden viereisten osien liukkeeseen. Tällöin aalto myös liikkuu nopeasti. Köyden pituustiheydellä on puolestaan päinvastainen vaikutus: mitä suurempi massa köyden osilla on, sitä kauemmin niiden nopeuden muuttaminen kestää ja sitä hitaammin köyden osat reagoivat hätriöihin niiden lähistöllä. Tällöin aalto etenee hitaasti.

Köydessä liikkuvat aallot ovat vain eräs mekaanisten aaltojen erikoistapaus, mutta samantapaisella analyysillä voidaan päättää muissakin väliaineissa kulkevien aaltojen vauhti. Tulos on yleensä aina samanlainen: *aallon vauhdin neliö on suoraan verrannollinen väliainetta takaisin tasapainoon palauttavan vuorovaikutuksen voimakkuuteen* (köydessä jännitysvoima) ja *kääntäen verrannollinen väliaineen inertian* (köydessä pituustiheys).

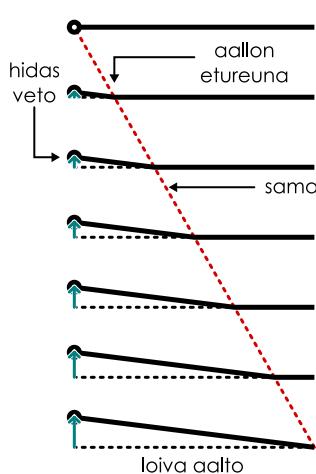


**15.5** (a) Mikä on äänen nopeus (i) ilmassa ja (ii) vedessä? (b) Selitä ero yhtälöön (15.9) verraten.

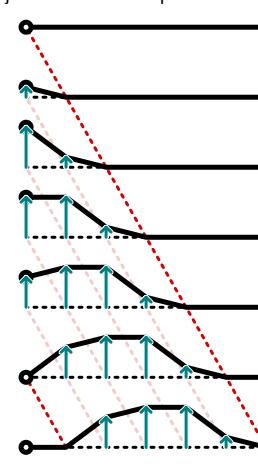
Erityisen tärkeää tässä tuloksessa on se, että *aallon vauhti riippuu vain väliaineen ominaisuuksista*. Erityisesti aalto etenee yhtä nopeasti riippumatta siitä, millainen häiriö väliaineessa liikkuu. Köyden tapauksessa aallon nopeus ei riipu siitä, kuinka nopeasti köyden päättä nostettiin (eli nopeudesta  $v_{y,pää}$ ), kuten kuvassa 15.6 (a) on esitetty. Tämä tarkoittaa sitä, että nostettaessa köyden päättä nopeasti köyteen syntyy jyrkästi nouseva aalto kun taas hitaassa nostossa syntynvä aalto on loiva. Kumpikin aalto kuitenkin liikkuu *yhtä nopeasti* köyttä pitkin. Edelleen aaltopulssin voi ajatella koostuvan useasta osasta, jotka kaikki etenevät yhtä

Kuva 15.6: Erilaiset aallot kulkevat samassa välivaiheessa yhtä nopeasti.

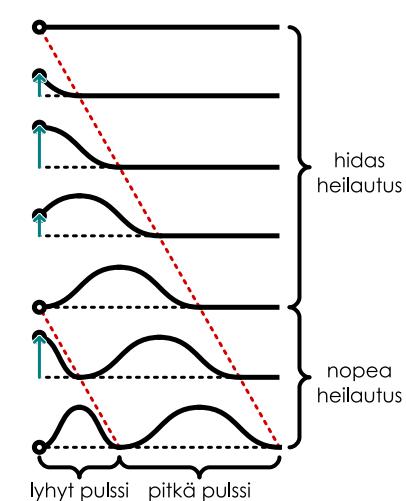
(a) Köyden pään hidas ja nopea vetro.



(b) Aaltopulssi koostuu osista, joilla on sama nopeus.



(c) Nopea häiriö tuottaa kapean pulssin.



nopeasti vaikka köyden jyrkkyys olisikin niissä erilainen (kuva 15.6 (b)). Koska kukaan pulssin osa etenee samalla nopeudella, osien etäisyys toisistaan ei muutu ja niin pulssin muoto säilyy samana aallon liikkussa.

Koska heilahduksen nopeus ei vaikuta aallon nopeuteen, sen täytyy vaikuttaa pulssin muotoon (kuva 15.6 (c)). Mitä nopeammin köyden päättä heilautetaan, sitä lyhyemmin matkan aalto ehtii heilautuksen aikana kulkea ja sitä kapeampi pulssista tulee. Edelleen koska aaltopulssi etenee köydessä vakionopeudella, *jokainen köyden piste kokee samanlaisen liikkeen pulssin kulkiessa sen ohi*. Nämä myös kunkin pisteen polkemaan ajan funktiona esittävä kuvaaja on samanlainen. Erityisesti *köyden kunkin pisteen liike toistaa köyden pään liikkeen*. Jos aaltopulssi on synnytetty heilauttamalla köyttä nopeasti, jokainen köyden piste heilahtaa nopeasti aaltopulssin kulkiessa sen ohi. Jos köyden päättä heilautetaan hitaasti, kukaan köyden piste heilahtaa hitaasti.

**15.6** Sinulla on kaksi samanlaista köyttä, joissa etenevien aaltojen vauhti on 2 m/s. Sinä ja ystäväsi heilautatte köyksien päättä edestakaisin, jolloin köysiin syntyy aaltopulssit. Aloitatte heilautukset samanaikaisesti, mutta sinä teet heilautuksen ajassa 0.4 s kun taas ystäväsi heilautus kestää 1.0 s. (a) Kuinka leveät aaltopulssit köysiin syntyy? (b) Kumpaankin köytteen on merkitty tarkastelupiste 1.0 m etäisyydelle köyden päästä. Millainen on pisteen liikkeen kuvaaja kummassakin köydessä?

## Aaltopulssin aaltofunktio

Tarkastellaan vielä köydessä kulkevan aaltopulssin matemaattista esitystä. Kuvaan 15.7 on piirretty pulssi, joka kulkee köydessä oikealle, positiiviseen  $x$ -suuntaan, nopeudella  $v_{x,\text{aalto}}$ . Ajan nollahetkeksi on valittu ensimmäinen kuva, jossa pulssin muotoa kuvaava funktio  $u_y(x, t = 0) = f(x)$ . Emme tässä esimerkissä tiedä täsmälleen tämän funktion matemaattista lauseketta, mutta funktion *kuvaaja* voidaan lukea köyden muodosta ja periaatteessa funktio voitaisiin selvittää tämän perusteella. Aallon muoto ei nyt kuitenkaan ole oleellinen, vaan kuvan 15.7 esimerkki toimii *millä tahansa* aallon muodolla ja sileällä funktiolla  $f(x)$ .

Kun kuluu aika  $\Delta t$ , aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan siirtymän  $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} \Delta t$ . Koska aaltopulssin muoto ei muutu, aaltoa voidaan kuvata edelleen samalla funktiolla  $f(x)$ . Kuitenkin koska aalto on siirtynyt, *argumenttia  $x$  täytyy muuttaa*. Tämän muutoksen voi päättää tarkastelemalla mitä tahansa aaltopulssin kohtaa, ja kuvassa 15.7 on tästä varten merkity aaltopulssin huippu. Ajan hetkellä  $t = 0$  huippu on pisteesä  $x_{\text{huippu,alku}} = 2.2$  m, joten aaltofunktion maksimin täytyy olla tässä pisteesä,

$$u_{y,\max} = u_y(x_{\text{huippu,alku}}, 0). \quad (15.10)$$

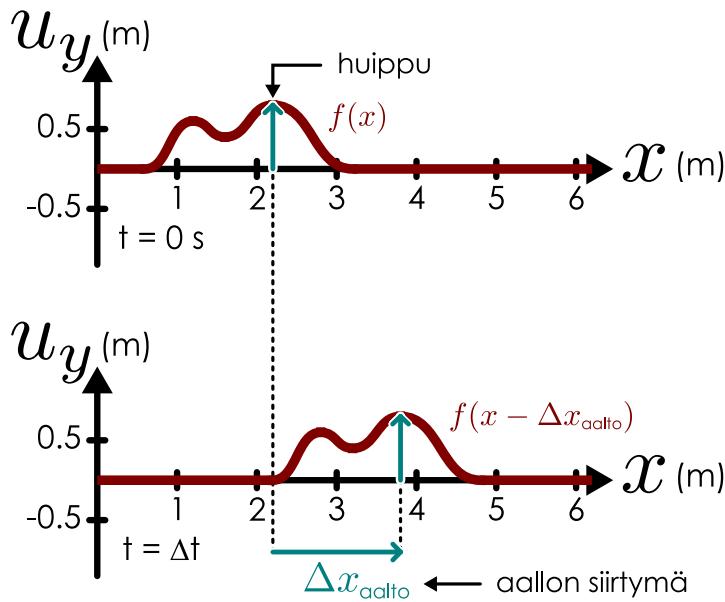
Toisaalta koska aallon muotoa kuvaava funktio  $f(x)$ , tällä funktiolla täytyy olla maksimi pisteesä  $x_{\text{huippu,alku}}$ , ja voimme merkitä

$$u_{y,\max} = f(x_{\text{huippu,alku}}). \quad (15.11)$$

Ajan kuluessa aalto liikkuu, ja hetkellä  $t = \Delta t$  huippu on kuvassa siirtynyt pisteesseen  $x_{\text{huippu,loppu}} = 3.8$  m. Yleisesti voimme kirjoittaa huipun uuden paikan sen alkuperäisen paikkakoordinaatin ja aallon siirtymän

## AALTOLIIKE

Kuva 15.7: Positiiviseen suuntaan kulkeva aaltopulssi. Hetkellä  $t = 0$  aallon huippu on pisteessä  $x_{\text{huippu}} = 2.2 \text{ m}$ , jossa funktion  $f$  maksimi on. Kun aalto on siirtynyt  $\Delta x_{\text{aalto}} = 1.6 \text{ m}$ , sen muotoa kuvaa funktio  $f(x - \Delta x_{\text{aalto}})$ . Tämän maksimi on pisteessä  $x - \Delta x_{\text{aalto}} = 2.2 \text{ m}$  eli  $x = 3.8 \text{ m}$ .



avulla,  $x_{\text{huippu,loppu}} = x_{\text{huippu,alku}} + \Delta x_{\text{aalto}} = x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t$ . Nyt aaltofunktion maksimi on tässä uudessa pisteessä

$$u_{y,\max} = u_y(x_{\text{huippu,loppu}}, \Delta t) = u_y(x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t, \Delta t). \quad (15.12)$$

Toisaalta funktio  $f(x)$  ei riipu ajasta joten sen maksimi on edelleen pisteessä  $x_{\text{huippu,alku}}$  eli yhtälö (15.11) pätee yhä. Niinpä aaltofunktion  $u_y$  ja muotofunktion  $f(x)$  välillä pätee

$$u_y(x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t, \Delta t) = u_{y,\max} = f(x_{\text{huippu,alku}}). \quad (15.13)$$

Toisin sanoen jos aaltofunktiossa  $u_y$  sekä annetaan ajan edetä  $\Delta t$  että siirretään paikkakoordinaattia  $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}}\Delta t$ , pysytää aaltopulssin samassa kohdassa — tässä tapauksessa aallon huipulla.



**15.7** (a) Jos kuvan 15.7 esimerkissä  $\Delta t = 2.0 \text{ s}$ , mikä on aallon nopeus? (b) Milloin tässä tapauksessa  $u_y(4.5 \text{ m}, t) = u_{y,\max}$ ?

Tämän huomion avulla voimme ratkaista yleisen lausekkeen ajasta riippuvalle aaltofunktiolle. Voimme nimitä tehdä yhtälössä (15.13) muuttujanvaihdon  $t = \Delta t$  sekä  $x = x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t$ . Tästä voidaan ratkaista funktio  $f$  argumentti  $x_{\text{huippu,alku}} = x - v_{x,\text{aalto}}t$  ja aaltofunktioiksi saadaan

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t). \quad (15.14)$$

Tämä on yleinen muoto vakionopeudella  $v_{x,\text{aalto}}$  liikkuvaa aaltoa kuvaavalle aaltofunktiolle riippumatta siitä, millainen aallon muotoa kuvava funktio  $f$  on. Vaikka edellisessä päättelyssä tarkasteltiin nimenomaan aallon huippupistettä, samanlainen päättely toimii millä tahansa aaltopulssin pisteellä, ja niinpä tulos onkin yleispätevä.

Aaltofunktiossa (15.14) kannattaa erityisesti huomata, että vaikka aalto kulkee positiiviseen suuntaan, funktion  $f(x)$  argumentissa funktio siirtoa kuvaavan nopeustermin edessä on *miinusmerkki*. Tämä miinus tulee siitä, että funktio  $f(x)$  huippu on aina samassa pisteessä  $x_{\text{huippu,alku}}$ . Jos tarkastelemme positiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevaa aaltoa, jonka huippu on ajan kuluessa siirtynyt tästä pisteestä oikealle, meidän pitää siirtyä tämän siirretyn funktion huippupisteestä *vasemmalle, negatiiviseen suuntaan*, jotta pääsisimme takaisin alkuperäisen funktion  $f(x)$  huippupisteeseen.



**15.8** Mitkä seuraavista funktioista kuvavat vakionopeudella liikkuvia aaltoja ja mikä on aallon nopeus?

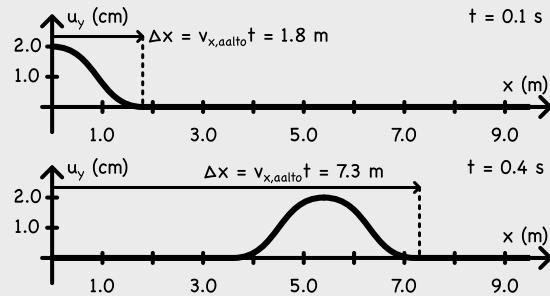
- (a)  $(0.10 \text{ m})e^{-(0.10 \text{ m}^{-2})(x+(0.30 \text{ m/s})t)^2}$ ,
- (b)  $(0.20 \text{ m}^3)/(x^2 - (0.40 \text{ m}^2/\text{s}^2)t^2 + 0.10 \text{ m}^2)$ ,
- (c)  $(0.30 \text{ m}) \cos[(0.20 \text{ m}^{-1})x - (0.50 \text{ s}^{-1})t]$

## esimerkki 15.1

## Aaltofunktio

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Sitten köyden päästä heilautetaan niin, että aikavälillä  $0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s}$  pään poikkeamaa tasapainosta kuvaava funktio  $u_{y,\text{pää}}(t) = (1.0 \text{ cm})[1 - \cos(2\pi t/0.2 \text{ s})]$  (muuten  $u_{y,\text{pää}} = 0$ ). Mikä on aallon aaltofunktio (ennen kuin aalto saavuttaa köyden toisen pään)?

**TILANNE** Piirretään kuva aallosta. Funktio  $u_{y,\text{pää}}(t)$  on aluksi nolla, hetkellä  $t = 0.1 \text{ s}$  se saa arvon  $u_{y,\text{pää}}(0.1 \text{ s}) = 2.0 \text{ cm}$  ja hetkellä  $t = 0.2 \text{ s}$  funktio on jälleen nolla. Köyden päästä siis heilautetaan kerran ylös-alas, ja tällöin köyteen syntyy aaltopulssi, jonka korkeus on 2.0 cm. Valitaan koordinaatisto nün, että köyden pää on pisteessä  $x = 0$  ja aalto lähtee kulkemaan positiiviseen  $x$ -suuntaan.



**SUUNNITELMA** Aallon nopeus ei riipu heilautuksen nopeudesta vaan vain köyden pituustiheydestä ja jännityksestä,

$$v_{\text{aalto}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (15.15)$$

Aaltofunktio on yleisesti muotoa

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t), \quad (15.16)$$

missä funktio  $f$  ratkeaa siitä, että köyden pään liikettä kuvaava funktio

$$u_y(0, t) = f(-v_{x,\text{aalto}}t) = u_{y,\text{pää}}(t) \quad (15.17)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{0.2 \text{ s}} \right), \quad 0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s}. \quad (15.18)$$

**RATKAISU** Aallon nopeus on  $v_{x,\text{aalto}} = \sqrt{\frac{50 \text{ N}}{4.5 \text{ kg}/30 \text{ m}}} = 18.3 \text{ m/s}$ . Aaltofunktiossa esiintyvä funktio  $f$  voimme puolestaan päätellä tekemällä muuttujanvaihdon  $y = -v_{x,\text{aalto}}t$  eli  $t = -y/v_{x,\text{aalto}}$ . Sen avulla voimme kirjoittaa

$$f(y) = f(-v_{x,\text{aalto}}t) \quad (15.19)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \frac{-2\pi t}{0.2 \text{ s}} \right), \quad 0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s} \quad (15.20)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{3.66 \text{ m}} \right), \quad 0 \text{ m} > y > -3.66 \text{ m}. \quad (15.21)$$

Varsinainen aaltofunktio saadaan sijoittamalla  $y = x - v_{x,\text{aalto}}t$  eli

$$u_y(x, t) = (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \left[ \frac{2\pi(x - v_{x,\text{aalto}}t)}{3.66 \text{ m}} \right] \right), \quad 0 \text{ m} > x - (18.3 \text{ m/s})t > -3.66 \text{ m} \quad (15.22)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \left[ (1.72 \text{ m}^{-1})x - (31.4 \text{ s}^{-1})t \right] \right), \quad (18.3 \text{ m/s})t > x > (18.3 \text{ m/s})t - 3.66 \text{ m}. \quad (15.23)$$

**ARVIOINTI** Köyteen syntyy aaltopulssi, jonka etureuna on pisteessä  $x = 0 \text{ m}$  heilautuksen alkaessa hetkellä  $t = 0 \text{ s}$  ja huippu  $u_y = 2.0 \text{ cm}$  heilautuksen puolivälissä eli hetkellä  $t = 0.1 \text{ s}$ . Pulssi liikkuu nopeudella  $v_{x,\text{aalto}} = 18.3 \text{ m/s}$ , joten esimerkiksi hetkellä  $t = 0.4 \text{ s}$  etureunan pitäisi olla pisteessä  $x = v_{x,\text{aalto}}\Delta t = (18.3 \text{ m/s}) \cdot (0.4 \text{ s}) = 7.3 \text{ m}$  ja huipun pisteessä  $x = v_{x,\text{aalto}}\Delta t = (18.3 \text{ m/s}) \cdot (0.3 \text{ s}) = 5.5 \text{ m}$  (ks. kuva). Johdettu aaltofunktio toteuttaa nämä ehdot, koska esimerkiksi

$$u_y(5.5 \text{ m}, 0.4 \text{ s}) = (1.0 \text{ cm}) \left( 1 - \cos \left[ (1.72 \text{ m}^{-1})(5.5 \text{ m}) - (31.4 \text{ s}^{-1})(0.4 \text{ s}) \right] \right) = 2.0 \text{ cm} \quad (15.24)$$

eli huippu  $u_y = 2.0 \text{ cm}$  on todellakin pisteessä  $x = 5.5 \text{ m}$  hetkellä  $t = 0.4 \text{ s}$ .



**15.9** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä yksilöitteisten aaltojen kuvauksesta. Selitä yleisesti, mitä aallot ovat. Mikä on aaltofunktio? Mikä vaikuttaa mekaanisen aallon nopeuteen? Mikä vaikuttaa mekaanisen aallon muotoon? Miten voit päätellä aallon nopeuden pelkästään sen aaltofunktion avulla?

### 15.3 Sinimuotoiset aallot

Edellisessä luvussa opimme, että aaltojen muoto riippuu siitä, millainen häiriö ne synnyttää. Esimerkiksi yksittäinen, lyhytkestoinen häiriö tuottaa lyhyen aalton pulssin. Toinen ääripää on *aaltolähde*, joka lähetää jatkuvasti aaltoliikettä ympärilleen. Tällainen lähde synnyttää aallon, jolla ei ole periaatteessa alkua eikä loppua lainkaan. (Tai ainakin jos lähde on lähetänyt aaltoa pitkään, aallon alkupiste on ehtinyt kulkea jo kauas.) Tällaiset aallot ovat varsin tavallisia, sillä esimerkiksi ääni syntyy äänilähteiden väärähtelyn sijtyessä ilman väärähtelyksi, joka puolestaan etenee ilmassa painealtona. Samoin esimerkiksi radiosignaaleja lähetävät antennit voivat synnyttää jatkuvan sähkömagneettisen aallon.

#### Sinimuotoisen aallon nopeus

Erityisen tärkeä erikoistapaus on aalto, jonka synnyttää *harmonisesti väärätelevä lähde*. Kuvassa 15.8 on esitetty yksinkertainen esimerkki tällaisesta tilanteesta: köyden pää on kiinnitetty jousen varassa harmonisesti väärätelevään kappaleeseen. Koska kappaleen massa on suuri köyden massaan verrattuna, köyden pää seuraa kappaletta eikä juurikaan vaikuta kappaleen liikkeseen. Kappaleen liikkeen köyteen syntynyt häiriö kuitenkin etenee köyttä pitkin, jolloin köyteen syntyy jatkuva aalto.

Kuten kuvasta nähdään, tällaisen harmonisen lähteen synnyttämän aallon muotoa kuvava aaltonfunktio on sinimuotoinen, minkä vuoksi aaltoa kutsutaan **sinimuotoiseksi aalloksi**, **harmoniseksi aalloksi** tai yksinkertaisesti vain **siniaalloksi**. Tämä johtuu siitä, että kappaleen väärähdys tuottaa köyteen liikkulan häiriön. Kun kappale on väärähdysensä huippukohdassa (kuva 15.8, toinen ylhäältä), köydessä on aallonharja. Kappaleen lükissä myös köyden pää kulkee pystysuunnassa (kuten muutkin köyden pistet) ja samalla tämä aallonharja kulkee köyttä pitkin poispäin köyden päästä. Hetken päästä kappale on väärähdysensä alimmassa pisteessä, ja tällöin köyden pään kohdalla on aallonpohja (neljäs kuva ylhäältä). Äsknen syntynyt aallonharja on sillä välin jo ehtinyt siirtymä poispäin kappaleesta. Kun aika taas kulkee hieman eteenpäin, kappale palaa jälleen väärähtelylükkeen huippuun, jolloin köyden päässä on uusi aallonharja (kuudes kuva ylhäältä).

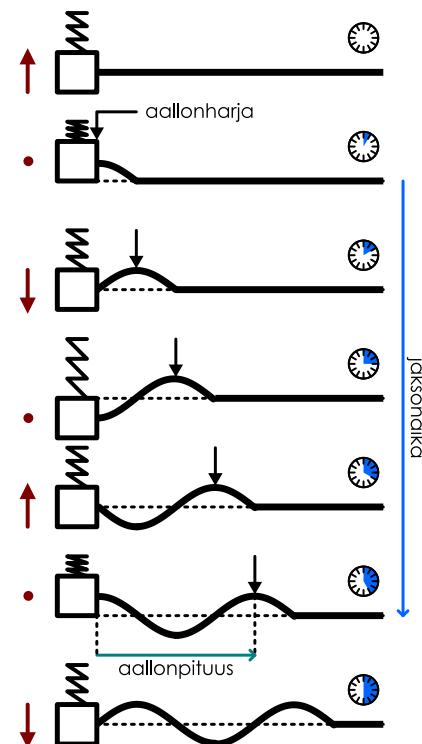
Hetkestä, jolloin köyden päässä on aallonharja, kuluu aikaa seuraavaan hetkeen, jolloin köyden päässä on jälleen aallonharja, täsmälle yksi jaksonaika  $T$ . Nämä siksi, että väärätelevä kappale suorittaa yhden kokonaisen väärähdysen täsmälle tässä ajassa. Samoin ne köyden osat, jotka aalto on jo saavuttanut, palaavat takaisin samaan tilaan jokaisen jaksonajan jälkeen. Toisin sanoen **köyden jokainen piste** (jonka aalto on saavuttanut) **väärätelee harmonisesti samalla taajuudella kuin aallon lähde**.

Valitaan nyt köydestä jokin kiintopiste. Tämä voi olla köyden pää tai yhtä hyvin mikä tahansa muu köyden piste. Aallonharjan saavuttaessa tarkasteltavan pisteen piste on väärähdyslukiessä huippukohdassa. Kahden peräkkäisen aallonharjan välissä on aallonpohja, joten aallonharjan kuljetta pisteen ohitse piste siirtyy pystysuunnassa alas päin. Piste palaa jälleen huippuasemaansa, kun seuraava aallonharja saavuttaa sen. Tällöin piste tekee täsmälle yhden väärähdysen, ja niinpä tähän edestakaiseen liikkeseen täytyy kulua aikaa täsmälle yksi jaksonaika,  $\Delta t = T$ .

Jaksollisessa aallossa kahden peräkkäisen aallonharjan välistä matkaa kutsutaan **aallonpituudeksi** ja sitä merkitään tavallisesti kreikkalaisella lambda-kirjaimella,  $\lambda$ . Jos tarkastelupisteessä on aluksi aallonharja ja ajan  $\Delta t$  kuluttua siinä on seuraava aallonharja, *aalto on kulkenut tässä ajassa täsmälle yhden aallonpituuden matkan*,  $|\Delta x_{\text{aalto}}| = \lambda$ . Nämä ollen aallon vauhti on

$$v_{\text{aalto}} = \left| \frac{\Delta x_{\text{aalto}}}{\Delta t} \right| = \frac{\lambda}{T}. \quad (15.25)$$

Kuva 15.8: Harmonisesti väärätelevä aaltolähde synnyttää sinimuotoisen aalon.



Koska taajuus on jaksonajan käänneisluku, tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$v_{\text{aalto}} = f\lambda. \quad (15.26)$$

Näitä aallon vauhdin lausekkeita kutsutaan **aaltoliikkeen perusyhtälöksi**. Nimi on kuitenkin hieman harhaanjohtava, koska yhtälö pätee vain *jaksollisille aalloille*. Esimerkiksi aaltopulsseillehan ei yleensä voida määritellä aallonpituitta eikä jaksonaikaa, joten yhtälöitä ei voi niihin suoraan soveltaa.



**15.10** (a) Taajuudella 170 Hz värähtelevä lähte tuottaa aallon, jonka aallonpituuus on 2.0 m. Mikä on aallon vauhti? (b) Värähtelijän taajuus kasvaa arvoon 200 Hz. Mikä on nyt aallonpituuus ja aallon etenemisvauhti?

### Sinimuotoisen aallon aaltofunktio

Sinimuotoisen aallon muotoa kuvaava nimen mukaisesti sinimuotoinen funktio eli sini tai kosini. Valitsemme tässä kosinifunktion, jolloin esimerkiksi ajan hetkellä  $t = 0$  aaltofunktio on muotoa

$$u_y(x, 0) = A \cos[\phi(x, 0)] = A \cos(kx + \phi_0). \quad (15.27)$$

Tässä

$$\phi(x, 0) = kx + \phi_0 \quad (15.28)$$

on aallon *vaihe* ja vakio  $\phi_0$  määrätyy siitä, mikä on köyden poikkeama tasapainosta origossa. Sillä on siis samanlainen merkitys kuin vaihetekijällä  $\phi_{\text{alku}}$  harmonisen värähtelijän liikkeen kuvauksessa.

Vakio  $k$  puolestaan lüttyy aallon muotoon. Ensinnäkin tämän vakion dimension on oltava  $1/\text{m}$ , koska vaihe on yksikötön suure. (Vaiheen täytyy olla dimensioton, koska kosinifunktion argumentilla ei voi olla yksikkö.) Kosinifunktio on  $2\pi$ -jaksollinen, joten se saa saman arvon aina, kun vaihetta muutetaan  $2\pi$  verran. Jos esimerkiksi  $k = 1.0 \text{ m}^{-1}$  ja  $\phi_0 = 0$ , vaihe on origossa nolla ja tässä pisteessä on siis aallonharja. Seuraava aallonharja on pisteessä, jossa vaihe on  $\phi(x, 0) = 2\pi$  eli pisteessä  $x = 2\pi \text{ m} \approx 6.3 \text{ m}$ , ja niin edelleen. Tällöin aallon aallonpituuus on  $2\pi$  metriä. Jos vakio  $k$  on suurempi, esimerkiksi  $k = 2.0 \text{ m}^{-1}$ , vaihe saa arvon  $2\pi$  jo pisteessä  $x = \pi \text{ m} \approx 3.1 \text{ m}$ , jolloin aallonpituuuskin on vain  $\pi$  metriä. Siispä *aallonpituuus on käänneverrannollinen vakioon  $k$* . Lisäksi koska aallonpituuus on  $2\pi$  metriä kun vakion  $k$  arvo on  $1 \text{ m}^{-1}$ , suureiden välisen verrannollisuuskertoimen täytyy olla  $2\pi$ . Toisin sanoen

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (15.29)$$

Vakiota  $k$  kutsutaan aallon **aaltoluvuksi**. Aaltoluvun suhde aallonpituiteen on täsmälleen samanlainen kuin kulmataajuuden suhde jaksonaikaan, sillä  $\omega = 2\pi/T$  ja  $k = 2\pi/\lambda$ . Fysikaalisesti jaksonaika kertoo *ajan*, jossa värähtelijä suorittaa yhden edestakaisen liikkeen. Kulmataajuus puolestaan kertoo millä kulmanopeudella värähtelyn vaiheenosoitin pyörii. Toisaalta taajuus  $f$  kertoo montako värähdystä tapahtuu sekunnissa, ja kulmataajuus on taajuus kerrottuna luvulla  $2\pi$ ,  $\omega = 2\pi f$ , joten kulmataajuuden voi ajatella myös mittaavan sitä, *montako värähdystä tapahtuu ajassa  $2\pi$  sekuntia*. Vastaavasti aallonpituuus ilmaisee *matkan*, jossa aalto suorittaa yhden edestakaisen liikkeen, ja aaltoluku mittaa sitä, *montako aallonpituutta mahtuu matkalle  $2\pi$  metriä* (kuva 15.9). Mitä lyhyempi on aallonpituuus, sitä enemmän aaloja  $2\pi$ -pituiselle matkalle mahtuu.



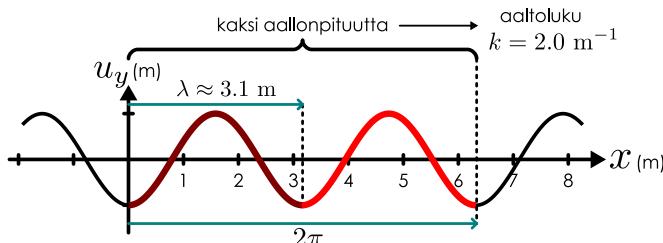
**15.11** Erään soittimen rakenne tuottaa vain sellaisia aaloja, joissa matkalle 0.50 m mahtuu joko täsmälleen yksi, kaksi tai kolme aallonpituitta. Mitkä ovat näiden aalojen aaltoluvut?

Aaltofunktion aikariippuvuuden määrittämiseksi voimme käyttää liikkuvan aallon aaltofunktion yleistä lauseketta (15.14), jonka mukaan aaltofunktion on oltava muotoa  $u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t)$ , missä  $f(x)$  on aallon muotoa ajan hetkellä nolla kuvaava funktio. Nyt aallon muotoa ajan hetkellä nolla kuvaa funktio (15.27) eli

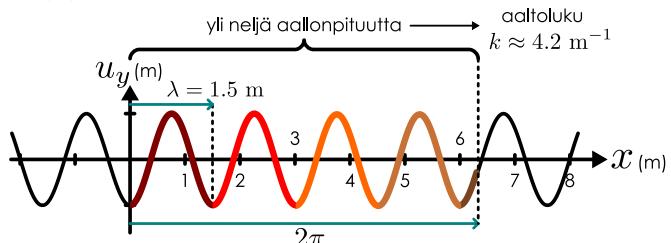
$$u_y(x, 0) = f(x) = A \cos(kx + \phi_0), \quad (15.30)$$

Kuva 15.9: Aaltoluku laskee montako aalonpituutta mahtuu  $2\pi$ -pituiselle matkalle. Kuvassa tälle välille sijoittuvat aalonpituuudet on korostettu eri värein.

(a) Pitkä aalonpituuus, pieni aaltoluku.



(b) Lyhyt aalonpituuus, suuri aaltoluku.



## AALTOLIIKE

joten ajasta riippuvan aaltofunktion täytyy olla

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x, \text{aalto}} t) = A \cos[k(x - v_{x, \text{aalto}} t) + \phi_0] = A \cos(kx - kv_{x, \text{aalto}} t + \phi_0). \quad (15.31)$$

Aallon vauhti saadaan perusyhtälöstä (15.25), ja relaatioiden  $\lambda = 2\pi/k$  ja  $T = 2\pi/\omega$  avulla tämän voi kirjoittaa myös kulmataajuuden ja aaltoluvun suhteena

$$v_{\text{aalto}} = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k}. \quad (15.32)$$

Niinpä *jos aalto kulkee postiiviseen x-suuntaan*, aaltofunktion lausekkeessa esiintyvä ajan  $t$  kerroin sievenee yksinkertaiseen muotoon  $kv_{x, \text{aalto}} = \omega$  ja aaltofunktioksi saadaan

$$u_y(x, t) = A \cos[\phi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.33)$$

Tämän vaihe on funktio

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0. \quad (15.34)$$



**15.12** Pisteessä  $x = 0$  m on aaltolähde, jonka taajuus on 2 Hz. Läheen tuottama aalto kulkee nopeudella 3 m/s positiiviseen x-suuntaan, ja aallon amplitudi on 0.1 m. (a) Mikä on aaltofunktio pisteessä  $x = 0$  m, eli  $u_y(0, t)$ , jos aallon vaihe hetkellä nolla on  $\pi/4$ ? (b) Mikä on aaltofunktio yleisesti,  $u_y(x, t)$ ? (c) Mikä on väliaineen poikkeama pisteessä  $x = 0.2$  m hetkellä  $t = 0.2$  s?

Koska aallonpituuus sekä aaltoluku liittyvät toisiinsa samoin kuin jaksonaika, taajuus ja kulmataajuuskin, tämän aaltofunktion voi muokata useisiin eri muotoihin. Esimerkiksi aaltoluvun voi kovata aallonpituuudella ja kulmataajuuden jaksonajalla, jolloin päädystään funktioon

$$u_y(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right). \quad (15.35)$$

Tämä on sama lauseke kuin (15.33), mutta se sisältää enemmän symboleita ja on siten matemaattisesti hiukan hankalampi käsitellä. Yleisestikin aaltojen matemaattisessa käsitellyssä juuri *aaltoluku ja kulmataajuus ovat tärkeimmät suureet*, joiden avulla laskutoimitukset onnistuvat helpoiten. Niinpä vaikka esimerkiksi aallonpituuus voi tuntua yksinkertaisemmalta käsitleltä kuin aaltoluku, on syytä opetella ymmärtämään aaltoluvun fysikaalinen merkitys ja totutella käyttämään sitä aaltojen matemaattisessa analyysissä.



**15.13** Äänen nopeus ilmassa on normaaliolosuhteissa noin 340 m/s. Äänirauta värihetelee taajuudella 440 Hz. (a) Mitä ovat syntyvän ääniaallon (i) taajuus, (ii) jaksonaika, (iii) kulmataajuus, (iv) aallonpituuus, (v) aaltoluku? (b) Erällä ajan hetkellä ääniaallossa on paineminimi (paineaallon vaihe  $\pi$ ) juuri ääniraudan kohdalla. Mikä on tällä samalla hetkellä paineaallon vaihe etäisyydellä 1 m ääniraudasta?

Koska kosini on symmetrinen funktio sen argumentin merkin voi vaihtaa eikä mikään muudu,  $\cos -\theta = \cos \theta$ . Tämän takia voisimme aivan yhtä hyvin valita aaltofunktioksi myös  $u_y(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \phi_0)$ . Toisin sanoen aaltofunktio kuva edelleen positiiviseen x-suuntaan kulkevaa sinimuotoista aaltoa, jos sekä aaltoluvun että kulmataajuuden etumerkit vaihdetaan. Sen sijaan esimerkiksi funktio  $u_y(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \phi_0)$  ei ole sama kuin funktio (15.33), sillä jos vaihdamme *joko* aika- tai paikkakoordinaatin kertoimen etumerkin, *aallon etenemissuunta kääntyy*. Etumerkkien kanssa pitää siis olla tarkkana, mutta toisaalta tämä ominaisuus antaa meille helpon tavan ilmaista aallon kulkusuunta. Voimme nimittäin kääntää aallon kulkusuunnan vaihtamalla joko aaltoluvun  $k$  tai kulmataajuuden  $\omega$  etumerkkiä. Tavallisesti valitaan niin, että . Kirjoitamme siis yksilöitteisen sinimuotoinen aallon aaltofunktion *aina* muodossa (15.33), mutta *jos aalto kulkee negatiiviseen suuntaan, sen aaltoluku on negatiivinen*. Tämä voi aiheuttaa sekaannusta, koska joskus aaltoluvusta puhuttaessa tarkoitetaan sen itseisarvoa  $|k|$  ja joskus taas huomioidaan aallon liikkeen suunta, jolloin  $k$  voi olla negatiivinenkin. Tässä tekstillä useimmiten tarkastellaan positiiviseen suuntaan kulkevia aaltoja, jolloin nämä ovat sama asia. Tapaukset, joissa aalto kulkee negatiiviseen suuntaan, mainitaan erikseen.

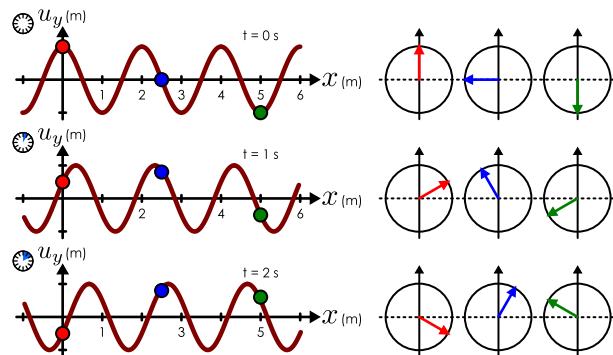


**15.14** Kahden aallon aaltofunktiot ovat  $u_1(x, t) = (-0.1 \text{ m}) \cos[(0.2 \text{ m}^{-1})x - (0.3 \text{ s}^{-1})t + (0.7)]$  ja  $u_2(x, t) = (0.5 \text{ m}) \cos[(-0.4 \text{ m}^{-1})x - (0.6 \text{ s}^{-1})t + (-0.8)]$ . Mikä on kummankin aallon (a) aaltoluku, (b) kulmataajuus, (c) amplitudi, (d) aallonpituuus, (e) taajuus, (f) vauhti, (g) liikkeen suunta?

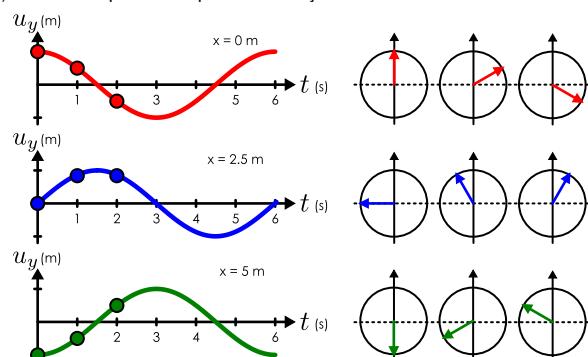
## Valheenosolitin

Kuva 15.10: Sinimuotoisen aallon aaltofunktio ja vaiheenosolitin. Aallon muoto on valittu kolme tarkastelupistettä (punainen, sininen, vihreä).

(a) Aallon muoto eri ajan hetkinä.



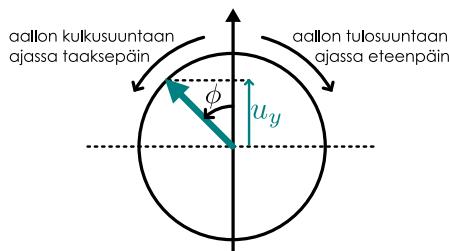
(b) Tarkastelupisteiden poikkeama ajan funktiona.



vaihe on kuitenkin muotoa  $\phi(x,t) = kx - \omega t + \phi_0$ , joten vaihe *pienenee*, kun aika kulkee eteenpäin eli  $t$  kasvaa. Niinpä kuvassa 15.10 vaiheenosottimet pyörivät ajan kulkessa *myötäpäivään* eli negatiiviseen kierrosuuntaan. Jos aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan, aaltoluku  $k$  on positiivinen, ja tällöin vaihe *kasvaa* kun  $x$ -koordinaatti kasvaa. Kuvassa 15.10 tämä ilmenee niin, että vaiheenosoitin pyörii *vastapäivään* aallon kulkusuuntaan (oikealle) kuljetaessa.

**15.15** Sinimuotoinen aalto kulkee negatiiviseen  $x$ -suuntaan. (a) Mikä on aaltoluvun etumerkki? (b) Kasvaaako vai pieneneekö aallon vaihe, kun  $x$ -koordinaatti kasvaa? (c) Mihin suuntaan vaiheenosoitin pyörii, kun kuljetaan positiiviseen  $x$ -suuntaan? (d) Mihin suuntaan vaiheenosoitin pyörii, kun kuljetaan aallon kulkusuuntaan?

Kuva 15.11: Vaiheenosoitin pyörii vastapäivään, kun siirrytään paikassa aallon kulkusuuntaan tai ajassa taaksepäin.



$\Delta x = 2.5 \text{ m} = \frac{5}{4}\lambda$  eli 1 ja 1/4 aallonpituuutta, jolloin sininen vaiheenosoitin on kiertynyt yhden kokonaisen ja yhden neljänneskierroksen vastapäivään punaiseen vaiheenosottimeen verrattuna. Samaan tapaan vaiheenosoitin tekee yhden kierroksen myötäpäivään, kun ajan annetaan kulua yhden jaksonajan verran. Tämä näkyy kuvassa 15.10 (b), jossa peräkkäisten merkityjen hetkien välinen aika on  $\Delta t = 1 \text{ s} = \frac{1}{6}T$  ja niitä vastaavat vaiheenosottimet eroavat toisistaan kuudeneskierroksen verran myötäpäivään. Kuvasta nähdään

sinimuotoisten aaltojen kuvauksessa vaihe on keskeinen suure aivan kuten harmonisen väärätelijän analyysissä. Harmonisen väärätelijän tapauksessa vaihe on ajan funktio, joka avulla voidaan päättää sekä väärätelijän paikka että nopeus. Sinimuotiossa aallossa kuitenkin *jokainen välialueen piste väärtelee harmonisesti*, joten aallossa vaiheella on arvo jokaisessa pisteessä. Niinpä aallon vaihe on sekä *ajan että paikan funktio*,  $\phi(x,t)$ .

Myös aallon vaihetta voi kuvata *vaiheenosottimella* eli aallon kulmataajuudella pyörivällä nuolella. Kuvassa 15.10 (a) on piirretty sinimuotoisen aallon muoto kolmena ajan hetkenä. Kuvan on myös merkitty kolme välialueen pistettä sekä näiden vaiheenosottimet. Kuvassa 15.10 (b) näiden tarkastelupisteiden poikkeamat tasapainosta on esitetty ajan funktiona. Kuvassa kunkin vaiheenosottimen  $y$ -komponentti kuvaa samanvärisen tarkastelupisteen poikkeamaa tasapainosta. Kun aika kuluu, kuvan aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan eli oikealle. Tällöin myös tarkastelupisteet liikkuvat ja niitä kuvavat vaiheenosottimet pyörivät.

Periaatteessa voimme valita vapaasti, kumppaan suuntaan annamme vaiheenosottimen pyöriä. Harmonisen väärätelijän tapauksessa sovimme, että vaiheenosoitin pyörii positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään ajan kuluessa eli vaiheen  $\phi(t) = \omega t$  kasvaessa. Aallon

Koska määrittelimme aaltofunktion (15.33) käyttäen kosinia, on aaltofunktiossa maksimi eli aallonharja aina, kun aallon vaihe on nolla tai jokin luvun  $2\pi$  monikerta eli kun  $\phi = 2\pi n$ , missä  $n$  on mikä tahansa kokonaisluku. Vaiheenosottinkuviossa tämä tarkoittaa sitä, että *aallossa on harja aina vaiheenosottimen osoittaessa suoraan ylöspäin*. Siirrytäessä aallonharjalta toiselle vaiheenosottimen pitää tehdä yksi tai useampia kokonaisia kierroksia. Niinpä vaiheenosoitin tekee yhden kokonaisen kierroksen vastapäivään, kun siirrymme paikassa yhden aallonpituuden aallon kulkusuuntaan, ja yhden kierroksen myötäpäivään, kun siirrymme yhden aallonpituuden aallon tulosuuntaan. Esimerkiksi kuvassa 15.10 (a) punaisen ja sinisen pisteenvälisen etäisyyksen

## AALTOLIIKE

myös, että koska jokainen piste värähtelee samalla taajuudella, niiden kaikkien vaiheenosottimet pyörivät yhtä nopeasti.

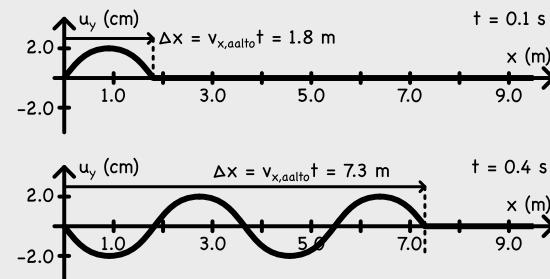
**15.16** Sinimuotoinen aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan nopeudella 1 m/s. Ajan hetkellä nolla aallonessa on aallonharjat pisteissä  $x = -2$  m (olkoon tämä harja A),  $x = 0$  m (B) ja  $x = 2$  m (C). (a) Miten vaiheenosoitin muuttuu (kiertokulma ja -suunta), jos hetkellä  $t = 0$  origosta siirrytään pisteeseen  $x = 1$  m? (b) Miten vaiheenosoitin muuttuu, kun tämän jälkeen odotetaan 3 s? (c) Miten vaiheenosoitin muuttuu, jos ajan hetkellä  $t = 0$  origosta siirrytään aallonharjan A kohdalle? (d) Miten vaiheenosoitin muuttuu, kun tämän jälkeen tarkastelupisteen annetaan kulkea aallonharjan A mukana 3 s? (e) Mikä on vaiheen kokonaismuutos kohdissa a ja b? Entä kohdissa c ja d?

## esimerkki 15.2

## Sinimuotoinen aaltofunktio

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Köyden päättä heilutetaan niin, että pään poikkeamaa tasapainosta kuvaava funktilo  $u_{y,\text{pää}}(t) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t / 0.2 \text{ s} - \pi/2)$ . Mikä on aallon aaltofunktio (ennen kuin aalto saavuttaa köyden toisen pään)?

**TILANNE** Tilanne on muuten sama kuin esimerkissä 15.1 paitasi ettei köyden päättä heilutetaan nyt harmonisesti. Niinpä köyteen ei nyt synny yksittäistä aaltopulssia vaan sinimuotoinen aalto.



**SUUNNITELMA** Aallon nopeus riippuu köyden pituustiheydestä ja jännityksestä, jotka ovat samat kuin edellisessä esimerkissä. Niinpä aallon nopeuskin on sama,  $v_{x,\text{aalto}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 18.3 \text{ m/s}$ .

Sinimuotaisen aallon aaltofunktio on yleisesti muotoa

$$u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0), \quad (15.36)$$

missä aaltolukua ja kulmataajuutta yhdistää aallon nopeus,

$$v_{x,\text{aalto}} = \frac{\omega}{k}. \quad (15.37)$$

Aaltofunktion täsmällinen muoto määräytyy siitä, miten köyttä heilutetaan eli ehdosta  $u_y(0, t) = u_{y,\text{pää}}(t)$ .

**RATKAISU** Sijoitetaan aaltofunktio yhtälöön (15.2). Koska yleensä kulmataajuudet määritellään positiivisina lukuina, käytetään vielä laskusääntöä  $\cos(y) = \cos(-y)$ , niin saadaan

$$u_y(0, t) = A \cos(-\omega t + \phi_0) = A \cos(\omega t - \phi_0) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t / 0.2 \text{ s} - \pi/2) = u_{y,\text{pää}}(t). \quad (15.38)$$

Tästä nähdään suoraan amplitudi, kulmataajuus sekä vaihetekijä:  $A = 2.0 \text{ cm}$ ,  $\omega = 2\pi / 0.2 \text{ s} = 31.4 \text{ s}^{-1}$  ja  $\phi_0 = \pi/2$ . Aaltoluku ratkeaa edelleen aallon nopeuden avulla,  $k = \omega / v_{x,\text{aalto}} = 1.72 \text{ m}^{-1}$ . Aaltofunktio on siis

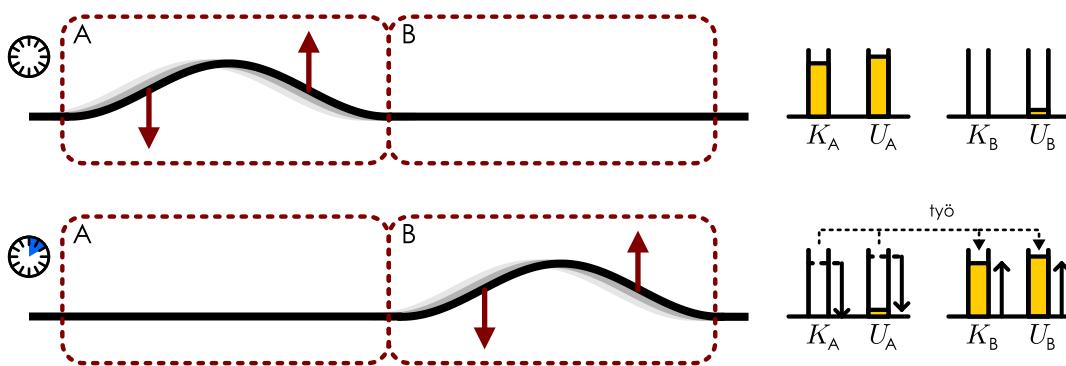
$$u_y(x, t) = (2.0 \text{ cm}) \cos \left[ (1.72 \text{ m}^{-1})x - (31.4 \text{ s}^{-1})t + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (15.39)$$

Täsmällisesti tämä lauseke pätee vain alueessa  $x < v_{x,\text{aalto}} t$ , koska aalto etenee tällä vauhdilla. Muualla aaltofunktio on nolla.

**ARVIOINTI** Kosinifunktion sisään saatuiin tässä täsmälleenn samat kertoimet kuin esimerkissä 15.1, eikä tämä ole sattumaa. Edellisen esimerkin aaltopulssi luotiin 0.2 s kestävällä heilautuksella, ja myös nyt aallon jaksonaika on  $T = 2\pi/\omega = 0.2 \text{ s}$ . Siksi ajan  $t$  edessä oleva kerroin on sama. Toisaalta aallot kulkevat yhtä nopeasti, koska ne on luotu samanlaiseen köyteen. Aaltofunktion  $\cos(kx - \omega t)$  kuvaama poikkeama kuitenkin etenee nopeudella  $v_{x,\text{aalto}} = \omega/k$ , eli nopeus saadaan jakamalla ajan kerroin paikan kertoimella. Niinpä jos aalloilla on sama nopeus 18.3 m/s ja aaltofunktiossa ajan kerroin on sama  $31.4 \text{ s}^{-1}$ , myös paikkakoordinaatin kertoimen täytyy olla kummassakin sama.

Myös aallonpituuus on tässä sama kuin esimerkin 15.1 aaltopulssin leveys,  $\lambda = 2\pi/|k| = 3.66 \text{ m}$ . Näin on siksi, että sinimuotoinen aalto etenee yhden jakson aikana yhden aallonpituuden, eli  $\lambda = v_{\text{aalto}} T$ . Samoin aaltopulssi etenee oman leveytensä verran sen luoneen heilautuksen aikana.

Kuva 15.12: Aaltopulssi kuljettaa energiaa. Aluksi aallon energia on systeemissä A ja myöhemmin systeemissä B.



**15.17** Kirjoita oman sanoin tiivistelmä sinimuotoisista aalloista. Mitä ne ovat ja miten ne syntyvät? Miten sinimuotoiset aallot liittyvät harmoniseen värvähtelyyn ja miten aaltoa kuvataan vaiheenosittimella? Selitä käsitteet taajuus, kulmataajuus, jaksonaika, amplitudi, vaihe, aallonpititus ja aaltoluku.

## 15.4 Aallon kuljettama energia

### Energiapulssi

Kuten jo luvun alussa totesimme, aalto ei kuljeta ainetta, mutta se kuljettaa energiaa. Erilaisissa aalloissa tämä energia voi ilmetää eri tavoin, mutta sen täytyy liittyä aina jotkin siihen, että aallossa väliaineen tila muuttuu. Esimerkiksi aaltopulssin kulkiessa köydessä köysi *venyy* paikallisesti, koska mutkalla oleva köysi on pidempi kuin suora. Tähän muodonmuutokseen liittyy *elastista potentiaalienergiaa*. Lisäksi aaltopulssin kulkiessa köyden pisteiden täytyy *liikkua* pystysuunnassa, jolloin liikkuvilla köyden osilla on myös *liike-energiaa*.

Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.12, jossa tarkastellaan köydessä kulkevan aaltopulssin energiasta. Tilanteessa on erotettu kaksi systeemiä, jotka kumpikin sisältäävät osan köytä. Ensimmäisessä kuvassa aaltopulssi on vasemmanpuoleisessa systeemissä A, jolloin tähän systeemiin kuuluva köysi on venynyt ja sen osat liikkuvat pystysuunnassa. Systeemissä A on siis sekä potentiaalienergiaa että liike-energiaa. Oikeanpuoleisessa systeemissä B köysi on suora. Tässäkin systeemissä on hieman potentiaalienergiaa, koska jännitetty köysi on hieman venynyt kaikkialla, mutta köysi ei liiku, joten sen liike-energia on nolla. Myöhempää ajan hetkeä esittävässä kuvassa aaltopulssi on kulkenut systeemiin B, ja tilanne on nyt päinvastainen: Systeemissä A ei ole juurikaan energiaa kun taas systeemissä B on paljon energiota. Energiaa on siis siirretty systeemistä A systeemiin B aallon mukana.

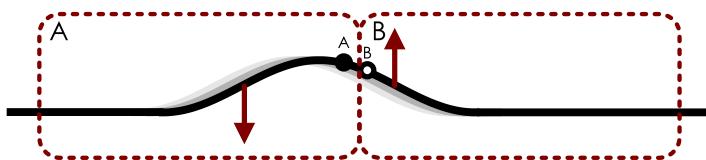
Kuvassa 15.13 tarkastellaan tämän energian siirtymistä, kun aaltopulssi on puolittain kummankin systeemin sisällä ja liikkeessä kohti systeemiä B. Kuvassa köyden osia systeemien rajalla on kuvattu massallisilla pisteillä, joiden välinen jousi kuvailee köyden elastisuutta. Systeemien rajalla olevia tarkastelupisteitä on merkity A ja B sen mukaan, kumpaan systeemiin pisteet kuuluvat. Pisteiden välinen jousi on valittu kuulumaan systeemiin A. Kuvan tilanteessa pisteen A poikkeama tasapainosta on hiukan suurempi kuin pisteen B. Kumpikin piste on liikkeessä ylöspäin eli kauemmas tasapainosta, ja pisteen A nopeus on hiukan pienempi kuin pisteen B.

Pisteiden välinen jousi on venynyt ja siksi jännittyneet, ja niinpä se vetää pistettä A viistosti alaspäin ja pistettä B viistosti ylöspäin. Systeemien B tekee nyt työtä pisteeseen B kohdistuvan voiman liikkeen suuntaisen komponentti  $\bar{F}_{y,jousi \rightarrow B}$ , joka osoittaa ylöspäin eli *samaan suuntaan kuin mihin piste B liikkuu*. Koska voima on liikkeen suuntaisen, sen tekemä työ on *positiivinen* eli systeemien B energia kasvaa. Jouseen kohdistuvan voiman  $y$ -komponentti  $\bar{F}_{y,B \rightarrow jousi}$  puolestaan osoittaa alaspäin eli *vastakkaiseen suuntaan kuin mihin jousen pää liikkuu*. Niinpä tämä voima tekee jouseen ja siis systeemien A *negatiivista* työtä, jolloin systeemien energia vähenee. Tässä tapauksessa systeemien B energian muutos ilmenee siinä, että *jousi vetää pistettä B hitaampaan vauhtiin*. Jousi välittää siihen kohdistuneen voiman pisteeseen A, ja tämä voima *vetää pistettä A hitaampaan vauhtiin*, jolloin systeemien A liike-energia vähenee. Lisäksi koska piste A liikkuu ylöspäin hitaammin kuin piste B, pallojen välisen jousen venymä pienenee ja siksi myös jousen potentiaalienergia vähenee, mikä niinkään vähentää systeemien A kokonaisenergiaa. Jousen energian vähennyminen johtuu siitä, että voima  $\bar{F}_{y,B \rightarrow jousi}$  tekee jouseen enemmän negatiivista työtä kuin voima  $\bar{F}_{y,A \rightarrow jousi}$  tekee positiivista työtä,

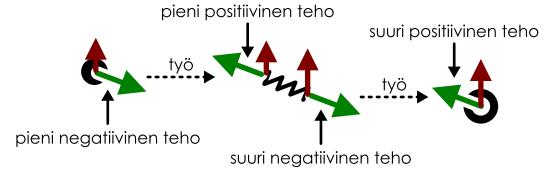
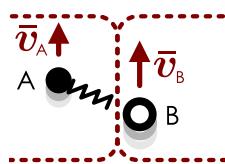
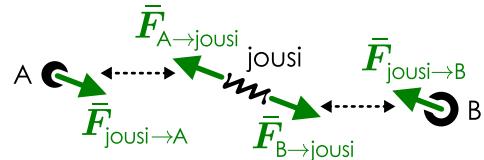
## AALTOLIIKE

Kuva 15.13: Köydessä kulkevassa aallossa energia siirtyy köyden osien tehdessä toisiinsa työtä. Kuvassa köysi on jaettu systeemihin A ja B, ja systeemi A tekee systeemiin B positiivista työtä aallon liikkussa.

(a) Köyden osat systeemien rajalla.



(b) Osien A ja B sekä näiden välisen jousen vapaakkappalekuvat.



jolloin jouseen tehty kokonaistyö on negatiivinen. Kaikkiaan energia kulkee köydessä aaltopulssin liikkeen suuntaan.



**15.18** Toista kuvassa 15.13 esitetyt päättelyt, kun aaltopulssin huippu on juuri ohittanut pisteen B. Tekevätkö voimat näissä tilanteissa positiivista vai negatiivista työtä (i) pisteeseen A, (ii) jouseen, (iii) pisteeseen B? Siirrykön tällöin energiota systeemien A ja B välillä?

### Virtaava energia

Aaltopulssissa aallon energia on keskittyneet pulssiin, jolloin sen siirtyminen on helppo havaita. Sinimuotoinen aallon energia liikkuu aallon mukana väliaineen eri osien tehdessä työtä toisiinsa. Oleellinen ero pulssin ja sinimuotoisen aallon välillä on kuitenkin se, että pulssissa energia on keskittyneet pieneen alueeseen kun taas sinimuotoisessa aallossa energia on levittäytynyt koko aallon pituudelle. Nämä sinimuotoinen aalto pystyy siirtämään energiota jatkuvana virtana, ja aallon kuljettaman energian määrä on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan aaltoa tuotetaan ja vastaanotetaan. Tutkitaan siis vielä, millainen on sinimuotoinen aallon kuljettama *teho* eli aallon siirtämä energia aikayksikköä kohden.

Kuvassa 15.13 (b) esitetyt voimien tekemän työn analyysi perustui vain köyden osien dynamiikkaan, eikä päättelyssä mitenkään oletettu, että kyseessä on aaltopulssi. Aivan yhtä hyvin kyseessä olisi voinut olla esimerkiksi sinimuotoinen aallon aallonharja, joten päättely toimii myös sinimuotoisten aaltojen kuljettaman energian kuvaussessä. Jatketaan siis kuvassa esitetyn tilanteen analyysiä. Kuvassa pisteeseen B tekee työtä voima  $\bar{F}_{\text{jousi} \rightarrow B}$ , ja tämän voiman tekemän työn teho on voiman ja nopeuden pistetulo,

$$P = \bar{F}_{\text{jousi} \rightarrow B} \cdot \bar{v}_B. \quad (15.40)$$

Koska piste B liikkuu pystysuunnassa, vain voiman pystykomponentti tekee työtä, joten tehon voi ilmaista vektoreiden *y*-komponenttien tulona

$$P = F_{y,\text{jousi} \rightarrow B} v_{y,B}. \quad (15.41)$$

Tämän tehon voimme laskea käyttäen hyväksi aallon nopeutta johdettaessa saatua tulosta. Tällöin nimittäin päättelimme, että köyden osaan kohdistuva voima riippuu sekä köyden pystysuuntaisesta nopeudesta että köydessä kulkevan aallon nopeudesta yhtälön (15.6) mukaisesti. Tällöin käytimme köyden tarkastelupisteelle symbolia *K*, mutta jos korvaamme sen tässä käytettyllä symbolilla *B*, yhtälö saa muodon

$$F_{y,\text{jousi} \rightarrow B} = \mu v_{y,B} v_{x,\text{aalto}}, \quad (15.42)$$

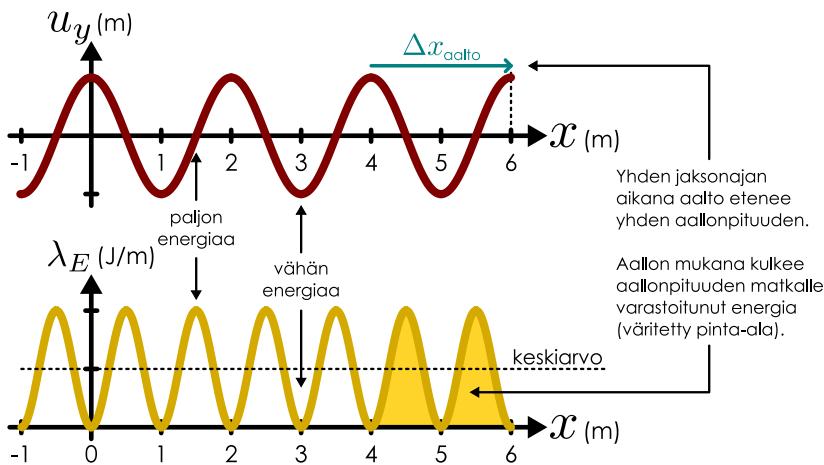
ja näin ollen aallon kuljettama teho on

$$P = \mu v_{y,B}^2 v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.43)$$

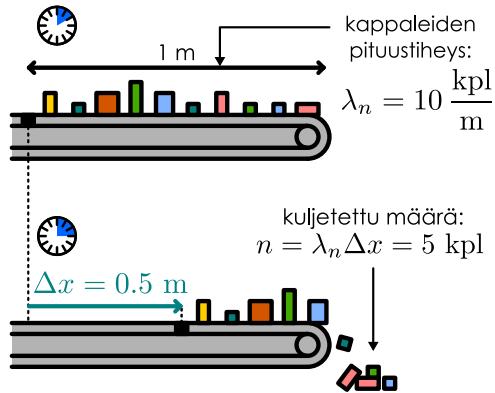
Edellinen päättely perustui vain köyden osien välisten vuorovaikutusten tarkasteluun, joten tulos pätee riippumatta aallon muodosta. Jos kuitenkin tiedämme köydessä kulkevan aallon muodon eli aaltofunktion, voimme laskea köyden osien pystysuuntaisen nopeuden sen avulla. Jokaisen köyden pisteen pystysuuntainen nopeus

Kuva 15.14: Sinimuotoisen mekaanisen aallon aaltofunktio ja energiatihesy. Aallon liikkuessa energiakin liikuu, ja siirtynen energian määrä saadaan aallon kulkeman matkan ja tämän matkan sisältämän energian tulona.

(a) Aallon sisältämä kokonaisenergia on energiatihyden kuvaajan rajaama pinta-ala.



(b) Analogia: liukuhihnan siirtämiän kappaleiden määrä on kappaleiden tiheyden ja hihnan siirtymän tulon.



saadaan nimittäin sen  $y$ -koordinaatin eli poikkeamakoordinaatin  $u_y$  derivaattana ajan suhteeseen. Sinimuotoinen aallon tapauksessa aaltofunktio on muotoa  $u_y = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ , joten köyden pystysuuntainen nopeus pisteessä  $x$  hetkellä  $t$  on

$$v_{y,B}(x, t) = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.44)$$

Köydessä kulkeva teho riippuu siis ajasta ja paikasta lausekkeen

$$P(x, t) = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) v_{x,\text{aalto}} \quad (15.45)$$

mukaisesti. Tämä tulos tarkoittaa sitä, että energiota ei siirry aallon jokaisessa kohdassa yhtä nopeasti. Syg tähän on se, että *energia on keskittynyt aallossa tiettyihin kohtiin*. Ne aallon kohdat, joissa energiota on paljon, myös siirtävät sitä suurella teholla. Kohdat, joissa energiota on vähän, eivät voi kuljettaa energiota suurella teholla, koska niissä ei ole energiota mitä kuljettaa.

Köydessä kulkevassa mekaanisessa aallossa potentiaalienergiaa on eniten kohdissa, joissa köysi on venynyt eniten. Nämä ovat ne kohdat, joissa köyden muoto muodostaa jyrkimmän laskun tai nousun, ja sinimuotoinen aallon tapauksessa näissä kohdissa köysi on lähellä tasapainoasemansa. Liike-energiaa aallolla on puolestaan eniten kohdissa, joissa köysi liikkuu pystysuunnassa suurimmalla vauhdilla. Mutta myös nämä ovat juuri ne pisteet, joissa köysi joko nousee tai laskee jyrkästi. Niinpä köydessä kulkevan mekaanisen sinimuotoinen aallon kaikki energia on keskittynyt kohtiin, joissa köyden pisteet eivät merkittävästi poikkeaa tasapainoasemasta. Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.14 (a), jossa on piirretty köydessä kulkevien aaltojen aaltofunktioita sekä näihin aaltoihin sitoutunut energiatihyys (tai tarkemmin pituusenergiatiheys)  $\lambda_E$  eli *aaltoon sitoutunut energian määrä pituusyksikköö kohden*. Kuvasta nähdään, että energiatihyys ja sen myötä siirtyvä energian teho on suurin pisteissä, joissa aaltofunktio leikkää  $x$ -akselin eli pisteissä, joissa köysi on tasapainoasemassa, koska sinimuotoinen aalto on jyrkin näissä pisteissä.

**15.19** (a) Köydessä kulkee sinimuotoinen aalto. Valitaan köydestä yksi tarkastelupiste. Missä tarkastelupisteen väärähtelyn vaiheessa pisteessä on paljon (i) potentiaali- ja (ii) liike-energiaa? (b) Jousesta roikkuva kappale muodostaa harmonisen väärähtelijän. Missä väärähtelyn vaiheessa sillä on paljon (i) potentiaali- ja (ii) liike-energiaa?

Jos aallon energiatihyys tarkastelupisteessä  $x$  on  $\lambda_E(x)$ , aalton on sitoutunut välille  $x \dots x + dx$  energiata kaikkiaan

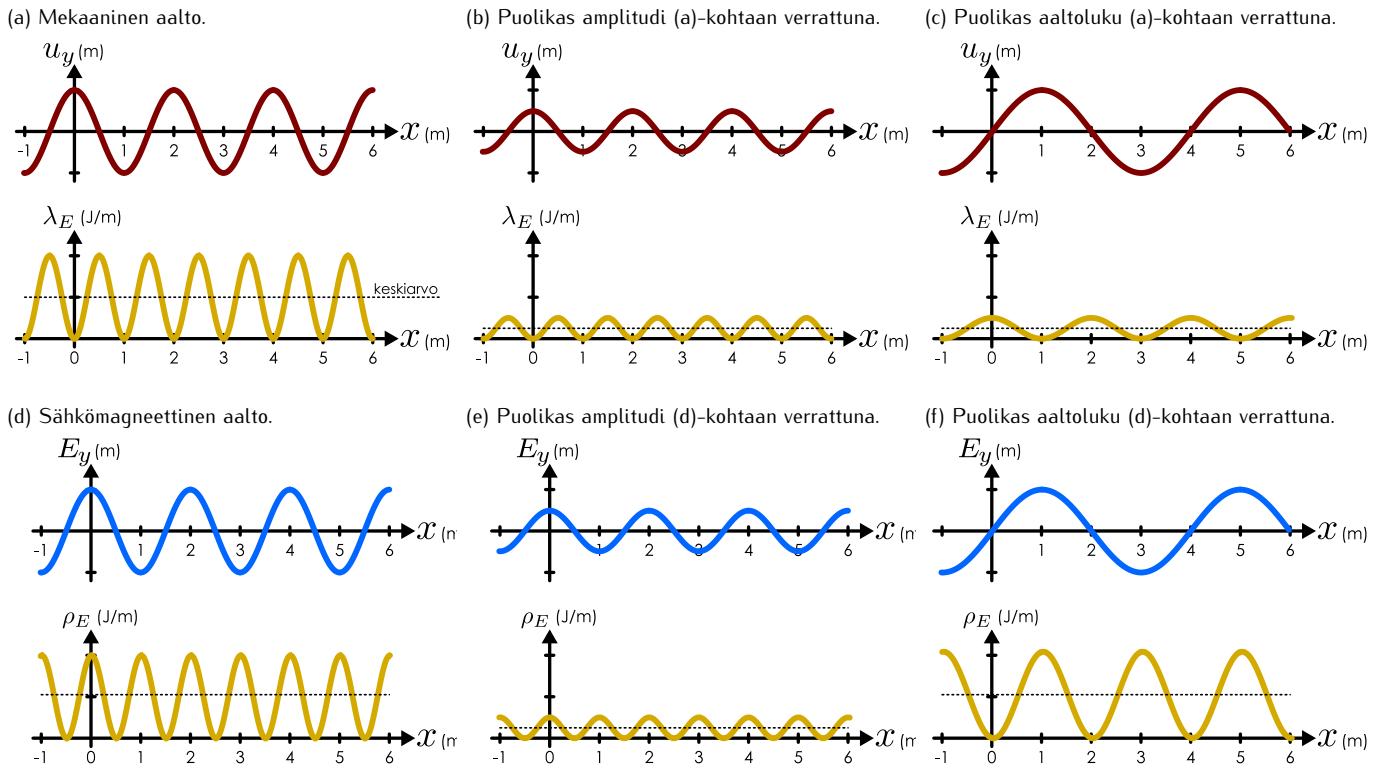
$$dE = \lambda_E dx. \quad (15.46)$$

Pidemmälle välille sitoutuneen energian kokonaismäärä saadaan tämän lausekkeen integraalina eli graafiseksi  $\lambda_E$ -kuvaajan rajaamana pinta-alana. Kuvassa 15.14 (a) onkin esitetty yhden aallonpituisen matkalle sitoutuneen energian määrän energiatihyden kuvaajassa keltaisella väritettynä pinta-alana.

Vaikka energiatihyys vaihtelee sinimuotoinesti, sen *keskiarvo* on sinifunktion symmetrisyden perusteella täsmälleen puolet maksimista. Tämä keskiarvo on piirretty kuvaan 15.14 (a) katkoviivalla, ja selvästikin tämän

## AALTOLIIKE

Kuva 15.15: Mekaanisen aallon energia on verrannollinen amplitudin ja aaltoluvun neliöön. Sähkömagneettisen aallon energia on verrannollinen amplitudin neliöön mutta ei riipu aaltoluvusta.



viivan alle jävä pinta-ala on keskimäärin sama kuin keltaisen kuvaajan rajaama pinta-ala. Merkitsemme tästä keskimääräistä energatiheyttä  $\langle \lambda_E \rangle$ , jolloin yhden aallonpituuuden matkalle on sitoutunut energiaa määrä

$$E_\lambda = \langle \lambda_E \rangle \lambda. \quad (15.47)$$

Toisaalta aalto kulkee yhden jaksonajan kuluessa juuri yhden aallonpituuuden matkan, joten se kuljettaa jaksonajan aikana täsmälleen näin paljon energiota. Aallon kuljettaman energian *keskimääräinen* teho on näin ollen kuljetetun energian  $\Delta E = E_\lambda$  ja tähän käytetyn ajan  $\Delta t = T$  suhde,

$$P_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \langle \lambda_E \rangle \frac{\lambda}{T}. \quad (15.48)$$

Mutta sinimuotoisen aaltoliikkeen perusyhdistelön mukaan aallonpituuuden ja jaksonajan suhde on aallon nopeus, joten aallon siirtämän energian *teho on energatiheyden ja aallon nopeuden tulo*

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{x,\text{aalo}}. \quad (15.49)$$

Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että aalto kuljettaa energiota sitä tehokkaammin, mitä nopeammin aalto kulkee ja mitä enemmän energiota aalto sisältää.

Samanlainen tulos nähtiin luvussa 11, jossa tutkimme sähkövirran mukana siirtymän varauksen määräät. Tällöin päätelimme, että aikayksikössä siirtymän varauksen määrä on suoraan verrannollinen varauksenkuljetajien määrään pituusyksikköä kohden sekä näiden vaellusnopeuteen. Täsmälleen samalla tavalla aallon mukana siirtymän energian määrä on verrannollinen aallon sisältämän energian määrään pituutta kohden sekä tämän energian kulkunopeuteen.

Edellä johdetussa aallon tehon lausekkeessa (15.45) energatiheyttä edustaa termi

$$\lambda_E = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.50)$$

Kuten edellä graafisesti perusteltiin, tässä esiintyvän sinin neliön keskiarvo yhden jakson aikana on puolikas

$$\langle \sin^2(kx) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2}, \quad (15.51)$$

joten aallon keskimääräinen energatiheys on

$$\langle \lambda_E \rangle = \mu \omega^2 A^2 \langle \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2. \quad (15.52)$$

Keskimääräinen aallon kuljettama teho on siten

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{x,\text{aalto}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.53)$$

Teho riippuu siis köyden pituustiheydestä sekä aallon kulmataajuudesta, amplitudista ja etenemisnopeudesta.



**15.20** (a) Yllä päätteliin, että koska pituuden suhteen laskettu keskiarvo  $\langle \sin^2(kx) \rangle = 1/2$ , pätee myös  $\langle \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) \rangle = 1/2$ . Selitä, miksi tekijät  $-\omega t + \phi_0$  eivät vaikuta tulokseen. (b) Laske integraali (15.51).

Tässä johdettu mekaanisen aallon energiatihesys (15.52) on samantyyppinen lauseke kuin harmonisen väähelijän energia  $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ , sillä pituustiheys  $\mu$  on köyden massa pituutta kohti. Sekä harmonisen väähelijän että harmonisen aallon energia ovat suoraan verrannolliset kulmataajuuden ja amplitudin neliöön. Näin siksi, että sekä väähelijän nopeus että sen elastisten osien venymä ovat näihin suoraan verrannolliset, ja liike-energia on puolestaan verrannollinen nopeuden neliöön ja potentiaalienergia venymän neliöön. Tätä energiatihedyiden riippuvuutta aallon muodosta on havainnollistettu kuvassa 15.15 (a)–(c), jossa on piirretty aaltofunktioita ja näiden energiatihedyksiä eri amplitudeilla ja aaltoluvuilla. Kun amplitudi tai aaltoluku puolittuu (kuvat (b) ja (c)), aallon sisältämä energia putoaa neljäsosaan. Aalloissa (b) ja (c) on kuitenkin keskenään yhtä paljon energiota.

Sama ajatus toimii kaikilla aalloilla: aallon kuljettama teho aallon kulkusuuntaan on aallon energiatihedyiden ja nopeuden tulo. Esimerkiksi sinimuotoisten sähkömagneettisten aaltojen keskimääräinen energiatihesys tilavuusyksikköö kohden on  $\langle \rho_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  missä  $E$  on sähkökentän väähelyamplitudi. (Tulos johdetaan luvussa 16.4.) Tämä energiatihesys ei riipu kulmataajuudesta kuten mekaanisen aallon energiatihesys, koska sähkökentän energia ei ole mekaanista liike- ja potentiaalienergiaa. Tämäkin energiatihesys on silti *suoraan verrannollinen aallon amplitudin neliöön*. Energian riippuvuus amplitudin neliöstä onkin harmonisten väähelijöiden ja aaltojen yleinen, tärkeä ominaisuus.

Kuvien 15.15 (d)–(f) on piirretty sähkömagneettisten aaltojen energiatihedyksiä. Nämä ovat erilaiset vastaan mekaanisiin aaltoihin verrattuna. Sähkömagneettisessa aallossa energia on keskittynyt alueisiin, joissa sähkökenttä on voimakas — siis aallonharjoihin ja -pohjiin, toisin kuin mekaanisissa aalloissa. Kuvan (f) energiatihesys on myös yhtä suuri kuin kuvassa (d), koska energia ei riipu aallon aaltoluvusta tai taajudesta.



**15.21** Tutki kuvan 15.15 aaltofunktioita. Mikä aaltofunktion ominaisuus on köydessä kulkevassa aallossa suurimmillaan, kun aallon energiatihesys on maksimissaan? Onko tämä ominaisuus kuvissa (b) ja (c) sama energiatihedyiden maksimikohdissa? Entä mikä aaltofunktion ominaisuus on sähkömagneettisessa aallossa suurimmillaan energiatihedyiden ollessa suurimmillaan? Onko tämä ominaisuus kuvissa (d) ja (f) sama energiatihedyiden maksimikohdissa?

### esimerkki 15.3

### Sinimuotoisen aaltofunktion energia

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Köyden päättä heilutetaan niin, että pään poikkeamaa tasapainosta kuvaan funktio  $u_{y,\text{pää}}(t) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t / 0.2 \text{ s} - \pi/2)$ . Mikä on köyteen syntynyt aallon pituusenergiatiheys ja sen kuljettama teho?

**TILANNE** Tilanne on sama kuin esimerkissä 15.2. Aallon ominaisuudet laskettiin jo siellä. Erityisesti aallon amplitudi on  $A = 0.02 \text{ m}$ , pituustiheys  $\mu = 0.15 \text{ kg/m}$ , kulmataajuus  $\omega = 31.4 \text{ s}^{-1}$  ja nopeus  $v_{\text{aalto}} = 18.3 \text{ m/s}$ .

**SUUNNITELMA** Köydessä kulkevan aallon keskimääräinen energia pituusyksikköö kohti on

$$\langle \lambda_E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 = 0.030 \text{ J/m}. \quad (15.54)$$

ja sen kuljettama teho on tämän pituusenergiatiheyden sekä aallon nopeuden tulo,

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{\text{aalto}} = 0.54 \text{ W}. \quad (15.55)$$

**ARVIOINTI** Aallon amplitudi on 2 cm, ja jaksonaika 0.2 s, joten köyden pisteen kulkevat puolen jakson aikana 4 cm ajassa 0.1 s. Köyden kunkin osan keskimääräinen nopeus on siis noin 0.4 m/s. Metrin mittaisen köyden osan massa on 0.15 kg, joten sen liike-energia on noin  $K = \frac{1}{2} m v^2 = 0.012 \text{ J}$ . Kaikkiaan aallossa on metrillä energiota  $E = \langle \lambda_E \rangle \Delta x = 0.030 \text{ J}$ , mikä on likimain kaksinkertainen lukema liike-energiaan verrattuna. Näin pitää ollakin, koska keskimäärin puolet mekaanisen siniaallon energiasta on potentiaalienergiaa ja puolet liike-energiaa.



**15.22** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä aaltojen kuljettamasta energiasta. Millaista energiota kuljettaa mekaaninen aalto? Entä sähkömagneettinen aalto? Mikä on energiatihesys ja mistä aallon ominaisuuksista se riippuu? Miten lasket aallon kuljettaman tehon?

## 15.5 Aaltojen superpositio

Etenevä aalto kuten köydessä liikkuva aaltopulssi muistuttaa hieman tasaisella nopeudella liikkuvaa kappaletta, mutta aaltojen ja kappaleiden tai hiukkasten käyttäytymisessä on eroja. Aallot eivät esimerkiksi kuljeta ainetta kuten hiukkaset. Erityisen tärkeä aaltojen ominaisuus on se, että *monta aaltoa voi olla samaan aikaan samassa paikassa*. Atomit ja niistä koostuvat kappaleet eivät voi kulkea toistensa lävitse, mutta aalloilla tälläista rajoitusta sen sijaan ei ole. Useimmissa väliaineissa aaltoja voi olla päälekkäin kuinka monta tahansa, ja tällöin aallot liikkuvat toisistaan riippumatta. Tätä ominaisuutta kutsutaan **aaltojen superpositioksi**.

### Kohtaavat aaltopulssit

Vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot eivät vuorovaikuta kulkissaan toistensa läpi, jolloin erottuaan aallot palaavat takaisin alkuperäisiin muotoihinsa. Kun väliaineessa kulkee useita aaltoa, ne aiheuttavat jokaisessa väliaineen pisteessä poikkeman, joka on yhtä suuri kuin jos kunkin aallon yksinään aiheuttama poikkeama laskettaisiin yhteen. Toisin sanoen jos aalto A sisältää yksinään väliaineen poikkeamaan tasapainosta tarkastelepisteessä määärän  $u_{y,A}$  ja aalto B määärän  $u_{y,B}$ , näiden aaltojen osuessa tähän pisteeseen samanaikaisesti pisteen poikkeama tasapainosta onkin  $u_{y,A} + u_{y,B}$ . Koska tämä pääsee jokaisessa pisteessä ja jokaisena ajan hetkenä, voidaan superpositiossa olevien aaltojen yhteen aaltofunktio kirjoittaa yksinkertaisesti summana

$$u_{y,\text{superpositio}}(x, t) = u_{y,A}(x, t) + u_{y,B}(x, t). \quad (15.56)$$

Jos aaltoa on useita, niiden kaikkien aaltofunktiot lasketaan samaan tapaan yhteen.

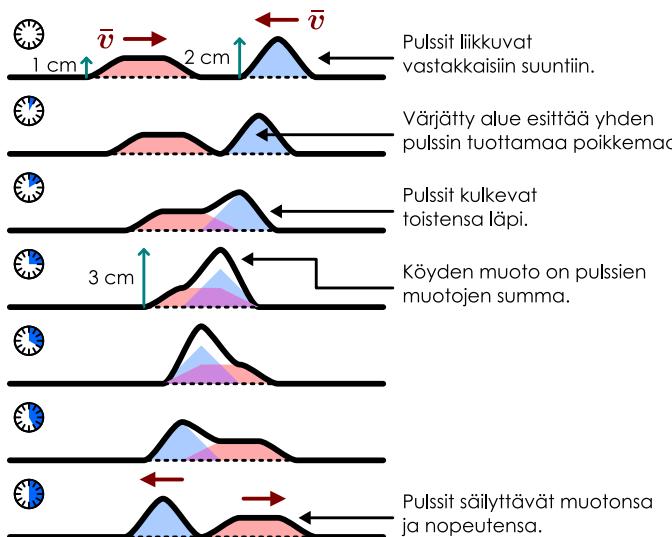


**15.23** Köydessä kulkee kaksi tasakylkisen kolmion muotoista aaltopulssia kohti toisiaan vauhdilla 0.1 m/s. Yhden pulssin korkeus on 10 cm, kannan leveys 20 cm ja huippu aluksi pisteessä  $x = 0.1$  m. Toisen pulssin korkeus on 5 cm, kannan leveys 40 cm ja huippu aluksi pisteessä  $x = 1.0$  m. Mikä on pisteen  $x = 0.5$  m poikkeama tasapainosta hetkillä  $t = 3, 4, 5$  s?

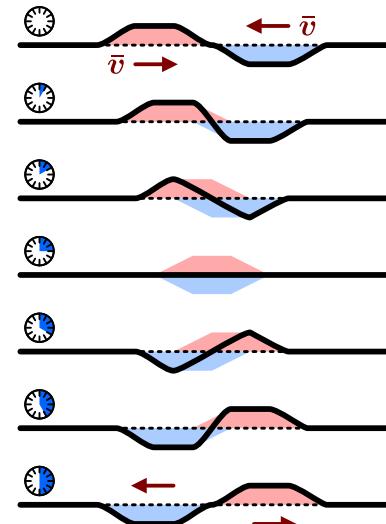
Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 15.16 (a), jossa kaksi köydessä vastakkaisiin suuntiin kulkevaa aaltopulssia kohtaa. Koska pulssit kulkevat samassa väliaineessa, nillä on sama vauhti. Toinen pulssista on puolisunnikkaan ja toinen kolmion muotoinen. Puolisunnikkaan muotoisen aallon korkeus on 1 cm ja kolmion 2 cm. Pulssuja on selkeyden vuoksi kuvattu myös omilla väreillään. Pulssien kohdattessa ne kulkevat toistensa läpi tai "päälekkäin", jolloin köyden muoto on pulssien muotojen summa. Koska kumpikin pulssi on tässä kuvassa köyden gläpuolella, ne saavat köyden pisteen poikkeamaan tasapainosta samaan suuntaan. Niinpä pulssien huippujen ollessa samassa pisteessä ne aiheuttavat köydessä poikkeaman, jonka maksimikorkeus on 3 cm. Tällöin aaltojen sanotaan *vahvistavan* toisiaan, millä siis tarkoitetaan yksinkertaisesti sitä, että nämä kaksi aaltoa saavat yhdessä köyden poikkeamaan tasapainosta enemmän kuin yksinään. Aallot eivät kuitenkaan vuorovaikuta, ja niinpä ohittuaan toisensa ne palaavat takaisin alkuperäiseen muotoonsa.

Kuva 15.16: Kahden vastakkaisiin suuntiin kulkevan aaltopulssin superpositio köydessä. Aallot kulkevat toistensa läpi, jolloin köyden muoto on aaltojen muotojen summa. Eroissa pulssit saavat jälleen alkuperäiset muotonsa.

(a) Kaksi aaltopulssia kohtaa.



(b) Vastakkaisilla puolilla kulkevat pulssit hetkellisesti hävittävät toisensa.



Kuvassa 15.16 (b) on samanlainen tilanne, mutta tässä tapauksessa kohtaavat pulssit kulkevat köyden eri puolilla. Vasemmalta saapuva pulssi aiheuttaa köydessä poikkeaman ylöspäin kun taas oikealta tuleva pulssi saa köyden pisteet siirtymään alas päin. Nämäkin poikkeamat summautuvat yhteen pulssien kulkissa toistensa läpi, jolloin aallot *kumoavat* toisensa. Tässä kuvassa aaltopulssit ovat yhdenmuotoiset, joten pulssien kohdatessa on itse asiassa hetki, jolloin köysi on täysin suora. Köyden pisteet ovat tällöin kuitenkin liikkeessä, joten köysi ei jää suoraksi vaan pulssit ilmestyvät jälleen ja jatkavat liikettää aivan kuin toista pulssia ei olisi ollutkaan. Vastakkaisetkaan aaltopulssit eivät siis tuhoa toisiaan, vaan aaltojen kumoutuminen on vain hetkellistä. Köyden muoto voidaan minä tahansa hetkenä määrittää laskemalla siinä etenevien aaltojen aaltofunktiot yhteen.



**15.24** Mitä tapahtuu aaltojen energialle kuvan 15.16 (b) keskimmäisessä tilanteessa, jossa aallot kumoavat toisensa?

### Sinimuotoisten aaltojen superpositio

Kuten jaksollisen liikkeen yhteydessä luvussa 14 opimme, kaikki jaksollinen liike voidaan kuvata harmonisten väärähtelyjen yhdistelmänä eli matemaattisesti kaikki jaksolliset funknot voidaan kirjoittaa harmonisten eli sinimuotoisten funktoiden summana eli *Fourier-sarjana*. Sinimuotoisten aaltojen aaltofunktiot ovat nimensä mukaisesti sinimuotoisia ja aaltojen superpositioperiaatteen mukaan päälekäisten aaltojen muodostaman aallon aaltofunktio saadaan laskemalla alkuperäisten aaltojen aaltofunktiot yhteen, joten Fourier-sarjoja voidaan soveltaa myös aaltojen kuvamiseen. Erityisesti siis *mikä tahansa jaksollinen aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen summana*

$$u_y(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x - \omega_n t) + b_n \sin(k_n x - \omega_n t)]. \quad (15.57)$$

Vaihtoehtoisesti tämä sarja voidaan esittää esimerkiksi muodossa

$$u_y(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \phi_n). \quad (15.58)$$

Harmonisten väärähtelyjen tapauksessa tarkasteltiin ajan funktoita, jolloin Fourier-sarjassa summattiin harmonisia funktoita, joilla oli eri kulmataajuudet. Sinimuotoiset aallot ovat harmonisia funktoita sekä ajan että paikan suhteen, joten niiden Fourier-sarjassa lasketaan yhteen sinimuotoisia aaltoja, joilla on eri kulmataajuudet ja aaltoluvut. Lisäksi jos esimerkiksi aallon aaltoluku tunetaan, aallon kulmataajuus voidaan tavallisesti päättää sen perusteella. Niinpä aaltojen Fourier-sarjoissa summattavien aaltojen ominaisuudet kuvataan tavallisesti aaltolukujen  $k_n$  ja Fourier-kertoimien  $a_n, b_n$  avulla.

Kuvassa 15.17 on esitetty sinimuotoisten aaltojen Fourier-sarjan periaate. Kuvassa (a) on esitetty kaksi harmonista aaltoa (punainen ja sininen) sekä näiden superpositio (musta), joka selvästiään ei ole sinimuotoinen. Kuvassa (b) on analysoitu summattavien aaltojen ominaisuudet. Aallot kulkevat origon kautta, joten niitä kuvaa sinifunktio. (Kosinifunktio saa origossa arvon 1). Lisäksi aaltojen kuvaajat laskevat alas päin origosta positiiviseen  $x$ -suuntaan kuljettaessa, joten niitä kuvaa sinifunktio, jolla on negatiivinen kerroin. Aaltojen Fourier-kertoimet ovat siis negatiiviset. Punaisen aallon amplitudi on noin 1.3 m, joten aallon Fourier-kerroin on  $b_1 = -1.3$  m. Vastaavasti sinisen aallon amplitudi on noin 0.7 m ja sen Fourier-kerroin on siis  $b_2 = -0.7$  m. Koska kuvan summassa käytetään vain sinifunktioita, sarjassa (15.57) esiintyvät kertoimet  $a_n$  ovat kaikki nolla.

Myös aaltojen aaltoluvut voidaan lukea kuvasta (b), johon on merkitty  $2\pi$ -pituisen matkan. Aaltoluku laskee montako aallonpituitta tälle matkalle mahtuu, ja kuvan perusteella punaisella aallolla merkityllä alueella on vain kolme neljäsosaa yhdestä allostaa, joten aallon aaltoluku on  $k_1 = 0.75 \text{ m}^{-1}$ . Sinisellä aallolla samalle pituudelle mahtuu yksi kokonainen ja yksi puolikas aalto, joten tämän aallon aaltoluku on  $k_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$ .

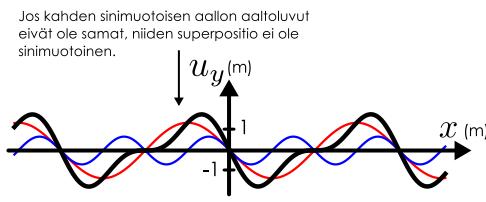
Kuvassa (c) Fourier-kertoimet on esitetty kuvaajana, jonka vaaka-akselina on aaltoluku  $k$  ja pystyakselina Fourier-kerroin  $b$ . Koska aaltoa on vain kaksi, kuvaajassa on vain kaksi pistettä. Pisteet on yhdistetty  $k$ -akseliin viivalla selkeyden vuoksi helpottamaan pisteen  $k$ -arvojen lukemista — näillä pystyviivoilla ei ole mitään erityistä merkitystä, ja ne voisi aivan hyvin jättää poiskin. Punainen piste kertoo punaisella piirretyn aallon ominaisuudesta:  $k_1 = 0.75 \text{ m}^{-1}$  ja  $b_1 = -1.3$  m. Sininen piste esittää puolestaan sinistä aaltoa:  $k_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$  ja  $b_2 = -0.7$  m. Kyseessä on siis aivan samanlainen kuvaaja kuin harmonisen väärähtelyn Fourier-sarjojen yhteydessä kuvassa 14.19 esitelty graafinen esitys. Erona on vain se, että nyt Fourier-kuvaajan vaaka-akselina on aaltoluku, kun harmonisen väärähtelyn tapauksessa vaaka-akselina käytetään kulmataajuutta tai taajuutta.

Kuvissa (d), (e) ja (f) on esitetty viiden sinimuotoisen aallon superpositio ja Fourier-esitys. Tässä esimerkissä kaikkien aaltojen aaltoluvut ovat punaisen aallon aaltoluvun monikertoja, joten aalloilla on sama jaksollisuus.

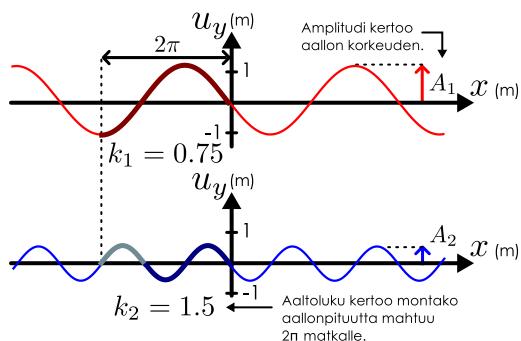
## AALTOLIIKE

Kuva 15.17: Mielivaltainen aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Kun tässä esitettynä superpositioon lisätään yhä enemmän aaltoja, superpositio alkaa muistuttaa yhä lähemmin sahalaita-aaltoa.

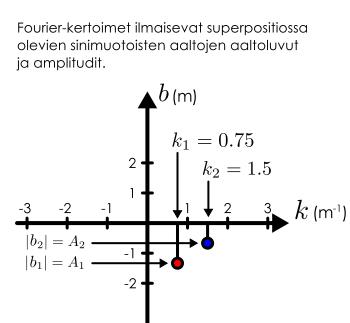
(a) Kahden sinimuotoisen aallon (punainen, sininen) superpositio (musta).



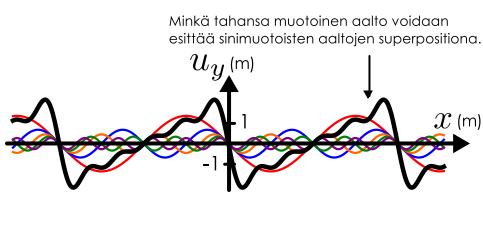
(b) Superposition muodostaneet aallot erikseen.



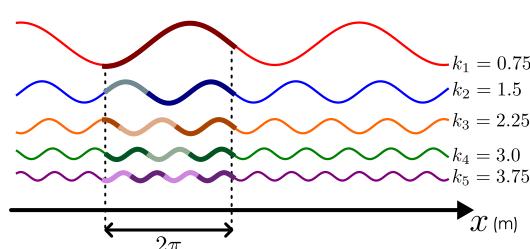
(c) Fourier-kertoimet.



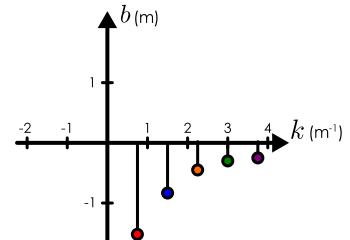
(d) Viiden aallon superpositio.



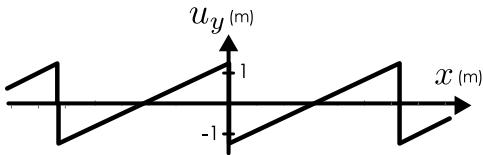
(e) Superposition muodostaneet aallot erikseen.



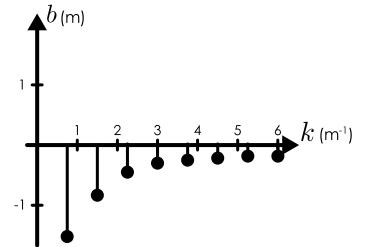
(f) Fourier-kertoimet.



(g) Äärettömän monen aallon superpositio.



(h) Fourier-kertoimia.



Punaisella piirretyn aallon aallonpituuus on  $\lambda_1 = 2\pi/k_1 \approx 8.4$  m, sinisen puolel tästä, oranssin kolmannes, jne. Niinpä aaltojen superpositiollaakin on sama jaksollisuus, ja sen aallonpituuus on sama kuin punaisen aallon.

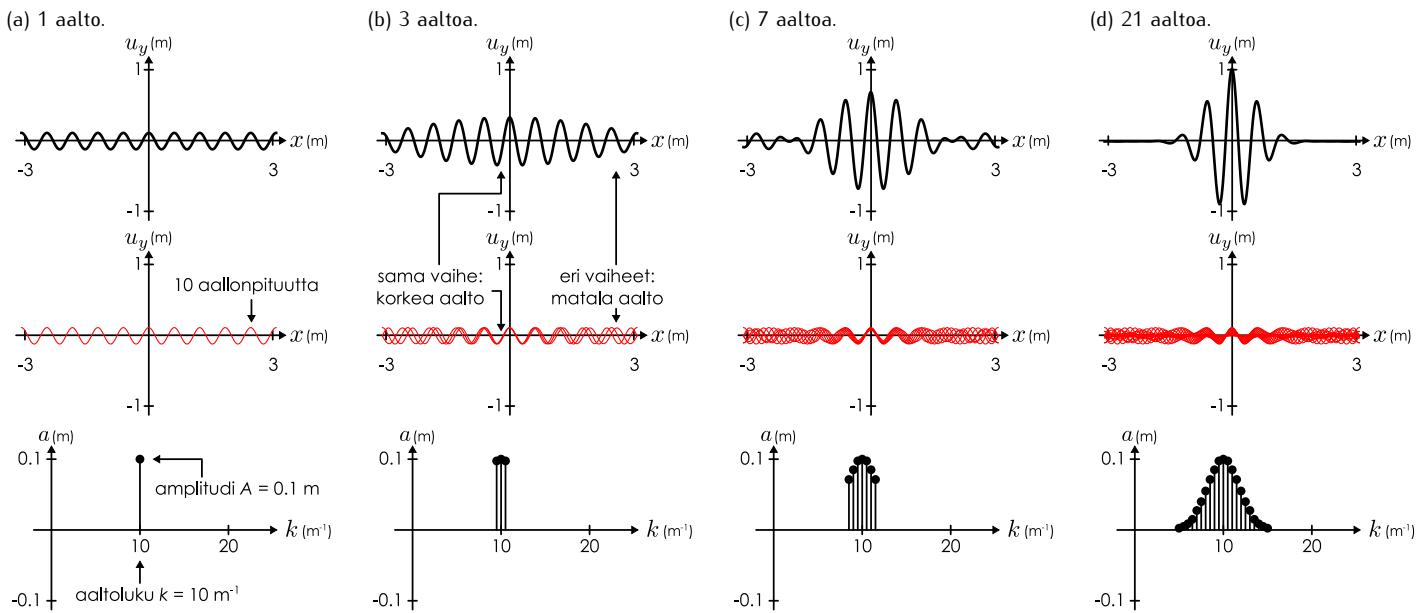
Kuvassa (g) on esitetty raja-arvo, joka saavutetaan, kun aaltoja lasketaan yhteen ääretön määrä. Aallon Fourier-kertoimet on puolestaan esitetty kuvaajassa (h). Tässä tapauksessa superpositio muodostaa niin sanotun sahalaita-aallon, jossa aallot muodostavat teräviä kolmioita. Oleellista esimerkissä ei ole kuitenkaan se, että näiden kyseisten aaltojen summana saadaan näin erikoisen näköinen aalto vaan se, että *valitsemalla harmoniset aallot sopivasti, niiden summana voidaan muodostaa millainen aalto tahansa*.

**15.25** Erään aallon Fourier-kertoimet ovat  $a_n = 0$ ,  $b_n = 1/n$ , kun  $n$  on pariton, ja  $b_n = 0$ , kun  $n$  on parillinen. Aallon aaltoluku on  $k_1 = 1 \text{ m}^{-1}$ . Piirrä tietokoneella kuva tästä aalosta hetkellä  $t = 0$  s, kun Fourier-sarjaan lasketaan mukaan esimerkiksi 5, 7 ja 9 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä. Millaista muotoa aaltojen superpositio näyttää lähestyvän, kun summaan otetaan mukaan yhä enemmän aaltoa?

Harmonisten eli sinimuotoisten aaltojen käytökkelpoisuus ei kuitenkaan jää tähän, sillä myös *epäjaksoiset* aallot kuten aaltopulssit voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Tässä on myös syy sinimuotoisten aaltojen tärkeyteen aalto-opissa: Sinimuotoisilla aalloilla on täsmällinen taajuus, kulmataajuus, aallonpituuus ja aaltoluku, joiden kautta aallon ominaisuudet voidaan kuvata, ja tästä johtuen kaikista aalloista usein juuri sinimuotoisten aaltojen käyttäytyminen on helpoin kuvata. Koska *kaikkien* aaltojen voidaan ajatella koostuvan sinimuotoisista aalloista eli *harmonisista komponenteista*, voimme oppia ymmärtämään kaikkien aaltojen käyttäytymistä tutkimalla pelkästään sinimuotoisia aaltoa.

Erityisesti aaltopulssien voi ajatella koostuvan sinimuotoisista aalloista. Tätä tulosta on demonstroitu kuvassa 15.18. Kuvasarjassa esitetään harmonisten aaltojen superposition muuttuminen, kun yhteen lasketaan

Kuva 15.18: Aaltopulssin esitys sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Mitä enemmän aaltoja summataan yhteen, sitä tarkemmin rajattu aaltopulssi saadaan aikaan. Jokaisessa kuvassa on esitetty superpositio (musta käyrä), superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot (punaiset käyrät) sekä näiden aaltojen Fourier-kertoimet (mustat pisteet).



yhää enemmän aaltoa. Kussakin kuvassa ylin kuvaaja esittää superpositiona saatavaa aaltoa paikan funktiona hetkellä  $t = 0$ , pystysuunnassa keskimmäisessä kuvaajassa on piirretty päälekäin superpositiossa olevien harmonisten aaltojen aaltofunktioit, ja alimmassa kuvaassa on aallon Fourier-kertoimien kuvaaja.

Kuvassa (a) on vain yksi aalto, joten aallon kuvaaja on puhtaasti sinimuotoinen. Aallon Fourier-kuvaajassa on vain yksi piste, jonka korkeus on sama kuin aallon amplitudi,  $a = A = 0.1 \text{ m}$ , ja jonka paikka  $k$ -akselilla kertoo aallon aaltoluvun,  $k = 10 \text{ m}^{-1}$ . Tämä näkyy aaltofunktion kuvaajassa siten, että välillä  $-3.1 \text{ m} \dots 3.1 \text{ m}$  on kymmenen aallonpituuutta. Aallon aallonpituuus on siis noin 0.63 m.

Kuvassa (b) superpositiossa on kolme sinimuotoista aaltoa, joiden aaltoluvut ovat hyvin lähellä toisiaan. Niinpä aaltojen aallonpituedet ovat myös varsin lähellä toisiaan. Origossa aallot ovat samassa vaiheessa, joten ne vahvistavat toisiaan, mutta koska aalloilla on hiukan erilaiset aallonpituedet, aallot ovat kaukana origosta eri vaiheissa eivätkä enää vahvista toisiaan. Niinpä superpositioaallon amplitudi on origossa suurimmillaan ja pienenee kuljetaessa origosta etäälle. Kyseessä on siis samantyypinen ilmiö kuin huojunta (kuva 14.17).

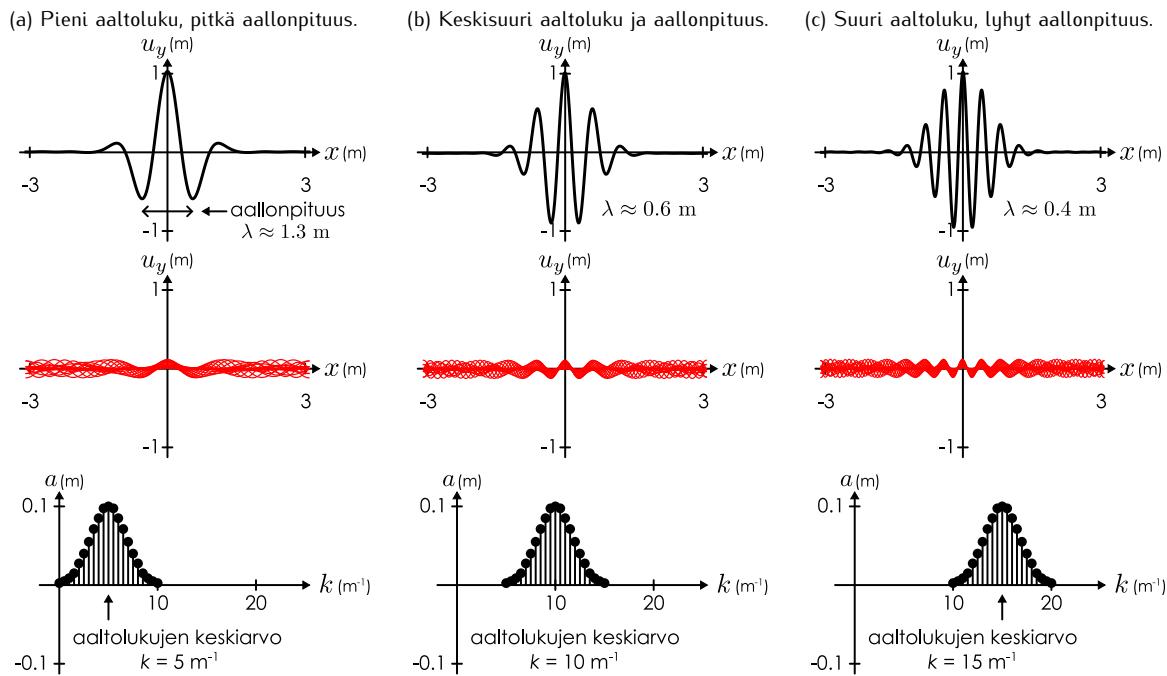
Kuvissa (c) ja (d) aaltoon lisätään yhä enemmän harmonisia komponentteja, jolloin aallosta muodostuu pulssi. Kuvassa (d) väliaine poikkeaa nollasta vain lähellä origoa ja kaukana origosta aaltofunktio on hyvin lähellä nollaa. Tämä johtuu siitä, että superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot ovat origossa samassa vaiheessa, mutta kaukana origosta jokaisessa pisteessä on yhtä paljon aaltoa  $x$ -akselin ylä- ja alapuolella, jolloin ne summautuvat likimain nollaksi.

Koska superpositioaalto ei ole enää sinimuotoinen, siinä esiintyvät aallonharjat eivät ole täsmälleen yhtä kaukana toisistaan eikä aallolla ole tarkkaa aallonpituetta eikä aaltolukua. Kuitenkin kuten kuvista 15.18 (a)–(d) huomataan, aallonharjat pysyvät *likimain* samalla etäisydellä toisistaan, kun superpositioon lisätään aaltoa. Niinpä aaltopulssillakin voi olla *likimääräinen* aallonpituuus ja aaltoluku. Kuvassa 15.19 on vertailtu kolme erilaista aaltopulssia ja niiden Fourier-esitystä. Kuvassa (a) aaltopulssin aallonharjat ovat likimain etäisydällä 1.3 m toisistaan, joten tästä voidaan pitää pulssin likimääräisenä aallonpituetenä. Fourier-kuvaajasta nähdään, että pulssi koostuu sinimuotoisista aalloista, joiden aaltoluvut ovat välillä  $0 \dots 10 \text{ m}^{-1}$ , ja suurimman amplitudin aallot ovat lähellä aaltolukua  $k = 5 \text{ m}^{-1}$ . Tätä voidaan pitää aallon keskimääräisenä aaltolukuna. Nämille arvoille pätee likimain relaatio (15.29) eli  $k_{\text{keskiarvo}} \approx 5 \text{ m}^{-1} \approx 2\pi/\lambda_{\text{pulssi}} \approx 2\pi/(1.3 \text{ m}) \approx 4.8 \text{ m}$ , joten tämä tulkinta on järkevä.

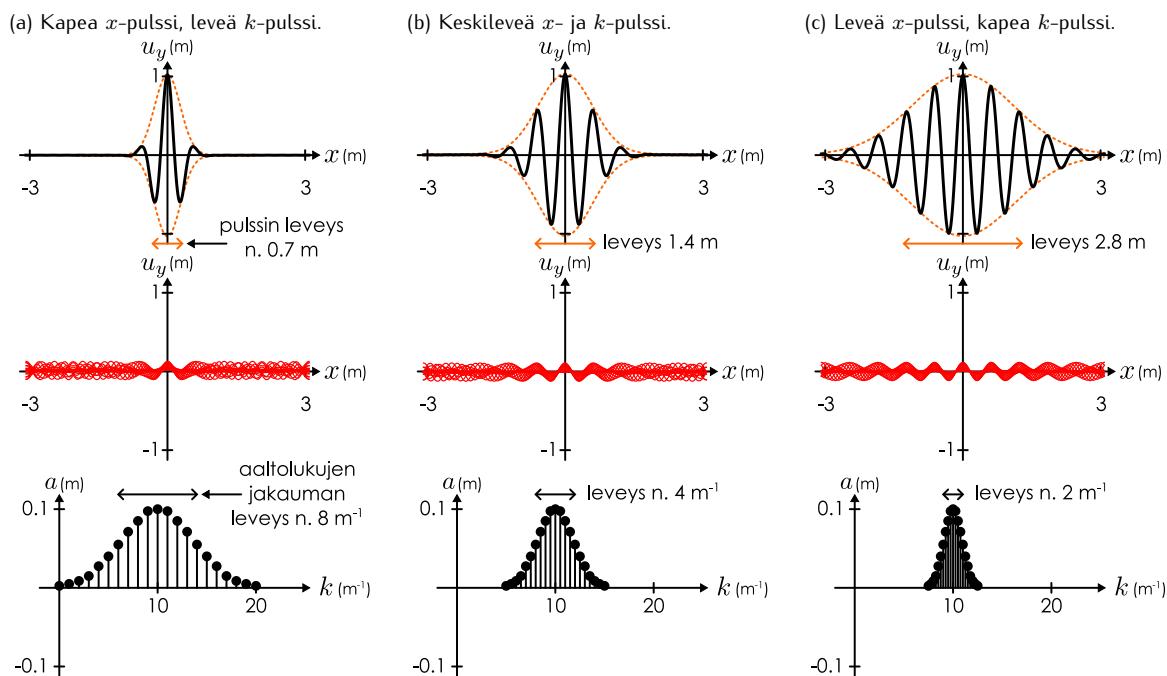
Kuvan 15.19 aalloissa aaltofunktio painuu kaikissa tapauksissa nollaan noin etäisydällä 1.5 m origosta eli aaltopulssit ovat yhtä leveitä. Pulssien aallonpituedet ovat kuitenkin erilaiset, sillä kuvassa (b) aallonharjojen välinen etäisyys on noin 0.6 m ja kuvassa (c) noin 0.4 m. Aaltojen Fourier-kuvaajat puolestaan ovat kaikki samanmuotoiset, mutta niiden keskipisteenvaihtelee. Erityisesti *kunkin pulssin likimääräinen aallonpituuus on käänten verrannollinen aallon Fourier-esityksen keskimääräiseen aaltolukuun yhteyden*  $k_{\text{keskiarvo}} \approx 2\pi/\lambda_{\text{pulssi}}$  mukaisesti.

Tarkastellaan vielä yhtä aaltopulssien sarjaa kuvassa 15.20. Tässä sarjassa jokaisen aaltopulssin likimääräinen aallonpituuus on sama, 0.6 m, mikä tarkoittaa myös sitä, että jokaisen aallon Fourier-esityksen keskipiste

Kuva 15.19: Aaltopulssi on rajoittunut pienelle alueelle, mutta se voi silti värähdellä. Pulssilla ei ole tarkkaa aallonpituita eikä aaltoikukua, koska sen aallonharjat eivät ole yhtä kaukana toisistaan. Pulssin aaltoluku on kuitenkin likimain sama kuin sen muodostaneiden sinimuotoisten aaltojen aaltolukujen keskiarvo.



Kuva 15.20: Aaltopulssien epätarkkuusperiaate. Mitä laajemmalta väliltä aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut valitaan, sitä kapeamman pulssin ne voivat muodostaa.



on  $k = 10 \text{ m}^{-1}$ . Pulssien leveydet ovat kuitenkin erilaiset, mitä on kuvassa korostettu oranssilla verhokäyrälä. Pulssin leveyden voi määritellä monella tavalla, ja tässä kuvassa leveyden mittana käytetään sen alueen leveyttä, jossa oranssin käyrän korkeus on vähintään puolet käyrän maksimiavusta (tätä mittaa kutsutaan *puoliarvoleveydeksi*). Kuvassa (a) tämä leveys on noin  $0.7 \text{ m}$ , kuvassa (b)  $1.4 \text{ m}$  ja kuvassa (c)  $2.8 \text{ m}$ . Toisaalta Fourier-esityksessä näiden pulssien aaltoluvut muodostavat myös "pulssit", joiden leveydet ovat (a)  $8 \text{ m}^{-1}$ , (b)  $4 \text{ m}^{-1}$  ja (c)  $2 \text{ m}^{-1}$ . Aaltopulssin *leveyden kasvaminen* näkyi siis Fourier-esityksessä aaltolukujen muodostaman kuvaajan *kaventumisenä*, ja itse asiassa pulssin aaltofunktion leveys ja sen Fourier-esityksen leveys ovat tässä *kääntäen verrannolliset*. Siispä kun aaltopulssi hajoittetaan Fourier-analyysillä harmonisiksi komponenteiksi, näiden komponenttien aaltoluvut välittämättä levivät sitä laajemmalle välille  $k$ -akselilla — eli aaltojen aallonpituuDET poikkeavat sitä enemmän toisistaan — mitä kapeampi aaltopulssi on.

Tämä on puhtaasti matemaattinen tulos, mutta havainnolla on myös fysiikalinen merkitys. Jos aaltopulssi nimitään on kapea, siihen mahtuu vain vähän aallonharjoja, ja niinpä aallonpituuDET päättely aallon muodon perusteella on vaikeaa. Näin määritetty aallonpituuDET on epätarkka. AallonpituuDET liittyy kuitenkin suoraan aaltolukuun, joten myös aaltoluku on tällöin epätarkka. Fourier-esityksessä tämä näkyi niin, että aallon sisältämien harmonisten komponenttien aaltoluvut ovat levinneet laajalle alueelle. Kun aaltopulssi on leveä, sen alueelle mahtuu monta aallonharjaa ja aallonpituuDET määritys aallon muodon perusteella on melko tarkkaa. Tällöin myös aaltoluvun arvo on varsin täsmällinen eivätkä aallon harmonisten komponenttien aaltoluvut poikkeaa kovin paljon toisistaan.



**15.26** Millainen on yhden ideaalisen sinimuotoisen aallon Fourier-esitys? Kuinka tarkasti tällainen aallon aallonpituuDET ja aaltoluku voidaan määrittää? Entä kuinka leveä tai kapea tämä aalto on? Voidaanko tässäkin tapauksessa sanoa, että aallon leveys ja sen aaltoluvun tarkkuus ovat verrannolliset?

Tätä ominaisuutta kutsutaan *Fourier-analyysin epätarkkuusperiaatteeksi*, ja sen mukaan mitä pienemmälle alueelle  $x$ -akselilla aaltopulssi on rajattu, sitä epätäsmällisempiä sen aallonpituuDET ja aaltoluku ovat. Toisin sanoen aallolla ei voi olla samaan aikaan sekä täsmällistä paikkaa että täsmällistä aaltolukua. Tämä on matemaattinen fakta, joka myös asettaa absoluuttisen rajan sille, kuinka kapeita aaltopulssi sekä sen Fourier-esitus voivat minimissään olla. Palaamme tarkastelemaan ilmiötä luvussa 17 kvantimekanikan yhteydessä. Osoittautuu nimitään, että myös hiukkasilla on aalto-ominaisuksia ja näiden aaltojen aaltoluku liittyy hiukkaseen liikkeeseen.



**15.27** (a) Miten aallon Fourier-kuvaaja muuttuu, jos kaikkien harmonisten komponenttien aaltoluvut kaksinkertaistetaan? (b) Miten aaltofunktio tällöin muuttuu? (c) Selitä tämän perusteella, miksi Fourier-kuvaajan leveyden muuttamisen täytyy vaikuttaa aaltopulssin leveyteen. (d) Vertaa kuvan 15.19 ja 15.20 aaltopulssuja. Mikä pulsseista voidaan muuntaa toiseksi kaksinkertaistamalla aaltoluvut?

#### esimerkki 15.4

#### Fourier-sarja

**Erään aallon Fourier-kertoimet noudattavat funktiota**

$$a(k) = Ae^{-\frac{1}{2\alpha^2}k^2}, \quad (15.59)$$

missä aaltoluku saa arvot  $k = -6.0 \text{ cm}^{-1}, -5.5 \text{ cm}^{-1}, -5.0 \text{ cm}^{-1}, \dots, 6.0 \text{ cm}^{-1}$  ja muut vakiot ovat  $A = 1.0 \text{ cm}$  sekä  $\alpha = 2.0 \text{ cm}^{-1}$ .

- (a) Mikä on välinaineen poikkeama eli aaltofunktion arvo pisteessä  $x = -1 \text{ cm}, 0 \text{ cm}, 1 \text{ cm}$  hetkellä  $t = 0 \text{ s}$ ?  
 (b) Aallot kulkevat tässä välinaineessa vauhdilla  $v_{\text{aalto}} = 10 \text{ cm/s}$ . Mikä on välinaineen poikkeama tasapainosta samoissa pisteissä hetkinä  $t = 0.1 \text{ s}$  ja  $t = 0.2 \text{ s}$ ?

**SUUNNITELMA** Tässä Fourier-sarjassa on vain kosinitermejä eli aaltofunktio on muotoa

$$u_y(x, t) = \sum_i a(k_i) \cos(k_i x - \omega(k_i)t). \quad (15.60)$$

Aaltoluvut saavat tehtävässä annetut arvot  $k_i = -6.0 \text{ cm}^{-1}, -5.5 \text{ cm}^{-1}, \dots$ , jolloin Fourier-kertoimien arvot voidaan laskea annetusta funktiosta,  $a(-6.0 \text{ cm}^{-1}) = 0.011 \text{ cm}, a(-5.5 \text{ cm}^{-1}) = 0.023 \text{ cm}, \dots$ . Kulmataajuus puolestaan riippuu aaltoluvusta sinimuotoisten aaltojen perusyhtälön  $v_{x,\text{aalto}} = \omega/k$  kautta. Nyt kuitenkin pitää huomata, että nopeus  $v_{x,\text{aalto}}$  ja aaltoluku  $k$  voivat olla negatiivisia, mutta kulmataajuus  $\omega$  ja vauhti  $v_{\text{aalto}}$  ovat sopimuksen mukaan positiivisia. Niinpä

$$\omega(k) = v_{x,\text{aalto}}k = |v_{x,\text{aalto}}k| = v_{\text{aalto}}|k|. \quad (15.61)$$

Kulmataajuuksiksi saadaan siis  $\omega(-6.0 \text{ cm}^{-1}) = 60 \text{ s}^{-1}, \omega(-5.5 \text{ cm}^{-1}) = 55 \text{ s}^{-1}, \dots$

**RATKAISU** Ratkaisu saadaan huolellisesti laskemalla. Esimerkiksi pisteessä  $x = 0 \text{ cm}$  hetkellä  $t = 0 \text{ s}$  aaltofunktio saa arvon

$$u_y(0 \text{ cm}, 0 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos(0) + (0.023 \text{ cm}) \cos(0) + \dots = 0.011 \text{ cm} + 0.023 \text{ cm} + \dots = 10.00 \text{ cm}. \quad (15.62)$$

Pisteessä  $x = 1 \text{ cm}$  aaltofunktio on puolestaan

$$u_y(1 \text{ cm}, 0 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos((-6.0 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm})) + (0.023 \text{ cm}) \cos((-5.5 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm})) + \dots \quad (15.63)$$

$$= (0.011 \text{ cm}) \cdot 0.96 + (0.023 \text{ cm}) \cdot 0.71 + \dots \quad (15.64)$$

$$= 1.34 \text{ cm}. \quad (15.65)$$

Vastaavasti pisteessä  $x = 1 \text{ cm}$  hetkellä  $t = 0.1 \text{ s}$  saadaan

$$u_y(1 \text{ cm}, 0.1 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos[(-6.0 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm}) - (60 \text{ s}^{-1}) \cdot (0.1 \text{ s})] + \dots \quad (15.66)$$

$$= (0.011 \text{ cm}) \cdot 0.84 + (0.023 \text{ cm}) \cdot 0.004 + \dots \quad (15.67)$$

$$= 5.00 \text{ cm}. \quad (15.68)$$

Kaikki kysyttyt arvot lasketaan samaan tapaan. Tulokset on taulukoitu alla. Paremman kuvan aallon käytöksestä saamme kuitenkin piirtämällä aaltofunktion tietokoneella.

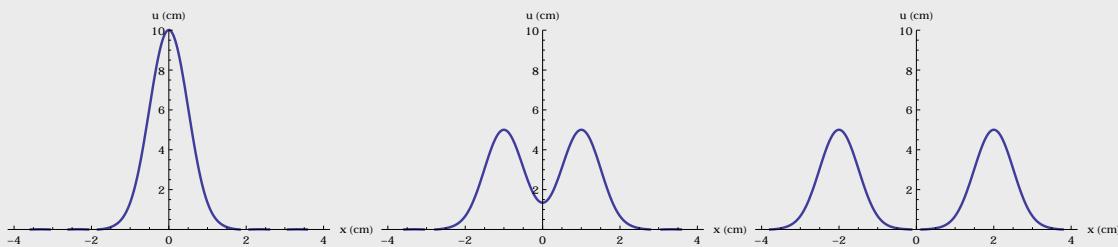
	$x = -1 \text{ cm}$	$x = 0 \text{ cm}$	$x = 1 \text{ cm}$
$t = 0.0 \text{ s}$	1.3 cm	10.0 cm	1.3 cm
$t = 0.1 \text{ s}$	5.0 cm	1.3 cm	5.0 cm
$t = 0.2 \text{ s}$	0.7 cm	0.0 cm	0.7 cm

Mathematica:

```
(* Fourier-sarja *)
amp = 1.0; alpha = 2.0; v = 10;
a[k_] := amp Exp[-k^2/(2 alpha^2)]
omega[k_] := v Abs[k]
u[x_, t_] := Sum[a[k] Cos[k x - omega[k] t], {k, -6, 6, 0.5}]

(* aaltofunktion arvot *)
{f[-1, 0], f[0, 0], f[1, 0]}
{f[-1, 0.1], f[0, 0.1], f[1, 0.1]}
{f[-1, 0.2], f[0, 0.2], f[1, 0.2]}
{1.34344, 10.0092, 1.34344}
{5.00234, 1.34344, 5.00234}
{0.669412, -0.00449333, 0.669412}

(* kuvajat *)
Plot[f[x, 0], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
Plot[f[x, 0.1], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
Plot[f[x, 0.2], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
```



**ARVIOINTI** Laskemamme lukuarvot vastaavat piirrettyjä kuvia kuten pitääkin. Näemme, että aluksi origossa on korkea aaltopulssi, joka kuitenkin jakautuu kahtia niin, että jäljelle jää kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa pienempää pulssia. Tilanne on hieman samankaltainen kuin jos pudotat kiven veteen.

Fourier-analyysissä pulssien ajatellaan koostuvan sinimuotoisista aalloista. Nyt puolet näistä aalloista kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan, koska niillä on positiivinen aaltoluku  $k$ , ja puolet negatiiviseen suuntaan, koska niillä on negatiivinen aaltoluku. Niinpä on järkevä, että lopputuloksena on kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa pulssia.

Voimme ajatella myös niin, että alkutilanne on näiden kahden pulssin superpositio. Erillään kummankin pulssin korkeus on 5 cm. Kun pulssit ovat aluksi superpositiossa niin, että kummankin huippu on origossa, superposition korkeus on 5 cm + 5 cm = 10 cm kuten pitääkin.



**15.28** Selitä omin sanoin mitä aaltojen superpositio tarkoittaa ja millaisia ilmiöitä siihen liittyy. Selitää myös mitä tarkoitetaan aaltojen Fourier-analyysilla. Mikä on epätarkkuusperiaate?

## 15.6 Väliaineet ja rajapinnat

Toistaiseksi olemme tarkastelleet aaltoja, jotka liikkuvat homogeenisessa eli kaikkialla samanlaisessa väliaineessa. Esimerkiksi köyden tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että köysi on kaikkialla yhtä paksu ja valmistettu samasta materiaalista, jolloin köyden pituustiheys ja jännitys ovat kaikkialla samat. Esimerkeissä tarkastellut köydet ovat myös olleet hyvin pitkiä niin etteivät aallot ole milloinkaan ehtineet kulkea koko köyden pituutta ja törmätä köyden päähän. Todellisuudessa näin ei kuitenkaan ole. Mikään väliaine ei ulotu samanlaisena äärettömiin, ja väliaineet voivat olla eri paikoissa erilaisia. Seuraavaksi tutkimmekin väliaineen merkitystä aaltojen käyttäytymisessä.

### Heijastuminen ja läpäisy

Kun yhdestä materiaalista tehty kappale tai aine loppuu, alkaa tavallisesti jostakin toisesta aineesta koostuva kappale. Esimerkiksi jos luet nyt sisätiloissa, ympärilläsi on ilmaa, jonka ympärillä on mm. seinät, jne. Paikkaa, jossa eri materiaalit kohtaavat, kutsutaan aineiden **rajapinnaksi**. Kolmessa ulottuvuudessa rajapinnat kuten esimerkiksi seinän pinta ovat nimensä mukaisesti pintoja, joiden yhdellä puolella on yhtä materiaalia (esim. ilmaa) ja toisella puolella toista (esim. betonia). Normaalisti rajapinnoilla on jokin pieni mutta nolla suurempi paksuus, sillä atomitasolla tasaiset pinnat ovat luonnossa harvinaisia. Usein rajapinnat ovat kuitenkin tarpeeksi ohuita ja tasaisia, jotta nütä voidaan kuvata täsmällisinä matemaattisina pintoina.

Yhdessä ulottuvuudessa rajapinta on piste. Esimerkiksi jos ohut ja paksu köysi sidotaan yhteen ja jännitetään suoraksi, voimme asettaa  $x$ -akselin köyden suuntaiseksi ja valita origoksi kohdan, jossa köyden paksuus muuttuu. Tällöin rajapinta on piste  $x = 0$ , sillä sen toisella puolella köysi on ohut ja toisella paksu.

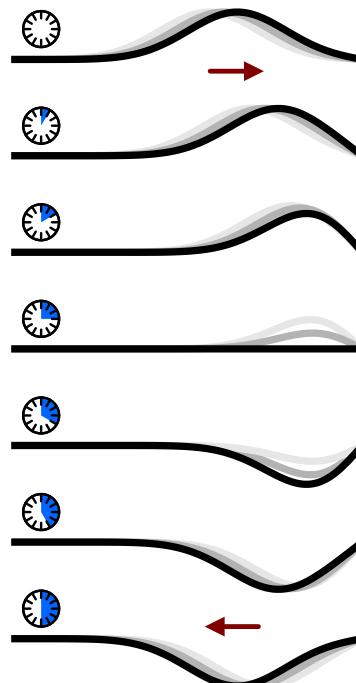
Jos väliaineen ominaisuudet rajapinnan eri puolilla ovat erilaiset, aalto ei voi kulkea rajapinnan läpi muuttumatta, koska aallon nopeus ja energiatihes riippuvat väliaineen ominaisuuksista. Tällöin on mahdollista, että saapuva aalto **läpäisee** rajapinnan ja jatkaa matkaansa samaan suuntaan kuin aikaisemmin mutta mahdollisesti eri nopeudella, amplitudilla, ja aallonpituuksella. On myös mahdollista että aalto ei pääse rajapinnan läpi vaan **heijastuu** takaisin tulosuuntaansa. Koska tällöin aalto pysyy koko ajan samassa materiaalissa, esimerkiksi aallon vauhti ei muutu vaan vain nopeuden suunta. Yleisin tilanne on kuitenkin se, että molemmat ilmiöt tapahtuvat samanaikaisesti, jolloin osa aalosta läpäisee rajapinnan ja osa heijastuu takaisin. Esimerkiksi paineaaltona etenevä ääni voi kulkea kevyiden seinien läpi, mistä on osoituksena äänen kuuluminen ohuiden rakenteiden läpi. Tällaisessa tilanteessa aalto kulkee ensin ilmassa, siirtyy siitä seinään, kulkee seinän läpi, ja siirtyy siitä jälleen ilmaan. Tällöin ääni läpäisee ainakin kaksi rajapintaa. Toisaalta tyhjässä huoneessa kaikku, mikä johtuu siitä, että ääntä kuljettavat paineaallot voivat myös heijastua ilman ja seinien rajapinnoista.

Aloitetaan tämän ilmiön tutkiminen tarkastelemalla yksinkertaisinta mahdollista tapausta, jossa aalto heijastuu täydellisesti. Kuvassa 15.21 on esitetty tästä esimerkkinä seinään kiinnitetty köysi. Nyt rajapintana toimii köyden kiinnityskohta, koska tässä pisteessä köysi vaihtuu seinäksi. Köydessä kulkevan aaltopulssin energia ei riitä tuottamaan havaittavaa värähtelyä seinässä, jolloin aalto ei pysty kulkemaan tämän rajapinnan läpi. Aallon kuljettama energia ei voi myöskään kadota minnekään, joten aaltopulssi ei voi myöskään vain hävitä saapuessaan köyden päähän. Ainoa mahdollisuus on siis se, että pulssi heijastuu takaisin.

Itse asiassa tässä tilanteessa pulssi heijastuu *kääntyen samalla köyden vastakkaiselle puolelle*. Pulssi kulki aluksi kuvassa köyden yläpuolella, jolloin se sai köyden poikkeamaan positiiviseen  $y$ -suuntaan, mutta heijastumisen jälkeen pulssi kulkee köyden alapuolella ja köyden poikkema on negatiiviseen  $y$ -suuntaan. Mekaanisesti tämä johtuu siitä, että pulssin saapuessa köyden päähän köysi venyy, koska sen pää ei pääse liikkumaan. Köyden muodossa tämä näkyy siten, että köyden pää muodostaa jyrkän kulman vaakataslon kanssa. Köyteen varastoituu tällöin potentiaalienergiaa. Tämän jälkeen köyden elastisuus vetää köyden takaisin suoraksi, jolloin köyden lähellä seinää olevat osat saavat suuren liike-energian ja suuren nopeuden alaspaan. Nämä osat jatkavat matkaansa köyden alapuolella ja synnyttävät sinne uuden aaltopulssin.

Kuvassa 15.22 on esitetty vastaava tilanne, jos köyden pää saa liikkua vapaasti pystysuunnassa. Tämän voi toteuttaa esimerkiksi kiinnittämällä seinään kiskon ja kiinnittämällä köyden tähän kiskoon. Jos köyden pää olisi aivan vapaana, köysi ei voisi olla jännitetty eikä mikään voima vetäisi sitä suoraksi. Tällöin köydessä

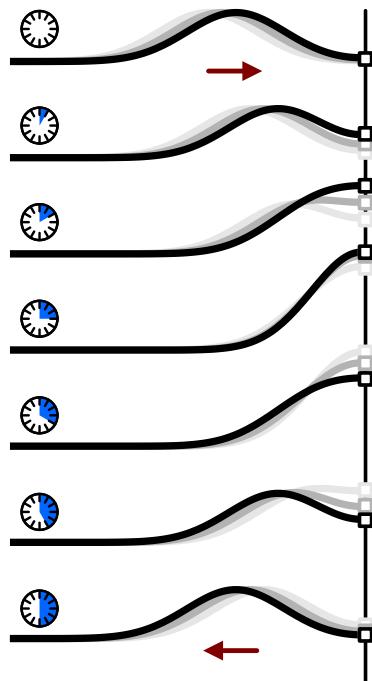
Kuva 15.21: Pulssi heijastuu köyden seinään kiinnitystää päästä.



## AALTOLIIKE

ei myöskään kulkisi aaltoa. Kun köysi kiinnitetään kiskoon, se voidaan jäännittää suoraksi, mutta köyden pää saa silti liikkua pystysuunnassa.

Kuva 15.22: Pulssi heijastuu köyden vapaasti liikkuvasta päästä.



Tässäkin tapauksessa seinään törmäävä pulssi heijastuu seinästä takaisin, sillä aallon energia ei voi hävitää yhtäkkiä minnekään. Nyt pulssi kuitenkin pysyy köyden yläpuolella päinvastoin kuin köyden pään ollessa kiinnitetynä paikoilleen. Tämä johtuu siitä, että pulsin kulkissa köydessä kunkin köyden osa vetää vuorollaan seuraavan osan pystysuuntaiseen liukkeeseen, mutta köyden pää ei joudu vetämään enää seuraavaa köyden osaa liikkeelle, koska sellaista ei ole. Niinpä köyden pää heilahtaa ylöspäin suuremmalla nopeudella kuin köyden muut osat ja kohoa pulssin alkuperäistä korkeutta ylemmäs. Tällöin köysi myös venyy enemmän kuin alkuperäisessä pulssissa, ja köyden elastisuus vetää köyden pään lopulta takaisin alkuperäiseen asemaansa. Samalla syntyy takaisin tulossaan kulkeva aaltopulssi.

**15.29** Millainen heijastuminen tapahtuu, kun (a) veden pinta-aalto kohtaa uima-altaan reunan tai (b) ilman paineaalto kohtaa seinän? Kääntyykö aalto ympäri vai ei?

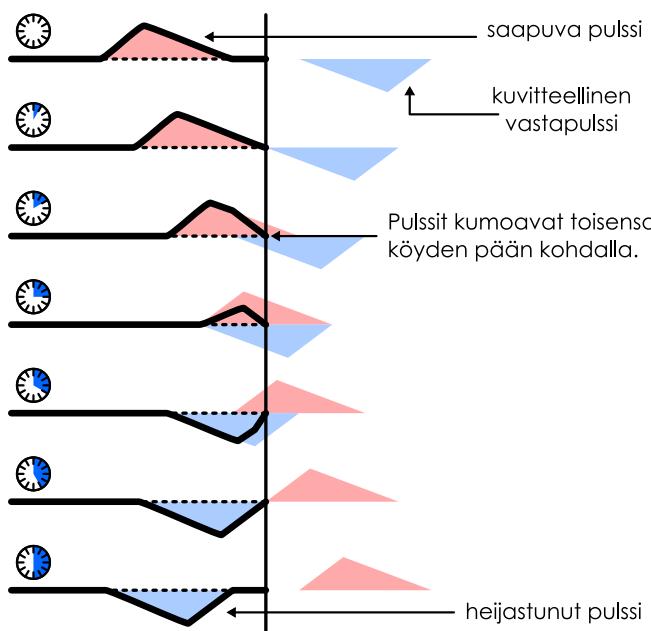
Köyden täsmällinen muoto aallon heijastuessa voidaan määrittää aaltofunktion kautta. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa köyden pää on kiinnitetty seinään eikä voi liikkua pystysuunnassa. Tällöin köyden pään poikkeama tasapainosta on aina nolla, ja näin ollen köyden aaltofunktion on toteutettava **reunaehdo**, jonka mukaan aaltofunktion arvo on tässä pisteessä nolla. Jos rajapinta on pisteessä  $x = 0$ , aaltofunktion on siis toteutettava ehto  $u_y(0, t) = 0$  kaikilla ajan  $t$  arvoilla.

Jos saapuva aaltopulssi kulkisi sellaisenaan köyden pähän asti, tämä ei toteutuisi, koska pulssi aiheuttaisi köyden pään siirtymisen ylöspäin. Aaltojen superpositioperiaatteen mukaan voimme kuitenkin ajatella, että alkuperäinen pulssi kulkee köyden loppuun asti muotoaan muuttamatta ja *samanaikaisesti* köyteen syntyy toinen pulssi köyden vastakkaiselle puolelle niin, ettei näiden pulssien superpositio pysyy pisteessä  $x = 0$  koko ajan tasapainossa. Tämä toinen pulssi jatkaa matkaansa pitkin köyttä alkuperäisen pulssin tulosuuntaan, joten sen täytyy olla heijastunut pulssi. Kuvassa

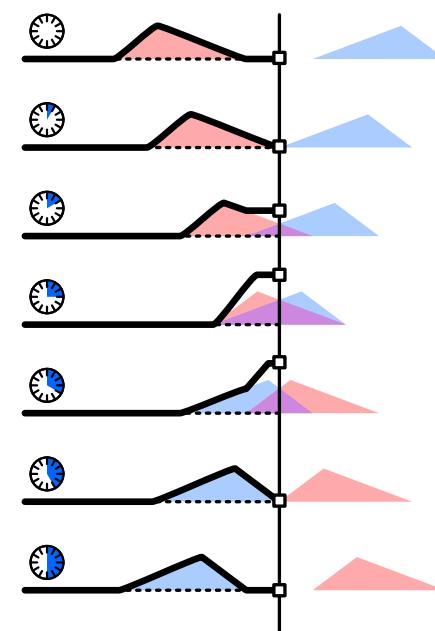
toaan muuttamatta ja *samanaikaisesti* köyteen syntyy toinen pulssi köyden vastakkaiselle puolelle niin, ettei näiden pulssien superpositio pysyy pisteessä  $x = 0$  koko ajan tasapainossa. Tämä toinen pulssi jatkaa matkaansa pitkin köyttä alkuperäisen pulssin tulosuuntaan, joten sen täytyy olla heijastunut pulssi. Kuvassa

Kuva 15.23: Köyden muodon määrittäminen saapuvan (punainen) ja heijastuneen (sininen) pulssin superpositiona. Heijastunut pulssi saadaan alkuperäisestä peilaamalla se  $y$ -akselin suhteeseen ja köyden pään pysyessä paikoillaan myös  $x$ -akselin suhteeseen.

(a) Köyden pää on kiinnitetty.



(b) Köyden pää saa liikkua vapaasti.



15.23 (a) on piirtämällä määritetty köyden muoto näiden pulssien superpositiona. Kuvasta nähdään, että köyden pään kohdalla saapuva ja heijastuva pulssi pyrkivät aina poikkeuttamaan köyttä yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin, jolloin köyden poikkeama on nolla kuten pitääkin.

Kuvaan 15.23 (a) on tarkoituksesta valittu epäsymmetrinen pulssi, jotta heijastuneen aallon muoto näkyisi selvästi. Pulssin toinen reuna on loiva ja toinen jyrkkä, ja sekä saapuvassa että heijastuneessa pulssissa *loiva reuna kulkee edellä*. Heijastunut (sininen) pulssi saadaan siis saapuvasta (punaisesta) pulssista peilaamalla pulssi sekä pysty- että vaakasuunnissa.

Köyden pään päästessä liikkumaan vapaasti reunaeho ei ole yhtä ilmeinen. Kuussa 15.22 kuitenkin nähdään, että tässä tapauksessa köysi pysyy kiinnityspisteessä vaakasuorana. Tämä johtuu siitä, että jos köyden pää ei olisi vaakasuora, köyden jännitysvoima kohdistaisi pähän suuren pystysuuntaisen komponentin. Jos köyden pään massa on suuri tai jos pystysuuntaisessa kiskossa, johon köysi on kiinnitetty, vaikuttaa merkittävä kitkavoima, köyden pään liikuttamiseen vaaditaankin merkittävä voima. Mutta jos kisko on lähes kitkaton ja köyden pää on kevyt, pään liikutaminen onnistuu hyvin pienellä voimalla, eikä köyden muoto sen pään kohdalla voi poiketa kovin paljon vaakasuorasta. Ideaalisessa tapauksessa köyden pää pysyy aina täsmälleen vaakasuorana. Jos köysi on vaakasuora, sen aaltofunktion tangentti kuvaaja on nolla, eli aaltofunktion derivaatta  $x$ -koordinaatin suhteen on nolla.

Tämäkin tapaus voidaan kuvata saapuvan ja heijastuvan pulssin superpositiona kuten kuussa 15.23 (b). Nytkö heijastunut pulssi on saapuneen pulssin peilikuvaa  $x$ -suunnassa, jolloin heijastuneen ja saapuvan pulssin jyrkkyydet ovat rajapinnalla aina yhtä suuret mutta vastakkaisuuntiset ja näin ollen niiden superpositio on rajapinnalla vaakasuora.

Edellä graafisesti perustellut tulokset voidaan esittää myös matemaattisesti. Jos saapuvaa pulssia kuvaava aaltofunktio

$$u_{y,\text{saapuva}}(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t), \quad (15.69)$$

kiinnitetystä päästä heijastuva pulssia kuvaava funktio

$$u_{y,\text{heijastuva,kiinni}}(x, t) = -f(-x - v_{x,\text{aalto}}t). \quad (15.70)$$

Tässä  $x$ -koordinaatin edessä oleva miinusmerkki kääntää pulssin muodon ja liikkeen suunnan  $x$ -suunnassa ympäri. Funktion edessä oleva miinusmerkki puolestaan kääntää pulssin köyden alapuolelle.

Näiden pulssien superpositiona saadaan kiinnitetyn pään tapauksessa aaltofunktio

$$u_{y,\text{kiinni}}(x, t) = u_{y,\text{saapuva}}(x, t) + u_{y,\text{heijastuva,kiinni}}(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t) - f(-x - v_{x,\text{aalto}}t), \quad (15.71)$$

ja köyden kiinnityspisteessä  $x = 0$  tämä saa arvon

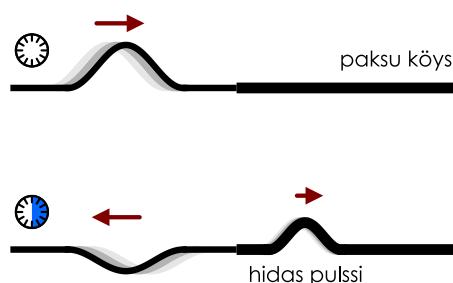
$$u_{y,\text{kiinni}}(0, t) = f(-v_{x,\text{aalto}}t) - f(v_{x,\text{aalto}}t) = 0. \quad (15.72)$$

Toisin sanoen aaltofunktio on tässä pisteessä aina nolla, mikä tarkoittaa köyden kiinnityspisteen pysyvän paikoillaan kuten pitääkin.

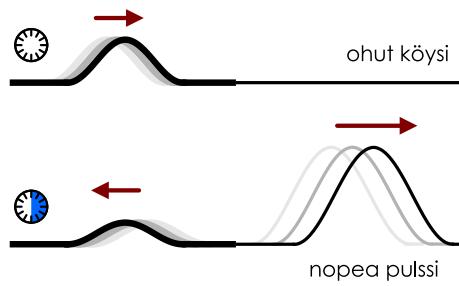
**15.30** (a) Mikä on heijastuva pulssia kuvaava aaltofunktio, jos köyden pää saa liikkua vapaasti pystysuunnassa? (b) Jotta aalto olisi rajapinnalla vaakasuora, aaltofunktion täytyy toteuttaa reunaeho  $\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$  kaikilla ajan  $t$  arvoilla. Osoita, että saapuvan ja heijastuneen pulssin summa totuttuu tämän ehdon (oleettaen, että funktio  $f$  on derivoitava).

Köysillä voidaan demonstroida myös rajapintoja, jotka aallot läpäisevät. Tällainen rajapinta saadaan aikaan yksinkertaisesti jatkamalla köyttä toisella köydellä, jonka paksuus tai tiheys on erilainen. Kun pulssi saapuu rajapinnalle, se pyrkii vetämään myös rajapinnan toisella puolella olevia köyden osia liukkeelle. Jos rajapinnan toisella puolella on paksu ja siis pituustiheydeltään suurempi köysi (kuva 15.24), tämän raskaan köyden saaminen liukkeelle on vaikeaa. Osa aalosta läpäilee rajapinnan, mutta paksuun köyteen syntynyt pulssi on alkuperäistä pulssia pienempi. Osa pulssista heijastuu käännyten köyden alapuolelle. Näin tapahtuu siksi, että saapuva pulssi saa köysien kiinnityskohdan liikkumaan vain vähän ja rajapinta toimii hiukan samaan tapaan kuin jos köysi olisi kiinnitetty seinään.

Kuva 15.24: Aalto saapuu ohuesta köydestä paksuun.



Kuva 15.25: Aalto saapuu paksusta köydestä ohueen.



Paksun köyden pituustiheys on suuri, joten rajapinnan läpäissyt aalto kulkee alkuperäistä aaltoa hitaammin. Heijastunut aalto sen sijaan kulkee yhtä nopeasti kuin rajapinnalle saapunut aalto, koska se kulkee samassa väliaineessa. Yhtälön (15.52) mukaan köydessä kulkevan sinimuotoisen aallon energia on verrannollinen köyden pituustiheyteen sekä amplitudin neliöön. Samaan tapaan myös pulssin energia on verrannollinen sen korkeuden neliöön. Niinpä sekä rajapinnan läpäisseen että heijastuneen pulssin täytyy olla *matalampia* kuin alkuperäinen pulssi, koska aallon kuljettama energia ei elatisessa köydessä häviä minnekään.

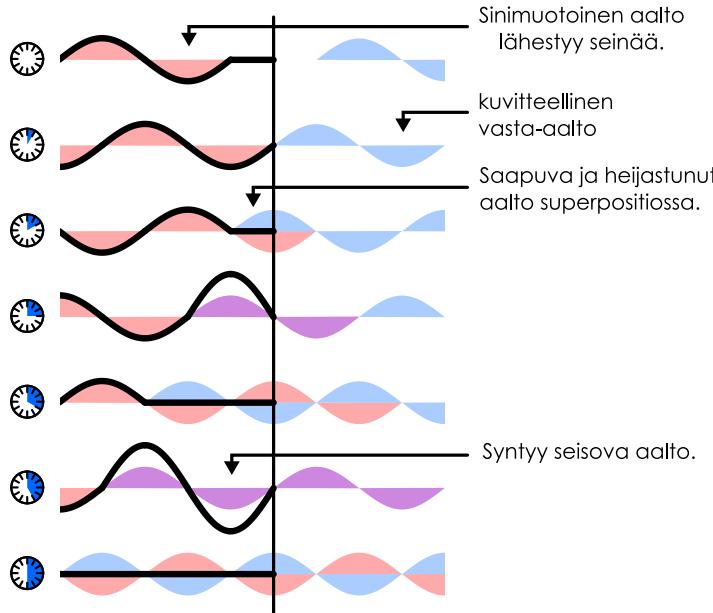
(kuva 15.25), rajapinnalle saapuneen pulssin on helppo saada tämä köysi liukkeelle. Niiinpä köysien kiinnityspiste pääsee liikkumaan pystysuunnassa lähes vapaasti ja siitä heijastunut pulssi pysyy samalla puolella köyttä kuin saapuva pulssi samaan tapaan kuin kuvassa 15.22. Läpäisyyt pulssi on kevyessä köydessä nopea ja korkea. Tässäkin tilanteessa energian pitää säilyjä, mutta ohuessa köydessä on pieni pituustiheys, ja niinpä läpäisseen aallon energia on pienempi kuin saapuvan aallon, vaikka sen amplitudi onkin suurempi.

Samanlainen ilmiö voi tapahtua *kaikilla aalloilla*, jotka kohtaavat rajapinnan. Esimerkiksi ilman ja seinän rajapinnalle saapuvasta paineaallostaa eli äänestää osa voi heijastua kaikuna ja osa voi jatkaa matkaansa sisään. Samoin ilman ja lasin rajapinnalle saapuva sähkömagneettinen aalto eli valo voi osittain läpäistää lasin ja osittain heijastua. Rüppuu kuitenkin aallon tyypistä ja välinaineiden ominaisuuksista, missä suhteessa heijastuminen ja läpäisy tapahtuvat ja millaisia aaltoja eri puolille rajapintaa syntyy. Tässä käsitellyssä köysiesimerkissä rajapinnan läpäisseestä aallostaa tulee sitä hitaampi, kapeampi ja matalampi, mitä tiheämpään ja paksumpaan köyteen aalto siirtyy. Toisaalta esimerkiksi rantaan saapuvat veden pinta-aallot hidastuvat niiden saapuessa matalaan veteen, ja tällöinkin aallot kaventuvat mutta ne eivät madallu vaan pääväistoin aaltojen korkeus kasvaa niiden saapuessa rantaan.

**15.31** Tarkastellaan kuvien 15.24 ja 15.25 tilannetta. Kuinka korkeita heiästunut ja läpäisyt pulssi ovat saapuvaan pulssin verrattuna, jos käyden oikean puolen pituustiheys on vasempaan puoleen verrattuna (a) hyvin paljon suurempi, (b) hyvin paljon pienempi tai (c) lähes yhtä suuri?

## Sinimuotoisten aaltojen heijastuminen ja vaihesiirto

Kuva 15.26: Vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositio on seisova aalto.

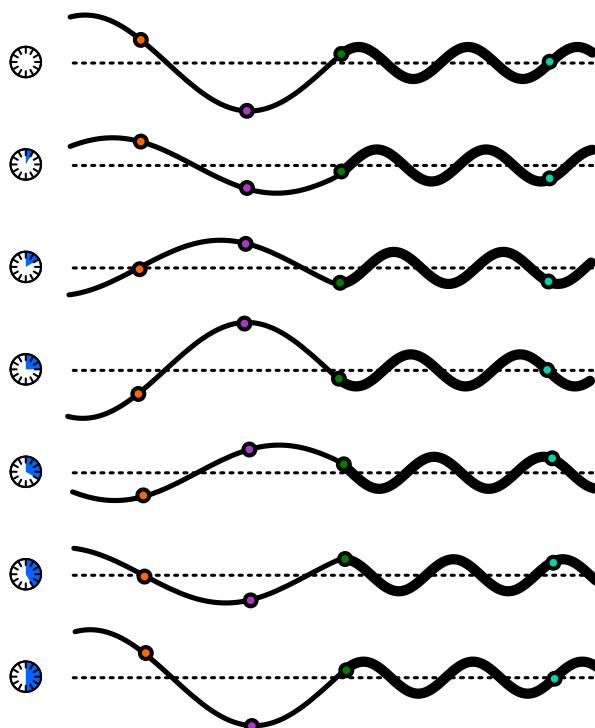


laus vaakasuunnassa tarkoittaa sitä, että heijastunut aalto kulkee vastakkaiseen suuntaan kuin saapuu

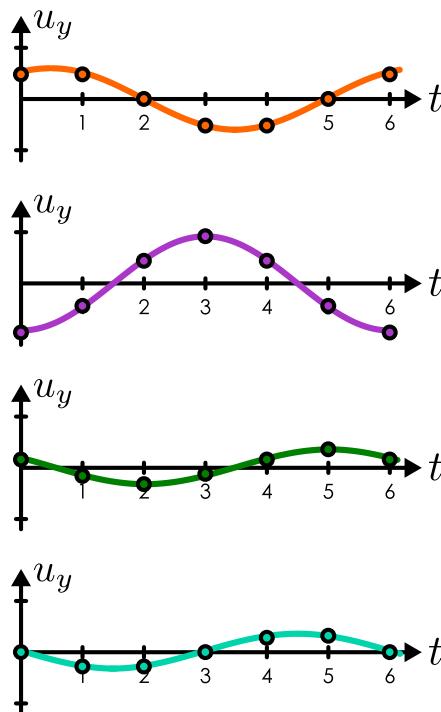
Myös sinimuotoiset aallot voivat heijastua kohdateessaan rajapinnan tai läpäistä sen. Kuvassa 15.26 on püirretty köysi, jossa kulkee sinimuotoinen aalto vasemmalta oikealle (punainen). Aallon synnyttää köyden vasempaan päähän kiinnitetty värahelijä, jota ei ole püirretty kuvaan. Köyden oikea pää on kiinnitettyn seinään, joten aallon täytyy heijastua tästä päästä niin, että pää pysyy paikoillaan. Aivan samoin kuin kuvassa 15.23 (a), tämän heijastumisen voi ajatella tapahtuvan niin, että seinän puolelta köyteen saapuu heijastunut aalto (sininen), jolloin saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio pysyy rajapinnalla paikoillaan. Jotta näin tapahtuisi, täytyy heijastuneen aallon olla muuten identtinen saapuvan aallon kanssa paitsi että se on peilattu sekä seinän että köyden tasapainoaseman suhteeseen eli sekä pysty- että vaakasuunnassa. Pei-

Kuva 15.27: Köyden värähtely ohuen (vasen puoli) ja paksun (oikea puoli) köyden rajapinnalla. Aallon lähte on kuvan ulkopuolella köyden vasemmassa päässä.

(a) Köyden muoto yhden värähdyjakson kuluessa.



(b) Jokainen piste värähtelee samalla taajuudella.



aalto. Peilaus pystysuunnassa puolestaan tarkoittaa sitä, että siinä missä saapuva aalto kulkee aallonpohja edellään, heijastuneessa aallossa on kärjessä aallonharja.

Kuvassa 15.26 nähdään myös, että saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio ei ole enää etenevä sinimuotoinen aalto. Sen sijaan köyteen syntyy **seisova aalto**, jossa jotkin köyden alueet värähtelevät voimakkaasti ja toiset eivät lainkaan. Kun saapuvan ja heijastuneen aallon aallonharjat ja pohjet ovat päällekkäin, köydessä on korkeita aaltoja. Sen sijaan jos aallonpohjet ja -harjat osuvat samoihin paikkoihin, köysi on hetkellisesti suora.

Seisovat aallot ovat erittäin tärkeä ja yleinen aaltojen erikoistapaus. Jos nimittäin aalto vangitaan pieneen tilaan kuten kielisoittimen kieleen, sen on pakko heijastua kielessä jatkuvasti edestakaisin. Tällöin kielessä kulkee aaltoa superpositiossa vastakkaisiin suuntiin, ja tuloksena on seisova aalto. Palaamme hetken päästä tutkimaan seisovia aaltoa tarkemmin, mutta tarkastellaan sitä ennen, kuinka sinimuotoiset aallot käyttäytyvät rajapinnalla, jonka ne voivat myös osittain *läpäistä*.

Kuvassa 15.27 (a) on piirretty köysi, jonka vasen puoli on ohuempi kuin oikea. Köyden keskellä on näitälä alueita erottava rajapinta. Köyden vasen pää on kiinni harmonisessa värähtelyjässä, joten rajapinnalle saapuu vasemmalta sinimuotoinen aalto. Kuten kuvassa 15.24, jossa aaltopulssi kohtasi samanlaisen rajapinnan, tässäkin tapauksessa saapuva aalto osittain heijastuu ja osittain läpäisee rajapinnan. Niinpä rajapinnan oikealla puolella paksussa köydessä havaitaan oikealle kulkeva sinimuotoinen aalto. Rajapinnan vasemmalla puolella saapuva ja heijastunut aalto ovat superpositiossa. Tämä muistuttaa kuvan 15.26 tilannetta, jossa vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot muodostavat seisovan aallon. Nyt heijastuneen aallon amplitudi on kuitenkin pienempi kuin saapuneen aallon, koska aalto heijastuu vain osittain, ja niinpä köyden vasemmalla puolella aalto ei ole puhtaasti etenevä eikä seisova vaan jotaain näiltä.

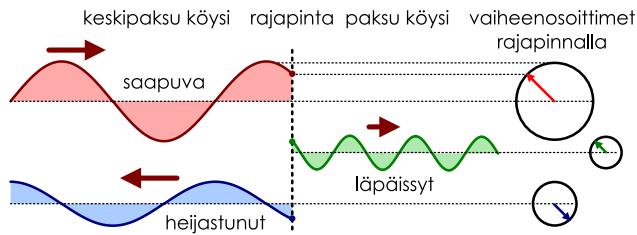
Kuvaan 15.27 (b) on piirretty neljän tästä köydestä valitun tarkastelupisteen värähtely ajan funktiona. Näiden värähtelyiden amplitudit ja vaiheet eivät ole samat, mutta niillä on kaikilla *sama taajuus*. Aaltona syntyy alunperin siitä, että köyden vasenta päättä (joka ei näy kuvassa) heilutetaan harmonisesti. Tämä harmoninen liike saa köyden seuraavan osan värähtelemään harmonisesti samalla taajuudella, tämä sitä seuraavan ja niin edelleen. Lopulta värähtely saavuttaa rajapinnan, joka alkaa myös värähdellä harmonisesti samalla taajuudella. Rajapinnasta värähtely levää sekä eteenpäin paksuun köyteen että takaisinpäin ohuempaan köyteen edelleen samalla taajuudella. Lopputuloksesta köyden jokainen piste värähtelee harmonisesti samalla taajuudella kuin aallon synnyttänyt lähde. Kyseessä on samanlainen ilmiö kuin pakotetussa harmonisessa värähtelyssä, joka oskilloi värähtelyä ajavan ulkoisen voiman taajuudella. Tässäkin tapauksessa köyden jokainen piste päätyy värähtelemään samalla, ulkoisen aaltolähteen määräämällä taajuudella.

Kuvissa 15.28 (a) ja (b) on eroteltu saapuva (punainen), heijastunut (sininen) ja läpäissyt (vihreä) aalto. Kuva (a) nämä aallot on selkeyden vuoksi piirretty erikseen ja kuva (b) superpositioon, jolloin köyden

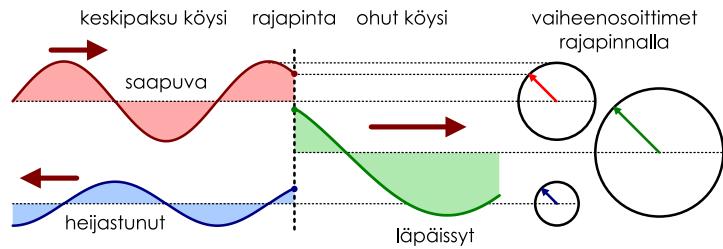
## AALTOLIIKE

Kuva 15.28: Käydessä kulkevan sinimuotoisen aallon heijastuminen ja läpäisy rajapinnalla. Kuvaassa aalto saapuu vasemmalta (punainen) ja siitä osa heijastuu takaisin oikealle (sininen) ja osa jatkaa matkaansa (vihreä). Kuvan vasemmalla puolella köyden muoto on saapuvan ja heijastuvan aallon superpositio.

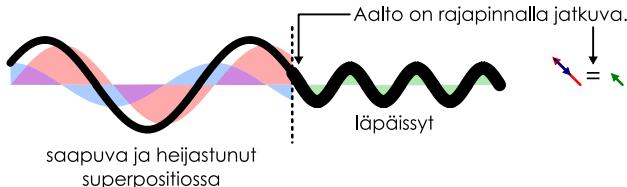
(a) Aalto saapuu ohuemmasta köydestä paksumpaan.



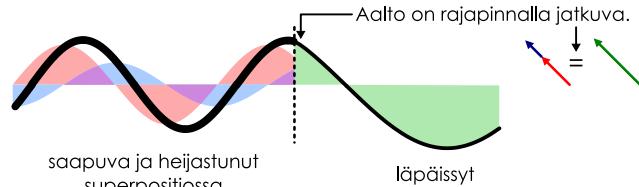
(c) Aalto saapuu paksummasta köydestä ohuempaan.



(b) Köyden muoto kuvan (a) tapauksessa.



(d) Köyden muoto kuvan (c) tapauksessa



todellinen muoto nähdään. Kuvatulla hetkellä saapuvan aallon aallonharja saavuttaa pian rajapinnan, mutta heijastuneen aallon rajapinnalle on syntymässä pian aallonpohja, eli tässäkin tapauksessa heijastunut aalto on "kääntynyt ympäri köyden alapuolelle". Rajapinnan läpäisseessä aallossa rajapinnalle on muodostumassa aallonharja, joten tämä aalto ei ole kääntynyt ympäri.

Sinimuotoisen aallon tapauksessa aallon "kääntymisen ympäri" voi ilmaista täsmällisesti aallon *vaiheen* avulla, ja siksi kuvaan (a) onkin piirretty aaltojen vaiheenosoitimet rajapinnalla. Saapuvan aallon vaihe rajapinnalla on kuvassa kahdeksasosakierros eli  $\phi_{saapuva} = \pi/4$ , mitä kuvaa vaiheenosoitin, jota on kierretty tämän verran pystysuunnasta vastapäivään (positiiviseen kiertosuuntaan). Aallon kulkissa sen vaihe rajapinnalla muuttuu, ja vaiheenosoitin pyörii myötäpäivään. Rajapinnan läpäisseen aallon vaihe on sama kuin saapuvan aallon vaihe, joten näiden aaltojen vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset. Heijastuneessa aallossa on kuitenkin rajapinnalla aallonpohja, joten tämän aallon vaiheenosoitin ei voi osoittaa ylöspäin vaan sen täytyy osoittaa alaspäin. Itse asiassa *heijastuneen aallon vaiheenosoitin on kääntynyt puoli kierrosta saapuvaan aaltoon verrattuna*. Aaltojen välillä on siten vaihe-ero  $\Delta\phi = \phi_{heijastunut} - \phi_{saapuva} = \pi$ , ja aallon sanotaan heijastuksessa kokevan puolen kierroksen *vaiheensiiron*.

Vaikka kuvassa (a) aallot piirrettiin erikseen, todellisuudessa aallot kulkevat tienkin samassa köydesä, jonka todellinen muoto on piirretty kuvaan (b). Eritiisesti saapuva ja heijastunut aalto kulkevat köyden samassa osassa, jolloin köyden muoto on näiden aaltojen superpositio. Lisäksi köyden vasen ja oikea puoli eivät voi värähdellä toisistaan riippumatta, koska köysi on yhtenäinen. Köysi ei saa mennä rajapinnalla poikki, joten köyden muodon kuvajan pitää olla aina jatkuva — siihen ei saa milloinkaan tulla hypäystä rajapinnalla. Ohuen ja paksun köyden rajapinnalla kohtaavien päiden täytyy siis värähdellä täsmälleen samalla tavalla, mikä toteutuu jos ja vain jos niiden *vaiheenosoitimet ovat samat* (kuva 15.28 (b)). Rajapinnan vasemmalla puolella saapuva ja heijastunut aalto ovat superpositiossa, joten köyden värähtelyä kuvaa niiden vaiheenosoitimien vektorisumma (punainen + sininen nuoli). Rajapinnan oikealla puolella on vain läpäissyt aalto, joten köyden värähtelyä kuvaa sen vaiheenosoitin (vihreä). Siispä vihreän nuolen täytyy olla sama kuin punaisen ja sinisen nuolen summa. Tämän täytyy toteutua *aina* (koska köysi ei voi mennä välillä poikki ja yhdistyä uudelleen), joten vaiheenosoitinten täytyy myös pyöriä yhtä nopeasti. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla kolmella aallolla täytyy olla *sama taajuus*, kuten kuvan 15.27 (b) perusteella jo aikaisemmin päätteliin. Luvun lopussa esimerkissä 15.5 näytetään, kuinka vastaavat ehdot kirjoitetaan yhtälöinä ja aaltofunktio voidaan laskea.



**15.32** Kuvassa 15.28 (b) aallon amplitudi rajapinnan vasemmalla puolella on suurempi kuin oikealla puolella. Kuinka tämä on mahdollista vaikka köyden pitää aina olla rajapinnalla jatkuva?

Kuvissa 15.28 (c) ja (d) on esitetty vastaava tilanne, kun rajapinnan oikealla puolella on ohut köysi. Tämä muistuttaa kuvan 15.25 tilannetta, jossa heijastunut aaltonulssi pysyy köyden yläpuolella eli samalla puolella kuin saapuva aalto. Sinimuotoisten aaltojen tapauksessa tämä tarkoittaa saapuvan ja heijastuneen aallon olevan sama rajapinnalla. Niinpä tässä tapauksessa kaikkien kolmen aallon vaiheenosoitimet osoittavat samaan suuntaan. Tässäkin tapauksessa aallon täytyy olla rajapinnalla jatkuva, joten saapuvan ja heijastuneen aallon vaiheenosoitimien summan pitää aina olla sama kuin läpäisseen aallon vaiheenosoitin.



**15.33** Kuvissa 15.28 (a) ja (c) punainen aalto on sama. Miten ja miksi siniset aallot ja niiden vaiheenosottimet eroavat toisistaan? Entä vihreät?

### esimerkki 15.5

### Aalto rajapinnalla

Eräässä köydessä on kaksi puoliskoa, josta toisen halkaisija on kaksinkertainen toiseen nähdien (kummatkin puolet on tehty samasta materiaalista). Toisin sanoen köydessä on ohut ja paksu puolisko sekä näitä erottava rajapinta. Köyden ohutta päättää heilutetaan harmonisesti taajuudella 1.0 Hz, jolloin köyteen syntyy sinimuotoinen aalto. Ratkaise köyden aaltofunktio rajapinnan ympäristössä, kun saapuvan aallon amplitudi on 0.10 m ja nopeus 2.0 m/s.

**TILANNE** Asetetaan rajapinta origoon ja  $x$ -akseli köyden tasapainoaseman suuntaiseksi. Olkoon köyden ohut puoli alue  $x < 0$  ja paksu puoli  $x > 0$ , jolloin rajapinnalle saapuva aalto kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan. Merkitään köyden ohuempaan puoliskoon liittyviä suureita indeksillä O ja paksumpaan liittyviä indeksillä P. Merkitään saapuvaa aaltoa indeksillä S, heijastunutta H ja läpäissytä L. Valitaan ajan nollahetki vielä niin, että saapuvan aallon vaihe on tällöin nolla rajapinnalla, eli  $\phi_S(0, 0) = 0$ .

**SUUNNITELMA** Köyden pituustiheys on verrannollinen sen poikkipinta-alaan, joten paksun köyden pituustiheys on nelinkertainen ohueeseen verrattuna,

$$\mu_P = \rho\pi r_P^2 = \rho\pi(2r_O)^2 = 4\mu_O. \quad (15.73)$$

Köyden jännitys on kaikkialla sama,  $T$ , joten aaltojen vauhti on ohuessa köydessä kaksinkertainen paksuun verrattuna,

$$v_O = \sqrt{\frac{T}{\mu_O}} = \sqrt{\frac{4T}{\mu_P}} = 2v_P. \quad (15.74)$$

Saapuvan aallon nopeus tunnetaan, joten  $v_O = 2.0$  m/s ja  $v_P = 1.0$  m/s.

Köyden kaikki osat väärtelevät samalla taajuudella  $f = 1.0$  Hz ja kulmataajuudella  $\omega = 2\pi f = 6.28$  s<sup>-1</sup>. Niinpä ohuessa köydessä kulkevien aaltojen aallonpituuus on kaksinkertainen ja aaltoluku puolikas paksuun köyteen verrattuna. Lukuarvoiksi saadaan  $\lambda_O = \frac{v_O}{f} = 2.0$  m,  $\lambda_P = \frac{v_P}{f} = 1.0$  m,  $k_O = 2\pi/\lambda_O = 3.14$  m<sup>-1</sup> sekä  $k_P = 2\pi/\lambda_P = 6.28$  m<sup>-1</sup>.

Aalto saapuu rajapinnalle negatiivisesta  $x$ -suunnasta ja kulkee positiiviseen  $x$ -suuntaan. Aalto kulkee ohuessa käydessä, joten sen aaltoluku on  $k_O$ . Saapuvan aallon aaltofunktio on siis muotoa

$$u_{y,S}(x, t) = A_S \cos(k_O x - \omega t), \quad (15.75)$$

missä  $A_S$  on tehtävänannon mukaan 0.10 m. Ajan nollahetki valittiin niin, että aallon vaihetekijä on nolla,  $\phi_0 = 0$ .

Rajapinnan läpäisseen aallon vaihe on sama kuin rajapinnalle saapuneen aallon. Tämä aalto kulkee paksussa köydessä, joten sen aaltofunktio on

$$u_{y,L}(x, t) = A_L \cos(k_P x - \omega t). \quad (15.76)$$

Heijastuneen aallon vaiheen täytyy käyntä puoli kierrosta, koska aalto heijastuu ohuen ja paksun köyden rajapinnalta ohuen köyden puolella. Lisäksi heijastunut aalto kulkee negatiiviseen  $x$ -suuntaan, joten sen aaltoluku on negatiivinen. Niinpä heijastuneen aallon aaltofunktio on

$$u_{y,H}(x, t) = A_H \cos(-k_O x - \omega t + \pi). \quad (15.77)$$

Jos tässä unohtaisi huomioida vaiheensiirron, saisimme laskussa lopulta vastaukseksi negatiivisen amplitudin heijastuneelle aallolle. Sen sijaan jos aallon kulkusuunnan unohtaa käänää, ratkaisua ei löydy lainkaan.

Ohuen köyden muotoa kuvaa saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio,

$$u_{y,O}(x, t) = u_{y,S}(x, t) + u_{y,H}(x, t), \quad (15.78)$$

kun taas paksussa köydessä kulkee vain läpäissyt aalto,

$$u_{y,P}(x, t) = u_{y,L}(x, t). \quad (15.79)$$

Nämä funktiot kuvaavat siis köyden muotoa alueissa  $x < 0$  ja  $x > 0$ . Köysi ei saa mennä rajapinnalla  $x = 0$  poikki, joten aaltofunktion täytyy olla jatkuva

$$u_{y,O}(0, t) = u_{y,P}(0, t). \quad (15.80)$$

Köydessä ei saa olla rajapinnalla myöskään terävä kulmaa, koska köyden jännitys vetäisi sen heti suoraksi, joten aaltofunktion derivaatan paikkakoordinaatin suhteen täytyy olla myös jatkuva

$$\left. \frac{\partial u_{y,O}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_{y,P}}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (15.81)$$

Meillä on kaksi yhtälöä, (15.80) ja (15.81), sekä kaksi tuntematonta,  $A_L$  ja  $A_H$ , joten tässä on tarpeeksi informaatiota köyden muodon ratkaisemiseksi.

**RATKAISU** Aaltofunktoiden sijoitus jatkuvuusehtoon (15.80) antaa yhtälön

$$A_S \cos(-\omega t) + A_H \cos(-\omega t + \pi) = A_L \cos(-\omega t). \quad (15.82)$$

Aaltofunktioiden osittaisderivaatat paikan suhtein ovat

$$\frac{\partial u_{y,S}}{\partial x} = -k_O A_S \sin(k_O x - \omega t) \quad (15.83)$$

$$\frac{\partial u_{y,L}}{\partial x} = -k_P A_L \sin(k_P x - \omega t) \quad (15.84)$$

$$\frac{\partial u_{y,H}}{\partial x} = k_O A_H \sin(-k_O x - \omega t + \pi), \quad (15.85)$$

joten derivaatan jatkuvuusehdo (15.81) antaa yhtälön

$$-k_O A_S \sin(-\omega t) + k_O A_H \sin(-\omega t + \pi) = -k_P A_L \sin(-\omega t). \quad (15.86)$$

Näiden yhtälöiden on toteuduttava *aina*, eli ne pätevät kaikilla ajan  $t$  arvoilla. Erityisesti voimme antaa ajalle  $t$  minkä tahansa arvon, ja saamme pätevän yhtälön. Jos yhtälössä (15.82) annetaan ajalle arvo  $t = 0$ , saadaan yksinkertaisempi yhtälö

$$A_S - A_H = A_L, \quad (15.87)$$

koska  $\cos 0 = 1$  ja  $\cos \pi = -1$ . Kuvan (15.28) (b) vaiheenosoitinten yhtälössä tämä ehto tarkoittaa sitä, että läpäisseen aallon vaiheenosoitimen pituuus on sama kuin saapuvan ja heijastuneen aallon vaiheenosoitinten pituuksien erotus.

Jos yhtälöön (15.86) sijoitetaan  $t = 0$  saadaan tosi mutta käyttökelvoton yhtälö  $0 = 0$ . Jotta voisimme hyödyttää täitä yhtälöä, siihen voidaan sijoittaa esimerkiksi arvo  $t = T/4$ , koska  $\sin -\frac{\omega T}{4} = \sin -\frac{\pi}{2} = -1$  ja  $\sin(\pi - \frac{\omega T}{4}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Näin saadaan yhtälö

$$k_O(A_S + A_H) = k_P A_L. \quad (15.88)$$

Tähän voidaan sijoittaa edellä ratkaistu  $A_L = A_S - A_H$ , jolloin

$$k_O(A_S + A_H) = k_P(A_S - A_H), \quad (15.89)$$

ja tästä heijastuneen aallon amplitudiksi ratkeaa

$$A_H = \frac{k_P - k_O}{k_P + k_O} A_S = \frac{1}{30} \text{ m} \approx 0.033 \text{ m}. \quad (15.90)$$

Sijoittamalla tämä takaisin esimerkiksi yhtälöön  $A_L = A_S - A_H$  saadaan läpäisseen aallon amplitudiksi ratkaistua

$$A_L = \frac{2k_O}{k_P + k_O} A_S = \frac{1}{15} \text{ m} \approx 0.067 \text{ m}. \quad (15.91)$$

On kuitenkin ehkä havainnollisempaa ilmoittaa aaltojen amplitudien suhteet

$$\frac{A_H}{A_S} = \frac{1}{3} \quad (15.92)$$

$$\frac{A_L}{A_S} = \frac{2}{3}. \quad (15.93)$$

Tietysti mielessä rajapinnan läpäisee siis kaksi kolmannesta saapuvasta aallosta ja yksi kolmannes heijastuu takaisin. Kuten tuloksen arvioinnissa kuitenkin todetaan, on yleensä parempi tarkastella aallon kuljettaman energian jakautumista kuin amplitudeja.

Mathematica:

```

lukuarvot = {ko -> Pi, kp -> 2 Pi, omega -> 2 Pi, as -> 1/10};

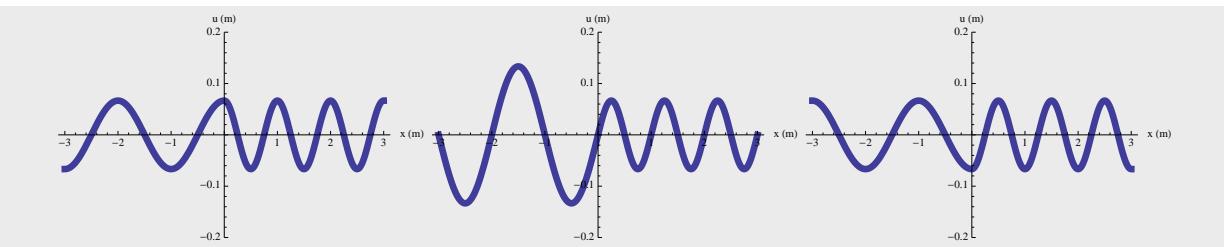
(* aaltofunktiot *)
us[x_, t_] := as Cos[ko x - omega t] (* saapuva *)
ul[x_, t_] := al Cos[kp x - omega t] (* lapaissyt *)
uh[x_, t_] := ah Cos[-ko x - omega t + Pi] (* heijastunut *)
uo[x_, t_] := us[x, t] + uh[x, t] (* ohut koysi *)
up[x_, t_] := ul[x, t] (* paksu koysi *)

(* ratkaistaan amplitudit jatkuvuusehdoista *)
ratkaisu = Solve[ {
    uo[0, 0] == up[0, 0],
    D[uo[x, t], x] == D[up[x, t], x] /. x -> 0
}, {al, ah}]
{{al -> (2 as ko)/(ko + kp), ah -> -(as ko - as kp)/(ko + kp))}]

ratkaisu /. lukuarvot
{{al -> 1/15, ah -> 1/30}};

(* aaltofunktion kuvaajia ajan T/4 valein *)
Table[
 Plot[
  If[x < 0, uo[x, t/4], up[x, t/4]],
  /. ratkaisu /. lukuarvot,
  {x, -3, 3},
  PlotRange -> {-0.2, 0.2},
  AxesLabel -> {"x (m)", "u (m)" },
  PlotStyle -> Thickness[0.02]
 ], {t, 0, 2}]

```



**ARVIOINTI** Saapuvan aallon energia ei voi hävitä vaan sen pitää jakautua läpäissen ja heijastuneen aallon kesken. Niinpä heijastuneen ja läpäisseen aallon tehon täytyy olla yhteenä suuri kuin saapuvan aallon teho.

Aallon keskimääräinen teho on

$$P_{\text{keski}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v_{\text{aalto}}. \quad (15.94)$$

Vaikka emme tunnekaan köyden pituustiheytä, tiedämme kaikkien suureiden suhteet eri aalloille. Erityisesti paksussä köydessä  $\mu_P v_P = 4\mu_O \frac{1}{2} v_O = 2\mu_O v_O$ , joten saapuvan aallon teho on  $P_S = \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 A_S^2 v_O$  ja heijastuneen sekä läpäisseen aallon teho on yhteenä

$$P_H + P_L = \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 A_H^2 v_O + \frac{1}{2} \mu_P \omega^2 A_L^2 v_P \quad (15.95)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O (A_H^2 + 2A_L^2) \quad (15.96)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O \left[ \left( \frac{1}{3} A_S \right)^2 + 2 \left( \frac{2}{3} A_S \right)^2 \right] \quad (15.97)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O A_S^2. \quad (15.98)$$

Tämä on sama kuin saapuvan aallon teho, joten energia säilyy, kuten pitääkin.

Tässä myös huomataan, että läpäisseen aallon suhde saapuvan aallon tehoon on  $P_L/P_S = 8/9$  kun heijastuneen aallon teho on vain  $1/9$  saapuvan aallon tehosta. Tässä mielessä onkin ehkä parempi sanoa, että rajapinnan läpäisee  $8/9$  saapuvasta aallosta ja vain  $1/9$  aallosta heijastuu takaisin.



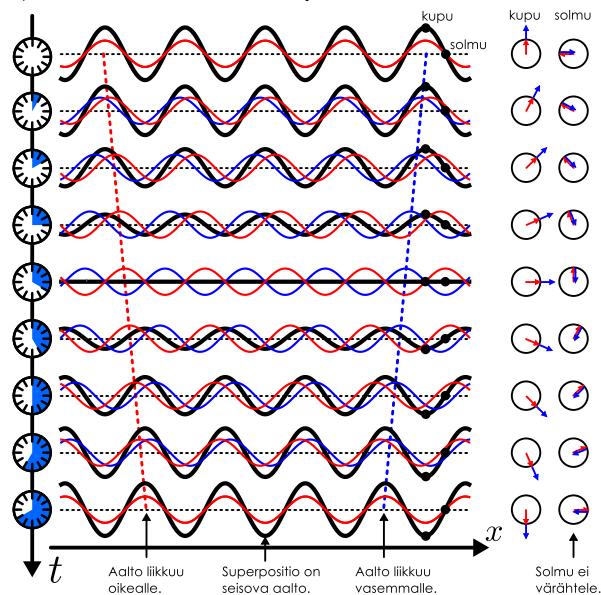
**15.34** Selitä omia sanoin, kuinka aallot käyttäytyvät rajapinnoilla. Mitä rajapinnalle saapuvalle aaltopulssille tai sinimuotoiselle aalolle voi tapahtua? Miten ja miksi tämä riippuu väliaineiden ominaisuuksista?

## Seisovat aallot

Edellisessä luvussa opimme, että vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot muodostavat seisovia aaltoja. Tarkastellaan nyt näitä aaltoja hieman tarkemmin.

Kuvassa 15.29 on esitetty seisovan aallon väärähely puolen jaksonajan aikana. Vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot on tässä piirtetty punaisin ja sinisin käyrin ja näiden superpositio eli köyden todellinen muoto mustana käyränä. Aluksi sininen ja punainen aalto ovat täsmälleen päällekkäin, jolloin köyden amplitudi on *kaksinkertainen* näihin verrattuna. Ajan kuluessa punainen aalto siirtyy kuvassa oikealle ja sininen vasemmalle, jolloin aallot eivät enää vahvista toisiaan täydellisesti ja mustan käyrän amplitudi pienenee. Viidennessä kuvassa ylhäältä lukien musta käyrä on täysin suora, koska punaisen aallon harjat osuvat täsmälleen sinisen aallon pohjiin ja päinvastoin. Tämän jälkeen mustan käyrän amplitudi alkaa jälleen kasvaa. Kuten harmonisten väärähelyjen yhteydessä opimme, kahden sinimuotoisen funktion summa on edelleen sinimuotoinen, jos funktioiden taajuus — tai tässä tapauksessa aallonpititus — on sama. Niinpä köysi on muodoltaan sinimuotoinen jokaisena ajan hetkenä.

Kuva 15.29: Kahden sinimuotoisen aallon (punainen, sininen) superpositio (musta) sekä vaiheenosittimet kuvun ja solmun kohdalla.



## AALTOLIIKE

Kuvaan 15.29 on merkitty myös kaksi tarkastelupistettä sekä sinisen ja punaisen aallon vaiheenosottimet näissä pisteissä. Yhdessä tarkastelupisteessä kumpikin aalto on aina täsmälleen samassa vaiheessa, jolloin niiden vaiheenosottimet osoittavat aina samaan suuntaan. Superposition värähtelyä tässä pisteessä kuvaan näiden vaiheenosottimien summa, jota voidaan kuvata asettamalla punainen ja sininen vaiheenosoitin peräkkäin. Mustan käyrän vaiheenosoitin tässä pisteessä on siis pituudeltaan kaksinkertainen punaiseen ja siniseen aaltoon verrattuna, ja köysi värähtelee tässä pisteessä voimakkaasti. Toisessa tarkastelupisteessä sininen ja punainen aalto ovat täsmälleen vastakkaisessa vaiheessa, jolloin niiden superpositio on aina tasapainoasemassa eikä värähtelevä lainkaan. Tämä ilmenee vaiheenosotinkuviossa niin, että punaisen ja sinisen vaiheenosottimen summan pituus on nolla.

Köydessä on siis vuorotellen voimakkaasti värähteleviä ja paikoillaan pysyviä pisteitä. Värähtelyä kutsutaan seisovaksi aalloksi, koska aalto ei etene kumpaankaan suuntaan vaan värähtelee paikoillaan. Paikoillaan pysyviä seisovan aallon pisteitä kutsutaan **solmuiksi** ja värähteleviä alueita **kuvuiksi**.

**!** **15.35** Miten kuvassa 15.29 esitetyn aallon potentiaali- ja liike-energia muuttuvat ajan kuluessa? Missä alueissa köydessä on eniten kutakin energiatyyppiä? Siirtyykö energia aallon värähdellessä?

Seisovia aaltoja syntyy erityisesti silloin, kun aalto on vangittu pieneen tilaan. Esimerkiksi kitaran kieli on kummastakin päästään kiinnitetty vaijeri, jonka on *pakko* värähdellä niin, että sen päät pysyvät paikoillaan. Tällöin yksinkertaisin aalto, joka kieleen voi syntyä, on yksikupuinen seisova aalto. Seuraava mahdollisuus olisi seisova aalto, jossa on kaksi kupua, ja niin edelleen. Näitä erilaisia perusvärähtelyjä on piirretty kuvaan 15.30 (a). Seisovia aaltoja kutsutaan myös *moodiksi*, koska tällaisessa systeemissä ne kuvaavat systeemin erilaisia mahdollisia tapoja värähdellä (engl. mode, 'tapa' tai 'tila').

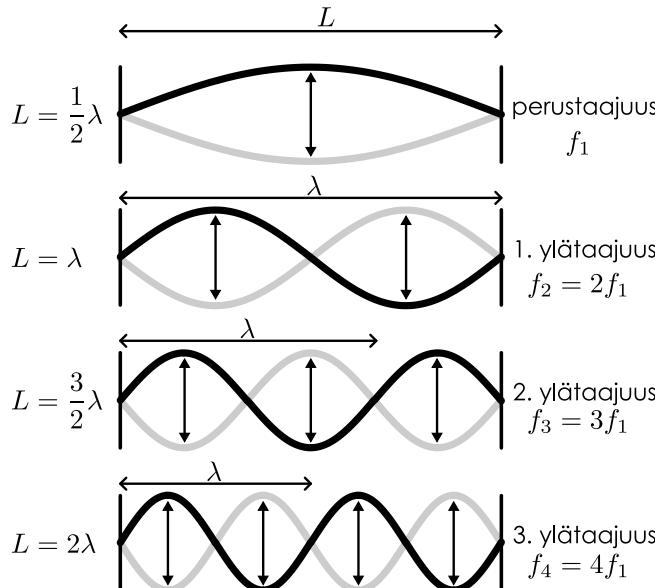
Seisovat aallot muodostuvat vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen summana, ja niiden peräkkäiset kuvut ovat siten vastakkaisissa vaiheissa. Toisin sanoen jos kielessä värähtelee kaksikupuinen seisova aalto, yhden kuvun muodostaessa aallonharjan toinen kupu on aallonpohja. Niinpä seisovan aallon aallonpituus ei ole kahden vierekkäisen solmun välinen etäisyys vaan *kolmen* peräkkäisen solmun rajaama pituus. Esimerkiksi yksikupuisessa seisovassa aallossa kielen pituus on *puolet* aallonpituudesta, kaksikupuisessa aallossa aallonpituus on sama kuin kielen pituus, kolmikupuisessa aallossa kieleen mahtuu 1.5 aallonpituutta ja niin edelleen. Yleisesti jokainen kupu on puolikkaan aallonpituuden levyinen,  $L_{\text{kupu}} = \lambda/2$ , ja kielen pituuden täytyy olla kuvun leveyden monikerta:  $L_{\text{kieli}} = nL_{\text{kupu}}$ , missä  $n$  on kupujen määrä ja siis positiivinen kokonaisluku. Niinpä päästään kiinnitetyn kielessä aallonpituuden ja kielen pituuden  $L$  välillä on yhteys

$$L = n \frac{1}{2} \lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (15.99)$$

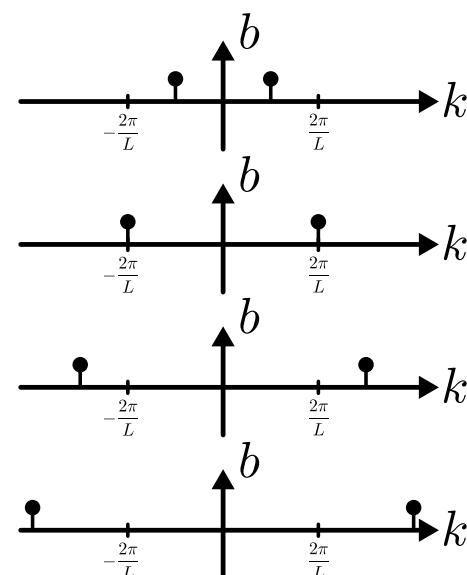
Lukua  $n$  kutsutaan myös *moodin kertaluvuksi*.

Kuva 15.30: Jos köysi tai soittimen kieli on kiinnitetty kummastakin päästään, siinä voi värähdellä seisovia aaltoja, joiden solmukohdat sijoittuvat köyhien pähin.

(a) Alimpien taajuuksien seisovat aallot.



(b) Fourier-kertoimet.



Kuvassa 15.30 (b) on esitetty myös seisovien aaltojen Fourier-kuvajat. Koska jokainen seisova aalto koostuu kahdesta vastakkaisiin suuntiin kulkevasta sinimuotoisesta allostosta, Fourier-kuvajassa jokaista perusväärhtelyä kuvaaa kaksi pistettä. Seisovan aallon amplitudi on kaksinkertainen sen muodostavien sinimuotoisiin aaltoihin verrattuna, joten Fourier-kuvajissa pisteiden korkeus on vain puolet väärhtelyn amplitudista.



**15.36** Puhallinsoittimet ovat gleensä ilmaputkia, joihin syntyy seisova paineaalto. Jos putken toinen pää on avoin ja toinen suljettu, paineaallossa on kupu likimain putken yhdessä päässä ja solmu toisessa. Millainen yhtälöä (15.99) vastaava säätöön pääte näiden aaltojen sallittujen aallonpituuksien  $\lambda_n$  ja putken pituuden  $L$  välttää?

Seisovan aallon väärhtelytaajuus riippuu sen kupujen lukumäärästä  $n$ . Tämäkin voidaan ymmärtää ajattelemalla seisovat aallot vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Sinimuotoisille aalloille nimitään pääte perusyhtälö  $v_{\text{aalto}} = f\lambda$ , (15.25), jonka mukaan aallon vauhti on taajuuden ja aallonpituuden tulo. Aaltojen etenemisvauhti riippuu vain välialueen ominaisuuksista — kielen tapauksessa sen pituustiheydestä ja jännityksestä — joten  $v_{\text{aalto}}$  on sama riippumatta aallon kupujen määrästä. Kuitenkin koska aallonpituuksista riippuu seisovan aallon kupujen määrästä  $n$ , myös taajuuden täytyy riippua siitä. Perusyhtälön ja seisovien aaltojen aallonpituuden lausekkeen (15.99) perusteella seisovien aaltojen taajuuden riipuvuus kupujen lukumäärästä on

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} v_{\text{aalto}} = \frac{n}{2L} v_{\text{aalto}}. \quad (15.100)$$

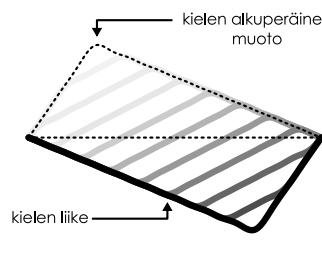
Taajuus  $f_1$  on väärhtelyn perustaaajuus, ja muut taajuudet ovat tämän monikertoja eli harmonisia ylätaajuuksia.



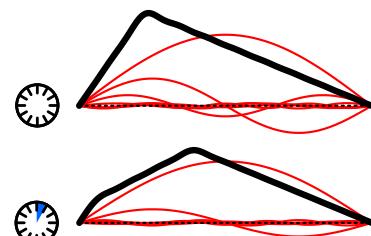
**15.37** Millä taajuuksilla seisovat aallot voivat väärhdellä puhallinsoittimessa, jonka putki on toisesta päästään auki ja toisesta kiinni?

Kuva 15.31: Päistään kiinnitetyt kielen monimutkaisetkin väärhtelyt voidaan jakaa harmonisiin seisoviin aaloihin.

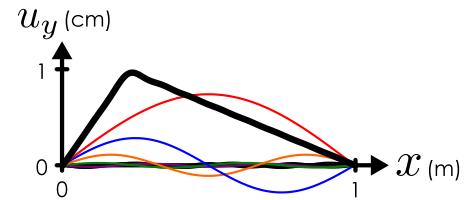
(a) Kielen väärhtely jaettuna seisoviin aaloihin.



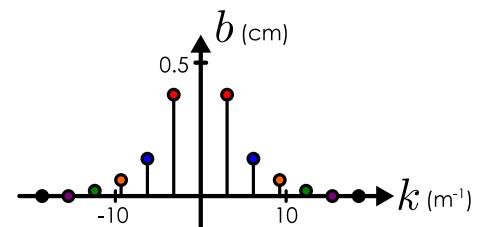
(b) Kielen muoto (musta) ja sen komponentit (punainen) eri ajan hetkinä.



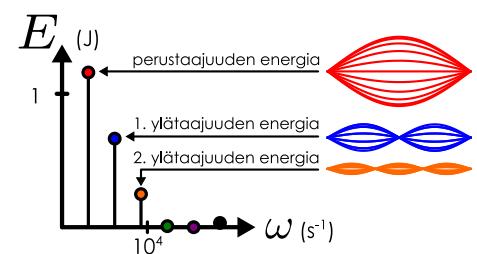
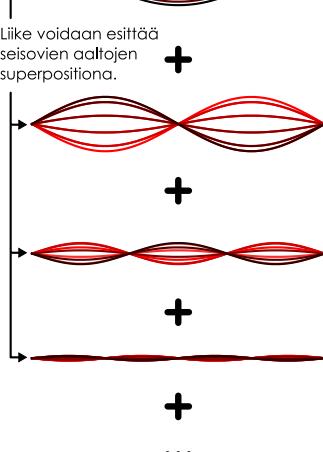
(c) Kielen aalofunktio alussa.



(d) Fourier-kertoimet.



(e) Spektri.



Vaikka kuvassa 15.30 esitettyjä seisovia aaltoja kutsutaan perusvärähelyiksi, tämä ei tarkoita, etteikö esimerkiksi kitaran kieli voisi värähellä muillakin tavoilla. Kielessä voi esimerkiksi lükkua aaltopulssi heiastuen edestakaisin kielen kiinnitetyistä päästä. Kuitenkin aivan kuten etenevä aaltopulssit voidaan kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona, kielen *mikä tahansa aalto voidaan kuvata seisovien aaltojen superpositiona*. Kuvassa 15.31 on esimerkki, jossa kielä venytetään ensin sivuttain, minkä jälkeen kieli päästetään värähtelemään vapaasti. Alkutilanteessa kielen muoto on likimain kolmio, ja kuvaan (a) on piirretty, kuinka kielen muoto alkaa muuttua sen päästessä vapaasti liikkumaan. Tässä tapauksessa kieli alkaa värähellä niihin, että sen muota alussa kuvannut kolmio käännyy ympäri kielen alapuolelle (kuvassa), minkä jälkeen kieli heilahtaa takaisin alkuperäiseen muotoonsa (ei kuvassa). Tämän värähelyn voi kuitenkin ajatella syntyvän harmonisten seisovien aaltojen summana. Kuvassa (b) on esitetty kielen muodonmuutos puolen jaksonajan aikana. Musta käyrä kuvaa kielen todellista muotoa ja punaiset käyrät esittävät tämän harmonisia komponentteja.

Kuvassa (c) kieli on piirretty uudestaan alkukhetkellä, mutta tässä kuvassa harmoniset komponentit on piirretty eri välein ja kielen mittakaava on esitetty koordinaatiston avulla. Tässä kielen pituudeksi on valittu yksi metri, joten yksikupuisen seisovan aallon aaltoluku on  $\pm 2\pi/2 \text{ m} = \pm 3.1 \text{ m}^{-1}$ , kaksikupuisen  $\pm 6.3 \text{ m}^{-1}$ , jne. Värähelyn merkittävimmät komponenttit ovat yksi-, kaksi- ja kolmekupuiset seisovat aallot (punainen, sininen ja oranssi), mikä näkyjä Fourier-kuvajassa (d) niin, että pisteen, joissa aaltoluku on itseisarvoltaan pieni, ovat kuvajassa korkealla. Korkeamman kertaluvun värähelyjen Fourier-kertoimet ovat pienet.

Värähelyn spektri on esitetty kuvassa (e)  $E(\omega)$ -kuvajana, jossa on esitetty kunkin harmonisen komponentin energia komponentin kulmataajuuden funktiona. Vaikka kukaan seisova aalto koostuu kahdesta sinimuotoisesta aallosta, näillä on sama taajuus, ja niinpä jokaista seisovaa aaltoa edustaa spektrissä vain yksi piste. Kunkin harmonisen aallon energia on verrannollinen sekä amplitudin että kulmataajuuden neliöön,  $E \sim \omega^2 A^2$ , joten vaikka kolmikupuisen seisovan aallon (oranssi) amplitudi on pieni, sen energia on selvästi nolla suurempi. Korkeamman kertaluvun aaltojen energia on pieni, vaikka niiden taajuus onkin suuri.



**15.38** Mikä on kuvan 15.31 mustan käyrän värähelyn taajuus ja jaksoaika? Harmonisten komponenttien taajuudet voit arvioida kuvan (e) avulla.

Oleellisinta tässä analyysissä on se, että kielen monimutkainen liike (kuva (a)) voidaan jakaa harmonisiin komponentteihin, joilla on kyllakin täsmällinen taajuus ja energia (kuva (e)). Erityisesti saman kielen värähely voidaan aina jakaa näihin samoihin komponentteihin riippumatta siitä, mikä kielen täsmällinen muoto alussa on. Instrumenttien toiminta perustuukin yleensä juuri siihen, että ne voivat värähellä vain tietyillä taajuuksilla. Esimerkiksi kitaran kielit soi perustaajuudellaan sekä tämän harmonisilla ylätäajuksilla, ja nämä taajuudet riippuvat kielen pituudesta sekä kielessä kulkevien aaltojen nopeudesta. Kieli ei siis voi soida millä tahansa taajuudella, eikä kielen nuotti voi noin vain muuttua. Toisaalta taajuutta voidaan tarvittaessa helposti muuttaa säätämällä kielen jännitystä tai pituutta. Käytännössä kielen näpäytys synnyttää siihen aina useiden seisovien aaltojen superposition, jolloin kieli värähtelee yhtä aikaa useilla taajuuksilla. Kuitenkin koska kaikki ylätäajuudet ovat perustaajuuden monikertoja, niiden yhdistelmä värähtelee myös perustaajuudella (ks. kuva 14.18), joten kuultavan nuotin taajuus on aina kielen perustaajuus. Ylätaajuuksien osuuden instrumentin äänessä eli äänen spektrin ihmisen havaitsee siten, että eri instrumentit kuulostavat erilaisilta, vaikka ne soittaisivatkin samaa nuottia (eli samaa perustaajuutta).



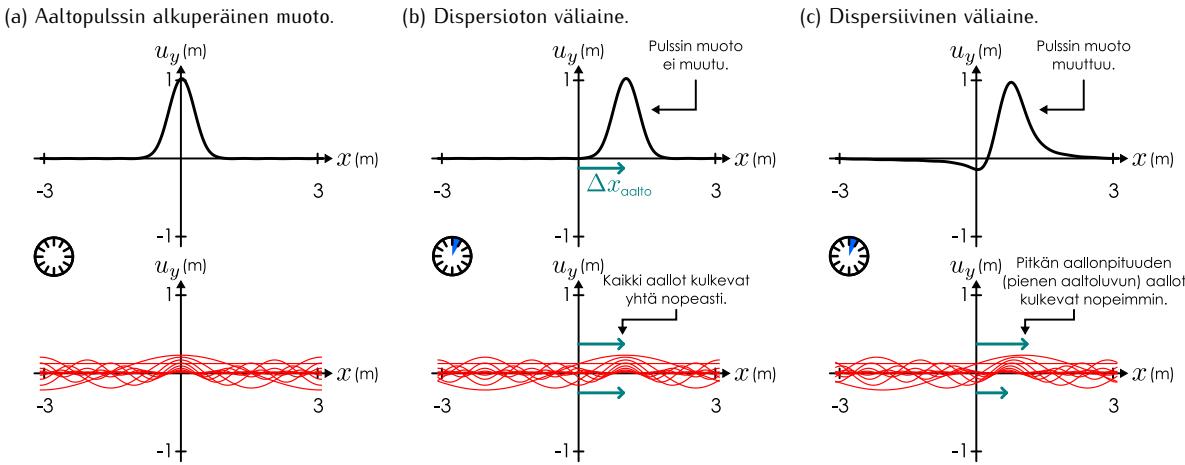
**15.39** Tässä analysoitiin kitaran kielen värähelyä. Ihminen ei kuitenkaan kuule kitaran värähelyä vaan oman korvansa värähelyn. (a) Selitä, miten kitaran kielen värähelyt siirtyyt korvaan. (b) Pohdi, mitkä näistä ominaisuuksista pysyvät tämän prosessin aikana vakiona ja mitkä muuttuvat: (i) amplitudi, (ii) aallonpituuus, (iii) taajuus, (iv) aallon nopeus?

## Dispersio

Luvussa 15.2 tarkastelimme aallon nopeutta köydessä, ja johdimme tuloksen, jonka mukaan aallon nopeus ei riipu aallon muodosta vaan ainoastaan köyden pituustiheydestä ja jännityksestä eli väliaineen ominaisuuksista. Tämä on totta usein, mutta ei aina. Joissakin väliaineissa aaltojen nopeus nimittäin riippuu myös aallon ominaisuuksista. Tätä ilmiötä kutsutaan **dispersioksi** (engl. dispersion, 'hajaantuminen'). Väliainetta, jossa dispersiota tapahtuu, kutsutaan **dispersiiviseksi**.

Esimerkiksi valkoisen valon hajaantuminen eri väreihin prismassa ( tai vesipisaroissa, mikä synnyttää saateenkaaret) johtuu dispersiosta. Valo on sähkömagneettinen aalto, ja näköäisti havaitsee valon eri värisenä riippuen valon taajuudesta ja aallonpituuudesta. Violetin valon taajuus on noin 750 THz ja aallonpituuus tyhjiössä 400 nm, kun taas punaisen valon taajuus on 400 THz ja aallonpituuus 750 nm. Muut näkyvän valon värit asettuvat tälle välille. Valkoisella valolla ei ole taajuutta, vaan valkoinen valo on useiden eritajauisten (eriväristen) aaltojen superpositio. Vesi ja lasi ovat sähkömagneettisille aalloille dispersiivisia väliaineita, jotka eri väreinä nähtävät valoaallot kulkevat näissä aineissa hiukan eri vauhdilla. Luvussa 16 aikanaan opimme

Kuva 15.32: Dispersiivisessä väliaineessa sinimuotoisen aallon nopeus riippuu aallon taajuudesta ja aaltoluvusta. Jos dispersiota tapahtuu, sinimuotoisten aaltojen superpositio muuttuu ajan kuluessa.



lisäksi, että eri materiaalien rajapinnalle vinosti saapuvien aaltojen kulkusuunta voi muuttua riippuen aaltojen vauhdista rajapinnan eri puolilla. Tästä johtuen valkoisen valon sisältämät eri värit kääntyvät prismassa hiukan eri suuntiin, ja näin valkoinen valo hajaantuu eri väreihin.

Puhtaasti harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää dispersiivisessä väliaineessa sinimuotoisen aallon aivan kuten dispersiottomassakin väliaineessa. Näin siksi, että harmonisesti värähtelevän läheen värähtely leviää väliaineeseen saaden väliaineen jokaisen pisteen värähtelemään samalla taajuudella. Tällöin väliaineessa etenee sinimuotoinen aalto. Dispersiivisessä väliaineessa tämän värähtelyn leväminen kuitenkin riippuu taajuudesta, joten aallot liikkuvat eri nopeuksilla.

Aaltopulssit muuttavat muotoaan liikkuessaan dispersiivisessä väliaineessa. Tämä johtuu siitä, että mikä tahansa pulssi voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Jos dispersiota ei tapahdu, kaikki nämä sinimuotoiset aallot kulkevat yhtä nopeasti, ja niinpä niiden superpositio lükkiää myös tällä nopeudella. Tämä on piirretty kuvissa 15.32 (a) ja (b), joissa on esitetty pulssin alkuperäinen muoto (musta) sekä sinimuotoiset aallot (punainen), joista aalto koostuu. Jos väliaine kuitenkin on dispersiivinen, sinimuotoiset aallot kulkevat eri nopeuksilla ja näin ollen ne siirtyvät toistensa suhteen ajan kuluessa, kuten kuvassa (c) on esitetty. Tällöin myös niiden superposition muoto muuttuu. Tässä esimerkissä pitkän aallonpituisuuden eli pienien aaltoluvun aallot kulkevat hieman nopeammin kuin lyhyen aallonpituisuden aallot, jolloin aluksi symmetrisen aaltopulssin perään muodostuu pieni aallonpohja. Dispersion ei tarvitse olla juuri näin pään, vaan joissakin väliaineissa lyhyen aallonpituisuden aallot voivat kulkea nopeammin kuin pitkän aallonpituisuden aallot.

Voisi arvata, että pulssin nopeus on jonkinlainen kesiarvo sen muodostavien sinimuotoisten aaltojen nopeuksista, mutta *näin ei ole*, vaan pulssien nopeus riippuu siitä, kuinka sinimuotoisten aaltojen kulmataajuus ja aaltoluku riippuvat väliaineessa toisistaan. Sinimuotoisen aallon vauhti on *aina* aaltoliukkeen perusyhtälön mukaisesti aallon kulmataajuuden ja aaltoluvun suhde,  $v_{\text{aalto}} = \omega/k$ . Jos väliaine on dispersioton, tämä vauhti on sama kaikilla aaltoluvilla ja kulmataajuksilla, ja niinpä kulmataajuus ja aaltoluku ovat suoraan verrannolliset toisiinsa. Jos kuitenkin dispersiota tapahtuu, kulmataajuus ja aaltoluku *eivät* voi olla suoraan verrannolliset toisiinsa vaan kulmataajuuden ja aaltoluvun välillä täytyy olla jokin toisenlainen yhteys. Tätä yhteyttä kuvataan yleensä kirjoittamalla kulmataajuus aaltoluvun funktiona,  $\omega(k)$ , ja tästä funktiota kutsutaan väliaineen *dispersiorelaatioksi*.

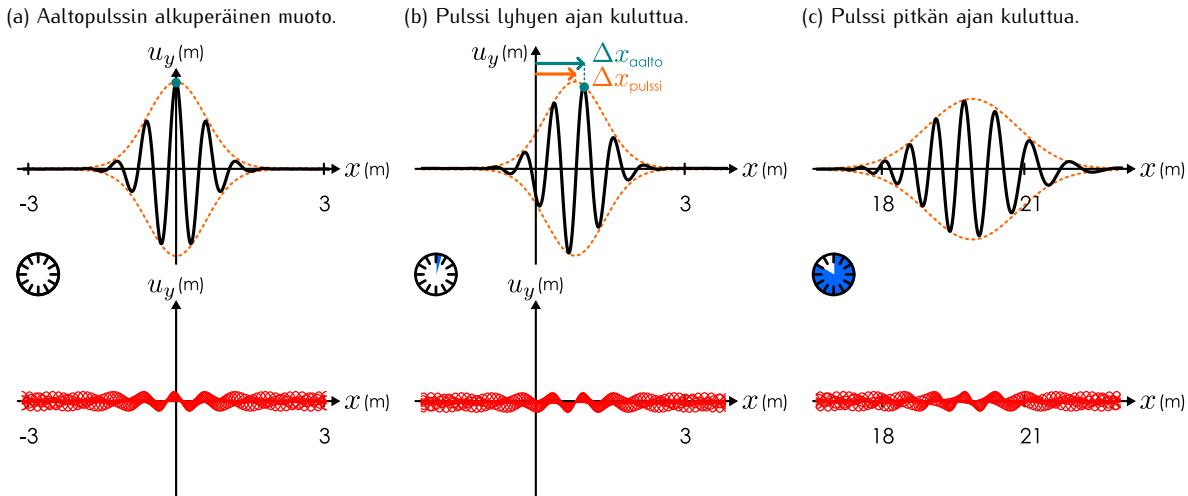


**15.40** Syvässä vedessä pinta-aaltojen dispersiorelaatio on  $\omega = \sqrt{gk}$ . Mikä on syvässä vedessä kulkevan sinimuotoisen aallon etenemisnopeus, jos (a) aaltoluku on  $2 \text{ m}^{-1}$ , (b) aallonpituuus on  $2 \text{ m}$ , (c) kulmataajuus on  $2 \text{ s}^{-1}$ , (d) taajuus on  $2 \text{ Hz}$ ?

Kuvassa 15.33 on havainnollistettu pulssin nopeuden ja sinimuotoisten aaltojen nopeuden eroa. Kuvan pulssi on sama aalto kuin kuvassa 15.18 (d). Se koostuu 21 sinimuotoisesta aallosta, joiden aaltolukujen kesiarvo on  $k_{\text{keski}} = 10 \text{ m}^{-1}$ . Tämä on näkyjä pulssissa siten, että mustan käyrän tihään värähtelyn aallonpituuus on likimain  $\lambda \approx 2\pi/k_{\text{keski}} \approx 0.6 \text{ m}$ . Tämä värähtely myös etenee likimain samalla nopeudella kuin saman aallonpituisen ja aaltoluvun sinimuotoisen aalto. Kuvassa 15.33 (a) on esitetty pulssin muoto ajan hetkellä  $t = 0 \text{ s}$  ja kuvassa (b) hetkellä  $t = 1 \text{ s}$ . Aluksi pisteessä  $x = 0.0 \text{ m}$  ollut mustan käyrän aallonharja (merkity pisteellä) on siirtynyt kuvassa (b) paikkaan  $x = 1.0 \text{ m}$ , joten mustan käyrän aallonharjet etenevät nopeudella  $\Delta x_{\text{aalto}}/\Delta t = 1.0 \text{ m/s}$ . Myös aaltopulssia kuvaavan oranssin verhokäyrän huippu on aluksi pisteessä  $x = 0 \text{ m}$ ,

## AALTOLIIKE

Kuva 15.33: Aaltopulssi dispersivisessä väliaineessa. Lyhyen aallonpituuden värähtely eli kantoaalto (musta) liikkuu vaihenopeudella ja aaltopulssi (oranssi) ryhmänopeudella. Ajan kuluessa dispersio johtaa myös pulssin hajaantumiseen.



mutta kuvassa (b) pulssin huippu on edennyt vain pisteeseen  $x = 0.8$  m. Pulssin etenemisnopeus on siten vain  $\Delta x_{\text{pulssi}}/\Delta t = 0.8$  m/s eli *pulssi etenee tässä väliaineessa hitaanmin kuin sinimuotoisen aallon*.

Mustan käyrän tihää värähtelyä kutsutaan *kantoaalloksi*, koska se "kantaa" oranssin verhokäyrän rajaamaa pulssia. Kantoaallon nopeutta kutsutaan aallon *vaihenopeudeksi*, ja tämä on siis ainakin likimain sama kuin vastaavan sinimuotoisen aallon nopeus,

$$v_{\text{vaihe}} = \frac{\omega}{k}. \quad (15.101)$$

Oranssin verhokäyrän kuvaaman pulssin nopeutta puolestaan kutsutaan aallon *ryhmänopeudeksi*. Osoittautuu, että jos aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltolukujen keskiarvo on  $k_{\text{keski}}$ , eivätkä aaltonluvut poikkeaa tästä keskiarvosta kovin paljon, ryhmänopeus saadaan laskemalla dispersiorelaation derivaatta pisteessä  $k_{\text{keski}}$ :

$$v_{\text{ryhmä}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_{\text{keski}}} = \omega'(k_{\text{keski}}). \quad (15.102)$$

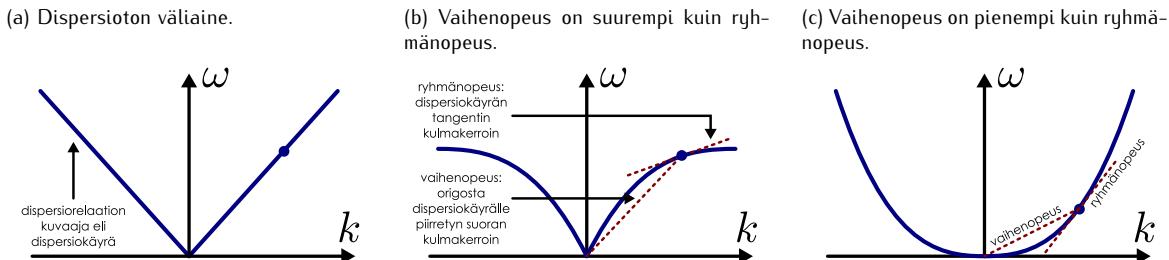
Kuvassa 15.34 tämä on esitetty graafisesti. Kuvaan on piirretty erilaisia dispersiorelaatiota, ja kullakin aaltonluvulla aallon vaihenopeus selviää origosta dispersiokäyrälle piirretyn suoran kulmakertoimesta kun taas ryhmänopeus on käyrän tangentin kulmakerroin. Vaihe- ja ryhmänopeuden eroa on havainnollistettu myös luvun lopussa esimerkissä 15.6.



**15.41** Syvässä vedessä veden pinta-aaltojen dispersiorelaatio on  $\omega = \sqrt{gk}$ . Mikä on syvässä vedessä kulvan aaltopulssin etenemisnopeus, jos pulssin keskimääräinen aaltoluku on  $2 \text{ m}^{-1}$ ?

Vaihe- ja ryhmänopeuden ero on tärkeä, koska vaikka sinimuotoinen aalto liikkuu *vaihenopeudella*, aaltopulssi kuljettaa energiota nimenomaan *ryhmänopeudella*. Näin siksi, että aallon energiatihesys on verrannollinen amplituuden neliöön ja aallon amplitudi poikkeaa nollasta vain pulssin kohdalla. Niinpä vaikka kantoaalto

Kuva 15.34: Vaihe- ja ryhmänopeus voidaan lukea dispersiorelaation kuvaajasta. Jos aallon aaltoluku on  $k$  ja kulmatuujuus  $\omega(k)$ , vaihenopeuden kertoo origosta kuvajajan pisteesseen  $(\omega, k)$  piirretty suora. Ryhmänopeus on tästä pistettä sivuavan tangentin kulmakerroin.



kulkisi eri nopeudella kuin pulssi, se ei pysty siirtämään energiaa pois pulssin alueelta. Aallon energia kulkee siis pulssin mukana ryhmänopeudella. Tässä mielessä ryhmänopeus on usein tärkeämpi aallon liikettä kuvavaa suurea kuin vaihenopeus. On esimerkiksi mahdollista tuottaa aaltoja, joiden vaihenopeus on valonnopeutta suurempi. Suhteellisuusteoria kielää energian ja informaation siirtämisen valonnopeutta nopeammin, mutta tässä ei ole ristiriitaa, koska vaikka aalloissa voi olla valoa nopeammin kulkevia osia, energiaa tai informaatiota aallotkaan eivät voi koskaan kuljettaa valonnopeutta nopeammin.

Dispersio voi vaikuttaa myös pulssin muotoon. Kuvaan 15.33 (c) on piirretty pulssi hetkellä  $t = 25$  s, ja pulssi on tällöin selkeästi leveämpi ja matalampi kuin kuvissa (a) ja (b). Alkuhetkellä kaikissa pulssin muodostavissa sinimuotoisissa aalloissa on aallonharja samassa pisteessä (origossa), jolloin pulssi on tässä kohdassa korkea. Ajan myötä aallot kuitenkin ajautuvat erilleen, jolloin ei enää ole pistettä, jossa aallot olisivat kaikki samassa vaiheessa. Sen sijaan aallot vahvistavat osittain toisiaan laajalla alueella, jolloin pulssista tulee leveä ja matala. Näin dispersio johtaa lopulta aaltopulssin hajaantumiseen.



**15.42** (a) Vertaa lyhyen ja pitkän aallonpituuuden sinialtojen liikettä kuvan 15.34 esittämissä väliaineissa. Mikä kuvajista voisi sopia kuvan 15.32 (c)? (b) Voiko aaltopulssi kulkea vastakkaiseen suuntaan kuin kantoaalto? Millainen pitäisi dispersiokuvaajan tällaisessa tapauksessa olla?

### esimerkki 15.6

### Ryhvä- ja vaihenopeus

Eräässä väliaineessa dispersiorelaatio on  $\omega(k) = ak^2$ , missä  $a = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ . Aineessa on superpositiossa kaksi sinimuotoisesta aaltoa, joiden aaltoluvut ovat  $k_1 = 5.0 \text{ m}^{-1}$  ja  $k_2 = 6.0 \text{ m}^{-1}$  ja muut ominaisuudet samat. Millainen tämä aalto on ja erityisesti millä nopeudella se liikkuu?

**TILANNE** Aallon aalofunktio on siis kahden sinimuotoisen funktion summa. Näiden funktioiden aaltoluvut poikkeavat vain vähän toisistaan, joten näiden superpositiossa vaihtelevat alueet, joissa aallot vahvistavat toisiaan, sekä alueet, joissa aallot heikentävät toisiaan. Toisin sanoen kyseessä on *huojuntailmiö*. Aalton syntyvä sinimuotoinen kantoaalto, jonka amplitudi vaihtelee jaksollisesti muodostaen loputtoman jonon aaltopulsseja.

**SUUNNITELMA** Valitaan ajan ja paikan nollakohta niin, että kummankin sinimuotoisen aallon vaihe on siinä nolla. Niinpä sinialtojen aalofunktiot ovat

$$u_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad (15.103)$$

$$u_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t), \quad (15.104)$$

ja superposition aalofunktio on näiden summa

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (15.105)$$

Oletettavasti kantoaallon pitäisi liikkua dispersiorelaation määräämällä vaihenopeudella ja aaltopulssien ryhmänopeudella. Niinpä lienee sytytää määrittää aaltolukujen keskiarvo ja kirjoittaa aalofunktio tämän avulla.

**RATKAISU** Sinialtojen aaltolukujen keskiarvo on

$$k_{\text{keski}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 5.5 \text{ m}^{-1} \quad (15.106)$$

ja merkitsemällä aaltolukujen eroa keskiarvosta  $\Delta k = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) = 0.5 \text{ m}^{-1}$ , aaltoluvut voidaan kirjoittaa muodossa  $k_1 = k_{\text{keski}} - \Delta k$  sekä  $k_2 = k_{\text{keski}} + \Delta k$ . Merkitään samaan tapaan kulmataajuudelle  $\omega_{\text{keski}} = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 30.5 \text{ s}^{-1}$  ja  $\Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 = 5.5 \text{ s}^{-1}$  jolloin  $\omega_1 = \omega_{\text{keski}} - \Delta \omega$  sekä  $\omega_2 = \omega_{\text{keski}} + \Delta \omega$ . Näillä merkinnöillä ensimmäisen siniallon aalofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_1(x, t) = A \cos(k_{\text{keski}}x - \Delta kx - \omega_{\text{keski}}t + \Delta \omega t) = A \cos[(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t) - (\Delta kx - \Delta \omega t)]. \quad (15.107)$$

Samaan tapaan toinen aalofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_2(x, t) = A \cos[(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t) + (\Delta kx - \Delta \omega t)]. \quad (15.108)$$

(Huomaa etumerkin valituminen.)

Käyttäen hyväksi trigonometristä identiteettiä

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cos y \quad (15.109)$$

superposition aalofunktio voidaan sieventää muotoon

$$u(x, t) = A \cos[(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t) - (\Delta kx - \Delta \omega t)] + A \cos[(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t) + (\Delta kx - \Delta \omega t)] \quad (15.110)$$

$$= 2A \cos(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t) \cos(\Delta kx - \Delta \omega t). \quad (15.111)$$

Toisin sanoen keskiarvot ja poikkeamat erottuvat aaltofunktiossa omiksi kosinifunktioikseen. Funktio  $\cos(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t)$  kuvaaa lyhytaallonpituuksista kantoaaltoa, ja tämä funktio liukkuu selvästikin vaihenopeudella

$$v_{x,\text{vaihe}} = \frac{\omega_{\text{keski}}}{k_{\text{keski}}} = 5.5 \text{ m/s.} \quad (15.112)$$

Funktio  $\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$  on aaltopulssin rajaava verhokäyrä, ja tämä puolestaan liukkuu nopeudella

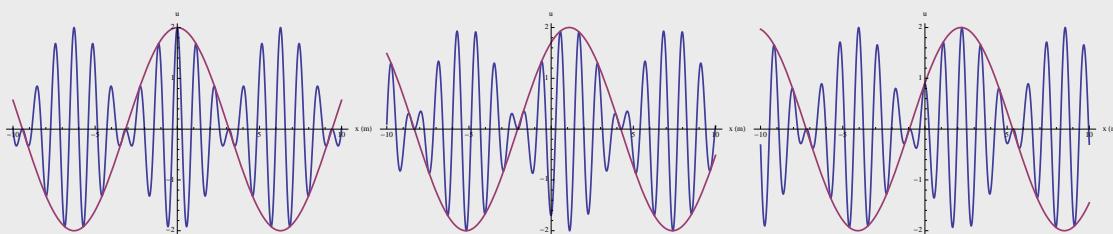
$$v_{x,\text{ryhmä}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = 11.0 \text{ m/s.} \quad (15.113)$$

Mathematica:

```
(* dispersio ja lukuarvot *)
w[k_] := k^2
k1 = 5; k2 = 6;
kavr = (k1 + k2)/2;
dk = (k2 - k1)/2;
wavr = (w[k1] + w[k2])/2;
dw = (w[k2] - w[k1])/2;

(* aaltofunktiot *)
u1[x_, t_] := Cos[k1 x - w[k1] t]
u2[x_, t_] := Cos[k2 x - w[k2] t]
u[x_, t_] := u1[x, t] + u2[x, t]
verho[x_, t_] := 2 Cos[dk x - dw t]

(* aaltofunktion ja verhokayran kuvaaja *)
Table[
  Plot[
    {u[x, 0.1 t], verho[x, 0.1 t]},
    {x, -10, 10},
    PlotStyle -> Thick,
    AxesLabel -> {"x (m)", "u"},
    {t, 0, 2}]
```



**ARVIOINTI** Dispersiorelaation mukaan kulmataajuus aaltoluvulla  $k_{\text{keski}}$  on  $\omega(k_{\text{keski}}) = 30.25 \text{ s}^{-1}$ . Tämä ei ole täsmälleen sama kuin  $\omega_{\text{keski}} = 30.5 \text{ s}^{-1}$ , koska dispersiorelaatio ei ole lineaarinen, mutta hyvin lähellä tätä. Kantoalto siis kulkee varsin tarkasti dispersiorelaation ennustamalla vaihenopeudella. Dispersiorelaation derivaatta on  $\omega'(k) = 2k$ , joten aallon ryhmännopeuden pitäisi tämän mukaan olla

$$v_{\text{ryhmä}} = \omega'(k_{\text{keski}}) = 2ak_{\text{keski}} = 11.0 \text{ m/s,} \quad (15.114)$$

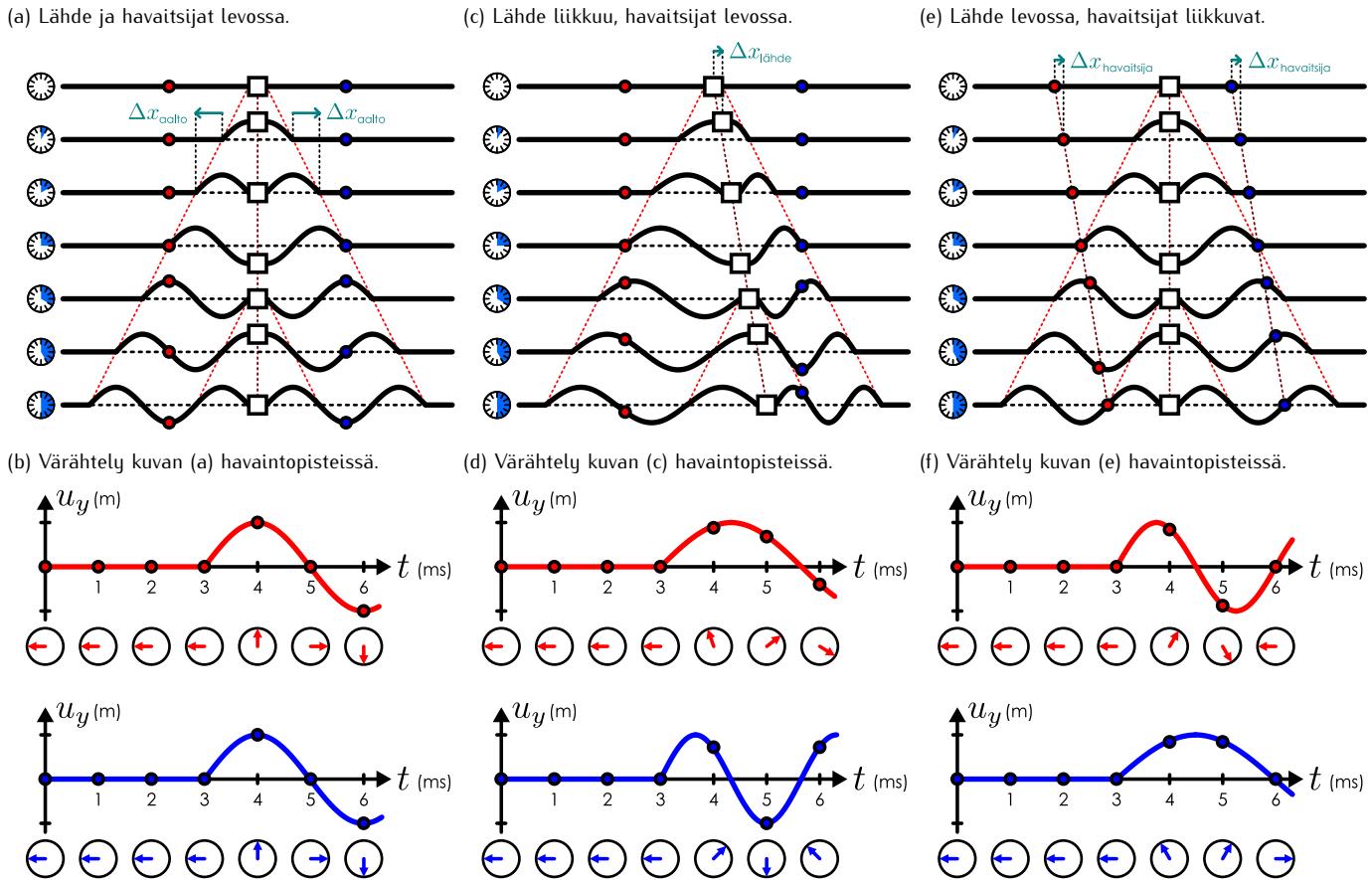
kuten onkin.

## Doppler-ilmiö

Kuvassa 15.8 esitettiin, kuinka köyden päähän kiinnitetty harmonisesti värähtelevä kappale tuottaa sinimuotoista aaltoliikestä köyteen. Samanlainen tilanne syntyy aina, kun aaltolähde lähettilä sinimuotoista aaltoa. Esimerkiksi värähtelevä äänirauta synnyttää ilmaan sinimuotoisesti värähteleviä paineaaltoja. Kuvassa 15.35 (a) on esitetty vastaava tilanne, jossa aaltolähde on kuvan keskellä ja sen lähettilä aalto levii läheestä sekä oikealle että vasemmalle. Kuvaan on myös merkitty kaksi tarkastelupistettä (punainen ja sininen), jotka havaitsevat aallon tuottaman värähtelyn. Kuvan voi ajatella esittävän köyttä, jolloin aaltolähde on värähtelevä kappale ja tarkastelupisteet ovat köyteen merkittyjä pisteitä. Toisaalta kuvan voi ajatella esittävän esimerkiksi paineen muutoksia ilmassa. Tällöin aaltolähteenä voi toimia äänirauta ja havaintopisteet voivat kuvata kuulijoiden tärykalvoja. Kuulo perustuu siihen, että ilmassa kulkeva paineaalto saa paineen värähtelemään tärykalvon kohdalla, ja tämä puolestaan saa tärykalvon värähtelemään samalla taajuudella. Kuvassa 15.35 (b) on esitetty tarkastelupisteiden värähtely ajan funktiona, ja äänen tapauksessa korva havaitsee nimenomaan tämän värähtelyn. Kuvaan on myös piirretty tämän värähtelyiden vaiheenosoitimet.

Tilanne muuttuu, jos aaltolähde liukkuu. Jos kyseessä on köyttä liikuttava värähtelijä, tämä tarkoittaa värähtelevän kappaleen liukuvan köyttä pitkin. (Tällöin köysi ei voi olla kappaleessa kiinni vaan kappaleessa voi esimerkiksi olla reikä, jonka läpi köysi kulkee.) Jos kyseessä on äänilähde kuten äänirauta, tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että äänirauta liukkuu ilman suhteen. Tilanne on esitetty kuvassa 15.35 (c). Aaltoliike etenee tässä tilanteessa poispäin läheestä täsmälleen samalla vauhdilla kuin kuvassa 15.35 (a).

Kuva 15.35: Aaltolähteen liike muuttaa aaltojen taajuutta. Havaitsijan liike muuttaa havaittua taajuutta.



Aallon nopeutta on kuvattu punaisilla katkoviivoilla, ja koska aaltoliikkenen nopeus on kuvissa sama, näiden viivojen kulma on sama. Punaiset katkoviivat on kuvissa piirretty täsmälleen niiden pisteiden kautta, joissa vältaine on tasapainoasemassa liikkeessä ylöspäin. Toisin sanoen punaisen viivojen kohdalla aallon vaihe on neljänneskierros positiviseen kiertosuuntaan,  $\phi = \pi/2$ , ja vaiheenosuoitin osoittaa vaakasuoran vasemmalle.

Koska punaiset viivat kuvaavat aallon samassa vaiheessa olevia pisteitä, niiden välinen vaakasuora etäisyys on yksi aallonpituuus. Kuvassa (a) sekä vasemmalle että oikealle kulkevien aaltojen aallonpituuus on sama, mutta kuvassa (c) näin ei ole, koska aaltolähde kulkee oikealle. Yhden väärähdyn aikana aaltolähde siirtyy läheemmäs oikelle kulkevaa aaltoa ja kauemmas vasemmalle kulkevasta aallostosta, jolloin oikealle kulkevaan aaltoon muodostuu lyhyempiä ja vasemmalle kulkevaan pidempiä aaltoja kuin lähteen ollessa paikoillaan.

Jos aaltojen nopeus on  $\pm v_{x,\text{aalto}}$  (etumerkki riippuu aallon kulkusuunnasta), yhden aaltolähteen väärähdyn aikana  $T_{\text{lähde}}$  aallot kulkevat matkan  $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} T_{\text{lähde}}$ . Jos aaltolähteen nopeus on  $v_{x,\text{lähde}}$ , lähde siirtyy tässä ajassa matkan  $\Delta x_{\text{lähde}} = v_{x,\text{lähde}} T_{\text{lähde}}$ , ja niinpä syntyvien aaltojen aallonpituuus on

$$\lambda = |\Delta x_{\text{aalto}} - \Delta x_{\text{lähde}}| = |v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| T_{\text{lähde}}. \quad (15.115)$$

Jos kyseessä on ääni, jonka vastaanottaa mikrofoni tai korva, havaitija ei mittaa aallonpituitta vaan aallon tuottaman väärähtelyn taajuuden omalla kohdallaan eli kuvassa 15.35 (d) esitetyn väärähtelyn. Tämä havaittu väärähtelytaajuus voidaan kuitenkin ratkaista aallonpituuden avulla, sillä sinimuotoisille aalloille pätee edelleen aaltolükkeen perusyhtälö (15.32), jonka perusteella aallon taajuus riippuu aaltojen vauhdista ja aallonpituudesta

$$f_{\text{aalto}} = \frac{v_{\text{aalto}}}{\lambda} = \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| T_{\text{lähde}}} = \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.116)$$

Tämä on myös paikoillaan olevat havaitsjan vastaanottama taajuus.

Jos aaltolähde liikkuu samaan suuntaan kuin aalto,  $|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| = v_{\text{aalto}} - v_{\text{lähde}} < v_{\text{aalto}}$ , ja tällöin aallon aallonpituuus on lyhyempi kuin aaltolähteen ollessa levossa ja aallon taajuus on suurempi kuin aaltolähteen taajuus. Tämä tapaus vastaa kuvan (d) sinistä käyrää. Jos sen sijaan aaltolähde liikkuu vastakkaiseen suuntaan aaltoon nähdyn,  $|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| = v_{\text{aalto}} + v_{\text{lähde}} > v_{\text{aalto}}$ . Tässä tapauksessa aallon taajuus on pienempi kuin aaltolähteen taajuus, kuten kuvan (d) punaisessa käyrässä. Äänen tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että

## AALTOLIIKE

havaitsijaa kohti liikkuvan lähteen tuottaman äänen taajuus suurempi kuin vastaanlevossa olevan lähteen tuottama ääni, jolloin ääni kuullaan korkeana. Havaitsijasta poispäin kulkevan lähteen äänen taajuus on puolestaan pienempi kuin levossa olevan lähteen, jolloin ääni kuullaan matalana. Tätä kutsutaan **Doppler-ilmiöksi** (Christian Dopplerin mukaan). Klassinen esimerkki Doppler-ilmiöstä on liikkuvan ajoneuvon kuten ambulanssin ääni, jonka havaittu taajuus selvästi muuttuu ajoneuvon ajaessa havaitsijan ohitse.



**15.43** Kuvassa 15.35 aaltojen vauhti on 345 m/s ja aaltolähteen vauhti on 115 m/s. (a) Mikä on kuvissa (a) ja (c) kunkin aallon aallonpituuks? (b) Mikä on kuvissa (b) ja (d) kunkin havaitun väärähelyn taajuus ja jaksonaika? Vertaa kuvaa ja yhtälön (15.116) antamaa tulosta.

On tietenkin myös mahdollista, että havaitsijat liikkuvat. Jos kyseessä on esimerkiksi ääni, näin tapahtuu kuuntelijan liikkuessa. Tämä tilanne on piirretty kuvassa 15.35 (e), jossa punainen havaintopiste lähestyy aaltolähettää ja sininen loittonee siitä. Havaitsijat mittaavat jälleen väliaineen väärähelyn omalla kohdallaan, mutta koska he liikkuvat väliaineen suhteeseen, tämän havaitun väärähelyn taajuus ei ole sama kuin aallon väärähelytaajuus. Esimerkiksi kuvassa (e) punainen havaitsija kohtaa ensimmäisen punaisen katkoviivan (aallon etureunan) neljännessä kuvassa ylhäältä eli ajan hetkellä  $t = 3$  ms ja toisen punaisen katkoviivan (ensimäisen aallonpituuden) jo alimmassa kuvassa eli ajan hetkellä  $t = 6$  ms. Punainen väärähelytäjä havaitsee siis yhden väärähelyjakson kestoksi vain kolme millisekuntia, vaikka aaltolähteen väärähelyjaksonaika on neljä millisekuntia. Vastaavasti aallon etureuna saavuttaa sinisen havaintopisteen hetkellä  $t = 3$  ms, mutta koska tämä piste kulkee aallon kanssa samaan suuntaan, hetkellä  $t = 6$  ms sinisen pisteen ohi on kulkenut vasta puoli aallonpituutta. Sininen piste havaitsee kolmessa millisekunnissa vain puolikkaan väärähelyjakson, joten tämä piste havaitsee väärähelyjaksonajaksi kuusi millisekuntia.

Havaitsija siis mittaa yhden väärähelyksen jaksonajaksi  $T_{\text{havaitsija}}$  sen ajan, jossa yksi aallonpituuks kulkee havaitsijan ohitse. Jos siis havaitsija kulkee tänä aikana siirtymän  $\Delta x_{\text{havaitsija}} = v_{x,\text{havaitsija}} T_{\text{havaitsija}}$  ja aalto kulkee samassa ajassa siirtymän  $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} T_{\text{havaitsija}}$ , havaittu jaksonaika määräytyy nün, että havaitsijan siirtymä *aallon suhteeseen* on yhtä pitkä kuin yksi aallonpituuks,  $|\Delta x_{\text{aalto}} - \Delta x_{\text{havaitsija}}| = \lambda$ , eli

$$|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}| T_{\text{havaitsija}} = \lambda. \quad (15.117)$$

Tästä voidaan ratkaista havaittu taajuus, joka on jaksonajan käänteisluku,

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{1}{T_{\text{havaitsija}}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{\lambda}, \quad (15.118)$$

ja käyttäen jälleen aaltolükkeen perusyhdistelöä  $\lambda = v_{\text{aalto}}/f_{\text{aalto}}$  tuloksen voi kirjoittaa aallon taajuuden avulla

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{v_{\text{aalto}}} f_{\text{aalto}}. \quad (15.119)$$



**15.44** Kuvassa 15.35 aaltojen vauhti on 345 m/s ja havaitsijoiden vauhti on 115 m/s. Mikä on kuvassa (f) kummankin havaitun väärähelyn taajuus ja jaksonaika? Vertaa kuvaa ja yhtälön (15.119) antamaa tulosta.

Yleisesti sekä aaltolähteet että havaitsijat voivat liikkua, jolloin kumpikin edellä kuvattu efekti tapahtuu yhtä aikaa. Yhtälö (15.116) kuvailee lähteen lükkeen vaikutusta aallon taajuuteen ja yhtälö (15.119) havaitsijan lükkeen vaikutusta havaittuun taajuuteen, ja koska nämä efektit ovat toisistaan riippumattomat, yhtälöt voidaan yhdistää muotoon

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{v_{\text{aalto}}} \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.120)$$

Tämäkin lauseke pätee kuitenkin vain silloin, kun havaitsija ja aaltojen lähde liikkuvat joko suoraan kohti toisiaan tai toisistaan poispäin.



**15.45** Äänilähde väärätelee taajuudella 100 Hz. (a) Jos aaltolähde liikkuu äänen nopeudella, mikä on lähteen synnyttämien aaltojen aallonpituuks ja taajuus (i) lähteen lükkeen suunnassa (lähteen edessä) ja (ii) lähteen lükkeeseen nähdyn vastakkaisessa suunnassa (lähteen takana)? (b) Lähde on paikoillaan. Havaitsija A liikkuu kohti lähettää ja havaitsija B pois lähteestä äänen nopeudella. Millaiset taajuudet he havaitsevat?

On vielä eräs mahdollinen lüke, jota edellisissä tapauksissa ei huomioitu. Kuvassa 15.35 väliaineen nimitäin oletettiin olevan aina levossa, mutta on tietenkin mahdollista, että *väliaine liikuu*. Esimerkiksi ilmassa kulkevan äänen tapauksessa väliaine liikkuu, jos tuulee. Liikkuvaa väliaine muuttaa aallon nopeutta, sillä aalto kulkee väliaineen suhteeseen. Liikkuvassa väliaineessa aallon nopeus onkin aallon väliaineen suhteeseen määritetyn nopeuden ja väliaineen nopeuden summa, ja erityisesti eri suuntiin kulkevat aallot liikkuvat tällöin eri vauhdeilla. Edellä esitetty analyysi pätee kuitenkin koordinaatistossa, jossa väliaine on paikoillaan, joten tällainen tilanne on gleensiä helpoin ratkaista siirtymällä koordinaatistoon, jossa väliaine on levossa. Väärähelytaajuudet eivät klassisessa suhteellisuudessa riipu koordinaatistosta, joten taajuudet voidaan ratkaista missä tahansa koordinaatistossa, ja tulos on sama.



**15.46** Äänilähde värähtelee taajuudella 100 Hz ja äänen nopeus on 345 m/s. Mikä on havaittu äänen taajuus, kun äänilähde ja havaitseja liikkuvat toisiaan kohti ja kummankin vauhti on 20 m/s, jos (a) on tyyni, (b) tuuli puhaltaa lähteen liikkeen suuntaan nopeudella 10 m/s, (c) tuuli puhaltaa havaitsejan liikkeen suuntaan nopeudella 10 m/s?

Mainittakoon vielä, että tässä esitetty analyysi ei päde valolle. Valo on sähkömagneettisen kentän aalto, ja myös valo kokee Doppler-ilmiön. Kuitenkin suhteellisuusperiaatteen mukaisesti kahdesta tasaisesti toistensa suhteen kulkevasta kappaleesta ei voida mitenkään määrittää, kumpi on paikoillaan ja kumpi liikkuu. Niinpä myöskään Doppler-ilmiö ei voi erottaa liikuuko aaltojen läheksi vai niiden havaitsejaksi. Väliaineessa kulkevien aaltojen tapauksessa sekä lähteen että havaitsejan liike mitataan *väliaineen suhteen*, joten Doppler-ilmiö on erilainen riippuen siitä kumpi liikkuu. Valo on kuitenkin sähkömagneettisen kentän aalto, joka ei tarvitse väliainetta, ja niinpä valon Doppler-ilmiössä lähteen ja havaitsejan liikettä ei voi määritellä väliaineen suhteen. Niinpä valon Doppler-ilmiö on symmetrinen, ja havaittu valon taajuuden muutos riippuu vain lähteen ja havaitsejan nopeudesta *toistensa suhteen*.



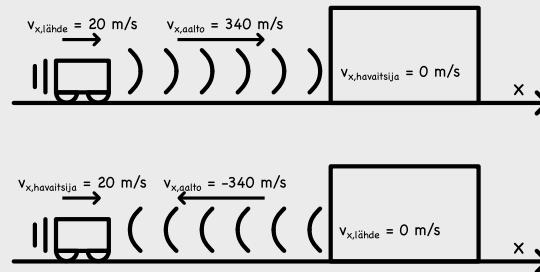
**15.47** Selitä omin sanoin, mitä tarkoitetaan seisovilla aalloilla, dispersiolla ja Doppler-ilmiöllä. Millaisissa tilanteissa näyttää havaitaan ja mitä ilmiötä niihin liittyy?

### esimerkki 15.7

### Doppler-ilmiö

Ambulanssi ajaa kohti sairaalaan nopeudella 20 m/s ja äänen nopeus on 340 m/s. Ambulanssin sirenin taajuus on 1000 Hz. Ääni heijastuu sairaalan seinästä suoraan takaisin kohti ambulanssia, jolloin kuljettaja kuulee äänen kaiun. Millä taajuudella kuuluu?

**SUUNNITELMA** Kuiku syntyy ääniaallon heijastuessa seinästä kuin valo peilistä. Tällöin voi ajatella niin, että seinä lähettilä ääniaallon kohti ambulanssia samalla taajuudella kuin mikä on seinään saapuvan aallon taajuus. Voimme siis ratkaista ongelman kahdessa osassa. Ensinnäkin ambulanssi on liikkuvaa aaltolähde taajuudella  $f_{\text{lähde},1} = 1000 \text{ Hz}$  ja seinää aallon havaitseja, jolloin seinän "havaitsema" taajuus on  $f_{\text{havaitseja},1}$ . Tämän täytyy olla sireenin varsinainen taajuus, sillä se on suurempi, koska ambulanssi liikkuu seinää kohti. Toisessa vaiheessa voimme ajatella seinää olevan aallon läheksi taajuudella  $f_{\text{lähde},2} = f_{\text{havaitseja},1}$ , jolloin seinää kohti liikkuva ambulanssin kuljettaja havaitsee aallon vielä korkeammalla taajuudella  $f_{\text{havaitseja},2}$ .



Kummassakin tapauksessa taajuuden muutosta kuvaavat Doppler-ilmiöt

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.121)$$

Jos valitsemme positiivisen  $x$ -suunnan ambulanssin suuntaan, ensimmäisessä osassa pätee  $v_{x,\text{aalto}} = 340 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,\text{lähde}} = 20 \text{ m/s}$ , koska sekä ääni että ambulanssi liikkuvat positiiviseen suuntaan mutta seinä on paikoillaan. Toisessa tapauksessa puolestaan  $v_{x,\text{aalto}} = -340 \text{ m/s}$  ja  $v_{x,\text{lähde}} = 20 \text{ m/s}$ , koska nyt ääni kulkee negatiiviseen suuntaan ja ambulanssi on havaitseja.

**RATKAISU** Aalto saapuu seinälle taajuudella

$$f_{\text{havaitseja},1} = \frac{340 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1062.5 \text{ Hz}, \quad (15.122)$$

ja tämä on siis myös heijastuneen aallon taajuus. Ambulanssissa ääni havaitaan taajuudella

$$f_{\text{havaitseja},2} = \frac{360 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} f_{\text{havaitseja},1} = \frac{360 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} \frac{340 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1125 \text{ Hz}. \quad (15.123)$$

**ARVIOINTI** Ongelman voi ratkaista toisellakin tavalla. Koska ääni heijastuu seinästä kuin valo peilistä, tilanne on täsmälleen samanlainen kuin jos äänen lähteenä toimisi ambulanssin "peilikuva", joka liikkuisi kohti ambulanssia nopeudella  $v_{x,\text{lähde}} = -20 \text{ m/s}$ . Tällöinkin lopputulos on se, että ääni havaitaan taajuudella  $f_{\text{havaitseja}} = \frac{360 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1125 \text{ Hz}$ .

## 15.7 Aaltoyhtälö

Tässä luvussa olemme kuvailleet aaltojen ominaisuuksia käyttäen esimerkinä pääasiassa köydessä kulkevia poikittaisia aaltoja. Selitimme näiden aaltojen etenemisen tarkastelemalla köyden vierekkäisten osien välistä vuorovaikutuksia, ja johdimme lausekkeen aallon nopeudelle sekä aallon kuljettaman energian teholle. Aallot ovat kuitenkin erittäin yleinen ilmiö, ja köysien lisäksi aaltoja kulkee monenlaisissa muissakin välinneissä ja sähkömagneettisten aaltojen tapauksessa myös tyhjiössä kokonaan ilman välinnettä. Kuitenkaan esimerkiksi lämpötila ei muodosta aaltoja. Lopetammekin yksilöllisistä aaltojen tarkastelun tutkimalla, millaisissa tilanteissa aine tai kenttä voi kuljettaa aaltoa. Tarkastelemme jälleen esimerkinä köydessä kulkevaa aaltoa.

Kuvassa 15.36 on esitetty köydessä kulkeva aaltopulssi, ja köydestä on valittu kolme tarkastelupistettä. Nämä pistetut on merkitty indeksein V (vasen), K (keski) sekä O (oikea). Köyden elastisuutta kuvataan jälleen pistetä yhdistävällä jousilla. Aluksi köysi on pisteen K ympäristössä tasapainossa, jolloin se on suora ja liikkumaton. Aaltopulssin saapuessa tarkastelupisteiden kohdalle (toinen kuva ylhäältä) piste V alkaa liikkua ensimmäisenä ylöspäin. Tällöin pisteen V ja K välisen jousi venyy ja alkaa vetää pistettä K ylöspäin. Pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa tällöin ylöspäin, jolloin pisteen K on kiihtyvyyttä ylöspäin.

Piste K lähee siis liukkeelle ylöspäin. Tällöin K alkaa vetää pistettä O ylöspäin, mutta niin kauan kuin pisteen V ja K välinen jousi on venynyt enemmän kuin pisteen K ja O välinen jousi (kolmas kuva ylhäältä), V vetää pistettä K ylöspäin suuremmalla voimalla kuin O vetää K:ta alas päin, ja K:n kiihtyvyysvektori osoittaa ylöspäin. K:n vauhti sisäkasvaa.

Kuvasarjan 15.36 neljännessä kuvassa Pisteen V ja O vetävät pistettä K yhtä voimakkaasti, jolloin pisteen K kiihtyvyys on nolla. Pisteen K *nopeus* ei ole nolla, vaan köysi on yhä liukkeessä ylöspäin. Tämän jälkeen pulssin huippu saavuttaa pisteen V, jolloin V ei enää vedä K:ta yhtä voimakkaasti kuin O. Niinpä pisteen K kiihtyvyys käännyy osoittamaan alas päin. Pisteen vauhti alkaa siis hidastua, koska sen *nopeus*- ja kiihtyvyysvektorit ovat vastakkaisuuntainen. Piste K kuitenkin pysähtyy vasta aaltopulssin huipun ollessa sen kohdalla. Tällöin pisteen *nopeus* on hetkellisesti nolla, mutta sen *kiihtyvyys* ei ole nolla vaan kiihtyvyysvektori osoittaa alas päin, koska *kumpikin* pistestä V ja O vetää sitä alas päin. Piste K alkaa siis liikkua alas päin, ja koska tässä esimerkissä aaltopulssin muoto on symmetrinen, piste palaa takaisin tasapainoon samaan tapaan kuin lähti liukkeellekin.

Tarkastelupisteen K liike muistuttaa hieman jouseen kiinnitetyn harmonisen värähtelijän liikettä, mutta nyt pisteesseen kohdistuvan voiman suuruus ei riipu siitä, kuinka kaukana piste K on tasapainoasemasta vaan siitä, kuinka kaukana se on *viereistä köyden pistestä*. Erityisesti kuvan 15.36 neljännellä rivillä pisteen kiihtyvyys on nolla, vaikka piste ei ole *tasapainoasemassa*, koska sen naapuripisteet ovat siitä yhtä kaukana mutta vastakkaisilla puolilla. Toisin sanoen tässä tilanteessa köysi on pisteen K kohdalla *suora* — se ei ole vaakasuora kuten kuvasarjan ensimmäisellä rivillä, mutta se ei ole myöskään mutkalla. Kuvan perusteella nähdäänkin, että pisteen K kiihtyvyys osoittaa ylöspäin täsmälleen silloin, kun köysi on pisteen kohdalla *ylöspäin kaareva* (siis likimain ylöspäin aukeavan paraabelin muotoinen). Jos köysi on alas päin kaareva, kiihtyvyys osoittaa alas päin, ja köyden ollessa suora kiihtyvyys on nolla.



- 15.48** (a) Millainen köyden muoto on silloin, kun pisteen K *nopeusvektori* osoittaa (i) ylöspäin, (ii) alas päin?  
 (b) Millainen köyden muoto on silloin, kun *nopeus* on itsearvoltaan suuri?

Harmoniselle värähtelijälle johdimme harmonisen likeyhtälön (14.12),  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ , jonka mukaan värähtelijän kiihtyvyys on suoraan verrannollinen värähtelijän poikkeamaan tasapainosta. Edellisen päättelyn mukaan mekaanisessa aallossa välinneen yksittäisen pisteen kiihtyvyys on verrannollinen aallon *kaarevuuteen* pisteen ympäristössä. Köyden tapauksessa kaarevuus kuvaa *jyrkkyuden muutosta köyttä pitkin siirryttäessä*, ja jyrkkyys on puolestaan köyden tangentin kulmakerroin eli matemaattisesti köyden muotoa kuvavaan aaltofunktion derivaatta paikan suhteeseen,  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ . Niinpä aallon kaarevuutta kuvaa aaltofunktion derivaatan muuttuminen eli derivaatan derivaatta,  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ .

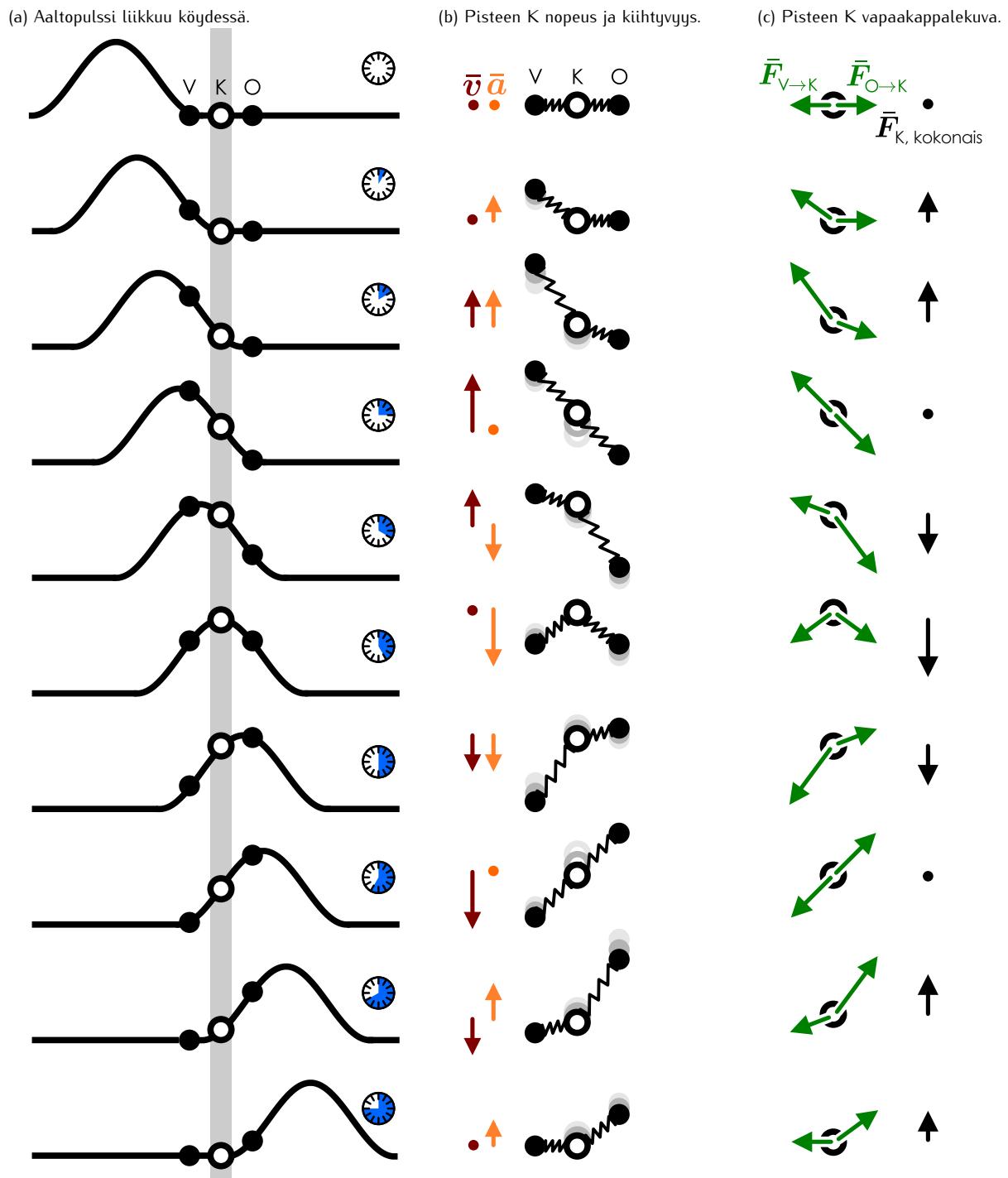


- 15.49** (a) Laske seuraavien käyrien kaarevuus  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ : (i) vakio  $u_y = 1 \text{ m}$ , (ii) suora  $u_y = x$ , (iii) ylöspäin aukeava paraabeli  $u_y = (2.0 \text{ m}^{-1})x^2$ , (iv) alas päin aukeava paraabeli  $u_y = (-3.0 \text{ m})x^2$ . (b) Vertaile käyrien muotoa ja niiden kaarevuutta. Miten kaarevuuden suuruus ja etumerkki liittyy käyrän muotoon?

Köyden pystysuoraa kiihtyvyyttä pisteeessä K kuvaa puolestaan kiihtyvyyden määritelmän mukaisesti pisteen K *y*-koordinaatin toinen derivaatta ajan suhteeseen. Toisaalta aaltofunktio kertoo meille pisteen poikkeaman tasapainosta *y*-suunnassa, joten pisteen K pystysuuntainen kiihtyvyys on aaltofunktion toinen aikaderivaatta  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ . Kuten äsken päättelimme, pisteen K *kiihtyvyys* on verrannollinen köyden *kaarevuuteen* pisteen *ympäristössä*, joten köyden aaltofunktion täytyy toteuttaa pisteen K *ympäristössä* yhtälö

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (15.124)$$

Kuva 15.36: Köyden osan dynaamikka aaltopulssin kulkiessa. Merkitään tarkastelupistettä "K" (keskellä) ja sen viereisiä osia "V" (vasen) ja "O" (oikea).



## AALTOLIIKE

Tässä  $C$  on verrannollisuuskerroin, jonka arvo riippuu pisteen  $K$  massasta ja pisteiden välisten köysien jäykkydestä. Lisäksi koska piste  $K$  oli mielivaltaisesti valittu, saman päättelyn voi toistaa *mille tahansa* köyden pisteeelle ja niinpä köyden aaltofunktion täytyy toteuttaa yhtälö (15.124) joka paikassa ja kaikilla ajan hetkillä eli kaikilla koordinaattien  $x$  ja  $t$  arvoilla.



**15.50** Mikä on vakion  $C$  yksikkö yhtälössä (15.124)?

Vakion  $C$  arvon voi johtaa kirjoittamalla pisteeelle  $K$  liikeyhtälön Newtonin lakienvälinen avulla. Päätelemme nyt kuitenkin vakion arvon epäsuorasti. Nimittäin vaikka kuvassa 15.36 käytettiin esimerkkinä aaltopulssia, täsmällekin sama päättely toimisi millä tahansa aallon muodolla. Yhtälö (15.124) on siis yleispätevä matemaattinen ehto, joka kaikkien köydessä kulkevien aaltojen täytyy toteuttaa. Erityisesti myös köydessä kulkeva sinimuotoisen aalto toteuttaa yhtälön. Tällaisen aallon aaltofunktio on  $u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ , ja derivoimalla funktiota kahdesti sekä ajan että paikan suhteiden saamme

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.125)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.126)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.127)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.128)$$

Näiden sijoitus yhtälöön (15.124) antaa tulokseksi

$$-A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0) = -CAk^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.129)$$

Yhtälön täytyy pätee aina (kaikilla ajan  $t$  arvoilla) kaikissa köyden pisteissä (kaikilla paikkakoordinaatin  $x$  arvoilla), ja tämä on mahdollista vain jos vakion  $C$  arvo on

$$C = \frac{\omega^2}{k^2} = v_{\text{aalto}}^2. \quad (15.130)$$

Niinpä aallon dynamiikkaa kuvaavan yhtälön (15.124) täytyy olla muotoa

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (15.131)$$



**15.51** Eräässä aineessa pätee yhtälö  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (5.0 \text{ m}^2/\text{s}^2) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ . Sijoita aaltopulssin aaltofunktio  $u_y(x, t) = f(x - v_{\text{aalto}}t)$  tähän yhtälöön. (a) Millä ehdolla yhtälö toteutuu? (b) Voitko päättää yhtälöstä aallon vauhdin  $v_{\text{aalto}}$ ? (c) Voitko päättää yhtälöstä aallon muodon  $f(x)$ ?

Yhtälöä (15.131) kutsutaan **aaltoyhtälöksi**, eikä tätä pidä sekoittaa **aaltofunktioon**, joka on siis aallon muotoa ja väliaineen poikkeamaa tasapainosta kuvaava funktio  $u_y(x, t)$ . Aaltoyhtälö on dispersiotomassa väliaineessa kulkevien aaltojen dynamiikkaa kuvaava perusyhtälö. (Dispersiivisissä väliaineissa yhtälö pätee vain likimain.) Jos väliaineen muoto ja nopeus tunnetaan ajan hetkellä  $t = 0$ , väliaineen liike voidaan aaltoyhtälön avulla ratkaista millä tahansa myöhemmällä ajan hetkellä joko analyttisesti tai ainakin tietokoneella simuloiden.

Aaltoyhtälö ei voi mitenkään määritellä aaltojen niitä ominaisuuksia, jotka riippuvat aaltojen syntyavasta. Esimerkiksi sinimuotoisen aallon aallonpituuksien ja amplituuden riippuvat aallon synnyttävän läheisen värähtelytaajuudesta ja -amplitudista. Näitä ei siis voi päättää aaltoyhtälöstä. Sen sijaan aallon vauhdin määritellä väliaine, ja niinpä aallon vauhti voidaan päättää.

Teoreettisesti aaltoyhtälö on erityisen merkittävä siksi, että *mikä tahansa suure, jolle pätee aaltoyhtälö (15.131), muodostaa aaltoa*. Esimerkiksi tarkastelemalla ilman puristumisen ja paineen välistä yhteyttä, ilmanpaineelle voidaan johtaa aaltoyhtälö, mikä tarkoittaa sitä, että ilmanpaineen paikalliset muutokset synnyttävät ilmaan painealtoja (eli ääntä). Aikoinaan sähkömagneettisten aaltojen olemassaolo pystyttiin päätelemään sillä perusteella, että sähkömagnetismin peruslaeista voidaan johtaa sähkömagneettiselle kentälle aaltoyhtälö. Myös hiljattain kokeellisesti havaittuja gravitaatioaaltoja osattiin etsää juuri siksi, että yleisen suhteellisuusteorian gravitaatiota kuvaavasta matematiikasta voidaan johtaa aaltoyhtälö. Sen sijaan esimerkiksi kiinteän aineen lämpötila noudattaa erilaista differentiaaliyhtälöä (ns. diffuusioyhtälöä), joten lämpö ei siirry aaltoina vaan johtumalla.



**15.52** Selitä omin sanoin, mikä on aaltoyhtälö. Mitä aaltojen ominaisuuksia aaltoyhtälöstä voidaan päättää ja mitä ominaisuuksia ei? Mitä eroa on aaltoyhtälöllä ja aaltofunktiossa?

## Yhteenveton Aaltoliike

### Aaltoliike

- **Aalto** on väliaineessa tai kentässä etenevä *poikkeama tasapainosta*. Aallot kuljettavat energiää mutta eivät ainetta.
- Esimerkiksi köydessä kulkeva aalto ja ääni ovat *mekaanisia aalloja*. Valo on *sähkömagneettinen aalto*.
- **Aaltopulssi** on aalto, jossa poikkeama tasapainosta on rajoittunut pienelle alueelle.
- **Poikittaisessa** aallossa väliaine poikkeaa tasapainosta aallon kulkuuntauhan nähdien kohtisuraan. **Pitkittäisessä** aallossa poikkeama tapahtuu aallon kulkusuunnassa.
- Aallon muotoa kuvataan **aaltofunktilla**, esim.  $u(x, t)$ , joka kertoo väliaineen poikkeaman sekä paikan että ajan funktiona. Aaltopulsin aaltofunktio on yhdessä ulottuvuudessa muotoa

$$u(x, t) = f(x - v_{x, \text{aalto}} t).$$

- Aaltojen nopeus riippuu väliaineesta. Ideaalisessa väliaineessa

kaikki aallot kulkevat samalla vauhdilla riippumatta aaltojen muodosta.

- Aaltoja kulkee väliaineissa, jotka toteuttavat **aaltohtälön**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Aaltohtälö määräeetä aaltojen nopeuden mutta ei niiden muotoa. Aallon muoto riippuu sen synnyttäneestä häiriöstä.

- Aallot noudattavat **superpositioperiaatetta**, jonka mukaan samassa väliaineessa voi kulkea samanaikaisesti useita aaltoa päälekkäin. Tällöin väliaineen poikkeamia kuvava aaltofunktio saadaan laskemalla yksittäisten aaltojen aaltofunktioit yhteen

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

### Sinimuotoiset aallot

- Harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää **sinimuotoisen aallon**, jonka aaltofunktio on sinimuotoinen funktio

$$u(x, t) = A \cos \phi(x, t),$$

missä funktio

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0 \quad (15.132)$$

on aallon **vaihe**. Tässä  $A$  on **amplitudi**,  $\omega$  **kulmataajuus**,  $\phi_0$  **vaihetekijä** ja  $k$  **aaltoluku**.

- Aallon vaihetta voi kuvata graafisesti **vaiheenosottimella**, joka pyörii myötäpäivään ajan kuluessa tai kuljetaessa aallon kulkuuntauhan vastaan ja vastapäivään kuljetaessa aallon kulkusuuntaan. Vaiheenosotin pyörähtää yhden kierroksen, kun kuluu yksi jaksonaikai tai kun siirrytään yhden aallonpituuuden matka.
- **Aallonpituuus**  $\lambda$  on etäisyys, joka erottaa sinimuotoisen aallon kahdella samassa vaiheessa olevaan pistettiä (esim. kahden aallonharjan välinen etäisyys). Aaltonluku puolestaan ilmaisee  $2\pi$ -pituisella välinillä olevien aallonpituuksien määrän. Nämä ovat kääntäen verrannolliset,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

- Aaltoluvulle voidaan määritellä etumerkki niin, että positiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevien aaltojen aaltonluku on positiivinen ja negatiiviseen suuntaan kulkevien negatiivinen.
- Sinimuotoinen aalto kulkee yhden jaksonejan aikana yhden aallonpituuden, joten aallon etenemisnopeus on

$$v_{\text{aalto}} = \frac{\Delta x_{\text{aalto}}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k}.$$

Tämä on **sinimuotoisen aaltoliikan perusyhtälö**.

- Sinimuotoisen aallon kuljettama teho on aallon energiatihedyn ja sen etenemisnopeuden tulotulo

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{\text{aalto}}.$$

Mekaanisten aaltojen energiatihedsyys riippuu aallon taajuudesta, ja energiatihedsyys on aina verrannollinen aallon amplitudin neljöön. Esimerkiksi köydessä kulkevan aallon energiatihedsyys on

$$\langle \lambda_{E, \text{köysi}} \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2.$$

- Eri väliaineiden **rajapinnan** kohtaava aalto voi heijastua tai läpäistä rajapinnan. Tavallisesti osa aalosta heijastuu ja osa kulkee rajapinnan läpi. Rajapinnan läpässeen aallon nopeus ja amplitudi riippuvat väliaineiden ominaisuuksista, mutta aallon taajuus ei muutu heijastuksessa eikä läpäisyssä. Jos läpässeen aallon amplitudi on pienempi kuin saapuvan aallon, heijastunut aalto "kääntyy ympäri", koska aaltofunktion pitää olla rajapinnalla jatkova. Sinimuotoisten aaltojen tapauksessa heijastuneen aallon vaihe muuttuu puoli kierrosta,  $\Delta\phi = \pi$ .
- Jos aaltolähde tai aaltojen havaitseja liikkuu väliaineen suhteen, havaitseja mittaa aallon värähtelevän eri taajuudella kuin millä lähde värähtelee,

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{|v_{x, \text{aalto}} - v_{x, \text{havaitseja}}|}{|v_{x, \text{aalto}} - v_{x, \text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}.$$

Tätä kutsutaan **Doppler-ilmiöksi**.

### Seisovat aallot

- Kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa samanlaista sinimuotoista aaltoa muodostavat superpositiossa **seisovan aalon**.
- Seisova aalto ei etene vaan siihän muodostuu paikoillaan värähteleviä alueita eli **kupuja** ja näitä erottavia paikoillaan pysyviä pisteytä eli **solmuja**. Yksilöllisessä seisovassa aallossa kahden solmun välinen etäisyys on puolikas aallonpituus.
- Rajoitettuun alueeseen vangitut aallot voidaan kuvata seisovien aaltojen superpositiona. Esimerkiksi soittimen kielessä voi värähdellä ainoastaan seisovia aaltoja, joissa on solmu kielen päässä.

Tällöin kielen pituuden täytyy olla puolikkaan aallonpituuden moninkerta eli

$$L = n \frac{1}{2} \lambda_n. \quad (15.133)$$

- Seisovien aaltojen taajuus riippuu niiden aallonpituudesta, joten soittimen kieli voi värähdellä vain tietyillä sallituilla taajuuksilla. Ideaalisessa soittimessa nämä taajuudet ovat perustajauus  $f_1$  sekä sen harmoniset ylätaajuudet  $f_n = nf_1$ .

## Fourier-analyysi

- Mikä tahansa aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Aallon jakoa sinimuotoisiin eli harmonisiin komponentteihin kutsutaan *Fourier-analyysiksi*.
- Jos aalto on jaksollinen eli sillä on aallonpituuksia  $\lambda_1$  ja aaltoluku  $k_1$ , se koostuu sinimuotoisista komponenteista, joiden aaltoluvut ovat  $k_n = nk_1$  ja aallonpituuudet  $\lambda_n = \lambda_1/n$ .
- Aaltopulsseissa on superpositiossa hyvin monta sinimuotoista aaltoa, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan. Aaltopulssien voidaan siis ajatella koostuvan useista toisistaan vain hiukan poikkeavista sinimuotoisista aalloista.
- Mitä enemmän aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut poikkeavat toisistaan, sitä kapeamman pulssin näiden superpositio muodostaa. Kääntäen, mitä lähempänä sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut ovat toisistaan, sitä leveämpi aaltopulssin

täytyy olla. Toisin sanoen mitä tarkemmin aaltopulssin paikka on rajattu, sitä epämäääräisempi sen aallonpituuus ja aaltoluku ovat. Tämä on Fourier-muunnoksen **epätarkkuusperiaate**.

- Joissakin väliaineissa eri taajuudella värähtelevät sinimuotoiset aallot etenevät eri nopeuksilla. Tätä kutsutaan **dispersioksi**. Tällaisissa väliaineissa aaltopulssien muoto voi muuttua ajan kullessa.
- Aaltopulssi, jonka keskimääräinen aaltoluku on  $k_{\text{keski}}$ , kulkee dispersiivisessä väliaineessa **ryhmänopeudella**

$$v_{\text{ryhmä}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_{\text{keski}}} = \omega'(k_{\text{keski}}).$$

Funktioita  $\omega(k)$  kutsutaan väliaineen **dispersiorelaatioksi**.

## Sanasto

- aalto (wave)
- pulssi (pulse)
- sinimuotoinen (sinusoidal)
- häiriö (disturbance)
- poikkeama (displacement)
- poikkittainen (transverse)
- pikkittäinen (longitudinal)
- aaltofunktio (wave function)
- aaltohtilö (wave equation)
- superpositioperiaate (superposition principle)
- rajapinta (interface)

- heijastuminen (reflection)
- läpäisy (transmission)
- seisova aalto (standing wave)
- solmu (node)
- kupu (antinode)
- moodi (mode)
- dispersio (dispersion)
- vaihenopeus (phase velocity)
- ryhmänopeus (group velocity)
- Doppler-ilmiö (Doppler effect)
- puoliarvoileveys (full width at half maximum)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

15.1 Kuvaajat olisivat nyt samanmuotoiset.

15.2 Ensimmäisessä kuvassa pulssin leveys on noin  $\Delta x = 2 \text{ m}$  ja se ohittaa tarkastelupisteen ajassa  $\Delta t = 6 \text{ s}$ , joten aallon nopeus on  $v_x = \Delta x / \Delta t = 0.33 \text{ m/s}$ . Toisessa kuvassa  $\Delta x = 4 \text{ m}$  ja  $\Delta t = 4 \text{ s}$ , joten  $v_x = 1 \text{ m/s}$ .

15.3 (a) Pulssi on symmetrinen, sillä kappaleiden siirtymät ovat pulssin kummallakin reunalla samanlaiset. Koska pulssi on pitkittäinen, jouset kappaleiden välissä puristuvat, kun jäljessä tuleva kappale siirtyy kohti seuraavaa enemmän kuin sen edessä oleva kappale (pulssin etupuoli), ja jouset venyvät, kun jäljessä tuleva kappale siirtyy vähemmän (pulssin takapuoli).

(b) Nyt siirtymät olisivat negatiiviseen suuntaan, joten pulssin kuvaaja kääntyisi ympäri, koordinaatiston negatiiviselle puolelle.

15.4 Et voi vaikuttaa aallon kuluun heiluttamalla köyttä eri tavalla, koska aallon nopeus riippuu vain väliaineesta. Sinun on siis muuttettava väliaineen ominaisuuksia, mikä onnistuu muuttamalla köyttä jännittävästä voimasta. Jos vedät köyttä kovemmin itseäsi kohti, jännitysvoima kasvaa ja aalto kulkee nopeammin.

15.5 Ilmassa äänen nopeus on noin  $340 \text{ m/s}$  riippuen ilman ominaisuuksista kuten lämpötilasta. Äänen nopeus vedessä on noin  $1480 \text{ m/s}$ . Väliaineiden tiheyserot eivät selitä tästä eroa, koska yleisesti aallot kulkevat tiheässä väliaineessa hitaammin, mutta ääni kulkee vedessä nopeammin kuin ilmassa. Oikea selitys erolla on se, että ilma on kaasua, jossa molekyylit vuorovaikuttavat keskenään heikosti. Nestemäisessä vedessä molekyylit sen sijaan vuorovaikuttavat varsin voimakkaasti. Aallot kulkevat siis vedessä nopeammin, koska vedessä väliainetta takaisin tasapainoon palauttavat vuorovaikutukset ovat voimakkaimmat kuin ilmassa.

15.6 (a) Pulssien leveys on  $\Delta x = v_x \Delta t = 2 \text{ m} / 0.4 \text{ s} = 0.8 \text{ m}$  sekä  $2 \text{ m}$ .

(b) Kummassakin köydessä merkitty piste tekee saman lükkeen kuin köyttä heiluttanut käsi. Sinun köydes-säi merkitty piste heilahtaa siis ajassa  $0.4 \text{ s}$  ja ystäväälläsi ajassa  $1.0 \text{ s}$ .

15.7 (a)  $v_x = \Delta x_{\text{aalto}} / \Delta t = 1.6 \text{ m} / 2.0 \text{ s} = 0.8 \text{ m/s}$ .

(b) Tämä tapahtuu, kun aalto on siirtynyt  $\Delta x_{\text{aalto}} = 2.3 \text{ m}$ , mihin kuluu aika  $\Delta t = \Delta x_{\text{aalto}} / v_x = 2.875 \text{ s}$ .

15.8 (a) Funktio on muotoa  $f(x + (0.30 \text{ m/s})t)$ , kun valitaan  $f(X) = (0.10 \text{ m})e^{-(0.10 \text{ m}^{-2})X^2}$  ja  $X = x + (0.30 \text{ m/s})t$ . Tästä voidaan lukea nopeudeksi  $v_x = -0.30 \text{ m/s}$ .

(b) Funktio ei ole muotoa  $f(x - v_x t)$ , joten se ei kuvaa vakionopeudella liikkuvaa aaltoa.

(c) Funktio on muotoa  $f(x - (0.5 \text{ s}^{-1}) / (0.2 \text{ m}^{-1})t)$ , kun valitaan  $f(X) = (0.3 \text{ m}) \cos[(0.2 \text{ m}^{-1})X]$ . Niinpä aallon nopeus on  $v_x = (0.5 \text{ s}^{-1}) / (0.2 \text{ m}^{-1}) = 2.5 \text{ m/s}$ . Tästä muotoa olevat aaltofunktiot ovat erittäin tärkeitä, kuten seuraavaksi näemme, ja näiden aaltojen nopeus pitää osata laskea!

15.10 (a) Vauhti on  $v_{\text{aalto}} = f\lambda = 340 \text{ m/s}$ . Tämä voisi olla ilmassa kulkeva äänialto. (b) Aallon vauhti riippuu väliaineesta, joten vauhti ei muudu. (Äänen nopeus ilmassa ei riipu taajuudesta.) Aallonpituuus on nyt  $\lambda = v_{\text{aalto}} / f = 1.7 \text{ m}$ .

15.11 Tämän voi laskea aallonpituuden avulla, mutta järkeillään ratkaisu aaltoluvun määritelmän kautta. Aaltolukuhan kertoo, montako aallonpituutta mahtuu  $2\pi$  metrille. Jos puoleen metriin mahtuu yksi aallonpituuus, kuuteen metriin mahtuu 12 aallonpituutta ja  $2\pi$  metriin  $2\pi / 0.5 \approx 12.6$  aallonpituutta. Tämä on aallon aaltoluku,  $k = 12.6 \text{ m}^{-1}$ . Kun puoleen metriin mahtuu kaksi aallonpituutta, mille tahansa matkalle mahtuu kaksinkertainen määrä aallonpituuksia ja  $k = 25.1 \text{ m}^{-1}$ . Ja kun puolessa metrissä on kolme aallonpituutta, aaltoja on kolminkertainen määrä ja  $k = 37.7 \text{ m}^{-1}$ .

15.12 Kulmataajuus on  $\omega = 2\pi f = 12.57 \text{ s}^{-1}$  ja aaltoluku  $k = \omega / v_{\text{aalto}} = 4.189 \text{ m}^{-1}$ . Aaltofunktio on siis origossa  $u_y(0, t) = A \cos(-\omega t + \pi/4)$  ja yleisesti  $u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \pi/4)$ . Erityisesti  $u_y(0.2, 0.2) = (0.1 \text{ m}) \cos(0.838 - 2.513 + \pi/4) = 0.06 \text{ m}$ .

15.13 (a)  $f = 440 \text{ Hz}$ ,  $T = 1/f = 2.3 \text{ ms}$ ,  $\omega = 2\pi f = 2760 \text{ s}^{-1}$ ,  $\lambda = v_{\text{aalto}} / f = 0.77 \text{ m}$ ,  $k = 2\pi / \lambda = 8.1 \text{ m}^{-1}$ .

(b) Valitaan tarkasteluhetkeksi  $t = 0$ , jolloin vaihe on  $\phi(x) = kx + \phi_0$ . Pisteessä  $x = 0$  on  $\phi(0) = \phi_0 = \pi$ , joten  $\phi(1 \text{ m}) = (8.131 \text{ m}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ m}^{-1}) + \pi = 11.27$ .

15.14 Aaltoluvut ovat  $0.2 \text{ m}^{-1}$  ja  $-0.4 \text{ m}^{-1}$ , kulmataajuudet  $0.3 \text{ s}^{-1}$  ja  $0.6 \text{ s}^{-1}$ , amplitudit  $0.1 \text{ m}$  ja  $0.5 \text{ m}$ , aallonpituudet  $31.4 \text{ m}$  ja  $15.7 \text{ m}$ , taajuudet  $0.048 \text{ Hz}$  ja  $0.095 \text{ Hz}$ , vauhti molemmilla  $1.5 \text{ m/s}$ , ensimmäinen liikkuu positiiviseen ja toinen negatiiviseen  $x$ -suuntaan.

15.15 (a) Aaltoluku on negatiivinen. (b) Vaihe pienenee (muuttuu negatiiviseen suuntaan). (c) Vaiheenosoitin pyörii negatiiviseen suuntaan eli myötäpäivään. (d) Päinvastoin kuin c-kohdassa eli vastapäivään.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

**15.16 (a)** Origossa vaiheenosoitin osoittaa ylöspäin (harja) ja se pyörii vastapäivään (positiiviseen suuntaan) aallon kulkusuuntaan siirryttäässä. Pisteessä  $x = 1$  m vaiheenosoitin osoittaa alas päin, eli osoitin siis pyörähtää puoli kierrosta.

**(b)** Ajan kuluessa osoitin pyörii myötäpäivään (negatiiviseen suuntaan). Kolmessa sekunnissa aalto siirryttää kolme metriä eli puolitoista aallonpituuutta, ja harja A saapuu tarkastelupisteesseen. Vaiheenosoitin siis pyörähtää puolitoistakierrosta myötäpäivään.

**(c)** Siirrytään yksi aallonpituuus aallon kulkusuuntaa vastaan, joten vaiheenosoitin pyörähtää yhden kieroksen myötäpäivään.

**(d)** Kun tarkastelupiste kulkee aallonharjan mukana, vaihe ei muutu eikä vaiheenosoitin pyöri.

**(e)** Kumpikin prosessi johtaa samaan pisteeseen  $(x, t) = (1 \text{ m}, 3 \text{ s})$ , joten kummassakin vaiheen täytyy yhteensä muuttua yhtä paljon. Tämä muutos on yksi kierros negatiiviseen suuntaan eli  $\Delta\phi = -2\pi$ .

**15.18** Pisteet ovat lükkeessä alas päin. Pisteeseen B kohdistuu tällöin voima alaviistoon ja pisteeseen A yläviistoon. Pisteeseen B tehdään siis positiivista työtä ja pisteeseen A negatiivista. Koska piste A liikkuu nopeammin kuin B, A:han tehdyn työn teho on suurempi. Tämä tarkoittaa sitä, että energiota siirrytään A:sta pisteidens väliseen jouseen enemmän kuin jousesta B:hen. A siis menettää energiota jouselle, joka puolestaan antaa osan tästä energiasta edelleen B:lle. Energiaa siirrytään systeemistä A systeemiin B.

**15.19 (a)** Potentiaalienergiaa on paljon, kun köysi on venyntä. Tämä tapahtuu, kun aaltofunktio (köyden profili) nousee tai laskee jyrkästi, mikä sinimuotoisessa aallossa tarkoittaa sitä, että tarkastelupiste on tasapainoasemassa. Liike-energiaakin on paljon silloin, kun aaltofunktio on jyrkkä. Kumpikin energian muoto saa siis maksiminsa köyden ollessa tasapainossa.

**(b)** Jousella on potentiaalienergiaa, kun se on venyntä tai puristunut eli kun kappale on mahdollisimman kaukana tasapainopisteestä. Liike-energiaa kappaleella on eniten tasapainopisteessä. Huomaa, että värähtelyjällä liike- ja potentiaalienergioiden summa on vakio, jolloin toisen ollessa suurimmillaan on toinen minimissään. Köyden aallossa sekä liike- että potentiaalienergia saavat maksiminsa samassa pisteesä, ja yksittäisen tarkastelupisteen energia muuttuu ajan kuluessa.

**15.20 (a)** Keskiarvo lasketaan paikan suhteeseen, joten  $-\omega t + \phi_0$  on vakio. Vakion lisääminen sinin argumenttiin vain siirtää funktioita  $x$ -akselilla, mutta jos laskemme funktion integraalin yhden jakson yli, ei ole väliä, mistä kohtaa jaksoa aloitamme. **(b)** Pätee  $\sin^2 x = [1 - \cos(2x)]/2$ , joten  $\int_0^\lambda \sin^2(kx)dx = \frac{1}{2} \int_0^\lambda [1 - \cos(2kx)]dx$ . Termeittäin saadaan  $\frac{1}{2} \int_0^\lambda dx = \frac{\lambda}{2}$  ja  $\frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos(2kx)dx = \frac{1}{4k} \Big|_0^\lambda \sin(2kx) = \frac{1}{4k}(\sin 4\pi - \sin 0) = 0$ . Siispä  $\frac{1}{2} \int_0^\lambda \sin^2(kx)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$ .

**15.21** Köydessä energiatiheds on maksimissaan, kun aaltofunktio on mahdollisimman jyrkkä (eli aaltofunktion derivaatan itseisarvo on suuri). Huomaa, että jyrkyys on sama kuvissa (b) ja (c), joten energiatiheden maksimi on myös sama. Sähkömagneettisen aallon energiatiheds on suurin, kun aaltofunktio (sähkökenttä) poikkeaa nollasta mahdollisimman paljon (eli aaltofunktion itseisarvo on suuri). Huomaa, että amplitudi on sama kuvissa (d) ja (f), joten energiatiheskin on.

**15.23** Piirrä kuva! Jokaisella ajan hetkellä pitää määritää kummankin pulssin tuottama poikkeama tasapainosta tarkastelupisteessä, jolloin kokonaispoikkeama on näiden summa. Hetkellä  $t = 3$  s pulssien reunat ovat tarkastelupisteessä, joten poikkeama on  $u_y = 0$  cm. Hetkellä  $t = 4$  s pisteesä on korkeamman pulssin huippu ja matalamman pulssin reuna. Poikkeama on nyt  $u_y = 10 \text{ cm} + 2.5 \text{ cm} = 12.5 \text{ cm}$ . Hetkellä  $t = 5$  s korkeampi pulssi on juuri ohittanut tarkastelupisteen ja matalamman pulssin huippu on pisteesä, joten  $u_y = 5 \text{ cm}$ .

**15.24** Köysi on suora, joten sen potentiaalienergia on nolla (tai ainakin minimissään). Köyden hiukkaset ovat kuitenkin pystysuorassa liikkeessä, joten köydellä on liike-energiaa. Aaltojen energia on siis tällä hetkellä pelkästään liike-energiaa. Energia ei tietenkään voi kadota mihinkään, joten kokonaisenergia on sama kuin pulssien ollessa erillään.

**15.25** Tässä on kyseessä sinisarja. Jos valitaan ajan hetki nolla, saadaan sarjaksi  $\sum_i = 1^N \frac{1}{2i-1} \sin[(2i-1)m^{-1}x]$ , missä  $N = 5, 7, 9$  jne. Tämän voi määritellä esimerkiksi Mathematicassa komennolla  $f[\mathbf{x}] := \text{Sum}[1/(2i-1) \text{ Sin}[(2i-1)x], \{i, 1, 5\}]$  ja piirtää komennolla  $\text{Plot}[f[\mathbf{x}], \{x, 0, 2\pi\}]$ . Lopputulos on aalto, jonka korkeus on välillä  $[0, \pi]$  likimain  $\pi/4$  ja välillä  $[\pi, 2\pi]$  likimain  $-\pi/4$  (ja luonnollisesti aalto toistuu  $2\pi$ -jakosella).

**15.26** Yhden sinimuotoisen aallon Fourier-esityksessä on vain yksi nollasta poikkeava kerroin (tai mahdollisesti nollasta poikkeavat molemmat kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  yhdellä ja samalla  $n$ ) eli samalla aaltoluvulla  $k_n$ . Aallon aaltoluku ja aallonpituuus ovat täsmällisesti määriteltyt. Aalto on äärettömän leveä, koska se jatkuu äärettömyyksiin. Voidaan ajatella, että aaltoluku on sitä tarkempi, mitä leveämpi aalto on. Kun aalosta tulee äärettömän pitkä (leveä), sen aaltoluvusta tulee äärettömän tarkka eli täsmällinen.

**15.27 (a)** Fourier-kuvaaja venyy  $k$ -akselilla niin, että jokainen piste siirryttää kaksinkertaiselle  $k$ :n arvolle.

**(b)** Aaltofunktio muodostamien aaltojen aallonpituuudet puolittuvat, joten koko aalto kutistuu  $x$ -akselin suunnassa puoleen alkuperäisestä leveydestä.

**(c)** Kun siis Fourier-kuvaajaa venytetään jollakin vakiolla, aaltofunktio kutistuu  $x$ -akselin suunnassa samalla vakiolla.

Kuvan 15.19 (a) kuvaajasta saadaan aaltoluvut kaksinkertaistamalla kuvaaja 15.20 (a). Huomaa, että kuvan 15.19 (a) aaltofunktio on täsmälleen samanmuotoinen kuin kuvan 15.20 (a) aaltofunktio paitsi että jälkimmäisen leveys on vain puolet edellisestä.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

**15.29** (a) Veden pinta voi vapaasti liikkua seinän kohdalla pystysuunnassa, joten tilanne on vastaava kuin köydessä, jonka pää on vapaa. Aalto ei siis käänny ympäri.

(b) Ääniallon tapauksessa voimme tarkastella kahta suuretta: ilmanpainetta tai hiukkasten siirtymää. Seinä estää hiukkasia siirtymästä sisäänsä, joten hiukkasten siirtymälle tilanne on samanlainen kuin köysi, jonka pää on kiinnitetty seinään. Sen sijaan paine voi seinän kohdalla kasvaa tai pienentyä, joten paineen näkökulmasta tilanne on samanlainen kuin köydessä, jonka pää ei ole kiinnitetty. Jos piirräme ääniallon aaltofunktion hiukkasten siirtymän avulla, tämä aaltofunktio käännytsee seinän kohdalla ympäri. Sen sijaan paineen avulla piirretty aaltofunktio ei käänny seinän kohdalla ympäri (ja tästä tehtävässä kysyttiin). Tämä voi vaikuttaa ristiriitaiselta, mutta ei ole sitä, koska näiden aaltofunktioiden minimit ja maksimit ovat eri kohdissa.

**15.30** (a) Koska nyt heijastunut pulssi ei käänny ympäri, sitä kuvaavalla aaltofunktiolla  $u_{y,\text{heijastuva,vapaa}}(x,t) = f(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$ .

(b) Nyt siis  $u_{y,\text{vapaa}}(x,t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t) + f(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$  ja tämän derivaatta on  $\frac{\partial}{\partial x} u_{y,\text{vapaa}} = f'(x - v_{x,\text{aalto}}t) - f'(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$ , missä miinusmerkki jälkimmäisen funktion edessä on sisäfunktion  $-x - v_{x,\text{aalto}}t$  derivaatta  $x$ :n suhteen. Pisteessä  $x = 0$  tämä on  $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=0} u_{y,\text{vapaa}} = f'(-v_{x,\text{aalto}}t) - f'(-v_{x,\text{aalto}}t) = 0$ . Siispä tässä tapauksessa köyden pää on aina vaakasuorassa.

**15.31** (a) Jos oikea puoli paljon tiheämpi kuin vasen, oikeaa puolta on paljon vaikeampi liikuttaa kuin vasenta. Niinpä vasemmalta tuleva aalto ei juuri tuota aaltoa köyden oikealle puolelle. Aalto siis heijastuu lähes kokonaan, jolloin läpäisseen pulssin korkeus on hyvin pieni ja heijastuneen lähes sama kuin saapuvan. Tilanne on lähes sama kuin jos köyden pää olisi künni seinässä.

(b) Jos oikean puolen tiheys on paljon pienempi, vasemmalta tuleva aalto tuottaa köyden kevyempään puoleen helposti hyvin korkean aallon. Läpäisseen aallon korkeus on siis suuri. Lisäksi kevyessä köydessä kulkevan aallon energia on pieni, joten suurin osa aallon energiasta heijastuu tässäkin tapauksessa takaisin. Heijastuneen pulssin korkeus on siis lähes sama kuin saapuvan aallon.

(c) Jos köydet ovat lähes samanlaiset, aalto käyttäätyy kuin rajapintaa ei olisikaan. Toisin sanoen läpäisseen aallon korkeus on likimain sama kuin saapuneen aallon ja heijastuneen aallon korkeus on pieni.

**15.32** Aalto ei ole puhtaasti kohti rajapintaa etenevä aalto rajapinnan vasemmalla puolella, koska kyseessä on kahden vastakkaisiin suuntiin kulkevan aallon superpositio. Aalto muistuttaakin enemmän seisovaa aaltoa, jossa värähely on joissakin pisteissä voimakasta ja toisissa heikkoa. Rajapinnalla värähely on heikko, jolloin väliaineen maksimipoikkeama tasapainosta on sama kuin rajapinnan oikean puolen aallon amplitudi.

**15.33** Sininen aalto on kuvissa peilikuva (pystysuunnassa), jolloin myös sen vaiheenosoitin on käännynty ympäri. Tämä johtuu siitä, että kuvassa (a) sininen aalto kokee puolen kierroksen vaihesiirron. Vihreän aallon vaiheenosoitin on sama kuin punaisen ja sinisen aallon vaiheenosoitimiin summa, joten kuvassa (a) tämä vaiheenosoitin on lyhyt kun taas kuvassa (c) se on pitkä. Vihreän aallon amplitudi on sama kuin sen vaiheenosittimen pituus.

**15.35** Kun köysi on suora, aallolla on vain liike-energiaa, ja tämä energia on keskittynyt aallon kupuihin, koska näissä pisteissä köyden osat liikkuvat pystysuunnassa suurimmalla nopeudella. Kun aalto on värähelynsä ääriasennossa, köysi on hetkellisesti paikoillaan ja sillä on vain potentiaalienergiaa. Tämä energia on keskittynyt solmuihin, koska näissä köysi venyy eniten. Energia siis vaihtaa muotoa ja se myös siirtyy kupujen ja solmujen välillä.

**15.36** Piirrä kuva! Putkeen mahtuu aallonpituudesta  $1/4$ ,  $3/4$ ,  $5/4$  jne. Siis

$$L = \left( n \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda_n, n = 0, 1, 2 \dots \quad (15.134)$$

**15.37** Ks. edellinen vastaus. Taajuudet ovat

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} v_{\text{aalto}} = \frac{1}{L} \left( n \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) v_{\text{aalto}} = (2n+1) \frac{1}{4L} v_{\text{aalto}}. \quad (15.135)$$

**15.38** Mustan käyrän eli koko kielen taajuus on sama kuin spektrin perustajauus. Kuvan perusteella 2. ylätaajuus on hieman alle  $\omega_3 \approx 10^4 \text{ s}^{-1}$ , joten perustajauutta vastaava kulmataajuus on noin  $\omega_1 = \frac{1}{3} \omega_3 \approx 3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Perustajauus itsessään on siis  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 480 \text{ Hz}$ .

**15.39** Kielen värähely työntää ilman hiukkaset liikkeelle, jolloin ilmaan syntyy aaltoja, joiden taajuudet ovat samat kuin kielen värähelytaajuudet. Nämä aallot kulkevat korvaan, jolloin siis ilmahiukkaset korvassa alkavat liikkua aallon taajuudella. Tämä liike (ja siihen liittyvä paine-ero) saavat korvan tärykalvon värähelemään jälleen samalla taajuudella. Näin siis kielen värähelyn taajuudet siirtävät ilmassa kulkevan paineaallon väliytysellä korvan tärykalvon värähelytaajuksiksi, ja nämä ihmisen voi aistia. Prosessissa vakiona pysyy vain taajuus. Aallonpituuus, amplitudi ja aallon nopeus muuttuvat jokaisessa rajapinnan ylityksessä.

**15.40** Sinimuotoisen aallon nopeus eli ns. vaihenopeus on  $v = \frac{\omega}{k}$ . Lausekkeen voi muokata moneen muotoon relatioiden  $\omega = \sqrt{gk}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  sekä  $\omega = 2\pi f$  avulla,

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{2\pi f}. \quad (15.136)$$

Nopeudet ovat siis (a) 2.21 m/s, (b) 1.77 m/s, (c) 4.91 m/s, (d) 0.78 m/s.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

#### 15.41 Pulssin nopeus on ns. ryhmänopeus

$$v_{\text{ryhmä}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_{\text{vaihe}} = 1.11 \text{ m/s.} \quad (15.137)$$

**15.42 (a)** Kun dispersiokäyrä kaartuu ylöspäin (kuva c), suuren aaltoluvun eli lyhyen aallonpituuden aallot kulkevat nopeasti. Kun dispersiokäyrä kaartuu alas päin (kuva b), pienien aaltoluvun eli suuren aallonpituuden aallot kulkevat nopeasti. Kuvassa 15.32 (c) pitkät aallonpituudet kulkevat lyhyitä nopeammin, joten tämä vastaa alas päin kaartuvaa dispersiokäyrää (b).

**(b)** Kyllä. Nämä voi tapahtua, jos dispersiokäyrä käännyttää laskevaksi, kun  $k$  on positiivinen, sillä tällöin vaiheenopeus on positiivinen mutta ryhmänopeus on negatiivinen.

**15.43 (a)** Kuvan (b) mukaan peräkkäisten kuvioiden välillä on kulunut aina 1 ms aikaa. Kuvan (a) perusteella väärähelijän jaksonaika on  $T = 4$  ms eli taajuus on  $f = 250$  Hz. Koska aalto kulkee yhden aallonpituuden tassaa ajassa, aallonpituus on  $\lambda = v_{\text{aalto}}T = 1.38$  m.

**(b)** Kuvassa (c) Aallonpituudet ovat  $\lambda_+ = (v_{\text{aalto}} - v_{\text{lähde}})T = 0.92$  m sekä  $\lambda_- = (v_{\text{aalto}} + v_{\text{lähde}})T = 1.84$  m. Havaitut taajuudet ja jaksonajat ovat siis  $f_+ = v_{\text{aalto}}/\lambda_+ = 375$  Hz,  $T_+ = 1/f_+ = 2.67$  ms (sininen) sekä  $f_- = v_{\text{aalto}}/\lambda_- = 187.5$  Hz,  $T_- = 1/f_- = 5.33$  ms (punainen). Jaksonajat voisi lukea myös suoraan kuvajista.

**15.44** Jaksonajat voi lukea suoraan kuvajista. Punaisen havaitsejan mukaan  $T_+ = 3$  ms ja sinisen  $T_- = 6$  ms. Taajuudet ovat  $f_+ = 333.3$  Hz sekä  $f_- = 166.7$  Hz. Liukuvan havaitsejan Doppler-ilmiön yhtälöstä saadaan samat tulokset,  $f_+ = (345 + 115)/345 \cdot 250$  Hz = 333.3 Hz ja  $f_- = (345 - 115)/345 \cdot 250$  Hz = 166.7 Hz.

**15.45 (a)** Kun lähdet liikkuvat äänen nopeudella, lähdet kulkee synnyttämisenä aaltojen mukana. Aallot pakkautuvat samaan pisteeseen lähteestä edessä, jolloin aallonpituus on nolla ja taajuus äretön. Tällaista aaltojen pakkautumista yhteen kutsutaan shokkiaalloksi. Lähteestä takana aallonpituus on kaksinkertainen levossa olevan lähteen aaltoihin verrattuna ja taajuus puolet.

**(b)** Koska B liikkuu nyt aaltojen mukana, B ei havaitse lainkaan väärähelyä. B:ssa siis taajuus on nolla. Havaitseja A puolestaan ehtii liikkua aina puoli aallonpituutta kahden aallonharjan havaitsemisen välillä, jolloin myös aalto liikkuu puoli aallonpituutta. Tällöin A havaitsee aallonharjoja kaksi kertaa niin usein kuin levossa oleva havaitseja, ja näinpä A:n havaitsema taajuus on kaksinkertainen lähteen taajuuteen verrattuna. Nämä tulokset ovat sopusoinnussa Doppler-ilmiölle johdetun taajuuden lausekkeen kanssa. Erityisesti huomataan, että tulokset ovat erilaiset riippuen siitä, liukkuuko lähdet vai havaitseja.

**15.46 (a)** Asetetaan  $x$ -akseli lähteen liikkeen suuntaan, jolloin  $v_{x,\text{aalto}} = 345$  m/s,  $v_{x,\text{lähde}} = 20$  m/s ja  $v_{x,\text{havaitseja}} = -20$  m/s. Doppler-ilmiön yhtälön perusteella

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{345 + 20}{345 - 20} \cdot 100 \text{ Hz} = 112.3 \text{ Hz.} \quad (15.138)$$

**(b)** Siirrytään koordinaatistoon, jossa ilma on paikoillaan. Tässä koordinaatistossa  $v_{x,\text{aalto}} = 345$  m/s,  $v_{x,\text{lähde}} = 10$  m/s ja  $v_{x,\text{havaitseja}} = -30$  m/s. Siispä

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{345 + 30}{345 - 10} \cdot 100 \text{ Hz} = 111.9 \text{ Hz.} \quad (15.139)$$

**(c)** Nyt ilman koordinaatistossa  $v_{x,\text{aalto}} = 345$  m/s,  $v_{x,\text{lähde}} = 30$  m/s ja  $v_{x,\text{havaitseja}} = -10$  m/s. Siispä

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{345 + 10}{345 - 30} \cdot 100 \text{ Hz} = 112.7 \text{ Hz.} \quad (15.140)$$

Huomataan, että tuulen suunnalla on pieni mutta havaittava vaikutus Doppler-ilmiöön.

**15.48 (a)** K liikkuu ylöspäin, kun köysi on pisteen kohdalla laskeva. Vastaavasti jos köysi on nouseva, K liikkuu alas päin.

**(b)** K:n vauhti on suuri, jos köysi on jyrkästi laskeva tai nouseva. Jos köysi on vaakasuora, vauhti on nolla.

**15.49 (a) (i)**  $0 \text{ m}^{-1}$ , **(ii)**  $0 \text{ m}^{-1}$ , **(iii)**  $4 \text{ m}^{-1}$ , **(iv)**  $-6 \text{ m}^{-1}$ .

**(b)** Suorien käyrien kaarevuus on nolla, kuten voisi arvata. Käyrän kuten paraabelin kaarevuus on itseisarvoaan sitä suurempi, mitä jyrkemmin käyrä taipuu. Kaarevuus on positiivinen, jos käyrä taipuu koordinaatistossa ylöspäin.

**15.50** Koska  $[\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}] = (\text{m/s})^2$  ja  $[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}] = 1$ , täytyy olla  $[C] = (\text{m/s})^2$ .

**15.51** Derivaatat ovat  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 f''(x - v_{\text{aalto}}t)$  ja  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = f''(x - v_{\text{aalto}}t)$ . Näinpä aaltoyhtälön mukaan  $v_{\text{aalto}}^2 f''(x - v_{\text{aalto}}t) = (5.0 \text{ m}^2/\text{s}^2) f''(x - v_{\text{aalto}}t)$  eli  $v_{\text{aalto}} = \pm\sqrt{5.0}$  m/s =  $\pm 2.2$  m/s. Aallon vauhti voidaan päättää aaltoyhtälöllä (mutta nopeuden suuntaa ei). Aallon muotoa eli funktiota  $f$  ei voi päättää. Nämä pitää olla, koska aaltoyhtälö kuvailee välinettä, ja välinneen ominaisuudet määritellään aallon vauhdin. Aallon syntytapa sen sijaan määritellään aallon muodon, joten sitä ei voi selvittää aaltoyhtälöllä.



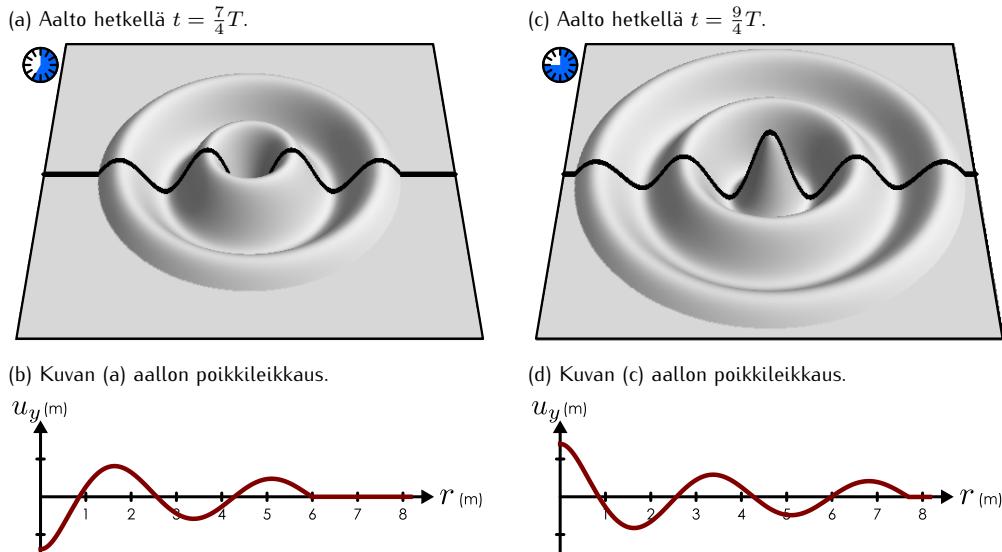
# 16 Moniulotteiset aallot

Nyt kun osaamme analysoida yhdessä ulottuvuudessa kulkevia aaltoja, voimme siirtyä tarkastelemaan kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa eteneviä aaltoja. Aaltojen lükkäävät ohjaavat perusperiaatteet ovat samat riippumatta ulottuvuuksien lukumäärästä, mutta moniulotteisessa avaruudessa voidaan havaita aaltojen ilmiöltä, joita ei tapahdu yhdessä ulottuvuudessa. Jos ulottuvuuksia nimitään on monta, aallot voivat hajaantua ja kulkea eri reittejä. Hajaantuessaan aallot pääsevät levämään avaruuteen, jolloin niiden kuljettama energiakin jakautuu suulle alueelle. Eri reittejä kulkevat aallot puolestaan voivat olla yhtäällä vahvistavassa ja toisaalla heikentävässä superpositiossa, mikä ohjaaa aaltojen kulkua. Lisäksi aaltoja kuljettavat väliaineet voivat muodostaa kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa paljon monimutkaisempia rakenteita kuin yhdessä, mikä mahdollistaa aaltojen tarkoituksellisen ohjaamisen. Tähän perustuu esimerkiksi optiikkalaakso ja akustiikka.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää aaltojen eteneminen Huygensin periaatteella ja kuvilla pistemäisten ja viivamaisten lähteiden synnyttämien aaltonrintamien muodot
- määritellä aallon intensiteetti ja määrittää sen riippuvuus amplitudista ja lähteestä mitatusta etäisyystä
- määrittää taittuvien ja heijastuneiden aaltojen kulkusuunnat ja selittää ilmiö aaltonrintamien käyttäytyksen pohjalta
- määritellä polarisaatio ja määrittää aallon väärähtelyn ja intensiteetin muutos sen kulkissa polarisaattorin läpi
- selittää interferensi ja diffraktio aaltojen superpositioperiaatteen avulla
- määrittää millaisia kuvia peileistä ja linsseistä koostuvat optiset laitteet tuottavat
- määrittää kaksoisraon, hilan, aukon sekä kalvon läpi kulkevan valon intensiteetijakauma

Kuva 16.1: Värähtelevän kappaleen veden pinnalle synnyttämä aaltoja.



## 16.1 Hajaantuvat aallot

### Aaltonrintamat

Veden pinnalla kulkeva aalto on tavanomainen ja helposti nähtävä esimerkki kaksiulotteisesta aaltoliukkeestä. Jos veteen vaikkapa heittää kiven, pinnalle syntyy ympyrän muotoisia väreitä, jotka levivät lähtöpisteestään samalla väliaineen määräämällä vauhdilla kaikkiin suuntiin. Vastaavasti jos veden pinnalla on harmonisesti värähtelevä kappale, se lähettää jatkuvasti aaloja kaikkiin suuntiin kuten kuvassa 16.1 on piirretty. Harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää veden pinnalle sinimuotoisia aaloja aivan samaan tapaan kuin köyden päähän kiinnitetty harmoninen värähtelijä synnyttää köyteen sinimuotoisia aaloja. Kummassakin tapauksessa väliaineen jokainen piste alkaa värhdellä harmonisesti samalla taajuudella kuin aalojen lähde.

Kuvaan on piirretty myös pinnan profili aaltolähteestä kautta kulkevalla suoralla. Koska tilanne on symmetrinen, profili on samanlainen kuljettiin lähteestä mihin tahansa suuntaan. Tästä johtuen pinta-aaltojen aallonharjat ja -pohjat muodostavat *renkaita*, joiden keskipisteessä on aalojen lähde. Aivan samaan tapaan kolmessa ulottuvuudessa kulkevan aallon aallonharjat ja -pohjat muodostavat avaruuteen *pallopintoja*. Esimerkiksi pistemäisen äänilähteen lähettämät paineaallot ovat tällaisia.

Veden pinnalla etenevä aallonharja muistuttaa hieman pintaan pitkin liukuvaa seinämää, ja tästä syystä aallonharjoja ja -pohjia kutsutaan **aaltonrintamiksi**. Yleisesti sinimuotoisen aallon aaltonrintama määritellään käyränä, jonka pisteissä *aallon vaihe on vakio*. Esimerkiksi niissä väliaineen pisteissä, joissa aallon vaihe on  $\phi = 0$ , on kaikissa aallonharjat. Vastaavasti pisteet, joissa vaihe on  $\phi = \pi$ , on aallonpohja.

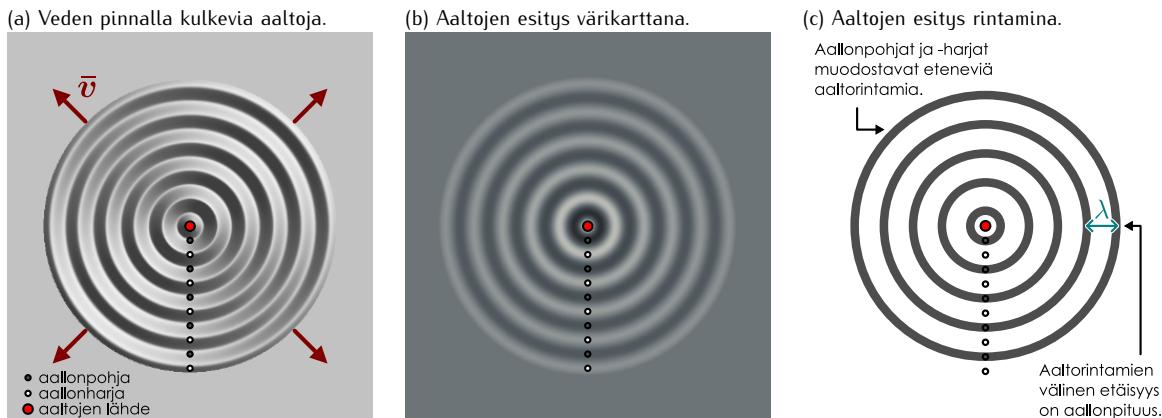
Yhdessä ulottuvuudessa aaloja saattoi kuvata tarkasti piirtämällä niiden aaltofunktion. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa aalofunktion piirtäminen on kuitenkin hankalampaa, koska aalofunktio riippuu useista paikkakoordinaateista. Kuvassa 16.2 on esitetty tapoja kuvata kaksiulotteinen aalto graafisesti. Kuvassa 16.2 (a) on kuva veden pinnasta yhtenä ajan hetkenä. Kuva on piirretty realistiseen näköiseksi, jolloin pinnan korkeudesta saa intuitiivisen käsityksen. Kuvassa käytetty varjostus kuitenkin aiheuttaa sen, ettei kuvasta pysty tarkasti lukemaan, missä pinta on korkealla ja missä matalalla.

Kuvassa 16.2 (b) on kuva samasta aallosta värikarttana. Tässä kuvassa vaaleat alueet kuvavat aallonharjoja ja tummat aallonpohjia. Toisin sanoen pinnan tasapainoasema on piirretty harmaalla, ja tästä korkeutta korkeammalla tai matalammalla olevat alueet on piirretty vaaleana ja tummana. Kuvasta pystyy lukemaan melko tarkasti, missä aallonharjat ja -pohjat ovat. Jotta eri kuvien vertailu olisi helpompaa, niihin on merkitty pistein joitakin aallonpohjia ja -harjoja.

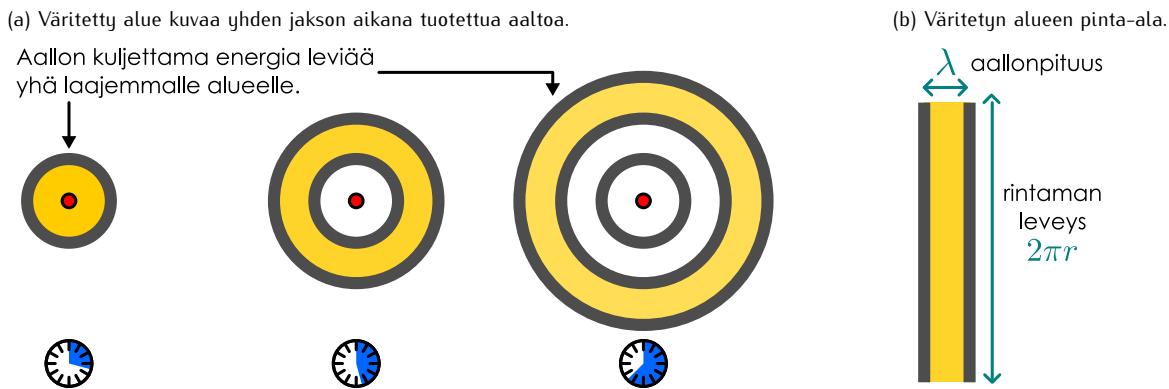
Kuva 16.2 (c) muistuttaa kuvaa (b), mutta on vieläkin yksinkertaisempi. Kuvassa (c) aallonpohjat on piirretty mustina viivoina ja aallonharjat on jätetty valkoisiksi. Tällaisesta kuvasta ei näe pinnan täsmällistä muotoa, mutta esitystapa on yksinkertainen ja siitä näkee selkeästi *aaltonrintamien muodon*. Osoittautuu, että kahdessa ulottuvuudessa liikkuvien aalojen kuvauksessa juuri aaltonrintamien liikkeen ymmärtäminen ja kuvaminen on tärkeää, joten käytämme jatkossa paljon juuri tästä yksinkertaisinta esitystä. Ei ole sinänsä mitään väliä, piirretäänkö aaltonrintamat aallonharjojen tai aallonpohjien kohdalle, mutta johdonmukaisuuden vuoksi piirämme aaltonrintamat aina aallonpohjien kohdalle.

## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.2: Erilaisia tapoja kuvata aaltoa kahdessa ulottuvuudessa.



Kuva 16.3: Pistemäisestä aaltolähteestä lähtevä aalto hajaantuu. Tällöin aallon energia jakautuu suuremmalle alueelle.



## Intensiteetti

Aallot kuljettavat energiota. Jos väliaineessa vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia kuten kitkaa tai väliaineen vastusta, aallon kuljettama mekaaninen energia muuttuu vähitellen lämpöenergiaksi. Tällöin aalto madaltuu kulkiessaan ja lopulta katoaa, koska aallon *energiatiheys on verrannollinen amplitudin nelioon*. Tällöin sanotaan, että väliaine **absorboi** aallon. Todellisissa väliaineissa tapahtuu aina jonkin verran absorptiota, mutta monesti absorptio on niin heikko, että se voidaan jättää huomioimatta. Ideaalisessa, absorptiottomassa väliaineessa aallon energia säilyy periaatteessa ikuisesti. Se vain kulkee aallon mukana paikasta toiseen.

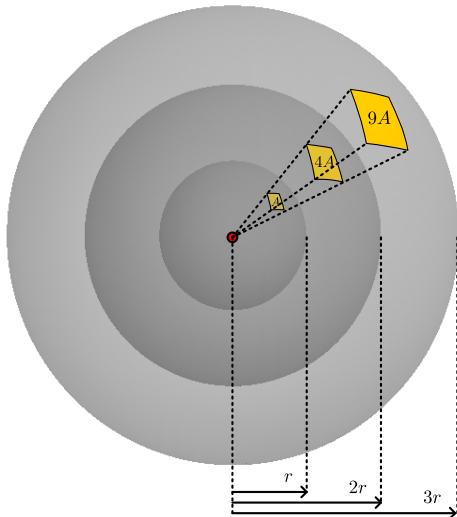
Yhdessä ulottuvuudessa aallon energia voi kulkea vain eteen- tai taaksepäin, ja tällöin aalto kulkee muutonsa säilyttään ellei heijastu. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa energia pääsee kuitenkin virtaamaan eri suuntiin, mikä muuttaa tilanteen. Jos aallon lähde siirtää väliaineeseen energiota keskimääräisellä teholla  $P$ , ajassa  $\Delta t$  lähteestä siirtyy väliaineeseen energia  $\Delta E = P\Delta t$ . Esimerkiksi yhden väähdyksjakson aikana lähde syöttää aaltoon energiamäärään  $E_{jakso} = PT$ . Toisaalta yhden väähdyksen aikana syntyy yhden aallonpituuden verran uutta aaltoa, joten yhden aallonpituuden alueelle varastoitunut energia on juuri  $E_{jakso}$ . Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa tämä alue tarkoittaa *kahden aaltorintaman välistä pinta-alaa tai tilavuutta*. Tämä on esitetty kuvassa 16.3 (a), jossa kahden peräkkäisen aallonpohjan välinen alue on väritetty eri ajan hetkinä. Jokaisessa kuvassa tähän alueeseen on varastoitunut sama määriä energiota,  $E_{jakso}$ .

Koska aaltorintamien rajaama alue kasvaa aaltojen etääntyessä kauemmas lähteestä mutta tämän alueen sisältämä kokonaisenergia ei muudu, aallon *energiatiheyden täytyy pienentyä*. Kahdessa ulottuvuudessa aaltorintamien välisen alueen pinta-ala on likimain aaltorintamien välisen etäisyyden  $\Delta r = \lambda$  ja aaltorintamien leveyden (eli rintaman muodostaman ympyrän kaarenpituuden)  $2\pi r$  tulo, kuten kuvassa 16.3 (b) on havainnollisetettu. Siispä kuvassa väritetyn alueen pinta-ala on likimain  $A_{ringas} \approx 2\pi r \Delta r = 2\pi r \lambda$ , missä  $r$  on alueen keskimääräinen etäisyys aaltolähteestä. Kolmessa ulottuvuudessa pistemäisen lähteen tuottamat aaltorintamat ovat pallopintoja, ja kahden rintaman välinen tilavuus on ohut pallon kuori. Tällaisen pallonkuoren tilavuus on likimain kuoren paksuuden  $\Delta r = \lambda$  ja kuoren pinta-alan  $4\pi r^2$  tulo,  $V_{pallopinta} \approx 4\pi r^2 \Delta r = 4\pi r^2 \lambda$ .



- 16.1** (a) Aaltonrintama muodostaa ympyrän, jonka säde on (i)  $\lambda$ , (ii)  $3\lambda$ , (iii)  $30\lambda$ . Mikä on tähän rintamaan nähden sisemmän, pienemmän ympyrän muodostavan rintaman säde?  
 (b) Mikä on näissä tapauksissa ulomman ja sisemmän aaltonrintaman säteen kesiarvo?  
 (c) Mikä on ulomman ja sisemmän aaltonrintaman välin jäävän alueen pinta-ala?  
 (d) Mikä on yhtälön  $A_{\text{rengas}} \approx 2\pi r\lambda$  antama approksimaatio rintamien väliselle pinta-alalle, kun säteenä käytetään (b)-kohdassa laskettua kesiarvoa?

Kuva 16.4: Kolmessa ulottuvuudessa aaltonrintamat ovat pallopintoja, joiden ala on verrannollinen säteen neliöön.



asiassa näkyy myös kuvassa 16.1, jossa aaltojen poikkileikkuksista selvästi nähdään aallonharjojen madaltuvan etäisyyden  $r$  kasvaessa. Esimerkiksi kolmessa ulottuvuudessa energiatihesys on suoraan verrannollinen amplitudin neliöön ja käantäen verrannollinen etäisyysteen  $r$ ,  $A^2 \sim \langle \rho_{E,3D} \rangle \sim 1/r^2$ , jolloin amplitudin täytyy olla käantäen verrannollinen etäisyysteen,  $A \sim 1/r$ .



- 16.2** Miten aallon amplitudi riippuu läheestä mitatusta etäisyydestä  $r$ , jos kyseessä on  
 (a) pistemäinen lähte, joka lähetää aaltoja veden pinnalla,  
 (b) hyvin pitkä sauva (pituus  $L \gg r$ ), joka lähetää ääntä (paineaaltoa ilmassa)?

Aaltojen energiatihesyn pienentymisen voi helposti havaita omin aistein. Esimerkiksi lampun valo näyttää sitä himmeämältä, mitä kauempaa lamppua katsotaan, koska sähkömagneettisena aaltona kulkevan valon energiatihesys pienenee etäisyyden kasvaessa. Samoin ääni kuuluu sitä heikommin, mitä kauempana äänen lähde on korvasta. Aaltojen leväminen eri suuntiin aiheuttaa luonnollisesti myös sen, että aaltojen energia päätyy eri paikkoihin. Esimerkiksi Aurinko säteilee jatkuvasti valtavan määrään energiota avaruuteen sekä hiukkasina että sähkömagneettisina aaloina, mutta Maapallolle tästä energiasta saapuu vain se osuuus, joka osuu Maahan (vrt. kuva 16.5). Tämä energiamäärä riippuu sekä säteilyn energiatihedestä Maan etäisyydellä Aurinkosta että Maan koosta. Esimerkiksi Kuuhun saapuvan energian kokonaismäärän täytyy olla pienempi kuin Maahan saapuvan, koska Kuu on Maata pienempi.

Sama periaate pätee yleisesti kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa: mitä suurempi kappale aaltoa, säteilyä, hiukkasia tai muuta energiavirtaa vastaanottaa, sitä enemmän energiota siihen kaikkiaan osuu. Siksi tällaisissa tapauksissa ei ole mielekästä puhua aaltojen (tai hiukkasten tms.) kuljettamasta kokonaistihesystä tai -tehosta, koska havaitojat vastaanottavat tyypillisesti vain osan aaltojen kuljettamasta energiasta, ja tämän osuuden suuruus riippuu havaitojan koosta. Erityisesti koska havaitojalle saapuva teho riippuu myös havaitojasta itsestään, se ei ole pelkästään aaltoliikkeen ominaisuus.

Riippumatta ulottuvuuskien lukumäärästä, havaitojan vastaanottama kokonaistihesys on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan havaitaja vastaanottaa energiota,  $\Delta E = P\Delta t$ . Kolmessa ulottuvuudessa havaitojan vastaanottama energia on lisäksi suoraan verrannollinen havaitojan *aaltoliikkeen kulkusuuntaan* nähden kohtisuoraan poikkipinta-alan,  $\Delta E \sim A$ . Jos siis jaamme havaitojan vastaanottaman kokonaistihesyn sekä havaintoajalla että havaitojan poikkipinta-alalla, saamme näistä molemmista riippumattoman, pelkästään aaltoliikkeen ominaisuuksia kuvavaan suureen **intensiteetiin**

$$I = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{A}. \quad (16.3)$$

Aallon keskimääräinen energiatihesys on sen sisältämä kokonaistihesys jaettuna aallon pinta-alalla (kahdessa ulottuvuudessa) tai tilavuudella (kolmessa ulottuvuudessa). Niinpä koska kaksiulotteinen aalto levää renkaana, sen energiatihesys pienenee käantäen verrannollisesti renkaan kaarenpituuteen, joka on verrannollinen lähteestä mitattuun etäisyyteen,

$$\langle \sigma_{E,2D} \rangle = \frac{E_{\text{jaksot}}}{{A}_{\text{rengas}}} = \frac{PT}{2\pi r \lambda}. \quad (16.1)$$

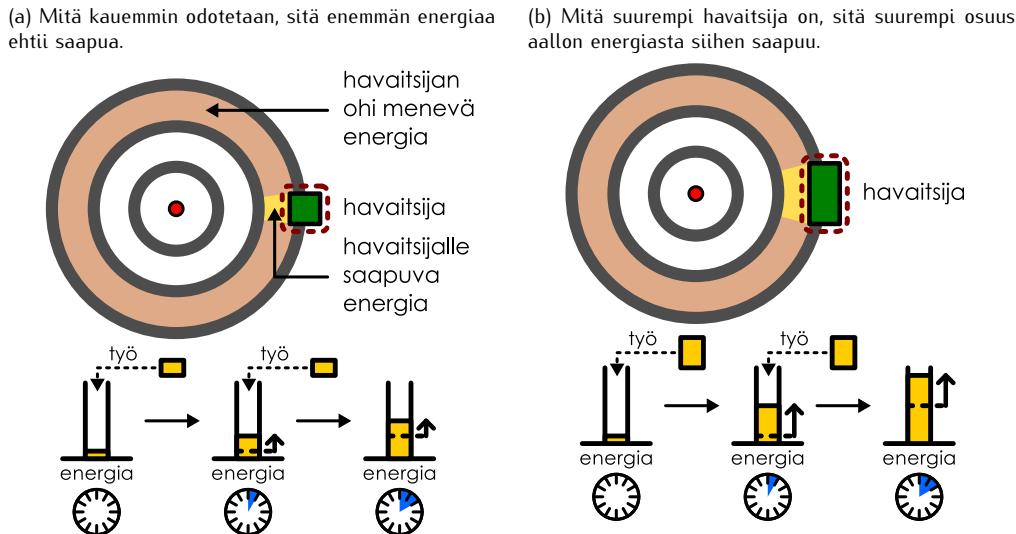
Kolmessa ulottuvuudessa aallon energia levää pallon pintana (kuva 16.4), jolloin energiatihesys on käantäen verrannollinen pallon pinta-alaan ja siis etäisyyden neliöön,

$$\langle \rho_{E,3D} \rangle = \frac{E_{\text{jaksot}}}{V_{\text{pallopinta}}} = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda}. \quad (16.2)$$

Tästä johtuen aalon muoto ei voi kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa pysyä vakiona edes ideaalisessa väliaineessa. Koska aalon energiatihesys on verrannollinen amplitudin neliöön (vrt. köydessä kulkevan aallon energiatihesys (15.52),  $\langle \lambda_E \rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$ ), ja energiatihesys pienenee kuljettaessa kauemmaksi aallon lähteestä, täytyy myös aallon amplitudin tällöin pienentyä. Tämä ilmiö itse

## MONIULOTTEiset aallot

Kuva 16.5: Sinimuotoinen aalto kuljettaa energian kaikkiin suuntiin. Havaitsija kerää energian sitä enemmän mitä kauemmin se energian vastaanottaa ja mitä suurempi se on.



Intensiteetti siis kertoo, *paljonko energian aallon mukana saapuu neliömetrille yhden sekunnin aikana*.



**16.3** Miten määrittelisit kahdessa ulottuvuudessa intensiteettiä vastaavan suureen, joka kuvailee aallon siirtämää energian ja on riippumaton havaintoajasta ja havaitajan koosta?

Tarkastellaan pistemäistä aaltolähdettä, joka säteilee energian teholla  $P$  kolmessa ulottuvuudessa. Ajatellaan, että lähteen ympärillä on  $r$ -säteinen pallopinta, jonka sisäpuoli mittaa saapuvan energian kokonaismääriä. Koska tämä pinta ympäröi lähteen, *kaiken* lähteen lähettiläisen energian täytyy päätyä tälle mittarille, ja niinpä sen havaitsema kokonaisenergia on  $E = P\Delta t$ . Toisaalta tämän pallopinnan pinta-ala on  $A = 4\pi r^2$ , joten intensiteetin määritelmän (16.3) perusteella aaltolähteen intensiteetti etäisyydellä  $r$  on

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (16.4)$$

Tulosta voi verrata jo aikaisemmin johdettuun yhtälöön (16.2), jonka mukaan palloaallon energiatihesyys on myös suoraan verrannollinen lähteen tehoon ja käännettäen verrannollinen pallon pinta-alaan,  $\langle\rho_{E,3D}\rangle = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda}$ . Muistamalla lisäksi, että aallon vauhti on  $v_{aalto} = \lambda/T$ , intensiteetin ja energiatihyyden välille saadaan yhteyts

$$I = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} = \langle\rho_{E,3D}\rangle v_{aalto}. \quad (16.5)$$

Tulos on järkevä: Intensiteetin täytyy olla suoraan verrannollinen aallon energiatihyyteen, sillä mitä enemmän energian aallossa on, sitä enemmän energian aalto voi kuljettaa. Toisaalta aalto tuo havaitsejaan sitä enemmän energian mitä nopeammin se kulkee. Itse asiassa tämä tulost on sama kuin yksilotteisille alioille johdettu teho ja energiatihyyden yhteys (15.49). Ainoa ero on siinä, että yhdessä ulottuvuudessa ei tarvitse huomioida havaitajan kokoa, koska osa aallon kuljettamasta energiasta ei voi kulkea havaitajan ohi kuten useassa ulottuvuudessa. Siksi intensiteetti ja kokonaisteho ovat sama asia yhdessä ulottuvuudessa mutta eri asia kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa.



**16.4** Aallon intensiteetti on  $2.0 \text{ W/m}^2$ . Kuinka paljon energian saapuu yhdessä minuutissa pienelle kuution muotoiselle kappaleelle (särmän pituus  $1.0 \text{ cm}$ ), jos aalto saapuu kuution erään sivun lävistäjän suuntaisesti eli  $45^\circ$  kulmassa kuution kahteen toiseen sivuun nähdyn?

Intensiteetti on kolmessa ulottuvuudessa etenevien aaltojen tärkeimpiä fysikaalisia ominaisuuksia, koska se kuvailee energian aallon mukana siirtynyttä. Intensiteetti on usein myös suoraan havaitavissa. Aikaisemmin toteimme, että mitä kauemmaksi valon tai äänen lähteestä sijaitsee, sitä himmeämmäksi valo käy ja hiljaisemmaksi ääni muuttuu. Tämä johtuu siitä, että näiden aaltojen intensiteetti pienenee etäisyyden kasvaessa, ja valon kirkkaus sekä äänen voimakkuus riippuvat nimenomaan niiden intensiteetistä.

## esimerkki 16.1

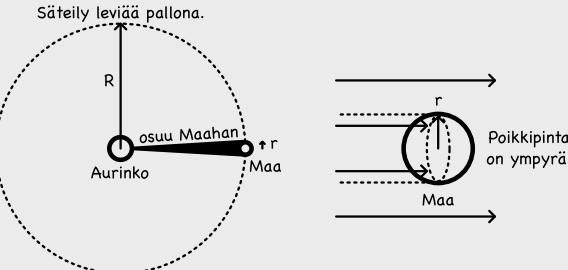
## Auringon intensiteetti

Auringon säteilemä kokonaisteho on noin  $4 \cdot 10^{26}$  W. Mikä on Maahan saapuvan säteilyn (a) intensiteetti ja (b) kokonaisteho? (c) Maailman energiankulutus oli 2010-luvulla noin  $10^{21}$  J vuodessa. Missä ajassa Maahan saapuu tämä energiamääärä?

**TILANNE** Maan etäisyys Auringosta on noin  $R = 1.5 \cdot 10^{11}$  m ja Maan sade on noin  $r = 6.4 \cdot 10^6$  m. Merkitään Auringon tehoa  $P = 4 \cdot 10^{26}$  W.

**SUUNNITELMA** Auringon säteily leviää pallopinnaa niin, että Maan etäisyydellä energia jakautuu alalle  $A_{\text{säteily}} = 4\pi R^2$ . Säteilyn intensiteetti on siis etäisyydellä  $R$  Auringon keskipisteestä

$$I = \frac{P}{A_{\text{säteily}}} = \frac{P}{4\pi R^2}. \quad (16.6)$$



Maahan saapuu siihen osuvaa säteilyjä vastaava teho, joka riippuu siis siitä, kuinka suuren osuuden tämän pallopinnan alasta Maa peittää,  $P_{\text{Maahan}} = IA_{\text{Maa}}$ . Tämä ala ei ole Maan kokonaispinta-ala (pallon ala) vaan planeetan poikkipinta-ala (ympyrän ala)  $A_{\text{Maa}} = \pi r^2$ . Maahan saapuva energia on puolestaan verrannollinen tehoon ja kuluneeseen aikaan,  $E = P\Delta t$ .

**RATKAISU** (a) Intensiteetti Maan kohdalla on  $I \approx \frac{4 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4\pi(1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \approx 1400 \text{ W/m}^2$ .

(b) Maahan saapuva kokonaisteho on  $P_{\text{Maahan}} \approx 1.8 \cdot 10^{17}$  W.

(c) Tarvittava aika on  $\Delta t = \frac{E}{P_{\text{Maahan}}} \approx 5600 \text{ s} = 1.5 \text{ h}$ .

**ARVIOINTI** Pikainen haku osoittaa, että Auringon säteilyn intensiteetti avaruudessa Maan kohdalla on todellakin noin  $1.4 \text{ kW/m}^2$ . Ilmakehä toki absorboi suuren osan tästä energiasta niin että maanpinnalla intensiteetti on maksimissaan noin  $1.0 \text{ kW/m}^2$ .

Tämäkin on silti paljon, sillä Aurinko säteilee maahan kahdessa tunnissa enemmän energiota kuin kaikki ihmiskunnan moottorit ja voimalaitokset käsitlevät vuodessa. Jos haluaisimme kattaa nykyisen energiantarpeemme aurinkopaneeleilla, jotka hyödyntävät 10 % näiden vastaanottamasta säteilyenergiasta ( $\eta = 0.1$ ), paneelien kokonaispinta-alan pitäisi olla  $A = \frac{E}{\eta I \Delta t} = \frac{10^{21} \text{ J}}{10^{-1} \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ km}^2$ . Tämä on suunnilleen Suomen pinta-ala, mikä on paljon muttei kuitenkaan mitenkään mahdoton suuruusluokka, sillä ihmisten rakennelmat kattavat jo nyt tätä suuremman pinta-alan.



**16.5** Selitä omin sanoin, mitä tarkoitetaan intensiteetillä. Mistä aallon ominaisuuksista intensiteetti riippuu? Miten ja miksi intensiteetti muuttuu, kun aalto leviää avaruuteen?

Intensiteetti kuvailee kaikkia kolmessa ulottuvuudessa kulkevia aaloja, mutta äänen intensiteetin mittamiseen on vakiintunut oma erikoinen tapansa. Heikoin ääni, jonka ihminen voi kuulla, on intensiteetiltään noin  $I_{\text{kynnys}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , mitä kutsutaan *kuulokynnyksi*. Toisessa ääripäässä painealto, jonka intensiteetti on noin  $I_{\text{kipu}} = 1 \text{ W/m}^2$  tai suurempi, aistitaan kipuna eikä äänenä. Ihmisen kuulo ei kuitenkaan mitata äänen intensiteettiä lineaarisesti vaan likimain logaritmisen. Jos äänen intensiteetti on aluksi esimerkiksi  $I_0 = 1.0 \text{ mW/m}^2$  ja se kaksinkertaistetaan arvoon  $I_1 = 2.0 \text{ mW/m}^2$ , ihmisen kuulee äänen voimakkuuden kasvavan. Jos intensiteetti jälleen kaksinkertaistetaan nyt arvoon  $I_2 = 4.0 \text{ mW/m}^2$ , äänen voimakkuuden lisäys *kuulostaa yhtä suurelta* kuin ensimmäisessä muutoksessa, vaikka ensin intensiteetti kasvoi määränpäin  $\Delta I_{0 \rightarrow 1} = 1.0 \text{ mW/m}^2$  ja sen jälkeen suuremman määränpäin  $\Delta I_{1 \rightarrow 2} = 2.0 \text{ mW/m}^2$ . Tämän takia äänen voimakkuutta mitataan tavallisesti logaritmilla *desibelialasteikolla*. (Desibelit on nimensä mukaisesti kymmenenesabeli,  $1 \text{ dB} = 0.1 \text{ B}$ , missä yksikkö beli on nimetty Alexander Bellin mukaan.) Desibelit määritellään niin, että jos äänen intensiteetti on  $I$ , sen voimakkuus desibeleissä on

$$\beta(I) = \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnys}}}, \quad (16.7)$$

missä  $\beta_0 = 10 \text{ dB}$  ja log on kymmenkantainen logaritmi. Tämän määritelmän mukaisesti heikoimman kuultavan äänen voimakkuus on  $\beta(I_{\text{kynnys}}) = (10 \text{ dB}) \log 1 = 0 \text{ dB}$  ja kipurajalla äänen voimakkuus on  $\beta(I_{\text{kipu}}) = (10 \text{ dB}) \log(1/10^{-12}) = 10 \text{ dB} \cdot 12 = 120 \text{ dB}$ .

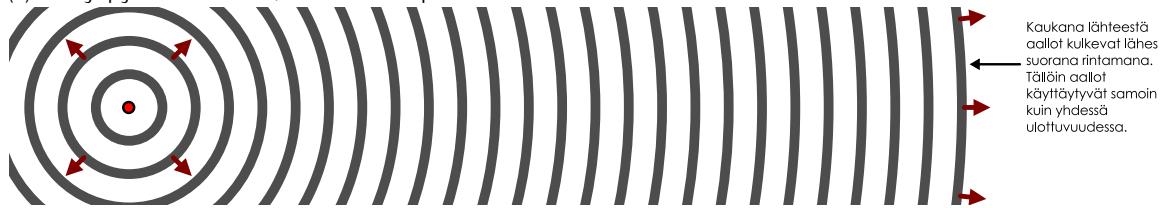


**16.6** Soitin tuottaa ääntä, jonka voimakkuus on 70 dB. (a) Mikä on äänen voimakkuus, jos kaksi samanlaista soitinta soittaa yhtä aikaa? (b) Montako soitinta tarvitaan tuottamaan ääni, jonka voimakkuus on 80 dB?

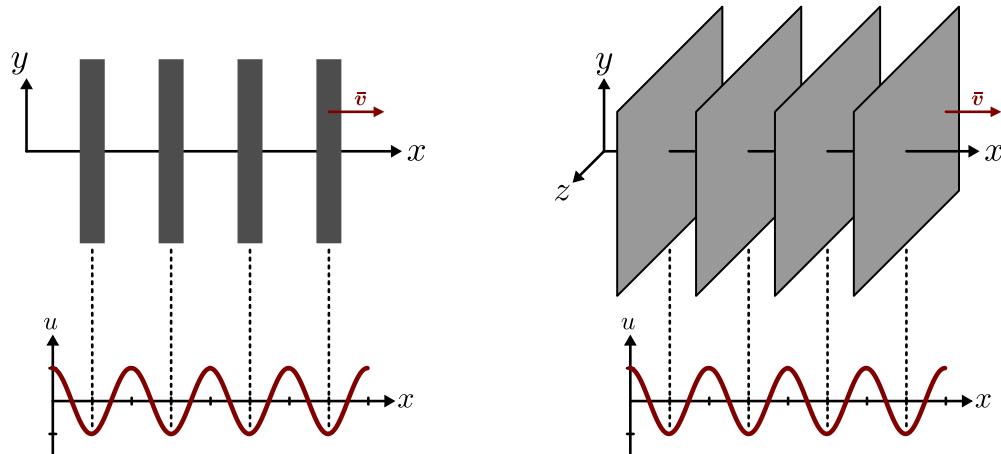
## MONIULOTTEiset aallot

Kuva 16.6: Kaukana lähteestä ympyrääallon kaarevuus on pieni. Tällöin aaltonrintamat ovat kahdessa ulottuvuudessa likimain suoria ja kolmessa ulottuvuudessa tasojia, ja aallot käyttäytyvät kuin yhdessä ulottuvuudessa.

(a) Kun ympyrän sade kasvaa, sen kaarevuus pienenee.



(b) Kaksi- ja kolmiulotteisia suoria aaltonrintamia.



## Aaltonrintamien muoto

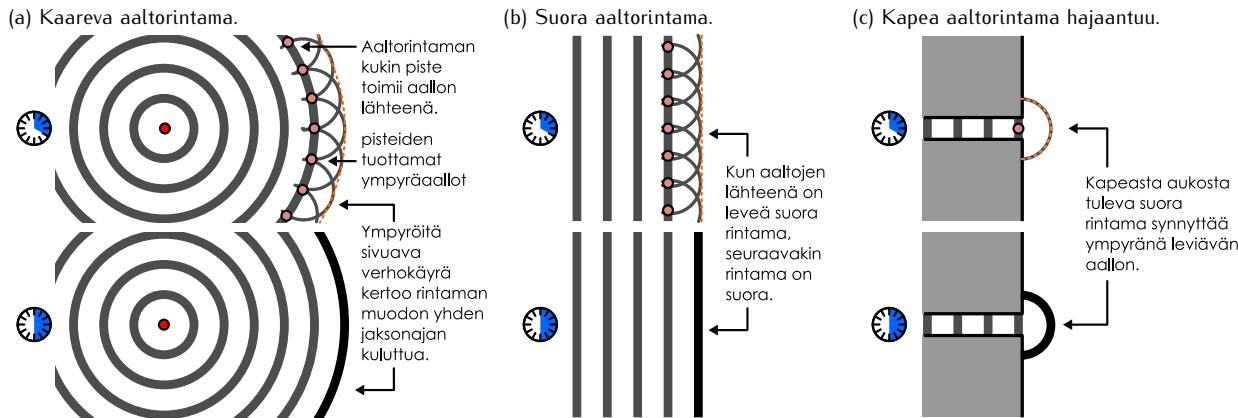
Lähellä pistemäistä lähdettä aaltonrintamien muodostamien ympyröiden tai pallopintojen sade on pieni ja kaarevuus suuri. Tällöin rintamien suhteellinen koko kasvaa nopeasti etäisyyden  $r$  kasvaessa ja siksi aaltojen energiatihes ja amplitudi pienenevät nopeasti siirryttäessä kauemmas lähteestä. Sen sijaan kaukana lähteestä kohtuulliset muutokset lähteestä mitatussa etäisyydessä vaikuttavat aaltonrintaman suhteelliseen kokoon vain vähän. Tästä johtuen aaltojen amplitudi ja energiatihes pienenevät kaukana lähteestä varsin hitaasti. Aaltonrintamien muodossa tämä näkyy siten, että aaltonrintamien kaarevuus pienenee, kuten kuvassa 16.6 (a) on havainnollistettu. Tällöin aaltonrintamista tulee lähes suoria ja lähellä toisiaan olevissa pisteissä aallon nopeutta kuvaavat vektorit ovat likimain yhdensuuntaiset. Esimerkiksi Aurinko on Maapallosta niin kaukana, että Maahan saapuvan valon suunta ei käytännössä muutu, vaikka havaitseja siirtyisi Maapallon pinnalla.

Jos aaltojen lähde on hyvin kaukana havaintopisteestä, kahdessa ulottuvuudessa aaltonrintamista tulee suoria viivoja (kuva 16.6 (b)) ja kolmessa ulottuvuudessa suoria tasojia (kuva 16.6 (c)), mikä vuoksi tälläistä aaltoa kutsutaan *tasoalaksi*. Jos tasoalto kulkee esimerkiksi  $x$ -suuntaan, aallon vaihe ja aaltonfunktio riippuvat vain  $x$ -koordinaatista eivätkä laikaan kulkusuuntaan nähden kohtisuorista  $y$ - ja  $z$ -koordinaateista. Tämän vuoksi tasoallot käyttäytyvät samalla tavalla kuin yksiulotteiset sinimuotoiset aallot. On paljon helpompi analysoida suoria aaltonrintamia kuin kaarevia, joten aaltojen analyysissä aaltonrintamien ajatellaan olevan suoria melkein aina, kun aaltojen lähde on kaukana havaintopisteestä.

Edellä tarkastellut tilanteet, joissa aaltonrintamat ovat täydellisiä ympyröitä tai suoria, ovat yksinkertaisia erikoistapauksia. Nämä mallit eivät välttämättä päde, jos aallon lähde ei ole pistemäinen tai jos ulkoiset esteet vaikuttavat aaltojen kulkuun. Tällaisissa tilanteissa aaltonmuoto voi olla hyvin monimutkainen, ja tässä luvussa päätavoitteitamme onkin ymmärtää, millaiset periaatteet aaltojen käyttäytymistä ohjaavat.

Ensimmäinen työkalumme on niin sanottu **Huygensin periaate** (Christiaan Huygensin mukaan). Tämän periaatteen mukaan *aaltonrintaman jokainen piste toimii kuin aallon lähde*. Tämän periaatteen mukaan aallon kulun voi ymmärtää seuraavasti: Aaltolähde värähtelee tietyllä taajuudella ja saa näin sitä ympäröivät väliaineen pisteen myös värähtelemaan samalla taajuudella. Nämä väliaineen pisteen puolestaan saavat *niitä ympäröivät pisteet* värähtelemaan ja niin edelleen. Aalto siis etenee siten, että kukaan väliaineen piste *levittää* värähtelyn lähiympäristöönsä. Koska jokainen värähtelijä saa ympäristönsä värähtelemaan samalla taajuudella kuin millä se itse värähtelee, väliaineen pisteen päätyvät lopulta värähtelemaan kaikkialla sa-

Kuva 16.7: Huygensin periaate. Aaltonrintaman jokaisen pisteen voi ajatella lähettyvän uutta aaltoa aallon kulkusuuntaan. Aallon tulevan muodon voi päättellä valitsemalla joukon pistetä aaltonrintamasta ja piirtämällä näiden ympärille ympyrät, joiden sade on yksi aallonpituisus. Näiden ympyröiden rajaama käyrä näyttää, minne aaltonrintama on edennyt yhden jaksonajan kuluttua.



malla taajuudella riippumatta esimerkiksi siitä, onko väliaine kaikkialla samanlainen. Lisäksi aalto jatkaa etenemistään, vaikka aaltojen alkuperäinen lähde lakkaisi värähtelemästä, koska väliaineessa jo oleva aalto toimii uusien värähtelyjen lähteenä.

Kun aaltonrintaman muoto tunnetaan yhdellä ajan hetkellä, aaltonrintaman muoto tulevaisuudessa voidaan päättää Huygensin periaatteen avulla. Jos nimittäin rintaman jokainen piste toimii aallon lähteenä, voimme valita rintamasta joukon pistetä ja piirtää niiden jokaisen ympärille ympyrän, joka esittää kyseisestä pistestä lähevää uutta aaltoa, kuten kuvassa 16.7 on esitetty. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että aalto muuttuisi yhtäkkiä joukoksi pieniä ympyröitä kuten kuvaan on piirretty. Todellisuudessahan aaltonrintamassa on ääretön määrä aallon lähteenä toimivia pistetä, joista kuvaan on piirretty vain muutama, ja uusi aalto on näiden kaikkien *superpositio*. Aallon muoto saadaankin määritettyä kuvaan piirrettyjä ympyröitä sivuavana *verhokäyränä*. Erityisesti kun ympyröiden säteeksi valitaan täsmälleenyksi aallonpituisus, tämä verhokäyrä piirryt yhteen, johon aaltonrintama on edennyt täsmälleenyksi aallonpituisuuden kuluttua.

Kuvissa 16.7 (a) ja (b) on esitetty etenevä aallon muodon määrittäminen Huygensin periaatteella, kun kyseessä on ympyrääalto ja suora aaltonrintama. Ympyrääallon tapauksessa aaltonrintamasta valitut pistet ovat ympyrän kaarella, joten niiden ympärille piirrettyjen pienten ympyröiden verhokäyrä on nii ikään ympyrän kaari. Tämä on uloimman aaltonrintaman uusi muoto yhden jaksonajan kuluttua. Suorassa aaltonrintamassa verhokäyrä on puolestaan suora, joten aaltonrintama etenee pysyen suorana. Nämä tulokset ovat täsmälleeny mitä näimme jo kuvassa 16.6.

Kuvassa 16.7 (c) on sen sijaan uusi tilanne, jossa suorat aaltonrintamat kulkevat pitkin kapeaa käytävää. Niin kauan kuin aalto on käytävässä, tilanne on sama kuin kuvassa 16.7 (b) ja etenevät rintamat pysyvät suorina. Kun käytävä aikanaan loppuu, tilanne kuitenkin muuttuu. Voisi ajatella, että suorana rintamana aikaisemmin edennyt aalto jatkaisi matkaansa suoraan, ja tietysti olosuhteissa näin tapahtuukin. Tässä tapauksessa kuitenkin Huygensin periaate sanoo, että käytävän päähän saapuneen aaltonrintaman pistet toimivat aaltojen lähteenä, jotka levittävät aaltoliikettä ympäristöönsä joka suuntaan. Lisäksi koska käytävä oli kapea, sen päättä voi kuvata likimain yhtenä pisteenä. Näin ollen aallon muotoa tulevaisuudessa kuvaa tämän *yhden pisteen lähettemä ympyrääalto*. Siispä vaikka aalto etenee käytävässä suorina rintamina, käytävästä ulos tulevat aallot levivät puoliympyrän muotoisesti.

Näin todella tapahtuu, ja ilmiötä kutsutaan **diffraktioksi**. Varsinkin äänen diffraktio on hyvin jokapäiväinen ilmiö. Jos esimerkiksi puhallat pilliin tai torveen, soittimen sisään muodostuu aaltoa, jotka poistuvat äänen aallonpituuuteen nähdyn pienien aukon kautta. Jos ääniaallot jatkaisivat kulkuaan suoraan aukosta kuljettuaan, torvet lähettilsivät ääntä vain suoraan eteenä. Todellisuudessa torvesta poistuvat aallot kuitenkin levivät kaikkiin suuntiin, minkä ansiosta torven äänen voi kuulla vaikka seisoi torven takana. Diffraktio-ilmiötä tutkimme tarkemmin luvussa 16.3.



**16.7** Tapahtuuko merkittävä diffraktio, kun (a) normaalilin puheen tuottamat ääniaallot kulkevat avoimesta ovesta tai (b) taskulampun valo kulkee avoimesta ovesta? Miksi?

## 16.2 Aallot ja väliaineet

### Heijastuminen ja taittuminen

Tarkastelimme yksiuotteisten aaltojen käyttäytymistä rajapinnoilla jo luvussa 15.6. Tällöin opimme, että rajapinnan kohtaava aalto voi heijastua, kulkea rajapinnan läpi tai tehdä osittain molempia. Näin tapahtuu myös kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa. Erona yksiuotteiseen tapaukseen on kuitenkin se, että kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa aalto voi saapua rajapinnalla *vinosti*.

Jos aalto saapuu rajapinnalle, jota se ei voi läpäistä, aallon on heijastuttava täydellisesti. Kaikki aallot voivat heijastua, mutta erityisen selkeä tämä ilmiö on valon tapauksessa, koska valon voi nähdä. Valoa lähes täydellisesti heijastavaa pintaa kutsutaan tietenkin *peiliksi*. Jos peiliä osoittaa kohtisuoraan esimerkiksi laser-osoittimella, valo heijastuu suoraan takaisin. Sen sijaan jos valo osuu peilin pintaan vinosti, huomataan valon heijastuvan *eri* suuntaan kuin mistä se tuli nün, ettei *peilille saapuva ja siitä heijastunut valonsäde muodostavat yhtä suuret kulmat peilin pintaan nähdyn*.

Aallon heijastuminen on esitetty kuvassa 16.8. Oletetaan, että saapuva aalto on tasoaalto, jonka aaltonrintamat ovat suoria. Aallon edetessä nämä rintamat kulkevat eteenpäin muotansa säilyttäen kunnes ne kohtaavat heijastavan rajapinnan. Nyt voimme päätellä aallon muodon Huygensin periaatteen avulla. Aaltonrintaman pisteet, jotka eivät ole vielä saavuttaneet rajapintaa, toimivat läheenä *kohti* rajapintaa kulkevalle aalloille. Rajapinnan saavuttanut aaltonrintaman piste toimii myös uuden aallon läheenä, mutta tällaisesta pisteestä lähtevä aalto kulkee *poispäin* rajapinnasta. Kuvassa 16.8 (a) Huygensin periaate on kuvattu valitsemalla aaltonrintamasta neljä pistettä yhtä kaukaa toisistaan, piirtämällä näiden ympärille renkaat, ja määrittämällä näiden avulla aaltonrintaman tuleva muoto.

Saapuva ja heijastunut aalto kulkevat samassa väliaineessa, joten niiden nopeus sekä aallonpituuus ovat samat. Kaikkien kuvaan piirrettyjen renkaiden säde on yksi aallonpituuus, joten renkaat ovat keskinään yhtä suuret. Niinpä jokainen aaltonrintama on täysin symmetrinen rajapintaa koskevan pisteen suhteen, ja siksi saapuvan ja heijastuneen aaltonrintaman täytyy olla samassa kulmassa rajapintaan nähdyn.

Tasoaallon liikesuunta on kohtisuorassa rintaman suuntaan nähdyn, joten aaltonrintaman ja rajapinnan välinen kulma on sama kuin aallon liikesuunnan ja rajapinnan *normaalilin* välinen kulma, mikä on kuvassa 16.8 (b) merkitty symbolilla  $\theta_A$ . Koska esimerkiksi valonsäteen tapauksessa näemme valon kulkusuunnan mutta emme sähkömagneettisen aallon aaltonrintamia, heijastuvien aaltojen suunta on tapana ilmoittaa nimenomaan aaltojen kulkusuunnan ja rajapinnan normaalilin välisen kulman avulla.



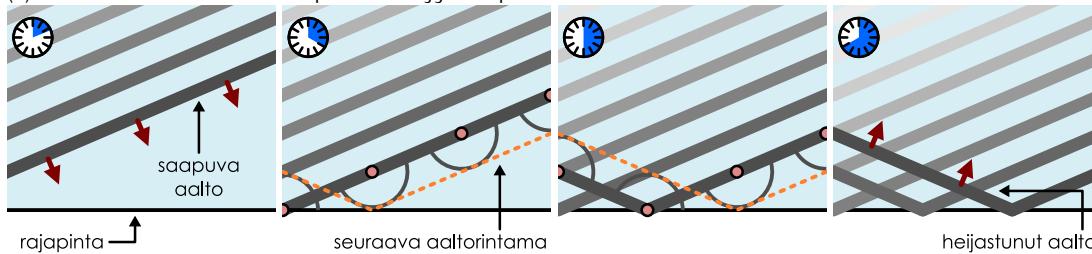
**16.8** Kuvassa 16.8 (a) heijastuva aalto ei koe vaihesiirtoa. Heijastuva aalto kuitenkin voi kokea vaihesiirron. Miltä kuva tässä tapauksessa näyttäisi? Tapahtuuko valossa vaihesiirto, kun valo heijastuu tavallisesta peilistä?

Jos aalto saapuu rajapinnalle, jonka se voi läpäistä, aalto tyypillisesti osittain heijastuu ja osittain *läpäisee* rajapinnan. Rajapinnan läpäisevä aalto *ei kuitenkaan yleensä kulje suoraan* vaan sen suunta tyypillisesti käantyy rajapinnalla. Tämäkin tapahtuu kaikille aalloille, mutta jälleen valon tapauksessa ilmiö on erityisen helppo havaita. Esimerkiksi vesilasissa oleva lusikka näyttää sopivasta kulmasta katsoen taittuneelta, koska vedestä ilmaan saapuvan valon reitti ei ole suora, ja tämä vääristää havainnon.

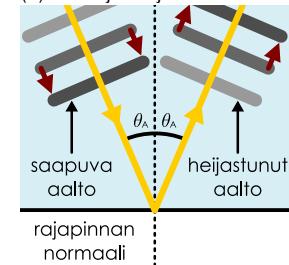
Kuvassa 16.9 on piirretty rajapinnalla taittuvan aallon kulku, kun aalto kulkee väliaineesta A väliaineeseen B. Aallon taajuus ei muutu sen ylöttäessä rajapinnan, mutta sen nopeus ja aallonpituuus yleensä muuttuvat, koska nämä riippuvat väliaineesta. Voimme jälleen valita Huygensin periaatteen mukaisesti aaltonrintamasta joukon pistettä ja piirtää niiden ympärille näistä pistestä lähteviä aaltoja kuvavat ympyrät. Nyt kuitenkin näiden ympyröiden täytyy olla eri väliaineissa erisuuret, koska ympyröiden säde vastaa aallonpituitta juuri tässä väliaineessa. Esimerkiksi kuvassa 16.9 (a) aallonpituuus on väliaineessa B suurempi kuin väliaineessa A,  $\lambda_A < \lambda_B$ . Aaltonrintaman muoto voidaan jälleen piirtämällä kaikkia ympyröitä sivuava verhokäyrä, ja

Kuva 16.8: Rajapinnalle vinosti saapuva aalto heijastuu samassa kulmassa kuin missä se saapuu pinnalle.

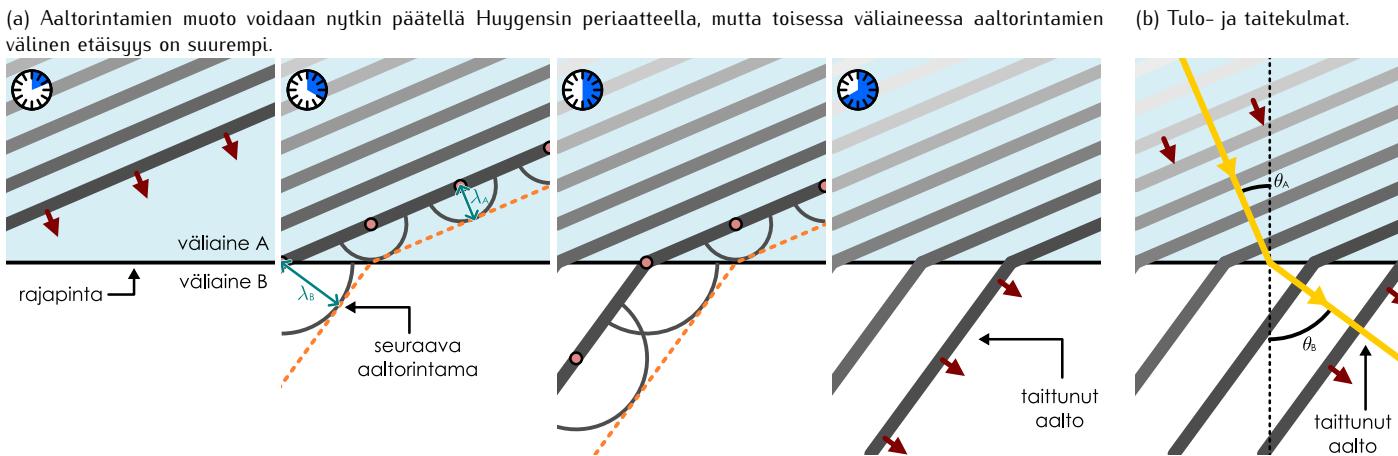
(a) Aaltonrintamien muoto voidaan päätellä Huygensin periaatteella.



(b) Tulo- ja heijastuskulmat.



Kuva 16.9: Rajapinnan läpäisevä aalto taittuu eli aallon suunta muuttuu, jos aallonpituuus on rajapinnan eri puolilla eri suuri.



koska ympyröiden säteet ovat rajapinnan eri puolilla eri suuret, tämän käyrän täytyy rajapinnan eri puolilla muodostaa erisuuruiset kulmat rajapintaan nähdyn. Niinpä aaltojen kulkusuunnat ovat myös erilaiset. Tässä tapauksessa kulma väliaineessa A on pienempi kuin väliaineessa B,  $\theta_A < \theta_B$ .



**16.9** Tarkastele kuva 16.9. (a) Kummassa väliaineessa aallon vauhti on suurempi? (b) Millainen kuvio olisi, jos vauhtien suhde olisi päinvastainen?

Aaltorintamien ja rajapinnan väliset kulmat voi päätellä geometrisesti kuvan 16.10 kuvion avulla. Väliaineessa A aaltorintamien välinen etäisyys on sama kuin aallonpituuus tässä väliaineessa,  $\lambda_A$ , ja vastaavasti väliaineessa B rintamien välinen etäisyys on  $\lambda_B$ . Kuviossa tämä tarkoittaa sitä, että merkitytten pisteiden  $Q$  ja  $R$  välinen etäisyys on  $L_{QR} = \lambda_A$  ja pisteiden  $P$  ja  $S$  välinen etäisyys on  $L_{PS} = \lambda_B$ . Lisäksi aaltorintamien täytyy olla rajapinnalla jatkuvat, sillä aallon vaihe ei muutu sen läpäistessä rajapinnan. Niinpä rintamia kuvavissa viivoissa ei saa olla hyppäystä rajapinnalla. Kuvassa tämä näkyy niin, että aaltorintamat kohtaavat pisteissä  $P$  ja  $Q$ .

Kolmiot  $PQR$  sekä  $PQS$  ovat suorakulmaiset, ja jana  $PQ$  on niiden yhteinen hypotenuusa. Kolmiossa  $PQR$  kärkipisteen  $P$  kulma on aaltorintaman ja rajapinnan välinen kulma  $\theta_A$ , joten tämän kolmion perusteella kulman siinä voidaan kirjoittaa kateetin  $QR$  ja hypotenuusan  $PQ$  pituuden suhteen,  $\sin \theta_A = L_{QR}/L_{PQ}$ . Vaihtoehtoisesti tästä voidaan ratkaista janan  $PQ$  pituudeksi

$$L_{PQ} = \frac{L_{QR}}{\sin \theta_A} = \frac{\lambda_A}{\sin \theta_A}. \quad (16.8)$$

Samalla tavalla kolmiossa  $PQS$  kärkipisteen  $Q$  kulma on  $\theta_B$  ja niinpä janan  $PQ$  pituus on tämän perusteella

$$L_{PQ} = \frac{L_{PS}}{\sin \theta_B} = \frac{\lambda_B}{\sin \theta_B}. \quad (16.9)$$

Yhdistämällä nämä kaksi relatiota saadaan aallonpituuksien ja kulmien välille yhteyts

$$\frac{1}{\lambda_A} \sin \theta_A = \frac{1}{\lambda_B} \sin \theta_B. \quad (16.10)$$

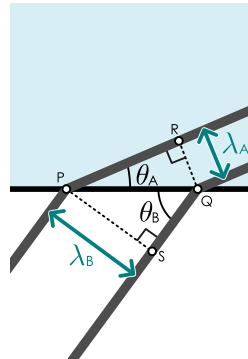
Tämä on aaltojen **tattumislaki** eli Snellin laki (Willebrord Snelliuksen mukaan).

Tattumislain voi kirjoittaa moneen eri muotoon, koska sinimuotoisen aallon aallonpituuus, taajuus ja nopeus liittyvät toisiinsa perusyhtälön  $v_{\text{aalto}} = f\lambda$  mukaisesti. Valon tapauksessa on tavallista määritellä **taitekerroin**  $n$  valonnopeuden ja sähkömagneettisen aallon väliaineessa mitatun vauhdin (täsmällisemmin vaihenopeuden) suhteen,

$$n = \frac{c}{v_{\text{aalto}}}. \quad (16.11)$$

Taitekerroin on yksikötön luku, joka on määritelmän mukaisesti tyhjössä yksi ja väliaineissa yleensä suurempi kuin yksi. Sijoittamalla taitekerroimen määritelmään aallon nopeuden paikalle taajuuden ja aallonpituuuden

Kuva 16.10: Tattumislain selittävä geometria.



## MONIULOTTEISET AALLOT

tulon, taitekerroin voidaan kirjoittaa myös muodossa  $n = c/(f\lambda)$ , ja tämän perusteella aallonpituuus on taajuuden ja taitekertoimen avulla kirjoitettuna  $\lambda = \frac{c}{fn}$ . Kun sijoitamme tämän lausekkeen tattumislakiin ja supistamme yhtälön kummaltakin puolelta pois tekijät  $c$  ja  $f$ , jotka eivät riipu väliaineesta, tattumislaki voidaan kirjoittaa muodossa

$$n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B. \quad (16.12)$$

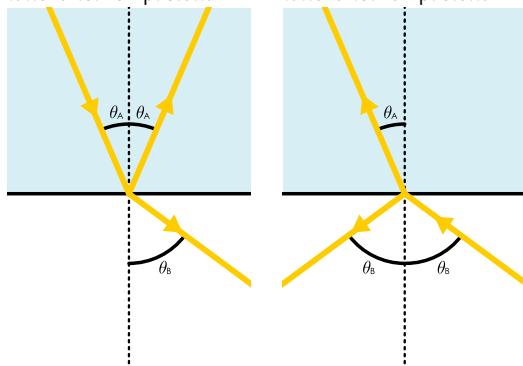


**16.10** Väliaineen A taitekerroin on 1.0 ja väliaineen B 1.3. Vertaa valon (a) nopeutta, (b) aallonpituuutta, (c) taajuutta sekä (d) tulo- ja taitekulmia näissä väliaineissa.

Aineita, joiden taitekertoimet ovat suuret, kutsutaan *optisesti tiheiksi*, ja tyypillisesti ne ovat tiheitä myös massaltaan. Esimerkiksi ilman kuten muidenkin kaasujen taitekerroin on hyvin lähellä yhtä, mutta veden taitekerroin on noin 1.3 ja läpinäkyvien kiinteiden aineiden kuten lasin ja monien muovien taitekertoimet ovat tavallisesti välillä 1.3–2. Vesi ja lasi ovat sis optisesti tiheämpää kuin ilma. Joidenkin kristallien taitekertoimet ovat vielä suuremmat. Esimerkiksi timantin taitekerroin on noin 2.4.

Kuva 16.11: Tulo- ja taitekulmien symmetria.

(a) Aalto saapuu suuren taitekerroimen puolelta. (b) Aalto saapuu pienen taitekerroimen puolelta.



Kun valo saapuu optisesti tiheästä aineesta optisesti harvaan, osa valosta heijastuu ja osa läpäisee aineiden rajapinnan, ja läpäisseen valonsäteen kulkusuunta tattuu tattumislain mukaisesti *pois rajapinnan normaalista*. Tämä tilanne on piirretty kuvaan 16.11 (a), jossa sininen alue voisi olla esimerkiksi lasia ja valkeaa ilmaa. Vastaavasti jos valo saapuu optisesti harvasta aineesta, se tattuu *kohti rajapinnan normalia* kuten kuvassa 16.11 (b).

Huomaa erityisesti, että kuviossa 16.10 ei mainittu lainkaan aaltojen liikkeen suuntaa, joten sama kuva voi kuvata väliaineesta A väliaineeseen B (tiheästä harvaan) kulkevaa aaltoa sekä väliaineesta B väliaineeseen A (harvasta tiheään) kulkevaa aaltoa. Tämä ilmenee myös tattumislain matemaattisessa muodossa: yhtälö ei muutu vaikka väliaineita kuvavat indeksit vaihdetaan keskenään. Tämä symmetria näkyy myös kuvissa 16.11 (a) ja (b) siten, että tulevaa ja tattunutta valoa kuvavat suorat ovat kuvissa yhdensuuntaiset — vain valon kulkusuunta on käännytetty ympäri.

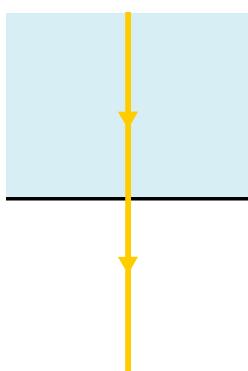
Tattumiskulma kasvaa aina, jos tulokulma kasvaa. Lisäksi kulma kasvaa optisesti tiheämässä aineessa (suuri taitekerroin) *hitaammin* kuin optisesti harvassa aineessa. Tämä on piirretty kuvasarjaan 16.12, jossa tulokulma kasvaa vasemmalta oikealle ja valo saapuu optisesti tiheästä aineesta A. Tästä seuraa, että jos valo saapuu rajapinnalle optisesti harvasta aineesta (kuvassa aine B), suurin mahdollinen tattumiskulma saavutetaan tulokulman lähestyessä arvoa  $\theta_B \rightarrow 90^\circ$ . Tattumiskulman suurin arvo  $\theta_{A,raja}$  voidaan tällöin ratkaista tattumislaita,  $n_A \sin \theta_{A,raja} = n_B \sin 90^\circ = n_B$ . Jos valo sen sijaan saapuu optisesti tiheästä aineesta (kuvassa aine A), tulokulma  $\theta_A$  voi tieteenkin olla suurempi kuin edellä määritetty  $\theta_{A,raja}$ . Tällöin ei kuitenkaan ole olemassa tattumiskulmaa  $\theta_B$ , joka toteuttaisi tattumislain, joten valo ei voi läpäistä rajapintaa lainkaan. Tätä ilmiötä kutsutaan *kokonaishiejastukseksi*.



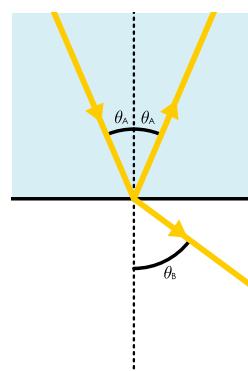
**16.11** Mikä on suurin mahdollinen taitekulma, jos valo saapuu ilmasta (taitekerroin 1.0) (a) veteen (taitekerroin 1.3) tai (b) muoviin (taitekerroin 1.5)?

Kuva 16.12: Kokonaishiejastuminen voi tapahtua, kun aalto saapuu rajapinnalla suuren taitekerroimen väliaineesta.

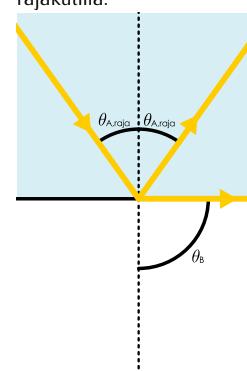
(a) Tulokulma nolla.



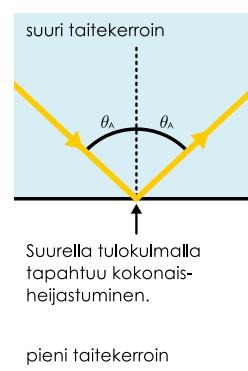
(b) Pieni tulokulma.



(c) Kokonaishiejastumisen rajakulma.

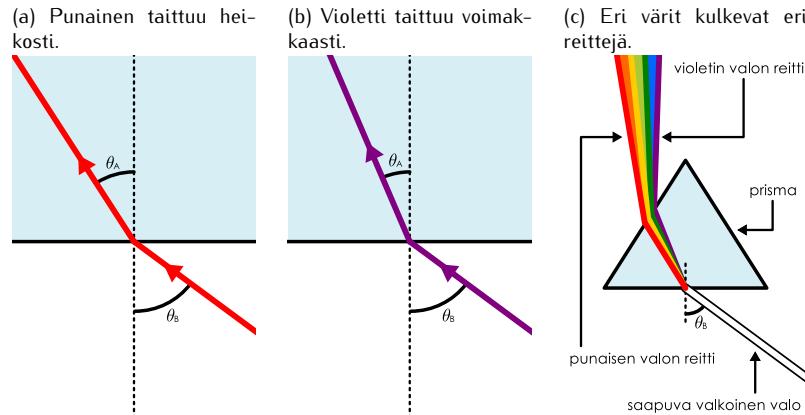


(d) Kokonaishiejastuminen.



pieni taitekerroin

Kuva 16.13: Dispersiosta johtuen taitekerroin riippuu valon väristä. Niinpä eri värit taittuvat eri kulmiin. Valkoinen valo on eri värien yhdistelmä, ja nämä eri värit taittuvat hiukan eri suuntiin, mikä erottelee ne toisistaan.



## Dispersio

Tutustuimme jo yhdessä ulottuvuudessa dispersioon eli tilanteisiin, joissa sinimuotoisen aallon nopeus riippuu sen taajuudesta. Yhdessä ulottuvuudessa tämä johtaa siihen, että superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot ajautuvat aallon kulkusuunnassa eri kohtiin. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa dispersio voi aiheuttaa sen, että eri taajuksilla värähtelevät aallot päätyvät kulkemaan *eri suuntiin*. Klassinen esimerkki dispersiosta on valkoisen valon hajautuminen eri väreihin prismassa tai vaikkapa sateenkaressa.

Valo, jonka ihminen näkee valkoisena, on itse asiassa superpositio useista eri väreistä eli eri taajuksilla värähtelevistä sinimuotoisista sähkömagneettisista aalloista. Tyhjiössä kaikki sähkömagneettiset aallot kulkevat valonnopeudella  $c$ , mutta esimerkiksi vedessä ja lasissa eri taajuudella värähtelevät sähkömagneettiset aallot liikkuvat hiukan eri nopeuksilla. Edelleen koska taitekerroin riippuu määritelmän (16.11) mukaisesti aallon nopeudesta, *eri värellä on hiukan erisuuruiset taitekerrotimet*.

Kuvassa 16.13 on kuvattu eri värien taittuminen valon saapuessa dispersiiviseen väliaineeseen. Näkyvän valon väreistä punaisella on pienin taajuus ja suurin aallonpituuus kun taas violetilla on suurin taajuus ja pienin aallonpituuus. Lisäksi näkyvän valon taajuusalueella taitekerroin yleensä kasvaa, kun valon taajuus kasvaa. Niinpä esimerkiksi lasissa eri väreistä punaisella on pienin taitekerroin, violetilla suurin ja muilla värellä kerroin on näiden välillä. Kun siis punainen ja violetti valonsäde saapuvat ilmasta lasiin, punainen taittuu vähemmän kuin violetti eli punaisen valon taitekulma on suurempi. Kuvassa 16.13 (c) nähdään, miten prisma erottelee nämä eri värit toisistaan, kun ne saapuvat yhdessä valkoisena valonsäteenä.



**16.12** Punaisen valon taitekerroin vedessä on noin 1.33 ja violetin 1.34. Kuinka paljon näiden värien taitekulmat poikkeavat toisistaan, jos valon tulokulma ilmasta veteen on  $45^\circ$ ?

## Polarisaatio

Erottelimme jo luvussa 15 pitkittäisen ja poikittaisen aaltoliikkeen. Esimerkiksi ääni on pitkittäinen aalto. Ääni koostuu tavallisesti ilmassa etenevistä aalloista, joissa ilman molekyyliit liikkuvat aallon etenemissuunnassa edestakaisin muodostaen tiheitymää (korkean paineen alueita) ja harventumia (matalan paineen alueita). Sen sijaan jos köyden päättä heilutetaan, köyteen syntyy poikittaisia aaltoja, joissa köyden poikkeamat tasapainoisesta tapahtuvat köyden pituuteen nähden kohtisuoraan. On vielä mahdollista, että väliaine liikkuu sekä aallon kulkusuunnassa että siihen nähden kohtisuoraan. Esimerkiksi veden pinta-aallot ovat tällaisia, sillä vesi liikkuu aallon kulkissa edestakaisin sekä pystysuunnassa että aallon kulkusuunnassa.

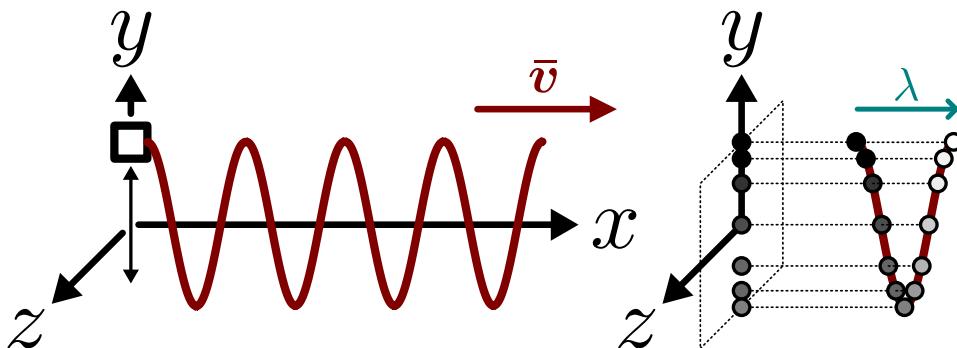
Tämän lisäksi kolmessa ulottuvuudessa on olemassa *erilaisia* poikittaisia aaltoja, koska aallon liikesuuntaan nähden on olemassa useita kohtisuoria suuntia. Kuvassa 16.14 on piirretty joitakin erilaisia aaltoja, joita  $x$ -suuntaan jännitetynä köydessä voi kulkea. Kuvassa (a) köyden päättä heilutetaan harmonisesti pystysuunnassa eli valitun koordinaatiston  $y$ -suunnassa, jolloin köyteen syntyy pystysuuntaisesti värähtelevä sinimuotoinen aalto. Kuvassa (b) köyden päättä heilutetaan vaakasuunnassa eli  $z$ -suunnassa, jolloin aalto värähtelee vaakasuuntaisesti. Aallot ovat siis muuten täsmälleen samanlaiset paitsi että niissä väliaine värähtelee eri suuntiin.

Sitä, että aallon värähtelyillä on tietty suunta, kutsutaan **polarisaatioksi**. Kuvien 16.14 (a) ja (b) aallot ovat *tasopolarisoituneet*, koska niissä värähtelyt tapahtuvat yhdessä tasossa. Kaikki poikittaiset aallot voivat olla

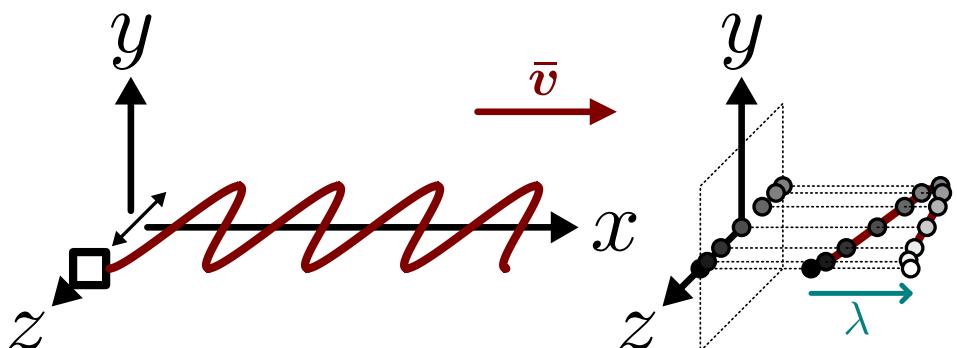
## MONIULOTTEiset aalot

Kuva 16.14: Poikittainen aaltoliike voi tapahtua eri suuntiin, mitä kutsutaan polarisaatioksi. Esimerkiksi  $x$ -suunnassa suoraksi jännitetyn köyden pää voi liikkua  $y$ -suunnassa  $z$ -suunnassa tai molemmissa suunnissa samanaikaisesti, jolloin köyteen syntyy näissä suunnissa värähteleviä aaltoja.

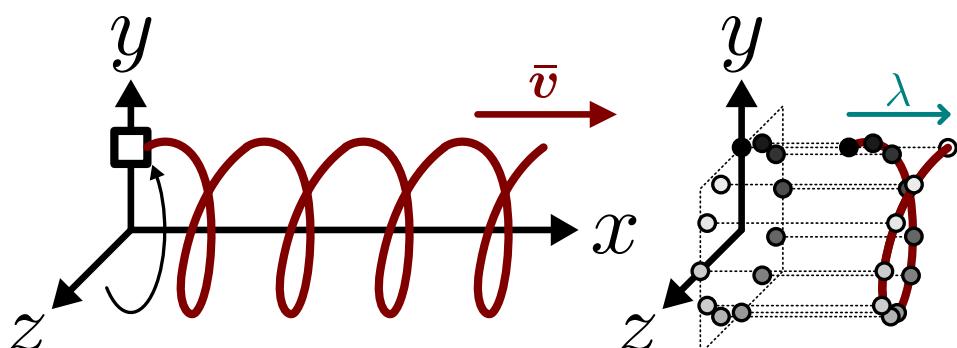
(a) Tasopolarisaatio  $y$ -suuntaan.



(b) Tasopolarisaatio  $z$ -suuntaan.



(c) Ympyräpolarisaatio.



polarisoituneita, mutta niiden ei tarvitse olla. Jos köyden päättä heilutettaisiin satunnaisesti eri suuntiin  $yz$ -tasossa, myös köyteen syntyvä aalto värähtelisi satunnaisesti eri suuntiin, jolloin aalto olisi *polarisoitumaton*.

Kuvassa 16.14 (c) on esitetty vielä köysi, jonka päättä pyöritetään. Tällaiseen köyteen syntyy *spiraalina* etenevä aalto, joka liikkuu samalla nopeudella kuin kuvien (a) ja (b) aallot. Tällaista aaltoa kutsutaan *ympyräpolarisoituneeksi*, jos spiraali on  $x$ -suunnasta katsoen ympyrä, tai *elliptisesti polarisoituneeksi*, jos spiraali on elliptinen.



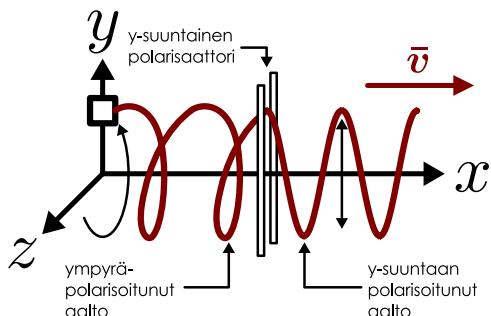
**16.13** Millainen polarisaatio on aallossa, joka muodostuu  $y$ - ja  $z$ -suunnissa tasopolarisoituneiden sinimuitosten aaltojen superpositiona, jos (a) aalloilla on sama amplitudi, taajuus ja vaihe, (b) aalloilla on sama amplitudi, taajuus ja vaihe-ero  $\pi/2$ , (c) aalloilla on eri taajuudet?

Polarisaatio on merkittävä ilmiö siksi, että valokin on poikittainen aalto, joka voi siis olla polarisoitunut. Sähkömagneettisessa aallossa sähkö- ja magneettikenttä nimitän värähtelevät kohtisuorassa sekä toisiaan että valon kulkusuuntaa vastaan. Yleensä sähkömagneettisen aallon sähkökenttä vuorovaikuttaa ympäristön kanssa voimakkaammin kuin magneettikenttä, joten valon polarisaatiosuunta määritellään nimenomaan sähkökentän värähtelysuuntana.

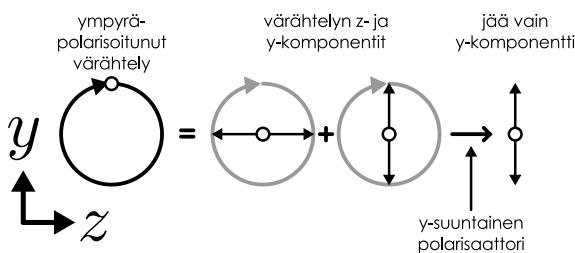
Valon polarisoituminen on yleinen ilmiö. Valo voi polarisoitua osittain tai jopa täydellisesti heijastuessaan rajapinnasta. On myös olemassa aineita ja rakenteita, joissa valon absorptio riippuu polarisaatiosuunnasta.

Kuva 16.15: Köysi kulkee kahden lähekäisen, liukkaan tangon välistä, mikä estää köyden värähtelyn vaakasuunnassa. Tämä on polarisaattori, joka päästää lävitseen vain pystysuuntaisen värähtelyn.

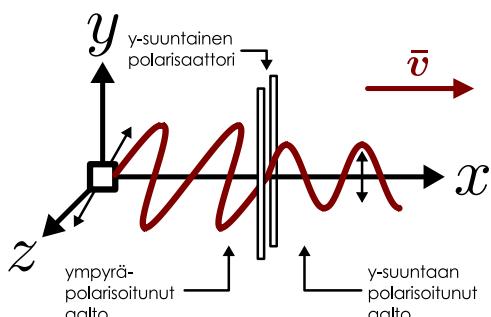
(a) Ympyräpolarisoitunut aalto kulkee polarisaattorista.



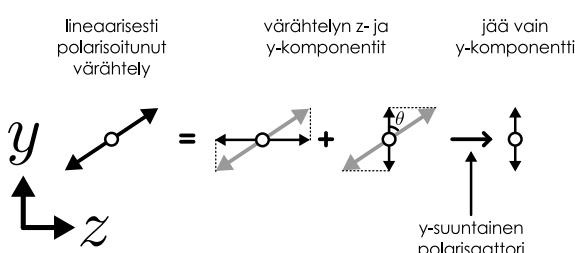
(b) Jäljelle jää tasopolarisoitunut aalto.



(c) Vinosti tasopolarisoitunut aalto kulkee polarisaattorista.



(d) Jäljelle jää värähtelyn pystykomponentti.



Nämä ovat *polarisaattoreita*, ja ne päästävät tiettyyn suuntaan polarisoituneen sähkömagneettisen aallon lävitseen mutta absorboivat tehokkaasti tätä suuntaa vastaan polarisoituneet aallot. Toisin sanoen tällaiset aineet ovat läpinäkyviä vain jos valo on polarisoitunut oikeaan suuntaan.

Polarisaattoreiden toiminta on esitetty kuvassa 16.15, jossa esimerkkinä on jälleen köysi. Köysi kulkee kapeasta raosta, joka estää köyttä liikkumasta sivusuunnassa mutta antaa sen liikkua vapaasti pystysuunnassa. Tästä raosta pääsee lävitse vain pystysuuntainen värähtely, joten rako toimii polarisaattorina. Jos köydesä kulkee polarisoitumaton tai ympyräpolarisoitunut aalto, joka värähtelee sekä vaaka- että pystysuunnissa, polarisaattori poimii allostia sen pystysuuntainen värähtelyn, jolloin polarisaattorin läpäissyt aalto on pystysuuntaan tasopolarisoitunut (kuvat 16.15 (a) ja (b)).



**16.14** (a) Erään valoa polarisoivan materiaalin rakenne on sellainen, että siivä elektronit pääsevät liikkumaan helposti vain yhteen suuntaan (materiaali koostuu pienistä yhdensuuntaisista johtavista säikeistä). Mihin suuntaan polarisoituttaa valoa tämä materiaali absorboi ja mihin suuntaan polarisoituneen se päästää lävitseen? (b) Toimiiko kapea rako valon polarisaattorina? Miksi?

Samoin tapahtuu, jos polarisaattoriin saapuu jo valmiiksi tasopolarisoitunut aalto (kuvat 16.15 (c) ja (d)). Jos saapuva aalto on polarisoitunut pystysuuntaan, se pääsee polarisaattorin läpi sellaisenaan. Jos saapuva aalto on polarisoitunut vaakasuuntaan, se ei pääse polarisaattorin läpi lainkaan. Yleisesti saapuvan aallon värähtely voidaan jakaa kahteen komponenttiin: polarisaattorin salliman suunnan suuntaiseen (tässä pystysuunta) sekä tätä vastaan kohtisuoraan (tässä vaakasuunta). Näistä vain sallittu komponentti pääsee polarisaattorin läpi. Jos saapuvan tasopolarisoituneen aallon amplitudi on  $A_{\text{saapuva}}$  ja aallon polarisaatiosuunnan sekä polarisaattorin salliman polarisaatiosuunnan välillä on kulma  $\theta$ , aallon komponentti sallitussa suunnassa värähtelee amplitudilla  $A_{\text{läpäissyt}} = A_{\text{saapuva}} \cos \theta$ . Polarisaattorin läpäisseen aallon polarisaatiosuunta siis muuttuu ja amplitudi pienenee. Edelleen koska aallon energiatihleys ja intensiteetti ovat verrannolliset amplitudin neljänneksi,  $I \sim A^2$ , aallon intensiteettikin pienenee sen kulkessa polarisaattorista,

$$I_{\text{läpäissyt}} = I_{\text{saapuva}} \cos^2 \theta. \quad (16.13)$$

Tämä on *Malus'n laki* (Etienne-Louis Malus'n mukaan).



**16.15** Tarkastellaan kuvan 16.15 aaltoja. Mikä on kummankin aallon intensiteetin suhteellinen muutos aaltojen kulkessa polarisaattorin läpi?

## esimerkki 16.2

## Brewsterin laki

Valolla on sellainen ominaisuus, että jos rajapinnalta heijastunut alunperin polarisoitumaton valo kulkee täsmälleen kohtisuoraan taittuneeseen valoon nähdien, heijastunut valo on täysin tasopolarisoitunutta. Tätä kutsutaan Brewsterin laiksi (David Brewsterin mukaan). Mikä pitää olla valon tulokulma, jotta ilmasta saapuva ( $n_{ilma} = 1.0$ ) ja veden pinnasta heijastuva ( $n_{vesi} = 1.3$ ) valo polarisoituisi täysin?

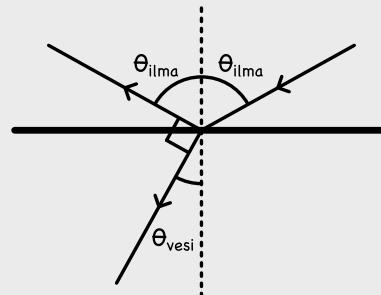
**SUUNNITELMA** Piirretään kuva. Heijastuskulma on sama kuin tulokulma,  $\theta_{ilma}$ . Taitekulma  $\theta_{vesi}$  puolestaan ratkeaa taittumislaista

$$n_{ilma} \sin \theta_{ilma} = n_{vesi} \sin \theta_{vesi}. \quad (16.14)$$

Brewsterin ehdon mukaan näille pitää päteä

$$\theta_{ilma} + \theta_{vesi} = 90^\circ, \quad (16.15)$$

sillä kuten kuvasta nähdään, heijastuskulma, taitekulma ja näiden välinen kulma muodostavat yhdessä oikokulman  $180^\circ$ . Niinpä jos välinen kulma on  $90^\circ$ , heijastuskulman ja taitekulman pitää yhteensä olla myös  $90^\circ$ .



**RATKAISU** Brewsterin ehdosta voidaan ratkaista taitekulma,  $\theta_{vesi} = 90^\circ - \theta_{ilma}$ , ja tämä voidaan sijoittaa taittumislakiin, jolloin saadaan  $n_{ilma} \sin \theta_{ilma} = n_{vesi} \sin(90^\circ - \theta_{ilma})$ . Toisaalta  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ , joten saamme

$$\frac{\sin \theta_{ilma}}{\cos \theta_{ilma}} = \frac{n_{vesi}}{n_{ilma}}. \quad (16.16)$$

Edelleen koska  $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$ , kulmaksi ratkeaa

$$\theta_{ilma} = \arctan \frac{n_{vesi}}{n_{ilma}} = \arctan 1.3 = 0.915 = 52^\circ. \quad (16.17)$$

**ARVIOINTI** Valo taittuu vedessä kohti pinnan normaalialia, joten  $\theta_{vesi} < \theta_{ilma}$ . Niinpä jotta taittunut ja heijastunut valo kulkisivat kohtisuoraan toisiaan vasten, täytyy olla  $\theta_{ilma} > 45^\circ$ . Tulos on siis järkevä.

Tämän ilmiön vuoksi polarisoivat aurinkolasit ovat hyödylliset. Kun linssien polarisaatiotaso on kohtisuorassa heijastuneen valon polarisaatiosuuntaan nähdien, linssit absorboivat heijastuneen valon. Näin esimerkiksi juuri veden pinnasta heijastuva valo ei häikäise.



**16.16** Kirjoita omien sanojen tiivistelmä taittumisesta, dispersiosta ja polarisaatiosta. Mihin tilanteisiin näitä ilmiöitä havaitaan ja miten aallot käyttäytyvät niissä? Millaisia matemaattisia lakeja ilmiöihin liittyy?

### 16.3 Interferenssi

Jo yhdessä ulottuvuudessa sinimuotoisten aaltojen superpositio osoittautui erittäin merkittäväksi ominaisudeksi, ja kuvasimme seisovat aallot sekä aaltopulssit sinimuotoisten aaltojen yhdistelminä. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa aalloilla on luonnollisesti vielä paljon enemmän mahdollisuuksia yhdistyä kuin yhdessä ulottuvuudessa, ja siksi kakso- ja kolmiulotteiset aallot kokevat superpositiossa monia mielenkiintoisia ilmiöitä, joita yhdessä ulottuvuudessa ei havaita.

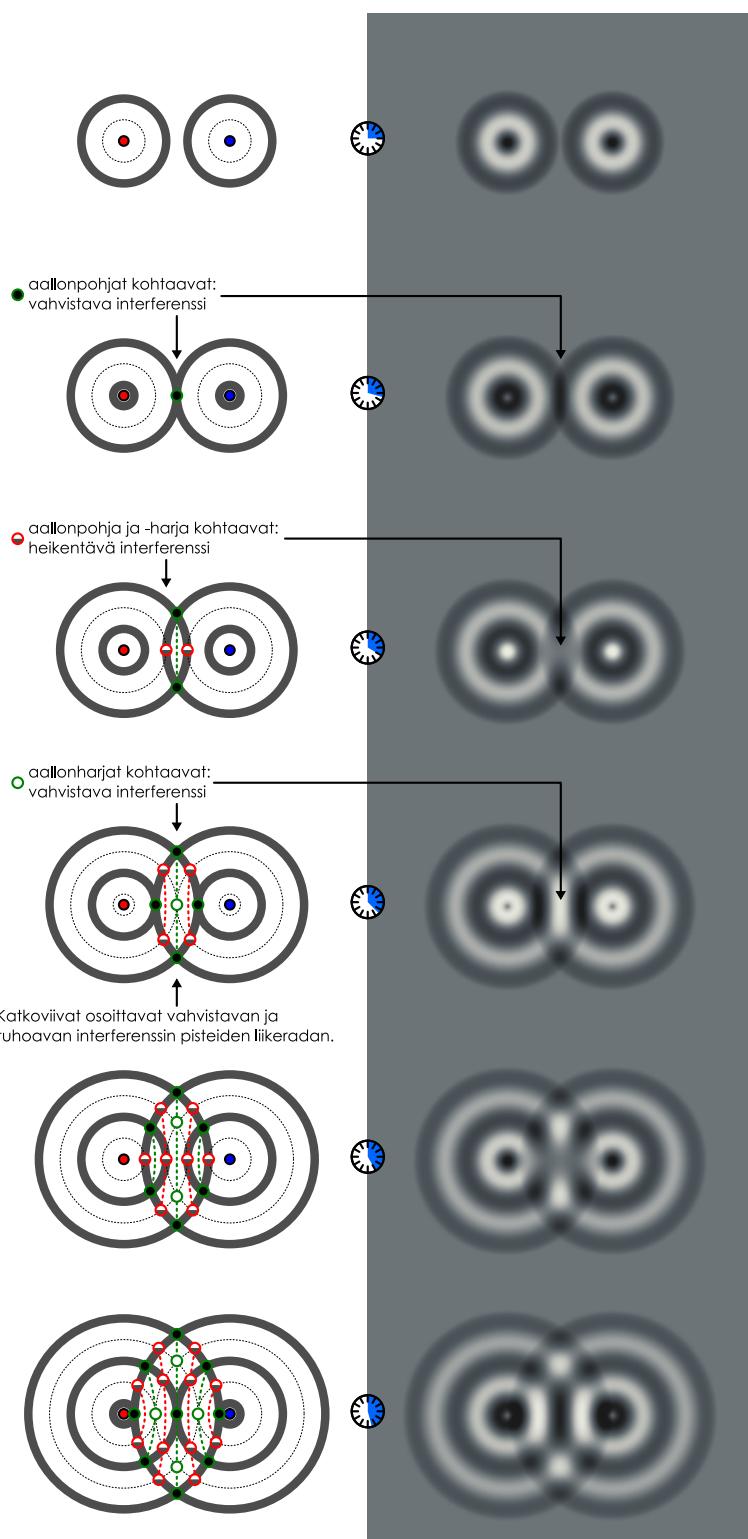
Tarkastelemme tässä luvussa erityisesti tilanteita, joissa samalla taajuudella värähtelevät eli *koherentit* sinimuotoiset aallot ovat keskenään superpositiossa. Tällöin aallot voivat joko vahvistaa tai heikentää toisiaan, jolloin ne saavat väliaineen värähteleämään yhtäällä voimakkaasti ja toisaalla heikosti. Tätä kutsutaan **interferenssiksi**. Tavoitteemme on ymmärtää tärkeimpä ja tavallisimpia interferenssi-ilmiöitä.

#### Kahden aaltolähteen interferenssi

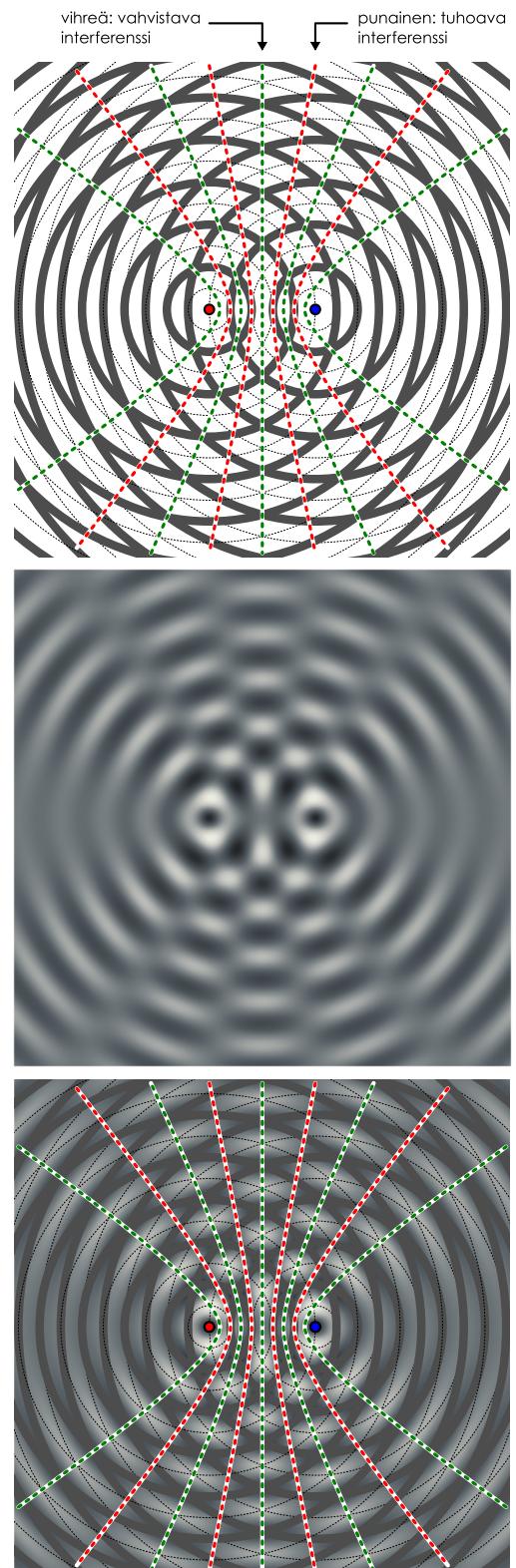
Aloitetaan interferenssin tutkiminen tilanteesta, jossa kaksi lähellä toisiaan olevaa pistemäistä aaltolähettää lähettilä sinimuotoista aaltoliikettä samalla taajuudella ja samassa vaiheessa. Kyseessä voisi olla esimerkiksi kaksi veden pinnalla värähtelevää pieniä kappaletta, kaksi ääntä lähettilä vakaänistä tai kaksi radioaaltoa lähettilä antennia. Tilanne on piirretty kuvan 16.16 (a), jossa on esitetty aaltojen eteneminen pian värähtelyn alettua. Kuvien aikaväli on  $\Delta t = T/4$  eli jaksonajan neljännes, joten aallot etenevät kuvien välistä aallonpituisuuden neljänneksen. Kuvan on piirretty sekä väliaineen poikkeamaa esittävä värikartta että

Kuva 16.16: Kahden aaltolähteen interferenssi. Lähteiden tuottamat aallot on kuvattu rintamina. Kun kaksi aallonpohja kohtaa, ne vahvistavat toisiaan, ja aallon amplitudi on suuri (vihreä). Samoin kun kaksi aallonharjaa kohtaa. Kun toisen aallon harja ja toisen pohja kohtaavat, aallot kumoavat toisensa eikä välinne värähtele lainkaan (punainen).

(a) Vahvistavan ja tuhoavan interferenssin pisteet eri ajan hetkinä.



(b) Lopullinen interferenssikuvio.



## MONIULOTTEISET AALLOT

yksinkertaisempi aaltonintamaesitys. Aallonpohjat on piirretty rintamaesitykseen jälleen tummina viivoina. Aallonharjat on piirretty ohuina katkoviivoina, jotta niiden paikka näkyisi selkeästi.

Sarjan ensimmäisessä kuvassa lähteistä loittonevat ympyrääallot ovat vielä erillään. Toisessa kuvassa aallot kuitenkin kohtaavat, ja superpositioperiaatteen mukaisesti ne jatkavat kulkuaan toistensa lävitse. Nyt aaltolähteiden puolivälissä on piste, johon on saapunut kummastakin lähteestä aallonpohja. Jos yksi aalto sisi aallonpohjassa väliaineen poikkeamaan tasapainosta määrän  $u = -A$ , aallonpohjen kohtauspisteessä väliaineen poikkeama on aaltojen tuottamien poikkeamien summa,  $u = -A - A = -2A$ . Koska väliaineen poikkama tasapainosta on tässä pisteessä suurempi kuin yhden aallon tapauksessa, sanotaan aaltojen kokevan pisteessä *vahvistavan interferenssiä*. Vahvistavan interferenssin pisteet on merkitty kuvasarjaan vihreinä renkaina, ja värikartassa se ilmenee mustana alueena.

Kun aika kulkee eteenpäin, aaltonintamat eivät enää sivua toisiaan yhdessä pisteessä vaan ne leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä. Tämä näkyy sarjan kolmannessa kuvassa. Nämä leikkauspisteet ovat vahvistavan interferenssin pisteitä, joten edellisessä kuvassa ollut yksittäinen vahvistavan interferenssin piste jakautuu kahtia ja näin syntyneet puoliskot kulkevat kuvassa ylös- ja alas päin. Tämä kulkureitti on piirretty kuvaan vihreällä katkoviivalla. Aaltolähteiden yhdysjanalle puolestaan on nyt syntynyt kaksi pistettä, joissa kohtaavat toisen aallon pohja ja toisen aallon harja. Aallonharjalla aalto tuottaa väliaineessa poikkeaman  $u = A$  (jätetään yksinkertaisuuden vuoksi amplitudin riippuvuus lähteestä mitatusta etäisyystä nyt huomioimatta). Niinpä aallonharjan ja -pohjan kohdateissa väliaineen poikkeama tasapainosta on *nolla*,  $u = A - A = 0$ . Tätä sanotaan *tahoavaksi interferenssiksi*, koska vaikka pisteeseen on saapunut kaksi aaltoa, väliaine on siinä edelleen tasapainoasemassa. Kuvaan nämä tahoavan interferenssin pisteet on merkitty punaisin renkain. Värikartassa tahoavan interferenssin alue ilmenee harmaana, koska siinä väliaine on tasapainossa.

Sarjan neljännessä kuvassa lähteiden yhdysjanan puolivälissä on jälleen vahvistavan interferenssin piste, mutta nyt pisteessä kohtaa kaksi aallonharjaa. Väliaineen poikkeama on nyt siis  $u = A + A = 2A$ , mikä näkyy värikartassa valkoisena alueena. Ajan edelleen kuluessa aaltonintamien muodostamat ympyrät lisääntyvät ja kasvavat, jolloin vahvistavan ja tahoavan interferenssin pisteitä syntyy yhä enemmän. Kuvassa 16.16 (b) on esitetty tilanne jonkin ajan kuluttua, jolloin aallot täyttävät tarkasteltavan alueen. Kuvassa on esitetty sama aalto aaltonintamina, värikarttana sekä näiden yhdistelmänä.

Aaltonintamaesitykseen on piirretty vahvistavan ja tahoavan interferenssin pisteiden kulkureitit vihreänä ja punaisena katkoviivana. Nämä käyrät piirtävät sillä säännöllä, että aallonpohjen leikkauspisteiden kautta kulkee aina vihreä käyrä, mutta aallonpohjen ja -harjojen keskinäisten leikkauspisteiden kautta kulkee punainen käyrä. *Vihreät käyrät edustavat niitä väliaineen pisteitä, joissa vahvistava interferensi on voimakkaimillaan* ja aallon amplitudi on suurimmillaan. Aaltoa kuvavassa värikartassa tämä näkyy siten, että vihreiden käyrien suunnissa aallossa on vuorottelevia mustia ja valkoisia alueita eli aallonpohjia ja -harjoja. Punaiset käyrät puolestaan edustavat tahoavan interferenssin pisteitä. Nämä käyrät näkyvät aallon värikarttassa tasaisen harmaina suorina, jotka erottavat mustia ja valkoisia alueita. *Punailla käyrillä väliaine ei siis värähtele lainkaan*.



**16.17** Punaisia käyriä kutsutaan myös "solmukäyriksi", koska väliaine ei niillä värähtele lainkaan kuten seisovan aallon solmussa. Mitä yhteistä ja mitä eroa löydät kuvan 16.16 interferenssikuvista ja esimerkiksi kuvan 15.29 seisovaa aaltoa esittävästä kuvasta? Tarkastele erityisesti aaltolähteitä yhdistävää janaa.

Kahden lähteen interferenssikuviossa aalto siis jakautuu kiilamaisiin osiin (vahvistavan interferenssin alueet), ja näitä erottavat suorat, joilla väliaine ei värähtele (tahoavan interferenssin käyrät). Lisäksi kuten kuvasarjasta 16.16 (a) nähtiin, aaltonintamien leikkauspisteet eli *vahvistavan interferenssin pisteet liikkuvat vihreitä käyriä pitkin*. Aallot siis edelleen loittonevat lähteistä, mutta interferenssistä johtuen aalto jakautuu osiin. Aallot kulkevat *vain* kuvan vihreillä käyrillä merkittijihin suuntiin. Punaisten käyrien suuntiin *ei kulje* lainkaan aaltoliikettä.

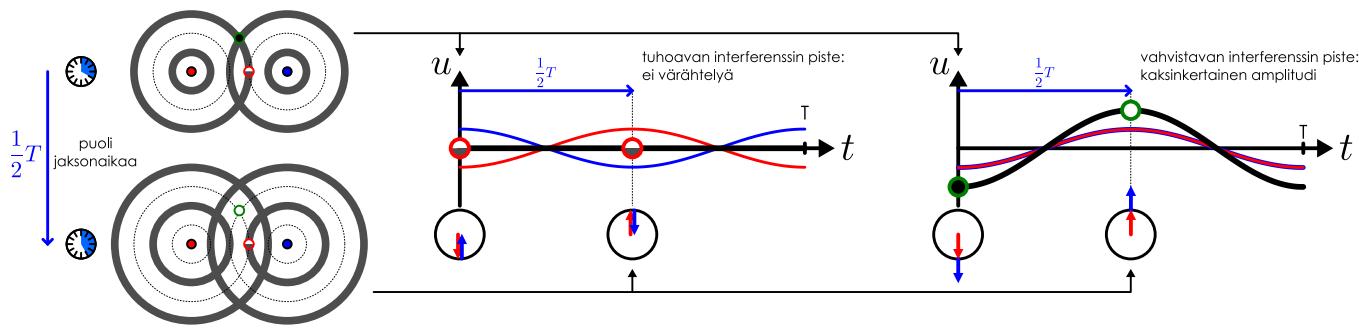


**16.18** Tarkastele aaltolähteiden välistä yhdysjanaa kuvassa 16.16. Punaiset ja vihreät käyrät leikkaavat janan tasavälein. (a) Mikä on käyrien välisen etäisyyden suhde aallonpituuuteen? (b) Jos lähteiden välinen etäisyys on  $d = n\lambda$ , montako punaista ja vihreää käyrää interferenssikuviossa täytyy siis olla?

## Interferoivien aaltojen amplitudi ja intensiteetti

Interferensi on yleinen ilmiö, mutta kuvan 16.16 (b) kaltaista interferenssikuvioita voidaan harvoin nähdä, koska monet aallot eivät ole näkyviä. Kun kuulemme ääntä, havaitsemme ilman värähtelyn siinä pisteessä, jossa korvamme on. Vastaavasti nähdessämme valoa tai vastaanottaessamme radioaaltoja antennilla, havaitsemme sähkömagneettisen kentän värähtelyn havaintopisteessä. Yleensä interferensi siis ilmeneekin siten, että aaltoliikkeen kuljettama signaali havaitaan niissä paikoissa, joissa tapahtuu vahvistavaa interferenssiä, mutta ei tahoavan interferenssin pisteissä.

Kuva 16.17: Väliaineen värähtely tuhoavan (punainen rengas) ja voimistavan (vihreä rengas) interferenssin pisteissä. Tuhoavan interferenssin pisteessä eri lähteistä saapuvat aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa, jolloin niiden superpositio ei värähtele lainkaan. Aaltojen vaiheenosoitimet ovat vastakkaisuuntaiset. Vahvistavan interferenssin pisteessä aallot ovat samassa vaiheessa, jolloin niiden superposition amplitudi on kaksinkertainen alkuperäisiin aaltoihin verrattuna. Vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset.



Tämä periaate on havainnollistettu kuvassa 16.17, jossa on piirretty väliaineen värähtely ajan funktiona kahdessa tarkastelupisteessä. Kuvaajista vasemmanpuoleinen on tuhoavan interferenssin piste. Aluksi punaisena ympyränä merkityn lähteen aallolla on tässä pisteessä aallonpohja ja sinisellä merkityn lähteen aallolla aallonharja, jolloin aallot kumoutuvat. Kun aikaa kuluu puoli jaksonaikaa, pisteessä on punaisen lähteen aallonharja sekä sinisen lähteen aallonpohja, mutta edelleen interferenssi on tuhoavaa.

Itse asiassa pisteessä tapahtuu tuhoava interferenssi *aina*. Nimittäin, kuten luvussa 14 opimme, kahden harmonisen värähtelyn summa on edelleen harmoninen, jos värähtelyjen taajuudet ovat samat. Nyt kumpikin aalto saa väliaineen värähtelemään havaintopisteessä harmonisesti, ja aalloilla on sama taajuus, joten niiden superposition täytyy edelleen värähdellä harmonisesti. Erityisesti tästä värähtelyä voidaan kuvata aaltojen vaiheenosoitimiien summana, ja koska aallot ovat aluksi vastakkaisissa vaiheissa, niiden vaiheenosoitimiien täytyy osoittaa vastakkaisiin suuntiin. Vaiheenosoitimiien summan pituus on siis nolla, mikä tarkoittaa värähtelyn amplitudin olevan tässä pisteessä nolla. Tässä pisteessä aaltoa ei siis havaita lainkaan!

Vahvistavan interferenssin pisteessä on aluksi kummastakin lähteestä saapuneen aallon aallonpohja, joten tässä pisteessä aaltojen vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset. Väliaineen värähtelyä kuvaaa siis vaiheenosoitin, jonka pituus on kaksinkertainen alkuperäisiin aaltoihin nähdyn, joten tässä pisteessä väliaine värähtelee kaksinkertaisella amplitudilla. Tässä pisteessä aalto siis havaitaan. Erityisesti koska värähtelyn amplitudi on *kaksinkertainen* verrattuna siihen, että aaltoa lähettäisi vain yksi lähde, havaittu intensiteetti on *nelinkertainen*, koska aallon energia on verrannollinen amplitudin nelioon.



**16.19** Miten kuvan 16.17 tarkastelupisteissä havaittu aallon intensiteetti muuttuisi, jos toinen aaltolähde poistettaisiin? Onko väliä kumpi lähde poistetaan?

Voi aluksi vaikuttaa oudolta, että intensiteetti nelinkertaistuu, jos kaksi aaltoa vahvistaa toisiaan. Intensiteettihän kuvaaa aallon kuljettamaa energiota, ja voisi ajatella, että kahden aallon yhtyessä niiden energia kaksinkertaistuu. Näin ei kuitenkaan ole. Interferenssi ei tietenkään voi rikkoa energian säilymislakia. Interferenssiin ei liity mitään dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joten se ei voi poistaa aallon kuljettamaa energiota, eikä se tienekään voi myöskään lisätä aaltoon energiota tyhjästä. Sen sijaan *interferenssi ohja aaltojen kuljettamaa energiota*.

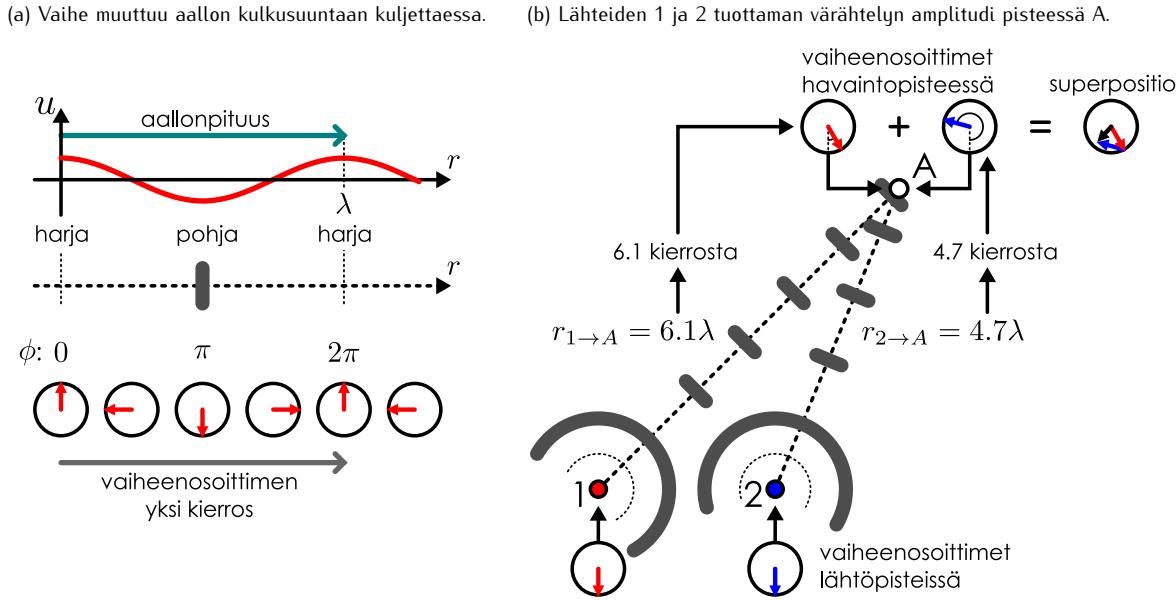
Kahden aaltolähteen kokonaisteho on luonnollisesti kaksinkertainen yhteen lähteeeseen verrattuna, ja niinpä lähteiden määrän kaksinkertaistaminen myös kaksinkertaistaa aaltojen kuljettaman energian kokonaismäären. Interferenssi kuitenkin ohja aallot kulkemaan vain tiettyihin suuntiin. Tuhoavan interferenssin suuntiin ei kulje energiota lainkaan, joten vahvistavan interferenssin suuntiin täytyy kulkea energiota *enemmän kuin kaksinkertainen määrä* verrattuna tilanteeseen, jossa on vain yksi lähde. Täsmällisemmin, jos yhden lähteen tuottaman aallon intensiteetti etäisyydellä  $r$  on  $I_1$ , kahden lähteen yhdessä tuottaman aallon intensiteetti on vahvistavan interferenssin suunnissa  $I_{\text{vahvistava}} = 4I_1$  ja tuhoavan interferenssin suunnissa  $I_{\text{tuhoava}} = 0$ . Vahvistavaa ja tuhoavaa interferenssiä tapahtuu yhtä paljon, jolloin interferovien aaltojen *keskimääräinen* intensiteetti on  $I_{\text{keskiarvo}} = \frac{1}{2}(I_{\text{vahvistava}} + I_{\text{tuhoava}}) = 2I_1$ . Tämä on kaksinkertainen verrattuna yhteen lähteeeseen, kuten energian säilymisen perusteella pitääkin.



**16.20** Onko mahdollista tuottaa tilanne, jossa aallot interferoivat kaikkialla toisiaan vahvistavasti?

## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.18: Väärähtelyn amplitudin määrittäminen interferenssissä. Määritetään aaltojen kulkeman matkan pituis aallonpituuksina. Kierretään aaltojen vaiheenosottimia yhtä monta kierrosta vastapäivään. Lasketaan lopulliset vaiheenosottimet vektoreina yhteen.



Johdetaan vielä menetelmä interferoivien aaltojen tuottaman väärähtelyn amplitudin määrittämiseksi missä tahansa havaintopisteessä. Koska jokainen sinimuotoinen aalto saa väliaineen väärähteleämään harmonisesti, voimme tehdä tämän vaiheenosoitintekniikalla. Jos määritämme erikseen jokaista aaltoa kuvaavan vaiheenosottimen, havaintopisteen väärähtelyä kuvaava vaiheenosoitin saadaan näiden vektorisummana. Merkitsemme nyt ja jatkossa havaintopisteitä kirjaimin ja aaltojen lähteitä numeroin. Tarkastellaan siis tilannetta, jossa aallon synnyttävät pistemäiset lähteet 1 ja 2, ja näiden synnyttämä väärähtely havaitaan pisteessä A.

Aallon amplitudi pienenee ja vaihe kasvaa kuljettaessa lähteestä pois päin. Yleensä kuitenkin olemme kiinnostuneet tilanteesta, joissa aaltojen lähteet ovat likimain yhtä kaukana havaintopisteestä (ts. lähteiden etäisyys toisistaan on paljon pienempi kuin näiden etäisyys havaintopisteestä), ja tällöin havaintopisteeseen saapuvilla aalloilla on lähes sama amplitudi. Tämän vuoksi yleensä oletamme, että kaikilla saapuvilla aalloilla on sama amplitudi. Vaiheenosoitinkuviossa tämä ilmenee siten, että jokaista aaltoa kuvaava yhtä pitkä vaiheenosoitin.

Vaiheenosottimien suunnat puolestaan riippuvat aaltojen vaiheesta havaintopisteessä, ja ne voidaan päättää seuraavasti: Valitaan jokin tietty ajan hetki, jona aaltoa tarkastellaan. Jos aaltojen lähteet väärähtelevät samassa vaiheessa, jokaisen aallon vaihe on valittuna hetkellä sen oman lähteen kohdalla sama,  $\phi_0$ . Esimerkiksi kuvassa 16.18 (b) aaltojen vaiheenosottimet osoittavat näiden lähtöpisteissä alas päin eli  $\phi_0 = \pi$ . Vaiheenosoitin kiertää yhden kierroksen, eli vaihe muuttuu määränpäin  $2\pi$ , kun siirrytään paikassa yksi aallonpiisuus aallon kulkusuuntaan. Niinpä jos etäisyys lähteestä 1 havaintopisteeseen A on  $r_{1 \rightarrow A}$ , lähteen 1 aallon vaiheen täytyy tällä matkalla muuttua

$$\Delta\phi_{1 \rightarrow A} = 2\pi \frac{r_{1 \rightarrow A}}{\lambda}. \quad (16.18)$$

Esimerkiksi kuvassa 16.18 (b) aallon 1 kulkema matka on  $r_{1 \rightarrow A} = 6.1\lambda$ , joten aallon vaiheen muutos tällä matkalla on  $\Delta\phi_{1 \rightarrow A} = 6.1 \cdot 2\pi$ . Aallon vaiheenosottimen suunta havaintopisteessä A saadaan näin ollen kiertämällä lähtöpisteenvaiheenosointia 6.1 kierrosta vastapäivään. Ja koska kokonaiset kierrokset eivät vaikuta vaiheenosottimen suuntaan, tämä on sama kuin että vaiheenosointi kierrettäisiin 0.1 kierrosta eli  $36^\circ$ . Tämä vaiheenosoitin on piirretty kuvaan punaisena nuolena.

Lähteen 2 tuottaman aalon vaiheenosoitin selviää samalla tavalla. Etäisyys lähteestä 2 pisteeseen A on kuvassa 16.18 (b) 4.7 aallonpiisutta, joten vaiheenosointi täytyy kiertää 4.7 kierrosta vastapäivään. Tämä on sama asia kuin jos vaiheenosointi kierrettäisiin ensin puoli kierrosta ja sitten vielä 0.2 kierrosta eli  $72^\circ$ . Tämä on piirretty kuvaan sinisenä nuolena.

Kun interferoivien aaltojen vaiheet on näin selvitetty, voimme ratkaista vaiheenosottimien summan pituuden geometrisesti. Kuvassa tämä vaiheenosoitin on esitetty mustana nuolena, ja tämän nuolen pituus on väärähtelyn amplitudi havaintopisteessä A. Tässä esimerkissä musta nuoli on lyhyempi kuin alkuperäisten aaltojen vaiheenosottimet (punainen ja sininen nuoli), jotka väliaineen väärähtelelee havaintopisteessä pienemmällä amplitudilla kuin jos vain toinen aaltojen lähteistä toimisi. Aallot siis interferoivat toisiaan heikentävästi tässä pisteessä.



- 16.21** (a) Millä ehdolla kahden samalla taajuudella samassa vaiheessa väärätelevän lähteen aallot ovat havaintopisteessä A täsmälleen samassa vaiheessa?  
 (b) Millä ehdolla aallot ovat samassa vaiheessa, jos lähteen 2 vaihe on  $\pi/2$  kun lähteen 1 vaihe on nolla?

### esimerkki 16.3

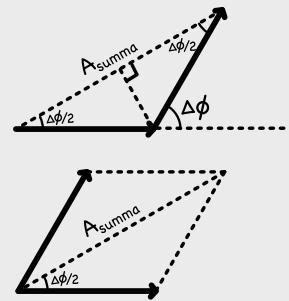
### Kahden lähteen interferenssi

Aaltolähde tuottaa yksin aallon, jonka amplitudi on  $A$  ja intensiteetti  $I$ . Systeemissä on kaksi tällaista lähdettä, joiden tuottamat aallot saapuvat havaintopisteeseen niin, että niiden välinen vaihe-ero on  $\Delta\phi$ . Mikä on summa-aallon amplitudi ja intensiteetti?

<!-- \physics '=latex Piirretään vaiheenosoitinkuvio, jossa on siis kaksi nuolta. Nuolten pituudet vastaavat aaltojen amplitudeja ja niiden välinen kulma on aaltojen vaihe-ero. Aaltojen superposition amplitudi on nuolten vektorisumman pituus.

**RATKAISU** Jaetaan vaiheenosoitinkuvioon syntynyt kolmio kahteen samanmuotoiseen suorakulmaiseen kolmioon. Kummankin kolmion hypotenuusan pituus on  $A$  ja sen toisen kateetin pituus on puolet vaiheenosittimen summan pituudesta. Kuvasta nähdään, että näiden välinen kulma on puolet vaihe-erosta eli  $\Delta\phi/2$ . Niinpä nuolten summan pituudeksi eli aaltojen summan amplitudiksi saadaan

$$A_{\text{summa}} = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (16.19)$$



Intensiteetti on suoraan verrannollinen amplituden neljöön, joten jos interferenssistä johtuen amplitudi kerrotaan tekijällä  $2 \cos \frac{\Delta\phi}{2}$ , intensiteetti kerrotaan tämän neljöllä. Siispä

$$I_{\text{summa}} = 4I \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (16.20)$$

**ARVIOINTI** Jos aallot ovat samassa vaiheessa eli  $\Delta\phi = 0$ , amplitudi on  $2A$  ja intensiteetti  $4I$ , tämä on vahvistavaa interferenssiä. Jos aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa, amplitudi ja intensiteetti ovat kumpikin nollia, mikä on tuhoavaa interferenssiä. Näin pitääkin olla.

Voimme myös verrata tästä tilannetta esimerkissä 14.4 johdettuun tulokseen (14.72), jonka mukaan  $n$  vaiheenosittimen summan pituus on  $A_{\text{summa}} = A \frac{\sin n \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}$ . Nyt  $n = 2$ , joten säännön  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  avulla amplitudiksi saadaan  $A_{\text{summa}} = A \frac{\sin 2 \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} = A \frac{2 \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cos \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2}$ . Tulokset ovat samat kuten tietysti pitääkin olla.

### Usean lähteen interferenssi

Tähän asti olemme tutkinneet vain tilanteita, joissa interfeeroivia aaltoja on kaksi. Superpositiossa voi olla kuitenkin mielivaltaisen monta aaltoa, ja siksi interferenssiäkin voi tapahtua samanaikaisesti monen aallon kesken. Interferensi-ilmiöiden analyysi tapahtuu silti aina periaatteessa samalla tavalla. Jos havaintopisteessä on samanaikaisesti useita sinimuotoisia aaltoja, joilla on sama taajuus, voimme määrittää erikseen jokaisen aallon vaiheenosittimen. Havaintopisteen vääräteljä kuvaava vaiheenosoitin saadaan selville yksittäisten aaltojen vaiheenosittimien summana.

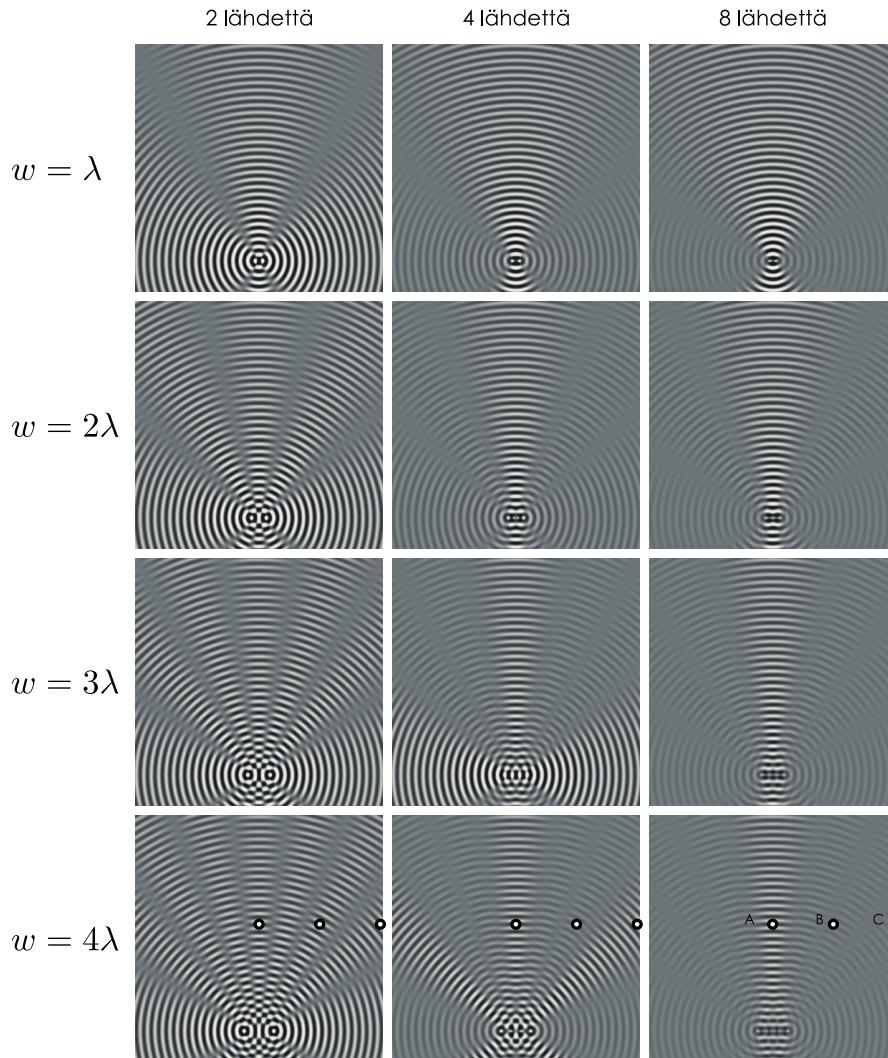
Aina ei ole kuitenkaan tarpeellista ratkaista väliaineen väärätelyn amplitudia täsmällisesti yllä kuvatulla menetelmällä, vaan voimme päättellä myös joitakin interferensi-ilmiöitä kuvavia nyrkkisääntöjä havainnoimalla interfeeroivien aaltojen käytöstä. Tutkimme erityisesti millaisen aallon suorassa rivissä olevat aaltojen lähteet tuottavat, ja miten lähteiden lukumäärän ja niiden muodostaman rivin leveys vaikuttaa interferenssiin. Tätä varten kuvaan 16.19 (a) on piirretty interfeeroivien aaltojen värikarttaesitys, kun lähteitä on rivissä 2, 4 tai 8 kappaletta, ja rivin leveys on yhdestä neljään aallonpituutta. Lähteiden muodostaman rivin leveyttä on tässä merkitty symbolilla  $w$ , kuten kuvassa 16.19 (b) on esitetty.

Jos lähteitä on kaksi, vahvistavan ja tuhoavan interferenssin suuntia on sitä enemmän mitä kauempana toisistaan aaltojen lähteet ovat. Syyn tähän voi ymmärtää tarkastelemalla kuvaa 16.16 (b), jossa vahvistavan ja tuhoavan interferenssin suuntia kuvattiin vihreillä ja punaisilla käyrillä. Nämä käyrät ovat aaltojen lähteiden välissä tasaisin välein, ja näin ollen käyriä täytyy kulkea lähteiden välistä sitä useampi, mitä kauempana toisistaan lähteet ovat. Nämä käyrät ovat jatkuvia ja ne kaikki kulkevat lähteiden välistä, joten mitä kauempana toisistaan lähteet ovat, sitä useampaan kapeaan kiihaan interferensi aallot hajottaa. Tästä seuraa tietenkin myös se, että mitä kauempana toisistaan aaltojen lähteet ovat, sitä *kapeampia* kiloja vahvistavan interferenssin alueet muodostavat.

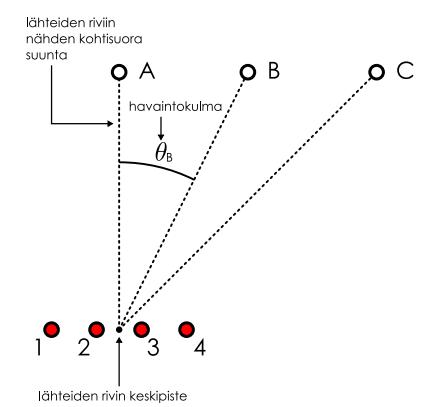
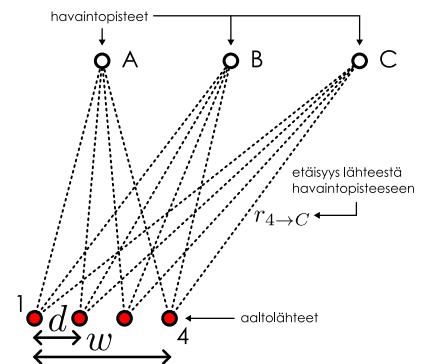
Kun aaltojen lähteiden lukumäärä kasvaa, vahvistavan interferenssin alueiden suhteelliset intensiteetit muuttuvat. Esimerkiksi kuvan 16.19 (a) alimmalla rivillä ( $w = 4\lambda$ ) aallot muodostavat jokaisessa kuvassa

Kuva 16.19: Mitä kauempana toisistaan lähteet ovat, sitä kapeampia kiiloja aallot muodostavat. Kun lähteiden määrä kasvaa, aaltojen intensiteetti keskittyy vain joihinkin näistä killoista.

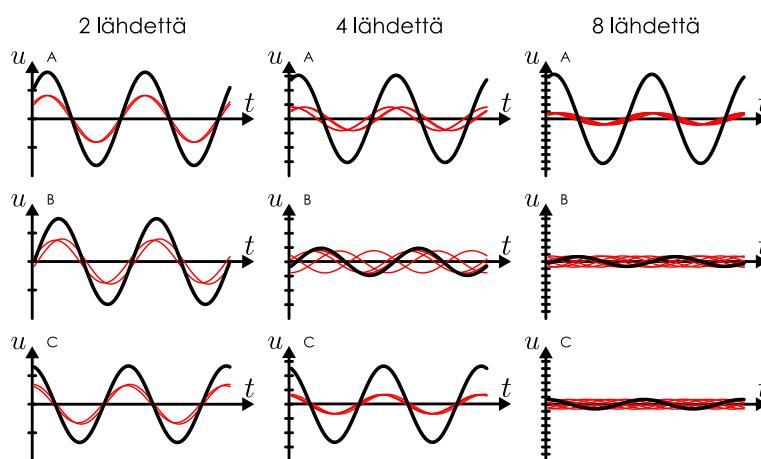
(a) Lähteiden lukumäärän ja etäisyyden vaikutus interferenssikuvioon.



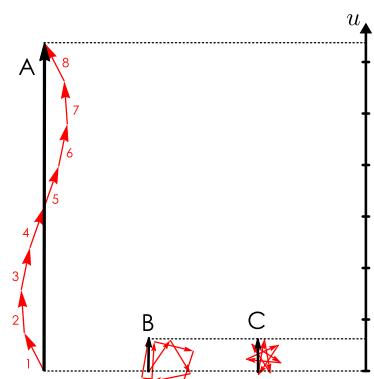
(b) Tarkasteltava geometria.



(c) Väliaineen värähtely havaintopisteissä ajan funktiona. Huomaa kuvaajien eri mittakaavat.

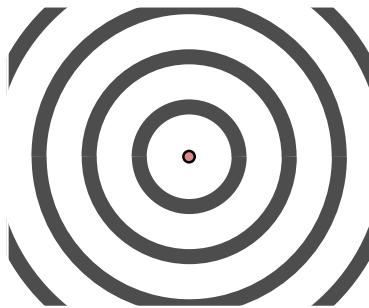


(d) Vaiheenosoitimet eri havaintopisteissä, kun lähteitä on kahdeksan.

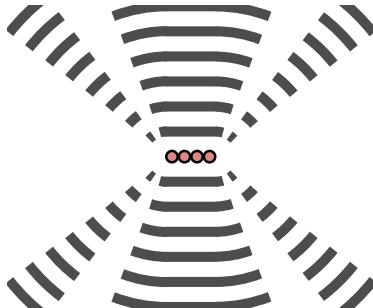


Kuva 16.20: Aallonpituteen näden pieni lähte tuottaa ympyrääaltoja. Interferenssin takia lähteiden rivistä (tai yhdestä leveästä lähteestä) lähtee aaltoja kiilamaisesti vain joihinkin suuntiin. Jos rivi on leveä aallonpituteen näden, syntyy lähes suoria aaltonrintamia, jotka liikkuvat riviin näden kohtisuoraan.

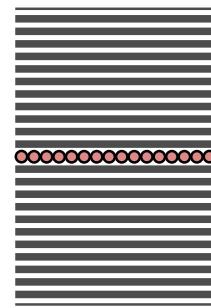
(a) Pistemäinen lähte.



(b) Kapea lähteiden rivi.



(c) Leveä lähteiden rivi.



yhtä monta kiilaan likimain samoihin suuntiin. Kun aaltojen lähteitä on kaksi, näissä kaikissa on likimain sama amplitudi ja intensiteetti. Kuitenkin kun aaltojen lähteitä on neljä, kolmessa külällä aaltojen amplitudi ja intensiteetti on selkeästi muita kiiroja suurempi. Kun lähteitä on kahdeksan, syntyy vain yksi suuren intensiteetin kiila, joka kulkee kohtisuoraan lähteiden muodostamaan riviin näden. Kaikissa muissa suunnissa intensiteetti on tähän verrattuna pieni.

Kuvien on merkitty myös kolme havaintopistettä (A, B ja C), ja kuvaan 16.19 (c) on piirretty väliaineen värähtely ajan funktiona näissä pisteissä. Jokaisessa kuvassa on piirretty erikseen punaisina käyrinä kustakin lähteestä saapuvan aallon tuottama värähtely sekä mustana käyränä näiden superpositio, joka kertoo väliaineen todellisen liikkeen.

Havaintopiste A on lähteiden muodostaman rivin keskipisteestä katsoen rivin normaalilin suunnassa, joten se on likimain yhtä kaukana kaikista lähteistä. Koska lähteet värähtevät samassa vaiheessa, eri lähteiden tuottamat aallot saapuvat havaintopisteeseen likimain samassa vaiheessa vahvistaen toisiaan. Tästä syystä pisteessä A aallon amplitudi on suuri riippumatta lähteiden lukumäärästä.

Pisteet B ja C ovat sivussa lähteiden rivin normaalilta, ja niissä havaittavan värähtelyn amplitudi riippuu siitä, mitkä ovat saapuvien aaltojen *vaiheet*. Esimerkiksi pisteeseen B aallot saapuvat eri vaiheissa, jos lähteitä on 4 tai 8, jolloin niiden superposition amplitudi on huomattavasti matalampi kuin pisteessä A. Amplitudi ei ole kuitenkaan nolla, koska pisteen B suunnassa aallot heikentävät toisiaan mutta tuhoava interferenssi ei sammuta värähtelyä täydellisesti. Pisteeseen C aallot saapuvat samassa vaiheessa, jos lähteitä on 4, jolloin interferenssi on vahvistavaa. Jos lähteitä on 8, aallot ovat eri vaiheissa ja interferenssi on jälleen tuhoavaa.

Tarkastellaan sitten kuvan 16.19 (a) oikeanpuoleista pystysaraketta eli tapauksia, joissa on rivissä kahdeksan pistemäistä aaltolähettää. Ylimmässä kuvassa rivin leveys on yksi aallonpititus ja alimmassa kuvassa neljä aallonpitututta, joten lähteiden välinen etäisyys on kaikissa kuvissa pienempi kuin aallonpititus. Kaikissa näissä tapauksissa suurimman amplitudin aalto muodostaa kuvassa ylöspäin (ja alaspäin) kulkevan kiilan.

Ylimmässä kuvassa, jossa lähteiden rivin leveys on yksi aallonpititus, kiila on leveä. Sen sijaan alimmassa kuvassa, jossa rivin leveys on neljä aallonpitututta, muodostuu kapea, melkein suorista aaltonrintamista koostuva kiila. Toisin sanoen jos aaltojen lähteet ovat tiheässä rivissä tai aaltoa tuottaa viivamainen lähde pistemäisen sijaan, syntyy pääasiassa tämän rivin tai viivan normaalilin suuntaan kulkeva aalto.



**16.22** Missä kaikissa kuvan 16.19 (a) tilanteissa lähteiden välinen etäisyys  $d$  on pienempi kuin yksi aallonpititus? Miten nämä eroavat tapauksista, joissa  $d \geq \lambda$ ?

Mitä leveämpi tai pidempi tämä aallon lähde on aallonpituteen verrattuna, sitä kapeampi kiila muodostuu. Aallonpitutetta selvästi pienempi lähde toimii kuten pistemäinen lähde ja se lähettää joka suuntaan levävän ympyrääallon (kuva 16.20 (a)). Esimerkiksi ääntä tuottava kappale lähettää ääntä ympärilleen joka suuntaan etenevinä painealtoina. Kun lähteiden rivin pituus on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpititus, aalto ei enää levä kaikkiin suuntiin yhtä voimakkaasti, vaan se muodostaa yhden tai useita kiiroja (kuva 16.20 (b)). Jos puolestaan lähteiden rivi on huomattavasti pidempi kuin aallonpititus, syntyy suoraan kulkeva aalto, joka ei juurikaan hajaannu (kuva 16.20 (c)). Esimerkiksi valonsäteet käyttäytyvät tyypillisesti näin, sillä tavallisesti valo kulkee tasaoaltoina, joiden leveys on huomattavasti niiden aallonpitututta suurempi. Tästä syystä esimerkiksi lasersäde näyttää kulkevan suoraan hajaantumatta, ja valon voidaan ajatella kulkevan säteinä.



**16.23** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä interferenssistä. Mikä aiheuttaa interferenssin ja miten interferenssi vaikuttaa aaltojen kulkueen? Miten vaihe liittyy interferensiin? Kuinka määrität kahden tai useamman interferoivan aallon intensiteetin?

## 16.4 Optiikka

Edellä tarkastellut ilmiöt kuten taittuminen, heijastuminen sekä interferenssi tapahtuvat kaikilla aalloilla. Erikoisista aalloista valo on kuitenkin meille ihmisielle erityisen tärkeä, koska näköaistimme perustuu valon havaitsemiseen. Tämän vuoksi päättämme aaltojen tutkimisen tarkastelemalla nimenomaan valoa ja sen käyttäytymistä eli **optiikkaa**.

### Sähkömagneettiset aallot

Olemme jo moneen otteeseen todenneet, että valo on sähkömagneettinen aalto. Nyt osoitamme sähkömagneettisen peruslaista eli Maxwellin yhtälöistä lähtien, että sähkömagneettisessa kentässä todellakin voi kulkea aaltoa.

Rajoitutaan tarkastelemaan sähkömagneettista kenttää tyhjiössä, jossa ei ole sähkövarauksia eikä -virtoja. Tällöin Gaussin laki mukaan sekä sähkö- että magneettikenttä ovat lähteettömiä, ja avaruuden perustila on se, että sekä sähkö- että magneettikenttä ovat kaikkialla nollia. Kuitenkin Faradayn lain mukaan muuttuva magneettikenttä indusoi pyörteisiä sähkökenttiä, ja Maxwellin lain mukaan muuttuvaan sähkökenttään liittyy aina pyörteisiä magneettikenttiä. Niinpä jos avaruuteen syntyy jostakin syystä ajassa muuttuva sähkö- tai magneettikenttä, kyseessä on poikkeama avaruuden perustilasta. Faradayn ja Amperen lain mukaisesti muuttuvat sähkö- ja magneettikentät alkavat indusoimaan toisiinsa pyörteitä, nämä pyörteet muuttavat kenttiä lisää, jolloin indusoituu lisää muutoksia, ja niin edelleen. Näin kentät muuttavat jatkuvasti toisiaan, ja poikkeama homogeenisuudesta alkaa levitä.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta, jossa sähkökenttä on  $y$ -suuntainen ja se riippuu ainoastaan  $x$ -koordinaatista eli matematisesti  $\bar{E} = E_y(x, t)\hat{j}$ . Sähkökenttä on siis olemassa kaikkialla avaruudessa (ei vain  $x$ -akselilla), mutta sen suunta ja voimakkuus ovat vakiot kaikkialla  $yz$ -tasossa.

Jos sähkökentän voimakkuus muuttuu, tämä muutos indusoi Maxwellin lain mukaan magneettikentän. Kuvassa 16.21 (b) on tutkittu indusoitunutta magneettikenttää, kun sähkökenttä muuttuu positiiviseen  $y$ -suuntaan eli  $\frac{\partial E_y}{\partial t} > 0$ . Kuvaan on piirretty sähkökenttä yhdessä pisteesä, ja tähän pisteeseen on asetettu infinitesimaalisen pieni nelion muotoinen Amperen-Maxwellin pinta. Pinnan normaali on  $y$ -suuntainen, pinnan reunat ovat  $x$ - ja  $z$ -suuntaiset, ja niiden pituudet ovat  $dx$  sekä  $dz$  (kuva 16.21 (a)). Positiivinen läpäisy suunta on valittu ylöspäin, positiiviseen  $y$ -suuntaan, jolloin positiivinen kiertosuunta on ylhäältä katsoen vastapäivään. Pinta on siis kohtisuorassa sähkökenttää vastaan ja sähkövuo pinnan läpi on

$$\Phi_E = E_y dx dz. \quad (16.21)$$

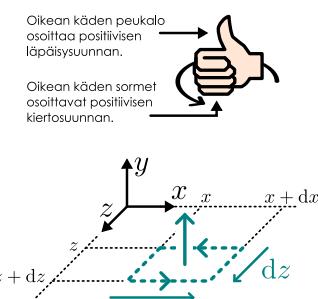
Sähkövuoon muutosnopeus ajan suhteeseen on

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y}{\partial t} dx dz, \quad (16.22)$$

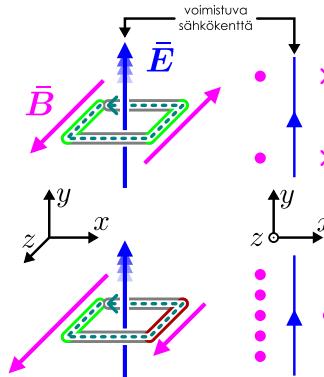
ja tämä on siis positiivinen kuva 16.21 (b).

Kuva 16.21: Maxwellin laki, kun sähkökenttä on  $y$ -suuntainen ja magneettikenttä  $z$ -suuntainen.

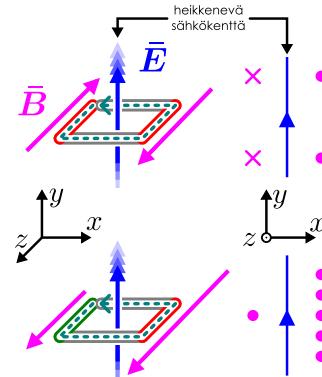
(a) Valitaan tarkastelupinnan läpäisy-suunta ylöspäin.



(b) Sähkökenttä muuttuu ajassa positiiviseen suuntaan, jolloin magneettikentän viivaintegraali on positiivinen.



(c) Sähkökenttä muuttuu ajassa negatiiviseen suuntaan, jolloin magneettikentän viivaintegraali on negatiivinen.



Koska sähkövuo muuttuu, magneettikentän viivaintegraalin pinnan reunaa pitkin täytyy olla eri suuri kuin nolla. Maxwellin lain mukaan positiiviseen läpäisy suuntaan muuttuva sähkövuo tuottaa magneettikentän, jonka viivaintegraali on positiivinen. Koska integrointipolku on  $xz$ -tasossa, vain magneettikentän  $x$ - ja  $z$ -komponentit vaikuttavat viivaintegraalin arvoon. Kuvassa 16.21 (b) magneettikenttä on oletettu  $z$ -suuntaiseksi. (Magneettikentällä voi olla  $x$ -komponentti, mutta koska systeemi oletettiin symmetriseksi  $yz$ -tasossa, tämä komponentti ei voi riippua  $z$ -koordinaatista eikä se näin ollen vaikuta viivaintegraalin arvoon.) Tällöin viivaintegraaliin jää vain  $z$ -komponentin osuus

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = B_z(x)dz - B_z(x+dx)dz = [B_z(x) - B_z(x+dx)]dz. \quad (16.23)$$



**16.24** Miksi yhtälössä (16.23) termin  $B_z(x+dx)dz$  edessä on miinusmerkki?

Kuvassa 16.21 (b) sähkövuo pinnan läpi muuttuu positiiviseen suuntaan, joten Maxwellin lain mukaan

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} > 0, \quad (16.24)$$

ja magneettikentän viivaintegraalin täytyy siis olla positiivinen. Tämä on mahdollista monin tavoin. Kuvan 16.21 (b) ylemmässä esimerkissä magneettikenttä osoittaa tarkastellun pinnan vasemmassa reunassa kohti katsojaa (positiiviseen  $z$ -suuntaan) ja oikeassa reunassa poispäin katsojasta (negatiiviseen  $z$ -suuntaan). On myös mahdollista, että magneettikenttä on kaikkialla kohti katsojaa, ja kenttä on voimakkaampi kuvan vasemmassa laidassa kuten kuvan 16.21 (b) alempassa esimerkissä. Kolmas vaihtoehto on se, että kenttä on kaikkialla poispäin katsojasta ja kentän voimakkuus on kuvan oikeassa laidassa suurempi (ei kuvassa). Kaikissa näissä tapauksissa magneettikentän  $z$ -komponentti muuttuu negatiiviseen suuntaan, kun kuvassa siirrytään vasemmalta oikealle eli positiiviseen  $x$ -suuntaan. Jos sähkövuo muuttuu negatiiviseen suuntaan, tilanne on päinvastainen kuten kuvassa 16.21 (c) on piirretty. Tällöin magneettikentän viivaintegraalin pitää olla negatiivinen ja magneettikentän  $z$ -komponentti muuttuu positiiviseen suuntaan, kun kuvassa siirrytään vasemmalta oikealle.

Edellisen havainnon voi tiivistää seuraavasti: jos sähkökentän  $y$ -komponentti muuttuu *ajan kuluessa* positiiviseen  $y$ -suuntaan, magneettikentän  $z$ -komponentti muuttuu *x-suuntaan siirryttääessä* negatiiviseen  $z$ -suuntaan (ja päinvastoin). Matemaattisesti tämä tulos voidaan johtaa sijoittamalla Maxwellin lakiin lausekeet (16.22) sekä (16.23), jolloin saadaan yhtälö

$$[B_z(x) - B_z(x+dx)]dz = \oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} dx dz. \quad (16.25)$$

Jakamalla tämä puolittain differentiaaleilla  $dx dz$  ja vaihtamalla  $B_z$ -termien järjestystä saadaan

$$\frac{B_z(x+dx) - B_z(x)}{dx} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (16.26)$$

ja huomioimalla vielä, että yhtälön vasen puoli on osittaisderivaatan määritelmä

$$\frac{B_z(x+dx) - B_z(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_z(x+\Delta x) - B_z(x)}{\Delta x} = \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (16.27)$$

päädytään magneetti- ja sähkökenttien osittaisderivaattojen väliseen yhteyteen

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (16.28)$$

Jos sähkökenttä muuttuu ajan kuluessa  $y$ -suuntaan,  $\frac{\partial E_y}{\partial t} > 0$ , yhtälön kummankin puolen täytyy olla negatiivinen, ja niinpä magneettikentän täytyy muuttua negatiiviseen  $z$ -suuntaan  $x$ -suuntaan kuljettaessa.



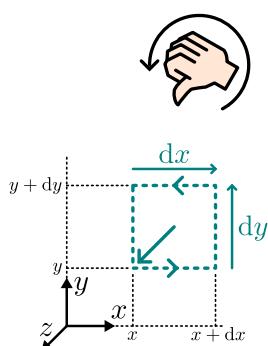
**16.25** Koordinaatistossa A sähkökenttä on  $y$ -suuntainen ja magneettikenttä on nolla. Sähkökenttä ei muutu ajan kuluessa mutta se voimistuu  $x$ -suuntaan siirryttääessä. Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen  $x$ -suuntaan. (a) Muuttuuko sähkökenttä koordinaatistossa B? (b) Onko koordinaatistossa B magneettikenttä Galilei-muunnoksen mukaan? (c) Riippuuko magneettikentän voimakkuus paikasta koordinaatistossa B? (d) Vertaa yhtälöön (16.28).

Faradayn laki antaa meille samanlaisen yhteyden muuttuvan magneettikentän ja sähkökentän välille kuin kuvassa 16.22 (b) ja (c) on esitetty. Magneettikenttä on tässäkin tapauksessa asetettu  $z$ -suuntaiseksi ja

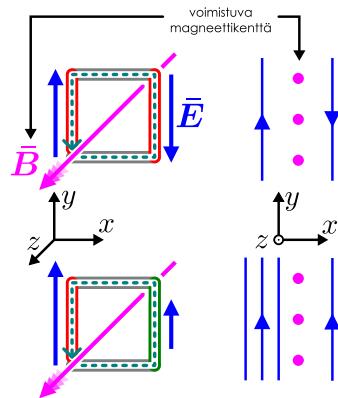
## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.22: Faraday'n laki, kun sähkökenttä on  $y$ -suuntainen ja magneettikenttä  $z$ -suuntainen.

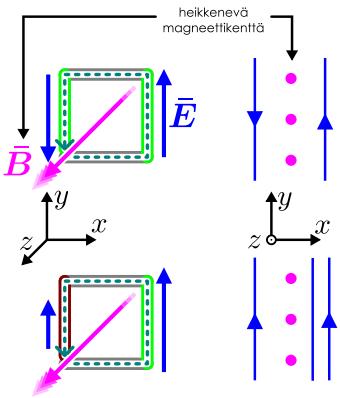
(a) Valitaan tarkastelupinnan läpäisyys-suunta kohti katsojaa.



(b) Magneettikenttä muuttuu ajassa positiiviseen suuntaan, jolloin sähkökentän viivaintegraali on negatiivinen.



(c) Magneettikenttä muuttuu ajassa negatiiviseen suuntaan, jolloin sähkökentän viivaintegraali on positiivinen.



sähkökenttä  $y$ -suuntaiseksi. Nyt tarkastellaan magneettivuota ja sähkökentän viivaintegraalia, joten tarkasteltava Faraday'n pinta on tässä tapauksessa  $xy$ -tason infinitesimaalinen neliö, jonka sivujen pituudet ovat  $dx$  ja  $dy$ . Magneettivuo tämän pinnan läpi on

$$\Phi_B = B_z dx dy, \quad (16.29)$$

ja tämän muutos ajan suhteeseen on

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy. \quad (16.30)$$

Sähkökentän viivaintegraali pinnan ympäri on

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = [E_y(x+dx) - E_y(x)] dy, \quad (16.31)$$

koska sähkökenttä on  $y$ -suuntainen.

Faraday'n lain perusteella

$$[E_y(x+dx) - E_y(x)] dy = \oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy, \quad (16.32)$$

mistä seuraa jakamalla differentiaaleilla  $dxdy$

$$\frac{E_y(x+dx) - E_y(x)}{dx} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (16.33)$$

Huomioimalla jälleen osittaisderivaatan määritelmä, tämä on sama asia kuin

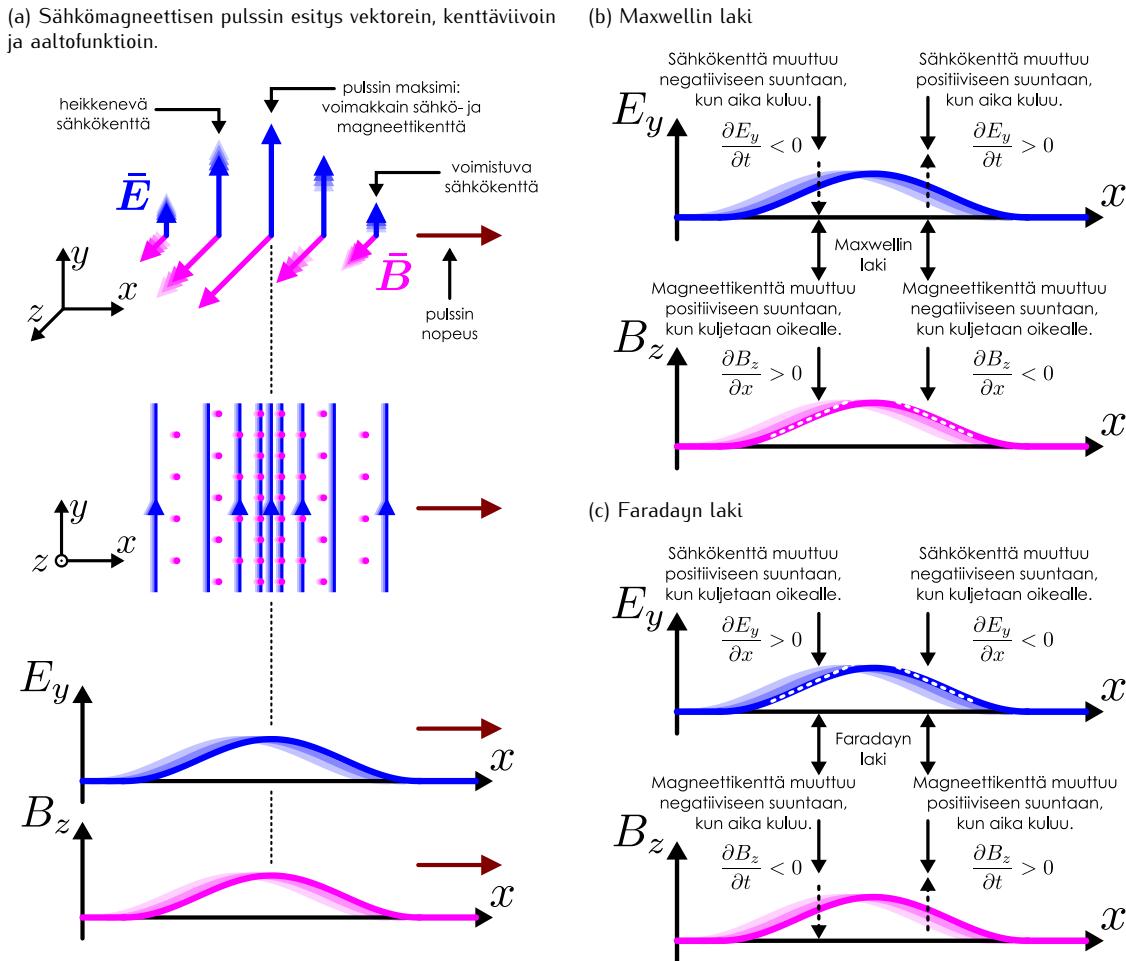
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (16.34)$$

Fysikaalisesti yhtälö tarkoittaa sitä, että jos magneettikenttä muuttuu *ajan kuluessa* positiiviseen  $z$ -suuntaan, sähkökentän  $y$ -komponentti täytyy muuttua negatiiviseen  $y$ -suuntaan, kun siirrytään positiiviseen  $x$ -suuntaan.

Kuvassa 16.23 on esitetty sähkömagneettinen aaltopulssi, jossa sähkökenttä osoittaa positiiviseen  $y$ -suuntaan ja magneettikenttä positiiviseen  $z$ -suuntaan ja joka liikkuu positiiviseen  $x$ -suuntaan. Kenttien voimakkuus on suurimmillaan pulssin keskellä ja pulssin ulkopuolella kenttä on nolla. Kuvassa 16.23 (a) pulssi on kuvattu kolmella eri tavalla. Ylimmässä kuvassa on piirretty pulssin sähkö- ja magneettikenttävektorit  $x$ -akselilla. Tässä kuvassa näkyvät sekä kenttävektoreiden suunnat että niiden muuttuminen, mutta kuva on siinä mielessä harhaanjohtava, että aalto ei kulje vain  $x$ -akselilla vaan kaikkialla avaruudessa. Keskimäisessä kuvassa pulssi on piirretty kenttäviivoin, ja tästä kuvasta nähdään paremmin, että sähkömagneettinen kenttä ei muudu  $y$ -suunnassa. Alimmassa kuvassa on piirretty sähkökentän  $y$ -komponentin ja magneettikentän  $z$ -komponentin kuvaajat  $x$ -koordinaatin funktiona. Nämä ovat pulssin *aaltofunktiot*.

Kuvassa 16.23 (b) on kerrattu Maxwellin lain toteutuminen tässä pulssissa. Pulssi kulkee kuvassa oikealle, joten pulssin oikea reuna on sen etureuna. Tässä reunassa sähkökentän voimakkuus kasvaa ajan kuluessa, jolloin kuvan 16.21 (b) tapaan magneettikenttä täytyy heikentyä kuvassa oikealle kuljettaessa, kuten tapahtuukin. Vastaavasti pulssin vasemmassa reunassa sähkökenttä heikkenee ajan kuluessa, koska pulssi on jo

Kuva 16.23: Sähkömagneettinen pulssi toteuttaa Maxwellin yhtälöt.



ohittamassa pisteen, ja niinpä magneettikentän täytyy kuvan 16.21 (c) mukaisesti voimistua kuvassa oikealle kuljettaessa. Näinkin tapahtuu, joten pulssi toteuttaa Maxwellin lain.

Samaan tapaan kuvassa 16.23 (c) on todettu, että pulssi toteuttaa myös Faradayin lain. Pulssin oikeassa reunassa magneettikenttä voimistuu ajan kuluessa, joten kuvan 16.22 (b) perusteella sähkökentän pitää heikentyä oikealle kuljettaessa. Pulssin vasemmassa reunassa tilanne on päinvastainen ja vastaa kuvaa 16.22 (c).

Koska sähkömagneettinen aaltopulssi toteuttaa Maxwellin yhtälöt, sähkömagneettisessa kentässä mitä ilmeisimmin voi edetä aaltoja. Todistetaan tämä lopuksi matemaattisesti osoittamalla, että sähkö- ja magneettikenttä toteuttavat *aaltoyhdyksin*. Tästä nimittäin seuraa automaattisesti, että sähkömagneettisessa kentässä voi edetä minkä muotoisia aaltoja tahansa ja että näille aalloille pätee superpositioperiaate. Lisäksi aaltoyhdyö määräää nopeuden, jolla sähkömagneettiset aallot liikkuvat.

Tämä onnistuu yhtälöiden (16.28) ja (16.34) avulla. Osittaisderivoimalla yhtälöä (16.28) ajan suhteeseen ja yhtälöä (16.34)  $x$ -koordinaatin suhteeseen päädymme nimittäin yhtälöihin

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (16.35)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}. \quad (16.36)$$

Lisäksi koska osittaisderivoinnin järjestyksen voi yleisesti vaihtaa, näissä esiintyvät magneettikentän derivaatat ovat samat,

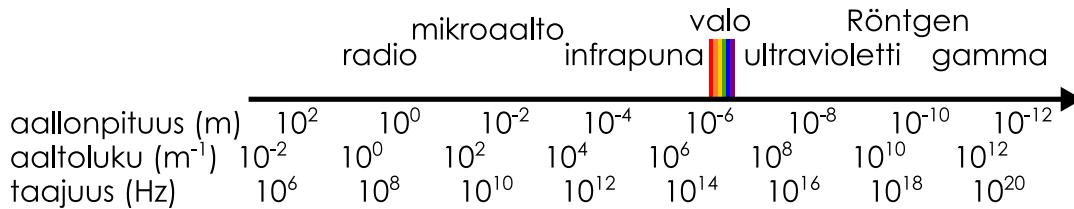
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}, \quad (16.37)$$

ja niinpä sähkökentän toinen derivaatta paikan suhteeseen (vrt. köyden kaarevuus) on suoraan verrannollinen kentän toiseen derivaattaan ajan suhteeseen (vrt. köyden kiihtyvyys)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (16.38)$$

## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.24: Sähkömagneettisten aaltojen spektri. Kuvassa on esitetty erilaisten sähkömagneettisten aaltojen aallonpituuksien, aaltolukujen ja taajuusten logaritmisen asteikolla. Näkyvää valoa on säteily, jonka aallonpituuus on noin 400 nm – 700 nm.



Tämä on täsmälleen samaa muotoa kuin *aaltoyhälö* (15.131), missä aaltofunktion paikalla on sähkökenttä  $E_y$  ja aallon vauhdin neliön paikalla on vakio  $1/\epsilon_0\mu_0$ .

Magneettikentälle voidaan johtaa aaltoyhälö aivan samalla tavalla derivoimalla yhtälöä (16.28) paikan suhteen ja yhtälöä (16.34) ajan suhteen. Koska sähkö- ja magneettikenttä toteuttavat aaltoyhälön, mikä tahansa kenttään luotu häiriö alkaa edetä kentässä spontaanisti aaltona, joka kulkee tyhjiössä aaltoyhälön määräämällä nopeudella

$$v_{\text{aalto}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (16.39)$$

eli valonnopeudella.

Erityisesti sähkömagneettisessa kentässä voi kulkea sinimuotoisia aaltoja, jolloin kaikki sähkömagneettiset aallot voi kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Lisäksi sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon sähkö- ja magneettikenttien välillä on täsmällinen yhteyts. Jos nimittäin sähkökentässä kulkee tasoaalto  $x$ -suuntaan, ja aallon sähkö- ja magneettikentät ovat  $y$ - ja  $z$ -suuntaiset, sähkökenttää kuvaava aaltofunktio

$$E_y(x, t) = E \cos(k_Ex - \omega_E t + \phi_E) \quad (16.40)$$

ja magneettikenttää aaltofunktio

$$B_z(x, t) = B \cos(k_Bx - \omega_B t + \phi_B). \quad (16.41)$$

Näiden derivaattojen täytyy noudattaa Faradayn laista johdettua yhtälöä (16.34), mistä saadaan

$$-Ek_E \sin(k_Ex - \omega_E t + \phi_E) = -B\omega_B \sin(k_Bx - \omega_B t + \phi_B). \quad (16.42)$$

Yhtälön kummallakin puolella on sinifunktio, ja yhtäsuuruus pätee kaikilla  $x$  ja  $t$  vain, jos sekä sinifunktioita kertovat vakiot eettä niiden argumentit ovat samat. Jotta funktioiden argumentit olisivat samat, sähkö- ja magneettikentillä on oltava sama aaltoluku,  $k_E = k_B$ , kulmataajuus,  $\omega_E = \omega_B$ , sekä vaihe  $\phi_E = \phi_B$ . Niinpä voimme jättää alaindeksit pois ja merkitä näitä vakioita yksinkertaisesti  $k$ ,  $\omega$  ja  $\phi$ . Yhtälön kummallakin puolella on sama kerroin, jos

$$Ek = B\omega, \quad (16.43)$$

minkä voi kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (16.44)$$

Tämän tuloksen mukaan sinimuotoisessa sähkömagneettisessa aallossa sähkö- ja magneettikenttien amplituudien suhteen täytyy olla sama kuin valonnopeus. Tässä esimerkkitapauksessa aaltoa kuvaava siis aaltofunktio

$$E_y(x, t) = E \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (16.45)$$

$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E \cos(kx - \omega t + \phi). \quad (16.46)$$

Koska sähkömagneettisten aaltojen nopeus on valonnopeus, on luonnollista arvata, että valokin on sähkömagneettinen aalto — kuten onkin. Valo ei ole kuitenkaan ainosa sähkömagneettisten aaltojen laji, sillä näkyvä valo muodostaa vain pienen osan sähkömagneettisten aaltojen spektristä. Valon aallonpituuus on joitakin satoja nanometrejä, mutta sähkömagneettisessa kentässä voi edetä aaltoja, joiden aallonpituuus on tätä huomattavasti pidempi tai lyhyempikin. Eri taajuudella värähtelevät sähkömagneettiset aallot käyttäytyvät eri tavoin ja niillä on erilaisia teknologisia sovelluksia, joten eri taajuusalueille on annettu omat nimensä (kuva 16.24). Valoa pidempi aallonpituuus ja pienempi taajuus on infrapuna-, mikro- ja radioaaltoilla. Lyhyempi aallonpituuus ja suurempi taajuus on puolestaan ultravioletti-, röntgen- ja gammasäteilyllä.

Edellisten tulosten perusteella voimme määrittää myös sähkömagneettisten aaltojen energiatiheden täsmällisesti. Sähkökentän energiatihesys on yhtälön (11.146) mukaisesti  $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ , missä  $E$  on sähkökentän voimakkuus *tarkastelupisteessä*. Sinimuotoisessa aallossa sähkökentän keskimääräinen energiatihesys on siten

$$\langle \rho_{E,E} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E^2, \quad (16.47)$$

missä  $E$  on nyt sähkökentässä kulkevan aallon *amplitudi*. Tässä käytimme jälleen yhtälöä (15.51), jonka mukaan sinimuotoisen funktion nelioni keskiarvo on puoli,  $\langle \cos^2(kx) \rangle = \langle \sin^2(kx) \rangle = 1/2$ .

Magneettikentän energiatihesys on puolestaan yhtälön (13.105) perusteella

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{4\mu_0} B^2, \quad (16.48)$$

missä  $B$  on magneettikentässä kulkevan aallon amplitudi. Toisaalta koska sähkö- ja magneettikentien amplituiden suhde on yhtälön (16.44) valonnopeus, voimme kirjoittaa magneettisen aallon energiatiheden muotoon

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \frac{E^2}{c^2}. \quad (16.49)$$

Lisäksi valonnopeuden nelioni voi ilmaista yhtälön (13.41) avulla sähkö- ja magneettivakioiden avulla,  $1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ , jolloin magneettisen aallon energiatihesys saa muodon

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \varepsilon_0 \mu_0 E^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E^2. \quad (16.50)$$

Tämä on kuitenkin *täsmälle sama kuin sähkökentässä etenevä aallon energiatihesys*. Sinimuotoisessa sähkömagneettisessa aallossa on siis yhtä paljon energiota sekä sähkö- että magneettikentissä. Aallon keskimääräinen energiatihesys on näiden summa,

$$\langle \rho_E \rangle = \langle \rho_{E,E} \rangle + \langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (16.51)$$



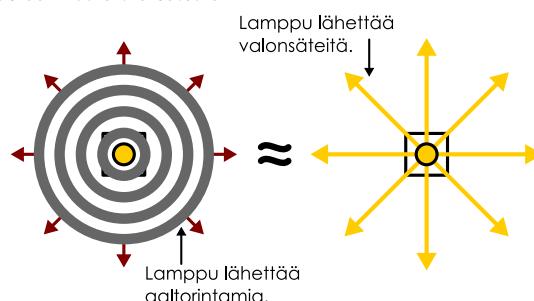
**16.26** Sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon sähkökentän amplitudi on 1.0 V/m. (a) Mikä on magneettikentän amplitudi? (b) Mikä on aallon energiatihesys? (c) Mikä on aallon intensiteetti?

## Sädeoptiikka

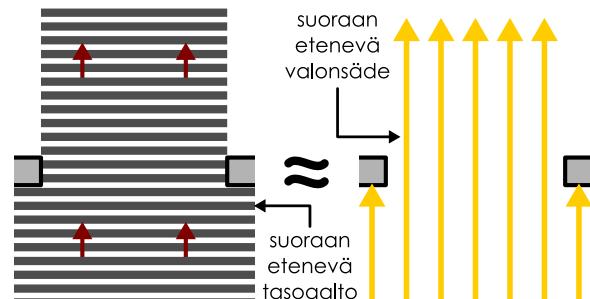
Valo muodostuu siis sähkömagneettisen kentän aalloista, mutta monissa tilanteissa valon aaltoluonnetta ei havaita. Tämä johtuu siitä, että näkyvän valon aallonpituuksia on väristä riippuen joitakin satoja nanometrejä, mikä on ihmisen mittakaavassa hyvin pieni pituus. Tavallisesti havainnoinme valonlähteitä paljon aallonpituitta kauempaa, jolloin valoa voi pitää tasooaltona (vrt. kuva 16.6). Lisäksi tarkastelemme usein valon kulkua huomattavasti aallonpituitta suurempien esineiden ja aukkojen ohi tai läpi, jolloin aallot eivät juurikaan koe interferenssiä vaan kulkevat suoraan (vrt. kuva 16.20). Koska tällaisissa tilanteissa valoa allost kulkevat suoraviivaisesti tasaisina rintamina, valo vaikuttaa koostuvan aaltojen sijaan suoraan etenevistä **valonsäteistä** (kuva 16.25). Todellisuudessa valo toki on aalto ja valonsäteet ovat vain yksinkertaistettu malli, mutta ellei

Kuva 16.25: Sädeoptiikassa valon ajatellaan kulkevan suoraviivaisesti säteinä. Näin voidaan tehdä, jos valon kulkuun vaikuttavien kappaleiden ja aukkojen koko on paljon valon aallonpituitta suurempi.

(a) Valo levää aaltorintamina, mutta sen voi ajatella etenevän suoraan kulkevana säteinä.



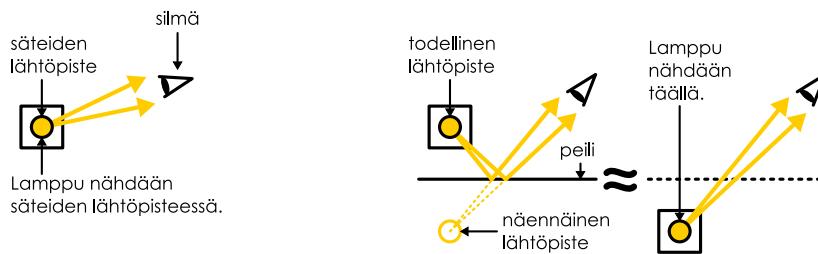
(b) Jos aallonpituuks on pieni, aallot kulkevat suoraan.



## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.26: Kappale havaitaan pisteessä, josta sen lähetämä valo näyttää tulevan. Jos valonsäteiden suunta muuttuu, niiden lähteen näennäinen paikka selviää etsimällä säteiden leikkauispiste.

- (a) Lampu nähdään säteiden lähtöpisteessä.  
 (b) Peili kääntää säteitä, jolloin säteet näyttävät tulevan peilistä.



valo kulje aallonpituuden kokoluokkaa olevista aukoista tai aallonpituuden suuruisista kappaleiden ohitse, tämä valonsädemalli kuvailee valon kulkua erittäin hyvin.

Valon kuvaamista säteinä kutsutaan **sädeoptiikaksi** tai *geometriseksi optiikaksi*. Sädeoptiikassa esimerkiksi lampun ajatellaan lähettyvän valoa säteinä kaikkiin suuntiin ympärilleen. Lampu nähdään, kun sen lähettyvä valo saapuu katsojan silmään, ja erityisesti jos valo saapuu suoraan lampusta silmään, katsoja voi silmään saapuvien valonsäteiden kulkusuuntien perusteella havaita, missä valo lähettyvä lampu on. Jos nimitäin lampu on pieni, säteiden voi ajatella lähtevän liukkeelle samasta pisteestä. Kun nyt silmään saapuvia valonsäteitä seurataan *takaisin niiden tulosuuntaan*, säteiden on täytynyt lähteä matkaan pisteestä, jossa ne leikkaavat toisensa (kuva 16.26 (a)). Tällä katsojan aivot päättelivät valoa lähettyvän lampunkin olevan.

Näemme toki myös kappaleita, jotka eivät itse lähetä valoa. Tällöin näemme esineiden pinnasta *siroavaa* valoa. Siroaminen tarkoittaa sitä, että kun valo osuu tällaisen esineen pintaan, se heijastuu johonkin satunnaiseen suuntaan. Tällöin valaistu esine lähettyy valoa ympärilleen kaikkiin suuntiin, jolloin se toimii lampun tavoin. Tällainen esine nähdään kaikista suunnista, ja sen sijaan katsoja päättlee samaan tapaan kuin valoa lähettyvän lampunkin paikan.

Kaikki pinnat eivät kuitenkaan sirota valoa. Heijastumis- ja taittumislain yhteydessä puhuimme jo peileistä, jotka ovat valoa heijastavia pintoja. Niistä valo ei siis siroa kaikkiin suuntiin vaan heijastuu niin, että valonsäteen tulokulma on aina yhtä suuri kuin sen heijastuskulma. Tämän ominaisuuden vuoksi peilit näyttävät aivan erilaisilta kuin valoa sirottavat pinnat. Peilipintaa itsessään voi olla vaikea nähdä, koska peilistä näkyy peilin edessä olevien esineiden kuvia. Tätä on havainnollistettu kuvassa 16.26 (b). Peilin edessä oleva lampu lähettyy valonsäteitä, jotka matkalla silmään heijastuvat peilin pinnasta. Silmä havaitsee siihen saapuvien valonsäteiden suunnan, jonka perusteella aivot päättelivät valon saapuvan siitä pisteestä, josta valonsäteet näyttävät lähteneen. Silmä ei voi kuitenkaan suoraan havaita, että valonsäteiden kulkusuunta muuttui niiden heijastuessa peilistä. Niinpä aivot päättelivät lampun olevan siinä pisteessä, jossa sen pitäisi olla, jotta lampusta suoraan silmään kulkevat valonsäteet saapuisivat samasta suunnasta kuin mistä silmään saapuvat valonsäteet todella tulevat. Kuvassa 16.26 (b) tämä piste löytyy jatkamalla silmään saapuvia valonsäteitä peilin taakse ja etsimällä näiden jatkeiden leikkauispisteen. Koska säteiden tulo- ja heijastuskulmat ovat peilissä yhtä suuret, tämä leikkauispiste on yhtä kaukana peilin pinnasta kuin lampu on todellisuudessaan, mutta *peilipinnan takana*. Niinpä katsojan aivot tulkitsevat silmiin saapuvan valon lähteneen peilin sisällä olevasta lampusta, jolloin peilissä siis nähdään lampun *peilikuvan*.



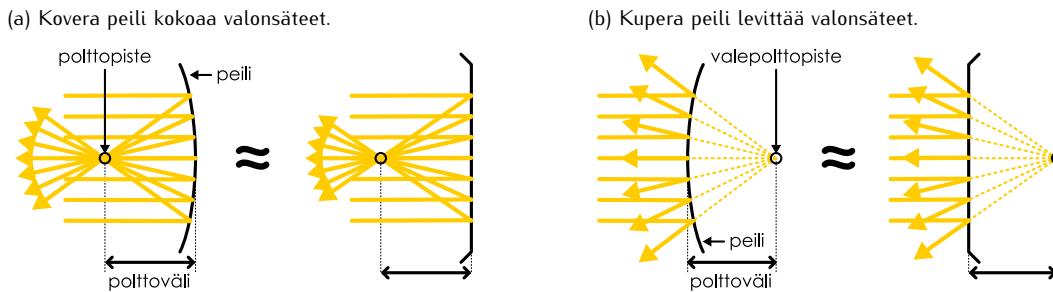
**16.27** Kuvassa 16.26 (b) katsoja näkee kaksi lampua: todellisen lampun sekä lampun peilikuvan. Montako lampua katsoja näkee, jos kaksi peiliä muodostaa  $90^\circ$  kulman?

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin suoraa peilipintaa, mutta peili voi olla myös kaareva. Kaarevakin peilipinta heijastaa siihen osuvan valonsäteen niin, että valon tulo- ja heijastuskulmat ovat samat. Kaarevalla pinnalla valonsäteen tulokulma voi kuitenkin olla pinnan eri kohdissa erilainen, jolloin säteet heijastuvat peilin eri kohdista eri suuntiin.

Kuvassa 16.27 (a) on esitelty **kovera peili**, jossa peilipinta muodostaa symmetrisen "kuopan". Kuvassa valo saapuu peiliin yhdensuuntaisina, peilin symmetria-akselin suuntaan kulkevina säteinä. Peilin keskelle osuva säde saapuu peilipinnalle kohtisuoraan, jolloin se heijastuu takaisin tulosuuntaansa. Peilin reunoilta saapuvat säteet sen sijaan eivät saavu pinnalle kohtisuoraan, jolloin ne heijastuvat peilistä *kohti peilin symmetria-akselia*. Jos peili on muotoiltu juuri sopivasti, kaikki sen symmetria-akselin suuntaiset valonsäteet heijastuvat kohti samaa pistettä, jota kutsutaan peilin **poltopisteeksi**. Poltopisteen etäisyys peilin pinnasta kutsutaan puolestaan **polttoväliksi**.

Jos peilipinta on kaareva päinvastaiseen suuntaan eli peili muodostaa "kukkulan", peiliä kutsutaan **kuperaksi**. Tällainen peili on piirretty kuvaan 16.27 (b). Kuperan peiliin osuvat yhdensuuntaiset säteet hajaantuvat eli ne heijastuvat toisistaan poispäin. Tällöin ei ole olemassa poltopistettä, jota kohti kaikki säteet kulkisivat,

Kuva 16.27: Valon heijastuminen peileissä.



mutta jälleen jos peili on muotoiltu juuri sopivasti, peilipinnan takana voi olla olemassa piste, jossa peilistä heijastuneiden säteiden jatkeet kohtaavat. Tätä kutsutaan peilin *valepoltopisteeksi*.

Valon kulkuun voi vaikuttaa peilien lisäksi myös **linsseillä**. Linssi on läpinäkyvästä materiaalista valmistettu kaarevapintainen kappale, joka muuttaa sen läpi kulkevan valon kulkusuuntaa. Kuvaassa 16.28 (a) on esiteltty *kupera linssi*, joka on keskeltä paksu ja reunoiltaan ohut. Linssiä ympäröi ilma, ja linssi itse on valmistettu materiaalista kuten lasista tai muovista, jonka taitekerroin on ilmaa suurempi. Kuvan on piirretty linssin symmetria-akselin suunnassa kulkevien valonsäteiden kulku linssin läpi. Linssin keskeltä kulkeva valonsäde saapuu ilman ja lasin rajapinnalle kohtisuoraan, joten se kulkee rajapinnan läpi suoraan. Linssin sivulle osuvat valonsäteet kuitenkin kohtaavat rajapinnan viistossa kulmassa, jolloin rajapinnan läpi kulkeva valonsäde taittuu kohti linssin symmetria-akselia. Valo taittuu toisenkin kerran poistuessaan linssistä takaisin ilmaan, ja kuvan linssissä tämäkin tattuminen kääntyy säteen kulkusuuntaa kohti symmetria-akselia. Linssin muodosta johtuen säteen kulkusuunta muuttuu sitä enemmän, mitä kauemmas linssin keskipisteestä säde osuu, ja jos linssin muoto on sopiva, kaikki symmetria-akselin suuntaiset valonsäteet kääntyvät kulkemaan ainakin likimain kohti linssin poltopistettä. Kuperan linssin läpi kulkevat valonsäteet käyttäytyvät siis samaan tapaan kuin koverasta peilistä heijastuvat säteet.

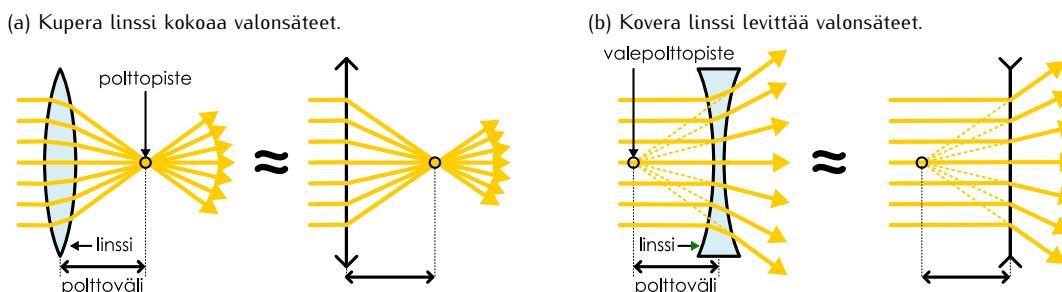
Kuvaan 16.28 (b) on piirretty vielä *kovera linssi*, jonka läpäisevä valo käyttää samaan tapaan kuin kuperasta peilistä heijastuva valo. Tässä linssissä säteet taittuvat symmetria-akselista poispäin, jolloin linssin läpäisyt valo siis hajaantuu. Näiden valonsäteiden jatkeet kohtaavat linssin valepoltopisteessä.

Kaarevien linssien ja peilien eri osiin osuvien valonsäteiden kulun täsmällinen analysointi on melko työlästä, koska pinnat ovat kaarevia. Säteiden täsmällisen reitin laskeminen vaatii kunkin säteen täsmällisen heijastus- tai tattumispisteen määrittämistä, jolloin pitäisi tietää kunkin linssin ja peilin tarkka muoto. Peili- ja linssisysteemien analyysissä käytetäänkin usein yksinkertaistettua mallia, jossa valoa heijastavien ja tattavien pintojen ajatellaan olevan likimain suoria. Kuvien on piirretty kullekin peilille ja linssille myös tämän mallin mukainen yksinkertaistettu vastine. Tässäkin mallissa symmetria-akselin suuntaan kulkevat valonsäteet kääntyvät aina kohti poltopistettä tai poispäin valepoltopisteestä, mutta säteiden heijastumis- ja tattumispisteiden ajatellaan olevan samassa tasossa (kuva samalla suoralla), jolloin säteiden kulun geometrinen tarkastelu helpottuu huomattavasti. Malli ei vastaa todellisuutta, jos linssi tai peili kaareutuu voimakkaasti, mutta se on hyvä approksimaatio ainakin lähellä symmetria-akselia kulkeville valonsäteille.



**16.28** Toimiiko lasipallo kuperan vai koveran linssin tavoin eli kokoako vai levittääkö se lävitseen kulevat yhdensuuntaiset säteet? Entä veden alla oleva pallon muotoinen ilmakupla?

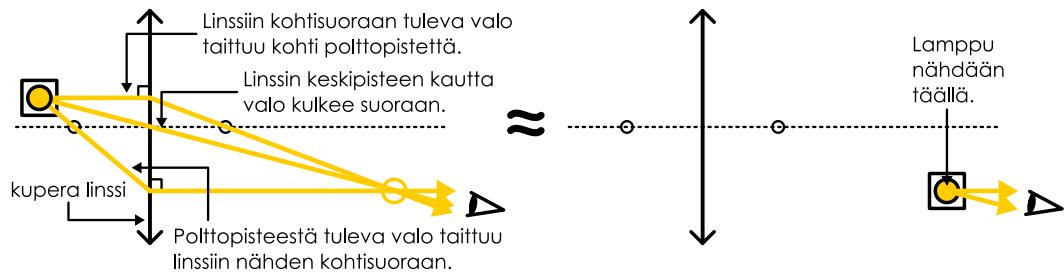
Kuva 16.28: Valon tattuminen linsseissä.



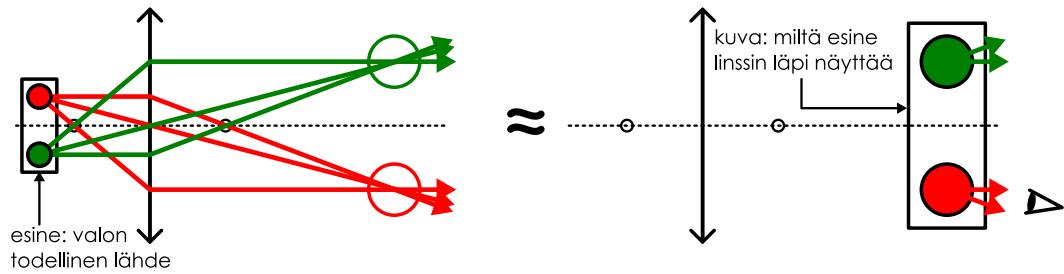
## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.29: Valon kulku kuperassa linssissä. Jos esine on linssistä polttopistettä kauempana, linssi luo esineestä kuvan linssin toiselle puolelle. Jos kuvan kohdalle asetetaan varjostin, kuva päätyy sille.

(a) Valonsäteiden kulku kuperan linssin läpi.



(b) Kuvan synty kuperassa linssissä.



Koska kaarevat peilit ja linssit muuttavat valonsäteiden kulkusuuntaa, ne myös muuttavat niiden kautta nähtävien kappaleiden ulkonäköä. Erityisesti sopivilla peili- tai linssisysteemeillä voidaan muuttaa havaittavien kappaleiden näennäistä kokoa, mikä onkin optisten suurennuslasien, mikroskooppien, kiikarien, kaukoputkien, kameroiden ja projektorien toiminnan perusta.

Kuvassa 16.29 on esitetty, miten kuperia linssi muuttaa sen läpi katsotun esineen ulkonäköä. Kuvassa (a) linssin vasemmalla puolella on lamppu, jonka etäisyys linssistä on suurempi kuin linssin polttoväli. Lamppu lähetää valonsäteitä kaikkiin suuntiin, mutta kuvan on yksinkertaisuuden vuoksi piirretty vain kolmen säteen kulureitit. Yksi kuvan piirretystä säteistä kulkee aluksi linssin symmetria-akselin suuntaan, joten sen täytyy linssissä taitua kohti linssin oikealla puolella olevaa polttopistettä. Toinen kuvan piirretty säde kulkee linssin keskipisteen kautta. Tämän säteen suunta ei muudu, sillä sen reitin täytyy olla linssin keskipisteen suhteen symmetrinen.

Kolmas kuvan piirretty säde kulkee lampusta kohti linssin vasemmanpuoleista polttopistettä. Tämä *valonsäde saapuu siis linssille polttopisteen suunnasta*, joten taituttuaan linssissä sen täytyy kulkea linssin symmetria-akselin suuntaan. Tämä johtuu siitä, että *valonsäteen kulkureitti ei saa muuttua, jos säteen kulkusuunta käännetään ympäri*, sillä taittumislaki on symmetrinen tulo- ja taitekulman suhteen. Jos siis linssiin saapuisi sen symmetria-akselin suuntaan oikealta vasemmalta kulkeva valonsäde, tämä valo taittuisi kohti linssin vasemmalla puolella olevaa polttopistettä. Niinpä jos linssiin saapuu valonsäde sen vasemmanpuoleisesta polttopisteestä, tämän säteen täytyy kulkea linssin oikealla puolella symmetria-akselin suuntaan.

Kaikki kolme kuvan piirrettyä valonsäätettä leikkaavat samassa pisteessä, joka on kuvassa linssin oikealla puolella. Tämä piste *ei ole* linssin polttopiste, koska lampusta lähteneet valonsäteet eivät kulkeneet aluksi linssin symmetria-akselin suuntaisesti. Kuitenkin jos linssi on hyvin muotoiltu, *kaikki* lampusta linssin kulkevat valonsäteet taittuvat ainakin likimain kohti tästä samaa pistettä. Nyt havaittijasta, joka näkee lampun linssin läpi, vaikuttaa aivan siltä kuin hänen silmäänsä saapuvat valonsäteet olisivat lähteneet matkaan tästä valonsäteiden leikkauspisteestä. Niinpä havaittija näkee lampun linssin oikealla puolella.

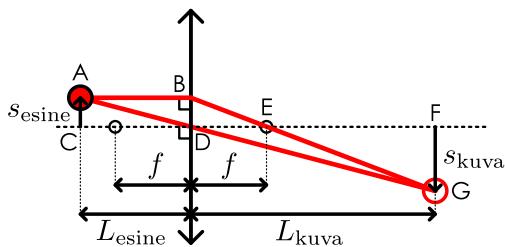
Samalla periaatteella voidaan päätellä, miltä ei-pistemäiset kappaleet näyttävät linssin läpi katsoen. Kuvassa 16.29 (b) linssin takana on esine, jonka yhdessä päässä on punainen ja toisessa vihreä lamppu. Punainen lamppu on kuvassa linssin vasemmalla puolella sen symmetria-akselin yläpuolella, ja lampun lähtämät valonsäteet taittuvat linssissä niin, että ne leikkaavat toisensa linssin oikealla puolella symmetria-akselin alapuolella. Vihreä lamppu on puolestaan symmetria-akselin alapuolella. Linssin läpi katsottuna esine näyttää siis käännyneen ympäri. Lisäksi punaisten ja vihreiden valonsäteiden leikkauspisteiden välinen etäisyys on suurempi kuin lampujen välinen todellinen etäisyys, joten linssin läpi katsottuna esine näyttää *suuremmalta* kuin mitä se todellisuudessa on.

Optiikassa sanotaan, että linssi muodostaa esineestä **kuvan**, ja tässä tapauksessa kuva on siis yllosalaisin käännyntä suurennos. Riippuu sekä linssistä että esineen ja linssin välisestä etäisyydestä, minkä kokoinen

Kuva on sekä miten pään se muodostuu, ja seuraava tehtäväämme onkin analysoida kuvan muodostuminen tarkemmin. Kuvaan 16.30 on piirretty tästä varten valonsäteiden kulkua havainnollistava kuviointi, jonka avulla voimme määrittää muodostuvan kuvan koon ja paikan. Kuvaan on yksinkertaisuuden vuoksi piirretty vain esineen toinen pää (punainen lamppu) sekä sen kuva, sillä vastakkaisen pään (vihreän lampun) kuvan paikka määrittyy täsmälleen samalla periaatteella.

Esine on kuvan pisteessä A etäisyydellä  $L_{\text{esine}}$  linssistä sekä etäisyydellä  $s_{\text{esine}}$  linssin symmetria-akselista. Kuvaan on nyt piirretty kaksi valonsädetä. Ylempi säteistä kulkee aluksi symmetria-akselin suuntaan. Säde kohtaa linssin pisteessä B, jolloin se taittuu kohti polttopistettä E. Polttopisteen etäisyys linssistä eli polttoväli on merkityy symbolilla  $f$ . Toinen kuvaan piirretty valonsäde kulkee linssin keskipisteestä D kautta eikä siis taitu lainkaan. Valonsäteet kohtaavat pisteessä G, johon muodostuu kuva. Kuvan etäisyys linssistä on  $L_{\text{kuva}}$  ja sen etäisyyksä symmetria-akselista on  $-s_{\text{kuva}}$ . Tässä kuvan etäisyyksä symmetria-akselista on tapana valita negatiiviseksi, koska kuva muodostui eri puolelle symmetria-akselia esineeseen verrattuna eli linssi käensi kuvan ympäri.

Kuva 16.30: Linssiyhtälön selittävä geometria.



Kuvaan muodostuneet suorakulmaiset kolmiot ACD sekä GFD ovat yhdenmuotoiset, joten niiden kateettien pituuksien suhteista saadaan

$$\frac{s_{\text{esine}}}{L_{\text{esine}}} = -\frac{s_{\text{kuva}}}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.52)$$

Kuten kuvasta 16.29 (b) nähdään, kuvan koko riippuu siitä, kuinka kaukana sen päät ovat symmetria-akselista. Niinpä kuva on esinettä suurempi, jos  $|s_{\text{esine}}| < |s_{\text{kuva}}|$ . Kuvan **suurennussuhde** määritelläänkin näiden etäisyyksien suhteena,

$$M = \frac{s_{\text{kuva}}}{s_{\text{esine}}} = -\frac{L_{\text{kuva}}}{L_{\text{esine}}}. \quad (16.53)$$

Näin määriteltyä  $M$  on negatiivinen, jos kuva on ylösalaisin esineeseen verrattuna, ja positiivinen kuvan ollessa samassa asennossa kuin esine.

Myös kolmiot BDE sekä GFE ovat yhdenmuotoiset, ja näiden kateettien pituuksien suhteet antavat verrannon

$$-\frac{L_{\text{kuva}} - f}{s_{\text{kuva}}} = \frac{f}{s_{\text{esine}}}. \quad (16.54)$$

Voimme ratkaista yhtälöstä (16.52) kuvan etäisyydeksi symmetria-akselista  $s_{\text{kuva}} = -s_{\text{esine}}L_{\text{kuva}}/L_{\text{esine}}$ , ja tämän sijoitus yhtälöön (16.54) antaa

$$\frac{L_{\text{kuva}} - f}{L_{\text{kuva}}} = \frac{f}{L_{\text{esine}}}. \quad (16.55)$$

Kun vielä jaamme yhtälön puolittain tekijällä  $f$  ja järjestelemme termit sopivasti, saamme **linssiyhtälön**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.56)$$

**16.29** Kuvan 16.30 linssin polttoväli on 20 cm.

- (a) Arvioi kuvasta esineen ja sen kuvan etäisyyksä linssistä.
- (b) Tarkista, että linssiyhtälö toteutuu.
- (c) Mikä on kuvan suurennussuhde? Vertaa kuvaan.

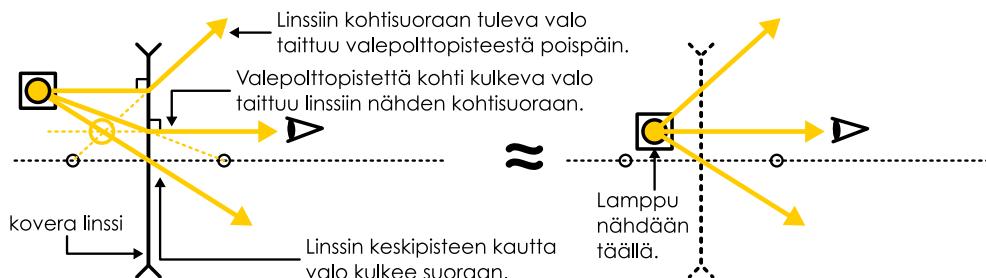
Kuvassa 16.31 on esitetty vastaavasti kuvan muodostuminen koverassa linssissä. Kuvassa (a) on jälleen analysoitu pistemäisestä lampusta lähtevien valonsäteiden kulkua. Kohtisuoraan linssiin saapuva valonsäde taittuu niin, että se kulkee kuvassa linssin oikealla puolella poispäin linssin vasemmanpuoleisesta valepolttopisteestä. Lampusta kohti linssin oikeanpuoleista valepolttopistettä lähtenyt valonsäde käännyy linssissä symmetria-akselin suuntaiseksi. Ja linssin keskipisteestä kulkeva säde etenee suoraan. Nämä valonsäteet eivät leikkaa missään, mutta niiden jatkeet leikkaavat kuvassa linssin vasemmalla puolelle eli samalla puolella kuin missä lamppu todellisuudessa on. Lamppua linssin läpi katsova havaitseja näkee lampun valonsäteiden jatkeiden leikkauspisteessä.

Kuvassa 16.31 (b) on esitetty ei-pistemäisen esineen kuvan muodostuminen samassa linssissä. Esineen päässä on jälleen punainen ja vihreä lamppu, ja esineen kuva selviää tutkimalla, missä nämä lamput nähdään. Nytkin muodostama kuva on pienempi kuin esine, samalla puolella linssiä kuin esine ja samoin pään kuin esine.

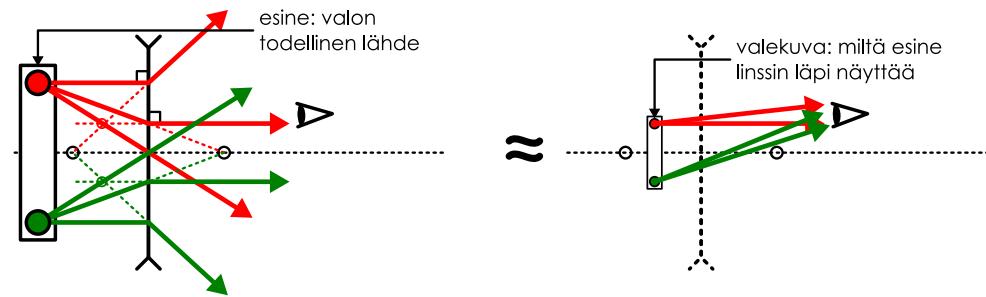
## MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.31: Valon kulku koverassa linssissä. Kuva muodostuu valonsäteiden jatkeiden leikkauispisteesseen, joten kyseessä on valekuva. Valekuva ei voi saada näkyviin varjostimelle, mutta se kertoo, miltä esine linssin läpi katsottuna näyttää.

(a) Valonsäteiden kulku koveran linssin läpi.



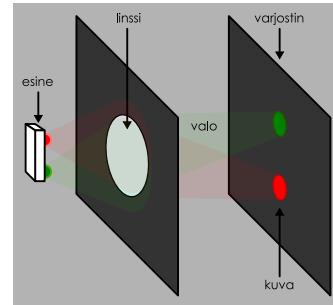
(b) Valekuvan synty koverassa linssissä.



Koska tässä tapauksessa valonsäteet eivät aidosti leikkaa missään vaan vain niiden kuvitellut jatkeet kohtaavat, linssi ei muodosta kuvaa vaan **valekuvan**. Kun esinettä katsotaan linssin läpi, kuvalla ja valekuvalta ei ole mitään eroa. Esine nähdään sen kuvan tai valekuvan näköisenä. Kuvan ja valekuvan ero on kuitenkin siinä, että *kuva voidaan projisoida* mutta valekuva ei. Tämä tarkoittaa sitä, että jos esine ja linssi asetetaan niin, että kuvan muodostumiskohdassa on esimerkiksi valkokangas, esineen kuva piirtyy tälle valkokankaalle (kuva 16.32). Fysiikassa pintaa, jolle kuva piirtyy, kutsutaan **varjostimeksi**. Valekuva *ei piirry varjostimelle*, koska valekuvassa valonsäteet eivät todellisuudessa kohtaa.

Kuvan piirtyminen varjostimelle johtuu siitä, että jos linssin edessä on lampu, linssi kokoaa kaiken lampun lähetämän valon kuvan muodostumiskohdassa yhteen pisteesseen. Jos linssin edessä on ei-pistemäinen esine kuten tässä tarkasteltu punaisen ja vihreän lampun muodostama kappale, linssi kokoaa kustakin esineen osasta läheväni valon varjostimen eri pisteisiin. Piste, johon punaisesta lampusta lähtenyt valo kokoontuu, hohtaa punaisena. Vastaavasti piste, johon vihreä valo kokoontuu, nähdään vihreänä.

Kuva 16.32: Kuvan piirtyminen.



**16.30** Miten kuvan 16.32 varjostimella nähtävä kuva muuttuu, jos linssin eteen, aivan kiinni linssiin, asetetaan linssin alapuoliskon peittävä levy?

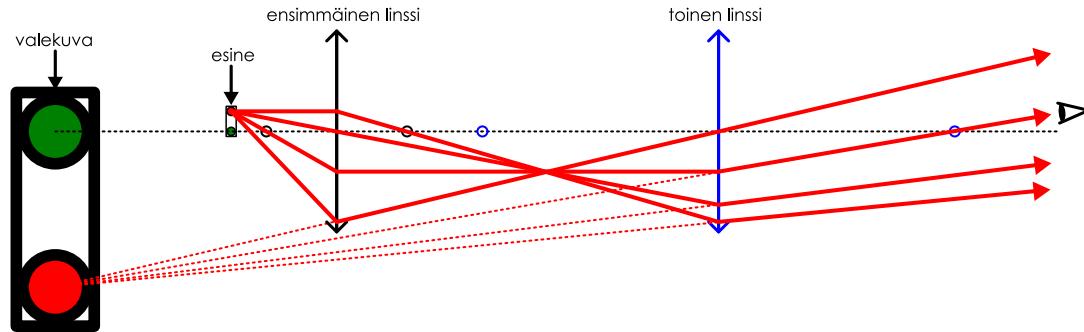
Johdimme edellä linssiyltäön kuperalle linssille, mutta se toimii myös sekä koverissa linsseissä että kupeissa ja koverissa peileissä, kunhan pituuskien etumerkit valitaan sopivasti. Merkkisäännöt on sovittu tässä niin, että valonsäteet kokoavissa peileissä ja linsseissä, joissa on todellinen polttopiste, polttoväli  $f$  on positiivinen. Vastaavasti valonsäteet hajauttavissa peileissä ja linsseissä, joissa on valepoltopiste, polttoväli on negatiivinen. Esineen etäisyys linssistä,  $L_{\text{esine}}$ , on positiivinen, jos esine on samalla puolella linssiä kuin mistä valonsäteet saapuvat linssiin. Samoin kuvan etäisyys linssistä,  $L_{\text{kuva}}$ , on positiivinen, jos kuva tai valekuva piirtyy samalle puolelle linssiä kuin mistä valonsäteet poistuvat linssistä. Esimerkiksi kuvan 16.31 tapauksessa  $L_{\text{esine}}$  on positiivinen, koska esine on linssin vasemmalla puolella, ja valonsäteet saapuvat linssiin vasemmalta. Sen sijaan  $L_{\text{kuva}}$  on negatiivinen, koska valekuva muodostuu linssin vasemmalle puolelle, mutta valonsäteet poistuvat linssistä sen oikealle puolelle.

Suurennuslasi on esimerkki yhteen linssiin perustuvasta optisesta laitteesta, mutta yleensä yksi linssi ei riitä vaan optisissa instrumenteissä tarvitaan useita linssejä tai peilejä ohjaamaan valonsäteiden kulkua. Esimerkiksi optiset kaukoputket, kuumarit ja mikroskoopit koostuvat kaikki useista linsseistä.

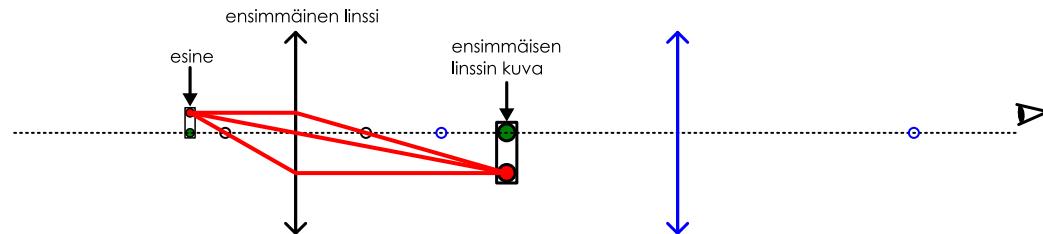
Kun esinettä katsotaan usean linssin läpi, jokainen linssi käänää sen läpi kulkevien valonsäteiden reittiä, kuten kuvan 16.33 esimerkissä. Tässä kuvassa on kaksi kuperaa linssiä, jotka kumpikin taittavat niiille saapuvia

Kuva 16.33: Valon kulku usean linssin läpi. Ensimmäinen linssi muodostaa esineestä kuvan, joka toimii esineenä toiselle linssille. Havaitsija näkee toisen linssin muodostaman valekuvan. Koska lopullinen valekuva on paljon suurempi kuin esine, laite voisi olla esimerkiksi mikroskooppi.

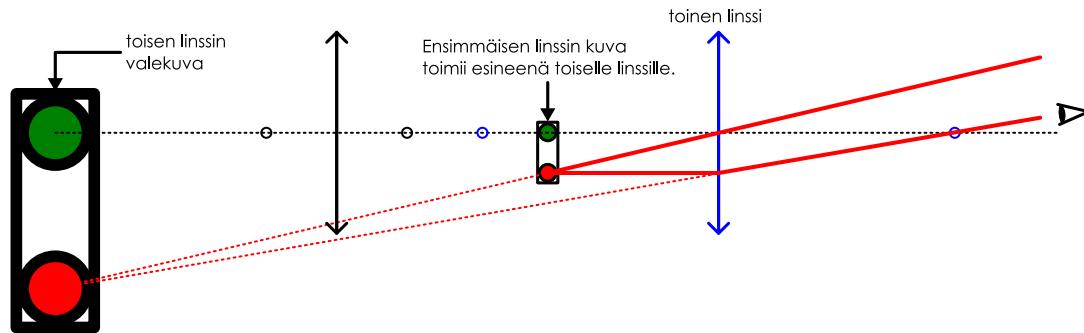
(a) Valonsäteiden kulku kahden kuperan linssin läpi.



(b) Ensimmäinen linssi muodostaa esineestä suurennetun kuvan.



(c) Toinen linssi muodostaa edellisestä kuvasta vielä suuremman valekuvan.



valonsäteitä toisiaan kohti. Ensimmäinen linssi kokoaa säteet yhteen linssien välissä olevaan pisteesseen. Valo kuitenkin jatkaa kulkuaan, ja säteet hajaantuvat jälleen ennen saapumistaan toiseen linssiin. Toinen linssi taittaa valonsäteitä toisiaan kohti, mutta tässä esimerkissä toinen linssi ei ole kyllin vahva taittamaan sille saapuvia säteitä yhteen pisteesseen. Valonsäteet eivät siis hajaannu toisen linssin läpi kuljettuaan enää niin paljon kuin sille saapuessaan, mutta silti ne hajaantuvat ja niinpä linssiin katsovan havaitsijan mielestä valonsäteet näyttävät tulevan linssien takaa pisteestä, jossa säteiden jatkeet leikkavat.

Valonsäteiden kulku usean linssin tai peilin systeemin läpi voi olla hyvin monimutkaista, mutta se voidaan silti analysoida varsin helposti. Toinen linssihän ei tiedä, miten siihen saapuneet valonsäteet ovat kulkenneet vaan linssi toimii niin kuin valonsäteet olisivat alunperin lähteneet lükkeelle siitä pisteestä, jossa ne ensimmäisen linssin jälkeen leikkasivat. Toisaalta tämä on se piste, johon ensimmäinen linssi muodostaa kuvan, joten toisen linssin toiminta voidaan analysoida ajattelemana, että *ensimmäisen linssin muodostama kuva toimii toisen linssin esineenä* (kuvat 16.33 (b) ja (c)). Sama periaate toimii riippumatta linssien lukumäärästä tai niiden tyyppistä, ja linssisysteemin toimintaa voi tutkia linssi kerrallaan niin, että edellisen linssin kuva toimii aina seuraavan linssin esineenä. Jos linssejä on useita, linssit täytyy käydä läpi siinä järjestyksessä missä valo kulkee niiden läpi.

Piste, josta valo näyttää katsojan silmään tulevan, on viimeisen linssin luoma kuva tai valekuva. Tämä on siis myös koko linssisysteemin luoma kuva. Tässä esimerkissä ensimmäinen linssi muodostaa kuvan poltoväliä läheemmäs toista linssia, jolloin toinen linssi muodostaa suuren valekuvan (vrt. esimerkin 16.4 (a)-kohta). Tässä linssit on asetettu vieläpä niin, että kumpikin niistä suurentaa. Ensimmäisen linssin suurenussuhde on noin  $M_1 = 2$  ja toisen linssin noin  $M_2 = 4$ . Lopullinen suurenus on näiden tulo,  $M = M_1 M_2 = 8$ . Koska suurennukset kertautuvat, monista linsseistä koostuvat laitteet voivat tuottaa hyvin suuria suurennuksia.

On myös eräs tilanne, joka on mahdollinen kahden tai useamman linssin systeemissä mutta ei yhdelle linssille. Yksittäiselle linssille esine on nimitäin *aina* samalla puolella linssia kuin mistä valo saapuu, koska muutenhan esinettä ei katsottaisi linssin läpi. Linssightälössä tämä tarkoittaa sitä, että  $L_{\text{esine}}$  on aina positiivinen. Linssisysteemeissä on kuitenkin aivan mahdollista, että ensimmäisen linssin muodostama kuva onkin

## MONIULOTTEiset AALLOT

seuraavaan linssiin verrattuna *eri puolella* kuin mistä valo saapuu. Kuvan 16.33 esimerkissä näin kävisi, jos toinen linssi siirrettäisiin kyllin lähelle ensimmäistä linssiä, sillä piirroksessa valo saapuu systeemiin vastmalta, mutta jos linssit ovat liian lähekkäin, ensimmäisen linssin kuva muodostuisi toisen linssin oikealle puolelle. Tämä ei ole mikään ongelma vaan tilanne voitaisiin edelleen analysoida pitämällä ensimmäisen linssin muodostamaa kuvaa esineenä toiselle linssille. Tällöin kuitenkin linssiyltälössä esineen etäisydelle linssistä  $L_{\text{esine}}$  pitää käyttää negatiivista arvoa.



**16.31** Millainen kuva tai valekuva syntyisi, jos kuvassa 16.33 toinen linssi olisikin lähempänä ensimmäistä linssiä kuin ensimmäisen linssin muodostama kuva?. Piirrä kuva ja tarkista linssiyltälöllä.

## esimerkki 16.4

## Suurennuslasi

**Suurennuslasi** on kupera linssi, jonka polttoväli on 10 cm. Mikä on kuvan tai valekuvan paikka ja koko, jos esine on etäisyydellä (a) 6 cm tai (b) 30 cm linssistä?

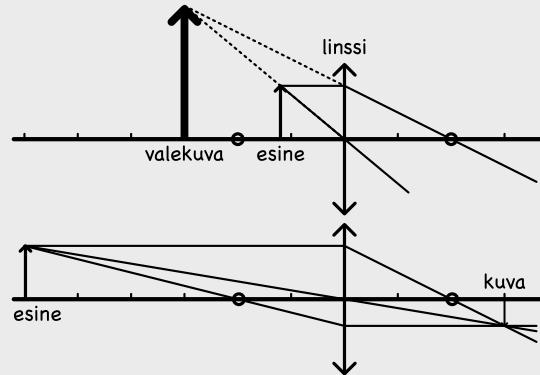
**TILANNE** Piirretään kuvat valonsäteiden kulusta. Merkitään esinettä nuolella, ja piirretään vain nuolen kärjestä lähtevät säteet. Linssin keskipisteen kautta kulkeva sade kulkee suoraan. Linssille kohtisuoraan saapuva sade taittuu kohti polttopistettä. Linssille polttopisteen kautta saapuva sade taittuu kulkemaan kohtisuoraan linssiä kohtaan. Kuva syntyy valonsäteiden (jatkuva viiva) tai niiden jatkeiden (katkoviiva) laikkauspisteeeseen. Kuva on aito kuva, jos valonsäteet leikkaavat. Jos säteiden jatkeet leikkaavat, kyseessä on valekuva.

**SUUNNITELMA** Voimme lukea kuvan koon ja paikan sädiaagrammista tai laskea linssiyltälöllä

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.57)$$

Esineen koko on suoraan verrannollinen siihen, mikä on esineen ja kuvan linssistä mitatutun etäisyyden suhde. Tätä mitataa suurennussuhde

$$M = -\frac{L_{\text{esine}}}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.58)$$



**RATKAISU** (a) Kuvan etäisyys linssistä on

$$L_{\text{kuva}} = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{L_{\text{esine}}} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{6 \text{ cm}} \right)^{-1} = -15 \text{ cm}. \quad (16.59)$$

Negatiivinen tulos tarkoittaa sitä, että kuva muodostuu samalle puolelle linssiä kuin missä esine on. Linssin suurennussuhde on

$$M = -\frac{-15 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 2.5. \quad (16.60)$$

Koska tämä on ykköstä suurempi, kuva on esinettä suurempi. Ja koska tämä on positiivinen kuva nähdään samoin päin kuin esine. Tässä tapauksessa suurennuslasi siis todella toimii suurennuslasina.

(b) Nyt etäisyys linssistä on

$$L_{\text{kuva}} = \left( \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{30 \text{ cm}} \right)^{-1} = 15 \text{ cm}. \quad (16.61)$$

Koska tämä on positiivinen, kuva muodostuu esineestä katsoen linssin vastakkaiselle puolelle. Suurennussuhde on

$$M = -\frac{15 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = -0.5. \quad (16.62)$$

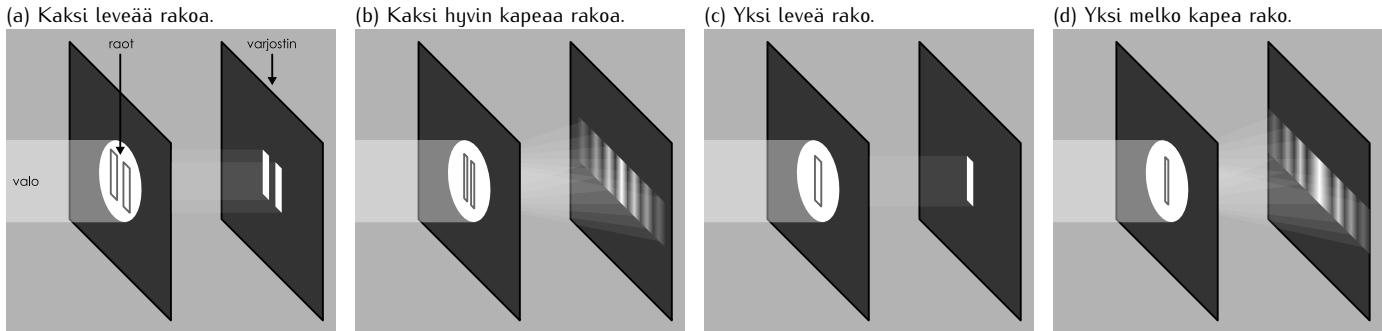
Kuva on siis esinettä pienempi ja se muodostuu väärin päin. Nyt linssi ei toimi suurennuslasina.

**ARVIOINTI** Verrataan laskuja kuviin. Ensimmäisessä tapauksessa kuva muodostuu valonsäteiden jatkeiden leikkauspisteeseen, joten kyseessä on valekuva. Valekuva on 2.5 kertaa suurempi kuin esine ja se muodostuu polttopistettä kauemmas linssistä, kuten laskettiin. Toisessa tapauksessa muodostuu aito kuva. Kuvan etäisyys linssistä on yhtä suuri kuin ensimmäisessä tilanteessa, mutta nyt kuva syntyy linssin vastakkaiselle puolelle ja se kääntyy ympäri. Kuvan koko on puolestaan esineen koosta ja suurennussuhde on -0.5, eli lasku ja piirros vastaavat toisiaan.



**16.32** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä sädeoptiikasta. Miten kuperat ja koverat peilit ja linssit toimivat? Mikä on kuva ja valekuva, ja miten ne muodostuvat? Miten päätelet piirtää ja linssiyltälöllä laskien, millaisen kuvan linssi muodostaa? Miten analysoit useasta linssistä koostuvan laitteen toiminnan?

Kuva 16.34: Makroskooppisista aukoista kulkeva valo voi kuvata suoraan kulkevina valonsäteinä eli sädeoptiikan avulla. Valo kuitenkin kokee interferenssiä ja diffraktiota kulkissaan raoista, joiden leveys on valon aallonpituuuden luokkaa. Tätä kutsutaan aalto-optiikaksi.



## Aalto-optiikka

Sädeoptiikassa valoa kuvataan suoria viivoja pitkin kulkevina säteinä. Aineiden rajapinnalla tällaisen säteen kulkusuunta voi muuttua, ja säde voi jakautua kahtia heijastuneeksi ja taittuneeksi säteeksi, mutta muuten valon kulku on suoraviivaista. Niinpä esimerkiksi linssien ja peilien toiminnan voi ymmärtää pelkästään taittumislain pohjalta. Itse asiassa tämä optiikan haara kehittyi jo kauan ennen kuin ymmärrettiin, että valo on sähkömagneettisen kentän aalto. Valo kuitenkin on aalto, ja niinpä kaikki aaltojen tyypilliset ilmiöt kuten interferenssi havaitaan myös valolla, ja valon käyttäytymistä näissä ilmiöissä kuvaa **aalto-optiikka** eli *fysiikaalinen optiikka*.

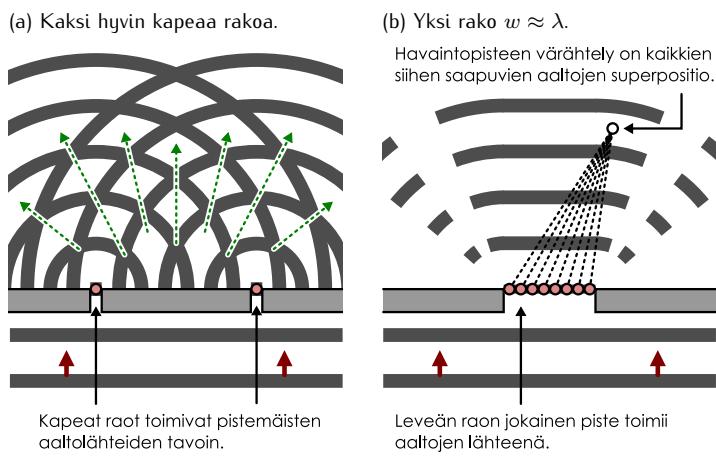
Kuvassa 16.34 on esitetty valon kulku erilaisista aukoista. Jokaisessa kuvassa valo saapuu vasemmalta, kulkee yhdessä levyssä olevan aukon läpi ja saapuu sitten varjostimelle. Kuvassa 16.34 (a) valo kulkee kahdesta aukosta, jotka ovat selvästi sen aallonpituuutta leveämät. Tällöin varjostimella nähdään kaksi kirkasta viivaa, ja tämä voidaan selittää yksinkertaisesti niin, että valonsäteet kulkevat aukoista suoraan. Kahden raon takana nähdään kaksi kirkasta viivaa, koska kummastakin raosta kulkeneet valonsäteet piirtävät oman, erillisen viivansa.

Kuvassa 16.34 (b) on esitetty sama koe, kun aukot ovat kapeat ja niiden välinen etäisyys on valon aallonpituuuden kokoluokkaa eli korkeintaan joitakin mikrometrejä. Nyt varjostimella ei nähdäkään kahta hyvin kapeaa viivaa vaan *joukko viivoja*. Nämä viivat eivät myöskään ole yhtä leveitä kuin aukot, joista valo kulki. Sen sijaan viivojen määrä, leveys ja keskinäinen etäisyys *riippuu aukkojen välisestä etäisyydestä*. Mitä lähempänä aukot ovat toisiaan, sitä leveämpää viivoja varjostimella nähdään. Tämä johtuu siitä, että nyt valo kulkee aaltona kummastakin aukosta ja eri reittejä kulkeneet aallot interfeeroivat aukkojen takana. Varjostimella nähdään kirkkaat viivat niissä paikoissa, joissa valon intensiteetti on suuri, eli vahvistavan interferenssin suunnissa. Tuhoavan interferenssin suuntiin ei kulje lainkaan valoa, ja niinpä näissä suunnissa varjostimella on tumma, valoton alue.

Kuvissa 16.34 (c) ja (d) on esitetty samanlainen vertailu, kun valo kulkee yhdestä raosta. Jos rako on leveä, nähdään varjostimella jälleen kirkas alue, jonka muoto on sama kuin raon muoto. Jos sen sijaan raon leveys on samaa suuruusluokkaa kuin valon aallonpituuus eli korkeintaan joitakin mikrometrejä, yhden viivan sijaan varjostimella nähdään useita valaistuja alueita.

Kuvan (b) tilannetta kutsutaan *kaksoisrakokokeeksi* tai Youngin kokeeksi (Thomas Youngin mukaan). Kuvan (d) tilannetta puolestaan kutsutaan valon *diffraktioksi* kapeassa raossa. Kummassakin tapauksessa kyse on interferenssistä, joka voidaan ymmärtää Huygensiin periaatteeseen ja valon aaltoluonteeseen avulla. Valon kulkissa kahdesta kapeasta rasta *kumpikin rako toimii Huygensiin periaatteeen mukaisesti pistemäisen aaltolähteen tavoin*, ja rakojen takana aallot interfeeroivat suunnissa, joissa ne ovat samassa vaiheessa (kuva 16.35 (a), vrt. kuva 16.16 (b)). Valon kulkissa yhdestä leveästä rasta *jokainen rako piste toimii aallon lähteenä*, ja tilanne on samanlainen kuin jos raon sijaan aallon synnyttäisi

Kuva 16.35: Aallon interferenssi ja diffraktio.



## MONIULOTTEiset AALLOT

rivi pistemäisiä lähteitä (kuva 16.35 (b), vrt. kuva 16.20 (b)). Näillä kokeilla on ollut valtava historiallinen merkitys, sillä niiden perusteella aikoinaan hyväksytin, että valo koostuu aalloista eikä hiukkasia jo huomattavasti ennen sähkömagneettisten aaltojen löytymistä.

Kaksoisrakokokeessa on siis kyse kahden lähteen interferenssistä, jonka selitimme jo luvussa 16.3. Valon tapauksessa emme kuitenkaan havaitse sähkömagneettista aaltoa itsessään vaan näemme ainoastaan varjostimella kirkkaasti ja himmeästi valaistuja alueita. Toisaalta kirkas valo tarkoittaa sähkömagneettisen aallon suurta intensiteettiä ja himmeä valo pientä. Niinpä varjostimella nähtävä kuvio on suora mittari havaintopisteisiin saapuvan aallon intensiteetistä. Kun siis haluamme ymmärtää kaksoisrakokokeessa nähtävän kuvion synnyin, tahdomme tosiasissa selvittää, missä pisteissä aallot interferoivat toisiaan vahvistavasti ja missä heikentävästi.

Kaksoisrakokokeen geometria on esitetty kuvassa 16.36 (a). Aaltojen lähteet (eli raot) on piirretty punaisin ympyröin ja varjostimelta valittu havaintopiste valkoisena ympyränä. Havaintopisteessä mitataan suuri intensiteetti (nähdään kirkas valo), jos eri lähteistä tulevat aallot ovat samassa vaiheessa. Vastaavasti intensiteetti on nolla (nähdään valoton alue), jos aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa. Lähteet värähtelevät samassa vaiheessa, joten havaintopisteeseen saapuvien aaltojen vaihe-ero riippuu ainoastaan niiden kulkkien matkojen erosta.

**!** 16.33 Edellä oletettiin, että lähteet värähtelevät samassa vaiheessa. Selitä kuvan 16.35 (a) perusteella, miksi näin täytyy olla. Miten voisit muuttaa koejärjestelyä niin, että lähteet eivät olekaan samassa vaiheessa?

Matkaero voidaan ratkaista geometrisesti. Kuvassa vasemmanpuoleinen lähde on kauempana havaintopisteestä, ja tämän havainnollistamiseksi lähteestä havaintopisteesseen piirretty jana on jaettu kahteen osaan. Turkoosilla väritetty osa on yhtä pitkä kuin oikeanpuoleisesta lähteestä havaintopisteesseen mitattu matka, jolloin punaisella piirretty osuus on matkojen pituksien erotus.

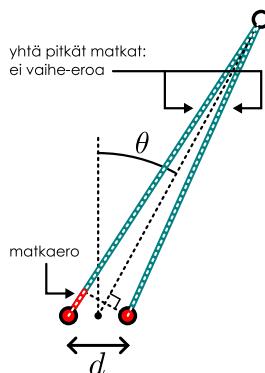
Valon tapauksessa interferensi havaitaan lähteiden välisen etäisyyden  $d$  ollessa valon aallonpituuuden suuruusluokkaa. Etäisyys raoilta varjostimelle voi sen sijaan olla metrejä eli paljon rakojen välistä etäisyyttä suurempi. Huomaan kuitenkin, että kuvassa (a) turkoosilla piirrettyt janat muodostavat tasakylkisen kolmion kyljet. Havaintopisteen ollessa hyvin kaukana lähteistä (etäisyyteen  $d$  verrattuna) tämä tasakylkinen kolmion on erittäin pitkä ja kapea, ja sen kyljet ovat lähes yhdensuuntaiset suorat, mutta ne ovat silti yhtä pitkät. Tämä tilanne voidaan esittää erittäin hyvällä tarkkuudella kuvaan 16.36 (b) piirretyllä geometrialla, jossa havaintopiste on äärettömän kaukana ja suorat ovat todella yhdensuuntaiset. Nyt kuvan muodostuu harmaalla väritetty suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on lähteiden välinen jana ja toinen kateetti on punaisella piirretty aaltojen kulkemien matkojen ero. Kuvassa on merkitty valon alkuperäisen kulkusuunnan ja raoista havaintopisteesseen osoittavan suunnan välistä kulmaa symbolilla  $\theta$ , ja tämä sama kulma on myös harmaalla piirretynä kolmiossa matkaeroa kuvaavan kateetin vastakkaisena kulmana. Tämän kulman sini voidaan siis ilmaista matkaeroa kuvaavan kateetin pituuden  $\Delta r$  ja hypotenuusan pituuden  $d$  suhteena,  $\sin \theta = \frac{\Delta r}{d}$ , tai toisin päin matkaeroa kuvaavan kateetin pituus on hypotenuksen pituus kerrottuna vastakkaisen kulman sinillä,

$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (16.63)$$

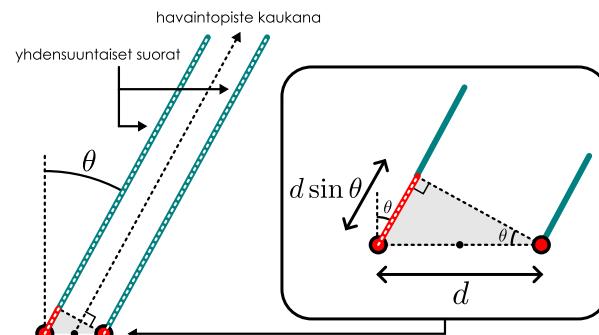
**!** 16.34 Osoita yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, että kuvan 16.36 (b) harmaan kolmion terävä kulma  $\theta$  on sama kuin raoista havaintopisteesseen osoittavan suunnan ja rakojen normaalisuunnan välinen kulma  $\theta$ .

Kuva 16.36: Kaksoisrakokokeessa vahvistava interferenssi tapahtuu, kun aaltojen kulkemien matkojen ero on aallonpituuuden monikerta.

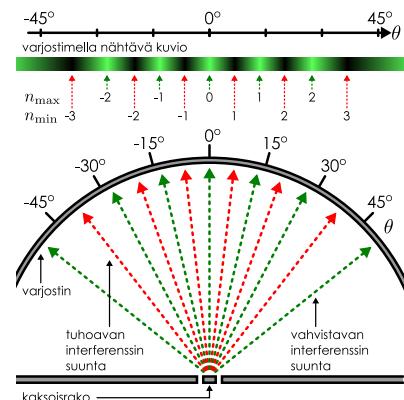
(a) Vaihe havaintopisteessä riippuu aaltojen kulkemasta matkasta.



(b) Jos havaintopiste on kaukana rakojen etäisyyteen nähdyn, aaltojen matkaero voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiossa.



(c) Havaitaan interferenssikuvio.



Yhden aallonpituisen matkalla aallon vaihe muuttuu yhden kokonaisen kierroksen, joten eri lähteiden aallot interferoivat vahvistavasti, jos matkaero on jokin aallonpituisen monikerta,  $|\Delta r| = 0, \lambda, 2\lambda$  jne. (Tässä määritelty matkaero  $\Delta r$  voi luonnollisesti olla myös negatiivinen, sillä havaintopiste voi olla myös lähempänä vasemmanpuoleista lähdettä kuin oikeaa.) Jos puolestaan matkaero on jokin aallonpituisen monikerta plus puolikas aallonpituuus,  $|\Delta r| = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$  jne., aallot ovat täsmälleen vastakkaisissa vaiheissa ja tapahtuu tuhoava interferenssi. Vahvistava interferenssi tapahtuu siis, jos  $|\Delta r| = |n_{\max}| \lambda$ , ja tuhoava interferenssi jos  $|\Delta r| = |n_{\min}| - \frac{1}{2} \lambda$ . Tässä kokonaislukuindeksi  $|n_{\max}| = 0, 1, 2, \dots$  on *intensiteettimaksimin kertaluku* ja  $|n_{\min}| = 1, 2, \dots$  on *intensiteettiminimin kertaluku*.

Sijoittamalla näihin ehtoihin matkaeron lauseke (16.63), saamme ratkaistua suunnat, joissa havaitaan vahvistava ja tuhoava interferenssi. Valon intensiteetillä on maksimi, kulmissa  $\theta_{\max}$ , joille pätee

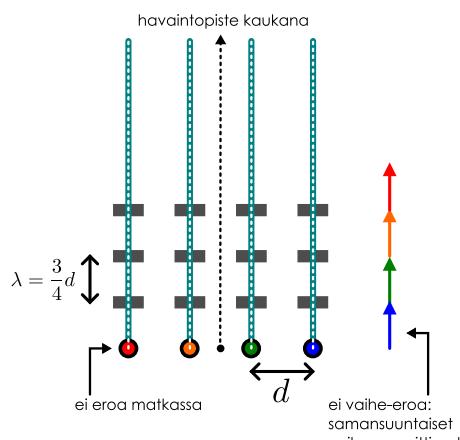
$$d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda. \quad (16.64)$$

Etumerkkien valinta on tässä sopimuskysymys. Kuvassa 16.36 (c) etumerkit on valittu niin, että kulma  $\theta$  ja indeksi  $n_{\max}$  ovat kuvan vasemmalla puolella negatiiviset ja oikealla puolella positiiviset. Vastaavasti intensiteettiminimit havaitaan kulmissa  $\theta_{\min}$ , joille pätee

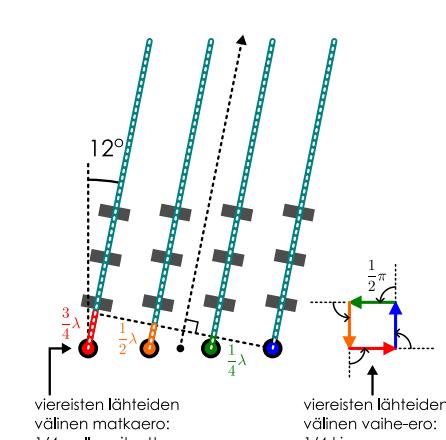
$$d \sin \theta_{\min} = \pm \left| n_{\min} - \frac{1}{2} \right| \lambda. \quad (16.65)$$

Kuva 16.37: Vahvistavan ja heikentävän interferenssin suuntien määritäminen valon kulkiessa neljästä tasavälistä raosta.

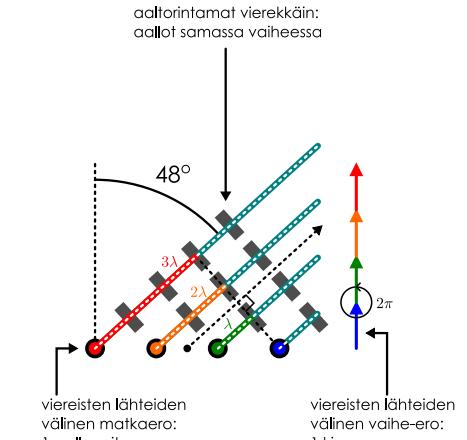
(a) Valo kulkee suoraan: keskuskaksimi.



(b) Ensimmäinen minimi.

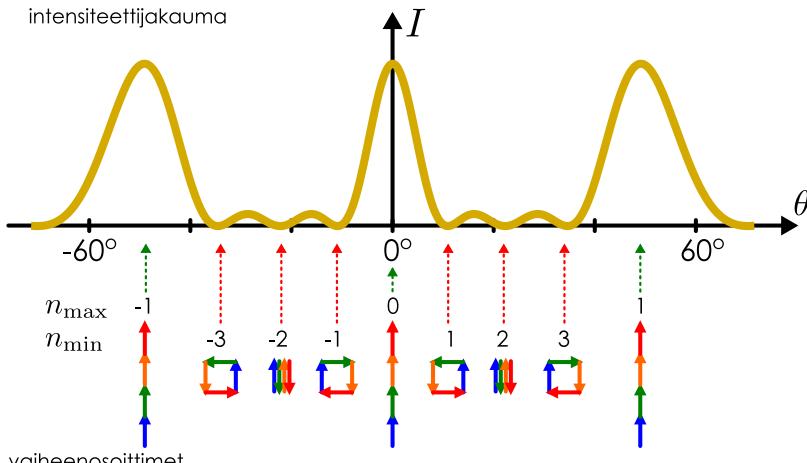


(c) Sivumaksimi.



(d) Havaitaan muutama intensiteetin päämaksimi ja maksimien välissä kolme minimia.

varjostimella nähtävä kuva



## MONIULOTTEISET AALLOT

Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa valo kulkee kahden raon sijaan useasta kapeasta raosta. Kuvasa 16.37 on esimerkinä neljän raon tapaus. Kuvassa jokainen rako eli aallon lähde on kuvattu värellisenä ympyränä ja ympyröistä lähtevät suorat kulkevat kaukana olevaan havaintopisteeseen. Myös aaltojen vaiheenosoitimet havaintopisteessä on piirretty. Kuvassa 16.37 (a) aallot kulkevat raoista suoraan, ja ne ovat kaikki samassa vaiheessa. Tämä näkyy siitä, että eri lähteistä tulevien aaltojen rintamat (paksut tummat viivat) ovat vierekkäin samassa linjassa. Vaiheenosoitimet ovat kaikki samansuuntaiset, ja niiden summana saadaan siis pitkä vaiheenosoitin. Tämän vaiheenosittimen pituus edustaa sähkömagneettisen aallon amplitudia havaintopisteessä, joten tässä suunnassa aallolla on suuri amplitudi ja intensiteetti.

Vaiheenosoitajien summan pituus on suurimmillaan silloin, kun vaiheenosoitimet osoittavat samaan suuntaan. Tällöin summan pituus on yksinkertaisesti nelinkertainen yhden lähteen vaiheenosittimeen verrattuna. Jos vaiheenosoitimien suunnat poikkeavat toisistaan, niiden summan pituus on välttämättä tätä lyhyempi. Kuvassa 16.37 (a) vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset siksi, että jokaisesta lähteestä on havaintopisteeseen yhtä pitkä matka. Vaiheenosoitimet voivat kuitenkin olla samansuuntaiset, vaikka aaltojen kulkemat matkat olisivat eri pituiset. Jos esimerkiksi kahdesta vierekkäisestä lähteestä havaintopisteeseen saapuvien aaltojen matkojen ero on yksi aallonpituuus kuten kuvassa 16.37 (c), vierekkäisten lähteiden vaiheenosoitimet poikkeavat toisistaan yhden kokonaisen kierroksen. Tällöin vaiheenosoitimet ovat jälleen samansuuntaiset. Samoin käy, jos vierekkäisistä lähteistä tulevien aaltojen matkaero on jokin aallonpituuuden monikerta. Tällöin jokainen vierekkäisten lähteiden pari on keskenään samassa vaiheessa, ja niinpä kaikki lähteet ovat keskenään samassa vaiheessa.

Kuvat 16.37 (a) ja (c) esittävät tilanteita, joissa eri lähteiden aallot vahvistavat toisiaan täydellisesti. Näissä kulmissa varjostimella havaitaan intensiteettimaksimi. Toisin sanoen näissä kulmissa varjostimella on kirkas viiva. Näiden maksimien välillä aallon intensiteetin täytyy puolestaan välttämättä olla pienempi. Kuvassa 16.37 (b) on esitetty tilanne, jossa vierekkäisistä lähteistä tulevien aaltojen matkaero on neljännes aallonpituudesta. Esimerkiksi matka kuvassa vihreällä piirretystä lähteestä havaintopisteeseen on  $\Delta r = \frac{1}{4}\lambda$  pidempi kuin matka sinisestä lähteestä. Tämä tarkoittaa sitä, että vihreän lähteen aallon vaiheenosoitin kiertyy neljänneskierroksen sinisen lähteen vaiheenosittimeen verrattuna eli vaiheenosoitimet ovat toisiinsa nähdyn kohtisuorassa. Samoin matka oranssista lähteestä havaintopisteeseen on pidempi kuin vihreästä ja matka punaisesta pidempi kuin oranssista. Niinpä nämäkin vaiheenosoitimet kääntyvät neljänneskierroksen napureihinsa verrattuna. Yhdessä kaikki neljä vaiheenosoitinta muodostavat *neliön*, ja niiden summana saatava vaiheenosoitin on näin ollen *nollamittainen*. Tämä tarkoittaa, että sähkökentän väärähtelyn amplitudi on havaintopisteessä nolla, eli tässä suunnassa tapahtuu täydellinen tuhoava interferenssi.

Kuvassa 16.37 (d) on piirretty varjostimella nähtävä kuvio sekä valon intensiteetti havaintokulman  $\theta$  funktiona. Intensiteettijakaumassa on maksimi kulmilla  $\theta = 0^\circ$  sekä  $\theta = \pm 48^\circ$ , mitkä vastaavat kuvien (a) ja (c) tilanteita. Intensiteetti on nolla kaikissa niissä pisteissä, joissa vaiheenosoitinten summa on nolla, ja näitä ovat kulmat  $\theta = \pm 12^\circ, \pm 24^\circ, \pm 36^\circ$ . Ensimmäinen näistä vastaa kuvan (b) tilannetta. Valon intensiteettijakaumassa on siis kirkkaita intensiteettimaksimeja, ja näiden välissä on aina *kolme* intensiteettiminimiä sekä näiden erottamat alueet, joissa intensiteetti on hieman nolla suurempi.



**16.35** Vertaa intensiteettijakaumaa kuvassa 16.37 kuvan 16.19 (a) interferenssikuvioihin. Mitä interferenssikuvioita intensiteettijakauma vastaa? Ovatko intensiteettimaksimit ja -minimit samoissa kulmissa kummassakin kuvassa?

Kaksoisrakokoetta analysoidessamme johdimme relaation (16.64) intensiteettimaksimien kulmille. Tämä yhtälö johdettiin siitä ehdosta, että kahden lähteen aallot ovat samassa vaiheessa, jos niiden kulkemien matkojen ero on aallonpituuuden monikerta. Yllä päättelimme, että myös neljän raon tapauksessa intensiteettimaksimin ehto on se, että vierekkäisten lähteiden aaltojen matkaero on aallonpituuuden monikerta. Koska vahvistavan interferenssin ehto on kummassakin tilanteessa sama, intensiteettimaksimit voidaan määrittää yhtälöstä (16.64) myös neljän raon tapauksessa. Erityisesti *intensiteettimaksimit havaitaan samoissa kulmissa riippumatta rakojen määrästä*, kunhan vierekkäisten rakojen välinen etäisyys  $d$  on sama (kuva 16.38).

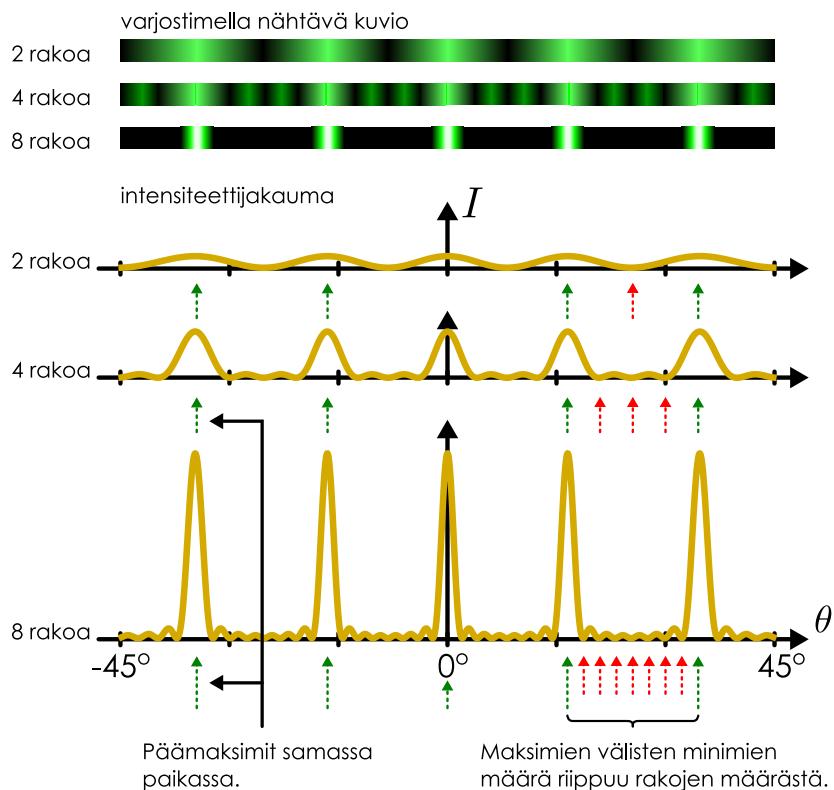
Maksimien välillä intensiteettijakauman muoto kuitenkin riippuu rakojen lukumäärästä. Kaksoisrakokokeessa kahden vierekkäisen intensiteettimaksimin välissä on aina yksi intensiteettiminimi, koska kaksi aaltoa kokuvat tuhoavan interferenssin vain niiden vaiheenosoitinten ollessa vastakkaisuuntaiset. Neljän raon tapauksessa minimejä on kuitenkin *kolme*, koska neljän vaiheenosittimen summaksi voidaan saada nolla usealla tavalla. Kuvassa 16.37 (b) vierekkäisten aaltojen vaiheenosoitimia on kierretty neljänneskierros, mutta vaiheenosoitimien summaksi tulee nolla myös, jos vierekkäisten osoittimien välinen kulma on puoli kierrostaa tai kolme neljännestä täydestä kierroksesta (kuva 16.37 (d)).



**16.36** Kuvassa 16.37 (d) on piirretty neljän lähteen vaiheenosoitimet, jotka tuottavat aallon amplitudiksi nollan. Millaiset ovat vastaavat kuviot, jos lähteitä on viisi? Montako nütää on?

Yleisesti, jos meillä on  $N$  lähettä ja vierekkäisten lähteiden aaltojen välillä on vaihe-ero  $\Delta\phi$ , vaiheenosittimien summa on nolla jos ja vain jos tämä vaihe-ero on jokin murto-osa  $1/N, 2/N, 3/N$  jne. täydestä

Kuva 16.38: Havaitut intensiteettijakaumat, kun valo kulkee kahden, neljän tai kahdeksan raon läpi, ja rakojen välinen etäisyys on kolme ja puoli aallonpituuutta,  $d = 3.5\lambda$ .



kierroksesta mutta *ei täyden kierroksen monikerta*. Toisin sanoen aallot kokevat täydellisen tuhoavan interferenssin, jos vaihe-ero on  $\Delta\phi = \frac{n}{N}2\pi$ , missä  $n$  on jokin kokonaisluku, joka ei ole jaollinen vaiheenoottimien lukumäärällä  $N$ . Esimerkiksi 4 lähteen tapauksessa intensiteetti on nolla, jos vierekkäisistä lähteistä saapuvien aaltojen vaihe-ero on 1/4, 2/4 tai 3/4 täydestä kierroksesta, mutta intensiteetillä on maksimi, kun vaihe-ero on 4/4 eli yksi kokonainen kierros.

Tästä johtuen  $N$  lähettä tuottavat intensiteettijakauman, jossa kahden vierekkäisen intensiteettimaksimin välissä on  $N - 1$  kulmaa, joissa intensiteetti on nolla. Siispä mitä enemmän rakoja on, sitä kapeammiksi intensiteettimaksimit käyvät. Lisäksi rakojen läpi kulkevan energian määrä on suoraan verrannollinen rakojen määrään, joten intensiteetin täytyy maksimien kohdalla olla sitä suurempi, mitä useammasta raosta valo kulkee, kuten kuvasta 16.38 nähdään.



**16.37** Tehdään kaksi interferenssikoetta. Ensimmäisessä valo kulkee 3 ja toisessa 6 raon läpi. Rakojen leveys ja keskinäinen etäisyys on sama. Miten muuttuu intensiteettimaksimien (a) lukumäärä, (b) leveys, (c) korkeus? (d) Entä varjostimelle saapuvan energian kokonaismäärä? (e) Ovatko kohtien (a)–(d) tulokset sopisoinnussa keskenään?

Siispä mitä useammasta raosta valo kulkee, sitä kapeammiksi ja kirkkaammiksi interferenssimaksimit käyvät. Vastaavasti maksimien väleillä intensiteettiminimiiden määrä kasvaa ja niinpä valon kuljettama energia keskittyy yhä enemmän maksimeihin, joiden välillä energiota ei virtaa juuri lainkaan. Rakennetta, jossa on hyvin monta tasavälistä, erittäin kapeaa raka, kutsutaan *diffraktiohilaksi*. Tällaisesta hilasta kulkeva valonsäde haarautuu interferenssin takia useaksi säteeksi, joilla on kullakin täsmällinen kulkusuunta. Ilmiön voi havaita helposti esimerkiksi DVD-levyn avulla. Informaatio tallennetaan tällaisen levyn pinnassa kulkeviin hyvin kapeisiin ja tiheässä oleviin uriin, ja valon heijastuessa levyn pinnasta kukin ura toimii uuden aallon lähteenä. Urista heijastuvat aallot interfeeroivat aivan samoin kuin rakojen läpi kulkevat aallo, joten levyn pinta toimii heijastavan diffraktiohilan tavoin. Jos pintaan valaisee esimerkiksi laserosoottimella, pinnasta heijastunut valo jakautuu useaksi säteeksi. Säteet kulkevat täsmälleen niihin suuntiin, joissa eri urista heijastuneet aallot interfeeroivat vahvistavasti.



**16.38** DVD-levystä heijastuva valkoinen valo hajaantuu eri väriin, mikä näkyi levyn pinnalla "sateenkaarina." Selitä ilmiö sen perusteella, että levyn pinta toimii diffraktiohilan tavoin.

## esimerkki 16.5

## Usean raon interferenssi

(a) Johda intensiteetin lauseke poikkeamakulman  $\theta$  funktiona, kun valo (aallonpituuus  $\lambda$ ) kulkee  $N$  tasaväisen (etäisyys  $d$ ) hyvin kapean raon läpi. (b) Pürrä intensiteetti, kun  $d = 4\lambda$  ja  $N = 2, 4, 6$ .

**SUUNNITELMA** Oletetaan, että valo saapuu raoille suorana rintamana samassa vaiheessa, jolloin kunkin rakan rakenne on samassa vaiheessa värähtelevä uuden aallon lähdde. Olkoon yhdestä raoista tulevan aallon amplitudi havaintoetäisyydellä  $A_0$  ja intensiteetti  $I_0$ . Jos havaintopiste on kaukana raoista niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, eri raoista tulevien aaltojen amplitudit ovat hyvin tarkasti samat.

Aaltojen superposition amplitudi ratkeaa laskemalla aaltojen vaiheenosottimien summan pituus. Koska vierekkäisten rakojen välinen etäisyys on vakio,  $d$ , vierekkäistä raoista tulevien aaltojen vaihe-ero on myös vakio,

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta, \quad (16.66)$$

sillä aaltojen kulkemien matkojen pituusero on  $\Delta r = d \sin \theta$ . Vaiheenosottinkuviossa on siis  $N$  nuolta, joiden pituus on  $E$ , ja vierekkäisten nuolten välinen kulma on  $\Delta\phi$ . Tehtävänä on ratkaista näiden nuolten vektorisumman pituus, mutta teimme tämän jo esimerkissä 14.4. Lopputulos oli

$$A_{\text{summa}} = A_0 \frac{\sin(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})}. \quad (16.67)$$

Koska intensiteetti on verrannollinen amplitudin neliöön, intensiteettijakauma on siis

$$I_{\text{summa}} = I_0 \frac{\sin^2(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\Delta\phi}{2})}. \quad (16.68)$$

**RATKAISU** Vaihe-eron lausekkeen sijoitus intensiteettijakaumaan antaa funktion

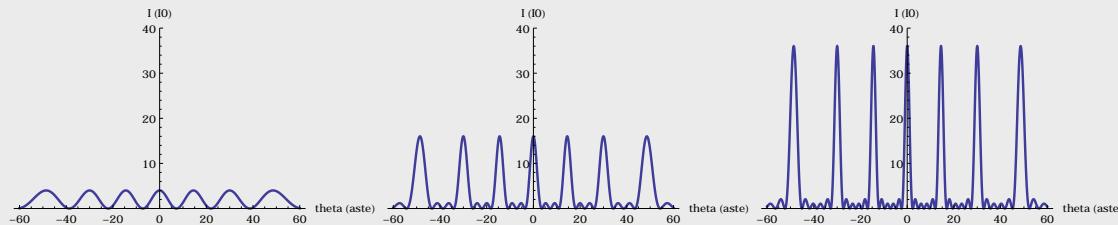
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}. \quad (16.69)$$

Nämä on piirretty alla välillä  $\theta \in [-60^\circ, 60^\circ]$ , pyydettyillä parametreilla.

Mathematica:

```
(* vaihe-ero, amplitudi, intensiteetti *)
lukuarvot = {d -> 4 lambda, a0 -> 1};
dphi[theta_] := 2 Pi d/lambda Sin[theta]
asumma[theta_, n_] := a0 Sin[n dphi[theta]/2]/ Sin[dphi[theta]/2]
isumma[theta_, n_] := asumma[theta, n]^2
```

```
(* kuvaajat *)
Plot[isumma[theta Degree, 2] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
Plot[isumma[theta Degree, 4] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
Plot[isumma[theta Degree, 6] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
```



**ARVIOINTI** Kun  $d = 4\lambda$ , intensiteettimaksimeille saadaan yhtälöstä (16.64) ehto  $\sin \theta_{\max} = \frac{1}{4}n_{\max}$ , ja koska sinifunktion arvon täytyy olla  $-1$  ja  $1$  välillä, mahdolliset ratkaisut ovat  $n_{\max} = -4, -3, \dots, 4$ , mitä vastaavat kulmat ovat  $\theta_{\max} \approx -90^\circ, -49^\circ, -30^\circ, -14^\circ, 0^\circ, 14^\circ, 30^\circ, 49^\circ, 90^\circ$ . Juuri näillä kulmissa kuvajissa onkin päämaksimit.

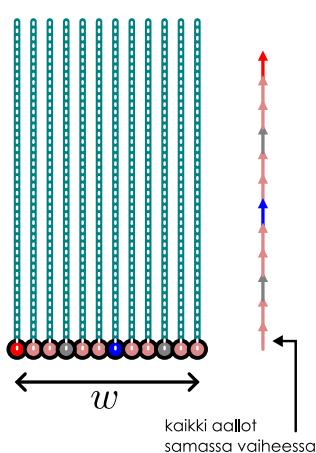
Huomaa erityisesti, että päämaksimit tulevat kaikkissa tapauksissa samoihin paikkoihin. Rakojen lukumäärä ei siis vaikuta tähän vaan ainoastaan vierekkäisten rakojen välisen etäisyyden suhde aallonpituuuteen. Kuitenkin kun rakojen lukumäärä kasvaa, päämaksimeista tulee kapeampia ja kirkkaampia.



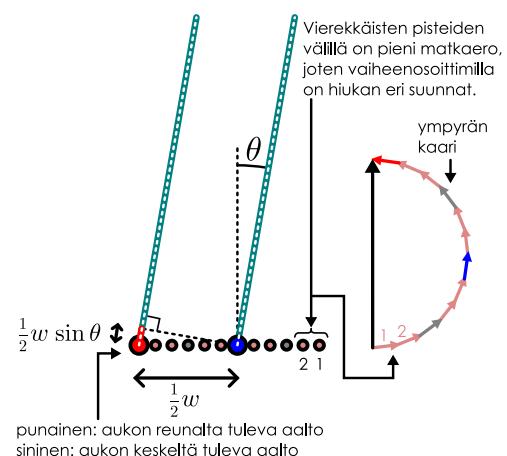
16.39 Millaisen intensiteettijakauman tuottaa esimerkin 16.5 perusteella yksi rako? Mitä tulos tarkoittaa?

Kuva 16.39: Vahvistavan ja heikentävän interferenssin suuntien määrittäminen valon kulkiessa yhdestä raosta, joka on neljän aallonpietuuden levijinen,  $w = 4\lambda$ . Raon jokainen piste toimii aallon lähteenä.

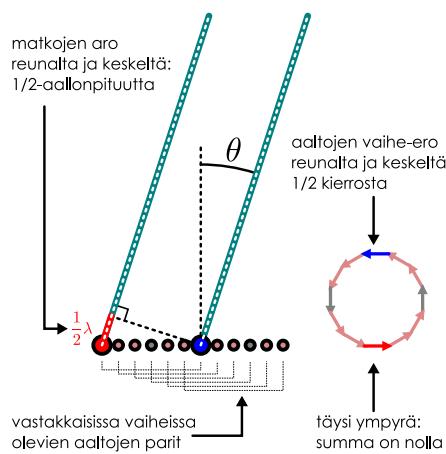
(a) Valo kulkee suoraan: keskuskaksimi.



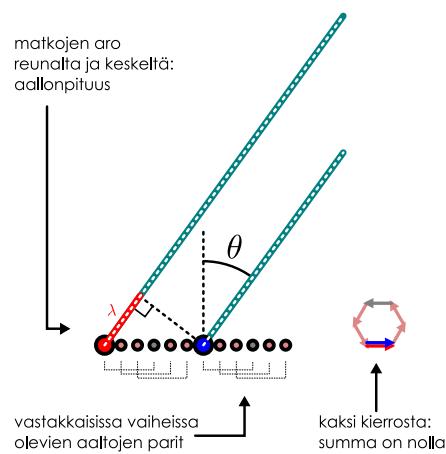
(b) Valo ei kulje suoraan: eri pisteiden lähetämät aallot ovat eri vaiheessa.



(c) Ensimmäinen intensiteettiminimi.



(d) Toinen intensiteettiminimi.



Edellisissä kahden ja usean raon interferenssikokeissa kaikkien rakojen oletettiin olevan valon aallonpietuuteen nähdyn hyvin kapeita, jolloin aukosta tuleva aalto toimii pistemäisen aaltolähteen tavoin synnyttäen ympyröinä leviväitä aaltonrintamia. Täsmällisemmin kuitenkin aukosta kulkevan aaltonrintaman *jokainen piste* toimii uuden aallon lähteenä (kuva 16.36 (b)). Siksi tämä malli ei toimi, jos valo kulkee raosta, jonka leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituuus.

Itse asiassa näimme jo luvussa 16.3, että pistemäisten lähteiden rivin tuottaman aallon muoto riippuu rivin leveyden ja aallonpituuksen suhteesta. Hyvin leveä rivi aaltojen lähteitä tuottaa lähes suoraan kulkevia aaltonrintamia. Jos lähteiden rivin leveys puolestaan on samaa suuruusluokkaa aallonpituuksen kanssa, aalto levivää ja muodostaa yhden tai useita kiilamaisia aaltonrintamia. Tällöin suurin osa aallon kuljettamasta energiasta virtaa suoraan, mutta osa energiavirrasta kääntyy ja hajaantuu eli *diffraktio*. Näin käy myös yhdestä raosta kulkevalle valolle. Jos rako on valon aallonpituuteen nähdyn leveä, diffraktio on heikkoa ja valo jatkaa matkaansa likimain suoraan. Jos aukon leveys on kuitenkin samaa suuruusluokkaa aallonpituuksen kanssa, diffraktio on merkittävä, ja valo hajaantuu.

Analysoidaan nyt yhdestä raosta kulkevan valon intensiteettijakauma kuvan 16.39 avulla. Raon jokainen piste toimii aallon lähteenä, ja näitä lähteitä on siis periaatteessa ärettömän monta. Yksinkertaisuuden vuoksi kuvassa rako on esitetty kahtenatoista ympyränä kuvattuna lähteenä. Tämä on approksimaatio, mutta se riittää ilmiön selittämiseksi.

Kuvassa 16.39 (a) on esitetty tilanne, jossa havaintopiste on suoraan raon takana. Tällöin kustakin lähteestä tuleva aalto kulkee raon normaalilin suuntaan, ja niinpä kaikki aallot ovat samassa vaiheessa. Aaltojen vaiheenosottimet ovat samansuuntaiset, jolloin niiden summan pituus on suurin mahdollinen. Tässä suunnassa valolla on siis suuri intensiteetti.

Tilanne, jossa valoa havaitaan hiukan vinosti raon takana, on esitetty kuvassa 16.39 (b). Nyt eri lähteistä

## MONIULOTTEISET AALLOT

havaintopisteeseen mitatuissa matkoissa on pieni pituusero, joten eri lähteistä saapuvilla aalloilla on havaintopisteessä pieni vaihe-ero. Niinpä aaltojen vaiheenosoitimet muodostavat kaaren. Tässä kuvassa kaari on monikulmio, koska kuvaan on yksinkertaisuuden vuoksi piirretty vain äärellinen määrä lähteitä ja vaiheenosoitimiä. Kuitenkin mitä useampaan lähteeseen rako jaetaan, sitä tarkemmin vaiheenosoitinkuvio muistuttaa sileää ympyrän kaarta. Todellisuudessa raon voi ajatella koostuvan äärettömän monesta pienestä lähteestä, ja niinpä tarkasti piirretty vaiheenosoitinkuvio olisikin täsmälleen ympyrän kaari.



**16.40** Kuvassa 16.39 rako on kuvattu 12 lähteenä. Miten vaiheenosoitinkuviot muuttuisivat, jos rako jaettaisiin 24 lähteeseen? Entä jos rako jaettaisiin äärettömän moneen lähteeseen?

Havaintopisteeseen saapuvan valon amplitudia kuvaava vaiheenosoitimiien summa. Kuvassa 16.39 (a) tämän summan pituus on yksinkertaisesti vaiheenosoitajien pituuksien summa, koska kaikki vaiheenosoitinnuotit osoittavat samaan suuntaan. Kuvaan 16.39 (b) summa on piirretty mustana nuolena, ja selvästikin tämän summan pituus on kuvassa (b) pienempi kuin kuvassa (a). Itse asiassa vaiheenosoitimiien summan pituus saa maksiminsa *vain* kuvan (a) tilanteessa, jossa havaintopiste on suoraan aukon takana ja vaiheenosoitimet muodostavat yhdessä suoran nuolen. Kaikissa muissa suunnissa vaiheenosoitimet muodostavat ympyrän kaaren, ja tämän *kaaren pituus on aina sama kuin vaiheenosoitimiien pituuksien summa*. Vaiheenosoitimiien summaa kuvaavat tämän kaaren alkupisteestä loppupisteeseen osoittava nuoli, jonka täytyy aina olla lyhyempi kuin kaaren pituus. Edelleen koska valon intensiteetti on verrannollinen sen amplitudin (eli vaiheenosoitimiien summan pituuden) neliöön, valon intensiteetin täytyy olla suurimmillaan suoraan raon takana. Kun havaintopiste siirtyy sivuun raon edestä, valon intensiteetin täytyy pienentyä. Toisin sanoen suurin osa valon energiasta kulkee raosta suoraan, mutta osa aallosta taipuu ja energiaa virtaa raon takana myös jonkin verran raon normaalisuuntaan nähdyn sivulle.



**16.41** Miksi esimerkiksi neljästä kapeasta raosta kulkevan valon tapauksessa voidaan havaita useita yhtä kirkkaita intensiteettimaksimeja, mutta yhdestä raosta kulkevan valon tapauksessa ei? Selitä tämä vaiheenosoitimiien avulla.

Erityisen mielenkiintoinen havaintokulma on piirretty kuvan 16.39 (c). Tässä kuvassa raon reunasta saapuvan aallon (punainen) ja raon keskeltä saapuvan aallon (sininen) välinen matkaero on täsmälleen puoli aallonpituitta. Nämä aallot ovat siis täsmälleen vastakkaisissa vaiheissa, niiden vaiheenosoitimet ovat vastakkaisuuntainen, ja aallot interferoivat keskenään tuhoavasti. Vaiheenosoitinkuvio on nytkin ympyrän kaari, ja kuvan piirrettyyn kuvioon on erikseen merkitty punaisella ja sinisellä näistä lähteistä saapuneiden aaltojen vaiheenosoitimet. Koska punainen ja sininen osoitin ovat vastakkaisuuntainen, punaisen ja sinisen lähteen välisiä jäävät vaiheenosoitimet piirtävät *puoliympyrän* kaaren. Nämä vaiheenosoitimet vastaavat punaisen ja sinisen lähteen välissä olevien lähteiden tuottamia aaltoja eli kuvassa *raon vasemmas puolesta tulevaa aaltoa*. Raon *oikean puolen* eli kuvassa sinisen lähteen oikealla puolella olevien lähteiden tuottamien aaltojen vaiheenosoitimet piirtävät *myös puoliympyrän* kaaren, ja yhdessä koko rakoa kuvaavat vaiheenosoitimet muodostavat *kokonaisen ympyrän*. Vaiheenosoitimiien summa on siis *nolla*, joten tässä havaintopisteessä valon amplitudi ja intensiteetti on nolla ja kyseessä on intensiteettiminimi. Tässä kulmassa ei siis havaita lainkaan valoa.

Tämän voi ajatella myös niin, että koska punaisen ja sinisen lähteen aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa, ne kumoavat toisensa. Samoin punaisesta lähteestä seuraavan lähteen aalto on vastakkaisessa vaiheessa sinisestä lähteestä seuraavan aallon kanssa, ja nämä aallot myös kumoavat keskenään toisensa. Samaan tapaan jokaiselle aallon lähteelle löytyy pari, joka on sen kanssa täsmälleen vastakkaisessa vaiheessa, ja niinpä kaikki aallot lopulta interferoivat keskenään tuhoavasti.

Tämän intensiteettiminimin kulma voidaan päättää samaan tapaan kuin miten intensiteettimaksimien kulmat pääteltiin kaksoisrakokokeessa. Nyt sininen lähde on raon keskellä, joten sinisen ja punaisen lähteen välinen etäisyys on puolet raon leveydestä,  $w/2$ , ja matkaero näistä lähteistä havaintopisteeseen on

$$\Delta r = \frac{1}{2}w \sin \theta. \quad (16.70)$$

Aaltojen vaihe-ero on puoli kierrosta, jos tämä matkaero on puolikas aallonpituuksista,  $\Delta r = \frac{1}{2}\lambda$ , eli jos

$$\frac{1}{2}w \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda. \quad (16.71)$$

Tämä tilanne siis vastaa kuvaa 16.39 (c), jossa vaiheenosoitimet tekevät silmukan ja muodostavat täydellisen ympyrän.

Edellisessä tilanteessa raon vasemasta ja oikeasta puoliskosta saapuvat aallot kumoavat toisensa täydellisesti. Täydellinen tuhoava interferensi on mahdollista muillakin tavoilla. Kuvassa 16.39 (d) on esitetty tilanne, jossa punaisena merkityn lähteen aalto on vastakkaisessa vaiheessa sen viereisen *harmaalla* merkityn

lähteen aallon kanssa. Näiden lähteiden välinen etäisyys on tässä tapauksessa *neljännes* raon kokonaisteveydestä,  $w/4$ . Samaan tapaan *mitkä tahansa* aallot, joiden lähteiden välinen etäisyys on neljännes raon leveydestä, kumoavat toisensa tässä suunnassa. Niinpä jokaiselle aallolle on olemassa pari, jonka kanssa se on vastakkaisessa vaiheessa, ja aaltojen summan amplitudi on nolla.

Kuvassa 16.39 (d) etäisyydellä  $w/4$  toisistaan olevien lähteiden aaltojen välinen matkaero on  $\Delta r = \frac{1}{4}w \sin \theta$ . Jotta tapahtuisi tuhoava interferenssi, tämän täytyy olla puolikas aallonpituuus, eli havaintokululle täytyy päteä ehto

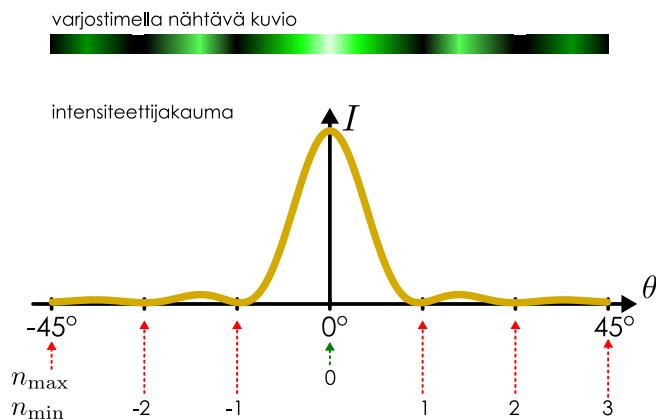
$$\frac{1}{4}w \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda. \quad (16.72)$$

Samanlainen päättely toimii, jos etäisyydellä  $w/6$ ,  $w/8$  jne. toisistaan olevien lähteiden aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa.



**16.42** Miksi kyseessä ei ole intensiteettiminimi, jos etäisyydellä  $w/3$  toisistaan olevat lähteet ovat vastakkaisissa vaiheissa?

Kuva 16.40: Raosta kulkeneen valon intensiteettijakauma.



vumaksimeja, joiden leveys on vain puolet päämaksimin leveydestä. Tämän mukaan ensimmäiset intensiteettiminimit  $n_{\min} = \pm 1$  nimitään havaitaan kulmissa

$$\theta = \pm \arcsin \frac{\lambda}{w}. \quad (16.75)$$

Sinin käänteisfunktio on kasvava funktio, joten kulma kasvaa aallonpituuuden  $\lambda$  kasvaessa ja pienenee raon leveyden  $w$  kasvaessa. Diffraktio on siis sitä voimakkaampaa, mitä kapeammasta raosta aalto kulkee, kuten aikaisemmin jo opimmekin (kuva 16.20).



**16.43** (a) Kuinka leveästä raosta valo on kuvassa 16.40 kulkenut, jos valon aallonpituuus on 500 nm?  
 (b) Valo kulkee 1 mm leveästä raosta. Arvioi, missä kulmassa ensimmäinen intensiteettiminimi havaitaan.  
 (c) Ääni kulkee 1 mm leveästä raosta. Arvioi, missä kulmassa ensimmäinen intensiteettiminimi havaitaan.

### esimerkki 16.6

### Yhden raon diffraktio

(a) Johda intensiteetin lauseke poikkeamkulman  $\theta$  funktiona, kun valo (aallonpituuus  $\lambda$ ) kulkee yhden raon läpi (leveys  $w$ ). (b) Piirrä intensiteetti, kun  $w = 4\lambda$ .

**SUUNNITELMA** Oletetaan, että valo saapuu rakoon suorana rintamana samassa vaiheessa. Tällöin voimme jakaa raon osiin ja kunkin rako on samassa vaiheessa väärätelevä uuden aallon lähde. Tämän jälkeen intensiteettijakauman laskeminen tapahtuu periaatteessa samalla tavalla kuin esimerkissä 16.5, jossa laskettiin  $N$  erillisestä raosta kulkevan valoaallon intensiteettijakauma. Ero edelliseen esimerkkiin on kuitenkin siinä, että koska nyt valo ei kulje oikeasti erillisistä raoista vaan yhdestä raosta, jonka vain ajattelemme koostuvan useasta osasta. Voimme laskea likimääräisen intensiteettijakauman jakamalla raon  $N$  osaan, mutta periaatteessa raken voi jakaa mielivaltaisen moneen osaan, joten täsmällisen tuloksen saamme ottamalla lopuksi raja-arvon  $N \rightarrow \infty$  niin, että raon leveys  $w$  on vakio.

## MONIULOTTEISET AALLOT

Jaetaan siis rako  $N$  osaan, jolloin kunkin osan leveys on  $w/N$  ja samoin kunkin osan keskipisteen etäisyys viereisen osan keskipisteestä on  $d = w/N$ . Vaihe-ero näiden osien kautta kuleneiden aaltojen välillä on

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = 2\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta \quad (16.76)$$

ja tämä riippuu siis osien määristä  $N$ .

Myös yhdestä osasta tulevan aallon amplitudi ja intensiteetti riippuvat siitä, kuinka moneen osaan raon jaamme. Tarkastellaanpa kulmaa  $\theta = 0$ . Tässä suunnassa kaikista raon osista tulevat aallot ovat samassa vaiheessa, joten jos yhden osan läpi kulkevan aallon amplitudi on  $A_N$ , niiden summan amplitudin täytyy olla  $A_{\text{summa}}(0) = N A_N$ . Toisaalta havaitun aallon amplitudi ei voi riippua siitä, kuinka moneen osaan ajattelemme raon jaetuksi, joten  $A_{\text{summa}}(0)$  täytyy olla vakio ja siis yhdestä osasta tulevan aallon amplitudi on  $A_N = \frac{1}{N} A_{\text{summa}}(0)$ . Vaiheenosoitinkuviossa tämä tarkoittaa sitä, että vaiheenosittimien yhteenlasketun pituuden pitää olla vakio, joten mitä enemmän kuvioon tulee vaiheenosittimia, sitä lyhyempi kunkin yksittäisen osoittimen täytyy olla. Tämä on myös fysikalisesti järkevää, sillä mitä kapeampia raot ovat, sitä vähemmän energiota kustakin raosta kulkee läpi.

Olkoon yhdestä raoista tulevan aallon amplitudi havaintoetäisyydellä  $A_0$  ja intensiteetti  $I_0$ . Jos havaintopiste on kaukana raoista niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, eri raoista tulevien aaltojen amplitudit ovat hyvin tarkasti samat.

Nyt voimme laskea vaiheenosittimet yhteen. Voimme jälleen käyttää esimerkin 14.4 tulosta, jolloin saamme

$$A_{\text{summa},N} = A_N \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}, \quad (16.77)$$

ja intensiteetti on jälleen verrannollinen amplitudin neliöön.

**RATKAIKU** Amplitudiksi saadaan

$$A_{\text{summa},N} = A_{\text{summa}}(0) \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} = A_{\text{summa}}(0) \frac{\sin\left(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta\right)}{N \sin\left(\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta\right)}. \quad (16.78)$$

Lausekkeen nimittäjä riippuu osien lukumäärästä  $N$ , mutta saamme tarkan tuloksen rajalla  $N \rightarrow \infty$ . Tällöin sinilausekkeen sisällä oleva funktio  $x = \pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta \rightarrow 0$ , jolloin voimme käyttää Taylorin sarjasta saatavaa approksimaatiota  $\sin x \approx x$  ja kirjoittaa  $N \sin\left(\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta\right) \rightarrow N \cdot (\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta) = \pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta$ . Summa-amplitudiksi saadaan siis lopujen lopuksi

$$A_{\text{summa}} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{\text{summa},N} = A_{\text{summa}}(0) \frac{\sin\left(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta}. \quad (16.79)$$

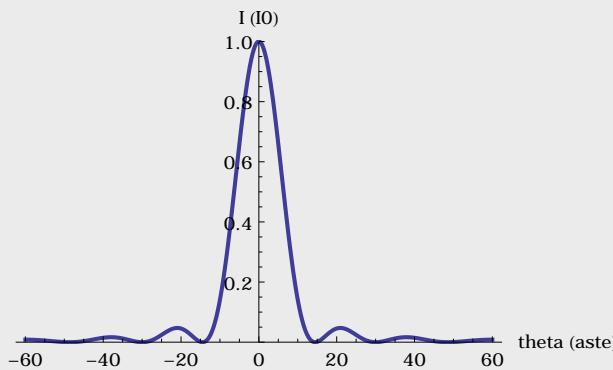
Intensiteetti on verrannollinen amplitudin neliöön, joten

$$I_{\text{summa}} = I_{\text{summa}}(0) \left[ \frac{\sin\left(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta} \right]^2. \quad (16.80)$$

Mathematica:

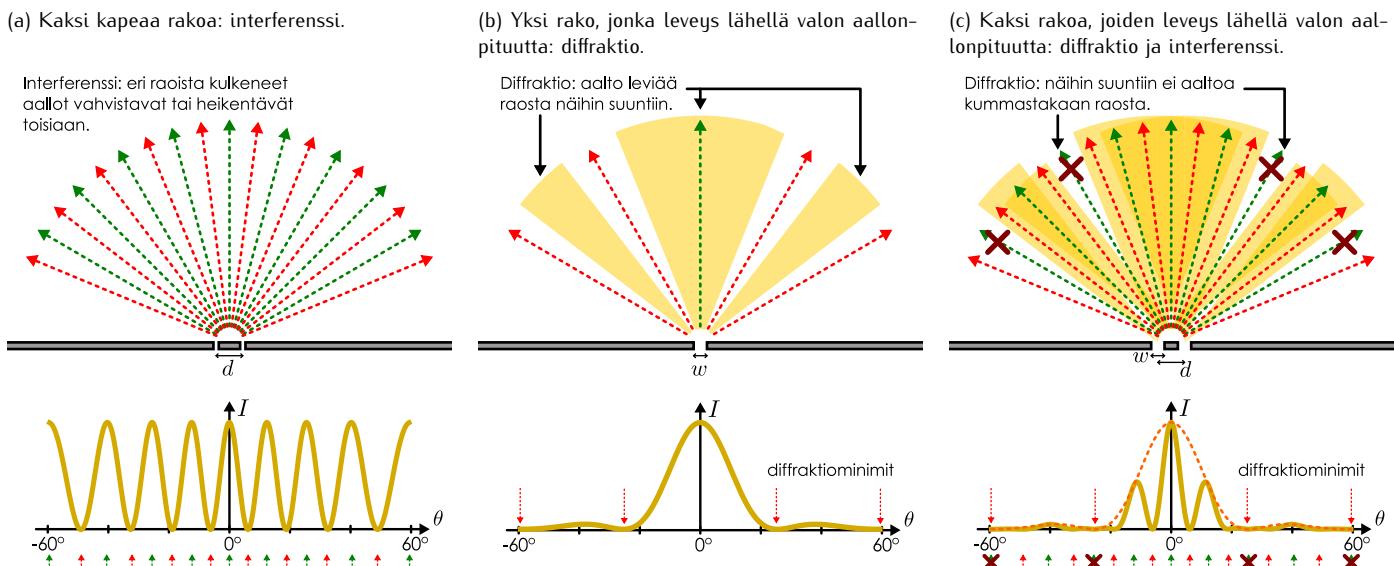
```
(* vaihe-ero, amplitudi, intensiteetti *)
lukuarvot = {w -> 4 lambda, a0 -> 1};
d = w/n;
dphi[theta_] := 2 Pi d/lambda Sin[theta]
asumma[theta_, n_] := a0/0 Sin[n dphi[theta]/2]/ Sin[dphi[theta]/2]
a[theta_] := Limit[asumma[theta, n], n -> Infinity]
i[theta_] := a[theta]^2

(* kuvaaja *)
Plot[i[theta Degree] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (I0)" },
PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 1}]
```



**ARVIOINTI** Piirretystä kuvajassa on suuri keskuskaksimi, joka korkeus on  $I_{\text{summa}}(0)$ , ja pienempiä sivumaksimeja kuten odottettua. Voimme ratkaista minimien paikat yhtälöstä (16.74), ja saamme  $\theta_{\min} \approx 0^\circ, \pm 14^\circ, \pm 30^\circ, \pm 49^\circ, \pm 90^\circ$ . Juuri näissä kohdissa kuvajassakin on nollakohdat. Huomaa, että tässä raon leveys oli sama kuin rakojen välinen etäisyys esimerkissä 16.5, mutta siinä missä edellisessä esimerkissä näillä kulmillilla havaittiin maksimit, nyt havaitaan minimit.

Kuva 16.41: Tavallisesti sekä diffraktio- että interferenssi-ilmiöt havaitaan samanaikaisesti.



Aikaisemmin puhuimme interferenssistä tarkastellessamme kaksoisrakokoetta mutta yhdestä raosta tai hiilasta kulkevan valon tapauksessa käytämme ilmiölle nimeä diffraktio. Nämä nimitykset ovat historiallisia. Diffraktiolla yleensä tarkoitetaan valon hajaantumista ja jakaantumista osiin (lat. 'diffingere', hajota osiin) ja interferenssillä superpositiossa olevien aaltojen toisiaan vahvistavaa tai heikentävää vaikutusta (engl. 'interfere', häiritä). Nimet ovat peräisin ajalta, jolloin valon ei vielä tiedetty olevan aalto. Fysikaalisesti kuitenkin **diffraktio on interferenssi-ilmiö**, ja aivan hyvin voitaisiin puhua valon interferenssistä sen kulkessa yhdestä raosta.

Diffraktio ja interferensi perustuvat molemmat pohjimmiltaan aaltojen superpositioon, ja niinpä nämä ilmiöt voivat tapahtua samanaikaisesti ja vaikuttaa toisiinsa. Esimerkiksi jos valo kulkee kahdesta raosta, joiden leveys ja etäisyys toisistaan ovat molemmat aallonpituuuden kokoluokkaa, varjostimella havaitussa kuviossa on piirteitä sekä yhden raon diffraktiosta että kahden raon interferenssistä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 16.41.

Analysoimme kaksoisrakokokeen aikaisemmin sillä oletuksella, että raot ovat hyvin kapeat. Tällöin kustakin raosta kulkeva valo kokee voimakkaan diffraktion ja levää raon takana lähes tasaisesti ympyrääaltoina kaikkiin suuntiin. Interferensi tapahtuu näiden aaltojen kohdateissa (kuva 16.41 (a)). Jos kuitenkin rakojen leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituuus, valo diffractoituu heikommin eikä levää kaikkiin suuntiin. Kuva 16.41 (b) valo kulkee tällaisesta raosta ja muodostaa raon takana *kolme* kiliaa, joista keskimmäinen on selkeästi kirkkain. Kuva 16.41 (c) valo kulkee kahdesta raosta, joiden etäisyys on sama kuin kuvassa (a) ja leveys sama kuin kuvassa (b). Nyt valo diffractoituu kummassakin aukossa jakautuen kolmeen kiliaan kuten kuvassa (b). Kiiloina etenevät aallot puolestaan interfeeroivat keskenään, jolloin interferenssimaksimit ja minimit muodostuvat samoissa suunnissa kuin kuvassa (a). Kuitenkaan *interferenssi ei voi tapahtua niissä suunnissa, joihin diffraktio ei valoa levitä*, joten diffraktio rajoittaa havaittua intensiteettiä. Lopputulos on se, että havaittu intensiteetti on nolla sekä kuvien (a) että (b) intensiteettiminimien suunnissa. Täsmällisemmin kuvan (c) intensiteettijakauma on muodoltaan kuvissa (a) ja (b) esitetyjen intensiteettijakaumien tulo.



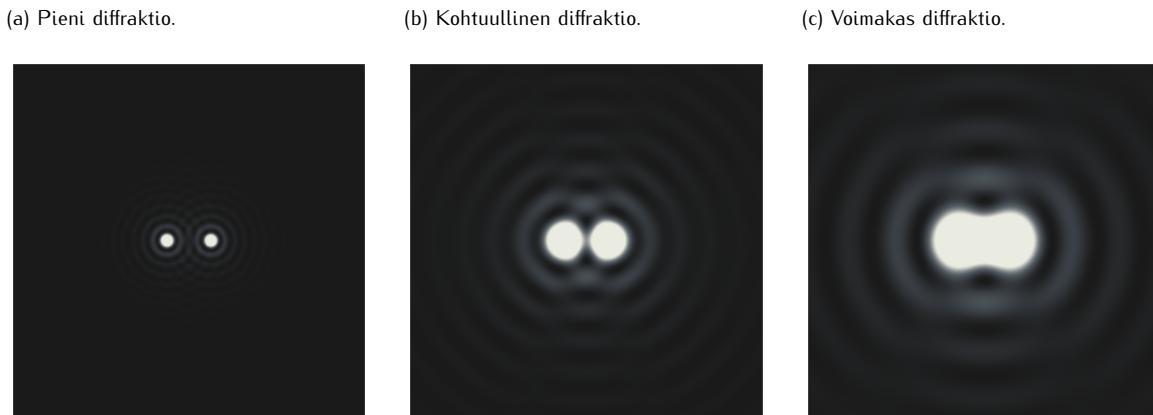
**16.44** Mikä on kuvassa 16.41 (c) rakojen leveyden  $w$  sekä niiden etäisyyden  $d$  suhde aallonpituuuteen  $\lambda$ ?

Edellä kuvatut kokeet, joissa valo kulkee ohuista raoista, ovat teoreettisesti merkittäviä. Interferensi on nimenomaan aaltojen ilmiö, ja näiden kokeiden tulokset kiistattomasti osoittavat, että valo on aalto. Edellä kuvatut ilmiöt on kuitenkin vaikea havaita, sillä interferensi on merkittävä vasta rakojen leveysien ja niiden välisen etäisyyksien ollessa valon aallonpituuuden suuruusluokkaa. Interferensi-ilmiötä kuitenkin havaitaan myös luonnossa, ja niillä on suuri käytännön merkitys optisissa laitteissa.

Mikroskooppien peilit ja linssit toimivat samaan tapaan kuin aukot, ja niissä tapahtuu väistämättä diffraktiota. Vaikka valon diffraktio on tavallisesti heikko ilmiö, optisilla laitteilla tutkitaan usein hyvin pieniä kohteita ja laitteiden kuvia suurentava vaikuttus vahvistaa myös diffraktiota. Niinpä diffraktiosta johtuvat ilmiöt voivat olla laitteiden tuottamissa kuvissa samaa suuruusluokkaa kuin tutkittavien kohteiden koko. Tämä asettaa rajoituksia laitteiden erottelukyvylle. Jos nimittäin laitteella kuvataan pieniä pistemäistä kohdetta,

## MONIULOTTEISET AALLOT

Kuva 16.42: Diffraktion vaikutus kahden pistemäisen kohteen kuvaan. Jos diffraktio on voimakas, lähellä toisistaan olevat yksityiskohdat eivät erotu kuvassa.



havaittu kuva ei olekaan piste vaan kiekko, jonka halkaisija riippuu diffraktion voimakkuudesta. Kun tällaisella laitteella yritetään kuvata kahta kohdetta, nämä kohteet voidaan varmuudella erottaa toisistaan vain, jos niiden keskinäinen etäisyys on suurempi kuin havaitun kiekon halkaisija (kuva 16.42). Jos kuvattavat kohteet ovat esimerkiksi tähtiä, diffraktion vaikutusta voidaan pienentää suurentamalla kaukoputken kokoa. Sen sijaan mikroskooppisia kohteita tutkittaessa merkittävää diffraktiota voi tapahtua myös kuvattavassa näytteessä. Tällöin diffraktion vaikutusta voidaan pienentää käyttämällä kuvamiseen säteilyä, jonka aallonpituuus on lyhyempi kuin näkyvällä valolla.



**16.45** Kuinka pieniä yksityiskohtia tavallisilla valo käyttävillä mikroskoopeilla on mahdollista erottaa? Seitä tämä rajoitus diffraktioon perustuen. Millaisia menetelmiä täitä tarkemmissa mikroskoopeissa käytetään?

Myös saippuakuplien ja öljyläikkien pinnalla nähtävät värikkiset kuviot johtuvat interferenssistä. Kahden aineen kuten ilman ja veden rajapinnalle saapuva valonsäde tavallisesti osittain heijastuu ja osittain läpäisee pinnan. Esimerkiksi saippuakupla on kuitenkin ohut kalvo, jolla on kaksi pintaa — toinen kuplan ulkona ja toinen sisällä — ja valo voi heijastua tai läpäistä näistä kummatkin. Valo voi siis kulkea kalvon läpi useita eri reittejä, ja eri reittejä kulkeneet osuudet interferoivat kohdateissaan.

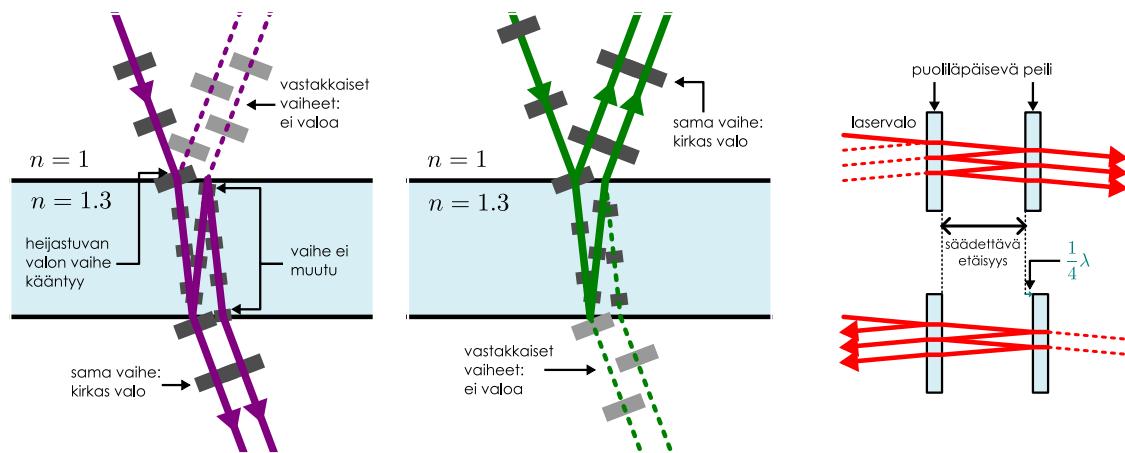
Kuvassa 16.43 (a) on piirretty kalvolle saapuvan violetin valon mahdollisia reittejä. Valo saapuu kuvassa ylhäältä ja kohdateissaan kalvon yläpinnan osa heijastuu takaisin ylös ja osa jatkaa kulkuaan kalvon sisään. Koska tässä tapauksessa valo saapuu optisesti harvasta aineesta, heijastunut aalto kokee puolen kierroksen vaihesiirron. Läpäisseen aallon vaihe ei muuta rajapinnalla. Kalvoon päässyt valo jatkaa matkaansa alaspin ja kohtaa kalvon alapinnan, jossa osa valosta jälleen heijastuu ja osa läpäisee pinnan. Nyt heijastunut valo ei koe vaihesiirtoa, koska se saapuu rajapinnalle optisesti tiheästä aineesta. Alapinnan läpäissyt valo jatkaa matkaansa kuvassa alaspin ja heijastunut valo palaa takaisin ylös kohti yläpintaa, jossa se jälleen osittain heijastuu. Valo siis heijastuu kalvossa *edestakaisin* ylä- ja alapinnan välissä, ja jokaisessa heijastuksessa osa valosta poistuu kalvosta.

Normaali valo ei koostu äärettömän pitkistä sinimuotoisista aalloista vaan lyhyistä pulsseista. Pulssi heijastuu kalvossa edestakaisin jakautuen jokaisessa heijastuksessa kahtia, ja jos kalvo on paksu, nämä heijastukset tapahtuvat yksi toisensa jälkeen. Lopputulos on se, että osa valosta päätyy kulkemaan kuvassa takaisin ylöspäin ja osa läpäisee kalvon jatkaa matkaansa alaspin. Jos kuitenkin kalvo on selvästi ohuempi kuin tyypillisen aalton pulssin pituus, aalto täytyy koko kalvon kuten kuvassa 16.43 (a). Tällöin sekä kalvon ala- että yläpinnalla on samanaikaisesti useita eri reittejä kulkeneita aaltoja, ja nämä pääsevät interferoimaan keskenään. Interferenssin vaikutus kalvosta poistuvan aallon intensiteettiin puolestaan riippuu kalvon paksuuden ja siinä kulkevan aallon aallonpituuuden suhteesta. Kuvassa 16.43 (a) kalvon paksuus on juuri sellainen, että kalvon yläpinnasta poistuvat aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa ja kokevat tuhoavan interferenssin kun taas kalvon alapinnalta poistuvat aallot ovat samassa vaiheessa ja vahvistavat toisiaan.

Vastaavasti kuvaan 16.43 (b) on piirretty vihreän valon reitti samassa kalvossa. Tällä valolla on pidempi aallonpituuus kuin violetilla, minkä vuoksi nyt kalvosta takaisin ylöspäin heijastuneet aallot ovat samassa vaiheessa. Siispä violetti valo kulkee kuvan kalvon läpi lähes täydellisesti ja vihreä valo heijastuu siitä lähes täydellisesti. Muut värit heijastuvat osittain. Jos kalvoa siis valaistaan valkoisella valolla, joka sisältää kaikkia aallonpituuksia, kalvo näyttää ylhäältä katsoen vihreältä ja alhaalta violettilta. Nähtävä väri riippuu tieteenkin katselukulmasta ja kalvon paksuudesta, minkä vuoksi saippuakuplan pinnalla nähdään värikkisiä kuvioita. Koska ilmiö tapahtuu juuri ohuissa kalvoissa, sitä kutsutaan *ohutkalvointerferenssiksi*.

Kuva 16.43: Interferensi ohuessa kalvossa. Eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat, ja tämä määräää heijastuvan ja läpäisevän aallon intensiteetin. Samaa ilmiötä sovelletaan interferometreissä hyvin tarkkojen pituusmittauksien tekemiseksi.

(a) Violettei valo läpäisee ohutkalvon. (b) Vihreä valo heijastuu ohutkalvosta. (c) Interferometri.



Samaa periaatetta sovelletaan *interferometreissä* tarkkojen pituusmittausten tekemiseksi. Nämä ovat laitteita, joissa yksivärinen valo (tavallisesti laser) ohjataan kulkemaan eri reittejä samaan havaintopisteeeseen, jolloin havaittu intensiteetti riippuu eri reittejä kulkeneiden valonsäteiden vaihe-eroista. Muutokset eri reittejä kulkeneiden aaltojen matkoissa vaikuttavat aaltojen vaiheeseen ja sitä kautta myös havaittuun intensiteettiin. Erityisesti jos matkaero muuttuu puoli aallonpituutta, interferensi muuttuu vahvistavasta tuhoavaksi tai päinvastoin. Tarkkailemalla valon intensiteetiä voidaan siis mitata hyvin tarkasti pituuden muutoksia, jotka ovat selvästi käytetyn valon aallonpituutta lyhyempiä.

Interferometrejä on monenlaisia. Kuvassa 16.43 (c) on esitetty ns. Fabry-Perot-interferometri, jossa valo heijastuu edestakaisin kahden puoliläpäisevän peilin välillä. Puoliläpäisevät peilit heijastavat niihin saapuvasta valosta vain osan ja päästäävät osan valosta lävitseen, joten peilit toimivat samalla tavalla kuin ohutkalvon pinnat. Kun peilien välinen etäisyys säädetään sopivasti, laitteen läpäisseet aallot kokevat vahvistavan interferenssin ja lähes koko laitteeseen saapuvan valon intensiteetti kulkee sen läpi (kuvassa oikealle). Jos sitten peilien välimatkaa muutetaan noin aallonpituuden neljäsosa, laitteen läpi kulkeneet aallot kokevat tuhoavan interferenssin ja valon intensiteetistä suurin osa heijastuu takaisin tulosuuntaan (kuvassa vasemmalle).



**16.46** Kirjoita omien sanoin tiivistelmä aalto-optiikasta. Millaisia ilmiöitä valon aaltoluonne tuottaa ja miksi? Millainen intensiteettjakama havaitaan, kun valo kulkee usean hyvin kapean raon läpi tai yhden likimain aallonpituuden levyisen raon läpi? Miten määrität näissä tilanteissa valon intensiteetin valitussa havaintopisteessä?

## Yhteenvetö: Moniulotteiset aallot

### Aaltonrintamat

- Samassa vaiheessa olevat väliaineen pistet muodostavat **aaltonrintamat**. Esimerkiksi veden pinnalla kulkevan aallon harja on aaltonrintama. Kahdessa ulottuvuudessa aaltonrintamat ovat käyriä ja kolmessa ulottuvuudessa pintoja.
- Pistemäärien lähdet tuottaa kahdessa ulottuvuudessa ympyrän ja kolmessa ulottuvuudessa pallon muotoisia aaltonrintamia.
- Tasomaisen aaltolähteen tuottamien aaltojen rintamat ovat tasoja. Tällaisia aaltoja kutsutaan *tasoalaltoiksi*. Myös pistemäärien lähteiden aallot ovat likimain tasoaaltoja kaukana lähteestä.
- Huggensin periaatteet** mukaan aaltonrintaman jokainen piste toimii uuden aallon lähteenä.

- Intensiteetti** kuvailee kolmessa ulottuvuudessa aallon kuljettaman energian määriä aikaa ja pinta-alaa kohden

$$I = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{A}.$$

- Intensiteetti on energiatihedys ja aallon nopeuden tulo. Koska energiatihedys on verrannollinen amplituuden neliöön, intensiteettikin on.

$$I = \langle \rho_E \rangle v_{\text{aalto}} \propto A^2.$$

- Äänen intensiteetti mitataan desibelasteikolla.

### Aallot väliaineissa

- Rajapinnalle saapuva aalto tavallisesti sekä *heijastuu* että *taittuu*. Heijastus- ja tulokulmat ovat yhtä suuret. Tulo- ja taitekulmien välillä pätee **tattumislaki**

$$\frac{1}{\lambda_A} \sin \theta_A = \frac{1}{\lambda_B} \sin \theta_B.$$

- Valolle määritellään **taitekerroin**

$$n = \frac{c}{v_{\text{aalto}}} = \frac{\lambda_{\text{tyhjiö}}}{\lambda}.$$

Suuren taitekerroimen aineita kutsutaan optiseksi tiheiksi.

- Valo kokonaishiejustuu tullessaan rajapinnalle optiseksi tiheästä aineesta liian suressa tulokulmassa.
- Dispersiivisessä väliaineessa aallon nopeus riippuu taajuudesta, joten eri taajuudella värähtelevät aallot taittuvat eri tavoin. Tästä johtuu valkoisen valon jakautuminen osiin prismaassa.
- Polarisaatiolla** tarkoitetaan poikittaisen aaltolukkien värähelyn suuntaa. *Polarisaattori* on aine tai laite, joka päästää lävitseen vain tietyn komponentin aallon värähelystä.

### Optiikka

- Valo on sähkömagneettisen kentän aalto. Usein valoa voi kuitenkin kuvata myös suoraan kulkevinä **säteinä**.
- Linssit ja peilit muodostavat esineistä **kuvan** pisteesseen, jossa esineen lähettämät valonsäteet leikkaavat. **Valekuva** muodostuu säteiden jatkeiden leikkauspisteesseen.

- Esineen ja kuvan paikat noudattavat likimain **linssiyhtälöä**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuv}}},$$

missä  $f$  on **polttoväli**.

### Interferenssi

- Interferensi** tarkoittaa kahden tai useamman sinimuotoisen aallon superpositiota, jossa aallot voimistavat tai heikentävät toisiaan riippuen niiden välistä vaihe-eroista.
- Interferoivien aaltojen superposition amplitudi on aaltojen vaiheenosittimiin summan pituus.
- Kaksi pistemääristä lähettää tuottaa aallon, joka jakautuu useaksi külaksi. Valon kaksoisrakokoe on tästä esimerkki. Jos valo kulkee kahdesta kapeasta raosta, joiden välinen etäisyys on  $d$ , rakojen takana havaitaan intensiteettimaksimit kulmissa  $\theta_{\max}$ , joille

$$d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda, \quad n_{\max} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

- Mitä useammasta tasavälistä raosta valo kulkee, sitä kapeammat ja kirkkaammat nämä intensiteettimaksimit ovat.

- Lähteiden rivi tuottaa kiilamaisen aallon, joka hajaantuu sitä enemmän, mitä kapeamman rivin lähteet muodostavat. Jos rivin leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituisuus, kiiroja syntyy useita. Valon **diffraktio** raossa on tästä esimerkki. Jos valo kulkee yhdestä raosta, jonka leveys on  $w$ , raon takana havaitaan intensiteettimaksimit kulmissa  $\theta_{\min}$ , joille pätee

$$w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda, \quad n_{\min} = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

- Interferometreissä ja ohuissa kalvoissa valonsäteet jakautuvat osiin ja eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat keskenään.

### Sanasto

- aaltolähdde (wave source)
- aaltonrintama (wave front)
- intensiteetti (intensity)
- palloaalto (spherical wave)
- tasoalalto (plane wave)
- tattuminen (refraction)
- tulokulma (incident angle)
- heijastuskulma (angle of reflection)
- tattumiskulma (angle of refraction)
- taitekerroin (refractive index)
- peili (mirror)
- linssi (lens)
- optiikka (optics)
- polttopiste (focus)
- polttoväli (focal length)

- esine (object)
- kuva (image)
- valekuva (virtual image)
- varjostin (screen)
- suurenussuhde (magnification)
- polarisaatio (polarization)
- koherentti (coherent)
- interferensi (interference)
- diffraktio (diffraction)
- rako (slit)
- kaksoisrako (double slit)
- diffraktiohila (diffraction grating)
- ohutkalvo (thin film)
- interferometri (interferometer)

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

**16.1** (a) Jos tarkastellun ympyrän säde on  $r_n = n\lambda$ , seuraavan (pienemmän) aalton rintaman säde on  $r_{n-1} = (n-1)\lambda$ .

(b) Keskiarvo on  $r_{\text{keski}} = (n-1/2)\lambda$ .

(c) Tarkka pinta-ala on  $A_{\text{rengas}} = \pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 = [n^2 - (n-1)^2]\pi\lambda^2$ . Nyt siis  $n = 1, 3, 30$ , joten näitä vastaavat alat ovat  $\pi\lambda^2$ ,  $5\pi\lambda^2$  ja  $59\pi\lambda^2$ .

(d) Approximaatio antaa  $A_{\text{rengas}} = 2\pi r_{\text{keski}}\lambda = (2n-1)\pi\lambda^2$  eli jälleen  $\pi\lambda^2$ ,  $5\pi\lambda^2$  ja  $59\pi\lambda^2$ . Likiarvo onkin nyt tarkka, koska  $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ .

**16.2** Kummassakin tapauksessa aallon energia heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyteen,  $E \sim r^{-1}$ . Pinnalla aalton rintama on ympyrän kaari, jonka pituus on  $2\pi r$ . Pitkä sauva tuottaa aalton rintaman, joka on lähellä saavaa ympyrälörön vaipan muotoinen. Sen pinta-ala on  $2\pi rL$ . Kummassakin tapauksessa energia leviiä alueelle, jonka koko on verrannollinen sääteeseen  $r$ . Toisaalta energia on verrannollinen amplituudin neljöön,  $E \sim A^2$ , joten täytyy olla  $A \sim E^{1/2} \sim r^{-1/2}$ . Amplitudi siis heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neljäjuureen,  $A \sim r^{-1/2} = 1/\sqrt{r}$ .

**16.3** Kahdessa ulottuvuudessa intensiteettiä vastaava suure on aallon kuljettama teho pituusyksikköö kohti,  $I_{2D} = P/L$ , koska aalton rintamat ovat viivoja eivätkä tasoja.

**16.4** Piirrä kuva! Aallon tulosuunnasta katsoen kuution poikkileikkuksen pinta-ala on  $\sqrt{2} \cdot 1.0 \text{ cm}^2 = 14.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . Tälle pinta-alalle aallon energia siis osuu. Minuutissa energiota saapuu

$$E = P\Delta t = IA\Delta t = 2.0 \text{ W/m}^2 \cdot 14.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot 60 \text{ s} = 17 \text{ mJ}. \quad (16.81)$$

**16.6** (a) Kaksi soitinta tuottaa kaksinkertaisen intensiteetin. Toisaalta  $\beta_0 \log \frac{2I}{I_{\text{kynnyk}}^2} = \beta_0 \log 2 + \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnyk}}}$  eli äänen voimakkuus kasvaa  $\beta_0 \log 2 \approx 3 \text{ dB}$ . Uusi voimakkuus on siis noin 73 dB. Huomaa, että intensiteetin kaksinkertaistaminen lisää voimakkuutta noin 3 dB riippumatta siitä, mikä oli alkuperäinen voimakkuus.

(b) Nyt tarvitaan siis  $n$  soitinta niin, että intensiteetin muutos on 10 dB. Nyt siis uusi intensiteetti on  $\beta_0 \log \frac{nI}{I_{\text{kynnyk}}} = \beta_0 \log n + \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnyk}}}$ , missä täytyy olla  $\beta_0 \log n = 10 \text{ dB}$ . Tästä ratkeaa  $n = 10^{(10 \text{ dB})/\beta_0} = 10^1 = 10$ . Siis kymmenen soitinta kymmenkertaistaa intensiteetin ja lisää äänen voimakkuutta 10 dB. Jälleen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää voimakkuutta 10 dB riippumatta siitä, mikä alkuperäinen voimakkuus oli.

**16.7** (a) Kyllä. Muutenhan ääni ei kuuluisi kuin suoraan oven edessä. Tämä johtuu siitä, että äänen aallon-pituus on tyypillisesti noin metrin kokoluokkaa eli samaa suuruusluokkaa kuin ovi.

(b) Ei. Taskulampun valo näky vain suoraan ovesta sisään katsoen. Syg on se, että valon aallonpituus on satojen nanometrien luokkaa eli huomattavasti oven leveyttä pienempi. Tällöin diffraktio ei juuri tapahdu vaan aalto kulkee suoraan. Valokin kokee diffraction kulkissaan tarpeeksi pienestä aukosta, kuten myöhemmin tässä luvussa vielä opimme.

**16.8** Jos heijastuva aalto kokee vaihesiiron, aallonharjat ja -pohjet vaihtavat heijastuneessa aallossa paikoja. Tällöin saapuvan ja heijastuneen aallon rintamat (tummat viivat) eivät kohtaa rajapinnalla. Sen sijaan heijastunutta aaltoa kuvavat viivat lähtevät rajapinnalla pisteistä, jotka ovat saapunutta aaltoa kuvavien viivojen puolivälissä.

Heijastuneen valoaallon vaihe muuttuu, jos valo saapuu rajapinnalle siitä materiaalista, jossa sen nopeus on suurempi. Tavallisessa peilissä valo heijastuu ilma-lasi- ja lasi-metalli-rajapinnoilta, ja näissä tapahtuu vaihesiirtö.

**16.9** Vauhti on suurempi väliaineessa, jossa aallonpituus on suurempi, sillä aallon taajuus ei muudu rajapinnalla. Siis nopeus on suurempi kuvan alareunan materiaalissa. Jos aalto saapuisi materiaaliin, jossa sen nopeus olisi pienempi, rajapinnan läpäisyyttä aaltoa kuvavat aalton rintamat olisivat lähempänä toisiaan. Tällöin viivojen pitäisi olla kuvan alareunassa lähempänä vaakasuoraa ja aallon liikkeen suunta siis lähempänä pystysuoraa.

**16.10** (a) A:ssa valon nopeus on  $c$  ja B:ssä  $c/1.3 = 0.77c$ .

(b) Aallonpituus on suurempi A:ssa. Näiden suhde on  $\lambda_A/\lambda_B = 1.3$ .

(c) Aaltojen taajuus on sama kummassakin väliaineessa.

(d) Kulmat noudattavat taittumislakia  $\sin \theta_A = 1.3 \sin \theta_B$  riippumatta siitä, kummasta aineesta valo saapuu. Jos esimerkiksi A:ssa  $\theta_A = 45^\circ$ , saadaan B:ssä  $\theta_B = 33^\circ$ . B:ssä valon kulkusuunnan ja rajapinnan normaalilin välinen kulma on pienempi.

**16.11** Rajakulma  $\theta_{A,\text{raja}}$  ratkeaa yhtälöstä  $\sin \theta_A = \frac{n_B}{n_A}$ . (a)  $\theta_{A,\text{raja}} = 50^\circ$ , (b)  $\theta_{A,\text{raja}} = 42^\circ$ .

**16.12** Snellin laista saadaan punaiselle  $\theta = 32.1^\circ$  ja violetille  $\theta = 31.8^\circ$ . Ero on  $\Delta\theta = 0.3^\circ$ .

**16.13** (a) Väliaine siirtyy samanaikaisesti sekä  $y$ - että  $z$ -suuntiin, joten aalto on tasopolarisoitunut  $45^\circ$  kulmassa  $y$ - ja  $z$ -akseleihin nähden.

(b) Väliaine siirtyy vuorotellen  $y$ - ja  $z$ -suuntiin. Aalto on ympyräpolarisoitunut.

(c) Väliaine siirtyy  $y$ - ja  $z$ -suuntiin, mutta koska taajuudet ovat erilaiset, väliaineen liike ei välttämättä noudata mitään yksinkertaista kuvioita. Aalto on polarisoitumaton.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

**16.14** (a) Valon polarisaatiotaso on sähkökentän suunta. Nyt polarisaattorin elektronit liikkuvat yhdessä suunnassa, jolloin ne reagoivat vain liikkeensä suuntaiseen sähkökenttään. Elektronit liikkuvat niin, että elektronien liikkeen suuntainen sähkökenttä ei pääse tunkeutumaan polarisaattorin taakse (vrt. sähkökenttää ei pääse johteseen, koska elektronit liikkuvat niin, että niiden sähkökenttä kumoaa johteen sisällä ulkoisen sähkökentän). Johtavia sääkeitä vastaan kohtisuorassa suunnassa elektronit eivät pääse liikkumaan, jolloin ne eivät myöskään pysty estämään sähkökentän aaltoa etenemästä. Siispä tämä polarisaattori estää kulun valolta, jonka sähkökenttää värähtelee elektronien liikesuunnassa (johtavien sääkeiden suunnassa) mutta päästää läpi valon, jonka sähkökenttää värähtelee sääkeistin nähden kohtisuorassa suunnassa. Tilanne on siis päinvastainen kuin ohuesta raosta kulkevan köyden polarisaatiossa.

(b) Ei. Sähkömagneettinen aalto ei ole mekaaninen aalto, jossa tapahtuisi lükettiä. Sähkömagneetissä allossa sähkökentän suunta ja voimakkuus värähtelevät, ja tällainen aalto mahtuu kulkemaan periaatteessa kuinka kapeasta raosta tahansa. Erityisesti vaikka sähkömagneettinen aalto voidaan kuvata nuolilla (sähkökenttävektoreilla), nämä nuolet eivät ulotu avaruudessa mihinkään. Niillä kuvataan vain kentän suuntaa.

**16.15** Kuvissa (a) ja (b) aalto koostuu aluksi  $x$ - ja  $y$ -suuntaisista värähtelyistä, joihin kumpaankin liittyy yhtä paljon energiavaaraa. Polarisaattori poistaa  $x$ -suuntaisen värähtelyn, jolloin jäljelle jää puolet energiasta. Intensiteetti siis puolittuu.

Kuvissa (c) ja (d) aallon amplitudi likimain puolittuu. Intensiteetti on verrannollinen amplitudin neliöön, joten intensiteetti putoaa neljäsosaan.

**16.17** Tässä ei ole yhtä oikeaa vastauta. Tässä joitakin huomioita. Samaa: lähteiden välillä on seisova aalto, koska siellä kaksi sinimuotoista aaltoa kulkee vastakkaisiin suuntiin, ja seisova aalto on tällaisten aaltojen superpositio. Erlaista: kuvan interferoiva aalto kuljettaa energiavaaraa toisin kuin seisova aalto, koska lähteiden väliä lukuunottamatta interferenssi muodostaa eteneviä aaltoja solmukäyrien välillä.

**16.18** (a) Lähteiden välissä aallonpituuksista on kahden vihreän (tai punaisen) käyrän välinen etäisyys. Toisin sanoen vierekkäisten punaisen ja vihreän käyrän välinen etäisyys on  $\lambda/4$ .

(b) Jos lähteiden välinen etäisyys on täsmälleen aallonpiuuden monikerta,  $n\lambda$ , niiden välissä on yhteensä  $4n - 1$  punaista ja vihreää käyrää. Lisäksi nyt aallot ovat lähteiden kohdalla samassa vaiheessa, joten lähteitä lähimmät käyrät ovat punaisia. (Kuvassa lähteiden välinen etäisyys on  $2.5\lambda$ , jolloin uloimmat käyrät ovat vihreät.) Niinpä punaisia käyriä on tässä tapauksessa yksi enemmän kuin vihreitä. Siis punaisia käyriä on  $2n$  ja vihreitä  $2n - 1$  kpl.

**16.19** Jos toinen lähde poistetaan, interferenssi katoaa. Siispä väliaine värähtelisi kummassakin havaintopisteessä eli punaisessa pisteesä intensiteetti kasvaisi (kuvassa se on nolla) ja vihreässä pieneni (noin neljänneksen, koska amplitudi puolittuu). Olemme interferenssiä tutkiessamme jättäneet huomioimatta sen, että aaltojen amplitudi pienenee niiden kulkien kauemmas lähteestään. Jos tästä ei edelleenkään huomioioida, yksi aaltolähde tuottaisi kumpaankin pisteeseen saman intensiteetin, eikä ole väliä, kumpi lähde poistetaan. Jos amplitudin pieneminen etäisyyden funktiona huomioidaan, kuten täsmällisesti ottaen tietysti pitäisi, yhden lähteen tuottama intensiteetti on suurempi, kun jäljelle jää havaintopistettä lähempänä oleva lähde.

**16.20** Ei ainakaan niin, että interferenssi olisi täydellisesti vahvistavaa kaikkialla. Kaksi aaltolähettä voi tuottaa aallot, jotka kuljettavat yhteensä kaksinkertaisen määrän energiavaaraa yhden lähteen tuottamiin aaltoihin nähdyn. Jos aallot kokisivat kaikkialla täydellisesti voimistavan interferenssin, aaltojen intensiteetti ja niiden kuljettama energiamäärä nelinkertaistuisi. Täytyy siis käydä niin, että jos aallot interferoivat toisiaan voimistavasti yhdessä suunnassa, jossakin toisessa suunnassa niiden täytyy interferoida toisiaan heikentävästi, koska lähteistä ei yksinkertaisesti riitä energiavaaraa kaikkialle.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

**16.21** (a) Aaltojen vaihe-eron pitää olla nolla tai jokin kokonaislukumäärä jaksoja eli  $2\pi$  monikerta. Ts.

$$\Delta\phi_{2 \rightarrow A} - \Delta\phi_{1 \rightarrow A} = n2\pi, \quad (16.82)$$

missä  $n$  on jokin kokonaisluku. Tämä toteutuu, kun

$$r_{2 \rightarrow A} - r_{1 \rightarrow A} = n\lambda. \quad (16.83)$$

Ehto on siis se, että lähteistä tarkastelupisteeseen mittaujen etäisyysien *eron* täytyy olla aallonpituuuden monikerta. Jos aallonpituuus on siis vaikkapa 2 m, lähteistä havaintopisteeseen mitatut etäisyydet voisivat olla esimerkiksi 4.5 m ja 8.5 m, sillä näiden erotus on  $4 \text{ m} = 2 \times 2 \text{ m}$ .

(b) Koska aalto 2 on lähtiessään aaltoa 1 neljännesjakson edellä, aallot ovat havaintopisteessä samassa vaiheessa, jos aallon 1 vaihe muuttuu matkalla neljännesjakson (tai neljännesjakson ja jonkin kokonaislukumäärän jaksoja) enemmän kuin aallon 2. Ts.

$$\Delta\phi_{2 \rightarrow A} - \Delta\phi_{1 \rightarrow A} = n2\pi - \frac{1}{2}\pi. \quad (16.84)$$

Tämä toteutuu, kun matkaerolle pätee

$$r_{2 \rightarrow A} - r_{1 \rightarrow A} = \left(n - \frac{1}{4}\right)\lambda. \quad (16.85)$$

**16.22** Lähteiden välinen etäisyys on  $d = w/(n - 1)$ , missä  $n$  on lähteiden määrä. Kun lähteitä on kaksi,  $d$  ei ole koskaan pienempi kuin  $\lambda$ , koska pienin rivin leveys on  $w = \lambda$ . Kun lähteitä on neljä,  $d < \lambda$  kahdessa ylimmässä kuvassa. Ja kun lähteitä on kahdeksan,  $d < \lambda$  kaikissa kuvissa. Kaikissa näissä tapauksissa lähteet tuottavat yhden voimakkaan aaltojen kiihan. Kun  $d \geq \lambda$ , lähteet tuottavat aaltoja useissa kiihoissa. Syy tähän on selitetty vastauksessa 16.16. Mitä kauempaan lähteet ovat toisistaan, sitä useampia solmukäyriä niiden välillä mahtuu. Kukin solmukäyrä vastaa aluetta, jossa välinaine ei värähtele, joten mitä useampia solmuja, sitä useampaan erilliseen kiihan jakautuu.

**16.24** Silmukassa on kaksi  $z$ -suuntaista sivua, ja näistä kohdassa  $x + dx$  oleva sivu kuljetaan negatiiviseen  $z$ -suuntaan. Niinpä pistetulo  $\bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r}$  on negatiivinen, jos  $B_z$  on positiivinen, koska tällöin magneettikenttä osoittaa vastakkaiseen suuntaan kuljettuun reittiin nähdyn. Niinpä tällä sivulla  $\bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = -B_z dz$ .

**16.25** (a) Koska A:ssa sähkökenttä voimistuu  $x$ -suuntaan ja B liikkuu A:n suhteen  $x$ -suuntaan, sähkökentän täytyy B:ssä voimistua ajan kulussa. Jos esimerkiksi  $E_{y,(A)}(x) = E'_y(x)x$  ja koordinaatistojen välinen nopeus on  $v_{B(A)}$ , B:n origon paikka A:ssa on  $x_{B(A)}(t) = v_{B(A)}t$  ja kentän voimakkuus on

$$E_{y,(B)}(t) = E'_y(x)v_{B(A)}t. \quad (16.86)$$

(b) Galilei-muunnoksen mukaan magneettikenttä on  $bsB_{(B)} = \bar{\mathbf{B}}_{(A)} - \varepsilon_0\mu_0\bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{E}}_{(A)}$  eli vaikka  $\bar{\mathbf{B}}_{(A)} = \bar{\mathbf{0}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_{(A)} \neq \bar{\mathbf{0}}$ . Täsmällisemmin nyt  $\bar{\mathbf{E}}_{(A)} = E_{y,(A)}\hat{\mathbf{j}}$  ja  $\bar{\mathbf{v}}_{B(A)} = v_{B(A)}\hat{\mathbf{i}}$ , joten

$$\bar{\mathbf{B}}_{(B)} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E_{y,(A)}\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E_{y,(A)}\hat{\mathbf{k}}. \quad (16.87)$$

(c) Magneettikentän voimakkuus on (b)-kohdan perusteella verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen, ja sähkökenttä voimistuu  $x$ -suuntaan, joten ilmeisesti myös magneettikenttä voimistuu  $x$ -suuntaan. Muutoksen jyrkkyys on

$$\frac{dB_{z,(B)}}{dx} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E'_y(x). \quad (16.88)$$

(d) Sähkökentän muutos  $t$ :n suhteen on positiivinen ja magneettikentän muutos  $x$ :n suhteen on negatiivinen, mikä on yhtensopiva Maxwellin lain kanssa. Täsmällistä vertailua varten voimme sijoittaa (c)-kohdan tulokseen (a)-kohdasta saatava tulos  $\frac{dE_{y,(B)}}{dt} = E'_y(x)v_{B(A)}$ . Nämä saamme

$$\frac{dB_{z,(B)}}{dx} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{dE_{y,(B)}}{dt}. \quad (16.89)$$

Tämä on täsmälleen sama tulos kuin mitä Maxwellin laista johdettiin.

**16.26** (a)  $B = E/c = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ . (b)  $\langle \rho_E \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = 4.4 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3$ . (c)  $I = \langle \rho_E \rangle c = 1.3 \text{ mW/m}^2$ .

**16.27** Piirrä kuva! Vastaus on neljä. Olkoot peilit A ja B. Tällöin katsoja näkee (i) oikean lampun, (ii) heijastuksen peilistä A, (iii) heijastuksen peilistä B sekä (iv) heijastuksen molemmista peileistä. Jos tarkkoja olallaan, on mahdollista nähdä lamppu niin, että matkalla valo heijastuu ensin peilistä A ja sitten peilista B *tai* niin että valo heijastuu ensin peilistä B ja sitten peilistä A. Nämä ovat periaatteessa eri kuvat, mutta kun peilit ovat  $90^\circ$  kulmassa, kuvat muodostuvat täsmälleen samaan paikkaan. Erityisesti näistä kuvista voi nähdä kerrallaan vain toisen (tai sitten puolet kummastakin), joten yhtensä lamppuja näyttäisi olevan neljä.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

**16.28** Lasipallossa on kupera pinta joten se toimii kuperan linssin tavoin ja kokoaa valonsäteet. Nämä käy siksi, että jos valonsäde saapuu pallon pinnalle viistossa, se taittuu kohti pinnan normaalialta ja siis kohti pallon keskipistettä. Veden alla oleva ilmakupla on myös pallon muotoinen, mutta se toimii kuin kovera linssi eli se levittää valonsäteet. Nämä käy siksi, että ilmakuplan sisällä on ilmaa, jonka taitekerroin on pienempi kuin ympäröivän veden. Niinpä kuplan pinnalle vedestä viistosti saapuvia valonsädeita taittuu pinnan normaalista poispäin, päinvastaiseen suuntaan kuin lasipallossa.

**16.29** Siius  $f = 0.20$  m. Esine on tästä hieman kauempaan linssistä, arvioitaan  $L_{\text{esine}} = 0.30$  m. Kuva puolestaan muodostuu huomattavasti kauemmaksi, noin etäisyydelle  $L_{\text{esine}} = 0.60$  m. Linssiyhtälöksi saadaan

$$\frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuvaa}}} = \frac{1}{0.3 \text{ m}} + \frac{1}{0.6 \text{ m}} = 5.0 \text{ m}^{-1} = \frac{1}{0.2 \text{ m}} = \frac{1}{f}, \quad (16.90)$$

eli yhtälö pätee. Suurennussuhkeksi saadaan

$$M = -\frac{L_{\text{kuvaa}}}{L_{\text{esine}}} = -\frac{0.6 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} = -2. \quad (16.91)$$

Kuva on kooltaan kaksinkertainen ja se on yllosalaisin esineeseen nähden, joten tämäkin tulos on yhteensopiva kuvan kanssa.

**16.30** Kuva himmenee, mutta kumpikaan piste ei katoa kuvasta. Kuva syntyy varjostimelle siksi, että linssi kokoaa kaikki siihen osuvat vihreästä lampusta tulevat valonsäteet kuvan vihreään pisteeseen ja vastaavasti punaisesta lampusta tulevat säteet kuvan punaiseen pisteeseen. Kun linssiä peitetään, puolet vihreään pisteeseen kulkeneesta valosta ei pääse perille, ja samoin puolet punaiseen pisteeseen matkanneesta valosta. Varjostimelle siis saapuu vähemmän valoa, jolloin kuva himmenee.

**16.31** Kuvassa 16.33 säteet ovat hajaantumassa niiden saapuessa toiseen linssiin. Toinen linssi kokoaa niitä yhteen, jolloin ne eivät enää hajaannu yhtä voimakkaasti. Tällöin syntyy suuri valekuva kauas linssin taakse. Jos toinen linssi tuodaan lähelle ensimmäistä, linssiiin saapuvat valonsäteet kulkevat toisiaan kohti ja toinen linssi kokoaa ne yhteen niin, että säteet leikkaavat toisensa vielä lähempänä ensimmäistä linssia. Tällöin syntyy aito kuva, joka on pienempi kuin ensimmäisen linssin yksin luoma kuva.

Ensimmäisen linssin kuva toimii toisen linssin esineenä, joten toisen linssin esine on nyt linssin takana. Linssiyhtälössä tämä huomioidaan niin, että  $L_{\text{esine}}$  on negatiivinen. Jos esimerkiksi toisen linssin polttoväli on  $f = 10.00$  cm ja ensimmäisen linssin kuva on linssin takana etäisyydellä 6.00 cm, on siius  $L_{\text{esine}} = -6.00$  cm ja linssiyhtälöstä  $1/f = 1/L_{\text{esine}} + 1/L_{\text{kuvaa}}$  saadaan  $L_{\text{kuvaa}} = (1/10.00 \text{ cm} + 1/6.00 \text{ cm})^{-1} = 3.75 \text{ cm}$ . Toinen linssi sijautuu siis  $6.00 \text{ cm} - 3.75 \text{ cm} = 2.25 \text{ cm}$  läheemmäksi ensimmäistä linssia.

**16.33** Kaksoisraossa aaltojen lähteinä toimivat rakoihin saapuvat aallot. Nämä lähteet ovat samassa vaiheessa, jos aalto saapuu rakoihin samassa vaiheessa. Nämä puolestaan ovat silloin, kun aaltorintama saavuttaa molemmat raot samanaikaisesti. Aallot eivät ole samassa vaiheessa, jos aaltorintama saapuu toiseen rakoona ennen toista. Nämä käy, jos valo ei saavu raoille kohtisuoraan vaan vinosti.

**16.34** Piirrä kuva! Jos jatkat harmaan kolmion ylempää kateettia, saat uuden, suuremman suorakulmaisen kolmion, jossa lähteiden välinen etäisyys  $d$  on nyt kateetti. Kuvaan punaisella merkity jana on tämän suorakulmaisen kolmion korkeusjana, joka jakaa kolmion kahteen yhdenmuotoiseen suorakulmaiseen kolmioon. Kulma  $\theta$  on näiden kolmien terävä kulma.

**16.35** Kuvan 16.37 tilanne vastaa kuvan 16.19 (a) tapausta, jossa on neljä lähdettä ja  $w = 3\lambda$ . Kummassakin tapauksessa kulkee voimakas aalto likimain kulmissa  $\theta = 0^\circ, \pm 50^\circ$  ja näiden välissä on kaksi suuntaa, joihin kulkee huomattavasti heikompi aalto.

**16.36** Piirrä kuva! Kuvioita on neljä, ja niissä vierekkäisistä lähteistä tulevia aaltoja kuvavaien vaiheenosittimien välinen kulma on  $\Delta\phi = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi$  tai  $\frac{8}{5}\pi$ . Kuvioista kaksi on viisikulmioita ja kaksi viisisakaraisia tähtiä.

**16.37 (a)** Kun rakojen keskinäinen etäisyys pysyy samana, päämaksimien paikat eivät muutu. Sivumaksimien määrä kuitenkin muuttuu. Kun rakoja on kolme, päämaksimien välissä on kaksi minimiä, jotka erottavat yhden sivumaksimin. Kun rakoja on kuusi, päämaksimien välissä on viisi minimiä, jotka erottavat neljä sivumaksimia. **(b)** Koska minimien ja sivumaksimien määrä lisääntyy rakojen määrän kasvaessa, maksimeista täytyy tulla kapeampia. Erityisesti päämaksimien leveys pienenee.

**(c)** Rakojen määrän kasvaessa, sivumaksimien intensiteetti pienenee ja päämaksimien kasvaa.

**(d)** Raot toimivat aaltojen lähteinä, joten rakojen määrän kaksinkertaistuminen tarkoittaa varjostimelle saapuvan energian kaksinkertaistumista. Tämä näkyy intensiteettijakaumassa niin, että päämaksimien leveys pienenee, mutta niiden intensiteetti kasvaa niin, että aallon kuljettama kokonaisteho kasvaa. Sivumaksimien intensiteetti pienenee, eli rakojen määrän lisääntyessä aaltojen kuljettama energia keskittyy yhä tarkemmin päämaksimeihin, joista tulee kirkkaita ja kapeita valokiiloja.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

**16.38** Levyn pinnassa on hyvin kapeita uria, joten levy toimii kuin peili, jonka pintaan on kiinnitetty diffraktiohila. Hilan läpi kulkeva aalto siroaa vain tiettyihin kulmiin, jotka riippuvat aallonpituuudesta. Valkoinen valo on monien värien eli monien eri aallonpituuksien superpositio. Kun nämä erilaiset aallot osuvat hilaan, kukin siroaa johonkin tiettyyn kulmaan riippuen sen aallonpituuudesta. Niinpä kun katsot levyn pinnan yhtä pistettä, näen vain sen värin, joka siroaa ko. pisteestä juuri siihen kulmaan, jossa silmäsi on. Kulma pinnasta silmääsi riippuu tieteenkin siitä, mikä pinnan piste on kyseessä, joten eri pisteissä näkyy eri värejä.

**16.39** Kun  $N = 1$ , intensiteettijakauma on  $I(\theta) = I_0$  eli intensiteetti on vakio. Tulos on aivan oikein, koska oletimme valon kulkevan hyvin kapeiden rakojen läpi. Tällöin kukin rako toimii aallon läheenä ja lähetää sylinterimäisänä pintoina leviävä aaltorintamia kaikkiin suuntiin. Tällaisen aallon intensiteetti on kaikissa suunnissa sama eli intensiteettijakauma kulman funktiona on vakio.

**16.40** Kuviot olisivat melko samanlaiset. Kuvioissa olisi nyt 24 nuolta 12 sijaan, mutta kukin nuoli olisi pituudeltaan puolet siitä mitä 12 läheen kuviossa ja peräkkäisten nuolten välinen kulma olisi puolikas siitä mitä kuvassa nyt. Lopputulos olisi se, että nuolet muodostaisivat lähes samanlaisia kaaria ja ympyrötä kuin nytkin, mutta esimerkiksi ympyrää muistuttava kuvio olisi nyt 24-kulmio 12-kulmion sijaan. Jos rako jaettaisiin äärettömän moneen osaan, kuvioista tulisi täydellinen ympyrä.

**16.41** Kun raot ovat erillisiä ja tasavälistä, on olemassa muitakin kulmia kuin  $\theta = 0$ , joissa kaikki vaiheenosittimet ovat samansuuntaiset. Kun kyseessä on yksi rako, joka jaetaan hyvin moneen osaan, eri osien vaiheenosittimet eivät ole ikinä yhdensuuntaiset ellei ole  $\theta = 0$ .

**16.42** Ajatellaan rako jaetuksi 12 osaan. Nyt ensimmäinen ja viides osa ovat vastakkaisissa vaiheissa ja niiden tuottamat aallot kumoavat toisensa. Samoin on 2. ja 6., 3. ja 7. sekä 4. ja 8. läheen laita. Jäljelle jäävät kuitenkin lähteet 9–12. Nyt siis 2/3 raosta interferoi täydellisen tuhoavasti, mutta viimeinen 1/3 ei. Intensiteetti on siis pieni mutta ei nolla.

**16.43 (a)** Minimit ovat likimain kulmissa  $\theta = \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$ , joten raon leveys  $w$  ratkeaa yhtälöstä

$$w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda. \quad (16.92)$$

Erityisesti kulma  $\theta = 45^\circ$  vastaa indeksiä  $n_{\min} = 3$ , joten  $w = 3\lambda / \sin 45^\circ = 2100 \text{ nm}$ .

(b) Nyt ratkaistaan kulma,

$$\theta_{\min} = \arcsin \frac{\lambda}{w} = \arcsin \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{10^{-3} \text{ m}} = \arcsin(5 \cdot 10^{-4}) \approx 5 \cdot 10^{-4} \approx 0.03^\circ. \quad (16.93)$$

Ensimmäinen intensiteettiminimi on siis erittäin lähellä nollakulmaa. Tämä tarkoittaa sitä, että valo kulkee raosta lähes täydellisen suoraan eikä diffraktoidu juuri lainkaan, sillä päämaksimi on lähes täsmälleen kulmassa  $\theta = 0^\circ$ . Valolla 1 mm on siis hyvin leveä aukko, ja siitä kulkeva valo kulkee suoraan noudattaen sädeoptiikan lakeja.

(c) Äänen aallonpituuus ilmassa riippuu taajuudesta. Äänen nopeus on noin 350 m/s. Esimerkiksi 500 Hz äänen aallonpituuus on siis noin  $\lambda = v/f = 0.70 \text{ m}$ . Yhtälöllä  $w \sin \theta_{\min} = \lambda$  ei ole nyt kuitenkaan ratkaisua, koska  $w < \lambda$ . Tämä tarkoittaa sitä, että diffraktiominimejä ei ole lainkaan vaan ääni diffraktoituu kaikkiin kulmiin. Tämäkin on odotettu tulos. Äänelle 1 mm on hyvin pieni rako, ja tällaisesta raosta tuleva ääni kuuluu kaikissa suunnissa eikä vain suoraan raon takana.

**16.44** Tarkimmin ongelma selviää huomaamalla, että kulmassa  $60^\circ$  on kahden raon interferenssikuvion neljäs maksimi ja yhden raon diffraktion toinen minimi. Rakojen välinen etäisyys ratkeaa kaksoisraon interferenssimaksimeja kuvavasta yhtälöstä  $d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda$ , josta saadaan  $d = \lambda 4 / \sin 60^\circ = 4.6 \lambda$ .

Rakojen leveys selviää yhden raon diffraktionminimejä kuvavasta yhtälöstä  $w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda$ , josta saadaan  $w = \lambda 2 / \sin 60^\circ = 2.3 \lambda$ .

**16.45** Tavallisesti mikroskoopeilla voidaan erottaa yksityiskohtia, jotka ovat hieman pienempiä kuin käytetty aallonpituuus. Parhailla laitteilla voidaan erottaa kohteet, joiden etäisyys on luokkaa  $\lambda/3$ . Tämä johtuu siitä, että jos valon aallonpituuus on selvästi suurempi kuin tarkasteltavat yksityiskohdat, valo diffraktoituu kulkissaan näiden kohteiden ohi, jolloin havaitusta kuvasta tulee epäselvä.

Ongelma voidaan ohittaa esimerkiksi käyttämällä lyhyen aallonpituuden aaltoa (esimerkiksi elektronimikroskooppi käyttää elektronialtoja) tai mikroskopiamenetelmää, jotka eivät perustu lainkaan aaltoihin (esimerkiksi atomivoimamikroskoopissa kohteita tutkitaan tunnustelemalla niittiä neulalla, jonka kärki on muutaman atomin kokoinen).

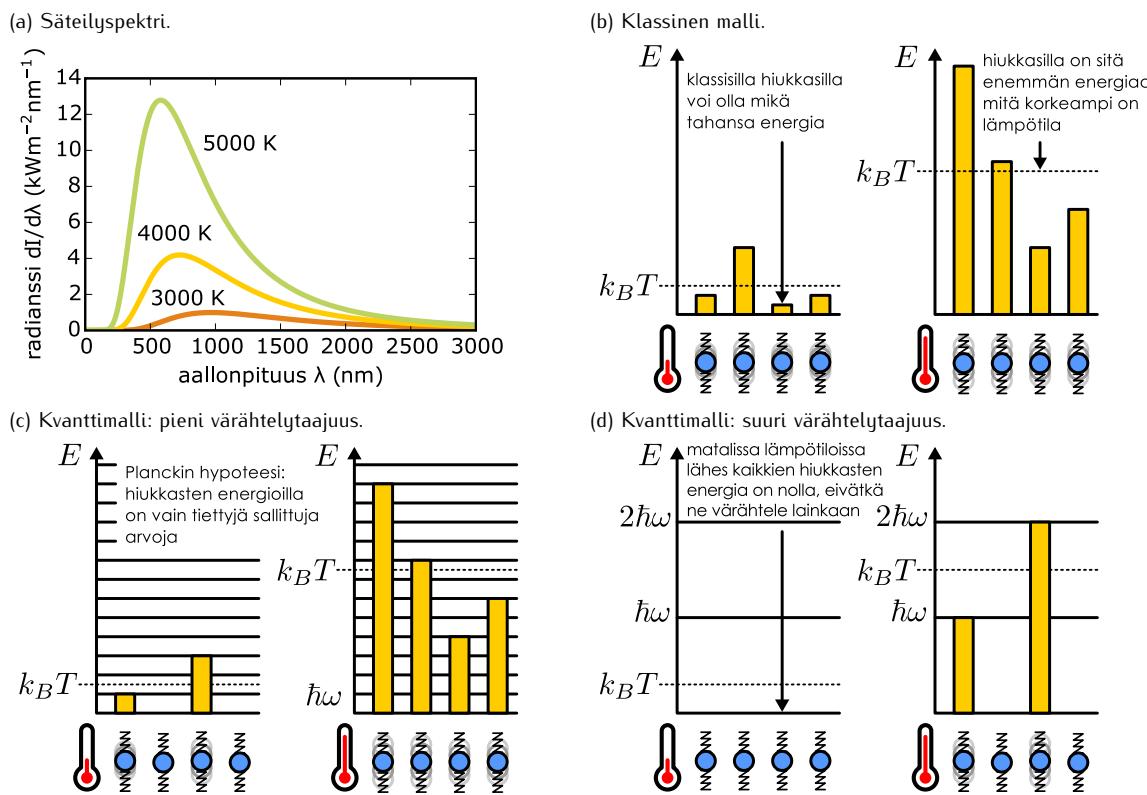
# 17 Kvanttimekanika

Tutustuimme mikroskooppisten hiukkasten fysiikkaan ensimmäisen kerran jo termodynamiikan yhteydessä. Tällöin pystyimme selittämään monia aineen ominaisuuksia oleellisesti ajattelemalla hiukkasten olevan "pieniä kumipalloja". Huomasimme kuitenkin myös, että joitakin ilmiöitä kuten jäätyneitä vapausasteita ei voida ymmärtää tällaisella mallilla, vaan selvästikin ajattelussamme oli puutteita. 1800-luvun loppuun mennessä oli kokeellisesti löydetty muitakin vastaavia ilmiöitä, joissa klassinen fysiikka oli riittämätön, ja nämä havainnot johtivat aivan uudenlaiseen tapaan kuvata luontoa — valon fotonimalliuksen sekä elektronien ja muiden alkeishiukkasten kvantimekanikkaan. Klassisen fysiikan käsitteet kuten paikka ja nopeus eivät ole kvantimekanikassa enää riittäviä kuvamaan hiukkasten käyttäytymistä. Toisin kuin klassisilla "kumipalloihukkasilta", kvantimekaanisilla hiukkasilla ei välttämättä ole esimerkiksi yhtä tiettyä paikkaa vaan ne voivat aaltojen tapaan olla levittäytyneet avaruuteen. Toisaalta joissakin systeemeissä kvanttihiukkassella ei voi olla mitä tahansa energiavaan vain jotkin arvot ovat mahdollisia. Kummallisinkin kvantimekanikan ominaisuus lienee kuitenkin se, että kvantimekaaniset hiukkaset eivät ole deterministisiä. Toisin sanoen vaikka tiedäsimme hiukkisen tilan täsmälleen, kvantimekanikka ei salli meidän tietää esimerkiksi hiukkisen paikkaa varmasti vaan pystymme ainoastaan ennustamaan paikan tietyillä todennäköisyyksillä.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää miksi klassinen valon aaltomalli ei voi selittää valosähköistä ilmiötä tai kaksoisrakokoetta mutta fotonimalli voi
- määritellä kvantimekaaninen tila ja selittää miten tila kuvaa hiukkisen paikkaa, liikemäärä ja energiavaa
- laskea hiukkisen paikan ja liikemäären odotusarvot
- muotoilla epätarkkuusperiaate paikan ja liikemäären hajontojen avulla
- muotoilla Schrödingerin yhtälö ja selittää kuinka hiukkisen mahdolliset tilat periaatteessa ratkaistaan
- kuvilla millaisia tiloja pieneen tilaan vangitulla hiukkassella voi olla
- kuvilla elektronin mahdollisia tiloja atomeissa

Kuva 17.1: Mustan kappaleen säteilyspektri. Klassinen teoria selittää ilmiön hyvin pitkillä aallonpituuksilla (pienillä taajuuksilla), mutta lyhyillä aallonpituuksilla (suurilla taajuuksilla) klassinen malli ennustaa intensiteetin kasvavan rajatta. Planckin mallissa suurtaajauksista säteilyä ei voi syntyä lainkaan, koska elektroneilla ei ole tarpeeksi energiota värähdellä suurilla taajuuksilla, ja niinpä säteilyn intensiteetti lähestyy nolla aallonpituuden lähestyessä nollaa.



## 17.1 Fotoni

### Planckin hypoteesi

Kvanttimekanikan katsotaan usein syntyneen vuonna 1900 Max Planckin esitetyä selityksen mustan kappaleen säteilyn ominaisuuksille. Musta kappale tarkoittaa fysiikassa kappaletta, joka absorboi täydellisesti kaiken siinä osuvan sähkömagneettisen säteilyn. Koska tällainen kappale ei heijasta lainkaan valoa, se on musta — ainakin kylmänä. Kun musta kappale on kuuma, se ei ole enää musta sanan puhekielisessä merkityksessä, koska kuuma aine lähetää eli **emittoi** sähkömagneettista säteilyä jota valokin on. Ihmisetkin ovat tarpeeksi lämpimää emittoidakseen infrapunasäteilyä, ja esimerkiksi metallit voivat kuumetessaan alkaa ensin punertaa, sitten kellertää ja lopulta hehkua valkoisenä.

Kokeellisesti siis selvästikin kappaleiden emittoiman säteilyn aallonpituuus riippuu niiden lämpötilasta, ja 1800-luvun lopulla mustan kappaleen spektri eli sen lähetämän säteilyn intensiteetin riippuvuus aallonpituuudesta, sekä spektrin riippuvuus lämpötilasta (kuva 17.1 (a)) tunnettiin kokeellisesti varsin hyvin. Mustan kappaleen säteilyn voimakkuudella on aina maksimi jollakin aallonpituuudella, joka riippuu kappaleen lämpötilasta. Tätä lyhyemmillä aallonpituuksilla kappale ei säteile juuri lainkaan. Jos lämpötila on matala, kappale ei lähetä säteilyä näkyvän valon aallonpituualueella vaan intensiteettimaksimi on tästä pidemmilä aallonpituuksilla, ja kappale on musta. Lämpötilan noustessa intensiteettimaksimi siirtyy kohti lyhyempiä aallonpituuksia, jolloin kappale alkaa emittoimaan myös näkyvää valoa.

Klassisen sähkömagnetismin näkökulmasta tästä oli mahdoton ymmärtää. Klassisen kappaleen pitäisi pystyä emittoimaan säteilyä *millä tahansa aallonpituuudella* ja erityisesti klassinen teoria ennusti säteilyn intensiteetin olevan sitä suurempi, mitä lyhyempää aallonpituutta tarkastellaan. Planckin selitys ilmiölle oli tämä: kappale lähetää säteilyä niillä taajuuksilla, joilla sen elektronit värähtelevät, ja jostakin tuntemattomasta syystä näiden elektronien energia *ei voi saada mitä tahansa arvoa* vaan vain jotkin tiettyt energiat olivat niiille sallittuja. Erityisesti elektronien mahdolliset energiat ovat Planckin selityksessä niiden värähtelytaajuuden  $f$  ja jonkin uuden luonnonvakion  $h$  tulon monikertoja,  $E = 0, hf, 2hf, 3hf$  jne.

Klassisen termodynamiikan ekvipartitioperiaatteen mukaan värähtelevä elektronin jokaisen värähtelysuunnan keskimääräinen energia lämpötilassa  $T$  on  $\langle E \rangle = k_B T$  (kuva 17.1 (b)), ja kullakin yksittäisellä elektronilla voi olla lämpöliikkeestä johtuen periaatteessa mikä tahansa satunnainen energia, kunhan energia ei

ole kovin paljon tästä keskiarvoa suurempi. Niinpä tässä mallissa kaikki elektronit värähtelevät ainakin vähän olipa lämpötila tai niiden värähtelytaajuus mikä tahansa.

Planckin malli ei poikkea klassisesta mallista kovin paljon, jos elektronien sallittujen energioiden erotus on pieni verrattuna lämpötilasta riippuvaan keskimääräiseen energiaan (kuva 17.1 (c)). Kuitenkin jos lämpötila on matala tai elektronien värähtelytaajuus on suuri, elektronien ensimmäinen nollasta poikkeava sallittu energia  $hf$  voi olla *suurempi* kuin lämpötilaan liittyvä energia,  $k_B T$  (kuva 17.1 (d)). Jotkin elektronit voivat sattumalta saada enemmän energiaa kuin keskimääräinen energia  $k_B T$ , mutta on hyvin epätodennäköistä, että satunnainen lämpöliike antaisi millekään elektronille huomattavasti tästä enemmän energiota. Niinpä jos  $hf$  on paljon suurempi kuin  $k_B T$ , on hyvin epätodennäköistä, että mikään elektroni saa näin paljon energiota. Tällöin lähes kaikkien taajuudella  $f$  värähtelevien elektronien energian täytyy olla *nolla*, eli elektronit eivät värähtele lainkaan. (Elektronien keskimääräinen energia ei myöskään ole tällöin  $k_B T$  vaan sekin on likimain nolla joten *ekvipartitioperiaate ei päde* enää.)

Jos elektronit eivät värähtelevät, ne eivät myöskään voi lähetä sähelyitä, ja tämä on selitys sille, miksi musta kappale ei lähetä sähelyitä lyhyillä aallonpituuksilla: Mitä lyhyempi on aallonpituuus, sitä suurempi on taajuus. Niinpä jotta musta kappale voisi lähetä sähelyitä lyhyillä aallonpituuksilla, siunä täytyy olla suurella taajuudella värähteleviä elektroneja. Kuitenkin mitä suurempi elektronin värähtelytaajuus  $f$  on, sitä suureman energian  $hf$  elektroni tarvitsee alkaakseen värähtelemaan. Jos elektroni ei saa näin paljon energiota, se ei värähtelevä eikä siis myöskään sähelyitä lainkaan. Jos lämpötila on matala, kappaleessa ei yksinkertaisesti ole tarpeeksi sisäenergiaa, jotta elektronit voisivat värähdyä suurilla taajuuksilla. Niinpä elektronit värähtevät ja lähetävät sähelyitä ainoastaan pienillä taajuuksilla. Tässä "suuri taajuus" tarkoittaa siis taajuuksia, joihin liittyy energia on suurempi kuin lämpötilaan liittyy energia,  $hf > k_B T$ . Lämpötilan noustessa tämä raja siirtyy kohti suurempia taajuuksia eli pienempiä aallonpituuksia. Näin ollen myös mustan kappaleen spektrissä esiintyvä maksimi siirtyy korkeissa lämpötiloissa kohti lyhyitä aallonpituuksia.

Planckin tarkka teoreettinen analyysi osoitti, että tällainen malli selittää täydellisesti, kuinka mustan kappaleen lähetämän sähelyn intensiteetti riippuu sähelyn aallonpituuudesta ja kappaleen lämpötilasta. Muutenkin Planckin hypoteesi hiukkasten värähtelytaajuuden ja energian verrannollisuudesta osoittautui erittäin tärkeäksi ideaaksi kvantimekanikan myöhempää kehityksessä. Planckin oletukselle ei kuitenkaan ollut vielä tuolloin mitään järkevää fysikaalista oikeutusta, ja nykyistä käsitystä vastaava selitys ilmiölle kehitettiin vasta 1920-luvulla. Joka tapauksessa mallissa esiintynyt uusi luonnonvakio  $\hbar = 6.62607015 \cdot 10^{-34}$  Js on sittemmin nimetty **Planckin vakioksi**. Tämä vakio osoittautui myöhempinä niin keskeiseksi, että vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksessa Planckin vakion arvon määriteltiin olevan tarkka. Koska vakion yksikkö on  $\text{Js} = \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ , yhdessä metrin ja sekunnin määritelmän kanssa Planckin vakion arvo määrittelee kilogramman.

Kvantimekaniikassa on tavallisempaa käyttää kulmataajuutta  $\omega = 2\pi f$  taajuuden sijaan, jolloin Planckin mallin energia  $hf$  voidaan kirjoittaa myös muodossa  $hf = \frac{\hbar}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega$ . Tässä esiintyvä uusi vakio  $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34}$  Js on nimeltään *redusoitu Planckin vakio* tai tuttavallisemmin "h-viiva".

Myös termi **kvantti** on peräisin Planckilta. Termi on johdettu latinan sanasta *quantum* ja tarkoittaa suoraan käännettynä 'näin paljon'. Planckin mallissa värähtelijän energia saattoi nimittäin muuttua vain määränpäin  $\hbar\omega$  eli yhden *energiakvantin*.



**17.1** Mitä suuruusluokkaa on punaisen valon taajuus? Mikä on sitä vastaavan energiakvantin suuruus? Mitä lämpötilaa se vastaa?

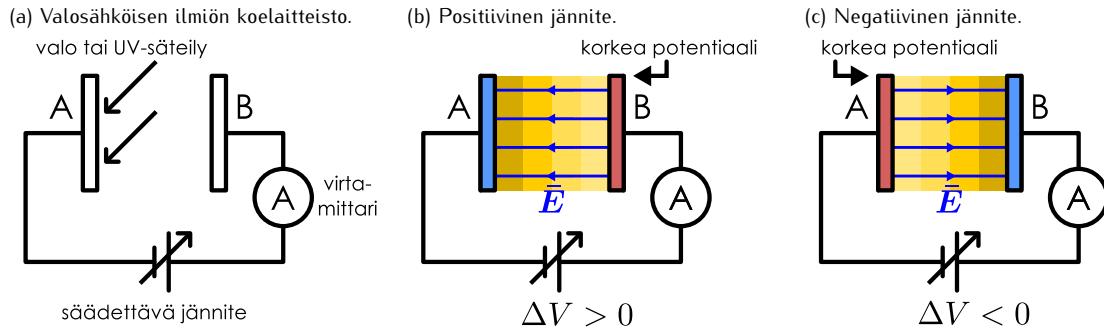
## Valosähköinen ilmiö

Planckin hypoteesissa elektronien energiat riippuvat niiden taajuuksista, mutta elektronien lähetämä sähely oli hänen mallissaan edelleen klassista sähkömagneettista aaltoliikettä. Seuraavan mullistavan idean esitti Einstein 1905 selittäessään valosähköisen ilmiön eli sen, kuinka metalliin osuva valo irrottaa siitä elektroneja tuottaen mitattavan sähkövirran.

Valosähköistä ilmiötä voidaan kokeellisesti tutkia kuvassa 17.2 esitettyllä laitteistolla. Laitteessa on yksinkertaisessa virtapiirissä jännitelähde ja kondensaattori, jonka levijä on kuvassa merkitty A ja B. Virtapiirin jännitelähde on säädetty niin, että levijen välistä jännitettä voidaan muuttaa ja erityisesti kummalle tahansa kondensaattorin levijistä voidaan antaa korkeampi potentiaali. Merkitään levijen välistä jännitettä  $\Delta V$  ja valitaan sen etumerkki niin, että  $\Delta V > 0$  V silloin, kun levy A on matalammassa potentiaalissa. Lisäksi silmukassa on virtamittari, joka normaalisti luonnollisesti näyttää nollaa, koska kondensaattorin katkaisemassa tasavirtapiirissä ei kulje sähkövirtaa.

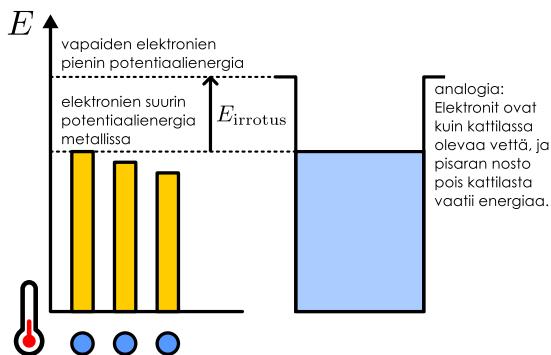
Kuitenkin jos kondensaattorin levijä A valaistaan, voidaan joissakin tapauksissa havaita, että silmukassa kulkee virta. Ilmiö johtuu yksinkertaisesti siitä, että valo antaa kondensaattorilevyllä oleville elektroneille energiota, jonka avulla ne voivat irrota levystä, kulkea kondensaattorilevijen välisen aukon yli, ja jatkaa matkaansa pitkin johdinta. Tässä ei sinänsä ole klassisen fysiikan näkökulmasta mitään ihmellistä, ja klassisen teorian (osittain väärä) selitys valosähköiselle ilmiölle on seuraava: Elektroneja sitoo metalliin attraktiivinen

Kuva 17.2: Yksinkertaistettu kuvaus valosähkisen ilmiön koelaitteistosta. Kokeessa kondensaattorille saapuu säteilyä, jonka energian turvin elektronit voivat kulkea kondensaattorin läpi ja kuljettaa virtaa. Kokeessa voidaan muuttaa säteilyn aallonpituitta ja intensiteettiä, kondensaattorissa käytettyjä materiaaleja sekä kondensaattorin jännettää (sähkökenttää). Kokeessa mitataan piirissä kulkeva virta.



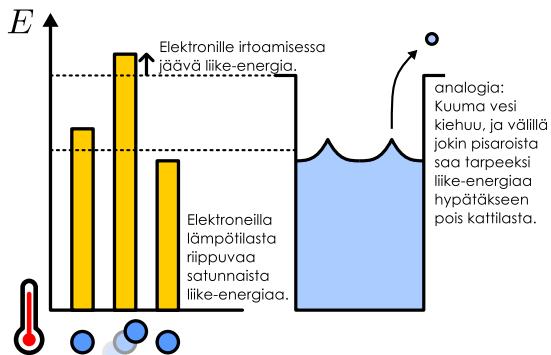
sähkömagneettinen vuorovaikus atomiydinten kanssa, joten niiden potentiaalienergia on metallissa pienempi kuin jos ne olisivat vapaat (eli irti metallista). Nämä elektronit irrottaminen metallista vaatii vähintään energian  $E_{\text{irrotus}}$  (tällä on historiallisista syistä outo nimi *työfunktio*) kuten kuvassa 17.3 on havainnollistettu. Metallissa olevilla elektroneilla ei ole aluksi kaikilla sama energia, ja  $E_{\text{irrotus}}$  kertookin paljonko energiota tarvitaan irrottamaan juuri ne elektronit, joilla on kaikkein *korkein* potentiaalienergia metallissa. Ne elektronit, joilla on aluksi tätä vähemmän energiota, tarvitsevat vielä enemmän energiota päästään pakenemaan metallista.

Kuva 17.3: Levyn A energiadiagrammi: elektronit kiinni levystä.



peasti lämpöenergiaksi, jolloin metallin *lämpötila nousee*. Lämpötilan ollessa kyllin korkea yksittäiset elektronit voivat saada sattumalta tarpeeksi liike-energiaa irrotakseen metallista (kuva 17.4). Vesianalogiassa tämä vastaa likimain sitä, että kattilassa oleva vesi kiehuu, jolloin pisaroita voi sattumalta lentää ulos kattilasta.

Kuva 17.4: Elektronin irtoaminen klassisessa mallissa.



Tilannetta voi verrata kattilaan, jossa on vettä. Jotta vesipisaran saisi pois kattilasta, se pitää nostaa kattilan reunan ylitse. Tällöin pisaran potentiaalienergia painovoimakentässä kasvaa, ja pisaralle on siis annettava energiaa, jotta nosto onnistuisi. Vähiten energiota tarvitsevat pinnalla olevat pisarat. Jos vettä nostetaan kattilan pohjalta, tähän tarvitaan enemmän energiota.

Valo on klassisen fysiikan mukaan sähkömagneettisen kentän aalto, joten kondensaattorilevylle osuvan valon sähkökenttä kohdistaa elektroneihin voiman. Tämän voiman tekemän työn kautta sähkömagneettisen kentän energiota siirtyy elektroneille, jotka lähtevät siis metallissa liukkeelle. Resistanssin vuoksi elektronien liike-energia kuitenkin muuttuu nopeasti.

Jos valaistu kondensaattorilevy A on pienemmässä potentiaalissa kuin toinen levy B (eli  $\Delta V > 0 \text{ V}$ ), levujen välinen sähkökenttä osoittaa kohti pienempää potentiaalia eli valaistua levyä A (kuva 17.5 (a)). Nämä kentät vetää kaikki ironneet elektronit kondensaattorilevyjen välisen raon ylitse levylle B, koska negatiivisesti varattuihin hiukkasiin kohdistuu sähkökenttässä voima kenttään nähdyn päävästäiseen suuntaan. Elektronien näkökulmasta ne siis "putoavat alaspäin" levylle B ja tällöin jokainen irronnut elektroni kulkee kondensaattorin läpi. Jos aikavälillä  $\Delta t$  irtoaa  $n_e$  elektronia, nämä kuljettavat varauksen  $\Delta q = -n_e e$  ja kondensaattorin läpi kulkee virta

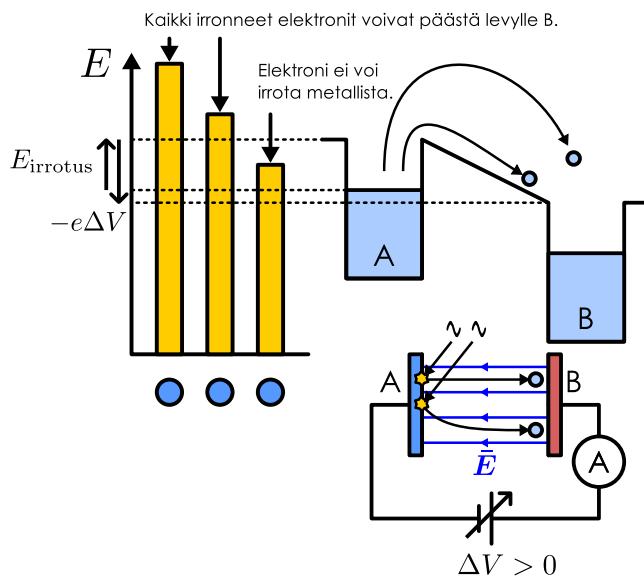
$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{n_e e}{\Delta t}. \quad (17.1)$$

Kondensaattorin läpi kulkenut sähkövaraus ei voi kuitenkaan jäädä kondensaattorilevylle B, koska tällöin kondensaattorin varaus ja samalla sen jänntie kasvaisi. Jänntielähte huolehtii siitä, että kondensaattorissa on aina sama jänntie, ja se tekee sen työntämällä ylimääräisiä elektroneja johdinta pitkin levyltä B levylle

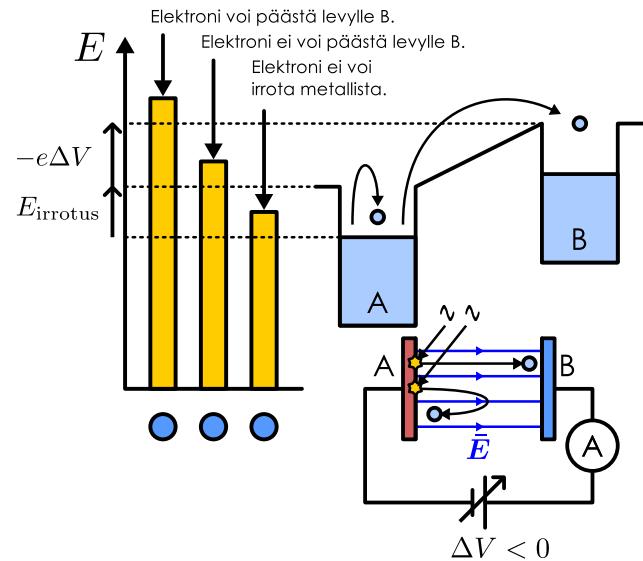
## KVANTTIMEKANIICKA

Kuva 17.5: Elektronien energiadiagrammi, kun piirissä on jännite. (a) Levyyn B ollessa korkeassa potentiaalissa elektronien potentiaalienergia on suurempi levylle A. Tällöin levy B vetää elektroneja puoleensa. Tällöinkin elektronien täytyy ensin päästää irti metallista ennen kuin voivat siirtyä levylle B. (b) Levyyn A ollessa korkeassa potentiaalissa elektronien potentiaalienergia on suurempi levylle B. Tällöin levy B hylkii elektroneja eivätkä kaikki irronneet elektronit pääse kondensaattorin läpi.

(a) Piirissä positiivinen jännite.



(b) Piirissä negatiivinen jännite.



A. Niinpä kondensaattorin läpi kulkeen virran täytyy kulkea koko virtapiirin ympäri ja näin ollen virtamittari mittaa saman virran kuin mitä kondensaattorissa kulkee. Negatiivisesti varautuneet elektronit kulkevat kondensaattorissa levyltä A levylle B ja piirissä levyltä B levylle A. Virta kulkee elektroneihin nähden vastakkaiseen suuntaan levyltä A levylle B. Asennetaan virtamittari piiriin niin päin, että mitattu virta on positiivinen.



**17.2** Selitä kuvaan 17.5 (a) tilanne vesianalogian avulla. Selitä (a) miten kattilasta A pois päässeet pisarat käyttäytyvät, (b) mikä olisi jännitelähteen vastine tässä analogiassa, sekä (c) mikä on virtamittarin analogia. Selitä erityisesti, miten kattilasta A pois lentäneiden pisarojen määrä ja nopeus vaikuttaa mitattuun virtaan.

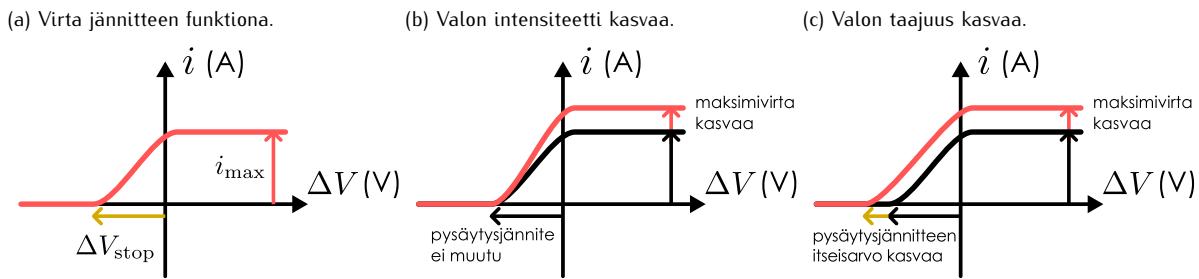
Nyt *mitattu virta ei riipu jännitteestä suuruudesta*, koska virta mittaa paljonko varausta eli *montako elektronia* kondensaattorin läpi kulkee. Eriti positiivisilla jännitteillä *kaikki* irronneet elektronit kulkevat kondensaattorin läpi, joten mitattu virta on sama,  $i_{\max}$ , kaikilla positiivisilla jännitteillä. Jännite vaikuttaa kyllä siihen, kuinka "korkealta elektronit putoavat" eli kuinka paljon energiota ne saavat kulkiessaan kondensaattorin läpi, mutta jokainen elektri kuljettaa varausta vain yhden alkeisvarauksen verran riippumatta siitä, kuinka nopeasti ne iskeytyvät levyn B. Piirissä mitattu maksimivirta  $i_{\max}$  on siis suoraan verrannollinen levystä A irronneiden elektronien määrään.

Jos valaistu kondensaattorilevy A on korkeammassa potentiaalissa kuin levy B,  $\Delta V < 0$  V, levijen välinen sähkökenttä pyrkii vetämään elektroneja takaisin levylle A (kuva 17.5 (b)). Tällöin vain ne elektronit, joiden liike-energia metallista irtoamisen jälkeen on suurempi kuin ero levijen välisessä potentiaalienergiassa, voivat päästää kondensaattorin läpi. Nyt elektronit "putoavat takaisin" levylle A, joten aivan samoin kuin ylös-päin heitetystä palloista vain tarpeeksi nopeat voivat osua katolle, vain tarpeeksi suurella alkonopeudella irronneet elektronit voivat osua levyn B. Koska elektronien liike on lämpöliikkeen vuoksi satunnaista, myös irtoavien elektronien liike-energioissa on satunnaista vaihtelua. Siispä irtoaville elektroneille irtoamisen jälkeen jäävä liike-energia on satunnainen, ja elektri voi kulkea kondensaattorin läpi, jos sillä on tarpeeksi energiota. Jokin kondensaattorin jännitteestä riippuva osuus irtoavista elektroneista pääsee siis kondensaattorin yli ja kuljettaa virtaa. Luonnollisesti mitä negatiivisempi jännite kondensaattorissa on, sitä vaikeampi elektronien on päästää siitä läpi ja niinpä piirissä mitattu virta pienenee jännitteen itseisarvon funktiona. Tarpeeksi negatiivisilla jännitteillä  $\Delta V < \Delta V_{\text{stop}} < 0$  V elektroneja ei pääse kondensaattorin läpi käytännössä lainkaan eikä sähkövirta kulje. Tätä rajaa  $\Delta V_{\text{stop}}$  kutsutaan *pysäytysjännitteeksi*.



**17.3** Selitä kuvaan 17.5 (b) tilanne vesianalogian avulla.

Kuva 17.6: Pürissä mitattu virta jännitteiden funktiona. Negatiivinen jännite pyrkii estämään elektroneja kulkemasta levyn yli, jolloin virta häviää kokonaan jännitteiden ollessa itseisarvoltaan kyllin suuri. Positiivinen jännite pyrkii vetämään irronneet elektronit levyn läpi, jolloin virta on likimain vakio kaikilla positiivisilla jännitteillä. Mitattu virta-jännitekuvaajan muoto riippuu sääteilyn taajuudesta (aallonpituuudesta) ja intensiteetistä.



Kuvaan 17.6 on piirretty edellä kuvailtu virran ja jännitteiden välinen yhteyts. Kuvaaja on varsin erilainen kuin esimerkiksi vastuksella, ja kyseessä onkin *diodi* eli komponentti, joka päästää virtaa vain yhteen suuntaan. Tässä ei ole kuitenkaan vielä mitään odottamatonta, sillä juuri tällaisia mittaustuloksia kokeellisesti saadaan. Outoa klassisen fysiikan näkökulmasta on se, miten tulokset *muuttuvat*, kun jännitetä  $\Delta V$  tai valon aallonpituutta muutetaan.

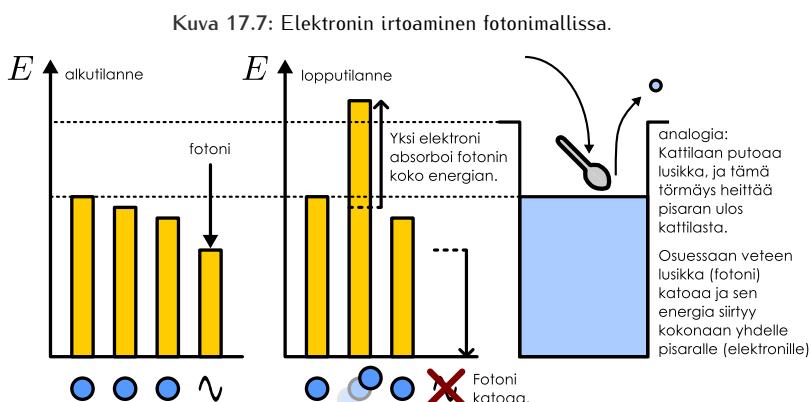
Klassisen teorian mukaan valon *aallonpituus* tai *taajuus* ei vaikuta sen kuljettamaan energiaan. Sen sijaan teho, jolla elektroneille siirryt energiota, riippuu ainoastaan valon *intensiteetistä*. Niinpä aallonpituuden ei pitäisi vaikuttaa mittaustuloksiin *mitenkään*. Toisaalta mitä suurempi on valon intensiteetti, sitä nopeammin ja kuumemmaksi levyn A pitäisi lämmetä. Tällöin elektroneja pitäisi irrota aikayksikössä *enemmän* ja irtovilla elektroneilla voi olla *suurempia* energioita. Toisin sanoen intensiteetin kasvattamisen pitäisi suurentaa sekä mitattua maksimivirtaa  $i_{\max}$  että pysäytysjännitettä  $\Delta V_{\text{stop}}$ . Lisäksi koska elektronit irtovat klassisessa mallissa lämpöenergian ansiosta, malli ennustaa, että levijä pitää valaista jonkin aikaa ennen kuin se on lämmennyt tarpeeksi ja elektroneja voi irrota.

Kokeellisesti kuitenkin havaitaan, että

- virta alkaa kulkea välittömästi, kun levyä valaistaan,
- intensiteetin kasvattaminen suurentaa maksimivirtaa  $i_{\max}$  mutta *ei pysäytysjännitettä*  $\Delta V_{\text{stop}}$ ,
- valon taajuuden kasvattaminen (aallonpituuden pienentäminen) *suurentaa sekä maksimivirtaa*  $i_{\max}$  *että pysäytysjännitteen itseisarvoa*  $|\Delta V_{\text{stop}}|$  ja
- on olemassa jokin levy A materiaalista riippuva sääteilyn kynnystaajaus  $f_{\text{raja}} = \omega_{\text{raja}}/2\pi$ , jota pienemmillä taajuuksilla (pidemmillä aallonpituuksilla) virtaa *ei kulje lainkaan*.



17.4 Selitä vielä omien sanoin, miksi yllä mainitut asiat ovat klassisen fysiikan mukaan käsittämättömiä.



Kuva 17.7: Elektronin irtamisen fotonimallissa.

Kokeelliset havainnot ovat selkeästi ristiriidassa edellä tarkastellun klassisen mallin kanssa, joten *klassinen malli ei voi olla oikein*. Einsteinin ratkaisun mukaan käsitystä valosta sähkömagneettisena aaltona täytyy muuttua. Koska virta alkaa kokeessa kulkemaan heti, kun levy A valaistaan, valon tuoma energia ei ilmeisesti jakaudu tasana kaikkien levyn hiukkasten kesken vaan jotkin elektronit saavat kerralla huomattavan suuren määrän energiota. Edelleen koska virta havaitaan vain tarpeeksi lyhyillä aallonpituuksilla eli suurilla taajuuksilla, yksittäisten elektronien saaman energian täytyy riippua valon taajuudesta. Nämä vaatimukset toteutuvat, jos valo koostuu hiukkasista, **fotoneista**.

Yksittäisen fotonin energia riippuu sen taajuudesta Planckin hypoteesia muistuttavalla tavalla,

$$E_{\text{fotoni}} = hf = \hbar\omega. \quad (17.2)$$

Fotonin kohtaava elektroni voi absorboida fotonin, jolloin se saa kerralla *fotonin koko energian* (kuva 17.7). Niinpä jos levä A valaistaan vain yhtä aallonpituuutta sisältävällä valolla, elektronien ja fotonien vuorovaikutuksessa kukin elektroni voi saada kerrallaan vain *joko* energian  $\hbar\omega$  tai *ei lainkaan energiaa*. Niinpä jos levylle saapuvien fotonien energia on suurempi kuin elektronien irrottamiseen vaadittu minimienergia  $E_{\text{fotoni}} = \hbar\omega > E_{\text{irrotus}}$ , yksittäiset fotonit pystyvät irrottamaan elektroneja. Näin on jos fotonien taajuus on suurempi kuin kynnystaajuus

$$\omega > \frac{1}{\hbar} E_{\text{irrotus}} = \omega_{\text{raja}}. \quad (17.3)$$

Vaikka valon taajuus olisi suurempi kuin kynnystaajuus, *kaikki* fotonit eivät siltikään irrota elektroneja. Voi nimittäin käydä myös niin, että fotonin absorboi elektroni, joka tarvitsee metallista irrotakseen suuremman energian kuin  $E_{\text{irrotus}}$ .

Vesianalogiassa tämä prosessi vastaa suunnilleen sitä, että veteen heitetään jokin kappale (vaikkapa lusikka), joka törmätessään veteen voi antaa vesipisaralle tarpeksi suuren nopeuden, jolla pisara pääsee kattilasta pois. Analogia ei ole kuitenkaan aivan näin yksinkertainen, koska fotonin luovuttaa energiansa vain *yhdelle* elektronille ja *katoaa* samalla. Analogiassa veteen heitetty lusikka ei siis voi tuottaa suurta läiskähdytystä vaan se voi roiskauttaa vain yhden pisaran. Samalla lusikan pitäisi hävitää.



**17.5** Selitä vesianalogian perusteella (a) miten fotonin taajuus liittyy analogiassa sitä edustavan lusikan ominaisuuksiin, (b) millainen pisara kuvailee elektronia, jonka irrottaminen vaatii enemmän energiota kuin  $E_{\text{irrotus}}$ , ja (c) mitä tarkoittaa se, että fotonin absorboi tällainen elektroni. (Huom. analogia ei enää tässä kohtaa toimi kovin hyvin.)

Koska yksittäinen elektroni absorboi *yhden* fotonin energian kerrallaan riippumatta fotonien lukumäärästä, irtoavien elektronien suurin mahdollinen liike-energia on

$$K_{\max} = E_{\text{fotoni}} - E_{\text{irrotus}} = \hbar\omega - E_{\text{irrotus}}. \quad (17.4)$$

Irronneet elektronit voivat kulkea levyltä A levylle B ainoastaan silloin, kun niiden liike-energia levyltä A lähdettäessä on suurempi kuin niiden potentiaalienergian muutos kuljettaessa levyltä A levylle B,

$$K_{\max} > \Delta U_{A \rightarrow B} = -e\Delta V. \quad (17.5)$$

Jos jännite on positiivinen, *kaikki* elektronit kulkevat kondensaattorin läpi (kuva 17.5 (a)). Jos jännite on negatiivinen, osa elektroneista voi "pudota takaisin" levylle A, ja tällöin vain osa fotonien irrottamista elektroneista havaitaan sähkövirtana (kuva 17.5 (b)).

Pysäytysjännite, jolla kaikkein nopeimmatkin elektronit pysähtyvät juuri ennen levä B on se jännite, jolla elektronien suurin mahdollinen liike-energia on yhtä suuri kuin elektronien potentiaalienergian muutos kondensaattorissa,  $K_{\max} = -e\Delta V_{\text{stop}}$ . Tästä voidaan ratkaista pysäytysjännitteeksi

$$\Delta V_{\text{stop}} = -\frac{1}{e} K_{\max} = -\frac{1}{e} (\hbar\omega - E_{\text{irrotus}}) = \frac{\hbar}{e} (\omega_{\text{raja}} - \omega). \quad (17.6)$$

Pysäytysjännite riippuu siis säteilyn *taajuudesta* ja *levyn A materiaalista*, kuten kokeellisesti havaitaan (kuva 17.6 (c)).

Tarkastellaan vielä fotoneista koostuvan säteilyn intensiteettiä. Jos säteily kuljettaa ajassa  $\Delta t$  kokonaisenergian  $E$  pinta-alalle  $A$ , sen intensiteetti on määritelmän mukaisesti

$$I = \frac{E}{A\Delta t}. \quad (17.7)$$

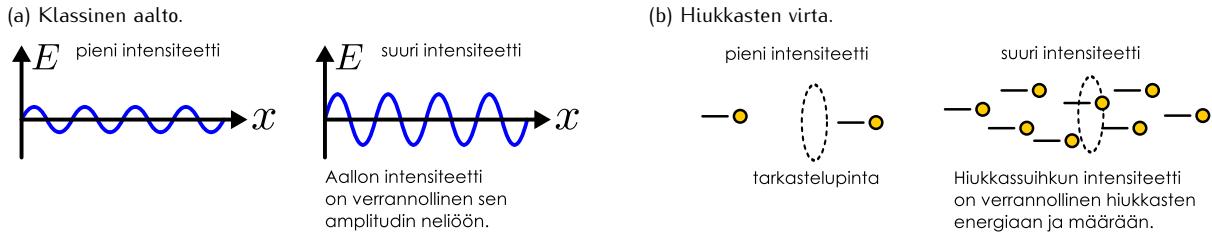
Toisaalta fotoneista koostuvan säteilyn kuljettama energia voidaan ilmaista saapuneiden fotonien *lukumäärän*  $n_{\text{fotoni}}$  ja *yhden fotonin energian* tulona, joten säteilyn intensiteetti on fotonimallissa

$$I = \frac{n_{\text{fotoni}} E_{\text{fotoni}}}{A\Delta t} = \frac{n_{\text{fotoni}} \hbar\omega}{A\Delta t}. \quad (17.8)$$

Jos valon taajuutta ei muuteta, intensiteetin kasvattaminen tarkoittaa yksinkertaisesti fotonien *lukumäärän* kasvattamista. Toisin sanoen pieni intensiteetti ei tarkoitakaan, että valo olisi matala aalto vaan että valo on kuin kevyt sade, jossa "pisaroita" eli fotoneja saapuu harvakseltaan. Vastaavasti suuri intensiteetti vastaa "rankkasadetta", jossa fotoneja saapuu paljon (kuva 17.8).

Säteilyn intensiteetin kasvattaminen lisää levylle A saapuvien fotonien lukumäärää ja sitä kautta irtoavien elektronien määriä. Näin ollen intensiteetin kasvattaminen lisää myös piirissä kulkeva virtaa (17.1). Tämä selittää, miksi havaittu maksimivirta  $i_{\max}$  kasvaa säteilyn intensiteetin kasvaessa. Toisaalta säteilyn intensiteetti ei vaikuta yksittäisten fotonien energiaan, joten se *ei vaikuta pysäytysjänniteeseen*.

Kuva 17.8: Sähkömagneettisen säteilyn intensiteetti aalto- ja hiukkasmallissa. Klassisessa aaltomallissa intensiteetti on verrannollinen sähkökentän amplitudin neliöön. Fotonimallissa intensiteetti on verrannollinen ajassa pinta-alayksikön läpi kulkevien fotonien määrään.



Jos valon intensiteetti pidetään vakiona ja säteilyn taajuutta suurennetaan, fotonien energia kasvaa mutta samalla niiden lukumäärä vähenee yhtälön (17.8) mukaisesti. Tämän voisi ajatella johtavan maksimivirran  $i_{\max}$  pienentymiseen fotonien vähentyessä, mutta kokeellisesti myös virran havaitaan kasvavan. Tämä johduu siitä, että vaikka fotoneja saapuukin vähemmän, niiden energian kasvaessa *yhä useampi niistä irrottaa elektronin*. Nämä siksi, että jos fotonin energia on täsmälleen  $E_{\text{irrotus}}$ , se voi irrotaa *vain* kaikkein helpoiten irtoavia elektroneja eli vesianalogiassa astian pinnalla olevia pisaroita. Mitä suurempi fotonin energia on, sitä syvempää "pinnan alta" fotonit voi elektroneja irrottaa. Näiden vastakkaisen efektien yhteisvaikutuksesta kondensaattorin läpi kulkevien elektronien lukumäärä voi kasvaa.

Idea valosta hiukkasina ei ollut Einsteininkaan aikaan uusi, sillä valon oli spekuloitu koostuvan hiukkasista jo Newtonin aikoihin. Fotonimalli oli kuitenkin radikaali mullistus siksi, että ilmiöt kuten valon interferenssi ja Maxwellin yhtälöt olivat kokeellisesti ja teoreettisesti osoittaneet, että *valon täytyy olla sähkömagneettisen kentän aalto*. Fotonimalli kuitenkin selitti valosähköisen ilmiön täydellisesti ja oli kiistaton osoitus siitä, että *valon täytyy koostua hiukkasista*. Ainoa ratkaisu tähän ristiriitaan on se, että *valo ei ole klassisessa mielessä kumpakaan*, vaan jotakin uutta, joka joissakin tilanteissa muistuttaa klassisia aaltoja ja toisissa hiukkasia.

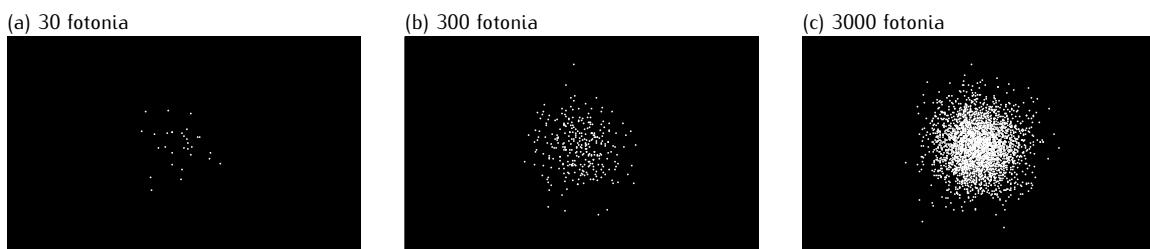
### Fotonien kaksoisrakokoe

Tutustuimme klassiseen kaksoisrakokokeeseen jo aaltojen interferenssiä tarkasteltaessa. Aallon saapuessa kahdelle ohuelle raoille se kulkee molempien rakojen kautta. Rakojen takana aallot hajaantuvat ja yhdistyvätkin jälleen, mutta koska eri reittejä kulkevat aallot ovat eri vaiheissa, ne interferoivat joissakin suunnissa vahvistavasti ja toisissa heikentävästi. Valon tapauksessa tämä havaitaan niin, että vahvistavan interferenssin suunnissa valo on kirkas ja heikentävän interferenssin suunnissa valoa ei havaita lainkaan. Jos siis rakojen taakse asetetaan varjostin, sille piirtyy joukko kirkkaita raitoja niissä suunnissa, joissa aallot interferoivat toisiaan vahvistavasti.

Ajatellaan sitten, että varjostin onkin ilmaisin, joka voi havaita yksittäisiä fotoneja ja tunnistaa *missä* kokin fotonit ovat. Esimerkiksi herkkä valokuvauslaitteisto sopii tähän tarkoitukseen. Yksittäiset fotonit voidaan tunnistaa valokuvauslevylle ilmestyvinä pisteinä, joista ilmenee myös niiden paikka. Vaihtoehtoisesti ne voidaan rekisteröidä digitaalisen kameran valosensorilla, joka on pienten ilmaisimien ruudukko. Tällöin kunkin fotonin rekisteröi vain *yksi* sensorin ilmaisimista, ja tämän ilmaisimen paikka kertoo meille, mihin kohtaan fotonit osui.

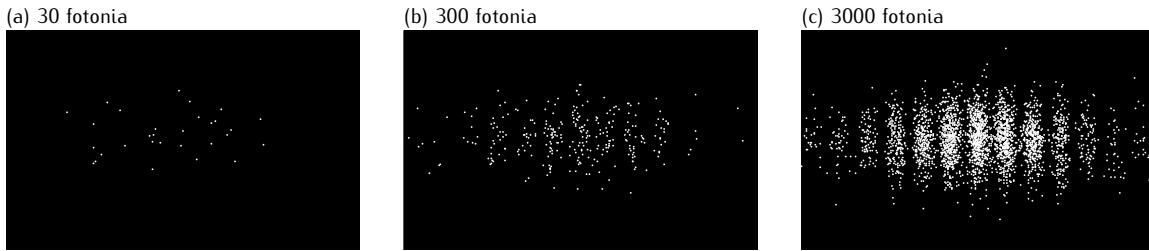
Säädetään valonlähteen intensiteetti niin pieneksi, että se lähettiläätä fotoneja harvakseltaan, jopa yksi kerrallaan. Laitteiston toiminta voidaan testata osoittamalla valo ilmaisimeen, jolloin fotonien havaitaan saapuvan yksittäisen alueelle, johon valo kohdistuu kuvan 17.9 tapaan. Jos valo olisi klassinen aalto, ilmaisimeen ei rekisteröityisi yksittäisiä pisteitä vaan koko alue alkaisi vähitellen vaalenemaan. Nyt kuitenkin valo

Kuva 17.9: Varjostimelle syntynyt kuvio, kun fotonit saapuvat suoraan. Yksittäisten fotonien havaintopisteet ovat satunnaiset, mutta ne noudattavat todennäköisyysjakamaa, jonka määrää sähkömagneettisen aallon intensiteetti. Korkean intensiteetin alueeseen osuu paljon fotonita.



## KVANTTIMEKANIKKA

Kuva 17.10: Varjostimelle syntyvä kuvaus, kun fotonit kulkevat yksittäisen kaksoisraon läpi. Yksittäisten fotonien havaintopisteet ovat jälleen satunnaiset, mutta nyt niiden todennäköisyysjakama seuraa kasoisraosta kulkeneen sähkömagneettisen aallon interferenssikuvia, jossa maksimit ja minimit vuorottelevat.



Havaitaan yksittäisinä pisteinä, joiden lukumäärä ajan myötä kasvaa, joten tässäkin kokeessa saamme havaita valon koostuvan hiukkasista. Lisäksi näyttää siltä, että fotonien paikat ovat aivan *satunnaiset*. Jos valonsäde on poikkileikkauskeltaan ympyrä (esimerkiksi lasersäde), eniten fotoneja havaitaan säteen keskellä, mutta osa fotoneista osuu ympyrän reunalle. Fotonien osumapaikoissa on siis hajontaa. Voidaan melko tarkasti ennustaa, millaiseen alueeseen fotonien osumat keskittyvät, mutta yhdenkään yksittäisen fotonin paikkaa ei voi etukäteen tietää. Valon intensiteetti on verrannollinen saapuvien fotonien määrään, joten intensiteetti on suurin säteen keskellä, missä havaitaan paljon fotoneja, ja pieni säteen reunoilla, jonka fotoneja saapuu vähän.



**17.6** (a) Ilmaisimen  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$  alueelle saapuu yhdessä sekunnissa  $10^9$  fotonia, joiden taajuus on  $500 \text{ THz}$ . Mikä on valon intensiteetti? (b) Yhtä suuri ilmaisin mittaa valon (sama taajuus) tehoksi  $1.0 \text{ W}$ . Montako fotonia ilmaisimeen saapuu sekunnissa?

Seuraavaksi asetetaan kaksoisrako valonlähteen ja ilmaisimen väliin. Jos valo koostuisi klassisista hiukkasista, jokaisen hiukkasen täytyisi kulkea suoraan *jommastakummasta* raosta, ja näin ollen ilmaisimella pitäisi näkyä nyt *kaksi* (mahdollisesti päälekäistä) aluetta, johon hiukkasia osuu. Jälleen voitaisiin olettaa, että fotonien liikeradoissa on jonkin verran satunnaisuutta, eikä etukäteen voida tietää kummasta raosta kukaan fotoni kulkee.

Kokeellisesti havaitaan, että yksittäisten fotonien osumakohdat ovat jälleen satunnaiset, kuten kuvassa 17.10 on esitetty. Kuitenkin fotonien lukumäärän kasvaessa niiden huomataan muodostavan kahden intensiteettimaksimin sijaan klassisten aaltojen interferenssikokeesta tutun raidallisen kuvion, jossa intensiteettiminimit ja -maksimit vuorottelevat. Alueille, joilla klassisen aaltoliikkeen teorian mukaan on intensiteettimaksimi, osuu paljon fotoneja. Intensiteettiminimien kohtiin puolestaan osuu hyvin vähän fotoneja. Toisin sanoen fotoneista koostuvalla säteilyllä on intensiteettimaksimit ja -minimit täsmälleen niillä paikoilla, jotka klassinen *aaltoliikkeen* teoria ennustaa.

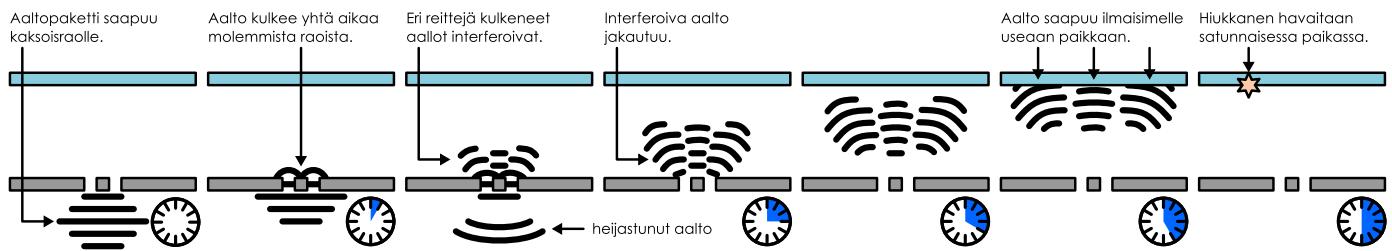
Erityisen mielenkiintoisen tästä kokeellisesta tuloksesta tekee se, että fotonit muodostavat tämän intensiteettijakauman kulkissaan laitteiston läpi *yksitellen*. Yksittäinen foton havaitaan aina jossakin *tiettyssä*, *satunnaisessa pisteessä*, mutta fotoneja ei kuitenkaan havaita intensiteettiminimien kohdissa, joten havaintopisteet eivät ole mielivalaiset, vaan jokaisen fotonin paikan täytyy *erikseen* noudattaa intensiteettikuvion määräämää *todennäköisyysjakamaa*.



**17.7** Kutsutaan kaksoisrakokokeen rakoja A ja B. Tehdään koe ensin niin, että rako A on auki ja B peitetty. Toistetaan koe sitten niin, että rako A on peitetty ja B auki. Lopuksi toistetaan koe niin, että molemmat raoat ovat auki. (a) Vertaa näissä kokeissa ilmaisimelle saapuvien fotonien määrää. (b) Vertaa ilmaisimille saapuvien fotonien muodostamia kuvioita.

Kaksoisrakokokeessa havaitun intensiteettijakauman raidat syntyvät siitä, että sähkömagneettinen aalto kulkee *molemista* raoista ja nämä eri reittejä kulkevat aallot interferoivat kohdateissaan jälleen rakojen takana. Koska myös yksittäisen fotonin havaintopiste noudattaa samaa intensiteettijakaumaa, myös yksittäiseen fotoniin täytyy liittyä jonkinlainen aalto, joka kulkee *molemista raoista yhtä aikaa* ja interferoi niiden takana. Koska fotonin havaitaan *todennäköisimmin alueissa, joissa sähkömagneettisen aallon intensiteetti on suuri*, tämän fotonin ohjaavan aallon täytyy olla sähkömagneettinen aalto tai ainakin jokin jokin täsmälleen sähkömagneettisen aallon tavoin käyttäytyvä aalto.

Kuva 17.11: Fotoni kaksoisrakokokeessa. Sähkömagneettinen aalto kulkee yhtä aikaa kummastakin raoista ja interferoi rakojen takana. Interferenssistä johtuen alunperin yhtenä pakettina liikkunut aalto jakautuu useaksi pulssiksi. Fotoni voidaan havaita pakettien saapuessa ilmaisimelle. Fotoni havaitaan satunnaisesti jossakin niistä alueista, joihin aaltopulssit saapuvat.



Edellä esitettyt päätelmat yhdistetään päädytään seuraavaan kvantimekaaniseen selitykseen kaksoisrakokokeelle (kuva 17.11):

- Fotonia kuvaavat aliot, jotka kulkevat *yhtä aikaa molemmista raoista*.
- Eri reittejä kulkevat aallot interferoivat rakojen takana. Interferenssistä johtuen aallon intensiteetillä on maksimeita ja minimeitä tietyissä suunnissa.
- Ilmaisimella yksittäinen fotoni havaitaan aina yhdessä pisteessä, mutta tämä piste on satunnainen.
- Fotoni havaitaan todennäköisimmin alueessa, jossa fotoniin lüttivän aallon intensiteetti on suuri. Fotonia ei havaita koskaan alueessa, jossa aallon intensiteetti on nolla.
- Fotonin havaintopisteiden todennäköisyysjakauma on sama kuin klassisen sähkömagneettisen aallon intensiteettijakauma.

Kaksoisrakokoe siis osoittaa, ettei valo ole klassinen aalto eikä hiukkas, vaan sillä on sekä aaltojen että hiukkasten ominaisuuksia. Kulkissaan raoista ja interferoidessaan fotoni käyttää tyypillisesti puhtaasti aallon tavoin. Erityisesti fotoni voi kulkea *kummastakin raosta* samaan aikaan, eikä sillä siis ole täsmälleen määriteltyä paikkaa. Vasta vuorovaikutus ilmaisimen kanssa pakottaa fotonin olemaan jossakin täsmällisessä pisteessä, ja tällöinkin fotonin aalto-ominaisuudet määrävät *todennäköisyyden* sille, missä fotoni havaitaan. Kunkin yksittäisen fotonin havaintopiste on aidosti satunnainen.



**17.8** Kirjoita omien sanoin tüvistelmä valosähköisestä ilmiöstä ja kaksoisrakokokeesta. Miten ja miksi nämä kokeet osoittavat, että valolla on hiukkasluonne, jota klassinen aaltomalli ei voi selittää? Miten ja miksi kokeet osoittavat, että valolla on aaltoluonne, jota klassinen hiukkasmalli ei voi selittää? Millainen on kummankin kokeen selittävä kvantimekaaninen malli?

## 17.2 Kvantimekaaniset hiukkaset

### Aalofunktio

Valon aalto-hiukkasmallin löytymisen jälkeen Louis de Broglie esitti 1924 hypoteesin, jonka mukaan myös massallisilla hiukkasilta kuten elektroneilla on aaltomaisia ominaisuuksia. Planckin hypoteesin mukaan taaajuus ja energia ovat toisiinsa verrannolliset, joten sekä fotoneilla että massallisilla hiukkasilta on olemassa niiden kokonaisenenergiasta riippuva väärähtelytaajuus

$$E_{\text{kokonais}} = \hbar\omega. \quad (17.9)$$

Edelleen koska suhteellisuusteorian mukaan hiukkisen kokonaisen energian ja liikemäären välillä on yhteys (6.131),  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ , massattomille fotoneille pätee tämän mukaan  $E^2 = p^2c^2$  ja niinpä niillä pitää olla liikemääriä

$$p_{\text{fotoni}} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (17.10)$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että valonnopeus on valoaaltojen kulmataajuuden ja aaltoluvun suhde,  $c = \omega/k$ . De Broglien hypoteesin mukaan myös massallisilla hiukkasilta on niiden liikemääristä riippuva aallonpituuus ja aaltoluku

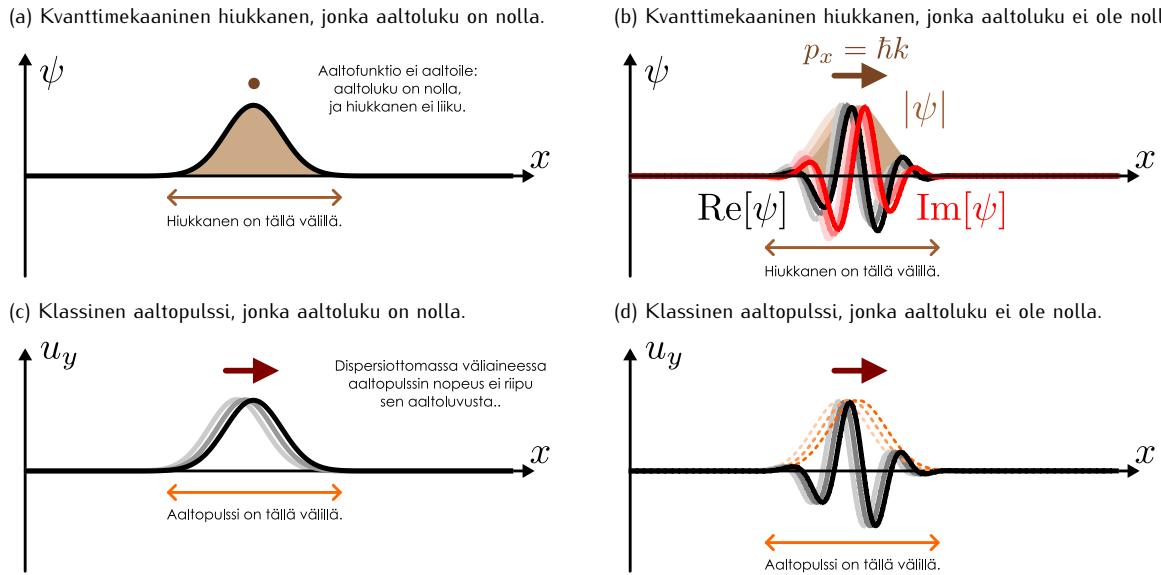
$$p_x = \hbar k. \quad (17.11)$$

Toisin sanoen *kaikkien hiukkasten liikemääriä on suoraan verrannollinen niiden aaltolukuun*.

Hypoteesi oli puhdas arvaus, joka perustui pääasiassa siihen ajatukseen, että luonnonlakien pitäisi olla samankaltaiset kaikille hiukkaille. Kokeellinen vahvistus elektronien aaltoluonteesta löytyi kuitenkin jo

## KVANTTIMEKANIIKKA

Kuva 17.12: Klassisen ja kvanttimekaanisen aaltofunktion vertailu. Kvanttimekaaninen hiukkasan ei ole pallo vaan aaltopulssi. Hiukkasan on siellä, missä sen aaltofunktio ei ole nolla. Hiukkasan liike riippuu aaltofunktion aaltoluvusta.



1928, kun elektronien diffraktio havaittiin. Näissä kokeissa myös vahvistettiin, että elektronien liikemäärä, aallonpituus ja aaltoluku riippuvat toisistaan juuri de Broglien hypoteesin (17.11) mukaisesti.

Sittemmin myös kaksoisrakokoe on toistettu elektroneilla täysin samoin tuloksin kuin fotoneilla: kaksoisraon läpi kulkevat elektronit saapuvat ilmaisimelle satunnaisiin paikkoihin, mutta yhdessä elektronit muodostavat ilmaisimelle samanlaisen interferenssikuvion kuin kuvassa 17.10. Siispä aivan kuten fotoni, myös yksittäinen elektroni kulkee kokeessa aaltona *molemmista raoista yhtä aikaa*, interferoi itsensä kanssa, ja saapuu lopulta ilmaisimelle, jossa se havaitaan jossakin yhdessä pisteessä. Jälleen havaintopiste on satunnainen, mutta sen todennäköisyysjakauman määrään elektroniallon amplitudi.

Tätä "elektroniaaltoa" kutsutaan nykyään elektronin **kvanttimekaaniseksi aaltofunktioksi** tai lyhyesti vain **aaltofunktioksi**, ja sitä merkitään usein kreikkalaisella psi-kirjaimella: yhdessä ulottuvuudessa  $\psi(x, t)$  ja kolmessa ulottuvuudessa  $\psi(\vec{r}, t)$ . Aaltofunktio on nimensä mukaisesti koko avaruudessa määritelty funktio, jonka dynamiikka on hyvin samankaltainen kuin klassisten aaltojen aaltofunktoiden dynamiikka. Aaltofunktiot voivat esimerkiksi levittäytyä avaruuteen, kulkea useaa reittiä samaan aikaan, olla keskenään superpositiossa sekä interferoida.

Mutta miten aaltofunktio voi kuvata hiukkasta kuten elektronia, joka voidaan havaita yksittäin, ja joita voidaan laskea ja vaikkapa vangita paikoilleen sopivaan sähkökenttään? Tavallinen intuitiivinen mielikuva hiukkasta kuten elektronista on hyvin pieni pallo, mutta tämä klassisten hiukkasten käyttäytymiseen perustuva mielikuva on **vääriä**. Elektronin käyttäytyminen ei juurikaan muistuta klassisten kappaleiden käytöstä. Sen sijaan elektronin voi ajatella olevan pieni **aaltopulssi**, jonka muotoa kuvaa aaltofunktio.

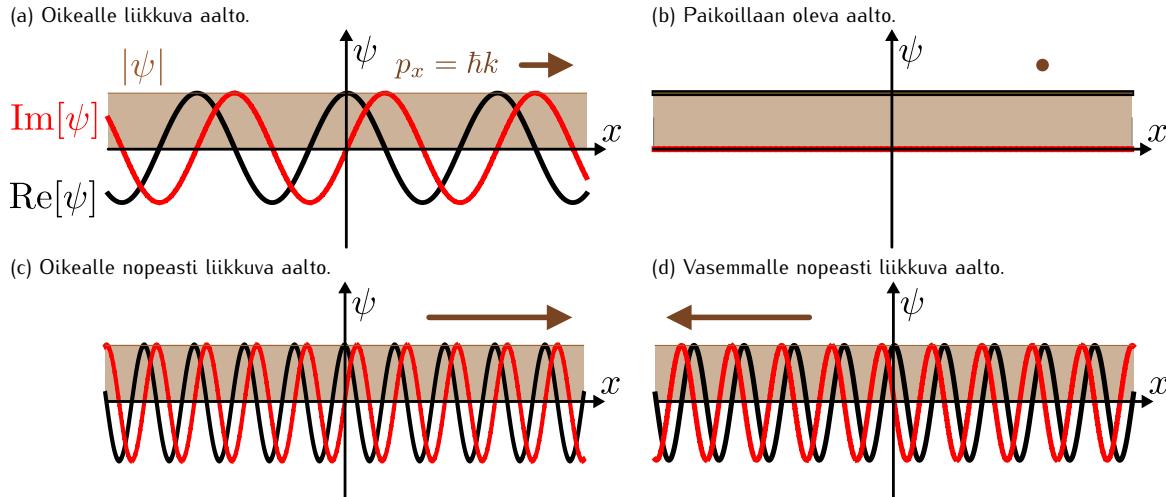
Elektronin kuvasta aaltopulssina on havainnollistettu kuvassa 17.12 (a), jossa on kuvattu paikoillaan olevan elektronin aaltofunktio. Elektroni ei ole pallo eikä pistemäinen hiukkasan, vaan se on kuin avaruuteen levittäytynyt pilvi. Elektroni on eräässä mielessä *levinnyt koko siihen alueeseen, jossa sen aaltofunktio ei ole nolla*. Kuvan (a) aaltopulssi ei liiku, joten se esittää levossa olevaa elektronia. Kuvassa 17.12 (b) on puolestaan esitetty liikkuva elektronia kuvava aaltofunktio. Tämänkin elektronin aaltofunktio muodostaa pulssin, ja kuvien (a) ja (b) pulsit ovat vieläpä yhtä leveitä. Kuvan (b) tapauksessa pulssi kuitenkin kulkee kuvassa vasemmalta oikealle.

Kuvaan (b) on piirretty itse asiassa kolme aaltoa: musta ja punainen käyrä sekä ruskealla väritetty alue. Näin siksi, että kvanttimekaaninen aaltofunktio on *kompleksilukuarvoinen* funktio, ja kuvaan piirrettyt käyrät esittävät aaltofunktion reaali- ja imaginääriosia (musta ja punainen) sekä itseisarvoa (ruskea).

De Broglien hypoteesi ilmenee kuvassa (a) niin, että elektronin aaltofunktio ei lainkaan "aaltoile". Toisin sanoen aaltofunktiossa ei näy aallonharjoja, eikä aallolla siten ole aallonpituutta. Erityisesti aaltopulssin aaltoluku on nolla,  $k = 0$ , ja de Broglien hypoteesin mukaan hiukkasan liikemäärä on tällöin myös nolla, eikä hiukkasan siis liiku. Kuvassa (b) hiukkasan liikkuu ja samalla aaltofunktion reaali- ja imaginääriosat selvästikin muodostavat aallot. Niinpä tällä aaltopulssilla on myös aallonpituus ja aaltoluku, joka ei ole nolla,  $k > 0$ . De Broglien hypoteesin mukaisesti tällä aallolla siis on liikemäärä  $p_x = \hbar k \neq 0$ , kuten liikkuvalla hiukkassella pitääkin olla.

Kuvissa 17.12 (c) ja (d) on piirretty vastaavat *klassiset* aallot. Jos aalto kulkee dispersiotonmassa väljai-

Kuva 17.13: Vapaan hiukkisen sinimuotoinen aaltofunktio. Funktion reaaliosa on püretty mustalla, imaginääriosa punaisella ja itseisarvo ruskealla. Hiukkisen liikemäärä on suoraan verrannollinen aaltolukuun eli käänään verrannollinen aallonpituteen.



neessa, sen nopeus ei riipu aallon muodosta eikä siis myöskään aaltoluvusta, vaan tälläisessä aineessa kaikki aallot kulkevat samalla vauhdilla. Siksi kuvan (c) klassinen aaltopulssi *liikkuu*, vaikka kuvan (a) kvanttimekaaninen pulssi *pysyy paikoillaan*.

Kuvien 17.12 (b) ja (d) aalloissa on toinenkin oleellinen ero, joka osaltaan selittää, miksi kvanttimekaaninen aalto on kompleksinen. Kuvan (d) klassisessa aaltopulssissa on nimittäin pulssin itsensä sisällä useita pisteytä, joissa aaltofunktio on nolla. Jos elektronin kvanttimekaaninen aaltofunktio olisi reaaliarvoinen, myös se menisi aaltopulssin sisällä väillä nollaan. Kuvan (b) kvanttimekaaninen aaltofunktio on kuitenkin nollasta poikkeava *kaikkialla* pulssin alueella. Jos aaltofunktion reaaliosa (musta käyrä) on nollassa, sen imaginääriosa (punainen) ei ole nolla, ja päinvastoin. Näin aaltofunktion itseisarvoa kuvaava ruskea kuvaaja voi muodostaa kuvissa 17.12 (a) ja (b) täsmälleen samanlaiset yhtenäiset pulssit vaikka aalloilla on eri aaltoluvut. Toisin sanoen se, miten kvanttimekaaninen aaltofunktio aaltoilee (eli miten elektroni liikkuu), ei suoraan määrästä missä aaltofunktio poikkeaa nollasta (eli missä elektroni on).

**17.9** Tarkastele funktioita  $u(x, t) = \cos[kx - \omega t]$  sekä  $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , missä vakioiden arvot ovat  $k = 25.0 \text{ nm}^{-1}$  ja  $\omega = 1.0 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ .

- (a) Monessaako pisteessä funktio  $u$  saa arvon nolla 1 nanometrin matkalla?
- (b) Monessaako pisteessä funktio  $\psi$  saa arvon nolla 1 nanometrin matkalla?

## Vapaa hiukkanen

Kuvan 17.12 aaltopulssit kuvavat tyhjässä avaruudessa olevaa hiukkasta. Koska tyhjässä avaruudessa ei ole mitään, minkä kanssa vuorovaikuttaa, tälläista kutsutaan **vapaaksi hiukkaseksi**. Tyhjä avaruus, jossa on vain yksi hiukkanen, on varmaankin yksinkertaisin kuviteltavissa oleva tilanne, joten aloitetaan kvanttimekaanisten hiukkasten ominaisuuksien tarkempi tutkiminen tästä.

Tähän mennessä olemme selvittäneet nämä asiat:

- Kvanttimekaaniset hiukkaset ovat pieniä aaltopulsseja, joita kuvaa kvanttimekaaninen aaltofunktio.
- Kvanttimekaaninen aaltofunktio on kompleksilukuarvoinen.
- Hiukkanen on levinyt avaruuteen sille alueelle, jossa sen aaltofunktio ei ole nolla.
- Liikkuvan hiukkisen liikemäärä ja aaltofunktion väärähtelyä yhdistää de Broglien hypoteesi  $p_x = \hbar k$ .

Luvussa 15 klassisten aaltojen yhteydessä opimme, että aaltoluku on määritelty täsmällisesti vain jaksolislolle funktioille. Erityisesti sinimuotoisilla aalloilla on täsmällinen aaltoluku. Lisäksi *kaikki* aallot, myös aaltopulssit, voidaan kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Tämä periaate pätee myös kvanttimekaanisille aaltopulssille, joten aloitetaan kvanttimekaanisten aaltojen tutkiminen tutustumalla *sinimuotoisten aaltofunktioiden* ominaisuuksiin. Aikanaan voimme rakentaa kaikki muut aallot niiden superpositiona.

Kompleksilukujen tapauksessa sinimuotoinen funktilo tarkoittaa kompleksista eksponenttifunktioita

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t). \quad (17.12)$$

Tällainen funktio on kaikilla itseisarvoltaan 1, koska  $|e^{i\theta}| = 1$ , ja sen reaali- ja imaginääriosat muodostavat positiivisen  $x$ -akselin suuntaan liikkuvat sinimuotoiset aallot, joiden aaltoluku on  $k$ . Aalto ulottuu äretömyksiin kaikissa suunnissa, joten se kuvailee periaatteessa koko avaruuteen levinnytä vapaata hiukkasta. Toisin sanoen jos hiukkasen paikkaa mitataan, se voidaan löytää mistä tahansa. (Tämä on kuitenkin vain ideaalinen malli. Todelliset hiukkaset ovat aina rajoittuneet jollekin äärelliselle alueelle.)

Kuvassa 17.13 on piirretty tällaisia aaltofunktioita. Ruskealla väritetyn alueen korkeus kuvailee aaltofunktion itseisarvoa, joka on näissä tapauksissa aina vakio. Mitä nopeammin hiukkanen liikkuu eli mitä suurempi on sen liikemääriä, sitä tiheämmin se väärtelee eli sitä pienempi on sen aallonpituuks ja suurempi sen aaltoluku, sopusoinnussa de Broglien relaation  $p_x = \hbar k$  kanssa. Myös hiukkasen liikkeen suunta voidaan lukea aaltofunktiosta, sillä funktion reaali- ja imaginääriosien vaihe-ero on erilainen riippuen siitä, liikkuuko aalto oikealle vai vasemmalle. Tämä näkyy kuvaajassa siten, että punainen käyrä on siirtynyt neljännesaallonpituuuden mustasta käyrästä katsoen aallon liikkeen suuntaan.



**17.10** Selitä aaltofunktion lausekkeen (17.12) perusteella, miksi aallon reaali- ja imaginääriosien välillä on vaihe-ero. Selitä erityisesti, miten vaihe-ero riippuu aaltoluvun  $k$  etumerkistä.

Verrataan sitten näiden aaltojen ominaisuuksia klassisten hiukkasten ominaisuuksiin. Mitä suurempi on hiukkasen liikemääriä, sitä nopeammin sen pitäisi klassisen fysiikan mukaan liikkua ja sitä suurempi liike-energia sillä täytyy myös olla. Klassisen hiukkasen liike-energia voidaan ilmaista sen nopeuden avulla muodossa  $K = \frac{1}{2}mv_x^2$ . Toisaalta massallisen hiukkasen nopeus on verrannollinen liikemäärään,  $v_x = p_x/m$ , joten liike-energian voi kirjoittaa myös muotoon  $K = p_x^2/(2m)$ . Lisäksi koska liikemääriä on de Broglien hypoteesin perusteella verrannollinen aaltofunktion aaltolukuun,  $p_x = \hbar k$ , *hiukkasen liike-energia on verrannollinen aaltoluvun neliöön*

$$K = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (17.13)$$

Vapaa hiukkanen ei vuorovaikuta minkään kanssa, joten sen potentiaalienergia on nolla ja hiukkasen kokonaisenergia on siis pelkkää liike-energiaa,  $E_{\text{kokonais}} = K$ . Toisaalta hiukkasen kokonaisenergia on Planckin hypoteesin mukaan verrannollinen sen aaltofunktion kulmataajuuteen,  $E_{\text{kokonais}} = \hbar\omega$ , joten hiukkasen aaltofunktion väärhtelyn kulmataajuus on

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m} k^2. \quad (17.14)$$

Tämä on kvanttimekaanisen hiukkasen *dispersiorelaatio*. Koska kulmataajuus ei ole suoraan verrannollinen aaltolukuun, eri taajuudella väärtelevät aallot liikkuват eri nopeuksilla. Erityisesti tällaisten aaltojen superpositiona muodostetut aaltopulssit kulkevat *ryhmänopeudella*

$$v_{x,\text{ryhmä}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p_x}{m}. \quad (17.15)$$

Tämä on myös hiukkasen nopeus, koska kvanttimekaaninen hiukkanen on aaltopulssi.



**17.11** Miten muuttuvat elektronin (a) aaltofunktion kuvaaja, (b) liikemääriä, (c) nopeus, (d) liike-energia, jos aaltoluku kaksinkertaistuu?

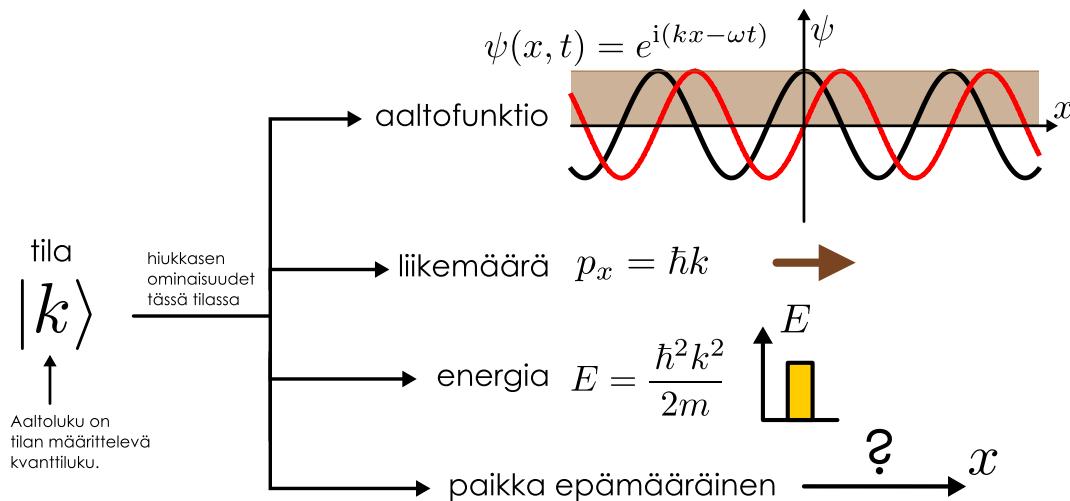
Erityisesti tämän tuloksen mukaan kvanttimekaaniselle hiukkaselle pätee klassinen nopeuden ja liikemääriä välinen yhteyks  $p_x = mv_x$ . Aaltofunktio (17.12) vaikuttaa siis järkevältä tavalta kuvata vapaata hiukkasta, koska se on yhtensopiva de Broglien hypoteesin sekä klassisen fysiikan liike-energian ja liikemäären lausekkeiden kanssa. Tämän parempaan perusteluun emme oikeastaan pystykään. Kvanttimekaniikka on laajempi teoria kuin klassinen fysiikka, joten sitä ei voi johtaa klassisesta fysiikasta. Sen sijaan *klassinen mekaniikka pitää pystyä johtamaan kvanttimekaniikasta*.

## Kvanttimekaaninen tila

Aaltofunktion käsite on peräisin Erwin Schrödingerin 1926 esittämästä "aaltomekaniikasta". Tämä ei kuitenkaan ollut ensimmäinen moderni kvanttimekaaninen teoria, vaan Werner Heisenberg kehitti kvanttimekaniikkaa kuvaavan "matriisimekanikan" jo vuonna 1925. Schrödingerin teoria oli alkuun suosituumpi, koska se perustui intuitiivisesti ymmärrettävään aaltojen käsittelyseen, kun taas Heisenbergin teoria oli hyvin abstrakti ja matemaattisesti monimutkainen. Myöhemmin kuitenkin osoittautui, että kvanttimekaniikka voidaan esittää useilla matemaattisesti ekvivalentilla tavilla ja *olemattomat* teoriat olivat oikeita.

Kvanttimekaniikka on usein epäintuitiivista, mutta aaltofunktiomallin tapa kuvata hiukkasia aaltopulsseina on melko helposti ymmärrettävissä, koska se muistuttaa niin vahvasti klassisten aaltojen teoriaa. Aaltofunktio on myös usein paras tapa kuvata kvanttimekaanisia hiukkasia, kun ollaan kiinnostuneita hiukkasten sijainnista

Kuva 17.14: Kvanttimekaaninen tila käsittää kaikki hiukkasen kvanttimekaaniset ominaisuudet. Usein tiloja voidaan indeksoida kvanttiluvuin, joista hiukkasen muut ominaisuudet riippuvat. Esimerkiksi vapaan hiukkasen tilaa kuvaa aaltoluku.



avaruudessa. Näin ei kuitenkaan välittämättä ole, jos ollaan kiinnostuttu esimerkiksi hiukkasen liikemäärästä tai energiasta. Lisäksi aaltofunktio ei kuvaa esimerkiksi hiukkasten sisäisiä ominaisuuksia mitenkään.

Koska hiukkasen ominaisuuksia voidaan luonnehtia eri tavoin, modernissa kvantimekanikkassa ei puhuta kaan pelkästään hiukkasen aaltofunktiosta vaan sen **kvantimekaanisesta tilasta**, joka sisältää kaiken tiedon hiukkasen ominaisuuksista. Tätä kvantimekaanista tilaa merkitään hieman erikoiselta vaikuttavalla tavalla, pystyviivan ja kulmasulkeen avulla:  $|\psi\rangle$ . Tämä on ns. *Diracin notaatio* eli merkintätapa kvantimekaanisille tiloille (Paul Dirac mukaan), ja oliota  $|\psi\rangle$  kutsutaan **tilavektoriksi** tai **ket-vektoriksi**. Merkinnän idea on siinä, että kvantimekanikkassa halutaan usein laskea laskutoimituksia, jotka riippuvat hiukkasten kvantimekaanisista tiloista ja näiden yhdistelmistä. Nämä laskutoimitukset voivat sisältää monimutkaisia integraaleja, summia tai matriisioperaatioita, eikä ole mielekästä kirjoittaa aina tarkalleen näkyviin miten laskutoimitukset täsmälleen tapahtuvat. (Samaan tapaan kuin on usein kätevämpää laskea suuresymboleilla numeroiden sijaan.) Jos halutaan esimerkiksi laskea hiukkasen paikan odotusarvo tilassa  $|\psi\rangle$ , tätä voidaan merkitä yksinkertaisesti  $\langle\psi|x|\psi\rangle$  tai vielä lyhyemmin  $\langle x \rangle$ , jos on selvää mitä tilaa tarkastellaan. Emme tässä materiaalissa ehdi perehymään Diracin notaation hienouksiin. Kvantimekanikan opintojen jatkamista suunnittelevien on kuitenkin syytä tututella tähän merkintätapaan ja tunnistaa se, koska sitä käytetään modernissa fysiikassa niihin yleisesti.

Kvantimekaanisia tiloja voidaan usein indeksoida, ja näitä indeksejä kutsutaan **kvanttiluvuiksi**. Tällä taroitetaan sitä, että useissa systeemeissä hiukkasten ominaisuudet riippuvat toisistaan niin, että joidenkin suureiden tietäminen riittää määräämään kaikkien muiden suureiden arvot. Esimerkiksi vapaan hiukkasen, jonka aaltofunktio on  $\psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$ , liikemäärä on  $p_x = \hbar k$ , taajuus  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ , energia  $E_{\text{kokonais}} = K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  jne. Kaikkien näiden suureiden arvot voidaan laskea, kun tunnetaan hiukkasen aaltofunktio. Mutta toisaalta jos tiedämme, että kyseessä on sinimuotoinen aaltofunktio, tämän aaltofunktion muodon voi päätellä pelkästään hiukkasen **aaltoluvun**  $k$  perusteella. Tällöin sanotaan, että **aaltoluku on hiukkasen tilaa kuvaava kvanttiluku**. Tällöin tila voidaan kirjoittaa Diracin notaatiossa yksinkertaisesti kirjoittamalla sulkuihin kvanttiluku,  $|k\rangle$ , koska se riittää määrittelemään hiukkasen tilan ominaisuudet.



**17.12** Koska elektronin liikemäärä on suoraan verrannollinen sen aaltolukuun, vapaan elektronin kvantimekaanista tilaa voisi kuvata myös kvanttiluvulla  $p_x$ . Miksi elektronin liike-energia  $K$  ei kuitenkaan ole hyvä kvanttiluku?

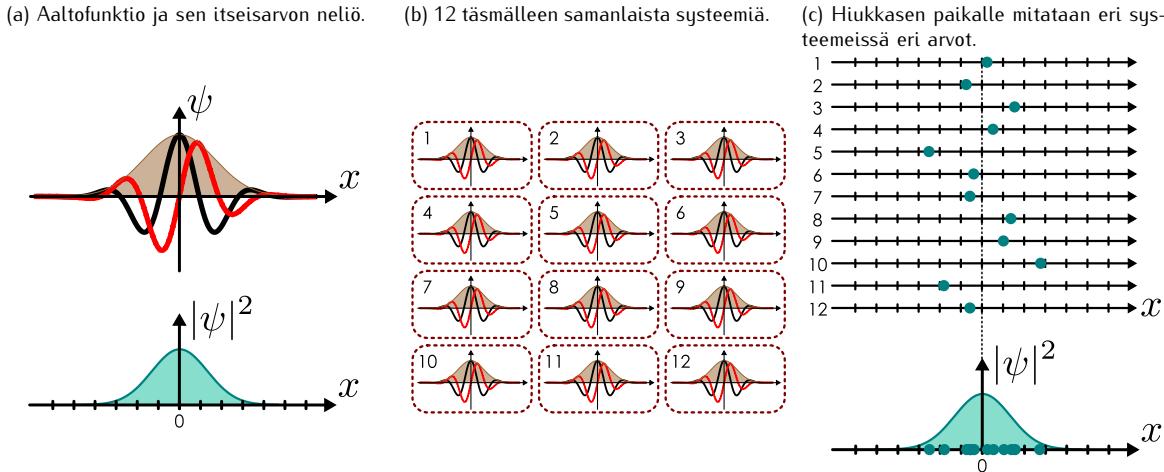
Riippuu tilanteesta, mitkä suureet sopivat määrittelemään tilan ominaisuudet eli mitkä suureet ovat hyviä kvanttilukuja. Esimerkiksi luvussa 17.4 opimme aikanaan, että kvantimekaaniset aallot voivat muodostaa seisovia aaltoja. Aivan kuten kitaran kielessä voi väähellä seisovia aaltoja vain tietyillä aallonpituuksilla, myös kvantimekaanisilla seisovilla aalloilla on vain tiettyjä sallittuja aallonpituuksia. Tällöin kvanttilukuna käytetään tavallisesti **seisovan aallon kupujen lukumäärää**  $n$ , ja kvantimekaanista tilaa merkitään  $|n\rangle$ .



**17.13** Selitä omin sanoin, mikä on kvantimekaaninen aaltofunktio ja tila. Millainen on vapaan hiukkasen aaltofunktio ja miten sen reaali- ja imaginääriosuuden ominaisuudet liittyvät hiukkasen liikkeeseen? Miten lasket tällaisen hiukkasen liikemäärän ja liike-energian?

## KVANTTIMEKANIIKKA

Kuva 17.15: Vaikka joukko elektroneja on täsmälleen samanlaisessa tilassa, mitattaessa elektronien paikkakoordinaattia saadaan erilaiset, satunnaiset tulokset. Useimmiten elektroni havaitaan alueella, jolla sen aaltofunktion itseisarvon neliö on suuri.



## esimerkki 17.1

## Aaltofunktio

Mikä on elektronin paikka, aitoluku, liikemäärä, nopeus, kulmataajuus ja energia tilassa  $|k = -1.0 \text{ nm}^{-1}|$ ?

**SUUNNITELMA** Tässä tilassa elektronin aaltofunktio on muotoa  $\psi(x, t) = e^{i(xk - \omega t)}$ . Tämä on koko avaruuteen levinnyt aalto, joten ilmeisesti hiukkasella ei ole täsmällistä paikkakoordinaattia. Hiukkasella on kuitenkin täsmällinen aitoluku

$$k = -1.0 \text{ nm}^{-1} = -1.0 \cdot (10^{-9} \text{ m})^{-1} = -1.0 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}. \quad (17.16)$$

Negatiivinen arvo tarkoittaa sitä, että elektroni liikkuu negatiiviseen  $x$ -suuntaan. Huomaa, että  $\text{nm}^{-1}$  on hyvin suuri yksikkö, vaikka siinä onkin etuliite nano.

Elektronin massa on  $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Tämä on vakio, joka ei riipu siitä, millaisen aallon elektroni muodostaa.

Elektronin liikemäärä on  $p_x = \hbar k$ , nopeus  $v_x = \frac{1}{m_e} p_x$  ja liike-energia  $K = \frac{1}{2} m_e v_x^2$ . Elektroni on ilmeisesti täysin vapaa eikä se vuorovaikuta minkään kanssa, joten sillä ei ole potentiaalienergiaa ja siispä elektronin kokonaisenergia on sama kuin sen liike-energia,  $E = K$ . Elektronin kulmataajuus on Planckin hypoteesin mukaisesti  $\omega = \frac{1}{\hbar} E$ .

**RATKAISU** Liikemääräksi saadaan  $p_x = -1.1 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$ , nopeudeksi  $v_x = -120 \text{ km/s}$ , energiaksi  $K = 6.1 \cdot 10^{-21} \text{ J}$  eli  $0.038 \text{ eV}$  ja kulmataajuudeksi  $\omega = 5.8 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ .

**ARVIOINTI** Tuloksen voi tarkistaa esimerkiksi laskemalla liike-energian myös suoraan lausekkeesta  $K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$ . Tuloksen täytyy olla sama kuin mitä lauseke  $K = \frac{1}{2} m_e v_x^2$  antaa. Voit myös laskea nopeuden lausekkeella  $v_x = 2\frac{\omega}{k}$ , ja sinun pitäisi saada sama (huomattavan suuri) vauhti kuin yllä. Jos kuitenkin laskisit  $v_x = \frac{\omega}{k}$  saisit väärän tuloksen. Tämä johtuu siitä, että  $\frac{\omega}{k}$  on sinimuotoisen aallon vaihenopeus, mutta todelliset elektronit ovat aina tällaisten sinimuotoisten superpositioina muodostuvia aaltopulsseja, jotka kulkeva ryhmänopeudella.

## 17.3 Todennäköisyystulkinta

## Kvanttimekaanisen mittauksen satunnaisuus

Elektronit ovat siis aaltopulsseja, jotka voivat levitä avaruudessa suureenkin tilaan. Esimerkiksi kaksoisrakokeessa tällainen aalto voi kulkea kummastakin raosta samanaikaisesti ja eri raoista kulkeneet aallot interferoivat keskenään ennen kuin saapuvat ilmaisimelle. Jos ilmaisin on kaukana kaksoisraon takana, sillä syntyyvä interferenssikuvio voi olla varsin suuri, joten mitä ilmeisimmin kvantimekaaniset aallot voivat levitä avaruudessa hyvin laajoille alueille. Silti ilmaisimelle saapuvat elektronit havaitaan aina jossakin tietyn pisteessä. Siispä vaikka elektronin kvantimekaaninen aaltofunktio olisi ennen hiukkasen havaitsemista levittäytynyt laajalle alueelle, elektronin vuorovaikutus ilmaisimen kanssa pakottaa aallon palaamaan takaisin "hiukkaseksi" eli pieneen alueeseen keskityneeksi aaltopulssiksi.



**17.14** (a) Selvitä, mikä on atomien keskimääräinen halkaisija. Kuinka laajalle alueelle yhden elektronin aaltofunktio voi levittäätyä atomissa? (b) Elektronidiffraktiokokeessa sivumaksimit poikkeavat keskumaksimista  $10^\circ$ . Elektronit havaitaan ilmaisimella, joka on  $10 \text{ cm}$  päässä näytteestä. Kuinka laajalle alueelle yhden elektronin aaltofunktio voi levitä tässä kokeessa?

Luvussa 17.1 tarkasteltiin fotoneilla tehtyä kaksoisrakokoetta, jonka tulosten perusteella pääteltiin, että fotonien havaitsemisen ja sähkömagneettisen aallon yhteys on *probabilistinen*: mitä suurempi on sähkömagneettisen aallon intensiteetti, sitä *todennäköisempää* on havaita fotonia. Toisaalta sähkömagneettisen aallon intensiteetti on verrannollinen sähkökentän amplitudin neliöön, joten karkeasti voidaan sanoa fotonin havaitsemisen todennäköisyuden pisteessä  $x$  olevan verrannollinen sähkömagneettisen aallon sähkökentän neliöön tässä pisteessä

$$P_{\text{fotoni}}(x) \sim I(x) \sim |\bar{\mathbf{E}}(x)|^2. \quad (17.17)$$

Aivan samaan tapaan todennäköisyys havaita elektroni pisteessä  $x$  on verrannollinen elektronin *aaltofunktion amplitudin neliöön* eli

$$P_{\text{elektroni}}(x) \sim |\psi(x)|^2. \quad (17.18)$$

Fotonin tapauksessa sähkökenttä on *vektori*, joten amplitudista puhuttaessa tarkoitetaan kenttävektorin piituuden maksimiarvoa. Aaltofunktio on skalaari, mutta sen arvot ovat *kompleksilukuja*, joten aaltofunktionkin tapauksessa itseisarvon ottaminen on välttämätöntä, koska todennäköisyysjyksien täytyy olla positiivisia reaalilukuja.

Tämä on aaltofunktion *todennäköisyystulkinta*. Sen havainnollistamiseksi tarkastellaan seuraavaa kuvasa 17.15 esitettyä ajatuskoetta: Oletetaan, että meillä on suuri joukko täsmälleen samanlaisia systeemejä. Jokaisessa systeemissä on yksi elektroni, ja jokaisen elektronien aaltofunktio on *täsmälleen samanlainen aaltopulssi*. Nyt mittaamme elektronin paikan näissä systeemeissä yksi kerrallaan *aaltopulssin leveyttä tarkemmin* (vrt. osumapaikan havaitseminen kaksoisrakokokeessa). Nyt jokainen mittaus löytää elektronin jostakin täsmällisestä paikasta alkuperäisen aaltopulssin alueelta, mutta vaikka systeemit ja niiden elektronit olivat aluksi *täysin samanlaiset*, kustakin systeemistä mitataan elektronin paikalle *erilainen, satunnainen arvo*. Elektroni havaitaan *useimmin* alueissa, joissa aaltofunktion amplitudin neliö on *suurin*, eikä koskaan paikoissa, joissa amplitudin neliö on nolla. Kukin yksittäinen mittaus on siis aina satunnainen, ja aaltofunktio määrävä vain tämän mittauksen loppululoksen todennäköisyysjakauman.

Tämä ajatuskoe ei sitä osoita, mutta kvantimekanikan perinteisen tulkinnan mukaan *aaltofunktion antama todennäköisyysjakauma sisältää kaiken mahdollisen informaation elektronin paikasta ennen varsinaista mittausta*. Toisin sanoen kysymys ei ole siitä, että elektroni olisi jossakin täsmällisessä paikassa, jota emme vain tiedä, vaan että elektronilla *ei ole täsmällistä paikkaa ennen kuin mittalaite pakottaa elektronin johokin tiettyyn pisteeseen*. Tällöin tämän havaintopisteen paikka määräytyy satunnaisesti ja aaltofunktio antaa täydellisen ennusteen paikan todennäköisyysjakaumasta.

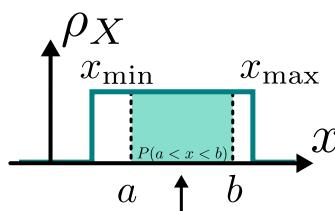
Kvantimekanikaan liittyy paljon epäintuitiivisia tuloksia, mutta suurin osa nüstää selittyy yksinkertaisesti hyväksymällä, että "hiukkaset" kuten elektronit ovatkin aaltoja. Sen sijaan sille, että mittausten tulokset ovat satunnaisia ja että mittauksen väistämättä vaikuttaa mitattavaan systeemiin irreversiibeliisti, ei ole selkeää klassista vastinetta. On paljon erilaisia tulkintoja sille, miksi kvantimekaanisen mittauksen täytyy olla satunnaisprosessi, mutta yleisesti hyväksyttyä selitystä ei ole, ja aiheesta käydään edelleen filosofista keskustelua.



**17.15** Etsi tietoa kvantimekanikan eri tulkinnoista. Mitä ovat esimerkiksi kööpenhaminalainen tulkinta, monet maailmat ja De Broglie–Bohm teoria?

## Jatkuva todennäköisyysjakauma

Kuva 17.16: Tasainen jakauma.



Tasaisesti jakautuneen satunnaismuuttujan todennäköisyys olla välillä  $[a, b]$  on verrannollinen välivälin pituuteen.

Paikka  $x$  on jatkuva suure, joka voi saada mitä tahansa reaaliarvoja. Niinpä jos aaltofunktion amplitudin neliö kuvaaa paikan todennäköisyyttä, sen on oltava todennäköisyyslaskennan termtein *jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio*.

Koska reaalilukuja on äärettömästi, minkä tahansa tietyn reaalilukuarvon todennäköisyys on jatkuvassa todennäköisyysjakaumassa tavallisesti nolla. Siksi onkin mielekästä puhua vain todennäköisyydestä, että satunnaismuuttuja saa arvon joltakin *väliltä*. Esimerkiksi jos satunnaismuuttuja  $X$  on tasaisesti jakautunut välille  $[x_{\min}, x_{\max}]$ ,  $X$ :n todennäköisyys saada arvo väliltä  $[a, b]$  (joka kuuluu välille  $[x_{\min}, x_{\max}]$ ) on näiden välien pituuskien suhde,

$$P(a < X < b) = \frac{b - a}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (17.19)$$

Jos esimerkiksi välillä  $[a, b]$  on leveydeltään puolet välistä  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , satunnaismuuttujan todennäköisyys saada arvo tältä väliltä on  $P = 1/2$ , mikä on järkevä. Tämä on *tasainen jakauma* ja sen *todennäköisyystiheys*

## KVANTTIMEKANIKKAA

$\rho_X$  voidaan nyt määritellä niin, että satunnaismuuttujan todennäköisyys olla välillä  $[a, b]$  on todennäköisyystiheyden ja välin pituuden tulo

$$P(a < X < b) = \rho_X \cdot (b - a). \quad (17.20)$$

Tässä tapauksessa todennäköisyystiheys on siis  $\rho_X = 1/(x_{\max} - x_{\min})$ .

Yleisesti todennäköisyystiheys ei kuitenkaan ole vakio, jolloin satunnaismuuttuja ei ole tasaisesti jakautunut. Tällöinkin kuitenkin todennäköisyystiheyttä voidaan pitää vakiona infinitesimaalisen lyhyllä välillä  $[x, x + dx]$ , jolloin yhtälön (17.20) mukaan satunnaismuuttujan arvon todennäköisyys olla tällä välillä on

$$dP = P(x < X < x + dx) = \rho_X(x)(x + dx - x) = \rho_X(x)dx. \quad (17.21)$$

Todennäköisyys mitata satunnaismuutujalle arvo äärelliseltä välilä  $[a, b]$  saadaan näin ollen jakamalla väli infinitesimaalisen pieniin osiin ja laskemalla näiden todennäköisyydet yhteen eli integroimalla

$$P(a < X < b) = \int_a^b \rho_X(x)dx. \quad (17.22)$$

Graafisesti tämä tarkoittaa sitä, että todennäköisyys on todennäköisyystiheyden  $\rho_X$  kuvaajan alle jäävä pinta-ala.

Todennäköisyystiheyden ja kokonaistodennäköisyden suhde on samanlainen kuin tiheyden ja kokonaismassan: tiheys  $\rho$  kertoo paljonko massaa  $dm$  yhtä pistettä ympäröivässä pienessä tilavuudessa  $dV$  on,  $dm = \rho dV$ . Todennäköisyystiheys puolestaan kertoo paljonko *todennäköisyyttä*  $dP$  satunnaismuuttujan yhden arvon ympärillä olevassa pienessä välissä  $dx$  on,  $dP = \rho_X dx$ .

Koska satunnaismuuttujan pitää saada mittauksessa aina *jokin* arvo (esimerkiksi hiukkasen pitää olla *jossakin*), *kaikkien mahdollisten arvojen kokonaistodennäköisyden pitää olla yksi*

$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x)dx = 1. \quad (17.23)$$

Tätä kutsutaan **normitusehdoksi**. Lisäksi koska todennäköisytyt ovat positiivisia, myös todennäköisyystiheyden pitää olla positiivinen. Itse asiassa todennäköisyksien pitää olla aina rajoitettu välille  $[0, 1]$ , missä  $P = 0$  on mahdoton ja  $P = 1$  on varma tapahtuma. Todennäköisyystiheys sen sijaan voi saada mielivaltaisen suuria arvoja, kunhan todennäköisyystiheyden *integraali* on yksi.



**17.16** Satunnaismuuttujan  $X$  todennäköisyystiheys saa arvon  $1/5 \text{ m}^{-1}$  välillä  $[0 \text{ m}, 0.5 \text{ m}]$ ,  $A$  (tunteeton vakio) välillä  $[0.5 \text{ m}, 1 \text{ m}]$ , ja muualla nolla. (a) Mikä on vakio  $A$ ? (b) Millä todennäköisydellä  $X < 0.5 \text{ m}$ ?

Kun satunnaismuuttujan arvo mitataan monta kertaa ja näille mittaustuloksille lasketaan keskiarvo, saadaan tilastollinen tunnusluku, joka lähestyy jakauman *odotusarvoa* mittausten lukumäärän kasvaessa. Tätä säädötä käytimme jo hiukkasten statistiikan yhteydessä luvussa 8.3. Tällöin diskreetin jakauman tapauksessa odotusarvo laskettiin summaamalla yhteen satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen ja niiden todennäköisyksien tulot. Jatkuvan jakauman tapauksessa summaus muuttuu integroinniksi, ja todennäköisytyt korvataan todennäköisyystiheydellä. Siispä jatkuvan jakauman odotusarvo on

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x)dx. \quad (17.24)$$

Odotusarvoa merkitään usein kreikkalaisella myy-kirjaimella,  $\mu_X = \langle X \rangle$ .

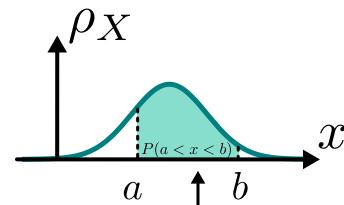


**17.17** Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo  $\langle X \rangle$ ?

Jos suure  $Y$  riippuu satunnaismuuttujasta  $X$ , myös  $Y$  on satunnaismuuttuja. Esimerkiksi jos hiukkasella on satunnainen nopeus, sen liikemääräkin on satunnainen. Myös tällaisten satunnaismuuttujien odotusarvot voidaan laskea todennäköisyystiheyden  $\rho_X$  avulla, jos tunnetaan muuttujien välinen riippuvuus,  $Y = y(X)$ , sillä tällöin

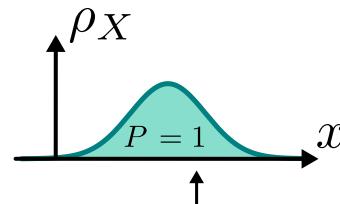
$$\langle Y \rangle = \langle y(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \rho_X(x)dx. \quad (17.25)$$

Kuva 17.17: Muuttuva todennäköisyystiheys.



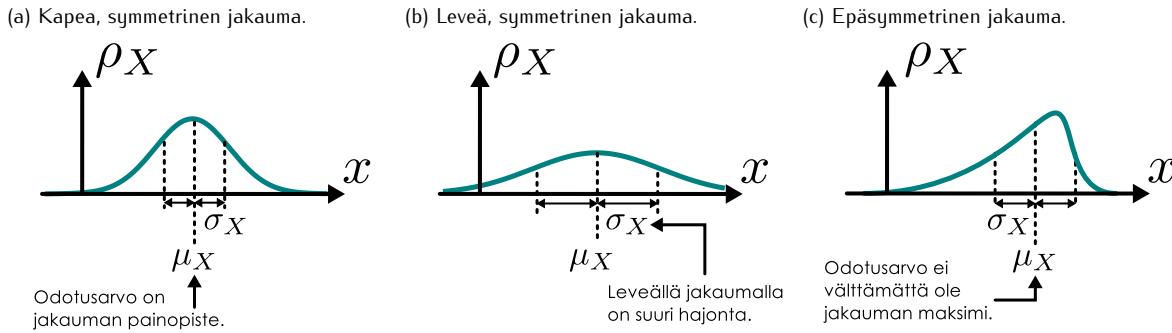
Satunnaismuuttujan todennäköisyyttä olla jollakin välillä  $[a, b]$  kuvaa tiheysfunktion rajaama pinta-ala.

Kuva 17.18: Normitusehdo.



Satunnaismuuttujan pitää saada jokin arvo, joten tiheysfunktion rajaama kokonaisala on yksi.

Kuva 17.19: Todennäköisyysjakauman odotusarvo ja keskijajonta.



Odotusarvoa lasketaessa siis yksinkertaisesti korvataan integraalissa satunnaismuuttujan arvo  $x$  funktiolla  $y(x)$ . Esimerkiksi suureen neliön odotusarvo on usein tärkeää,

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho_X(x) dx. \quad (17.26)$$



**17.18** Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan  $X$  neliön odotusarvo  $\langle X^2 \rangle$ ?

Todennäköisyysjakaumille voidaan määritellä paljon muitakin tunnuslukuja. **Varianssi** ja **keskijajonta** ovat näistä tärkeimmät. Varianssi  $\sigma_X^2$  määritellään satunnaismuuttujan odotusarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden odotusarvoksi

$$\sigma_X^2 = \langle (X - \mu_X)^2 \rangle \quad (17.27)$$

ja keskijajonta  $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$  on tämän neliöjuuri. Varianssi ja keskijajonta kuvavat satunnaismuuttujan vaihtelua eli sen jakauman leveyttä. Jos satunnaismuuttujan arvot eivät poikkea paljon toisistaan, erotus  $X - \mu_X$  on yleensä pieni ja niinpä sen neliön odotusarvokin on pieni. Jos satunnaismuuttujan arvoissa on puolestaan paljon vaihtelua,  $X$ :n arvot voivat poiketa keskiarvosta paljon ja niinpä varianssi ja keskijajontakin ovat suuret. Erityisesti varianssi on aina positiivinen, koska se on neliölausekkeen odotusarvo.

Odotusarvon lineaarisuuden perusteella varianssin lauseke voidaan kirjoittaa esimerkiksi muotoon

$$\sigma_X^2 = \langle X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\mu_X \langle X \rangle + \mu_X^2 = \langle X^2 \rangle - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \langle X^2 \rangle - \mu_X^2, \quad (17.28)$$

eli varianssi on satunnaismuuttujan neliön odotusarvon ja odotusarvon neliön erotus. Tämä on usein kätevä tapa laskea varianssi.



**17.19** Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan  $X$  keskijajonta  $\sigma_X$ ?

### Hiukkasen paikan todennäköisyys

Palataan vielä takaisin tarkastelemaan elektronia ja sen aaltofunktioita. Elektronin *aaltofunktion itseisarvon neliö on siis sen paikan todennäköisyystiheys*, jolla on edellisessä luvussa kuvallut ominaisuudet. Erityisesti todennäköisyys mitata hiukkasen paikalle  $x$  arvo väliltä  $[a, b]$  on

$$P(a < x < b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx. \quad (17.29)$$

Koska  $\psi$  voi olla kompleksiarvoinen, sen itseisarvo on usein helpoin laskea kompleksikonjugaatin avulla,  $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ , jolloin todennäköisyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(a < x < b) = \int_a^b \psi^*(x) \psi(x) dx. \quad (17.30)$$

Jotta nämä todennäköisyyydet olisivat hyvin määriteltyt, on normitusehdon (17.23) myös toteuduttava,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = 1. \quad (17.31)$$

Aaltofunktioita, joka toteuttaa tämän ehdon, kutsutaan **normitetuksi**. Monesti on hyödyllistä tarkastella myös funktioita, jotka ovat *normittamattomia*, mutta tällöin on huomioitava, etteivät ne suoraan kuvaa minkään hiukkasen paikan jakaumaa.

Vastaavasti hiukkasen paikkakoordinaatin odotusarvo on

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx \quad (17.32)$$

ja paikkakoordinaatin neliön odotusarvo on

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x^2 \psi(x) dx. \quad (17.33)$$

Paikkakoordinaatin varianssi on näiden avulla

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (17.34)$$

**17.20** Mitkä näistä väitteistä ovat totta? Perustele!

- (a) Hiukkasen paikan odotusarvo on sen paikan todennäköisin mittaustulos.
- (b) Hiukkasen paikan mittaus poikkeaa paikan odotusarvosta korkeintaan hajonnan verran.
- (c) Aaltofunktion itseisarvon neliö ei voi olla missään suurempi kuin 1.
- (d) Jos hiukkasen aaltofunktio poikkeaa nollasta vain välillä  $[0, 2]$ , on olemassa jokin piste, jossa  $|\psi(x)| \geq 1/\sqrt{2}$ .

esimerkki 17.2

Jatkuva jakauma

Elektronin aaltofunktio on  $\psi(x) = a\sqrt{x}$  välillä  $[0, 2]$  ja nolla muualla. (a) Mikä on vakion  $a$  itseisarvo? (b) Mikä on paikan odotusarvo? (c) Mikä on paikan keskijohonta?

Paikan todennäköisyysjakauma on  $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2 = |a|^2 x$ .

Satunnaismuuttujan jakauman täytyy olla normitettu, eli pitää päteä

$$\int_0^2 \rho_X(x) dx = 1. \quad (17.35)$$

Tästä saadaan ratkaistua vakion  $a$  itseisarvo. Kun tämä tiedetään, paikan odotusarvo on

$$\mu_x = \langle x \rangle = \int_0^2 x \rho_X(x) dx \quad (17.36)$$

ja sen keskijohonta on

$$\sigma_x = \left( \int_0^2 (x - \mu_x)^2 \rho_X(x) dx \right)^{1/2}. \quad (17.37)$$

**RATKAISU** (a) Normitusehdosta saadaan

$$1 = \int_0^2 |a|^2 x dx = \left| \frac{|a|^2}{2} x^2 \right|_0^2 = 2|a|^2. \quad (17.38)$$

Jos valitsemme positiivisen reaalitarvon, saamme  $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

(b) Odotusarvo on

$$\mu_x = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left| \frac{1}{6} x^3 \right|_0^2 = \frac{4}{3} \approx 1.33. \quad (17.39)$$

(c) Varianssi on

$$\sigma_x^2 = \int_0^2 \frac{1}{2} x \left( x - \frac{4}{3} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( x^3 - \frac{8}{3} x^2 + \frac{16}{9} x \right) dx \quad (17.40)$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} x^4 - \frac{8}{9} x^3 + \frac{8}{9} x^2 \right|_0^2 = \frac{1}{2} \left( 4 - \frac{64}{9} + \frac{32}{9} \right) = \frac{2}{9} \quad (17.41)$$

joten keskijohonta on  $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.47$ .

**ARVIOINTI** Jakaumafunktio on kolmio, jonka kannan pituus on 2 ja korkeus 1, joten sen pinta-ala on 1, kuten pitääkin. Koska funktio on kasvava, odotusarvon on oltava välillä  $[0, 2]$  keskipistettä suurempi, kuten laskun mukaan onkin. Hajonnan puolestaan täytyy olla pienempi kuin pienissä odotusarvosta jakauman reunoilta, kuten onkin.

Voimme laskea varianssin myös neliöllisen odotusarvon avulla. Nimittäin  $\langle x^2 \rangle = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx = \left| \frac{1}{8} x^4 \right|_0^2 = 2$  ja tästä saadaan varianssiksi  $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$  eli sama tulos kuin edellä.

## Kvanttimekaaninen superpositio

Superpositio on aaltojen perusominaisuksia, ja myös kvantimekaaniset aaltofunktiot voivat olla superpositiossa. Periaatteessa kvantimekaanisten aaltofunktioiden superpositio toimii samalla tavalla kuin klassistenkin: superpositiossa olevat aaltofunktiot lasketaan pisteittäin yhteen. Esimerkiksi köydessä kulkevien aaltojen tapauksessa tämä tarkoittaa vain sitä, että köyden muoto saadaan köydessä kulkevien aaltojen "muotojen summana". Kvanttimekaniikassa ilmiön fysikaalinen tulkinta ei ole kuitenkaan sama, koska kvantimekaaninen aaltofunktio kuvaa *hiukkasen tilaa*. Hiukkanen kuten elektroni ei synny minkään aaltolähteestä vaan se voi olla olemassa ympäristöstään riippumatta, yksin tyhjässäkin avaruudessa. Kvantimekaanisen aaltofunktion superpositio ei kuvaan useiden toisistaan riippumattomien aaltojen tai useiden elektronien yhteydestä. Sen sijaan kvantimekaaninen superpositio merkitsee sitä, että hiukkasen tila voi olla erilaisten tilojen sekoitus tai yhdistelmä. Tästä seuraa, että hiukkasen ominaisuudet eivät välttämättä ole täsmällisiä ja tarkkaan määriteltyjä vaan epämääriäisiä.

Tarkastellaan kvantimekaanista superpositiota esimerkin avulla. Kuvassa 17.20 (a) on piirretty elektronin aaltofunktio ja tähän liittyvä paikan todennäköisyysjakauma. Aaltofunktio on hyvin kapea piikki pisteen  $x = a$  ympärillä, joten jos elektronin paikka mitataan tässä tilassa, tulokseksi saadaan varmasti jokin arvo läheltä täitä pistettä. Merkitään tästä tilaa  $|a\rangle$  ja siihen liittyyvä aaltofunktio  $\psi_a(x, t)$ . Vastaavasti kuvassa (b) elektroni on pistessä  $x = b$ , joten merkitään tästä tilaa  $|b\rangle$  ja sen aaltofunktio  $\psi_b(x, t)$ . Näiden tilojen *superposition* aaltofunktio on piirretty kuvaan (c). Superpositiossa aaltofunktiot lasketaan yhteen,  $\psi_a(x, t) + \psi_b(x, t)$ , joten lopputuloksena on aaltofunktio, jossa on piikki sekä pisteen  $x = a$  että pisteen  $x = b$  kohdalla. Aaltofunktion todennäköisyystulkinnan perusteella tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että superpositiotilassa olevan elektronin paikan mittaus antaa tulokseksi *joko*  $x = a$  *tai*  $x = b$ . Toisin sanoen tällaisessa superpositiotilassa elektroni on tavallaan *kahdessa paikassa yhtä aikaa*, ja vasta paikan mittaaminen pakottaa elektronin aaltofunktion keskittymään joko pisteen  $a$  tai pisteen  $b$  ympärille.

Tulos voi vaikuttaa kummalliselta, koska klassinen hiukkanen ei voi olla kahdessa paikassa yhtä aikaa. Tässä on kuitenkin jälleen muistettava, että kvantimekaaninen elektroni muistuttaa enemmän aaltoa kuin klassista hiukkasta. Aalto voi aivan hyvin koostua kahdesta tai useammasta pulssista, ja näin aalto voi jakautua moneen paikkaan samanaikaisesti.



**17.21** (a) Mikä on kuvan 17.20 (c) elektronin paikan odotusarvo?

(b) Millä todennäköisydellä elektronin paikan mittaus antaa tulokseksi tämän arvon?

Vaikka hiukkanen on kuvan 17.20 (c) tilassa "kahdessa paikassa yhtä aikaa", hiukkasen paikan mittaus antaa silti aina yksikäsitteisen tuloksen. Se, kummasta pistestä  $a$  vai  $b$  hiukkanen löytyy, on satunnaista. Hiukkanen havaitaan välittämättä *vain* jommassakummassa pistessä. Ei ole mahdollista, että sama hiukkanen havaittaisiin samanaikaisesti molemissa pistessä. Tästä johtuen myös superpositiotilan täytyy toteutua normitusehto (17.23), jonka mukaan todennäköisyys mitata hiukkasen paikalle *jokin* arvo on täsmälleen yksi. Aaltofunktiolle tämä tarkoittaa sitä, että aaltofunktion itseisarvon neliön rajaaman pinta-ala on täytyy olla myös superpositiossa täsmälleen yksi.

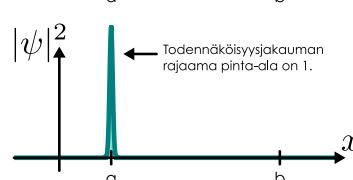
Normitusehdon takia kvantimekaanista superpositiota ei voi muodostaa suoraan summaamalla eri tilojen aaltofunktioita yhteen. Jos nimittäin aaltofunktion  $\psi_a$  itseisarvon neliön rajaama pinta-ala on yksi, ja tähän funktoon lisätään toinen funklio  $\psi_b$ , näiden funktoiden summan itseisarvon neliön rajaama pinta-ala on tavallisesti *suurempi kuin yksi*. Niinpä kahden tilan summana muodostettu aaltofunktio pitää vielä normeerata.

Kuva 17.20: Kvantimekaaninen superpositio tarkoittaa sitä, että hiukkasen ominaisuuksilla voi olla samanaikaisesti erilaisia mahdollisia arvoja.

(a) Tilan  $|a\rangle$  aaltofunktio ja todennäköisyysjakauma.



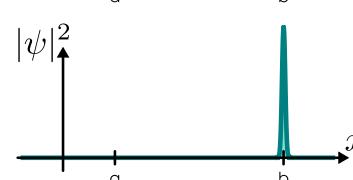
Todennäköisyysjakauman rajama pinta-ala on 1.



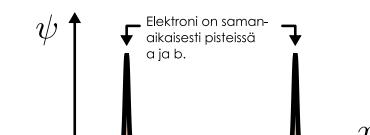
(b) Tilan  $|b\rangle$  aaltofunktio ja todennäköisyysjakauma.



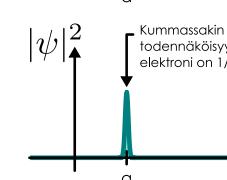
Todennäköisyysjakauman rajama pinta-ala on 1.



(c) Tilojen  $|a\rangle$  ja  $|b\rangle$  superpositio.



Kummassakin pistessä todennäköisyys havaita elektroni on 1/2.



## KVANTTIMEKANIKKA

Esimerkiksi kuvien 17.20 (a) ja (b) aaltofunktioille pätee  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx = 1$  ja  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = 1$ . Lisäksi koska aaltofunktiot ovat täysin toisistaan erillään, jokaisessa pisteessä  $x$  niistä vähintään toinen on nolla. Tässä erikoistapauksessa pätee  $|\psi_a(x) + \psi_b(x)|^2 = |\psi_a(x)|^2 + |\psi_b(x)|^2$  (huom. *tämä ei ole totta kaikille funktioille*), jolloin funktioiden summalle pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x) + \psi_b(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = 2. \quad (17.42)$$



**17.22** (a) Milloin vektoreille  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  pätee  $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$ ? (Vinkki: Pythagoras) (b) Milloin kompleksiluvuille  $z_1$  ja  $z_2$  pätee  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ ?

Jotta tästä integraalista tulisi tulokseksi 1, pitää integroitava funktio kertoa siis tekijällä  $1/2$ . Toisaalta jos kerromme funktion neliön tekijällä  $1/2$ , voimme yhtä hyvin kertoa alkuperäisen funktion tekijällä  $1/\sqrt{2}$ . Nünä tässä tapauksessa aaltofunktioiden  $\psi_a$  ja  $\psi_b$  superpositio onkin tarkalleen ottaen

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x, t) + \psi_b(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_a(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_b(x, t). \quad (17.43)$$

Tämä näkyy myös kuvassa 17.20 (c), jossa aaltofunktion muodostamien piikkien korkeus *ei ole sama* kuin kuvissa (a) ja (b). Todennäköisyysjakaumassa  $|\psi|^2$  kuvan (c) piikkien korkeus on *puolittunut* verrattuna kuvien (a) ja (b) piükkeihin. Aaltofunktio on puolestaan kuvassa (c) tekijän  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  verran matalampi kuin kuvissa (a) ja (b).

Kerrataanpa vielä, koska tämä on sekä tärkeää että varsin abstraktia. Kuvan 17.20 (c) aaltofunktio on siis yhdistelmä kahden tilan,  $|a\rangle$  ja  $|b\rangle$ , aaltofunktioita  $\psi_a$  ja  $\psi_b$ . Tilassa  $|a\rangle$  elektroni on melko tarkkaan pisteessä  $x = a$  ja tilassa  $|b\rangle$  se on pisteessä  $x = b$ . Tilat yhdistämällä luodaan *superpositiotila*, jossa elektroni voidaan havaita kummassa tahansa näistä pisteistä. Erityisesti jos elektronin paikka mitataan, elektroni havaitaan aina jommassakummassa pisteessä. Koskaan ei voi käydä niin, että elektronia ei havaita kummassakaan pisteessä tai että se havaittaisiin kummassakin pisteessä samanaikaisesti.

Esimerkissämme tilojen yhdistelmä on täysin symmetrinen. Aaltofunktion kuvajassa on yhtä korkeat piikit pisteiden  $a$  ja  $b$  kohdilla ja aaltofunktion lausekkeessa (17.43) kummankin aaltofunktion edessä on sama kerroin,  $1/\sqrt{2}$ . Koska superpositio on symmetrinen, todennäköisyys löytää elektroni pisteestä  $a$  täytyy olla sama kuin todennäköisyys havaita se pisteessä  $b$ . Siis  $P(a) = P(b) = 1/2$ . Toisaalta lausekkeessa (17.43) tilojen  $|a\rangle$  ja  $|b\rangle$  kertoimina oli näiden *todennäköisyysjakaumien neliöjuuret*,  $\sqrt{P(a)} = \sqrt{P(b)} = 1/\sqrt{2}$ . Näyttäisi siis siltä, että kun aaltofunktioista muodostetaan superpositio, todennäköisyys havaita elektronilla ne ominaisudet, joita kukin alkuperäinen aaltofunktio kuvaavat, on verrannollinen aaltofunktioita kertovan luvun neliöön.

Havainto pitää paikkansa ja se yleistykykin lähes sellaisenaan koskemaan *kaikkia kvantimekaanisia superpositiotiloja*. Nimittäin jos elektronin paikalla on tilassa  $|a\rangle$  täsmällinen arvo  $x = a$  ja tilassa  $|b\rangle$  täsmällinen arvo  $x = b$ , näistä tiloista voidaan muodostaa superpositio kertomalla tilat sopivasti *normitetulla kertoimilla*  $c_a$  ja  $c_b$  ja laskemalla ne yhteen,

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = c_a\psi_a(x, t) + c_b\psi_b(x, t). \quad (17.44)$$

Tässä tilassa paikan mittaus antaa aina tulokseksi *joko* arvon  $a$  *tai*  $b$  ja nämä havaitaan todennäköisyksillä

$$P(a) = |c_a|^2, P(b) = |c_b|^2. \quad (17.45)$$

Tässä itseisarvot tarvitaan siksi, että kertoimet voivat olla myös kompleksilukuja. Sama periaate toimii myös silloin, kun yhteen lasketaan enemmän kuin kaksi tilaa.



**17.23** Hiukkanen on superpositiossa  $\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = c_a\psi_a(x, t) + c_b\psi_b(x, t)$ , missä tiloilille  $|a\rangle$  ja  $|b\rangle$  pätee kaikilla  $|c_a\psi_a(x) + c_b\psi_b(x)|^2 = |c_a\psi_a(x)|^2 + |c_b\psi_b(x)|^2$ . Millainen ehto pitää kertoimien  $c_a$  ja  $c_b$  toteuttaa, jotta superpositio olisi oikein normitettu?

### Hiukkasen liikemäärän todennäköisyys

Kvantimekaanisen hiukkasen kuten elektronin muillakin ominaisuuksilla kuin paikalla voi olla samanaikaisesti useita arvoja. Elektroni voi esimerkiksi *liikkua useilla eri nopeuksilla samanaikaisesti*. Kuvassa 17.21 (a) on piirretty positiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevan elektronin aaltofunktio, kun hiukkasen aaltoluku on  $K$  (vrt. kuva 17.13). Tässä tilassa  $|K\rangle$  aaltofunktio on  $\psi_K(x, t) = e^{i(Kx - \omega t)}$ , joten funktion reaali- ja imaginääriosat muodostavat kuvassa oikealle etenevät sinimuotoiset aallot. Vastaavasti kuvassa (b) on piirretty tilassa  $|-K\rangle$  olevan negatiiviseen  $x$ -suuntaan kulkevan elektronin aaltofunktio  $\psi_{-K}(x, t) = e^{i(-Kx - \omega t)}$ .

Elektroni voi olla myös näiden tilojen superpositiossa,

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_K(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-K}(x, t), \quad (17.46)$$

joka on esitetty kuvassa (c). Kuten klassisten aaltojen yhteydessä opimme, vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot muodostavat *seisovan aallon*. Niinpä tässä superpositiotilassa elektronin aaltofunktio on seisova aalto. Seisova aalto ei kulje kumpaankaan suuntaan, joten elektroni on *keskimäärin paikoillaan*. Elektroni ei ole kuitenkaan absoluuttisesti paikoillaan vaan se kulkee nyt *samaanikaistesti sekä oikealle että vasemmalle*, ja jos elektronin liikemäärä mitattaisiin tässä superpositiotilassa, mittaustulokseksi voitaisiin saada *joko  $p_x = \hbar K$  tai  $p_x = -\hbar K$* , mutta *ei nolla*, koska aaltolukua  $k = 0$  vastaava tila ei ole superpositiossa mukana.

Kvanttimekaaniset aaltofunktiot voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen Fourier-sarjana aivan samaan tapaan kuin klassiset aallot. Erityisesti koska kompleksinen eksponenttifunktio sisältää sinimuotoiset reaalijä imaginääriosat, voidaan aaltofunktio esittää tällaisten kompleksisten eksponenttifunktoiden summana

$$\psi(x, t) = \sum_i a(k_i) e^{i(k_i x - \omega_i t)}. \quad (17.47)$$

Tämä on kompleksiarvoisten funktioiden Fourier-sarja, ja siinä esiintyvät Fourier-kertoimet  $a(k_i)$  voivat olla kompleksilukuja. Kuvaan 17.21 on piirretty myös kunkin aaltofunktion *Fourier-kuvaaja* eli sen Fourier-kertoimien graafinen esitys. Kuvassa (a) Fourier-kuvaaja  $a_K(k)$  on vain yksi piste kohdassa  $k = K$ , koska aaltofunktio koostuu vain yhdestä sinimuotoisesta aallosta, jonka aaltoluku on  $K$ . Vastaavasti kuvan (b) Fourier-kuvaaja  $a_{-K}(k)$  on yksi piste kohdassa  $-K$ . Koska kuvassa (c) on näiden tilojen superpositio, sen Fourier-kuvaajassa on *kaksi* pistettä.

Kvanttimekaaninen superpositio voidaan siis kirjoittaa myös Fourier-kertoimien avulla muodossa

$$a_{\text{superpositio}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_K(k) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_{-K}(k). \quad (17.48)$$

Tällä tavalla Fourier-kertoimien avulla kirjoitettu superpositio on matemaattisesti ekvivalentti aaltofunkcioilla muodossa (17.46) kirjoitetun superposition kanssa. Toisin sanoen superpositioperiaate pätee sekä aaltofunktioille että niiden Fourier-kertoimille. Koska superposition voi ilmaista eri tavoin, kvantimekanikkassa se kirjoitetaankin usein tilavektoreiden avulla abstraktissa muodossa

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-K\rangle. \quad (17.49)$$

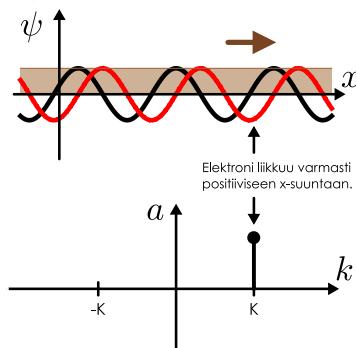
Tämä merkintä tarkoittaa sitä, että samanlainen yhteenlasku toimii riippumatta siitä, esitetäänkö tilat aaltofunktioina vai Fourier-kertoimina.

**17.24** Elektronin Fourier-kuvaajassa on yhtä korkeat pükit kohdissa  $k = 5 \text{ nm}^{-1}$  ja  $k = 6 \text{ nm}^{-1}$ . Huom.  $1 \text{ nm}^{-1} = 10^9 \text{ m}^{-1}$ .

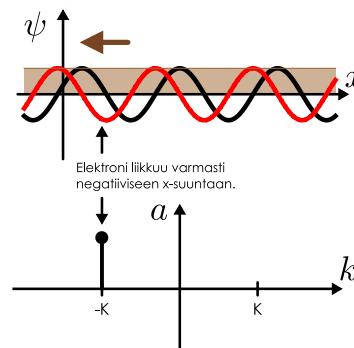
- (a) Mitä eri arvoja elektronin liikemäärälle voidaan mitata?
- (b) Mikä on elektronin nopeuden odotusarvo?

Kuva 17.21: Hiukanen voi liikkua usealla nopeudella samanaikaisesti.

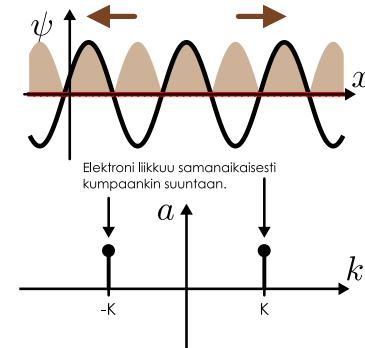
(a) Tilan  $|K\rangle$  aaltofunktio ja aaltolukuesitys.



(b) Tilan  $|-K\rangle$  aaltofunktio ja aaltolukuesitys.

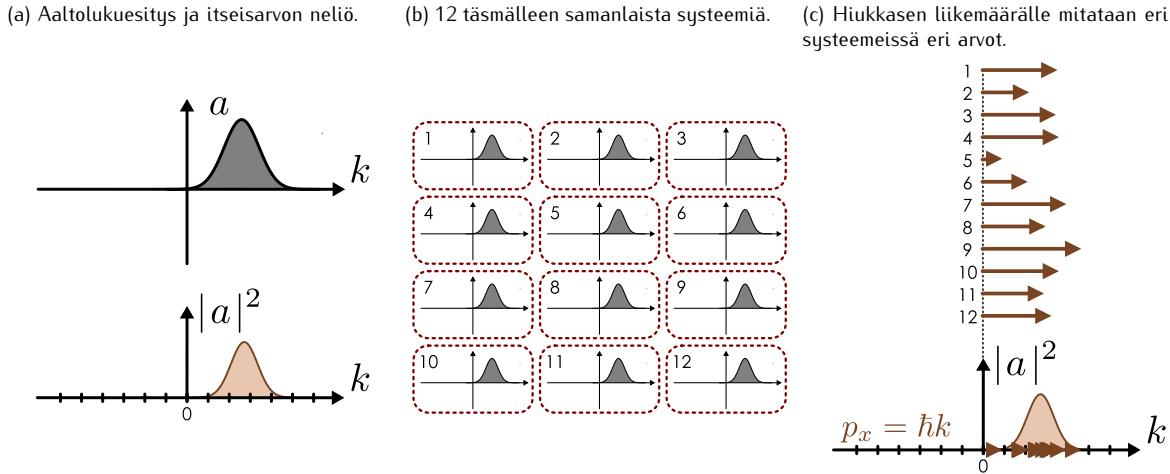


(c) Tilojen  $|K\rangle$  ja  $|-K\rangle$  superpositio.



## KVANTTIMEKANIICKA

Kuva 17.22: Vaikka joukko elektroneja on täsmälleen samanlaisessa tilassa, mitattaessa elektronien liikemääriä saadaan erilaiset, satunnaiset tulokset. Useimmiten elektronilla havaitaan liikemääriä, jota vastaan aaltoluvulla  $k = p_x/\hbar$  elektronin  $k$ -aaltofunktion itseisarvon neliö on suuri.



Vapailla hiukkasilla aaltoluku voi saada mitä tahansa reaaliarvoja, jolloin yksittäisten aaltojen summaamisen sijaan voidaan aaltoja laskea yhteen myös jatkuvasti muuttuvan  $k$ -indeksin yli. Tällöin  $a(k)$  on jatkuva funktio ja Fourier-sarjassa (17.47) esitetyvä summa muuttuu integraaliksi aaltoluvun suhteeseen

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (17.50)$$

Tässä esitetyvä funktio  $a(k)$  kutsutaan aaltofunktion  $\psi(x)$  **Fourier-muunnokseksi**. Kuten Fourier-sarja myös Fourier-muunnos on yksikäsitteinen, mikä tarkoittaa sitä, että on olemassa vain yksi funktio  $a(k)$ , josta aaltofunktio voidaan laskea muunnoksella (17.50). Toisin sanoen funktio  $a(k)$  sisältää *yhtä paljon tietoa* hiukkasen tilasta kuin aaltofunktio ja on siten matemaattisesti *yhtä hyvä* tapa kuvata hiukkasta. Tästä syystä Fourier-muunnosta kutsutaan myös hiukkasen **aaltolukuesitykseksi**, koska se "esittää" hiukkasen tilan ominaisuudet aaltoluvun avulla.

Elektroni voidaan havaita vain sellaisessa paikassa  $x$ , jossa sen aaltofunktio ei ole nolla. Samaan tapaan elektronin aaltoluvuksi ja liikemääriksi voidaan mitata vain sellaiset arvot  $k$  ja  $p_x = \hbar k$ , joissa elektronin aaltolukuesitys  $a(k)$  ei ole nolla. Itse asiassa *todennäköisyys* havaita aaltoluvun arvo  $k$  on verrannollinen *aaltolukuesityksen itseisarvon neliöön* aivan samaan tapaan kuin todennäköisyys havaita elektroni paikassa  $x$  on verrannollinen aaltofunktion itseisarvon neliöön. Jos aaltolukuesitys poikkeaa nollasta vain joissakin  $k$ -akselin pisteissä kuten kuvassa 17.21 (c), elektronin aaltoluvun mittaus antaa tulokseksi jonkin näistä arvoista, ja kunkin arvon havaitsemisen todennäköisyys on

$$P(k) = |a(k)|^2. \quad (17.51)$$

Vastaavasti todennäköisyys mitata hiukkaselle liikemääriä  $p_x = \hbar k$  on

$$P(p_x) = P(k = p_x/\hbar) = |a(p_x/\hbar)|^2. \quad (17.52)$$

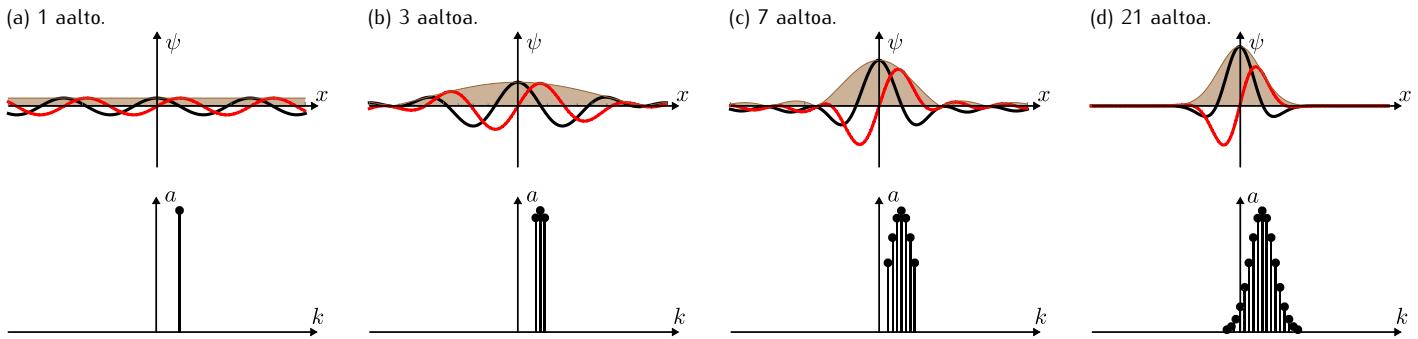
Jos aaltolukuesitys on jatkuva funktio, sen itseisarvon neliö on hiukkasen liikemäären todennäköisyysjakauman todennäköisyystiheys

$$\rho_K(k) = |a(k)|^2. \quad (17.53)$$

Aaltofunktion Fourier-muunnos kuvaa siis elektronin aaltoluvun ja sitä kautta liikemäären todennäköisyysjakaumaa täsmälleen samalla tavalla kuin aaltofunktio kuvaa elektronin paikan todennäköisyysjakaumaa.

Tämän merkitystä mittauksille on havainnollistettu kuvan 17.22 ajatuskokeessa. Valmistelemme joukon kvanttimekaanisia systeemejä, joissa on kussakin yksi hiukkanen *täsmälleen samanlaisessa tilassa*. Mitataamme näiden hiukkasten liikemäärit, jolloin saamme jälleen satunnaisia tuloksia aivan kuten paikankin mittauksista saatün. Minkään yksittäisen liikemäärimittauksen tulosta ei voi etukäteen täsmälleen tietää. Sen sijaan mitatut liikemäärit yhdessä muodostavat jakauman, jonka muoto seuraa funktion  $|a(k)|^2$  muotoa. Useimpien hiukkasten mitattu liikemääri  $p_x$  vastaa aaltolukua  $k = p_x/\hbar$ , jolla tämä funktio saa suuria arvoja, eikä sellaisia liikemääriä mitata lainkaan, joita vastaan aaltoluvulla funktio saa arvon nolla.

Kuva 17.23: Kompleksieksponeentialisten aaltofunktioiden superpositioita. Yksittäinen aalto ulottuu äärettömän kauas, mutta yhdistämällä useita aaltoja, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan, saadaan pieneen alueeseen rajoittunut aaltopaketti. Kuvassa on esitetty kunkin tilan aaltofunktio  $\psi(x)$  sekä aaltolukuesitys  $a(k)$ .



**17.25** Elektronin aaltolukuesityksessä on kaksi piikkiä:  $a(1 \text{ nm}^{-1}) = 3/5$  sekä  $a(2 \text{ nm}^{-1}) = 4/5$ .

- Mitä arvoja elektronin liikemääärän mittaus voi antaa?
- Millä todennäköisyydellä nämä arvot mitataan?
- Mikä on liikemääärän odotusarvo?

### esimerkki 17.3

### Kvanttimekaaninen superpositio

Elektroni on systeemissä, jossa sille voidaan mitata energiat  $E_n = \epsilon n^2$ , missä  $n = 1, 2, 3, \dots$  ja  $\epsilon$  on jokin pieni energia. Tilaa, jossa hiukkasen energia on  $E_n$ , merkitään  $|n\rangle$ . Nyt elektroni on superpositiotilassa  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|4\rangle$ . (a) Mitä energian arvoja hiukkaselle on mahdollista mitata? (b) Millä todennäköisyyksillä hiukkaselle mitataan mikäkin energia? (c) Mikä on hiukkasen energian odotusarvo?

**SUUNNITELMA** Hiukkasen energialle voidaan mitata vain tiloja  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  ja  $|4\rangle$  vastaavat energiat  $E_1 = \epsilon$ ,  $E_2 = 4\epsilon$  ja  $E_4 = 16\epsilon$ . Kunkin energian mittauksen todennäköisyys  $P_n$  on ko. tilan kertoimen itseisarvon neliö. Odotusarvo on

$$\langle E \rangle = \sum_n P_n E_n = P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_4 E_4. \quad (17.54)$$

**RATKAIKSI** Mittaustodennäköisyydet ovat  $P_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$ ,  $P_2 = \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{4}{6}$ ,  $P_4 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$ , jolloin energian odotusarvo on  $\langle E \rangle = \left( \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{4}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 16 \right) \epsilon = \frac{33}{6} \epsilon \approx 5.5\epsilon$ .

**ARVIOINTI** Todennäköisyyksien summa on selkeästi yksi kuten pitääkin. Odotusarvo on puolestaan energioiden  $E_2$  ja  $E_4$  välillä lähellä arvoa  $E_2$ , mikä on järkevä, koska arvon  $E_2$  mittamisella on suurin todennäköisyys, mutta toisaalta  $E_4$  on selvästi muita energian arvoja suurempi.

### Paikan ja liikemääärän epätarkkuusperiaate

Luvussa 15.5 opimme, että aallot voidaan aina esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona, ja erityisesti yhdistämällä useita sinimuotoisia aaltoja, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan, saadaan muodostettua aaltopulssi. Täsmälleen sama pätee myös kvantimekaanisille aaltofunktioille. Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.23, jossa aaltofunktiot on muodostettu summaamalla yhteen yhä enemmän sinimuotoisia aaltoja. Kuvasta nähdään, kuinka jo muutaman aallon yhdistäminen johtaa aaltofunktioon, joka on yhdessä paikassa korkea ja toisaalla matala. Kun summaan lisätään yhä enemmän aaltoja, aaltopulssista tulee yhä tarkemmin rajattu ja värähtely paketin keskipisteestä loitottaessa vähenee.

Klassisten aaltojen yhteydessä huomasimme myös sen, että mitä enemmän aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut  $k$  poikkeavat toisistaan eli mitä leveämpi on aallon Fourier-kuvaaja, sitä kapeamman pulssin ne muodostavat. Eli mitä tarkemmin aaltopulssi on rajattu tiettyyn paikkaan, sitä epämääritsempi tämän pulssin aallonpituuus ja aaltoluku ovat. Ja pisin vastoin jotta pulssin aallonpituuus ja aaltoluku olisivat täsmälliset, pulssin on välttämättä oltava paikka-akselilla leveä. Kutsuimme tästä ominaisuutta Fourier-muunnoksen epätarkkuusperiaatteeksi. Klassisille aalloille tulos ei ollut erityisen mielenkiintoinen, mutta sama periaate pätee myös kvantimekaanisille aaltofunktioille, ja kvantimekanikkassa tämä ominaisuus on merkittävä. Jos kvantimekaanista hiukkasta kuten elektronia kuvava aaltopulssi on leveä, emme

## KVANTTIMEKANIKKAA

voi ennustaa kovin tarkkaan, mikä arvo elektronin paikan mittauksessa saadaan. Toisaalta jos elektronin aaltolukuesityksen kuvaaja on leveä, emme voi ennustaa kovin tarkkaan, mikä arvo elektronin liikemääärän mittauksessa saadaan. Toisin sanoen sekä elektronin paikka että sen liikemäärä ovat epämääritetyt, ja epätarkkuusperiaatteen mukaan nämä epämääritetyt *riippuvat toisistaan*. Jos aaltopulssi on kapea, elektronin paikka on melko täsmällinen, mutta tällöin elektronin aaltoluku on epätarkka, jolloin elektronin liikemäärä ei voi ennustaa tarkasti (kuva 17.24 (a) ja (b)). Jos puolestaan elektronin aaltolukuesitys muodostaa kapean kuvaajan, aaltoluku ja siis liikemäärä ovat melko tarkat, mutta tällöin elektronia kuvaava aaltopulssi on välttämättä leveä eikä elektronin paikkaa voida ennustaa tarkasti (17.24 (d) ja (e)). Tätä paikan ja liikemäären epämääritetyksien riippuvuutta kutsutaan **Heisenbergin epätarkkuusperiaatteeksi** (Werner Heisenbergin mukaan).

Epätarkkuusperiaate ei ole mittaustekninen vajavaisuus, vaan se sanoo, että elektronilla *ei ole olemassa kvanttimekaanista tilaa*, jossa  $x$ -paikkakoordinaatti ja  $x$ -suuntainen liikemäärä sisivät yhtä aikaa tarkan arvon. Riippumatta siitä, millainen elektronin tila ja aaltofunktio on, elektronin paikan ja liikemäären todennäköisyysjakaumilla on *aina* jokin äärellinen leveys, ja toisen suureen todennäköisyysjakauman kaventaminen välttämättä leventää toista jakaumaa.

Tämä periaate voidaan muotoilla myös matemaattisesti täsmälliseksi hiukkasen paikan ja liikemäären todennäköisyysjakaumien leveyttä koskevaksi epäyhtälöksi. Todennäköisyysjakauman leveyttä kuvaava sen keskihajonta, joten tavallisesti *paikan epätarkkuudeksi* määritellään *paikkakoordinaatin keskihajonta*

$$\Delta x = \sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (17.55)$$

Samoin liikemäären  $x$ -komponentin epätarkkuus tarkoittaa kyseisen liikemäären komponentin keskihajontaa, joka on suoraan verrannollinen aaltoluvun keskihajontaan

$$\Delta p_x = \sigma_{p_x} = \hbar \sigma_k = \hbar \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}. \quad (17.56)$$

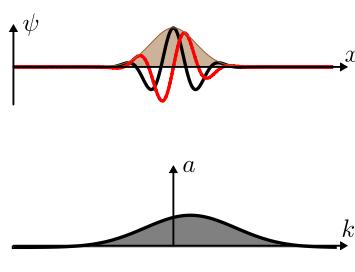
Fourier-muunnoksen ominaisuuksista seuraa, että *kaikissa aalloissa* paikan ja aaltoluvun *hajontojen tulo* on aina suurempi tai yhtä suuri kuin puolikas,  $\sigma_x \sigma_k \geq 1/2$ . Näin ollen elektronin  $x$ -koordinaatille sekä liikemäären  $x$ -komponentille pätee täsmällinen epäyhtälö

$$\Delta x \Delta p_x = \sigma_x \sigma_{p_x} = \sigma_x \hbar \sigma_k \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (17.57)$$

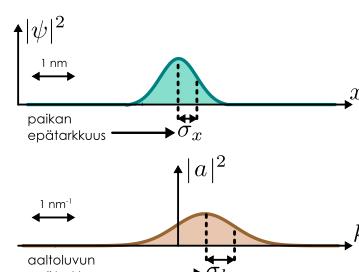
Vastaavia epätarkkuusperiaatteita voidaan kvantimekaniikassa johtaa monille muillekin suurepareille.

**Kuva 17.24:** Aaltopaketteja  $\psi(x)$ , näitä vastaavia aaltolukuesityksiä  $a(k)$  sekä hiukkasen paikan ja aaltoluvun (liikemäären) todennäköisyysjakaumat. Mitä leveämpi on aaltolukuesitys sitä kapeampi aaltopaketti ja päinvastoin. Paikan ja aaltoluvun (liikemäären) hajontojen tulo ei voi koskaan olla epätarkkuusperiaatteen määräämää alarajaa  $1/2$  ( $\hbar/2$ ) pienempi.

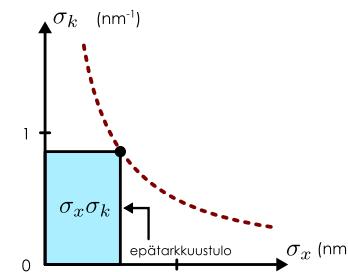
(a) Kapea aaltofunktio.



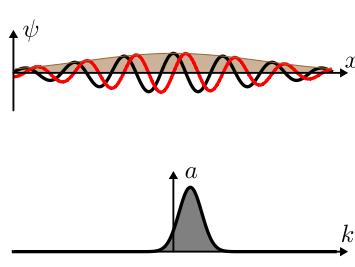
(b) Paikan ja aaltoluvun todennäköisyysjakaumat.



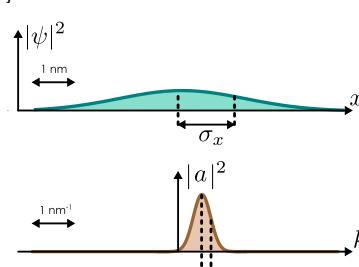
(c) Hajontojen tulo.



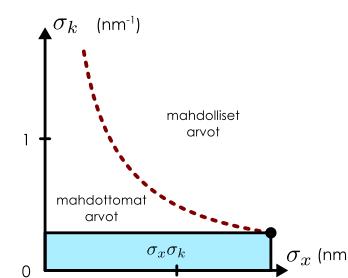
(d) Leveä aaltofunktio.



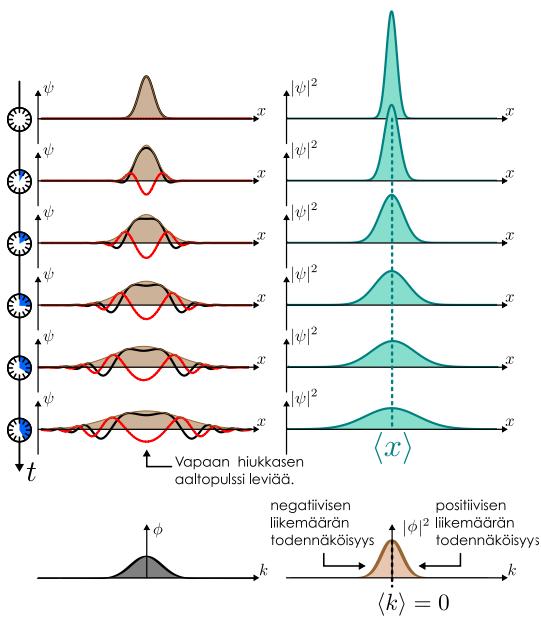
(e) Paikan ja aaltoluvun todennäköisyysjakaumat.



(f) Hajontojen tulo.

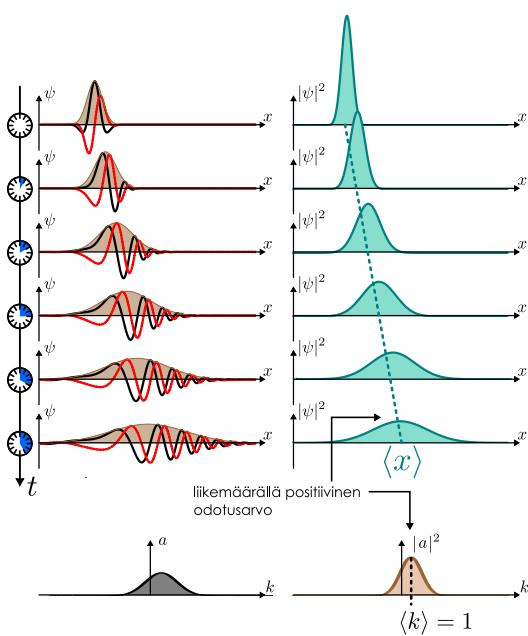


Kuva 17.25: Liikemääärän odotusarvo on nolla.



ää ajan kuluessa. Toisin sanoen vaikka elektroni on keskimäärin paikoillaan, sen paikan jakauma ei silti ole muuttumaton. Tämä johtuu siitä, että vaikka aaltoluvun ja liikemääärän odotusarvo on nolla, nämä suureet eivät ole täsmälleen nollia. Sen sijaan liikemäärä on tässä tilassa epämääriäinen ja sen mittaus voi antaa negatiivisen tai positiivisen mittauksen. Tavallaan elektronilla on samanaikaisesti sekä negatiivista että positiivista nopeutta, jolloin elektronin nopeuden odotusarvo on nolla ja sen paikan odotusarvo pysyy paikoillaan, mutta silti elektronin todennäköisyystiheys virtaa sekä negatiiviseen että positiiviseen suuntaan. Tällöin elektronin paikan todennäköisyysjakauma on, sitä täsmällisemmin elektronin nopeus on nolla ja sitä hitaanmin paikan todennäköisyysjakauma levää. Vapaan elektronin aaltoluvun, liikemäärä ja nopeuden epätarkkuus ei kuitenkaan voi koskaan olla täsmälleen nolla.

Kuva 17.26: Liikemääärän odotusarvo on positiivinen.



nopeus on todennäköisesti positiivinen, joten elektronin paikan todennäköisyysjakauma liikkuu kokonaisuudessaan positiiviseen suuntaan. Liikemäärä ja nopeuden mittaus voi kuitenkin tuottaa myös negatiivisen tuloksen, ja tämä näkyy myös aaltofunktiossa siten, että elektronia kuvaavan aaltopulssin vasen reuna liikkuu kuvaassa vasemmalle, negatiiviseen suuntaan.

Aaltojen näkökulmasta kyseessä on *dispersioilmiö*. Kyseessä on tyhjässä avaruudessa vapaasti liikkova elektroni, jonka liikkeeseen ei vaikuta mikään ulkopuolin vuorovaikutus. Se on aaltopulssi, jonka voi ajatella

Epätarkkuusperiaatteen mukaan mitä tarkemmin hiukkasella on paikka, sitä epätarkempi sen liikemäärä ja sitä kautta nopeus on. Epätarkkuusperiaatteen merkitys ilmeneekin ehkä konkreettisemmin tarkastelemalla elektronia kuvaavan aaltopulssin liikettä. Kuva 17.25 on esitetty vapaata elektronia kuvaavan aaltopulssin kehitys ajan funktiona, kun elektronin aaltofunktio ja aaltolukuesitys ovat kumpikin aluksi origon suhteen symmetriset pulssit. Erittäisesti koska aaltoluku on suoraan verrannollinen liikemäärä ja aaltoluvun todennäköisyysjakauma on nollan suhteenvaihtoinen, aaltoluvun ja siis liikemääärän odotusarvon täytyy olla nolla. Elektroni on siis keskimäärin paikoillaan. Lisäksi koska tässä on kyse tyhjässä avaruudessa olevasta elektronista, johon ei kohdistu mitään vuorovaikutuksia, elektronin liikemäärä ei muutu ajan kuluessa. Aaltoluvun todennäköisyysjakauma ei siis muutu ajan kuluessa.

Aaltofunktio ja paikan todennäköisyysjakauma sen sijaan muuttuvat. Kuvasarjasta nähdään, että aluksi origossa ollut kapea aaltopulssi *hajaantuu ja levii*

Huomaa myös, että tässä esimerkissä liikemäären epätarkkuus on ei muutu ajan kuluessa mutta paikan epätarkkuus kasvaa. Tässä ei ole mitään ristiriitaa, koska epätarkkuusperiaate asettaa epätarkkuuskien tulolle vain alarajan mutta ei ylärajaa. Epätarkkuudet voivat olla kuinka suuret tahansa, ja vaikka yksi kasvaa, toisen ei välttämättä tarvitse pienentyä.

Aivan vastaava ilmiö nähdään myös kuvassa 17.26, jossa elektronin liikemäären odotusarvo poikkeaa nollasta. Kuvan esimerkissä aaltoluvun ja siis myös liikemäären sekä nopeuden odotusarvo on positiivinen, joten elektroni liikkuu keskimäärin positiiviseen  $x$ -suuntaan. Tämä näkyy siinä, että elektronin paikan todennäköisyysjakauman keskikohta siirtyy ajan kuluessa. Aaltoluvun todennäköisyysjakauman leveys on sama kuin kuvassa 17.25, mikä tarkoittaa sitä, että elektronin liikemäären ja nopeuden epätarkkuus on kuvissa yhtä suuri. Jos siis mittamme elektronin liikemäären kummassa tahansa tilanteessa, mittaustuloksen odotettu poikkeama odotusarvosta on kummassakin tapauksessa yhtä suuri. Tämä tarkoittaa myös sitä, että paikan todennäköisyysjakauma levää kummassakin kuvassa ajan kuluessa yhtä nopeasti. Kuvan 17.26 esimerkissä elektronin

## KVANTTIMEKANIICKA

koostuvan sinimuotoisista aalloista, ja vapaasti liikkuvat sinimuotoiset aallot kulkevat tasaisella nopeudella. Näillä aalloilla on kuitenkin *eri nopeudet*, joten niiden superpositiona kuvattu aaltopulssi *muuttaa muotoaan ja hajaantuu* ajan kuluessa. Erityisesti näissä esimerkeissä aaltopulssi on superpositio sekä vasemmalle että oikealle kulkevista aalloista, jolloin pulssinkin tätyy liikkua sekä vasemmalle että oikealle. Esimerkissä 15.4 tutkimme kuvaaa 17.25 vastaavaa klassista aaltoa dispersiotonmassa väliaineessa, ja silloin näimme aallon jakautuvan kahteen pienempään, vastakkaisiin suuntiin kulkevaan pulssiin. Kvanttimekaanisenkin aaltopulssin reunat liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, mutta koska tämä aalto kokee dispersiota, se ei jakaudu kahtia vaan levää yhä laajemmalle alueelle.



**17.26** Tiedämme, että elektroni on eräällä ajan hetkellä  $x$ -akselin välillä [0 nm, 2 nm] ja sen keskimääräinen nopeus on  $\langle v_x \rangle = 100$  km/s. Mikään ulkoinen vuorovaikutus ei muuta elektronin liikettä.

- (a) Mikä on elektronin liikemäärän pienin mahdollinen epätarkkuus?
- (b) Mikä on silloin nopeuden epätarkkuus?
- (c) Millä välillä voimme ennustaa elektronin olevan yhden mikrosekunnin päästä?

## esimerkki 17.4

## Epätarkkuusperiaate

Kvanttimekaanisen elektronin aaltolukuesitys on

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi\alpha^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{4\alpha^2} k^2}. \quad (17.58)$$

- (a) Mikä on aaltoluvun, liikemäään ja nopeuden epätarkkuus, jos  $\alpha = 2.0 \text{ nm}^{-1}$ ? (b) Ratkaise elektronin aaltofunktio hetkellä  $t = 0 \text{ s}$ . (c) Mikä on paikan epätarkkuus? (d) Vertaa epätarkkuusperiaatteeseen.

**SUUNNITELMA** Aaltolukuesitys antaa kertoimet, joilla sinimuotoisia aaltoja  $e^{ikx - \omega t}$  pitää Fourier-muunnoksessa painottaa, jotta saisimme muodostettua elektronin aaltofunktion. Aaltofunktio saadaan siis integroimalla funktioiden  $a(k)$  ja  $e^{ikx - \omega t}$  tuloa. Lisäksi nyt kysytiin erityisesti hetkeä  $t = 0$ , joten ajasta riippuvat termit ovat nollia. Jäljelle jää integraali

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk. \quad (17.59)$$

Aaltoluvun todennäköisyystiheys on aaltolukuesityksen itseisarvon neliö,  $\rho_K(k) = |a(k)|^2$ . Liikemäärä on aaltoluvun ja redusoidun Planckin vakion tulo,  $p_x = \hbar k$ , ja nopeus liikemäään ja massan suhde,  $v_x = p_x/m_e$ . Paikan todennäköisyystiheys on aaltofunktion itseisarvon neliö,  $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2$ . Epätarkkuudella tarkoitetaan näiden jakaumien hajontoja, ja epätarkkuusperiaatteeen mukaan pitää olla  $\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$ .

**RATKAISU** (a) Aaltoluvun todennäköisyysjakauma on

$$\rho_K(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{1}{2\alpha^2} k^2}. \quad (17.60)$$

Voit laskea jakauman odotusarvon ja hajonnan integroimalla todennäköisyystiheyttä, mutta se ei ole tarpeen, koska tämä on normaalijakauma. Yleisesti normaalijakauman tiheysfunktio odotusarvolla  $\mu$  ja hajonnalla  $\sigma$  on

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (17.61)$$

ja vertaamalla tästä funktion  $\rho_K(k)$  nähdään, että nyt aaltoluvun odotusarvo on  $\mu_k = 0$  ja keskijajonta  $\sigma_k = \alpha = 2.0 \text{ nm}^{-1}$ . Lükemäään ja nopeuden odotusarvat ovat siis myös nolla, ja niiden hajonat ovat  $\sigma_{p_x} = \hbar\sigma_k = 2.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$  sekä  $\sigma_{v_x} = \sigma_{p_x}/m_e = 230 \text{ km/s}$ .

(b) Aaltofunktion määrittelevän integraalin voi laskea käsin, mutta se vaatii useiden matemaattisten kikkojen käyttämistä. Helpompa on laskea integraali tietokoneella. Saamme aaltofunktioksi ja siihen edelleen paikan todennäköisyysjakaumaksi

$$\psi(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2} \Rightarrow \rho_X(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-2\alpha^2 x^2}. \quad (17.62)$$

(c) Paikan todennäköisyysjakauma on myös normaalijakauma. Se on nimittäin sama funktio kuin lauseke (17.61), kun valitsemme  $\mu = 0$  ja  $2\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ . Paikan odotusarvo on siis nolla ja paikan keskijajonta on  $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{1}{2\sigma_k} = 0.25 \text{ nm}$ .

(d) Epätarkkuustuloksi saadaan

$$\sigma_x \sigma_k = \frac{1}{2\sigma_k} \sigma_k = \frac{1}{2}, \quad (17.63)$$

mikä on täsmälleen epätarkkuusperiaatteeen määräämä alaraja.

```
Mathematica:
(* aaltolukuesitys ja aaltofunktio *)
a = 1/(2 Pi alpha^2)^(1/4) Exp[-1/(4 alpha^2) k^2]
psi = 1/Sqrt[2 Pi] Integrate[a Exp[I k x], {k, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0]
E^(-alpha^2 x^2) (2/Pi)^(1/4) Sqrt[alpha]

(* hajonnat *)
deltak = Sqrt[ Integrate[k^2 a^2, {k, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0] ]
deltax = Sqrt[ Integrate[x^2 psi^2, {x, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0] ]
deltax deltak /. alpha -> 2.0
Sqrt[alpha^2]
Sqrt[1/alpha^2]/2
0.5
```

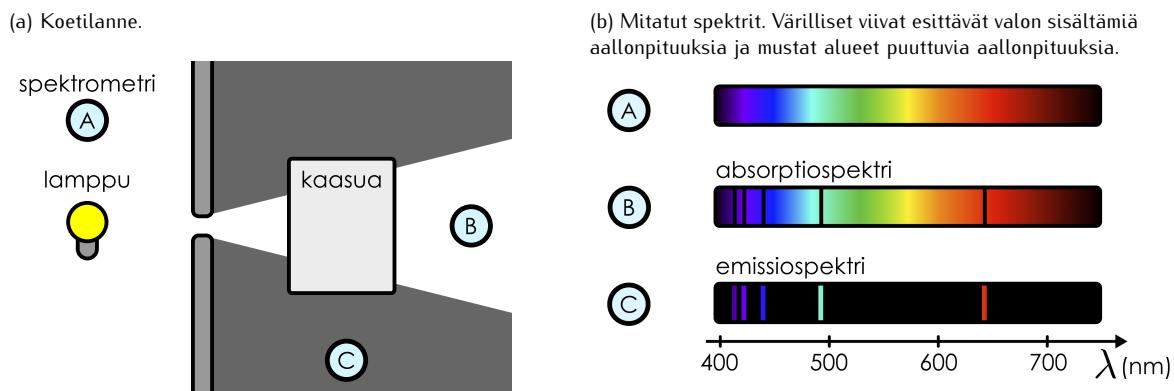
**ARVIOINTI** Koska epätarkkuusperiaate toteutuu, tulos vaikuttaa järkevältä. Huomaa erityisesti, että paikan epätarkkuus on kääntäen verrannollinen aaltoluvun epätarkkuuteen. Yhden pienentäminen siis väistämättä kasvattaa toista.



**17.27** Kirjoita omien sanojen tüvistelma kvantimekaanikan todennäköisyystulkinnasta ja epätarkkuusperiaatteenesta. Miten aaltofunktio liittyy elektronin paikkaan? Miten aaltolukuesitys liittyy aaltolukoon ja lükemäärään? Miten aaltofunktio ja aaltolukuesitys liittyvät toisiinsa? Miksi tästä seuraa epätarkkuusperiaate?

## KVANTTIMEKANIKKA

Kuva 17.27: Emissio- ja absorptiospektrin mittaus. Valonlähdet tuottaa valoa, joka sisältää kaikkia näkyvän valon aallonpituuksia (ja mahdollisesti myös infrapuna-, ultraviolettei- ym. aallonpituuksia). Spektrometri A mittaa valon sisältämät aallonpituudet. Annetaan tämän valon kulkea kaasun läpi ja mitataan tämän valon aallonpituuudet spektrometrillä B. Mitataan myös kaasun lähetettämän valon aallonpituuudet spektrometrillä C.



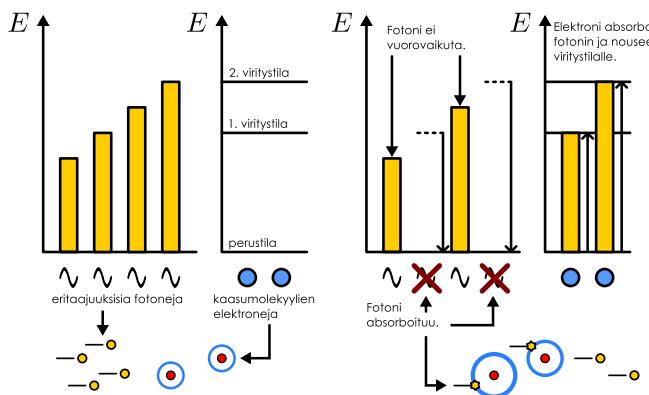
## 17.4 Kvanttuminen

### Diskreetit spektrit

Planckin ratkaisu mustan kappaleen spektrin ominaisuuksille perustui oletukseen, että aineen elektronit voivat värähdellä vain joillakin tietyillä taajuuksilla. Samoin luvussa 8 ominaislämpökapasiteetin yhteydessä totesimme, että vapausasteiden jäätyminen johtuu siitä, etteivät molekyylit voi värähdellä tai pyöriä miten tahansa vaan ainoastaan jotkin taajuudet ja kulmanopeudet ovat niiille mahdollisia. Toisin sanoen esimerkiksi värähtelevillä elektroneilla ja molekyyleillä on olemassa vain joitakin sallittuja värähtelytaajuuksia ja -energioita eivätkä ne voi värähdellä millään muilla taajuuksilla. Tällöin kvanttimekaniikassa sanotaan, että värähtelevien hiukkasten energia on **kvantittunut**.

Mustan kappaleen säteily ja vapausasteiden jäätyminen ovat epäsuoria todisteita siitä, että värähtelijöiden energiat eivät voi saada mitä tahansa arvoja, sillä kvantihypoteesi johti näiden ilmiöiden toimivaan teoreettiseen selitykseen. 1900-luvun alussa oli kuitenkin löydetty myös tapa mitata sallittujen energoiden välistä eroja suoraan. Oli nimittäin havaittu, että kun tietystä alkuaineesta koostuvaa kaasua valaistiin valkoisella, kaikkia eri aallonpituuksia sisältävällä valolla, kaasun läpi kulkeneesta valosta *puuttui* joitakin tietyjä aallonpituuksia (kuva 17.27). Samalla kaasu itse alkoi säteilemään heikkoa valoa mutta ainoastaan *tietyillä* aallonpituuksilla. Kaasu siis *absorboi* itseensä sähkömagneettista säteilyä joillakin aallonpituuksilla ja *emittoi* näin saamansa energian niinikään sähkömagneettisena säteilynä. Kaasun läpi kulkeneen valon sisältämien aallonpituuksien joukkoa kutsutaan *absorptiospektriksi* ja kaasun lähetettämien aallonpituuksien joukkoa *emissiospektriksi*. Koska absorptiospekristä puuttuu ja emissiospektriin kuuluu vain joitakin erillisiä aallonpituuksia, spektrejä kutsutaan *diskreteiksi*.

Kuva 17.28: Fotonien absorptio.



Absorptio- ja emissiospektrit riippuvat koekossa käytetystä kaasusta. Esimerkiksi vetykaasu absorboi ja emittoi aina tiettyjä juuri sille ominaisia aallonpituuksia. Klassisen sähkömagnetismin perusteella tästä on mahdoton ymmärtää, mutta kvantimekaniikan sallittujen energoiden idea antaa ilmiölle yksinkertaisen selityksen: Koska elektronin täytyy fotonin absorboidessaan saada itselleen fotonin *koko energia*, absorptio on mahdollinen vain silloin, jos fotonin energia on täsmälleen sopiva nostamaan elektronin energian johokin uuteen sallittuun arvoon. Toisin sanoen jos fotonin, jonka energia on  $E_{foton} = \hbar\omega$ , kohtaa elektronin, jonka energia on  $E_{alku}$ , foton voi absorboitua ainoastaan, jos energian arvo  $E_{loppu} = E_{alku} + \hbar\omega$  on elektronille sallittu.

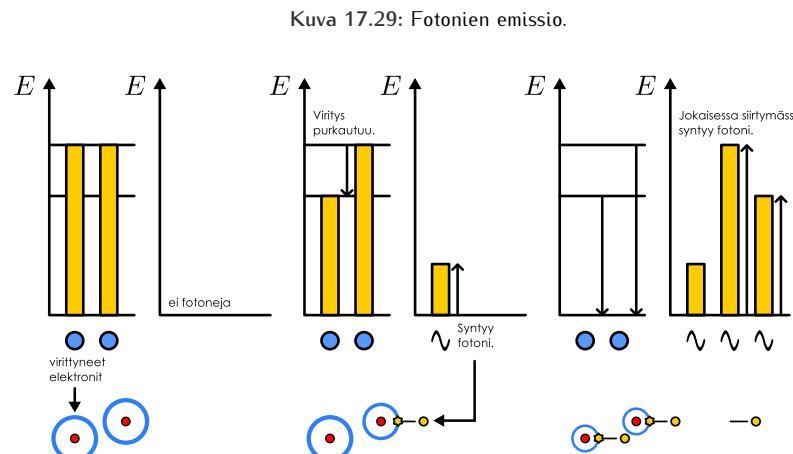
Absorptiospekristä tällaiset fotonit puuttuvat, koska kaasun läpi kulkevat elektroneja, jotka voivat ne absorboida. Suurin osa fotoneista kuitenkin kulkee kaasun läpi vuorovaikuttamatta sen kanssa, koska kaasussa ei ole sopivia elektroneja, jotka voisivat ne napata (kuva 17.28).

Jos kaasun lämpötila ei ole kovin korkea, lähes kaikki elektronit ovat alimman mahdollisen energian tilalla, jota kutsutaan **perustilaksi**. Tällöin absorptiospektristä puuttuvat taajuudet vastaavat kaikki perustilan ja sitä korkeamman energian tilojen eli **viritystilojen** välistä energioita, ja spektrin avulla voidaan siis suoraan mitata elektroneille sallittuja energian arvoja. Jos kaasun lämpötila on korkea, osa elektroneista voi olla noussut viritystiloille jo kaasun sisäenergian avulla, jolloin spektrissä näkyy myös viritystilojen välistä energiaeroja.

Fotonin absorboinut elektroni on **virettyneet**. Elektronit kuitenkin pyrkivät takaisin perustilaan samaan tapaan kuin kappaleet putoavat painovoiman vaikutuksesta alaspäin, eivätkä ne siis pysy virettyneinä pitkään. Sürtyessään pienemän energian tilalle elektronin on kuitenkin luovuttava energiansa jonnekin, koska energia ei voi häviää. Tämä tapahtuu niin, että syntyy fotoni, jonka energia vastaa täsmälleen elektronin tilojen energoiden eroa

(kuva 17.29). Nämä kaasu alkaa emitoida valoa, jossa jokaisen fotonin energia vastaa täsmälleen jotakin elektronien sallittujen energoiden välistä eroa.

Diskreettejä spektrijä havaitaan juuri kaasuilla, koska kaasuissa molekyylit ja atomit vuorovaikuttavat keskenään hyvin heikosti. Tällöin elektronien sallitut tilat riippuvat juuri molekyylien ja atomien kvanttimekanisesta rakenteesta. Nesteissä ja kiinteissä aineissa atomien ja niiden elektronien välisen vuorovaikutusten johdosta sallittuja energioita on tavallisesti paljon enemmän kuin yksittäisissä atomeissa, jolloin absorptio ja emissio voi tapahtua hyvin monilla aallonpituuksilla.



Kuva 17.29: Fotonien emissio.

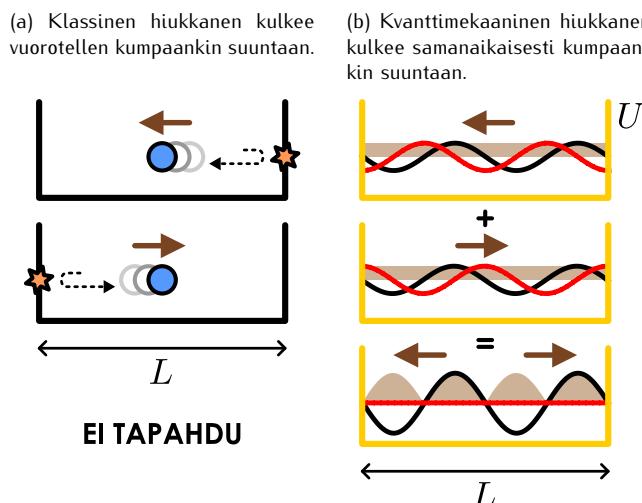
## Kvanttimekaaniset seisovat aallot

Kaikki kvantimekaaniset systeemit eivät ole kvantittuneet. Esimerkiksi tilassa  $|k\rangle$  olevan vapaan hiukkasen energia on  $E_{\text{kokonais}} = K = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Koska mikään ei rajoita vapaan hiukkasen mahdollisia aaltoluvun  $k$  arvoja, hiukkasella voi olla myös *mikä tahansa* positiivinen liike-energia. Tässä suhteessa kvantimekaaninen hiukkanen ei poikkea klassisesta hiukkasta, koska klassisessakin mekanikkassa hiukkanen voi liikkua millä tahansa nopeudella ja hiukkasen liike-energia voi olla mikä tahansa. Energiat ovat kvantittuneet vain silloin, kun *systeemi asettaa rajoituksia siinä olevan hiukkasen aaltofunktion muodolle*. Nämä tapahtuvat, jos hiukkanen on vangittu pieneen tilaan.

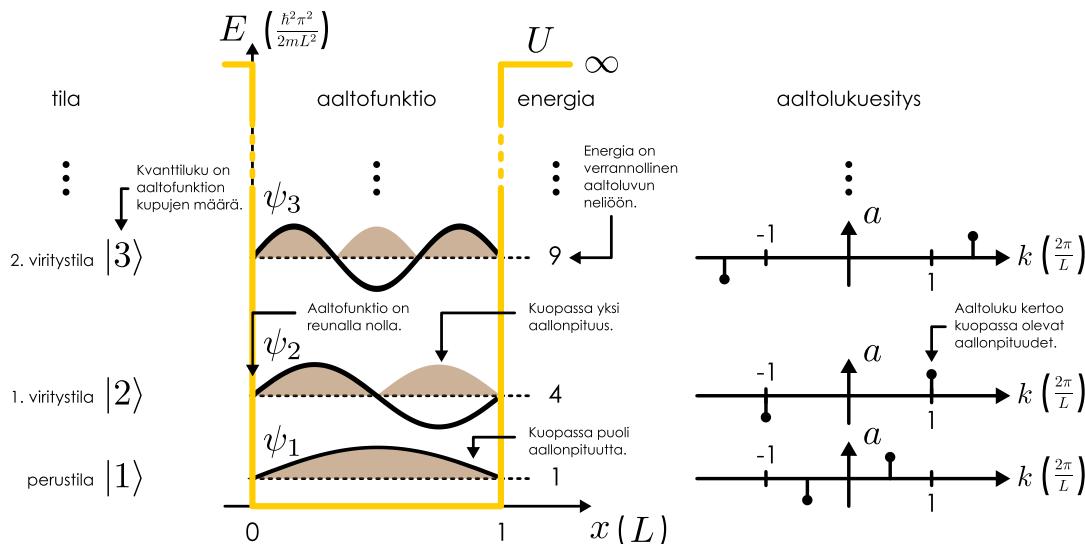
Yksinkertaisin tällainen tilanne on piirretty kuvaan 17.30, jossa elektroni on vangittu pieneen "laatikkoon". Elektronien mittakaavassa laatikkoja ei tietenkään ole olemassa. Tällainen tilanne kuitenkin syntyy, jos elektroni on ulkoisessa sähkökentässä, jossa sen potentiaalienergia riippuu paikasta. Tässä yksinkertaisessa esimerkissä elektronin potentiaalienergia on *nolla* laatikon sisällä ja *ääretön* laatikon ulkopuolella. Koska elektronin energia on äärellinen, se ei pääse pois laatikosta. Tällaisessa laatikossa olevan elektronin potentiaalienergia muistuttaa kuopassa olevan kappaleen potentiaalienergiaa, joten tilannetta kutsutaankin yleensä *äärettömän syväksi potentiaalikuopaksi*.

Jos elektroni olisi klassinen hiukkanen, se poukkoilisi kuopassa edestakaisin kuten kuvassa 17.30 (a). Elektroni *ei kuitenkaan ole klassinen hiukkanen*, vaan sitä kuvaa aaltofunktio kuten kuvan 17.30 (b) on piirretty. Aaltofunktio heijastuu kuopan reunoista aivan samaan tyyppiin kuin esimerkiksi köydessä etenevä mekaaninen

Kuva 17.30: Pienen "kuopan"vangittu elektroni heijastuu edestakaisin kuopan reunoista.



Kuva 17.31: Hiukkasen ominaistiloja äärettömän syvässä potentiaalienergiakuopassa.



aalto heijastuu kiinnitetyn köyden päistä. Niinpä kuoppaan syntyy kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon superpositio eli *seisova aalto* (vrt. kuva 17.21). Elektronin ei siis kulje kuopassa edestakaisin vuorotellen vastakkaisiin suuntiin vaan *samanaisesti* kumpaankin suuntaan.

Elektronin aaltofunktio käyttääsiis potentiaaliakuopassa samalla tavalla kuin päistään kiinnitetyn kitaran kielessä kulkevat aallot. Erityisesti kuoppaan voi syntyä *vain sellaisia seisovia aaloja, joissa kuopan reunalla on solmut* (kuva 17.31, vrt. kuva 15.30). Tämä johtuu siitä, että elektronin aaltofunktion täytyy olla kuopan ulkopuolella nolla, koska hiukkanen ei voi olla alueessa, jossa sen potentiaalienergia olisi äretön. Aaltofunktion pitää olla myös jatkuva, joten aaltofunktion täytyy olla kuopan reunalla nolla. Niinpä kuopassa olevan elektronin aaltofunktiolla on vain tiettyjä sallittuja aallonpituuksia aivan kuten kitaran kielessä vain tiettyt aallonpituedet ovat mahdollisia. Erityisesti *kuopan leveyden on oltava puolen aallonpituuden monikerta* eli

$$L = \frac{1}{2}\lambda_1, \lambda_2, \frac{3}{2}\lambda_3, \dots = n \frac{1}{2}\lambda_n, \quad (17.64)$$

missä  $n = 1, 2, 3, \dots$  on aaltofunktion kupujen lukumäärä. Tässä tapauksessa  $n$  on myös tilan indeksoiva *kvanttiluku*, koska tämä luku yksin riittää kertomaan, mistä seisovasta aalosta on kyse. Näitä seisovia aaloja muodostavien aaltojen tiloja merkitäänkin  $|n\rangle$  ja tilojen aaltofunktioita  $\psi_n(x)$ .

Koska aaltoluku ja aallonpituuus ovat käännekkäin verrannolliset toisiinsa, aaltoluku voi saada tilassa  $|n\rangle$  arvot

$$k_n = \pm \frac{2\pi}{\lambda_n} = \pm n \frac{\pi}{L}. \quad (17.65)$$

(Koska aaltoluvulla on tässä tilassa useita mahdollisia arvoja, se ei nyt kelpaa tilan määritteleväksi kvanttiluvuksi.) Hiukkasen liike-energia riippuu aaltoluvusta yhtälön (17.13) mukaisesti, mutta tämä energia saa saman arvon riippumatta siitä, mikä on aaltoluvun  $k_n$  etumerkki (eli mihiin suuntaan hiukkanen liikkuu). Niinpä hiukkasen liike-energia tilassa  $|n\rangle$  on

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2. \quad (17.66)$$

Koska potentiaalienergia kuopassa oli nolla, tämä on myös hiukkasen kokonaisenergia.

Tämä on pohjimmainen syy elektronin energian kvantitatumiseen: kuoppaan sopii vain tietynlaisia seisovia aaloja, ja näillä aaltofunktiolla voi olla vain tiettyjä sallittuja energioita. Aivan samasta syystä kitaran kielikin voi värähdellä vain perustajaudella ja sen harmonisilla ylätaajuuksilla.



**17.28** Vertaa kuvien 15.30 ja 17.31 klassisia ja kvanttimekaanisia seisovia aaloja. Tarkastele ainakin aaltolukua, aallonpituuutta ja kulmataajuutta sekä näiden riippuvuutta kupujen lukumäärästä  $n$ .

Kuvaan 17.31 on piirretty hiukkasen perustilan aaltofunktio sekä kaksi alinta viritystila. Kuvaajassa potentiaalienergiaa kuvaava keltainen viiva ja hiukkasen kokonaisenergia kullakin tilalla on piirretty vaakasuuntaisella katkoviivalla. Kutakin energiota vastaava aaltofunktio on piirretty kokonaisenergiaa kuvaavan vaakaviivan suhteeseen niin, että ko. viiva on aaltofunktion nollataso. Näin aaltofunktiot on voitu piirtää samaan

kuvaan ilman, että niiden kuvaajat menevät pääallekäin. Myös tilojen aaltolukuesitykset on pürretty kuvaan. Mitä korkeamman energian tilasta on kyse, sitä lyhyempi on hiukkasen aaltofunktion aallonpituuus ja sitä suurempi (itseisarvoltaan) aaltoluku siihen liittyy.

Huomaa erityisesti, että hiukkasen energia perustilalla *ei ole nolla*. Hiukkasen energia on pelkkää liikeenergiaa, koska potentiaalienergia kuopassa on nolla, mutta hiukkanen ei voi koskaan olla täysin paikoillaan, vaan sen on *aina* pakko liikkua. Tämä johtuu siitä, että hiukkasen liikemäärä on verrannollinen aaltolukuun  $k$ , eikä kuopassa voi olla aaltofunktioita, jonka aaltoluku olisi nolla. Havainto on yhteensopiva myös epätarkkuusperiaatteen kanssa: Koska hiukkanen on vangittu vällille, jonka pituus on  $L$ , sen paikan epätarkkuus on rajoitettu ja niinpä sen liikemääränpäätarkkuuden on oltava nollaa suurempi.

Tässä tarkasteltu äärettömän syvä potentiaalioppa on luonnollisesti vain *yksinkertaistettu malli*, jolla ei ole luonnossa vastinetta. Todellisissa, äärellisissä potentiaaleissa aaltofunktiot ovat sileitä funktioita, joissa ei ole "kulmia" kuten tässä tapauksessa kuopan reunolla oli. Aaltolukuesityksetkään eivät ole tarkkoja piükkejä vaan jatkuvia funktioita, jotka pitää laskea aaltofunktion Fourier-muunnoksesta. Kuitenkin edellä esitettyt johtopäätökset pätevät:

- äärelliseen alueeseen vangitun hiukkasen aaltofunktio voi aina muodostaa seisovia aaltoja
- näissä tiloissa hiukkanen voi saada vain tiettyjä, diskreettejä energioita
- hiukkasen tilaa kuvavaksi kvanttiluvuksi käy aaltofunktion kupujen lukumäärä  $n$
- mitä enemmän kupuja on, sitä suurempi on hiukkasen energia.

## Ajasta riippuvat ja riippumattomat tilat

Jatketaan vielä potentiaalioppaan muodostuvien seisovien aaltojen matemaattista analyysiä. Seisova aalto voidaan muodostaa kahden muutten samanlaisten mutta vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositiona aivan kuten klassisessakin fysiikassa. Koska kvanttimekaanisen hiukkasen aaltofunktio tilassa  $|k\rangle$  on sekä reaali- että imaginääriosiltaan sinimuotoinen,

$$\operatorname{Re}[\psi(x, t)] = \cos(kx - \omega t), \quad \operatorname{Im}[\psi(x, t)] = \sin(kx - \omega t), \quad (17.67)$$

tilojen  $|k\rangle$  ja  $|-k\rangle$  superpositio  $|k\rangle - |-k\rangle$  muodostaa sekä reaali- että imaginääriosiltaan seisovia aaltoja. Näiden tilojen kvanttimekaanista superpositiota kuvaaa aaltofunktio

$$\psi_{\text{seisova}}(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} - e^{i(-kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{-i\omega t} - e^{-ikx} e^{-i\omega t} = (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-i\omega t}. \quad (17.68)$$

Aaltofunktio on tässä kirjoitettu muotoon, joka on ajasta riippuvan osan  $e^{-i\omega t}$  ja paikasta riippuvan osan  $e^{ikx} - e^{-ikx}$  tulo. Ajasta riippuva osuus kuvailee aallon reaali- ja imaginääriosien väärähtelyä ajan kuluessa. Paikasta riippuva osa puolestaan kuvailee aallon muotoa. Erityisesti huomioiden sini- ja eksponenttifunktion välinen yhteys

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (17.69)$$

aaltofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\psi_{\text{seisova}}(x, t) = 2i \sin(kx) e^{-i\omega t}. \quad (17.70)$$

(Huom. tämä aaltofunktio on normittamatonta. Aaltofunktion normitus on laskettu esimerkissä 17.5.)



**17.29** Perustele yhtälöissä (17.68) esiintyvät yhtäsuuruudet eksponenttifunktion laskusäännöillä ja yhtälö (17.69) Eulerin kaavalla (14.31).

Tällä seisovalta aallolla on aina solmu pisteessä  $x = 0$ , koska sinifunktio on origossa nolla. (Jos oltaisiin tarkasteltu superpositiota  $|k\rangle + |-k\rangle$ , sinifunktion sijaan lopputulokseen olisi saatu kosini. Koska tässä esimerkissä kuopan toinen reuna on pisteessä  $x = 0$ , tämä ei kuitenkaan käy, koska kosini ei ole tässä pisteessä nolla.) Lisäksi funktiolla on solmut kaikissa muissakin pisteissä, joissa sinifunktio on nolla eli joissa sen argumentti on  $\pi:n$  monikerta,  $kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = n\pi$ . Seisovan aallon ehto on se, että kuopan laidassa pisteessä  $x = L$  täytyy olla solmu, joten tästäkin esityksestä saadaan sama kvantitumisehto  $k_n L = n\pi$ , joka pääteliin jo aaltofunktion graafisen esityksen avulla.

Aaltofunktio muuttuu ajan kuluessa kuten kuvassa 17.32 on osoitettu. Esimerkiksi ajan hetkellä  $t = 0$  aaltofunktio on

$$\psi_n(x, 0) = 2i \sin(k_n x) \quad (17.71)$$

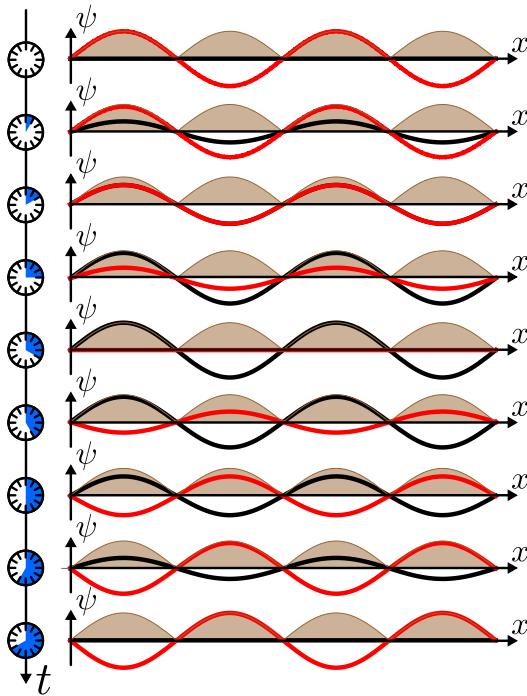
eli puhtaasti imaginääriinen, kun taas hetkellä  $t = T/4$ , missä  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  on väärähtelyn jaksonaika, aaltofunktio on

$$\psi_n(x, T/4) = 2 \sin(k_n x) \quad (17.72)$$

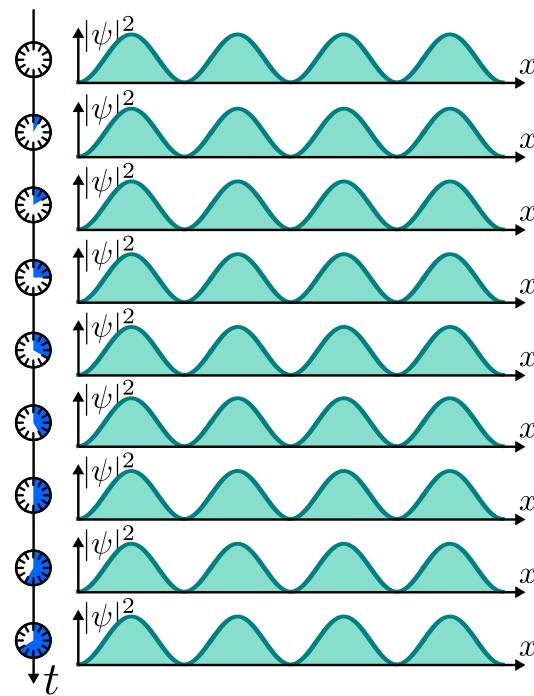
## KVANTTIMEKANIKKAA

Kuva 17.32: Kvanttimekaanisessa seisovassa aallossa reaali- ja imaginääriosat värähtelevät samalla taajuudella niin, että aaltofunktion itseisarvon neljö pysyy vakiona ajan suhteen. Koska aallossa on neljä kupua, kyseessä on tilan  $|4\rangle$  aaltofunktio.

(a) Hiukkasen aaltofunktio muuttuu ajan kuluessa.



(b) Hiukkasen paikan todennäköisyysjakauma ei riipu ajasta.



eli puhtaasti reaalinen. Tämä värähtely jatkuu, jolloin aaltofunktio vaihtelee jaksollisesti reaalisen ja imaginäärisen välillä. Aaltofunktion itseisarvon neljö kuitenkin on aina

$$|\psi_n(x, t)|^2 = 4 \sin^2(k_n x) |e^{-i\omega t}|^2 = 4 \sin^2(k_n x), \quad (17.73)$$

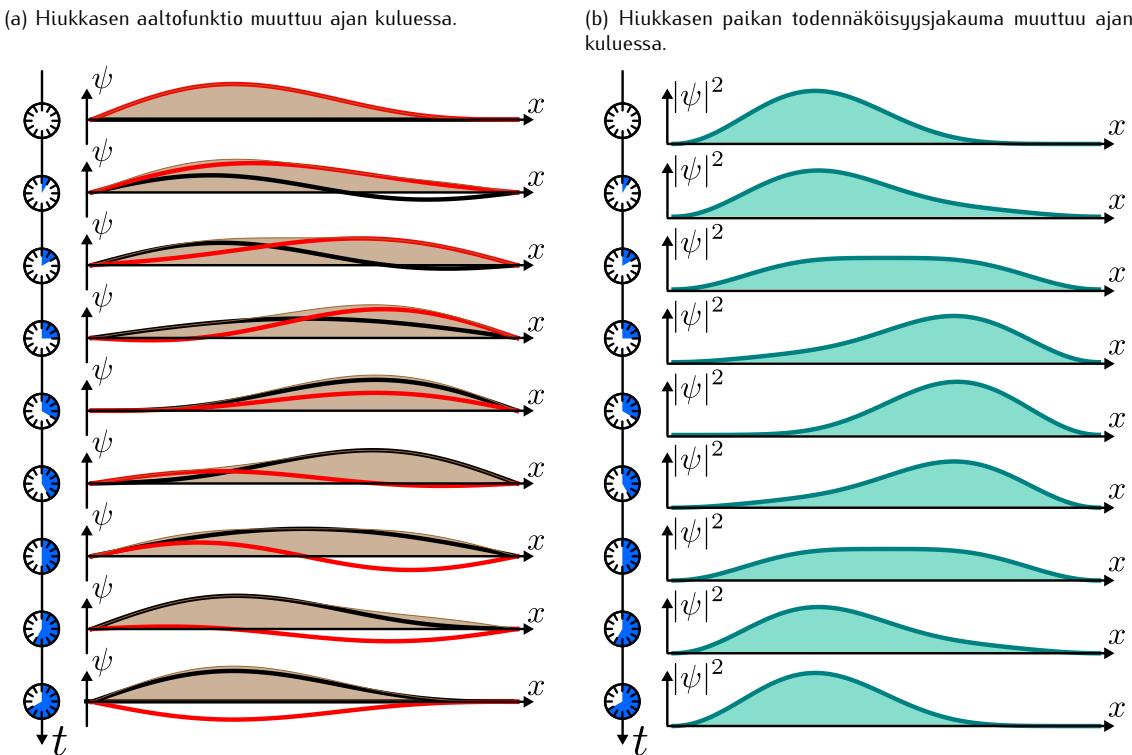
ja tämä *ei riipu ajasta*. Tämä johtuu siitä, että aaltofunktion ajasta riippuva osuus  $e^{-i\omega t}$  on aina itseisarvoltaan yksi. Toisin sanoen vaikka aaltofunktion reaali- ja imaginääriosat värähtelevät ajan muuttuessa, yhdessä ne muodostavat funktion, jonka itseisarvo ei muutu vaikka aika kuluisi.

Tästä seuraa, että *hiukkasen paikan todennäköisyysjakauma ei muutu* (kuva 17.32 (b)). Tällaisia kvantimekaanisia tiloja kutsutaan **stationaariksi** eli 'paikoillaan oleviksi'. Tässäkään tilassa *hiukkanen ei kuitenkaan ole paikoillaan* siinä mielessä, että sen nopeus olisi nolla. Edellähän juuri totesimme, että hiukkasen on *aina* pakko liikkua, ja tässä tilassa hiukkanen liikkuu yhtä aikaa kahteen suuntaan. Sen sijaan hiukkanen on *pai-kollaan* siinä mielessä, että *todennäköisyysjakauma ei muutu ajan kuluessa*. Tämän voi ymmärtää niin, että koska hiukkanen liikkuu yhtä aikaa sekä positiiviseen että negatiiviseen suuntaan, sen paikan todennäköisyysjakauma ei muutu ajan kuluessa.

Kaikki tilat  $|n\rangle$  ovat edellä esitetyn tarkastelun mukaan stationaarisia, ja niitä kutsutaan hiukkasen **ominaistiloiksi**. Vastaavasti hiukkasen sallittuja energioita näissä ominaistiloissa kutsutaan hiukkasen **ominaisenergioiksi**. Hiukkasen ei kuitenkaan tarvitse välttämättä olla juuri ominaistilassa, vaan hiukkanen voi olla myös tällaisten tilojen *superpositiossa*, jolloin tilanne on aaltofunktoiden näkökulmasta samanlainen kuin esimerkiksi värähtlevässä kitaran kielessä, jossa soi yhtä aikaa useita seisovia aaltoja harmonisilla taajuuksilla (vrt. kuva 15.31). Esimerkiksi ominaistilojen superposition  $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle$  aaltofunktio  $\psi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x, t) + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x, t)$  on aina nolla pisteissä  $x = 0$  ja  $x = L$ , joten sekin on kuopassa olevan elektronin mahdollinen aaltofunktio. Tämä aaltofunktio ja siihen liittyvä paikan todennäköisyysjakauma on pürretty kuvassa 17.33.

Kvantimekaanisessa tapauksessa ominaistilojen kulmataajuudet riippuvat tilan *kokonaisenergiasta* Planckin säädön  $\omega_n = E_n/\hbar$  mukaisesti. Tästä johtuen ominaistiloilla, joilla on eri energiat, on myös eri taajuudet. Niinpä eri energioihin liittyvien ominaistilojen superpositio sisältää useita eri taajuudella värähtleviä komponentteja, joten tällainen superpositio *ei ole stationaarinen tila* vaan hiukkasen paikan todennäköisyysjakauma muuttuu ajan kuluessa. Kuvan hiukkasen todennäköisyysjakauma on aluksi painottunut kuopan vasempaan laitaaan, mutta ajan kuluessa jakauma liikkuu kuopassa edestakaisin. Aaltofunktio käyttäätyy tällaisessa tilanteessa samoin kuin kuvassa 15.31 esitetty soittimen kieli, jossa värähtelee samanaikaisesti useita seisovia aaltoja.

Kuva 17.33: Jos tila ei ole ominaistila, hiukkisen todennäköisyysjakauma muuttuu ajan kuluessa.



Hiukkisen paikan sijaan yleensä meitä kuitenkin kiinnostaa hiukkisen liikemääri ja etenkin sen energia. Stationarisessa tilassa hiukkaselä on täsmällinen energia, mutta tila  $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle$  on superpositio kahdesta tilasta, joilla on eri energiat. Niinpä tässä tilassa hiukkisen energia on epämääriinen, ja energian mittaus antaa *joko* tuloksen  $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$  *tai* tuloksen  $E_2 = 4\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ . Siis vaikka ominaistilat  $|n\rangle$  eivät ole hiukkasten ainoat sallitut tilat potentiaalienergiakuopassa, energiat  $E_n$  ovat ainoat mahdolliset energiat, joita hiukkaselä voidaan havaita olevan.



**17.30** Elektroni on äärettömän syvässä energiakuopassa, jonka leveys on 1.0 nm, tilassa  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|4\rangle$ . Mitä energian arvoja elektronille voidaan mitata ja mikä on energian odotusarvo? (Vrt. esimerkki 17.3).

Samankaltainen periaate pätee kaikissa systeemeissä, joissa hiukkanen on vangittu pieneen tilaan. Muun muassa atomeissa ja molekyyleissä positiivisesti varautuneet ytimet (protonit) vetävät negatiivisesti varautuneita elektroneja sähköisesti puoleensa ja elektronien potentiaalienergia on sitä pienempi mitä lähempänä ytimiä ne ovat. Niinpä elektronien näkökulmasta atomi on kolmiulotteinen potentiaalikuoppa joka vangitsee elektronin ytimen läheisyyteen. Siksi elektronit voivat saada atomeissa vain joitakin tiettyjä ominaisenergioita. Elektronien energian mittauissa prosesseissa kuten fotonien absorptiossa ja emissiossa elektroneilla voidaan havaita olevan vain näitä ominaisenergioita, mikä selittää esimerkiksi diskreettien absorptio- ja emissiospektrien synny sekä mustan kappaleen säteilyn ominaisuudet.



**17.31** Selitä omin sanoin, millaisia ovat kvanttimekaaniset seisovat aallot ja mitä tarkoitetaan stationarisilla tiloilla. Millaisen aallon muodostaa esimerkiksi laatikkoon vangittu elektroni? Missä mielessä stationarisessa tilassa oleva elektroni on paikoillaan ja missä mielessä se liikkuu? Entä jos tila on erilaisten stationaaristen tilojen superpositio?

## esimerkki 17.5

## Normitus

Yhtälöiden (17.68) ja (17.70) kuvaama seisovan aallon aaltofunktio on normittamatonta, joten sen itseisarvon neliö ei kuva hiukkasen todennäköisyysjakaumaa. Ratkaise vastaava normitettu aaltofunktio  $\psi_n(x, t)$  potentiaalienergiakuopassa, jonka leveys on  $L$ .

**TILANNE** Aaltofunktion normittaminen tarkoittaa sen kertomista jollakin sopiaalla vakiolla niin, että funktio toteuttaa normitusehdon. Niinpä yhtälön (17.70) mukaan aaltofunktio täytyy olla muotoa

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t}, \quad (17.74)$$

missä  $A_n$  on normitusvakio, joka tehtävässä tulee ratkaista. Jos kuopan leveys on  $L$ , aaltoluvun mahdolliset arvot ovat  $k_n = n\frac{\pi}{L}$  ja taajuudet  $\omega_n = \frac{1}{\hbar} E_n = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2} n^2$ .

**SUUNNITELMA** Normitetun aaltofunktion itseisarvon neliön integraali yli koko avaruuden on yksi, koska tämä kuva hiukkasen paikan todennäköisyyttä ja hiukkasen täytyy olla jossakin. Koska aaltofunktio on nolla kaikkialla muualla kuin kuopassa, tässä tapauksessa riittää integroida kuopan leveyden yli.

Normitusehdo on yhtälönä

$$\int_0^L |\psi_n(x, t)|^2 dx = 1. \quad (17.75)$$

**RATKAISU** Auki kirjoitettuna normitusehdo on

$$|A_n|^2 \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = 1. \quad (17.76)$$

Yhtälön vasemman puolen voi integroida esimerkiksi kirjoittamalla sinin neliön muotoon  $\sin^2(k_n x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2k_n x))$  ja muistamalla kosinin integrointisäännön  $\int \cos(2k_n x) dx = -\frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x)$ . Tulokseksi saadaan

$$|A_n|^2 \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2} |A_n|^2 \int_0^L (1 - \cos(2k_n x)) dx \quad (17.77)$$

$$= \frac{1}{2} |A_n|^2 \left[ x + \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x) \right]_0^L \quad (17.78)$$

$$= \frac{1}{2} |A_n|^2 \left( L + \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L) - 0 - \frac{1}{2k_n} \sin(0) \right) \quad (17.79)$$

$$= \frac{L}{2} |A_n|^2. \quad (17.80)$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa on huomioitu, että  $2k_n L = 2n\frac{\pi}{L} L = 2n\pi$  ja sinifunktio  $\sin(2n\pi) = 0$  aina kun  $n$  on kokonaisluku. Normituskertoimiksi voidaan nyt ratkaista

$$|A_n| = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (17.81)$$

Mathematica:

```
(* aaltofunktio *)
psi = a Sin[k x] Exp[-I omega t];
omega = hbar k^2/2 m;
reunaehdo = {k -> n Pi/L, t -> 0}

(* normitus olettaen a reaaliseksi *)
normi = Simplify[
  Integrate[Abs[psi]^2 /. reunaehdo, {x, 0, L}],
  {Element[n, Integers], Element[a, Reals]}
]
(Abs[a]^2 L)/2

(* ratkaisu *)
Solve[normi == 1, a]
{a -> -(Sqrt[2]/Sqrt[L]), {a -> Sqrt[2]/Sqrt[L]}}
```

**ARVIOINTI** Normitusvakio ei riipu kvanttiluvusta  $n$ . Huomataan kuitenkin, että normitusehdosta voidaan ratkaista ainosaan kertoimen  $A_n$  itseisarvo. Voidaan siis valita  $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ , jolloin aaltofunktioksi tulee

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t}, \quad (17.82)$$

mutta aivan yhtä hyvin voitaisiin valita esimerkiksi  $A_n = i\sqrt{\frac{2}{L}}$ , jolloin aaltofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$\psi_n(x, t) = i\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{2i} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{2L}} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) e^{-i\omega_n t}. \quad (17.83)$$

Tästä muodosta nähdään, että aaltofunktio on yhdistelmä muotoa  $e^{ik_n x}$  olevia aaltoja.

## Schrödingerin yhtälö

Potentiaalikuopassa olevalla elektronilla on siis tiettyjä ominaistiloja ja näitä vastaavia ominaisenergioita, koska kuopan reunat asettivat hiukkasen aaltofunktioille reunaehdon. Aaltofunktio heijastuu kuopan reunasta, ja näin kuoppaan syntyy samanlaisia seisovia aaltoja kuin jännitettyn kitaran kieleen. Nämä käy *aina*, kun hiukkanen on vangittu pieneen tilaan. Todellisuudessa hiukkaset eivät kuitenkaan ole äärettömän syvissä, täsmällisen levyisissä laatikoissa, vaan esimerkiksi atomeissa olevien elektronien potentiaalienergia riippuu ytimestä mitatusta etäisyydestä. Siispä vaikka elektronin aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja kaikissa potentiaalikuopissa, aaltojen muoto riippuu kuopan muodosta. Erityisesti elektronin aaltofunktion kulmataajuus ja energia riippuvat siitä, millainen elektronin potentiaalienergia on, eikä niitä yleensä voi päättää yhtä yksinkertaisesti kuin kuvassa 17.31. Monimutkaisten tilanteiden analysoimiseksi tarvitaan fysikaalinen laki, jonka perusteella hiukkasten tilat voidaan määrittää *missä tahansa tilanteessa*.

Tämä laki on kvanttimekaniikan peruslaki eli **Schrödingerin yhtälö** (Erwin Schrödingerin mukaan). Schrödingerin yhtälöä ei voi varsinaisesti *johtaa* mistään. Se on peruslaki, jota ei voi perustella klassisen mekaanikan kautta. Historiallisesti Schrödinger päätyi yhtälöönsä ja aaltofunktion käsittelyseen samaan tapaan kuin mekin: etsimällä hiukkasia kuvavaa aaltoa, joka toteuttaisi de Broglien hypoteesin liikemääärän ja aallonpituuden riippuvuudesta. Samalla Schrödinger päätteli yhtälön, jonka ratkaisuja nämä aaltofunktiot ovat. Sittemmin yhtälöä on testattu valtavasti sekä kokeellisesti että teoreettisesti johtamalla sen avulla tunnettuja klassisia lakeja. Yhtälön on todettu toimivan erinomaisella tarkkuudella.

Schrödingerin yhtälö voi saada erilaisissa systeemeissä erilaisia muotoja, minkä vuoksi yleisesti pätevä yhtälön kirjoittaminen on hankala. Yleisimillään Schrödingerin yhtälö voi modernissa kvantimekaniikassa kirjoittaa muotoon

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle, \quad (17.84)$$

missä  $E_{\text{kokonais}}$  on hiukkasen kokonaisenergia ja  $\hat{H}$  hiukkasen kokonaisenergiaa kuvaava *operaattori* (ns. Hamiltonin operaattori William Rowan Hamiltonin mukaan). Joissakin tilanteissa  $\hat{H}$  voi olla matriisi, jolloin Schrödingerin yhtälö on matriisin ominaisarvohtälö. Toisissa tilanteissa  $\hat{H}$  voi sisältää esimerkiksi derivaatoja, jolloin kyseessä on differentiaaliyhtälö. Kummassakin tapauksessa on mahdollista, että yhtälön ratkaisut ovat diskreetit, jolloin ratkaisuna saatavat *ominaisarvot*  $E_{\text{kokonais}}$  oват hiukkasen mahdolliset kokonaisenergian arvot ja vastaavat *ominaistilat*  $|\psi\rangle$  ovat ne stationaariset tilat, joissa hiukkasella on ominaisarvoa vastaava kokonaisenergia.

Schrödinger muotoili alunperin yhtälön nimenomaan aaltofunktioille, jolloin loppululos on differentiaaliyhälö. Hän oivalsi, että aaltofunktion  $\psi(x) = e^{ikx}$  derivaatta  $x$ :n suhteen on

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik e^{ikx} = ik\psi. \quad (17.85)$$

Toisin sanoen jos tämän aaltofunktion derivoi ja derivaatan kertoor tekijällä  $-i\hbar$ , loppuloksenä on aaltofunktio itse kerrottuna sen liikemäärellä,

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i^2 \hbar k \psi = \hbar k \psi = p_x \psi. \quad (17.86)$$

Tästä herää ajatus, voisiko *kaikkien* aaltofunktioiden liikemäären laskea samaan tapaan. Osoittautuu, että vastaus on ei. Aivan näin suoraviivaisesti lasku ei onnistu. Osoittautuu kuitenkin, että tämä laskuoperaatio — derivoointi ja vakiolla  $-i\hbar$  kertominen — liittyy yleisesti aaltofunktioiden liikemäärään, ja sen kautta on mahdollista laskea liikemäären odotusarvo missä tahansa tilassa. Toisin sanoen *aaltofunktion liikemäärästä kuvaava laskusääntö*

$$\hat{p}_x \doteq -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (17.87)$$

Operaattori  $\hat{p}_x$  ei ole vielä mikään funktio vaan laskusääntö funktion muuttamiseksi toiseksi funktioksi, koska siinä ei kerrota, mitä derivoidaan. Operaattorille voidaan antaa funktio  $\psi(x)$  operoitavaksi, ja tällöin saadaan loppuloksenä uusi funktio  $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = -i\hbar \psi'(x)$ . Tässä vastaavuuden symboli  $\doteq$  tarkoittaa, että kyseessä on operaattorin muoto, kun käytämme nimenomaan aaltofunktioita, mutta muissa esitysmuodoissa liikemäärästä vastaava laskusääntö voi olla erilainen.



**17.32** Olkoon  $\psi(x) = A \sin(kx)$ . Mitä on  $\hat{p}_x \psi$ ? Onko olemassa jokin vakio  $p$  niin että  $\hat{p}_x \psi = p\psi$ ?

Sen, että liikemäärä liittyy aaltofunktion derivaattaan, voi perustella täsmällisesti, mutta se vaatii huomattavasti syvempää ymmärrystä kvantimekaniikan teoreettisesta rakenteesta, emmekä valitettavasti tässä vaiheessa voi sitä tehdä. Jos nyt kuitenkin hyväksymme, että tällainen operaattori eli laskusääntö liittyy aaltofunktion liikemäärään, voimme johtaa muitakin tärkeitä operaattoreita. Jos nimittäin suhteellisuusteoriaa

ei tarvitse huomioida, liike-energia on  $K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{p_x^2}{2m}$ . Voisi siis arvata, että liike-energian operaattori muodostetaan korottamalla liikemääärän operaattori neliöön. Tässä kohtaa pitää olla myös tarkkana siitä, mitä operaattorin neliöiminien ylipäänsä tarkoittaa. Operaattorin neliö ei tarkoita sitä, että operaattoria sovellettaisiin kerran ja tämän jälkeen lopputulos neliötäisiin, vaan sitä, että operaattoria käytetään kaksi kertaa,  $\hat{p}_x^2\psi = \hat{p}_x(\hat{p}_x\psi)$ . Tällä logiikalla liike-energian operaattori on

$$\hat{K}|\psi\rangle = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2|\psi\rangle \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{(-i\hbar)^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \quad (17.88)$$

Vaikea emme tätkään voi sen syvällisemmin perustella, tämä arvaus osoittautuu oikeaksi.

Vastaava potentiaalienergian operaattori on aaltofunktion tapauksessa vain *kertominen potentiaalienergia-funktioilla*

$$\hat{U}|\psi\rangle \stackrel{\hat{=}}{=} U(x)\psi(x). \quad (17.89)$$

Kokonaisenergia on puolestaan liike-energian ja potentiaalienergian summa, joten kokonaisenergiaa kuvaava operaattori  $\hat{H} = \hat{K} + \hat{U}$ . Näin ollen *aaltofunktion Schrödingerin yhtälö*  $\hat{H}|\psi\rangle = (\hat{K} + \hat{U})|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle$  saa muodon

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E_{\text{kokonais}}\psi(x). \quad (17.90)$$

Jos hiukkasen potentiaalienergia  $U(x)$  tunnetaan paikan funktiona, tästä yhtälöstä voidaan periaatteessa ratkaista ominaistiloja kuvavat aaltofunktiot  $\psi(x)$  sekä näitä vastaavat ominaisenergiat  $E_{\text{kokonais}}$ . Käytännössä yhtälön ratkaiseminen tarkasti on kuitenkin erittäin vaikeaa joitakin erityistapauksia lukuunottamatta.

Ominaistilat värähtelevät aina Planckin kulmataajuudella  $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$ , joten niiden ajasta riippuvat aaltofunktiot ovat aina muotoa

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}. \quad (17.91)$$

Hiukkasen *kaikki mahdolliset tilat* voidaan puolestaan aina muodostaa tällaisten ominaistilojen superposiiton.



**17.33** Eräässä systeemissä elektronin ominaisaaltofunktiot ovat  $\psi_n(x)$  ja ominaisenergiat  $E_n = (n + 1/2)\epsilon$ , missä  $\epsilon$  on jokin pieni energia. (a) Mikä on tilan  $|n\rangle$  aaltofunktion kulmataajuus? (b) Mikä on elektronin ajasta riippuvan aaltofunktion lauseke tilassa  $|n\rangle$ ? (c) Mikä on ajasta riippuvan aaltofunktion lauseke superpositiollaissa  $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$ ?

### esimerkki 17.6

### Hiukkanen kuopassa

Ratkaise äärettömän syvässä potentiaaliopassa olevan hiukkasen ominaisenergiat Schrödingerin yhtälön avulla.

**SUUNNITELMA** Hiukkasen ominaistilojen aaltofunktiot ratkaistiin jo aikaisemmin. Sijoitetaan nämä funktiot Schrödingerin yhtälöön, jolloin jos aaltofunktiot todella ovat Schrödingerin yhtälön ratkaisuja, energia-operaattorilla operoiminen palauttaa alkuperäisen ominaisfunktion sitä vastaavalla energialla kerrottuna.

Aaltofunktiot ovat muotoa

$$\psi_n(x, t) = A \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t}, \quad (17.92)$$

missä  $A$  on normeerausvakio. Koska potentiaaliopassa potentiaalienergia on nolla, Schrödingerin yhtälö on

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E_{\text{kokonais}}\psi. \quad (17.93)$$

**RATKAISU** Aaltofunktion derivaatat ovat

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = n\frac{\pi}{L}A \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} = -n^2\frac{\pi^2}{L^2}A \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t}. \quad (17.94)$$

Sijoitus Schrödingerin yhtälöön antaa tuloksen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(-n^2\frac{\pi^2}{L^2}A\right) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2A \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-i\omega t} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2\psi_n = E_{\text{kokonais}}\psi_n, \quad (17.95)$$

joten kokonaisenergian täytyy olla

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2. \quad (17.96)$$

**ARVIOINTI** Ratkaistu kokonaisenergia on sama mikä aikaisemmin päätteliin hiukkasen aaltoluvun perusteella, kuten pitääkin.

## esimerkki 17.7

## Matriisimuotoinen Schrödingerin yhtälö

Eräällä kvanttimekaanisella hiukkasella on vain kaksi energian ominaistila,  $|\uparrow\rangle$  ja  $|\downarrow\rangle$ , joissa hiukkasen energia on  $E_{\uparrow}$  ja  $E_{\downarrow}$ . Mikä on hiukkasen Schrödingerin yhtälö?

**SUUNNITELMA** Koska hiukkasella on vain kaksi ominaistila, voimme kuvata näitä pystyvektoreina

$$|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (17.97)$$

Hiukkanen voi olla muissakin tiloissa, mutta nämä voidaan aina esittää ominaistilojen superpositiona

$$|\psi\rangle = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} c_{\uparrow} \\ c_{\downarrow} \end{bmatrix} = \mathbf{c}, \quad (17.98)$$

missä  $c_{\uparrow}$  ja  $c_{\downarrow}$  ovat jotkin mahdollisesti kompleksilukuarvoiset kertoimet.

Hiukkasen ominaistilat ovat Schrödingerin yhtälön ominaisratkaisuja, joten Schrödingerin yhtälössä esiintyvän Hamiltonin operaattorin täytyy olla se matriisi, jonka ominaisvektoreita ominaistilat ovat. Tiloja vastaavat energiat ovat puolestaan yhtälön ominaisarvot.

**RATKAISU** Koska ominaistilat kuvattiin yksikkövektoreina, Hamiltonin operaattoria kuvaava matriisi on

$$\hat{H} \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix}, \quad (17.99)$$

sillä tälle pätee

$$\hat{H}|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\uparrow} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{=} E_{\uparrow}|\uparrow\rangle \quad (17.100)$$

sekä

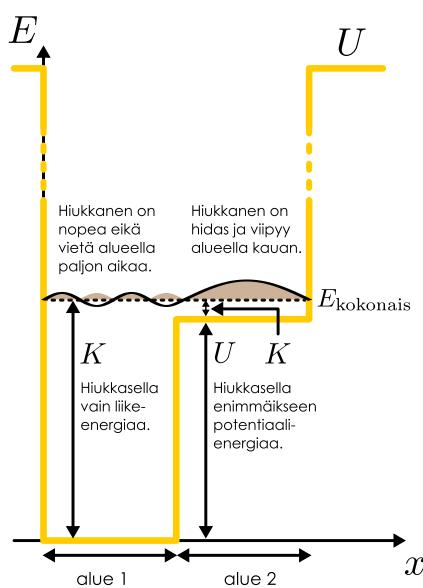
$$\hat{H}|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{\downarrow} \end{bmatrix} \hat{=} E_{\downarrow}|\downarrow\rangle \quad (17.101)$$

Systeemiä kuvaava Schrödingern yhtälö on näin ollen matriisin ominaisarvo-yhtälö

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \mathbf{c} = E_{\text{kokonais}}\mathbf{c} \quad (17.102)$$

## Paikasta riippuva potentiaali

Kuva 17.34: Elektronin aallonpituuus ja amplitudi muuttuvat, jos elektronin liike-energia muuttuu.



Päättämme kvantimekaniikan tarkastelun aikanaan luvussa 17.5 esittelemällä kvantimekaanisen atomimallin. Atomissa elektri on ytimen sähkökentän muodostamassa potentiaaliakuopassa, jossa se muodostaa seisovia aaltoja. Tämä rajoittaa elektronin aaltofunktion mahdollista muotoa, ja siksi elektronilla on atomissa vain tiettyjä sallittuja ominaisenergioita. Atomi on kuitenkin monimutkaisempi potentiaaliakuoppa kuin kuvan 17.31 yksiulotteinen laatikko, ja siksi aaltofunktioiden muotoa ei voi päättellä yhtä helposti kuin "laatikossa". Atomiin sidotun elektronin mahdolliset aaltofunktiot pitää ratkaista Schrödingerin yhtälöstä, mutta nämä ratkaisut ovat varsin monimutkisia. Ymmärtääksemme hiukan paremmin miksi aaltofunktiot käyttäytyvät atomissa kuten käyttäytyvät, tutkimme ensin yksinkertaisempaa tapausta: yksiulotteista potentiaaliakuoppaa, jossa elektronin potentiaalienergia riippuu paikasta. Tarkastelemme esimerkkinä kuvan 17.34 systeemiä, jossa elektri on vangittu äärettömän syväen potentiaalienergiakuoppaan. Erotuksena aikaisemmasta tämä kuoppa on jaettu kahteen osaan, joista toisessa elektronin potentiaalienergia on nolla (alue 1) ja toisessa  $U_0 > 0$  (alue 2).

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin kuopan korkeamman puoliskon potentiaalienergia,  $E_{\text{kokonais}} > U_0$ , jolloin hiukkanen pääsee liikkumaan vapaasti koko kuopan alueella. Koska kuopan syvässä päässä alueessa 1 hiukkasen

potentiaalienergia on nolla, sen kokonaisenergia on tässä kuopan osassa vain liike-energiaa,  $E_{\text{kokonais}} = K$ . Alueessa 2 hiukkasella on sen sijaan myös potentiaalienergiaa, joten hiukkasen kokonaisenergia on liike-energian ja potentiaalienergian summa,  $E_{\text{kokonais}} = K + U_0$ . Niinpä sen liike-energia on pienempi kuin alueessa 1. Tilanne on hiukan samanlainen kuin klassisella heilurilla: Tasapainoasemassa heilurin liike-energia on suurimmillaan, mutta heilurin heilahtaaessa ylöspäin sen liike-energiaa muuttuu potentiaalienergiaksi. Heilurin kokonaisenergia on kuitenkin koko ajan vakio.

Kuitenkin koska elektroni on kvanttimekaaninen hiukkanen, se ei liiku kuopassa edestakaisin vaan sen aaltofunktio täyttää koko kuopan. Niinpä elektroni on samanaikaisesti sekä alueessa 1 että alueessa 2. Niinpä parempi klassinen analogia elektronin aaltofunktioille onkin aaltoileva köysi, jossa on sekä ohut että paksu osuus. Toisin sanoen piste, jossa elektronin potentiaalienergia muuttuu, on *rajapinta*, jonka eri puolilla aallolla on erilaiset ominaisuudet.

Alueessa 1 hiukkasella on vain liike-energiaa, joten sen kokonaisenergia on

$$E_{\text{kokonais}} = K = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}. \quad (17.103)$$

Tästä aaltoluvaksi ratkeaa

$$k_1 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m E_{\text{kokonais}}}. \quad (17.104)$$

Alueessa 2 hiukkasen liike-energia on sen kokonaisenergian ja potentiaalienergian erotus,

$$E_{\text{kokonais}} - U_0 = K = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}, \quad (17.105)$$

joten aaltoluku tässä alueessa on

$$k_2 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m (E_{\text{kokonais}} - U_0)}. \quad (17.106)$$

Niinpä alueessa 1, jossa elektronilla on paljon liike-energiaa, elektronilla täytyy olla suuri aaltoluku ja siis pieni aallonpituuus. Alueessa 2 elektronilla on vähän liike-energiaa, joten sillä on pieni aaltoluku ja suuri aallonpituuus. Tämä pätee yleisesti: mitä syvämpi potentiaalikuoppa on elektronin kokonaisenergiaan verrattuna, sitä suurempi aaltoluku ja lyhyempi aallonpituuus elektronin aaltofunktiossa on.



- 17.34** (a) Millainen aaltofunktio kuvan 17.34 potentiaalikuoppaan muodostuu, kun  $U_0$  lähestyy nollaa?  
 (b) Vertaa aaltofunktion aaltolukuja alueissa 1 ja 2, kun elektronin kokonaisenergia on suuri verrattuna potentiaalienergiaan  $U_0$ . (c) Vertaa kohtia (a) ja (b).

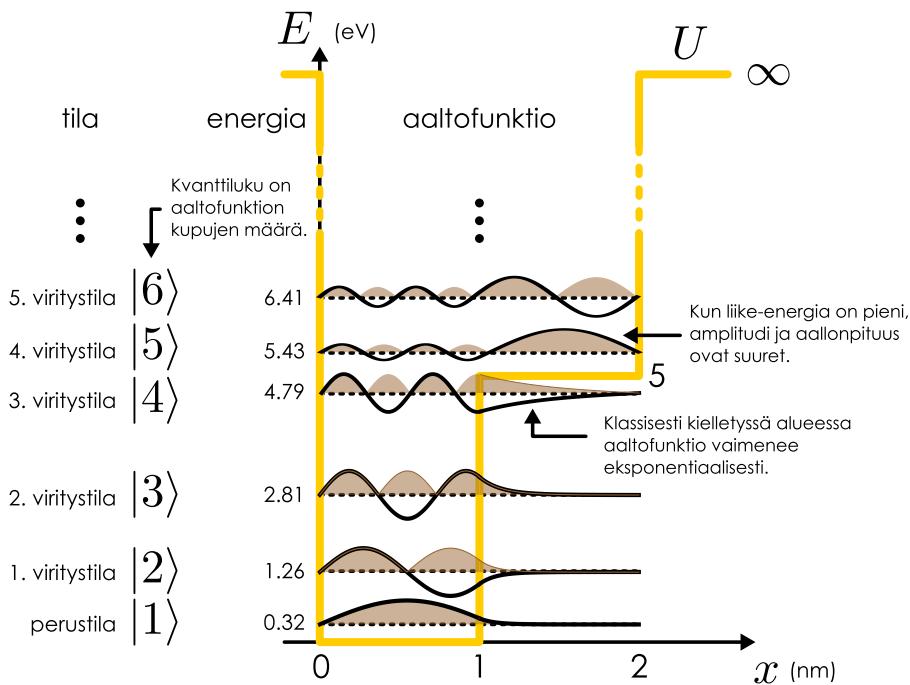
Aaltojen muodon ja aaltoluvut voisi johtaa myös suoraan Schrödingerin yhtälöstä, sillä aaltofunktion sivimuotoisuus sekä liike-energian lauseke  $K = \hbar^2 k^2 / (2m)$  ovat yhtälön suoria seurauskia. Tämän enempää informaatiota Schrödingerin yhtälöstä itsestään ei kuitenkaan saada. Aaltojen amplitudia ja vaihetta ei voida siitä ratkaista, ja erityisesti myöskään hiukkasen *kokonaisenergiaa ei voida ratkaista pelkästään Schrödingerin yhtälöstä*. Tasaisen kuopan tapauksessahan energian sallitut arvot seurasivat vaativuudesta, että aaltofunktio on kuopan reunalla nolla (eli toisin sanoen kuoppaan on mahduttava täsmälleen kokonaislukumäärä seisovan aallon kupaaja). Tämä on aaltofunktiossa asetettu *reunaehdo*, ja nytkin energian ominaisarvot on ratkaistava reuna- ja jatkuvuusehtojen avulla.

Aaltofunktio on oltava kaikkialla jatkuva — erityisesti eri alueiden rajalla. Lisäksi aaltofunktion derivaatan on oltava jatkuva kaikkialla muualla paitsi kuopan reunalla. (Tämä poikkeus johtuu siitä, että potentiaalienergia on ääretön kuopan reunalla.) Ominaisenergioiden ratkaiseminen näiden ehtojen avulla on esitetty esimerkissä 17.8, kun kuopan leveys on 2 nm ja matalampi puoli on 5 eV pohjaa korkeammalla. Lopputuloksena saatavia ominaisalojen aaltofunktioita on piirretty kuvaan 17.35. Aaltofunktio voidaan ratkaista samalla tavalla kuin esimerkissä 15.5, jossa ratkaistiin köydessä kulkevan aallon muoto, kun köydessä on ohut ja paksu osuus. Tällöin aaltofunktio määritettiin erikseen sekä ohuessa että paksussa köydessä, ja nämä ratkaisut yhdistettiin vaativalla, että rajapinnalla aaltofunktion täytyi olla sekä jatkuva että derivoitava.

Kuvasta 17.35 nähdään, että aaltofunktion amplitudi on suurempi kuopan matalassa päässä eli alueessa 2. Matemaattisesti tämä seuraa aallon jatkuvuusehdoista alueiden 1 ja 2 rajapinnalla, mutta tämänkin ominaisuuden voi ymmärtää klassisen analogian kautta. Mitä suurempi liike-energia hiukkasella nimittäin on, sitä suurempi nopeus sillä täytyy olla. Esimerkiksi klassinen heiluri liikkuu tasapainoasemassa nopeasti ja heilahduksen ääriasennossa hitaasti. Toisaalta tämä tarkoittaa sitä, että heiluri ohittaa tasapainoasemansa nopeasti mutta viipyy heilahduksen ääriasennossa kauan. Jos siis värähtelevästä heilurista otetaan valokuva satunnaisella ajan hetkellä, heiluri on valokuvassa todennäköisemmin lähellä heilahduksen ääriasemaa kuin tasapainoasemaa. Tämäkin on yleisesti totta: liikkova kappale viettää suhteellisesti eniten aikaa alueessa, jossa se liikkuu hitaasti — eli alueessa jossa sillä on pieni liike-energia.

Kvanttimekaaninen hiukkanen ei ole missään tiettyssä paikassa, mutta hiukkasen paikan kvanttimekaaninen todennäköisyysjakauma käyttää samalla tavalla kuin klassisen hiukkasen paikan jakauma ajan suhteen

Kuva 17.35: Aaltofunktio potentiaalienergian riippuessa paikasta. Klassinen hiukkasan ei voi koskaan liikkua alueella, jossa sen potentiaalienergia olisi kokonaisenergiaa suurempi, koska tällöin hiukkasen liike-energia olisi negatiivinen. Kvanttimekaanisen hiukkasen todennäköisyysjakauma kuitenkin ulottuu myös tähän alueeseen.



— kvanttihiukkasan paikan todennäköisyystiheys on suurin alueissa, joissa hiukkasen nopeus on pienin. Edelleen koska hiukkasan paikan todennäköisyys liittyy sen aalofunktion itseisarvon neliöön, aalofunktion amplitudin täytyy olla suuri alueessa, jossa hiukkasen liike-energia on pieni ja sen potentiaalienergia on suuri. Tämäkin ilmiö näkyi kuvassa 17.35, sillä aalofunktion amplitudi on tiloissa  $|5\rangle$  ja  $|6\rangle$  alueessa 1 matala ja alueessa 2 korkea.

Ilmiö on samantyyppinen kuin rantaan saapuvilla veden pinta-aalloilla. Aallot nimittäin lükkivat matalassa vedessä sitä hitaammin, mitä matalampaa vesi on. Rantaan saapuvat aallot siis hidastuvat ja samalla niiden korkeus (amplitudi) kasvaa. Samaan tapaan myös kvanttimekaanisten aaltojen amplitudi kasvaa niiden hidastuessa. Aallot kuitenkin eroavat siinä, että meren aaltojen aallonpituuus *lyhentyy* niiden hidastuessa mutta kvanttimekaanisten aaltojen aallonpituuus *pitenee*.

**17.35** Kuinka köydessä kulkevan aallon (i) nopeus, (ii) amplitudi ja (iii) aallonpituuus muuttuvat, jos köysi muuttuu (a) ohuemmaksi tai (b) paksummaksi. Vertaa tulosta kvanttimekaaniseen aalofunktioon.

Edellisessä analyysissä tarkasteltiin vain tilannetta, jossa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin sen potentiaalienergia alueessa 2. Näihän ei kuitenkaan välittämättä tarvitse olla, vaan elektronin kokonaisenergia voi aivan hyvin olla tätä pienempikin, jolloin elektroni on vangittu kuopan syvempään puoliskoon eli alueeseen 1. Klassisen mekanikan mukaan elektronin ei tällöin pitäisi päästää lainkaan pois alueesta 1, koska elektronin liike-energian pitäisi olla alueessa 2 negatiivinen. Klassisesti tämä on mahdotonta, koska liike-energia on pienimmillään nolla levossa olevalla kappaleella. *Kvanttimekaanisesti näin ei kuitenkaan ole!* Jos nimittäin  $E_{\text{kokonais}} < U_0$ , Schrödingerin yhtälöksi alueessa 2 saadaan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + U_0 \psi_2(x) = E_{\text{kokonais}} \psi_2(x), \quad (17.107)$$

ja tästä voidaan edelleen ratkaista aalofunktion toiseksi derivaataksi

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{2m(U_0 - E_{\text{kokonais}})}{\hbar^2} \psi_2(x). \quad (17.108)$$

Tämän yhtälön ratkaisee yrite  $\psi_2(x) = e^{\eta x}$ . Tälle yritteelle nimittäin pätee  $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \eta^2 \psi_2(x)$ , ja näiden lausekkeiden sijoitus Schrödingerin yhtälöön antaa tuloksen

$$\eta^2 \psi_2(x) = \frac{2m(U_0 - E_{\text{kokonais}})}{\hbar^2} \psi_2(x), \quad (17.109)$$

## KVANTTIMEKANIKKAA

joka toteutuu kaikilla  $x$ -koordinaatin arvoilla vain, jos

$$\eta = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_{\text{kokonaista}})}. \quad (17.110)$$

Huomaa, että sekä negatiivinen että positiivinen ratkaisu on mahdollinen.

Schrödingerin yhtälön mukaan aaltofunktio ei siis ole alueessa 2 nolla eikä sinimuotoinen aalto vaan se muuttuu eksponentiaalisesti. Schrödingerin yhtälön yleinen ratkaisu alueessa 2 on näin ollen muotoa

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\eta x} + B_2 e^{-\eta x}. \quad (17.111)$$

Tässä esiintyvien vakoiden  $A_2$  ja  $B_2$  arvoja ei voi laskea Schrödingerin yhtälöstä vaan ne on jälleen päätteltyä reunaehtoista. Koska Schrödingerin yhtälö on yhdessä ulottuvuudessa toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, yleisessä ratkaisussa pitää olla täsmälleen kaksi vapaata parametria.



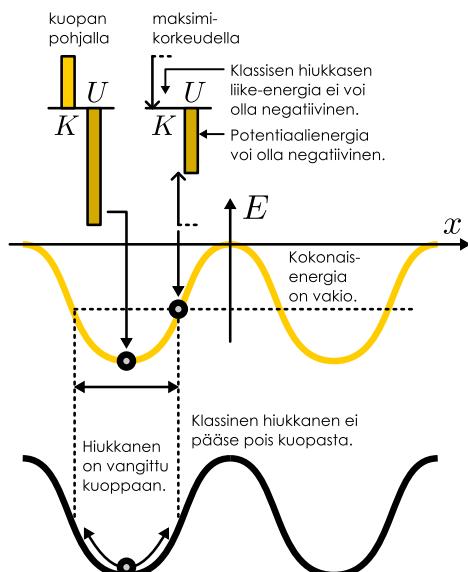
**17.36** Miten parametri  $\eta$  muuttuu, jos elektronin kokonaisenergia kasvaa? Miten tämä näkyy aaltofunktiossa? Vertaa kuvaan 17.35!

Yhteenvedona siis aaltofunktio on alueessa 1 sinimuotoinen, koska tässä alueessa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin potentiaalienergia. Alueessa 2 aaltofunktio on sen sijaan eksponentiaalinen, kuten kuvassa 17.35 nähdään. Aaltofunktion on mentävä kuopan oikealla reunalla nollaan, koska potentiaalienergia kohoaa siellä äärettömäksi. Niiinpä aaltofunktion täytyy olla alueessa 2 eksponentiaalisesti vaimeneva siirtymättä poispäin alueesta 1. Tämä on yleisპätevä tulos: Klassisesti kielletystä alueessa, jossa hiukkasen kokonaisenergia on pienempi kuin sen potentiaalienergia, hiukkasen aaltofunktio vaimenee eksponentiaalisesti. Vakio  $1/\eta$  kuvailee vaimenemisen mittakaavaa ja sitä kutsutaankin vaimenemismatkaksi tai tunkeutumisyvyydeksi.

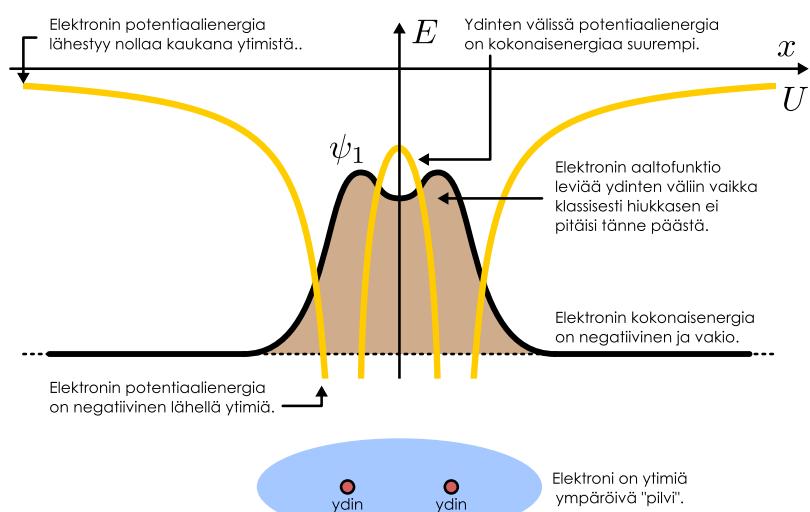
Ilmiö on erityisen mielenkiintoinen silloin, jos systeemissä on potentiaalienergiavalli eli kapea korkean potentiaalienergian alue. Jos esimerkiksi syteemissä on kaksi erillistä potentiaalienergiakuoppaa ja hiukkanen on aluksi yhdessä kuopassa, sen ei klassisen mekanikan mukaan pitäisi mitenkään päästää sieltä pois ilman, että ulkopuolinen vuorovaikutus antaa sillle lisää energiota (kuva 17.36 (a)). Esimerkiksi jos maahan kaivaa kaksi kuoppaa ja asettaa yhteen pallon, pallo ei hyppää itsestään kuopasta toiseen. Kvantimekaniikkassa kuitenkin tilanne on toinen. Jos kuoppien välinen etäisyys on tunkeutumissyyjien luokkaa tai sitä pienempi, hiukkasen aaltofunktio pääsee klassisesti kielletyn alueen läpi kuopasta toiseen. Kvantimekaanisen hiukkasen aaltofunktio voi siis olla nollasta poikkeava kummassakin kuopassa ja paikkaa mitattaessa hiukkasen voidaan havaita siirtyneen eri kuopaan kuin mihin se alunperin asetettiin. Silloin hiukkasella on nollaa suurempi todennäköisyys läpäistä alue, jonka kautta sen ei klassisen mekanikan mukaan pitäisi voida koskaan kulkea.

Kuva 17.36: Klassinen hiukkanen ei voi päästää pois potentiaalienergiakuopasta, jos hiukkasen kokonaisenergia on liian pieni. Kvantimekaanisen hiukkasen aaltofunktio kuitenkin levittää yli kuopan ulkopuolellekin. Kovalenttinen sidos muodostuu, kun elektroni levii kahden atomiytimen väliseen klassisesti kiellettyyn alueeseen, jossa potentiaalienergia on elektronin kokonaisenergiaa suurempi.

(a) Klassinen hiukkanen kuopassa.

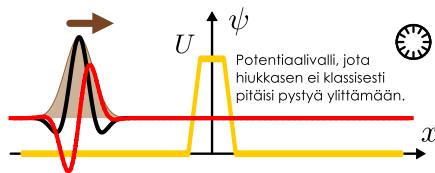


(b) Elektroni kahden atomiytimen ympärillä.



Kuva 17.37: Kvanttimekaanista hiukkasta kuvaava aaltopulssi voi tunneloitua läpi potentiaalivallista eli alueesta, jossa hiukkisen potentiaalienergia on sen kokonaisenergiaa suurempi.

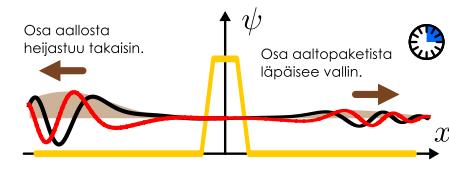
(a) Aaltopulssi saapuu vasemmalta.



(b) Aaltopulssi tunneloituu vallin läpi.



(c) Osa aallostaa heijastuu, osa läpäisee vallin.



Tätä ilmiötä kutsutaan **tunneloitumiseksi** ja se on erittäin tärkeä sekä monissa luonnonilmiöissä että teknologisissa sovelluksissa. Eräs tällainen ilmiö on kovalenttisten sidosten muodostuminen, jonka yksinkertainen malli on esitetty kuvassa 17.36 (b). Kuvan molekyylissä on kaksi atomia, joista kummankin ydin muodostaa elektroneille potentiaalikuopan, koska ytimen positiivisesti varautuneet protonit vetävät negatiivisesti varautuneita elektroneja sähköisesti puoleensa. Jotta elektroni pysyi atomissa, sen kokonaisenergia on oltava pienempi kuin tämän kuopan ulkoreunan korkeus, mutta itse asiassa elektronin kokonaisenergia on yleensä myös pienempi kuin potentiaalienergia ydinten *välissä*. Klassinen hiukkanen olisi tällaisessa tilanteessa vangittu *yhden* ytimen ympärille eikä mitään sidosta voisi syntyä. Kvanttimekaanisen elektronin aalofunktio pääsee kuitenkin kulkemaan atomien välisen alueen läpi ja levittäytymään *kummankin* ytimen ympärille. Tällöin elektroni ei ole kummankaan ytimen "oma" vaan atomit jakavat sen muodostaan sidoksen.



**17.37** Montako kupua on kuvan 17.36 (b) aalofunktiossa? (Huom. kupu ei ole aalofunktion maksimi vaan solmujen erottama alue.) Mikä on tilan kvanttiluku? Miltä näyttäisi seuraavan viritystilan aalofunktio?

Myös vapaasti liikkuvat hiukkaset voivat tunneloitua kuten kuvassa 17.37, jossa elektronia kuvaava aaltopulssi törmää energiavallin eli alueeseen, jossa elektronin potentiaalienergia olisi sen kokonaisenergiaa suurempi. Jos elektroni olisi klassinen hiukkanen, sen liike-energia ei voisi mitenkään riittää nousemaan tämän energiavallin yli eikä elektroni siis voisi millään päästä vallin toiselle puolelle. Kuitenkin koska elektroni on aalto, se ei kimpaa energiavallista kuin pallo seinästä vaan vallikin on aalolle vain rajapinta. Jos valli olisi paksu, aalto kokooi kokonaishetkistä ja elektroni palaisi varmasti takaisin tulosuuntaansa. Sen sijaan jos valli on tarpeeksi ohut, osa aallostaa voi läpäistä sen ja jatkaa matkaansa vallin takana alueessa, johon elektronin ei klassisen hiukkasmallin mukaan pitäisi päästää. Tätä hyödynnetään esimerkiksi tunnelointimikroskoopissa, jossa pintojen rakenteita voidaan havaita atomienkin kokoluokkaa tarkemmin tuomalla erittäin terävä neula alle nanometrin päähän tutkittavasta pinnasta. Elektronin irrottaminen tutkittavasta pinnasta vaatisi paljon energiata, joten pinnan ja neulan välillä jäävä rako on elektronille potentiaalienergiavalli. Klassisesti elektronien pitäisi pysyä tiukasti kiinni pinnassa, mutta todellisuudessa elektroniaallot voivat tunneloitua tutkittavasta pinnasta neulaan ilman, että niitä varsinaisesti irrotetaan pinnasta antamalla niille energiata. Elektronien tunneloituessa pinnan ja neulan välillä siirtyy varausta ja systeemissä kulkee siis sähkövirta, ja mikroskoopin toiminta perustuu tämän virran mittauiseen neulan paikan funktiona.



**17.38** Jos kuvan 17.37 (c) elektronin paikka tai nopeus mitataan, mitä voidaan havaita ja kuinka todennäköisesti?

## esimerkki 17.8

## Epätasainen kuoppa

**Hiukkanen on potentiaalikuopassa, jonka leveys on 2 nm. Hiukkasen potentiaalienergia on nolla välillä [0 nm, 1 nm],  $U_0 = 5 \text{ eV}$  välillä [1 nm, 2 nm] ja ääretön muualla. Mikä ovat hiukkasen ensimmäiset ominaisenergiat, joille  $E_{\text{kokonais}} > U_0$ .**

**SUUNNITELMA** Jaetaan systeemi alueisiin 1 ja 2 kuten kuvassa 17.34. Merkitään kuopan leveyttä  $L$ . Tekstissä osoitettiin, että alueessa, jossa potentiaalienergia on vakio ja hiukkasen kokonaisenergiaa pienempi, aaltofunktio on sinimuotoinen. Aaltofunktion täytyy olla nolla kuopan reunoilla, jossa potentiaalienergia on ääretön, ja sekä aaltofunktio että sen derivaatan on oltava jatkuvia alueiden rajalla.

Alueessa 1 aaltofunktioksi voidaan valita

$$\psi_1(x) = A_1 \sin(k_1 x), \quad (17.112)$$

koska tämä on reunaehdon  $\psi_1(0) = 0$  toteuttava Schrödingerin yhtälön ratkaisu. Tässä aaltoluku on Schrödingerin yhtälön perusteella

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}. \quad (17.113)$$

Alueessa 2 aaltofunktioksi puolestaan saadaan

$$\psi_2(x) = A_2 \sin(k_2(x - L)), \quad (17.114)$$

missä aaltoluku on

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}, \quad (17.115)$$

sillä tämä toteuttaa reunaehdon  $\psi_2(L) = 0$ . Jäljelle jäävät vielä jatkuvuusehdot alueiden rajalla

$$\psi_1(L/2) = \psi_2(L/2) \quad (17.116)$$

$$\psi'_1(L/2) = \psi'_2(L/2) \quad (17.117)$$

sekä normitusehdo

$$\int_0^{L/2} |\psi_1|^2 dx + \int_{L/2}^0 |\psi_2|^2 dx = 1. \quad (17.118)$$

Energian ominaisarvot ratkeavat jatkuvuusehdoista. Aaltofunktion amplitudi selviää normitusehdosta, mutta sitä ei tässä tarvitse välittämättä ratkaista.

**RATKAISU** Aaltofunktion derivaatat ovat  $\psi'_1(x) = A_1 k_1 \cos(k_1 x)$  ja  $\psi'_2(x) = A_2 k_2 \cos(k_2(x - L))$ . Jakamalla aaltofunktion ja sen derivaatan jatkuvuusehdot puolittain toisillaan voimme kirjoittaa

$$\frac{\psi_1(L/2)}{\psi'_1(L/2)} = \frac{\psi_2(L/2)}{\psi'_2(L/2)} \quad (17.119)$$

eli auki kirjoitettuna

$$\frac{1}{k_1} \tan(k_1 L/2) = \frac{1}{k_2} \tan(-k_2 L/2) \quad (17.120)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}} \tan\left(\frac{L\sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}}{2\hbar}\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}} \tan\left(-\frac{L\sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}}{2\hbar}\right). \quad (17.121)$$

Jatkuvuusehtojen jakaminen puolittain toisillaan supisti pois tuntemattomat amplitudit  $A_1$  ja  $A_2$ , jolloin yhtälön ainoaksi tuntemattomaksi jää elektronin kokonaisenergia  $E_{\text{kokonais}}$ . Energian sallitut arvot voidaan siis ratkaista tästä yhtälöstä.

Kyseessä on ns. transsidenttinen yhtälö, jonka ratkaisua ei voi kirjoittaa eksplisiittisesti alkeisfunktioiden avulla, mutta ratkaisu voidaan etsiä numeerisesti halutulla tarkkuudella. Ratkaisut voi etsiä graafisesti esimerkiksi piirtämällä yhtälön molemmat puolet energian  $E_{\text{kokonais}}$  funktiona, jolloin kuvajat leikkaavat täsmälleen niillä energian arvoilla, joilla yhtälö toteutuu. Alla oleva Mathematica-koodi piirtää tämän kuvajan sekä etsii numeerisesti yhtälön juuret.

Alimmaksi sallituksi energiaksi, joka on suurempi kuin 5 eV, saadaan 5.43 eV. Aaltofunktion kuvaajassa on viisi kupua, jotien tilan kvanttiluku on  $n = 5$ . (Kuopassa on siis oltava neljä ominaistilaa, jotka ovat energialtaan pienemmät kuin 5 eV) Seuraavat ominaisenergiat ovat  $E_6 = 6.41 \text{ eV}$ ,  $E_7 = 7.49 \text{ eV}$ ,  $E_8 = 8.70 \text{ eV}$  jne.

Mathematica:

```
(* aaltofunktio *)
psi1[x_] := a1 Sin[k1 x]
psi2[x_] := a2 Sin[k2 (x - L)]
psi[x_] := Piecewise[{{psi1[x], x < L/2}, {psi2[x], x > L/2}}]
potene[x_] := Piecewise[{{0, x < L/2}, {u, x > L/2}}]
k1 = 1/hbar Sqrt[2 m ene];
k2 = 1/hbar Sqrt[2 m (ene - u)];

(* yksiköt: nm, eV ja s *)
metri = 10^9;
eV = 1;
sekunti = 1;
joule = 1/(1.60217662*10^-19);
```

```

valonnopeus = 3*10^8 metri/sekunti;

(* vakioiden arvot, [m] = MeV/c^2 *)
arvot = {u -> 5, hbar -> 1.0545718*10^-34 joule sekunti,
         m -> 0.510998910*10^6 eV/valonnopeus^2 , L -> 2};

(* graafinen ratkaisu *)
Plot[{  

    psi1[L/2]/psi1'[L/2] /. arvot,  

    psi2[L/2]/psi2'[L/2] /. arvot  

}, {ene, 5, 15},  

PlotRange -> {-1, 1},  

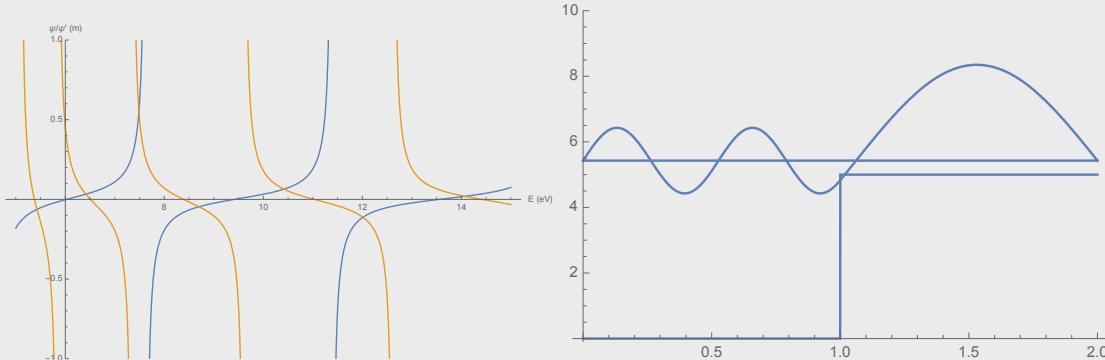
AxesLabel -> {"E (eV)", "[\Psi]/[\Psi]' (m)"}]

(* numeroinen ratkaisu alkuarvauksella ene = 5.5 *)
energia = FindRoot[
    psi1[L/2]/psi1'[L/2] == psi2[L/2]/psi2'[L/2] /. arvot,
    {ene, 5.5}]
{ene -> 5.42747}

(* ratkaistaan jatkuvuusehto *)
jatkuvuus = FindRoot[
    psi1[L/2] == psi2[L/2] /. arvot /. energia /. a1 -> 1,
    {a2, 1}]
{a2 -> -2.92129}
amplitudi = {a1 -> 1, jatkuvuus[[1]]};

(* aaltofunktion ja potentiaalin kuvaaja *)
Plot[ {ene, potene[x], ene + psi[x]}
    /. arvot /. amplitudi /. energia
    {x, 0, L /. arvot},
    PlotRange -> {-0.1, 10}]

```



**ARVIOINTI** Helpoin tapa todeta ratkaisun järkevyys on tarkastella aaltofunktion kuvaajaa. Aaltofunktio on selkeästi nolla kuopan reunilla. Lisäksi alueiden 1 ja 2 reunalla aaltofunktio on jatkuva (kuvaajassa ei ole "hyppyä") ja myös aaltofunktion derivaatta on jatkuva (kuvaajassa ei ole "kulmaa"). Energian ominaisarvon oikeellisuus voidaan tarkistaa sijoittamalla funktio Schrödingerin yhtälöön.



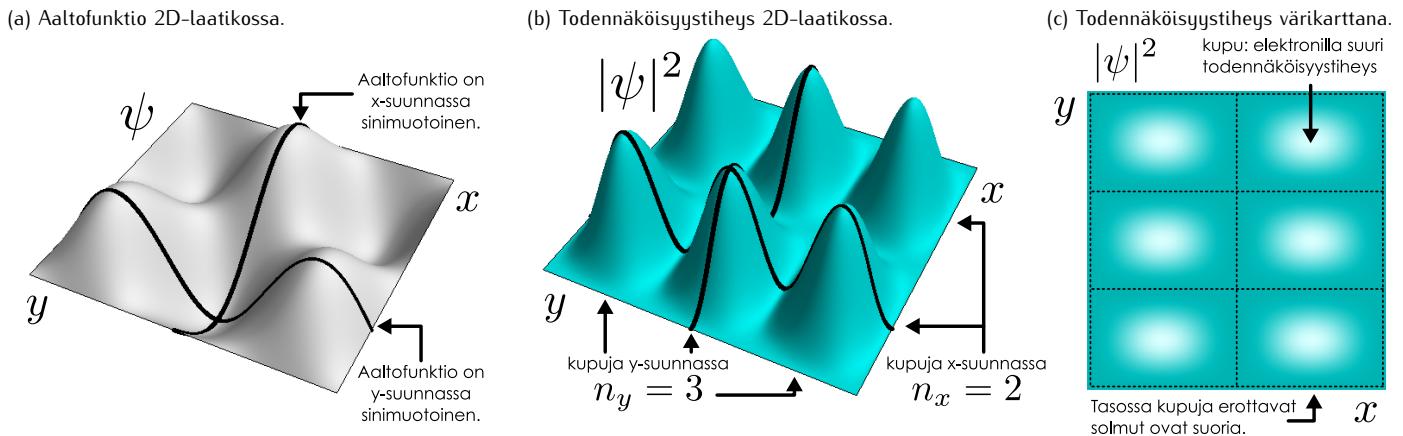
**17.39** Selitä omien sanoin, miten kuvataan elektronia systeemissä, jossa elektronin potentiaalienergia riippuu paikasta. Millaisia aaltoja elektroni muodostaa? Mikä on Schrödingerin yhtälö, mitä sen avulla voi ratkaista, ja millaisen matemaattisen muodon se tässä tilanteessa saa?

## Moniulotteiset aaltofunktiot

Toistaiseksi olemme tutkinneet kvanttimekaanisia hiukkasia vain yhdessä ulottuvuudessa, mutta todelliset systeemit ovat yleensä kolmiulotteisia. Erityisesti haluamme kuvilla, millaisia elektronien aaltofunktioit ovat atomissa, joka on geometrialtaan kolmiulotteinen, pallosymmetrinen systeemi.

Kvanttimekaaniset aallot käyttäävät pääasiassa samalla tavalla yhdessä ja useassa ulottuvuudessa, mutta ulottuvuuksien määrällä on kuitenkin tärkeä merkitys, sillä useassa ulottuvuudessa kvanttimekaanisilla aaltofunktioilla on enemmän mahdollisia tapoja värähdellä aivan kuten klassisillakin aalloilla. Lisäksi koska atomissa elektroni on vangittu palloaiseen tilaan, sen muodostamien aaltojen täytyy olla erilaisia kuin jos elektroni olisi vaikkapa suorakulmaisen särmion muotoisessa tilassa. Suorakulmaiset koordinaatistot ovat kuitenkin yksinkertaisempia kuin pallomaiset, joten tutkimme ensin kaksi- ja kolmiulotteisessa suorakulmaisessa laatikossa olevan elektronin aaltofunktioita. Tässä vaiheessa tarkoitus on siis ymmärtää vasta se, miten ulottuvuuksien määrä vaikuttaa siihen, miten aaltofunktio kuvataan. Pallosymmetrian vaikutukseen menemme vasta, kun esittelemme atomimallin.

## KVANTTIMEKANIICKA

Kuva 17.38: Kaksiulotteisessa laatikossa olevan elektronin aaltofunktio ja todennäköisyystilheys tilassa  $|2, 3\rangle$ .

Klassisen hiukkasen paikan voi kuvata koordinaateilla, ja näitä koordinaatteja tarvitaan aina yhtä monta kuin avaruudessa on ulottuvuuksia. Esimerkiksi yhdessä ulottuvuudessa riittää koordinaatti  $x$ , mutta kahdessa ulottuvuudessa vaaditaan kaksi koordinaattia, jotka voivat olla esimerkiksi karteesiset  $(x, y)$  tai vaikkapa napakoordinaatiston  $(r, \theta)$ . Kolmessa ulottuvuudessa tarvitaan kolme koordinaattia kuten karteesisen koordinaatiston  $(x, y, z)$  tai pallokoordinaatiston  $(r, \phi, \theta)$ . Hiukkasen liike puolestaan voidaan kuvata näiden koordinaattien muutoksena ajan suhteeseen. Esimerkiksi kolmessa ulottuvuudessa hiukkasen rata tunetaan, jos tiedetään sen koordinaatit ajan funktiona,  $x(t), y(t), z(t)$ , ja esimerkiksi nopeus ja kiihtyvyys saadaan derivoimalla koordinaatteja ajan suhteesta.

Kvanttimekaaninen elektroni sen sijaan ei ole yhdessä pisteessä sijaitseva hiukkanen vaan avaruuteen levitetytyn aalto, jota kuvaaa aaltofunktio. Aaltofunktio on sekä paikan että ajan funktio, ja avaruuden ulottuvuuksien määrä ilmeneekin siinä, monenko koordinaatin funktio aaltofunktio on. Esimerkiksi yhdessä ulottuvuudessa aaltofunktio on paikkakoordinaatin  $x$  sekä ajan  $t$  funktio,  $\psi(x, t)$ . Kolmessa ulottuvuudessa aaltofunktio on kaikkien paikkakoordinaattien sekä ajan funktio, esim.  $\psi(x, y, z, t)$  tai  $\psi(r, \phi, \theta, t)$ . Lisäksi jos kyseessä on ominaistila, aaltofunktion aikariippuvuus on aina kompleksinen eksponenttifunktio kulmataajuudella  $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$ , jolloin aaltofunktio voi kirjoittaa pelkästään paikan funktiona muodossa

$$\psi_{\text{aikariippuva}}(x, y, z, t) = \psi_{\text{aikariippumaton}}(x, y, z)e^{-i\omega t}. \quad (17.122)$$

Koska kaikki tilat voidaan kuvata ominaistilojen superpositiona, *yleensä riittää tarkastella vain näitä ajasta riippumattomia aaltofunktioita*.

Ominaistilat voi myös indeksoida *kvanttiluvuilla*. Esimerkiksi yksiulotteisessa potentiaaliopassa olevan elektronin tilan ominaisuudet voi päättellä sen aaltofunktion kupujen lukumäärän  $n$  perusteella. Samoin vapaan elektronin tilan ominaisuudet määrää sen aaltoluku  $k$ . Tämä on hyödyllistä, koska hiukkasen ominaisuudet voidaan kirjoittaa kvanttilukujen funktiona. Esimerkiksi vapaan hiukkasen lüke-energia on aaltoluvun funktio,  $E_{\text{kokonais}} = K = \hbar^2 k^2 / (2m)$  ja  $L$ -levyisessä kuopassa olevan elektronin energia on kupujen lukumäärän funktio,  $E_{\text{kokonais}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2$ . Tällaisissa tapauksissa hiukkasen aaltofunktiota ei oikeastaan tarvitse lainkaan tuntea, sillä pelkkä kvanttiluku riittää.

Yksiulotteisessa systeemissä tilan aaltofunktion indeksointiin tarvitaan yksi kvanttiluku. Useassa ulottuvuudessa *kvanttilukuja tarvitaan yksi jokaista ulottuvuutta kohti*. Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.38, johon on piirretty kaksiulotteisessa laatikossa (eli äärettömän syvässä potentiaaliopassa) olevan elektronin aaltofunktio. Tässä tapauksessa elektroni muodostaa seisovan aallon sekä  $x$ - että  $y$ -suunnassa, ja elektronin aaltofunktiossa täytyy olla kokonaislukumäärä kupuja kummassakin suunnassa. Aaltofunktio värähtelee tässä tilassa kuin nelion muotoisen rummun kalvo.

Kuvan 17.38 esimerkissä kupuja on  $x$ -suunnassa 2 ja  $y$ -suunnassa 3 eli yhteensä  $2 \times 3 = 6$ . Tila voidaan indeksoida kupujen määrää kuvaavin kvanttiluvuin  $n_x$  ja  $n_y$ , jolloin sitä voidaan merkitä yksinkertaisesti  $|n_x, n_y\rangle$ . Tässä esimerkissä on siis kyseessä tila  $|2, 3\rangle$ . Kupujen kokonaislukumäärä 6 ei kelpaa kvanttiluvuksi, koska esimerkiksi tilassa  $|1, 6\rangle$  on myös kuusi kupua, mutta tämä on eri tila kuin  $|2, 3\rangle$ . (Teknisesti olisi toki mahdollista luetteloida nämä tilat käyttäen vain yhtä kokonaislukuindeksiä, mutta tälläinen luettelointi olisi väistämättä täysin abstrakti eikä indeksillä olisi mitään fysikaalista tulkintaa. Siksi näin ei ole tapana tehdä.)

Vastaavasti kolmiulotteisessa laatikossa olevan elektronin aaltofunktio muodostaa seisavia aaltoja kolmessa suunnassa,  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , ja jokaiseen suuntaan liittyy kupujen lukumäärän kertova kvanttiluku. Niiinpä tässä tapauksessa elektronin tilat voidaan indeksoida muodossa  $|n_x, n_y, n_z\rangle$ . Kolmessa ulottuvuudessa tarvitaan siis kolme kvanttilukua.



- 17.40** (a) Luettelo kaikki tilat  $|n_x, n_y, n_z\rangle$ , joissa elektronin aaltofunktiossa on 8 kupua. (10 kpl)  
 (b)  $L_x \times L_y \times L_z$  laatikossa elektronin energia on  $E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2})$ . Elektroni on kuutiossa, jonka sivun pituus on  $L$ . Luettelo kaikki tilat, joissa energia on  $33\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ . (6 kpl)

### Aaltofunktioiden ratkaiseminen

Aaltofunktioiden muodon kvalitatiivinen päättely:

1. Jos systeemi ei rajoita hiukkasta äärelliselle alueelle, aaltofunktio muodostaa aaltopulssin, joka voidaan kuvata äärettömiin ulottuvien aaltojen (esim. tilojen  $|k\rangle$ ) superpositiona.
2. Jos systeemi rajoittaa hiukkasen äärelliselle alueelle, aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja.
3. Hiukkasen liike-energian ollessa suuri aaltofunktion aaltoluku on suuri ja amplitudi pieni. Siispä hiukkasen aaltofunktio muodostaa tiheitä ja matalia aaltoja, kun sen kokonaisenergian ja potentiaalienergian erotus on suuri.
4. Alueessa, jossa hiukkasen kokonaisenergia on pienempi kuin sen potentiaalienergia, aaltofunktio vaimenee eksponentiaalisesti paikan funktiona. Vaimeneminen on sitä nopeampaa, mitä suurempi on potentiaalienergian ja hiukkasen kokonaisenergian erotus.
5. Seisovia aaltoja muodostavalla hiukkasella on diskreetit ominaistilat. Yhdessä ulottuvuudessa nämä voidaan indeksoida kvanttiluvulla  $n$ , joka on aaltofunktiossa esiintyvien kupujen lukumäärä.
6. Useassa ulottuvuudessa aaltofunktion indeksoivia kvanttilukuja tarvitaan yhtä monta kuin mikä on ulottuvuuksien lukumäärä.

Aaltofunktioiden laskeminen:

1. Määritä hiukkasen potentiaalienergia paikan funktiona. Tee tarvittaessa yksinkertaistavia oletuksia. Paloittain määritellyn potentiaalienergian tapauksessa jaa ongelma alueisiin.
2. Määritä reuna- ja jatkuvuusehdot, jotka aaltofunktion toteutettava alueiden reunoilla. Erityisesti aaltofunktion pitää olla kaikkialla jatkuva. Jos potentiaalienergia on äretön, aaltofunktio on nolla. Muutoin aaltofunktion derivaatan pitää myös olla jatkuva.
3. Kirjoita Schrödingerin yhtälö erikseen kussakin tarkasteltavassa alueessa ja ratkaise se. Huomaa, että koska Schrödingerin yhtälö on differentiaaliyhdiste, aaltofunktioiden lausekkeisiin jää välttämättä tuntemattomia vakioita. Yhtälön ratkaiseminen alkeisfunktoiden avulla on myös usein mahdotonta, jolloin on turvauduttava esimerkiksi sarjakehitelmiin.
4. Ratkaise tuntemattomista suureista mahdollisimman monta reunaehdot avulla.
5. Ratkaise loput tuntemattomista suureista normitusehdon avulla, jos normittaminen on tarpeellista. Rajoitteluun alueeseen (potentiaalienergiakuoppaan) vangitun hiukkasen aaltofunktion on lähestyttävä nollaa äärettömyksissä,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$ , sillä muutoin funktio ei voi normittaa.
6. Jos hiukkasen kokonaisenergia on kaikkialla suurempi kuin systeemin potentiaalienergia, hiukkanen on vapaa liikkumaan minne tahansa. Tällöin voidaan ensin ratkaista normittamattomat funknot, jotka eivät lähesty äärettömyksissä nollaa (esim. funknot  $e^{ikx}$  ovat tällaisia). Hiukkasta kuvava aaltopulssi voidaan muodostaa näiden superpositiona.
7. Ominaismuodon aikakehitys on aina muotoa  $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$ , missä taajuus  $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$ .
8. Mikä tahansa tila voidaan esittää ominaistilojen superpositiona, esim.  $\psi(x, t) = \sum_n a_n \psi_n(x, t)$  tai  $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \psi_k(x, t) dk$ .

## 17.5 Atomi

### Atomin osat: ydin ja elektronit

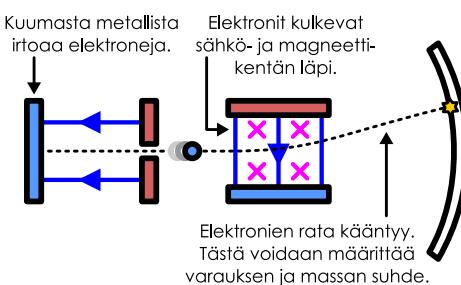
Atomin rakennetta ei tunnettu vielä 1900-luvun alussa. Oli kuitenkin huomattu, että kuumat metallit lähetti-vät säteilyä, ja 1897 Joseph Thomson osoitti tämän säteilyn koostuvan hyvin pienistä varatuista hiukkasista havaitsemalla säteilyn kääntyvän sähkömagneetisessa kentässä (kuva 17.39 (a)). Hän myös mittasi näiden hiukkasten varauksen ja massan suhteen. Hiukkaset olivat elektroneja, ja koska niitä irtosi kaikista materiaaleista, niiden täytyi olla aineen perusosia. Kuitenkin koska aine on sähköisesti neutraalia, siinä täytyi olla myös positiivisesti varautunut osuus. Thomsonin atomimallissa elektronit olivatkin positiivisesti varatuun aineeseen upotettuja pistemäisiä hiukkasia — kuin rusinoita pullassa, minkä vuoksi mallia kutsutaankin rusinapullamalliksi.

Vuonna 1909 Ernest Rutherford osoitti atomien positiivisen varauksen keskittyneen niiden keskukseen — atomiytimeen — pommittamalla ohutta kultakalvoa alfahiukkasilla eli heliumytimillä. Kokeessa osa hiukkasista sirosi takaisin tulosuuntaansa, mikä oli hyvin yllättävää. Jos atomi nimittäin olisi Thomsonin mallin

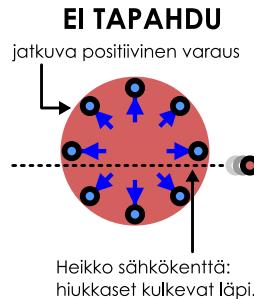
## KVANTTIMEKANIKKA

Kuva 17.39: Elektroni löytyi kuumien metallien säteilystä. Ydin löytyi pommittamalla ohuita kalvoja varatuilla hiukkasilla. Näin syntyi atomimalli, jossa elektroni kiertää ydintä. Tämä malli ei kuitenkaan ole klassisesti mahdollinen, koska kihiityvässä liikkeessä olevan elektronin pitäisi sääellä pois kaikki energiansa.

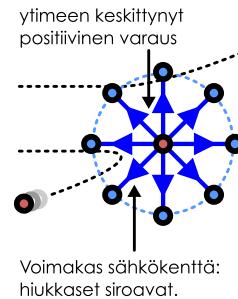
(a) Thomsonin koe.



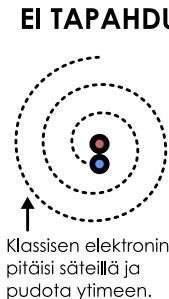
(b) Rutherfordin kokeen odotettu tulos.



(c) Rutherfordin kokeen todellinen tulos.



(d) Aurinkokuntamalli ei toimi.



mukaista jatkuvaa positiivista ainetta, nopeat hiukaset kulkisivat siitä helposti läpi kuin sumuun heitettyt palot (kuva 17.39 (b)). Nyt hiukkasia kuitenkin kimposi takaisin, joen atomin massa ja positiivinen varaus eivät voineet olla levinneet kovin suureen tilavuuteen vaan niiden täytyi olla keskittynyt hyvin pieneen alueeseen (kuva 17.39 (c)). Näin oli löydetty atomiydin, jonka myöhemmin ymmärrettiin koostuvan positiivisesti varautuneista protoneista sekä neutraaleista neutroneista. Rutherfordin atomimalli muistuttikin aurinkokuntaa, sillä siinä elektronit kiersivät ydintä kuin planeetat.



**17.41** Thomsonin mallissa atomin positiivisesti varautunut osa on tasaisesti varautunut pallo, jonka koonaisvaraus on  $Q = Ze$  (tässä  $Z$  on protonien lukumäärä) ja säde noin  $R = 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ . (a) Potentiaali on nolla äärettömän kaukana atomista. Mikä on potentiaali atomin pinnalla, jos  $Z = 79$ ? (b) Gaussin laista voidaan johtaa potentiaaliksi tasaisesti varatun pallon sisällä  $V(r) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Zer^2}{R^3}$ . Mikä on potentiaali atomin keskipisteessä? (c) Hiukkanen, jonka varaus on  $2e$ , kulkee suoraan kohti atomia. Kuinka paljon energiaa hiukkasella on oltava, jotta se kulkisi atomin lävitse? (d) Entä jos positiivisen varauksen säde onkin  $10^{-14} \text{ m}$ ? (e) Miten tämä selittää Rutherfordin kokeen?

Tämäkin malli on kuitenkin mahdoton, sillä ydintä kiertävä elektroni olisi ympyrälükkeessä, jossa sillä on aina kihiityvyys kohti ydintä. Kihiityvässä liikkeessä olevat varatut hiukaset kuitenkin lähettävät sähkömagneettista säteilyä, mikä kuluttaa niiden energiota. Klassisen fysiikan mukaan siis elektronin liike-energian pitäisi kadota säteilynä ja elektronin tulisi "pudota" ytimeen sen vauhdin hidastuessa (kuva 17.39 (d)). Kvanttimekanikan ja hiukkasten aaltomallin kehittyessä 1910- ja 1920-luvuilla mm. Bohr esitti osittaisia ratkaisuja tähän ongelmaan, mutta vasta kvanttimekanikan peruslain eli Schrödingerin yhtälön löydystyä elektronien todellinen luonne ja atomien rakenne pystyttiin selittämään kunnolla. Tässä luvussa kuvaillemme tämän modernin kvanttimekaanisen atomimallin perusomaisuuksia.

### Elektronin etäisyys ytimestä

Aloitetaan atomien tarkastelu yksinkertaisimmasta mahdollisesta atomista eli vedystä. Vetyatomi koostuu protonista ja elektronista, jotka vetävät toisiaan puoleensa Coulombin lain mukaisesti. Koska protoni on paljon elektronia massiivisempi, ajattelemme tässä protonin olevan levossa ja elektronin liikkuvan protonin ympäillä. Tarkalleen ottaen levossa olevassa atomissa systeemin *massakeskipiste* pysyy paikoillaan, mutta massakeskipiste on hyvin lähellä protonia.

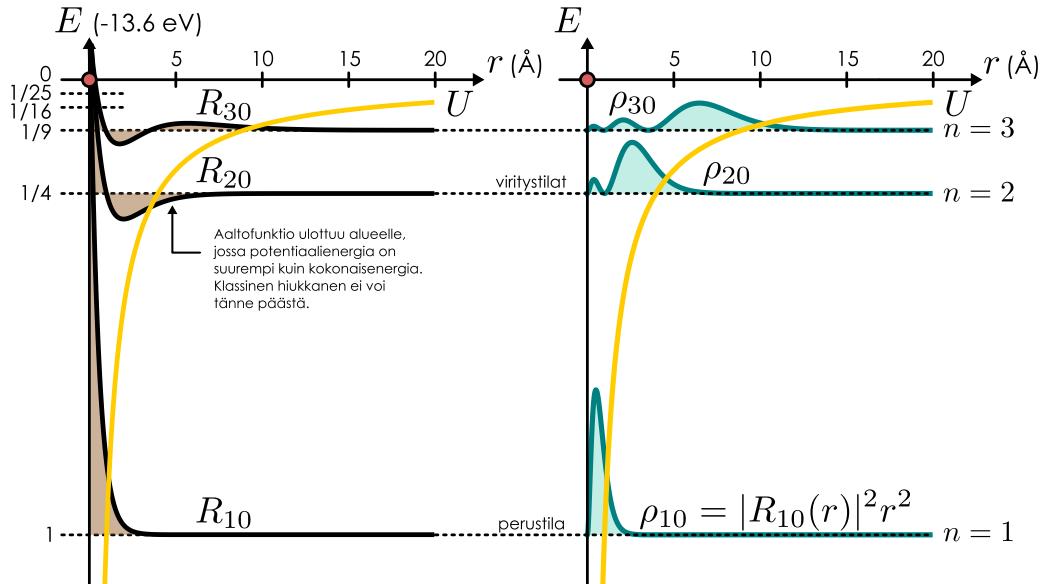
Protonin ympäilleen luoma sähköinen potentiaali muodostaa elektronille potentiaalikuopan. Potentiaalienergian nollatasoksi on tapana valita tilanne, jossa elektroni on äärettömän kaukana protonista, jolloin elektronin potentiaalienergiaa kuvaava funktio

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (17.123)$$

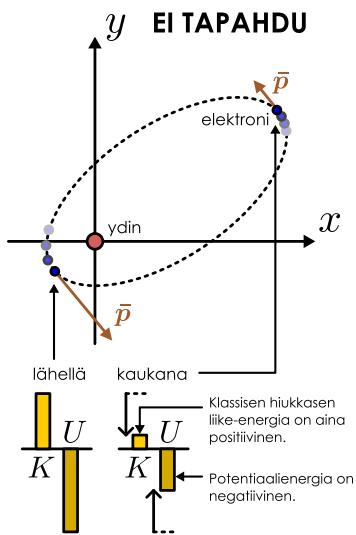
missä  $e$  on alkeisvaraus ja  $r$  hiukkasten välinen etäisyys. Koska elektronin ja protonin välillä on attraktiivinen vuorovaikutus, elektronin potentiaalienergia *pienenee*, kun elektroni lähestyy ydintä. Niinpä elektronin potentiaalienergia on kaikilla nollaa pienempi eli *negatiivinen*.

Jos nyt elektronin *kokonaisenergia* on negatiivinen, elektroni ei pääse koskaan pakenemaan ytimen luota vaan se on vangittu ytimen muodostamaan potentiaalikuoppaan. Tällöin elektroni on jollakin ominaistilallaan ( tai näiden tilojen superpositiossa), mikä muistuttaa klassisen fysiikan tilannetta, jossa elektroni on stabiililla ydintä kiertävällä radalla (kuva 17.40). Kvanttimekaanisella elektronilla ei kuitenkaan ole täsmällistä rataa eikä elektroni ole ydintä kiertävä pallo vaan ydintä ympäröivä aalto.

Kuva 17.41: Kvanttimekaanisen elektronin aaltofunktion radiaaliosuuksista ja todennäköisyysjakaumista olla etäisyydellä  $r$  ytimestä kun  $n = 1, 2, 3$  ja  $l = 0$ .



Kuva 17.40: Klassinen kiertorata ei ole oikea malli elektronille atomissa.



Elektronin kokonaisenergia voisi periaatteessa olla myös positiivinen. Klassisesti tämä tarkoittaisi sitä, että elektronin liike-energia on enemmän positiivinen kuin mitä sen potentiaalienergia on negatiivinen. Mutta tällöin elektronilla on nüün paljon liike-energiaa, että se pääsee kulkemaan äärettömän kauas ytimestä eli kyseessä on vapaa hiukkasan. Kvanttimekaanisesti tällaisen elektronin aaltofunktio on avaruudessa etenevä aaltopulssi. Vaikka elektroni olisi aluksi sidottu atomiin, se voi saada lisää energiota esimerkiksi absorboimalla fotonin. Jos elektronin kokonaisenergiasta tulee tällöin positiivinen, elektroni irtoaa atomista eli atomi ionisoituu. Keskeytymme tässä luvussa kuitenkin tarkastelemaan vain sellaisia elektronitiloja, joissa elektroni on vangittu ympärille.

Vedynsä olevan elektronin aaltofunktio noudattaa kolmiulotteista Schrödingerin yhtälöä

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \psi(\vec{r}) = E_{\text{kokonais}} \psi(\vec{r}), \quad (17.124)$$

missä  $\hat{K} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) \hat{=} -\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$  on liike-energiaoperaattori kolmessa ulottuvuudessa ja  $\vec{r}$  on elektronin paikkavektori.

Yhtälö voidaan ratkaista pallokoordinaatistossa kirjoittamalla aaltofunktio radiaalisen ja kulmariippuvan funktion tulona

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\phi, \theta), \quad (17.125)$$

jolloin nämä osuudet voidaan separoida ja ratkaista erikseen. Lasku on pitkä emmekä käy sitä tässä läpi, koska osittaisdifferentiaalijäätelöiden ratkaiseminen pallokoordinaatistossa ei ole tämän kurssin asia. Lopputulos on kuitenkin se, että kulmariippuvan osuuden ratkaisut ovat ns. *palloharmonisia funktioita*  $Y_l^m(\phi, \theta)$ , jotka voidaan indeksoida kahdella kokonaisluvulla  $l$  ja  $m$ . Nämä ovat aaltofunktion kulmariippuvan osuuden kvanttiluvut. Atomin keskuksesta mitatusta etäisyydestä riippuvan osuuden ratkaisut eli *radiaalifunktiot*  $R_{nl}(r)$  voidaan indeksoida niin ikään kahdella indeksillä  $n$  ja  $l$ , joista  $l$  on *sama* kvanttiluku kuin kulmariippuvassa osuudessa esiintynyt indeksi  $l$ . Nämä elektronin aaltofunktion indeksointiin tarvitaan yhteensä *kolme* kvanttilukua  $n$ ,  $l$  ja  $m$ . Nämä pitääkin olla, koska atomi on *kolmiulotteinen* systeemi.

Tyhjässä avaruudessa olevan vetynatomin elektronin ominaisenergiat riippuvat *vain* pääkvanttiluvusta  $n$ , ja ne ovat Schrödingerin yhtälön mukaan

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = (-13.6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2}, \quad (17.126)$$

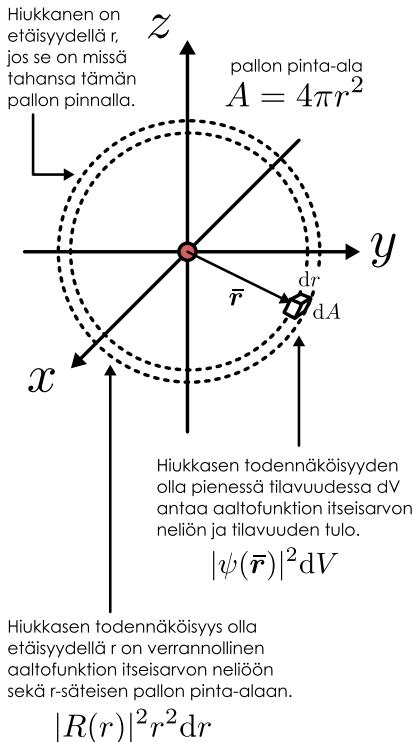
## KVANTTIMEKANIICKA

missä  $m_e$  on elektronin massa. (Täsmällisemmin  $m_e$  on protonin ja elektronin massakeskipistekoordinaatistossa laskettu ns. redusoitu massa, joka on hieman elektronin todellista massaa pienempi.) Pienin mahdollinen energia eli elektronin perustilan energia on  $E_1 = -13.6$  eV ja kvanttiluvun  $n$  kasvaessa energia kasvaa eli tulee vähemmän negatiiviseksi. Energia ei kuitenkaan kasva loputtomiin kuten äärettömän syvän kukan tapauksessa vaan se lähestyy nolla. Jos elektronin energia kasvaa nolla suuremmaksi, elektroni irtoaa atomista.



- 17.42** (a) Paljonko energiää tarvitaan irrottamaan elektroni vetyatomin (i) perustilalta ja (ii) 1. viritystilalta?  
 (b) Elektroni siirtyy vetyatomin 1. viritystilalta perustilalle emittoiden fotonin. Mikä on fotonin taajuus?

Kuva 17.42: Radiaalisen todennäköisyysjakauman laskussa tarvittava geometria.



Elektronin joitakin ominaisenergioita on piirretty kuvaan 17.41 vaakasuorina katkoviivoina. Kuvassa on esitetty myös elektronin radiaalinen aaltofunktio  $R_{n0}(r)$  sekä ytimestä mitattu etäisyyden  $r$  todennäköisyysjakauma  $\rho_{n0}(r)$  näissä tiloissa. Tässä tapauksessa elektronin todennäköisyystä olla etäisyydellä  $r$  ytimestä ei kuvaan radiaalifunktion itseisarvon neliö  $|R(r)|^2$  vaan funktio

$$P(r) = |R(r)|^2 r^2. \quad (17.127)$$

Syy tähän on piirretty kuvaan 17.42. Elektronin todennäköisyys olla missä tahansa *yksittäisessä pisteessä* on verrannollinen sen aaltofunktion itseisarvon neliöön  $|\psi|^2$ . Erityisesti jos piste on etäisyydellä  $r$  ytimestä, elektronin todennäköisyys olla tuossa pisteessä on verrannollinen radiaalifunktio  $R(r)$  itseisarvon neliöön. Toisaalta etäisyydellä  $r$  olevat pisteet muodostavat pallon pinnan, ja niinpä näiden *pisteiden määrä* on verrannollinen tämän pinnan alaan,  $4\pi r^2$ . Elektroni on etäisyydellä  $r$ , jos se on *jossakin*  $r$ -säteisen pallon pinnalla, ja tämän todennäköisyys on verrannollinen sekä elektronin todennäköisyyteen olla kussakin tämän pinnan pisteessä,  $|R(r)|^2$ , että pisteiden määrään,  $r^2$ . Esimerkissä 17.9 tämä tulos johdetaan täsmällisesti.

Koska elektronin radiaalisessa aaltofunktiossa on kupuja ja solmuja, se muodostuu seisovista aalloista. Seisovat aallot puolestaan syntyvät kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon superpositiona. Koska tässä tapauksessa seisovat aallot syntyvät radiaalisuunnassa, näiden vastakkaisiin suuntiin kulkevien aaltojen täytyy liikkua kohti ydintä ja siitä poispäin. Elektroni siis tavallaan liikkuu samanaikaisesti sekä ydintä kohti että siitä poispäin. Tilanne on samankaltainen kuin aiemmin tarkastellussa yksiulotteisessa laatikossa (kuva 17.30), jossa elektronin pitäisi klassisesti kiimpilla edestakaisin, mutta jossa kvanttimekaaninen elektroni onkin itse asiassa samanaikaisesti vastakkaisiin suuntiin kulkeva seisova aalto.

Seisovissa aalloissa täytyy aina olla kokonaislukumäärä solmuja. Ja koska solmuja on kokonaislukumäärä, myös niiden välissä olevia kupuja on oltava kokonaislukumäärä. (Aallon yhdessä päässä voisi olla puolikas-kin kupu, mutta laskemme tässä kaikki solmujen erotamat alueet kokonaiksi kuvuiksi.) Osoittautuu, että radiaalifunktiossa kupujen määrä on  $n - l$ . Esimerkiksi kuvaan 17.41 piirretystä funktiossa  $R_{10}$  on yksi kupu, funktiossa  $R_{20}$  on kaksi kupua, ja funktiossa  $R_{30}$  kolme. Toisin sanoen kupuja on sitä enemmän mitä suurempi kvanttiluku  $n$  on ja mitä pienempi kvanttiluku  $l$  on. Kupuja on oltava vähintään yksi, joten täytyy olla  $n > l \geq 0$ .



- 17.43** Elektronin perustilan aaltofunktio on  $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\pi^{1/2} a^{3/2}} e^{-r/a}$ , missä  $a$  on ns. Bohrin säde.  
 (a) Millä todennäköisyydellä elektroni on pienessä tilavuudessa  $\Delta V = (0.01a)^3$  etäisyydellä (i)  $r = a/2$  tai (ii)  $r = a$  ytimestä?  
 (b) Mikä on sellaisen pallokuoren tilavuus, jonka paksuus on  $\Delta r = 0.01a$  ja säde (i)  $r = a/2$  tai (ii)  $r = a$ ?  
 (c) Millä todennäköisyydellä elektroni on *jossakin* pallokuoren (i) tai (ii) sisällä?

## esimerkki 17.9

## Elektronin radiaalinen todennäköisyysjakauma

**Elektri on vetyatomissa perustilalla**  $\psi_{100}(r, \phi, \theta) = R_{10}(r)Y_0^0(\phi, \theta)$ . **Tässä radiaalifunktio on**  $R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a}$ , missä  $a$  on Bohrin säde, ja kulmaosuus on vakio  $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ . Millä etäisyydellä ytimestä elektri on suurimmalla todennäköisyydellä?

**SUUNNITELMA** Aaltofunktion itseisarvon neliö kuvaaa hiukkasen todennäköisyystiheyttä olla tiettyssä pisteessä. Nyt kysytään kuitenkin hiukkasen todennäköisyyttä olla etäisyydellä  $r$ , ja tällaisia pisteitä on paljon. Saadaksemme siis selville hiukkasen todennäköisyyden olla jollakin tiettyllä etäisyydellä, meidän on laskettava yhteen hiukkasen todennäköisydet olla kaikissa näissä pisteissä.

Todennäköisyys, että hiukanen on pisteen  $\vec{r}$  ympärillä sijaitsevan pienien tilavuuden  $dV$  sisällä on aaltofunktion itseisarvon nelön ja tilavuuden tulo,  $dP(\vec{r}) = |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dV$ , kuten kuvassa 17.42 on nähty. Etäisyydellä  $r$  olevat pisteet muodostavat avaruudessa pallon, joten tarkastellaan tälläistä  $dr$ -paksuista pallokuorta. Pallon pinta voidaan myös jakaa pieniin  $dA$ -kokoisiin pinta-ala-alkioihin, jolloin kuori tulee jaettua tilavuusalkioihin, joiden koko on  $dV = dr dA$ .

Todennäköisyys, että elektri on jossakin tämän kuoren sisällä saadaan näin ollen laskemalla yhteen hiukkasen todennäköisyys olla kuoren muodostavien tilavuusalkioiden sisällä eli integroimalla pinnan yli

$$dP(r) = \left( \int_A |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dA \right) dr. \quad (17.128)$$

Toisaalta hiukkasen todennäköisyys olla kuoren sisällä voidaan ilmaista radiaalisen todennäköisyystiheyden ja kuoren paksuuden tulona  $dP(r) = \rho_R(r)dr$  joten tämän perusteella hiukkasen todennäköisyysjakaumaa kuvaa tiheysfunktio

$$\rho_R(r) = \frac{dP}{dr} = \int_A |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dA. \quad (17.129)$$

**RATKAISU** Todennäköisyysjakauman lausekkeessa integraali lasketaan pallon pinnan yli eli kulmamuuttujien  $\phi$  ja  $\theta$  suhtein, joten radiaalifunktio  $R$  on tässä integraalissa vakio ja se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle. Jakaumafunktio on siis  $\rho_R(r) = |R(r)|^2 \int_A |Y(\phi, \theta)|^2 dA$ . Lisäksi kulmafunktio  $Y$  on vakio, joten jäljelle jää vain vakion integraali pallon pinnan yli, jolloin tulos on pallon pinta-ala  $A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$ ,

$$\rho_R(r) = |R(r)|^2 \frac{1}{4\pi} \int_A dA = |R(r)|^2 \frac{1}{4\pi} A_{\text{pallo}} = |R(r)|^2 r^2. \quad (17.130)$$

Tässä lasku oli helppo, koska  $Y$  oli vakio, mutta itse asiassa palloharmoniset funktiot on normitettu niin, että sama tulos saadaan kaikissa tiloissa.

Perustilassa todennäköisyysjakauma on näin ollen

$$\rho_{10}(r) = |R_{10}(r)|^2 r^2 = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}. \quad (17.131)$$

Tämän maksimi löydetään derivaatan nollakohdasta,

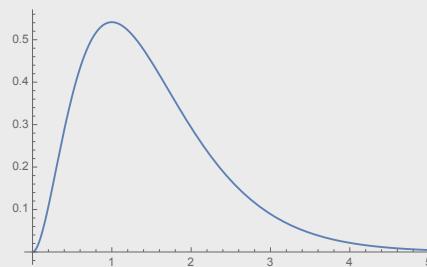
$$\rho'_{10}(r) = \left( \frac{8r}{a^3} - \frac{8r^2}{a^4} \right) e^{-2r/a} = (a - r) \frac{8r}{a^4} e^{-2r/a} = 0, \quad (17.132)$$

ja ratkaisu on  $a = r$  eli todennäköisin etäisyys on juuri Bohrin säde.

```
Mathematica:
(* aaltofunktion radiaaliosuuus *)
r10[r_] := 2/a^(3/2) Exp[-r/a];
rho10[r_] := r10[r]^2 r^2;

(* maksimi *)
Solve[rho10'[r] == 0, r]
{{r -> 0}, {r -> a}};

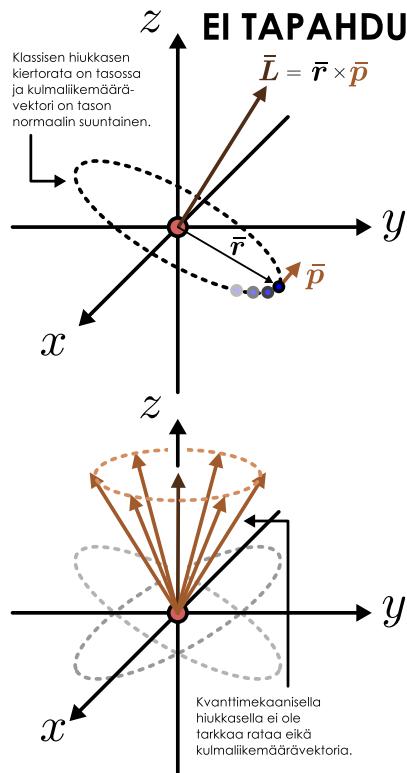
Plot[rho10[r] /. a->1, {r, 0, 5}]
```



**ARVIOINTI** Hiukkasen todennäköisyysjakauma on maksimissaan Bohrin säteen etäisyydellä  $a$  ytimestä. Vaikkei hiukkasella olekaan mitään täsmällistä rataa eikä edes etäisyyttä ytimestä, tätä voidaan pitää jonkinlaisena atomin koon mittana. Se ei ole välttämättä *paras* atomin koon mitta, sillä esimerkiksi hiukkasen etäisyyden odotusarvo  $\langle r \rangle$  on tästä suurempi, koska jakauma on epäsymmetrinen.

## Elektronin kiertoliike ytimen ympäri

Kuva 17.43: Kvanttimekaanisen elektronin kulmalikemääärän suunta on epämääräinen.



Elektri muodostaa siis radiaalisuunnassa seisovia aaltoja, mutta tämän lisäksi elektri muodostaa myös *ydintä kiertäviä aaltoja*. Edelleen koska elektronilla on massa, näillä aalloilla on kulmalikemääärää ytimen suhteen, vaikka ydintä toisaan kiertääkin aalto eikä klassinen hiukkanen.

Kulmalikemäärästä kuvaavat vektorit  $\bar{L}$ . Klassiseksi tämän vektorin suunta kertoo, minkä akselin ympäri hiukkanen kiertää, ja vektorin suuruus kertoo kulmalikemääärän suuruuden, joka riippuu ratasäteestä ja kiertonopeudesta (kuva 17.43). Mitä nopeammin ja mitä kauempaan kiertoakselista hiukkanen kulkee, sitä pidempi on sen kulmalikemääärävektori. Kvanttimekaaninen hiukkanen ei kuitenkaan ole täsmällisellä radalla kulkeva pieni planeetta vaan aalto, jonka paikka ja liikerata on epämääräinen. Niinpä elektronin kulmalikemääräkään ei ole täsmällinen vaan siihenkin liittyy epätarkkuus samaan tapaan kuin elektronin paikkaan ja liikemäääränkin. Täsmällisesti ilmaisten kulmalikemäärä on vektori, jonka  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -komponenteilla on kullaan oma todennäköisyysjakaumansa. Emme tätä todista, mutta itse asiassa atomissa ominaistilalla olevan elektronin kulmalikemäärin suuruus eli vektorin  $\bar{L}$  *pituus on täsmällinen* eli sen hajonta on nolla, mutta sen *suunta on epämääräinen*. Siispä kun elektri on atomissa ominaistilalla, tiedämme tarkasti kuinka suurella kulmalikemäärellä elektri ydintä kiertää, mutta tämä kiertoliike ei tapahdu missään täsmällisessä tasossa, koska ydintä kiertävä aalto ei kulje täsmällistä liikerataa pitkin.

Tutkiessamme aalofunktioita yhdessä ulottuvuudessa opimme, että eteneviä aaltoa kuvavissa aalofunktioissa sekä reaali- että imaginääriosat muodostavat eteneviä aaltoa niin, että imaginääriosat kulkevat reaaliosan edellä (vrt. kuva 17.13). Tämä pääsee myös kiertoliikkeessä oleville aalloille. Jos nimitän elektronin kiertää ydintä jonkin akselin ympäri, sen aalofunktion reaali- ja imaginääriosat muodostavat tässä suunnassa etenevät, ydintä kiertävät aallot kuten kuvan 17.44 (a) on püretty.

Opimme yhdessä ulottuvuudessa myös sen, että vastakkaisiin suuntiin kulkevien aaltojen superpositio muodosta seisovan aallon, ja näin käy myös ydintä kiertävän elektronin aalofunktiossa, jos ydintä kiertää kaksi aaltoa yhtä aikaa vastakkaisiin suuntiin. Itse asiassa osoittautuu, että pallon pinnalla kulkeva aalto voi muodostaa eteneviä aallon vain yhden akselin ympäri. Muissa suunnissa on pakko muodostua seisovia aaltoa. Tämä ei ole kvantimekaaninen erikoisuus vain yleinen aaltojen ominaisuus, joka pääsee myös ydintä kiertävän elektronin aalofunktiolle. Seisovien aaltojen suunnissa aalofunktioon muodostuu solmuja ja kupoja.

Akseli, jonka ympäri etenevä aalto kiertää, voi tieteenkin osoittaa mihin avaruuden suuntaan tahansa, mutta tapana on valita koordinaatiston  $z$ -suuntaan tämän kiertoakselin suuntaiseksi. Koska kulmalikemääärävektori  $\bar{L}$  liittyy elektronin kiertoliikkeeseen, ydintä  $z$ -akselin ympäri kiertävän elektronin liikkeeseen liittyy  $z$ -suuntainen kulmalikemäärin komponentti  $L_z$ . Eritäisesti oikean käden säännön mukaisesti  $L_z$  on positiivinen, jos elektri kiertää ydintä positiivisen  $z$ -akselin suunnasta katsottaessa vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan. Kuvassa 17.44 (a) on juuri tämä tilanne, joten siinä kulmalikemäärin  $z$ -komponentti on positiivinen.

Ydintä kiertävä aalto ei voi olla millainen tahansa, koska aalofunktion täytyy olla jatkuva. Tämä tarkoittaa sitä, että kun kierrämme täyden kierroksen ytimen ympäri, aallon reaali- ja imaginääriosien täytyy palata samoihin arvoihin kuin missä ne alunperin olivat. Toisin sanoen yhteen kierroksen täytyy mahtua täsmälleen jokin kokonaislukumäärä aallonpituuksia, ja kvanttiluku  $m$  kertoo näiden lukumäären. Esimerkiksi kuvassa 17.44 (a)  $m = 5$  ja ydintä kiertämään mahtuu viisi aallonpituitta. Tilanne on samankaltainen kuin yksilöltiseen kuoppaan vangitun elektronin tapauksessa. Kuopassa elektronin aalofunktio muodostaa seisovia aaltoa, ja kuoppaan pitää aina mahtua kokonaislukumäärä kupoja, minkä vuoksi vain tietyt aallonpituuudet ovat sallittuja. Kierradalla ei ole reunia, mutta yksi kierros on silti äärellisen pituinen, mikä rajoittaa mahdollisia aallonpituuksia.

Koska kiertävässä aallossa täytyy olla kokonaislukumäärä aallonpituuksia, vain tietynlaiset ja tiettyllä kulmanopeudella kiertävät aallot ovat mahdollisia. Toisin sanoen *kiertoliike on kvantittunutta*. Suoraan eteneviä elektronin liikemääriä sekä nopeus ovat suoraan verrannolliset aaltolukuun ja siis kääntäen verrannollinen aallonpituteen. Toisin sanoen mitä tiheämässä aallot ovat, sitä nopeammin elektri liikkuu. Aivan samoin kiertoliikkeessä olevan elektronin kulmanopeus on kääntäen verrannollinen ydintä kiertävien aaltojen aal-

lonpituuteen eli suoraan verrannollinen aallonpituuksien lukumäärään. Ajatellaan yksinkertaisuuden vuoksi elektronin kiertävän ydintä ympyräradalla, jonka  $z$ -akselista mitattu sade on  $r$ . Tällöin elektronin kulmaliikemäärän  $z$ -komponentti on radan säteen ja elektronin liikemäärän tulo,

$$L_z = rp = r\hbar k. \quad (17.133)$$

Aallonpituuden avulla lausuttuna aaltoluku on  $k = 2\pi/\lambda$ , joten kulmaliikemäärän voi kirjoittaa myös muotoon

$$L_z = r\hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{s}{\lambda}, \quad (17.134)$$

sillä  $r$ -säteisen ympyräradan pituus on  $s = 2\pi r$ . Toisaalta jos aallossa on yhden kierroksen matkalla täsmälleen  $m$  aallonpituutta, radan pituus on aallonpituuden avulla kirjoitettuna  $s = m\lambda$ . Niinpä radan pituuden ja aallonpituuden suhde on juuri  $m$ , ja kulmaliikemäärän komponentilla  $L_z$  on täsmällinen arvo

$$L_z = \hbar m. \quad (17.135)$$

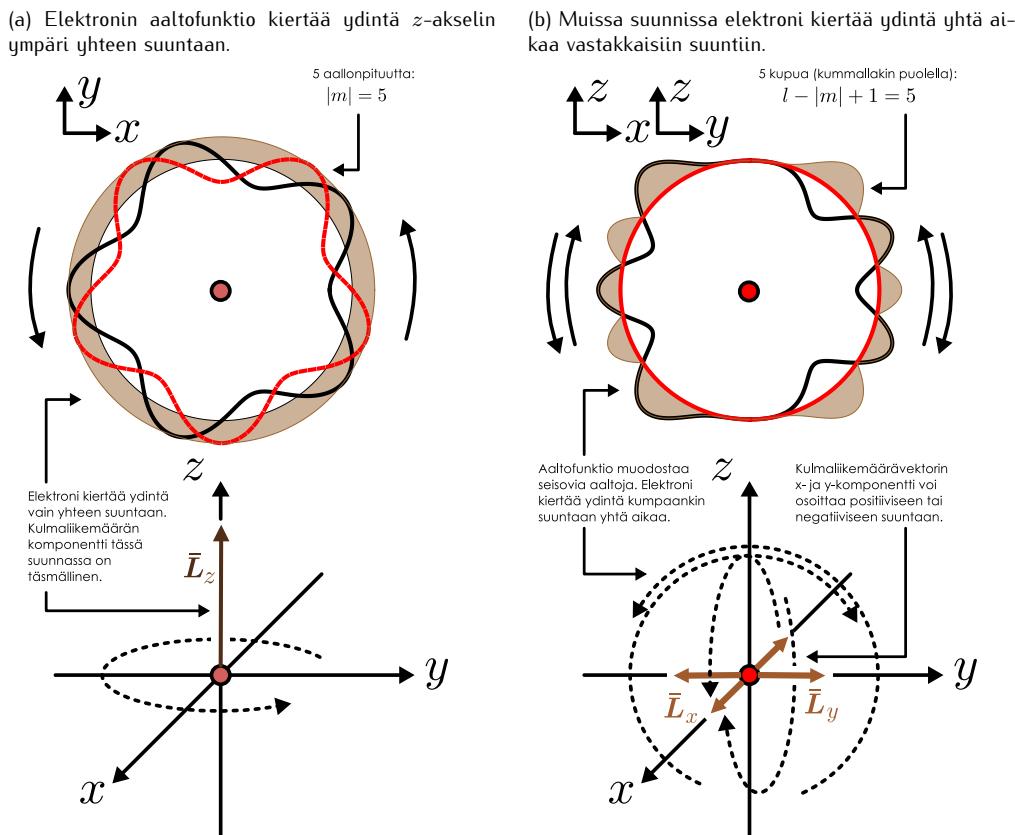
Siispä  $z$ -akselia kiertävän aallon kulmaliikemäärän arvon täytyy olla jokin redusoidun Planckin vakion monikerta, ja se riippuu kvanttiluvusta  $m$ . Mitkään muut arvot eivät ole mahdollisia.

Edellä esitettyssä päättelyssä elektronin oletettiin kiertävän  $r$ -säteistä rataa, mutta tämä ei ole totta, koska elektronin etäisyys ytimestä on epämääräinen. Tällä ei kuitenkaan ole loppujen lopuksi väliä, sillä kulmaliikemäärän  $z$ -komponentin arvo ei riipu siitä, kuinka kaukana ytimestä elektroni on, vaan ainoastaan kvanttiluvusta  $m$  eli ydintä kiertävien aallonpituuksien lukumäärästä.

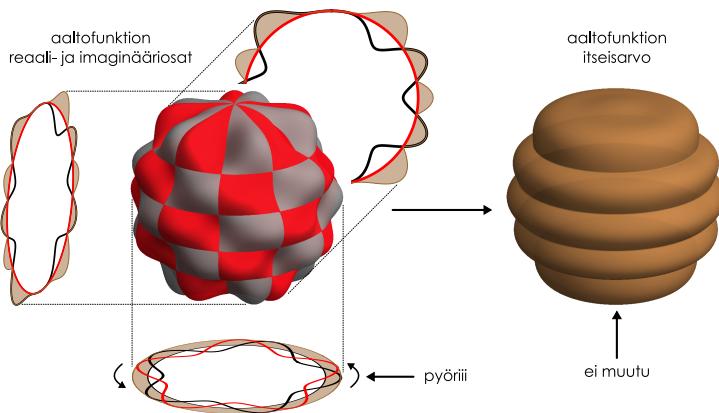
Oikean käden säännön mukaisesti kulmaliikemäärävektorin suunta riippuu elektronin kiertosuunnasta: kiertosuunnan käänäminen käänää myös kulmaliikemäärävektorin ympäri. Eritiisesti kulmaliikemäärän  $z$ -komponentti voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä, kumpaan suuntaan elektroni kiertää  $z$ -akselia. Niinpä kvanttiluku  $m$  voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen elektronin kiertosuunnasta.

Ydintä  $z$ -akselin ympäri kiertävä klassinen hiukanen liikkisi vain  $xy$ -tasossa, jolloin sen nopeus  $z$ -suunnassa olisi täsmälleen nolla. Tämä ei kuitenkaan ole epätarkkuusperiaatteen perusteella mahdollista, sillä elektronilla ei voi olla täsmällistä  $z$ -koordinaattia ja  $z$ -suuntaista liikemäärää. Niinpä vaikka kvanttimekaaninen elektroni kiertäisi ydintä **pääasiassa**  $z$ -akselin ympäri  $xy$ -tasossa, sillä on pakko olla liikettä *myös*  $z$ -akselin suunnassa eli  $x$ - ja  $y$ -akselien ympäri.

Kuva 17.44: Kvanttimekaanisen elektronin aalofunktio kulmaosuus, kun  $l = 9$  ja  $m = 5$ . Aalofunktio muodostaa ytimen ympärille sekä seisovia että eteneviä aaltoja. Elektroniaalto kiertää siis ydintä yhtä aikaa useilla kiertoradalla sekä eri suuntiin, ja tämän vuoksi elektronin kulmaliikemäärän suunta on epämääräinen.



## KVANTTIMEKANIICKA

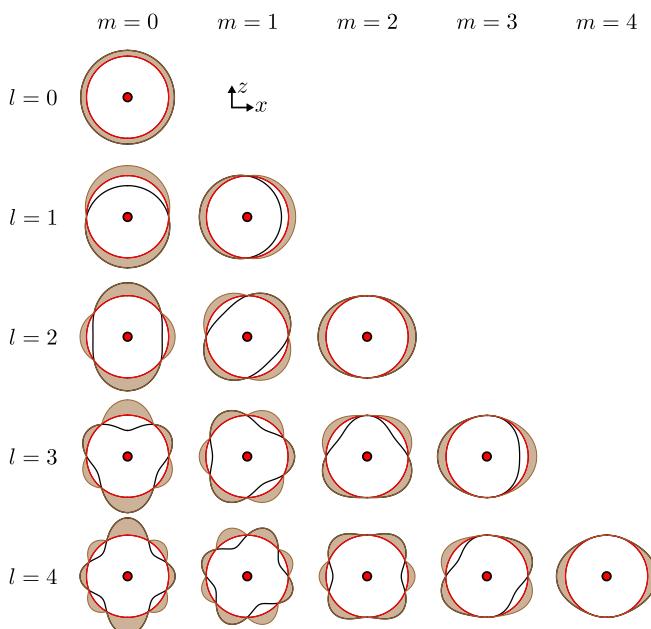
Kuva 17.45: Aaltofunktion kulmaosuus piirrettynä pallon pinnalle, kun  $l = 9$  ja  $m = 5$ .

akseleiden ympäri kiertäviä aaltoja, eli elektronilla on kiertoliikettä näiden akseleiden ympäri *kumpaanakin suuntaan yhtä aikaa*. Elektronin aaltofunktio on symmetrinen  $z$ -akselin suhteen, joten kuvassa 17.44 (b) nähdään pystyakselin kummallekin puolelle pürttyvän samanlaiset seisovat aallot.

Seisovien aaltojen kupujen ja solmujen lukumäärän on oltava kokonaisluku. Osoittautuu, että kupujen lukumäärä kierrettäessä positiivisen  $z$ -akselin suunnasta puoli kierrosta alas päin negatiivisen  $z$ -akselin suuntaan saadaan lausekkeesta  $l - |m| + 1$ . Kuvan esimerkissä lausekkeen arvo on  $9 - 5 + 1 = 5$ , ja seisova aalto muodostaa viisi kupua pystyakselin kummallekin puolelle. Koska kupuja on oltava tälläkin kierroksella vähintään yksi, kvanttiluvulle täytyy päteä  $l - |m| + 1 \geq 1$  eli  $l \geq |m|$ .



**17.44** Mitkä ovat elektronin kvanttiluvut, jos sen aaltofunktion radiaaliosuudessa on 1 kupa,  $z$ -akselia kiertää 2 aallonpituitta myötäpäivään ja  $x$ -akselin ympäällä (puolen kierroksen matkalla) on 3 kupua? Mikä on elektronin energia ja kulmalukemäärän  $z$ -komponentti tässä tilassa?

Kuva 17.46: Aaltofunktion seisovien aaltojen muoto eri kvanttiluvuilla  $l, m \leq 4$ .

suunnassa vakio, joten vaikka aalto pyörii, sen itseisarvo ei muutu ajan kuluessa.

Kuvan 17.45 aaltofunktiota on varsin monimutkainen, mutta tämä johtuu siitä, että kvanttilukujen arvot  $l = 9$  ja  $m = 5$  ovat hyvin suuret. Normaleissa atomeissa elektronit eivät ole käytännössä koskaan tällaisissa tiloissa vaan yleensä nämä kvanttiluvut saavat pieniä arvoja. Nämä kvanttiluvut valittuun tähän esimerkkiin vain siksi, että aaltofunktion rakenne näkyy paljon selkeämmin, kun funktiossa on paljon kupuja. Tavalliset, pienten kvanttilukujen aaltofunktioiden seisovat aallot on taulukoitu kuvan 17.46 kvanttilukujen  $l$  ja  $m$  funktiona.

Kuvaan 17.44 (b) on piirretty elektronin aaltofunktion muoto  $x$ - tai  $y$ -akselin suunnasta katsottuna tilassa  $l = 9$  ja  $m = 5$ . Toisin sanoen  $z$ -akseli osoittaa kuvassa ylöspäin ja elektronin kiertoliike  $z$ -akselin ympäri tapahtuu kuvassa vaakatasossa. Kuten kuvasta nähdään, elektronin aaltofunktio muodostaa pystysuunnassa kupuja ja solmuja, ja nämä voidaan jälleen tulkitta kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon muodostamaksi seisovaksi aalloksi. Tässä tapauksessa nämä vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot ovat ydintä  $x$ - ja  $y$ -akseleiden ympäri kiertäviä aaltoja, eli elektronilla on kiertoliikettä näiden akseleiden ympäri *kumpaanakin suuntaan yhtä aikaa*. Elektronin aaltofunktio on symmetrinen  $z$ -akselin suhteen, joten kuvassa 17.44 (b) nähdään pystyakselin kummallekin puolelle pürttyvän samanlaiset seisovat aallot.

Kuvassa 17.45 on yhdistetty edelliset tulokset piirtämällä koko aaltofunktion kulmasta riippuva osuus pallopinnalle. Kuvan on piirretty reaaliosuuksia harmaalla, imaginääriosuuksia punaisella sekä erikseen itseisarvo ruskealla, ja kuvajat on piirretty pallon pinnalle siten, että positiiviset arvot on esitetty kumpuina ja negatiiviset arvot kuoppina. Koska reaalista ja imaginääriosuutta kuvaavat pinnat leikkivät, pinnan väri määrityy sen mukaan, kumpi näistä on suurempi. Jos esimerkiksi imaginääriosuuksia on reaaliosuutta suurempia, punainen pinta pürttyy korkeammalle ja se peittää harmaan pinnan. Kuvasta nähdään, kuinka aaltofunktio muodostaa todellakin viisi aallonpituitta kiertäessään kuvassa pystyyn valitun  $z$ -akselin, koska  $m = 5$ . Lisäksi jos funktili kierretään "pohjoisnavalta etelännavalle", matkalle jää viisi kupua, koska  $l - |m| + 1 = 5$ . Aaltofunktio pyörii pystyakselin ympäri, mihin liittyy kulmalukemäärän komponentti  $L_z$ . Aaltofunktion itseisarvo on kuitenkin tässä kierroksessa vakio, joten vaikka aalto pyörii, sen itseisarvo ei muutu ajan kuluessa.



**17.45** Tutki kuva 17.46. Miten aalofunktio muuttuu, kun  $l$  kasvaa? Entä kun  $m$  kasvaa? Onko tiloissa  $m = 0$  joiain erikoista?

Seisoven aalotojen muodostuminen  $x$ - ja  $y$ -akselien ympärille tarkoittaa sitä, että elektronin kulmaliikemäärävektorilla on komponentit myös  $x$ - ja  $y$ -suunnissa. Nämä kulmaliikemäärään komponentit ovat kuitenkin epämääritetut. Jos mittaisimme esimerkiksi elektronin kulmaliikemäärään  $x$ -akselin ympäri eli kulmaliikemäärään komponentin  $L_x$ , elektronin voitaisiin havaita kiertävän täitä akselia kumpaan tahansa suuntaan. Nämä eri kiertosuunnat vastaavat kulmaliikemäärään komponentin  $L_x$  eri etumerkejä, ja niinpä komponentille  $L_x$  voidaan mitata sekä positiivinen että negatiivinen arvo. Itse asiassa myös komponentin  $L_x$  itsesarvolla on hajontaa. Aivan samanlainen päättely pätee komponentille  $L_y$ . Toisin sanoen ainostaan yksi kulmaliikemäärävektorin  $\bar{L}$  komponenteista voi olla täsmällisesti tunnettu ja vektorin muut komponentit ovat välittämättä epämääritetut. Tästä syystä kulmaliikemäärävektorin suunta ei voi koskaan olla täsmällinen (ellei kulmaliikemäärä ole nolla) vaan siihen liittyy aina epätarkkuus.

Vaikka kvanttimekaanisen elektronin kulmaliikemäärävektorin kaikkia komponentteja ei voida tietää samanaikeisesti, vektorin *pituudella* voi silti olla tarkka arvo. Täsmällinen matemaattinen analyysi osoittaa, että kulmaliikemääränen neliö riippuu kvanttiluvusta  $l$  seuraavasti

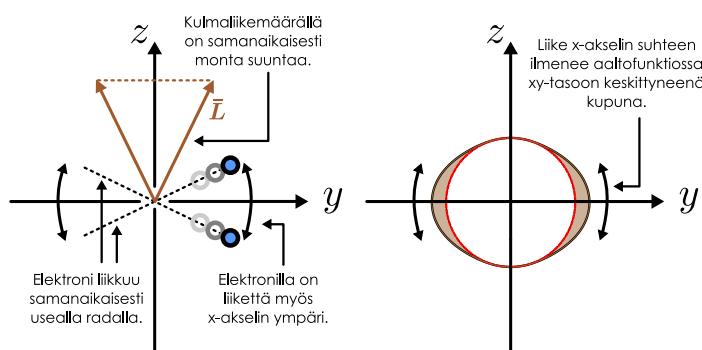
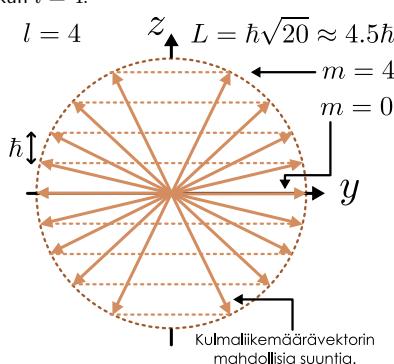
$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (17.136)$$

mukaisesti (missä  $l \geq 0$ ), eli kulmaliikemäärään itseisarvo on  $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ . Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.47:  $\bar{L}$  on vektori, jolla on täsmällinen pituus ja  $z$ -komponentti, mutta epämääritetut  $x$ - ja  $y$ -komponenttit. Vektori  $\bar{L}$  ei siis osoita mihinkään täsmälliseen suuntaan vaan sillä on samanaikaisesti useita suuntia. Tämän voi ajatella tarkoittavan sitä, että koska elektronin paikka ja liikemäärä ovat epämääritetut, elektroni voi kulkea samanaikaisesti usealla kieritoradalla. Elektronin kulmaliikemääränsuuruus on kaikilla näillä radoilla sama,  $L$ , mutta nämä radat kulkevat erisuuntaisilla tasolla. Tällöin vektorilla  $\bar{L}$  on epämääritetty suunta, koska kulmaliikemäärä on kohtisuorassa kiertoradan tasoa vastaan.

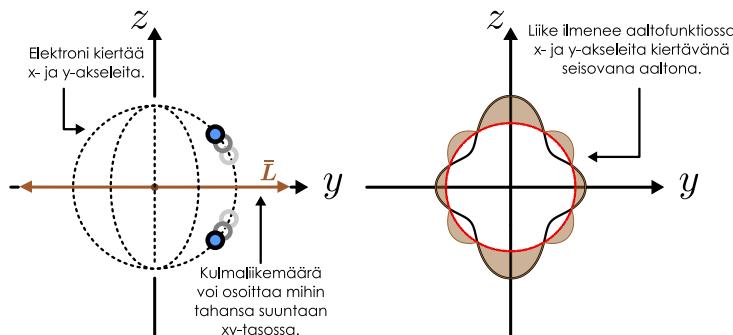
Tämä tulos asettaa myös rajoituksen kvanttiluvulle  $m$  ja  $l$ . Elektronin kulmaliikemäärävektorin pituuden neliö on Pythagoraan lauseen perusteella sen komponenttien neliöiden summa,  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , ja

**Kuva 17.47:** Kulmaliikemäärävektorin pituuden määritä kvanttiluku  $l$  ja sen  $z$ -komponentin kvanttiluku  $m$ . Jos  $m = l$ , elektroni kiertää pääasiassa  $z$ -akselia. Jos taas  $m = 0$ , elektronin liike tapahtuu pelkästään  $x$ - ja  $y$ -akselten ympäri. Tämä on mahdollista, koska elektroni on aalto. Jos elektronia yrittää ajatella klassisena hiukkasena, tulos tarkoittaisi elektronin liikkuvan usealla radalla yhtä aikaa.

(a) Kulmaliikemäärävektorin mahdolliset asennot, kun  $l = 4$ . (b) Klassinen analogia ja aalofunktio tilassa  $l = 4, m = 4$ .



(c) Klassinen analogia ja aalofunktio tilassa  $l = 4, m = 0$ .



## KVANTTIMEKANIICKA

erityisesti koska jokaisen komponentin neliö on positiivinen, kulmaliükemääärän neliön on oltava suurempi kuin sen  $z$ -komponentin neliön,  $L^2 > L_z^2$ . Kvanttilukujen avulla kirjoitettuna epäyhtälö saa muodon  $\hbar^2(l^2 + l) > \hbar^2 m^2$ , ja koska  $l \geq 0$ , tämä toteutuu vain, jos  $l \geq |m|$ . Kvanttiluku  $m$  ei siis voi olla itseisarvoltaan suurempi kuin  $l$ . Pohjimmiltaan tässä on kyse siitä, että jos elektronin kulmaliükemääärä  $z$ -akselin ympäri (kvanttiluku  $m$ ) on suuri, myös elektronin kokonaiskulmaliükemääärän (kvanttiluvun  $l$ ) täytyy olla suuri.



- 17.46** (a) Mikä on elektronin kulmaliükemääärän suuruus, jos kvanttiluku  $l$  on (i) 0, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 4, (v) 8?  
 (b) Vertaa lukuja  $L/\hbar$  ja  $l$ . Lähestyykö näiden erotus jotakin raja-arvoa, kun  $l$  kasvaa?

Jos kvanttiluku  $l = 0$ , elektronin kulmaliükemääärä on nolla. Tässä tilassa elektroni *ei kierrä ydintä lainkaan* vaan se liikkuu ainoastaan kohti ydintä ja siitä poispäin. Tässä tilassa kulmaliükemääärän kaikkien komponenttienkin täytyy luonnollisesti olla nollia, koska vektorin pituus on nolla täsmälleen silloin kun sen kaikki komponenttit ovat nollia. Vain tässä erikoistapauksessa kulmaliükemääärän kaikilla komponenteilla on täsmällinen arvo. Jos  $l$  ei ole nolla, kulmaliükemääärä on itseisarvoltaan nolla suurempi. Tällöin vain yhdellä kulmaliükemääärän komponentilla voi olla täsmällinen arvo. Tämän komponentin suunta voi olla *mikä tahansa* aivan kuten klassisella kiertoradalla olevan hiukkasen rata voi kulkea minkä suuntaisessa tasossa tahansa. On vain *tapa*, että koordinaatiston  $z$ -suunta valitaan niin, että juuri siinä suunnassa kulmaliükemäärellä on täsmällinen komponentti, eikä tähän liity mitään erityistä fysikaalista merkitystä. Jos  $m = l$ , elektronin kiertoluuksesta tapahtuu pääasiassa  $z$ -akselin ympäri, mutta tällöinkin elektronilla on hieman kulmaliükemäärä  $x$ - ja  $y$ -akseleiden ympäri, koska aina täytyy olla  $L^2 > L_z^2$  (kuva 17.47 (b)). Jos  $m = 0$ , elektroni *ei kierrä ydintä lainkaan*  $z$ -akselin ympäri vaan se kulkee *ainoastaan*  $x$ - ja  $y$ -akseleiden ympäri (kuva 17.47 (c)).



- 17.47** Tarkastele kuvaa 17.47, jossa  $l = 4$ .  
 (a) Perustele kuvan ja kulmaliükemäärävektorin avulla, miksei voi olla  $m = 5$ .  
 (b) Mikä on kulmaliükemäärävektorin ja  $z$ -akselin välinen kulma, jos  $m = 4$ ?  
 (c) Kuinka pitkä elektronin kulmaliükemäärävektorin  $xy$ -tason suuntaisen komponentti on tällöin?

Koska elektroni on varattu hiukan, sen kiertoluuksesta ytimen ympäillä muodostaa mikroskooppisen virtasilmukan ja tähän virtasilmukkaan liittyy magneettinen dipolimomentti. Rataliikkeeseen liittyvä dipolimomenttivektori on siis yhdensuuntainen elektronin kulmaliükemäärävektorin kanssa. Koska kulmaliükemäärä on epämääräinen, myöskään siihen liittyvän magneettisen dipolimomenttivektorin kaikkia komponentteja ei voida tuntea samanaikaisesti. Magneettisen dipolin potentiaalienergia ulkoisessa magneettikentässä riippuu kuitenkin vain momenttivektorin *kentän suuntaisesta* komponentista, jota kuvaavat kvanttiluku  $m$ , kun  $z$ -akseli valitaan magneettikentän suuntaiseksi. Niinpä magneettikentässä elektronin energia riippuu pääkvanttiluvun  $n$  lisäksi myös sivukvanttiluvusta  $m$ . Tätä kutsutaan *Zeemanin ilmiöksi* (Pieter Zeemanin mukaan), ja tästä johtuen kvanttilukua  $m$  nimitetään myös *magneettiseksi kvanttiluvuksi*.

Yhteenvedona siis pääkvanttiluku  $n$  voi saada minkä tahansa positiivisen kokonaislukuarvon

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.137)$$

ja  $l$  voi saada vain tätä pienemmät kokonaislukuarvot

$$l = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (17.138)$$

Luku  $m$  voi saada kokonaislukuarvot, jotka ovat itseisarvoltaan korkeintaan  $l$ , joten

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (17.139)$$

Näiden kvanttilukujen indeksoimia ominaistiloja merkitään  $|n, l, m\rangle$ .

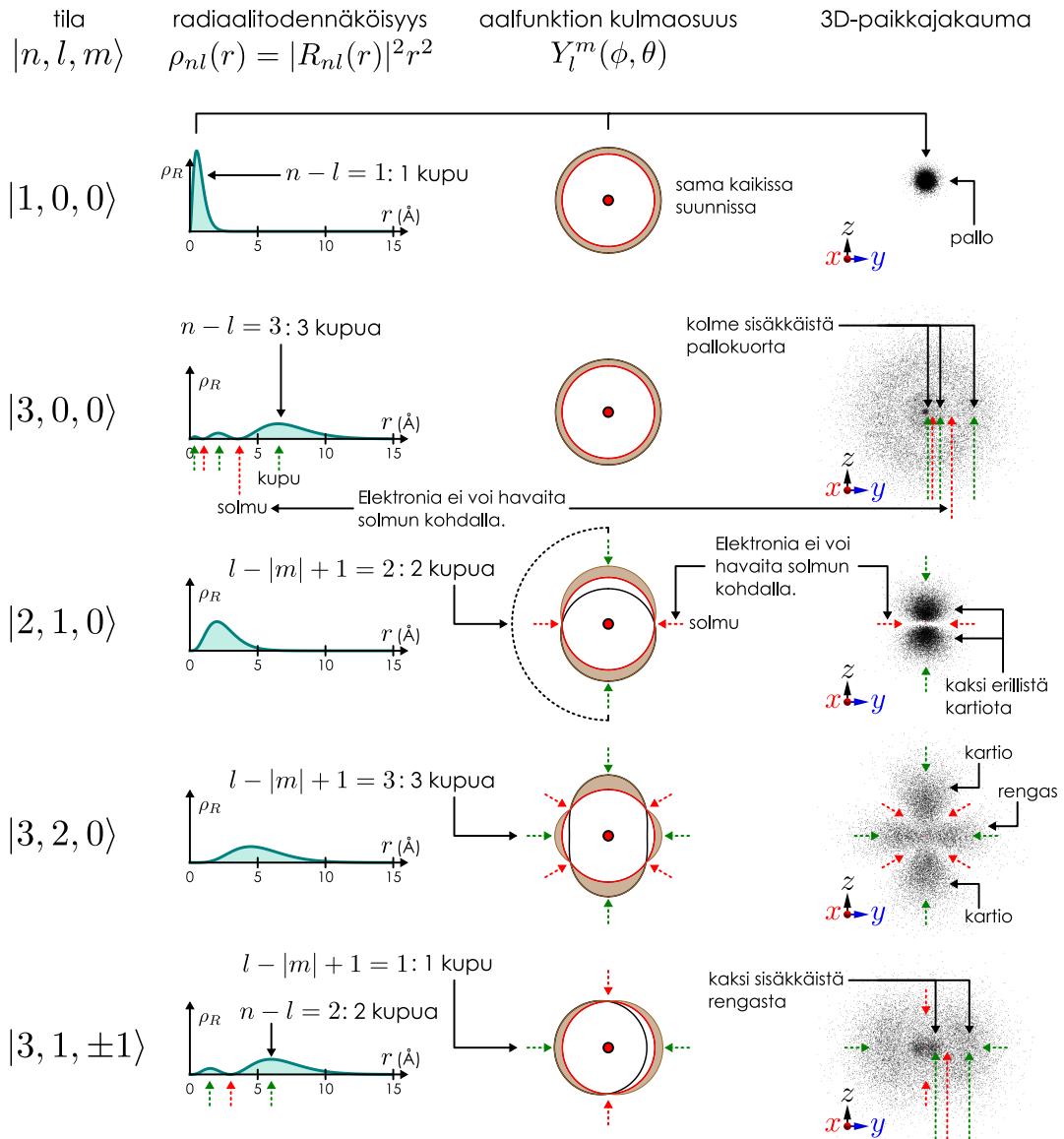


- 17.48** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä atomimallista. Millaisia aaltoja elektroni voi muodostaa ytimen ympärille? Mitä elektronin kulmaliükemääristä voidaan tietää? Millaisilla kvanttiluvuilla näitä tiloja indeksoidaan ja mitä fysikaalisia ominaisuuksia kvanttiluvuista voi laskea?

## Elektronin paikka

Elektroni ei siis ole vetyatomissa ydintä kiertävä pieni planeetta vaan aalto, ja erityisesti elektronin aaltofunktio muodostaa eri suunnissa seisovia ja eteneviä aaltoja. Osaamme nyt määrittää ominaistilassa olevan elektronin kokonaisenergian sekä kulmaliükemäären suuruuden ja yhden komponentin, eikä elektronin liikkeestä oikeastaan sen enempää voikan tietää. Viimeinen asia, joka meidän pitäisi vielä elektronin aaltofunktiossa selvittää, on elektronin paikka. Tutkimme toki jo erikseen radiaalista todennäköisyysfunktioita ja aaltofunktion kulmasta riippuvaa osuutta, mutta nyt yhdistämme oppimamme ja päättelemme elektronin paikan kolmiulotteisessa avaruudessa.

Kuva 17.48: Elektronin paikkajakauman muodon määritymisen aalofunktion radiaali- ja kulmaosista. Elektroni ei voi koskaan havaita etäisyydeltä, jolla radiaalfunktiossa on solmu, eikä suunnasta, jossa kulmafunktiossa on solmu.



Elektroni on aalto, jonka paikka on epämääräinen. Omniaistilassa elektroni ei ole missään tietystä paikassa vaan sen aalofunktio on levinnyt kaikkialle ytimen ympärille. Hiukkasen sijaan onkin parempi ajatella, että elektroni on kuin pilvi. Käytännössä elektronin paikan täsmällinen mittaaminen atomista olisi varsin vaikeaa, mutta vaikka se olisi periaatteessa mahdollista tehdä, tulos olisi satunnainen ja noudattaisi aalofunktion määräämää todennäköisyysjakaumaa. Niinpä kun puhumme elektronin paikasta, tarkoittamme täsmällisesti ottaen elektronin paikan todennäköisyysjakaumaa. Tällä jakaumalla on kuitenkin merkitystä, sillä elektronin paikka vaikuttaa esimerkiksi atomin kemiallisin ominaisuuksiin.

Päätelemme nyt elektronin paikan jakauman kuvan 17.48 piirrettyissä tiloissa. Kuvassa on viisi erilaista tilaa, ja kullekin tilalle on piirretty sen radiaalinen todennäköisyysjakauma, aalofunktion kulmaripputavan osuuden seisovia altoja muodostava osuus sekä elektronin paikan jakauma kolmessa ulottuvuudessa. Paikan jakauma on piirretty arpomalla 15000 satunnaispistettä aalofunktion määräämästä todennäköisyysjakaumasta.

Kuvan ensimmäinen tila on perustila  $|1, 0, 0\rangle$ . Tässä tilassa radiaalfunktiossa on yksi kupu ja kulmafunktio on vakio. Tämä tarkoittaa sitä, että elektroni voi olla yhtä suurella todennäköisyydellä missä tahansa suunnassa ytimestä katsoen, jolloin paikan jakauma on pallo, jonka keskellä ydin on.

Toinen tila on  $|3, 0, 0\rangle$ . Tässä tilassa kulmaosus on jälleen vakio, joten nytkin elektroni voi olla missä tahansa suunnassa yhtä suurella todennäköisyydellä. Radiaalfunktiossa on kuitenkin kolme kupua, joita erottaa kaksi solmua. Solmun kohdalla todennäköisyys havaita elektroni on nolla, joten elektronin paikan

jakaumaan muodostuu kolme pallokuorta. Radiaalifunktion kunkin kuvun kohdalla on kuori, jossa elektroni on suurella todennäköisyydella, ja kunkin solmun kohdalla on kuoria erottava "tyhjä" alue, jossa elektroni ei voi olla.

Kolmas tila on  $|2, 1, 0\rangle$ . Nyt radiaalifunktiossa on jälleen vain yksi kupu, mutta nyt kulmafunktiossa on kuvut atomin "navoilla" eli  $z$ -akselilla ja solmu "päiväntasaajalla" eli  $xy$ -tasossa. Tämä tarkoittaa sitä, että *elektronia ei voi havaita kaikissa suunnissa yhtä suurella todennäköisyydella*. Suurin todennäköisyys on kupujen suunnassa ja solmujen suunnassa elektronin havaitsemisen todennäköisyydellä on nolla. Paikan jakauma on pyörähdysymmetrisen  $z$ -akselin suhteen, joten elektronin paikan todennäköisyydellä on nolla koko  $xy$ -tasossa, ja niinpä paikan jakaumaan muodostuu kaksi erillistä, likimain kartion muotoista aluetta, joista toinen on ytimestä positiivisen  $z$ -suunnan puolella ja toinen negatiivisessa suunnassa.

Seuraavassa tilassa  $|3, 2, 0\rangle$  kulmafunktiossa on kuvut sekä navoilla että päiväntasaajalla. Napojen kuja vastaavat tässäkin tapauksessa  $z$ -suuntaiset kartion muotoiset alueet, joissa elektronin havaitsemisen todennäköisyyds on suuri. Päiväntasaajan kupu ilmenee  $xy$ -tasossa ydintä kiertävänä renkaana.

Kuvan viimeisessä tilassa  $|3, 1, 1\rangle$  radiaalifunktiossa on kaksi kupua. Kulmafunktiossa on puolestaan kuvut päiväntasaajalla sekä solmut navoilla. Nyt siis elektronia ei voi havaita niillä etäisyksillä, joilla radiaalifunktiossa on solmut, eikä niissä suunnissa, joissa kulmafunktiossa on solmut. Niinpä koska kulmafunktiossa on kupu  $xy$ -tasossa, paikan jakauma muodostaa ydintä kiertäviä renkaita. Koska radiaalifunktiossa on kaksi kupua, renkaita on kaksi sisäkkäin.

Samaan tapaan voidaan päätellä elektronin paikan jakauma missä tahansa ominaistilassa. Tila  $l = 0$  on pallosymmetrinen, ja siinä elektronin paikan jakauma muodostaa ydintä ympäröivää pallopintoja. Sisäkkäisiä pallopintoja on yksi jokaista radiaalifunktion kupua kohti. Tiloissa  $l > 0$  paikkajakauma ei ole pallosymmetrinen vaan se jakautuu kartioihin ja renkaisiin. Kartiot syntyvät vain tiloissa  $m = 0$ , koska vain näissä tiloissa aaltofunktiolla on kuvut atomin navoilla. Muihin suuntiin osuvat kuvut muodostavat renkaita, joita siis syntyy sitä enemmän mitä enemmän kupujakin on. Kaikkien tilojen  $n \leq 3$  paikkajakaumat on püirretty luvun lopussa olevaan kuvaan 17.50.



**17.49** Millainen on elektronin paikan todennäköisyydsjakauma tilassa  $|6, 4, 1\rangle$ ?

## Spin

Kvanttiluvut  $n$ ,  $l$  ja  $m$  riittävät indeksoimaan elektronin kvanttimekaanisen tilan ominaisuudet, jotka riippuvat elektronin paikasta ja kulmaliikeväristä, koska kolmessa ulottuvuudessa aaltonfunktion indeksointi vaatii kolme kvanttilukua. Erityisesti kvanttiluvut  $l$  ja  $m$  seuraavat atomin *pallosymmetriasta*, joten nämä kvanttiluvut kuvaavat kvanttimekaanisen hiukkasen tilaa *kaikkissa pallosymmetrisissä potentiaaleissa* riippumatta siitä millainen funktio potentiaalienergia  $U(r)$  on. Toisaalta niitä ei koskaan esiinny esimerkiksi yksiuolteisissa systeemeissä. Elektronin tilan kuvaus ei kuitenkaan ole vielä täydellinen, sillä elektronilla on myös *sisäinen ominaisuus* nimeltä **spin**, ja siihen liittyy neljäs kvanttiluku  $s$ , joka elektronin tapauksessa voi saada ainoastaan arvot

$$s = \pm \frac{1}{2}. \quad (17.140)$$

Kaikkiaan siis elektronin tiloja vetyatomissa kuvaaa neljä kvanttilukua, ja tiloja voidaan merkitä  $|n, l, m, s\rangle$ .

Spin on vektorisuure, joka muistuttaa matemaattisiltä ominaisuuksiltaan kulmaliikeväristä. Samaan tapaan kuin kvanttiluku  $m$  liittyy elektronin rataliikkeen kulmaliikeväärän  $z$ -komponenttiin, vastaavasti kvanttiluku  $s$  kuvaaa spin-vektorin  $z$ -komponenttia

$$S_z = \hbar s. \quad (17.141)$$

Elektronin spin-vektorin pituus on *aina*

$$S = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} + 1 \right)} = \hbar \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (17.142)$$

Tämä on sama arvo, jonka kulmaliikeväärä  $L$  saisi, jos kvanttiluku  $l$  olisi *puolikas*. Kvanttiluku  $m$  voi saada minimissään arvon  $-l$  ja maksimissaan  $l$  sekä kaikki kokonaislukuarvot näiden väliltä — esim. jos  $l = 1$ ,  $m$  voi saada arvot  $-1, 0$  ja  $1$ . Samaan tapaan spin-kvanttiluku  $s$  voi saada arvot  $-1/2$  ja  $1/2$ , joiden erotus on myös  $1$ . Tässäkin suhteessa spin siis käyttää samalla tavalla kuin kulmaliikeväärä.

Vaikka spin muistuttaa kulmaliikeväristä, se on puhtaasti kvanttimekaaninen ominaisuus, jolla *ei ole* suoraa klassista vastinetta. Pyörimislükkeen kulmaliikeväärän kvanttiluvun  $l$  täytyy *aina* olla kokonaisluku, mutta elektronin spinille vastaava luku on  $1/2$ , joten spin *ei* kuvailee pyörimistä missään klassisessa mielessä. Elektroni *ei ole* pieni pyörivä pallo eikä spiniä voi selittää elektronin pyörimisenä. Spiniä *ei* voi esittää myöskään aaltonfunktiona, koska spin *ei* liity elektronin paikkaan avaruudessa vaan on sen *sisäinen ominaisuus*. Niinpä

spinin käsittely vaatii esimerkin 17.7 kaltaista käsittelyä matriisien avulla. Emme perehdy tässä esityksessä spinin ominaisuuksiin tarkemmin, mutta pelkästään tämän kvanttiluvun olemassaololla on tärkeä merkitys aineen rakenteelle ja kemiallisille ominaisuuksille.

Spin voidaan havaita magneettikentän avulla, koska spinin liittyy magneettinen momentti aivan kuten elektronin kiertoliikkeseenkin. Tästä johtuen ulkoisessa magneettikentässä olevan elektronin energia riippuu siitä, onko elektronin spin kentän suuntainen vai siihen nähden vastakkaisuuntainen. Lisäksi elektroniin kohdistuu epähomogeenisessa magneettikentässä voima aivan kuin pieneen kestomagneettiin. Erityisesti tämän magneettisen voiman suunta riippuu siitä, osoitaako spin-vektori samaan vai vastakkaiseen suuntaan kuin magneettikenttä. Täsmällisemmin jos magneettikentän suunta valitaan  $z$ -suunnaksi, voiman suunta riippuu spin-vektorin  $z$ -komponentin arvosta, jolla on siis elektronin tapauksessa täsmälle kaksi mahdollista arvoa,  $-\frac{1}{2}\hbar$  ja  $\frac{1}{2}\hbar$ . Tästä johtuen epähomogeenisessa magneettikentässä kulkeva elektronisuihku *jakautuu kahia* elektronin spinin suunnan eli kvanttiluvun  $s$  perusteella.

Elektronin spinin liittyvä magneettinen momentti on itse asiassa  $\bar{\mu} = -g \frac{e}{2m_e} \bar{S}$ , missä  $g \approx 2.002$  on vakio. Tämän ns.  $g$ -tekijän tarkka arvo on määritetty sekä kokeellisesti että teoreettisesti 13 desimaalin tarkkuudella eli suhteellisella tarkkuudella  $10^{-13}$ . Niinpä  $g$ -tekijä onkin tarkimmin tunnettuja luonnonvakioita (tietenkin tarkasti määriteltyjä arvoja kuten valonnopeutta lukuunottamatta)!



**17.50** On olemassa myös hiukkasia, joiden spin ei ole puolikas. Erään hiukkasen spin-vektorin pituus on  $S = \hbar\sqrt{15}/4$ . Mitkä arvot tämän hiukkasen kvanttiluku  $s$  voi saada? Jos tällaisten hiukkasten suihku kulkee epähomogenisen magneettikentän läpi, kuinka moneen osaan se jakautuu?

## Monielektroniset atomit ja rakenteet

Vetyatomi on yksinkertaisin mahdollinen atomi, koska se koostuu vain yhdestä protonista ja yhdestä elektronista. Kaikkien muiden alkuaineiden atomeissa on *useita* elektroneja, ja tämä tekee elektronien ominaistilojen tarkan ratkaisemisen mahdottomaksi elektronien keskinäisen vuorovaikutuksen vuoksi. Tavanomainen approksimaatio onkin olettaa, että monielektronisissa atomeissa yksittäiset elektronit käyttäytyvät likimain samaan tapaan kuin elektri vetyatomissa. Toisin sanoen oletetaan, että elektronien tilat voidaan indeksoida samoin kvanttiluvuin  $n$ ,  $l$ ,  $m$  sekä  $s$ , jolloin atomin kvanttimekaaninen tila tunnetaan, kun sen kaikkien elektronien kaikki kvanttiluvut tiedetään. Tämä *ei ole* täsmälle totta, mutta se on usein hyvä malli.

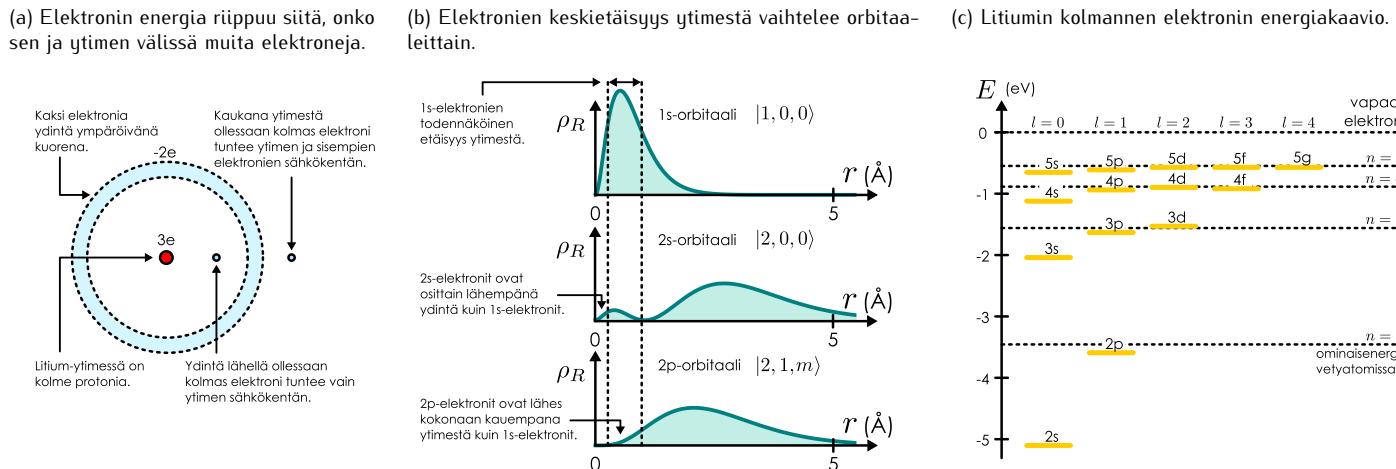
Kvanttilukujen fysikaalinen merkitys on tässä mallissa sama kuin vetyatomien tapauksessa. Kvanttiluvut  $l$  ja  $m$  kuvavat elektronin liikkeen kulmalikemääriä ja kvanttiluku  $n$  liittyy siihen, kuinka kaukana ytimestä elektri keskimäärin on. Kuitenkin koska elektronit vuorovaikuttavat keskenään ja atomin ytimen varaus on suurempi kuin vetyatomissa, elektronien energiat *eivät ole* samat kuin vetyatomissa ja ne riippuvat kvanttiluvun  $n$  lisäksi myös kvanttiluvusta  $l$ . Esimerkkinä voidaan tarkastella vaikkapa litiumatomia, jolla on kolme elektronia ja jonka ytimestä on kolme protonia. Tällaisen atomin ytimestä on kolminkertainen sähkövaraus vetyyn verrattuna, joten ytimen ja yhden elektronin välinen vuorovaikutus on voimakkuudeltaan kolminkertainen. Näin ollen esimerkiksi tilassa  $|1, 0, 0, 1/2\rangle$  olevan elektronin energian pitäisi olla litiumissa enemmän negatiivisempi (eli itseisarvoltaan suurempi) verrattuna vastaavaan elektronin vetyatomissa.

Elektronit eivät myöskään ole kaikki yhtä lähellä ydintä, sillä elektronien paikan todennäköisyysjakauma riippuu kvanttiluvuista  $n$  ja  $l$  kuten kuvassa 17.50 on esitetty. Elektri, jonka pääkvanttiluku on  $n = 1$ , on keskimäärin lähempänä ydintä kuin elektri, jonka pääkvanttiluku on esimerkiksi  $n = 2$ . Gaussin lain perusteella pallomaisen varausjakauman sähkökenttä on samanlainen kuin pallon keskellä olevan pistevarauksen kenttä, joten tarkasteltaessa ydintä ja sitä ympäröiviä elektroneja kauaa, niitä ei voi erottaa pistevarauksista, jonka suuruus on ytimen varauksen ja elektronien varausten summa. Nyt jos esimerkkimme litiumatomissa on kaksi elektronia tilalla  $|1, 0, 0, \pm 1/2\rangle$  ja yksi elektri tilalla  $|2, 0, 0, 1/2\rangle$ , tämä yksinäinen elektri on keskimäärin kauempana ytimestä kuin muut elektronit ja niinpä se tuntee *ytimen ja ydintä lähempänä ole-vien elektronien yhteisen sähkökentän* (kuva 17.49 (a)). Koska ytimen varaus on  $3e$  ja kahden elektronin varaus on  $-2e$ , tämä elektri siis kokee likimain samanlaisen vuorovaikutuksen kuin elektri, joka kiertää pistevarausta  $3e - 2e = e$  — eli yhtä protonia, aivan kuten elektri vetyatomissa. Niinpä tämän elektronin energian voisi olettaa olevan likimain sama kuin vetyatomissa tilalla  $|2, 0, 0, 1/2\rangle$  olevan elektronin, eli  $E_2 = -3.4$  eV. Aivan täsmälle näin ei ole, koska elektronin todennäköisyysjakauma ulottuu myös lähelle ydintä, joten elektri ei ole kokonaan muiden elektronien rajojen ulkopuolella (kuva 17.49 (b)). Kuitenkin mitä kauempana ytimestä kolmas elektri on, eli mitä suuremmat ovat sen kvanttiluvut  $n$  ja  $l$ , sitä vähemmän sen energia poikkeaa elektronin energiasta vetyatomissa vastaavalla kvanttililla (kuva 17.49 (c)). Elektronien energiasojen poikkeamat vetyatomien vastaavista voidaan periaatteessa päätellä samantyyppisellä logiikalla muissakin monielektronisissa atomeissa, mutta tilanne on tieteenkin sitä monimutkaisempi mitä enemmän elektroneja atomiin kuuluu. Yleisesti kuitenkin elektronin energia on sitä pienempi mitä pienemmät sen kvanttiluvut  $n$  ja  $l$  ovat.

Elektronien ominaistiloja atomeissa kutsutaan **orbitaaleiksi** (engl. orbit, 'kiertorata'). Elektronien sijoittuminen eri orbitaaleille ilmaistaan usein lyhyesti ns. *spektroskooppisella notaatiolla*  $nl^x$ , missä  $n$  on pääkvant-

## KVANTTIMEKANIKKAA

Kuva 17.49: Lithiumin kolmannen elektronin energia, kun kaksi muuta elektronia ovat 1s-orbitaalilla. Tiloilla, joilla kolmas elektroni on pääasiassa kauempana ytimestä kuin 1s-kuori, elektronin energia on melko tarkasti sama kuin vetyatomissa olevan elektronin. Jos elektroni pääsee täti lähemmäs ytimiin (s-orbitaalit), sen energia on pienempi.



tilukua vastaava numero,  $l$  on kulmaliikemäärän kvanttilukua vastaava *kirjain*, ja  $x$  on kyseisillä orbitaaleilla olevien elektronien lukumäärä. Tilojen  $l = 0, 1, 2, 3$ , jne. kirjainsymbolit ovat *s*, *p*, *d*, *f* jne. (tulevat historiallisesti sanoista 'simple', 'principal', 'diffuse' ja 'fundamental'), joten esimerkiksi litiumatomin, jossa elektronit ovat tiloilla  $|1, 0, 0, 1/2\rangle$ ,  $|1, 0, 0, -1/2\rangle$  ( $n = 1, l = 0$  eli 1s) sekä  $|2, 0, 0, 1/2\rangle$  ( $n = 2, l = 0$  eli 2s), elektronirakennetta merkitään  $1s^2 2s^1$  (2 elektronia 1s ja 1 elektroni 2s orbitaaleilla). Kvanttilukujen  $m$  ja  $s$  eroja ei tässä merkinnässä huomioida, koska elektronien energia ei riipu näistä kvanttiluvuista ellei atomi ole magneettikentässä.



**17.51** Mikä on hapen, natriumin, ja magnesiumin elektronirakenne spektroskooppisessa notaatiossa?

Elektronien sijoittumista orbitaaleille ohjaavat kaksi perussääntöä: elektronit pyrkivät pienimmän energian tilaan ja mitkään kaksi elektronia eivät voi olla samassa kvanttimekaanisessa tilassa. Säännöstä ensimmäisen olemme jo nähneet esimerkiksi emissiota tarkasteltaessa. Virittynyt elektroni pyrkii itsestään palaamaan takaisin perustilalle eli pienimmän energian tilaan. Toinen sääntö on kuitenkin uusi. Sitä kutsutaan **Paulin kieltosäännöksi** (Wolfgang Paulin mukaan), ja se ei ole mitenkään itsestäänselvä. Elektroneillahan ei ole esimerkiksi tarkkaa paikkaa, joten kyse *ei ole* siitä, että elektronit olisivat toistensa "tiellä" klassisten pallojen tapaan. Elektronien paikkaa kuvaavat aalofunktio, eivätkä aallot törmää samaan tapaan kuin klassiset hiukkaset. Erityisesti kahdella elektronilla, joilla on eri spin-kvanttiluvut, *voi* olla muuten täsmälleen samanlaiset kvanttiluvut eli ne voivat olla levinneet avaruuteen *täsmälleen samalla tavalla*. Kieltosääntö ei pidä myöskään sekoittaa elektronien väliseen sähköiseen voimaan. Toki elektronit hylkivät toisiaan, koska negatiivisina hiukkasina niiden välisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia on sitä suurempi mitä lähevästä toisiaan elektronit ovat. Periaatteessa kuitenkin kaksi elektronia voidaan tuoda mielivaltaisen lähelle toisiaan antamalla niille tarpeeksi energiota. Kieltosääntö sen sijaan on absoluuttinen: elektronit eivät voi *millioinkaan* olla samassa kvanttillassa. Kyseessä on jälleen puhtaasti kvantimekaaninen ominaisuus, joka pätee ns. **fermioneille**, joita mm. elektroni, protoni ja neutronit ovat. Se *ei päde* ns. **bosoneille** kuten fotoneille, jotka fotone voi olla samassa kvanttimekaanisessa tilassa mielivaltaisen monta!

Koska esimerkiksi kvanttilukua  $n = 1$  vastaa vain kaksi tilaa,  $|1, 0, 0, 1/2\rangle$  ja  $|1, 0, 0, -1/2\rangle$ , Paulin säännön mukaan 1s-orbitaalille mahtuu siis maksimissaan *kaksi* elektronia. Kolmannen elektronin on asetuttava energiassa toiseksi matalimmalle orbitaalille, joka on 2s, eli esimerkiksi tilalle  $|2, 0, 0, 1/2\rangle$ . Vaikkapa hiiliatomissa on kuusi elektronia, joista hiilen elektroneista kaksi on orbitaalilla 1s, kaksi orbitaalilla 2s ja kaksi orbitaalilla 2p. Kaikkiaan hiilen elektronirakennetta merkitään siis  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Koska kaikilla tiloilla  $|2, 1, m, s\rangle$  on sama energia (kun emme huomioi elektronien välistä hylkivää sähköistä vuorovaikutusta), hiulen kaksi 2p-elektronia voivat olla millä tahansa näistä tiloista tai jossakin tilojen superpositiossa kuten esimerkiksi tiloissa  $|2, 1, 1, 1/2\rangle$  (ns.  $p_z$ -orbitaalil) ja  $\frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1, 1, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1, -1, 1/2\rangle$  (ns.  $p_x$ -orbitaalil). Merkintä  $2p^2$  ei siis kerro täsmälleen millaiset näiden elektronien tilat ovat, mutta atomin kemiallisten ominaisuuksien kannalta tärkeintä onkin se, että näillä orbitaaleilla on vain *kolme* elektronia — siellä on siis vielä tilaa *kolmelle muulle* elektronille.



**17.52** Kolme elektronia asetetaan äärettömän syvään potentiaalikuoppaan (kuva 17.31). Oletetaan, että elektronien välinen sähköinen vuorovaikus muuttaa elektronien sallittujen tilojen energioita vain vähän. Mitkä ovat elektronien energiat? Mikä on pienin ja toiseksi pienin energia, jonka jokin kuopassa oleva elektroni voi absorboida (yksiköissä  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ )?

Atomien elektronirakenne on kaiken kemian lähtökohta, sillä kemia on seurausta juuri atomien elektronien käyttäytymisestä. Vaikka orbitaalimalli on vain approksimaatio, se on usein riittävä selittämään eri alkuaineiden kemialliset ominaisuudet. Alkuaineiden jaksollisessa järjestelmässä alkuaineet jaotellaan ryhmään kuten alkaliometalleihin, halogeeneihin ja jalokaasuihin, ja jaottelu perustuu pohjimmiltaan siihen, että kussakin ryhmässä kaikkien alkuaineiden uloimmat elektronit ovat samantyyppisillä orbitaaleilla. Esimerkiksi alkaliometalleissa eli litiumissa, natriumissa, kaliumissa, rubidiumissa, cesiumissa ja franciumissa suurin energia on elektronilla, joka on yksin orbitaalilla  $2s^1$  (Li),  $3s^1$  (Na),  $4s^1$  (K),  $5s^1$  (Rb),  $6s^1$  (Cs) ja  $7s^1$  (Fr). Nämä alkuaineet ovatkin kemiallisesti hyvin aktiivisia, sillä niiden on helppo luovuttaa tämä yksi elektroni jollekin toiselle atomille. Tällöin atomit voivat ionisoitua, jolloin niiden elektronien lukumäärä muuttuu, tai muodostaa kovalentteja molekyylisidoksia, joissa elektronit ovat levittyneet useamman kuin yhden ytimen ympärille.

Kovalentteja sidoksia muodostavien elektronien sanotaan olevan *molekyyliorbitaaleilla*. Nämä ovat jälleen astetta monimutkaisempia kuin atomiorbitaalit, mutta niidenkin voi usein ajatella muodostuneen atomiorbitaalien kvanttimekaanisenä superpositiona, jolloin puhutaan orbitaalien hybridisaatiosta. Kiinteissä aineissa, joissa valtava määrä atomeja on järjestynyt suuraksi rakenteiksi, elektronit eivät enää välittämättä kuulu edes atomiparille vaan ne levivät aineeseen aaltopulsseina samaan tapaan kuin vapaat elektronit. Tällöin elektroneiden sallitut energiat eivät ole enää diskreetit kuten atomeissa vaan ne muodostavat jatkumon kuten vapaille hiukkasilla. Tällaisilla elektroneilla ei silti voi olla aivan mitä tahansa energioita, koska vuorovaikutus säädöllisen hilan muodostavien atomiydinten kanssa rajoittaa elektronien aaltofunktioita. Niinpä vaikka elektronien mahdolliset energiat muodostavat jatkumon, siinä on "aukkoja" eli kiellettyjen energioden alueita. Tätä nimitetään elektronien *vyörakenteeksi*, ja aukkojen erottamia sallittujen energoiden arvojen alueita kutsutaan elektronivöiksi. Vyörakenne selittää, miksi materiaalit ovat johteita, eristeitä tai puolijohdeita. Loppujen lopuksi aineiden *kaikki* kemialliset ja sähköiset ominaisuudet ovatkin seurausta elektronien kvanttimekaniikasta.



**17.53** Selitä omin sanoin, mikä on spin, orbitaali ja spektroskooppinen notaatio. Miten elektronit asettuvat eri tiloiille vetyä raskaammissa alkuaineissa ja miksi spin liittyy tähän?

## Yhteenvetö: Kvanttimekaniikka

### Fotoni

- Sähkömagneettinen säteily koostuu fotoneista.
- Fotonin energia on suoraan verrannollinen sen taajuuteen

$$E = \hbar\omega$$

ja liikemäärä aaltolukuun

$$p = \hbar k.$$

- Jos elektroni absorboi fotonin, fotonin koko energia siirryy elektronille. Absorptio on mahdollinen vain jos elektroni pystyy vastaanottamaan juri tämän verran energiaa.
- Sähkömagneettisen säteilyn intensiteetti on verrannollinen pinnaalle saapuvien fotonien lukumäärään aikayksikössä,  $I = n_{\text{fotoni}} E_{\text{fotoni}} / \Delta t$ . Kääntäen, todennäköisyys havaita fotoneja on verrannollinen klassisen sähkömagneetisen aallon amplitudin neljöön,  $n_{\text{fotoni}} / \Delta t \sim |\vec{E}|^2$ .

### Todennäköisyyslaskenta

- Jos  $\rho_X$  on jatkuvan satunnaismuuttujan jakauman tiheysfunktio, todennäköisyys mitata satunnaismuuttujalle arvo väliltä  $[a, b]$  on

$$P(a < x < b) = \int_a^b \rho_X(x) dx.$$

- Jakauman pitää toteuttaa normitusehota

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) dx = 1.$$

- Jos satunnaismuuttuja mitataan monta kertaa, näiden mittausten keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa. Odotusarvo on

$$\mu_x = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x) dx.$$

- Satunnaismuuttujan varianssi on

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \rho_X(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

- Hajonta mittaa sitä, kuinka kaukana odotusarvosta satunnaismuuttujan arvot yksittäisissä mittauksissa ovat. Hajonta on varianssin neljöjuuri,  $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ .

### Kvanttimekaaninen superpositio ja epätarkkuus

- Kvanttimekaanikassa hiukkasten ominaisuuksia kuvaa kvanttimekaaninen **tila**  $|\psi\rangle$ . Hiukkisen paikkaa kuvaa tilaan lüttivä **aaltofunktio**  $\psi(x)$  ja hiukkisen liikemäärä sen **aaltolukuesitys**  $a(k)$ . Aaltofunktio ja aaltolukuesitystä yhdistää *Fourier-muunnos*.
- Tilassa  $|k\rangle$  hiukkasselä on tarkka liikemäärä

$$p_x = \hbar k$$

sekä liike-energia

$$K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

mutta täysin epämääräinen paikka. Hiukkisen aaltofunktio on tässä tilassa muotoa  $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ .

- Tilassa  $|\psi\rangle$  hiukkisen paikan todennäköisyysjakauaman tiheysfunktio on sen aaltofunktion itseisarvon neliö,  $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2$ . Hiukkisen liikemäärä on verrannollinen sen aaltolukuun  $p_x = \hbar k$ , jonka todennäköisyysjakauaman tiheysfunktio on aaltolukuesityksen itseisarvon neliö,  $\rho_K(k) = |a(k)|^2$ .

- Yleisesti, jos hiukkisen jokin ominaisuus  $y$  saa tiloissa  $|i\rangle$  tarkat arvot  $y_i$ , hiukkisen tila  $|\psi\rangle$  voidaan esittää näiden tilojen superpositiona  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$ . Aaltofunktioiden avulla superposition voi esittää summan

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x).$$

Tällaisessa superpositiotilassa hiukkisen ominaisuuden  $y$  mittaus antaa tulokseksi jonkin sellaisen arvon  $y_i$ , jolle kerroin  $c_i$  ei ole nolla.

- Jos paikan ja liikemäären epätarkkuudeksi määritellään niiden hajonta, kaikille tiloille pätee **epätarkkuusperiaate**

$$\Delta x \Delta p_x = \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

## Ominaistilat ja -energiat

- Alueissa, joissa hiukkasen kokonaisenergia on potentiaalienergiaa suurempi, aaltofunktio muodostaa aaltoja. Alueissa, joissa hiukkasen kokonaisenergia on potentiaalienergiaa pienempi, aaltofunktio vaimenee eksponentiaalisesti.
- Jos hiukkasen kokonaisenergia on sen potentiaalienergiaa suurempi kaikkialla, hiukkanen on **vapaa** ja se pääsee liikkumaan minne tahansa. Tällöin hiukkasen energia voi saada mitä tahansa arvoja.
- Jos hiukkasen kokonaisenergia on sen potentiaalienergiaa suurempi vain rajoitetussa alueessa, hiukkanen on **vangittu** potentiaalienergiakuoppaan. Tällöin hiukkasen energia voi saada vain joitakin tiettyjä arvoja, jotka määrätyvät systeemin asettamista reunaehdoista. Erityisesti hiukkasen aaltofunktion pitää olla kaikkialla jatkuvaa.
- Tiloja, joissa hiukkasen kokonaisenergialla on tarkka arvo, kutsutaan **ominaistiloiksi**. Näitä tiloja vastaavia energian arvoja kutsutaan hiukkasen **ominaisenergioiksi**. Jos hiukkasen energia mitataan, tulokseksi saadaan aina jokin ominaisenergia.

- Ominaistilassa olevan hiukkasen ominaisuuksien todennäköisyysjakaumat eivät muutu ajan kuluessa.
- Kaikki tilat voidaan esittää ominaistilojen superpositiona.
- Vapaan hiukkasen aaltofunktio muodostaa aaltopulssin, ja tämä ei ole ominaistila.
- Potentiaalienergiakuopassa olevan hiukkasen aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja, ja nämä ovat ominaistiloja. Seisovissa aaloissa täytyy aina olla kokonaislukumäärä  $n$  kupuja, joten tämä on **kvanttiluku**, jonka avulla ominaistilat  $|n\rangle$  voi indeksoida.
- Yleisesti hiukkasen ominaistilat ja -energiat määritellään **Schrödingerin yhtälö**, joka on kvanttimekaniikan peruslaki. Aaltofunktiosetyksessä yhtälö saa muodon

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E_{\text{kokonais}}\psi(x).$$

Yhtälön ensimmäinen termi kuvailee hiukkasen liike-energiaa ja toinen potentiaalienergiaa. Yhtälön oikea puoli kuvailee hiukkasen kokonaisenergiaa.

## Atomi

- Atomi on elektronille potentiaalienergiakuoppa, jossa elektronin aaltofunktio muodostaa sekä ydinästä kiertäviä että seisovia aaltoja.
- Vetyatomissa elektronin ominaistilojen  $|n, l, m, s\rangle$  paikasta riippuvan osuuden indeksointiin tarvitaan kolme kvanttilukua,  $n$ ,  $l$  ja  $m$ , ja lisäksi elektronin sisäistä spin-ominaisuutta kuvaava kvanttiluku  $s$ . Näiden sallitut arvot ovat

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, \dots, n-1 \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \\ s &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Elektronin kokonaisenergia vetyatomissa riippuu vain pääkvanttiluvusta  $n$ , kun ulkoista magneettikenttää ei ole

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = (-13.6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2}.$$

- Ulkoisessa magneettikentässä elektronien energiat riippuvat myös kvanttiluvuista  $m$  ja  $s$ .

- Elektronin kulmalukemäärän itseisarvo riippuu kvanttiluvusta  $l$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

ja kulmalukemäärän  $z$ -komponentti riippuu kvanttiluvusta  $m$

$$L_z = \hbar m.$$

- Usean elektronin atomeissa kunkin elektronin voi ajatella olevan tilassa, joka muistuttaa elektronin tilaa vetyatomissa ja jota kuvaavat siis samat kvanttiluvut  $n, l, m, s$ . Tämä on kuitenkin vain approksimaatio.
- Elektroni on **fermioni**, mikä tarkoittaa sitä, että kaksi elektronia ei voi koskaan olla täsmälleen samassa kvanttillassa. Erityisesti usean elektronin atomissa millään kahdella elektronilla ei voi olla täsmälleen samoja kvanttilukuja. Tämä on **Paulin kieltosääntö**.
- Elektronien tiloja atomeissa kutsutaan **orbitaaleiksi**. Elektronien sijoittumista eri orbitaaleille merkitään  $nl^x$ , missä  $n$  on pääkvanttiluvun arvo,  $l$  on sivukvanttilukua merkitsevä kirjain (s, p, d, f, jne.) ja  $x$  on kyseisillä orbitaaleilla olevien elektronien lukumäärä.

## Sanasto

- kvanttimekaniika (quantum mechanics)
- valosähköinen ilmiö (photoelectric effect)
- fotoni (photon)
- absorptio (absorption)
- emissio (emission)
- musta kappale (blackbody)
- tunneloituminen (tunneling)
- fermioni (fermion)
- bosoni (boson)
- orbitaali (orbital)
- Planckin vakio (Planck's constant)
- redusoitu Planckin vakio (reduced Planck's constant)
- aaltofunktio (wavefunction)
- aaltolukuesitys (wavenumber representation)
- Fourier-muunnos (Fourier transform)

- epätarkkuusperiaate (uncertainty principle)
- ominaistila (eigenstate)
- ominaisenergia (eigenenergy)
- stationaarinen tila (stationary state)
- perustila (ground state)
- viritystila (excited state)
- kvanttiluku (quantum number)
- Schrödingerin yhtälö (Schrödinger equation)
- reunaehento (boundary condition)
- Paulin sääntö (Pauli principle)
- jatkuva jakauma (continuous distribution)
- todennäköisyystiheys (probability density)
- varianssi (variance)
- keskijohonta (standard deviation)

Kuva 17.50: Elektronin ensimmäiset ominaistilat vetyatomissa. Funktioissa  $R_{nl}$  esiintyvä vakio  $a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.3 \cdot 10^{-11}$  m on ns. Bohrin sade. Sarakkeen "paikka" kuvissa on tietokoneella arvottu 15000 satunnaisista paikkaa tilaan liittyvästä paikan todennäköisyysjakaumasta.

| tila<br>$ n, l, m\rangle$ | aaltofunktio<br>$\psi_{nlm}(r, \phi, \theta) = R_{nl}(r)Y_l^m(\phi, \theta)$  | etäisyys<br>$\rho_R$ | energia   | kulma-likemäärä         | paikka  |
|---------------------------|---|----------------------|-----------|-------------------------|---|
| $ 1, 0, 0\rangle$         | $R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-\frac{r}{a}}$<br>$Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$   |                      | -13.60 eV |                         | <br>Näkymä z-suunnasta.<br>Hiukkasan ei kierro lairkaan. Tämä ei olisi mahdollista klassisesti. |
| $ 2, 0, 0\rangle$         | $R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}a^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}$<br>$Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  |                      | -3.40 eV  |                         | <br>Näkymä x-suunnasta.   |
| $ 2, 1, 0\rangle$         | $R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}}$<br>$Y_1^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$  |                      | -3.40 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{2}$ | <br>Näkymä y-suunnasta.   |
| $ 2, 1, \pm 1\rangle$     | $R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}}$<br>$Y_1^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$                                  |                      | -3.40 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{2}$ | <br>Tämä on tila m=1. Tilossa m=-1 vektori osoittaa alas-päin.                                  |
| $ 3, 0, 0\rangle$         | $R_{30}(r) = \frac{2}{81\sqrt{3}a^{3/2}} \left(27 - 18\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$                             |                      | -1.51 eV  |                         | <br>Näkymä z-suunnasta.   |
| $ 3, 1, 0\rangle$         | $R_{31}(r) = \frac{4}{81\sqrt{6}a^{3/2}} \left(6\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_1^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$                         |                      | -1.51 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{2}$ | <br>Näkymä y-suunnasta.   |
| $ 3, 1, \pm 1\rangle$     | $R_{31}(r) = \frac{4}{81\sqrt{6}a^{3/2}} \left(6\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_1^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$ |                      | -1.51 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{2}$ | <br>Näkymä x-suunnasta.   |
| $ 3, 2, 0\rangle$         | $R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_2^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$  |                      | -1.51 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{6}$ | <br>Näkymä z-suunnasta.   |
| $ 3, 2, \pm 1\rangle$     | $R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_2^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}$                |                      | -1.51 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{6}$ | <br>Näkymä y-suunnasta.   |
| $ 3, 2, \pm 2\rangle$     | $R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$<br>$Y_2^{\pm 2}(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm i2\phi}$                           |                      | -1.51 eV  | <br>$L = \hbar\sqrt{6}$ | <br>Näkymä x-suunnasta.   |

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

**17.1** Punaisen valon aallonpituuus on noin 700 nm eli  $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$  m. Sen taajuus on siis sinimuotoisen aaltoliukkeen perusyhtälön mukaan  $f = c/\lambda = 3 \cdot 10^8$  m/s/( $7 \cdot 10^{-7}$  m) =  $4 \cdot 10^{14}$  Hz. Tällä taajuudella energiavantti on  $E = hf = 3 \cdot 10^{-19}$  J. Tämä vastaa lämpötilaa  $T = E/k_B = 21000$  K.

Huom. tämä ei tarkoita sitä, että punahehkuisen tähden tai rautakappaleen lämpötila olisi 20000 K. Kuten kuvasta 17.1 voi lukea, punahehkuisen kappaleen lämpötila on luokkaa 3000 – 4000 K. (Esimerkiksi Aurinkon pintalämpötila on noin 6000 K, ja Aurinko on kelta-valkoinen tähti.) Lämpötilassa 20000 K suurin osa taajuudella  $4 \cdot 10^{14}$  Hz värähtelevistä hiukkasia värähtelee, mutta punaisen valon lähetämiseen riittää noin 3500 K lämpötila, koska jo tässä lämpötilassa tarpeksi moni taajuudella  $4 \cdot 10^{14}$  Hz värähtelevä vapausaste alkaa värhdellä ja lähetää valoa.

**17.2 (a)** Jos pisara lentää ulos kattilaasta A, se päättyy kaltevalle tasolle ja liukuu itsestään kattilaan B riippumatta siitä, minne pisara alunperin lähti. Tämä kuvaa sitä, että elektronin irrotus levystä A vaatii tietyn energian, mutta kun elektroni on irronnut metallista, sähköinen voima vetää sen levylle B.

(b) Jännitelähde tuottaa potentiaalieron eli analogiassa se nostaa kattilan A korkeammalle kuin kattilan B.

(c) Virta on määritelty siirtymän varauksen suhteen kuluvaan aikaan. Niinpä vedelle vastaava mittari mittaa sitä, kuinka paljon vettä (montako pisaraa) kattilaan B saapuu sekunnissa. Mittari rekisteröi siis vain pisaroiden määrän eikä niiden vauhdilla ole mitään merkitystä virran kannalta.

**17.3** Nyt kattila B on korkeammalla kuin A, joten vaikka pisara lennähtäisi ulos kattilaasta A, se yleensä valuu sinne takaisin. Jotta pisara pääsisi kattilaan B, sen täytyy lentää sinne suoraan. Samoin sähköinen voima vetää elektroneja nyt kohti levylle A, joten vaikka elektroni irtoaisi levystä, sen liike-energia ei välittämättä riitä viemään sitä levylle B asti. Vain tarpeeksi nopeasti liikkuvat elektronit voivat saavuttaa levyn B.

**17.4** Klassisen mallin mukaan aalto kuljettaa energiota jatkuvasti, jolloin pitäisi kulua jonkin aikaa ennen kuin levijen elektronit voivat saada tarpeeksi energiota irrotakseen metallista. Kun metalli lämpenee, elektronien keskimääräisen energian pitäisi kasvaa, jolloin elektroneja sekä irtoaa enemmän etä suuremmilla liike-energioilla. Elektronien määrä havaitaan virtana, mutta elektronien energia pysäytysjännitteessä, joten tämän mukaan myös pysäytysjänniteen pitäisi kasvaa. Taajuuden ei klassisen mallin mukaan pitäisi vaikuttaa elektronien energian mitenkään, koska sähkömagneettisen aallon kuljettama energia riippuu vain sen amplitudista.

**17.5 (a)** Fotonin energia on verrannollinen sen taajuuteen. Lusikan energia on puolestaan verrannollinen sen massaan ja nopeuden neliöön. Niinpä suurtaajuusinen foton vastaisi tässä analogiassa suurta tai nopeasti liikkuvaa lusikkaa.

(b) Vähiten energiota tarvitaan irrottamaan ne elektronit tai pisarat, joilla on jo valmiaksi eniten potentiaalienergiaa. Vesianalogiassa nämä ovat veden pinnalla olevat pisarat. Jos energiota tarvitaan enemmän kuin minimimäärä, pisara ei ollut veden pinnalla vaan syvemmällä. Samaan tapaan metallissa olevilla elektroneilla ei ole kaikilla sama energia vaan osa on "syvemmällä" eli niillä on vähemmän potentiaalienergiaa. (Elektroneilla potentiaalienergia ei riipu kuitenkaan siitä, onko elektroni metallin pinnalla vai ei.)

(c) Fotonimallissa foton luovuttaa energiansa kokonaan yhdelle elektronille ja katoaa. Vesianalogiassa tämä tarkoittaisi sitä, että lusikka osuu täsmälleen yhteen pisaraan ja katoaa. Lisäksi lusikan ei tarvitse osua veden pinnalla olevaan pisaraan vaan se voi kulkea pinnan läpi (häiritsemättä pinnalla olevaa vettä) ja "osua" johonkin pintaan syvemmällä olevaan pisaraan. No, tämä ei tietenkään ole mahdollista lusikoilla ja vedellä, joten tässä kohtaa analogia ei enää toimi.

**17.6 (a)** Yhden fotonin energia on  $E_{\text{fotoni}} = hf = 3.3 \cdot 10^{-19}$  J, joten  $n_{\text{fotoni}} = 10^9$  fotonia kuljettaa energian  $E = n_{\text{fotoni}}E_{\text{fotoni}} = 3.3 \cdot 10^{-10}$  J. Kun tämä energia saapuu alalle  $A = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$  ajassa  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , intensiteetti on  $I = \frac{E}{A\Delta t} = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$ .

(b) Nyt ilmaisimeen saapuu energia  $E = 1 \text{ J}$  joka sekunti, joten fotoneja on  $n_{\text{fotoni}} = E/E_{\text{fotoni}} = 3.0 \cdot 10^{18}$ .

**17.7 (a)** Kun valo kulkee kahdesta raosta, varjostimelle pääsee kaksinkertainen intensiteetti verrattuna siihen, että rakoja olisi auki vain yksi. Niinpä myös fotonien määrän täytyy olla kaksinkertainen, kun molemmat raot on auki.

(b) Kun vain yksi rako on auki, valoaalto kokee raossa diffraktion, jolloin ilmaisimelle syntyy yksi hyvin leveä diffraktiomaksimi. Ts. ilmaisimella on yksi leveä alue, jonne fotonit saapuvat satunnaisesti. Kun molemmat raot on auki, valoaalto kulkee kummastakin raosta ja diffraktoituu. Eri raoista kulkeneet aallot kohtaavat rakojen takana ja interferoivat. Ilmaisimelle muodostuu interferenssikuvio, jossa suuren ja pienen intensiteetin alueet vaihtelevat. Ts. ilmaisimella on vuorotellen alueita, joihin osuu paljon fotoneja, ja alueita, joihin ei saavu lainkaan fotoneita.

**17.9 (a)** Kosini on nolla, kun sen argumentti on  $0.5\pi$ ,  $1.5\pi$  jne. eli puolen aallonpituuuden välein. Nollakohtia on yhden nanometrin matkalla siis  $1 \text{ nm}/\frac{1}{2}\lambda = 1 \text{ nm} \cdot k/\pi \approx 8$ .

(b) Kompleksinen eksponenttifunktio ei ole nolla koskaan.

Tämän tehtävän tarkoitus on saada sinut huomaamaan, että kun aaltofunktio on kompleksinen, se voi aaltoilla ja silti olla nollasta poikkeava kaikkeilla.

**17.10** Aaltofunktion reaaliosa on  $\cos(kx - \omega t)$  ja imaginääriosaa  $\sin(kx - \omega t)$ . Nämä kumpikin liikkuvat x-akselilla positiiviseen suuntaan, jos  $k > 0$ , ja negatiiviseen suuntaan, jos  $k < 0$ . Ajan hetkellä  $t = 0$ , reaaliosaa on 1 origossa riippumatta aaltoluvun merkistä. Tässä pisteessä on siis aallonharja. Origoa lähiin piste, jossa imaginääriosaa on 1, on  $kx = \pi/2$  eli  $x = \pi/(2k)$ . Jos  $k > 0$ , tämä piste on  $x = \lambda/4$ , ja jos  $k < 0$ , piste on  $x = -\lambda/4$ . Imaginääriosan aallonharja on siis etäisyyden  $\lambda/4$  päässä reaaliosan aallonharjasta aallon kulkusuunnassa.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

**17.11** (a) Kuvaajassa reaali- ja imaginääriosojuuden aallot tiivistyvät eli aallonpituuus puolittuu. (b) Liikemäärä kaksinkertaistuu, joten (c) nopeus kaksinkertaistuu ja (d) liike-energia nelinkertaistuu.

**17.12** Liike-energia ei kerro liikkeen suuntaa. Elektronin liike-energia on sama sen aaltoluvun ollessa sekä  $k$  että  $-k$ . Ei siis riittää tietää liike-energiaa elektronin tilan täsmälliseksi määritämiseksi.

**17.14** (a) Atomien säde vaihtelee eikä se ole edes kovin täsmällisesti määritelty suure, mutta yleisesti atomien sade on suuruusluokkaa  $10^{-10}$  m. Elektronin aaltofunktio on siis levinnyt atomissa näin suurelle alueelle.

(b) Elektronin aaltofunktio on levinnyt koko sille alueelle, missä elektroni voidaan havaita. Nyt tämän alueen leveys ilmaisimella on noin  $0.1 \text{ m} \cdot 10^\circ \approx 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ rad} \approx 0.02 \text{ m}$ . Elektroniaalto voi siis levittää hyvin suurelle alueelle.

**17.16** (a) Normitusehdon mukaan todennäköisyystiheyden rajaaman pinta-alan täytyy olla 1. Välillä  $[0 \text{ m}, 0.5 \text{ m}]$  rajattu ala on  $P_{X < 0.5 \text{ m}} = 0.5 \text{ m} \cdot 1/5 \text{ m} = 0.1$ . Tämä on todennäköisyys sille, että  $X$  saa arvon tältä väliniltä eli (b)-kohdan vastaus. Todennäköisyys, että  $X > 0.5 \text{ m}$ , on siis  $P_{X > 0.5 \text{ m}} = A \cdot 0.5 \text{ m} = 0.9$ , mistä ratkeaa  $A = 1.8 \text{ m}^{-1}$ .

**17.17** Odotusarvo saadaan integroimalla paikkakoordinaatin ja todennäköisyystiheyden tulo. Koska todennäköisyystiheys on määritelty paloissa, myös integraali pitää laskea paloissa.

$$\langle X \rangle = \int_{0.0 \text{ m}}^{0.5 \text{ m}} x \cdot (0.2 \text{ m}^{-1}) dx + \int_{0.5 \text{ m}}^{1.0 \text{ m}} x \cdot (1.8 \text{ m}^{-1}) dx = 0.7 \text{ m}. \quad (17.143)$$

**17.18** Nyt integroidaan  $x^2$  kerrottuna todennäköisyystiheydellä,

$$\langle X^2 \rangle = \int_{0.0 \text{ m}}^{0.5 \text{ m}} x^2 \cdot (0.2 \text{ m}^{-1}) dx + \int_{0.5 \text{ m}}^{1.0 \text{ m}} x^2 \cdot (1.8 \text{ m}^{-1}) dx = 0.533 \text{ m}^2. \quad (17.144)$$

Huomaa lopputuloksen yksikkö.

**17.19** Varianssin voi laskea integroimalla funktiota  $(x - \mu_X)^2 = (x - 0.7 \text{ m})^2$ , mutta koska tiedämme jos neliön keskiarvon, voimme laskea yksinkertaisesti

$$\sigma_X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 0.533 \text{ m}^2 - (0.7 \text{ m})^2 = 0.0433 \text{ m}^2. \quad (17.145)$$

Keskihajonta on tämän neliöjuuri

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = 0.208 \text{ m}. \quad (17.146)$$

**17.20** (a) Ei ole totta. Mittaustulosten keskiarvo lähestyy odotusarvoa, kun mittausten määrä kasvaa, mutta voi olla niinkin, ettei paikalle mitata ikinä samaa arvoa kuin odotusarvo.

(b) Ei ole totta. Keskihajonta mittaa tulosten poikkeamaa odotusarvosta, mutta se ei ole ylräaja.

(c) Ei ole totta. Aaltofunktion itseisarvon neliö kuvailee paikan todennäköisyystiheyttä mutta ei todennäköisyyttä itsessään. Todennäköisyystiheyden rajaaman pinta-alan täytyy olla yksi, mutta todennäköisyystiheys itsessään voi olla kuinka suuri tahansa.

(d) On totta. Jos  $|\psi(x)| < 1/\sqrt{2}$  kaikkialla, on myös  $|\psi(x)|^2 < 1/2$ . Tällöin todennäköisyystiheyden rajaama pinta-ala on  $\int |\psi(x)|^2 dx < \int_0^1 \frac{1}{2} dx = 1$ . Mutta normitusehdon mukaan tämän täytyy olla täsmälleen yksi, ja vastaoletuksen  $|\psi(x)| < 1/\sqrt{2}$  on väärin.

**17.21** (a) Koska kummankin tuloksen todennäköisyys on yhtä suuri, paikan odotusarvo on pisteen  $x = a$  ja  $x = b$  puolivälissä eli  $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(a + b)$ .

(b) Elektronin todennäköisyys olla tässä pisteessä on nolla. Odotusarvo ei siis tarkoita todennäköisintä arvoa.

**17.22** (a) Jos vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  asetetaan peräkkäin, saadaan graafisesti laskettua summa  $\bar{a} + \bar{b}$ . Tässä kuviossa vektorit siis muodostavat kolmion sivut. Kolmion sivujen pituuksille pätee  $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$  täsmälleen silloin, kun kyseessä on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$ , joten tämä tulos pätee täsmälleen silloin, kun vektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tai ainakin toinen vektoreista on nollavektori.

(b) Kompleksiluvut voi kuvata kompleksitaso vektoreina, jolloin niidne yhteenlasku ja itseisarvo lasketaan aivan samalla tavalla kuin geometristen vektoreiden vastaavat laskutoimitukset. Niinpä tuloksen täytyy pätee samalla ehdolla kuin kohdassa (a) eli silloin, kun kompleksilukuja kuvaavat vektorit ovat kompleksitasossa kohtisuorassa toisiaan vastaan tai toinen on nolla.

Voimme tuki todistaa tämän myös suoralla laskulla. Ensinnäkin  $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + z_2 z_1^*$ . Kysytty relaatio siis pätee, jos  $z_1 z_2^* + z_2 z_1^* = 0$ . Toisaalta luvun  $Z = z_1 z_2^*$  konjugaatti on  $Z^* = (z_1 z_2^*)^* = z_1^* z_2$  eli nyt vaaditaan  $Z + Z^* = 0$ . Aina pätee  $Z + Z^* = 2\operatorname{Re}[Z]$ , joten pitää siis olla  $\operatorname{Re}[Z] = \operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = 0$ . Kirjoitetaanpa luvut nyt eksponenttimuodossa:  $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$  ja  $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$  jolloin  $z_2^* = r_2 e^{-i\phi_2}$ . Tulon  $z_1 z_2^* = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$  reaaliosa on nolla, jos kompleksilukua kuvaava vektori on kompleksitasossa pystysuora eli jos  $\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2}\pi + n\pi$ , missä  $n$  on kokonaisluku. Tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että kompleksilukujen vaihe-ero on  $\pm \frac{1}{2}\pi$  eli neljänneskierros, jolloin kompleksilukuja kuvaavien vektoreiden täytyy olla kompleksitasossa kohtisuorat.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

**17.23** Normitusehdoksi tulee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_a \psi_a(x) + c_b \psi_b(x)|^2 dx = |c_a|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx + |c_b|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1. \quad (17.147)$$

Toisin sanoen kertoimien itseisarvojen neliöiden summan täytyy olla yksi. Tulkinta on se, että jos mittaamme, onko hiukanen tilassa  $|a\rangle$  vai  $|b\rangle$ , tulos on  $a$  todennäköisyydellä  $|c_a|^2$  ja  $b$  todennäköisyydellä  $|c_b|^2$ .

**17.24 (a)** Aaltoluku voi saada vain arvot  $k = 5 \text{ nm}^{-1}$  ja  $k = 6 \text{ nm}^{-1}$ , joten liikemäärä  $p_x = \hbar k$  voi saada arvot  $p_x = 5.3 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$  ja  $p_x = 6.3 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ . (Huom.  $1 \text{ nm}^{-1} = (10^{-9} \text{ m})^{-1} = 10^9 \text{ m}^{-1}$ .)

(b) Nopeus on  $v_x = p_x/m_e$ , ja tämä voi saada arvot  $579 \text{ km/s}$  ja  $694 \text{ km/s}$ . Näiden keskiarvo on  $636 \text{ km/s}$ .

**17.25 (a)** Aaltoluku voi saada vain arvot  $k = 1 \text{ nm}^{-1}$  ja  $k = 2 \text{ nm}^{-1}$ , joten liikemäärä  $p_x = \hbar k$  voi saada arvot  $p_x = 1.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$  ja  $p_x = 2.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ .

(b) Aaltolukuesityksen itseisarvon neliö edustaa todennäköisyyttä mitata tietty aaltoluku. Nyt ensimmäisen tuloksen todennäköisyyss on siis  $P(k = 1 \text{ nm}^{-1}) = |3/5|^2 = 9/25 = 0.36$  ja toisen  $P(k = 2 \text{ nm}^{-1}) = |4/5|^2 = 16/25 = 0.64$ .

(c) Odotusarvot ovat  $\langle k \rangle = P(k = 1 \text{ nm}^{-1})(1 \text{ nm}^{-1}) + P(k = 2 \text{ nm}^{-1})(2 \text{ nm}^{-1}) = 1.64 \text{ nm}^{-1}$  ja  $\langle p_x \rangle = \hbar \langle k \rangle = 1.7 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ .

**17.26** Huom. käytämme tässä ratkaisussa epätarkkuudelle symbolia  $\sigma_x$  ja muutokselle  $\Delta x$ .

(a) Karkeasti voimme arvioida, että elektronin paikan keskiarvo on  $\langle x \rangle = 1 \text{ nm}$ , jolloin sen paikan epätarkkuus on korkeintaan  $\sigma_x \leq 1 \text{ nm}$ . Koska  $\sigma_x \sigma_k \geq 1/2$  aaltoluvun epätarkkuuden on oltava vähintään  $\sigma_k \geq 0.5 \text{ nm}^{-1}$ . Liikemäären epätarkkuuden on siis oltava  $\sigma_{p_x} = \hbar \sigma_k \geq 5.3 \cdot 10^{-26} \text{ kgm/s}$ .

(b) Nopeuden epätarkkuuden pitää olla  $\sigma_{v_x} = \frac{1}{m_e} \sigma_{p_x} \geq 57.8 \text{ km/s}$ .

Yhdessä mikrosekunnissa elektronin paikan odotusarvo siirtyy matkan  $\Delta \langle x \rangle = \langle v_x \rangle \Delta t = 100000 \text{ m/s} \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0.1 \text{ m}$ , joten paikan odotusarvo on mikrosekunnin kuluttua  $\langle x \rangle = 0.1 \text{ m}$ . Kuitenkin koska nopeuden epätarkkuudeksi arvioitiin  $\sigma_{v_x} \approx 60 \text{ km/s}$ , siirtymän epätarkkuudeksi tulee  $\sigma_{\Delta x} = \sigma_{v_x} \Delta t = 0.06 \text{ m}$ . Voimme siis arvioida, että elektri on mikrosekunnin kuluttua keskimäärin pisteessä  $\langle x \rangle = 0.1 \text{ m}$  ja sen paikan epätarkkuus on luokkaa  $\sigma_x = \sigma_{v_x} \Delta t = 0.06 \text{ m}$ . Niinpä voimme arvioida, että elektri on todennäköisesti välillä  $[0.04 \text{ m}, 0.16 \text{ m}]$ .

**17.28** Kuvat ovat samanlaiset. Jos aalto on vangittu välille, jonka pituus on  $L$  niin, että aaltofunktio on oltava välin reunilla nolla, mahdolliset aallonpituudet ovat  $\lambda_1 = 2L$ ,  $\lambda_2 = L$ ,  $\lambda_3 = 2L/3$  jne., yleisesti  $\lambda_n = 2L/n$ . Aaltoluku on tällöin  $k_n = 2\pi/\lambda_n = n\pi/L$ . Tähän asti klassinen ja kvanttimekaaninen tilanne on täysin samanlainen. Taajuus on kuitenkin erilainen klassisessa ja kvanttimekaanisessa tapauksessa. Klassiselle aallolle pätee sinimuotoisen aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan  $f_n = v/\lambda_n = nv/(2L)$  ja  $\omega_n = vk_n = nv\pi/L$ , missä  $v$  on aallon nopeus väliaineessa. Jos väliaine on dispersioton,  $v$  on aallosta riippumaton vakio. Kvanttimekaaniset aallot kokevat voimakkaan dispersion, ja niiden nopeus riippuu aallon ominaisuuksista. (Tietenkin, sillä kyllähän esimerkiksi elektri voi liikkua eri nopeuksilla riippuen sen liike-energiasta.) Kvanttimekaaniselle aallolle kulmataajuus on  $\omega_n = \frac{1}{\hbar} E_n = \frac{\hbar}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar \pi^2}{2m L^2} n^2$ .

**17.29** Tässä on laskettu  $e^{i(kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{-i\omega t}$ , joka perustuu yleiseen säätöön  $e^{a+b} = e^a e^b$ . Viimeisessä yhtäsuurudessa on vain otettu  $e^{-i\omega t}$  yhtiseksi tekijäksi.

Suoralla laskulla saadaan

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos -\theta + i \sin -\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) = 2i \sin \theta. \quad (17.148)$$

Jakamalla  $2i$ :llä saadaan yhtälö (17.69).

**17.30 (a)** Kvanttimekaaninen kulmataajuus on  $\omega_n = \frac{1}{\hbar} E_n = \frac{\epsilon}{\hbar} (n + 1/2)$ .

(b)  $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\omega_n t}$ .

(c)  $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\omega_2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\frac{\epsilon}{2\hbar} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\frac{3\epsilon}{2\hbar} t}$ .

**17.32** Suoralla laskulla  $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \psi'(x) = -i\hbar A_k \cos(kx)$ . Koska yleisesti  $\sin x \neq \cos x$ , ei ole olemassa mitään vakiota  $p$ , jolla pätki  $\hat{p}_x \psi = p\psi$ . Tämä johtuu siitä, että hiukanen liikemäärä on tässä tilassa epämääriäinen.

**17.33 (a)** Kulmataajuus on  $\omega_n = \frac{\epsilon}{\hbar} (n + \frac{1}{2})$ . (b) Aaltofunktio on  $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} (n + \frac{1}{2}) t}$ . (c) Superposition aaltofunktio on

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} \frac{3}{2} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} \frac{5}{2} t}. \quad (17.149)$$

**17.34 (a)** Kun  $U_0$  lähestyy nollaa, kuopasta tulee tasainen. Tällöin aaltofunktion pitää siis lähestyä jo aikaisemmin tutkimaamme seisovalta aaltoa, jolla on kaikki alue sama aallonpituuus.

(b) Jos  $E \gg U_0$ ,  $k_2 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonaist}} - U_0)} \approx \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonaist}})} = k_1$ . Siispä tällöin elektronin aaltoluku ja aallonpituuus ovat kuopassa likimain vakiot.

(c) Kummassakin tapauksessa aallonpituudesta tulee likimain sama alueissa 1 ja 2. Näin pitääkin käydä, koska jos elektronin energia on hyvin suuri kuopan epätasaisuuteen nähden, kuoppa on elektronin näkökulmasta likimain tasainen.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

**17.35** Kun aalto saapuu ohuempaan köyteen, aallon nopeus, amplitudi ja aallonpituuus kaikki kasvavat. Kun aalto taas saapuu paksuun köyteen nämä kaikki pienenevät. Tämä johtuu siitä, että paksussa köydessä on suuri inertia ja siksi liike hidastuu. Taajuus pysyy vakiona, joten aallonpituudenkin täytyy silloin kasvaa. Lisäksi aallon energiatihesys on verrannollinen köyden pituustiheysteen, joten koska energia ei voi lisääntyä, täytyy aallon amplitudin pienentyä.

Kvanttimekaaninen aalto käyttää tyypillisesti hieman eri tavalla. Kun kvanttimekaaninen aalto saapuu alueeseen, jossa sen potentiaalienergia on suuri, aallon nopeus pienenee mutta amplitudi ja aallonpituuus kasvavat. Tämä johtuu siitä, että potentiaalienergian kasvaessa liike-energian täytyy pienentyä, jolloin aallon nopeus pienenee. Kvanttimekaanisen aallon aaltoluku riippuu kuitenkin sen liike-energiasta, joten liike-energian pienentyessä myös aaltoluku pienenee eli aallonpituuus kasvaa. Kvanttimekaanisen aallon amplitudi ei liity suoraan aallon energiaan vaan todennäköisyyteen havaita hiukan. Klassisesti hiukan viettää eniten aikaa alueessa, jossa se liikkuu hitaasti, joten liike-energian pienentyessä havainnointitodennäköisyyksä kasvaa, ja näinpä amplitudinkin täytyy kasvaa.

**17.36** Jos kokonaisenergia kasvaa,  $\eta$  pienenee. Tällöin funktio  $e^{\pm\eta x}$  muuttuu loivemmin paikan funktiona eli aaltofunktio vaimenee alueessa 2 hitaan min. Tämä näkyy myös kuvassa 17.35, jossa esimerkiksi tilan  $|4\rangle$  aaltofunktio tunkeutuu pitkälle alueen 2 sisään kun taas tilan  $|1\rangle$  aaltofunktio vaimenee hyvin nopeasti. Huomaa myös, että  $\eta$  on reaalinen vain silloin, kun kokonaisenergia on pienempi kuin  $U_0$ . Jos energia on liian suuri, aalto pääsee vapaasti liikkumaan myös alueessa 2 eikä aaltofunktio vaimene eksponentiaalisesti vaan väärätelee sinimuotoisesti.

**17.37** Kuvassa on yksi kupu vaikka aaltofunktiossa onkin kaksi maksimia. Koska näiden maksimien välissä ei ole solmua, ne määritellään yhdaksi kuvaksi. Jos kvanttilukuna käytetään kupujen määrästä, tämä kvanttiluku on 1. Ensimmäisellä viritystilalla aaltofunktiossa olisi yksi solmu, jonka symmetrian perusteella täytyy asettua systeemiin keskelle ydinten väliin. Aaltofunktio olisi solmun yhdellä puolella positiivinen (jos funktio on reaalinen) ja toisella negatiivinen.

**17.38** Elektronin aaltofunktio on jakautunut kuvassa kahteen osaan. Toinen näistä osista jatkaa matkaansa vallin läpi kuvassa oikealle kun taas toinen heijastuu takaisin. Jos elektronin paikka mitataan, elektroni löytyy jommastakummasta pulssista, mutta on täysin satunnaisista kummasta. Samoin jos elektronin nopeus mitataan, voidaan tulokseksi saada kumpi tahansa suunta. Todennäköisyys on verrannollinen pulssin amplitudin neljöön, joten ilmeisesti on todennäköisempää havaita heijastunut kuin vallin läpäissyt pulssi, mutta kumpikin havainto on täysin mahdollinen.

**17.40 (a)** Kupuja on  $n_x n_y n_z$  kpl, joten sopivat tilat ovat  $|8, 1, 1\rangle, |1, 8, 1\rangle, |1, 1, 8\rangle, |4, 2, 1\rangle, |4, 1, 2\rangle, |2, 4, 1\rangle, |1, 4, 2\rangle, |2, 1, 4\rangle, |1, 2, 4\rangle$  sekä  $|2, 2, 2\rangle$ .

(b) Nyt pitää siis olla  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 33$ . Sopivat tilat ovat  $|5, 2, 2\rangle, |2, 5, 2\rangle, |2, 2, 5\rangle, |4, 4, 1\rangle, |4, 1, 4\rangle$  sekä  $|1, 4, 4\rangle$ . Nyt on siis olemassa monta eri tilaa, joilla on kaikilla sama energia. Tätä kutsutaan degeneraatioksi.

**17.41 (a)** Varatun pallon potentiaali on pallon ulkopuolella samalainen kuin pistevarauksen potentiaali eli  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ . Atomien pinnalla siis  $V(R) = 1100$  V.

(b) Varatun pallon sisällä sähkökenttä muuttuu lineaarisesti,  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}$  (ks. luku 10, Gaussin laki). Potentiaali on tämän integraali, joten pallon sisällä

$$V(r) = V(R) - \int_R^r E(r) dr = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Zer^2}{R^3}. \quad (17.150)$$

Atomien keskipisteessä  $V(0) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} = 1700$  V.

(c) Hiukkasen potentiaalienergia kaukana atomista on nolla ja atomien keskipisteessä  $U = 2eV(0) = 3400$  eV. Jos hiukkasella on tästä enemmän energiää, se pääsee kulkemaan varatun pallon läpi.

(d) Jos positiivinen varaus on keskittynyt pallokseen, jonka säde on  $R = 10^{-14}$  m, potentiaali pallon keskellä on  $V(0) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} = 1.7 \cdot 10^7$  V ja hiukan tarvitsisi energian  $3.4 \cdot 10^7$  eV päästään läpi.

(e) Thompsonin mallin mukaan hiukkasten pitäisi läpäistä kaikki atomit, jos niiden liike-energia on joitakin kiloelektronivoltteja. Rutherfordin kokeessa kuitenkin nähtiin, että jotkin hiukkaset kimposivat atomista takaisin tulosuuntaansa, vaikka niiden liike-energia oli paljon tästä suurempi. Selitys oli se, että atomi ei ole varattu pallo, jonka säde on  $10^{-10}$  m, vaan atomin keskellä on varattu ydin, jonka säde on  $10^{-14}$  m. Tällöin hiukan tarvitsee kymmenien megaelektronivolttien energian saavuttaakseen ytimen. Tätä pienemmällä energiolla suoraan ydintä kohti saapuvat hiukkaset pysähtyvät ja kääntyvät ympäri.

**17.42 (a)** Perustilan energia on  $-13.6$  eV, kun potentiaalienergian nollakohta on valittu äärettömän kauas ytimestä. Jotta elektroni irtoisii atomista, sillä täytyy olla niin paljon energiota, että se voi päästää ytimestä periaatteessa kuinka kauas tahansa. Tällöin elektronin kokonaisenergia on oltava suurempi kuin sen potentiaalienergia äärettömyyksissä eli positiivinen. Siispä elektronin irrottaminen perustilasta vaatii energian  $13.6$  eV. Vastaavasti 1. viritystilan energia on  $(-13.6eV)^{\frac{1}{4}} = -3.4$  eV, joten tältä tilalta elektronin irrottaminen vaatii  $3.4$  eV energiota.

(b) Elektroni menettää nyt energiota  $10.2$  eV, ja samalla syntyy fotoni, jolla on näin paljon energiota. Fotonin taajuus on siis  $f = E/h = 2.5 \cdot 10^{15}$  Hz.

### Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

**17.43 (a)** Todennäköisyys havaita elektroni pienessä tilavuudessa on  $P = |\psi|^2 \Delta V$ , kun tilavuus on niin pieni että aaltofunktio on sen sisällä likimain vakio. Nyt siis  $P_{a/2} = \frac{1}{\pi a^3} e^{-1} (0.01a)^3 = 1.17 \cdot 10^{-7}$  ja  $P_a = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2} (0.01a)^3 = 0.43 \cdot 10^{-7}$ .

(b) Tilavuus on likimain kuoren pinta-alan ja paksuuden tulo,  $V = A\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$ . Siispä  $V_{a/2} = 0.01\pi a^3$  ja  $V_a = 0.04\pi a^3$ .

(c) Jos pallokuoren, jonka säde on  $a/2$ , jakaa  $\Delta V = 10^{-6}a^3$ -kokoisin osiin, näitä osia on  $n_{a/2} = V_{a/2}/\Delta V = 31416$  kpl. Koska jokaisessa osassa todennäköisyys elektronin havaitsemiselle on  $P_{a/2} = 1.17 \cdot 10^{-7}$ , kokonaistodennäköisyys havaita elektroni jossakin tämän kuoren sisällä on  $P(r = a/2) = n_{a/2} P_{a/2} = 0.0037$ . Samaan tapaan  $a$ -säteiseen kuoreen mahtuu samanlaisia osia  $n_a = 125664$  kpl, jolloin kokonaistodennäköisyys on  $P(r = a) = n_a P_a = 0.0054$ .

Huomataan siis, että vaikka kohdassa (a) elektronin todennäköisyys olla tiettyssä pienessä tilavuudessa on suurempi etäisyydellä  $a/2$ , on todennäköisempää havaita elektroni jossakin etäisyydellä  $a$  kuin etäisyydellä  $a/2$ , koska kauempana ytimestä on enemmän mahdollisia paikkoja.

**17.44** Koska  $z$ -akselia kiertää 2 aallonpituitta myötäpäivään eli negatiiviseen suuntaan,  $m = -2$ . Koska  $x$ -akselin ympäri muodostuu 3-kupuinen seisova aalto,  $l - |m| + 1 = 3$  eli  $l = 4$ . Radiaaliosuuden kupujen määrä on  $n - l = 1$ , joten  $n = 5$ . Tässä tilassa  $E = (-13.6 \text{ eV})/5^2 = -0.54 \text{ eV}$  ja  $L_z = \hbar m = -2.1 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

**17.45** Kun  $l$  kasvaa, kupujen ja solmujen määrä lisääntyy. Kun  $m$  kasvaa, niiden määrä pienenee. Tiloissa  $m = 0$  on se erikoisuus, että vain näissä tiloissa aaltofunktiossa on kuvut  $z$ -akselin suunnassa eli atomin "navoilla". Kaikissa muissa tiloissa navoilla on solmut.

**17.46** Kulmaliikeämäät ovat  $l = 0 : L = 0$ ,  $l = 1 : L = \hbar\sqrt{2} = 1.41\hbar$ ,  $l = 2 : L = \hbar\sqrt{6} = 2.45\hbar$ ,  $l = 4 : L = \hbar\sqrt{20} = 4.47\hbar$ ,  $l = 8 : L = \hbar\sqrt{72} = 8.49\hbar$ . Kun  $l > 0$ , pätee aina  $L/\hbar > l$ , ja itse asiassa  $L/\hbar \rightarrow l + \frac{1}{2}$ , kun  $l \rightarrow \infty$ .

**17.47 (a)** Kulmaliikeämäärävektorin pituuden määrää kvanttiluku  $l$  ja sen  $z$ -komponentin luku  $m$ . Nyt  $l = 4$ , joten vektorin pituus on tunnettu, noin  $4.5\hbar$ . Niinpä vektoria kuvaavan nuolen täytyy olla kuvaan piirretyn ympyrän säteen pituinen. Kuvaan piirretty vaakaviivat kuvaavat vektorin  $z$ -komponentin mahdollisia arvoja. Nämä viivat ovat välimatkan  $\hbar$  etäisyydellä toisistaan, ja korkein kuvaan piirretty viiva kuvaa lukua  $m = 4$ , joka on siis korkeudella  $4\hbar$ . Seuraava viiva vastaisi lukua  $m = 5$ , mutta se tulisi jo korkeudelle  $5\hbar$  eli ympyrän ulkopuolelle. Koska vektori ei voi olla näin pitkä kun  $l = 4$ , tämä ei ole sallittu arvo luvulle  $m$ .

(b) Nyt siis  $L = \hbar\sqrt{20}$  ja  $L_z = 4\hbar$ , joten  $\theta = \arccos \frac{L_z}{L} = 0.464 = 26.6^\circ$ . (c) Pythagoraan lauseella  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ , joten  $L_{xy} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{L^2 - L_z^2} = \hbar\sqrt{20 - 4^2} = 2\hbar$ . Kulmaliikeämäärän komponentin pituus  $xy$ -tasossa on siis täsmällinen, mutta sen suunta ei ole ja niinpä kulmaliikeämäärän  $x$ - ja  $y$ -komponentteihin liittyvä epätarkkuus (ts. niiden mittaus antaa jonkin satunnaisen tuloksen, vrt. paikan ja liikemäärän epätarkkuusperiaate).

**17.49** Nyt  $n - l = 2$ , joten radiaalifunktiossa on kaksi kupua. Lisäksi  $l - |m| + 1 = 4$ , joten kulmafunktiossa on neljä kupua, ja koska  $m > 0$ , atomin navoilla ei ole kupuja. Siispä paikan todennäköisyysjakaumassa on radiaalisuunnassa kaksi kerrosta ja kulmasuunnassa neljä rengasta. Kaikkiaan jakauma muodostaa siis  $2 \times 4 = 8$  rengasta.

**17.50** Spin on kvanttimekaanista kulmaliikeämäärää, ja spin-vektorin pituus noudattaa samaa sääntöä kuin kiertoliukkeen kulmaliikeämäärävektorin pituus,  $S = \hbar\sqrt{s_{\text{kokonais}}(s_{\text{kokonais}} + 1)}$ , missä  $s_{\text{kokonais}} \geq 0$  on varsinainen spin-kvanttiluku. Tekstissä mainittu  $s$  on itse asiassa spinin  $z$ -komponentin kvanttiluku. Ts.  $s_{\text{kokonais}}$  vastaa kvanttilukua  $l$  ja  $s$  vastaa kvanttilukua  $m$ . Ero rataliukkeen ja spinin välillä on siinä, että rataliukkeen kulmaliikeämäärän kvanttilukujen täytyy aina olla kokonaislukuja, mutta spin-kvanttiluvut voivat olla myös puolikkaita.

Nyt siis  $s_{\text{kokonais}}(s_{\text{kokonais}} + 1) = 15/4$ , josta ratkeaa  $s_{\text{kokonais}} = \frac{3}{2}$ . Kvanttiluku  $s$  saa arvoja yhden välein alkaen arvosta  $s = -s_{\text{kokonais}}$  ja päättynä arvoon  $s = s_{\text{kokonais}}$  eli mahdolliset arvot ovat  $s = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ . Epähomogenisessa magneettikentässä hiukkaseen kohdistuva voima riippuu hiukkisen spinin komponentista kentän suunnassa, ja tällä hiukkasella kentän suuntainen komponentti voi siis saada neljä eri arvoa. Niinpä hiukkassuihku jakautuu neljään osaan.

**17.51 O:**  $1s^2 2s^2 2p^4$ , **Na:**  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ , **Mg:**  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

**17.52** Tehtävän oletuksilla elektronien sallitut energiat ovat siis samat kuin yhden kuoppaan asetetun elektronin sallitut energiat eli  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$ . Koska kyseessä on yksiuotteinen systeemi, elektronin tilan indeksointiin tarvitaan vain kvanttiluku  $n = 1, 2, \dots$ , joka määrää elektronin paikan ja liikkeen kuopassa, sekä luku  $s = \pm \frac{1}{2}$ , joka kertoo elektronin spinin suunnan. Muistathan, että yksiuotteisessa systeemissä paikan ja liikkeen kuvaamiseen tarvitaan vain YKSI kvanttiluku! Esimerkiksi kvanttiluvut  $l$  ja  $m$  tarvittiin atomissa, koska atomi on kolmiulotteinen ja vieläpä pallosymmetrinen systeemi. Yksiuoteinen kuoppa ei ole pallo, joten näitä kvanttilukuja EI ole. Elektronin tila voidaan siis merkitä  $|n, s\rangle$ .

Paulin kieltosäännön mukaan elektronit eivät voi asettua samalle kvanttilille, joten kolme elektronia voivat asettua esimerkiksi tiloille  $|1, \frac{1}{2}\rangle$ ,  $|1, -\frac{1}{2}\rangle$  ja  $|2, \frac{1}{2}\rangle$ . Tällöin kahdella elektronilla on energia  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$  ja yhdellä  $4 \frac{2\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ . Pienin energia, jonka elektroni voi absorboida, on tilalta  $n = 1$  tilalle  $n = 2$  siirtymiseen vaadittava energia eli  $3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ . (Huom. tila  $|2, -\frac{1}{2}\rangle$  on yhä vapaa.) Toiseksi pienin energia on tilalta  $n = 2$  tilalle  $n = 3$  siirtymiseen vaadittava energia  $5 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ .