

Fysiikan perusteet

Teemu Hynninen
Turun yliopisto

Tämä teos on lisensoitu Creative Commons Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä.
(<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.fi>).

Sisältö

Johdanto	7
Fysiikka tieteenä ja oppiaineena	8
Kuvat ja geometria	11
Matemaattinen analyysi	13
Yhteenvetö: Johdanto	19
I Mekaniikka	21
1 Liike	23
1.1 Paikka, aika ja nopeus	24
1.2 Läpikäytävän graafinen esittäminen	26
1.3 Paikan määrittäminen nopeuden avulla	29
1.4 Suunnat ja vektorit	31
1.5 Kierteily	33
Yhteenvetö: Liike	41
2 Säilymislait	45
2.1 Säilyvät suureet	46
2.2 Energia	49
2.3 Energian laatu	58
2.4 Läpikäytävä	62
2.5 Massakeskipiste	75
Yhteenvetö: Säilymislait	81
3 Voima ja työ	87
3.1 Voima läpikäytävän muuttajana	88
3.2 Voiman ja vastavoiman laki	92
3.3 Voimien graafinen analyysi	94
3.4 Vuorovaikutukseen liittyviä voimia	99
3.5 Voiman impulssi ja työ	109
Yhteenvetö: Voima ja työ	122
4 Moniulotteinen liike	129
4.1 Kolmiulotteinen avaruus	130
4.2 Dynamikka	132
4.3 Läpikäytävä	137
4.4 Työ	141
4.5 Kentät	151
Yhteenvetö: Moniulotteinen liike	160

5 Pyörimisliike	163
5.1 Ympyräliike	164
5.2 Pyörimisliike	172
5.3 Momentti	180
5.4 Kulmaliikemäärä	185
5.5 Moniulotteinen pyörimisliike	190
Yhteenvetö: Pyörimisliike	195
II Mekaniikasta termodynamikkaan	201
6 Suhteellisuus	203
6.1 Tasainen ja kiihtyvä suhteellinen liike	204
6.2 Klassinen suhteellisuus	208
6.3 Lükemäärän ja energian suhteellisuus	211
6.4 Suhteellisuusteoria	220
6.5 Avaruusaika	232
6.6 Säilymislait suhteellisuusteoriassa	242
Yhteenvetö: Suhteellisuus	252
7 Jatkuva aine	257
7.1 Paine	258
7.2 Virtausmekaniikkaa	268
7.3 Lämpötila ja lämpöenergia	273
7.4 Tilamuuttujat	289
Yhteenvetö: Jatkuva aine	295
8 Hiukkasia koostuva aine	299
8.1 Kaasun hiukkasmalli	300
8.2 Kaasujen ominaislämpökapasiteetti	306
8.3 Mikro- ja makrotilat	311
8.4 Entropia	320
Yhteenvetö: Hiukkasia koostuva aine	328
9 Termodynamikka	331
9.1 Kvasistaattiset prosessit	332
9.2 Termodynamiiset perusprosessit	336
9.3 Energian ja entropian muutokset	340
9.4 Energian hyödynnettävyys	351
Yhteenvetö: Termodynamikka	361
III Sähkömagnetismi	367
10 Sähkövaraus ja -kenttä	369
10.1 Sähkövaraus	370
10.2 Sähkökenttä	378
10.3 Gaussin laki	392
10.4 Potentiaali	406
10.5 Sähkövaraksen ja -kentän manipulointi	421
Yhteenvetö: Sähkövaraus ja -kenttä	435
11 Sähkövirta	443
11.1 Sähkövirta	444
11.2 Johtavuus ja resistanssi	450
11.3 Virtapiirit	457
11.4 Energia virtapiirissä	474
Yhteenvetö: Sähkövirta	482

12 Magneettikenttä	487
12.1 Magneetit	488
12.2 Magneettikenttä	491
12.3 Gaussin ja Ampèren lait magneettikentälle	503
12.4 Dipolit	509
Yhteenvetö: Magneettikenttä	521
13 Sähkömagnetismi	527
13.1 Sähkömagneettinen induktio	528
13.2 Sähkömagneettinen yhteisvuorovaikutus	535
13.3 Induktanssi	545
13.4 Sähkömagnetismin peruslait	554
Yhteenvetö: Sähkömagnetismi	560
IV Klassiset ja kvanttimekaaniset aallot	565
14 Jaksollinen liike	567
14.1 Harmoninen liike	568
14.2 Harmonisen liikkeen dynamiikka	575
14.3 Likimain harmoninen liike	581
14.4 Yhdistetty harmoninen liike	586
14.5 Resonanssi	596
Yhteenvetö: Jaksollinen liike	604
15 Aaltoliike	609
15.1 Aaltoliike	610
15.2 Aallon eteneminen	613
15.3 Sinimuotoiset aallot	619
15.4 Aallon kuljettama energia	624
15.5 Aaltojen superpositio	629
15.6 Välilaineet ja rajapinnat	636
15.7 Aaltoyhtälö	655
Yhteenvetö: Aaltoliike	658
16 Moniulotteiset aallot	665
16.1 Hajaantuvat aallot	666
16.2 Aallot ja väliaineet	673
16.3 Interferenssi	679
16.4 Optikka	687
Yhteenvetö: Moniulotteiset aallot	713
17 Kvanttimekaniikka	719
17.1 Fotoni	720
17.2 Kvanttimekaaniset hiukkaset	728
17.3 Todennäköisyystulkinta	733
17.4 Kvantittuminen	747
17.5 Atomi	764
Yhteenvetö: Kvantimekaniikka	779



Johdanto

Tervetuloa opiskelemaan fysiikkaa! Ennen kuin käydään varsinaiseen asiaan, on syytä pohtia hiukan fysiikkaan ja fysiikan opiskeluun liittyviä yleisiä pürriteitä sekä fysiikassa tarvittavia työskentelytapoja. Fysiikan opintojen tavoite ei nimittäin ole opettaa vain faktuja vaan luonnontieteellistä ajattelutapaa. Niiinpä tämä johdantoluku ei ole vain johdanto tähän materiaaliin vaan myös fysiikan esittely tieteenä sekä johdanto fysiikan opintoihin. Johdannossa annetaan vinkkejä opintojen alkuun ja selitetään yleisiä tekniikoita, joita tarvitaan kaikilla fysiikan alueilla.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla tieteellinen metodi
- määritellä käsitteet suure ja dimensio
- määrittää laskun lopputuloksen järkevä tarkkuus
- tehdä yksinkertaisia suuruusluokka-arvioita
- kuvalla fysiikaisten ongelmien ratkaisussa käytettäviä menetelmiä

Fysiikka tieteenä ja oppiaineena

Fysiikka on luonnontiede, joka pyrkii selittämään luonnonilmiöitä kaikilla tasolla alkeishiuikkasten käyttäytymisestä koko maailmankaikkeuden toimintaan. Fysiikka tukee kaikkia muita luonnontieteitä ja fysiikaisten ilmiöiden kuvamiseen luotuja ideoita sovelletaan nykyään myös selittämään ilmiötä, jotka eivät ennen ole kuuluneet fysiikan alaan. Fysiikassa ajattelu on usein minimalistista ja analyyttistä — monimutkaisista ilmiöistä rakennetaan mahdollisimman yksinkertaisia malleja, jotta ilmiöiden keskeiset püreet ja selittävät tekijät voitaisiin selittää. Fysiikassa haluamme ymmärtää, miten luonto käyttää ja mitkä periaatteet luonnonilmiöitä ohjaavat.

Fysiikan opiskelussa tarkoitus ei ole omaksua suurta määrää tietoa lyhyessä ajassa. Fysiikassa on lopujen lopuksi varsin vähän keskeisiä periaatteita, jotka selittävät mitä moninaisimpia ilmiöitä. Siksi laatu korvaa määrän. Opinnoissa tavoitteena on huomata, mitkä lait ja periaatteet ovat gleispäteviä sekä oppia soveltamaan näitä periaatteita. Fysiikka on eksaktia, ja lait sekä määritelmät on hallittava täsmällisesti, jotta niitä pystyisi soveltamaan. Uusiaasioita opiskeltaessa väärinkäsityksiä syntyy väistämättä. Virheistä ei pidä kuitenkaan lannistua vaan ottaa opiksi. Siksi fysiikan opinnoissa onkin ensisijaisen tärkeää testata omaa osaamistaan ja harjoitella, jotta mahdolliset virheet omassa ymmärryksessä paljastuisivat. Tämä vaatii opiskelijan aktiivista toimintaa, jota opettaja ei voi mitenkään korvata.

Tämä oppimateriaali on tarkoitettu opiskelijoiden ensisijaiseksi uuden informaation lähteksi, ja siinä yritytään selittää asioita tasolla, jonka myös asiaan ensimmäistä kertaa tutustuva lukija voisi ymmärtää. Ajoittain teksti on kuvalevaa, jolloin tarkoitus on selittää keskeiset ideat yleisellä tasolla. Yleensä näitä osioita seuraa saman asian täsmällinen matemaattinen käsittely. Tällä tavalla pyritään antamaan ensin asioista yleiskuva ja antamaan esimerkkejä aiheeseen liittyvistä fysiikaista ilmiöstä. Matematiikkaa puolestaan käytetään suureiden ja lakienvälistä määrittelyssä ja määrellisten päättelyiden ilmaisemisessa. Yleensä molempia tarvitaan, ja tavallisesti on hyödyllistä tarkastella ilmiötä ensin puhtaasti fysiikaalisesti, ilman matematiikan painolastia.

Koska fysiikka on eksakti tiete, fysiikan opinnoissa ei riitä se, että osaa nimetä suureita ja ilmiöitä. Tällainen tieto ei vielä ole ymmärrystä eikä sillä voi tehdä mitään hyödyllistä. Älä siis koskaan lukiessasi yrity opetella asioita ulkoa vaan pohdi, mitä lukemasi tarkoittaa. Toisaalta fysiikkaa ei myöskään opi pelkästään lukemalla vaan luetun ymmärtämistä pitää jatkuvasti testata väärinkäsitysten kitkemiseksi. Siksi opiskelu vaatii myös jatkuva harjoitteua. Opiskelkaa siis ahkerasti, kysykää, keskustelkaa ja ihmetelkää, kuinka maailma toimii!

Tieteellinen metodi

Tiede on selkeästi tehokkain ihmisen kehittämistä tavoista kerätä tietoa. Tiede ei tarkoita tunnettuja tosiasioita tai viimeisintä tekniikkaa, vaan tiede on *menetelmä*, jonka keskeiset ominaisuudet ovat *kriittisyys* ja *korjautuvuus*. Tiede ei ole erehtymätöntä, eikä tieteeltä myöskään vaadita varmuutta. Usein täytyy varmuutta asioista ei voida koskaan saavuttaakaan, ja ajatukset, jotka ovat uskottavia mutteivat aukottomasti todistettuja, voivat olla hyödyllisiä. Tieteellisen tiedon pitää kuitenkin olla *perusteltua* ja *testattavaa*, ja jos tieteen väitteet osoittautuvat ristiriitaisiksi, väitettilä pitää joko korjata tai niistä pitää luopua.

Tieteellinen **teoria** ei tarkoita arvausta kuten puhekielellä termiä käytetään vaan ristiriidatonta tietorakennetta, joka kykenee selittämään ilmiötä. Esimerkiksi fysiikassa puhutaan painovoimateoriasta, mikä siis tarkoittaa painovoiman toimintaa kuvaavaa selitysmallia — ei spekulaatiota siitä, onko painovoima olemassa. Tieteellinen arvaus on **hypoteesi**. Jotta uusi väite voisi saavuttaa fysiikalisen teorian tason, sen pitää olla sekä sisäisesti ristiriidaton että kyettä kuvalemaan asioita, joita aiemmat teoriat eivät selitä. Tämä on mahdollista, jos väite käsitlee uusia ilmiöitä, joita ei ole aiemmin tutkittu, tai jos sen ennusteet jo tunnehuista ilmiöistä ovat erilaiset kuin vanhojen teorioiden. Jos väite johtaa täsmälleen samoihin päättelmiin kuin aikaisemmat teoriat, se ei ole varsinaisesti uusi teoria vaan vain uusi tapa ilmaista vanha teoria. Tällainenkin tieteen kehitys on toki tärkeää, sillä usein monimutkaisia ilmiöitä voidaan hahmottaa useilla tavoilla.

Fysiikka on kokeellinen tiete, ja luonto on fysiikan teorioiden viimeinen tuomari. Fysiikan teorian pitää siis kyetä ennustamaan jotakin, jota voidaan verrata kokeellisiin tuloksiin, ja teoreettisen sekä kokeellisen tiedon vertaaminen onkin fysiikassa keskeistä: Tarkastelemalla asioita vain teoreettisesti ei voida saada selville, kuvaleeko teoria todella luontoa. Toisaalta tekemällä kokeita saamme tietää miten luonto käyttää ja, mutta emme ymmärrä miksi niin tapahtuu. Luonnonlaisesti fysiikan teorian tarkoitus ei ole selittää vain koetuloksia vaan kokeet ovat teorian toimivuuden testi, ja teorian on ideaalisesti tarkoitus selittää luonnon toiminta *kaikissa mahdollisissa tilanteissa*.

Oppiminen muistuttaa paljon tieteellistä prosessia. Teillä opiskelijoilla on omat käsityksenne siitä, kuinka maailma toimii ja kuinka fysiikan lait sitä ohjaavat. Nämä käsitykset ovat teidän oma “fysiikan teorianne”, joka perustuu osittain aikaisempaan koulutukseen ja osittain omiin kokemuksiin. Fysiikan perusperiaatteet ovat lopujen lopuksi yksinkertaisia mutta usein abstrakteja ja niiden löytäminen pelkästään arkikokemuksen perusteella on lähes mahdotonta. Esimerkiksi ensimmäiset nykyfysiikan mukaan oikeat käsitykset kappaleiden liikettä ohjaavista mekanikan laeista keksittiin vasta 1600-luvulla, vaikka ihmiset ovat aina pohtineet

maailman toimintaa. Koska teidänkin tapanne ajatella maailmasta perustuu pitkälti kokemuksiin, todennäköisesti monet nykyisistä käsityksistänne fysiikasta ovat *vääriä*. Lisäksi fysiikka ulottuu alueille, joita ei normaalisti havaita, joten käsityksenne fysiikasta ovat myös *puutteellisia*. Fysiikan ymmärtäminen vaatiikin siis sekä puutteellisten ajattelumallien täydentämistä että väärrien ajatusten löytämistä ja korjaamista.

Fysiikka muodostaa kumuloituvan tietorakenteen, jossa uudet teoriat ja mallit pohjautuvat aikaisempaan tietoon. Siksi onkin aivan välttämätöntä aina pyrkiä ymmärtämään yksi aihe mahdollisimman hyvin ennen seuraavaan siirtymistä. Vaikka esimerkiksi lämpöilmiötä kuvaava termodynamika käsitteli näennäisesti eri ilmiöitä kuin liikettä kuvaava mekanikka, moderni termodynamika kuvailee lämpöilmiötä suurten hiukkasjoukkojen mekanikan kautta. Niinpä termodynamikan ymmärtäminen vaatii myös mekanikan hallintaa. Fysiikan opinnoissa on siis syytä edetä järjestelmällisesti ja pyrkiä ennen kaikkea ymmärtämään kukin aihe mahdollisimman hyvin ennen seuraavaan siirtymistä, sillä puutteellisesti omaksutut tai väärin ymmärrettyt ajattelumallit estäävät oppimisen myös jatkossa.

Onkin välttämätöntä, että jatkuvasti testaatte omia käsityksiänne ja pohditte, onko oma ajattelutapanne ristiriidassa kohtaamanne oppikirjatiedon kanssa. Perinteisesti opetus on perustunut siihen, että opettaja kertoo opiskelijoille mikä on vallitseva tieteellinen käsitys. Tämä on nopeaa, ja näin voidaan käydä läpi hyvin suuri määrä informaatiota hyvin lyhyessä ajassa. Ongelmana tässä opetustavassa on kuitenkin se, ettei pelkkä asioiden kuuleminen riittää muuttamaan tapaanne ajatella, vaan se korkeintaan opettaa ratkaisemaan oppikirjatehtäviä. Oppimisen tavoite ei kuitenkaan ole tehtävien ratkaiseminen vaan oikeiden ajattelumallien omaksuminen. Tämä puolestaan vaatii teiltä opiskelijoilta työtä. Ei riittää tutustua vain vallitsevaan fysiikan teoriaan, vaan on välttämätöntä tarkastella myös sitä tukevaa todistusaineistoa — koetuloksia ja teoreettista päättelyä — jotta voitte ymmärtää mihin väitteet perustuvat ja löytää ne itse. Niinpä tämäkään materiaali ei anna valmiita vastauksia kaikkeen, vaan pyrkii ensisijaisesti esittelemään sitä fysikaalista ajattelua, jolla vastaukset voidaan löytää.

Tehtävien tarkoitus puolestaan on antaa teille mahdollisuus testata omassa mielessänne olevaa käsitystä fysiikan laeista. Tätä varten tekstiin on sijoitettu aika-ajoin pohdintakysymyksiä, jotka liittyvät välttämästä nütä edeltäneeseen asiaan. Kysymysten tarkoitus on herättää pohtimaan luetun merkitystä, sillä pelkkä lukeminen ei vielä johda oppimiseen. Älä koskaan ohita pohdintakysymystä ennen kuin osaat mielestäsi vastata siihen! Jos huomaat, ettei osaa vastata kysymykseen, lue edellinen kappale tai luku uudestaan ja etene vasta kun osaat vastata kaikkiin kysymyksiin. Väliin jätetty kysymys tarkoittaa mitä todennäköisimmin sitä, että jotakin tärkeää on jäänyt ymmärtämättä eikä sinulla ole vielä valmiuksia oppia seuraaviakaan aiheita.

 0.1 Taitava opiskelija varaa aina kaikkiin tehtäviin riittävästi aikaa. Jos kuitenkin huomaat ettei sinulla olekaan tarpeksi aikaa esimerkiksi tehdä moniosaista tehtävää kunnolla, onko parempi vilkaista nopeasti kaikkiaasioita vai opiskella yksi asia kunnolla ja palata myöhemmin muihin aiheisiin?

Myöskään virheitä ei pidä pelätä. Ette olisi opiskelemassa, jos jo tietäisitte kaiken. Väärinkäsitykset ovat tavallisia ja niiden korjaaminen voi olla hidasta, joten epäonnistumisia tapahtuu välttämättä. Tieteessä epäonnistumiset ovat jokapäiväisiä, eikä tiedettä edes tarvittaisi jos vastaukset olisivat selviä jo etukäteen. Monet suuret tieteelliset harppaukset ovatkin tapahtuneet juuri löydettäessä vallitsevan tieteellisen käsityksen kanssa ristiriitaisia ilmiöitä, sillä tällaiset ilmiöt ovat merkki vallitsevan tiedon puutteellisuudesta. Samoin kaikkein paras mahdollisuus oppia onkin huomata, että jokin ongelm ratkeaan eri tavalla kuin mitä itse ajattelitte, koska silloin voitte pohtia, miten oma käsityksenne vaatii korjaamista tai täydentämistä. Epäonnistuminen on merkki siitä, että ette tiedä ja osaa vielä kaikkea. Epäonnistumisen syiden pohtiminen on tie uusien asioiden oppimiseen.

Suureet

Fysiikka pyrkii selittämään millainen maailmankaikkeuden rakenne on ja miten sen osat käyttäytyvät. Tutkimuksen kohteet ulottuvat hyvin konkreettisista kuten kappaleiden liikkeestä hyvin abstrakteihin kuten informaatioon. Erityisesti fysiikassa maailmaa pyritään kuvaamaan mitattavissa olevien ominaisuuksien eli **suureiden** avulla, ja fysiikan teorioiden eräs tavoite on kuvata, kuinka suureet riippuvat toisistaan. Luonnontieteissä on käytössä suureiden **SI-järjestelmä** (ranskaa, 'Système International d'Unités'), joka määrittelee seitsemän perussuuretta ja näiden yksiköt — metrin, kilogramman, sekunnin, ampeerin, molin, kelvinin sekä kandelan — ja muut suureet on ilmaistavissa näiden avulla. Järjestelmän tarkoitus on määritellä kaikki mitattavat suureet absoluuttisten luonnonvakioiden kautta, mikä onnistuikin lopulta riittävällä tarkkuudella vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksessa.

Fysiikassa suureille käytetään tavallisesti lyhennysmerkintänä yhden kirjaimen *symboluja*. Jotkin ovat vaikuttaneet, ja esimerkiksi massan symboli on lähes aina *m*, kun taas toisille suureille käytetään eri läheteissä eri symbolleita. Jos sama symboli esiintyy useassa merkityksessä, symbolit erotellaan tavallisesti ala- tai yläindeksein tai muilla lisämerkinnöillä. Esimerkiksi usean kappaleen massoja voidaan merkitä

m_1, m_2, m_3, \dots tai vaikkapa m, m', m'' . Joillakin symbolleilla on puolestaan on useita merkityksiä, joten pelkän symbolin perusteella ei voi koskaan päätellä matemaattisten lausekkeiden merkitystä. Suureita kuvavat symbolit kirjoitetaan tavallisilla kursiivilla erotuksena muista lyhenteistä.

Fysikaalisilla suureilla on *laatu* eli **dimensio**, joka kertoo, millaista fysikaalista ominaisuutta suure kuvailee. Esimerkiksi pituus, aika, lämpötila ja massa ovat erilaisia suureiden laatuja eli dimensioita. Laatuun liittyy myös aina **yksikkö**, ja suureilla laskettaessa kuhunkin suureeseen liittyvään symboliin ajatellaan sisältyvän sekä suureen suuruus että sen yksikkö. Esimerkiksi massan yksikkö on kilogramma, ja voidaan kirjoittaa $m = 1.0 \text{ kg}$ eli symboliin m sisältyy sekä suureen suuruus 1.0 että sen yksikkö, kg. Suureen yksikköön merkitään hakasuluin, esimerkiksi $[m] = \text{kg}$. Dimensiollisten suureiden laskutoimituksissa on seuraavat perussäännöt:

- Yhteen- ja vähenneyslasku on mahdollinen vain samaa dimensiota olevien suureiden välillä, jolloin lopputuloksella on edelleen sama dimensio: $a + b$ on määritelty jos ja vain jos $[a] = [b]$ ja tällöin $[a + b] = [a] = [b]$. On siis järkevää laskea $2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}$, mutta ei ole mielekästä laskea $2 \text{ kg} + 1 \text{ m}$ (kilogramma + metri). Huomaa myös, että vaikka suureen arvo olisi nolla, sillä voi edelleen olla yksikkö. Esimerkiksi $1 \text{ kg} - 1 \text{ kg} = 0 \text{ kg}$, eikä lopputulos ole pelkkä nolla ilman yksikköä.
- Kerto- ja jakolasku on mahdollinen eri dimensiota olevien suureiden välillä, jolloin lopputuloksesta saadaan jotakin uutta dimensiota oleva suure. Esimerkiksi jos pituus (yksikkö metri, m) jaetaan ajalla (yksikkö sekunti, s), lopputuloksesta saadaan suure, jonka dimensio on pituus jaettuna ajalla ja yksikkö metri/sekunti (m/s).
- Jos suure on jonkin muun alkeisfunktion kuin polynomien tai juurifunktion argumentti, sen on oltava paljas luku (siis yksikötön suure): esim. eksponenttifunktio e^a on määritelty vain jos $[a] = 1$. Toisin sanoen jos lasketaan esimerkiksi $y = Ae^{kx}$, missä suureen x yksikkö on m, on suureen k yksikön välinäköön oltava $1/\text{m}$, koska eksponenttifunktion sisällä olevan lausekkeen kx on oltava yksikötön. On silti sallittua laskea esim. $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Jos $[x] = \text{m}$, tällöin $[x^{1/2}] = \text{m}^{1/2}$.
- Yhtälöt pätevät vain jos niiden molemmilla puolella olevien lausekkeiden dimensio on sama: $a = b$ on tosi vain jos $[a] = [b]$. Jotta yhtälö olisi tosi, tietenkin myös suureiden lukuarvon on oltava sama.

Koska yksiköiden yhdistelyssä on näinkin vahvat rajoitukset, **yksikkötarkastelu** on hyvä ja helppo apukeino fysikaalisessa päättelyssä. Jos laskussa rikotaan jotakin yllä mainituista ehdoista tai jos laskun lopputuloksen dimensio ei vastaa suuretta, jota sen tulisi esittää, jossakin on pakko olla karkeaa virhe.

esimerkki 0.1

Yksikkötarkastelu

Opiskelijat A, B ja C ovat laskeneet erään kappaleen nopeuden ja saaneet tulokset $v_A = ax - x/t$, $v_B = be^{at}$ ja $v_C = be^{ax}$, missä symbolien yksiköt ovat $[x] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$, $[a] = 1/\text{s}$, $[b] = \text{m/s}$. Mitkä tuloksista voivat olla oikein?

Tarkistetaan onko tulosten yksikkö oikea nopeuden yksikkö m/s. Opiskelijan A vastauksen yksikkö on

$$[v_A] = [a][x] - [x]/[t] = 1/\text{s} \cdot \text{m} - \text{m/s} = \text{m/s} - \text{m/s} = \text{m/s} \quad (1)$$

eli yksikkötarkastelun puolesta tulos voisi olla oikein. Opiskelijan B tulos on

$$[v_B] = [b][e^{at}] = \text{m/s} \cdot [e^{1/\text{s} \cdot \text{s}}] = \text{m/s} \cdot [e^1] = \text{m/s} \cdot 1 = \text{m/s}, \quad (2)$$

eli tämäkin tulos voisi olla oikein. Opiskelijan C vastauksen yksikkö puolestaan on

$$[v_B] = [b][e^{ax}] = \text{m/s} \cdot [e^{1/\text{s} \cdot \text{m}}] = \text{m/s} \cdot [e^{\text{m/s}}] = \text{määrittelemätön}. \quad (3)$$

Lauseke on mieletön, koska vastauksessa esiintyvan eksponenttifunktion argumentin yksikkö on m/s eikä täitä funktiota ole määritelty dimensiolliselle suurelle. Opiskelijan B vastauksessa esiintyi myös eksponenttifunktio, mutta silloin funktion argumentti oli paljas luku, kuten pitääkin.

Siispä opiskelija A tai B voi olla oikeassa, mutta C on varmasti tehnyt virheen. Yksikkötarkastelu ei riitä kertomaan onko A tai B oikeassa, mutta sen avulla voi huomata selkeitä virheitä.



0.2 Jos suureen a yksikkö on A^2 ja suureen b yksikkö on $1/\text{A}$, onko lauseke $a - \frac{1}{b^2} \sin(ab^2)$ järkevä? Mikä on sen yksikkö?

Mallit

Maailma on monimutkainen. Tavallisetkin fysikaaliset ilmiöt syntyvät monien tekijöiden yhteisvaikutuksesta, ja fysiikan peruslakeja on vaikea ymmärtää vain tarkastelemalla luonnon toimintaa sellaisenaan. Usein fysiikan lakienvaihtoehdot ovat ymmärtämisen kannalta helpompia kuin niiden soveltuuksia.

vaikutus on saatu rajattua pois. Sama pätee myös fysiikan opinnoissa — tarkastelemme usein hyvin yksinkertaisia tilanteita, jotka eivät välittämättä ole todellisuuden kannalta kovin mielenkiintoisia, jotta tilanteen ymmärtäminen ei vaatisi liian monen tekijän huomioimista.

Toisaalta koska maailma on monimutkainen, todellisten fysikaalisten ilmiöiden ymmärtäminen vaatii lähes poikkeuksetta kykyä hahmottaa tilanteita, yhdistellä, tulkita ja soveltaa tietoa sekä löytää ilmiötä ja tapahtumia ohjaavista tekijöistä tärkeimmät. Tämä ei ole helppoa ja vaatii harjoitusta, minkä vuoksi myös monimutkaisen ongelmien ratkaisemisen harjoittelun on oleellinen osa fysiikan opiskelua. Ongelmanratkaisutaito on luonnollisesti hyödyllinen kaikilla elämän alueilla. Itse asiassa todelliset ongelmat ovat yleensä avoimia ja epämääräisiä, ja niihin voi olla monia erilaisia ratkaisuja. Siksi ei riitä harjoitella vain hyvin määriteltyjen tehtävien selvittämistä vaan myös avointen kysymysten pohdintaa.

Fysiassa ongelmien ratkaiseminen tapahtuu **mallien** avulla. Malli on monimutkaisen tilanteen yksinkertaistus, johon otetaan mukaan vain välittämätön määrä informaatiota ja yksityiskohtia. Esimerkiksi kappaleita voidaan kuvata hyvin monimutkaisina osien yhdistelminä tai vain pisteinä, palloina tai kuutioina, jos oleellista on vain kappaleiden sijainti eikä niiden muoto (kuva 1). Yleensä kannattaa ensin muodostaa mahdollisimman yksinkertainen malli, johon tarpeen vaatiessa lisätään yksityiskohtia, kunnes malli kykee selittämään tarkasteltavan ilmiön.

Koska mallit ovat epätäydellisiä, myös niiden ennusteet ovat epätarkkoja. Lisäksi hyvin usein yksinkertaisenkin mallien käyttäytyminen on mahdotonta ratkaista täydellisesti, jolloin turvaudutaan matemaattisiin likiarvoihin eli **approksimaatioihin**. Tällöin on syytä pitää kirja kaikista oletuksista, joita mallin muodostamisessa ja sen matemaattisessa käsittelyssä on tehty. Kun lopputulokseen lopulta päästään, tulee tarkistaa, päätevätkö tehdyt oletukset.



0.3 Haluat tutkia ihmisen ajattelua ja aivotoimintaa. Millaista tietoa voitaisiin saada muodostamalla malli, jonka pienin yksikkö on (a) molekyyli, (b) hermosolu, (c) aivoalue, (d) ihminen, (e) ihmisyhteisö (esim. yritys tai valtio)?

Kuvat ja geometria

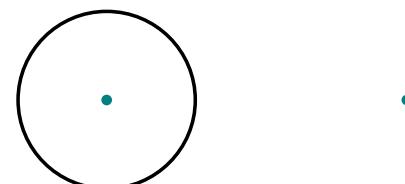
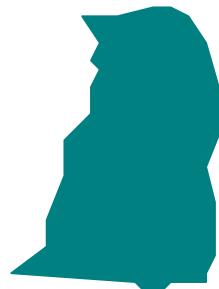
Kuvat ovat tieteellisessä kommunikoinnissa ensisijaisen tärkeitä. Monimutkaisia ajattelumalleja ja suurta määrää informaatiota on usein mahdotonta välittää ilman visualisointia, sillä useimmat ihmiset käsitlevät kuvallista tietoa paljon tehokkaammin kuin sanallista. Usein on suorastaan mahdotonta ymmärtää määrellistä informaatiota ennen kuin informaatiolle löytyy sopiva kuvallinen esitys. Opiskelussakin omien ajatusten kuvallinen ilmaisu voi olla tehokas oppimistapa. Kuvien muodostaminen vaatii nimittäin informaation käsittelyä, ja kun tieto on puettu kuvan muotoon, oleellisten piirteiden huomaaminen ja muistaminen on yleensä paljon helpompaa kuin tekstin muodossa olevan tiedon.

Myös monimutkaisen ongelman ratkaisemisessa kuvalliset esitykset ovat tärkeitä ajattelun apuvälineitä. Kun asiantuntija alkaa ratkaista ongelmaa, hän yleensä aloittaa piirtämällä tilanteesta kuvan. Näin siksi, että kuvaan on helppo kerätä kaikki tilanteessa oleelliset seikat ja tunnettu informaatio muotoon, josta kokonaisuuden hahmottaa helposti. Yksityiskohtia ja asioiden välistä suhteita on niinikään helppo lisätä kuvaan. Fysiikassa mallien muodostaminen on yleensä helpointa juuri kuvien avulla. Monesti fysikaalisissa ongelmissa kappaleiden tai hiukkasten paikat ovat merkitykselliset, ja tällöin kuvan piirtäminen tilanteesta on lähes välittämätöntä.

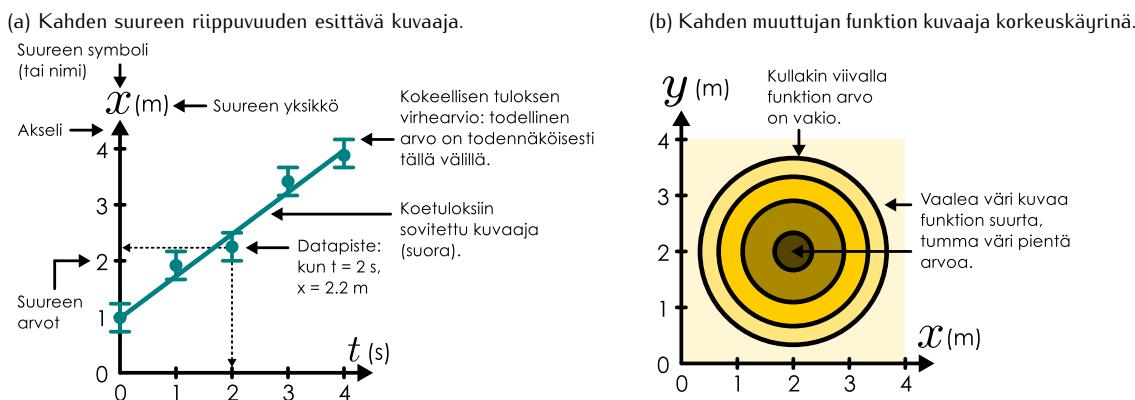
Fysiikassa ja muissakin luonnontieteissä **kuvajien** tulkitseminen on välittämätön taito. Yksinkertaisesta kuvajasta, jossa on piirretty jokin suure toisen suureen funktiona, voidaan usein suoraan päättellä esimerkiksi

Kuva 1: Eralaisia malleja kissalle.

(a) Yksityiskohtainen kuvaus. (b) Koon ja muodon kuvaus. (c) Koon ja sijainnin kuvaus. (d) Pelkän sijainnin kuvaus.



Kuva 2: Erilaisia kuvaajia.



funktion ääriarvojen, raja-arvojen, derivaattojen, integraalien yms. johdannaisten käyttäytymisen, mikä voi laskemalla olla erittäin työlästä tai jopa mahdotonta. Asiantuntija tietää, miten suureet riippuvat toisistaan erilaisissa tilanteissa, jolloin hän voi hyvästää kuvaajasta heti huomata olellisen tiedon. Siksi tieteellisessä esityksessä juuri kuvat ja kuvaajat — ei teksti tai kaavat — ovat avainasemassa informaation välittämisessä.

Kuvaajien tulkitseminen ja piirtäminen ei kuitenkaan ole itsestään selvää, ja sitä pitää harjoitella. Kuvaajan tulkinnassa ensimmäinen askel on aina tarkistaa, mitä kuvataan. Jos kyseessä on tyypillinen kaksiulotteinen koordinaatistokuvaaja kuten kuvassa 2 (a), tämä tarkoittaa kuvaajassa esitettyjen suureiden ja mittakaavan tarkistamista kuvaajan **akseleilta**. Tämän jälkeen voidaan alkaa tulkitsemaan varsinaista kuvaajaa. Riippuu kuitenkin aina tapauksesta, millaiset kuvaajan ominaisuudet ovat mielenkiintoiset. Ja toisaalta täysin samankäiset kuvaajat voivat esittää aivan erilaisia ilmiöitä, jos kuvattavat suureet eivät olekaan niissä samat. Nämä kuvajien tulkitseminen edellyttää ilmiöiden ja niihin liittyvän fysiikan aitoa ymmärtämistä — pelkkien nyrrkisääntöihin nojaaminen ei aina onnistu.

Tässä materiaalissa esitetään dataa kuvaajien muodossa ja toisistaan riippuvien suureiden kuvailussa pyritään esittämään myös suureiden yhteydet graafisissa esityksissä. Lisäksi kuvaajien tulkintaan ja diagrammien piirtämiseen opastetaan. Kuvaajien käsitteilylle annetaan materiaalissa siis erityishuomiota, ja sitä on syytä opiskella.



0.4 Kuvassa 2 (a) on esitetty mittaustuloksia graafisesti. Arvioi kuvaajan perusteella, millä välillä suureen x todellinen arvo on, kun (a) $t = 3\text{ s}$, (b) $t = 6\text{ s}$.

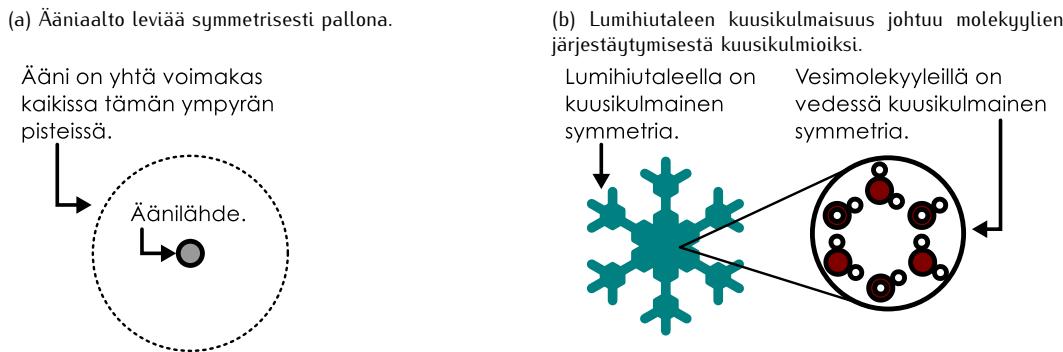
Symmetria

Symmetria tarkoittaa tilannetta, jossa jotakin erityisasemassa olevaa suuretta voidaan muuttaa niihin ettei mikään muu asia muutu. Esimerkiksi geometriassa nelio on symmetrinen 90° kierron suhteeseen (kuten myös 180° , 270° jne. kierron) sekä myös sen keskipisteen kautta kulkevien sivujen tai lävistäjien suuntaisten peilauksien suhteeseen, koska nelion käänäminen tällaisilla tavoilla tuottaa kuvion, joka on täsmälleen samanlainen kuin alkuperäinen nelio. Nelion tapauksessa symmetriat ovat epäjatkuvia eli diskreettejä, koska vain tietyn operaatiot pitävät kuvion muuttumattomana. Sitä vastoin esimerkiksi ympyrässä on jatkuva symmetria, koska ympyrä voi kiertää keskipisteestä ympäri minkä kulman verran tahansa ja ympyrä näyttää edelleen samalta.

Geometriset ja matemaattiset symmetriat ovat fysiikassa hyödyllisiä ongelmanratkaisun apuvälineitä. Esimerkiksi jos suure riippuu jostakin pisteestä mitatusta etäisyystä, on suureen oltava sama kaikissa pisteissä, jotka ovat tätä pisteestä yhtä kaukana — siis ympyrän kehällä tai pallon pinnalla. Kuvassa 3 (a) on tätä esimerkki. Tyhjässä tilassa oleva äänilähde, esimerkiksi kaiutin, lähettää ääntä kaikkiin suuntiin yhtä voimakkaasti. Tällöin tilanne on symmetrinen suuntien suhteeseen, joten äänenvoimakkuus on sama kaikissa suunnissa kunhan etäisyys äänilähteestä on yhtä suuri. Toisin sanoen ajattelemalla läheen ympärille pallo, jonka keskipisteessä lähde on, äänen on oltava yhtä voimakas jokaisessa pistessä tämän pallon pinnalla. Huomattaavaa tässä päättelyssä on se, että se ei vaadi tarkkaa tietoa äänen ominaisuuksista — ainoastaan oletuksen siitä, että äänen eteneminen on samanlaista eri suunnissa. Koska tämä oletus liittyy vain tilanteen symmetriaan, vastaava päätteily toimii mille tahansa vain suunnasta riippuvalle suurelle.

Tilanne voi olla myös päinvastainen: näemme, että jokin asia on symmetrinen, mutta emme tiedä miksi. Tällöin symmetria on vahva johtolanka siitä, että jossakin rakenteessa tai laissa on oltava vastaava symmetria.

Kuva 3: Geometrisia symmetrioita. Symmetria yhtäällä johtaa usein symmetriaan toisaalla.



Muun muassa mineraalit ja kiteet voivat olla hyvin symmetrisen muotoisia riippuen niiden atomien muodostamasta rakenteesta. Esimerkiksi kuvassa 3 (b) esitettyllä lumihiuutaleilla on kuusikulmainen symmetria, ja tämä symmetria johtuu jääkiteessä olevien vesimolekyylien muodostamasta rakenteesta, jossa molekyylit asettuvat muodostamaan kuusikulmioita.

Myös fysiikan *laiessa* on symmetrioita, ja itse asiassa juuri tällaiset symmetriat ovatkin eräitä fysiikan voimakkaimpia periaatteita. Esimerkiksi fysiikan peruslakien uskotaan olevan samanlaiset kaikkialla maailmankaikkeudessa: Jos rakennat koelaitteiston ja suoritat kokeen yhdessä paikassa, siirrät laitteiston toiseen täsmälleen samanlaiseen paikkaan (ts. paikkaan jossa olosuhteet ovat kaikin puolin samanlaiset), kaikkien samojen fysiikan lakienvaihtoehdot pitäisi päteä ja kokeen tuloksen pitäisi olla täsmälleen sama kuin ennenkin. Tätä kutsutaan lakienvaihtoehdot symmetriaksi paikan siihen suhteeseen, mikä tarkoittaa etteivät lait riipu mistään absoluuttisesta paikasta. Samoin jos koelaitteistolla tehdään sama koe tänään ja huomenna, tulosten pitäisi olla samat, koska fysiikan lait eivät riipu ajasta eli ne ovat symmetriset ajan muutoksen suhteeseen. Osoittautuu, että tällaiset symmetriat ovat erittäin tärkeitä, koska ne liittyvät säilymislakeihin, joista puhutaan tarkemmin luvussa 2.

Uusia ilmiöitäkin on löydetty puhtaasti tutkimalla, millaisia symmetrioita fysiikan lait toteuttavat. Esimerkiksi 1900-luvun alussa kehitettiin valolle aalto-hiukkasmalli, foton. Aineelle kehitettiin tämän jälkeen vastaanvalainen aaltomekaaninen kuvaus tarkastelemalla hypoteesia, että valon ja aineen perusominaisuudet ovat samanlaiset — eli että niitä kuvaavat lait ovat symmetriset. Kyseessä oli teoreettinen arvaus, jonka kokeet osoittivat myöhemmin oikeaksi. Pyrkimys symmetriaan on osoittautunut niin vahvaksi periaatteeksi teoreettisen fysiikan kehityksessä, että monet teoreettiset fyysikot pitivät modernin fysiikan yhtenä päätaivuteena ns. kaiken teoriaa eli kaikki fysiikan perusvuorovaikutukset yhdistävää peruslakia. Tällainen on mahdollista vain jos eri vuorovaikutukset voidaan kuvata samanlaisessa, symmetrisessä muodossa.



0.5 Hyvin pitkä, suora, ohut lanka väärtelee, jolloin sen jokainen piste toimii äänen lähteenä. Ääni kuuluu yhtä voimakkaana kaikissa niissä avaruuden pisteissä, joiden etäisyys langasta on sama. Minkä muotoisen alueen tai pinnan tällaiset pisteet muodostavat?

Matemaattinen analyysi

Matematiikkaa sanotaan luonnon kieleksi, millä tarkoitetaan sitä, että matemaattisilla menetelmillä voidaan kuvata luonnonilmiöitä erittäin tarkasti. Matematiikka on tärkeä apuneuvo kaikissa luonnontieteissä, mutta luonnontieteistä fysiikka käyttää matematiikkaa epäilemättä monipuolisimmin. Fysiikka ei kuitenkaan ole matematiikkaa. Aloittelevilla fysiikan opiskelijoilla on usein harhakäsitys, että laskeminen ja kaavat ovat fysiikan tärkein sisältö. Matematiikka on kuitenkin vain työkalu, joka mahdollistaa sellaiset määritelliset päättelyt ja täsmälliset ilmaisut, jotka ilman matematiikkaa olisivat erittäin vaikeita. Esimerkiksi ilmaisut "kappaleen kiihyvyysvektorin ja massan tulo on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoimavektori" ja " $\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{m}\bar{a}$ " ovat merkitykseltään *samat*. Matemaattinen yhtälö on vain lyhyempi kirjoittaa, joten se ei rasita ihmisen muistia niin paljon kuin pitkä sanallinen selitys. Matemaattisia lausekkeita voidaan myös käsitellä matematiikan sääntöjen avulla uusien fysikaalien väitteiden johtamiseksi.

Yllä esitetyn väitteen sanallinen muotoilu on *fysikaalinen* tapa ilmaista asia kun taas kaava on *matemaattinen*, ja aina kun tutustut uuteen fysikaaliseen lakiin tai määritelmiin, on syytä ymmärtää *molemmat*. Fysikaalien lakienvaihtoehdot täsmällinen ilmaiseminen ja soveltaminen pelkästään sanallisesti on hankala, mutta toisaalta pelkät kaavat ovat vain merkitykseltömiä symbolien jonoja, jos et ymmärrä mitä fysikaalisia suureita ne käsittelevät ja etenkin millaisissa tilanteissa ne pätevät. Fysiikan opintojen ydin onkin ymmärtää

millaiset periaatteet ja lait luonnon käyttäytymistä ohjaavat. Siksi laskutehtävissäkin oleellisinta on aina *perustella* mitä ja miksi lasketaan eikä vain laskea — varsinkin kun raaka laskeminen voidaan nykyään pitkälti antaa tietokoneiden tehtäväksi.

Laskemiselta ei kuitenkaan voi fysiikassa välttyä, koska fysiikka on eksakti luonnontiede, joka ei pyri kuvamaan luontoa vain laadullisesti eli **kvalitatiivisesti** vaan myös määrellisesti eli **kvantitatiivisesti**. Aina kun fysiikassa lasketaan, on tulosten tarkkuus ja oikeellisuus vielä erikseen arvioitava, koska fysikaalisia tilanteita kuvavat mallit ovat lähes aina puutteellisia ja laskuissa voi tapahtua virheitä. Tällainen arvointi vaatii selkeästi enemmän fysikaalista kuin matemaattista taitoa. Yksiköiden tarkastamisen lisäksi laskujen tulosten järkevyyden pohdinnassa hyviä keinoja ovat suuruusluokka-arviot, erikoistapausten tarkastelu sekä raja-arvojen analysointi.

Merkitsevät numerot

Laskimet ja tietokoneet käsittelevät lukuja aina tietyllä kiinteällä tarkkuudella, jota rajoittaa muisti. Lisäksi laskukoneet käsittelevät numeroita binääriesityksessä eli kakkosen potenssien avulla. Siispä kun laskukoneelle antaa luvun 10.0, se voi ymmärtää tämän esimerkiksi muodossa $1.000000 \cdot 10^1$. Kun laskin suorittaa laskuja, se tuottaa uusia lukuja, jotka se tallentaa samalla tarkkuudella. Jos tuloksena saadaan luku, jonka desimaalit ovat pelkkiä nollia, laskin ymmärtää yleensä jättää ne näytämättä, mutta muuten kone saattaa tulostaa desimaaleja niin paljon kuin sen muistissa on.

Fysikaalisesti tässä ei kuitenkaan ole mitään järkeä. Jos luvut kuvavat fysikaalisten suureiden suuruksia, niitä ei voida tuntea tarkasti kuin joissakin erikoistapaussissa. Tavallisesti fysikaaliset lukuarvot ilmoitetaan aina sillä tarkkuudella kuin ne tunnetaan. Jos esimerkiksi pituus on noin 1 m ja tämä tiedetään 1 cm eli 0.01 m tarkkuudella, on soveliasta ilmoittaa pituuden lukuarvoksi 1.00 m. Merkintä 1 m ei ole yhtä hyvä, koska tämä periaatteessa tarkoitetaan, että pituus tunnetaan 1 metrin tarkkuudella, ja merkintä 1.000 m on suorastaan väärin, koska suureen arvoa ei tunneta näin tarkasti.

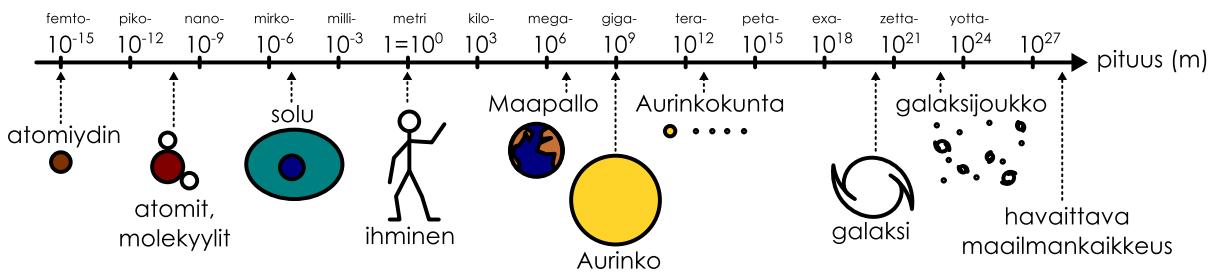
Merkinnässä 1.00 m yksi on luvun kokonaislukuosa, piste on desimaalierotin, ja sitä seuraavat kaksi nolla ovat **desimaalit**, eli luku on ilmoitettu kahden desimaalin tarkkuudella. (Tässä tekstillä käytetään erottimena pistettä, joka on kansainvälisesti tavallisin min käytetty desimaalierotin, vaikka suomen kielessä normaalilisti erotin onkin pilkku.) Kaikki kolme numeroa kuitenkin sisältävät informaatiota: 1 tarkoittaa yhtä metriä ja seuraavat kaksi nolla nolla desि- ja senttimetriä. Niinpä sanotaan, että luku on ilmoitettu kolmen **merkitsevän numeron** tarkkuudella. Luvussa, jossa ei ole lainkaan desimaaleja, merkitsevien numeroiden määrä voi olla epäselvä. Esimerkiksi kirjoitusasu 100 m voi sisältää yhden, kaksi tai kolme merkitsevää numeroa riippuen siitä, ovatko nollat todella tarkalleen nollia vai onko lukuarvo pyöristetty. Jos merkitsevien numeroiden määrä halutaan ilmaista täsmällisesti, voidaankin käyttää niin sanottua tieteellistä merkintätapaa eli kymmenen potensseja ja kirjoittaa $1.00 \cdot 10^2$ m.

Kun fysikaalisilla suureilla lasketaan, loppululoskin olisi syytä ilmoittaa sillä tarkkuudella, mikä alkuperäisten lukuarvojen tarkkuudesta voidaan päätellä. Yleisesti ottaen tulosten tarkkuuden määräävät huonoimman tarkkuuden lukuarvot.

- Yhteen- ja vähennyslaskuissa tarkkuuden ilmaisevat lukujen **desimaalit**. Jos esimerkiksi lasketaan yhteen $1.1 \text{ m} + 2.34 \text{ m}$ loppuloksen järkevä tarkkuus on 3.4 m eikä 3.44 m , koska lukuarvosta 1.1 ei tunneta toista desimaalia.
- Kerto- ja jakolaskuissa tarkkuuden ilmaisevat **merkitsevät numerot**. Jos esimerkiksi kerrotaan $0.11 \text{ m} \cdot 0.234 \text{ m}$, loppuloksen järkevä tarkkuus on 0.026 m^2 , jossa on kaksi merkitsevää numeroa, eikä esimerkiksi 0.02574 m^2 , joka on lukujen tarkka tulo. Näin siksi, että 0.11 m edustaa pituutta, jonka todellinen arvo voi olla väliltä $0.105 \dots 0.115 \text{ m}$ ja 0.234 m edustaa jotakin arvoa väliltä $0.2335 \dots 0.2345 \text{ m}$. Tällöin kertolaskun tulos voi todellisuudessa olla jotakin väliltä $0.105 \cdot 0.02335 = 0.00245175 \dots 0.115 \cdot 0.02345 = 0.00269675$. Toisin sanoen jo tuloksessa 0.026 m^2 voi olla viimeinen numero väärin, eikä ole järkevää antaa vastausta vielä tätäkin suuremalla tarkkuudella.
- Kun lasku sisältää muita funktioita kuten potensseja, eksponenttifunktioita, logaritmja tai trigonometrisia funktioita, laskujen tarkkuuden analysointi vaatii periaatteessa erillisen tarkastelun. Tähän tutustutaan esimerkiksi harjoitustöiden yhteydessä, jolloin on analysoitava todellisten mittaustulosten luotettavuutta. Karkeana arviona tällöinkin lienee parasta käyttää merkitsevien numeroiden lukumäärää sopivana tarkkuutena tuloksia ilmoittaessa.

Kun lukuarvoja on syytä pyöristää, tämä tapahtuu normaalien pyöristyssääntöjen mukaisesti. Jos ensimmäinen poisjäävä numero on 5 tai suurempi, viimeinen mukaan otettava numero muutetaan yhtä suuremmaksi. Huomaa kuitenkin, että jos lasketaan välituloksia, nämä kannattaa tallentaa laskukoneeseen tai kirjoittaa muistiin mahdollisimman suurella tarkkuudella, koska lukuja pyöristäminen monta kertaa laskun aikana johdattaa helposti kumuloituviiin pyöristysvirheisiin. Tietenkin aina kannattaa pyrkiä laskemaan *symbolilla* mahdollisimman pitkälle ja sijoittaa lukuarvot vasta lopuksi.

Kuva 4: Pituuden suuruusluokkia atomiyöntimestä maailmankaikkeuden kokoon. Akseli on logaritminen: kunkin pykälän on tuhat kertaa suurempi kuin edellinen. Akselilla näkyvät myös SI-järjestelmän etulüütteet.



0.6 Jos suureen a lukuarvo on 0.12 ja suureen b lukuarvo on 3.45, mikä on lausekkeen (a) $1/b - a$, (b) a^2b , (c) $b - a^2$ lukuarvo ja järkevä tarkkuus? Viimeisessä tapauksessa pitää tarkastella tarkkuutta erikseen kussakin laskutoimituksessa!

Suurusluokat

Fysiikka käsittelee suureita, joiden kokoluokka ulottuu valtavan pienestä valtavan suureen, ja fyysikon on syytä osata analysoida ilmiöitä kaikissa mittakaavoissa. Alun perin monet fysiikan alueet ovat kehittyneet pelkästään ihmisten havainnoiman mittakaavan eli **makroskooppisen** mittakaavan ilmiötä ja suureita tutkimalla. Nykyään tunnetaan kuitenkin myös alkeishiukkisten mittakaavan eli **mikroskooppisen** mittakaavan fysiikka niin tarkasti, että makroskooppiset ilmiöt voidaan selittää pelkästään tarkastelemalla hiukkosten käyttäytymistä. Makroskooppiset lait kannattaakin usein opetella yhdessä vastaavien mikroskooppisten laien kanssa.

Edellä mainitut etuliitteet "femto" ja "zetta" ovat SI-järjestelmän määrittelemää kertoimia, jotka yhdistetään suureen yksikköön sen murto-osan tai monikerran ilmaisemiseksi. Nämä ovat kuitenkin melko harvinaisia erittäin pienien ja suuren kokonsa vuoksi, ja tavallisempia pituuden mittoja ovat esimerkiksi kilometri eli tuhat metriä, ja millimetri eli metrin tuhannesosa. Kuvassa 4 on listattu mjos SI-järjestelmän etuliitteitä.

SI-yksiköiden ohella on vakiintunut käytöön monia erityisyksiköitä kuten elektronivoltti ($1 \text{ eV} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), atomimassayksikkö ($1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) ja valovuosi ($1 \text{ ly} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$), joiden muuntamisessa SI-järjestelmään voi tehdä helposti virheitä. Onkin tärkeää osata käsittellä suuruusluokkia myös tulosten järkevyyden arvioimiseksi.

Suurusuolokka-arvioita tekemällä saa itse asiassa ilmiöistä usein paremman näppituntuman kuin laskemalla laskuja tarkasti, koska oleelliset seikat helposti häviävät näkyvistä, kun yksityiskohtia on paljon. Siksi onkin erittäin hyödyllistä pystyä arvioimaan erilaisten ilmiöiden suuruusluokkia ja sitä kautta tunnistaa tilanteessa vaikuttavista ilmiöistä merkittävimmät. Tällöin voikin jättää vähemmän tärkeät seikat huomioimatta ainakin aluksi. Muutostenkin suuruusluokkien hahmottaminen ja arviointi on erittäin tärkeä yleistaito, josta on hyötyä kaiken toiminnan suunnittelussa taloudesta insinööritieteisiin.

Monimutkaistenkin asioiden suuruksia voi arvioida jakamalla tarkasteltava asia pienempiin osiin, joiden suuruudet voidaan arvata tai selvittää. Kukin arvioitu lukuarvo kannattaa ilmaista yhden merkitsevän luvun tarkkuudella, jotta varsinaiset laskut pysyvät helppoina. Lopputulosessa kuitenkaan ei ole edes tällä yhdellä merkitsevällä numerolla merkitystä, koska laskuissa kertyneet epätarkkuudet ovat mitä todennäköisimmin suuremmat, joten lopputulos pyöristetään ja ilmoitetaan kymmenen potensseissa. Suurusuokkalaskuissa päähuomio kohdistuukin näihin kymmenen potensseihin, joille pätevät normaalit potenssien laskusäännöt,

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}, \quad (10^a)^b = 10^{ab}, \quad \frac{1}{10^a} = 10^{-a}. \quad (4)$$

Lukuarvon ilmoittaminen kymmenen potensseissa tarkoittaa **logaritmisen asteikon** käyttämistä, sillä esimerkiksi 10^3 on kymmenen kertaa suurempi kuin 10^2 , joka on kymmenen kertaa suurempi kuin 10^1 jne. Toisin

sanoen asteikossa "pykälät" eivät ole tassaisin välein vaan peräkkäisten välien suuruksien *suhde* on aina sama. Myös pyöristämisen toimii logaritmisessa asteikossa normaalista poiketen. Nyt perussääntö on se, että jos laskun lopputuloksen ensimmäinen numero on *kolme tai pienempi*, luku pyörristetään alaspäin, muuten ylöspäin. Kolme on pyörityksen rajana, koska esimerkiksi $3 \cdot 10^4$ on kolme kertaa suurempi kuin 10^4 , mutta se on myös hieman alle yksi kolmasosa luvusta 10^5 . Niinpä logaritmisessa asteikossa $3 \cdot 10^4$ ajatellaan olevan lähempänä arvoa 10^4 mutta $4 \cdot 10^4$ on lähempänä arvoa 10^5 .

Suurusuokkien arviointi on laskuteknisesti melko helppoa, mutta ongelmien paloittelu pienempiin osiin ja näiden arviointi voi joskus olla haastavaa, joten tätkin taitoa on sytä erikseen harjoitella.



0.7 Arvioi, montako a-kirjainta (ei ole väliä, onko kyseessä iso vai pieni kirjain) koko tässä tekstissä (noin 700 sivua) kaikkiaan on?

esimerkki 0.2

Maapallon ja atomin suuruusluokat

Monestako atomista Maapallo koostuu?

Maapallo on suuri ja atomit ovat pieniä, joten vastaus on mitä ilmeisimmin hyvin suuri, mutta kuinka suuri? Ongelmaa voi lähteä tutkimaan esimerkiksi seuraavien helpommin selvitettävien kysymysten kautta:

- Mikä on yhden atomin keskimääräinen massa?
- Mikä on Maapallon massa?
- Mikä on Maapallon tilavuus?
- Mikä on Maapallon keskimääräinen tiheys?

Maapallon massa tunnetaan kohtuulisen tarkasti, joten kyseisen arvon voisi tuki hakea suoraan. Harjoituksen vuoksi arvioidaan kuitenkin sekin erikseen.

Kivialaineksen tiheys on joitakin tonneja kuutiometriä kohden, minkä voi tarkistaa mittaan minkä tahansa kiven tilavuuden ja painon. Maan ytimessä ei ole kiveä, mutta tiheys ei silti muutu kovin paljon — geologisten lähteiden mukaan maan ytimen tiheys on hieman yli 10 tonnia kuutiometrissä. Arvioidaan siis Maan keskimääräiseksi tiheydeksi $\rho_{\text{Maa}} = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Metrin alkuperäinen määritelmä oli, että se on kymmenesmiljoonasosa etäisyystästä päiväntasaajalta pohjoisnavalle. Toisin sanoen Maan ympäryysmitta on melko tarkasti 40000 km . Ympyrän ympärys on $2\pi R \approx 6R$, missä R on säde, joten Maan säde on tämän mukaan $R_{\text{Maa}} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 10^7 \approx 7 \cdot 10^6 \text{ m}$. Tästä saadaan Maapallon tilavuudeksi $V_{\text{Maa}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4R^3 \approx 4 \cdot 7^3 \cdot 10^{6 \cdot 3} \text{ m}^3 \approx 1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$ ja edelleen massaksi $m_{\text{Maa}} = \rho_{\text{Maa}} V_{\text{Maa}} = 5 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Maan tunnettu massa on $6.0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, joten tämä arvio on itse asiassa yllättäväkin hyvä!)

Atomimassayksikkö on $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Tämä on likimain vetyatomien massa, mutta Maa ei koostu vedystä vaan raskaammista alkuaineista, joiden massat ovat joitakin kymmeniä atomimassayksiköitä. (Maassa yleisiä alkuaineita ovat mm. happi, piiri ja rauta, joiden massat ovat noin 20 u, 30 u ja 50 u.) Arvioidaan siis atomien massaksi $m_{\text{atomi}} = 3 \cdot 10^1 \text{ u} = 5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Näin ollen Maapallolla on atomeja

$$N_{\text{atomi}} = \frac{m_{\text{Maa}}}{m_{\text{atomi}}} = \frac{5}{5} \cdot 10^{24 - (-26)} = 1 \cdot 10^{50}. \quad (5)$$

Siis Maassa on noin 10^{50} atomia. Kuinka paljon tämä on? Sadassa grammassa hiihtää on noin 10^{25} atomia, ja tämän mukaan Maapallolla on noin $10^{25} \cdot 10^{25}$ atomia. Maassa on siis suunnilleen yhtä monta 100 g yksikköä ainetta kuin sata grammaa ainetta sisältää atomeja.

Erityistapaukset

Yksittäistapaukset, joissa suureiden lukuarvot tunnetaan, on usein helpompi ratkaista kuin johtaa yleisiä riippuvuuksia suureiden välijille. Puhtaasti symbolilla tapahtuva laskeminen on kuitenkin fysiikassa tärkeää, koska siten saadaan tietää, mitkä tekijät vaikuttavat toisiinsa — eli jos jotakin muutetaan, mitkä muut asiat muuttuvat. Yksittäistapauksia voi kuitenkin käyttää testinä, kun halutaan tarkistaa johdettujen lausekkeiden oikeellisuutta. Usein nimittäin on helppo keksiä erikoistapauksia, joissa tilanteet on erityisen helpot ratkaista: massat ovat yhtä suuret, nopeudet ovat yhdensuuntaiset, kappaleet ovat paikoillaan tms. Jos johdettu laki, jonka pitäisi kuvata ilmiötä kaikissa tapauksissa, on oikein, sen pitää luonnollisesti kuvata oikein myös kaikki yksittäistapaukset. Myös raja-arvot ja asymptootit ovat erikoistapauksia, ja yleisten ratkaisujen käyttäytyminen kannattaa aina tarkastaa, kun niissä esiintyvät suureet ovat hyvin pienet tai hyvin suuret.



0.8 Eräs suure riippuu toisesta suureesta t lausekkeen $x(t) = 1 + \frac{2}{3+4t}$ mukaisesti. Mikä on suureen arvo, kun (a) t on nolla, (b) t on hyvin suuri?

esimerkki 0.3

Raja-arvot

Tehtävään oli tutkia tilannetta, jossa kaksi samanlaista kappaletta, joista ensimmäisen lämpötila on T_1 ja toisen $T_2 > T_1$, tuodaan yhteen. Opiskelijat A, B ja C ratkaisivat ensimmäisen kappaleen lämpötilan ajan funktiona ja saivat erilaiset tulokset:

$$\begin{aligned}T_A(t) &= T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(1 - e^{-at}) \\T_B(t) &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 e^{-at} \\T_C(t) &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_1 - T_2)e^{-at}\end{aligned}$$

missä a on jokin positiivinen vakio. Mikä ratkaisuista voisi olla oikein?

Kappale on aluksi lämpötilassa T_1 eli $T(0) = T_1$. Toisaalta kun odotetaan tarpeeksi kauan, kappaleiden lämpötilat tasoittuvat, jolloin kahden samanlaisen kappaleen lämpötiloiksi tulee alkuperäisten lämpötilojen keskiarvo $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ eli $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$.

Kaikki opiskelijat ovat saaneet vastaukseensa eksponenttifunktion e^{-at} . Eksponenttifunktio nollasta on yksi, $e^0 = 1$, ja jos a on positiivinen, funktio lähestyy nollaan kun t kasvaa, $e^{-at} \rightarrow 0$.

Opiskelijan A ratkaisussa lämpötila on aluksi $T_A(0) = T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2)(1 - 1) = T_1$ ja se lähestyy arvoa $T_A \rightarrow T_1 - \frac{1}{2}(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, kuten pitääkin — se voisi siis olla oikea tulos. Opiskelijan B ratkaisussa lämpötila on aluksi $T_B(0) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$ ja lopuksi $T_B \rightarrow \frac{1}{2}T_1$. Nämä eivät ole oikean ratkaisun alkua- ja loppuarvot, joten opiskelijan B on täytynyt tehdä laskussaan virhe. Opiskelijan C ratkaisussa lämpötila lähtee arvosta $T_C(0) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_1 - T_2) = T_1$ ja päättyy arvoon $T_C(t) \rightarrow \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, eli myös tällä ratkaisulla on oikeat raja-arvot ja se voi olla oikea tulos. Itse asiassa se on aivan sama tulos kuin opiskelijalla A, mutta kirjoitettuna vain eri muotoon.

Jotta voitaisiin lopullisesti selvittää, ovatko ratkaisut oikeat, pitäisi vielä tarkistaa, että vakiolla a on oikea arvo. Sitä ei kuitenkaan saada selville raja-arvoja tarkastelemalla, koska a :n arvo ei niihin vaikuta. Kuitenkin raja-arvotarkastelulla voitiin suoraan päättää, että ratkaisu B ei voi olla oikein. Huomaa vielä, että esimerkiksi yksikkötarkastelu ei tässä kohtaa olisi pystynyt erottelemaan ratkaisuja toisistaan, sillä myös ratkaisussa B on aivan oikeat yksiköt.

Matemaattiset ohjelmistot

Fysiikka hyödyntää erittäin monipuolista matematiikkaa, ja monet matematiikan haarat ovat alunperin kehittyneet täyttämään fysiikan tarpeita. Jo fysiikan perusopinnoissa tarvitaan mm. differentiaalilaskentaa, vektoreita, lineaarialgebraa sekä todennäköisyyslaskentaa. Monesti teoreettisten tarkastelujen ymmärtäminen vaatii monipuolista matematiikan hallintaa, minkä vuoksi laskuteknikkaa on sytytä harjoitella. Laskeminen on kuitenkin vaivalloista, eikä ole välttämätöntä aina tehdä kaikkia laskuja käsin, vaan laskuissa voi käyttää apuna matemaattisia ohjelmistoja ja laskimia. Tässä materiaalissa laskuesimerkkien yhteydessä annetaankin myös esimerkkejä, kuinka laskut voi suorittaa Mathematica-ohjelmiston avulla (ks. esimerkki 0.4). Kyseessä on symboliseen laskentaan tarkoitettu ohjelmisto, jonka ytimen pääälle myös verkkopalvelu Wolfram Alpha rakentuu.

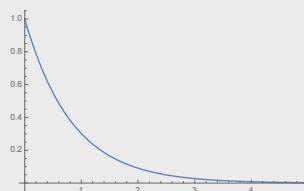
esimerkki 0.4

Mathematica

Mathematicassa ohjelman omat komennot alkavat aina isolla kirjaimella ja niiden argumentit kirjoitetaan hakasulkeisiin. Symbolien joukot kirjoitetaan aaltosulkeisiin. Komennot suoritetaan painamalla Shift+Enter. Alla on esimerkki Mathematica-koodista, jossa määritellään funktio $f(x) = e^{-ax}$, missä $a = 1.2$, ja piirretään sen kuvaaja välillä $0 < x < 5$.

Mathematica:

```
a = 1.2
f[x_] := Exp[-a x]
Plot[f[x], {x, 0, 5}]
```



0.9 Mene osoitteeseen wolframalpha.com ja piirrä siellä funktion $f(x) = \sin^2 x$ kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$. Määritä myös sen integraalifunktio.

Ongelmanratkaisu

Fysiikan opinnoissa tärkeintä ei ole opetella ulkoaa suurta määrää informaatiota vaan oppia soveltamaan melko pieniä määriä perusperiaatteita ja -lakeja. Siksi harjoittelu, ongelmanratkaisu ja tehtävien ratkominen ovat fysiikan opinnoissa tärkeitä, ja niihin tulee varata kohtuullisen suuri osa opiskelun käytettävästä ajasta. Perinteisesti fysiikan opetuksessa on painotettu *laskutehtäviä*, joissa annetuissa tilanteissa ratkaistaan joitakin kysytyjä suureita. Nämäkin ovat tärkeitä, mutta fysiikaalisen ajattelun kehittymisessä on tärkeää harjoitella myös *konseptuaalista ajattelua* eli periaatteellista päättelyä, joka ei vaadi laskemista.

Periaatteellisen ajattelun hallinta on itse asiassa edellytys useimpien laskuja vaativien ongelmien ratkaisemiseksi. Vielä lukiotasolla useat laskutehtävät ratkeavat vain oikean kaavan valinnalla ja siihen lukuarvoja sijoittamalla. Todellisuudessa kiinnostavissa fysiikan ongelmissa tämä ei käytännössä koskaan onnistu, koska valmiit kaavat pätevät vain erittäin yksinkertaisissa ja ideaalisissa tilanteissa. Sen sijaan ongelmien ratkaiseminen vaatii aina tilanteen hahmottamista, siinä vallitsevien fysiikaalisten lakien ymmärtämistä sekä niitä kuvavien matemaattisten relatioiden muodostamista, ja nämä askeleet vaativat juuri periaatteellisen eli konseptuaalisen ajattelun taitoja. Varsinainen laskutoimitus on tehtävänratkaisussa vain matemaattinen harjoitus tehtävän lopuksi — fysiikka on ongelman pukeminen muotoon, johon matematiikan työkaluja voidaan soveltaa. Ohessa on esitelty eräs tapa lähteä järjestelmällisesti ratkaisemaan monimutkaista fysiikan tehtävää.

Fysiikan laskutehtävien ratkaiseminen

1. **Tilanne** Useimmiten kannattaa aloittaa *piirtämällä kuva*, sillä kuva on erinomainen tapa kerätä yhteen saatavilla oleva tieto. Fysiikkassa usein tarkastellaan tilanteita, joissa kappaleiden tai hiukkasten paikat avaruudessa ovat merkitykselliset, jolloin kuva on luonnollinen tapa esittää tilanne, ja myös kappaleiden liikettä voi esittää kuvin tai kuvasarjoin. Fysiikaalisen ongelman hahmottamista auttaa myös *tunnustujen ja tuntemattomien suureiden listaaminen*. Todelliset ongelmat ovat yleensä avoimia, eikä silloin sanota suoraan, mitä pitäisi ratkaista. Tällöin kannattaa jo tässä vaiheessa pohtia, mitkä suuret voisivat olla kiinnostavia asetettuun kysymykseen vastaamisessa.
2. **Suunnitelma** Kaikkien monimutkaisten ongelmien ratkaiseminen — myös fysiikaalisten — kannattaa aina aloittaa *laatimalla suunnitelma* siitä, miten ongelma aiotaan ratkaista. Ongelmien ratkaiseminen vaatii yleensä tarkasteltavan tilanteen pilkomista pienempiin, helpommin hallittaviin osiin, näiden osien erillistä analysointia ja lopuksi osien yhdistämistä takaisin yhdeksi kokonaisuudeksi. Tällainen analyysi vaatii monenlaisen tiedon yhdistämistä, eivätkä pitkät päättelyketjut yleensä onnistu ilman kokonaiskuvaaa siitä, mihin kukin päättelyaskel on loppuken lopuksi johtamassa. Ongelmanratkaisu helpottuu huomattavasti, kun pohdit ensin yleisellä tasolla, kuinka ongelma voitaisiin ratkaista ilman kaikkien täsmällisten yksityiskohtien huomioimista.
3. **Ratkaisu** Kun suunnitelma on olemassa, voit toteuttaa sen. Jos suunnitelma on hyvin laadittu, tiedät jo valmiiksi mitä työvaiheita ratkaisuun kuuluu ja miksi kukin niistä on tarpeellinen. Ratkaisuvaiheessa voit keskittää kunkin suunnitelmassa mainitun askeleen toteuttamiseen ja huomioida kaikki suunnitelmavaiheessa sivuutetut yksityiskohdat. Jos ongelman ratkaiseminen vaatii matemaattisten työkalujen käyttöä, niihin liittyvät laskut voi toteuttaa vasta tässä vaiheessa. Jos kaikki menee hyvin, ongelman pitäisi ratketa, kunhan seuraat suunnitelmaasi ja olet huolellinen sen toteuttamisessa. Hyvätkään suunnitelmat eivät tietenkään aina onnistu, etkä välttämättä pääsekään ratkaisussa haluamaasi lopputulokseen. Tällöin sinun on syytä palata suunnitelmavaiheeseen muuttamaan suunnitelmaa.
4. **Arviointi** Monimutkaisten ongelmien analyysissä voi tapahtua helposti virheitä, joten *ratkaisun järkevyys pitää aina arvioida*. Muutenkin on erittäin tarpeellista osata arvioida kohtaamiesi väitteiden oikeellisuutta yksinkertaisin periaattein, koska maailma on täynnä mielettömiä väitteitä eikä sinulla ole aina mahdollista selvittää niitä yksityiskohtaisesti. Käy fysiikaalisen ongelmien arvioinnissa läpi ainakin seuraavat kysymykset: Oletko vastannut kaikkiin kysymyksiin? Toteuttaako ratkaisusi erikoistapaukset, joissa ratkaisu on ilmiselvä? Oletko käytännyt suureita johdonmukaisesti, eli ethän sekoita esimerkiksi skalaareja vektoriin ja ovathan yksiköt oikein? Jos vastauksessasi on numeroarvo, onko siinä järkevä määrä merkitsevä numeroita ja onko vastauksesi suuruusluokka järkevä? Kaikkien näiden asioiden muistamiseksi käy muistisääntö *KEVYT*:
 - Kysymyksiin vastattu?
 - Erikoistapaukset ja raja-arvot oikein?
 - Vektorit ja skalaarit oikein?
 - Yksiköt oikein?
 - Tarkkuus ja suuruusluokka oikein?

Yhteenvetö: Johdanto

Fysiikka tieteenä

- **Tiede** on menetelmä tiedon systemaattiseksi keräämiseksi.
- Luonnontieteellisten väitteiden on oltava testattavissa. Jos tieteellinen tieto osoittautuu ristiritaiseksi, tieteen väitteinä on muokattava tai ne on korvattava uusilla. Tiede on itseään korjaava.

- **Fysiikka** on kokeellinen tiede, jossa väittämien ja teorian ennusten oikeellisuuden mittarina on niiden yhteensopivuus kokeellisten havaintojen kanssa.

Suureet ja yksiköt

- **Suure** on mitattavissa oleva ominaisuus. Suureilla on fysiikassa sekä **suuruus** että **dimensio**.
- **Yksikkötarkastelu** on hyvä keino tarkastaa suureiden yhteensovivuus. Suureen yksikköä merkitään hakasulkein, esim. $[x] = \text{m}$ tarkoittaa, että suureen x laatu on pituus ja yksikkö metri.
- Kaksi suuretta voidaan laskea yhteen jos niillä on sama dimensio: $a + b$ on määritelty vain jos $[a] = [b]$.

- Mitkä tahansa suureet voidaan kertoa keskenään.
- Suure voi olla useimpien funktion argumenttina vain, jos se on paljas luku: esim. e^a on määritelty vain jos $[a] = 1$.
- Yhtälöissä pitää aina olla sama yksikkö molemmissa puolilla: esim. $a = b$ on tosi vain jos $[a] = [b]$.

Kuvat ja kuvaajat

- Kuvat ovat yleensä paras tapa esittää paljon informaatiota ymmärrettävässä muodossa. Kuvia voi käyttää sekä oman ajattelun tukena että muiden kanssa kommunikoinnissa.

- **Kuvaajat** ovat tärkeä tapa esittää tietoa ja dataa fysiikassa.
- **Kuvaajien akselit** kertovat esittävät suureet sekä niiden mittakaavan.

Ratkaisustrategioita

- Fisikaalisten **ongelmien ratkaiseminen** etenee seuraavasti:
 - hahmotetaan **tilanne**
 - tunnistetaan vallitsevat **fisikaaliset periaatteet**
 - muodostetaan **matemaattinen malli**
 - **ratkaistaan** tarvittavat suureet
 - **arvioidaan** saadut tulokset
- **Tarkista** nämä:
 - Kysymyksiin vastattu?
 - Erikoistapaukset ja raja-arvot oikein?
 - Vektorit, skalaarit ja differentiaalit oikein?
 - Yksiköt oikein?
 - Tarkkuus ja suuruusluokka oikein?
- Numeeristen laskujen tulokset ovat yhtä tarkkoja kuin niissä käytettävien lukuarvojen huonoin tarkkuus:

- yhteenlaskussa tarkkuden määritetyt **desimaalit**
- kertolaskussa tarkkuuden määritetyt **merkitsevät numerot**
- **Suuruusluokka-arvio** voidaan muodostaa seuraavasti:
 - jaetaan ongelma pienempiin osiin
 - arvioidaan kukaan tekijä muodossa $a \cdot 10^b$, missä a :lle riittää yhden numeron tarkkuus
 - lasketaan lopputulos käyttäen potenssien laskusääntöjä
$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}, (10^a)^b = 10^{ab}, \frac{1}{10^a} = 10^{-a}.$$
- pyöristetään lopputulos kymmenen potensseiksi siten, että luvut 2–3 pyöristetään alas päin ja 4–9 ylöspäin

Sanasto

- tiede (science)
- teoria (theory)
- hypoteesi (hypothesis)
- malli (model)
- fysiikka (physics)
- suure (quantity)
- dimensio (dimension)
- yksikkö (unit)
- yksikkötarkastelu (dimensional analysis)
- SI-yksikköjärjestelmä (SI-units)
- kuvaaja (graph, plot)
- symmetria (symmetry)

- matematiikka (mathematics)
- merkitsevä numero (significant digit)
- desimaali (decimal)
- pyöristäminen (rounding)
- suuruusluokka (order of magnitude)
- logaritmisen asteikko (logarithmic scale)
- raja-arvo (limit)
- approksimaatio (approximation)
- kvalitatiivinen (qualitative)
- kvantitatiivinen (quantitative)
- mikroskooppinen (microscopic)
- makroskooppinen (macroscopic)

Vastaukset pohdintakysymyksiin

0.1 Tähän ei ole yhtä oikeaa vastausta. Kumuloituvissa aineissa kuten fysiikassa täytyy yleensä edetä asia kerrallaan, koska monimutkaisemmat asiat perustuvat yleensä yksinkertaisempien asioiden soveltamiseen ja yhdistelyyn. Jos siis perusasioita ei osaa, edistyneempiä asioita ei voi mitenkään ymmärtää. Toki joskus voi olla perusteltua opiskella ensin suurempi kokonaisuus pintatasolla, jonka jälkeen voi palata pohtimaan yksityiskohtia, kun on jo jonkinlainen käsitys siitä, miten eri asiat liittyvät toisiinsa.

0.2 Ensinnäkin tarkastetaan, että sinin argumentti on paljas luku: $[ab^2] = A^2/A^2 = 1$. Se on, joten sini on hyvin määritelty ja siispä $[\sin(ab^2)] = 1$. Koko lausekkeen yksikkö on $[a] - 1/[b^2][\sin(ab^2)] = A^2 - 1/(1/A)^2 = A^2$.

0.3 Tällaisilla malleilla voidaan tutkia monenlaisia asioita, esimerkiksi

- (a) erilaisten aineiden vaikutusta hermosolujen toimintaan (neurokemia),
- (b) informaation kulkuja hermosolujen kesken (neuroverkkotiede),
- (c) aivoalueiden tehtäviä ja niiden toimintahäiriöiden vaikuttuksia (aivotutkimus),
- (d) ihmisten käyttäytymistä ja siihen vaikuttavia tekijöitä (psykologia) ja
- (e) joukkojen käyttäytymistä (peliteoria).

0.4 Kun $t = 3$ s, kuvajan datapisteestä voidaan lukea $x = 3.3 \pm 0.3$ m. Vielä parempi arvioi voitaisiin saada datapisteiden kautta piirretyn suoran avulla, jonka perusteella $x = 3.1 \pm 0.2$ m.

Kun $t = 6$ s, ei olla kuvajan alueella. Tällöin täytyy jatkaa kuvaan piirrettyä suoraa eli ekstrapoloida ja päätellä x :n arvo tätä kautta. Graafisesti voidaan piirtää jyrkin ja loivin suora, joka näyttää sopivan mittapisteisiin, ja arvioida x :n arvo hetkellä $t = 6$ s näiden välün jäävien arvojen kautta.

Laskennallisesti aikavälillä $t = 0 \dots 4$ s x muuttuu arviolta 2.8 ± 0.6 m, ja hetkellä $t = 2$ s suora kulkee pisteen $x = 2.5 \pm 0.1$ m kautta, joten hetkellä $t = 6$ s voidaan x :n arvoksi arvioida $x = 5.3 \pm 0.7$ m.

0.5 Hyvin pitkästä langasta yhtä kaukana olevat pisteet muodostavat sylinterin eli ympyrälifieriön vaipan. Fysiikassa "hyvin pitkä" tarkoittaa yleensä sitä, että mallina käytetään äärettömän pitkää kappaletta, joten tässä voidaan ajatella langan (ja sylinteripinnan) jatkuvan äärettömyksiin.

0.6 Luvussa $a = 0.12$ on kaksi merkitsevää numeroa ja luvussa $b = 3.45$ on kolme.

(a) Lasku $1/b$ on jakolasku, joten sen järkevä tarkkuus on 3 merkitsevää numeroa, $1/b = 0.290$. Lasku $1/b - a$ on vähennyslasku, joten sen järkevä tarkkuus määritetyt desimaaleista, $0.290 - 0.12 = 0.17$. (Huom. varsinaiset laskut kannattaa aina tehdä niin suurella tarkkuudella kuin mahdollista, ja vasta lopuksi tulos pyörristetään sopivaan tarkkuuteen.)

(b) $a^2 b$ sisältää vain kertolaskua, joten sen tarkkuus on 2 merkitsevää numeroa, $0.12^2 \cdot 3.45 = 0.050$. (c) Laskun a^2 tarkkuus on 2 merkitsevää numeroa, $0.12^2 = 0.014$. Laskun $b - a^2$ tarkkuus määritetyt desimaaleista, $3.45 - 0.014 = 3.44$. Huomaa, että tässä järkevä tarkkuus on kaksi desimaalia eikä kaksi merkitsevää numeroa, koska viimeinen laskutoimitus on vähennyslasku kaksi- ja kolmedesimaalisen luvun välillä.

0.7 A-kirjain on suomen yleisin kirjain. Arvioidaan karkeasti, että kaikista kirjaimista osuus $n_{a/kirjain} = 10^{-1}$ on a-kirjaimia. Yhdellä rivillä on noin $n_{kirjain/rivi} = 10^2$ kirjainta ja yhdellä sivulla on keskimäärin noin $n_{rivi/sivu} = 4 \cdot 10^1$ rivia (kunkin sivun rivien määrä riippuu tieteenkin siitä, onko sivulla esim. kuvia). Materiaalia on noin $n_{sivu} = 7 \cdot 10^2$ sivua, joten kaikkiaan a-kirjaimia on $n_a = n_{a/kirjain} n_{kirjain/rivi} n_{rivi/sivu} n_{sivu} = 10^{-1} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^1 \cdot 7 \cdot 10^2 = 28 \cdot 10^4 \approx 10^5$. Tässä materiaalissa on siis arvolta $10^5 - 10^6$ a-kirjainta.

0.8 (a) Funktion arvo selviää suoralla sijoituksella, $x(0) = 1 + 2/3 = 5/3$. (b) Kun t on hyvin suuri, voidaan tarkastella raja-arvoa, kun t lähestyy ääretöntä. Siispä suurilla t :n arvoilla voidaan arvioida $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1 + 2/\infty = 1 + 0 = 1$.

0.9 Ohjelma osaa melko hyvin arvata, mitä haluat, joten voit kokeilla esimerkiksi kirjoittaa "plot sin^2 x from -pi to pi". Voit kuitenkin käyttää myös täsmällisiä Mathematica-kielen komentoja, jotka olisivat tässä "Plot[Sin[x]^2,{x,-Pi,Pi}]" (tulos on kuvaaja, jossa on kaksi maksimia) sekä "Integrate[Sin[x]^2,x]" (tulos on $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$).

Osa I

Mekaniikka

1 Liike

Mekaniikan keskeinen tutkimuskohde on kappaleiden liike sekä vuorovaikutusten ja liikkeen yhteys. Ensimmäinen askel mekaniikassa onkin siis liukkeen täsmällinen kuvaaminen. Aloitamme liukkeen tarkastelun yhdessä ulottuvuudessa ja myöhemmin gleistämme kuvausken kolmiulotteiseen avaruuteen. Tietenkin kappaleet liikkuvat todellisuudessa moniulotteisessa avaruudessa, mutta niihin kauan kuin liike on ainakin likimain suoraviihdistävistä, eli kappale liikkuu suoraa pitkin joko yhteen suuntaan tai edestakaisin, liikettä voi kuvata yksiulotteisena.

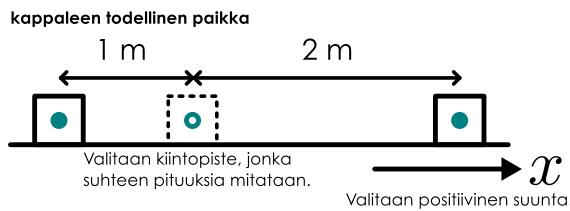
Lukiossa fysiikan matemaattinen käsittely tapahtuu algebrallisesti, mikä tarkoittaa matemaattisten työkalujen rajoittuvan yksinkertaisiin laskutoimituksiin ja funktioihin. Näin ei kuitenkaan päästä juuri lukion oppimäärää pidemmälle vaan monimutkaisempien ilmiöiden matemaattinen analyysi vaatii kehittyneempiä matemaattisia työkaluja. Erityisesti muuttuvien suureiden analyysi vaatii derivaattojen ja integraalien eli differentiaalilaskennan käyttöä ja moniulotteisessa avaruudessa suuntien kuvaaminen edellyttää vektorien käsittelyä. Molemmat tekniikat esitellään jo tässä luvussa ja niiden käyttöä harjoitellaan ja syvennetään opintojen edetessä. Derointi ja integrointi ovat keskeisiä heti ja niitä käytetään jatkossa yleisesti. Vektoreihin syvennytään tarkemmin luvussa 4 tarkasteltaessa liikettä useassa ulottuvuudessa.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- määritellä paikkakoordinaatti sekä siirtymä koordinaatiston avulla
- määritellä nopeus ja kiihtyvyys sekä näiden skalarikomponentit
- esittää liike kuvien ja kuvaajien avulla
- ratkaista paikka, nopeus ja kiihtyvyys derivointia tai integrointia käytäen
- esittää paikka, nopeus ja kiihtyvyys vektoreina

Kuva 1.1: Yhdessä suunnassa liikkuvan kappaleen paikka voidaan esittää koordinaattien avulla.

(a) Valitaan kiintopiste eli origo sekä positiivinen suunta ja mitataan kappaleen etäisyys kiintopisteestä.



(b) Kappale voidaan esittää pisteenä, jolla on yksikäsiteinen paikka. Paikan kertoo koordinaatti.



1.1 Paikka, aika ja nopeus

Liike yleisesti tarkoittaa sitä, että kappaleiden **paikat** muuttuvat. Paikka itsessään ei kuitenkaan ole fysiikalinen suure, jollei sitä voi mitata, ja tämä puolestaan vaatii, että on ensin valittava jokin **kiintopiste**, jonka suhteen paikkaa mitataan. Kiintopiste voi olla havaitsi ja itse tai sellaiseksi voidaan valita esimerkiksi jokin toinen kappale. Kun kiintopiste on valittu, voidaan mitata minkä tahansa kappaleen **etäisyys** tästä pisteesi. Etäisyys eli kiintopisten ja kappaleen välisen **matkan** pituus on hyvin määritelty fysiikalinen suure. **Pituus** on itse asiassa fysiikan perussuure, ja sen yksikkö on metri (m). Perinteisesti pituus on mitattu pituusmitan avulla eli vertaamalla tutkittavaa pituutta tunnetun mittakappaleen pituuteen, ja metrin virallinen määritelmäkin perustui tähän periaatteeseen aina 1960-luvulle asti.

Koordinaatisto

Paikka ja pituus (tai etäisyys) eroavat toisistaan yhdellä hyvin merkittävällä tavalla. Yleisesti on olemassa paljon pisteitä, jotka ovat yhtä kaukana valitusta kiintopisteestä. Yksilotteisessakin tapauksessa on aina kaksi pistettä, jotka ovat valitusta kiintopisteestä samalla etäisyydellä. Jotta paikka olisi yksikäsiteisesti määritelty, pitää etäisyyden lisäksi siis ottaa huomioon, missä *suunnassa* kiintopisteestä katsoen ollaan. Tämä huomioidaan käytämällä **koordinaatistoa** ja ilmoittamalla paikka **koordinaattien** avulla.

Koordinaatisto antaa kaikille avaruuden pisteille yksikäsiteinen numerosarjan eli koordinaatit, jotka ilmaisevat pisteiden paikkaa, ja kiintopistettä, jonka suhteen paikkoja mitataan, kutsutaan koordinaatiston **origoksi**. Tavallisia symboleja etäisyyksien avulla mitatuille koordinaateille ovat muun muassa x, y, z .

Koordinaatistot määrittelevät aina myös positiivisen ja negatiivisen suunnan kullekin koordinaatille siten, että avaruuden pisteet, jotka ovat origosta katsoen positiivisessa suunnassa, saavat positiivisia koordinaatteja, ja negatiivisessa suunnassa olevat pisteet saavat negatiivisia koordinaatteja. Yksilotteisessa tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että kahdesta pisteestä, jotka ovat esimerkiksi etäisyydellä 1 m, toisen koordinaatiksi sovitaan $x = 1 \text{ m}$ ja toisen $x = -1 \text{ m}$. Matematiikassa sanotaan, että avaruuden pisteet muodostavat reaaliakselin (jota merkitään \mathbb{R}) tai x -akselin, jossa pisteitä on äärettömän tiheässä ja kullakin pisteellä on oma yksikäsiteinen reaalilukukoordinaattinsa.

Kappaleen **sürtymällä** tarkoitetaan sen paikan muutosta, ja tämän antaa loppu- ja alkukoordinaattien erotus (nimenomaan tässä järjestyksessä). Muutoksen symbolina käytetään fysiikassa suurta kreikkalaista delta-kirjainta, Δ , eli merkitään

$$\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}. \quad (1.1)$$

Jos kappale on aluksi esimerkiksi pisteessä $x_{\text{alku}} = 2.0 \text{ m}$ ja lopuksi pisteessä $x_{\text{loppu}} = -1.0 \text{ m}$, sen sürtymä on $\Delta x = -3.0 \text{ m}$. Tulos ei riipu siitä, ovatko kappaleen koordinaatit positiivisia vai negatiivisia — yhtä pitkälle ja samansuuntaiselle sürtymälle loppu- ja alkukoordinaattien erotus on aina sama. Toisin sanoen origon valinta ei saa vaikuttaa mittaustuloksiin.

Sürtymä ei kuitenkaan ole sama asia kuin kappaleen kulkema matka. Jos kappale nimittäin liikkuu ensin yhteen suuntaan metrin ja sitten takaisin metrin, kappaleen kulkema matka on kaksi metriä mutta sen sürtymä on nolla metriä, sillä se on lopuksi samassa paikassa kuin lähtiessään. Tämä ero on syytä tiedostaa, koska on olemassa suureita, jotka riippuvat sürtymästä ja toisia jotka riippuvat kuljetusta matkasta.



- 1.1** Kappale on aluksi pisteessä $x_0 = 1.0 \text{ m}$. Siitä se siirtyy ensin pisteeseen $x_1 = -2.0 \text{ m}$ ja sitten pisteeseen $x_2 = 0.5 \text{ m}$. (a) Mikä on kappaleen sürtymä? (b) Mikä on kappaleen kulkema matka? (c) Mitkä ovat kappaleen koordinaatit, sürtymä ja matka, jos origoksi (kiintopisteeksi) valitaankin piste 2.0 m edellisestä origosta positiiviseen x -suuntaan?

Aika ja nopeus

Aika on fysiikan perussuure, ja kaikilla on intuitiivinen käsitys siitä, mitä aika on. Aikahan kulkee tasaisesti eteenpäin, itsestään. Aika on fysikaalisesti erittäin mielenkiintoinen suure, mutta klassinen mekanikka ei juurikaan tutki ajan luonnetta. Sen sijaan mekanikkassa ajan todellakin ajatellaan olevan itsestään muuttuva suure, jonka suhteen muita suureita havainnoidaan. Ajan yksikkö on **sekanti** (s). Sekunnin moderni määritelmä perustuu cesium-atomien lähetämän säteilyn ominaisuuksiin. Pituuden moderni määritelmä puolestaan perustuu valon nopeuteen tyhjiössä. Nykyisin metri on määritelty sen matkan pituudeksi, jonka valo kulkee ajassa 1/299792458 sekuntia.

Aivan kuten paikalle valittiin kiintopiste, myös ajalle voidaan valita kiintopiste eli nollahetki, ja voimme määritellä ajan mitattavana suureena tämän hetken suhteen. Käytännössä tämän voidaan ajatella tapahtuvan nün, että nollahetkellä käynnistetään kello, ja tämän jälkeen ajan arvo mitattavana suureena määritellään kunakin hetkenä tämän kellen lukemaksi.

Kun kappale liikkuu, sen paikkakoordinaatti muuttuu ajan kuluessa, eli eri ajan hetkinä kappaleen paikalle mitataan eri arvot. Tätä voidaan matemaattisesti merkitä $x(t)$, jolloin sanotaan, että paikka x on ajan t **funktio**. Funktio on matematiikassa olio, jolle annetaan yksi tai useampi luku eli argumentti, ja funktille palauttaa näitä vastaavan uuden luvun. Funktion $x(t)$ tapauksessa funktiolle annetaan argumentti aika t ja funktille kertoo mikä on kappaleen paikkakoordinaatti x tuona hetkenä. Mekaniikan perustehtäviä onkin selvittää, missä kappaleet milläkin ajan hetkellä ovat, eli mikä on kunkin kappaleen paikan funktille $x(t)$.

Paikan muuttumista ajan kuluessa kuvaavat **nopeus**. Jos kappale siirtyy yhden metrin yhdessä sekunnissa, kappaleen **keskimääräinen nopeus** on yksi metri sekunnissa (1 m/s) eli siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhde,

$$v_{x,\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Keskimääräinen nopeus riippuu kuitenkin yleensä siitä, kuinka pitkän ajanjakson Δt yli nopeutta mitataan.



1.2 Juoksija harjoittelee juoksemalla edestakaisin 15.0 metrin matkan. Hän juoksee ensin matkan yhteen suuntaan ajassa 3.0 sekuntia, pysähtyy ja käantyy ajassa 0.5 sekuntia, ja juoksee takaisin lähtöpisteesensä ajassa 4.0 sekuntia. (a) Mikä on juoksijan nopeus menomatkalla? (b) Entä paluumatkalla? (c) Mikä on juoksijan keskimääräinen nopeus? (d) Entä keskimääräinen vauhti?

Tehdään sitten ajatuskoe: Oletetaan, että jonkin kappaleen paikka tunnetaan ajan funktiona mielivaltaisella tarkkuudella. Nyt jos määritämme kappaleen siirtymän eripituisilla aikaväleillä $\Delta t = t_{\text{loppu}} - t$, missä aikavälin alkuhetki t pysyy samana mutta loppuhetki $t_{\text{loppu}} = t + \Delta t$ valitaan yhä lähempää alkuhetkeä, huomataan, että näin määritetty keskimääräinen nopeus $\Delta x / \Delta t = [x(t+\Delta t) - x(t)] / \Delta t$ ei muutu mielivaltaisesti vaan lähestyy jotakin tiettyä arvoa. Matemaattisesti tästä ominaisuutta kutsutaan raja-arvoksi, ja sen avulla määritellään kappaleen hetkellinen nopeus eri lyhyemmin pelkkä nopeus

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.3)$$

Tämä on suure, joka riippuu ajan hetkestä t eli toisin sanoen hetkellinen nopeus on ajan funktille, $v_x(t)$, kuten kappaleen paikkakoordinaattifin. Alaindeksi x on tässä muistuttamassa, että kyseessä on nopeus suuntaan, jossa x kasvaa — *jos liike suuntautuu negatiiviseen x -suuntaan, myös nopeus v_x on negatiivinen*.

Yllä on käytetty äärellisten muutosten Δx ja Δt raja-arvoille lyhennysmerkintöjä dx ja dt . Näitä olivat kutsutaan **differentiaaleiksi** (tai *infinitesimaaleiksi*), ja ne ovat keskeisiä työkaluja, kun analysoidaan muuttuvia suureita.

Nopeuden määritelmässä esiintyvä differentiaalien jakolasku eli suureiden erotusten osamäärä on nimeltään **derivaatta**. Tämän tuloksen käytännön merkitys nähdään esimerkissä 1.1. Fysikaalisesti derivaatta $\frac{dx}{dt}$ ilmaisee kuinka paljon suure x muuttuu, kun suure t muuttuu. Jos tämä derivaatta on suuri eli nopeus on suuri, pienikin muutos ajassa aiheuttaa suuren muutoksen paikkakoordinaatissa.

Matematiikassa muuttujan x derivaatalle muuttujan t suhteen käytetään mm. pilkkumerkintää $x'(t)$, mutta fysiikassa derivaattoja merkitään hyvin yleisesti juuri differentiaalien suhteena dx/dt , koska differentiaaleilla laskemalla voidaan derivaattoja ja muita differentiaalilaskennan lausekkeita manipuloida helposti. Jatkossa näemme tästä runsaasti esimerkkejä, ja differentiaalimerkintöihin on syytä tututella mahdollisimman pian.



1.3 Olkoon $x = bt^2$ eli $t = \sqrt{x/b}$, missä b on vakio. Mitä on (a) dx/dt ja (b) dt/dx ? (c) Mitä nämä ovat, jos $b = 2$, $t = 1$ ja $x = 2$?

esimerkki 1.1

Nopeus ja keskinopeus

Mäkeää alas vierivän pallon paikkaa kuvaaa ajan funktio $x(t) = at^2$, missä vakio $a = 2.0 \text{ m/s}^2$. Mikä on pallon keskinopeus hetkestä $t = 3.0 \text{ s}$ alkavalla aikavälillä, jonka pituuus on (a) 1 s, (b) 0.1 s, (c) 0.01 s, (d) 0.001 s. (e) Mikä on kappaleen nopeus hetkellä $t = 3.0 \text{ s}$?

SUUNNITELMA Kappaleen keskinopeus aikavälillä $t \dots t + \Delta t$ saadaan kappaleen tämän ajan kuluessa tekemän siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhteena. Kappaleen hetkellinen nopeus on sen paikan derivaatta ajan suhteen.

Keskinopeus on

$$v_{x,\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = a \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \quad (1.4)$$

ja hetkellinen nopeus on derivoimissäynnön $d(t^n)/dt = nt^{n-1}$ perusteella

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2at. \quad (1.5)$$

RATKAISU Sijoittamalla lukuarvat keskinopeuksiksi saadaan

	Δt	$v_{x,\text{keskiarvo}}$
(a)	1 s	14 m/s
(b)	0.1 s	12.2 m/s
(c)	0.01 s	12.02 m/s
(d)	0.001 s	12.002 m/s

(e) Kappaleen nopeus on $v_x(3 \text{ s}) = 2 \cdot 2.0 \text{ m/s}^2 \cdot 3.0 \text{ s} = 12 \text{ m/s}$.

Mathematica:

```
(* paikka ajan funktiona *)
x[t_] := a t^2

(* tallennetaan lukuarvat *)
lukuarvat = {t0 -> 3, a -> 2};

(* lasketaan keskinopeudet *)
Table[(x[t0 + dt] - x[t0])/dt /. lukuarvat, {dt, {1, 0.1, 0.01, 0.001}}]
{14, 12.2, 12.02, 12.002}

(* lasketaan nopeus derivoiden *)
v = D[x[t0], t0]
2 a t0
v /. lukuarvat
{12}
```

ARVIOINTI Ilmiselvästi keskinopeuksien raja-arvo lähestyy derivoiden laskettua nopeutta $v_x = 12 \text{ m/s}$. Tämä raja-arvo voidaan laskea tarkasti, sillä keskinopeuden lauseke sievenee muotoon

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = a \frac{t^2 + 2t(\Delta t) + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = a(2t + \Delta t). \quad (1.6)$$

Tämän raja-arvo on

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(2t + \Delta t) = 2at \quad (1.7)$$

eli sama kuin derivoimissäällöllä laskettu tulos. Nämä tietoinkin pitääkin olla, koska kyseinen sääntö on johdettu vastavalla raja-arvotarkastelulla.

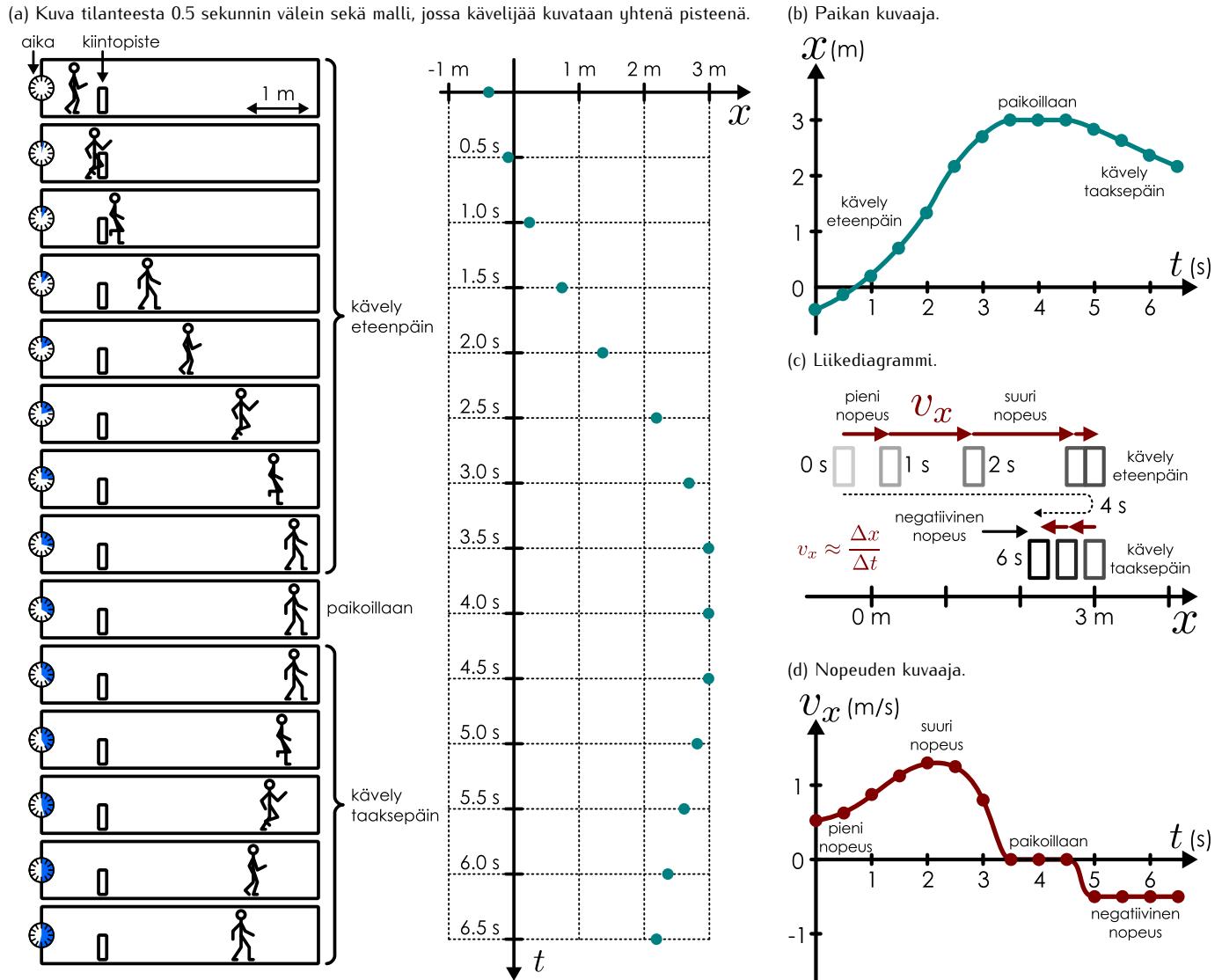
1.2 Liikkeen graafinen esittäminen

Monimutkaiset ilmiöt on melkein aina helpoin ymmärtää hyvän kuvan perusteella. Esimerkiksi selkeästä liikkeen kuvallisesta esityksestä voidaan yhdellä vilkaisulla päättää kappaleen kuljema matka, siirtymä, mahdolliset käännytymiset, nopeus, nopeuden muuttuminen yms. tietoa, jonka laskeminen esimerkiksi numeerisesta esityksestä voi olla hyvin työlästä. Tutustumme seuraavaksi tällaisten graafisten esitysten laatimiseen sekä niiden tulkitsemiseen. Vaikka tässä aiheena onkin liike, samanlaiset päättelyt osoittautuvat myöhemmin tärkeiksi myös muiden suureiden esittämisesessä.

Tarkastellaan hyvin yksinkertaista esimerkkiä liikkeestä: kävelevää ihmistä. Kuvassa 1.2 (a) on esitetty sarja kävelijää esittäviä kuvia, joissa tämä kulkee ensin eteenpäin, pysähtyy ja kulkee sitten taaksepäin. Kuvat on otettu puolen sekunnin välein, ja ne yhdessä esittävät kävelijän liikkeen 6.5 s ajalta. Tällainen kuvasarja ei ole kuitenkaan paras tapa kuvata liikettä, koska se sisältää paljon turhaa informaatiota. Emme ole kiinnostuneita kävelijän tarkasta askelluksesta vaan liikkeestä yhtenä yksikkönä eli *kappaleena*, joten voimme tehdä tilanteesta yksinkertaistetun mallin, jossa kävelijää kuvaa vain yksi piste. Tämän pisteen liike on kuvauksem-

LIIKE

Kuva 1.2: Erilaisia tapoja esittää liike graafisesti. Tässä henkilö kävelee ensin oikealle, pysähtyy, ja palaa sitten jonkin matkaa vasempalle.



me koko kävelijän liikkeestä. Valitsemalla vielä kuvasta kiintopisteen voimme kiinnittää koordinaatiston ja piirtää kävelijän paikkaa kuvaavan pisteenvaihdoksen tähän koordinaatistoon eri ajan hetkinä.

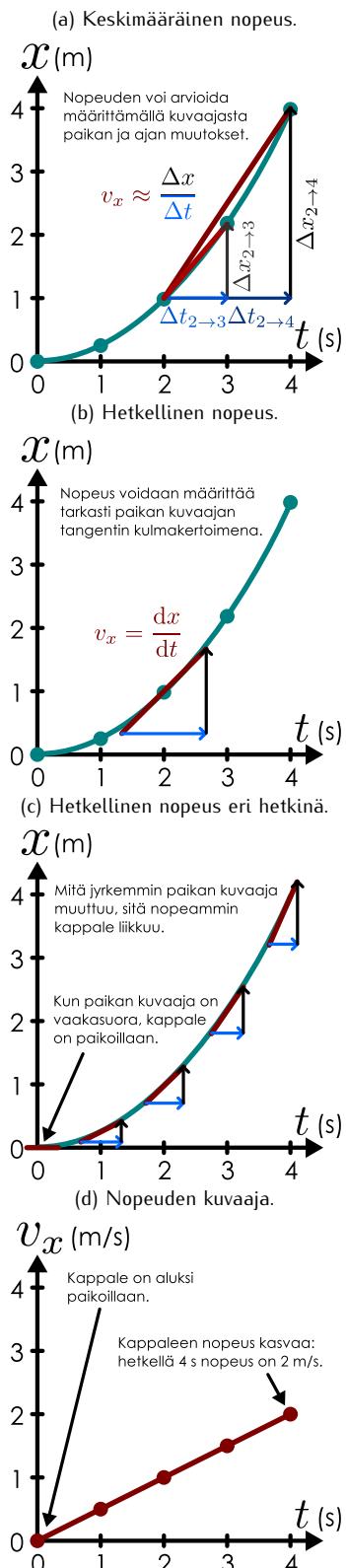
Edellä kuvattu malli on kävelijän *paikan kuvaaja*. Kuvaajassa yksi akseli esittää paikkakoordinaattia ja toinen aikaa, ja kunkin kuvauksen piste ilmaisee kävelijän paikan tietyllä ajan hetkellä. Periaatteessa kuvaajissa akselit voi piirtää osoittamaan mihin suuntaan tahansa. Kuitenkin tällaisissa kuvaajissa on tavallisesti tapana piirtää riippumaton suure vaaka-akselille ja tästä riippuva suure pystyakselille. Koska klassisessa mekaniikassa paikan ajatellaan riippuvan ajasta eli paikka on ajan funktio, $x(t)$, on siis tapana piirtää kuvaaja niin, että paikkakoordinaatti x on pystyakselille ja aikakoordinaatti t on vaaka-akselille. Tämä kuvaaja on esitetty kuvassa 1.2 (b). Tässä kuvaajassa pisteiden muodostama kuvio on täsmälleen sama kuin kuvassa (a) paitsi että sitä on käännetty ja sen mittakaavaa on muutettu.

Näin konstruoitu kuvaaja, jonka vaaka-akselina on aika t ja pystyakselina paikkakoordinaatti x , on kappaleen paikkaa kuvaavan matemaattisen funktion $x(t)$ graafinen esitys. Tällaisessa esityksessä kappaleen ollessa paikoillaan aika muuttuu mutta paikkakoordinaatti ei, joten kuvaaja on *vaakasuora viiva* $x = \text{vakio}$. Tällöin sanotaan kappaleen olevan **levossa**. Jos kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, sen x -koordinaatti kasvaa ajan kulkiessa ja kuvaaja on siten *nouseva käyrä*. Vastaavasti kappaleen liikkumisessa negatiiviseen suuntaan x -koordinaatti pienenee ja kuvaaja on *laskeva käyrä*. Kuvaajan leikatessa x -akselin kappaleen koordinaatti saa arvon nolla eli kappale on samassa paikassa kuin koordinaatiston määrittelevä kiintopiste. Muuta erityistä merkitystä paikkakoordinaatin nollapisteellä ei ole. Tässä tarkastellussa esimerkissä kävelijä eteenpäin ilmenee kuvaajan nousemisena ylöspäin. Kun kävelijä on paikoillaan, kuvaaja on vaakasuora. Lopuksi kävelijä kulkee takaperin, jolloin kuvaaja laskee alas.



1.4 Miltä kävelijän paikan kuvaaja näyttäisi, jos pisteessä $x = 2$ m olisi teleportti, joka siirtäisi hänet välittömästi pisteesseen $x = 3$ m? Koska teleportteja ei ole olemassaakaan, millaisia oikeat paikan kuvaajat siis eivät saa olla?

Kuva 1.3: Hetkellisen nopeuden määrittäminen graafisesti.



Liikediagrammi on toinen mahdollinen tapa esittää kävelijän liike. Tällöin valitaan sopivat ajan hetket tasaisin väliajoin ja piirretään samaan kuvaan kappaleen paikka kaikkina näinä hetkinä. Kuvassa 1.2 (c) on piirretty kävelijän liikkeen liikediagrammi, kun peräkkäisten kuvien väiseksi ajaksi on valittu yksi sekunti. Selkeyden vuoksi diagrammi on jaettu kahteen osaan sen mukaan tapahtuuko liike eteenpäin vai taaksepäin. Lopputulos muistuttaa pitkällä valotusajalla otettua valokuvaaa, jossa yhdessä kuvassa näkyy kappaleen **liikerata** pitkän ajan kuluessa.

Liikediagrammissa näkyy selkeästi kappaleen siirtymä kummakin aikaväillä. Yhdessä ulottuvuudessa tästä nähdään helposti tapahtuuko liike positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan. Erityisen käytökelpoinen liikediagrammi on kuitenkin liikkeen tapahtuessa tasossa, koska tällöin myös liikkeen suunta näkyy kuvasta suoraan. Tällaisiin liikediagrammeihin tutustumme luvuissa 4 sekä 5.

Kappaleen keskimääräinen nopeus (1.2) määriteltiin lyhyen jakson aikana tapahtuneen siirtymän ja siihen käytetyn ajan suhteena. Siispä koska liikediagrammissa on piirretty kappaleen paikka tasaisin väliajoin, kappaleen keskinopeus kuvattujen ajan hetkien välillä on suoraan verrannollinen kappaleen kokemiin siirtymiin. Niinpä myös kappaleen keskinopeus voidaan arvioida liikediagrammin avulla piirtämällä nuolia kappaleen peräkkäisten paikkojen välillä. Näiden nuolien pituus on verrannollinen kappaleen nopeuteen ja nuolten suunta kuvaa kappaleen liikesuuntaa. Tässä tapauksessa nähdään suoraan, että kävelijä liikkuu aluksi eteenpäin ensin hitaasti (pieni siirtymä), sitten nopeammin (suuri siirtymä) ja lopulta jälleen hitaammin kunnes pysähtyy. Kävellessään takaperin kävelijä liikkuu hitaasti likimain tasaisella nopeudella (siirtymät negatiiviseen suuntaan).

Liike voidaan luonnollisesti kuvata myös piirtämällä nopeus $v_x(t)$ ajan funktio kuvan 1.2 (d) tapaan. Tällaisessa kuvaajassa kappaleen pysymistä paikoillaan kuvaavat pisteet, joille $v_x = 0$ m/s, ja kuvaajan vaakasuorat alueet esittävät yleisemmin lükettä, jossa nopeus ei muutu eli **tasaista liikettä**. Kuvaajan ollessa t -akselin yläpuolella $v_x > 0$ m/s kappale liikkuu positiiviseen suuntaan ja kappaleen vauhti on sitä suurempi mitä korkeammalla nopeuden kuvaaja on. Vastaavasti kuvaajan ollessa t -akselin alapuolella kappale lükää negatiiviseen suuntaan. Nopeuden kuvaajan ja t -akselin leikkaaminen tarkoittaa siis kappaleen liikkeen **suunnan käänymistä** ja leikkauspisteessä kappale on hetkellisesti paikoillaan. Tässä esimerkissä nopeus on aluksi positiivinen ja kasvava kuten liikediagrammissakin päätteliin. Kävelijän ollessa paikoillaan nopeuden kuvaaja on nollatasolla. Lopuksi kävelijä kulkee negatiiviseen suuntaan, joten nopeuden kuvaajakin kulkee nollatasosta alapuolella. Koska kävelijän nopeus on lopuksi likimain vakio, nopeuden kuvaaja on vaakasuora.

Nopeuden suuruus voidaan arvioida liikediagrammiin piirrettyjen siirtymien avulla, mutta koska liikediagrammiin piirretty nuolet kuvaavat vain kappaleen keskinopeutta, tämä arvio on epätarkka. Nopeus voidaan kuitenkin määrittää täsmällisesti paikan kuvaajan avulla. Kappaleen nopeus määriteltiin yhtälössä (1.3) siirtymän ja ajan muutoksen suhteeseen raja-arvona. Paikan kuvaajassa kappaleen siirtymä on kahden pisteen välisen x -akselin suuntainen etäisyys (eli etäisyys pystysuunnassa) ja tästä vastaava ajan muutos on pisteen välisen t -akselin suuntainen etäisyys (eli etäisyys vaakasuunnassa). Tämä on havainnollistettu kuvassa 1.3 (a). Niinpä kappaleen keskimääräinen nopeus (1.2) on kuvaajan kahden pisteen kautta kulkevan sekantin eli leikkaajan kulmakerroin.

Raja-arvo, kun keskinopeus lasketaan yhä lyhyemmältä aikaväliltä, $\Delta t \rightarrow 0$, tarkoittaa graafisesti sitä, että t -akselin suuntainen etäisyys pienenee. Koska paikan kuvaaja yhdistää paikka- ja aikakoordinaatteja, on myös x -akselin suuntaisen etäisyden Δx lähestyttävä nolla, jos kuvaaja on jatkuva eli jos kuvaaja on lisäksi sileä eli siinä

on myös x -akselin suuntaisen etäisyden Δx lähestyttävä nolla, jos kuvaaja on jatkuva eli jos kuvaaja on lisäksi sileä eli siinä

ei ole teräviä piikkejä, voidaan sille piirtää **tangentti** eli sivuaja, joka koskettaa kuvaajaa täsmälleen yhdessä pisteessä ja on tässä pisteessä täsmälleen yhdensuuntainen kuvaajan kanssa (kuva 1.3 (b)). Tällöin rajalla $\Delta t \rightarrow 0$ kuvaajalle piirretty sekantti lähestyy kuvaajan tangenttia. Koska kappaleen keskinopeus on sen kuvaajan sekantin kulmakerroin ja sekantti lähestyy graafisessa esityksessä tangenttia tarkasteltavan aikavälisen lähestyessä nolla, täytyy tangentin kulmakertoimen olla keskinopeuksien raja-arvo. Keskinopeuden raja-arvo aikavälisen lähestyessä nolla on kuitenkin määritelmän mukaisesti kappaleen nopeus v_x . Siispä kappaleen nopeus x -suunnassa on sen *paikan kuvaajan kulmakerroin*.

Tämä on järkevä tulos: kun kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, sen nopeus on positiivinen. Toisaalta tällöin kuvaaja on nouseva käyrä, jonka tangentin kulmakerroin on myös positiivinen. Vastaavasti kun kappale liikkuu negatiiviseen suuntaan, sen kuvaaja on laskeva käyrä, jonka tangentin kulmakerroin on negatiivinen ja samoin v_x on negatiivinen. *Mitä nopeammin kappale liikkuu, sitä jyrkempi paikan kuvaaja on.* Jos kappale on paikoillaan, sen nopeus on nolla, kuvaaja on vaakasuora, ja tangentin kulmakerroin on myös nolla.



1.5 Kappale liikkuu siten, että sen nopeus aikavällillä $0 \dots 1$ s on 1 m/s ja aikavällillä $1 \dots 2$ s nopeus on 2 m/s. Miltä kappaleen paikan ja nopeuden kuvaajat näyttävät hetkellä $t = 1$ s?

1.3 Paikan määrittäminen nopeuden avulla

Paikan ja nopeuden välisen yhteyden kertoo nopeuden määritelmä (1.3), josta nopeuden voi laskea, kun paikka tunnetaan eri ajan hetkinä. Graafisesti nopeuden voi lukea paikan kuvaajasta sen kulmakerroimena. Usein kuitenkin pitää selvittää missä kappale on kulloinkin, kun nopeus tunnetaan. Tarkastellaankin siis seuraavaksi, miten paikka voidaan määrittää laskemalla tai kuvaajan avulla nopeuden perusteella.

Yksinkertaisin tapaus on se, että nopeus x -suunnassa on *vakio*, jolloin se voidaan ilmaista kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhteena, $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Kappale tieteenkin liikkuu sitä pidemmälle mitä kauemmin se liikkuu. Jos kappale on aluksi paikassa x_{alku} , se on ajan Δt jälkeen paikassa

$$x_{\text{loppu}} = x_{\text{alku}} + \Delta x = x_{\text{alku}} + v_x \Delta t. \quad (1.8)$$

Jos nopeus ei ole vakio vaan muuttuu, sitä ei voi enää ilmaista äärellisten muutosten avulla eikä yhtälö (1.8) enää toimi. Kuitenkin jos liikettä tarkastellaan *hyvin lyhyellä aikavällillä* Δt , voidaan nopeutta pitää tänä aikana likimain vakiona ja kappaleen siirtymä on

$$\Delta x_{t \rightarrow t+\Delta t} \approx v_x(t) \Delta t. \quad (1.9)$$

Tässä merkintä $t \rightarrow t + \Delta t$ on muistuttamassa siitä, että kyseessä on matka, jonka kappale kulkee aikavällillä hetkestä t hetkeen $t + \Delta t$ eikä kyseessä siis ole raja-arvo. Matka $\Delta x_{t \rightarrow t+\Delta t}$ on hyvin lyhyt, koska aikaväli Δt on lyhyt.

Nyt kappaleen liike pidemmällä aikavällillä $t_{\text{alku}} \rightarrow t_{\text{loppu}}$ voidaan jakaa hyvin moneen hyvin lyhyeen ajanjaksoon $t_{\text{alku}} \rightarrow t_1, t_1 \rightarrow t_2, t_2 \rightarrow t_3, \dots, t_{N-1} \rightarrow t_{\text{loppu}}$. Tällöin kappaleen *kokonaissiirtymä* saadaan laskemalla yhteen kaikki pienet siirtymät, jotka kappale kulkee kunkin lyhyen aikavälisen kuluessa,

$$\Delta x = \Delta x_{t_{\text{alku}} \rightarrow t_1} + \Delta x_{t_1 \rightarrow t_2} + \dots + \Delta x_{t_{N-1} \rightarrow t_{\text{loppu}}}. \quad (1.10)$$

Jos aikavälit ovat kaikki tarpeeksi lyhyitä, voidaan nopeutta pitää jokaisen aikana *erikseen* vakiona yhtälön (1.9) mukaisesti kuitenkin niihin, että eri aikaväleillä nopeudella on eri arvot. Näin kappaleen kokonaissiirtymäksi saadaan

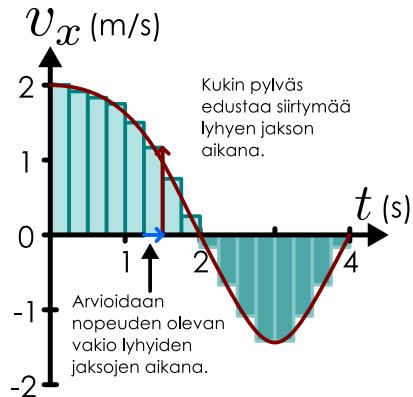
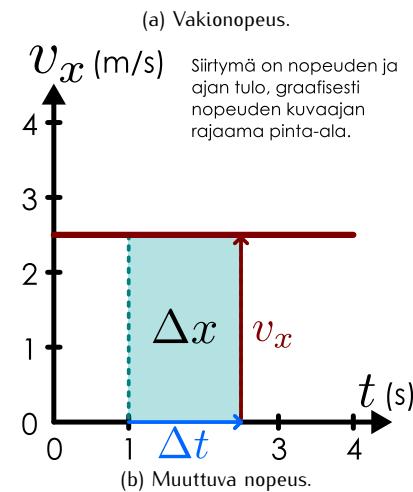
$$\Delta x \approx v_x(t_0) \Delta t + v_x(t_1) \Delta t + \dots + v_x(t_{N-1}) \Delta t. \quad (1.11)$$

Tässä on oletettu, että kaikki aikavälit ovat yhtä pitkät, $\Delta t = (t_{\text{loppu}} - t_{\text{alku}})/N$. Tämä ei ole välttämätöntä päätelyn kannalta, mutta vähentää kirjanpidon tarvetta.



1.6 Kappaleen keskinopeus on 0.1 m/s aikavällillä $t = 0.0 \dots 0.2$ s, 0.2 m/s aikavällillä $t = 0.2 \dots 0.4$ s, 0.4 m/s aikavällillä $t = 0.4 \dots 0.6$ s ja 0.7 m/s aikavällillä $t = 0.6 \dots 0.8$ s. Mikä on kappaleen kokonaissiirtymä?

Kuva 1.4: Siirtymän määrittäminen graafisesti nopeuden kuvaajan avulla.



Summa (1.11) on approksimaatio. Kuitenkin approksimaatiossa tehty virhe pienenee, kun tarkasteltava pitkä aikajakso $t_{\text{alku}} \rightarrow t_{\text{loppu}}$ jaetaan yhä pienempiin osiin. Matemaattisesti tällöin otetaan raja-arvo, kun aikavälien Δt lukumäärä lähestyy ääretöntä ja niiden pituus lähestyy nolla. Tämä on **integraalin** eräs määritelmä (ns. Riemannin summa), joten kappaleen siirtymäksi saadaan

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N v_x(t_i) \Delta t = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt. \quad (1.12)$$

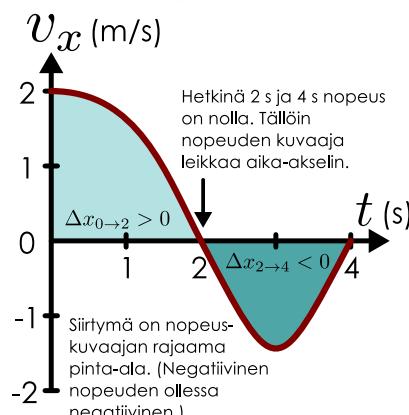
Siirtymä ilmaisee paikan muutosta, joten jos halutaan tietää kappaleen paikka siirtymän jälkeen, on luonnollisesti huomioitava, mistä kappale lähti liukkeelle

$$x_{\text{loppu}} = x_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt. \quad (1.13)$$

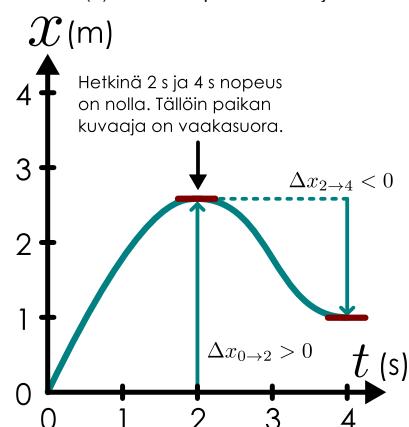
Koska nopeus on paikan derivaatta ajan suhteeseen ja paikka on yllä esitetyn päätelyn mukaan nopeuden integraali ajan suhteeseen, samalla on johdettu yleisesti pätevä tulos: **Derointi ja integrointi ovat toistensa käänneisoperaatioita**. Toisin sanoen jos suuresta a saadaan suureesta b integroimalla, voidaan alkuperäiseen muuttujaan palata derivoimalla, ja päinvastoin.

Kuva 1.5: Siirtymä on nopeuden integraali.

(a) Siirtymä pinta-alana.



(b) Vastaava paikan kuvaaja.



Yllä esitetty päätely ei koske ainoastaan paikkaa ja nopeutta, vaan samaa päätelytekniikkaa käytetään fysiikassa yleisesti tarkasteltaessa muuttuvien suureiden vaikutusta pitkän ajan kuluessa. Päätelyn logiikka on tällöin aina seuraava:

- jaetaan aika hyvin lyhyisiin jaksoihin
- ajatellaan suureiden olevan näiden lyhyiden jaksojen aikana likimain vakioita
- määritetään vaikutus kunkin jakson aikana erikseen
- summataan lopuksi kaikki pienet tekijät yhteen, jolloin päädystään integroimaan ajan suhteeseen.

Päätely toimii, jos laskettava suure on ositeltavissa ajan suhteeseen. Silloinkin kun näin ei ole, osittelu voi toimia jonkin toisen suureen suhteeseen, jolloin tästä suureesta tulee integroimismuuttuja. Vastaavia esimerkkejä käsitellään jatkossa lisää.

Itse asiassa lasku onnistuu suoraan käyttämällä differentiaaleja ilman, että raja-arvoja täytyisi erikseen merkitä näkyviin. Nimittäin vaikka nopeus riippuisi ajasta, infinitesimaalisen jakson dt aikana muuttuvaakin nopeutta voidaan pitää vakiona. Tällöin voidaan muodollisesti kertoa nopeuden määritelmä (1.3) ajan differentiaalilla dt , jolloin saadaan tulos

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = v_x dt, \quad (1.14)$$

mikä on differentiaaleille tarkka yhtälö, ei approksimaatio. Differentiaalia dx voidaan sitten integroida, jolloin saadaan differentiaalien summa eli paikan muutos äärellisen ajan kuluessa

$$\Delta x = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} dx = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x dt. \quad (1.15)$$

Tällainen differentiaaleihin perustuva kirjoitustapa, jossa raja-arvojen ottaminen jätetään merkitsemättä, on fysiikassa hyvin yleinen. Tässä kohtaa voi tietenkin herätä epäilyä, saako differentiaaleilla kertoa ja jakaa — ja vastaus on kyllä. Differentiaaleille voi

laskea aivan kuin ne olisivat normaaleja reaalilukuja. Jos tämä tuntuu hankalalta hyväksyä, laskun voi aina tehdä ensin äärellisillä muutoksilla joista otetaan vasta lopuksi raja-arvo, kun muutosten suuruus lähestyy nolla. Käytännössä näin ei kuitenkaan fysiikassa koskaan tehdä, koska differentiaaleilla laskien samaan loppulokseen päästään paljon helpommin.



1.7 Selitä omiin sanoin, kuinka paikasta $x(t)$ lasketaan nopeus $v_x(t)$ ja päinvastoin. Keksi jokin esimerkifunktio $v_x(t)$ (joka ei ole vakio) ja laske sitä vastaava paikka $x(t)$, kun $x(0) = -1$ m. Tarkista laskusi johtamalla tästä paikan lausekkeesta nopeus.

1.4 Suunnat ja vektorit

Suureita, joita kuvaa vain suuruus, kutsutaan **skalaareiksi**. Tällainen suure voi saada arvokseen esimerkiksi kokonais- tai reaalilukuja sekä suureen dimensiota kuvaavan yksikön. Tällaisia suureita ovat esimerkiksi lämpötila, massa ja lukumäärä. On kuitenkin olemassa myös suureita, joihin liittyy enemmän ominaisuuksia kuin vain suuruus. Eräs tällainen suureiden luokka ovat suureet, joilla on suuruuden lisäksi suunta, ja näitä kutsutaan **vektoreiksi**. Koska esimerkiksi siirtymällä ja nopeudella on suunta, ne ovat vektorisuureita. Myös vektoreilla on fysiikassa dimensio ja yksikkö. Esimerkiksi nopeus on vektorisuure, jonka yksikkö on m/s. Aivan kuten skalarisuureen "suuruuteen" kuuluu sekä lukuarvo (kuinka paljon) että yksikkö (mitä laatuja), myös vektorisuureilla yksikön voi ajatella kuuluvan osaksi vektorin "suuruutta", jolloin vektorin "suunta" on puhtaasti geometrinen ominaisuus, joka ainoastaan määrittelee suunnan avaruudessa.



1.8 Mitkä näistä suureista ovat vektoreita ja mitkä skalaareita: nopeus, paikka, pituus, matka, siirtymä, lukumäärä, tilavuus, lämpötila?

Graafisesti vektorit esitetään tavallisesti *nuolina*. Nuolen suunta osoittaa vektorin suunnan ja nuolen pituus osoittaa vektorin suuruuden. Esimerkiksi siirtymän tapauksessa esitys on aivan konkreettinen: jos kappale siirtyy pisteestä A pisteeseen B, siirtymää voidaan esittää nuolella, joka osoittaa pisteestä A pisteeseen B. Jos siirtymän pituus eli pisteiden välinen etäisyys oli esimerkiksi 1 cm, siirtymää kuvaavan nuolen pituus on myös 1 cm. Toki jos tilanteesta piirretään kuva eri *mittakaavassa*, myös siirtymiä kuvaavien nuolien pituudet muuttuvat. Jos esimerkiksi 100 km kulkeneen auton siirtymä piirretään kartalle, jossa yksi senttimetri vastaa kymmentä kilometriä luonnossa, siirtymää kuvaavan nuolen pituudeksi tulee 10 senttimetriä.

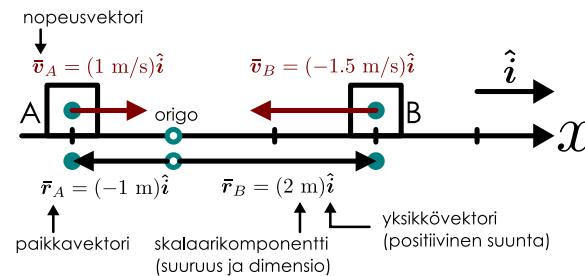
Muiden vektorisuureiden kohdalla suureen graafinen esitys nuolena on *abstrakti*: ei ole mitään yhtä ja oikeaa tapaa valita mittakaavaa esimerkiksi nopeusvektoreille. Jos esimerkiksi kappale liikkuu positiiviseen *x*-suuntaan nopeudella 1 m/s, nopeutta voidaan esittää nuolen, joka osoittaa positiiviseen *x*-suuntaan, mutta tämän nuolen pituus voidaan valita vapaasti. Esimerkiksi voidaan valita, että kuvassa tätä nopeutta esittää nuoli, jonka pituus on 1 cm. Tietenkin mittakaavan valinnan jälkeen *kaikki* samaa suuresta esittävät vektorit on piirrettävä samassa mittakaavassa niin että niiden suhteelliset pituudet vastaavat esitettyjen suureiden suuruuksia.

Vektorisuureiden välille voidaan määritellä monenlaisia laskutoimituksia, joista yksinkertaisin on *yhteenlasku*. Esimerkiksi jos kappale siirtyy ensin positiiviseen *x*-suuntaan yhden metrin ja sitten vielä kaksi metriä lisää, kappaleen kokonaissiirtymä on näiden summa, kolme metriä positiiviseen suuntaan. Koordinaatein tämä voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti $\Delta x_{\text{kokonais}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1 \text{ m} + 2 \text{ m} = 3 \text{ m}$. Sen sijaan jos kappale siirtyy ensin metrin positiiviseen suuntaan ja sitten kaksi metriä negatiiviseen suuntaan, kappaleen kokonaissiirtymä on yksi metri negatiiviseen suuntaan eli $\Delta x_{\text{kokonais}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1 \text{ m} - 2 \text{ m} = -1 \text{ m}$. Graafisesti tämän voi esittää niiin, että ensimmäisessä tapauksessa siirtymiä kuvaavat samaan suuntaan osoittavat nuolet ja toisessa tapauksessa vastakkaisuuntaiset nuolet. Kummassakin tapauksessa näiden *summaa kuvaava ensimmäisen nuolen alkupisteestä toisen nuolen kärkeen osoittava nuoli*.

Vektoreita merkitään useilla tavoilla. Yleisesti käytettyjä merkintöjä ovat yläviiva tai nuoli vektorisuureen symbolin yllä, \bar{v} , \vec{v} , tai symbolin kirjoittaminen lihavoidulla, v . Tässä materiaalissa vektoreita merkitään sekä yläviivalla että lihavoinnilla, \bar{v} . Yksiulotteisessa tapauksessa on olemassa vain kaksi mahdollista suuntaa: "eteenpäin" ja "taaksepäin" eli koordinaatistossa positiivinen ja negatiivinen suunta, jolloin vektorisuureiden matemaattisessa käsittelyssä varsinaisten vektorimerkintöjen käyttäminen ei ole välttämätöntä — suunnanhan voi ilmaista suureen etumerkin avulla, sillä esimerkiksi negatiiviseen *x*-suuntaan kulkevan kappaleen nopeus on negatiivinen. Kuitenkin kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa lüke voi suuntautua moneen eri suuntaan, joten vektorisuuren kuten nopeuden suuntaa *ei voi* määritellä pelkästään etumerkillä vaan tällöin suuntien matemaattiseen kuvaamiseen todella tarvitaan vektorilaskentaa. Suureiden vektoriluonteen huomioiminen on siis aivan välttämätöntä, ja on syytä alusta alkaen opetella käyttämään vektorimerkintöjä sekä erottamaan vektori- ja skalarisuureet toisistaan.

Koordinaatistoissa esitettyjen vektorisuureiden käsittelyssä koordinaatiston **yksikkövektorit** ovat erinomaisia työkaluja. Nämä ovat vektorita, joiden pituus on yksi ja jotka ovat laaduttomia eli yksikötömiä. (Nimitys "yksikkövektori" ei siis viittaa fysiikalisten suureiden yksiköihin, vaan vektorien pituuteen, joka on aina yksi.) Ne ilmaisevat siis ainoastaan suuntaa. Vakiintunut symboli *x*-akselin suuntaiselle yksikkövektorille on \hat{i} . Tässä yläviivan korvaaminen "hatulla" osoittaa, että kyseessä on juuri yksikkövektori. Yksikkövektorin avulla

Kuva 1.6: Vektorien esittäminen skalaarikomponentti ja yksikkövektorin avulla.



mikä tahansa x -suuntainen vektori voidaan kirjoittaa skalaarin ja yksikkövektorin tulona. Esimerkiksi nopeus voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{v} = v_x \hat{i}, \quad (1.16)$$

missä v_x on vektorin **skalaarikomponentti** suunnassa x . Merkintä (1.16) esittää skalaarin v_x ja vektorin \hat{i} tuloa, joka on siis vektori \bar{v} . Vektorin ja skalaarin tulon määritelläänkin olevan uusi vektori, joka on yhdensuuntainen alkuperäisen vektorin kanssa, ja jonka pituus on tulossa esiintyvien skalaarin itseisarvon ja vektorin pituuden tulo. Jos kertova skalaari on negatiivinen, vektorin suunta käännyt ympäri.

Vektorin jaossa skalaarikomponenttiin ja yksikkövektoriin esiintyy jälleen ajatus siitä, että vektorisuureen suuruus on samanlainen ominaisuus kuin skalaarisuuren suuruus (tässä v_x) ja vektorin suunta (tässä \hat{i}) on tästä riippumaton ominaisuus. Tämä on tärkeä oivallus, koska vektoreiden käsittely usein helpottuu huomattavasti, kun vektorien suuruudet ja suunnat käsittellään erillään yhtälön (1.16) tapaan.

Vektorin \bar{v} pituus positiiviseen x -suuntaan (eli suuntaan johon vektori \hat{i} osoittaa) on siis v_x . Jos vektori \bar{v} osoittaa samaan suuntaan kuin \hat{i} , skalaarikomponentti on positiivinen, ja jos vektori osoittaakin päinvastaiseen suuntaan kuin \hat{i} , skalaarikomponentti on negatiivinen. Vektorin pituutta merkitään yleensä samalla symbolilla kuin vektoria itseään, mutta ilman vektorimerkintää. Toisin sanoen vektorin \bar{v} pituus on v . Nopeuden tapauksessa vektorin pituutta kutsutaan myös **vauhdiksi**, joka on siis skalaarisuure. Vektorin pituus on aina positiivinen luku, minkä vuoksi sitä kutsutaan matematiikassa myös vektorin **itseisarvoksi** ja merkitään $v = |\bar{v}|$. Vektorin skalaarikomponentti sen sijaan voi olla positiivinen tai negatiivinen vektorin suunnasta riippuen — toisin sanoen vektorin pituus ja skalaarikomponentti ovat eri asiat!



1.9 Eräään vektorisuureen suuruus on 2.5 T (ei tarvitse tietää mikä tämä yksikkö on) ja vektori osoittaa negatiiviseen x -suuntaan. Mikä on (a) vektorin pituus, (b) skalaarikomponentti, (c) itseisarvo, (d) vektorin suuntainen yksikkövektori, (e) vektori itse skalaarikomponentin ja yksikkövektroin avulla ilmaistuna?

Myös kappaleen paikka voidaan määritellä vektorina. Tämä voi vaikuttaa oudolta, koska paikallahan ei siinänsä ole suuntaa. Kuitenkin paikka mitataan koordinaatistossa origon suhteeseen, jolloin "paikan suunta" on se suunta, jossa paikka on origosta katsoen. Näin määritellään **paikkavektori**, joka on origosta tarkasteltavaan paikkaan osoittava vektori. Yksiulotteisessa tapauksessa paikkavektori osoittaa siis suuntaan \hat{i} eli positiiviseen x -suuntaan, kun paikan koordinaatti x on positiivinen, ja suuntaan $-\hat{i}$ eli negatiiviseen x -suuntaan, kun paikan koordinaatti on negatiivinen. Paikkavektorin pituus on tarkasteltavan paikan etäisyys origosta. Tämähän kuitenkin tarkoittaa, että *paikkavektorin skalaarikomponentti on sama asia kuin paikkakoordinaatti*, joten yksiulotteisessa tapauksessa paikkavektori on yksinkertaisesti

$$\bar{r} = x \hat{i}. \quad (1.17)$$

Näin määriteltyä myös paikan muutokset eli siirtymät ovat vektoreita, sillä

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_{\text{loppu}} - \bar{r}_{\text{alku}} = x_{\text{loppu}} \hat{i} - x_{\text{alku}} \hat{i} = (x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}) \hat{i} = \Delta x \hat{i}. \quad (1.18)$$

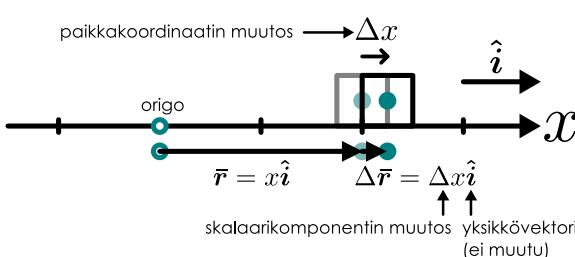
Tässä käytettiin vektorien ja skalaarien kertolaskun laskusääntöjä, jotka ovat samanlaiset kuin tavallisen kertolaskun säännöt. Toisin sanoen voidaan laskea esimerkiksi $x\bar{a} + y\bar{a} = (x+y)\bar{a}$. Tulokseksi saatiiin, että paikkavektorin muutos on sama asia kuin paikkakoordinaatin (eli paikkavektorin skalaarikomponentin) muutos kerrottuna yksikkövektorilla, joka antaa vektorille suunnan. Varsinainen lasku voitiin siis tässä yksiulotteisessa tapauksessa suorittaa pelkästään vektorien skalaarikomponentteja käyttäen, koska kaikki vektorit ovat x -suuntaisia ja niiden suunta \hat{i} voitiin ottaa yhtiseksi tekijäksi.

Kuva 1.7: Vektorin muutos skalaarikomponentin muutoksen ja yksikkövektorin tulona.

Aivan samoin kuin skalaarimuuttujan muutoksen raja-arvo kirjoitetaan differentiaalina muutoksen suuruuden lähestyessä nollaa, voidaan myös vektorisuurelle kirjoittaa differentiaali

$$d\bar{r} = dx \hat{i}, \quad (1.19)$$

missä differentiaali esiintyy vektorin skalaarikomponentissa. Siispä vektorin differentiaali on vektori, jolla on hyvin määritelty suunta (\hat{i}), mutta jonka pituus on infinitesimaalisen lyhyt (dx). Jos ajatus ääretömin lyhyestä muttei kuitenkaan nollan pituisesta vektorista tuntuu hankalalta, voit aina ajatella differentiaalin kuvaavan jotakin hyvin lyhyttä vektoria,



josta halutaan laskea raja-arvo. Oleellista on huomata, että kyseessä ei ole **nollavektori**. Nollavektori $\bar{0}$ on nimittäin vektori, jonka pituus on nolla ja jolla siksi ei ole hyvin määriteltyä suuntaa. Vektorin differentiaalilla on yksikäsiteinen suunta.

esimerkki 1.2

Paikka- ja siirtymävektorit

Auto, jonka pituus on 1.8 m, on aluksi liikennemerkin takana perä 0.7 m etäisyydlä merkistä. Sitten auto pakittaa liikennemerkin eteen niin, että sen keula on 1.1 metrin päässä merkistä. Kiinnitä koordinaatisto ja määritä auton siirtymävektori tässä koordinaatistossa.

TILANNE Valitaan liikennemerki kiintopisteeksi ja positiivinen suunta merkistä sen takapuolelle. (Huom. tämä on vain yksi mahdollinen valinta, ja koordinaatisto voitaisiin kiinnittää muillakin tavoilla.)

SUUNNITELMA Siirtymä on kappaleen paikan muutos, joten määritetään ensin auton paikka alussa ja lopussa. Tällöin siirtymä on vektori, joka osoittaa alkupisteestä loppupisteeseen. Paikkakoordinaatti pitää muistaa mitata aina samalla tavalla. Valitaan, että mitataan paikka aina auton keulasta.

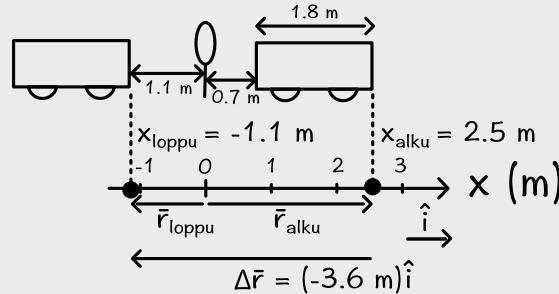
Jos kappaleen koordinaatit aluksi ja lopuksi ovat x_{alku} ja x_{loppu} , sen koordinaatin muutos on $\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}$ ja siirtymävektori on $\Delta \bar{r} = \Delta x \hat{i}$.

RATKAISU Auton keula on aluksi etäisyydlä $0.7 \text{ m} + 1.8 \text{ m} = 2.5 \text{ m}$ merkistä. Niinpä tässä koordinaatistossa auton paikkakoordinaatti on aluksi $x_{\text{alku}} = 2.5 \text{ m}$. Koordinaatti on positiivinen, koska auto on merkin takana. Auto siirtyy sitten pisteesseen $x_{\text{loppu}} = -1.1 \text{ m}$, merkin eteen. Kappaleen paikkavektori on aluksi $\bar{r}_{\text{alku}} = x_{\text{alku}} \hat{i} = (2.5 \text{ m}) \hat{i}$ ja lopuksi $\bar{r}_{\text{loppu}} = x_{\text{loppu}} \hat{i} = (-1.1 \text{ m}) \hat{i}$.

Paikkakoordinaatin muutos on $\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}} = (-1.1 \text{ m}) - 2.5 \text{ m} = -3.6 \text{ m}$ ja paikkavektorin muutos on $\Delta \bar{r} = \Delta x \hat{i} = (-3.6 \text{ m}) \hat{i} = (3.6 \text{ m}) (-\hat{i})$.

ARVIOINTI Kappale siirtyy kohti negatiivista x -suuntaa, joten koordinaatin muutos on negatiivinen ja muutosvektori osoittaa kohti negatiivista x -suuntaa eli suuntaan $-\hat{i}$.

Laskussa kaikki paikkavektoria käsittelevät suureet ovat vektoreita ja paikkakoordinaattia käsittelevät ovat skalaareita. Kaikissa yhtälöissä, joissa näitä vertaillaan, on skalaari kerrottu yksikkövektorilla \hat{i} , jotta yhtälön molemmilla puolilla olisi vektorisuure.



Tällaisia vektoridifferentiaaleja ja vektorisuureiden raja-arvoja tarvitaan, kun haluamme tietää miten vektorisuureet muuttuvat. Esimerkiksi nopeuden skalarikomponentti kirjoitettiin yhtälössä (1.3) paikkakoordinaatin muutoksen avulla, mutta yleisemmin **nopeusvektori** määritellään *paikkavektorin* muutoksen ja ajan muutoksen suhteena

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d \bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i}. \quad (1.20)$$

Nämä määritelty nopeus on siihen vektori, joka osoittaa kappaleen liikenemisen suuntaan (vektori $d \bar{r}$ osoittaa suuntaan, johon kappale siirtyy) ja jonka pituus on sama kuin kappaleen vauhti.



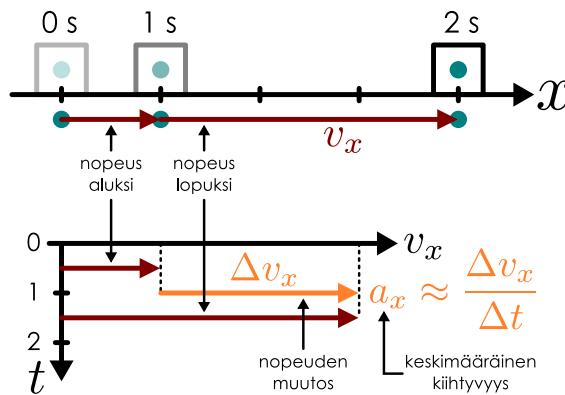
1.10 Eräs kappale on aluksi 1.5 metrin päässä koordinaatiston origosta positiivisessa x -suunnassa ja sekunnin päästä 2.5 metrin päässä origosta negatiivisessa x -suunnassa. Mikä on (a) kappaleen paikkakoordinaatti, (b) paikkavektori aluksi ja lopuksi? Mikä on (c) keskinopeuden skalarikomponentti, (d) keskinopeusvektori tällä aikavälillä?

1.5 Kiihtyvyys

Jos kappaleen nopeus ei ole nolla, kappale liikkuu. Harvoin kappaleen nopeus on kuitenkaan vakio, ja usein onkin tarpeellista ilmaista myös miten nopeus muuttuu. Tätä ilmaiseva suure on nimeltään **kiihtyvyys**. Puhekielessä kiihtyvyydlä tarkoitetaan usein vauhdin kasvamista. Usein sanotaan, että esimerkiksi auto kiihdyytää, kun sen vauhti lisääntyy, ja jarruttaa tai hidastaa, kun sen vauhti pienenee. Tämä on kuitenkin fysikaalisesti epätäsmällistä kieltä. Fysiikassa ei puhuta lainkaan hidastumisesta vaan *kaikki liike, jossa nopeuden suuruus tai suunta muuttuu, on kiihtyvä liikettä*.

Kiihtyvyyden ja nopeuden välistä yhteyttä on havainnollistettu kuvassa 1.8, johon on piirretty liikediagrammi kappaleen paikasta sekunnin välein kolmena eri ajan hetkenä. Ensimmäisen sekunnin aikana kappale siirtyy kuvassa oikealle eli positiiviseen x -suuntaan lyhyen matkan. Voimme kuvata kappaleen keskimääräisestä nopeutta tällä aikavälillä nuolella, joka osoittaa kappaleen lähtöpaikasta $x(0 \text{ s})$ pisteesseen, jossa kappale on yhden sekunnin päästä, $x(1 \text{ s})$. Seuraavan sekunnin aikana kappale jatkaa liikettää oikealle, mutta nyt se kulkee paljon pidemmän matkan. Kappaleen keskinopeutta tällä aikavälillä kuvaavat nuoli pistestä $x(1 \text{ s})$ pisteesseen $x(2 \text{ s})$.

Kuva 1.8: Kiihtyvyys on vektori, joka osoittaa nopeuden muutoksen suunnan ja suuruuden.-

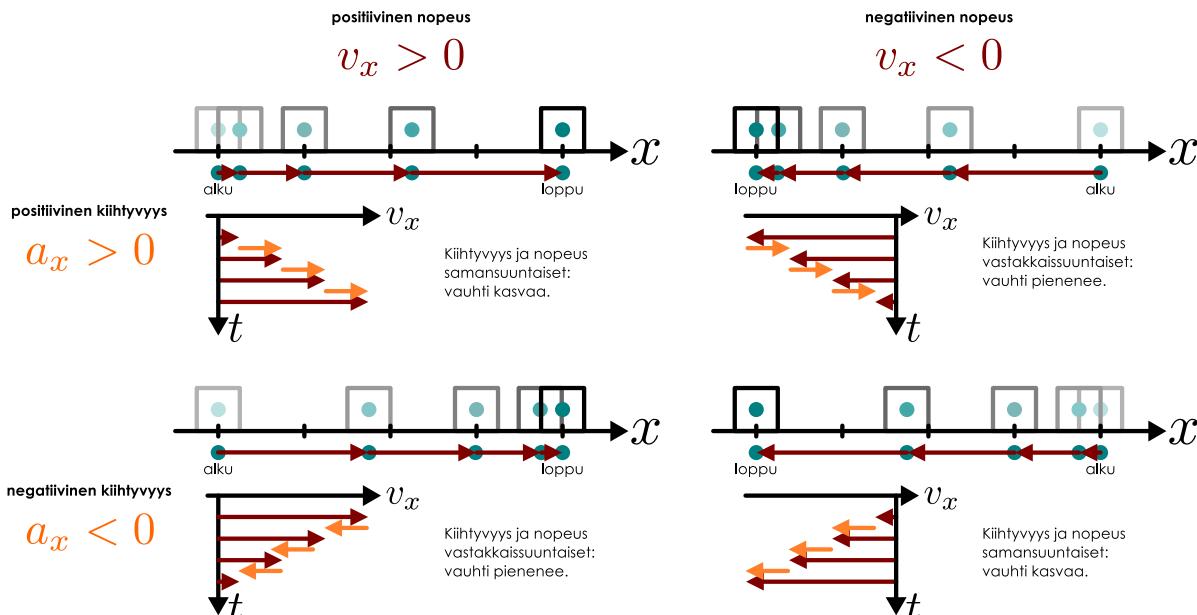


ja vauhti kasvaa, jolloin nopeusvektori pitenee. Näin ollen nopeutta kuvaavan nuolen kärki siirtyy kauemmas positiiviseen suuntaan ja nopeuden muutos Δv_x on positiivinen. *Kiihtyvyys on siis vektori, joka osoittaa nopeusvektorin muutoksen suuntaan.*

Huomaa erityisesti, että kiihtyvyys määritellään nimenomaan nopeuden eikä vauhdin muutoksen kautta. Jos nopeus muuttuu negatiiviseen suuntaan, kiihtyvyyskin on negatiivinen, eikä tämä suinkaan tarkoita sitä, että vauhdin täytyisi pienentyä kuten puhekielessä joskus epätäsmällisesti sanotaan. Tätä on havainnollistettu kuvalassa 1.9, johon on taulukoidu neljä erilaista tilannetta. Kuvan kaikissa tilanteissa kappale on kiihtyvässä liukkeessa. Taulukon vasemmalla puolella kappaleen nopeus v_x on positiivinen, sillä kappale lükkuu positiiviseen x -suuntaan, ja taulukon oikealla puolella nopeus on negatiivinen. Taulukon ylärivillä kiihtyvyys a_x on positiivinen, sillä nopeus muuttuu positiiviseen suuntaan. Tämä näkyy siitä, että vierekkäin asetettujen nopeutta kuvaavien nuolten kärki siirtyy kuvassa oikealle ajan kuluessa. Taulukon alarivillä nopeutta kuvaavien nuolten kärjet siirtyytä ajan kuluessa vasemmalle eli negatiiviseen suuntaan, jolloin kiihtyvyyskin on siis negatiivinen. Kappaleen vauhti kasvaa taulukon vasemman yläkulman ja oikean alakulman tapauksissa eli silloin, kun kiihtyvyys osoittaa samaan suuntaan kuin nopeus.

Luonnollisesti kappaleet voivat lükkiä myös niin että niiden lükkeen suunta muuttuu. Tällöinkin niiden nopeus muuttuu vaikka niiden vauhti pysyi vakiona, koska tällöin nopeuden *suunta* muuttuu. Tällöin kiihtyvyysvektori osoittaa nopeusvektoria vastaan kohtisuoraan suuntaan. Tässä vaiheessa tarkastelemme kuitenkin vain liikettä yhdessä ulottuvuudessa, ja palaamme tutkimaan kaarevaa liikettä luvuissa 4 ja 5.

Kuva 1.9: Kiihtywyden ja nopeuden etumerkki määrytyy sen mukaan, osoittaako kiihtyvyys- ja nopeusvektori positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan.



Kappaleen nopeuden muutos näkyy kuvassa siten, että toinen nuoli on ensimmäistä selvästi pidempi. Voimme määrittää kappaleen keskimääräisen nopeuden muutoksen pürtämällä nopeutta kuvaavat nuolet vierekkäin ja piirtämällä tämän perusteella nopeuksien eroa kuvaavan nuolen. Kuussa nopeudet v_x on püretty punaisella ja nopeuden muutosta Δv_x kuvaava nuoli oranssilla.

Kappaleen keskimääräinen kiihtyvyys määritellään nopeuden muutoksen ja muutokseen kuluneen ajan suhteena,

$$a_{x,\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

Kuvaan piirretty oranssi nuoli kuvailee siis nopeuden muutoksen lisäksi kappaleen kiihtyvyyttä. Tässä kuvassa nopeus osoittaa positiiviseen suuntaan

LIIKE

Edellä tutkimamme suure on täsmällisesti ottaen vain keskimääritisen kiihtyvyyden skalaarikomponentti. Yleisesti kiihtyvyys määritellään vektorina, jolloin sen skalaarikomponentti tulee kertoa positiivista suuntaa kuvaavalla yksikkövektorilla, $\bar{a} = a_x \hat{i}$. Lisäksi jotta saisimme selville hetkellisen kiihtyvyyden keskimääritisen kiihtyvyden sijaan, meidän on otettava raja-arvo, kun ajan muutos lähestyy nolla. Näin saamme kiihtyvyyden x -komponentille täsmällisen lausekkeen

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (1.22)$$

ja kiihtyvyysvektorin määritelmä on

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (1.23)$$

Kiihtyvyys on siis matemaattisesti nopeuden derivaatta aivan kuten nopeus on paikan derivaatta (kuva 1.10). Kiihtyvyyden yksikkö on nopeuden yksikkö jaettuna ajan yksiköllä, $[a_x] = [dv_x]/[dt] = (\text{m/s})/\text{s} = \text{m/s}^2$, eli metri jaettuna sekunnin neliöllä.



1.11 Kappaleen nopeus on aluksi 1.0 m/s positiiviseen x -suuntaan. Mikä on kappaleen (keskimääritinen) kiihtyvyysvektori, jos nopeus on yhden sekunnin kuluttua (a) 2.0 m/s positiiviseen suuntaan, (b) 1.0 m/s positiiviseen suuntaan, (c) 0.0 m/s, (d) 1.0 m/s negatiiviseen suuntaan, (e) 2.0 m/s negatiiviseen suuntaan?

Koska nopeus on paikan derivaatta ja kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, saadaan kiihtyvyys siis laskettua paikan avulla derivoimalla paikkaa ajan suhteeseen kaksi kertaa. Toisin sanoen kiihtyvyys on paikan toinen derivaatta ajan suhteeseen. Moninkertaisia derivaattoja voidaan merkitä esimerkiksi kahdella pilkulla $a_x(t) = x''(t)$. Fysiikassa kuitenkin käytetään yleisemmin differentiaalimerkintää, jolloin voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.24)$$

Tässä merkinnässä on syjä huomata, kuinka viimeisen lausekkeen osoittajassa on kaksoisdifferentiaali d^2 ja nimittäjässä on differentiaalin neliö dt^2 . Vaikka lausekkeessa esiintyykin toista potenssia muistuttavia symbolita, merkintä ei tarkoita, että tässä laskettaisiin toisia potensseja vaan että derivoointi suoritetaan kaksi kertaa. Vastaavasti voidaan määritellä myös korkeamman kertaluvun derivaattoja kuvamaan liikettä, mutta useimmiten paikka, nopeus ja kiihtyvyys riittävät.



1.12 -Kappaleen paikka on $x(t) = (2.5 \text{ m/s}^3)t^3$. Mitä ovat
(a) kappaleen nopeus,
(b) kappaleen kiihtyvyys?
(c) Integroi kiihtyvyys ajan suhteeseen. Mitä saat?

Täsmälleen samalla tavalla kuin yhtälössä (1.12) lausutan paikan muutos nopeuden integraalina, voidaan nopeus ilmaista kiihtyvyyden integraalina, mikä seuraa suoraan kiihtyvyyden määritelmästä nopeuden derivaattana. Voidaan siis aina kirjoittaa

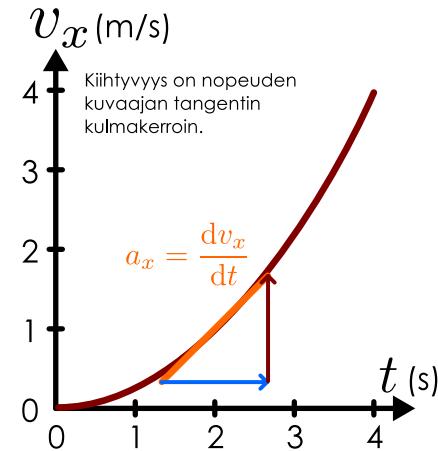
$$v_x(t) = v_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t a_x(t) dt. \quad (1.25)$$

Edelleen koska derivaatta vastaa graafisessa esityksessä kulmakerrointa, kiihtyvyys on nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin. Vastaavasti integraali vastaa kuvaajan rajaaman pinta-alan määrittämistä, joten nopeuden muutos tietyllä aikavallilla voidaan määrittää kiihtyvyyden kuvaajan rajaamana pinta-alana (kuva 1.11).



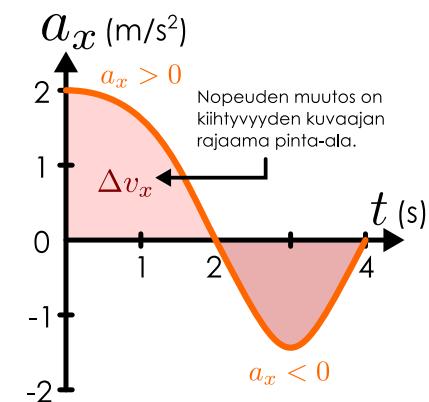
1.13 Selitä omien sanoin, miten kiihtyvyys ja nopeus liittyvät toisiinsa. Selitä erityisesti, mitä positiivinen ja negatiivinen kiihtyvyys tarkoittavat. Keksi esimerkki funktiosta $x(t)$, johon lüttymä nopeus on aina negatiivinen mutta kiihtyvyys on aina positiivinen, ja osoita laskemalla, että näin on.

Kuva 1.10: Kiihtyvyys on nopeuden kuvaajan tangentin kulmakerroin.

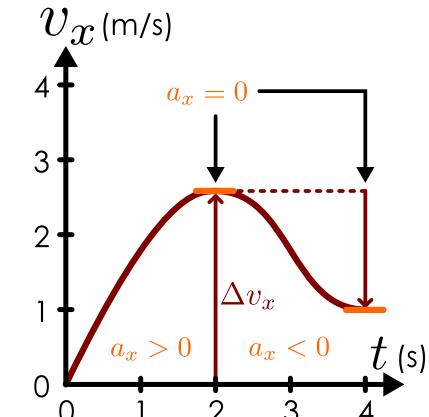


Kuva 1.11: Kiihtyvyyden kuvaajan rajaama ala kuvailee nopeuden muutosta.

(a) Kappaleen kiihtyvyys.

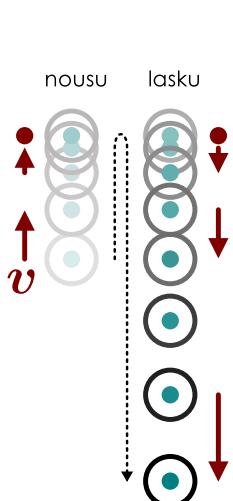


(b) Saman kappaleen nopeus.

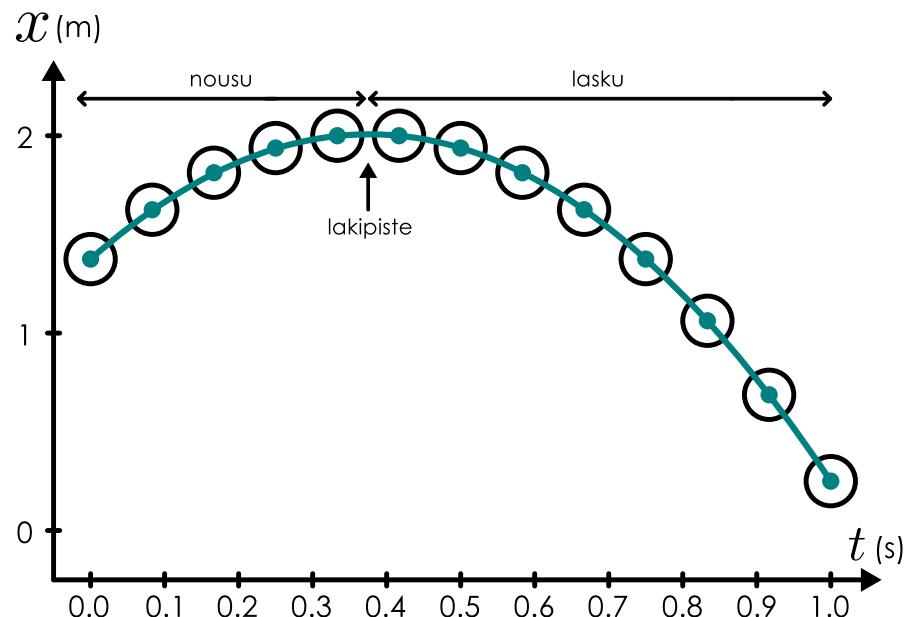


Kuva 1.12: Vapaa pudotus, jossa alkunopeus on ylöspäin.

(a) Liikediagrammi.



(b) Paikan kuvaja.



Putoamisliike

Vapaa pudotus on yksinkertainen esimerkki kiihtyvästä liikkeestä. Sillä tarkoitetaan liikettä, jonka kappale kokee kun sen annetaan pudota Maapallon painovoiman vaikutuksesta ilman muita kappaleen liikkeeseen vaikuttavia tekijöitä. Vaikka arkikielessä putoaminen tarkoittaa aina alas päin tapahtuvaa liikettä, fysiikaalisesti ylöspäin heitetty tai ammuttu kappale on vapaassa pudotuksessa myös liikkueessaan ylöspäin. Varsinainen heitto vaikuttaa tällöin kappaleen saamaan alkunopeuteen, mutta kun kappaleesta päästetään irti, sen liikerata määrytyy pelkästään painovoiman vaikutuksesta.

Tällainen liike on esitetty kuvassa 1.12. Suoraan ylöspäin heitetty kappale liikkuu vain pystysuoraa pitkin, jolloin x -akseliksi voidaan valita pystysuora suunta. Jos lisäksi positiiviseksi suunnaksi valitaan suunta ylöspäin, x -koordinaatti mittaa kappaleen korkeutta. Tässä koordinaatistossa ylöspäin heitetyn kappaleen nopeus on aluksi positiivinen. Kappaleen vauhti kuitenkin pienenee. Lopulta kappale saavuttaa liikeratansa korkeimman kohdan eli lakipisteen. Tässä pisteessä kappaleen pystysuuntainen nopeus on hetkellisesti nolla, minkä jälkeen kappale alkaa liikkua alas päin.

Voimme tutkia kappaleen kiihtyvyyttä liikediagrammin avulla tarkastelemalla kappaleen nopeuden muutosta. Kun kappale liikkuu ylöspäin, sen nopeusvektori osoittaa ylöspäin, mutta nopeutta kuvavien nuolten pituus lyhenee, jolloin nopeuden muutoksen suunta on alas päin. Kiihtyvyysvektori siis osoittaa alas päin ja kiihtyvyys a_x on negatiivinen. Kappaleen liikkumissa alas päin sen nopeusvektori osoittaa alas päin, ja koska vektorin pituus kasvaa, nopeus muuttuu nytkin alas päin. Kiihtyvyysvektori osoittaa alas siis myös kappaleen laskeutuessa.

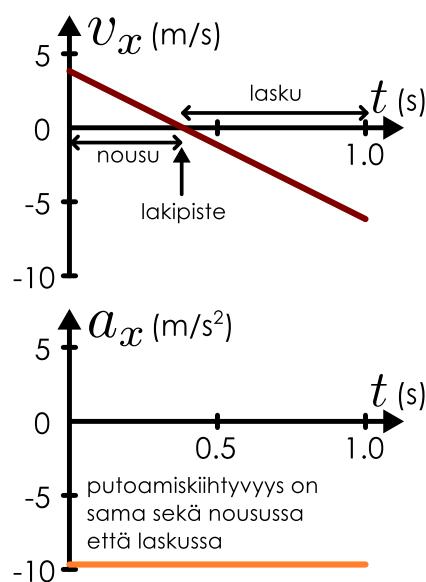
Heiton lakipistettä on vielä syytä tarkastella erikseen. Juuri ennen lakipistettä kappaleen nopeusvektori osoittaa ylöspäin, ja juuri lakipisteen jälkeen nopeus osoittaa alas päin. Nopeusvektori on siis myös heiton lakipisteessä muuttumassa alas päin, ja niinpä kappale on kiihtyvässä liikkeessä myös lakipisteessä, ja kiihtyvyysvektori osoittaa tällöinkin alas päin. Kappaleen kiihtyvyysvektori osoittaa siis alas päin *kaikkialla* sen lentoRADALLA. Valitussa koordinaatistossa kiihtyvyys on siis aina negatiivinen. On varsin tavallinen väärinkäsitys ajatella, että kappaleen kiihtyvyys olisi lakipisteessä nolla, mutta tämä on *vääriin*. Kappaleen *nopeus* on lakipisteessä hetkellisesti nolla, mutta nopeus muuttuu koko ajan, joten nopeuden muutosta mittaava *kiihtyvyys* ei ole nolla edes lakipisteessä.



1.14 Edellä tarkasteltu kappale osuu maahan ja pomppaa takaisin ylöspäin. Mihin suuntaan kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektorit osoittavat (a) juuri ennen maahan osumista, (b) kappaleen koskettaessa maata ja (c) juuri maasta irtoamisen jälkeen?

Kappaleen nopeus osoittaa siis aluksi ylöspäin ja lopuksi alas päin, ja kappaleen kiihtyvyys osoittaa koko ajan alas päin. Edellinen päättely ei kuitenkaan kertonut meille vielä mitään siitä, kuinka suuria nopeuksia ja kiihtyvyksiä kappale kokee. Nämä voidaan selvittää graafisesti kappaleen paikan kuvajasta lähtien. Aloitetaan tutkimalla nopeutta.

Kuva 1.13: Nopeus ja kiihtyvyys vapaassa pudotuksessa.



Nopeus määriteltiin paikan derivaattana, joten nopeus on graafisesti paikan kuvaajan tangentin kulmakerroin. Aluksi paikan kuvaaja nousee jyrkästi, jolloin nopeus on positiivinen ja vauhti suuri. Kun paikan kuvaaja loivenee, vauhti pienenee. Lakipisteessä paikan kuvaaja on vaakasuora, jolloin nopeus on nolla. Kun paikan kuvaaja alkaa laskea, nopeudesta tulee negatiivinen, ja mitä jyrkemmin paikan kuvaaja laskee, sitä suuremmaksi nopeuden itsesarvo muuttuu. Koska nopeus on aluksi positiivinen ja lopuksi negatiivinen, sen kuvaajan täytyy olla laskeva käyrä. Täsmällinen analyysi osoittaa, että nopeuden kuvaaja on itse asiassa *laskeva suora*. Tämä on piirretty kuvaan 1.13.

Kiihtyvyys on puolestaan nopeuden kuvaajan kulmakerroin, ja koska nopeuden kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on vakio, täytyy kappaleen kiihtyvyyden olla heittoliukkeessa *vakio*. Tätä vakiokiihtyvyttä kutsutaan **putoamiskiihtyvyydeksi**, ja sen aiheuttaa yksin painovoima eli Maan ja kappaleen välinen vuorovaikutus.

Ilmakehässä täysin vapaa pudotus ei käytännössä ole mahdollinen, koska putoaminen ilman läpi vaikuttaa kappaleen liukkeeseen. Kuitenkin jos kappaleen ja ilman välinen vuorovaikutus ei ole merkittävä (esimerkiksi jos koe suoritetaan tyhjiössä), kappaleen kiihtyvyys todella on putoamisen aikana vakio. Maan muodosta ja pyörimisestä johtuen putoamiskiihtyvyyden arvo ei ole täsmälleen sama kaikkialla, mutta sen suuruus ei rüpu kovin voimakkaasti paikasta. Putoamiskiihtyvyyden arvo on maapinnalla likimain

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2. \quad (1.26)$$

Erityisesti jos mittaamme putoamiskiihtyvyyden tietyn paikassa, saamme saman tuloksen käytimmeä mittaamisessa mitä tahansa kappaletta. Esimerkiksi höyhen ja kivi putoavat ilmassa eri nopeuksilla, koska ilma vaikuttaa höyhenen liukkeeseen paljon voimakkaammin kuin kiven. Kuitenkin jos höyhen ja kivi pudotetaan tyhjiössä, ne todella putoavat täsmälleen yhtä nopeasti samalla vakiokiihtyvyydellä g .



1.15 Pudota kirja ja yksittäinen paperiarkki samaan aikaan. Putoavatko ne eri tavalla? Laita sitten paperiarkki kirjan päälle ja pudota ne yhdessä. Putoavatko ne nyt eri tavalla? Miksi?

Putoamiskiihtyvyys osoittaa aina alasään eli edellä valitussa koordinaatistossa negatiiviseen suuntaan, joten tässä koordinaatistossa putoamiskiihtyvyyssvektori on

$$\bar{g} = -g\hat{i} \quad (1.27)$$

ja kappaleen kiihtyvyyden x -komponentti on $a_x = -g$. Origo eli taso $x = 0$ m voidaan valita vapaasti esimerkiksi maapinnan tasolle tai kappaleen alkuperäiselle korkeudelle, mutta kun se on kerran valittu, valintaa ei tietenkään saa enää muuttaa.

Tässä erikoistapauksessa, jossa kiihtyvyys on vakio, nopeus on helppo ratkaista lausekkeesta (1.25), koska vakiofunktion integraali t :n suhteen on vakio itse kerrottuna t :llä. Jos vielä merkitään aikaa tarkastelun alkuperäisellä $t_{alku} = 0$ s saadaan nopeudeksi ajan funktiona

$$v_x(t) = v_{x,alku} + \int_0^t -g dt = v_{x,alku} - g \Big|_0^t = v_{x,alku} - gt. \quad (1.28)$$

Tämä on tämälleen kuvaan 1.13 piirretyn laskevan suoran yhtälö.

Tästä voidaan ratkaista edelleen paikka ajan funktiona yhtälön (1.12) perusteella. Nopeus ei ole nyt vakio, mutta se on yksinkertainen polynomifunktio, jonka integrointi onnistuu helposti säännön $\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C$ avulla. Paikaksi saadaan siten

$$x(t) = x_{alku} + \int_0^t (v_{x,alku} - gt) dt = x_{alku} + \left|_0^t \left(v_{x,alku} t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \right| = x_{alku} + v_{x,alku}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.29)$$

Nähdäään, että kappaleen paikkakoordinaatti riippuu aikamuuttujan toisesta potenssista, joten paikan kuvaaja on alasään aukeava paraabeli kuten jo näimme kuvassa 1.12. Tämä on kuitenkin totta *ainoastaan kun kiihtyvyys on vakio*. Yleisesti nopeus on ratkaistava yhtälöstä (1.25) ja paikka yhtälöstä (1.12). Nämä yhtälöt perustuvat suureiden määritelmiiin, joten ne pätevät aina! Seuraavaksi harjoittelemme tasaisesti kiihtyvän liukkeen analyysiä esimerkissä 1.3. Luvun lopun esimerkissä 1.4 näytetään, kuinka ratkaistaan yleisempi tapaus, jossa kiihtyvyys ei ole vakio.

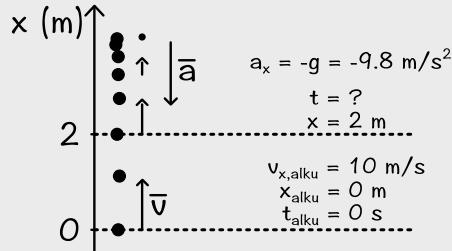
esimerkki 1.3

Heitetyn pallon lentorata

Heitetään pallo ylöspäin alkunopeudella 10.0 m/s. (a) Millä hetkellä pallo on korkeudella 2.0 m heittokorkeudelta mitattuna? (b) Mikä on tällöin pallon nopeus?

TILANTEE Koska pallo heitettiin suoraan ylöspäin, se liikkuu ensin suoraan ylöspäin, pysähtyy sitten ja alkaa lopulta pudota suoraan alas päin. Valitaan positiivinen suunta ylöspäin ja paikan nollakohta kappaleen lähtöpisteen.

SUUNNITELMA Heitetty kappale on vapaassa putoamisliikkeessä koko lentonsa ajan. Tällöin sen liike on tasaisesti kiihtyvä ja kiihtyvyys on sama kuin putoamiskiihtyvyys.



Yhtälön (1.29) mukaan tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen paikka muuttuu ajassa t siirtymän

$$\Delta x = v_{x,alku} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (1.30)$$

missä $a_x = -g$ on kappaleen kiihtyvyys ja $v_{x,alku}$ kappaleen alkunopeus. Voimme toisaalta käääntää ongelman toisin päin ja kysyä, milloin kappale on siirtynyt matkan Δx . Tämä selviää ratkaisemalla yhtälöstä (1.30) aika.

Kun tiedämme pallon lentoajan, voimme selvittää pallon nopeuden tasaisesti kiihtyvän liukkeen nopeuden yhtälöstä (1.28),

$$v_x = v_{x,alku} + a_x t. \quad (1.31)$$

RATKAISU Lauseke (1.30) on toisen asteen yhtälö muuttujan t suhteen ja sen ratkaisu on

$$t = \frac{1}{a_x} \left(-v_{x,alku} \pm \sqrt{v_{x,alku}^2 + 2a_x \Delta x} \right). \quad (1.32)$$

Nyt siis alkunopeus on $v_{x,alku} = 10.0 \text{ m/s}$, kiihtyvyys $a_x = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$ ja kysyttyin korkeutta $\Delta x = 2.0 \text{ m}$. Ratkaisuja saadaan kaksi, $t = 0.2 \text{ s}$ sekä $t = 1.8 \text{ s}$. Sijoittamalla ajan lauseke (1.32) nopeuden lausekkeeseen (1.31) nopeudeksi saadaan

$$v_x = \pm \sqrt{v_{x,alku}^2 + 2a_x \Delta x} \quad (1.33)$$

ja edelleen lukuarvojen sijoittaminen antaa nopeuden arvot $v_x = 7.8 \text{ m/s}$ sekä $v_x = -7.8 \text{ m/s}$.

Mathematica:

```
(* tallennetaan lukuarvot *)
lukuarvot = {v0 -> 10.0, a -> -9.8, deltax -> 2.0};

(* ratkaistaan aika *)
Solve[ deltax == v0 t + 1/2 a t^2, t]
{{t -> (-v0 + Sqrt[2 a deltax + v0^2])/a},
 {t -> -(v0 + Sqrt[2 a deltax + v0^2])/a}}

(* tallennetaan edellinen tulos muuttujaan 'ratkaisu' *)
aika = %

(* sijoitetaan ratkaistu aika nopeuden lausekkeeseen *)
nopeus = v0 + a t /. aika
{{ Sqrt[2 a deltax + v0^2]}, -Sqrt[2 a deltax + v0^2]}}

(* tulostetaan ratkaisu uudestaan, nyt lukuarvojen kera *)
aika /. lukuarvot
nopeus /. lukuarvot
{{t -> 0.224751}, {t -> 1.81606}}
{7.79744, -7.79744}
```

ARVIOINTI Ratkaisujen fysiikalinen merkitys on selkeä: Ratkaisuista ajoista ensimmäinen on hetki, jolloin pallo on korkeudella 2.0 m matkalla *ylöspäin*. Tätä vastaava nopeus on positiivinen. Toinen ratkaisu on hetki, jolloin pallo on samalla korkeudella matkalla *alaspäin*, ja tästä vastaa negatiivinen nopeus. Huomaa, että tässä kysyttyin nimenomaan hetkeä jolloin pallo on *etäisyydellä* 2.0 m lähtöpisteestään — ei hetkeä jolloin pallon kuljema matka olisi 2.0 m — joten kumpikin ratkaisu on oikein. Pallon ollessa matkalla alaspäin se on luonnollisesti kulkenut pidemmän matkan.

Huomataan lisäksi, että pallon vauhti eli nopeuden suuruus on kummassakin tapauksessa *sama*. Näin selvästikin täytyy olla ratkaisun (1.33) perusteella riippumatta alkunopeudesta, kiihtyvyydestä ja tarkastelukorkeudesta.

Tarkistetaan vielä ratkaisujen yksiköt:

$$[t] = \frac{[v_{x,alku}] + \sqrt{[2a\Delta x] + [v_{x,alku}^2]}}{[a]} = \frac{\text{m/s} + \sqrt{\text{m/s}^2 \cdot \text{m} + (\text{m/s})^2}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{m/s} + \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = \text{s}. \quad (1.34)$$

$$[v_x] = \sqrt{[v_{x,alku}^2] + [2a\Delta x]} = \sqrt{(\text{m/s})^2 + \text{m/s}^2 \cdot \text{m}} = \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2} = \text{m/s}. \quad (1.35)$$

Esimerkissä 1.3 johdettiin lauseke pystysuoraan heitetyn kappaleen nopeudelle tietyllä korkeudella, kun kappaleen lähtökorkeus ja -nopeus tunnetaan. Korottamalla saatu lauseke (1.33) puolittain neliöön ja merkitsemällä kappaleen nopeutta siirtymän Δx jälkeen v_{loppu} tulos voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$v_{x,\text{loppu}}^2 = v_{x,\text{alku}}^2 + 2a_x \Delta x, \quad (1.36)$$

jossa on päästy eroon neliöjuuresta ja plusmiinus-merkinnästä. Huomaa kuitenkin, että sekä positiivinen että negatiivinen loppunopeuden arvo toteuttaa yhtälön edelleen. Jos kirjoitamme edelleen $\Delta(v_x^2) = v_{x,\text{loppu}}^2 - v_{x,\text{alku}}^2$, yhtälö saa vielä tyylistetyn muodon

$$\Delta(v_x^2) = 2a_x \Delta x. \quad (1.37)$$

Toisin sanoen nopeuden neliön muutos on *yksiuotteisessa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä* aina suoraan verrannollinen kappaleen siirtymään. Tutkimme tämän tuloksen merkitystä tarkemmin luvussa 2.



1.16 Edelleen olettaen ilmanvastus pieneksi, mikä on esimerkkin 1.3 pallon nopeus v_x (a) kun se on jälleen lähtökorkeudella, (b) heiton lakipisteessä? (c) Kuinka korkealle pallo nousee?

esimerkki 1.4

Juna

Juna liikkuu nopeudella $v_{x,\text{alku}} = 150 \text{ km/h}$ alkaessaan jarruttaa. Tällöin junan nopeutta kuvaavat ajan funktio $v_x(t) = v_{x,\text{alku}} - bt + ct^2$ kunnes juna pysähtyy, minkä jälkeen nopeus on nolla. Vakioiden arvot ovat tässä $b = 2.24 \text{ m/s}^2$ sekä $c = 0.030 \text{ m/s}^3$. (a) Milloin juna pysähtyy? (b) Kuinka pitkä on junan jarrutusmatka?

TILANNE Piirretään junan liikkeestä liikediagrammi. Merkitään junan pysähtymisen hetkeä t_{stop} ja junan kulkemaa matkaa Δx . Nämä ovat kysyttyt suureet.

SUUNNITELMA Juna pysähtyy, kun sen nopeus saavuttaa arvon $v_x = 0 \text{ m/s}$. Junan kulkema matka voidaan määrittää nopeuden integraalina.

Laskuja varten on lisäksi syytä muuntaa alkunopeus yksikköihin m/s. Koska kilometri on 1000 metriä ja tunti on 3600 sekuntia, saadaan muunnos

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{10}{36} \text{ m/s}. \quad (1.38)$$

Siispä alkunopeus on $v_{\text{alku}} = 150 \text{ km/h} = 150 \cdot 10/36 \text{ m/s} = 41.7 \text{ m/s}$.

Pysähtymishetki on ratkaistavissa junan nopeuden lausekkeesta $v_x(t_{\text{stop}}) = 0 \text{ m/s}$. Ennen tätä juna ehti kulkea matkan

$$\Delta x = \int_0^{t_{\text{stop}}} v_x dt. \quad (1.39)$$

RATKAISU (a) Juna pysähtyy, kun $v_{x,\text{alku}} - bt_{\text{stop}} + ct_{\text{stop}}^2 = 0$, mikä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisu on

$$t_{\text{stop}} = \frac{1}{2c} (b \pm \sqrt{b^2 - 4cv_{x,\text{alku}}}). \quad (1.40)$$

Sijoittamalla tähän lukuarvot saadaan mahdolliset ratkaisut 35.1 s sekä 39.5 s. Koska annettu nopeuden lauseke pätee vain siihen asti kunnes juna pysähtyy, ensimmäisen ajan hetken on oltava oikea ratkaisu. Siispä $t_{\text{stop}} = 35 \text{ s}$.

(b) Junan kulkema matka on

$$\Delta x = \int_0^{t_{\text{stop}}} (v_{x,\text{alku}} - bt_{\text{stop}} + ct_{\text{stop}}^2) dt = \left[v_{x,\text{alku}} t - \frac{1}{2}bt^2 + \frac{1}{3}ct^3 \right]_0^{t_{\text{stop}}} = v_{x,\text{alku}} t_{\text{stop}} - \frac{1}{2}bt_{\text{stop}}^2 + \frac{1}{3}ct_{\text{stop}}^3. \quad (1.41)$$

Lukuarvojen sijoitus tähän antaa ratkaisuksi $\Delta x = 520 \text{ m}$.

Mathematica:

```
(* nopeus ajan funktio *)
vx[t_] := valku - b t + c t^2

(* tallennetaan lukuarvot *)
kmh = 1000/3600;
lukuarvot = {valku -> 150 kmh, c -> 0.030, b -> 2.24};

(* ratkaistaan pysähtymishetki *)
stop = Solve[vx[tstop] == 0, tstop]
{{tstop -> (b - Sqrt[b^2 - 4 c valku])/(2 c)},
```

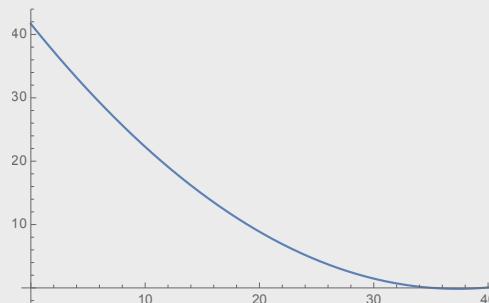
```

{tstop -> (b + Sqrt[b^2 - 4 c valku])/(2 c)}
stop /. lukuarvot (* sijoitetaan numeroarvot *)
{{tstop -> 35.1223}, {tstop -> 39.5444}]

(* ratkaistaan kuljettu matka *)
matka = Integrate[vx[t], {t, 0, tstop}]
-((b tstop^2)/2) + (c tstop^3)/3 + tstop valku
matka /. stop /. lukuarvot
{515.084, 514.652}

(* kuvaja *)
Plot[vx[t] /. lukuarvot, {t, 0, 40}]

```



ARVIOINTI Kuvaajasta voidaan lukea, että junan nopeus todellakin saavuttaa t -akselin eli arvon nolla kun $t \approx 35$ s. Tämän jälkeen lauseke ei ole enää voimassa, mutta Mathematica piirtää funktion niin pitkälle kuin pyydetään. Tietokoneen antamat tulokset on siis aina tulkittava kriittisesti.

Junan kulkemaa matkaa edustaa kuvaajan alle jäänyt pinta-ala. Tätä voidaan arvioida karkeasti kolmiona, jonka kärjet ovat origossa sekä pisteissä (0 s, 40 m/s) sekä (30 s, 0 m/s). Tällaisen kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 30 \text{ s} \cdot 40 \text{ m/s} = 600 \text{ m}$, mikä on jonkin verran enemmän kuin integroiden laskettu tarkka arvo, mutta selkeästi ratkaisun suuruusluokka on järkevä.

Ratkaisuilla on ajan ja pituuden yksiköt kuten pitääkin:

$$[t_{\text{stop}}] = \frac{1}{[c]}([b] + \sqrt{[b]^2 + [cv_0]}) = s^3 / m(m/s^2 + \sqrt{m^2/s^4 + m/s^3 \cdot m/s}) = s^3 / m(m/s^2 + \sqrt{m^2/s^4}) = s^3 / m \cdot m/s^2 = s. \quad (1.42)$$

$$[\Delta x] = [v_0 t] + [bt^2] + [ct^3] = m/s \cdot s + m/s^2 \cdot s^2 + m/s^3 \cdot s^3 = m. \quad (1.43)$$



1.17 Kun ilmanvastus huomioidaan, vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen kiilthyvyys noudattaa likimain lauseketta $a_x(t) = -ge^{-t/\tau}$, missä τ on kappaleen koosta ja muodosta riippuva ilmanvastusta kuvava vakio. Jos kappale pudotetaan levosta korkeudelta x_{alku} , mikä on sen nopeus ja paikka ajan funktiona?

Yhteenvetö: Liike

Differentiaalit ja vektorit

- Skalaari on suure, jota kuvaavat pelkkä suuruus. Suuruuteen kuuluu fysiikassa sekä lukuarvo että yksikkö.
- Vektori on suure, jolla on sekä suunta että suuruus. Yksikkövektori on vektori, jonka suuruus on yksi ja jolla ei ole yksikköä.
- Differentiaali kuvaavat suureen infinitesimaalista eli äärettömän pienistä muutosta tai määärää.
- Derivaatta kuvaavat suureen muutosnopeutta toisen suureen suhteena. Matemaattisesti se voidaan määritellä muutosten osamäärän raja-arvona eli differentiaalien suhteena

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

- Integraali kuvaavat pieniin osiin jaetun suuren kokonaismääärää. Matemaattisesti se voidaan määritellä summan raja-arvona

$$\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} v_x(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N v_x(t_i) \Delta t$$

- Integrointi ja derivoointi ovat toistensa käänneisoperaatiot

$$\int \frac{dy}{dx} dx = y + C, \quad \frac{d}{dx} \int y dx = y.$$

Paikka ja nopeus

- Paikkavektori on koordinaatiston origosta tarkastelupisteeseen osoittava vektori. Graafisesti se voidaan kuvata nuolena, jonka kanta on origossa ja kärki tarkastelupisteessä. Paikkavektorin skalarikomponentti x -suunnassa on pisteen x -koordinaatti. Lükkeen tapahtuessa yhdessä ulottuvuudessa x -akselin suunnassa kappaleen paikkavektori voidaan ilmaista kappaleen paikan koordinaatin sekä x -suuntaisen yksikkövektorin avulla

$$\bar{r} = x\hat{i}.$$

- Siirtymä on paikan muutos

$$\Delta x = x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}}, \quad \Delta \bar{r} = \bar{r}_{\text{loppu}} - \bar{r}_{\text{alku}}.$$

- Paikkavektorin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteeseen on nopeus

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

- Nopeuden skalarikomponentti x -suunnassa eli x -suuntainen nopeus on kappaleen x -koordinaatin derivaatta ajan suhteeseen

$$\bar{v} = v_x \hat{i}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

- Nopeusvektorin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteeseen on kiihtyvyys

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

- Kiihtyvyden skalarikomponentti x -suunnassa eli x -suuntainen kiihtyvyys on kappaleen x -suuntaisen nopeuden derivaatta ajan suhteeseen

$$\bar{a} = a_x \hat{i}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

- Putoavan kappaleen kiihtyvyys on noin $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ suoraan alaspäin.

Graafinen esitys

- Lükediagrammissa kappaleen paikka eri ajan hetkinä piirretään samaan koordinaatistoon. Kappaleen nopeus voidaan arvioida siirtymien perusteella ja kiihtyvyys nopeuden muutosten avulla.
- Kappaleen paikan kuvajassa kunkin pisteen paikka pystysuunnassa esittää kappaleen paikkakoordinaattia ja paikka vaakasuunnassa aikakoordinaattia. Vastaavasti voidaan esittää minkä tahansa kahden suureen välinen riippuvuus.
- Kappaleen nopeus ilmenee paikkakoordinaatin **kuvajan tangentti**.

tin kulmakertoimena. Samoin kiihtyvyys on nopeuden kuvajan tangentin kulmakerroin. Yleisesti derivaatta $f'(t) = df/dt$ on kuvajan $f(t)$ tangentin kulmakerroin.

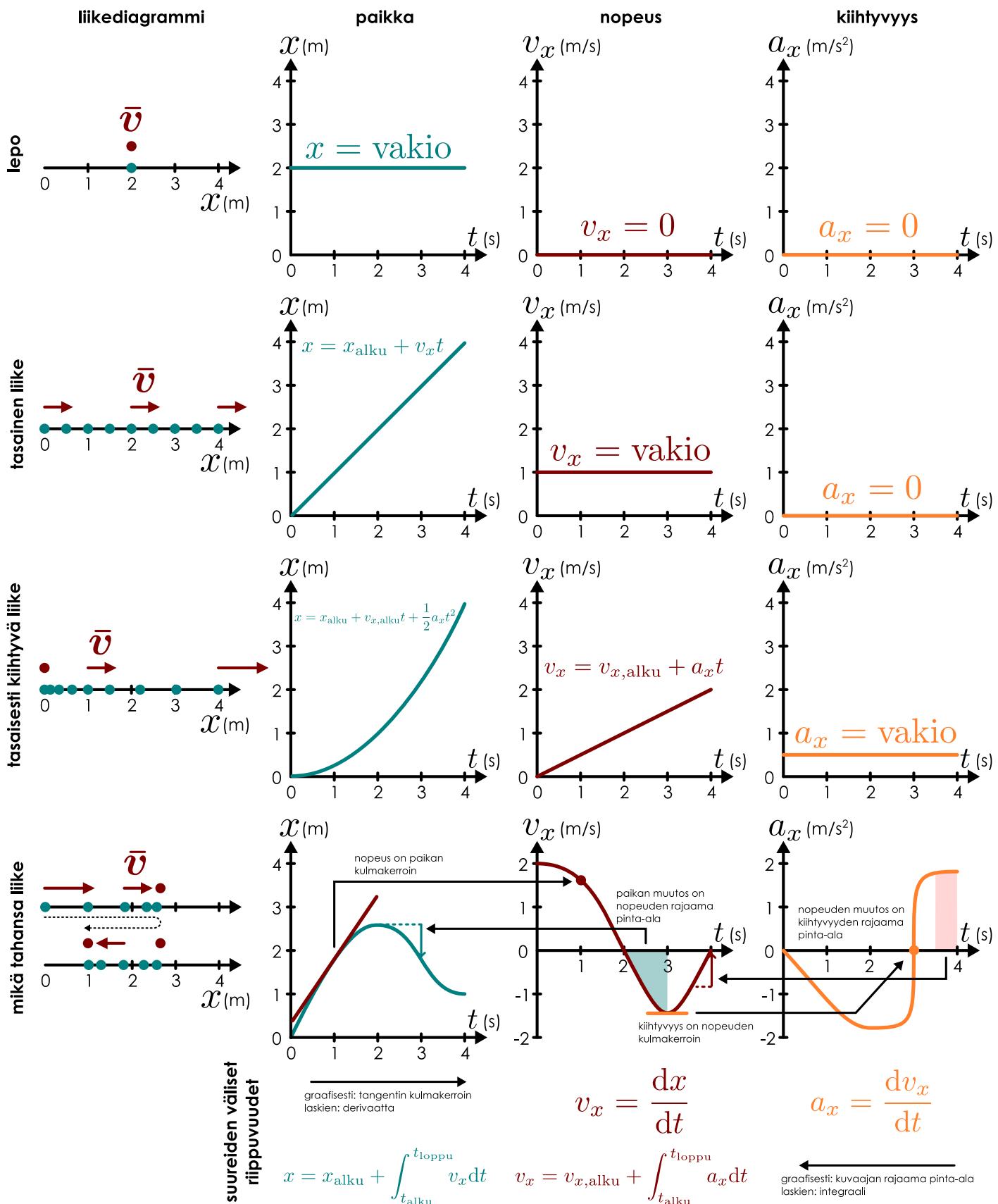
- Kappaleen siirtymä ilmenee nopeuden skalarikomponentin **kuvajan rajaamana pinta-ala**. Samoin nopeus on kiihtyvyyden kuvajan rajaama pinta-ala. Yleisesti integraali $\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} f(t) dt$ on kuvajan $f(t)$ ja t -akselin välin jäävä pinta-ala.

Sanasto

- koordinaatti (coordinate)
- koordinaatisto (reference frame)
- akseli (axel)
- liike (motion, movement)
- paikka (position)
- kiintopiste (reference point)
- origo (origin)
- metri (meter)
- pituus (length)
- siirtymä (displacement)
- matka (distance)
- aika (time)
- sekunti (second)
- ajan hetki (instant)
- aikaväli (interval)
- nopeus (velocity)
- vauhti (speed)
- kiihtyvyys (acceleration)
- lepo (rest)
- tasainen liike (uniform motion)

- tasaisesti kiihtyvä liike (uniformly accelerated motion)
- vapaa pudotus (free fall)
- liikerata (trajectory)
- putoamiskiihtyvyys (gravitational acceleration)
- differentiaali (differential)
- derivaatta (derivative)
- integraali (integral)
- tangentti (tangent)
- kulmakerroin (slope)
- pinta-ala (area)
- lükediagrammi (motion diagram)
- skalaari (scalar)
- vektori (vector)
- nollavektori (zero vector)
- yksikkövektori (unit vector)
- skalarikomponentti (scalar component)
- vektorin pituus (vector magnitude)
- itseisarvo (absolute value)
- paikkavektori (position vector)
- suoran sovitus (linear fit)

Kuva 1.14: Liikkeen erilaisia esitystapoja sekä liikettä kuvaavien suureiden riippuvuudet toisistaan. Taulukossa on esitetty erikseen erikoistapaukset, joissa paikka, nopeus tai kiihtyvyys ovat vakioita, sekä yleinen liike.



Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

- 1.1** (a) Siirtymä riippuu vain alku- ja loppupisteistä, joten $\Delta x = x_2 - x_0 = 0.5 \text{ m} - 1.0 \text{ m} = -0.5 \text{ m}$.
 (b) Kuljettu matka on siirtymien itseisarvojen summa, $s = |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| = 2.5 \text{ m} + 3.0 \text{ m} = 5.5 \text{ m}$.
 (c) Koordinaatit muuttuvat origon siirron verran, jolloin saadaan
 $x_0 = -1.0 \text{ m}$, $x_1 = -4.0 \text{ m}$ ja $x_2 = -1.5 \text{ m}$. Siirtymä ja kuljettu matka eivät riipu kiintopisteestä.
- 1.2** Nopeus on siirtymän ja kuluneen ajan suhde.
 (a) Menomatkalla $v_x = 15 \text{ m}/3 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$.
 (b) Paluumatkalla $v_x = -15 \text{ m}/4 \text{ s} = -3.75 \text{ m/s}$.
 (c) Kokonaismatkalla siirtymä on nolla, joten keskimääräinen nopeus on $v_{x,\text{kesiarvo}} = 0 \text{ m}/3 \text{ s} = 0 \text{ m/s}$.
 (d) Kokonaismatka on 30 m ja aikaa kuluu 7.5 s, joten keskivauhti on $v_{\text{kesiarvo}} = 30 \text{ m}/7.5 \text{ s} = 4.0 \text{ m/s}$. Keskivauhti on siis eri asia kuin keskinopeus, ja kumpikaan näistä ei ole nopeuden tai vauhdin kesiarvo.
- 1.3** (a) $\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2bt$.
 (b) $\frac{dt}{dx} = t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{bx}}$.
 (c) $\frac{dx}{dt} = 4$ ja $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$. Huomaa, että $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}$
- 1.4** Jos kappale siirtyy välittömästi paikasta toiseen, paikan kuvaajassa on epäjatkuvuus. Tässä tapauksessa kuvaaja siis saapuisi pisteeseen $x = 2 \text{ m}$ ja hyppäisi epäjatkuvasti pisteeseen $x = 3 \text{ m}$. Koska teleportteja ei ole oikeasti olemassa, paikan kuvaaja ei siis saa olla epäjatkuva.
- 1.5** Nopeuden kuvaaja on välillä $0 \dots 1 \text{ s}$ vaakasuora, joka kulkee korkeudella 1 m/s. Hetkellä $t = 1 \text{ s}$ kuvaaja hyppää arvoon 2 m/s, ja kuvaaja on tämän jälkeen jälleen vaakasuora aikavälin $1 \dots 2 \text{ s}$. Nopeuden kuvaajassa on siis epäjatkuvuus, jos nopeus muuttuu yhtäkkiä. Paikan kuvaaja on puolestaan suora, jonka kulmakerroin on kappaleen nopeus. Paikan kuvaajan kulmakerroin on siis aluksi 1 m/s ja lopuksi 2 m/s. Kuvaaja on jatkuva hetkellä $t = 1 \text{ s}$, mutta siinä on kulma, koska kuvaajan jyrkkyys muuttuu yhtäkkiä.
- 1.6** Ensimmäisellä välillä kappale siirtyy $\Delta x_1 = v_x \Delta t = 0.1 \text{ m/s} \cdot 0.2 \text{ s} = 0.02 \text{ m}$. Vastaavasti seuraavilla aikaväleillä kappale siirtyy $\Delta x_2 = 0.04 \text{ m}$, $\Delta x_3 = 0.08 \text{ m}$ ja $\Delta x_4 = 0.14 \text{ m}$. Kokonaissiirtymä on näiden summa, $\Delta x = 0.28 \text{ m}$.
- 1.8** Skalaareja ovat pituus, matka, lukumäärä, tilavuus ja lämpötila. Vektoreita ovat nopeus, paikka ja siirtymä. Huomaa, että pituus ja matka ilmaisevat vain etäisyksiä ilman suuntaa, joten ne ovat skalaareja. Paikka on vektori, koska se ilmaisee valitun pisteen origosta mitatun etäisyyden ja suunnan. Siirtymä on puolestaan paikan muutos, joka ilmaisee sekä siirrytyyn etäisyyden että siiron suunnan.
- 1.9** Merkitään tästä vektoria kirjaimella \vec{B} . (a) Pituus eli suuruus on $B = 2.5 \text{ T}$,
 (b) skalaarikomponentti $B_x = -2.5 \text{ T}$,
 (c) itseisarvo $|\vec{B}| = B = 2.5 \text{ T}$,
 (d) yksikkövektori $\hat{\vec{B}} = \vec{B}/B = -\hat{i}$ ja
 (e) vektori itse $\vec{B} = B_x \hat{i} = (-2.5 \text{ T}) \hat{i}$
- 1.10** (a) $x_{\text{alku}} = 1.5 \text{ m}$, $x_{\text{loppu}} = -2.5 \text{ m}$,
 (b) $\vec{r}_{\text{alku}} = (1.5 \text{ m}) \hat{i}$, $\vec{r}_{\text{loppu}} = (-2.5 \text{ m}) \hat{i}$,
 (c) $v_{x,\text{kesiarvo}} = (x_{\text{loppu}} - x_{\text{alku}})/\Delta t = -4.0 \text{ m}/1.0 \text{ s} = -4.0 \text{ m/s}$,
 (d) $\vec{v}_{x,\text{kesiarvo}} = (\vec{r}_{\text{loppu}} - \vec{r}_{\text{alku}})/\Delta t = (-4.0 \text{ m}) \hat{i}/1.0 \text{ s} = (-4.0 \text{ m/s}) \hat{i}$.
- 1.11** (a) Nopeuden muutos $\Delta v_x = v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}} = 2.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 1.0 \text{ m/s}$, joten kiihtyvyys $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = 1.0 \text{ m/s}^2$.
 (b) $\Delta v_x = 1.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 0.0 \text{ m/s}$, $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = 0.0 \text{ m/s}^2$.
 (c) $\Delta v_x = 0.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -1.0 \text{ m/s}$, $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -1.0 \text{ m/s}^2$.
 (d) $\Delta v_x = -1.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -2.0 \text{ m/s}$, $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -2.0 \text{ m/s}^2$.
 (e) $\Delta v_x = -2.0 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = -3.0 \text{ m/s}$, $a_{x,\text{kesiarvo}} = \Delta v_x/\Delta t = -3.0 \text{ m/s}^2$. Huomaa, että tapauksessa (d) vauhti ei muutu, mutta kiihtyvyys ei silti ole nolla. Tapauksessa (e) puolestaan vauhti kasvaa, mutta kiihtyvyys on negatiivinen.
- 1.12** (a) Nopeus on paikan derivaatta, $v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t) = 3 \cdot (2.5 \text{ m/s}^3)t^2 = (7.5 \text{ m/s}^3)t^2$.
 (b) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, $a_x = \frac{dv_x}{dt} = v'_x(t) = 2 \cdot (7.5 \text{ m/s}^3)t = (15.0 \text{ m/s}^3)t$.
 (c) Kiihtyvyyden integraali on $\int (15.0 \text{ m/s}^3)t dt = \frac{1}{2}(15.0 \text{ m/s}^3)t^2 + C = (7.5 \text{ m/s}^3)t^2 + C$. Tämä on sama kuin nopeus, kun integroimisvakioksi valitaan nolla.
- 1.14** (a) Kappale putoaa alaspäin: nopeus ja kiihtyvyys osoittavat molemmat alaspäin.
 (b) Kappale koskettaa maata: Nopeus on hetkellisesti likimain nolla. Kiihtyvyys osoittaa ylöspäin, koska kappaleen nopeusvektori osoittaa alas ja lopuksi ylös eli nopeuden muutos on ylöspäin. Koska nopeus muuttuu pomppussa hyvin nopeasti, kiihtyvyys on itseisarvoltaan suuri.
 (c) Kappale liikkuu ylöspäin mutta on vapaassa pudotuksessa: nopeus osoittaa ylöspäin, kiihtyvyys alas.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

1.15 Erillään kirja putoaa nopeasti ja paperi hitaasti, koska ilman ja paperin välinen vuorovaikutus muuttaa kevyen paperin liikettä paljon ja painavan kirjan liikettä vain vähän. Kun paperi putoaa kirjassa kiinni, putoavan paperin edessä ei ole putoamista hidastavaa ilmaa, ja tällöin paperi putoaa yhtä nopeasti kuin kirja, putoamiskiihtyydellä g .

1.16 (a) Kun pallo on lähtökorkeudella, sen siirtymä on nolla, $\Delta x = 0$ m. Yhtälön (1.36) perusteella siis $v_{x, \text{loppu}}^2 = v_{x, \text{alku}}^2$ eli pallon vauhti on sama kuin alussa. Koska pallo putoaa nyt alaspäin, sen nopeuden suunta on käännyntänyt eli $v_x = -10.0$ m/s.

(b) Läkipisteessä pallo on hetkellisesti paikoillaan, $v_x = 0$ m/s.

(c) Voimme sijoittaa yhtälöön (1.36) loppunopeudeksi nopeuden läkipisteessä (nolla) ja ratkaista tästä pallon siirtymän Δx . Saamme

$$\Delta x = -\frac{1}{2a_x}v_{x, \text{alku}}^2 = \frac{1}{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2} \cdot (10.0 \text{ m/s})^2 = 5.1 \text{ m}. \quad (1.44)$$

1.17 Nopeus saadaan integroimalla kiihtyyttä ja paikka edelleen integroimalla nopeutta. Nopeus on

$$v_x(t) = v_{x, \text{alku}} + \int_0^t -ge^{-t/\tau} dt = g\tau(e^{-t/\tau} - 1) \quad (1.45)$$

ja paikka

$$x(t) = x_{\text{alku}} + \int_0^t g\tau(e^{-t/\tau} - 1) dt = x_{\text{alku}} + g\tau[\tau(1 - e^{-t/\tau}) - t]. \quad (1.46)$$

2 Säilymislait

Olemme usein kiinnostuneita siitä, miten asiat muuttuvat, sillä muuttumattomille asioille ei tapahdu mitään. Jos suure ei muutu, voimme selvittää suureen arvon yhdellä ajan hetkellä, ja tiedämme automaattisesti suureen arvon kaikkina ajan hetkinä. Tällaiset suureet eivät vaikuta kovin kiinnostavilta. Kuitenkin fysiikan tärkeimmät ja voimakkaimmat lait koskevat nimenomaan suureita, jotka eivät muutu ajan kuluessa. Tällaisten suureiden sanotaan säilyvän. Säilyvät suureet ovat tärkeitä siksi, että koska niiden arvo ei voi muuttua, ne asettavat voimakkaita rajoituksia sille, mitä fysiicalissä prosesseissa voi ja ei voi tapahtua.

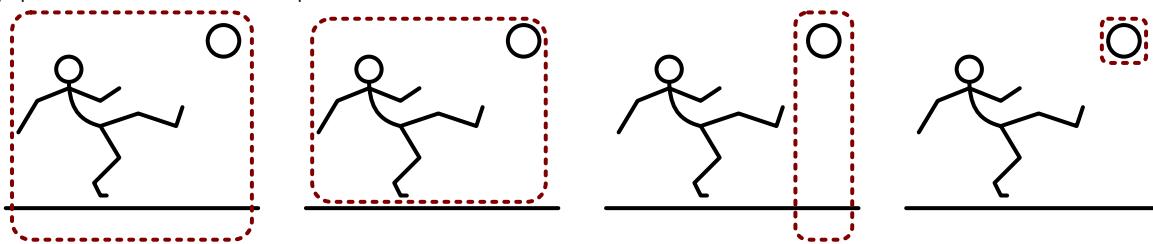
Tutkimme aluksi yleisesti, millaisia ominaisuuksia säilyvillä suureilla on. Tämän jälkeen tutustumme mekanikan kahteen tärkeimpään suureeseen: energiaan ja liikemäärään. Energia on fysiikan tärkein käsite, joka yhdistää kaikki fysiikan osa-alueet. Tarkasteltiinpa kappaleiden liikettä, aaltoja, lämpöä tai sähköä, energia on aina keskeisessä roolissa selittämässä mitä tapahtuu tai ylipäänsä mitä voi tai ei voi tapahtua. Liikemäärä puolestaan määrä sen, miten kappaleet ja kappaleiden joukot voivat liikkua. Liikemäärä esimerkiksi selittää sen arkisen havainnon, että raskaat kappaleet työttävätkin törmäyksissä kevyemmät pois tieltään kun taas kevyet kappaleet eivät kykene liikkuttamaan raskaampia.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- määritellä systeemi ja rajata fysikalinen tilanne systeemiksi
- tunnistaa ekstensiiviset suureet sekä tavat joilla nämä voivat muuttua
- määritellä liike-energia, potentiaalenergia sekä sisäenergia
- määritellä liikemäärä ja massakeskipiste
- selittää, millaisessa systeemissä energia tai liikemäärä on vakio
- selittää energian säilymislaki ja ratkaista painovoiman ja jousten liikuttamien kappaleiden liike sen avulla
- selittää liikemäären säilymislaki ja ratkaista kappaleiden liike törmäyksissä sen avulla

Kuva 2.1: Tilanne, jossa potkaistaan palloa, on rajattu erilaisiksi systeemeiksi. Systeemi on rajattu katkoviivalla.

- (a) Systeemissä Maa, pelaaja ja pallo. (b) Systeemissä pelaaja ja pallo. (c) Systeemissä Maa ja pallo. (d) Systeemissä vain pallo.



2.1 Säilyvät suureet

Systeemi

Fysikaalisten mallien muodostamisessa kantava ajatus on tilanteiden yksinkertaistaminen ja ongelmien pelkistäminen niin rajattuun muotoon, että tilanteisiin liittyvä fysiikka voidaan lopulta kuvata hyvin tarkasti yksinkertaisten periaatteiden ja lakienvälistä avulla. Tässä yksinkertaistamisessa täytyy valita kuinka tarkasti asioita kuvataan, mutta ennen muuta siinä on valittava *mitä* kuvataan. Kaikkea mahdollista ei voi ottaa kerralla huomioon, eikä se ole järkevätkään. Jos tarkoitus on esimerkiksi arvioida jalkapallokentällä potkaistun pallon lentoa, voidaan hyvin jättää katsomossa istuvien ihmisten tekemiset huomioidottomaksi. Kun tilanteesta siis muodostetaan fysikaalinen malli, katsot ja katsomo voidaan kokonaan unohtaa ilman että mallin ennustheet muuttuisivat. Toisin sanoen tilanteen tarkastelu voidaan rajata vain tiettyihin asioihin, joiden oletetaan olevan merkittäviä.

Fysiikassa sitä joukkoja kappaleita, hiukkasia tai muita fysikaalisia objekteja, joihin tarkastelu kohdistuu, kutsutaan **systeemiksi**. Kaikkea systeemin ulkopuolelle jätettyä kutsutaan systeemin **ympäristöksi**. Systeemin määritelmään ei sisälly mitään rajoituksia vaan mikä tahansa olioiden joukko, jonka voimme mielessämme erottaa muusta todellisuudesta, voidaan valita systeemiksi. Systeemin rajojen ei tarvitse noudattaa mitään todellista fysikaalista rajapintaa vaan erotus systeemiin ja ympäristöön on täysin kuvitteellinen.

Yleensä systeemiin valitaan mukaan kaikki asiat, joiden käyttäytymisen tarkka tuntemus on välttämätöntä. Ympäristöön ei tarvitse kuitenkaan olla merkityksetön vaan systeemi voi vuorovaikuttaa ympäristönsä kanssa. Nämä vuorovaikutukset pitää kuitenkin olla kuvattavissa ilman tarkkaa tietoa esimerkiksi systeemin ulkopuolisten kappaleiden paikoista. Systeemin rajojen ei tarvitse myöskään kohdistua kappaleisiin tai hiukkasiin vaan systeemiksi voidaan valita myös esimerkiksi jokin tietty tilavuus tai alue, jolloin tarkastellaan kaikkia kappaleita tai hiukkasia, jotka ovat kyseisen tilavuuden sisällä. Tällöin kappaleita voi tulla systeemiin tai poistua sieltä.

Esimerkiksi määritettäessä potkaistun pallon liikerataa pallo lienee syytä ottaa osaksi tarkasteltavaa systeemiä, sillä juuri pallon käyttäytymisestä ollaan kiinnostuneita. Potkun aikana pallo vuorovaikuttaa pelaajan kanssa ja lentonsa aikana se vuorovaikuttaa Maan ja ilman kanssa, joten nämäkin voidaan ottaa osaksi tarkasteltavaa systeemiä. Näin ei ole kuitenkaan välttämätöntä tehdä, sillä esimerkiksi Maa ei pallon lennon aikana liiku mihinkään eikä sen paikasta siis tarvitse pitää kirja. Maan jättäminen pois tarkasteltavasta systeemistä ei tienekään poista Maan ja pallon välistä vuorovaikutusta mihinkään, vaan tällöin palloon kohdistuva painovoima on huomioitava systeemin ja sen ympäristön välisenä vuorovaikutuksena.

Systeemin valinta tapahtuu siis puhtaasti ajatustasolla, eikä se tienekään saa vaikuttaa tarkasteltavan tilanteen käyttäytymiseen, sillä luonto huomoi toiminnassaan aivan kaiken. Systeemien merkitys onkin toimia ajattelun apuvälineinä. Systeemin valinta on muistutus siitä, että systeemiin kuuluvista asioista on pidettävä kirja, eikä kerran valittua systeemiä saa vaihtaa kesken analyysin. On myös olemassa joukko hyvin vahvoja fysikaalisia menetelmiä, joita voi käyttää vain *tietynlaisissa systeemeissä* kuten pian opimme. Niinpä rajaamalla tarkasteltava systeemi juuri sopivasti voidaan ilmiötä ymmärtää huomattavasti helpommin kuin huonosti valittua systeemiä tutkimalla.

Ekstensiiviset suureet

Fysikaalisia suureita voidaan luokitella monin tavoin. Liikkeen tarkastelun yhteydessä tarkasteltiin jo skaalaareja ja vektoreita joista edellisillä ei ole suuntaa mutta jälkimmäisillä on. Toinen tärkeä luokittelu on jako **intensiivisiin ja ekstensiivisiin** suureisiin, mikä tarkoittaa karkeasti ilmaisten jakoa paikallisiin (aineen) ominaisuuksiin ja yleisiin (systeemin) ominaisuuksiin.

Tarkastellaan esimerkinä muovailuvahasta tehtyä täysin tasalaatuista palloa. Mitataan vahapallon ominaisuuksia ja kirjataan nämä muistiin: esimerkiksi halkaisija, tilavuus, lämpötila, paino jne. — emme ole määritelleet vielä näitä suureita, mutta voit varmasti keksiä vielä paljon muitakin mitattavia ominaisuuksia. Leikataan tämän jälkeen pallo osiin ja mitataan nyt samat ominaisuudet jokaiselle osalle. Jotkin suuret kuten tilavuus ovat tietenkin kullekin pallon osalle pienempiä kuin koko pallolle, mutta toiset kuten lämpötila voivat olla pienissä osissa samat kuin alkuperäisessä pallossa.

Suuret, joille voidaan määritellä arvo erikseen kussakin pisteessä, ovat *intensiivisia*. Erityisesti jos tällaisen suureen arvo on kaikkialla vakio alkuperäisessä pallossa, suurella on sama arvo myös missä tahansa palosta leikatussa pallassa. Esimerkiksi lämpötila on intensiivinen suure. Jos pallo on kauttaaltaan yhtä lämmi, sen kussakin osassa on sama lämpötila.

Tämä ei kuitenkaan päde kaikille suureille. Esimerkiksi alkuperäisestä palosta leikatun pienien palan tilavuus on vältämättä pienempi kuin koko pallon tilavuus. Erityisesti jos vaha ei puristu leikatessa merkittävästi kokoon, voimme pallon pilkkomisen jälkeen laskea yhteen kaikkien siitä leikattujen pienien osien tilavuudet ja näiden tilavuuskien summan täytyy olla yhtä suuri kuin alkuperäisen pallon tilavuus. Tätä ominaisuutta sanotaan *ekstensiivisyydeksi*. Toisin sanoen *kun kappale tai systeemi jaetaan osiin mielivaltaisella tavalla ja kustakin osasta mitataan suureen a arvo, suure on ekstensiivinen, jos näiden arvojen summa on sama kuin suureen arvo alkuperäisellä kappaleella tai systeemillä*. Ekstensiivisen suureen arvo on siis suoraan verrannollinen kappaleen kokoon kun taas intensiivisen suureen arvo ei sitä ole.

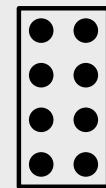
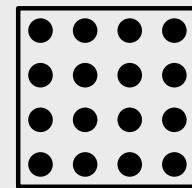
esimerkki 2.1

Ekstensiiviset ja intensiiviset suureet

Ovatko kappaleen tilavuus, kappaleen muodostavien hiukkosten lukumäärä sekä näiden hiukkosten tiheys eli hiukkosten määrä tilavuusyksikköä kohden intensiivisiä vai ekstensiivisia suureita?

SUUNNITELMA Suure, joka ei muutu jaettaessa kauttaaltaan samalaisesta aineesta tehty kappale kahtia, on intensiivinen. Sen sijaan jos suureen arvo tällöin puolittuu, kyseessä on ekstensiivinen suure. Tilannetta voi havainnollistaa piirtämällä hiukkasista koostuvan kappaleen sekä kokonaisen että osissa.

koko kappale puolikas



RATKAISU Jos kappaleen tilavuus on V ja puolitamme kappaleen, puolikkaan tilavuus on $V/2$, joten tilavuus on *ekstensiivinen*.

Jos kappale koostuu N hiukkasta ja puolitamme kappaleen, yhteen puolikkaaseen jää $N/2$ hiukkasta, joten hiukkasmäärä on *ekstensiivinen*.

Hiukkosten lukumäärätihesy ilmaisee hiukkosten lukumäärän tilavuusyksikössä. Hiukkosten tiheys voi vaihdella kappaleessa, mutta keskimääräinen hiukkastihesy kappaleelle, joka koostuu N :stä hiukkasta ja jonka tilavuus on V , on

$$n = \frac{N}{V}. \quad (2.1)$$

Puolikkaan kappaleen hiukkastihesy on niinikään $\frac{N/2}{V/2} = \frac{N}{V} = n$ eli sama kuin alkuperäisellä kappaleella. Hiukkastihesy on siis *intensiivinen*.

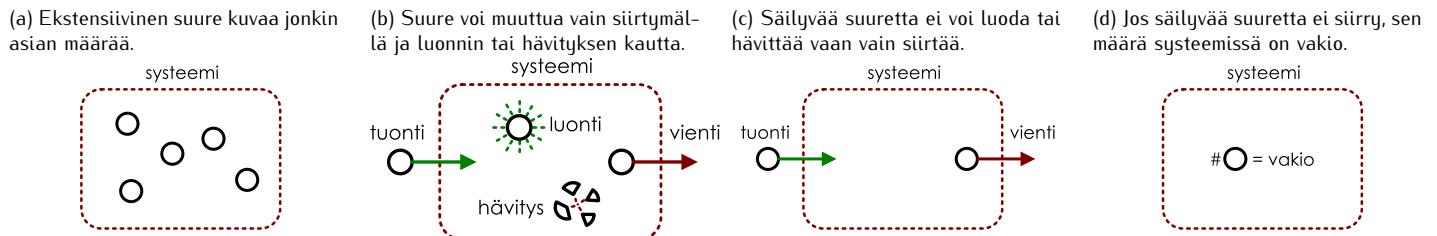
ARVIOINTI Itse asiassa jo huomio, että hiukkastihesy ei ole vältämättä vakio kappaleen sisällä kertoo, että kyseessä on intensiivinen suure, sillä vain intensiivisille suureille voidaan määritellä arvo eri paikoissa kappaleen sisällä. Ei ole mielekästä pohtia ekstensiivisen suuren kuten kappaleen tilavuuden arvoa kappaleen sisällä, koska tilavuus on koko kappaleen ominaisuus.

Intensiivisillä ja ekstensiivisillä suureilla käytetään samanlaisia symboleita, joten matemaattiset lausekkeet eivät suoraan kerro, ovatko suureet intensiivisiä vai ekstensiivisia. Fysikaalisesti intensiiviset ja ekstensiiviset ominaisuudet käyttäytyvät kuitenkin eri tavoin, eikä niitä voi yhdistellä miten sattuu. Esimerkissä 2.1 nähtiin, että kahden ekstensiivisen suuren suhde on intensiivinen. Vastaavasti koska intensiiviset suureet eivät riipu kappaleen koosta, myöskään intensiivisten suureiden tulot tai osamäärät eivät riipu kappaleen koosta ja myös ne ovat intensiivisiä suureita. Sen sijaan intensiivisen ja ekstensiivisen suureen tulo on ekstensiivinen. Esimerkiksi hiukkastihedyen (intensiivinen) ja tilavuuden (ekstensiivinen) tulona saadaan hiukkasmäärä (ekstensiivinen).



2.1 Selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa intensiivisyys ja ekstensiivisyys. Ovatko seuraavat suureet intensiivisiä tai ekstensiivisiä: (a) nopeus, (b) pinta-ala, (c) tilavuuden ja nopeuden tulo?

Kuva 2.2: Systeemin sisältämän ekstensiivisen suureen muuttuminen.



Muuttuvat ja muuttumattomat suureet

Fysiikassa usein halutaan tietää, miten suureet muuttuvat ajan kuluessa, ja riippuen suureen laadusta tämä voi tapahtua eri tavoin. Esimerkiksi kappaleen paikka muuttuu kappaleen liikuessa. Ekstensiiviset suureet ovat kuitenkin erityisen tärkeitä, koska ne kuvaavat systeemin ominaisuuksia kokonaisuutena, joten tutkitaan nyt tällaisten suureiden muuttumista.

Ekstensiivinen suure mittaa aina jonkin asian *kokonaismäärää*. Esimerkiksi hiukkasten lukumäärä kuvailee niemensä mukaisesti monestako hiukkasesta systeemi koostuu ja tilavuus kuvailee sen avaruuden määrää, jonka systeemi täyttää. Ekstensiivinen suure voikin muuttua neljällä eri tavalla: sitä voidaan tuoda systeemiin lisää, viedä pois, luoda tai hävittää. Yhtälönä tämän asian voi esittää muodossa

$$\Delta a_{\text{ekstensiivinen}} = \Delta a_{\text{tuonti}} + \Delta a_{\text{vienti}} + \Delta a_{\text{luonti}} + \Delta a_{\text{häitys}}. \quad (2.2)$$

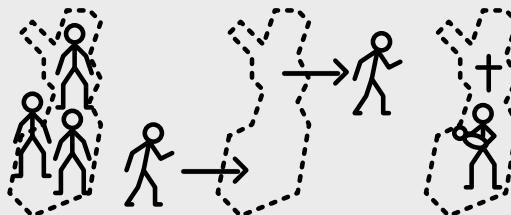
Näistä eri tavoista suuren tuominen systeemiin tai vieminen sieltä pois ovat selkeästi erilaisia tapahtumia kuin luominen ja hävittäminen, sillä tuotaessa tai vietäessä suuretta vain siirtyy ympäristöön ja systeemin välillä kun taas luomisen ja hävittämisen yhteydessä suuren kokonaismäärä muuttuu.

esimerkki 2.2

Ihmisten määrä

Tarkastellaan Suomessa asuvien ihmisten lukumäärää. Millaista systeemiä, ympäristöä ja suuretta tässä tarkastellaan? Millaisissa tapahtumissa tämän suuren kokonaismäärä muuttuu?

Koska suure on rajattu Suomessa asuviin ihmisiin, tarkasteltu systeemi on Suomi ja sen ympäristö ovat kaikki muut maat. Tarkasteltava suure on ihmisten lukumäärä. Rajatulla alueella asuvien ihmisten lukumäärä on myös ekstensiivinen suure, sillä se riippuu tarkasteltavan alueen koosta. Esimerkiksi Etelä-Suomen läänissä asuu vähemmän ihmisiä kuin koko Suomessa, mutta koko Suomen väkiluku on sama kuin kaikkien läänien väkilukujen summa.



Ihmisten määrä Suomessa ei muudu ihmisten muuttaessa maan sisällä, sillä tällöin asukkaiden kokonaismäärä pysyy samana ihmisten vain siirtymessä paikasta toiseen. Ihmisten määrä voi muuttua maahanmuuton ja maastamuuron myötä, sillä tällöin ihmisiä siirtyy Suomen ja ulkomaiden välillä. Nämä edustavat suuren siirtymistä ympäristöstä systeemiin sekä systeemistä ympäristöön. Tällöinkään kuitenkaan systeemin (Suomen) ja ympäristön (ulkomaiden) yhteenlaskettu ihmisten kokonaismäärä ei muudu. Ihmisten määrä voi muuttua myös syntymien ja kuolemien kautta. Nämä edustavat suuren luontia ja hävittämistä, sillä niissä ihmisen ei siirry minnekään vaan ihmisten kokonaismäärä todella muuttuu.

Erityisen tärkeitä ovat ekstensiiviset suureet, joita ei voi luoda eikä hävittää, sillä näiden suureiden mittaama asia voi ainoastaan siirtää systeemin ja ympäristön välillä eikä sen kokonaismäärä voi muuttua. Fysiikassa tällaisten suureiden sanotaan *säilyvän*. Säilyvän suuren kokonaismäärän muutos systeemissä on

$$\Delta a_{\text{säilyvä}} = \Delta a_{\text{tuonti}} + \Delta a_{\text{vienti}}. \quad (2.3)$$

Nimitys "säilyvä" viittaa suuren kokonaismäärään, joka säilyy muuttumattomana. Myös vektorisuureet voivat olla ekstensiivisia säilyviä suureita, mikä tarkoittaa sitä että myös suuren suunta pysyy aina samana.

Systeemin ollessa sellainen, että säilyvä suuretta ei voi siirtää systeemin ja ympäristön välillä eli $\Delta a_{\text{tuonti}} = \Delta a_{\text{vienti}} = 0$, suuren kokonaismäärän systeemissä ei voi muuttua,

$$\Delta a_{\text{säilyvä}} = 0 \quad (2.4)$$

joten sen täytyy olla vakio

$$a = \text{vakio.} \quad (2.5)$$

Edelleen koska suureen derivaatta ajan suhteen on määritelty muutosten osamäärien kautta, myös suureen aikaderivaatta on siis aina nolla

$$\frac{da}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

Riippuu tilanteesta, mikä näistä tavoista esittää suureen säilyminen on käytökelpoisin, mutta joka tapauksessa on syytä tunnistaa näiden kaikkien ilmaisevan samaa asiaa.

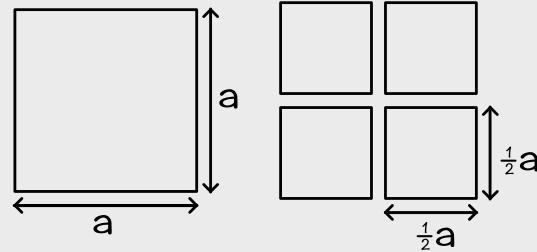
Säilymislaki on fysiikan laki, jonka mukaan fysiikaalinen suure säilyy eli suuretta ei voi luoda tai hävittää. Tällöin suureen *kokonaismäärä* ei muutu ajan kuluessa. Säilymislait ovat erittäin voimakkaita fysiikan periaatteita, koska niiden avulla systeemien käytös voidaan usein analysoida yksinkertaisesti pitämällä kirjaan säilyvien suureiden käyttäytymisestä ilman tarkkaa tietoa systeemin tapahtumista. Jos säilyvän suureen määrä lisääntyy jossakin, sen on välttämättä vähennettävä muualla yhtä paljon. Tai jos systeemi jaetaan osiin, osien on *yhteensä* sisällettävä täsmälleen yhtä paljon säilyvää suuretta kuin alkuperäinen systeemi sisälsi riippumatta jaon suorittamistavasta.

esimerkki 2.3

Paperin säilymislaki

Neliön muotoinen paperi leikataan neljään yhtä suureen neliön muotoiseen osaan kahdella alkuperäisten sivujen suuntaisella leikkauksella. Mikä on osien ympäryysmittojen ja pinta-alojen summa ennen ja jälkeen operaation? Entä jos paperi leikataan mielivaltaisen muotoisiin osiin?

SUUNNITELMA Neliön, jonka sivun pituus on a , ympäryysmitta on $4a$ ja pinta-ala a^2 . Kun paperi leikataan neljään osaan, saadaan neljä uutta neliötä, joiden sivujen pituudet ovat puolet alkuperäisestä.



RATKAISU Alkuperäisen neliön sivun pituus on a , ympäryysmitta $4a$ ja pinta-ala a^2 . Leikkauksen jälkeen on neljä neliön muotoista palaa, joiden kunkin sivun pituus on $a/2$. Näiden palojen ympäryysmitta on siis $2a$ ja pinta-ala $a^2/4$ ja palojen yhteenlaskettu ympäryysmitta on $4 \times 2a = 8a$ ja pinta-ala $4 \times a^2/4 = a^2$. Palojen ympäryysmitta kasvoi mutta pinta-ala pysyi samana. Ympäryysmitta ei siis ole intensiivinen eikä ekstensiivinen suure eikä se säilynyt, mutta pinta-ala on ekstensiivinen säilyvä suure paperin leikkauksessa. (Kaksiulotteiselle kappaleelle pinta-ala on ekstensiivinen aivan samoin kuin kolmiulotteiselle kappaleelle tilavuus on ekstensiivinen suure.)

ARVIOINTI Jos paperi leikataan mielivaltaisiin osiin, osien ympäryysmitasta ei voida sanoa muuta kuin että ympäryysmitta kasvaa (tämän todistaminen jätetään lukijalle). Osien kokonaispinta-ala on kuitenkin aina sama a^2 riippumatta siitä, kuinka paperi on leikattu. Tämä on esimerkki säilymislakien voimasta: Vaikkemme tiedä mitään muuta kuin että paperi on leikattu, silti voidaan olla varmoja, että osien kokonaispinta-ala ei ole muuttunut, mikä on hyvin voimakas reunaehto sille, miten paperi voi leikkauksessa käyttää.

Huomaa kuitenkin vielä, että paperin pinta-ala säilyy vain ideaalisessa leikkauksessa, ja pinta-alaa voidaan hävittää vaikkapa polttamalla paperi. Suureita, jotka säilyvät kaikissa mahdollisissa tapahtumissa on loppujen lopuksi hyvin vähän.



2.2 Tarkastellaan seuraavia systeemejä ja suureita. Millä tavoilla suureet voivat muuttua? Mitkä suureista ovat säilyviä? (a) kasvien määrä puistossa, (b) ilman suhteellinen kosteus huoneessa, (c) rahan määrä lukeutussa kassakaapissa.

2.2 Energia

Kaikki tuntevat nykyään sanan "energia", koska **energia** fysiikaalisena suureena on niin keskeinen modernin yhteiskunnan toiminnassa. Karkeasti ilmaisten energian on jonkinlainen mittari sille, mitä kaikkea systeemi voi tehdä. Ruoka sisältää kemiallista energiota, josta saamme osan itsellemme syömällä. Tämän energian avulla pysymme lämpiminä, pystymme liikkumaan ja ylläpidämme elintoiomintojamme. Käytämme myös koneita, jotka toimivat joko polttoaineiden kemiallisella energialla tai sähkösellä energialla. Tällainen arkinen käsitys energiasta on kuitenkin monin tavoin epätäsmällinen, ja seuraavaksi tutkimme, miten energian voisi määritellä täsmällisemmin ja miten energia toimii fysiikaalisissa ilmiöissä.

Energian säilymlislaki

Puhekielessä sanotaan, että "liikunta kuluttaa energiaa". Tästä voi saada sellaisen käsityksen, että lihasten toiminta vaatii energiota ja että samalla tämä energiaa katoaa. Tämä ei kuitenkaan ole totta. Esimerkiksi ruokaan sitoutunut kemiallinen energia on molekyylien rakenteeseen varastoitunutta energiota. Liikuntasuorituksen aikana aineenvaihduntaan kuuluvat prosessit muuttavat kehoon varastoituneiden molekyylien rakennetta, jolloin niihin varastoitunut kemiallinen energia muuttuu. Liikuntasuorituksen aikana paljon energiota varastotivia molekyylejä pilkotaan, jolloin niihin varastoituneen energian määrä pienenee. Energiaa siis "kuluu" liikuntasuorituksen aikana siinä mielessä, että kemiallinen energiavarasto hupenee.

Kemiallisten energiavarastojen kuluttamisella on kuitenkin myös muita vaikutuksia. Lihakset supistuvat, ja tällä tavalla niihen omistaja voi työntää itsensä tai muut kappaleet liukkeeseen. Lisäksi lihakset lämpenevät liikuntasuorituksen aikana. Herääkin siis kysymys, voisiko liukkeeseen ja lämpöön liittyä myös jonkinlaista energiota, ja voiko näitä erilaisia energian muotoja mitata samalla mittarilla (samalla yksiköllä). Osoittautuu, että vastaus on *kyllä*. Vaikka nämä ilmiöt ovat näennäisesti aivan erilaisia, niitä kaikkia voidaan mitata suurella nimeltä energia, jonka SI-yksikön nimeksi on annettu **joule** (James Joulen mukaan) ja symboliksi J.

Osoittautuu myös, että kun määrittelemme kemiallisen energian ja liike- sekä lämpöenergian mittarit sopivasti, lihasten toiminta lisää lämpö- ja liike-energiaa *täsmälleen yhtä paljon* kuin ne kuluttavat kemiallista energiota. Tässä mielessä lihakset eivät siis todellisuudessa *kuluta* energiota lainkaan vaan ne vain *muuttavat* energiota muodosta toiseen.

Tässä ei vielä sinänsä ole mitään ihmeellistä. Tietenkin saamme tuottua lihaksilla sitä enemmän liikettä ja lämpöä mitä enemmän ruokaa voimme käyttää. Ei siis ole mitenkään ihmeellistä, että voimme määritellä lihasten toimintaa kuvaavan suureen, joka kertoo paljonko liikettä ja lämpöä tietyllä ruokamäärällä saadaan aikaan. Erityiseksi tämän suureen tekee se, että *täsmälleen sama mittari toimii kaikissa muissakin prosesseissa*. Jos meillä on liikkuva kappale, jolla on liike-energiaa, ja vaikkapa pudotamme sen veteen, veden ja kappaleen lämpöenergia lisääntyy täsmälleen yhtä paljon kuin niiden liike-energia vähentyy. Jos poltamme ruoan, muutamme siihen varastoituneen kemiallisen energian suoraan lämpöenergiaksi, ja tällöin lämpöenergian määrä lisääntyy yhtä paljon kuin kemiallisen energian määrä vähentyy.

Vielä tärkeämpää on se, että tämä periaate on voitu yleistää kaikkiin muihinkin ilmiöihin. Voimme nimittäin lämmittää kappaletta myös esimerkiksi valaisemalla sitä kirkkaalla valolla. Tällöin kappaleen lämpöenergia kasvaa ilman, että sen kemiallinen energia tai liike-energia muuttuisi. Tällöin voimme kuitenkin määritellä uuden energian muodon, säteilyenergian (sillä valo on säteilyjä), jolloin lämpöenergian lisääntymisen voi selittää säteilyenergian vähentemällä. Sähköjohtokin lämpenee, kun siinä kulkee sähkövirta. Tämän voimme selittää määrittelemällä sähkövirran kuljettaman sähköisen energian, jolloin johdon lämpeneminen selittyy sillä, että osa sen läpi kulkevan sähkövirran kuljettamasta sähköisestä energiasta muuttuu lämpöenergiaksi. Ja jos sähkövirta kulkee lampun läpi, lamppu lämpenee ja lähetää valoa niin, että lampun lämpöenergian kasvu ja sen lähtämän säteilyenergian määrä on täsmälleen yhtä suuri kuin sähkövirran kuljettaman sähköenergian menetys lampussa. *Aina*, kun energiota on näytänyt katoavan tai syntyvänt itsestään, on löydetty jokin uusi energian muoto, joka on selittänyt havaitut muutokset. Vaikka energian eri muodot voivat lisääntyä ja vähentyä, ei tunneta ilmiöttä, joissa kaikkien eri energian muotojen summa eli **kokonaisenergia**

$$E_{\text{kokonais}} = E_{\text{liike}} + E_{\text{kemia}} + E_{\text{lämpö}} + E_{\text{säteily}} + E_{\text{sähkö}} + \dots \quad (2.7)$$

muuttuisi. *Systeemin* kokonaisenergia voi toki muuttua, sillä energiota voi siirtyä systeemiin ja sen ympäristöön välillä, mutta *systeemin ja sen ympäristön* yhteenlasketun kokonaisenergian täytyy olla aina vakio,

$$\Delta E_{\text{kokonais}} = 0. \quad (2.8)$$

Tämä tulos on **energian säilymlislaki**. Se on kaiken fysiikan tärkeimpä periaatteita, jonka mukaan *energiaa ei voi luoda eikä hävittää*. Energian säilyminen on alunperin päätelty kokeellisesti, mutta nykyisin sillä on myös vankka teoreettinen pohja.

-  2.3 (a) Jos yhdessä hampurilaisessa on kemiallista energiota 2000 kJ, paljonko energiota kahdessa samanlaisessa hampurilaisessa on?
 (b) Jos yksi lamppu tarvitsee 5 J sähköenergiaa sekunnissa, paljonko kaksi samanlaista lamppua tarvitsee?
 (c) Perustele näiden kysymysten perusteella, onko energia ekstensiivinen vai intensiivinen suure.
 (d) Miten energian ekstensiivisyys tai intensiivisyys liittyy siihen, että energia on säilyvä suure?

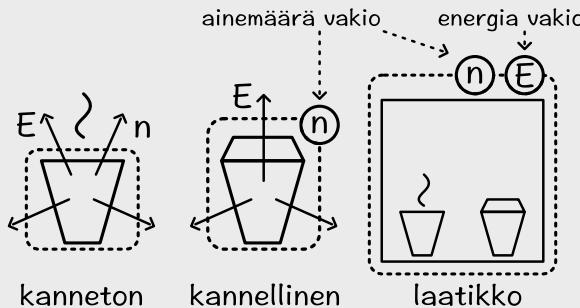
Energian säilymlislaki on tärkeää useastakin syystä. Ensinnäkin energia on kaikkia fysiikan osa-alueita yhdistävä fundamentaali suure. Toiseksi energian säilyminen rajoittaa voimakkaasti sitä, mitä voi tapahtua. Jos käytettävissä on polttoainemääriä, johon on varastoitu 1000 kJ energiota, sillä ei voi kiihdyttää kulkuneuvoa nopeuteen, jossa liike-energia olisi tätä suurempi. Myös ikiliukkujat, jotka liikkuisivat ikuisesti ja joita voitaisiin samalla käyttää hyväksi jotkin, ovat energian säilymisen vuoksi mahdottomia. Jos nimittäin systeemi kasvattaa ympäristönsä energiota, systeemin energian täytyy vähentyä. Kolmanneksi energian säilymläsin avulla voidaan sopivasti valituissa systeemeissä päättää täsmälleen, miten systeemi käyttäätyy.

esimerkki 2.4

Systeemin valinta

Eristetyssä laatikossa on kaksi mukillista kuumaa vettä. Toinen mukeista on kannellinen pahvimuki, toinen kanneton. Millaisin tavoin tilanne voidaan rajata systeemiksi? Onko systeemin ainemäärä tai kokonaisenergia vakioita?

TILANNE Laatikkoon kuuluu nyt kaksi mukia, niiden sisältämät vedet, ilmaa sekä laatikko itse. Mikä tahansa näiden yhdistelmä voidaan valita systeemiksi. Tarkastellaan muutamaa erikoistapausta.



SUUNNITELMA Valitaan systeemiksi kanneton muki sekä sen sisältämä tilavuus. Tilavuus ei itsessään ole mikään kappale, mutta tällä tarkoitetaan systeemiin sisältävän kaiken sen aineen, joka kulloinkin on mukin sisällä. Koska vesi on kuumaa, siihen on varastoitunut lämpöenergiaa. Vesi kuitenkin jäähtyy, jolloin ilmeisesti sen sisältämän energian määrä pienenee,

$$\Delta E_{\text{systeemi}} = \Delta E_{\text{vesi}} + \Delta E_{\text{muki}} < 0. \quad (2.9)$$

Systeemin *kokonaisenergia siis ei ole vakio*. Koska mukissa ei ole kantta, kuumaa vettä muuttuu myös kaasuksi ja poistuu mukista kaiken aikaa ja niinpä mukin sisältämän nestemäisen veden määrä vähenee. Tilalle tulee ilmaa, mutta tarvitaan huomattavasti pienempi määrä ilmaa korvaamaan poistunut neste. Siispä tässä systeemissä myöskään *ainemäärä ei ole vakio*.

Valitaan systeemiksi sitten kannellinen muki sekä sen sisältö eli kuuma vesi. Koska mukissa on kansi, ei sieltä pääse pois vettä eikä ilmaa, joten systeemin sisältämä *ainemäärä on vakio*. Muistutukseksi tästä voidaan tilanteesta piirrettyyn kuvaan merkitä systeemin rajauksen yhteyteen merkintä n osoittamaan ainemäären olevan systeemissä vakio. Kuten kannettoman mukin tapauksessa, nytkin mukissa oleva vesi jäähtyy, sillä lämpöä pääsee virtaamaan mukin seinämien läpi ympäriovään ilmaan ja siis systeemin sisältämä *kokonaisenergia ei ole vakio*.

Tarkastellaan vielä systeemiä, johon kuuluu koko laatikon sisältö ja laatikko itse. Kun kuuma vesi mukissa jäähtyy, sen energiota siirtyy laatikon sisältämän ilman ja laatikon itsensä lämpöenergiaksi. Jos laatikko on hyvin eristetty, lämpöenergia ei kuitenkaan pääse siirtymään laatikon ulkopuolelle. Tällöin veden sisältämä energiamäärä pienenee täsmälleen yhtä paljon kuin ilman ja laatikon sisältämä energia lisääntyy ja systeemin *kokonaisenergia on vakio*

$$\Delta E_{\text{systeemi}} = \Delta E_{\text{vesi}} + \Delta E_{\text{mukit}} + \Delta E_{\text{ilma}} + \Delta E_{\text{laatikko}} = 0. \quad (2.10)$$

Koska laatikko on tiivis, sieltä ei pääse ilmaa ulos ja myös systeemin *ainemäärä on vakio*.

Esimerkissä 2.4 tarkastellaan mahdollisia tapoja rajata systeemi ja systeemin kokonaisenergian huomataan joissakin tapauksissa olevan vakio ja toisissa ei. Jos systeemin ja sen ympäristön välillä voi siirtyä energiota ja ainetta, systeemiä kutsutaan **avoimeksi**. Esimerkissä 2.4 tällainen systeemi oli kanneton muki. Jos systeemistä ei voi siirtää ainetta ympäristöön mutta energiota voi, systeemiä kutsutaan **suljetuksi**. Esimerkissä tällainen systeemi oli kannellinen muki. Systeemi, joka ei voi vaihtaa ainetta eikä energiota ympäristönsä kanssa, on **eristetty** systeemi, ja tällainen oli esimerkin eristetty laatikko.

Jos systeemi on eristetty, se ei voi saada energiota ympäristöstään eikä myöskään menettää sitä. Koska energian säilymislain mukaan energiota ei voi luoda eikä hävittää, energian kokonaismäärän systeemissä on tällöin oltava vakio. Näin saadaan yleisen energian säilymislain erikoistapaus: **eristetyn systeemin kokonaisenergia on vakio kaikissa prosesseissa**,

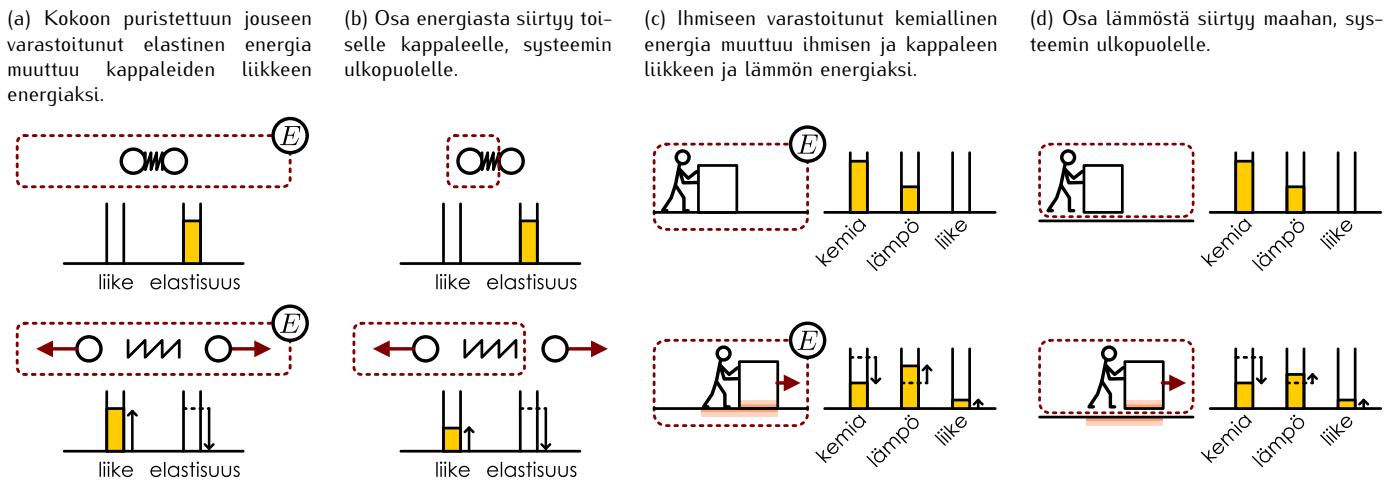
$$\Delta E_{\text{eristetty}} = 0. \quad (2.11)$$



2.4 Laihduttaminen on mahdollista liikkumalla paljon. Valitaan systeemiksi ihminen. Selitä, miten liikunta voi johtaa systeemin energian ja atomien määrän muuttumiseen.

Eritystyn systeemin käyttäytyminen voidaan usein ennustaa varsin tarkasti pitämällä kirja energian eri muodoista, koska niiden summa ei muutu. Tätä kirjanpitotekniikkaa kutsutaan **energiaperiaatteeksi**. Jos nimittäin osaamme laskea systeemin kokonaisenergian määrän yhdellä ajan hetkellä, tiedämme varmasti kokonaisenergian olevan *sama* minä tahansa muunakin aikana riippumatta siitä mitä systeemissä täsmälleen tapahtuu. Erityisesti jos systeemissä vain muutamat energian muodot muuttuvat, voidaan yhden energian lajin muutokset päättää tarkastelemalla *muiden* energian muotojen käyttäytymistä. On hyvin tavallista, että

Kuva 2.3: Energiadiagrammeja erilaisille systeemeille. Kuvissa (a) ja (b) kahden kappaleen välisiin puristettu jousi työntää kappaleet liukkeelle. Kuvissa (c) ja (d) ihminen työntää laatikkoa.



joidenkin energian muotojen määrä on helppo määrittää kun taas toisiin muotoihin varastoitunut energia on vaikea mitata tai laskea. Tällöin voidaan päättää näiden hankalampienkin muotojen sisältämä energia tutkimalla helpommin havaittavia energian lajeja.

Tällaisissa tilanteissa **energiadiagrammi** on hyvä tapa havainnollistaa energian muotojen muutokset. Energiadiagrammi on graafinen esitys, jossa systeemin kokonaisenergian jakautuminen eri muotoihin esitetään esimerkiksi pylväskuvaajana. Tällaisen kuvallisen esityksen avulla on helpompi muistaa huomioida kaikki systeemissä ilmenevät energian muodot ja ennen kaikkea niiden avulla voi suoraan nähdä miten energian eri muodot muuttuvat.

Kuvassa 2.3 on esitetty tällaisia energiadiagrammeja erilaisille systeemeille. Ensimmäisessä esimerkissä jousi on puristettu kahden kappaleen välisiin. Jousen puristamiseen (muodon muutokseen) liittyy elastista energiota, joka muuttuu kappaleiden liikkeen energiaksi päästettäessä jousi oikenemaan. Jos nämä kappaleet eivät vuorovaikuta muiden kappaleiden kanssa, energiota ei voi muuttaa miinhänkään muuhun muotoon ja systeemin kokonaisenergian täytyy olla vakio. Tällöin kappaleiden yhteen lasketun liike-energian on lopuksi oltava yhtä suuri kuin jouseen varastoitunut energia oli alkuksi. Tämä ilmenee energiadiagrammissa siten, että jousen elastinen energia vähenee täsmälleen yhtä paljon kuin liike-energia kasvaa.

Edellinen tarkastelu onnistui siksi, että tarkastelimme eristettyä systeemiä. Systeemin valintahan on miehivaltainen, joten samaa tilannetta voitaisiin tarkastella myös systeeminä, johon kuuluu ainoastaan yksi kappaleista sekä jousi. Tällöin toinen kappale on osa ympäristöä. Tämä on aivan kelvollinen systeemin valinta, mutta koska jousi vuorovaikuttaa molempien kappaleiden kanssa, systeemin ja ympäristön välillä on nyt vuorovaikutus. Kummankin kappaleen nopeus muuttuu jousen vapautuessa, jolloin ympäristön kokonaisenergia muuttuu. Osa alunperin jouseen sitoutuneesta energiasta siis siirryttyy systeemistä ympäristöön eikä systeemin kokonaisenergia ole nyt vakio.

Kolmannessa kuvassa on esitetty tilanne, jossa joku työntää lattialla olevan suuren laatikon liukkeelle. Tässä prosessissa työntäjä kuluttaa varastoimaansa kemiallista energiota lihastensa liikkumiseksi. Laatikko lähtee liukkeelle, jolloin sen liikkeen energia kasvaa. Samalla huomataan myös työntäjän, laatikon sekä lattian lämpenevän, mihin liittyy lämpöenergiaa. Kun kaikki liikkuvat ja lämpenevät kappaleet ovat mukana tarkasteltavassa systeemissä, ympäristöön jää ainoastaan asioita, joihin laatikon työntäminen ei vaikuta mitenkään. Energiaa ei siis siirry systeemistä ympäristöön ja systeemin kokonaisenergia on vakio. Prosessissa muuttuu toisikseen kolme energian muotoa — liike-energia, lämpöenergia sekä kemiallinen energia — mutta näiden summa pysyy samana. Diagrammissa tämä ilmenee niin, että kemiallinen energia vähenee yhtä paljon kuin lämpöön ja liikkeeseen liittyvät energiat yhteensä lisääntyvät.

Jos energiaperiaatetta käytetään, on aina oltava huolellinen systeemin valinnassa ja tarkistettava, että valitussa systeemissä energia on todella vakio. Jos nimittäin äskeisessä esimerkissä vaikkapa lattia jähetään systeemin ulkopuolelle, lattian lämmöksi muuttuva energia ei enää kuuluaan systeemiin eli systeemin kokonaisenergia pienenee vaikka systeemin ja ympäristön yhteenlaskettu energia ei muutukaan.



2.5 Muovailuvahapallo heitetään seinään, johon se tarttuu kiinni. Kun pallo vielä liikkui ennen seinää osumista, sen liikkeeseen liittyi energiaa. Onko systeemin kokonaisenergia vakio, jos systeemi on (a) pelkkä vahapallo, (b) pallo ja seinä? (c) Millaisiin muotoihin pallon liikkeen energiasta saatoi muuttua?

Liikkeen ja painovoiman energia

Edellä puhuimme energiaperiaatteesta yleisellä tasolla, mutta jotta energiaa voisi todella käyttää fysikaalisten prosessien analyysin työkaluna, meidän täytyy ensin määritellä erilaiset energian muodot täsmällisesti. Erityisesti haluamme laskea systeemien energiasisällön eri tilanteissa. Koska mekaanikassa tutkimme pääasiassa kappaleiden liikettä, keskitymme aluksi kappaleiden nopeuksista, paikoista ja muodoista riippuviin energian muotoihin.

Aloitetaan tutkimalla putoamislukettä, koska kappaleen 1.5 pohjalta osaamme jo analysoida vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen liikkeen. Erityisesti johdimme yhtälön (1.37) eli $\Delta(v_x^2) = -2g\Delta x$, jonka mukaan pystysuorassa vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen nopeuden neliön muutos $\Delta(v_x^2)$ on aina verrannollinen kappaleen paikan muutokseen Δx riippumatta siitä, miltä korkeudelta kappale putoaa tai onko kappaleella alkunopeutta. Erityisesti tulos pätee riippumatta siitä, liikkumuksen kappale ylöspäin, alas päin tai kenties edestakaisin molempien suuntiin liikkeensä aikana.

Koska tutkimme nyt nimenomaan suureiden muutoksia, kerrataan muutamia muutosten laskusääntöjä. Ensinnäkin, jos k on vakio ja suure a muuttuu määränpäin Δa eli $a_{\text{loppu}} = a_{\text{alku}} + \Delta a$, tulo ka saa arvon $k a_{\text{loppu}} = k(a_{\text{alku}} + \Delta a) = k a_{\text{alku}} + k \Delta a$. Siispä tulon ka muutos on

$$\Delta(ka) = k a_{\text{loppu}} - k a_{\text{alku}} = k \Delta a. \quad (2.12)$$

Vakion ja muuttuvan suureen a tulon muutos on siis yhtä suuri kuin vakion ja a :n muutoksen tulo.

Samoin jos kaksi suuretta a ja b muuttuvat, niiden summa saa arvon $a_{\text{loppu}} + b_{\text{loppu}} = a_{\text{alku}} + \Delta a + b_{\text{alku}} + \Delta b$, ja näin ollen suureiden summan muutos on yhtä suuri kuin niiden muutosten summa,

$$\Delta(a + b) = (a_{\text{loppu}} + b_{\text{loppu}}) - (a_{\text{alku}} + b_{\text{alku}}) = \Delta a + \Delta b. \quad (2.13)$$

Käytetään näitä laskusääntöjä yhtälö (1.37) voidaan putoamislukkeen tapauksessa (kun putoaminen tapahtuu tyhjiössä tai kappaleen vuorovaikutusta sitä ympäröivän ilman kanssa ei huomioida) kirjoittaa muotoon

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2\right) = -\Delta(gx) \quad (2.14)$$

ja edelleen siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle

$$\Delta\left(\frac{1}{2}v_x^2 + gx\right) = 0, \quad (2.15)$$

mikä siis tarkoittaa sitä, että nopeuden neliön ja kappaleen paikkakoordinaatin summa, kertoimien $1/2$ ja g kanssa, on *vakio*.

Näin johdettuna tulos voi vaikuttaa vain matemaattiselta tempulta, mutta se antaa meille vihjeen paljon syvällisemmästä fysikaalisesta yhteydestä, joten pohditaan tulosta tarkemmin. Ensinnäkin tulos yhdistää kappaleen vauhdin ja sen korkeuden niin, että syntyy vakiona pysyvä lauseke. Toisaalta jos valitsemme systeemiksi putoavan kappaleen ja maapallon, tämä systeemi sisältää kaiken, mikä putoamisessa muuttuu (kappaleen nopeus ja sen etäisyys maasta). Putoaminen on sisäprosessi, joka vaikuttaa vain valitun systeemin sisällä, ja niinpä energian säilymislain perusteella tämän systeemin kokonaisenergian täytyy myös olla vakiona pysyvä lauseke. Ehkä sisä yhtälössä 2.15 esiintyvä lauseke liittyy systeemin kokonaisenergiaan!

Yhtälön ensimmäinen termi riippuu vain kappaleen nopeudesta, ja se on sitä suurempi, mitä nopeammin kappale liikkuu. Tämän termin voi siis tulkitä liittyvän kappaleen liikkeen energiaksi. Yhtälön toinen termi puolestaan riippuu putoamiskiertyvyydestä ja kappaleen korkeudesta. Putoamiskiertyvyys on painovoiman ominaisuus, joten ilmeisesti tämä termi kuvailee jotakin *painovoimaan varastoituvaa energiota*.

Yhtälössä (2.15) esiintyvä lauseke ei kuitenkaan voi kuvata systeemin energiasta täsmälleen vaan se on ainoastaan siihen verrannollinen lauseke. Nopeus ja paikkakoordinaatti ovat nimitään *intensiivisiä* suureita, joten lausekkeen kuvamaa suure on myös intensiivinen. Lausekkeen arvohan ei riipu mitenkään siitä, koostuuko tarkasteltava systeemi vaikkapa hiekanjyvästä vai kivenlohkareesta.

Energia on kuitenkin *ekstensiivinen* suure kuten kaikki säilyvät suureet. Jos meillä olisi esimerkiksi kaksi samanlaista, samalla nopeudella liikkuvaa kappaletta, niillä pitäisi olla kaksinkertainen energia yhteen kappaleeseen verrattuna. Samoin arkikokemuksesta tiedämme, että on raskaampaa nostaa monta kappaletta kuin vain yksi, koska kaksi kappaletta ovat yhdessä *painavammat* kuin yksi. Niinpä myös painovoiman energian täytyy riippua siitä, paljonko ainetta on. Yhtälöstä (2.15) puuttuu siis jokin kappaleen kokoon ja määrään liittyvä tekijä, joka kertoo tarkasteltavan aineen määrästä. Tämä tekijä on kappaleen **massa**. Massa on SI-järjestelmän perussuure, jonka yksikkö on **kilogramma** (kg).

Massalla on fysiikassa kaksi toisistaan täysin poikkeavaa roolia. Ensinnäkin massiiviset kappaleet ovat *painavia*, mikä tarkoittaa karkeasti ilmaisten siitä, että niiden nostaminen *ylöspäin* on vaikeaa. Arkikielessä yleensä puhutaankin kappaleen painosta, kun tarkoitetaan sen massaa. Toisaalta massiiviset kappaleet ovat

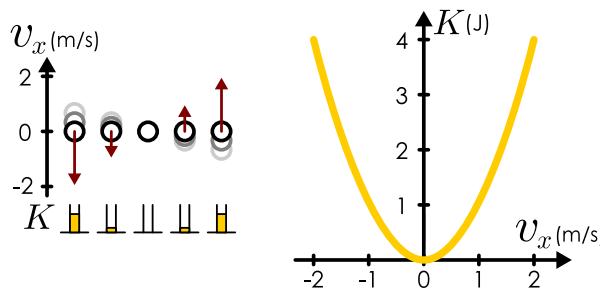
hitaita, mikä tarkoittaa karkeasti sitä, että suuren nopeuden antaminen kappaleelle on vaikeaa *mihin tahansa suuntaan*. Jälkimmäistä ominaisuutta eli massan hitautta kutsutaan fysiikassa **inertiaksi**. Nämä voivat vaikuttaa samankaltaisilta asioilta mutta niillä on täysin erilainen fysikaalinen merkitys. Nostaminen lüttyy kappaleen *paikan muuttamiseen* ja erityisesti kappaleen siirtämiseen pois päin maanpinnasta (eli yhtälössä 2.15 suureen x muutokseen). Nostaminen on vaikeaa, koska maa ja kappale vuorovaikuttavat *painovoiman* eli **gravitaation** kautta, ja kappaleen siirtäminen pois päin varastoi energiaa gravitaatiovuorovaikutukseen. Painava massa kuvaa tämän vuorovaikutukseen voimakkuutta. Kappaleen liikkeelle saaminen puolestaan lüttyy *nopeuden muuttamiseen* (eli yhtälössä 2.15 suureen v_x muutokseen), mikä on aivan yhtä vaikeaa vaikka kappale olisi tyhjässä avaruudessa kaukana Maapallosta. Nykytietämyksen mukaan inertia ja painava massa ovat kuitenkin täsmälleen samat kaikilla hiukkasilla ja kappaleilla.



2.6 Jos otat käteesi esimerkiksi kuulantyönnössä käytettävän painavan kuulan ja työnnät sen liikkeelle (a) suoraan vaakasuoraan tai (b) suoraan ylös, mikä massan ominaisuus pääasiassa rajoittaa nopeutta, jonka pystyt kuulalle antamaan?

Kuva 2.4: Liike-energia.

(a) Eri nopeudella liikkuvat kappaleet. (b) Liike-energia nopeuden funktiona.



Kappaleen liikkeeseen liittyy energiaa, joka riippuu kappaleen inertialta, sillä mitä suurempi on kappaleen inertia, sitä enemmän energiaa tarvitaan, jotta kappale saataisiin kiihytettyä johonkin nopeuteen v_x . Niinpä kappaleen, jonka inertia on m , **liike-energia** eli **kineettinen energia** K on yhtälön (2.15) ensimmäinen termi kerrottuna kappaleen massalla m ,

$$E_{\text{liike}} = K = \frac{1}{2}mv_x^2. \quad (2.16)$$

Tästä yhtälöstä voimme yksikkötarkastelulla myös määrittää energian yksikön joulen Si-järjestelmän perusyksiköiden avulla lausuttuna,

$$J = [K] = [m][v_x^2] = \text{kg}\text{m}^2/\text{s}^2. \quad (2.17)$$

Kertomalla koko yhtälö (2.15) kappaleen massalla saadaan siis varsinainen putoavan kappaleen energian säilymislaki

$$\Delta \left(\frac{1}{2}mv_x^2 + mgx \right) = 0. \quad (2.18)$$

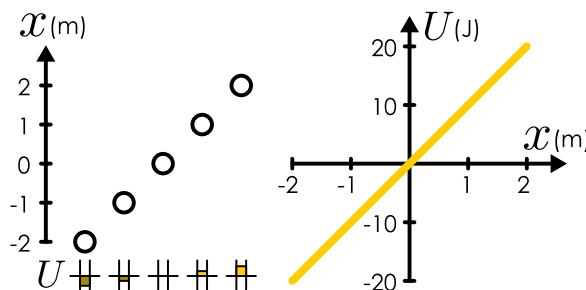
Yhtälön jälkimmäinen termi on kappaleen ja maan välisen painovoiman varastoima energia, jota kutsutaan fysiikassa **potentiaalienergiaksi** ja merkitään tavallisesti symbolilla U

$$E_{\text{potentiaali}} = U = mgx. \quad (2.19)$$

Nimitys viittaa siihen, että tällä varastoidulla energialla voidaan esimerkiksi saada kappale liikkeelle — sillä on siis "potentiaalia" saada prosesseja tapahtumaan. Yhtälössä (2.19) massa ilmaisee sitä, että painavan kappaleen nostaminen vaatii paljon energiaa.

Kuva 2.5: Painovoiman potentiaalienergia.

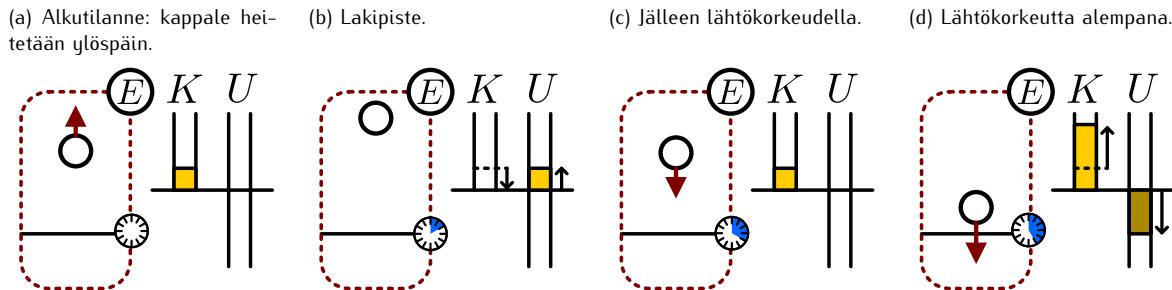
(a) Eri korkeudella olevat kappaleet. (b) Potentiaalienergia paikan funktiona.



Kuvassa 2.6 on esitetty jo aiemmin luvussa 1.5 analysoitu pystysuora heitto energiadogrammein. Heitetyn kappaleen sekä Maan sisältävän systeemin kokonaisenergia on heiton aikana vakio, sillä liike-energia on kappaleen liikkeen ominaisuus ja painovoiman potentiaalienergia on maan ja kappaleen vuorovaikutuksen varstoimaa energiaa. Nämä kuuluvat systeemiin, jossa ovat sekä kappale että maa.

Liike-energia riippuu kappaleen nopeuden neljästä, joten se ei voi koskaan olla negatiivinen. Erityisesti *liike-energian etumerkki ei riipu nopeuden suunnasta kuten nopeuden skalaarikomponentti*. Potentiaalienergia puolestaan riippuu kappaleen koordinaatista pystysuunnassa. Koordinaatti kuitenkin mitataan

Kuva 2.6: Energiadiagrammi pystysuoralle heitolle.



aina jonkin kiintopisteen suhteen, ja tämä kiintopiste voidaan valita periaatteessa minne tahansa. Potentiaalienergia saa kohdassa $x = 0$ m arvon nolla, joten kiintopisteen valinta kiinnittää myös potentiaalienergian nollataso, ja tämän alapuolella *potentiaalienergia on negatiivinen*. Potentiaalienergian absoluuttisella arvolla ei olekaan mitään fysikaalista merkitystä, vaan ainoastaan potentiaalienergian *muutokset* ovat merkityksellisiä. Heittoliukien tapauksessa potentiaalienergian nollataso voidaan valita esimerkiksi kappaleen lähtöpisteesseen, mutta tämä ei ole ainoa mahdollinen valinta.

Jos potentiaalienergian nollakohdaksi valitaan kappaleen lähtöpiste, ylöspäin heitettylä kappaleella on aluksi liike-energia $K = \frac{1}{2}mv_x^2$ eikä lainkaan potentiaalienergiaa. Ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergia kasvaa ja liike-energia pienenee niin, että kokonaisenergia on koko ajan vakio. Koska liike-energia ei voi saada negatiivisia arvoja, kappale pääsee täsmälleen niin korkealle, että kaikki sen alkuperäinen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi, jolloin sen nopeus on nolla. Tämän jälkeen kappale putoaa jälleen alas päin ja päästää takaisin lähtökorkeudelleen sen potentiaalienergia on jälleen nolla ja sen liike-energia on sama kuin alkuperäinen. Kappaleen vauhtikin on siis tällöin yhtä suuri kuin heiton alussa.

Kappaleen jatkaessa putoamistaan lähtötasona alapuolelle sen potentiaalienergia pienenee edelleen saaden nyt *negatiivisia* arvoja. Tässä ei ole mitään ihmeeelistä, sillä potentiaalienergian nollakohta riippuu koordinaatiston origon valinnasta. Potentiaalienergian negatiiviset arvot eivät siten tarkoita fysikaalisesti sen enempää kuin paikkakoordinaatin negatiiviset arvot: ne ainoastaan kertovat siitä, että kappale on nyt liikkunut valitusta origosta negatiiviseen suuntaan. Oleellista on se, että liike-energia aina kasvaa täsmälleen yhtä paljon kuin potentiaalienergia pienenee. Kappaleen liikkeessä liike-energian kasvu ilmenee kappaleen nopeuden kasvamisenä. Kuitenkin koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, kappaleen nopeus kasvaa *hitaammin* kuin liike-energia.

2.7 Miten kuvan 2.6 heittoliukien (i) energiadiagrammi ja (ii) pallon rata muuttuvat, jos

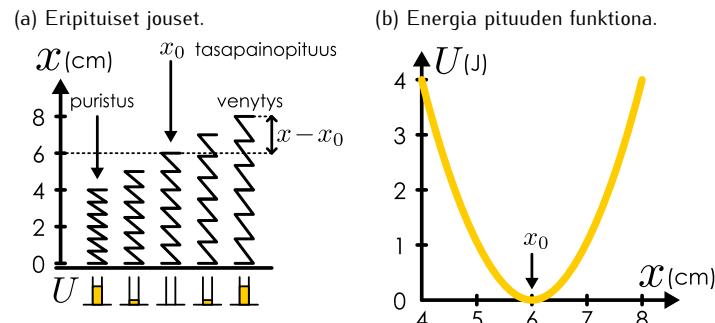
- (a) pallon alkuopeus on kaksinkertainen,
- (b) potentiaalienergian nollakohta valitaan heiton lakipisteesseen?
- (c) vuorovaikutus ilman kanssa muuttaa osan pallon liike-energiasta lämpöenergiaksi heiton aikana?

Elastinen energia

Kappaleen muodon muuttaminen on myös energiavaativa prosessi, ja toisaalta esimerkiksi puristetun jousen avulla voi laukaista kappaleen liikkeelle. Siispä mistä ilmeisimmin jousi tai mikä tahansa muu sopivasti taipuisa kappale kykenee varastoimaan energiota muuttamalla muotoaan. Tälläista itsestään palautuvaa tai-puissutta kutsutaan fysiikassa *elastisuudeksi* ja jouseen varastoitunut energia on *elastista potentiaalienergiaa*. Kunhan jouta ei venytetä liukaa, *ideaalinen jousi* varastoikin kaiken sen puristamiseen tai venyttämiseen tarvitun energian ja voi vapauttaa sen takaisin liike-energiaksi.

Jos jouta ei puristeta eikä venytetä, se on niin sanotussa *lepopituudessaan*. Koska jousi ei tällöin pyri itsestään muuttamaan pituuttaan, tästä kutsutaan myös jousen *tasapainopituudeksi*. Jouta voidaan yleensä sekä puristaa lyhyemmäksi että venyttää pidemmäksi, ja molemmat muutokset vaativat energiota, joten

Kuva 2.7: Elastinen potentiaalienergia.



jousen potentiaalienergia on *pienimmillään* jousen ollessa lepopituudessaan. Tästä syystä jousen potentiaalienergian nollakohdaksi yleensä valitaankin juuri jousen lepopituus. Itse asiassa ideaalisen jousen pituuden muuttaminen vaatii *yhtä paljon* energiää olipa kyseessä puristus tai venytys. Mitä enemmän jousen pituutta muutetaan, sitä enemmän energiää tarvitaan, eikä kyseessä itse asiassa ole edes suora verrannollisuus vaan suurien venymien aikaansaaminen on tavallisesti huomattavasti vaikeampaa kuin pienten.

Todellisen jousen potentiaalienergia voi riippua jousen pituudesta monimutkaisellakin tavalla. Kuitenkin yksinkertaisin matemaattinen funktio, jolla on edellä kuvatut elastisen potentiaalienergian ominaisuudet, on toisen asteen polynomi eli paraabeli. Niinpä jousten ja muidenkin elastisten kappaleiden varastoimaa potentiaalienergiaa kuvataan yleensä tällä yksinkertaisella mallilla,

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, \quad (2.20)$$

jota kutsutaan myös *harmoniseksi potentiaalienergiaksi*. Tässä k on jousen jäykkyyttä kuvaava **jousivakio**, x on jousen pituus ja x_0 sen lepopituus. Etäisyys $x - x_0$ on siis jousen normaalista pituudesta mitattu venymä. Sen positiivinen arvo kuvaaa jousen venymistä pidemmäksi ja negatiivinen arvo puristumista lyhyemmäksi. Funktio U on nolla, kun venymä on nolla, ja se saa yhä suurempia positiivisia arvoja, kun jouta joko puristetaan tai venytetään. Tämä tarkoittaa jousen varastoivan yhä enemmän energiää mitä enemmän sitä puristetaan tai venytetään, kuten kuvasta 2.7 nähdään. Mitä suurempi jousivakio k on, sitä enemmän energiää jousen pituuden muuttaminen vaatii eli sitä *jäykempi* jousi on.

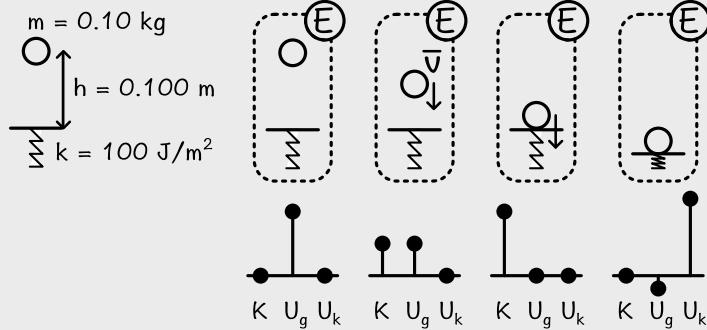
2.8 Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä siitä, miten kappaleen liike- ja potentiaalienergia (painovoima sekä elastisuus) voidaan laskea. Selitä myös, mikä on energiadiagrammi sekä miten esimerkiksi kappaleen nopeus voidaan ratkaista energiadiagrammin ja energiaperiaatteen avulla.

esimerkki 2.5

Gravitaation ja jousen energia

Kappale pudotetaan levosta korkeudelta 0.100 m pystysuoran jousen päälle. Jousen jousivakio on 100 J/m^2 ja kappaleen massa 0.10 kg. Kuinka paljon jousi enimmillään puristuu?

TIANNE Valitaan systeemiksi kappale, jousi ja Maa. Tällöin systeemin kokonaisenergia koostuu kappaleen liike-energiasta, painovoiman potentiaalienergiasta sekä jousen potentiaalienergiasta. Asetetaan vielä gravitaation potentiaalienergian nollakohta korkeudelle, jolla kappale juuri koskettaa joustaa. Piirtäään putoamisesta energiadiagrammi helpottamaan kirjanpitoa eri energian muotojen muutoksille.



SUUNNITELMA Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Tällöin, koska ainoastaan kappale ja jousi liikkuvat putoamisen aikana, valitun systeemin kokonaisenergia on vakio eli liike-energian ja potentiaalienergian summa on lopussa, jousen puristuttua sama kuin alussa, kappaleen lähiessä liikkeelle.

Aluksi kappale on paikoillaan, joten sillä on vain potentiaalienergiaa. Pudotuksen aikana osa potentiaalienergiasta muuttuu liike-energiaksi. Kun kappale putoaa jousen päälle, jousi puristuu varastoiden kappaleen liike-energiaa potentiaalienergiaksi. Lopulta kappale pysähtyy ja jousi heittää kappaleen jälleen ylöspäin. Jousen maksimaalinen puristuma saavutetaan kappaleen pysähtyessä, ennen kuin jousi alkaa jälleen nostaa kappaleta ylöspäin. Kappaleen ollessa paikoillaan sen liike-energia on jälleen nolla, joten gravitaation ja jousen potentiaalienergoiden summan täytyy olla sama kuin liikkeen alussa. Erityisesti kappaleella on lopuksi hiukan negatiivista gravitaation potentiaalienergiaa, joten jousen potentiaalienergia on suurempi kuin kokonaisenergia oli alussa.

Kappaleen liike-energia on

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.21)$$

missä v on kappaleen nopeus. Kappaleen pudotessa sen gravitaatiopotentiaalienergia on

$$U_{\text{gravitaatio}} = mgx, \quad (2.22)$$

missä x on jousen yläpäästä mitattu pystysuora etäisyys. Jousi puristuu vasta kappaleen kohdateissa sen, joten jousen potentiaalienergia on

$$U_{\text{jousi}} = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Kappaleella on ennen pudotusta ainoastaan gravaation potentiaalienergia $E_{\text{alku}} = mgh$, missä h on kappaleen lähtöpisteen koordinaatti eli pudotuskorkeus. Energian säilymislaki saa näin ollen muodon

$$K + U_{\text{gravitaatio}} + U_{\text{jousi}} = E_{\text{alku}} = mgh. \quad (2.24)$$

Kun jousi on puristunut ja kappale on jälleen pysähtynyt, kappaleen paikkakoordinaatti on negatiivinen, $x < 0$, ja tämä on myös jousen venymä, koska origoksi valittiin jousen tasapainoasema. (Eli jousen puristuma on $-x > 0$.) Kokonaisenergian säilyminen saa yhtälönä muodon

$$mgx + \frac{1}{2}kx^2 = mgh \quad (2.25)$$

huomioiden että liike-energia on nolla, $K = 0$, kun kappale on ratansa alimmassa pisteessä. Tästä voidaan ratkaista paikka x .

RATKAISU Kyseessä on toisen asteen yhtälö muuttujan x suhteeseen, jonka ratkaisut ovat

$$x = -\frac{gm}{k} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right). \quad (2.26)$$

Koska ratkaisun pitää olla negatiivinen, fysiikalisesti oikea valinta on

$$x = -\frac{gm}{k} \left(1 + \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right), \quad (2.27)$$

sillä $\sqrt{2hk/(gm) + 1} > 1$.

Annetuilla lukuarvoilla kappaleen alimaksi paikaksi saadaan

$$x = -\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.10 \text{ kg}}{100 \text{ J/m}^2} \left(1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0.100 \text{ m} \cdot 100 \text{ J/m}^2}{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.10 \text{ kg}} + 1} \right) = -0.055 \text{ m}. \quad (2.28)$$

Jousen maksimipuristuma on siis $-x = 5.5 \text{ cm}$.

```
Mathematica:
(* energioiden lausekkeet *)
ualku = m g h;
ugrav = m g x;
ujousi = 1/2 k x^2;

(* ratkaistaan paikkakoordinaatti,
kun potentiaalienergia on sama kuin alussa *)
pohja = Solve[ ugrav + ujousi == ualku, x]
{{x -> (-g m - Sqrt[g m (2 h k + g m)])/k},
 {x -> (-g m + Sqrt[g m (2 h k + g m)])/k}}

(* sijoitetaan lukuarvot *)
pohja /. {g -> 9.8, m -> 0.1, k -> 100, h -> 0.1}
{{x -> -0.0551436}, {x -> 0.0355436}}
```

ARVIOINTI Ratkaisun järkevyyttä voidaan arvioida yksikkötarkastelulla:

$$[x] = \frac{[g][m]}{[k]} = \frac{\text{kgm/s}^2}{\text{J/m}^2} = \frac{\text{kgm/s}^2}{\text{kg/s}^2} = \text{m}. \quad (2.29)$$

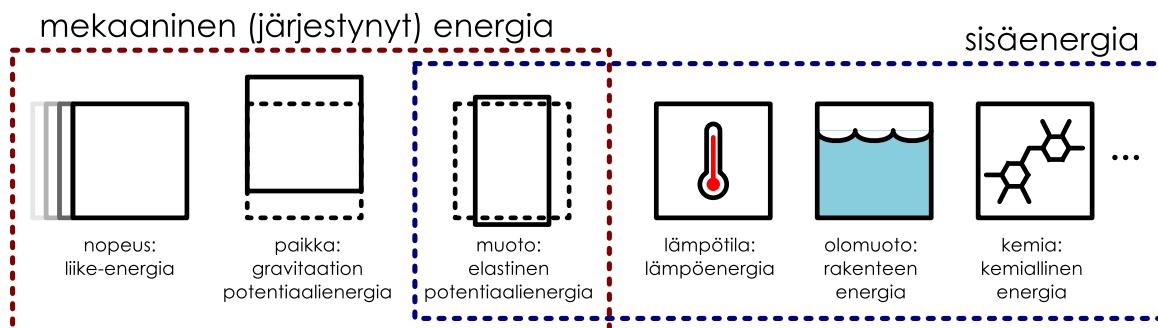
Ratkaisulla on siis pituuden yksikkö kuten pitääkin. Lisäksi neljäjuurilausekkeen sisältämän termin $\frac{2hk}{gm}$ täytyy olla paljas luku, koska se lasketaan yhteen ykkösen kanssa. Sitä se on, koska $[h][k/(gm)] = \text{m} \cdot 1/\text{m} = 1$.

Voimme tutkia myös ratkaisuna saadun lausekkeen raja-arvoja. Tarkastellaan tilannetta, jossa jousi on hyvin jäykki (k on suuri) tai kappale on hyvin kevyt (m on pieni). Jos jäykän jousen päälle pudotetaan kevyt kappale, jousi puristuu hyvin vähän ja kappale pomppaa välittömästi takaisin ilmaan. Tätä vastaa raja-arvo $m/k \rightarrow 0$, joka voidaan laskea kirjoittamalla ratkaisu muotoon

$$x = -\frac{gm}{k} \left(1 + \sqrt{\frac{2hk}{gm} + 1} \right) = -\frac{gm}{k} - \sqrt{\frac{2hgm}{k} + \frac{g^2m^2}{k^2}} \rightarrow 0. \quad (2.30)$$

Hyvin jäykki jousi ei siis puristu, kuten pitääkin.

Kuva 2.8: Mekaaninen energia eli liike- ja potentiaalienergia on järjestynytä energiaa. Sisäenergiaa ovat kappaleen tilasta riippuvat energian muodot.



2.3 Energian laatu

Mekaaninen energia ja sisäenergia

Kappaleen nostaminen ylöspäin lisää kappaleen potentiaalienergiaa, joten tämä on yksi mahdollinen tapa *varastoida energiota*. Tätä periaatetta voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi vesivoimalaitoksissa. Varastoimalla vettä esimerkiksi patoaltaaseen voidaan samalla varastoida energiota veden potentiaalienergiaksi. Tarvittaessa vettä voidaan sitten juoksuttaa padossa olevan voimalaitoksen läpi, jolloin veden potentiaalienergia muuttuu ensin veden liike-energiaksi. Liukkuva vesi puolestaan pyörittää generaattoreita, jolloin osa liike-energiasta muuttuu sähköiseksi energiaksi. Sähköön avulla energiota on helppo siirtää edelleen käytettäväksi muihin tarkoituksiin.

Myös elastisiin kappaleisiin voi varastoida energiota puristamalla, venytämällä tai taivuttamalla niitä. Tätä tekniikkaa on käytetty iät ja ajat esimerkiksi jousipyssyissä, joissa jousta jännitetessä ampujan lihasten kemiallinen energia varastoituu jousen kaaren elastiseen muodonmuutokseen. Jousen vapautuessa tämä elastinen energia muuttuu nuolen liike-energiaksi.

Kappaleiden liike-energialla ja edellä kuvatuilla potentiaalienergian eri muodoilla on se yhteinen piirre, että ne voidaan havaita makroskooppisesti. Voimme nähdä suoraan onko pallo korkealla vai matalalla, liikuuko se nopeasti vai hitaasti ja onko se mahdollisesti myös puristunut kasaan. Koska nämä energian muodot liittyvät makroskooppisten kappaleiden paikkaan, nopeuteen ja muotoon, niitä kutsutaan yhteisnimellä **mekaaninen energia**.

Mekaanisella energialla on toinenkin merkittävä erityispiirre: mekaanisen energian eri lajit voivat muuttua helposti toisikseen. Esimerkiksi ylöspäin heitetyn pallon liike-energia muuttuu pallon potentiaalienergiaksi pallon noustessa, koska pallon vauhti pienenee ja korkeus lisääntyy. Potentiaalienergia puolestaan muuttuu jälleen liike-energiaksi pallon laskeutuessa alas päin. Pallon heitolle aikaisemmin päätelty energian säilymislaki (2.18) voidaan siis kirjoittaa myös muotoon

$$E_{\text{kokonaista}} = E_{\text{liike}} + E_{\text{potentiaali}} = K + U = \text{vakio.} \quad (2.31)$$

Yllä esitetyt periaatteet toimivat myös muiden vuorovaikutusten kuin gravaation kohdalla, *jos vuorovaikutukset voidaan kuvata potentiaalienergialla* eli funktiolla, joka kuvailee vuorovaikutuksen varastoimaa energiota ja riippuu ainoastaan kappaleiden paikoista, asennoista tai muodoista. Tämä on energian säilymislain tärkeä erikoistapaus: *Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa ainoastaan sellaisia vuorovaikutuksia, joihin liittyy potentiaalienergia, systeemin mekaaninen energia eli liike-energian ja potentiaalienergian summa $K + U$ on vakio.*

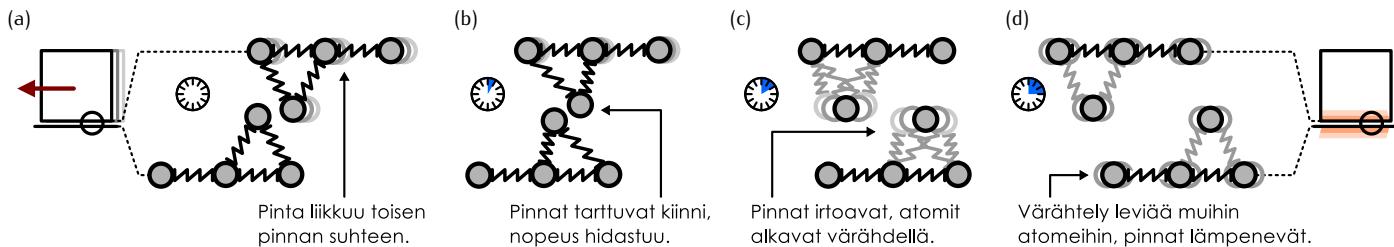


2.9 Uimahyppääjä hyppää ponnahduslaudalle, ponnistaa tästä hyvin korkealle ilmaan tehden voltin ja sukeltaa lopulta veteen. Millaisia energian muotojen muutoksia tähän prosessiin liittyy? Jos systeemi on hyppääjä, lauta sekä vesi, missä prosessin vaiheissa systeemin mekaaninen energia on ainakin likimain vakio?

Koska mekaanista energiota on helppo varastoida ja vapauttaa liikkeeksi, sen hyödyntäminen on melko yksinkertaista. Ennen höyrykoneiden keksimistä melkein kaikki laitteet kelloista purjelaivoihin perustuvatkin joko "lihasvoimaan" eli kemialliseen energiassa tai mekaaniseen energiassa. Kaikki energian muodot eivät kuitenkaan muudu noin vain toisikseen. Jos esimerkiksi muovailuvahasta tehty pallo putoaa lattialle, se pysähtyy lattiaan osuessaan, jolloin pallon liike-energia muuttuu muihin, ei-makaanisiin muodoihin. Seuraavaksi tarkastelemmekin millaisia muita muotoja energialla on ja millaisia ominaisuuksia energian eri muodoilla on.

Aloitimme energian tarkastelun luettelemalla energian muotoja kuten kemiallisen energian ja lämpöenergian. Nämä energian muodot poikkeavat mekaanisesta energiasta siinä, että ne liittyvät ilmiöihin, joita ei voi

Kuva 2.9: Yksinkertainen malli kitkan toiminnasta kahden liikkuvan kappaleen rajapinnalla. Pallot kuvaavat atomeja ja niiden väliset "jouset" atomisidoksia.



suoraan nähdä. Kemiallinen energia on aineiden kemialliseen koostumukseen eli niiden molekyylien rakenneeseen varastoitunutta energiota. Lämpöenergia on puolestaan aineen kuumuuteen liittyvä energia. Näiden energiamuotojen mittaaminen vaatii siis enemmän tietoa kappaleista kuin vain missä ne ovat ja miten ne liikkuvat. Periaatteessa systeemin kaikkien energiamuotojen määrittäminen vaatisi sitä, että tunnemme systeemin kaikki ominaisuudet mukaan lukien niiden sisäisestä rakenteesta riippuvat näkymättömät ominaisuudet. Fysiikassa tälläistä systeemin täydellistä kuvausta kutsutaan **tilaksi**. Toisin sanoen tilan käsite sisältää paikan ja nopeuden lisäksi *kaikki* systeemin fysikaaliset ominaisuudet kuten kappaleiden muodon, kemiallisen koostumuksen, lämpötilan jne. Monet energian muodot liittyvät systeemin tilaan, ja energian muutokset voivat ilmetä kappaleiden liikkeen muutosten lisäksi myös niiden tilan muutoksena.

Fysiikassa kappaleen tilaan liittyvä "näkymätöntä" energiota kuten kemiallista energiota ja lämpöenergiota kutsutaan **sisäenergiaksi**. Nimitys viittaa siihen, että tämä energia on "piilossa" kappaleen sisällä. Kappaleen makroskooppiseen liikkeeseen liittyvä liike-energia ei ole sisäenergiaa kuten ei ole esimerkiksi painovoiman potentiaalienergiakan, sillä nämä eivät riipu kappaleen sisäisistä ominaisuuksista. Elastinen energia sen sijaan voidaan laskea sisäenergaksi, koska kappaleen puristaminen ja venytäminen muuttaa myös atomien keskinäisiä etäisyyskiä aineen sisällä, ja elastinen energia onkin itse asiassa näiden atomien välisen sidosten potentiaalienergiaa.

2.10 Kappale on aluksi paikoillaan, mutta lähee liikkeelle. Missä seuraavista tapauksista kappaleen saama liike-energia on peräisin jonkin toisen kappaleen mekaanisesta energiasta ja missä sisäenergiasta? (a) Kappale putoaa. (b) Kappale työnetään käsin liikkeelle. (c) Kappaleeseen törmää toinen kappale. (d) Kappaleen työntää liikkeelle puristunut jousi. (e) Kappaleen vieressä tapahtuu räjähdys.

Energian epäjärjestyminen

Ota kirja, aseta se pöydälle ja työnnä se liukumaan pitkin pöydän pintaa. Todennäköisesti huomaat kirjan pysähtyvän melko nopeasti. Liukuvalla kirjalla on aluksi liike-energiaa, mutta koska kirja pysähtyy, sen liike-energian täytyy olla lopuksi nolla. Jos sinulla olisi hyvin tarkka lämpömittari, voisit kuitenkin samalla havaita kirjan ja pöydän pinnan hieman lämpenevän. Kirjan liike-energia siis vähenee, ja pintojen lämpöenergia lisääntyy, joten prosessissa mekaanista liike-energiaa muuttuu kappaleiden lämpöenergiaksi eli sisäenergaksi.

Tämän ilmiön selittää **kitka**, joka on koskettavien pintojen välinen vuorovaikutus. Kitka aiheutuu siitä, että toisiaan koskettavat pinnat pyrkivät tarttumaan mikroskooppisessa mittakaavassa toisiinsa kiinni (kuva 2.9). Jos kuitenkin kappaleet liikkuvat, nämä heikot sidokset eivät kuitenkaan välittämättä riitää saamaan kappaleita tarttumaan toisiinsa vaan sidokset vain hidastavat pintojen liukumista toistensa suhteen. Nämä liikkuvien pintojen välillä syntyy jatkuvasti uusia sidoksia ja vanhoja sidoksia rikkoutuu. Tyypillisesti sidokset venyvät ennen rikkoutumistaan, jolloin pintojen rakenteessa tapahtuu pieniä elastisia muutoksia — ts. pinnat voivat venyä tai puristua mikroskooppisella tasolla, mihin varastoituu elastista energiasta.

Kun pinnat sitten irtoavat toisistaan, nämä muodonmuutokset pääsevät yhtäkkiä palautumaan kuin jännitetty kuminauha, jonka toinen pää päästetään vapaaksi. Tämän seurauksena pintaan varastoitunut elastinen energia muuttuu pintojen atomien liike-energiaksi, ja atomit alkavat värähdellä. Pinnan atomien poukkoilu töniä nopeasti myös muita atomeja liikkeelle ja niin tämä liike-energia alkaa levitä muuallekin kappaleeseen. Loppujen lopuksi suuri osa liukuvan kappaleen liike-energiasta on muuttunut värähtelevien atomien liike-energaksi, mutta nyt atomit eivät enää liiku kaikki samaan suuntaan kuten aluksi vaan nyt ne värähtelevät satunnaisesti kaikissa suunnissa. Makroskooppisesti tämä ilmenee siten, että kappale pysähtyy ja *lämpenee*.

Ilman läpi kulkevan kappaleeseen kohdistuu samantyyppinen vuorovaikutus. Ilmassa kulkevan kappaleen on työnettävä ilmaa pois edestään, jolloin kaasun molekyylit saavat kappaleelta liike-energiaa. Molekyylien edelleen törmällessä toisiinsa tämäkin liike-energia jakautuu satunnaisesti suurelle määrelle hiukkasia. Lopputuloksena kappaleen vauhti hidastuu ja ilma sekä kappaleen pinta lämpenevät.

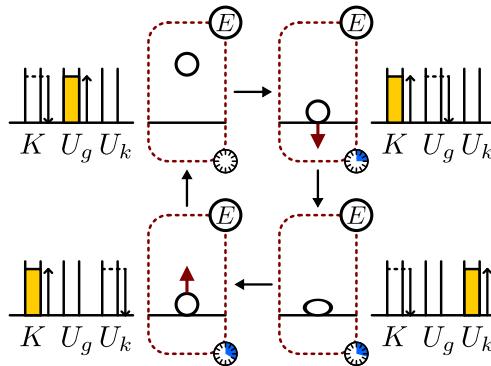


2.11 Purjelaivoissa liikkuva ilma törmää purjeisiin työntäen laivan liikkeelle. Miten ilmanvastus tässä ilmenee? Millaisia energian muutoksia muodosta toiseen tähän prosessiin liittyy?

Atomien poukkoilu on normaalista täysin satunnaista eikä yksittäisiä atomeja voi havaita ilman huipputeknikkaa. Niinpä atomien *satunnaisen* liikkeen liike-energiaa ei makroskooppisella tasolla nähdä liikkeenä vaan se ilmenee *kuumutena*, joka on kappaleen *tilan* ominaisuus. Mikroskooppisessa mittakaavassa atomit tieteenkin vain liikkuvat tietämättä onko niiden liikkeen energia meidän mielestämme liike-energiaa vai lämpöenergiaa. Makroskooppisessa mittakaavassa liike ja kuumaus ovat kuitenkin täysin erilaisia ilmiöitä. Lämmin kappale voi olla paikoillaan eikä kylmä kappale tunnut lämpimämmältä vaikka se liikkuisi. Tämä ero on seurausta siitä, että atomit liikkuvat eri tavoin *toistensa suhteen*. Kun kappale liikkuu, sen kaikki atomit liikkuvat kollektiivisesti samaan suuntaan. Sen sijaan kuuman kappaleen atomit liikkuvat satunnaisin suuntaan. Toisin sanoen liikkuvassa kappaleessa atomien liike on *järjestynyt* kun taas kuumassa kappaleessa liike on *epäjärjestynyt*.

Mekaanisen energian muodot ovat järjestynytä energiota. Kaikki epäjärjestyneet energian muodot ovat sisäenergiaa. Elastinen energia kuten jousen energia on järjestynytä ja se riippuu kappaleen muodosta (siis tilasta), joten elastinen energia voidaan lukea sekä mekaaniseen energiaan että sisäenergiaan. Osoittautuu, että juuri energian järjestyneisyys on keskeinen tekijä, josta riippuu miten energian muodot voivat muuttua toisikseen ja millaiset prosessit ovat mahdollisia, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Kuva 2.10: Energian muutokset elastisen pallon pomppiessa.

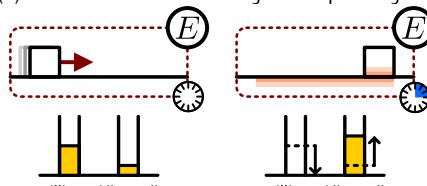


energian muodot ovat kaikki järjestyneitä ja ne voivat vapaasti muuttua toisikseen.

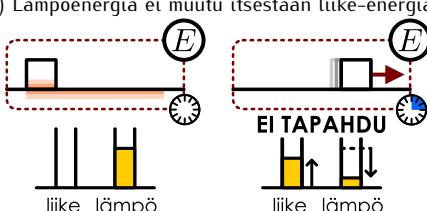
Tarkastellaan toisena esimerkkinä jo äsknen tutkimaamme pöydällä liukuvaa kirja (kuva 2.11). Kirjan ja pöydän pinnan välillä vaikuttava kitka muuttaa kirjan järjestyneen liike-energian epäjärjestyneeksi lämpöenergiaksi. Kuitenkin kun kirja on paikoillaan, se *ei koskaan* lähde itsestään liikkeelle niin, että sen ja pöydän lämpöenergia muuttuisi kirjan liike-energiaksi. Toisin sanoen *prosessi, jossa kitka pysyytää kirjan, voi tapahtua vain yhteen suuntaan*. Tällaista prosessia kutsutaan fysiikassa **irreversiibeliksi** (engl. ‘irreversible’, käänämätön). Vastaavasti prosessia, joka voidaan käänää ajassa takaperin, kutsutaan **reversiibeliksi**.

Kuva 2.11: Energian muutos kappaleen liukuessa.

(a) Kitka muuttaa liike-energian lämpöenergiaksi.



(b) Lämpöenergia ei muudu itsestään liike-energiaksi.



Tarkastellaan kuvan 2.10 ideaalista elastista pomppia kumpipalloa. Pallon osuessa maahan se painuu hetkeksi kasaan, jolloin sen liike-energia varastoituu muodonmuutokseen liittyväksi elastiseksi potentiaalienergiaksi. Tämä potentiaalienergia palautuu pallon liike-energialaksi pallon palattessa takaisin alkuperäiseen muotoonsa, jolloin pallo pomppaa takaisin ylös yhtä suurella nopeudella kuin millä se osui lattiaan. Tämän jälkeen pallon liike-energia varastoituu pallon noustessa graviitaation potentiaalienergiaksi kunnes muuttuu jälleen pallon pudotessa takaisin liike-energialaksi. Jos pallo olisi täysin elastinen ja koe suoritettaisiin tyhjiössä niin ettei ilmanvastuskaan hidasta pallon liikkettä, pallo jatkaisi pomppimistään lopputoimin liike-energian muuttuessa vuoroin elastiseksi ja vuoroin graviitaation potentiaalienergiaksi. Nämä mekaanisen

irreversiibelit prosessit voi tunnistaa kuvittelemalla prosessin tapahtuvan takaperin tai videoimalla prosessin ja katsomalla videon lopusta alkuun. Jos takaperin tapahtuva prosessi näyttää mahdottomalta, prosessi on irreversiibeli. Liukuvan kirjan pysähtyminen, näyttää takaperin siltä, että paikoillaan ollut kirja vain yhtäkkiä lähtee liikkeelle lattian samalla viilentyessä, mitä ei todellisuudessa voi tapahtua. Sen sijaan video pomppivasta pallosta, jonka jokainen pomppu on yhtä korkea, näyttää täsmälleen samanlaiselta myös takaperin esitettyä. Prosessit, joissa mekaanisen energian muodot muuttuvat toisikseen, ovat yleensä reversiibeiteitä ainakin jos prosessiin osallistuvien kappaleiden määrä on pieni. Epäjärjestyneen energian muotoja sieltävä prosessit ovat puolestaan tavallisesti irreversiibeiteitä.

Koska makroskooppisella tasolla ei voida koskaan täysin välttää esimerkiksi kitkaa, täysin reversiibeiteitä prosesseja on todellisuudessa olemassa vain atomien mittakaavassa. Niinpä järjestyneen energian muodot muuttuvat jatkuvasti epäjärjestyneiksi. Myös epäjärjestynyt energia voi muuttua takaisin järjestyneeksi. Esimerkiksi räjähdyksessä kemiallinen energia muuttuu ensin lämpöenergialaksi ja sitten osa tästä lämpöenergiasta muuttuu edelleen kappaleiden liike-energialaksi. Tällä on kuitenkin rajoituksensa eikä kaik-

tyneeksi. Esimerkiksi räjähdyksessä kemiallinen energia muuttuu ensin lämpöenergialaksi ja sitten osa tästä lämpöenergiasta muuttuu edelleen kappaleiden liike-energialaksi. Tällä on kuitenkin rajoituksensa eikä kaik-

keä epäjärjestynyttä energiota voi koskaan palauttaa järjestyneeksi. Tässä mielessä epäjärjestynyt energia on järjestynyttä energiota huonompa.

Epäjärjestyneen sisäenergian mittaaminen on usein vaikeampaa kuin mekaanisen energian, minkä vuoksi mekaanikkassa usein prosesseja pidetään likimain reversiibeleinä — ts. vuorovaikutukset kuten kitka ja ilmanvastus jätetään usein huomioimatta — sillä tällöin mekaaninen energia on likimain vakio. Näin voi kuitenkin tehdä vain, jos esimerkiksi kitka on paljon heikompi kuin muut systeemissä vaikuttavat vuorovaikutukset. Luvussa 3 palaamme tarkastelemaan, kuinka energian muutoksia yhdestä muodosta toiseen voidaan tarkemmin analysoida. Lämpöenergian ominaisuuksia ja hyödyntämistä kuvaavaan *termodynamiikkaan* tutustumme luvussa 9.



2.12 Mitkä seuraavista prosesseista ovat reversiibeit? (a) Kappale liukuu tasaisella nopeudella alas kaltevaa tasoa. (b) Kappale putoaa tyhjiössä. (c) Ruoka jäähtyy. (d) Täysin elastinen pallo törmää toiseen samanlaiseen palloon. (e) Täysin elastinen pallo törmää kymmenen samanlaisen pallon kasaan.

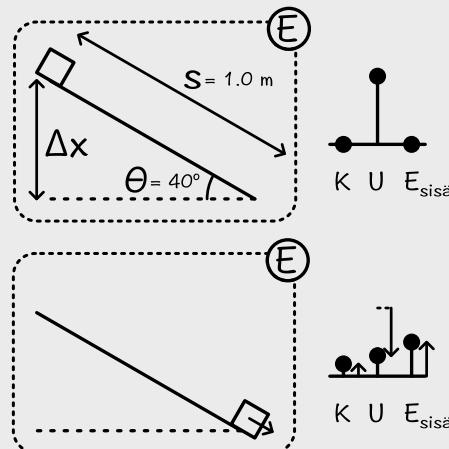
esimerkki 2.6

Dissipatiivinen vuorovaikutus

Kappale (massa 0.350 kg) lähee levosta liukumaan alas kaltevaa tasoa. Kuljettaan yhden metrin, kappale on saavuttanut nopeuden 1.5 m/s. Tason kaltevuuskulma vaakatasoon nähdyn on 40° . Kuinka paljon energiota on kulunut kappaleen ja sen ympäristön lämmittämiseen?

TILANNE Valitaan systeemiksi kappale ja maan painovoimakenttä. Piirretään systeemin kuva ja prosessia kuvava energiadiagrammi. Merkitään kappaleen kulkuessa matkaa $s = 1.0 \text{ m}$ ja tason kaltevuuskulmaa $\theta = 40^\circ$. Kappaleen massa on $m = 0.350 \text{ kg}$ ja sen saama nopeus $v_{\text{loppu}} = 1.5 \text{ m/s}$.

SUUNNITELMA Systeemin potentiaalienergia pienenee ja liike-energia kasvaa kappaleen liikkuesa alaspäin. Kappaleeseen vaikuttavat dissipatiiviset vuorovaikutukset, kitka ja ilmanvastus, kuitenkin muuttavat samalla liike-energiaa lämpöenergiaksi. Systeemin kokonaisen energia ei ole vakio, mutta energian säilymislain perusteella systeemistä hävinneen mekaanisen energian täytyy muuttua muihin energian muotoihin, pääasiassa lämpöenergiaksi.



Kappale siirtyy pystysuoran etäisyyden $\Delta x = -s \sin \theta$ ja sen potentiaalienergia pienenee tällöin määrän

$$\Delta U = mg\Delta x = -mgs \sin \theta. \quad (2.32)$$

Kappaleen liike-energia puolestaan kasvaa määrän

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\Delta(v^2) = \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2. \quad (2.33)$$

Lämmöksi muuttuu energia $\Delta E_{\text{sisä}} = -\Delta E_{\text{mechaninen}} = -\Delta U - \Delta K$.

RATKAISU Lämmöksi muuttuu energiamäärä

$$\Delta E_{\text{sisä}} = mgs \sin \theta - \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2, \quad (2.34)$$

ja lukuarvojen sijoitus antaa tulokseksi $\Delta E_{\text{sisä}} = 1.8 \text{ J}$.

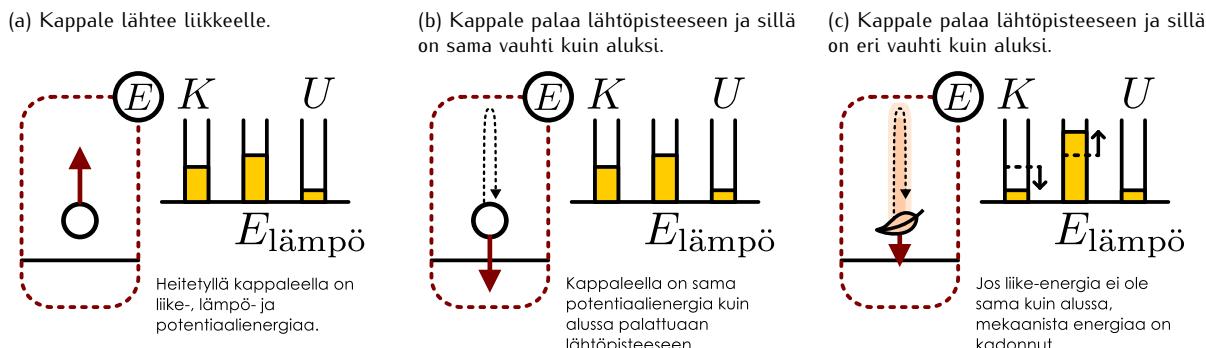
ARVIOINTI Tarkasteltaan, että ratkaisulla on energian yksikkö.

$$[\Delta E_{\text{sisä}}] = [mgs] + [mv^2] = \text{kg m/s}^2 \cdot \text{m} + \text{kgm}^2/\text{s}^2 = \text{J}. \quad (2.35)$$



2.13 Selitä omien sanoin käsitteet järjestynyt ja epäjärjestynyt energia sekä sisäenergia. Selitä myös millaisia rajoituksia energian eri muotojen muutoksiin liittyy, ja miksi tästä seuraa se, että jotkin prosessit eivät voi tapahtua takaperin.

Kuva 2.12: Konservatiiviset ja dissipatiiviset vuorovaikutukset voi tunnistaa tarkastelemalla kappaleen liikettä suljettua reittiä pitkin.



Konservatiivisuus

Painovoimaa ja elastisia vuorovaikutuksia, joihin liittyy potentiaalienergia, kutsutaan **konservatiivisiksi** vuorovaikutuksiksi, koska ne säilyttävät (engl. ‘conserve’) järjestyneen eli mekaanisen energian. Järjestynyt energia epäjärjestyneeksi muuttavat vuorovaikutukset kuten kitka ovat puolestaan **dissipatiivisia**, koska ne hukkaavat (engl. ‘dissipate’) mekaanista energiota. Konservatiivisilla vuorovaikutuksilla on fysiikassa erityisen tärkeä asema juuri siksi, että ne eivät muuta energian järjestyneisyttä. Tutkitaan siis vielä, millaisia ominaisuuksia konservatiivisilla vuorovaikutuksilla on.

Tarkastellaan prosessia, jossa kappale liikkuu ja palaa lopuksi takaisin lähtöpisteesensä. Tämä tapahtuu esimerkiksi heitetäessä pallo suoraan ylöspäin, mutta periaatteessa kappale voi kulkea millaisen reitin tahansa, kunhan se lopuksi päätyy takaisin lähtöpaikkaansa. Tällaista reittiä kutsutaan **suljetuksi**, koska reittiä pitkin piirretty viiva muodostaa suljetun silmukan.

Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, joita kuvaa *ainoastaan paikasta riippuva potentiaalienergia*, tämän potentiaalienergian on oltava suljetun reitin lopussa *sama* kuin alussa, $U_{\text{loppu}} = U_{\text{alku}}$, koska kappale palaa suljetulla reitillä lopuksi *samaan* pisteeseen kuin mistä lähti. Tämä nähdään kuvissa 2.12 (a) ja (b). Mekaanisen energian säilymisen perusteella kokonaisen energian ei muutu, $K_{\text{loppu}} + U_{\text{loppu}} = \text{vakio} = K_{\text{alku}} + U_{\text{alku}}$, joten myös kappaleen *liike-energian* ja siis vauhdin on oltava lopuksi sama kuin alkuksi.

Päättelyn voi myös käantää ympäri. Jos on olemassa reitti, jota pitkin kulkien kappale voi palata takaisin lähtöpisteesensä niin, että sen vauhti *ei ole lopuksi sama kuin alkuksi*, kappaleen liike-energian ja potentiaalienergian summa *ei ole alkuksi sama kuin lopuksi*, $K_{\text{loppu}} + U_{\text{loppu}} \neq K_{\text{alku}} + U_{\text{alku}}$. Tällaisessa tapauksessa mekaanisen energian on täytynyt muuttua johonkin toiseen muotoon ja systeemissä täytyy vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Näin käy ylöspäin heitettylle kappaleelle, kun ilmanvastuksen lükettä hidastava vaikutus huomioidaan. Kuvassa 2.12 on tästä esitetty esimerkkinä höyhen, joka suurellakin alkunopeudella ylöspäin heitettyynä leijaailee lopulta alas hyvin hitaasti. Prosessissa osa höyhenen alkuperäisestä mekaanisesta energiasta muuttuu heiton aikana ilman lükkeen energiaksi ja lopulta lämpöenergiaksi.



2.14 Jos potentiaalienergia riippuu paikan lisäksi kappaleen muodosta, onko kappaleen potentiaalienergian muutos välttämättä nolla, jos kappale kulkee suljetun reitin? Jos ei ole, mitä muuta pitää vaatia?

2.4 Liikemäärä

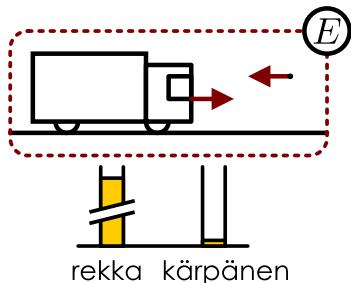
Edellä opimme, että kappaleen liikkeeseen sitoutuneen energian määrä riippuu sekä kappaleen massasta että kappaleen vauhdista. Tämän näkee konkreettisesti esimerkiksi kolareissa. Massiivinen ja nopeasti liikkuva auto tekee törmätessään enemmän tuhoa kuin kevyt tai hidaskoska suurella autolla on ennen törmäystä enemmän liike-energiaa.

Energia yksinään ei kuitenkaan riitä selittämään, mitä törmäyksissä tapahtuu. Ajatellaanpa tilannetta, jossa rekka ja kärpänen liikkuvat vastakkaisiin suuntiin samalla vauhdilla ja törmäävät (kuva 2.13). Rekan liike ei varmasti muutu törmäyksessä havaittavasti, mutta kärpänen tai mitä siitä jääkään jäljelle jää todennäköisesti kiinni rekkaan. Rekan liike-energia on törmäyksen jälkeen likimain sama kuin ennen törmäystä, koska rekan nopeus ei juuri muutu. Kärpäsen nopeuden suunta vaihtuu, mutta sen vauhti ei muutu, joten kärpäsenkin liike-energia on likimain vakio.

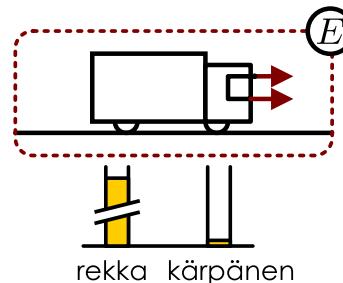
Tuntuu itsestään selvältä, että rekka ja kärpänen eivät voi törmätä niin, että kumpikin kimpoaisi takaisin tulosuuntaansa samalla vauhdilla kuin saapuivat (kuva 2.13 (c)). On nimitäin aivan selvää, että kärpänen ei

Kuva 2.13: Rekan törmäys kärpäseen. Molemmilla on sama nopeus, mutta massiivisen rekan liike-energia on paljon suurempi.

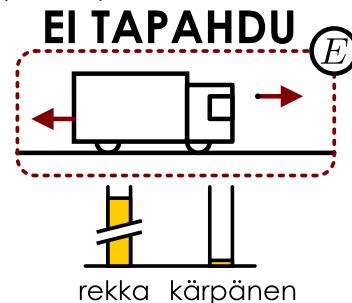
(a) Rekka ja käpänen kohtaavat.



(b) Käpänen jää kiinni rekkaan. Liike-energia on likimain vakiointia.



(c) Liike-energia olisi vakiointi myös jos kappaleet kimpoaisivat toisistaan.



voi muuttaa rekan liikettä. Mutta *miksi?* Energian säilyminen ei tätä selitä, sillä jos rekan liikkeen suunta kääntyy ympäri mutta vauhti pysyy vakiona, rekan liike-energia ei muudu. Täytyy olla jonkin toinen selitys sille, miksi käpänen ei voi muuttaa rekan liikettä.

Törmäykset

Ymmärtääksemme rekan ja käpäsen törmäyksen tutkimme seuraavaksi kappaleiden törmäyksiä kokeellisesti. Tätä varten hankimme suoran radan ja radalla lähes kitkattomasti liikkuvia vaunuja. Näihin vaunuihin kohdistuvat dissipatiiviset vuorovaikutukset ovat niin heikot, että vaunujen liike-energia pysyy likimain vakiona ja vaunut siis kulkevat radalla vakionopeudella. Vaunuissa on myös joustavat puskurit, jolloin ne törmättessään kimpovat toisistaan elastisesti niin, että vaunujen muodostaman systeemin mekaaninen energia on likimain vakio. Annamme vaunujen törmätä tällä radalla ja mittaamme vaunujen liikkeen videoimalla. Voimme kokeen jälkeen palata tutkimaan törmäyksestä saatua kuvamateriaalia kuva kuvalta (kuva 2.14 (a)) ja määritää näin vaunujen paikat tasaisin väliajoin. Tämän perusteella voimme piirtää vaunujen paikan kuvajan (kuva 2.14 (b)).



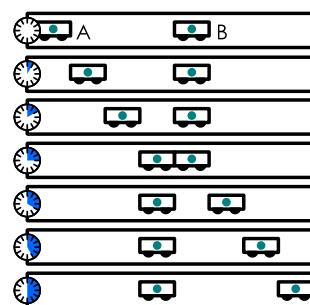
2.15 Vaunu liikkuu aluksi negatiiviseen x -suuntaan vauhdilla 2.0 m/s ja lopuksi positiiviseen suuntaan vauhdilla 1.0 m/s. Mikä on (a) vauhdin muutos, (b) nopeuden muutos? (c) Millainen on vaunun nopeuden kuvaja?

Kun tiedämme kappaleiden paikan ajan funktiona, kappaleen nopeus selviää paikan derivaattana eli paikan kuvaajan tangentin kulmakertoimeksi. Kuvan 2.14 törmäävien vaunujen nopeuden kuvaaja on piirretty kuvaan 2.15. Kumpikin vaunu liikkuu tasaisesti sekä ennen törmäystä että törmäyksen jälkeen, joten nopeuden kuvaajat ovat vaakasuoria. Törmäyksessä vaunujen nopeus muuttuu äkillisesti, ja tämä näkyy nopeuden kuvaajien askelmaisenä muoton. Kummankin vaunun nopeuden muutos näkyy nopeuden kuvaajaan piirtyvä askeleen korkeutena niin, että nopeuden muutos positiiviseen suuntaan vastaa kuvassa vasemmalta oikealle nousevaa askelmaa kun taas negatiivisen nopeuden muutos näkyy laskevana portaana. Muista kuitenkin, että positiivinen ja negatiivinen muutos eivät tarkoita vauhdin kasvua ja pienentymistä vaan nopeuden muuttumista positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan.

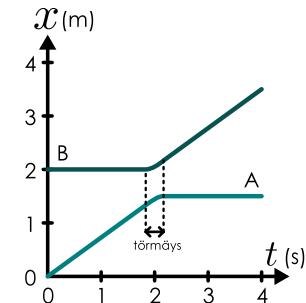
Kuvien 2.14 ja 2.15 törmäyskokeen alussa vaunu A liikkui ja vaunu B oli paikoillaan. Törmäyksessä vaunu A pysähtyy ja vaunu B saa saman nopeuden mikä vaunulla A aluksi oli. Vaunun A nopeuden kuvaaja siirtyy alas päin, eli vaunun aluksi positiivinen x -suuntainen nopeus pienenee ja muuttuu itse asiassa nollaksi, jolloin vaunun nopeuden muutos on $\Delta v_{x,A} = v_{x,A,\text{loppu}} - v_{x,A,\text{alku}} = -v_{x,A,\text{alku}} =$

Kuva 2.14: Vaunujen törmäyksen analyysi.

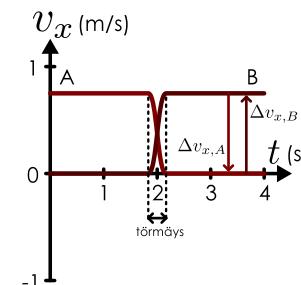
(a) Videoitu liike kuvasarjana.



(b) Tämän perusteella piirretty paikan kuvaja.



Kuva 2.15: Vaunujen nopeuden kuvaja.

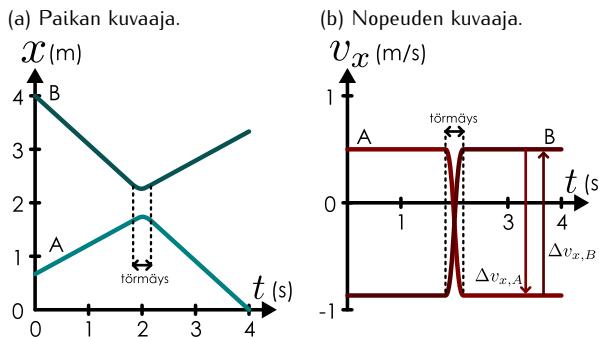


-0.75 m/s . Vaunun B kuvaja siirtyy puolestaan ylöspäin, joten vaunun nopeuden muutos on x -suuntainen, $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,\text{loppu}} - v_{x,B,\text{alku}} = v_{x,B,\text{loppu}} = 0.75 \text{ m/s}$. Nopeuksien muutosten suhde on siten

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00 \quad (2.36)$$

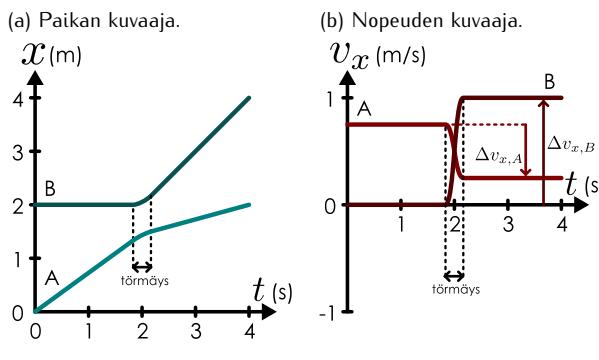
eli nopeudet muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin, $\Delta v_{x,A} = -\Delta v_{x,B}$.

Kuva 2.16: Lükkuvien vaunujen törmäys.



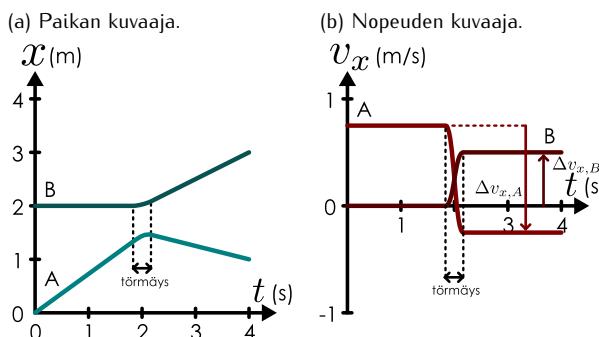
niin, että kiinnitämme vaunuun A toisen samanlaisen vaunun, jolloin vaunu A on käytännössä kooltaan kaksoinkertainen vaunuun B nähdään. Kuvassa 2.17 nähdään, mitä näiden vaunujen törmäyksessä tapahtuu. Nyt vaunujen nopeuksien kuvaajat eivät enää olekaan symmetriset vaan kevyemmän vaunun B nopeuden muutos on itseisarvoltaan suurempi vaanun A verrattuna.

Kuva 2.17: Törmäys, kun $m_A = 2m_B$.



Vaunujen nopeudet muuttuvat siis vastakkaisiin suuntiin, mutta nyt kevyemmän vaunun nopeuden muutos on itseisarvoltaan kaksinkertainen.

Kuva 2.18: Törmäys, kun $m_B = 2m_A$.



$v_{x,A,\text{loppu}} = 0.50 \text{ m/s}$. A:n nopeuden muutos on siis $\Delta v_{x,A} = -0.50 \text{ m/s}$ ja B:n $\Delta v_{x,B} = 0.50 \text{ m/s}$. Nopeuksien muutosten suhde on nyt

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -2.00 \quad (2.38)$$

Toistetaan koe sitten niin, että molemmat kappaleet liikkuvat aluksi, jolloin saamme kuvalle 2.16 mukaisen tuloksen. Huomaamme, että nopeuden kuvaja näyttää täsmälleen samalta kuin kuvassa 2.15 paitsi että kappaleiden alkuja loppunopeudet ovat erilaiset. Koe voidaan toistaa useita kertoja ja rüppumatta kappaleiden alunnopeuksista tulos on sama: kummankin kappaleen nopeus on lopuksi sama kuin toisen kappaleen nopeus oli aluksi. Toisin sanoen kun kaksi *samanlaista* kappaletta törmää elästisesti, niiden nopeudet muuttuvat aina yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin.

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, kun kaksi erikokoista kappaletta törmää. Teemme tämän kappaleiden nopeuksien kuvajat eivätkä olekaan symmetriset vaan kevyemmän vaunun B nopeuden muutos on itseisarvoltaan suurempi vaanun A verrattuna.

Lasketaan täsmällisesti, kuinka paljon nopeudet muuttuvat. Raskaampi vaunu A on aluksi liikkeessä nopeudella $v_{x,A,\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$. Tämän vaunun nopeus törmäyksen jälkeen on $v_{x,A,\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$. Vaunu siis jatkaa matkaansa törmäyksen jälkeen edelleen positiiviseen x -suuntaan, mutta sen nopeuden muutos on negatiivinen, $\Delta v_{x,A} = -0.5 \text{ m/s}$. Kappale B puolestaan oli aluksi levossa ja se saa törmäyksessä nopeuden $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,\text{loppu}} = 1.00 \text{ m/s}$. Kappaleiden nopeuksien muutosten suhde on siis nyt

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -0.50. \quad (2.37)$$

Kokeillaan vielä, mitä tapahtuu pääinvastaisessa tapauksessa eli kevyen vaunun törmäyessä raskaaseen. Tätä varten irrotamme vaunusta A siihen äskën liittämämme ylimäääräisen vaunun ja kiinnitämme tämän lisäkuorman vaunuun B. Nyt siis vaunu A on kooltaan vain puolet vaunusta B. Näiden vaunujen törmäys on esitetty kuvassa 2.18.

Vaunujen alunnopeudet ovat samat kuin edellisessä kokeessa, $v_{x,A,\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$ ja $v_{x,B,\text{alku}} = 0.00 \text{ m/s}$. Nyt kuitenkin kevyt vaunu A kimpoaa raskaasta vaunusta B takaisin, jolloin A:n loppunopeus on $v_{x,A,\text{loppu}} = -0.25 \text{ m/s}$. Raskas vaunu B lähee törmäyksessä liukkeelle, mutta se saa vain nopeuden

eli jälleen vaunujen nopeudet muuttuvat vastakkaisiin suuntiin ja *nopeuksien muutosten suhde on käänneen verrannollinen kappaleiden kokoon tai täsmällisemmin niiden massaan*.

- 2.16** Vaunun A massa on 2 yksikköä ja vaunun B massa 5 yksikköä. Vaunujen nopeudet ovat alkuksi $v_{x,A} = 3.00 \text{ m/s}$ ja $v_{x,B} = 0.20 \text{ m/s}$ ja vaunun A nopeus on lopuksi $v_{x,A} = -1.00 \text{ m/s}$. Ennusta, mikä on
 (a) A:n nopeuden muutos,
 (b) B:n nopeuden muutos,
 (c) B:n loppunopeus.

Kaikki edellä esitettyt törmäyskokeet tehtiin vaunuilla, joissa oli elastiset puskurit. Tällöin vaunut törmääessään kimpoavat toisistaan ja törmäyksen sanotaan olevan *elastinen* eli *kimmoisa*. Tilanne on samanlainen kuin kuvassa 2.10 esityssä pallon pomppaamisessa. Törmäyksen alussa vaunujen puskurit joustavat, jolloin vaunujen liike-energiaa muuttuu puskureiden elastiseksi potentiaalienergiaksi. Tämä potentiaalienergia kuitenkin palautuu välittömästi vaunujen liike-energiaksi puskureiden palatessa takaisin alkuperäiseen muotoon sa. Koska täysin elastiseen muodonmuutokseen liittyvät vuorovaikutukset ovat konservatiiviset, kappaleiden muodostaman systeemin mekaaninen energia säilyy. Törmäyksen jälkeen puskurit ovat luovuttaneet kaiken potentiaalienergiansa takaisin vaunujen liike-energiaksi, joten *systeemin kokonaisliike-energia törmäyksen jälkeen on sama kuin ennen törmäystä*

$$\frac{1}{2}m_A v_{A,\text{alku}}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,\text{alku}}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A,\text{loppu}}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B,\text{loppu}}^2. \quad (2.39)$$

Jos kuitenkin poistamme vaunuista puskurit ja korvaamme ne esimerkiksi muovailuhallalla, törmäykset eivät ole enää kimmoisia eikä mekaaninen energia pysy niissä vakiona. Sen sijaan osa vaunujen liike-energiasta muuttuu törmäyksessä dissipatiivisten vuorovaikutusten takia epäjärjestyneeksi energiaksi kuten lämpöenergiaksi. Tällästa törmäystä kutsutaan *epäelastiseksi* eli *kimmottomaksi*. Epäelastisen törmäyksen ääritapauksessa vaunut tarttuvat törmäyksessä kiinni toisiinsa, ja tästä nimitetään *täysin epäelastiseksi* törmäyseksi. Esimerkiksi tennispalloista pyritään tekemään elastisia, jotta ne kimpoaisivat törmäessään maahan. Autojen rungot puolestaan suunnitellaan niin, että ne painuvat törmäyksessä kasaan ja absorboivat näin auton liike-energian, jolloin autot eivät kimpoile vaan törmäävät mahdollisimman epäelastisesti.

Kuvassa 2.19 on esitetty vaunujen törmäykse, kun kaksi samanlaista vaunua törmää epäelastisesti. Vaunujen alkuonopeudet ovat samat kuin edellisissä kokeissa. Törmäyksen jälkeen vaunu A lükkiu edelleen samaan suuntaan kuin ennen törmäystä, mutta sen vauhti hidastuu niin, että vaunun loppunopeus on $v_{x,A,\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$. Vaunu B puolestaan saa nopeuden $v_{x,B,\text{loppu}} = 0.50 \text{ m/s}$. Vaunujen nopeuksien muutokset ovat siis $\Delta v_{x,A} = -0.50 \text{ m/s}$ ja $\Delta v_{x,B} = 0.50 \text{ m/s}$, joten vaikka nopeudet muuttuvat vähemmän kuin kuvan 2.16 elästisessä törmäyksessä, muutosten suhde on nytkin

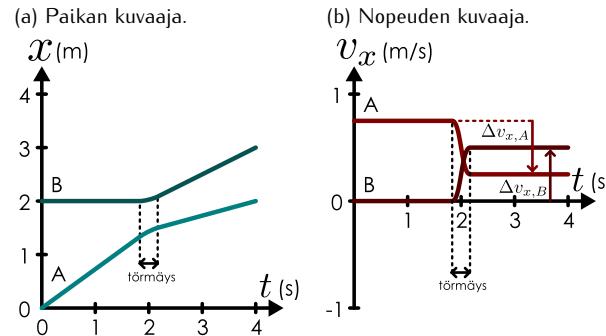
$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.40)$$

Se, mikä kummankin vaunun loppunopeus täsmälle on, riippuu törmäyksen epäelastisuuden asteesta eli siitä, kuinka suuri osuus vaunujen liike-energiasta muuttuu esimerkiksi lämpöenergiaksi tai poistuu systeemistä äänien välityksellä.

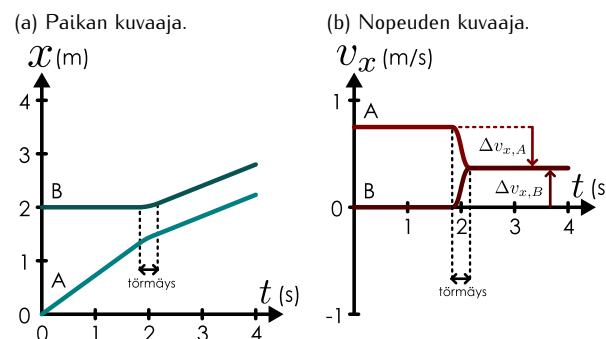
Ääritapaus, jossa vaunut tarttuvat toisiinsa kiinni eli törmäys on täysin epäelastinen, on esitetty kuvassa 2.20. Vaunujen alkuonopeudet ovat jälleen samat, mutta törmäyksen jälkeen kumpikin vaunu lükkiu nyt nopeudella $v_{x,A,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{loppu}} = 0.375 \text{ m/s}$. Vaunujen nopeuden muutos on siis $\Delta v_{x,A} = -0.375 \text{ m/s}$ ja $\Delta v_{x,B} = 0.375 \text{ m/s}$ eli tässäkin tapauksessa muutosten suhde on

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.41)$$

Kuva 2.19: Epäelastinen törmäys.



Kuva 2.20: Täysin epäelastinen törmäys.



Epäelastisessa törmäyksessä liike-energiaa muuttuu sisäenergiaksi, mutta on myös mahdollista, että sisäenergiaa muuttuu liike-energiaksi. Tämä on epäelastisen törmäyksen vastakohta, jota kutsutaan *räjähätäväksi erotukseksi*. Tällaisessa tilanteessa kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia *kasvaa*. Tästä on esimerkki kuussa 2.21, jossa kaksi vaunua on aluksi kiinni toisissaan liikkuen samalla nopeudella. Sitten vaunujen välissä puristettu jousi päästetään oikenemaan, ja tämä työntää vaunut toisistaan erilleen. Kyseessä ei ole varsinaisesta räjähdyksistä, mutta systeemi toimii täysin samalla periaatteella kuin räjähätävä kappale.

Ainoa ero on se, että tässä tapauksessa jousen potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi kun taas varsinaisissa räjähdyksissä gleensä kemiallinen energia muuttuu lämpö- ja liike-energiaksi.

Vaunujen massat ovat jälleen yhtä suuret. Nyt vaunujen alkunopeus on $v_{x,A,alku} = v_{x,B,alku} = 0.50 \text{ m/s}$, ja jousen työnettyä kappaleet erilleen kappaleen A nopeus on $v_{x,A,loppu} = 0.125 \text{ m/s}$ ja kappaleen B nopeus on $v_{x,B,loppu} = 0.875 \text{ m/s}$. Nopeuden muutos on siten $\Delta v_{x,A} = -0.375 \text{ m/s}$ sekä $\Delta v_{x,B} = 0.375 \text{ m/s}$, ja näiden suhde on tässäkin tapauksessa

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -1.00. \quad (2.42)$$

Voisimme jatkaa kokeita loputtomien vaihdellen vaunujen massoja, alkunopeuksia ja niiden välissä olevia puskureita. Kuitenkin kaikissa kokeissa lopputulos on se, että vaunujen nopeudet muuttuvat vastakkaisiin suuntiin ja jos vaunuilla on eri massat, kevyemmän vaunun nopeus muuttuu enemmän. Täsmällisemmin nopeuden muutokset ovat käännekkäin verrannolliset vaunujen massoihin eli ne noudattavat aina sääntöä

$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -\frac{m_B}{m_A}. \quad (2.43)$$

Tämä tulos pätee kaikille vaunupareille riippumatta niiden alkunopeuksista, massoista ja siitä, onko vaunujen välinen törmäys elastinen vai ei.



2.17 Mikä on liike-energian muutos (a) kuvan 2.19 törmäyksessä, (b) kuvan 2.20 törmäyksessä ja (c) kuvan 2.21 erotuksessa, jos kummankin vaunun massa on 1.0 kg?

Liikemääärän säilymislaki

Palataan nyt tarkastelemaan rekan ja kärpäsen törmäystä. Kokeellisesti havaittu tuloksen (2.43) perusteella kahden suoraan törmäävän kappaleen nopeudet muuttuvat käännekkäin verrannollisesti niiden inertioihin. Eritiisesti tämä tulos näyttää pätevän *aina* riippumatta siitä, miten kappaleet liikkuvat ennen törmäystä, mikä kappaleiden massojen suhde on tai onko törmäys elastinen vai epäelastinen. Koska rekan inertia on valtavan suuri, rekan nopeuden muuttaminen on hyvin vaikeaa. Kärpäsen inertia on puolestaan pieni, joten kärpäsen nopeutta on helppo muuttaa, ja näiden törmätessä rekan nopeus ei siis muudu juuri lainkaan mutta kärpäsen muuttuu.



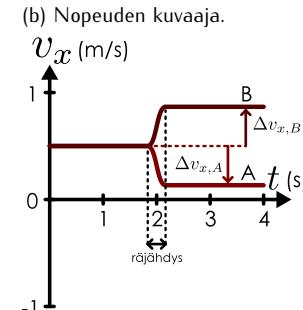
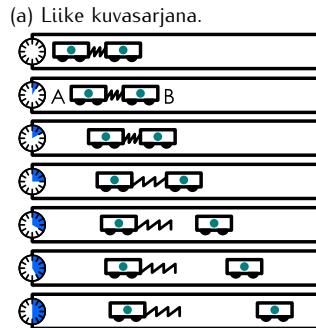
2.18 Johda yhtälö (2.43), että jos rekan massa on paljon suurempi kuin kärpäsen, niin $\Delta v_{x,rekka} \rightarrow 0$.

Tässä on kyse pohjimmiltaan siitä, että rekan hidashinta massa eli inertia on suuri, jolloin rekan nopeuden muuttaminen on vaikeaa. Kärpäsen inertia on puolestaan pieni, joten kärpäsen nopeutta on helppo muuttaa. Liike-energia on jonkinlainen mittari sille, kuinka vaikeaa on kihdyttää paikoillaan oleva kappale liikkeeseen, mutta rekan ja kärpäsen törmäyksessä oli kyse siitä, kumman kappaleen nopeuden *suuntaa* on helpompi muuttaa. Tätä liike-energia ei kuva mitenkään, koska liike-energia riippuu vain nopeuden suuruudesta eikä lainkaan sen suunnasta.

Törmäykokeiden perusteella kaikissa kahden kappaleen törmäyksissä pätee yhtälö (2.43), $\Delta v_{x,A}/\Delta v_{x,B} = -m_B/m_A$, jos kappaleet eivät vuorovaikuta voimakkaasti ympäristönsä kanssa, ja tämä sääntö antaa meille mahdollisuuden määritellä suure, joka huomioi sekä kappaleiden inertian että niiden liikkeen suunnan. Voimme nimittäin kirjoittaa yhtälön myös muotoon

$$m_A \Delta v_{x,A} = -m_B \Delta v_{x,B} \quad (2.44)$$

Kuva 2.21: Räjähätävä erotus.



josta saadaan edelleen

$$\Delta(m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}) = 0. \quad (2.45)$$

Tämän perusteella lauseke $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$ on kahden kappaleen törmäyksessä vakio!



2.19 Perustele, miksi suure $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$ on ekstensiivinen. Miksi tämä on tärkeää?

Koska suure $m_A v_{x,A} + m_B v_{x,B}$ on ekstensiivinen ja se pysyy vakiona, kyseessä voi olla säilyvä suure. Osoittautuu, että näin juuri onkin. Tätä suuretta kutsutaan kappaleiden A ja B muodostaman systeemin liikemääräksi, ja se koostuu siis kappaleen A liikemääristä $p_{x,A} = m_A v_{x,A}$ sekä kappaleen B liikemääristä $p_{x,B} = m_B v_{x,B}$. Koska nopeus on vektori, liikemääräkin on vektori, ja yleisesti yksittäisen kappaleen liikemääräksi määritellään

$$\bar{p} = m\bar{v}. \quad (2.46)$$

Systeemin kokonaisliikemääriä saadaan puolestaan laskemalla systeemin kaikkien osien liikemäärit yhteen,

$$\bar{p}_{\text{kokonais}} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i. \quad (2.47)$$

Yhdessä ulottuvuudessa tämä yksinkertaistuu muotoon

$$p_{x,\text{kokonais}} = p_{x,1} + p_{x,2} + \dots = \sum_i p_{x,i} = \sum_i m_i v_{x,i}, \quad (2.48)$$

ja tässäkin liikemäärän vektoriluonne ilmenee siinä, että nopeudet $v_{x,i}$ ovat eri kappaleiden nopeuksien x -suunnan skalaarikomponentteja. Nopeuden ja liikemäään x -skalaarikomponentti on negatiivinen, jos kappale liikkuu negatiivisen x -akselin suuntaan. Nämä ollen systeemin *kokonaisliikemääriä voi olla nolla vaikka sen osat eivät olisi paikoillaan*, jos nämä osat liikkuvat *vastakkaisiin suuntiin*.



2.20 Kappale liikkuu positiivisen x -akselin suuntaan nopeudella 4 m/s. Millä seuraavista on siihen verrattuna sama (i) liike-energia, (ii) liikemääri? (a) Kaksi kappaletta, jotka liikkuvat yhdessä positiiviseen suuntaan nopeudella 2 m/s. (b) Neljä kappaletta, jotka liikkuvat yhdessä positiiviseen suuntaan nopeudella 2 m/s. (c) Kappale, joka liikkuu negatiiviseen suuntaan nopeudella 4 m/s.

Edellä päättelimme kokeellisesti, että kahden kappaleen törmäyksessä kappaleiden kokonaisliikemääriä on vakio. Osoittautuu kuitenkin, että sama tulos pätee kaikissa sellaisissa systeemeissä, jotka eivät vuorovaikuta ympäristönsä kanssa (tai joissa vuorovaikutukset ympäristön kanssa kumoavat toisensa). Toisin sanoen *liikemääriä on säilyvä suure, jota ei voi luoda eikä hävittää*, ja jos systeemiin ei kohdistu vuorovaikutuksia, systeemin kokonaisliikemääriä on vakio,

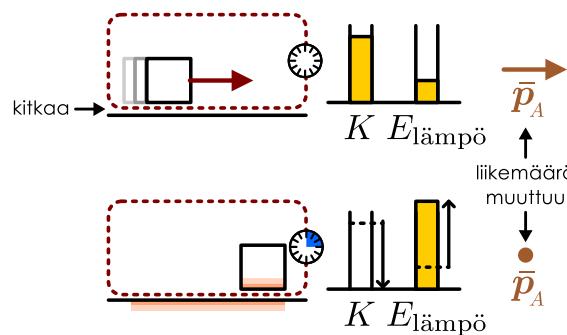
$$\Delta \bar{p}_{\text{kokonais}} = 0. \quad (2.49)$$

Tämä on **liikemäään säilymislaki**.

Liikemääriä on energian jälkeen mekaniikan tärkein suure, ja se kuvaaa nimensä mukaisesti systeemin tai kappaleen liikettä. Liikemäään säilyminen tarkoittaa siis sitä, että kappaleiden liike ei muutu ellei jokin ulkoinen vuorovaikutus niitä muuta. On tavallinen väärinkäsitys ajatella, että kappaleet pysähtyvät, jos niiden liikettä ei pidetä yllä. Tämä ajatus on kuitenkin *vääriä*. Ajatus on uskottava, koska arkikokemuksen mukaan kaikki kappaleet pysähtyvät itsestään. Tämä johtuu kuitenkin siitä, että makroskoopisessa mittakaavassa vuorovaikutuksia kuten kitkaa ja ilmanvastusta ei voi koskaan välttää. Kappaleet pysähtyvät siksi, että nämä vuorovaikutukset muuttavat niiden liikemääriä ja liike-energiaa (kuva 2.22).

Kappaleiden liike kuitenkin muuttuu sitä hitaan min, mitä suurempi inertia kappaleella on, ja sitä nopeammin, mitä voimakkaampi vuorovaikutus liikkeen pyrkii pysäyttämään. Esimerkiksi jäällä kitka on hyvin heikko, ja nünäpä jääkiekko voi liukua pitkään pysähtymättä. Avaruuden lähes täydellisessä tyhjiössä kappaleet liikkuvat käytännössä ikuisesti tai ainakin siihen asti kunnes törmäävät johonkin. Liikkeen perusominaisuus ei siis olekaan pyrkimys pysähtyä vaan *pyrkimys olla muuttumatta*.

Kuva 2.22: Kitka pysäyttää kappaleen.



Liikettä ei voi myöskään muuttaa millaisella vuorovaikutuksella tahansa. Tarinoissa sankari saattaa ottaa itseään kirjaimellisesti niskasta kiinni ja vetää itsensä näin pystyyn. Tämä on hassua, koska näin ei tietenkään voi tehdä. Pystyn voi nousta ottamalla tukea jostakin toisesta kappaleesta kuten maanpinnasta, mutta itseään ei voi vetää pystyn niskasta nostaan. Samasta syystä lentoon ei voi nousta vetämällä kengännaauhoista ylöspäin. Jonkin *toisen* voi toki nostaa näin ilmaan, mutta *ei itseään*.

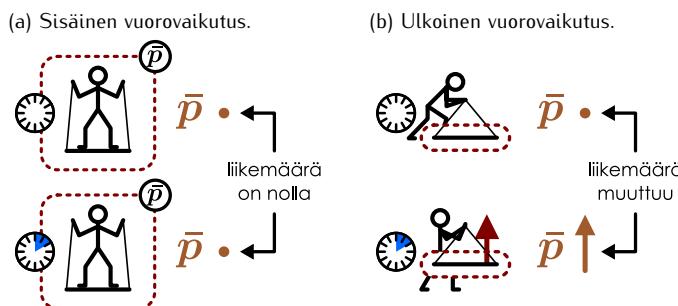
Samantyyppinen ilmiö tapahtuu jäällä. Normaalisti kävely tai ajaminen on helppoa, koska voimme työntää itsemme liikkeelle maanpinnasta kitkan avulla ponnistaen. Hyvin liukkaalla pinnalla on kitkan puuttuessa kuitenkin vaikea päästää liikkeelle, pysähtyä tai käentyä, koska nämä kaikki toimet vaativat vuorovaikutuksen maanpinnan kanssa. Nämä havainnot osoittavat, että systeemi (tässä siis ihminen tai auto) voi lähteä liikkeelle, pysähtyä tai käentyä vain *vuorovaikuttamalla ympäristönsä* kanssa. Fysiikassa tällaisia systeemien ja sen ympäristön välistä vuorovaikutuksia kutsutaan systeemin **ulkoisiksi vuorovaikutuksiksi**. Vastaavasti vuorovaikutukset, joiden kaikki osapuolet kuuluvat systeemiin, ovat systeemin **sisäisiä vuorovaikutuksia**.

Liikemääränsä säälymislain mukaan liikkeen muuttaminen vaatii aina ulkoisia vuorovaikutuksia. Tämä on luonnon perusperiaate, jonka mukaan *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin liikemääriä*. Systeemin sisäiset vuorovaikutukset voivat kyllä saada systeemin osat liikkeelle, mutta aina jos yhden systeemin osan liike muuttuu johonkin tiettyyn suuntaan, muiden osien liikkeen on muututtava vastakkaiseen suuntaan niin, että systeemin liikemäärä kokonaisuutena ei muuto. Sisäiset vuorovaikutukset voivat vaikuttaa systeemin ulkoisiin vuorovaikutuksiin ja sitä kautta ne voivat vaikuttaa systeemin liikkeeseen (esimerkiksi kävellessä lihaksissa vaikuttavat vuorovaikutukset muuttavat kehon asentoa, mikä puolestaan vaikuttaa jalkojen ja maan välistiin vuorovaikutuksiin). Tällöinkin kuitenkin ulkoiset vuorovaikutukset aiheuttavat lopulta systeemin liikemääränsä muutokset (kävellessä kävelijää työntää jalaa ja maanpinnan välinen kitkavuorovaiketus).



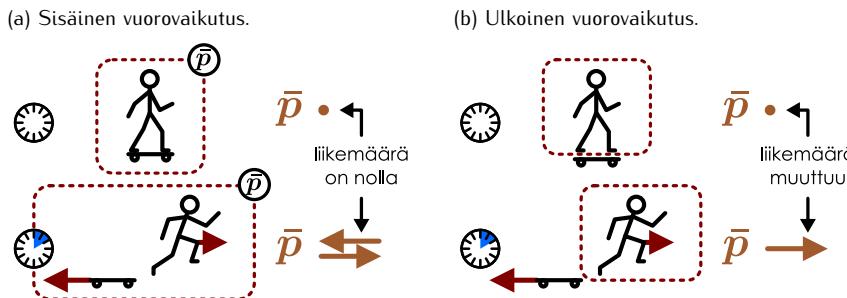
2.21 Voivatko systeemin sisäiset vuorovaikutukset muuttaa systeemin kokonaislüke-energiaa (eli sen osien liike-energoiden summaa)? Entä systeemin kokonaisenergiaa?

Kuva 2.23: Systeemin liikemäären muuttaminen vaatii ulkoisen vuorovaikutuksen.



miksi valita pelkästään nostettava kappale. Kappale vuorovaikuttaa nostajan kanssa kosketuksen välityksellä ja maan kanssa painovoiman kautta, ja jos nostava vuorovaikutus on painovoimaa vahempi, kappale nousee eli sen liike muuttuu. Tässä esimerkissä nostava vuorovaikutus on ulkoinen vuorovaikutus, joten sen on mahdollista muuttaa systeemin liikettä.

Kuva 2.24: Systeemin osien liikettä voi muuttaa sisäisellä vuorovaikutuksella.



voi muuttaa systeemin liikettä kokonaisuudessaan. Systeemin *osien* liike toki muuttuu laudan ja lautailijan lähiessä liikkeelle. Systeemin kokonaisliikemääriä on kuitenkin lautailijan ja laudan liikemäärien summa, ja tässä tapauksessa lauta saa yhtä suuren mutta vastakkaissuuntainen liikemäären lautailijaan verrattuna, jolloin kokonaisliikemääriä on hypynkin jälkeen nolla. Tässä mielessä systeemin liike ei siis muutu.

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 2.23. Kuvassa (a) on levy, jonka kulmiin on kiinnitetty narut. Henkilö vetää naruista ylöspäin seisoen samalla levyn päällä. Levy ei tällöin tietenkään nouse, ja tämän voi selittää liikemäären säälymislain avulla. Jos nimittäin systeemiksi valitaan nostaja ja levy yhdessä, kaikki nostajan ja levyn välistet vuorovaikutukset ovat systeemin sisäisiä, eivätkä ne siis voi saada systeemiä liikkeelle.

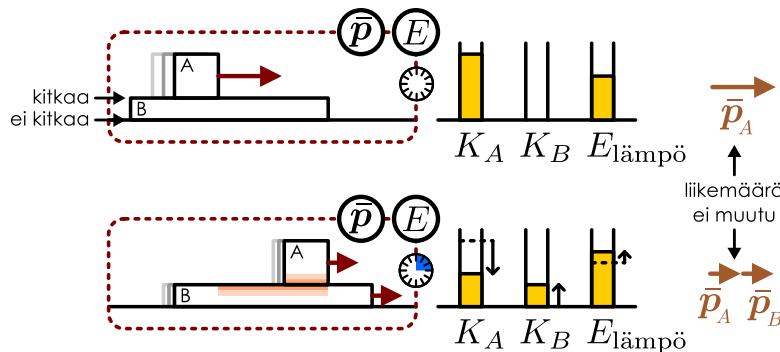
Sen sijaan jos nostaja ei seiso kappaleen päällä kuten kuvassa 2.23 (b), nostaminen onnistuu. Tällöin voidaan systeem

Kuvassa 2.24 tarkastellaan puolestaan rullalautailijaa, joka hyppää pois laudaltaan. Aluksi lauta ja lautailija ovat molemmat paikoillaan. Hypätessään lautailija ponnistaa laudasta, jolloin lautailija lähtee liikkeelle eteenpäin ja lauta taaksepäin. Jos systeemiin sisällytetään sekä lauta että lautailija, ponnistus laudalta on systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka ei

Aivan yhtä hyvin systeemiksi olisi tässä tilanteessa voitu valita myös pelkkä lautailija kuten kuvassa 2.24 (b). Tällä valinnalla systeemin liikemääriä muuttuu, mutta nyt lautailijan vuorovaikutus laudan kanssa on systeemin *ulkoinen vuorovaikutus*, joten se voi muuttaa systeemin liikemääriä. Lauta on nyt puolestaan osa systeemin ympäristöä, joten systeemin liikemäären muuttuessa myös ympäristön liikemääriä muuttuu.

2.22 Oletetaan, että meillä on kaksi eksoottista kappaletta, A ja B, joiden välillä vaikuttaa seuraavainen vuorovaikutus: jos kappaleet ovat lähempänä kuin 0.5 m toisistaan, B:hen kohdistuu vakiokiihtyvyys kohti A:ta (ts. A vetää B:tä puoleensa), mutta A:n liike ei muudu (B ei vedä A:tta puoleensa). Kiinnität kappaleen B kengänpohjisi ja pidät kappaletta A kädessäsi. (a) Valitaan systeemiksi sinä + A + B. Onko kuvattu vuorovaikutus systeemin sisäinen? (b) Mitä tapahtuu, kun tuot kappaleteen A lähelle kenkiäsi? (c) Onko tällainen vuorovaikutus mahdollinen?

Kuva 2.25: Kitka siirtää liikemääriä kappaletta toiselle.



rää eivätkä dissipatiiviset vuorovaikutukset voi muuttaa systeemin liikemääriä muihin muotoihin samaan taapaan kuin liike-energiaa. Sen sijaan jos vaikkapa kirja liukuu pöydällä ja pysähtyy kitkan vaikutuksesta, kirjan liikemääriä ei katoa vaan siirryt pöydälle ja pöydältä edelleen maalle. Maapallo on kuitenkin niin suuri, että vaikka kirjan koko liikemääriä siirryt maahan, maapallon liike ei muudu havaittavasti. Maapallon näkökulmasta kirja tai mikä tahansa ihmisen rakennelma on mitättömämpi kuin kärpänen rekkaan verrattuna.

Sen, että kitka ei hävitää liikemääriä vaan siirtää sen vain kappaletta toiselle, voi todeta seuraavalla kuvassa 2.25 esitetyllä kokeella. Asetetaan lähes kitkattomalle suoralle radalle pitkä kappaletta B ja tämän päälle toinen kappaletta A. Kappaletta B on aluksi levossa, mutta kappaletta A työnnetään liikkeelle. Koska B on kitkattomalla radalla, sen alapintaan ei vaikuta kitka. A:n ja B:n välisellä pinnalla kitkaa kuitenkin on, ja tämä kitka pyrkii pysäyttämään pintojen liukkeen *toistensa suhteeseen*. Tämä tarkoittaa sitä, että kitka hidastaa kappaletta A liikkettä mutta samalla se vetää kappaletta B liikkeelle. Lopputulos on se, että kappaletat päätyvät liikkumaan samalla nopeudella, ja tämä nopeus määräytyy liikemääriä säilymislain mukaisesti niin, että lopputilanteessa kappaletten A ja B liikemäärien summa on sama kuin kappaletten A liikemääri alkutilanteessa. Tässä kokeessa kitka on siis systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka siirtää liikemääriä kappaletta A kappaletelle B, mutta sekään ei voi hävittää liikemääriä. Tämä koe on myös esimerkki tilanteesta, jossa kitka ei pyri pysäyttämään kappaletta, sillä nyt kitka nimenomaan työntää kappaletta B liikkeelle. Kitka kuten muutkin dissipatiiviset vuorovaikutukset pyrkivät saamaan kappaletat liikkumaan samalla nopeudella, mutta tämä nopeus ei väittämättä ole nolla.

Lopuksi on vielä syytä täsmennää dissipatiivisten vuorovaikutusten ja liikemäären suhdetta. Oppime jo aikaisemmin, että dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat muuttaa liike-energian esimerkiksi lämpöenergiaksi, jolloin systeemin liike-energia voi vähentyä, vaikka energiaria ei energian säilymislain mukaan voikan hävittää. Tämä pääte kuitenkin vain energialle. Liikemäärelläkin on olemassa muita muotoja kuin massiivisten kappaletiden liike, sillä esimerkiksi valollakin on pieni liikemääri. Lämpöön ja kuumuuteen ei kuitenkaan liity mitään liikemääriä eivätkä dissipatiiviset vuorovaikutukset voi muuttaa systeemin liikemääriä muihin muotoihin samaan taapaan kuin liike-energiaa. Sen sijaan jos vaikkapa kirja liukuu pöydällä ja pysähtyy kitkan vaikutuksesta, kirjan liikemääriä ei katoa vaan siirryt pöydälle ja pöydältä edelleen maalle. Maapallo on kuitenkin niin suuri, että vaikka kirjan koko liikemääriä siirryt maahan, maapallon liike ei muudu havaittavasti. Maapallon näkökulmasta kirja tai mikä tahansa ihmisen rakennelma on mitättömämpi kuin kärpänen rekkaan verrattuna.

2.23 Kirjoita tüivistelmä törmäyksistä ja säilyvistä suureista. Kuvaile elastiset ja epäelastiset törmäykset sekä räjähtävät erotukset. Selitä erityisesti milloin ja miksi liike-energia tai liikemääriä on vakio ja selitä, mikä näitä suureita voi muuttaa.

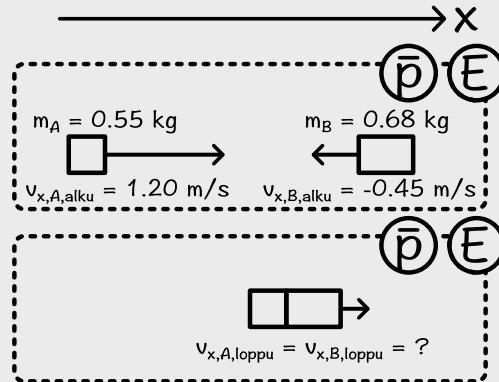
esimerkki 2.7

Epäelastinen törmäys

Kaksi kappaletta, joiden massat ovat 0.55 kg ja 0.68 kg, liikkuvat nopeuksilla 1.20 m/s positiiviseen ja 0.45 m/s negatiiviseen x -suuntaan. Mikä on kappaleiden loppunopeus suoran törmäyksen jälkeen (kappaleet pysyvät x -akselilla), jos törmäys on täysin epäelastinen.

TILANNE Merkitään kappaleita indeksin A ja B, niiden massoja $m_A = 0.55 \text{ kg}$ ja $m_B = 0.68 \text{ kg}$ sekä nopeuksia $v_{x,A,\text{alku}} = 1.20 \text{ m/s}$ ja $v_{x,B,\text{alku}} = -0.45 \text{ m/s}$.

SUUNNITELMA Oletetaan törmäys niihin nopeaksi, että ulkoiset vuorovaikutukset eivät ehdi sen aikana merkittävästi vaikuttaa kappaleiden liikemääriin. Tällöin systeemin kokonaisliikemääriä on törmäyksessä vakio. Täysin epäelastisessa törmäyksessä kappaleet tarttuvat yhteen joten törmäyksen jälkeen kappaleiden loppunopeudet ovat samat. Systeemin kokonaisenergia on vakio, mutta törmäyksessä vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia jotka muuttavat liike-energiaa sisäenergiaksi eikä liike-energia ole vakio.



Täysin epäelastisen törmäyksen jälkeen kappaleiden nopeudet ovat samat

$$v_{x,A,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{loppu}} = v_{x,\text{loppu}}. \quad (2.50)$$

Liikemäärin säilyminen tarkoittaa puolestaan sitä, että kokonaisliikemääriä on oltava aluksi sama kuin lopuksi eli

$$m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}} = (m_A + m_B) v_{x,\text{loppu}}. \quad (2.51)$$

RATKAISU Voimme ratkaista loppunopeuden suoraan yhtälöstä (2.51), ja ratkaisuksi saadaan

$$v_{x,\text{loppu}} = \frac{m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}}}{m_A + m_B}. \quad (2.52)$$

Sijoittamalla numeroarvot saadaan loppunopeudeksi

$$v_{x,\text{loppu}} = 0.29 \text{ m/s}. \quad (2.53)$$

Mathematica:

```
(* ratkaistaan liikemäärin säilymisen yhtälö *)
ratkaisu = Solve[ mB (vloppu - vBalku) == -mA (vloppu - vAalku), vloppu]
{{vloppu -> (mA vAalku + mB vBloppu) / (mA + mB)}}

(* sijoitetaan ratkaisuun lukuarvot *)
ratkaisu /. {mA -> 0.55, mB -> 0.68, vAalku -> 1.20, vBalku -> -0.45}
{{vloppu -> 0.287805}}
```

ARVIOINTI Loppunopeus on alkunopeuksien väliltä kuten pitääkin. Yksinkertaisin tapa tarkastaa tulos täsmällisesti on laskea liikemääriä ennen törmäystä sekä sen jälkeen. Kokonaisliikemääriä on aluksi $p_{x,\text{alku}} = m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}} = 0.354 \text{ kgm/s}$ ja lopuksi $p_{x,\text{loppu}} = m_A v_{x,A,\text{loppu}} + m_B v_{x,B,\text{loppu}} = 0.354 \text{ kgm/s}$, joten liikemääriä on vakio. Siispä tulos toteuttaa liikemäärin säilymisehdon.

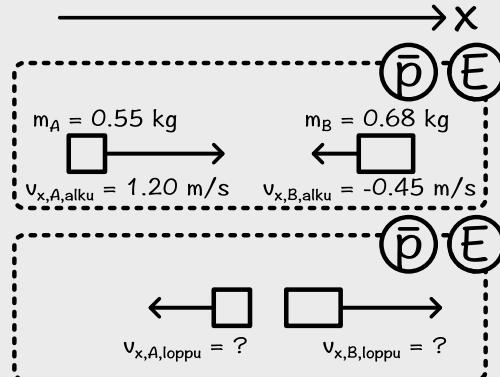
esimerkki 2.8

Elastinen törmäys

Kaksi kappaletta, joiden massat ovat 0.55 kg ja 0.68 kg, liikkuvat nopeuksilla 1.20 m/s positiiviseen ja 0.45 m/s negatiiviseen x -suuntaan. Mikä on kappaleiden loppunopeus suoran törmäyksen jälkeen (kappaleet pysyvät x -akselilla), jos törmäys on elastinen?

TILANNE Tilanne on täsmälleen samanlainen kuin esimerkissä 2.7 paitsi ettei törmäys ole elastinen. Merkitään kappaleita indeksin A ja B, niiden massoja $m_A = 0.55 \text{ kg}$ ja $m_B = 0.68 \text{ kg}$ sekä nopeuksia $v_{x,A,\text{alku}} = 1.20 \text{ m/s}$ ja $v_{x,B,\text{alku}} = -0.45 \text{ m/s}$.

SUUNNITELMA Oletetaan jälleen törmäys niin nopeaksi, että ulkoiset vuorovaikutukset eivät ehdi sen aikana merkittävästi vaikuttaa kappaleiden liikemääriin. Tällöin systeemin kokonaisliikemääriä on törmäyksessä vakio. Elastisen törmäyksen tapauksessa myös systeemin kokonaisliike-energia on törmäyksessä vakio.



Liikemäärin säilyminen tarkoittaa kahden kappaleen tapauksessa sitä, että kappaleiden nopeuksien muutokset ovat kääntäen verrannolliset kappaleiden massoihin eli

$$\Delta v_{x,B} = -\frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A}. \quad (2.54)$$

Elastisessa törmäyksessä liike-energia on vakio

$$\frac{1}{2} m_A v_{x,A,\text{alku}}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,\text{alku}}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,\text{loppu}}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,\text{loppu}}^2. \quad (2.55)$$

RATKAISU Nopeudet voidaan ratkaista yhtälöistä (2.54) sekä (2.55). Periaatteessa lasku onnistuu ratkaisemalla liikemäärin säilymislain avulla esimerkiksi kappaleen B loppunopeus ja sijoittamalla tämä energian säilymislain yhtälöön. Lopputuloksena saadaan toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisuna saadaan kappaleen A loppunopeus. Tämä voidaan sijoittaa takaisin liikemäärin säilymislakiin, jolloin saadaan myös kappaleen B loppunopeus. Lasku on kuitenkin varsin pitkä ja työläs, ja ratkaisu löytyy helpomminkin.

Termejä ryhmittelemällä liike-energian säilymlaki (2.55) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2} m_B (v_{x,B,\text{loppu}}^2 - v_{x,B,\text{alku}}^2) = -\frac{1}{2} m_A (v_{x,A,\text{loppu}}^2 - v_{x,A,\text{alku}}^2). \quad (2.56)$$

Tässä yhtälössä on kummallakin puolella neliöiden erotus, joka voidaan hajottaa laskusäännöllä

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b). \quad (2.57)$$

Huomioiden vielä, että $\Delta v_{x,B} = v_{x,B,\text{loppu}} - v_{x,B,\text{alku}}$, liike-energian säilyminen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{2} m_B \Delta v_{x,B} (v_{x,B,\text{loppu}} + v_{x,B,\text{alku}}) = -\frac{1}{2} m_A \Delta v_{x,A} (v_{x,A,\text{loppu}} + v_{x,A,\text{alku}}). \quad (2.58)$$

Sijoittamalla tähän liikemäären säilymisen ehto (2.54) saadaan tulos

$$-\frac{1}{2} m_B \frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A} (v_{x,B,\text{loppu}} + v_{x,B,\text{alku}}) = -\frac{1}{2} m_A \Delta v_{x,A} (v_{x,A,\text{loppu}} + v_{x,A,\text{alku}}) \quad (2.59)$$

josta yhtaiset tekijät supistaen

$$v_{x,B,\text{loppu}} + v_{x,B,\text{alku}} = v_{x,A,\text{loppu}} + v_{x,A,\text{alku}}. \quad (2.60)$$

Tämä yllättävä yksinkertainen tulos siis sanoo, että kummankin kappaleen alku- ja loppunopeuden summa (tai keskiarvo) on sama. Tämä pätee kuitenkin vain yksilötilanteissa elastiissä törmäyksissä.

Yhtälöt (2.54) sekä (2.60) muodostavat yhtälöparin, josta loppunopeudet voidaan ratkaista. Esimerkiksi jälkimmäisen yhtälön mukaan kappaleen B loppunopeus on

$$v_{x,B,\text{loppu}} = v_{x,A,\text{loppu}} + v_{x,A,\text{alku}} - v_{x,B,\text{alku}} \quad (2.61)$$

ja tämän sijoitus ensimmäiseen antaa

$$v_{x,A,\text{loppu}} + v_{x,A,\text{alku}} - 2v_{x,B,\text{alku}} = -\frac{m_A}{m_B} (v_{x,A,\text{loppu}} - v_{x,A,\text{alku}}). \quad (2.62)$$

Sürtämällä kaikki kappaleen A loppunopeutta sisältävät termit yhtälön vasemmalle puolelle saadaan

$$\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_{x,A,\text{loppu}} = \left(\frac{m_A}{m_B} - 1\right) v_{x,A,\text{alku}} + 2v_{x,B,\text{alku}} \quad (2.63)$$

ja tästä edelleen kappaleen A loppunopeudeksi

$$v_{x,A,\text{loppu}} = \left(\frac{m_A - m_B}{m_B} v_{x,A,\text{alku}} + 2v_{x,B,\text{alku}} \right) / \left(\frac{m_A + m_B}{m_B} \right) = \frac{(m_A - m_B)v_{x,A,\text{alku}} + 2m_B v_{x,B,\text{alku}}}{m_A + m_B}. \quad (2.64)$$

Sijoitus takaisin yhtälöön (2.61) antaa kappaleen B loppunopeuden

$$v_{x,B,\text{loppu}} = \frac{(m_B - m_A)v_{x,B,\text{alku}} + 2m_A v_{x,A,\text{alku}}}{m_A + m_B}. \quad (2.65)$$

Sijoittamalla numeroarvot saadaan loppunopeuksiksi

$$v_{x,A,\text{loppu}} = -0.62 \text{ m/s}, \quad v_{x,B,\text{loppu}} = 1.0 \text{ m/s}. \quad (2.66)$$

Mathematica:

```
(* ratkaistaan energian ja liikemäärän säilymisen yhtälöpari *)
ratkaisu = Solve[{{
    mA vAloppu^2 + mB vBloppu^2 == mA vAalku^2 + mB vBalku^2,
    mB (vBloppu - vBalku) == -mA (vAloppu - vAalku)
},
{vAloppu, vBloppu},
{{vAloppu -> vAloppu, vBloppu -> vBloppu},
 {vAloppu -> ((mA - mB) vAalku + 2 mB vBalku) / (mA + mB),
  vBloppu -> (2 mA vAalku + (mB - mA) vBalku) / (mA + mB)}}

(* sijoitetaan ratkaisuun lukuarvot *)
ratkaisu /. {mA -> 0.55, mB -> 0.68, vAalku -> 1.20, vBalku -> -0.45}
{{vAloppu -> 1.2, vBloppu -> -0.45}, {vAloppu -> -0.62439, vBloppu -> 1.02561}}
```

ARVIOINTI Kappaleen A loppunopeus on negatiivinen ja kappaleen B positiivinen, joten kappaleet käentyvät törmäyksessä ympäri mikä on järkevä. Yksinkertaisin tapa tarkastaa tulos täsmällisesti on laskea energia ja liikemäärä ennen törmäystä sekä sen jälkeen. Kokonaisenergiaksi saadaan aluksi

$$K_{\text{alku}} = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,\text{alku}}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,\text{alku}}^2 = 0.465 \text{ J} \quad (2.67)$$

sekä lopuksi

$$K_{\text{loppu}} = \frac{1}{2} m_A v_{x,A,\text{loppu}}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{x,B,\text{loppu}}^2 = 0.465 \text{ J}, \quad (2.68)$$

joten liike-energia on vakio. Kokonaislukemäärä on aluksi

$$p_{x,\text{alku}} = m_A v_{x,A,\text{alku}} + m_B v_{x,B,\text{alku}} = 0.354 \text{ kgm/s} \quad (2.69)$$

ja lopuksi

$$p_{x,\text{loppu}} = m_A v_{x,A,\text{loppu}} + m_B v_{x,B,\text{loppu}} = 0.354 \text{ kgm/s}, \quad (2.70)$$

joten myös lukemäärä on vakio. Siispä tulos toteuttaa vaaditut fysikaaliset ehdot.

Tarkastellulla yhtälöllä on toinenkin ratkaisu, jonka Mathematica-ratkaisu löysi. Nimittäin jos kummankaan kappaleen nopeus ei muutu, lukemäärä ja liike-energia tieteenkin ovat vakiot. Yllä esitettyssä laskussa täitä ratkaisua ei löydetty, koska yhtälössä (2.60) on supistettu pois termi $\Delta v_{x,A}$, mikä on sallittua vain jos ko. termi ei ole nolla. Fysikaalisesti tämä ratkaisu tienkenkin tarkoittaa sitä, että kappaleet eivät törmää lainkaan, joten ratkaisu ei kelpaa. Yhtälöiden matemaattisessa käsitteilyssä on kuitenkin aina syytä olla tarkkana, jottei fysikaalisesti merkityksellisiä ratkaisuja unohdu.

Impulssi

Edellä todettiin, että systeemin kokonaislukemäärä on vakio, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia. Usein on kuitenkin tarpeellista tarkastella systeemejä, joiden kokonaislukemäärä muuttuu. On siis tarpeen pystyä analysoimaan myös vuorovaikutusten lukemäärää muuttavaa vaikutusta.

Vuorovaikutuksen kykyä muuttaa systeemin lukemäärää mittaa suure nimeltä **impulssi**. Ympäristönsä kanssa vuorovaikuttavaan systeemiin kohdistuva impulssi määritellään *yhtä suureksi kuin systeemin liikemäärän muutos*

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}. \quad (2.71)$$

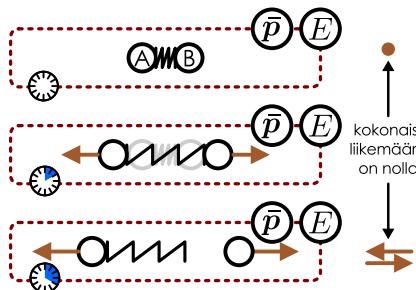
Yhtälö (2.71) tarkoittaa impulssin olevan *yhtä suuri* kuin liikemäärän muutos, mutta nämä ovat fysikaalisesti *eri asioita*. Impulssi on *vuorovaikutuksen voimakkuutta* kuvaava suure kun taas liikemäärän muutos on *kappaleen liikettä* kuvaava suure. Tämä määritelmä siis kertoo, kuinka vuorovaikutus vaikuttaa liikkeeseen. Se ei tarkoita sitä, että impulssi olisi kappaleiden liikettä kuvaava suure.



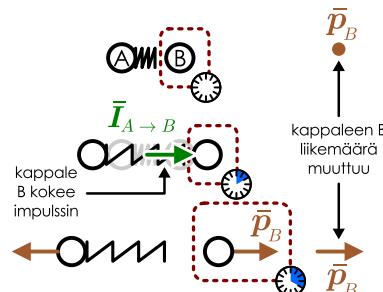
2.24 Miten voisit määrittää golfpalloon golflyönnin aikana kohdistuvan impulssin suuruuden?

Kuva 2.26: Jousi työntää kaksi kappaletta erilleen. Kappaleiden kokonaislukemäärä on koko ajan nolla, mutta kappaleiden liikemäärät erikseen muuttuvat, sillä vuorovaikutus kohdistaa kumpaanakin kappaleeseen impulssin.

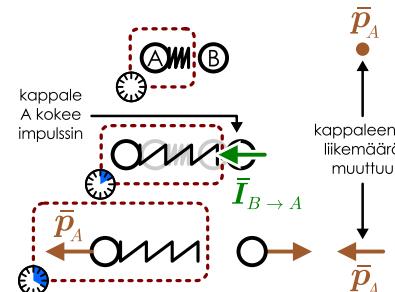
(a) Kahden kappaleen systeemin kokonaislukemäärä on vakio.



(b) Kappale A kohdistaa kappaleeseen B impulsin jolloin B:n liikemäärä muuttuu.



(c) Myös kappale A saa impulssin ja sen liikemäärä muuttuu.



Kuvassa 2.26 tarkastellaan kahden kappaleen, A ja B, yksinkertaista vuorovaikutusta erilaisin systeemirajauksin. Toisessa kappaleessa on jousi, joka on aluksi puristunut kokoon. Vapautuessaan jousi työntää kappaleet liikkeelle. Kappaleiden muodostamaan systeemiin ei kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia, joten sen kokonaislukemäärä on vakio. Merkitsemällä kappaleiden liikemäärää \bar{p}_A ja \bar{p}_B , systeemin kokonaislukemäärä on näiden summa joka siis ei muutu,

$$\Delta \bar{p}_{\text{kokonais}} = \Delta(\bar{p}_A + \bar{p}_B) = \Delta \bar{p}_A + \Delta \bar{p}_B = \bar{0}. \quad (2.72)$$

Kuitenkin jos systeemiksi valitaan vain toinen kappaleista, systeemin liikemäärä selvästiikään ei ole vakio. Systeemin liikemäärä muuttuu, koska nyt kappaleiden välinen vuorovaikutus on ulkoinen vuorovaikutus, ja se kohdistaa systeemiin impulssin. Esimerkiksi kappaleen A kappaleeseen B kohdistama impulssi on impulssin määritelmän (2.71) nojalla yhtä suuri kuin kappaleen B liikemäärän muutos

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = \Delta \bar{p}_B. \quad (2.73)$$

Koska myös kappaleen A liikemäärä muuttuu, myös siihen täytyy kohdistua vuorovaikutussa impulssi

$$\bar{I}_{B \rightarrow A} = \Delta \bar{p}_A. \quad (2.74)$$

Koska kappaleiden liikemäärien muutosten summa on liikemäärän säilymisen (2.72) perusteella nollavektori, näiden muutosten täytyy olla yhtä suuret ja vastakaissuuntainen

$$\Delta \bar{p}_A = -\Delta \bar{p}_B. \quad (2.75)$$

Toisaalta, koska kummankin kappaleen saama impulssi on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutos, kappaleiden vuorovaikutussa saamien impulssien täytyy olla niiinkään *yhtä suuret mutta vastakaissuuntaiset*

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = -\bar{I}_{B \rightarrow A}. \quad (2.76)$$

Päättelyn tulos oli siis seuraava: koska kahden vain keskenään vuorovaikuttavan kappaleen kokonaislukemäärä on liikemäärän säilymislain nojalla vakio, niiden keskinäiset vuorovaikutukset välttämättä kohdistavat impulssin *kumpaanakin* kappaleeseen. Toisin sanoen vuorovaikutukset todella ovat vastavuoroisia — ei ole mahdollista, että vuorovaikutus kohdistuisi vain yhteen kappaleeseen vaan molempien vuorovaikutusten osapuolten on koettava impulssi. Liikemäärän säilymlaki asettaa näin ollen voimakkaita rajoituksia sille, millaiset vuorovaikutukset ovat fysikaalisesti sallittuja. Huomaa vielä, että vaikka kuvassa 2.26 vuorovaikutus oli seurausta jousen elastisuudesta, tässä esityssä päättelyssä ei missään vaiheessa tarvinnut tietää vuorovaikutuksen ominaisuuksia. Niiinpä päättely toimi *mille tahansa* kahden kappaleen väliselle vuorovaikutukselle.

2.25 Muovailuvahasta tehty pallo putoaa lattialle ja pysähtyy hyvin nopeassa törmäyksessä. Jos pallon massa ja nopeus juuri ennen törmäystä tunnetaan, mitä voidaan päätellä (a) lattian palloon törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista, (b) painovoiman palloon törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista ja (c) pallon lattiaan törmäyksen aikana kohdistamasta impulssista?

esimerkki 2.9

Liikkuvia laatikkoja

Laatikon (massa 0.20 kg) sisällä on jousi ja pallo, jonka massa on yhtä suuri kuin laatikon massa. Aluksi sekä laatikko että pallo ovat paikoillaan, ja jousi on puristettu kokoon niin, että jouseen on varastoitunut 20 J energiaa. Sitten jousi vapautetaan, jolloin se työntää pallon liukkeelle ja pallo alkaa kimpilla edestakaisin laatikon kahdesta vastakkaisesta sivusta. (Jousi itse ponnahtaa pois pallon tieltä.) Laatikko on vaakasuoralla lähes kitkattomalla pinnalla ja törmäykset ovat täysin elastiset. Millaisia impulsseja pallo ja laatikko toisiin antavat? Miltä laatikon liike ulospäin näyttää?

TILANNE Valitaan systeemiksi pallo, jousi ja laatikko. Piirretään kappaleiden liikkeestä kuvasarja auttamaan tilanteen hahmottamista.

SUUNNITELMA Aluksi pallo ja laatikko ovat paikoillaan, joten niiden liike-energiat ja liikemäärit ovat nollia. Jousella on potentiaalienergiaa. Kun jousi vapautuu, sen potentiaalienergia muuttuu pallon ja laatikon liike-energiaksi. Pallon ja laatikon muodostamaan systeemiin vaikuttaa ulkoinen gravitaatio sekä kosketusvuorovaikutus maanpinnan kanssa. Koska systeemi ei liiku pystysuunnassa, näiden vuorovaikutusten täyttyy kuitenkin olla tasapainossa eikä systeemiin kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia, jotka vaikuttaisivat kappaleiden vaakasuuntaiseen liikkeeseen. Niinpä systeemin kokonaislukemääriä on vakio. Koska systeemi on aluksi paikoillaan, sen kokonaislukemääriä on nolla, ja siispä systeemin kokonaislukemääriä pitää olla nolla *aina*. Nämä ollen pallon nopeuden muuttuessa myös laatikon nopeuden täyttyy myös muuttua vastakkaiseen suuntaan, jotta systeemin kokonaislukemääriä säilyisi nollana.

Merkitään pallon ja laatikon massaa $m = 0.20 \text{ kg}$ ja niiden nopeuden skalarikomponentteja $v_{x,\text{pallo}}$ ja $v_{x,\text{laatikko}}$. Tällöin niiden liikemäärit ovat

$$\bar{p}_{\text{pallo}} = mv_{x,\text{pallo}}\hat{i}, \bar{p}_{\text{laatikko}} = mv_{x,\text{laatikko}}\hat{i}. \quad (2.77)$$

Systeemin kokonaislukemääriä on nolla koko liikkeen ajan

$$\bar{p}_{\text{kokonaiss}} = \bar{p}_{\text{pallo}} + \bar{p}_{\text{laatikko}} = m(v_{x,\text{pallo}} + v_{x,\text{laatikko}})\hat{i} = \bar{0}. \quad (2.78)$$

ja systeemin liike-energia on yhtä suuri kuin jouseen aluksi varastoitunut energia

$$K = \frac{1}{2}mv_{x,\text{pallo}}^2 + \frac{1}{2}mv_{x,\text{laatikko}}^2 = U_{\text{jousi, alk.}} \quad (2.79)$$

Törmäyksissä pallo ja laatikko kohdistavat toisiinsa impulssin. Kappaleen saama impulssi on yhtä suuri kuin kappaleen liikemääärän muutos,

$$\bar{I} = \Delta\bar{p}. \quad (2.80)$$

RATKAISU Yhtälön (2.78) mukaan systeemin kokonaislukemäärävektori on nollavektori. Tämä tarkoittaa sitä, että vektorin pituus on nolla, eli

$$m(v_{x,\text{pallo}} + v_{x,\text{laatikko}}) = 0. \quad (2.81)$$

Koska kappaleiden massat eivät ole nollia, tämä toteutuu vain kun $v_{x,\text{pallo}} = -v_{x,\text{laatikko}}$ eli kun kappaleet liikkuvat vastakkaisiin suuntiin itsesarvoltaan yhtä suurilla nopeuksilla.

Voidaan siis päätellä, että jousen työntäässä pallon liukkeelle, se työntää myös laatikon liukkeelle vastakkaiseen suuntaan. (Tämä on räjähäitävä erotus.) Samoin jokaisessa törmäyksessä pallon nopeuden vaihtaa ($v_{x,\text{pallo}} \rightarrow -v_{x,\text{pallo}}$) myös laatikon nopeus vaihtaa suuntaa. Laatikko alkaa siis poukkoilemaan edestakaisin samalla nopeudella mutta vastakkaiseen suuntaan kuin sen sisällä liikkova pallo.

Kappaleiden vauhti selviää nyt energiaperiaatteella. Merkitsemällä $v = |v_{x,\text{pallo}}| = |v_{x,\text{laatikko}}|$ yhtälöstä (2.79) saadaan

$$v = \sqrt{U_{\text{jousi, alk.}}/m} = 10 \text{ m/s.} \quad (2.82)$$

Pallon vauhti on kussakin törmäyksessä vakio, mutta sen nopeus ei ole, koska liikeneminen muuttuu. Nopeuden muutos on suuruudeltaan

$$|\Delta v_{x,\text{pallo}}| = |v_{x,\text{pallo, loppu}} - v_{x,\text{pallo, alk.}}| = 2v = 20 \text{ m/s.} \quad (2.83)$$

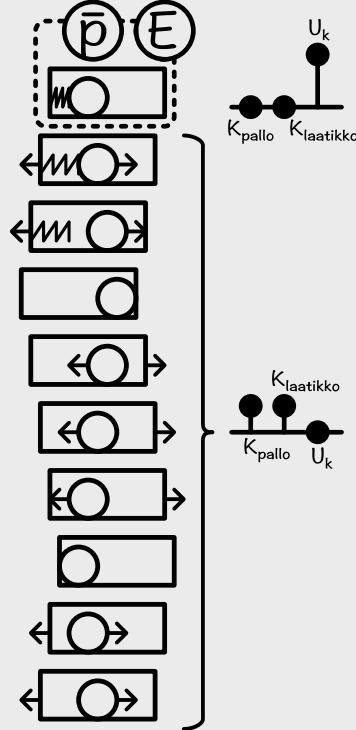
Jos pallo on aluksi liikkeessä positiiviseen suuntaan, sen saama impulssi on

$$I_{x,\text{laatikko} \rightarrow \text{pallo}} = \Delta p_{x,\text{pallo}} = m\Delta v_{x,\text{pallo}} = -4.0 \text{ kgm/s.} \quad (2.84)$$

Laatikon saama impulssi on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen, $I_{x,\text{pallo} \rightarrow \text{laatikko}} = -I_{x,\text{laatikko} \rightarrow \text{pallo}}$.

ARVIOINTI

Sekä pallo että laatikko liikkuvat, mutta edestakaisin. Kumpikaan ei pääse puolta laatikon mittaa kauemmaksi alkuperäiseltä paikaltaan, koska tällöin laatikko ja pallo jo törmäävät. Systeemin osat siis liikkuvat mutta systeemi itsessään ei lähde liikkeelle. Tämä on järkevä tulos, koska systeemiin vaikuttii vain sisäisiä vuorovaikutuksia, jotka eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemäärästä.



2.5 Massakeskipiste

Esimerkissä 2.9 nähtiin, että vaikkei systeemin sisäinen vuorovaikutus voi saada systeemiä jatkuvaan suoravii-vaiseen liikkeeseen, se voi kuitenkin saada systeemin osat liikkumaan systeemin suhteen. Kokonaisliikemäärä kertoo meille systeemin liiketilan, ja erityisesti kokonaisliikemäärä on nolla systeemi on kokonaisuutena paikoillaan. Edelleen jos systeemi on paikoillaan, on luonnollista kysyä *missä* systeemi on. Kuitenkaan systeemin osien liikkuesa minkään yksittäisen kappaleen paikka ei ole hyvä tapa kuvata systeemin sijaintia. Ilmeisesti jonkinlainen keskiarvo eri kappaleiden paikoista olisi tähän tarkoitukseen parempi suure.

Massa on ekstensiivinen suure, joten systeemin kokonaismassa on sen kaikkien osien massojen summa. Jos systeemi koostuu esimerkiksi hiukkasista, joiden massat ovat m_1, m_2 , jne., kokonaismassa on

$$M = m_1 + m_2 + \dots = \sum_i m_i. \quad (2.85)$$

Jos nyt systeemin kokonaisliikemäärä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{p}_{\text{kokonais}} = M \bar{v}_{\text{cm}}, \quad (2.86)$$

eli systeemin kokonaismassan ja jonkin "keskiarvonopeuden" \bar{v}_{cm} tulona, tämä nopeus voisi olla hyvä mittari systeemin kollektiiviselle liikkeelle. (Lyhenteen 'cm' merkitys selviää pian. Se ei tarkoita senttimetriä.) Eri-tyisesti *paikoillaan* olevalle systeemille, jolle kokonaisliikemäärä on nolla, tällaisen keskiarvoisen nopeuden pitäisi lausekkeen (2.86) mukaan olla *nolla*.

Rajoitutaan tarkastelemaan yksilöitteistä, x -suuntaista liikettä, jolloin voimme poimia kokonaisliikemäärään (2.86) x -skalaarikomponentin ja kirjoittaa ilman vektoreita

$$p_{x,\text{kokonais}} = M v_{x,\text{cm}}. \quad (2.87)$$

Systeemin keskiarvoisen nopeuden määritteleminen onnistuu laventamalla kokonaisliikemäärään lauseke (2.48) kokonaismassalla (2.85), jolloin voidaan kirjoittaa

$$p_{x,\text{kokonais}} = M \left(\frac{m_1}{M} v_{x,1} + \frac{m_2}{M} v_{x,2} + \dots \right) = M \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}. \quad (2.88)$$

Lopputuloksena saadussa yhtälössä (2.88) summassa esiintyvä tekijät m_i/M ovat kunkin hiukkisen massan ja systeemin kokonaismassan suhde. Nämä ovat siis vain joitakin reaalilukuja, joten lausekkeessa esiintyvässä summassa yksinkertaisesti lasketaan yhteen kaikkien hiukkasten nopeudet kerrottuna kyseisen hiukkisen massan osuudella systeemin kokonaismassasta. Summa on siis hiukkasten nopeuksien *massoilla painotettu keskiarvo*. Näin kokonaisliikemäärä on kirjoitettu systeemin kokonaismassan sekä hiukkasten nopeuksien painotetun keskiarvon tulona aivan kuten yhtälössä (2.88). Siispä tämä nopeuksien painotettu keskiarvo kuvailee systeemin kollektiivista nopeutta

$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}. \quad (2.89)$$

Koska voimme nyt ilmaista systeemin nopeuden hyvin määritellyllä tavalla, seuraava askel on määritellä systeemin *paikka* yksikäsitteisesti. Teemme tämän käyttämällä nopeuden määritelmää 1.20, jonka mukaan nopeus on paikkavektorin derivaatta. Jos nimittäin voimme kirjoittaa systeemin nopeuden muodossa

$$v_{x,\text{cm}} = \frac{dx_{\text{cm}}}{dt}, \quad (2.90)$$

missä x_{cm} on jokin hyvin määritetty paikkakoordinaatti, tämä koordinaatti on myös järkevä tapa määritellä systeemin paikka.

Edellä johdetussa nopeuden lausekeessa (2.89) esiintyy hiukkasten nopeuksia, mutta voimme kirjoittaa nämä myös hiukkasten paikkakoordinaattien derivaattoina, jolloin saadaan

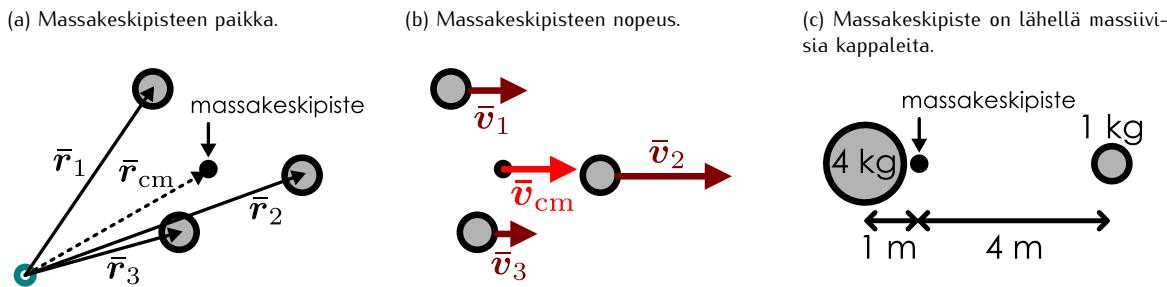
$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \frac{dx_i}{dt} = \frac{m_1}{M} \frac{dx_1}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{dx_2}{dt} + \dots \quad (2.91)$$

Edelleen summan derivoimissäädön $\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2)$ perusteella tämä on sama asia kuin

$$v_{x,\text{cm}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 + \dots \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i}{M} x_i \right). \quad (2.92)$$

Toisin sanoen on sama asia laskea ensin hiukkasten koordinaatit yhteen ja derivoida niiden summaa kuin derivoida erikseen jokaista koordinaattia ja laskea derivaatat yhteen.

Kuva 2.27: Massakeskipiste on kappaleiden paikkojen keskiarvo.



Edellä johdetussa viimeisessä lausekkeessa derivoitava summa $\sum_i \frac{m_i}{M} x_i$ on nyt hiukkasten *paikkakoordinaattien massoilla painotettu keskiarvo* — siis jonkin avaruuden pisteen koordinaatti sekin. Näin keskiarvonopeus $v_{x,cm}$ on kirjoitettu täsmälleen haluttuun muotoon (2.90) systeemin kokonaismassan ja koordinaatin derivaatan avulla. Niiinpä voimme määritellä systeemin x -koordinaatiksi tämän hiukkasten koordinaattien keskiarvon

$$x_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} x_i \quad (2.93)$$

Samanlainen päätely toimii erikseen missä tahansa suunnassa ja sama määritelmä yleisesti vektorein kirjoittaen on

$$\bar{r}_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{r}_i. \quad (2.94)$$

Tätä kutsutaan systeemin **massakeskipisteeksi** ja nopeus

$$\bar{v}_{cm} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{v}_i \quad (2.95)$$

on systeemin **massakeskipistenopeus**. (Lyhenne 'cm' tulee englanninkielisestä termistä 'center of mass'.) Massakeskipistevektori on samaan tapaan määritelty vektori kuin paikkavektorikin, eli se on koordinaatiston origosta varsinaiseen massakeskipisteen osoittava vektori, jonka x -komponentti on x_{cm} .

Massakeskipisteen käsitteen avulla edellä esitettyt ilmukset, joissa puhutaan "systeemin paikasta" tulevat täsmällisiksi. Kun systeemin paikaksi määritellään massakeskipiste ja systeemin nopeudeksi massakeskipisteen nopeus, systeemin kokonaislukemäärä voidaan kirjoittaa systeemin kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulona (2.86). Systeemi on siis paikoillaan täsmälleen silloin kun sen *massakeskipiste ei liiku*. Liikemäären säilymlaki voidaan ilmaista myös niin, että *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa massakeskipisteen nopeutta*. Myös yksittäisten kappaleiden paikkakoordinaatiille saadaan näin hyvä ja yksikäsitteinen määritelmä: Kappaleen paikaksi voidaan aina sopia kappaleen muodostavien *hiukkasten* massakeskipiste.



2.26 Jos systeemissä on kaksi kappaletta, joiden massat ovat 1.0 ja 2.0 kg ja vauhdit 3.0 ja 1.0 m/s vastakkaisiin suuntiin, ja kappaleiden välinen etäisyys on 3 m, mikä on systeemin (a) kokonaismassa, (b) massakeskipistenopeus? (c) Missä on systeemin massakeskipiste?

Massakeskipisteen energia

Massakeskipiste on hyödyllinen työkalu sekä energian että liikemääriä perustuvissa tarkasteluissa. Tutkitaan nyt, miten massakeskipisteen avulla voidaan laskea kappaleen tai systeemin energia.

Äsknen opimme laskemaan hiukkasista koostuvan systeemin massakeskipisteen paikan ja nopeuden, mutta sama teknikka toimii myös silloin, kun systeemi koostuu kokonaista kappaleista. Jos nimittäin määritämme ensin kunkin kappaleen massan ja massakeskipisteen, näiden kappaleiden muodostaman systeemin massakeskipiste saadaan kappaleiden massakeskipisteiden paikkojen painotettuna keskiarvona. Toisaalta jako kappaleisiin on aivan mielivaltainen, joten sama periaate pätee myös kappaleiden osille. Tämän idean avulla voimme etsiä massakeskipisteen myös epäsäännöllisen muotoisille kappaleille kuten kuvassa 2.28. Kuvan kappaleen muoto muistuttaa C-kirjainta, eikä ole lainkaan selvää, missä kappaleen massakeskipiste täsmälleen on. Voimme kuitenkin ajatella kappaleen koostuvan kolmesta suorakulmaisesta osasta. Jos kappale koostuu kauttaaltaan samanlaisesta aineesta, kunkin suorakulmaisen osan massa on verrannollinen osan kokoon ja

kunkin osan massakeskipiste on symmetrian perusteella osan keskipisteessä. Koko kappaleen massakeskipisteen paikka saadaan puolestaan laskettua yhtälöllä 2.94 näiden kolmen osan massakeskipisteiden paikkakoordinaattien painotettuna keskiarvona. Tässä tapauksessa massakeskipiste on hieman kappaleen ulkopuolella, mutta ei kuitenkaan täsmälleen kappaleen sisään jäävän aukon keskellä.

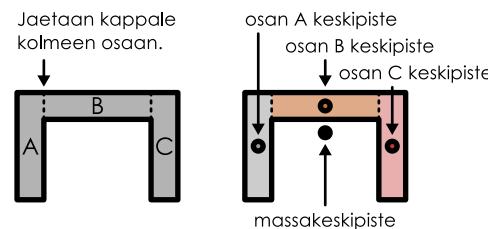
Kun tunnemme kappaleen massan ja massakeskipisteen paikan, voimme laskea helposti kappaleen painovoiman potentiaalienergian sen avulla. Jos nimittäin kappale koostuu osista, joiden massat ovat m_1, m_2 jne. ja joiden koordinaatit pystysuunnassa ovat x_1, x_2 jne., näiden osien potentiaalienergia on $U_1 = m_1gx_1$, $U_2 = m_2gx_2$ jne. ja koko kappaleen potentiaalienergia on

$$U = m_1gx_1 + m_2gx_2 + \dots = g \sum_i m_i x_i. \quad (2.96)$$

Mutta toisaalta massakeskipisteen paikkakoordinaatti on yhtälön (2.93) perusteella $x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$, joten potentiaalienergian voi kirjoittaa kappaleen kokonaismassan ja massakeskipisteen avulla muodossa

$$U = Mg x_{cm}. \quad (2.97)$$

Kuva 2.28: Epäsäännöllisen kappaleen massakeskipiste.



- 2.27** Systeemi koostuu kahdesta osasta, joiden massat ovat 2.0 kg ja 3.0 kg. Kevyemän osan massakeskipiste on korkeudella 0.5 m ja raskaamman 1.2 m. Mikä on systeemin (a) massakeskipisteiden korkeus? (b) kummankin osan potentiaalienergia? (c) massakeskipisteiden avulla laskettu potentiaalienergia?

Epäsäännöllisen muotoisen kappaleen potentiaalienergian voi siis laskea kahdella tavalla (kuva 2.29). Yksi tapa on jakaa kappale osiin ja laskea kunkin osan potentiaalienergia erikseen, jolloin koko kappaleen potentiaalienergia on sen osien energioiden summa. Toinen tapa on määrittää ensin kappaleen massakeskipisteiden paikka. Kappaleella on nimittäin sama potentiaalienergia kuin pallolla, jolla on sama massa ja joka on samalla korkeudella kuin kappaleen massakeskipiste.

Systeemin *liike-energiaa ei kuitenkaan voi laskea yhtä yksinkertaisesti*. Jos systeemin kaikki kappaleet liikkuvat samaan suuntaan samalla nopeudella v_x , myös systeemin massakeskipisteen nopeus on sama, $v_{x,cm} = v_x$ ja tällöin systeemin liike-energia voidaan laskea massakeskipisteen massan ja nopeuden avulla,

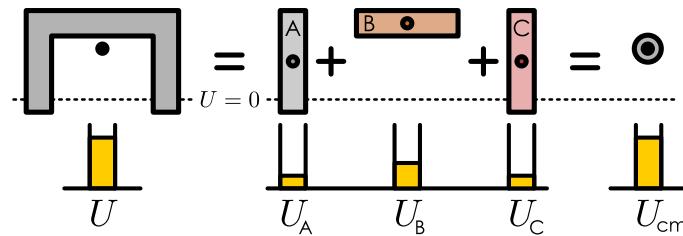
$$K = \frac{1}{2}m_1v_{x,1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2}^2 \dots = \frac{1}{2}m_1v_{x,cm}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,cm}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \dots)v_{x,cm}^2 = \frac{1}{2}Mv_{x,cm}^2. \quad (2.98)$$

Yleensä tämä ei kuitenkaan päde! Esimerkiksi jos systeemiin kuuluu kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa kappaletta, joilla on sama massa ja sama vauhti, niiden muodostaman systeemin massakeskipistenopeus on nolla, vaikka systeemillä selvästikin on liike-energiaa. Niinpä yleisesti pätee

$$K_{\text{systeemi}} \geq \frac{1}{2}Mv_{x,cm}^2, \quad (2.99)$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain kun kaikilla kappaleilla on sama nopeus.

Kuva 2.29: Epäsäännöllisen kappaleen potentiaalienergia.



- 2.28** Edellisen kysymyksen systeemin kevyt kappale liikkui ylöspäin vauhdilla 1.5 m/s ja raskas kappale alasäin vauhdilla 0.8 m/s. Mikä on systeemin (a) massakeskipisteen nopeus? (b) massakeskipisteen avulla laskettu liike-energia? (c) todellinen liike-energia?

Massakeskipisteen liike törmäyksessä

Tarkastellaan sitten systeemin massakeskipisteen käyttäytymistä tilanteessa kuten törmäyksessä, jossa systeemin lükemääriä on vakio. Kuvaan 2.30 on piirretty tällainen tilanne. Kyseessä on sama törmäys kuin kuvassa 2.17, jossa kappale A törmää aluksi levossa olleeseen kappaleeseen B, jonka inertia on puolet kappaleen A inertiastä. Nyt kuvan on kuitenkin piirretty myös systeemin massakeskipisteen liike.

Merkitään kappaleen B massa $m_B = m$, jolloin kappaleen A massa on $m_A = 2m$ ja systeemin kokonaismassa on $M = 3m$. Jos kappaleen A koordinaatti on x_A ja kappaleen B x_B , massakeskipisteen x -koordinaatti on määritelmän (2.94) mukaisesti $x_{cm} = \frac{1}{3m}(2mx_A + mx_B) = \frac{2}{3}x_A + \frac{1}{3}x_B$. Tämä on piste, joka on kappaleiden A ja B paikkoja kuvaavien pisteiden välissä ja jakaa niiden yhdysjanan suhteessa 1 : 2. Toisin sanoen massakeskipiste on kaksi kertaa niin kaukana kappaleesta B kuin kappaleesta A.

Piirtämällä massakeskipiste samaan tapaan jokaisella ajan hetkellä kappaleiden välillä näemme massakeskipisteen liikkeen törmäyksessä. Kuvasta nähdään suoraan, että massakeskipisteen paikkaa kuvaava suora eli massakeskipiste liikkuu *tasaisesti*. Myös nopeuden kuvaajassa massakeskipisteen nopeus on kappaleiden A ja B nopeuksien kuvaajien välissä, lähempänä kappaleen A nopeutta. Tässä graafissa massakeskipisteen nopeuden kuvaajaksi piirtyy vaakasuora viiva, mikä tarkoittaa massakeskipisteen nopeuden olevan vakio, kuten tasaisessa liikkeessä pitää ollakin. Erityisesti massakeskipisteen liike on tasaista myös törmäyksen aikana vaikka kummankin kappaleen nopeus välillöin muuttuu.

Systeemin massakeskipisteen nopeus kuvailee systeemin kollektiivista liikettä. Erityisesti massakeskipisteen nopeus kerrottuna systeemin kokonaismassalla on sama kuin systeemin kokonaislükemääriä yhtälön (2.86) mukaisesti. Niinpä jos systeemin massakeskipiste liikkuu tasaisella nopeudella ja systeemin kokonaismassa on vakio, systeemin kokonaislükemääriä on siis myös vakio. Juuri näin onkin törmäyksissä, joissa ulkoiset vuorovaikutukset eivät ole merkittäviä, ja massakeskipisteen tasainen liike on osoitus kokonaislükemäärästä säilymisestä.

Massakeskipisteen liikkeen analysointia ja graafista esitystä voidaan myös käyttää kappaleiden törmäysten tutkimisen apuvälineenä. Kahden kappaleen massakeskipiste on nimittäin *aina* kappaleiden välissä — ei koskaan niiden yhdysjanan ulkopuolella. Niinpä kokonaislükemäären ollessa vakio kappaleiden liikkeen on *aina* tapahduttava siten, että tasaisesti liikkuva massakeskipiste pysyy kappaleiden välissä.



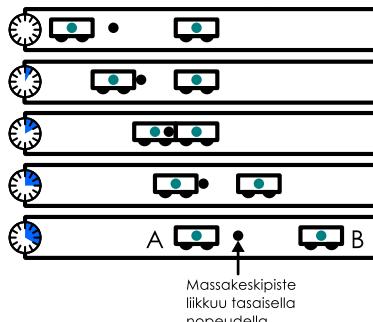
2.29 Kaksi kappaletta liikkuvat vastakkaisiin suuntiin niin, että systeemin kokonaislükemääriä on nolla. Kappaleet törmäävät. (a) Mitä voit päätellä kappaleiden lükemääristä ennen törmäystä? (b) Entä törmäyksen jälkeen, jos törmäys on täysin elastinen? (c) Entä jos törmäys on täysin epäelastinen?

Massakeskipisteen nopeus ei muutu myöskään räjähdyksissä, jos räjähdyksen sinkoamat kappaleet eivät osu mihinkään. Esimerkiksi kun räjähtävä kappale on ennen räjähdyystä paikoillaan, räjähdyksessä liikkeelle lähtevien kappaleiden massakeskipiste pysyy paikoillaan myös räjähdyksen jälkeen. Käytännössä tämä tarjoittaa sitä, että räjähdyks sinkoaa kappaleita yhtä paljon kaikkiin suuntiin. Vastaavasti liikkuvan kappaleen räjähtäessä sen osien massakeskipiste jatkaa samalla nopeudella kuin alkuperäinen kappale.

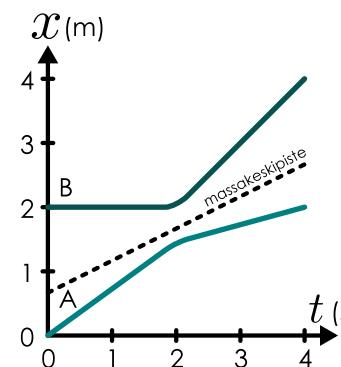
Esimerkiksi räjähtävän ilotulitusraketin massakeskipiste jatkaa räjähdyksen jälkeen samalla radalla kuin ennen räjähdyystä. Räjähdyttävän raketti on vapaassa pudotuksessa, joten sen osat jatkavat samalla vapaan pudotuksen liikeradalla, jolla raketin olisi liikkunut jollei olisi hajonnut osiin, kuten kuvassa 2.31. Toisin sanoen räjähdyks, joka on systeemin sisäinen vuorovaikutus, ei vaikuta massakeskipisteen liikkeeseen. Massakeskipisteen liikerata muuttuu ainoastaan, jos kappaleen hajoaminen osiin muuttaa kappaleeseen vaikuttavia ulkoisia vuorovaikutusia. Rakettin tapauksessa ilmanvastus voi olla osiin hajonneelle raketille erilainen kuin ehjälle.

Kuva 2.30: Massakeskipiste liikkuu törmäyksissä tasaisesti. Tässä kappaleen A massa on kaksinkertainen kappaleeseen B verrattuna, $m_A = 2m_B$, joten massakeskipiste on kappaleiden välissä lähempänä A:tä.

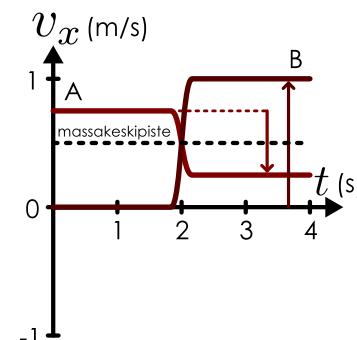
(a) Kappaleiden liike kuvasarjana.



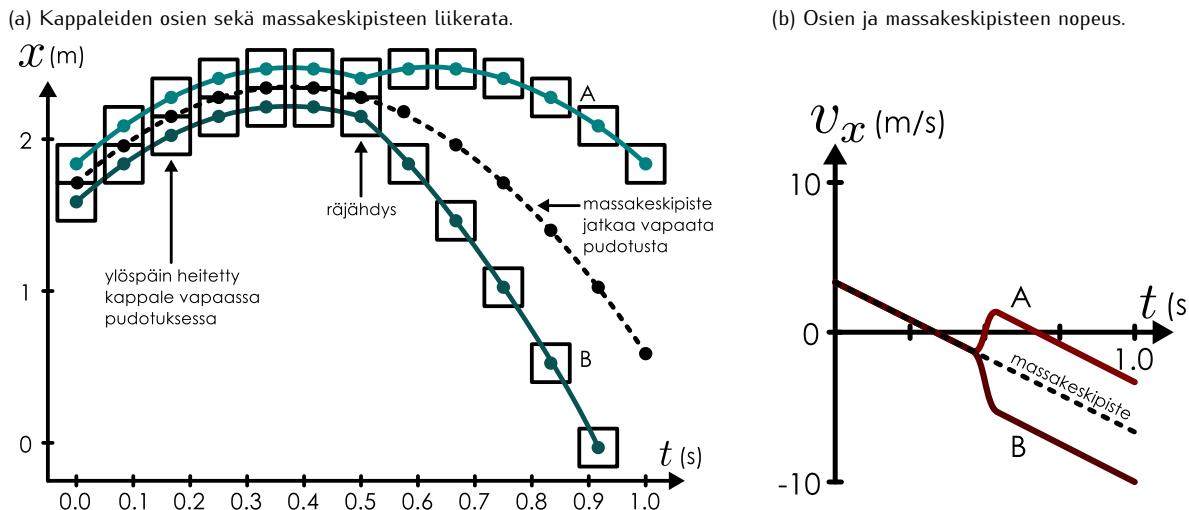
(b) Kappaleiden paikan kuvaaja.



(c) Kappaleiden nopeuden kuvaaja.



Kuva 2.31: Vapaassa pudotuksessa oleva kappale räjähtää kahteen osaan. Osien massakeskipiste jatkaa vapaassa pudotuksessa eikä kappaleen hajoamisen vaikuta siihen.



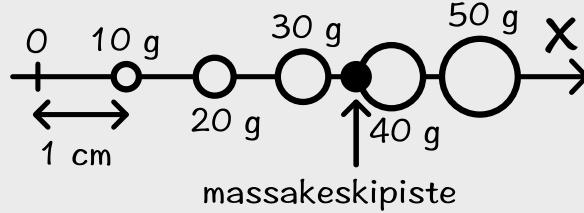
2.30 Kirjoita tüvistelmä massakeskipisteiden ominaisuuksista. Keksi esimerkki systeemistä, jossa on vähintään kolme kappaletta (eri pisteissä, eri nopeudet) ja laske systeemin massakeskipisteen paikka ja nopeus. Selitä erityisesti, voiko systeemin liikemäärän, liike-energian tai potentiaalienergian päättelä suoraan massakeskipisteiden ominaisuuksista.

esimerkki 2.10

Helminauhan massakeskipiste

Helminauhassa on erikokoisia helmiä. Ensimmäinen helmistä on massaltaan 10 g, toinen 20 g jne. niin että kunkin helmia on aina 10 g massiivisempi kuin edellinen. Nauhan massa on pieni helmiin verrattuna. Vierekkäisten helmien välinen etäisyys on 1.0 cm. Mikä on nauhan kokonaismassa ja missä on sen massakeskipiste nauhan ollessa suora, jos nauhassa on (a) 5 tai (b) 10 helmeä?

TILANNE Valitaan x -akseli nauhan suuntaiseksi ja origo 1 cm päässä ensimmäisestä helmestä.



SUUNNITELMA Systeemin kokonaismassa on sen kaikkien osien yhteenlaskettu massa. Massakeskipisteen x -koordinaatti on systeemin osien koordinaattien määrällä painotettu keskiarvo.

Helmienvälinen etäisyys on $\Delta x = 1 \text{ cm}$ ja ensimmäisen helen paikkakoordinaatti on valitussa koordinaatistossa $x_1 = 1 \text{ cm}$. Niinpä kunkin helen paikkakoordinaatti on

$$x_i = x_1 + (i-1)\Delta x = i\Delta x, \quad (2.100)$$

missä indeksi i on helen järjestysnumero.

Vierekkäisten helmienvälinen ero on $\Delta m = 10 \text{ g}$ ja ensimmäisen helen massa on $m_1 = 10 \text{ g}$, joten kunkin helen massa on

$$m_i = m_1 + (i-1)\Delta m = i\Delta m. \quad (2.101)$$

Helminauhan kokonaismassa on näillä merkinnöillä

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (2.102)$$

ja massakeskipisteiden paikkakoordinaatti

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} x_i. \quad (2.103)$$

RATKAISU Nauhan kokonaismassa on

$$M = \sum_{i=1}^N i\Delta m = \Delta m \sum_{i=1}^N i. \quad (2.104)$$

Lausekkeessa esiintyy aritmeettinen summa

$$\sum_{i=1}^N i = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{1}{2}N(N+1). \quad (2.105)$$

Summan arvon voi päätellä esimerkiksi huomaamalla, että summassa on N summattavaa, joiden keskiarvo on $(N+1)/2$. Kokonaismassaksi saadaan siis

$$M = \frac{1}{2}N(N+1)\Delta m. \quad (2.106)$$

Erikoistapauksessa $N = 5$ kokonaismassaksi tulee

$$M_5 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)\Delta m = 15\Delta m = 150 \text{ g}. \quad (2.107)$$

Edellä johdettu yleinen lauseke (2.106) antaa saman tuloksen $M_5 = 5 \cdot 6/2 \cdot \Delta m = 15\Delta m$ kuten pitääkin.

Massakeskipiste on puolestaan

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i = \frac{\Delta m \Delta x}{M} \sum_{i=1}^N i^2. \quad (2.108)$$

Tässä lausekkeessa esiintyy neliösumma, jonka laskeminen on huomattavasti vaikeampi tehtävä kuin edellä esitetyn aritmeettisen summan. Kyseessä on kuitenkin tunnettu pyramidilukujen jono, jonka summa tunnetaan (http://en.wikipedia.org/wiki/Square_pyramidal_number),

$$\sum_{i=1}^N i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1). \quad (2.109)$$

Massakeskipisteen paikaksi saadaan siis

$$x_{cm} = \Delta x \frac{N(N+1)(2N+1)/6}{N(N+1)/2} = \Delta x \frac{1}{3}(2N+1) \quad (2.110)$$

Erikoistapauksessa $N = 5$ massakeskipisteen paikkakoordinaatti on

$$x_{cm,5} = \frac{1}{M_5} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + m_5 x_5) = \frac{1}{M_5} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \Delta m \Delta x = \frac{55 \Delta m \Delta x}{15 \Delta m} = \frac{11}{3} \Delta x \approx 3.7 \text{ cm} \quad (2.111)$$

eli massakeskipiste on kolmannen ja neljänneksen helmen välissä (ks. kuva). Jälleen yleinen lauseke (2.110) antaa saman tuloksen $x_{cm,5} = (2 \cdot 5 + 1)/3 \cdot \Delta x = 11/3 \cdot \Delta x$.

Mathematica:

```
(* helmen massa ja paikkakoordinaatti i:n funktioina *)
m[i_] := i dm
x[i_] := i dx

(* nauhan kokonaismassa *)
M = Sum[m[i], {i, 0, N}]
dm N (1 + N) / 2

(* nauhan massakeskipisteen koordinaatti *)
xcm = 1/M Sum[m[i] x[i], {i, 0, N}]
dx (1 + 2 N) / 3

(* erikoistapaus N = 5 *)
{M, xcm} /. N -> 5
{15 dm, 11 dx / 3}
{M, xcm} /. {N -> 5, dx -> 1.0, dm -> 10}
{150, 3.66667}
```

ARVIOINTI Koska johdettu yleinen lauseke antoi saman tuloksen kuin erikoistapaus $N = 5$, lauseke vaikuttaa oikealta. Toki lisävarmistukseksi voitaisiin tarkastella muitakin erikoistapauksia. Nauhan pidentyessä eli N kasvaessa massakeskipiste siirtyy positiviseen x -suuntaan, mikä on järkevää, koska nauhaan lisätään tällöin yhä raskaampia helmiä yhä kauemmas origosta. Toisaalta, koska nauhan kokonaispituus on $L = N\Delta x$, massakeskipisteen paikka suhteessa nauhan pituuteen ei kasva rajattaa, $\frac{x_{cm}}{L} = \frac{2N+1}{3N} = \frac{2+1/N}{3} \rightarrow \frac{2}{3}$. Toisin sanoen massakeskipiste on etäisyydellä $2L/3$ nauhan keveästä ja $L/3$ nauhan raskaasta päästä. Tämäkin on järkevä tulos, koska massakeskipisteen täytyy olla jossakin helmien välissä (ei nauhan ulkopuolella). Lisäksi massakeskipisteen täytyy olla lähempänä sitä päästä, jossa raskaat helmet ovat.

Yhteenveton Säilymislait

Systeemi ja säilyvät suureet

- Systeemi** tarkoittaa niiden asioiden joukkoa, johon tarkastelu on rajattu.
- Ympäristö** on kaikki muu fysikaalinen todellisuus, joka ei kuulu kulloinkin valittuun systeemiin.
- Intensiivinen suure** kuvaa aineen tai kappaleen paikallista ominaisuutta. Sen arvo ei riipu systeemin koosta.
- Ekstensiivinen suure** kuvaa jonkin asian kokonaismääärää systeemissä. Ekstensiivisen suureen arvo on suoraan verrannollinen aineen määrään tai systeemin kooon.
- Säilymislaki** on fysikaalinen laki jonka mukaan jotakin ekstensiivistä suuretta ei voi luoda eikä hävittää. Tällöin sanotaan, että suure **säilyy**.

- Avin systeemi** voi vaihtaa energiota ja ainetta ympäristönsä kanssa, eli näitä voi siirtää systeemistä ja ympäristöön välillä.
- Suljettu systeemi** voi vaihtaa energiota mutta ei ainetta ympäristönsä kanssa.
- Eristetty systeemi** ei voi vaihtaa energiota eikä ainetta ympäristönsä kanssa.
- Vuorovaikutus** on kahden tai useamman fysikaalisen olion (kappaleen, hiukkisen, tms.) välinen vaikutussuhde.
- Systeemin ja sen ympäristön välistä vuorovaikutusta kutsutaan **ulkoiseksi vuorovaikutukseksi**. Systeemin osien väliset vuorovaikutukset ovat **sisäisiä vuorovaikutuksia**.

Energia

- Energia** on kaiken fysiikan tärkein suure. Fysikaalisissa prosesseissa energia muuttuu muodosta toiseen, ja prosessi on mahdollinen vain jos systeemissä on siihen tarpeeksi energiaa.
- Kokonaisenergia** on kaikkien eri energian muotojen summa. Energiaa ei voi luoda eikä hävittää,

$$\Delta E_{\text{kokonaiss}} = 0, \text{ eli } E_{\text{kokonaiss}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **energian säilymislaki**.

- Systeemin kokonaisenergia *ei ole vakio*, jos systeemi voi vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa. *Eristetyn* systeemin kokonaisenergia *on vakio*.
- Kappaleen liikkeeseen liittyvä **liike-energia** eli **kineettinen energia**

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2,$$

missä m on kappaleen **inertia** eli **massa** ja v nopeus.

- Potentiaalienergia** on vuorovaikutusten varastoimaa energiota, joka riippuu ainoastaan kappaleiden paikoista. Painovoiman poten-

tiaalienergia on

$$U_{\text{painovoima}} = mgx,$$

- Elastisella kappaleella kuten jousella on potentiaalienergia

$$U_{\text{elastinen}} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

missä x on kappaleen pituus ja k on **jousivakio**.

- Mekaaninen energia** on liike-energian ja potentiaalienergian summa. Jos eristetyssä systeemissä vaikuttaa vain **konservatiivisia** vuorovaikutuksia, systeemin mekaaninen energia on vakio.
- Systeemin **tilan** muista ominaisuuksista kuin paikasta ja nopeudesta riippuva energia **on sisäenergia**.
- Dissipatiiviset** vuorovaikutukset muuttavat järjestynyttä mekaanista energiota epäjärjestyneeksi energiaksi kuten lämpöenergiaksi.

Liikemäärä

- Kappaleen **liikemäärä** on sen inertian (eli massan) ja nopeuden tulo

$$\bar{p} = m\bar{v}.$$

Yksilotteisessa tapauksessa liikemäärä on

$$p_x \hat{i} = mv_x \hat{i}.$$

- Systeemin **kokonaislukemäärä** on sen kaikkien osien (kappaleiden, hiukkasten) liikemäärien vektorisumma

$$\bar{p}_{\text{kokonaiss}} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i v_{x,i} \hat{i}.$$

Liikemäärä ei voi luoda eikä hävittää

$$\Delta \bar{p}_{\text{kokonaiss}} = \bar{0}, \text{ eli } \bar{p}_{\text{kokonaiss}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **liikemäären säilymislaki**.

- Systeemin kokonaislukemäärä **on vakio**, jos siihen ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia tai jos ulkoiset vuorovaikutukset kumoavat toisensa. Jos systeemin liikemäärä muuttuu, ympäristön liikemäärä on muuttuvana yhtä paljon mutta vastakkaiseen suuntaan.
- Jos systeemiin tai kappaleeseen vaikuttaa ulkoisia vuorovaikutuksia, sen liikemäärä voi muuttua. Systeemin liikemäären kokonaismuutos on yhtä suuri kuin systeemin saama **impulssi**

$$\bar{I} = \Delta \bar{p}.$$

- Kahden kappaleen vuorovaikutuksessa kappaleiden saamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset

$$\bar{I}_{A \rightarrow B} = -\bar{I}_{B \rightarrow A}.$$

Massakeskipiste

- Systeemin paikkaa kuvaa sen **massakeskipiste** eli sen osien paikojen massoilla painotettu keskiarvo

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{\mathbf{r}}_i,$$

missä M on systeemin kokonaismassa $M = \sum_i m_i$. Massakeskipisteen x -koordinaatti on

$$x_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} x_i.$$

- Systeemin kollektiivista liikettää kuvaa sen massakeskipisteen nopeus

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \bar{\mathbf{v}}_i,$$

Massakeskipisteen nopeuden x -komponentti on

$$v_{x,\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i}{M} v_{x,i}.$$

- Systeemin kokonaislukemäärä on sen kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulo

$$\bar{\mathbf{P}}_{\text{kokonais}} = M \bar{\mathbf{v}}_{\text{cm}}.$$

- Painovoiman potentiaalienergia voidaan laskea kappaleen kokonaismassan ja sen massakeskipisteen korkeuden avulla,

$$U_{\text{painovoima}} = Mg x_{\text{cm}}.$$

- Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia, sen massakeskipisteen nopeus ei muudu.

Sanasto

- systeemi (system)
- ympäristö (environment)
- avoin systeemi (open system)
- suljettu systeemi (closed system)
- eristetty systeemi (isolated system)
- intensiivinen suure (intensive quantity)
- ekstensiivinen suure (extensive quantity)
- säilymlaki (conservation law)
- hiukkasmäärä (particle number)
- tilavuus (volume)
- hiukkastikeys (particle density)
- vuorovaikutus (interaction)
- painovoima, gravitaatio (gravity)
- massa (mass)
- inertia (inertia)
- kilogramma (kilogram)
- jousi (spring)
- harmoninen vuorovaikutus (harmonic interaction)
- kitka (friction)
- väliaineen vastus (drag, resistance)

- konservatiivinen vuorovaikutus (conservative interaction)
- dissipatiivinen vuorovaikutus (dissipative interaction)
- energia (energy)
- joule (joule)
- liike-energia, kineettinen energia (kinetic energy)
- potentiaalienergia (potential energy)
- sisäenergia (internal energy)
- mekaaninen energia (mechanical energy)
- reversiibeli prosessi (reversible process)
- irreversiibeli prosessi (irreversible process)
- liikemäärä (momentum)
- sisäinen vuorovaikutus (internal interaction)
- ulkoinen vuorovaikutus (external interaction)
- impulssi (impulse)
- massakeskipiste (center-of-mass)
- massakeskipistenopeus (center-of-mass velocity)
- törmäys (collision)
- elastinen, kimoisa (elastic)
- epäelastinen (inelastic)
- räjähtävä erotus (explosive separation)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

- 2.1 (a) Nopeus on intensiivinen suure. Jos kappale liikkuu suoraviivaisesti nopeudella \vec{v} , sen mikä tahansa osa liikkuu myös tällä nopeudella. Toisaalta jos kappale ei ole jäykä, sen eri osat voivat liikkua eri nopeuksilla, joten nopeuden voi määritellä kappaleen eri osille erikseen, mikä on myös intensiivisen suuren ominaisuus.
- (b) Pinta-ala on kahdessa ulottuvuudessa ekstensiivinen ominaisuus. Jos nimittäin kaksiulotteisen kappaleen (esim. ohuen paperin) leikkää osiin, näiden osien pinta-ala on yhteensä sama kuin alkuperäisen paperin ala. Kolmessa ulottuvuudessa pinta-ala ei kuitenkaan ole ekstensiivinen eikä intensiivinen.
- (c) Tilavuus on ekstensiivinen suure ja nopeus on intensiivinen suure, joten niiden tulo on ekstensiivinen.
- 2.2 (a) Kasvien määrä on ekstensiivinen suure, joten se voi muuttua luomalla, hävittämällä, tuomalla tai viemällä. Luonti tarkoittaa uusien kasvien kasvua, hävittäminen kasvien kuolemaa. Tuonti tarkoittaa uusein kasvien tuomista ja istuttamista ja vienti kasvien korjaamista ja viemistä pois.
- (b) Kosteus voi muuttua ilmaan kuuluvan veden määrän muuttuessa, mutta toisaalta se voi muuttua myös esimerkiksi ilman lämpötilan muuttuessa. Veden määrä on ekstensiivinen suure, mutta suhteellinen kosteus ei ole, joten sitä ei voi muuttaa luomalla, hävittämällä, tuomalla ja viemällä.
- (c) Rahan määrä on ekstensiivinen suure, joten periaatteessa sitä voi muuttaa luomalla, hävittämällä, tuomalla ja viemällä. Rahaa ei varmasti synny kaapissa lisää. Lisäksi jos kassakaappi on hyvä ja se pysyy lukossa, sen pitäisi suojella rahoja häitykseltä (esim. tulelta) eikä sieltä voi myöskään viedä tai sinne tuoda lisää rahaa. Tässä systeemissä rahan määrä on siis vakio.
- 2.3 (a) Kahdessa hampurilaisessa on 4000 kJ energiaa.
- (b) Kaksi lamppua tarvitsee 10 J energiaa sekunnissa.
- (c) Koska kahdessa samanlaisessa systeemissä on kaksinkertainen määrä energiota yhteen systeemiin verrattuna, energian määrä on siis suoraan verrannollinen systeemin kokoona. Energia on siis ekstensiivinen suure.
- (d) Intensiivinen suure voi olla vakio jossakin tilanteessa, mutta vain ekstensiiviset suuret voivat olla yleisesti säilyviä. Energia voi olla säilyvä suure vain koska se on ekstensiivinen.
- 2.4 Energia on säilyvä suure. Atomien määrä ei yleisesti ole, mutta liikuntasuorituksen aikana ei varmasti tapahdu mitään prosesseja, joissa aineen atomit hajoaisivat tai muuttuisivat, koska ihmisen ei ole ydinreaktori. Siispä ainoa tapa vähentää näitä suureita on poistaa niitä systeemistä. Liikuessa kemiallisen energian varastot muuttuvat osittain liike-energiaksi ja pääasiassa lämpöenergiaksi, ja lämpö voi siirtyä systeemistä ympäristöön itsestään. Atomien määrä muuttuu siksi, että liikuntasuorituksen aikana kehoon varastoituneet orgaaniset molekyylit muodostavat hapen kanssa pääasiassa vettä ja hiilidioksidia, jotka poistuvat elimistöstä. Laihtumisen kannalta tärkein mekanismi onkin se, että uloshengityksen kautta elimistöstä poistuu paljon hiilidioksidia. (Kasveissa prosessi tapahtuu toiseen suuntaan, kun kasvit sitovat itseensä ilman hiilidioksidia yhteyttäässään. Siksi kasvillisuuden suojelu on tärkeää ilmastonmuutoksen pysäyttämiseksi.)
- 2.5 (c) Törmäyksessä osa pallon liike-energiasta muuttuu pääasiassa lämpöenergiaksi, josta osa siirryy seinään. Osa energiasta voi myös kulkeutua pois änen mukana. Niinpä (a) pallon energia ei ole vakio ja (b) pallon ja seinän energia on likimain vakio.
- 2.6 (a) Vaakasuorassa työnnössä kuulan nopeutta rajoittaa vain inertia. Tämän huomaa esimerkiksi siitä, että vaakasuorassa työnnössä kuulan liike-energia muuttuu (riippuu inertiesta) mutta potentiaalienergia ei (riippuu painosta). (b) Pystysuorassa työnnössä nopeutta rajoittaa sekä inertia että paino, sillä tällöin sekä liike- että potentiaalienergia muuttuvat.
- 2.7 (a) Jos alkunopeus on kaksinkertainen, pallolla on aluksi nelinkertainen liike-energia. Pallo siis nousee nelinkertaiselle korkeudelle (alkutasosta mitattuna).
- (b) Jos potentiaalienergian nollakohta valitaan laki pisteeeseen, pallon liike ei muutu mitenkään. Energiadiagrammeissa kaikki potentiaalienergiat kuitenkin siirtyytä kohti negatiivista.
- (c) Jos ilmanvastus muuttaa liike-energiaa lämpöenergiaksi, energiadogrammiin täytyy lisätä lämpöenergiaa kuvava pylväs. Tämä pylväs kasvaa jatkuvasti heiton aikana, jolloin laki pisteeessä kappaleella täytyy olla vähemmän potentiaalienergiaa kuin kuvassa. Siispä pallo ei nouse yhtä korkealle ja putoava pallo ei saa yhtä suurta nopeutta.
- 2.9 Aluksi hyppääjän varastoima kemiallinen energia muuttuu liike-energiaksi. Liike-energia varastoituu hyppyn aluksi ponnahduslautaan ja siitä takaisin liike-energiaksi. Lennon aikana liike-energiasta osa muuttuu potentiaalienergiaksi (mutta ei kaikki, koska hyppääjä pyörii) ja siitä jälleen liike-energiaksi. Hyppääjän osuessa veteen hyppääjän liike-energiasta suurin osa siirryy veden liike-energiaksi ja lämpöenergiaksi. Mekaaninen energia on likimain vakio hyppääjän irrottua laudasta ja ennen hyppääjän osumista veteen.
- 2.10 (a) Energia on peräisin painovoiman potentiaalienergiasta, joka on mekaanista energiasta.
- (b) Energia on peräisin työntäjän varastoimasta kemiallisesta energiasta, joka on sisäenergiaa.
- (c) Energia on peräisin törmäävän kappaleen liike-energiasta, joka on mekaanista energiasta.
- (d) Energia on peräisin jouseen varastoituneesta elastisesta energiasta, joka on sekä mekaanista energiasta että sisäenergiaa.
- (e) Energia on peräisin räjähdyssaineeseen varastoituneesta kemiallisesta energiasta, joka on sisäenergiaa.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

2.11 Ilmanvastus vastustaa purjeen ja ilman liikettä toistensa suhteen. Koska ilma virtaa eri nopeudella kuin purje liikkuu, ilmanvastus pyrkii saamaan nämä nopeudet samaksi. Ilman vauhti siis pienenee ja purjeen vauhti kasvaa. Tässä prosessissa ilman liike-energiaa muuttuu purjeen ja laivan liike-energiaksi sekä lämpöenergiaksi.

2.12 (a) Kappale ei voi liukua ylöspäin tasaisella nopeudella, joten ilmiö on irreversiibeli. Jos kappale liikkuu alas tasaisella nopeudella, siihen täytyy kohdistua kitkavoima tason suunnassa ylöspäin. Jos kappale liikkuisi vastakkaiseen suuntaan, kitkan täytyisi vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan.

(b) Kappale putoaa tasaisella kiertyvyydellä riippumatta siitä, onko se lükkeessä ylös- vai alas päin. Ilmiö on siis reversiibeli.

(c) Ruoka jäähtyy ja sitä ympäröivä ilma lämpenee. Ei ole mahdollista, että ruoka lämpenisi ja ilma jäähtyisi samalla, joten tämä on irreversiibeli prosessi.

(d) Elastinen törmäys voi tapahtua täsmälleen samalla lailla takaperin, joten kyseessä on reversiibeli prosessi.

(e) Jokainen törmäys on reversiibeli, joten periaatteessa prosessi on reversiibeli. Ts. jos pallojen nopeudet käännettäisiin törmäyksen jälkeen ympäri, 10 palloa palaisi yhteen kasaan ja vain yksi jäisi lükkelle. Kuitenkin pienikin muutos pallojen nopeuksissa johtaisi erilaiseen loppulokseen, joten käytännössä prosessia ei voi toistaa takaperin.

2.14 Ei ole. Jos esimerkiksi jousi on aluksi lepopituudessa ja se puristetaan kokoon sen kulkissa suljetun reitin, systeemin potentiaalienergia ei ole lopuksi sama kuin aluksi. Painovoiman potentiaalienergia ei tässä muutu, joten voimme päättää painovoiman olevan konservatiivinen. Elastisen vuorovaikutuksen konservatiivisuus näkyy siinä, että jousen elastisen potentiaalienergian muutos on nolla, jos jousta puristetaan tai venytetään ja sitten se palautetaan alkuperäiseen pituuteen.

2.15 Aluksi $v_{x,\text{alku}} = -2.0 \text{ m/s}$ ja lopuksi $v_{x,\text{loppu}} = 1.0 \text{ m/s}$. Siispä

$$(a) \Delta v = v_{\text{loppu}} - v_{\text{alku}} = 1.0 \text{ m/s} - (-2.0 \text{ m/s}) = 3.0 \text{ m/s}.$$

$$(b) \Delta v_x = v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}} = 1.0 \text{ m/s} - (-2.0 \text{ m/s}) = 3.0 \text{ m/s}.$$

(c) Kuvaaja on aluksi korkeudella -2.0 m/s ja lopuksi 1.0 m/s . Kuvaajan muoto näiden välillä riippuu siitä, miten nopeuden muutos tapahtuu.

2.16 (a) Vaunun A nopeuden muutos on $\Delta v_{x,A} = -4.00 \text{ m/s}$.

(b) Edellisten kokeiden perusteella nopeuden muutos on kääntäen verrannollinen vaunujen massaan. Niinpä

$$\Delta v_{x,B} = -\frac{m_A}{m_B} \Delta v_{x,A} = 1.60 \text{ m/s}. \quad (2.112)$$

(c) Tämän perusteella B:n loppunopeus on $v_{x,B,\text{loppu}} = v_{x,B,\text{alku}} + \Delta v_{x,B} = 1.80 \text{ m/s}$.

2.17 (a) Aluksi liike-energia on noin 0.281 J ja lopuksi 0.156 J . Energian muutos on siis $\Delta K = -0.125 \text{ J}$.

(b) Liike-energia on aluksi sama kuin edellä. Lopuksi energia on 0.141 J , ja energian muutos on $\Delta K = -0.141 \text{ J}$. Koska tämä on täysin epäelastinen törmäys, liike-energia vähentyy enemmän kuin osittain epäelastisessa tapauksessa.

(c) Nyt liike-energia on aluksi 0.125 J ja lopuksi 0.391 J . Energian muutos on $\Delta K = 0.266 \text{ J}$. Räjähtävässä erotuksessa liike-energia lisääntyy.

2.18 Yhtälön (2.43) mukaan

$$\Delta v_{x,\text{rekka}} = -\frac{m_{\text{kärpänen}}}{m_{\text{rekka}}} \Delta v_{x,\text{kärpänen}}. \quad (2.113)$$

Sen, että rekan massa on paljon kärpäsen massaa suurempi, voi ilmaista raja-arvona $m_{\text{kärpänen}}/m_{\text{rekka}} \rightarrow 0$, joten $\Delta v_{x,\text{rekka}} \rightarrow 0$. Kahden hyvin erimaisen kappaleen törmäyksessä suuremman kappaleen nopeus ei siis juuri kaan muudu.

2.19 Tekninen perustelu: nopeus on intensiivinen suure, mutta massa on ekstensiivinen, joten näiden tulon mv_x on ekstensiivinen. Fysiikaalinen perustelu: Tässä $m_A v_{x,A}$ on A:n liikemäärä ja $m_B v_{x,B}$ on B:n liikemäärä. Koska koko systeemin liikemäärä saadaan näiden summana, suureen täytyy olla ekstensiivinen. Vain ekstensiiviset suureet voivat olla säilyviä.

2.20 Jos kappaleen massa on 1 kg , sen liike-energia on $K = 8 \text{ J}$ ja liikemäärä $p_x = 4 \text{ kgm/s}$.

(a) Kappaleiden liike-energia on $K = 4 \text{ J}$ ja liikemäärä $p_x = 4 \text{ kgm/s}$. Liikemäärä on sama mutta energia ei.

(b) Nyt $K = 8 \text{ J}$ ja $p_x = 8 \text{ kgm/s}$. Energia on siis sama mutta liikemäärä ei.

(c) Nyt $K = 8 \text{ J}$ ja $p_x = -4 \text{ kgm/s}$. Energia on siis sama mutta liikemäärä ei. Huomaa, että liikemäärä on vektorisuhue, ja liikemäärän etumerkki muuttuu, kun kappaleen liukkeen suunta vaihtuu.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

2.21 Sisäiset vuorovaikutukset voivat muuttaa systeemin osien liikettä. Esimerkiksi jos kahden levossa olevan kappaleen välissä on puristettu jousi, jousen oikeneminen voi työntää kappaleet liikkeelle. Kokonaislätkemäärä ei tällöin muutu, koska vastakkaisuuntainen muotokset liikemääressä kumoavat toisensa. Liike-energia ei kuitenkaan riipu liikkeen suunnasta, joten tässä prosessissa kappaleiden liike-energia kasvaa. Sisäinen vuorovaikutus voi siis muuttaa systeemin liike-energiaa. Sisäinen vuorovaikutus ei kuitenkaan voi energian säilymislain perusteella muuttaa systeemin kokonaisenergiaa. Kahden kappaleen ja jousen esimerkissä jousen potentiaalienergia pienenee täsmälleen yhtä paljon kuin kappaleiden liike-energia kasvaa, jolloin kokonaisenergia on vakio.

2.22 (a) On. (b) Kappale A vetää B:tä ylöspäin mutta B ei vaikuta A:han, joten kenkäsi alkavat nousta ylöspäin. Nouset siis lentoon. (c) Ei. Itseään ei voi nostaa ilmaan edes eksoottisilla kappaleilla. Ei siis voi olla kappaleita A ja B niin, että A vetää B:tä puoleensa mutta B ei vaikuta A:han.

2.24 Impulssi on määritelmän mukaisesti sama kuin kappaleen liikemääärän muutos. Pallon liikemäärä on aluksi nolla, joten jos mittaamme pallon nopeuden lyönnin jälkeen, voimme laskea tämän avulla pallon liikemääärän muutoksen, ja impulssin täytyy olla yhtä suuri.

2.25 (a) Pallon liikemäärä on ennen törmäystä suoraan alas päin ja törmäyksen jälkeen nolla. Liikemäärä siis muuttuu ylöspäin ja lattia antaa pallolle impulssin ylöspäin. Impulssin suuruus on sama kuin pallon liikemääärän muutos.

(b) Koska törmäys on nopea, painovoima ei ehdi antaa pallolle merkittävää impulssia sen aikana. Törmäyksen aikana painovoima on paljon heikompi kuin pallon ja lattian välinen vuorovaikutus.

(c) Pallo antaa lattialle yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen impulssin kuin lattia pallolle. Pallo antaa siis lattialle impulssin alas päin.

2.26 (a) 3 kg. (b) 0.33 m/s kevyemmän kappaleen liikkeen suuntaan. (c) Massakeskipiste on kappaleiden välisellä suoralla 2 m päässä kevyestä ja 1 m päässä raskaasta kappaleesta.

2.27 (a) Massakeskipiste on korkeudella 0.92 m. (b) Osien potentiaalienergiat ovat $U_A = 2.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} = 9.8 \text{ J}$ sekä $U_B = 3.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1.2 \text{ m} = 35.28 \text{ J}$. (c) Massakeskipisteen avulla laskettu potentiaalienergia on $U = 5.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.92 \text{ m} = 45.08 \text{ J}$. Tämä on sama kuin osien energoiden summa, $U = U_A + U_B$.

2.28 (a) Massakeskipistenopeus on 0.12 m/s kevyemmän kappaleen liikkeen suuntaan. (b) Massakeskipisteen avulla laskettu liike-energia olisi $0.5 \cdot 5.0 \text{ kg} \cdot (0.12 \text{ m/s})^2 = 0.036 \text{ J}$. Tämä ei ole kuitenkaan systeemin liike-energia! (c) Kappaleiden liike-energiat ovat $K_A = 2.25 \text{ J}$ ja $K_B = 0.96 \text{ J}$, joten systeemin liike-energia on $K = K_A + K_B = 3.21 \text{ J}$.

2.29 (a) Kappaleilla täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärit. (b) Systeemin liikemäärä on vakio, joten kokonaisliikemäärä on myös törmäyksen jälkeen nolla. Niinpä kappaleiden nopeudet ovat törmäyksen jälkeenkin yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Elastiisessa törmäyksessä liike-energiakin on vakio, joten jos kappaleet liikkuvat suoralla, niiden vauhtien täytyy olla törmäyksen jälkeen samat kuin ennen törmäystä. Kappaleiden nopeusvektorit siis kääntyvät ympäri. (c) Nytkin kappaleiden nopeudet ovat törmäyksen jälkeen samat mutta vastakkaisuuntainen. Täysin epäelastiisessa törmäyksessä kappaleet tarttuvat toisiinsa, joten kappaleiden täytyy jäädä törmäyksen jälkeen paikoilleen.

3 Voima ja työ

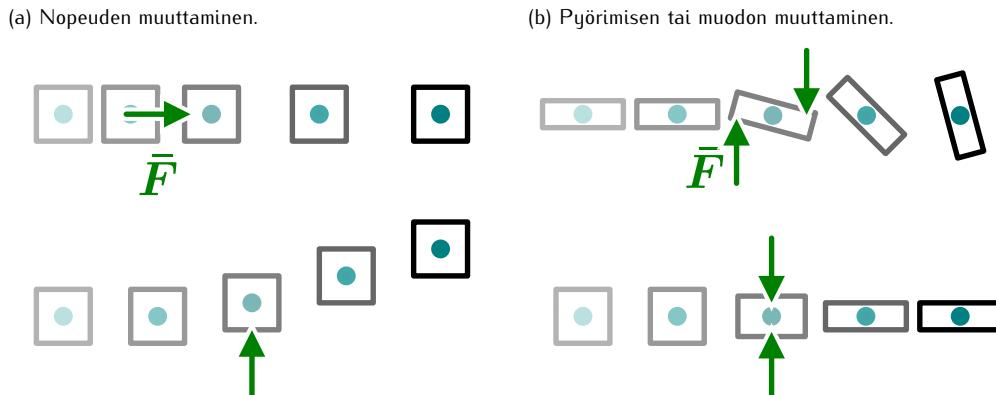
Energian ja liikemäärän käsitteet ovat tärkeitä kaikilla fysiikan osa-alueilla ja energian sekä liikemäärän säilymislait ovat yleispätevät. Mekaniikassa nämä lait voidaan kuitenkin muotoilla myös voiman käsitteen avulla Newtonin lakeina. Vaikka nykyään suuria säilymislakeja pidetään fysiikan peruslakeina, historiallisesti Newton muotoili nimeään kantavat lait ensin ja mekaniikassa säilymislait voidaan itse asiassa johtaa Newtonin laeista. Tässä luvussa tarkastellaankin mekaniikan lakeja voiman kautta.

Voima on vuorovaikutuksia kuvaava suure, ja kuten edellisissä luvuissa opimme, vuorovaikutukset voivat muuttaa energian muodosta toiseen tai siirtää liikemäärää kappaleelta toiselle. Voiman avulla voidaankin suoraan määrittää, kuinka vuorovaikutus muuttaa kappaleiden energian ja liikemäärän. Voiman aiheuttama energian muutosta kuvaavaa suuretta kutsutaan työksi ja vastaava liikemäärän muutosta kuvaava suure on impulssi.

Tämän luvun opiskeltuaasi sinun tulee osata:

- määritellä voima sekä sen avulla työ, impulssi ja teho
- selittää Newtonin lait sekä sanallisesti että matemaattisesti
- tunnistaa kappaleisiin vaikuttavat voimat ja piirtää vapaakkappalekuva
- määrittää vektoreiden komponentit sekä laskea vektoreita yhteen graafisesti
- ratkaista kappaleiden liike Newtonin lakien avulla
- määrittää konservatiivisen vuorovaikutuksen tuottama voima, kun potentiaalienergia tunnetaan
- määrittää muutokset kappaleen energiassa ja liikemäärässä työn ja impulssin avulla, kun kappaleeseen vaikuttava voima tunnetaan
- määrittää kappaleen tasapainotila suoraviivaisen liikkeen suhteen

Kuva 3.1: Voima kuvailee vuorovaikutusten suuruutta ja suuntaa. Voima voi vaikuttaa sekä kappaleen liikkeeseen että tilaan.



3.1 Voima liikkeen muuttajana

Usein mekaanikan ongelmia on helpoin ratkaista säilymislakien avulla, koska tällöin ei välttämättä tarvitse tietää täsmälleen miten prosessit tapahtuvat vaan lopputulos voidaan päätellä suoraan alkutilanteesta. Esimerkiksi jos tiedetään, mistä kappale lähtee liikkeelle ja minne se päätyy, energiaperiaatteen avulla voi olla mahdollista päätellä kappaleen loppunopeus tietämättä kappaleen tarkkaa rataa. Toisaalta monesti ollaan nimenomaisesti kiinnostuttu siitä, *miten* asiat tapahtuvat. Esimerkiksi jos kappaleen paikka ja sen kokemat vuorovaikutukset tunnetaan, voidaan haluta ennustaa, milläristä rataa kappale kulkee. Tämä onnistuu Isaac Newtonin mukaan nimettyjen **Newtonin laki** avulla, sillä nämä lait kertovat miten vuorovaikutukset vaikuttavat kappaleiden liikkeeseen.

Newtonin laeissa vuorovaikutuksia kuvaava suure on **voima**. Voiman käsite on intuitiivisesti tuttu: Kun esimerkiksi työnnämme tai nostamme kappaleita, kohdistamme niihin voiman, joka *muuttaa niiden liikettä*. Jos pudotamme kappaleen, se on kiihyvässä liikkeessä kohti Maata, koska siihen vaikuttaa **painovoima**. Voimalla voi myös muuttaa kappaleiden ominaisuuksia kuten puristaa jousia tai taivuttaa rautalankaa uuteen muotoon. Kummassakin tapauksessa voimaa karakterisoituu sekä suuruus — kuinka nopeasti kappale saadaan liikkeelle tai kuinka paljon jäykkiä kappale taipuu — että suunta — mihin suuntaan kappaleen nopeus muuttuu tai muoto taipuu. Voima on siis **vektorisuure**. Voiman yksikkö on **newton (N)**.

Vaikka voiman käsite on intuitiivinen, sen täsmällinen fysiikaalinen merkitys ei ole itsestäänselvä. Eräs tavallinen voimiin liittyvä harhaluulo on se, että voiman tuottaminen vaatii lihaksen tai moottorin kaltaisen laitteen. Tämä on ymmärrettävä, sillä voima liittyy liikkeeseen ja eläimet ja koneet ovat liikkuvat lihasten tai moottoreiden avulla. Ajatus on kuitenkin väärä, sillä voimia voivat tuottaa myös elottomat kappaleet, jotka eivät itsestään liiku. Jos puristamme jousen kokoon ja laitamme sen päälle kappaleen, jousi voi suoristuessaan työntää kappaleen liikkeelle. Tällöin jousi selvästi kohdistaa kappaleeseen liikkeen muutoksen aiheuttavan voiman. Tai jos päinvastoin pudotamme kappaleen jousen päälle, lükkuva kappale puristaa jousen kasaan ennen pysähymistään. Tällöin kappale kohdistaa jouseen muodonmuutoksen aiheuttavan voiman. Voiman tuottaminen ei siis vaadi lihaksia vaan kaikki kappaleet kohdistavat koskettaessaan toisiinsa voimia. Lihas- ja moottorien erikoisomaisuus onkin se, että ne pystyvät muuttamaan kemiallista **energiaa** mekaaniseksi energiaksi. Puhemielessä termejä energia ja voima käytetään sekaisin ja puhutaan esimerkiksi "vesivoimasta", kun tarkoitetaan virtaavan veden liike-energian hyödyntämistä. Fysiikassa voima ja energia toki liittyytä toisiinsa kuten tässä luvussa opitaan, mutta ne ovat silti aivan erilaiset suureet, joita ei pidä sekoittaa.

Kokonaivoima

Kappale voi vuorovaikuttaa samanaikaisesti useiden kappaleiden kanssa, jolloin kaikki nämä vuorovaikutukset voivat kohdistaa kappaleeseen voiman. Jos kappaleeseen kohdistuu useita samansuuntaisia voimia, ne vaikuttavat yhdessä voimakkaammin kuin yksinään. Esimerkiksi raskaan taakan nostaminen on sitä helpompaa mitä useampia nostajia on. Toisaalta jos kappaleeseen kohdistuu useita vastakkaisuuntaisia voimia, niiden vaikutus voi olla heikompi kuin yksittäisten voimien vaikutus. Tästä käy esimerkiksi vaikkapa käessä pideltävä esine, joka voidaan pitää paikoillaan kohdistamalla siihen ylöspäin suuntautuva voima, joka on yhtä suuri kuin esinettä alas päin vetävä painovoima.

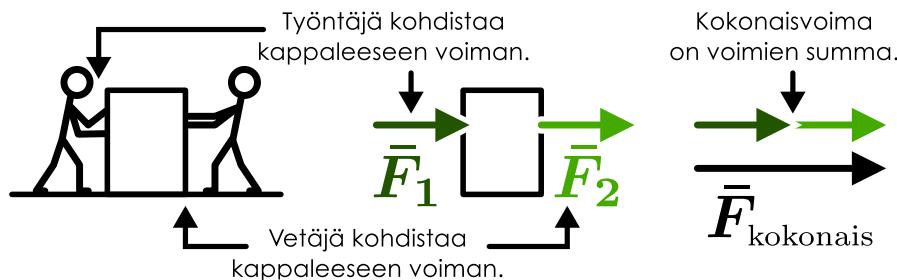
Voimien yhteisvaikutus on täsmällisemmin seuraava: *usean voiman vaikutus kappaleen suoraviivaiseen liikkeeseen on sama kuin yhden voiman, joka saadaan laskemalla voimat vektorina yhteen*. Tätä voimien summaa kutsutaan kappaleeseen vaikuttavaksi **kokonaivoimaksi**. Jos siis kappaleeseen vaikuttaa voimat \bar{F}_1, \bar{F}_2 jne.,

Kuva 3.2: Kappaleen liikkeen muutos riippuu siihen vaikuttavasta kokonaisvoimasta.

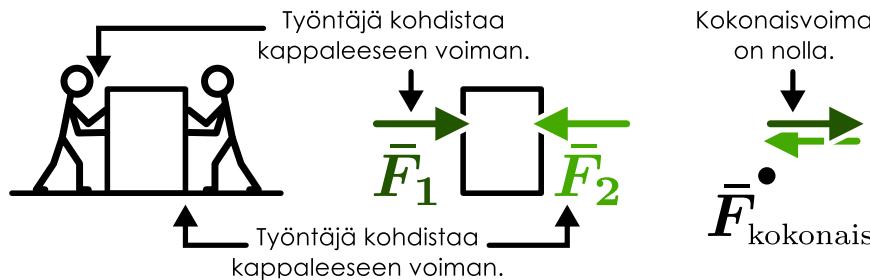
(a) Kappaleeseen vaikuttaa yksi voima, joka muuttaa sen liikkettä.



(b) Usean voiman vaikutus kappaleeseen liikkeeseen on sama kuin näiden summan.



(c) Vastakkaiset yhtä suuret voimat kumoavat toisensa.



kokonaisvoima on

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots = \sum_i \bar{F}_i. \quad (3.1)$$

Yksiuotteisessa tapauksessa tämä voidaan kirjoittaa skalaarikomponenttimuodossa

$$F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,1} + F_{x,2} + \dots = \sum_i F_{x,i}. \quad (3.2)$$

Tätä voimien yhteenlaskemisen periaatetta kutsutaan **voimien superpositioksi**. (Superpositio tarkoittaa kirjaimellisesti 'olla päällekkäin'. Fysiikassa superpositioperiaatteilla gleensä tarkoitetaan yhteenlaskusääntöjä.)

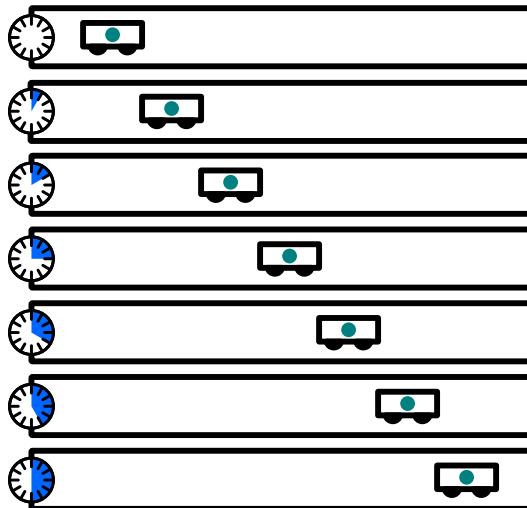
Vektorisuurina voiman suuruus on aina positiivinen. Kuitenkin jos esimerkiksi kappaletta työnnetään koordinaatiston negatiiviseen suuntaan, voimavektori osoittaa negatiiviseen x -suuntaan ja tällöin voiman *skalaarikomponentti* x -akselin suunnassa on negatiivinen. Jos siis kappaleeseen vaikuttaa monta samansuuntaista voimaa, voimat pyrkivät kaikki työntämään kappaletta samaan suuntaan ja niinpä niiden yhteisvaikutusta kuvaava kokonaisvoima on *suurempi* kuin yksikään alkuperäisistä voimista. Matemaattisesti tämä ilmenee niin, että voimien skalaarikomponentit ovat kaikki joko positiivisia tai negatiivisia, jolloin niiden summa on itseisarvoltaan suuri. Sen sijaan jos voimat osoittavat eri suuntiin, ne pyrkivät työntämään kappaletta eri suuntiin ja yhteisvaikutusta kuvaava kokonaisvoima voi olla pienempi kuin yksikään sen muodostavista voimista. Tällöin joidenkin voimien skalaarikomponentit ovat positiivisia ja joidenkin negatiivisia ja niiden summa voi olla itseisarvoltaan kuinka pieni tahansa. Erityisesti jos voimien summa on nolla, niiden vastakkaissuuntiset vaikutukset ovat yhtä suuret eivätkä voimat muuta kappaleen liikkettä *lainkaan*. Tällaisissa tapauksissa voimien sanotaan *kumoavan* toisensa. Huomaa kuitenkin, että tämä koskee vain voimien vaikutusta etenevään liikkeeseen. Vaikka kokonaisvoima olisi nolla, voimat voivat silti vaikuttaa esimerkiksi kappaleen pyörimiseen tai muotoon.



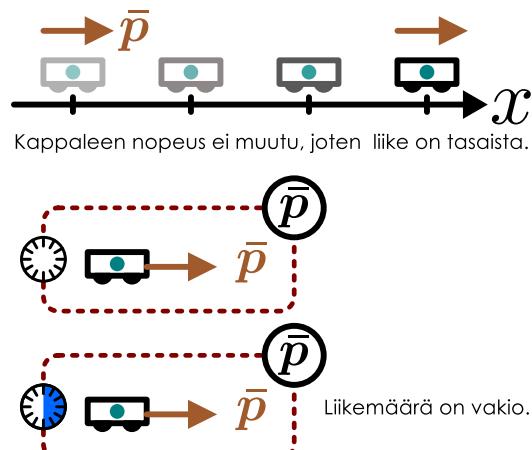
3.1 Voiko kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima olla nolla, jos kappaleeseen kohdistuu (a) yksi, (b) kaksi, (c) kolme erisuuria voimaa, (d) kolme yhtä suurta voimaa?

Kuva 3.3: Jatkavuuden laki ilmaistuna sekä kappaleen liikkeen että liikemäären kautta. Jos kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla, kappaleen liikemääri ei muudu.

(a) Kuvasarja tasaisesti liikkuvan kappaleen liikkeestä.



(b) Liikediagrammi ja systeemin liikemääriä.



Jo liikemäärin säilymislain yhteydessä totesimme, että systeemin liike ei voi muuttua, ellei systeemiin vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia. Voiman käsitteen avulla voimme täsmennää tästä lakia: *jos systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten systeemiin kohdistama kokonaisvoima on nolla, systeemin liikemääri ei muudu*. Toisin sanoen systeemiin sisä voi kohdistua ulkoisia vuorovaikutuksia, mutta jos ne kumoavat toisensa, kokonaisliikemääri ei muudu. Tätä tulosta kutstuaan Newtonin ensimmäiseksi laiksi eli **jatkavuuden laiksi**. Sen mukaan kappale, johon vaikuttava kokonaisvoima on nolla, jatkaa liikettään tasaisella nopeudella kuten kuvaassa 3.3. Modernissa fysiikassa liikemäärin säilymislakia pidetään peruslakina ja jatkavuuden laki on sen seuraus, mutta historiallisesti jatkavuuden lain esitti Galilei jo ennen Newtonia ja liikemäären käsitteen olemassaoloa.

Liikkeen tasapaino

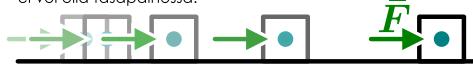
Kuva 3.4: Liikkeen tasapaino.

(a) Liikkuva kappale voi olla tasapainossa.

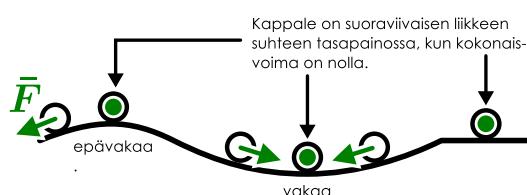
Tasapainossa oleva kappale voi olla levossa tai tasaisessa liikkeessä.



Kiihyvässä liikkeessä oleva kappale ei voi olla tasapainossa.



(b) Eriisia tasapainotiloja.



Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, kappaleen sanotaan olevan **tasapainossa** suoraviivaisen liikkeen suhteesta. Arkkielessä tasapainolla tarkoitetaan yleensä tilannetta, jossa kappale pysyy paikoillaan kun siinä ei kosketa. Jos kappale pysyy paikoillaan, sen liikemääri on vakiointi ja niinpä kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoimankin täytyy olla nolla. Fysiikaalisesti tasapaino on kuitenkin laajempi käsite, sillä myös tasaisessa liikkeessä olevaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla, joten **myös tasainen liike on tasapainotila** (kuva 3.4 (a)).

Jos tasapainossa oleva kappale on levossa, se pysyy paikoillaan. Tällöinkin voidaan erottaa erityyppisiä tasapainotiloja riippuen kappaleen käyttäytymisestä, jos se siirretään pois tasapainosta. **Vakaassa** eli stabiilissa tasapainossa kappale palaa takaisin tasapainopisteeseen itsestään. Tällainen tilanne on esimerkiksi kuopassa oleva pallo (kuva 3.4 (b)), joka vierii takaisin kuoppaan, jos sitä hieman siirretään. **Epämäärisessä** eli indifferentissä tasapainossa kappaleen kaikki läheiset tilat ovat tasapainotiloja, jolloin kappaleen siirtäminen aiheuttaa kappaleen asettumisen uuteen tasapainoon. Esimerkki tästä on pallo

vaakasuoralla pinnalla, joka jää paikoilleen uuteen kohtaan, jos sitä liikutetaan. **Epävakaassa** eli labiilissa tasapainossa kappaleen siirtäminen pois tasapainosta saa kappaleen etääntymään alkuperäisestä tasapainoasemastaan yhä kauemmas. Näin käy esimerkiksi mäen päällä olevalle pallolle, joka vierii pois, jos se siirrytään pois täsmälleen mäen päältä.

Tasapainon käsite on fysiikassa yleinen, eikä se rajoitu vain kappaleiden liikkeeseen. Periaatteessa minä tahansa suureen voidaan sanoa olevan tasapainossa, jos sitä muuttavat tekijät kumoavat toisensa. Nyt määritellyn suoraviivaisen lükkeen tasapainon lisäksi määrittelemme myöhemmin vielä *pyörimislükkeen* tasapainon, ja esimerkiksi lämpöopin yhteydessä käsitellään *termodynäamista* tasapainoa, jolla tarkoitetaan systeemin *tilan* tasapainoa eli tilannetta, jossa systeemin ominaisuudet kuten lämpötila eivät muutu.



3.2 Missä seuraavista tilanteista olet tasapainossa ja miksi? (a) Seisot paikoillasi. (b) Rullalautaillet suoraan vaktionopeudella. (c) Ponnistat maasta (et ole vielä ilmassa). (d) Olet hypännyt ilmaan.

Dynamikan peruslaki

Kappaleen nopeus ja liikemäärä ovat siis vakioita, jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tämä kuitenkin tarkoittaa, että jos kappaleen nopeus ja liikemäärä muuttuvat, kappaleeseen täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima. Tämän kokonaisvoiman vaikutuksen kappaleen liikkeeseen kertoo täsmällisesti Newtonin toinen laki eli **dynamikan peruslaki**.

Totesimme jo aikaisemmin, että vuorovaikutuksen aiheuttamaa *kokonaismuutosta* kappaleen tai systeemin liikemäärässä kuvaaa *impulssi*. Dynamikan peruslain mukaan *voima* kuvailee liikemäärän muutoksen *nopeutta*. Täsmällisesti kappaleen liikemäärän muutosnopeus ajan suhteeseen on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima,

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{p}}{dt}. \quad (3.3)$$

Tätä voidaan pitää voiman *määritelmänä*.

Tavallisesti kappaleiden massa on vakio, jolloin liikemäärän määritelmän (2.46) perusteella dynamikan peruslaki voidaan kirjoittaa myös muotoihin

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \bar{a}. \quad (3.4)$$

Tämä laki siis sanoo, että kappaleeseen vaikuttava voima muuttaa kappaleen nopeutta eli antaa sille kiihtyvyden. Eriksisesti x -suunnassa voidaan kirjoittaa skalaarikomponenteilla

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dt} = ma_x. \quad (3.5)$$

Kiihtyvyden ja voiman välinen verrannollisuuskerroin on kappaleen *inertia*, mikä jälleen ilmentää sitä tosiseikkaa, että massiivisten kappaleiden lükettä on vaikea muuttaa.

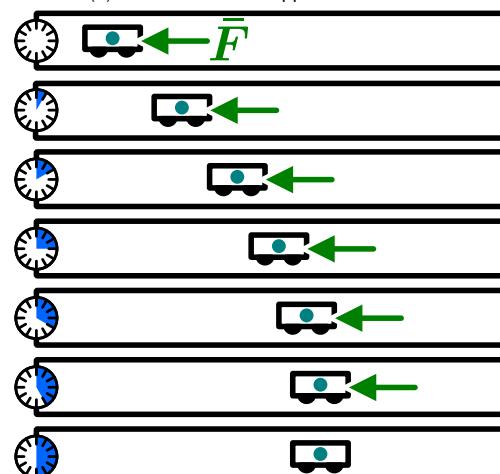
Yhtälö (3.3) antaa meille myös mahdollisuuden määritellä voiman yksikkö täsmällisesti. Jos yhden kilogramman massaiseen levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa yhden newtonin vakiovoima sekunnin ajan, kappale saa liikemäärän 1 kgm/s. Näin voidaan ilmaista voiman yksikkö SI-järjestelmän perusyksiköiden avulla,

$$N = [F] = \frac{[p]}{[t]} = \frac{\text{kgm/s}}{\text{s}} = \text{kgm/s}^2. \quad (3.6)$$

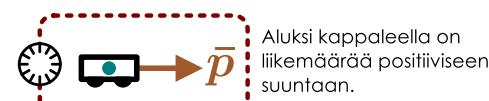
Dynamikan peruslakia sovellettaessa on ehdottoman tärkeää huomata, että kyseessä on vektoriyhtälö, jonka mukaan kappaleen *liikemäärä muuttuu aina siihen suuntaan, johon kokonaisvoima osoittaa* eli toisin sanoen kappaleen *kiihtyvyys osoittaa aina samaan suuntaan kuin kokonaisvoima* (kuva 3.6). Jos kappaleeseen kohdistuu voima, joka osoittaa sen nopeuteen nähden vastakkaiseen suuntaan, kappaleen vauhti pienenee eli nopeus- ja liikemäärävektorit lyhentyvät. Jos kappaleeseen kohdistuu voima, joka osoittaa sen nopeuden suuntaan, kappaleen vauhti kasvaa. Moniulotteisessa tapauksessa on vielä sekin mahdollisuus, että kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa kohtisuoraan kappaleen lükettä vastaan, ja tällöin kappaleen nopeus *kääntyy*, mikä on sekin kiihtyvä liikettä. Voi tavallaan ajatella, että voima venyttää, puristaa tai kääntää liikemäärävektoria.

Kuva 3.5: Dynamikan peruslaki.

(a) Voima muuttaa kappaleen lükettä.

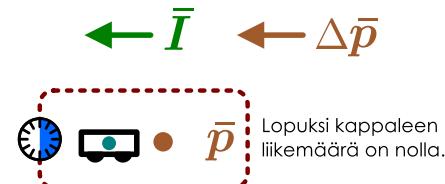


(b) Voima tuottaa impulssin.



Aluksi kappaleella on liikemäärää positiiviseen suuntaan.

Kappaleeseen vaikuttava voima muuttaa liikemäärää. Liikemäärän kokonaismuutos on yhtä suuri kuin voiman antama impulssi.



Lopuksi kappaleen liikemäärä on nolla.

Kuva 3.6: Kappaleen nopeus ja liikemäärävektorit muuttuvat voiman osoittamaan suuntaan.

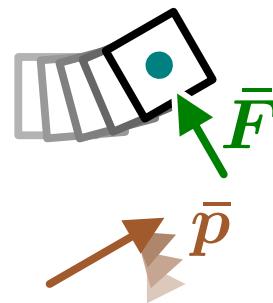
(a) Liukkeen suuntainen voima pidentää liikemäärävektoria.



(b) Liukkeen suuntaan vastakkainen voima lyhtää liikemäärävektoria.



(c) Liikettä vastaan kohtisuora voima kääntää liikemäärävektoria.



3.3 Jos kappale lükkiää negatiiviseen x -suuntaan ja sen vauhti hidastuu, millainen kokonaivoima kappaleeseen täytyy kohdistua? Jos voima on vakio sekä suunnaltaan että suuruudeltaan ja se vaikuttaa edelleen kappaleen pysähdyttäväksi, miten kappale lükkiää? Vertaa tilannetta glosspain heitettyyn kappaleeseen.

3.2 Voiman ja vastavoiman laki

Newtonin kaksi ensimmäistä laka käsittelevät voimien vaikutusta kappaleiden liukkeeseen, mutta kolmas Newtonin mukaan laki käsittelee voimia itseään. Se ei siis ole dynamiikkaa vaan *vuorovaikutusten luonnetta* koskeva laki. Tämä laki liittyy jo aikaisemmin tutkimamme liikemäärin säilymislakiin.

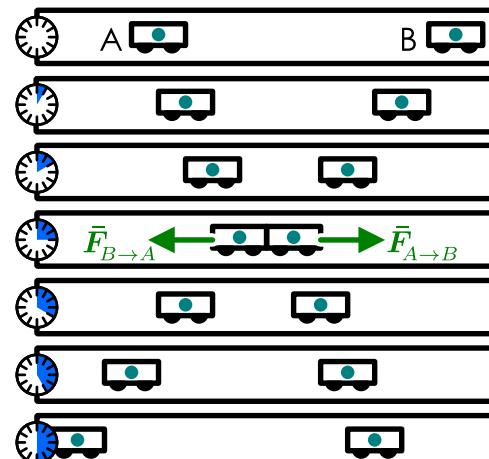
Liikemäärin säilymislain mukaan minkään systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemääriä. Sisäiset vuorovaikutukset voivat kyllä muuttaa systeemin osien liikettä — esimerkiksi kuvalassa 3.7 on esitetty kappaleiden A ja B törmäys, jossa kappaleet vuorovaikuttavat ja niiden nopeus muuttuu. Kuitenkin jos systeemiin valitaan molemmat kappaleet, systeemin kokonaislukemääri täytyy pysyä törmäyksessä vakiona. Edelleen, koska kappaleiden kokonaislukemääri on vakio, kappaleiden lukemäärien täytyy muuttua yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että kappaleiden välisen vuorovaikutuksen on pakko antaa kappaleille yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset impulssit yhtälön (2.76) mukaisesti.

Vaunujen törmätessä impulssin tuottaa vaunujen välinen kosketusvuorovaikutus, ja sitä voidaan kuvata impulssin sijaan myös voimien avulla. Vuorovaikutuksen kappaleisiin kohdistamat voimat muuttavat kappaleiden liikemääriä dynamikan peruslain mukaisesti, ja koska kokonaislukemääri on tässä systeemissä *aina* vakio, kappaleiden lukemäärien on muututtava vastakkaisiin suuntiin *yhtä nopeasti*. Niinpä kappaleisiin kohdistuvien voimien on oltava *aina* suuruudeltaan yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset.

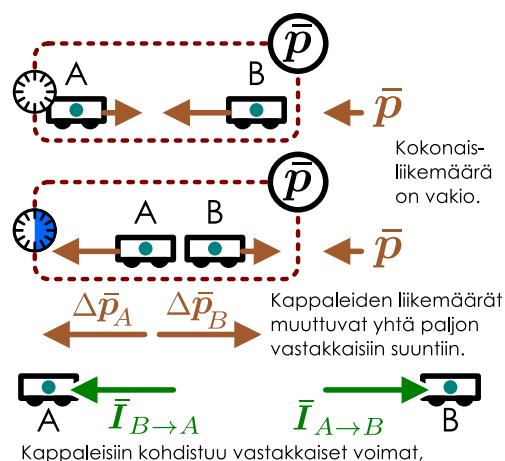
Tämä tulos ei riipu mitenkään siitä, millainen vuorovaikutus voiman tuottaa. Kahden kappaleen systeemissä kappaleiden välinen vuorovaikutus on aina systeemin sisäinen vuorovaikutus, joka ei voi muuttaa systeemin kokonaislukemääriä. Niinpä edellinen vuorovaikutus pätee *kaikille* kahden kappaleen välisille vuorovaikutuksille. Ei ole myöskään mitään väliä, liikkuvatko vuorovaikuttavat kappaleet vai ovatko ne levossa. Toisin sanoen, jos

Kuva 3.7: Voiman ja vastavoiman laki.

(a) Vuorovaikutus muuttaa kappaleiden liikettä.



(b) Kokonaislukemääri ei muudu.

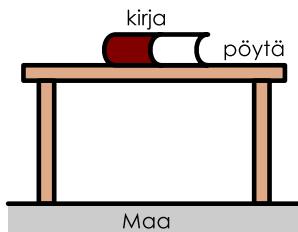


Kappaleisiin kohdistuu vastakkaiset voimat, jotka tuottavat yhtä suuret impulssit.

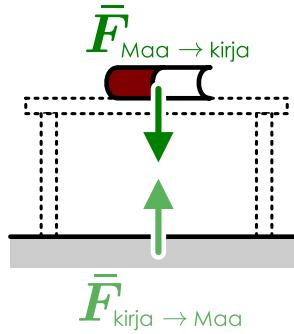
Toisin sanoen, jos

Kuva 3.8: Pöydällä olevan kirjan kokemien vuorovaikutusten voima-vastavoimaparit.

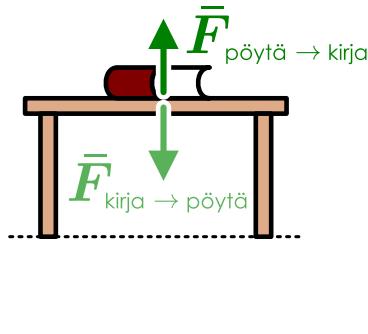
(a) Vuorovaikuttavat kappaleet.



(b) Gravitaatiovuorovaikutus.



(c) Kosketusvuorovaikutus.



kaksi kappaletta, A ja B, vuorovaikuttavat niin että kappaletta B kohdistaa vuorovaikutuksessa A:han voiman $\bar{F}_{B \rightarrow A}$, vuorovaikutuksen täytyy kohdistaa kappaletta B yhtä suuri mutta vastakaissuuntainen voima eli ns. vastavoima

$$\bar{F}_{B \rightarrow A} = -\bar{F}_{A \rightarrow B}. \quad (3.7)$$

Tämä on Newtonin kolmas laki eli **voiman ja vastavoiman laki**.



3.4 Jos jokaista voimaa kohti on aina olemassa toinen yhtä suuri mutta vastakaissuuntainen voima, miten mihinkään kappalettaan voi koskaan kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima?

Vastavoimien käsitettä on havainnollistettu kuvassa 3.8, jossa tarkastellaan pöydällä olevaa kirjaa. Kirjaan kohdistuu Maan vetovoima, joka pyrkii vetämään kirjaa kohti Maata. Kirja ei kuitenkaan putoa, koska pöydän pinta kannattelee sitä. Pöytä kohdistaa siis kirjaan kosketusvoiman, joka kumoaa painovoiman ja pitää kirjan tasapainossa. Tilanteessa kirjaan vaikuttaa siis kaksi vuorovaikutusta: gravitaatio kirjan ja Maan välillä sekä kosketus kirjan ja pöydän välillä. Kumpikin vuorovaikutus kohdistaa voiman sekä kirjaan että vuorovaikutuksen toiseen osapuoleen.

Gravitaatiovuorovaikutus kohdistaa kirjaan alas päin osoittavan voiman ja *Maahan ylöspäin* osoittavan voiman. Tämä Maahan kohdistuva voima on painovoima, jolla *kirja vetää Maata puoleensa*. Se on suuruudeltaan yhtä suuri kuin kirjaan kohdistuva painovoima mutta sen suunta on ylöspäin. On ehkä hiukan yllättävää, että pieni kirja kohdistaa suureen Maahan yhtä suuren voiman kuin Maa kirjaan. Tässä on kuitenkin kyse siitä, että vaikka kirja luo ympärilleen hyvin heikon painovoimakentän, Maan koko valtava massa tuntee tämän kentän ja yhteensä kirja kohdistaa Maahan kokonaisvoiman, joka on yhtä suuri kuin Maan voimakkaan painovoimakentän pieneen kirjaan kohdistama kokonaisvoima. Edelleen jos kirja pudotetaan, vaikka kumpaankin kappalettaan kohdistuu yhtä suuri voima, havaitsemme muutoksen vain kirjan liikkeessä, koska Maan inertia on niin suuri. Kuten kärpänen ei saa rekkaa liikkeelle, koska rekan inertia on niin suuri, myöskaan kirja ei saa Maata liikkeelle.

Kirjan ja pöydän välisen kosketusvuorovaikutus kohdistaa kirjaan voiman, jonka suunta on ylöspäin, ja pöytään yhtä suuren voiman, jonka suunta on alas päin. Toisin sanoen kirja *painaa pöytää alas*. Jos pöytä on jäykki ja kirja on kevyt, tätä ei juurikaan huomaa, mutta jos oikean pöydän pääälle pinoaa paljon lastia, voi helposti huomata pöydän taipuvan. Tässä ilmiössä on kyse pöytään kohdistuvan voiman vaikutuksesta pöydän muotoon, ja mitä suurempi voima pöytää painaa alas päin, sitä enemmän pöytälevy taipuu.

Edellisessä esimerkissä voima ja vastavoima -pareja olivat siis Maahan ja kirjaan kohdistuvat gravitaatiovuorovaikutuksen voimat sekä pöytään ja kirjaan kohdistuvat kosketusvuorovaikutuksen voimat. On tavallinen väärinkäsitys ajatella voiman ja vastavoiman lain tarkoittavan samaan kappaletseen kohdistuvia toisensa kumoavia voimia, mutta näin ei suinkaan ole, sillä esimerkissä kirjaan kohdistuvat ja toisensa tasapainottivat voimat olivat kirjaan kohdistuva painovoima sekä kirjaan kohdistuva kosketusvoima. Nämä ovat siis *samaan kappaletseen kohdistuvia eri vuorovaikutusten tuottamia voima*. Vastavoiman laki sen sijaan puhuu aina *eri kappaletsiin* kohdistuvista voimista, jotka ovat seurausta *samasta kappaleiden välisestä vuorovaikutuksesta*.



3.5 Mitkä ovat seuraavien voimien vastavoimat? (a) Voima jolla heität palloa. (b) Voima jolla maa vetää sinua puoleensa. (c) Voima jolla maapinta kannattelee sinua.

3.3 Voimien graafinen analyysi

Vapaakappalekuva

Jos systeemün kuuluu useita vuorovaikuttavia kappaleita, kaikkiin kappaleisiin kohdistuvien voimavektoreiden piirtäminen yhteen kuvaan johtaa helposti hyvin monimutkaiseen ja vaikeasti tulkittavaan kuvaan. Kuitenkin jokaisen kappaleen liikkeeseen vaikuttavat vain kyseiseen kappaleeseen kohdistuvat voimat, joten kappaleiden liikkeen analysoimiseksi pitää pystyä erottelemaan mikä voima vaikuttaa mihinkin kappaleeseen. Tämä on usein helppointa **vapaakappalekuvan** avulla. Vapaakappalekuva on diagrammi, jossa systeemin jokainen yksittäinen kappale erotetaan omaksi kuvakseen ja kuhunkin kuvaan merkitään kaikki *kyseisen kappaleeseen* vaikuttavat voimat mutta ei muihin kappaleisiin vaikuttavia voimia. Nimitys "vapaakappale" viittaa siihen, että tässä esityksessä kappale piirretään erilleen kaikista muista kappaleista. Kappale ei siis ole fysikaalisesti "vapaa" siinä mielessä, että se vuorovaikuttaa muiden kappaleiden kanssa ja siihen kohdistuu vuorovaikutusten tuottamia voimia. Piirroksessa kappaleet kuitenkin piirretään toisistaan erilleen, jotta olisi selvää mihin kappaleeseen mikäkin voima vaikuttaa.

Voimat piirretään vapaakappalekuvaan nuolin, joiden pituus kuvailee voiman suuruutta ja suunta voiman vaikuttussuuntaa. Jos kappaleen muodolla tai asennolla ei ole merkitystä, kappaleita voi kuvata pelkkänä massakeskipisteenä. Tällöin kaikki nuolet piirretään lähtemään kappalesta esittävästä pistestä. Jos halutaan huomioida myös voimien vaikutus kappaleen asentoon, voimat piirretään niin että joko voimaa kuvavien nuolen kärki tai kanta asetetaan pisteesseen, jossa voiman arvioidaan vaikuttavan. Suoraviivaisen liikkeen kannalta ei ole väliä, minne nuolet piirtää, mutta esimerkiksi pyörimislukkien kannalta tällä on merkitystä, joten voimat on syytä opetella piirtämään oikeisiin paikkoihin. Tästä on myös se hyöty, että jo pelkästään voimavektorin paikan perusteella voi päätellä, mihin vuorovaikutukseen kukaan voima liittyy. Kappaleet esimerkiksi vuorovaikuttavat kosketusvuorovaikutuksen kautta niissä paikoissa, joissa ne ovat kiinni toisissa kappaleissa. Niinpä esimerkiksi maassa seisovan ihmisen jalkoihin täytyy kohdistua maanpinnan jalkoihin kohdistama kosketusvoima.

Kuvassa 3.9 on piirretty vapaakappalekuvat kuvaamaan ylöspäin suuntautuvaa hyppyä. Tilanteessa hyppäävä ihmisen voima on kohdistettu ylös Maan gravitaation kautta. Jos olemme kiinnostuneet hyppääjän liikkeestä, periaatteessa riittää piirtää vapaakappalekuva vain hyppääjälle. Monimutkaisessa tilanteessa on kuitenkin helppo unohtaa jokin tilanteessa vaikuttava voima, joten on aina suositeltavaa piirtää vapaakappalekuviot *kaikille* prosessiin osallistuville kappaleille. Niinpä tässäkin kuvassa on piirretty vapaakappalekuvat sekä hyppääjälle että Maalle. Kaikkein tavanomaisin virhe vapaakappalekuvioiden laadinnassa on vastavoimien unohtaminen, ja siksi kannattaa myös aina varmistaa, että löytää jokaiselle piirtämälle voimalle vastavoiman. Esimerkiksi kuvassa 3.9 vastavoimaparit on yhdistetty katkoviivalla, mutta tämän voi tehdä myös luetteloinalla. Jos jollekin voimalle ei löydy vastavoimaa, tämä on varma merkki siitä, että jokin voima on jäänyt piirtämättä.

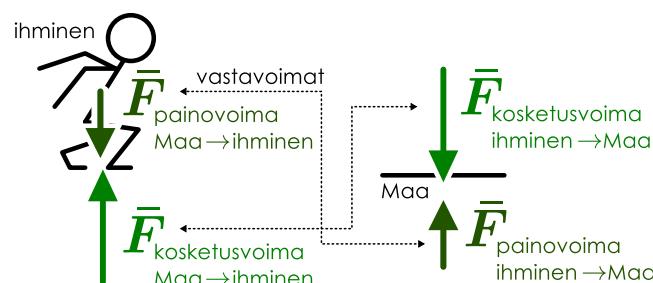
Vapaakappalekuvan piirtämisessä perusajatus on jälleen ongelman pilkkomisen mahdollisimman pieniin osiin ja näiden osien systemaattinen ratkaiseminen. On helpompi etsiä kappale kerrallaan kaikki vuorovaikutukset, joihin jokainen kappale osallistuu, kuin usean kappaleen systeemin kaikki vuorovaikutukset. Merkitsemällä kuvan kappaleeseen kohdistuvien vuorovaikutusten voimat, vapaakappalekuva toimii myös visualisena muistin ja hahmottamisen apuvälineenä, josta voi helposti nähdä, millaisia voimia kappaleeseen vaikuttaa. Kun kappaleeseen kohdistuvat voimat on löydetty, kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima voidaan määrittää piirtämällä vektoreita kuvavien nuolten summa *graafisten yhteenlaskusääntöjen* kautta. Näin voidaan arvioida ilman varsinaisia laskuja, mihin suuntaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima suuntautuu

Kuva 3.9: Yksinkertaisen tilanteen analyysi vapaakappalekuvan avulla. Hyppäävään ihmiseen kohdistuu painovoima ja maanpinnan kosketusvoima.

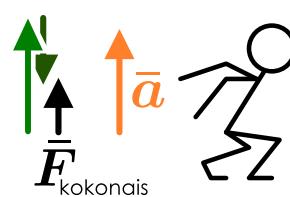
(a) Vuorovaikuttavat kappaleet.



(b) Hyppääjän ja Maan vapaakappalekuvat. Vastavoimaparit on yhdistetty nuolin.



(c) Kokonaisvoima on voimien summa ja kiihtyvyys kokonaisvoiman suuntainen.



tai onko se mahdollisesti nolla. Esimerkiksi kuvan 3.9 (c) perusteella hyppääjään kohdistuva kokonaisvoima osoittaa ylöspäin, koska kappaletta ylös työntävä kosketusvoima on suurempi kuin alas vetävä painovoima. Edelleen, koska kokonaisvoima osoittaa ylöspäin, hyppääjän täytyy olla kiiltyvässä lükkeessä ylöspäin. Myös käänneinen päättely on mahdollinen: jos esimerkiksi tiedetään, että kappale on tasapainossa, siihen vaikuttavan kokonaisvoiman on oltava nolla. Tällöin vapaakappalekuvan avulla voidaan päättää kuinka pitkiä ja minkä suuntaisia voimia kuvaavien nuolten pitäisi olla, jotta niiden summa olisi nolla.



3.6 Onko kuvan 3.9 hyppääjä ponnistamassa vai laskeutumassa takaisin maahan hypyn jälkeen? Perustele tarkastelemalla erikseen kumpaakin tapausta!

Vaikka vapaakappalekuvan avulla voidaan päättää kappaleen kiiltyvyys, vapaakappalekuvaan ei kuulu piirtää muita vektoreita kuin voimia. Toki voi olla hyödyllistä piirtää myös esimerkiksi kappaleen nopeus tai kiiltyvyysvektori samaan kuvaan, mutta sekäannusten välittämiseksi muut kuin voimavektorit on syytä piirtää selvästi erilleen kappaleesta. Vapaakappalekuvan perusteella usein määritetään kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima, ja jos kuvaan on merkityt muitakin suureita kuin voimia, voi helposti käydä niin, että tulee laskettua yhteen eri suureita. Fysiikassa ei kuitenkaan koskaan voi laskea yhteen suureita, joilla on eri yksiköt. Esimerkiksi nopeus- ja voimavektoreiden yhteenlaskussa ei olisi mitään järkeä.

Myös kokonaiselle systeemille tai useasta osasta koostuvalle kappaleelle voidaan piirtää vapaakappalekuvan kaltainen voimadiagrammi, jossa näkyvät kaikki systeemiin kohdistuvat voimat. Tällöin riittää kuitenkin piirtää ainoastaan systeemiin vaikuttavien *ulkoisten vuorovaikutusten* voimavektorit, koska systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi vaikuttaa systeemin liikkeeseen, kuten liikemäärän säilymislain yhteydessä todettiin.



3.7 Ajatellaan kuvan 3.9 hyppääjä jaetuksi jalkoihin ja muuhun kehoon. Millaisen voiman jalat kohdistavat kehoon? Millaisen voiman keho kohdistaa jalkoihin? Millainen kokonaisvaikutus näillä voimilla on koko hyppääjän liikkeeseen? Millä voimalla on suurin vaiketus hyppääjän massakeskipisteen nopeuteen?

Vapaakappalekuvan laatimininen

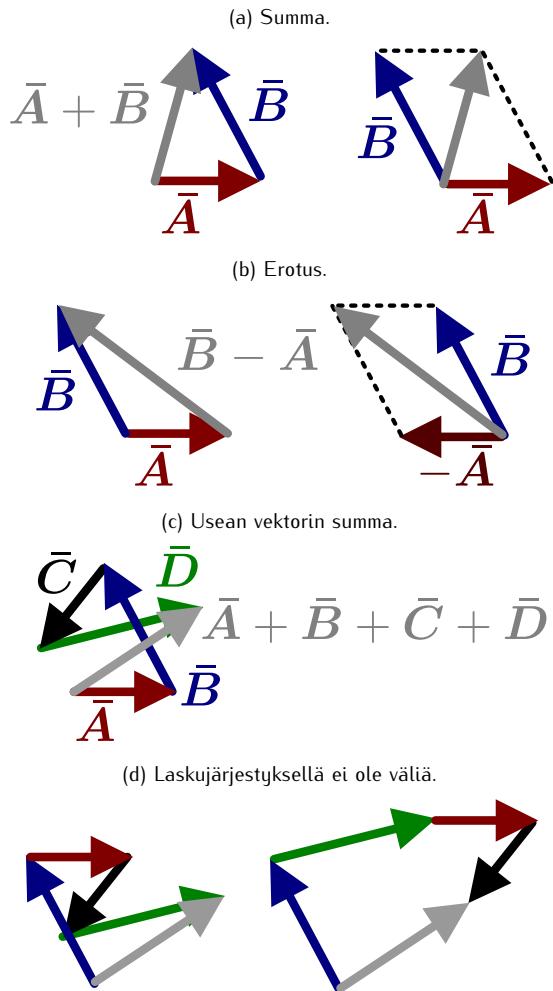
1. Piirrä erikseen kappale, jonka vapaakappalekuva halutaan piirtää.
2. Tunnista *ulkoiset vuorovaikutukset*, jotka kappale kokee. Kaikilla kosketuspinnilla voi vaikuttaa normaalivoima ja kitkavoima. Yleensä kappaleisiin vaikuttaa myös painovoima. Myöhemmin tutustutaan muihinkin vuorovaikutuksiin kuten nosteeseen ja sähkömagneettisiin vuorovaikutuksiin, jotka myös voivat kohdistaa kappaleeseen voiman.
3. Päättele jokaiselle vuorovaikutukselle, mihin suuntaan sen tuottama voima osoittaa ja mihin kohtaan vuorovaikutus kohdistuu. Piirrä jokaista voimaa kuvava nuoli, joka osoittaa voiman vaikutussuuntaan ja jonka kärki tai kanta on voiman vaikutuspisteessä. Jos mahdollista, yritä päättää myös voimien keskinäiset suuruudet ja piirrä nuolet sitä pidemmiksi mitä suurempaa voimaa ne kuvavat.
4. Nimeä voimia kuvavat nuolet (vektorit). Jos esimerkiksi kappale A vuorovaikuttaa kappaleen B kanssa, voit nimetä vuorovaikutuksen kappaleeseen A kohdistaman voiman $\bar{F}_{B \rightarrow A}$.
5. Jos systeemissä on useita kappaleita, joille täytyy piirtää vapaakappalekuvat, toista vaiheet 1. – 4. kullekin kappaleelle.
6. Merkitse jokaiselle voimalle, mikä on sen vastavoima. Voit tehdä tämän esimerkiksi yhdistämällä voimavastavoimaparit katkoviivoin tai listaamalla parit. Muista, että voima ja vastavoima kohdistuvat aina *eri kappaleisiin*. Mikään vuorovaikutus ei voi tuottaa voimaa vain yhteen kappaleeseen, joten jokaisella voimalla täytyy olla vastavoima. Tämän vaiheen tarkoitus on tarkistaa, ettei mitään voimia ole unohtunut.
7. Jos mahdollista, päättele voimien suhteelliset suuruudet kappaleen liikkeen reunaehdoista. Esimerkiksi jos kappale liikkuu suoralla, siinä kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy osoittaa tämän suoran suuntaan. Erityisesti jos kappale on paikoillaan, kokonaisvoiman on oltava nolla.
8. Voit piirtää kuhunkin kappaleeseen kohdistuvaa kokonaisvoimaa ja kappaleen kiiltyvyyttä kuvaavat nuolet vapaakappalekuvan viereen, mutta *älä* piirrä niitä varsinaiseen vapaakappalekuvaan, sillä siinä on tarkoitus merkitä ainoastaan vuorovaikutusten kappaleisiin kohdistamat voimat.

Vektorien graafinen yhteenlasku

Vapaakappalekuvaan nuolin piirrettyjen voimavektoreiden summa kuvailee kappaleeseen vaikuttavaa kokonaisvoimaa, ja Newtonin toisen lain mukaisesti kappaleen kiiltyvyys on verrannollinen tähän kokonaisvoimavektoriin. Vapaakappalekuvan graafinen tapa esittää vektoreita onkin hyvä tapa määrittää kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoimavektori.

Vektoreiden ollessa yhdensuuntaisia vektoreiden yhteenlasku onnistuu yksinkertaisesti laskemalla *saman-suuntaisten* vektoreiden pituudet yhteen ja vähtämällä niistä *vastakkaissuuntaisten* vektorien yhteenlaskettu pituus. Tähän perustuu myös vektorien skalaarikomponenteilla laskeminen, ja teknikka perustuu yksinkertaisesti siihen, että yhdessä ulottuvuudessa vektoreilla on vain kaksi mahdollista suuntaa. Kolmiulotteisessa avaruudessa vektoreilla on kuitenkin äärettömästi mahdollisia suuntia ja kaksi vektoria eivät yleensä ole yhdensuuntaiset. Vektoreiden ollessa *erisuuntaiset* vektoreiden suunnat onkin erikseen huomioitava. Tämä on mahdollista sekä graafisesti (geometrisesti) että algebrallisesti (analyyttisen geometrian keinoin). Nyt tarkastelemme graafista tapaa, joka on yleensä paras tekniikka tilanteiden hahmottamiseen ja arvioiden tekemiseen. Luvussa 4 perehdytään algebrallisiin vektorilaskennan menetelmiin, joita tarvitaan tarkemmassa laskennassa.

Kuva 3.10: Vektorien graafisia laskusääntöjä.



Nuolin piirretty vektorit lasketaan graafisesti yhteen siirtämällä vektorit peräkkäin niin, että kunkin vektoria kuvavaan nuolen pituus ja suunta pysyy muuttumattomana. Asettamalla kaksi vektoria \bar{A} ja \bar{B} niin, että nuolen \bar{B} kanta on samassa pisteessä kuin nuolen \bar{A} kärki, summavektoria $\bar{A} + \bar{B}$ esittää nuolen \bar{A} kannasta nuolen \bar{B} kärkeen piirretty nuoli, kuten kuvassa 3.10 (a) on esitetty. Toinen tapa laskea vektorien summa on asettaa vektorien kannat samaan pisteeseen ja piirtää suunnikas, jonka sivut ovat nämä vektorit. Tällöin summavektoria kuvaa suunnikkaan lävistäjä, joka lähee alkuperäisten vektorien kantapisteestä ja päättyy suunnikkaan vastakkaiseen kulmaan.

Vektoreita voidaan myös vähtää toisistaan. Tällöin negatiivisenä esitetty vektori yksinkertaisesti käännetään ympäri ennen yhteenlaskua. Itse asiassa vektorien erotuslaskun merkitys onkin se, että ensin vähennettävä vektori kerrotaan luvulla -1 , jolloin vektoria kuvava nuoli käännyy.

$$\bar{B} - \bar{A} = \bar{B} + (-\bar{A}) = \bar{B} + (-1)\bar{A}. \quad (3.8)$$

Tämä on esitetty kuvassa 3.10 (b).

Graafisesti voidaan todeta myös, että vektorien yhteenlaskussa pätee vaihdantalaki eli yhteenlaskettavien järjestystä saa muuttaa lopputuloksen muuttumatta

$$\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A} \quad (3.9)$$

kuten skalaarienkin yhteenlaskussa. Tämä on melko ilmeistä suunnikkaan perusteella esitetyn yhteenlaskusäännön avulla, koska summattavat vektorit ovat symmetrisessä asemassa tässä laskutavassa. Vähennyslaskussa laskujärjestyksellä kuitenkin on väliä, kuten skalaareilakin,

$$\bar{A} - \bar{B} = -(\bar{B} - \bar{A}) \neq \bar{B} - \bar{A}. \quad (3.10)$$

Samaan tapaan monta vektoria voidaan summata yhteen asettamalla ne peräkkäin yksi toisensa jälkeen, jolloin vektorien summa on ensimmäisen summattavan nuolen kannasta viimeisen kärkeen piirretty nuoli. Tässäkään tapauksessa summauksen järjestyksellä ei ole merkitystä. Riippumatta järjestyksestä, johon vektorit asetellaan, seuraamalla vektorien merkitsemää reittiä kulkien aina yhden vektorin kannasta kärkeen päädystään aina samaan loppupisteeeseen.

Jos yhteen lasketaan siirtymävektoreita $\Delta\bar{r}$, kuvassa 3.10 (d) esitettyt erilaiset järjestykset kuvaavat erilaisia *reittejä*. Minkä tahansa reitin voi ajatella muodostuvan pienten peräkkäisten siirtymien yhdistelmänä, ja kokonaissiirtymä reitin alkupisteestä loppupisteesseen saadaan reitin muodostavien siirtymävektoreiden summana. Jos vaihdamme siirtymien järjestyksen saamme tieteenkin erilaisen reitin. Kuitenkin koska vektorien yhteenlaskussa järjestyksellä ei ole väliä, tällä tavalla muodostettu uusi reitti päättyy samaan pisteeseen kuin alkuperäinen reitti.

Laskettaessa yhteen voimavektoreita ei kuitenkaan ole olemassa mitään sääntöä, missä järjestyksessä nämä voimat pitäisi laskea yhteen, sillä kaikki voimat kohdistuvat kappaleeseen samanaikaisesti. Niinpä onkin fysiikaan järkevä ja suorastaan välttämätöntä, että vektorien yhteenlaskussa järjestyksellä ei ole väliä. Voimavektorit voi siis laskea yhteen eli graafisessa ratkaisussa asettaa peräkkäin missä tahansa järjestyksessä etkä lopputuloksena saatava kokonaisvoima siitä muutu.

Eritiisesti jos kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on nolla, vektorita kuvavat nuolet muodostavat peräkkäin asetettuina kuvion, jossa viimeisen vektorin kärki on samassa pisteessä kuin ensimmäisen vektorin

kanta. Toisin sanoen *joko* vektoreita kuvaavat nuolet ovat vastakkaissuuntaiset ja eri suuntiin osoittavien nuolien yhteispituus on yhtä suuri *tai* nuolet muodostavat umpinainen silmukan. Jälkimmäisessä tapauksessa yhdenkään vektorin ei välttämättä tarvitse olla vastakkaissuuntainen minkään toisen vektorin kanssa vaan myös erisuuntaiset vektorit voivat summautua nollaksi.



- 3.8** (a) Missä tapauksessa kahden vektorin summan pituuksien $|\bar{A} + \bar{B}|$ on yhtä suuri kuin niiden pituuksien summa $\bar{A} + \bar{B}$? (b) Onko mahdollista, että $|\bar{A} + \bar{B}| = |\bar{A}|$ vaikka \bar{B} ei ole nollavektori? Jos on, keksi esimerkki jossa näin on.

Vektorien jako komponentteihin

Vektoreiden yhteenlaskun periaatetta voidaan käyttää myös käänkesti vektorien yhdistämisen sijaan niiden hajottamiseksi osiin. Jos esimerkiksi ystäväsi ripustaa taulua seinälle ja sinun pitäisi antaa ohjeita taulun saamiseksi oikeaan kohtaan, on todennäköisesti molemille helpompaa käyttää ohjeissa suuntaa ylös–alas sekä vasen–oikea kuin neuvoa siirtämään taulua viistoon tietty matka tiettyyn suuntaan. Näin siksi, että jotkut suunnat kuten pysty- ja vaakasuunta ovat usein erityisasemassa ja helppo hahmottaa. Esimerkiksi pystysuunta määritellään sen mukaan mihin suuntaan painovoima vaikuttaa, ja vaakasuunta taas on tästä vastaan kohtisuora suunta. Fysiikaalisesti taulun siirtäminen askeleittain pysty- ja vaakasuunnissa tarkoittaa sitä, että siirtymä jaetaan pysty- ja vaakasuuntasiin osiin. Aivan vastaavasti mikä tahansa muukin vektorisuure kuten nopeus, liikemäärä tai voima voidaan jakaa osiin eli **vektorikomponentteihin** tai lyhyesti vain komponentteihin.

Komponenttijakoa on havainnollistettu kuvassa 3.11 (a), jossa vektorit \bar{A} ja \bar{B} on jaettu komponentteihin vaaka- ja pystysuunnissa, joita on merkitty alaindekseillä x ja y . Kuvassa vektori \bar{A} on jo valmiiksi vaakasuuntainen, joten sen x -suuntainen komponentti on vektori itse, $\bar{A}_x = \bar{A}$, ja y -suuntainen komponentti on nolla, $\bar{A}_y = \bar{0}$.

Vektori \bar{B} sen sijaan osoittaa viistoon, joten sen komponentit eivät ole nollia eivätkä sama kuin vektori itse. Kuten kuvasta nähdään, komponentit osoittavat yhtä pitkälle pysty- ja vaakasuunnissa kuin mitä vektori itse ulottuu ja niiden summa on alkuperäinen vektori itse

$$\bar{B}_x + \bar{B}_y = \bar{B}. \quad (3.11)$$

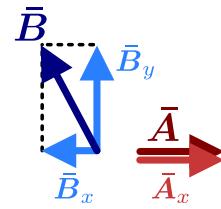
Vektorikomponentti \bar{A}_x ja skalaarikomponentti A_x lüttivät toisiinsa mutta eivät ole sama asia. Vektorikomponentti on nimensä mukaisesti *vektori* ja skalaarikomponentti on *skalaari*. Jos esimerkiksi vektorin x -vektorikomponentti osoittaa positiiviseen x -suuntaan, vektorin x -skalaarikomponentti on sama kuin vektorikomponentin pituus, $A_x = |\bar{A}_x|$. Jos vektorin x -vektorikomponentti osoittaa negatiiviseen x -suuntaan, vektorin x -skalaarikomponentti on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin vektorikomponentin pituus mutta *negatiivinen*, $A_x = -|\bar{A}_x|$. Matemaattisesti tämä voidaan esittää x -suuntaisen yksikkövektorin \hat{i} avulla

$$\bar{A}_x = A_x \hat{i}. \quad (3.12)$$

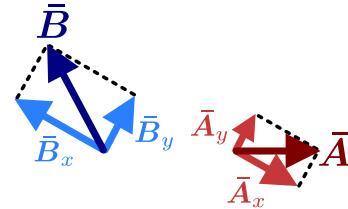
Komponenttijaon ei tietenkään tarvitse tapahtua juuri pysty- ja vaakasuunnissa, vaan mitkä tahansa suunnat voidaan valita komponenttijaon perustaksi. Esimerkiksi tarkasteltaessa kappaleita kaltevalla tasolla on usein kätevää valita koordinaatiston akselit tason pinnan suuntaisesti ja pintaan nähden kohtisuoraan. Tällöin vektorin jako komponentteihin on tietenkin erilainen kuin jaon tapahtuessa pysty- ja vaakakomponentteihin, kuten kuvassa 3.11 (b) nähdään. Kuitenkin riippumatta siitä missä suunnissa vektorin jako komponentteihin tehdään, komponenttien summan pitää aina olla alkuperäinen vektori yhtälön (3.11) mukaisesti.

Kuva 3.11: Vektorien jako komponentteihin.

(a) Vaaka- ja pystykomponentit.

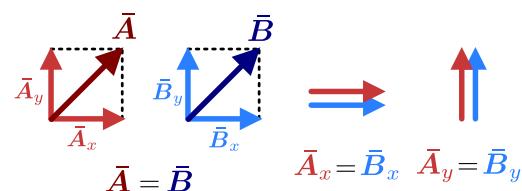


(b) Jaon voi tehdä missä suunnassa tahansa.

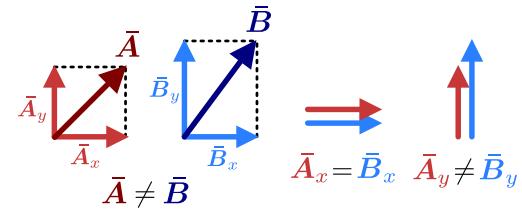


Kuva 3.12: Komponenttijaon yksikäsiteisyys.

(a) Samanlaisten vektoreiden komponentit.



(b) Erikoisten vektoreiden komponentit.



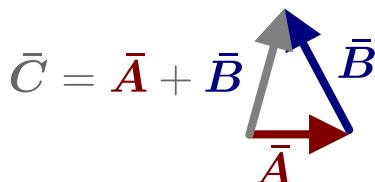
Ja huomaa myös, että vaikka vektorin voi jakaa komponentteihin äärettömän monella tavalla valitsemalla koordinaatiston akseleille eri suunnat, koordinaatiston valinnan jälkeen vektori voidaan jakaa komponentteihin koordinaattiakselien suunnissa *vain yhdellä tavalla*. Toisin sanoen kun koordinaatisto on valittu, vektoreiden komponenttijako on yksikäsiteinen. Tämän ominaisuuden ansiosta vektorien yhtäsuuruuden voi tarkistaa myös komponenttien kautta. Kaksi vektoria ovat samat jos ja vain jos niiden *kaikki* komponenttit ovat samat (kuva 3.12). Toisin sanoen $\bar{A} = \bar{B}$ on totta täsmälleen silloin, kun $\bar{A}_x = \bar{B}_x$ ja $\bar{A}_y = \bar{B}_y$ (ja kolmessa ulottuvuudessa lisäksi $\bar{A}_z = \bar{B}_z$).



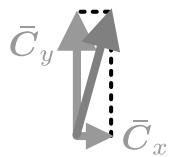
3.9 Erääseen kappaleeseen vaikuttaa kaksi voimaa, \bar{F}_A ja \bar{F}_B . Voimalla A on komponentti 1.5 N positiiviseen x -suuntaan ja komponentti 1.1 N negatiiviseen y -suuntaan. Voiman B pituus on 2.0 N ja voimavektori osoittaa xy -koordinaatistossa yläviistoon vasemmalle niin, että voimavektorin ja x -akselin välinen kulma on 150° . Kuinka pitkät ovat kokonaivoiman x - ja y -komponentit ja mihin suuntaan ne osoittavat?

Kuva 3.13: Vektorien yhteenlasku komponenteittain.

(a) Graafinen yhteenlasku.

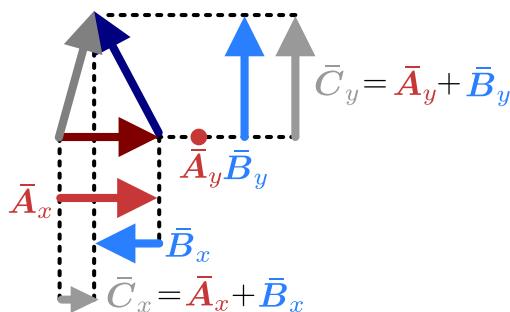


(b) Summan komponentit.



$$\bar{C} = \bar{C}_x + \bar{C}_y$$

(c) Komponenttien summa.



sia ja yhdensuuntaisten vektoreiden yhteenlaskussa pitää ainoastaan huomioida osoittavatko vektorit samaan vai vastakkaiseen suuntaan.

Myös vapaakappalekuvien analyysi usein helpottuu jakamalla voimat pysty- ja vaakasuuntaisiin komponentteihin. Esimerkiksi jos kappaleen tiedetään liikkuvan vain vaakasuunnassa, sen kiilthyvyysvektorin on joko oltava nolla tai osoitettava vaakasuoraan. Tällöin kiilthyvyden pystykomponentti on välttämättä nolla ja myös kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman pystysuuntaisen komponenttin on oltava nolla, koska kappaleen kiilthyvyys osoittaa samaan suuntaan kuin sen tuottava kokonaivoima.



3.10 Kirjoita omien sanoin ohjeet vapaakappalekuvien pürtämiseen sekä vektoreiden yhteenlaskuun ja komponenttijakoon. Keksi esimerkki, jossa on kolme toistensa kanssa vuorovaikuttavaa kappaletta, piirrä sille vapaakappalekuvio, ja määritä kuviot avulla kuhunkin kappaleeseen kohdistuvaa kokonaivoimaa kuvaava nuoli.

Myös laskutoimitukset usein helpottuvat huomattavasti, kun vektorit jaetaan ensin komponentteihin. Esimerkiksi vektoreiden yhteenlasku voidaan helposti tehdä komponenttien avulla kuvan 3.13 tapaan. Jos nimittää merkitään vektorien \bar{A} ja \bar{B} summaa symbolilla $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$, voidaan tämä vektori jakaa usealla tavalla osiin. Ensinnäkin *summavektorilla* on komponenttijako

$$\bar{C} = \bar{C}_x + \bar{C}_y. \quad (3.13)$$

Toisaalta *summattavat vektorit* voidaan jakaa erikseen komponentteihin ja näiden komponenttien summan voi järjestellä uudelleen,

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B} \\ &= (\bar{A}_x + \bar{A}_y) + (\bar{B}_x + \bar{B}_y) \\ &= (\bar{A}_x + \bar{B}_x) + (\bar{A}_y + \bar{B}_y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tässä siis $\bar{A}_x + \bar{B}_x$ on x -suuntainen vektori ja $\bar{A}_y + \bar{B}_y$ on y -suuntainen vektori. Vektorin komponenttijako on kuitenkin yksikäsiteinen, joten on vain yksi tapa esittää summavektori \bar{C} x - ja y -suuntaisten komponenttien summana. Niinpä summan $\bar{A}_x + \bar{B}_x$ on oltava vektorin \bar{C} x -komponentti eli sen täytyy olla sama vektori kuin \bar{C}_x . Samoin voidaan päätellä y -suunnassa, joten

$$\bar{C}_x = \bar{A}_x + \bar{B}_x, \quad \bar{C}_y = \bar{A}_y + \bar{B}_y. \quad (3.15)$$

Tämä tarkoittaa, että vektorien summa voidaan laskea ja kämällä vektorit ensin komponentteihin, laskemalla sitten yhdensuuntaiset komponenttit yhteen ja lopuksi yhdistämällä erisuuntaiset komponenttit geometrisesti. Jos vektreitä on monta, tämä on helpoin tapa laskea, koska esimerkiksi kaikki x -komponenttit ovat keskenään *yhdensuuntaisia* ja yhdensuuntaisten vektoreiden yhteenlaskussa pitää ainoastaan huomioida osoittavatko vektorit samaan vai vastakkaiseen suuntaan.

3.4 Vuorovaikutuksiin liittyviä voimia

Konservatiiviset voimat

Gravitaation tuottama voima eli painovoima osoittaa aina alas päin, sillä voimme määritellä suunnan "alas" tarkoittavan painovoiman vaikutussuuntaa. Vapaasti putoavan kappaleen liikkeessä tämä ilmenee niin, että kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jossa kiihtyvyysvektori (1.27) osoittaa aina painovoiman vaikutussuuntaan eli alas päin. Toisaalta kuten luvussa 2 todettiin, painovoiman potentiaalienergia pienenee siirryttäässä alas päin, joten selvästikin putoava kappale pyrkii liikkumaan kohti pienenevää potentiaalienergiaa. Täsmällisemmin ilmaisten gravitaatiovuorovaikutus kohdistaa kappaleisiin voiman, joka osoittaa kohti pienenevää potentiaalienergiaa. Vastaavasti venytetty jousi pyrkii palaamaan tasapainopisteensä, joten jousi kohdistaa siihen kiinnitettyyn kappaleeseen voiman, joka osoittaa aina kohti tasapainopistettä eli jousen potentiaalienergian minimiä. Tämä havainto pätee itse asiassa aina: *Konservatiivinen vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen voiman suuntaan, johon siirryttäässä vuorovaikutksen potentiaalienergia pienenee.* Todistamme seuraavaksi tämän väitteen ja tutkimme samalla sen merkitystä.

Määritellään ensin, mitä tässä tarkoitetaan potentiaalienergian muuttumisella. Tarkastellaan esimerkiksi painovoimakentässä liikkuva kappaletta, jonka massa on 1 kg ja määritellään positiivinen x -suunta ylöspäin. Jos kappale siirtyy ylöspäin yhden metrin, $\Delta x = 1$ m, gravitaation potentiaalienergian muutos on $\Delta U = mg\Delta x = 9.8$ J. Potentiaalienergian muutoksen suhde paikan muutokseen on siis $\Delta U/\Delta x = mg = 9.8$ J/m. Toisaalta jos kappale liikkuu tämän matkan nopeudella $v_x = 2.0$ m/s, tähän siirtymään kuluu aika $\Delta t = \Delta x/v_x = 0.5$ s ja potentiaalienergian muutoksen suhde ajan muutokseen on $\Delta U/\Delta t = v_x \Delta U/\Delta x = 19.6$ J/s. Toisin sanoen energia muuttuu ajan kuluessa sitä nopeammin mitä enemmän energia muuttuu kappaleen siirtyessä ja mitä nopeammin kappale liikkuu. Täsmälleen samanlainen päättely toimii myös differentiaaleilla. Joten vaikka tarkasteltavat suureet eivät olisi vakioita kuten edellä, voimme aina kirjoittaa

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dU}{dx} = v_x \frac{dU}{dx}. \quad (3.16)$$

Kun puhumme suunnasta, jossa potentiaalienergia pienenee, tarkoitamme siis suuntaa johon liikuttaessa U pienenee kun paikkakoordinaatti x muuttuu. Jos tämä suunta on *positiivinen x -suunta*, tämä tarkoittaa sitä, että potentiaalienergia pienenee siirryttäässä positiviseen suuntaan. Toisin sanoen $dU < 0$ jos $dx > 0$ m, jolloin $dU/dx < 0$ J/m eli potentiaalienergian derivaatta paikan suhteeseen on *negatiivinen*. Graafisessa esityksessä tämä ilmenee siten, että potentiaalienergian kuvaaja on paikan funktiona laskeva käyrä, jossa derivaatan negativisuus näkyy negatiivisena tangentin kulmakertoimena. Vastaavalla päättelyllä derivaatta on *positiivinen* jos potentiaalienergia pienenee *negatiiviseen x -suuntaan* siirryttäässä, ja tällöin potentiaalienergian kuvaaja on nouseva käyrä.



3.11 Miten edellä tarkastellun painovoimakentässä liikkuvan kappaleen potentiaalienergia muuttuu ajan kuluessa, jos kappaleen nopeus on 0.5 m/s alas päin? Mitkä ovat tällöin derivaattojen dU/dt ja dU/dx etumerkit? Miten suureiden etumerkit muuttuvat, jos positiivinen x -suunta valitaankin alas päin?

Tarkastellaan sitten kuinka kappaleen liike-energia muuttuu. Kun massa on vakio, liike-energian muutos riippuu vain kappaleen nopeuden neliön muutoksesta,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d(v_x^2)}{dt}. \quad (3.17)$$

Tässä esiintyvän nopeuden neliön derivaatan laskeminen onnistuu käyttäen yhdistetyn funktion derivaatan laskusääntöä $\frac{d}{dt}[f(g(t))] = f'(g(t))g'(t)$. Nimittäin valitsemalla ulkopuunkioksi potenssin $f(g) = g^2$ ja sisäfunktioksi nopeuden $g(t) = v_x$ saamme yhdistetyksi funktioksi nopeuden neliön, $f(g(t)) = v_x^2$, ja derivaatoiksi $f'(g) = 2g$ sekä $g'(t) = \frac{dv_x}{dt}$. Niinpä laskussa tarvittava nopeuden neliön aikaderivaatta on

$$\frac{d(v_x^2)}{dt} = \frac{d}{dt}[f(g(t))] = 2v_x \frac{dv_x}{dt} \quad (3.18)$$

ja tämän perusteella liike-energian aikaderivaataksi saadaan

$$\frac{dK}{dt} = mv_x \frac{dv_x}{dt} = mv_x a_x. \quad (3.19)$$

Toisin sanoen koska liike-energia riippuu nopeuden neliöstä, sen muuttuminen ajan funktiona riippuu sekä kappaleen nopeudesta v_x että sen *kiihtyvydestä a_x* .



3.12 Kappale, jonka massa on 1.000 kg, liikkuu nopeudella 3.000 m/s positiiviseen x -suuntaan. Kappaleen kiihtyvyys on vakio 0.500 m/s^2 negatiiviseen x -suuntaan. (a) Mikä on kappaleen liike-energian muutos 0.010 s aikana? (b) Mikä on liike-energian ja ajan muutoksen suhde $\Delta K/\Delta t$? (c) Onko tulos sopusoinnissa yhtälön (3.19) kanssa?

Tarkastellaan sitten *kokonaisenergian* muuttumista sellaisessa systeemissä, johon tarkasteltava kappale sisältyy. Energian säilymislain yhteydessä opimme, että jos systeemissä vaikuttaa *ainoastaan konservatiivisia vuorovaikutuksia*, joiden yhteenlaskettu potentiaalienergia $U(x)$ riippuu tarkasteltavan kappaleen paikasta x , systeemin mekaaninen *energia on vakio*. Tämä tarkoittaa sitä, että mekaaninen energia *ei muutu ajan kuluessa* eli sen derivaatta ajan suhteen on nolla,

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0. \quad (3.20)$$

Nyt sijoittamalla täähän edellä johdetut potentiaalienergian ja lüke-energian derivaatat (3.16) ja (3.19) saadaan

$$mv_x a_x + v_x \frac{dU}{dx} = 0, \quad (3.21)$$

ja supistamalla tästä pois nopeus v_x sekä siirtämällä potentiaalitermi yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle

$$ma_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.22)$$

Mutta dynamiikan peruslain (3.5) mukaisesti massan ja kiihtyvyyden tulo on sama kuin kappaleeseen kohdistuva *kokonaivoima*. Niinpä olemme päättelleet seuraavan tuloksen: jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman x -skalaarikomponentti on sama kuin systeemin potentiaalienergian x -derivaatan vastaluku. Erityisesti jokaisen konservatiivisen vuorovaikutuksen voima saadaan derivoimalla kyseisen vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa,

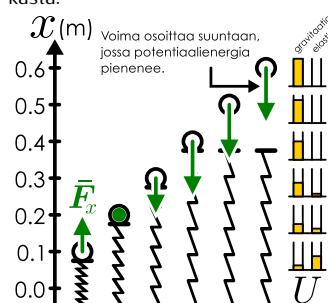
$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (3.23)$$

Voima on siis verrannollinen potentiaalienergian derivaatan vastalukun ja tämä derivaatta kuvailee potentiaalienergian muuttumista *siirrytäessä* (paikan funktiona). Derivaatan ollessa itseisarvoltaan suuri energia muuttuu paljon lyhyellä matkalla ja voima on suuri. Vastaavasti jos potentiaalienergia on vakio, derivaatta ja samoin voima on nolla. Jos derivaatta on positiivinen, miinusmerkistä johtuen voima on negatiivinen eli se osoittaa kohti negatiivista x -suuntaa — siis pieneneväntä potentiaalienergian suuntaan — ja päinvastoin jos derivaatta on negatiivinen. Toisin sanoen, jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivinen vuorovaiketus, jonka potentiaalienergia riippuu vain x -koordinaatista, tämä vuorovaiketus kohdistaa kappaleeseen *voiman, joka osoittaa pieneneväntä potentiaalienergian suuntaan ja on sitä suurempi mitä nopeammin potentiaalienergia muuttuu*.

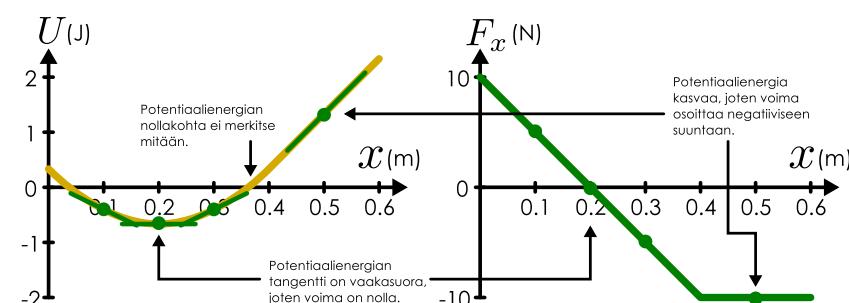
Vaikka edellä tehtyjä päätelmiä havainnollistettiin gravaation ja jousen avulla, tulos ei riippunut mitenkään siitä, millainen funktio potentiaalienergia $U(x)$ on. Niinpä kappaleet käyttäytyvät täähän tapaan kokies-saan *minkä tahansa* konservatiivisen vuorovaikutuksen. Potentiaalienergiafunktiot voivat olla joskus hyvin monimutkaisia, mutta kappaleisiin vaikuttavat voimat vetävät niitä aina kohti pieneneväntä potentiaalienergiaa. Kappaleet siis käyttäytyvät samaan tapaan kuin mäkeen asetettu pallo, joka pyrkii vierimään kohti kuopan pohjaa, jossa sen potentiaalienergia minimoituu. Itse asiassa analogia minkä tahansa potentiaalienergian ja mäen välillä on nijn hyvä, että fyysikot yleisesti kutsuvat potentiaalienergiafunktion minimejä *potentiaali-kuopiksi* tai *-kaivoiksi*, vaikkei tarkasteltavana olisikaan gravaatiovuorovaiketus eikä kappaleen korkeudella olisi asian kanssa mitään tekemistä.

Kuva 3.14: Vuorovaikutuksen potentiaalienergian ja voiman välinen yhteyks kuvajin esitetynä. Voima osoittaa kohti pieneneväntä potentiaalienergian suuntaa ja sen suuruus on verrannollinen potentiaalienergian kuvajan tangentin kulmakertoimeen.

(a) Voima ja energia riippuvat paikasta.



(b) Potentiaalienergian ja voiman kuvajat.



Kuvassa 3.14 on piirretty potentiaalienergia ja sitä vastaava voima paikan funktiona systeemissä, joka on samanlainen kuin esimerkissä 2.5: pystysuorassa liikkuvan kappaleen alla on jousi. Kappaleen ollessa jousta korkeammalla siihen vaikuttaa vain gravitaatio ja potentiaalienergian kuvaaja on suora. Liikkuessaan alas-päin kappale puristaa jousta, jolloin jouseen varastoituu elastista potentiaalienergiaa ja potentiaalienergian kuvaaja on paraabeli. Kun potentiaalienergia kasvaa ylöspäin siirryttääessä, positiiviseen x -suuntaan, voima osoittaa alas-päin eli voiman x -komponentti on negatiivinen. Jousen puristuessa potentiaalienergia saavuttaa *minimin*, jolloin voima on *nolla*. Tätä alempana potentiaalienergia kasvaa alas-päin siirryttääessä ja voima osoittaa ylöspäin, positiiviseen x -suuntaan. Potentiaalienergian minimi on kappaleen *tasapainopiste*, sillä tässä pisteessä kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla.

Kuvassa 3.14 esitettyssä tilanteessa kappale on tasapainossa pisteessä $x = 0.2$ m, jolloin gravitaation ja jousen siihen kohdistamat voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Voiman x -komponentin kuvaaja leikkää tällöin x -akselin, koska voima on nolla. Tällöin potentiaalienergian kuvaajan tangentti on *vaakasuora* joten tasapainopiste on siis potentiaalienergian kuvaajan minimikohdassa. Tämä on vakaa tasapainotila, koska jos kappaletta siirretään alas-päin, jousivoima kasvaa suuremmaksi kuin painovoima ja se pyrkii työtämään kappaleen takaisin ylöspäin. Vastaavasti jos kappaletta siirretään ylöspäin, jousivoima pienenee ja painovoima pyrkii vetämään kappaleen takaisin alas-päin. Voimat pyrkivät siis tuomaan kappaleen takaisin tasapainoasemaan (vrt. pallo kuopassa). Aivan samalla tavalla vaakasuora potentiaalienergian kuvaaja esittää epämääriästä tasapainotilaan (vrt. pallo vaakasuoralla tasolla) ja potentiaalienergian maksimi on epävakaa tasapainotila (vrt. pallo mäen huipulla).



3.13 Miksi kuvassa 3.14 voiman kuvaaja muuttuu laskevasta suorasta vaakasuoraksi? Miten kappaleen kohemat vuorovaikutukset liittyvät tähän? Miten tämä ilmenee potentiaalienergian kuvaajassa?

Kirjoitetaan vielä edelliset päättelyt matemaattiseen muotoon. Vapaasti putoava kappale on yhtälön (1.27) mukaisesti tasaisesti kiihyvässä liikkeessä putoamiskiihyvyydyllä $\ddot{a} = \ddot{g} = -g\hat{i}$, jos positiivinen x -suunta valitaan ylöspäin. Newtonin toisen lain (3.3) mukaisesti siihen täytyy silloin vaikuttaa kokonaisvoima

$$F_x = ma_x = -mg, \quad (3.24)$$

joka vapaassa pudotuksessa johtuu ainostaan painovoimasta eli gravitaatiosta. Toisin sanoen kappaleeseen kohdistuvan painovoiman suuruus on suoraan verrannollinen putoamiskiihyvyyteen sekä kappaleen massaan. Koska putoamiskiihyvyys osoittaa alas-päin, myös painovoima osoittaa aina alas-päin.

Voima voidaan päättelä myös potentiaalienergiasta. Painovoiman potentiaalienergiahan on $U = mgx$, kun x -suunta valitaan ylöspäin, joten tähän vuorovaikutukseen liittyvän voiman on oltava yhtälön (3.23) mukaan

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -mg. \quad (3.25)$$

Saatiin siis sama tulos kuin putoamiskiihyyden kautta pääteltiin, kuten tietysti pitikin. Gravitaatiovoimaa merkitään usein isolla "G"-kirjaimella eli symbolilla \bar{G} .



3.14 Gravitaation potentiaalienergian arvo riippuu siiitä, minkä suhtein korkeutta mitataan eli tässä x -koordinaatin nollakohdasta. Gravitaatiovoiman suuruus ei kuitenkaan riipu nollakohdasta. Miten toinen suureista voi riippua nollakohdasta ja toinen ei?

Tarkastellaan sitten jousen tuottamaa voimaa. Luvussa 2 todettiin, että elastista potentiaalienergiaa voidaan kuvata melko hyvällä tarkkuudella mallilla $U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$, (2.20). Potentiaalienergian lausekkeessa x_0 on piste, jossa energia on minimissään, ja $x - x_0$ on etäisyys tästä pisteestä. Esimerkiksi jousen tapauksessa x_0 on jousen luonnollinen pituus ja $x - x_0$ on jousen venymä. Tällaista potentiaalienergiaa vastaa voima

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_0). \quad (3.26)$$

Voima on siis suoraan verrannollinen venymään ja verrannollisuuskerroin on jousivakio k . Tämä tulos tunne-taan **Hookeen laki**.

Muotoa (3.26) olevaa voimaa, joka on suoraan verrannollinen poikkeamaan tasapainopisteestä, kutsutaan yleisesti *harmoniseksi voimaksi*. Jos potentiaalienergian minimipisteestä poiketaan negatiiviseen x -suuntaan, poikkeama $x - x_0$ on negatiivinen, ja voima osoittaa positiiviseen suuntaan, koska lausekkeessa (3.26) on miinusmerkki. Vastaavasti jos poikkeama on positiiviseen suuntaan, voima osoittaa negatiiviseen suuntaan. Toisin sanoen *voima osoittaa aina kohti potentiaalienergian minimiä eli tasapainopistettä*. Tämän ominaisuuden vuoksi harmoninen potentiaali on hyvä malli lähes kaikille *vakaille tasapainopisteille*: jos kappaletta siirretään pois tasapainopisteestään eli potentiaalienergian minimistä, siihen vaikuttaa aina voima, joka pyrkii siirtämään kappaleen takaisin tasapainoon. Jos siirtymä on kyllin pieni, voimaa voidaan yleensä approksimoida harmonisen voiman lausekkeella (3.26).

Huomaat, että jousen tapauksessa yhtälö (3.26) kuvaaa voimaa, jonka *jousi kohdistaa sitä venytävään tai puristavaan kappaleeseen*. Jos esimerkiksi pystysuoran jousen pääällä on kappale, jousi puristuu ja kohdistaa kappaleeseen ylöspäin osoittavan voiman. Kappale puolestaan kohdistaa vastavoiman lain mukaisesti jouseen alas päin osoittavan voiman, joka puristaa joustaa kasaan. Nämä voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen, jotka jouseen kohdistuvaa voimaa kuvaavat muuten sama lauseke (3.26) mutta ilman miinusmerkkiä.

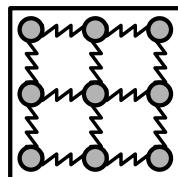


3.15 Kirjoita omia sanoin tiivistelmä konservatiivisista voimista. Selitä erityisesti, miten voima ja potentiaalienergia liittyvät toisiinsa ja millainen voima ja energia gravitaatiolla ja jousilla on.

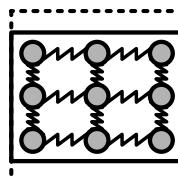
Jännitysvoimat

Kuva 3.15: Elastisuus johtuu itsestään palautuvista muutoksista atomien paikoissa.

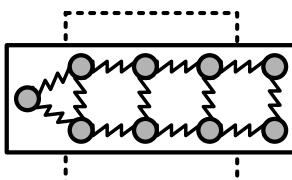
(a) Alkuperäinen muoto.



(b) Elastinen muodonmuutos.



(c) Plastinen muodonmuutos.



Kun poikkeamat tasapainosta ovat tarpeeksi pieniä, palauttava voima on useimmissa todellisissa tasapainoilmiöissä suoraan verrannollinen poikkeamaan kuten Hooken laissa. Tämä ei kuitenkaan enää päde jos poikkeamat ovat hyvin suuria — esimerkiksi jos jouta venytetään hyvin paljon se voi suoristua eikä enää toimi jousena. Näin käy siksi, että materiaalia muokkaavan voiman ollessa heikko materiaaleissa tapahtuu pieniä muodonmuutoksia, jotka pyrkivät palautumaan itsestään. Hyvin suuret voimat voivat kuitenkin aiheuttaa pysyviä muodonmuutoksia, jolloin jousi ei enää palaakaan alkuperäiseen muotoonsa. Voimia, jotka pyrkivät yhdessä muuttamaan kappaleen muotoa venytämällä tai puristamalla, kutsutaan **jännityksiä**. Jännitysvoimille käytetään usein symbolia \bar{T} (englanninkielisen termin 'tension' mukaan).

Ilmiön tarkka selitys vaatii melko syvälistää ymmärrystä aineen mikroskooppisesta rakenteesta, mutta oleellisesti kyse on siitä, että kiinteissä aineissa atomit ovat järjestätyneet säännöllisesti rakenteisiin ja kappaleiden muodonmuutokset vaativat tämän rakenteen muuttamista kuten kuvassa 3.15. Jännityksen ollessa kyllin pieni atomit siirtyvät hieman lähemäksi toisiaan tai kauemmaksi toisistaan, mutta aineen rakenne ei muutu. Niinpä atomien väliset vuorovaikutukset pyrkivät vetämään atomit takaisin alkuperäisille paikoilleen. Kuitenkin jos jännitys on tarpeeksi voimakas, atomien väliset sidokset voivat rikkoutua ja aineen rakenne muuttuu. Hauraan materiaalin tapauksessa tämä voi johtaa kappaleen hajoamiseen osiin, mutta on myös mahdollista, että atomit liittyvät välittömästi uusiin sidoksiin muodostaen uuden, *erilaisen rakenteen*. Tällöin materiaali ei rikkoudu mutta kappaleen muoto muuttuu. Koska samat atomit eivät ole enää sitoutuneet toisiinsa samoin kuin aikaisemmin, tällainen muodonmuutos ei palaudu itsestään.



3.16 Miten kuvan 3.14 potentiaalienergian ja voiman kuvajat muuttuvat, jos jousivakio k kasvaa? Miten jousen jäykkyys tällöin muuttuu? Millainen voiman kuvaja saadaan, jos jouta venytetään hyvin paljon?

Itsestään palautuvia aineen muodonmuutoksia, joita Hooken laki kuvailee yleensä hyvin, kutsutaan **elastisiksi** ja tälläisissä tapauksissa vaikuttavaa jousivoimaa *elastiseksi voimaksi*. Pysyviä muodonmuutoksia puolestaan kutsutaan **plastisiksi**. Elastisen muodonmuutokset ovat reversiibeileitä prosesseja ja niihin sitoutunut potentiaalienergia vapautuu lähes täydellisesti kappaleen palatessa alkuperäiseen muotoonsa. Plastiset muodonmuutokset puolestaan ovat irreversiibeileitä ja niissä osa muodonmuutokseen tarvitusta energiasta väistämättä muuttuu epäjärjestyneeseen muotoon, pääasiassa lämpöenergiaksi.

Elastisuutta ja plastisuutta esiintyy kaikissa aineissa ja riippuu materiaalista, kuinka pienillä voimilla kappaleet ovat vielä elastisia. Esimerkiksi kuminauha on erittäin elastinen kun taas muovailuvalha on erittäin plastinen kappale. Monet kovat materiaalit kuten metallit ovat elastisia vaikka niitä puristettaisiin tai venytettäisiin melko suurellakin voimalla, koska niissä tapahtuvat muodonmuutokset ovat tavallisesti pienet. Vaikka siis kaikki kappaleet muuttavat jännitettyinä jonkin verran muotoaan, voidaan kovista materiaaleista tehtyjä kappaleita usein pitää likimain **jäykkinä** eli muotonsa säilyttävinä.



3.17 Miksi teräsjousen muotoa on helppo muuttaa vaikka samasta teräksestä valmistettu tanko on hyvin jäykkiä?

Köydet, langat ja ketjut eivät ole jäykkiä puristettaessa, koska niiden rakenne sallii laskostumisen. Nekin kuitenkin vastustavat *venytystä*, ja usein yksinkertaisin tapa kuvata jännitettyä köyttä on olettaa, ettei sen

pituus muutu, vaikka sen päistä vedettäisiin. Köyden pituuden vakioisuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos köyden yksi pää siirtyy tietyn matkan, myös köyden toinen pää siirtyy yhtä pitkän matkan. Esimerkiksi jos köysi yhdistää kaksi kappaletta toisiinsa ja köysi pysyy jännitettyinä, kappaleiden siirtymien täytyy aina olla yhtä pitkät. Tämä tarkoittaa samalla sitä, että myös kappaleiden nopeuksien ja kiihtyvyysien täytyy olla yhtä suuret.

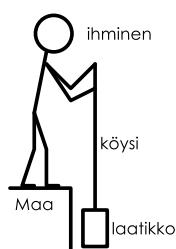
Lisäksi koska köyden massa on usein huomattavasti pienempi kuin muiden tarkasteltavien kappaleiden, *massaton köysi* on hyvin yleisesti käytetty malli. Tarkastellaan tämän mallin merkitystä kuvan 3.16 esimerkin kautta, jossa laatikkoa nostetaan köydellä. Nostaja kohdistaa köyden yläpähän voiman, joka vetää köyttä ylöspäin. Tämän vastavoima vetää *nostajaa* alaspäin. Köysi kohdistaa voiman myös *laatikkoon*, ja tämä voima vetää laatikkoa ylöspäin. Tämän vastavoima vetää köyttä alaspäin. Sekä köyteen että laatikkoon vaikuttaa lisäksi painovoima alaspäin.

Köyden ja laatikon roikkuessa paikoillaan niihin kumpaankin kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava nolla. Köyden laatikkoon kohdistaman voiman täytyy siis olla yhtä suuri kuin laatikon painovoima. Nostajan köyteen kohdistaman voiman puolestaan täytyy olla yhtä suuri kuin köyden painovoiman ja laatikon köyteen kohdistaman voiman summa. Jos köyden massa on pieni, köyden painovoima voidaan jättää huomioimatta ja tällöin *nostajan* köyteen kohdistaman voiman täytyy olla yhtä suuri kuin *laatikon* köyteen kohdistama voima.

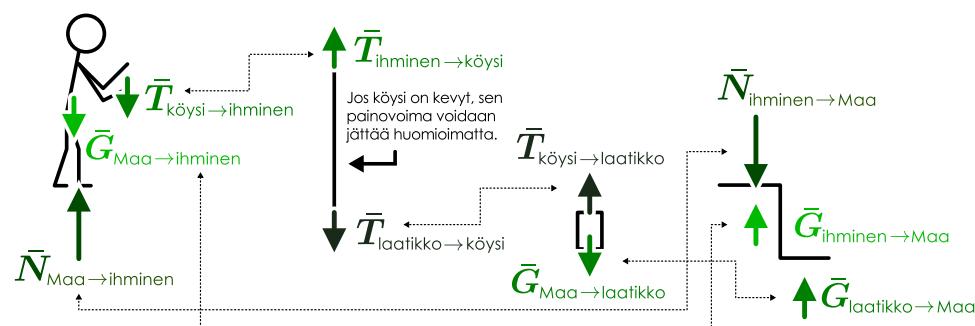
Jos nostaja kohdistaa köyteen *suuremman* voiman kuin laatikkoon kohdistuva painovoima, köysi ja laatikko saavat kiihtyvyden ylöspäin ja alkavat nousta. Köyden venymättömyys tarkoittaa tässä sitä, että laatikko nousee ylöspäin yhtä paljon kuin nostaja saa vedettyä köyttä ja sekä köysi että laatikko nousevat yhtä nopeasti. Erityisesti niillä on tällöin myös yhtä suuret kiihtyvyydet. Kuitenkin koska laatikon massa on paljon suurempi kuin köyden, laatikkoon kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava paljon suurempi kuin köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman. Jos köyden massa on esimerkiksi yksi sadasosa laatikon massasta, köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava yksi sadasosa laatikkoon kohdistuvasta kokonaisvoimasta. Jos köyden massaa pidetään mitättömänä, köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman on oltava likimain *nolla* riippumatta köyden kiihtyvyydestä. Niinpä tässäkin tapauksessa köysi kohdistaa laatikkoon yhtä suuren voiman kuin millä nostaja vetää köyttä. Tällaisissa tapauksissa sanotaankin, että köysi *välittää* nostajan voiman laatikkoon.

Kuva 3.16: Massaton köysi välittää siihen kohdistuvat voimat. Tämä tarkoittaa sitä, että jos köyttä vedetään sen päistä, köysi kohdistaa sitä vetäviin kappaleisiin yhtä suuret voimat.

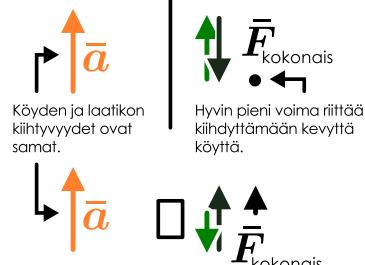
(a) Ihminen nostaa laatikkoa köydellä.



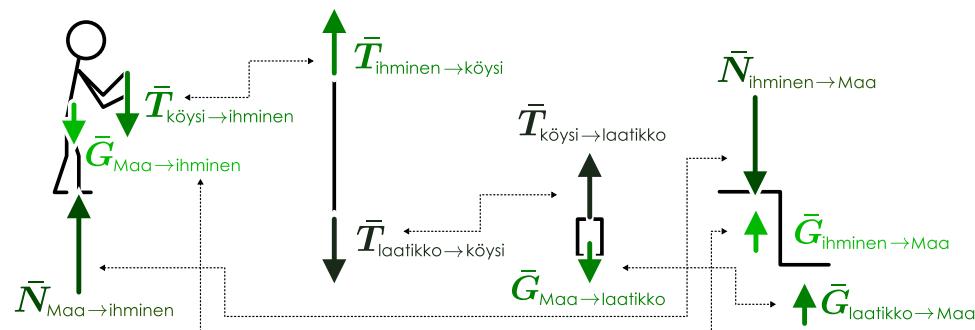
(b) Vapaakkappalekuvat laatikon ja köyden ollessa tasapainossa. Köyden pähin kohdistuvat jännytysvoimat ovat yhtä suuret, jos köyden painovoimaa ei huomioida.



(c) Jos laatikolla on kiihtyvyyttä, myös köydellä on.



(d) Vapaakkappalekuvat laatikon ja köyden ollessa kiihyvässä liikkeessä ylöspäin. Köyden pähin kohdistuvat jännytysvoimat ovat nytkin yhtä suuret.





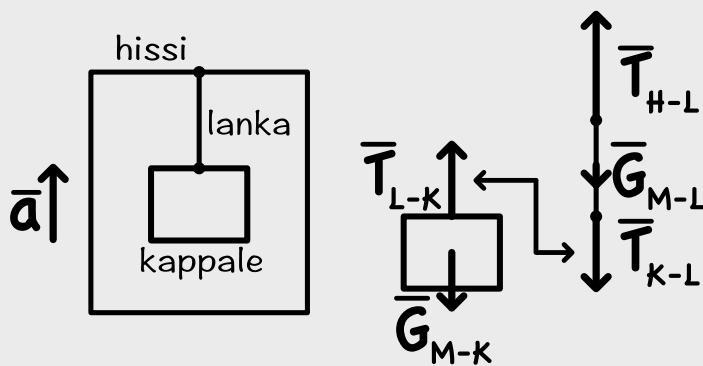
3.18 Kuinka suuret voimat kohdistuvat edellä kuvatun esimerkin köyteen, jos köyttä vetää ylöspäin yksi nostaja köyden päästä ja toinen köyden keskikohdasta?

esimerkki 3.1

Jännitysvoima

Kappale (massa M) roikkuu langan varassa (massa m) hissin katosta. (a) Millaiset voimat kohdistuvat kappaleeseen ja lankaan kun hissi lähtee ylöspäin kiihtyvyydellä a_x ? (b) Mitä voimista voidaan päätellä, jos lanka on hyvin paljon kevyempi kuin kappale?

TILANNE Merkitään langan kappaleeseen kohdistamaa voimaa $\bar{T}_{L \rightarrow K}$, kappaleen lankaan kohdistamaa voimaa $\bar{T}_{K \rightarrow L}$ ja hissin lankaan kohdistamaa voimaa $\bar{T}_{H \rightarrow L}$. Langan kappaleeseen kohdistama voima ja kappaleen lankaan kohdistama voima ovat voima-vastavoimapari. Hisin lankaan kohdistaman voiman vastavoima on langan hissiin kohdistama voima. Kappaleeseen vaikuttaa myös maan painovoima $\bar{G}_{M \rightarrow K}$ ja lankaan $\bar{G}_{M \rightarrow L}$. Näiden vastavoimien kohdistuvat maapalloon. Valitaan positiivinen x -suunta ylöspäin.



RATKAISU (a) Kappaleeseen kohdistuu painovoima $G_{x,M \rightarrow K} = -Mg$ sekä langan kiinnityskohdassa vaikuttava kosketusvoima $T_{x,L \rightarrow K}$, jotka ovat vastakkaisuuntiset. Kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima antaa kappaleelle kiihtywyden, joten

$$F_{x,K,\text{kokonaist}} = T_{x,L \rightarrow K} + G_{x,M \rightarrow K} = Ma_x \quad (3.27)$$

ja siis jännitysvoiman täytyy olla

$$T_{x,L \rightarrow K} = Ma_x - G_{x,M \rightarrow K} = M(a_x + g). \quad (3.28)$$

Lankaan kohdistuu kappaleen kosketusvoima $T_{x,K \rightarrow L} = -T_{x,L \rightarrow K} = -M(a_x + g)$, hissin kosketusvoima $T_{x,H \rightarrow L}$ ja painovoima $G_{x,M \rightarrow L} = -mg$. Näiden summa on lankaan kohdistuva kokonaivoima, joka antaa langalle kiihtywyden, joten kappaleelle kiihtywyden, joten

$$F_{x,L,\text{kokonaist}} = T_{x,H \rightarrow L} + T_{x,K \rightarrow L} + G_{x,M \rightarrow L} = ma_x \quad (3.29)$$

ja jännitysvoima langan yläpäässä on siis

$$T_{x,H \rightarrow L} = ma_x - T_{x,K \rightarrow L} - G_{x,M \rightarrow L} = (M+m)(a_x + g). \quad (3.30)$$

(b) Langan yläpähän kohdistuu suurempi jännitysvoima kuin alapähän, koska alapähän kohdistuva voima oleellisesti vetää ylöspäin vain roikkuva kappaletta, mutta yläpähän kohdistuvan voiman täytyy vetää myös lankaa itseään. Näiden voimien suhde on

$$\frac{T_{x,H \rightarrow L}}{T_{x,L \rightarrow K}} = 1 + \frac{m}{M}. \quad (3.31)$$

Sen, että langan massa on hyvin pieni, voi matemaattisesti kuvata raja-arvona $m/M \rightarrow 0$, ja tällä rajalla langan pähin kohdistuvien jännitysvoimien suhteeksi saadaan $T_{x,H \rightarrow L}/T_{x,L \rightarrow K} \rightarrow 1$. Jos langan massa on siis pieni, jännitysvoima on langan kummassakin päässä yhtä suuri. Tähän tulokseen perustuu massattoman langan malli.

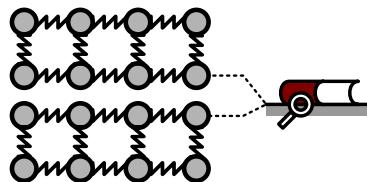
Kosketus- eli normaalivoima

Jäykät kappaleet eivät kulje toistensa läpi, minkä vuoksi esimerkiksi maan pinta kannattelee sinua ja voit ottaa esineitä käsiisi. Syg tähän pihleet jälleen aineen mikroskooppisessa rakenteessa (kuva 3.17). Kiinteiden aineiden mikroskooppisen rakenteen rikkominen vaatii paljon energiota, eikä edes suuren rakennuksen paino riittää hajottamaan rakennusta kannattelevan maaperän atomirakennetta. Lisäksi vaikka atomit voivat muodostaa sidoksia ja vetää toisiaan puoleensa, hyvin lähelle toisiaan puristetut atomit hylkivät toisiaan. Niinpä yhteen puristettujen kappaleiden pintojen atomien väliset vuorovaikutukset estävät kappaleita kulkemasta toistensa läpi.

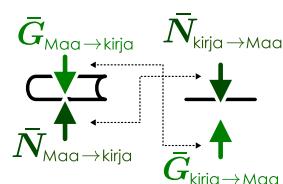
Tarkastellaan esimerkiksi maassa olevaa kirjaa. Kirjaan kohdistuu painovoima, joka pyrkii vetämään kirja kohti maata. Kirja ei kuitenkaan pääse liikkumaan, koska sen tiellä on maapinta. "Tiellä oleminen" ei ole kuitenkaan fysikaalinen vuorovaikutus, vaan pinnan täytyy kohdistaa kirjaan voima, joka kumoaa painovoiman kirja alaspäin vetävän vaikutuksen.

Kuva 3.17: Kosketusvoima syntyy pintojen puristuessa toisiaan vasten.

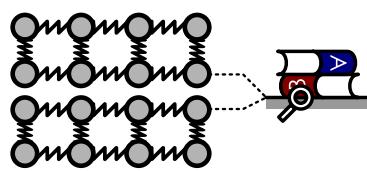
(a) Kirjan paino puristaa pintoja yhteen.



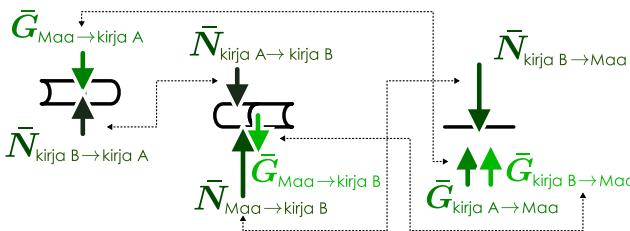
(b) Vapaakappalekuva.



(c) Kaksinkertainen paino puristaa pintoja kovemmin.



(d) Vapaakappalekuva.



sen normaalivoiman on oltava täsmälleen yhtä suuri kuin muiden kirjaan kohdistuvien alaspäin osoittavien voimien summa, jotta kirjaan kohdistuva kokonaisvoima olisi nolla.

Jos maassa on vain yksi kirja, kirjan ja maanpinnan välinen normaalivoima on voimakkuudeltaan yhtä suuri kuin kirjaan kohdistuva painovoima. Jos kirjoja on kaksi päällekkäin kuten kuvassa 3.17 (d), ylempi kirja (kuvassa A) painaa alempaa (kuvassa B) yhtä suurella kosketusvoimalla kuin kirjaan A kohdistuva painovoima. Alempi kirja B puolestaan painaa maapintaa kosketusvoimalla, joka on voimakkuudeltaan yhtä suuri kuin kirjan B painovoima ja kirjan A siihen kohdistama kosketusvoima *yhteensä*. Toisin sanoen mitä suurempi kirjapino kootaan, sitä suuremmalla kosketusvoimalla maapinnan täytyy pinoa kannatella ja sitä suuremmalla kosketusvoimalla pino painaa maata. Tämä on helppo havaita itsekin pitämällä kirjoja käessä: suurta kirjapinoa on raskas kannatella, koska se vaatii suuremman pystysuuntaisen kosketusvoiman kuin vain yhden kirjan pitely paikoillaan.

3.19 Kuinka suuri normaalivoima seuraavissa tilanteissa kohdistuu kappaleeseen, jonka massa on 1.0 kg?

- (a) Kappale on paikoillaan olevan hissin lattialla. (b) Kappale on ylöspäin kiihtyvyydyllä 1.0 m/s^2 nousevan hissin lattialla. (c) Kappale on ylöspäin tasaisella nopeudella 2.0 m/s nousevan hissin lattialla. (d) Kappale on alaspäin kiihtyvyydyllä 3.0 m/s^2 laskeutuvan hissin lattialla.

Kitka

Myös kitka on kosketusvoima, mutta normaalivoimasta poiketen kitka vaikuttaa koskettavien pintojen suuntaiseksi. Luvussa 2 tarkastelimme jo kitkaa esimerkkinä dissipatiivisesta vuorovaikutuksesta, joka syntyy kappaleiden pintojen tarttuessa mikroskooppisella tasolla toisiinsa kiinni. Tällöin tarkastelimme liukuvien kappaleiden välistä **liikekitkaa**. Kuitenkin myös toistensa suhteeseen paikoillaan olevat kappaleet tarttuvat toisiinsa hiukan kiinni, jolloin kyseessä on **lepotitka**.

Kokeellisesti voidaan todeta, että liukekitkan aiheuttama voima osoittaa kappaleiden pintojen liukuessa toistensa suhteeseen aina pinnan suhteellista liikkettä vastaan. Tavallisesti tämä tarkoittaa sitä, että kitka vaikeuttaa kappaleen nopeuteen nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Liukekitkan suuruus puolestaan ei juurikaan

Tämä tapahtuu niin, että kirjan ja maapinnan atomit alkavat *hyliksiä* toisiaan niiden jouluessa liian lähekkäin. Makroskooppisessa mittakaavassa tämä hylikiminen ilmenee vuorovaikutuksena, joka kohdistaa kirjaan voiman ylöspäin (maapinta kannattee kirja) sekä maahan voiman alasäin (kirja painaa maata). Nämä ovat vuorovaikutukseen liittyvä voiman ja vastavoiman lain (3.7) kuvamaa voimien pari. Koska kirjaan kohdistuva kosketusvoima ainoastaan estää kirjaan siirtymästä maan sisään, sen suunnan on oltava aina maan ja kirjan kosketuspinta vastaan kohtisuorassa. Kohtisuoria suuntia kutsutaan matematiikassa toistensa normaaleiksi, minkä vuoksi kosketusvoiman toinen nimitys on **normaalivoima** ja sen symbolina käytetään usein kirjainta \bar{N} .

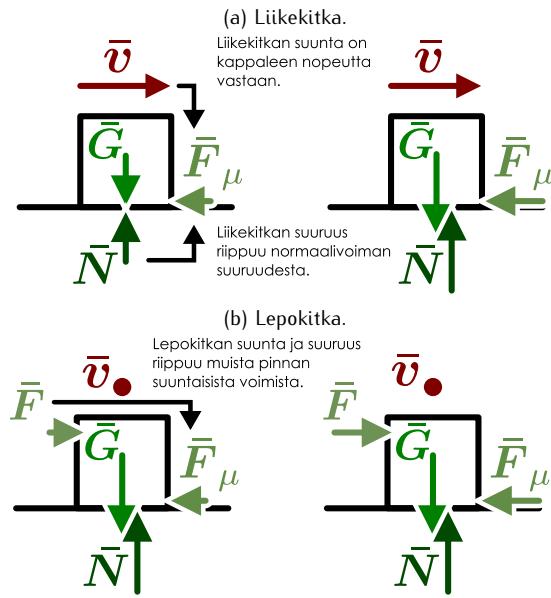
Kosketusvoima on siis *elastinen* vuorovaikuttus aivan kuten jousen tuottama voima niin kauan kuin pinnat eivät rikkoudu. Sekä kirjan että pöydän pinnat joustavat hieman niiden koskettessa, ja vuorovaikutuksen voimakkuus riippuu kirjan täsmällisestä paikasta ja asennosta maapinnan suhteeseen. Kuitenkin koska vuorovaikutus syntyy atomien tasolla, voiman suuruus voi muuttua hyvin voimakkaasti kirjan siirtymessä nanometrienkin matkan. Makroskooppisessa mittakaavassa on siis täysin mahdotonta määrittää normaalivoiman suuruus tarkastelemalla kirjan täsmällistä paikkaa. Sen sijaan normaalivoiman suuruus voi olla päättelävissä siitä, että kappaleet eivät saa liikkua toistensa sisälle. Jos kirja on paikoillaan, kirjan ja maapinnan väli-

riipu kappaledge muodosta eikä liikkeen nopeudesta vaan ainoastaan liikkuvien pintojen laadusta (liukkaudesta) sekä pintojen välisen normaalivoiman suuruudesta N . Pintojen liukkautta kuvaa **liikekitkakerroin** μ , jonka avulla kitkavoiman suuruus voidaan ilmaista muodossa

$$F_{\text{liikekitka}} = \mu N. \quad (3.32)$$

Erityisesti liikekitkan voimakkuus ei riipu pintojen kosketuspinta-alasta. Tämä on hieman yllättävää, mutta kyse on yksinkertaisesti siitä, että vaikka suurempi kosketuspinta-ala lisää kitkavoimaa, se johtaa myös pintoja yhteen puristavan voiman jakautumiseen suuremmalle pinta-alalle. Nämä vaikutukset kumovat toisensa, jolloin lopputuloksena kosketuspinta-ala ei vaikuta kitkavoimaan.

Kuva 3.18: Kitka vaikuttaa koskettavilla pinnoilla.

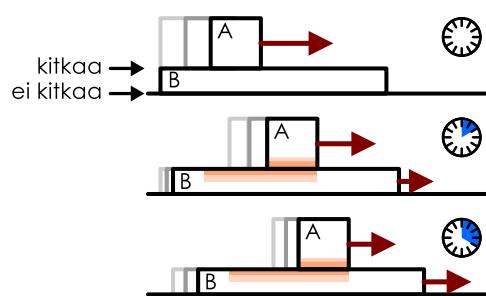


kuitenkaan käytännössä koskaan ole näin suuri vaan tämä on vain voiman *maksimisuuruus* eli raja jolloin kappalet lähevät liukkeelle. Lepokitkan suuruus pitää siis käytännössä päättellä aina epäsuorasti siitä ehdosta, että kappalet eivät liiku toistensa suhteesta aivan kuten normaalivoiman suuruus määräytyy siitä, etteivät kappalet saa kulkea toistensa läpi.

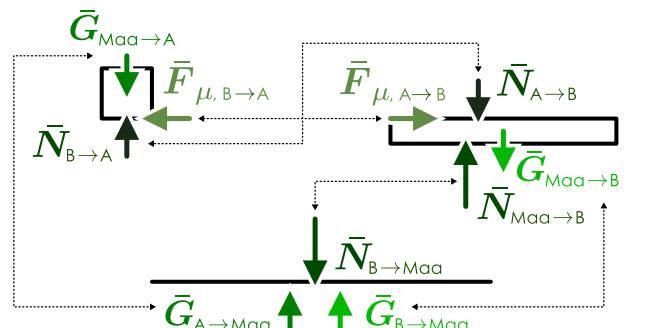
Liikekitkan suunnan päättelyssä on huomioitava, että liikekitka vaikuttaa aina pintojen suhteellista liikettä vastaan. Liikemäärän yhteydessä tarkasteltiin esimerkkiä, jossa kappale (A) liukui toisen kappaleen (B) päällä ja työnsi sen liukuessaan liukkeelle kitkan avulla, kuten kuvassa 3.19. Tässä tapauksessa kappale B lähti liukkeelle kuvassa oikealle, joten myös kappaleen liukkeelle työntänyt kitkavoima osoitti oikealle eli samaan suuntaan kuin mihin kappale lükkui. Oleellista ei olekaan kappaleen nopeus vaan toistensa suhteesta liikkuvien pintojen suhteelliset nopeudet. Koska kappale A liikkui oikealle *nopeammin* kuin kappale B, kappaleen A pinta liikkui kappaleeseen B verrattuna oikelle ja kappaleen B pinta liikkui kappaleeseen A verrattuna

Kuva 3.19: Kitkavoima vastustaa pintojen suhteellista liikettä. Tässä molemmat kappalet lükkivät oikealle, mutta A liikuu oikealle nopeammin kuin B, joten suhteessa A:han B liikkuu vasemmalle.

(a) Liukuva kappale työntää toisen kappaleen liukkeelle.



(b) Vapaakkappalekuvaus: Kappaleisiin A ja B kohdistuvat kitkavoimat ovat vastakkaisuuntaiset.



Myös lepokitka vaikuttaa aina koskettavien pintojen suuntaiseksi, mutta se vaikuttaa vain toisten suhteesta liikkumattomien pintojen välillä ja pyrkii pitämään kappalet paikoillaan toistensa suhteesta. Lepokitka on *elastinen* voima, joka syntyy koskettavien pintojen tarttuessa heikosti yhteen. Kun pintoja yritetään liikuttaa, pintojen väliset heikot sidokset venyvät, mutta eivät vielä katkea, jolloin kappale ei lähde liukkeelle eikä liike-energiaa muutu lämmöksi. Rüttävän suuri ulkoinen voima pystyy kuitenkin rikkomaan pintojen väliset liitokset, jolloin kappalet alkavat liukua toistensa suhteesta ja lepokitka häviää muuttuen liikekitkaksi. *Suurin mahdollinen voima*, jonka lepokitka pystyy tuottamaan, riippuu liikekitkan tavoin pintojen laadusta ja niiden välisestä normaalivoimasta

$$F_{\text{lepokitka}} \leq \mu_{\text{lepo}} N, \quad (3.33)$$

missä μ_{lepo} on **leikitkakerroin**. Lepikitkakerroin on aina hieman *suurempi* kuin liikekitkakerroin, koska paikoillaan olevat pinnat pääsevät tarttumaan toisiinsa voimakkaammin kuin liikkuvat. Lepokitka ei

vasemmalle. Niinpä kappaleeseen A vaikutti kitkavoima vasemmalle ja kappaleeseen B oikealle. Nämä voimat ovat vastavoimapari, joten niiden täytyy osoittaa vastakkaisiin suuntiin, vaikka kyseisessä tapauksessa kummatkin kappaleet liikkuvat kuvassa samaan suuntaan, oikealle.



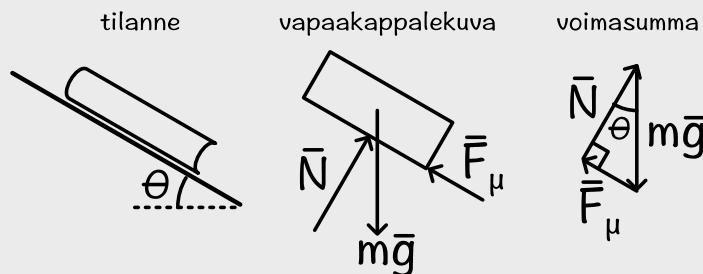
3.20 Millainen voima muuttaa seuraavissa tapauksissa potkulautailijan ja hänen lautansa liikettä? (i) Mikä vuorovaikutus on kyseessä? (ii) Mikä kappale kohdistaa voiman lautailijaan ja lautaan? (iii) Mikä on voiman suunta? (iv) Miten voiman suuruus voitaisiin päättää? (a) Lautailija seisoo toisella jalalla laudallaan ja potkaisee toisella jalallaan maasta vauhtia. (b) Lautailija jarruttaa astumalla laudan takapyyörän pääälle, jolloin pyörä pyörii vähitellen hidastuen.

esimerkki 3.2

Levossa kaltevalla tasolla

Kirja on pöydällä, jota aletaan kallistamaan. Mistä tekijöstä riippuu, kuinka jyrkkään kulmaan pöytälevy voidaan kallistaa ennen kuin kirja alkaa liukua? Valitse jotkin järkevät arvot näille tekijöille ja laske maksimikulma valitsemillasi arvoilla.

TILANNE Piirretään kuva tilanteesta sekä kirjan vapaakkappalekuva. Mahdollisia kirjaan vaikuttavia tekijöitä voisivat olla ainakin kirjan massa m sekä kirjan ja pöydän välinen lepokitakerroin μ_{lepo} . Merkitään pöydän kallistuskulmaa symbolilla θ .



SUUNNITELMA Kirjaan vaikuttaa painovoima $\bar{G} = m\bar{g}$ alas päin. Kirja ei putoa pöydän läpi, koska pöydän pinta kohdistaa kirjaan normaalivoiman \bar{N} . Tämä voima on kohtisuorassa pöydän pintaan vastaan, ja kuviosta nähdään tämän suunnan olevan kulmassa θ pystysuuntaan nähden. Koska kirja pysyy paikoillaan eli on tasapainossa, siihen täytyy vaikuttaa myös pinnan suuntainen lepokitka \bar{F}_μ niin, että kirjaan vaikuttavien voimien summa on nolla.

Lepokitkan suuruus määräytyy tasapainoehdosta mutta kitkavoiman suuruus ei voi kasvaa rajattaa vaan sillä on kitkakertoimesta riippuva maksimiarvo. Pyödän kallistaminen heikentää pinnan tukivoimaa ja samalla kirjan paikoillaan pitämisen vaatii yhä suuremman kitkavoiman. Suurimmalla mahdollisella kallistuskulmalla θ_{\max} kitkavoima saa maksimiarvonsa.

Piirretään voimien vektorisumma vapaakkappalekuvioon merkityjen nuolten perusteella. Koska voimien summan täytyy olla nolla, voimia kuvaavien nuolten pitää muodostaa kolmio. (Asettamalla nuolet peräkkäin täytyy syntyä kuvio, joka palaa alkupisteesensä.) Normaalivoima ja kitkavoima ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, joten kolmio on suorakulmainen. Lisäksi painovoiman ja normaalivoiman välinen kulma on θ , joten kolmion muoto voidaan ratkaista geometrisesti.

Painovoimavektorin pituus on mg . Muiden vektorien pituus saadaan trigonometrialla,

$$N = mg \cos \theta \quad (3.34)$$

sekä

$$F_\mu = mg \sin \theta. \quad (3.35)$$

Kitkavoiman suuruuden maksimi riippuu normaalivoimasta sekä lepokitkakertoimesta

$$F_{\mu,\max} = \mu_{\text{lepo}} N. \quad (3.36)$$

RATKAISU Suurimmalla kallistuskulmalla pätee ehto

$$mg \sin \theta_{\max} = \mu_{\text{lepo}} mg \cos \theta_{\max}. \quad (3.37)$$

Tästä voidaan supistaa painovoima pois ja ratkaista kulma muistamalla trigonometrisen sääntö $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ sekä käantefunktio $\theta = \arctan x \Rightarrow \tan \theta = x$

$$\theta_{\max} = \arctan \mu_{\text{lepo}}. \quad (3.38)$$

Kallistuskulma riippuu siis ainostaan kirjan ja pöydän välisestä lepokitkakertoimesta eikä lainkaan esimerkiksi kirjan massasta. Lepikitkakertoimet vaihtelevat huomattavasti. Esimerkkejä eri materiaalien välisistä kitkakertoimista voi helposti hakea vaikkapa verkosta. Joka tapauksessa pöytien pinnat ovat usein varsin liukkaat, joten järkevä arvo kitkakertoimelle voisi olla esimerkiksi $\mu_{\text{lepo}} = 0.3$. Tällöin kirja lähtee liikkeelle kallistuskulmalla $\theta_{\max} \approx 0.3 \text{ rad} \approx 20^\circ$.

ARVIOINTI Arkustangentti on kasvava funktio, joten mitä suurempi kitkakerroin on, sitä suurempaan kulmaan pöytä voidaan kallistaa, mikä on järkevä tulos. Laskettu kulma on kohtullisen pieni, mutta asiaahan voi myös helposti testata itse laittamalla kirja pöydälle ja kokeilemalla, paljonko pyötää pitää kallistaa, jotta kirja alkaisi liukua.

Kitkakerroin on yksikötön luku, joten se voi olla funtion argumentti. Lisäksi *kulma* on myös yksikötön suure, $[\theta] = \text{rad} = 1$, joten ratkaisulla on oikea yksikkö. Trigonometrisen funktion tulos on nimittäin paljas luku — funktio ei lisää tulokseensa yksikköä. Myöskään *aste* ei ole yksikkö vaan *muuntokerroin*. Täyskulma on nimittäin $360^\circ = 2\pi$, joten aste on

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0.01745 \dots \quad (3.39)$$

esimerkki 3.3

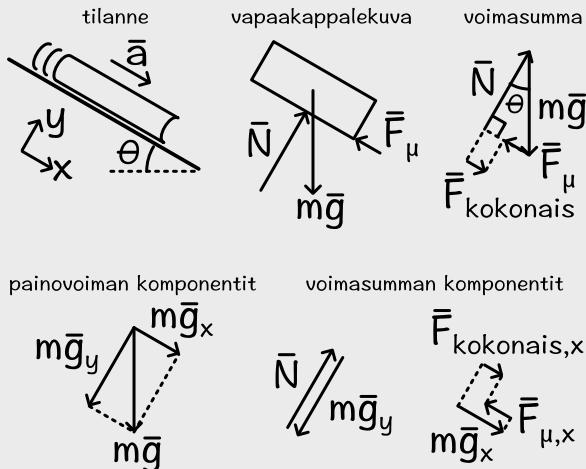
Liikkeellä kaltevalla tasolla

Kirja lähtee levosta liukumaan alas kaltevaan tasoa. Tason kallistuskulma on 36° . Kuinka suuri on kirjan kiilthyvyys, jos kirjan ja pöydän väliset lepo- ja liikekitkakertoimet ovat 0.30 ja 0.20?

TILANNE Piirretään kuva tilanteesta sekä kirjan vapaa-kappalekuva. Tilanne on muuten samankaltainen kuin esimerkissä 3.2, mutta nyt kirja liikkuu. Merkitään kaltevan tason suuntaa x ja tason normaalini suuntaa y .

SUUNNITELMA Kirjaan vaikuttaa painovoima $\bar{G} = m\bar{g}$ ja normaalivoima \bar{N} viistoon ylöspäin. Koska kirja liikkuu, siihen vaikuttaa myös pinnan suuntainen liikekitka \bar{F}_μ .

Normaalivoiman suuruus määräytyy ehdosta, että kirja ei saa liikkua pinnan sisään. Toisin sanoen pintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa voimien summan täytyy olla nolla. Liikekitkan suuruus riippuu normaalivoiman suuruudesta sekä liikekitkakertoimesta μ . Koska kirja lähtee liikkeelle levosta, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nollasta poikkeava. Lisäksi, koska mikään kirjaan kohdistuvista voimista ei riipu kirjan nopeudesta tai paikasta, tämän kokonaisvoiman täytyy olla vakio ja siispä myös kirjan kiilthyvyys on dynamiikan peruslain mukaisesti vakio.



Piirretään voimien vektorisumma vapaakkappalekuvioon merkittujen nuolten perusteella ja jaetaan voimat pinnan suuntaisiin ja kohtisuorien komponentteihin.

Voimien pistaa vasten kohtisuorien komponenttien täytyy summautua nollaksi,

$$\bar{N}_y + m\bar{g}_y = \bar{0}, \quad (3.40)$$

koska kirja liikkuu pinnan suunnassa. Kirjaan vaikuttaa liikekitka (ei lepotikka), joten kitkavoiman suuruus riippuu normaalivoimasta sekä liikekitkakertoimesta

$$F_\mu = \mu N. \quad (3.41)$$

Kokonaisvoima on x -suuntaisten voimien summa

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_{x,\text{kokonais}} = \bar{F}_{\mu,x} + m\bar{g}_x \quad (3.42)$$

ja kiilthyvyys on

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \bar{F}_{\text{kokonais}}. \quad (3.43)$$

RATKAISU

Painovoiman komponenttien pituus voidaan päätellä kuvasta trigonometrisesti. Painovoima osoittaa positiiviseen x -suuntaan ja negatiiviseen y -suuntaan, joten painovoiman skalaarikomponentit ovat

$$mg_x = |m\bar{g}_x| = mg \sin \theta \quad (3.44)$$

$$mg_y = -|m\bar{g}_y| = -mg \cos \theta. \quad (3.45)$$

Siispä normaalivoiman suuruuden on oltava

$$N = N_y = -mg_y = mg \cos \theta. \quad (3.46)$$

ja kitkavoiman suuruus on

$$F_\mu = \mu N = \mu mg \cos \theta. \quad (3.47)$$

Kitkavoima osoittaa negatiiviseen x -suuntaan, joten sen skalaarikomponentti on negatiivinen

$$F_{\mu,x} = -|\bar{F}_{\mu,x}| = -\mu mg \cos \theta. \quad (3.48)$$

Kokonaisvoiman osoittaa positiiviseen x -suuntaan ja sen suuruus on

$$F_{\text{kokonais}} = F_{\text{kokonais},x} = mg_x + F_{\mu,x} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta. \quad (3.49)$$

Kappaleen kiilthyvyys osoittaa positiiviseen x -suuntaan ja sen suuruus on

$$a_x = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) = 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot (\sin 36^\circ - 0.20 \cdot \cos 36^\circ) = 4.2 \text{ m/s}^2. \quad (3.50)$$

3.5 Voiman impulssi ja työ

Voiman impulssi

Liikemäärään yhteydessä totesimme, että vuorovaikutus voi muuttaa kappaleen liikemäärää antamalla sille impulssin. Dynamikan peruslain (3.3) mukaan puolestaan voima muuttaa kappaleen liikemäärää ajan kuluessa, joten voiman ja impulssin täytyy kuvata samaa asiaa — vuorovaikutuksen kykyä muuttaa liikemäärää. Suureiden ero on ainostaan se, että impulssi kuvailee vuorovaikutuksen tuottamaa liikemäärään kokonaismuutosta *jollakin aikavälillä* kun taas voima kuvaa vuorovaikutuksen tuottamaa liikemäärään muutosnopeutta *yhdellä ajan hetkellä*.

Dynamikan peruslain mukaisesti kappaleen liikemäärä muuttuu sitä enemmän, mitä suurempi kokonaivoima kappaleeseen kohdistuu ja mitä kauemmin tämä voima kappaleeseen vaikuttaa. Jos kappaleeseen kohdistuu vakiovoima \bar{F} ajan Δt , liikemääränen muutos on $\Delta \bar{p} = \bar{F} \Delta t$. Toisaalta impulssi määriteltiin niin, että se on vuorovaikutuksen tuottama liikemäärään kokonaismuutos, joten vakiovoiman impulssi on siis

$$\bar{I}_{\text{vakiovoima}} = \Delta \bar{p} = \bar{F}_{\text{kokonaist}} \Delta t. \quad (3.51)$$

Skalaarikomponenttien avulla ilmaistuna sama asia on

$$I_{x,\text{vakiovoima}} = \Delta p_x = F_{x,\text{kokonaist}} \Delta t. \quad (3.52)$$

Jos voima ei ole vakio vaa riippuu ajasta, impulssia ei voida laskea voiman ja sen vaikutusajan tulona, mutta pitkäkin aikaväli voidaan jakaa pieniin osiin, joiden aikana voima on likimain vakio kuten kuvassa 3.20 (b). Kullakin lyhyellä aikavälillä Δt) kappale saa tällöin pienisen impulssin

$$I_x \approx F_{x,\text{kokonaist}}(t) \Delta t \quad (3.53)$$

ja kappaleen saama kokonaismimpulssi saadaan laskemalla nämä yhteen

$$I_x \approx F_{x,\text{kokonaist}}(t_0) \Delta t + \dots + F_{x,\text{kokonaist}}(t_{N-1}) \Delta t. \quad (3.54)$$

Ottamalla raja-arvo, kun aikavälien pituus Δt lähestyy nolla tämä approksimaatio tulee tarkaksi ja summaus muuttuu integraaliksi

$$I_x = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokonaist}} dt. \quad (3.55)$$

Impulssi on siis voiman integraali ajan suhtein. Graafisesti impulssin x -skalaarikomponentti saadaan siis määrittämällä voiman x -komponentin *aikakuvaajan* $F_x(t)$ ja aika-akselin rajaama pinta-ala (kuva 3.20 (a)).

Impulssi on vektorisuure, ja äskeisessä analyysissä johdettiin impulssin x -komponentin ja voiman x -komponentin välinen yhteyts. Sama asia voidaan kirjoittaa yleisemmin ja helpommin käyttämällä differentiaaleja ja vektoriteita. Infinitesimaalisen lyhyen ajan dt aikana voima nimittäin antaa kappaleelle impulssin

$$d\bar{I} = d\bar{p} = \bar{F}_{\text{kokonaist}} dt. \quad (3.56)$$

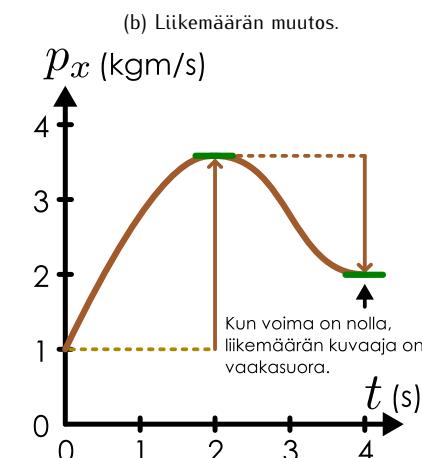
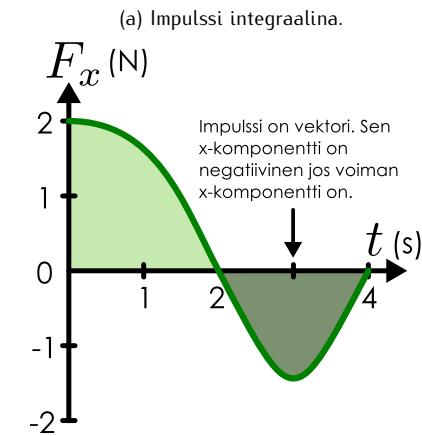
Kokonaismimpulssi saadaan laskemalla nämä pienet impulssit yhteen eli integroimalla

$$\bar{I} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F}_{\text{kokonaist}} dt. \quad (3.57)$$

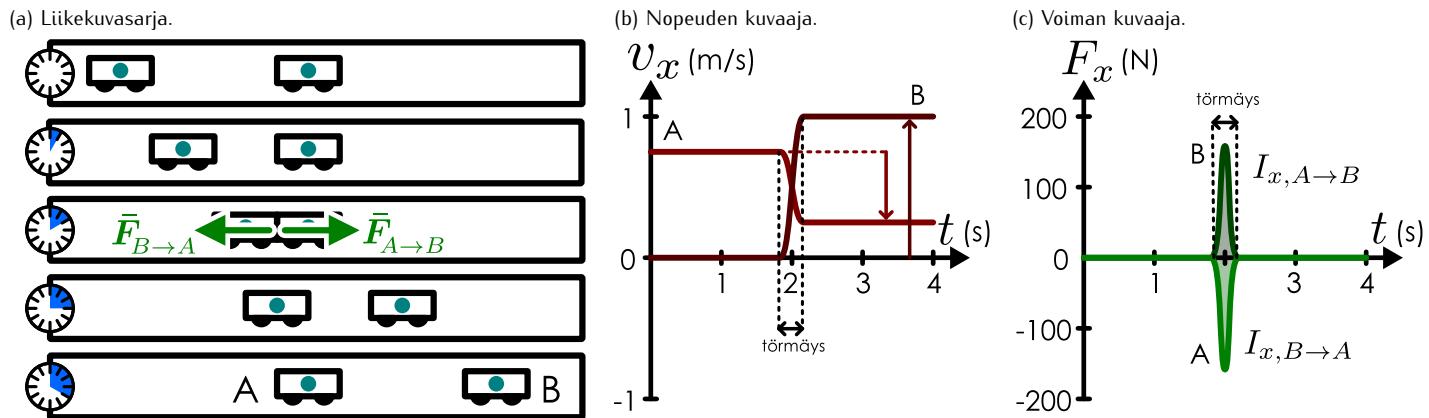
Tämä on impulssin ja voiman välinen yleinen yhteyts, joka yksilöllisessä tapauksessa voidaan kirjoittaa x -skalaarikomponenttien avulla yhtälön (3.55) muotoon.

Luvussa 2 törmäysten tarkastelussa todettiin kappaleiden liikemäärien muuttuvan kappaleiden saamien impulssien takia. Kuvassa 3.21 on esitetty kahden kappaleen törmäys mukaan lukien kappaleisiin vaikuttavien voimien kuvaaja. Kuvan esimerkissä kappaleen A massa on kaksinkertainen kappaleen B massaan nähdien, sillä kappaleen A nopeuden muutos on törmäyksessä vain puolet kappaleen B vastaavasta. Kuitenkin koska systeemin liikemäärä on vakio, kummankin kappaleen liikemääräntä pitää muuttua yhtä paljon mutta vastakkaiseen suuntaan eli kappaleet saavat yhtä suuret impulssit. Kappaleisiin kohdistuvien voimien kuvaajassa

Kuva 3.20: Impulssi on funktion $F(t)$ rajaama pinta-ala.



Kuva 3.21: Kappaleiden välinen vuorovaikutus törmäyksessä. Kappaleisiin vaikuttaa joka hetki yhtä suuri voima ja ne saavat yhtä suuret impulssit. Kappaleen A inertia on kuitenkin kaksinkertainen kappaleeseen B verrattuna.



impulssi on kuvajan ja aika-akselin välisiin jäävä pinta-ala, joka on molemmilla kappaleilla itseisarvoltaan sama mutta vastakkaismerkkinen, koska kappaleisiin kohdistuvilla voimilla on eri etumerkit. Erot kappaleiden nopeuksien muutoksissa ovat seurausta kappaleiden erilaisista inertioista — kappaleiden saamat impulssit ovat yhtä suuret.

Impulssin ja voiman yhteyttä voidaan käyttää myös voiman arvioimiseksi, kun kappaleen saama impulssi tunnetaan. Jos nimitätörmäys kestää ajan Δt ja voiman on tässä ajassa tuotettava x -suuntainen impulssi I_x , voiman suuruuden on oltava keskimäärin $F_x = I_x/\Delta t$ ja koska voima ei käytännössä ole kuitenkaan vakio sen maksimiarvo voi olla tästä selvästi suurempikin. Tästä syystä esimerkiksi kolarit ja korkealta puotoaminen ovat vaarallisia. Liikemääärän *suuri* muutos vaatii suuren impulssin ja liikemääärän *nopea* muutos tarkoittaa impulssin tapahtuvan lyhyessä ajassa. Molemmat ehdot vaativat, että impulssin tuottava voima on suuri. Materiaalien kestäminen tai rikkoutuminen rasituksessa riippuu pääasiassa niihin kohdistuvan voiman suuruudesta (vrt. elastiset ja plastiset muodonmuutokset), joten nopea pysähtyminen suuresta vauhdista on vaaraksi niin esineille kuin elollisille olennollekin.

3.21 Kappale (massa 1.0 kg) on vapaassa pudotuksessa. Valitaan positiivinen suunta alas päin.

- (a) Kuinka suuren impulssin gravitaatio antaa kappaleelle yhden sekunnin aikana?
- (b) Mikä on kappaleen liikemääärän muutos sekunnin aikana, jos alkunopeus on 2.0 m/s ylöspäin?
- (c) Entä jos alkunopeuden suunta on alas päin?

Voiman tekemä työ

Kappaleeseen vaikuttava voima tuottaa impulssin ja muuttaa siten kappaleen liikemääriä, mutta jos kappaleen liikemääri muuttuu, myös kappaleen *liike-energia* muuttuu. Niinpä voima pystyy muuttamaan liikemääriä lisäksi myös kappaleen *energiaa*. Siinä missä impulssi kuvailee voiman aiheuttamaa muutosta liikemääriässä, voiman aiheuttamaa muutosta energiassa kuvailee suuret nimeltä **työ**. Esimerkiksi kuvassa 3.22 (a) työnnetään vaunu, jolloin se lähtee liikkeelle suuntaan, johon voima sitää työntää. Tällöin vaunun liike-energia kasvaa ja fysiikassa sanotaan, että *voima tekee vaunuun työtä*. Vastaavasti kuvassa 3.22 (b) liikkuvaa vaunu pysäytetään työntämällä sitä vaunun liikkeeseen nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Tällöin vaunun energia vähentyy.

Kuvan 3.22 esimerkissä oleellista on se, että molemmissa tilanteissa vaunut *liikkuvat* ja voima vaikuttaa liikkeen suunnassa. Kun voima osoittaa vaunun liikkeen suuntaan, vaunun vauhti kasvaa ja siten myös sen liike-energia kasvaa. Kun voima osoittaa vastakkaiseen suuntaan liikkeeseen nähdyn, vauhti pienenee ja liike-energia vähenee. Työ liittyy siis aina prosessiin, jossa kappale *liikkuu* ja voima on *liikkeen suuntainen*.

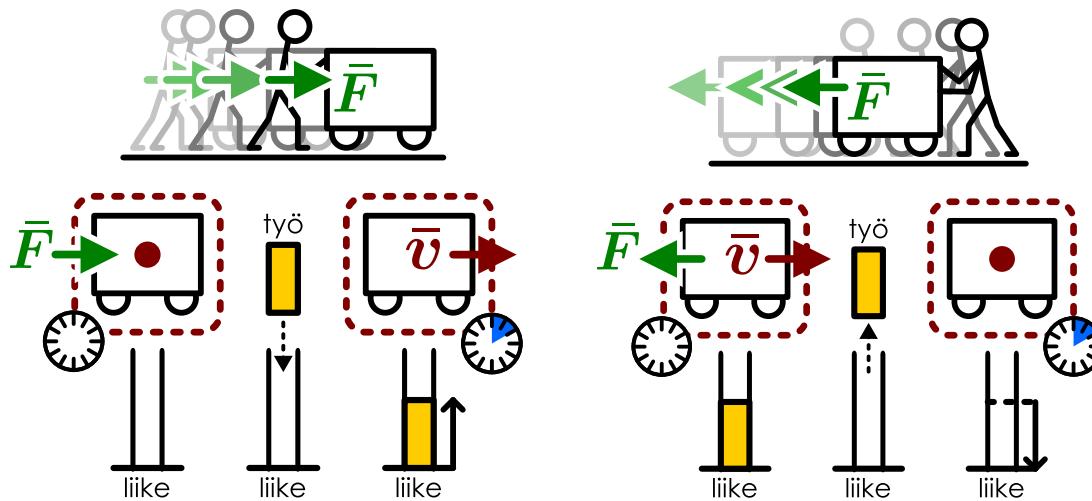
Yksinkertainen esimerkki tällaisesta prosessista, jossa voima vaikuttaa kappaleen liikkeen suunnassa, on kappaleen vapaa putoaminen suoraan alas päin (kuva 3.23 (a)). Tällöin kappaleeseen vaikuttaa vain painovoima, joka on suuruudeltaan vakio, $G_x = -mg$, missä positiivinen x -suunta on valittu ylöspäin. Toisaalta mekaanisen energian säilymislain perusteella putoavan kappaleen liike-energian muutos riippuu kappaleen kokeman pystysuuntaisen siirtymän pituudesta,

$$\Delta K = -\Delta U = -mg\Delta x = G_x \Delta x. \quad (3.58)$$

Toisin sanoen potentiaalienergiaa muuttuu liike-energiaksi määriä, jonka suuruus on voiman suuruuden ja kappaleen pystysuuntaisen siirtymän tulo. Toisin sanoen painovoima tekee kappaleeseen työtä, joka muuttaa

Kuva 3.22: Työ on positiivinen voiman osoittaessa liikkeen suuntaan ja negatiivinen voiman osoittaessa liikkeeseen nähden vastakkaiseen suuntaan.

- (a) Kappale työnnetään liikkeelle: positiivinen työ lisää kappaleen energiaa.
 (b) Kappale pysäytetään: negatiivinen työ vähentää kappaleen energiaa.



vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa kappaleen liike-energiaksi. Voima voi siis sekä lisätä että vähentää kappaleen energiaa tekemällä työtä. Kuitenkin koska energia on säilyvä suure, työ ei voi luoda eikä hävittää energiota vaan ainoastaan muuttaa sitä muodosta toiseen tai siirtää kappaleelta toiselle. Voiman tekemä *työ siis mittaa kuinka paljon energiota muuttuu muodosta toiseen*.

Huomaa erityisesti, että edellinen päätteily päättää riippumatta siitä, liikkuuko kappale ylös- vai alas päin. Jos kappale putoaa alas päin, painovoima osoittaa samaan suuntaan kuin mihin kappale liikkuu ja voima tekee *positiivista* työtä kasvattaa kappaleen liike-energiaa (ja vähentää graviatation potentiaalienergiaa). Jos kappale on heitetty ylöspäin, painovoima osoittaa liikkeeseen nähden vastakkaiseen suuntaan ja tekee kappaleeseen *negatiivista* työtä vähentää kappaleen liike-energiaa (ja lisäten graviatation potentiaalienergiaa). Työn etumerkki sisä kuvailee siirtymän energian suuntaa: kappaleeseen (tai systeemiin) tehty positiivinen työ lisää kappaleen (tai systeemin) energiota kun taas negatiivinen työ vähentää energiota.

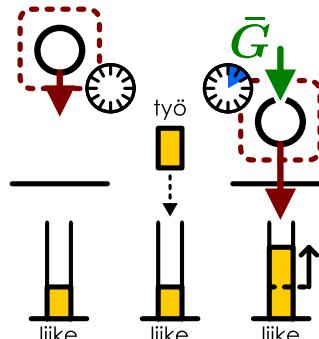
Samanlainen päätteily toimii mille tahansa vakiovoimalle: *voiman tekemä työ on suoraan verrannollinen voiman suuruuteen sekä kappaleen siirtymään. Työ on positiivinen, jos voima ja siirtymä ovat vastakaissuuntaiset*. Yhtälönä tämän asian voi ilmaista yksinkertaisesti niin, että työ on vakiovoiman x -skalaarikomponentin ja x -suuntaisen siirtymän tulo,

$$W = F_x \Delta x. \quad (3.59)$$

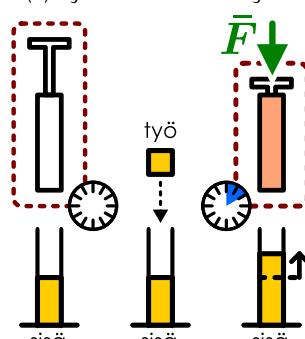
Voiman osoittaessa *samaan suuntaan* kuin mihin kappale liikkuu eli suureiden F_x ja Δx ollessa samanmerkkiset työ on *positiivinen*. Jos puolestaan voima osoittaa *vastakkaiseen suuntaan* kuin mihin kappale liikkuu, toinen suureista F_x ja Δx on negatiivinen ja toinen positiivinen, jolloin työ on *negatiivinen*. Vaikka voima ja siirtymä ovat vektoreita, työn määritelmässä esiintyy ainoastaan vektoreiden skaalaarikomponentteja, joten työ on *skalaari* aivan kuten energiakin. Työ siis joko lisää tai vähentää kappaleen energiota. Tämä on oleellinen ero impulssiin, joka on vektori ja jonka suunta osoittaa liikemäärävektorin muutoksen suunnan.

Kuva 3.23: Työ mittaa energian muutosta.

- (a) Työ muuttaa liike-energiaa.



- (b) Työ muuttaa sisäenergiaa.



- 3.22 Kuinka suuren työn teet, jos nostat 0.8 kg massan maasta 1.2 m korkeudelle (a) 1 sekunnissa, (b) 10 sekunnissa? (c) Entä jos nostat kymmenen samanlaista kappaleetta yhden kerrallaan, yhden sekunnissa? (d) Entä jos nostat kymmenen samanlaista kappaleetta kerralla 10 sekunnissa? (e) Entä jos kannattelet kappaleita tällä korkeudella 1 minuutin?

Putoavan kappaleen tapauksessa kappaleen potentiaalienergia ja liike-energia on helppo laskea kappaleen paikan ja nopeuden avulla, eikä työn laskeminen voiman kautta ole erityisen hyödyllistä. Työ kuitenkin ilmaisee *aina* vuorovaikutuksen aiheuttaman energiamuodon muutoksen suuruutta, ja niinpä työn avulla voidaan laskea myös sellaiset energian muutokset, joita *ei voida* päättää tarkastelemalla vain prosessin alku- ja lopputilaa. Esimerkiksi ilman puristaminen pumpulla vaatii voimaa ja voima tekee pumpussa olevaan ilmaan työtä (kuva 3.23 (b)). Työn tekeminen kasvattaa ilman ja pumpun energiota, ja koska prosessissa liike- tai potentiaalienergia eivät ilmeisesti muudu, työn on kasvatettava systeemin sisäenergiaa. Toisin sanoen ilma lämpenee, ja *lämpöenergian muutoksen on oltava yhtä suuri kuin voiman tekemä työ*. Erityisesti tällaisissa prosesseissa työ on huomattavan vahva työkalu, sillä sen avulla voidaan mekaanisten suureiden perusteella määrittää myös epäjärjestyneen sisäenergian muutoksia, joita voisi muuten olla mahdoton laskea.

Myös systeemin *sisäiset* vuorovaikutukset voivat tehdä työtä, mutta tällöin systeemin kokonaisenergia ei muudu vaan energia muuttaa muotoaan systeemin sisällä. Kuvan 3.24 esimerkissä laatikko nostetaan ylöspäin painovoimakentässä, mikä vaatii ylöspäin vaikuttavan voiman kohdistamisen kappaleeseen. Tämä nostava voima kumoaa laatikkoon kohdistuvan painovoiman. Nostava voima on laatikon noustessa samansuuntainen kuin liike eli voiman kappaleeseen tekemä työ on positiivinen. Kuitenkin nostajan ja laatikon välisen vuorovaikutuksen täytyy kohdistaa voima *myös nostajaan* ja voiman ja vastavoiman lain mukaisesti tämä voima on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen laatikkoon kohdistuvaan voimaan nähden. Koska tämä voima on vastakkaisuuntainen nostajan käsiin siirtymään nähden, se tekee nostajaan negatiivisen työn, joka on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin laatikkoon tehty positiivinen työ.

Laatikko nostaa ihmisen, ja prosessissa tehty negatiivinen työ kuluttaa häneen sitoutunutta kemiallista energiota. Samalla positiivinen työ lisää kappaleen ja Maan välisen gravitaatiovuorovaikutuksen potentiaalienergiaa. Toisin sanoen ihmisen sisäenergiaa muuttuu mekaaniseksi energiaksi, ja energian muutos on yhtä suuri kuin vuorovaikutuksen tekemä työ. Nostajalle tulee prosessissa myös lämminteli kemiallista energiota muuttuvan myös lämpöenergiaksi. Tätä muutosta ei *laatikon ja nostajan välisen vuorovaikutuksen* tekemä työ kuitenkaan mitata, sillä muutokset nostajan sisäenergianssa johtuvat hänen sisäisistä vuorovaikutuksistaan.



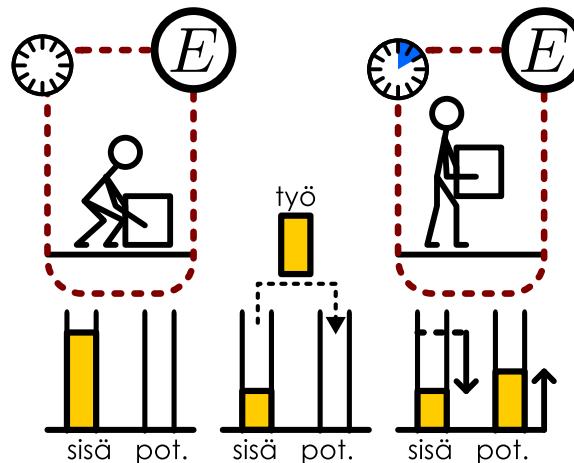
3.23 Palloa heitetään ylöspäin vakivoimalla, jolloin pallo on kiihyvässä liikkeessä. Pallo saa heiton aikana (ennen kädestä irtoamista) liike-energian 2 J ja sen gravaatiopotentiaalienergian muutos on 1 J. (a) Mikä on heittäjän palloon tekemä työ? (b) Mikä on painovoiman palloon tekemä työ? (c) Mikä on pallon heittäjään tekemä työ? (d) Miten heittäjän energia muuttuu heiton aikana? (e) Onko kokonaisenergia (likimain) vakio systeemissä, johon kuuluu heittäjä ja pallo?

Painovoiman voimakkuus on maanpinnalla likimain vakio, mutta yleisesti voimat muuttuvat. Esimerkiksi kuvan 3.23 (b) pumpun tapauksessa vaaditaan sitä suurempi voima mitä pienempään tilavuuteen ilma puristetaan. Tällöin voidaan käyttää samaa ositteluperiaatetta kuin aikaisemmin muuttuvien suureiden analyysissä on käytetty. Kappaleen kulkeva reitti jaetaan hyvin pieniin siirtymiin dx , joilla voiman x -komponentti F_x voidaan pitää vakiona. Tällöin kunkin pienin siirtymän matkalla voima tekee kappaleeseen työn

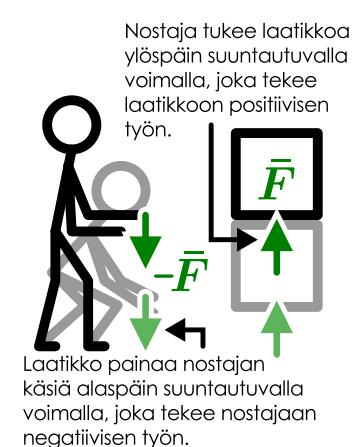
$$dW = F_x dx \quad (3.60)$$

Kuva 3.24: Systeemin sisäisten vuorovaikutusten tekemä työ muuttaa energiota muodosta toiseen, mutta systeemin kokonaisenergia ei muudu.

(a) Nostaja tekee työtä laatikkoon ja nostajan sisäenergiaa muuttuu gravaatiopotentiaalienergiaksi.



(b) Nostajan ja laatikon välisen vuorovaikutuksen kohdistaa molempien voimat.



ja koko matkalla pisteestä x_{alku} pisteesseen x_{loppu} tehty työ saadaan laskemalla nämä yhteen eli integroimalla voimaa *siirtymän* suhteen

$$W = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx. \quad (3.61)$$

Graafisesti työ on siis voiman paikkakuvaajan, $F_x(x)$, ja paikka-akselin rajaama pinta-ala.

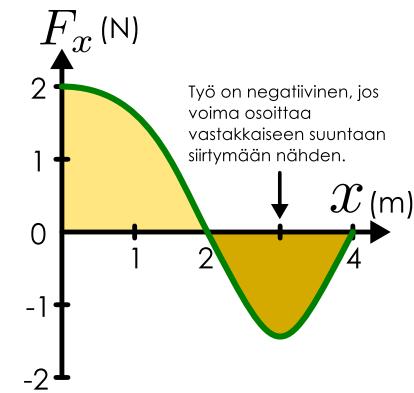
Työn määritelmä (3.61) muistuttaa impulssin lauseketta (3.57), sillä molemmat ovat *voiman integraaleja*. Kuitenkin työ on voiman integraali *paikan* suhteen ja se kertoo vuorovaikutuksen aiheuttaman muutoksen kappaleen *energiassa*. Impulssi sen sijaan on voiman integraali *ajan* suhteen ja se kertoo vuorovaikutuksen aiheuttaman muutoksen kappaleen *liikemäärässä*. Työ on *skalaari* aivan kuten energia ja impulssi on liikemääräntavoin *vektori*.

Työn ja impulssin eroa on havainnollistettu kuvassa 3.26. Kateen kappaleeseen, joilla on erilaiset inertiat, vaikuttaa kumpaanakin samanlainen voima. Kappaleet ovat aluksi levossa ja voima kiihdyyttää ne liikkeelle. Inertialtaan suurempi kappale kuitenkin kiihtyy hitaammin, joten sen nopeus on aina pienempi kuin pienemmän kappaleen. Kuitenkin koska voiman antama impulssi on suoraan verrannollinen siihen kuinka kauan voima kappaleisiin vaikuttaa, kappaleiden liikemääät muuttuvat yhtä nopeasti ja millä tahansa ajan hetkellä kummallakin on yhtä suuri liikemääri. Kappaleisiin tehty työ sen sijaan riippuu siitä, kuinka pitkän matkan kappale on kulkenut voiman vaikutussuunnassa. Koska suurempi kappale lükkiää hitaammin, voima tekee siihen työtä hitaammin ja kullakin ajan hetkellä sen liike-energia on pienempi kuin kevyen kappaleen. Kuitenkin valitaanpa mikä tahansa etäisyys lähtöpisteestä, kappaleiden liike-energia tällä etäisyydellä on sama. Raskaamman kappaleen nopeus on silti tällöinkin pienempi kuin kevyen kappaleen.

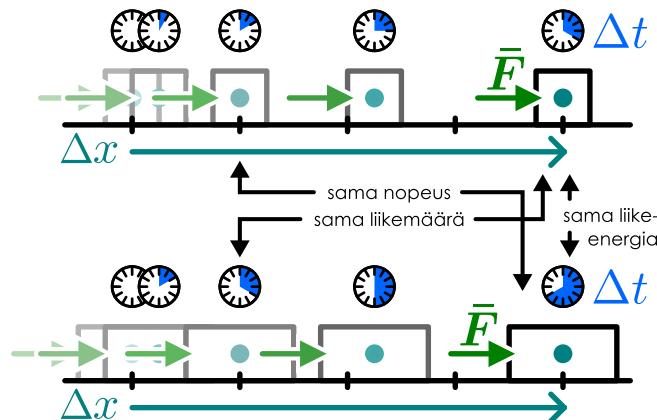
Esimerkki tällaisesta tilanteesta voisi olla vaikkapa heitto. Kevyt pallo on helpo heittää nopeasti, mutta se ei silti saa suurta liikemääriä, koska voima ehtii vaikuttaa siihen vain vähän aikaa. Raskaasta palloa puolestaan ei saa liikkeelle yhtä nopeasti eikä sen loppunopeus ole yhtä suuri, mutta sille voi antaa helpommin suuren liikemäären, koska heittoliike kestää kauemmin. Koska heittoa rajoittaa käden pituus, samanlaisella heittotekniikalla, jos kumpaanakin palloon kohdistuu heiton aikana likimain yhtä suuri voima, kumpikin pallo saa kuitenkin heitossa yhtä suuren liike-energian.

Yleisesti, jos voima tunnetaan ajan funktiona, sen tuottama impulssi voidaan laskea integroimalla ajan suhteen ja näin voidaan määrittää kappaleen saama impulssi ja sen liikemäären muutos. Työtä sen sijaan ei voida laskea ratkaisematta ensin voimaa paikan funktiona. Jos sen sijaan voima tunnetaan paikan funktiona, sen tekemä työ voidaan laskea integroimalla paikan suhteen ja näin voidaan määrittää kappaleeseen tehty työ ja sen energian muutos. Impulssia sen sijaan ei voida laskea ratkaisematta ensin voimaa ajan funktiona.

Kuva 3.25: Työ on funktion $F(x)$ rajaama ala.



Kuva 3.26: Kateen kappaleeseen vaikuttavat samanlaiset voimat antavat samat impulssit vaikuttuaan yhtä kauan ja tekevät yhtä suuren työn kappaleiden liukuttua yhtä pitkän matkan.



3.24 Aluksi levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa vakiovoima $F_x > 0$ N. Millainen kuvaaja saadaan, jos piirretään (a) kappaleen saama kokonaisimpulssi ajan funktiona, $I_x(t)$, (b) kappaleen saama kokonaisimpulssi paikan funktiona, $I_x(x)$, (c) kappaleeseen tehty työ paikan funktiona, $W(x)$ ja (d) kappaleeseen tehty työ ajan funktiona, $W(t)$?

esimerkki 3.4

Purjeveneet

Kaksi ulkoisesti samanlaista purjevenettä lähtee levosta liikkeelle. Kumpaankin veneeseen vaikuttaa yhtä suuri liikkeen suuntainen kokonaisvoima, joka on vakio. Veneistä toisen massa on kaksinkertainen toiseen nähden. Mikä on veneiden (a) liike-energian ja (b) vauhtien suhde niiden kuljettua sata metriä?

TILANNE Koska veneiden massoja ja niihin kohdistuvia voimia ei tunneta, energioita ja nopeuksia ei voida ratkaista tarkasti. Sen sijaan voimme tarkastella niiden suhteellista suuruutta. Merkitään pienempää venettä A (massa m) ja suurempaa B (massa $2m$). Merkitään veneisiin vaikuttavaa voimaa F_{kokonais} , niiden kulkemaa matkaa Δx ja niiden loppunopeuksia v_A sekä v_B .

SUUNNITELMA Voima tekee veneisiin työtä, joka on verrannollinen voiman suuruuteen ja veneiden kulkemaan matkaan. Veneiden liike-energian muutos on sama kuin niihin tehty työ. Koska veneet ovat aluksi paikoillaan, niiden liike-energia on aluksi nolla. Siispä veneiden liike-energia lopuksi on yhtä suuri kuin niihin tehty työ.

Koska veneisiin kohdistuu vakiovoima, ne ovat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.

RATKAISU (a) Voiman tekemä työ on $W_{\text{kokonais}} = F_{\text{kokonais}} \Delta x$ ja tämä on siis sama kuin veneiden saama liike-energia, $K = W_{\text{kokonais}}$. Kuljettuaan yhtä pitkän matkan Δx veneisiin on tehty *yhtä suuri* työ. Siispä niiällä on myös *sama* liike-energia, koska niihin vaikuttaa yhtä suuri voima.

(b) Veenen A liike-energia on $K_A = \frac{1}{2}mv_A^2 = W$, joten sen loppunopeus on $v_A = \sqrt{2W/m}$. Koska veneen B massa on kaksinkertainen, sen loppunopeus on *pienempi*, $v_B = \sqrt{W/m}$. Nopeuksien suhde on

$$v_A/v_B = \sqrt{\frac{2W}{m}} / \sqrt{\frac{W}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m} \frac{m}{W}} = \sqrt{2}. \quad (3.62)$$

ARVIOINTI Veneiden saama liike-energia on yhtä suuri, mutta raskaamman veneen vauhti on pienempi. Näin täytyy olla, koska raskaalla veneellä on suurempi inertia. Huomaa myös, että veneiden liike-energia on sama kun ne ovat kulkenneet *yhtä pitkät matkat*. Raskaalta veneeltä tähän luonnollisesti kuluu enemmän aikaa.

Koska työ riippuu kappaleen siirtymästä, työ ja energia ovat usein parhaat tavarat ratkaista kappaleen liike *paikan funktiona*. Jos liike halutaan ratkaista *ajan funktiona*, on helpointa käyttää dynamiikan peruslakia.

Liikettä vastaan kohtisuora voima

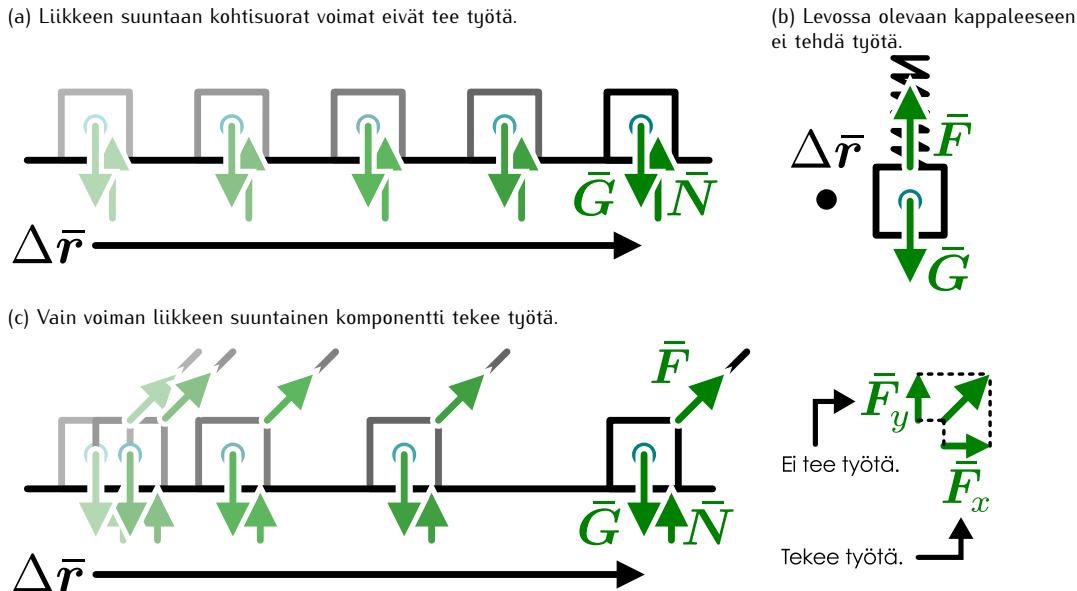
Edellä todettiin, että kappaleeseen vaikuttava voima tekee positiivisen työn kappaleen liikkumisen voiman suuntaan ja negatiivisen työn kappaleen liikkumessa voiman näiden vastakkaiseen suuntaan. On kuitenkin myös mahdollista, että voima ei vaikuta liikkeen suunnassa vaan siihen näiden *kohtisuoraan*. Esimerkiksi kitkattomalla vaakasuoralla tasolla liikkuvan kappaleeseen vaikuttaa painovoima ja pinnan tukivoima, jotka ovat molemmat liikkeen suuntaan näiden kohtisuorassa (kuva 3.27 (a)). Tällaisen kappaleen potentiaalienergia ei muutu, koska kappale ei liiku pystysuunnassa. Kappale myös liikkuu tasaisella nopeudella, koska siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Kappaleen liikkeeseen ei siis liity mitään energian muodon muutoksia eikä kappaleeseen tehdä työtä vaikka se liikkuu ja siihen vaikuttaa voima.

Energian näkökulmasta on ymmärrettävä, että tässä tapauksessa painovoima tai normaalivoima eivät voi tehdä työtä. Jos voimat nimittäin tekisivät kappaleeseen työtä, energiata pitäisi muuttua muodosta toiseen. Kuitenkin gravitaation potentiaalienergia on vakio vaakasuorassa liikkeessä, eikä lattiassa tapahdu liikkeen aikana muutoksia. Koska energia ei muuta muotoaan kappaleessa eikä sen ympäristössä, prosessiin ei voi liittyä työtä.

Esimerkin päättelmä on yleispätevä: *kappaleen liikkeen suuntaan näiden kohtisuorat voimat eivät tee kappaleeseen työtä*. Edelleen voimat, jotka eivät ole liikkeen suuntaisia eivätkä siihen näiden täsmälleen kohtisuorassa, voidaan aina jakaa liikkeen suuntaiseen ja kohtisuoraan komponenttiin (kuva 3.27 (c)). Tällöin voiman tekemä työ voidaan määrittää laskemalla erikseen kummankin komponentin tekemän työn ja summaamalla nämä yhteen, ja koska kohtisuoran komponenttiin työ on nolla, *ainoastaan voiman liikkeen suuntainen komponentti tekee työtä*.

Työ on nolla myös jos kappale *ei liiku*, sillä tällöin ei ole olemassakaan liikkeen suuntaista voiman komponenttia. Tämän voi havainnollistaa esimerkiksi tarkastelemalla jousesta roikkuvaa kappaleetta (kuva 3.27 (b)). Kappale vuorovaikuttaa sekä jousen että gravitaatiokentän kanssa, mutta kummankaan vuorovaikutuksen potentiaalienergia ei muutu ellei kappaleen paikka muutu, eikä kappaleen liike-energiakaan muutu jos kappale on levossa. Energian muodot eivät siis muutu eikä mikään vuorovaikutuksista tee työtä. On tavallinen harhakäsitys ajatella pelkän voiman tuottamisen vaativan työtä, sillä painavien kappaleiden kannattelemisen väsyttää. Tällöin kyse on kuitenkin ihmisen fysiologian rajoitteista. Lihasvoiman ylläpitäminen esimerkiksi kappaleen kannattelemiseksi vaatii toki energiota, mutta tämä energia ei siirry kappaleelle vaan muuttuu lihaksissa lämpöenergiaksi. Kappaleen energia ei muutu prosessissa eikä kappaleeseen tehdä työtä.

Kuva 3.27: Siirtymään nähdien kohtisuorat voimat eivät tee työtä.



3.25 Rullalauta rullailee puoliympyrän muotoisen "half-pipen" puolelta toiselle. (a) Tuuttaako lautan kohdistuvaa normaalivoima impulssin? (b) Tekeekö lautan kohdistuvaa normaalivoima työtä?

Työ ja mekaaninen energia

Kuten edellä huomasimme vapaassa pudotuksessa olevalle kappaleelle, painovoiman tekemä työ muuttaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Toisin sanoen painovoiman potentiaalienergian muutos on voiman tekemän työn vastaluku, $\Delta U = -W$, missä mǐnus ilmaisee sitä, että positiivinen työ johtaa potentiaalienergian vähenemiseen. Tämä on itseasiassa yleisesti totta kaikille konservatiivisille vuorovaikutuksille. Nimittäin kohdistuupa konservatiivinen vuorovaikutus mihin tahansa kappaleeseen tai systeemiin ja tämä vuorovaikutus tekee työtä, tämä työ kasvattaa kappaleen tai systeemin energiota. Energiaa ei kuitenkaan voi luoda vaan ainoastaan siirtää, joten tämän energian täytyy tulla vuorovaikutuksen varastointista potentiaalienergiasta.

Matemaattisesti tämä tulos on suora seuraus siitä, että voima on konservatiivisten vuorovaikutusten tapauksessa potentiaalienergian derivaatta paikan suhteeseen yhtälön 3.23 mukaisesti. Nimitään koska integrointi on derivoinnin käännekohtainen, *potentiaalienergian täytyy olla voiman integraali paikan suhteeseen*. Toisin sanoen x -suuntaisen vain paikasta riippuvan konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia voidaan laskea integroimalla vuorovaikutuksen tuottamaa voimaa paikan suhteeseen,

$$\int F_x dx = \int -\frac{dU}{dx} dx = - \int dU = -U(x) + U_0, \quad (3.63)$$

missä U_0 on integrointivakio. Tällä vakiolla ei ole kuitenkaan fysikaalista merkitystä, sillä potentiaalienergialla ei ole absoluuttisia arvoja. Toisin sanoen potentiaalienergian nollakohta voidaan aina valita vapaasti ja ainoastaan potentiaalienergian muutokset ovat merkityksellisiä. Kuitenkin kun valinta on kerran tehty, sitä ei saa enää muuttaa. Jos esimerkiksi päätetään, että potentiaalienergia on nolla pisteessä x_0 , eli $U(x_0) = 0$, määritetyjä potentiaalienergia yksikäsitteisesti kaikissa muissakin pisteissä, ja

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F_x dx = -W_{x_0 \rightarrow x}, \quad (3.64)$$

missä $W_{x_0 \rightarrow x}$ tarkoittaa vuorovaikutuksen tekemää työtä kappaleen siirtyessä paikasta x_0 paikkaan x . Tätä voidaan pitää potentiaalienergian määritelmänä: *konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutos kappaleen liikkumisessa on aina yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin vuorovaikutukseen liittyvä voiman kappaleeseen tekemä työ*.

3.26 Jousivoima on Hooken lain mukaisesti $F_x = -k(x - x_0)$. Johda lauseke jousen potentiaalienergialle yhtälöstä (3.64). Mitä saat, jos potentiaalienergian nollakohta onkin pisteessä x_1 , joka on eri kuin jousen lepopiuttoa merkitsevä paikka x_0 ?

Kappaleen liikkeen kannalta erityisen tärkeässä asemassa on siihen vaikuttavan *kokonaivoiman* tekemä työ, koska juuri kokonaivoima vaikuttaa kappaleen liikemäärään dynamikan peruslain (3.3) mukaisesti. Koska kokonaivoima vaikuttaa liikkeeseen, voisi arvata kokonaivoiman tekemän työn aiheuttavan kappaleen liike-energian muutokset. Nämä juuri onkin.

Kun osoitimme aikaisemmin konservatiivisen voiman ja potentiaalienergian derivaatan yhteyden, saimme tuloksen (3.19), jonka mukaan liike-energian muutosnopeus on verrannollinen kappaleen nopeuteen ja kiihtyvyteen, $dK/dt = ma_x v_x$, ja koska kappaleen kiilthyvyys riippuu siihen vaikuttavasta kokonaivoimasta, $a_x = F_{x,\text{kokona}}/m$, tämä on voiman ja paikan muutoksen avulla lausuttuna

$$\frac{dK}{dt} = F_{x,\text{kokona}} \frac{dx}{dt}. \quad (3.65)$$

Koska derivoointi ja integrointi ovat toistensa käännesoperaatiot, liike-energian muutos äärellisellä aikavälillä saadaan tämän lausekkeen integraalina ajan suhtein

$$\Delta K = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{dK}{dt} dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokona}} \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokona}} dx. \quad (3.66)$$

Mutta tässä viimeinen lauseke on sama asia kuin kokonaivoiman kappaleeseen tekemä työ. Siispä *kappaleeseen vaikuttavan kokonaivoiman kappaleeseen tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos*

$$W_{\text{kokona}} = \Delta K. \quad (3.67)$$

Tämä tulos on nimeltään **työ-energiateoreema**.

Johdimme aikaisemmin liike-energialle lausekkeen $K = \frac{1}{2}mv_x^2$ tarkastelemalla gravaatiota, mutta silloin kyseessä oli erikoistapaus. Nyt tarkastelimme yleisempää tapausta, jossa kappaleeseen vaikuttaa *mielivaltainen* kokonaivoima, joka voi riippua sekä ajasta että paikasta. Erityisesti kappaleeseen voi vaikuttaa sekä konservatiivisia että dissipatiivisia vuorovaikutuksia, ja yllä johdettu tulos pätee silti, sillä päättelyssä käytettiin ainoastaan dynamikan peruslakia ja nopeuden ja työn määriteliä. Nämä vaikuttipa kappaleeseen *millaisia voimia tahansa*, niiden kappaleeseen tekemä kokonaistyö ilmenee aina kappaleen liike-energian muutoksena.

Koska työ-energiateoreema on yleispätevä, liike-energia voidaan *määritellä* sen avulla. Jos nimittäin levossa olevan kappaleen liike-energia on nolla ja kokonaivoima tekee siihen työn $W_{0 \rightarrow v_x}$, kappale saa työ-energiateoreeman mukaisesti liike-energian

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = W_{0 \rightarrow v_x}. \quad (3.68)$$

Kappaleen liike-energia on siis se kokonaistyö, joka kappaleeseen on tehty, kun se on kiihdytetty nopeuteensa. Erityisen huomattavaa tässä on se, että tehty työ ei riipu esimerkiksi siitä, kuinka nopeasti kiihdytys tapahtuu tai onko kiilthyvyys a_x positiivinen vaan *ainoastaan* kappaleen saamasta loppunopeudesta.

Yhdistämällä edellä saadut tulokset, jonka mukaan konservatiivisten vuorovaikutusten tekemä työ ilmaisee vuorovaikutusten varastoiman potentiaalienergian muutosta, $\Delta U = -W$, ja kokonaivoiman tekemä työ ilmaisee kappaleen liike-energian muutosta, $\Delta K = W$, päädyimme tuttuun mekaanisen energian säilymis-lakiin: Jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, niiden yhdessä tekemä työ on aina yhtä suuri kuin potentiaalienergian muutos liike-energiaksi ja näiden summa on vakio

$$\Delta K + \Delta U = W - W = 0. \quad (3.69)$$

Päättelimme tuloksen jo aikaisemmin suoraan energian säilymislaista, mutta koska onnistuimme nyt johtamaan sen työn määritelmän avulla, tulos on osoitus siitä että nämä määriteltynä työ on järkevä suure joka todella kuvaa energiamuotojen muuttumista toisikseen.

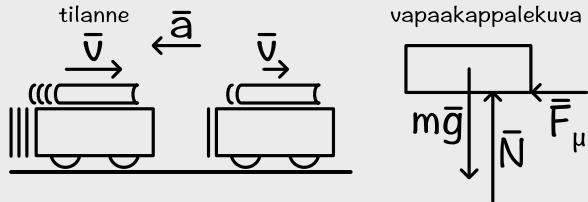
3.27 Kappaleen massa on 1.0 kg ja sitä nostetaan ylöspäin 15.0 N vakivoimalla 1.0 m matka. (a) Kuinka suuren työn nostava voima tekee? (b) Kuinka suuren työn painovoima tekee? (c) Kuinka suuren työn kokonaivoima tekee? (d) Mikä on gravitaation potentiaalienergian muutos? (e) Mikä on kappaleen liike-energian muutos? (f) Miten edellä lasketut työt ja energoiden muutokset liittyvät toisiinsa?

esimerkki 3.5

Liikkuvan kappaleen lepotitka

Kirja on liikkuvan auton kyydissä vaakasuoralla alustalla. Kuinka suuri kitkavoima kirjaan kohdistuu? Kuinka voimakkaasti auto voi jarruttaa niin että kirja pysyy auton suhteen paikoillaan?

TILANNE Piirretään tilanteesta kuva ja kirjan vapaa-kappalekuva. Kirja ja auto ovat molemmat kiihtyvässä liikkeessä. Merkitään kirjan massaa m , auton kiihtyvyttä \ddot{a} sekä lepo- ja liikekitkakertoimia μ_{lepo} ja μ .



SUUNNITELMA Jotta kirja pysyisi auton suhteen paikoillaan, sen täytyy liikkua aina samalla nopeudella kuin auto. Tällöin kirjan kiihtyvyden pitää myös olla sama kuin auton kiihtyvyys, ja kirjaan täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima.

Kirjaan vaikuttaa painovoima, normaalivoima sekä kitka. Vaikka kappale ulkopuolisen havaittajan mielestä liikkuu, kirjan ja alustan pinnat eivät liiku toistensa suhteen, joten kyseessä on lepotitka — ei liikekitka. Kitkavoiman suuruus määrittyy niin, että kirjan kiihtyvyys on sama kuin auton. Lepotitkan suurin mahdollinen arvo riippuu kirjan ja alustan välisen normaalivoiman suuruudesta sekä lepotitkkakertoimesta.

Koska kirja ei liiku pystysuunnassa, siihen kohdistuva normaalivoima on yhtä suuri kuin painovoima

$$N = mg. \quad (3.70)$$

Kirjaan kohdistuva kokonaisvoima osoittaa siis vaakasuoraan ja koska tässä suunnassa vaikuttaa ainoastaan kitka, kokonaisvoiman täytyy olla sama kuin kitkavoima. Kokonaisvoiman suuruus voi siis olla korkeintaan kitkavoiman maksimi-suuruus

$$F_{\text{kokonais,max}} = F_{\mu,\text{max}} = \mu_{\text{lepo}} N. \quad (3.71)$$

Kirjan kiihtyvyyden skalaarikomponentti liikkeen suunnassa on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais},x} = \frac{1}{m} F_{\mu,x} = -\frac{1}{m} F_{\mu}. \quad (3.72)$$

Koska voiman suuruudella on maksimi, myös kiihtyvyyden itseisarvolla on maksimi

$$a_{\text{max}} = \frac{1}{m} F_{\text{kokonais,max}}. \quad (3.73)$$

RATKAISU Kirjan kiihtyvyys voi olla korkeintaan

$$a_{\text{max}} = \frac{1}{m} \mu_{\text{lepo}} N = \mu_{\text{lepo}} g. \quad (3.74)$$

Kun auto jarruttaa kiihtyvyydellä a , joka on itseisarvoltaan tätä pienempi, lepotitkan voimakkuuden on oltava

$$F_{\mu} = ma, \quad (a < a_{\text{max}}) \quad (3.75)$$

jotta kirja pysyisi paikoillaan. Jos auto jarruttaa kiihtyvyydellä, joka on suurempi kuin a_{max} , lepotitka ei ole riittävä pitämään kirjaa paikoillaan ja se alkaa liikkua. Tällöin kirjaan vaikuttaa liikekitka, joka riippuu normaalivoimasta

$$F_{\mu} = \mu N = \mu mg, \quad (a > a_{\text{max}}). \quad (3.76)$$

ARVIOINTI Huomaa, että tässä esimerkissä kirjan liike-energia pienenee, koska lepotitka tekee siihen negatiivista työtä. Joskus näkee väitetävän, että lepotitka ei voi tehdä työtä, koska se vaikuttaa vain paikoillaan oleviin kappaleisiin, mutta tämä ei ole totta. Lepotitka vaikuttaa tässä esimerkissä kirjaan, koska kirja ei liiku *auton suhteen*, mutta ulkopuolisen tarkastelijan näkökulmasta kirja liikkuu ja lepotitka tekee siihen työtä. Samalla kun kitka tekee kirjaan negatiivista työtä, se tekee autoon yhtä paljon positiivista työtä.

Mitä suurempi lepotitkkakerroin on, sitä suuremmalla kiihtyvyydellä kirja pysyy auton suhteen paikoillaan. Tämä on järkevä, sillä jarruttavassa autossa sileillä, liukkaille pinnoilla olevat tavarat lähtevät liukumaan helpommin kuin karkeilla.

Moniosaisiin systeemeihin tehty työ

Työ-energiateoreemassa tarkasteltiin yhden kappaleen liikkeen muuttumista siihen vaikuttavan kokonaivoiman vaikutuksesta. Täsmälle sama päätely toimii myös systeemeille, kun kokonaivoiman käytetään systeemiin vaikuttavien *ulkoisten voimien summaa*, systeemin paikkana *massakeskipistettä*, systeemin massana sen *kokonaismassaa* ja systeemin nopeutena *massakeskipisteen nopeutta*. Tällöin siis työ-energiateoreeman mukaan, jos $F_{x,\text{kokonais}}$ on systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien summa, systeemin massakeskipisteen avulla lasketulle liike-energialle pätee

$$\Delta \left(\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \right) = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_{x,\text{kokonais}} dx_{\text{cm}}. \quad (3.77)$$

Jos systeemi on yksi jäykä kappale, kappaleen ja sen massakeskipisteen liike ovat sama asia, jolloin massakeskipisteen avulla laskettu liike-energia on systeemin liike-energia. Opimme kuitenkin jo aikaisemmin, että tämä ei ole yleisesti totta, koska systeemi voi koostua eri tavoin liikkuvista osista. Niinpä moniosaisen systeemin liike-energian muutos *ei ole* sama asia kuin systeemiin vaikuttavan kokonaivoiman ja systeemin massakeskipisteen siirtymän tulo.

Lisäksi jos systeemi koostuu useista kappaleista tai se on kappale, jonka muoto voi muuttua, systeemi yleensä sisältää *muutakin* energiää kuin liike-energiaa. Työ on suure, joka mittaa energian muutosta, joten systeemiin tehdyn työn pitää vastata systeemin *kokonaisenergian* muutosta. Tutkitaan nyt, miten työ pitää määritellä, jotta tämä olisi totta.

Tarkastellaan yksinkertaista kuvan 3.28 esimerkkiä asian havainnollistamiseksi: Kitkattomalla suoralla radalla on kaksi samanlaista vaunuja, jotka on kytketty yhteen jousella. Vaunut ovat aluksi levossa, mutta sitten toista vaunuista aletaan työntää liikkeelle. molemmat vaunut eivät liiku heti yhtä nopeasti, sillä ensimmäisen vaunun työntäminen puristaa vaunujen välistä joustaa ja vasta puristuneen jousen toiseen vaunuun kohdistama voima työntää toisen vaunun lükkeelle. Siispä jousi puristuu prosessissa ja varastoi samalla potentiaalienergiaa. Systeemin energia kasvaa siis *enemmän* kuin mitä systeemin liike-energia kasvaa.

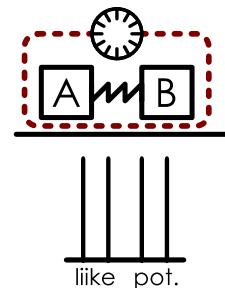
Voimme jälleen tarkastella erikseen systeemin sisäisiä ja ulkoisia voimia. Sisäiset voimat ovat nyt kappaleiden ja jousen välistet voimat, jotka muuttavat kappaleiden liike-energiaa ja jousen potentiaalienergiaa toisikseen. Ainoa systeemiin vaikuttava ulkoinen voima on ensimmäiseen kappaleeseen kohdistuva voima, jolla kappalella työntetään. Tämän voiman kappaleeseen tekemä työ on työn määritelmän mukaisesti voiman liikkeen suuntaisen komponentin sekä *kappaleen siirtymän tulo*, $W = F_{x,\text{kokonais}} \Delta x_{\text{kappale}}$. Tämän täytyy olla siis myös ulkoisten voimien systeemiin tekemä työ ja systeemin *kokonaisenergian* muutoksen täytyy prosessissa olla yhtä suuri kuin tämä työ. Voiman tekemä työ on todellakin suurempi kuin massakeskipisteen liike-energian muutosta kuvaava suure $F_{x,\text{kokonais}} \Delta x_{\text{cm}}$, sillä jousen puristuessa ensimmäinen kappale siirtyy *pidemmän* matkan kuin massakeskipiste.

Vastaava päätteily pätee mille tahansa moniosaiselle systeemille. Systeemin massakeskipisteen liike-energian muutoksen voi aina laskea systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien summan ja massakeskipisteen siirtymän avulla, mutta systeemiin tehtyä työtä ei voi. Sen sijaan jokaisen voiman tekemä työ riippuu voiman *vaikutuspisteen siirtymästä*. Jos systeemin muoto muuttuu, eri voimien vaikutuspisteet voivat siirtymään eri tavalla, ja tällöin jokainen voiman tekemä työ täytyy laskea erikseen. Erityisesti voimat, joiden vaikutuspiste ei liiku, eivät tee lainkaan työtä.

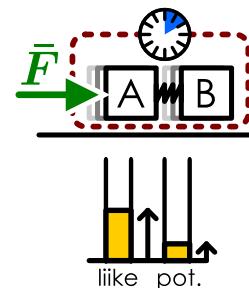
3.28 Selitä omien sanoin voiman tuottama impulssi ja työ sekä miten voit laskea nämä suureet. Selitä erityisesti, milloin suureet ovat positiivisia, negatiivisia tai nollia. Keksi esimerkki, jossa voima tai voimat tuottavat impulssin mutta niiden tekemä työ on nolla. Keksi myös esimerkki, jossa voimat tekevät työtä mutta niiden impulssi on nolla.

Kuva 3.28: Moniosaiseen systeemiin tehty työ.

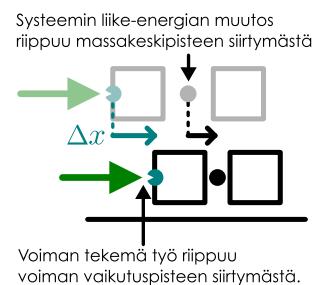
(a) Systeemi levossa



(b) Systeemiä työnnetään.



(c) Työ riippuu siirtymästä.



esimerkki 3.6

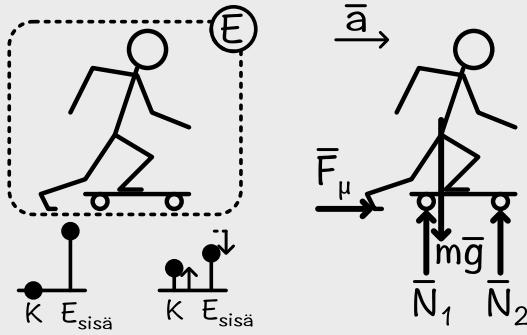
Rullalauta

Rullalautailija ottaa vauhtia potkaisemalla maasta (tasaisella maalla). (a) Minkä vuorovaikutuksen voima työntää lautailijan liikkeelle? (b) Mikä on tämän voiman tekemä työ?

TILANNE Tarkastellaan systeeminä lautailijan ja rullalauden yhdistelmää ja püürretään näiden vapaakappalekuva.

SUUNNITELMA (a) Systeemiin kohdistuvat ulkoiset voimat ovat painovoima, maanpinnan tukivoima sekä maanpinnan ja kenkän välinen kitkavoima. Painovoima ja tukivoima ovat vastakkaisuuntainen ja kumoavat toisensa. Kitkavoima aiheuttaa lautailijalle vaakasuuntaisen kiilthyvyyden.

(b) Voima osoittaa liikkeen suuntaan, joten lautailijan tehty työ riippuu voiman suuruudesta ja potkun pituudesta. Potkun aikana kenkä on kuitenkin maan suhteeseen paikoillaan, joten *kitka ei tee lainkaan työtä*.



ARVIOINTI Voi olla outo tulos, että lautailijan liikkeelle työntävä voima ei tee lautailijaan työtä. Tämä kuitenkin johtuu siitä, että lautailija on moniosainen systeemi ja työtä tekevät *lautailijan jalan lihatset* eikä maan pinta. Työhän mittaa energian siirtymistä, eikä maasta siirry energiaa lautailijaan. Sen sijaan prosessissa muuttuu lautailijan varastoitunutta kemiallista energiota lämpö- ja liike-energiaksi. Voimien avulla ilmaisten tämä ilmenee niin, että potkun aikana lautailijan jalka liikkuu, joten jalan eri osiin vaikuttavat voimat tekevät mekanista työtä.

Tavallinen intuitiivinen käsitys voimasta on se, että voimia voivat tuottaa vain elolliset olennot tai korkeintaan moottorien kaltaiset laitteet. Tämä on kuitenkin aivan väärä käsitys, sillä myös paikoillaan pysyvä lattia kohdistaa sen päällä seisovaan ihmiseen voimia kuten tässäkin esimerkissä. Voiman tuottaminen vaatii vain kappaleiden kosketuksen. Intuio on kuitenkin siinä mielessä oikeilla jäljillä, että paikoillaan pysyvä lattia ei pysty tekemään sen päällä seisovaan ihmiseen *työtä* eli *energiaa* ei siirry lattiasta ihmiseen.

Dissipatiivisten voimien työ

Myös dissipatiiviset voimat tekevät työtä, mutta tämä työ ei voi varastoitua potentiaalienergiaksi, koska dissipatiivisia vuorovaikutuksia ei voi kuvata potentiaalienergialla. Kappaleiden liike-energian muuttuminen lämpöenergiaksi kitkan vaikutuksesta on tyypillinen dissipatiivisen vuorovaikutuksen tekemästä työstä. Esimerkiksi kuvassa 3.29 (a) laatikkoon työnnetään pitkin maata. Tällöin työntäjä kohdistaa laatikkoon voiman laatikon liikkeen suuntaan ja liikekitka voiman vastakkaiseen suuntaan kuin mihin laatikko liikkuu. Siispä työntäjä tekee laatikkoon positiivista ja kitka negatiivista työtä. Työntäjän tekemä työ ilmenee hänen varastoituneen kemiallisen energian vähentymisenä ja laatikon liike-energian lisääntymisenä. Kitkan tekemä työ puolestaan ilmenee laatikon liike-energian vähentymisenä ja laatikon sekä lattian lämpöenergian lisääntymisenä. Loppuloksena siis osa työntäjän käytämästä energiasta muuttuu laatikon liikkeeksi ja osa lämpöenergiaksi. Energiaa ei voi luoda, joten systeemin kokonaisenergia on silti vakio.

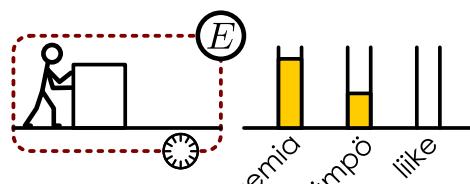
Dissipatiivisten vuorovaikutusten ollessa merkittävästi on systeemin valinnassa oltava erityisen huolellinen, jos tarkoitus on pitää kirjaa energian eri muotojen säilymisestä. Esimerkiksi lattialla liukuvaan kappaleeseen vaikuttava kitka muuttaa liike-energiaa lämpöenergiaksi eli sisäenergiani. Tämä sisäenergia kuitenkin jakaantuu *kaikkien* vuorovaikuttavien kappaleiden kesken, eikä *yhden* kappaleen sisäenergian muutos prosessin lopussa välttämättä ole yhtä suuri kuin dissipatiivisen voiman siihen tekemä työ. Esimerkiksi liukuvan kappaleen ja lattian välisen kitkan lämmittää sekä kappaleita että lattiaa. Niinpä jos systeeminä tarkastellaan vain työntäjää ja liukuva kappaleita kuten kuvassa 3.29 (b), systeemin sisäenergian muutos *ei ole* yhtä suuri kuin laatikon liike-energian energian muutos, sillä osa tästä energiasta voi siirtyä systeemin ulkopuolelle, lattiaan. Tämän systeemin kokonaisenergia ei siis ole prosessissa vakio.

Itse asiassa on mahdollista, että systeemin kokonaisenergia ei ole vakio, vaikka kaikkien systeemiin kohdistuvien ulkoisten voimien tekemä työ olisi nolla. Osoittautuu nimittäin, että energiaa voi siirtyä työn lisäksi myös *lämpönä*, kuten vaikkapa kuuman kahvin jäähtyminen osoittaa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että koska lämpimien kappaleiden atomeilla on paljon epäjärjestynytä liike-energiaa, kylmän kappaleen kanssa kontaktissa olevan lämpimän kappaleen atomit alkavat töniä myös kylmän kappaleen atomeja nopeampaan liikkeeseen itse samalla hidastuen. Mikroskooppisessa mittakaavassa tämäkin voidaan selittää atomien välisen voimien tekemänä työnä, mutta makroskooppisesta näkökulmasta lämpöenergia näyttää tällöin siirtymän itsestään kappaleesta toiseen. Lämmön kautta tapahtuvaa energian siirtymistä ja tähän liittyviä lainalaisuuksia kuvaan *termodynamikka*, johon tutustumme myöhemmin.

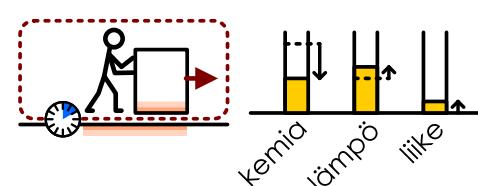
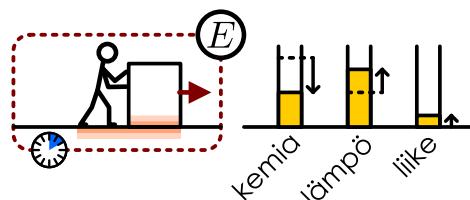
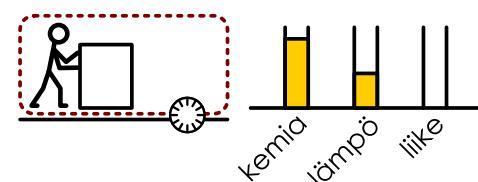
Energian säilymislain perusteella emme siis voi päättää paljonko työntäjän, laatikon ja lattian sisäenergiat muuttuvat, joten vaikka tarkastelisimme systeemiä, johon nämä kaikki kuuluvat ja jonka energia on vakio,

Kuva 3.29: Systeemin ulkoiset dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat siirtää energiaa systeemistä ja ympäristöön välillä.

(a) Dissipatiivinen vuorovaikutus systeemin sisällä: systeemin kokonaisenergia on vakio.



(b) Dissipatiivinen vuorovaikutus systeemin reunalla: energiaa siirrytään systeemistä ympäristöön.



emme pysty suoraan päätelemään esimerkiksi laatikon saamaa liike-energiaa. Työn avulla voimme kuitenkin tämän selvittää. Laatikon työntäjältä saama liike-energia on nimitään täsmälleen yhtä suuri kuin työntäjän laatikkoon tekemä työ. Vastaavasti kitka kuluttaa laatikon liike-energiaa täsmälleen kitkavoiman tekemän työn verran. Niinpä voimme määritellä laatikon liike-energian muutoksen siihen kohdistuvien voimien tekemänä kokonaistyönä.



3.29 Työntäjä kohdistaa laatikkoon 100 N vakiovoiman ja laatikkoon vaikuttaa 80 N kitkavoima. Työntäjä työntää laatikkoa yhden metrin. (a) Paljonko laatikko saa työntäjältä liike-energiaa? (b) Paljonko laatikko menettää kitkan takia liike-energiaa? (c) Mikä on laatikon liike-energian muutos? (d) Mikä on työntäjän, laatikon ja lattian sisäenergian kokonaismuutos?

Teho

Energian säilymislakia sovellettaessa ei usein väitetä kuinka nopeasti prosessit tarkalleen tapahtuvat, koska lopputulos voidaan päättellä suoraan loppu- ja alkutilan perusteella. Sen sijaan systeemien dynamikkaa tarkasteltaessa tapahtumien nopeus voi olla hyvin kiinnostavaa. Koska prosesseja voidaan lähes aina kuvata energian muuttumisenä muodosta toiseen, prosessien nopeutta voidaan kuvata tarkastelemalla kuinka nopeasti tämä tapahtuu. Tätä kuvaava suure on **teho**, joka määritellään energian (jonkin muodon) derivaattana ajan suhteeseen

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (3.78)$$

Tehon yksikkö on wattti

$$W = [P] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{kg}\text{m}^2/\text{s}^3. \quad (3.79)$$

Voiman tekemän työn teho kuvaa sitä, kuinka nopeasti voiman kuvaama vuorovaikutus muuttaa energiaa muodosta toiseen. Esimerkiksi kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman teho ilmaisee kuinka nopeasti kappaleen liike-energia muuttuu. Työn määritelmän mukaisesti x -suunnassa liikkuvan kappaleeseen vaikuttavan litikkeen suuntaisen voiman teho on

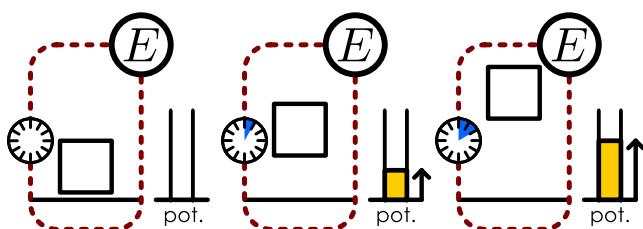
$$P = \frac{dW}{dt} = F_x \frac{dx}{dt} = F_x v_x. \quad (3.80)$$

Siispä voima tekee kappaleeseen työtä sitä suuremalla teholla, mitä nopeammin kappale liikkuu. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että työ riippuu *matkasta*, jolla voima vaikuttaa, ja nopea kappale kulkee pitkän matkan lyhyessä ajassa. Esimerkiksi painovoimakentässä ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergia kasvaa sitä suuremalla teholla mitä nopeammin kappale nousee (kuva 3.30).

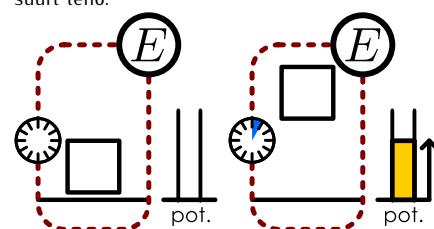
Teho on keskeinen suure monissa energiansiirron käytännön sovelluksissa. Esimerkiksi jos auto pitää pystyä kiihdystämään tiettyyn nopeuteen tiettyssä ajassa, sen moottorin on pystyttävä tuottamaan tähän vaadittava teho. Vastaavasti jarrutuksessa kitka lämmittää jarrupaloja yhtä suurella teholla kuin millä auton liike-energia vähenee. Lämmittäessä rakennusta tiettyllä teholla pitää eristys mitoitaa niin, ettei rakenteiden kautta hukattu lämpöteho ole lämmitystehoa suurempi, sillä muuten rakennus jähtyy. Tai päinvastoin jos tietokoneen prosessori kuumenee käytössä tietyllä teholla, lämpöä on kyettävä siirtämään pois yhtä tehokkaasti tai muuten laite ylikuumenee.

Kuva 3.30: Teho kuvaa energian muutoksen nopeutta.

(a) Kappaleen hitaaseen nostamiseen riittää pieni teho.



(b) Kappaleen nopeaan nostamiseen tarvitaan suuri teho.



3.30 Liukuvaan laatikkoon kohdistuu 80 N kitkavoima. (a) Kuinka nopeasti laatikko voi työntää, jos käytetään yhden hevosvoiman eli n. 740 W teho? (b) Jos laatikko työnnetään 160 N voimalla, kuinka suurella teholla tehdään työtä laatikon ollessa lähdössä liukkeelle (ts. laatikko ei vielä liiku).

esimerkki 3.7**Moottorin teho**

Auton massa on 1400 kg. Kuinka suuri keskimääräinen teho vaaditaan, jos auton pitää pystyä kiihdyttämään nopeudesta 60 km/h nopeuteen 100 km/h seitsemän sekunnin aikana?

TILANNE Merkitään auton massaa $m = 1400 \text{ kg}$ ja alku- ja loppunopeutta $v_{\text{alku}} = 60 \text{ km/h}$ sekä $v_{\text{loppu}} = 100 \text{ km/h}$. Olkoon kiihdytykseen tarvittu aika $\Delta t = 7 \text{ s}$.

SUUNNITELMA Kysytty teho on auton energian muutos jaettuna tähän muutokseen tarvitulla ajalla. Nopeudet on sytytä muuttamaa ensin SI-yksiköihin kertoimella $\text{km/h} = \frac{10}{36} \text{ m/s}$. (Ks. esimerkki 1.4).

Liike-energian muutos on $\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{\text{loppu}}^2 - v_{\text{alku}}^2)$ ja keskimääräinen teho $P_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$.

RATKAISU Liike-energia alussa on $K_{\text{alku}} = \frac{1}{2}mv_{\text{alku}}^2 = 194 \text{ kJ}$ ja lopussa $K_{\text{loppu}} = \frac{1}{2}mv_{\text{loppu}}^2 = 540 \text{ kJ}$. Liike-energian muutos on siis $\Delta K = 346 \text{ kJ}$ ja teho $P = 49 \text{ kW}$.

ARVIOINTI Moottoreiden yhteydessä käytetään tehon yhteydessä usein vanhanaikaista yksikköä hevosvoima, joka on noin 740 W. Tarvittava teho on siis $P = 49400 \text{ W}/740 \text{ W/hv} \approx 67 \text{ hv}$. Tämä ei ole polttomoottorille vielä kovin paljon, mutta kyseessä oli tarvittavan tehon keskiarvo, ja lisäksi moottorin tehosta vain pieni osa kuluu auton liike-energian kasvattamiseen. Polttoaineen kemiallisesta energiasta vain osa voidaan muuntaa moottorissa mekaaniseksi energiaksi ja esimerkiksi ilmanvastuksen autoon kohdistama voima tekee siihen jatkuvasti negatiivista työtä, ja osa moottorin tehosta kuluu tämän työn kattamiseksi.

Yhteenveton Voima ja työ

Differentiaalit ja vektorit

- Vektorisuurite voidaan graafisesti esittää nuolina, joiden pituus kuvailee suureen suuruutta ja suunta suureen suuntaa.
- Vektorisumma voidaan esittää graafisesti piirtämällä vektoreita kuvaavat nuolet peräkkäin. Tällöin vektorien summaa esittää ensimmäisen vektorin kannasta viimeisen vektorin kärkeen piirretty nuoli.
- Vektorin \bar{A} vektorikomponentti \bar{A}_x suuntaan \hat{i} on tähän suuntaan osoittava vektori, joka ulottuu kyseisessä suunnassa yhtä pitkälle kuin vektori \bar{A} . Vektorin voi esittää eri suuntaisten vektorikompo-

nenttien summana

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z. \quad (3.81)$$

- Vektorikomponentin pituus on yhtä suuri kuin vektorin skalaarikomponentin itseisarvo kyseiseen suuntaan

$$\bar{A}_x = A_x \hat{i}. \quad (3.82)$$

Vapaakkappalekuva

- Voima** on suure, joka kuvailee vuorovaikutuksen vaikutusta kappaleen liikkeseen ja muotoon. Voimalla on suuruus ja suunta eli se on *vektorisuure*.
- Vapaakkappalekuva** on graafinen esitys, johon merkitään kaikki yhteen kappaleeseen vaikutavat voimat.

- Kappaleeseen vaikuttava **kokonaivoima** on siihen vaikuttavien voimien **vektorisumma**

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \sum_i \bar{F}_i.$$

Newtonin lait

- Jos kappaleeseen vaikuttava kokonaivoima on nolla, se liikkuu tasaisella nopeudella. Tämä on **jatkavuuden laki**.
- Kappaleen liikemääränpäätä muutosnopeus on yhtä suuri kuin siihen vaikuttava kokonaivoima

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{p}}{dt}.$$

Tämä on **dynamikan peruslaki**.

- Jos kappaleet A ja B vuorovaikuttavat ja vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen A voiman $\bar{F}_{B \rightarrow A}$, vuorovaikutus kohdistaa kappaleeseen B voiman $\bar{F}_{A \rightarrow B}$. Nämä voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen

$$\bar{F}_{A \rightarrow B} = -\bar{F}_{B \rightarrow A}.$$

Tämä on **voiman ja vastavoiman laki**.

Vuorovaikutuksia

- Elastinen muodonmuutos (kuten jousi) tuottaa voiman, joka osoittaa aina kohti tasapainopistettä ja jonka suuruus on verrannollinen pituuden muutokseen

$$\bar{F}_{\text{elastinen}} = -k(x - x_0)\hat{i}.$$

- Gravitaatio tuottaa voiman, jonka suuruus on verrannollinen kappaleiden massaan ja suunta on aina alaspäin

$$\bar{F}_{\text{gravitaatio}} = m\bar{g} = -mg\hat{i}.$$

- Pinnan tukivoima eli **normaalivoima** \bar{N} on koskettavien kappaleiden välinen voima, joka estää kappaleita liikkumasta toistensa lävitse. Normaalivoiman suunta on aina kohtisuoraan kosketuspintaa vastaan ja sen suuruus määrittyy niin, että kappale ei saa liikkua pinnan läpi.

- Liikekitka** tuottaa voiman, joka pyrkii hidastamaan pinnalla liukuvan kappaleen nopeutta *pinnan suhteen*. Liikekitkan suuruus on suoraan verrannollinen pinnan ja kappaleen väliseen normaalivoimaan sekä pintojen **liikekitkakertoimeen** μ ja sen suunta on aina vastakkainen kappaleen pinnan suhteeseen mitattuun nopeuteen nähdyn,

$$F_{\text{liikekitka}} = \mu N.$$

- Lepokitka** tuottaa voiman, joka pyrkii estämään kappaleiden välistä kosketuspintoja liikkumasta toistensa suhteeseen. Lepokitkan suuruus määrittyy ehdosta, että kappale ei saa liikkua alustansa suhteeseen. Lepokitkalla on kappaleen ja pinnan välistä normaalivoimasta sekä pintojen **lepotikitkakertoimesta** μ_{lepo} riippuva **maksimisuurius**,

$$F_{\text{lepotikitka}} \leq \mu_{\text{lepo}} N.$$

Sanasto

- voima (force)
- vapaakkappalekuva (free body diagram)
- vektorisumma (vector sum)
- vektorikomponentti (vector component)
- yhden suuntainen (parallel)
- kohtisuora (perpendicular)
- voimien superpositio (superposition of forces)
- Newtonin lait (Newton's laws)
- jatkavuuden laki (law of inertia)
- dynamikan peruslaki (Newton's equation of motion)
- voiman ja vastavoiman laki (law of action and reaction)
- jousivoima (spring force)
- Hooken laki (Hooke's law)
- jäykä kappale (rigid body)

- vaka tasapaino (stable equilibrium)
- epämääräinen tasapaino (neutral equilibrium)
- epävakaa tasapaino (unstable equilibrium)
- elastisuus (elasticity)
- plastisuus (plasticity)
- jännitys (tension)
- normaalivoima (normal force)
- lepotikitka (static friction)
- liikekitka (kinetic friction)
- kitkakerroin (coefficient of friction)
- potentiaaliakuoppa (potential well)
- työ (work)
- työ-energiatoreema (work-energy theorem)
- teho (power)

Voima, työ ja impulssi

- Vuorovaikutukseen tekemä työ mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa muutosta energiassa.
- Vuorovaikutukseen tuottama impulssi mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa muutosta liikemääressä.
- Jos kappaleeseen vaikuttaa x -suuntainen *vakiovoima* $\bar{F} = F_x \hat{i}$ ja kappale siirtyy x -suunnassa matkan Δx , voima tekee kappaleeseen *työn*

$$W = F_x \Delta x.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa x -suuntainen paikasta riippuva voima $\bar{F} = F_x \hat{i}$ ja kappale liikkuu x -suunnassa pisteestä x_{alku} pisteeseen x_{loppu} , voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx.$$

- Kappaleen liike-energian muutos on aina yhtä suuri kuin *kokonaivoiman* kappaleeseen tekemä työ

$$\Delta K = W_{\text{kokonais}}.$$

- Konservatiivinen vuorovaikutus, johon liittyy koordinaatista x riippuva potentiaalienergia $U(x)$, tuottaa voiman

$$\bar{F} = - \frac{dU}{dx} \hat{i}.$$

Tämä voima on vektori, jonka suunta on aina *pienenevän potentiaalienergian suuntaan* ja suuruus on *sitä suurempi mitä nopeammin potentiaalienergia muuttuu paikan suhteen*.

- Konservatiiviseen x -suuntaiseen voimaan $\bar{F} = F_x \hat{i}$ liittyvä potentiaalienergia on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen kuin voiman kappaleeseen tekemä työ

$$U(x) = -W_{x_0 \rightarrow x} = - \int_{x_0}^x F_x dx.$$

- **Teho** on *energian muutosnopeutta* esittävä suure

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

- Suuntaan x nopeudella v_x liikkuvaan kappaleeseen vaikuttava voima $\bar{F} = F_x \hat{i}$ tekee kappaleeseen työtä teholla

$$P = F_x v_x.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa ajasta riippuva voima aikavälillä $t_{\text{alku}} \dots t_{\text{loppu}}$, kappaleen saama *impulssi* on dynamikan peruslain mukaisesti

$$\Delta \bar{p} = \bar{I} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F} dt.$$

Impulssin x -suuntainen skalaarikomponentti saadaan vastaavasti voiman skalaarikomponentin integraalina

$$I_x = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x dt.$$

Taulukko 3.1: Voiman, työn ja impulssin ominaisuuksia. Huomaa, että koska voima ja impulssi ovat vektoreita, niiden skalaarikomponenttien merkki riippuu koordinaatistosta. Energia on skalaari, joten sen etumerkki koordinaatiston valinta ei vaikuta.

	voima	impulssi	työ
tyyppi	vektori	vektori	skalaari
yhteys voimaan	-	ajan integraali	paikan integraali
muuttaa	-	liikemäärä	energiaa
positiivinen kun	voima x -suuntaan*	voima x -suuntaan*	voima siirtymän suuntaan

*: Pätee skalaarikomponentille F_x tai I_x .

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

3.1 Jos kappaleeseen kohdistuu yksi voima (ei nolla), tämä on myös kokonaisvoima, joka siis ei ole nolla. Jos voimia on kaksi tai useampia, on aina mahdollista, että voimien summa on nolla, koska vastakkaisuuntainen voimat voivat kumota toisensa. Kaksi erisuuruista voimaa ei kuitenkaan voi kumota toisiaan. Samoin kolme yhtä suurta voimaa ei voi kumota toisiaan, jos voimat ovat yhdensuuntainen. Kuitenkin jos voimat saavat osoittaa eri suuntaan, ne voivat kumota toisensa, kunhan voimien vektorisumma on nolla.

3.2 Tasapainitiloja ovat (a) ja (b), koska näissä liikut tasaisella nopeudella (joka on paikoilla seisoessa nolla) ja sinuun kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tilat (c) ja (d) eivät ole tasapainossa. Ponnistuksessa olet kiihtyvässä liikkeessä ylöspäin, joten sinuun täytyy kohdistua kokonaisvoima ylöspäin. Tämän voiman tuottaa jalkojen ja maanpinnan välinen kosketusvuorovaikutus. Ilmalennon aikana olet puolestaan kiihtyvässä liikkeessä alas päin, koska sinuun kohdistuu painovoima. Tämä pääsee koko ilmalennon ajan ml. hypyn laki pisteessä, jossa nopeus on hetkellisesti nolla.

3.3 Kappaleeseen kohdistuvan kiihtyyden täytyy osoittaa positiiviseen x -suuntaan, joten myös kokonaisvoiman täytyy osoittaa tähän suuntaan. Siis $F_x > 0$. Jos voima on vakio, kappale on kiihtyvässä liikkeessä positiiviseen x -suuntaan myös pysähdyttäään, jolloin kappale saa siis positiivisen nopeuden, jonka itseisarvo kasvaa. Ts. kappale käantyy ympäri ja sen vauhti alkaa kasvaa.

3.4 Voima ja vastavoima kohdistuvat aina eri kappaleisiin. Jos kappaleeseen A kohdistuu voima $\bar{F}_{B \rightarrow A}$, tämän vastavoima $\bar{F}_{A \rightarrow B}$ kohdistuu kappaleeseen B. Jos nämä ovat ainot kappaleisiin kohdistuvat voimat, kappaleeseen A kohdistuu siis kokonaisvoima $\bar{F}_{B \rightarrow A}$ ja B:hen kokonaisvoima $\bar{F}_{A \rightarrow B}$ eikä näistä kumpikaan ole nolla. Voiman ja vastavoiman laki on aivan eri asia kuin tasapainoehdot!

3.5 (a) Kosketusvoima, jolla pallo painaa käyttää.

(b) Painovoima, jolla sinä vedät maata puoleesi.

(c) Kosketusvoima, jolla sinä painat maapintaan.

3.6 Tilannetta ei voi päättää kuvasta. Ponnistuksessa hyppääjän nopeus muuttuu nollasta ylöspäin osoittavaksi vektoriksi, joten hyppääjän kiihtyyysvektori osoittaa nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin. Mutta laskeutumisessa nopeus muuttuu alas päin osoittavasta nollaksi, jolloin kiihtyyysvektori osoittaa jälleen nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin. Kuva voi siis esittää sekä ponnistusta että laskeutumista. Voit todeta tämän itsekin. Tee tasajalkahyppy suoraan ylöspäin. Tunnet jalkapohjiesi puristuvan maapintaan vasten normaalialia voimakkaammin sekä ponnistuksessa että laskeutumisessa.

3.7 Jalat kohdistavat kehoon voiman ylöspäin. Tämä voima työntää kehoa ylöspäin. Keho puolestaan kohdistaa voiman ja vastavoiman lain mukaisesti jalkoihin yhtä suuren voiman alas päin. Jos tarkastelemme systeeminä koko hyppääjää, näiden voimien kokonaisvaikutus systeemiin on nolla, koska ne ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Voimat eivät siis muuta hyppääjän massakeskipisteen liikettä mitenkään. (Nämä ovat systeemin sisäisiä voimia, jotka eivät voi muuttaa systeemin kokonaislukemääräitä.) Hyppääjän massakeskipiste lähee liikkeelle ylöspäin siksi, että jalkojen painuminen maapintaan vasten voimistaa jalkojen ja maapinnan välistä kosketusvuorovaikutusta. Maapinta kohdistaa siis hyppääjän jalkoihin suuren voiman ylöspäin, ja tämä (ulkoinen) voima työntää hyppääjän liikkeelle ylöspäin.

3.8 (a) $|\bar{A} + \bar{B}|$ on sama kuin $A + B$ vain jos vektorit ovat samansuuntaiset.

(b) On. Vektorien pitää vain olla sopivassa asennossa niin, että niiden summavektori on yhtä pitkä kuin vektori \bar{A} . Esimerkiksi jos kummankin vektorin pituus on 1 ja vektorien välinen kulma on 120° , myös summavektorin pituus on 1.

3.9 Voiman A skalaarikomponentit ovat $F_{x,A} = 1.5 \text{ N}$ ja $F_{y,A} = -1.1 \text{ N}$. Voiman B skalaarikomponentit voidaan puolestaan ratkaista trigonometrialla, jolloin saadaan $F_{x,B} = (2.0 \text{ N}) \cos 150^\circ \approx -1.7 \text{ N}$ ja $F_{y,B} = (2.0 \text{ N}) \sin 150^\circ = 1.0 \text{ N}$. Kokonaisvoiman skalaarikomponentit ovat siis $F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,A} + F_{x,B} = -0.2 \text{ N}$ sekä $F_{y,\text{kokonais}} = F_{y,A} + F_{y,B} = -0.1 \text{ N}$. Kokonaisvoiman x -komponentin pituus on siis 0.2 N ja se osoittaa negatiiviseen x -suuntaan. Voiman y -komponentin pituus on puolestaan 0.1 N ja se osoittaa negatiiviseen y -suuntaan. Kokonaisvoimavektori osoittaa siis alaviistoon vasemmalle.

3.11 Nopeus on $v_x = -0.5 \text{ m/s}$, kun positiivinen suunta on ylöspäin. Tällöin potentiaalienergia muuttuu ajassa $\Delta t = 1 \text{ s}$ määritän $\Delta U / \Delta t = mg\Delta x / \Delta t = mgv_x = -4.9 \text{ J/s}$. Siis $dU/dt < 0$. Potentiaalienergia kasvaa koordinaatin x kasvaessa, joten $dU/dx > 0$. Jos x -akseli osoittaakin alas päin, potentiaalienergia pienenee koordinaatin x -kasvaessa, koska tällöin siirrytään alas päin, $dU/dx < 0$. Muutos ajan suhteeseen ei kuitenkaan muutu, koska alas päin liikkuvan kappaleen potentiaalienergia pienenee riippumatta koordinaatiston valinnasta, $dU/dt < 0$.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

3.12 Nyt $v_{x,\text{alku}} = 3.0 \text{ m/s}$ ja $a_x = -0.5 \text{ m/s}^2$. Ajassa $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ nopeuden muutos on $\Delta v_x = a_x \Delta t = -0.005 \text{ m/s}$, joten nopeus tämän ajan kuluttua on $v_{x,\text{loppu}} = 2.995 \text{ m/s}$.

(a) Liike-energian muutos on siis

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_{x,\text{loppu}}^2 - v_{x,\text{alku}}^2) = -0.0149875 \text{ J}. \quad (3.83)$$

(b) Tämän suhde ajan muutokseen on

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = -1.49875 \text{ J/s}. \quad (3.84)$$

(c) Yhtälön (3.19) mukaan

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} \approx \frac{dK}{dt} = mv_x a_x. \quad (3.85)$$

Jos nopeudelle käytetään sen alkuarvoa $v_{x,\text{alku}} = 3.0 \text{ m/s}$, yhtälö antaa suhteeksi -1.5 J/s . Jos nopeudelle käytetään sen kesiarvoa tarkasteltavalla aikavälillä, $v_{x,\text{kesiarvo}} = 2.9975 \text{ m/s}$, suhteeksi saadaan -1.49875 J/s eli täsmälleen sama tulos kuin kohdassa (b).

3.13 Voiman kuvaaja on laskeva suora, kun kappaleeseen kohdistuu jousen tuottama voima, sillä tämän voiman suuruus riippuu jousen puristumasta ja siten myös kappaleen paikasta. Kun kappale kohoaa tarpeeksi korkealle, siihen kohdistuu enää painovoima, joka on vakio. Tällöin voiman kuvaaja on suora. Potentiaalienergian kuvaajassa tämä näkyy niin, että kun voiman kuvaaja on laskeva suora, potentiaalienergian kuvaaja on ylöspäin aukseava paraabeli. Kun voiman kuvaaja on vaakasuora, potentiaalienergian kuvaaja on suora.

3.14 Energian nollakohta ei voi vaikuttaa voimaan, koska painovoiman suuruus ei riipu siitä, miten valitsemme koordinaatiston. Se on aina vakio. Potentiaalienergia sen sijaan riippuu siitä, kuinka korkealle kappale nostetaan, joten se riippuu kiintopisteen valinnasta. Matemaattisesti kyse on siitä, että vaikka potentiaalienergiaan U lisättäisiin mikä tahansa vakio, tämä vakio ei vaikuta potentiaalienergian derivaattaan eli voimaan.

3.16 Jos jousivakio on suuri, voiman kuvaaja on jyrkästi laskeva suora ja potentiaalienergian kuvaaja kapea, jyrkkäreunainen paraabeli. Tällöin jousi on jäykki. Jos jousta venytetään liikaa, se ei enää käyttäydy elastiisti. Tällöin jousi ei vastusta enää venytystä voimalla, joka kasvaa pituuden lisääntyessä, vaan venytystä vastustava voima on tyypillisesti Hooken lain ennustamaa voimaa pienempi, mahdollisesti jopa jousen pituudesta riippumaton vakio. Voiman kuvaaja on siis laskeva suora vain tarpeeksi pienillä venymillä ja suurilla venymillä se voi muuttua esimerkiksi vaakasuuraksi.

3.17 Ero johtuu kappaleen muodosta. Jousessa tanko muodostaa spiraalin, ja kun jousta puristetaan kokoon, spiraalin muodostava terästanko kiertyy mutta ei puristu kasaan. Teräs vastustaa puristusta voimakkaasti mutta kiertoa ja taivutusta paljon heikomin. Samasta syystä esimerkiksi paperiarkki on helppo repiä ottamalla kiinni arkin yhdestä reunasta kahdesta kohdasta ja vetämällä eri suuntiin, koska paperi ei pysty vastustamaan tälläistä leikkavaaa repimistä kovin hyvin. Paperia on sen sijaan vaikea repiä ottamalla kiinni arkin vastakkaisista reunista ja vetämällä näitä reunuja erilleen, koska paperi vastustaa venytystä voimakkaasti.

3.18 Merkitään köyden yläpähän kohdistuvaa vetävästä voimaa \bar{F}_A ja keskikohtaan kohdistuvaa voimaa \bar{F}_B . Jos köyden massa on hyvin pieni, voimme jättää köyteen kohdistuvan painovoiman huomioimatta ja köyteen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla likimain nolla. Niinpä köyden alapähän täytyy kohdistua voima $\bar{F} = -\bar{F}_A - \bar{F}_B$. Köyden alapäässä kiinni olevaan kappaleeseen kohdistuu siis voima $-\bar{F} = \bar{F}_A + \bar{F}_B$. Köysi siis välittää molemmat sitä ylöspäin vetävät voimat sen päässä roikkuvaan kappaleeseen.

3.19 (a) Kappale ei saa pudota hissin lattian läpi, joten kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla ja normaalivoiman täytyy kumota kappaleeseen kohdistuva painovoima. Siis $N_x = -G_x = -mg = 9.8 \text{ N}$, kun valitaan x -akseli ylöspäin.

(b) Kappaleeseen täytyy kohdistua kokonaisvoima $F_x = N_x + G_x = ma_x = 1.0 \text{ N}$ ylöspäin. Siispä normaalivoiman pitää olla painovoimaa suurempi, $N_x = F_x - G_x = 10.8 \text{ N}$.

(c) Jos hissi liikkuu tasaisella nopeudella, kappale on tasapainossa ja siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Tilanne on siis sama kuin kohdassa a, $N_x = 9.8 \text{ N}$.

(d) Laskussa kappaleeseen kohdistuu kokonaisvoima $F_x = ma_x = -3.0 \text{ N}$. Siispä normaalivoima on pienempi kuin painovoima, $N_x = 6.8 \text{ N}$.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

3.20 (a) Liikettä muuttaa jalan ja maanpinnan välinen lepokitkavoima. Voiman lautailijaan kohdistaa siis maapinta. Voiman suunta on eteenpäin, jos jalalla työnnetään taaksepäin, sillä lepokitka estää jalkaa liukumasta maapinnan suhteeseen. Voiman suuruus voitaisiin päätellä mittaamalla lautailijan kiilthyvyyts.

(b) Jarrutuksessa vaikuttaa liikekitka lautailijan kengän ja pyörän välillä (koska pyörä edelleen pyörii ja pyörän pinta siis liikkuu kengän pinnan suhteeseen) sekä lepokitka pyörän ja maapinnan välillä (sillä pyörä ei liu'u maapinnan suhteeseen vaan vierii). Valitaan systeemiksi pyöräiliä ja potkulauta. Kengän ja pyörän välinen liikekitka on dissipatiivinen vuorovaikutus, joka muuttaa systeemin liike-energiaa lämpöenergiaksi. Se on kuitenkin systeemin sisäinen vuorovaikutus, joten se ei voi muuttaa systeemin liikemääriä. Systeemin liikemääriä muuttaa pyörän ja maapinnan välinen lepokitka, joka on ulkoinen vuorovaikutus. On ehkä yllättävää, että energian ja liikemäären muutokset johtuvat eri voimista, mutta mieti mitä tapahtuu, jos potkulauta rullaisi hyvin liukkaalla jällä, jolla renkaan ja maapinnan välillä ei ole juurikaan kitkaa. Tällöin jarruttaminen pysäytäisi kyllä renkaan pyörimisen (tämä muuttaa liike-energiaa lämpöenergiaksi), mutta lautailija itsessään jatkaisi matkaansa suoraan jällä liukuen, koska systeemin sisäinen vuorovaikutus ei voi muuttaa systeemin liikemääriä.

3.21 Kappaleeseen kohdistuu voima $F_x = mg = 9.8 \text{ N}$.

(a) Voima antaa impulssin $I_x = F_x \Delta t = 9.8 \text{ Ns}$.

(b, c) Liikemäären muutos on sama kuin impulssi, $\Delta p_x = I_x = 9.8 \text{ Ns}$. Tämä ei riipu alkunopeudesta.

3.22 (a, b) Vakivoiman työ on voiman ja sen vaikutuspisteen voiman suuntaisen siirtymän tulo, $W = F_x \Delta x = mg \Delta x = 9.4 \text{ J}$. Tämä ei riipu siitä, kuinka nopeasti prosessi tapahtuu.

(c, d) Jos nostat kymmenen kappaletta, teet kymmenkertaisen työn, $W = 94 \text{ J}$.

(e) Jos voiman vaikutuspiste ei liiku, työtä ei tehdä, $W = 0 \text{ J}$. Kannattelu kyllä väsyttää, mutta tämä johtuu siitä, että jännitetty lihakset joutuvat käyttämään kemiallista energiaa myös staattisessa rasituksessa. Energia ei kuitenkaan tällöin muutu kannateltavan kappaleen potentiaalienergaksi vaan lihasten lämpöenergaksi, joten kappaleeseen ei tehdä työtä.

3.23 (a) Koska pallon kokonaisenergian muutos on 3 J , palloon tehdyn työn täytyy olla myös 3 J .

(b) Painovoima tekee palloon työn -1 J . Tämä työ siis vähentää pallon liike-energiaa yhden joulen ja muuttaa sen painovoiman potentiaalienergaksi, jolloin potentiaalienergia lisääntyy yhden joulen.

(c) Pallo tekee heittäjään työn -3 J . Tämän työn tekee heittäjän palloon kohdistaman voiman vastavoima (palloon heittäjän käteen kohdistama voima).

(d) Heittäjään varastoitunutta kemiallista energiota muuttuu lämpöenergaksi ja heittäjän käden liike-energaksi. Kolme joulea energiota siirtyy myös heittäjästä palloon. Työ mittaa juuri tästä energian siirtymää. Koska pallo saa heittäjältä energian, heittäjä tekee palloon positiivisen työn, ja koska heittäjä luovuttaa energian palolle, pallo tekee heittäjään negatiivisen työn.

(e) On, likimain. Energiaa siirtyy heittäjältä palolle, mutta systeemin kokonaisenergian määrä ei muudu. Tämä ei ole täsmälleen totta, koska systeemistä voi siirtyä energiota esimerkiksi äänenä ja lämpönä ympäröivään ilmaan.

3.24 Kun voima on vakio, kappale on tasaisesti kiilthyvässä liikkeessä.

(a) Impulssi on voiman integraali ajan suhteeseen, ja kun voima on vakio, impulssi kasvaa lineaarisesti ajan kuluessa, $I_x = F_x t$. Kuvaaja on siis origon kautta kulkeva nouseva suora, jonka kulmakerroin on F_x .

(b) Kappaleen paikka on $x = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2$, joten pisteesseen x pääsyn kuluu aikaa $t = \sqrt{2mx/F_x}$ ja impulssi on $I_x = \sqrt{2mF_x x}$. Kuvaaja on siis neljöjuuren kuvaajan muotoinen (sivulle aukeava paraabeli).

(c) Kappaleeseen tehty työ on suoraan verrannollinen siirtymään, joten $W = F_x x$ ja kuvaaja on nouseva suora.

(d) Työn riippuvuus ajasta on nyt $W = \frac{1}{2} \frac{F_x^2}{m} t^2$, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

3.25 (a) Tuottaa. Impulssi on voiman integraali ajan suhteeseen, ja maapinta kohdistaa lautaan voiman. Jos lauta on alussa ja lopussa paikoillaan, sen liikemäären muutos on nolla. Painovoima tuottaa lautanan prosessin aikana impulssin alas päin, joten normaalivoiman täytyy tuottaa impulssi ylöspäin niin, että kokonaisimpulssi on nolla.

(b) Ei tee. Jos lattia ei jousta ja lauta liikkuu aina pinnan suuntaan nähdien kohtisuoraan, voima ja laudan siirtymän suunta ovat koko ajan toisiinsa nähdien kohtisuorassa. Voiman komponentti liikkeen suunnassa on siis aina nolla eikä voima tee työtä. Tämä tarkoittaa sitä, että lautan tekee työtä vain painovoima, ja tämä työ muuttaa painovoiman potentiaalienergiaa laudan liike-energaksi ja takaisin.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

3.26 Integroidaan voima paikan suhteen. Jos valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi tasapainopiste x_0 , saadaan

$$U(x) = - \int_{x_0}^x -k(x-x_0)dx = \left|_{x_0}^x \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\right| = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2. \quad (3.86)$$

Tämä on harmonisen potentiaalienergian lauseke kuten pitääkin. Jos potentiaalienergian nollkohta ei ole tasapainopisteessä, potentiaalienergia on

$$U(x) = - \int_{x_1}^x -k(x-x_0)dx = \left|_{x_1}^x \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\right| = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2. \quad (3.87)$$

Nyt energia tasapainopisteessä on $U(x_0) = -\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$, joten voidaan kirjoittaa

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2. \quad (3.88)$$

Tämä on harmonisen potentiaalienergian yleisempi lauseke, jossa huomioidaan se, ettei energian tarvitse välttämättä olla tasapainopisteessä nolla.

3.27 (a) Nostava voima tekee työn $W_F = F_x \Delta x = 15.0 \text{ J}$.

(b) Painovoima tekee työn $W_G = G_x \Delta x = -9.8 \text{ J}$.

(c) Kokonaisvoima tekee työn $W = W_F + W_G = 5.2 \text{ J}$.

(d) Potentiaalienergian muutos on $\Delta U = -W_G = 9.8 \text{ J}$.

(e) Liike-energian muutos on $\Delta K = W = 5.2 \text{ J}$.

(f) Potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin painovoiman tekemän voiman työ, mutta vastakkaismerkkinen. Tämä johtuu siitä, että painovoima muuttaa kappaleen liike-energiaa vuorovaikutuksen potentiaalienergiaksi. Liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien tekemä työ yhteenä.

3.29 (a) Laatikko saa energiaa siihen tehdyn työn verran, 100 J .

(b) Kitka kuluttaa mekaanista energiaa -80 J .

(c) Liike-energian muutos on näiden summa, 20 J .

(d) Työntäjä menettää sisäenergiaa (kemiallista energiota) 100 J ja laatikko sekä lattia saavat sisäenergiaa (lämpöenergiaa) 80 J . Koko systeemin sisäenergia siis vähentyy 20 J . Tämän verran systeemin liike-energia kasvoo, joten kokonaisenergia on vakio.

3.30 (a) Maksimivauhdilla kaikki työntävän voiman tekemä työ kuluu kitkan kautta lämpöenergiaksi, jolloin liike-energia on vakio. Kitkan teho on $P = F_x v_x$, ja tämän pitää olla siis itseisarvoltaan 740 W . Maksimineopeus on siis $v_x = 9.25 \text{ m/s}$.

(b) Kun laatikko ei vielä liiku, siihen tehdään työtä teholla nolla riippumatta voiman suuruudesta. Työtä aletaan kuitenkin tehdä välittömästi, kun laatikko alkaa liikkua.

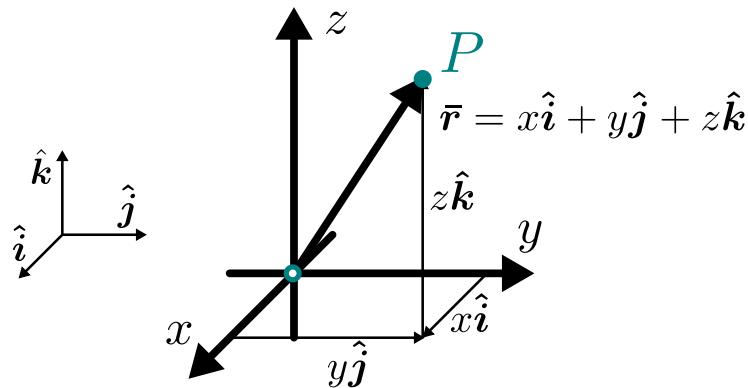
4 Moniulotteinen liike

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain suoraviivaista liikettä yhdessä ulottuvuudessa. Todellisuudessa kappaleet tieteenkin yleensä liikkuvat useammassa ulottuvuudessa. Onneksi tähän mennessä esitellyt fysikaaliset konseptit — energia, liikemäärä, voima, työ ja impulssi — toimivat useammassa ulottuvuudessa täsmälleen samoin kuin yhdessäkin ja kappaleiden liukkeen kuvaus onnistuu niiden avulla. Suurin muutos siirryttääessä useaan ulottuvuuteen tapahtuukin ilmiöiden matemaatisessa kuvauksessa, sillä kolmiulotteisessa avaruudessa vektorisuurteiden kuten nopeuden, liikemäären ja voiman suunnat on välttämättä huomioitava. Olemme jo tutustuneet vektoreiden graafiseen käsittelyyn sekä vektorien esittämiseen komponenttien avulla. Tässä luvussa täydennämme kolmiulotteisessa avaruudessa tarvittavia vektorimatematiikan työkaluja esittämällä vektorit kolmiulotteisessa koordinaatistossa ja ottamalla käyttöön vektorien pistetulon.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- esittää vektorit komponenttina sekä laskea vektoreiden summa ja pistetulo karteesisessa koordinaatistossa
- ratkaista kappaleen liikerata useassa ulottuvuudessa, kun kappaleeseen vaikuttavat voimat tunnetaan ajan funktiona
- määritää kappaleiden liike törmäyksessä
- määritää kappaleeseen vaikuttava voima, kun sen potentiaalienergia tunnetaan
- määritää kappaleeseen tehty työ, kun siihen vaikuttava voima tunnetaan paikan funktiona

Kuva 4.1: Karteesinen xyz -koordinaatisto sekä sen yksikkövektorit. Pisteen P paikkavektori on origosta pisteeseen osoittava vektori, joka voidaan esittää koordinaattiakselien suuntaisten komponenttien summana.



4.1 Kolmiulotteinen avaruus

Klassisessa mekaniikassa avaruutta pidetään muuttumattomana tyhjänä tilana, joka sisältää maailmankaikkeuden. Tämä avaruus on passiivinen näytämö, joka ulottuu tasaisesti äärettömyyksiin kolmessa ulottuvudessa ollen kaikkialla samanlainen. Matemaattisesti tällaista tilaa sanotaan *kolmiulotteiseksi euklidiseksi avaruudeksi* (muunaisen kreikkalaisen matemaatikon Eukleideen mukaan), ja siinä pätevät koulusta tutut (euklidisen) geometrian säännöt, kuten että kolmion kulmien summa on 180° . Modernin fysiikan mukaan juuri mitkään näistä oletuksista eivät ole täysin oikeat — avaruus ei todennäköisesti ole passiivinen, muuttumaton, tyhjä, tasainen eikä vältämättä edes kolmiulotteinen. Nämä poikkeamat intuitiivisesti tutusta avaruuden käsitteestä kolmiulotteisena tilana ovat kuitenkin ihmisen mittakaavassa täysin mahdottomia havaita, joten klassisessa mekaniikassa avaruutta voidaan pitää tyhjänä ”laatikkona”.

Avaruuden kolmiulotteisuus sen sijaan on keskeinen ominaisuus myös klassisessa mekaniikassa. Kappaleet eivät liiku aina suoraa pitkin, ja onkin välttämätöntä laajentaa aiemmissa luvuissa käsitelty yksiuotiteinen fyysiskka kolmeen ulottuvuuteen. Onneksi kaikki tähän asti käsitellyt konseptit toimivat useassa ulottuvuudessa aivan samoin kuin yhdessäkin. Karkeasti sanoen kaikki tähän mennessä esitellyt skalarisuureita käsittelevät lait kuten energian säilymislaki toimivat kolmessa ulottuvuudessa aivan samoin kuin yhdessäkin. Myös vektorisuureita sisältävien lakienvälinen merkitys on sama ulottuvuuksien määrästä riippumatta. Esimerkiksi voiman tekemä työ kuvailee edelleen vuorovaikutuksesta johtuvaa energian muutosta. Joidenkin tällaisten suureiden matemaattista kuvausta täytyy kuitenkin laajentaa ottamaan huomioon tapaukset, joissa kaikki ei enää tapahdukaan yhdellä suoralla.

Karteesinen koordinaatisto

Jo yksiuotiteisen lükkeen tapauksessa koordinaatiston käyttö osoittautui erinomaiseksi työkaluksi. Tähän kuului positiivisen suunnan sekä kiintopisteen eli origon valinta, jonka jälkeen esimerkiksi kappaleiden paikka voitiin määritellä yksikäsitteisesti origon suhteeseen mitatan koordinaatin avulla. Lisäksi koordinaatistossa vektorisuureet kuten nopeus voitiin näppärästi ilmoittaa niiden skalaarikomponentin ja positiivista suuntaa edustavan yksikkövektorin avulla. Paikan kuvaaminen kolmiulotteisessa avaruudessa tapahtuu täsmälleen samalla periaatteella, mutta nyt toisistaan riippumattomia suuntia on kolme. Nämä suunnat voidaan valita monin tavoin, ja riippuu systeemin geometriasta, millainen valinta on hyödyllisin. Yksinkertaisin kolmiulotteinen koordinaatisto on kuitenkin sellainen, jossa positiivisiksi suunniksi valitaan kolme toisiinsa nähden kohtisuora, muuttumatonta suuntaa. Näitä suuntia kutsutaan tavallisesti x -, y - ja z -suunniksi ja niiden suuntaisia yksikkövektoreita merkitään usein symbolilla \hat{i} , \hat{j} sekä \hat{k} . Tällaista koordinaatistoa kutsutaan **karteesiseksi koordinaatistikksi** (René Descartesin mukaan).

Kolmiulotteisessa avaruudessa pisteen P paikkaa kuvaavat kolme koordinaattia (x, y, z) , ja ne ilmaisevat kuinka pitkä matka origosta pitää siirtää positiivisiin x -, y - ja z -suuntiin, jotta saavuttaisiin pisteesseen P . Kuten yhdessä ulottuvuudessa, esimerkiksi koordinaatti x on positiivinen, jos pisteesseen P päästääni siirtymällä positiiviseen x -suuntaan, ja negatiivinen, jos siirtymä täytyy tehdä negatiiviseen x -suuntaan. Koordinaatin itseisarvo ei kuitenkaan kolmessa ulottuvuudessa ole sama asia kuin *etäisyys origosta*, koska pisteesseen P pääsemiseksi voidaan joutua siirtymään myös y - ja z -suunnissa. Koordinaatin x itseisarvo ilmaiseekin x -suuntaisen etäisyyden yz -tasosta eli siitä tasosta, johon origosta päästääni siirtymättä lainkaan x -suunnassa.

Koordinaatit voidaan määritellä myös pisteen P paikkavektorin \vec{r} avulla. Kyseessähan oli vektori, joka osoittaa origosta kyseiseen pisteeseen. Paikkavektori voidaan jakaa komponentteihin koordinaatiston mää-

rittelemissä suunnissa

$$\bar{r} = \bar{r}_x + \bar{r}_y + \bar{r}_z, \quad (4.1)$$

ja nämä komponentit esittävät eri suuntaisia siirtymiä, jotka johtavat yhdessä origosta pisteeeseen P . Vektorikomponenttien esittelyn yhteydessä kuitenkin todettiin, että vastaavat *skalaarikomponentit* kertovat itseisarvoltaan vektorikomponenttien pituuden ja etumerkillään niiden suunnan yhtälön (3.12) mukaisesti. Koordinaatit ilmaisevat siirtymien pituutta ja suuntaa juuri tällä tavalla, joten *koordinaatit ovat paikkavektorin skalaarikomponentit*

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (4.2)$$

Tämä on yhtälön (1.17) suora yleistys kolmeen ulottuvuuteen.

Pisteen P etäisyys origosta on paikkavektorin pituus eli itesisarvo. Koska koordinaatiston suunnat ovat toisiaan vastaan kohtisuorat, tämä pituus voidaan laskea geometrisesti. Vektorin pituus vastaa nimittäin sellaisen suorakulmaisen särmiön lävistäjän pituutta, jonka sivujen pituudet ovat x , y ja z . Jakamalla geometria sopivasti kolmioihin ja käyttämällä Pythagoraan lausetta saadaan tulokseksi

$$r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.3)$$

Edellä esitettyt tulokset voidaan kaikki johtaa alkeisgeometriasta, sillä vektorit ja koordinaatit mittasivat todellisia fysiikaalisia pituuksia. Kuitenkin samat tulokset pätevät *mille tahansa* vektoreille niiden yksiköistä riippumatta. Mikä tahansa vektorisuhde \bar{A} voidaan jakaa komponentteihin

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad (4.4)$$

ja vektorin pituus voidaan laskea skalaarikomponenteista

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (4.5)$$

Voidaan ajatella, että geometria on koordinaatiston ja sen suuntia ilmaisevien yksikkövektorien ominaisuus. Fysiikaliset yksiköt sisältävät vektorien skalaarikomponentteihin eivätkä vaikuta geometriasta johdettuihin laskusääntöihin.

esimerkki 4.1

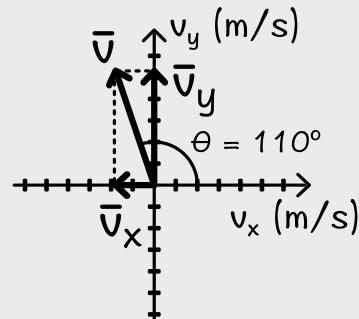
Vektorikomponentit

Kappale liikkuu suoraa pitkin xy -tasossa. Kappaleen vauhti on 5.5 m/s ja sen liikesuunnan sekä x -akselin välinen kulma on 110° vastapäivään x -akselista mitattuna. Mitkä ovat kappaleen nopeuden karteesiset skalaari- ja vektorikomponentit?

TILANNE Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään kappaleen nopeutta \bar{v} ja tehtävässä mainittua kulmaa θ .

SUUNNITELMA Nopeusvektorin komponentit x - ja y -suunnissa voidaan päättellä geometrisesti. Koska nopeus suuntautuu koordinaatistossa ylävasemmalle, nopeuden x -skalaarikomponentti on oltava negatiivinen ja y -komponentti positiivinen. Koska liike tapahtuu xy -tasossa, z -komponentti on ilmeisesti nolla.

RATKAISU Nopeuden skalaarikomponentti x -suunnassa on trigonometristen funktioiden yksikköympyrämääritelmän perusteella $v_x = v \cos \theta$ ja vastaavasti y -suunnassa $v_y = v \sin \theta$. Vastaavasti vektorikomponentit ovat $\bar{v}_x = v_x\hat{i} = v \cos \theta \hat{i}$ sekä $\bar{v}_y = v_y\hat{j} = v \sin \theta \hat{j}$. Lukuarvojen sijoitus antaa skalaarikomponenteiksi $v_x = -1.9$ m/s sekä $v_y = 5.2$ m/s.



ARVIOINTI Komponenteilla on oikeat etumerkit ja ne ovat molemmat itesisaroltaan pienemmät kuin vauhti v , kuten pitääkin. Püretyn kuvan perusteella skalaarikomponenteille lasketut arvot myös vaikuttavat järkeviltä. Voidaan vielä tarkistaa, että komponentteihin jaetun vektorin pituus on oikein, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5.5$ m/s.

Kuten luvussa 3.3 vektoreiden geometristen laskusääntöjen yhteydessä huomattiin, vektoreilla laskeminen on yleensä helpompaa komponenteittain. Tällöin rajoituttiin yksinkertaisuuden vuoksi kaksiulotteisiin esimerkkeihin. Kolmiulotteisessa avaruudessa geometriaan perustuva vektorien käsiteily on usein suorastaan mahdotonta ja jako komponentteihin on monesti ainosa järkevä tapa laskea vektoreilla. Esimerkiksi vektorien yhteenlasku onnistuu komponenteittain, jolloin summavektorin skalaarikomponentit saadaan laskemalla summattavien skalaarikomponentit yhteen

$$\bar{A} + \bar{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}. \quad (4.6)$$

Toisin sanoen vektorien yhteenlasku voidaan laskutoimituksena hoitaa yksinkertaisesti laskemalla erikseen yhteen vektorien x -, y - ja z -skalaarikomponentit.



4.1 Kappaleeseen vaikuttaa kaksi voimaa, A ja B. Voima A on suuruudeltaan 3.0 N ja osoittaa positiivisen x -akselin suuntaan. Voima B on suuruudeltaan 4.0 N ja osoittaa suuntaan, joka on 60° x -akselista negatiivisen y -akselin suuntaan. Mikä on kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima komponenttein esitetynä?

Edellä avaruuden piste esitettiin kahdella eri tavalla, koordinaatein (x, y, z) sekä paikkavektorin $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ avulla. Molemmissa esityksissä on täsmälleen yhtä paljon informaatiota ja kolmiulotteisen vektorin voikin aivan hyvin esittää matemaattisesti lukukolmikkona. Samaan tapaan minkä tahansa vektorin \bar{A} voi kuvata kolmikkona (A_x, A_y, A_z). Matematiikassa tällainen vektorin esitys lukujoukkona on tavallinen ja käytännöllinen, koska matemaattisilla vektoreilla voi olla kuinka monta komponenttia tahansa. Fysiikassa kuitenkin käytetään yleensä avaruuden vektoreiden esittämisessä yksikkövektoreita, koska avaruuden vektoreiden komponenttiesitys riippuu käytettävästä koordinaatistosta, ja joskus on tarpeellista käyttää saman tilanteen analyysissa erilaisia koordinaattijärjestelmiä. Tällöin yksikkövektoreilla voidaan ilmaista mitä koordinaatistoa kulloinkin käytetään.



4.2 Määritellään kaksi tason koordinaatistoa, xy ja $x'y'$, joista jälkimmäistä on kierretty 45° vastapäivään ensimmäisen suhteeseen. Koordinaatistojen yksikkövektorit ovat \hat{i}, \hat{j} ja \hat{i}', \hat{j}' . Mikä on vektorin $\bar{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ komponenttiesitys toisessa koordinaatistossa?

4.2 Dynamikka

Luvussa 1 opimme määrittelemään kiihtyvyyden sekä laskemaan nopeuden ja siirtymän yhdessä ulottuvuudessa kiihtyvyyden integraaleina (1.12) ja (1.25). Toisaalta luvussa 3 esitellyn dynamiikan peruslain (3.3) mukaan kiihtyvyys on verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan voimaan. Yhdistämällä nämä tulokset on periaatteessa mahdollista ratkaista kappaleen paikka, kun kappaleeseen vaikuttavat voimat tunnetaan. Käytännössä tehtävä on kuitenkin vaikea, koska kappaleeseen vaikuttava voima voi riippua monesta tekijästä kuten ajasta, kappaleen paikasta tai nopeudesta sekä *muiden* kappaleiden paikoista. Itse asiassa osoittautuu, että jo kolmen keskenään vuorovaikuttavan kappaleen systeemi on joitakin erikoistapauksia lukuunottamatta mahdoton ratkaista analyttisesti (eli ratkaisua ei voi kirjoittaa yksinkertaisena funktiona — ratkaisu onnistuu toki numeerisesti tietokoneella). Kuitenkin sünä erikoistapauksessa, että kappaleeseen vaikuttavat voimat riippuvat *vain ajasta*, kappaleen lükerata voidaan laskea samaan tapaan kuin yhdessäkin ulottuvuudessa.

Heittoliike

Ideaalinen heittoliike eli **ballistinen liike** on vapaan pudotuksen yleistys useampaan ulottuvuuteen. Luvussa 1.5 vapaa pudotus määriteltiin liikkeeksi, jossa kappaleella on vakiokihtyvyys \bar{g} alas päin. Samassa yhteydessä todettiin, että myös ylöspäin heitetty kappale on vapaassa pudotuksessa, sillä senkin *kiihtyvyys* on vakio ja osoittaa alas päin, vaikka nopeus suuntautuisikin ylöspäin. Putoavan kappaleen kiihtyvyyden aiheuttaa tietenkin gravitaatio, joka kohdistaa kappaleeseen painovoiman. Painovoima vaikuttaa kappaleeseen aina ja sen suuruus ja suunta ovat samat riippumatta kappaleen nopeuden suunnasta. Aivan samalla perusteella myös viistoon heitetty kappale on vapaassa pudotuksessa, sillä jos ilmanvastus ei ole merkittävä, kappaleeseen vaikuttaa ainoastaan painovoima ja kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alas päin. Ainoa ero pystysuoraan liikkeeseen nähdyn on nyt vain se, että kappaleella on nopeutta myös vaakasuunnassa eli voimaa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa pallo heitetään jollakin alkunopeudella v_{alku} kulmassa θ vaakatasoon nähdien. Kappaleen liikkeen kuvamisessa ensimmäinen askel on koordinaatiston käännittäminen, ja se kannattaa tehdä nyt niin, että x -suunta osoittaa vaakasuoraan kappaleen liikkeen suuntaan ja y -suunta on ylöspäin (kuva 4.2). Kappaleen kiihtyvyys on tällöin liikkeen aikana vakio

$$\bar{a} = -g\hat{j}, \quad (4.7)$$

ja kappaleen alkunopeus voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa

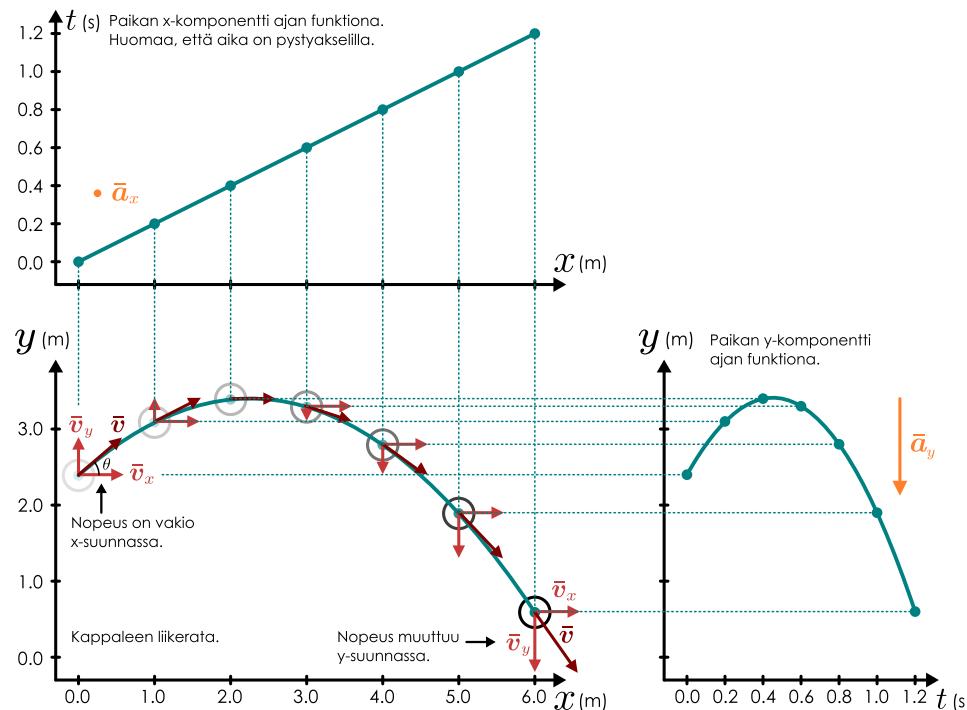
$$\bar{v}_{\text{alku}} = v_{x,\text{alku}}\hat{i} + v_{y,\text{alku}}\hat{j} = (v_{\text{alku}} \cos \theta)\hat{i} + (v_{\text{alku}} \sin \theta)\hat{j}. \quad (4.8)$$

Näiden tietojen avulla voidaan ratkaista kappaleen nopeus ajan funktiona. Ensinnäkin, koska kappaleella ei ole kiihtyvyyttä vaakasuunnassa, sen *vaakasuuntainen nopeus ei muutu*. Kappale liikkuu siis x -suuntaan vakionopeudella

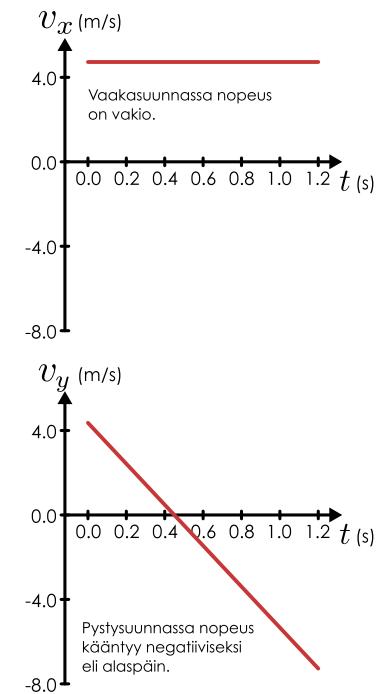
$$v_x = v_{x,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \cos \theta. \quad (4.9)$$

Pystysuunnassa kappaleen kiihtyvyys on vakio, joten *pystysuuntainen nopeus muuttuu täsmälleen samoin kuin suoraan ylöspäin heitettyllä kappaleella*: aluksi kappaleen nopeuden pystykomponentti on positiivinen

Kuva 4.2: Heittoliikkeen analyysi liikkeen komponenttiaon avulla.

(a) Ratkaistaan nopeus ja paikka erikseen x - ja y -suunnissa liikeradan selvittämiseksi.

(b) Nopeuden skalaarikomponentit.



eli kappale liikkuu ylöspäin. Koska kappaleella on kiihtyvyyttä alas päin, pystysuuntainen nopeus kuitenkin pienenee jatkuvasti ja nopeus käännytää pian alas päin. Nopeuden skalaarikomponenttia kuvaavat yhtälö (1.28) eli

$$v_y(t) = v_{y,\text{alku}} + \int_0^t a_y dt = v_{\text{alku}} \sin \theta - gt. \quad (4.10)$$

Nopeuksien komponenttien avulla voidaan edelleen ratkaista kappaleen paikkakoordinaatit. Nopeuden kuin komponentti nimittäin ilmaisee vastaan paikkakoordinaatin muutumisvauhtia, joten koordinaatit saadaan Nopeuden skalaarikomponenttien integraaleina yhtälön (1.12) mukaisesti. Vaakasuunnassa nopeus on vakio, joten siirtymä on suoraan verrannollinen siihen käytettyyn aikaan

$$x(t) = x_{\text{alku}} + v_{x,\text{alku}} t. \quad (4.11)$$

Pystysuunnassa vastaavasti

$$y(t) = y_{\text{alku}} + v_{y,\text{alku}} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4.12)$$

Kappaleen rata muodostaa siis paraabelin kuten kuvasta 4.2 (a) ilmenee.

Kappaleen nopeusvektoria kuvaava nuoli voidaan muodostaa piirtämällä ensin nopeuden vektorikomponentit x - ja y -suunnissa, jolloin varsinainen nopeusvektori on näiden summavektori. Kuvan 4.2 (a) liikediagrammiin on piirretty nopeusvektori sekä nopeuden komponentit koordinaattiakselien suunnassa muutamina ajan hetkinä. Nopeuden x -komponentti on vakio, joten vaakasuora komponentti on aina yhtä pitkä. Nopeuden y -komponentti sen sijaan osoittaa ensin ylöspäin ja käännytää sitten osoittamaan alas päin, koska kappaleen kiihtyvyys on alas päin. Kiihtyvyshän osoittaa suunan, johon nopeus muuttuu. Nopeusvektori itsessään on aina *radan tangentin suuntaisen*. Tämä ei ole vain heittoliikkeen ominaisuus vaan tämä on aina totta, sillä *nopeusvektori osoittaa suuntaan, johon kappale liikkuu*.

4.3 Hiihtäjä laskee alas mäkeä, jonka muoto muistuttaa ylöspäin aukeavaa paraabelia. Hiihtäjän vauhti on likimain vakio alamäen käännyessä ylämäeksi (eli hänen ollessaan paraabelin pohjalla). (a) Muuttuuiko hiihtäjän nopeuden suunta laskun tässä pisteessä? (b) Miten hiihtäjän nopeuden komponentit muuttuvat? (c) Millainen on hiihtäjän kiihtyvyysvektori? (d) Millainen on hiihtäjään kohdistuva kokonaisvoima?

esimerkki 4.2

Kantama

Missä kulmassa pallo tulee heittää, jotta sen kantama olisi mahdollisimman pitkä, jos pallon lähtövauhti ei riipu heittokulmasta? Oletetaan, että ilmanvastus on pieni ja että pallo lähee likimain maanpinnan tasolta.

TILANNE Merkitään pallon lähtökulmaa θ ja sen lähtönopeutta \bar{v}_{alku} . Valitaan koordinaatisto siten, että pallo liikkuu xy -tasossa, x -akseli on vaakasuuntainen ja y -akseli pystysuuntainen. Asetetaan origo pallon lähtöpisteeeseen.

SUUNNITELMA Jos ilmanvastusta ei huomioida, pallo on vapaassa pudotuksessa. Tällöin sen liike x -suunnassa on tasaisia ja y -suunnassa tasaisesti kiihtyvä. Pallon kantama on sen x -suunnassa kulkema matka ennen osumista maahan eli ennen kuin pallon y -koordinaatti saa arvon nolla. Pisin kantama löydetään etsimällä tämän maksimi lähtökulman suhteeseen esimerkiksi derivaatan nollakohtia tutkimalla.

Pallon alkunopeuden komponentit ovat $v_{x,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \cos \theta$ ja $v_{y,\text{alku}} = v_{\text{alku}} \sin \theta$. Pallon koordinaatit saadaan yhtälöistä (4.11) ja (4.12).

Pallo osuu maahan hetkellä t_{loppu} , jolle pätee $y(t_{\text{loppu}}) = 0$ m. Kappaleen siirtymä x -suunnassa on silloin $s = x(t_{\text{loppu}})$.

RATKAISU Pallon maahanosumishetki ratkeaa yhtälöstä $y(t_{\text{loppu}}) = v_{\text{alku}} t_{\text{loppu}} \sin \theta - \frac{1}{2} g t_{\text{loppu}}^2 = 0$ m. Tästä voidaan ratkaista aika

$$t_{\text{loppu}} = \frac{2v_{\text{alku}} \sin \theta}{g}. \quad (4.13)$$

Pallon x -koordinaatti on tuolloin

$$s = x(t_{\text{loppu}}) = v_{\text{alku}} t_{\text{loppu}} \cos \theta = \frac{2v_{\text{alku}}^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_{\text{alku}}^2 \sin 2\theta}{g}, \quad (4.14)$$

missä on käytetty trigonometrista säätöä $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$.

Kantaman ääriarvot löytyvät sen derivaatan nollakohdista. Derivaatta pitää laskea luonnollisesti sen muuttujan suhteeseen, jonka suhteen maksimia etsitään, eli heittokulman. Derivoitavaan siis kantama,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{v_{\text{alku}}^2}{g} \frac{d}{d\theta} \sin 2\theta = \frac{v_{\text{alku}}^2}{g} 2 \cos 2\theta. \quad (4.15)$$

Tämä on nolla täsmälleen silloin kun funktio $\cos 2\theta$ on nolla. Kosini on jaksollinen funktio, joten sillä on äärettömästi nollakohtia $\cos \pi/2 = \cos 3\pi/2 = \cos 5\pi/2 = \dots = 0$. Nyt voidaan kuitenkin tyytyä tarkastelemaan kulmia välillä $\theta \in [0, 90^\circ] = [0, \pi/2]$, ja tällöin nollakohtia on vain yksi, $\cos(2 \cdot \pi/4) = \cos \pi/2 = 0$.

Sitspä kantamalla saavutetaan ääriarvon heittokulmalla $\pi/4 = 45^\circ$. Tämän täytyy olla myös maksimikantama, koska kulmissilla 0 ja 90° kantamaksi saadaan nolla, ja varmastikin viistoon heitetty pallo lentää tätä pidemmälle. Huomaa, että todellisissa pallopeleissä ilmanvastus on merkittävä, joten tulos ei ole lähimainkaan tarkka.

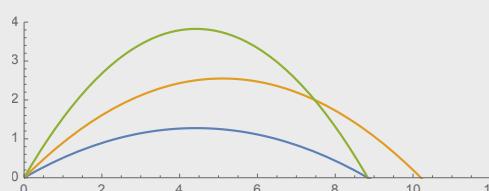
Mathematica:

```
(* koordinaatit ajan ja kulman funktiona *)
x[t_, theta_] := valku Cos[theta] t
y[t_, theta_] := valku Sin[theta] t - 1/2 g t^2

(* ratkaistaan maahan osumisen hetki *)
maassa = Solve[y[tloppu, theta] == 0, tloppu]
{{tloppu -> 0}, {tloppu -> (2 valku Sin[theta])/g}}
(* ratkaistaan kantama käytettäen toista ratkaisua *)
kantama = x[tloppu, theta] /. maassa[[2]] // Simplify (* sievennetään samalla *)
(valku^2 Sin[2 theta])/g

(* derivoitavaan kantama kulman suhteeseen ja etsitään maksimi *)
derivaatta = D[kantama, theta] // Simplify
(2 valku^2 Cos[2 theta])/g
ratkaisu = Solve[{derivaatta == 0, 0 < theta < Pi/2}, theta] (* väli [0, pi/2] *)
{{theta -> Pi/4} }

(* kappaleen rata kolmella heittokulmalla *)
rata[theta_] := {x[t, theta], y[t, theta]} /. {valku -> 10, g -> 9.8}
ParametricPlot[{rata[30 Degree], rata[45 Degree], rata[60 Degree]},
{t, 0, 2}, PlotRange -> {{0, 12}, {0, 4}}]
```



Liike ajasta riippuvan voiman vaikuttaessa

Heittoliikkeen analyysissä huomattiin, että liike voitiin jakaa eri suuntaisiin komponentteihin ja nopeudet sekä paikka voitiin ratkaista näissä suunnissa erikseen toisistaan riippumatta. Matemaattisesti tämä perustuu siihen, että derivointi ja integrointi ovat *lineaarisia operaatioita* eli summan voi derivoida tai integroida termi kerrallaan. Lisäksi koska yksikkövektorit ovat vakioita, ne voidaan siirtää derivaattojen ja integraalien ulkopuolelle. Niinpä esimerkiksi nopeuden y -skalaarikomponentti voitiin laskea integroimalla kiihtyvyyden y -skalaarikomponenttia ajan suhteen. Yleisesti minkä tahansa vektorin derivaatta voidaan laskea karteesisessa koordinaatistossa komponenteittain,

$$\frac{d\bar{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.16)$$

ja vastaavasti integroinnille pätee

$$\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{\mathbf{A}} dt = \left(\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_x dt \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_y dt \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} A_z dt \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (4.17)$$

Kiihtyvyyden määritelmä (1.23) on siten komponenttimuodossa

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \quad (4.18)$$

ja käänneen nopeus saadaan kiihtyvyyden integraalina

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t \bar{\mathbf{a}} dt, \quad (4.19)$$

mikä voidaan edelleen hajottaa komponentteihin yhtälön 4.17 avulla. Jos siis kiihtyvyyden skalaarikomponentit tunnetaan, nopeuden x -, y - ja z -skalaarikomponentit saadaan integroimalla erikseen kiihtyvyyden vastaavia komponentteja. Esimerkiksi x -suunnassa pätee

$$v_x(t) = v_{x,\text{alku}} + \int_{t_{\text{alku}}}^t a_x dt \quad (4.20)$$

ja muissa suunnissa saadaan täsmälleen samanlaiset tulokset. Kappaleen paikkakoordinaatit saadaan edelleen integroimalla nopeuden skalaarikomponentteja.

Kappaleen liikkeen ratkaisemiseksi täytyy siis tuntea sen kiihtyvyyden komponentit, ja ne saadaan ainakin periaatteessa ratkaistua dynamiikan peruslaista (3.3), joka komponenttimuodossa saa muodon

$$a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}}\hat{\mathbf{k}}. \quad (4.21)$$

Komponenttijonon käyttäminen tässä tilanteessa voi vaikuttaa ongelman hankaloittamiselta, koska yhtälössä on nyt kuusi termiä, mutta yhtälön kumpikin puoli voidaan tulkitta saman vektorin komponenttiesitykseksi. Koska vektorin komponenttit karteesisessa koordinaatistossa ovat *yksikäsitteiset*, lukukolmikon (a_x, a_y, a_z) pitää siis olla sama kuin lukujen $(\frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}, \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}, \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}})$. Siispä vektorimuotoinen yhtälö $\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{F}}$ kokonais voidaan komponenttien avulla muuttaa kolmeksi skalaariyhtälöksi

$$a_x = \frac{1}{m}F_{x,\text{kokonais}}, \quad a_y = \frac{1}{m}F_{y,\text{kokonais}}, \quad a_z = \frac{1}{m}F_{z,\text{kokonais}}, \quad (4.22)$$

joista kiihtyvyyden komponenttit voidaan ratkaista. Jos voima tunnetaan *ajan funktiona*, kiihtyvyyden komponenttit voidaan suoraan integroida ajan suhteen nopeuden ja paikan ratkaisemiseksi, mistä on esimerkki 4.3 luvun lopussa. Jos voima riippuu muista tekijöistä kuten paikasta tilanne on huomattavasti hankalampi ja ratkaisua täytyy etsiä *differentialiyhtälöiden* avulla.



4.4 Kappaleeseen (massa 1 kg) vaikuttavan kokonaisvoiman skalaarikomponentit riippuvat ajasta nün, että F_x on aluksi 2.0 N ja sekunnin päästä -1.0 N ja F_y on aluksi 2.0 N ja sekunnin päästä 4.0 N. Kumpikin komponentti muuttuu lineaarisesti ajan funktiona (eli niiden kuvaajat ovat suorat). Jos kappale liukkuu aluksi negatiiviseen x -suuntaan 1.0 m/s vauhdilla, mitkä ovat sen nopeuden komponenttit sekunnin päästä?

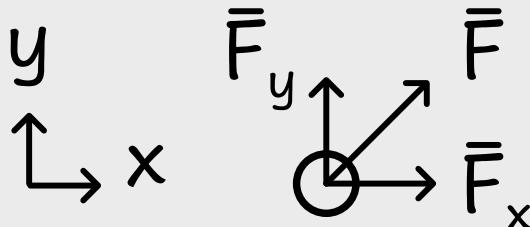
esimerkki 4.3

Kuulapeli

Kuulapelissä pyritään ohjaamaan pientä kuulaa (massa 10 g) labyrintissa kallistamalla pelilautaa, jolloin painovoima vetää kuulaa aina jyrkimmän laskun suuntaan. Pelaaja voi kahdesta nupista käänämällä vaikuttaa laudan kallistumaan ja samalla siis kuulaan kohdistuvaan kokonaisvoimaan kahdessa kohtisuorassa suunnassa x ja y . Millaisen reitin levosta lähevä kuula kulkee kahden sekunnin aikana, jos siihen vaikuttavan kokonaisvoiman x -suuntainen skaalaarikomponentti on $F_x = At$ ja y -suuntainen $F_y = B \sin Ct$, missä $A = 3.0 \cdot 10^{-4}$ N/s, $B = 7.0 \cdot 10^{-4}$ N, $C = 3.5 \text{ s}^{-1}$?

TILANNE Systeemiin kuuluu vain kuula, johon kohdistuvat voimat tunnetaan komponentteittain ajan funktiona.

SUUNNITELMA Kuulan kiilthyvyys, nopeus ja paikka voidaan ratkaista dynamiikan peruslain ja kiilthyvyyden määritelmän avulla, koska voima tunnetaan ajan funktiona. Kaikkien näiden vektorisureiden x - ja y -komponentit voidaan määrittää toisistaan riippumatta, koska voima ei riipu paikasta vaan ainoastaan ajasta.



Kun kuulaan vaikuttavan kokonaisvoiman skaalaarikomponentti suunnassa x on F_x , kuulan kiilthyvyys tässä suunnassa on $a_x = F_x/m$. Nopeus on kiilthyvyyden integraali $v_x = v_{x,\text{alku}} + \int_0^t a_x dt'$ ja paikka on nopeuden integraali $x = x_{\text{alku}} + \int_0^t v_x dt'$. Tässä integroimismuuttuja on selvyyden vuoksi merkity pilkulla, t' , erotuksena integraalin ylärajassa esitetyistä niinikään aikaa esittävistä symbolista t . Suunnassa y pätevät täsmälleen samat yhtälöt. Lisäksi tiedetään, että kuulan alkunopeus on nolla, $v_{x,\text{alku}} = 0$, $v_{y,\text{alku}} = 0$ ja koordinaatiston origo voidaan valita kuulan lähtöpisteeseen, jolloin myös $x_{\text{alku}} = 0$, $y_{\text{alku}} = 0$.

RATKAISU Nopeudeksi saadaan

$$v_x = \int_0^t \frac{F_x}{m} dt' = \frac{A}{m} \int_0^t t' dt' = \frac{1}{2} \frac{A}{m} t'^2 \quad (4.23)$$

$$v_y = \int_0^t \frac{F_y}{m} dt' = \frac{B}{m} \int_0^t \sin Ct' dt' = \frac{B}{mC} \left|_0^t \right. - \frac{1}{C} \cos Ct' = \frac{B}{mC} (1 - \cos Ct) \quad (4.24)$$

ja tästä edelleen paikaksi

$$x = \int_0^t \frac{1}{2} \frac{A}{m} t'^2 dt' = \frac{1}{6} \frac{A}{m} t^3 \quad (4.25)$$

$$y = \int_0^t \frac{B}{mC} (1 - \cos Ct') dt' = \frac{B}{mC} \left|_0^t \right. t' - \frac{1}{C} \sin Ct' = \frac{B}{mC^2} (Ct - \sin Ct). \quad (4.26)$$

Kuulan paikka millä tahansa ajan hetkellä t selviää sijoittamalla lukuarvot näihin lausekkeisiin. Kappaleen reitti voidaan piirtää valitsemalla aikoja tasaisin välein (esim. $t = 0.0$ s, 0.5 s, ...), ratkaisemalla kappaleen koordinaatit näinä hetkinä ja piirtämällä pistet koordinaatistoon. Reitin piirtäminen onnistuu myös tietokoneella.

Mathematica:

```
(* voimat *)
fx = a t; fy = b Sin[c t];
lukuarvot = {a -> 3*10^-4, b -> 7*10^-4, c -> 3.5, m -> 0.01};

(* nopeudet *)
vx = Integrate[fx/m, {t, 0, t}]
(a t^2)/(2 m)
vy = Integrate[fy/m, {t, 0, t}]
(b - b Cos[c t])/(c m)

(* paikkakoordinaatit *)
x = Integrate[vx, {t, 0, t}]
(a t^3)/(6 m)
y = Integrate[vy, {t, 0, t}]
(b (c t - Sin[c t]))/(c^2 m)

(* piirretään kuvaaja *)
viiva = ParametricPlot[{x, y} /. lukuarvot, {t, 0, 2},
AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{0, 0.05}, {0, 0.05}}]; (* reitti *)

(* lasketaan paikka tasaisin aikavälein *)
npisteet = 10; aika = 2;
koordinaatit = Table[{x, y} /. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}];
paikat = ListPlot[koordinaatit,
AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{0, 0.05}, {0, 0.05}}]

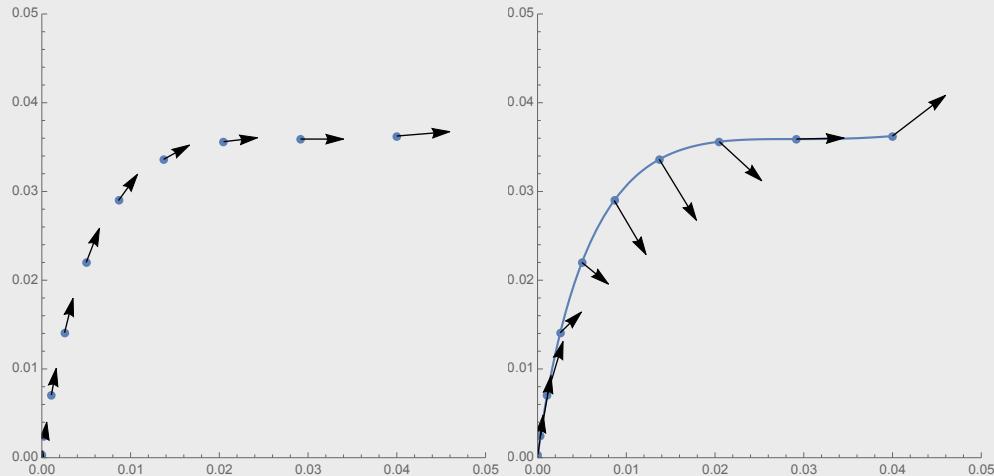
(* lasketaan nopeus ja voima tasaisin aikavälein *)
vskala = 0.1; fskala = 10;
nopeusvektorit = Graphics[
Table[{Arrow[{{x, y}, {x + vskala*vx, y + vskala*vy}}}],
/. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}],
Axes -> True];
```

```

voimavektorit = Graphics[
  Table[{Arrow[{x, y}, {x + fskala*fx, y + fskala*fy}]},
    /. lukuarvot /. t -> i*aika/npisteet, {i, 0, npisteet}],
  Axes -> True];

(* Piirretään yhdessä *)
Show[pisteet, nopeusvektori]
Show[viiva, pisteet, voimavektorit]

```



ARVIOINTI Kappaleeseen vaikuttaa koko ajan x -suunnassa positiivinen voima, joten se liikkuu tähän suuntaan kiihtyväällä nopeudella (ei kuitenkaan tasaisesti kiihtyväällä nopeudella, koska kiihtyvyys ei ole vakio). Suunnassa y voima on aluksi positiivinen ja sitten negatiivinen, joten kappale lähtee liikkeelle positiiviseen y suuntaan mutta sitten liike tässä suunnassa pysähtyy, jolloin kappale siis liikkuu vain x -suuntaan.

Tarkistetaan myös paikkakoordinaattien yksiköt:

$$[x] = \frac{[A]}{[m]} [t^3] = \frac{\text{N/s} \cdot \text{s}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m/s}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} = \text{m} \quad (4.27)$$

$$[y] = \frac{[B]}{[mC^2]} [(Ct - \sin Ct)] = \frac{\text{N}}{\text{kg s}^{-2}} \cdot 1 = \frac{\text{Ns}^2}{\text{kg}} = \text{m}. \quad (4.28)$$

4.3 Liikemäärä

Liikemäärään säilymislaki muotoiltiin jo luvussa 2 vektorimuodossa, ja sen sisältö on useassa ulottuvuudessa täsmälle sama kuin yhdessäkin ulottuvuudessa. Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia tai jos nämä vuorovaikutukset kumoavat toisensa, systeemin kokonaislukemäärä on vakio. Lisäksi koska kokonaislukemäärä on vektori, sekä sen suunta että suuruus pysyvät tällöin muuttumattomina. Yhdessä ulottuvuudessa suunnat ilmaistuun skalarikomponenttien etumerkkien avulla. Useammassa ulottuvuudessa liikemäärävektorit voidaan esittää joko graafisesti nuolien avulla tai komponentteittain.

Kuvassa 4.3 on esitetty kahden kappaleen törmäys tasossa sekä liikediagrammina että kuvaajina. Kappaleen B massa on kaksinkertainen kappaleen A massaan nähden. A liikkuu aluksi y -suuntaan ja B viistoon, jolloin sillä on nopeutta sekä x - että y -suunnissa. Liikediagrammin perustella selvästikin kummankin kappaleen nopeus muuttuu törmäyksessä sekä suunnaltaan että suuruudeltaan.

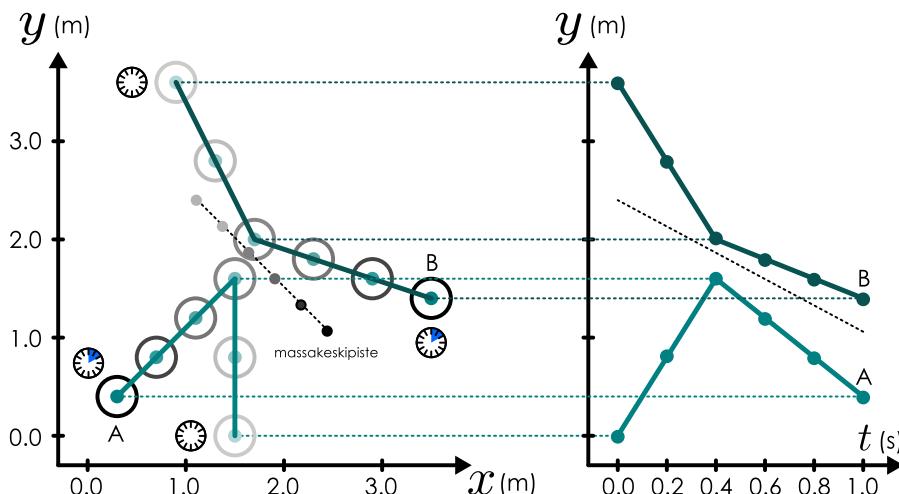
Kuvassa on esitetty myös erikseen kappaleiden paikkakoordinaattien ja nopeuskomponenttien kuvaajat ajan funktiona. Tarkastellaan ensin kuvassa 4.3 (a) esitettyä paikan y -komponenttia. Kappale A kulkee ensin positiiviseen y -suuntaan mutta kääntyy törmäyksessä negatiiviseen y -suuntaan. Kappale B kulkee negatiiviseen y -suuntaan sekä ennen törmäystä että sen jälkeen, mutta sen vauhti pienenee törmäyksessä. Kappaleiden nopeuden y -komponentit voidaan määrittää $y(t)$ -kuvaajien kulmakertoimista aivan kuten yksilotteisessakin tapauksessa, ja näin määritetyt nopeuden y -skalarikomponenttien kuvaajat on piirretty kuvaan 4.3 (b). Tämän perusteella kappaleen A y -suuntaisen nopeuden muutos on $\Delta v_{y,A} = -6.0 \text{ m/s}$ ja kappaleen B $\Delta v_{y,B} = 3.0 \text{ m/s}$. Nopeuskomponenttien muutosten suhde on siis

$$\frac{\Delta v_{y,A}}{\Delta v_{y,B}} = -2.0 = -\frac{m_B}{m_A}. \quad (4.29)$$

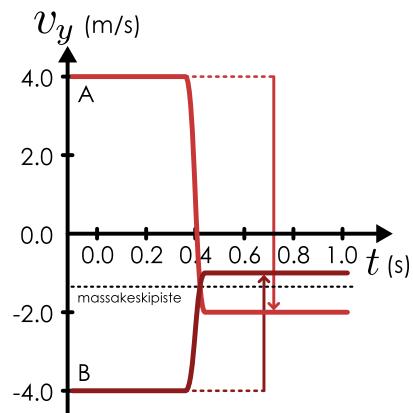
Toisin sanoen aivan kuten yksilotteisessakin törmäyksessä kappaleiden nopeuksien y -komponenttien muutosten suhde on kääntäen verrannollinen kappaleiden massojen suhteeseen yhtälön (2.43) mukaisesti. Mutta

Kuva 4.3: Kahden kappaleen törmäys tasossa. Kokonaislukemäärän komponentit x - ja y -suunnissa ovat vakiot ja massakeskipisteen liike on tasaista.

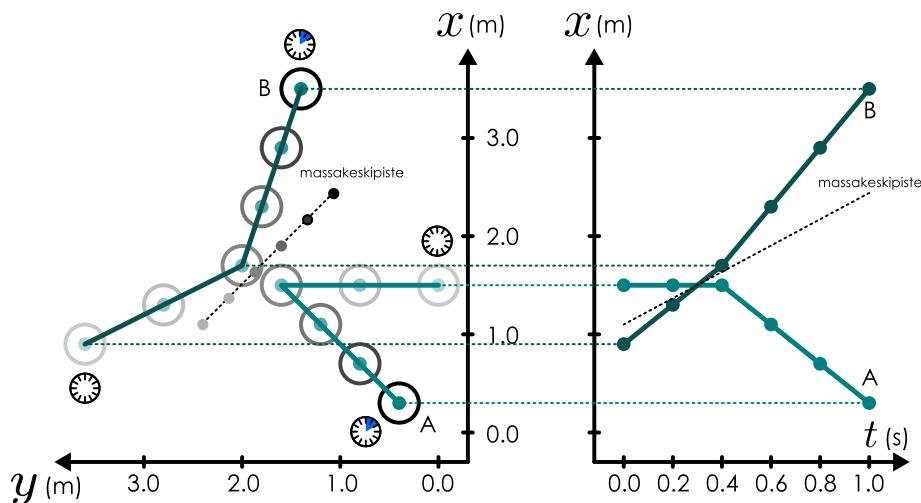
(a) Liikediagrammi xy -tasossa sekä y -koordinaatin kuvaaja ajan suhtein.



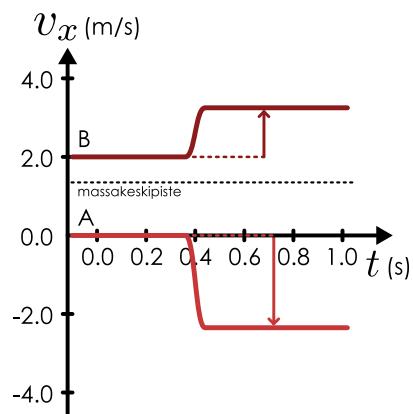
(b) Nopeuden y -komponentin kuvaaja.



(c) Liikediagrammi xy -tasossa sekä x -koordinaatin kuvaaja ajan suhtein. Liikediagrammi on käännetty 90° kuvan (a) nähtiin.



(d) Nopeuden x -komponentin kuvaaja.



tämä ehtohan tarkoitti yhdessä ulottuvuudessa *liikemäärän olevan vakiot*. Niiinpä edellisen analyysin mukaan tässä törmäyksessä *liikemäärän y-komponentti on vakiot*.



4.5 Tee kuvan 4.3 mukainen liikediagrammi kappaleelle, joka liikkuu aluksi 45° kulmassa x -akseliin nähtiin ja törmää elastiisesti y -akselin suuntaiseen seinään. Miltä näyttävät kappaleen paikkakoordinaattien ja nopeuden skalaarikomponenttien kuvaajat ajan funktioina?

Kuvassa 4.3 (c) on esitetty saman törmäyksen liikediagrammi sekä kappaleiden x -komponenttien kuvaajat. Huomaa, että liikediagrammi on nyt käännetty 90° kuvan (a) verrattuna, jotta sen x -akseli olisi pystysuuntainen kuten viereisessä paikkakoordinaatin kuvaajassa. Kappaleen A nopeuden x -suuntainen komponentti on aluksi nolla ja törmäyksessä kappale saa nopeutta negatiiviseen x -suuntaan. Kappale B liikkuu positiiviseen x -suuntaan sekä ennen törmäystä että sen jälkeen, ja törmäyksessä kappaleen vauhti *kasvaa*. Kappaleiden nopeuden x -skalaarikomponentit voidaan määrittää $x(t)$ -kuvaajien kulmakertoimista ja nämä on esitetty kuvassa 4.3 (d). Tässä kappaleen A nopeuskomponentin muutos on $\Delta v_{x,A} = -2.6 \text{ m/s}$ ja kappaleen B $\Delta v_{x,B} = 1.3 \text{ m/s}$. Siispä tässäkin suunnassa pätee

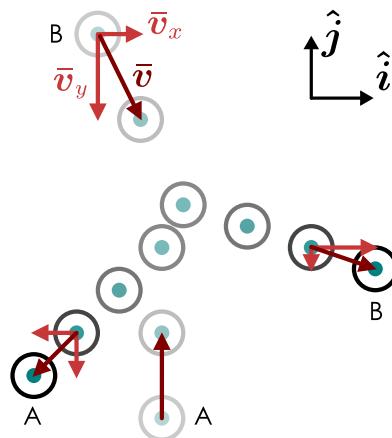
$$\frac{\Delta v_{x,A}}{\Delta v_{x,B}} = -2.0 = -\frac{m_B}{m_A}, \quad (4.30)$$

joten myös *liikemäärän x-komponentti on törmäyksessä vakiot*. Toisin sanoen yhdessä ulottuvuudessa aikaisemmin esitetty törmäysten analyysi toimii myös useassa ulottuvuudessa, kun kunkin koordinaatiston suunta eli nopeuden karteesinen komponentti käsitellään erikseen.

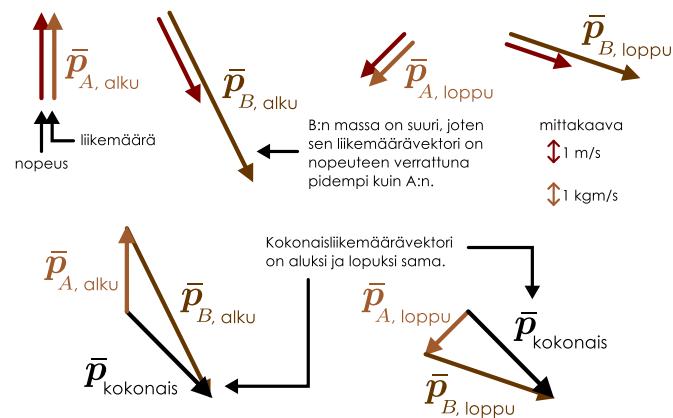
MONIULOTTEINEN LIIKE

Kuva 4.4: Törmäävien kappaleiden liikemäärävektori, jos kappaleen A massa on 1 kg ja kappaleen B 2 kg. Kokonaislukemäärävektori on sama alussa ja lopussa, mutta kappaleiden liikemäärit muuttuvat.

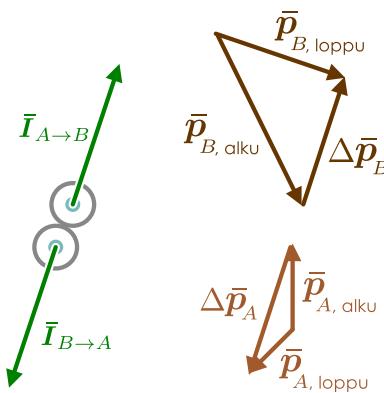
(a) Liikediagrammi ja kappaleiden nopeudet.



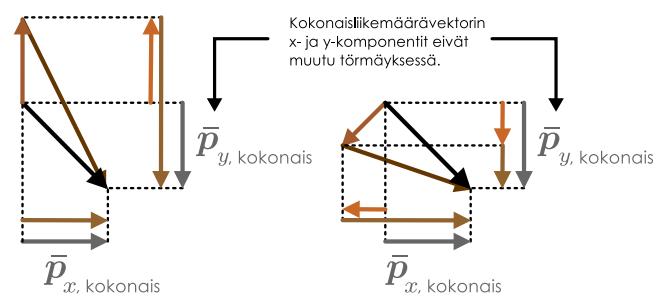
(b) Kappaleiden nopeus- ja liikemäärävektoret.



(c) Kappaleet saavat yhtä suuret mutta vastakkais-suuntaiset impulssit.



(d) Liikemäärän komponentit aluksi ja lopuksi.



Tulos voidaan selittää liikemäärin vektoriluonteen avulla. Kuussa 4.4 on piirretty törmäyksestä liikediagrammi, jonka perusteella voidaan piirtää kappaleiden nopeusvektoreita kuvaavat nuolet sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Kappaleiden liikemäärävektoreita kuvaavat nuolet ovat samansuuntaiset näiden nopeusvektoreiden kanssa, mutta koska kappaleen B massa oli kaksinkertainen kappaleeseen A nähden, B:n liikemäärää kuvaavat nuolet on piirretty pituudeltaan kaksinkertaisiksi nopeuteen nähden siinä missä A:n liikemäärävektorit ovat kuvassa yhtä pitkät nopeusvektoreiden kanssa.

Selvästi käännäkään kappaleen liikemääri ei ole vakio törmäyksessä, mutta kokonaislukemääri eli niiden vektorisumma on,

$$\bar{p}_{A, \text{alku}} + \bar{p}_{B, \text{alku}} = \bar{p}_{\text{kokonais}, \text{alku}} = \bar{p}_{\text{kokonais}, \text{loppu}} = \bar{p}_{A, \text{loppu}} + \bar{p}_{B, \text{loppu}}. \quad (4.31)$$

Graafisesti kokonaislukemääri voidaan esittää piirtämällä kappaleiden liikemäärävektoreita kuvaavat nuolet peräkkäin, ja kuvasta nähdään että näin muodostetut kokonaislukemääräät esittävät nuolet ovat samat sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Tämä nuoli osoittaa itse asiassa aina systeemin massakeskipisteen liikkeen suuntaan, ja kokonaislukemäären säilyminen tarkoittaa myös sitä, että massakeskipiste liikkuu koko ajan tasaisella nopeudella.

Toisaalta vektorit voidaan jakaa komponentteihin, jolloin kokonaislukemäärävektorin jokaisen komponentin pitää erikseen olla vakio

$$p_{x,A,\text{alku}} + p_{x,B,\text{alku}} = p_{x,A,\text{loppu}} + p_{x,B,\text{loppu}} \quad (4.32)$$

$$p_{y,A,\text{alku}} + p_{y,B,\text{alku}} = p_{y,A,\text{loppu}} + p_{y,B,\text{loppu}} \quad (4.33)$$

$$p_{z,A,\text{alku}} + p_{z,B,\text{alku}} = p_{z,A,\text{loppu}} + p_{z,B,\text{loppu}}. \quad (4.34)$$

Sisäpä alvan kuten vektorimuotoisen dynamiikan peruslaki (3.3) voitiin karteesisessa koordinaatistossa havjottaa kolmeen skalaariyhtälöön (4.22), myös liikemäären säilymislaki on oikeastaan kolmen skalaariyhtälön ryhmä.

Aivan kuten yhdessä ulottuvuudessa, myös useassa ulottuvuudessa törmäys voi olla elastinen tai epäelastinen. Energia ei kuitenkaan ole vektori vaan skalaari ja niinpä liike-energia ei ole välttämättä vakio, jos tarkastellaan nopeuksien komponentteja vain yhdessä suunnassa. Esimerkiksi kuvan 4.3 tapauksessa x -suunnassa kappaleiden liike-energia näyttäisi kasvavan. Kokonaisenergia ei kuitenkaan lisääny, sillä y -suunnassa kappaleiden liike-energia pienenee. Vaikka törmäys olisi täysin elastinen, kappaleiden loppunopeuksia ei voi ennustaa pelkästään niiden alkunopeuksien perusteella, koska nämä riippuvat myös asennosta, jossa kappaleet törmäävät toisiinsa.



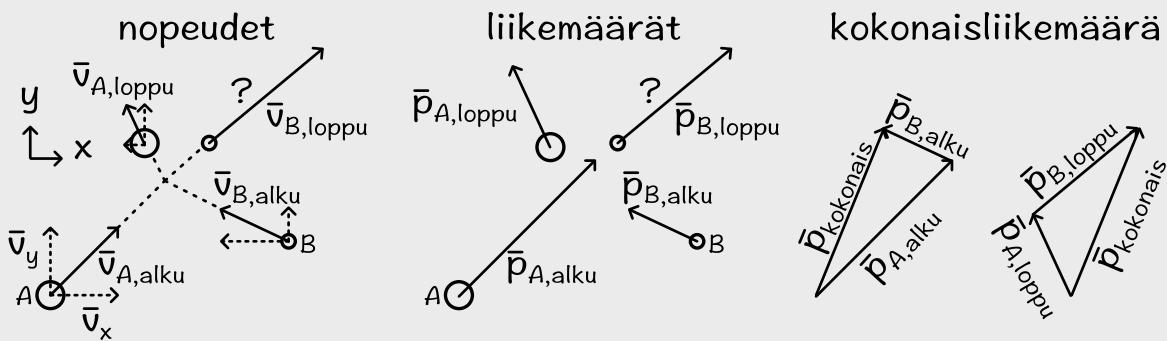
4.6 Kuinka suuri osuuus liike-energiasta muuttuu muihin muotoihin kuvan 4.3 törmäyksessä?

esimerkki 4.4

Törmäys tasossa

Kaksi kiekkoja, A (massa 180.0 g) ja B (massa 90.0 g), liikkuvat aluksi nopeuksilla $\bar{v}_{A,alku} = (2.50 \text{ m/s})\hat{i} + (2.50 \text{ m/s})\hat{j}$ sekä $\bar{v}_{B,alku} = (-2.50 \text{ m/s})\hat{i} + (1.25 \text{ m/s})\hat{j}$. Kiekon A nopeus törmäyksen jälkeen on $\bar{v}_{A,loppu} = (-0.75 \text{ m/s})\hat{i} + (1.50 \text{ m/s})\hat{j}$. Mikä on (a) kiekon B nopeus, (b) kiekkojen saamat impulssit, (c) kokonaisliike-energian muutos törmäyksessä?

TILANNE Merkitään systeemiin kuuluvien kiekkojen massoja $m_A = 180.0 \text{ g}$ ja $m_B = 90.0 \text{ g}$. Pürrtetään tilanteesta kuva nopeuksien ja suuntien hahmottamiseksi.



SUUNNITELMA Törmäyksessä systeemiin vaikuttavat ulkoiset voimat kumoavat toisensa, joten systeemin kokonaisliikemäärä on vakio. Tämän perusteella voidaan ratkaista kiekon B loppunopeus. Kummankin kiekon saama impulssi on yhtä suuri kuin kyseisen kiekon liikemääärän muutos. Myös liike-energian muutos voidaan laskea kappaleiden nopeuksista.

Kokonaisliikemaara on vakio erikseen x - ja y -suunnissa

$$m_A v_{x,A,alku} + m_B v_{x,B,alku} = m_A v_{x,A,loppu} + m_B v_{x,B,loppu} \quad (4.35)$$

$$m_A v_{y,A,alku} + m_B v_{y,B,alku} = m_A v_{y,A,loppu} + m_B v_{y,B,loppu}. \quad (4.36)$$

Tästä voidaan ratkaista kiekon B loppunopeuden komponentit.

Kiekon A saama impulssi on

$$\bar{I}_{B \rightarrow A} = \Delta \bar{p}_A = m_A (\bar{v}_{A,loppu} - \bar{v}_{A,alku}) \quad (4.37)$$

ja vastaavasti kiekolle B. Impulssitkin kannattaa laskea komponenteittain.

Kokonaisliike-energian muutos on

$$\Delta K = K_{\text{loppu}} - K_{\text{alku}} = \frac{1}{2} m_A v_{A,loppu}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B,loppu}^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A,alku}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,alku}^2. \quad (4.38)$$

RATKAISU Kiekon nopeuden skalaarikomponentit ovat

$$v_{x,B,loppu} = v_{x,B,alku} + \frac{m_A}{m_B} (v_{x,A,alku} - v_{x,A,loppu}) = 4.00 \text{ m/s} \quad (4.39)$$

$$v_{y,B,loppu} = v_{y,B,alku} + \frac{m_A}{m_B} (v_{y,A,alku} - v_{y,A,loppu}) = 3.25 \text{ m/s} \quad (4.40)$$

Kiekon A saaman impulssin komponentit ovat

$$I_{x,B \rightarrow A} = m_A (v_{x,A,loppu} - v_{x,A,alku}) = -0.585 \text{ Ns} \quad (4.41)$$

$$I_{y,B \rightarrow A} = m_B (v_{y,A,loppu} - v_{y,A,alku}) = -0.180 \text{ Ns} \quad (4.42)$$

ja vastaavasti kiekkoon B kohdistuu impulssi

$$I_{x,A \rightarrow B} = m_B (v_{x,B,loppu} - v_{x,B,alku}) = 0.585 \text{ Ns} \quad (4.43)$$

$$I_{y,A \rightarrow B} = m_B (v_{y,B,loppu} - v_{y,B,alku}) = 0.180 \text{ Ns}. \quad (4.44)$$

Liike-energia on ennen törmäystä

$$K_{\text{alku}} = \frac{1}{2}m_A(v_{x,A,\text{alku}}^2 + v_{y,A,\text{alku}}^2) + \frac{1}{2}m_B(v_{x,B,\text{alku}}^2 + v_{y,B,\text{alku}}^2) = 1.48 \text{ J} \quad (4.45)$$

ja törmäyksen jälkeen

$$K_{\text{loppu}} = \frac{1}{2}m_A(v_{x,A,\text{loppu}}^2 + v_{y,A,\text{loppu}}^2) + \frac{1}{2}m_B(v_{x,B,\text{loppu}}^2 + v_{y,B,\text{loppu}}^2) = 1.45 \text{ J} \quad (4.46)$$

joten liike-energiaa katoaa (muuttuu mm. lämpöenergiaksi). Liike-energian muutos on

$$\Delta K = K_{\text{loppu}} - K_{\text{alku}} = -0.03 \text{ J}. \quad (4.47)$$

Mathematica:

```
(* nopeusvektorit ja inertiat *)
vAalku = {2.5, 2.5}; vBalku = {-2.5, 1.25};
vAlloppu = {-0.75, 1.5}; vBloppu = {vxBloppu, vyBloppu};
mA = 0.180; mB = 0.090;

(* ratkaistaan liikemääräyhtälö *)
ratkaisu = Solve[mA vAalku + mB vBalku == mA vAlloppu + mB vBloppu, {vxBloppu, vyBloppu}]
{{vxBloppu -> 4., vyBloppu -> 3.25}};

(* impulssit *)
impulssiA = mA (vAlloppu - vAalku) /. ratkaisu
{{-0.585, -0.18}}
impulssiB = mB (vBloppu - vBalku) /. ratkaisu
{{0.585, 0.18}};

(* liike-energia *)
k[m_, v_] := 0.5 m v.v (* v.v on pistetulo, = v^2 *)
kloppu = k[mA, vAlloppu] + k[mB, vBloppu] /. ratkaisu
t1.44844}
kalku = k[mA, vAalku] + k[mB, vBalku] /. ratkaisu
t1.47656}
kloppu - kalku
t-0.028125}
```

ARVIOINTI Liikemäären vakioisuuden voi tarkistaa laskemalla kokonaisliikemäären sekä ennen törmäystä että sen jälkeen. Tuloksena saadaan molemmissa tapauksissa

$$\bar{\mathbf{p}}_{\text{kokonais}} = (0.225 \text{ kgm/s})\bar{\mathbf{i}} + (0.5625 \text{ kgm/s})\bar{\mathbf{j}} \quad (4.48)$$

joten kokonaisliikemäärä on todellakin vakio. Liike-energia vähenee hiukan, mikä on järkevä, sillä liike-energia ei voi törmäyksessä lisääntyä (kyseessä ei ole räjähtävä erotus). Kiekkojen saamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkais-suuntainen, kuten liikemäären säilymislain (tai voiman ja vastavoiman lain) perusteella pitääkin olla.

4.4 Työ

Yksiulotteisen liikkeen tapauksessa vakiovoiman kappaleeseen tekemä työ määritellään voiman liikkeen suuntaisena skalaarikomponenttin ja voiman vaikutuspisteen siirtymän tulona. Vastaavasti muuttuvan voiman tekemä työ saadaan integroimalla liikkeen suuntaista voiman skalaarikomponenttia paikan suhteen. Työn määritelmä on kolmiulotteisessa avaruudessa sama kuin yhdessäkin ulottuvuudessa, mutta työn laskeminen on kuitenkin vaikeampaa, koska kolmessa ulottuvuudessa kappaleet voivat liikkua eri suuntiin. Työn laskemiseksi tarvitaan siis käytännöllinen laskentamenetelmä voiman liikkeen suuntaisen komponentin löytämiseksi liikkuiipa kappale *mihin tahansa* suuntaan.

Pistetulo

Pohditaan ensin yleisesti, miten minkä tahansa vektorin komponentti voitaisiin määrittää missä tahansa suunnassa. Aloitetaan tutkimalla varjoja. Ota kappale ja valaise sitä kohdevalolla niin, että kappaleen takana olevalle seinälle piirtyy varjo. Varjoon jäävät ne seinän pisteet, joihin matkalla ollut valo törmää kappaleeseen, joten varjon muoto on kaksiulotteinen kuva alkuperäisen kolmiulotteisen kappaleen muodosta. Varjoa kutsutaankin kappaleen **projektioksi**. Varjon muoto tietenkin muuttuu, jos kappaleetta käännetään, mutta se muuttuu myös siinä tapauksessa, että valoa tai seinää käännetään. Projektio on siis kuvaus, joka riippuu sekä kuvaattavasta kappaleesta että siitä, miten kuvaus tehdään.

Asetetaan seinä ja valo sitten niin, että valo saapuu seinälle kohtisuoraan. Valitaan kappaleeksi ohut sauva ja tutkitaan nyt tämän sauvan varjoa. Huomataan, että tällaisen sauvan varjo on suora viiva, jonka suunta ja pituus seinällä riippuu sauvan asennosta. Jos sauva on seinän suuntainen, varjo on yhtä pitkä kuin sauva

itse. Jos sauva on puolestaan seinään nähdien kohtisuorassa, sen varjo on vain piste. Ja yleisesti, jos sauvan pituus on L_{sauva} ja saavan sekä seinän välinen kulma on θ , yksinkertaisella geometrialla voimme ratkaista varjon pituuden. Tässä nimittäin muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on sauva itse ja sen viereinen kateetti on sauvan varjo. Niinpä varjon pituuden L_{varjo} ja sauvan pituuden suhde on niiden välisen kulman kosini,

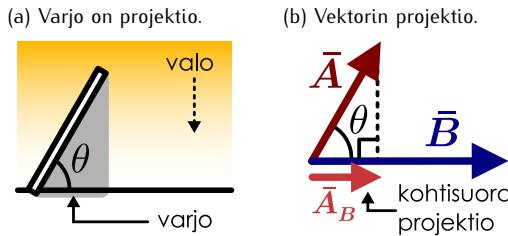
$$\frac{L_{\text{varjo}}}{L_{\text{sauva}}} = \cos \theta, \quad (4.49)$$

ja varjon pituus on siis

$$L_{\text{varjo}} = L_{\text{sauva}} \cos \theta. \quad (4.50)$$

Koska tässä tilanteessa valo saapui kohtisuoraan seinään nähdien, varjoa kutsutaan sauvan *kohtisuoraksi projektioksi*.

Kuva 4.5: Kohtisuora projektiot.

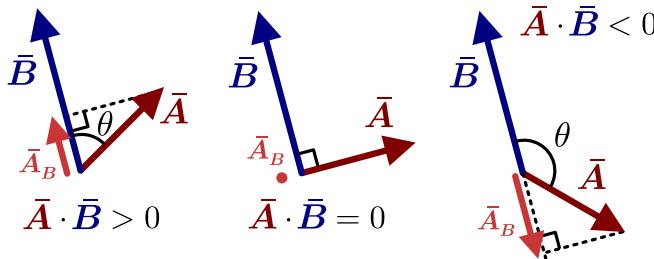


\bar{B} eli vektorin \bar{A} kohtisuora komponentti vektorin \bar{B} suunnassa, ja merkitsemme sitä \bar{A}_B (samaan tapaan kuin vektorin \bar{A} projektioita x -akselille merkitään \bar{A}_x).

Vektorin projektiot pituus selviää samanlaisella geometrialla kuin sauvan varjon pituus, joten sille pätee yhtälöä (4.50) vastaava sääntö. Jos vektorien välinen kulma on θ , vektorikomponentin pituus on vektorin \bar{A} pituus kerrottuna vektorien välisen kulman kosinilla

$$|\bar{A}_B| = |A \cos \theta|. \quad (4.51)$$

Kuva 4.6: Vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa.



Projektilo \bar{A}_B on vektorin \bar{A} vektorikomponentti vektorin \bar{B} suunnassa, mutta voimme tietenkin määritellä myös sitä vastaavan skalaarikomponentti A_B . Tämä skalaarikomponentti on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin vektorikomponentin pituus $|\bar{A}_B|$, mutta skalaarikomponentin etumerkki riippuu projektiota \bar{A}_B suunnasta. Skalaarikomponentti on positiivinen vektorikomponentti \bar{A}_B osoittaessa samaan suuntaan kuin \bar{B} ja negatiivinen näiden ollessa vastakkaisuuntainen. Onneksi kosinifunktio huolehtii tästä etumerkistä automaattisesti, sillä kosini muuttuu positiivisesta negatiiviseksi kulman ylittäessä arvon $\theta = 90^\circ = \pi/2$. Niinpä skalaarikomponentille saadaan yksinkertainen esitys

$$A_B = A \cos \theta. \quad (4.52)$$

Aivan vastaavasti vektorin \bar{B} skalaarikomponentti vektorin \bar{A} suunnassa on

$$B_A = B \cos \theta. \quad (4.53)$$

Kolmiulotteisessa avaruudessa vektoreiden välisen kulmien määrittäminen alkeisgeometrian avulla on kuitenkin erittäin vaikeaa, joten yllä esitetty komponenttien määrittely ei kelpaa työkaluksi varsinaisiin laskuihin. Käytännössä nämä lasketaankin vektorien **pistetulon** avulla. Vektorien \bar{A} ja \bar{B} välisen pistetulon määritellään olevan *vektorien pituuskertoimien ja vektorien välisen kulman kosinin tulo*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta, \quad (4.54)$$

ja nimensä mukaisesti sitä merkitään pisteellä. (Koska vektoreille voidaan määritellä monenlaisia kertolaskuja, pistettä ei saa jättää merkitsemättä!) Pistetulon tulos on skalaari, joten sitä kutsutaan myös *skalarituloksi*. Lisäksi pistetulo on erikoistapaus matematiikassa paljon yleisemmin määritelystä *sisätulosta*, joten tätäkin nimitystä käytetään.

Pistetulo voidaan kirjoittaa myös projektioiden avulla sijoittamalla projektiön skalaarikomponentin lauseke (4.52) tai (4.53) pistetulon määritelmään (4.54), jolloin saadaan

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB_A = A_B B. \quad (4.55)$$

Pistetulo on siis yhden vektorin pituuden ja toisen projektiön skalaarikomponentin tulo. Tästä seuraa suoraan, että projektiolle pätee

$$A_B = \frac{1}{B} \bar{A} \cdot \bar{B}. \quad (4.56)$$

Jos siis opimme tekniikan laskea pistetuloja helposti, kuten kohta teemme, voimme laskea vektorin projektiota toisen vektorin suunnassa helposti tällä säännöllä.

Pistetulolle pätevät pitkälti samanlaiset laskusäännöt kuin normaalille kertolaskullekin. Tekijöiden järjestysellä ei ole merkitystä, sillä

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta = BA \cos \theta = \bar{B} \cdot \bar{A}. \quad (4.57)$$

Samoin pistetulon ja skalaarilla kertomisen järjestystä voi vaihtaa

$$c(\bar{A} \cdot \bar{B}) = cAB \cos \theta = (c\bar{A}) \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot (c\bar{B}). \quad (4.58)$$

Pistetulolle ja yhteenlaskulle pätee myös osittelulaki (eli summan kertomisen sääntö), sillä jos merkitään $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$, voidaan kirjoittaa (kuva 4.7)

$$(\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{D} = \bar{C} \cdot \bar{D} = C_D D = (A_D + B_D)D = A_D D + B_D D = (\bar{A} \cdot \bar{D}) + (\bar{B} \cdot \bar{D}). \quad (4.59)$$

Pistetulosta voi siis ottaa yhteen tekijän. Koska pistetulo on skalaari ja pistetulon tekijöiden pitää olla vektoreita, lauseketta $(\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$ ei ole määritelty, sillä $\bar{A} \cdot \bar{B}$ ei ole vektori vaan skalaari. Sen sijaan $(\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$ on hyvin määritelty lauseke, joka tarkoittaa vektorin \bar{C} kertomista pistetulon $\bar{A} \cdot \bar{B}$ arvolla.



4.7 Vektorin \bar{A} pituus on 1.5 ja sen suunta on xy -tasossa 40° x -akselista vastapäivään. Vektorin \bar{B} pituus on 2.0 ja sen suunta on xy -tasossa 20° x -akselista myötäpäivään. Vektorin \bar{C} pituus on 2.5 ja sen suunta on xy -tasossa 50° x -akselista myötäpäivään. Mitä on (a) $\bar{A} \cdot \bar{B}$, (b) $\bar{A} \cdot \bar{C}$, (c) $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C})$, (d) $(\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C}$?

Sääntö $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ tai $B = 0$ ei päde pistetulolle. Pistetulo on nimitään nolla jos jompikumpi tekijöistä on nollavektori *tai jos vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{0} \text{ tai } \bar{B} = \bar{0} \text{ tai } \bar{A} \perp \bar{B}. \quad (4.60)$$

Tämä seuraa suoraan pistetulon määritelmästä, sillä kohtisuorille vektoreille $\cos \theta = 0$. Tämä yksinkertaiselta tuntuva ominaisuus tekee pistetulosta hyvin voimakkaan työkalun, koska toisiaan vastaan kohtisuorat vektorit ovat varsin yleisiä ja niiden pistetulo on aina nolla riippumatta vektorien pituuksista. Erityisesti karteesiset yksikkövektorit ovat nimitään toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten kunkin yksikkövektorin tulo itsensä kanssa on 1 ja tulot muiden yksikkövektorien kanssa ovat kaikki nollia

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (4.61)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0. \quad (4.62)$$

Niinpä kahden vektorin pistetulo voidaan kirjoittaa *komponenttimuodossa*

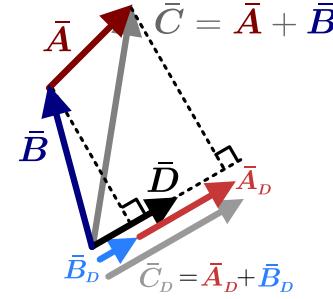
$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \quad (4.63)$$

$$= A_x \hat{i} \cdot B_x \hat{i} + A_x \hat{i} \cdot B_y \hat{j} + A_x \hat{i} \cdot B_z \hat{k} + A_y \hat{j} \cdot B_x \hat{i} + \dots + A_z \hat{k} \cdot B_z \hat{k} \quad (4.64)$$

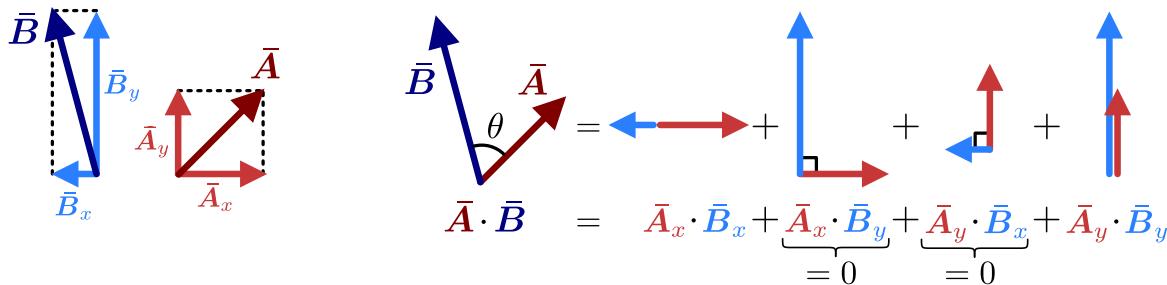
$$= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + \dots + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}. \quad (4.65)$$

Tässä on siis kirjoitettu molemmat vektorit komponenteittan ja kerrottu pistetulo auki. Näin saatavassa lausekkeessa on yhdeksän termiä, mutta näistä kuusi on nollia yksikkövektorien kohtisuoruusehdon (4.62) vuoksi

Kuva 4.7: Summan projektiot on projektiot summa.



Kuva 4.8: Vektoreiden pistetulo saadaan laskettua karteesisten komponenttien avulla kertomalla samansuuntaiset komponentit keskenään ja laskemalla näinä tulot yhteen.



(esim. $A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$). Lopuissa kolmessa esiintyy kunkin yksikkövektorin tulo itsensä kanssa, mikä on 1 (esim. $A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} = A_x B_x$). Tulos sievenee siis muotoon

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (4.66)$$

joten minkä tahansa kahden vektorin *pistetulo voidaan laskea yksinkertaisesti kertomalla vektoreiden x-, y- ja z-skalaarikomponentit keskenään ja laskemalla näin saadut luvut yhteen.*

Pistetulon laskeminen komponenteista on siis erittäin helppoa, ja niinpä pistetulon avulla voidaan laskea hyvin tehokkaasti sellaisia geometrisiä ominaisuuksia, joiden määrittäminen kolmiulotteisessa avaruudessa olisi muilla keinoina hyvin hankalaa. Esimerkiksi kahden vektorin välinen kulma voidaan ratkaista pistetulon määritelmästä (4.54)

$$\cos \theta = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{AB} \quad (4.67)$$

ja vektorin skalaarikomponentti saadaan säännöllä (4.56).



4.8 Mitä ovat vektorien $\bar{A} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ sekä $\bar{B} = 4\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$ (a) pituudet, (b) pistetulo, (c) välinen kulma?

esimerkki 4.5

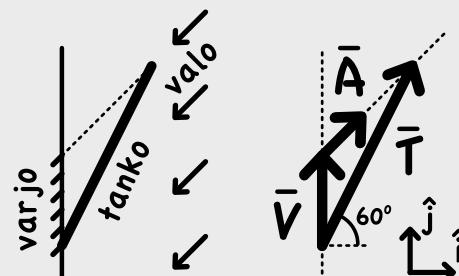
Varjo

Seinässä on vino lipputanko. Tangon pituus on 1.0 m ja se on 30° kulmassa seinään nähdyn. Aurinko paistaa 45° asteen kulmassa maahan ja seinään nähdyn niin, että tangon varjo seinällä on pystysuora. Kuinka pitkä varjo on?

TILANNE Valitaan x -akseli vaakasuoraan pois päin seinästä ja y -akseli ylöspäin. Valo saapuu siis suunnasta $\bar{A} = \hat{i} + \hat{j}$. Määritellään tankoa kuvaava vektori \bar{T} ja varjota kuvaava vektori \bar{V} .

SUUNNITELMA Varjo on pystysuora, joten $\bar{V} = V\hat{j}$, missä V on varjon pituus. Tanko on 60° kulmassa x -akseliin nähdyn, joten $\bar{T} = (1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ \hat{i} + (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ \hat{j}$.

Jos tangon kärjestä piirretään suora valon suuntaan, tämä suora kohtaa seinän varjon kärkipisteessä. Toisin sanoen lipputankoa kuvaava vektori voidaan muodostaa lisäämällä vektoriin \bar{V} sopivan pituuden valon kulkuunsaan osoittava vektori $a\bar{A}$. Toisin sanoen jollakin a pätee



$$\bar{T} = \bar{V} + a\bar{A}. \quad (4.68)$$

RATKAISU Sijoittamalla vektorien lausekkeet yhtälöön (4.68) saamme komponenttimuotoisen yhtälön

$$(1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ \hat{i} + (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ \hat{j} = V\hat{j} + a(\hat{i} + \hat{j}) = a\hat{i} + (V + a)\hat{j}. \quad (4.69)$$

Yhtälön kummallakin puolella on x - ja y -komponentteihin jaettu vektori, ja koska komponenttijako on yksikäsiteinen, vektoriella täytyy olla samat komponentit. Siispä x -komponenteille saadaan yhtälö $(1.0 \text{ m}) \cos 60^\circ = a$ ja y -komponenteille $(1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ = V + a$. Ensimmäinen yhtälö kertoo meille suoran tuntemattoman a arvon, ja tämän sijoitus jälkimmäiseen yhtälöön antaa varjon pituudeksi

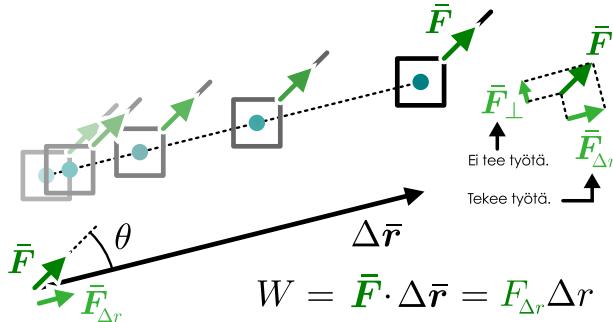
$$V = (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ - a = (1.0 \text{ m})(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ) = 0.366 \text{ m}. \quad (4.70)$$

ARVIOINTI Tangon kohtisuoran projektiot pituus seinällä olisi $T_V = (1.0 \text{ m}) \sin 60^\circ = 0.866 \text{ m}$. Nyt valo ei kuitenkaan saavu seinälle kohtisuoraan, joten kyseessä ei ole kohtisuora projektio. Kuvasta näemme, että varjon pituus on noin puolet tangon korkeudesta. Laskettu pituus on hieman pienempi kuin $|T_V|/2$, joten tulos on järkevä.

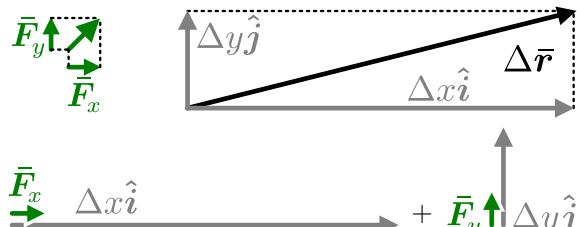
Vakiovoiman tekemä työ

Kuva 4.9: Vakiovoiman tekemä työ.

(a) Työ on voiman ja siirtymän pistetulo.



(b) Työn lasku komponenteittain.



$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

peutta, jolla energia siirtyy, eli jos vakiovoima tekee ajassa Δt työn W , sen keskimääräinen teho on

$$P_{\text{keskiarvo}} = \frac{W}{\Delta t} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\Delta \bar{\mathbf{r}}}{\Delta t}. \quad (4.75)$$

Hetkellinen teho saadaan raja-arvona kun aikaväli Δt lähestyy nolla,

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\Delta \bar{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}}. \quad (4.76)$$

Työn teho on siis voimavektorin ja nopeusvektorin pistetulo. Tämä on yleinen tulos joka pätee myös vaikkei voima olisi vakio, koska lauseke johdettiin differentiaisen lyhyellä ajanjaksolla dt , jonka aikana muuttuvaakin voimaa voidaan pitää vakiona.



4.9 Miksi voimalle pätee $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ mutta kuitenkin $W \neq \sqrt{(F_x \Delta x)^2 + (F_y \Delta y)^2 + (F_z \Delta z)^2}$?

Viivaintegraali

Yhdessä ulottuvuudessa muuttuvan voiman tekemä työ laskettiin jakamalla kappaleen siirtymä infinitesimaaliisiin osiin, joilla voima on vakio, laskemalla kullakin pienellä siirtymällä tehty infinitesimaalinen työ ja summaamalla nämä yhteen — eli integroimalla paikan suhteen. Kolmessa ulottuvuudessa työ lasketaan samalla periaatteella, mutta asiaa hankaloittaa lisäksi se, että kappale ei vältämättä kulje suoraan vaan sen reitti voi olla kaareva. Kaarevakin reitin voi kuitenkin jakaa pieniin suoriin osiin ja näin muodostunut murtoviiva lähestyy aidosti kaarevaa reittiä jaon tihentyessä.

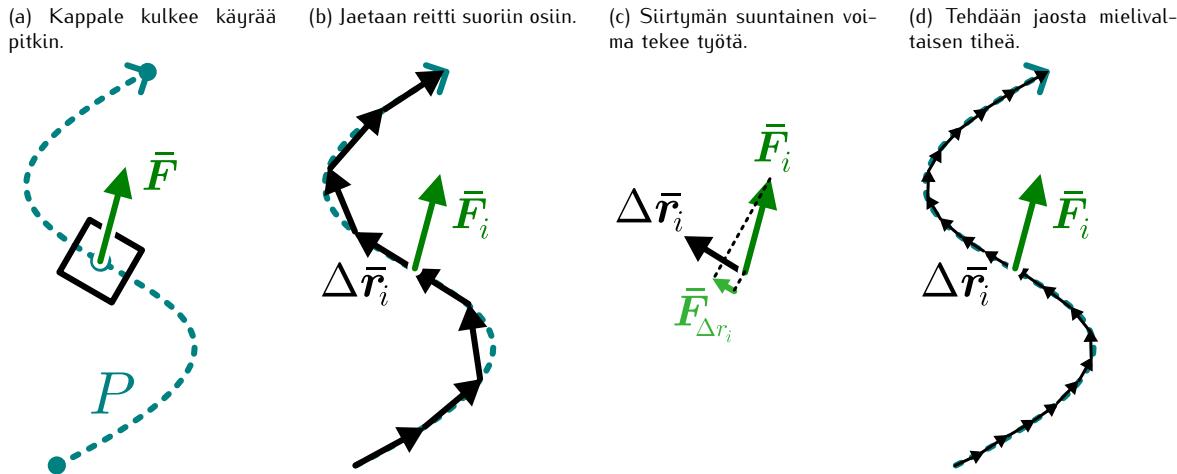
Tarkastellaan kappaletta, joka kulkee pisteestä \bar{r}_{alku} pisteeseen \bar{r}_{loppu} kaarevaa reittiä P pitkin (kuva 4.10). Jaetaan reitti pieniin suoriin siirtymiin $\Delta \bar{r}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$ niin, että nämä siirtymät yhdessä kulkevat reitin alusta loppuun

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{loppu}} - \bar{\mathbf{r}}_{\text{alku}} = \sum_{i=0}^N \Delta \bar{\mathbf{r}}_i. \quad (4.77)$$

Kun siirtymät ovat kyllin lyhyet, kappaaleeseen vaikuttava voima \bar{F}_i on likimain vakio joka on sama kaikilla siirtymävaiheilla. Tällöin kullekin siirtymälle voima tekee yhtälön (4.73) mukaisesti työn

$$W_i = \bar{\mathbf{F}}_i \cdot \Delta \bar{\mathbf{r}}_i \quad (4.78)$$

Kuva 4.10: Muuttuvan voiman tekemä työ käyräviivaista reittiä pitkin on voiman viivaintegraali.



ja kappaleeseen tehty kokonaistyö on näiden summa. Ottamalla raja-arvo, kun reitti jaetaan äärettömän lyhyisiin osiin, sekä reitin approksimaation että voiman vakioksi olettamisen virhe lähestyvät nolla ja saadaan työn tarkka arvo,

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \bar{F}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_P \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.79)$$

Tämä on työn yleinen määritelmä.

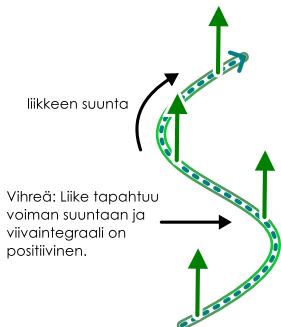
Yhtälössä esiintyvä lauseke on **viivaintegraali**, jossa integroidaan suuretta jotakin tiettyä avaruuden *reittiä* pitkin. Koska integroitavana on kahden vektorin pistetulo, joka on skalaari, lopputulos on myös skalaari. Yhdessä ulottuvuudessa viivaintegraaleja ei ole, koska liike on rajoitettu suoralle ja voi siten tapahtua korkeintaan edestakaisin. Siksi yhdessä ulottuvuudessa määrittyjen integraalien arvo riippuu alku- ja loppupisteestä. Kolmessa ulottuvuudessa lasketun viivaintegraalin arvo voi sen sijaan riippua myös siitä, mitä kautta alkupisteestä siirtyään loppupisteesseen.



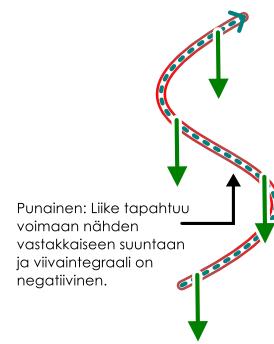
4.10 Haluat kulkea luentosalista ruokalaan. Voit mennä sinne mitä reittiä haluat. Mitkä seuraavista suureista riippuvat valitsemastasi reitistä? (a) Matkan pituus, (b) oman gravitaatiopotentiaalenergiasi muutos, (c) kitkan ja ilmanvastuksen sinuun tekemä työ, (d) gravitaation sinuun tekemä työ?

Kuva 4.11: Erilaisia viivaintegraaleja. Polku ympäröivän viivan väri kertoo, onko liike samaan vai vastakkaiseen suuntaan voiman nähdyn.

(a) Reitti voiman suuntaan.



(b) Reitti voimaa vastaan.



Viivaintegraalin fysikaalista merkitystä on pyritty havainnollistamaan kuvassa 4.11. Kuvassa (a) kappale liikkuu käyräviivaista polku pitkin ylöspäin ja siihen kohdistuu samalla ylöspäin vaikuttava voima. Koska liike on aina samaan suuntaan kuin voiman liikkeen suuntainen komponentti, viivaintegraali on *positiivinen* ja voima tekee koko matkan positivista työtä kappaleeseen. Tämä on esitetty kuvassa kappaleen kulkema polku ympäröivällä vihreällä viivalla.

Tässä tarkasteltu voima *ei ole* kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima, koska kappaleen kiilthyvyys ei selvästi käään osoita ylöspäin. Tämän voi päättää siitä, että rata mutkittelee. Jos kiilthyvyys osoittaisi ylöspäin, rata olisi ylöspäin aukeava paraabeli. Kyseessä voi olla esimerkiksi tilanne, jossa ihminen kulkee nousevassa hississä edestakaisin ja tarkasteltu

voima on hänen kohdistuva hissin lattian tukivoima. Hissin matkustajaan kohdistava tukivoima pitää hänet ylöspäin nousevalla radalla ja tekee samalla matkustajaan työtä.

Kuvassa (b) on sama reitti, mutta nyt voima osoittaa alaspäin. Tällöin voiman komponentti radan tangentin suunnassa osoittaa aina vastakkaiseen suuntaan kuin mihin kappale liikkuu, joten voiman tekemä työ on

negatiivinen. Tämä on esitetty kuvassa rataa ympäröivänä punaisena viivanä. Tämä voima voisi olla samaiseen hissimatkustajaan vaikuttava painovoima. Painovoima tekee nousevaan kappaleeseen negatiivista työtä, koska se *vähentää* kappaleen liike-energiaa muuttaen sen vuorovaikutukseen varastoimaksi potentiaalienergiaksi.

Edellisissä esimerkeissä oli yksinkertaista päätellä, onko viivaintegraali positiivinen vai negatiivinen, koska liike tapahtui aina joko liikimain voiman suuntaan tai siihen nähdien vastakkaiseen suuntaan. Yleisesti kuitenkin tilanne voi vaihdella kuten kuvassa 4.12. Kuvassa (a) kappale kulkee välillä voiman suuntaan eli kuvassa oikealle, jolloin voima tekee kappaleeseen positiivista työtä (vihreä). Välillä kappale kuitenkin käännyy ja alkaa kulkea voimaan nähdien vastakkaiseen suuntaan, jolloin työ on negatiivinen (punainen). Kappaleen liikkussa voiman suuntaan nähdien kohtisuoran, voima ei tee työtä lainkaan (harmaa). Kuvassa (b) puolestaan voima muuttuu kappaleen kulkiessa, jolloin aluksi kappaleeseen tehdään positiivista ja lopuksi negatiivista työtä.

Koko matkan aikana tehty työ saadaan las kemalla positiivinen ja negatiivinen työ yhteen, ja tämä kokonaistyö on siis positiivinen, jos kappaleeseen tehdään enemmän positiivista kuin negatiivista työtä, ja päinvastoin negatiivinen, jos negatiivisen työn osuus on suurempi. Jos positiivista ja negatiivista työtä tehdään yhtä paljon, kokonaistyö on *nolla*. Tämä on myös viivaintegraalin fysikaalinen merkitys. Karkeasti ilmaisten viivaintegraali nimittäin mittaa sitä, osoittaako integroitava vektorisuure kuljetulla polulla enemmän kulkusuuntaan vai sitä vastaan.



4.11 Ovatko kuvissa 4.12 esitetyt viivaintegraalit positiivisia, negatiivisia vai nollia?

Viivaintegraalin laskeminen on mahdollista myös tarkasti, jos sekä kappaleen reitti että siihen vaikuttava voima pystytään ilmoittamaan jonkin parametrin kuten kuljetun matkan tai ajan avulla. Esimerkiksi jos tiedetään kappaleeseen vaikuttava voima ajan funktiona, $\bar{F}(t)$ sekä kappaleen paikka $\bar{r}(t)$, viivaintegraali voidaan muuttaa integraaliksi ajan suhteen

$$W = \int_P \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F}(t) \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F}(t) \cdot \bar{v}(t) dt. \quad (4.80)$$

Tämän voi puolestaan jakaa edelleen komponentteihin pistetulon laskusäännön avulla, jolloin voidaan laskea erikseen voiman erisuuntaisten komponenttien tekemä työ.

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x v_x dt + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_y v_y dt + \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_z v_z dt. \quad (4.81)$$

Nämä monimutkaiselta näyttänyt viivaintegraali on pilkottu kolmen tavallisen yhden muuttujan integraalin summaksi, ja näiden laskeminen onnistuu tavallisilla integrointisäännöillä. Esimerkissä 4.6 näytetään, miten tällainen lasku tehdään.

Edellisessä analyysissä työ, joka on voiman ja *siirtymän* pistetulo, muutettiin muotoon, jossa esiintyy voiman ja *nopeuden* pistetulo. Tämähän on kappaleeseen työtä tekevän voiman *teho*, ja se ilmaisee kuinka *nopeasti* energiaa siirryy kappaleelle. Kappaleelle siirryvä kokonaisenergiamäärä eli kappaleeseen tehty työ on puolestaan teho (kuinka nopeasti energiaa siirryy) kerrottuna ajalla (kuinka kauan energiaa siirryy), jos teho on vakio. Jos teho ei ole vakio, kokonaistyö saadaan integroimalla tehoa ajan suhteen.

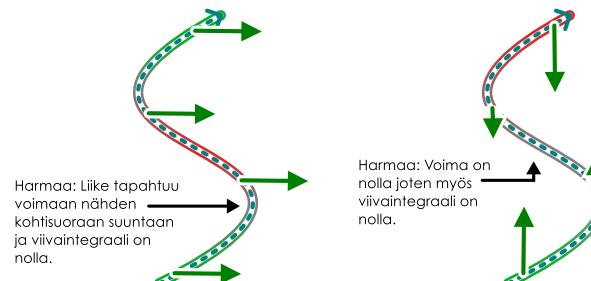


4.12 Selitä omin sanoin, miten työ lasketaan kappaleen liikkussa kahdessa tai kolmessa ulottuvuudessa. Selitä erityisesti milloin pistetulo ja viivaintegraali ovat positiivisia, negatiivisia tai nollia.

Kuva 4.12: Eriaisia viivaintegraaleja. Polkua ympäröivän viivan väri kertoo, onko liike samaan vai vastakkaiseen suuntaan voimaan nähdyn.

(a) Reitti edestakaisin.

(b) Muuttuva voima.



esimerkki 4.6

Työ viivaintegraalina

Kuinka suuren työn kokonaivoima tekee määritelmän mukaisesti esimerkin 4.3 kuulaan kahden sekunnin aikana?

TILANNE Kuulan liikerata, nopeus sekä kuulaan vaikuttavat voimat on ratkaistu komponenteittain esimerkissä 4.3. Tarkastelaan prosessia ajan välillä $t_{\text{alku}} = 0$ s ja $t_{\text{loppu}} = 2$ s.

SUUNNITELMA Kuulaan tehty työ on määritelmän mukaisesti voiman viivaintegraali siirtymän suhteen. Jotta tällaisen integraalin voisi laskea, pitää kuitenkin tietää sekä kuulan paikka että siihen vaikuttava voima jonkin parametrin funktiona. Mahdollisia vaihtoehtoja ovat esimerkiksi kuljetun matkan pituus tai matkaan käytetty aika. Koska nyt tiedämme jo valmiiksi kaikki suuret ajan funktioita, on järkevästi esittää voima ja siirtymä ajan funktioina. Eriyisesti siirtymä voidaan ilmoittaa nopeuden ja ajan muutoksen tulona.

Työ on määritelmän mukaisesti

$$W = \int_{\bar{r}_{\text{alku}}}^{\bar{r}_{\text{loppu}}} \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.82)$$

Jos kuulan nopeus ajan hetkellä t on $\bar{v}(t)$, on kuulan siirtymä lyhyen ajan dt kuluessa nopeuden määritelmän mukaisesti $d\bar{r} = \bar{v}dt$. Työ voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{F} \cdot \bar{v} dt. \quad (4.83)$$

Tämä voidaan päättää myös työn tekemän tehon avulla, sillä teho on

$$P = \frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}, \quad (4.84)$$

joten työ saadaan integroimalla lauseketta $dW = \bar{F} \cdot \bar{v} dt$. Käytännössä lasku onnistuu hajottamalla pistetulo komponentteihin

$$W = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} (F_x v_x + F_y v_y) dt. \quad (4.85)$$

RATKAISU Lasketaan ensin x -suuntaisen voiman tekemä työ

$$W_{F_x} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_x v_x dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{1}{2} \frac{A^2}{m} t^3 dt = \frac{1}{8} \frac{A^2}{m} (t_{\text{loppu}}^4 - t_{\text{alku}}^4). \quad (4.86)$$

Sijoittamalla lukuarvat saadaan $W_{F_x} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ J. Vastaavasti y -suunnassa

$$W_{F_y} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} F_y v_y dt = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{B^2}{mC} (1 - \cos Ct) \sin Ct dt. \quad (4.87)$$

Tässä integraalissa on kaksi termiä, joista ensimmäisen integraali on $\int \sin Ct dt = -\frac{1}{C} \cos Ct + c$ ja toisen integrointi onnistuu esimerkiksi trigonometristen laskusääntöjen avulla $\int -\cos Ct \sin Ct dt = \int -\frac{1}{2} \sin 2Ct dt = \frac{1}{4C} \cos 2Ct + c$. Kaikkiaan siis

$$W_{F_y} = \left|_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \frac{B^2}{mC^2} \left(\frac{1}{4} \cos 2Ct - \cos Ct \right) \right| = \frac{B^2}{mC^2} \left(\frac{1}{4} \cos 2Ct_{\text{loppu}} - \cos Ct_{\text{loppu}} \right) - \frac{B^2}{mC^2} \left(\frac{1}{4} \cos 2Ct_{\text{alku}} - \cos Ct_{\text{alku}} \right). \quad (4.88)$$

Sijoittamalla lukuarvat saadaan $W_{F_y} = 1.2 \cdot 10^{-7}$ J.

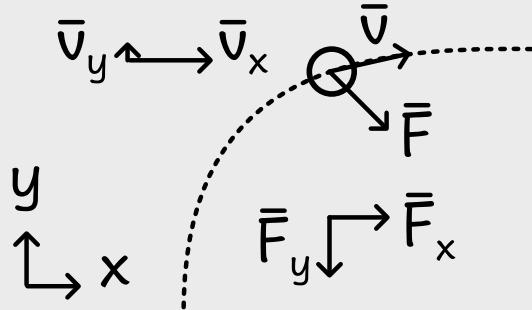
Kokonaistyö on näiden summa, ja koska y -suuntaisten voimien tekemä työ on huomattavasti pienempi kuin x -suuntaisten, kokonaistyö on kahden merkitsevän numeron tarkkuudella sama kuin pelkkä x -suuntaisen voiman komponentin tekemä työ $W = W_{F_x} + W_{F_y} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ J.

Mathematica:

```
(* voimat *)
fx = a t; fy = b Sin[c t];
lukuarvat = {a -> 3*10^-4, b -> 7*10^-4, c -> 3.5, m -> 0.01};
aika = {talku -> 0, tloppu -> 2}

(* nopeudet *)
vx = Integrate[fx/m, {t, 0, t}]
(a t^2)/(2 m)
vy = Integrate[fy/m, {t, 0, t}]
(b - b Cos[c t])/(c m)

(* työ *)
wx = Integrate[fx vx, {t, talku, tloppu}]
-((a^2 talku^4)/(8 m)) + (a^2 tloppu^4)/(8 m)
```



```

wx /. lukuarvot /. aika
0.000018
wy = Integrate[fy vy, {t, talku, tloppu}]
(b^2 (4 Cos[c talku] - Cos[2 c talku] - 4 Cos[c tloppu] + Cos[2 c tloppu]))/(4 c^2 m)
wy /. lukuarvot /. aika
1.21128*10^-7

(* kokonaistyö *)
w = wx + wy /.lukuarvot /. aika
0.0000181211

(* kuulan saaman liike-energian pitää olla sama kuin siihen tehty kokonaistyö *)
kx = 1/2 m vx^2 /. lukuarvot /. t->2
0.000018
ky = 1/2 m vy^2 /. lukuarvot /. t->2
1.21128*10^-7

```

ARVIOINTI Kuulan liike-energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin kuulaan tehty kokonaistyö. Sijoitus liike-energian lausekkeeseen osoittaa, että näin on

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ J} = W. \quad (4.89)$$

Tarkistetaan myös työn yksiköt:

$$[W_x] = \frac{[A^2]}{[m]} [t^4] = \frac{N^2/s^2}{kg} s^4 = \frac{kg^2 m^2/s^4}{kg} s^2 = kg m^2/s^2 = J \quad (4.90)$$

$$[W_y] = \frac{[B^2]}{[mC^2]} [\cos 2Ct] = \frac{N^2}{kg s^{-2}} \cdot 1 = \frac{N^2 s^2}{kg} = J. \quad (4.91)$$

Konservatiivisuus

Aikaisemmin määritelimme konservatiivisiksi sellaiset vuorovaikutukset, joihin liittyy potentiaalienergia. Edelleen jos systeemissä vaikuttaa vain konservatiivisia vuorovaikutuksia, mekaaninen energia on systeemissä vakioksi, ja tämä ominaisuus tekee konservatiivisuudesta erittäin tärkeän teoreettisen työkalun. Lisäksi yhdessä ulottuvuudessa opimme myös, että potentiaalienergia voidaan määrittää konservatiivisen voiman tekemän työn kautta

$$\Delta U = -W_{\text{konservatiivinen}} = - \int_{x_{\text{alku}}}^{x_{\text{loppu}}} F_x dx, \quad (4.92)$$

eli integraalina. Tämä tulos perustui siihen, että työ mittaa vuorovaikutuksen siirtämää energiota, ja konservatiivisen vuorovaikutuksen tapauksessa tämä energia tulee vuorovaikutuksen varastoimasta potentiaalienergiasta. Vastaavasti voima saadaan potentiaalienergian derivaattana,

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (4.93)$$

Seuraavaksi tarkastelemme, miten konservatiivisuus ilmenee kolmiulotteisessa avaruudessa.

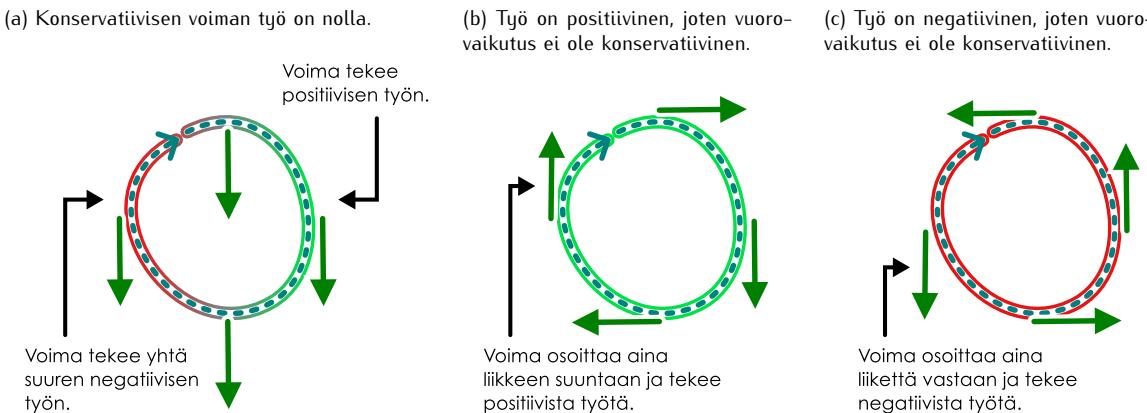
Myös kolmessa ulottuvuudessa potentiaalienergia määritellään niin, että konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutos missä tahansa prosessissa on tämän vuorovaikutuksen tekemän työn vastaluku $\Delta U = -W_{\text{konservatiivinen}}$. Potentiaalienergialla ei ole absoluuttista arvoa, mutta jos valitaan jokin piste \bar{r}_0 potentiaalienergian nollakohdaksi, konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia missä tahansa pisteesä \bar{r} on voiman tekemän työn vastaluku kappaleen siirtyessä nollapisteestä tähän tarkastelupisteeseen

$$U(\bar{r}) = -W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}}. \quad (4.94)$$

Kolmessa ulottuvuudessa on kuitenkin huomioitava, että kappale voi tehdä siirtymän $\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}$ mielivaltaista reittiä pitkin ja työ määriteltiin kolmessa ulottuvuudessa viivaintegraalina. Kuitenkin koska potentiaalienergia on paikan funktio, sillä täytyy olla pisteesä \bar{r} jokin tietty yksikäsitteinen arvo. Niinpä yhtälö (4.94) on mielekäs vain jos työ $W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}}$ saa saman arvon kulkipa kappale mitä tahansa reittiä pitkin. Tämä on kolmessa ulottuvuudessa konservatiivisuuden määritelmä: vuorovaikutus on konservatiivinen jos ja vain jos sen tekemä työ kappaleen siirtyessä minkä tahansa kahden pisteen välillä ei riipu reitistä, jota pitkin kappale kulkee.

Toinen tapa ilmaista sama asia on vaatia, että jos kappale kulkee suljetun reitin, konservatiivisen voiman siihen tekemän työn täytyy olla nolla. Nämä siksi, että kuljettuaan suljetun reitin kappale palaa takaisin alkupisteesensä jolloin potentiaalienergian täytyy olla lopuksi sama kuin aluksi. Potentiaalienergian muutos kierroksen jälkeen, jonka täytyy olla sama kuin vuorovaikutuksen tekemä työ, on siis nolla $W_{\text{suljettu}} = -\Delta U =$

Kuva 4.13: Viivaintegraali suljetulla reitillä.



0 J. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4.13 (a), jossa voima tekee silmukan kulkevan kappaleeseen yhtä paljon positiivista ja negatiivista työtä jolloin kokonaistyö on nolla.

Atta näin ei kuitenkaan välttämättä ole ja kappaleeseen tehty kokonaistyö voi olla nollasta poikkeava vaikka kappale kulkisi suljetun reitin. Näin on kuvissa 4.13 (b) ja (c), joissa molemmissa voima on aina yhdensuuntainen liikkeen kanssa — joko samansuuntainen, jolloin työ on positiivinen, tai vastakkaisuuntainen, jolloin työ on negatiivinen.

Täsmälleen sama ajatus esiteltiin jo luvussa 2 tarkasteltaessa kappaleita, jotka kuljettuaan edestakaisen matkan palasivat samaan pisteeseen. Jos kappaleen mekaaninen energia säilyi, siihen tehty kokonaistyö oli nolla ja vuorovaikutukset olivat konservatiivisia. Jos puolestaan kappaleen mekaanista energiota oli muuttunut sisäenergiaksi tai pääinvastoin, kappaleeseen täytyi vaikuttaa myös dissipatiivisia vuorovaikutuksia.



4.13 (a) Kappaletta nostetaan ensin metri suoraan ylös ja sitten lasketaan metri alas. Millainen on painovoiman kappaleeseen tekemä työ? (b) Kappaletta työnnetään lattialla ensin metri eteenpäin ja sitten metri takaisin. Millainen on kitkan kappaleeseen tekemä työ? (c) Mitä tulokset kertovat voimien konservatiivisuudesta?

Tarkastellaan lopuksi vielä painovoimaa esimerkkinä konservatiivisesta vuorovaikutuksesta. Painovoimallaan on potentiaalienergia (2.19), joten painovoiman on sen perusteella oltava konservatiivinen vuorovaikutus. Perustelimme tämän aikaisemmin kuitenkin vain *pystysuoralle* liikkeelle. Kolmessa ulottuvuudessa kappaleet voivat kuitenkin liikkua myös *vaakasuunnassa*, ja jotta painovoima todella olisi konservatiivinen, sen tekemän työn täytyy olla nolla minkä tahansa suljetun reitin kulkeneeseen kappaleeseen. Päättelään nyt, että painovoiman tapauksessa näin todella tapahtuu.

Tarkastellaan ensin yksinkertaista tapausta — vapaata liikettä kaltevalla tasolla. Suora siirtymä kaltevalla tasolla voidaan jakaa pysty- ja vaakasuoran komponenttiin $\Delta\bar{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, jolloin painovoiman tekemä työ on

$$W = \bar{G} \cdot \Delta\bar{r} = -mg\hat{j} \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\hat{j} \cdot \Delta x\hat{i} - mg\hat{j} \cdot \Delta y\hat{j}. \quad (4.95)$$

Tässä kuitenkin painovoiman ja vaakasiirtymän pistetulo on nolla, $-mg\hat{j} \cdot \Delta x\hat{i} = -mg\Delta x(\hat{i} \cdot \hat{j}) = 0$, joten työ riippuu ainoastaan *pystysuuntaisesta* siirtymästä

$$W = -mg\hat{j} \cdot \Delta y\hat{j} = -mg\Delta y. \quad (4.96)$$

Tämä on sama tulos kuin pystysuorassa liikkeessä. Kalteva tasoa pitkin liikkuva kappale toki joutuu kulkemaan pidemmän matkan ja se käyttää tähän matkaan enemmän aikaa, mutta kappaleen saama energia on sama kuin suorassa pudotuksessa.

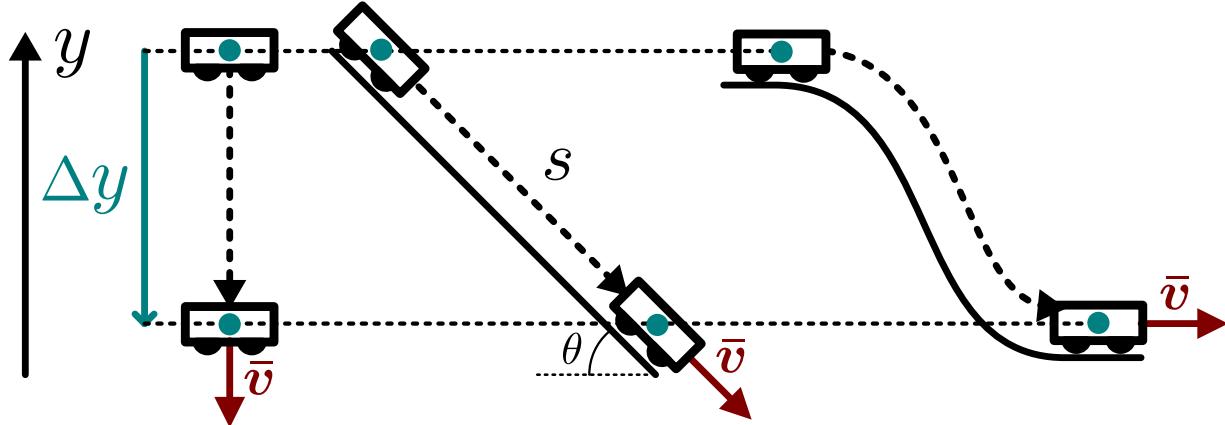
Tapaus, jossa kappale liikkuu pitkin käyräviivaista reittiä, voidaan analysoida edellisen tuloksen avulla. Mikä tahansa reitti voidaan nimittäin jakaa lyhyistin osiin ja näitä osia voidaan pitää likimain suorina siirtyminä kuten kuvassa 4.14 (b) on esitetty. Tämä on tietenkin approksimaatio, jos kappale todellisuudessa kulkee käyräviivaista rataa, mutta mitä lyhyempiin osiin reitti jaetaan, sitä tarkemmin suorista siirtymistä koostuva reitti muistuttaa todellista käyrää.

Kullakin lyhyellä siirtymällä kappaleeseen tehty työ riippuu vain kappaleen pystysuuntaisesta siirtymästä ja kokonaistyö saadaan laskemalla nämä yhteen. Koska massa ja putoamiskiihtyvyys ovat tässä vakioita, tämä kuitenkin johtaa vain pystysuuntaisten siirtymien yhteenlaskuun. Kuvan 4.14 (c) esimerkissä reitti on jaettu neljään osaan, jolloin

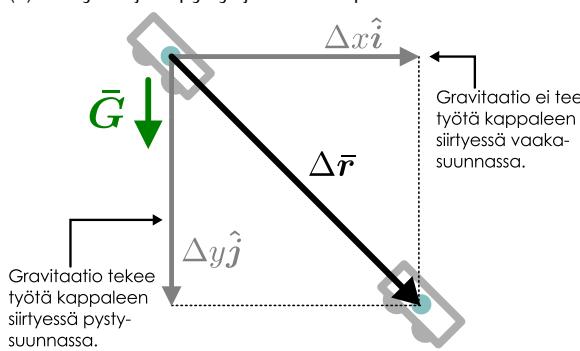
$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = -mg(\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4) = -mg\Delta y_{\text{kokonais}}. \quad (4.97)$$

Kuva 4.14: Painovoima on konservatiivinen, koska sen kappaleeseen tekemä työ ei riipu kappaleen kulkemasta reitistä vaan vain pystysuuntaisesta siirtymästä.

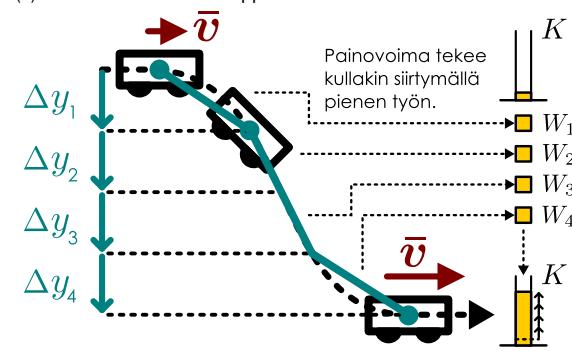
(a) Pystysuora, vino ja kaareva reitti.



(b) Siirtymän jako pysty- ja vaakakomponentteihin.



(c) Kaarevan reittin voi approksimoida murtoviivana.



Tulos on sama riippumatta siitä miten reitti jaettiin osiin, joten sen täytyy päteä *mille tahansa* reitille, jonka loppu- ja alkupisteen välinen etäisyys on pystysuunnassa Δy . Nämä on siis päättely, että *mitä tahansa* reittiä kappale kulkeekaan painovoimakentässä, sen liike-energian muutos riippuu ainoastaan sen siirtymästä *pystysuunnassa*. Siispä gravitaatiota todella kuvaava ainoastaan kappaleen pystysuuntaisesta koordinaatista riippuva potentiaalienergia (2.19) ja vuorovaikutus on konservatiivinen.



4.14 Päätteli edellä esitetyn perusteella vielä, että jos kappale kulkee suljetun reitin, painovoiman siihin tekemä työ on nolla. Selität, miksi tämä on tärkeää.

4.5 Kentät

Kenttä vuorovaikutuksen välittäjänä

Vuorovaikutuksilla tarkoitetaan fysiikassa yleisesti kahden tai useamman olion välistä vaikutussuhdetta, joka ohjaa olioiden käyttäytymistä. Vuorovaikutukset tuottavat voimia ja niihin voi liittyä potentiaalienergiaa. Fysiikka tuntee neljä perusvuorovaikutusta, jotka ovat *gravitaatiovuorovaikutus* eli painovoima, *sähkömagneettinen vuorovaikutus*, *heikko vuorovaikutus* sekä *vahva vuorovaikutus*.

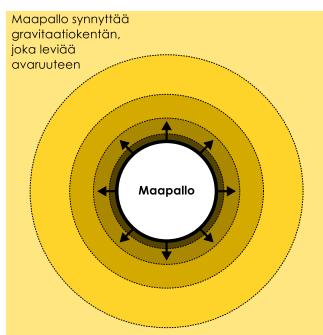
Heikko ja vahva vuorovaikutus vaikuttavat atomiydinten ja alkeishiukkasten mittakaavassa. Ne ovat äärimäisen tärkeitä, sillä ne pitävät atomien ytimet koossa ja vaikuttavat ilmiöissä kuten radioaktiivisuudessa. Kuitenkaan makroskoopissa, arkielämän mittakaavassa niitä ei voi suoraan havaita, emmekä tässä materiaalissa käsittele lainkaan näitä vuorovaikutuksia.

Gravitaatio on kaikkien *massallisten* kappaleiden ja hiukkasten välinen vuorovaikutus, joka saa kappaleet vetämään toisiaan puoleensa. Ilmeisin esimerkki gravitaatiosta on se, että kappaleet putoavat kohti maata, sillä maapallo vuorovaikuttaa gravitaation kautta kaikkien massallisten kappaleiden kanssa vetäen niitä puoleensa.

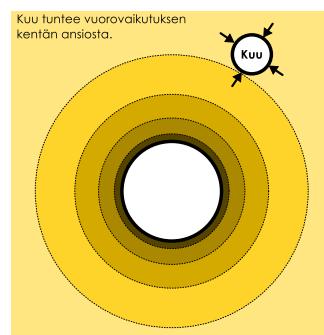
Sähkömagneettinen vuorovaikutus puolestaan vaikuttaa hiukkasiin, joilla on *sähkövaraukseksi* kutsuttu ominaisuus. Se pitää atomien elektronit ja ytimet toisissaan kiinni ja se voidaan havaita suoraan myös makros-

Kuva 4.15: Gravitaatiovuorovaikutuksen voi ajatella välittivän kappaleiden kesken gravitaatiokentän avulla.

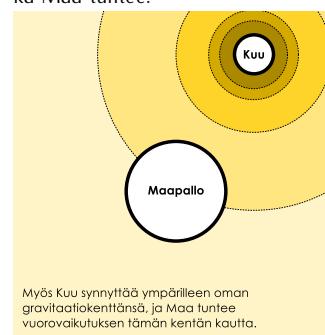
(a) Maa synnyttää kentän.



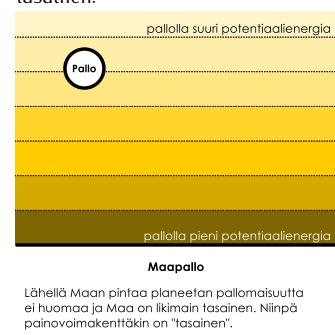
(b) Kuu tuntee kentän.



(c) Myös Kuu synnyttää kentän, jonka Maa tuntee.



(d) Lähellä Maan pintaan kenttä on tasainen.



kooppisessa mittakaavassa sähköisesti varattujen, magneettisten ja virtaa kuljettavien kappaleiden vuorovaikutuksina. Tutustumme sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen tarkemmin luvusta 10 alkaen.

Myös esimerkiksi kemia, aineen makroskooppiset ominaisuudet ja arkipäiväiset vuorovaikutukset kuten kosketusvuorovaikutukset ovat pohjimmiltaan sähkömagneettisen vuorovaikutuksen aikaansaamia. Ne ovat nimitätin kaikki seurausta atomeissa olevien elektronien vuorovaikutuksista ja kvanttimekaanisista ominaisuuksista. Kappaleet eivät esimerkiksi kulje toistensa läpi, koska niiden rakenteen hajottaminen edellyttäisi atomiydinien ja elektronien välisen sähkömagneettisen vuorovaikutuksen synnyttämien sidosten rikkomista, mikä vaatisi hyvin paljon energiaa. Ainetta *on* toki mahdollista hajottaa, mutta se ei ole yleensä aivan helppoa.

Sähkömagneettinen vuorovaikutus voi saada hiukkaset joko hylkimään toisiaan tai vetämään toisiaan puoleensa. Gravitaatio puolestaan saa kappaleet aina vetämään toisiaan puoleensa. Mitä suurempi on kappaleiden massa, sitä voimakkaampi on niiden välinen gravitaatio. Gravitaatio on kuitenkin paljon heikompi kuin kaikki muut perusvuorovaikutukset (myös heikompi kuin "heikko" vuorovaikutus), joten tarvitaan valtavan suuria massakeskittymiä kuten tähtiä ja planeettoja, jotta gravitaation vaikutukset voitaisiin havaita. Planeettoja ja tähtiä kuitenkin on olemassa, ja niinpä hyvin suressa mittakaavassa gravitaatio on usein merkittävä vuorovaikutus. On ehkä yllättävää, että gravitaatio, joka tavallisesti tuntuu hyvin vahvalta vuorovaikutukselta onkin ylivoimaisesti heikoin luonnon vuorovaikutus. Tämän voi ymmärtää paremmin huomaamalla, että vaikka pitelisit kädessäsi vaikkapa painavaa kirjaa, jota vetää puoleensa *koko maapallon massa*, pieni alue sormiesi pinnalla pystyy kosketuksen kautta helposti vuorovaikuttamaan kirjan kanssa voimakkaammin ja nostamaan kirjan ylös. Ja kosketuksessakin välittyy vain sähkömagneettisen vuorovaikutuksen pieni sivujänne.

Monet arkipäiväiset vuorovaikutukset vaativat kappaleiden koskettamista, koska ne syntyvät kappaleiden pintojen atomien kohdateissa. Oleellisesti kysymys on siitä, että atomien elektronit eivät voi helposti kulkea toistensa läpi. Gravitaatio ja sähkömagneettinen vuorovaikutus kuitenkin toimivat vaikka vuorovaikuttavat hiukkaset olisivat *kuinka kaukana tahansa*, minkä vuoksi niitä kutsutaan **etävuorovaikutuksiksi**. Esimerkiksi maapallo on noin 150 miljoonan kilometrin päässä Auringosta, mutta silti Auringon ja Maan välinen gravitaatiovuorovaikutus pitää Maan Aurinkoa kiertävällä radalla. Herääkin kysymys, kuinka tällaiset etävuorovaikutukset ovat mahdollisia.

Gravitaation voidaan ajatella toimivan niin, että massalliset kappaleet synnyttävät ympärilleen **gravitaatiokentän** eli jonkinlaisen näkymättömän rakenteen, joka levittää kaikkialle avaruuteen ja vaikuttaa siellä muiden kappaleiden käyttämiseen. Vastaavasti sähköinen vuorovaikutus toimii siten, että varatut hiukkaset synnyttävät avaruuteen **sähkökentän**, joka vaikuttaa toisten varattujen hiukkasten liikkeeseen. Koska kenttä levää avaruuteen, se mahdollistaa vuorovaikutukset mielivaltaisen pitkien etäisyyksien päästää ilman, että kentän kohtaava kappale tietäisi, millainen kappale kentän on synnyttänyt. Itse asiassa kenttä levää avaruuteen äärellisellä nopeudella, joten kentän synnyttänyt kappale on voinut jo siirtyä muualle, kun kentän tuottama vuorovaikutus lopulta tunnetaan. Fysiikassa tästä mekanismista sanotaan, että kenttä *välittää* vuorovaikutuksen kappaleiden välillä.

Matemaattisesti kenttä on avaruudessa määritelty paikan funktio. **Skalaarikenttä** on funktio, jolla on jokaisessa avaruuden pisteessä jonkin skalaariarvo eli suuruus. Vastaavasti **vektorikenttä** on funktio, jolla on jokaisessa avaruuden pisteessä vektoriarvo eli sekä suuruus että suunta. Gravitaatio- ja sähkökenttä ovat tärkeitä esimerkkejä fysiikaalaisista kentistä, mutta periaatteessa mikä tahansa avaruudessa määritelty funktio voi olla kenttä.



4.15 Kesi lisää esimerkkejä kentistä, jotka voidaan määritellä tavallisessa huoneessa. Ovatko esimerkkisi skalaari- vai vektorikenttiä?

esimerkki 4.7

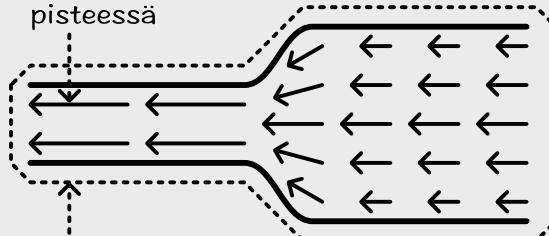
Virtauskenttä

Putkessa virtaa kaasua. Virtausnopeus on vektorisuuressa, joka ilmaisee nopeuden, jolla kaasun molekyylit keskimäärin liikkuvat *yhdessä* avaruuden pisteessä. Periaatteessa kaasun virtausnopeus voidaan mitata missä tahansa pisteessä putken sisällä. Koska kaasu voi liikkua putken eri osissa eri nopeuksilla ja eri suuntiin, virtausnopeus riippuu mittauspisteestä.

Kaasun virtausta kokonaisuutena kuvaavat virtauskentät, joita sisältää tiedon kaasun nopeudesta *kaikissa* avaruuden pisteessä. Voidaan valita mikä tahansa piste putken sisältä, ja virtauskenttä kertoo, mikä on kaasun nopeus kyseisessä pisteessä. Se on siis paikan funktio eli kenttä. Koska virtausnopeus on vektori, kyseessä on vektorikenttä.

virtausnopeus:

kaasun nopeus *yhdessä*
pisteessä



virtauskenttä:
kaasun nopeus *kaikkialla*

Esimerkiksi gravitaation potentiaalienergia on *skalaarikenttä*, sillä kappaleen potentiaalienergia riippuu sen paikasta. Gravitaation kappaleeseen kohdistama voima on puolestaan *vektorikenttä*. Voimahan on vektori ja painovoima riippuu periaatteessa kappaleen paikasta. Lähellä maapintaa painovoima on vakio, mutta kaukana maapallosta näin ei enää ole. Gravitaatiovoima ja sen potentiaalienergia ovat kuitenkin lopuksi vain kaksi erilaista tapaa kuvata gravitaati vuorovaikutusta, jotka ne liittyvät kiinteästä toisiinsa. Seuraava tavoiteemme onkin tutkia, miten näitä kenttiä kuvataan matemaattisesti. Erityisesti haluamme selvittää, miten konservatiivisen vuorovaikutuksen voima lasketaan, kun vuorovaikutuksen potentiaalienergia tunnetaan.

Voiman määrittäminen potentiaalienergiasta

Potentiaalienergia määritellään voiman tekemänä työnä eli matemaattisesti integraalina. Yhdessä ulottuvudessa tämä tarkoitti toisaalta sitä, että konservatiivisen vuorovaikutuksen voima saatiin potentiaalienergian derivaattana, sillä derivointi ja integrointi ovat käänneisoperaatiot. Samanlainen periaate pätee myös kolmessa ulottuvuudessa, mutta aivan kuten työn määrittely vaati uudenlaisen integraalin, viivaintegraalin, voiman määrittäminen potentiaalienergian perusteella vaatii derivaatan määrittelyn useassa ulottuvuudessa.

Pohditaan aluksi, millaisia ominaisuuksia konservatiivisella voimalla pitäisi olla. Ajatellaan jälleen analogiaa mäessä vierivään palloon: Palloon kohdistuva kokonaisvoima osoittaa aina alämäkeen vetäen palloa tähän suuntaan. Lisäksi jyrkkään mäkeen asetettu pallo alkaa vierä nopeammin kuin loivaan rinteeseen tuotu pallo, joten jyrkässä mäessä palloon vaikuttava kokonaisvoima on suurempi. Tilanne on kuitenkin monimutkaisempia kuin yhdessä ulottuvuudessa, koska "alamäki" voi eri paikoissa osoittaa eri suuntiin. Pallon liikkumisessa tämä alamäen suunta todennäköisesti vielä muuttuu, jolloin palloon kohdistuvan voiman suunta myös muuttuu. Jotta tietäisimme minnepään palloon vaikuttava voima missäkin vaikuttaa, meillä pitäisi olla jokin keinotekniikka, johon mäki kussakin pisteessä jyrkimmin laskee. Koska tämä riippuu vain mäen korkeuden muutoksesta, periaatteessa ongelman pitäisi olla ratkaistavissa kunhan tiedämme kuinka korkealla mäki kussakin pisteessä on. Tämä tehtävä gleistyy mielivaltaisen potentiaalienergian tapaukseen: jos tiedämme kappaleen potentiaalienergian avaruuden jokaisessa pisteessä, kuinka lasketaan suunta, johon kappaleeseen vaikuttava voima osoittaa — eli johon liikuttaessa potentiaalienergia pienenee nopeiten? Ja edelleen, kuinka nopeasti potentiaalienergia tuossa suunnassa muuttuu?

Suureen muutosta toisen suureen muuttuessa kuvaavat derivaatta, joten mitä ilmeisimmin edellä esitetty ongelma liittyy jotenkin derivaattoihin. Useassa ulottuvuudessa on kuitenkin mahdollista derivoida eri koordinaattien suhteiden, joten täytyy olla erityisen tarkkana sen suhteiden *millaisia* derivaattoja kulloinkin lasketaan. Erityisesti voi olla tilanne, jossa suureet riippuvat toisistaan ja yhden suureen muuttaminen vaikuttaa toisiin suureisiin.

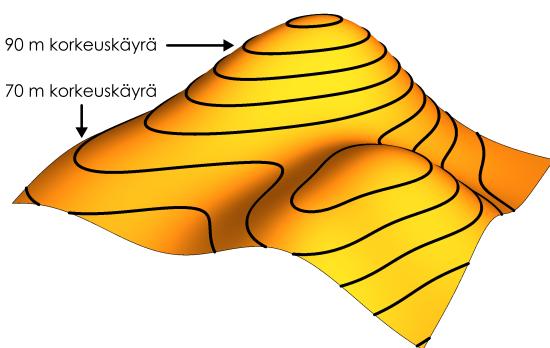
Usean muuttujan funktion määritellään **osittaisderivaatta** tavallisen derivaatan tapaan erotusosamääränä. Esimerkiksi funktion $f(x, y, z)$ osittaisderivaattaa muuttujan x suhteen merkitään

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (4.98)$$

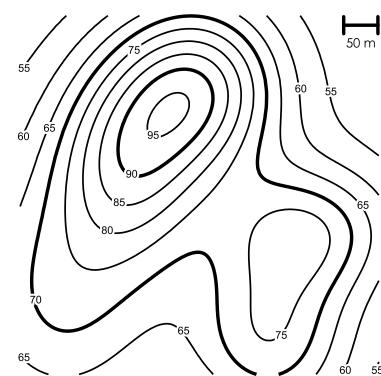
Huomattavaa tässä määritelmässä on se, että raja-arvo lasketaan erotuksesta, jossa ainoastaan *yhden* suureen, tässä x , annetaan muuttua ja kaikki muut ovat vakioita. Tällainen derivaatta lasketaan normaaleilla derivoimissäänöillä, mutta näitä sääntöjä sovelletaan ainoastaan derivoimismuuttujaan ja kaikki muut suureet käsitellään kuin ne olisivat vakioita.

Kuva 4.16: Maaston korkeus esimerkkinä usean muuttujan funktiosta. Korkeutta voidaan kuvata esimerkiksi korkeuskäyrillä ja korkeuden muuttumista paikan funktiona voidaan kuvata osittaisderivaatoilla ja gradientilla.

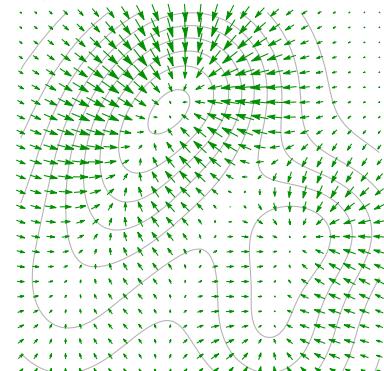
(a) Maaston muoto kahden kukkulan ympäristössä.



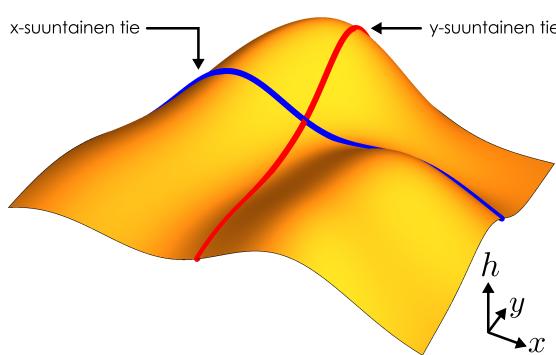
(b) Maaston muoto korkeuskäyrinä.



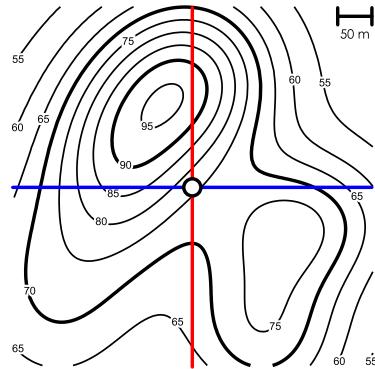
(c) Jyrkimmän nousun suunta ja jyrkkyys eli gradientti.



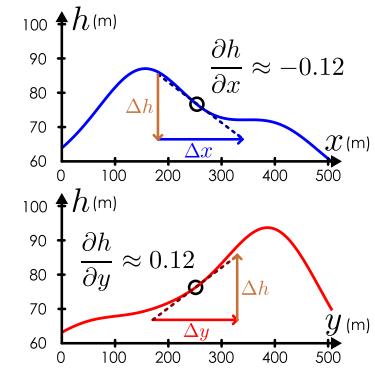
(d) Maaston profili x - (sininen) ja y -suunnassa (punainen).



(e) Profilikuvaajien sijainti.



(f) Korkeuden osittaisderivaatat kulmakerroinina.



Osittaisderivaatan käsitettä on havainnollistettu kuvalla (4.16), jossa on kuvattu epätasaisen maaston muoto $500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$ kokoisella alueella. Tässä tarkasteltava funktio on maan pinnan korkeus, h , joka on itä-länsi-suuntainen koordinaatin x ja pohjois-etelä-suuntainen koordinaatin y funktio, $h(x, y)$. Kuvissa (a) ja (b) maaston korkeus on kuvattu korkeuskäyrillä eli käyrillä, joilla korkeus on vakio. Esimerkiksi 70 m korkeuskäyrän kaikki pistet ovat 70 m merenpinnan yläpuolella. Kuvassa (d) maaston muoto on esitetty toisella tavalla piirtämällä maastoon x - ja y -suunnissa kulkevat viivat. Käytännössä nämä voisivat olla vaikkapa maastossa suoraan kulkevia teitä. Mittaamalla maaston korkeuden tälläistä tietä pitkin saamme maaston poikkileikkauskuksen eli profiilin yhdessä suunnassa. Nämä on piirretty kuvan (f). Profilista voimme edelleen määrittää maaston jyrkkyyden *kuljetun tien suunnassa*. Jos profilia esittävä kuvaaja on laskeva käyrä, kuten tässä x -suunnassa kuvattu profiili (sininen kuvaaja) teiden risteypisteessä on, korkeus pienenee x :n funktiona (ts. tiessä on alamäki positiiviseen x -suuntaan). Laskun jyrkkyys puolestaan selviää tarkastelemalla profilikuvaajan *tangentin kulmakerrointa*, joka kertoo paljonko korkeuden h arvo muuttuu koordinaatin x muuttuessa ja koordinaatin y pysyessä vakiona. Matemaattisesti tämä kulmakerroin on täsmälleen korkeuden h osittaisderivaatta x :n suhteen, $\frac{\partial h}{\partial x}$. Vastaavasti osittaisderivaatta y -koordinaatin suhteen on y -suuntainen profiilin kuvaajan tangentin kulmakerroin, joka tässä esimerkissä on positiivinen, koska tarkastelupisteessä y -suuntainen tie nousee y -suuntaan kuljetaessa.

Usean muuttujan funktioille määritellään myös **kokonaisderivaatta**, joka edellä mainitulle funktiolle $f(x, y, z)$ esimerkiksi muuttujan x suhteen on

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (4.99)$$

Tämä on selvästikin eri asia kuin pelkkä osittaisderivaatta. Ero on se, että siinä missä osittaisderivaatta ilmaisee funktion muutosnopeutta yhden muuttujan suhteen *jos kaikki muut muuttujat pysyvät vakioina*, kokonaisderivaatta ottaa huomioon sen, että esimerkiksi suureen x muutos voi vaikuttaa myös suureiden y ja z arvoihin. Tätä eroa on havainnollistettu esimerkissä 4.8, jossa tarkastellaan jyrkkyyttä tietyllä polulla.



4.16 Määritellään funktiot $f = xy$ ja $y = x^2$. Mitä ovat derivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{df}{dx}$? Saatko kokonaisderivaalle saman tuloksen sekä yhtälöllä (4.99) että suoraan derivoimalla lauseketta $f = xy = x^3$?

Kertomalla kokonaisderivaatan lauseke (4.99) differentiaalilla dx saadaan vielä funktion f **kokonaisdifferentaali**

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (4.100)$$

Tämä kertoo paljonko funktion f arvo muuttuu, jos sen argumentteihin tehdään differentiaaliset muutokset dx , dy ja dz . Differentiaalimuodossa tämä on tarkka lauseke, mutta sitä käytetään usein myös approksimaationa äärellisten muutosten tapauksessa

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z. \quad (4.101)$$



4.17 Mikä on korkeuden muutos kuvan 4.16 esimerkissä, jos siirrytään merkitystä tarkastelupisteestä (a) 20 m pohjoiseen, (b) 20 m itään, (c) ensin 20 m pohjoiseen ja sitten saman verran itään, eli noin 30 m koilliseen? Arvioi muutos sekä kuvan korkeuskäyrien perusteella että yhtälön (4.101) avulla. Saatko likimain saman tuloksen?

esimerkki 4.8

Osittaisderivaatta

Maaston korkeus riippuu erällä alueella paikasta funktion $h(x, y) = ax^2 - by^2$ **mukaisesti**, missä $a = 0.2 \text{ m}^{-1}$, $b = 0.1 \text{ m}^{-1}$. **Maastossa kulkee polku, jota kuvaavat yhtälö** $y = cx^2$, missä $c = 1.0 \text{ m}^{-1}$. **Kuinka jyrkästi kulkija joutuu kiipeämään rinnettä, jos hän on pisteessä (1 m, 1 m) ja kulkee (a) x-suuntaan, (b) y-suuntaan tai (c) polku pitkin?**

SUUNNITELMA Rinteenten jyrkyys tarkoittaa kuinka nopeasti maasto kohoaa sivusuunnassa liikuttaessa, ja tästä kuvaavat korkeuden derivaatta paikan suhteen. Jyrkyys x -suunnassa saadaan derivoimalla korkeutta koordinaatin x suhteeseen niin ettei y muudu ja vastaavasti y -suunnassa derivoimalla y :n suhteeseen pitäen x -koordinaatin vakiona. Polkuun pitkin siirryttäässä nousun voi laskea esimerkiksi derivoimalla korkeutta x -koordinaatin suhteeseen huomioiden, että y muuttuu samalla.

RATKAISU (a) Jyrkyys x -suuntaan on korkeuden osittaisderivaatta x :n suhteeseen

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2ax. \quad (4.102)$$

Kysyttyssä pisteessä jyrkyys on siis 0.4 eli tähän suuntaan rinne kohoaa paikallisesti 40 cm siirryttäässä 1 m.

(b) Suuntaan y vastaavasti

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2by, \quad (4.103)$$

joka saa kysyttyssä pisteessä arvon -0.2 . Maasto siis laskee 20 cm yhden metrin matkalla.

(c) Polulla korkeuden muutoksen kertoo kokonaisderivaatta. Jos korkeutta derivoidaan esimerkiksi x -koordinaatin suhteeseen, derivaatta kertoo maaston korkeuden muutoksen x -koordinaatin muutoksen suhteeseen kuljettaessa pitkin polkuuta. Tämä voidaan laskea kokonaisderivaatan lausekkeella (4.99)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad (4.104)$$

josta osittaisderivaatat on jo ratkaistu. Polun lausekkeesta $y = cx^2$ voidaan ratkaista y :n derivaatta

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \quad (4.105)$$

joten

$$\frac{dh}{dx} = 2ax + (-2by)(2cx) = 2ax - 4bc^2x^3. \quad (4.106)$$

Lukuarvojen sijoitus osoittaa, että tämä on nolla, eli polku kulkee kysyttyssä pisteessä vaakasuoraan.

Kokonaisderivaatan voi laskea myös sijoittamalla heti polun lausekkeen maaston korkeutta kuvaavaan funktioon, jolloin saadaan *polun korkeutta* kuvaava funktio

$$h = ax^2 - bc^2x^4. \quad (4.107)$$

Tämän derivaatta on

$$\frac{dh}{dx} = 2ax - 4bc^2x^3 \quad (4.108)$$

eli sama tulos kuin yhtälössä (4.106) saatuiin.

Mathematica:

```
(* polun ja maaston korkeuden yhtälöt *)
h[x_, y_] := a x^2 - b y^2
ypolku[x_] := c x^2
lukuarvot = {a -> 0.2, b -> 0.1, c -> 1}
paikka = {x -> 1, y -> 1}

(* osittaisderivaatat *)
xsuunta = D[h[x, y], x]
```

```

{2 a x}
xsuunta /. lukuarvot /. paikka
{0.4}

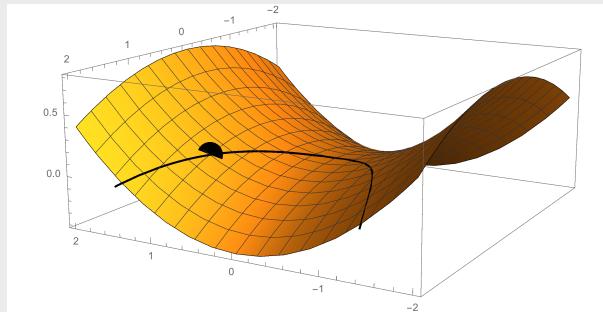
ysuunta = D[h[x, y], y]
{2 b y}
ysuunta /. lukuarvot /. paikka
{-0.2}

(* kokonaisderivaatta sijoittamalla polun lauseke *)
kokonais = D[h[x, ypolku[x]], x]
{2 a x - 4 b c^2 x^3}
kokonais /. lukuarvot /. paikka
{-0.}

(* kokonaisderivaatta suoraan *)
kokonaisB = Dt[h[x, y], x]
{2 a x + y^2 Dt[b, x] - 2 b y Dt[y, x]}
(* Mathematica ei tiedä mitä a, b ja y ovat ellemme kerro. *)
kokonaisB /. y -> ypolku[x] /. lukuarvot
{0.4 x - 0.4 x^3}

(* piirretään kuva*)
pinta = Plot3D[h[x, y] /. lukuarvot, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
polku = ParametricPlot3D[
  {x, ypolku[x], h[x, ypolku[x]]} /. lukuarvot,
  {x, -2, 2},
  PlotStyle -> {Black, Thick}];
piste = Graphics3D[{Black, PointSize[0.05],
  Point[{1, 1, h[1, 1]} /. lukuarvot]}];
Show[pinta, polku, piste]

```



Osittaisderivaatta siis kertoo miten usean muuttujan funktio kuten kuvassa 4.16 maastonkorkeus muuttuu yhden koordinaattiakselin suunnassa liikuttaessa ja kokonaissdifferentiaali ilmaisee funktion kokonaismuutoksen kun kuljettame jonkin tietyn siirtymän. Haluaisimme kuitenkin vielä keinon selvittää, *mihin suuntaan kuljetaessa korkeus muuttuu kaikkein nopeimmin*, ja tästä varten määrittelemme **gradientin**. Korkeuden gradientti on vektori, joka osoittaa aina maaston *jyrkimmän nousun suuntaan* ja jonka pituus kertoo *kuinka nopeasti korkeus muuttuu* tähän suuntaan kuljetaessa. Jyrkimmän nousun suunta selvästi riippuu siitä, missä pisteessä kulloinkin olemme, joten gradientti on myös paikan funktio. Se on siis matemaattisesti vektorikenttä.

Korkeuden gradientti on esitetty kuvassa 4.16 (c), jossa gradienttivektori on esitetty nuolin tasaisin välein valituissa maaston pisteissä. Kuvassa on esitetty taustalla myös korkeuskäyrät. Käyrät ovat kartalla sitä *lähempänä* toisiaan, mitä jyrkemmin maasto kohoaa tai laskee eli maaston jyrkkyyks on käännekkäin verrannollinen korkeuskäyrien väliseen etäisyyteen kartalla. Eli jyrkkyyks on suuri, jos korkeuskäyrät ovat *tiheässä*. Niinpä myös gradienttivektorit, jotka ilmaisevat maaston jyrkkyyttä, ovat *pitkiä* korkeuskäyrien ollessa lähellä toisiaan ja lyhyitä käyrien ollessa toisistaan kaukana. Erityisesti mäkiä huipuilla ja kuoppien pohjilla gradientti on nolla, koska maasto on paikallisesti tasainen eikä jyrkimmän nousun suuntaa ole. Maaston korkeus *ei muutu* myöskään kuljetaessa pitkin korkeuskäyrää, joten jyrkimmän nousun suunnan täytyy olla *korkeuskäriin nähdien kohtisuorassa*. Niinpä gradientti on aina kohtisuorassa korkeuskäriä vastaan.

Gradientti voidaan määritellä mille tahansa skalaarikentälle, ja konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian gradientti on erityisen tärkeä, koska se on suoraan verrannollinen vuorovaikutuksen tuottamaan voimaan. Kolmiulotteisessa avaruudessa määritellyn potentiaalienergian tapauksessa pisteet, joissa potentiaalienergia on vakio, eivät yleensä muodosta käyriä vaan pintoja, ja näitä kutsutaan potentiaalienergian **tasa-arvopinnoiksi**. Samaan tapaan kuin korkeuden gradientti on kohtisuorassa korkeuskäriä vastaan ja osoittaa kohti jyrkintä nousua, potentiaalienergian gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintoja vastaan ja osoittaa potentiaalienergian voimakkaimman kasvun suunnan. Koska voima osoittaa potentiaalienergian jyrkimmän *laskun* suuntaan ("alamäkeen"), voiman suunta on aina vastakkainen potentiaalienergian gradientin suuntaan nähdien.

Johdetaan lopuksi vielä tarkka matemaattinen säädöntö potentiaalienergian gradientin laskemiseksi. Tarkastellaan potentiaalienergian muutosta kappaleen liikuessa x -suunnassa infinitesimaalisen lyhyen matkan dx , y -suunnassa matkan dy sekä z -suunnassa matkan dz . Tällöin kappaleen siirtymä on siis

$$d\bar{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}. \quad (4.109)$$

Jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivinen voima \bar{F} , se tekee siirtymässä kappaleeseen työn yhtälön (4.73) mukaisesti

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (4.110)$$

ja koska tämä työ siirtää vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa kappaleelle, potentiaalienergian muutos on

$$dU = -dW = -F_x dx - F_y dy - F_z dz. \quad (4.111)$$



4.18 Jos kappaleeseen kohdistuva konservatiivinen voima on $\bar{F} = (2.5 \text{ N})\hat{i} - (0.5 \text{ N})\hat{j}$ ja kappale kulkee siirtymän $\Delta\bar{r} = (1.0 \text{ mm})\hat{i} + (2.0 \text{ mm})\hat{j}$, mikä on potentiaalienergian muutos olettaen että voima on tällä matkalla likimain vakio?

Toisaalta potentiaalienergian *kokonaisdifferentiaali* on määritelmän (4.100) mukaisesti

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (4.112)$$

ja tämän pitää siis olla sama lauseke kuin (4.111). Huomaa, että yhtälö (4.111) on *fysiakaalinen laki*, joka perustuu työn ominaisuuksiin kun taas yhtälö (4.112) on *matemaattinen laki*, joka perustuu osittaisderivaatan määritelmään.

Koska lausekkeet (4.111) ja (4.112) ovat samat, pitää kunkin differentiaalin dx jne. kertoimen olla kummassakin sama. Nyt nimittäin tarkastelimme potentiaalienergian muutosta mielivaltaisessa siirtymässä, joten voimme valita milläkin tämä siirtymä on. Esimerkiksi jos tarkastellaan x -suuntaista siirtymää $d\bar{r} = dx\hat{i}$, pätee $dy = dz = 0$ ja täytyy siis olla

$$dU = -F_x dx = \frac{\partial U}{\partial x} dx \quad (4.113)$$

mistä saadaan samanlainen yhtälö kuin yksilotteisessa tapauksessa, (3.23),

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (4.114)$$

Täsmälleen samoin voidaan valita $dx = dz = 0$, mistä voidaan päätellä $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, ja $dx = dy = 0$, mistä seuraa $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$. Voimavektorin skalaarikomponentit kussakin koordinaattiakselin suunnassa saadaan siis *osittaisderivoimalla potentiaalienergiaa kyseisen koordinaatin suhteeseen* ja siispä voimavektorin on oltava

$$\bar{F}_{\text{konservatiivinen}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\nabla U. \quad (4.115)$$



4.19 Mihin suuntaan osoittaa korkeuden gradientti kuvan 4.16 esimerkin tarkastelupisteessä? Mitkä ovat gradienttivektorin x - ja y -skalaarikomponenttien etumerkit ja suhteelliset suuruudet? Miten ne liittyvät korkeuden osittaisderivaattoihin?

Yhtälössä (4.115) esiintyy uusi symboli ∇ , **nabla**, joka on lyhennysmerkintä yhtälössä esitettylle osittaisderivaattojen muodostamalle vektorille. Nabla ei itse ole skalaari, vektori tai funktio vaan **operaattori**. Kun nabla yhdistetään *skalaarikentän* eli avaruudessa määritellyn funktion U kanssa, tuloksena on uusi funktio ∇U , jota kutsutaan U :n **gradientiksi**. Tällöin nablan sanotaan *operoivan* funktioon U . Gradientifunktio on määritelty kaikkialla avaruudessa mutta sen arvot ovat *vektoreita* eli ∇U on *vektorikenttä*.



4.20 Vuorovaikutuksen potentiaalienergia riippuu kappaleen paikasta yhtälön $U(x, y) = (1.5 \text{ J/m}^2)x^2 - (4.0 \text{ J/m})y$ mukaisesti. Kappale on aluksi pisteessä $(x, y) = (0.5 \text{ m}, 1.5 \text{ m})$. (a) Mikä on kappaleeseen kohdistuva voima? (b) Mikä on kappaleen potentiaalienergian muutos, jos kappaleen paikka muuttuu siirtymän $(\Delta x, \Delta y) = (-1.0 \text{ mm}, 2.0 \text{ mm})$?

esimerkki 4.9

Gradientti

Kappale on kiinnitetty lattiastaan jousella (lepopituus 0.10 m ja jousivakio 100 N/m), jonka lattiassa kiinni oleva pää pääsee vapaasti käänymään kaikkiin suuntiin. Miten kappaleeseen vaikuttava voima riippuu kappaleen paikasta olettaen ettei kappale nouse lattialta?

TILANNE Piirretään tilanteesta kuva. Valitaan origoksi jousen kiinnitetty pää. Merkitään $r_0 = 0.10 \text{ m}$ (lepopituus) ja $k = 100 \text{ N/m}$ (jousivakio).

SUUNNITELMA Kappaleeseen kohdistuu gravitaatio, pinnan tukivoima sekä jousen jännitys. Gravitaatio ja tukivoima suuntautuvat aina pystysuuntaan ja kumoavat toisensa. Niinpä kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on yhtä suuri kuin jousen voima. Voiman voi määrittää suoraan Hooken laista tai vaihtoehtoisesti voimme laskea ensin potentiaalienergian ja määrittää voiman sen gradienttina.

Jousen potentiaalienergia on

$$U = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2, \quad (4.116)$$

missä etäisyys origosta on $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, sillä pystysuuntainen koordinaatti on vakio $z = 0$. Kappaleeseen vaikuttava voima on siten

$$\bar{F} = -\nabla U. \quad (4.117)$$

RATKAISU Lasketaan jousivoiman gradientti komponenteittain. Esimerkiksi x -suunnassa saadaan sisäfunktion derivoimis-säännöllä

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -k(r - r_0) \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.118)$$

ja vastaavasti muissa suunnissa. Etäisyyden r derivaatta puolestaan on

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}. \quad (4.119)$$

Koska r on symmetrinen koordinaattien suhteen, y -suunnassa saadaan täsmälleen samoin

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}. \quad (4.120)$$

Voiman z -komponentti on nolla. Jousivoimaksi saadaan siten Hooken lain mukainen tulos

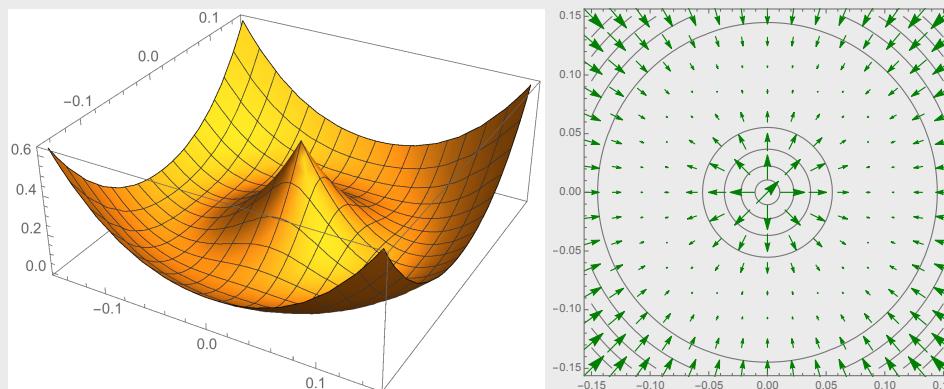
$$\bar{F} = -k \frac{(r - r_0)}{r} (x\hat{i} + y\hat{j}) = -k \frac{(r - r_0)}{r} \bar{r} = -k(r - r_0)\hat{r}. \quad (4.121)$$

Mathematica:

```
(* potentiaalienergia *)
u = 1/2 k (Sqrt[x^2 + y^2] - r0)^2
lukuarvot = {r0 -> 0.1, k -> 100}

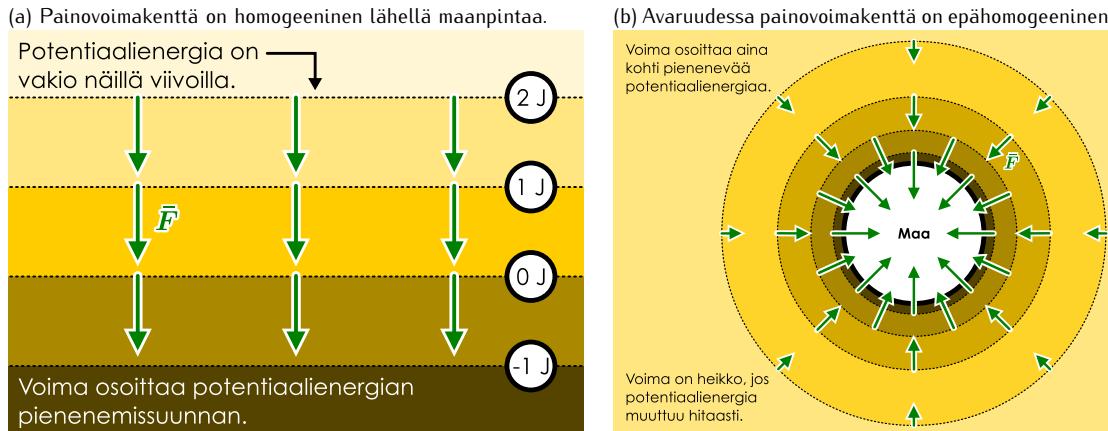
(* voima *)
voima = -Grad[u, {x, y}]
{(-(k x (-r0 + Sqrt[x^2 + y^2]))/Sqrt[x^2 + y^2]),
 -(k y (-r0 + Sqrt[x^2 + y^2]))/Sqrt[x^2 + y^2]}}
Simplify[voima /. Sqrt[x^2 + y^2] -> r] (* sievennetään *)
{k (-r + r0) x/r,
 k (-r + r0) y/r}

(* kuvaajat *)
voimat = VectorPlot[voima /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15},
 VectorStyle -> RGBColor[0, 0.5, 0]];
potentiaali = ContourPlot[u /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15},
 ContourShading -> None];
Plot3D[u /. lukuarvot, {x, -0.15, 0.15}, {y, -0.15, 0.15}]
Show[potentiaali, voimat]
```



MONIULOTTEINEN LIIKE

Kuva 4.17: Voima osoittaa konservatiivisen potentiaalienergian pienemissuunnan ja -nopeuden. Voima on kohtisuorassa potentiaalienergian tasa-arvopintoja vastaan ja sitä suurempi mitä lähempänä nämä ovat toisiaan.



Tarkastellaan vielä lopuksi painovoimaa fysikaalisena kentänä. Gravitaation tuottama voima on lähellä maapintaa massan ja putoamiskiertyyden tulon. Näistä massa on kappaleen ominaisuus ja putoamiskiertyys kentän ominaisuus. Gravitaatiokenttää voidaan siis kuvata myös **voimakenttänä**, jonka voimakkuus on kaikkialla sama, \bar{g} , ja itseasiassa puhuttaessa painovoimakentstä yleensä tarkoitetaan juuri tästä voimakenttää. Kentässä olevaan m -massaiseen kappaleeseen kohdistuu gravitaatiokenttässä kaikkialla voima $m\bar{g}$, joka on kappaleen massan ja kentän voimakkuuden tulon. Tälläista voimakenttää, jonka tuottama **voima** on kaikkialla sama, kutsutaan **homogeniseksi kentäksi**.

Koska voimakentän arvot ovat vektoriteita, kyseessä on vektorikenttä, ja koska gravitaatio on konservatiivinen vuorovaikutus, kenttään liittyvä voima voidaan laskea kenttään liittyvästä potentiaalienergiasta gradientin avulla. Gravitaation tapauksessa potentiaalienergia lähellä maapintaa riippuu vain korkeudesta, joten valitsemalla z -akseli osoittamaan ylöspäin gravitaation potentiaalienergia m -massaiselle kappaleelle on $U = mgz$. Gravitaation tuottama painovoima voidaan puolestaan määrittää laskemalla gradientti

$$\bar{G} = -\nabla U = -mg\nabla z = -mg \left(\frac{\partial z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \hat{k} \right). \quad (4.122)$$

Lausekkeessa esiintyy korkeuden z osittaisderivaattoja eri koordinaattien suhteeseen, ja nämä on helppo laskea muistaen osittaisderivaatan määritelmä. Osittaisderivaattahan lasketaan niin, että muiden muuttujien ajatelaan olevan derivoinnissa vakioita, ja vakion derivaatta on nolla, joten $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Toisaalta koordinaatin derivaatta sen itsensä suhteeseen on yksi, $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, joten

$$\bar{G} = -mg \left(0\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \right) = -mg\hat{k}. \quad (4.123)$$

Nämä saatiin siis tuttu tulos, jonka mukaan painovoiman suunta on alas päin negatiivisen z -akselin suuntaan ja sen voimakkuus on vakio.

Painovoiman määrittäminen gradientin avulla ei ole erityisen mielenkiintoista, koska painovoima on vakio. Epähomogeniset kentät ovat kuitenkin fysiikassa yleisiä, ja näissä tilanteissa gradienttia tarvitaan voiman määrittämiseen, jos tunnetaan vain potentiaalienergia. Esimerkiksi maapallon painovoimakenttä vaikuttaa homogeniselta ainoastaan lähellä maapintaa. Avaruudesta katsoen planeetta näyttää pallolta ja maan gravitaatiokenttä onkin avaruudessa itse asiassa pallosymmetrinen. Gradienttia tarvitaan myös sähkövarausten synnyttämien **sähkökenttien** analyysissä, jota tarkastelemme luvussa 10. Sähköinenkin vuorovaikutus on konservatiivinen, joten myös siihen liittyvä potentiaalienergia ja sen tuottama voima osoittaa aina kohti pieneneväntä potentiaalienergian suuntaa.



4.21 Selitä omiin sanoin, mitä kenttä tarkoittaa matematiikassa ja fysiikassa. Selitä erityisesti, miten konservatiivisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia ja voima liittyvät toisiinsa ja miten voit laskea yhden kunnan toisen.

Yhteenveton: Moniulotteinen liike

Differentiaalit ja vektorit

- Kolmiulotteinen koordinaatisto, jonka akselit x, y, z ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, on **karteesisen koordinaatisto**. Vektorit tässä koordinaatistossa voidaan kirjoittaa akselien suuntaisten *ykkösvektoreiden* ja *skalaarikomponenttien* avulla

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}.$$

- Vektorin pituus saadaan Pythagoraan lauseesta

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

- Vektorisumma voidaan laskea komponenteittain

$$\bar{A} + \bar{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}.$$

- Pistetulo** eli skalaritulo on kahden vektorin välinen kertolasku. Sen loppululos on skalaari, ja tulon suuruus on vektorien pituuksien sekä niiden välisen kulman θ kosinin tulo

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \theta.$$

Pistetulo voidaan laskea karteesisessa koordinaatistossa *vektorien komponenttien tulojen summana*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

- Vektorin komponentti minkä tahansa toisen vektorin suunnassa saadaan pistetulon avulla

$$A_B = \frac{1}{B} \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

- Kaksi vektoria ovat yhtä suuret jos ja vain jos sekä niiden pituudet että suunnat ovat samat. Karteesisessa koordinaatistossa tämä tarkoittaa sitä, että vektorien kaikki skalaarikomponentit ovat yhtä suuret

$$\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z.$$

- Vektorin derivaatta ja integraali voidaan karteesisessa koordinaatistossa laskea komponenteittain

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{i} + \frac{dA_y}{dt} \hat{j} + \frac{dA_z}{dt} \hat{k}$$

$$\int \bar{A} dt = \int A_x dt \hat{i} + \int A_y dt \hat{j} + \int A_z dt \hat{k}$$

- Osittaisderivaatta** on usean muuttujan funktion derivaatta yhden muuttujan suhteen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

- Gradientti** on derivaatan yleistys useaan ulottuvuuteen. Funktion f gradientti on *vektori*, joka osoittaa suuntaan, jossa funktion arvo kasvaa nopeimmin, ja sen pituus kertoo kuinka paljon funktion arvo muuttuu tähän suuntaan sääryttääessä. Karteesisessa koordinaatistossa gradientin skalaarikomponentti kussakin suunnassa on funktion osittaisderivaatta tähän suuntaan mitatun koordinaatin suhteen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}.$$

Symboli ∇ , **nabla**, on lyhennysmerkintä ylä esitettylle lausekkeelle.

- Viivaintegraali** on määrityn integraalin yleistys useaan ulottuvuuteen. Reittiä P pitkin laskettava integraali voidaan määritellä jakamalla reittiä osiin ja antamalla jaon tulla äärettömän tihäksi

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \bar{A}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_P \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \bar{A} \cdot \bar{v} dt.$$

Liikemäärä ja dynamiikka

- Jos kappaleeseen vaikuttaa kokonaivoima $\bar{F}_{\text{kokonais}}$, kappaleen liiketyydyys on komponenteittain

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonais}}, \quad a_y = \frac{1}{m} F_{y,\text{kokonais}}, \quad a_z = \frac{1}{m} F_{z,\text{kokonais}}.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttava kokonaivoima tunnetaan *ajan funktiona*, kappaleen nopeus ja paikka voidaan ratkaista komponen-

teittain liiketyydyden integraaleina.

- Jos systeemiin ei vaikuta ulkoisia vuorovaikutuksia, kokonaislukemäärä on vakio. Tällöin kokonaislukemäärävektorin kunkin komponentti on erikseen vakio

$$p_{x,\text{alku}} = p_{x,\text{loppu}}, \quad p_{y,\text{alku}} = p_{y,\text{loppu}}, \quad p_{z,\text{alku}} = p_{z,\text{loppu}}.$$

Energia ja työ

- Jos kappaleeseen vaikuttaa *vakiovoima* \bar{F} ja kappale siirtyy matkan $\Delta \bar{r}$, voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \bar{F} \cdot \Delta \bar{r}.$$

- Jos kappaleeseen vaikuttaa *mikä tahansa voima* \bar{F} ja kappale liikkuu pistestä \bar{r}_{alku} pisteesseen \bar{r}_{loppu} reittiä P , voima tekee kappaleeseen työn

$$W = \int_P \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

- Liikkuvan kappaleeseen vaikuttava voima \bar{F} tekee työtä kappaleeseen teholla

$$P = \bar{F} \cdot \bar{v}.$$

- Vuorovaikutus on konservatiivinen jos ja vain jos siihen liittyvä voiman tekemä työ pistestä \bar{r}_{alku} pisteesseen \bar{r}_{loppu} siirtyväen kappaleeseen ei riipu reitistä, jonka kappale kulkee. Tällöin vuorovaikutuksen potentiaalienergia on

$$U(\bar{r}) = -W_{\bar{r}_0 \rightarrow \bar{r}} = - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F}_{\text{konservatiivinen}} \cdot d\bar{r}.$$

- Konservatiivinen vuorovaikutus, johon liittyy potentiaalienergia $U(x, y, z)$, tuottaa voiman

$$\bar{F}_{\text{konservatiivinen}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}.$$

Sanasto

- karteesiset koordinaatit (Cartesian coordinates)
- pistetulo, skalaritulo (dot product, scalar product)
- osittaisderivaatta (partial derivative)
- kokonaisdervaatta (total derivative)
- kokonaissdifferentiaali (total differential)
- gradientti (gradient)
- nabla (nabla, del, grad)
- operaattori (operator)
- viivaintegraali (line integral)
- potentiaalienergian tasa-arvopinta (equipotential surface)
- perusvuorovaikutus (fundamental interaction)
- kenttä (field)
- homogeeninen (homogeneous)
- heittoliike (projectile motion)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

4.1 Voiman A komponentit ovat $F_{x,A} = 3.0 \text{ N}$ ja $F_{y,A} = 0.0 \text{ N}$. Voiman B komponentit ovat $F_{x,B} = (4.0 \text{ N}) \cos(-60^\circ) = 2.0 \text{ N}$ ja $F_{y,B} = (4.0 \text{ N}) \sin(-60^\circ) = -3.46 \text{ N}$. Kokonaisvoiman komponentit saadaan näiden summana, $F_x = F_{x,A} + F_{x,B} = 5.0 \text{ N}$ ja $F_y = F_{y,A} + F_{y,B} = -3.46 \text{ N}$. Kokonaisvoima on siis

$$\bar{\mathbf{F}} = (5.0 \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-3.46 \text{ N})\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.124)$$

4.2 Vektorin $\bar{\mathbf{A}}$ pituuus on $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ja se on kulmassa $\theta = \arctan \frac{4}{3} = 0.927 = 53.1^\circ$ (vastapäivään) x -akseliin nähden. Koska x' -akseli on kulmassa 45° x -akseliin nähden, vektori $\bar{\mathbf{A}}$ on kulmassa $\theta' = \theta - 45^\circ = 8.1^\circ$ x' -akseliin nähden. Niinpä vektorin komponenttisitus koordinaatistossa $x'y'$ on

$$\bar{\mathbf{A}} = 5 \cos \theta' \hat{\mathbf{i}}' + 5 \sin \theta' \hat{\mathbf{j}}' = 4.95 \hat{\mathbf{i}}' + 0.71 \hat{\mathbf{j}}' \quad (4.125)$$

4.3 (a) Muuttuu. Nopeusvektori kääntyy ylöspäin.

(b) Jos valitsemme x -suunnan vaakatasoon ja y -suunnan ylöspäin, x -komponentti on kuopan pohjalla likimain vakio ja y -komponentti muuttuu positiiviseen suuntaan.

(c) Kiilthyvyysvektori osoittaa nopeuden muutoksen suuntaan eli ylöspäin.

(d) Kokonaisvoiman täytyy osoittaa samaan suuntaan kuin kiilthyvyysvektorikin.

4.4 Kappaleen nopeuden muutos kussakin suunnassa saadaan kiilthyvyyden vastaan komponentin integraalina tai graafisesti kuvajajan rajaamana pinta-alana. Siis x -suunnassa

$$\Delta v_x = \frac{1}{m} \int F_x dt = 0.5 \text{ m/s} \quad (4.126)$$

ja y -suunnassa

$$\Delta v_y = \frac{1}{m} \int F_y dt = 3.0 \text{ m/s}. \quad (4.127)$$

Kappaleen alunopeus oli $\bar{v}_{\text{alku}} = (-1.0 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$, joten sen loppunopeuden komponentit ovat $v_x = -0.5 \text{ m/s}$ ja $v_y = 3.0 \text{ m/s}$.

4.5 Liikediagrammi näyttää sivuttain käännetyltä V-kirjaimelta, jonka kärki koskettaa seinää. Nopeuden y -komponentti on vakio, joten sen kuvaaja on vaakasuora ja y -koordinaatin kuvaaja on suora. Nopeuden x -komponentti kääntyy törmäyksessä ympäri, joten sen kuvaaja näyttää jyrkältä askelmalta ja x -koordinaatin kuvaaja on V:n muotoinen.

4.6 Kappaleen A alunopeuden komponentit ovat likimain $v_{x,A} = 0.0 \text{ m/s}$ ja $v_{y,A} = 4.0 \text{ m/s}$. Kappaleen B vastaavat nopeuden komponentit ovat $v_{x,B} = 2.0 \text{ m/s}$ ja $v_{y,B} = -4.0 \text{ m/s}$. Jos A:n massa on esimerkiksi 1 kg (ja B:n massa on kaksinkertainen), kappaleiden liike-energia alussa oli $K_A = 8.0 \text{ J}$ ja $K_B = 20.0 \text{ J}$. Lopuksi kappaleiden nopeuskomponentit ovat likimain $v_{x,A} = -2.0 \text{ m/s}$, $v_{y,A} = -2.6 \text{ m/s}$, $v_{x,B} = 1.0 \text{ m/s}$ ja $v_{y,B} = 3.3 \text{ m/s}$. Kappaleiden liike-energiat ovat siis törmäyksen jälkeen noin $K_A = 5.4 \text{ J}$ ja $K_B = 11.9 \text{ J}$. Systeemin kokonaisliike-energia oli siis aluksi $K = 28 \text{ J}$ ja lopuksi $K = 17.3 \text{ J}$. Liike-energiasta muuttui lämpöenergiaksi ym. muotoihin noin 38 %.

4.7 (a) Vektoreiden $\bar{\mathbf{A}}$ ja $\bar{\mathbf{B}}$ välinen kulma on 60° , joten $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = AB \cos 60^\circ = 1.5 \cdot 2.0 \cdot 0.5 = 1.5$.

(b) Vektorit $\bar{\mathbf{A}}$ ja $\bar{\mathbf{C}}$ ovat toisiinsa nähden kohtisuorassa, joten $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 0$.

(c) $\bar{\mathbf{A}} \cdot (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{C}}) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 1.5 + 0.0 = 1.5$.

(d) Ensinnäkin $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 1.5$ on skalaari, joten laskun lopputulos on vektori $1.5 \cdot \bar{\mathbf{C}}$. Tämä on vektori, jonka pituuus on $1.5 \cdot 2.5 = 3.75$ ja joka osoittaa samaan suuntaan kuin $\bar{\mathbf{C}}$ eli 50° x -akselista myötäpäivään.

4.8 (a) $A = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = 3.74$ ja $B = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = 8.77$.

(b) $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-6) = 12$.

(c) $\theta = \arccos \frac{12}{3.74 \cdot 8.77} = 1.20 = 69^\circ$.

4.9 Voima on vektori, ja kaikkien vektorien pituuus saadaan Pythagoraan lauseen perusteella niihin karteesisten komponenttien neljöiden summan neljöjuurena. Työ sen sijaan on skalaari, jolla ei ole edes olemassa karteesisia komponentteja. Niinpä Pythagoraan lause, joka on siis geometrisen tuloksen, ei voi mitenkään päteä työlle. Työ on määritelty kahden vektorin pistetulona, joten työn voi kirjoittaa näiden vektoreiden komponenttien avulla, mutta pistetulossa karteesisten komponenttien tulot vain lasketaan yhteen. Pistetuloon ei kuulu neljöintä eikä neljöjuuren ottoa.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

4.10 Reitistä riippuvat matkan pituus ja dissipatiivisten vuorovaikutusten tekemä työ. Jos kuljet suoraan, matka on lyhyempi ja vähemmän rasittava kuin jos vaikkapa juokset ensin pari kertaa yliopiston ympäri. Gravitaation tekemä työ ja siihen liittyvä potentiaalienergian muutos sen sijaan eivät riipu kulkemastasi reitistä, vaan ainoastaan siitä, kuinka paljon korkeammalla tai matalalla ruokala on luentosalin verrattuna.

4.11 Kuvan (a) viivaintegraali on positiivinen. Vaikka reitillä kuljetaan sekä voiman suuntaan että sitä vastaan, voiman suuntaan kuljetaan enemmän. Kuvan (b) integraali on nolla. Reitin alussa integraali on positiivinen, koska kuljetaan voiman suuntaan, mutta reitin lopussa integraali on negatiivinen siirtymän ollessa voimaa vastaan. Reitti ja voima ovat ainakin likimain symmetriset, joten integraalin positiivinen ja negatiivinen osuus melko tarkasti kumoavat toisensa.

4.13 (a) Nostettaessa painovoima tekee negatiivisen työn ja laskettaessa yhtä suuren positiivisen työn. Työ on siis kokonaisuudessaan nolla.

(b) Liikekitka tekee tässä prosessissa koko ajan negatiivista työtä.

(c) Kitka ei voi olla konservatiivinen vuorovaikutus, koska se teki kappaleeseen nollasta poikkeavan työn, kun kappale kulki suljetun reitin. Painovoima on konservatiivinen.

4.14 Tekstissä pääteltiin, että gravitaation kappaleeseen tekemä työ riippuu ainoastaan kappaleen korkeuden muutoksesta. Otetaan nyt mielivaltainen suljettu reitti ja etsitään reitin korkein ja matalin piste. Olkoon näiden välinen korkeusero Δy . Kuljettaessa reitin ylimmästä pisteestä alimpaan painovoima tekee positiivisen työn $W_{\text{alas}} = mg\Delta y$. Kun siten alimmasta pisteestä palataan takaisin ylimpään pisteeseen, painovoima tekee negatiivisen työn $W_{\text{ylös}} = -mg\Delta y$. Painovoiman tekemä kokonaistyö tällä suljetulla reitillä on siis $W = W_{\text{alas}} + W_{\text{ylös}} = mg\Delta y - mg\Delta y = 0$.

4.15 Mikä tahansa intensiivinen suure, jolle voidaan määritellä arvo kussakin huoneen pisteessä, muodostaa matemaattisessa mielessä kentän. Esimerkki lämpötila, ilmanpaine ja korkeus ovat skalarikenttiä. Ilman virtausnopeus tai vaikkapa suunta kohti lähintä lampua ovat vektorikenttiä.

4.16 $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x, \frac{dy}{dx} = 2x$ ja $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = y + 2x^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2$. Sama tulos saadaan suoraan derivoimalla lauseketta $f = x^3$ kuten pitääkin.

4.17 (a) Tarkastelupisteessä maaston korkeus muuttuu pohjoiseen kuljettaessa jyrkkyydellä $\partial h/\partial y \approx 0.12$ eli maasto nousee noin 12 cm jokaista pohjoiseen siirryttävä metriä kohden. Niinpä siirryttäessä $\Delta y = 20$ m pohjoiseen noustaan $\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y = 0.12 \cdot 20$ m = 2.4 m. (b) Itään kuljettaessa korkeus muuttuu jyrkkyydellä $\partial h/\partial x \approx -0.12$ eli maasto laskee tähän suuntaan 12 cm metrillä. Korkeuden muutos on siis $\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = -0.12 \cdot 20$ m = -2.4 m. (c) Korkeuden kokonaismuutos voidaan arvioida kokonaisdifferentiaalilla.

$$\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y = 2.4 \text{ m} - 2.4 \text{ m} = 0.0 \text{ m}. \quad (4.128)$$

Toisin sanoen koilliseen kuljettaessa korkeus ei tämän arvion mukaan juuri muudu. Näin todella on, sillä tarkastelupisteen ympäristössä korkeuskäyrät kulkevat koillisesta lounaaseen (yläoikealta alavasemalle).

4.18 Vakiovoima tekee työn $W = \bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (2.5 \text{ N}) \cdot (1.0 \text{ mm}) + (-0.5 \text{ N}) \cdot (2.0 \text{ mm}) = 1.5 \text{ mJ}$. Potentiaalienergian muutos on siis $U = -W = -1.5 \text{ mJ}$.

4.19 Gradientti osoittaa kuvan 4.16 (c) perusteella luoteeseen (ylävasemmalta). Korkeuden osittaisderivaatat ovat tarkastelupisteessä $\partial h/\partial x \approx -0.12$ ja $\partial h/\partial y \approx 0.12$. Nämä ovat gradienttivektorin skalarikomponentit x - ja y -suunnissa, joten komponentit ovat siis itseisarvoltaan likimain yhtä suuret, mutta x -komponentti on negatiivinen. Korkeusfunktion h gradientti on siis $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} = -0.12 \hat{\mathbf{i}} + 0.12 \hat{\mathbf{j}}$. Tämä on luoteeseen osoittava vektori, joten laskun tulos on sopusoinnussa kuvan kanssa.

4.20 (a) Lasketaan ensin potentiaalienergian osittaisderivaatat. Ensinnäkin $\partial U/\partial x = (3.0 \text{ J/m}^2)x$, ja pisteessä (0.5 m, 1.5 m) tämä saa arvon 1.5 J/m. Sitten y -suunnassa $\partial U/\partial y = -4.0 \text{ J/m}$. Voima on siis $\bar{\mathbf{F}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} = (-1.5 \text{ N}) \hat{\mathbf{i}} + (4.0 \text{ N}) \hat{\mathbf{j}}$. (b) Potentiaalienergian muutos on helpoin laskea kokonaisdifferentiaalilla, $\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y = (1.5 \text{ J/m}) \cdot (-1.0 \text{ mm}) + (-4.0 \text{ J/m}) \cdot (2.0 \text{ mm}) = -9.5 \text{ mJ}$. Energian muutoksen voi toki laskea myös "tarkasti", mutta tämä on vaivalloista. Ensinnäkin pitää määrittää kappaleen loppusijainti, joka on (0.499 m, 1.502 m). Sitten voimme laskea potentiaalienergian alussa ja lopussa, jolloin tulokseksi saadaan $U_{\text{alku}} = U(0.5 \text{ m}, 1.5 \text{ m}) = -5.625 \text{ J}$ ja $U_{\text{loppu}} = U(0.499 \text{ m}, 1.502 \text{ m}) = -5.6344985 \text{ J}$. Muutos on näiden erotus, $\Delta U = U_{\text{loppu}} - U_{\text{alku}} = -9.4985 \text{ mJ}$. Ero kokonaisdifferentiaalilla laskettuun arvioon on luokkaa 0.01%, mikä on paljon vähemmän kuin annettujen lukuarvojen tarkkuus.

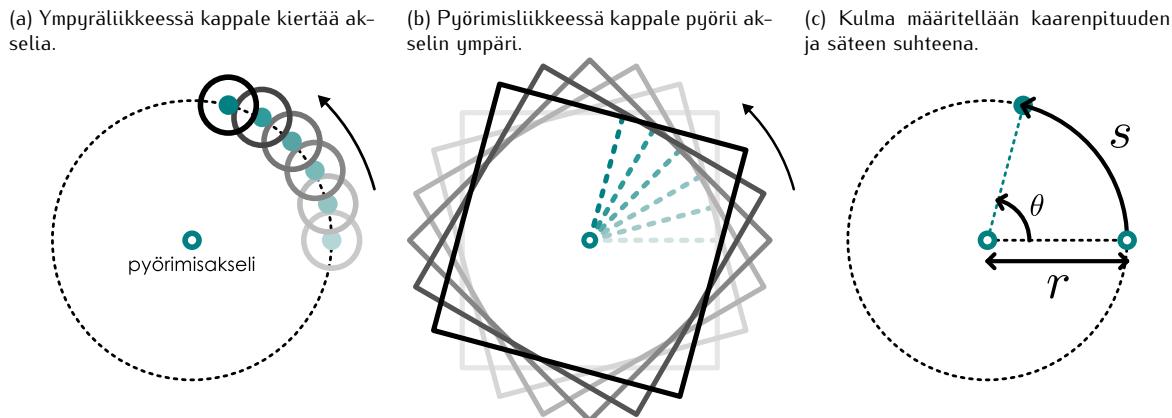
5 Pyörimisliike

Toistaiseksi olemme tarkastelleet vain etenevää liikettä, jossa kappaleiden paikka muuttuu mutta niiden asento ei. Liike on kuitenkin harvoin tällaisista, ja tässä luvussa tutustummekin kappaleiden asennon muuttumiseen niiden pyöriessä. Pyöriminen on moniuotteisen liikkeen erikoistapaus, sillä kappaleen pyöriessä kiinteän akselin ympäri sen jokainen piste liukkuu tasossa ympyräradalla. Itse asiassa aloitammekin pyörimisen tarkastelun nimenomaan tutkimalla tällaista ympyräliikettä. Näemme, että sekä ympyräliikettä että pyörimistä voidaan kuvata määrittelemällä kappaleen asentoa kuvaava kulma samaan tapaan kuin suoraviivaisessa liikkeessä määriteltiin paikkaa kuvaava koordinaatti. Tällöin useimmat pyörimistä kuvaavat mekanikkana lait saavat täsmälleen saman muodon kuin yksiuotteen liikkeen lait kunhan suoraviivaisen liikkeen suureet korvataan vastaavilla pyörimislukkien suureilla. Lopuksi esitellään, kuinka tämä kuvaus yleistyy tapaukseen, jossa kappaleet voivat pyöriä erisuuntaisten akselien ympäri.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- esittää kappaleen paikka napakoordinaatistossa ja jakaa vektorit napakoordinaatiston radiaali- ja tangenttikomponentteihin
- määritellä kulmaliükkeen suureet: kulmanopeus ja -kiulityvyys, hitausmomentti sekä momentti
- määrittää ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeus- ja kiulityvyysvektorit
- määrittää pyörimisen liike-energia ja momentin tekemä työ
- määritellä kulmaliukemäärä ja kuvalla sen säilymislaki
- esittää kappaleen liike suoraviivaisen liikkeen ja pyörimisen yhdistelmänä ja ratkaista vierivän kappaleen liike
- laskea vektoreiden ristitulo ja ilmaista pyörimislukkien suureet vektorimuodossa

Kuva 5.1: Ympyräliikettä ja pyörimistä voidaan molempia kuvata kulmakoordinaatilla.



5.1 Ympyräliike

Kappaleen **pyöriessä** kiinteän **akselin** ympäri sen jokainen pistee liikkuu ympyräradalla. Akseli voi olla todellinen kiinteä kappale kuten oven sarana, joka estää kappaleen muun liikkeen pyörimistä lukuun ottamatta. Toisaalta kappale voi pyöriä myös kuvitteellisen akselin ympäri kuten heitetty frisbee. Kummassakin tapauksessa kappaleen **pyörimisaksellilla** olevat hiukkaset pysyvät paikoillaan ja muut hiukkaset **kiertävät** tätä akselia ympyräradolla. Myös kokonainen kappale voi olla **ympyräliikkeessä**, jolloin se kiertää pyörimisakseli. Ero pyörimisen ja ympyräliikkeen väillä onkin siinä, että pyörimisakseli on pyörimislükkeen tapauksessa kappaleen *sisällä* (tai kappale ainakin ympäröi sitä) ja ympyräliikkeen tapauksessa akseli on selkeästi kappaleen *ulkopuolella*. Pyöriminen ja ympyräliike ovatkin siis kumpikin **kiertoliukkeen** muotoja. Aloitamme kiertoliukkeen tarkastelun ympyräliikkeestä. Ensimmäinen askel on jälleen liikkeen täsmällinen määrittely.

Kulma ja napakoordinaatisto

Kuvailimme suoraviivaisen liikkeen luvussa 1 kiinnittämällä kiintopisteeni eli origon ja mittaamalla kappaleen paikan tämän suhteesta. Kiintopisteen lisäksi valitaan positiivinen suunta, jolloin kappaleen koordinaatti määritellään positiiviseksi sen siirtyessä origosta tähän suuntaan. Ympyräliike tapahtuu tasossa, joten se on kaksiluotesta. Samalla ympyräliike on rajottettua, sillä ympyrän pistet ovat kaikki yhtä kauhana ympyrän keskipisteestä. Kappaleen paikka ympyräradalla voidaankin karakterisoida määritämällä, missä kappale sijaitsee *ympyrän kaarella*. Ympyrän tapauksessa x - tai y -koordinaatin arvo yksin ei riitä tähän. Kappaleen paikka voidaan kuitenkin kuvata yhdellä koordinaatilla kiinnittämällä jokin kiintopiste ympyrän kaarelta ja mittaamalla matka s , joka täytyy kulkea *kaarta pitkin* kappaleen saavuttamiseksi. Kuten suoraviivaisessa liikkeessä piti valita positiivinen suunta paikkakoordinaatin yksikäsitteiseksi määrittämiseksi, myös ympyrän tapauksessa valitaan positiivinen ja negatiivinen suunta, jotta voidaan erottaa mihin suuntaan ympyrää kierretään.

Kaarenpituuden mittaaminen ei välttämättä ole käytännössä helppoa, ja onkin käytännöllisempää mitata valitun kiintopisteen, ympyrän keskipisteen sekä kappaleen paikan määrittelemä **kulmakoordinaatti**. Tämä kulma on kaarenpituuden s ja radan säteen r suhde (kuva 5.1)

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (5.1)$$

Tämä on itse asiassa **radiaanin** eli absoluuttisen kulmayksikön **määritelmiä**. Kappaleen kiertäessä kokonaisen kierroksen se kulkee matkan $s = 2\pi r$, jolloin kulma on määritelmiän mukaisesti $\theta = 2\pi$. Kahden kierroksen kiertäminen vastaa kulmaa $\theta = 4\pi$ jne. Koska täysien kierrosten kiertäminen ei muuta kappaleen paikkaa, kulman 2π monikerran lisääminen kappaleen paikkaa kuvaavaan kulmakoordinaattiin ei muuta kappaleen paikkaa. Tällöin sanotaan, että kappaleen paikka on **2π -jaksollinen** kulmakoordinaatin suhteessa.

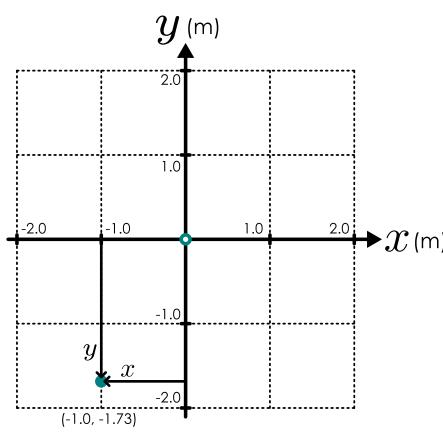


5.1 Mikä on kulmakoordinaatti (välillä $[0, 2\pi]$), jos akselin ympäri kierretään (a) $3/4$ kierrostaa vastapäivään, (b) $1/3$ kierrostaa myötäpäivään, (c) $11/8$ kierrostaa vastapäivään?

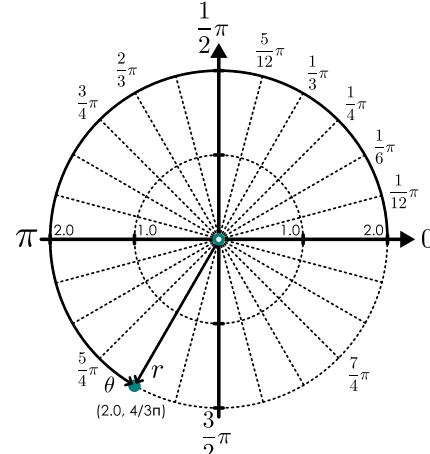
Kulmakoordinaattia ja kappaleen etäisyyttä origosta eli **radiaalikoordinaattia** voidaan käyttää kappaleen paikan määrittämiseksi muulloinkin kuin ympyräliukkeen tapauksessa, sillä jokaista tason pistettä vastaa yksikäsiteinen koordinaattipari (r, θ) . Tätä kutsutaan **napakoordinaatistiksi**, ja se on yleensä kätevin tapa

Kuva 5.2: Karteesisen koordinaatiston ja napakoordinaatiston vertailu.

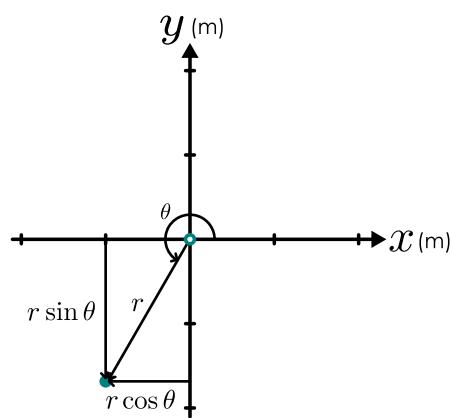
(a) Karteesinen koordinaatisto tasossa.



(b) Napakoordinaatisto.



(c) Muunnos koordinaattien välillä.



kuvata systeemejä, jotka ovat ympyräsymmetrisiä. Samaa kaksiulotteista tasoa voidaan tietenkin kuvata sekä karteesisilla että napakoordinaateilla, ja voi olla hyödyllistä esittää suureita molemmissa koordinaateissa. Yleensä tapana on valita kulmakoordinaatin kiintopisteeksi x -akseli ja positiiviseksi kiertosuunnaksi kierto vastapäivään. Näillä valinnoilla koordinaatistojen yhdistää muunnos (kuva 5.2)

$$x = r \cos \theta \quad (5.2)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (5.3)$$



5.2 (a) Mitkä ovat kappaleen karteesiset koordinaatit, jos sen etäisyys origosta on 2.0 m ja sen kiertokulma x -akselista on $\frac{2}{3}\pi$? (b) Mitkä ovat kappaleen napakoordinaatit, jos sen karteesiset koordinaatit ovat $(x, y) = (1.0 \text{ m}, -1.0 \text{ m})$.

Nopeusvektori napakoordinaatistossa

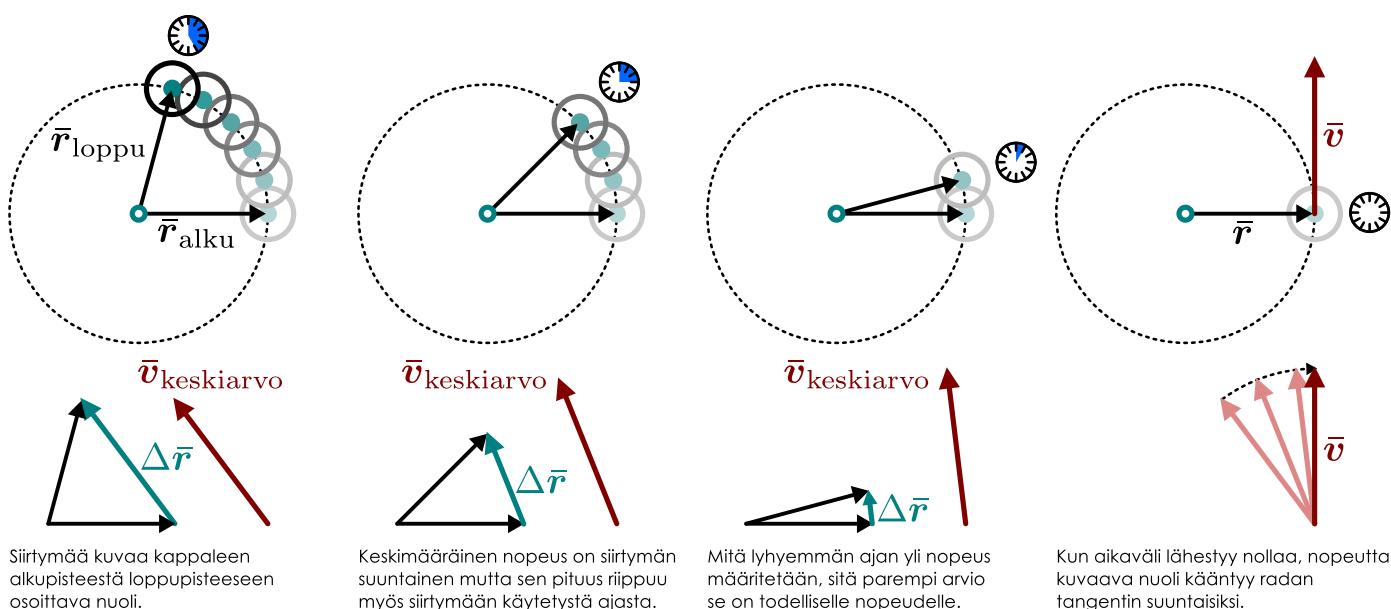
Matemaattisesti kappaleen nopeus määritellään paikkavektorin *derivaattana* yhtälön (1.20) mukaisesti. Toisin sanoen samoin kuin yhdessä ulottuvuudessa nopeus voidaan päättellä määrittämällä ensin kappaleen keskinopeus lyhyellä aikavälillä ja tarkastelemalla tämän keskinopeuden raja-arvoa, kun aikavälin pituus lähestyy nollaa. Keskimääräinen nopeus lasketaan valitsemalla kappaleen paikka kahtena lähekkäisenä ajan hetkenä ja mittaamalla kappaleen siirtymä näiden hetkien välillä kuten kuvassa 5.3, jolloin keskinopeus on siirtymä jaettuna siihen käytetyllä ajalla. Graafisesti siirtymävektori on kappaleen alkupisteestä sen loppupisteeseen osoittava nuoli. Valitsemalla paikat yhä lähempää toisiaan eli yhä lyhyemmän ajan välein tämä keskinopeus lähestyy kappaleen hetkellistä nopeutta, mikä graafisessa esityksessä ilmenee nopeusvektoria esittävän nuolen käännyminenä osoittamaan *radan tangentin suuntaan*. Itse asiassa vastaavalla päättelyllä voidaan todeta nopeusvektorin olevan kappaleen liikeradan tangentin suuntainen aina — ei vain ympyräliikkeen tapauksessa, ja itse asiassa huomasimme jo heittoliikettä tarkastellessamme, että tasossa liikkuvan kappaleen nopeusvektori on aina kappaleen radan tangentin suuntainen. Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että nopeus ja radan tangentti kumpikin osoittavat aina suuntaan, johon kappale kyllakin hetkellä on liikkumassa.



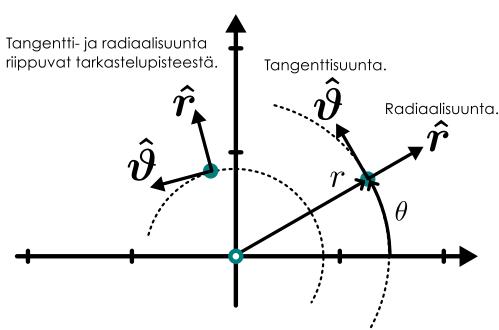
5.3 Miksi kuvassa 5.3 keskinopeutta kuvaavan vektorin pituus on eri kuvissa likimain sama vaikka siirtymävektorin pituus muuttuu?

Heittoliikkeen tapauksessa kappaleen liikkeen jako x - ja y -komponentteihin oli hyvä tappa ratkaista kappaleen paikka ja nopeus ajan funktiona. Tämä toimi erityisesti sen takia, että heittoliikkeessä kappaleen kiihtyvyys oli y -suuntainen. Ympyräliikkeen tapauksessa nopeusvektori osoittaa aina radan tangentin suuntaan, joten sen täytyy *pyöriä*, eikä nopeuden kumpikaan karteesinen komponentti ole vakio. Sen sijaan ympyräliikkeessä etäisyys origosta on vakio ja nopeus on aina radan tangentin suuntainen, joten tässä tapauksessa on kätevämpää jakaa vektorit x - ja y -komponenttien sijaan **tangenti-** ja **radiaalikomponentteihin**.

Kuva 5.3: Kappaleen nopeusvektori voidaan määrittää tarkastelemalla kappaleen siirtymää. Hetkellinen nopeus osoittaa aina radan tangentin suuntaan.



Kuva 5.4: Napakoordinaatiston yksikkövektorit riippuvat paikasta.



Tangenttikomponentti kuvailee vektorin komponenttia ympyrän tangentin suunnassa ja radiaalikomponentti kuvailee ympyrän keskipisteestä poispäin osoittavaa komponenttia. Periaatteessa tämä komponenttijako toimii täsmälleen samalla tavalla kuin vektorien jako komponentteihin karteesisessa koordinaatistossakin, mutta oleellinen ero on se, että tämä komponenttijako riippuu kappaleen sijainnista. Näin on siksi, että ympyrän tangentti osoittaa eri suuntaan kaaren eri kohdissa ja samoin suunta poispäin ympyrän keskipisteestä riippuu paikasta. Tangentti- ja radiaalikomponentit voidaan esittää skalaarikomponenttien ja yksikkövektoreiden avulla kuten karteesisessakin koordinaatistossa, jolloin siis esimerkiksi nopeusvektori voidaan kirjoittaa muodossa

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\vartheta} \quad (5.4)$$

missä v_r on nopeuden skalaarikomponentti radiaalisuunnassa ja v_θ tangenttiuunnassa. Koska ympyräradalla liikkuvan kappaleen nopeus on aina radan tangentin suuntainen, sen radiaalikomponentti täytyy olla aina nolla

$$v_r = 0. \quad (5.5)$$

Yllä esitetyssä komponenttijossa yksikkövektori \hat{r} osoittaa poispäin origosta ja yksikkövektori $\hat{\vartheta}$ osoittaa ympyrän tangentin suunnassa positiiviseen kiertosuuntaan (kuva 5.4). Koska tangentti- ja radiaalisuunnat riippuvat kappaleen paikasta, myös näitä yksikkövektorit muuttuvat kappaleen liikkessa. Täsmällisemmin yksikkövektorit kääntyvät yhtä nopeasti kuin kappale kiertää ympyrää.

5.4 Ympyräraataa vastapäivään vauhdilla 3.0 m/s kiertävän kappaleen kulmakoordinaatti on $\frac{3}{4}\pi$ ja radiaalikoodinaatti 2.0 m. (a) Mikä on kappaleen nopeusvektorin ja x -akselin välinen kulma? (b) Mikä on nopeusvektorin x -komponentti? (c) Mikä on nopeusvektorin tangenttikomponentti?

Jos kaksi kappaletta kiertää saman origon ympäri niin, että ne kulkevat täyden kierroksen samassa ajassa mutta eri etäisyyksillä, kauempaan origosta olevan eli suurempisäteistä ympyrää kiertävän kappaleen täytyy kulkea samassa ajassa pidempi matka. Siispä ympyräradalla kappaleen nopeus on tässä mielessä verrannollinen sen radan sääteeseen. Toisaalta mitä nopeammin kappale kiertää eli mitä nopeammin kulma θ muuttuu, sitä suurempi on kappaleen nopeus. Tämän havainnon voi esittää täsmällisesti kulmakoordinaatin (5.1) määritelmän kautta. Jos kappale nimittäin kulkee kaarta pitkin matkan Δs , kulmakoordinaatin muutos on

$$\Delta\theta = \theta_{\text{loppu}} - \theta_{\text{alku}} = \frac{s_{\text{loppu}}}{r} - \frac{s_{\text{alku}}}{r} = \frac{\Delta s}{r}. \quad (5.6)$$

Kuljetun matkan lähestyessä nolla kulma pienenee ja kappaleen kulkema reitti lähestyy suoraa. Suoraväisessä liukkeessa kappaleen nopeus on määritelmän mukaisesti kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhde, joten

$$v_\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} r = \frac{d\theta}{dt} r. \quad (5.7)$$

Nopeus on siis verrannollinen radan säteeseen ja kulman θ aikaderivaattaan eli muuttumisnopeuteen. Kulman θ muutosnopeutta kutsutaan **kulmanopeudeksi** ja se määritellään kulmakoordinaatin derivaattana ajan suhteen samaan tapaan kuin nopeus x -suunnassa määritellään paikkakoordinaatin derivaattana ajan suhteen,

$$\omega_\theta = \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.8)$$

Kappaleen nopeus on sen avulla lausuttavissa muodossa

$$v_\theta = \omega_\theta r. \quad (5.9)$$



5.5 Karuselli tekee kierroksen 20 sekunnissa ja matkustajat ovat 1.5 m ja 2.5 m päässä karusellin keskiakselista. Mitkä ovat matkustajien nopeus ja kulmanopeus?

Samaan tulokseen päästäisiin myös vektorilaskulla. Ensinnäkin napakoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit voidaan esittää toistensa avulla muunnoksella

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (5.10)$$

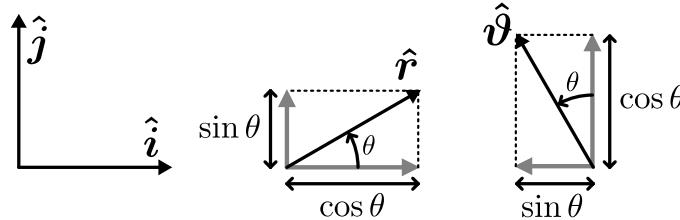
$$\hat{\vartheta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (5.11)$$

Kuva 5.5: Muunnos napakoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston yksikkövektorien välillä.

Tämä muunnos perustuu kuvaan 5.5 piirrettyyn geometriaan. Napakoordinateista puolestaan voidaan siirtyä karteesisiin koordinaatteihin muunnoksen (5.3) avulla. Kappaleen nopeuden x - ja y -komponentit saadaan näiden koordinaattien derivaattoina, joten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\omega_\theta r \sin \theta \quad (5.12)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \omega_\theta r \cos \theta. \quad (5.13)$$



Tämän perusteella kappaleen nopeusvektori on siis

$$\bar{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = -\omega_\theta r \sin \theta \hat{i} + \omega_\theta r \cos \theta \hat{j} = \omega_\theta r (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \omega_\theta r \hat{\vartheta}, \quad (5.14)$$

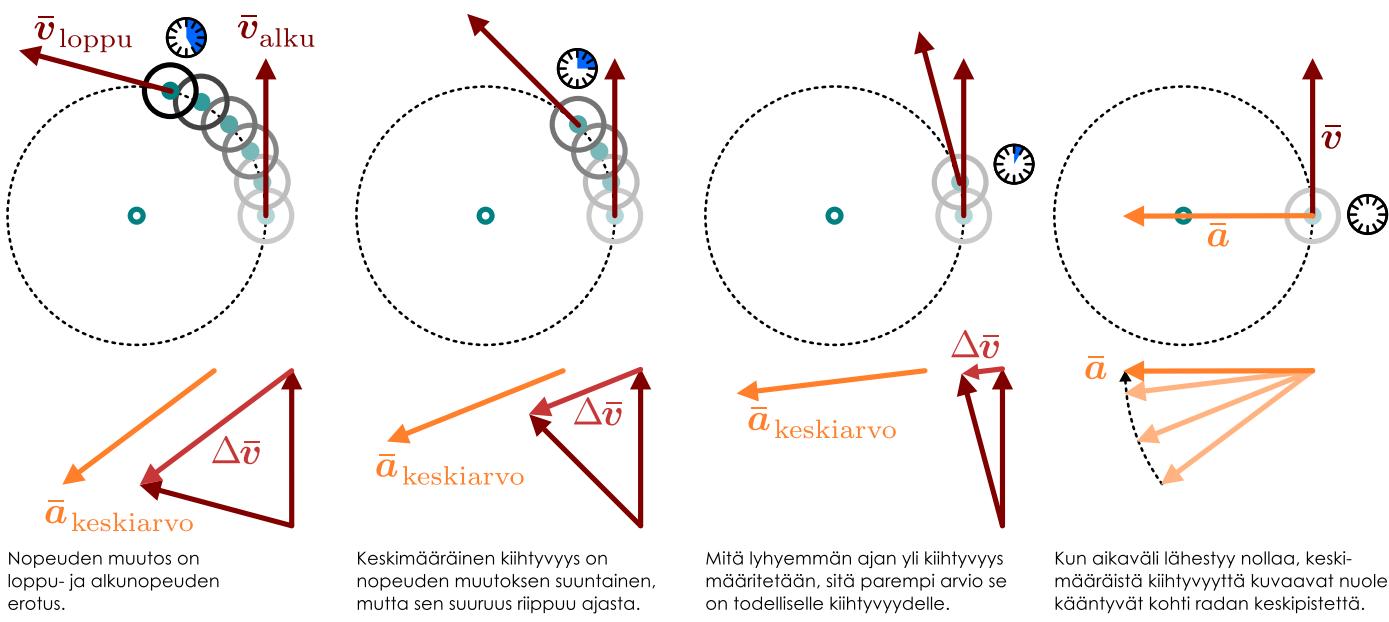
mikä on täsmälleen sama tulos kuin mitä edellä päätteliin geometrisesti.



5.6 Tarkista muunnoksen (5.10) ja (5.11) järkeyys tarkastelemalla tapauksia (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 0.1$ ja (c) $\theta = \frac{2}{3}\pi$. Päättely erityisesti yksikkövektorien \hat{r} ja $\hat{\vartheta}$ x - ja y -komponenttien etumerkit geometrisesti ja vertaa muunnosyhtälöiden antamiin tuloksiin.

Symbolit θ ja ϑ ovat molemmat sama kirjain, kreikkalainen 'theta', hiukan eri tavoin kirjoitettuna. Merkinässä v_θ symboli kertoo, että kyseessä on nopeusvektorin komponentti yksikkövektorin $\hat{\vartheta}$ suunnassa eli siis nopeuden tangentiaalinen komponentti. Kyseessä on siis aivan samanlainen merkintä kuin x -komponenttia tarkoittavassa tapauksessa v_x . Merkinässä ω_θ symboli puolestaan kertoo, että kulmanopeus on määritelty nimenomaan kulman θ suhteen. Tarkastelemme aluksi vain tasossa tapahtuvaa ympyräliikettä, jonka kuvamiseen riittää yksi kulmakoordinaatti, mutta yleisesti pyöriminen voi tapahtua erisuuntaisten akselien ympäri, jolloin kuvauksen täytyy sisältää myös tieto *pyörimisakselin suunnasta*. Tällöin kulmalikemäärä määritellään *vektorina*, jonka suunta osoittaa pyörimisakselin suunnan. Merkintä ω_θ tarkoittaa siis täsmällisemmin sitä, että kyseessä on ainoastaan tämän kulmalikemäärävektorin yksi komponentti. Vaikka molemmat symbolit liittyvät kulmaan θ , kyseessä on kuitenkin eri komponenttijako, joten näille käytetään tässä eri symboleita. Pyörimisliikkeen vektorikuvaus esitellään tarkemmin luvussa 5.5.

Kuva 5.6: Kappaleen kiihtyvyysvektori voidaan määrittää tarkastelemalla kappaleen nopeuden muutosta. Hetkellinen kiihtyvyys osoittaa radan keskipisteen suuntaan, jos nopeus on vakio.



Kiihtyvyys ympyräliikkeessä

Selvitetään seuraavaksi kappaleen kiihtyvyys ympyräliikkeessä ja tarkastellaan ensin tapausta, jossa kappaleen vauhti ei muutu eli kappaleen nopeuden itseisarvo on vakio. Intuitiivisesti voi helposti ajatella, että vakionopeudella ympyrässä kulkevalla kappaleella ei ole kiihtyvyyttä, mutta tässä sekoittuu kiihtyvyyden arkipäiväinen käytö suureen täsmälliseen fysiikaalaiseen määritelmään. Kiihtyvyys nimittäin mittaa fysiikassa nopeuden muutosta, ja kuten edellä päättelimme, ympyräradalla kulkevan kappaleen nopeus muuttuu, koska nopeusvektori *kääntyy*. Niinpä kappaleella täytyy olla kiihtyvyyttä, joka osoittaa *nopeusvektorin muutoksen suuntaan*. Asiaa voi tarkastella myös jatkuvuuden lain kannalta. Jos kappaleeseen kohdistuva voima on nolla, se liikkuu *suoraan* tasaisella nopeudella. Jos kappale on *ympyräradalla*, siinä täytyy kohdistua nollasta poikkeava voima, joka aiheuttaa kappaleen kiihtyvyyden ja saa kappaleen radan poikkeamaan suorasta.

Kappaleen nopeusvektori on edellä tarkastellun perusteella aina sen liikeradan tangentin suuntainen. Toisaalta ympyräliikkeessä kappale kulkee ympyräradalla, jonka tangentti on aina kohtisuorassa ympyrän sädetä eli kappaleen paikkavektoria vastaan. Kappaleen liikkuessa vakiovauhdilla se siis kiertää ympyrää vakio-kulmanopeudella ja sekä paikkavektori että nopeusvektori pysyvät liukkeen aikana yhtä pitkinä ja *kääntyvät samalla kulmanopeudella*.

Kiihtyvyysvektori voidaan näin ollen määrittää nopeusvektorin muutoksen perusteella täsmälle samalla tavalla kuin nopeusvektori määritettiin paikkavektorista. Kuvassa 5.6 on piirretty kappaleen nopeusvektoreita kuvaavia nuolia sekä näiden muutoksia, joiden perusteella voidaan päättää kappaleen keskimääräinen kiihtyvyys lyhyillä aikaväleillä. Kun tarkastellun aikavälin pituus lähestyy nolla, keskikiihtyvyyttä kuvaavat vektorit käännyvät yhä tarkemmin *nopeusvektoria vastaan kohtisuoraan*. Tämä raja-arvo on kappaleen hetkellistä kiihtyvyyttä kuvaava vektori, ja se selvästikin osoittaa *kohti liikeradan keskipistettä* — siis suuntaan, johon nopeusvektori kääntyy. Koska kiihtyvyysvektori osoittaa kohti radan keskipistettä, sillä on ainoastaan radiaalikomponentti

$$\bar{a} = a_r \hat{r}. \quad (5.15)$$

Tätä kiihtyvyyttä kutsutaan **keskeiskiihtyvydeksi**, koska se suuntautuu kohti radan keskipistettä.

Voimme päättää keskeiskiihtyvyden suuruuden samaan tapaan kuin nopeuden ja kulmanopeuden välisen yhteyden. Jos nimittäin kappaleen kulmakoordinaatti muuttuu määränpitkin $d\theta$, sen siirtymä on

$$|d\vec{r}| = ds = rd\theta. \quad (5.16)$$

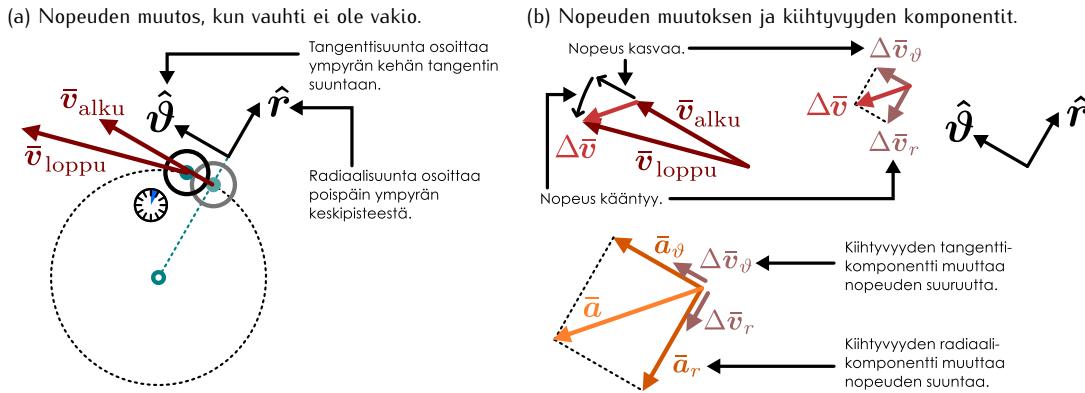
Kappaleen nopeusvektori kääntyy tällöin *yhtä paljon*, joten nopeuden muutos on aivan samalla päättelyllä

$$|d\vec{v}| = v_\vartheta d\theta. \quad (5.17)$$

Yhdistämällä nämä tulokset voidaan kiihtyvyyden itseisarvo kirjoittaa muotoihin

$$|\bar{a}| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = v_\vartheta \frac{d\theta}{dt} = v_\vartheta \omega_\theta = \frac{v_\vartheta^2}{r} = \omega_\theta^2 r. \quad (5.18)$$

Kuva 5.7: Kappaleen kiihtyvyyden radiaalikomponentti käänää nopeuden suuntaa ja tangenttikomponentti muuttaa nopeuden itseisarvoa.



Koska tämä kiihtyvyys osoittaa aina kohti ympyrän keskipistettä ja vektorin radiaalikomponentti määritellään positiiviseksi osoittaessaan keskipisteestä poispäin, on kappaleen kiihtyvyyden radiaalikomponentti siis *negatiivinen*. Kiihtyvyysvektori on näin ollen komponenttimuodossa

$$\bar{a} = -\frac{v_\theta^2}{r}\hat{r} = -\omega_\theta^2 r \hat{r}. \quad (5.19)$$



5.7 Karuselli tekee kierroksen 20 sekunnissa ja matkustajat ovat 1.5 m ja 2.5 m päässä karusellin keskiakselista. Mitkä ovat matkustajien kiihtyvyydet?

Kappaleella on siis ympyrälükkeessä aina kiihtyvyys kohti ympyrän keskipistettä, ja tämän keskeiskiihtyvyden suuruus yhdessä ratalükkeen vauhdin kanssa määräytyy ympyräradan säteen. Mitä suurempi keskeiskiihtyvyys on, sitä pienempää ympyrää kappale kulkee ja päinvastoin mitä pienempi kappaleen keskeiskiihtyvyys on, sitä suurempaa ympyrää kappale kiertää. Jos keskeiskiihtyvyys on *nolla*, radan säde on *ääretön*, eli kappale kulkee suoraan kuten sen jatkavuuden lain mukaan pitäisikin.

Kappaleella voi tieteenkin olla myös kiihtyvyttä *radan tangentin suuntaan*, ja tämä vaikuttaa kappaleen liikkeeseen oleellisesti eri tavalla kuin keskeiskiihtyvyys. Kuten kappaleen kulkiessa suoraan myös ympyräradalla nopeuden suuntainen kiihtyvyys kasvattaa kappaleen vauhtia kun taas nopeuteen nähden vastakkaisuuntainen kiihtyvyys hidastaa vauhtia. Toisin sanoen *jos kappaleen kiihtyvyyden tangenttikomponentti ei ole nolla, kappaleen vauhti muuttuu*. Koska liike suoralla on tavallaan ympyrälükkeen erikoistapaus, jossa ratsasäde on ääretön, tangenttikihtyvyden vaikutukseen kappaleen nopeuteen täytyy olla täsmällinen sama kuin yksilötteisen liikkeen tapauksessa eli toisin sanoen kiihtyvyden tangenttikomponentin täytyy olla nopeuden tangenttikomponentin derivaatta,

$$a_\vartheta = \frac{dv_\theta}{dt} = \frac{d\omega_\theta}{dt} r. \quad (5.20)$$

Tangenttikihtyvyys voitiin tässä kirjoittaa myös kulmanopeuden avulla, sillä ympyräradalla kulmanopeus ja nopeus ovat suoraan verrannolliset yhtälön (5.8) mukaisesti. Määritellään vielä *kulmakihtyvyys* kulmanopeuden aikaderivaattana

$$\alpha_\theta = \frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (5.21)$$

jolloin kiihtyvyyden tangenttikomponentti on suoraan verrannollinen kappaleen kulmakihtyvyyteen

$$a_\vartheta = \alpha_\theta r, \quad (5.22)$$

aivan kuten kappaleen nopeuden tangenttikomponentti on verrannollinen kappaleen kulmanopeuteen.

Kiihtyvyysvektori on siis kaikkiaan

$$\bar{a} = a_r \hat{r} + a_\vartheta \hat{\vartheta} = -\omega_\theta^2 r \hat{r} + \alpha_\theta r \hat{\vartheta}. \quad (5.23)$$

Vektorin pituus eli kiihtyvyyden itseisarvo saadaan Pythagoraan lauseesta aivan kuten karteesisessakin koordinaatistossa, koska radiaali- ja tangenttikomponentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorat,

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\vartheta^2}. \quad (5.24)$$



5.8 Karuselli tekee täydessä vauhdissa kierroksen 20 sekunnissa ja siltä kestää 2 sekuntia saavuttaa tämä kulmanopeus levosta lähtiessään. Karusellin kulmakihtyvyys on tänä aikana likimain vakio. Matkustaja on etäisyydellä 1.5 m karusellin keskiakselista. Mikä on sekunnin kuluttua liukkeelle lähdöstä matkustajan (a) radiaalikihtyvyys, (b) tangenttikihtyvyys, (c) kihtyvyyden itseisarvo?

Voidaan siis tehdä seuraava yhteenvetö ympyräliukkeesta sekä kappaleen nopeus- ja kihtyvyysvektoreista:

- Nopeusvektori on *aina* radan tangentin suuntainen.
- Nopeuden suuruus on verrannollinen kulmanopeuteen ja ympyrän säteeseen.
- Kihtyvyysvektorilla on *aina* komponentti kohti ympyrän keskipistettä.
- Tämän keskeiskihtyvyyden suuruus on verrannollinen kappaleen nopeuden *neliöön*.
- Jos kappaleen vauhti muuttuu, sen kihtyvyysvektorilla on lisäksi komponentti radan tangentin suuntaan.
- Tämän tangenttikihtyvyyden suuruus on verrannollinen kappaleen kulmakihtyvyyteen ja ympyrän säteeseen.

Kappaleen kihtyvyyden tangentti- ja radiaalikomponenteilla on siis selkeästi toisistaan eroavat fysiikalliset merkitykset: *radiaalikomponentti eli keskeiskihtyvyys liittyy ainoastaan kappaleen liikkeen suunnan muuttumiseen kun taas tangenttikomponentti liittyy ainoastaan kappaleen vauhdin muuttumiseen*. Koska kappaleen kihtyvyysvektori on dynamiikan peruslain mukaan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaisvoimaan, tulos voidaan tulkita myös voimien avulla: Kappaleeseen kohdistuvan voiman liikkeen suuntainen komponentti pyrkii muuttamaan kappaleen nopeuden suuruutta mutta ei vaikuta liikkeen suuntaan

$$F_\vartheta = ma_\vartheta = m\alpha_\vartheta. \quad (5.25)$$

Sen sijaan kappaleeseen kohdistuvan voiman lükettä vastaan kohtisuora komponentti pyrkii ainoastaan muuttamaan nopeuden suuntaa mutta ei vaikuta liikkeen vauhtuihin

$$F_r = ma_r = -m \frac{v_\vartheta^2}{r}. \quad (5.26)$$

Ympyräliike on siis mahdollista vain jos kappaleeseen kohdistuu voima kohti ympyrän keskipistettä, ja mitä nopeammin kappale liikkuu tai mitä pienempi on sen radan sade, sitä suurempi voima vaaditaan pitämään kappale radalla.



5.9 Kirjoita oman sanoin tiivistelmä ympyräliukkeesta. Selitä erityisesti, mitä tarkoitetaan kulmanopeudella ja -kihtyvyydellä, sekä millaisia nopeus- ja kihtyvyysvektorit ovat ympyräliukkeessa. Taulukoi nämä suureet yhdistävät yhtälöt.

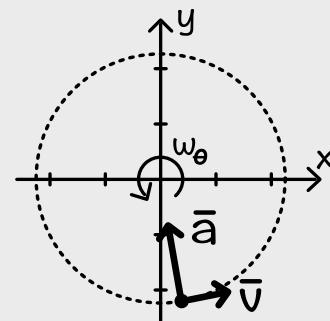
esimerkki 5.1

Ympyräliike

Hiukkanen kiertää origoa ympyräradalla tasaisella vauhdilla $v = 1.5 \text{ m/s}$ vastapäivään. Hiukkanen on erällä ajan hetkellä pisteessä $(x, y) = (0.35 \text{ m}, -1.20 \text{ m})$. Mikä on hiukkasen (a) radan sade, (b) kulmanopeus, (c) nopeusvektori, (d) kulmakihtyvyys, (e) kihtyvyysvektori? Esitä vektorit kartesisissä komponenteissa.

TILANNE Piirretään tilanteesta kuva.

SUUNNITELMA Radan sade voidaan selvittää laskemalla hiukkasen etäisyyks origosta. Origokeskisellä ympyräradalla tämä on vakio. Hiukkasen nopeusvektorin pituus on sama kuin hiukkasen vauhti ja se osoittaa radan tangentin suuntaan. Kulmanopeus puolestaan on vauhdin ja säteen suhde. Hiukkasen kihtyvyysvektori osoittaa kohti origoa ja kulmakihtyvyys on nolla, koska vauhti oli vakio. Kihtyvyyden suuruus riippuu vauhdin neliöstä ja radan säteestä.



Etäisyys origosta on $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Radialinen yksikkövektori osoittaa origosta kohti hiukkasen paikkaa, joten se saadaan jakamalla hiukkasen paikkavektori origosta mitattulla etäisyydellä

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \bar{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\hat{i} + y\hat{j}). \quad (5.27)$$

Tangenttisuuntainen yksikkövektori on tästä vastaan kohtisuorassa

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y\hat{i} + x\hat{j}). \quad (5.28)$$

Hiukkasen kulmanopeus on $\omega_\theta = v/r$ ja nopeusvektori $\bar{v} = v\hat{\theta}$. Hiukkasen kulmakihtyvyys on $\alpha_\theta = 0$ ja kiihtyvyysvektori $\bar{a} = -v^2/r\hat{r}$.

RATKAISU (a) Sijoittamalla hiukkasen koordinaatit radan sääteksi saadaan $r = 1.25$ m ja napakoordinaatiston yksikkövektorit ovat siis $\hat{r} = 0.28\hat{i} - 0.96\hat{j}$ sekä $\hat{\theta} = 0.96\hat{i} + 0.28\hat{j}$.

(b) Kulmanopeus on $\omega_\theta = 1.2 \text{ s}^{-1}$, (c) nopeusvektori $\bar{v} = (1.4 \text{ m/s})\hat{i} + (0.42 \text{ m/s}^2)\hat{j}$, (d) kulmakihtyvyys on nolla ja (e) kiihtyvyysvektori $\bar{a} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (1.7 \text{ m/s}^2)\hat{j}$.

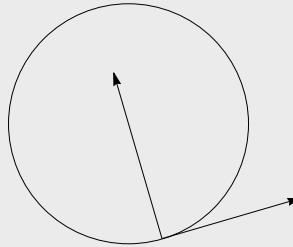
Mathematica:

```
(* paikka- ja yksikkövektorit *)
x = 0.35; y = -1.20; v = 1.5;
paikka = {x, y} (* paikkavektori *)
r = Sqrt[paikka.paikka] (* paikka.paikka on pistetulo *)
1.25
radiaali = 1/r paikka
{0.28, -0.96}
tangentti = 1/r {-y, x}
{0.96, 0.28}

(* nopeudet ja kiihtyvyydet *)
omega = v/r
1.2
nopeus = v tangentti
{1.44, 0.42}
kiihtyvyys = -v^2 / r radiaali
{-0.504, 1.728}

(* tarkistus derivoimalla paikkavektoria *)
rvektori = {r Cos[omega t], r Sin[omega t]};
aika = Solve[rvektori == paikka, t]
{{t -> -1.0725}}
D[rvektori, t] /. aika (* nopeusvektori on paikan aikaderivaatta *)
{{1.44, 0.42}}
D[rvektori, {t, 2}] /. aika (* kiihtyvyysvektori on paikan toinen aikaderivaatta *)
{{-0.504, 1.728}}

(* kuva *)
nopeusnuoli = Graphics[Arrow[{paikka, paikka + nopeus}]];
kiihtyvyysnuoli = Graphics[ Arrow[{paikka, paikka + kiihtyvyys}]];
rata = Graphics[Circle[{0, 0}, r]];
Show[rata, nopeusnuoli, kiihtyvyysnuoli]
```



ARVIOINTI Piirretyn kuvan perusteella vektorit osoittavat oikeisiin suuntiin. Tarkistukseksi voimme myös ratkaista hiukkasen nopeuden ja kiihtyvyden ajan funktioita. Nopeus- ja kiihtyvyysvektori voidaan nimittäin laskea suoraan derivoimalla kappaleen paikkavektoria ajan suhteeseen (ks. Mathematica-koodi yllä). Kappaleen paikkavektori on

$$\bar{r} = r\hat{r} = r(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = r(\cos(\omega_\theta t) \hat{i} + \sin(\omega_\theta t) \hat{j}) \quad (5.29)$$

joten nopeus- ja kiihtyvyysvektorit ovat

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \omega_\theta r(-\sin(\omega_\theta t) \hat{i} + \cos(\omega_\theta t) \hat{j}) \quad (5.30)$$

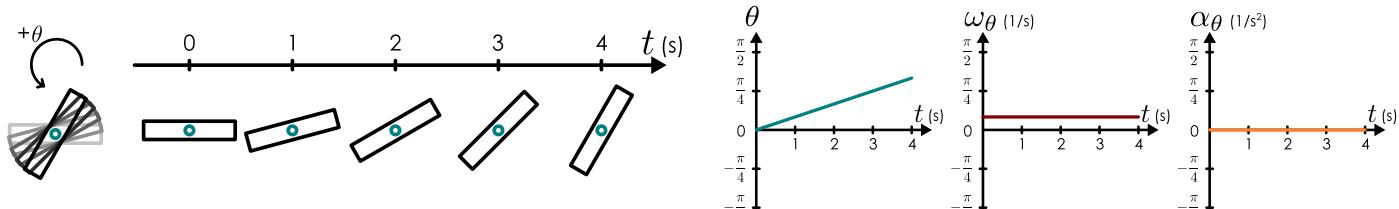
sekä

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \omega_\theta^2 r(-\cos(\omega_\theta t) \hat{i} - \sin(\omega_\theta t) \hat{j}). \quad (5.31)$$

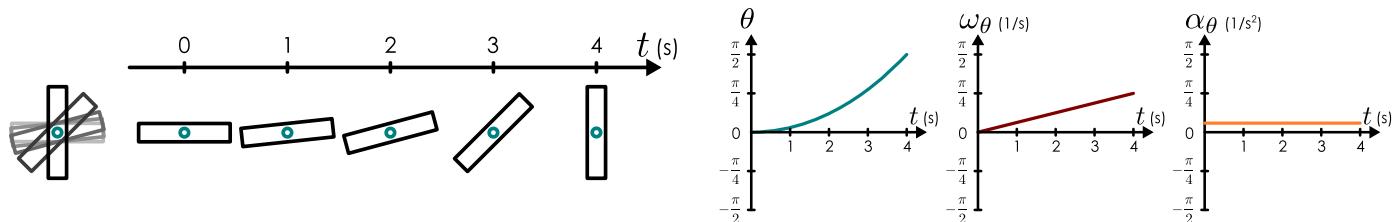
Kappale on tehtävässä annetussa paikassa esimerkiksi hetkellä $t = -1.0725$ s, ja sijoittamalla tämän sekä muut lukuarvot derivoiden johdettuihin nopeuden ja kiihtyvyden lausekkeisiin saadaan samat tulokset kuin edellä tangentti- ja radiaalikomponenttien avulla laskien.

Kuva 5.8: Pyörivän kappaleen kulmakoordinaatin, -nopeuden ja -kiihityyden kuvajat.

(a) Tasaisesti pyörivä kappale.



(b) Tasaisella kulmakihtyydellä pyörivä kappale.



5.2 Pyörimisliike

Etenevä ja pyörivä liike

Pyörivän jäykän kappaleen asento voidaan määritellä kulmakoordinaatin avulla täsmälleen samoin kuin ympyräliikkeessäkin olevan kappaleen. Jos nimittäin kappaleen muoto ei muutu, sen jokainen piste käännytä kappaleen pyöriessä aina *yhtä suuren kulman*, ja niinpä voimme mitata kappaleen kiertokulman minkä tahansa sellaisen pisteen perusteella, joka ei ole pyörimisakselilla. Tällöin asennon muutosta kuvaa kulmanopeus ja kulmanopeuden muutosta edelleen kulmakihtyyrys aivan samoin kuin ympyräliukkeen tapauksessa, ja nämäkin ovat *samat* jokaiselle kappaleen hiukkaselle. Sen sijaan pyörimisakseliin nähdyn eri paikoissa olevien hiukkasten nopeudet ja kihtyydyt eivät ole *samat*, sillä mitä kauempana pyörimisakselistä hiukkanen on, sitä nopeammin sen täytyy liikkua. Niinpä pyörimislükkeen kuvauksessa on mielekästä esittää liike pelkästään kulmamuuttujien $\theta, \omega_\theta, \alpha_\theta$ jne. avulla.

Aivan kuten suoraviivaisen etenemislükkeen tapauksessa voidaan pyörimislükkeessäkin erottaa erikoistapauksia kuten tasainen pyörimisliike $\omega_\theta = \text{vakio}$ ja tasaisesti kihtyyvä pyörimisliike $\alpha_\theta = \text{vakio}$. Nämä on havainnollistettu kuvassa 5.8. Koska kulmanopeus (5.8) ja -kihtyyrys (5.21) määritellään kulman derivaattona täsmälleen samoin kuin nopeus ja kihtyyrys suoraviivaisessa liikkeessä, nille pätevät myös muut paikan-, nopeuden- ja kihtyydyiden väliset relaatiot kuten integraaliesitykset

$$\Delta\theta = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \omega_\theta dt \quad (5.32)$$

$$\Delta\omega_\theta = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \alpha_\theta dt. \quad (5.33)$$

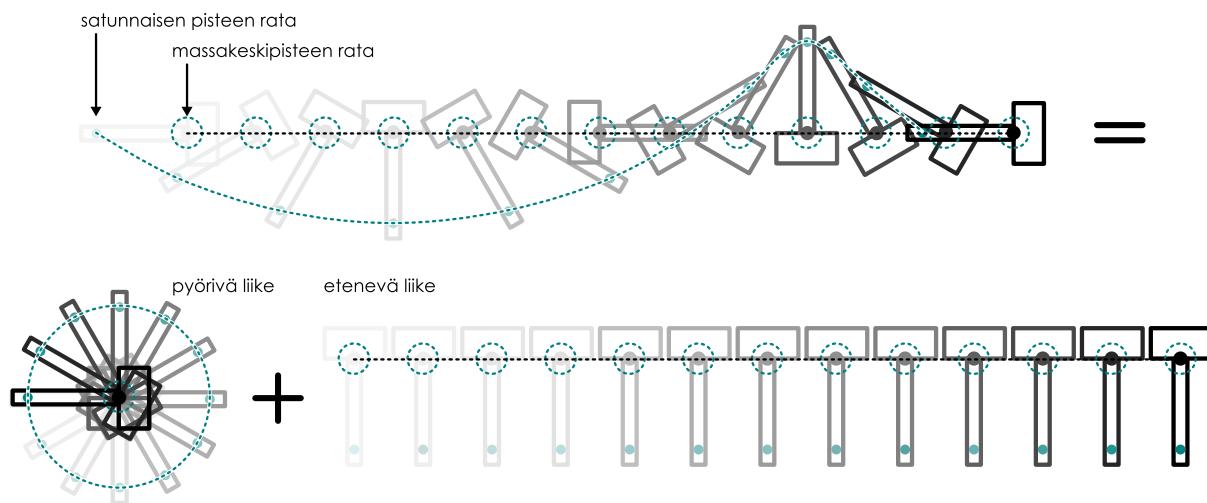
Tässä $\Delta\theta$ on kappaleen asentoa kuvaavan kulman muutos eli **kierto** ja $\Delta\omega_\theta$ on kappaleen kulmanopeuden muutos. Graafisesti kulmanopeus voidaan määrittää kulman kuvaajan tangentin kulmakertoimena ja samoin kulmakihtyyrys on kulmanopeuden tangentin kulmakerroin. Kulmakoordinaatin muutos puolestaan on kulmanopeuden kuvaajan rajaama pinta-ala ja kulmanopeuden muutos saadaan kulmakihtyyden kuvaajan rajaamana pinta-alana.

5.10 (a) Kuinka pitkän siirtymän kappale kulkee kahdessa sekunnissa, jos sen nopeus on aluksi $v_x = 1.0 \text{ m/s}$ ja kihtyyrys $a_x = -0.4 \text{ m/s}^2$?

(b) Kuinka suuren kulman pyörivä kappale kiertyy kahdessa sekunnissa, jos sen kulmanopeus on aluksi $\omega_\theta = 1.0 \text{ 1/s}$ ja kulmakihtyyrys $\alpha_\theta = -0.4 \text{ 1/s}^2$.

Liikemääränsä säilymislain perusteella kappale, johon vaikuttava kokonaivoima on nolla, liikkuu tasaisella nopeudella tai on levossa. Erityisesti kappaleen massakeskipisteen nopeus on tällöin vakio — mahdollisesti nolla. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, etteivätkö kappaleen osat voisi liikkua massakeskipisteen suhteeseen. Erityisesti kappale voi pyöriä massakeskipisteensä ympäri. Jos kappale on etenemislükkeen suhteeseen paikoillaan mutta pyörii, sen massakeskipiste ei liiku mutta kappaleen jokainen hiukkanen on ympyräliikkeessä massakeskipisteen ympäri nopeudella $v_\theta = \omega_\theta r$, missä r on kunkin hiukkasen etäisyys massakeskipisteestä. Jos

Kuva 5.9: Jäykän kappaleen mielivaltainen liike voidaan kuvata massakeskipisteen etenevän liikkeen ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvan pyörimisen yhdistelmänä.



kappale lisäksi liikkuu, sen *liike voidaan jakaa massakeskipisteen etenevään liikkeeseen sekä pyörimisliikkeeseen massakeskipisteen ympäri*. Tällöin kappaleen kunkin hiukan voi kulkea varsin monimutkaistakin rataa, kuten kuvassa 5.9 on esitetty.

Oleellista tässä joossa etenevään ja pyörivään liikkeeseen on huomata, että pyörivällekin kappaleelle massakeskipisteen liikettä kuvavat mekanikan lait ovat *täsmälleen samanlaiset* kuin kappaleelle, joka ei pyöri. Toisin sanoen kappaleen etenemislükkeen kuvaus onnistuu käyttäen jo aikaisemmin opittuja lükemäärään säilymislakia ja dynamiikan peruslakia. Kappaleen pyörimisen kuvaaminen puolestaan tapahtuu *täsmälleen samalla tavalla* riippumatta siitä, liikkuuko kappaleen massakeskipiste vai ei. Niinpä koska osaamme jo kuvata kappaleen suoraviivaisen liikkeen, jos vielä ymmärrämme kuinka paikoillaan olevan kappaleen pyöriminen tapahtuu, pystymme kuvamaan kappaleen *minkä tahansa* lükkeen näiden kahden yhdistelmänä.



5.11 Kuvan 5.9 vasaran merkity piste on etäisyydellä 20 cm massakeskipisteestä. Jos vasaran massakeskipiste liikkuu tasaisella nopeudella 2.0 m/s ja sen kulmanopeus on 6.5 s^{-1} , mikä on merkityn pisteen suurin ja pienin nopeus?

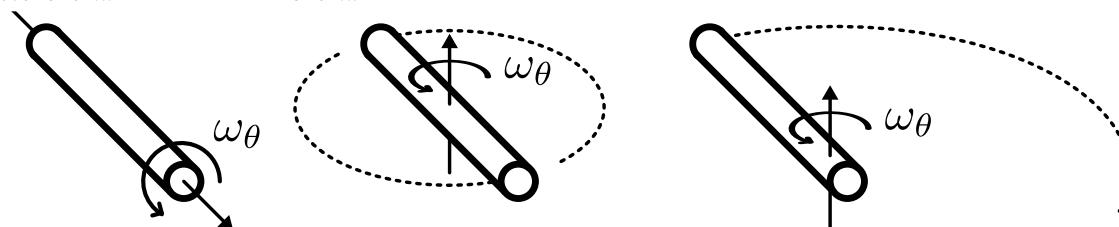
Hitausmomentti ja pyörimisen liike-energia

Suoraviivaisen liikkeen laeissa kuten lükemäärään säilymislaisissa ja dynamiikan peruslaissa esiintyy kaikissa kappaleen *inertiaa* kuvava massa, joka kertoo kuinka vaikea kappaleen etenemislükettä on muuttaa. Myös pyörimislükkeeseen liittyy inertia, joka kertoo kuinka helppoja kappaleen pyörimislukettä on muuttaa. Tätä pyörimisen inertian kutsutaan **hitausmomentiksi**.

Hitausmomentti riippuu massasta, sillä aivan kuten massiivisia kappaleita on raskas työntää liikkeelle, niitä on myös raskas pyörittää. Hitausmomentti riippuu kuitenkin myös kappaleiden *muodosta*, minkä huomaa

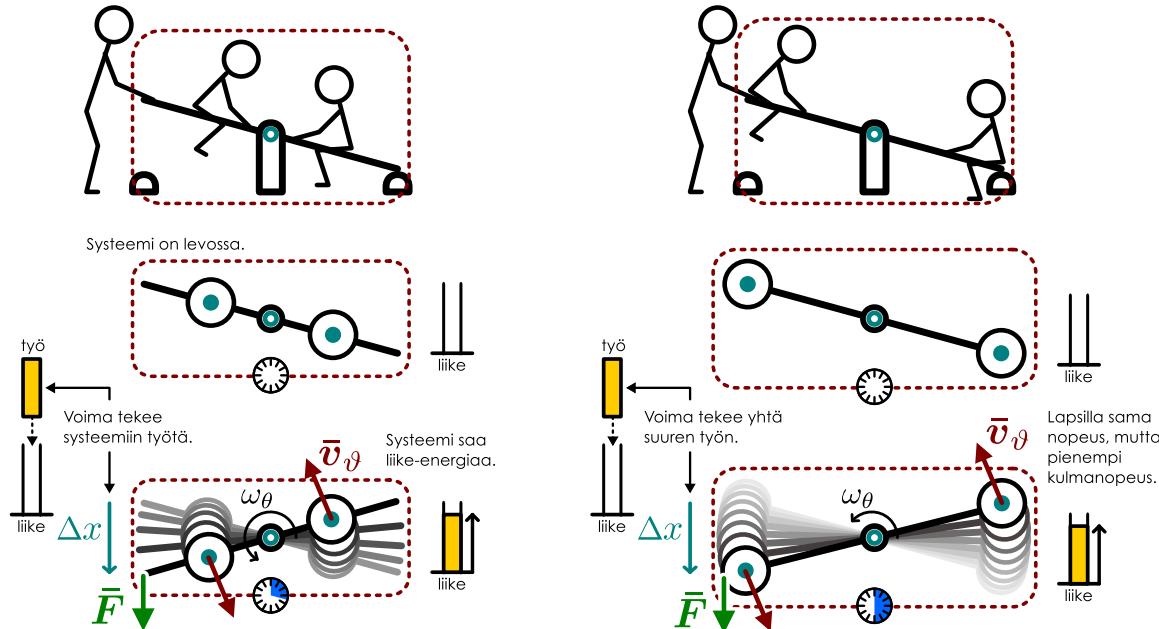
Kuva 5.10: Jäykän sauvan hitausmomentti riippuu akselistä, jonka suhteeseen se määritetään.

- (a) Akseli sauva pitkin: pieni hitausmomentti.
 (b) Akseli sauvan keskellä: suuri hitausmomentti.
 (c) Akseli sauvan päässä: hyvin suuri hitausmomentti.



Kuva 5.11: Keinulauta työnnetään vauhtiin, jolloin voiman tekemä työ lisää systeemin liike-energiaa. Voiman tehessä yhtä suuren työn laudalla istuvat lapset saavat yhtä suuret nopeudet.

(a) Lasten istuessa lähellä akselia lauta käännyy nopeasti. (b) Lasten istuessa kaukana akselistä lauta käännyy hitaasti.



helposti pyörittämällä kahta yhtä massiivista mutta eri muotoista esinettä. Esimerkiksi pieni pallo on helppo saada pyörimään, mutta yhtä raskaan sauvan saaminen pyörimään on vaikeampaa.

Lisäksi hitausmomentti riippuu siitä, minkä akselin ympäri kappale pyörii. Esimerkiksi ohutta sauvaa on helppo pyörittää sen pituusakselin ympäri (kuva 5.10 (a)), mutta sauvan pyörittäminen tähän nähdien kohitusoraan suuntaan on vaikeampaa (kuva 5.10 (b)). Ja sauvan pyörittäminen sen päästä on (kuva 5.10 (c)) on vielä vaikeampaa kuin sauvan pyörittäminen sen keskipisteen ympäri. Yleisesti kappaleen pyörittäminen on vaikeaa eli hitausmomentti on suuri, jos pyörivän kappaleen osat ovat kaukana pyörimisakselista, koska tällöin nämä osat joutuvat kiertämään pyörimisakselia suurella nopeudella.

Tarkastellaan tämän ymmärtämiseksi kuvassa 5.11 esitettyä systeemiä, jossa kaksi lasta istuu hyvin kevyelle keinulaudalla. Keinulauta työnnetään liukkeelle toisesta päästään, jolloin laudan ja lasten muodostaman systeemin energia lisääntyy systeemiin tehdyn työn verran. Lapset ovat yhtä suuret ja istuvat yhtä kaukana akselista, jojen toisen lapsen nostessa toinen laskeutuu yhtä paljon ja kaikkiaan systeemin potentiaalienergia on vakio. Jos lisäksi lautan vaikuttavat dissipatiiviset voimat ovat heikot (akseli on hyvin rasvattu), mekaanista energiota ei katoa ja kaikki systeemiin tehty työ lisää systeemin liike-energiaa. Lauta siis alkaa käantyä ja lapset liikkuvat kiertyvällä vauhdilla.

Työnnetään keinulauta ensin liukkeelle niin, että lapset istuvat lähellä akselia. Toistetaan koe sitten niin, että lapset istuvat laudan päässä kaukana akselista. Molemmissa tapauksissa lautaa työnnetään samalla volla. Tällöin huomataan, että lauta käännyy huomattavasti *nopeammin* lasten istuessa *läheellä* akselia verrattuna tapaukseen, jossa lapset ovat kaukana akselista. Tämä tarkoittaa sitä, että pyörimislukkien muutosta vastustava *inertia* eli hitausmomentti on pienempi lasten istuessa lähellä akselia.

Tämä voidaan ymmärtää yksinkertaisesti energian säilymislain perusteella. Jos lauta on kevyt, systeemin liike-energia on ympyräradalla liikkuvien lasten liike-energiaa. Lisäksi jos kummassakin tilanteessa lautaa työnnetään samalla voimalla yhtä pitkä matka, systeemiin tehty työ on molemissa tapauksissa *sama*. Niinpä systeemin saama liike-energia on molemissa tapauksissa *sama* ja siten lasten *nopeuksien* on oltava kummassakin tapauksessa *samat*. Koska lapset kuitenkin istuvat eri etäisyyksillä laudan pyörimisakselista, laudan *kulmanopeus* ei ole sama.

Vivun kulmanopeuden $\omega_\theta = v_\theta/r$, lasten massojen m sekä lasten akselista mitatun etäisyyden r avulla ilmaistuna systeemin liike-energia on lasten liike-energoiden summa

$$K_{\text{rotaatio}} = 2 \left(\frac{1}{2} m v_\theta^2 \right). \quad (5.34)$$

Merkitsemällä lasten kokonaismassaa $M = 2m$ liike-energia voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} M r^2 \omega_\theta^2 \quad (5.35)$$

eli *kulmanopeuden* neliön avulla. Tällöin kuitenkin lüke-energian lausekkeessa esiintyy lasten massan lisäksi heidän istumapaikkojensa *pyörimisakselista mitatun etäisyyden neliö*. Määritellään nyt *r*-säteisellä *ympyräradalla lükkuvan massan hitausmomentiksi*

$$I_\theta = Mr^2. \quad (5.36)$$

Hitausmomentti riippuu akselista, jonka suhteen se mitataan, ja tässä alaindeksi θ onkin muistuttamassa siitä, että käytössä on sama akseli jonka suhteen myös kulma θ määriteltiin. Nyt kulmanopeuden avulla lausuttu lüke-energia saa muodon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2. \quad (5.37)$$

Tämä lauseke on täsmälleen samanlainen kuin suoravivaisen lükkeen lüke-energian lauseke, kun nopeus korvataan kulmanopeudella ja inertia hitausmomentilla.



5.12 Kateen identtiseen palloon on kumpaankin kiinnitetty hyvin kevyt lanka. Langoista pidempi on pituudeltaan kaksinkertainen lyhyempään nähdien. Palloja pyöritetään langan päästää kiinni pitäen niin, että kummallakin pallolla on sama vauhti, joka on likimain vakio. Kummalla pallolla on suurempi (a) hitausmomentti radan keskipisteen suhteen, (b) kulmanopeus, (c) lüke-energia?

Yleensä kappaleen massa ei ole keskittynyt vain yhteen pisteeeseen kuten edellisessä esimerkissä oletettiin, vaan massa on jakautunut koko kappaleeseen. Tarkasteltaessa kappaletta hiukkasten joukkona kokonaismassaa saadaan yhtälön (2.85) mukaisesti laskemalla kaikkien hiukkasten massat yhteen, koska massa on *ekstensiivinen suure*. Makroskooppisten kappaleiden hiukkasia ei tavallisesti voi havaita, ja siksi onkin usein kätevä ajatella kappaleiden koostuvan *jatkuvasta aineesta*. Tällöinkin kuitenkin voidaan kappale ajatella jaetuksi pieniin osiin, jolloin kappaleen kokonaismassaa saadaan laskemalla näiden osien massat yhteen. Osoittautuu, että myös hitausmomentti on *ekstensiivinen suure*, joten suuren kappaleen hitausmomenttikin voidaan laskea jakamalla kappale osiin, määrittämällä kunkin osan hitausmomentti (aina saman akselin suhteen) ja laskemalla nämä hitausmomentit yhteen.

Makroskooppisessä mittakaavassa massan jakautumista kuvaavat *intensiivinen suure tiheys*, joka kertoo paljonko massaa kappale sisältää tilavuusyksikköö kohden. Jos massa on tasaisesti jakautunut, kappaleen tiheys on vakio: massan ja tilavuuden suhde

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (5.38)$$

Jos massa on jakautunut epätasaisesti, tiheys ei ole vakio vaan riippuu paikasta. Tällöin tiheys missä tahansa pisteesä \vec{r} voidaan määritellä tarkastelemalla infinitesimaalisen pientä tilavuutta dV tämän pisteen ympärillä. Koska tilavuus on pistemäinen, tiheyttä voidaan pitää siinä vakiona. Jos tilavuus sisältää massan dm , tiheyden arvo tässä pisteesä on jälleen massan ja tilavuuden suhde

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (5.39)$$

Vastaavasti jos kappaleen tiheys tunnetaan, voidaan tilavuuden dV massa kirjoittaa muodossa

$$dm = \rho dV. \quad (5.40)$$

Kappaleen kokonaismassaa saadaan tällöin jakamalla koko kappale pieniin osiin kuvassa 5.12 (b) kuvattuun tapaan, laskemalla näiden osien massat sekä summaamalla massat yhteen. Infinitesimaalien massojen tapauksessa summaaminen tapahtuu integroimalla

$$m = \int dm = \int_V \rho dV. \quad (5.41)$$

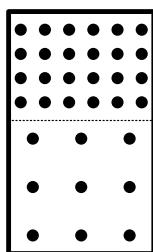


5.13 Eräs sauva koostuu kolmesta osasta, joiden tiheydet ovat järjestyksessä 800 kg/m^3 , 1000 kg/m^3 ja 1300 kg/m^3 ja pituudet 5.0 cm , 15.0 cm ja 10.0 cm . Sauvan poikkileikkaksen pinta-ala on 1.0 cm^2 . Mikä on sauvan massa?

Edellisessä tarkastelussa differentiaalin symbolia d käytettiin merkitsemään infinitesimaalisen pientä tilavuutta ja massaa. Tämän merkinnän tulkinta tässä tapauksessa on se, että kappale ajatellaan jaettavan osiin ja näiden osien koon annetaan lähestyä nollaa. Kyseessä ei siis ole tässä tapauksessa kappaleen tilavuuden tai massan *muutos*, kuten esimerkiksi merkinnässä $v_x = dx/dt$, sillä kappaleen koko ei muudu ajan kuluessa mihinkään. Ero merkinnän fysiikalisessa tulkinnassa johtuu siitä, että massa ja tilavuus ovat kappaleen *ekstensiivisiä* ominaisuuksia, jotka voidaan jakaa osiin, ja on mielekästä puhua pienien tilavuuden sisältämästä pienestä massasta. Paikka ja aika eivät ole ekstensiivisiä suureita, joten niiden tapauksessa differentiaali

Kuva 5.12: Kappaleen massa ja hitausmomentti voidaan määrittää kappaleen tiheyden avulla. Tällöin ajatellaan kappale jaettuksi pieniin osiin, joiden massa ja hitausmomentti voidaan laskea. Koko kappaleen massa ja hitausmomentti saadaan näiden summana.

(a) Hiukkasta koostuva kappale.

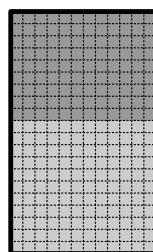


Paljon massaa
pienessä
tilavuudessa: suuri tiheys.

Vähän massaa
suuressa
tilavuudessa: pieni tiheys.

Kokonaismassa saadaan laskemalla
hiukkasten massat yhteen.

(b) Jatkuvasta aineesta koostuva kappale.

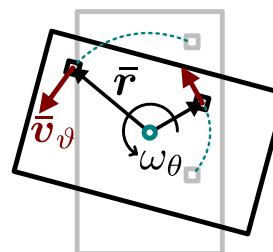


Suuri tiheys:
tilavuusyksikössä
paljon massaa.

Pieni tiheys:
tilavuusyksikössä
vähän massaa.

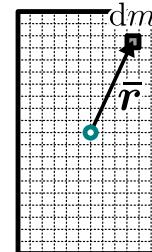
Kokonaismassa saadaan laskemalla
osien massat yhteen.

(c) Pyörivä kappale.



Kappaleen pyöriessä sen kokin
osa on ympyräliikkeessä.

(d) Kappaleen hitausmomentti.



Jaetaan kappale
pienii osiin dv,
joiden massat
ovat dm.

Kunkin osan
hitausmomentti
on $dl = r^2 dm$.

Hitausmomentti on osien
hitausmomenttien summa.

merkitsee suureen hyvin pientä muutosta. Kummassakin tapauksessa differentiaalimerkintä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että kyseinen suure on infinitesimaalisen pieni eli matemaattisesti laskussa otetaan raja-arvo suureen lähestyessä nolla.

Samantyyppisellä päättelyllä voidaan määrittää kappaleen hitausmomentti. Jos kappale pyörii paikoillaan pysyväni pyörimisakselin ympäri, sen hiukkaset liikkuvat eri nopeuksilla, mutta jokainen hiukkanen kiertää akselia *samalla kulmanopeudella* (kuva 5.12 (c)). Tällöin koko kappaleen pyörimiseen liittyvä liike-energia voidaan määrittää laskemalla kaikkien hiukkasten liike-energiat yhteen. Jos jätämme nyt hiukkasten satunnaisen liikkeen huomioimatta ja oletamme niiden todellakin pelkästään kiertävän akselia, kappaleen kokonaisliike-energia on

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}m_1v_{\theta,1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{\theta,2}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\theta,i}^2 \quad (5.42)$$

Kappaleen eri osat kuitenkin liikkuvat *eri nopeuksilla*, joten nopeus $v_{\theta,i}$ on hiukkisen akselista mitatun etäisyyden r_i funktio eikä vakio. Niinpä kappaleen liike-energiaa ei voi ilmaista sen hiukkasten nopeuksien avulla täta yksinkertaisemmassa muodossa. Kappaleen kaikki osat liikkuvat kuitenkin *samalla kulmanopeudella* $\omega_\theta = v_{\theta,i}/r_i$, joten tämä voidaan sijoittaa liike-energian lausekkeeseen ja ottaa summassa yhtiseksi tekijäksi

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}m_1\omega_\theta^2 r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_\theta^2 r_2^2 + \dots = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega_\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_\theta^2. \quad (5.43)$$

Määrittelemällä jälleen kappaleen hitausmomentti

$$I_\theta = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2, \quad (5.44)$$

myös pyörivän kappaleen pyörimisen liike-energia voidaan kirjoittaa muodossa $K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2$. Toisin sanoen kappaleen hitausmomentti pyörimisakselin suhteeseen saadaan *laskemalla yhteen sen jokaisen hiukkisen hitausmomentti* (tämän saman akselin suhteeseen mitattuna). Hitausmomentti on siis *ekstensiivinen* suure kuten massakin.

Huomaa erityisesti, että yhtälö (5.36), $I = mr^2$, pätee ainoastaan kappaleille, joiden *kaikki* massa on keskittynyt etäisyydelle r pyörimisakselista. Jos näin ei ole, kyseistä sääntöä ei voi käyttää kappaleen hitausmomentin laskemiseksi. Sääntö pätee kuitenkin kappaleen jokaiselle hiukkaselle erikseen, ja koko kappaleen hitausmomentti saadaan laskemalla hiukkasten hitausmomentit yhteen.



5.14 Käsipainossa on melko kevyt varsi ja sen kummassakin päässä on raskas massa. Jos painoa pyöritetään sen varteen nähdyn kohtisuoran akselin ympäri, onko tämä helpompaa akselin kulkiessa painon keskipisteen vai toisen pään kautta? Mikä on näiden akseleiden suhteeseen laskettujen hitausmomenttien suhde?

Makroskooppisessa mittakaavassa hitausmomentti voidaan määrittää samalla periaatteella, mutta nyt kappaleita ei kannata ajatella jaetuksi hiukkasiin vaan pieniin osiin, joiden tilavuus on dV ja massa dm . Laskemalla näiden osien liike-energiat $dK = \frac{1}{2}(dm)v^2$ yhteen päädytään integraaliin

$$K_{\text{rotaatio}} = \int \frac{1}{2}v_\theta^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v_\theta^2 dV. \quad (5.45)$$

Siirtymällä jälleen käyttämään kulmanopeutta tämä saa muodon

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} \omega_\theta^2 \int_V \rho r^2 dV \quad (5.46)$$

ja integroitavaksi jäävät vain kappaleen materiaalista ja muodosta riippuvat suureet. Lopputuloksena saadaan siis jälleen sama pyörimisen liike-energian lauseke $K = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2$ kuin yhtälössä (5.37), kun kappaleen hitausmomentiksi määritellään

$$I_\theta = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV. \quad (5.47)$$

Hitausmomentti on siis muuten samanlainen tiheyden integraali kuin kappaleen kokonaismassa (5.41) paitsi että hitausmomenttia määritettäessä tiheytä täytyy painottaa sen pyörimisakselista mitattu etäisyys neljällä.

Edellisissä tarkasteluissa osoitettiin, että kappaleen pyörimisen liike-energia voidaan *aina* esittää hitausmomentin ja kulmanopeuden avulla yhtälön (5.37) mukaisesti, olipa kyseessä pyörimis- tai ympyräliike. Lisäksi koska etenevä ja pyörivä liike voidaan erottaa toisistaan, myös kappaleen *liike-energia voidaan erotella* etenevän ja pyörivän liikkeen osuuksien

$$K = K_{\text{cm}} + K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2. \quad (5.48)$$

Tämä pätee jos kappale lükkuu ja pyörii samalla massakeskipisteensä ympäri, jolloin myös hitausmomenttina täytyy käyttää juuri massakeskipisteen suhteen laskettua hitausmomenttia. Jos kappale pyörii jonkin toisen, künneän akselin ympäri, sen pyörimisen energia voidaan laskea yksinkertaisesti käyttämällä tämän akselin suhteen määritettyä hitausmomenttia, joka on siis aina *suurempi* kuin massakeskipisteen suhteen laskettu hitausmomentti. Tällöin massakeskipisteen liikkeen energiasta ei kuitenkaan pidä laskea enää erikseen mukaan, koska se huomioidaan jo pyörimislükkeen energiassa suuremman hitausmomentin kautta.



5.15 Oven massa on 30 kg, leveys 1.0 m, hitausmomentti saranoiden suhteen 10.0 kgm^2 ja hitausmomentti massakeskipisteen suhteen 2.5 kgm^2 . Ovi sulkeutuu tasaisella kulmanopeudella niin, että se käantyy neljänneskierroksen kahdessa sekunnissa. Mikä on (a) oven massakeskipisteen liike-energia, (b) pyörimisen liike-energia massakeskipisteen ympäri, (c) pyörimisen liike-energia saranoiden ympäri?

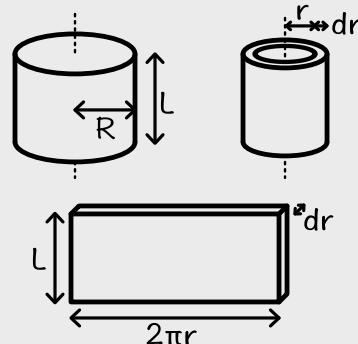
esimerkki 5.2

Hitausmomentti

Laske homogenisen (tiheys vakio) sylinterin hitausmomentti sen keskiakselin suhteeseen. Ilmaise tulos sylinterin kokonaismassan m , korkeuden L ja säteen R avulla.

TIANNE Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään akselista mitattua etäisyyttä r .

SUUNNITELMA Kappaleen jokaisen pisteen hitausmomentti riippuu pisteen massasta ja sen akselista mitattusta etäisyydestä. Sylinteri voidaan ajatella jaetuksi ohuisiin, dr -paksuisiin kuorisiin, jolloin kunkin kuoren kaikki hiukkaset ovat yhtä kaukana akselista. Niinpä tällaisen kuoren hitausmomentti saadaan kertomalla keskenään kuoren massa ja sen akselista mitattun etäisyyden neljö. Koko sylinterin hitausmomentti saadaan laskemalla kuoren hitausmomentit yhteen.



Yhden r -säteisen kuoren pinta-ala on sen korkeuden L ja ympärysmitan $2\pi r$ tulo, $A = 2\pi rL$. Kuoren tilavuus voidaan arvioida sen pinta-alan A ja tästä vastaan kohtisuoran korkeuden dr tulona,

$$dV = 2\pi r L dr. \quad (5.49)$$

Tämä tilavuus voidaan laskea myös r -säteisen sylinterin tilavuuden $V = \pi r^2 L$ kautta, sillä tilavuuden derivaatta säteen suhteeseen on $\frac{dV}{dr} = 2\pi rL$ eli tilavuuden muutos säteen kasvaessa infinitesimaalisen määren dr on $dV = 2\pi rL dr$.

Kuoren massa on verrannollinen sylinterin tiheyteen. Koska tiheys on tässä vakio, se on yksinkertaisesti sylinterin kokonaismassan ja kokonaistilavuuden suhde $\rho = m/V = m/(\pi R^2 L)$. Ohuen kuoren massa on siten $dm = \rho dV = \frac{2mr^3}{R^2} dr$.

Kuoren hitausmomentti on näin ollen $dI_\theta = r^2 dm = \frac{2mr^3}{R^2} dr$. Ja koko sylinterin hitausmomentti saadaan laskemalla yhteen kaikkien kuoren hitausmomentit

$$I_\theta = \int dI_\theta = \int_0^R \frac{2mr^3}{R^2} dr. \quad (5.50)$$

RATKAISU Hitausmomentiksi saadaan

$$I_\theta = \int_0^R \frac{2mr^4}{4R^2} = \frac{1}{2}mR^2. \quad (5.51)$$

Mathematica:

```
(* sylinterin tilavuus ja tiheys *)
V[r_] := Pi r^2 l; rho = m / V[R]; dVperdr = D[V[r], r]
2 l Pi r
```

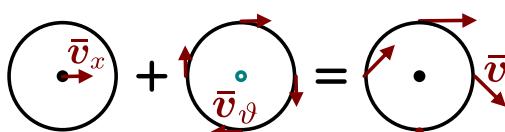
```
(* hitausmomentti *)
i = Integrate[rho r^2 dVperdr, {r, 0, R}]
m R^2 / 2
```

ARVIOINTI Hitausmomentti on verrannollinen kappaleen massaan ja sen säteen neliöön kuten pitääkin. Tekijä $1/2$ seuraa kappaleen muodosta, eikä sitä voi helposti päättää laskematta integraalia.

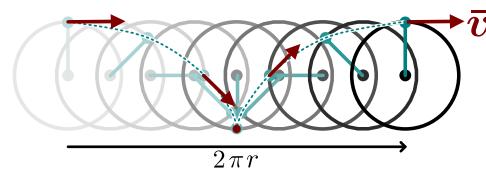
Vieriminen

Kuva 5.13: Vierivän kappaleen liike.

(a) Kehän pisteen nopeudet.



(b) Kehän pisteen liikerata.



nopeudella. Esimerkiksi maata pitkin vierivän pallon täytyy liikkua niin, että sen maata koskettava piste on aina hetkellisesti paikoillaan. Tämä voi olla helpoin ymmärtää jakamalla pallon liike etenevään ja pyörivään osuuteen. Pallon massakeskipiste etenee nopeudella

Yleinen ja tärkeä erikoistapaus etenevän ja pyörivän liukien yhdistelmästä on **vieriminen** liukumatta. Lähes mikä tahansa pyöreä kappale nimittäin päätyy vierimään, jos sen annetaan liikkua vapaasti, ja esimerkiksi renkailla kulkevien ajoneuvojen liikkuminen perustuu renkaiden vierimiseen. Vierimisen *liukumattomuus* tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että pinnalla vierivän kappaleen pintaan koskettavat osat *eivät liiku* pinnan suhteen. Kappaleet voivat vierää myös liukuen, mikä esimerkiksi renkaiden tapauksessa tarkoittaa sutimista tai lukkojarrutusta. Tällöin pinnat liukuvat toistensa suhteen ja niiden välillä vaikuttaa liukukitka. Kappaleiden vieressä liukumatta pinnat ovat paikoillaan toistensa suhteen ja niiden välillä vaikuttaa lepotkitka.

Jos pinnat ovat paikoillaan toistensa suhteen, niiden molempien täytyy joko olla paikoillaan tai liikkua samalla

$$\bar{v}_{cm} = v_x \hat{i}, \quad (5.52)$$

mutta samalla se pyörii niin että sen pinnan pisteen liikkuvat massakeskipisteen suhteen nopeudella

$$\bar{v}_{rotaatio} = -\omega_\theta r \hat{\vartheta}, \quad (5.53)$$

jos pallon säde on r . Kappaleen kunkin pisteen nopeus on näiden summa

$$\bar{v} = \bar{v}_{cm} + \bar{v}_{rotaatio}. \quad (5.54)$$

Erityisesti maata koskettavan pisteen pyörimisnopeus on $\bar{v}_{rotaatio} = -\omega_\theta r \hat{\vartheta}$, joten pistekin on paikoillaan jos

$$\bar{v} = (v_x - \omega_\theta r) \hat{i} = \bar{0}. \quad (5.55)$$

Näin on jos pallon nopeuden ja kulmanopeuden välillä pätee **vierimisehdo**

$$v_x = \omega_\theta r. \quad (5.56)$$

Lisäksi koska tämän täytyy päteä aina, nopeuden ja kulmanopeuden täytyy muuttua yhtä nopeasti, ja kiihtyvyksille pätee vastaava ehto

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\omega_\theta}{dt} r = \alpha_\theta r. \quad (5.57)$$



5.16 Liukuhihna kulkee nopeudella 1 m/s lattian suhteen ja sen päällä vierii liukumatta pallo nopeudella 1 m/s lattian suhteen pääinvastaiseen suuntaan. Pallon säde on 10 cm. Mikä on pallon kulmanopeus?

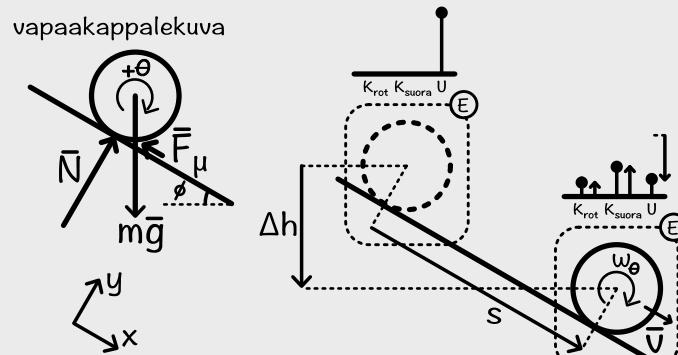
esimerkki 5.3

Vieriminen

Pallo (massa m ja säde R) lähee vierimään liukumatta alas rinnettä, jonka kaltevuuskulma on ϕ . (a) Kuinka suuri kitkavoima palloon vaikuttaa? (b) Mikä on pallon nopeus, kun se on kulkenut tasoa pitkin matkan s ?

TILANNE Piirretään pallolle vapaakkappalekuva ja energiadiagrammi. Valitaan systeemiksi pallo ja painovoimakenttä.

SUUNNITELMA Palloon vaikuttaa painovoima sekä kosketus- ja kitkavoima sen kosketuspisteessä tason kanssa. Kitka on lepokitkaa, sillä pallo ei liu'u. Palloon kohdistuvat voimat voidaan jakaa pinnan suuntaisiin (x) ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin (y). Koska pallo liikkuu pinnan suunnassa, palloon kohdistuvan kokonaivoiman on oltava y -suunnassa nolla. Kokonaivoiman x -komponentti kiidhyttää pallon liikkeseen. Koska pallo ei liu'u, sillä on oltava kulmakihtyyvys, joka saa pallon pyörimään. Tämän kulmakihtyyvyn tuottaa kitkavoiman momentti, sillä muiden voimien momentti pallon keskipisteen suhteeseen on nolla.



Voimat eivät kuitenkaan tee palloon työtä, sillä voimien vaikutuspiste ei liiku. Tämä voi vaikuttaa oudolta, sillä pallohan liikkuu alas tasoa, mutta koska pallo vierii, sen pinnan pistet saapuvat tasolle kohtisuorassa tasoon nähdyn (vertaa kuvaa 5.13) ja tasoon koskettavat pallon pistet ovat aina tason suhteeseen paikoillaan. Niinpä systeemin kokonaisenergia on vakio. Aluksi pallolla on potentiaalienergiaa, ja tämä muuttuu prosessissa pallon suoraviivaisen ja pyörivän liukkeen liike-energiaksi.

Palloon kohdistuvan kokonaivoiman x -komponentti on $F_{x,\text{kokonais}} = mg \sin \phi - F_\mu$. Palloon kohdistuva kokonaismomentti on puolestaan $\tau_\theta = RF_\mu$. Pallon etenevän liikkeen likeyhtälö dynamiikan peruslain mukaisesti on $F_{x,\text{kokonais}} = ma_x$ ja vastaavasti pyörimiselle $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$.

Pallon kulkissa matkan s se lasketaan matkan $\Delta h = -s \sin \phi$. Tällöin sen potentiaalienergian muutos on $\Delta U = mg\Delta h = -mgs \sin \phi$. Koska pallon vauhti kasvaa, sen liike-energia lisääntyy, $\Delta K = \Delta K_{\text{etenevä}} + \Delta K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2$. Energian säilymisestä seuraa $\Delta K = -\Delta U$.

Vierimisehdon mukaan pallon kulmanopeuden ja nopeuden välillä on yhteyks $v_x = \omega_\theta R$ ja samoin kulmakihtyyvyyden ja kihityvyyden välillä pätee $a_x = \alpha_\theta R$. Pallon hitausmomentti puolestaan on $I_\theta = \frac{2}{5}mR^2$, minkä voi laskea esimerkin 5.2 tapaan tai etsiä taulukosta.

RATKAISU (a) Likeyhtälöt voi yhdistää vierimisehdon avulla

$$RF_\mu = \tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta = \frac{2}{5}mR^2\alpha_\theta = \frac{2}{5}mRa_x = \frac{2}{5}RF_{x,\text{kokonais}} = \frac{2}{5}R(mg \sin \phi - F_\mu). \quad (5.58)$$

Tästä voidaan ratkaista kitkavoima

$$F_\mu = \frac{2}{7}mg \sin \phi. \quad (5.59)$$

(b) Liike-energian muutos on

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\frac{v_x^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_x^2. \quad (5.60)$$

Niinpä energian vakioisuudesta seuraa $\frac{7}{10}mv_x^2 = mgs \sin \phi$ eli pallon saama nopeus on

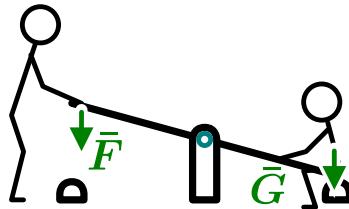
$$v_x = \sqrt{\frac{10}{7}gs \sin \phi}. \quad (5.61)$$

ARVIOINTI Huomaa, että ratkaisussa ei käytetty kitkakerointia vaan kitkavoiman suuruus määritetti vierimisehdosta. Tällöin oletettiin, että lepokitka voi olla kyllin suuri estämään pallon liukumisen. Jos näin ei ole, pallo alkaa liukua ja palloon vaikuttaa liukikitka.

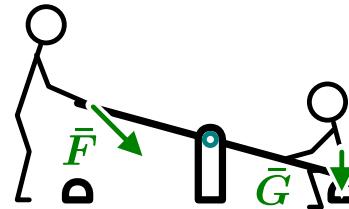
Helppojen erikoistapauksia ovat $\phi = 0$ (vaakasuora taso) ja $\phi = \pi/2$ (pystysuora taso). Kun taso on vaakasuora, pallon nopeus on $v_x = 0$ m/s, mikä on järkevä, koska pallon nopeuden ei kuuluaan muuttua sen vieressä vaakatasossa. Kun taso on pystysuora, pallon nopeus on $v_x = \sqrt{10gs/7}$. Tämä on vähemmän kuin vapaassa pudotuksessa, jossa $v_x = \sqrt{2gs}$. Näin pitää olla, koska nyt osa potentiaalienergiasta kuluu pallon pyörimisen liike-energiaksi, jolloin suoraviivaisen liukkeen liike-energian täytyy olla pienempi kuin vapaassa pudotuksessa, jossa kaikki potentiaalienergia muuttuu suoran liukkeen energiaksi.

Kuva 5.14: Voiman kyky käantää kappaletta riippuu voiman suuruudesta, suunnasta sekä vaikutuspisteestä. Kuvassa on esitetty kolme tapaa käantää keinulautaa yhtä nopeasti.

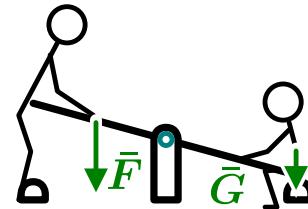
(a) Voima kaukana akselista.



(b) Viistoon kohti akselia osoittava voima.



(c) Voima lähellä akselia.



5.3 Momentti

Kappaleiden vuorovaikutuksia voidaan kuvata voiman, impulssin, työn tai potentiaalenergian avulla, ja näiden suureiden perusteella voidaan myös päätellä kuinka vuorovaikutukset vaikuttavat kappaleiden liikkeeseen. Vuorovaikutukset ovat vastuussa sekä kappaleiden etenevän että pyörivän liikkeen muutoksista, ja seuraavaksi tarkastelemme miten vuorovaikutusten tuottamat voimat vaikuttavat pyörimiseen. Pyörivien kappaleiden hiukkasethan ovat etenemisliikkeessä, jonka muutoksia voidaan kuvata voimien avulla, joten myös pyörimisen dynamiikka voidaan selittää tarkastelemalla hiukkasiin kohdistuvia voimia. Osoitetaan kuitenkin, että pyörimislükkeen tapauksessa kappaleiden dynamiikan kuvaus helpottuu, kun määrittelemme uuden suuren, **momentin**.

Nimitys momentti on hiukan huono, koska se viittaa mekaniikassa yleisesti pyörimiseen. Esimerkiksi hitausmomentti tarkoittaa pyörimisen hitautta eli inertiansa. Niinpä momenttia kutsutaankin joskus myös voiman momentiksi tai väentömomentiksi sekä annusten välttämiseksi. Kuitenkin pelkkä "momentti" viittaa aina juuri tähän vuorovaikutuksiin suureeseen, eikä sitä pidä sekoittaa muihin suureisiin, joiden nimessä sana momentti esiintyy.

Voiman momentti

Tarkastellaan jälleen keinulautaa, jolla istuu lapsi. Lapseen kohdistuu painovoima, joka pyrkii käantämään laudan ja lapsen muodostaman systeemin niin, että lapsi liikkuu kohti maata. Jos nyt lapsi halutaan nostaa ylös laudan toiselta puolelta työntämällä, nostaja huomaa tämän onnistuvan helpoiten laudan päästä lautaa vasten kohtisuoraan työntäen (kuva 5.14). Työntäminen lähetää akselia tai vinosti laudan suuntaan nähdyn vaatii huomattavasti suurempaa voimaa. Toisin sanoen voiman kappaletta käantävä vaiketus riippuu voiman suuruuden lisäksi voiman *suunnasta sekä paikasta, johon voima kohdistuu*.

Tämän kvalitatiivisen havainnon täsmäntäminen onnistuu jälleen tarkastelemalla systeemin energiata ja siihen tehtyä työtä. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi prosessia, jossa lauttaa työnetään voimalla \bar{F} niin, että lapsi nousee ylös ja lauta käantyy kulman $\Delta\theta$. Tällöin systeemin energia kasvaa määränpäin ΔE . Jos dissipatiiviset voimat ovat heikot, mekaanista energiota ei katoa, ja näin ollen systeemin mekaanisen energian muutoksen on oltava yhtä suuri kuin systeemiin tehty työ, $W = \Delta E$.

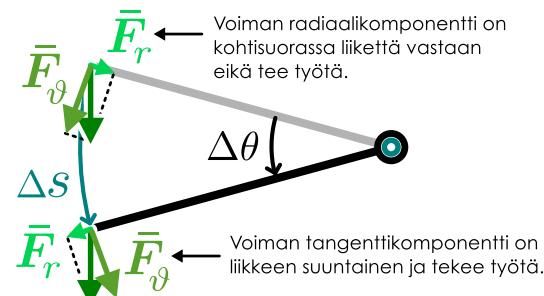
Lautaa käantävä voima kohdistuu laudan pisteenseen, joka on etäisyydellä r akselistä. Tämä piste kulkee laudan käentyessä ympyrän kaaren muotoisesta rataa ja tällöin *työtä tekee ainoastaan siirtymän suuntainen voiman komponentti* eli tässä tapauksessa voiman *tangenttikomponentti* (kuva 5.15). Jos voiman tangenttikomponentti on liikkeen aikana vakio, sen tekemä työ on yksinkertaisesti kuljetun matkan ja voiman liikkeen suuntaisen komponentin eli tangenttikomponentin tulo,

$$W = F_\vartheta \Delta s. \quad (5.62)$$

Yleisesti työ on voiman liikkeen suuntaisen komponentin integraali kuljetun matkan suhteeseen

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int F_\vartheta ds. \quad (5.63)$$

Kuva 5.15: Voiman radiaali- ja tangenttikomponentti.



Lisäksi koska voima vaikuttaa aina samalla etäisyydellä kappaleen pyörimisakselista, voiman vaikutuspiste siirtyy kappaleen käännyessä kulman $d\theta$ matkan

$$ds = rd\theta. \quad (5.64)$$

Jos tangenttikomponentti on vakio, tehty työ on siis

$$W = F_\vartheta r \Delta\theta \quad (5.65)$$

ja yleisesti

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} F_\vartheta r d\theta. \quad (5.66)$$

Tuloksesta nähdään, että laudan käännyessä lautan tehty työ riippuu siihen kohdistuvan *voiman tangenttikomponentista* sekä *voiman vaikutuspisteen etäisyydestä pyörimisakseliin*. Jos esimerkiksi lautaa halutaan käännyä lähempää akselia (eli r on pienempi), on käytettävä suurempaa voimaa, jotta laudan käännyessä yhtä suuren kulman saataisiin tehtyä yhtä suuri työ.

Tämä voiman tangenttikomponentin ja pyörimisakselista mitatun etäisyyden tulo on *voiman momentti akselin suhteen*

$$\tau_\theta = r F_\vartheta. \quad (5.67)$$

Edellä esitetyn perusteella *vakiomomentti* tekee kappaleen käännyessä työn

$$W = \tau_\theta \Delta\theta, \quad (5.68)$$

ja *muuttuvan momentin* tapauksessa työ on yhtälön (5.66) mukaisesti

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} \tau_\theta d\theta. \quad (5.69)$$

Huomaa, että näin saatu momentin työn lauseke on täsmälleen samanlainen kuin voiman työn lauseke yksiloteisen liukkeen tapauksessa, kun voiman skalaarikomponentti liukkeen suunnassa on korvattu momentilla ja siirtymä kiertokulmalla.

Edelleen jos momentin aiheuttaa *konservatiivinen vuorovaikutus*, sen tekemä työ on vastakkaismerkkinen vuorovaikutuksen potentiaalienergian muutoksen kanssa

$$-dU = dW = \tau_\theta d\theta, \quad (5.70)$$

ja momentti on siten yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin potentiaalienergian derivaatta *kulman suhteen*

$$\tau_\theta = -\frac{dU}{d\theta} \quad (5.71)$$

aivan kuten *voima* on potentiaalienergian derivaatta *paikan* suhteen. Konservatiivisen voiman momentti pyrkii siis aina käänämään kappaleita suuntaan, johon potentiaalienergia pienenee, aivan kuten voima osoittaa pieneneväni potentiaalienergian suuntaan.

Momentin yksikkö on

$$[\tau_\theta] = [r][F_\vartheta] = \text{Nm}, \quad (5.72)$$

mikä on periaatteessa sama kuin työn ja energian yksikkö, joule. Kuitenkin koska momentin luonne on täysin erilainen kuin työllä, momentin yksikköä ei koskaan kutsuta jouleksi, vaan se on "newtonmetri". Huomaa myös, että laskettaessa momentin tekemää työtä momentti kerrotaan kiertokulmalla $\Delta\theta$, jonka yksikkö on radiaani. Radiaani kuitenkin on vain kulman absoluuttiselle yksikölle annettu erikoisnimi, ja periaatteessa radiaani on

$$\text{rad} = \frac{[s]}{[r]} = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \quad (5.73)$$

eli kulma on *yksikötön suure*. Niiinpä momentin ja kiertokulman tulon yksikkö, $\text{Nm} \times \text{rad}$, on dimensioltaan edelleen "newton kertaa metri", mutta koska tämä suure on momentin tekemä työ, sitä kutsutaan jouleksi eikä "newtonmetrikksi".

Voiman akselia kohti osoittava komponentti ei tee työtä kappaleen käännyessä joten se ei voi myöskään vaikuttaa kappaleen pyörimiseen. Jos voimavektorin ja akselistä voiman vaikutuspisteesseen osoittavan paikkavektorin välinen kulma on ϕ (kuva 5.16), voiman skalaarikomponentti paikkavektoriin nähden *kohtisuorassa* suunnassa, $F_{\perp r}$, on

$$|F_\vartheta| = F \sin \phi = F_{\perp r}. \quad (5.74)$$

Toisaalta paikkavektorin voimaan nähdien kohtisuora skalaarikomponentti on

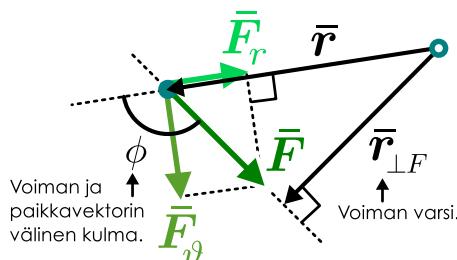
$$r_{\perp F} = r \sin \phi, \quad (5.75)$$

joten momentti voidaan kirjoittaa vaihtoehtoihin muotoihin

$$|\tau_\theta| = |rF_\theta| = rF \sin \phi = rF_{\perp r} = r_{\perp F} F. \quad (5.76)$$

Näitä vaihtoehtoisia esitystapoja käytettäessä on huomioitava, että momentilla on etumerkki. Jos momentti pyrkii käänämään kappaletta kulman θ kasvusuuntaan, momentti on positiivinen, ja päinvastaisessa tapauksessa negatiivinen. Paikkavektorin skalaarikomponenttia voimavektoria \bar{F} vastaan kohtisuorassa suunnassa, $r_{\perp F}$, kutsutaan *voiman varreksi* tai *vipuvarreksi*. Voiman momentti on siis sitä suurempi mitä pidempi on voiman varsi, ja siksi kappaleiden käänämisen onnistuu pienelläkin voimalla kunhan voima vaikuttaa tarpeeksi kaukaa ja se osoittaa pyörimissuuntaan eikä kohti akselia.

Kuva 5.16: Momentin voi laskea voiman varren avulla.



kulmamuuttujat pitääkin määrittää saman kiintopisteen suhteeseen!

Momentti määriteltiin yllä nimenomaan origon suhteeseen. Momenttia laskettaessa täytyy *aina* valita jokin kiintopiste, jonka suhteeseen voiman varsi tai voiman tangentisuunta määritellään. Kiintopisteen ei tarvitse olla koordinaatiston origossa, vaan sen voi valita vapaasti. Usein hyödyllisin valinta tälle kiintopistelle on joko kiinteä akseli, jonka ympäri kappale pyörii, tai kappaleen massakeskipiste, jos kappale liikkuu vapaasti. Kuitenkin kun kiintopiste on kerran valittu, *kaikkien voimien momentit pitää määrittää saman kiintopisteen suhteeseen*, koska eri akselien suhteeseen lasketut momentit eivät ole samat. Aivan samoin kappaleen *hitausmomentti* riippuu pisteestä, jonka suhteeseen se määritetään. *Kaikki*

- 5.17** Kappale on kiinnitetty kiinteään akseliin, joka on koordinaatiston origossa. Kappaleeseen kohdistuu voima $\bar{F} = (2.0 \text{ N})\hat{i} + (2.0 \text{ N})\hat{j}$, joka vaikuttaa pisteessä $\bar{r} = (-3.0 \text{ m})\hat{i}$. (a) Mikä on voiman suuruus? (b) Mikä on voiman vaikutuspisteen etäisyys origosta? (c) Mikä on voiman tangenttikomponentti? (d) Mikä on voiman varren pituus? (e) Mikä on voiman momentin suuruus? (f) Pyrkikö voima käänämään kappaletta myötä- vai vastapäivään?

Pyörimisen likeyhtälö

Momentti siis tekee kääntyvään kappaleeseen työtä aivan samoin kuin voima tekee työtä siirtymään kappaleeseen. Jos kappaleeseen kohdistuu vain yksi momentti, sen tekemän työn täytyy siirtää energiaksi kappaleen liikkeeseen eli toisin sanoen momentin täytyy pystyä muuttamaan kappaleen pyörimislukettä. Momentti siis vaikuttaa pyörimislukkeeseen aivan samoin kuin voima vaikuttaa etenevään liikkeeseen, ja erityisesti pyörimislukkeelle pitäisi päättää samantyyppinen laki kuin dynamiikan peruslaki, $F_x = ma_x$, kun voima, inertia ja kiihtyvyys korvataan vastaavilla kulmasuureilla: momentilla, hitausmomentilla sekä kulmakihtyvyydyllä. Seuraavaksi päätelemme, että näin todella on.

Kun kappaleeseen vaikuttaa useita voimia, ne kaikki kohdistavat kappaleeseen momentin ja *kokonaismomentti* on näiden summa

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = \tau_{\theta,1} + \tau_{\theta,2} + \dots = \sum_i \tau_{\theta,i}. \quad (5.77)$$

Kuten suoraviivaisenkin liukkeen tapauksessa kappaleeseen kohdistuvan kokonaivoiman tekemä työ muuttaa kappaleen suoraviivaisen liukkeen liike-energiaa, *kokonaismomentin tekemä työ muuttaa kappaleen pyörimislukkeen liike-energiaa*

$$\Delta K_{\text{rotaatio}} = W_{\text{kokonais}}. \quad (5.78)$$

Nämäkin momentin täytyy muuttaa kappaleen kulmanopeutta eli se *aiheuttaa kulmakihtyvyyden*.

Tarkastellaan ensin ympyräradalla kulkevaa hiukkasta. Ympyrärataa kulkevalla hiukkasella on aina keskeiskihtyvyyttä kohti radan keskipistettä, ja tämän kiihtyvyyden täytyy aiheuttaa hiukkaseen kohdistuvasta kohti radan keskustaa osoittavasta voiman radiaalikomponentista. Jos hiukkisen radan säde on r , siihen kohdistuvan kokonaivoiman $\bar{F}_{\text{kokonais}}$ radiaalikomponentin suuruus määrittyy yhtälön (5.26) perusteella, eikä tämä komponentti muuta hiukkisen vauhtia. (Tai toisin päin: hiukkaseen kohdistuvan voiman radiaalikomponentin suuruus määritää hiukkisen radan sääteen.) Kokonaivoiman tangenttikomponentti sen sijaan muuttaa yhtälön (5.25) mukaisesti hiukkisen vauhtia eli tuottaa hiukkaselle radan tangentin suuntaisen kiihtyvyyden

$$F_{\theta, \text{kokonais}} = ma_\theta = m\alpha_\theta r. \quad (5.79)$$

Koska kaikki yhteen hiukkaseen kohdistuvat voimat vaikuttavat samassa pisteessä yhtä kaukana pyörimisakselista, $r_i = r$, tämä yhtälö voidaan momentin avulla kirjoittaa muodossa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = r_1 F_{\theta,1} + r_2 F_{\theta,2} + \dots = r(F_{\theta,1} + F_{\theta,2} + \dots) = rF_{\theta,\text{kokonais}} = rma_{\theta} = mr^2\alpha_{\theta}. \quad (5.80)$$

Huomataan vielä, että $I_{\theta} = mr^2$ on hiukkasen hitausmomentti, joten voidaan kirjoittaa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}. \quad (5.81)$$

Tämä on **pyörimisen likeyhtälö**, kun **hitausmomentti on vakio**, ja tämäkin laki on täsmälleen samanlainen kuin vastaava suoraviivaisen liikkeen yhtälö $F_x = ma_x$, missä suureet on korvattu vastaavilla pyörimislukkeilla suureilla.

Edellisessä analyysissä tutkimme pistemäistä kappaletta, mutta sama tulos pätee myös suuremmille kappaleille, mikä nähdään tutkimalla momentin vaikutusta pyörivän kappaleen energiaan. Jos kappale nimittäin käänny pienen kulman $d\theta$, sen liike-energia muuttuu momentin tekemän työn vaikutuksesta määrään

$$dW_{\text{kokonais}} = \tau_{\theta,\text{kokonais}} d\theta = dK = \frac{1}{2} I_{\theta} d(\omega_{\theta}^2). \quad (5.82)$$

Edelleen jakamalla tämä kulman differentiaalilla saadaan ratkaistua momentti

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{1}{2} I_{\theta} \frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\theta}. \quad (5.83)$$

Käytämällä kulmanopeuden määritelmää ja derivoinnin ketjusääntöä (eli differentiaaleilla laventamista) nähdään lausekkeessa esiintyvä derivatan olevan verrannollinen kulmakiertyvyyteen

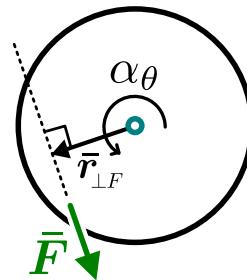
$$\frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\theta} = \frac{d(\omega_{\theta}^2)}{d\omega_{\theta}} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2\omega_{\theta} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\omega_{\theta}}{d\theta} = 2 \frac{d\omega_{\theta}}{dt} = 2\alpha_{\theta}. \quad (5.84)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (5.83) saadaan tuloksena jälleen $\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}$ eli likeyhtälö (5.81).

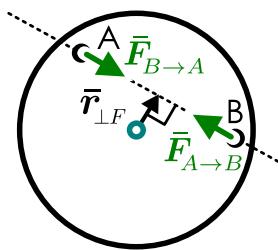
Pyörivän jäykän kappaleen tapauksessa kappaaleeseen kohdistuva kokonaismomentti voidaan määrittää laskemalla yhteen kaikkiin kappaaleen osiin kohdistuvat momentit. Kappaaleen sisäisten vuorovaikutusten voimien momentit eivät voi vaikuttaa kappaaleen pyörimiseen, sillä jos kaksi kappaaleen hiukkasta, A ja B, vuorovaikuttavat, niihin kohdistuu yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset voimat (kuva 5.18). Koska voimat ovat yhden-suuntaiset hiukkasten kautta kulkevan suoran kanssa, niillä täytyy olla yhtä suuret vipuvarret ja niinpä ne kohdistavat kappaaleeseen yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset momentit. Siispä näiden sisäisten vuorovaikutusten vaikutus kappaaleen pyörimiseen kumoutuu, ja *ainoastaan ulkoisten vuorovaikutusten momentit muuttavat kappaaleen kulmanopeutta*.

Yllä esitettyissä laskuissa oletettiin hitausmomentin I_{θ} olevan *vakio*, ja näin johdettu likeyhtälö pätee vain tässä erikoistapauksessa. Jäykkien kappaaleiden hitausmomentit toki ovat vakiot, mutta hitausmomentti voi kuitenkin helposti muuttua, jos pyörivä kappaale ei ole jäykki tai tarkastellaan *liikkuvista osista* koostuvaa pyörivää systeemiä. Esittemme kaikissa tilanteissa pätevän pyörimisen yleisen likeyhtälön luvun lopussa, kun tarkastelemme pyörimislukkeen esitystä kolmessa ulottuvuudessa.

Kuva 5.17: Momentti tuottaa kulmakiertyvyyden.



Kuva 5.18: Sisäisten voimien momentit kumoutuvat.



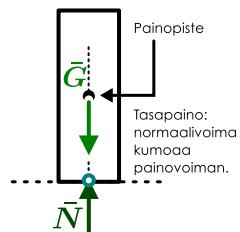
5.18 Keinulaudalla istuu kaksi lasta, joiden massat ovat 15 kg sekä 20 kg. (a) Millainen kokonaismomentti lautan kohdistuu, jos kumpikin istuu 1.0 m etäisyydellä laudan akselista? (b) Jos laudan hitausmomentti akselin suhteeseen on 8.0 kg m^2 ja kummankin lapsen jalat ovat irti maasta, mikä on laudan ja lasten muodostaman systeemin kulmakiertyvyys? (c) Miten lasten pitäisi istua, jotta kulmakiertyvyys olisi nolla?

Vapaakappalekuva ja tasapaino

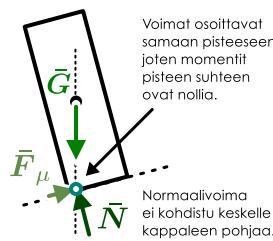
Vapaakappalekuvat piirretään pyöriville kappaleille samalla tavalla kuin voiman yhteydessä opittiin, mutta koska voiman momentti riippuu voiman vaikutuspisteestä, on pyörimisen analysoimiseksi voimat piirrettävä nün, että niiden vipuvarsi on oikean mittainen. Koska vipuvarsi riippuu ainoastaan voiman kohtisuorasta etäisyydestä pyörimisakseliin nähdien, ei ole väliä piirretäänkö voiman vaikutuspisteesseen voimaa kuvavan

Kuva 5.19: Tasapainossa sekä kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima että kokonaismomentti on nolla.

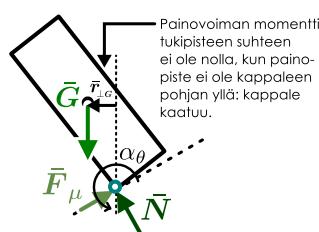
(a) Kappale on tasapainossa.



(b) Kaltevalla tasolla kappaletta tukeva normaalivoima kohdistuu pohjan reunaan.



(c) Kappale kaatuu jos painopiste siirtyy sivuun pohjan päältä.



nuolen kärki vai kanta, mutta voimanuolen on osoitettava oikeaan suuntaan ja nuolen on oltava oikealla etäisyysdellä pyörimisakselista.

Tietenkään voimat eivät todellisuudessa kohdistu vain yhteen pisteeeseen. Esimerkiksi painovoima vaikuttaa kappaleen *jokaiseen* hiukkaseen. Olemme kuitenkin aina piirtäneet kappaleeseen kohdistuvan painovoiman vapaakkappalekuviin *yhtenä massakeskipisteen vaikuttavana voimana*. Tämä on sallittua, koska tällainen voima vaikuttaa kappaleen etenemis- ja pyörimislükkeeseen täsmälle samoin kuin kappaleeseen todellisuudessa vaikuttava painovoima. Näin on, koska tämä kokonaivoima kohdistaa kappaleeseen yhtä suuren momentin *minkä tahansa pisteen suhteen* laskettuna kuin todellinen, kaikkiin hiukkasiin vaikuttava painovoima.

Todistetaan yllä esitetty väite. Jos kappale koostuu hiukkasia, joiden massat ovat m_i , kappaleeseen kohdistuu kokonaispainovoima

$$\bar{G} = \sum_i m_i \bar{g} = M \bar{g}. \quad (5.85)$$

Tämän voiman momentti saadaan laskemalla kaikkiin hiukkasiin kohdistuvien momenttien summa. Koska painovoima osoittaa aina alaspäin, sen voiman varsi on aina hiukkisen pyörimisakselista mitattu etäisyys vaakasuunnassa — merkitään tästä etäisyyttä tässä x -koordinaatilla. Siispä pistessä x_i olevaan hiukkaseen kohdistuvan painovoiman momentti on $\tau_i = x_i m_i g$, ja koko kappaleeseen kohdistuva momentti on

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = \sum_i m_i x_i g. \quad (5.86)$$

Kappaleen massakeskipisteen x -koordinaatti $x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$, joten kokonaismomentti on yhtä suuri kuin massakeskipisteen asetetun kokonaispainovoiman momentti

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = M \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \right) g = x_{\text{cm}} M g = x_{\text{cm}} G. \quad (5.87)$$

Niinpä tämän kokonaivoiman \bar{G} momentti on sama kuin kappaleeseen kohdistuvan todellisen painovoiman momentti, ja kokonaivoiman vaikutus kappaleen liikkeeseen on täsmälle sama kuin kappaleeseen todellisuudessa kohdistuvan voiman. Näin ollen voimme kuvata painovoimaa *yhtenä massakeskipisteen vaikuttavana voimana*, vaikka se todellisuudessa vaikuttaakin koko kappaleeseen.

Voimaa \bar{G} , jonka vaikutus on täsmälle sama kuin kappaleen kaikkiin hiukkasiin kohdistuvan painovoiman kutsutaan **resultanttivoimaksi** ja pistettä, johon tämä painovoimaa kuvava yksittäinen voima kohdistuu, kutsutaan **painopisteeksi**. Homogeenisessa painovoimakentässä painopiste on sama kuin massakeskipiste, kuten edellä johdettiin.

Edellä esitetty tekniikka, jossa kappaleen eri puolille kohdistuva vuorovaikutusta kuvataan yhdellä resultanttivoimalla, toimii usein myös muille vuorovaikutuksille, mutta tällöin resultanttivoiman vaikutuspiste ei välttämättä ole massakeskipiste. Esimerkiksi pintojen välinen normaalivoima kohdistuu kaikkiin pistesiin, joissa pinnat koskettavat, mutta sitäkin voidaan kuvata yhtenä resultanttivoimana, kunhan voiman suuruus, suunta ja vaikutuspiste valitaan niin että sekä sen kokonaivoima että -momentti ovat samat kuin todellisen vuorovaikutuksen tuottamat voima ja momentti.

5.19 Tuuli kohdistaa purjeeseen voiman. Kuitenkin koska tuulen nopeus kasvaa ylöspäin nostessa, voimakin on purjeen yläosissa suurempi kuin alaosissa. Oletetaan, että korkeudella z olevaan dz -korkuisen purjeen osaan kohdistuu voima $dF = az dz$, missä a on jokin vakio. Purje ulottuu korkeudelta $z = 0$ korkeudelle $z = L$. (a) Mikä on purjeeseen kohdistuva kokonaivoima? (b) Mikä on purjeeseen kohdistuva kokonaismomentti purjeen alaosan suhteen? (c) Mille korkeudelle resultanttivoima kohdistuu?

Vapaakkappalekuva on erityisen hyödyllinen työkalu tasapainossa olevien kappaleiden voimien analyysissä. Kappalehan on etenevän liikkeen suhteen tasapainossa, jos siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, koska tällöin sen nopeus ei muutu ja kappale on joko levossa tai liikkuu tasaisella nopeudella. Kappaleen pyörimisen huomioiminen antaa kuitenkin lisää mahdollisia tapoja liikkua: kappale voi olla etenevän liikkeen suhteen tasapainossa, jolloin sen massakeskipisteen liike on tasaista, mutta sen pyörimisliike massakeskipisteen ympäri voi muuttua. Jos kappaleeseen vaikuttaa nollasta poikkeava kokonaismomentti, kappaleen kulmanopeus muuttuu, ja tämä on mahdollista vaikka kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima olisi nolla eli vaikka kappale olisi etenevän liikkeen suhteen tasapainossa.

Niinpä onkin välttämätöntä määritellä myös **pyörimisen tasapaino**. Kappaleen sanotaan olevan pyörimisliikkeen suhteen tasapainossa, jos siihen kohdistuva *kokonaismomentti on nolla*

$$\tau_{\theta, \text{kokonais}} = 0. \quad (5.88)$$

Tällöin kappale joko ei pyöri lainkaan tai se pyörii *tasaisella kulmanopeudella*. Erityisesti jos kappale on täysin paikoillaan, se ei liiku eikä pyöri, ja tällöin sen on oltava samanaikaisesti tasapainossa sekä etenevän että pyörivän liikkeen suhteen. Kappale voi kuitenkin olla tasapainossa sekä etenevän että pyörivän liikkeen suhteen, jos se liikkuu ja pyörii tasaisella nopeudella ja kulmanopeudella. Esimerkiksi tasaisella nopeudella vierivä pallo on tasapainossa.

Tasapainoehojen avulla voidaan päättää levossa oleviin kappaleisiin kohdistuvien voimien suuruudet, koska mihin tahansa levossa olevaan kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman ja kokonaismomentin on oltava nolla. Tämä on tärkeää menetelmä esimerkiksi rakennustekniikassa, sillä sen avulla voidaan laskea mm. talojen rakenteisiin kohdistuvien voimien suuruuksia ja suunnitella tarvittavan kuormituksen kestäviä rakenteita.



5.20 Voiko kappale olla (i) tasapainossa etenevän mutta ei pyörivän liikkeen suhteen tai (ii) tasapainossa pyörivän mutta ei etenevän liikkeen suhteen, jos kappaleeseen kohdistuu (a) yksi voima, (b) kaksi samaan pisteeseeen kohdistuva voimaa, (c) kaksi eri pistesiin kohdistuva voimaa?

5.4 Kulmaliiikemäärä

Suoraviivaista liikettä kuvaavista suureista liike-energian ohella liikemäärä on tärkein, ja liikemäärään säilymlaki on fysiikan tärkeimpiä peruslajeja. Pyörimislukkettä kuvaavaa liikemäärää vastaava suure on **kulmaliiikemäärä**, jota kutsutaan myös pyörimismääräksi tai liikemäärämomentiksi. Liikemäärään säilyminen oli yhtäpitävä sen havainnon kanssa, että systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa koko systeemin etenemisliikettä vaan ainoastaan systeemin osien liikettä toistensa suhteen. Aivan vastaavasti *systeemin sisäiset vuorovaikutukset eivät voi muuttaa systeemin pyörimislukkettä kokonaisuutena* vaan ne voivat ainoastaan saada systeemin osat pyörimään toistensa suhteen. Tästä seuraa, että myös *kulmaliiikemäärä on säilyvä suure*, ja tämän vuoksi se onkin energian ja liikemäärään ohella fysiikan tärkeimpiä käsitteitä.

Kulmaliiikemääränsäilymlaki on fysiikan peruslajeja, mutta jäykkiin kappaleiden liikkeen tapauksessa se voidaan johtaa jo aiemmin käsitellyistä energian ja liikemääränsäilymläistä tai Newtonin laeista. Seuraavaksi tarkastelemmekin kuinka kulmaliiikemäärä määritellään ja millaisissa systeemeissä kulmaliiikemäärä on vakio.

Kappaleiden ja hiukkasten kulmaliiikemäärä

Ennen kuin voimme puhua kulmaliiikemääränsäilymisestä, meidän on sytytä määritellä kulmaliiikemäärä. Lähikohtana tähän voimme käyttää pyörimisen lükeyhtälöä (5.81), jonka mukaan kappaleeseen kohdistuva momentti on aiheuttaa kappaleen kulmakihtyydyden ja on yhtä suuri kuin hitausmomentin ja kulmakihtyydyden tulo. Tämä on täysin analoginen suoraviivasessa liukkeessa pätevän dynamikan peruslain kanssa, jonka mukaan voima on yhtä suuri kuin kappaleen inertian ja kiihtyvyden tulo tai tarkemmin *voima on sama kuin kappaleen liikemääränsä muutosnopeus*. Jotta kulmaliiikemäärä ja momentin yhteys olisi samanlainen kuin voiman ja liikemääränsä yhteys, *momentin pitäisi siis olla sama kuin kulmaliiikemääränsä muutosnopeus eli*

$$\tau_{\theta} = \frac{dL_{\theta}}{dt}, \quad (5.89)$$

missä L_{θ} on kulmaliiikemäärä saman akselin suhteen kuin minkä suhteen momentti on määritetty. Vertaamalla tästä jäljän kappaleen pyörimisen lükeyhtälöön näemme, että näin on jos *kulmaliiikemäärä määritellään kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden tulona*,

$$L_{\theta} = I_{\theta}\omega_{\theta}, \quad (5.90)$$

sillä tällöin jäykälle kappaleelle, jonka hitausmomentti on vakio, pätee

$$\tau_\theta = \frac{dL_\theta}{dt} = I_\theta \frac{d\omega_\theta}{dt} = I_\theta \alpha_\theta. \quad (5.91)$$

Tämäkin määritelmä on aivan analoginen liikemääränpäätelön määritelmän kanssa, kun suoran liukkeen suuret liikemäärä ja inertiaton nopeus ovat korvattu vastaavilla kulmasuureilla eli kulmaliike- ja kulmanopeudella.

Edellä esitetty määritelmä toimii aivan yhtä hyvin sekä pyöriville että ympyräliikkeessä oleville kappaleille, kun kulmaliike- ja kulmanopeudella määritetään pyörimisakselin tai liikeradan keskipisteen suhteeseen, sillä tällöin kappaleella on hyvin määritelty kulmanopeus ja hitausmomentti.



5.21 Kuu kiertää Maata niin, että siitä näkyy Maahan aina sama puoli. Toisin sanoen se pyörii oman akselinsa ympäri samalla kulmanopeudella kuin millä se kiertää Maata. Kumpaan liittyy suurempi kulmaliike- ja Maan keskipisteen suhteeseen — Kuun pyörimiseen vai sen kiertoliikkeeseen?

Tavallisesti kappaleet eivät kuitenkaan liiku ympyräradolla — esimerkiksi planeettojen radat ovat ellipeejä — joten on syytä määritellä kulmaliike- ja yleisesti *kaikestaan* etenevälle liukkeelle. Tarkastellaan esimerkinä tasaisessa liukkeessä olevaa hiukasta, joka liikkuu suoraan vektorinopeudella. Koska hiukanen on tasaisessa liukkeessä, voimme olettaa, ettei siihen kohdistu ulkoisia voimia, ja tällöin palloon kohdistuva kokonaismomentti on nolla. Tällöin myös hiukkasen kulmaliike- ja pitää olla *vakio*.

Voisi olla houkuttelevaa määritellä suoraan liikkuvan hiukkasen kulmaliike- ja nolla, mutta tämä ei toimi. Haluamme nimittäin määritellä kulmaliike- ja nolla, ettei kyseessä on säilyvä suure liikemäären tapaan. Kuitenkin jos suoraan liikkova kappale törmää toiseen, levossa olevaan kappaleeseen, on hyvin mahdollista, että toinen kappaleista tai ne kummatkin alkavat törmäyksen seurauksena pyöriä. Jos suoraan liikkuvan kappaleen kulmaliike- ja olisi nolla mutta pyörivän kappaleen kulmaliike- ja ei, kulmaliike- ja muuttuisi tällaisessa törmäyksessä eikä se siis voisi mitenkään olla säilyvä suure. Niinpä myös suoraan liikeseen täytyy liittyä kulmaliike- ja.

Suoraan kulkevan hiukkasen kulmaliike- ja määritelläänkin seuraavasti: *Jos hiukanen liikkuu vauhdilla v pitkin suoraa, joka ohittaa valitun pyörimisakselin lähimmillään etäisyystä $r_{\perp v}$, hiukkasen kulmaliike- ja on yhtä suuri kuin akselia $r_{\perp v}$ -säteisellä ympyräradalla kiertävän hiukkasen kulmaliike- ja* (kuva 5.20). Jos piirräme suoran, joka kulkee hiukkasen kautta ja on hiukkasen nopeusvektorin suuntainen, etäisyys $r_{\perp v}$ on tämän suoran etäisyys valitusta pyörimisakselistä.

Ympyräradalla hiukkasen hitausmomentti on $I_\theta = mr_{\perp v}^2$ ja kulmanopeus $\omega_\theta = v/r_{\perp v}$, joten tämä kulmaliike- ja on

$$|L_\theta| = |I_\theta \omega_\theta| = r_{\perp v} mv = r_{\perp v} p. \quad (5.92)$$

Liikkuvan hiukkasen kulmaliike- ja matemaattinen lauseke on hyvin samanlainen kuin momentin lauseke, sillä momentti voidaan laskea voiman F ja voiman varren $r_{\perp F}$ tulona, kun taas kulmaliike- ja lasketaan liikemäären p ja liikemäären "varren" $r_{\perp v}$ tulona. Lisäksi samoin kuin momentilla kulmaliike- ja on etumerkki: Kulmaliike- ja on positiivinen jos ja vain jos liike tapahtuu positiiviseen kiertosuuntaan.



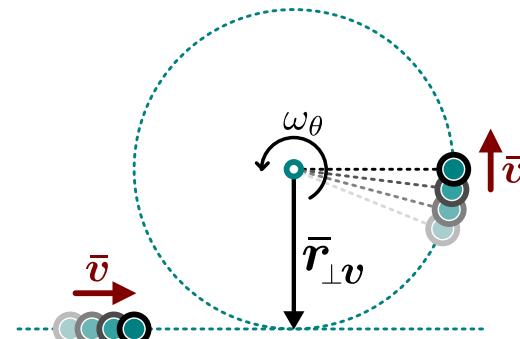
- 5.22** (a) Tasaisessa liukkeessä kulmaliike- ja pitää olla yhtälön (5.89) perusteella vakio. Osoita tämä.
 (b) Riippuuko suoraan kulkevan kappaleen kulmaliike- ja pyörimisakselin valinnasta?
 (c) Riippuuko ympyräradalla olevan kappaleen kulmaliike- ja pyörimisakselin valinnasta?
 (d) Riippuuko massakeskipisteen ympäri pyörivän kappaleen kulmaliike- ja pyörimisakselin valinnasta?

Kulmaliike- ja on ekstensiivinen suure, joten minkä tahansa kappaleen kulmaliike- ja on sen hiukkasten kulmaliike- ja summa. Lisäksi jäykien kappaleiden kulmaliike- ja voidaan määrittää laskemalla erikseen kappaleen massakeskipisteen rataliukkeen kulmaliike- ja kappaleen pyörimisen kulmaliike- ja massakeskipisteen ympäri. Tällöin kappaleen kokonaismkulmaliike- ja saadaan näiden summana,

$$L_\theta = L_{\theta,cm} + L_{\theta,rotaatio}, \quad (5.93)$$

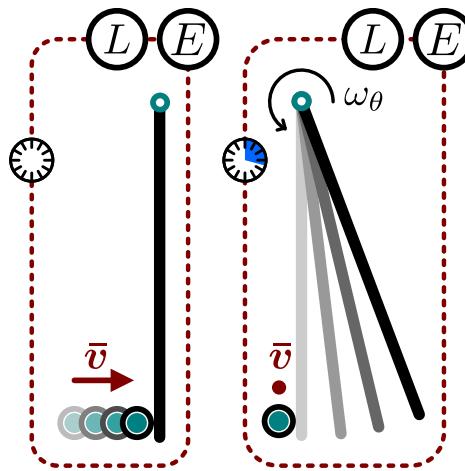
aivan samaan tapaan kuin kappaleen liike-energia voitiin laskea massakeskipisteen rataliukkeen energian ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvan pyörimisen liike-energian summana.

Kuva 5.20: Suora liike ja kiertoliike, joilla on sama kulmaliike- ja.

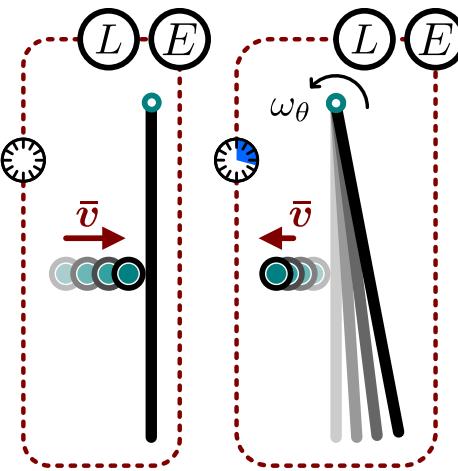


Kuva 5.21: Pallon törmäys toisesta päästään saranoituun tankoon. Törmäys on erilainen riippuen pallon osumakohdasta.

(a) Pallo törmää tangon päähän ja jää paikoilleen. Tanko saa suuren kulmanopeuden.



(b) Pallo törmää tangon keskelle ja kimpooa takaisin. Tanko saa pienien kulmanopeuden.



Kulmaliikemääärän säilymislaki

Tutkitaan sitten kulmaliikemääärän muutoksia törmäyksessä tarkastelemalla kuvassa 5.21 esitetttyä koetta, jossa suoraan etenevä pallo törmää levossa olevaan tankoon elastisesti. Kun pallon alkunopeus on kokeessa valittu sopivasti niin, että pallo jää paikoilleen ja toisesta päästään kiinteään akseliin kiinnitetty tanko alkaa pyöriä akselinsa ympäri pallon törmätessä tangon vapaaseen päähän.

Toistetaan koe sitten samalla pallolla ja tangolla niin, että pallolle annetaan sama alkunopeus mutta pallo osuukin nyt tangon keskelle. Tässä toisessa kokeessa saadaan *erilainen* tulos: pallo kimpaa takaisin ja tanko saa pienemmän kulmanopeuden kuin ensimmäisessä kokeessa. Toisin sanoen pallon osumakohdan etäisyys pyörimisakselistä vaikuttaa kappaleiden liukkeeseen törmäykseen jälkeen. Tämä johtuu siitä, että törmäyksessä sekä palloon että tankoon kohdistuu voima, ja tämä voima käänää tankoa sitä helpommin mitä kauempana akselista se vaikuttaa. Niinpä pallon osuessa tangon vapaaseen päähän tanko saa suuremman nopeuden kuin jos pallo osuu tangon keskelle. Kuitenkin aivan kuten liikkuvien kappaleiden törmäykset oli helpoin ymmärtää liikemääärän säilymislain avulla, tämäkin törmäys kannattaa analysoida voimien sijaan säilymislakien avulla.

Valitaan tarkasteltavaksi systeemiksi vain tanko ja pallo. Tanko on toisesta päästään kiinni akselissa (ei kuulu systeemiin), joka voi kohdistaa systeemiin törmäyksen aikana varsin suuren voiman. Kuitenkin koska tangon akselissa kiinni oleva pää ei liiku, tämä voima ei tee tangon ja pallon muodostamaan systeemiin työtä. Niinpä systeemin *kokonaisenergia* on törmäyksessä vakio. Lisäksi koska törmäys on elastinen, energiasta ei muutu epäjärjestyneisiin muotoihin ja systeemin *mekaaninen energia* on vakio. Toisaalta koska akseli kohdistaa systeemiin ulkoisen voiman, systeemin *kokonaislukumääärä ei ole vakio*. Vaikka törmäys olisi nopea, tätä akselin tankoon kohdistamaa voimaa ei voi jäätää huomioimatta, sillä se voi olla suuruudeltaan samaa kokoluokkaa kuin pallon ja tangon väliset voimat.

5.23 Miten pallon ja tangon käytös törmäyksessä muuttuu, jos tanko ei ole kiinni akselissa ja pallon tuottamaa voimaa lukuunottamatta siihen kohdistuvat ulkoiset voimat kumoavat toisensa (esim. tanko on jäällä)? Mitkä suureet ovat tällöin systeemissä vakiota ja miksi?

Oletetaan, että kaikki liikettä vastaan kohtisuorat voimat kuten painovoima ja normaalivoimat ovat aina tasapainossa ja jätetään ne tarkastelussa huomioimatta. Tällöin pallo vuorovaikuttaa törmäyksessä ainoastaan tangon kanssa, ja tämä vuorovaikutus kohdistaa kumpaankin kappaleeseen yhtä suuren ja vastakkaisuuntaisen voiman

$$\bar{F}_{\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = -\bar{F}_{\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.94)$$

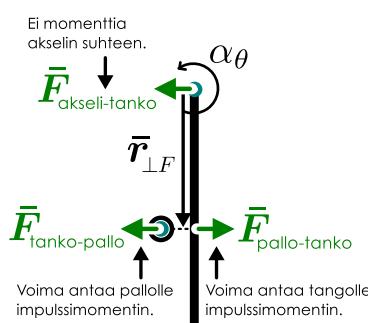
Lisäksi koska nämä voimat vaikuttavat yhtä kaukana pyörimisakselistä, ne kohdistavat palloon ja tankoon yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset momentit

$$\tau_{\theta, \text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = -\tau_{\theta, \text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.95)$$

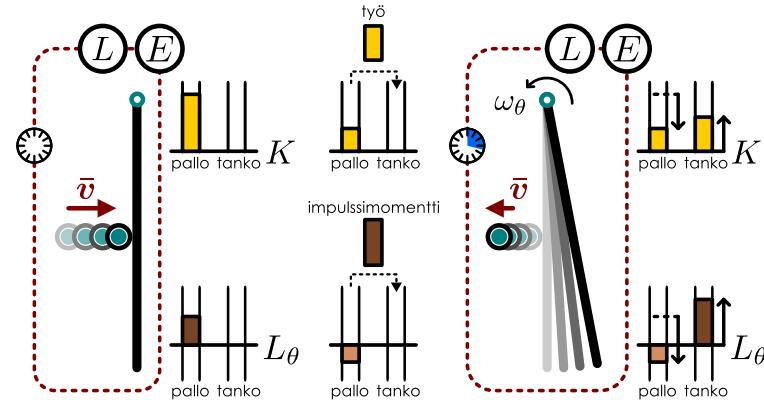
Tanko vuorovaikuttaa lisäksi myös akselin kanssa. Akselin tankoon kohdistaman voiman vaikutuspiste osoittaa kuitenkin kohti akselin keskipistettä, joten akselin suhteeseen mitattuna tämän voiman varsi on nolla. Jos akselissa ei vaikuta myöskään kitka (se on hyvin öljytty), akselin tankoon kohdistaman voiman *momentti on*

Kuva 5.22: Pallon ja tangon törmäyksen kuvaus voimien ja säilymislakien avulla.

(a) Palloon ja tankoon törmäyksen aikana vaikuttavat voimat.



(b) Systeemin mekaaninen energia ja kulmaliikemääriä ovat törmäyksessä vakiot.



nolla eikä se siis vaikuta tangon pyörimiseen. Koska myös käään palloon ei kohdistu ulkoisten vuorovaikutusten momenttia, *systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten kokonaismomentti on nolla*. Suoraviivaisen liikkeen tapauksessa *ulkoisten voimien* summan ollessa nolla systeemin kokonaismomentti ei voi muuttua. Nyt systeemiin kohdistuvien *ulkoisten momenttien* summa on nolla, joten systeemin kokonaiskulmaliikemääriä ei voi muuttua vaan sen täytyy olla vakio. Sekä pallon että tangon kulmaliikemäärit kyllä muuttuvat, mutta pallon kulmaliikemäärin muutos on yhtä suuri ja vastakkainen tangon kulmaliikemäärin muutokseen nähdyn.

Käydään edellä esitetyt päättely vielä läpi matemaattisesti. Tangon kulmanopeus muuttuu siihen törmäyksessä kohdistuneen voiman momentin $\tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}$ vuoksi. Täsmällisemmin tämä on pyörimisen likeyhtälön mukaan sama asia kuin tangon kulmaliikemäärin muutosnopeus

$$\frac{dL_{\theta,\text{tanko}}}{dt} = \tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}, \quad (5.96)$$

joten kulmaliikemäären kokonaismuutos saadaan tästä integroimalla ajan suhtein

$$\Delta L_{\theta,\text{tanko}} = \int \tau_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} dt. \quad (5.97)$$

Tämä muistuttaa suoraviivaisen liikkeen yhtälöä $\Delta p_x = \int F_x dt = I_x$, jonka vasen puoli on kappaleen liikemäärin muutos ja oikea puoli voiman impulssi. Voimmekin määritellä **impulssimomentti** momentin integraalina ajan suhtein,

$$J_{\theta} = \int \tau_{\theta} dt, \quad (5.98)$$

jolloin yhtälö (5.97) sanoo, että *tangon kulmaliikemäärin muutos on yhtä suuri kuin siihen kohdistunut impulssimomentti*

$$\Delta L_{\theta,\text{tanko}} = J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}. \quad (5.99)$$

Impulssimomentti siis mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa kokonaismuutosta kappaleen kulmaliikemääressä samaan tapaan kuin impulssi mittaa vuorovaikutuksen aiheuttamaa kokonaismuutosta kappaleen liikemääressä.

Vastaavasti pallon kulmaliikemäärin muutoksen aiheuttaa tangon palloon kohdistama momentti ja kulmaliikemäären kokonaismuutos on yhtä suuri kuin pallon saama impulssimomentti

$$\Delta L_{\theta,\text{pallo}} = \int \tau_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} dt = J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.100)$$

Toisaalta voiman ja vastavoiman lain mukaisesti vuorovaikutus kohdistaa kumpaankin osapuoleen yhtä suuret mutta vastakkaiset momentit, joten

$$J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} = \int \tau_{x,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}} dt = - \int \tau_{x,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} dt = -J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}}. \quad (5.101)$$

Tanko ja pallo saavat siis törmäyksessä yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset impulssimomentit tangon akselin suhtein, ja näin ollen niiden kulmaliikemäärit muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin. *Systeemin kokonaiskulmaliikemäärin muutos on siten nolla*

$$\Delta L_{\theta,\text{kokonaiss}} = (\Delta L_{\theta,\text{pallo}} + \Delta L_{\theta,\text{tanko}}) = (J_{\theta,\text{tanko} \rightarrow \text{pallo}} + J_{\theta,\text{pallo} \rightarrow \text{tanko}}) = 0. \quad (5.102)$$



5.24 Kuvassa 5.21 esitettiin kaksi törmäyskoetta pallon ja tangon välillä. Kummassa tapauksessa (a) pallon saama impulssi on (itseisarvoltaan) suurempi, (b) tangon saama impulssimomentti on suurempi, (c) pallon saama impulssimomentti on suurempi?

Prosessissa siis kokonaisen energian lisäksi *kokonaiskulmaliikemääriä* on vakio, ja aivan vastaavilainen päätely toimii aina kun systeemiin kohdistuvien ulkoisten vuorovaikutusten *kokonaismomentti on nolla*. Nämä siksi, että systeemin sisäisissä vuorovaikutuksissa kappaleiden väliset voimat voivat kyllä muuttaa yksittäisten kappaleiden kulmaliikemääriä (aivan kuten pallon ja tangon esimerkissä molempien kappaleiden kulmaliikemäärit muuttuvat törmäyksessä) mutta tällöin kappaleiden kokonaiskulmaliikemäären muutoksen on oltava aina nolla (aivan kuten pallon ja tangon tapauksessa kappaleiden kulmaliikemäärit muuttuvat yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin). Systeemin ulkoiset vuorovaikutukset voivat muuttaa systeemin kokonaiskulmaliikemääriä, mutta se on mahdollista vain jos nämä vuorovaikutukset kohdistavat systeemiin nollasta poikkeavan momentin.

Tässä *johdimme* kulmaliikemäären säilymislain jälkille kappaleille lähtien vuorovaikutuksia kuvaavista voimista. Kuitenkin kuten energia ja liikemääräkin, kulmaliikemääriä on laajempi käsite kuin pelkkää kappaleiden mekaanista liikettä kuvavaa suure, ja niinpä *kulmaliikemäären säilymislakia* pidetään omana peruslakinaan. Sen mukaan kulmaliikemääriä ei voi luoda eikä hävittää. Kulmaliikemääriä voi siirtää systeemin ja sen ympäristön välillä vain jos systeemiin kohdistuu ulkoisen vuorovaikutuksen momentti — muutoin systeemin kulmaliikemääriä on vakio.



5.25 Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä kulmaliikemääristä. Määrittele sekä pyörivän että etenevän liikkeen kulmaliikemääriä, selitä miten kulmaliikemääri voi muuttua, ja perustele täitä kautta, millaisessa systeemissä kulmaliikemääriä on vakio.

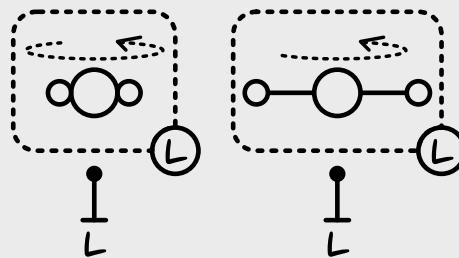
esimerkki 5.4

Kulmaliikemääriä

Satelliitti pyörii pituusakselinsa ympäri nopeudella 1.62 radiaania sekunnissa. Satelliitin rungon hitausmomentti on 2.30 kgm². Lisäksi satelliitissa on kaksi kevyttä ”käsivartta”, joiden päissä on 353 g massaiset mittalaitteet. Käsivarret ovat symmetrisesti satelliitin vastakkaisilla puolilla. Aluksi laitteet ovat etäisyydellä 12 cm satelliitin pyörimisakselista. Sitten käsivarret oikaistaan, jolloin mittalaitteet siirtyvät etäisyydelle 55 cm satelliitin pyörimisakselista. Mikä on satelliitin pyörimisnopeus tämän jälkeen?

TILANNE Merkitään rungon hitausmomenttia $I_\theta = 2.30 \text{ kgm}^2$, laitteiden massaa $m = 0.353 \text{ kg}$, niiden etäisyyttä pyörimisakselista $r_{\text{alku}} = 0.12 \text{ m}$ ja $r_{\text{loppu}} = 0.55 \text{ m}$ ja satelliitin kulmanopeutta $\omega_{\theta,\text{alku}} = 1.62 \text{ s}^{-1}$ ja $\omega_{\theta,\text{loppu}}$.

SUUNNITELMA Satelliittiin ei vaikuta avaruudessa painovoimaa lukuunottamatta ulkoisia vuorovaikutuksia, ja painovoiman momentti satelliitin massakeskipisteen suhteeseen on nolla. Niinpä satelliitin kulmaliikemääriä on vakio. Satelliitin hitausmomentti kasvaa mittalaitteiden siirtymessä kauemmas sen pyörimisakselista, joten satelliitin pyörimisnopeuden täytyy samalla pienentyä.



Satelliitin kokonaishitausmomentti on aluksi $I_{\theta,\text{kokonais,alku}} = I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2$ ja lopuksi $I_{\theta,\text{kokonais,loppu}} = I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2$. Satelliitin kulmaliikemääriä on $L_\theta = I_\theta \omega_\theta$, ja tämä on vakio.

RATKAISU Kulmaliikemäären vakioisuuden perusteella $I_{\theta,\text{kokonais,alku}} \omega_{\theta,\text{alku}} = I_{\theta,\text{kokonais,loppu}} \omega_{\theta,\text{loppu}}$ eli

$$(I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2) \omega_{\theta,\text{alku}} = (I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2) \omega_{\theta,\text{loppu}}. \quad (5.103)$$

Tästä voidaan ratkaista kulmanopeus lopuksi

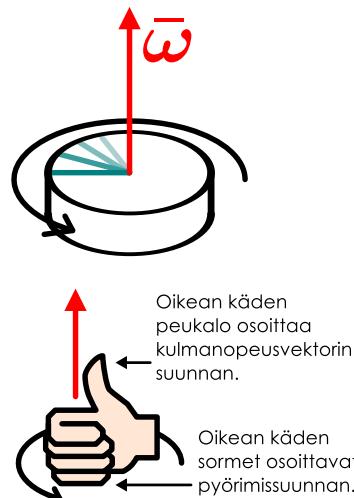
$$\omega_{\theta,\text{loppu}} = \frac{I_\theta + 2mr_{\text{alku}}^2}{I_\theta + 2mr_{\text{loppu}}^2} \omega_{\theta,\text{alku}} = 1.49 \text{ s}^{-1}. \quad (5.104)$$

ARVIOINTI Jos laitteet siirtäisivät hyvin kauas, satelliitin hitausmomentti kasvaisi mielivaltaisen suureksi ja sen kulmanopeus lähestyisi nollaa. Tämä päätee johdetulle ratkaisulle, sillä $\lim_{r_{\text{loppu}} \rightarrow \infty} \omega_{\theta,\text{loppu}} = 0 \text{ s}^{-1}$.

5.5 Moniulotteinen pyörimisliike

Pyöriminen kolmiulotteisessa avaruudessa

Kuva 5.23: Kulmanopeusvektori on pyörimisakselin suuntainen.



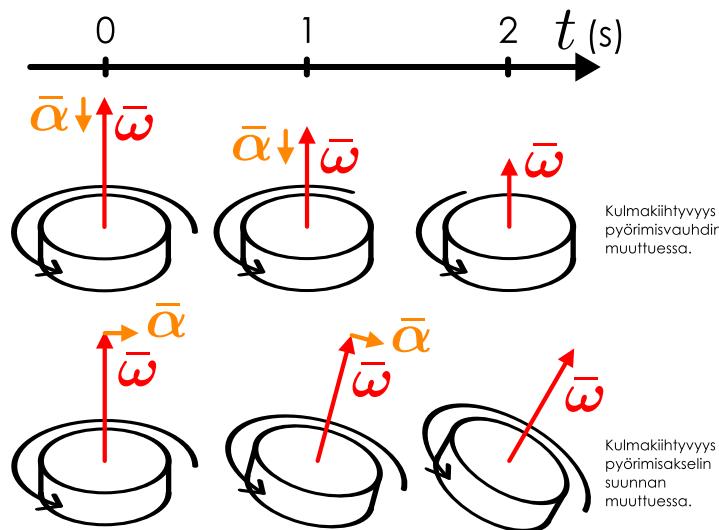
Edellä olemme käsitelleet pyörimistä vain tasossa. Tällöin pyörimislükkeen lait ovat analogiset yksiuolotteisen etenevän liikkeen kanssa, kun paikkakoordinaatti korvataan kulmakoordinaatilla. Kuitenkin aivan kuten etenevä liike voi todellisuudessa tapahtua eri suuntiin, kappaleet voivat myös pyöriä erisuuntaisten akseleiden ympäri. Etenevä liikettä voidaan kuvata nopeusvektorilla, jonka suunta kertoo liikkeen suunnan, ja samoin pyörimislükettä voidaan kuvata *kulmanopeusvektorilla* $\bar{\omega}$, jonka suunta osoittaa *pyörimisakselin suunnan* ja suuruus kulmanopeuden suuruuden. Jos esimerkiksi kappale pyörii karteesisen koordinaatiston xy -tasossa, sen pyörimisakseli ja kulmanopeusvektori on z -suuntainen.

Pelkkä pyörimisakselin suunta ei kuitenkaan riitä määrittelemään pyörimistä, koska kappale voi pyöriä akselin ympäri kahteen eri suuntaan. Pyörimisen tapahtuessa tasossa valittuun positiivinen kiertosuunta ja kulmanopeuden ω_θ etumerkki kertoivat kumpaan suuntaan kappale pyörii. Samoin kolmessa ulottuvuudessa pitää valita pyörimiselle positiivinen suunta. Tämä tapahtuu niin sanotun **oikean käden säännön** avulla (kuva 5.23): Jos oikean käden sormet käännetään nyrkiin ja käsi asetetaan niin, että nämä sormet osoittavat kappaleen pyörimissuuntaan, kulmanopeusvektori osoittaa ojennetun peukalon suuntaan. Näin määritellen kulmanopeusvektorin suunta käännyy ympäri, jos kappaleen pyörimissuunta käännyy, eli kulmanopeusvektorin suunta kertoo kappaleen pyörimissuunnan. Itse asiassa tähän asti käytämämme skalaarinen kulmanopeus ω_θ on kulmanopeusvektorin *skalarikomponentti*, joten vektorin suunnan käänteminen vaihtaa myös sen skalarikomponentin etumerkin.



5.26 Mihin suuntaan osoittaa eteenpäin ajavan polkupyörän renkaan kulmanopeusvektori?

Kuva 5.24: Kulmakihtyvyys muuttaa pyörimisen suuruutta tai suuntaa.



pyörimisakseli käännyy.

Kun kulmanopeus on näin määritelty vektorina, monet muutkin kulmaliükkeen suureet voidaan määritellä vektorina. Esimerkiksi kulmakihtyvyysvektori määritellään kulmanopeusvektorin derivaattana

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (5.105)$$

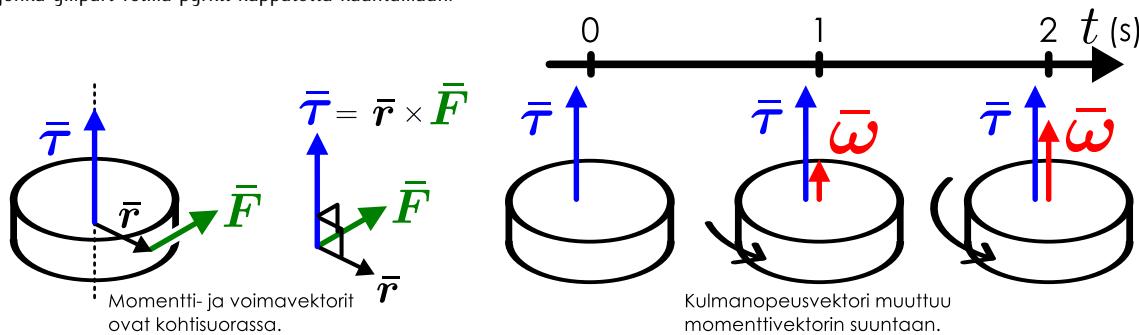
Kulmakihtyvyys on siis vektori, joka osoittaa kulmanopeusvektorin muutoksen suunnan aivan kuten kihihtyvyys on vektori, joka osoittaa nopeuden muutoksen suunnan. Jos kulmakihtyvyys on kulmanopeusvektorin suuntainen, kulmanopeusvektori pitenee. Jos kulmakihtyvyys on kulmanopeudelle vastakkaisuuntainen, kulmanopeusvektori lyhenee. Ja jos kulmakihtyvyysvektori on kohtisuorassa kulmanopeusvektorin suuntaan nähdien, kulmanopeusvektori *kääntyy*. Tällöin pyörimislükkeen vauhti ei muutu, mutta

Momentti ja ristitulo

Joidenkin suureiden yleistys kolmeen ulottuvuteen ei kuitenkaan ole aivan suoraviivaista. Tarkastellaan esimerkiksi pyörää, joka pyörii akselinsa ympäri ja jolle annetaan lisää vauhtia reunasta vetämällä. Pyörän kohdistuva voimavektori osoittaa tällöin pyörän *ulkoreunan suuntaan*. Pyörän kulmanopeusvektori kuitenkin osoittaa määritelmänsä mukaan *pyörimisakselin suuntaan* — siis eri suuntaan kuin voimavektori. Pyörän

Kuva 5.25: Momenttivektorin määrittely ristituloon avulla.

(a) Momenttivektori osoittaa sen akselin suuntaan, jonka ympäri voima pyrkii kappaletta käantämään.
 (b) Kulmanopeusvektori muuttuu momenttivektorin suuntaan.



pyörimisvauhti lisääntyy, koska voima kohdistaa pyörään momentin, ja tällöin kulmanopeusvektorin pituuden täytyy kasvaa. Tarvitaan siis tapa yhdistää voima, momentti ja kulmaliikeväärä vektoreina.

Idea on seuraava: Aivan kuten kulmanopeusvektorin suunta määriteltiin osoittamaan pyörimisakselin suuntaan, määritellään momenttivektorin $\bar{\tau}$ suunta osoittamaan sen akselin suuntaan, jonka ympäri voima pyrkii kappaletta käantämään. Tarkastellun pyörän tapauksessa *momentti osoittaa tällöin pyörimisakselin suuntaan* ja kulmanopeusvektori muuttuu momenttivektorin osoittamaan suuntaan. Tällöin jälkän kappaleen pyörimisen liikeyhtälöksi saadaan yksinkertaisesti

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = I \ddot{\omega} = I \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (5.106)$$

Määritöksemme momenttivektorin täsmällisesti tarvitsemme kuitenkin uuden vektorilaskennan työkalun, **ristituloon**.

Voiman momentti riippuu voiman suuruuden lisäksi sen viipavarren pituudesta. Niinpä voiman momentti voidaan määritellä vektorina muodossa

$$\bar{\tau} = (rF \sin \phi) \hat{c}, \quad (5.107)$$

missä yksikkövektori \hat{c} on kohtisuorassa sekä voimavektoria \bar{F} että pyörimisakselista voiman vaikutuspisteeseen osoittavaa paikkavektoria \bar{r} vastaan. Vektorin \hat{c} suunta on valittava niin, että kulmanopeudelle määritelty oikean käden säätö pätee. Siispä jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat pyörimissuunnan, johon voima pyrkii kappaletta käantämään, ojennettu peukalo osoittaa momenttivektorin suunnan (eli yksikkövektorin \hat{c} suunnan). Määritellään tämän perusteella paikka- ja voimavektoreiden ristitulo

$$\bar{r} \times \bar{F} = (rF \sin \phi) \hat{c}. \quad (5.108)$$

jolloin momenttivektori on yksinkertaisesti

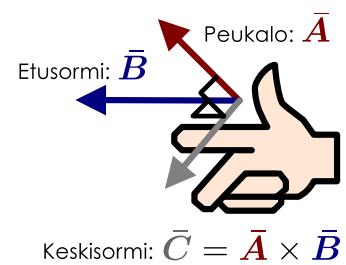
$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (5.109)$$

Ristitulo on kahden vektorin kertolasku ja laskutoimituksen tulos on uusi vektori, minkä vuoksi ristituloa kutsutaankin myös vektorituloksi. Tämän vektorin pituus on alkuperäisten vektorien pituuksien sekä niiden suuntien välisen kulman sinin tulo. Koska sinifunktio nollakulmasta tai oikokulmasta on nolla, kahden yhdensuuntaisen vektorin välinen ristitulo on nolla. Momentin tapauksessa tämä vastaa tapausta, jossa voimavektori osoittaa kohti pyörimisakselia. Tällöin voiman varsi on nolla ja niinpä myös momentti on nolla. Erityisesti minkä tahansa vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla.

Ristituloon suunta on molempia alkuperäisiä vektorita vastaan kohtisuorassa niin, että oikean käden säätö toteutuu. Yleisesti kahden vektorin ristituloon suunta voidaan määritellä niin, että jos vektori \bar{A} osoittaa oikean käden peukalon suuntaan ja \bar{B} etusormen suuntaan, ristitulo $\bar{A} \times \bar{B}$ osoittaa kämmentä vastaan kohtisuoraan asetetun keskisormen suuntaan. Tästä säännöstä seuraa suoraan, että *vektorien vaihtaminen keskenään käantää ristitulovektorin*

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}. \quad (5.110)$$

Kuva 5.26: Ristitulo.

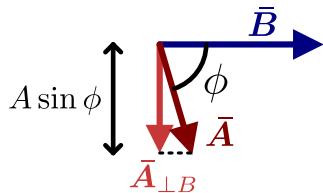


Matematiikassa tällaisesta ominaisuudesta sanotaan, että tulo on *antikommutatiivinen*. Useimmat muut normaalilin kertolaskun ominaisuudet toimivat ristitulollekin, mutta tulon tekijöiden järjestyksen vaihtaminen on siis kiellettyä.



- 5.27** Eteenpäin ajava polkupyörä jarruttaa, jolloin renkaan yläosassa sijaitsevat jarrupalat kohdistavat renkaaseen sen pyörimislukettä hidastavan momentin. (a) Mihin suuntaan renkaan akselista katsoen jarrupalojen paikkavektori osoittaa? (b) Mihin suuntaan jarrupalojen renkaaseen kohdistama kitkavoima osoittaa? (c) Mihin suuntaan renkaaseen kohdistuvan momentin vektori osoittaa? (d) Miten renkaan kulmaliikemäärvektori muuttuu?

Kuva 5.27: Vektorin kohtisuora komponentti.



Pistetulo on verrannollinen vektoreiden välisen kulman kosiniin, min-kä vuoksi vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa voidaan esittää pistetulon avulla. Ristitulo on verrannollinen vektoreiden välisen kulman siniin, joten ristitulon itseisarvon avulla voidaan esittää vektorin toista vektoria vastaan *kohtisuoran komponentin pituus*,

$$A_{\perp B} = A \sin \phi = \frac{1}{B} |\bar{A} \times \bar{B}|. \quad (5.111)$$

Tästä seuraa myös se, että ristitulon itseisarvo on yhtä suuri kuin sellaisen suunnikkaan pinta-ala, jonka sivut ovat vektorit \bar{A} ja \bar{B} .

Kuten pistetulo, ristitulokin voidaan laskea karteesisissa koordinaateissa. Karteesisten yksikkövektoreiden ristitulot ovat nimittäin

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad (5.112)$$

ja vektorin ristitulo itsensä kanssa on aina nolla

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \bar{0}, \quad (5.113)$$

joten kahden komponenteissa esitetyn vektorin ristitulo voidaan kertoa auki ja lopputulokseksi saadaan

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) \quad (5.114)$$

$$= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + \dots \quad (5.115)$$

$$= A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + \dots \quad (5.116)$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}. \quad (5.117)$$

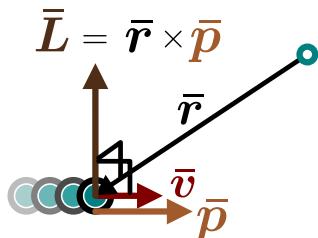


- 5.28** Olkoot $\bar{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ja $\bar{B} = -4\hat{i} - 1\hat{j} + 6\hat{k}$. Mitä on (a) $\bar{A} \cdot \bar{B}$, (b) $\bar{A} \times \bar{B}$?

Kulmaliikemäärä

Kuva 5.28: Suoran liikkeen kulmaliikemäärä.

Kulmaliikemäärä on kohtisuorassa hiukkasen nopeutta vastaan.



Momentin ohella myös etenevän liikkeen kulmaliikemäären määritelmässä tarvittiin kahden vektorin, nopeuden ja paikan, toisiaan vastaan kohtisuoria komponentteja, joten ristitulo sopii myös kulmaliikemäären määrittelemiseen kolmessa ulottuvuudessa. Ensinnäkin paikkavektorin ja liikemäären ristitulon itseisarvo on

$$|\bar{r} \times \bar{p}| = |rp \sin \theta| = |r_{\perp} p| = |L_{\theta}|, \quad (5.118)$$

eli siis sama kuin kappaleen kulmaliikemäären suuruus origon suhteeseen. Lisäksi ristitulon suunta on kohtisuorassa pyörimistäsoa vastaan, joten oikean käden säännön perusteella kulmaliikemäärvektori osoittaa samaan suuntaan kuin kulmanopeusvektori. Niinpä *etenevän hiukkasen kulmaliikemääräksi* määritellään yleisesti

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}. \quad (5.119)$$

Pyörivän kappaleen kulmaliikemäärä voidaan kirjoittaa myös kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden avulla

$$\bar{L} = I \bar{\omega}. \quad (5.120)$$

Pyörimisen likeyhtälön mukaan jäykän kappaleen kulmanopeuden muutosnopeus on verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaismomenttiin, joten pyörimisen likeyhtälö voidaan kirjoittaa myös kulmaliiemääärän avulla muodossa

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{L}}{dt}. \quad (5.121)$$

Toisin sanoen kappaleen *kulmaliiemääärän muutosnopeus on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva kokonaismomentti*. Tämä on totta gleyestä, sillä kulmaliiemääärän säilymislain mukaan systeemin tai kappaleen kulmaliiemäärä voi muuttua vain, jos kappaleeseen kohdistuu ulkoinen momentti. Erityisesti jos kappaleeseen tai systeemiin kohdistuva kokonaismomentti on nolla, sen kulmaliiemäärävektori on *vakio*.

Tuloksen voi johtaa myös derivoimalla hiukkasen kulmaliiemääärän määritelmää (5.119) ja käyttämällä kertolaskun derivoimissääntöä:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}. \quad (5.122)$$

Nyt kuitenkin paikkavektorin derivaatta ajan suhteen on nopeus \bar{v} , joka on yhdensuuntainen liikemääärän kanssa, joten ensimmäinen termi on nolla,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} = \bar{v} \times (m\bar{v}) = \bar{0}. \quad (5.123)$$

Lisäksi dynamiikan peruslain mukaan liikemääärän derivaatta ajan suhteen on yhtä suuri kuin kappaleeseen vaikuttava voima, joten jälkimmäinen termi on yhtä suuri kuin hiukkaseen vaikuttava momentti

$$\bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{\tau}_{\text{kokonais}}. \quad (5.124)$$

Niinpä kulmaliiemääärän muutosnopeuden on oltava yhtä suuri kuin hiukkaseen kohdistuva kokonaismomentti. Tulos voidaan gleyistää kappaleille jakamalla kappaleet ostiin ja laskemalla kaikkien osien kulmaliiemäärien muutokset yhteen.

Huomaa erityisesti, että likeyhtälö $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$ eli yhtälö (5.106) pätee vain, jos *kappaleen hitausmomentti on vakio*. Jos kappaleen hitausmomentti muuttuu esimerkiksi kappaleen muodon muuttuessa, kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti on sama kuin kappaleen kulmaliiemääärän muutos eli yhtälö (5.121) *pätee*, mutta momentti *ei ole* sama kuin kappaleen hitausmomentin ja kulmanopeuden muutoksen tulo, joten yhtälö (5.106) *ei päde*. Klassinen esimerkki tästä on pirkkia tekevä taitoluistelija, jonka kulmanopeus hidastuu luistelijan levittäässä kätensä. Luistelijaan *ei vaikuta* tällöin merkittävästi ulkoista momenttia joten myöskään hänen kulmaliiemäärensä ei muudu. Kuitenkin koska hänen hitausmomenttinsa kasvaa massan siirtymessä kauemmas pyörimisakselia, kulmanopeuden on samalla pienennytävä, jotta kulmaliiemäärä pysyisi vakiona.



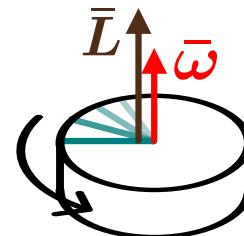
5.29 Millainen momentti viistoon heitettyyn palloon kohdistuu heittoliikkeen aikana, jos akseli on kiinnitetty heittäjään? Miten pallon kulmaliiemäärä muuttuu heiton aikana? Entä jos akseli on kiinnitetty heiton lakipteeseen?

Kun levossa olevaan kappaleeseen kohdistuu nollasta poikkeava kokonaismomentti, kappale alkaa pyöriä. Tällöin kappale saa kulmaliiemäärään ja sen kulmaliiemäärävektori osoittaa samaan suuntaan kuin mihin momenttivektori osoitti. Kappale alkaa näin ollen pyöriä intuitiivisesti odotettuun suuntaan. Esimerkiksi kuvassa 5.25 kiekkoon kohdistuu sen sivun suuntainen voima, ja tämä voima tuottaa kiekon keskipisteen suuntaan momenttin, joka osoittaa kuvassa suoraan ylöspäin. Näin ollen kiekko alkaa pyöriä kuvassa ylöspäin osoittavan akselin ympäri, kuten odotettua.

Myös pyörivien kappaleiden liikettä voidaan muuttaa kohdistamalla niihin momentti, mutta tällaisten kappaleiden liikkeen muutokset ovat usein varsin epäintuitiivisia. Tästä on esimerkki kuvassa 5.30. Kuvassa kaksi palloa on yhdistetty toisiinsa jäykällä sauvalla, ja pallojen muodostama kappale pyörii massakeskipisteensä ympäri. Aluksi pyörimisakseli on kuvassa pystysuora. Sitten palloihin kohdistuu samanaikaisesti yhtä suuret, mutta vastakkaisuuntiset voimat. Jos pallot olisivat paikoillaan, kumpikin niistä alkaisi liikkua siihen kohdistuvan voiman osoittamaan suuntaan. Nyt kuitenkin pallot ovat jo liikkeessä, joten kummankin pallon nopeusvektori muuttuu palloon kohdistuvan voiman osoittamaan suuntaan. Näin pallojen muodostaman kappaleen pyörimisakseli käännyt kuvassa hieman vasemmalle. Voimapari saa siis kappaleen pyörimisakselin käantymään eri suuntaan kuin mihin ne käantäisivät levossa olevaa kappaletta!

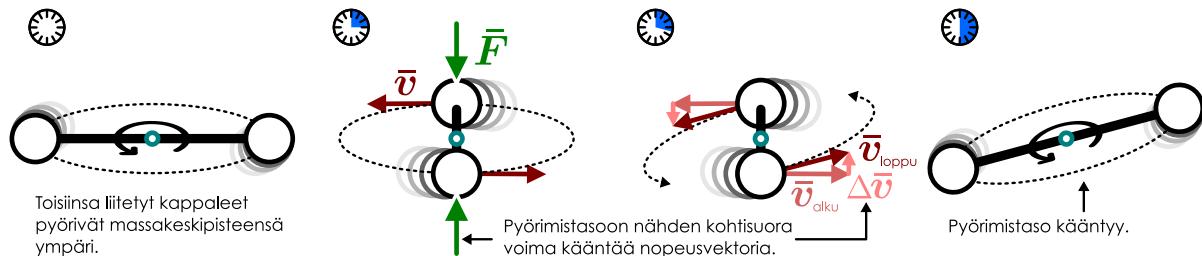
Kuva 5.29: Pyörimisen kulmaliiemäärä.

Kulmaliiemäärä on yhdensuuntainen kulmanopeuden kanssa.

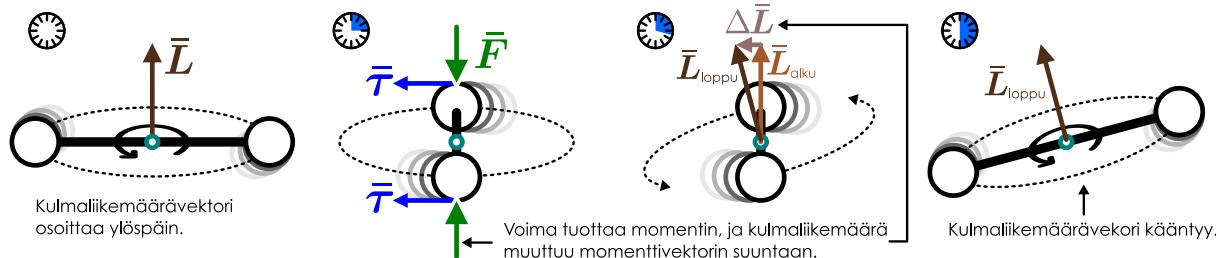


Kuva 5.30: Pyörivään kappaleeseen kohdistuvat voimat voivat käännyä kappaleen pyörimisakselin suuntaa. Akseli ei kuitenkaan välttämättä käänny samaan suuntaan kuin mihin kappale alkaisi pyöriä, jos se olisi aluksi levossa.

(a) Pyörimissuunnan muutoksen päättely voima- ja nopeusvektoreiden avulla.



(b) Pyörimissuunnan muutoksen päättely momentti- ja kulmaliikemäärävektorin avulla.



Tässä esimerkissä kappaleen liikkeen muutos voitiin päätellä helposti tarkastelemalla palloihin kohdistuvia voimia ja niiden vaikutusta pallojen nopeusvektoreihin, mutta usein tällainen analyysi on vaikeaa. Sen sijaan pyörimislukettä kannattaa analysoida momentin ja kulmaliikemäärän avulla kuten kuvassa 5.30 (b). Aluksi kappaleen pyörimisakseli on pystysuorassa, joten kulmaliikemäärävektori osoittaa oikean käden säännön mukaisesti ylöspäin. Samoin oikean käden säännön mukaisesti kumpaanakin palloon kohdistuva voima tuottaa kuvassa vasemmalle osoittavan momenttivektorin. Kulmaliikemäärä muuttuu kokonaismomenttivektorin osoittamaan suuntaan eli kuvassa vasemmalle, ja niinpä kappaleen pyörimisakseli käännyy hieman vasemmalle.



5.30 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä pyörimisen kolmiulotteisesta kuvauksesta. Selitä erityisesti miten momentti- ja kulmaliikemäärävektorien suunnat päättellään oikean käden säännöillä sekä miten ne laskeutuvat ristituloon avulla.

esimerkki 5.5

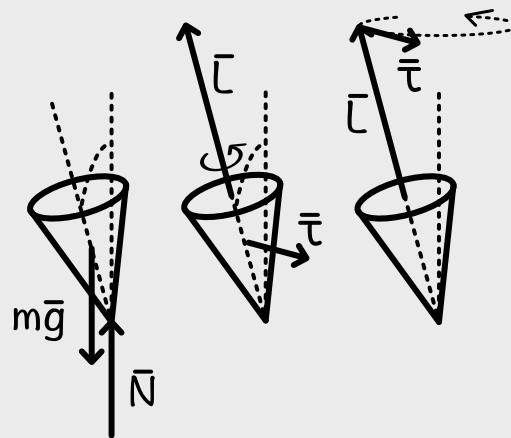
Hyrrä

Miksei pyörivä hyrrä kaadu?

SUUNNITELMA Hyrrän kohdistuu maanpinnan tukivoima sekä painovoima. Jos hyrrä on hieman vinossa, nämä voimat kohdistavat hyrrän momentin. Oikean käden sääntö määräe momenttivektorin suunnan. Jos hyrrä katsotaan suunnasta, jossa se näyttää olevan vinossa vasemmalle, momenttivektori osoittaa ylöspäin.

Pyörivällä hyrällä on kulmaliikemäärää. Jos hyrrä pyörii ylhäältä katsoen vastapäivään, kulmaliikemäärävektori osoittaa ylöspäin.

Kulmaliikemäärävektorin muutosnopeus on sama kuin momenttivektori. Koska momenttivektori osoittaa vaakasuuntaan, kulmaliikemäärävektori täytyy myös käännyä tähän suuntaan. Niinpä hyrrä ei kaudu maahan vaan käänny pysytysuunan ympäri. Samalla hyrrän kohdistuva momenttivektori käännyy ja niinpä hyrrä kiertää kehää. Tätä liikkettä kutsutaan *prekessioksi*.



Yhteenveton Pyörimisliike

Differentiaalit ja vektorit

- Napakoordinaatisto** on kaksulotteinen koordinaatisto, jossa kunkin pisteen paikkaa kuvaavat *radiaalinen* eli etäisyys origosta, r , sekä x -akselin suhteenvastapäivään mitattu *kulmakoordinaatti*, θ .
- Napakoordinaatiston yksikkövektorit eivät ole vakiot vaan kussakin avaruuden pisteessä määritellään *radiaaliyksikkövektori* $\hat{r}(\theta)$, joka osoittaa poispäin origosta, sekä *tangenttiyksikkövektori* $\hat{\theta}(\theta)$, joka osoittaa aina kulmakoordinaatin kasvusuuntaan.
- Vektorit voidaan jakaa radiaali- ja tangenttikomponentteihin

$$\bar{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}.$$

- Ristitulo** eli vektoritulo on kahden vektorin välinen kertolasku, jossa tulos on vektori. Tämän vektorin pituus on vektorien pituuksien sekä niiden välisen kulman ϕ sinin tulo

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = AB \sin \phi.$$

Ristituloon suunta on alkuperäisiä vektoreita vastaan kohtisuoraan

$$\bar{A} \times \bar{B} \perp \bar{A}, \bar{B}$$

niin että ns. oikean käden sääntö pätee: jos oikean käden peukaloja etusormi osoittavat vektorien \bar{A} ja \bar{B} suuntiin, ristitulo osoittaa keskisormen suuntaan.

- Ristitulo voidaan karteesisissa koordinaateissa kirjoittaa komponenttimuodossa

$$\bar{A} \times \bar{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

- Vektorin toista vektoria vastaan *kohtisuora komponentti* voidaan laskea ristitolun avulla

$$A_{\perp B} = \frac{1}{B} |\bar{A} \times \bar{B}|.$$

Pyörimisliike

- Ympyräradalla liikuvan tai kiinteän akselin ympäri pyörivän kappaleen asentoa voidaan kuvaltaa *kulmakoordinaatilla*. Ympyräradan tapauksessa tämä kiertokulma on kappaleen kulkeman matkan s ja ympyräradan säteen r suhde

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

- Kappaleen kulmanopeus ω_θ ja kulmakihiptyvyys α_θ ovat kiertokulman derivaataat ajan suhteena

$$\begin{aligned}\omega_\theta &= \frac{d\theta}{dt} \\ \alpha_\theta &= \frac{d\omega_\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.\end{aligned}$$

- Ympyräradalla olevan kappaleen nopeusvektori on aina radan tangenttiin suuntainen. Nopeuden tangentti- ja radiaalikomponentit ovat

$$\begin{aligned}v_\theta &= \omega_\theta r \\ v_r &= 0.\end{aligned}$$

- Ympyräradalla liikuvan kappaleen kihitysvyysvektorilla on aina komponentti *kohti ympyrän keskipistettä*. Tämän *keskeiskihiptyvyden* suuruus riippuu kappaleen nopeudesta v sekä radan sääteestä r . Jos kappaleella on kihitysvyden komponentti lükkeen suunnassa, sen kulmanopeus muuttuu. Tämä *tangenttihiptyvyys* on verrannollinen kulmakihiptyvyyteen.

$$\begin{aligned}a_r &= -\frac{v_\theta^2}{r} = -\omega_\theta^2 r \\ a_\theta &= \alpha_\theta r.\end{aligned}$$

- Liikkuvaan kappaleeseen kohdistuvan voiman liikkeen suuntaisen komponentti muuttaa kappaleen nopeutta mutta ei vaikuta sen suuntaan kun taas lükettä vastaan kohtisuora komponentti muuttaa kappaleen suuntaa mutta ei vaikuta sen nopeuteen.
- Kolmassa ulottuvuudessa kulmanopeus on vektori, jonka suunta osoittaa pyörimisakselin suuntaan.

Energia ja kulmaliikekemäärä

- Kappaleen *hitausmomentti* kuvailee kappaleen kiertoliikkeen inertiansa eli sen kykyä vastustaa pyörimislükkeen muutosta. Ympyräliikkeessä olevan m -massaisen hiukkasen hitausmomentti *ympyrän keskipisteen suhteeseen* on

$$I_\theta = mr^2.$$

- Kappaleen hitausmomentti saadaan laskemalla yhteen sen kaikien hiukkasten hitausmomentit *pyörimisakselin suhteeseen*

$$I_\theta = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

missä r on infinitesimaalisen massan dm etäisyys pyörimisakselista, ρ on tiheys ja dV on infinitesimaalinen tilavuus.

- Pyörimislükkeen liike-energia on

$$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2} I_\theta \omega_\theta^2.$$

- Pyörivän kappaleen *kulmaliikekemäärä* on

$$L_{\text{rotaatio}, \theta} = I_\theta \omega_\theta.$$

- Liikkuvan hiukkasen kulmaliikekemäären suuruus *origon suhteeseen* on

$$L_\theta = mv_\theta r = m\omega_\theta r^2 = \pm mvr_{\perp v}.$$

missä $r_{\perp v}$ on kappaleen *nopeutta vastaan kohtisuora etäisyys origosta*. Kulmaliikekemäärellä on etumerkki: se on positiivinen kappaleen pyöriessä positiiviseen kiertosuuntaan.

- Kolmassa ulottuvuudessa kulmaliikekemäärä on vektori, jonka suunta osoittaa *pyörimisakselin suunnan* oikean käden säännön mukaisesti. Liikkuvan hiukkasen kulmaliikekemäärä on

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}.$$

ja pyörivän kappaleen

$$\bar{L} = I \bar{\omega}.$$

- Kulmaliikekemäärä on ekstensiivinen suure ja systeemin kokonaishkulmaliikekemäärä on sen kaikkien osien kulmaliikekemäärien summa. Kulmaliikekemäärä ei voi luoda eikä hävittää

$$\Delta \bar{L}_{\text{kokonaais}} = \bar{0}, \text{ eli } \bar{L}_{\text{kokonaais}} = \text{vakio}.$$

Tämä on *kulmaliikekemäären säilymislaki*.

- Systeemin kokonaishkulmaliikekemäärä on vakio, jos siihen vaikuttavien ulkoisten vuorovaikutusten momentti on nolla.

Pyörivä ja etenevä liike

- Kappaleen liike voidaan jakaa massakeskipisteen etenemislükkeeseen ja massakeskipisteen ympäri tapahtuvaan pyörimislükkeeseen.
- Kappaleen liike-energia jaettuna etenevään ja pyörivään osaan

$$K = K_{\text{cm}} + K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\theta}\omega_{\theta}^2.$$

- Kappaleen kulmaliikemäärä jaettuna etenevään ja pyörivään osaan

$$L_{\theta} = L_{\text{cm},\theta} + L_{\text{rotaatio},\theta} = mv_{\vartheta,\text{cm}}r_{\text{cm}} + I_{\theta}\omega_{\theta} \quad (5.125)$$

- Kappale vierii pinnalla liukumatta, kun kappaleen pinta kosketava piste on kosketushetkellä paikoillaan pinnan suhteessa. Tällöin R -säteisen kappaleen pinnan suhteesta etenemisnopeus ja kulmanopeus ovat toisiinsa verrannolliset,

$$v = \omega_{\theta}R$$

$$a = \alpha_{\theta}R.$$

Momentti, työ ja impulssi

- Voima \bar{F} , joka vaikuttaa kappaleeseen pisteessä \bar{r} , kohdistaa siihen origon kautta kulkevan akselin suhteesta **momentti**

$$|\tau_{\theta}| = |rF_{\vartheta}| = r_{\perp}F.$$

Momentti voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä, osoittaakö voima positiiviseen vai negatiiviseen kiertosuuntaan.

- Kappaleeseen vaikuttava kokonaismomentti on siihen kohdistuvien momenttien summa

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \sum_i \tau_{\theta,i}.$$

- Pyörimisen likeyhtälö on

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{dL_{\theta}}{dt}.$$

Jäykän kappaleen, jonka **hitausmomentti on vakio**, likeyhtälö on

$$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = I_{\theta}\alpha_{\theta}.$$

- Kappaleeseen vaikuttava **vakiomomentti** tekee kappaleen käännytessä työn

$$W = \tau_{\theta}\Delta\theta.$$

- Muuttuva momentti tekee työn

$$W = \int_{\theta_{\text{alku}}}^{\theta_{\text{loppu}}} \tau_{\theta} d\theta.$$

- Kappaleeseen vaikuttava momentti kohdistaa kappaleeseen **impulssimomentti**

$$J_{\theta} = \int_{t_{\text{alku}}}^{t_{\text{loppu}}} \tau_{\theta} dt,$$

ja kappaleen kulmaliikemäärä muutos on yhtä suuri kuin sen saama kokonaismomentti

$$\Delta L_{\theta} = J_{\theta,\text{kokonais}}.$$

- Kolmessa ulottuvuudessa momentin yleinen määritelmä on

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}.$$

ja yleinen pyörimisen likeyhtälö on

$$\bar{\tau}_{\text{kokonais}} = \frac{d\bar{L}}{dt}.$$

Sanasto

- ympyräliike (circular motion)
- pyörimislilke (rotational motion)
- kiertoliike (revolving motion)
- pyörimisakseli (axel of rotation)
- napakoordinaatit (polar coordinates)
- radiaalikoordinaatti (radial coordinate)
- kulmakoordinaatti (angular coordinate)
- tangenttihiityvyys (tangential acceleration)
- keskeiskihiityvyys (centripetal acceleration)
- kulmanopeus (angular velocity)

- kulmakihiityvyys (angular acceleration)
- hitausmomentti (rotational inertia)
- tiheys (density)
- momentti (torque)
- vieriminen (rolling)
- resultanttivoima (resultant force)
- painopiste (center-of-gravity)
- kulmaliikemäärä (angular momentum)
- impulssimomentti (angular impulse)

Taulukko 5.1: Yksiulotteista ja pyörivää liikettä kuvaavat suureet skalaarimuodossa.

suora liike		pyörivä liike	
paikkakoordinaatti	x	kulmakoordinaatti	θ
nopeus	$v_x = \frac{dx}{dt}$	kulmanopeus	$\omega_{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
hiityvyys	$a_x = \frac{dv_x}{dt}$	kulmakihiityvyys	$\alpha_{\theta} = \frac{d\omega_{\theta}}{dt}$
inertia	m	hitausmomentti	$I_{\theta} = \int r^2 dm$
liike-energia	$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2$	liike-energia	$K_{\text{rotaatio}} = \frac{1}{2}I_{\theta}\omega_{\theta}^2$
liikemäärä	$p_x = mv_x$	kulmaliikemäärä	$L_{\theta,\text{rotaatio}} = I_{\theta}\omega$
voima	F_x	momentti	$L_{\theta,\text{cm}} = mv_{\text{cm},\theta}r = m\omega_{\theta}r^2$
likeyhtälö	$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt}$	likeyhtälö	$\tau_{\theta} = rF_{\vartheta}$
työ	$W = \int F_x dx$	työ	$\tau_{\theta,\text{kokonais}} = \frac{dL_{\theta}}{dt}$
impulssi	$I_x = \int F_x dt$	impulssimomentti	$W = \int \tau_{\theta} d\theta$
			$J_{\theta} = \int \tau_{\theta} dt$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

- 5.1 (a) Yksi kierros on kulma 2π , joten $3/4$ kierrosta on $3/4 \cdot 2\pi = 3/2\pi$.
 (b) $1/3$ kierrosta myötäpäivään vastaa $2/3$ kierrosta vastapäivään, joten kulma on $4/3\pi$.
 (c) $11/8$ kierrosta johtaa samaan pisteeseen kuin $3/8$ kierrosta, joten kulma on $3/4\pi$.
- 5.2 (a) Koordinaatit ovat $x = (2.0 \text{ m}) \cos \frac{2}{3}\pi = -1 \text{ m}$ sekä $y = (2.0 \text{ m}) \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3} \text{ m} \approx 1.732 \text{ m}$.
 (b) Pisteen etäisyys origosta on $r = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (-1 \text{ m})^2} = \sqrt{2} \text{ m} \approx 1.414 \text{ m}$. Tähän pisteeseen päästään kiertämällä $3/8$ kokonaisesta kierroksesta, joten kulmakoordinaatti on $\theta = \frac{3}{4}\pi$.
- 5.3 Keskinopeus on siirtymän ja kuluneen ajan suhde. Vaikka siirtymä lyhenee kuvasarjassa vasemmalta oikealle, myös siirtymään kulunut aika lyhenee, jolloin näiden suhde ei juuri muudu.
- 5.4 (a) Ympyräradalla vastapäivään kiertävän kappaleen nopeusvektori on kohtisuorassa paikkavektoriin nähdien niin, että nopeusvektorin kulma x -akseliin nähdien on $90^\circ = \pi/2$ suurempi kuin paikkavektorin kulma. Niinpä nopeusvektorin kulma on $\theta_v = \frac{5}{4}\pi$.
 (b) Kappaleen paikkavektori osoittaa origosta ylävasemmalle ja nopeusvektori osoittaa alavasemmalle. Nopeuden x) – ja
 (y -komponenttien täytyy siis olla negatiiviset. Täsmällisesti x -komponentti on $v_x = v \cos \theta_v = (3.0 \text{ m/s}) \cos \frac{5}{4}\pi = -2.12 \text{ m/s}$.
 (c) Koska kappale liikkuu ympyrän tangentin suuntaan, sen nopeusvektorin tangenttikomponentti on sama kuin kappaleen vauhti, $v_\theta = v = 3.0 \text{ m/s}$.
- 5.5 Karuselli tekee kierroksen eli kulman $\Delta\theta = 2\pi$ ajassa $\Delta t = 20 \text{ s}$, joten kulmanopeus on $\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$. Tämä on sama kummallekin matkustajalle. Kauempaan akselista oleva matkustaja kuitenkin liikkuu nopeammin, sillä hän kulkee pidemmän ympyrän karusellin tehessä kierroksen. Nopeudet ovat 0.47 m/s ja 0.79 m/s .
- 5.6 (a) Kun $\theta = 0$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}$ ja $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \hat{\mathbf{j}}$. Näin pitääkin olla, koska tarkastelupiste on x -akselilla.
 (b) Kun θ on hyvin pieni, tarkastelupiste on siirtynyt hieman positiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin $\hat{\mathbf{r}}$ käännyttää hieman kohti positiivista y -suuntaa ja $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ kohti negatiivista y -suuntaa. Kun $\theta = 0.1$, vektoreiksi saadaan $\hat{\mathbf{r}} \approx 0.995\hat{\mathbf{i}} + 0.1\hat{\mathbf{j}}$ sekä $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \approx -0.1\hat{\mathbf{i}} + 0.995\hat{\mathbf{j}}$, joten näin todella käy.
 (c) Kun $\theta = \frac{2}{3}\pi$, tarkastelupiste on käännyntänyt 30° ohi positiivisesta y -akselista. Radiaalivektorin täytyy osoittaa origosta ylävasemmalle, jolloin sillä on negatiivinen x -komponentti sekä positiivinen y -komponentti, ja näistä y -komponentti on itseisarvoaltaan suurempi. Vastaavasti tangenttivektori osoittaa alavasemmalle, joten tällä vektorilla sekä x - että y -komponenttit ovat negatiiviset, ja x -komponentti on pidempi. Muunnosyhtälöt antavat vektoreiksi $\hat{\mathbf{r}} \approx -0.5\hat{\mathbf{i}} + 0.866\hat{\mathbf{j}}$ sekä $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \approx -0.886\hat{\mathbf{i}} - 0.5\hat{\mathbf{j}}$, joten tulos on järkevä.
- 5.7 Kulmanopeus on $\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$. Matkustajilla on radiaalikiihtyyvyys kohti karusellin keskustaa, ja tämän kiihtyydyden suuruus riippuu etäisyydestä. Kiihtyydyt ovat 0.148 m/s^2 ja 0.247 m/s^2 .
 5.8 Karusellin kulmanopeus muuttuu $\Delta\omega_\theta = \frac{1}{10}\pi \text{ s}^{-1} = 0.314 \text{ s}^{-1}$ ajassa $\Delta t = 2 \text{ s}$, joten sen kulmakihtyyvyys on $\alpha_\theta = \Delta\omega_\theta/\Delta t = \frac{1}{20}\pi \text{ s}^{-2} = 0.157 \text{ s}^{-2}$. Tämä on kulmakihtyyvyys siis myös hetkellä $t = 1 \text{ s}$. Kulmanopeus on tällöin puolet lopullisesta kulmanopeudesta eli $\omega_\theta = \alpha_\theta \frac{1}{2}\Delta t = \frac{1}{20}\pi \text{ s}^{-1} = 0.157 \text{ s}^{-1}$. (a) Matkustajan radiaalikiihtyyvyys on $a_r = -\omega_\theta^2 r = 0.037 \text{ m/s}^2$.
 (b) Matkustajan tangenttikihtyyvyys on $a_\theta = \alpha_\theta r = 0.236 \text{ m/s}^2$.
 (c) Kiihtyydyksen puitus saadaan Pythagoraan lauseella, $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 0.239 \text{ m/s}^2$.
- 5.10 (a) Siirtymä on $\Delta x = v_{x,\text{alku}}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 = (1.0 \text{ m/s}) \cdot (2 \text{ s}) + 0.5 \cdot (-0.4 \text{ m/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = 1.2 \text{ m}$.
 (b) Kierto on $\Delta\theta = \omega_{\theta,\text{alku}}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_\theta(\Delta t)^2 = 1.2$. Kierto lasketaan siis täysin samalla tavalla kuin yksiloteinen siirtymä.
- 5.11 Pisteen tangenttinopeus massakeskipiteen ympäri on $v_\theta = \omega_\theta r = 1.3 \text{ m/s}$. Piste saavuttaa siis suurimman nopeutensa silloin, kun sen tangenttinopeus on massakeskipiteen liikkeen suuntainen, ja pienimmän nopeutensa silloin, kun tangenttinopeus on massakeskipiteen liikettä vastaan. Nopeudet ovat siis 0.7 m/s ja 3.3 m/s .

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

- 5.12 (a) Pidemmän langan pallon hitausmomentti on nelinkertainen lyhyempään lankaan verrattuna.
 (b) Koska palloilla on sama vauhti, pidemmän langan pallon kulmanopeuden täytyy olla puolet lyhyeen lankaan verrattuna.
 (c) Koska palloilla on sama vauhti, niillä on myös sama liike-energia.
- 5.13 Sauvan kokonaismassa on sen osien massojen summa. Ensimmäinen osa: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 L_1 A = 4$ g. Toinen osa: $m_2 = \rho_2 L_2 A = 15$ g. Kolmas osa: $m_3 = \rho_3 L_3 A = 13$ g. Yhteensä $M = m_1 + m_2 + m_3 = 32$ g.
- 5.14 Pyörittäminen sauvan pään kautta kulkevan akselin ympäri on vaikeampaa, koska tällöin toinen massa on hyvin kaukana pyörimisakselista. Merkitään käspainon päässä olevia massoja m ja oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi ne pistemäisiksi. Merkitään massojen välistä etäisyyttä L . Yhden massan hitausmomentti painon keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on $m(L/2)^2 = \frac{1}{4}mL^2$, joten kahden massan hitausmomentti on $I_{\theta,\text{keskipiste}} = \frac{1}{2}mL^2$. Jos pyörimisakseli asetetaan käspainon päähän, toisen massan hitausmomentti on likimain nolla (koska sen etäisyys akselistä on lähes nolla), mutta toisen massan hitausmomentti on $I_{\theta,\text{pää}} = mL^2$. Nämä hitausmomentti pääen suhteen on suurempi kuin keskipisteen suhteen. Tämä on yleisesti totta: hitausmomentti kappaleen massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen on aina pienempi kuin hitausmomentti minkä tahansa muun samansuuntaisen akselin suhteen.
- 5.15 Oven kulmanopeus on $\omega_\theta = \frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1} = 0.785 \text{ s}^{-1}$ ja sen massakeskipiste, joka on etäisyydellä $r = 0.5$ m saranasta, liikkuu vauhdilla $v_{cm} = \omega_\theta r = 0.393 \text{ m/s}$.
- (a) Massakeskipisteen liukkeen energia on $K_{cm} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 = 2.31 \text{ J}$.
 (b) Pyörimislükkeen energia massakeskipisteen ympäri on $K_{rotaatio} = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 = 0.77 \text{ J}$. Tässä pitää käyttää hitausmomenttia massakeskipisteen suhteen.
 (c) Pyörimislükkeen energia saranan suhteen on $K = \frac{1}{2}I_\theta\omega_\theta^2 = 3.08 \text{ J}$, missä energia lasketaan siis käyttäen hitausmomenttia saranan suhteen. Tämä on sama kuin massakeskipisteen rataliukkeen ja massakeskipisteen suhteen tapahtuvan pyörimislükkeen energoiden summa, $K = K_{cm} + K_{rotaatio}$. Kappaleen massakeskipisteen liike sekä pyöriminen massakeskipisteen ympäri voidaan aina erottaa ja näiden energiat voidaan laskea erikseen. Tällöin kappaleen kokonaisliike-energia on näiden summa. Kuitenkin jos kappale pyörii kiinteän akselin ympäri (tässä sarana), kappaleen kokonaisliike-energia saadaan myös laskemalla kappaleen pyörimisen liike-energia tämän kiinteän akselin suhteen.
- 5.16 Pallo liikkuu nopeudella 2 m/s hihnan pinnan suhteen, joten pallon kulmanopeuden täytyy olla $\omega_\theta = 2 \text{ m/s}/0.10 \text{ m} = 20 \text{ s}^{-1}$. Huomaa, että vierimisehdo $v_x = \omega_\theta R$ pätee pallon ja hihnan suhteelliselle nopeudelle $v_x = 2 \text{ m/s}$ mutta ei pallon varsinaiselle nopeudelle $v_x = 1 \text{ m/s}$.
- 5.17 Kuvan piirtäminen auttaa tehtävän ratkaisua. Vastaukset ovat: (a) $F = 2.83 \text{ N}$, (b) $r = 3.0 \text{ m}$, (c) $F_\vartheta = -2.0 \text{ N}$, (d) $r_{\perp F} = 2.12 \text{ m}$, (e) $|\tau_\theta| = |rF_\vartheta| = r_{\perp F}F = 6.0 \text{ Nm}$, (f) Momentti kääntää kappaletta myötäpäivään.
- 5.18 (a) Oletetaan, että lauta on likimain vaakatasossa, jolloin voiman varsi on sama kuin lasten etäisyys akselista. Tällöin lapset kohdistavat lautan vastakkaisuuntaiset momentit $\tau_{\theta,A} = -147 \text{ Nm}$ sekä $\tau_{\theta,B} = 196 \text{ Nm}$, jolloin kokonaismomentti on $\tau_\theta = \tau_{\theta,A} + \tau_{\theta,B} = 49 \text{ Nm}$. (jos positiivinen kiertosuunta valitaan momentin suuntaan).
 (b) Kulmakiertyvyys on $\alpha_\theta = \tau_\theta/I_\theta = 6.1 \text{ s}^{-2}$.
 (c) Kulmakiertyvyys on nolla jos kokonaismomentti on nolla. Näin on, jos lasten painon tuottamat momentit kumoavat toisensa täsmälleen. Näin käy esimerkiksi siinä tapauksessa, että suurempi lapsi asettuu istumaan etäisyydelle 0.75 m akselista, koska tällöin hänenkin painonsa tuottaa momentin $\tau_{\theta,B} = 147 \text{ Nm}$.
- 5.19 (a) Purjeeseen kohdistuu kokonaisvoima $F = \int dF = \int_0^L az dz = \frac{1}{2}aL^2$, missä L on purjeen korkeus. Vakion a voi siis kirjoittaa kokonaisvoiman avulla muodossa $a = 2F/L^2$. (b) Purjeen pienen osaan kohdistuva voima tuottaa momentin $d\tau_\theta = zdF = az^2 dz$ purjeen alaosan suhteen. Kokonaismomentti on puolestaan $\tau_\theta = \int d\tau_\theta = \int_0^L az^2 dz = \frac{1}{3}aL^3 = \frac{2}{3}FL$. (c) Voima F tuottaisi saman momentin, jos se kohdistuisi korkeudelle $z = \frac{2}{3}L$, mikä on siis purjeen keskikohdan $z = \frac{1}{2}L$ yläpuolella.
- 5.20 (a) (i) Kappale ei voi olla etenevä liikkeen suhteen tasapainossa. (ii) Se voi olla pyörimislükkeen suhteen tasapainossa, jos voima osoittaa kohti kappaleen massakeskipistettä.
 (b) (i) Ei. Jos kappale on etenevä liikkeen suhteen tasapainossa, voimien täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset. Koska voimat vaikuttavat samaan pisteeeseen, niiden momenttienkin täytyy kumota toisensa. Kappaleen täytyy siis olla myös pyörimislükkeen suhteen tasapainossa. (ii) Kyllä. Jos esimerkiksi molemmat voimat osoittavat kohti massakeskipistettä, kappale on pyörimislükkeen suhteen tasapainossa, mutta sen ei tarvitse olla etenemisen suhteen tasapainossa.
 (c) (i) Kyllä. Näin on, jos voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset mutta ne eivät vaikuta samalla suoralla. (ii) Kyllä, kuten (b)-kohdassa.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

- 5.21 Kiertoliikkeeseen Maan ympäri liittyy paljon suurempi kulmaliikemääriä. Kumpikin kiertoliike tapahtuu samalla kulmanopeudella, mutta kiertoliikkeen kulmaliikemääriä riippuu Kuun hitausmomentista Maan keskipisteen suhteeseen kun taas pyörimisliikkeen kulmaliikemääriä riippuu hitausmomentista Kuun keskipisteen suhteeseen. Kuun massa on melko lähellä Kuun omaa keskipistettä mutta hyvin kaukana Maan keskipisteestä, joten hitausmomentti Maan suhteeseen on valtavan paljon suurempi.
- 5.22 (a) Tasaisessa liikkeessä liikemääriä p on vakio ja koska liike tapahtuu suoralla, myös etäisyys $r_{\perp v}$ on vakio. Niinpä myös näiden tulona laskettava kulmaliikemääriä on vakio.
 (b) Riippuu, koska etäisyys $r_{\perp v}$ riippuu akselista. *Kaikki* kulmasuureet riippuvat akselin valinnasta!
 (c) Riippuu. Huomaa erityisesti, että ympyrälükkeen kulmaliikemääriä on vakio vain ympyrän keskipisteen asetetun akselin suhteeseen.
 (d) Ei riipu. Jos kappaleella on sekä etenevä että pyörivä liikettä, sen etenevän liikkeen kulmaliikemääriä riippuu valitusta akselista mutta sen pyörivän liikkeen kulmaliikemääriä on sama kaikkien akselien suhteeseen.
- 5.23 Jos systeemiin ei kohdistu ulkoisia voimia, energian ja kulmaliikemääriä lisäksi myös systeemin kokonaisliikemääriä on vakio. Nyt siis törmäyksessä tanko saa impulssin ja se alkaa liikkua pallon alkuperäisen nopeuden suuntaan. Tanko alkaa myös pyöriä, mutta törmäyksen jälkeen tangon massakeskipisteen tätyy liikkua tasaisella nopeudella, joten tangon liikkeen on helpoin ajatella koostuvan massakeskipisteen tasaisesta liikkeestä sekä pyörimislükkeestä massakeskipisteen ympäri.
- 5.24 (a) Pallon nopeus muuttuu enemmän kuin (b), joten impulssi on siinä suurempi.
 (b) Tangon kulmaliikemääriä muuttuu enemmän kuin (a), joten impulssimomentti on siinä suurempi.
 (c) Pallo saa yhtä suuren impulssimomentin kuin tanko, joten tämäkin on kuin (a) suurempi. Huomaa, että pallo saa suuremman impulssin kuin (b), mutta koska voima vaikuttaa siinä lähevästä pyörimisakselia, sen tuottama impulssimomentti on pienempi.
- 5.26 Renkaan yläpuoli pyörii eteenpäin. Jos asetamme oikean käden sormet tähän suuntaan, peukalo osoittaa vasemmalle. Siispä kulmaliikemäärävektori osoittaa liikkeen suuntaan vasemmalle.
- 5.27 (a) Paikkavektori osoittaa glöspään. (b) Renkaan gläosa liikkuu jarrupaloihin nähden eteenpäin, joten kitkavoima osoittaa taaksepäin. (c) Momenttivektori osoittaa oikean käden säännön perusteella kulkusuuntaan nähden oikealle. (d) Kulmaliikemäärävektori muuttuu momentin suuntaan eli oikealle. Edellisessä kysymyksessä päättelimme kulmaliikemäärävektorin osoittavan vasemmalle, joten vektori siis lyhentyy. Näin tietysti pitääkin tapahtua, koska renkaan pyöriminen hidastuu jarrutuksessa.
- 5.28 (a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, (b) $\vec{A} \times \vec{B} = -9\hat{i} - 42\hat{j} - 13\hat{k}$
- 5.29 Palloon kohdistuu koko ajan painovoima alas päin, joten jos akseli valitaan heittäjään, painovoiman momentti akselin suhteeseen on itsestaroltaan sitä suurempi, mitä kauemmas heittäjästä pallo on vaakasuunnassa edenneyt. Pallon kulmaliikemääriä on aluksi nolla, koska etäisyys $r_{\perp v} = 0$. Momentti muuttaa kulmaliikemääriä jatkuvasti, joten kulmaliikemääriä itsestarvo kasvaa jatkuvasti ballistisen liikkeen aikana. Jos akseli sen sijaan on asetettu lakiptiseen, pallolla on aluksi kulmaliikemääriä. Ennen kuin pallo saavuttaa lakiptsteen, painovoiman momentti on vastakkaisuuntainen pallon kulmaliikemääriä nähden, joten kulmaliikemääriä pienenee. Lakipteeessä kulmaliikemääriä on nolla, koska etäisyys $r_{\perp v} = 0$. Tämän jälkeen momentin suunta vaihtuu ja pallon kulmaliikemääriä alkaa jälleen kasvaa.

Osa II

Mekaniikasta termodynamikaan

6 Suhteellisuus

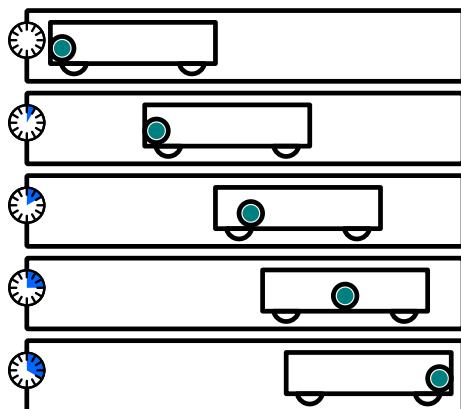
Fysiikassa suhteellisuus tarkoittaa sitä, että joidenkin suureiden mitatut arvot riippuvat siitä, miten ne mitataan. Tässä ei ole sinänsä mitään ihmelistä, sillä esimerkiksi kappaleen paikkaa ilmaisevat koordinaatit mitataan aina jonkin küntopisteen suhteen, jolloin tämän küntopisteen muuttaminen luonnollisesti muuttaa myös näitä koordinaatteja. Tässä luvussa tutkimme erityisesti, millaiset suureet muuttuvat jos niitä mitataan toistensa suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa. Tällainen tarkastelu tekee joistakin ilmiöistä helpompiä käsitellä matemaattisesti, mutta ennen kaikkea suureiden suhteellisuus kuitenkin kertoo meille suureiden fysikaalisen luonteesta. Suureet, joiden arvot ovat kaikissa koordinaatistoissa samat, ovat perustavalla tavalla erilaisia verrattuna suureisiin, joiden arvot riippuvat mittajasta. Tämä tarkastelu johdattaa meidät lopulta suppeaan suhteellisuusteoriaan ja siihen päätelmään, että jopa intuiitivisesti absoluutiselä tuntuva aika on suhteellinen suure.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

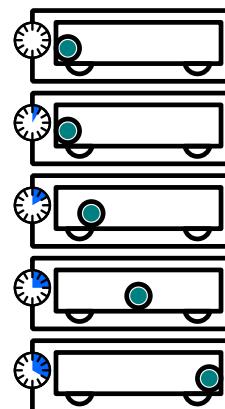
- selittää ekvivalenssi- ja suhteellisuusperiaate
- määritellä inertiaali- ja massakeskipistekoordinaatisto
- muuntaa yhdessä koordinaatistossa mitatut koordinaatit toiseen inertiaalikoordinaatiostoon
- määrittää kappaleen massan ja sen hiukkasten satunnaisliukkeen sisäenergia
- kuvilla suhteellisuusteoreettisia ilmiöitä ja arvioida niiden merkittävyyttä eri koordinaatistoissa
- kuvilla epäinertiaalikoordinaatistoissa havaittavia ilmiöitä

Kuva 6.1: Tarkastellaan palloa, johon ei vaikuta voimia, jarruttavassa autossa (suorakaide). Ulkopuolisen havaitsijan mielestä Newtonin lait pätevät. Automatkustajan mielestä pallo on kiihtyvässä liikkeessä vaikkei siihen kohdistu voimaa.

(a) Pallo liikkuu tasaisella nopeudella, auton vauhti hidastuu.



(b) Autossa pallo on kiihtyvässä liikkeessä vaikka kokonaivoima on nolla.



6.1 Tasainen ja kiihtyvä suhteellinen liike

Luvussa 1 määrittelimme paikan fysikaalisena suureena koordinaatiston avulla. Valitsimme kiintopisteen eli origon, jonka suhteen paikkoja mittasimme, ja tällöin pystyimme ilmaisemaan paikan koordinaattien avulla. Havainnoidessamme liikettä arkissa tilanteissa kiintopisteeksi valitaan usein jokin *Maapallon pinnan piste*, koska valtavan suuren kappaleena Maa vaikuttaa meistä liikkumattomalta. Näin ei kuitenkaan tarvitse tehdä. Aivan yhtä hyvin kiintopisteeksi voidaan valita jokin *Maan suhteen liukkuva piste*. Erityisesti jos liikumme itse Maan suhteen tai teemme mittauksia liikkuvilla havaintovälineillä, on järkevää valita kiintopisteeksi *havaitsija*. Kuitenkin jos paikkaa mitataan eri kiintopisteiden suhteen, mittaustuloksina saadut koordinaatit ovat luonnollisesti erilaiset. Myös monet muut suureet saavat eri koordinaatistoissa eri arvot, ja tässä luvussa tutkimme, miten havaitsijan liike vaikuttaa hänen tekemiinsä havaintoihin.

Inertiaalikoordinaatistot

Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima on nolla, jatkavuuden lain perusteella kappale liikkuu suoraan vakionopeudella. Toisaalta tällöin myös dynamiikan peruslain (3.3) perusteella kappaleen liikemäärän muutosnopeus on nolla eli liikemäärä on vakio. Jatkavuuden lain voisi siis periaatteessa unohtaa kokonaan, koska se sisältyy jo dynamiikan peruslakiin. Se kuitenkin erotellaan omaksi laikseen kahdesta syystä. Ensinnäkin jatkavuuden lailla on historiallinen merkitys ja sen ymmärtäminen on ensimmäinen askel Newtonilaisen mekaniikan omaksumisessa. Ennen Galilein ja Newtonin tutkimuksia yleisesti vallalla oli *väärä* Aristoteleen näkemys, jonka mukaan kappaleet pysähtyvät itsestään, jos niihin ei vaikuta mitään voimaa. Toiseksi on tilanteita, joissa Newtonin lait näennäisesti eivät pädekkää, ja jatkavuuden laki on yksinkertainen testi näiden tilanteiden tunnistamiseksi.

Jos esimerkiksi olet liikkuvassa autossa, joka yhtäkkiä jarruttaa, auton sisällä näyttää siltä, että tavarat alkavat yhtäkkiä liikkua eteenpäin kiihtyvällä nopeudella vaikkei niihin vaikuta mitään vuorovaikutuksia, kuten kuvassa 6.1 on havainnollistettu. Tämä johtuu siitä, että kappaleet auton sisällä jatkavat suoraviivaista liikettäään jatkavuuden lain mukaisesti ja auto itsessään on kiihtyvässä liikkeessä. Auton mukana liikkuvan havaitsijan mielestä näyttää siltä, että jatkavuuden laki ei päde, vaikka auton ulkopuolella olevan havaitsijan mukaan laki pätee. Samoin myöskaän dynamiikan peruslaki ei auton sisällä näytä pätevän, koska palloon kohdistuva kokonaivoima on nolla, mutta pallon kiihtyvyys ei ole nolla.

Fysiikassa havaintojärjestelmää, jossa jatkavuuden laki pätee, kutsutaan **inertiaalikoordinaatoksi**, ja tällaisessa koordinaatistossa Newtonin lait sekä säilymislait ovat voimassa. Jos jatkavuuden laki ei päde, kuten tässä auton mukana matkustavan havaitsijan mielestä tilanne on, kyseessä on **epäinertiaalikoordinaatisto**.

Ekvivalenssiperiaate

Totesimme jo luvussa 2 mekaanista energiaa määrittellessämme, että massalla on fysiikassa kaksi roolia. Ensinnäkin massa vastustaa esineiden liikkeen muutosta, ja tämä ominaisuus on massan *inertia*. Toiseksi massat vuorovaikuttavat gravitaation välityksellä, mikä havaitaan *painona*. Massan inertia ilmenee esimerkiksi dynamiikan peruslaissa, jonka mukaan kappaleeseen kohdistuva kokonaivoima aiheuttaa massaan kääntäen

verrannollisen kiihtyvyyden. Massan paino puolestaan ilmenee painovoimassa, joka on suoraan verrannollinen massaan.

Jos otamme kaksi kappaletta, voimme mitata niiden inertioiden suhteen törmäyskokeella liikemäären säilymislakiin perustuen. Toisaalta voimme ottaa painovoimaan perustuvan vaa'an, ja mitata kappaletten massojen suhteita sen avulla. Olivatpa kappaletet millaiset tahansa, *kumpikin koe antaa massojen suhteelle saman arvon*. Nämä havainnot tarkoittavat sitä, että kappaletten *inertia ja painava massa ovat samat*. Periaatteessa näin ei tarvitse olla. Voisi aiwan hyvin olla niin, että vaikka kahdelle kappalettelle mitattaisiin vaa'alla sama paino, niillä olisi silti eri kiihtyvyys saman kokonaisvoiman vaikuttaessa niihin. Kokeellisesti kuitenkin tiedetään erittäin tarkasti, että näin ei ole. *Samanpainoiset kappaletet kokevat aina saman kiihtyvyyden, jos niihin vaikuttaa sama kokonaisvoima.*



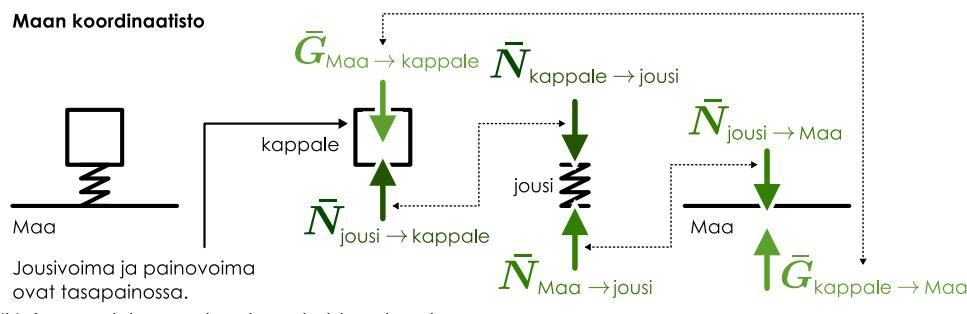
6.1 Oletetaan, että on olemassa oudosta aineesta tehty kappale, jonka inertia on 2 kg mutta sen painava massa on 1 kg. Mikä on kappaleten (a) potentiaalienergia 1 m korkeudella potentiaalienergian nollatasosta? (b) Liike-energia nopeudella 1 m/s? (c) Kiihtyvyys, kun kappaleteeseen kohdistuu 1 N voima? (d) Kuinka suuren nopeuden kappaletta saa, jos se pudotetaan levosta 1 m korkeudelta?

Eräs tapa punnita kappaleten paino on asettaa se jousivaa'alle. Kappaleten ollessa tasapainossa siihen kohdistuva kokonaisvoima on nolla, jolloin jousen täytyy kohdistaa kappaleteeseen sen painon kumoava kosketusvoima. Voiman ja vastavoiman lain mukaisesti kappaletta kohdistaa tällöin jouseen yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen kosketusvoiman, joka puristaa joustaa kokoon. Vaaka toimii yksinkertaisesti mittamaalla jousen pituuden muutoksen.

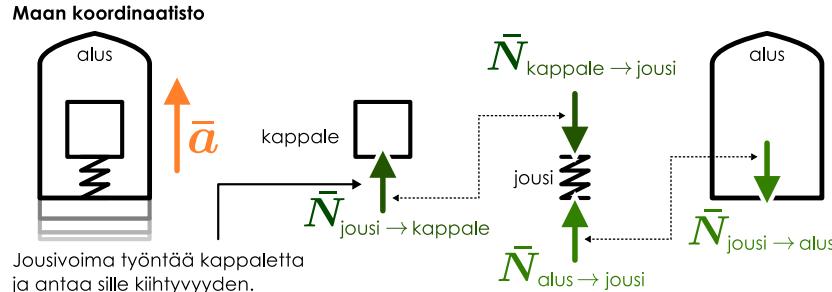
Edellä kuvailtu periaate painon mittamiseksi on esitetty kuvassa 6.2. Kuvassa on esitettynä myös sama koejärjestely avaruusaluksessa, joka liikkuu tasaisella kiihtyvyydellä kaukana avaruudessa. Alus liikkuu alueessa, jossa painovoimakentän voimakkuus on nolla, joten kappaleteeseen *ei kohdistu lainkaan painovoimaa*.

Kuva 6.2: Jousen päällä oleva kappaletta puristaa joustaa. Jos muita havaintoja ei voi tehdä, on mahdotonta tietää johtuuko tämä painovoimasta vai siitä, että koordinaatisto on kiihtyvässä liikkeessä.

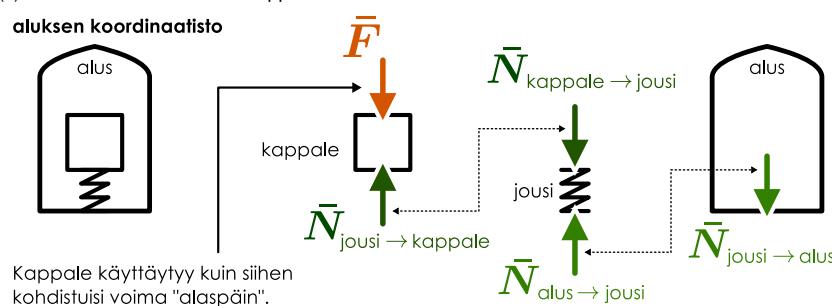
(a) Maassa oleva kappaletta.



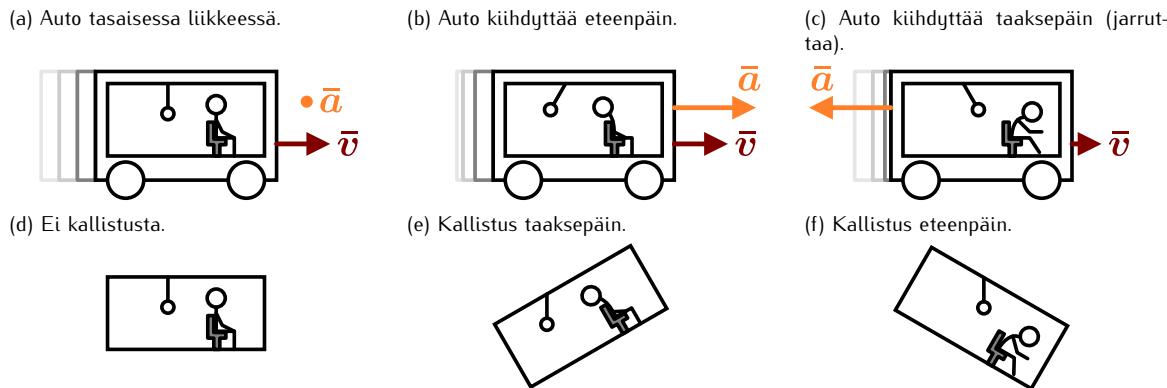
(b) Avaruusaluksessa oleva kappaletta Maan koordinaatistossa.



(c) Avaruusaluksessa oleva kappaletta aluksen koordinaatistossa.



Kuva 6.3: Liikkuvassa autossa tunnetaan kiihtyvyydestä johtuvia näennäisvoimia, jos auto on kiihtyvässä liikkeessä. Näitä näennäisvoimia ei voi erottaa painovoimasta, joten ajoneuvon kiihtyvä liike tuntuu samalta kuin kallistuma.



Kuitenkin koska kappale liikkuu aluksen mukana, se on kiihtyvässä liikkeessä ja siihen täytyy kohdistua nollasta poikkeava kokonaisvoima. Koska kappale vuorovaikuttaa ainoastaan jousen kanssa, jousen täytyy kohdistaa kappaleeseen voima ja niinpä tässäkin tapauksessa jousi puristuu kasaan.

Jos raketin kiihtyvyys on sama kuin putoamiskiihtyvyys Maassa, jousi puristuu kummassakin tapauksessa täsmälleen yhtä paljon, ja tilanne näyttää Maassa olevan havaitsijan näkökulmasta täsmälleen samalta kuin avaruusaluksella matkustavan havaitsijan näkökulmasta. Avaruusaluksessa oleva havaitsija voi toki päätellä olevansa kiihtyvässä liikkeessä mittaamalla oman sijaintinsa muuttumista esimerkiksi tähtien suhteen. Jos havaitsija kuitenkaan ei havainnoin aluksen ympäristöä vaan tarkastelee vain aluksen sisältöä, hän ei voi mitenkään päätellä onko hän painovoimakentässä vai kiihtyvässä liikkeessä. Tämä tulos saadaan käytettiinpä painon mittamiseen *mitä tahansa menetelmää*. Toisin sanoen kiihtyvässä liikkeessä olevassa koordinaatistossa *havaitsija ei voi erottaa oman koordinaatiston tasaisesti kiihtyvää liikettä homogenisesta painovoimakentästä*. Tätä kutsutaan painovoiman ja kiihtyvyyden **ekvivalenssiperiaatteeksi**.

Avaruusaluksessa oleva kappale käyttää yttäytyy avaruusaluksen mukana matkustavan havaitsijan mielestä aivan kuin siihen vaikuttaisi aluksen kiihtyvyyteen nähdyn vastakkaisuuntainen voima, jonka suuruus on verrannollinen kappaleen massaan ja aluksen kiihtyvyyteen. Kyseessä ei kuitenkaan ole todellinen voima vaan **näennäisvoima**, koska sitä ei aiheuta mikään vuorovaikutus vaan havaitsijan koordinaatiston kiihtyvä liike.



6.2 Onko näennäisvoimilla vastavoimaa?

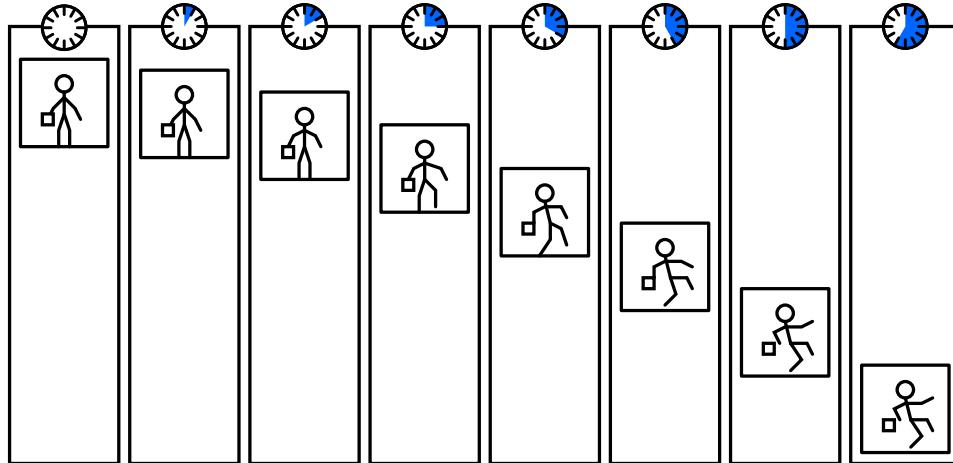
Arkisempi esimerkki samasta ilmiöstä on automatkustajan tuntemat auton liikkeen aiheuttamat näennäisvoimat kuten kuvassa 6.3. Auton liikkuessa vakionopeudella täysin suoraan sekä auto että matkustaja ovat tasaisessa liikkeessä eikä autossa havaita mitään näennäisvoimia. Jos auto ei täriise eikä matkustaja katso ulos, hän ei voi mitenkään *tuntea* liikkuuko auto vai onko se paikoillaan. Autot harvemmin liikkuvat tarpeeksi tasaisesti, jottei mitään liikettä tuntisi, mutta hitaasti liikkuvassa junassa tämän ilmiön voi havaita melko helposti. Jos asemalla lähtöä odottavan junan ikkunasta näkee toisen hitaasti liikkeelle lähevän junan, voi olla vaikea hahmottaa liikkuuko oma vai ikkunasta näkyvä junta.

Sen sijaan auton lisätessä tai vähentäessä vauhtia matkustaja havaitsee näennäisvoimia. Auton kiihdystäässä suurempaan vauhtiin eli kiihtyvyyden osoittaessa *eteenpäin* matkustaja tuntee *taaksepäin* suuntautuvan näennäisvoiman, joka painaa häntä vasten istuimen selkänojaa. Aivan samoin jarruttavan auton kiihtyvyys osoittaa *taaksepäin*, jolloin matkustaja ja kaikki autossa olevat kappaleet kokevat auton koordinaatistossa *eteenpäin* suuntautuvan näennäisvoiman. Tilanne on näissä tapauksissa matkustajan kannalta täsmälleen samalainen kuin jos painovoimalla olisi komponentti auton liikkeen suunnassa taaksepäin tai eteenpäin. Tätä hyödynnetään esimerkiksi lentosimulaattoreissa, joissa kiihtyvyyden tunne tuotetaan simulaattoria kallistamalla. Simulaattorin sisällä oleva "matkustaja" ei erota painovoiman suunnan muutosta ajoneuvon kiihtyvästä liikkeestä.

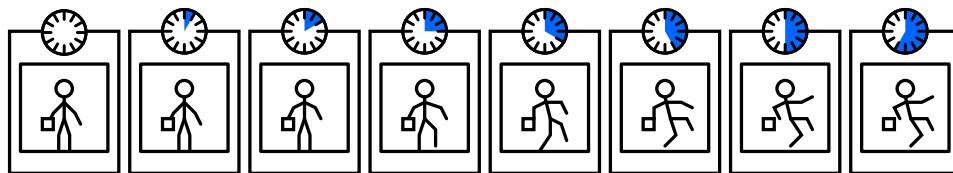
Koska auto on kiihtyvässä liikkeessä myös käännyessään, matkustaja tuntee kääntyvässäkin autossa näennäisvoiman, jota yleisesti kutsutaan keskipakoisvoimaksi. Keskipakoisvoima *ei ole oikea voima* vaan yksinkertaisesti seuraus siitä, että ympyräradalla kulkeva auto on kiihtyvässä liikkeessä *kohti liikeradan piirtämän ympyrän keskustaa*, ja tällöin auton mukana liikkova havaitsija tuntee omassa koordinaatistossaan *poispäin ympyrän keskustasta osoittavan näennäisvoiman*. Keskipakoisvoiman lisäksi pyörivissä koordinaatistoissa kuten Maapallon pinnalla liikkuihin kappaleisiin kohdistuu *Coriolis-näennäisvoima*, joka vaikuttaa esimerkiksi ilmakehän liikkeeseen ja siten sääilmioihin.

Kuva 6.4: Vapaassa pudotuksessa oleva havaitsi ja olevassa painottomassa tilassa.

(a) Kaikki vapaassa pudotuksessa olevat kappaleet liikkuvat samalla kiihtyvyydellä.



(b) Vapaassa pudotuksessa olevassa koordinaatistossa kappaleet havaitaan painottomina.



6.3 Auton sisällä on narulla kiinnitetty helium-ilmapallo. Mihin suuntaan se liikkuu auton lähtiessä liukkeelle ja jarruttaessa?

Ekvivalenssiperiaatteen kannalta *vapaa pudotus* on erityisen mielenkiintoinen tilanne. Vapaassa pudotuksessa olevat kappaleet liikkuvat samalla kiihtyvyydellä, jolloin vapaassa pudotuksessa oleva havaitsi näkee muiden vapaassa pudotuksessa olevien kappaleiden olevan paikoillaan tai liikkuvan tasaisella nopeudella aivan kuin ne leijuisivat. Vapaassa pudotuksessa olevan koordinaatiston kiihtyvyys on \bar{g} , joten kaikki koordinaatiston kappaleet käyttäytyvät ikään kuin niihin vaikuttaisi painovoiman kumoava näennäisvoima $-m\bar{g}$. Nämä havaitsettiin ei ainoastaan *näe* kappaleiden leijuvan vaan hän myös *tuntee* itsensä painottomaksi. Toisin sanoen vapaassa pudotuksessa oleva koordinaatisto on *painottomassa tilassa*.

Tästä ilmiöstä johtuen esimerkiksi Maata kiertävällä avaruusasemalla ei tunneta painovoimaa. Kiertoradalla oleva asema on toki kauempaina maan pinnasta, mistä johtuen Maan painovoimakenttä on asemalla heikompi kuin maanpinnalla. Tämä ero on kuitenkin vain kymmenen prosentin luokkaa. Oleellista on se, että asema on Maata kiertäässään ympyräradalla ja siten jatkuvasti kiihtyvässä lükkeessä kohti Maata. Tämän kiihtyvyden aiheuttaa ainoastaan Maan aseman kohdistama painovoima, joten asema on vapaassa pudotuksessa. Asema ei koskaan osu maahan, koska sen *maanpinnan suuntainen* nopeus on niin suuri — asema putoaa jatkuvasti Maasta ”ohi” — mutta tällainenkin kiertorataliike on vapaata putoamista. Myös kaikki aseman sisällä olevat kappaleet ovat vapaassa pudotuksessa ja niinpä aseman koordinaatistossa ei havaita painovoimaa. Ilmiö on sama kuin kaartavassa autossa, jossa näennäinen keskipakoisvoima vetää matkustajia kohti auton ulkoreunaa. Avaruusasemalla näennäinen keskipakoisvoima osoittaa täsmälleen painovoimaa vastaan ja näennäisesti painovoiman vaikutus kumoutuu.

6.4 Avaruussukkula kiertää maata 300 km korkeudella, jossa putoamiskiihtyvyys on noin 8.9 m/s^2 .

- (a) Jos sukkulan pystysuuntainen nopeus on aluksi nolla, kuinka pitkän pystysuuntaisen matkan sukkula putoaa yhden sekunnin aikana?
- (b) Maapallon säde on 6400 km. Kuinka pitkä matka sukkulan täytyy sekunnissa edetä maanpinnan suunnassa, jotta se olisi sekunnin putoamisen jälkeen edelleen samalla etäisyydellä maanpinnasta?
- (c) Tarkista tulos tasaisen ympyräliikkeen normaalikiihtyvyden lausekkeella.

6.2 Klassinen suhteellisuus

Toistensa suhteen kiihtyvässä liikkeessä olevissa koordinaatistoissa mekanikan lait eivät näennäisesti päde, koska koordinaatistojen kiihtyvyystä johtuen kappaleet käyttäytyvät aivan kuin niihin vaikuttaisi voimia, joita ei tuota mikään vuorovaikutus. Tasaisella nopeudella liikkuvissa *inertiaalikoordinaatistoissa* mekanikan lait pätevät, ja tämän vuoksi juuri tasaisessa liikkeessä olevat koordinaatistot ovat mekanikassa erityisasemassa. Jatkossa tarkastelemmekin ainoastaan *inertiaalikoordinaatistojen*. Lisäksi tasaisella nopeudella liikkuva havaitseja ei voi itse tuntea liikkuvansa, koska tasaisella nopeudella liikkuvassa koordinaatistossa ei havaita näennäisvoimia tai muita poikkeamia mekanikan laeista. Tällä havainnolla on sekä käytännöllistä että teoreettista merkitystä. Joskus fysiikalisia prosesseja on helpompi analysoida tarkastelemalla niitä juuri tietynä koordinaatistossa. Toisaalta jo se, että voimme tarkastella prosesseja useasta näkökulmasta, antaa mahdollisuuden ymmärtää niiden fysiikkaa paremmin.

Vaikka luonnonlait ovat *inertiaalikoordinaatistoissa* samanlaiset, kaikkia ilmiöitä ei havaita eri koordinaatistossa samanlaisina eikä kaikille suureille mitata kaikissa koordinaatistoissa samoja arvoja. Pohdimmekin seuraavaksi, millaisille suureille eri havaitsijat mittaavat eri arvot ja miten eri koordinaatistossa tehdyt mittaukset liittyvät toisiinsa.

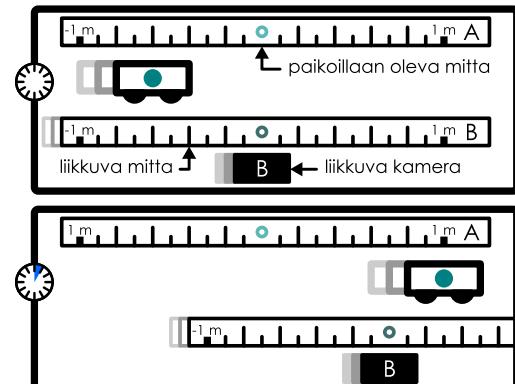
Liikkuvat havaitsejät

Tehdään koe, jossa suoralla radalla liikkuvan vaunun liikettä kuvataan kahdella kameralla. Kuvassa 6.5 (a) on esitetty suoralla vaunun liike Maan suhteen paikoillaan olevan kameran (A) kuvamana. Kuvassa näkyjä myös rataan kiinnitetty pituusmitta (A), jolla vaunun paikka voidaan mitata. Vaunun vieressä on toinen rata, jolla kulkee liikkuvaa kamerasi (B) ja tähän kameraan kiinnitetty toinen pituusmitta (B). Kuvassa 6.5 (b) on esitetty vaunun liike tämän toisen kameran kuvamana, ja koska mitta B liikkuu yhtä nopeasti kuin kamera B, se näyttää pysyvän tämän kameran kuvamana paikoillaan. Kamerat on säädetty niin, että ensimmäinen kuva on otettu juuri silloin kun pituusmitat ovat samassa kohdassa liikkeen suunnassa. Toinen kuva on otettu yhden sekunnin tämän jälkeen. Kummankin kameran ottamat kuvat esittävät näin ollen samaa tilannetta mutta hiukan eri paikoista katsottuna.

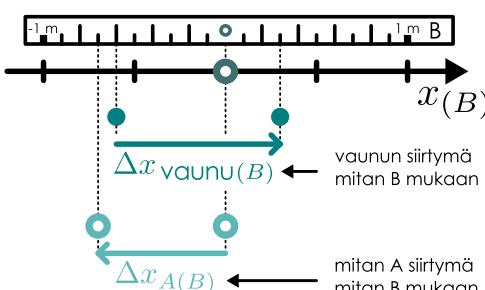
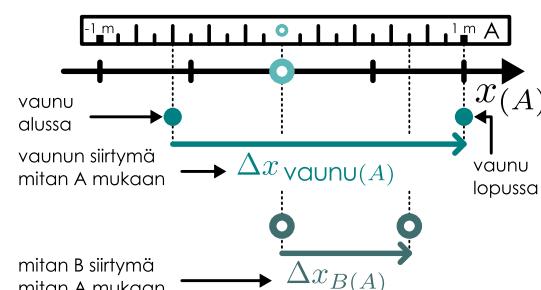
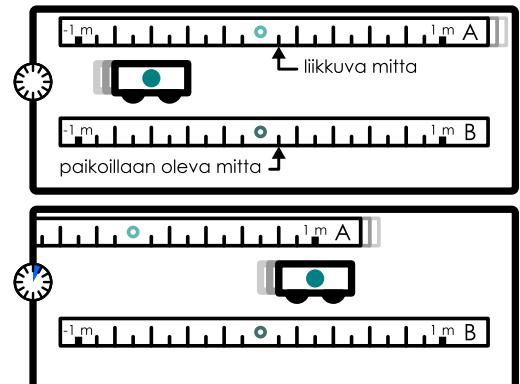
Maan suhteen paikoillaan olevan kameran näkökulmasta mitta A on paikoillaan, joten vaunun paikka kameran suhteen voidaan lukea tästä mitasta. Kutsutaankin jatkossa kameran A näkökulmaa koordinaatistoksi A, ja tässä koordinaatistossa x -koordinaatin määrittelee mitta A. Vastaavasti kameran B näkökulmaa olkoon koordinaatisto B, jossa x -koordinaatin määrittelee mitta B. Merkitään vaunun paikkaa koordinaatistossa A

Kuva 6.5: Yksilotteinen liike kahden toistensa suhteen liikkuvan havaitsejan koordinaatistossa.

(a) Kameran A näkökulma.



(b) Kameran B näkökulma.



$x_{\text{vaunu}(A)}$ ja koordinaatistossa B $x_{\text{vaunu}(B)}$. Merkitään lisäksi *koordinaatiston B origon sijaintia koordinaatiston A origoon nähdyn* $x_{B(A)}$. Tässä siis sulkuihin on merkitty koordinaatisto, jonka suhteen paikkaa mitataan, ja sulkujen edessä on mitattava asia eli tässä tapauksessa vaunun tai koordinaatiston B (origon) paikka. Vastaavasti koordinaatiston A origon paikkakoordinaatti koordinaatistossa B on $x_{A(B)}$.

Valitaan koordinaatiston A origoksi mitan A keskipiste (merkity kuvaan ympyrällä) ja valitaan positiivinen x-akseli kuvassa oikealle. Nämä määritellyssä koordinaatistossa A vaunu on aluksi pisteessä $x_{\text{vaunu}(A)} = -0.6$ m ja sekunnin päästä pisteessä $x_{\text{vaunu}(A)} = 1.0$ m. Vaunu liikkuu siis yhdessä sekunnissa siirtymän $\Delta x_{\text{vaunu}(A)} = 1.6$ m. Vaunun liike on tänä aikana likimain tasaista, joten vaunun nopeus on sama kuin sen keskinopeus, $v_{x,\text{vaunu}(A)} = \Delta x_{\text{vaunu}(A)} / \Delta t = 1.6$ m/s. Liikkuvaan kameran kiinnitettä mittä on saman kuvan perusteella aluksi pisteessä $x_{B(A)} = 0.0$ m ja lopuksi pisteessä $x_{B(A)} = 0.7$ m, joten sen siirtymä on $\Delta x_{B(A)} = 0.7$ m.

Koska liikkuva kamera B kulkee vaunun kanssa samaan suuntaan, tämän kameran näkökulmasta vaunu siirtyy sekunnissa *lyhyemmän* matkan. Vaunu on nimittäin aluksi pisteessä $x_{\text{vaunu}(B)} = -0.6$ m ja sekunnin päästä pisteessä $x_{\text{vaunu}(B)} = 0.3$ m, joten vaunun siirtymä on vain $\Delta x_{\text{vaunu}(B)} = 0.9$ m. Niinpä tämän kameran koordinaatistossa vaunun nopeus on $v_{x,\text{vaunu}(B)} = 0.9$ m/s. Maan suhteen paikoillaan pysyvä mittä puolestaan siirtyy *vasemmalle* eli negatiiviseen suuntaan siirtymän $\Delta x_{A(B)} = -0.7$ m.

Tässä kokeessa vaunulle siis mitataan *eri nopeus* käyttämällä kahta eri mittaa, jotka liikkuvat toistensa suhteen. Maan suhteen paikoillaan pysyvä mittä on tavallinen valinta, mutta ei ole *mitään* syytä miksi liikkuvan mitan antamat tulokset olisivat jotenkin huonommat. Maa on usein luonnollinen valinta siksi, että mikään ihmisten tekemä koe ei voi muuttaa Maan liikettä Maan suuren inertian takia. Niinpä Maa *vaiuttaa* pysyvän aina paikoillaan. Maa on kuitenkin Aurinkoa kiertävä planeetta, joka ei Aurinkokunnan mittakaavassa ole paikoillaan. Myöskaan Aurinko ei ole paikoillaan vaan kiertää Linnunrataa, joka puolestaan liikkuu toisten galaksien suhteen. Maahan kiinnitettä koordinaatisto ei siis ole mitenkään erityinen verrattuna Maan suhteen liikkuvaan koordinaatistoon. Eri koordinaatistoissa mitatut nopeudet ovat kaikki yhtä "oikein". Fysiikassa sanotaan, että nopeus on **suhteellinen** suure, mikä tarkoittaa sen riippuvan havaittajan liikkeestä.

Maan suhteen paikoillaan pysyvä ja liikkuva koordinaatisto ovat siis yhdenvertaisia eli *kumman tahansa* voidaan ajatella olevan paikoillaan ja toisen liikkuvan. Esimerkissä kameran A näkökulmasta kamera B liikkuu ja kameran B näkökulmasta Maa ja sen mukana kamera A liikkuvat, ja kumpikin näkökulma on yhtä hyvä. Voisi silti olla mahdollista, että on olemassa jokin avaruuden rakenteeseen liittyvä absoluuttinen koordinaatisto, jonka suhteen kaikkien muiden koordinaatistojen liikettä tulisi mitata. Vaunujen törmäyskoe ei sitä voi paljastaa, mutta periaatteessa voisi olla olemassa jokin ilmiö, joka käyttäytyisi tässä absoluuttisessa koordinaatistossa eri tavalla kuin muissa, sen suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa. Tätä ajatusta on fysiikassa pohdittu ja testattu sekä kokeellisesti että teoreettisesti, mutta nykyisen käsityksen mukaan *mitään absoluuttista koordinaatista ei ole olemassa*. Universumilla ei ole keskipistettä eikä nopeutta, jonka suhteen kapaleiden liikettä pitäisi mitata. *Kaikki* toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvat koordinaatistot ovat keskenään samanarvoiset, ja niissä havaitaan *täsmälleen samanlaiset fysiikan lait*. Tätä kutsutaan **suhteellisuusperiaatteeksi**. Tämän periaatteen mukaan ei ole olemassa *mitään* fysiikalista koetta, jonka avulla voisi kahdesta tasaisesti kulkevasta koordinaatistosta päättää toisen olevan absoluuttisesti paikoillaan ja toisen liikkuvan, vaan paikoillaan oleminen ja liikkuminen ovat suhteellisia, havaittijasta riippuvia ominaisuuksia.

Galilei-muunnos

Minkä tahansa pisteen paikkakoordinaatti määritellään niin, että koordinaatin arvo on sama kuin koordinaatiaksielun suuntaan kuljettava siirtymä, kun origosta siirrytään tarkasteltavaan paikkaan. Erityisesti koordinaatti on negatiivinen, jos siirtymä tapahtuu negatiiviseen suuntaan. Esimerkiksi vaunun paikkakoordinaatti koordinaatistossa A saadaan mittaamalla siirtymä origosta paikkaan, jossa vaunu on, kuten kuvassa 6.6 on esitetty. Kuitenkin koska yksi siirtymä voidaan aina suorittaa osissa, vaunun koordinaatti koordinaatistossa A voidaan selvittää myös siirtymällä ensin origosta A origoon B ja sitten origosta B vaunuun. Tässä kuitenkin ensimmäinen siirtymä on *origon B koordinaatti A:ssa* ja toinen siirtymä on *vaunun koordinaatti B:ssä*. Niinpä eri koordinaatistoissa mitatuille koordinaateille pätee

$$x_{(A)} = x_{B(A)} + x_{(B)} \quad (6.1)$$

tai toisin päin tästä ratkaisten koordinaatti B:ssä,

$$x_{(B)} = x_{(A)} - x_{B(A)}. \quad (6.2)$$

Sama päätely toimii mille tahansa paikkakoordinaatille, ei vain vaunun paikalle, joten tästä on jätetty alaindeksi "vaunu" pois. Sen sijaan useita koordinaatistoja tarkasteltaessa pitää aina olla huolellinen siitä, minkä koordinaatiston suhteen paikkaa mitataan, joten koordinaatiston määrittelevää indeksiä ei saa unohtaa.

Kuvasta 6.6 huomataan myös, että koordinaatiston B paikka A:n suhteen on yhtä suuri mutta vastakkais-suuntainen kuin koordinaatiston A paikka B:n suhteen, eli

$$x_{B(A)} = -x_{A(B)}. \quad (6.3)$$

Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että jos siirrytään ensin A:sta B:hen ja sitten B:stä takaisin A:han, koko-näissiirtymä on nolla, joten täytyy päteä $x_{B(A)} + x_{A(B)} = 0$ m.

Edellinen päättely toimii aina olivatpa koordinaatistot paikoillaan tai liikkeessä, mutta jos koordinaatistot *liikkuvat toistensa suhteen*, koordinaatistojen välinen siirtymä $x_{B(A)}$ muuttuu ajan kuluessa. Eritäyisesti jos koordinaatistot liikkuvat tasaisella nopeudella toistensa suhteen, on olemassa täsmälleen yksi ajan hetki jolloin niiden origot ovat samassa pisteessä ja niissä mitataan samat x -koordinaatit. Tällöin koordinaatiston B origon paikka koordinaatistossa A on *nolla* eli $x_{B(A)} = 0$ m. Jos ajan nolla-hetkeksi $t = 0$ s valitaan tämä hetki, koordinaatiston B nopeus koordinaatiston A suhteeseen on määritelmiän mukaisesti

$$v_{x,B(A)} = \frac{\Delta x_{B(A)}}{\Delta t} = \frac{x_{B(A)}(t) - x_{B(A)}(0)}{t - 0} = \frac{x_{B(A)}(t)}{t} \quad (6.4)$$

ja tämän perusteella B-origon paikka minä tahansa ajan hetkenä t on

$$x_{B(A)}(t) = v_{x,B(A)}t. \quad (6.5)$$

Näin ollen vaunun paikka koordinaatistoissa A ja B liittyy toisiinsa muunnoksella

$$x_{(B)} = x_{(A)} - v_{x,B(A)}t, \quad (6.6)$$

jos koordinaatistot ovat ajan nollahetkellä samassa paikassa. Sama päättely toimii myös kolmessa ulottuvudessa, jolloin saadaan vektorimuotoinen muunnos

$$\bar{r}_{(B)} = \bar{r}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)}t. \quad (6.7)$$

Tätä kutsutaan **Galilei-muunnokseksi**, ja se kertoo kuinka yhdessä koordinaatistossa mitatusta paikkakoordinaatista voidaan selvittää vastaava paikkakoordinaatti toisessa koordinaatistossa.



6.5 (a) Miten kirjoitetaan Galilei-muunnos koordinaatistossa A mitatulle paikalle käyttäen A:n nopeutta B:n suhteeseen? (b) Miten nopeudet $\bar{v}_{B(A)}$ ja $\bar{v}_{A(B)}$ liittyvät toisiinsa?

Edelleen, koska nopeus määritellään siirtymän Δx ja siihen käytetyn ajan Δt suhteena, Galilei-muunnoksen mukaan nopeuksille pätee

$$v_{x,\text{vaunu}(B)} = \frac{\Delta x_{(B)}}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta t} - v_{x,B(A)} \frac{\Delta t}{\Delta t} = v_{x,(A)} - v_{x,B(A)}. \quad (6.8)$$

Siispä kahdessa eri koordinaatistossa mitattujen *nopeuksien ero on sama kuin koordinaatistojen suhteellinen nopeus*. Sama päättely toimii myös jos siirtymät ovat infinitesimaalisen pienet eli jos siirtymät Δx korvataan paikan differentiaaleilla dx , jolloin samat tulokset saadaan hetkellisille nopeuksille keskinopeuksien sijaan. Päättely toimii myös kolmessa ulottuvuudessa, jolloin skalarikomponenttien sijaan voidaan kirjoittaa vektoreilla

$$\bar{v}_{(B)} = \bar{v}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)}. \quad (6.9)$$

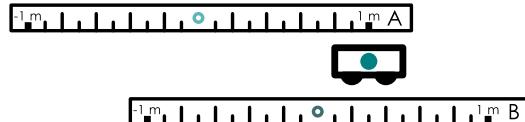


6.6 Tarkista, että edellä johdetut muunno sytälöt pätevät kuvan 6.5 vaunulle mitatuille paikoille ja nopeuksille.

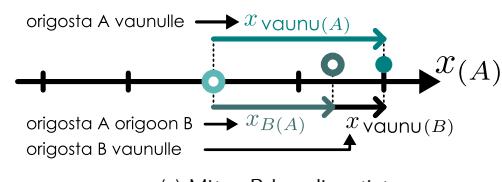
Edellä esitettyä tarkastelua, jossa kappaleelle mitataan eri paikkakoordinaatit ja nopeudet eri koordinaatistoihin kutsutaan **Galilei-suhteellisuudeksi**. Tässä Galilein nimi viittaa siihen, että kyseessä on nimenomaan klassisen fysiikan säätöjä noudattava koordinaatistomuunnos. Osoittautuu nimittäin, että tämä intuitiivisesti varsin ilmeiseltä tuntuva päättely pätee vain koordinaatistojen suhteellisen nopeuden ollessa pieni. Nopeuksien ollessa hyvin suuret Galilei-muunnos ei päde vaan tarvitaan *suhteellisuusteoriaa*, johon tutustumme luvussa 6.4.

Kuva 6.6: Paikan mittaus eri kiintopisteiden suhteeseen.

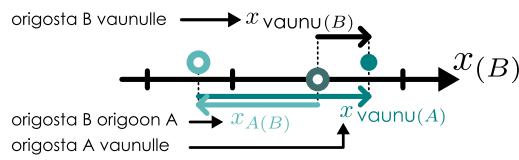
(a) Kappale ja kaksi mittaa.



(b) Mitan A koordinaatisto.



(c) Mitan B koordinaatisto.



esimerkki 6.1

Suhteellinen liike

Juna liikkuu aseman ohitse tasaisella nopeudella 10.0 m/s. Ohittaessaan asemalla olevan kyltin konduktööri on 3.0 m päässä junan keulasta. Konduktööri kulkee tasaisella nopeudella kohti junan perää niin, että 2.5 s päästä hän on etäisyydellä 10.5 m junan keulasta. (a) Mikä on konduktöörin paikkakoordinaatti ja nopeus aluksi ja lopuksi, jos koordinaatiston küntopiste on junan keula ja positiivinen suunta kohti junan kulkusuuntaa? (b) Entä jos koordinaatiston küntopiste on aseman kyltti?

TILANNE Merkitään konduktöörin paikkakoordinaattia ja nopeutta junan keulan suhteen mitattuna $x_{K(J)}$ ja $v_{x,K(J)}$ ja aseman kyltin suhteen mitattuna $x_{K(A)}$ ja $v_{x,K(A)}$. Merkitään junan keulan vastaavia suureita $x_{J(A)}$ ja $v_{x,J(A)}$. Olkoon hetki, jolloin konduktööri on kyltin kohdalla $t_0 = 0.0$ s ja tarkasteluhetki $t_1 = 2.5$ s.

SUUNNITELMA Tässä tarkastellaan kahta toistensa suhteita tasaisella nopeudella liikkuvaa koordinaatistoa (asema ja junan). Koska koordinaatistojen akselit ovat samat, saadaan konduktöörin etäisyys asemasta laskettua määritämällä ensin junan keulan etäisyys asemasta ja vähentämällä konduktöörin etäisyys junan keulasta (koska konduktööri on keulasta nähdyn lähempänä asemaa). Nyt junan koordinaatti on aseman suhteen positiivinen ja konduktöörin koordinaatti junan keulan suhteen negatiivinen. Niinpä konduktöörin paikkakoordinaatti aseman suhteen saadaan laskemalla yhteen junan koordinaatti aseman suhteen ja konduktöörin koordinaatti junan suhteen.

Kun paikat tunnetaan, konduktöörin nopeus saadaan siirtymän ja käytetyn ajan osamääränä, koska nopeus on vakio. Koordinaattien välinen yhteyts on

$$x_{K(A)} = x_{K(J)} + x_{J(A)} \quad (6.10)$$

ja nopeuksien välinen yhteyts on

$$v_{x,K(A)} = v_{x,K(J)} + v_{x,J(A)}. \quad (6.11)$$

RATKAISU (a) Konduktööri on alussa junan keulasta katsoen perään päin eli negatiiviseen suuntaan. Niinpä konduktöörin paikkakoordinaatti junan keulan suhteen mitattuna on aluksi $x_{K(J)}(t_0) = -3.0$ m ja lopuksi $x_{K(J)}(t_1) = -10.5$ m. Konduktöörin nopeus on vakio $v_{x,K(J)} = [x_{K(J)}(t_1) - x_{K(J)}(t_0)]/2.5$ s = -3.0 m/s.

(b) Konduktöörin paikka aseman suhteen on aluksi $x_{K(A)}(t_0) = 0.0$ m, sillä konduktööri on tällöin juuri aseman kyltin kohdalla. Niinpä junan keulan koordinaatti on tällöin $x_{J(A)}(t_0) = x_{K(A)}(t_0) - x_{K(J)}(t_0) = 3.0$ m. Junan siirtymä kahden ja puolen sekunnin aikana on $\Delta x_{J(A)} = v_{x,J(A)}\Delta t = 25.0$ m, joten junan koordinaatti on lopuksi $x_{J(A)}(t_1) = x_{J(A)}(t_0) + \Delta x_{J(A)} = 28.0$ m. Konduktöörin paikka lopuksi on siten $x_{K(A)}(t_1) = x_{K(J)}(t_1) + x_{J(A)}(t_1) = 17.5$ m. Konduktöörin nopeus aseman suhteen on $v_{x,K(A)} = [x_{K(A)}(t_1) - x_{K(A)}(t_0)]/2.5$ s = 7.0 m/s.

ARVIOINTI Konduktöörin nopeus aseman suhteen voidaan laskea myös suoraan summaamalla yhteen konduktöörin nopeus junan suhteen ja junan nopeus aseman suhteen $v_{x,K(A)} = v_{x,K(J)} + v_{x,J(A)} = 7.0$ m/s. Tulos on sama kuin konduktöörin siirtymän kautta laskettu nopeus, kuten pitääkin.



6.7 Selitä omien sanoin mitä tarkoitetaan epäinertiaalisilla ja inertiaalisilla koordinaatistolla. Selitä myös, miksi joillekin suureille mitataan eri koordinaatistoissa eri arvoja.

6.3 Liikemäärän ja energian suhteellisuus

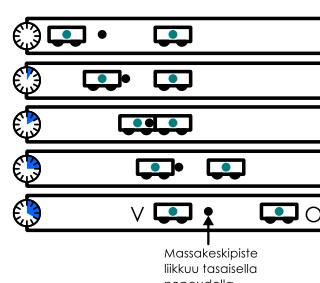
Liikemäärän suhteellisuus

Opimme jo luvussa 2, että energia ja liikemäärä ovat säilyviä suureita, joita ei voi luoda eikä hävittää. Erityisesti eristetysä systeemissä energian määrä on vakio ja systeemissä, johon kohdistuva ulkoinen kokonaisvoima on nolla, liikemäärä on vakio. Oleellista näiden lakienv soveltamisen kannalta oli siis tarkasteltavan *systeemin* luonne. Näitä lakeja esiteltäessä emme kuitenkaan kiinnittäneet erityisesti huomiota siihen, millaisessa *koordinaatistossa* prosesseja tarkastellaan. Nyt onkin aiaka pohtia, muuttuvatko säilymislait jotenkin koordinaatistoa vaihdettaessa.

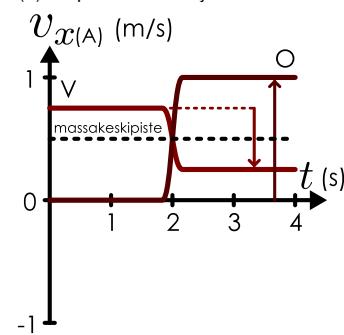
Tutkimme jo aikaisemmin liikemäärän ja energian säilymistä törmäykokeilla, ja teemme niin nytkin. Kuvassa 6.7 on esitetty samaa kahden vaunun törmäys kahdessa eri koordinaatistossa,

Kuva 6.7: Liikkuvien vaunujen törmäys laboratorion koordinaatistossa A.

(a) Liikediagrammi.



(b) Nopeuden kuvaaja.



A ja B. Vaunuja on merkitty kuvassa kirjaimin V (vasen) ja O (oikea), koska kirjaimet A ja B käytettiin jo koordinaatistojen merkitsemiseen.

Koordinaatistossa A vaunu O on aluksi levossa ja vaunu V liikkuu sitä kohti nopeudella $v_{x,V(A),\text{alku}} = 0.75 \text{ m/s}$. Törmäyksessä vaunu V saa impulssin kuvassa vasemmalle eli negatiiviseen suuntaan ja sen nopeus törmäyksen jälkeen on $v_{x,V(A),\text{loppu}} = 0.25 \text{ m/s}$. Vaunun nopeuden muutos on siis $\Delta v_{x,V(A)} = -0.5 \text{ m/s}$. Vaunu O saa törmäyksessä impulssin kuvassa oikealle eli positiiviseen suuntaan, ja sen nopeudeksi tulee törmäyksen jälkeen $v_{x,O(A),\text{loppu}} = 1.0 \text{ m/s}$. Vaunun nopeuden muutos on siten niin ikään $\Delta v_{x,O(A)} = 1.0 \text{ m/s}$. Koska vaunun O nopeuden muutos on itsesarvoltaan kaksinkertainen vaunuun V nähden, vaunun V tätyy siis olla inertialtaan kaksinkertainen O:hon verrattuna.

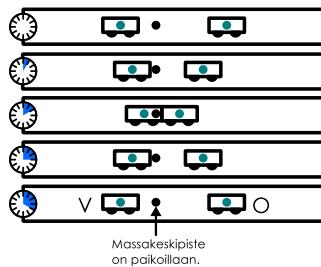
Kuvaan on piirretty myös vaunujen muodostaman systeemin massakeskipiste, joka on lähempänä massiivisempaa vaunua V. Massakeskipiste liikkuu kuvassa oikealle, eli sen nopeuden skalaarikomponentti on positiivinen. Massakeskipisteen nopeus voidaan laskea myös täsmälleen määritelmän (2.89) avulla huomioiden vaunujen inertioiden suhde, $m_V = 2m_O$ ja kokonaismassa $M = m_V + m_O = 3m_O$. Tässä tapauksessa massakeskipisteen nopeudeksi saadaan

$$v_{x,\text{cm}(A)} = \frac{m_V}{M} v_{x,V(A)} + \frac{m_O}{M} v_{x,O(A)} = \frac{2}{3} v_{x,V(A)} + \frac{1}{3} v_{x,O(A)} = 0.5 \text{ m/s}. \quad (6.12)$$

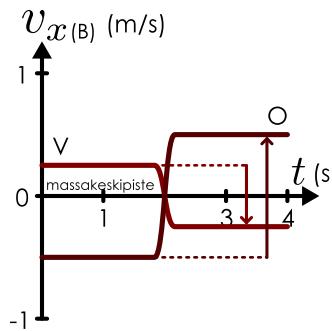
Systeemin kokonaislukemäärä on kokonaismassan ja massakeskipisteen nopeuden tulo, $p_{x,\text{kokonaiss}(A)} = M v_{x,\text{cm}(A)}$, joten koska massakeskipisteen nopeus on positiivinen, systeemillä on myös positiivinen kokonaislukemäärä. Erityisesti systeemin kokonaislukemäärä ei ole nolla. Lisäksi koska vaunuihin kohdistuva ulkoinen kokonaivoima on likimain nolla, systeemin kokonaislukemäärä on vakio ja massakeskipiste liikkuu vakionopeudella. Kummankaan vaunun lukemäärä ei ole erikseen vakio, koska vaunut saavat törmäyksessä impulssin vuorovaikuttaessaan keskenään.

Kuva 6.8: Liikkuvien vaunujen törmäys massakeskipistekoordinaatistossa B.

(a) Liikediagrammi.



(b) Nopeuden kuvaaja.



positiiviseen x -suuntaan (kuva 6.8). Galilei-muunnoksen nopeuksien yhteenlaskusäännön (6.9) perusteella kaikille kappaleille mitatut nopeudet koordinaatistossa B ovat siis siirtyneet tämän verran *negatiiviseen suuntaan* verrattuna koordinaatistoon A. Kappale V siis liikkuu aluksi hitaammin oikealle ja sen liikkeen suunta käännyy törmäyksessä ympäri toisin kuin koordinaatistossa A. Kappale O puolestaan ei ole tässä koordinaatistossa aluksi levossa vaan liikkuu negatiiviseen suuntaan ja tämänkin kappaleen nopeus käännyy törmäyksessä ympäri.

Tämä nopeuksien muutos ilmenee kuvan 6.8 nopeuskuvajassa, joka on täsmälleen samanlainen kuin kuvan 6.7 koordinaatistossa A mitattu kuvaaja paitsi, että kaikki kuvaajat ovat siirtyneet koordinaatistossa B alaspin 0.5 m/s eli koordinaatistojen välisen nopeuden verran. Erityisesti kummankin vaunun alku- ja loppunopeudet muuttuvat koordinaatistomuunnoksessa samalla tavalla, jolloin vaunun V nopeuden *muutos* törmäyksessä on

$$\Delta v_{x,V(B)} = v_{x,V(B),\text{loppu}} - v_{x,V(B),\text{alku}} = (v_{x,V(A),\text{loppu}} - v_{x,B(A)}) - (v_{x,V(A),\text{alku}} - v_{x,B(A)}) = \Delta v_{x,V(A)}. \quad (6.13)$$

Toisin sanoen vaunun V nopeuden *muutokselle* mitataan kummassakin koordinaatistossa sama arvo ja vastaava päättely toimii luonnollisesti myös vaunulle O. Edelleen, koska lukemäärä on verrannollinen kappaleen nopeuteen, kummankin vaunun lukemäären *muutos* on verrannollinen nopeuden muutokseen. Koska jokaisen kappaleen nopeuden muutos on sama kummassakin koordinaatistossa, myös kappaleiden lukemääret muuttuvat kaikissa koordinaatistoissa saman verran. Esimerkiksi vaunun V lukemäären muutos on

$$\Delta p_{x,V(B)} = m_V \Delta v_{x,V(B)} = m_V \Delta v_{x,V(A)} = \Delta p_{x,V(A)} \quad (6.14)$$

ja samoin vaunulle O $\Delta p_{x,O(B)} = \Delta p_{x,O(A)}$. Siispä vaikka systeemin lukemäärelle mitataan koordinaatistossa eri arvot, lukemäären *muutokset* ovat kaikkien havaitsijoiden mittauksissa samat. Erityisesti tässä ta-

Ei ole kuitenkaan mitään syytä, miksi koe pitäisi analysoida juuri siinä koordinaatistossa, jossa rata on paikoillaan. Meidän ei myöskään tarvitse oikeasti havainnoida koetta liikkuvalla kameralla, sillä voimme aina Galilei-muunnoksen avulla määrittää miltä tilanne näyttäisi jos havaitsija liikkuisi. Toisin sanoen tilanne voidaan aina analysoida käyttäen mitä tahansa koordinaatista ja koordinaatistosta toiseen siirtyminen voidaan tehdä *ajatuskokeena*.

Valitaan nyt toiseksi tarkasteltavaksi koordinaatistoksi B sellaisen havaitsijan näkökulma, joka liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $v_{x,B(A)} = 0.5 \text{ m/s}$

pauksessa kokonaisliikemääärän muutos on kaikissa koordinaatistoissa nolla eli systeemin *kokonaisliikemäärä on vakio riippumatta siitä, missä koordinaatistossa sitä mitataan*.

Koordinaatisto B on siten erikoinen, että siinä *massakeskipiste on paikoillaan*. Tämä myös tarkoittaa sitä, että koordinaatistossa B systeemin *kokonaisliikemäärä on nolla*, ja koska systeemissä on vain kaksi kappaletta täytyy kappaleiden liikemäärien olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen. Tämän erikoisomaisuuden vuoksi koordinaatista B kutsutaankin systeemin **massakeskipistekoordinaatistiksi** eli *nollaliikemääräkoordinaatistiksi*.

Koska massakeskipisteen liike ei muutu törmäyksessä, massakeskipiste on tässä koordinaatistossa paikoillaan myös törmäyksen jälkeen. Tämän ominaisuuden vuoksi liikemäären säilymislain soveltaminen törmäysten analysoinnissa on usein erityisen helppoa juuri massakeskipistekoordinaatistossa, koska törmäävien kappaleiden liikemäärien summan täytyy olla törmäyksen jälkeen *nolla*. Usein törmäyksiä tutkittaessa kannattaakin ensin siirtyä törmäävien kappaleiden muodostaman systeemin massakeskipistekoordinaatistoon, analysoida törmäys tässä koordinaatistossa, ja siirtyä sitten takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon.



6.8 (a) Kaksi kappaletta tarttuu törmäyksessä toisiinsa kiinni. Mikä on kappaleiden nopeus törmäyksen jälkeen massakeskipistekoordinaatistossa?

(b) Hiukan hajoaa kahdeksi pienemmäksi hiukkaseksi, joiden massat ovat m_A ja $m_B = 2m_A$. Vertaa syntyvien hiukkasten liikemääriä massakeskipistekoordinaatistossa.

Edellisessä törmäysesimerkissä vaunujen muodostaman systeemin kokonaisliikemäärä oli törmäyksessä vakio kummassakin tarkastellussa koordinaatistossa, sillä systeemiin kohdistuneiden ulkoisten voimien summa oli molemmissa tapauksissa likimain nolla. Kappaleisiin kohdistuva painovoima ja radan niihin kohdistama normaalivoima eivät nimittäin riipu siitä, miten satumme kappaleita katsomaan. Kuitenkin tämän kokonaisliikemääärän arvo on näissä koordinaatistoissa *eri suuri*: koordinaatistossa A kokonaisliikemäärä on *positiivinen* ja koordinaatistossa B se on *nolla*. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että liikemäärä riippuu nopeudesta ja nopeus on suhteellinen suure. Niinpä myös *liikemäärä on suhteellinen suure*.

On toki olemassa myös suureita, joille kaikki havaitsevat samat arvot ja ovat riippumattomia siitä, kuinka niitä tarkastellaan. Esimerkiksi tässä törmäykokeessa on kaikissa koordinaatistoissa *kaksi* vaunua riippumatta siitä kuinka havaitseja liikkuu vaunujen suhteeseen. Tällaisia asioita, jotka havaitaan kaikissa koordinaatistoissa samalla tavalla, kutsutaan **absoluuttisiksi**. Kuten säilyvien suureiden arvot ovat *vakiot* ajan muuttumisen suhteeseen, absoluuttisten suureiden arvot ovat **invariantteja** (engl. invariant, 'muuttumaton') koordinaatiston vaihdon suhteeseen.

Absoluuttisuus on siis suhteellisuuden vastakohta, mutta kyseessä on täysin eri asia kuin suureen säilyvyys. Säilyvän suureen kokonaismäärä ei muutu *ajan kuluessa*, mutta eri havaitijoiden mittaan määritellään tämä kokonaismäärä voi kuitenkin saada eri arvoja. Esimerkiksi törmäyksessä kokonaisliikemäärä on säilyvä suure — sitä ei voi luoda eikä hävittää. Havainto on puolestaan absoluuttinen, jos kaikki havaitsevat sen samalla tavalla, mutta absoluuttisen suureen ei tarvitse olla säilyvä. Esimerkiksi vaunujen lukumäärä on absoluuttinen suure, mutta se ei välttämättä ole säilyvä. Vaunuja voidaan nimittäin hajottaa ja koota, jolloin niiden kokonaismäärä muuttuu eikä kyseessä siis ole säilyvä suure. Kuitenkin jos vaunu hajoaa yhdessä koordinaatistossa, sen täytyy hajota *kaikissa* koordinaatistoissa. Ei ole esimerkiksi mahdollista, että yksi havaitseja näkee vaunun hajoavan törmäyksessä mutta toinen havaitseja ei.



6.9 Törmäävä vaunu hajoaa, jos se kokee törmäyksessä liian suuren voiman. Koordinaatistossa A vaunun nopeus on pieni eikä se hajoa törmäyksessä. Koordinaatisto B liikkuu kuitenkin hyvin nopeasti A:n suhteen, joten tässä koordinaatistossa vaunuilla on hyvin suuri nopeus. Voiko vaunu hajota B:ssä? Mitä voidaan päätellä vaunuun kohdistuvista voimista eri koordinaatistoissa?

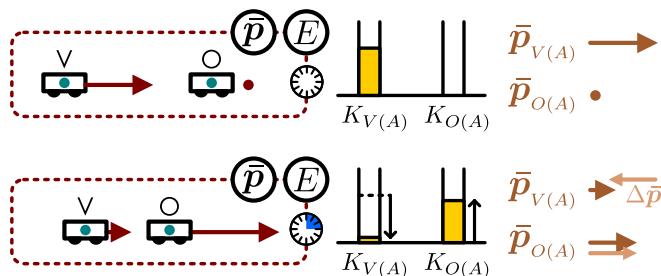
Työn ja energian suhteellisuus

Liikemäärä on siis suhteellinen suure, koska se riippuu kappaleiden nopeudesta ja nopeus on suhteellinen. Myös kappaleiden liike-energia riippuu nopeudesta, joten mitä ilmeisimmin myös energia on suhteellinen suure. Tämä ilmenee kuvasta 6.9, jossa on piirretty edellisen esimerkin vaunujen energidiagrammit: koordinaatistossa A aluksi vaunu V kulkee suurella nopeudella ja lopuksi nopeasti lükkuu vaunu O. Niinpä systeemillä on tässä koordinaatistossa paljon liike-energiaa. Lisäksi koska vaunut törmäävät elastisesti, kokonaisliike-energia on törmäyksessä vakio. Sen sijaan koordinaatistossa B kumpikin vaunu lükkuu melko hitaasti, jolloin liike-energia on pienempi. Tämän voi tarkistaa myös laskemalla. Jos esimerkiksi vaunun V massa on 2 kg ja vaunun O 1 kg (massojen suhde on 2), vaunujen liike-energioiden summa on koordinaatistossa A noin 0.6 J kun taas koordinaatistossa B se on 0.2 J. Systeemin kokonaisenergia on kummassakin koordinaatistossa vakio, koska vaunujen muodostama systeemi on likimain eristetty havaitsejan liikkeestä riippumatta.

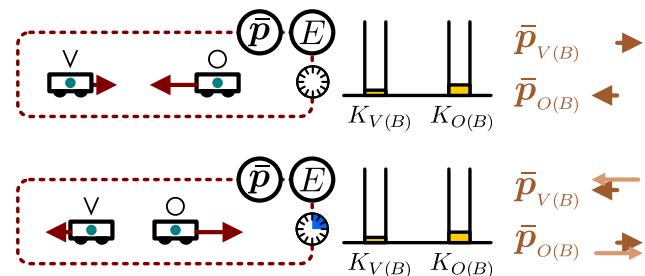
Energiadiagrammista nähdään myös, että vaikka systeemin kokonaisenergia on vakio kummassakin koordinaatistossa, yksittäisten kappaleiden liike-energioiden muutokset ovat *erilaiset* eri koordinaatistoissa. Koordinaatistossa A kappaleen V vauhti pienenee joten myös sen liike-energia vähenee. Samalla aluksi levossa

Kuva 6.9: Säilyvät suuret törmäävien vaunujen muodostamassa systeemissä.

(a) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa A.

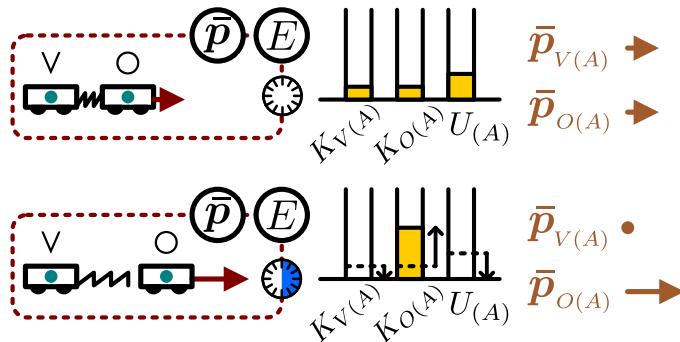


(b) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa B.

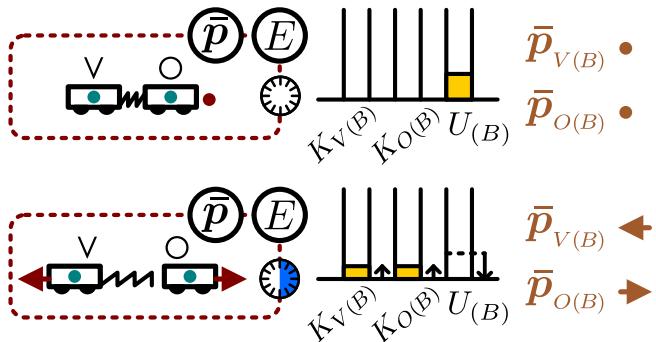


Kuva 6.11: Säilyvät suuret erkanevien vaunujen muodostamassa systeemissä.

(a) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa A.



(b) Systeemin energia ja liikemäärä koordinaatistossa B.



olleen kappaleen O liike-energia lisääntyy. Koordinaatistossa B sen sijaan kummankin kappaleen nopeusvektori käännytettiin mutta kappaleiden vauhdit eivät muutu. Niinpä myöskään kappaleiden liike-energiat eivät muutu lainkaan. Tämä on selkeä ero liikemääärään verrattuna, sillä edellä päätteliin kaikkien havaittijoiden mittauksen kappaleiden liikemääriille samat muutokset. Sen sijaan kunkin yksittäisen kappaleen energian muutos riippuu valitusta koordinaatistosta.



6.10 Tarkista laskemalla, että tässä törmäyskokeessa systeemin kokonaisenergia on kummassakin koordinaatistossa sama ennen törmäystä ja sen jälkeen.

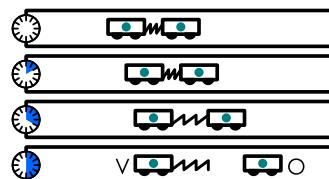
Tarkastellaan toisena esimerkinä identtisiä vaunuja, joiden välillä on puristettu jousi (kuva 6.10). Vaunut on aluksi lukittu yhteen niin, että vaunujen keskinäinen etäisyys pysyy vakiona eikä jousi pääse oikenemaan. Vaunuille annetaan koordinaatistossa A alkunopeus positiiviseen x -suuntaan ja vaunujen liikkuessa niiden välinen lukitus aukaistaan, jolloin jousi työntää vaunut erilleen. Vaunujen alkunopeus oli valittu niin, että vasemmanpuoleinen vaunu V jää jousen vapauduttua paikoilleen. Oikeanpuoleinen vaunu O saa puolestaan lopuksi suuremman vauhdin kuin aluksi.

Jos valitaan systeemiksi vaunut ja jousi, alussa vaunujen liikkuessa yhdessä systeemin massakeskipiste liikkuu vaunujen mukana. Tämä tarkoittaa sitä, että vaunut ovat massakeskipistekoordinaatistossa (B) aluksi levossa. Vapautuva jousi työntää tässä koordinaatistossa vaunut liikkeelle. Tällöin prosessissa kummankin vaunun vauhti kasvaa. Koska tässä kokeessa vaunujen inertia oli yhtä suuri, vaunut saavat liikemäären säilymislain nojalla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen nopeudet.

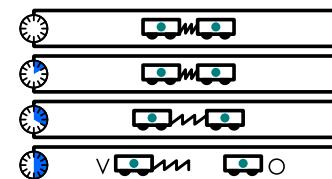
Prosessin energiadiagrammi on piirretty kuvaan 6.11. Jouseen on aluksi varastoitunut potentiaalienergiaa, joka muuttuu prosessissa vaunujen liike-energiaksi, mutta *energian jakautuminen riippuu koordinaatistosta*.

Kuva 6.10: Vaunujen räjähävä erotus.

(a) Koordinaatisto A.



(b) Massakeskipistekoordinaatisto B.



Massakeskipistekoordinaatistossa B systeemi on täysin symmetrinen x -akselin suhteen. Koko koe näyttäisi täsmälleen samalta, vaikka koejärjestely käännettäisiin ympäri, joten ei ole mitään syytä miksi jompikumpi vaunuista saisi enemmän energiaa ja suuremman vauhdin kuin toinen. Niinpä jousen potentiaalienergia siirtyy vaunuille ja jakautuu *tasapainoon* niiden kesken. Tämä päätelmä pätee kuitenkin vain siksi, että vaunut ovat identtiset eikä systeemi aluksi liiku mihinkään suuntaan.



6.11 Millaiset vauhdit vaunut saisivat massakeskipistekoordinaatistossa, jos vaunun V massa olisi kaksinkertainen vaunuun O nähden? Missä suhteessa liike-energia tällöin jakautuisi vaunujen kesken?

Koordinaatistossa A systeemi liikkuu positiiviseen suuntaan, joten tilanne ei ole symmetrinen eikä jousen energia jakaudu vaunuille tasana. Itse asiassa tässä koordinaatistossa kummallakin vaunulla on aluksi liike-energiaa, mutta lopuksi systeemin *kaikki* energia on siirtynyt vaunulle O. Toisin sanoen vaunu O saa prosessissa sekä kaiken jousen energian että myös kaiken vaunulla V alussa olleen liike-energian. Systeemin kokonaisenergia on tässäkin koordinaatistossa vakio, mutta energian jakautuminen tapahtuu eri koordinaatistoissa täysin eri tavoin.

Energia siirtyy vaunujen ja jousen välillä, koska jousivoima tekee vaunuihin työtä. Nämä jousen ja vaunujen väliset voimat on piirretty kuvan 6.12 (a) vapaakappalekuviin. Kuvista on selkeyden vuoksi jätetty pois toisensa kumoavat painovoima ja radan vaunuihin kohdistama normaaliveima. Vaunut puristavat joustaa kokoon ja oietakseen jousen täytyy kohdistaa vaunuihin voimat, jotka työntävät niitä poispäin toisistaan. Jousen vaunuun kohdistama voima riippuu Hooken lain mukaisesti vain jousen puristumasta, ja erityisesti jos jousi on kevyt, se kohdistaa kumpaankin kappaleeseen *yhtä suuren voiman* samalla perusteella kuin kevyen köyden jännitysvoima on köyden kummassakin päässä *yhtä suuri*.

Koska jousivoima riippuu vain jousen pituudesta ja jousen pituus on kaikissa koordinaatistoissa sama, vaunuihin kohdistuvat voimat ovat *samat* kaikissa koordinaatistoissa. Toisin sanoen voima on *absoluuttinen* suure. Tämä pätee itse asiassa kaikille voimille. Päättelimme nimittäin jo aikaisemmin, että kaikki havaitsijat mittaavat samat *liikemäärän muutokset*. Erityisesti jos ajassa dt kappaleen liikemäärän muutos koordinaatistossa A on $dp_{x,(A)}$, sen liikemäärä muuttuu *yhtä paljon* myös koordinaatistossa B. Niinpä kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla dynamikan peruslain perusteella sama kummassakin koordinaatistossa,

$$F_{x,\text{kokonais}(A)} = \frac{dp_{x,(A)}}{dt} = \frac{dp_{x,(B)}}{dt} = F_{x,\text{kokonais}(B)}. \quad (6.15)$$

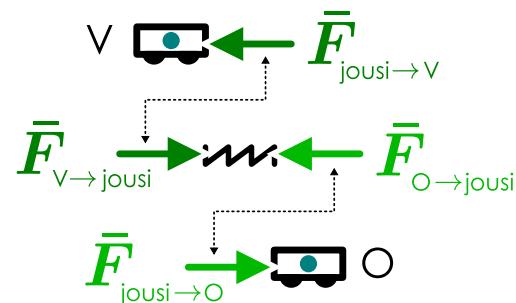


6.12 Onko impulssi suhteellinen vai absoluuttinen suure? Entä jousen potentiaalienergia?

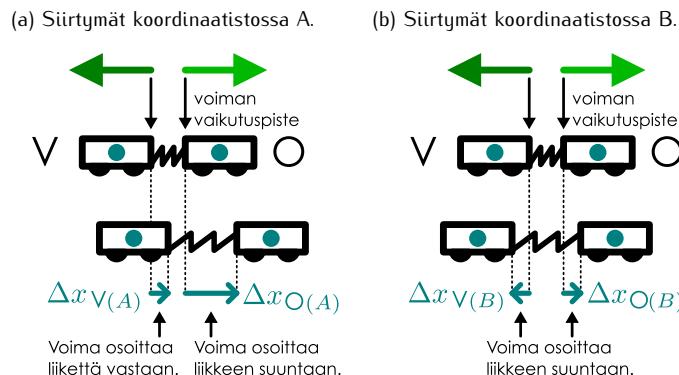
Koordinaatistossa B kumpikin vaunu on aluksi paikoillaan, joten kumpikin vaunu alkaa kulkea siihen suuntaan, johon vaunuun kohdistuva voima osoittaa. Vaunu V liikkuu siis vasemmalle ja vaunu O oikealle, kuten kuvassa 6.12 (c) on kuvattu. Koska vaunuilla on aina *yhtä suuri* vauhti, ne liikkuvat jousen oikenemisen aikana *yhtä pitkän* matkan. Ja koska vaunuihin kohdistuu *yhtä suuret* voimat, jousi tekee niihin kumpaankin *yhtä suuren* työn. Nämä ollen tässä koordinaatistossa B jousi siirtää kummallekin vaunulle *yhtä paljon* energiaa.

Koordinaatistossa A (kuva 6.12 (b)) sen sijaan vaunut liikkuvat aluksi kuvassa oikealle. Vaunu O liikkuu koko ajan oikealle eli samaan suuntaan kuin siihen kohdistuva voima, joten voima tekee siihen positiivisen työn. Koska vaunuilla on koordinaatistossa A suurempi nopeus kuin koordinaatistossa B, vaunu ehtii tässä koordinaatistossa

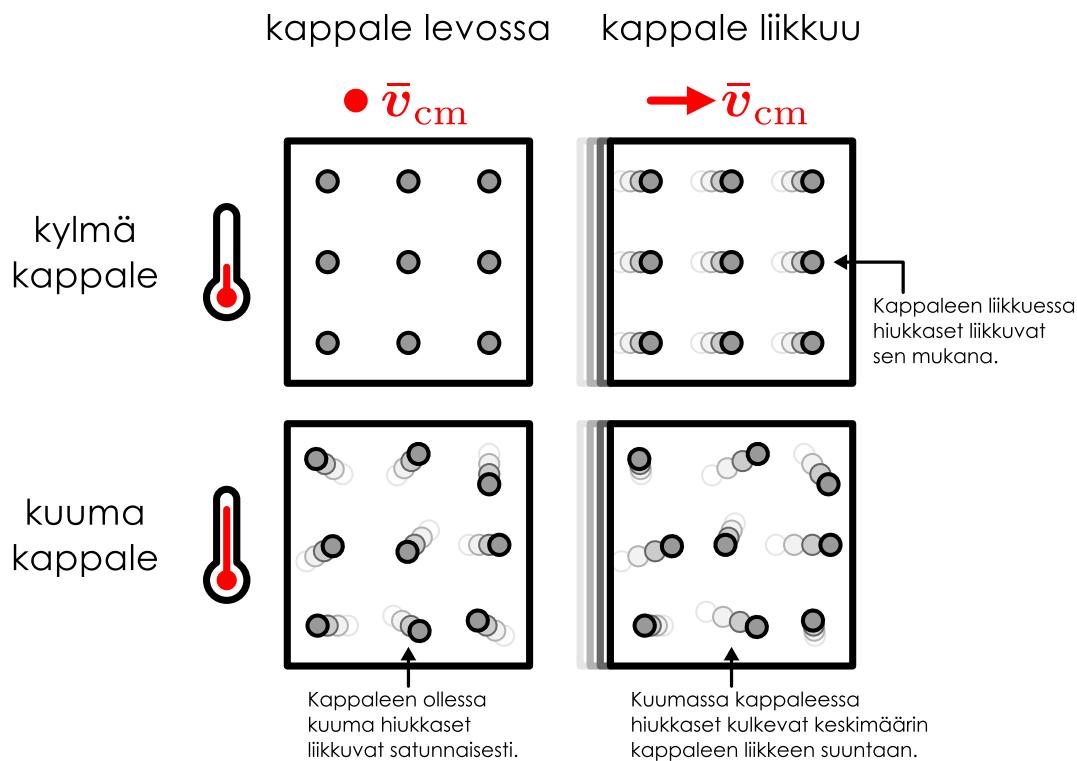
Kuva 6.12: Vaunujen vapaakappalekuvat.



Kuva 6.13: Jousen vaunuihin tekemä työ riippuu vaunujen siirtymästä.



Kuva 6.14: Hiukkasten satunnainen liike ilmenee kappaleen lämpötilana ja niiden järjestäytynyt liike kappaleen liikkeenä. Kappaleen nopeus riippuu koordinaatistosta, mutta kuuman kappaleen hiukkaset liikkuvat satunnaisesti kaikissa koordinaatistoissa.



kulkea *pidemmän matkan* ja voima tekee siihen myös suuremman työn. Niinpä vaunun O lüke-energia kasvaa koordinaatistossa A enemmän kuin koordinaatistossa B. Vaunu V sen sijaan pysähtyy prosessissa, mutta ennen sitä se ehtii siirtyä kuvassa oikealle. Vaunuun kohdistuva voima kuitenkin osoittaa kuvassa vasemmalle eli *vastakkaiseen suuntaan* siirtymään nähdien. Niinpä tämä voima hidastaa vaunun vauhtia ja tekee siihen negatiivisen työn. Vaunun V lüke-energia siis pienenee koordinaatistossa A. Kaikkiaan siis energiaa siirtyy vaunusta V jouseen ja jousesta edelleen vaunuun O. Systeemin kokonaisenergia kuitenkin pysyy vakiona.

Yhteenvetona siis voima ja liikemäären muutokset ovat absoluuttisia eli havaitijasta riippumattomia suureita, vaikka liikemäärä itsessään on suhteellinen. Kuitenkin koska *siirtymä* on suhteellinen suure, voiman ja siirtymän tulo eli *työ*, on myös suhteellinen suure. Tämän takia yksittäisen kappaleen energian muutos on suhteellinen eli eri havaitijat mittavat erilaiset energioiden muutokset. Energia on silti säilyvä suure kaikissa koordinaatistoissa ja jos systeemi on eristetty yhdessä koordinaatistossa se on eristetty myös kaikissa muissakin koordinaatistoissa.



6.13 Olet aluksi paikoillasi Maan suhteen ja lähdet sitten juoksemaan tasaisella nopeudella 5 m/s kohti yliopistoa. (a) Mikä on liike-energiasi omassa koordinaatistossasi aluksi ja lopuksi? (b) Mikä on yliopiston lüke-energia omassa koordinaatistossasi aluksi ja lopuksi? (c) Säilyykö energia koordinaatistossasi?

Sisäenergian absoluuttisuus

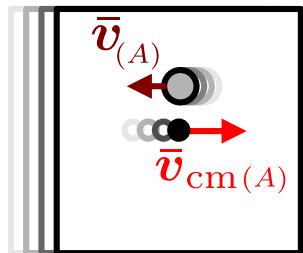
Jouseen varastoitunut potentiaalienergia riippuu ainostaan jousen muodosta, mikä ei riipu koordinaatistosta. Toisin sanoen jos jousta puristetaan tietyllä voimalla yhdessä koordinaatistossa, tämä puristava voima on sama muissakin koordinaatistoissa, ja jousi puristuu kaikkien havaittijoiden mielestä yhtä paljon. Lüke-energia on eri koordinaatistoissa erilainen siksi, että kappaleiden havaitaan liikkuvan eri nopeuksilla, mutta jousi näyttää samalta kaikista havaittijoista.

Monet muutkin kappaleiden ominaisuudet ovat absoluuttisia. Auton polttoainesäiliössä olevan polttoaineen määriä on kaikkien havaittijoiden mielestä sama. Kuuma kappale on kuuma ja kylmä kappale on kylmä kaikkien havaittijoiden mielestä. Samoin jos astiaan laitetaan vettä, sen täytyy olla kaikkien havaittijoiden mielestä samassa olomuodossa — jäähän, vetenä tai kaasuna. Ilmapallon koko riippuu sen sisällä olevasta paineesta, ja koska ilmapallon koko on kaikissa koordinaatistoissa sama, myös paineen täytyy olla sama.

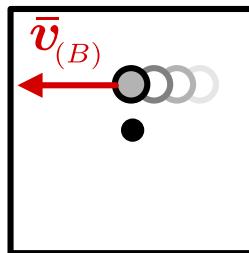
Näissä kaikissa tapauksissa kappaleen *tila* on kaikkien havaittijoiden mielestä sama nopeutta lukuunottamatta. Samoin tilaan liittyvän *sisäenergian* täytyy siis olla absoluuttinen suure. Auton polttoaineeseen on

Kuva 6.15: Kappaleen hiukkisen liike voidaan jakaa kappaleen massakeskipisteen liikkeeseen sekä hiukkisen liikkeeseen massakeskipisteen suhteeseen.

(a) Hiukkisen liike koordinaatistossa A, jossa kappale liikkuu.



(b) Massakeskipistekoordinaatistossa B kappale ei liiku.



(c) Hiukkisen nopeuden jako massakeskipisteen nopeuteen ja nopeuteen massakeskipisteestä.

$$\bar{v}_{(B)} = \bar{v}_{(A)} + \bar{v}_{cm(A)}$$

sitoutunut kemiallista energiota, ja tämän energian määärän täytyy olla kaikissa koordinaatistoissa sama koska polttoaineen määrä on. Lämpötilaan ja aineen olomuodon muutoksiin sitoutuu myös lämpöenergiaa, ja tämän energian määärän täytyy niihin ikään olla absoluuttinen.

Sisäenergialla on useita muotoja, joista yksi on hiukkasten *satunnaisliikkeeseen* sitoutunut liike-energia. Karkeasti ilmaisten mitä nopeammin aineen atomit ja molekyylit liikkuvat ja värihtelevät, sitä enemmän niihin on sitoutunut liike-energiaa ja sitä kuumempaa aine on. Kuitenkin hiukkasten nopeus on suhteellinen suure, minkä pitäisi tämän ajatuksen mukaan vaikuttaa kappaleen havaittuun lämpötilaan. Kylmän kappaleen hiukkaset ovat kappaleen massakeskipistekoordinaatistossa B lähes paikoillaan. Tämän suhteiden nopeudella $\bar{v}_{A(B)}$ liikkuvassa koordinaatistossa A hiukkaset kuitenkin liikkuvat likimain nopeudella $-\bar{v}_{A(B)}$. Kappale kuitenkin havaitaan tässäkin koordinaatistossa yhtä kylmänä! Ainoa ero havainnoissa on se, että koordinaatistossa A kappale *liikkuu*. Mikä tahansa hiukkasten liike *ei* siis ilmene lämpötilana. Koordinaatistossa A kaikki hiukkaset liikkuvat samalla nopeudella, joten tähän liikkeeseen liittyvä energia on *järjestynyttä* liike-energiaa. Lämpöenergia lüitetykin vain hiukkasten *epäjärjestyneeseen* satunnaisliikkeeseen.

Tätä eroa on havainnollistettu kuvassa 6.14, jossa on erotteltu kappaleen makroskooppisesti havaittujen ominaisuuksien, liikkeen ja lämpötilan, ero hiukkasten liikkeen kannalta. Kappale on levossa, jos sen hiukkasten massakeskipiste ei liiku eli jos massakeskipistenopeus on nolla. Tämä on mahdollista jos hiukkaset ovat paikoillaan, jolloin kappale on kylmä, tai jos hiukkaset liikkuvat satunnaisesti vastakkaisiin suuntiin, jolloin kappale on kuuma. On toki vielä mahdollista, että kappale *pyörii* massakeskipisteensä ympäri tai että sen muoto muuttuu, mutta näitä vaihtoehtoja ei ole tässä yksinkertaisuuden vuoksi erikseen käsitelty.

Toisessa koordinaatistossa sama kappale liikkuu. Jos kappale on kylmä, sen hiukkaset liikkuvat tällöin samaan suuntaan, mikä siis ilmenee kappaleen liikkeenä. Jos kappale on kuuma, sen hiukkaset liikkuvat edelleen satunnaisesti kappaleen sisällä sen massakeskipisteen suhteeseen. Kuitenkin tämän lisäksi hiukkaset liikkuvat kollektiivisesti kappaleen mukana. Toisin sanoen tällöin hiukkaset liikkuvat satunnaisesti, mutta niiden satunnaisten nopeuksien massoilla painotettu kesiarvo ei ole nolla kuten kappaleen ollessa levossa. Sen sijaan kappaleen liikkeen suuntaan liikkuu hiukan enemmän hiukkasia hiukan suuremmalla vauhdilla kuin päinvastaiseen suuntaan, jolloin hiukkasten muodostama kappale liikkuu.



6.14 Junassa on jääläpä. Juna on aluksi paikoillaan asemalla ja lähtee sitten liikkeelle. Kuinka junan liikkuminen muuttaa asemalla olevan havaittajan koordinaatistossa jääni (a) molekyylien nopeusvektoreita, (b) molekyylien vauhtea, (c) lämpötilaa, (d) liike-energiaa?

Hiukkasten satunnaista liikkettä ei makroskooppisessa mittakaavassa voi nähdä, joten siihen liittyvä liike-energia on kappaleen *sisäenergiaa*, ja mitä enemmän tähän satunnaisliikkeeseen lüitettiin energiaa, sitä *kuumempaan* kappale makroskooppisesti havaitaan. Hiukkasten kollektiivinen liike sen sijaan nähdään myös makroskooppisesti kappaleen *liikkeenä*, johon lüitettiin mekanista liike-energiaa. Liike-energia on suhteellinen suure, mutta kappaleen lämpötila ei ole, joten hiukkasten satunnaisliikkeen energian pitäisi tämän perusteella olla riippumaton koordinaatistosta. Näin todella on, kuten seuraavaksi osoitetaan.

Olkoon koordinaatisto, jossa kappale liikkuu A, ja kappaleen massakeskipistekoordinaatisto B kuten kuvassa 6.15 on piirretty. Koska koordinaatisto B liikkuu kappaleen mukana, sen nopeus koordinaatiston A suhteeseen on siis sama kuin kappaleen nopeus koordinaatistossa A eli

$$\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{cm(A)}. \quad (6.16)$$

Jos siis yksittäinen hiukkanen liikkuu nopeudella $\bar{v}_{(B)}$ koordinaatistossa B, jossa kappale on levossa, se liikkuu koordinaatistossa A nopeudella

$$\bar{v}_{(A)} = \bar{v}_{(B)} + \bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{(B)} + \bar{v}_{cm(A)}. \quad (6.17)$$

Toisin sanoen hiukkasen nopeus tässä koordinaatistossa saadaan yhdistämällä hiukkasen nopeus *massakeskipisteen suhteeseen* sekä kappaleen makroskooppisesti havaittava massakeskipistenopeus.

Jos kappaleen kaikki hiukkaset luetteloitaan ja merkitään indeksein $i = 1, 2, 3, \dots$, hiukkasten yhteenlaskettu liike-energia koordinaatistossa A on

$$K_{\text{kokonais},(A)} = \frac{1}{2}m_1v_{1(A)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2(A)}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i(A)}^2. \quad (6.18)$$

Nopeuden neliö voidaan kirjoittaa komponentteittain Pythagoraan lauseen avulla muodossa

$$v_{i(A)}^2 = v_{x,i(A)}^2 + v_{y,i(A)}^2 + v_{z,i(A)}^2, \quad (6.19)$$

joten liike-energia voidaan laskea erikseen x -, y - ja z -suunnissa,

$$K_{\text{kokonais},(A)} = \sum_i \frac{1}{2}m_i(v_{x,i(A)}^2 + v_{y,i(A)}^2 + v_{z,i(A)}^2) = K_{x\text{-suunta},(A)} + K_{y\text{-suunta},(A)} + K_{z\text{-suunta},(A)}. \quad (6.20)$$

Jos vielä x -akseli valitaan kappaleen liikkeen suuntaan, hiukkasten nopeuden y - ja z -komponentit ovat *samat* koordinaatistoissa A ja B, ja siten näihin suuntiin liittyvä liike-energia on kummassakin koordinaatistossa yhtä suuri, $K_{y\text{-suunta},(A)} = K_{y\text{-suunta},(B)}$ ja $K_{z\text{-suunta},(A)} = K_{z\text{-suunta},(B)}$. Niinpä voimme rajoittua tarkastelemaan vain x -suuntaisen liikkeen energiaa

$$K_{x\text{-suunta},(A)} = \frac{1}{2}m_1v_{x,1(A)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(A)}^2 + \dots = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{x,i(A)}^2. \quad (6.21)$$



6.15 Hiukkasen (massa 1.0 g) nopeus on koordinaatistossa A $\bar{v}_{(A)} = (100 \text{ m/s})\hat{i} + (100 \text{ m/s})\hat{j}$. Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $\bar{v}_{B(A)} = (10 \text{ m/s})\hat{i}$. Mikä on kummassakin koordinaatistossa hiukkasen (a) nopeuden x - ja y -komponentit, (b) vauhti, (c) x - ja y -suuntaisen liikkeen liike-energia, (d) kokonaisliike-energia?

Koordinaatistossa A mitattu nopeuden neliö voidaan kirjoittaa yhtälön (6.17) perusteella massakeskipisteenopeuden ja massakeskipisteen suhteeseen mitatun nopeuden avulla. Tuloksena saadaan

$$v_{x,i(A)}^2 = (v_{x,i(B)} + v_{cm(A)})^2 = v_{x,i(B)}^2 + 2v_{x,i(B)}v_{cm(A)} + v_{cm(A)}^2. \quad (6.22)$$

Tässä massakeskipisteenopeuden symbolista on jätetty alaindeksi x pois, koska kappale liikkuu positiiviseen x -suuntaan. Tällöin massakeskipisteen nopeuden x -skalaarikomponentti on sama kuin massakeskipisteen nopeuden itseisarvo eli $v_{x,cm(A)} = v_{cm(A)}$. Tämän hajotelman sijoitus hiukkasen i liike-energian lausekkeeseen antaa

$$\frac{1}{2}m_i v_{x,i(A)}^2 = \frac{1}{2}m_i v_{x,i(B)}^2 + m_i v_{x,i(B)} v_{cm(A)} + \frac{1}{2}m_i v_{cm(A)}^2 \quad (6.23)$$

ja hiukkasten yhteenlasketuksi liike-energiaksi tulee

$$\begin{aligned} K_{x\text{-suunta},(A)} &= \left(\frac{1}{2}m_1v_{x,1(B)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(B)}^2 + \dots \right) + \\ &\quad (m_1v_{x,1(B)} + m_2v_{x,2(B)} + \dots) v_{cm(A)} + \\ &\quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \dots) v_{cm(A)}^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Tämän summan ensimmäinen osa on yksinkertaisesti *hiukkasten liike-energia koordinaatistossa B*,

$$K_{x\text{-suunta},(B)} = \left(\frac{1}{2}m_1v_{x,1(B)}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{x,2(B)}^2 + \dots \right) = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{x,i(B)}^2. \quad (6.25)$$

Summan toinen osa puolestaan sisältää hiukkasten *liikemäärien summan koordinaatistossa B* eli kappaleen *kokonaisliikemäärän*. Koordinaatisto B on kuitenkin massakeskipistekoordinaatisto, jossa *kokonaisliikemäärä on nolla*. Niinpä tämän termin täytyy olla nolla,

$$m_1v_{x,1(B)} + m_2v_{x,2(B)} + \dots = p_{x,1(B)} + p_{x,2(B)} \dots = p_{x,\text{kokonais}(B)} = 0. \quad (6.26)$$

Summan viimeinen osa on myös liike-energiaa muistuttava termi, mutta siinä esiintyy kappaleen massakeskipisteen nopeus sekä kaikkien hiukkasten massojen summa. Kuitenkin massakeskipisteen nopeus on sama

asia kuin kappaleen makroskooppinen nopeus ja hiukkasten massojen summa on kappaleen kokonaismassa. Niinpä kyseessä on *kappaleen makroskooppiseen liikkeeseen liittyvä energia koordinaatistossa A*,

$$K_{cm,(A)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + \dots) v_{cm(A)}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm(A)}^2 = \frac{1}{2} M v_{cm(A)}^2. \quad (6.27)$$

Nämä ollen hiukkasten liike-energoiden summa koordinaatistossa A on hiukkasten koordinaatistossa B mitattujen liike-energoiden summan sekä hiukkasten muodostaman kappaleen koordinaatistossa A mitattun makroskooppisen liike-energian summa,

$$K_{x-suunta,(A)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{x,i(B)}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm(A)}^2 = K_{x-suunta,(B)} + K_{cm(A)}. \quad (6.28)$$

Yhdistämällä täähän vielä hiukkasten y - ja z -suuntaisen liikkeen energiat, jotka ovat kummassakin koordinaatistossa samat, voidaan hiukkasten liikkeeseen liittyvä energia erotella kappaleen *mekaaniseksi liike-energiaksi* $K_{(A)} = K_{cm(A)}$ sekä hiukkasten massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan satunnaisliikkeeseen varastoituneeksi epäjärjestyneeksi *sisäenergiaksi*

$$E_{sisä} = K_{x-suunta,(B)} + K_{y-suunta,(B)} + K_{z-suunta,(B)}. \quad (6.29)$$

Hiukkasten liikkeen energia koordinaatistossa A on näillä merkinnöillä siis

$$E_{kokonais,(A)} = K_{(A)} + E_{sisä} \quad (6.30)$$

ja koordinaatistossa B

$$E_{kokonais,(B)} = E_{sisä}. \quad (6.31)$$

Toisin sanoen hiukkasten satunnaisliikkeeseen liittyvä sisäenergia on *sama* kaikissa koordinaatistoissa — se on absoluuttinen suure. Nämä pitääkin olla, koska tämä energia liittyy kappaleen lämpötilaan, joka on absoluuttinen. Hiukkasten liikkeen järjestynyt osuuus ilmenee kappaleen makroskooppisena liikkeenä, ja tämän liikkeen nopeus on suhteellinen suure. Eritysesti massakeskipistekoordinaatistossa kappale on paikoillaan, jolloin kaikki hiukkasten liike-energia on kappaleen sisäenergiaa.



6.16 Systeemin muodostaa kaksi samanlaista hiukasta (massa 1.0 g). Koordinaatistossa A hiukkaset liikkuvat positiiviseen x -suuntaan nopeuksilla $v_{x,1(A)} = 150$ m/s ja $v_{x,2(A)} = 120$ m/s. Systeemin massakeskipistekoordinaatisto on B. Mikä on kummassakin koordinaatistossa (a) hiukkasten kokonaislle-energia, (b) massakeskipisteen liikkeen energia, (c) massakeskipisteen liikkeen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia?

esimerkki 6.2

Lämpöliike

Typikaasun N_2 tiedetään sisältävän huoneenlämmössä noin 230 kJ/kg sisäenergiaa, josta 1/5 on molekyylien x -suuntaisen liikkeen liike-energiaa. Arvioi yhden hiukkasen keskimääräinen x -suuntainen vauhti ja liike-energia.

SUUNNITELMA Merkitään sisäenergiaa $E_{sisä} = M e_{sisä}$, missä M on kaasun massa ja $e_{sisä} = 230$ kJ/kg. Merkitään x -suuntaisen liike-energian osuutta sisäenergiasta $\eta = 1/5$. Typpimolekyylin massa on $m_{N_2} = 2 \cdot 14.01 u = 46.52 \cdot 10^{-27}$ kg. Molekyylin liike-energia riippuu sen massasta, ja samoin kaasun sisältämien molekyylien lukumäärä on kaasun massa jaettuna yhden molekyylin massalla. Molekyyleillä on kaussa eri liike-energioita, mutta merkitään hakasulkeilla yhden molekyylin x -suuntaisen liikkeen liike-energian keskiarvoa $\langle K_{N_2} \rangle$. Tämä saadaan laskemalla kaikkien molekyylien liike-energiat yhteen ja jakamalla molekyylien lukumäärällä.

Kaassussa on $N = M/m_{N_2}$ molekyylia. Yhden molekyylin liike-energia on $K_{N_2,i} = \frac{1}{2} m_{N_2} v_{x,i}^2$ ja molekyylien keskimääräinen liike-energia on

$$\langle K_{N_2} \rangle = \frac{1}{N} (K_{N_2,1} + K_{N_2,2} + K_{N_2,3} + \dots) = \frac{1}{N} \sum_i K_{N_2,i}. \quad (6.32)$$

Toisaalta molekyylien kokonaislle-energia on sisäenergian perusteella $\sum_i K_{N_2,i} = \eta E_{sisä} = \eta M e_{sisä}$.

RATKAISU Keskimääräinen liike-energia on $\langle K_{N_2} \rangle = \frac{1}{N} \eta E_{sisä} = \frac{m_{N_2}}{M} \eta M e_{sisä} = \eta m_{N_2} e_{sisä} = 2.2 \cdot 10^{-21}$ J.

Hiukkasen keskimääräistä vauhtia ei voi näillä tiedoilla laskea, mutta hiukkasen nopeuden neliön keskiarvo sen sijaan ratkeaa. Tämä on

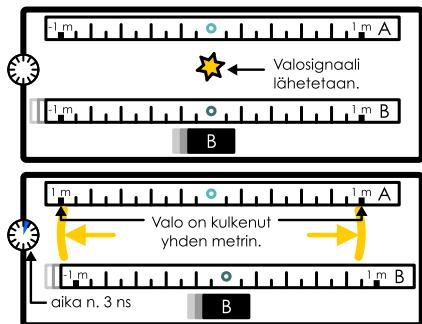
$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{2}{m_{N_2}} \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m_{N_2} v_{x,i}^2 = \frac{2}{m_{N_2}} \frac{1}{N} \sum_i K_{N_2,i} = \frac{2}{m_{N_2}} \langle K_{N_2} \rangle. \quad (6.33)$$

Arvioidaan hiukkasten vauhtia tämän neliöjuurella $\langle |v_x| \rangle \approx \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{m_{N_2}} \langle K_{N_2} \rangle} = \sqrt{2\eta e_{sisä}} = 300$ m/s.

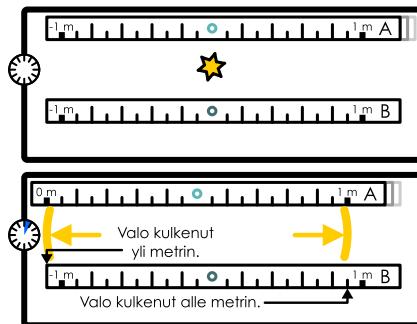
ARVIOINTI Tulos on ehkä yllättäväkin suuri. Se on kuitenkin järkevä, sillä äänen nopeus ilmassa on samaa luokkaa, noin 340 m/s, ja myös ääni kulkee ilman molekyylien yhteisen liikkeen kautta.

Kuva 6.16: Valonnopeuden absoluuttisuus on ristiriidassa Galilei-suhteellisuuden kanssa.

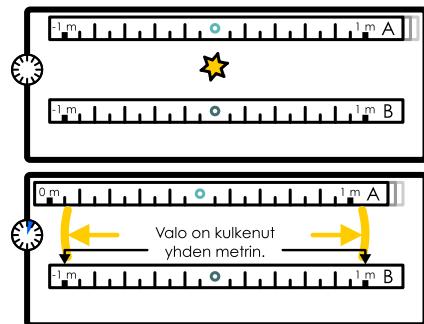
(a) Valo liikkuu koordinaatistossa A yhtä nopeasti kaikkiin suuntiin.



(b) Galilei-suhteellisuuden mukaan valo liikkuu eri suuntiin eri noopeuksilla koordinaatistossa B.



(c) Suhteellisuusteorian mukaan valo liikkuu yhtä nopeasti kaikissa koordinaatistoissa.



EI TAPAHDU

6.4 Suhteellisuusteoria

Valonnopeuden absoluuttisuus

Sähkömagnetismin teorian kehittymisen myötä 1800-luvun lopussa selvisi, että valo on sähkömagneettinen aalto, jonka nopeus tyhjiössä on $c = 299792458 \text{ m/s}$. Nykyisin metri on määritelty valonnopeuden kautta, joten tämä on valonnopeuden *täsmällinen tarkka arvo*. (Yleensä kuitenkin arvio $c \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ on täysin riittävä, ja tällä likiarvolla on helppo laskea.) Valon nopeuden arvo seuraa suoraan sähkömagnetismin peruslauseista, joten tämä nopeus on fundamentali luonnonvakio. Tästä syystä tällä vakion avulla onkin erityinen nimi **valonnopeus** (yhdyssana).

Valon nopeuden mittaaminen on periaatteessa yksinkertaista: lähetämme valosignaalin ja mittaamme kuinka pitkän matkan se kulkee tiettyssä ajassa. Tällöin valon nopeus on valon kulkeman matkan suhde matkan kulkemiseen käytettyyn aikaan. Tällainen mittaus on esitetty kuvassa 6.16 (a), jossa valon havaitaan kulkevan kaikkiin suuntiin yhtä nopeasti. Yhden metrin kulkemiseen valolta kuluu noin 3.3 ns riippumatta siitä mihiin suuntaan valo kulkee.

Kuvassa 6.16 (b) on esitetty sama tilanne toisessa koordinaatistossa B, joka liikkuu A:n suhteeseen positiiviseen x -suuntaan. Jos valo liikkuu koordinaatistossa A vauhdilla $c_{(A)}$ kaikkiin suuntiin, koordinaatistossa B valo ehtii *Galilei-suhteellisuuden mukaan* liikkumaan positiiviseen x -suuntaan hieman lyhyemmän matkan, koska koordinaatisto B "ottaa valoa kiinni". Vastaavasti negatiivisessa x -suunnassa valo kulkee hieman pidemmän matkan, koska valosignaali ja koordinaatisto B liikkuvat vastakkaisiin suuntiin koordinaatistossa A. Siispä koordinaatistossa B valolle pitäisi mitata tämän mukaan eri nopeus tarkastelusuunnasta riippuen. Positiiviseen x -suuntaan kulkevien valonsäteiden pitäisi liikkua tässä koordinaatistossa nopeudella $c_{x,(B)} = c_{(A)} - v_{x,B(A)}$ eli hitaammin kuin $c_{(A)}$, ja vastaavasti negatiiviseen x -suuntaan kulkevien valonsäteiden nopeudeksi pitäisi koordinaatistossa B mitata $c_{x,(B)} = -c_{(A)} - v_{x,B(A)}$ eli näiden valonsäteiden vauhti $|c_{x,(B)}| = c_{(A)} + v_{x,B(A)}$ olisi suurempi kuin $c_{(A)}$.



6.17 Mikä on koordinaatistojen välinen nopeus kuvassa 6.16? Jos Galilei-muunnos olisi oikein, mitä arvoja valonnopeudelle mitattaisiin koordinaatistossa B kuvan (b) mukaan?

Tämä kuitenkin tarkoittaisi, että koordinaatisto A olisi erityisasemassa kaikkiin muihin koordinaatistoihin nähdyn. Valonnopeus olisi kaikissa suunnissa sama *vain* tässä koordinaatistossa ja kaikissa muissa A:n suhteeseen liikkuvissa koordinaatistissa valon havaittaisiin kulkevan johonkin suuntaan nopeammin kuin toisiin. Voitaisiin siis ajatella, että A on absoluuttisesti paikoillaan oleva koordinaatisto ja kaikkien muiden koordinaatistojen liike A:n suhteeseen voitaisiin määrittää mittaamalla valon nopeutta. Tämä kuitenkin rikkoo suhteellisuusperiaatetta, jonka mukaan ei ole olemassa mitään luonnonlakia, joka havaittaisiin toistensa suhteeseen tasaisesti liikkuvissa koordinaatistissa eri tavoin.

On siis kolme vaihtoehtoa: joko suhteellisuusperiaate on väärin, valonnopeus ei olekaan luonnonvakio (jolloin sähkömagnetismin peruslait olisivat väärin) tai Galilei-muunnos on väärin. Kokeellisissa mittauksissa on kuitenkin moneen otteeseen vahvistettu, että *valonnopeudelle mitataan kaikissa koordinaatistoissa sama arvo c kaikissa suunnissa*, kuten kuvassa 6.16 (c). Valonnopeus todella on luonnonvakio ja suhteellisuusperiaate on oikein. Niinpä ainoa vaihtoehto on se, että *Galilei-muunnos on väärin*. Galilei-suhteellisuus toimii erinomaisella tarkkuudella, kun koordinaatistojen suhteelliset nopeudet ovat huomattavasti pienemmät

kuin valonnopeus, joten normaalisti emme huomaa siinä mitään vikaa. Kuitenkin nopeuksien ollessa lähekkäin valonnopeutta koordinaatistojen välisen yhteyden *täytyy* olla erilainen, jotta valonnopeus olisi kaikissa koordinaatistoissa sama.

Tarvittavan koordinaatistomuunnonoksen matematiikan kuvasivat 1800- ja 1900-lukujen vaihteessa mm. Lorentz ja Poincaré, ja tämän kuvauksen viimeisteli fysiikaileksi teoriaksi Einstein *suppeassa suhteellisuusteoriassa*. Nimitys "suppea" viittaa tässä siihen, että on olemassa myös yleinen suhteellisuusteoria. Suppea suhteellisuusteoria käsitlee pääasiassa suhteellisuusperiaatetta ja toistensa suhteen tasaisesti liikkuvia inertialkoordinaatistoja. Yleinen suhteellisuusteoria puolestaan perustuu ekivalenssiperiaatteelle, ja se käsitlee kiintyydyjen ja painovoiman aiheuttamia ilmiöitä. Tässä materiaalissa käsittelemme ainoastaan suppeaa suhteellisuusteoriaa.

Tapahtumat ja mittaaminen

Kuten jo Galilei-muunnoksen yhteydessä huomasimme, monet suureet ovat suhteellisia ja monet absoluuttisia. Nämä prosessien kuvaaminen eri koordinaatistoissa vaatii erityistä huolellisuutta, sillä yhdessä koordinaatistossa tiettyllä tavalla tehty havainto voi olla toisessa koordinaatistossa aivan erilainen. Tarvitsemme siis jonkin yleisen menetelmän monimutkaisten prosessien analysoimiseksi eri koordinaatistoissa. Suhteellisuusteoriassa tämä onnistuu ajattelella prosessien koostuvan **tapahtumista**.

Tapahtumat määritellään suhteellisuusteoriassa asioiksi, joilla on *täsmällinen paikka ja täsmällinen aika*. Esimerkiksi on tapahtuma, että luet juuri tämän lauseen. Voit mitata paikkasi esimerkiksi Maapallon pituus- ja leveyspiirien suhteen ja tarkistaa ajan kellostasi, joka mittaa aikaa yhteisesti sovitun nollahetken suhteen. Siispä sillä, että juuri sinä luit edellisen lauseen ensimmäistä kertaa oli täsmällisesti määriteltäväissä oleva paikka ja aika, ja näinpä se on suhteellisuusteoreettinen tapahtuma. Matemaattisesti kukaan tapahtuma määrittelee siis aika- ja paikkakoordinaatin eli tapahtuma on *xyzt*-koordinaatiston *piste*.

Tapahtumat ovat keskeisessä asemassa siksi, että ne ovat absoluuttisia. Jos esimerkiksi lamppu syttyy tai lasi rikkoutuu yhdessä koordinaatistossa, lampun täytyy syttyä ja lasin rikkoutua myös kaikissa muissakin koordinaatistoissa. Koordinaatiston valinta nimittäin liittyy vain siihen, miten tapahtumia *havainnoidaan*, eikä se vaikuta itse tapahtumiin mitenkään. Nämä koordinaatiston valinta ei voi vaikuttaa tapahtumien toteutumiseen. Yksittäinen tapahtuma ei välittämättä ole vielä kovin kiinnostava, mutta mikä tahansa prosessi voidaan ajatella erilaisten tapahtumien ketjuksi, jossa tapahtumat voivat olla toisten, niitä seuraavien tapahtumien aiheuttajia. Suhteellisuusteoreettisten tarkastelujen lähtökohtana onkin yleensä prosessien jako tapahtumiin, koska jokaisen tapahtuman täytyy varmasti tapahtua kaikissa koordinaatistoissa.

Prosessit voivat todellisuudessa kestää pitkiäkin aikoja ja näihin voi liittyä suuriakin etäisyysjä, mutta suhteellisuusteoriassa puhuttaessa tapahtumasta tarkoitetaan jotakin tiettyä ajan hetkeä ja paikkaa. Esimerkiksi "lamppu palaa" ei ole tapahtuma, koska lamppu voi palaa pitkän ajan. "Lamppu syttyy" ja "lamppu sammuu" kuitenkin ovat tapahtumia, koska syttymisen ja sammumisen voi ajatella ainakin likimain tapahtuvan tietynä ajan hetkenä ja lamppua voi pitää likimain yhdessä paikassa sijaitsevana kappaleena. Nämä prosessit "lamppu palaa" kuvataan suhteellisuusteoriassa tapahtumien "lamppu syttyy" ja "lamppu sammuu" välillä jäävänä jaksona.



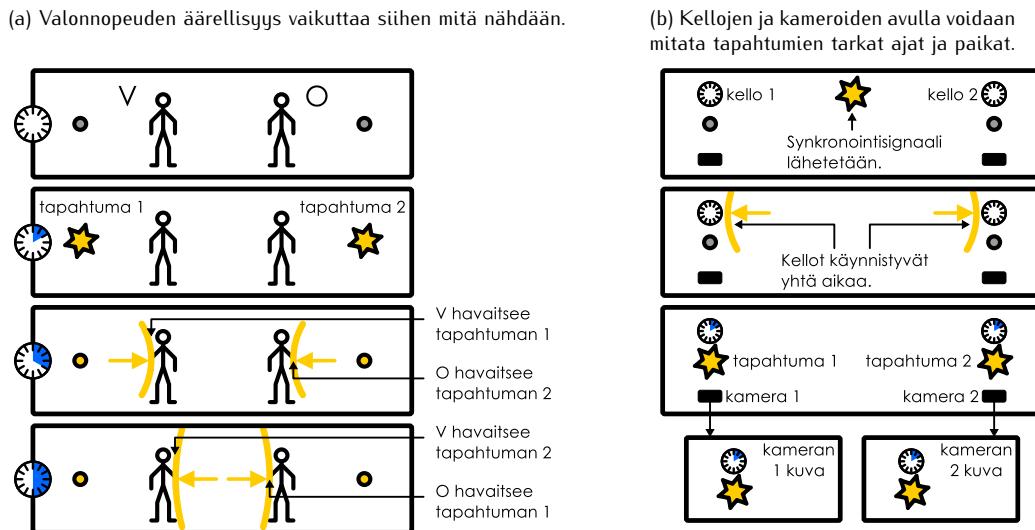
6.18 Heität pallon kymmenen metrin päähän. Millaisia tapahtumia voit määritellä tähän prosessiin liittynä? Jos tapahtuma "pallo on heiton lakipisteessä" valitaan paikan ja ajan nollapisteeksi, x -akseli asetetaan vaakatasoon heiton suuntaan ja y -akseli asetetaan ylöspäin, millaisia paikan ja ajan arvoja liittyy muihin keksimiisi tapahtumiin?

Suhteellisuudesta puhuttaessa usein käytetään ilmaisuja kuten "koordinaatistossa A havaitaan tapahtuma tiettyssä paikassa tiettyyn aikaan". Galilei-suhteellisuuden tapauksessa on melko selvä mitä tämä tarkoittaa, koska havaitseja voi esimerkiksi katsoa ja nähdä tapahtuman. Suhteellisuusteoriassa on kuitenkin syvä määritellä tarkemmin miten aikaa ja paikkaa mitataan, sillä valon äärellinen nopeus on tarkasteluissa keskeisessä asemassa. Jos havaitseminen tapahtuisi vain katselemalla, tieto kaukaisista tapahtumista saavuttaisi havaitsejan vasta valon saapuessa havaitsejan silmiin.

Kuvassa 6.17 (a) on esitetty tilanne, jossa kaksi havaitsejaa, V ja O, ovat paikoillaan samassa koordinaatistossa ja havaitsejoiden sivuilla sytyy samanaikaisesti lamput. Kutsutaan näiden sytymisiä tapahtumiksi 1 ja 2. Kumpikaan havaitseja ei voi vielä tässä vaiheessa tietää lampujen sytyneen, sillä lampuista lähtenyttä valoa ei ole vielä saapunut heidän luokseen. Koska havaitseja V on lähempänä tapahtumaa 1, tältä lähtenyttä valoa saavuttaa hänet ensin ja näinpä tämän havaitsejan näkökulmasta tapahtuma 1 näyttää tapahtuvan ensin. Vastaavasti havaitseja O on lähempänä tapahtumaa 2, joten hänen näkökulmastaan tapahtuma 2 näyttää tapahtuvan ensin. Siiitä huolimatta lamput todellisuudessa sytyvät yhtä aikaa. Valon äärellinen nopeus siis vaikuttaa siihen mitä katselija näkee, mutta nyt *emme tarkastele sitä miltä tilanteet näyttävät vaan sitä mitä todella tapahtuu*. Nämä tapahtumien havainnointi ei voi perustua vain katselemiseen.

Tapahtumien 1 ja 2 ajat voidaan mitata niin, että tuodaan ennen koetta kummankin lampun luo kello ja kamera kuten kuvassa 6.17 (b). Kellot voidaan asettaa samaan aikaan esimerkiksi niin, että mitataan

Kuva 6.17: Jotta valon äärellinen nopeus ei vaikuttaisi mittaustuloksiin, suhteellisuusteoriassa avaruuden ajatellaan olevan täynä mittalaitteita, jotka havainnoivat tapahtumia lähistöltään.



niiden väisen janan keskikohta ja lähetetään siitä valosignaali kohti kumpaakin keloa. Tämä signaali saapuu kummallekin kelolle samaan aikaan, ja jos kellot on asetettu käynnistymään valosignaalin saapuessa, ne näyttävät tämän jälkeen samaa aikaa eli kellot on *synkronoitu*. Tämän jälkeen kumpikin kamera kuvailee sekä vieressään olevaa lamppua etä aikaa näyttääkseen keloa, jolloin lampujen syttymishetket eli tapahtumien 1 ja 2 ajat tallentuvat. Koska kumpikin kamera on aivan lampun vieressä, lampujen syttymiset havaitaan välittömästi eikä valon äärellinen nopeus vaikuta mittauksiin.

Kokeen jälkeen kummankin kameran ottamat kuvat voidaan tarkastaa, jolloin nähdään täsmälleen milloin lamput sytyivät. Tässä tapauksessa kamerat havaitsevat kellojen näyttävän täsmälleen samaa aikaa lamppujen sytyessä, joten tapahtumat 1 ja 2 ovat *samanaikaiset*. Tämä voidaan itse asiassa ottaa samanaikaisuuden määritelmäksi: kaksi tapahtumaa ovat samanaikaiset, jos niiden luona olevat synkronoidut kellot näyttävät tapahtumahetkellä samaa aikaa. Jos kellot näyttävät tapahtumien hetkillä eri aikoja, tapahtumat ovat *eriaikaiset* ja ensin tapahtuu luonnollisesti se tapahtuma, jolle kellon lukema on pienempi.

Periaatteessa samaa ajatusta voidaan käyttää yleisesti ajan ja paikan mittamiseen missä tahansa koordinatistossa. Aluksi koordinatistoon asetetaan säännöllisin välimatkoin kelloja ja kameroita, jotka ovat tässä koordinatistossa paikoillaan. Kellot synkronoidaan niin, että ne kaikki näyttävät samaa aikaa ja jokaiseen kelloon merkitään missä paikassa se on. Kun näin on tehty, kamerat käynnistetään ja jokaisen tapahtuman havaitsee sitä lähin kamera. Myöhemmin kameroiden kuvamateriaali voidaan analysoida, jolloin tapahtuman *paikka* voidaan päättää siitä, mikä kamera tapahtuman havaitsi. Kameran kello puolestaan tallentaa tapahtuman tarkan *ajan*. Nämä voimme myöhemmin varmistaa täsmälleen missä ja milloin mitäkin tapahtuu.

Jos tarkastelemme useita toistensa suhteen liukkuvia koordinaatistoja, edellä kuvattu järjestelmä pitää rakentaa jokaisessa koordinaatistossa erikseen. Mittauksiin tarvitaan siis useita toistensa suhteen liukkuvia kellojen ja kameroiden joukkoja, joista kukaan on paikoillaan yhdessä tarkasteltavista koordinaatistoista. Käytännössä tämä on hyvin hankala, mutta emme nyt olekaan tekemässä oikeita kokeita. Oleellista on se, että voimme ainakin periaatteessa mitata missä tahansa koordinaatistossa minkä tahansa tapahtuman täsmällisen paikan ja ajan. Seuraavaksi tarkasteltavissa ajatuskokeissa oletetaan tällaisen mittauslaitteiston olevan käytössä.

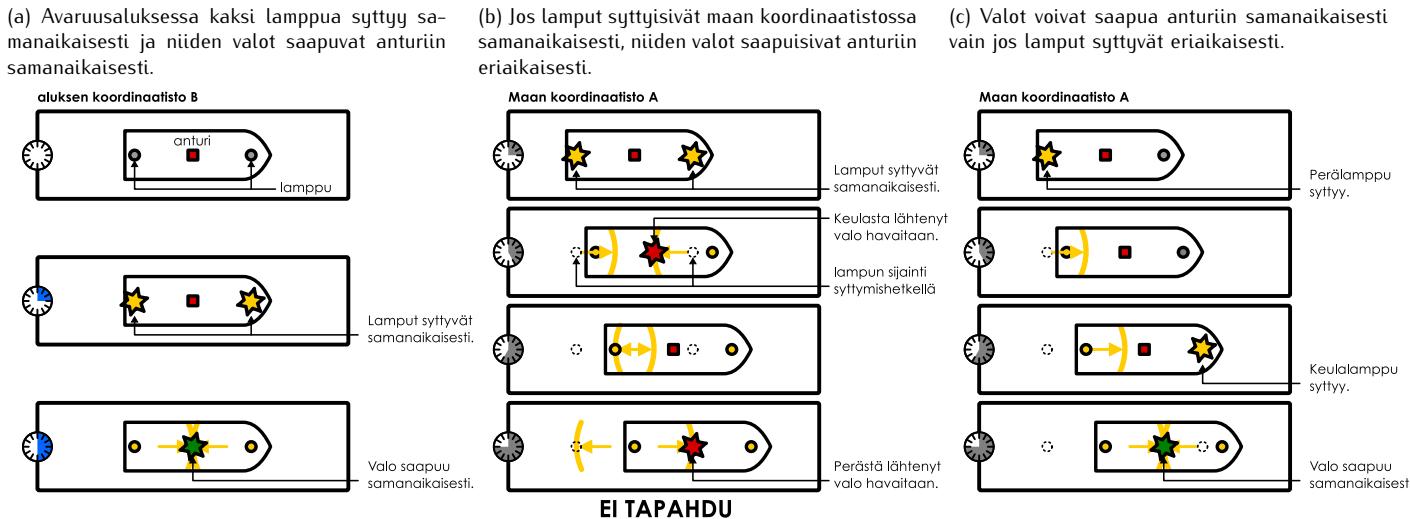
6.19 Asetetaan x -akselille kelloja metrin välein ja säädetään kellot niin, että ne käynnistyvät vastaanottaa-
saan lähetämämme valosignaalin. Signaali lähetetään koordinaatiston origosta, jossa oleva kello näyttää
käynnistyessään täsmälleen ajan hetkeä nolla. Miten muiden kellojen ajat pitää ennen signaalin lähettämis-
tä asettaa, jotta lopputuloksena kaikki kello olisivat täsmälleen samassa ajassa?

Samanaikaisuuden suhteellisuus

Pohditaan seuraavaa ajatuskoetta. Olkoon Maan koordinaatisto A ja Maan suhteenvaihto nopeasti suoraan tasaisella nopeudella liikkuvan avaruusaluksen koordinaatisto B. Aluksen keulassa ja perässä on lamput ja aluksen keskellä yhtä kaukana kummastakin lampusta on valoanturi, joka aktivoituu vain jos siihen saapuu valonsäde yhtä aikaa sekä aluksen keulasta että sen perästä. Toisin sanoen anturi aktivoituu vain jos sekä

SUHTEELLISUUS

Kuva 6.18: Samanaikaisuus on suhteellista. Tapahtumat voivat olla yhdessä koordinaatistossa samanaikaiset ja toisessa eriaikaiset.

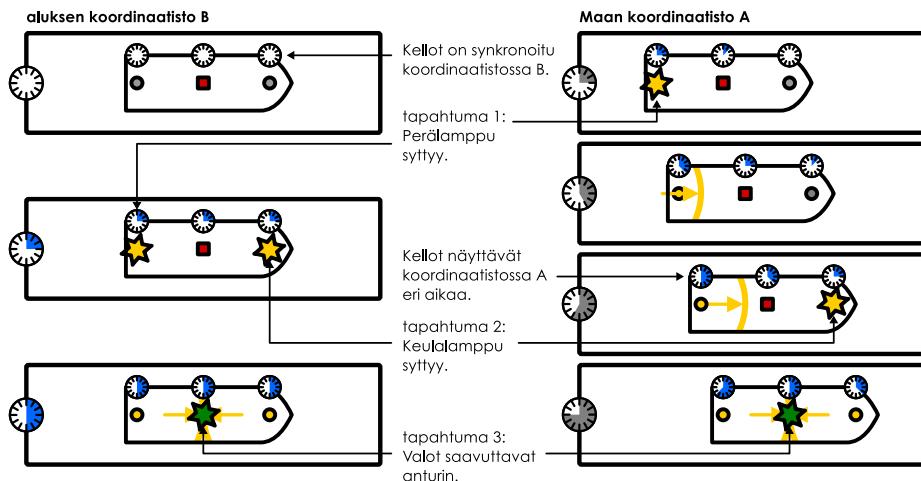


keulan etä perän lampujen lähetämä valo saapuu siihen samanaikaisesti. Jos anturi aktivoituu, se ampuu aluksesta luotaimen kohti Maata.

Avaruusaluksen koordinaatistossa B lamput on säädetty niin, että ne sytytysivät täsmälleen samanaikaisesti kuten kuvassa 6.18 (a). Tässä koordinaatistossa lamput sekä aluksen keskellä oleva anturi ovat paikoillaan, koska kyseessä on juuri aluksen koordinaatisto. Koska kumpikin lamppu on yhtä kaukana anturista ja kummastakin lampusta lähtenyt valonsäde liikkuu yhtä nopeasti, valonnopeudella, valonsäteet saapuvat anturille samanaikaisesti, anturi aktivoituu, ja luotain lähetetään Maahan.

Jos luotain irtoaa aluksesta aluksen koordinaatistossa B, sen *täytyy* varmasti irrota aluksesta myös Maan koordinaatistossa A. Toisaalta koska luotaimen lähetäminen tapahtuu vain, jos avaruusaluksen lampujen lähetämät valonsäteet saavuttavat anturin samanaikaisesti, myös tämän täytyy olla absoluuttista. Siispä valonsäteet saavuttavat anturin samanaikaisesti myös koordinaatistossa A. Näin ei kuitenkaan tapahtuisi *jos lamput sytytysivät samanaikaisesti* koordinaatistossa A, mikä näkyy kuvassa 6.18 (b). Maan koordinaatistossa avaruusalus nimitään lükkiuksi, jolloin sen keskellä oleva anturi lükkiuksi lähtee aluksen keulaa. Koska lampujen lähetämisiltä säteltä kuluu jonkin aikaa ennen kuin ne ehtivät saavuttaa anturin, anturi ehtii siirtyä hiukan lähemmäksi pistettä, jossa keulan lamppu sytytessään oli ja hiukan kauemmaksi pistestä, jossa perän lampaatti sytytessään oli. Kummankin lampun lähetämä valo kulkee samalla vauhdilla, joten tässä tapauksessa *keulasta lähtenyt valo saavuttaisi anturin ensin*. Näin ollen valonsäteet saapuisivat anturiin *eri aikaan*, eikä anturi aktivoituisi. Tämä ei voi olla mahdollista, koska luotaimen lähetämisestä täytyy tapahtua kaikissa

Kuva 6.19: Koordinaatistossa B synkronoidut kellot näyttävät eri aikaa koordinaatistossa A, jossa ne liikkuvat. Liikkeen suunnassa ensimmäisenä kulkevat kellot ovat jäljessä niitä seuraavia kelloja.



koordinaatistoissa, joten *lamput eivät voi sytyä samaan aikaan koordinaatistossa A*.

Tapahtumien oikea järjestys koordinaatistossa A on esitetty kuvassa 6.18 (c). Jotta valonsäteet saavuttaisivat anturin samanaikaisesti myös koordinaatistossa A, jossa alus liikkuu, aluksen perässä olevan lampun täytyy sytyä ensin. Tällöin tämän lampun lähettämällä valolla on *enemmän aikaa* saavuttaa anturi kuin keulan lampusta lähteneellä valolla, ja valonsäteet todella saapuvat anturille yhtä aikaa.

Kuvassa 6.19 on esitetty sama tilanne niin, että alukseen on asetettu lamppujen ja anturin kohtiin synkronoidut kello. Nämä kelloet näyttäävät, millä ajan hetkellä kukaan tapahtuma tapahtuu *aluksen koordinaatistossa*. Lampun sytyminen on tapahtuma, ja voimme havaita sen lampun luo asetettujen kameroiden avulla, jolloin havaitsemme myös lampun vieressä olevan kelon näyttämän ajan lampun sytytessä. Kelon näyttämä ei kuitenkaan voi riippua siitä, miten tapahtuman havaitseva kamera liikkuu — jos lampun sytytymisen kuvaan yksi aluksen suhteeseen paikoillaan oleva kamera sekä toinen Maan suhteeseen paikoillaan oleva kamera, kummankin kameran kuvassa kelon täytyy valon sytytessä näyttää *samaa aikaa*. Erityisesti lamppujen kohdalla elevat kelloet näyttäävät siis myös Maan koordinaatistossa ajan, jolloin lamput sytyvät *aluksen koordinaatistossa*. Kuvassa 6.19 tämä näkyy niin, että lampun luona oleva kello näyttää lampun sytytessä samaa aikaa kummakin koordinaatistossa. Kuitenkin aluksen perässä oleva lamppu sytyy Maan koordinaatistossa ensin, joten perässä oleva kello näyttää aluksessa mitattua lampun sytytymisaikaa ensin. Toisin sanoen Maan koordinaatistossa *aluksen perässä oleva kello on edellä aluksen keulassa olevaa keloa*. Niinpä se, mikä on yksi samanaikainen hetki aluksen koordinaatistossa, ei olekaan Maan koordinaatistossa yksi hetki. Sen sijaan tuon aluksessa koetun hetken tapahtumat ovat levittäytyneet Maan koordinaatistossa pitkälle ajanjaksolle.

Tämä ajatuskoe osoittaa, että *samanaikaisuus on suhteellista*. Valonsäiden saapuminen anturille on samanaikainen tapahtuma kummassakin koordinaatistossa, koska tämä tapahtuu sekä samassa paikassa että samaan aikaan. Sen sijaan lamppujen sytyminen on samanaikainen vain aluksen koordinaatistossa B, ja Maan koordinaatistossa A aluksen perässä oleva lamppu sytyy ennen aluksen keulassa olevaa lampua. Yhdessä koordinaatistossa samaan aikaan mutta eri paikoissa havaittavat tapahtumat voivat tapahtua toisessa koordinaatistossa myös eri aikoihin.



6.20 Käyvätkö aluksen liikkuvat kelloet kuvan 6.19 mukaan Maan koordinaatistossa keskenään yhtä nopeasti? Entä kulkevatko aluksen liikkuvat kelloet kuvassa yhtä nopeasti kuin Maan koordinaatiston oma kello?

Ajan suhteellisuus

Edellä päättiin, että ajan havaitseminen riippuu koordinaatistosta. Edelleen koska ajan mittaaminen vaatii kellojen käytöötä, eri koordinaatistossa havaitaan kellojen toimivan eri tavoilla. Jatketaan siis ajan suhteellisuuden pohdintaa tutkimalla kellojen käyttäytymistä eri koordinaatistossa kuten kuvassa 6.20. Tutkittavat koordinaatistot ovat jälleen Maa (A) sekä Maan suhteeseen liikkuva avaruusalus (B). Maahan on tuotu kello A, joka on siis paikoillaan Maan koordinaatistossa. Toinen kello B on avaruusaluksen kyydissä, joten se liikkuu Maan koordinaatistossa. Sen sijaan avaruusaluksen koordinaatistossa kello B on paikoillaan ja kello A liikkuu.

Käytetään kokeessa kelloja, jotka perustuvat valon kulkuajan mittaamiseen. Kelloissa on lamppu ja valoanturi etäisydellä L toisistaan. Kello toimii niin, että lamppu välähtää ja lähetää valosignaalin kohti anturia, ja anturin havaitessa valon kelon näyttämä siirryy eteenpäin. Jos lampun ja anturin välinen etäisyys on esimerkiksi $L = 3 \text{ m}$, lampun sytytymisen ja valon havaitsemisen välillä kuluu aika $L/c = 10 \text{ ns}$. Tämä on siis kelon mittamaa aikayksikkö.

Anturiin voidaan liittää numeronäyttö tai kellotaulu ja tämä voidaan asettaa päivittymään aina anturin aktivoitumisen. Myös lamppu voidaan kytkeä anturiin niin, että valon havaitseminen saa lampun välähtämään uudelleen. Näin uusi valosignaali lähetetään aina edellisen kuljettua kelon läpi ja kello mittaa aikaa laskemalla kuinka monta kertaa valo on sen läpi kulkenut (eli kuinka monta kertaa anturi on aktivoitunut). Näin mitattu aika voidaan lukea helposti kaikissa koordinaatistoissa kelloon liitetystä näytöstä.



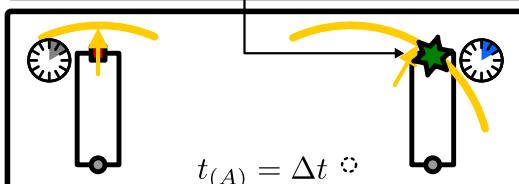
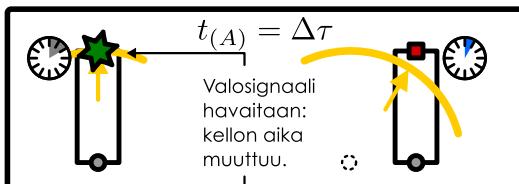
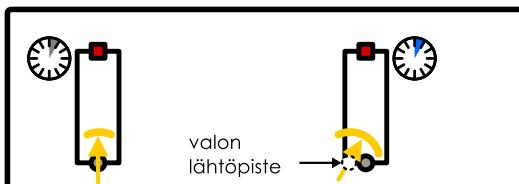
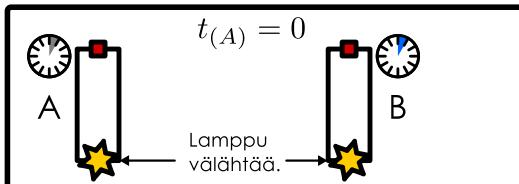
6.21 Jos anturi ja lamppu ovat kelon eri puolilla etäisydellä L toisistaan, voiko anturin aktivoituminen saada lampun välähtämään heti? Jos ei, kuinka pian anturin aktivoitumisen jälkeen lamppu voi aikaisintaan välähtää uudestaan?

Kuvassa 6.20 (a) on esitetty tällaisten kellojen A ja B toiminta Maan koordinaatistossa valosignaalin kulkissa kerran laitteen läpi. Kello A on paikoillaan, joten siinä anturi ei liiku valon kulkissa. Kello B sen sijaan liikkuu, ja erityisesti sen anturi liikkuu valon kulkissa kauemmas pistestä, josta valosignaali lähti liikkeelle. Tällöin saavuttaakseen anturin valo joutuu kulkemaan *pidemmän matkan* kuin kellossa A, ja näin ollen kellolla B kuluu *kauemmin* yhden aikayksikön mittamiseen. Itse asiassa kello B tarvitsee enemmän aikaa jokaisen aikayksikön mittamiseen, joten *liikkova kello B käy hitaammin kuin levossa oleva kello A*. Tätä ilmiötä kutsutaan **aikadilataatioksi** (engl. dilation, 'laajeneminen'), koska liikkuvan kelon aika tavallaan "pitenee".

SUHTEELLISUUS

Kuva 6.20: Kellon voi rakentaa mittamalla aikaa, joka valolta kuluu lampusta anturiin kulkemiseen. Liikkuvassa kellossa valo joutuu kulkemaan pitemmän matkan kuin kellon ollessa levossa, joten liikkuvaa kelloa jätettää.

(a) Levossa olevassa kellossa valo saavuttaa anturin aikaisemmin kuin liikkuvassa kellossa.



(b) Liikkuvassa kellossa valo kulkee viistoon.

Valo liikkuu kaikkiin suuntiin valonnopeudella.

$$\Delta r_{(A)} = c \Delta t$$

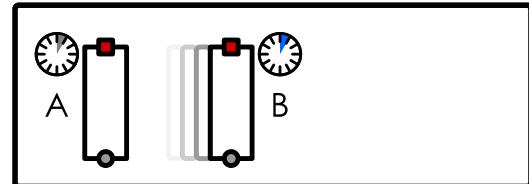
$$\Delta y_{(A)} = c \Delta \tau$$

$$\Delta x_{B(A)} = v_{B(A)} \Delta t$$

Kellon kulkema matka riippuu kellon nopeudesta.

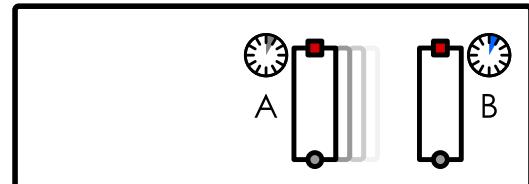
(c) Koordinaatistossa A kello B liikkuu.

Maan koordinaatisto A



(d) Koordinaatistossa B kello A liikkuu.

aluksen koordinaatisto B



6.22 Jos kellon sekuntihiisari siirtyy 1.2 s välein, kuinka pitkän ajan kello mittaa yhdessä minuutissa?

Äkkiseltään tämä voisi ajatella tarkoittavan vain sitä, että kellon liike häiritsee sen toimintaa. Tästä ei kuitenkaan ole kysymys, sillä tämä tulos pätee vain koordinaatistossa A. Koordinaatistossa B kello B on paikoillaan ja kello A liikkuu, joten sama päättely voidaan toistaa tässä koordinaatistossa ja lopputulos on se, että koordinaatistossa B kello A käy hitaammin kuin kello B. Toisin sanoen se, mikä kello käy nopeammin ja mikä hitaammin on suhteellista. Jokaisessa koordinaatistossa nopeiten kävät levossa olevat kellot ja kaikki liikkuvat kellot kävät hitaammin. Se mikä kello on paikoillaan ja mikä liikkuu riippuu kuitenkin koordinaatiston valinnasta.

Mikä sitten on oikea tapa mitata aikaa, jos eri nopeuksilla liikkuvat kellot mittaavat aikaa eri tavoin? Luonnollisin tapa on käyttää koordinaatistossa paikoillaan olevaa keloa. Tavallaan voi ajatella, että koska kello ei liiku, suhteellisuudesta seuraavat ilmiöt eivät muuta sen toimintaa ja näin saadaan mitattua "oikea aika". Suhteellisuusteoriassa paikoillaan olevan kellon mittaamaa aikaa kutsutaankin koordinaatiston **omiaikaksi**.

naisajaksi ja sitä merkitään usein symbolilla τ tavallisen ajan symbolin t sijaan tämän ajan erityisaseman korostamiseksi.

On myös psykologinen syy, miksi juuri paikoillaan olevan kellon aika on hyvä tapa mitata ajan kulumisesta. Nimittäin vaikka tässä tarkasteltiin vain valon kulkuun perustuvaa keloa, *kaikki* liikkuvat kelloit kokevat samanlaisen aikadilataation. Voimme nimittäin kiinnittää mihin tahansa keloon jonkinlaisen osoittimen (esimerkiksi viisarin tai näytön), josta kellon käyminen voidaan lukea. Jos kelloit ovat levossa esimerkiksi Maan koordinaatistossa A, tässä koordinaatistossa niiden viisarit liikkuvat ja näytöt päivittyvät *yhtä usein* ja kelloit käyvät samalla nopeudella. Voimme lisäksi liittää Maan kelloihin merkkivalon, joka syttyy jos kahden kelon näyttämät poikkeavat toisistaan. Jos kelloit toimivat kunnolla, tämä valo *ei syty* Maan koordinaatistossa. Koordinaatistossa B Maassa olevat kelloit liikkuvat ja *ainakin* edellä kuvattu valokello kokee aikadilataation ja käy Maassa hitaammin kuin avaruusaluksen oma kello. Jos nyt jokin toinen Maassa oleva kello kokisi *erilaista* aikadilataation (tai *ei dilataatiota lainkaan*), se kävisi eri nopeudella Maan valokelloon nähden ja merkkivalo *syttysi*. Valon syttyminen on kuitenkin tapahtuma, joten se on absoluuttinen. Niinpä koska valo ei syty Maan koordinaatistossa, se *ei voi* syttää myöskään avaruusaluksen koordinaatistossa. Siispä mikään Maan kelloista ei voi käydä eri nopeudella Maan valokelloon verrattuna.

Kuitenkin *mikä tahansa ajasta riippuva prosessi voi toimia kellona*. Erityisesti *biologiset prosessit* riippuvat ajasta ja tapahtuvat tiettyllä nopeudella, joten myös ne kokevat aikadilataation. Tämä tarkoittaa sitä, että organismien elintoinintojen havaitaan hidastuvan koordinaatistoissa, joissa ne liikkuvat. Myös ihmisten vanhemisen ja ajattelun havaitaan hidastuvan, koska solujen toiminta ja hermoimpulssien kulku hidastuu. Niinpä esimerkiksi avaruusaluksen miehistö toimii Maan koordinaatistossa kuin hidastetussa elokuvassa. Maan koordinaatistossa *kaikki* liikkuvassa avaruusaluksessa tapahtuvat prosessit havaitaan tapahtuvan hitaammin kuin Maassa, joten voidaan aivan hyvin sanoa, että liikkuvassa aluksessa *aika hidastuu*. Avaruusaluksen koordinaatistossa sen sijaan miehistö toimii aivan normaalisti ja Maa liikkuu, joten tässä koordinaatistossa Maassa tapahtuvat prosessit toimivat hitaammin kuin vastaavat prosessit aluksessa. Jokainen on *omassa koordinaatistossaan* paikoillaan, eikä aikadilataatiota siis voi kokea omalla kohdallaan. Kaikki havaittavat kokevat siis omassa koordinaatistossaan kyseisen koordinaatiston *ominaisajan*.

Määritetään vielä kuinka paljon aikadilataatio vaikuttaa liikkuvan kellon käymiseen. Valon kulkema matka kummassakin kellossa on esitetty kuvassa 6.20 (b). Kellossa A lamppu ja anturi ovat paikoillaan ja valo kulkee matkan $L = \Delta y_{(A)}$. Merkitsemällä tähän kuluvalaa aikaa $\Delta\tau$ (tämä kello on paikoillaan, joten se mittaa ominaisaikaa) valon kulkema matka on siis

$$\Delta y_{(A)} = c\Delta\tau. \quad (6.34)$$

Olkoon vastaavasti valosignaalin matka-aika kellossa B Δt . Jos kellon B nopeus on koordinaatistossa A $v_{x,B(A)}$, kello ehtii siirtyä sivusuunnassa (x -suunnassa) valon kulkissa matkan

$$\Delta x_{B(A)} = v_{x,B(A)}\Delta t. \quad (6.35)$$

Pystysuunnassa (y -suunnassa) lampun ja anturin etäisyys on sama kuin kellossa A, $\Delta y_{(A)}$. Niinpä valo joutuu kaikkiaan kulkemaan viistoon matkan, joka on pidempi kuin valon kellossa A kulkema matka. Koska valo kulkee kaikkiin suuntiin valonnopeudella — myös viistoon — tämä matka voidaan ilmaista valonnopeuden ja matkan käytetyn ajan tulona

$$\Delta r = c\Delta t. \quad (6.36)$$

Toisaalta tämän matkan pituuden voi ratkaista kuvioon syntynytä kolmiosta Pythagoraan lauseella, jolloin saadaan

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x_{B(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 = v_{x,B(A)}^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta\tau)^2. \quad (6.37)$$

Saimme siis valon kulkemalle matkalle yhden esitysmuodon (6.36) valonnopeuden absoluuttisuudesta ja toisen muodon (6.37) geometriasta. Yhdistämällä nämä voimme eliminoida yhtälöistä matkan Δr ja ratkaista kellon B aikayksikön Δt ja kellon A aikayksikön $\Delta\tau$ välisen yhteyden. Suora sijoitus antaa

$$c^2(\Delta t)^2 = v_{x,B(A)}^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta\tau)^2, \quad (6.38)$$

ja jakamalla valonnopeuden neliöllä sekä termejä ryhmittelemällä tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}\right)(\Delta t)^2 = (\Delta\tau)^2. \quad (6.39)$$

Kellon B aikayksiköksi (jonka pitää olla positiivinen) ratkeaa tästä

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}}}\Delta\tau. \quad (6.40)$$

Tässä esiintyvää nopeudesta riippuvaa kerrointa kutsutaan **Lorentzin tekijäksi** ja sitä merkitään kreikkalaisella gamma-kirjaimella,

$$\gamma_{B(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2}}}, \quad (6.41)$$

missä $v_{x,B(A)}$ on koordinaatistojen välinen nopeus (eli liikkuvan kellon nopeus). Lorentzin tekijän avulla kellojen aikayksikköjen välinen yhteys voidaan siis kirjoittaa yksinkertaisemmin $\Delta t = \gamma_{B(A)} \Delta \tau$. Jos kallon nopeus on nolla eli kello on paikoillaan, Lorentzin tekijän arvo on yksi. Tällöin kellon mittamaa aika on sama kuin koordinaatiston ominaisaika, kuten pitääkin. Kellon nopeuden kasvaessa tekijä kasvaa yhtä suuremmaksi eli $\Delta t > \Delta \tau$. Liikkuvan kellon näyttämän muuttumista pitää siis *odottaa kauemmin*, eli kello käy hitaasti.

Kellon nopeuden lähestyessä valonnopeutta neliöjuuren alla oleva lauseke lähestyy nollaa ja gamma lähestyy ääretöntä. Toisin sanoen mitä lähempänä valonnopeutta kello B liikkuu, sitä hitaammin se käy. Kellon B:n nopeuden *täytyy* olla pienempi kuin valonnopeus, koska muutoin gamma ei olisi reaaliluku. Tämä johtuu siitä, että jos kello B liikkuisi valonnopeutta nopeammin, valosignaali ei saavuttaisi *koskaan* kellon anturia. Kuitenkin koska signaali saavuttaa anturin koordinaatistossa B, sen *täytyy* saavuttaa anturi kaikissa muisakin koordinaatistoissa. Siispä kello B *ei voi liikkua valoa nopeammin* missään koordinaatistossa — kuten ei mikään muukaan massallinen kappale.



6.23 Mikä on Lorentzin tekijän arvo, kun liikkeen nopeus on (a) 1000 m/s, (b) 10^7 m/s, (c) 10^8 m/s, (d) $2.7 \cdot 10^8$ m/s. Miten tekijä näyttää käyttäytymään nopeuden muuttuessa?

esimerkki 6.3

Aikadilataatio

Koordinaatistossa A on kaksi kelloa. Kello A on paikoillaan ja kello B liikkuu nopeudella $v_{x,B(A)} = 0.6c$. Kuinka paljon aikaa on kulunut kellon B mukaan, kun kellon A mukaan on kulunut täsmälle 1 sekunti?

SUUNNITELMA Liikkuva kello B kokee suhteellisuusteoreettisen aikadilataation, jolloin se käy hitaammin kuin kello A. Sen, kuinka paljon hitaammin kello B käy, kertoo Lorentzin tekijä.

Jos kellosta A kuluu yhden sekunnin mittaamiseen aika $\Delta \tau = 1$ s, kellosta B kuluu yhden sekunnin mittaamiseen tässä koordinaatistossa aika $\Delta t = \gamma \Delta \tau$. Toisin sanoen jos kello B näyttää molemmat tässä koordinaatistossa nollaa samaan aikaan, kello A näyttää jo lukemaan $t_{A(A)} = \Delta t$ kun kello B näyttää vasta aikaa $t_{B(A)} = \Delta \tau$.

RATKAISU Kellojen lukemien suhde on

$$\frac{t_{B(A)}}{t_{A(A)}} = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \frac{\Delta \tau}{\gamma \Delta \tau} = \frac{1}{\gamma}. \quad (6.42)$$

Niinpä kellon B lukema on

$$t_{B(A)} = \frac{1}{\gamma} t_{A(A)}. \quad (6.43)$$

Tässä tapauksessa $\frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2} = 0.36$, joten Lorentz-tekijän suuruus on

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_{x,B(A)}^2}{c^2} \right)^{-1/2} = (0.64)^{-1/2} = 1.25. \quad (6.44)$$

Kellon A näyttäessä yhtä sekuntia kello B näyttää siis aikaa

$$t_{B(A)} = \frac{1}{1.25} 1 \text{ s} = 0.8 \text{ s}. \quad (6.45)$$

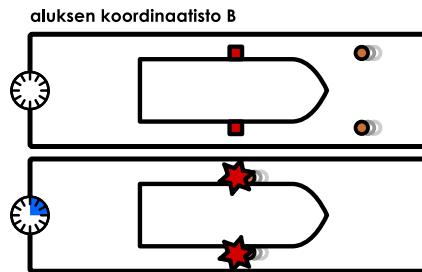
ARVIOINTI Kello B käy hitaammin kuin kello A, kuten pitääkin. Huomaa, että aikadilataation yhtälö (6.40) kertoo kuinka paljon pidempi aika kellosta B kuluu tietyn ajan mittaamiseen. Tämä on *suoraan verrannollinen* Lorentzin tekijään eli kellosta B kestää kauemmin mitata yksi sekunti. Kellon käymisnopeus on *kääntäen verrannollinen* Lorentzin tekijään eli kello B näyttää vähemmän kuin koordinaatistossa A kulunutta ominaisaikaa mittava kello A.

Pituuden suhteellisuus

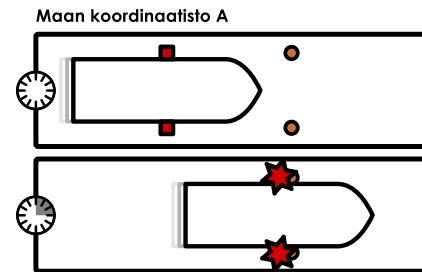
Galilei-suhteellisuus ennustaa siis väärin, että valon nopeus riippuu koordinaatistosta, ja edelliset ajatuskokeet osoittavat, että ainoina tapa korjata tilanne on hylätä ajatus absoluuttisesta ajasta ja hyväksyä ajan olevan suhteellinen suure. Näin siksi, että nopeus mitataan kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhteena, jolloin mitattujen *aikojen* täytyy olla eri koordinaatistoissa erilaiset, jotta *nopeudet* olisivat samat. Toisaalta nopeus riippuu myös kuljetusta matkasta, joten suhteellisuus voi vaikuttaa myös havaittuihin *pituuksiin*.

Kuva 6.21: Avaruusalus lentää kahden Maan koordinaatistossa paikoillaan olevan esteen ohi. Jos aluksen kyljissä olevat ulokkeet osuvat esteisiin aluksen koordinaatistossa, niiden on osuttava esteisiin myös Maan koordinaatistossa.

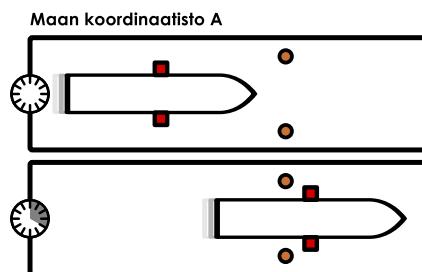
(a) Avaruusaluksen koordinaatistossa esteet liikkuvat ja osuvat aluksen kylkiin.



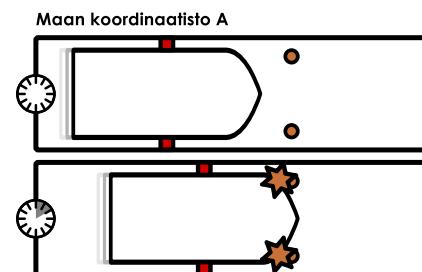
(b) Maan koordinaatistossa alus liikkuu ja sen kyljet osuvat esteisiin.



(c) Jos alus olisi Maan koordinaatistossa kapeampi, se ei osuisi esteisiin.



(d) Jos alus olisi Maan koordinaatistossa leveämpi, sen keula osuisi esteisiin.



EI TAPAHDU

EI TAPAHDU

Tarkastellaan ensin seuraavaa kuvassa 6.21 esitettäjä ajauskoetta: Avaruusalus lentää kahden Maan koordinaatistossa paikoillaan olevan esteen välistä. Aluksen kyljissä on ulokkeet, joiden välinen etäisyys on täsmällen sama kuin esteiden välinen etäisyys ja niinpä ulokkeet ja esteet osuvat toisiinsa. Törmäysten täytyy tapahtua myös Maan koordinaatistossa, joten aluksen leveyden täytyy olla myös Maan koordinaatistossa sama kuin esteiden välisen etäisyyden. Jos aluksen leveys olisi Maan koordinaatistossa pienempi, alus lentäisi esteiden välistä, ja jos leveys olisi suurempi, esteet törmäisivät jo aluksen keulaan. Siispä toistensa suhteeseen liikkuvissa koordinaatistoissa mitataan samat etäisydet *koordinaatistojen liikkeeseen nähdyn kohtisuorassa suunnassa*.

Tässä kokeessa pituus mitattiin vertaamalla tunnetun matkan pituuteen (esteiden välineen etäisyyteen) eli periaatteessa käyttämällä pituusmittaa. Saman periaatteeen käyttäminen liikkuvien kappaleiden lükkeen suunnassa on kuitenkin hankalaa, joten mitataan avaruusaluksen pituus käyttämällä aluksen nopeuteen perustuvaa menetelmää, joka on esitetty kuvassa 6.22. Maahan asennetaan Maan koordinaatistossa paikoillaan pysyvä mittausasema ja aluksen keulaan sekä perään asennetaan tunnistimet. Sitten aluksen annetaan lentää mittausaseman ohitse, jolloin asema rekisteröi ajat, jolloin aluksen keula ja perä ohittavat sen. Nämä ohitusprosessin määrittelee kaksi tapahtumaa: (1) aluksen keula ohittaa mittauspisteen ja (2) aluksen perä ohittaa mittausaseman. Ohitukseen kuluva aika on näiden tapahtumien välinen aikaero,

$$\Delta\tau = \tau_{\text{perä}} - \tau_{\text{keula}}. \quad (6.46)$$

Toisaalta ohitukseen kuluva aika on sitä pidempi mitä pidempi alus on ja sitä lyhyempi mitä nopeammin alus kulkee. Jos aluksen pituus on L ja vauhti $v = v_{x,B(A)}$, ohitukseen kuluva aika on

$$\Delta\tau = \frac{L}{v}. \quad (6.47)$$

Tässä käytetään nimenomaan koordinaatiston todellista aikaa eli ominaisaikaa, koska nopeus määritellään aluksen kulman matkan ja koordinaatistossa todellisuudessa kuluneen ajan suhteena. Niinpä ajan mittauksessa täytyy käyttää aina koordinaatistossa levossa olevaa keloa. Tämä mittausperiaate toimii *missä tahansa koordinaatistossa*, kunhan kaikki suuret ovat kyseisessä koordinaatistossa mitattuja suureita.

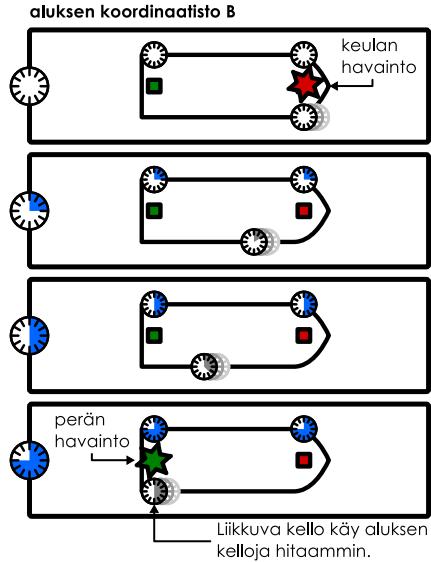


6.24 Jos kuvan 6.20 (a) tilanteessa käytettäisiin ajan mittamiseen liikkuvaa kelloa B, millainen arvo saataisiin valonnopeudelle, kun valon kulman matkan pituus jaetaan tämän kelon mittamaalla ajalla?

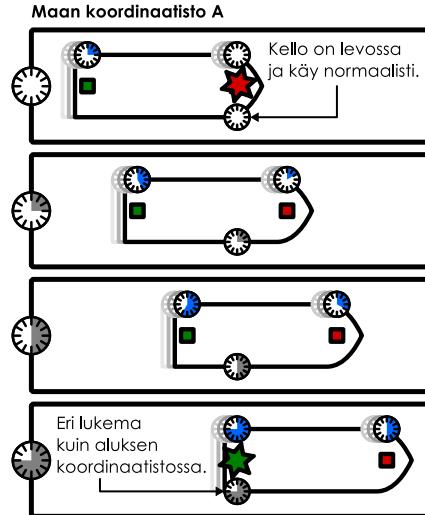
Jos alus liikkuu Maan koordinaatistossa nopeudella $v_{x,B(A)}$, mittauspiste liikkuu aluksen koordinaatistossa yhtä suurella mutta vastakkaisuuntaisella nopeudella $v_{x,A(B)} = -v_{x,B(A)}$, ja voimme merkitä tätä vauhtia

Kuva 6.22: Avaruusaluksen pituus voidaan mitata Maan koordinaatistossa kiinnittämällä havaintopiste ja mittamalla milloin aluksen keula ja perä havaitaan tässä pisteessä. Mitä pidempi kappale on, sitä pidempi aika alukselta kuluu havaintopisteeseen ohitukseen.

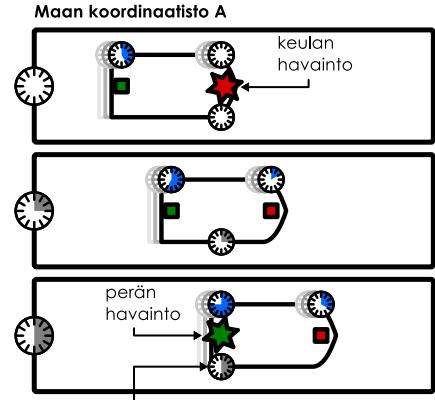
(a) Avaruusaluksen koordinaatistossa havainto-piste liikkuu ja ohittaa aluksen.



(b) Maan koordinaatistossa alus liikkuu ja ohittaa paikoillaan olevan havaintopisteen.



(c) Aluksen pituus on lyhyempi koordinaatistossa, joissa alus liikkuu.



EI TAPAHDU

yksinkertaisesti $v = |v_{x,B(A)}| = |v_{x,A(B)}|$. Niinpä jos aluksen pituus on sen omassa koordinaatistossa $L_{(B)}$, mittauspiste ohittaa sen aluksen kellojen mukaan ajassa

$$\Delta\tau_{(B)} = \frac{1}{v} L_{(B)}. \quad (6.48)$$

Tässä pitää käyttää mittamiseen nimenomaan aluksen kelloja, koska nämä kelloet ovat aluksen koordinaatistossa paikoillaan ja ne mittavat siis koordinaatiston ominaisaikaa. Koska mittauspiste liikkuu aluksen koordinaatistossa, mittauspisteen kello käy aikadilataation vuoksi aluksen kelloja hitaammin. Tämä kello käy mittauspisteen ohitukseen kuluessa ajan

$$\Delta t_{A(B)} = \frac{1}{\gamma} \Delta\tau_{(B)}, \quad (6.49)$$

joka on vähemmän kuin aluksen kellojen mittamaa aika.

Maan koordinaatistossa ohitukseen kuluu vastavasti aika

$$\Delta\tau_{(A)} = \frac{1}{v} L_{(A)}, \quad (6.50)$$

mutta tässä koordinaatistossa ominaisaikaa mittaa paikoillaan oleva *mittauspisteen kello*, joka tässä koordinaatistossa käy normaalilla nopeudella. Jos nyt aluksen pituus olisi kummassakin koordinaatistossa sama, $L_{(A)} = L_{(B)}$, Maan koordinaatistossa ohitukseen kuluisi yhtä kauan kuin aluksen koordinaatistossa, $\Delta\tau_{(A)} = \Delta\tau_{(B)}$. Mittapisteen kello siis kävisi Maan koordinaatistossa ohitukseen aikana saman verran kuin aluksen kelloet kävät aluksen koordinaatistossa. Perän saapuminen mittauspisteesseen on kuitenkin tapahduma, ja koska mittausaseman kello on samassa paikassa kuin mittauspiste, tämän kellon täytyy näyttää kaikissa koordinaatistossa samaa aikaa perän ollessa mittauspisteen kohdalla. Voimmehan aina asentaa mittauspisteesseen ja aluksen perään kamerat, jotka kuvavat mittauspisteen kellon täsmälleen perän ollessa mittauspisteen kohdalla, eikä ole mahdollista, että kello näyttäisi eri aikaa eri kameroiden kuvissa.

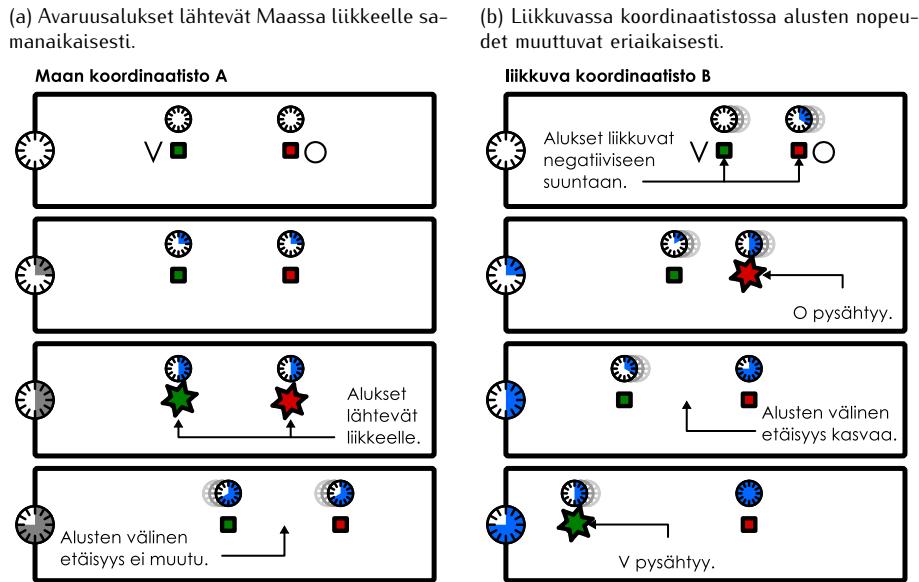
Kuitenkin äsken päättemme, että avaruusaluksen koordinaatistossa mittauspisteen kello mittaa ohitukseen kuluessa ajan

$$\Delta\tau_{(A)} = \Delta t_{A(B)} = \frac{1}{\gamma} \Delta\tau_{(B)}, \quad (6.51)$$

eli vähemmän kuin äskeisen mallin mukaan Maan koordinaatistossa. Jos siis alus olisi molemmissa koordinaatistissa yhtä pitkä kuten kuvassa 6.22 (b), mittauspisteen kello näyttäisi eri koordinaatistissa eri aikaa aluksen perän ollessa mittauspistessä. Koska tämä ei ole mahdollista, aluksen täytyy olla eri koordinaatistossa eri pituinen.

Kerrataan vielä: aluksen koordinaatistossa mittauspisteen kello käy hitaasti ja mittaa aluksen ohitukselle lyhyemän ajan kuin aluksen kello. Toisaalta mittauspisteen kellon on mitattava kaikissa koordinaatistossa

Kuva 6.23: Pituuskontraktio havaitaan myös kappaleiden väliselle etäisyydelle. Tässä kahden aluksen nopeus muuttuu koordinaatistossa A samanaikaisesti mutta koordinaatistossa B eriaikaisesti.



sama ohitusaike, joten Maan koordinaatistossa alus ohittaa mittauspisteen *lyhyemmässä ajassa* kuin aluksen omassa koordinaatistossa. Tämä on kuitenkin mahdollista vain jos *aluksen pituus on Maan koordinaatistossa lyhympi kuin sen omassa koordinaatistossa*. Täsmällisemmin aluksen pituus Maan koordinaatistossa A on

$$L_{(A)} = v \Delta \tau_{(A)} = v \frac{1}{\gamma} \Delta \tau_{(B)} = \frac{1}{\gamma} L_{(B)} \quad (6.52)$$

eli liikkuvan aluksen pituus muuttuu *liikkeen suunnassa* Lorentzin tekijän määräämällä tavalla. Ilmiötä kutsutaan **pituuskontraktioksi** (engl. contract, 'supistua'), koska kappaleiden pituuksien havaitaan kutistuvan koordinaatistossa, joissa kappaleet liikkuvat. Riippuvuus on täsmälleen sama kuin liikkuvien kellojen käymisnopeudessa esiintyvä tekijä, koska pituus voidaan mitata eri koordinaatistojen kellojen avulla.

Edellisessä ajatuskokeessa pituuskontraktioon pääteltiin seuraavan kellojen käyntinopeuksien suhteellisuudesta. Kuvassa 6.23 on puolestaan esitetty ajatuskoe, jossa pituuskontraktio nähdään seuraavan samanaikaisuuden suhteellisuudesta. Maassa (A) on aluksi levossa kaksi avaruusalusta, V ja O. Kummassakin aluksessa on synkronoitu kello, ja kellon näyttäessä tiettyä aikaa kumpikin alus kiihdyytää nopeasti liikkeelle. Maan koordinaatistossa alukset lähtevät siis liikkeelle samanaikaisesti ja saavat saman nopeuden $v_{x,B(A)}$, jolloin niiden välinen etäisyys on prosessissa vakio.

Tarkastellaan sitten samaa prosessia koordinaatistossa B, joka liikkuu nopeudella $v_{x,B(A)}$ koordinaatiston A suhteeseen. Tämä koordinaatisto liikkuu siis samalla nopeudella kuin minkä alukset lopuksi saavat. Koska alukset olivat aluksi levossa koordinaatistossa A, koordinaatistossa B alukset ovat aluksi liikkeessä ja kiihdyytyksen jälkeen alukset pysähtyvät. Siis alusten lepokoordinaatisto on aluksi A ja lopuksi B. Samanaikaisuuden suhteellisuuden perusteella alusten synkronoidut kelloit eivät kuitenkaan näytä samaa aikaa koordinaatistossa B vaan koordinaatiston liikkeen suunnassa kaukaisemmat kelloit ovat ajassa edellä lähempänä olevia kelloja. Tässä tapauksessa siis aluksen O kello on edellä aluksen V kelloon nähten. Tämä tarkoittaa kuitenkin sitä, että aluksen O kello saavuttaa *ensin* hetken, jolloin aluksen nopeus muuttuu, eli alus O pysähtyy ensin. Tämän jälkeen on aikajakso, jolloin alus O on levossa mutta alus V vielä liikkuu, ja tällöin alusten välinen etäisyys kasvaa. Alus V pysähtyy vasta kun sen kellon mukaan on aika kiihdyytää, ja näin ollen koordinaatistossa B alusten lopullinen etäisyys toisistaan on *suurempi* kuin koordinaatistossa A. Tässäkin on kyseessä pituuskontraktio. Koordinaatisto B on alusten ja *niiden välisen matkan* lepokoordinaatisto, joten tässä koordinaatistossa alusten välinen etäisyys on suurimillaan. Koordinaatistossa A alukset sekä niiden välillä liikkuvat, joten tässä koordinaatistossa alusten välinen etäisyys havaitaan kutistuneena.



6.25 Miltä kuvan 6.23 prosessi näyttäisi koordinaatistossa A, jos avaruusalukset pysähtyisivät samanaikaisesti koordinaatistossa B? Havattaisiinko koordinaatistojen välillä pituuskontraktioita?

Yhteenvetona siis toistensa suhteeseen liikkuvien koordinaatistojen etäisydet eivät muutu liikettä vastaan kohitusorassa suunnassa, mutta liikkeen suunnassa ne muuttuvat niin, että liikkuvat systeemit havaitaan liikkeen suunnassa lyhentyneinä. Tämä tarkoittaa sitä, että *minkä tahansa pituuden mittaus antaa suurimman*

tuloksen koordinaatistossa, jossa mitattava pituus on paikoillaan. Tätä pituutta kutsutaan **ominaispituudeksi** samaan tapaan kuin levossa olevan kellon mittamaa aika on ominaisaika. Ominaispituutta voidaan pitää kappaleiden todellisena pituutena siinä mielessä, että jokainen havaitsija on omassa koordinaatistossaan levossa ja mittaa siis omaksi pituudekseen juuri ominaispitutensa. Pituuskontraktio koskee sekä kappaleiden pituksia että niiden välistä etäisyysä eli toisin sanoen *kaikkia pituuksia*. Kysymys ei ole sitä, että liikkuvat kappaleet puristuisivat kasaan jonkin voiman vaikutuksesta, eikä myöskään siitä, että kappaleet ajautuisivat toisistaan kauemmas. Koska pituuskontraktio vaikuttaa kaikkiin liikkeen suuntaisiin etäisyysiin, tämä tarkoittaa että *avaruus itse* ilmenee eri koordinaatistoissa eri tavoin.



6.26 Avaruusalus on matkalla Maasta Alpha Centauriin 4 valovuoden päähän. Aluksen nopeus näiden tähien suhteen on $0.98c$, jolloin $\gamma \approx 5$. (a) Kuinka kauan aluksen matka kestää Maan koordinaatistossa? (b) Kuinka paljon aikaa avaruusaluksen kellon mukaan kuluu matkan aikana? (c) Kuinka nopeasti alus liikkuu omassa koordinaatistossaan? (d) Kuinka nopeasti Alpha Centauri liikkuu aluksen koordinaatistossa? (e) Kuinka pitkä matka Alpha Centauriin on aluksen koordinaatistossa? (f) Kuinka kauan matka kestää aluksen koordinaatistossa?

esimerkki 6.4

Myonit

Ilmakehän yläkerroksiuun saapuva kosminen säteily tuottaa myoneja — hiukkasia joiden puoliintumisaika on $1.6\mu\text{s}$. (Toisin sanoen puolet kaikista hiukkasia hajoaa tämän ajan kuluessa.) Hiukkaset syntyvät noin 10 km korkeudella ja niiden vauhti on $0.98c$. Jos tiettyssä ajassa syntyy 10^7 myonia, kuinka monta hiukkasta havaitaan maan pinnalla?

TILANNE Merkitään myonien alkumäärää $N_{\text{alku}} = 10^7$, ilmakehän paksuutta Maan koordinaatistossa A $L_{(A)} = 10 \text{ km}$ ja myonien puoliintumisaaka niiden omassa lepokoordinaatistossa B $t_{1/2,(B)} = \tau_{1/2} = 1.6\mu\text{s}$. Myonien nopeus on $v_{B(A)} = 0.98c$.

SUUNNITELMA Hiukkasten määrä pienenee eksponentiaalisesti ajan kuluessa, ja maahan saapuvien hiukkasten määrä voidaan laskea kun tunnetaan aika, joka hiukkasilta kuluu matkaan ilmakehän läpi. Hiukkasten nopeudet ovat lähellä valonnopeutta, joten Maan koordinaatistossa A hiukkasten aika on hidastunut aikadilataation vuoksi ja hiukkaset säilyvät pidempään kuin omassa koordinaatistossaan. Myonien koordinaatistossa B puolestaan Maa ja ilmakehä kokevat pituuskontraktio, joten myonien matka on lyhyempi.

Kun aikaa kuluu yksi puoliintumisaika $t = t_{1/2}$, puolet hiukkasia häviää eli $N(t_{1/2}) = \frac{1}{2}N_{\text{alku}}$. Kahden puoliintumisajan jälkeen $t = 2t_{1/2}$ hiukkasia on jäljellä neljäsosa, $N(2t_{1/2}) = \frac{1}{2^2}N_{\text{alku}}$, jne. Yleisesti ajan t jälkeen hiukkasia on jäljellä

$$N(t) = \frac{1}{2^{t/t_{1/2}}} N_{\text{alku}}. \quad (6.53)$$

Maan koordinaatistossa myonien hajoaminen on hidastunut ja niiden puoliintumisaika on pitkä, $t_{1/2,(A)} = \gamma\tau_{1/2}$. Myonien koordinaatistossa ilmakehän paksuus on lyhentynyt, $L_{(B)} = \frac{1}{\gamma}L_{(A)}$. Maan koordinaatistossa myonien matka-aika on $\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v_{B(A)}} L_{(A)}$. Myonien koordinaatistossa Maa liikkuu kohti myoneja nopeudella $v_{A(B)} = v_{B(A)}$, jolloin Maa saavuttaa myonit ajassa $\Delta t_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} L_{(B)}$.

RATKAISU Koordinaatistojen välinen Lorentz-tekijä on $\gamma = \left(1 - \frac{v_{B(A)}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 5.0$. Maan koordinaatistossa myonien matkaan kuluu aikaa

$$\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v_{B(A)}} L_{(A)} = \frac{10^4 \text{ m}}{0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 34\mu\text{s}, \quad (6.54)$$

ja myonien puoliintumisaika on $t_{1/2,(A)} = 5.0 \cdot 1.6\mu\text{s} = 8.0\mu\text{s}$, joten myonien joukko kokee matkallaan $\Delta t_{(A)}/t_{1/2,(A)} = 4.25$ puoliintumista. Myoneja saapuu siis maahan

$$N_{(A)} = \frac{1}{2^{\Delta t_{(A)}/t_{1/2,(A)}}} N_{\text{alku}} = \frac{1}{2^{4.25}} 10^7 = 5 \cdot 10^5. \quad (6.55)$$

Myonien koordinaatistossa Maa saavuttaa myonit ajassa

$$\Delta t_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} L_{(B)} = \frac{1}{v_{A(B)}} \frac{1}{\gamma} L_{(A)} = \frac{0.2 \cdot 10^4 \text{ m}}{0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6.8\mu\text{s}, \quad (6.56)$$

joten myonit kokevat jälleen $\Delta t_{(B)}/t_{1/2,(B)} = 4.25$ puoliintumista ja niitä saapuu maahan myös tässä koordinaatistossa $N_{(B)} = 5 \cdot 10^5$.

ARVIOINTI Molemmissa koordinaatistoissa saadaan sama tulos kuten pitääkin. Myonin saapuminen maan pinnalle on nimittäin tapahtuma, joten jokainen maahan saapuva myoni saavuttaa Maan kaikissa koordinaatistoissa.

Vertailun vuoksi voimme laskea myös paljonko myoneja epärelativistinen mekanikkalla ennustaa saapuvan maahan. Jos suhteellisuus jätetään huomioimatta, myonin matka-aika on $\Delta t_{\text{klassinen}} = 34\mu\text{s}$ ja puoliintumisaika on $t_{1/2,\text{klassinen}} = 1.6\mu\text{s}$, joten puoliintumisia ehtii tapahtua $\Delta t_{\text{klassinen}}/t_{1/2,\text{klassinen}} = 21.25$. Tämän mukaan maahan pitäisi saapua vain $N_{\text{klassinen}} = \frac{1}{2^{21.25}} 10^7 = 4$ myonia! Myoneja todella havaitaan maassa, joten tämä ilmiö on eräs epäsuora todiste suhteellisuusteorian oikeellisuudesta.

6.5 Avaruusaika

Suhteellisuusteoriassa siis sekä avaruus että aika ilmenevät eri koordinaatistoissa eri tavoin. Yhdessä koordinaatistossa samaa aikaa näyttävät kelloit näyttävätkin toisessa koordinaatistossa eri aikojen näyttämä aika riippuu niiden paikasta. Samoin pituudet ilmenevät eri koordinaatistoissa eri tavoin. Suhteellisuusteoriassa avaruus ja aika ovatkin hyvin samankaltaisia ja toisiinsa perustavalla tavalla kytkeytyneitä suureita, minkä vuoksi usein ei puhutakaan erikseen avaruudesta ja ajasta vaan **avaruusajasta**, jossa aika ja avaruuden kolme suuntaa muodostavat yhdessä *neliulotteisen koordinaatiston*.

Lorentz-muunnos

Galilei-suhteellisuuden mukaan toistensa suhteen liikkuvissa koordinaatistoissa mitataan tapahtumille erilaiset paikkakoordinaatit, koska koordinaatiston kiintopisteet siirtyvät toistensa suhteen ajan kuluessa. Tämän takia myös esimerkiksi kappaleiden nopeuksille mitataan erilaiset arvot. Jos tapahtuman paikkakoordinaatit tunnetaan yhdessä koordinaatistossa A, ne voidaan laskea toisessa koordinaatistossa B Galilei-muunnoksen (6.7) avulla.

Suhteellisuusteoriassa Galilei-muunnosta vastaava säätö koordinaattien muuntamiseksi koordinaatistossa toiseen on **Lorentz-muunnos**. Nopeuksien ollessa selkeästi valonnopeutta pienemmät Lorentz- ja Galileimuunnokset antavat samat tulokset, mutta koordinaatistojen liikuessa toistensa suhteen lähes valonnopeudella Galilei-muunnos ei toimi ja on käytettävä nimenomaan Lorentz-muunnosta, sillä *valonnopeus on Lorentz-invariantti* eli valonnopeuden arvo ei muutu Lorentz-muunnoksessa.

Lorentz-muunnos on seuraava: Valitaan kaksi koordinaatistoa A ja B niin, että koordinaatistojen x -, y - ja z -akselit osoittavat samaan suuntaan. Annetaan B:n liukkuva A:n suhteen x -suuntaisella vakionopeudella $v_{x,B(A)}$ ja valitaan koordinaatistolle myös sama origo. Tämä tarkoittaa sitä, että koordinaatiston A ajan hetkellä $t_{(A)} = 0$ avaruuden pisteessä $(x, y, z)_{(A)} = (0, 0, 0)$ havaittu tapahtuma tapahtuu myös koordinaatistossa B ajan hetkellä $t_{(B)} = 0$ avaruuden pisteessä $(x, y, z)_{(B)} = (0, 0, 0)$. Nyt jos jollekin toiselle tapahtumalle mitataan koordinaatistossa A paikka- ja aikakoordinaatit $(x_{(A)}, y_{(A)}, z_{(A)}, t_{(A)})$, tälle tapahtumalle mitataan koordinaatistossa B koordinaatit

$$x_{(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)}) \quad (6.57)$$

$$y_{(B)} = y_{(A)} \quad (6.58)$$

$$z_{(B)} = z_{(A)} \quad (6.59)$$

$$t_{(B)} = \gamma_{B(A)} \left(t_{(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{(A)} \right). \quad (6.60)$$

Lorentz-muunnoksen mukaan tapahtumille mitataan siis eri koordinaatistoissa *koordinaatistojen liikkeen suunnassa* erilaiset paikkakoordinaatit kuten Galilei-muunnoksessakin. Koordinaatin x muunnos on itsessään Lorentzin tekijää lukuunottamatta täsmälleen samanlainen kuin Galilei-muunnos. Liikettä vastaan kohtisuorat suunnat y ja z eivät muutu mitenkään. Oleellinen ero Galilei-muunnokseen on kuitenkin se, että Lorentz-muunnoksessa myös *aikakoordinaatit* muuttuvat koordinaatistoa vaihdettaessa.

Emme johda Lorentz-muunnosta, mutta perustelemme muunno syhtälöiden järkevyyden tarkastelemalla valosignaalin kulkua kahdessa eri koordinaatistossa. Signaalin kulun voi kuvata kahtena tapahtumana: ensin valo lähtee, ja sitten se havaitaan. Valon lähtö voi tapahtua missä vain ja milloin vain, mutta oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että valosignaali lähetetään koordinaatiston A origosta. Toisin sanoen signaalin lähtö on tapahtuma, jonka koordinaatit ovat $(0, 0, 0)_{(A)}$. Valon havaitseminen on myös tapahtuma, ja olkoon tämän koordinaatit $(x_{(A)}, y_{(A)}, z_{(A)}, t_{(A)})$.

Valon havaintopisteen etäisyysyden neliö valon lähtöpisteestä on Pythagoraan lauseen mukaisesti

$$(\Delta r_{(A)})^2 = (\Delta x_{(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 + (\Delta z_{(A)})^2. \quad (6.61)$$

Toisaalta signaali kulkee valonnopeudella, joten valo kulkee matkan ajassa $\Delta t_{(A)}$, missä

$$\Delta r_{(A)} = c\Delta t_{(A)}. \quad (6.62)$$

Näin ollen signaalin lähdön ja havainnon koordinaattien erolle täytyy päteä

$$(c\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = 0. \quad (6.63)$$

Lauseeketta

$$s_{(A)}^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - [(\Delta x_{(A)})^2 + (\Delta y_{(A)})^2 + (\Delta z_{(A)})^2] \quad (6.64)$$

kutsutaan tapahtumien väliseksi **avaruusaika-intervalliksi**, ja avaruusaikaintervalli saa siis arvon nolla tapahtumille, joita yhdistää valonnopeudella kulkeva signaali.



6.27 Kuvan 6.20 kello B toimii lähetämällä ja vastaanottamalla valosignaalin. Kellon korkeus on L ja se liikkuu koordinaatistossa A nopeudella v_x . (a) Jos tapahtuma "valo lähtee" valitaan origoksi, mitkä ovat tapahtuman "valo havaitaan" koordinaatit koordinaatistossa A ja B? (b) Mikä on tapahtumien välinen avaruusaikaintervalli s^2 A:ssa ja B:ssä?

Myös koordinaatistossa B havaitaan edellä kuvatut tapahtumat: ensin valosignaali lähtee ja sitten se havaitaan. Kuitenkin jos valonnopeus on kaikissa koordinaatistoissa sama, näitä tapahtumia täytyy yhdistää valonnopeudella kulkeva signaali myös tässä koordinaatistossa ja niinpä tapahtumien välisen avaruusaikaintervallin täytyy olla nolla myös koordinaatistossa B

$$s_{(B)}^2 = 0. \quad (6.65)$$

Valo lähtee myös koordinaatistossa B liukkeelle origosta, koska koordinaatistot oli valittu niin, että niiden origot ovat samat. Näin ollen tämän tapahtuman koordinaatit ovat $(0, 0, 0, 0)_{(B)}$. Valon havaitsemisen koordinaatit ovat puolestaan $(x_{(B)}, y_{(B)}, z_{(B)}, t_{(B)})$, missä koordinaatistoissa A ja B mitattuja koordinaatteja yhdistää Lorentz-muunnos (6.57) – (6.60). Valo havaitaan siis koordinaatistossa B ajan hetkellä $t_{(B)} = \gamma_{B(A)}(t_{(A)} - \frac{1}{c^2}v_{B(A)}x_{(A)})$, ja havaintopisteen x -koordinaatti on $x_{(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{(A)} - v_{B(A)}t_{(A)})$. Näiden tulosten sijoitus koordinaatistossa B mitattuun avaruusaikaintervallin lausekkeeseen ja sievennys osoittaa, että välimatka on *Lorentz-invariantti*,

$$s_{(B)}^2 = c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = s_{(A)}^2. \quad (6.66)$$

Toisin sanoen avaruusaikaintervallin s^2 arvo on *sama* kaikissa toistensa suhteenvaihtuvissa inertialkoordinaatistoissa. Erityisesti jos tapahtumat ovat valosignaalin kulureitillä, niiden välinen avaruusaikaintervalli on kaikissa koordinaatistoissa *nolla*, mikä tarkoittaa valon kulkevan tapahtumien välin valonnopeudella kaikissa koordinaatistoissa.



6.28 Sijoita lausekkeet (6.57) sekä (6.60) koordinaatiston B avaruusaikaintervallin lausekkeeseen ja osoita, että sievennys antaa tulokseksi saman lausekkeen koordinaatistossa A mitattuna.

Jos koordinaatistojen välinen nopeus on pieni verrattuna valonnopeuteen, pätee $v_{x,B(A)}/c^2 \approx 0$, ja tällöin myös Lorentzin tekijä on likimain yksi, $\gamma_{B(A)} \approx 1$. Tässä tapauksessa paikkakoordinaatin muunnosyhtälöksi saadaan

$$x_{(B)} \approx x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)} \quad (6.67)$$

ja aikakoordinaatin muunnokseksi puolestaan

$$t_{(B)} \approx t_{(A)} \quad (6.68)$$

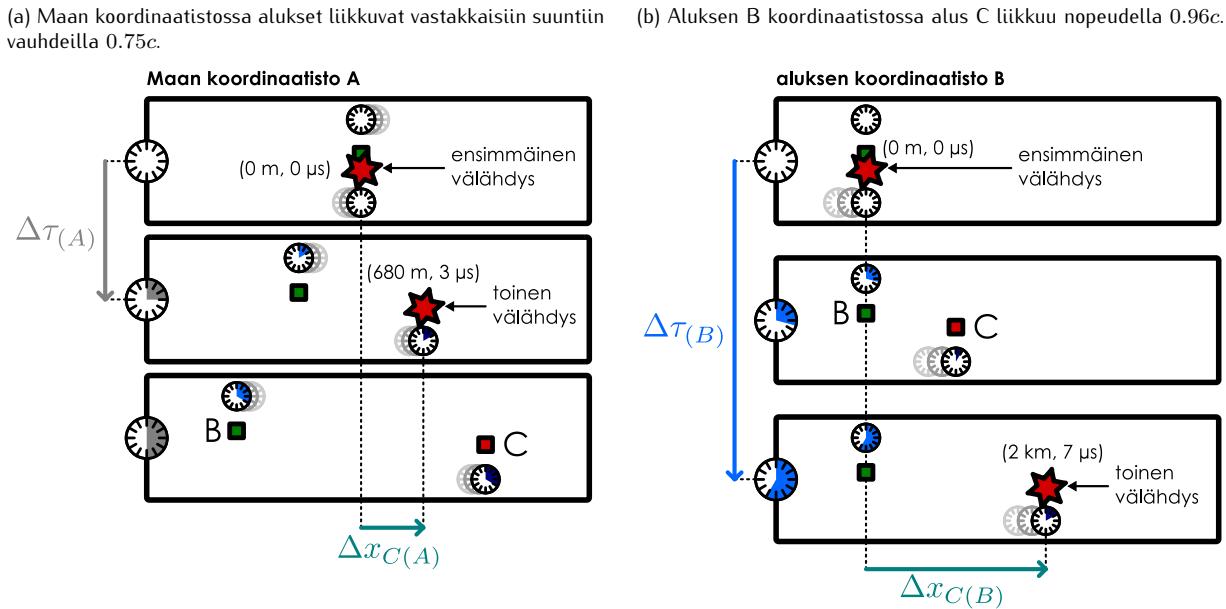
eli samat muunnosyhtälöt kuin Galilei-suhteellisuudessa. Koordinaatistojen liikkuessa hitaasti suhteellisuusteoria antaa siis saman tuloksen kuin klassinen mekanikka. Näin tietysti pitääkin olla, koska Galilei-muunnos selvästikin toimii arkipäiväissä nopeuksissa ja suhteellisuusteoriaa tarvitaan vain tarkasteltaessa hyvin suuria nopeuksia. Nyrkkisääntönä suhteellisuusteoreettisten ilmiöiden tärkeyden voikin arvioda Lorentzin tekijän avulla: mitä enemmän tekijä poikkeaa yhdestä, sitä suurempi virhe tehdään Galilei-muunnosta käytettäessä Lorentz-muunnoksen sijaan.

Tutustuimme luvussa 6.4 suhteellisuusteoreettisiin ilmiöihin ajatuskokeilla, joissa ilmenevät samanaikaisuuden suhteellisuus, aikadilataatio sekä pituuskontraktio. Nämä ajatuskokeet oli suunniteltu erittäin yksinkertaisiksi, jotta kussakin tilanteessa ilmenisi jokin näistä ilmiöistä. Monimutkaisissa suhteellisuusteoreettisissa prosesseissa nämä ilmiöt kuitenkin tapahtuvat yhdessä, ja prosessien analyysi on yleensä hyvin vaikeaa pelkästään pohtimalla esimerkiksi aikadilataation ja pituuskontraktion vaikutusta erikseen. Lorentz-muunnos sen sijaan toimii varmasti. Niinpä varmin tapa analysoida suhteellisuusteoreettisia prosesseja eri koordinaatistoissa on määritettää prosessin keskeiset tapahtumat ja etsiä näiden tapahtumien koordinaatit jossakin tarkastelluista koordinaatistosta. Tällöin tapahtumien koordinaatit voi *aina* määritellä kaikissa muissa koordinaatistoissa Lorentz-muunnoksella, ja prosessin kulku on helppointa hahmottaa tarkastelemalla tapahtumien paikkoja ja aikoja.

Nopeuksien yhteenlasku

Galilei-muunnoksen mukaan nopeudet ovat additiiviset eli eri koordinaatistoissa mitattujen nopeuksien erotus on sama kuin koordinaatistojen välinen nopeus. Suhteellisuusteoriassa valonnopeudelle mitataan kuitenkin kaikissa koordinaatistoissa sama arvo. Mikään kappale ei myöskään voi liikkua yli valonnopeudella. Niinpä mitattujen nopeuksien muuntuminen koordinaatistosta toiseen ei voi olla additiivinen.

Kuva 6.24: Liikkuvan avaruusaluksen nopeus voidaan mitata havaitsemalla aluksen paikka ajan hetkenä.



Tutkitaan nopeuksien muuntumista koordinaatistojen välillä tarkastelemalla kahta avaruusalusta, B ja C, jotka liikkuvat Maan koordinaatistossa A tasaisella vauhdilla vastakkaisiin suuntiin (kuva 6.24). Aluksen C keulassa on vilkuva valo, joten voimme havainnoida aluksen liikkeen mittaan paikat ja ajat, joissa valo väältää. Tämän jälkeen voimme mitata aluksen nopeuden määrittämällä kahden välähdyn välisen etäisyyden ja aikaeron, sillä nopeushan on määritelmän mukaisesti kuljetun matkan ja siihen käytetyn ajan suhde.

Asetetaan koordinaatiston A origo pisteeseen, jossa aluksen C valo väältää ensimmäisen kerran. Olkoon valon ensimmäinen välähdys siis tapahtuma 1, jonka koordinaatit ovat $(x_{1(A)}, t_{1(A)}) = (0 \text{ m}, 0 \mu\text{s})$. Asetetaan myös avaruusalusten koordinaatistojen origot tähän pisteeseen, jolloin valon ensimmäisen välähdyn koordinaatit ovat $(0 \text{ m}, 0 \mu\text{s})$ kaikissa koordinaatistoissa.

Valitaan koordinaatistojen positiivinen x -akseli aluksen C lükkeen suuntaan, jolloin alus B lükkiä negatiiviseen x -suuntaan. Alusten vauhdit ovat tässä esimerkissä $0.75c$ ja aluksen C valo on säädetty väältämään kahden mikrosekunnin välein *aluksen C oman kelon mukaan*. Valon toinen välähdys on siten tapahtuma 2, joka aluksen C koordinaatistossa tapahtuu pisteessä $(x_{2(C)}, t_{2(C)}) = (0 \text{ m}, 2.0 \mu\text{s})$. Tapahtuman paikkakoordinaatti on nolla, koska alus C on omassa koordinaatistossaan paikoillaan.

Maan nopeus koordinaatiston C suhteeseen on $v_{x,A(C)} = -0.75c$, koska Maa liikkuu aluksen C suhteeseen negatiiviseen x -suuntaan. Niinpä Lorentz-muunnoksen perusteella valon toinen välähdys havaitaan Maan koordinaatistossa A paikassa

$$x_{2(A)} = \gamma_{A(C)}(x_{2(C)} - v_{x,A(C)}t_{2(C)}) = 1.51 \cdot (0 \text{ m} - (-0.75 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 680 \text{ m} \quad (6.69)$$

ajan hetkellä

$$t_{2(A)} = \gamma_{A(C)} \left(t_{2(C)} - \frac{1}{c^2} v_{x,A(C)} x_{2(C)} \right) = 1.51 \cdot (2.0 \cdot 10^{-6} \text{ s} - 0 \text{ s}) = 3.0 \mu\text{s}. \quad (6.70)$$

Koordinaatistossa A aluksen C nopeudeksi mitataan siis

$$v_{x,C(A)} = \frac{\Delta x_{C(A)}}{\Delta\tau_{(A)}} = \frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}} = \frac{680 \text{ m}}{3.0 \mu\text{s}} = 0.75c, \quad (6.71)$$

kuten pitääkin.

Voimme laskea Lorentz-muunnoksen avulla toisen välähdyn eli tapahtuman 2 paikan ja ajan myös koordinaatistossa B. Emme voi laskea näitä suoraan tapahtuman 2 koordinaatistossa C mitattujen paikan ja ajan avulla, koska emme tiedä koordinaatistojen B ja C suhteellista nopeutta. Tiedämme kuitenkin, että koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $v_{x,B(A)} = -0.75c$, joten voimme laskea tapahtuman 2 koordinaatit äsken koordinaatistossa A määrittämme koordinaattien avulla. Nämä saamme valon toisen välähdyn paikaksi aluksen B koordinaatistossa

$$x_{2(B)} = \gamma_{B(A)}(x_{2(A)} - v_{x,B(A)}t_{2(A)}) = 1.51 \cdot (680 \text{ m} - (-0.75 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 2050 \text{ m} \quad (6.72)$$

ja ajan hetkeksi

$$t_{2(B)} = \gamma_{B(A)} \left(t_{2(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{2(A)} \right) = 1.51 \cdot \left(3.0 \cdot 10^{-6} \text{ s} - \frac{-0.75}{3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 680 \text{ m} \right) = 7.1 \mu\text{s}. \quad (6.73)$$

Koordinaatistossa B aluksen C nopeudeksi mitataan siis

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{C(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{x_{2(B)}}{t_{2(B)}} = \frac{2050 \text{ m}}{7.1 \mu\text{s}} \approx 0.96c. \quad (6.74)$$

Vaikka koordinaatistossa A *alusten välinen etäisyys* kasvaa nopeudella $1.5c$ eli valonnopeutta nopeammin, kumpikaan aluksista ei liiku valoa nopeammin. Koordinaatistossa B alus C liikkuu kuitenkin vain nopeudella $0.96c$, ja koska alus B on tässä koordinaatistossa paikoillaan, tämä on myös alusten välisen etäisyyden muuttumisen nopeus. Tässä tapauksessa nopeuksia ei voi vain laskea suoraan yhteen, koska suhteellisuusteoriassa avaruudelliset etäisyydet ja kellojen käynti riippuu koordinaatistosta. Koordinaatistossa B alus C liikkuu lähellä valonnopeutta, joten sen kello käy hyvin hitaasti ja kahden valon välähdyksen välillä kuluu yli kaksinkertainen aika koordinaatistoon A verrattuna. Toisaalta myös x -suuntaiset etäisyydet muuntuvat, joten aluksen C kulkema matka välähdysten välillä on koordinaatistossa B vain noin kolminkertainen koordinaatistossa A kuljettuun matkaan nähden.

Voimme johtaa samalla periaatteella yleisen nopeuksien yhteenlaskusäännön. Jos nimittäin kappale C liikkuu koordinaatistossa B nopeudella

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{C(B)}}{\Delta t_{C(B)}} = \frac{x_{2(B)}}{t_{2(B)}}, \quad (6.75)$$

voimme sijoittaa tähän Lorentz-muunno syhtälöt (6.57) ja (6.60), jolloin nopeudeksi saadaan koordinaatistossa A mitattujen koordinaattien avulla ilmaistuna

$$v_{x,C(B)} = \frac{x_{2(A)} - v_{x,B(A)} t_{2(A)}}{t_{2(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{2(A)}}. \quad (6.76)$$

Edelleen supistamalla tämä ajan arvolla $t_{2(A)}$, nopeuden lauseke saa muodon

$$v_{x,C(B)} = \frac{\frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} \frac{x_{2(A)}}{t_{2(A)}}}. \quad (6.77)$$

Kuitenkin tässä lausekkeessa esiintyvä koordinaatistossa A mitattu paikan ja ajan suhde on määritelmän mukaisesti aluksen nopeus koordinaatistossa A, $v_{x,C(A)} = x_{2(A)}/t_{2(A)}$, joten koordinaatistossa B mitattu nopeus voidaan kirjoittaa koordinaatistossa A mitattujen nopeuksien avulla muodossa

$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} v_{x,C(A)}}. \quad (6.78)$$

Tämä on yleinen *yhdensuuntaisten nopeuksien yhteenlaskusääntö*, kun koordinaatistoja yhdistää Lorentzmuunno.

Jos koordinaatistojen välinen nopeus tai aluksen nopeus on selkeästi valonnopeutta pienempi, yhdistettyjen nopeuksien lausekkeen (6.78) nimittäjä on $1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} v_{x,C(A)} \approx 1$ ja nopeuden muunno saadaan yksinkertaisesti säännöstää $v_{x,C(B)} = v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}$, joka on sama kuin Galilei-muunnonkseen tulos. Kuitenkin jos sekä koordinaatistojen välinen nopeus että aluksen nopeus ovat lähellä valonnopeutta, tulos poikkeaa selvästi Galilei-muunnonksesta. Erityisesti koska alus liikkuu yhdessä koordinaatistossa valoa hitaammin, sen täytyy liikkua *kaikissa* koordinaatistoissa valoa hitaammin.

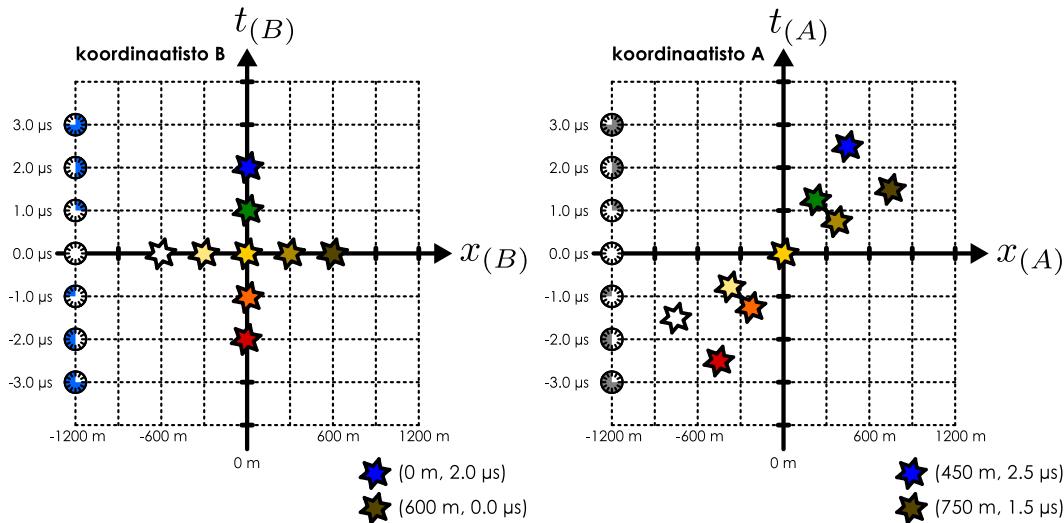
6.29 Alus B liikkuu Maan koordinaatistossa nopeudella $v_{x,B(A)} = -0.6c$ ja alus C nopeudella $v_{x,C(A)} = 0.75c$. Aluksen C valo välähtää koordinaatistossa A samoissa pisteissä kuin kuvassa 6.24. (a) Missä pisteissä valo välähtää koordinaatistossa B? (b) Laske C:n nopeus koordinaatistossa B matkan ja ajan suhteenä. (c) Laske C:n nopeus nopeuksien yhteenlaskusäännöllä.

Avaruusajan graafinen kuvaus

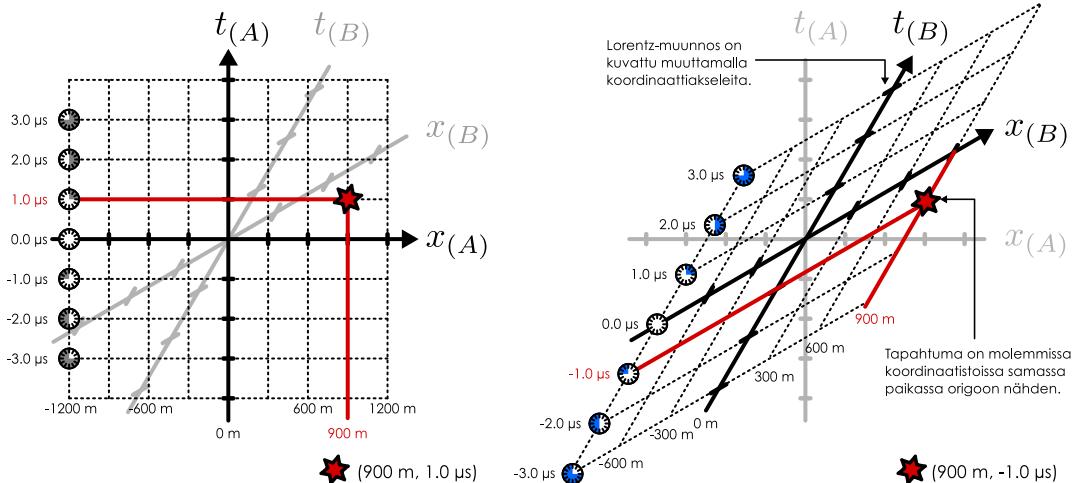
Jos tunnemme tapahtuman koordinaatit yhdessä koordinaatistossa, voimme Lorentz-muunnonkseen avulla laskea koordinaatit muissa koordinaatistoissa, ja paras tapa analysoida prosessien kulkua on määrittää prosessiin liittyvien tapahtumien paikat ja ajat tarkasteltavissa koordinaatistoissa. Tapahtumien suhdetta toisiinsa on

Kuva 6.25: Tapahtumat voi kuvata kahdessa koordinaatistossa joko muuntamalla tapahtumien sijaintia koordinaatistossa tai muuttamalla koordinaatistoa itseään.

(a) Koordinaatistomuunnoksen kuvaus siirtämällä tapahtumia.



(b) Koordinaatistomuunnoksen kuvaus muuntamalla koordinaatistoa.



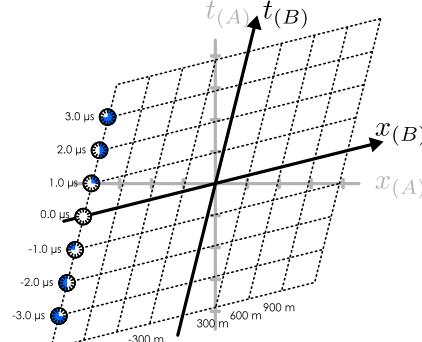
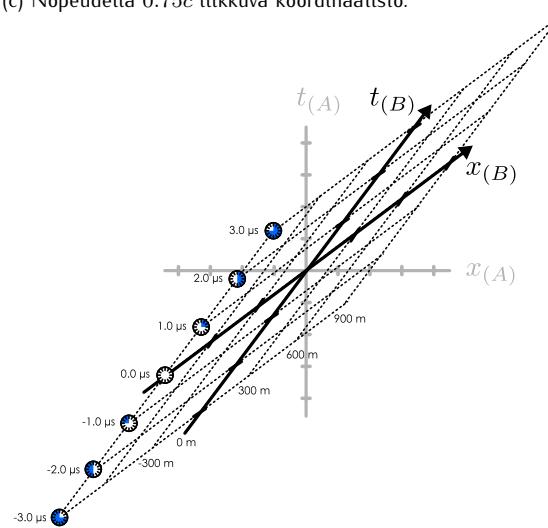
kuitenkin hyvin vaikea hahmottaa tarkastelemalla koordinaatteja vain numeroina. Niinpä usein onkin tarpeellista *piirtää* tapahtumat koordinaatistoon.

Tarkastellaan jälleen Maata (koordinaatisto A) sekä avaruusalusta (koordinaatisto B), joka liikkuu Maan suhteeseen nopeudella $v_{x,B(A)} = 0.6c$. Avaruusaluksen keskellä on lamppu, joka välähtää kerran mikrosekunnissa. Asetetaan aluksen koordinaatistossa origo tämän lampun kohdalle, joten näiden välähdysten paikkakoordinaatti on $x_{(B)} = 0 \text{ m}$. Koska alus liikkuu koordinaatistossa A, välähdykset eivät tapahdu samassa paikassa vaan mitä myöhemmästä välähdyksestä on kyse, sitä edempänä x -suunnassa se tapahtuu koordinaatistossa A. Tämä on piirretty kuvaan 6.25 (a) punaisesta siniseen väritettynä tapahtumasarjana. Aika-akseli on tässä piirretty pystysuoraan ja paikka-akseli vaakasuoraan, joten koordinaatistossa B tapahtumat muodostavat pystysuoran jonon. (Tämä on tavallinen valinta akseleiden suunnille suhteellisuusteoriassa, mutta periaatteessa akseleiden järjestysksellä ei ole väliä.) Koordinaatistossa A tapahtumat muodostavat *vinon* suoran, koska alus liikkuu. Lisäksi koska aluksen kello käy Maan koordinaatistossa aikadilataation vuoksi hitaasti, välähdysten välinen aika on koordinaatistossa A *pidempi* kuin yksi mikrosekanti. Koordinaatistojen välinen Lorentz-tekijä on $\gamma_{A(B)} = 1.25$, joten välähdysten välinen aika on $\Delta t_{(A)} = \gamma_{A(B)} \Delta t_{(B)} = 1.25 \mu\text{s}$.

Koordinaatistojen välinen nopeus voidaan lukea esimerkiksi kuvaan sinisellä merkitystä tapahtumasta. Tapahtuman koordinaatit aluksessa ovat $(0 \text{ m}, 2 \mu\text{s})_{(B)}$, jolloin Lorentz-muunnoksen perusteella koordinaatit Maassa ovat $(450 \text{ m}, 2.5 \mu\text{s})_{(A)}$. Tämä tapahtuma on koordinaatiston B origossa, joten se kuvaaa aluksen siirtymää Maan koordinaatistossa. Aluksen eli koordinaatiston B nopeus koordinaatistossa A on siten

$$v_{x,B(A)} = \frac{\Delta x_{B(A)}}{\Delta t_{(A)}} = \frac{x_{\text{sininen}(A)} - x_{\text{keltainen}(A)}}{t_{\text{sininen}(A)} - t_{\text{keltainen}(A)}} = \frac{450 \text{ m}}{2.5 \mu\text{s}} = 0.6c, \quad (6.79)$$

Kuva 6.26: Graafinen Lorentz-muunnos eri nopeuksilla liikkuvien koordinaatistojen välillä.

(a) Nopeudella $0.25c$ liikkuva koordinaatisto.(c) Nopeudella $0.75c$ liikkuva koordinaatisto.

kuten alunperin oletettuinkin.

Aluksessa on muitakin lampuja, ja lamput on ohjelmoitu välihtämään aluksen koordinaatistossa yhtä aikaa aluksen kallon näyttäessä nolla. Tämä on esitetty kuvassa 6.25 (a) koordinaatistoon B piirretynä keltaisien tapahtumien vaakarivinä. Samanaikaisuuden suhteellisuuden vuoksi nämä tapahtumat eivät kuitenkaan ole samanaikaiset koordinaatistossa A, vaan nämäkin tapahtumat muodostavat kuvaan *vinon* suoran. Aluksen liikkeen suunnassa taaimmainen väähdyys (valkoinen tapahtuma) tapahtuu Maan koordinaatistossa ensimäisenä ja liikkeen suunnassa etummainen väähdyys (harmaa) tapahtuu viimeisenä.

Koordinaatistot on kuvassa piirretty niin, että aika-akselin yksikön suuruus on yksi mikrosekunti ja paikka-akselin yksikkö on 300 metriä, joka on valon yhdessä mikrosekunnissa kuljema matka. Toisin sanoen aika-ja paikka-akselien *mittakaavat ovat samat*, kun aika kerrotaan valonnopeudella. Kun mittakaava valitaan näin, tapahtumat siirtyvät Lorentz-muunnoksessa symmetrisesti. Koordinaatistossa B aika-akselillä havaitut (samanaikaiset) tapahtumat sijoittuvat koordinaatistossa A suoralle, joka on käännytynyt ja venynty koordinaatiston aika-akseliin nähdien. Samoin koordinaatistossa B paikka-akselillä havaitut (samanaikaiset) tapahtumat sijoittuvat koordinaatistossa A suoralle, joka on käännytynyt ja venynty koordinaatiston paikka-akseliin nähdien. Muunnoksen symmetrisyys ajan ja paikan suhteeseen näkyi siinä, että nämä suorat ovat käänyneet ja venyneet *yhtä paljon*.

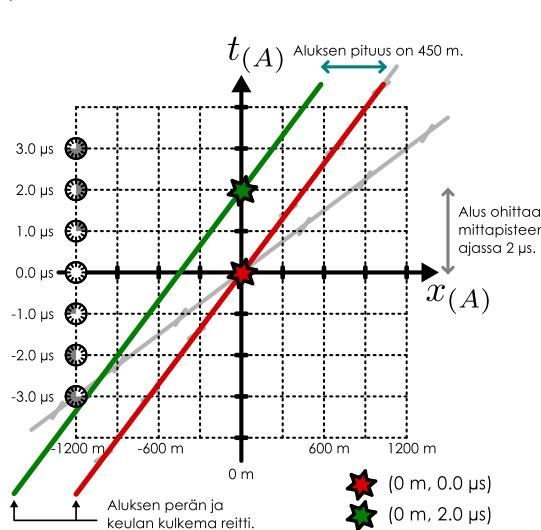
Edellä Lorentz-muunnos kuvattiin siten, että sekä Maalle että alukselle piirrettiin kummallekin *oma koordinaatistonsa*, ja tapahtumien paikat määritettiin näissä erikseen. Näin piirretty kuvat ovat erilaiset: koordinaatistossa B plus-kuvion muodostavat tapahtumat ovat koordinaatistossa A kapean X-kirjaimen muodossa. On kuitenkin myös toinen tapa esittää koordinaatistojen välinen muunnos graafisesti. Voimme nimittäin antaa tapahtumien olla molemmissa koordinaatistoissa samoilla paikoilla ja *muuttaa koordinaatistoa itseään*.

Otetaan nyt lähtökohdaksi koordinaatisto A. Tiedämme, että kuvassa 6.25 (a) tapahtumasarja punaisesta siniseen on koordinaatiston B *aika-akselilla* $t_{(B)}$ ja erityisesti tapahtumat ovat aksellilla yhden mikrosekunnin välein. Vastaavasti tapahtumasarja valkoisesta harmaaseen on koordinaatiston *paikka-akselilla* $x_{(B)}$ 300 metrin välein. Niinpä voimme *piirtää koordinaatiston A päälle toisen koordinaatiston B*, jonka aika-akseli kulkee tapahtumasarjan punainen-sininen kautta ja paikka-akseli tapahtumasarjan valkoinen-harmaa kautta. Lopputulos on esitetty kuvassa 6.25 (b). Näin piirtäen koordinaatiston B akselit tulevat vinoon, mikä voi vaikuttaa asioiden monimutkaistamiselta. Esityksen hyödyllisyys on kuitenkin siinä, että koordinaatistossa A määritetyt tapahtumat asettuvat näin automaattisesti oikeille paikoilleen myös koordinaatistossa B. Toisin sanoen voimme piirtää yhden kuvan ja lukea siitä minkä tahansa tapahtuman koordinaatit kummassakin koordinaatistossa, A ja B.

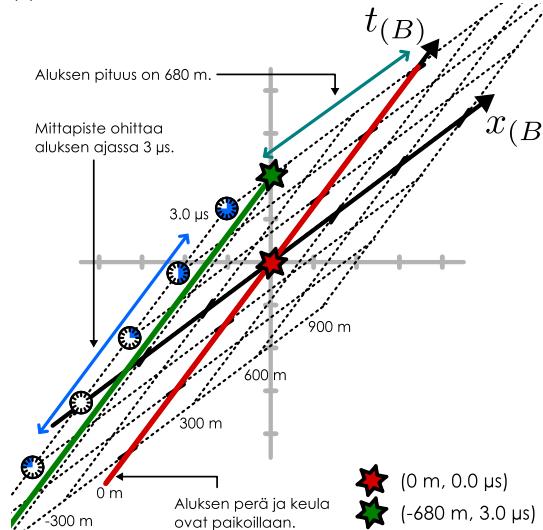
Tätä graafista esitystä kutsutaan **avaruusaika-diagrammiksi** tai **Minkowski-diagrammiksi**. Huomaa, että vaikka kuvaan 6.25 (b) on piirretty kaksi kuvajaa, nämä ovat muuten *täsmälleen sama kuva* paitsi että toisessa on korostettu koordinaatiston A akseleita ja toisessa koordinaatistoa B. Kuvassa esimerkkinä käytetyn tapahtuman ($900 \text{ m}, 1 \mu\text{s}$)_(A) koordinaateiksi saadaan Lorentz-muunnoksella laskien ($900 \text{ m}, -1 \mu\text{s}$)_(B), mutta sama tulos voidaan myös lukea kuvasta. Koska koordinaatisto A on kuvassa suorakulmainen, tapahtuman koordinaatit voidaan lukea helposti etsimällä paikan ja ajan arvot pysty- ja vaakasuunnassa. Koordinaatisto B on kuitenkin vinovivainen, joten siinä koordinaattien lukeminenkin tapahtuu "vinoon". Käytännössä tämä onnistuu piirtämällä tapahtumaa kuvaavasta pisteestä koordinaattiakseleiden suuntaiset apuviivat (kuvas-

Kuva 6.27: Pituuskontraktio avaruusaikadiagrammissa.

(a) Ohitus Maan koordinaatistossa.



(b) Ohitus aluksen koordinaatistossa.



sa punaisella), jolloin paikka-akselin suuntainen apuväriavan leikkauispiste aika-akselilla kertoo tapahtuman aikakoordinaatin ja vastaavasti aika-akselin suuntainen apuväriavan leikkauispiste paikka-akselilla kertoo tapahtuman paikka-koordinaatin.



6.30 Arvioi kuvan 6.25 (b) koordinaatistojen avulla tapahtuman $(600 \text{ m}, 1 \mu\text{s})_{(B)}$ koordinaatit koordinaatistossa A. Tarkista tuloksesi laskemalla.

Diagrammi ei ole yksikäsitteinen siinä mielessä, että aivan yhtä hyvin koordinaatiston B akselit voitaisiin piirtää suorakulmaisiksi ja koordinaatiston A akselit vinoon. Tai vaihtoehtoisesti *molempien* koordinaatistojen akselisto voitaisiin piirtää vinovivaisiksi. Joka tapauksessa mitä lähempänä valonnopeutta koordinaatistojen välinen nopeus on, sitä enemmän koordinaattiakselit muuntuvat toistensa suhteeseen. Kuvassa 6.26 on esimerkkinä piirretty muunnos nopeuksilla $0.25c$ sekä $0.75c$, kun koordinaatisto A on valittu suorakulmaiseksi. Mitä lähempänä valonnopeutta koordinaatiston B nopeus on A:n suhteeseen, sitä lähemmäksi 45° kulmaa koordinaattiakselit käantyvät ja sitä enemmän niiden mittakaava venyy. Valon kulku kuvailee diagrammissa täsmälleen 45° kulmassa kulkeva suora, koska koordinaattiakseleille valittuun tällaiseen mittakaavaan.

Kuvassa 6.27 on esimerkki avaruusaikadiagrammien käytöstä prosessien analyysissä. Diagrammi esittää täsmälleen samaa koetta kuin kuvassa 6.22, jossa avaruusalus ja Maassa oleva mittapiste ohittavat toisensa. Punainen viiva kuvailee aluksen keulassa olevan tunnisteen liikerataa ja vihreä viiva on aluksen perässä oleva tunniste. Maan koordinaatistossa alus liikkuu, joten nämä viivat ovat koordinaatiston akselihin nähden vinossa. Aluksen pituus voidaan määrittää diagrammista lukemalla missä keula ja perä ovat *samalla ajan hetkellä* eli määritämällä viivojen välinen etäisyys x -akselin suunnassa. Tässä diagrammissa koordinaatisto A on piirretty suorakulmaiseksi, joten samanaikaiset tapahtumat ovat vaakasuorilla viivoilla. Niinpä aluksen pituus on Maan koordinaatistossa punaisen ja vihreän viivan välinen vaakasuora etäisyys, $L_{(A)} = 450 \text{ m}$.

Aluksen koordinaatistossa B aluksen keula ja perä ovat paikoillaan, joten niitä kuvaavat viivat ovat yhdensuuntaiset koordinaatiston aika-akselin kanssa. Keulaa kuvaava punainen viiva on suora $x_{\text{keula}(B)} = 0 \text{ m}$ ja perää kuvaava vihreä viiva on suora $x_{\text{perä}(B)} = -680 \text{ m}$. Aluksen pituus voidaan jälleen määrittää keulan ja perän välistenä etäisyytenä, joka on siis aluksen koordinaatistossa $L_{(B)} = 680 \text{ m}$. Alus on siis omassa koordinaatistossaan pidempi kuin Maan koordinaatistossa aivan kuten aikaisemmin päättelimme.

Diagrammiin on myös merkityt tapahtumina aluksen keulan ja mittapisteiden kohtaaminen (punainen) sekä aluksen perän ja mittapisteiden kohtaaminen (vihreä). Maan koordinaatistossa alus ohittaa mittapisteiden kahdessa mikrosekunnissa, mikä voidaan lukea näiden tapahtumien välisestä $t_{(A)}$ -akselin suuntaisesta etäisyydestä. Sen sijaan aluksen koordinaatistossa mittapiste ohittaa aluksen *kolmessa* mikrosekunnissa, mikä ilmenee tapahtumien välisestä $t_{(B)}$ -akselin suuntaisesta etäisyydestä.



6.31 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä suhteellisuusteoriasta ja aika-avaruudesta. Selitä erityisesti, miten prosesseja kuvataan tapahtumien avulla ja kuinka koordinaatistosta siirrytään toiseen Lorentz-muunnokseen avulla.

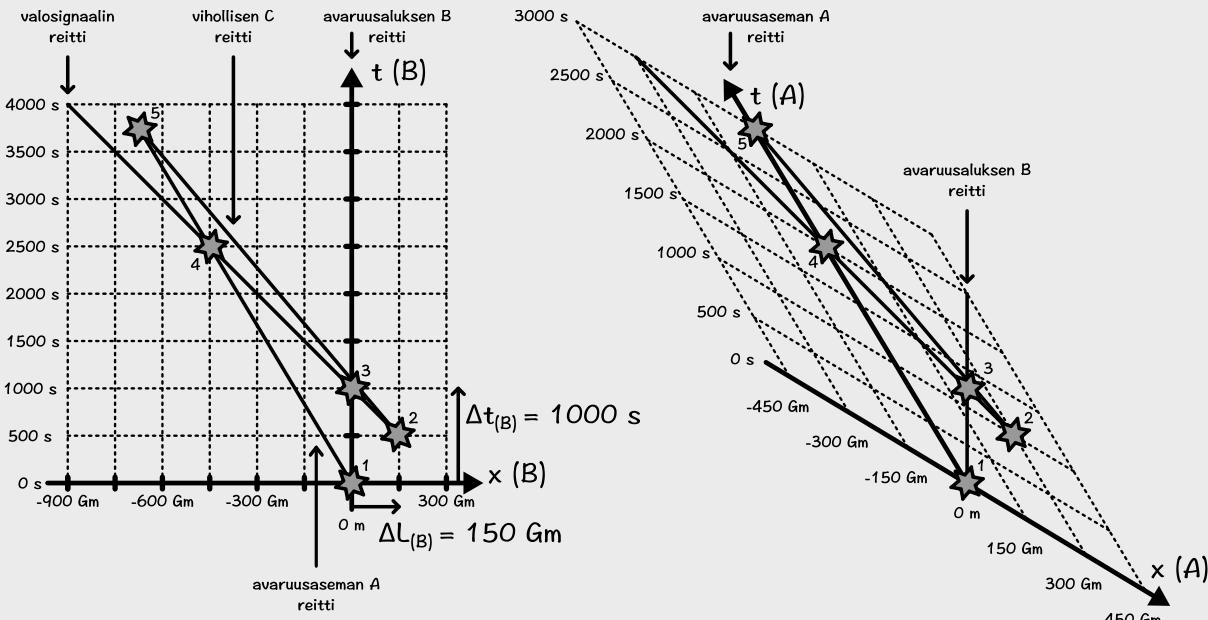
esimerkki 6.5

Avaruusseikkailu

Sci-fi-elokuvassa avaruusalus lentää avaruusaseman ohi tasaisella nopeudella $0.6c$. Kun aluksen kelon mukaan ohituksesta on kulunut 1000 s, aluksesta havaitaan suoraan kohti asemaa nopeudella $0.5c$ aseman suhteen kulkeva vihollisalus etäisyydellä $150 \cdot 10^9$ m suoraan edessä. Alus lähetää välittömästi varoitukseen avaruusasemalle. Selvitä ohjaajalle, paljonko aikaa aseman asukkailla on evakuointiin.

TILANNE Merkitään asemaa A, avaruusalusta B ja vihollisalusta C. Aluksen nopeus on $v_{x,B(A)} = 0.6c$ ja vihollisten nopeus on $v_{x,C(A)} = -0.5c$. Määritellään seuraavat tapahtumat ja piirretään kuva tapahtumasarjasta.

- 1: alus B ohittaa aseman A
- 2: valo lähee vihollisaluksesta C (valo, joka aluksessa B havaitaan)
- 3: vihollisaluksesta lähtenyt valo havaitaan aluksessa B ja varoitus lähetetään
- 4: varoitus havaitaan asemalla A
- 5: vihollisalus C saapuu asemalle A



Asetetaan origo tapahtumaan 1, jolloin $(x_1, t_1) = (0, 0)$ kaikissa koordinaatistoiissa. Tällöin tapahtuman 3 ja tapahtuman 1 välinen aika aluksen koordinaatistossa B on $\Delta t_{1 \rightarrow 3,(B)} = t_{3(B)} = 1000$ s. Vihollisalus havaitaan etäisyydellä $\Delta L_{(B)} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m aluksesta, mutta koska vihollisaluksesta lähteneeltä valolta kuluu aikaa saapua alukselle, tämä on vihollisten sijainti aluksen koordinaatistossa valon lähtessä vihollisaluksesta eli tapahtuman 2 hetkellä, $x_{2(B)} = \Delta L_{(B)}$.

Alus on aina oman koordinaatistonsa B origossa, joten tapahtuman 3 paikkakoordinaatti on nolla, $x_{3(B)} = 0$. Vastaavasti avaruusasema on oman koordinaatistonsa origossa, joten tapahtumien 4 ja 5 paikkakoordinaatit ovat nolla koordinaatistossa A, $x_{4(A)} = x_{5(A)} = 0$.

Koordinaatistossa B alus on paikoillaan joten sen reittiä kuva pystysuora viiva. Asema A liikkuu negatiiviseen suuntaan nopeudella $0.6c$, joten aseman reittiä kuva vino suora, joka siirtyy vasemmalle kolme pituusyksikköä ($9 \cdot 10^{11}$ m) viiden aikayksikön (2500 s) aikana. Vihollisaluksesta C alukseen B kulkeva valo ja edelleen aluksesta B asemalle A kulkeva valosignaali piirtävät koordinaatistoon 45° kulmassa kulkevan suoran. Aseman reitin ja valon reittien leikkauspiste on tapahtuma 4, jolloin asema vastaanottaa aluksen lähetämän viestin. Vihollisalus kulkee koordinaatistossa B hiukan valoa hitaammin, ja saavuttaa aseman kun aseman ja aluksen reitit leikkaavat. Aseman koordinaatistossa A alus C kulkee vauhdilla $0.5c$, joten se siirtyy x -suunnassa yhden yksikön ($3 \cdot 10^{11}$ m) ajan edetessä kaksi yksikköä. (1000 s)

Selvitettäväänä on nyt tapahtumien 4 ja 5 välinen aikaväli aseman koordinaatistossa A, $\Delta t_{4 \rightarrow 5,(A)} = t_{5(A)} - t_{4(A)}$. Kuvan perusteella tämä on 1000 s. Tarkistetaan kuitenkin graafin ratkaisu laskemalla.

SUUNNITELMA Tapahtumia 2 ja 3 yhdistää vihollisaluksesta havainnon tekevään alukseen valonnopeudella kulkeva valosignaali, joten tapahtumien välistille koordinaateille pätee

$$\frac{\Delta x_{2 \rightarrow 3,(B)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 3,(B)}} = -c. \quad (6.80)$$

Samoin tapahtumia 3 ja 4 yhdistää valosignaali, joten vastaava yhteys pätee myös näille koordinaateille

$$\frac{\Delta x_{3 \rightarrow 4,(B)}}{\Delta t_{3 \rightarrow 4,(B)}} = -c. \quad (6.81)$$

Tapahtumia 2 ja 5 puolestaan yhdistää aseman koordinaatistossa nopeudella $v_{x,C(A)}$ kulkeva vihollisalus, joten näille pätee

$$\frac{\Delta x_{2 \rightarrow 5,(A)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)}} = -0.5c. \quad (6.82)$$

Jos tapahtuman koordinaatit tunetaan yhdessä koordinaatistossa, koordinaatit toisessa koordinaatistossa saadaan Lorentz-muunnoksella. Koordinaatistosta B siirrytään koordinaatistoon A muunnoksella

$$x_{(A)} = \gamma_{A(B)}(x_{(B)} - v_{x,A(B)}t_{(B)}) \quad (6.83)$$

$$t_{(A)} = \gamma_{A(B)} \left(t_{(B)} - \frac{1}{c^2}v_{x,A(B)}x_{(B)} \right). \quad (6.84)$$

RATKAISU Koordinaatistossa B tapahtuman 2 ajaksi saadaan yhtälön (6.80) perusteella

$$t_{2(B)} = t_{3(B)} - \frac{1}{c}\Delta x_{2 \rightarrow 3,(B)} = t_{3(B)} - \frac{1}{c}\Delta L_{(B)} = 1000 \text{ s} - \frac{1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 500 \text{ s} \quad (6.85)$$

Koordinaatistojen A ja B välinen Lorentz-tekijä on

$$\gamma_{A(B)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25 \quad (6.86)$$

ja Lorentz-muunnoksen perusteella tapahtuman 2 koordinaatit aseman koordinaatistossa A ovat

$$x_{2(A)} = 1.25 \cdot (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} + 0.6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 500 \text{ s}) = 3.0 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (6.87)$$

$$t_{2(A)} = 1.25 \cdot \left(500 \text{ s} + 0.6 \frac{1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right) = 1000 \text{ s}. \quad (6.88)$$

Vastaavasti tapahtuman 3 koordinaatit aseman koordinaatistossa A ovat

$$x_{3(A)} = 1.25 \cdot (0 \text{ m} + 0.6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 1000 \text{ s}) = 2.25 \cdot 10^{11} \text{ m} \quad (6.89)$$

$$t_{3(A)} = 1.25 \cdot (1000 \text{ s} + 0 \text{ s}) = 1250 \text{ s}. \quad (6.90)$$

Aluksen B lähettämältä signaalilta kestää matkaan aseman koordinaatistossa A aika

$$\Delta t_{3 \rightarrow 4,(A)} = \frac{1}{c}\Delta x_{3 \rightarrow 4,(A)} = \frac{1}{c}x_{3(A)} = \frac{2.25 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 750 \text{ s}, \quad (6.91)$$

joten varoitus havaitaan ajan hetkellä

$$t_{4(A)} = t_{3(A)} + \Delta t_{3 \rightarrow 4,(A)} = 1250 \text{ s} + 750 \text{ s} = 2000 \text{ s}. \quad (6.92)$$

Vihollisalus puolestaan kulkee tapahtuman 2 ja 5 välisen matkan ajassa

$$\Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)} = \frac{1}{-0.5c}\Delta x_{2 \rightarrow 5,(A)} = \frac{1}{-0.5c}(-x_{2(A)}) = \frac{3.0 \cdot 10^{11} \text{ m}}{0.5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2000 \text{ s}, \quad (6.93)$$

joten alus saapuu asemalle hetkellä

$$t_{5(A)} = t_{2(A)} + \Delta t_{2 \rightarrow 5,(A)} = 1000 \text{ s} + 2000 \text{ s} = 3000 \text{ s}. \quad (6.94)$$

Asemalla kuluu siis varoitukseen saapumisesta vihollisten saapumiseen aika

$$\Delta t_{4 \rightarrow 5,(A)} = t_{5(A)} - t_{4(A)} = 1000 \text{ s} = 16 \text{ min } 40 \text{ s}. \quad (6.95)$$

Kovin paljon valmistautumisaikaa ei siis jää.

ARVIOINTI Laskien saatiin sama tulos kuin graafisesti. Voimme vielä tarkistukseksi laskea tapahtumien 4 ja 5 koordinaatit aluksen koordinaatistossa B Lorentz-muunnoksella. Tulokset on esitetty alla taulukossa ja kaikki koordinaatit vastaavat koordinaatistoon piirrettyä kuvaaa.

taapahduma	$x_{(A)}$	$t_{(A)}$	$x_{(B)}$	$t_{(B)}$
1	0 m	0 s	0 m	0 s
2	$3.0 \cdot 10^{11}$ m	1000 s	$1.5 \cdot 10^{11}$ m	500 s
3	$2.25 \cdot 10^{11}$ m	1250 s	0 m	1000 s
4	0 m	2000 s	$-4.5 \cdot 10^{11}$ m	2500 s
5	0 m	3000 s	$-6.75 \cdot 10^{11}$ m	3750 s

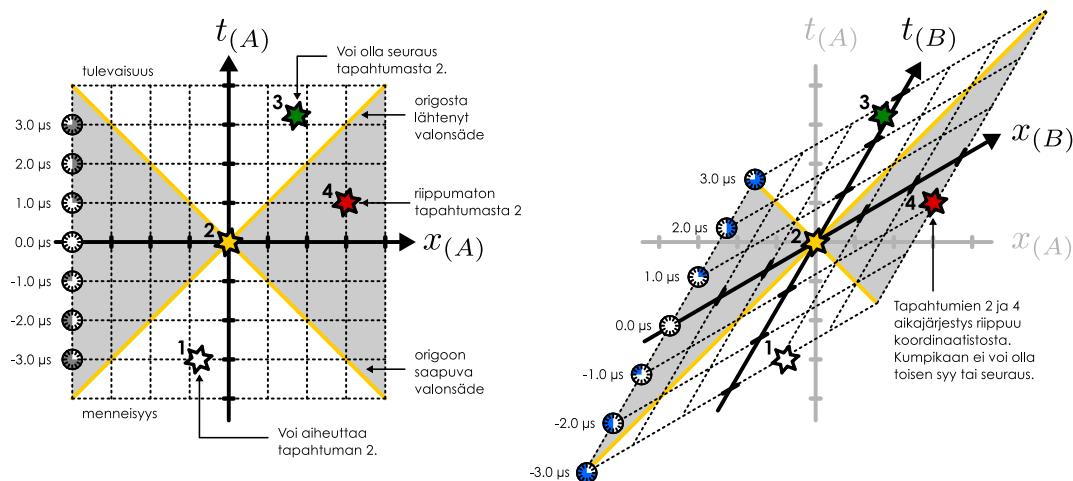
Lisäksi voimme näiden perusteella laskea eri kappaleiden nopeudet. Esimerkiksi vihollisaluksen C nopeus aluksen B koordinaatistossa on nopeuden yhteenlaskusäännön perusteella

$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2}v_{x,C(A)}v_{x,B(A)}} = \frac{-0.5c - 0.6c}{1 + 0.5 \cdot 0.6} = -0.846c. \quad (6.96)$$

Vertaamalla tapahtumien 2 ja 5 koordinaatteja koordinaatistossa B saamme saman tuloksen

$$v_{x,C(B)} = \frac{\Delta x_{2 \rightarrow 5,(B)}}{\Delta t_{2 \rightarrow 5,(B)}} = \frac{-8.25 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3250 \text{ s}} = -2.538 \cdot 10^8 \text{ m/s} = -0.846c. \quad (6.97)$$

Kuva 6.28: Tapahtumien vuorovaikutus toisiinsa. Tapahtumien välillä voi olla syy-seuraussuhde vain jos valosignaali ehtii kulkemaan tapahtumasta toiseen.



Kausaliteetti

Syy ja seuraus eli *kausaliteetti* on tärkeä ajan kokemukseen liittyvä ilmiö. Jos tapahtuma 1 nimitään aiheuttaa tapahtuman 2 eli on sen syy, tapahtuman 1 täytyy tapahtua *ensin*. Kuitenkin tapahtumien aikajärjestys riippuu havaittajan koordinaatistosta, joten herää kysymys voiko suhteellisuusteoria sekoittaa tapahtumien kausaaliset suhteet. Onko esimerkiksi mahdollista, että tapahtuma 1 aiheuttaa tapahtuman 2 yhdessä koordinaatistossa mutta tapahtuma 2 silti tapahtuu ennen tapahtumaa 1 jossakin toisessa koordinaatistossa?

Tätä kysymystä on havainnollistettu kuvassa 6.28, jossa on merkitty neljä tapahtumaa avaruusaikakoordinaatiistoon. Tapahtuma 2 on sijoitettu koordinaatiston origoon, ja koordinaatistossa A tapahtuma 1 havaitaan ennen tapahtumaa 2 ja tapahtumat 3 ja 4 sen jälkeen. Koordinaatistossa B tapahtumat 1, 2 ja 3 ovat samassa järjestyksessä, mutta tapahtuma 4 tapahtuu *ennen* tapahtumaa 2.

Koordinaatistoihin on merkitty myös origon kautta kulkevien valosignaalien radat. Valonnopeudella kulkeva signaali piirtää koordinaatistossa 45° asteen kulmassa olevat suorat, joten nämä signaalit jakavat koordinaatiston neljään osaan. Origosta alas päin aukeavan valkoisen alueen kuvattu alue sisältää ne avaruusajan pisteet, joista voidaan lähetä valonnopeudella tai sitä hitaanmin kulkeva signaali origoon. Tapahtuma 1 on tässä alueessa, joten siitä voi kulkea signaali tapahtumaan 2. Jos tapahtuma 1 on esimerkiksi valokatkaisijan käänämisen, tapahtuma 2 voi olla tästä seuraava lampun sytyminen. Eritäisyesti tapahtuma 1 voi siis olla tapahtuman 2 syy. Vastaavasti origosta ylöspäin aukeava valkoinen alue sisältää pisteet, joihin origosta lähevä signaali voi ehtiä. Koska tapahtuma 3 on tässä alueessa, tapahtuma 2 voi olla tapahtuman 3 syy.

Origosta kummallekin sivulle on piirretty myös harmaa alue. Jos korkeintaan valonnopeudella kulkeva signaali lähtee liikkeelle jossakin tässä alueessa, se ei voi ehtiä origoon. Vastaavasti origosta lähevä signaali ei voi saavuttaa harmaan alueen pisteitä. *Valonnopeus on kuitenkin informaation suurin mahdollinen nopeus*. Niinpä vaikka tapahtuma 4 tapahtuu koordinaatistossa A vasta tapahtuman 2 jälkeen, tieto tapahtumasta 2 ei voi mitenkään saavuttaa tapahtumaa 4 ajoissa eikä tapahtuma 2 voi olla tapahtuman 4 syy. Vastaavasti koordinaatistossa B tapahtuma 4 tapahtuu ennen tapahtumaa 2, mutta tieto tapahtumasta 4 ei voi ehtiä tapahtumaan 2, joten tapahtuma 4 ei voi aiheuttaa tapahtumaa 2. Tapahtumat 2 ja 4 voivat kyllä molemmat olla seurausta tapahtumasta 1, mutta niiden välillä ei voi olla keskinäistä syy-seuraussuhdetta.

Kuvassa origosta ylöspäin piirretty valkoinen alue kuvaa tapahtuman 2 *tulevaisuutta*. Tämän alueen tapahtumat havaitaan *kaikissa koordinaatistoissa* vasta tapahtuman 2 jälkeen, ja ne voivat olla seurausta tapahtumasta 2. Vastaavasti origosta alas päin piirretty valkoinen alue kuvaa tapahtuman 2 *mennetynytä*. Tämän alueen tapahtumat havaitaan *kaikissa koordinaatistoissa* ennen tapahtumaa 2, ja ne voivat olla tapahtuman 2 syy. Harmaan alueen suhde tapahtumaan 2 on epämääriäinen. Olipa tapahtuma missä tahansa harmaalla alueella, on olemassa koordinaatistot, joista toisessa tämä tapahtuma havaitaan ennen tapahtumaa 2 ja toisessa tapahtuman 2 jälkeen. Mutta toisaalta harmaan alueen tapahtumat eivät voi vaikuttaa tapahtumaan 2, joten näiden aikajärjestyksen suhteellisuus ei riko kausaliteettia. Kahden tapahtuman syy ja seurauskuuden suhde on siis absoluuttinen.

- 6.32** Otat laserosoittimen ja menet seisomaan pitkän muurin luon. Osoitat laserin muurin yhteen päähän ja sitten käänät laserin nopeasti osoittamaan muurin toiseen päähän. Määritellään tapahtumat 1: käänät laserosoittinta, 2: valopilkku muurissa lähtee liikkeelle ja 3: valopilkku saapuu perille. (a) Minkä tapahtumien välillä on syy-seuraussuhde? (b) Voiko tapahtumien aikajärjestys riippua koordinaatistosta? (c) Kuinka nopeasti valopilkku voi liikkua?

6.6 Säilymislait suhteellisuusteoriassa

Suhteellisuusteoreettisten prosessien analyysi ei ole aina helppoa, koska Lorentz-muunnos on matemaattisesti hankalampi ja erityisesti epäintuitiivisempi kuin klassinen Galilei-muunnos. Kuitenkaan usein ei ole tarpeellista analysoida prosessien kulkua yksityiskohtaisesti vaan säilymislakien ja systeemin alkutilan perusteella voimme päätellä paljon siitä, millainen systeemin lopputilan pitää olla. Energian ja liikemäään säilymislait pätevät myös suhteellisuusteoriassa, mutta kuten Galilei-muunnos on vain hitaissa nopeuksissa toimiva approksimaatio, myös klassiset liike-energian ja liikemäään lausekkeet pätevät vain kappaleiden ja hiukkasten liikkumisessa hitaasti. Tehtävämme onkin lopuksi tutkia miten nämä säilyvät suureet voidaan kuvata nopeuksien lähestyessä valonnopeutta.

Liikemäärä

Kuvassa 6.29 on esitetty kahden kappaleen elastinen törmäys. Kappaleiden V (vihreä) ja P (punainen) massat ovat yhtä suuret ja kappaleet liikkuvat koordinaatistossa A aluksi yhtä suurilla vauhdilla vastakkaisiin suuntiin. Systeemin kokonaisliikemäärä on siis nolla eli koordinaatisto A on kappaleiden massakeskipiste-koordinaatisto.

Koordinaatiston x -suunta on valittu niin, että kummankin kappaleen törmäyksessä saama impulssi on y -suuntainen ja koordinaatiston origon määrittelee kappaleiden törmäys (joka on tapahtuma). Kuvan esimerkissä kappaleen P alku nopeus on $\vec{v}_{\text{alku},P(A)} = (0.6c)\hat{i} + (0.6c)\hat{j}$ ja kappaleen V $\vec{v}_{\text{alku},V(A)} = -(0.6c)\hat{i} - (0.6c)\hat{j}$. Törmäyksessä kummankin kappaleen nopeuden x -komponentti on vakio, ja koska myös kokonaisliike-energia on elastisessä törmäyksessä vakio, kappaleiden y -suuntaiset nopeuskomponentit kääntyvät ympäri. Kappaleiden nopeudet voidaan jälleen määrittää havaitsemalla kappaleet törmäyksen jälkeen. Kuvassa kappaleen V havaitseminen on tapahtuma pisteessä $(x, y, t)_{V(A)} = (-900 \text{ m}, 900 \text{ m}, 5 \mu\text{s})$ ja kappaleen P havainto tapahtuu pisteessä $(x, y, t)_{P(A)} = (900 \text{ m}, -900 \text{ m}, 5 \mu\text{s})$.

Kummankin kappaleen mukana x -suunnassa kulkee kello, ja koska kellot liikkuvat koordinaatistossa A vauhdilla $0.6c$, ne käyvät koordinaatiston ominaisaikaa hitaammin. Tätä nopeutta vastaava Lorenzin tekijä on

$$\gamma(0.6c) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25, \quad (6.98)$$

joten kellot ehtivät mittamaan *neljä mikrosekuntia* kun koordinaatistossa kuluu aikaa *viisi mikrosekuntia*. Niinpä säättämällä kellot osoittamaan täsmälleen nollaa törmäyshetkellä, ne näyttävät siis aikaa $4 \mu\text{s}$, kun kappaleet havaitaan.

Tarkastellaan sitten samaa törmäystä koordinaatistossa B, joka liikkuu x -suunnassa A:n suhteen nopeudella $v_{x,B(A)} = -0.6c$. Koska koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen x -suunnassa samalla nopeudella kuin kappale V, kappaleen V nopeuden x -komponentti on tässä koordinaatistossa nolla, $v_{x,V(B)} = 0$. Tässäkin koordinaatistossa törmäys tapahtuu origossa, mutta kappaleiden havaintopisteiden koordinaatit muuttuvat Lorentz-muunnoksen määräämällä tavalla. Kappaleen V havaintopisteen x -koordinaatti on *nolla*, koska kappale ei liiku x -suunnassa. Sen y -koordinaatti on sama kuin koordinaatistossa A, $y_{V(B)} = 900 \text{ m}$, koska liikettä vastaan kohtisuorat etäisyysdet eivät muutu. Havaintoaikeita on kuitenkin

$$t_{V(B)} = \gamma_{B(A)} \left(t_{V(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B(A)} x_{V(A)} \right) = 1.25 \cdot \left(5 \cdot 10^{-6} \text{ s} - \frac{-0.6}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} (-900 \text{ m}) \right) = 4 \mu\text{s} \quad (6.99)$$

eli törmäyksestä kappaleen havaitsemiseen kestää koordinaatistossa B *vähemmän aikaa* kuin koordinaatistossa A.

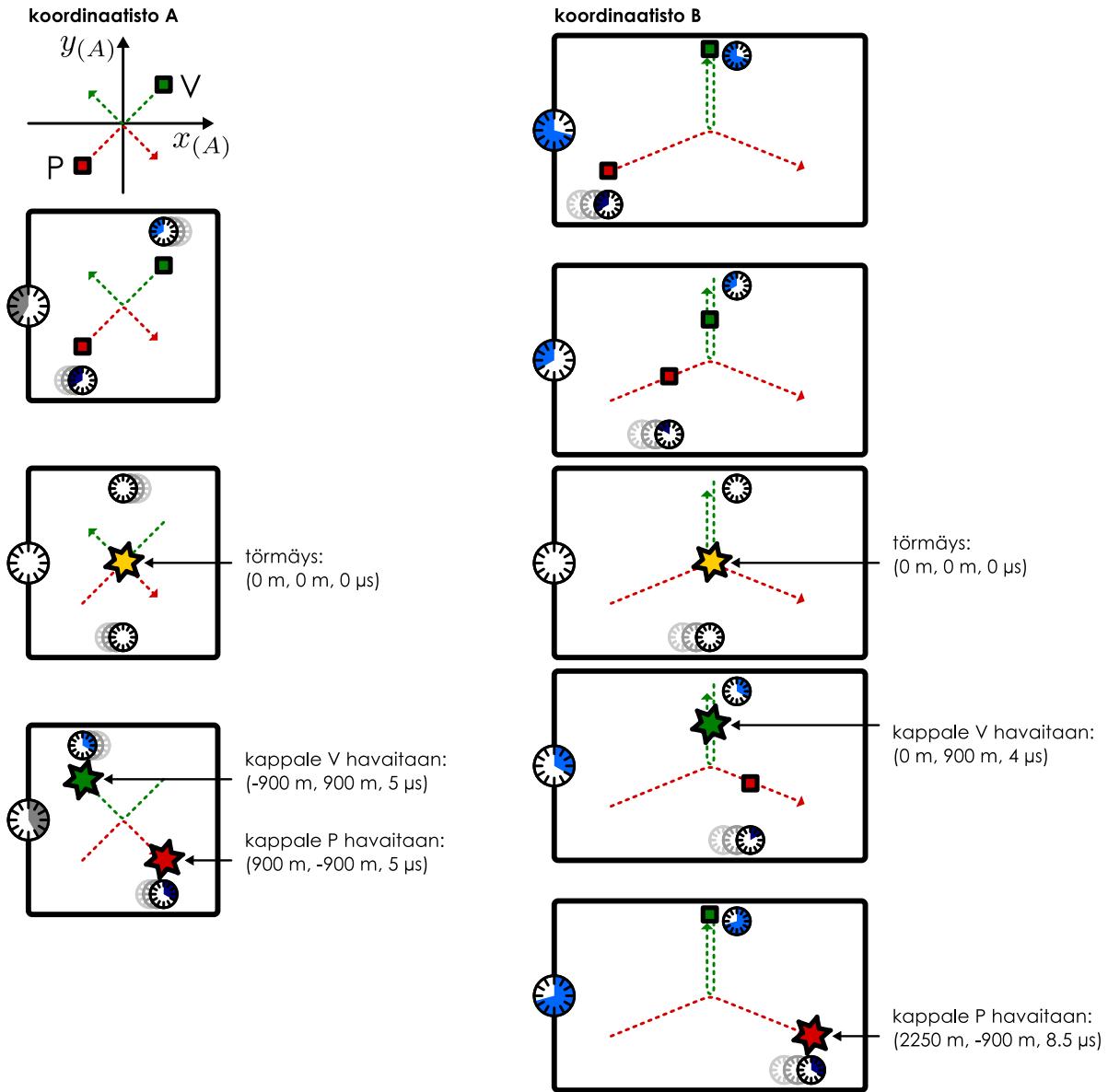
Tämän voi ymmärtää tarkastelemalla koordinaatistossa A kappaleen V mukana kulkevaa keloa. Kello mittaa koordinaatistossa A neljä mikrosekuntia törmäyksen ja kappaleen V havaitsemisen välillä. Kelon lukeman pitää kuitenkin olla sama, nolla, kaikissa koordinaatistoissa törmäyksen tapahtuessa ja samoin lukeman pitää olla sama, neljä mikrosekuntia, kappaleen V havainnon tapahtuessa. Kuitenkin tämä kello on koordinaatistossa B paikoillaan, joten se mittaa koordinaatiston ominaisaikaa. Niinpä koordinaatistossa B täytyy kulua neljä mikrosekuntia törmäyksen ja kappaleen V havaitsemisen välillä.

Vastaavasti voimme laskea kappaleen P havaintopisteen koordinaatit koordinaatistossa B, jolloin tulokseksi saadaan $(x, y, t)_{P(B)} = (2250 \text{ m}, -900 \text{ m}, 8.5 \mu\text{s})$. Nyt havaitaan törmäyksestä kappaleen P havaitsemiseen kuluvan ajan *pidentyvän* verrattuna koordinaatistoon A. Tämä johtuu siitä, että kappaleen P mukana x -suunnassa kulkeva kello liikkuu koordinaatistossa B vielä nopeammin kuin koordinaatistossa A, joten se käy vielä hitaammin. Koska kappaleen havainto tapahtuu kelon näyttäessä neljää mikrosekuntia, tästä täytyy odottaa koordinaatistossa B kauemmin kuin koordinaatistossa A.

Kappaleiden saama impulssi on kummassakin koordinaatistossa y -suuntainen, ja vain kappaleiden nopeuden y -komponentti muuttuu. Lisäksi koska törmäys on massakeskipistekoordinaatistossa symmetrinen,

Kuva 6.29: Mitä nopeammin kappale liikkuu, sitä suurempi sen inertia on.

(a) Kaksi samanlaista kappaletta törmää täysin elastisesti. (b) Törmäys koordinaatistossa, jossa toinen kappaletista ei liiku x -suunnassa.



y -komponentit yksinkertaisesti kääntyvät ympäri. Nopeudet siis muuttuvat yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin,

$$\Delta v_{y,V(A)} = 2v_{y,\text{loppu},V(A)} = 1.2c = -2v_{y,\text{loppu},P(A)} = -\Delta v_{y,P(A)}. \quad (6.100)$$

Nämä pitää ollakin, koska systeemin liikemäärä on törmäyksessä vakio ja kappaleiden massat ovat yhtä suuret.

Koska koordinaatisto B liikkuu A:n suhteeseen x -suunnassa, y -komponentit kääntyvät ympäri myös tässä koordinaatistossa. Koordinaatistossa B kappaleiden nopeuksien muutokset ovat kuitenkin *eri suuret*. Kappaleen V nopeuden komponentti törmäyksen jälkeen ovat

$$v_{x,\text{loppu},V(B)} = \frac{\Delta x_{V(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{x_{V(B)}}{t_{V(B)}} = \frac{0 \text{ m}}{4 \mu\text{s}} = 0.0c \quad (6.101)$$

$$v_{y,\text{loppu},V(B)} = \frac{\Delta y_{V(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{y_{V(B)}}{t_{V(B)}} = \frac{900 \text{ m}}{4 \mu\text{s}} = 0.75c, \quad (6.102)$$

joten kappaleen nopeuden muutos törmäyksessä on

$$\Delta v_{y,V(B)} = 2v_{y,\text{loppu},V(B)} = 1.5c. \quad (6.103)$$

Kappaleen P nopeuden komponentit ovat puolestaan

$$v_{x,\text{loppu},P(B)} = \frac{\Delta x_{P(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{x_{P(B)}}{t_{P(B)}} = \frac{2250 \text{ m}}{8.5 \mu\text{s}} = 0.88c \quad (6.104)$$

$$v_{y,\text{loppu},P(B)} = \frac{\Delta y_{P(B)}}{\Delta \tau_{(B)}} = \frac{y_{P(B)}}{t_{P(B)}} = \frac{-900 \text{ m}}{8.5 \mu\text{s}} = -0.35c, \quad (6.105)$$

joten tämän kappaleen nopeuden muutos törmäyksessä on

$$\Delta v_{y,P(B)} = 2v_{y,\text{loppu},P(B)} = -0.7c. \quad (6.106)$$

Toisin sanoen kappale P, joka liikkuu tässä koordinaatistossa *nopeammin* kuin kappale V, käyttäätyy törmäyksessä kuin sillä olisi *suurempi inertia*.



6.33 Mikä on kappaleen P nopeuden x -komponentti koordinaatistossa B nopeuden yhteenlaskusäennön (6.78) perusteella? Onko tulos sama kuin yllä laskettu arvo?

Ero mitatuissa nopeuksissa johtuu aikadilataatiosta. Kappaleiden mukana liikkuvat kellokot katkevat koordinaatistossa A samalla vauhdilla ja kävät siis yhtä nopeasti, mutta koordinaatistossa B kappaleen P mukana kulkeva kello käy hitaasti. Tämä kello liikkuu koordinaatistossa B samalla nopeudella kuin kappale P liikkuu x -suunnassa, $v_{x,P(B)} = 0.88c$, joten kellon käynti on hidastunut tekijällä

$$\gamma_{\text{kello}(B)} = 2.125 \quad (6.107)$$

verrattuna kappaleen V mukana kulkevan kelloon. Koska nopeus on matkan ja ajan suhde, ja kappaleiden y -suunnassa kulkemat matkat ovat kokeessa samat, kappaleen P y -suuntainen nopeus on koordinaatistossa B tekijän $\gamma_{\text{kello}(B)}$ verran kappaleen V nopeutta pienempi, ja nopeuden muutosten suhde on siis

$$\frac{\Delta v_{y,V(B)}}{\Delta v_{y,P(B)}} = -\gamma_{\text{kello}(B)}. \quad (6.108)$$

Johdimme aikaisemmin tuloksen (2.43), jonka mukaan liikemäärän säilymisen seurauksena kahden kappaleen törmäyksessä nopeuden muutosten suhde on käänänne verrannollinen kappaleiden inertioihin. Kummallakin kappaleella on tässä esimerkissä sama *massa*, mutta kokeen perusteella nopeasti liikkuvan kappaleen P *inertia* on koordinaatistossa B suurempi kuin hitaanmin liikkuvan kappaleen V *inertia* ja erityisesti inertioiden suhde on

$$\frac{m_{\text{inertia},P(B)}}{m_{\text{inertia},V(B)}} = -\frac{\Delta v_{y,V(B)}}{\Delta v_{y,P(B)}} = \gamma_{\text{kello}(B)}. \quad (6.109)$$

Toisin sanoen kappaleen *inertia* riippuu sen nopeudesta.

Koska kumpikin kappale liikkuu koordinaatistossa B, tämä tulos ei suoraan kerro kuinka yksittäisen kappaleen *inertia* riippuu sen nopeudesta. Kuitenkin klassisessa mekaniikassa kappaleiden massa ja *inertia* ovat samat, joten myös suhteellisuusteoriassa hitaasti kulkevan kappaleen inertian täytyy olla likimain sama kuin sen massa. Niinpä jos toistamme kokeen niin, että kappaleiden y -suuntaiset nopeudet ovat pienet verrattuna valonnopeuteen, kappale V on koordinaatistossa B lähes levossa, $v_{V(B)} \approx 0$ ja kappale P liikkuu lähes suoraan x -suuntaan samalla nopeudella kuin sen vierellä kulkeva kello, $v_{P(B)} \approx v_{x,P(B)} = v_{x,\text{kello}(B)}$. Tällöin kappaleen V *inertia* on sama kuin sen massa, $m_{\text{inertia},V(B)} \approx m$, ja kappaleen P *inertia* on $m_{\text{inertia},P(B)} = \gamma_{\text{kello}(B)} m_{\text{inertia},V(B)} \approx \gamma_{P(B)} m$. Niinpä olemme päättelleet, että suhteellisuusteoriassa kappaleen *inertia* on *sen massan ja Lorentzin tekijän tulo*.



6.34 (a) Mikä ovat kuvassa 6.29 (b) kappaleiden V ja P vauhti koordinaatistossa B? (b) Mitkä ovat näitä vauhtuja vastaavat Lorentzin tekijät? (c) Jos kappaleiden massa on 1 kg, mikä on niiden *inertia*? (d) Mikä on inertioiden suhde? Vertaa tästä kappaleiden nopeuden y -komponentin muutoksen suhteeseen.

Tämän päättelyn avulla voimme yleistää liikemäärän käsitteen suhteellisuusteoriaan. Kappaleen liikemäärä määriteltiin klassisessa mekaniikassa inertian ja nopeuden tulona, ja tämä sama määritelmä toimii edelleen kunhan huomioidaan inertian riippuvuus kappaleen nopeudesta,

$$\bar{p} = m_{\text{inertia}} \bar{v} = \gamma m \bar{v}. \quad (6.110)$$

Näin määritelty liikemäärä on säilyvä suure, ja jos systeemiin kohdistuvien ulkoisten voimien summa on nolla, systeemin kokonaisliikemäärä on vakio.

Tässä käytämme termiä *massa* ja symbolia m ilmaiseen kappaleen *omassa koordinaatistossa* mitattua massaa ja *inertiaa*, jotka ovat siis yhtä suuret. Termillä *inertia* tarkoitetaan puolestaan liikemäärän määritelmässä esiintyvää nopeudesta riippuvaa suuretta $m_{\text{inertia}} = \gamma m$. Nämä eivät kuitenkaan ole yleisesti vaikuttuneita nimityksiä, vaan joissakin lähteissä kappaleen lepokoordinaatistossa mitattua massaa kutsutaan

leponmassaksi ja merkitään symbolilla m_0 ja kappaleen inertiaa kutsutaan yleisesti massaksi. Oleellista on joka tapauksessa huomata, että kappaleen massaan ja inertian liittyy sekä invariantti ominaisuus (massa) että havaitsijan koordinaatistosta riippuva ominaisuus (inertia). Tutustuessasi uuteen tietolähteeseen on aina syytä tarkistaa, millä nimellä näitä kutsutaan!

Energia

Klassisen mekaniikan liikemäärä siis yleistyy suhteellisuusteoriaan, kun huomioidaan inertian riippuvuus kappaleen nopeudesta. Inertia esiintyy kuitenkin liikemääränpohjana myös *liike-energian* lausekkeessa, joten mitä ilmeisimmin myös kappaleen liike-energian lauseke on suhteellisuusteoriassa erilainen kuin klassisessa mekaniikassa. Tässä tapauksessa kuitenkaan *ei riitä* vain vaihtaa klassisen mekaniikan liike-energian lausekkeeseen massan m tilalle suhteellisuusteoreettista inertian m_{inertia} . Viimeisenä tehtävänämme onkin nyt johtaa liike-energialle yleinen lauseke suhteellisuusteoriassa.

Klassisessa mekaniikassa opimme, että *työ* kuvailee energian siirtymistä muodosta toiseen, eikä suhteellisuusteoria muuta tästä periaatetta mitenkään. Erityisesti kappaleen *liike-energia määriteltiin kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman tekemänä työnä*, kun kappale kiihytetään levosta nopeuteen v . Yksilöllisen liikkeen tapauksessa liike-energia on siis

$$K = W = \int F_{x,\text{kokonais}} dx. \quad (6.111)$$

Voima puolestaan määritellään *liikemäärään aikaderivaattana*,

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt}. \quad (6.112)$$

Nämä määritelmät pätevät myös suhteellisuusteoriassa, ja ainoa ero klassiseen mekaniikkaan verrattuna on liikemäärä määritelmä, jossa vakiona pysyvä massan sijaan on käytettävä nopeudesta riippuva inertiaa.

Lasketaan siis ensin suhteellisuosteoreettisen liikemääräderivaattaa ajan suhteen. Koska liikemäärä lausekkeessa esiintyy sekä Lorentzin tekijä γ että nopeus v_x , jotka molemmat muuttuvat ajan kuluessa (koska kappale on kiihyvässä liikkeessä), voimme laskea tämän tulon derivoimissäännöllä,

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(\gamma mv_x)}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} mv_x + \gamma m \frac{dv_x}{dt}. \quad (6.113)$$

Edelleen Lorentzin tekijän derivaatta on yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{v_x}{c^2} \frac{dv_x}{dt}, \quad (6.114)$$

joten liikemäärään aikaderivaatta on

$$\frac{dp_x}{dt} = \left[\frac{\frac{v_x^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{1/2}} \right] m \frac{dv_x}{dt} \quad (6.115)$$

$$= \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right)^{3/2}} \right] m \frac{dv_x}{dt} \quad (6.116)$$

$$= \gamma^3 m \frac{dv_x}{dt}. \quad (6.117)$$

Tämä on samalla myös suoraan liikuvaan kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima

$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{dp_x}{dt} = \gamma^3 m \frac{dv_x}{dt} = \gamma^3 m a_x. \quad (6.118)$$

Huomaa erityisesti, että $F_{x,\text{kokonais}} \neq m_{\text{inertia}} a_x$ eli dynamikan peruslain inertian ja kiihyvyyden avulla lausuttu muoto ei päde suhteellisuusteoriassa.



6.35 Onko voima suhteellinen suure (a) Galilei-suhteellisuudessa, (b) suhteellisuusteoriassa?

Tämän perusteella kappaletta kiihdyttävän kokonaivoiman tekemä työ on

$$W = \int \frac{dp_x}{dt} dx = \int \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} m \frac{dv_x}{dt} dx. \quad (6.119)$$

Voimme tässä vaihtaa differentiaalien järjestyksen ja kirjoittaa

$$\frac{dv_x}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv_x = v_x dv_x \quad (6.120)$$

samoin kuin luvussa 3 klassisen mekaniikan liike-energiaa laskettaessa. Tämä vaihtaa integroimismuuttujaksi nopeuden, jolloin laskettavaksi jää integraali

$$W = \int \frac{mv_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv_x. \quad (6.121)$$

Integroitavan funktion $f(v_x) = mv_x \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^n$ integraalifunktio on $F(v_x) = -\frac{mc^2}{2(n+1)} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{n+1}$ ja tässä $n = -3/2$. Niinpä kun kappale kiihdytetään levosta nopeuteen v , siihen tehdään työ

$$W_{0 \rightarrow v} = \left|_0^v mc^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (6.122)$$

Tämä on siis myös kappaleen suhteellisuustekonäytelmä liike-energia

$$K = (\gamma - 1)mc^2. \quad (6.123)$$



6.36 Derivoi edellä mainittu funktio $F(v_x)$ ja osoita, että sen derivaatta on $f(v_x)$. Koska integrointi ja derivoointi ovat käänneisoperaatiot, täytyy funktion $f(v_x)$ integraalin olla siis $F(v_x)$.

Liike-energian lausekkeen voi kirjoittaa myös muotoon

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 = m_{\text{inertia}} c^2 - mc^2. \quad (6.124)$$

Levossa kappaleen inertia ja massa ovat samat, joten levossa olevan kappaleen liike-energia on nolla kuten pitääkin. Liike-energian lauseke kuitenkin koostuu nopeudesta riippuvasta osuudesta γmc^2 sekä nopeudesta riippumattomasta mc^2 , ja näilläkin on fysikaalinen merkitys. Tämä analyysi ei sitä todista, mutta vakiotermi on kappaleen *massasta riippuva sisäenergia*,

$$E_{\text{sisä}} = mc^2 \quad (6.125)$$

ja nopeudesta riippuva osuus on kappaleen *kokonaisenergia*

$$E_{\text{kokona}} = m_{\text{inertia}} c^2 = \gamma mc^2. \quad (6.126)$$

Liike-energian lauseke (6.124) siis yksinkertaisesti kuvaa energian jakautumisen liike- ja sisäenergiaksi

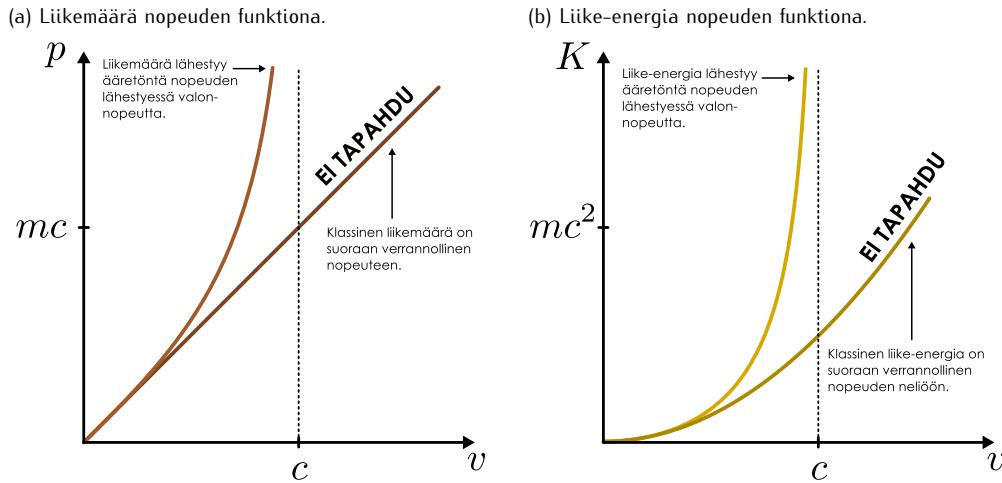
$$K = E_{\text{kokona}} - E_{\text{sisä}}. \quad (6.127)$$



6.37 Jos x on paljon yhtä pienempi, pätee sarjakehitelmä $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Kirjoita tämän avulla sarjakehitelmä Lorentzin tekijälle, kun $x = v^2/c^2 \ll 1$. Päättelte edelleen, että nopeuden ollessa paljon valonnopeutta pienempi liike-energialle pätee klassinen lauseke $K \approx \frac{1}{2}mv^2$.

Tämä on suhteellisuustekorian kuuluisimpia tuloksia, jonka mukaan *kappaleen massaan liittyy energia mc^2* , vaikka kappale olisi levossa. Tätä energiota kutsutaankin myös *lepoenergiaksi*. Massa on siis energian muoto ja toisaalta energia ilmenee massana. Koska näiden välinen verrannollisuuskerroin c^2 on hyvin suuri luku, arkiisin prosesseihin liittyvät energiamäärität ovat liian pieniä, jotta massan muutoksia havaittaisiin. Sen sijaan ydin- ja hiukkasfysiikassa tulos on alivan keskeinen, sillä esimerkiksi ydinreaktioissa ja hiukkasten hajoamisessa syntyyvien hiukkasten kokonaismassa on tavallisesti *eri suuri* kuin alkuperäisten hiukkasten kokonaismassa, ja massojen erotukseen liittyvä energia siirtyy tällaisissa reaktioissa hiukkasten liike-energiaksi.

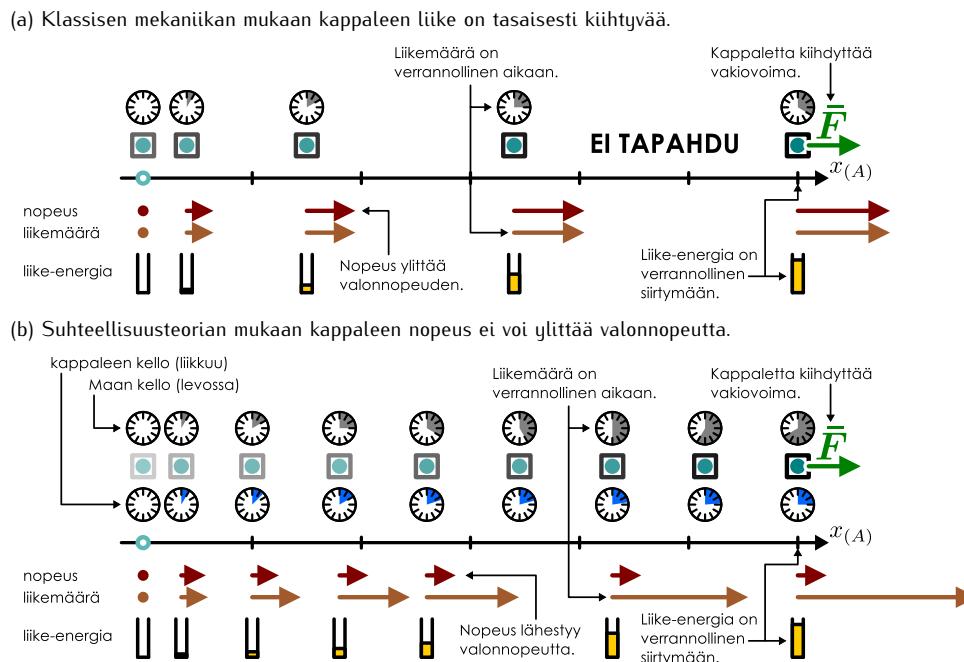
Kuva 6.30: Kappaleen liikemääärän ja liike-energian riippuvuus nopeudesta suhteellisuusteoriassa (oikein) sekä klassisen mekaniikan mukaan (väärin).



Kuvassa 6.30 on piirretty kappaleen liikemäärin itseisarvo ja liike-energia nopeuden funktio sekä klassisen mekaniikan perusteella (väärin) että suhteellisuusteorian mukaisesti (oikein). Newtonin mekaniikkassa liikemääri on suoraan verrannollinen nopeuteen ja liike-energia nopeuden nelioon. Tämä pätee erittäin hyvin, kun nopeus on selkeästi valonnopeutta pienempi. Sen sijaan nopeuden lähestyessä valonnopeutta sekä liikemääri että liike-energia kasvavat rajattaa. Tämä johtuu siitä, että kappaleen *inertia* kasvaa nopeuden kasvaessa ja lähestyy ääretöntä nopeuden lähestyessä valonnopeutta. Niinpä mitä lähempänä valonnopeutta kappale lükkiu, sitä suurempi työ sen *nopeuden* muuttamiseen tarvitaan, eikä massallista kappaletta voi koskaan saada liikkumaan valonnopeudella tai sitä nopeammin missään koordinaatistossa. Valonnopeus on siis universumin yleinen nopeusrajoitus: kappaleet eivät voi liikkua sitä nopeammin, eikä ole myöskään mielekästä tarkastella toistensa suhteita valoa nopeammin kulkevia koordinaatistoja.

Kappaleen nopeuden, liikemäären ja liike-energian muutosta on havainnollistettu myös lükeidiagrammein kuvassa 6.31. Kuvassa on esitetty aluksi levossa olevan kappaleen liike vakiovoiman vaikuttaessa kappaleeseen jälleen sekä klassisen mekaniikan (a, väärin) että suhteellisuusteorian (b, oikein) perusteella. Klassinen kappale on koko ajan tasaisesti kiihyvässä liikkeessä. Kappaleen nopeus ja liikemääri ovat suoraan ver-

Kuva 6.31: Vakiovoiman vaikutus aluksi levossa olevaan kappaleeseen.



rannolliset voiman *vaikutusaikaan*, sillä mitä kauemmin voima ehtii kappaletta kiihyttää, sitä suuremman impulssin kappale saa. Kappaleen saama liike-energia puolestaan on verrannollinen *siirtyämään*, sillä mitä pidemmän matkan kappale kulkee, sitä suuremman työn voima siihen tekee. Suhteellisuusteoriassa impulssia ja työperiaatteet toimivat täsmälleen samoin kuin klassisessa mekaniikassa. Kappaleen saama impulssi ja siis sen liikemääriä on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan kappaletta kiihytetään. Kappaleeseen tehty työ ja siten kappaleen liike-energia puolestaan on suoraan verrannollinen siihen, kuinka pitkän matkan kappale on kiihytyksen aikana kulkenut. Ero klassiseen mekaniikkaan on vain siinä, että vaikka liikemääri ja liike-energia kasvavat, nopeus ei voi koskaan ylittää valonnopeutta. Kappaleelle voidaan kuitenkin antaa mielivaltaisen suuri liikemääri ja liike-energia.



6.38 Vertaa kuvan 6.31 klassista (a) ja suhteellisuusteoreettista (b) liikediagrammia. Kuvaan (a) piirretystä viimeisessä (oikeanpuolimaisessa) havaintopisteessä kappaleen nopeus, liikemääri ja liike-energia ovat v_x , p_x ja K . Missä kohtaa kuvan (b) liikeradalla kappaleella on sama nopeus, liikemääri tai liike-energia?

Energian ja liikemäään yhteys

Näiden tulosten perusteella voimme myös johtaa yhteyden hiukkasten kokonaisenergian ja liikemäään välille. Suoraan laskemalla näemme, että kokonaisenergian ja liikemäään *neliöiden* erotukselle pätee

$$E_{\text{kokonais}}^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (c^2 - v^2). \quad (6.128)$$

Toisaalta Lorentzin tekijän neliö on

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad (6.129)$$

joten

$$E_{\text{kokonais}}^2 - p^2 c^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^4. \quad (6.130)$$

Kokonaisenergian ja liikemäään neliöille pätee siis

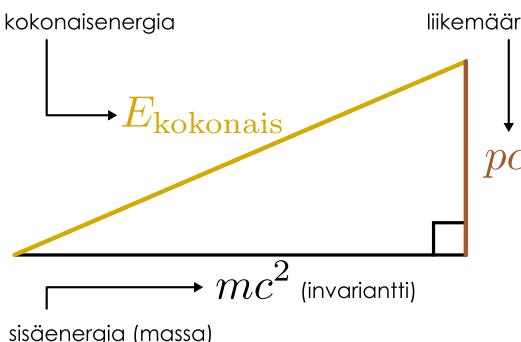
$$E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 = E_{\text{sisä}}^2. \quad (6.131)$$

Relaatio on erityisen käytökelpoinen siksi, että se ei sisällä hiukkasen nopeutta lainkaan. Sekä energia että liikemääri riippuvat hiukkasen nopeudesta Lorenzin tekijän kautta, ja tämä sisältää matemaattisesti hankalan neliöjuurilausekkeen. Tuloksen (6.131) perusteella kokonaisenergian ja liikemäään neliöiden välillä on kuitenkin yksinkertainen yhteyts. Niinpä esimerkiksi alkeishiukkasprosessit, joissa sekä kokonaisenergia että liikemääri ovat vakioita, on yleensä helpoin analysoida suoraan energian ja liikemäään avulla ratkaisematta välillä hiukkasten nopeutta.

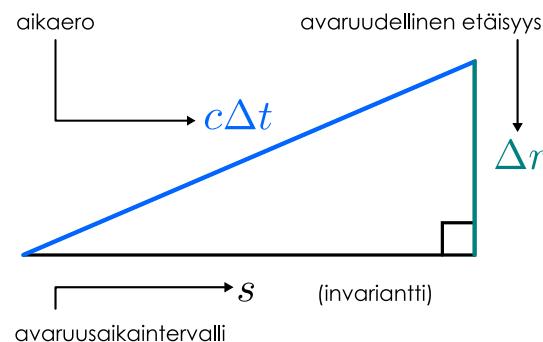
Lausekkeen (6.131) oikealla puolella esiintyy vain kappaleen massa ja valonnopeus, jotka ovat molemmat *invariantteja*. Niinpä myös lausekkeen vasemman puolen täytyy olla invariantti. Toisin sanoen vaikka kokonaisenergia E_{kokonais} ja liikemääri p riippuvat koordinaatistosta, niiden neliöiden erotus $E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2$ ei riipu. Sääntö muistuttaa Pythagoraan lausetta, ja sen voikin muistaa kuvassa 6.32 esitetyn suorakulmaisen kolmion avulla. Hiukkasen kokonaisenergia, liikemääri ja massa muodostavat suorakulmaisen kolmion

Kuva 6.32: Graafinen muistisääntö energian, liikemäään ja massan yhteydelle. Suureiden arvot muodostavat kaikissa koordinaatistoissa suorakulmaisen kolmion, jonka sivu mc^2 on kaikissa koordinaatistoissa sama.

(a) Kokonaisenergia, liikemääri ja massa.



(b) Aikaero, etäisyys ja avaruusaikaintervalli, kun $s^2 > 0$.



kaikissa koordinaatistoissa, ja kolmion sisäenergiaa kuvaavan sivun pituus on kaikissa koordinaatistoissa sama.

Tulos muistuttaa avaruusaikaintervallin lauseketta

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] = \text{invariantti}, \quad (6.132)$$

joka on niin ikään invariantti. Myös avaruusaikaintervallin lausekkeessa esiintyy suureiden neliöitä, koska se johdettiin *avaruuden geometriasta* käyttäen Pythagoraan lausetta. Osoitamme vielä lopuksi, että energian ja liikemäään yhteyks voidaan johtaa suoraan avaruusaikaintervallin lausekkeesta, ja tämän vuoksi energian ja liikemäään välillä on Pythagoraan lauseen tapainen neliöllinen riippuvuus.

Hiukkasan voidaan havaita koordinaatistossa A kahdessa avaruuskakkoordinaatiston pisteesä ja näiden havaintotapahtumien välille voidaan laskea avaruusaikaintervalli, joka siis ei riipu koordinaatistosta. Jos samalla mitataan havaintojen välinen ominaisaika hiukkasen omassa koordinaatistossa B, $\Delta\tau_{(B)} = \frac{1}{\gamma_{B(A)}}\Delta t_{(A)}$, intervallin paikkakoordinaateista riippuvat termit ovat verrannolliset hiukkasen liikemäään skalaarikomponentteihin

$$\left(\frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta\tau_{(B)}}\right)^2 = \left(\gamma_{B(A)} \frac{\Delta x_{(A)}}{\Delta t_{(A)}}\right)^2 = (\gamma_{B(A)} v_{x,(A)})^2 = \left(\frac{p_{x,(A)}}{m}\right)^2 \quad (6.133)$$

ja ajasta riippuva osuus on verrannollinen hiukkasen kokonaisenergiaan

$$\left(c \frac{\Delta t_{(A)}}{\Delta\tau_{(B)}}\right)^2 = \left(c \gamma_{B(A)} \frac{\Delta t_{(A)}}{\Delta t_{(A)}}\right)^2 = (c\gamma_{B(A)})^2 = \left(\frac{E_{\text{kokonais},(A)}}{mc}\right)^2 \quad (6.134)$$

Niinpä avaruusaikaintervallin lausekkeen (6.132) kertominen termillä $(mc)^2/(\Delta\tau_{(B)})^2$ antaa tuloksen

$$E_{\text{kokonais},(A)}^2 - p_{(A)}^2 c^2 = \text{invariantti}. \quad (6.135)$$

Tulos on sama kuin yhtälö (6.131), mutta tässä se johdettiin avaruusaikaintervallia tarkastellen. Tämä päätely osoittaa, että energian ja liikemäään suhde on suhteellisuusteoriassa hyvin samankaltainen kuin ajan ja paikan suhde. Siinä missä liikemäärä liittyy paikan muuttumiseen, energia liittyy kappaleen ajan muuttumiseen. Itse asiassa jos ajan ajatellaan olevan avaruusajan yksi ulottuvuus, kappaleen kokonaisenergiaa voi tavallaan pitää sen liikemääärävektorin "komponenttina" aikauottuvuuden suunnassa.



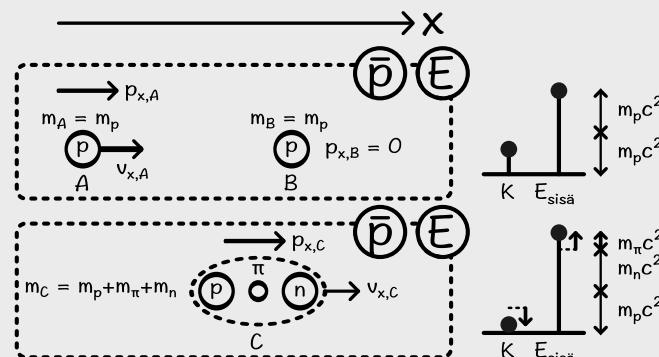
6.39 Protoni liikkuu koordinaatistossa A vauhdilla $0.6c$ ja on koordinaatistossa B levossa. Mikä on kummassakin koordinaatistossa protonin (a) sisäenergia, (b) liike-energia, (c) kokonaisenergia, (d) liikemäärä, (e) lausekkeen $E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2$ arvo?

esimerkki 6.6

Relativistinen törmäys

Nopeasti liikkuva protoni törmää toiseen levossa olevaan protoniin. Törmäyksessä yksi protoni muutuu neutroniksi sekä pioniksi. Neutronin massa on likimain sama kuin protonin ja pionin massa on 0.149-kertainen protonin verrattuna. Törmäyksen jälkeen kaikki hiukkaset liikkuvat likimain samalla nopeudella. Mikä on protonin liike-energia ennen törmäystä?

TILANTE Protonin massa on $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg, neutronin $m_n \approx m_p$ ja pionin $m_\pi = 0.149m_p$. Merkitään aluksi liikkuvaa protonia indeksillä A ja levossa olevaa protonia indeksillä B. Koska hiukkaset liikkuvat lopuksi kaikki samalla nopeudella, voimme kuvata niitä yhtenä hiukkasena C, jonka massa on $m_C = 2m_p + m_\pi = 2.149m_p$. Piirretään kuva systeemistä ennen törmäystä ja sen jälkeen.



SUUNNITELMA Oletetaan ettei protoneihin kohdistu ulkoisia vuorovaikutuksia. Tällöin protonien ja pionin muodostaman systeemin kokonaisenergia ja kokonaisliikemääri ovat vakiot. Aluksi systeemin energia koostuu protonien lepoenergiasta ja protonin A liike-energiasta. Lopuksi systeemin energia koostuu yhdistetyn hiukkasen C lepo- ja liike-energioista. Törmäyksessä systeemin massa kasvaa pionin massan verran, ja tähän massaan liittyvän lepoenergian täyttyy tulla protonin liike-energiasta. Liikemäään säilymisen johdosta hiukkaset liikkuvat myös törmäyksen jälkeen, joten systeemillä on edelleen myös liike-energiaa.

Protonien energiat ja liikemäärit liittyvät toisiinsa. Protonille A pätee

$$E_A^2 - p_A^2 c^2 = m_p^2 c^4 \quad (6.136)$$

ja protonille B, jonka liikemäärä on nolla, $p_B = 0$,

$$E_B = m_p c^2. \quad (6.137)$$

Reaktiossa syntynyt hiukkasen C energialle ja liikemäärelle pätee

$$E_C^2 - p_C^2 c^2 = m_C^2 c^4 = (2.149 m_p)^2 c^4. \quad (6.138)$$

Näillä merkinnöillä kokonaisenergian vakioisuuden perusteella siis

$$E_A + E_B = E_C \quad (6.139)$$

ja liikemäären vakioisuudesta seuraa

$$p_A = p_C. \quad (6.140)$$

RATKAISU Säilymislakien perusteella voimme sijoittaa yhtälössä (6.138) hiukkasen C energian tilalle protonien A ja B kokonaisenergian (6.139) ja liikemäären tilalle hiukkasen A liikemäären (6.140). Näin saadaan relaatio

$$(E_A + E_B)^2 - p_A^2 c^2 = (2.149 m_p)^2 c^4. \quad (6.141)$$

Tässä voidaan kertoa binomin neliö auki

$$(E_A + E_B)^2 = E_A^2 + 2E_A E_B + E_B^2, \quad (6.142)$$

jolloin saadaan

$$E_A^2 - p_A^2 c^2 + 2E_A E_B + E_B^2 = 2.149^2 m_p^2 c^4. \quad (6.143)$$

Tässä esiintyvät lausekkeet $E_A^2 - p_A^2 c^2$ sekä E_B^2 ovat kuitenkin yhtä suuret kuin $m_p^2 c^4$, joten hiukkasen B energia ja hiukkasen A liikemäärä voidaan eliminoida. Näin saadaan yhtälö

$$2m_p c^2 E_A + 2m_p^2 c^4 = 2.149^2 m_p^2 c^4, \quad (6.144)$$

jossa ainoa tuntematon on hiukkasen A kokonaisenergia, jonka arvoksi ratkeaa

$$E_A = \frac{1}{2}(2.149^2 - 2)m_p c^2 = 1.309 m_p c^2. \quad (6.145)$$

Hiukkasen A *liike-energia* voidaan edelleen laskea vähentämällä kokonaisenergiasta lepoenergia,

$$K_A = E_A - m_p c^2 = 0.309 m_p c^2 = 0.309 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 4.73 \cdot 10^{-11} \text{ J}. \quad (6.146)$$

Mathematica:

```
(* massat ja hiukkanen B (asetetaan m_p = 1 ja c = 1) *)
mA = 1;
mB = 1;
mC = 2.149;
eneB = mB;
pB = 0;

(* E ja p ovat vakiot *)
eneC = eneA + eneB;
pC = pA + pB;

(* ratkaistaan E_A ja p_A relaation E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 avulla *)
ratkaisuA = Solve[{{
    eneA^2 - pA^2 == mA^2,
    eneC^2 - pC^2 == mC^2
}, {eneA, pA}}
, {{eneA -> 1.3091, pA -> -0.844834}, {eneA -> 1.3091, pA -> 0.844834}}]

{eneC, pC} /. ratkaisuA[[2]]
{2.3091, 0.844834}

(* lukuarvot *)
mp = 1.7*10^-27;
c = 3*10^8;
kA = (eneA - 1) mp c^2 /. ratkaisuA[[2]]
{4.72924*10^-11}
```

ARVIOINTI Systeemin kokonaisenergia on $E_A + E_B = 2.31 m_p c^2$, josta protonin A liike-energian osuuus on $0.31/2.31 = 0.13$. Liike-energiaa muuttuu prosessissa pionin lepoenergiaksi $\Delta E_{\text{sisä}} = 0.15 m_p c^2$, joten hiukkasten liike-energiaksi jää törmäyksen jälkeen $K_C = K_A - \Delta E_{\text{sisä}} = 0.16 m_p c^2$. Siispä likimain puolet protonin liike-energiasta muuttuu pionin lepoenergiaksi (siis massaksi). Kaikki protonin liike-energia ei voi muuttaa törmäyksessä pionin energiaksi, sillä liikemäären säilymislain takia hiukkasten täytyy olla törmäyksen jälkeen edelleen liikkeessä ja niillä on edelleen liike-energiaa.

Tarkistetaan, että liikemäärä ja energia säilyvät. Protonin A liikemäärä on aluksi

$$p_A = \sqrt{\frac{1}{c^2} E_A^2 - m_p^2 c^2} = \sqrt{1.309^2 - 1} m_p c = 0.845 m_p c \quad (6.147)$$

ja tämän täytyy olla siis myös hiukkasten kokonaisliikemäärä lopuksi, $p_C = 0.845 m_p c$. Voimme laskea hiukkasten kokonaisenenergian törmäyksen jälkeen tämän liikemäären perusteella,

$$E_C = \sqrt{p_C^2 c^2 + (m_C c^2)^2} = \sqrt{5.332} m_p c^2 = 2.31 m_p c^2. \quad (6.148)$$

Tämä on sama kuin kokonaisenenergia aluksi, $E_C = E_A + E_B$, joten kokonaisenenergia on vakio ja säilymislait toteutuvat.

Hiukkasten nopeuksia ei kysytty eikä niitä tarvittu laskussa. Itse asiassa lasku olisi huomattavan vaikea, jos yrittäisimme ensin ratkaista nopeudet. Nyt kuitenkin kun hiukkasten energiat ja liikemäärit tunnetaan, voimme laskea myös hiukkasten nopeudet tilanteen hahmottamiseksi. Protoni B on aluksi levossa ja sen nopeus on nolla. Protonin A nopeus on helpoin laskea energian avulla, sillä hiukkasen Lorentz-tekijä on $\gamma_A = E_A/(m_p c^2) = 1.309$ ja nopeus on siten

$$v_{x,A} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_A^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{1.309^2}} = 0.645 c. \quad (6.149)$$

Hiukkasjoukon C Lorentz-tekijä on puolestaan $\gamma_C = E_C/(m_C c^2) = 2.309/2.149 = 1.075$ ja nopeus

$$v_{x,C} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_C^2}} = c \sqrt{1 - \frac{1}{1.075^2}} = 0.366 c. \quad (6.150)$$

Hiukkasten nopeus on siis törmäyksen jälkeen hieman suurempi kuin puolet alkuperäisestä nopeudesta. Tämä on järkevä, sillä liikkuvan hiukkasjoukon massa on lopuksi likimain kaksinkertainen aluksi lükkeessä olleen protonin massaan verrattuna. Toisaalta protonin alkunopeus on niin suuri, että suhteellisuustoreettinen inertian kasvu täytyy huomioida. Systeemin liikemäärä aluksi ja lopuksi on sama,

$$p_{x,\text{alku}} = \gamma_A m_A v_{x,A} = 1.29 \cdot m_p \cdot 0.63 c = 0.82 m_p c = 1.07 \cdot 2.14 m_p \cdot 0.36 c = \gamma_C m_C v_{x,C} = p_{x,\text{loppu}}, \quad (6.151)$$

kuten pitääkin.



6.40 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä suhteellisuustoreettisesta liikemääristä ja energiasta. Pohdi, mitä samaa ja mitä erilaista näiden suureiden kuvauksessa on klassiseen mekanikkaan verrattuna. Taulukoi yhtälöt, jotka yhdistävät nopeuden, liikemäären ja kokonaisenenergian.

Yhteenveton: Suhteellisuus

Suhteellisuus

- Suure on **suhteellinen**, jos sen arvo voi saada eri koordinaatistossa eri arvoja.
- Suure on **absoluuttinen** eli sen arvo on **invariantti**, jos se havaitaan samanlaisena kaikissa koordinaatistossa.
- **Suhteellisuusperiaateen** mukaan kaikki luonnonlait havaitaan täsmälleen samanlaisina kaikissa toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvissa koordinaatistossa. Jos koordinaatistot A ja B liikkuvat toistensa suhteen, ei ole mahdollista määrittää absoluuttisesti kumpi on paikoillaan ja kumpi liikkuu.
- **Valonnopeus** eli valon nopeus tyhjiössä, $c = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, on invariantti luonnonvakio, jolle mitataan sama arvo kaikissa koordinaatistossa.
- **Tapahtuma** on paikka-aikakoordinaatiston piste eli asia, jolla on täsmälliset paikka- ja aikakoordinaatit (x, y, z, t) .
- Jos koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteen nopeudella $v_{x,B}(A)$, ja koordinaatistossa A havaitaan tapahtuma $(x, y, z, t)_{(A)}$, tapahtuman koordinaatit B:ssä ovat **Galileimuunnoksen** mukaan

$$\begin{aligned} x_{(B)} &= x_{(A)} - v_{x,B}(A)t_{(A)} \\ y_{(B)} &= y_{(A)} \\ z_{(B)} &= z_{(A)} \\ t_{(B)} &= t_{(A)}. \end{aligned}$$

Galilei-muunnos pääte vain, jos koordinaatistot liikkuvat huomattavasti valoa hitaanmin, $v_{x,B}(A) \ll c$.

- Jos x -suuntaan liikkuvan kappaleen nopeus koordinaatistossa A on $v_{x,(A)}$, sen nopeus koordinaatistossa B on Galilei-muunnoksen perusteella

$$v_{x,(B)} = v_{x,(A)} - v_{x,B}(A).$$

Säilymislait

- Liikemäärä ja energia ovat säilyviä mutta suhteellisia suureita. Niitä ei voi luoda eikä hävittää, mutta niille mitataan eri koordinaatistossa erilaiset arvot.
- Kappaleen kokonaisenergia on sen makroskooppisen liike-energian ja sisäenergian summa

$$E_{\text{kokonais}} = K + E_{\text{sisä}} \quad (6.153)$$

Liike-energia on suhteellinen suure, mutta sisäenergia on absoluuttinen suure. Esimerkiksi kappaleen lämpötila ei riipu koordinaatistosta, jossa sitä tarkastellaan.

- Hiukkasista koostuvan kappaleen hiukkasten liike voidaan jakaat järjestyneeseen massakeskipisteeseen liikkeeseen sekä hiukkasten satunnaisliikkeeseen massakeskipisteen suhteen. Järjestynyt osuus on kappaleen liike-energiaa ja epäjärjestynyt osuus sisäenergiaa (lämpöenergiaa).
- Nopeudella \bar{v} liikkuvan kappaleen tai hiukkisen liikemäärä on

$$\bar{p} = \gamma m \bar{v} = \frac{m \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.154)$$

Sanasto

- koordinaatisto (reference frame)
- inertiaalikoordinaatisto (inertial frame)
- massakeskipistekoordinaatisto (center of mass frame)
- näennäisvoima (fictitious force)
- keskipakovoima (centrifugal force)
- painottomuuks (weightlessness)
- suhteellinen (relative)
- absoluuttinen (absolute)
- invariantti (invariant)
- suppea suhteellisuusteo (special relativity)
- yleinen suhteellisuusteo (general relativity)
- ekivalenssiperiaate (principle of equivalence)

- Koordinaatistojen välinen täsmällinen muunnos on **Lorentzmuunnos**, joka pääte myös nopeuksien lähestyessä valonnopeutta

$$\begin{aligned} x_{(B)} &= \gamma_{B(A)}(x_{(A)} - v_{x,B}(A)t_{(A)}) \\ y_{(B)} &= y_{(A)} \\ z_{(B)} &= z_{(A)} \\ t_{(B)} &= \gamma_{B(A)} \left(t_{(A)} - \frac{1}{c^2} v_{x,B}(A)x_{(A)} \right), \end{aligned}$$

missä esiintyy ns. **Lorentzin tekijä**

$$\gamma_{B(A)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{x,B}(A)^2}{c^2}}}. \quad (6.152)$$

- Jos x -suuntaan liikkuvan kappaleen nopeus koordinaatistossa A on $v_{x,(A)}$, sen nopeus koordinaatistossa B on Lorentz-muunnoksen perusteella

$$v_{x,(B)} = \frac{v_{x,(A)} - v_{x,B}(A)}{1 - \frac{1}{c^2} v_{x,B}(A)v_{x,(A)}}.$$

- Lorentz-muunnokseen mukaan aika ja pituus ovat suhteellisia, toisistaan riippuvia suureita, jotka muodostavat yhdessä neliuotteen avaruusajan.
- Lorentzin tekijä on yksi, kun koordinaatistot eivät liiku toistensa suhteen. Tekijä lähestyy ääretöntä koordinaatistojen nopeuksien lähestyessä valonnopeutta. Galilei-suhteellisuus on sitä parempi approksimaatio, mitä lähevästi tekijä on arvoa yksi.
- Kahden tapahtuman välinen **avaruusaikaintervalli** on neliöllinen etäisyys

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2].$$

Tämä suure on **Lorentz-invariantti**.

- Kappaleen kokonaisenergia on

$$E_{\text{kokonais}} = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.155)$$

mikä koostuu liike-energiasta

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (6.156)$$

sekä sisäenergiasta

$$E_{\text{sisä}} = mc^2. \quad (6.157)$$

Siiäpä myös levossa olevalla hiukkasella on sen massaan lüttivää energiaa.

- Kappaleen kokonaisenergia, liikemäärä, massa ja sisäenergia riippuvat toisistaan

$$E_{\text{kokonais}}^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 = E_{\text{sisä}}^2. \quad (6.158)$$

Massa ja sisäenergia ovat Lorentz-invariantit.

- suhteellisuusperiaate (principle of relativity)
- valonnopeus (light speed)
- muunnos (transformation)
- tapahtuma (event)
- aikadilataatio (time dilation)
- pituuskontraktio (length contraction)
- samanaikaisuus (simultaneity)
- ominaisaika (proper time)
- ominaispituus (proper length)
- avaruusaika (spacetime)
- intervalli (interval)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

6.1 Merkitään $m_{\text{inertia}} = 2 \text{ kg}$ ja $m_{\text{paineo}} = 1 \text{ kg}$.

(a) Potentiaalienergia riippuu painavasta massasta, $U = m_{\text{paineo}}gh = 9.8 \text{ J}$.

(b) Liike-energia riippuu inertialta, $K = \frac{1}{2}m_{\text{inertia}}v^2 = 1 \text{ J}$.

(c) Kiiltovyys riippuu inertialta, $a = F/m_{\text{inertia}} = 0.5 \text{ m/s}^2$.

(d) Energiaperiaatteella $\Delta K = -\Delta U$ eli $\frac{1}{2}m_{\text{inertia}}v^2 = m_{\text{paineo}}gh$ josta nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{2ghm_{\text{paineo}}/m_{\text{inertia}}} = 3.1 \text{ m/s}$.

Tällaista kappaletta ei tietenkään ole, mutta esimerkiksi vakiosähkökentässä E olevan sähkövarauksen q potentiaalienergia etäisyydellä h potentiaalienergian nollatasosta on $U = qEh$. Jos tällainen varattu hiukkanen päästetään putoamaan sähkökentässä, se saa vauhdin $v = \sqrt{2Ehq/m}$. Varaus sähkökentässä on siis esimerkki tilanteesta, jossa hiukkasen potentiaalienergia ja liike-energia riippuvat eri ominaisuuksista, varauksesta ja massasta. Onkin yllättävä, että gravitaation potentiaalienergia riippuu samasta ominaisuudesta kuin hiukkasen liike-energia!

6.2 Ei. Näennäisvoima ei aiheudu vuorovaikutuksesta, joten ei ole olemassa mitään kappaleiden paria, joihin kumpaankin vuorovaikutuksen pitäisi kohdistaa voima. Asian voi ajatella myös niin, että voiman ja vastavoiman laki seuraa liikemäären säilymislaista, mutta epäinertiaalikoordinaatistossa liikemäären säilymislaki ei näennäisesti päde. Niinpä voiman ja vastavoiman lainkaan ei tarvitse toteutua näennäisvoimille.

6.3 Jarrutuksessa auton koordinaatisto käyttää ikään kuin painovoima vaikuttaisi viistosti alas ja eteenpäin kulkusuuntaan nähdyn. Pallo pyrkii kohoamaan painovoimaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, joten se siirtyy taaksepäin. Tämä on ehkä hiukan epäintuitiivinen tulos, koska pallollakin on inertiala, ja sen voisi kuvitella kokevan näennäisvoiman eteenpäin kuten muutkin kappaleet. Niin se kokeekin, mutta autossa oleva ilma kokee vielä suuremman näennäisvoiman eteenpäin, jolloin ilma virtaa jarrutuksessa auton etuosaan ja työntää kevyen heliumin taakseen auton takaosaan.

6.4 (a) Sukkulalla voi ajatella olevan tasaisesti kiiltovyässä vapaassa pudotuksessa, joten se putoaa levosta sekunnissa matkan $\Delta y = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 4.45 \text{ m}$. (Huomaa, että nyt $g = 8.9 \text{ m/s}^2$).

(b) Jos sukkulalla olisi nopeus v maanpinnan suuntaan ja se ei putoaisi alas, se kulkisi sekunnissa sivusuuntaisen matkan $\Delta x = v\Delta t$. Voimme piirtää suorakulmaisen kolmion, jonka yksi kärki (A) on maan keskipisteessä, toinen (B) sukkulan alkuperäisessä paikassa, ja kolmas (C) sukkulan paikassa siirtymän jälkeen. Kateetin AB pituus on $L_{AB} = 6700 \text{ km}$ ja kateetin BC pituus on $L_{BC} = \Delta x$. Hypotenuusa AC on hieman kateettia AB pidempi, $L_{AC} = \sqrt{L_{AB}^2 + L_{BC}^2} = \sqrt{L_{AB}^2 + (\Delta x)^2}$. Kuitenkin koska sukkula todellisuudessa putoaa, se ei päädy pisteeseen C vaan likimain matkan $\Delta y = 4.45 \text{ m}$ tästä lähemmäs pistettiä A. Nyt pitää siis ratkaista Δx niin, että $L_{AC} = L_{AB} + \Delta y$. Korottamalla tämä yhtälö puolittain neljöön ja sijoittamalla aikaisemmat tulokset saadaan $L_{AC}^2 = L_{AB}^2 + (\Delta x)^2 = L_{AB}^2 + 2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2$ josta $(\Delta x)^2 = 2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2$ eli $\Delta x = \sqrt{2L_{AB}\Delta y + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{2L_{AB}\Delta y} \approx 7700 \text{ m}$. Sukkulalla pitää siis liikkua sivusuuntaisella nopeudella 7.7 km/s, jotta se pysyisi vapaassa pudotuksessa jatkuvasti yhtä kaukana maasta (eli kiertoradalla).

(c) Ympyrälükkeessä $a_r = -v^2/r$. Edellä lasketulla nopeudella saadaan $a_r = -(7700 \text{ m/s})^2/6700000 \text{ m} = 8.85 \text{ m/s}^2$, mikä on juuri sukkulan putoamiskiiltovyys.

6.5 (a) Voimme aina vaihtaa koordinaatistojen nimiä, joten jos Galilei-muunnoksessa vaihdetaan kirjaimet A ja B keskenään, mikään ei muutu. Siispä pääte $\bar{r}_{(A)} = \bar{r}_{(B)} - \bar{v}_{A(B)}t$, ja tästä voidaan edelleen ratkaista paikka koordinaatistossa B, jolloin $\bar{r}_{(B)} = \bar{r}_{(A)} + \bar{v}_{A(B)}t$.

(b) Vertaamalla tästä tulosta yhtälöön (6.7) nähdään, että $\bar{v}_{A(B)} = -\bar{v}_{B(A)}$. Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos koordinaatisto A liikkuu koordinaatiston B suhteeseen nopeudella \bar{v} , koordinaatisto B liikkuu A:suhteeseen nopeudella $-\bar{v}$.

6.6 Kummassakin koordinaatistossa vaunu on hetkellä $t = 0 \text{ s}$ pisteessä $x_{(A)} = x_{(B)} = -0.6 \text{ m}$, sillä koordinaatistojen origot ovat samassa paikassa. Hetkellä $t = 1 \text{ s}$ vaunu on koordinaatistossa A pisteessä $x_{(A)} = 1.0 \text{ m}$ ja koordinaatistossa B pisteessä $x_{(B)} = 0.3 \text{ m}$. Koordinaatiston B origo on pisteessä $x_{B(A)} = 0.7 \text{ m}$. Vaunun nopeudeksi mitataan $v_{x,(A)} = 1.6 \text{ m/s}$ ja $v_{x,(B)} = 0.9 \text{ m/s}$. Koordinaatistojen välinen nopeus on $v_{x,B(A)} = 0.7 \text{ m/s}$. Vaunun koordinaattien sijoitus paikan Galilei-muunnokseen antaa $0.3 \text{ m} = 1.0 \text{ m} - 0.7 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s}$, mikä on tosi yhtälö. Nopeuksien sijoitus nopeuden Galilei-muunnokseen antaa $0.9 \text{ m/s} = 1.6 \text{ m/s} - 0.7 \text{ m/s}$, mikä myös pätee. Galilei-muunnos siis toimii.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

6.8 Massakeskipistekoordinaatistossa systeemin kokonaisliikemäärä on nolla. (a) Toisiinsa tarttuneiden kappaleiden täytyy jäädä paikoilleen, jotta liikemäärä olisi nolla ja massakeskipiste levossa.

(b) Systeemi koostuu nyt kahdesta hiukkasesta, joten sen kokonaisliikemäärä on nolla vain jos hiukkasilla on yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärit, $\bar{p}_A = -\bar{p}_B$. Tämä ei riipu mitenkään syntyneistä hiukkasista.

6.9 Vaunun hajoaminen on absoluuttinen tapahtuma, joten jos se ei tapahdu A:ssa, se ei varmasti tapahdu myöskään B:ssä. Niinpä vaunuun ei voi kohdistua suuria voimia myöskään koordinaatistossa B. Syg tähän on se, että vaikka vaunun nopeus on B:ssä suuri, nopeuden muutos on sama kummassakin koordinaatistossa.

6.10 Koordinaatistossa A vaunun V energian muutos on $\Delta K_{V(A)} = -0.5 \text{ J}$ ja vaunun O $\Delta K_{O(A)} = 0.5 \text{ J}$. Niinpä kokonaisliike-energian muutos on nolla. Koordinaatistossa B kumman kaan vaunun vauhti ei muutu, joten kokonaisliike-energia on tässäkin koordinaatistossa vakio.

6.11 Massakeskipistekoordinaatistossa vaunujen täytyy saada yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen liikemäärit, $p_{x,V} = -p_{x,O}$, jotta kokonaisliikemäärä olisi nolla. Kevyemmän vaunun täytyy siis saada suurempi vauhti. Ts. koska $m_V v_{x,V} = -m_O v_{x,O}$ niin jos $m_V = 2m_O$, pitää olla $v_{x,O} = -2v_{x,V}$. Tällöin vaunujen liike-energoiden suhde on

$$\frac{K_O}{K_V} = \frac{\frac{1}{2}m_O v_{x,O}^2}{\frac{1}{2}m_V v_{x,V}^2} = \frac{m_O(2v_{x,V})^2}{2m_O v_{x,V}^2} = 2 \quad (6.159)$$

eli kevyempi vaunu saa kaksinkertaisen liikke-energian.

6.12 Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäären muutos, joka puolestaan riippuu massasta ja nopeuden muutoksesta. Nopeus on suhteellinen suure mutta nopeuden muutos on kaikissa inertialkoordinaatistoissa sama, joten impulssi on siis absoluuttinen suure Galilei-suhteellisuudessa. Tämän perusteella myös voima on absoluuttinen suure. Jousen potentiaalienergia puolestaan riippuu jousen pituudesta. Jousen päiden paikkakoordinaatit ovat suhteellisia, mutta niiden välinen etäisyys ei ole, joten jousen potentiaalienergiakin on absoluuttinen.

6.13 (a) Omassa koordinaatistossasi olet aina paikoillasi, joten liikke-energiasi on nolla (jos jätämme heiluvien käsiens ja jalkojen liikke-energian huomioimatta). (b) Yliopisto oli aluksi paikoillaan, jolloin sen liikke-energia oli nolla. Lopuksi yliopisto liikkui 5 m/s vauhdilla. Koska yliopiston massa on valtava, sen liikke-energiakin on hyvin suuri. (c) Ei tietenkään. Mistä ihmeestä yliopiston saama valtava liikke-energia voisi tulla? Selitys tähän on se, että et ole inertialkoordinaatistossa, jos kiihdytät levosta 5 m/s nopeuteen. Säilymislait eivät pärde epäinertialkoordinaatistossa.

6.14 (a) Kaikki nopeusvektori muuttuvat junan liikkeen suuntaan.

(b) Jääpalan massakeskipisteen suhteeseen samaan suuntaan liikkuvien molekyylien vauhti kasvaa. Vastakkaiseen suuntaan liikkuvien molekyylien vauhti pienenee.

(c) Lämpötila ei tietenkään muudu.

(d) Liikke-energia kasvaa.

6.15 (a) A:ssa $v_{x,(A)} = 100 \text{ m/s}$ ja $v_{y,(A)} = 100 \text{ m/s}$. B:ssä $v_{x,(B)} = 90 \text{ m/s}$ ja $v_{y,(B)} = 100 \text{ m/s}$.

(b) A:ssa $v_{(A)} = 141.4 \text{ m/s}$ ja B:ssä $v_{(B)} = 134.5 \text{ m/s}$.

(c) Liikke-energia on A:ssa $K_{x-suunta,(A)} = \frac{1}{2}mv_{x,(A)}^2 = 5.0 \text{ J}$ ja samoin $K_{y-suunta,(A)} = 5.0 \text{ J}$. B:ssä $K_{x-suunta,(B)} = 4.05 \text{ J}$ ja $K_{y-suunta,(B)} = 5.0 \text{ J}$.

(d) Kokonaisliike-energia on A:ssa $K_{(A)} = 10.0 \text{ J}$ ja B:ssä $K_{(A)} = 9.05 \text{ J}$.

6.16 Massakeskipisteen nopeus on $v_{x,cm(A)} = v_{x,B(A)} = 135 \text{ m/s}$. Hiukkasten nopeudet B:ssä ovat $v_{x,1(B)} = 15 \text{ m/s}$ ja $v_{x,2(B)} = -15 \text{ m/s}$.

(a) A:ssa liikke-energiat ovat $K_{1(A)} = 11.25 \text{ J}$ ja $K_{2(A)} = 7.2 \text{ J}$, joten kokonaisenergia on $K_{(A)} = 18.45 \text{ J}$. B:ssä puolestaan $K_{1(B)} = K_{2(B)} = 0.1125 \text{ J}$ ja $K_{(B)} = 0.225 \text{ J}$.

(b) Massakeskipisteen liikkeen energia on A:ssa $K_{cm(A)} = \frac{1}{2}Mv_{x,cm(A)}^2 = 18.225 \text{ J}$. B:ssä massakeskipiste ei liiku, joten $K_{cm(B)} = 0 \text{ J}$.

(c) Massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia on A:ssa $K_{(A)} - K_{cm(A)} = 0.225 \text{ J}$. Tämä on sama myös B:ssä, jossa se on myös kokonaisenergia.

Tässä esimerkissä massakeskipisteen liikkeen energia vastaa mikroskooppisen systeemin liikke-energiaa ja massakeskipisteen suhteeseen tapahtuvan liikkeen energia sisäenergiaa. Kohdan (c) tulos vastaa tekstillä johdettua tulosta, jonka mukaan sisäenergia on invariantti.

6.17 Kuvien välillä valo kulkee yhden metrin, joten niiden välillä kuluu aikaa $\Delta t = \Delta x/c = 3.3 \text{ ns}$. Koordinaatisto B kulkee tässä ajassa 0.1 m A:n suhteeseen, joten sen nopeus on $v_{x,B(A)} = 0.1c$. Jos kuva (b) olisi oikein, valo kulkisi kuvien välillä yhteen suuntaan matkan 1.1 m ja toiseen suuntaan matkan 0.9 m. Niinpä valolle mitattaisiin yhteen suuntaan nopeus $1.1c$ ja toiseen $0.9c$, mikä on suhteellisuusperiaatteen mukaan väärin.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

6.18 Tapahtumia ovat erimeriksi "pallo irtoaa kädestä", "pallo on lakinistessä" ja "pallo osuu maahan". Välitussa koordinaatistossa tapahtuman "pallo irtoaa kädestä" x - ja y - ja t -koordinaatit ovat kaikki negatiiviset.

Tapahtuman "pallo osuu maahan" x - ja t -koordinaatit ovat positiiviset mutta y -koordinaatti on negatiivinen.

6.19 Jos kallon etäisyys origosta on s , signaalilta kestää aika $\Delta t = s/c$ saavuttaa kello. Niinpä tällainen kello pitää asettaa tämän verran edelle origossa olevaa keloa, jotta kellot olisivat lopuksi samassa ajassa. Yhden metrin matkalla tämä aikaero on $\Delta t = 3.3$ ns.

6.20 Aluksen kellot kävät maan koordinaatistossa keskenään yhtä nopeasti, mutta ne ovat eri ajassa. Ne kävät kuvan perusteella myös hitaammin kuin maan kello, sillä koordinaatistossa A maan kello ja aluksen perän kello näyttävät molemmat aikaa "15 yli" kun viimeisessä kuvassa maan kello on ajassa "15 vaille" kun taas aluksen perän kello on vasta noin "20 vaille".

6.21 Jos anturin ja lampun välillä on matkaa, tieto valon saapumisesta anturiin ei voi siirtyä välittömästi lamppuun. Tieto voidaan siirtää korkeintaan valonnopeudella, joten jos lampun välähdyksestä valon havaitsemiseen kuluu L/c , lampun seuraavaan välähdykseen kuluu vielä toiset L/c .

6.22 Viisari ehtii minuutissa siirtyä $60 \text{ s}/1.2 \text{ s} = 50$ kertaa, joten kello mittaa minuutissa tämän ajan. Kello siis jätettää 10 sekuntia joka minuutti.

6.23 Käytetään valonnopeudelle arvoa $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. (a) $\gamma = 1.0000$, (b) $\gamma = 1.0006$, (c) $\gamma = 1.06$, (d) $\gamma = 2.29$.

6.24 Jos valon kulku levossa olevan kallon läpi vaatii ajan $\Delta\tau$, kello siis mittaa tämän ajan valon kulkissa kerran sen läpi. Liikkuvassa kellossa valo joutuu kulkemaan matkan $\Delta r = c\Delta t$, mutta kello mittaa tällöin ajan vain ajan $\Delta\tau$. Valon nopeudelle saataisiin siis tämän kallon mukaan arvo $v = \Delta r/\Delta\tau = c\Delta t/\Delta\tau$. Koska $\Delta t > \Delta\tau$, valolle mitattaisiin tämän kallon mukaan suurempi nopeus kuin c . Aika pitää siis jokaisessa koordinaatistossa mitata nimenomaan levossa olevalla kelolla.

6.25 Jos alukset pysähtyisivät B:ssä samanaikaisesti, alus V lähtisi liukkeelle koordinaatistossa A ennen alusta O. Näin ollen alusten välinen etäisyys olisi B:ssä vakio, mutta A:ssa liikkuvien alusten välinen etäisyys olisi pienempi kuin paikoillaan olevien, koska ensiksi liukkeelle lähtevä alus V ehtisi liikkua lähemmäs alusta O ennen O:n lähtöä liukkeelle. Koordinaatistojen välillä havaittaisiin samanlainen pituuskontraktio kuin kuvassa 6.23. Aluksi alusten välinen etäisyys olisi suurempi A:ssa (jossa alusten väli on paikoillaan), mutta lopuksi alusten väli olisi suurempi B:ssä (jossa alusten väli on paikoillaan). Alusten välinen etäisyys on suurimmillaan aina siinä koordinaatistossa, jossa alukset ovat levossa.

6.26 (a) Noin 4 vuotta. (b) Liikkuvan aluksen kello käy maan koordinaatistossa hitaammin aikadilataation vuoksi. Kallon käynti on hidastunut tekijän $1/5$ verran, joten aikaa kuluu aluksessa noin $4/5$ vuotta. (c) Omassa koordinaatistossaan alus on paikoillaan. (d) Alpha Centauri liikkuu nopeudella $0.98c$. (e) Matka on pituuskontraktioon vuoksi $4/5$ valovuotta. (f) Aikaa kuluu noin $4/5$ vuotta. Siis vaikka maan koordinaatistossa mikään ei voi päästä Alpha Centauriin nopeammin kuin 4 vuodessa, aluksen miehistön näkökulmasta matkan voi tehdä selvästi lyhyemmässä ajassa.

6.27 (a) Tapahtuman "valo lähtee" koordinaatit ovat $(x, y, z)_1 = (0, 0, 0)$ kummassakin koordinaatistossa. Tapahtuman "valo havaitaan" koordinaatit ovat silloin B:ssä $(x, y, z)_{2(B)} = (0, L, \tau)$ ja A:ssä $(x, y, z)_{2(A)} = (v_x t, L, t)$. Tässä $\tau = L/c$ ja $t = \gamma\tau$ aikadilataation perusteella.

(b) B:ssä tapahtumien aikaeron neliö on $(\Delta t_{(B)})^2 = \tau^2 = L^2/c^2$ ja A:ssa $(\Delta t_{(A)})^2 = t^2 = \gamma^2\tau^2$. B:ssä tapahtumien välisten etäisyyden neliö on $(\Delta r_{(B)})^2 = L^2$ ja A:ssa $(\Delta r_{(A)})^2 = (vt)^2 + L^2 = (v_x\gamma L/c)^2 + L^2$. Avaruusaikaintervalli on B:ssä siis $s_{(B)}^2 = c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 = c^2(L/c)^2 - L^2 = 0$ ja A:ssa $s_{(A)}^2 = c^2(\Delta t_{(A)})^2 - (\Delta r_{(A)})^2 = c^2\gamma^2(L/c)^2 - (v_x L/c)^2 - L^2 = \gamma^2(1 - v_x^2/c^2)L^2 - L^2$. Mutta koska $\gamma^2 = 1/(1 - v_x^2/c^2)$, tämänkin lausekkeen arvo on itse asiassa $s_{(A)}^2 = 0$. Näin pitää ollakin, koska s^2 on invariantti eli sillä pitää olla sama arvo sekä A:ssa että B:ssä. Lisäksi avaruusaikaintervalli on *aina* nolla tapahtumille, joita yhdistää suoraan valonnopeudella kulkeva signaali.

6.28 Sijoitus antaa

$$\begin{aligned} s_{(B)}^2 &= c^2(\Delta t_{(B)})^2 - (\Delta r_{(B)})^2 \\ &= c^2\gamma^2(t_{(A)} - \frac{v}{c^2}x_{(A)})^2 - \gamma^2(x_{(A)} - vt_{(A)})^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 \\ &= \gamma^2 c^2 t_{(A)}^2 - 2\gamma^2 t_{(A)} v x_{(A)} + \frac{v^2}{c^2} x_{(A)}^2 - \gamma^2 x_{(A)}^2 + 2\gamma^2 x_{(A)} v t_{(A)} - \gamma^2 v^2 t_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 \\ &= \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})t_{(A)}^2 - \gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2})x_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Edelleen koska $\gamma^2 = 1/(1 - \frac{v^2}{c^2})$, pätee $\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$ ja niinpä tämä sievenee muotoon

$$s_{(B)}^2 = t_{(A)}^2 - x_{(A)}^2 - y_{(A)}^2 - z_{(A)}^2 = s_{(A)}^2. \quad (6.161)$$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

6.29 (a) A:ssa välähdykset ovat tapahtumat 1: $(x, t)_{(A)} = (0, 0)$ ja 2: $(x, t)_{(A)} = (680, 3)$, missä yksiköt ovat metrejä ja mikrosekunteja. Tapahtuman 1 koordinaatit B:ssä ovat $(x, t)_{(B)} = (0, 0)$ ja tapahtuman 2 koordinaatit ovat

$$x_{2(B)} = \gamma(x_{(A)} - v_{x,B(A)}t_{(A)}) = 1.25 \cdot (680 \text{ m} + 0.6 \cdot 300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 3.0 \mu\text{s}) = 1525 \text{ m} \quad (6.162)$$

$$t_{2(B)} = \gamma(t_{(A)} - \frac{1}{c^2}v_{x,B(A)}x_{(A)}) = 1.25 \cdot (3.0 \mu\text{s} + 0.6/300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 680 \text{ m}) = 5.45 \mu\text{s}. \quad (6.163)$$

(b) C:n nopeus on $v_{x,C(B)} = 1525 \text{ m}/5.45 \mu\text{s} = 279.8 \text{ m}/\mu\text{s} = 0.93c$.

(c) Yhteenlaskusääntö antaa

$$v_{x,C(B)} = \frac{v_{x,C(A)} - v_{x,B(A)}}{1 - \frac{1}{c^2}v_{x,B(A)}v_{x,C(A)}} = \frac{0.75c + 0.6c}{1 + 0.75 \cdot 0.6} = 0.93c \quad (6.164)$$

eli saman tuloksen kuin (b)-kohta, kuten pitääkin.

6.30 Kuvan 6.25 (b) perusteella paikkakoordinaatin täytyy olla hieman yli 900 m ja ajan hieman alle 3 μs . Lorentz-muunnos nopeudella $v_{x,A(B)} = -0.6c$ antaa tarkoiksi koordinaateiksi

$$x_{(A)} = \gamma(x_{(B)} - v_{x,A(B)}t_{(B)}) = 1.25 \cdot (600 \text{ m} + 0.6 \cdot 300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 1.0 \mu\text{s}) = 975 \text{ m} \quad (6.165)$$

$$t_{(A)} = \gamma(t_{(B)} - \frac{1}{c^2}v_{x,A(B)}x_{(B)}) = 1.25 \cdot (1.0 \mu\text{s} + 0.6/300 \text{ m}/\mu\text{s} \cdot 600 \text{ m}) = 2.75 \mu\text{s}. \quad (6.166)$$

6.32 (a) 1 (laserin käentö) aiheuttaa tapahtumat 2 ja 3 (pilkun liike).

(b) Tapahtuma 1 on aina ennen tapahtumia 2 ja 3, mutta tapahtumien 2 ja 3 järjestys riippuu koordinaatistosta.

(c) Pilkku voi liikkua mielivaltaisen nopeasti, myös nopeammin kuin valonnopeus. Tässä ei ole mitään ihmeeellistä, koska vaikka pilkku voi liikkua tapahtumasta 2 tapahtumaan 3 mielivaltaisen nopeasti (eikä pilkun liike suinkaan ole tasaista), tapahtuma 2 ei "lähetä" pilkkua matkaan eikä tällä tavalla siis voi lähettää signaalia tapahtumasta 2 tapahtumaan 3. Ei siis myöskään ole mitään ongelmaa siihen, että joissakin koordinaatistoissa 3 tapahtuu ennen tapahtumaa 2.

6.33 Nyt x -suuntaiset nopeudet ovat $v_{x,P(A)} = 0.6c$ ja $v_{x,B(A)} = -0.6c$. Nopeuksien yhteenlaskusäännöllä $v_{x,P(B)} = (v_{x,P(A)} - v_{x,B(A)})/(1 + v_{x,B(A)}v_{x,P(A)}/c^2) = (0.6c + 0.6c)/(1 + 0.6^2) = 0.88c$. Tämä on sama tulos kuin tekstissä. Huomaa, että y -suuntaisia nopeuksia ei voi laskea x -suuntaisten nopeuksien yhteenlaskusäännöllä!

6.34 (a) Kappaleen V vauhti on $v_{V(B)} = 0.75c$. Kappaleen P vauhti on puolestaan $v_{P(B)} = \sqrt{v_{x,P(B)}^2 + v_{y,P(B)}^2} = 0.95c$.

(b) Lorentzin tekijät ovat $\gamma_{V(B)} = 1.512$ ja $\gamma_{P(B)} = 3.213$.

(c) Inertiaat ovat $m_{\text{inertia},V(B)} = 1.512 \text{ kg}$ ja $m_{\text{inertia},P(B)} = 3.213 \text{ kg}$.

(d) Inertioiden suhde on $m_{\text{inertia},P(B)}/m_{\text{inertia},V(B)} = 3.213/1.51 = 2.125$. Tämä on täsmälleen sama kuin tekstissä laskettu kappaleiden nopeuden muutoksen suhde, joten suhteellisuusteorettisen inertian ja nopeuden tulona määritelty liikemäärä on törmäyksessä vakio.

6.35 Galilei-suhteellisuudessa liikemäären muutokset ovat absoluuttiset, joten voimakin on. Suhteellisuusteoressa liikemäären muutos on suhteellinen, koska liikemääri riippuu nopeudesta epälineaarisesti Lorentz-tekijästä johtuen. Niinpä voimakin on suhteellisuusteoressa suhteellinen suure. Osoittautuu kuitenkin, että jos kappale kulkee suoraan x -akselia pitkin ja siihen kohdistuu vain x -suuntainen voima (eli tilanne on täysin yksilotteinen), tämä voima on sama kaikissa x -suuntaan liikkuvissa inertialkoordinaatistoissa. Toisin sanoen vaikka x -suuntaiselle voimalle saatiin hankalalta näyttävä lauseke $F_x = \gamma^3 ma_x$, tämä lauseke on itse asiassa yksilotteisessa liikkeessä invariantti.

6.36 $F'(v_x) = -mc^2/(2n+2) \cdot (n+1)(1-v_x^2/c^2)^n \frac{d}{dv_x}(1-v_x^2/c^2) = -\frac{1}{2}mc^2(1-v_x^2/c^2)^n \cdot -2v_x/c^2 = mv_x(1-v_x^2/c^2)^n$.

6.37 $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$. Niinpä liike-energialle pätee $K = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{v^2}{2c^2}mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$.

6.38 Klassisen mallin nopeus ylittää valonnopeuden, mitä suhteellisuusteoressa ei voi tapahtua. Liikemääri on yhtä suuri, kun voima on vaikuttanut yhtä kauan eli antanut saman impulssin. Liike-energia on yhtä suuri, kun voima on tehnyt työtä yhtä pitkän siirtymän yli.

6.39 Protonin massa on $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

(a) $E_{\text{sisä}} = mc^2 = 1.50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ kummassakin koordinaatistossa.

(b) $K_{(A)} = (\gamma_{(A)} - 1)mc^2 = 3.75 \cdot 10^{-11} \text{ J}$ ja $K_{(B)} = 0 \text{ J}$.

(c) $E_{(A)} = \gamma_{(A)}mc^2 = K_{(A)} + E_{\text{sisä}} = 1.88 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ ja $E_{(B)} = E_{\text{sisä}} = 1.50 \cdot 10^{-10} \text{ J}$.

(d) $p_{(A)} = \gamma_{(A)}mv_{(A)} = 3.76 \cdot 10^{-19} \text{ kgm/s}$ ja $p_{(B)} = 0 \text{ kgm/s}$.

(e) $E_{(A)}^2 - (pc)^2 = 2.26 \cdot 10^{-20} \text{ J}^2 = E_{\text{sisä}}^2$ ja samoin $E_{(B)}^2 - (pc)^2 = 2.26 \cdot 10^{-20} \text{ J}^2$. Tämä lauseke on invariantti, joten sen täytyykin saada sama arvo kummassakin koordinaatistossa.

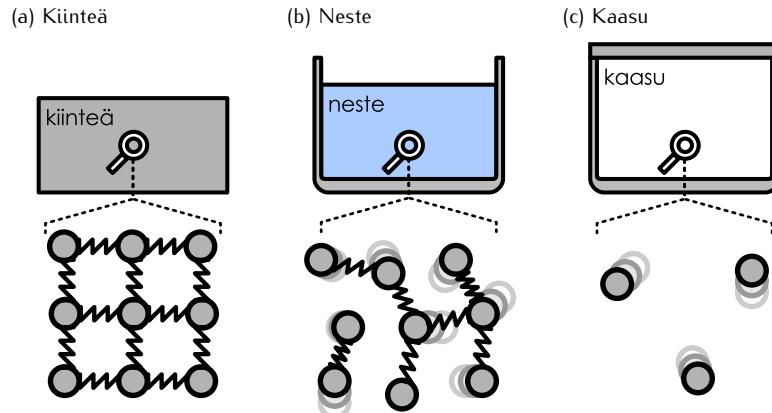
7 Jatkuva aine

Aine koostuu atomeista, mutta makroskooppisesta näkökulmasta tämä ei ole mitenkään ilmeistä. Ihmisen mittakaavassa yksittäisiä atomeja ei voi havaita vaan aineet vaikuttavat jatkuvilta ja itse asiassa monien ilmiöiden kuvaminen on paljon helpompaa, kun aineen ajatellaan olevan jatkuva materiaa erillisten atomien sijaan. Tässä luvussa tutustummekin jatkuvan aineen malliin. Kuvaamme tämän mallin avulla virtaavien aineiden eli nesteiden ja kaasujen käyttäytymistä yksinkertaisissa tilanteissa. Aloitamme myös lämpöoppia tutustumisen tutkimalla energian siirtymistä lämpönä ja sen vaikutusta aineiden lämpötilaan, paineeseen, tilavuuteen ja olomuotoon.

Tämän luvun opiskeltuaasi sinun tulee osata:

- kuvilla aineen olomuotojen ominaisuuksia ja tulkita faasidiagrammia
- määritellä paine ja lämpötila sekä selittää, kuinka näitä suureita voidaan mitata
- kuvilla millaista on kokoonpuristumattoman nesteen pyörteeton virtaus ja määrittää paine tällaisessa virtauksessa
- selittää termodynamiikan pääsäännöt sanallisesti
- määritellä lämpö, lämpökapasiteetti ja latentilämpö sekä selittää kuinka näihin liittyvä energia voi siirtyä tai varastoitua
- määrittää lämpönä siirtvän energian teho, kun lämmönjohtavuus tunnetaan
- selittää, mikä on tilanyhtälö, ja määrittää kaasun tilamuuttujien arvot ideaalikaasun tilanyhtälön avulla
- määrittää kappaleen koon muutos, kun sen lämpölaajenemiskerroin tunnetaan

Kuva 7.1: Aineen tavalliset olomuodot.



7.1 Paine

Aineen olomuodot

Mekaniikassa tarkastelimme *kiinteästä aineesta* tehtyjen jäykkien kappaleiden liikettä. Maailma ei kuitenkaan koostu vain kiinteästä aineesta vaan myös *nesteistä* ja *kaasuista*. Kiinteä, neste ja kaasu ovat aineen tavallismuodot (kuva 7.1). Esimerkiksi vesi voi esiintyä nestemäisenä vetenä, kiinteänä jääänä tai kaasumaisena höyryänä. Eri olomuodossa olevat aineet voivat myös sekoittua keskenään, ja tällaisia sekoituksia kutsutaan *kolloideiksi*. Esimerkiksi huonekaluissa yleisesti pehmusteena käytetty vaahamuovi on kiinteän aineen (muovin) ja kaasun (ilman) yhdistelmä. Kermavaahto puolestaan on nesteiden (kerman, joka on veden ja rasvan sekoitus) ja kaasun (ilman) sekoitus.

On olemassa muitakin olomuotoja kuin edellä mainitut kiinteä, neste ja kaasu. Esimerkiksi tähdissä aine on *plasmaa*, jossa atomit ovat hajonneet ja ytimet sekä elektronit ovat toisistaan erillään. Aineilla voi myös olla useita tapoja esiintyä näissä olomuodoissa. Esimerkiksi grafiitti (lyijykynän kärki) ja timantti ovat kumpikin hiilen kiinteitä olomuotoja, mutta näillä on aivan erilaiset ominaisuudet. Fysiikassa olomuotoa yleisempi termi aineen tiettylle esiintymismuodolle onkin **faasi**. Grafiitti ja timantti ovat siis eri faaseja, vaikka kumpikin on kiinteää hiiltä. Joissakin tapauksissa eri faasit voivat olla hyvin samanlaisia ja erota vain jonkin tietyn ominaisuuden suhteen. Esimerkiksi tietty raudan yhdisteet voivat olla magneettisia tai ei-magneettisia. Nämäkin ovat aineen eri faaseja.

Kiinteällä kappaleella on tietty ominainen koko ja muoto, jotka kappale säilyttää ellei jokin ulkoinen tekijä nüttä muuta. Esimerkiksi jääkuutio pysyy kuution muotoisena vaikka sen pudottaisi pyöreäpohjaiseen lasiin. Nesteilläkin on tietty tilavuus, mutta niillä ei ole ominaista muotoa. Jos nelikulmaisesta lasista kaataa nestemäistä vettä pyöreäpohjaiseen lasiin, vesi mukautuu lasin muotoon. Vesi täyttää kummastakin lasista kuitenkin yhtä suuren tilavuuden. Kaasulla sen sijaan ei ole ominaista muotoa eikä tilavutta, vaan kaasut pyrkivät laajenemaan ja täyttämään niille annetun tilavuuden kokonaan. Jos esimerkiksi heliumilla täytetyn ilmapallon rikkoo, pallon sisällä ollut heliumkaasu pakenee ja levää pallon ympäristöön.

Mikroskooppisessa mittakaavassa eri olomuodot eroavat niiden atomien järjestäytymisessä. Kiinteissä aineissa atomit ja molekyylit ovat kiinnittyneet toisiinsa ja järjestyneet yleensä varsinkin säännölliseen rakenteeseen. Atomit eivät pääse liikkumaan toistensa suhteeseen ja siksi aine ei muuta helposti muotoaan. Nesteissäkin molekyylit kiinnittyvät toisiinsa ja ovat lähekkäin, mutta nesteissä molekyylit liikkuvat niin nopeasti, että niiden väliset sidokset voivat ajoittain rikkoutua, jolloin molekyylit pääsevät liikkumaan toistensa suhteeseen. Nesteellä on ominainen tilavuus, koska sen molekyylejä ei ole helppo puristaa lähemmäs toisiaan tai vetää toisistaan kauemmas. Nesteellä ei kuitenkaan ole ominaista muotoa, koska molekyylit pääsevät liikkumaan. Kaasuissa molekyylien väliset sidokset ovat hajonneet ja molekyylit ovat kaukana toisistaan. Nopeasti liikkuvat molekyylit pääsevät näin ollen levämään minkä muotoiseen ja kokoiseen astiaan tahansa.

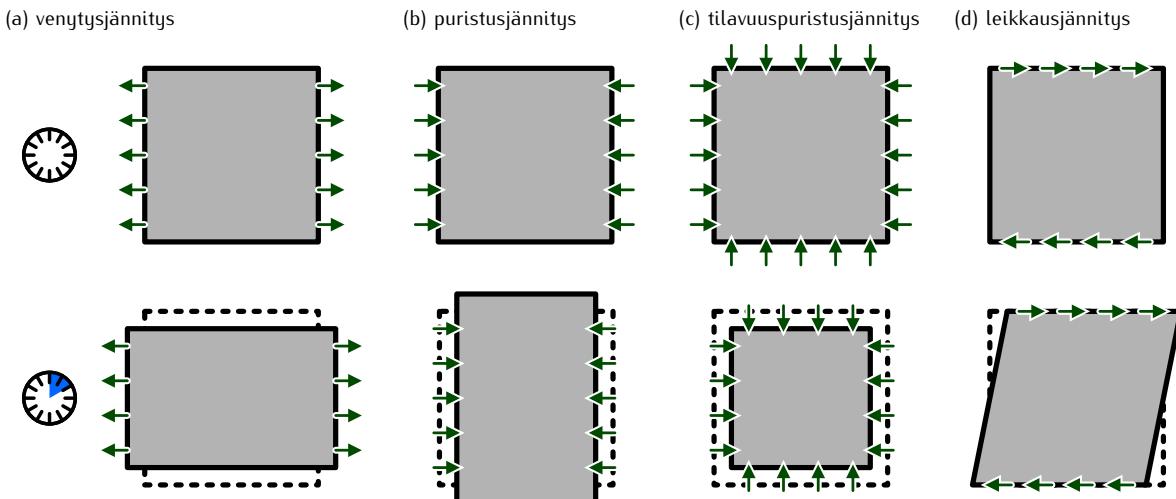


7.1 Etsi tietoa veden faaseista. Onko vedellä olemassa erilaisia kiinteitä faaseja?

Jännitys ja paine

Edelliset havainnot pätevät täsmälleen vain silloin kun aineeseen ei kohdistu suuria ulkoisia voimia. Kuten mekanikan yhteydessä opimme, mitkään kiinteät aineet eivät ole täysin jäykkii vaan niiden muotoa ja

Kuva 7.2: Jännitys saa kiinteän aineen muuttamaan muotoaan.



kokoa voidaan muuttaa *jännitysvoimien* avulla. Jos jännitysvoimat ovat heikot, kiinteiden kappaleiden muoto muuttuu elastiisesti Hooken lain mukaan ja kappaleet pyrkivät palaamaan takaisin alkuperäiseen muotoonsa. Hyvin voimakas jännitys puolestaan johtaa plastisiin muodonmuutoksiin, jotka eivät enää itsestään palaudu. Aineiden kovus ja pehmeys riippuukin siitä, kuinka herkästi ne muuttavat muotoaan jännityksessä.

Aineet reagoivat erityyppisiin jännitysvoimiin eri tavoin, kuten kuvassa 7.2. Jos kappaletta puristetaan vastakkaisilta puolilta, se pyrkii tavallisesti levämään muihin suuntiin eli litistymään. Tällöin kappaleen kokonaistilavuus muuttuu yleensä hyvin vähän. Tilavuutta voidaan muuttaa puristamalla kappaletta kaikista suunnista, mutta kiinteiden aineiden tilavuuden muuttaminen vaatii tavallisesti hyvin suuria jännitysvoimia.

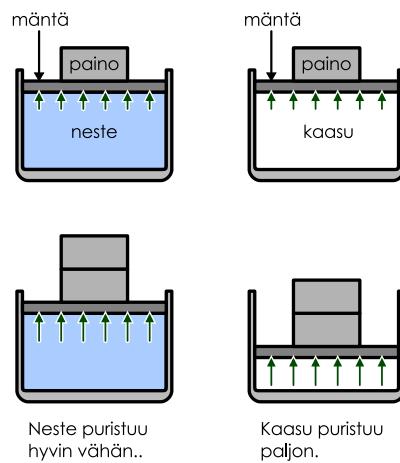
Kiinteitä kappaleita voidaan myös väentää kohdistamalla niihin voimia, joilla on eri vaikutussuorat. Esimerkiksi kuvassa 7.2 (d) kuutiota venytetään sen tahkojen suuntasilla voimilla. Tätä kutsutaan leikkausjännitykseksi. Vaikka aine vastustaisi puristus- ja venytysjännitystä voimakkaasti, sitä voi silti olla helppo taivuttaa tai leikata. Esimerkiksi tavallista paperia täytyy venyttää hyvin voimakkaasti ennen kuin paperi repeää, mutta paperia on silti helppo repiä, leikata ja taivuttaa.

Tarkastellaan seuraavaksi nesteiden ja kaasujen käyttäytymistä erilaisten jännitysvoimien vaikuttaessa. Voit tehdä tai kuvitella seuraavan kokeen. Aseta kämmenesi veden alle vastakkain mutta hieman irti toisistaan. Siirrä sitten käsiäsi lähemäs toisiaan. Käisen liikkumisen tunnet kämmenissäsi veden niihin kohdistaman voiman, joka vastustaa käisen liikkettä. Tässä kokeessa puristat vettä kahdelta vastakkaiselta puolelta, jolloin nesteeseen kohdistuu *puristusjännitys*. Tämä saa nesteen liikkumaan pois käsiestä välistä, ja nesteen kykyä vastustaa tätä virtausta kutsutaan *viskositeetiksi*. Veden viskositeetti on pieni eli vesi liikkuu helposti, kun taas esimerkiksi siirapin viskositeetti on suuri.

Kuitenkin kun pysäytät kätesi, voimaa ei enää tunnu. Jos olist puristanut jousta, jousi pyrkisi nyt työtämään kämmeniasi poispäin toisistaan. Vesi ei kuitenkaan tee näin, koska neste saa tilanteessa uuden muodon eikä pyri palautumaan alkuperäiseen muotoonsa. Jos teet saman kokeen ilmassa, tulos on sama. Voit toistaa saman kokeen myös niin, että liikutatkin käsiäsi kämmenien suunnassa pitäen kämmenien välisen etäisyyden vakiona. Tällöin veteen (tai ilmaan) kohdistuu *leikkausjännitys*. Tässäkin tapauksessa vesi (tai ilma) vastustaa hieman käisen liikkettä, mutta se ei pyri vetämään käsiäsi takaisin alkuasentoon. Nesteet ja kaasut eivät siis ole elastisia puristus- tai leikkausjännityksen suhteeseen.

Jatketaan puristuskokeita täytämällä tiivis, liikkuvalla männällä suljettu astia kuvan 7.3 tapaan. Männän päällä on paino, johon kohdistuva painovoima vetää mäntää alas. Tällöin mäntä kohdistaa astiassa olevaan nesteeseen voiman alas, ja tämän voiman vastavoima on nesteen mäntään kohdistama voima ylöspäin. Mäntä on tasapainossa, kun sitä alhaalta kannatteleva voima on yhtä suuri kuin sitä päältä alas päin työntävä voima.

Kuva 7.3: Nesteet ja kaasut käyttäytyvät puristuksessa eri tavoin. Nuoret kuvavat nesteen ja kaasun mäntään kohdistamaa voimaa.



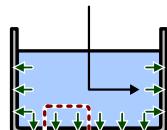
Painon lisääminen männän päälle kasvattaa mäntää alaspäin vetävää voimaa ja niinpä myös nesteen mäntään kohdistaman voiman täytyy tasapainossa olla sitä suurempi mitä enemmän lastia männän pällä on. Puristaminen työntää nestettä sivusuuntaan pois männän ja astian pohjan välistä, mutta koska astia on tiivis, neste ei pääse levämään myöskään sivuttain. Tämä tarkoittaa sitä, että astian seinämien täytyy kohdistaa nesteeseen sivusuuntainen voima, joka estää nestettä liikkumasta. Nesteeseen kohdistuu tässä tilanteessa siis *tilavuuspuristusjännitys*, jossa astian reunat kohdistavat siihen kaikkialla yhtä suuren astian ja nesteen rajapintaan nähdyn kohtisuoran voiman (kuva 7.4). Nesteet pyrkivät säilyttämään tilavuutensa, joten vaikka männän pällä olevaa massaa kasvatetaan ja vettä kokoon puristava voima kasvaa, veden tilavuus ei käytännössä juurikaan muutu eikä mäntä liiku. Tätä ominaisuutta kutsutaan *kokoopuristumattomudeksi*.



7.2 Ota paperiarkki. Yritä repiä paperi vetämällä vastakkaisia sivuja toisistaan poispäin. Yritä sitten repiä paperi "normaalisti". Kumpi on helpompi tapa? Millaista jännitystä kohdistat paperiin kummassakin tapauksessa? Mitä voit siis päättää paperin kyvystä vastustaa erilaisia jännityksiä?

Kuva 7.4: Paine jakautuu virtaavissa aineissa tasaiseksi.

Nesteet ja kaasut välittävät voiman kaikille pinnoille.



Kokonaivoima on suoraan verrannollinen tarkasteltuun alaan.

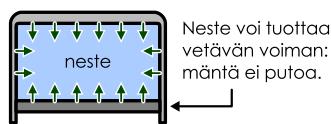
Kuvassa 7.3 on esitetty myös vastaava puristuskoe, kun astian sisällä on kaasua. Kaasukin pystyy kannattelemaan mäntää, mutta kaasulla ei ole ominaista tilavuutta vaan kaasun tilavuus riippuu puristusjännityksen suuruudesta. Kun männän pällä lisätään painoa, kaasu puristuu pienempään tilavuuteen. Mitä pienempään tilavuuteen kaasu puristetaan, sitä suuremman voiman se mäntää kohdistaa, ja näin saavutetaan lopulta uusi tasapainotila, jossa kaasun tilavuus on pienempi kuin ennen painon lisäämistä. Kaasut siis eivät ole kokoopuristumattomia.

Kaasujen ja nesteiden toisiin kappaleisiin kohdistamat voimat siis jakautuvat tasaisesti kaikkielle niitä koskettaville pinnoille, ja nämä voimat ovat aina tarkastelupintaan vasten kohtisuorassa. Kuvassa 7.4 astian pohjan *jokaiseen pisteenseen kohdistuu pieni voima*, ja tämä voima on kaikissa pisteissä suuruudeltaan sama. Näiden voimien summa on luonnollisesti kokonaivoima, jolla nesteen ja sen pällä olevan taakan massa painaa astian pohjaa. Jos tarkastelemme vain osaa astian pohjasta, tarkasteltavaan alueeseen kohdistuvan voiman täytyy olla pienempi kuin astian koko pohjan kohdistuvan voiman. Erittäin koska pohjan kaikkiin pisteisiin kohdistuu yhtä suuri voima, tarkasteltavaan *alueeseen kohdistuvan voiman suuruuden täytyy olla suoraan verrannollinen tarkastelualueen pinta-alaan*, $F = \frac{A}{A_{pohja}} F_{pohja}$. Esimerkiksi kuvassa 7.4 tarkasteltavaksi alueeksi on rajattu kolmannes astian pohjan pinta-alasta, ja tähän alueeseen kohdistuu kolmannes koko pohjaan kohdistuvasta voimasta. Sama asia voidaan ilmaista myös niin, että *tarkasteltavaan alueeseen kohdistuvan voiman suhde alueen pinta-alaan on vakio*, $F/A = F_{pohja}/A_{pohja} = \text{vakio}$. Tämä voiman ja sen vaikutusalan suhde on nesteen **paine** astian pohjalla

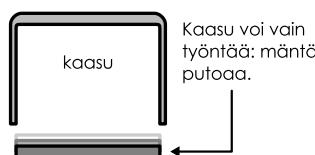
$$p = \frac{F}{A}. \quad (7.1)$$

Paineen yksiköllä on erikoisnimi pascal (Blaise Pascalin mukaan), joka on perusyksiköiden avulla kirjoitettuna $\text{Pa} = \text{N/m}^2$.

Kuva 7.5: Nesteen paine voi olla negatiivinen.



Neste voi tuottaa vetävän voiman: mäntä ei putoa.

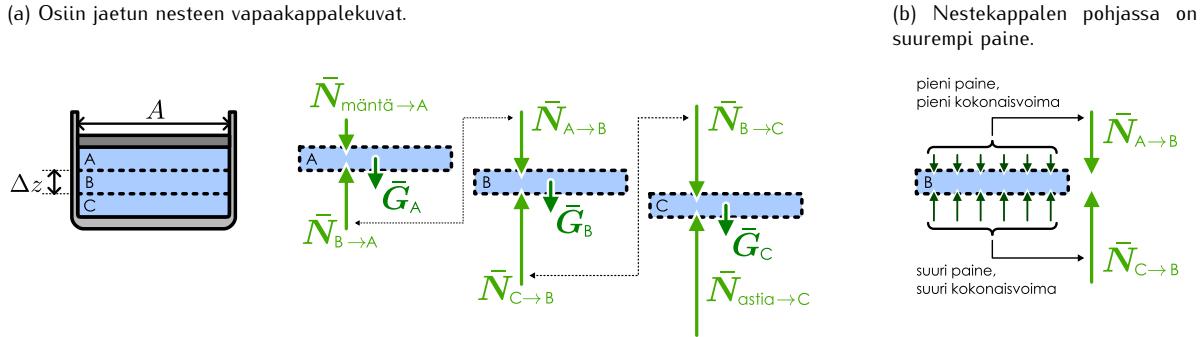


Kaasu voi vain työntää: mäntä putoaa.

Paine ja voima liittyvät toisiinsa, mutta ne ovat selkeästi eri suuret. Hyvin pienikin voima voi tuottaa suuren paineen, jos voima kohdistuu pienelle pinta-alalle. Vastaavasti suuri voima voi saada aikaan vain pieni paineen, jos voima jakautuu tarpeeksi suurelle pinta-alalle. Voima on vektorisuhue, jolla on aina suunta. Paine sen sijaan on skalaari, jolla on vain suuruus. Nestettä tai kaasua koskettavaan suoraan pintaan kohdistuu aina voima, jonka suunta on kohtisuoran pintaan vastaan (eli pinnan normaalilin suuntainen), ja jonka suuruus on nesteen tai kaasun paineen ja pinnan pinta-alan tulo. Esimerkiksi kuvan 7.4 astian kohdistuva *voima* riippuu sekä nesteen paineesta että astian muodosta. Nesteen *paine* sen sijaan *ei riipu astiasta* vaan ainoastaan siitä, kuinka kovasti nestettä puristetaan eli puristusjännityksestä. Paine on siis *vain nesteen tai kaasun ominaisuus*. Voima sen sijaan riippuu sekä paineesta että astiasta, sillä sama paine tuottaa erilaisiin kappaleisiin erilaiset voimat.

Kuvassa 7.5 on esitetty koe, jossa havaitaan toinenkin nesteiden ja kaasujen ero. Jos astia nimittäin käännetään ympäri, painovoima ei enää työnnä mäntää astian sisään vaan vetää sitä ulos. Kaasulla täytetystä astiasta mäntä liukuu tällöin ulos, mutta nesteellä täytetyssä astiassa mäntä pysyy paikoillaan kunhan se ei ole liian painava. Tämä johtuu siitä, että nesteissä molekyylien välillä on sidoksia, jotka vetävät molekyylejä yhteen ja vastustavat venytystä. Molekyylit voivat muodostaa sidoksia myös männän pinnan kanssa, jolloin

Kuva 7.6: Hydrostaattinen paine kasvaa syvemmälle siirryttääessä.



ne kohdistavat mäntääkin voiman, joka vastustaa mänän vetämistä ulos. Kaasussa molekyyliit sen sijaan eivät muodosta sidoksia eivätkä siten myöskään vedä toisiaan puoleensa. Kaasu ei siis voi vetää mäntää astian sisään vaan vain työntää sitä ulos, ja niinpä ympäri käännetystä astiasta mäntä putoaa, jos mikään ulkoinen voima ei sitä kannattele.

Kuvien 7.4 ja 7.5 nesteellä täytetyjen astioiden seinämään kohdistuvien voimien suunnat ovat päinvastaiset, sillä kuvassa 7.4 painovoima työntää mäntää astian sisään ja kuvassa 7.5 se vetää mäntää ulos. Kummassakin tilanteessa nesteen paine välittää mänän työntävän tai vetävän voiman astian kaikkiin seiniin. Kun nestettä puristetaan, paineen määritellään olevan positiivinen, ja kun nestettä venytetään, paine on negatiivinen. Kaasu voi tuottaa mäntää ainostaan ulospäin työntävän voiman, joten *kaasun paineen täytyy olla aina positiivinen*. Jos kaasusäiliön mäntää vedetään ulospäin, kaasu laajenee itsestään täyttämään näin syntyneen tilan, jolloin kaasun tilavuus kasvaa ja paine pienenee pysyen kuitenkin aina positiivisenä.

Hydrostaattinen paine

Kuvan 7.4 astia ja sen sisältämä neste ovat levossa, joten niihin kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla. Muuteten kappaleet olisivat kiihyvässä liukkeessa. Astian ja nesteen välisten voimien täytyy siis olla astian vastakkaisilla seinämillä yhtä suuret ja vastakkaisuuntaiset, mikä tarkoittaa nesteen paineen olevan sama kummallakin seinällä. Toisin sanoen *puristusjännitys pyrkii leviämään nesteissä ja kaasuisissa tasaisesti niin, että paine on kaikilla yhtä suuri*. Tulosta kutsutaan *Pascalin laiksi*, mutta itse asiassa tämä ei yleensä ole täsmälleen totta. Edellisessä päättelyssä nimittiin oletettiin, että neste ei liiku ja että siihen ei kohdistu muita ulkoisia voimia kuin astian seinämien siihen kohdistamat voimat. Kumpikin näistä — nesteen liike tai ulkoiset voimat — muuttavat paineen jakautumista ja voivat johtaa siihen, että paine ei ole astiassa kaikkialla sama.

Erittäin nesteillä ja kaasuilla on massa, joten niihin kohdistuu painovoima, ja tästä johtuen astiassa olevan nesteen *paineen täytyy olla pohjalla suurempi kuin pinnalla*. Nesteen voi nimittää aina ajatella koostuvan ohuista, toistensa päällä olevista "nestekappaleista", joista alemmat kannattelevat ylempiään ja vastaavasti ylemmät puristavat alempiaan. Esimerkiksi kuvassa 7.6 neste on jaettu kolmeen osaan, joita on merkitty kirjaimin A, B ja C. Näistä ylimpään, osaan A, kohdistuu kolme pystysuuntaista voimaa. Mänän kosketusvoima ja osaan kohdistuva painovoima vetävät kappaletta alas, ja osan B kosketusvoima kannatteelee kappaletta. Koska neste ei liiku, voimien summan täytyy olla nolla. Siispä osan B kosketusvoiman täytyy olla yhtä suuri kuin mänän kosketusvoiman ja osan A painovoiman yhteensä. Toisaalta osan A kuhunkin pintaan kohdistuvan voiman täytyy olla yhtä suuri kuin nesteen paine kyseisellä pinnalla kerrottuna pinnan alalla. Tässä esimerkissä osan A ylä- ja alapinnat ovat yhtä suuret, mutta alapintaan kohdistuu suurempi voima, joten *nesteen paineen täytyy olla alapinnalla suurempi*.

Täsmälle samanlainen päättely toimii myös osille B ja C: kunkin osan alapintaan kohdistuvan voiman täytyy olla suurempi kuin osan yläpintaan kohdistuvan voiman, koska myös nesteen painovoima vetää näitä osia alas. Esimerkiksi osaa B painaa alas osan A kosketusvoima, $\bar{N}_{A \rightarrow B}$, ja sitä kannatteelee osan C kosketusvoima $\bar{N}_{C \rightarrow B}$. Lisäksi tästä vesimassaa vetää alas osan B paino \bar{G}_B , joten veteen kohdistuvien voimien summa on nolla jos

$$N_{C \rightarrow B} = N_{A \rightarrow B} + G_B. \quad (7.2)$$

Tässä esimerkissä astia on suoran lieriön muotoinen, joten kappaleen B ylä- ja alapintojen pinta-ala on sama, A. Kappaleen paino riippuu sen tilavuudesta, joka on tämän pinta-alan ja kappaleen korkeuden Δz tulo,

$$G_B = mg = \rho V g = \rho A \Delta z g. \quad (7.3)$$

Toisaalta veden kuhunkin pintaan kohdistuva voima voidaan ilmaista paineen ja pinta-alan tulona, $N_B = pA$, joten kappaleen ylä- ja alapinnan välillä täytyy olla paine-ero

$$\Delta p = \frac{\Delta N_B}{A} = \frac{1}{A}[N_B(z + \Delta z) - N_B(z)] = \frac{1}{A}(N_{A \rightarrow B} - N_{C \rightarrow B}), \quad (7.4)$$

joka voidaan voimatasapainoehdon (7.2) ja veden painon (7.3) perusteella kirjoittaa myös muotoon

$$\Delta p = -\frac{1}{A}G_B = -\rho\Delta zg. \quad (7.5)$$

Paine siis muuttuu pystysuuntaan siiirtyttääessä nopeudella

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g, \quad (7.6)$$

ja tässä miinusmerkki tarkoittaa sitä, että paine pienenee, kun z -koordinaatti kasvaa eli kun siirrytään ylös-päin. Näin juuri pitääkin käydä, koska nesteen oma paino lisää painetta astian pohjalla. Erityisesti jos paine astian yläreunassa (veden pinnalla) on p_0 , ja asetamme z -akselin nollakohdan tälle korkeudelle, $p(0) = p_0$, paine korkeudella z on

$$p(z) = p_0 + \Delta p = p_0 - \rho g \Delta z = p_0 - \rho gz. \quad (7.7)$$

Yhtälössä esiintyvä korkeudesta riippuva termi ρgz kutsutaan **hydrostaattiseksi paineeksi** (kreikkaa, 'hydro' vesi; engl., 'static' liikkumaton).



7.3 Tiivis suorakulmainen astia on täynä nestettä. Astiaa työnnetään sivulta vakivoimalla, jolloin astia ja sen sisältö ovat tasaisesti kiiltovässä liikkeessä (kiiltovyys $a_x > 0$). Miten tämä vaikuttaa paineen jakautumiseen nesteessä?

Myös kaasuilla on massaa, ja siksi myös kaasut tuottavat hydrostaattisen paineen. Erituisen tärkeä esimerkki tästä on *ilmanpaine*, joka on seurausta siitä, että elämme valtavan "ilmameren" pohjalla. Avaruudessa vallitsee lähes täydellinen tyhjiö, joten paine avaruudessa on nolla. Maata ympäröivään ilmakehään ei siis kohdistu lainkaan ulkoista painetta, joka puristaisi ilmakehän kaasuja kasaan. Ainoa voima, joka estää ilmakehän kaasuja karkaamasta avaruuteen, onkin ilmakehään itseensä kohdistuva painovoima. Ilmakehän yläkerroksissa paine on hyvin pieni, mutta koska ilmakehä on varsin paksu ja sisältää hyvin suuren määän kaasua, ilmakehän kokonaismassa on suuri. Koko ilmakehään kohdistuva painovoima jakautuu Maan pinnalle, joka kannattelee ilman painoa, ja niinpä ilmakehän alaosissa täytyy olla merkittävä paine. Keskimääräinen ilmanpaine merenpinnan korkeudella onkin $p_{ilma} = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$. Nesteiden hydrostaattisen paineen tapaan myös ilmanpaine pienenee ylöspäin siiirtyttääessä. Kuitenkin koska ilma on kaasu, se ei ole nesteiden tapaan kokoontumaton. Yläilmakehäässä paine on pieni ja kaasu pääsee laajemmaan lähes vapaasti, joten kaasun tiheys on hyvin pieni. Ilmakehän alaosissa ylempien ilmakerosten paino sen sijaan puristaa kaasua kasaan, ja siksi ilman tiheys kasvaa maanpintaan lähestyttääessä. Suurin osa ilmakehän massasta onkin keskitynyt ilmakehän alaoiin.



- 7.4** (a) Kuinka suuren voiman ilmanpaine kohdistaa $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ pinnalle?
 (b) Kuinka suuri ilmamassa tällaisen pinnan päällä siis on?
 (c) Arvioi koko ilmakehän massa ilmanpaineen ja Maan koon perusteella.

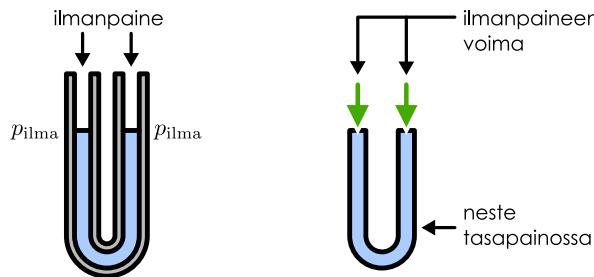
Paineen sovelluksia

Edellä johdimme hydrostaattiselle paineelle lausekkeen suorassa astiassa. Tutkimme seuraavaksi astian muodon vaikutustua paineeseen kuvan 7.7 avulla. Kuva esittää symmetrisessä U-putkessa olevaa nestettä. Kuvassa 7.7 (a) putken kummassakin haarassa on sama ulkoinen paine, ilmanpaine p_{ilma} , joka työntää nestettä putkeen. Nesteen pintaan kohdistuu siis sama voima kummassakinhaarassa, ja neste on tasapainossa sen ollessa symmetrisesti pinta yhtä korkealla kummassakin putkenhaarassa.

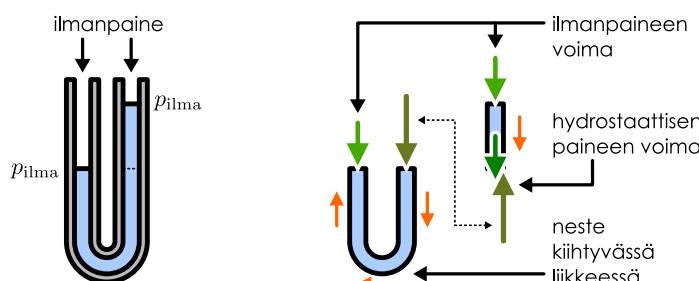
Jos nestepinta on haaroissa eri korkeudella, tilanne on kuten kuvassa 7.7 (b). Tässä tapauksessa neste voidaan ajatella jaetuksi kappaleeksi: symmetriseen U:n muotoiseen osaan sekä putken oikeassahaarassa tämän U:n päällä olevaan osaan. Ulkoinen ilmanpaine on edelleen sama kummassakinhaarassa, joten ilmanpaine kohdistaa nytkin yhtä suuren voiman nesteen pintaan kummassakinhaarassa. U-putken vasemmassahaarassa tämä voima kohdistuu U:n muotoisen nestekappaleen pintaan, mutta oikean puoleisenhaarassa ilmanpaineen tuottama voima kohdistuu U:n päällä olevaan kappaleeseen. Tähän kappaleeseen kohdistuu myös painovoima, joten nyt U:n muotoisen nestekappaleen oikeanpuoleisenhaaran päällä on yli-määräistä painoa ja U-kappaleen oikeaahaaraa siis työntää putken sisään suurempi voima kuin vasenta

Kuva 7.7: U-putkessa olevan nesteen paine ja nestepatsaiden vapaakappalekuvat.

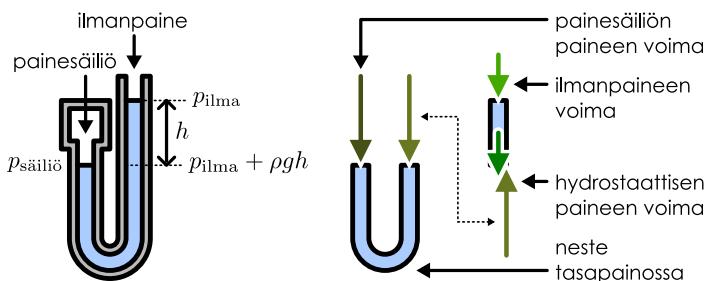
(a) Haaroissa sama ulkoinen paine: tasapainossa nesteen pinta yhtä korkealla kummassakin haarassa.



(b) Haaroissa sama ulkoinen paine: neste ei ole tasapainossa, jos pinta ei ole kaikkialla yhtä korkealla.



(c) Haaroissa eri paine: tasapainossa nesteen pinta on eri haaroissa eri korkeudella.



haaraa. U-kappaleeseen kohdistuvat voimat eivät siis ole tasapainossa, ja niinpä nesteen täytyy olla kiihyvässä liikkeessä. (Putken seinämät kohdistavat toki nekin nesteesseen voimia, joita ei ole kuvaan piirretty, mutta nämä eivät vaikuta nesteen virtaukseen putkea pitkin jos viskoositeetti on pieni.) Tasapaino saavutetaan silloin, kun U-kappaletta työntää putken sisään yhtä suuri voima kummassakinhaarassa eli kun nesteen pinta on kummassakinhaarassa yhtä korkealla (kuva (a)).

On toki mahdollista työntää nestettä putkeen muuttamalla ulkoista painetta putken toisessahaarassa. Kuvaan 7.7 (c) putken vasemmanhaarana on säiliö, jonka painetta voidaan muuttaa. Kuvan tilanteessa säiliön paine on suurempi kuin ilmarpaine ja neste on tasapainossa sen pinnan ollessa oikeanpuoleisessahaarassa korkeammalla kuin vasemmassa. Tämäkin tilanne voidaan analysoida jakamalla neste kahteen kappaleeseen, joista toinen on symmetrinen, U:n muotoinen kappale. Koska neste on tasapainossa, U-kappaleen kumpaankin pintaan täytyy kohdistua yhtä suuri voima. Kappaleen vasemmassahaarassa tämän voiman tuottaa säiliön paine $p_{säiliö}$ ja oikeassahaarassa ulkoinen ilmarpaine sekä U-kappaleen päällä olevan nesteen hydrostaattinen paine, $p_{ilma} + \rho gh$, missä h on nesteen pinnankorkeuden ero haarojen välillä. Tasapainossa olevan U-kappaleen kummallakin pinnalla on sama paine, joten

$$p_{säiliö} = p_{ilma} + \rho gh. \quad (7.8)$$

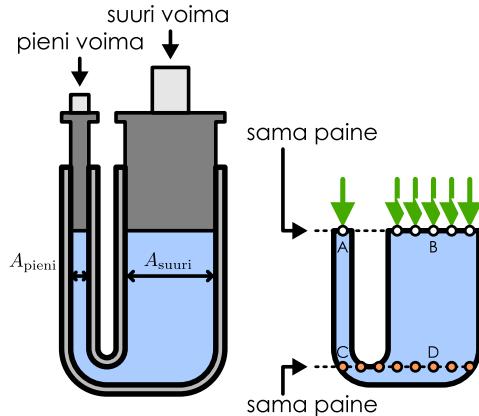
Koska paine työntää nesteitä ja kaasuja, nämä olomuodot saadaan virtaamaan tuottamalla paine-eroja. Nesteitä ja kaasuja kutsutaankin yhteisnimellä *virtaavat aineet* eli *fluidit*. Kuvaan 7.7 (c) tilanteessa paine-ero nostaa nestettä putkeen, jolloin virtaus pysähtyy, mutta jos kyseessä olisi vaakasuora putki, putken suiden välinen paine-ero voisi tuottaa jatkuvan virtauksen.



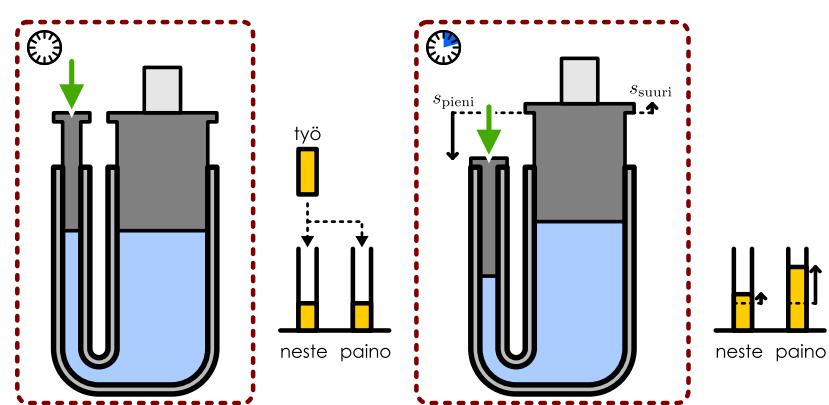
7.5 Mehupillin toiminta perustuu siihen, että suu on pillin toisen pään sulkeva painesäiliö, jossa paine on pienempi kuin ulkoinen ilmarpaine. (a) Selitä mehupillin toiminta tämän perusteella ja vertaa sitä kuvaan 7.7 (c). (b) Vaikuttaako pillin pituus, leveys tai korkeus sen toimintaan?

Kuva 7.8: U-putkessa olevan nesteen paine ja nestepatsaiden vapaakappalekuvat.

(a) Tasapainossa nesteen paineen täytyy olla yhtä suuri kaikissa samalla korkeudella olevissa pisteissä.



(b) Pieneen mäntää tehdään työtä, jolloin suuri mäntä nousee.



U-putkea voidaan käyttää myös paineen mittaamiseen. Jos nimittäin nesteen pinta asettuu tasapainossa U-putken haaroissa eri korkeudelle, ulkoisen paineen täytyy olla putken eri haaroissa erilainen kuten kuvassa 7.7 (c). Tasapainossa nesteen kokonaispaineen täytyy olla sama kaikissa samalla korkeudella olevissa pisteissä, minkä perusteella voidaan määrittää nesteen pinnalla putken eri haaroissa vallitsevien paineiden erot mittamalla nestepintojen korkeuserot. Erityisesti jos paine U-putken toisessahaarassa tunnetaan, näin voidaan määrittää paine myös putken toisessa päässä. Jos esimerkiksi painesäiliön paine tunnetaan, ulkoinen ilmanpaine voidaan määrittää nestepatsaan korkeuden perusteella. Ensimmäiset nesteilmapuntarit perustuvatkin juuri tähän periaatteeseen.

Edellä tutkittiin symmetristä U-putkea, mutta tarkastellaan seuraavaksi miten putken epäsymmetria vaikuttaa systeemin käyttäytymiseen. Tarkastellaan tästä varten kuvan 7.8 kaksiharaista, nesteellä täytettyä putkea. Putken vasen haara on kapea, ja sen poikkipinta-alaa on merkitty kuvassa A_{pieni} . Oikea haara on puolestaan leveä, ja sen poikkipinta-ala on A_{suuri} . Putken kummankin pään sulkee kevyt mäntä, joka pääsee liikkumaan helposti. Kuvassa 7.8 (a) systeemi on tasapainossa, mutta mäntiin ei silti kohdistu yhtä suuret voimat. Sen sijaan kapean putken päällä on *pieni* paino ja leveän putken päällä on *suuri* paino.

Kuvassa 7.8 (a) on merkitty astian pohjalla olevat pisteet C ja D, jotka ovat yhtä korkealla. Näiden pisteiden välillä on vain nestettä, joten jos paine olisi esimerkiksi pisteessä D suurempi kuin pisteessä C, tämän paineron täytyisi työntää nestettä kohti pistettä C. Tällöin neste ei olisi tasapainossa vaan kiihtyvässä liukkeessa. Niinpä koska *neste on tasapainossa*, pisteissä C ja D on pakko olla *sama paine*,

$$p_C = p_D. \quad (7.9)$$

Toisaalta pisteiden A ja C sekä B ja D välinen etäisyys pystysuunnassa on sama. Niinpä näiden pisteiden välisen hydrostaattisesta paineesta johtuvan paine-eron on oltava yhtä suuri,

$$\Delta p_{AC} = \Delta p_{BD}. \quad (7.10)$$

Nämä ollen myös pisteissä A ja B täytyy olla keskenään sama paine,

$$p_A = p_C + \Delta p_{AC} = p_D + \Delta p_{BD} = p_B, \quad (7.11)$$

vaikka nämä pisteet ovat putken eri haaroissa. Samaan tapaan voidaan päätellä, että *kaikissa* pisteissä, jotka ovat yhtä korkealla kuin piste A, on oltava sama paine. Nesteen tai kaasun hydrostaattinen paine ei siis riipu astian muodosta vaan hydrostaattinen paine on sama riippumatta siitä, onko neste leveässä, kapeassa, suorassa tai mutkittelevassa astiassa.

Koska paine on putken kummassakin haarassa sama, täytyy nesteen pintaan kohdistuvan *voiman* olla leveässä putkessa suurempi, sillä voimahan on paineen ja putken poikkipinta-alan tulo. Täsmällisesti leveässä putkessa neste kohdistaa mäntään voiman $F_{\text{suuri}} = p_B A_{\text{suuri}}$ ja kapeassa putkessa voiman $F_{\text{pieni}} = p_A A_{\text{pieni}}$. Koska paine on kummassakin putkessa sama, voimien suhde on sama kuin pinta-alojen suhde,

$$F_{\text{suuri}} = F_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}}. \quad (7.12)$$

Neste siis välittää siihen kohdistetun paineen, ja näin nestettä voidaan käyttää sekä voiman siirtämiseen että sen suuruuden muuttamiseen. Tätä kutsutaan *hydraulikaksi*, ja sitä sovelletaan yleisesti konetekniikassa.

Esimerkiksi autojen jarruissa käytetään hydraulista voimansiirtoa. Kuljettajan painaessa jarrupoljinta jarruneste välittää voiman tuottaman paineen jarruihin. Vaikka kuljettaja painaisi poljinta vain pienellä voimalla, näin syntyvä paine puristaa jarrupaloja suurella voimalla, koska jarrupolkimeen on liitetty pieni mäntä ja jarrupaloihin suuri.

Hydrauliikkaa käytetään myös työkoneissa kuten nostureissa ja kaivinkoneissa. Tällöin hydraulisessa järjestelmässä käytettävän nesteen tuotetaan pumpulla suuri paine, ja tämän paineen tuottaman voiman avulla tehdään työtä kuten nostetaan raskaita taakkoja. Kuvassa 7.8 (b) on tästä yksinkertaistettu esimerkki: kaksihaarainen U-putki, jonka toinen haara on kapea ja toinen leveä. Kapeassa haarassa on mäntä, jota puristaa voima F_{pieni} . Leveässähaarassa olevan männän päällä puolestaan on nostettava taakka. Systeemiksi on tässä valittu putkessa oleva neste sekä nostettava taakka. Pienenen mäntään kohdistuva voima on systeemiin työtä tekevä ulkoinen voima.

Ulkoinen voima on tässä kyllin suuri painaakseen pieni mäntä sisään, jolloin suuri mäntä taakkoineen nousee ylöspäin. Kuitenkin koska neste on kokoonpuristumatonta, sen kokonaistilavuus ei saa muuttua. Pienen männän siirtyessä matkan s_{pieni} putken sisään, se työntää nestettä pienestä putkesta suureen. Nesteen pinnan pitää siis nousta suressa putkessa matka s_{suuri} niin, että suressa putkessa olevan nesteen tilavuus kasvaa yhtä paljon kuin pienessä putkessa olevan nesteen tilavuus pienentyi.

Nesteen tilavuuden muutos pienessä putkessa on $\Delta V_{\text{pieni}} = -A_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}}$ ja vastaavasti suressa putkessa nesteen tilavuus kasvaa määränpäätä $\Delta V_{\text{suuri}} = A_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}}$. Kokonaistilavuuden pitää olla vakio, joten $\Delta V_{\text{suuri}} = -\Delta V_{\text{pieni}}$, mistä saadaan mäntien siirtymiksi

$$s_{\text{suuri}} = s_{\text{pieni}} \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{suuri}}}. \quad (7.13)$$

Suuri mäntä siirtyy siis lyhyemmän matkan kuin pieni mäntä kuten kuvastakin nähdään.

Koska pieni mäntä liikkuu samaan suuntaan kuin mihin siihen kohdistuva voima osoittaa, voima tekee työtä mäntään ja niinpä kuvan 7.8 (b) systeemin energia kasvaa. Tämä energia muuttuu nesteen ja nostettavan taakan potentiaalienergiaksi (ja mahdollisesti myös liike-energiaksi). Jos nesteen paino on pieni verrattuna nostettavan taakan painoon, nesteen energian muutos on pieni verrattuna taakan energian muutokseen, ja tällöin ulkisen voiman tekemän työn täytyy olla likimain yhtä suuri kuin taakan potentiaalienergian muutos. Näin onkin, sillä pienenen mäntään kohdistuva voima tekee systeemiin työn $W = F_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}}$ ja taakan energian muutos on puolestaan $\Delta E = F_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}}$. Voimien suuruksille pätee likimain yhtälö (7.12), joka oli seurausta siitä, että paine on kummassakin putkessa sama. Yhtälö ei päde täsmälleen, sillä mäntien siirtyessä niiden pintojen välille syntyy nesteen hydrostaattisesta paineesta johtuen paine-ero. Jos kuitenkin nesteen paino on pieni verrattuna taakan painoon, tämä ero ei ole merkittävä. Mäntien kulkemille matkoille puolestaan pätee aina yhtälö (7.13), kun neste on kokoonpuristumatonta. Näillä oletuksilla systeemiin tehty työ on sama kuin taakan energian muutos,

$$W = F_{\text{pieni}} s_{\text{pieni}} = F_{\text{suuri}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}} s_{\text{suuri}} \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{suuri}}} = F_{\text{suuri}} s_{\text{suuri}} = \Delta E. \quad (7.14)$$

Erityisesti jos nosto tapahtuu hitaasti eikä taakka saa kovin suurta liike-energiaa, suureen mäntään kohdistuva voima on sama kuin taakan paino, $F_{\text{suuri}} = mg$, ja systeemiin tehty työ muuttuu nostettavan lastin potentiaalienergiaksi,

$$W = \Delta E = \Delta U = mgs_{\text{suuri}}. \quad (7.15)$$



7.6 Mihin energian muotoihin ulkisen voiman tekemä työ kuvassa 7.8 (b) muuttuu, jos

- (a) nesteen paino on merkittävä nostettavaan taakkaan verrattuna?
- (b) ulkoinen voima on suuri ja nosto tapahtuu nopeasti?
- (c) nesteen sijaan putkessa onkin kaasua (eli kyseessä on *pneumaattinen laite*)?

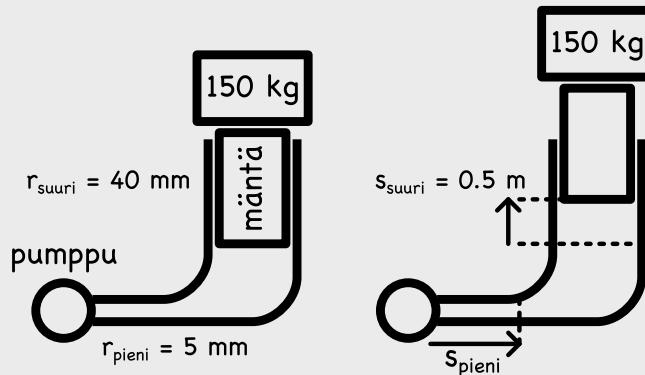
esimerkki 7.1

Hydrauliikka

Hydraulisen nosturin pumppu työntää nestettä putkeen, jonka säde on 5.0 mm. Neste työntää puolestaan mäntää putkessa, jonka säde on 40.0 mm. Mäntä nostaa 150 kg taakan 0.5 m korkeudelle 22 sekunnissa. (a) Mikä on pumpun teho, jos dissipatiiviset vuorovaikutukset ja nesteen oma liike- ja potentiaalienergia jätetään huomioimatta? (b) Kuinka suuri paine nesteeseen täytyy tuottaa? (c) Kuinka nopeasti neste virtaa pumpusta pieneen putkeen?

TILANNE

Merkitään ohuen putken sädettä $r_{\text{pieni}} = 0.005 \text{ m}$ ja paksun $r_{\text{suuri}} = 0.040 \text{ m}$. Putkien poikkipinta-alat ovat siis $A_{\text{pieni}} = \pi r_{\text{pieni}}^2 = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ja $A_{\text{suuri}} = \pi r_{\text{suuri}}^2 = 5.03 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Taakan siirtymä on sama kuin männän siirtymä paksussa putkessa, $s_{\text{suuri}} = 0.5 \text{ m}$. Kulunut aika on $\Delta t = 22 \text{ s}$.



SUUNNITELMA Pumppu työntää nestettä, jolloin sen paine kasvaa, ja hitaasti virtaavassa nesteessä paine on kaikkialla sama. Paine puolestaan kohdistaa voiman kaikkiin nestettä ympäröiviin pintoihin, myös mäntään. Tämä voima työntää mäntää ja nostaa männän kannattelemaan taakan, jos voima on suurempi kuin taakan paino.

Taakan noustessa sen gravaation potentiaalienergia kasvaa, joten nosto vaatii työtä. Todellisuudessa myös nesteen potentiaalienergia muuttuu ja kitka kuluttaa mekaanista energiota lämpöenergiaksi, mutta jos näitä tekijöitä ei huomioida, tarvittava työ on yhtä suuri kuin taakan potentiaalienergian muutos.

Kun mäntä liikkuu putkessa, nesteen täytyy täytyy vapautuva tilavuus. Kummassakin putkessa siirtymän nesteen tilavuus saadaan putken pinta-alan ja siirtymän tulona. Pumppu siirtää ohueeseen putkeen yhtä suuren tilavuuden kuin mitä ohuesta putesta virtaa paksun putkeen, joten ohuessa putkessa neste siirtyy pidemmän matkan kuin paksussa.

Jos nesteen paine on p , se tuottaa mäntään voiman

$$F = pA_{\text{suuri}}. \quad (7.16)$$

Jotta taakka nousisi, tämän voiman täytyy olla suurempi kuin taakkaan kohdistuva painovoima. Jos taakka nousee tasaisella nopeudella, voima on yhtä suuri kuin painovoima, $F = mg$, josta ratkeaa paineeksi

$$p = \frac{mg}{A_{\text{suuri}}}. \quad (7.17)$$

Potentiaalienergian muutos on $W = \Delta U = mgs_{\text{suuri}}$ ja pumpun teho on työ jaettuna kuluneella ajalla

$$P = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7.18)$$

Putkeen siirtyy nestettä tilavuus $\Delta V = A_{\text{suuri}}s_{\text{suuri}} = A_{\text{pieni}}s_{\text{pieni}}$, josta saadaan nesteen siirtymäksi pienessä putkessä $s_{\text{pieni}} = s_{\text{suuri}} \frac{A_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}}$. Nesteen virtausnopeus on siirtymä jaettuna kuluneella ajalla

$$v_{\text{pieni}} = \frac{s_{\text{pieni}}}{\Delta t}. \quad (7.19)$$

RATKAISU (a) Paine on

$$p = \frac{mg}{A_{\text{suuri}}} = 292000 \text{ Pa}. \quad (7.20)$$

(b) Pumpulta vaaditaan teho

$$P = \frac{mg s_{\text{suuri}}}{\Delta t} = 33 \text{ W}. \quad (7.21)$$

(c) Nesteen virtausnopeus ohuessa putkessa on

$$v_{\text{pieni}} = \frac{A_{\text{suuri}}s_{\text{suuri}}}{A_{\text{pieni}}\Delta t} = 1.5 \text{ m/s}. \quad (7.22)$$

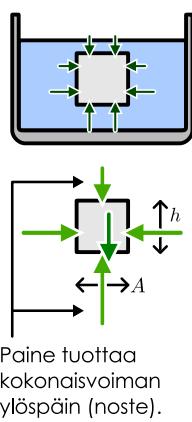
ARVIOINTI Koska energiaa ei voi luoda, taakan nostaminen tälle korkeudelle vaatii aina saman verran energiota riippumatta siitä, miten nosto tehdään. Pumpulta vaadittava teho on kuitenkin sitä pienempi, mitä hitaammin nosto tapahtuu, ja vaadittava paine on sitä pienempi, mitä leveämpi on taakkaa nostava mäntä. Näin nostotyö saadaan tehtyä hyvin vaativatmallakin pumpulla.

Noste

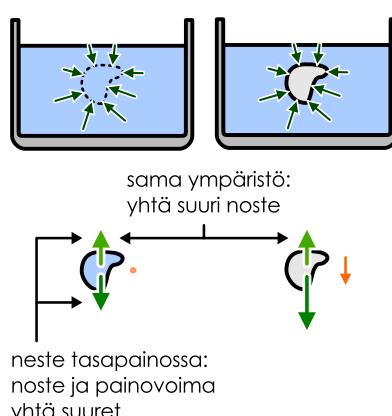
Hydrostaattinen paine on siis sekä kaasuissa että nesteissä sitä suurempi, mitä alemmas siiirtyää. Tästä johtuen nesteen tai kaasun ympäröimän kappaleen alapintoihin kohdistuu suurempi paine kuin sen yläpintoihin. Edelleen, koska kappaleiden alapinnat ovat suuremmassa paineessa, niihin kohdistuu myös suurempi voima pinta-alayksikköö kohden kuin yläpintoihin. Paineen tuottama voima on kohtisuorassa kappaleen pintaan vastaan, joten ympäröivän nesteen tai kaasun paine kohdistaa yleisesti kappaleen alapintoihin ylöspäin osoittavan voiman ja vastavasti yläpintoihin alas päin osoittavan voiman. Paine-eroista johtuen näiden voimien ylöspäin osoittavat pystysuorat komponentit ovat alas päin osoittavia hieman suuremmat, ja niinpä *ympäröivä paine kohdistaa kappaleeseen ylöspäin suuntautuvan kokonaisvoiman*. Tätä voimaa kutsutaan **nosteeksi**.

Analysoidaan nosteen vaikutus ensin kuvaan 7.9 piirretyn suorakulmaisen kappaleen tapauksessa. Kuvan kappaleen kaikki sivut ovat vaaka- tai pystysuorat, ja niihin kohdistuvat voimat osoittavat kohtisuoraan kappaleen pintoja vastaan eli myös pysty- tai vaakasuuntaan. Vastakkaisiin sivuihin kohdistuvat vaakasuuntaiset voimat ovat yhtä suuret, joten ne kumoavat toisensa. Sen sijaan kappaleen alapintaan kohdistuu voima ylöspäin, ja koska alapinta on suora taso, tämän voiman suuruus on pinnan pinta-alan ja pinnalla vallitsevan paineen tulo, $F_{\text{alapinta}} = p_{\text{alapinta}}A$. Vastaavasti kappaleen yläpintaan kohdistuva voima on $F_{\text{yläpinta}} = p_{\text{yläpinta}}A$.

Kuva 7.9: Suorakulmaisen kappaleen neste.



Kuva 7.10: Epäsäädöllisen kappaleen neste.



Koska kappale oli suorakulmainen särmio, ylä- ja alapintojen alat ovat samat. Pintojen välinen paine-ero johtuu puolestaan hydrostaattisesta paineesta, joten jos kappaleen korkeus on h , alapinnan paine on

$$p_{\text{alapinta}} = p_{\text{yläpinta}} + \rho gh. \quad (7.23)$$

Kappaleeseen kohdistuva paineesta johtuva kokonaisvoima eli neste on siis

$$F_{\text{noste}} = F_{\text{alapinta}} - F_{\text{yläpinta}} = p_{\text{alapinta}}A - p_{\text{yläpinta}}A = \rho ghA. \quad (7.24)$$

Toisaalta kappaleen tilavuus on sen korkeuden ja pohjan alan tulo, $V = Ah$, joten kappaleeseen kohdistuva neste voidaan ilmaista myös kappaleen tilavuuden ja sitä ympäröivän nesteen tai kaasun tiheyden ρ avulla

$$F_{\text{noste}} = \rho gV. \quad (7.25)$$

Tiheyden ja tilavuuden tulo on massa mutta nesteen lausekkeessa (7.25) ρ on *ympäröivän aineen* tiheys ja V on *kappaleen* tilavuus. Niinpä lausekkeessa esiintyvä tulo ρV on massa, joka kappaleen tilavuutta vastaavalla määrellä nestettä tai kaasua olisi näissä olosuhteissa. Tätä kutsutaan *kappaleen syrjäytämäksi* nesteeksi tai kaasukiksi. Massan tulo putoamiskiertyvyuden kanssa on puolestaan tämän aineen paino. Niinpä nesteen suuruus voidaan ilmaista myös *Arkhimedeen lakin*: Kaasun tai nesteen ympäröimään kappaleeseen kohdistuu voima (noste), jonka suunta on painovoiman suuntaan nähden vastakkainen ja jonka suuruus vastaa kappaleen syrjäytämän kaasu- tai nestemäärän painoa.

Edellä johdimme nesteen suuruuden suorakulmaiselle kappaleelle tarkastelemalla kappaleen eri pintoihin kohdistuvia voimia. Mielivaltaisen muotoiselle kappaleelle nesteen laskeminen suoraan paineen tuottamien voimien avulla on hankalampaa, koska paine tuottaa aina pintaan vastaan kohtisuoran voiman. Jos kappale on erikoisen muotoinen, siihen kohdistuva voima pitäisi periaatteessa laskea jakamalla kappaleen pinta pieniin osiin, määrittämällä kuhunkin osaan kohdistuva voima, ja laskemalla nämä voimat vektoreina yhteen. Voimme kuitenkin päättää Arkhimedeen lain pätevän kaikille kappaleille niiden muodosta riippumatta yksinkertaisella ajatuskokeella, joka on esitetty kuvassa 7.10.

Kuvassa on kaksi astiaa. Toisessa on vain nestettä ja toisessa on nesteesseen upotettu kappale. Neste, jonka ominaisuudet ovat kauttaaltaan samanlaiset (painetta lukuunottamatta) pysyy astiassa paikoillaan, koska ei ole mitään syötä, miksi neste alkaisi virrata itsestään. Nestettä täynnä olevassa astiassa neste on siis kauttaaltaan paikoillaan, tasapainossa. Vaikka astia onkin täynnä vain vettä, voimme aina ajatuksissamme jakaa nesteen kahteen osaan: "neste-kappaleeksi", joka on täsmälleen samanmuotoinen ja -kokoinen kuin toisessa astiassa oleva oikea kappale, ja tästä nestekappaletta ympäröiväksi nesteeksi. Koska nestekappale on tasapainossa, siihen kohdistuvan kokonaisvoiman täytyy olla nolla. Toisaalta nestekappaleeseen kohdistuu ainoastaan sen omasta massasta johtuva painovoima sekä ympäröivän nesteen neste. Koska kappale on tasapainossa, näiden voimien täytyy olla täsmälleen yhtä suuret ja vastakaissuuntiset. Nesteen kuitenkin aiheuttaa kappaletta *ympäröivä neste*,

ja tämä on täsmälleen samanlainen sekä nestekappaleen että oikean kappaleen tapauksessa. Niinpä oikeaan kappaleeseen täytyy kohdistua täsmälleen samanlainen neste kuin sitä vastaavaan nestekappaleeseen. Nämä ollen nosteen täytyy olla täsmälleen yhtä suuri ja vastakkaisuuntainen kuin kappaleen syrjäyttämää nestettä vastaavaan nestekappaleeseen kohdistuva painovoima.



7.7 Kuution muotoisessa astiassa on aluksi vettä (tilanne 1). Sitten astiaan laitetaan langasta roikkuva pallo, joka on vettä tiheämpi (tilanne 2). Sitten lanka katkaistaan, jolloin pallo uppoaa astian pohjalle ja jää sinne paikoilleen (tilanne 3). Vertaa seuraavien voimien suuruutta sekä keskenään että eri tilanteissa: (a) pallon paino, (b) palloon kohdistuva neste, (c) astian pohjaan kohdistuva voima.

esimerkki 7.2

Vene

Veneen pohja on likimain $0.7 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$ muotoinen suorakaide. Kuinka syvälle vene keskimäärin vajoaa, jos veneen ja sen kuorman kokonaismassa on 550 kg?

TILANNE

Pohjan pinta-ala on $A = 1.68 \text{ m}^2$. Merkitään kuorman massaa $m = 550 \text{ kg}$. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että on tyyntä ja vene vajoaa suoraan alaspin niin, että pohja on etäisyys Δz vedenpinnan alapuolella. Veden tiheys on noin $\rho_{vesi} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

SUUNNITELMA Veneeseen kohdistuu painovoima alaspin ja veden neste ylöspäin (ilman neste on pieni). Tasapainossa nämä ovat yhtä suuret. Painovoima riippuu vain kuormasta, mutta neste riippuu siitä, paljonko vettä vene syrjäyttää. Täsmällisesti neste on yhtä suuri kuin sen vesimäärän paino, joka mahtuisi veneen vedenpinnan alapuoliseen tilavuuteen.

Veneen paino on $G = mg$. Neste on

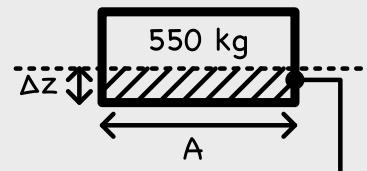
$$F_{\text{neste}} = \rho_{vesi} V g, \quad (7.26)$$

missä $V = A\Delta z$ on veneen vedenpinnan alapuolelle jäävä tilavuus. Tasapainossa nämä ovat yhtä suuret, $G = F_{\text{neste}}$.

RATKAISU Tasapainoehto on siis $mg = \rho_{vesi} A \Delta z g$, josta uppouumaksi ratkeaa

$$\Delta z = \frac{m}{\rho_{vesi} A} = 0.33 \text{ m}. \quad (7.27)$$

ARVIOINTI Vene on soutuveen suuruusluokkaa, ja sen kyydissä on kohtuullinen lasti, joten on aivan järkevää, että sen pohja uppoaa joitakin kymmeniä senttimetrejä.



**neste = pinnanalainen tilavuus
x veden tiheys**



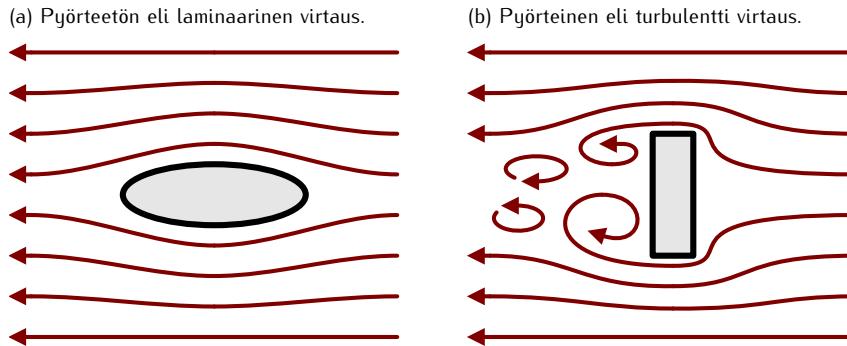
7.8 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä paineesta ja sen sovelluksista. Selitä erityisesti mistä hydrostaattinen paine ja neste johtuvat.

7.2 Virtausmekaniikkaa

Edellisissä esimerkeissä tarkasteltiin levossa olevia nesteitä ja kaasuja. Nämä olomuodot voivat kuitenkin virrata, minkä vuoksi ne ovat varsin harvoin levossa, eivätkä edellä esitellyt tulokset tällöin päde. Nesteiden ja kaasujen liikettä kuvaava **virtausmekaniikka** on kuitenkin yleisesti ottaen erittäin vaikea fysiikan osa-alue, koska virtaukset voivat olla hyvin monimutkaisia. Virtaavilla aineilla on erityisesti taipumus muodostaa **pyörteitä** niiden virratessa esteiden ohi (tai kappaleiden liikkumessa niiden läpi), ja pyörteiden käytös on tavallisesti kaoottista ja nopeasti muuttuvaa.

Pyörteet ovat yleensä haitallisia käytännön sovelluksissa, koska pyörteet jarruttavat virtauksia ja lisäävät väliaineen vastusta. Tämä johtuu siitä, että pyörteisiin sitoutuu liike-energiaa, jonka virtaavan aineen viskoiteetti (sisäinen kitka) kuluttaa lopulta dissipatiivisesti lämpöenergiaksi. Kun esimerkiksi auto kulkee ilman läpi, se työntää ilmaa pois tieltään ja vastaavasti ilma kohdistaa autoon sen liikettä vastustavan ilmanvastusvoiman. Jos auto on *virtaviivainen*, ilman täytyy vain väistää liikkuvaa autoa, jolloin autosta siirrytään vain vähän energiota ilmaan ja ilmanvastus on pieni. Tällöin ilmavirta auton ympäri on pyörteeton eli *laminaarinen*. Kuvaan piirretty käyrät ovat *virtaviivoja*, ja ne on piirretty niin, että kullekin käyrällä virtaavan aineen nopeus on kussakin pisteesä käyrän tangentin suuntainen. Nimittäin virtaviivainen tarkoittaa sitä,

Kuva 7.11: Virtauksen esitys virtauslinjoina. Käyrät kuvaavat virtaavan aineen hiukkasten kulkemia reittejä.



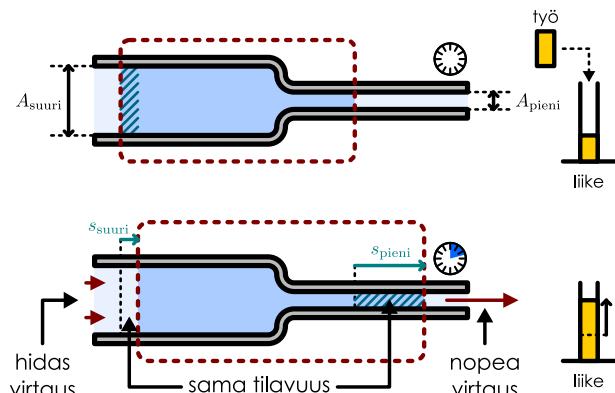
että kappaaleen muoto mukailee virtaviivoja mahdollisimman hyvin, jolloin virtaviivojen ei tarvitse taipua kovin paljon.

Jos auto sen sijaan ei ole virtaväinäinen, sen liike synnyttää ilmaan pyörteitä, jolloin energiaa siirryy autosta ilmaan suurella teholla. Tällöin ilman virtaus on pyörteinen eli *turbulentti*, mistä kuva 7.11 (b) on esimerkki. Pyörteisten virtausten täsmällinen analyysi on niin vaikeaa, että emme yritä sitä tässä tehdä. Tarkastelemme siis vain täysin ideaalisia virtauksia, joissa ei ole lainkaan pyörteitä ja joihin ei liity lainkaan dissipatiivisia vuorovaikutuksia.

Tarkastellaan kuvan 7.12 putkea esimerkkinä kokonpuristumattoman nesteen pyörteettömästä virtauksesta. Virtaus saapuu kuvassa vasemmalta, putken leveästä osasta ja kulkee oikealle, putken kapeaan osaan. Systeemiksi on valittu tietty nestemäärä putken sisällä, ja systeemi siis liikkuu nesteen virratessa. Koska neste on kokonpuristumatonta, sen tilavuus ei muudu. Niinpä aivan kuten kuvassa 7.8 (b) nesteen pinnan täytyi siirtää kapeassa putkessa pidempi matka kuin leveässä, tässäkin tilanteessa systeemiksi rajattu vesimassa etenee kapeassa putkessa pidemmän matkan kuin leveässä putkessa.

Koska kyseessä on jatkuva, pyörteeton virtaus, nesteen nopeus on paksussa putkessa kaikkialla sama ja ajasta riippumaton, v_{suuri} . Samoin nopeus on kapeassa putkessa kaikkialla sama, v_{pieni} , mutta tämä nopeus ei ole sama kuin virtausnopeus leveässä putkessa. Koska nesteen täytyy kapeassa putkessa kulkea pidempi matka samassa ajassa, *neste siis virtaa kapeassa putkessa nopeammin kuin leveässä*. Tässä on kyse yksinkertaisesti siitä, että leveässä putkessa kulkeva neste ei pääse kapeaan putkeen ennen kuin kapeassa putkessa jo ennestään oleva neste siirtyy pois tieltä. Ilmiön näkee selkeästi esimerkiksi lääkeruiskussa, jossa nestettä työntetään männällä kapean neulan läpi. Männän hidaskin työtäminen saa nesteen suihkuamaan neulasta suurella nopeudella.

Kuva 7.12: Nesteen virtaus kapenevan putken läpi. Tarkasteltavaksi systeemiksi on valittu rajallinen nestemäärä, joka liikkuu putken suhteeseen.



7.9 Suuri joukko ihmisiä kulkee samaan suuntaan pitkin leveää tietä, joka muuttuu yhtäkiä kapeaksi poluki. Miten tämä vaikuttaa joukon nopeuteen ja tiheyteen? Selitä miten ja miksi ihmiset käyttäytyvät samalla tai eri tavalla kuin neste.

Nesteen kulkema matka putken kussakin osassa on yhtälön (7.13) mukaisesti käantäen verrannollinen putken poikkipinta-alaan. Virtausnopeus on puolestaan nesteen kulkeman matkan suhde tähän käytettyyn aikaan, joten myös *virtausnopeus on käantäen verrannollinen putken poikkipinta-alaan*. Yhtälönä kirjoitettuna

$$v_{suuri} A_{suuri} = v_{pieni} A_{pieni}. \quad (7.28)$$

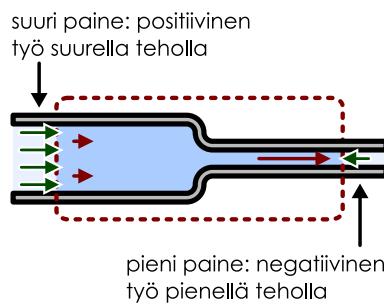
Tätä kutsutaan virtauksen *jatkuvuusyhälöksi*, ja nimi viittaa siihen, että yhtälö kuvaavat jatkuvaan virtausta, joka pysyy kaikkialla samanlaisena vaikka aika kuluisi. Nesteen kulkeman matkan ja poikkipinta-alan tulo on putken läpi virranneen nesteen tilavuus, $sA = V$, ja nesteen nopeuden ja poikkipinta-alan tulo on siten

putken läpi virranneen nesteen tilavuus aikayksikköä kohden, $vA = sA/\Delta t = V/\Delta t$. Yhtälö (7.28) siis sanoo, että putken jokaisen kohdan läpi pitää joka sekunti virrata yhtä paljon nestettä. Erityisesti jos putken yhdestä päästä tulee sisään tietty määrä nestettä, saman verran pitää poistua putken toisesta päästä. Tämä vaikuttaa melko itsestään selvältä, mutta ehto pätee vain jatkuvassa virtauksessa. Jos nimittäin putki on vaikkapa alussa *tyhjä*, aluksi putkeen tulee sisään vettä mutta vettä ei poistu sieltä lainkaan, koska putki vasta täytyy. Tällöin jatkuvuusyhtälö ei päde — mutta toisaalta virtauskaan ei ole jatkuva, koska veden määrä putkessa muuttuu ajan kuluessa.



7.10 Jatkuvuusyhtälön (7.28) mukaan putken yhdestä päästä tulee sisään yhtä suuri tilavuus nestettä kuin toisesta poistuu. Kaasut voivat kuitenkin puristua kasaan, joten nille jatkuvuusehto sanoo, että putkeen tulee yhtä paljon massaa kuin mitä sieltä poistuu. Johda kaasuvirtaukselle jatkuvuusyhtälö poikkipinta-alan, virtausnopeuden ja tiheyden avulla.

Kuva 7.13: Paine tekee nesteeseen työtä.



laskea paineesta johtuvan voiman tekemän työn suuruutta. Voimme kuitenkin käänräää tarkastelumme päävästaiseksi ja *määrittää paineen putken eri osissa* nesteeseen tehdyn työn perusteella. Jatkuvuusehdon (7.28) nimittäin täytyy päteä joka tapuksessa, ja siitä voidaan suoraan päätellä virtausnopeuden suhteellinen muutos putken kaventuessa. Otamme siis lähtökohdaksi sen, että nesteen virtausnopeus on tunnettu suure, ja haluamme määrittää paineen tämän perusteella.

Lasketaan ensin nesteen energian muutos. Koko systeemi siirryttää ajan kuluessa, mutta jos tarkastelemme lyhyttä aikaväliä Δt , valtaosa nesteestä säilyttää saman virtausnopeuden. Merkitystä on vain sillä, paljonko *systeemiin kuuluvan nesteen määrä* kummassakin putken osassa muuttuu. Tämä nestemäärä on merkityt kuvan 7.12 raitoittettuna tilavuutena. Leveässä putkessa olevan nesteen tilavuus vähentyy yhtä paljon kuin kapeassa putkessa olevan nesteen määrä kasvaa, ja tämän tilavuuden ΔV sisältämän nesteen massa on $m = \rho\Delta V$. Leveässä putkessa olevan nesteen liike-energia muuttuu siis määränpaineksi $\Delta K_{suuri} = -\frac{1}{2}mv_{suuri}^2$ ja kapeassa putkessa olevan nesteen liike-energia määränpaineksi $\Delta K_{pieni} = \frac{1}{2}mv_{pieni}^2$. Kaikkiaan systeemin liike-energian muutos on siis

$$\Delta K = \Delta K_{suuri} + \Delta K_{pieni} = \frac{1}{2}m(v_{pieni}^2 - v_{suuri}^2). \quad (7.29)$$

Määritetään sitten systeemiin tehty työ, jonka täytyy olla yhtä suuri kuin systeemin energian muutos. Leveässä putkessa paine p_{suuri} kohdistaa nesteeseen voiman $F_{suuri} = p_{suuri}A_{suuri}$, joka tekee systeemiin työn

$$W_{suuri} = F_{suuri}s_{suuri} = p_{suuri}A_{suuri}s_{suuri} = p_{suuri}\Delta V. \quad (7.30)$$

Erityisesti huomataan, että *paineen tekemä työ voidaan ilmaista paineen ja tilavuuden muutoksen tulona*. Tulos osoittautuu vielä erittäin tärkeäksi luvussa 9, kun tutkimme laajenevien kaasujen tekemää työtä.

Paineen tuottama voima tekee työtä myös pienessä putkessa, mutta siellä paineen tuottama voima osoittaa liikkeen suuntaa vastaan ja tekee siis *negatiivisen* työn

$$W_{pieni} = -F_{pieni}s_{pieni} = -p_{pieni}\Delta V. \quad (7.31)$$

Systeemiin tehty kokonaistyö on näin ollen

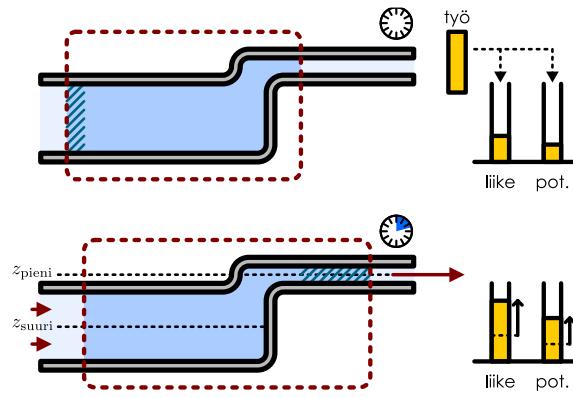
$$W_{kokonais} = W_{suuri} + W_{pieni} = (p_{suuri} - p_{pieni})\Delta V. \quad (7.32)$$

Tehty kokonaistyö riippuu siis leveässä ja kapeassa putkessa vallitsevasta *paine-erosta*. Jos paine olisi putkessa kaikkialla sama, systeemiin tehty työ olisi *nolla*. Näin ei kuitenkaan voi olla, koska nesteen liike-energia kasvaa, ja siispä putken eri osissa täytyy olla eri paine. Täsmällisemmin systeemiin tehdyn kokonaistyön täytyy olla positiivinen, joten *leveässä putkessa täytyy olla suurempi paine kuin kapeassa putkessa*, $p_{suuri} > p_{pieni}$.

Edellisessä esimerkissä putki oli vaakasuora, mutta tieteenkin neste voi virrata myös pystysuunnassa kuten kuvaassa 7.14. Tällöin myös nesteen potentiaalienergia muuttuu. Potentiaalienergian muutos voidaan määrittää tarkastelemalla sitä, paljonko *systeemiin kuuluva* nestettä siirtyy pystysuunnassa, ja jälleen on helpointa tutkia vain paljonko nesteen määrä muuttuu putken kummassakin osassa. Putken leveästä osasta poistuu massa m nestettä korkeudelta z_{suuri} , ja yhtä paljon nestettä tulee lisää kapeaan putkeen korkeudelle z_{pieni} . Nesteen potentiaalienergian muutos on silloin

$$\Delta U = mg(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.33)$$

Kuva 7.14: Nesteen virtaus putkessa, jonka paksuus ja korkeus muuttuvat.



Systeemin kokonaisen energian muutoksen täytyy nyt olla yhtä suuri kuin systeemiin tehty kokonaistyö, $W_{\text{kokonais}} = \Delta K + \Delta U$, ja sijoittamalla tähän edellä johdetut lausekkeet saadaan yhtälö

$$(p_{\text{suuri}} - p_{\text{pieni}})\Delta V = \frac{1}{2}m(v_{\text{pieni}}^2 - v_{\text{suuri}}^2) + mg(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.34)$$

Siirrynyt massa m ja tilavuus ΔV riippuvat tarkasteltavan ajanjakson pituudesta, mutta niiden suhde eli nesteen tiheys $\rho = m/\Delta V$ on vakio. Niinpä edellinen yhtälö voidaan jakaa puolittain tekijällä ΔV , jolloin saadaan

$$p_{\text{suuri}} - p_{\text{pieni}} = \frac{1}{2}\rho(v_{\text{pieni}}^2 - v_{\text{suuri}}^2) + \rho g(z_{\text{pieni}} - z_{\text{suuri}}). \quad (7.35)$$

Tämä voidaan edelleen ryhmitellä niin, että putken leveää ja kapeaa puoliskoa kuvavat termit ovat yhtäsuuruusmerkin eri puolilla,

$$p_{\text{suuri}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{suuri}}^2 + \rho g z_{\text{suuri}} = p_{\text{pieni}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{pieni}}^2 + \rho g z_{\text{pieni}}. \quad (7.36)$$

Nyt yhtäsuuruusmerkin molemmen puolin on kirjoitettuna sama lauseke erikseen putken leveälle ja kapealle osuudelle. Lausekkeella on siis putkessa sama arvo *kaikkialla*, eli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{vakio}. \quad (7.37)$$

Tätä tulosta kutsutaan **Bernoullin yhtälöksi** (Daniel Bernoulli mukaan), ja se kertoo kuinka virtaavan aineen paine, nopeus ja korkeus riippuvat toisistaan, kun kuljetaan virtauksen suunnassa.



7.11 Vertaa kuvia 7.12 ja 7.14. Putken leveys on kummassakin kuvassa sama kuten myös paine ja nesteen virtausnopeus leveässä putkessa. Kummassa kuvassa on suurempi (a) virtausnopeus kapeassa putkessa, (b) systeemin liike-energian muutos, (c) systeemiin tehty työ, (d) paine kapeassa putkessa? Perustele!

Edellisessä päätelyssä Bernoullin yhtälö johdettiin putkessa virtaavalle nesteelle, ja samalla tehtiin paljon oletuksia. Virtauksen piti olla jatkuva, kokoonpuristumatonta ja pyörteetöntä, eikä nesteessä saanut vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Nämä oletukset eivät yleensä päde, minkä vuoksi Bernoullin yhtälökään ei yleensä ole tarkka. Se on kuitenkin usein varsin hyvä approksimaatio, jolla voidaan kuvata myös esimerkiksi kaasujen virtauksia. Virtausten ei myöskään tarvitse olla rajoitettu putkiin kuten tarkastelemassamme esimerkissä, vaan yhtälön avulla voidaan arvioida paineen vaihteluita myös esimerkiksi ilmavirtauksissa. Tällöin pitää kuitenkin huomioida se, että Bernoullin yhtälö toimii vain samalla virtaviivalla oleville pisteille.



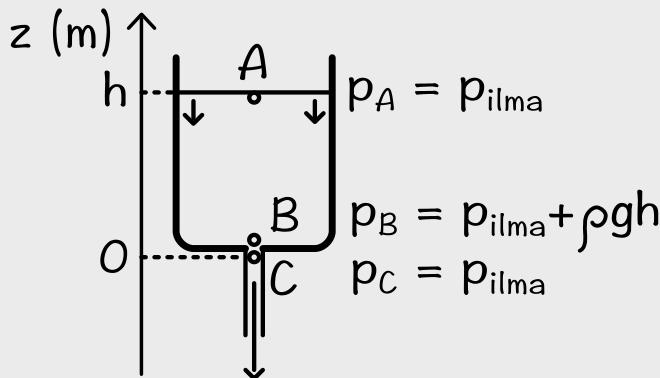
7.12 Selitä perustellen päteekö Bernoullin yhtälö, kun
 (a) vesi virtaa pumpun läpi (tarkastelupisteet ennen pumppua ja sen jälkeen),
 (b) vesi putoaa vapaasti hanasta lavaaariin (tarkastelupisteet hanan suu ja vesinoro matkan puolivälissä),
 (c) vesi virtaa joen pinnalla nopeasti mutta pohjalla hitaasti (tarkastelupisteet pinnalla ja pohjalla)?

esimerkki 7.3

Vuoto

Suuren vesisäiliön pohjassa on pieni reikä. Säiliö on ylhäältä katsoen ympyrän muotoinen. Sen säde on 0.40 m ja veden korkeus pohjasta 0.30 m. Reiän säde on 1.0 mm. Millä nopeudella vesi suihkuaa reiästä?

TILANNE Piirretään kuva säiliöstä. Merkitään kuvaan kolme tarkastelupistettä: A veden pinnalla, B säiliön pohjalla hieman reiän yläpuolella ja C säiliön ulkopuolella hieman reiän alapuolella. Merkitään säiliön sädettä $r_{\text{säiliö}} = 0.40 \text{ m}$, reiän sädettä $r_{\text{reiä}} = 0.0010 \text{ m}$ ja veden korkeutta $h = 0.30 \text{ m}$. Asetetaan z -akseli niin, että pisteiden B ja C korkeus on likimain nolla, $z_B \approx z_C \approx 0 \text{ m}$, jolloin pisteen A korkeus on siis sama kuin veden korkeus $z_A = h = 0.30 \text{ m}$. Veden tiheys on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Säiliön ulkopuolella vallitsee ilmanpaine, $p_{\text{ilma}} \approx 100 \text{ kPa}$.



SUUNNITELMA Säiliössä olevan veden paino vetää vettä alaspin ja työntää sitä reiästä läpi. Tällöin säiliön pohjalla pisteessä B täytyy olla suurempi paine kuin säiliön pinnalla pisteessä A tai säiliön ulkopuolella pisteessä C, ja pisteiden B ja C välinen paine-ero työntää veden nopeaan liukkeeseen reiän läpi. Pisteessä A paineen täytyy olla sama kuin ilmanpaineen, koska tässä pisteessä neste kohtaa ilman. Myös piste C on hyvin lähellä nesteä ja ilman rajapintaa, joten sielläkin painee täytyy olla sama kuin ilmanpaineen. Pisteessä B paine sen sijaan on ilmanpaineen ja säiliössä olevan nesteen hydrostaattisen paineen summa. Näillä tiedoilla voimme laskea pisteiden B ja C välisen paine-eron.

Paineen ja virtausnopeuden yhteyden kertoo meille Bernoullin yhtälö.

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{vakio.} \quad (7.38)$$

Siispä kun paine-ero pisteiden B ja C välillä tunnetaan, virtausnopeudet näissä pisteissä voidaan ratkaista.

Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan olettaa, että virtausnopeus pisteessä B on likimain nolla, $v_B \approx 0$. Todellisuudessa vesi kyllä virtaa alaspin myös säiliössä, mutta koska säiliön poikkipinta-ala on niin suuri reiään verrattuna, virtaus on säiliössä hyvin hidasta. Täsmällisesti virtauksen pitää toteuttaa jatkuvuusyhdistö

$$vA = \text{vakio.} \quad (7.39)$$

Piste B on säiliössä, joten siinä pinta-ala A on säiliön poikkipinta-ala. Piste C puolestaan on reiän alla, joten siinä pinta-ala A on reiästä tulevan vesisuihkun poikkipinta-ala eli reiän pinta-ala. Siispä näissä pisteissä virtausnopeuksien suhde on

$$\frac{v_B}{v_C} = \frac{A_{\text{reiä}}}{{A}_{\text{säiliö}}} = \frac{r_{\text{reiä}}^2}{r_{\text{säiliö}}^2} = 6.25 \cdot 10^{-6}. \quad (7.40)$$

Virtausnopeus on siis pisteessä B hyvin paljon pienempi kuin pisteessä C.

RATKAISU Paine pisteessä B on $p_B = p_{\text{ilma}} + \rho gh$ ja pisteessä C $p_C = p_{\text{ilma}}$. Huomioimalla, että z_B , z_C ja v_B ovat kaikki likimain nollia, Bernoullin yhtälön perusteella täytyy olla

$$p_B = p_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2. \quad (7.41)$$

Tästä voidaan ratkaista nopeus pisteessä C,

$$v_C = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_B - p_C)} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (\rho gh)} = \sqrt{2gh} = 2.4 \text{ m/s.} \quad (7.42)$$

ARVIOINTI Tarkasteltu säiliö ja reikä olivat arkipäiväistä kokoluokkaa, joten varmasti veden nopeus ei voi olla satoja metrejä sekunnissa tai sitä suurempi. Tuloksen suuruusluokka on metrejä sekunnissa, mikä on järkevä.

Itse asiassa ratkaisuna saatu veden nopeus $\sqrt{2gh}$ on täsmälleen sama kuin nopeus, jonka vapaasti putoava kappale saa pudottessaan matkan h . Nämä pitääkin olla, koska virtauksen voi ajatella tapahtuvan niin, että vesisäiliön pinnalta korkeudelta $z = h$ poistuu vettä, jolloin vesisäiliön potentiaalienergia pienenee. Samalla yhtä paljon vettä siirtyy reiästä ulos korkeudelle $z = 0$.



7.13 Kirjoita omiin sanoin tyylistelmä laminaarisista virtauksista. Selitä erityisesti, mitä tarkoittaa virtauksen jatkuvuseheto, mikä on Bernoullin yhtälö sekä miten ja millä oletuksilla näitä voidaan käyttää.

7.3 Lämpötila ja lämpöenergia

Lämpöön liittyvät ilmiöt ovat jokapäiväisiä ja niitä voidaan havaita monin tavoin. Kuumaa tai kylmää kappaletta koskettamalla lämmön voi tuntea. Veden lämmittäminen saa sen kiehumaan ja muuttamaan olomuotoaan nesteestä kaasaksi, ja jäähdyttämällä veden voi puolestaan saada jäätymään kiinteäksi. Jotkin aineet sytyyvätkin lämmetessään palamaan, mikä on lisää lämpöä vapauttava kemiallinen reaktio. Tämän ansiosta palamisreaktiota voidaan käyttää kemiallisen energian muuttamiseksi lämpöenergiaksi ja edelleen mekaaniseksi energiaksi esimerkiksi polttoaineissa tai voimalaitoksissa.

Vaikka lämpöilmiöt ovat yleisiä, niiden tutkiminen ei ole yhtä helppoa kuin mekaanisten ilmiöiden, koska lämpöilmiöihin liittyviä suureita ovat vaikeampia havaita ja mitata kuin mekaanisia suureita kuten paikkaa ja nopeutta. Lisäksi lämpöilmiötä ohjaavien mekanismien suora havaitseminen on vaikeaa tai mahdotonta, koska lämpöä itsessään ei voi nähdä. Näistä syistä lämpöilmiötä opittiin ymmärtämään ja hyödyntämään huomattavasti myöhemmin kuin mekaanisia ilmiöitä.

Lämpöilmiöt syntyvät pohjimmiltaan atomitasolla. Näitä ilmiöitä kuitenkin alettiin tutkia jo ennen kuin aineen tiedettiin koostuvan atomeista, ja lämpöilmiöiden toiminta opittiin hallitsemaan varsin hyvin ilman atomimalliakin. Tässä luvussa aloitamme lämpöilmiöihin tutustumisen samaan tapaan kuin miten ilmiötä historiallisesti tutkittiin — tarkastelemalla kokeellisesti ilmiöihin liittyviä säännönmukaisuuksia.

Lämpötila

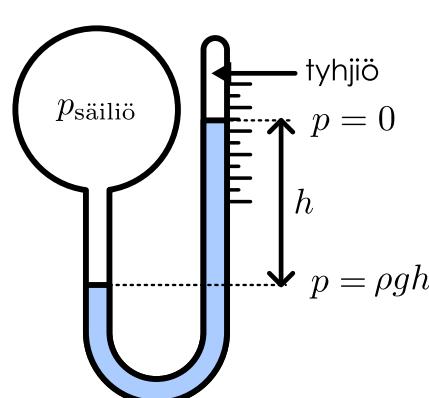
Opimme jo aikaisemmin, että lämpö liittyy aineiden varastoimaan lämpöenergiaan, joka on sisäenergian muoto. Mitä enemmän aineessa on lämpöenergiaa, sitä kuumempaa aine on. Historiallisesti lämpöilmiötä ei kuitenkaan alunperin kuvattu energian avulla vaan päinvastoin lämpöopin kehityminen johti aikoinaan energian käsitteen ja energian säilymislain keksimiseen. Historiallisesti lämpöopin kehitys alkoikin pyrkimyksistä mitata "kylmyyttä" ja "kuumutta" eli **lämpötilaa**.

Emme vielä määrittele lämpötilaa täsmällisesti. Lämpötilan arkipäiväinen merkitys on kuitenkin se, että lämpötila on sitä korkeampi, mitä kuumempaa aine on, ja tämä intuitiivinen käsitys riittää näin aluksi. Lämpötilaa mitataan *lämpömittareilla*, ja periaatteessa mikä tahansa lämpötilasta jatkuvasti riippuva ilmiö voi toimia lämpömittarina, kunhan mittari ensin *kalibroidaan*. Jotta mittaukset olisivat vertailtavissa, lämpötilalle pitää myös sopia jokin mittayksikkö ja mittakaava. Suomessa ja muuallakin maailmassa yleisimmin käytetään *Celsius-asteikkoa* (Anders Celsiusin mukaan), jossa lämpötila $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ on asetettu veden jäätymispisteeneseen (1 atm paineessa) ja lämpötila $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ veden kiehumispisteeneseen. Tietenkin käytettävä lämpömittari on myös säädettävä niin, että se todella näyttää oikeita arvoja näissä lämpötiloissa.

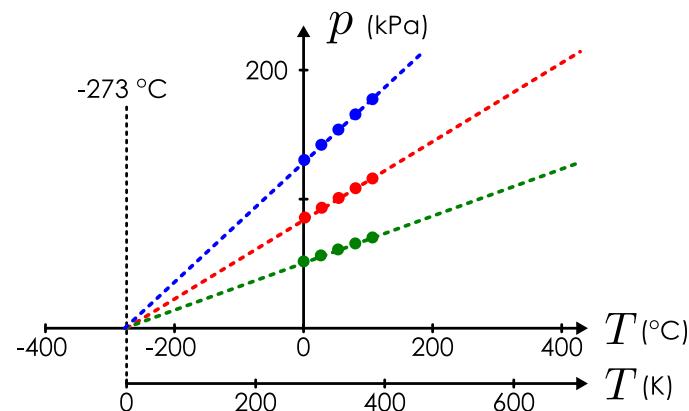
Kaasulämpömittari on eräs yksinkertainen mutta silti varsin tarkka tapa mitata lämpötilaa. Tällainen mittari on esitetty kuvassa 7.15 (a). Mittari koostuu ohuesta U-putkesta, jossa on nestettä. Putken toisessa päässä on tunnettu paine — esimerkiksi jos putkessa on tyhjiö, paine on nolla. Toisessa päässä on puolestaan kaasusäiliö. Kuten kuvassa 7.7 nähtiin, paine-ero putken haarojen välillä kohdistaa nesteesseen voiman, joka työntää nestettä kohti pienempää painetta. Tässä siis kaasusäiliön paine työntää nestettä tyhjiön puolelle. Tasapainossa nesteessä on sama hydrostaattinen paine kaikissa yhtä korkealla olevissa pisteissä, ja näin nestepinnan korkeutta voidaan käyttää kaasusäiliön paineen mittarina.

Kuva 7.15: Kaasulämpömittari ja absoluuttinen lämpötila.

(a) U-putkeen perustuva kaasulämpömittari.



(b) Eri kaasujen paineen riippuvuus lämpötilasta. Ekstrapoloidut kuvaajat saavuttavat nollapaineen samassa lämpötilassa.



Jos kaasusäiliötä lämmitetään, kaasun havaitaan työntävän nestettä pidemmälle U-putkeen. Siispä *kaasun paineen täytyy kasvaa sen lämmetessä*. Tämä tarkoittaa myös sitä, että U-putken avulla voidaan mitata kaasun lämpötilaa. Jos kaasusäiliö ympäröidään jäävedellä, kaasu jäähtyy lämpötilaan $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ja näin saamme selville, millä korkeudella nesteen pinta on tässä lämpötilassa. Vastaavaan tapaan kaasusäiliö voidaan ympäröidä kiehuvalta vedellä, jolloin kaasu lämpenee lämpötilaan $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja neste U-putkessa nousee tätä lämpötilaa vastaanalle korkeudelle. Tämän jälkeen voimme määritellä muut lämpötilat niin, että lämpötilan muutos on suoraan verrannollinen nesteen pinnan korkeuden muutokseen. Toisin sanoen kaasun lämpötila on esimerkiksi $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ silloin, kun nesteen pinta on tasapainossa täsmälleen puolivälissä lämpötiloissa $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ mitattuihin korkeuksiin nähden.

Kaasulämpömittarilla voidaan siis mitata kaasun paineen ja lämpötilan välinen riippuvuus. Kaasun paine ei tietenkään riipu pelkästään lämpötilasta vaan myös kaasun lajista ja määristä sekä kaasusäiliön koosta. (Jo kuvassa 7.3 nähtiin, että kaasun puristaminen pienentää kaasun tilavuutta ja kasvattaa sen painetta.) Kuvassa 7.15 (b) on piirretty erilaisissa astioissa olevien erilaisten kaasujen paine lämpötilan funktiona. Kaikissa tapauksissa kaasun paine riippuu lineaarisesti lämpötilasta, mikä näkyy kuvassa siten, että mitatut paineen ja lämpötilan arvot asettuvat kullakin kaasulla nousevalle suoralle. Koska kaasut ovat erilaisia, kuvajilla on eri kulmakertoimet.



7.14 Se, että kaasun paine riippuu lineaarisesti lämpötilasta, johtuu tavastamme määrittellä lämpötila kaasulämpömittarin nestepatsaan korkeuden kautta. Selitä miksi!

Kun samassa kuvassa mittapisteiden kautta piirretään suorat ja näitä suoria jatketaan eli ekstrapolooidaan kohti yhä pienempiä lämpötiloja, suorien huomataan leikkaavan lämpötila-akselin samassa pisteessä, lämpötilassa $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tämä on erittäin tärkeä havainto, sillä sen mukaan kaikkien kaasujen paine on suoraan verrannollinen *pisteen $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ suhteeseen mitattuun lämpötilaan*. Celsiusasteikon nollakohta $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ on mielelvaltaisesti valittu, mutta tämän havainnon mukaan lämpötila-asteikon nollakohdaksi kannattaisikin valita piste $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Lämpötilaa T , jonka nollakohta on valittu näin, kutsutaan **absoluuttiseksi lämpötilaksi** ja piste $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$ on lämpötilan **absoluuttinen nollapiste**. Absoluuttisen lämpötilan SI-yksikkö on **kelvin**, K (Lordi Kelvinin mukaan). Kelvin-asteikon jakoväli on sama kuin Celsius-asteikon. Siispä 1 K lämpötilan muutos on yhtä suuri kuin $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ muutos. Asteikkojen ainoa ero onkin nollapisteenvaihto, ja celsius-asteissa annettu lämpötila saadaan muunnettua kelvineiksi yksinkertaisesti lisäämällä vakio 273.15.



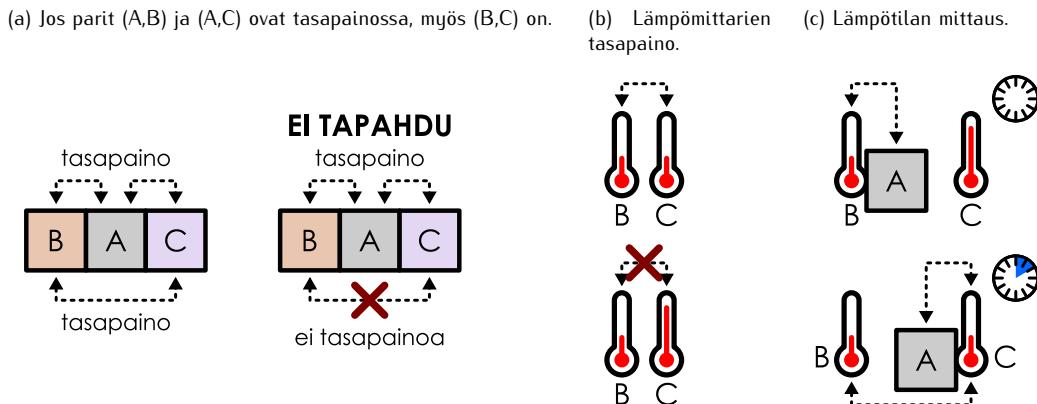
7.15 Jos kuvan 7.15 (b) tapainen kuvaaja piirretäisiin pelkkää nestettä sisältävien lämpömittarien nesteen tilavuuden ja lämpötilan välille, leikkaisivatko mittauspisteiden kautta piirretyt suorat absoluuttisessa nollapisteessä?

Tämä tulos ei tarkoita, että kaasulämpömittarit todella toimisivat näin kylmissä lämpötiloissa. Se kuitenkin tarkoittaa sitä, että tarpeeksi korkeissa lämpötiloissa minkä tahansa kaasun paine ja absoluuttinen lämpötila ovat toisiinsa suoraan verrannolliset. Jos tämä riippuvuus päätisi mielivaltaisen kylmissä lämpötiloissa, kaasun paine saavuttaisi arvon nolla lämpötilassa $-273.15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kaasun paine ei voi olla negatiivinen, joten tämä tulos viittaa pienimmän mahdollisen lämpötilan olemassaoloon (mutta ei todista sitä). Tämä kaasujen ominaisuuksia koskeva havainto oli ensimmäinen vihje siitä, että lämpötilalle on järkevä määrittellä absoluuttinen asteikko. Myöhemmin on osoittautunut, että absoluuttinen lämpötila on lämpöilmiöiden fysiikassa erittäin tärkeä suure, ja fysiikassa "lämpötilalla" tarkoitetaankin aina juuri absoluuttista lämpötilaa. Käytännössä siis lämpötilat ilmaistaan aina kelvineinä ellei erityisesti ole syytä käyttää jotakin muuta yksikköä.

Nollas pääsääntö

Edellisessä tarkastelussa oletettiin asiaa erityisesti mainitsematta, että on olemassa yksi yleinen kuumuutta kuvava suure nimeltä lämpötila. Tämä on totta, mutta on sygtä pohtia tämän oletuksen merkitystä. Tehdään ajatuskoe: Otetaan kappale (A), ja annetaan sen koskettaa kahta muuta kappaletta (B ja C) niin että nämä kappaleet eivät kosketa toisiaan (kuva 7.16 (a)). Jos toisiaan koskettavilla kappaleilla on eri lämpötilat, kuumat kappaleet alkavat *itsestään* jäähtyä ja kylmät lämmetä. Prosessi jatkuu jonkin aikaa, kunnes kappaleiden kuumuus ei enää muudu. Tällöin toisiaan koskettavien kappaleiden A ja B sekä A ja C sanotaan olevan *termodynamiassa tasapainossa*. Poistetaan nyt kappale A ja annetaan kappaleiden B ja C koskettaa toisiaan. Onko mahdollista, että toinen kappaleista alkaa lämmetä ja toinen vähentyä? Kumpikin kappaleista B ja C oli tasapainossa kappaleen A kanssa, mutta voiko olla niin, että B ja C eivät silti ole keskenään tasapainossa? Vastaus on *ei*. Jos kappaleet A ja B sekä A ja C ovat keskenään termodynamiassa tasapainossa, myös kappaleet B ja C ovat tasapainossa. Tätä lainalaisuutta kutsutaan **termodynamiikan nollanneksi pääsäännöksi**. Nimi tulee siitä, että termodynamiikan ensimmäinen ja toinen pääsääntö (joihin tutustumme pian) oli jo numeroitu ennen kuin tämän säännön merkitys oivallettiin. Sitä voi kuitenkin pitää näistä pääsäännöistä perustavimpana, koska sen ansiosta lämpötila on järkevä suure.

Kuva 7.16: Termodynamiikan nollanen pääsäännön ansiosta lämpötila erottelee termodynaamiset tasapainotilat. Kappaleet ovat tasapainossa vain jos niillä on sama lämpötila.



Lämpötilan mittaaminen lämpömittarilla edellyttää sitä, että mittarin lämpötila on sama kuin mitattavan kappaleen lämpötila. Termodynamiisen tasapainon käsitteen ansiosta tämä on mahdollista. Jos nimittäin kappaleen annetaan koskettaa mittaria, mittari ja kappale hakeutuvat itsestään termodynamiiseen tasapainoon. Tällöin voimme sanoa, että kappaleen lämpötila on sama kuin mittarin näyttämä lämpötila. Tästä seuraa ensinnäkin se, että samaa lämpötilaa näyttävien lämpömittareiden täytyy olla keskenään termodynamiisessa tasapainossa (kuva 7.16 (b)). Toiseksi, jos kappale on tasapainossa yhden lämpömittarin kanssa, sen täytyy olla tasapainossa myös kaikkien muidenkin samaa lämpötilaa näyttävien mittareiden kanssa (kuva 7.16 (c)). Kolmanneksi, kaikki keskenään tasapainossa olevat kappaleet ovat tasapainossa myös samojen lämpömittareiden kanssa eli niillä on kaikilla sama lämpötila.

Lämpötilan avulla ilmaisten 0. pääsääntö sanoo siis sen, että jos $T_A = T_B$ ja $T_A = T_C$, täytyy olla myös $T_B = T_C$. Tämä on tieteenkin ilmeistä, kun nyt tiedämme lämpötilan olevan hyvin määritelty suure. Nollanen pääsäännön merkitys onkin siinä, että ilman sitä termodynamiasta tasapainoa ei voisi kuvata yhdellä luvulla T eli lämpötilalla. Samalla se antaa lämpötilalle syvällisemmän merkityksen kuin olla vain "kuumuuden mittari". **Lämpötila nimittäin erottelee termodynamiiset tasapainotilat:** kappaleet ovat tasapainossa keskenään vain jos niillä on sama lämpötila.



7.16 Jos nollas pääsääntö ei olisi totta, kaksi toimivaa lämpömittaria voisi näyttää samalle kappaleelle eri lämpötiloja. (a) Selitä miksi. (b) Miksi tämä olisi ongelmallista lämpötilan määrittelyn kannalta?

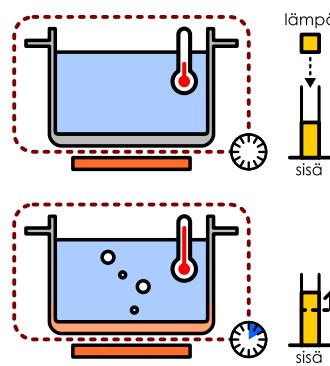
Lämpönä siirtyvä energia

Aineiden lämmittäminen vaati energiota, ja kuumiin kappaleisiin on varastoitunut paljon sisäenergiaa. Sisäenergialla on kuitenkin monia muotoja, ja näistä vain jotkin ilmenevät kappaleiden kuumuuteena, "lämpöenergiana". Atomien satunnaisliikkeen energia havaitaan makroskoopisesti kuumuutena, kuten luvussa 6 nähtiin, ja muitakin tällaisia lämpöenergian muotoja on olemassa. Toisaalta esimerkiksi molekyylien kemiallisiin sidoksiin sitoutunut energia ei ilmene kuumuutena. Vaikkapa paristoon varastoituneen energian määrä ei suoraan vaikuta siihen, onko paristo kylmä tai kuuma.

Koska lämpötila riippuu kappaleen energiasta, lämpötilan muuttumiseen täytyy aina liittyä energian siirtymistä tai muuttumista muodosta toiseen. Esimerkiksi palaminen nostaa yleensä palavan aineen lämpötilaa, koska palaminen on kemiallinen prosessi, jossa aineeseen sitoutunut kemiallinen sisäenergia muuttuu lämpöenergiaksi. Myös esimerkiksi liukuvat pinnat lämpenevät, kun kitka muuttaa mekaanista energiasta lämpöenergiaksi. Kuumalla keittolevyllä oleva kattilaakin lämpenee, kun lämpöenergiaa siirrytä suoraan levystä kattilaan.

Läpenemisprosessi on näissä tilanteissa kussakin erilainen. Palavassa aineessa aineen sisäenergia muuttaa muotoaan, mutta prosessi ei muuta aineen kokonaisenergiaa. Jos kappaleita työnnetaan, siihen tehdään työtä, ja tämän vuoksi kappaleen kokonaisenergia lisääntyy. Työn tekeminen vaatii aina jonkinlaista makroskooppista vetämistä tai työntämistä, koska työ määriteltiin voimavektorin ja sen vaikutuspisteen siirtymän

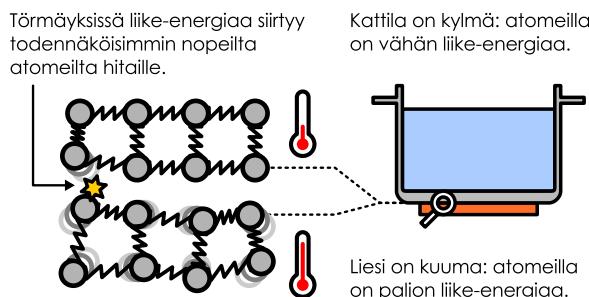
Kuva 7.17: Energiaa voi siirtää lämpönä.



tulona tai yleisemmin voiman viivaintegraalina. Jos kuitenkin kappale on paikoillaan eikä sen muoto muutu, kappaleeseen ei tehdä työtä. Keittolevyllä oleva kattila ei liiku eikä levy tee siihen työtä, mutta kuitenkin energiaa siirryt kuumasta levystä viileämpään kattilaan. Tämä energia ei siirry työnä vaan **lämpönä**.

Lämpönä siirtyvää energiota merkitään tavallisesti symbolilla Q . Termi "lämpö" tarkoittaa fysiikassa niemenomaan prosessissa *siirtyvää* energiota aivan kuten työkin ilmaisee siirtyvää energiota eikä mitään tiettyä energiamuotoa. Atomien satunnaisliukkeeseen varastoitunutta energiota voidaan kutsua lämpöenergiaksi $E_{\text{lämpö}}$ tai miteluummin sisäenergiaksi $E_{\text{sisä}}$, mutta ei siis pelkäksi lämmöksi. Termiä ei pidä myöskään sekoittaa lämpötilaan T , jolla on jopa eri dimensio. Koska nämä lämpöopin termit ovat niin samankaltaiset, käytämme tässä tekstissä selvyyden vuoksi pidempää ilmaisua "lämpönä siirtyvä energia", kun tarkoitamme suuretta Q .

Kuva 7.18: Lämpö siirryt atomitason vuorovaikutuksissa.



giaa havaitaan siirtvän vain yhteen suuntaan, liedestä kattilaan.

Tämä pätee yleisesti: jos eri lämpötiloissa olevat kappaleet koskettavat, *energia virtaa lämpönä aina itsesäärän korkeammassa lämpötilassa olevasta kappaleesta matalammassa lämpötilassa olevaan kappaleeseen eli kuumasta kylmään*. Tällöin kuumempi kappale jäähtyy ja kylmempää lämpenee, ja termodynamiikan tasapaino saavutetaan, kun kappaleilla on sama lämpötila. Se, että *tasapainotila on olemassa* ja että sitä kuva lämpötila, on termodynamikan nollannen pääsäännön seuraus. Se, että lämpö virtaa itsestään aina kuumasta kylmään eli että *systeemit pyrkivät tasapainoon* on puolestaan **termodynamikan toinen pääsääntö**.

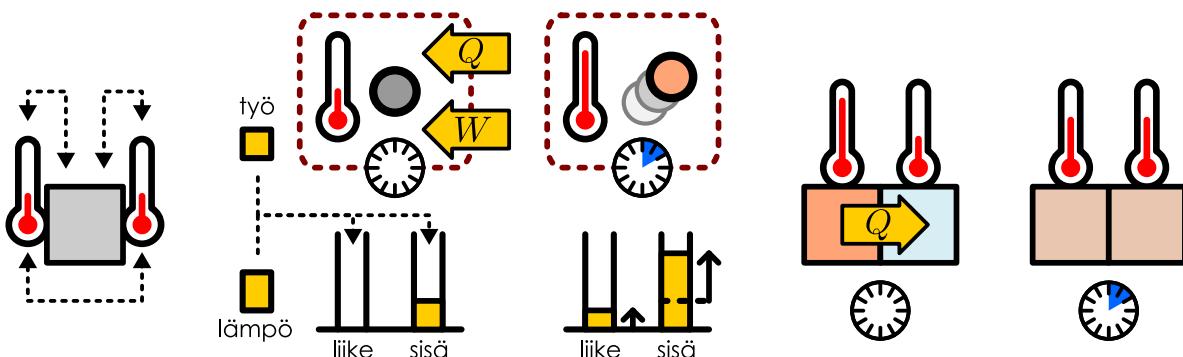
Työnä ja lämpönä siirtyvä energia on erilaista, kuten edellisessä esimerkissä nähtiin. Mekaaniseen työhön liittyy makroskooppista liikkettä, mutta lämpö siirryt ilman näkyvää liikkettä, koska lämpöenergiaa siirtävät vuorovaikutukset tapahtuvat mikroskooppisessa mittakaavassa. Tämä ei ole kuitenkaan työn ja lämmön tärkein ero. Yleisesti fysiikassa *työ tarkoittaa hyvin järjestyneen energian siirtymistä, ja lämpö on epäjärjestyneen energian siirtymistä*. Mekaanisen työn lisäksi esimerkiksi sähköiset voimat voivat tehdä työtä liikkuviin sähköisiin hiukkasiin, vaikkei esimerkiksi sähköjohdossa kulkevan sähkövirran liikkettä makroskooppisesti näekään. Lämpönä energia puolestaan voi siirry esimerkiksi *johtumalla* kahden eri lämpötilassa olevan kappaleen koskettäessä kuten kattilan tapauksessa tai *säteilemällä* kaukaistenkin kappaleiden välillä. Kolmas tapa siirtää energiota lämpönä on yksinkertaisesti lämpimän aineen siirtäminen paikasta toiseen, jolloin aineen

Kuva 7.19: Termodynamikan pääsäännöt.

(a) 0. pääsääntö: on

(b) 1. pääsääntö: energiaa voi siirtää työnä tai lämpönä

(c) 2. pääsääntö: lämpötilaeroit pyrkivät tasotumaan itsestään



sisältämä lämpöenergia siirtyy sen mukana.

Energian säilymislain perusteella minkä tahansa systeemin kokonaisenergian muutos missä tahansa prosessissa on yhtä suuri kuin systeemiin työnä ja lämpönä tuodun energian summa. Tämä energian säilymislain muoto on **termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö**. Meille energian säilymislaki on jo tuttu luvusta 2, mutta historiallisesti tämä laki on löydetty kokeellisesti ennen yleisen energian käsitteen keksimistä.



7.17 Selitä termodynamiikan pääsäännöt oman sanoin. Keksi jokaisen lain kohdalla esimerkki selvästi mahdottomasta ilmiöstä tai koneesta, joka voisi olla mahdollinen, jos laki ei päti.

Lämpökapasiteetti

Kappaleen lämpöenergian lisääminen nostaa sen lämpötilaa, ja kappale voi vastaanottaa energiaa sekä työnä että lämpönä. Lämpötilan muuttamiseen tarvittava energiamäärä riippuu kuitenkin sekä lämmittävästä aineesta että sen määristä. Esimerkiksi saunaan olevan ilman lämmittäminen vaatii paljon vähemmän energiota kuin yhtä suuren vesisäiliön sisällön lämmittäminen. Ja tietenkin kahden saunan lämmittäminen vaatii kaksinkertaisen energiamäärän yhteen verrattuna.

Kappaleen tai systeemin kykyä varastoida lämpöenergiaa kuvaa **lämpökapasiteetti**. Suuri lämpökapasiteetti tarkoittaa sitä, että vaikka systeemiin tuodaan suuri määrä energiota lämpönä, Q , kappaleen lämpötilan muutos, ΔT on silti pieni. Lämpökapasiteetti on näiden suureiden suhde,

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \quad (7.43)$$

ja tämä suhde on siius suuri, jos lämpötilan muutos on pieni lämpönä tuotuun energiamäärän verrattuna. Tai toisin päin käännettynä: lämpötilan muutokseen ΔT vaadittava lämpömäärä voidaan laskea lämpötilan muutoksen ja lämpökapasiteetin suhteena,

$$Q = C\Delta T. \quad (7.44)$$

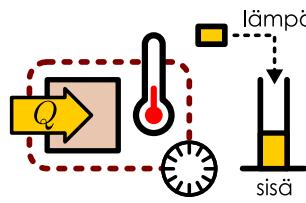
Mitä suurempi lämpökapasiteetti on, sitä enemmän energiota lämpötilan muutos vaatii.

Edelliset lausekkeet pätevät vain silloin, kun lämpökapasiteetti on vakio, koska tällöin kappaleen lämpötilan muutos on aina suoraan verrannollinen kappaleen lämpönä vastaanottaman energian määrään. Todellisuudessa lämpökapasiteetti voi kuitenkin riippua lämpötilasta, ja tällöin se määritellään täsmällisesti systeemin vastaanottaman lämmön derivaattana lämpötilan suhteeseen,

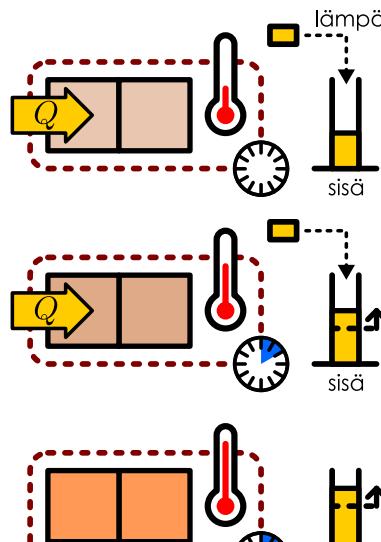
$$C = \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.45)$$

Kuva 7.20: Lämpökapasiteetti mittaa systeemin kykyä varastoida lämpönä vastaanotettua energiota.

(a) Pieni lämpökapasiteetti: pieni lämpömäärä muuttaa lämpötilaa paljon.



(b) Suuri lämpökapasiteetti: lämpötilan muuttaminen vaatii paljon energiota.



Vastaavasti lämpönä vastaanotettu kokonaisenergia voidaan laskea lämpökapasiteetin integraalina

$$Q = \int C dT. \quad (7.46)$$

Lämpökapasiteetti on *ekstensiivinen* suure, sillä mitä suurempi systeemi on, sitä enemmän siinä voi olla lämpöenergiaa varastoivaa ainetta. Aineiden ominaisuuksista puhuttaessa on usein hyödyllisempää tarkastella **ominaislämpökapasiteettia**, joka on *intensiivinen* suure. Ominaislämpökapasiteetti mittaa aineen kykyä varastoida lämpönä siirtymää energiaa, ja jotta kyseessä olisi kappaleen koosta riippumaton suure, ominaislämpökapasiteetti määritellään jakamalla kappaleen lämpökapasiteetti kappaleen kokoa kuvaavalla suurella kuten massalla. Näin voidaan määritellä useita erilaisia ominaislämpökapasiteetteja. Yleisimmin käytetään massaa m , ainemäärää n ja hiukkosten lukumäärää N kohden laskettuja ominaislämpökapasiteetteja, jotka määritellään

$$c^m = \frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial T}, \quad c^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T}, \quad c^N = \frac{1}{N} \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.47)$$

Erikoisille lämpökapasiteeteille ei ole vakiintuneita merkintätapoja, vaan eri kirjoissa käytetään eri merkityksissä pieniä ja suuria kirjaimia. Tässä materiaalissa suuri C merkitsee systeemin tai kappaleen kokonaislämpökapasiteettia ja pieni c aineen ominaislämpökapasiteettia. Symbolit m , n ja N eivät ole tässä eksponentteja vaan yläindeksejä, joilla vain merkitään se ekstensiivinen suure, jolla kokonaislämpökapasiteetti on jaettu.

Ainemäärä tarkoittaa tässä samannimistä SI-perusyksikköä, joka on suoraan verrannollinen hiukkisten määrään. Ainemäärän yksikkö on **mooli**, joka on nykyisen määritelmän mukaan täsmälleen $6.02214076 \cdot 10^{23}$ hiukkasta. Tätä lukua merkitään tavallisesti symbolilla $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ 1/mol ja sitä kutsutaan *Avogadron vakioksi* (Amedeo Avogadron mukaan). Aineen hiukkisten lukumäärän N ja ainemäärän eli moolien määrän n välillä on siis yhteyks

$$N = n N_A. \quad (7.48)$$

Pohjimmiltaan ainemäärä siis mittaa aivan samaa asiaa kuin hiukkisten lukumäärä. Kuitenkin koska makroskooppisissa kappaleissa on suuruusluokkaa 10^{23} hiukkasta, on näitä tarkasteltaessa usein kätevämpää puhua moleista kuin hiukkisten lukumääristä, koska näin saadaan pienempiä lukuarvoja. Mitään muuta eroa näillä suureilla ei ole.



7.18 Veden ominaislämpökapasiteetti massayksikköö kohti on 4.2 kJ/(kgK) ja veden atomimassa on 18 g/mol. Mikä on tämän perusteella (a) yhden vesimolekyylin massa, (b) molekyylien määrä 1 kg vesimassassa, (c) ominaislämpökapasiteetti hiukkisten lukumäärää kohti, (d) ominaislämpökapasiteetti ainemäärää kohti.

Olomuodon muutosten energia

Lämpötila ei ole ainoa asia, johon lämmittäminen vaikuttaa, sillä aineen sisäenergian muuttuminen voi myös muuttaa aineen olomuotoa. Esimerkiksi jään lämmittäminen saa sen sulamaan nestemäiseksi vedeksi, ja veden lämmittäminen edelleen saa sen lopulta kiehumaan ja muuttumaan kaasuksi. Sulaminen ja kaasuuntuminen ovat molemmat prosesseja, joissa aineeseen varastoituu sisäenergiaa, ja näille vastakkaiset jähmettyminen ja tiivistyminen ovat energiavaapauttavia prosesseja. Olomuodon muutoksiin liittyvää energiota kutsutaan yleisesti **latenttilämöksi** (latinaa 'latere', olla piilossa).

Latenttilämpö on lämpökapasiteetin tapainen suure, sillä kumpikin kuva sistemeen kykyä varastoida energiota. Oleellinen ero näiden kahden välillä on kuitenkin se, että latenttilämpöön ei liity lämpötilan muutosta toisin kuin lämpökapasiteettiin. Olomuodon muutosten latenttilämpö kuvailee vain aineen rakenteen muutokseen liittyvää energiota. Esimerkiksi veden muuttuessa nesteestä kaasuksi vesimolekyylien väliset sidokset rikkoutuvat, ja näiden sidosten rikkominen vaatii energiota. Kaasumaisen veden sisäenergia on siis suurempi kuin nestemäisen veden, vaikka nämä olisivat samassa lämpötilassa, ja latenttilämpö kuvailee tätä energiaveroa. Jos sekä aineen olomuoto että sen lämpötila muuttuvat, prosessiin liittyvä energian muutos saadaan laskemalla erikseen olomuodon muutoksen energian latenttilämön kautta ja lämpötilan muutoksen energian lämpökapasiteetin avulla. Tällöin on kuitenkin huomioitava, missä olomuodossa aine kulloinkin on, sillä yleensä eri olomuodoilla on eri ominaislämpökapasiteetit. Vaatii siis eri määränpainetta ensin lämmittää vettä 10 K ja sitten keittää se kuin keittää vesi ensin ja sitten lämmittää kaasumaista vettä vielä 10 K.

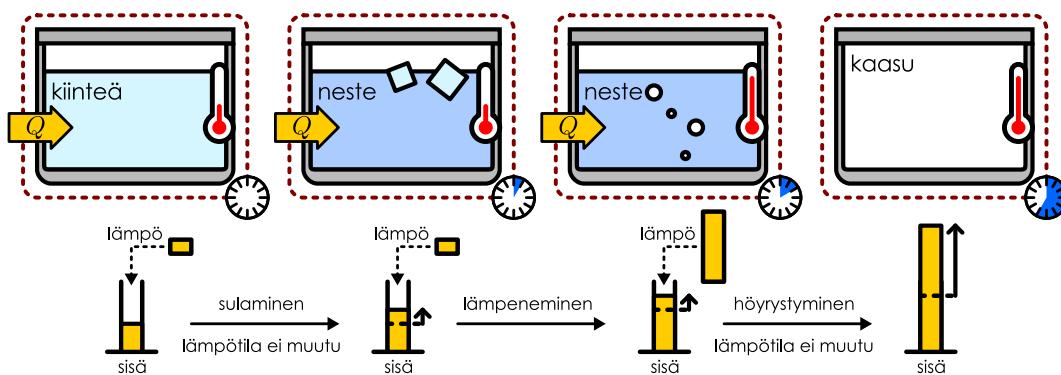
Aivan kuten voidaan erotella lämpökapasiteetti ja ominaislämpökapasiteetti, voidaan myös erottaa systeemin kokonaislatenttilämpö ja aineen ominaislatenttilämpö. Esimerkiksi latenttilämpö massayksikköö kohti määritellään

$$L = \frac{1}{m} Q, \quad (7.49)$$

missä m on systeemin massa ja Q sen lämpönä vastaanottama energia. Yleisesti lämmittäminen vaatii hyvin paljon energiota ja olomuotojen muutokset vaativat vielä enemmän energiota. Esimerkiksi nestemäisellä vedellä on suuri ominaislämpökapasiteetti, noin $c^m = 4200 \text{ J}/(\text{kgK})$, joten 1 kg vesimassan lämmittäminen 1 K verran

JATKUVA AINE

Kuva 7.21: Lämmitetyn veden muutos kiinteästä nesteeksi ja edelleen kaasuksi normaalipaineessa. Sulamisen aikana lämpö kuluu olomuodon muutokseen ja vesi on kiinteän ja nestemäisen aineen sekoitus lämpötilassa 273 K. Sulamisen jälkeen lämpö nostaa nesteen lämpötilaa. Lämpötilassa 373 K neste höyrystyy kaasukiin.



vaatii energiaa 4200 J. Veden sulamisen latenttilämpö on puolestaan $L = 334000 \text{ J/kg}$ ja höyrystymisen latenttilämpö valtavat $L = 2260000 \text{ J/kg}$!

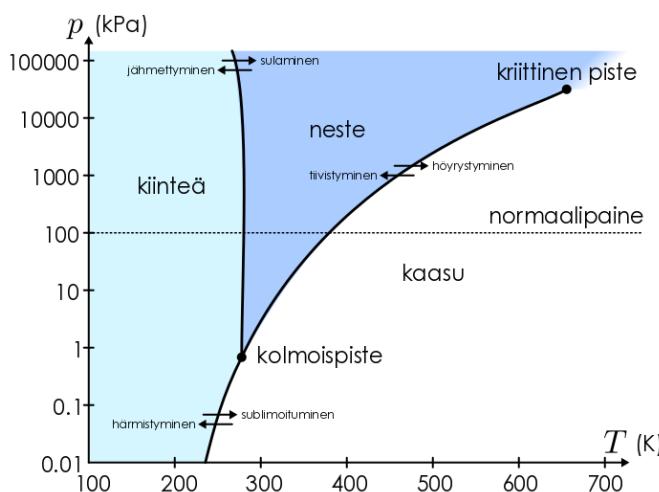


7.19 (a) Paljonko energiaa vaatii 10 g jääläpällä muuttaminen kaasukiin sulattamalla, lämmittämällä ja kiehuttamalla? Kuinka suuri osuus energiasta kuluu kuhunkin vaiheeseen? (b) Jos jääläpälle annettaisiin yhtä paljon liike-energiaa, kuinka suuren vauhdin se saisi?

Aineen olomuoto riippuu sen lämpötilasta. Arkikielessä lämpötilaa, jossa aine jähmettyy ja sulaa, kutsutaan sulamispisteeksi, ja lämpötilaa, jossa se höyrystyy ja tiivistyy, kutsutaan kiehumispisteeksi. Tämä on kuitenkin vain osa totuudesta, sillä olomuoto riippuu muistakin ominaisuuksista kuin lämpötilasta. Esimerkiksi vesi kiehuu lämpötilassa 100 °C vain normaalipaineessa, ja tästä suuremmassa paineessa veden kiehuminen vaatii korkeaman lämpötilan.

Aineen olomuoto tai yleisemmin sen faasin riippuvuus useasta suureesta voidaan esittää *faasidiagrammin* avulla. Kuvassa 7.22 on piirretty esimerkkinä veden faasidiagrammi. Faasidiagrammi on koordinaatisto, jonka akseleinä ovat olomuotoon vaikuttavat suureet kuten tässä tapauksessa lämpötila ja paine. Kukin koordinaatiston piste kuvaa siis tiettyjä olosuhteita. Olosuhteet, joissa aine on kussakin olomuodossa, muodostavat koordinaatistoon tavallisesti yhtenäisiä alueita. Näitä erottavat käyrät, joilla kaksi eri olomuota voi esiintyä yhtä aikaa termodynamiassa tasapainossa. Jos olosuhteet muuttuvat niin, että niitä kuvaava piste kulkee diagrammissa tällaisen käyrän yli, tapahtuu olomuodon muutos eli *faasitransitio*.

Kuva 7.22: Veden faasidiagrammi. Huomaa, että paine on esitetty logaritmisella asteikolla.



käyrä päättyy niin sanottuun kriittiseen pisteesee. Jos lämpötila ja paine ovat tästä suuremmat, kaasun ja nesteen ominaisuudet muuttuvat vähitellen toisikseen.

Faasidiagrammi kertoo aineen olomuodon termodynamiassa tasapainossa. Toisin sanoen se kertoo mihin olomuotoon aine loppujen lopuksi muuttuu, jos odotetaan tarpeeksi kauan. Jos esimerkiksi vesilasiin laitetaan

Tavallisesti aineen ominaisuudet kuten tiheys ja ominaislämpökapasiteetti ovat kussakin olomuodossa lähes vakiot tai ne muuttuvat hitaasti ja jatkuvasti lämpötilan ja paineen funktiona. Eri olomuodoissa nämä ominaisuudet sen sijaan ovat tyypillisesti erilaiset. Niinpä olomuodon muutoksessa aineen ominaisuudet voivat muuttua epäjatkuvasti. Esimerkiksi kiehumalla kaasukiin muuttuvan nesteen tiheys muuttuu huomattavasti vaikka sekä kiehuvan veden että höyrystyneen kaasun lämpötila olisi sama 373 K. Nämä ei kuitenkaan tapahdu kaikissa olomuotojen muutoksissa. Esimerkiksi hyvin korkeassa lämpötilassa ja paineessa muutos nesteestä kaasukiin tapahtuu vähitellen ilman selkeää faasitransitiota. Kuvan 7.22 faasidiagrammissa tämä näkyy siten, että neste- ja kaasufaasia erottava tasapaino-

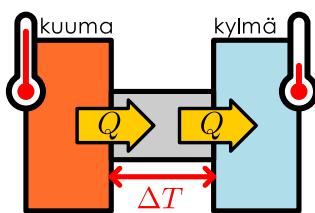
jääpalooja ja lasin ympäristön lämpötila on 300 K ja paine 100 kPa, jää sulaa ja loppujen lopuksi jäljelle jää vain nestettä. Jos ympäristön lämpötila onkin 260 K, lopputulos on pelkkää kiinteää jäättä. Lämpötilassa 273 K ja paineessa 100 kPa veden nestemäinen ja kiinteää olomuoto ovat tasapainossa, joten näissä olosuhteissa osa vedestä pysyy nesteenä ja osa kiinteänä.

Jos olosuhteet muuttuvat hitaasti, aine hakeutuu aina itsestään tasapainotilaansa ja on siis aina faasidiagrammin osoittamassa olomuodossa. Jos esimerkiksi nestemäistä vettä lämmitetään hitaasti, se pysyy nestemäisenä kunnes saavuttaa lämpötilan, jossa nestemäinen ja kaasumainen olomuoto ovat tasapainossa. Tällöin vesi ei enää lämpene vaan veden lämpönä vastaanottama energia saa nesteen höyrystymään. Lämmitys alkaa jälleen nostaa lämpötilaa vasta sitten, kun kaikki vesi on muuttunut kaasuksi.

Termodynamiasta tasapainoa ei kuitenkaan aina saavuteta heti. Esimerkiksi nestemäisen veden voi jäähdyttää selvästi alempaan lämpötilaan kuin 273 K veden jäätymättä. Jäätyminen on nimittäin monimutkainen prosessi, joka ei välttämättä käynnisty heti. Jos siis vettä jäähdytetään tehokkaasti, se voi säilyä nestemäisenä myös olosuhteissa, joissa sen faasidiagrammin mukaan pitäisi olla kiinteää. Tällöin nesteen sanotaan olevan aliäähtynyt. Tässä ei ole mitään ristiriitaa, sillä aliäähtyneenä neste ei ole termodynamiassa tasapainossa, jota faasidiagrammi kuvaa. Jos odotetaan tarpeeksi kauan, jäätyminen kyllä jossakin vaiheessa käynnistyy, jolloin vesi jäätyy nopeasti ja saavuttaa näin tasapainon. Tilanne on hieman samanlainen kuin kuopan reunalla olevalla pallolla. Pallo olisi tasapainossa kuopan pohjalla, ja sinne pallo asettuuakin, jos se kuoppaan putoaa. Pallo kuitenkin voi pysyä kuopan reunalla putoamatta kuoppaan, jos sitä ei häiritä.

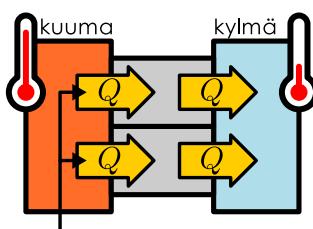
Lämmönjohtavuus

Kuva 7.23: Jos kappaaleen reunat ovat eri lämpötiloissa, kappaaleen läpi siirrytnee energiota lämpönä johtumalla.



Johtumista tapahtuu aina, kun kaksi eri lämpötiloissa olevaa kappaletta koskettaa toisiaan. Koska kappaletit ovat eri lämpötiloissa, ne eivät ole termodynamiassa tasapainossa, ja siksi niiden välillä täytyy siirrytnee energiota lämpönä. Toisen pääsäännön mukaisesti energia siirrytnee lämpönä aina kuumasta kylmään, mutta tämän energian siirron nopeus eli teho riippuu tilanteesta. Energiaa siirrytnee nopeasti, jos kappaleten lämpötilojen välillä on suuri ero, ja hitaasti lämpötilojen ollessa lähes samat. Lisäksi jotkin aineet johtavat lämpöä paremmin kuin toiset. Esimerkiksi metallit ovat hyviä *lämmönjohteita*, minkä voi huomata vaikkapa koskettamalla kuumaa metallikattilaa. Kattila tuntuu kuumalta, koska sen kuumasta pinnasta siirrytnee energiota lämpönä koskettajan ihoon. Ihon lämmetessä kattilan pinta jäähtyy, mutta koska metalli on hyvä lämmönjohde, kattilan muista osista virtaa nopeasti lisää lämpöä kosketuskohtaan. Näin kosketuspiste pysyy kuumana. Esimerkiksi puu sen sijaan on melko huono lämmönjohde eli se on *lämpöeriste*. Vaikka kattilassa olisi puinen kauha, jonka lämpötila on sama kuin kattilan, kauha ei koskettetuissa tuntuisi lainkaan yhtä kuumalta kuin kattilan metallinen pinta. Tämä johtuu siitä, että koskettetuissa kauhan kuumaa pinta kyllä hetken aikaa lämmittää koskettajan ihoa, mutta tällöin puu itsessään jäähtyy. Koska puu ei johda lämpöä kovin tehokkaasti, kosketuspiste pysyy jäähdyttyään yhtä lämpimänä kuin koskettajan iho eikä siis tunnu enää kuumalta.

Kuva 7.24: Kaksi kappaletta rinnakkain.



kaksi kappaletta rinnakkain:
kaksinkertainen lämpövuo

Aineen kykyä siirtää energiota lämpönä johtumalla kuvaa **lämmönjohtavuus**. Määritellään tämä suure kuvan 7.23 esimerkin kautta. Kuvassa on kauttaaltaan samasta aineesta valmistettu kappaale kahden eri lämpötiloissa olevan *lämpösäiliön* välillä. Lämpösäiliö voi olla mikä tahansa suuri kappaale tai systeemi, joka on kauttaaltaan samassa vakiolämpötilassa. Eriksisesti lämpösäiliöiden lämpötilan ajatellaan pysyvän aina samana. Tämä on hyvä approksimaatio, jos säiliön lämpönä vastaanottaman ja luovuttaman energian määrä on pieni säiliön kaikkiaan varastoimaan energian verrattuna. Kuvassa lämpösäiliöt ovat eri lämpötiloissa, T_{kuuma} ja $T_{\text{kylmä}}$. Energia pyrkii siirtymään itsestään lämpönä aina kuumasta kylmään, joten tässäkin tilanteessa energiota virtaa kuumasta säiliöstä kylmään johtumalla näiden välissä olevaa kappaletta pitkin.

Energiaa siirrytnee sitä nopeammin, mitä kuumempia kuumaa säiliö on ja mitä kylmempi kylmä säiliö on. Täsmällisesti teho on suoraan verrannollinen lämpösäiliöiden väliseen lämpötilaeeroon

$$\Delta T = T_{\text{kuuma}} - T_{\text{kylmä}}. \quad (7.50)$$

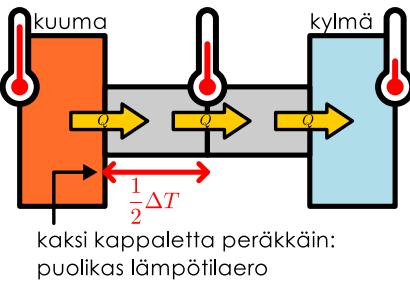
Toisin sanoen jos säiliöiden välillä lämpönä siirryvän energian kokonaismäärää merkitään Q , lämpövirran kuljettama teho on

$$P = \frac{dQ}{dt} = k\Delta T, \quad (7.51)$$

missä verrannollisuuskerroin k on *kappaaleen kokonaislämmönjohtavuus*.

Yhtälössä 7.51 esiintyvä kerroin k ei ole kuitenkaan *aineen* ominainen lämmönjohtavuus, koska se riippuu kappaleen koosta. Jos yhden kappaleen sijaan säiliöiden välillä olisikin kaksi kappaletta rinnakkain kuten kuvassa 7.24, nämä molemmat kuljettaisivat yhtä suuren lämpövirran säiliöstä toiseen. Tällöin teho olisi kaksinkertainen. Toisaalta kaksi vierekkäistä, samasta aineesta valmistettua kappaletta ei eroa mitenkään yhdestä kappaleesta, jonka poikkipinta-ala on kaksinkertainen. Siispä kappaleen poikkipinta-alan kaksinkertaistamisen täytyy myös kaksinkertaistaa kappaleen läpi johtuva teho eli siirttyvän tehon on oltava suoraan verrannollinen kappaleen poikkipinta-alaan.

Kuva 7.25: Kaksi kappaletta peräkkäin.



Jos säiliöiden välillä sen sijaan on kaksi peräkkäin asetettua kappaletta, siirttyvän tehon täytyy pienentyä. Tilannetta voisivat verrata lämmittettyyn taloon. Talon sisällä on lämmin ja ulkona kylmä, jolloin energia pyrkii virtaamaan sisältä ulos talon rakenteita pitkin. Tämän estämiseksi seiniin laitetaan eristettä, ja siirttyvä lämpöteho on sitä pienempi, mitä paksumpi eristekerroks on. Lämpöä johtavan kerroksen paksuuden kasvattamisen täytyy siis pienentää kerroksen läpi virtaavan energian tehoa. Täsmällisesti teho on käännekkäin verrannollinen lämpöä johtavan kappaleen paksuuteen. Tämän voi päätellä helposti kuvalta 7.25 avulla. Koska nyt lämpösäiliöiden välillä on kaksi kappaletta, lämpötilaero ΔT jakautuu nähille kappaleille. Tässä kappaleet ovat samanlaiset, joten symmetrian perusteella lämpötilaero kummankin kappaleen päiden välillä on puolet lämpösäiliöiden lämpötilojen eroasta eli $\frac{1}{2}\Delta T$. Toisaalta koska johtumalla siirttyvän energian teho on yhtälön (7.51) mukaisesti verrannollinen tähän lämpötilaeroon, kappaleen päiden välisen lämpötilaeron puolittaa myös kappaleen läpi siirttyvän lämpövirran tehon. Teho on nyt siis $P = k\frac{1}{2}\Delta T$. Kahden samanlaisen kappaleen yhdistäminen peräkkäin on sama asia kuin kappaleen pituuden kaksinkertaistaminen, joten lämpöä johtavan kappaleen pituuden kaksinkertaistaminen lämmön virtaussuunnassa puolittaa kappaleen kokonislämmönjohtavuuden. Samanlainen päätely toimii yhdistettiinä kappaleita kuinka monta tahansa. Siispä kappaleen lämmönjohtavuuden täytyy olla käännekkäin verrannollinen kappaleen pituuteen.

7.20 Kahden kappaleen lämmönjohtavuudet ovat $k_A = 1 \text{ W/K}$ ja $k_B = 2 \text{ W/K}$. Kappaleet asetetaan peräkkäin kahden lämpösäiliön välille (lämpötilat 280 K ja 310 K), jolloin kappaleiden läpi kulkee energiaa lämpönä tasaisena virtana. (a) Selitä, miksi kummankin kappaleen läpi täytyy kulkea lämpöä yhtä suurella teholla. (b) Mikä on tämän perusteella lämpötila kappaleiden välissä liitoskohdassa? (c) Millä teholla energia virtaa kappaleiden läpi? (d) Mikä on yhdistettyjen kappaleiden kokonislämmönjohtavuus?

Näin olemme päättelleet, että kappaleen kokonislämmönjohtavuus on suoraan verrannollinen kappaleen poikkipinta-alan A ja käännekkäin verrannollinen kappaleen pituuteen L , eli

$$k = \lambda \frac{A}{L}. \quad (7.52)$$

Tässä esiintyvä verrannollisuuskerroin λ on aineen ominainen lämmönjohtavuus. Sijoittamalla tämä yhteys kappaleen kuljettamaa lämpötehoa kuvaavaan yhtälöön (7.51) saamme johtuen siirttyvän lämmön tehoksi

$$P = \lambda A \frac{\Delta T}{L}, \quad (7.53)$$

kun lämpö siirtyy kauttaaltaan samasta materiaalista valmistetun kappaleen läpi.

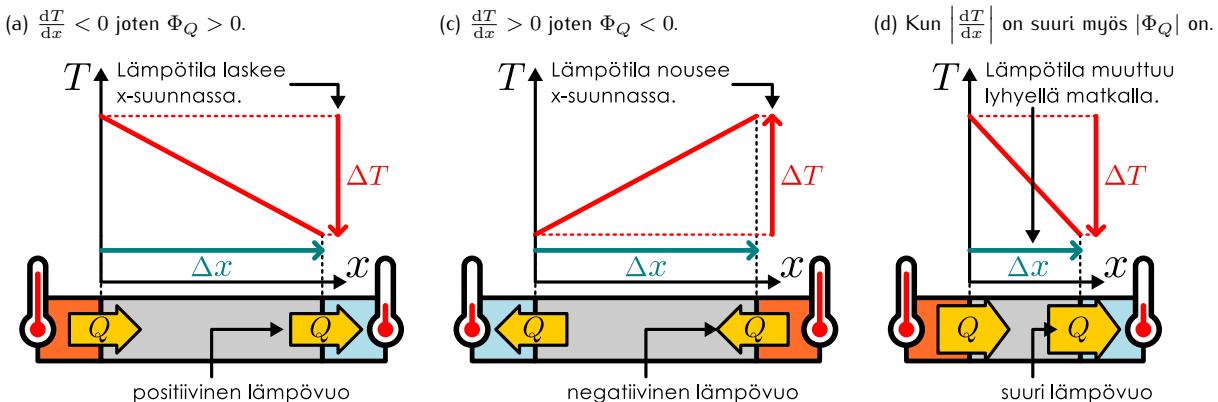
7.21 Mikä on kappaleen kokonislämmönjohtavuuden k ja aineen ominaislämmönjohtavuuden λ yksikkö? Eräissä rakennusoppaassa kerrotaan, että ikkunan lämmönläpäisykerroin on $1.0 \text{ W/(Km}^2\text{)}$. Mitä tämä kertoo ikkunan lämmönjohtavuudesta?

Edellä johdettu lämpötehon lauseke kuvailee kuumasäiliöstä kylmäsäiliöön siirttyvän energian määrää, mutta tämä lauseke ei huomioi mitenkään missä nämä säiliöt ovat tai mihin avaruuden suuntaan energia kulkee. Voimme kuitenkin yleistää tuloksen huomioimaan myös suunnat kuvan 7.26 tapaan kiinnittämällä koordinaatiston niin, että x -akseli osoittaa kappaleen pituussuuntaan eli suuntaan, jossa lämpötila muuttuu. Kappaleen pituus voidaan nyt kirjoittaa sen päiden x -koordinaattien erona, $L = \Delta x$. Tällöin lämpötehon lausekkeessa (7.53) esiintyvä osamäärä $\Delta T/L$ saa muodon $\Delta T/\Delta x$. Määritellään myös lämpötilaero ΔT niin, että se kertoo lämpötilan muutoksen nimenomaan siirryttääessa Δx positiiviseen x -suuntaan eli

$$\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x). \quad (7.54)$$

Kuvassa 7.26 (a) lämpötila pienenee x -suunnassa, joten $\Delta T < 0$. Lämpötilan kuvaaja on tässä tapauksessa laskeva suora ja $\Delta T/\Delta x < 0$ on tämän suoran kulmakerroin. Kuvassa (b) lämpötila puolestaan kasvaa x -suuntaan siirryttääessa, joten kulmakerroin $\Delta T/\Delta x > 0$.

Kuva 7.26: Lämpövuon kertoo sekä lämpönä siirtymän energian tehon että kulkusuunnan. Lämpö siirtyy suuntaan, jossa lämpötila pienenee.



Lämpö siirtyy itsestään aina siihen suuntaan, jossa lämpötila on pienempi, joten kuvassa 7.26 (a) energiaa siirtyy lämpönä positiiviseen x -suuntaan. Kuvassa (b) vastaavasti lämpö virtaa negatiiviseen suuntaan. Määritellään **lämpövuon** Φ_Q niin, että sen suuruus on sama kuin kappaleen läpi kulkevan lämpövirran kuljettama teho, $|\Phi_Q| = P$, mutta sen etumerkki on positiivinen vain jos energia kulkee positiiviseen x -suuntaan. Nämä määriteltyynä lämpövuon on siis kuvassa (a) positiivinen ja kuvassa (b) negatiivinen. Mutta tällöin lämpövuon etumerkki on aina *päinvastainen* lämpötilan kuvaajan kulmakertoimeen $\Delta T/\Delta x$ verrattuna. Lämpövuon lauseke on siis sama kuin siirtymän lämpötehon yhtälö (7.53), mutta koska yhtälössä esiintyvällä osamääräällä $\Delta T/\Delta x$ on eri etumerkki kuin lämpövuolla Φ_Q , yhtälöön täytyy lisätä miinusmerkki. Nämä ollen lämpövuon on

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (7.55)$$

Mitä nopeammin lämpötila muuttuu *paikan suhteen* eli mitä jyrkempi on lämpötilan kuvaaja, sitä suurempi on lämpövuon ja sitä nopeammin energiota siirtyy lämpönä *ajan kuluessa* (kuva 7.26 (c)). Jos lämpötilan kuvaaja ei ole suora, lämpövuokaan ei ole kaikkialla sama. Tällöin lämpö virtaa suurimmalla teholla alueilla, joilla lämpötila muuttuu paljon lyhyillä matkoilla eli joilla lämpötilan kuvaajan kulmakerroin on suuri. Lämpövuon lausekkeessa esiintyvä suoran kulmakerroin $\Delta T/\Delta x$ pitää tällaisessa tapauksessa korvata käyrän tangentin kulmakertoimella eli derivaatalla dT/dx . Nämä lämpövuolle saadaan yleinen lauseke

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{dT}{dx}. \quad (7.56)$$



7.22 Selitä omien sanoin, mitä tarkoittaa lämpökapasiteetti, latenttilämpö ja lämmönjohtavuus. Selitä erityisesti, mitä erilaisia tapoja näiden suureiden määritellyyn on (esim. mitä tarkoittaa ominaislämpökapasiteetti ja pelkkä lämpökapasiteetti). Pohdi, mitkä suureet ovat intensiivisiä tai ekstensiivisiä.

Differentiaaliyhtälöt

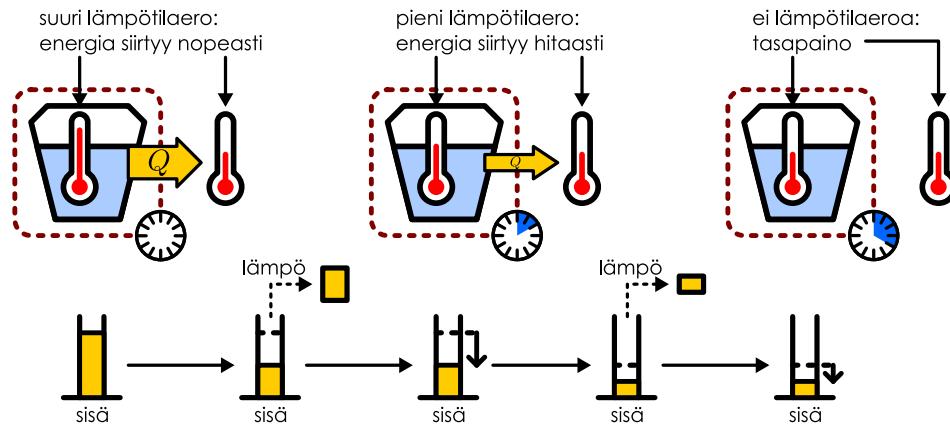
Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa yhdistyvät edellä esiteltyt lämpönä siirtymää energiaa koskevat fysiikaaliset konseptit: lämpötila, lämpökapasiteetti, energian siirtymisen lämpönä johtumalla ja systeemien pyrkimys termodynamiiseen tasapainoon. Esimerkinämme on kuvan 7.27 suljettu pahvinen kahvikuppi, jossa on aluksi kahvia lämpötilassa $T_{\text{alku}} = 355$ K. Ilman lämpötila on $T_{\text{ilma}} = 295$ K. Ympäristöään kuumpeli kahvi jäähtyy itsestään, koska se pyrkii termodynamiiseen tasapainoon ympäristönsä kanssa. Tällöin energiaa siirtyy lämpönä kahvikupista ympäristöön ja kahvi menettää sisäenergiaansa. Samalla kahvin lämpötila laskee, koska lämpötila ja sisäenergia riippuvat toisistaan. Prosessi jatkuu kunnes kahvi saavuttaa ympäristönsä lämpötilan.

Jäähtymisprosessissa energia virtaa lämpönä pääasiassa johtumalla kupin seinämien läpi. Kupin lämmittäessä ilmaa sen ympärille syntyy ohut ilmakerros, jossa lämpötila muuttuu kupin pinnan lämpötilasta ympäriovin ilman lämpötilaan. Myös tämä ohut ilmakerros toimii eristeenä, ja lämmön täytyy kulkea myös sen läpi. Jos kahvin lämpötila on T , lämpönä siirtymän energian teho on

$$P = k(T - T_{\text{ilma}}), \quad (7.57)$$

missä k on kupin ja sitä ympäröivän lämpimän ilmakerroksen kokonaislämmönjohtavuus. Tämä voi olla vaikea laskea, mutta tässä esimerkissä lämmönjohtavuuden arvo on tunnettu, $k = 0.70 \text{ W/K}$.

Kuva 7.27: Kappaleesta siirtyy energiaa ympäristöön sitä nopeammin, mitä suurempi kappaleen ja ympäristön lämpötilaero on.



Lyhyessä ajassa dt kupista siirtyy ympäröivään ilmaan energiaa lämpönä määrä

$$dQ_{\text{ulos}} = Pdt. \quad (7.58)$$

Toisaalta koska kupista siirtyy energiaa pois lämpönä, sen lämpötila laskee. Siirttyvän energian ja lämpötilan muutoksen suhde on kupin ja sen sisältämän kahvin kokonaislämpökapasiteetti C , joten

$$dQ_{\text{ulos}} = -CdT. \quad (7.59)$$



7.23 Miksi yhtälössä (7.59) on miinusmerkki?

Kupissa oleva kahvi on pääasiassa 0.2 kg vettä, joten lämpökapasiteetti on noin $C = 840 \text{ J/K}$. Voimme näin ollen yhdistää lämpötilan muutoksen siihen kuluvaan aikaan siirttyvän energian kautta,

$$-CdT = dQ_{\text{ulos}} = Pdt. \quad (7.60)$$

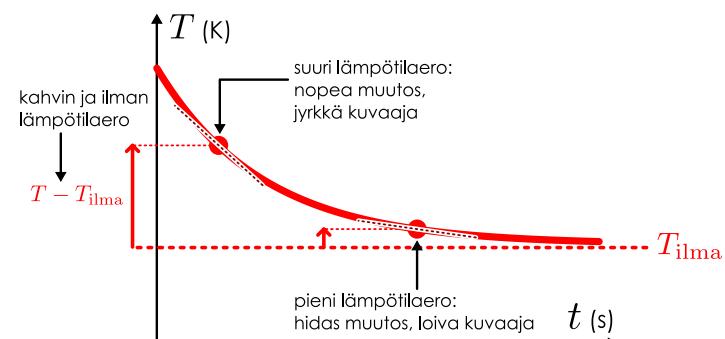
Tästä voidaan edelleen ratkaista lämpötilan muutos ja sijoittaa tehon P tilalle lauseke (7.57), jolloin saadaan

$$dT = -\frac{P}{C}dt = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}})dt. \quad (7.61)$$

Yhtälön vasemmalla puolella on *lämpötilan muutos* lyhyessä ajassa ja sen oikealla puolella on ajan muutos kerrottuna *lämpötilasta riippuvalla tekijällä*. Yhtälö siis kertoo meille sen, että lämpötilan muuttuminen riippuu lämpötilasta itsestään. Erityisesti lämpötila muuttuu sitä nopeammin, mitä kuumempaa kahvi on. Kahvi siis jäähdyttää ensin nopeasti, koska kuumasta kahvista siirtyy energiaa lämpönä ympäristöön suurella teholla. Mitä pienemmäksi kahvin ja sitä ympäröivän ilman lämpötilaero käy, sitä pienemmäksi lämpövuo kahvista ilmaan käy ja sitä hitaammin kahvi jäähdyttää.

Tämä on esitetty graafisesti kuvaassa 7.28, johon on hahmoteltu kahvin lämpötila ajan funktiona. Ilman lämpötilaa, joka on vakio, kuva paksu vaakasuora katkoviiva. Kahvin ja ilman välistä lämpötilaeroa esittää puolestaan kuvaajan pystysuora etäisyys tästä katkoviivasta. Kahvin lämpötilan muutosnopeus näkyy kuvassa käyrän jyrkkyytenä eli tangentin kulmakertoimena. Koska kahvi jäähdyttää nopeasti ollessaan ympäröivää ilmaa kuumempaa, sen kuvaajan täytyy olla sitä jyrkempi, mitä kauempana ilman lämpötilaa esittävästä katkoviivasta se on. Aluksi kuvaaja laskee jyrkästi, mutta mitä lähemmäksi katkoviivaa kuvaaja tulee, sitä loivemmaksi se käy.

Voisi ajatella, että jos yhtälöön (7.61) sijoittaa kahvin alkulämpötilan $T = T_{\text{alku}}$, yhtälöstä voi laskea kahvin lämpötilan muutoksen, kun aika kuluu. *Tämä on kuitenkin väärin!* Jos kulunut aika on hyvin lyhyt, nähnä saadaan approksimaatio lämpötilan muutokselle, mutta lasku menee sitä enemmän väärin mitä pidempää

Kuva 7.28: Kuvaaja on sitä jyrkempi, mitä enemmän se poikkeaa arvosta T_{ilma} .

aikaa tarkastellaan. Tämä johtuu siitä, että kun vähän aikaa on kulunut, kahvin lämpötila T on muuttunut (ks. kuva 7.28). Tällöin ei enää päde $T = T_{\text{alku}}$ eikä yhtälön oikean puolen arvo siis enää ole sama. Yhtälöstä ei siis voi suoraan laskea lämpötilan arvoa, vaan lämpötila on ratkaistava jollakin toisella menetelmällä.

7.24 Eräälle kappaleelle $k/C = 0.5 \text{ s}^{-1}$. Kappaleen lämpötila on alkuksi $T_{\text{alku}} = 300 \text{ K}$ ja sen ympäristön lämpötila on $T_{\text{ilma}} = 280 \text{ K}$. (a) Paljonko kappaleen lämpötilan pitäisi muuttua yhtälön (7.61) mukaan yhdessä sekunnissa, jos oletetaan lämpötilan olevan koko tämän ajan $T = T_{\text{alku}}$? (b) Mikä kappaleen lämpötilan pitäisi siis olla hetkellä $t = 1 \text{ s}$ eli mitä on $T(1)$? (c) Paljonko kappaleen lämpötilan pitäisi muuttua seuraavan sekunnin aikana, jos lämpötilan muutos lasketaan taas yhtälöstä (7.61) olettaen, että $T = T(1)$? (d) Mikä olisi silloin kappaleen lämpötila hetkellä $t = 2 \text{ s}$? (e) Mitä saataisiin kappaleen lämpötilaksi hetkellä $t = 2 \text{ s}$, jos lämpötilan muutos laskettaisiin neljässä askelissa (eli lämpötilan ajateltaisiin olevan vakio aina puoli sekuntia kerrallaan)? (f) Kumpi malli on parempi?

Yhtälö (7.61) voidaan jakaa puolittain differentiaalilla dt , jolloin se saa muodon

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}}). \quad (7.62)$$

Tässä muodossa yhtälön vasemmalla puolella on *lämpötilan derivaatta* ja sen oikealla puolella on *lämpötila itse*. Tälläista yhtälöä, jossa esiintyy tuntematon funktio (tässä $T(t)$, lämpötila ajan funktiona) ja sen derivaattoja (tässä $\frac{dT}{dt} = T'(t)$, lämpötilan derivaatta ajan suhteen) kutsutaan **differentiaaliyhtälöksi**. Johdimme yhtälön yleisistä fysikaalisista periaatteista, joten sen täytyy päteä koko jäähtymisen ajan, kaikilla ajan hetkillä t . Siispä jos haluamme selvittää kahvin lämpötilan jollakin ajan hetkellä, meidän täytyy löytää funktio $T(t)$, joka toteuttaa tämän differentiaaliyhtälön kaikilla muuttujan t arvoilla. Kun funktio on selvillä, voimme laskea sen avulla lämpötilan T millä tahansa ajan t arvolla.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen yleisesti on vaikeaa, mutta tässä tapauksessa ratkaisu voidaan löytää monellakin tavalla. Jos tiedämme jo etukäteen, millainen funktio yhtälön voisi ratkaista, **yrite** on helpoin tapa ratkaista differentiaaliyhtälö. Jäähtyvän kahvin tapauksessa tiedämme, että kahvi on alkuksi lämpötilassa T_{alku} ja sen lämpötila lähestyy vähitellen ympäröivän ilman lämpötilaa T_{ilma} . Lämpötilaa täytyy siis kuvata funktio, joka lähestyy vakioarvoa. Esimerkiksi eksponenttifunktio on tällainen, joten ratkaisu voisi olla

$$T(t) = a + be^{-t/c}, \quad (7.63)$$

missä a , b ja c ovat jotkin vakiot. Tämä on siis *arvaus*. Meidän täytyy laskea funktion derivaatta ja sijoittaa funktion derivaattoineen differentiaaliyhtälöön (7.62) selvittääksemme, onko arvaus oikein. Jos on, voimme samalla ratkaista ainakin osan tuntemattomista vakioista a , b ja c tunnettujen fysikaalisten parameterien k , C , T_{alku} ja T_{ilma} avulla.

7.25 (a) Mitkä ovat yritteessä 7.63 esiintyvien vakioiden yksiköt?
 (b) Osoita, että jos $c > 0$, yrite lähestyy vakioarvoa, kun aika kuluu.
 (c) Mikä on yritteen mukaan lämpötila alkuksi ja pitkän ajan kuluttua vakioiden a , b ja c avulla lausuttuna?

Derivoitaaan yrite siis kerran, jolloin saadaan

$$\frac{dT}{dt} = T'(t) = -\frac{b}{c}e^{-t/c} \quad (7.64)$$

Tämän derivaattafunktion ja alkuperäisen yritefunktion (7.63) sijoitus differentiaaliyhtälöön (7.62) tuottaa tavallisen yhtälön

$$-\frac{b}{c}e^{-t/c} = -\frac{k}{C}(a + be^{-t/c} - T_{\text{ilma}}). \quad (7.65)$$

Yhtälössä esiintyy nyt vakiotermejä ja eksponenttifunktioita, ja selkeyden vuoksi nämä kannattaa ryhmitellä yhtälön eri puolille, jolloin yhtälö saadaan kirjoitettua muotoon

$$b \left(\frac{k}{C} - \frac{1}{c} \right) e^{-t/c} = -\frac{k}{C}(a - T_{\text{ilma}}). \quad (7.66)$$

Nyt seuraa tärkeää päättelyaskeloa: Tarkasteltava differentiaaliyhtälö johdettiin fysikaalisista perusperiaatteista ja se kuvailee lämpötilan muutosta koko jäähtymisprosessin ajan. Sen täytyy siis olla voimassa kaikilla ajan hetkillä, ja sen ratkaisevan funktion $T(t)$ täytyy toteuttaa yhtälö *kaikilla ajan t arvoilla*. Koska yritteen sijoitus differentiaaliyhtälöön tuotti tavallisen yhtälön (7.66), yrite toteuttaa differentiaaliyhtälön täsmälleen silloin kun tämä yhtälö on voimassa. Ja koska yritteen täytyy toteuttaa differentiaaliyhtälö *aina, kaikilla ajan hetkillä*, yrite on differentiaaliyhtälön ratkaisu jos ja vain jos yhtälö (7.66) toteutuu *aina, kaikilla ajan hetkillä*. Mutta yhtälössä (7.66) on vasemmalla puolella ajasta t riippuva funktio $b(k/C - 1/c)e^{-t/c}$ ja oikealla puolella oleva lauseke $-k/C(a - T_{\text{ilma}})$ on ajan suhteinen *vakio*. Yhtälö voi olla voimassa kaikilla ajan t arvoilla vain,

jos yhtälön vasen puoli on sama vakio kuin oikea puoli. Lauseke $b(k/C - 1/c)e^{-t/c}$ on vakio muuttujan t suhteeseen vain jos $k/C - 1/c = 0$ eli jos

$$c = \frac{C}{k}, \quad (7.67)$$

sillä silloin lauseke on nolla. Lausekkeen $-k/C(a - T_{\text{ilma}})$ pitää siis niin ikään olla nolla, ja näin on jos

$$a = T_{\text{ilma}}. \quad (7.68)$$

Jos vakioilla a ja c on nämä arvot, yhtälö (7.66) sievenee muotoon $0 = 0$, joka on tietenkin totta olipa ajan t arvo mitä tahansa. Niinpä olemme osoittaneet, että funktio (7.63) toteuttaa differentiaaliyhtälön (7.62) kaikilla ajan hetkillä, jos vakioille valitaan arvot $a = T_{\text{ilma}} = 295$ K ja $c = C/k = (840 \text{ J/K})/(0.7 \text{ W/K}) = 1200$ s. Differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis funktio

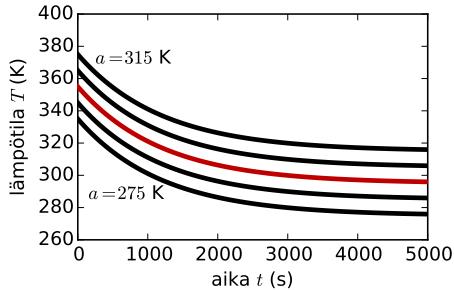
$$T(t) = T_{\text{ilma}} + be^{-\frac{k}{C}t}. \quad (7.69)$$

Pohditaan vielä ratkaistujen vakoiden merkitystä. Kuvassa 7.29 on piirretty yritteenä käytetty funktio (7.63) vakioiden a , b ja c eri arvoilla. Kuvassa 7.29 (a) vakiolle a on annettu eri arvoja, jolloin lämpötilaa kuvaava funktio $T(t)$ siirtyy pystysuunnassa. Vakio a kuvaakin lämpötilaa, jota funktio $T(t)$ lähestyy ajan kuluessa. Tässä tapauksessa kahvi jäähtyy lopulta samaan lämpötilaan kuin sitä ympäröivä ilma, joten vakion a arvon täytyy olla sama kuin ulkoilman lämpötilan T_{ilma} .

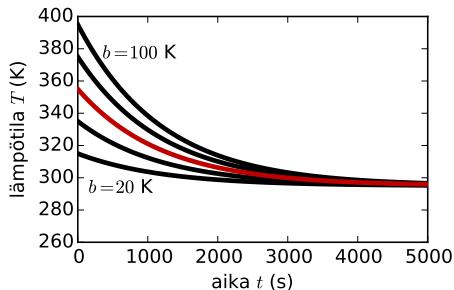
Kuvassa 7.29 (c) vakio c puolestaan saa eri arvoja. Tämä vaikuttaa siihen, kuinka nopeasti lämpötila muuttuu. Mitä pienempi c on, sitä nopeammin lämpötila lähestyy vakiota eli sitä nopeammin kahvi jäähtyy. Koska vakio c määräää jäähtymisen nopeuden, sitä kutsutaankin ratkaisun **aikavakioksi**. Kahvi tietenkin jäähtyy sitä

Kuva 7.29: Parametrien a , b ja c vaikutus funktioon $T(t) = a + be^{-t/c}$. Kuvissa (a)–(c) punainen käyrä on piirretty arvoilla $a = 295$ K, $b = 60$ K, $c = 1200$ s ja kussakin kuvassa muutetaan vain yhtä parametria kerrallaan.

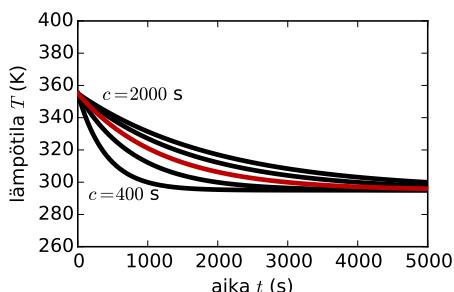
(a) $a = 275, 285, 295, 305, 315$ K.



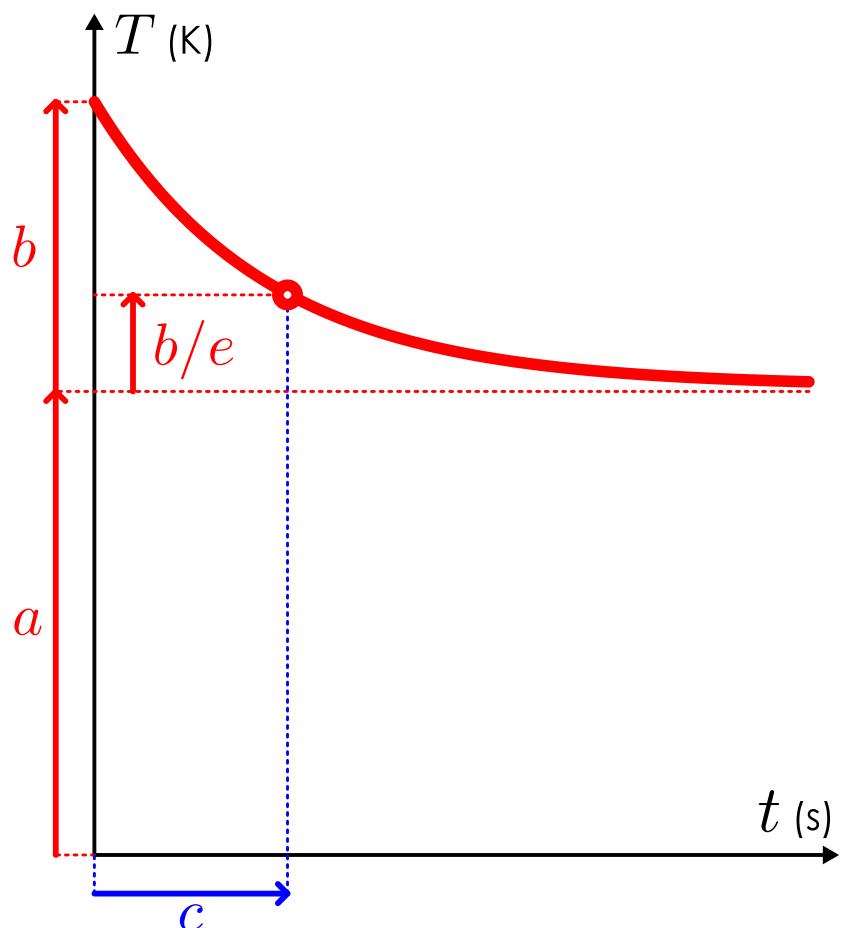
(b) $b = 20, 40, 60, 80, 100$ K.



(c) $c = 400, 800, 1200, 1600, 2000$ s.



(d) Kaikki parametrit.



nopeammin mitä paremmin sitä ympäröivä kuppi ja ilma johtavat lämpöä eli mitä suurempi on lämmönjohtavuus. Tässä tapauksessa aikavakio c on lämpökapasiteetin ja lämmönjohtavuuden suhde, joten suuri lämmönjohtavuus k tarkoittaa pientä aikavakiota. Tällöin siis ratkaisumme mukaan kahvin lämpötila lähestyy ilman lämpötilaa nopeasti, mikä on järkevä. Sitä vastoin jos lämpökapasiteetti C olisi suurempi — esimerkiksi jos kupissa olisi enemmän kahvia — myös vakio c olisi suurempi ja kahvi jäähtyisi hitaanmin. Fysikaalisesti tämä johtuu siitä, että suuri lämpökapasiteetti tarkoittaa systeemin varastoivan paljon energiaa. Suuremman energiamäärään siirtäminen vaatii enemmän aikaa, joten jäähtyminen olisi hitaampaa.

7.26 Tarkastele kuvaan 7.29 (c) piirrettyjä funktioita.

- (a) Mikä on punaisen käyrän osoittama lämpötila hetkellä $t = 1200$ s?
- (b) Laske tarkasti, mikä on kunkin piirretyn funktion arvo hetkellä $t = c$ (huom. kussakin eri c).
- (c) Kullakin käyrällä lämpötila muuttuu kaikkiaan 60 K pitkän ajan kuluessa. Kuinka suuri osuus tästä muutoksesta tapahtuu ajassa $t = c$?

Kuvassa 7.29 (b) muuttuu vakion b arvo, ja selvästikin tämä vakio sääteli funktion $T(t)$ alkuarvoa, sillä käyrät alkavat kuvassa eri kohdista. Tätä vakiota emme saaneet ratkaistua differentiaaliyhtälöstä, eikä sitä voikan sen perusteella ratkaista. Differentiaaliyhtälöön (7.62) nimittäin sisältyy tieto lämmönjohtavuudesta k , lämpökapasiteetista C ja ympäristön lämpötilasta T_{ilma} , mutta siinä ei ole tietoa kahvin lämpötilasta alussa. Vakion b ratkaisemiseen tarvitaan siis **alkuehto**. Tässä tapauksessa tiedämme, että kahvin lämpötila oli aluksi $T(0) = T_{\text{alku}} = 355$ K, ja toisaalta ratkaisuna saadun lausekkeen (7.69) arvo alkuperäisellä hetkellä on

$$T(0) = T_{\text{ilma}} + be^0 = T_{\text{ilma}} + b. \quad (7.70)$$

Siispä täytyy päteä $T_{\text{ilma}} + b = T_{\text{alku}}$ eli

$$b = T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}. \quad (7.71)$$

Näin kaikki yritteen tuntemattomat on ratkaistu ja kahvin lämpötilaksi ajan funktiona on saatu

$$T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t}. \quad (7.72)$$

7.27 Mitkä vakioista a , b ja c olisi voinut päättää suoraan kahvin alkuperäisen ja lopullisen lämpötilan perusteella ratkaisematta differentiaaliyhtälöä? Miten?

On myös fysikaalisesti järkevää, ettei vakiota b voi ratkaista jäähtymistä kuvaavasta differentiaaliyhtälöstä. Yhden kahvikupillisen sijaan voisimme nimittäin aivan hyvin tarkastella kahta kupillista, jotka ovat muuten samanlaiset mutta aluksi eri lämpötiloissa. Jos kuitit ovat samanlaiset, niillä on sama lämmönjohtavuus ja lämpökapasiteetti, ja niinpä kummankin jäähtymistä kuvaava *sama* differentiaaliyhtälö (7.62). Niiden lämpötila siis lähestyy samaa arvoa samalla suhteellisella muutosnopeudella. Toinen kupeista on kuitenkin aluksi kuumempi, joten kupeilla täytyy olla jäähtymisen aikana eri lämpötila ja lämpötilaa kuvaava funktio. Differentiaaliyhtälön ratkaisuun (7.69) oli siis pakko jäädä yksi tuntematon vakio, jonka arvo määritetyy alkuehdon perusteella. Tätä vakiota lukuunottamatta differentiaaliyhtälön ratkaisu on silti yksikäsiteinen. Toisin sanoen ei ole olemassa mitään muuta funktiota kuin eksponenttifunktio, joka toteuttaisi tässä tarkastellun differentiaaliyhtälön.

7.28 Eräälle kappaleelle $k/C = 0.5 \text{ s}^{-1}$. Kappaleen lämpötila on aluksi $T_{\text{alku}} = 300$ K ja sen ympäristön lämpötila on $T_{\text{ilma}} = 280$ K. (a) Mikä on kappaleen lämpötila hetkellä $t = 2$ s? (b) Vertaa ratkaisua aikaisempaan kysymykseen, jossa lämpötilan muutoksia laskettiin askeleittain.

Näin selvitimme kahvin lämpötilan millä tahansa ajan hetkellä kertovan funktion $T(t)$ yritteellä. Jos haluamme tietää lämpötilan jollakin tiettyllä ajan hetkellä, voimme laskea sen tämän funktion avulla. Aina yritteillä ei ole kuitenkaan helppo keksiä, jolloin ratkaisua voidaan etsiä jollakin systemaattisella menetelmällä. **Separointi** eli toisistaan riippuvien suureiden eroteltu (engl. separate ‘erottaa’) on eräs tällainen menetelmä. Ratkaistaan sama differentiaaliyhtälö nyt myös tällä tavalla.

Otetaan lähtökohdaksi yhtälö (7.61), joka yhdistää lämpötilan ja ajan differentiaalit. Separoinnin idea on se, että kaikki lämpötilaa T sisältävät tekijät siirretään yhtälön vasemmalle puolelle ja kaikki aikaa t sisältävät tekijät yhtälön oikealle puolelle, minkä jälkeen yhtälön kumpikin puoli voidaan integroida erikseen vain ko. puolella esintyvän suureen suhteeseen. Tämä ei aina ole mahdollista, mutta nyt se onnistuu jakamalla yhtälö (7.61) puolittain tekijällä $T - T_{\text{ilma}}$, jolloin saadaan

$$\frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} dt. \quad (7.73)$$

Tämän yhtälön vasemmalla puolella esiintyy symboli T ja sen differentiaali dT mutta ei symbolia t . Yhtälön oikealla puolella taas esiintyy differentiaali dt mutta ei symbolia T . Kun toisistaan riippuvat suureet T ja t on näin separoitu, yhtälöön voi integroida puolittain. On siis oikein kirjoitetaan

$$\int_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} \int_0^t dt, \quad (7.74)$$

missä vasen integraali lasketaan muuttujan T suhteeseen ja oikea muuttujan t suhteeseen. Tässä on valittu määritetyt integraalit, jolloin ajan integroimisrajat ovat 0 ja t ja lämpötilan rajat ovat *lämpötilan arvot näillä ajan hetkillä* eli $T(0) = T_{\text{alku}}$ ja $T(t)$. Näin alkuehto tulee automaattisesti huomioitua integraalien alarajassa. Jos yhtälössä (7.74) käytettäisiin määräämättömiä integraaleja, ratkaisun jäisi integroimiskäsi, joka pitäisi lopuksi ratkaista alkuehdosta samaan tapaan kuin vakio b määrittääessämme ratkaisun yritteen avulla.



7.29 Mitä menee väärin, jos kirjoitetaan $\int dT = -\frac{k}{C} \int (T - T_{\text{ilma}}) dt$, lasketaan $T = -\frac{k}{C}(T - T_{\text{ilma}})t$ ja ratkaistaan tästä $T = T_{\text{ilma}} \frac{kt/C}{1+kt/C}$?

Integraali ajan suhteeseen on helppo laskea,

$$-\frac{k}{C} \int_0^t dt = -\frac{k}{C} \Big|_0^t t = -\frac{k}{C} t. \quad (7.75)$$

Lämpötilan integrointi onnistuu integroimissäädöllä $\int 1/(x-a) dx = \ln|x-a| + c$, jolla saadaan

$$\int_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{\text{ilma}}} = \left|_{T_{\text{alku}}}^{T(t)} \ln |T - T_{\text{ilma}}| \right| = \ln |T(t) - T_{\text{ilma}}| - \ln |T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}| = \ln \frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}}. \quad (7.76)$$

Itseisarvot voi jättää pois, koska kahvin lämpötila on tässä tapauksessa aina korkeampi kuin sitä ympäröivän ilman. Näiden tulosten avulla yhtälö (7.74) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\ln \frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}} = -\frac{k}{C} t. \quad (7.77)$$

Tämä on periaatteessa differentiaaliyhtälön ratkaisu, mutta se on nyt muodossa, josta selviää aika t , kun lämpötila T tunnetaan. Ts. tämä yhtälö kertoo kauanko pitää odottaa, jotta kahvi jäähtyisi tiettyyn lämpötilaan. Haluamme nyt kuitenkin tietää lämpötilan T ajan funktiona, joten meidän on ratkaistava tästä $T(t)$.

Logaritmi on eksponenttifunktion käänteisfunktio, joten jos $\ln x = y$ pätee myös $x = e^y$ ja päinvastoin. Siispä täytyy päteä

$$\frac{T(t) - T_{\text{ilma}}}{T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}} = e^{-\frac{k}{C} t}. \quad (7.78)$$

Tämän yhtälön kertominen puolittain tekijällä $T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}$ antaa

$$T(t) - T_{\text{ilma}} = (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}) e^{-\frac{k}{C} t} \quad (7.79)$$

ja vakiotermin T_{ilma} lisääminen yhtälön kummallekin puolelle johtaa lopputulokseen

$$T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}}) e^{-\frac{k}{C} t}. \quad (7.80)$$

Tämä on täsmälleen sama kuin yritteellä etsitty ratkaisu (7.72). Näin pitää olla, koska ei ole tietenkään mitään väliä, miten ratkaisun etsii. Siksi differentiaaliyhtälötä ratkaistaessa kannattaakin miettiä, miten pääsee helpoimalla. Jos ratkaisun osaa arvata, yritteet avulla arvauksen voi osoittaa oikeaksi. Separointia kannattaa yrittää, jos arvaaminen ei onnistu. Silloinkin ratkaisu kannattaa ehdottomasti aina tarkistaa sijoittamalla se alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön ja tutkimalla, toteutuuko yhtälö.



7.30 Selitä omien sanoin, mikä on differentiaaliyhtälö. Mikä on yrite, ja miten ratkaiset differentiaaliyhtälön, jos tiedät sopivan yritteet? Mikä on alkuarvo, ja miksi sellaisia tarvitaan?

esimerkki 7.4

Korkoa korolle

Erään tilin tuotto on huikeat 125 % vuodessa. Jos tilillä on aluksi 100 euroa, paljonko siellä on vuoden päästä jos korko lasketaan (a) kerran vuodessa, (b) kerran kuukaudessa, (c) kerran sekunnissa, (d) jatkuvasti?

TILANNE Merkitään tilillä kulloinkin olevaa rahamäärää M , jolloin siis aluksi tilillä on rahaa $M_0 = 100$ e. Merkitään korkotekijää on $p = 1.25$, mikä vastaa siis 125 prosenttia.

SUUNNITELMA Jos korko lasketaan vain kerran vuodessa, rahamäärä kerrotaan yhden kerran tekijällä $1 + p$. Yleisesti jos korko lasketaan aikavältein Δt , korkoa maksetaan ajassa $t_0 = 1$ a yhteensä $n = t_0/\Delta t$ kertaa. Tämä tarkoittaa sitä, että rahamäärä kerrotaan tekijällä $1 + p/n$ tänä aikana n kertaa. Jos korko poistettaisiin tililtä aina maksun jälkeen, kumpikin tapa tuottaisi vuodessa rahamääränp pM_0 . Jos korko kuitenkin aina jää tilille, seuraavan koron maksun yhteydessä maksetaan korkoa myös aikaisemmin maksetulle korolle. Näin ollen tuotto on sitä suurempi mitä tiheämmin korkoa maksetaan.

Koron maksussa raha lisääntyy aina määrään

$$\Delta M = \frac{p}{n} M. \quad (7.81)$$

Ensimmäisen koron maksun jälkeen tilillä on siis rahaa

$$M_1 = M_0 + \Delta M = \left(1 + \frac{p}{n}\right) M_0. \quad (7.82)$$

Toisen maksun jälkeen rahaa on

$$M_2 = \left(1 + \frac{p}{n}\right) M_1 = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^2 M_0, \quad (7.83)$$

ja yleisesti n maksun jälkeen

$$M_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n M_0. \quad (7.84)$$

(Oletetaan, että korot lasketaan tarkasti eikä rahamäärä välillä pyöristetä.)

Jatkuvan koron tapaus tarkoittaa periaatteessa raja-arvoa $n \rightarrow \infty$. Toinen tapa ajatella asiaa on ilmaista rahamääränp muutujen välisen ajan Δt avulla muodossa

$$\Delta M = \frac{p}{n} M = \frac{p}{t_0} M \Delta t, \quad (7.85)$$

jolloin rahamääränp muutosnopeus on

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{p}{t_0} M. \quad (7.86)$$

Jatkuva korko tarkoittaa tässä maksujen välisen ajan lähestyvän nollaa, jolloin äärellisten muutosten suhteesta tulee derivaatta,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{p}{t_0} M. \quad (7.87)$$

Tämä on differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on rahamääränp kallakin ajan hetkellä kertova funktio $M(t)$. Ratkaistaan yhtälö yritteellä

$$M(t) = a + be^{t/c}. \quad (7.88)$$

RATKAISU (a) Kun korkoa maksetaan kerran, rahamääräksi tulee

$$M(1 \text{ a}) = (1 + p)M_0 = 225 \text{ e} \quad (7.89)$$

(b) Kuukausittain laskien $n = 12$. Rahamääräksi tulee

$$M(1 \text{ a}) = \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12} M_0 = 328.41 \text{ e} \quad (7.90)$$

(c) Vuodessa on $n = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 36266400$ sekuntia. Rahamääräksi tulee siis

$$M(1 \text{ a}) = \left(1 + \frac{p}{36266400}\right)^{36266400} M_0 = 349.03 \text{ e} \quad (7.91)$$

(d) Yritteen derivaatta on $M'(t) = \frac{b}{c}e^{-t/c}$, ja tämän sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa

$$\frac{b}{c}e^{-t/c} = \frac{p}{t_0}(a + be^{-t/c}). \quad (7.92)$$

Yhtälön voi ryhmitellä myös muotoon

$$b\left(\frac{p}{t_0} - \frac{1}{c}\right)e^{-t/c} = a\frac{p}{t_0}, \quad (7.93)$$

ja jotta tämä toteutuisi kaikilla ajan t arvoilla, yhtälön kummankin puolen täytyy olla vakio. Yhtälön vasen puoli on vakio täsmälleen silloin, kun $p/t_0 - 1/c = 0$ eli kun $c = t_0/p$, jolloin vasen puoli on nolla. Oikea puoli on myös nolla, jos $a = 0$. Vakio b ratkeaa alkuehdosta $M(0) = M_0 = 100$ e, josta saadaan $b = M_0$. Yhtälön ratkaisu on siis funktio

$$M(t) = M_0 e^{\frac{p}{t_0} t}, \quad (7.94)$$

josta rahamääräksi vuoden päästä ratkeaa

$$M(1 \text{ a}) = M_0 e^{1.25} = 349.03 \text{ e} \quad (7.95)$$

Alla on ratkaistu tehtävä Mathematicalla ja piirretty tilillä oleva rahamäärä. Punainen piste saadaan tilittämällä korko kerran vuodessa. Siniset pisteet kuvaavat tuottoa, kun korko lasketaan joka kuukausi. Käyrä kuvailee jatkuvaan korkoon.

Mathematica:

```

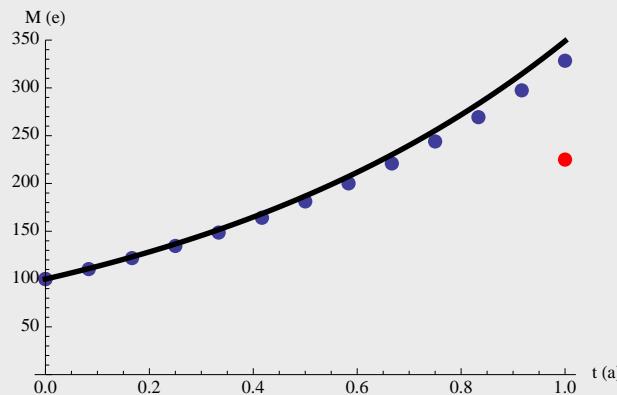
lukuarvot = {M0 -> 100, p -> 1.25, t0 -> 1};
Mi[n_, i_] := (1 + p/n)^i M0; (* i kpl koronlaskuja *)
Ma[n_] := (1 + p/n)^n M0; (* n kpl koronlaskuja *)

(* ratkaisut *)
{Ma[1], Ma[12], Ma[365*24*60*60], Limit[Ma[n], n -> Infinity]} /. lukuarvot
{225., 328.409, 349.034, 349.034}

(* ratkaistaan DY *)
dy = DSolve[{M'[t] == p/t0 M[t], M[0] == M0}, M, t];
M[t] /. dy
M[t0] /. dy /. lukuarvot
{E^(p t)/t0 M0}
{349.034}

(* kuvaajat *)
vuosi = ListPlot[Table[{1/12 t, Mi[12, t] /. lukuarvot}, {t, 0, 1}],
  PlotStyle -> {PointSize[Large], Red},
  PlotRange -> {0, 350},
  AxesLabel -> {"t (a)", "M (e)" }];
kk = ListPlot[Table[{1/12 t, Mi[12, t] /. lukuarvot}, {t, 0, 12}],
  PlotStyle -> PointSize[Large]];
jatkuva = Plot[M[t] /. dy /. lukuarvot, {t, 0, 1},
  PlotStyle -> {Thickness[0.01], Black}];
Show[vuosi, kk, jatkuva]

```



ARVIOINTI Rahamäärä on sitä suurempi, mitä useammin korko lasketaan, kuten pitääkin. Lisäksi (c)- ja (d)-kohdissa saatuiin sama tulos, mikä on järkevä, koska vuoden jakaminen 36266400 osaan ei poikkea paljonkaan sen jakamisesta äärettömän moneen osaan.

Kohdan (d) vastaus saataisiin myös raja-arvona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n M_0 = e^p M_0. \quad (7.96)$$

Tämä on sama tulos kuin differentiaalilaitölön kautta laskettu ratkaisu, mutta tässä laskussa tarvitaan luvun e määritelämää raja-arvona. Historiallisesti luvun e ensimmäisiä sovelluksia ovat olleet juuri tällaisten korkoa korolle -ongelmien ratkaisut!

Huomaa myös, että jatkuvan koron tapauksessa rahamäärästä kuvailee eksponenttifunktio aivan kuten jäähtyvän kahvikupin lämpötilaakin. Tämä johtuu siitä, että differentiaalilaitöt $M'(t) = \frac{p}{t_0} M(t)$ ja $T'(t) = -\frac{k}{C} [T(t) - T_{\text{tilma}}]$ ovat kumpikin samaa muotoa: derivaatta = funktio + vakio, eli fysikaalisesti suureen muutosnopeus = suureen arvo + vakio. Tällaisessa tapauksessa suureen muutosta kuvailee aina eksponenttifunktio, täysin riippumatta siitä, mikä suure on kyseessä.

7.4 Tilanmuuttujat

Mekaniikassa hiukkasen tilan voi kuvata sen paikan ja liikemäären avulla, sillä jos hiukkasen massa tunnetaan, näiden suureiden perusteella on mahdollista määrittää esimerkiksi hiukkasen liike- ja potentiaalienergia. Jäykän kappaleen tila sisältää myös tiedon kappaleen kulmaliikeämästä, lämpötilasta ja kappaleeseen kohdistuvasta jännityksestä. Kaasun tilan kuvaaminen puolestaan vaatii tietoa muun muassa kaasun lämpötilasta, paineesta ja tilavuudesta. Lämpöopissa tällaisia tilan ominaisuuksia kuvaavia suureita kutsutaan **tilanmuuttujiksi**, ja lämpöilmiöiden ymmärtäminen tarkoittaakin yleensä nimenomaan tilanmuuttujien käytök-

sen tutkimista, sillä systeemin kaikkien tilanmuuttujien tunteminen kertoo meille millaisessa tilassa systeemi on.

Tilanmuuttujat siis kertovat systeemin ominaisuudet. On syytä kuitenkin erottaa toisistaan ekstensiiviset ja intensiiviset tilanmuuttujat. Esimerkiksi tilavuus ja ainemäärä ovat ekstensiivisiä tilanmuuttujia, sillä näiden arvo riippuu tarkasteltavan systeemin koosta. Jos esimerkiksi kauttaaltaan samanlainen kappale puolitetaan, kummankin puolikkaan ainemäärä ja tilavuus on puolet alkuperäisestä. Sen sijaan paine ja lämpötila ovat intensiivisiä tilanmuuttujia, sillä nämä suuret eivät muutu systeemin koon muuttuessa. Ekstensiiviset tilanmuuttujat kuvavat aina jotakin kokonaismääräää, ja niillä on systeemissä tyypillisesti yksikäsitteinen arvo. Esimerkiksi kannelliseen astiaan suljetulla kaasulla on käytettävässään astian määräämä tilavuus ja kaasu koostuu tietystä määrästä ainetta. Intensiiviset tilanmuuttujat sen sijaan kuvavat aina jotakin paikallista ominaisuutta, ja niillä voi olla systeemin eri osissa eri arvot. Esimerkiksi lämmönjohtavuuden yhteydessä (kuva 7.26) tarkastelimme kappaleita, joiden päätt olivat eri lämpötiloissa ja joiden sisällä lämpötila muuttui paikasta toiseen siirryttääessä. Hydrostaattista painetta tutkiessamme (kuva 7.6) opimme paineen riippuvan korkeudesta. Intensiivisillä tilanmuuttujilla ei siis gleensä ole systeemissä vain yhtä arvoa vaan niiden arvo riippuu paikasta. Systeemien tilan kuvaminen yksinkertaistuu kuitenkin huomattavasti, jos myös jokaisella intensiivisillä tilanmuuttujalla on ainakin likimain sama arvo kaikkialla systeemissä, koska tällöin kutakin tilanmuuttujaa kuvaa systeemissä vain yksi numeroarvo. Termodynamiosten tilojen tarkastelussa gleensä olettetaan nän olevan, jos intensiivisten tilanmuuttujien paikkariippuvuutta ei ole erityisesti syytä huomioida. Silloinkin kun tämä ei ole totta, systeemi voidaan usein jakaa pienempiin osiin niin, että kussakin osassa jokaisella tilanmuuttujalla on yksi vakioarvo.



7.31 Kuvaako seuraavissa systeemeissä kaikkia tilanmuuttujia vain yksi arvo koko systeemissä?

- (a) Suljetussa asiassa on kaasua vakiolämpötilassa.
- (b) Kappale on kahden lämpösäiliön välissä ja johtaa lämpöä.
- (c) Kaksi eri lämpötiloissa olevaa kappaletta koskettaa toisiaan.

Oletetaan siis systeemin olevan tilassa, jossa sen jokaisella tilanmuuttujalla on kaikkialla sama arvo. Esimerkiksi systeemissä on kauttaaltaan sama lämpötila. Tilanmuuttujien arvojen tunteminen kuvaa siis systeemin tilan, mutta tämä logiikka toimii myös käännekkäin. Tapahtuipa systeemille mitä tahansa, jos se palaa takaisin samaan tilaan kuin missä se aluksi oli, sen tilanmuuttujien täytyy saada samat arvot kuin mitä niillä oli aluksi. Jos esimerkiksi säiliössä olevaa kaasua jäähdyytetään ja sitten kaasu taas lämmitetään takaisin samaan lämpötilaan ja tilavuuteen kuin aluksi, kaasu palaa samaan tilaan kuin missä se alunperinkin oli. Tällöin luonnollisesti kaasun lämpötila palaa samaan arvoon kuin aluksi, mutta niin palaavat *kaikki muutkin* tilanmuuttujat. Ei ole mahdollista jäähdyttää ja lämmittää kaasua niin, että sillä olisi lopuksi esimerkiksi sama lämpötila ja tilavuus kuin aluksi mutta eri paine. Huomaa kuitenkin että kaikki suuret eivät ole tilanmuuttujia. Esimerkiksi mekaanisen kappaleen paikka on sen tilaa kuvava suure, mutta kappaleen kulkeman matkan pituus ei ole, sillä samaan paikkaan voi päästä monia eri reittejä pitkin. Samaan tapaan lämpötila on tilanmuuttuja, mutta lämpöön sijertynyt energia ei ole, koska kappaleen voi lämmittää tiettyyn lämpötilaan monella eri tavalla.

Tilanyhtälöt

Mekaniikassa tilaa kuvavat suuret kuten kappaleen paikka ja nopeus ovat pääasiassa toisistaan riippumattomia. Yleensä kappaleen paikkaa ei voi päättää, jos tunnetaan kappaleen nopeus yhdellä hetkellä, sillä se, miten kappale yksittäisellä hetkellä liikkuu, ei mitenkään määräää sitä, missä kappale on. Lämpöilmiötä kuvavien tilanmuuttujien tapauksessa nän ei kuitenkaan ole. Suuret kuten paine, tilavuus ja lämpötila kaikki riippuvat toisistaan. Jos tilanmuuttujista muutama tunnetaan, kaikkien muiden arvot voidaan päättää tämän perusteella. Tälläista tilanmuuttujien keskinäistä riippuvuutta kuvavia matemaattisia lausekkeita kutsutaan **tilanyhtälöksi**.

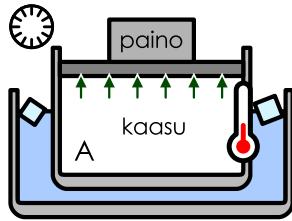
Olemme jo nähtneet esimerkkejä tällaisista tilanmuuttujien välisistä riippuvuksista, ja kuvaan 7.30 on koottu esimerkkejä prosesseista, joissa tilanmuuttujien väliset riippuvuudet näkyvät. Kuvassa (a) mänällinen kaasusäiliö on ympäröity jään ja veden sekoiutuksella, jonka lämpötila on 273 K. Tämä pitää myös kaasun lämpötilan vakiona. Säiliön mänän päällä oleva paino työntää mäntää säiliön sisään ja puristaa kaasua tuottaen paineen. Mänän pääälle lisätään sitten painoa, jolloin mäntä liikkuu säiliön sisään kunnes kaasun paineen mäntää kohdistama voima tasapainottaa painovoiman. Painoa lisätään sen verran, että kaasun paine kaksinkertaistuu, jolloin huomataan kaasun tilavuuden puolittuvan alkuperäiseen verrattuna. Kaasun paineen kasvattaminen ainemäärän ja lämpötilan ollessa vakio siis pienentää kaasun tilavuutta. Kokeet osoittavat, että *kaasun tilavuus on käännekkäin verrannollinen sen paineeseen*. Yhtälönä tämän voi kirjoittaa esimerkiksi muodossa

$$n, T = \text{vakio} \Rightarrow V = \frac{c_1}{p}, \quad (7.97)$$

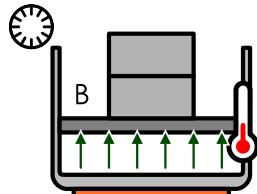
missä $c_1 = c_1(n, T)$ on jokin lämpötilasta ja ainemäärästä riippuva vakio.

Kuva 7.30: Kaasun tilanmuuttujien välisiä yhteyksiä erilaisissa prosesseissa. Vaikka tilanteet ovat erilaiset, kaasu on kuvissa vain neljässä eri tilassa, jotka on merkitty A, B, C ja D.

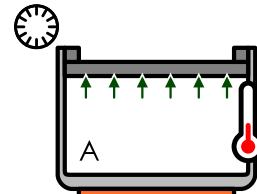
(a) n, T vakio: p kaksinkertaistuu ja V puolittuu.



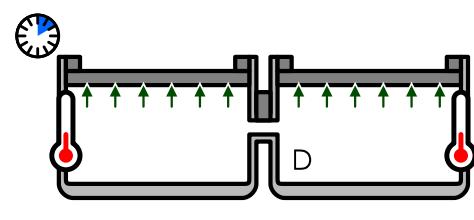
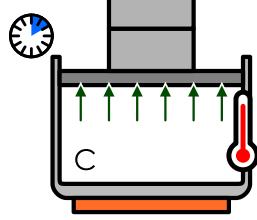
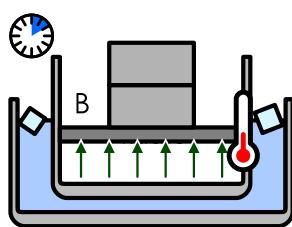
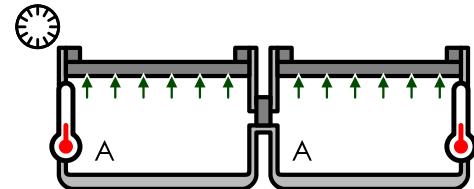
(b) n, p vakio: T ja V kaksinkertaistuvat.



(c) n, V vakio: T ja p kaksinkertaistuvat.



(d) p, T vakio: n ja V kaksinkertaistuvat.



Myös kuvassa 7.30 (b) kaasu on männällisessä säiliössä, jonka päällä oleva paino työntää mäntää ja tuottaa kaasun paineen. Nyt männän päällä oleva paino pidetään vakiona, joten kaasun paineenkin täytyy pysyä vakiona. Kaasu on aluksi kylmää, mutta sitä lämmitetään kunnes sen lämpötila on kaksinkertaistunut alkuperäiseen verrattuna. Lämmittäminen pyrkii kasvattamaan kaasun painetta, mikä saa kaasun työntämään mäntää ylöspäin. Kaasu laajenee kunnes mäntää kohdistivat voimat ovat jälleen tasapainossa. Kaasun lämpötilan kasvattaminen ainemäärän ja paineen ollessa vakio siis kasvattaa kaasun tilavuutta. Täsmällisesti tilavuus on suoraan verrannollinen lämpötilaan,

$$n, p = \text{vakio} \Rightarrow V = c_2 T, \quad (7.98)$$

missä $c_2 = c_2(n, p)$ on jokin paineesta ja ainemäärästä riippuva vakio.

Kuvassa 7.30 (c) kaasua lämmitetään niin, että säiliön tilavuus pidetään vakiona. Tällöin lämpötilan kaksinkertaistuessa paine kaksinkertaistuu, eli jos tilavuus pysyy vakiona, *kaasun paine on suoraan verrannollinen sen lämpötilaan*,

$$n, V = \text{vakio} \Rightarrow p = c_3 T, \quad (7.99)$$

missä $c_3 = c_3(n, V)$ on tilavuudesta ja ainemäärästä riippuva vakio.

Kaasun ainemääräkin voi toki muuttua, ja tämän vaikutuksen voi päättää kuvan 7.30 (d) kokeella. Oteaan nyt kaksi samanlaista säiliötä kuin edellisessä kokeessa. Kummassakin on yhtä paljon samaa kaasua samassa paineessa ja lämpötilassa. Säiliöiden välissä on suljettu venttiili, joten kyseessä on kaksi erillistä kaasusäiliötä. Sitten venttiili kuitenkin avataan, jolloin kaasut pääsevät levämään kumpaan tahansa säiliöön ja lopputulokseksi on yksi kaasusäiliö, jonka tilavuus on kaksinkertainen kumpaankin alkuperäiseen nähdyn. Samoin tämän säiliön sisällä on kaksinkertainen määrä kaasua kumpaankin yksittäiseen säiliöön verrattuna. Kaasujen lämpötila tai paine eivät luonnollisesti muutu miinhään, koska kummassakin säiliössä oli samaa kaasua täsmälleen samassa tilassa. Siispä tässä prosessissa lämpötila ja paine ovat vakiot ja *kaasun tilavuus on suoraan verrannollinen sen ainemäärään*,

$$p, T = \text{vakio} \Rightarrow V = c_4 n, \quad (7.100)$$

missä $c_4 = c_4(p, T)$.

Nämä kokeelliset tulokset voidaan yhdistää yhdeksi tilanyhtälöksi. Ensimmäinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $pV = c_1(n, T)$, ja sekä toinen että kolmas yhtälö toteutuu, jos $c_1(n, T) = c_5(n)T$, jolloin $pV = c_5(n)T$. Neljäskin yhtälö toteutuu, jos $c_5(n) = Rn$, missä R on vakio. Tällöin kaasun tilanmuuttuja p, V, n ja T yhdistäväksi tilanyhtälöksi saadaan

$$pV = nRT. \quad (7.101)$$

Tätä kutsutaan **ideaalikaasun tilanyhtälöksi**, ja se yhdistää kaasun tilaa kuvaavat suuret toisiinsa.

Nimitys "ideaalikaasu" viittaa siihen, että yhtälön liittyy oletuksia, jotka eivät aina ole voimassa. Se on approksimaatio, joka pätee kaasun tiheyden ollessa pieni. Erityisesti jos kaasun lämpötila ja paine ovat lähekkäitä olosuhteita, joissa kaasu tiivistyy nesteeksi, tilanmuuttujat eivät enää noudata tätä tilanyhtälöä. Silloinkin

tilanmuuttujat kyllä riippuvat toisistaan, mutta tätä riippuvuutta kuvaamaan tarvitaan monimutkaisempi matemaattinen lauseke. Jos kuitenkin kaasun lämpötila on korkea, paine pieni ja tilavuus suuri niin, että ollaan kaukana tiivistymisoloista, tämä sama tilanyhtälö kuvaaa *kaikkia kaasuja*. Erityisesti vakiolle R , jota kutsutaan *kaasuvakioksi*, saadaan kokeellisesti sama arvo $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$ kaikille kaasuille.

Koska ainemäärä on suoraan verrannollinen kaasun sisältämien hiukkasten lukumäärään, ideaalikaasun tilanyhtälön (7.101) voi kirjoittaa myös hiukkasten määrän N avulla ainemäärän n sijaan. Ainemäärän ja hiukkasten määrän välillä on yhteys $n = N/N_A$, ja tämän sijoitus tilanyhtälöön antaa $pV = NTR/N_A$. Tässä symbolit p , V ja T ovat kaasua kuvaavia tilanmuuttujia, ja R sekä N_A ovat vakioita. Erityisesti näiden vakioiden suhde on myös vakio. Tätä vakiota kutsutaan **Boltzmannin vakioksi** (Ludwig Boltzmannin mukaan) ja sillä on vakiintunut symboli

$$k_B = R/N_A = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (7.102)$$

Tämän vakion avulla ideaalikaasun tilanyhtälö voidaan siis kirjoittaa vaihtoehtoisiin muotoihin

$$pV = nRT = Nk_B T. \quad (7.103)$$

Boltzmannin vakio on erittäin tärkeä fysiikan perusvakio, jonka syvämpi merkitys selviää seuraavissa luvuissa. Boltzmannin vakion arvo on tarkka, sillä vuoden 2019 SI-yksiköiden uudessa määritellyssä lämpötilan yksikkö kelvin *määritellään* Boltzmannin vakion arvon kautta.

Vaikka kuvassa 7.30 on kuvattu neljä täysin erilaista prosessia, kaasu esiintyy kuvissa vain neljässä eri tilassa, jotka on merkitty kuvaan kirjaimin A, B, C ja D. Esimerkiksi kuvan (a) alkutilassa A kaasun tilavuus on suuri mutta paine, lämpötila ja ainemäärä ovat pienet. Kaasulla on kuitenkin sama ainemäärä, tilavuus ja lämpötila myös kuvan (c) alkutilassa. Tämä tarkoittaa ensinnäkin sitä, että kaasulla täytyy olla myös sama paine näissä tilanteissa, koska tilanyhtälö sitoo tilanmuuttujat toisiinsa. Jos kaasulla on kahdessa tilanteessa sama T , V ja n , niillä on *pakko olla myös sama* p . Toiseksi tämä tarkoittaa sitä, että kaasu on näissä tilanteissa *täsmälleen samassa tilassa*, jota tässä on siis merkitty kirjaimella A. Kaasun ympäristö on toki kuvissa (a) ja (c) erilainen ja kaasun tila muuttuu kuvatuissa prosesseissa eri tavoin, mutta koska kaasujen kaikki tilanmuuttujat ovat näissä tapauksissa samat, kaasut itse ovat kuvissa esitettyinä ajan hetkinä samassa tilassa.



7.32 Kuvassa 7.30 tilassa A lämpötila on $T_A = 273 \text{ K}$, tilavuus $V_A = 0.010 \text{ m}^3$ ja paine $p_A = 105 \text{ kPa}$. Mitkä ovat kaikkien tilanmuuttujien T , V , p ja n arvot kaikissa kuvan tiloissa A, B, C ja D?

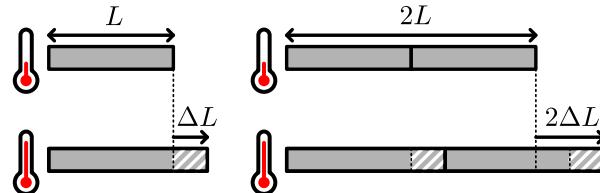
Lämpölaajeneminen

Tilanyhtälöt eivät yhdistä tilanmuuttujien arvoja vain kaasuissa vaan tilanmuuttujat riippuvat toisistaan aineen *kaikissa* olomuodoissa. Riippuvuus on kuitenkin eri olomuodoissa erilainen. Jos neste tai kiinteä aine tuodaan suureen paineeseen, myös näiden olomuotojen tilavuus pienenee hieman. Yleensä nämä tilavuuden muutokset ovat kuitenkin niin pieniä ja vaativat niin suuren paineen, että nesteitä ja kiinteitä aineita voi usein pitää kokoonpuristumattomina. Tarkkaan ottaen tilavuus ja paine (tai täsmällisemmin jännitys) riippuvat aina toisistaan. Samoin jos nestettä tai kiinteää ainetta lämmittää, niiden tilavuus gleensä kasvaa. Nesteitä ja kiinteitä aineita kuvaavat tilanyhtälöt ovat kuitenkin gleensä huomattavasti monimutkaisempia kuin ideaalikaasun tilanyhtälö, emmekä yrityt tässä johtaa mitään yleistä tilanyhtälöä näille olomuodoille. Tutkimme sen sijaan yhtä esimerkkiä tilanmuuttujien välisestä yhteydestä: kiinteän kappaleen koon ja lämpötilan välistä riippuvuutta eli **lämpölaajenemista**.

Tavallisesti kiinteiden aineiden tilavuus kasvaa niiden lämpötilan nostessa, jos ulkoinen paine ei muudu. Kuvassa 7.31 on esimerkkinä tästä pitkä ja kapea sauva, joka pitenee lämmetessään. Sauvan alkuperäistä pituutta on merkitty symbolilla L ja pituuden muutosta ΔL . Kuvassa on myös toinen, pituudeltaan kaksinkertainen sauva, jonka pituuden muutos on kaksinkertainen lyhyempään sauvaan nähden, kun sauvojen lämpötilat muuttuvat yhtä paljon. Näin täytyy olla, koska pitkän sauvan voi ajatella koostuvan kahdesta peräkkäin asetetusta lyhyestä sauvasta, ja jos kummankin lyhyen saavan pituuden muutos on ΔL , ne yhdessä pitenevät määrän $2\Delta L$. Suhteellinen muutos eli pituuden muutoksen suhde alkuperäiseen pituuteen on siis kummassakin tilanteessa sama. Jos lämpötilan muutos ΔT ei ole kovin suuri, sauvan pituuden suhteellinen muutos on suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen,

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T. \quad (7.104)$$

Kuva 7.31: Pitkän kiinteän kappaleen lämpölaajeneminen.



Tässä verrannollisuuskerroin

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T} \quad (7.105)$$

on pituuden lämpölaajenemiskerroin.

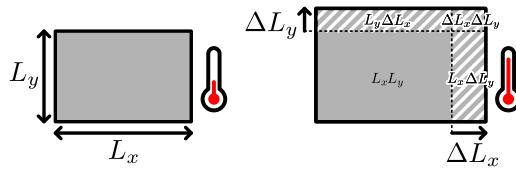
Jos lämpölaajenemiskerroin on suuri, pieni lämpötilan muutos riittää aiheuttamaan suuren muutoksen suvan pituudessa. Yleensä lämpölaajenemiskertoimet ovat kuitenkin varsin pieniä, jolloin merkittävä koon muutos vaatii suuren muutoksen lämpötilassa. Tyypillisesti kiinteiden aineiden lämpölaajenemiskertoimet ovat suuruusluokkaa 10^{-5} K^{-1} . Lämpölaajenemiskertoimet eivät ole kuitenkaan vakioita vaan ne riippuvat lämpötilasta. Niinpä yhtälö (7.104) on vain approksimaatio, joka pätee sitä paremmin mitä pienempi lämpötilan muutos on. Yleisesti lämpölaajenemiskerroin määritelläänkin pituuden derivaattana lämpötilan suhteeseen,

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial T}. \quad (7.106)$$



7.33 Selvitä, mikä on betonin pituuden lämpölaajenemiskerroin. Arvioi paljonko betonisen sillan pituudessa on eroa talven ja kesän välillä. Pitääkö tämä huomioida rakentamisessa?

Kuva 7.32: Tasomaisen kappaleen lämpölaajeneminen.



Jos kappale on tehty kauttaaltaan samasta materiaalista, sen koko muuttuu kaikissa suunnissa suhteellisesti yhtä paljon, jolloin kappaleen muoto ei muudu. Tätä on havainnollistettu kuvassa 7.32, jossa tarkastellaan suorakulmaisen levyn lämpölaajenemista. Levyn sivujen pituudet ovat aluksi L_x ja L_y , ja nämä pidentyvät lämpenemisen aikana suhteellisesti yhtä paljon, sivusuunnassa $\Delta L_x = L_x \alpha \Delta T$ ja pystysuunnassa $\Delta L_y = L_y \alpha \Delta T$. Levyn pinta-ala on siis aluksi

$$A_{\text{alku}} = L_x L_y \quad (7.107)$$

ja lopuksi

$$A_{\text{loppu}} = (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y) = L_x L_y + L_x \Delta L_y + L_y \Delta L_x + \Delta L_x \Delta L_y. \quad (7.108)$$

Näiden termien kuvaamat pinta-alat on merkitty myös kuvaan 7.32. Kuvassa pituuden suhteellisia muutoksia on kuitenkin liioiteltu. Kuten edellä todettuun, pituuden suhteellinen muutos on kiinteiden aineiden lämpölaajenemisessa tavallisesti hyvin pieni. Niinpä pituuden muutokset ΔL_x ja ΔL_y ovat todellisuudessa huomattavasti pienemmät kuin alkuperäispituudet L_x ja L_y . Tästä johtuen myös pinta-alan $\Delta L_x \Delta L_y$ täytyy olla todellisessa lämpölaajenemisessa hyvin pieni pinta-aloihin $L_x \Delta L_y$ ja $L_y \Delta L_x$ verrattuna. Näin voidaan approksimoida

$$A_{\text{loppu}} \approx L_x L_y + L_x \Delta L_y + L_y \Delta L_x. \quad (7.109)$$



7.34 Metallilevyssä on keskellä aukko. Levyä lämmitetään, jolloin metalli lämpölaajenee. Miten aukon koko muuttuu?

Nyt pituuden muutokset voidaan kirjoittaa lämpölaajenemiskertoimen ja lämpötilan muutoksen avulla, jolloin loppupinta-alan lausekkeeksi saadaan

$$A_{\text{loppu}} = L_x L_y + L_x L_y \alpha \Delta T + L_y L_x \alpha \Delta T = A_{\text{alku}}(1 + 2\alpha \Delta T). \quad (7.110)$$

Pinta-alan suhteellinen muutos on siis

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{\text{loppu}} - A_{\text{alku}}}{A_{\text{alku}}} = 2\alpha \Delta T = \beta \Delta T, \quad (7.111)$$

missä $\beta = 2\alpha$ on *pinta-alan lämpölaajenemiskerroin*. Tämän tuloksen mukaan pinta-alan suhteellinen muutos on verrannollinen lämpötilan muutokseen kuten pituudenkin suhteellinen muutos, mutta tämäkin on jälleen approksimaatio. Itse asiassa tämä tulos seuraa suoraan siitä, että jätimme pinta-alan $\Delta L_x \Delta L_y$ huomioidottomaksi. Jos lämpötilan muutokset ovat suuria, tämä ei ole välttämättä enää perusteltua eikä pinta-alan muutos ole enää suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen.

Tilavuuden lämpölaajeneminen voidaan analysoida aivan vastaavalla tavalla. Lopputulos on se, että jos lämpötila ei muudu kovin paljon, tilavuuden suhteellinen muutos on

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta T = \gamma \Delta T, \quad (7.112)$$

ja tässä $\gamma = 3\alpha$ on siis *tilavuuden lämpölaajenemiskerroin*.



7.35 Mikä on ideaalikaasun tilavuuden lämpölaajenemiskerroin tilaantyhtälön (7.103) mukaan?

esimerkki 7.5

Kitara

Eräässä kitarassa on teräskieli, jonka pituus on 610.0 mm. Kieli on vireessä, kun sitä jännittävä voima on 67.0 N. Kieli viritetään lämpötilassa 0.0 °C, ja seuraavaksi kitaraa soitetaan paikassa, jossa lämpötila on 30.0 °C. Mikä on nyt kielen jännitysvoima, jos kitaraa ei viritettä uudelleen? Kielen jousivakio on noin 49.0 kN/m, ja voit olettaa sen pysyvän muuttumattomana. Teräksen pituuden lämpölaajenemiskerroin on noin $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

TILANNE

Merkitään kielen pituutta $L = 610.0 \text{ mm}$, sen jousivakiota $k = 49.0 \text{ kN/m}$ ja tarvittavaa jännitysvoimaa $F = 67.0 \text{ N}$. Lämpötilan muutos on $\Delta T = 30.0 \text{ K}$ ja lämpölaajenemiskerroin $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

SUUNNITELMA Jännittävä voima venyttää kieltä hiukan, jolloin jännitysvoima riippuu Hooken lain mukaisesti venymästä. Kielen lepopituus L_0 on siis lyhyempi kuin kielen todellinen pituus L . Kun kieli lämpenee, se lämpölaajenee. Oletetaan, että kitaran kaula ei juuri lämpölaajene (tämä ei ole totta, mutta esimerkiksi puu lämpölaajenee vähemmän kuin teräs), jolloin kielen päättä on koko ajan kiinnitetty 610 mm etäisyydelle toisistaan. Kielen todellinen pituus ei siis muutu. Kielen lepopituus kuitenkin kasvaa lämpölaajenemisen takia, jolloin kielen venymä pienenee ja niinpä myös venytämiseen tarvittava jännitysvoima pienenee.

Jännityksen tuottama venymä on

$$\Delta L_F = \frac{F}{k}. \quad (7.113)$$

Lämpölaajenemisen tuottama lepopituuden muutos on puolestaan

$$\Delta L_T = L_0 \alpha \Delta T. \quad (7.114)$$

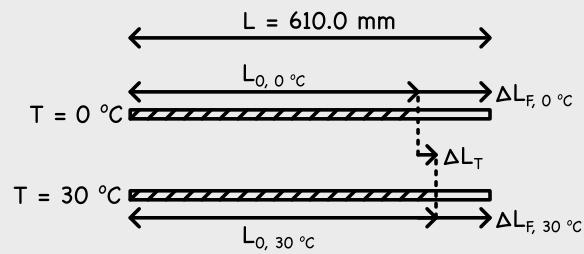
RATKAISU Kielen venymä on aluksi $\Delta L_{F,0^\circ\text{C}} = F/k = 1.3 \text{ mm}$, joten lepopituus on aluksi noin $L_{0,0^\circ\text{C}} = L - \Delta L_F = 608.7 \text{ mm}$. Kun kieli lämpenee, sen lepopituuden muutos on

$$\Delta L_T = L_0 \alpha \Delta T = 0.2 \text{ mm}, \quad (7.115)$$

eli uusi lepopituus on $L_{0,30^\circ\text{C}} = 608.9 \text{ mm}$. Jännitysvoiman tuottama venymä on nyt siis vain $\Delta L_{F,30^\circ\text{C}} = 1.1 \text{ mm}$, joten jännitysvoima on

$$F_{30^\circ\text{C}} = k \Delta L_{F,30^\circ\text{C}} = 54 \text{ N}. \quad (7.116)$$

ARVIOINTI Kielen jännitysvoima pienenee, mikä on järkevä. Jännitysvoiman muutos on noin 20 %, mikä vaikuttaa merkittävästi soittimen ääneen ja kitara pitää siis virittää uudestaan.



7.36 Selitä oman sanoin, mitä tarkoitetaan tilanmuuttujilla ja -yhtälöillä. Selitä, miten lämpötila, tilavuus ja paine riippuvat toisistaan kaasuissa ja kiinteissä aineissa.

Yhteenvetö: Jatkuva aine

Virtaavat aineet

- Kiinteä, neste ja kaasu ovat aineen **olomuotoja**. Aineen erilaisia tapoja järjestäytyä kutsutaan yleisesti **faaseiksi**.
- Faasidiagrammi on koordinaatistossa, jossa on esitetty aineen tasapainofaasi eri olosuhteissa.
- Paine on pintaan kohdistuvan voiman ja pinta-alan suhde,

$$p = \frac{F}{A}.$$

- Nesteet ja kaasut eli *fluidit* välittävät paineen kaikille koskettamilleen pinnoille.
- Nesteen tai kaasun ympäröimään kappaleeseen kohdistuu **noste**. Nosteen suunta on painovoimaa vastaan ja sen suuruus on sama kuin kappaleen syrjäyttämän fluidin paino

$$F_{\text{noste}} = \rho g V.$$

- Kokoontumaton jatkuva virtausta kuvaava *jatkuvuusyhtälö*,

$$vA = \text{vakio}, \quad (7.117)$$

jonka mukaan virtaavaa ainetta saapuu ja poistuu kaikkialla yhtä suuri tilavuus.

- Pyörteömässä kokoonpistumattomassa virtauksessa painetta kuvaava **Bernoulli yhtälö**, jonka mukaan *virtaviivalla* pätee

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{vakio}.$$

Tämän mukaan paine kasvaa siirryttäässä alaspäin ja virtausnopeuden kasvaessa.

Lämpöilmiot

- Lämpötila on termodynamiasta **tasapainotila** kuvava suure. **Termodynamiikan 0. pääsäännön** perusteella kaikki keskenään tasapainossa olevat kappaleet ovat samassa lämpötilassa.
- Lämpötilalla on absoluuttinen asteikko, jonka nollapiste on 0 K eli -273.15°C .
- Lämpö Q on epäjärjestyneenä siirryvä energiava. **Termodynamiikan 1. pääsäännön** mukaan energiava voi siirtää sekä työnä että lämpöänä.
- Systeemin kykyä vastaanottaa energiava lämpöön kuvaa **lämpökapasiteetti**

$$C = \frac{\partial Q}{\partial T}. \quad (7.118)$$

Aineen vastavaa ominaisuus on *ominaislämpökapasiteetti*.

- Olomuodon muutoksiin liittyvä energiava kutsutaan **latenttilämpöksi**.
- Eri lämpötiloissa olevat kappaleet pyrkivät termodynamiiseen tasapainoon. Niinpä energiava virtaa itsestään aina korkeasta lämpötilasta matalaan kunnes lämpötilaerot tasoittuvat. Tämä on **termodynamiikan 2. pääsääntö**.

- Jos kappaleen eri osat ovat eri lämpötiloissa, energia siirtyy lämpöön **johtumalla**. Siirryvä energiava kuvaa **lämpövuo**

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{dT}{dx}.$$

Tässä λ on aineen ominainen **lämmönjohtavuus**.

- Ainemäärä** kuvaa kappaleen sisältämien hiukkasten määrää. Yksi **mooli** tarkoittaa $6.022 \cdot 10^{23}$ hiukkasta.
- Systeemin tilaa kuvavia suureita kutsutaan **tilanmuuttujiksi**. Tilanmuuttujien välistä riippuvuutta kuvaa **tilanyhtälö**. Kaasulle pätee likimain *ideaalikaasun tilanyhtälö*

$$pV = nRT = Nk_B T.$$

Tässä vakio $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$ on *kaasuvakio* ja $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ on *Boltzmannin vakio*.

- Kiinteissä aineissa pituuden ja lämpötilan yhteyttä kuvaa **lämpölaajeneminen**

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T, \quad \frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälö** on yhtälö, jossa esiintyy funktio ja sen derivaattoja. Tämän ratkaiseminen tarkoittaa differentiaaliyhtälön toteuttavan funktion etsimistä.
- Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi on monia menetelmiä:
 - Yrite** on ratkaisun arvaus. Se voidaan osoittaa oikeaksi sijoittamalla differentiaaliyhtälöön.
 - Separoinnissa** toisistaan riippuvat muuttujat erotellaan ja integroidaan erikseen.

- Yhtälön

$$f'(t) + Af(t) + B = 0$$

ratkaisu on funktio

$$f(t) = -\frac{B}{A} + Ce^{-At}.$$

Tässä f ja t voivat olla mitkä tahansa toisistaan riippuvat suuret, A ja B ovat tunnetut vakiot, ja vakio C täytyy määritellä erillisen **alkuehdon** avulla.

Sanasto

- olomuoto, faasi (phase)
- kiinteä (solid)
- neste (liquid)
- kaasu (gas)
- virtaava aine, fluidi (fluid)
- puristusjännitys (compressive stress)
- vemytsjännitys (tensile stress)
- tilavuuspuristusjännitys (bulk stress)
- leikkausjännitys (shear stress)
- paine (pressure)
- kokoonpistumaton (incompressible)
- noste (buoyancy)
- virtaus (flow)
- virtaviiva (streamline)
- pyörteeton, laminaarinen (laminar)
- pyörteellinen, turbulentti (turbulent)

- lämpötila (temperature)
- ainemäärä (amount of substance)
- mooli (mole)
- absoluuttinen nollapiste (absolute zero)
- tasapainotila (equilibrium state)
- lämpö (heat)
- latenttilämpö (latent heat)
- vuo (flux)
- lämmönjohtavuus (thermal conductivity)
- lämpökapasiteetti (heat capacity)
- lämpölaajeneminen (thermal expansion)
- tilanmuuttuja (state variable)
- tilanyhtälö (equation of state)
- differentiaaliyhtälö (differential equation)
- yrite (ansatz)
- alkuehko (initial condition)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

7.1 Vedellä on useita erilaisia kiunteitä faaseja eli on olemassa monenlaista jäättä. Maapallolla näistä esiintyy vain yhtä, tavallista jäättä, mutta hyvin suressa paineessa ja matalissa lämpötiloissa vesimolekyylit voivat muodostaa monenlaisia rakenteita.

7.2 Ensimmäinen koe kohdistaa paperiin venytysjännityksen. Paperin repiminen on tällä tavalla vaikeaa, joten paperi vastustaa venytystä hyvin. Normaali repiminen kohdistaa paperiin leikkausjännityksen, ja tälläista jännitystä paperin rakenne ei pysty vastustamaan ja niinpä paperi repeää helposti.

7.3 Ekvivalenssiperiaatteentäytäväksessä astian koordinaatistossa havaitaan kiihtyvyydestä johtuva näennäisvoima. Tämä näennäisvoima vaikuttaa nesteeseen painovoiman tavoin, mutta voiman suunta on kiihtyvyydlle vastakkainen ja voiman suuruus on ma_x eikä mg . Niinpä näennäisvoima tuottaa nesteeseen sivusuuntainen hydrostaattisen paineen $p(x) = p_0 - \rho_{\text{air}}gx$. (Toki nesteeseen vaikuttaa myös todellisen painovoiman hydrostaattinen paine.) Paine on siis työnnettävällä sivulla suurempi kuin vastakkaisella sivulla.

7.4 (a) Ilmanpaine on noin $p = 10^5$ Pa, joten se kohdistaa pinta-alaan $A = 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} = 0.01 \text{ m}^2$ voiman $F = pA = 1000 \text{ N}$.

(b) Vastaavan voiman tuottaa massa m , jolla $F = mg$ eli $m = F/g \approx 100 \text{ kg}$.

(c) Maan säde on noin $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$, joten maapallon pinta-ala on noin $A = 4\pi R^2 = 5 \cdot 10^{14}$. Koko pintaan ilmanpaine kohdistaa voiman $F = pA = 5 \cdot 10^{19} \text{ N}$, mikä vastaa ilmamassaa $m = F/g = 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$.

7.5 (a) Pilli toimii niin, että imemällä tuotetaan alipaine pillin yläpähän. Tällöin mehulaisissa olevan mehun pintaan kohdistuva ilmanpaine tuottaa mehuun voiman, joka työntää mehua pilliä ylös. Suussa olevan ilman paine työntää mehua alas päin, mutta koska suussa paine on pienempi kuin ilmanpaine, tämä voima on mehua ylös työntävä painetta pienempi. Lisäksi mehun kohotessa pilliin, mehun oma paino vetää mehua alas päin. Mehu nousee niin korkealle, että suussa oleva paine ja pillissä olevan mehun hydrostaattinen paine ovat lasissa olevan mehun pinnan tasolla yhtä suuret kuin ulkoinen ilmanpaine.

(b) Jos pilli on hyvin leveä, pillin sisään voi päästää ilmakuplia ja pilliin voi muodostua virtauksia. Periaatteessa kuitenkin mielivaltaisen leveä pilli tai putki voi toimia. Pilli ei kuitenkaan voi olla mielivaltaisen korkea. Jos pillin yläpähän imetään tyhjiö, paine siellä on nolla. Tällöin ulkoinen ilmanpaine voi työntää nesteen korkeintaan niin korkealle, että pilliin nousseen nestepatsaan hydrostaattinen paine pillin alapäässä on yhtä suuri kuin ilmanpaine, $p_{\text{ilm}} = \rho g z_{\max}$. Veden tapauksessa siis $z_{\max} = p_{\text{ilm}} / (\rho g) \approx 10^5 \text{ Pa} / (10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2) = 10 \text{ m}$. Mehua ei siis voi imeä pillillä 10 metriä korkeammalle.

7.6 (a) Jos nesteen paino on merkittävä, osa työstää kuluu nesteen potentiaalienergian kasvattamiseen.

(b) Jos nosto tapahtuu nopeasti, osa työstää kuluu taakan liike-energian kasvattamiseen.

(c) Kaasu ei ole kokoonpuristumatonta, jolloin osa työstää voi kulua kaasun puristamiseen, mikä lämmittää kaasua. Tosin, näin käy vain siinä tapauksessa, että aluksi putki itsessään kannattelee suurta mäntää. Jos mäntä lepää vain kaasun päällä, taakka on puristanut kaasun jo valmiaksi kasaan eikä kaasu puristu enempää. Tällöin laite toimii aivan samalla tavalla kuin hydraulinen laite.

7.7 (a) Pallon paino eli siihen kohdistuva painovoima on vakio, $G_{\text{pallo}} = mg = \rho_{\text{pallo}} V_{\text{pallo}} g$.

(b) Kappaleeseen kohdistuva neste riippuu kappaleen syrjäyttämän veden tilavuudesta, joten neste on tilanteessa 1 nolla ja muissa tilanteissa $F_{\text{noste}} = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{pallo}} g$. Noste on pienempi kuin pallon paino, koska kappale on vettä tiheämpi.

(c) Kaikissa tilanteissa astia joutuu kannattelemaan veden ja sen päällä olevan ilman painoa, ja tilanteessa 1 tämä on astian ja veden välinen kokonaisvoima. Voit ajatella niin, että astian pohjalla vallitsee paine $p = p_{\text{ilm}} + \rho_{\text{vesi}} gh_{\text{vesi}}$, jolloin vesi kohdistaa astian pohjaan voiman $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = pA = p_{\text{ilm}} A + \rho_{\text{vesi}} gh_{\text{vesi}} A = p_{\text{ilm}} A + \rho_{\text{vesi}} g V_{\text{vesi}} = p_{\text{ilm}} A + G_{\text{vesi}}$. Astia kohdistaa vastavoiman lain mukaan veteen yhtä suuren voiman. Tilanteessa 2 vesi kohdistaa palloon nosteen ylöspäin, jolloin pallo kohdistaa veteen tämän vastavoiman alas päin. Niinpä nyt astian pohjaan kohdistuu voima $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = p_{\text{ilm}} A + G_{\text{vesi}} + F_{\text{noste}}$. Samaan tulokseen päästääsiin myös paineen kautta. Nyt nimitän veden pinta on korkeammalla kuin tilanteessa 1, koska pallo syrjäyttää oman tilavuutensa verran vettä, $V_{\text{pallo}} = A\Delta h_{\text{vesi}}$. Niinpä $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = pA = p_{\text{ilm}} A + \rho_{\text{vesi}} g(h_{\text{vesi}} + \Delta h_{\text{vesi}})A = p_{\text{ilm}} A + \rho_{\text{vesi}} g(V_{\text{vesi}} + V_{\text{pallo}}) = p_{\text{ilm}} A + G_{\text{vesi}} + F_{\text{noste}}$. Tilanteessa 3 astian pohja joutuu kannattelemaan myös pohjalla makaavaa palloa. Niinpä astian pohjaan kohdistuu vedenpaineen voima sekä kappaleen ja astian välinen normaalivoima. Koska vesi ja pallo ovat levossa, astian pohjan täytyy kohdistaa niihin yhtä suuri voima kuin veden ja pallon paino yhteensä, $F_{\text{vesi} \rightarrow \text{astia}} = p_{\text{ilm}} A + G_{\text{vesi}} + G_{\text{pallo}}$. Voima on siis suurempi kuin tilanteessa 2.

7.9 Todennäköisesti ihmisten kulkunopeus hidastuu polulla ja polun alkuun syntyy ruuhka. Ihmiset siis käyttäytyvät täysin päinvastoin kuin virtaava neste. Tämä johtuu siitä, että ihmisten virtaus ei ole tasainen eikä kokoonpuristumatton. Jos ihmisiä olisi niin paljon, että leveä tie olisi aivan täynnä, ihmiset joutuisivat jonottamaan polulle pääsyä. Tällöin ihmisten nopeus tiellä olisi pienempi kuin polulla, ja ihmisten virtaus käyttäytyisi samaan tapaan kuin virtaavan nesteen virtaus.

7.10 Putken poikkileikkaus läpi kulkeva tilavuusvuoto (tilavuus/aika) on siis $\Delta V = vA$. Virtauksen kuljettamana massavuo (massa/tilavuus) on siis $\Delta m = \rho \Delta V = \rho vA$. Jatkuvuusyhtälökseen saadaan siis

$$\rho_{\text{suuri}} v_{\text{suuri}} A_{\text{suuri}} = \rho_{\text{pieni}} v_{\text{pieni}} A_{\text{pieni}} \quad (7.119)$$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

7.11 Ainoa ero kuvissa on putken kapeamman pään korkeus. (a) Virtausnopeus pienessä putkessa määrätyy jatkuvuusyhälöstä, joten nopeus on sama kummassakin kuvassa. (b) Koska nopeus on sama, myös liike-energia on sama. (c) Kun putken loppupää on korkealla, nesteen potentiaalienergia kasvaa. Niinpä nesteeseen täytyy tehdä enemmän työtä kuvassa 7.14. (d) Koska nesteeseen tehdään enemmän työtä kuvassa 7.14, paine-ero putken pääiden välillä on tässä kuvassa suurempi. Niinpä paine kapeassa putkessa on pienempi kuvassa 7.14.

7.12 (a) Ei. Pumppu tekee veteen työtä ja tuottaa sitä kautta ylimääräisen paine-eron.

(b) Pätee. Kyseessä on tasainen virtaus, vaikka neste ei olekaan putkessa.

(c) Ei. Valitut pistet eivät ole samalla virtaviiwalla.

7.14 Nesteen korkeus mittarissa on suoraan verrannollinen kaasusäiliönpaineeseen, joten mittari mittaa oikeastaan tätä painetta. Jos määrittelemme lämpötilan tämän lämpömittarin lukeman kautta, ja lukema mittaa painetta, paineen ja lämpötilan täytyy olla lineaarisesti verrannolliset.

7.15 Ei. Nesteiden tilavuus riippuu lämpötilasta, mutta tilavuus ei ole suoraan verrannollinen absoluuttiseen lämpötilaan kuten kaasuilla. Se etttä kaasuilla ekstrapoloidut kuvaajat leikkaavat samassa pisteessä, ei ole mitenkään itsestään selvää.

7.16 Jos 0. säätö ei pätsi, kappale voisi olla tasapainossa kahden eri lämpömittarin kanssa niin, etttä lämpömittarit eivät kuitenkaan olisi tasapainossa keskenään. Kuitenkin jos lämpömittarit eivät ole keskenään tasapainossa, ne näyttävät eri lämpötiloja. Jos siis tällainen tilanne olisi mahdollinen, kaksi erilaista periaatteessa toimivaa ja kalibroitua lämpömittaria näyttäisi kappaleelle erilaista lämpötilaa. Ja jos näin olisi, lämpötilaa ei voisi luotettavasti mitata. Itse asiassa lämpötila itsessään ei olisi järkevä suure.

7.18 (a) Moolissa on $N_A = 6.0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ molekyyliä, joten yhden molekyylin massa on $m = 0.018 \text{ kg/mol}/N_A = 3.0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

(b) Kilogrammassa vettä on siis $1 \text{ kg}/(3.0 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) = 3.3 \cdot 10^{25} \text{ molekyyliä}$.

(c) Ominaislämpökapasiteetti molekyyliä kohti on $4.2 \text{ kJ/kgK}/3.3 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1} = 1.3 \cdot 10^{-22} \text{ J/K}$.

(d) Ominaislämpökapasiteetti moolia kohti on $4.2 \text{ kJ/kgK} * 0.018 \text{ kg/mol} = 76 \text{ J/molK}$.

7.19 (a) Oletetaan jäänen olevan jo lämpötilassa 0°C . Sulatus vaatii energian $Q_{\text{sulaminen}} = mL = 0.010 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 3.34 \text{ kJ}$, lämmitys $Q_{\text{lämpeneminen}} = Cm\Delta T = 4.2 \text{ kJ/kgK} \cdot 0.010 \text{ kg} \cdot 100K = 4.2 \text{ kJ}$ ja kiehutus $Q_{\text{höyrystyminen}} = mL = 0.010 \text{ kg} \cdot 2260 \text{ kJ/kg} = 22.6 \text{ kJ}$. Kaikkiaan energiaa vaaditaan $Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sulaminen}} + Q_{\text{lämpeneminen}} + Q_{\text{höyrystyminen}} = 30.1 \text{ kJ}$. Tästä sulattamiseen kului 11 %, lämmittämiseen 14 % ja höyristämiseen 75 %.

(b) Jos kuutiolla olisi tämä liike-energia, $K = \frac{1}{2}mv^2 = Q_{\text{kokonais}}$, se saisi vauhdin $v = \sqrt{2Q_{\text{kokonais}}/m} = 2500 \text{ m/s}$. Tämä on valtava vauhti. Tarinan opetus on se, etttä lämpöilmiöihin liittyvät energiat ovat tavallisesti paljon suuremmat kuin mekaanisiin ilmiöihin liittyvät energiat.

7.20 (a) Kappaleiden läpi voi toki kulkea erilaiset tehot, mutta silloin kappaleiden liitoskohtaan saapuvan energian ja sieltä poistuvan energian tehot eivät ole samat. Tällöin energian määrä liitoskohdassa joko lisääntyy tai vähentyy ja lämpötila muuttuu rajapinnalla. Lopuksen lopuksi rajapinta asettuu lämpötilaan, jossa lämpöä siirtyy kummankin kappaleen läpi samalla teholta.

(b) Merkitään lämpötilaeroa A:n ja liitoskohdan välillä kappaleen A pääiden välillä ΔT_A ja B:n vastaavasti ΔT_B . Nyt siis $P_A = k_A \Delta T_A = k_B \Delta T_B = P_B$, josta $\Delta T_A/\Delta T_B = k_B/k_A = 2$ eli $\Delta T_A = 2\Delta T_B$. Koska lämpötilaero lämpösäiliöiden välillä on $\Delta T_A + \Delta T_B = 30 \text{ K}$, täytyy olla $\Delta T_A = 20 \text{ K}$ ja $\Delta T_B = 10 \text{ K}$. Lämpötila liitoskohdassa on siis 300 K.

(c) Energiaa siirtyy teholta $P = P_A = P_B = k_A \Delta T_A = 20 \text{ W}$.

(d) Kokonaislämmönjohtavuus on $k = P/\Delta T = 20 \text{ W}/30 \text{ K} = 0.67 \text{ W/K}$. Huomaa, etttä kokonaislämmönjohtavuus on pienempi kuin kumpikaan johtavuksista k_A tai k_B . Näin täytyy olla, koska kaksi peräkkäistä eristettä eristää paremmin kuin kumpikaan yksinään.

7.21 Kokonaislämmönjohtavuus: $[k] = [P]/[\Delta T] = \text{W/K}$. Ominaislämmönjohtavuus: $[\lambda] = [P][L]/([A][\Delta T]) = \text{W/Km}$. Ikkunan lämmönjohtavuus on ilmoitettu pinta-alaa kohti, joten kyseessä on vakio a yhtälöstä $P = aA\Delta T$. Vakio kertoo, kuinka suuri teho ikkunan läpi kulkee ikkunapinta-alaa ja lämpötilaeroa kohden.

7.23 dQ_{ulos} on systeemistä ulos virtaava energia. Jos systeemi jäähtyy, tämä on positiivinen, koska lämpöä siirtyy ympäristöön. dT on systeemin lämpötila. Jos systeemi jäähtyy, tämä on negatiivinen. Niinpä dQ_{ulos} ja dT ovat erimerkkiset, ja koska C on positiivinen, yhtälöön tarvitaan miinusmerkki.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

7.24 (a) Jos lämpötila olisi vakio, lämpötilan muutokseksi sekunnissa saataisiin $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.5 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \text{ K} \cdot 1 \text{ s} = -10 \text{ K}$.

(b) Tällöin siis olisi $T(1) = 290 \text{ K}$.

(c) Nyt $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.5 \text{ s}^{-1} \cdot 10 \text{ K} \cdot 1 \text{ s} = -5 \text{ K}$.

(d) Siis $T(2) = 285 \text{ K}$.

(e) Edellisessä mallissa lämpötilan muutos oli aina puolet kappaleen ja ympäristön välisestä lämpötilaeroista. Jos aika-askeleen pituus on vain puoli sekuntia, lämpötilan muutos on $\Delta T = -\frac{k}{C}(T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})\Delta t = 0.25(T - T_{\text{ilma}})$ eli neljännes lämpötilaeroista. Niinpä tässä mallissa saataisiin $T(0) = 300 \text{ K}$, $T(0.5) = 295 \text{ K}$, $T(1) = 291.25 \text{ K}$, $T(1.5) = 288.4 \text{ K}$ ja $T(2) = 286.3 \text{ K}$.

(f) Mitä lyhyempää aika-askeleta käytetään, sitä parempi tulos luonnollisesti saadaan. Siispä $T(2) = 286.3 \text{ K}$ on parempi arvio kappaleen lämpötilalle kahden sekunnin kuluttua kuin $T(2) = 285 \text{ K}$. Täsmällinen lasku vaatii raja-arvoa, jossa aika-askeleen pituus lähestyy nolla.

7.25 (a) Ensinnäkin eksponenttifunktio on yksikötön samoin kuin sen argumentti. Siksi pitää olla $[c] = \text{s}$. Yhtälön kummallakin puolella on oltava sama yksikkö, joten $[T] = [a] + [b] = \text{K}$, joten $[a] = [b] = \text{K}$.

(b) Jos $c > 0$, $e^{-t/c} \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Siispä $T = a + be^{-t/c} \rightarrow a$.

(c) Aluksi lämpötila on yritteen mukaan $T(0) = a + be^0 = a + b$ ja lopuksi edellisen kohdan mukaan b . Vakiot a ja b voidaan siis ratkaista suoraan, alku- ja loppulämpötilojen perusteella. Vakiota c sen sijaan ei voi.

7.26 Kysytty lämpötila on noin 318 K kaikissa tapauksissa. Vakio c on se aika, jossa systeemin ja ympäristön lämpötilaero muuttuu tekijällä $e^{-1} = 0.368$. Tässä lämpötilaero on aluksi 60 K, joten ajan c kuluttua eroksi jää $0.368 \cdot 60 \text{ K} \approx 22 \text{ K}$. Ympäristön lämpötila on tässä $a = 295 \text{ K}$, joten systeemin lämpötila on $295 \text{ K} + 22 \text{ K} = 317 \text{ K}$

7.27 Vakiot a ja b . Ks. vastaus 7.25.

7.28 Lämpötila on ajan funktio $T(t) = 280 \text{ K} + 20 \text{ K} \cdot e^{-0.5 \text{ s}^{-1} \cdot t}$, joten $T(2 \text{ s}) = 287.4 \text{ K}$. Tehtävässä 7.18 saimme arviot 285 K ja 286.3 K jakamalla ajan yhden sekunnin ja puolen sekunnin askeleisiin. Todellinen ratkaisu on näitä hieman suurempi.

7.29 Virhe tapahtuu integraalissa $\int(T - T_{\text{ilma}})dt$. Kysymyksen virheellinen lasku toimii vain, jos $T - T_{\text{ilma}}$ on vakio. Nyt kuitenkin lämpötila on ajan funktio, jolloin pitää integroida ajasta riippuvaa funktiota $\int[T(t) - T_{\text{ilma}}]dt$. Tätä integraalia ei voi laskea tuntematta funktiota $T(t)$, joten differentiaalitähöä ei voi ratkaista tällä tavalla. (Jos haluat lisäharjoitusta, voit sijoittaa integraaliin lausekkeen $T(t) = T_{\text{ilma}} + (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t}$ ja integroida. Tulokseksi pitäisi tulla $\int(T - T_{\text{ilma}})dt = (T_{\text{alku}} - T_{\text{ilma}})e^{-\frac{k}{C}t} + c$, missä c on integrointivakio. Tämä lasku antaa kyllä oikean lopputuloksen, mutta näin ei tosiaan voi laskea ellei funktiota $T(t)$ tiedetä jo etukäteen.)

7.31 (a) Kyllä, jos kaasun lämpötila ja paine ovat likimain vakiot koko astiassa.

(b) Ei. Kappaleen päät ovat selvästikin eri lämpötiloissa, jolloin yksi lämpötilan arvo ei voi kuvata koko systeemiä.

(c) Ei. Kappaleet ovat eri lämpötiloissa, jolloin yksi lämpötilan arvo ei voi kuvata koko systeemiä.

7.32 Tilassa A ainemäärä on ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella $n = pV/(RT) = 0.46 \text{ mol}$.

Tilassa B: $n = 0.46 \text{ mol}$, $T = 273 \text{ K}$, $p = 210 \text{ kPa}$ ja $V = 0.005 \text{ m}^3$.

Tilassa C: $n = 0.46 \text{ mol}$, $T = 546 \text{ K}$, $p = 210 \text{ kPa}$ ja $V = 0.010 \text{ m}^3$.

Tilassa D: $n = 0.92 \text{ mol}$, $T = 273 \text{ K}$, $p = 105 \text{ kPa}$ ja $V = 0.020 \text{ m}^3$.

7.33 Betonin pituuden lämpölaajenemiskerroin on luokkaa $2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, joten jos talven ja kesän välillä voi olla esim. 50 K lämpötilaero, tämä tarkoittaa esim. 10 m pituisessa sillassa pituuseroa $\Delta L = 1 \text{ cm}$. Tämä on tarpeeksi aiheuttamaan halkeamia, minkä vuoksi betonirakennuksiin kuten siltoihin jätetään betoniosien väliin rakoja.

7.34 Levyn lämpölaajeneminen suurentaa levyn kaikkia mittoja samalla kertoimella, jolloin myös aukko laajenee, ja aukon laajenemista kuvaavat sama lämpölaajenemiskerroin kuin ympäröivää levyä.

7.35 Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaan $V = \frac{1}{p}nRT$. Niinpä jos kaasun lämpötila muuttuu määrään ΔT , sen uudeksi tilavuudeksi tulee $V + \Delta V = \frac{1}{p}nR(T + \Delta T) = V + \frac{1}{p}nR\Delta T$. Siispä tilavuuden muutos on $\Delta V = \frac{1}{p}nR\Delta T$ ja suhteellinen muutos on

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{nR\Delta T/p}{nRT/p} = \frac{1}{T}\Delta T. \quad (7.120)$$

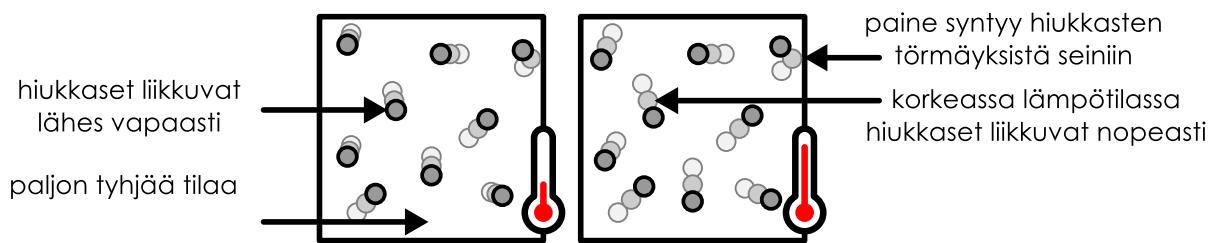
Vertaamalla tästä yhtälöön $\Delta V/V = \gamma\Delta T$ nähdään, että kaasun tilavuuden lämpölaajenemiskerroin on $\gamma = 1/T$.

Edellisessä luvussa tutustuimme lämpöilmöihin käyttäen pelkästään jatkuvan aineen mallia. Opimme paljon siitä *miten* lämpöilmiöt käyttäytyvät, mutta emme kuitenkaan juuri voineet selittää *miksi* ilmiöt toimivat kuten toimivat. Tiedämme esimerkiksi, että energia pyrkii siirtymään itsestään aina kuumasta kylmään eikä koskaan pääinvastoin, mutta syytä tähän jatkuvan aineen lämpööppi ei kerro. Aine ei kuitenkaan todellisuudessa ole jatkuvaan vaan se koostuu atomeista ja molekyyleistä — siis hiukkasista. Tässä luvussa tutkimmekin aineen hiukasmallia ja opimme kuinka makroskooppiset lämpöilmöt voidaan ymmärtää mikroskooppisten atomien ja molekyylien mekanikan kautta. Makroskooppisessa mittakaavassa yksittäisiä hiukkasia ei voi havaita, mutta makroskooppiset suuret kuvastavat hiukkasjoukon *keskimääräisiä* ominaisuuksia. Keskiarvot käyttäytyvät oleellisesti eri tavoin kuin yksittäisten kappaleiden tai hiukkosten ominaisuudet, ja niille pätevät erilaiset lait kuin yksittäisille hiukkasille. Erityisesti hiukkasten keskimääräinen käyttäytyminen selittää, miksi lämpötilaeroit tasaantuvat itsestään ja systeemit pyrkivät termodynamiiseen tasapainoon. Tähän liittyy erityisen tärkeä uusi suure, entropia.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla, miten hiukkasten keskiarvoiset ominaisuudet lütttyvät aineen makroskooppiisiin suureisiin
- määritellä vapausaste ja määrittää molekyylin vapausasteiden määrä
- määrittää ideaalikaasun paine, sisäenergia, lämpötila ja ominaislämpökapasiteetti sen molekyylien ominaisuuksien avulla
- määritellä entropia hiukkasjoukon ominaisuuksien perusteella ja laskea yksinkertaisen systeemin entropia
- laskea ideaalikaasun entropia
- määritellä lämpötila entropian avulla

Kuva 8.1: Ideaalikaasumalli kuvaa kaasua joukkona hyvin pieniä, törmäileviä hiukkasia, jotka eivät vuorovaikuta lähes ollenkaan.



8.1 Kaasun hiukkasmalli

Tutustuimme kaasujen tilanmuuttuihin ja niiden välisiä riippuuksia kuvavaan ideaalikaasun tilanyhtälöön jo aikaisemmin. Tällöin kuitenkin hyväksyimme tilanyhtälön kokeellisena havaintona. Nyt tarkoituksenamme on tutkia tarkemmin, miten kaasuja makroskooppisesti kuvaavat suuret kuten paine ja lämpötila syntyvät mikroskooppisten kaasuhiukkasten käytöksestä.

Aloitetaan määrittelemällä täsmällisesti, mitä oikein tarkoitetaan ideaalikaasulla. Kaasu on aineen olo-muoto, jossa molekyylien liike-energia on kyllin suuri rikkomaan niiden väliset sidokset. Niinpä kaasuissa molekyyilit liikkuvat nopeasti, vuorovaikuttavat hyvin heikosti ja molekyylien väliset etäisydyt ovat molekyylien kokoon nähden suuret. *Ideaalikaasu* puolestaan on hyvin yksinkertainen kaasujen *malli*. Ideaalikaasun voi ajatella olevan kuin kokoelma äärimmäisen pieniä kumpalloja, jotka liikkuvat hyvin nopeasti ja pomppivat lakkamatta täysin elastisesti. Ideaalikaasumallissa tehdään seuraavat oletukset:

- Kaasu koostuu hiukkasista (atomeista tai molekyyleistä) joiden tilavuus on nolla.
- Hiukkaset vuorovaikuttavat vain törmätessään toisiinsa.

Ensimmäinen oletus tarkoittaa sitä, että jos kaasu on suljettu säiliöön, kaasumolekyyleillä on käytettävissään koko säiliön tilavuus. Todellisen kaasun tapauksessa näin ei ole, sillä molekyyleillä on pieni mutta nollaa suurempi koko ja etenkään kaasua ei voi puristaa mielivaltaisen pieneen tilavuuteen. Toinen oletus tarkoittaa puolestaan sitä, että molekyylien välillä ei ole pitkän kantaman vuorovaikutuksia, jotka vaikuttaisivat molekyylien liukkeeseen tai niiden energiaan. Vaikka ideaalikaasun molekyyilit voivat periaatteessa törmällä, gleensä voi aivan hyvin ajatella, että kaasu on harvaa ja molekyylit törmäävät hyvin harvoin. Yksittäiset molekyyilit voivat siis kulkea lähes vapaasti ja niiden voi ajatella liikkuvan kuin ne olisivat yksin säiliössään.

Ideaalikaasu kuvailee todellisia kaasuja hyvin, kun kaasujen lämpötila on suuri tai paine on pieni, koska tällöin kaasumolekyyilit liikkuvat nopeasti ja niillä on paljon tilaa, jolloin ne eivät juurikaan huomaa muita molekyylejä. Jos lämpötila sen sijaan on matala ja paine suuri, lähestytään olosuhteita, jossa kaasu nesteytyy, ja tällöin todellisten kaasujen käytös ei vastaa ideaalikaasun ennusteita. Ei olekaan mielekästä pohtia, mitkä kaasut noudattavat ideaalikaasumallia vaan missä *olosuhteissa* mikäkin kaasu käyttäätyy kuten ideaalikaasu.

Vaikka todelliset molekyyilit ovat monimutkaisempia ololta kuin "äärimmäisen pienet kumpallot", ideaalikaasumallin avulla voidaan selittää monia todellisten kaasujen makroskooppisia ominaisuuksia pelkästään kaasun muodostavien hiukkasten mekanikan kautta. Makroskooppisista suureista tilavuuksista luonnollisesti kaasun sisältävän säiliön koko ja ainemäärä mittata kaasun muodostavien hiukkasten määrä. Kaasun paine syntyy mallin mukaan hiukkasten törmäyksistä säiliön seiniin, ja lämpötila puolestaan mittata hiukkasten liike-energiaa — siis vauhtia.

Ideaalikaasun paine

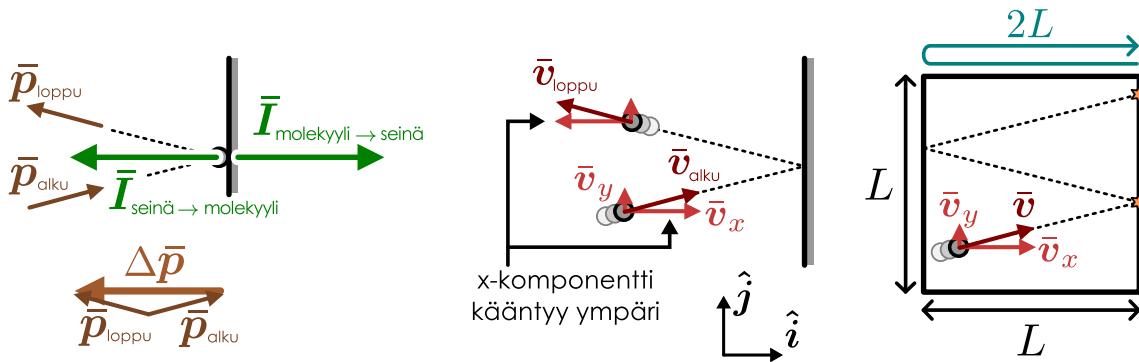
Tarkastellaan ideaalikaasua, joka on suljettu kuution muotoiseen säiliöön, missä sivun pituus on L . Kokeellisesti tiedämme, että kaasu kohdistaa säiliön seinämään paineen, joka pyrkii työntämään seiniä ulospäin. Toisin sanoen kaasu vuorovaikuttaa säiliön seinien kanssa. Ideaalikaasussa vuorovaikutukset ovat törmäyksiä, joten paineen täytyy syntyä kaasun molekyylien törmäyksistä säiliön seinämään. Molekyyilit ovat pieniä, joten yhdessä törmäyksessä seinä saa mitättömän impulssin. Toisaalta makroskooppisessa säiliössä on valtava määrä nopeasti liikkuvia molekyylejä, ja seinään kohdistuvien törmäysten yhteisvaiketus voi tuottaa suurenkin voiman ja sitä kautta paineen.

Tarkastellaan ensin yksittäisen molekyylin yhtä törmäystä seinään. Koska molekyyli ei pääse seinän läpi, seinän täytyy kohdistaa molekyylin törmäyksessä impulssi (kuva 8.2 (a))

$$\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}}, \quad (8.1)$$

Kuva 8.2: Törmäessään säiliön seinään kaasumolekyli kohdistaa siihen impulssin. Nämä törmäykset synnyttävät kaasun paineen.

- (a) Impulssi muuttaa molekyylin liikemäärää. (b) Törmäyksessä molekyylin nopeuden seinälle kohtisuora komponentti käännytys. (c) Törmäysten välillä molekyyli kulkee kahdesti säiliön poikki.



ja samalla molekyyli kohdistaa seinään yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen vastaimpulssin

$$\bar{I}_{\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = -\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}}. \quad (8.2)$$

Molekyyliin kohdistunut impulssi muuttaa molekyylin liikkeen suuntaa niin, että molekyyli kimpoaa takaisin säiliöön. Seinään kohdistunut impulssi puolestaan työntää seinää ulospäin.

Törmäyksen tarkkaa analyysiä varten asetetaan koordinaatisto niin, että säiliön seinä on yz -tasossa ja positiivinen x -suunta on kohti seinää. Oletetaan myös seinän olevan täysin sileä ja törmäyksien elastiset. Molekyylien mittakaavassa sileys ei ole järkevä oletus, mutta näin säästymme eri suuntiin tapahtuvien kimpoamisten huomioimiselta ja lopputulos on sama. Elastisuus puolestaan on järkevä oletus, koska jos kaasuhukkaset ovat atomeja tai jäykkä molekyylejä, niiden liike-energia ei voi muuttua sisäenergiaksi kuten makroskooppisten kappaleiden törmäyksissä.

Tämän mallin mukaan molekyylin saama impulssi osoittaa seinää vastaan kohtisuoraan, negatiiviseen x -suuntaan, ja niinpä myös molekyylin liikemäärään muutos on negatiiviseen x -suuntaan. Liikemäärään y - ja z -komponentit ovat siis vakiot ja x -suuntainen komponentti vaihtaa suuntaa. Edelleen koska törmäys on elastinen, molekyylin liike-energia on törmäyksen jälkeen sama kuin ennen törmäystä eli molekyylin *vauhdin* on säilyttävä vakiona. Mutta vektorin \bar{v} pituus ja kaksi komponenttia voivat pysyä vakioina ainoastaan jos kolmannenkaan komponentin pituus ei muutu. Siispä nopeuden x -komponentin täytyy käännytyä ympäri (kuva 8.2 (b))

$$v_{x,\text{loppu}} = -v_{x,\text{alku}}. \quad (8.3)$$

Molekyylin liikemäärään muutos on siten

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}_{\text{loppu}} - \bar{p}_{\text{alku}} = m \bar{v}_{\text{loppu}} - m \bar{v}_{\text{alku}} = m(v_{x,\text{loppu}} - v_{x,\text{alku}})\hat{i} = -2mv_{x,\text{alku}}\hat{i}. \quad (8.4)$$

Impulssin määritelmän (2.71) perusteella molekyylin liikemäärään muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin molekyylin saama impulssi, joten seinän saama impulssi on

$$\bar{I}_{\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = -\bar{I}_{\text{seinä} \rightarrow \text{molekyyli}} = -\Delta \bar{p} = 2mv_{x,\text{alku}}\hat{i} = 2m|v_x|\hat{i}. \quad (8.5)$$

Viimeisessä yhtäsuurudessa on huomioitu se, että molekyylin nopeuden itseisarvo ei törmäyksessä muutu, joten molekyylin alkunopeuden x -skalaarikomponentti on sama kuin molekyylin nopeuden x -komponentin itseisarvo milloin tahansa.

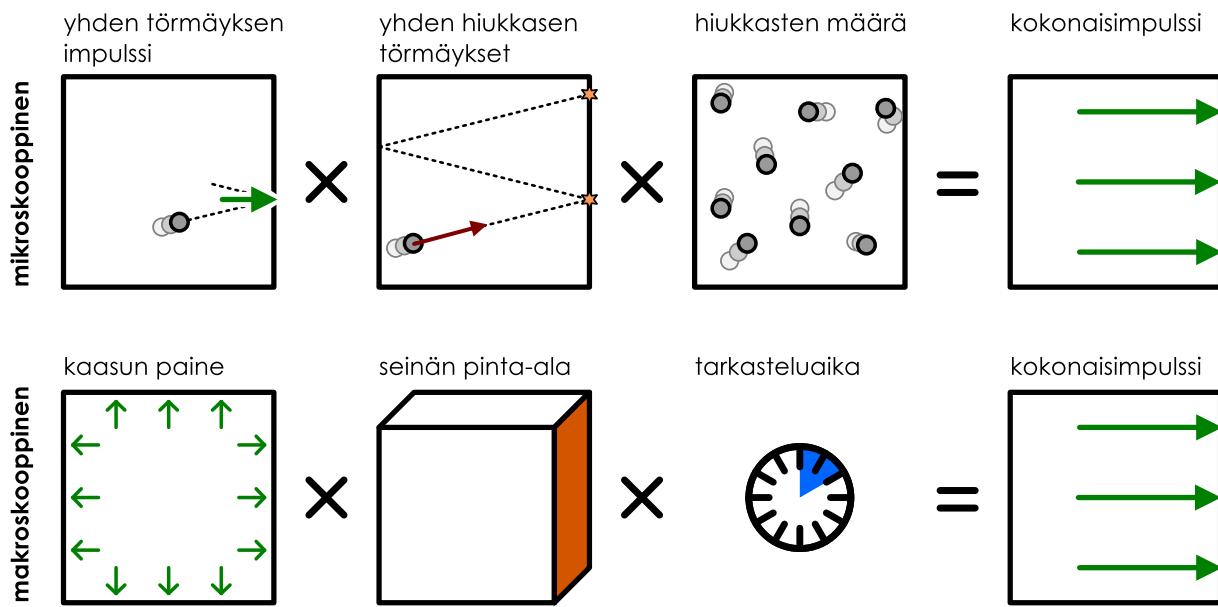
Koska seinään kohdistuva paine syntyy useiden törmäysten yhteisvaikutuksesta, arvioidaan seuraavaksi kuinka usein molekyyli törmää seinään. Koska molekyyli on säiliön sisällä, se kimpoilee edestakaisin säiliön kahden yz -suuntaisen seinän välissä vakiovauhdilla. Törmättäään seinään kerran molekyylin täytyy kulkea vastakkaiselle seinälle ja takaisin ennen kuin se törmää samaan seinään uudestaan (kuva 8.2 (c)). Koska säiliön pituus x -suunnassa on L , molekyyli kulkee edestakaisen matkan $2L$ säiliön poikki ajassa

$$\Delta t_{\text{osuma}} = \frac{2L}{|v_x|}. \quad (8.6)$$

Tämä molekyyli ehtii ajassa Δt törmätä samaan seinään

$$n_{\text{osuma}} = \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{osuma}}} = \frac{\Delta t |v_x|}{2L} \quad (8.7)$$

Kuva 8.3: Kaasun seinään kohdistaman impulssin mikroskooppinen ja makroskooppinen selitys.



kertaa. Kaikkiaan molekyyli tuottaa siis tässä ajassa kokonaisimpulssin

$$I_{x,\text{molekyyli}} = n_{\text{osuma}} I_{x,\text{molekyyli} \rightarrow \text{seinä}} = \frac{\Delta t |v_x|}{2L} 2m |v_x| = \frac{m}{L} v_x^2 \Delta t. \quad (8.8)$$

Koska säiliössä on N molekyyliä, seinään kohdistuva kokonaisimpulssi saadaan laskemalla näiden molekyylien törmäysten antamat impulssit yhteen. Jos merkitään molekyylejä indeksin 1, 2, jne., kokonaisimpulssi on

$$I_{x,\text{kokonais}} = I_{x,1} + I_{x,2} + \dots = \frac{m}{L} v_{x,1}^2 \Delta t + \frac{m}{L} v_{x,2}^2 \Delta t + \dots = \frac{m}{L} (v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots) \Delta t = \frac{m}{L} \Delta t \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2. \quad (8.9)$$

Tässä lausekkeessa esiintyy summa kaikkien kaasun hiukkasten nopeuksien x -komponenttien neliöistä, jota emme tietenkään voi sellaisenaan laskea. Tämä voidaan kuitenkin kirjoittaa yksinkertaisemmin *hiukkasten yli lasketun keskiarvon* avulla. Tällainen keskiarvo lasketaan määritelmän mukaisesti summaamalla yhteen suureen arvo jokaiselle hiukkaselle ja jakamalla hiukkasten lukumäärällä. Merkitsemme tässä tekstillä suureen keskiarvoa kulmasulkeilla

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} (v_{x,1}^2 + v_{x,2}^2 + \dots) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2. \quad (8.10)$$

Kokonaisimpulssi voidaan tämän avulla ilmoittaa muodossa

$$I_{x,\text{kokonais}} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L} \Delta t. \quad (8.11)$$

8.1 Sinulla on laatikossa 100 superpalloa (massa 50 g). Kaadat pallot maahan 2 m korkeudelta. Pallot pomppaavat likimain elastisesti osuessaan maahan. Kuinka suuren impulssin pallot antavat maanpinnalle törmäysessä?

Makroskoopisessa mittakaavassa hiukkasten seinään kohdistama voima on vakio, koska hiukkastörmäyksiä tapahtuu niin paljon, että keskimäärin seinään on aina törmäämässä yhtä paljon hiukkasia. Edelleen vakio-voiman impulssi on voima kerrottuna voiman vaikutusajalla, $I_x = F_x \Delta t$, yhtälön (3.51) mukaisesti. Niinpä seinään kohdistuva voima on

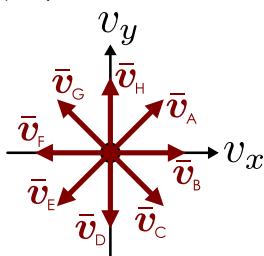
$$F_{x,\text{kokonais}} = \frac{I_{x,\text{kokonais}}}{\Delta t} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L} \quad (8.12)$$

ja edelleen paine on seinään kohdistuva voima jaettuna seinän pinta-alalla

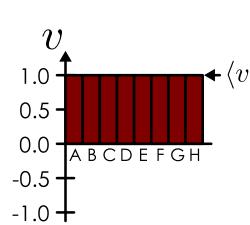
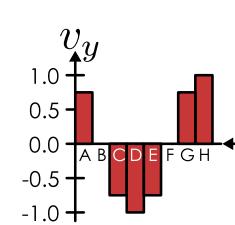
$$p = \frac{F_{x,\text{kokonais}}}{L^2} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L^3} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}, \quad (8.13)$$

Kuva 8.4: Vektorisuureiden statistiikkaa. Kahdeksan yhtä pitkän mutta erisuuntaisen vektorin pituuden, skalaarikomponentin sekä näiden neliön jakaumat ja keskiarvot.

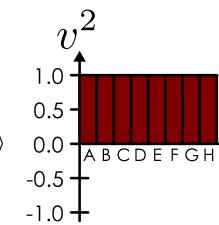
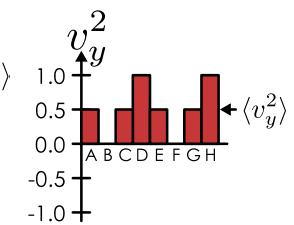
(a) Nopeusvektoreita.



(b) Vektorien pituudet.

(c) y -komponentit.

(d) Pituuksien neliöt.

(e) y -komponenttien neliöt.

missä on sijoitettu laatikon tilavuus $V = L^3$. Tarkastelimme tässä yksinkertaisuuden vuoksi kuution muotoista säiliötä, mutta koska kaasun paine jakautuu tasaisesti, säiliön *muodolla* ei loppujen lopuksi ole merkitystä vaan ainoastaan tilavuudella.



8.2 Kaasun paine kasvaa, jos säiliön tilavuus pienenee tai molekyylien nopeus kasvaa. Selitä kuvan 8.3 gläirivin kuvien perusteella, mihin asioihin säiliön koko ja molekyylien nopeus vaikuttaa. Selitä erityisesti miksi paine on suoraan verrannollinen molekyylien nopeuden neliöön (eikä esimerkiksi nopeuteen itseensä).

Kuvassa 8.3 on kuvallisesti esitetty edellä käytetty päättely sekä makroskooppisessa että mikroskooppisessa mittakaavassa. Mikroskooppisesti kaasun seinään kohdistama impulssi ja voima pääteiltiin laskemalla paljonko molekyylejä seinään törmää ja kuinka suuren impulssin ne antavat. Toisaalta makroskooppisesti sama asia ilmastiin kaasun paineen ja säiliön koon perusteella, ja näin mikroskooppiset ja makroskooppiset suureet saatiin yhdistettyä.

Tulosta voidaan kuitenkin edelleen sieventää. Keskiarvon ottaminen on *lineaarinen operaatio*, mikä tarjoittaa summan keskiarvon olevan sama kuin keskiarvojen summa, $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$. Tämän voi päättellä suoralla laskulla

$$\langle a + b \rangle = \frac{1}{N}(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots) = \frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \dots) + \frac{1}{N}(b_1 + b_2 + \dots) = \langle a \rangle + \langle b \rangle. \quad (8.14)$$

Lisäksi nopeusvektorille pätee Pythagoraan lause $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, joten nopeuden neliön keskiarvo on sama kuin nopeuden skalaarikomponenttien neliöiden keskiarvojen summa

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle. \quad (8.15)$$

Edelleen koska ei ole mitään syytä miksi kaasun molekyylit liikkuisivat mihinkään suuntaan nopeammin kuin toisiin, täytyy näiden komponenttien neliöiden keskiarvojen olla symmetriarenkaan perusteella samat,

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle, \quad (8.16)$$

ja niinpä nopeuden keskiarvo ja yhden komponentin keskiarvo ovat toisiinsa verrannolliset

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle. \quad (8.17)$$

Edellä esitettyä keskiarvoihin liittyvä päättely on havainnollistettu kuvassa 8.4, jossa on piirretty erisuuntaisten vektoreiden pituuksien ja skalaarikomponenttien jakaumia ja näiden perusteella laskettuja keskiarvoja. Esimerkki on *kaksilottainen*, joten siinä nopeuksien y -komponenttien neliöiden keskiarvoksi $\langle v_y^2 \rangle$ saadaan *puolet* nopeuksien neliöiden keskiarvosta $\langle v^2 \rangle$. *Kolmessä ulottuvuudessa* nopeuden kunkin skalaarikomponentin neliön keskiarvo on samalla periaatteella *kolmannes* nopeuden neliöiden keskiarvosta $\langle v^2 \rangle$.

Paineen lausekkeessa esiintyvä molekyylien *nopeuden x-komponenttien* neliöllinen keskiarvo voidaan siis korvata *nopeuden* neliöiden keskiarvolla lisäämällä samalla mukaan kerroin $1/3$,

$$p = \frac{Nm\langle v^2 \rangle}{3V}. \quad (8.18)$$

Kaasun paine on siis verrannollinen molekyylien nopeuksien neliöiden keskiarvoon. Neliöllinen verrannollisuus johtuu edellä esitetyn mukaan siitä, että sekä molekyylitörmäysten lukumäärä että yhden törmäyksen antama impulssi ovat molemmat suoraan verrannollisia molekyylien nopeuteen. Keskiarvo $\langle v^2 \rangle$ on hiukkasten statistiikassa niin tärkeä, että sen neliöjuurrelle on annettu oma nimi, **neliöllinen keskinopeus** eli **rms-nopeus** (engl. *root-mean-square*)

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (8.19)$$

Rms-nopeus on tilastollinen tunnusluku, joka määritelmän mukaisesti saadaan

- laskemalla nopeuden neliö kaikille kaasun hiukkasille
- laskemalla nämä nopeuden neliöt yhteen
- jakamalla hiukkasten kokonaismäärellä ja
- ottamalla neliöjuuri.



8.3 Systeemissä on kolme hiukkasta, joiden nopeusvektorit ovat $\vec{v}_1 = (1 \text{ m/s})\hat{i} + (4 \text{ m/s})\hat{j}$, $\vec{v}_2 = (-3 \text{ m/s})\hat{i} + (-2 \text{ m/s})\hat{j}$ ja $\vec{v}_3 = (2 \text{ m/s})\hat{i} + (-2 \text{ m/s})\hat{j}$. Mitä ovat seuraavat keskiarvot? (a) $\langle v_x \rangle$, (b) $\langle v_y \rangle$, (c) $\langle \vec{v} \rangle$, (d) $\langle v \rangle$, (e) $\langle v_x^2 \rangle$, (f) $\langle v^2 \rangle$, (g) $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

Paine voidaan kirjoittaa rms-nopeuden avulla myös muodossa $p = Nmv_{\text{rms}}^2/(3V)$. Koska rms-nopeuden määritelmässä nopeudet korotetaan ensin neliöön ja vasta näiden summasta otetaan neliöjuuri, rms-nopeus on aina *suurempi tai yhtä suuri* kuin hiukkasten vauhtien keskiarvo $\langle v \rangle$. Tavallisesti keskinopeus ja rms-nopeus ovat kuitenkin samaa suuruusluokkaa.

Ideaalikaasun lämpötila

Vertaamalla molekyylimallin perusteella johdettua paineen lauseketta (8.18) kokeellisesti löydettyyn ideaalkaasun tilanyhtälöön

$$pV = Nk_B T \quad (8.20)$$

nähdään heti, että makroskooppisen lämpötilan ja mikroskooppisten suureiden välillä täytyy päteä yhteys

$$k_B T = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} m v_{\text{rms}}^2. \quad (8.21)$$

Kaasun lämpötila kuten painekin on siis verrannollinen molekyylien rms-nopeuden neliöön. Kysymys on siitä, että lämpötila liittyy aineen *sisäenergiaan* — mitä kuumempi kappale on, sitä enemmän sisäenergiaa siihen on sitoutunut. Toisaalta ainakin osa kaasun sisäenergiasta on molekyylien liikkeen energiata, joten mitä nopeammin molekyylit liikkuvat, sitä kuumempi kappale on.

Molekyylien etenevä liikkeen liike-energioiden keskiarvo on

$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2, \quad (8.22)$$

joten lämpötila ja liike-energia ovat tämän perusteella *suoraan verrannolliset* toisiinsa,

$$k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle \quad (8.23)$$

tai päinvastoin

$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (8.24)$$

Yhtälössä esiintyvä Boltzmannin vakio $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ yksikkö on energia jaettuna lämpötilalla, joten tämän vakion fysikaalinen merkitys on muuntaa lämpötilan yksiköt energian yksiköiksi. Vakion numeerinen arvo puolestaan riippuu siitä, millaisia yksiköitä lämpötilalle ja energialle käytetään. Koska $\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle$ on *yhden* molekyylin keskimääräinen liike-energia, joka on jouleissa hyvin pieni koska molekyylin massa on pieni, myös Boltzmannin vakio on SI-yksiköissä pieni.



8.4 -(a) Miksi yhtälössä (8.22) voitiin siirtää keskiarvo lausekkeen $\frac{1}{2}mv^2$ ympäriltä sen sisälle? Toisin sanoen milloin on sallittua kirjoittaa $\langle ab \rangle = a \langle b \rangle$? (b) Onko $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$ yleisesti totta?

Liike-energian ja lämpötilan välinen verrannollisuuskerroin $3/2$ on myös mielenkiintoinen. Liike-energia voidaan nimittää yhtälön (8.17) mukaisesti hajottaa liikkeen erisuuntaisten komponenttien osuiksiksi, koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön

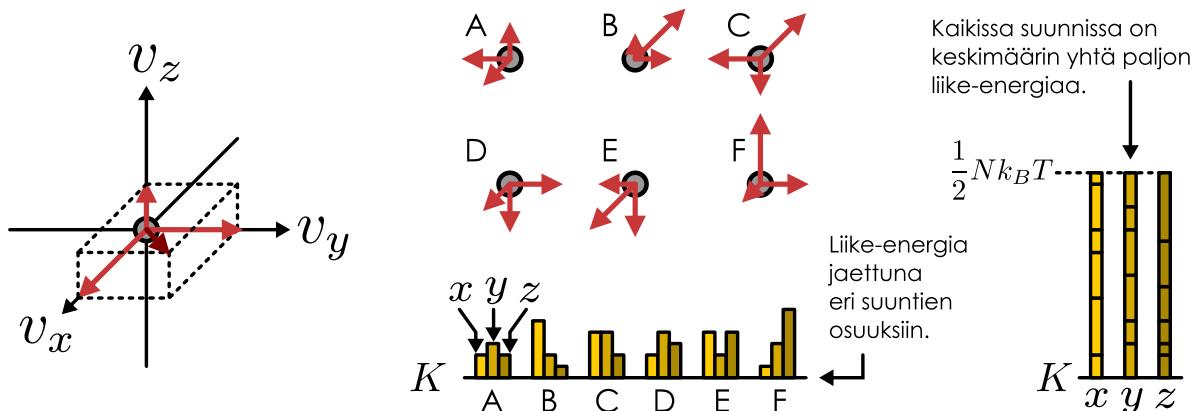
$$\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle = \langle K_{v_x} \rangle + \langle K_{v_y} \rangle + \langle K_{v_z} \rangle, \quad (8.25)$$

missä esimerkiksi $\langle K_{v_x} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle$ on molekyylien x -suuntaisen liikkeen keskimääräinen energia. Edelleen koska kaasun hiukkasia liikkuu keskimäärin yhtä paljon eri suuntiin, näiden erisuuntaisten nopeuden komponenttien varastoimat energiat ovat *yhtä suuret*,

$$\langle K_{v_x} \rangle = \langle K_{v_y} \rangle = \langle K_{v_z} \rangle = \frac{1}{3} \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (8.26)$$

Kuva 8.5: Kaasun hiukkasilta on satunnaiset nopeudet, mutta jos liike-energia jaetaan erisuuntaisten nopeuden komponenttien osuuksiin, jokaisessa suunnassa hiukkasilta on yhtä paljon energiaa.

- (a) Yhdellä hiukkasella on satunnaiset nopeudet, mutta jos liike-energia jaetaan erisuuntaisten nopeuden komponenttien.



Toisin sanoen kolmiulotteisessa avaruudessa kaasun hiukkaset liikkuvat x -, y - ja z -suunnissa, ja *jokaisessa suunnassa tapahtuvaan liikkeeseen liittyy lämpötilassa T keskimäärin energia $\frac{1}{2} k_B T$ molekyyliä kohti*. Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.5. Periaatetta, jonka mukaan tiettyssä lämpötilassa kaikkiin eri energian muotoihin on varastoitunut keskimäärin yhtä paljon energiota, kutsutaan **energian ekvipartitioksi** (latinaa, equi = 'tasan', partitio = 'jako'). Tämä on hiukkasten fysiikassa erittäin tärkeä ja hyödyllinen periaate, ja tutkimme sitä tarkemmin luvussa 8.3.



8.5 Mikä olisi yksiatomisen ideaalikaasun sisäenergian riippuvuus lämpötilasta, jos avaruudessa olisi neljä paikkaulottuvuutta?

Koska ideaalikaasun hiukkaset eivät vuorovaikuta lähes ollenkaan, *atomeista* koostuvan kaasun sisäenergia on *pelkästään* hiukkasten etenevän liikkeen energiota. Niinpä tällaisessa kaasussa yhden hiukkisen energia on keskimäärin $\langle K_{\text{molekyyli}} \rangle$ ja kaikkiaan N atomista koostuvan kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä,yksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekyyli}} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T, \quad (8.27)$$

missä tekijä 3 on siis edellä esitetyn päättelyn perusteella *avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä*. Erityisesti huomataan, että *ideaalikaasun sisäenergia riippuu ainoastaan lämpötilasta ja ainemäärästä*. Vaikka kaasun painetta ja tilavuutta muuttaisiin, kaasun varastointuneen energian määrä ei muutu, jos kaasun lämpötila pysyy vakiona.

Jos kaasu kuitenkin koostuu molekyyleistä eikä atomeista kuten useimmat todelliset kaasut, molekyyleillä voi olla *tämän lisäksi* muitakin energiota kuin pelkkää suoraviivaisen liikkeen energiota ja niinpä tällaisten kaasujen sisäenergia on samassa lämpötilassa *suurempi* kuin yhtälön (8.27) esittämä energia. Tällaisten kaasujen kykyä varastoida energiota tarkastelemme seuraavassa luvussa.



8.6 Kirjoita omien sanojen tiivistelmä ideaalikaasun hiukkasmallista. Kerro erityisesti, miten malli selittää paineen ja lämpötilan sekä mistä tekijöistä (hiukkasmäärä, hiukkasten massa, hiukkasten nopeus, säiliön tilavuus) nämä riippuvat.

esimerkki 8.1

Ideaalikaasun paine ja lämpötila

Kaasusäiliöissä A ja B on 2 mol heliumia He. Säiliön A tilavuus on 0.02 m^3 ja säiliön B tilavuus on 0.04 m^3 . Kaasutatomien rms-vauhti on 900 m/s . (a) Mikä on kaasun sisäenergia? (b) Mikä on kaasun lämpötila? (c) Mikä on kaasun paine?

SUUNNITELMA Heliumatomien massa on noin $m_{\text{He}} = 4.00u = 13.3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Sisäenergia riippuu vain kaasuhuikkasten massasta ja nopeudesta, ja lämpötila on suoraan verrannollinen sisäenergiaan. Nämä suureet ovat siis samat kummassakin säiliössä. Paine sen sijaan riippuu näiden lisäksi säiliön tilavuudesta, joten säiliössä on eri paine.

Kaasuhuikkasia on noin

$$N = nN_A = 1.2 \cdot 10^{24}. \quad (8.28)$$

Yhden hiukkasen keskimääräinen energia on $\langle K \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$ joten koko kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä}} = N \langle K \rangle. \quad (8.29)$$

Toisaalta sisäenergia on suoraan verrannollinen lämpötilaan

$$E_{\text{sisä}} = \frac{3}{2}Nk_B T, \quad (8.30)$$

joten lämpötila voidaan ratkaista tästä. Kaasun paine voidaan laskea relatiolla (8.18),

$$p = \frac{Nm v_{\text{rms}}^2}{3V}. \quad (8.31)$$

RATKAISU (a) Sisäenergia on $E_{\text{sisä}} = 6.5 \text{ kJ}$. (b) Lämpötilaksi ratkeaa

$$T = \frac{2E_{\text{sisä}}}{3Nk_B} = \frac{mv_{\text{rms}}^2}{3k_B} = 260 \text{ K}. \quad (8.32)$$

(c) Paine säiliössä A on $p_A = 215 \text{ kPa}$ ja säiliössä B $p_B = 108 \text{ kPa}$.

ARVIOINTI Voimme tarkistaa tuloksen sijoittamalla lasketut arvot ideaalikaasun tilanyhtälöön. Paineen ja tilavuuden tulo on kummassakin säiliössä $pV = 4309 \text{ J}$. Lämpötilan, hiukkasmäärän ja Boltzmannin vakion tulo on puolestaan $Nk_B T = 4308 \text{ J}$. Tilanyhtälö $pV = Nk_B T$ siis pätee (pieni ero johtuu välitulosten pyörityksistä).

Huomaa, että vaikka kaasuhuikkasten vauhti on huimat 900 m/s , kaasun lämpötila on vain 260 K eli noin -13°C . Heliumatomit kulkevat matalissakin lämpötiloissa hyvin nopeasti, koska niiden massa on niin pieni.

8.2 Kaasujen ominaislämpökapasiteetti

Lämpökapasiteetteja on makroskooppisesti melko helppo mitata, ja näin voidaan taulukoida ominaislämpökapasiteettien arvoja eri aineille. Nämä tehtäessä huomataan kuitenkin, että ominaislämpökapasiteeteissa on säädönmukaisuutta. Esimerkiksi jalokaasujen kuten heliumin (He), neonin (Ne) ja argonin (Ar) vakiotilavuudessa ainemäärä kohti mitatut ominaislämpökapasiteetit ovat *samat*, noin $c_V^n = 12.5 \text{ J/(molK)}$. Vastaavasti monien tavallisten kaksiatomisten kaasujen kuten vedyn (H_2), hapen (O_2) ja typen (N_2) ominaislämpökapasiteetit ovat keskenään likimain samat, noin $c_V^n = 21 \text{ J/(molK)}$. Makroskooppinen jatkuvan aineen malli ei kuitenkaan lainkaan selitä *miksi* näin on. Tässä luvussa käytämmekin aineen hiukkasmallia näiden havaintojen ymmärtämiseksi.



8.7 Jos kahden kaasun ominaislämpökapasiteetti ainemäärästä kohden on sama, ovatko myös kaasujen massaa tai hiukkasmäärää kohden lasketut ominaislämpökapasiteetit samat?

Vapausasteet

Opimme juuri, että *yksiatomisista hiukkasista* koostuvan ideaalikaasun sisäenergia riippuu lämpötilasta yhtälön (8.27) mukaisesti, $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = \frac{3}{2}Nk_B T$. Jos tällaista kaasua lämmitetään, sen lämpötila nousee, koska kaasun sisäenergia kasvaa lämmön siirtymessä ympäristöstä kaasun. Eritäysesti, jos kaasua lämmitetään *vakiotilavuudessa*, kaikki tuotu lämpö Q siirryy kaasun sisäenergiaksi, $\Delta E_{\text{sisä}} = Q$. Tällöin kaasun ominaislämpökapasiteetin täytyy määritelmän mukaisesti olla

$$c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} = \frac{1}{N/N_A} \frac{\partial E_{\text{sisä}}}{\partial T}, \quad (8.33)$$

missä on huomioitu, että ainemäärä n on hiukkasten lukumäärä jaettuna Avogadron luvulla (koska yhdessä moolissa on N_A hiukkasta). Derivoimalla sisäenergian lauseketta ja huomioimalla, että kaasuvakion $R = 8.31 \text{ J/(molK)}$, Boltzmannin vakion k_B sekä Avogadron luvun välillä on yhteys $R = N_A k_B$, saadaan hyvin yksinkertainen tulos

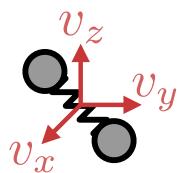
$$c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{N_A}{N} \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} N_A k_B = \frac{3}{2} R = 12.5 \frac{\text{J}}{\text{molK}}. \quad (8.34)$$

Tämän päättelyn mukaan atomeista koostuvan ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti ainemäärää kohti vakiotilavuudessa on $c_{V,\text{yksiatominen}}^n = \frac{3}{2} k_B N_A = \frac{3}{2} R$. Tuloksessa on paljon tärkeää huomattavaa. Ensinnäkään se ei riipu kaasun ominaisuuksista muuten kuin että kaasun oletettiin koostuvan atomeista (eikä molekyyleistä). Toiseksi, lasketun vakion arvo on erinomaisessa sopuisuinnissa jalokaasujen kokeellisesti määritetyyn ominaislämpökapasiteetin kanssa. Jalokaasut koostuvat atomeista, koska niiden atomit eivät muodosta keskenään kemiallisia sidoksia, joten tässä käytetty ideaalikaasumalli mitä ilmeisimmin kuvaa jalokaasuja hyvin.



8.8 Mikä on yksiatomisen ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti hiukkasten lukumäärää kohden, c_V^n ?

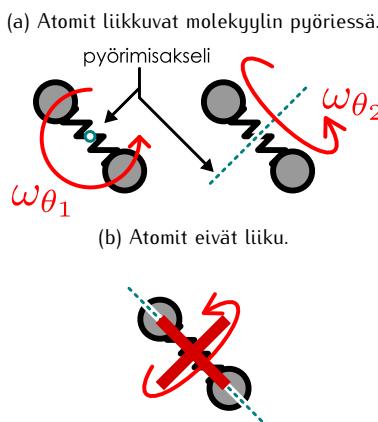
Kuva 8.6: Kolme suoran liikkeen vapausastetta.



Kuitenkaan tämä tulos *ei* päde useampiatomisista molekyyleistä koostuville kaasille, joten siitä puuttuu vielä jotakin tärkeää. Kokeellisesti on havaittu, että monien kaksiatomisista molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetti on likimain $c_{V,\text{kaksiatominen}}^n = 21 \text{ J/(molK)} = \frac{5}{2} k_B N_A = \frac{5}{2} R$. Tämäkin on jälleen $R/2$ monikerta, mutta nyt kerroin on 5 kun se yksiatomiselle kaasulle oli 3. Ilmeisesti siis kaasumolekyylien koko jotenkin vaikuttaa kaasun kykyyn varastoida energiaa.

Palataan vielä tarkastelemaan atomeista koostuvaa kaasua. Ideaalikaasumallin mukaan tällainen kaasu varstoi energiota *pelkästään atomien suoravivaiseen liikkeeseen*. Erityisesti kaasun sisäenergian yhtälöä (8.27) johdetaessa huomattiin, että siinä esiintyvä kerroin 3 oli *avaruuden suuntien lukumäärä*, sillä atomien liikkeeseen x -, y - ja z -suunnissa liittyi aina keskimäärin energia $\frac{1}{2} k_B T$. Yksiatomisella kaasulla on siis *kolme erilaista tapaa varastoida energiota* atomiensa liikkeeseen. Koska kaksiatomisen kaasun ominaislämpökapasiteetissä vastaava kerroin näyttäisi olevan 5, vaikuttaa siltä, että tällaisella kaasulla on *viisi tapaa varastoida energiota*. Vielä suuremmista molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetit ovat vielä suuremmat, joten ilmeisesti niillä on vielä enemmän näitä energian varastointin tapoja. Näitä molekyylin erilaisia tapoja vastaanottaa energiota kutsutaan **vapausasteiksi**.

Kuva 8.7: Kaksiatomilla molekyyleillä on kaksi pyörimisen vapausastetta. Pyöriminen pituusakselin ympäri ei varasto energiota.



Energiaa on mikroskooppisakin mittakaavassa monessa muodosissa, mutta ominaislämpökapasiteetin kannalta oleellista on tarkastella *mitkä energian lajit muuttuvat lämpötilan muuttuessa*. Esimerkiksi atomit koostuvat ytimestä ja elektroneista, joiden vuorovaikutukseen liittyy paljon energiota. Kuitenkin ellei kaasu ole erittäin kuumaa, atomien väliset törmäykset eivät yleensä ole tarpeeksi voimakkaita, jotta ne voisivat muuttaa atomien elektronirakennetta. Niinpä atomiydin ja elektronien välisen vuorovaikutuksen energia ei muudu vaikka lämpötila muuttuisi, eikä tällä energialla ole merkitystä ominaislämpökapasiteelle. Atomit ovat myös lähes pistemäisiä, eivätkä niiden väliset törmäykset voi muuttaa atomien pyörimistä. Niinpä ainoastaan atomien suoravivaisen liikkeen energia riippuu lämpötilasta ja yksiatomisen kaasun ominaislämpökapasiteetti mittaa tästä atomien liike-energian varastoutumista. Tästä juontuu myös nimitys vapausaste: atomi on "vapaa" liikkumaan kolmiulotteisen avaruuden kolmessa kohti-suorassa suunnassa, joten sillä on kolme *siirtymä- eli translaatiovapaustetta* (kuva 8.6).

Kaksiatomiset molekyylit sen sijaan voivat törmätessään myös muuttaa toistensa *pyörimistä*, ja erityisesti tällaisissa törmäyksissä voi molekyylien suoravivaisen liikkeen energiota muuttua pyörimisen energiaksi ja päinvastoin. Niinpä myös molekyylien pyörimislükkeeseen varastoitunut energia riippuu lämpötilasta. Toisin sanoen molekyyleillä on myös pyörimiseen liittyviä *pyörimis- eli rotatiiovapausasteita*. Koska kaksiatomisella molekyyllä on kokeellisesti viisi vapausastetta, joista kolme liittyytä suoraan liikkeeseen kuten atomeillakin, pyörimisen vapausasteita on ilmeisesti kaksi. Tämä voi olla yllättävä tulos. Molekyylinhän voisi ajatella voivan pyöriä x -, y - ja z -suuntaisten akseleiden ympäri, jolloin sillä olisi *kolme* pyörimisen vapausastetta. Kysymys on taas siitä, että molekyylien väliset törmäykset voivat kyllä saada molekyylin atomit kiertämään molekyylin massakeskipistettä (kuva 8.7 (a)), mutta ne *eivät voi* vaikuttaa molekyylin pyörimiseen pituusakselinsa ympäri (kuva 8.7 (b)). Niinpä kaksiatomisella molekyyllä on kolme suoran liikkeen ja kaksi pyörimisen vapausastetta.

Energian ekvipartitioperiaatteen mukaan pyörimisvapausasteisiin liittyy keskimäärin *yhtä suuri energia* kuin eteneväni liikkeen vapausasteisiin, $\langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2}k_B T$, ja yhden molekyylin keskimääräinen pyörimisenenergia on

$$\langle K_{\text{molekyyli, rotaatio}} \rangle = \frac{1}{2}I_{\theta_1} \langle \omega_{\theta_1}^2 \rangle + \frac{1}{2}I_{\theta_2} \langle \omega_{\theta_2}^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T. \quad (8.35)$$

Tällaisista molekyyleistä koostuvan kaasun sisäenergia on siis kaikkiaan

$$E_{\text{sisä,kaksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekyyli, translatio}} \rangle + N \langle K_{\text{molekyyli, rotaatio}} \rangle = NN_{\text{vapaus}} \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{5}{2}Nk_B T, \quad (8.36)$$

ja sen ominaislämpökapasiteetti on

$$c_V^n_{\text{kaksiatominen}} = \frac{5}{2}k_B N_A = \frac{5}{2}R, \quad (8.37)$$

sopusoinnussa kokeellisen tuloksen kanssa.



8.9 Montako translaatio- ja rotaatiovapausastetta on kolmiatomisella molekyyllillä, jonka atomit muodostavat (a) kolmion, (b) suoran?

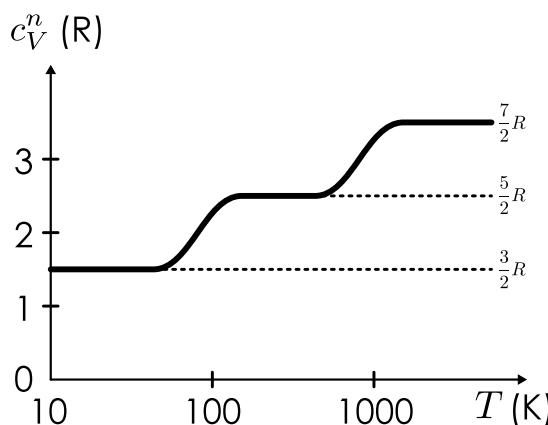
Ominaislämpökapasiteetin riippuvuus lämpötilasta

Edellä jätettiin mainitsematta se, että kokeelliset ominaislämpökapasiteetin arvot oli mitattu huoneenlämmössä eli noin 300 K lämpötilassa. Lämpökapasiteetti ei monilla aineilla riipu kovin voimakkaasti lämpötilasta, mutta kaksiatomisten kaasujen tapauksessa ominaislämpökapasiteetti *muuttuu*, kun kaasun lämpötila on hyvin matala tai hyvin korkea, kuten kuvassa 8.8 on esitetty. Riippuu kaasusta, mikä lämpötila on "matala" ja mikä "korkea", mutta yleisesti matalissa lämpötiloissa kaasujen lämpökapasiteetti on *pieni*, $c_V^n = \frac{3}{2}R$, ja korkeissa lämpötiloissa *suuri*, $c_V^n = \frac{7}{2}R$. Näyttäisi siltä, että kylmässä kaasussa on vain *kolme* vapausastetta kun taas kuumassa kaasussa vapausasteita on *seitsemän*.

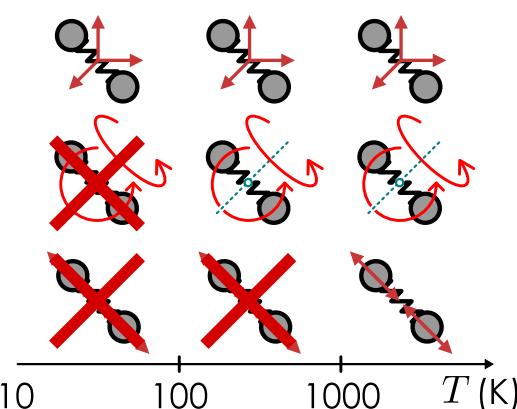
Tämän ilmiön selittäminen aiheutti fyysikoille pitkään ongelmia, ja itse asiassa sen ymmärtäminen vaatii *kvanttimekaniikkaa*. Kvanttimekaniikan mukaan tietyissä olosuhteissa hiukkaset eivät voi liikkua miten tahansa vaan ainostaan jotkin tavat liikkua ovat mahdollisia. Erityisesti hiukkasten liike-energia voi saada *vain joitakin tiettyjä arvoja*. Esimerkiksi kaksiatomisella molekyyllillä on olemassa tila, jossa se ei pyöri lainkaan, ja tällä tilalla on pyörimisen liike-energia $K_0 = 0$ J. Tästä tilasta energia-asteikossa seuraavana on toinen tila, jossa molekyyli pyörii niin hitaasti kuin kvanttimekanikan säännöt sallivat ja sillä on liike-energia K_1 . Edelleen tämän jälkeen tulevat tilat, joissa molekyyli pyörii aina hieman nopeammin ja joissa sen energia on aina suurempi, K_2, K_3 , jne. Ero peräkkäisten tilojen energioissa on hyvin pieni. Huoneenlämmössä molekyyleillä onkin aina paljon energiota verrattuna peräkkäisten pyörimistilojen energioihin, ja niinpä molekyyleiden pyörimisenergia voi helposti muuttua molekyyleiden välisissä törmäyksissä. Sen sijaan hyvin matalissa lämpötiloissa lähes kaikki molekyylit ovat pienimmän energian tilassa, jossa ne eivät pyöri. Molekyyleillä on tällöin niin vähän liike-energiaa, että niiden väliset törmäykset eivät ole tarpeeksi voimakkaita saamaan molekyylejä pyörimään nopeammin. Toisin sanoen törmäyksissä molekyyleiden välillä siirtymät energiat ovat

Kuva 8.8: Kaksiatomisista molekyyleistä koostuvan kaasun ominaislämpökapasiteetti riippuu lämpötilasta.

(a) Ominaislämpökapasiteetti lämpötilan funktiona.



(b) Energiaa varastoivat vapausasteet eri lämpötiloissa.

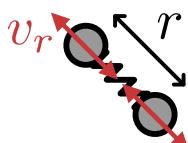


lähes aina pienemmät kuin hitaampien pyörimistilojen välinen ero energiassa $\Delta K = K_1 - K_0$, joten molekyilit eivät melkein koskaan pääse tilalle, jonka energia on K_1 . Tällöin sanotaan pyörimisen vapausasteiden jäätyväni, koska niiden energia ei muutu eivätkä ne siis pysty varastoimaan energiaa. Suoraviivaisen lükkeen vapausasteet eivät jäädy, joten molekyyleille jää matalissa lämpötiloissa kolme vapausastetta ja niiden ominaislämpökapasiteetti on $c_V^n = \frac{3}{2}R$.

Kyseessä ei ole kuitenkaan vain erittäin matalien lämpötilojen ilmiö. Molekyyleillä on nimittäin jäätyneitä vapausasteita myös huoneenlämmössä! Laskiessamme kaksiatomisen molekyylin vapausasteita jätimme huomioimatta sen, että molekyylit ei ole jäykkiä kappale, vaan molekyylit muodostavat atomit voivat siirtää läheemmäs tai kauemmas toisistaan. Molekyyleissä atomeja sitoo yhteen *kovalenttiinen sidos*, joka on tyypillisesti erittäin vahva. Yksinkertaistaan voi kuitenkin ajatella, että atomien välissä on pieni, erittäin jäykki jousi, joka kiinnittää atomit toisiinsa. Jousen kiinnittämät atomit voivat *värähdellä* edestakaisin, ja tähän värähtelyliikkeeseen liittyy myös *värähtely- eli vibraatiovapausasteita*.

Molekyylit värähtelyllä on myös kvantimekanikan määräämä pienimmän energian tila, jossa atomit värähtelevät niin vähän kuin mahdollista sekä tätä korkeamman energian tiloja, joissa liike on nopeampaa ja atomeja yhdistävä sidos (jousi) venyy enemmän. Näiden värähtelytilojen energiat ovat yleensä huomattavasti kauempana toisistaan kuin pyörimistilojen energiat, joten värähtelyyn liittyvät vapausasteet pysyvät jäätyneinä korkeammissa lämpötiloissa. Huoneenlämmössä monien kaasujen molekyylit ovat värähtelyn pienimmän energian tilassa eli ne värähtelevät niin vähän kuin mahdollista. Vasta useiden satojen kelvinien lämpötiloissa molekyyleillä on tarpeeksi energiata, jotta niiden väliset törmäykset voisivat muuttaa niiden värähtelyä.

Kuva 8.9: Kaksiatomisella molekyyllillä on yksi tapa värähdellä.



Kaksiatominen molekyyli voi värähdellä vain yhdessä suunnassa: atomien kautta kulkevan suoran suunnassa niin, että atomien välinen etäisyys muuttuu (kuva 8.9). Värähtely kuitenkin poikkeaa suorasta lükkeestä ja pyörimisestä siinä suhteessa, että atomeja yhdistävä sidos rajoittaa liikkettä. Erityisesti molekyylin värähtellessä molekyylin atomeilla on sekä värähtelyyn liittyvää liike-energiaa että *sidoksen venytämiseen liittyvää potentiaalienergiaa*. Energian ekvipartitioperiaatteen mukaisesti näihin molempien liittyy keskimäärin energia

$$\langle K_{\text{vibraatio,molekyyli}} \rangle = \langle U_{\text{vibraatio,molekyyli}} \rangle = \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (8.38)$$

joten vaikka värähtelytapoja on vain yksi, siinä liittyy kaksi tapaa varastoida energiata. Niinpä voimme sanoa, että värähtelyyn liittyy *kaksi* vapausastetta: yksi liike-energian ja yksi potentiaalienergian vapausaste. Nämä ollen kaksiatomisella molekyyllillä on korkeissa lämpötiloissa yhteenä *seitsemän* vapausastetta, joihin se voi varastoida energiata: kolme liittyen eteneväin lükkeeseen, kaksi pyörivään lükkeeseen, yksi värähtelevien atomien lükkeeseen ja yksi värähtelevän sidoksen venymiseen. Nämä ollen kaasun ominaislämpökapasiteetti on $c_V^n = \frac{7}{2}R$.



8.10 Onko mahdollista, että värähtelyn liike-energiaan liittyvä vapausaste vastaanottaa energiata mutta potentiaalienergiaan liittyvää ei?

Suuremmistakin molekyyleistä koostuvien kaasujen ominaislämpökapasiteetit voidaan selittää samaan tapaan tarkastelemalla molekyylien vapausasteiden lukumäärää, ja yleisesti jos kaasussa on N molekyyliä ja molekyyleillä on N_{vapaus} vapausastetta, kaasun sisäenergia on

$$E_{\text{sisä}} = N_{\text{vapaus}}N \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}}Nk_B T, \quad (8.39)$$

ja ominaislämpökapasiteetti

$$c_V^n = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}}k_B N_A = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}}R. \quad (8.40)$$

Tämän mallin soveltamisessa on kuitenkin rajoituksensa. Vapausasteiden jäätyminen ja vapautuminen ei nimittäin tapahdu yhtäkästiksi jossakin tietyssä lämpötilassa vaan vähitellen lämpötilan muuttuessa kuten kuvassa 8.8. Suurilla molekyyleillä on monia erilaisia tapoja värähdellä ja näiden vapausasteet voivat jäätyä eri lämpötiloissa, ja niinpä on tavallista, että jotkin vapausasteet voivat olla osittain jäätyneitä. Tällöin N_{vapaus} ei välttämättä ole kokonaisluku.

Sama idea toimii itse asiassa myös kuumiessä aineissa, joissa atomit muodostavat säännöllisiä rakenteita. Tällöin jokainen atomi voi nimittäin liikkua mihin tahansa avaruuden kolmesta suunnasta, mutta koska atomien välillä on sidoksia, atomien lükkeeseen liittyy aina sekä liike-energian että sidosten potentiaalienergian muutos. Tällöin atomeilla on *kuusi* vapausastetta: kolme liittyen lükkeeseen kolmessa ulottuvuudessa ja kolme liittyen sidosten venymiseen näissä suunnissa. Siispä tällaisen kuumeen ominaislämpökapasiteetti on

$$c_V^n = 3k_B N_A = 3R. \quad (8.41)$$

Tämä tulos on ns. *Dulong-Petit-laki*, ja se pätee hyvin mm. monille metallille hyvin matalia lämpötiloja lukuunottamatta (jolloin kvantimekaaniset ilmiöt ovat jälleen tärkeitä).



8.11 Erään kaasun molekyylit ovat kolmiamomisia. Mikä on kaasun ominaislämpökapasiteetti lämpötilassa, jossa kaikki pyörimislükkeen vapausasteet ovat aktiivisia, yksi väärähelytapa on puoliksi jäätynyt ja muut väärähelyt ovat täysin jäätynyt?

esimerkki 8.2

Ideaalikaasun energia

Kaasusäiliössä A on heliumia He ja säiliössä B typpeä N₂ 100 kPa paineessa ja 300 K lämpötilassa. Säiliöiden tilavuus on 1.0 m³. (a) Mikä on kaasun sisäenergia? (b) Mikä on yksittäisten molekyylien keskimääräinen suoraviivaisen liikkeen liike-energia? (c) Mikä on molekyylien rms-vauhti?

SUUNNITELMA Helium on jalokaasu, joka koostuu yksittäisistä atoimeista. Näillä on kolme vapausastetta. Typpi koostuu kaksiamomisista molekyyleistä. Näillä on tässä lämpötilassa kolme suoraviivaisen liikkeen ja kaksi pyörimislükkeen vapausastetta.

Ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella kummankin kaasun ainemäärä on

$$n = \frac{pV}{RT} = 40 \text{ mol} \quad (8.42)$$

eli kaasuhiuksia on noin

$$N = nN_A = 2.4 \cdot 10^{25}. \quad (8.43)$$

Kaasun lämpötila ja sisäenergia ovat suoraan verrannolliset. Ekviartitioperiaatteen mukaisesti kuhunkin vapausasteeseen liittyy yhdessä molekyyllissä keskimäärin energia $\frac{1}{2}k_B T$. Kaasun sisäenergia on siis

$$E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}} N k_B T. \quad (8.44)$$

Kummassakin kaasussa jokaisella molekyyllällä on kolme suoran liikkeen vapausastetta, joten molekyylien suoraviivaisen liikkeen energia on

$$\langle K_{\text{suora}} \rangle = \frac{3}{2}k_B T. \quad (8.45)$$

Toisaalta liike-energia on $\langle K_{\text{suora}} \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$, joten rms-nopeus on

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{2}{m}\langle K_{\text{suora}} \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (8.46)$$

Heliumatomien massa on noin $m_{\text{He}} = 4.00u = 13.3 \cdot 10^{-27}$ kg ja typpimolekyylien massa on $m_{\text{N}_2} = 2 \cdot 14.01u = 46.5 \cdot 10^{-27}$ kg.

RATKAISU (a) Sisäenergia heliumissa on $E_{\text{sisä, He}} = 150$ kJ ja typessä $E_{\text{sisä, N}_2} = 250$ kJ.

(b) Yhden hiukkasen suoraviivaisen liikkeen energia on kummassakin kaasussa sama, $\langle K \rangle = 6.2 \cdot 10^{-21}$ J.

(c) Heliumatomien rms-vauhti on $v_{\text{rms, He}} = 970$ m/s ja typpimolekyylien $v_{\text{rms, N}_2} = 520$ m/s.

ARVIOINTI Samassa lämpötilassa olevissa kaasuissa hiukkilla on yhtä paljon suoraviivaisen liikkeen energiota. Tällöin kuitenkin kevyemmät heliumatomit liikkuvat nopeammin kuin raskaamat typpimolekyylit. Typpimolekyylit voivat lisäksi myös pyöriä, joten niillä on suoran liikkeen energian lisäksi pyörimislükkeen energiota. Tämän vuoksi typpeen on varastoitunut kaikkiaan enemmän energiota.

Tarkastelimme typpimolekyylien liikettä jo aikaisemmin tehtävässä 6.2. Tällöin arvioimme molekyylien x -suuntaisen liikkeen vauhdiksi noin 300 m/s. Toisaalta $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle$, joten rms-nopeuden pitäisi tämän mukaan olla

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3\langle v_x^2 \rangle} \approx \sqrt{3} \cdot 300 \text{ m/s} = 520 \text{ m/s}. \quad (8.47)$$

Tehtävissä saamamme tulokset ovat siis sopusoinnussa.



8.12 Selitä omin sanoin, mitä ovat vapausasteet. Miten ja miksi vapausasteet vaikuttavat kaasujen ominaisuuksiin? Mitkä tekijät määrittelevät, montako vapausastetta kaasulla on?

8.3 Mikro- ja makrotilat

Energian säilymislaista seuraa, että *eristetyssä* systeemissä kokonaisenergia on vakio, koska energiota ei pääse siirtymään systeemistä pois tai sinne sisään. Energia voi kuitenkin siirtyä systeemin sisällä. Esimerkiksi säiliössä olevan kaasun molekyylit liikkuvat, joten niillä on mikroskooppisessa mittakaavassa liike-energiaa. Molekyylit voivat myös törmällä keskenään elastisesti, jolloin yksittäisten molekyylien energia voi muuttua. Jos siis kaasun kokonaisenergia on E_{kokonais} , tämä energiamäärä jakautuu kaasun molekyyleille ja tämä *energian jakautuminen* voi muuttua ajan kuluessa. Energian ekvipartitioperiaatteen mukaan kuhunkin vapausasteeseen lütttyy tällöin *keskimäärin* yhtä paljon energiota, mutta kunkin yksittäisen molekyylin energia voi poiketa tästä keskiarvosta. Seuraavaksi tutkimme tarkemmin miten energia tällaisessa systeemissä täsmällisemmin jakautuu ja mitä siitä seuraa.

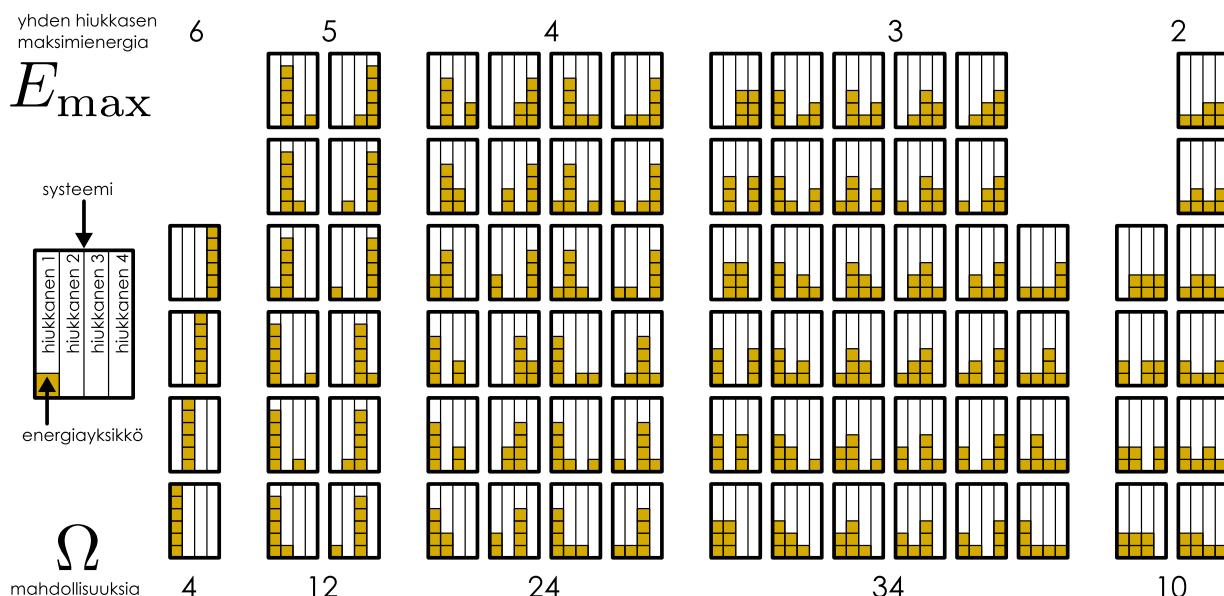
Tarkastellaan yksinkertaisena esimerkkinä systeemiä, jossa on 4 hiukkasta ja kullakin hiukkasella on yksi vapausaste. Kullakin hiukkasella voi olla energia $0\epsilon, 1\epsilon, 2\epsilon, \dots$, ja systeemin kokonaisenergia on $E_{\text{kokonais}} = 6\epsilon$, missä ϵ on jokin pieni energiamäärä. Toisin sanoen systeemissä on kuusi yksikköä energiota, ja nämä yksiköt voidaan jakaa neljälle hiukkaselle miten tahansa. Kyseessä on vain yksinkertaistettu esimerkki, mutta kvanttimekanikkassa tilanne, jossa vain tietyt energian arvot ovat sallittuja, on aivan tavallinen. Niinpä esimerkki voisi aivan hyvin kuvata todellistakin systeemiä.

Koska systeemi on nün pieni, voimme yksinkertaisesti *taulukoida* kaikki mahdolliset tavat jakaa energia hiukkasten kesken. Kuva 8.10 on esitetty kaikki nämä mahdolisudet, joita on yhteensä 84 kappaletta. Taulukossa systeemit on jaoteltu sen mukaan paljonko energiota yhdellä hiukkasella on maksimissaan, ja siitä nähdään, että noin puolessa systeemeistä korkeintaan puolet systeemin energiasta on yhdellä hiukkasella. Toisessa puolessa yhdellä hiukkasella on yli puolet systeemin kokonaisenergiasta.

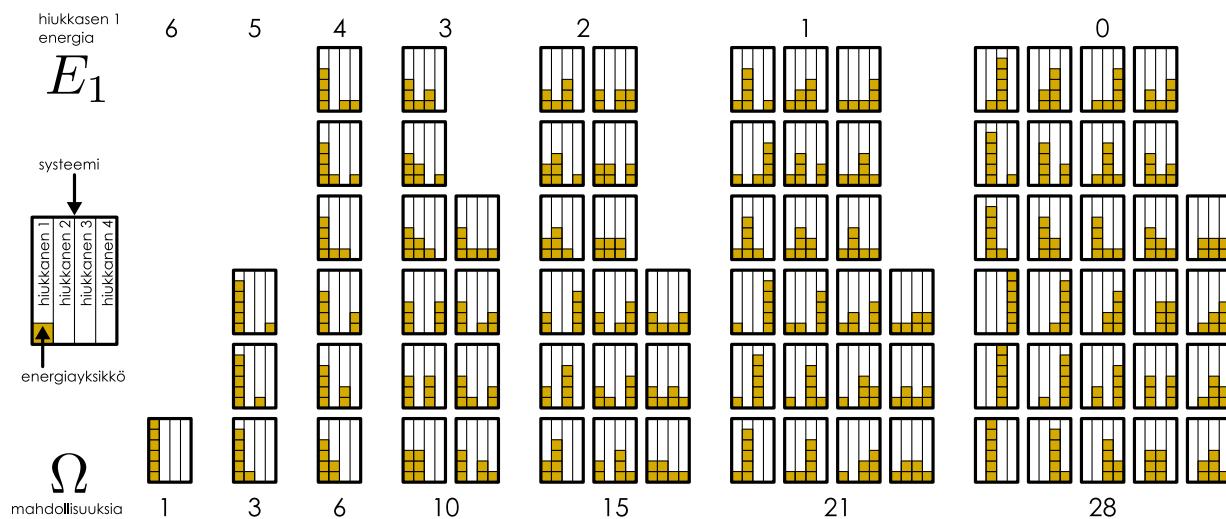
Olemme tähän mennessä puhuneet paljon *tilasta*, jolla tarkoitetaan kappaletta tai systeemiä kuvavien fysikaalisten suureiden joukkoa. Nyt on sytytä laajentaa tilan käsitettä erottellemalla **makrotila** ja **mikrotila**. Mikrotilalla tarkoitetaan systeemin täydellistä kuvausta. Kaasun mikrotilaan esimerkiksi kuuluu tieto kaasun *kaikkien hiukkasten* paikoista, nopeuksista ja energioista. Makrotilalla puolestaan tarkoitetaan systeemin kuvausta makroskooppisesti havaittavien suureiden kuten lämpötilan ja paineen avulla. Esimerkiksi kuvassa 8.10 kukaan erilainen tapa jakaa energiayksiköt hiukkasten kesken on eri mikrotila ja systeemillä on siis 84 mahdollista mikrotilaa.

Jako makro- ja mikrotilan ominaisuuksiin ei ole yksikäsitteinen, vaan se riippuu siitä, mitä systeemistä pystytään suoraan havainnoimaan. Esimerkiksi jos edellä tarkasteltuun neljän hiukkisen systeemiin luetetaan sensori, joka pystyy mittamaan paljonko energiota yhdellä hiukkasella maksimissaan on (mutta ei paljonko energiota kullakin hiukkasella täsmälleen on), ominaisuus "yhden hiukkisen maksimienergia", E_{\max} , on makrotilaa kuvava suure. Tällöin systeemissä on 7 mahdollista makrotilaa — $E_{\max} = 0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, 6\epsilon$. Kuvan 8.10 esittämässä taulukossa kukaan systeemi (84 kpl) esittää eri makrotilaa ja niiden ryhmät esittävät eri makrotiloja.

Kuva 8.10: Kaikki mahdolliset tavat jakaa 6 yksikköä energiota 4 hiukkaselle. Kukin laatikko kuvailee yhtä mahdolisutta, ja laatikon pylväät eri hiukkasia. Keltaiset neliöt ovat energiayksiköitä.



Kuva 8.11: Kaikki mahdolliset tavat jakaa 6 yksikköä energiaa 4 hiukkaselle. Kukin laatikko kuvailee yhtä mahdolisuutta, ja laatikon pylväät eri hiukkasia. Keltaiset neliöt ovat energiayksiköitä.



8.13 Kuvassa 8.10 on vain 5 eri makrotilaa vaikka tekstissä todettiin makrotiloja olevan 7. Mitkä makrotilat puuttuvat kuvasta ja miksi?

Makrotilaa voi vastata monta erilaista mikrotilaa. Esimerkiksi makrotilaa $E_{\max} = 6\epsilon$ (kaikki energia yhdellä hiukkasella) vastaa neljä eri mikrotilaa (energia voi olla millä tahansa hiukkasista). Lisäksi eri makrotiloja vastaavien mikrotilojen määrä vaihtelee. Kaikkein eniten mikrotiloja, 34 erilaista, liittyy makrotilaan $E_{\max} = 3\epsilon$. Makrotilaan liittyvien mikrotilojen määrää kutsutaan *multiplisiteeksi* ja sitä merkitään usein kreikkalaisella omega-kirjaimella, Ω .

Jos hiukkaset pääsevät vaihtamaan keskenään energiota vapaasti, jokaisen *mikrotilan* kuvassa 8.10 täytyy olla *yhtä todennäköinen*. Tällöin systeemin *todennäköisyys olla missä tahansa makrotilassa on sitä suurempi mitä enemmän mikrotiloja makrotilaan liittyy*. Todennäköisyys perustuu makrotilan todennäköisyyteen siihen liittyvien mikrotilojen lukumäärään (multiplisiteetin) ja kaikkien mahdollisten mikrotilojen lukumäärän suhde

$$P_{\text{makrotila}} = \frac{\Omega_{\text{makrotila}}}{\Omega_{\text{kaikki}}}. \quad (8.48)$$

Esimerkiksi todennäköisyys sille, että yksi hiukkasan saa kaiken systeemissä tarjolla olevan energian, on $P(E_{\max} = 6\epsilon) = \frac{4}{84} \approx 0.048$.



8.14 Mikä on tässä esimerkissä kunkin makrotilan todennäköisyys? Mikä on näiden todennäköisyysien summa?

Energian ekvipartitio

Jatketaan saman esimerkin analysointia kuin edellä mutta valitaan nyt makrosuureeksi yhden tietyn hiukkisen energia — esimerkiksi hiukkisen 1, E_1 . Tämä on järkevä tapa määritellä makrotila, jos hiukkasan 1 on erilainen kuin systeemin muut hiukkaset (esimerkiksi huomattavasti suurempi) ja pystymme jotenkin mittamaan juuri tämän hiukkisen energian mutta emme muiden hiukkasten energioita. Kutakin tällaista makrotilaa vastaavat mikrotilat on listattu kuvassa 8.11. Kuvassa on täsmälleen samat 84 mikrotilaa kuin kuvassa 8.10, mutta nyt ne ovat ryhmitelty uudelleen hiukkisen 1 energian mukaan. Näidenkin makrotilojen todennäköisyydet saadaan yhtälöllä (8.48). Selkeästi mitä vähemmän energiota hiukkasellassa on, sitä todennäköisempi tila on kyseessä.

Yksittäisen hiukkisen mahdolisista energian arvoista $E_1 = 0$ on kaikkein todennäköisin, sillä $P(E_1 = 0) = \frac{28}{84} = 0.33$. Kuitenkaan hiukkisen energian todennäköisesti ei ole nolla, koska todennäköisyys nolla suurempaan energialaan on $P(E_1 > 0) = 1 - P(E_1 = 0) = \frac{56}{84} = 0.67$. Onkin kiinnostavaa tutkia, mikä on hiukkasten energoiden odotusarvo $\langle E_1 \rangle$. Odotusarvo nimittäin ennustaa satunnaismuuttujan keskiarvon, kun muuttuja mitataan monta kertaa. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että jos systeemin annetaan toimia vapaasti ja

hiukkisen 1 energiota mitataan N kertaa, saadaan jotkin satunnaiset mittaustulokset $(E_1)_1, (E_1)_2, (E_1)_3$, jne. ja näiden *mittausten keskiarvo lähestyy satunnaismuuttujan odotusarvoa, kun mittausten lukumäärä kasvaa*

$$\langle E_1 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_1)_i. \quad (8.49)$$

Vaihtoehtoisesti *suuressa systeemissä* voidaan ajatella, että sama satunnainen ominaisuus määritetään yhtä aikaa monelle samanlaiselle hiukkaselle, ja tällöin myös näiden mittausten keskiarvo lähestyy satunnaismuuttujan odotusarvoa, kun hiukkasten lukumäärä kasvaa. Tätä eri hiukkaille laskettua keskiarvoa käytimme jo aikaisemmin ideaalikaasun tarkastelussa mm. yhtälössä (8.10). Vaikka periaatteessa keskiarvon laskeminen yli systeemin hiukkasten on eri asia kuin yhden hiukkisen ominaisuuksien keskiarvoistaminen ajan kullessa, kummakin keskiarvot *lähestyvät samaa odotusarvoa mittausten määrän lähestyessä äretöntä*, ja niinpä esimerkiksi hiukkisen energian keskiarvon voi yleensä tulkita kummallakin tavalla.

Satunnaismuuttujan X odotusarvo saadaan laskemalla kunkin mahdollisen tuloksen X_i ja sen todennäköisyyden $P(X = X_i)$ tulojen summa,

$$\langle X \rangle = \sum_i P(X = X_i) X_i, \quad (8.50)$$

eli tässä esimerkissä

$$\langle E_1 \rangle = P(E_1 = 0) \cdot 0 + P(E_1 = \epsilon) \cdot \epsilon + P(E_1 = 2\epsilon) \cdot 2\epsilon + \dots + P(E_1 = 6\epsilon) \cdot 6\epsilon. \quad (8.51)$$

Lukemalla todennäköisyydet kuvan 8.11 taulukosta, saadaan odotusarvoksi yhden hiukkisen energialle

$$\langle E_1 \rangle = \frac{28}{84} \cdot 0 + \frac{21}{84} \cdot \epsilon + \frac{15}{84} \cdot 2\epsilon + \dots + \frac{1}{84} \cdot 6\epsilon = 1.5\epsilon. \quad (8.52)$$

Laskettu odotusarvo on siis täsmälleen yksi neljännes systeemin kokonaisenergiasta eli $\langle E_1 \rangle = \frac{1}{4} E_{\text{kokonais}}$. Toisin sanoen hiukkassa 1 on *keskimäärin* täsmälleen neljännes systeemin kokonaisenergiasta. Huomaan kuitenkin, että vaikka hiukkassa voi olla yhdellä ajan hetkellä mikä tahansa energia $E_1 = 0, \epsilon, \dots, 6\epsilon$, sillä *ei voi* tässä esimerkissä koskaan olla energiaa 1.5ϵ . Odotusarvo ei siis kerro paljonko energiota hiukkassa 1 on todennäköisimmin (todennäköisintä energia on $E_1 = 0$). Sen sijaan jos systeemi antaa toimia vapaasti, hiukkaset vaihtavat keskenään energiota ja välillä hiukkisen 1 energia on enemmän kuin $\frac{1}{4} E_{\text{kokonais}}$ ja välillä vähemmän. Odotusarvo kertoo paljonko energiota hiukkassa 1 on ajan kuluessa.

Samanlainen päättely voidaan toistaa tarkastelemalla hiukkasia 2, 3 ja 4, ja koska tilanne on täysin symmetrinen hiukkasten vaihdon suhteeseen, jokaisen hiukkisen energian odotusarvon täytyy olla sama, $\langle E_2 \rangle = \langle E_3 \rangle = \langle E_4 \rangle = \frac{1}{4} E_{\text{kokonais}}$. Jokaisella hiukkassa on siis *keskimäärin* yhtä paljon energiota, ja energia siis *keskimäärin* jakautuu tasaisesti kaikkien hiukkasten tai tarkemmin sanoen kaikkien vapausasteiden kesken — tämä on energian ekvipartitiooperaate.



8.15 Jos systeemissä on 200 hiukkasta ja 500 yksikköä energiota, paljonko energiota yhdellä hiukkassa on keskimäärin?

Edellä tarkastelimme energian jakautumista usean hiukkisen kesken, mutta käytännössä makroskooppisessa mittakaavassa ei havainnoida hiukkasia vaan systeemejä, ja niinpä onkin mielenkiintoisempaa tutkia, miten energia jakautuu kahteen osaan jaettuna systeemin osien välillä. Tilanne on tällöin erilainen kuin vain yksittäisiä hiukkasia tarkasteltaessa, koska energia voi jakautua myös systeemin osien sisällä. Tarkastellaan siis toisena esimerkinä 10 hiukkisen systeemiä, joka on jaettu kahteen osaan, A ja B, niin että osassa A on neljä yhden vapausasteen hiukkasta ja osassa B kuusi. Systeemin kokonaisenergia on 10 yksikköä ja valitaan makrotilan määritteleväksi suureksi osan A kokonaisenergia. Tällainen systeemi voisi kuvata esimerkiksi kahta hyvin pieniä kosketuksissa olevaa kappaletta, jotka voivat vaihtaa keskenään energiota.

Koska systeemissä on 10 yksikköä energiota, makrotiloja on 11: $E_A = 0, E_A = \epsilon, \dots, E_A = 10\epsilon$. Rajoitutaan aluksi tarkastelemaan ainoastaan osaa A. Tilannetta jossa osassa A ei ole lainkaan energiota vastaa vain yksi osan A mikrotila: sellainen jossa osan A millään hiukkassa ei ole energiota. Merkitään tästä $\Omega_{A,0} = 1$. Seuraava mahdollisuus on se, että osassa A on yksi yksikkö energiota, ja tällöin mahdollisia osan A mikrotiloja on 4, sillä tämä yksi yksikkö energiota voi olla millä tahansa osan A hiukkasta, $\Omega_{A,1} = 4$. Näin voidaan laskea kaikkia eri energioita E_A vastaavien osan A mikrotilojen lukumäärä. Tulokset on annettu taulukossa 8.1 sarakkeessa Ω_A . Voit huomata, että tapauksessa, jossa osassa A on 6 yksikköä energiota, mikrotiloja on $\Omega_{A,6} = 84$. Nämä ovat kuvissa 8.10 ja 8.11 esitetyt mikrotilit.

Osa A ei kuitenkaan ole koko systeemi. Jos osan A energia on E_A , osan B kokonaisenergian täytyy olla $E_B = E_{\text{kokonais}} - E_A$ ja myös tämä energia voi jakautua osan B hiukkasten kesken useilla tavoilla. Osan B mikrotilojen lukumäärät on niin ikään koottu taulukkoon 8.1.

Taulukko 8.1: Mikrotilojen lukumäärä systeemille, joka on jaettu osiin A (4 hiukkasta) ja B (6 hiukkasta), kun systeemin kokonaisenergia on 10 yksikköä.

A:n energia E_A	B:n energia E_B	A:n mikrotiloja Ω_A	B:n mikrotiloja Ω_B	mikrotiloja kaikkiaan Ω	todennäköisyys P
0	10	1	3003	3003	0.03
1	9	4	2002	8008	0.09
2	8	10	1287	12870	0.14
3	7	20	792	15840	0.17
4	6	35	462	16170	0.18
5	5	56	252	14112	0.15
6	4	84	126	10584	0.11
7	3	120	56	6720	0.07
8	2	165	21	3465	0.04
9	1	220	6	1320	0.01
10	0	286	1	286	0.00

Orien A ja B mikrotilojen lukumäärät eivät kerro energian jakautumisen todennäköisyyttä vaan tämä riippuu *koko systeemin* mikrotilojen määristä. Nämä mikrotilat voidaan kuitenkin muodostaa osien A ja B tiloja yhdistelmällä kuten kuvassa 8.12 on havainnollistettu makrotilalle, jossa osissa A on neljä ja osissa B kuusi energiayksikköä. Jos nimittäin osa A voi olla mikrotiloissa A_1, A_2 , jne. (Ω_A kpl.) ja osa B mikrotiloissa B_1, B_2 , jne. (Ω_B kpl.), koko systeemin tiloja ovat kaikki näiden yhdistelmät. Esimerkiksi jos osa A on mikrotilassa A_1 , osa B voi olla mikrotiloissa B_1, B_2 jne. On siis Ω_B erilaista koko systeemin mikrotilaa, joissa osaa A edustaa mikrotila A_1 . Vastaavasti on Ω_B systeemin mikrotilaa, jossa A on mikrotilassa A_2 . Näin voidaan käydä läpi kaikki Ω_A osan A mikrotilaa ja kaikkiaan systeemin makrotilaan liittyvät

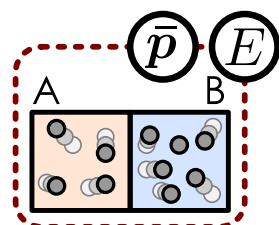
$$\Omega = \Omega_A \Omega_B \quad (8.53)$$

mikrotilaa.

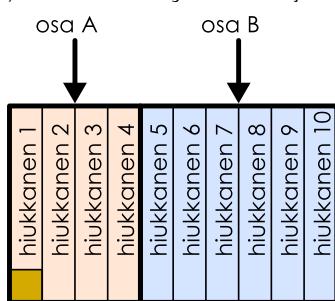
Todennäköisylaskennan kielellä sama asia voidaan ilmaista niin, että jos osalla A on Ω_A erilaista mahdollista mikrotilaa, joiden todennäköisyydet ovat yhtä suuret, todennäköisyys löytää A mistä tahansa tietystä mikrotilasta A_i on $P_A = 1/\Omega_A$. Samoin todennäköisyys, että B on täsmälleen tietystä mikrotilassa B_j

Kuva 8.12: Mahdolliset mikrotilat 10 hiukkisen systeemissä, joka on jaettu 4 hiukkisen (A) ja 6 hiukkisen osiin (B), kun osassa A on 4 yksikköä energiota ja osassa B 6 yksikköä.

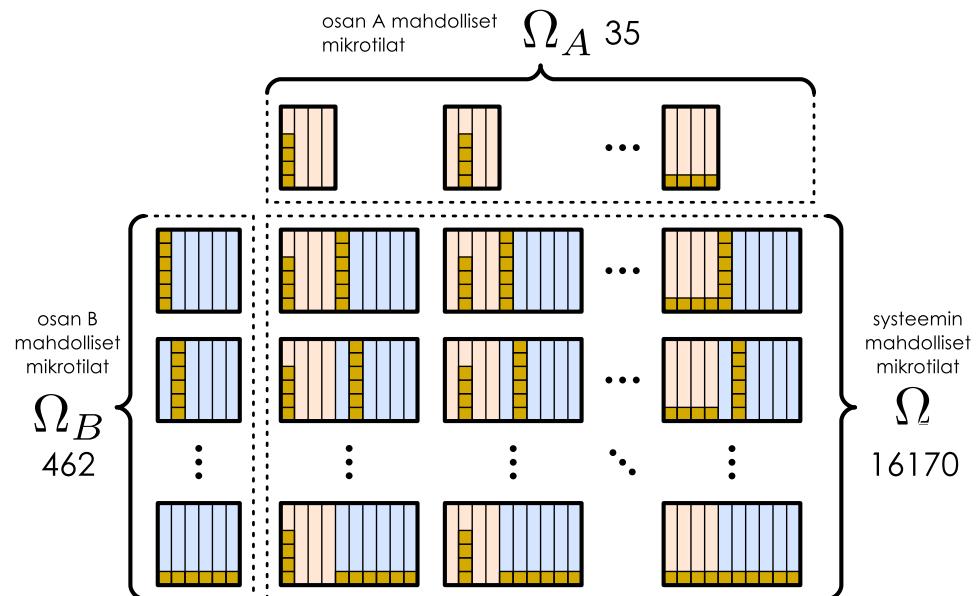
(a) Jaetaan systeemi kahteen osaan.



(b) Hiukkosten energioiden kuvajana.



(c) Systeemin mikrotilat voidaan esittää osien A ja B mikrotilojen yhdistelminä.



on $P_B = 1/\Omega_B$. Jos osien A ja B mikrotilat ovat *toisistaan riippumattomat*, systeemin todennäköisyys olla täsmälleen siinä mikrotilassa, joka on tilojen A_i ja B_j yhdistelmä, on $P = 1/\Omega = P_A P_B = 1/(\Omega_A \Omega_B)$.

Taulukosta 8.1 nähdään, että osien A ja B mikrotilojen lukumäärit eli multiplisiteetit kasvavat osien sisältämän energian lisääntyessä. Kuitenkin koska koko systeemin mikrotilojen määriä riippuu osien A ja B multiplisiteettien tulosta, systeemin multiplisiteetillä on *maksimi*, kun $E_A = 4\epsilon$ ja $E_B = 6\epsilon$. Toisin sanoen systeemi on kaikkein todennäköisimmin tilassa, jossa osassa A on neljä yksikköä energiaa ja osassa B kuusi. Tämä on järkevä, koska osa A sisälsi neljä hiukkasta ja osa B kuusi ja tasana jakautuneena jokaisella hiukkalla on keskimäärin yksi yksikkö energiaa. Ekvipartioperiaatteen mukaan osassa A täytyy olla *keskimäärin* neljä kymmenenesosaa systeemin koko energiasta, ja koska tässä energian todennäköisyysjakama on likimain symmetrinen, myös jakauman maksimi (todennäköisin makrotila) on kohdassa $E_A = 4\epsilon$.



8.16 Laske taulukon 8.1 sarakkeen Ω avulla osan A energian odotusarvo $\langle E_A \rangle$ ja vertaa tulosta ekvipartioperiaatteen ennusteeseen. Mikrotiloja on kaikkaan $\Omega_{\text{kaikki}} = 92378$ kpl.

Tasapainotila

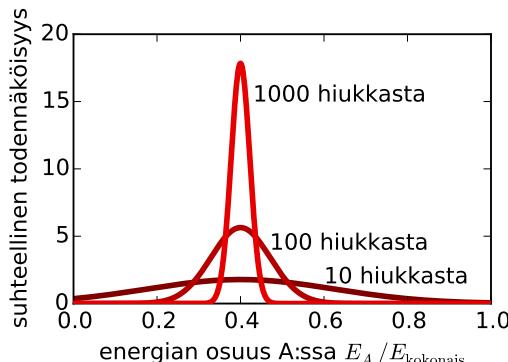
Taulukosta 8.1 nähdään myös, että osan A ei tarvitse välttämättä sisältää juuri energiota $E_A = 4\epsilon$. Tämä johtuu siitä, että osat A ja B vuorovaikuttavat ja energiota voi siirtyä niiden välillä. Yhdenkin energiayksikön siirtymisen osasta toiseen aiheuttaa suuren suhteellisen muutoksen, koska systeemi on niin pieni, ja niinpä energian jakauma voi poiketa tasaisesta huomattavasti.

Osan A sisältämän energian todennäköisyysjakama kuitenkin riippuu systeemin koosta. Kuvassa 8.13 (a) on piirretty todennäköisyysjakamat osassa A olevan energian määälle, kun systeemin koko on 10, 100 tai 1000 hiukasta ja systeemin kokonaisenergia on yksi yksikkö hiukkasta kohden. Osan A koko on kaikissa tapauksissa 40 % systeemin hiukkasista eli 4, 40 ja 400 hiukasta. Kuvaajasta nähdään, että todennäköisyysjakamaan keskipiste on aina tilassa, jossa A:ssa on 40 % systeemin kokonaisenergiasta. Toisin sanoen energia on aina keskimäärin jakautunut osan A ja B välillä niin, että kummankin osan sisältämä energia on verrannollinen osan sisältämiens hiukkasten määrään. Kuitenkin kun systeemi on pieni, todennäköisyysjakama on leveä ja on siis varsinkin tavallista, että energian jakauma poikkeaa odotusarvosta. Kuitenkin mitä suurempi systeemi on, sitä kapeammaksi todennäköisyysjakama muuttuu. Tämä tarkoittaa sitä, että suuret poikkeamat keskiarvosta tulevat hyvin epätodennäköisiksi. Sadan hiukkisen systeemissä osan A sisältämä energia on aina lähes varmasti 20 – 60 % systeemin kokonaisenergiasta, sillä muiden makrotilojen todennäköisyys on lähes nolla. Tuhannen hiukkisen systeemissä A:ssa on lähes varmasti 30 – 50 % systeemin kokonaisenergiasta, ja mitä suuremmaksi systeemi kasvaa, sitä kapeammalle välille osan A energia jää.

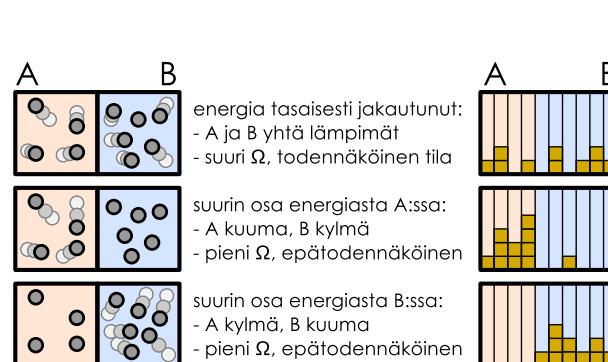
Todennäköisyysjakaman kaventuminen johtuu siitä, että systeemin koon kasvaessa mikrotilojen lukumääri kasvaa käsittämättömän nopeasti. Esimerkiksi tuhannen hiukkisen ja tuhannen energiayksikön systeemillä on luokkaa $\Omega_{\text{kaikki}} = 10^{600}$ erilaista mikrotilaa! Tämän lisäksi mikrotilojen määriä kasvaa kaikkein nopeimmin juuri siinä makrotilassa, jossa energia on jakautunut tasaisesti ja muiden makrotilojen suhteellinen todennäköisyys lähestyy nollaa systeemin koon kasvaessa. Makroskooppisissa kappaleissa hiukkasten lukumääri on Avogadron vakion $N_A \approx 10^{23}$ suuruusluokkaa, jolloin tilan $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ todennäköisyys on käytännössä yksi ja kaikkien muiden makrotilojen todennäköisyys on nolla. Toisin sanoen vaikka energiota voi virrata osasta A osaan B ja päinvastoin, suressa systeemissä olisi *äärimmäisen epätodennäköistä*, että energiota siirtyisi

Kuva 8.13: Energia jakautuu todennäköisimmin likimain tasana osien A ja B kokojen suhteessa. Mitä suurempi systeemi on, sitä epätodennäköisempää on, että energian jakautuminen poikkeaa tästä.

(a) Osan A sisältämä osuus energiasta erikokoisille systeemeille, kun osien kokojen suhde on 4:6.



(b) Mitä enemmän energiota systeemin osa sisältää, sitä kuumempi se on makroskooppisesti.



koskaan enemmän yhdestä osasta toiseen. Niinpä osien sisältämä energia pysyy vakiona. Koska systeemin osien energiat ovat tässä makrotilassa tasapainossa, sitä kutsutaankin **termodynäamiseksi tasapainotilaksi**.

Makroskooppisissa systeemeissä sisäenergia lüöttää systeemin lämpötilaan, ja tasapainotila edustaakin tällöin makrotilaa, jossa systeemin *lämpötila on kaikkialla sama*. Vastaavasti esimerkiksi tilassa, jossa osassa A on suhteellisesti enemmän energiota kuin osassa B, osa A on korkeammassa lämpötilassa kuin B. Tämän tilan todennäköisyyts on nolla, mikä tarkoittaa sitä, että jos systeemin osat A ja B ovat samassa lämpötilassa (tasapainotila), systeemi ei koskaan itsestään muutu niin, että sen osista toinen lämpenisi toista kuumemaksi.



8.17 Arvioi kuvan 8.13 (a) jakaumien perusteella, kuinka todennäköisesti osa A sisältää yli puolet systeemin kokonaisenergiasta, jos hiukkasia on 10, 100 tai 1000. (Muistathan todennäköisyyslaskennasta, että todennäköisyyttä kuvaava jakaumafunktion rajaama *pinta-ala*.)

esimerkki 8.3

Mikrotilat

Kappaleet A ja B ovat samaa materiaalia, mutta kappale B on kooltaan kolminkertainen kappaleeseen A verrattuna. Ts. kappale A koostuu $N_A = N$ hiukkasesta ja kappale B $N_B = 3N$ hiukkasesta. Kullakin hiukkasella on yksi vapausaste, jonka energia voi olla $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots$ Kappaleiden muodostaman eristetyn systeemin kokonaisenergia on $E_{\text{kokonais}} = 8N\epsilon$, ja energia voi siirtyä vapaasti kaikkien hiukkasten välillä ϵ kokoisina paketteina. Tutki seuraavia kysymyksiä, kun $N = 1, 10, 100, 1000$:

- Mikä on A:n energian odotusarvo, $\langle E_A \rangle$?
- Mikä on A:n energian todennäköisin arvo?
- Montako mikrotilaa systeemillä kaikkiaan on?
- Millä todennäköisyydellä A:n energian poikkeama odotusarvosta on korkeintaan 5 % kokonaisenergiasta?

SUUNNITELMA Ekvipartitioperiaatteen mukaan A:ssa täytyy olla keskimäärin neljäsosa systeemin koko energiasta eli $\langle E_A \rangle = \frac{1}{4}E_{\text{kokonais}} = 2N\epsilon$. Huom. todennäköisin energia on tätä lähellä, mutta sen ei tarvitse olla täsmälleen sama kuin odotusarvo.

Todennäköisyyksien laskemiseksi meidän on laskettava E_A :n todennäköisyysjakauma. Todennäköisyyssille, että A:n energia on $E_A = N\epsilon$, saadaan laskemalla monessako mikrotilassa A:lla on tämä energia ja jakamalla tämä kaikkien mahdollisten mikrotilojen lukumäärällä,

$$P(E_A = N\epsilon) = \frac{\Omega(E_A = N\epsilon)}{\Omega_{\text{kaikki}}} \quad (8.54)$$

Tässä puolestaan mikrotilojen määrä selviää laskemalla erikseen, monellako tavalla $N\epsilon$ yksikköä energiota voidaan jakaa N_A hiukkaselle, $\Omega(N\epsilon, N_A)$, sekä monellako tavalla loput $8N - N\epsilon$ yksikköä voidaan jakaa N_B hiukkaselle, $\Omega(8N - N\epsilon, N_B)$. Koko systeemissä on tällöin energiota $E_A = N\epsilon$ vastaavia mikrotiloja

$$\Omega(E_A = N\epsilon) = \Omega(N\epsilon, N_A)\Omega(8N - N\epsilon, N_B) \quad (8.55)$$

Haluamme laskea, kuinka monella tavalla $N\epsilon$ yksikköä energiota voidaan jakaa N_{vapaus} vapausasteelle. Kyseessä on täsmälleen sama ongelma kuin jos haluaisimme selvittää monellako eri tavalla $N\epsilon$ samanlaista palloa voidaan jakaa N_{vapaus} erilaiseen laatikkoon. Tämä on tunnettu kombinatorinen ongelma, jonka ratkaisu on

$$\Omega(N\epsilon, N_{\text{vapaus}}) = \frac{(N\epsilon + N_{\text{vapaus}} - 1)!}{N\epsilon!(N_{\text{vapaus}} - 1)!}. \quad (8.56)$$

Emme johda tulosta tässä, mutta voit etsiä sen itse hakemalla kombinatoriikan menetelmää nimeltä "stars and bars".

RATKAISU Ensimmäiset tapaukset voi laskea vielä käsin, mutta suuremmat systeemit on laskettava tietokoneella. Ratkaisun antava Mathematica-ohjelma on annettu alla tapauksessa $N = 1000$. Tässä on taulukoituna lopputulokset.

N	Ω_{kaikki}	$\langle E_A \rangle (\epsilon)$	$\max P(E_A) : E_A (\epsilon)$	$P(E_A \notin [\langle E_A \rangle - \delta, \langle E_A \rangle + \delta])$
1	165	2	1	0.83
10	$3.8 \cdot 10^{31}$	20	19	0.50
100	$4.3 \cdot 10^{329}$	200	199	0.055
1000	$4.2 \cdot 10^{3314}$	2000	1999	$4.0 \cdot 10^{-9}$

Mathematica:

```
(* hiukkaset ja energia *)
n = 1000;
nA = n;
nB = 3n;
nEkokonais = 8n;

(* multiplisiteetti *)
omega[nE_, nH_] := (nE + nH - 1)!/(nE! (nH - 1)!)
omegaKaikki = omega[nEkokonais, nA + nB] // N
omegaA[nE_] := omega[nE, nA] omega[nEkokonais - nE, nB]
p[nE_] := omegaA[nE]/omegaKaikki
4.225569151121798*10^3314
```

```
(* energian odotusarvo, todennäköisin energia *)
eAkeski = nEkokonais*nA/(nA + nB)
Maximize[{p[ne], eAkeski - 2 < ne < eAkeski + 2}, {ne}, Integers] // N
2000
{0.00594745, {ne -> 1999.} }

(* yli 5 prosentin poikkeaman todennäköisyys *)
1.0 - Sum[ omegaA[ne],
{ne, Ceiling[eAkeski - 0.05 nEkokonais], Floor[eAkeski + 0.05 nEkokonais]}]
]/omegaKaikki // N
3.97673*10^-9
```

ARVIOINTI Tarkastetaan laskemalla todennäköisyyksien summa

$$\sum_{n_\epsilon=0}^{8N} n_\epsilon \epsilon P(E_A = n_\epsilon \epsilon) \quad (8.57)$$

sekä odotusarvo

$$\langle E_A \rangle = \sum_{n_\epsilon=0}^{8N} n_\epsilon \epsilon P(E_A = n_\epsilon \epsilon) \quad (8.58)$$

suoraan. Mathematicassa riittää komennot `Sum[p[ne], ne, 0, nEkokonais]` sekä `Sum[ne*p[ne], ne, 0, nEkokonais]`. Todennäköisyyksien summaksi saadaan kaikissa tapauksissa 1 ja odotusarvoksi $2N_\epsilon \epsilon$ kuten pitääkin.

Tuloksista nähdään, kuinka systeemin koon kasvattaminen lisää mikrotilojen määrää aivan mielettömästi. Mikrotilojen määrä kasvaa voimakkaimin juuri odotusarvon ympäristössä, ja niinpä selvästi odotusarvosta poikkeavien energioiden todennäköisyys pienenee. Jo 4000 hiukkasen systeemissä todennäköisyys poiketa odotusarvosta on luokkaa 10^{-8} , ja systeemin kasvaessa tämä todennäköisyys pienenee entisestään. Makroskooppisissa kappaleissa hiukkasia on niin paljon, että todennäköisyys mille tahansa mainittavalle poikkeamalle odotusarvosta on käytännössä nolla.

Pyrkimys tasapainoon

Edellä tarkasteltu mikrotilojen lukumäärän perustuva päätely perustuu oletukseen, että kaikki mikrotilat ovat yhtä todennäköisiä, mikä päätee tasapainossa olevalle eristetynlylle systeemille. Systeemi voi kuitenkin ulkoisten vuorovaikutusten takia päätyä johonkin epätasapainotilaan. Esimerkiksi jos yhdistämme kappaleen A, jonka hiukkasilla on paljon energiota, sekä kappaleen B, jonka hiukkasilla energiota on vähän, päädymme tilanteeseen, jossa systeemin osassa A on suhteellisesti enemmän energiota kuin mitä tasapainotilassa sillä kuuluisi olla. Käytännössä näin voidaan tehdä esimerkiksi yhdistämällä kuuma ja kylmä kappale. Jos systeemi tämän jälkeen eristetään ja sen annetaan kehittyä itsekseen, kappaleiden lämpötilojen voidaan havaita muuttuvan energian alkaessa virrata osasta A osaan B. Tämä prosessi jatkuu kunnes kappaleilla on *samat lämpötilit*, jolloin myös energia on keskimäärin jakautunut systeemissä tasaisesti.

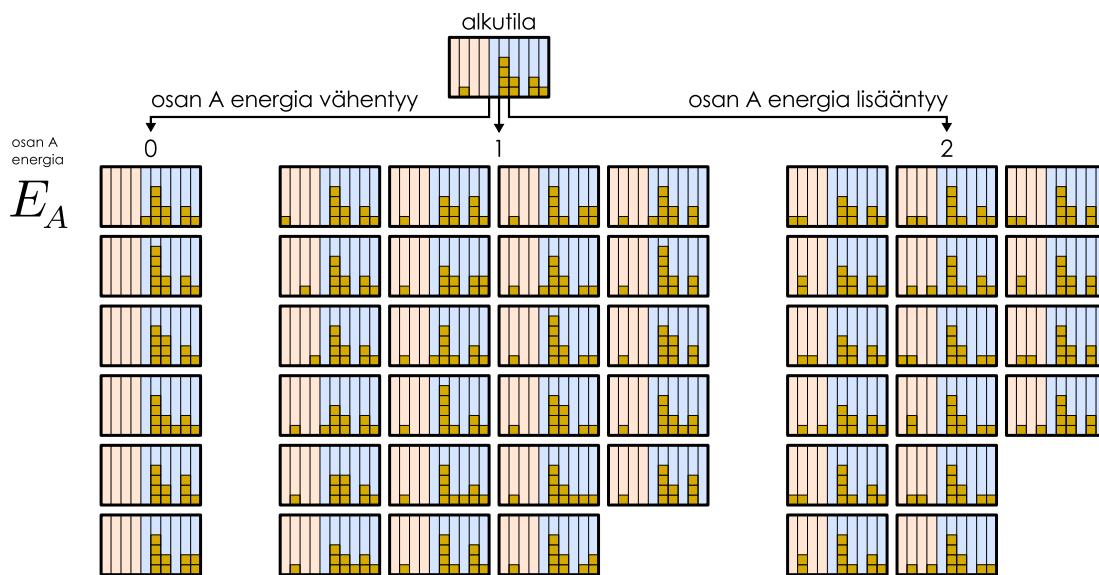
Todellinen fysiikalinen systeemi on aina jossakin tietyn mikrotilassa, eikä se voi hypätä siitä yhtäkkiä mihin tahansa toiseen mikrotilaan. Sen sijaan muutokset tapahtuvat askelittain: hiukkaset voivat vuorovaikuttaa esimerkiksi törmäilemällä (kuten kaasussa), jolloin energiota siirryt hiukkasetta toiselle, ja systeemin mikrotila hieman muuttuu. Makroskooppisissa systeemeissä näitä hiukkasten välisiä vuorovaikutuksia tapahtuu koko ajan ja jos systeemi on tasapainossa, vuorovaikutukset yhdessä siirtävät energiota systeemin eri osien välillä täsmälleensä yhtä paljon kaikkiin suuntiin, eikä energian kokonaismäärä systeemin eri osissa muutu. Sen sijaan jos systeemi *ei ole tasapainossa*, tapahtumat, joissa systeemiin tila muuttuu enemmän tasapainotilan kaltaiseksi, ovat *todennäköisempia* kuin tapahtumat, joissa systeemi siirryt kauemmas tasapainosta. Niinpä epätasapainossa olevan systeemin tila muuttuu jatkuvasti enemmän tasapainotilan kaltaiseksi kunnes systeemi lopulta saavuttaa tasapainon.

Tätä on havainnollistettu kuvassa 8.14 edellä tarkastellulle 10 hiukkasen systeemille. Kuvassa on esitetty eräs tila, jossa osan A energia on $E_A = 0.1E_{\text{kokonais}}$ sekä kaikki mahdolliset tilat, joihin on mahdollista siirtää energiota yksi energiayksikkö. Kuten kuvasta nähdään, on mahdollista, että osan A energia vähentyy, säilyy samana tai lisääntyy. Kuitenkin koska alkutilassa osassa A on vähemmän energiota kuin tasapainossa, on *enemmän* tapoja muuttaa systeemiä niin että osan A energia lisääntyy kuin vähentyy. Niinpä on todennäköisempää, että osa A vastaanottaa energiota osalta B eikä päinvastoin.

Arkinen esimerkki tästä ilmiöstä on toisiaan koskettavat kylmä kappale A ja kuuma kappale B. Kappaleiden ollessa kontaktissa niiden pintojen hiukkasten törmäyksissä siirryt energiota hiukkasetta toiselle. Kuuman kappaleen B hiukkasilla on paljon energiota eli ne liikkuvat nopeasti, kun taas kappaleen A hiukkasilla on vähän energiota ja ne liikkuvat keskimäärin hitaammin kuin kappaleen B hiukkaset. Nopean ja hitaan hiukkasten törmäyksessä yleensä energiota siirryt nopealta hiukkasetta hitaalle, joten on todennäköisempää, että kappaleen B hiukkaset menettävät energiota ja kappaleen A hiukkaset saavat sitä lisää. Makroskooppisesti tämä tarkoittaa kappaleen B lämpötilan laskevan ja kappaleen A lämpötilan nousevan.

Kuvan 8.14 esimerkissä kyseessä on pieni systeemi, joten energian on mahdollista siirtää myös osasta A osaan B, vaikka tämä onkin epätodennäköistä. Samoin kun kuuman ja kylmän kappaleen toisiaan koskettavien

Kuva 8.14: Kaikki mahdolliset mikrotilat, joihin eräästä alkutilasta voi päästää antamalla kahden hiukkisen vaihtaa keskenään yhden energiayksikön. Koska systeemin osassa A on suhteellisesti vähemmän energiota kuin osassa B, on todennäköisempää että A:n energia lisääntyy kuin vähentyy.



pintojen atomit törmäilevät toisiinsa, joissakin törmäyksissä voi sattumalta käydä niin, että kylmän kappaleeen atomi luovuttaa energiota kuuman kappaleen atomille, jolloin energiota siirrytty kylmästä kappaleesta kuumaan. Kuitenkin valtaosa törmäyksistä on sellaisia, että niissä energiota siirrytty kuuman kappaleen atomeilta kylmän kappaleen atomeille. Makroskooppisessa systeemissä pintojen atomeita törmää jatkuvasti valtavat määräät toisiinsa, jolloin energiota siirrytty aina yhteensä enemmän kuumasta kappaleesta kylmään kuin toisin päin. Niinpä jos makroskooppisen systeemin osan A lämpötila on matalampi kuin osan B, energian täytyy *aina* siirryä osasta B osaan A eli kuumasta kylmään eikä koskaan päinvastoin. Tällöin kuuma osa jäähtyy ja kylmä osa lämpenee. Vasta tasapainotilassa eli osien A ja B ollessa samassa lämpötilassa energiota siirrytty yhtä paljon kumpaankin suuntaan, jolloin kummankin osan kokonaisenergia ei enää muudu.

Tasapainotilassakin on periaatteessa mahdollista, että systeemi siirrytty hieman pois tasapainosta, mutta heti jos niin tapahtuu, systeemiä takaisin tasapainoon vievat tapahtumat ovat jälleen todennäköisempiä kuin systeemiä kauemmas tasapainosta vievat ja systeemi palaa välittömästi takaisin tasapainotilaan. Makroskooppisissa systeemeissä epätasapainotilojen todennäköisydet ovat niin pienet, että vaikka tasapainotilassa olevaa systeemiä seurattaisiin koko universumin ikä, havaittavaa poikkeamaa tasapainotilasta ei nähtäisi (ks. esimerkki 8.4). Tämä tosiasia voidaan muotoilla seuraavaksi fysiikan laiksi: *Makroskooppinen eristetty systeemi pyrkii makrotilaan, jota vastaavien mikrotilojen lukumäärä Ω on suurin mahdollinen. Tässä tilassa systeemi on tasapainossa. Eristetyn systeemin makrotila ei voi itsestään muuttua niin että makrotilaa vastaavien mikrotilojen lukumäärä pienenee.* Tämä on **termodynamiikan toinen pääsääntö** systeemin hiukkasten ja mikrotilan käsitteen avulla muotoiltuna.

Makroskooppisessa mittakaavassa tämä systeemin pyrkimys tasapainotilaan ilmenee prosessien *irreversiibeliyytenä*. Esimerkiksi kaksi eri lämpötilassa olevaa kappaletta pyrkivät samaan lämpötilaan, koska tämä on systeemin tasapainotila. Ei kuitenkaan koskaan käy niin, että samassa lämpötilassa olevista kahdesta kappaleesta toisen lämpötila alkaisi itsestään nousta ja toisen laskea. Ei ole myöskään mahdollista, ettei kappaleten hiukkasten satunnaisliikkeen epäjärjestynyt sisäenergia muuttuisi spontaanisti järjestyneeksi liike-energiaksi, koska on olemassa paljon mikrotiloja, joissa hiukkaset liikkuvat satunnaisiin suuntiin, ja vähän mikrotiloja, joissa kaikki hiukkaset liikkuvat samaan suuntaan. Esimerkiksi vedessä liikkova pallo pysähtyy, koska pallon yhteen suuntaan liikkuvat atomit törmäävät vesimolekyyleihin, jolloin niiden kollektiivisen liikkeen liike-energia siirrytty vesimolekyyleiden satunnaiseksi liikkeeksi. Sen sijaan olisi äärimmäisen epätodennäköistä, että makroskooppisen kappaleten pinnalla olevat vesimolekyylit sattumalta liikkuisivat kaikki samaan suuntaan ja näin työntäisivät pallon liikkeelle. (Tämä on kuitenkin mahdollista hyvin pienille hiukkastille. Mikroskoolla voidaan nähdä vedessä kelluvien mikroskooppisten hiukkasten poukkoilevan niihin törmäävien vesimolekyyleiden antamien impulssien johdosta. Ilmiötä kutsutaan *Brownin liikkeeksi*.)



8.18 Kerro omin sanoin, mitä ovat mikro- ja makrotilit. Selitä tämän perusteella, miksi jotkin makrotilit ovat toisia todennäköisempiä. Perustele erityisesti, mitä tästä seuraa systeemien koon kasvaessa, ja miten tämä liittyy irreversiibeileihin prosesseihin.

esimerkki 8.4

Itsestään liikkeelle

Jalkapallo kelluu paikoillaan täysin tyynessä vedessä. Palloa ympäröivät vesimolekyylit poukkoilevat satunnaisesti, ja periaatteessa voisi olla mahdollista, että molekyylit sattuisivat liikkumaan samaan suuntaan työntäen pallon liikkeelle. Arvioi, kuinka epätodennäköistä tämä on.

SUUNNITELMA Valitaan x -akseli johonkin mielivaltaiseen suuntaan ja tarkastellaan molekyylien todennäköisyksiä liukkuu positiviseen ja negativiseen x -suuntaan. Koska vesi ei virtaa, kyllakin yksittäisellä molekyyllä on yhtä suuri todennäköisyys liukkuu mihin tahansa suuntaan. Nopeuden x -komponentti on siis positiivinen todennäköisyydellä $p = 0.5$ ja negatiivinen yhtä suurella todennäköisyydellä. Millä tahansa hetkellä N molekyylistä hyvin tarkasti noin puolet liukkuu positiiviseen suuntaan ja puolet negativiseen suuntaan, jolloin niiden palloon kohdistamat impulssit kumoavat toisensa eikä pallo lähde liikkeelle. Periaatteessa on mahdollista, että jonakin hetkenä molekyylejä liukkuu enemmän vaikkapa positiiviseen x -suuntaan kuin negatiiviseen, jolloin molekyylit antaisivat pallolle impulssin x -suuntaan ja pallo lähtisi liikkeelle. Arvioidaan, kuinka epätodennäköistä tämä on. Lasketaan, kuinka suurella todennäköisyydellä vähintään 50.01 % pallon pinnalla olevista molekyyleistä liukkuu positiiviseen tai negatiiviseen x -suuntaan. Tämä määrä ei riittäisi vieväli työntämään palloa havaittavasti liikkeelle, mutta jos tämä on hyvin epätodennäköistä, pallon lähteminen itsestään liikkeelle on vielä epätodennäköisempää.

RATKAISU Jalkapallon säde on luokkaa $R = 10^{-1}$ m. Jos pallo kelluu niin, että puolet siitä on veden alla, vedessä olevan osan pinta-ala on $A = 2\pi R^2 \approx 6 \cdot 10^{-2}$ m². Vesimolekyylien välinen keskimääräinen etäisyys nestemäisessä vedessä on puolestaan luokkaa $r = 3 \cdot 10^{-10}$ m, joten pallon pinnalla on keskimäärin yksi molekyyli noin pinta-alaa r^2 kohden. Pallon pinnalla on siten noin

$$N = \frac{A}{r^2} = 7 \cdot 10^{17} \quad (8.59)$$

molekyyliä.

Oletetaan pallon pinnalla olevien molekyylien liike toisistaan riippumattomaksi ja tarkastellaan satunnaismuuttujaan n : "tarkasteluhetkellä positiiviseen x -suuntaan liikkuvien molekyylien lukumäärä". Koska meillä on N molekyyliä, joista kukaan liukkuu positiiviseen suuntaan todennäköisyydellä p , positiiviseen suuntaan liikkuvien molekyylien lukumäärä n noudataa binomijakaumaa odotusarvolla $\mu = Np$ ja hajonnalla $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$. Koska N on hyvin suuri, jakauma ei käytännössä poikkea lainkaan normaalijakaumasta, jolla on sama odotusarvo ja keskijointa.

Todennäköisyys sillä, että normaalijakautunut satunnaismuuttuja n poikkeaa odotusarvostaan enemmän kuin x keskijointaa, eli että $|n - \mu| > x\sigma$, pienenee nopeasti hajontojen määräen x kasvaessa. Esimerkiksi todennäköisyys sillä, että satunnaismuuttujan n arvo poikkeaa odotusarvosta enemmän kuin 2.6σ , on $P = 0.01$. Arvo poikkeaa odotusarvosta yli 3.9σ todennäköisyydellä $P = 0.0001$ ja yli 4.9σ todennäköisyydellä $P = 0.000001$. Kun x on suuri, satunnaismuuttuja poikkeaa odotusarvostaan enemmän kuin x keskijointaa todennäköisyydellä

$$P(|n - \mu| > x\sigma) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}. \quad (8.60)$$

Haluamme laskea todennäköisyyden sillä, että molekyyleistä yli 50.01 % liukkuu samaan suuntaan eli että n poikkeaa odotusarvostaan $\mu = Np$ enemmän kuin 0.01 %. Siispä haluamme laskea todennäköisyyden $P(|n - Np| > 0.0001N)$. Keskijointa oli $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$, joten tämän poikkeaman voi kirjoittaa myös hajontojen monikertana $0.0001N = x\sigma = x\sqrt{Np(1-p)}$, mistä hajontojen määräksi ratkeaa

$$x = \frac{0.0001N}{\sqrt{Np(1-p)}} = 10^{-4} \sqrt{\frac{N}{p(1-p)}} \approx 10^5. \quad (8.61)$$

Odotusarvoisesti molekyylejä liukkuu yhtä paljon kumpaankin suuntaan. Yli 0.01 % poikkeamaa tästä tasajakaumasta vastaa 100000 keskijointaa. Tämä on mielettömän suuri poikkeama odotusarvosta, ja sen todennäköisyys on luokkaa $P \approx 10^{-5} e^{-5 \cdot 10^9}$. Luvun voi muuntaa e-kannasta 10-kantaiseksi logaritmilla, sillä $\log P \approx -2 \cdot 10^9$, joten

$$P \approx 10^{-2 \cdot 10^9} = 10^{-2000000000}. \quad (8.62)$$

Toisin sanoen $P \approx 0.0000 \dots 0001$, missä on siis noin 2000000000 nollaa!

ARVIOINTI Todennäköisyys on pieni, mutta eikö periaatteessa näin voisi käydä, kun tarpeeksi kauan odotetaan? Verrataan laskettua todennäköisyyttä maailmankaikkeuden kokoon ja ikään. Havaittavissa olevassa maailmankaikkeudessa on arvioitu olevan noin 10^{80} atomia. Maailmankaikkeuden ikä on puolestaan noin 13 miljardia vuotta eli $4 \cdot 10^{17}$ s. Molekyylien liikkeen aikaskaala on femtosekunnin luokkaa, joten voimme arvioida molekyylien osuvan pallon pintaan 10^{-15} s välein. Havaittavissa maailmankaikkeudessa on siis varmasti vähemmän kuin 10^{80} jalkapalloja ja vaikka pallot olisivat kelluneet vedessä maailmankaikkeuden syntyhetkestä alkaen, niitä ympäröivät molekyylit olisivat ehtineet törmätä niihin korkeintaan noin $4 \cdot 10^{32}$ kertaa. Siispä jos koko maailmankaikkeus olisi täynnä vedessä kellovia jalkapalloja, edellä tarkasteltu tilanne olisi ehtinyt tapahtua korkeintaan noin $M \approx 10^{12}$ kertaa. Tämä on mielettömän paljon mutta silti mitättömän vähän todennäköisyyteen $P \approx 10^{-2000000000}$ verrattuna. Todennäköisyys sillä, että vesimolekyylien satunnaislle olisi työntänyt kellovan pallon liikkeelle missään koko maailmankaikkeuden historian aikana, on tämän perusteella edelleen luokkaa $MP \approx 10^{-2000000000+100} \approx 10^{-2000000000}$ eli käytännössä nolla. Ja samanlainen päätely toimii mille tahansa prosessille, jossa satunnaistesti järjestyyttää energiaa muutuisi spontaanisti järjestyneeksi energiaksi. Vaikka tällaiset prosessit ovat mekaanisesti mahdollisia, niiden todennäköisyys on niin pieni, ettei niitä ole voinut tapahtua ikinä missään. Tämä on termodynamiikan toinen pääsääntö.

8.4 Entropia

Makroskooppisissa systeemeissä mikrotilojen määrittäminen on käytännössä täysin mahdotonta, koska atomaristen hiukkasten paikkoja ja nopeuksia on yleensä mahdoton mitata ja joka tapauksessa hiukkasia on aivan liian paljon niiden kaikkien havainnoimiseksi. Makrotila sen sijaan voidaan määrittää muutamia makroskooppisia suureita kuten lämpötilaa, painetta, ainemäärää ja tilavuutta mittamaalla. Makroskooppisten suureiden käytös kuitenkin pohjautuu mikroskooppisen maailman statistikkaan, joten makroskooppisten ilmiöiden ymmärtämiseksi tarvitsisimme keinon liittää makroskooppiset suuret mikroskooppisiin. Erityisesti koska mikrotilojen lukumäärä kuvailee makrotilan todennäköisyyttä, olisi erittäin hyödyllistä löytää keino mitata mikrotilojen lukumäärää makroskooppisten suureiden avulla.

Tätä päämäärää varten määrittelemme makroskooppisen suuren **entropia** makrotilaan liittyvien mikrotilojen lukumäärän logaritmina

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (8.63)$$

Logaritmi on aidosti kasvava funktio, joten kun mikrotilojen määrä Ω kasvaa, myös entropia kasvaa, ja niinpä mikrotilojen lukumäärän maksimoituminen on sama asia kuin entropian maksimoituminen. Lisäksi vaikka mikrotilojen määrä on todellisissa systeemeissä käsittämättömän suuri, niiden logaritmit ovat paremmin hahmotettavissa ja näin määriteltyyn entropian arvot ovat helpommin käsittelyissä. Ja ennen kaikkea yhdistettäessä kaksi kappaletta yhdeksi systeemiksi systeemin mikrotilojen lukumäärä saadaan osien mikrotilojen lukumärien *tulona* yhtälön (8.53) mukaisesti. Logaritmin laskusäännön $\ln ab = \ln a + \ln b$ perusteella systeemin kokonaisentropia saadaan kuitenkin sen osien entropioiden *summana*

$$S_{\text{kokonais}} = k_B \ln \Omega = k_B \ln \Omega_A \Omega_B = k_B \ln \Omega_A + k_B \ln \Omega_B = S_A + S_B. \quad (8.64)$$

tai yleisemmin

$$S_{\text{kokonais}} = \sum_i S_i. \quad (8.65)$$

Multipliteetin logaritmina määritelty entropia on siis *ekstensiivinen suure*.

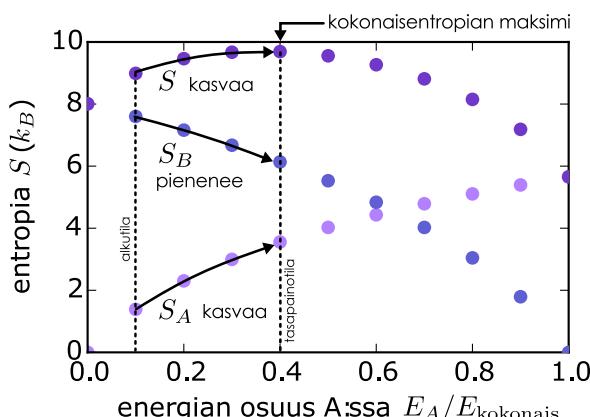


8.19 Systeemi koostuu kolmesta osasta. Nämä osat ovat makrotiloissa, joihin liittyy $\Omega_A = 7.0 \cdot 10^{100}$, $\Omega_B = 1.5 \cdot 10^{200}$ sekä $\Omega_C = 2.0 \cdot 10^{300}$ mikrotilaa. (a) Mikä on kunkin osan entropia? (b) Montako mikrotilaa systeemin makrotilaan kaikkiaan liittyy? (c) Mikä on systeemin kokonaisentropia?

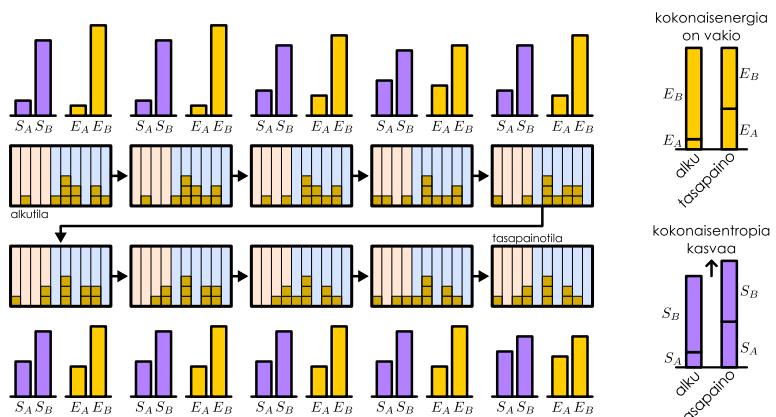
Usein entropiaa kutsutaan systeemin epäjärjestyskuvaaksi, koska yleensä on vain vähän tapoja järjestää systeemi säännönmukaisesti (esimerkiksi niin, että atomit ovat kaikki rivissä) mutta on paljon tapoja miten systeemi voi olla epäjärjestynyt (atomit miten sattuu). Täsmällisemmin kuitenkin entropia mittaa makroskooppisessa mittakaavassa *puuttuvaa informaatiota*. Jos makrotilan entropia on pieni, siinä liittyy vähän mikrotiloja ja pelkästään makrotilan perusteella tiedämme suunnilleen miten hiukkasten täytyy olla järjestyneet. Jos sen sijaan entropia on suuri, mahdollisia mikrotiloja on paljon emmekä tiedä millainen systeemi tarkalleen on makroskooppisessa mittakaavassa.

Kuva 8.15: Taulukossa 8.1 esitetyn systeemin entropia. Epätasapainossa olevan eristetyn systeemin tila siirtyy itsestään kohti tasapainotila, jolloin systeemin energia on vakio mutta entropia kasvaa.

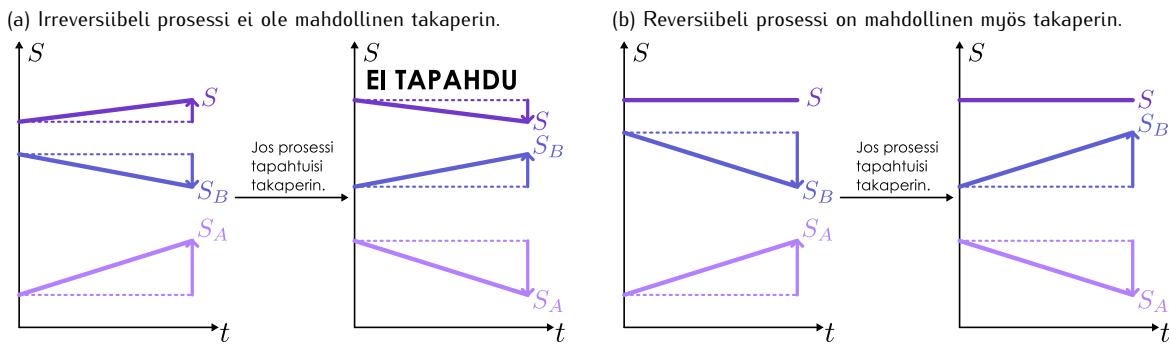
(a) Entropia maksimoituu tasapainossa.



(b) Systeemin eräs mahdollinen reitti kohti tasapainoaa.



Kuva 8.16: Entropian muutos ja reversiibelisyys. Jos eristetyn systeemin entropia kasvaa jossakin prosessissa, saman prosessin tapahtuminen ajassa takaperin pienentäisi entropiaa. Tämä ei ole mahdollista, joten tällainen prosessi on irreversiibeli. Jos entropia ei muutu, prosessi voi tapahtua myös ajassa takaperin. Avointen systeemien (osat A ja B) entropia voi vähentyä.



Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan eristetty systeemi kehittyy aina kohti makrotilaa, johon liittyy eniten mikrotiloja, ja tähän tasapainotilaan päässeeseen systeemin makrotila ei enää muudu. Sama asia voidaan entropian avulla lausua seuraavasti: *Makroskooppisen eristetyn systeemin entropia voi ainoastaan kasvaa. Systeemi on tasapainossa, kun sen entropia on maksimissaan, ja tällöin entropia ei muudu.*

$$\Delta S_{\text{eristetty}} \geq 0. \quad (8.66)$$

Kuvassa 8.15 on piirretty entropia samalle 10 hiukkaseen systeemille kuin mitä taulukossa 8.1 analysoitiin numeerisesti. Kuvaan on piirretty erikseen osien A ja B entropiat sekä systeemin kokonaisentropia osan A sisältämän energian funktiona. Tasapainotilaan $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ liittyy eniten mikrotiloja, joten myös sen kokonaisentropia on suurin. Makrotiloihin, joissa osan A energia on jotain muuta, liittyy aina pienempi kokonaisentropia.

Kummankaan osan A tai B entropia *ei ole* tasapainotilassa suurimmillaan vaan kummankin osan entropia kasvaa osan sisältämän energian kasvaessa. Jos systeemi on aluksi esimerkiksi tilassa $E_A = 0.1E_{\text{kokonais}}$ (A on kylmä ja B kuumaa), se alkaa spontaanisti kulkemaan kohti tasapainotilaan (A:lta ja B:llä sama lämpötila). Tällöin systeemin kokonaisentropia kasvaa, mutta osan B entropia *pienenee*. Tämä johtuu siitä, että jos tarkastelemme systeeminä ainoastaan osaa B, tämä *ei ole eristetty systeemi* (vaan ainoastaan suljettu), sillä se vaihtaa energiaa osan A kanssa. Energian siirtymessä osasta B osaan A eli B:n sisältämien energiayksiköiden vähentyessä B:n makrotilaan liittyvien mikrotilojen lukumäärä vähentyy. Näin siksi, että mitä enemmän energiayksiköitä B sisältää, sitä enemmän erilaisia tapoja niiden jakamiselle B:n hiukkasten kesken on olemassa. Siispä B:n menettäessä energiota myös sen entropia pienenee. Kuitenkin samalla osan A energia lisääntyy ja niinpä A:ta kuvaavien mikrotilojen määrä kasvaa, ja koska A:ssa oli aluksi niin vähän energiota, entropia kasvaa A:ssa *nopeammin* kuin se pienenee B:ssä. Tällöin eristetyn systeemin kokonaisentropia, joka on sen osien entropioiden summa, kasvaa. Tarinan opetus on siis se, että termodynamiikan toisen pääsäännön entropiaa koskeva muoto *pätee vain eristetylle systeemeille*. Avoimissa ja suljetuissa systeemeissä, joiden kokonaisenergia voi muuttua vuorovaikutuksissa ympäristön kanssa, entropia voi kasvaa, pienentyä tai olla vakio.



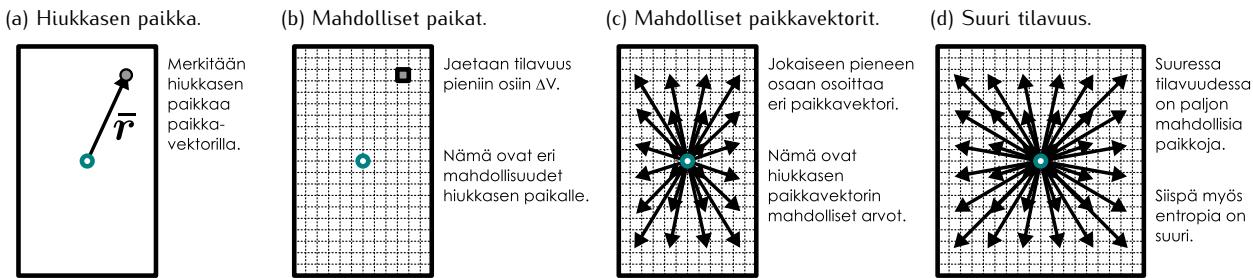
8.20 (a) Laske taulukon 8.1 perusteella osien A ja B entropiat sekä systeemin kokonaisentropia, kun (i) $E_A = 0.3E_{\text{kokonais}}$, (ii) $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$, (iii) $E_A = 0.5E_{\text{kokonais}}$. (b) Vertaa kuvaa 8.15. (c) Päteekö aina $S_{\text{kokonais}} = S_A + S_B$?

Entropia antaa meille myös uuden keinon tarkastella reversiibelyyttä eli sitä, millaiset prosessit voivat tapahtua ajassa kumpaan suuntaan tahansa (kuva 8.16). Nimittäin jos prosessi johtaa makroskooppisen eristetyn systeemin entropiaa kasvuun, prosessin käänтaminen ajassa takaperin johtaisi eristetyn systeemin entropian pienentämiseen. Tämä on kuitenkin termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan mahdotonta, joten prosessi *ei voi tapahtua ajassa takaperin*. Siispä tällainen prosessi on *irreversiibeli*. Prosessit, joissa eristetyn systeemin entropia ei muutu, sen sijaan voivat tapahtua myös takaperin, ja ne ovat siis *reversiibeileitä*.

Entropian riippuvuus tilavuudesta

Edellä on tarkasteltu esimerkkejä, joissa systeemin mikrotila kuvattiin pelkästään hiukkasten energian avulla. Todellisuudessa tämä ei yleensä riitä, vaan mikrotila sisältää *kaiken* informaation systeemistä. Esimerkiksi kaasun tapauksessa tämä tarkoittaa sekä hiukkasten liikemäärien että niiden paikkojen tuntemista. Mikrotilat, joissa hiukkaset ovat samoissa paikoissa mutta liikkuvat eri nopeuksilla ovat *eri mikrotilat* ja ne voivat itse

Kuva 8.17: Yhden hiukkisen mahdolliset mikrotilitat riippuvat siitä, monessako eri paikassa hiukkisen voi olla, ja tämä riippuu sen tilavuuden suuruudesta, jossa hiukkisen on.



asiassa liittyy myös eri makrotiloihin. Aivan samoin mikrotilitat, joissa hiukkasten nopeudet ovat samat mutta hiukkaset ovat eri paikoissa, ovat eri makrotiloja. Seuraavaksi tarkastelemmekin makrotilojen määän ja siten entropian riippuvuutta hiukkasten mahdolisista paikoista ja systeemin makroskooppisesta tilavuudesta.

Otetaan esimerkkitapaukseksi säiliöön suljettu ideaalikaasu ja tarkastellaan aluksi kaasun yhtä hiukkasta. Hiukkisen voi tietenkin olla missä tahansa säiliön sisällä, mutta analyysin mahdolistamiseksi ajatellaan säiliön tilavuus V jaetuksi pieniin osiin ΔV , joita on yhteensä $M = \frac{V}{\Delta V}$ kappaletta. Koska yksi hiukkisen voi olla missä tahansa näistä osista, sillä on M mahdollista paikkaa, eli systeemillä on $\Omega = M$ erilaista makrotilaia. Jos hiukkasia on kaksi, ensimmäinen hiukkasta voi olla missä tahansa M eri paikasta ja samoin toinen hiukkisen voi olla missä tahansa, joten kahden hiukkisen systeemillä on yhteensä $\Omega = M^2$ makrotila. Samalla päättelyllä N hiukkasta voivat olla $\Omega = M^N$ eri makrotilassa olettaen, että missä tahansa piennessä tilavuudessa ΔV voi olla kuinka monta hiukkasta tahansa ja että hiukkaset ovat tunnistettavissa toisistaan. (Ensimmäinen oletus on yksinkertaistus, joka yleensä tehdään ideaalikaasumallissa. Se on hyvä approksimaatio kaasun ollessa harvaa, koska silloin kaasun hiukkasten kohtaaminen on harvinaista. Toinen oletus tarkoittaa sitä, että makrotila, jossa hiukkaset A ja B ovat paikoissa \bar{r}_A ja \bar{r}_B , on eri makrotila kuin se jossa hiukkaset ovat paikoissa \bar{r}_B ja \bar{r}_A — siis vaihdettu keskenään. Osoittautuu, että tämä oletus ei päde, mutta yksinkertaisuuden vuoksi emme tässä ota siitä seuraavia korjauksia huomioon.)



8.21 Hyllyssä on kuusi tasoa ja kolme esineitä. Monellako erilaisella tavalla esineet voidaan asettaa eri tasolle, jos (a) esineet ovat erilaiset ja samalla tasolla saa olla monta esineittä (mutta samalla tasolla olevien esineiden järjestyskellä ei ole väliä), (b) esineet ovat täysin samanlaiset (niitä ei voi tunnistaa toisistaan) ja yhdellä tasolla saa olla vain yksi esine kerrallaan?

Tällöin systeemin entropia on määritelmän mukaisesti

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = k_B \ln M^N = N k_B \ln M, \quad (8.67)$$

missä on käytetty logaritmin laskusääntöä $\ln a^b = b \ln a$. Edelleen sijoittamalla tilavuusalkioiden lukumäärää

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = N k_B \ln \frac{V}{\Delta V}. \quad (8.68)$$

Nämä laskettu entropian arvo riippuu tilavuusalkion ΔV koosta, joten näin emme saa entropialle täsmällistä arvoa. Periaatteessa tilavuusalkion koon voi valita mielivaltaisen pieneksi, jolloin alkioita on äärettömästi ja myös entropia on ääretön. Entropian muutokset säiliön tilavuuden muuttuessa ovat kuitenkin äärellisiä ja niillä on täsmällinen arvo. Jos nimittäin säiliön tilavuus on aluksi V_{alku} ja tilavuuden annetaan muuttua arvoon V_{loppu} , kaasumolekyylien käytössä oleva tilavuus muuttuu. Näin ollen kaasun entropia on aluksi $S_{\text{alku}} = N k_B \ln \frac{V_{\text{alku}}}{\Delta V}$ ja lopuksi $S_{\text{loppu}} = N k_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{\Delta V}$. Entropian muutos tilavuuden muuttuessa on siten

$$\Delta S = S_{\text{loppu}} - S_{\text{alku}} = N k_B \left(\ln \frac{V_{\text{loppu}}}{\Delta V} - \ln \frac{V_{\text{alku}}}{\Delta V} \right) = N k_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}. \quad (8.69)$$

Erityisesti entropian muutos ei riipu mitenkään mielivaltaisesti valitusta tilavuusalkion koosta ΔV , joten tämä muutos on hyvin määritelty pelkästään systeemin koon suhteellisesta muutoksesta riippuva suure.

Entropian muutos on positiivinen systeemin tilavuuden kasvaessa eli suuren tilavuuden täyttävällä kaasulla on suuri entropia. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että suressa tilavuudessa kaasumolekyyleillä on suhteellisesti enemmän mahdolisia paikkoja kuin piennessä tilavuudessa. Entropialle ei tämän analyysin perusteella voitu antaa mitään absoluuttista arvoa, mutta voimme silti määritellä yhtälön (8.69) toteuttavan entropiafunktion

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = N k_B \ln \frac{V}{V_0}, \quad (8.70)$$

missä V_0 on jokin tuntematon vakio. Edelleen koska entropian absoluuttisella arvolla ei makroskooppisessa mittakaavassa ole merkitystä vaan tavallisesti halutaan vain tietää milloin entropia on maksimissaan, voidaan tälle vakiolle käyttää esimerkiksi arvoa $V_0 = 1 \text{ m}^3$.



- 8.22** Säiliön tilavuus on 1.0 m^3 ja siinä on 1 mooli kaasua. (a) Kuinka suuri on entropian muutos, jos kaasun tilavuus (i) kasvaa 0.5 m^3 tai (ii) kaksinkertaistuu? (b) Onko tulos erilainen, jos säiliön alkutilavuus onkin 0.1 m^3 ? (c) Onko tulos erilainen, jos yhtälön (8.70) vakion V_0 arvo onkin $V_0 = 0.1 \text{ m}^3$?

Entropian riippuvuus energiasta

Aikaisemmassa systeemin osia A ja B käsitteleessä esimerkissä päättelimme osan A entropian kasvavan sen sisäenergian lisääntyessä. Samoin osan B sisäenergian kasvaessa tämän osan entropia kasvaa. Näin tapahtuu yleisesti: *systeemin entropia kasvaa sen sisäenergian kasvaessa*. Tämän perusteella kaasun tilavuuden lisäksi myös sen sisältämä energia vaikuttaa sen entropiaan. Analysoimme seuraavaksi millainen tämä riippuvuus on.

Pohjimmiltaan kyse on aivan samanlaisesta päättelystä kuin tilavuudenkin tapauksessa. Kaasun molekyylien paikkavektoreiden muuttuminen tarkoittaa kaasun mikrotilan muuttumista, ja koska kaasun tilavuuden kasvaessa paikkavektoreilla voi olla enemmän erilaisia arvoja, myös mahdollisten mikrotilojen lukumäärä kasvaa. Näin ollen tilavuuden kasvaminen lisää entropiaa. Aivan samoin molekyylien *nopeusvektoreiden* muuttuminen tarkoittaa kaasun mikrotilan muuttumista, joten kaasun entropia kasvaa myös silloin, kun molekyylien nopeusvektoreiden mahdolliset arvot lisääntyvät.

Kaasumolekyylien nopeusvektoreiden suunnat ovat satunnaiset, koska kullakin ajan hetkellä jokainen molekyyli voi olla liikkeessä mihiin suuntaan tahansa. Nopeusvektoreilla on siis yhtä paljon erilaisia suuntia kaikissa tiloissa. Sen sijaan jos molekyylien keskimääräinen vauhti lisääntyy, nopeusvektoreilla on enemmän mahdollisia *pituuksia* (kuva 8.18). Suurempi vauhti puolestaan tarkoittaa suurempaa liike-energiaa. Siispä kaasun energian lisääntyessä molekyyleillä on enemmän mahdollisia nopeusvektoreita ja sitä kautta enemmän erilaisia mikrotiloja. Näin ollen myös entropia kasvaa.

Oletetaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisella molekyylillä voi olla mikä tahansa nopeus, jonka nopeusvektorin pituus on korkeintaan $v_{\max} = av_{\text{rms}}$, missä vakio a ilmaisee nopeuksien rms-keskiarvon v_{rms} ja maksimivauhdin välistä suhdetta. Tämä tarkoittaa sitä, että jos asetamme molekyylien nopeusvektoreiden kannat koordinaatiston origoon, niiden päät ovat v_{\max} -säteisen pallon sisällä ja ne täyttävät tämän pallon tasaisesti. Tämä ei ole täsmälleen totta, mutta oikean nopeusjakauman käyttö ei muuta päättelyn kulkua eikä lopputulosta.



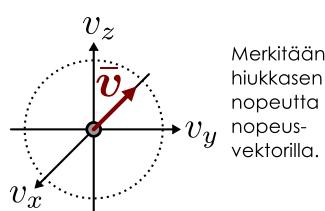
- 8.23** Paperille on piirretty ympyrä. Sinulla on joukko ohuita, eripituisia nauloja ja tehtäväsi on asettaa ympyrään mahdollisimman monta naulaa niin, että jokaisen naulan kanta on ympyrän keskipisteessä ja kaikkien naulojen kärjet ovat vähintään 1 cm päässä toisistaan. Montako naulaa saat sopimaan ympyrään, jos ympyrän säde on (a) 1 cm , (b) 2 cm , (c) 3 cm . (d) Miten ympyrään mahtuvien naulojen määrä riippuu ympyrän säteestä?

Nyt voimme käyttää samaa päättelyä kuin edellä tilavuuden tapauksessa. Nopeusvektorit täyttävät nyt $v_x v_y v_z$ -koordinaatistossa pallomaisen tilan (statistikassa fysiikassa täitä kutsutaan *nopeusvaruudeksi*), jonka "tilavuus" on pallon tilavuuden lausekkeen perusteella

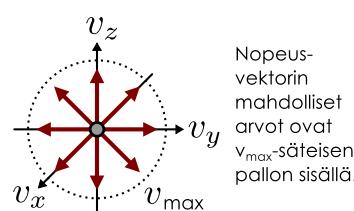
$$V_v = \frac{4}{3}\pi v_{\max}^3. \quad (8.71)$$

Kuva 8.18: Yhden hiukkasen mahdolliset mikrotilit riippuvat siitä, mitä erilaisia nopeuksia hiukkasella voi olla, ja tämä riippuu hiukkasen suurimmasta mahdollisesta liike-energiasta.

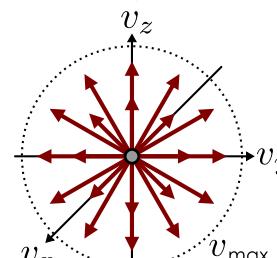
(a) Hiukkasen nopeusvektori.



(b) Mahdolliset nopeusvektorit.



(c) Suuri energia.



Kun hiukkaille on paljon energiota, niillä voi olla suuret nopeudet ja paljon mahdollisia nopeuden arvoja.

Siispä myös entropia on suuri.

Toisaalta rms-nopeus riippuu kaasun hiukkasten liike-energiasta eli kaasun sisäenergiasta yhtälöiden (8.22), $\langle K_{\text{molekylli}} \rangle = \frac{1}{2}mv_{\text{rms}}^2$, sekä (8.27), $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = N \langle K_{\text{molekylli}} \rangle$, mukaisesti. Niinpä voimme kirjoittaa maksiminopeuden v_{max} kaasun molekyylien liike-energian avulla

$$v_{\text{max}} = av_{\text{rms}} = a \left(\frac{2}{m} \langle K_{\text{molekylli}} \rangle \right)^{1/2} = a \left(\frac{2}{m} \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{1/2}, \quad (8.72)$$

joten nopeusvektorien täyttämän pallon "tilavuus" on

$$V_v = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \frac{a^3}{m^{3/2}} \left(\frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{3/2}. \quad (8.73)$$

Entropian muutos noudattaa nyt täsmälleen samaa periaatetta kuin todellisenkin tilavuuden muuttuessa. Energian $E_{\text{sisä,yksiatominen}}$ kasvaessa nopeusvektoreilla on enemmän mahdollisia arvoja ja entropia riippuu tilavuudesta V_v yhtälön (8.70) mukaisesti

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V_v}{V_{v,0}} = Nk_B \ln \left[\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \frac{a^3}{m^{3/2} V_{v,0}} \left(\frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} \right)^{3/2} \right]. \quad (8.74)$$

Merkitsemällä logaritmin sisällä olevaa tuntematonta vakiota lyhyemmin $\frac{8\sqrt{2}}{3} \pi a^3 / (m^{3/2} V_{v,0}) = (N_0/E_0)^{3/2}$ ja käytämällä jälleen logaritmin laskusääntöä $\ln a^b = b \ln a$ lauseke voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{E_{\text{sisä,yksiatominen}}}{N} / \frac{N_0}{E_0}. \quad (8.75)$$

Lausekkeessa esiintyville vakioille voidaan jälleen valita jotkin sopivat arvot kuten $E_0 = 1 \text{ J}$ ja $N_0 = N_A$.

Tuloksena saatu riippuvuus energiasta on samanlainen kuin yhtälön (8.70) kuvama riippuvuus tilavuudesta paitasi että eksponentti $3/2$ on nyt siirtynyt kertoimeksi. Kerroin 3 on yhtälössä (8.71) esiintynyt avaruuden ulottuvuuksien lukumäärä eli suoraviivaisen liikkeen *vapausasteiden lukumäärä*. Niinpä yhtälö (8.75) päteekin täsmälleen ottaen vain atomeista koostuvalle kaasulle ja moniatomisen kaasun tapauksessa kerroin 3 korvataan vapausasteiden lukumäärällä. Entropian energiasta riippuva osuus onkin näillä kaasuilla *suurempi* kuin yksiatomisella kaasulla. Tämä johtuu siitä, että jos molekyylit voivat pyöriä tai värähdellä, niillä on myös erilaisia tapoja pyöriä ja värähdellä. Niinpä moniatomilla molekyyleillä on enemmän eri tapoja liikkua kuin pelkillä atomeilla ja niiden entropiakin on siten suurempi.

Entropia ja lämpötila

Atomeista koostuvan ideaalikaasun sisäenergia saadaan yhtälöstä (8.27), $E_{\text{sisä,yksiatominen}} = \frac{3}{2} Nk_B T$, jonka mukaan sisäenergia ja lämpötila ovat toisiinsa suoraan verrannolliset. Niinpä tällaisen ideaalikaasun energiasta riippuva entropia (8.75) voidaan kirjoittaa lämpötilan avulla muotoon

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{\frac{3}{2} N_0 k_B T}{E_0} = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}, \quad (8.76)$$

missä T_0 on jälleen uusi tuntematon vakio, jolle voidaan valita arvoksi esimerkiksi 1 K.

Kaasun entropia riippuu siis yhtälön (8.70) mukaan sen tilavuudesta, koska mitä suuremmassa tilassa kaasun molekyylit saavat liikkua, sitä enemmän mahdollisia mikrotiloja Ω_{paikka} niillä on. Toisaalta yhtälön (8.76) mukaan entropia riippuu myös lämpötilasta, koska korkeassa lämpötilassa kaasun molekyyleillä voi olla enemmän energiota ja sitä kautta myös enemmän mahdollisia nopeuteen liittyviä mikrotiloja Ω_{nopeus} . Kaasun mikrotilan kuvaamiseen tarvitaankin sekä tietoa molekyylien nopeuksista että niiden paikoista, joten kaikkiaan kaasulla on

$$\Omega = \Omega_{\text{paikka}} \Omega_{\text{nopeus}} \quad (8.77)$$

mikrotila, kuten yhdelle hiukkaselle on havainnollistettu kuvassa 8.19. Kaasun entropia on siis kaikkiaan tilavuudesta riippuvan osuuden ja lämpötilasta riippuvan osuuden *summa*

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = k_B \ln \Omega = k_B \ln \Omega_{\text{paikka}} + k_B \ln \Omega_{\text{nopeus}} = S_{\text{ideaalikaasu,paikka}} + S_{\text{ideaalikaasu,nopeus}}, \quad (8.78)$$

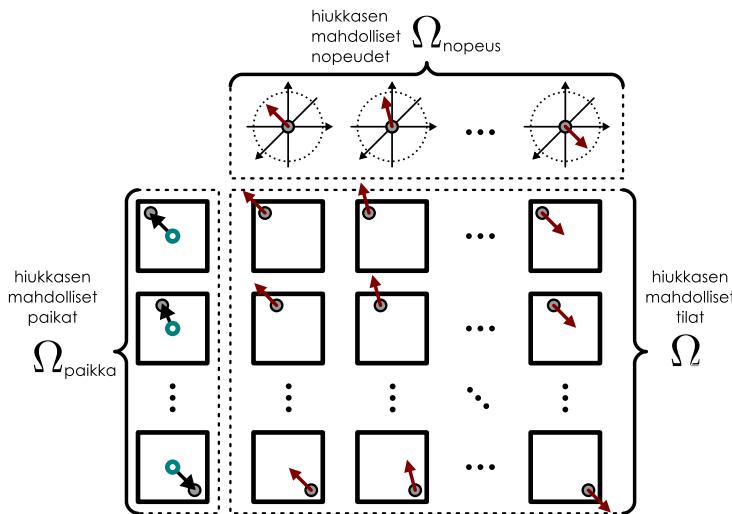
eli auki kirjoitettuna

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}. \quad (8.79)$$

Edelleen jos kaasu koostuu molekyyleistä, jotka voivat pyöriä tai värähdellä, lämpötilasta riippuvassa entropiassa täytyy kerroin 3 korvata molekyylien vapausasteiden lukumäärällä. Näin ideaalikaasun entropian lausekkeeksi saadaan lopulta

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{T}{T_0}. \quad (8.80)$$

Kuva 8.19: Yhden hiukkasen mahdolliset tilat saadaan yhdistämällä hiukkasen mahdolliset paikat ja nopeudet.



8.24 Miksei vapausasteiden lukumäärä vaikuta entropian tilavuudesta riippuvaan osuuteen?

esimerkki 8.5

Tasapaino

Kaksi kaasusäiliötä on kiinni toisissaan. Säiliössä A on 10 mol heliumia 300 K lämpötilassa, ja säiliössä B on 20 mol heliumia 330 K lämpötilassa. Säiliöt on eristetty ympäristöstään, mutta ne voivat vaihtaa keskenään energiaa. (a) Mihin lämpötilaan säiliöt lopulta asettuvat? (b) Miten kaasujen entropia muuttuu? Entä miten muuttuu kokonaisentropia?

SUUNNITELMA Kyseessä on irreversiibeli prosessi, jossa lämpötilaeroit tasaantuvat. Säiliöt päätyvät siis loppujen lopuksi samaan lämpötilaan niin, että systeemin kokonaisenergia on vakio.

Oletetaan itse säiliöiden lämpökapasiteetit pieniksi. Koska säiliössä B on kaksinkertainen määrä kaasua, säiliöön A verrattuna, B:n lämpökapasiteetin täytyy olla kaksinkertainen. Niinpä A:n lämpötilan muutoksen täytyy olla prosessissa itseisarvoiltaan kaksinkertainen. Näin on, jos $\Delta T_A = 20 \text{ K}$ ja $\Delta T_B = -10 \text{ K}$, jolloin kumpikin säiliö päätyy loppulämpötilaan $T_{\text{loppu}} = 320 \text{ K}$.

Entropian muutokset voidaan laskea kaasun lämpötilasta riippuvaa entropiaa kuvaavasta lausekkeesta

$$\Delta S = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} n R \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (8.81)$$

RATKAISU (a) Loppulämpötila on siis 320 K.

(b) Pienemmän kaasusäiliön entropian muutos on

$$\Delta S_A = \frac{3}{2} \cdot 10 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/molK} \cdot \ln \frac{320 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 8.0 \text{ J/K} \quad (8.82)$$

ja suuremman

$$\Delta S_B = \frac{3}{2} \cdot 20 \text{ mol} \cdot 8.314 \text{ J/molK} \cdot \ln \frac{320 \text{ K}}{330 \text{ K}} = -7.7 \text{ J/K}. \quad (8.83)$$

Kokonaisentropian muutos on siis

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 0.3 \text{ J/K} \quad (8.84)$$

ARVIOINTI Lämpötilojen spontaani tasaantuminen on irreversiibeli prosessi, joten eristetyn systeemin entropian täytyy kasvaa sen aikana. Kumpikaan säiliö ei yksinään ole eristetty, joten säiliön B entropia voi aivan hyvin pienentyä. Yhdessä säiliöt kuitenkin muodostavat eristetyn systeemin, joten kokonaisentropian täytyy kasvaa, kuten tapahtuu.

Itse asiassa kokonaisentropialla täytyy olla toisen pääsäännön mukaan tasapainotilassa maksimi, ja näin onkin. Jos nimittäin säiliöt olisivat aluksi lämpötilassa 320 K ja säiliön A lämpötilaa muutettaisiin $\Delta T_A = 0.2 \text{ K}$ (jolloin $\Delta T_B = -0.1 \text{ K}$), kokonaisentropian muutos olisi $\Delta S = -0.037 \text{ mJ/K}$. Entropia vähensi likimain yhtä paljon myös jos $\Delta T_A = -0.2 \text{ K}$ ja $\Delta T_B = 0.1 \text{ K}$. Toisin sanoen tasapainolämpötilassa 320 K kaikki lämpötilojen muutokset laskisivat entropiaa, joten kyseessä täytyy olla entropian maksimi. Eristetyn systeemin kokonaisentropia ei voi itsestään pienentyä, joten kun kaasut ovat kerran saavuttaneet tasapainolämpötilan 320 K, lämpötilassa ei voi enää tapahtua muutoksia ellei jokin ulkoinen tekijä vaikuta systeemiin.

Kaasun entropia on siis sen ainemääärän, tilavuuden ja lämpötilan funktio. Erityisesti jos kaasulla on jokin tietty tilavuus ja lämpötila, sen entropia ei riipu siitä, miten kaasu on saanut lämpötilansa ja tilavuutensa vaan ainoastaan kaasun *makrotila*. Toisin sanoen entropia on *tilanmuuttuja*. Erityisesti jos kaasu käy läpi prosessin ja se palautetaan takaisin samaan tilaan kuin alkuksi, kaasun entropia palaa samaan arvoon kuin alkuksi riippumatta siitä, mitä kaasulle välillä tapahtui. Tämä ei ole myöskään ideaalikaasun ominaisuus vaan se pätee kaikille aineille.

Entropian, sisäenergian ja lämpötilan välillä on kuitenkin vielä paljon syvälli sempi yhteys. Tarkastellaan jälleen eristettyjä systeemiä, joka on jaettu kahteen osaan, A ja B. Nyt systeemi on kuitenkin makroskooppinen toisin kuin aikaisemmin tarkasteltu 10 hiukkasen systeemi. Kyseessä voi olla esimerkiksi kaasusäiliö, joka on jaettu kahtia lämpöä johtavan kalvon avulla.

Kuvassa 8.20 on esitetty systeemin ja sen muodostavien osien entropiat systeemin A sisäenergian funktiona (vrt. kuvan 8.15 (a)). Tasapainotilassa systeemin kokonaisentropia maksimoituu, mikä graafisesti tarkoittaa entropian kuvaajan tangentin olevan vaakasuorassa. Matemaattisesti siis kokonaisentropian derivaatta energian suhteen on tasapainossa nolla

$$\frac{dS_{\text{kokonais}}}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} + \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}} = 0 \quad (8.85)$$

eli osan A ja osan B entropioiden derivaatat ovat tasapainossa yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset

$$\frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} = -\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}}. \quad (8.86)$$

Edelleen koska systeemin kokonaisenergia on vakio, osan B energia on $E_{\text{sisä,B}} = E_{\text{kokonais}} - E_{\text{sisä,A}}$ ja niinpä osan B entropian derivaatta *osan B sisäenergian suhteen* on niin ikään vastakkaismerkkinen vastaavaan osan A energian suhteen laskettuun derivaattaan nähdien

$$\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}} \frac{dE_{\text{sisä,B}}}{dE_{\text{sisä,A}}} = -\frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}}. \quad (8.87)$$

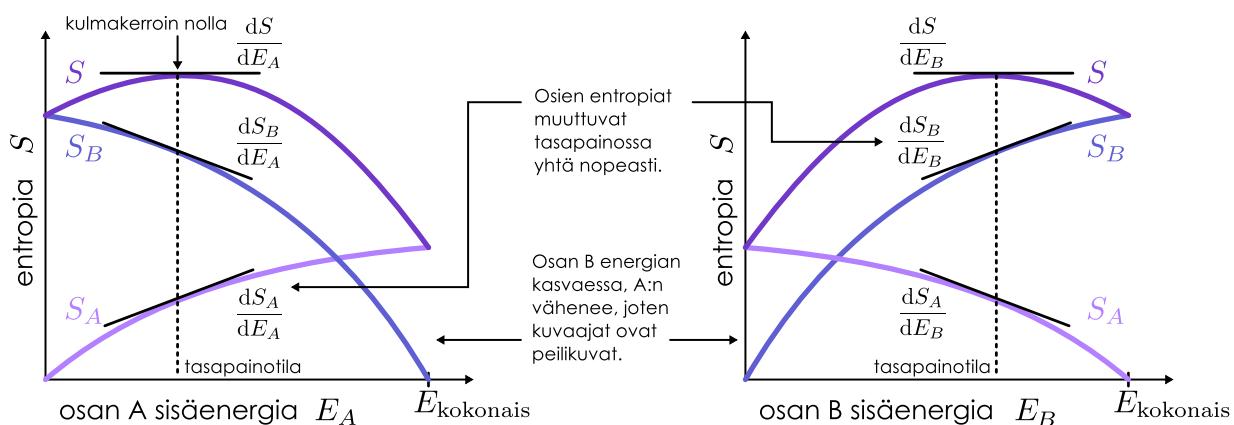
Niinpä tasapainoehto (8.86) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{dS_A}{dE_{\text{sisä,A}}} = \frac{dS_B}{dE_{\text{sisä,B}}}. \quad (8.88)$$

Siispä vaikka tasapainossa systeemin osien entropiat eivät ole yhtä suuret, osien entropiat *muuttuvat sisäenergian funktiona* yhtä nopeasti. Kuvajassa 8.20 tämä näkyy osien A ja B entropian kuvaajien tangenttien yhtä jyrkinä kulmakertoimina.

Edelleen kuvan 8.20 mukaan kummankin osan entropian kuvaaja nousee sitä *voimakkaammin*, mitä vähemmän energiaa osa sisältää. Makroskooppisesti kuitenkin suhteellisesti vähän energiota sisältävä osa on kylmä, eli sen *lämpötila on matala*. Niinpä näyttää siltä, että *mitä matalampi osan lämpötila on, sitä nopeammin osan entropia kasvaa sen sisäenergian lisääntyessä*. Lisäksi kokeellisesti tiedetään, että kaksi kappaletta ovat termodynamiassa tasapainossa, kun niiden lämpötilat ovat samat, joten tasapainoehdon 8.88 perusteella osien A ja B *entropioiden muutosnopeuksien yhtäsuuruus* voidaan tulkita tarkoittavan osien *lämpötilojen yhtäsuuruutta*.

Kuva 8.20: Kahteen osaan jaetun systeemin entropia osien sisäenergioiden funktiona. Tasapainossa entropialla on maksimi, jolloin osien entropiat muuttuvat yhtä nopeasti.



Lasketaan esimerkin vuoksi entropian muutosnopeus ideaalikaasulle, kun kaasun sisäenergia muuttuu. Koska kaasun entropia riippuu myös tilavuudesta ja ainemääristä, tarkastellaan erityisesti entropian muutosta *tilavuuden ja ainemääärän ollessa vakiot*, mitä merkitään derivaatan alaindekseillä V, N ,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{\partial}{\partial E_{\text{sisä}}} \left(\frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{E_{\text{sisä}}}{E_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{N_{\text{vapaus}} N k_B}{E_{\text{sisä}}}. \quad (8.89)$$

Toisaalta koska kaasun sisäenergia on $E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B T$, tulos sievenee yksinkertaisesti muotoon

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{1}{T}. \quad (8.90)$$



8.25 Koska ideaalikaasun lämpötila on verrannollinen kaasun sisäenergiaan, kaasun entropian derivaatan sisäenergian suhteen täytyy olla kään்�täen verrannollinen kaasun energiaan, $\partial S / \partial E_{\text{sisä}} = a / E_{\text{sisä}}$. Miten tämä näkyy kuvan 8.20 funktion $S_A(E_A)$ kuvaajassa?

Tämä yksinkertainen tulos on yhteenopiva edellä esitetyjen pohdintojen kanssa: Mitä pienempi on lämpötila, sitä nopeammin entropia muuttuu energian funktona eli sitä suurempi on entropian derivaatta. Tasa-painossa systeemin osien entropioiden derivaatat ovat samat, joten osat ovat samassa lämpötilassa.

Vaikka tässä tulos (8.90) johdettiin vain ideaalikaasulle, se pätee yleisesti. Historiallisesti, ennen aineen mikroskooppisen rakenteen selvittämistä, *entropia määriteltiin* hyvin samantyyppisen säännön kautta. Modernissa statisessä fysiikassa asia on käännetty päinvastoin: tämä on nykyisin *lämpötilan määritelmä!*



8.26 Selitä omien sanojen entropia. Selitä sekä miten entropia määritellään mikrotilojen kautta että miten entropian muutokset käytännössä lasketaan ideaalikaasulle. Miten entropia liittyy irreversiibeliyteen ja toiseen pääsääntöön?

Yhteenvetö: Hiukkasista koostuva aine

Todennäköisyyslaskenta

- Jos satunnaismuuttujalla X on Ω mahdollista arvoa, joiden todennäköisydet ovat *yhtä suuret*, kunkin arvon todennäköisyyks on $P = \frac{1}{\Omega}$. Jos tapahtumaan A kuuluu Ω_A satunnaismuuttujan X arvoa, tapahtuman todennäköisyys on

$$P_A = \frac{\Omega_A}{\Omega}.$$

- Jos satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat X_i ja näiden todennäköisydet ovat $P(X = X_i)$, satunnaismuuttujan **odotusarvo** on

$$\langle X \rangle = \sum_i P(X = X_i) X_i.$$

- Jos satunnaismuuttuja X mitataan N kertaa ja saadaan mittaus tulokset x_i , näiden keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa mit-

tausten määärän kasvaessa

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \langle X \rangle.$$

- Kolmiulotteiselle satunnaisvektorille \vec{v} , jolle kaikki suunnat ovat yhtä todennäköiset, pätee

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

- Rms-nopeus** on nopeusvektorien neliöiden keskiarvon neliöjuuri

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

Ideaalikaasu ja ominaislämpökapasiteetti

- Ideaalikaasu** on yksinkertainen malli kaasulle. Mallissa kaasun molekyylejä kuvataan törmäilevinä hiukkasina, kaasun paine on seurausta molekyylien törmäyksistä ja sisäenergia on molekyylien satunnaislukkeeseen varastoitunutta energiasta.
- Vapausasteilla** tarkoitetaan atomien ja molekyylien erilaisia tapoja varastoida liike- tai potentiaalienergiaa. Näitä ovat mm. liikkeen ja pyörimisen *eri suunnat*.
- Pyörimisen ja väärähtelyn vapausasteet *jäätyvät* matalissa lämpötiloissa, jolloin niihin ei varastoidu energiasta.
- Ekvipartitioperiaatteem** mukaan molekyyleillä on kussakin aktiivisessa vapausasteessa keskimäärin energia

$$\langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

- Ideaalikaasun paine on

$$p = \frac{Nmv_{\text{rms}}^2}{3V} = \frac{Nk_B T}{V},$$

sisäenergia

$$E_{\text{sisä}} = N_{\text{vapaus}} N \langle E_{\text{vapausaste}} \rangle = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B T$$

ja ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa

$$c_V^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N_A k_B = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R.$$

Entropia

- Makrotila** tarkoittaa systeemin kuvausta makroskooppisten suureiden kuten lämpötilan, paineen ja tilavuuden avulla.
- Mikrotila** tarkoittaa systeemin kuvausta mikroskooppisten suureiden kuten hiukkasten paikkojen ja liikemäärien avulla.
- Eristetyssä systeemissä** kaikkien mikrotilojen todennäköisydet ovat yhtä suuret. Jos eristetyn systeemin makrotilaan A vastaa Ω_A mikrotilaa, ja systeemillä on kaikkiaan Ω_{kaikki} mikrotilaa, systeemin todennäköisyys olla makrotilassa A on

$$P_A = \frac{\Omega_A}{\Omega_{\text{kaikki}}}.$$

- Makrotilan **entropia** on sen mikrotilojen määärän logaritmi

$$S = k_B \ln \Omega.$$

Entropia on siis sitä suurempi mitä enemmän mikrotiloja makrotilaan lüttyy.

- Entropia on ekstensiivinen suure eli systeemin kokonaisentropia on sen osien entropioiden summa

$$S_{\text{kokonais}} = \sum_i S_i.$$

- Eristetty systeemi pyrkii muuttumaan itsestään niin, että sen entropia kasvaa. Kun entropia on saavuttanut maksimin, systeemi on *tasapainotilassa*, jossa entropia on vakio. *Makroskooppisen eristetyn systeemin entropia ei voi koskaan vähentyä*.

$$\Delta S_{\text{eristetty}} \geq 0.$$

Tämä on *termodynamiikan toinen pääsääntö* entropian avulla lausuttuna.

- Suljettujen ja avointen* systeemien entropia voi vähentyä.
- Eristetyn systeemin prosessit, joissa entropia kasvaa, ovat *irreversiibeilitä*. Prosessit joissa entropia on vakio, ovat *reversiibeilitä*.
- Ideaalikaasun entropia on

$$S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} N k_B \ln \frac{T}{T_0}.$$

- Lämpötila *määritellään* entropian muutoksena energian suhteella

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_{\text{sisä}}} \right)_{V,N} = \frac{1}{T}.$$

Sanasto

- lämpö (heat)
- ideaalikaasu (ideal gas)
- ykstatominen (monatomic)
- kaksiatominen (diatomic)
- rms-nopeus (root-mean-square velocity)
- keskiarvo (average)
- satunnaismuuttuja (random variable)
- todennäköisyys (probability)
- odotusarvo (expectation value)
- ominaislämpökapasiteetti (specific heat capacity)
- vapausaste (degree of freedom)

- siirtyminen, translaatio (translation)
- pyöriminen, rotaatio (rotation)
- väärähtely, vibraatio (vibration)
- ekvipartito (equipartition)
- mikrotila (microstate)
- makrotila (macrostate)
- multiplisiteetti (multiplicity)
- tilanmuuttuja (state variable)
- tasapainotila (equilibrium state)
- termodynamiikan 2. pääsääntö (2nd law of thermodynamics)
- entropia (entropy)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/2)

8.1 Kunkin pallon pystysuora nopeus selviää energiaperiaatteella, josta $v_z = -\sqrt{2gh} = -6.26 \text{ m/s}$ (kun z -akseli on ylöspäin). Pallojen vaakasuuntaiset nopeudet voivat vaihdella, mutta tällä ei ole väliä. Yksittäisen pallon nopeuden muutos törmäyksessä on $\Delta v_z = -2v_z = 12.5 \text{ m/s}$, joten kunkin pallo saa maanpinnalta impulssin

$$I_{z,\text{maa} \rightarrow \text{pallo}} = m\Delta v_z = 0.63 \text{ kgm/s}. \quad (8.91)$$

Maanpinta saa törmäyksessä yhtä suuren mutta vastakkaisuuntainen impulssin, ja koska palloja on sata, kokonaismomentti on

$$I_{z,\text{maa, kokonais}} = -NI_{z,\text{maa} \rightarrow \text{pallo}} = -63 \text{ kgm/s}. \quad (8.92)$$

8.2 Jos säiliön koko pienenee, hiukkasten tarvitsee kulkea lyhyempi matka törmäysten välillä, jolloin törmäykset tapahtuu enemmän ja paine kasvaa. Jos hiukkasten vauhti kasvaa, hiukkaset kulkevat törmäysten välisen matkan lyhyemmässä ajassa. Tämä aiheuttaa paineeseen ensimmäisen kertaluvun riippuvuuden hiukkasten nopeudesta. Lisäksi hiukkaset tuottavat törmäyksissä sitä suuremman impulssin mitä nopeammin ne liikkuvat, ja tämäkin on suoraan vauhtiin verrannollinen tekijä paineessa. Yhdessä nämä tekijät johtavat siihen, että paine on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

8.3 (a) $\langle v_x \rangle = 0 \text{ m/s}$,

(b) $\langle v_y \rangle = 0 \text{ m/s}$,

(c) $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0} \text{ m/s}$, **(d)** $\langle v \rangle = 3.519 \text{ m/s}$, **(e)** $\langle v_x^2 \rangle = 4.667(\text{m/s})^2$, **(f)** $\langle v^2 \rangle = 12.667(\text{m/s})^2$, **(g)** $v_{\text{rmm}} = 3.559 \text{ m/s}$

8.4 (a) Yhtälö $\langle ab \rangle = a \langle b \rangle$ pätee, jos a on vakio. Lausekkeessa $\frac{1}{2}mv^2$ tekijä $\frac{1}{2}m$ on vakio, jos kaikki hiukkaset ovat samanlaisia ja niillä on sama massa. Tällöin pätee $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}m \rangle v^2$.

(b) Ei, tähän on helppo keksiä vastaesimerkkejä. Esimerkiksi jos a saa arvot 1 ja 2 sekä b arvot 3 ja 4, saadaan $\langle a \rangle = 1.5$ ja $\langle b \rangle = 3.5$, mutta $\langle ab \rangle = 5.5$ kun taas $\langle a \rangle \langle b \rangle = 5.25$. Keskiarvoa ei siis voi ottaa tulosta tekijä kerrallaan. Kaasumallin tapauksessa erityisesti $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle \langle v \rangle = \langle v \rangle^2$, joten $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \neq \langle v \rangle$.

8.5 Kaasulla on keskimäärin energia $\frac{1}{2}Nk_B T$ jokaista liikkeen suuntaa kohden, joten neljässä ulottuvuudessa sisäenergia olisi $4 \times \frac{1}{2}Nk_B T = 2Nk_B T$.

8.7 Ominaislämpökapasiteetti hiukkasten määrää kohden on sama, sillä $n = N/N_A$, missä (N_A extbacksplash) on kaikille aineille sama Avogadron vakio. Siispä $c^N = \frac{1}{N}C = \frac{1}{nN_A}C = \frac{1}{N_A}c^n$. Ominaislämpökapasiteetti massaa kohden sen sijaan ei ole sama, koska $n = m/M$, missä M on aineesta riippuva moolimassa. Niinpä $c^m = \frac{1}{m}C = \frac{1}{nM}C = \frac{1}{M}c^n$.

8.8 Edellisen vastauksen perusteella siis $c^N = \frac{1}{N_A}c^n$, joten $c_{V,\text{yksiatominen}}^N = \frac{3}{2}k_B$. Yleisesti ainemäärää kohden lasketut tulokset saadaan muuttua hiukkasten lukumäärää kohden lasketuiksi arvoiksi, kun lausekkeissa korvataan kaasuvakio R Boltzmannin vakiolla k_B .

8.9 Translaatiovapausasteita on aina kolme. (a) Rotaatiovapausasteita on kolme, kun molekyyli on aidosti kolmiulotteinen, koska tällöin molekyyli voi pyöriä kolmen kohtisuoran pyörimisakselin ympäri. (b) Rotaatiovapausasteita on vain kaksi, jos molekyyli on suora. Tällöin molekyyli ei nimittään pääse pyörimään symmetria-akselinsa ympäri.

8.10 Ei. Jos molekyyli pääsee värähteleämään, sen liukkeeseen täytyy vaikuttaa jokin vuorovaikutus, joka vetää molekyylin atomeita aina takaisin kohti tasapainoasemaa. Tähän vuorovaikutukseen täytyy liittyä myös potentiaalienergiaa. Jos tällaista vuorovaikutusta ei ole, liike ei voi olla värähtelyä vaan suoraviivaista tai pyörivää liikettä.

8.11 Oletetaan, että molekyylit eivät ole suoria (ks. vastaus 8.9), jolloin molekyylillä on 3 translaatio- ja 3-rotaatiovapausastetta. Kuhunkin värähtelytapaan liittyy kaksi vapausastetta (liike-energian ja potentiaalienergian), joten jos yksi värähtelytapa on puoliksi jäätynyt, se vastaa yhtä vapausastetta. Yhteensä vapausasteita on siis noin 7. Ominaislämpökapasiteetti on tällöin $c_V^n = \frac{7}{2}R$

8.13 Puuttuvat makrotilat ovat $E_{\text{max}} = 0\epsilon$ ja $E_{\text{max}} = 1\epsilon$. Näitä puuttuvat, koska ei ole olemassa sellaista mikrotilaa, jossa yhdelläkään hiukkasella ei olisi vähintään kahta yksikköä energiasta.

8.14 Todennäköisydet ovat $P(E_{\text{max}} = 6\epsilon) = 4/84 = 0.048$, $P(E_{\text{max}} = 5\epsilon) = 12/84 = 0.143$, $P(E_{\text{max}} = 4\epsilon) = 24/84 = 0.286$, $P(E_{\text{max}} = 3\epsilon) = 34/84 = 0.405$, $P(E_{\text{max}} = 2\epsilon) = 10/84 = 0.119$.

8.15 Kullakin hiukkasella on keskimäärin $1/200$ -osa kokonaisenergiasta eli $500/200 = 2.5$ yksikköä. Huomaa, että tämä on vain keskiarvo. Jos yhden hiukkasen energia voi saada vain arvot 0, 1, 2, 3 jne., yhdelläkään hiukkasella ei ole koskaan täsmälleen 2.5 yksikköä energiasta.

8.16 Energian A odotusarvo on

$$\langle E_A \rangle = 0 \cdot P(E_A = 0) + 1 \cdot P(E_A = 1) + \dots + 10 \cdot P(E_A = 10) \quad (8.93)$$

$$= 0 \cdot \frac{3003}{92378} + 1 \cdot \frac{8008}{92378} + \dots + 10 \cdot \frac{286}{92378} = \frac{369512}{92378} = 4. \quad (8.94)$$

Ekvipartitioteoreeman mukaan energia jakautuu systeemin hiukkasiille tasaisesti, joten osassa A pitääkin olla täsmälleen $4/10$ systeemin kokonaisenergiasta.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/2)

8.17 Kun hiukkasia on 10, kuvajan alle jäänyt pinta-ala on melkein puolet koko pinta-alasta eli todennäköisyys on hieman alle 0.5. Kun hiukkasia on 100, suurin osa pinta-alasta on kuvan keskikohdan vasemmalla puolella. Rajan $E_A = 0.5E_{\text{kokonais}}$ oikealle puolelle jää noin kymmenys kokonaispinta-alasta, joten todennäköisyys on noin 0.1. Kun hiukkasia on 1000, kaikki pinta-ala on rajan vasemmalla puolella, joten todennäköisyys on nolla. Tässä on kysymys siitä, että kun systeemin koko kasvaa, osan A energian todennäköisyysjakauma kaventuu pisteen $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ ympäristöön. Toisin sanoen mitä suurempi systeemi on kyseessä, sitä epätodennäköisemmäksi suuret poikkeamat ekvipartitioteoreeman ennusteesta $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ tulevat. Kun systeemi on makroskooppinen eli siinä on luokkaa 10^{20} hiukkasta, osan A energia on mittaustarkkuuden rajoissa täsmälleen $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$ todennäköisyysdellä yksi.

8.19 (a) $S_A = 3.2 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$, $S_B = 6.4 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$, $S_C = 9.5 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$.

(b) Mikrotiloja on $\Omega = \Omega_A \Omega_B \Omega_C = 2.1 \cdot 10^{601}$.

(c) Entropia on $S = S_A + S_B + S_C = 1.9 \cdot 10^{-20} \text{ J/K}$. Tämän voisi laskea myös mikrotiloista, $S = k_B \ln \Omega = 1.9 \cdot 10^{-20} \text{ J/K}$.

8.20 (a) (i) $S_A = 3.00k_B$, $S_B = 6.67k_B$, $S_{\text{kokonais}} = 9.67k_B$, (ii) $S_A = 3.56k_B$, $S_B = 6.14k_B$, $S_{\text{kokonais}} = 9.69k_B$, (iii) $S_A = 4.03k_B$, $S_B = 5.53k_B$, $S_{\text{kokonais}} = 9.55k_B$.

(b) Lasketut arvot vastaavat kuvan piirrettäjä pisteitä. Huomaa erityisesti, että S_A kasvaa, kun E_A kasvaa ja S_B pienenee. Kokonaisentropialla on kuitenkin maksimi, kun $E_A = 0.4E_{\text{kokonais}}$.

(c) Pätee. Yllä esitettyissä numeroissa on hiukan pyörityksistä johtuvaa epätarkkuutta, mutta tarkasti laskien yhtälö on voimassa.

8.21 (a) Jokainen esine voidaan asettaa toisista riippumatta kuudelle eri tasolle. Ensimmäisellä esineellä on siis 6 eri paikkaa. Toisella esineellä on myös 6 eri paikkaa, joten kahdella esineellä on yhteensä $6^2 = 36$ järjestystä. Kolmannella esineellä on kuusi paikkaa, joten esineellä on yhteensä $6^3 = 216$ järjestystä. Yleisesti N erilaista kappaletta voidaan asettaa M paikkaan $\Omega = M^N$ tavalla.

(b) Ensimmäinen esine voidaan nyt asettaa 6 eri paikkaan. Toiselle jää sitten 5 eri paikkaa, koska se ei voi olla samalla hyllyllä kuin ensimmäinen. Yhteensä olisi siis $5 \cdot 6 = 30$ järjestystä, jos esineet olisivat erilaiset. Kolmannella esineellä on vielä 4 mahdollista paikkaa, joten yhteensä järjestyksiä on $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. Lisäksi, koska esineitä ei voi tunnistaa, esineiden vaihtaminen keskenään ei tuota uusia järjestyksiä. Siispä tilanteet, joissa esimerkiksi esine 1 on ylimmällä hyllyllä ja esine 2 toiseksi ylimmällä, lasketaan samaksi tilanteeksi kuin jos 1 olisi toisiksi ylimmällä ja 2 ylimmällä hyllyllä. Kolme esinettä voidaan asettaa yhteensä 6 erilaisseen järjestykseen, joten edellinen tulos 120 pitää jakaa vielä 6:lla, jotta saadaan oikea lopputulos. Erilaisia järjestyksiä on siis kaikkiaan vain 20. Kysymys on sama kuin miten monella tavalla M tasosta voidaan valita N kpl. Yleisesti vastaus on $\frac{M!}{N!(M-N)!}$. Tämän tehtävän opetus on se, että statistiikka riippuu siitä, millaisia kappaleita tutkitaan. Tekstissä hiukkasia käsitellään kohdan (a) tapaan kuin ne olisivat toisistaan erotettavia. Fysiikassa hiukkaset ovat kuitenkin tavallisesti tunnistamattomia, joten itse asiassa gleensä pitäisi laskea kohdan (b) tapaan. Tämä on kuitenkin hieman monimutkaisempaa, joten yksinkertaisuuden vuoksi tulokset on johdettu kohdan (a) laskutavalla.

8.22 Kaasun tilavuudesta riippuvan entropian muutos on $\Delta S = Nk_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}} = nR \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}$.

(a) (i) $\Delta S = 3.37 \text{ J/K}$, (ii) $\Delta S = 5.76 \text{ J/K}$.

(b) (i) $\Delta S = 14.90 \text{ J/K}$, (ii) $\Delta S = 5.76 \text{ J/K}$. Tilavuuden kaksinkertaistuessa entropia muuttuu siis yhtä paljon riippumatta alkuperäisestä tilavuudesta.

(c) Entropian muutos ei riipu vakiosta V_0 .

8.23 (a) Ympyrään mahtuu 7 naulaa: Yhden hyvin lyhyen naulan kärki on likimain keskipisteessä ja 6 1 cm pituista naulaa voidaan asettaa 60° kulmiin toisiinsa nähdyn.

(b) Ympyrän keskelle voi asettaa samat 7 naulaa kuin kohdassa (a). Tämän lisäksi ympyrän kehälle mahtuu kahdentoinsta 2 cm -pituisen naulan kärjet. Yhteensä siis 19 naulaa.

(c) Ympyrän keskelle mahtuu samat 19 naulaa kuin kohdassa (b). Lisäksi kehälle mahtuu nyt 3 cm -pituisen naulojen kärkiä 18 kpl. Yhteensä siis 37 naulaa.

(d) Kun ympyrän säde kasvaa, ympyrän reunalle mahtuu aina enemmän ja enemmän lisää naulojen kärkiä. Niinpä naulojen määrä kasvaa nopeammin kuin ympyrän säde. Voit ajatella vaikkapa niin, että kunkin naulan kärjen kohdalle pürretään piste. Näiden pisteiden tiheys on ympyrässä likimain vakio (jos nauloja on maksimimäärä), jolloin naulojen lukumäärän täytyy olla verrannollinen ympyrän pinta-alaan. Siispä likimain $N_{\text{naula}} \propto r^2$. (Kohdissa (a)–(c) itse asiassa $N_{\text{naula}} = 1 + (3 \text{ cm}^{-1})r + (3 \text{ cm}^{-2})r^2$, mutta tämä ei päde täsmälleen suurilla ympyröillä.)

Tehtävä liittyy nopeusvektoreiden entropiaan. Kaksiulotteiseen ympyrään mahtuvien nuolien määrä on verrannollinen ympyrän pinta-alan. Kolmiulotteiseen palloon mahtuvien nuolien määrä on puolestaan verrannollinen pallon tilavuuteen.

8.24 Hiukkasen paikkaa kuvaa kolme koordinaattia täysin riippumatta siitä, voiko hiukanen esimerkiksi pyöriä. Niinpä entropian tilavuustermi ei riipu vapausasteiden määrästä. Periaatteessa molekyyllillä, joka voi olla eri asennoissa ja siis pyöriä, on suurempi entropia kuin pistemäisellä hiukkasella, koska myös molekyylin eri asennot luovat erilaisia tiloja. Molekyyllä on kuitenkin aivan yhtä paljon erilaisia asentoja riippumatta siitä, kuinka suressa tilavuudessa se on, joten tämä osuuus esimerkiksi kaksiatomisen kaasun entropiasta on vakio, eikä sitä tarvitse huomioida entropian muutoksia laskettaessa.

8.25 Derivaatta on kuvajan kulmakerroin, joten kun energia kasvaa, kulmakertoimen täytyy pienentyä. Kuvaajasta nousee siis pienillä energioilla jyrkästi ja mitä suurempi sisäenergia systeemillä on, sitä loivemmin entropian kuvaaja kasvaa energian funktiona.

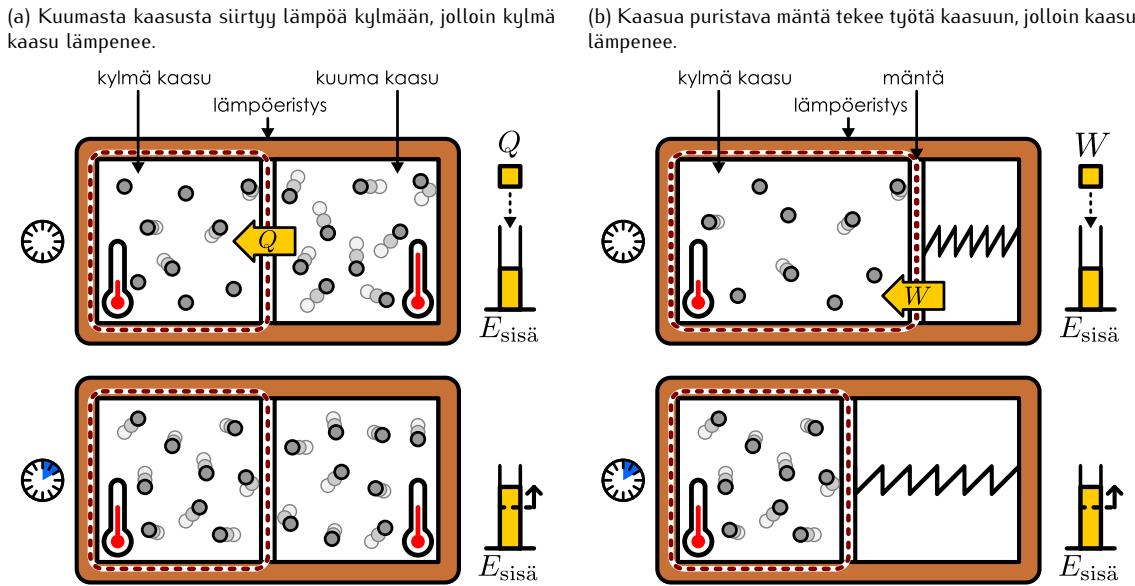
9 Termodynamika

Edellisissä luvuissa tutustuimme jatkuvaan ainetta kuvaaviin perussuureisiin kuten paineeseen ja lämpötilaan ja selitimme näiden suureiden käyttäytymistä tutkimalla jatkuvan ja hiukkasista koostuvan aineen malleja. Tässä luvussa yhdistämme nämä näkökulmat yhdeksi lämpöilmiöiden yleiseksi teoriaksi eli termodynamikaksi ja tutkimme tämän sovelluksia. Termodynamika syntyi 1800-luvulla tarpeesta ymmärtää etenkin höyrykoneiden toimintaa, ja siksi nimenomaan energian muodonmuutosten kuvaaminen on termodynamikan keskeinen tavoite. Höyrykoneet kuten modernit polttomoottoritkin toimivat tuottamalla polttoaineen avulla korkeita lämpötiloja ja muuttuen sitten osan tästä lämpöenergiasta mekaaniseksi energiaksi. Vastaavalaisia prosesseja tapahtuu yleisesti myös luonnossa. Esimerkiksi auringon lämmittäessä maata epätasaisesti syntyy lämpötilaeroja, ja ilmakehän sääilmiot saavat tästä kautta energiansa. Tällaisia epäjärjestynyttä energian järjestyneeksi mekaaniseksi energiaksi muuttavia prosesseja kutsutaan yleisesti lämpövoimakoneiksi, ja termodynamika kuvailee tällaisten prosessien toimintaa. Erityisesti osoittautuu, ettei epäjärjestynyttä energian voi muuttaa järjestyneeksi miten tahansa, ja termodynamika selittää millaisia rajoituksia tähän liittyy.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- muotoilla termodynamikan pääsäännöt matemaattisesti
- määritellä kvasistaattinen, isoterminen, isokorinen, isobaarinen, isentrooppinen ja adiabaattinen prosessi sekä selittää ideaalikaasun tilanmuuttujien käyttäytyminen näissä prosesseissa
- laatia termodynamiisia prosesseja kuvaavia pV- ja entropiadiagrammeja
- määrittää lämpövoimakoneen tekemä työ ja hyötykuva
- kuvilla Carnot'n kone ja arvioda lämpövoimakoneiden rajoituksia tämän koneen perusteella

Kuva 9.1: Systeemin kokonaisenergia voi muuttua jos systeemi vaihtaa energiaa ympäristönsä kanssa. Tämä voi tapahtua lämmön tai työn kautta.



9.1 Kvasistaattiset prosessit

Ensimmäinen pääsääntö

Kuvassa 9.1 on tarkasteltu kahta prosessia, joissa toisessa systeemi vastaanottaa energian lämpönä ja toisessa työnä. Systeemi on kummassakin tapauksessa kaasusäiliö, ja koska säiliö on paikoillaan, systeemillä on vain sisäenergiaa, joka ilmenee kaasun lämpötilana. Alkutilanteessa kaasun lämpötila on matala molemmissa esimerkeissä. Ensimmäisessä prosessissa kaasusäiliö on kosketuksissa toisen, kuumaa kaasua sisältävän säiliön kanssa, jolloin lämpöä virtaa kuumasta säiliöstä kylmään. Säiliöt on eristetty muusta ympäristöstään, joten kaikki kuuman kaasun menettämä energia siirtyy kylmään kaasun ja prosessi jatkuu kunnes kaasujen lämpötilat ovat samat. Prosessissa systeemin sisäenergia kasvaa täsmälleensä yhtä paljon kuin kaasun siirtymä lämpöä.

Toisessa esimerkissä kaasusäiliön yksi sivu on liikkuva mäntä, jota jousi puristaa sisään. Säiliö on tässäkin tapauksessa lämpöeristetty muusta ympäristöstään, joten säiliön ja ympäristön välillä ei siirry lämpöä, $Q = 0$. Tällainen prosessi on *lämmönvaihdoton* eli **adiabaattinen**. Kaasun paine työntää mäntää ulospäin, joten mäntään kohdistuu sekä paineen tuottama työntövoima ulospäin että jousen tuottama voima sisäänpäin. Männän siirtymessä kaasun tilavuus pienenee ja sen paine kasvaa, ja tällöin myös ulospäin työntävä voima kasvaa. Samalla jousi oikenee, jousivoima heikkenee ja mäntä asettuu loppujen lopuksi asemaan, jossa jousivoima ja kaasun paineen tuottama voima ovat tasapainossa. Prosessin aikana jousen pituus muuttuu ja siihen sitoutunut elastinen potentiaalienergia vähenee. Jousivoima tekee kuitenkin mäntään työtä ja mäntä tekee edelleen kaasun työtä, joten jousen potentiaalienergia siirtyy työnä kaasun sisäenergiaksi.

Kummassakin prosessissa pätee energian säilymislaki eli termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö. Jos systeemi vaihtaa energian ympäristönsä kanssa, systeemin kokonaisenergian muutoksen täätyy olla aina täsmälleensä yhtä suuri kuin systeemin ja ympäristön välillä siirtyneen energian määrä, koska energian ei voi luoda eikä hävittää vaan vain siirtää. Systeemin energian muutos voidaan siis kirjoittaa systeemin vastaanottaman ja luovuttaman lämmön ja työn avulla muodossa

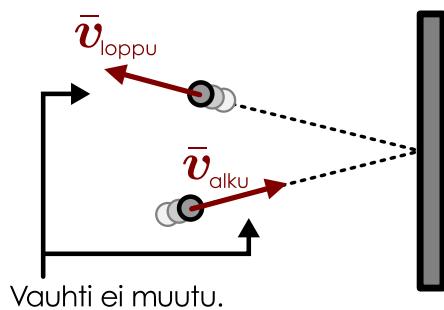
$$\Delta E_{\text{kokonais}} = Q_{\text{kokonais}} + W_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}} + W_{\text{sisään}} - W_{\text{ulos}}. \quad (9.1)$$

Tässä alaindeksi "sisään" viittaa systeemin vastaanottamaan energiaan ja "ulos" systeemin luovuttamaan energian. Monissa lähteissä lämmölle ja työlle käytetään vain symboleita Q ja W , jolloin pitää aina erikseen tarkistaa merkitsevätkö nämä systeemin saamaa vai luovuttamaa energiavaa. Tässä esimerkissä kaasusäiliö oli kiinnitetty paikoilleen, joten sen liike- tai potentiaalienergia ei voi muuttua kummassakaan prosessissa. Niinpä kaasun sisäenergia kasvaa riippumatta siitä, vastaanottaako kaasu energian lämpönä vai työnä. Edelleen koska kaasun lämpötila on suoraan verrannollinen kaasun sisäenergiaan, kaasun lämpötilan täätyy kasvaa kummassakin tapauksessa.

Olemme jo aikaisemmin nähneet esimerkkejä prosesseista, joissa työ muuttuu lämpöenergiaksi. Dissipatiiviset vuorovaikutukset kuten kitka toimivat juuri näin. Kuvan 9.1 (b) prosessissa ei kuitenkaan ole kyse

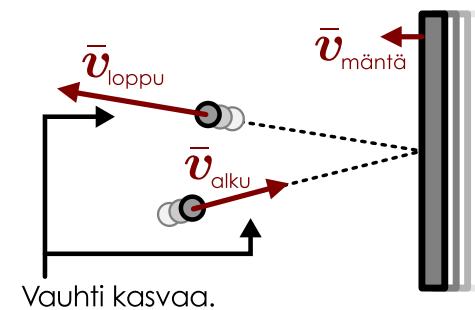
Kuva 9.2: Kaasumolekyylin vauhti ei muutu sen kimmotessa paikoillaan olevasta seinästä, mutta vauhti muuttuu jos seinä liikkuu.

(a) Törmäys paikoillaan olevasta seinästä.



Vauhti ei muutu.

(b) Törmäys liikkuvasta seinästä.



Vauhti kasvaa.

kitkasta vaan mekaaninen energia muuttuu lämpöenergiaksi kaasumolekyylien ja männän välisissä *elastisissa* törmäyksissä kuten kuvassa 9.2 on havainnollistettu. Kun kaasumolekyyli törmää elastiisesti paikoillaan olevaan seinään, sen nopeusvektori käännytettiin mutta vauhti ei muutu. Sen sijaan liikkuvaan mäntään törmäävän molekyylin *vauhti kasvaa*, jos mäntä liikkuu kohti molekyylia. Aivan samaan tapaan tennispallo voi saada hyvin suuren nopeuden, kun sitä lyö mailalla "vastapalloon". Tällä tavalla liikkuva mäntä lisää kaasumolekyylien liike-energiaa (menettäen samalla itse energiota), ja molekyylien edelleen törmäillessä keskenään tämä liike-energia jakautuu niiden kesken satunnaisesti. Niinpä kaasun sisäenergia kasvaa ja lämpötila nousee. Vastaavasti jos mäntä liikkuu törmäyshetkellä poispäin kaasumolekyylistä, molekyyli työntää törmäyksessä mäntää suurempaan vauhtiuin menettäen samalla itse omaa vauhtiaan. Tällöin kaasun sisäenergia pienenee ja männän liike-energia kasvaa.



9.1 Molekyylin nopeus x -suunnassa on 200 m/s ja männän nopeus on -1 m/s. Molekyyli törmää suoraan mäntää vasten. (a) Mikä on molekyylin alkunopeus koordinaatistossa, jossa mäntä on paikoillaan? (b) Mikä on molekyylin loppunopeus tässä koordinaatistossa? (c) Mikä on molekyylin loppunopeus alkuperäisessä koordinaatistossa, jossa mäntä liikkuu?

Jos mäntä liikkuu molekyylien suuntaan, se puristaa kaasua kokoon ja kaasun tilavuus pienenee. Jos taas mäntä liikkuu poispäin kaasumolekyyleistä, kaasu laajenee ja sen tilavuus kasvaa. Niinpä voimme yleisesti päätellä, että *kaasua puristettaessa pienempään tilavuuteen siihen tehdään työtä* kun taas *kaasun laajentuessa suurempaan tilavuuteen kaasu tekee työtä*. Tämä on oleellinen ero esimerkiksi kitkaan verrattuna. Jos kappaletta vedetään pitkin karkeaa pintaan, kitka muuttaa aina järjestynytä mekaanista energiota epäjärjestyneeksi lämpöenergiaksi. Männällisen kaasusäiliön avulla sen sijaan voi myös muuttaa lämpöenergiaa takaisin mekaaniseksi energiaksi.

Kvasistaattisuus

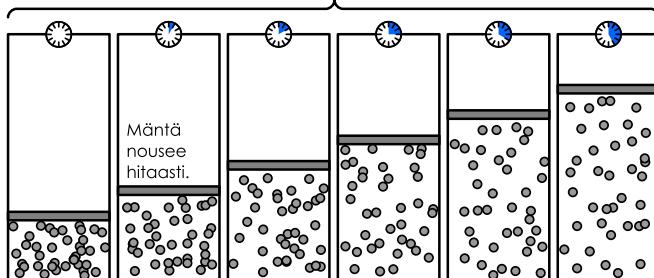
Kitkan vaikutuksesta hidastuvan kappaleen liike on aina irreversiibeli prosessi, koska kitka kuluttaa mekaanista energiota lämpöenergiaksi eikä koskaan muuta lämpöenergiaa takaisin mekaaniseksi energiaksi. Kaasun puristuminen tai laajeneminen sen sijaan voi olla reversiibeli tai irreversiibeli riippuen siitä, miten prosessi tapahtuu. Kuvassa 9.3 (a) on esitetty kaasun laajentuminen männän liikkuessa *hitaasti* poispäin kaasusta. Koska kaasumolekyylit liikkuvat hyvin nopeasti mäntään verrattuna, ne täyttävät säiliön tasaisesti koko prosessin ajan. Kaasun laajetessa sen paine voi muuttua, mutta jokaisella ajan hetkellä kaasun paine on likimain sama kaikkialla säiliön sisällä. Samoin lämpötila voi prosessin lopussa olla eri kuin alussa, mutta silti kullakin ajan hetkellä säiliön ylä- ja alapäädessä on sama lämpötila. Tällainen likimain termodynamiassa tasapainossa tapahtuva prosessi on **kvasistaattinen** (kiasi- 'näennäinen', staattinen 'paikoillaan').

Kuvassa 9.3 (b) on esitetty samanlainen laajeneminen, mutta nyt mäntä liikkuu *nopeasti* kaasumolekyyleihin verrattuna. Tällöin säiliön tilavuus kasvaa nopeammin kuin kaasu ehti laajentua ja säiliön yläosaan syntyy hetkeksi alue, jossa ei ole lainkaan kaasumolekyylejä eli siis tyhjiö. Nyt systeemi ei selvästi käännä ole prosessin aikana tasapainossa, koska paine säiliön alasissa on suurempi kuin säiliön yläosassa. Kaasusäiliön *ekstensiiviset* suureet kuten tilavuus ovat prosessin aikana hyvin määritellyt, mutta *intensiiviset* suureet kuten lämpötila ja paine ovat erilaiset säiliön eri osissa, joten ei ole mielekästä edes puhua "koko kaasun paineesta". Tämä prosessi ei siis ole myöskään kvasistaattinen, koska systeemi ei ole sen aikana tasapainossa.

Kuva 9.3: Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on aina likimain termodynamiikassa tasapainossa.

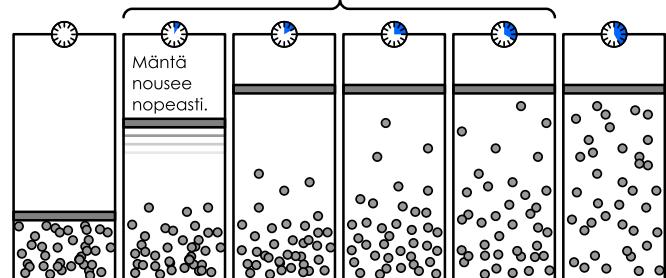
(a) Kvasistaattinen prosessi: kaasu laajenee hitaasti.

Tasapaino: kaasu täyttää säiliön tasaisesti koko prosessin ajan.



(b) Ei-kvasistaattinen prosessi: kaasu laajenee tyhjään tilaan.

tasapaino Epätasapaino: kaasu ei ole tasaisesti jakautunut. tasapaino



9.2 Tarkastellaan systeeminä suljettua kaasusäiliötä. Millä seuraavista suureista on systeemissä aina jokin täsmällinen arvo ja millä tällainen arvo on olemassa vain tasapainossa? (a) paine, (b) tilavuus, (c) lämpötila, (d) ainemäärä, (e) entropia, (f) kokonaisenergia.

Hitaasti tapahtuvan kvasistaattisen laajenemisprosessin voi ajatella tapahtuvan myös käänтäen, jolloin kaasu puristetaan hitaasti kokoon. Tällöin prosessi näyttää täsmälleen samanlaiselta kuin laajentuminen paitsi että se tapahtuu takaperin. Laajentuva kaasu tekee työtä, jolloin kaasun sisäenergia vähenee. Puristettaessa kaasuun tehdään työtä, jolloin kaasun sisäenergia kasvaa. Jos kaasun annetaan ensin laajentua ja sitten se puristetaan kasaan, systeemi päätyy täsmälleen samaan tilaan kuin mistä prosessi lähti liukkeelle. Prosessi on *reversiibel*, koska se voi tapahtua samanlaisena alusta loppuun tai lopusta alkun.

Sen sijaan nopeasti tapahtunut laajeneminen ei voi tapahtua samanlaisena ajassa takaperin. Jos näin tapahtuisi, kaasumolekyylien pitäisi yhtäkkiä pakkautua säiliön alaosaan *ennen kuin mäntää puristetaan*. Yksittäinen molekyyli voi aina ajautua sattumaalta säiliön alaosaan, mutta on äärimmäisen epätodennäköistä, että makroskooppisen kaasun *kaikki* molekyylit yhtäkkiä sattuisivat päätyämään samalle puolelle säiliötä. Toki kaasun voi puristaa takaisin kokoon, mutta tällöin se ei päädy samaan tilaan kuin missä se prosessin alussa oli. Levitessään tyhjään tilaan kaasumolekyylit eivät törmää mäntään eivätkä siis myöskään tee työtä, joten nopeassa laajenemisessa kaasun sisäenergia ei muudu. Kaasun puristaminen kokoon kuitenkin vaatii työtä, joten jos kaasu puristetaan takaisin alkuperäiseen tilavuuteen, se päätyy tilaan, jossa sen sisäenergia ja siis lämpötila on suurempi kuin alkutilassa. Prosessi on siis *irreversiibel*.

Prosessi ei voi olla reversiibel elletti se ole kvasistaattinen. Tämä johtuu siitä, että ei-kvasistaattisessa prosessissa systeemi ei ole tasapainossa. Systeemi pyrkii aina tasapainoon eikä koskaan pois tasapainosta, ja niinpä poissa tasapainosta olevan systeemin täytyy kehittyä irreversiibelisti. Esimerkiksi tyhjään tilaan levivä kaasu pyrkii täytämään kaasusäiliön tasaisesti, eikä kaasun leväminen säiliöön voi tapahtua takaperin. Kvasistaattiset prosessit eivät kuitenkaan välittämättä ole reversiibeileitä. Kuvan 9.3 (a) kvasistaattinen prosessi on reversiibel jos mäntä on kitkaton, mutta jos mäntään vaikuttaa kitka (kuten todellisuudessa aina tieteenkin vaikuttaa), tämäkin prosessi on irreversiibel.



9.3 Mitä näistä prosesseista ovat kvasistaattisia tai reversiibeileitä? (a) Sokeri liukenee kahviin. (b) Kupissa oleva kahvi jäähyy. (c) Ilmapallo laajenee ulkoisen ilmanpaineen pienentyessä. (d) Ilmapallo poksahtaa ja sen sisältämä helium levää ympäröivään ilmaan.

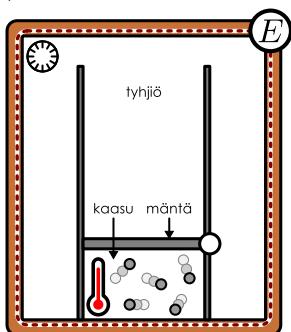
Kvasistaattisen prosessin entropia

Seuraavaksi tarkastelemme entropian muutoksia kaasun laajentuessa. Tätä varten on kuitenkin syytä määritellä tarkemmin, millaista systeemiä kulloinkin tarkastelemme. Etenkin kaasusäiliön ympäristö valkuttaa prosessien kulkuun, koska kaasu voi esimerkiksi vastaanottaa lämpöä riippuen säiliötä ympäröivän aineen ominaisuuksista. Tilanteen täsmentämiseksi laajennamme tarkasteltavia systeemejä kuten kuvissa 9.4 ja 9.5: ajatellaan, että kaasusäiliöiden ympärillä on suurempi, täysin eristetty ja tyhjä säiliö. Tämä suurempi säiliö muodostaa *eristetyn systeemin*, joten sen kokonaisenergian täytyy olla energian säilymislain perusteella vakio. Tyhjiöllä ei ole sisäenergiaa, joten kaasu ei siis vaihda myöskään ympäröivän säiliön kanssa lämpöä. Lisäksi termodynamikan toisen pääsäännön perusteella eristetyn systeemin entropia ei voi vähentyä, joten suuremman säiltön kokonaisentropian täytyy joko olla vakio tai kasvaa kaikissa prosesseissa.

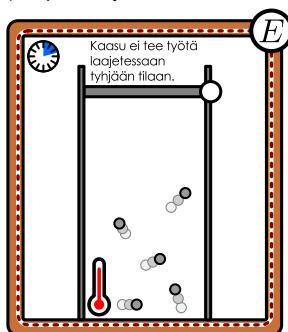
Kuvassa 9.4 mäntä siirtyy nopeasti ylös ja kaasu saa laajentua vapaasti tyhjään tilaan. Männän nopea liike voidaan toteuttaa esimerkiksi pienellä moottorilla. Jos männän massa on hyvin pieni, tämä vaatii vain vähän

Kuva 9.4: Kaasun ei-kvasistaattinen adiabaattinen laajeneminen. Kaasu laajenee tyhjään tilaan. Sen molekyylit eivät tällöin törmää liukkuvaan mäntään eikä niiden vauhti muutu. Siispä kaasun sisäenergia on vakio.

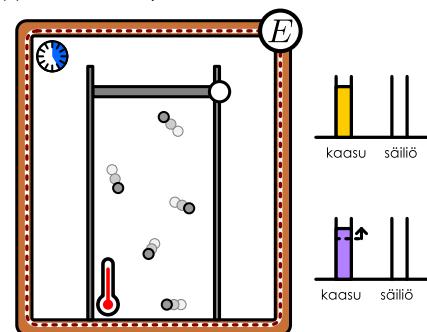
(a) Alkutila.



(b) Vapaa laajeneminen.

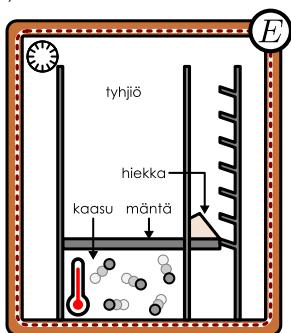


(c) Kaasun entropia on kasvanut.

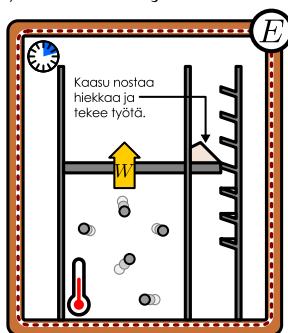


Kuva 9.5: Kaasun kvasistaattinen adiabaattinen laajeneminen. Kaasu laajenee työntämällä mäntää, mutta tästä jarruttaa männän päällä olevan hiekan paino. Hiekan valuessa pois kaasun paine työntää mäntää ja hiekkaa ylöspäin, jolloin kaasumolekyylit hidastuvat ja kaasun sisäenergia vähenee.

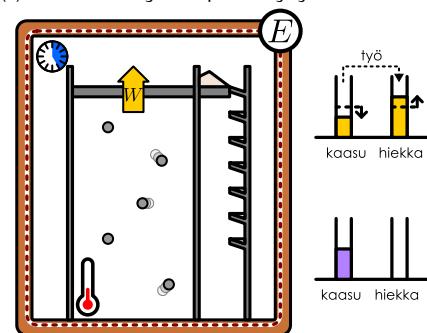
(a) Alkutila.



(b) Kaasu tekee työtä.



(c) Kaasun energia on pienentynyt.



energiaa ja männän liikkutamisen vaikutus systeemin entropiaan on pieni. Niinpä ei oikeastaan ole väliä, kuinka mäntä nostetaan, kunhan se vain tapahtuu nopeasti. Männän liikuessa nopeasti molekyylit eivät ehdí törmätä siihen, jolloin kaasu ei tee laajetessaan mäntään työtä. Kaasun ympärillä on tyhjiö, jolla ei ole sisäenergiaa, joten kaasuun ei voi myöskään siirtää lämpöä. Niinpä kaasun sisäenergia ei prosessissa muutu. Kaasumolekyylit liikkuvat laajenemisen jälkeen yhtä nopeasti kuin alkuksi, kaasun lämpötila on lopuksi sama kuin alkuksi, ja kaasun entropian *lämpötilasta riippuva osuus* on vakio. Kaasun tilavuus kuitenkin kasvaa, joten entropian *tilavuudesta riippuva osuus* kasvaa. Niinpä kaasun *kokonaisentropia* kasvaa prosessissa, $\Delta S_{\text{kaasu}} > 0$. Tyhjiön mikrotila on aina sama, mitään ei ole missään, joten tyhjiön entropia on *nolla*. Näin ollen systeemin muiden osien entropia ei muudu, $\Delta S_{\text{säiliö}} = 0$, ja *systeemin kokonaisentropia* kasvaa, $\Delta S_{\text{systeemi}} = \Delta S_{\text{kaasu}} + \Delta S_{\text{säiliö}} > 0$. Näin pitää ollakin, koska prosessi on irreversiibeli ja eristetyn systeemin kokonaisentropian täytyy kasvaa irreversiibelissä prosessissa.

Kuvassa 9.5 on kuvattu vastaava prosessi, kun mäntä nousee hitaasti. Männän hidaski liike voidaan toteuttaa esimerkiksi kasaamalla männän pääälle hiekkaa ja antamalla sen valua hitaasti pois. Systeemi on tasapainossa, kun hiekan painon tuottama mäntää alas päin työntävä voima ja kaasun paineen ylöspäin työntävä voima ovat yhtä suuret. Kun hiekkaa valuu pois, mäntää alas painava voima heikkenee ja kaasu pääsee työntämään mäntää ylöspäin. Toisaalta laajenevan kaasun paine pienenee, jolloin systeemi saavuttaa heti uuden tasapainotilan ja prosessi on kvasistaattinen.

Männän noustessa kaasun tekemä työ siirtää kaasun sisäenergiaa hiekan potentiaalienergiaksi. (Kuvassa hieka valuu kaasusäiliöön viereen asetettuun telineeseen. Näin hiekan potentiaalienergian muutos näkyy selkeästi eikä säiliön pohjalle putoava hieka pääse lämmittämään säiliötä.) Nostaminen ei muuta hiekan entropiaa, koska hiekanjyvien tilavuus tai lämpötila ei muudu, joten tässäkin tapauksessa kaasua ympäröivän säiliön entropia on vakio, $\Delta S_{\text{säiliö}} = 0$.

Kaasun laajentuessa sen lämpötila laskee, mikä pienentää kaasun entropiaa, mutta samalla kaasun tilavuus kasvaa, mikä kasvattaa entropiaa. Niinpä ei ole itsestäänselvä, kuinka entropia kalkkiaan muuttuu. Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan kuitenkin reversiibeleissä prosesseissa eristetyn systeemin kokonaisentropia on vakio. Tässä on kyseessä reversiibeli prosessi eristetyssä systeemissä, joten systeemin

kokonaisentropian täytyy olla tässä prosessissa vakio, $\Delta S_{\text{kokonais}} = \Delta S_{\text{kaasu}} + \Delta S_{\text{säiliö}} = 0$. Koska säiliön entropia ei muutu, myöskään kaasun entropia ei siis voi muuttua, $\Delta S_{\text{kaasu}} = 0$. Niinpä tässä tapauksessa kaasun lämpötilan ja tilavuuden muutokset muuttavat kaasun entropiaa täsmälleen yhtä paljon mutta vastakkaisiin suuntiin, jolloin kaasun kokonaisentropia on vakio.



9.4 Miten kaasun entropia ja energia muuttuvat, kun kaasusäiliötä (a) lämmitetään, (b) jäähdytetään, (c) puristetaan, (d) nostetaan, (e) kiihdytetään nopeaan liikkeeseen?

Edelliset prosessit ovat molemmat *adiabaattisia*, koska niissä ei siirrynyt lainkaan lämpöä. Hidas laajeneminen on lisäksi *kvasistaattinen*, koska siinä systeemi on aina likimain termodynamiikassa tasapainossa, ja tässä tapauksessa systeemin *entropia on vakio*. Tällaista vakioentropiassa tapahtuva prosessi kutsutaan *isentrooppiseksi* (kreikkaa, isos 'sama'). Samanlainen päättely voidaan toistaa mille tahansa muullekin systeemille, joka tekee työtä mutta ei vaihda lämpöä, ja lopputulos on sama: *systeemin entropia ei muutu kvasistaattisessa adiabaattisessa prosessissa*. Tämä päätee kuitenkin nimenomaan vain kvasistaattisille prosesseille. Kaasun nopea laajeneminen ei ole kvasistaattinen prosessi, ja siinä kaasun entropia kasvaa prosessin irreversiibeliyyden takia.

Tästä tuloksesta voimme myös päätellä, että kaasun entropia *ei voi olla vakio*, jos kaasu käy läpi kvasistaattisen prosessin, joka *ei ole* adiabaattinen. Jos nimittäin kaasua jäähdytettiisi sen laajentuessa, kaasun lämpötila laskisi prosessissa enemmän kuin adiabaattisessa prosessissa. Tällöin kaasun entropian lämpötilasta riippuva osuus pieneni enemmän kuin tilavuudesta riippuva osuus kasvaisi, ja niinpä kaasun kokonaisentropia pieneni. Vastaavasti jos kaasua lämmitetäisiin, sen lämpötila laskisi vähemmän tai voisi jopa nousta prosessissa. Tällöin kaasun kokonaisentropia kasvaisi. Niinpä olemme päättelleet, että *kvasistaattisessa prosessissa systeemin entropia kasvaa, kun systeemi vastaanottaa lämpöä, ja pienenee, kun systeemi luovuttaa lämpöä*. Tässä on oleellista huomata, että entropia riippuu nimenomaan *lämpöänä* siirtynestä energiasta mutta ei työstä. Adiabaattisesti ja kvasistaattisesti laajeneva kaasu tekee työtä, mutta sen entropia on silti vakio.



9.5 Selitä omin sanoin, mitä tarkoittavat adiabaattinen, kvasistaattinen ja reversiibeli prosessi. Milloin kaasuprosessei on likimain jokin näistä? Miten entropia muuttuu näissä prosesseissa?

9.2 Termodynamiiset perusprosessit

Todelliset termodynamiiset prosessit ovat harvoin täsmälleen adiabaattisia, isentrooppisia tai kvasistaattisia, mutta tällaiset ideaaliset mallit ovat usein käytökkönsä. Esimerkiksi täydellistä lämpöeristystä ei ole olemassakaan. Kuitenkin jos systeemi on hyvin lämpöeristetty ja prosessi tapahtuu melko nopeasti, sen aikana siirtyy vain hyvin vähän lämpöä ja prosessia voidaan pitää likimain adiabaattisena. Prosesseja kannattaa aina kuvata mahdollisimman yksinkertaisilla malleilla, joten jos prosessi on melkein adiabaattinen, on yleensä helppointa ajatella prosessin olevan täydellisen adiabaattinen.

Tietenkään kaikkia prosesseja ei voi mitenkään pitää adiabaattisena, sillä monesti siirtyvä lämpö vaikuttaa oleellisesti prosessin kulkuun. Seuraavaksi tutustummekin termodynamiisten prosessien kuvaamiseen ja tutkimme muutamien tärkeiden kvasistaattisten prosessityyppien ominaisuuksia.

PV-diagrammit

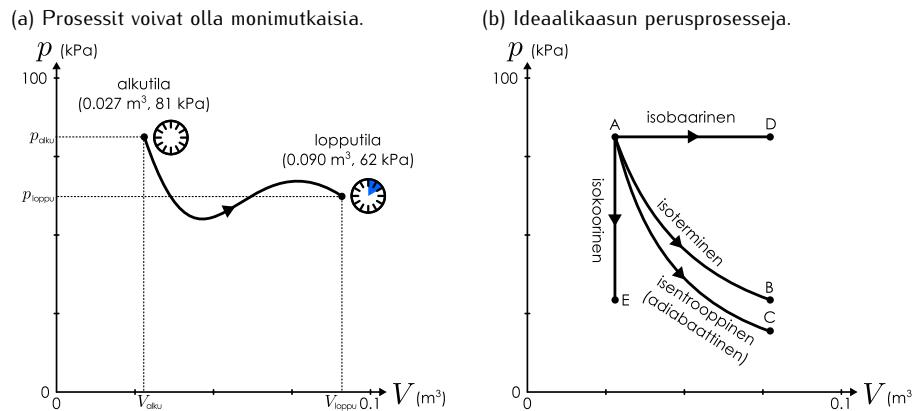
Jos systeemi on termodynamiikassa tasapainossa, tilanmuuttujat kuten lämpötila ja paine ovat samat kaikkialla systeemissä. Tällöin systeemin makrotilan voi kuvata yksinkertaisesti listaamalla sen tilanmuuttujien arvot. Lisäksi koska tilanmuuttuja yhdistää tilan yhtälö, systeemin tilan kuvaamiseen riittää tuntea vain jotkin tilanmuuttujat. Esimerkiksi jos tunnemme tasapainossa olevan ideaalikaasun ainemäärä, paineen ja tilavuuden, voimme määrittää kaasun lämpötilan, entropian ja sisäenergian näiden perusteella.



9.6 Kahdessa kaasusäiliössä on 1.5 mol yksiatomista kaasua. Säiliön A tilavuus on 0.030 m^3 ja paine 125 kPa, B:n 0.034 m^3 sekä 105 kPa. Vertaa kaasujen (a) lämpötiloja, (b) entropioita, (c) sisäenergioita.

Termodynamiikassa prosessissa kaasun tila muuttuu, joten myös sen tilanmuuttujien arvot muuttuvat. Jos prosessi ei ole kvasistaattinen, intensiivisillä tilanmuuttujilla kuten paineella ei ole prosessin aikana yksikäsitteistä arvoa, joten pelkät tilanmuuttujat eivät riitä kuvamaan prosessin kulkua. Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on kuitenkin aina likimain tasapainossa ja myös esimerkiksi paineella on jokaisella hetkellä yksi ja sama arvo kaikkialla systeemissä. Tällaisessa tilanteessa prosessin kulku voidaan kuvata esittämällä tilanmuuttujien arvojen muuttuminen prosessin aikana. Jos esimerkiksi tarkastelemme suljetussa kaasusäiliössä tapahtuva kvasistaattista prosessia, kaasun ainemäärä on vakio ja kaasun *tilan kullakin hetkellä*

Kuva 9.6: Kvasistaattisen prosessin pV -diagrammi. Jokainen koordinaatiston piste esittää tasapainotilaan. Kvasistaattinen prosessi koostuu tasapainotilojen sarjasta, jotka kuvaa alkutilaa esittävästä pisteestä lopputilaa esittävään pisteeseen kulkeva käyrä.



määrittelee kaasun paine ja tilavuus. Tällaisen prosessin kulun voi esittää graafisesti yksinkertaisesti piirtämällä kooordinatiston, jonka akselina on kaasun paine ja tilavuus, eli niin sanotun **pV -diagrammin** (kuva 9.6). Tällaisessa koordinaatistossa kaasun tilaa yhtenä ajan hetkenä kuvaa siis *piste*, ja alkutilasta lopputilaan kulkevaa kvasistaattista prosessia kuvaa näitä tiloja vastaavia pisteitä yhdistävä *käyrä*. Periaatteessa diagrammissa ei ole väliä kumpi suure on pysty- ja kumpi vaaka-akselilla, mutta tavallisesti paine piirretään pystyakselille.



9.7 Voiko ei-kvasistaattista prosessia kuvata pV -diagrammina? Jos voi, miten? Jos ei voi, miksi ei?

Periaatteessa termodynamiikan prosessi voi piirtää pV -diagrammiin millaisen käyrän tahansa. Jos kyseessä on esimerkiksi mäennällisessä säiliössä oleva kaasu, kaasun tilavuutta voidaan muuttaa siirtämällä mäntää. Kaasun paine puolestaan riippuu kaasun tilanyhtälön mukaisesti tilavuudesta ja lämpötilasta, ja jos säiliötä lämmitetään tai jäähdytetään sopivasti, myös kaasun painetta voidaan muuttaa. Kunhan kaasua ei jäähdytetä tai puristeta niin paljon, että se muuttuu nesteeksi, sen tilanmuuttuja voidaan ainakin periaatteessa ohjata kuten halutaan.

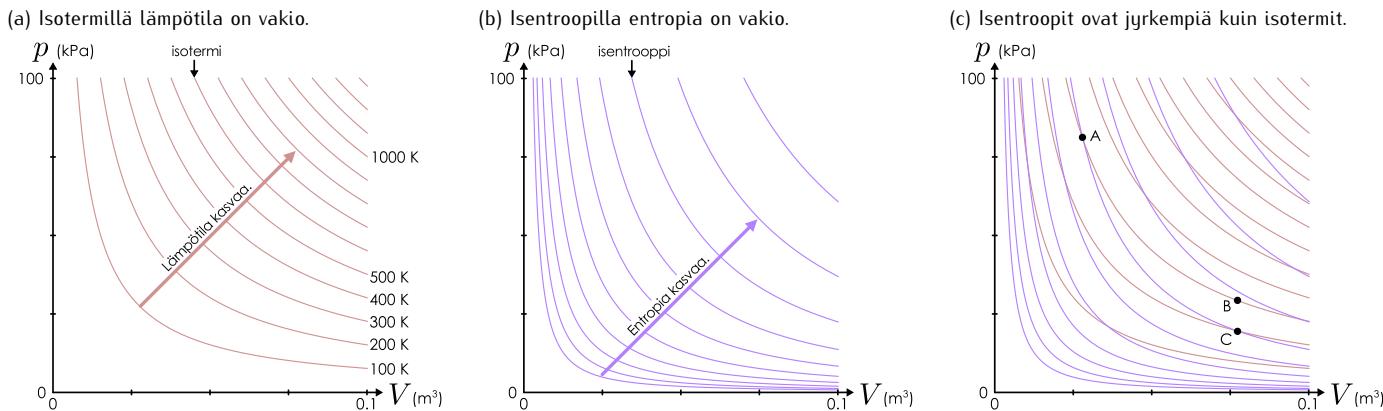
Yleensä ei kuitenkaan ole syytä tavoitella kovin erikoisia prosesseja, koska sellaiset vaativat monimutkaita ohjaamista. Adiabaattisen prosessin ohella tavallisia prosesseja ovatkin sellaiset, jossa jokin tilanmuuttujista pidetään likimain vakiona. Esimerkiksi kaasun tilavuus voidaan pitää vakiona lukitsemalla kaasusäiliön koko. Paine voidaan puolestaan pitää vakiona antamalla kaasusäiliön männän liikkua vapaasti. Jos nimittäin kaasun paine kasvaa suuremmaksi kuin ulkoinen paine, kaasu laajenee työntäen mäntää ulospäin. Tällöin kaasun paine pienenee, kunnes se on tasapainossa ulkoisen paineen kanssa.



9.8 Miten voidaan käytännössä toteuttaa prosessi, jossa kaasun lämpötila on vakio?

Vakiotilavuudessa tapahtuva prosessia kutsutaan **isokoriseksi**, vakiopaineessa tapahtuva **isobaariseksi** ja vakiolämpötilassa **isotermiseksi**. Kuvassa 9.6 (b) on esimerkki tällaisten prosessien pV -diagrammeista. Koska diagrammissa paine on pysty- ja tilavuus vaaka-akselilla, vakiotilavuudessa tapahtuva isokorista prosessia kuvaa pystysuora jana. Vastaavasti vakiopaineessa tapahtuva isobaarista prosessia esittää vaakasuora jana. Prosessilla on täsmällinen alku- ja lopputila, joten myös prosessin kuvajalla on täsmällinen alku- ja loppupiste. Kuvajat eivät siis ole käyriä ilman alkua ja loppua kuten funktioiden kuvajat.

Isotermisen prosessin kuvamiseksi meidän täytyy tietää, kuinka paine riippuu tilavuudesta lämpötilan ollessa vakio. Tämä on kuitenkin helppo päätellä ideaalikaasun tilanyhtälöstä, jonka mukaan paineen riippuvuus muista tilanmuuttujista on $p = \frac{1}{V} N k_B T$. Toisin sanoen lämpötilan ja ainemäärän ollessa vakiot paine on *kääntäen verrannollinen tilavuuteen*, ja isotermistä prosessia kuvava käyrä on osa *hyperbeliä*. Tilanyhtälön perusteella itse asiassa kaikki samassa lämpötilassa olevat tilat ovat pV -diagrammissa samalla hyperbelikäyrällä eli **isotermillä**. Mitä korkeammasta lämpötilasta on kyse, sitä kauempaan koordinaatiston origosta hyperbeli kulkee (kuva 9.7 (a)). Tämä tulos pääsee luonnollisesti vain silloin, kun ideaalikaasumalli kuvaa todellisia kaasuja hyvin.

Kuva 9.7: Ideaalikaasun isotermejä ja isentrooppeja, kun $N_{\text{vapaus}} = 5$.

Isentrooppi

Neljäs tärkeä erikoistapaus on isentrooppinen (eli kvasistaattinen ja adiabaattinen) prosessi. Kuten kuvan 9.5 esimerkissä huomattiin, isentrooppisessa laajenemisessa kaasu tekee työtä mutta ei vastaanota lämpöä. Tällöin kaasu menettää sisäenergiaansa ja sen lämpötila laskee. Vastaavasti isentrooppisessa puristuksessa kaasuun tehdään työtä, joten sen lämpötila nousee. Niinpä pV -kuvaajassa isentrooppisen prosessin alku- ja loppupisteet ovat *eri isotermillä* niin, että suuremmassa tilavuudessa oleva piste on alemman lämpötilan käyrällä. Siispä prosessia kuvaava käyrä laskee *jyrkemmin* kuin isotermi. Aivan kuten samassa lämpötilassa olevat tilat muodostavat diagrammiin isotermien, samaa entropiaa vastaavat tilat piirtävät **isentroopin**. Mitä suurempaa entropiaa tarkastellaan, sitä kauempaan origosta isentrooppi kulkee. Isentrooppikäyrä on piirretty kuvaan 9.7 (b).



9.9 Kuvassa 9.6 (b) pisteen A lämpötila on 300 K ja kaasulla on 5 vapaustasetta. (a) Mikä on kaasuhukkisten lukumäärä (tai ainemäärä)? (b) Mikä on kaasun lämpötila pisteissä B ja C? (c) Laske entropian muutos prosessissa A → B ja A → C.

Ratkaistaan vielä isentrooppikäyrrien muotoa kuvaava täsmällinen matemaattinen lauseke. Koska isentroopilla entropia on vakio, otamme lähtökohdaksi ideaalikaasun entropian lausekkeen (8.80). Ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella voimme korvata lausekkeessa esiintyvä lämpötilan paineen ja tilavuuden tulolla, $T = pV/(Nk_B)$, jolloin entropian riippuvuus paineesta ja tilavuudesta on

$$Nk_B \ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{pV}{p_0 V_0} = S_{\text{ideaalikaasu}} = \text{vakio} \quad (9.2)$$

Tässä p_0 , V_0 ja $S_{\text{ideaalikaasu}}$ ovat jotkin vakiot, joiden täsmällisiä arvoja emme tunne. Koska kaasun ainemäärä on vakio, voimme jakaa yhtälön puolittain tekijällä Nk_B , jolloin saadaan

$$\ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{pV}{p_0 V_0} = \text{vakio}. \quad (9.3)$$

Edelleen käytämällä logaritmin laskusääntöä $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ voimme erotella lausekkeessa paineen ja tilavuuden

$$\ln \frac{V}{V_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{p}{p_0} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{V}{V_0} = \text{vakio}, \quad (9.4)$$

ja yhdistämällä kaikki tilavuutta sisältävät termit sekä jakamalla vielä tekijällä $N_{\text{vapaus}}/2$ saadaan

$$\left(\frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} \right) \ln \frac{V}{V_0} + \ln \frac{p}{p_0} = \text{vakio}. \quad (9.5)$$

Tässä lausekkeessa esiintyvä vapaustaseden lukumäärästä riippuva kerroin

$$\gamma = \frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}} \quad (9.6)$$

on kaasun **adiabaattivakio**, missä nimi luonnollisesti viittaa siihen, että tässä tarkasteltu isentrooppinen prosessi on myös adiabaattinen, jos se on kvasistaattinen.



9.10 Mikä on adiabaattivakio, jos kaasu on (a) yksiatominen, (b) kaksiatominen ja värähtelyn vapausasteet ovat jäätyneet, (c) kaksiatominen ja kaikki vapausasteet ovat aktiiviset?

Huomioimalla vielä logaritmin laskusääntö $b \ln a = \ln a^b$, yhtälö (9.5) voidaan kirjoittaa yksinkertaisempaan muotoon

$$\ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^\gamma + \ln \frac{p}{p_0} = \ln \frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = \text{vakio.} \quad (9.7)$$

Toisaalta koska eksponenttifunktio on logaritmifunktion käänteisfunktio, muotoa $\ln a = b = \text{vakio}$ olevasta yhtälöstä voidaan ottaa puolittain eksponentti ja saadaan $e^{\ln a} = a = e^b = \text{uusi vakio}$. Niinpä tämä isentrooppia kuvava yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = \text{vakio,} \quad (9.8)$$

ja koska $p_0 V_0^\gamma$ on myös jokin vakio, voimme kertoa yhtälön vielä tällä tekijällä ja saamme hyvin yksinkertaisen lopputuloksen

$$pV^\gamma = \text{vakio.} \quad (9.9)$$

Tämä on ideaalikaasun **adiabaattilaki**, joka siis kuvailee kaasun paineen ja tilavuuden välistä riippuvuutta kvasistaattisessa adiabaattisessa prosessissa, jossa entropia on vakio.



9.11 Miten kaasun vapausasteiden lukumäärä vaikuttaa isentrooppikäyrän jyrkkyyteen pV -diagrammissa?

esimerkki 9.1

Isentrooppinen prosessi

Kaasusäiliössä on typpeä N_2 lämpötilassa 350 K , paineessa 200 kPa ja tilavuudessa 0.10 m^3 . Kaasu laajenee isentrooppisesti tilavuuteen 0.15 m^3 . (a) Mikä on kaasun ainemäärä? (b) Montako vapausasteita kaasulla on? (c) Mikä on kaasun paine ja lämpötila lopuksi?

TILANNE Merkitään tilanmuuttujia alkutilassa $(p_{\text{alku}}, V_{\text{alku}}, T_{\text{alku}}) = (200\text{ kPa}, 0.10\text{ m}^3, 350\text{ K})$. Lopputilasta tunnetaan $V_{\text{loppu}} = 0.15\text{ m}^3$.

SUUNNITELMA Typpi on kaksiatominen kaasu, ja tässä lämpötilassa sen värähtelyn vapausasteet ovat jäätyneet, joten kaasulla on 3 suoran liikkeen ja 2 pyörimisen vapausastetta.

Oletetaan, että typpi käyttäätyy prosessissä ideaalikaasun tavoin, jolloin aina päätee tilanyhtälö

$$pV = Nk_B T = nRT. \quad (9.10)$$

Isentrooppinen laajeneminen on kvasistaattinen adiabaattinen prosessi, joten siinä päätee myös adiabaattilaki, jonka mukaan pV^γ on vakio. Erityisesti tämän lausekkeen arvo on koko ajan sama kuin aluksi, joten päätee

$$pV^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma, \quad (9.11)$$

missä adiabaattivakio on $\gamma = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}$.

RATKAISU (a) Ainemäärä pysyy vakiona, ja se on $n = \frac{pV}{RT} = 6.9\text{ mol}$.

(b) Vapausasteita on $N_{\text{vapaus}} = 5$, ja tähän adiabaattivakioksi saadaan $\gamma = 1.4$.

(c) Loppupaine on adiabaattilain mukaan $p_{\text{loppu}} = p_{\text{alku}} \frac{V_{\text{alku}}^\gamma}{V_{\text{loppu}}^\gamma} = 113\text{ kPa}$, jolloin lämpötila on tilanyhtälön perusteella $T_{\text{loppu}} = \frac{p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}}{nR} = T_{\text{alku}} \frac{p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}}{p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}} = 298\text{ K}$.

ARVIOINTI Adiabaattisessa prosessissa ei siirry lämpöä, ja laajetessa kaasu tekee työtä, joten sen täyttyy menettää sisäenergiaa ja lämpötilan täytyy pienentyä. Tulos on siis järkevä.



9.12 Selitä omin sanoin, millaisia ovat ideaalikaasun isoterminen, isobaarinen, isokoorinen ja isentrooppinen prosessi. Millainen kuvaaja kyllakin prosessilla on pV -koordinaatistossa. Jos tiedät ideaalikaasun alkupaineen ja -tilavuuden, p_{alku} ja V_{alku} sekä joko loppupaineen p_{loppu} tai -tilavuuden V_{loppu} , miten saat laskettua näistä suureista toisen lopputilasta? Selitä kullekin prosessille!

9.3 Energian ja entropian muutokset

Prosessin tekemä työ

Systeemin sisältämä energia ja entropia riippuvat vain systeemin tilasta. Hiukkasten mikroskooppinen liike-energia riippuu niiden nopeuksista ja niiden potentiaalienergia riippuu niiden paikoista. Ja jos systeemin makroskooppiset ominaisuudet kuten paine ja tilavuus eivät muutu, myöskään systeemin sisäenergia ei voi muuttua vaan sillä on tässä makrotilassa tietty vakioarvo, vaikka systeemin mikrotila jatkuvasti muuttuakin hiukkasten liikkuessa. Systeemin entropia puolestaan mittaa sitä, montako erilaista mikrotilaan yhteen makrotilaan liittyy eli monellako tavalla hiukkaset voidaan järjestää niin, että systeemi näyttää makroskooppisesti aina samanlaiselta.

Erityisesti sisäenergia ja entropia eivät riipu siitä, miten systeemi on tilaan tuotu. Voimme esimerkiksi valmistella useita kaasusäiliöitä, joissa on kaikissa yhtä paljon samanlaista kaasua mutta eri lämpötila, paine ja tilavuus. Kaasuilla on tällöin luonnollisesti erisuuruiset sisäenergiat ja entropiat. Kuitenkin jos sitten säädämme jokaisen säiliön tilavuuden ja paineen samaksi, kaikki kaasut saavat automaattisesti saman lämpötilan, entropian ja sisäenergian riippumatta siitä, miten tämä säätö tehdään. Samoin jos systeemi on jossakin alkutilassa ($V_{\text{alku}}, p_{\text{alku}}$) ja se käy läpi prosessin, joka siirtää sen toiseen tilaan ($V_{\text{loppu}}, p_{\text{loppu}}$), muutos systeemin energiassa ja entropiassa riippuu vain näistä alku- ja lopputiloista eikä lainkaan prosessista, joka muutoksen aiheutti. Tämä pätee vaikka prosessi olisi irreversiibeli ja ei-kvasistaattinen.

Sama ei kuitenkaan päde prosessissa tehdylle työlle ja siirtyvälle lämmölle vaan nämä *riippuvat siitä, kuinka prosessi tapahtuu*. Kuvissa 9.8 ja 9.9 on tästä esimerkki. Kuvissa on kaksi kaasusäiliötä, joista kummassakin on liikkuva mäntä ja tämän männän päällä paino. Kuvassa 9.8 painona toimii yksi kiinteä kappale kun taas kuvassa 9.9 paino on hiekkaa. Kappaleen ja hiekkakasan massat ovat yhtä suuret. Säiliön ympärillä on tyhjiö, joten ulkoisen ilman paine ei purista mäntää sisään vaan mäntää painaa alas paina alaspäin ainoastaan sen päällä olevan kappaleen tai hiekan paino.

Ensimmäisessä prosessissa kaasua lämmitetään, jolloin lämpöä siirtyy kaasun ja kaasun sisäenergia kasvaa. Samalla kaasun paine pyrkii kasvamaan, jolloin kaasu työntää mäntää ylöspäin ja kaasu laajenee. Laajetessaan kaasu tekee mäntään työtä, mikä ilmenee männän päällä olevan massan kohoamisena ylöspäin. Koska lämmitys tapahtuu vähitellen, prosessi on kvasistaattinen ja systeemi on koko ajan likimain tasapainossa. Tämä tarkoittaa sitä, että kaasu laajenee aina juuri sen verran, että mäntää alas painava voima ja kaasun paineen sitä ylöspäin työntävä voima ovat aina yhtä suuret. Koska mäntää alas painava voima on tässä tapauksessa kappaleen painovoiman suuruinen ja siis vakio, täytyy myös kaasun paineen olla prosessin aikana vakio. Prosessissa siis kaasun paine on vakio mutta tilavuus kasvaa ja lämpötila nousee. Kaasun vastaanottamasta lämmöstä osa muuttuu kaasun sisäenergiaksi ja osa siirtyy kappaleen potentiaalienergiaksi kaasun tehessä siihen työtä.

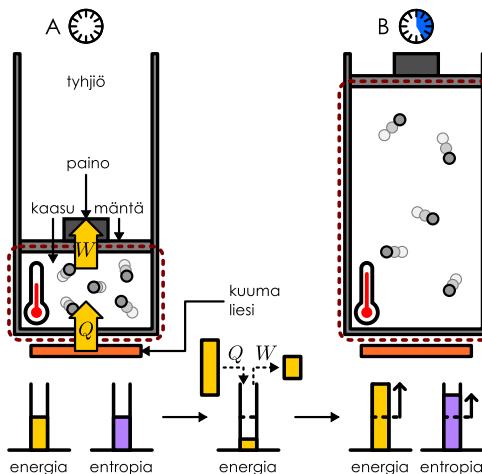


9.13 Miksi kaasun paine pysyy kuvan 9.8 (a) prosessissa vakiona vaikka molekyylien nopeus kasvaa? Selitä tämä molekyylien liikkeen kautta käytämättä ideaalikaasun tilanyhtälöä.

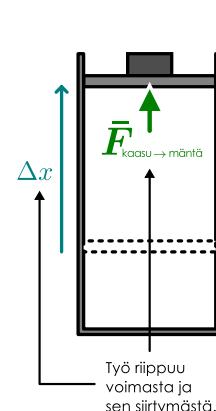
Toinen prosessi alkaa täsmälleen samoin kuin kuvan 9.5 prosessi. Kaasusäiliö on aluksi lämpöeristetty, joten kaasu ei voi vastaanottaa lämpöä. Sen sijaan männän päällä oleva hiekkavaluu vähitellen pois, jolloin

Kuva 9.8: Kaasu laajenee isobaarisesti. Laajeneva kaasu tekee työtä, ja samalla kaasua on lämmittää.

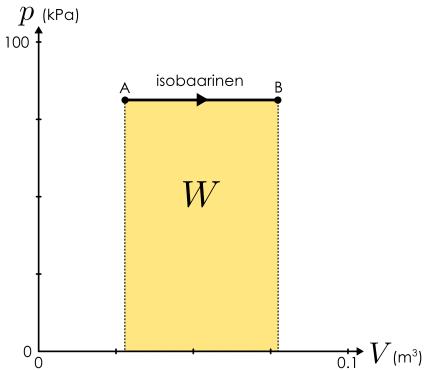
(a) Kaasua lämmitetään vakiopaineessa.



(b) Voiman tekemä työ.

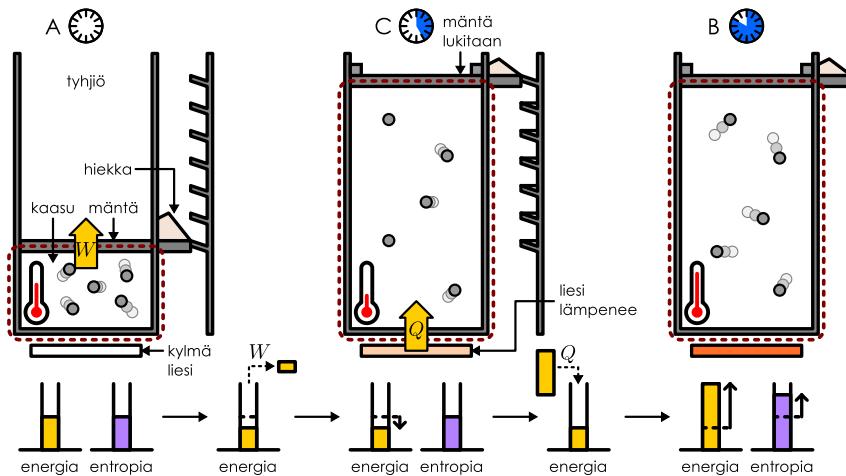


(c) Työtä kuvaa prosessin rajaama ala.

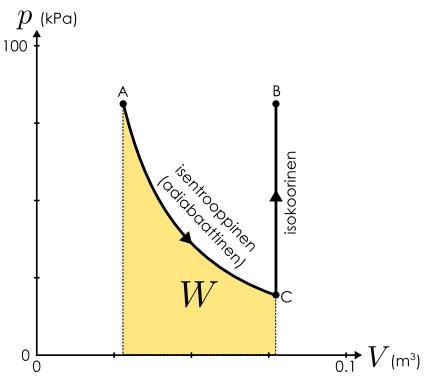


Kuva 9.9: Kaksivaiheinen prosessi, jossa kaasu ensin laajenee isentrooppisesti ja sitten lämpenee isokoriseksi.

(a) Kaasu laajenee ensin ja lämpenee sitten.



(b) Työ on pienempi kuin vakiopaineessa.



mäntää alas painava voima heikkenee ja kaasun paine työntää mäntää ylöspäin. Laajeneva kaasu tekee tällöin jälleen työtä ja nostaa hiekkaa ylöspäin. Samalla kaasun sisäenergia vähenee ja kaasun lämpötila laskee, mikä edelleen johtaa kaasun paineen pienemiseen. Prosessi on kvasistaattinen, joten kaasun paine muuttuu aina niin, että sen mäntää ylöspäin työntävä voima on yhtä suuri kuin hiekan painosta johtuva mäntää alas painava työntävä voima. Männän päällä ollut hiekka valuu säiliön vierellä olevaan telineeseen, jolloin se jää aina suunnilleensille korkeudelle, jolla mäntä oli hiekan poistuessa sen päältä.

Männän annetaan nousta kummassakin prosessissa yhtä paljon, jolloin kaasut päätyvät samaan tilavuuteen. Ensimmäinen prosessi (kuva 9.8) tapahtui vakiopaineessa eli se oli isobaarinen ja niinpä sitä kuvaava pV -koordinaatistossa vaakasuora jana. Koska toinen prosessi (kuva 9.9) oli lämmönvaihdoton eli adiabaattinen, siinä kaasun paine ja lämpötila laskevat ja prosessin pV -kuvaaja seuraa isentrooppikäyrää. Jotta molemmat prosessit saataisiin tuotua samaan lopputilaan, voimme lukita toisessa prosessissa säiliön männän paikoilleen ja lämmittää säiliötä kunnes sen lämpötila on sama kuin ensimmäisen prosessin säiliön. Tätä prosessin vaihetta kuvaava pV -koordinaatistossa pystysuora jana.

Molemmat prosessit päätyvät samaan lopputilaan, jolloin nällä on lopussa sama lämpötila ja sisäenergia. Prosessit eivät kuitenkaan tehneet yhtä paljon työtä eikä säiliöiden lämmittäminen vaatinut yhtä paljon lämpöä. Isobaarisessa prosessissa kaasu nimittään nosti koko kappaleen yhtä korkealle kuin mäntä nousi, mutta adiabaatisessa prosessissa osa hiekasta valui prosessin aikana kaasusäiliön viereiseen telineeseen ja nousi siis lyhyemmän matkan ylöspäin. *Kiinteän kappaleen potentiaalienergia siis kasvoi enemmän kuin hiekan*, ja ilmeisesti kaasu teki adiabaatisessa prosessissa vähemmän työtä.

Voiman tekemä työ riippuu voiman suuruudesta ja suunnasta sekä voiman vaikutuspisteen kulkemasta matkasta. Isobaarisessa prosessissa kaasun paineen mäntään kohdistama voima on koko ajan likimain yhtä suuri kuin männän päällä olevan kappaleen painovoima, joten voiman suuruus on vakio. Jos männän pinta-ala on A , paineen siihen kohdistama voima on siis

$$F_x = pA, \quad (9.12)$$

kun positiivinen x -suunta valitaan ylöspäin. Lisäksi jos mäntä liikkuu matkan Δx , tämän vakiovoiman tekemä työ on

$$W = F_x \Delta x = pA \Delta x = p\Delta V = p(V_{\text{loppu}} - V_{\text{alku}}), \quad (9.13)$$

missä $\Delta V = A\Delta x$ on kaasusäiliön tilavuuden muutos.

Adiabaatisessa prosessissa kaasun paine pienenee tilavuuden kasvaessa. Tällöin myös paineen mäntään kohdistama voima pienenee männän liukkuessa ja niinpä työ täytyy laskea voiman integraalina. Toisaalta jokaisella lyhyellä männän siirtymällä dx tehty työ on

$$dW = F_x dx = pAdx = pdV, \quad (9.14)$$

joten kaasun laajetessaan tekemä työ voidaan ilmaista *paineen integraalina tilavuuden suhteen*

$$W = \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} pdV. \quad (9.15)$$

Jos kaasu laajenee eli lopputilavuus on alkutilavuutta suurempi, integraali on positiivinen ja integraalin arvo todellakin ilmaisee kaasun tekemää työtä eli systeemistä poistuvan energian määriä. Jos kaasua puristetaan,

lopputilavuus on alkutilavuutta pienempi ja integraalin arvo on negatiivinen. Integraali kertoo siis edelleen systeemistä poistuvan energian määärän, sillä systeemin vastaanottessa energiaa siitä poistuva energiamäärä on negatiivinen. Systeemin työön *vastaanottama energia* on siis

$$W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} p dV \quad (9.16)$$

riippumatta siitä laajeneeko vai supistuuko systeemi.

9.14 Kaasusäiliön sisäinen paine on 120 kPa ja säiliön ulkopuolinen ilmanpaine on 100 kPa. Säiliön yksi seinä on mäntä, joka on aluksi lukittu paikoilleen. Lukitus avataan, jolloin säiliön sisällä oleva ylipaine kohdistaa mäntään suuremman voiman kuin ulkoinen paine ja mäntä alkaa liikkua ulospäin. Hetken päästä säiliön tilavuus on kasvanut 0.01 m^3 ja paine säiliössä on enää 110 kPa. (a) Arvioi, paljonko työtä säiliön sisällä oleva kaasu on tehnyt? (b) Paljonko työtä säiliön ulkoinen ilmanpaine on tehnyt? (c) Paljonko säiliön sisältämän kaasun sisäenergia on muuttunut? (d) Muuttuvatko muut energian muodot? Jos muuttuvat, kuinka paljon?

Koska prosessi (b) on lämmönvaihdoton ja kvasistaattinen, paine riippuu siinä tilavuudesta adiabaattilain (9.9) mukaisesti, $pV^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma$. Paine on siis tilavuuden funktioina

$$p = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma V^{-\gamma}, \quad (9.17)$$

ja prosessissa tehty työ on

$$W_{\text{ulos}} = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} V^{-\gamma} dV \quad (9.18)$$

$$= p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \left| \frac{1}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \right|_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} \quad (9.19)$$

$$= p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma \frac{1}{1-\gamma} \left(V_{\text{loppu}}^{1-\gamma} - V_{\text{alku}}^{1-\gamma} \right) \quad (9.20)$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} \left(p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma V_{\text{loppu}}^{1-\gamma} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}} \right). \quad (9.21)$$

Tässä voi vielä huomata, että adiabaattilain perusteella $p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}}^\gamma = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^\gamma$, joten kaasun tekemä työ sievenee muotoon

$$W_{\text{ulos}} = \frac{1}{1-\gamma} (p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}). \quad (9.22)$$

Tämä työ on aina *pienempi* kuin vastaavassa isobaarisessa prosessissa, jossa kaasun alkupaine ja tilavuuden muutos on sama.

9.15 Kaasun vapausasteiden lukumäärä on 5. Kaasu on aluksi paineessa 100 kPa ja tilavuudessa 0.02 m^3 . Kuinka suuren työn kaasu tekee laajetessaan kaksinkertaiseen tilavuuteen (a) isobaarisesti, (b) adiabaattisesti? (c) Kummissa tapauksessa työ on suurempi? Vertaa prosessien kuvajiaan *pV*-diagrammissa.

Graafisessa esityksessä integraali vastaa integraalifunktion rajaamaa pinta-alaa. Esimerkiksi työ, joka on voiman integraali siirtymän suhteen, on voimaa paikan funktiona kuvaavan käyrän ja *x*-akselin väliin jäävä pinta-ala. Samaan tapaan kaasun tekemä työ on paineen integraali tilavuuden suhteen, joten *kaasun tekemää työtä kuvaava pV-diagrammissa prosessia esittävä käyrän ja V-akselin väliin jäävä pinta-ala*. *V*-akseli onkin tapana asettaa diagrammissa vaakasuuntaan juuri siksi, että tällöin pinta ala on prosessin kuvajan ja vaaka-akselin välinen ala. Jos akselit valitsisi toisin päin, työtä esittäisi kuvajan ja pystyakselin välinen ala.

Edellä tarkasteltujen prosessien *pV*-diagrammien perusteella onkin selvää, että isobaarisen kvasistaattisen prosessin tekemän työn täytyy olla suurempi kuin adiabaattisen, jos kaasujen alku- ja lopputilavuudet ovat samat. Kuvassa 9.8 (c) kaasun isobaarisessa prosessissa tekemää työtä esittää värellisen suorakaiteen pinta-ala. Kuvassa 9.9 (b) on vastaava adiabaattisen prosessin kuvaja. Koska adiabaattisessa prosessissa kaasun paine pienenee, kuvaja kulkee aina alempaan kuin vastaavan isobaarisen prosessin kuvaja. Niinpä kuvaja myös rajaa *pV*-diagrammissa pienemmän pinta-alan, mikä fysikaalisesti tarkoittaa kaasun tekevän vähemmän työtä kuin isobaarisessa prosessissa. Kuvassa 9.9 (b) esitetyn kaksivaiheisen prosessin jälkimmäisessä osassa (C → B) kaasua lämmitetään isokoorisesti eli vakiotilavuudessa. Tämän aikana prosessin *pV*-kuvaja on pystysuora ja sen rajaama pinta-ala on *nolla*. Niinpä *isokoorinen prosessi ei tee työtä lainkaan*.

Näissä prosesseissa tarkasteltu kaasusysteemi laajeni, joten se teki työtä ympäristöönsä. Työ siirsi kaasun sisäenergiaa kaasusäiliön päällä olevan kappaleen ja hiekan potentiaalienergiaksi. Vastaavasti *pV*-kuvajassa kaasun laajeneminen ilmenee tilavuuden kasvuna. Toisin sanoen jos prosessin *pV*-kuvajassa lopputilan tilavuus on suurempi kuin alkutilan eli prosessi kulkee kuvassa vasemmalta oikealle, systeemi tekee työtä ympäristöönsä. Tilanne on päinvastainen, jos kaasun tilavuus pienenee: tällöin *pV*-diagrammissa prosessi kulkee oikealta vasemmalle ja kuvajan rajaama pinta-ala esittää ympäristön kaasun tekemää työtä.



9.16 Tarkastele kuvien 9.8 ja 9.9 prosesseja. (a) Missä prosesseista $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$ ja $C \rightarrow B$ siirrytään lämpönä suurin ja pienin energiamäärän?

esimerkki 9.2

Isoterminen prosessi

Ideaalikaasu on suljettu männälliseen säiliöön, jota ei ole lämpöeristetty ja jonka ympärillä on vettä. Vesi on samassa lämpötilassa kuin kaasu alkutilassa. Kaasua puristetaan hitaasti pienempään tilavuuteen. (a) Paljonko työtä vaatii kaasun puristaminen alkutilavuudesta V_{alku} lopputilavuuteen V_{loppu} ? (b) Paljonko kaasun ja sen ympäristön välillä siirrytään lämpöä?

SUUNNITELMA Veden ominaislämpökapasiteetti on suuri, joten voimme olettaa kaasua ympäröivän veden pysyvän koko ajan samassa lämpötilassa. Puristaminen tekee kaasun työtä, joka kasvattaa kaasun sisäenergiaa ja pyrkii nostamaan sen lämpötilaa. Lämpöä kuitenkin pääsee siirtymään kaasun ja sitä ympäröivän veden välillä, joten vesi jäähdyyttää kaasua. Lisäksi koska puristaminen tapahtuu hitaasti, voimme olettaa systeemin olevan aina likimain tasapainossa ja kaasun samassa lämpötilassa veden kanssa, jolloin prosessi on kvasistaattinen ja isoterminen.

Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaisesti kaasun paine ja tilavuus riippuvat toisistaan,

$$p = \frac{1}{V} N k_B T. \quad (9.23)$$

Kaasuun tehty työ puolestaan saadaan integroimalla painetta tilavuuden muutoksen suhteeseen,

$$W_{\text{sisäänn}} = W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} p dV. \quad (9.24)$$

Kaasun sisäenergia riippuu ainoastaan sen lämpötilasta, joten isotermissä prosessissa lämpötila ja sisäenergia ovat vakiot, $\Delta E_{\text{sisäänn}} = 0$. Tällöin energian säilymisen perusteella kaasun täytyy luovuttaa prosessissa ympäristöönsä energiota lämpönä yhtä paljon kuin se vastaanottaa työtä, $Q_{\text{ulos}} = W_{\text{sisäänn}}$.

RATKAISU Lasketaan tehty työ integroimalla.

$$W_{\text{sisäänn}} = -N k_B T \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} \frac{1}{V} dV = -N k_B T \left| \ln V \right|_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} = -N k_B T (\ln V_{\text{loppu}} - \ln V_{\text{alku}}) = N k_B T \ln \frac{V_{\text{alku}}}{V_{\text{loppu}}}. \quad (9.25)$$

Kaasu luovuttaa lämpöä yhtä paljon.

ARVIOINTI Puristettaessa alkutilavuus on suurempi kuin lopputilavuus, joten saatu työ on positiivinen. Näin pitääkin olla, koska puristuksessa kaasuun tehdään työtä ja laskimme juuri kaasun työnä siirtynä energian määrän. Työtä pitää tehdä sitä enemmän mitä enemmän kaasua on ja mitä korkeampi sen lämpötila on. Tämä on järkevä, koska ainemäärän lisääminen tai lämpötilan nostaminen kasvattaa kaasun painetta.

Ominaislämpökapasiteetit

Lämpökapasiteetti kuvailee systeemiä kykyä varastoida lämpönä siirtymää energiaa ja erityisesti lämpötilan muutosten riippuvuutta vastaanotetusta lämmöstä. Mitä suurempi lämpökapasiteetti on, sitä enemmän systeemiin pitää tuoda lämpöä, jotta sen lämpötila muuttuisi tietyn määrän. Prosessissa siirtyvä lämpö riippuu kuitenkin siitä, kuinka prosessi tapahtuu. Niinpä on mahdollista siirtää systeemi yhdestä lämpötilasta T_{alku} toiseen lämpötilaan T_{loppu} eri tavoin, ja näissä eri prosesseissa systeemin vastaanottama lämpö voi hyvinkin olla erilainen. Tämä tarkoittaa sitä, että lämpökapasiteetti ei ole vain systeemin vaan *systeemin ja prosessin yhteinen ominaisuus*.

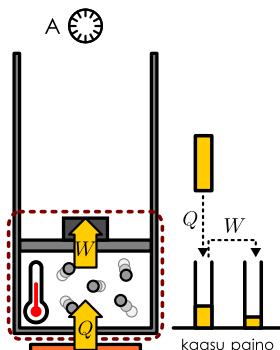
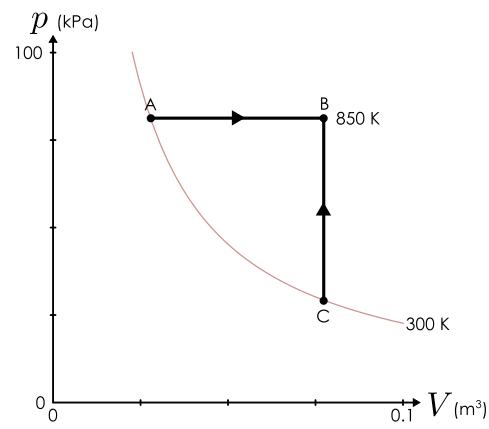
Lämpötilaa muuttavia prosesseja on äärettömästi erilaisia, ja niinpä systeemin lämpökapasiteettikin voisi periaatteessa saada äärettömästi erilaisia arvoja. Yksinkertaisuuden vuoksi lämpökapasiteetti yleensä määritellään kuitenkin vain joko *vakiotilavuudessa* tai *vakiopaineessa*. Merkittäessä lämpökapasiteettia symbolilla tämä ero ilmaistaan alaindeksillä, joka ilmoittaa kulloinkin vakiona pidettävän suureen. Toisin sanoen lämpökapasiteettia vakiopaineessa merkitään symbolilla C_p ja vakiotilavuudessa C_V . Vastaavasti esimerkiksi ominaislämpökapasiteettia ainemäärää kohden vakiopaineessa merkitään c_p^n ja vakiotilavuudessa c_V^n . Jos aineen tilavuuden muutos sen lämpötilan muuttuessa on pieni, lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on likimain sama kuin vakiopaineessa. Esimerkiksi useimmat kiinteät aineet lämpölaajenevat kuumetessaan niin vähän, ettei ilmiöllä ole lämpökapasiteetin kannalta juuri merkitystä. Kaasujen tilavuus, paine ja lämpötila ovat sen sijaan vahvasti kytkeytyneet, joten kaasuilla eri tavoin mitatut ominaislämpökapasiteetit poikkeavat toisistaan merkittävästi.



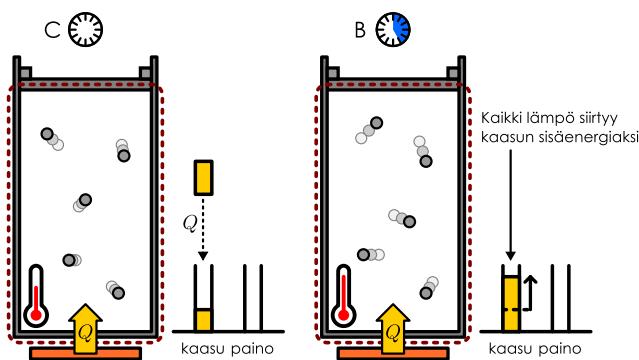
9.17 Miksei ole järkevää määritellä lämpökapasiteettia isotermissä tai adiabaattisessa prosessissa?

Kuva 9.10: Ominaislämpökapasiteetin määrittäminen vakiopaineessa ja -tilavuudessa.

(a) Lämmitys vakiopaineessa.

(c) pV -diagrammi.

(b) Lämmitys vakiotilavuudessa.



Kuvassa 9.10 on esitetty prosessit, joilla kaasun ominaislämpökapasiteetti voidaan mitata sekä vakiopaineessa että vakiotilavuudessa. Kummassakin tapauksessa kaasu pidetään suljetussa säiliössä, jolloin sen ainemääriä on vakio. Säiliötä lämmitetään, jolloin kaasun siirtyy energiaa lämpönä ja kaasun lämpötila kasvaa. Kuvassa (a) säiliössä on vapaasti liikkova mäntä ja tämän pääällä kappale, jonka paino tuottaa mäntää alas painava voiman. Prosessi on kvasistaattinen, joten systeemi on aina tasapainossa ja kaasun paine työntää mäntää ylöspäin yhtä suurella voimalla kuin millä kappale painaa sitä alas. Kaasun lämmetessä sen paine pyrkii kasvamaan ja kaasu laajenee, mutta toisaalta laajentuvan kaasun paine pienenee. Koska mäntää alas painava voima on vakio, kaasun paineen täytyy kuitenkin pysyä vakiona ja niinpä tilavuuden ja lämpötilan muutosten vaikutukset kaasun paineeseen kumoavat toisensa. Kuvassa (b) kaasusäiliön koko sen sijaan ei muutu. Niinpä kaasun lämmetessä sen tilavuus pysyy vakiona ja paine kasvaa.

Prosessien pV -diagrammit on piirretty kuvaan (c). Kaasujen alkulämpötila on sama, ja ne päätyvät myös lopuksi samaan lopputilaan. Kuitenkin koska toisessa prosessissa muuttuu paine ja toisessa tilavuus, kaasuilla on alkutilassa eri paine ja tilavuus. Koska prosessi $A \rightarrow B$ tapahtuu vakiopaineessa, sitä kuvaava vaakasuora jana. Prosessi $C \rightarrow B$ puolestaan tapahtuu vakiotilavuudessa, ja sitä kuvaava pystysuora viiva.

Ideaalikaasun sisäenergia on pelkästään sen molekyylien liike-energiaa, ja tämä liike-energia on suoraan verrannollinen lämpötilaan yhtälön (8.39) mukaisesti. Niinpä myös sisäenergian *muutos* on verrannollinen lämpötilan muutokseen,

$$\Delta E_{\text{sisä}} = \frac{1}{2} N N_{\text{vapaus}} k_B \Delta T. \quad (9.26)$$

Kaasuilla on lopputilassa yhtä suuri sisäenergia, koska kummassakin prosessissa on sama lopputila, mutta niillä on täsmälleen sama sisäenergia myös alkutilassa, koska *lämpötila* on alkutilassa sama. Niinpä kaasun sisäenergian muutos on kummassakin prosessissa yhtä suuri.

Systeemin sisäenergia kasvaa, koska kaasu vastaanottaa lämpöä. Isokorisen prosessin tapauksessa *kaikki* kaasun vastaanottama lämpö siirtyy sen sisäenergiaksi eli

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisää}, V}. \quad (9.27)$$

Niinpä määritelmän mukaisesti kaasun ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on

$$c_V^n = \frac{1}{n} \frac{\partial Q_{\text{sisää}, V}}{\partial T} = \frac{1}{n} \frac{\partial E_{\text{sisä}}}{\partial T}. \quad (9.28)$$

Kaasun lämpötilan muuttuessa sen vapausasteiden lukumäärä voi muuttua, jolloin myös lämpökapasiteetti muuttuu. Siksi lämpökapasiteetti määritellään täsmällisesti lämmön derivaattana lämpötilan suhteeseen. Jos kuitenkin kaasun vapausasteiden lukumäärä pysyy prosessissa vakiona, myös lämpökapasiteetti on vakio ja voimme laskea sen sisäenergian kokonaismuutoksen suhteen lämpötilan kokonaismuutokseen. Tällöin huomioiden yhteydet $N = nN_A$ (hiukkasten määrä on sama kuin moolien määrä kerrottuna yhden moolin sisältämällä hiukasmäärällä) sekä $R = N_A k_B$ tulokseksi saadaan

$$c_V^n = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{sisä}}}{\Delta T} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \frac{N k_B}{n} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R, \quad (9.29)$$

mikä on sama tulos kuin jo aikaisemmin johdettu (8.40). Täsmällinen lasku derivaatan avulla antaa aivan saman loppituloksen, jos vapausasteiden määrä on vakio.

Sen sijaan isobaarisessa prosessissa kaasu tekee laajetessaan työtä ja tällöin kaasun sisäenergiaa muuttuu ylöspäin nousevan kappaleen potentiaalienergiaksi. Kaasun sisäenergian muutos on tällöin

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisäänp},p} - W_{\text{ulos},p}. \quad (9.30)$$

Koska kaasun lämpötila muuttuu kummassakin prosessissa yhtä paljon, kaasun sisäenergian muutos on sama kuin isokoririsessa prosessissa. Osa systeemin energiasta siirtyy kuitenkin nousevan kappaleen potentiaalienergiaksi, joten *systeemiin täytyy vakiopaineessa tapahtuvassa prosessissa tuoda enemmän lämpöä kuin vakiotilavuudessa*. Tällöin myös ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa on suurempi kuin vakiotilavuudessa. Olettaen taas kaasun vapausasteiden pysyvän vakiona tämä on

$$c_p^n = \frac{1}{n} \frac{Q_{\text{sisäänp},p}}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{\Delta E_{\text{sisä}}}{\Delta T} + \frac{1}{n} \frac{W_{\text{ulos},p}}{\Delta T} = c_V^n + \frac{1}{n} \frac{W_{\text{ulos},p}}{\Delta T}. \quad (9.31)$$



9.18 Oletetaan, että haluamme mitata kaasun lämpökapasiteetin prosessissa, jossa kaasua lämmitetään ja puristetaan samanaikaisesti. (a) Onko tämä kuvitteellinen lämpökapasiteetti suurempi, pienempi tai yhtä suuri kuin c_p^n tai c_V^n ? (b) Riippuukö tämä lämpökapasiteetti nopeudesta, jolla kaasua puristetaan? Jos riippuu, kuinka pieni tai suuri lämpökapasiteetti voi olla?

Laajetessaan tilavuuden ΔV kaasu tekee aina työn $W_{\text{ulos}} = p\Delta V$. Lisäksi tässä tarkastellussa isobaarisessa prosessissa laajeneminen tapahtuu paineen ja ainemäärän pysyessä vakioina, joten ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella tilavuuden muutos on suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen $\Delta V = \frac{1}{p}nR\Delta T$, ja niinpä kaasun tekemä työ voidaan ilmaista myös lämpötilan muutoksen avulla muodossa

$$W_{\text{ulos},p} = nR\Delta T. \quad (9.32)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (9.31) saadaan yksinkertainen tulos

$$c_p^n = c_V^n + R. \quad (9.33)$$

Toisin sanoen vakiopaineessa ominaislämpökapasiteetti on suurempi kuin vakiotilavuudessa, koska laajentava kaasu tekee laajentuessaan työtä ja systeemiin tuodun lämmön täytyy kattaa myös tähän työhön kuluva energia. Ideaalikaasun tapauksessa ero moolia kohden lasketuissa lämpökapasiteeteissa on täsmälleen kaasuvakion suuruinen.



9.19 Mikä on hiukkasten määrää kohden määritetyjen ominaislämpökapasiteettien ero, $c_p^N - c_V^N$?

Vakiotilavuudessa määritetyt lämpökapasiteetit (8.40) sekä ominaislämpökapasiteettien ero (9.33) perusteella ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa on näin ollen

$$c_p^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R + R = \left(1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}}\right) R. \quad (9.34)$$

Nämme samantyyppisen lausekkeen jo aikaisemmin adiabaattivakion (9.6) osoittajassa. Itse asiassa *adiabaattivakio määritellään ominaislämpökapasiteettien suhteena*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{1 + N_{\text{vapaus}}/2}{N_{\text{vapaus}}/2} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}. \quad (9.35)$$

Koska kyseessä on suhde, ei ole väliä lasketaanko se kokonaislämpökapasiteeteille vai ominaislämpökapasiteeteille.

esimerkki 9.3

Lämpökapasiteetti

Typhen ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa tavallisen huoneen lämpötilassa on 29.2 J/(Kmol) . Mikä on tällöin typhen (a) ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa? (b) adiabaattivakio? (c) vapausasteiden määrä? (d) Paljonko lämpöä tarvitaan, kun 1 mooli typpeä lämmitetään vakiopaineessa 1 K? (e) Mikä on tällöin kaasun sisäenergian muutos?

TILANNE Tunnetaan ominaislämpökapasiteetti $c_p^n = 29.2 \text{ J/(Kmol)}$ ja lämpötilan muutos $\Delta T = 1 \text{ K}$. Kysytään suureita c_V^n , γ , N_{vapaus} , Q sekä $\Delta E_{\text{sisä}}$. Kaasuvakio $R = 8.314 \text{ J/(Kmol)}$, Boltzmannin vakio $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ja Avogadron vakio $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

SUUNNITELMA Oletetaan typhen käyttäytymän ideaalikaasun tavoin. Tämä on järkevä oletus, koska typpi ei ole normaaliloissa lähelläkään nesteytymistä.

Lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on pienempi kuin vakiopaineessa, ja eron suuruus on ideaalikaasulla sama kuin kaasuvakio. Tämän perusteella voidaan laskea adiabaattivakio lämpökapasiteettien suhteena ja edelleen tämän perusteella vapausasteiden lukumäärä yhtälöstä $\gamma = 1 + 2/N_{\text{vapaus}}$.

Lämmitykseen tarvittava lämpömäärä saadaan laskettua suoraan lämpökapasiteetin c_p^n avulla. Lämpömäärä on suurempi kuin kaasun sisäenergian muutos, koska kaasu tekee tällöin työtä. Kuitenkin vakiotilavuudessa kaasun lämmitykseen käytettävä energia siirtyy kaikki kaasun sisäenergiaksi, joten kaasun sisäenergian muutos voidaan laskea lämpökapasiteetin c_V^n avulla.

RATKAISU (a) Lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa on $c_V^n = c_p^n - R = 29.2 \text{ J/(Kmol)} - 8.3 \text{ J/(Kmol)} = 20.9 \text{ J/(Kmol)}$.

(b) Adiabaattivakio on $\gamma = c_p^n/c_V^n = 29.2/20.9 = 1.40$.

(c) Vapausasteiden lukumäärä on $N_{\text{vapaus}} = \frac{2}{\gamma-1} = 2/0.40 = 5.0$.

(d) Lämpöä tarvitaan $Q_{\text{sisäänp}} = nc_p^n \Delta T = 1 \text{ mol} \cdot 29.2 \text{ J/(Kmol)} \cdot 1 \text{ K} = 29.2 \text{ J}$.

(e) Sisäenergian muutos on sama kuin vastaavassa vakiotilavuudessa tapahtuvassa prosessissa, joten

$$\Delta E_{\text{sisä}} = Q_{\text{sisäänp},V} = nc_V^n \Delta T = 1 \text{ mol} \cdot 20.9 \text{ J/(Kmol)} \cdot 1 \text{ K} = 20.9 \text{ J}. \quad (9.36)$$

ARVIOINTI Typpi on kaksiatominen kaasu, ja tällaisen kaasun vapausasteiden lukumäärä normaaliosuhteissa on tavallisesti 5, koska molekyyllillä on kolme suoran liikkeen vapausastetta ja kaksi pyörivän liikkeen vapausastetta. (Väärähtelyn vapausasteet eivät tässä lämpötilassa vastaanota energiaa.) Tämä tulos saatuiin myös tässä laskussa. Laskettu lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa voidaan myös tarkistaa taulukoista.



9.20 Selitä omin sanoin, miten voit määrittää kaasuprosessin tekemän työn laskemalla tai kuvaajasta lukiolla. Miten voit päätellä, tekeekö kaasu työtä vai tehdääkö kaasuun työtä? Entä miten voit laskea, paljonko lämpöä prosessissa siirrytä?

esimerkki 9.4

Adiabaattilaki

Johda ideaalikaasun kvasistaattisen adiabaattisen prosessin adiabaattilaki ehdosta $Q_{\text{kokonais}} = 0$ käyttämättä hyväksi entropian lauseketta.

TILANNE Adiabaattilaki on kvasistaattisen adiabaattisen prosessin tilanmuuttuja yhdistävä laki. Historiallisesti adiabaatisuutta on tutkittu jo ennen entropian käsitteen keksimistä, joten on hyödyllistä tutkia kuinka adiabaattilaki voidaan päätellä energian säilymislaista ja ideaalikaasun tilanyhtälöstä ilman entropian käsittettä.

SUUNNITELMA Adiabaattisessa prosessissa ei siirry lämpöä, joten kaasun sisäenergia muuttuu täsmälleen yhtä paljon kuin kaasuun tehdään työtä. Toisaalta kaasun sisäenergia on suoraan verrannollinen lämpötilaan, ja niinpä lämpötilakin muuttuu. Haluamme siis ilmaista kaasun lämpötilan ja tilavuuden muutosten välisen yhteyden, mikä onnistuu ideaalikaasun tilanyhtälön avulla. Koska suureet muuttuvat prosessin aikana, prosessi pitää jakaa lyhyisiin osiin, jolloin voimme laskea suureiden suhteellisen muutoksen kunkin osan aikana. Suureiden arvot missä tahansa prosessin vaiheessa saadaan tämän jälkeen laskemalla pienet muutokset yhteen eli integroimalla.

$$dE_{\text{sisä}} = nc_V^n dT. \quad (9.37)$$

Toisaalta tämän täytyy adiabaattisessa prosessissa olla energian säilymisen takia olla yhtä suuri kuin kaasuun tehty työ,

$$dE_{\text{sisä}} = dW_{\text{kokonais}} = -pdV. \quad (9.38)$$

Ideaalikaasun tilanyhtälön avulla voimme ilmaista paineen lämpötilan ja tilavuuden avulla. Koska yhtälöissämme esiintyy lämpötilan ja tilavuuden differentiaalit, on helpointa ratkaista ensin nimenomaan näiden välinen riippuvuus.

RATKAISU Sisäenergian muutos on siis lämpötilan ja tilavuuden avulla kirjoitettuna

$$nc_V^n dT = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV. \quad (9.39)$$

Tämän voi separoida, mikä tarkoittaa kaikkien lämpötilaan ja tilavuutta sisältävien tekijöiden siirotaa yhtälön vastakkaisille puolille. Nämä saadaan

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V^n} \frac{dV}{V}. \quad (9.40)$$

Tässä esintyvä vakio voidaan kirjoittaa adiabaattivakion avulla. Nimittäin $R = c_p^n - c_V^n$ ja $\gamma = c_p^n/c_V^n$, joten

$$\frac{R}{c_V^n} = \frac{c_p^n - c_V^n}{c_V^n} = \frac{c_p^n}{c_V^n} - 1 = \gamma - 1. \quad (9.41)$$

Nämä ollen meillä on ratkaistavana differentiaalihälö

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}. \quad (9.42)$$

Yhtälö tarkoittaa sitä, että kaasun tilavuuden kasvaessa määärän dV lämpötila laskee määärän dT . (Koska vakio $-(\gamma - 1)$ on aina negatiivinen, suuret muuttuvat eri suuntiin.) Ja mitä suurempi adiabaattivakio on, sitä suurempi on lämpötilan suhteellinen muutos verrattuna tilavuuden suhteelliseen muutokseen.

Suureiden arvot prosessin aikana saadaan ratkaistua laskemalla suureiden muutokset niiden alkuarvoista, ja tämä onnistuu laskemalla kaikki infinitesimaalisen pienet muutokset yhteen eli integroimalla. Tällöin kumpikin puoli yhtälöstä integroidaan nimenomaan sen muuttujan suhteen, jonka differentiaali siihun esitetyy (differentiaali ilmaisee minkä muuttujan muutoksia lasketaan yhteen). Nämä saadaan integrointisäännöön $\int dx/x = \ln x$ sekä logaritmien laskusääntöjen $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ ja $a \ln b = \ln b^a$ avulla

$$\int_{T_{\text{alku}}}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_{\text{alku}}}^V \frac{dV}{V} \quad (9.43)$$

$$\ln T - \ln T_{\text{alku}} = -(\gamma - 1)(\ln V - \ln V_{\text{alku}}) \quad (9.44)$$

$$\ln \frac{T}{T_{\text{alku}}} + (\gamma - 1) \ln \frac{V}{V_{\text{alku}}} = 0 \quad (9.45)$$

$$\ln \frac{TV^{\gamma-1}}{T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}} = 0. \quad (9.46)$$

Edelleen ottamalla tästä puolittain eksponenttifunktio saadaan tulos

$$\frac{TV^{\gamma-1}}{T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}} = e^0 = 1 \quad (9.47)$$

eli

$$TV^{\gamma-1} = T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1}. \quad (9.48)$$

Tämä on vaihtoehtoinen muoto adiabaattilaille. Jos tulos halutaan kirjoittaa mieluummin paineen ja tilavuuden avulla yhtälön (9.9) muotoon $pV^\gamma = \text{vakio}$, muunnos onnistuu ideaalikaasun tilanyhtälön kautta. Nimittäin $p = Nk_B T/V$, joten

$$pV^\gamma = Nk_B TV^{\gamma-1} = Nk_B T_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^{\gamma-1} = p_{\text{alku}}V_{\text{alku}}^\gamma. \quad (9.49)$$

Entropia ideaalikaasuprosesseissa

Päättelimme jo aikaisemmin, että kvasistaatisessa adiabaattisessa prosessissa entropia ei muutu, mistä seuraava suoraan, että muunlaisissa kvasistaatisissa prosesseissa entropian täytyy muuttua. Entropia on energian ohella termodynamiikan tärkein suure, joten seuraavaksi on aika määrittää tarkemmin miten entropia muuttuu erilaisissa prosesseissa. Tarkastelemme jälleen ensimmäiseksi ideaalikaasuprosesseja.

Kuvassa 9.7 (b) esitettiin ideaalikaasun isentrooppeja eri pV -diagrammin käyriä, joilla kaasun entropia on vakio. Jos kaasu käy läpi isentrooppisen prosessin, prosessin kuvaaja seuraa aina alkupisteen kautta kulkevaa isentrooppikäyrää. Vastaavasti jos kaasun tila muuttuu prosessissa niin, että tilaa kuvaava piste siirtyy pois isentroopilta, entropia muuttuu. Entropia kasvaa pisteen siirtyessä pois päin origosta ja pienenee pisteen siirtyessä kohti origoa. Tällä perusteella kaasun isobaarisessa ja isotermissä laajenemisessa entropia kasvaa. Entropia kasvaa myös paineen kasvaessa isokoririsessa prosessissa. Yleisesti ideaalikaasun entropian muutos missä tahansa prosessissa on yhtälön (8.80) perusteella

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}} = Nk_B \left(\ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}} + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} \right). \quad (9.50)$$

Tilavuuden ollessa vakio entropian tilavuudesta riippuva osuus on vakio ja niinpä entropian muutos on yksinkertaisesti

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu}, V} = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} Nk_B \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = nc_V^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}, \quad (9.51)$$

missä on huomioitu ominaislämpökapasiteetin lauseke $c_V^n = \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R$ sekä yhteys $Nk_B = nR$. Vastaavasti paineen ollessa vakio tilavuus on ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella suoraan verrannollinen lämpötilaan ja niinpä $V_{\text{loppu}}/V_{\text{alku}} = T_{\text{loppu}}/T_{\text{alku}}$. Tämän perusteella entropian muutos vakiopaineessa on

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu},p} = Nk_B \left(1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} \right) \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = nc_p^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (9.52)$$

Lämpötilan ollessa vakio entropian lämpötilasta riippuva osuus ei muutu, joten entropia riippuu ainoastaan tilavuudesta,

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu},T} = Nk_B \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}. \quad (9.53)$$

Kuitenkin esimerkin 9.2 ja yhtälön (9.25) mukaan isotermissessä prosessissa kaasu vastaanottaa lämmön

$$Q_{\text{kokonais}} = Nk_B T \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}, \quad (9.54)$$

joten entropian muutos vakiolämpötilassa voidaan ilmaista myös yksinkertaisesti muodossa

$$\Delta S_{\text{ideaalikaasu},T} = \frac{Q_{\text{kokonais}}}{T} \quad (9.55)$$

eli *entropian muutos on verrannollinen systeemin vastaanottaman lämmön määrään ja käänten verrannollinen systeemin lämpötilaan*.

Tämän tuloksen fysikaalinen merkitys on karkeasti seuraava: Lämpönlähtö tuottaa energiaa lisää systeemiin epäjärjestynytä energiaksi ja siten sen epäjärjestystä. Koska entropia puolestaan mittaa tätä epäjärjestyneisyyttä, entropian täytyy kasvaa systeemin vastaanottajaessa lämpöä. Entropian muutos on käänten verrannollinen lämpötilaan siksi, että jos lämpötila on matala, systeemi on aluksi melko hyvin järjestyneessä tilassa ja pieniakin lämpömääriä rüttää lisäämään systeemin epäjärjestystä huomattavasti. Sen sijaan jos lämpötila on korkea, systeemi on jo valmiiksi epäjärjestyneessä tilassa eikä pieni lämpömääriä muuta tilannetta kovin paljon.

Ideaalikaasun kvasistaattisten perusprosessien ominaisuuksia on koottu taulukkoon 9.1. Taulukossa on listattu kaasun sisäenergian ja entropian muutokset, kaasuun lämpönlähtö ja työnä tuottu energia sekä kaasun paine tilavuuden tai lämpötilan funktiona. Ideaalikaasun tilanyhtälö esiintyy isokorisen ja isoterminen prosessin kohdalla, mutta tilanyhtälö pääsee myös isobaarisessa ja isentrooppisessa prosessissa vaikkei sitä olekaan erikseen listattu. Termodynamiikan pääsäännöt pätevät luonnollisesti *kaikissa* prosesseissa.

Taulukko 9.1: Ideaalikaasun perusprosessien ominaisuuksia.

prosessti	vakio	$p(V, T)$	$\Delta E_{\text{sisä}}$	Q_{kokonais}	W_{kokonais}	ΔS
isokorinen	V	$p = \frac{Nk_B}{V_{\text{alku}}} T$	$Nc_V^N \Delta T$	$\Delta E_{\text{sisä}}$	0	$Nc_V^N \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}$
isobaarinen	p	$p = p_{\text{alku}}$	$Nc_V^N \Delta T$	$Nc_p^N \Delta T$	$-Nk_B \Delta T$	$Nc_p^N \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}$
isoterminen	T	$p = Nk_B T_{\text{alku}} \frac{1}{V}$	0	$Nk_B T \ln \frac{V_{\text{loppu}}}{V_{\text{alku}}}$	$-Q_{\text{kokonais}}$	$\frac{Q_{\text{kokonais}}}{T}$
isentrooppinen	S	$p = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^{\gamma} \frac{1}{V^{\gamma}}$	$Nc_V^N \Delta T$	0	$\Delta E_{\text{sisä}}$	0



9.21 Tarkastele taulukkoa 9.1. (a) Miten ominaislämpökapasiteetit hiukkasta kohden c^N voi muuntaa ominaislämpökapasiteeteiksi ainemäärää kohden c^n ? (b) Miksi c_V^N esiintyy myös isobaarisen ja isentrooppisen prosessin riveillä? (c) Onko työ positiivinen vai negatiivinen, kun lämpötila kasvaa (i) isobaarisessa ja (ii) isentrooppisessa prosessissa? Miksi?

Nesteiden ja kiinteiden aineiden entropia

Yhtälöä (9.50) voi käyttää ainoastaan kaasuille, joten sen avulla emme voi laskea nesteiden tai kiinteiden aineiden entropiaa. Näilläkin olomuodoilla entropian, lämpötilan ja lämmön välillä on kuitenkin yhtälöä (9.55) muistuttava yhteys. Lämpötila nimittäin *määriteltiin* yhtälössä (8.90) käytämällä entropian derivaattaa systeemin sisäenergian suhteen tilavuuden ja ainemäärän ollessa vakiot. Nesteillä ja kiinteillä aineilla tilavuuden muutokset ovat yleensä pieniä, joten niihalle siis pätee tämän perusteella

$$\frac{dS}{dE_{\text{sisä}}} = \frac{1}{T}. \quad (9.56)$$

Lisäksi jos aineiden tilavuus tai muoto ei muutu, niihin ei voi myöskään tuoda energiaa työn avulla ja tällöin niiden sisäenergiaa voi muuttaa ainoastaan siirtämällä energiota niihin tai niistä lämpöön,

$$dE_{\text{sisä}} = dQ_{\text{kokonais}}. \quad (9.57)$$

Siispä nesteiden ja kiinteiden aineiden vastaanottaaessa pienien lämpömääriäniiden entropian muutos on

$$dS = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.58)$$

Vaikka tässä yhtälö perusteltiin vain vakiotilavuudessa tapahtuville prosesseille, se pätee itse asiassa yleisesti *kvasistaattisissa prosesseissa*. Erityisesti yhtälö pätee myös ideaalikaasulle.

Systeemin entropian kokonaismuutos voidaan laskea integroimalla yhtälöä (9.58). Isoterminen prosessi on yksinkertaisin tapaus, sillä lämpötilan ollessa vakio voidaan laskea

$$\Delta S_T = \int dS = \int \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = \frac{1}{T} \int dQ_{\text{kokonais}} = \frac{Q_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.59)$$

Tämä on sama tulos kuin mitä ideaalikaasun entropian lausekkeen avulla johdettiin. Jos systeemin tilavuus on vakio, yhtälön (9.58) voi ilmaista lämpökapasiteetin avulla muodossa

$$dS = nc_V^n \frac{dT}{T}, \quad (9.60)$$

ja entropian kokonaismuutokseksi saadaan

$$\Delta S_V = nc_V^n \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} \frac{dT}{T} = nc_V^n \left|_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} \right. \ln T = nc_V^n \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}}. \quad (9.61)$$

Tämäkin on sama tulos kuin mitä ideaalikaasun isokooriselle prosessille johdettiin, ja myös isobaarisen prosessin entropian muutos (9.52) voidaan johtaa samalla tavalla.

Entropia voidaan laskea samalla periaatteella myös aineen olomuodon muutoksissa. Esimerkiksi kiinteän aineen sulattaminen vaatii energiota, jonka aine yleensä vastaanottaa pelkästään lämpöön. Sulamisen aikana systeemi koostuu kiinteän ja nestemäisen aineen sekoituksesta, ja prosessin edetessä kiinteän aineen osuus vähenee ja nesteen määrä lisääntyy. Jos prosessi on nopea, nesteen lämpötila voi olla sulamispistettä korkeampi ja kiinteän aineen lämpötila tätä matalampi, mutta jos prosessi on kvasistaattinen, systeemin täytyy olla koko ajan likimain tasapainossa ja siten kauttaaltaan samassa lämpötilassa. Tämän lämpötilan täytyy olla sulamislämpötila, koska kiinteä ja nestemäinen olomuoto voivat olla tasapainossa vain sulamislämpötilassa, ja niinpä *kvasistaattisen olomuodon muutoksen täytyy tapahtua vakiolämpötilassa*. Tällöin entropian muutos sulamisen aikana saadaan laskettua yhtälöllä (9.59), missä systeemin vastaanottama lämpö on olomuodon muutokseen tarvittava latenttilämpö, $Q_{\text{sisään}} = Lm$.



9.22 Pakastimeen asetetaan 0.010 kg vettä lämpötilassa 18.0 °C. Vedestä tulee jääkuutio, joka saa lämpötilan -18.0 °C. Mikä on entropian muutos (a) veden jäähtyessä, (b) veden jäätyessä, (c) jään jäähtyessä, (d) yhteesä?

esimerkki 9.5

Sulamisen entropia

Otat pakastimesta jääkuution (massa 10 g, lämpötila -18°C). (a) Mikä on jään entropian muutos, kun siitä tulee vettä (loppulämpötila 0°C)? (b) Mikä on ympäristön entropian muutos, jos ympäristön lämpötila on vakio 20°C ? (c) Mikä on entropian kokonaismuutos?

TILANNE Jääen ominaislämpökapasiteetti on noin $c_V^m = 2.1 \text{ J/gK}$ ja veden sulamisen latenttilämpö on $L = 334 \text{ J/g}$. Jääen alkulämpötila on noin $T_{\text{alku}} = 255 \text{ K}$ ja loppulämpötila $T_{\text{loppu}} = 273 \text{ K}$. Ympäristön lämpötila on $T_{\text{ympäristö}} = 293 \text{ K}$.

SUUNNITELMA Jääpalaa vastaanottaa energiaa lämpönä, joten prosessissa dQ_{kokonais} on jääpalalle koko ajan positiivinen ja palan entropia kasvaa. Ympäristö puolestaan luovuttaa energiota lämpönä, joten ympäristön entropia pienenee. Molemmille entropian muutos on

$$S = \int \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}. \quad (9.62)$$

RATKAISU (a) Palan lämpenemisessä entropian muutos on

$$\Delta S_{255 \rightarrow 273 \text{ K}} = \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{loppu}}} mc_V^m \frac{dT}{T} = mc_V^m \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{alku}}} = 1.4 \text{ J/K}. \quad (9.63)$$

Tässä on pakko integroida, koska lämpötila ei ole prosessissa vakio. Sulamisen aikana lämpötila sen sijaan on vakio, joten entropian muutos on yksinkertaisesti

$$\Delta S_{\text{sulaminen}} = \frac{Q_{\text{sulaminen}}}{T_{\text{loppu}}} = \frac{Lm}{T_{\text{loppu}}} = 12.2 \text{ J/K}. \quad (9.64)$$

Kaikkiaan jääpalan entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{jää}} = \Delta S_{255 \rightarrow 273 \text{ K}} + \Delta S_{\text{sulaminen}} = 13.6 \text{ J/K}. \quad (9.65)$$

(b) Ympäristön lämpötila on vakio, joten sen entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{ympäristö}} = -\frac{Q_{\text{kokonais}}}{T_{\text{ympäristö}}} = -\frac{mc_V^m(T_{\text{loppu}} - T_{\text{alku}}) + Lm}{T_{\text{ympäristö}}} = -12.7 \text{ J/K}. \quad (9.66)$$

(c) Entropian kokonaismuutos on

$$\Delta S_{\text{kokonais}} = \Delta S_{\text{jää}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} = 0.9 \text{ J/K}. \quad (9.67)$$

ARVIOINTI Prosessi on kokonaisuudessaan irseversiabeli, sillä lämpimään huoneeseen jätetty jääpalaa muuttuu itsestään vesilammikoksi, mutta vesilammikko ei muudu itsestään jääpalaksi. Tämä näkyy myös siinä, että palan ja sitä ympäröivän huoneen kokonaisentropia kasvaa. Huonehan voisi olla eristetty systeemi, joten sen sisällä tapahtuvassa irreversiibelissä prosessissa entropian täytyy kasvaa.

Edellisissä tapauksissa prosessien oletettiin aina olevan kvasistaattisia, sillä yhtälö (9.58) pätee kvasistaattisissa prosesseissa. Esimerkiksi kuvassa 9.4 tarkastelimme kaasun laajenemista ei-kvasistaattisesti tyhjään tilaan. Tällöin kaasu ei vastaanota lainkaan lämpöä, joten koko prosessin ajan $dQ = 0$. Entropian muutos olisi tällöin yhtälön (9.58) mukaan myös nolla, mutta tämä on väärin, sillä tässä prosessissa kaasun entropia kasvaa.

Tämä on irreversiibleiden prosessien ominaisuus. Jos prosessi on kvasistaattinen ja reversiabeli, systeemin entropian muutos riippuu systeemin vastaanottamasta lämmöstä yhtälön (9.58) mukaisesti. Sen sijaan jos prosessi ei tapahdu kvasistaattisesti eli systeemi ei ole tasapainossa, prosessiin liittyy aina irreversiibleitä komponentteja, joissa entropia lisääntyy. Kaasun vapaan laajenemisen tapauksessa irreversiibelisyytä johtuu siitä, että kaasu voi levitä itsestään tyhjään tilaan, mutta se ei koskaan itsestään palaa takaisin pieneen tilavuuteen. Laajenemisessa kaasun entropia kasvaa eikä käänneinen prosessi, jossa entropia pienenisi itsestään, ole mahdollinen.

Entropian muutosta ei siis voi laskea irreversiibleille prosesseille suoraan kaavaa (9.58) integroimalla, koska tämä sisältää vain lämmön siirtoon liittyvän entropian muutoksen. Entropia on kuitenkin vain systeemin tilasta riippuva tilanmuuttuja, joten ideaalikaasun tapauksessa voimme *aina* laskea kaasun entropian prosessin alussa ja lopussa käyttäen yhtälöä (8.80).

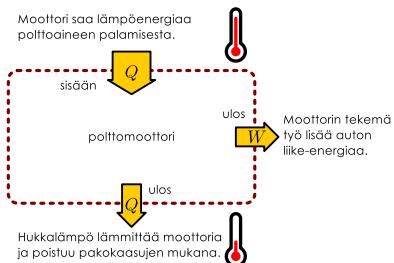


9.23 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä entropian muutoksista erilaisissa prosesseissa. Selitä erityisesti, miten voit laskea entropian muutoksen kaasussa ja miten lasket sen muissa olomuodoissa.

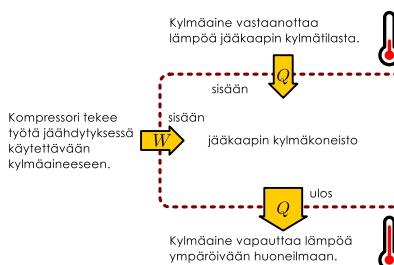
9.4 Energian hyödynnettävyys

Kokonaisentropia

Kuva 9.11: Moottorin energiakaavio.



Kuva 9.12: Jääkaapin energiakaavio.



Termodynamiikan toisen pääsäännön mukaan eristetyn systeemin entropia ei voi pienentyä vaan sen täytyy kaikissa prosesseissa joko pysyä vakiona tai kasvaa. Entropia voi kuitenkin pienentyä systeemeissä, jotka eivät ole eristettyjä, koska entropia pienentyy systeemin luovuttaessa lämpöä. Esimerkiksi ideaalikaasun entropia pienenee, jos kaasu jäähtyy. Toinen pääsääntö ei siis päde suljetuille tai avoimille systeemeille. Kuitenkin jos koko maailmankaikkeus on eristetty systeemi, joka ei vaihda lämpöä minkään ulkopuolisen ympäristön kanssa, toinen pääsääntö pätee koko maailmankaikkeudelle. Siispä maailman kaikkeuden kokonaisentropia ei voi vähentyä ja kaikissa irreversiibleissä prosesseissa maailmankaikkeuden kokonaisentropia kasvaa.

Tarkastelimmepä millaista systeemiä tahansa systeemi ja sen ympäristö yhdessä kattavat periaatteessa koko maailmankaikkeuden. Niinpä vaikka systeemin entropia voi pienentyä systeemin luovuttaessa lämpöä, *systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia voi vain kasvaa*. Toisin sanoen jos prosessi pienentää systeemin entropiaa määrä $\Delta S_{\text{systeemi}} < 0$, systeemin ympäristön entropian täytyy välttämättä kasvaa samassa prosessissa vähintään määrä $\Delta S_{\text{ympäristö}} = -\Delta S_{\text{systeemi}} > 0$. Jos prosessi on reversiibeli, nämä muutokset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret ja kokonaisentropia on vakio

$$\Delta S_{\text{kokonais, reversiibeli}} = \Delta S_{\text{systeemi}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} = 0. \quad (9.68)$$

Jos prosessi on irreversiibeli, kokonaisentropian muutos on positiivinen

$$\Delta S_{\text{kokonais, irreversiibeli}} = \Delta S_{\text{systeemi}} + \Delta S_{\text{ympäristö}} > 0. \quad (9.69)$$

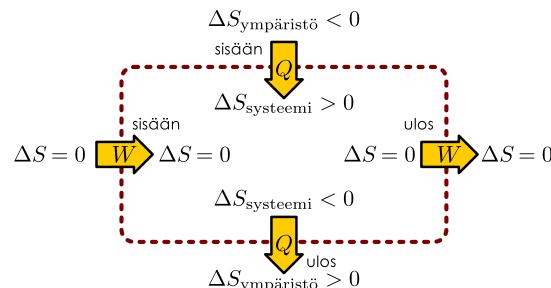
Systeemin vuorovaikutuksia ympäristönsä kanssa ja tämän vaikutusta energiaan voidaan esittää *energiasiirtodiaagrammi*. Systeemi voi vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa joko työn tai lämmön kautta, ja prosessista riippuen energiota voi siirtyä systeemiin tai systeemistä pois. Näitä eri mahdollisuksia edustaa kaaviossa energiavirtoja kuvavat nuolet. Kuvassa 9.11 on esitetty laite, joka vastaanottaa lämpöenergiaa ja muuntaa osan siitä työksi. Tämä voisi olla esimerkiksi polttomoottori, joka muuntaa osan palavan polttoaineen tuottamasta lämmöstä auton liike-energiaksi ja vapauttaa osan hukkalämpönä. Kuvassa 9.12 on puolestaan laite, johon tehdään työtä ja joka siirtää tämän avulla lämpöä kylmästä kuumaan. Tämä voisi olla esimerkiksi jääkaappi, johon kompressorit tekevät työtä ja joka tämän avulla jäähdittää kylmäsäiliötä.



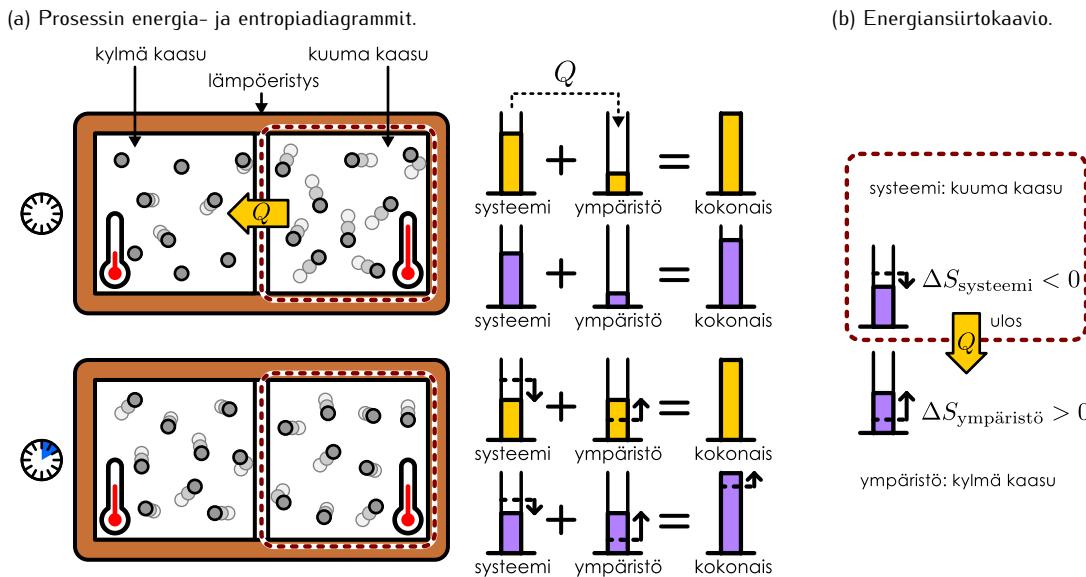
9.24 Millainen energiansiirtodiagrammi vastaa kuvan 9.10 prosesseja, joissa ominaislämpökapasiteetti mitataan vakiopaineessa ja -tilavuudessa.

Kuvan 9.13 kaavioon on merkitty systeemin kaikki mahdolliset tavat vaihtaa energiota ympäristönsä kanssa sekä näihin liittyvät entropian muutokset. Opimme jo aikaisemmin, että systeemiin tehty työ ei muuta sen entropiaa, joten työtä kuvaviin nuoliin ei liity lainkaan entropian muutosta. Sen sijaan lämmön siirtymässä systeemin ja ympäristön välillä molempien entropia muuttuu. Erityisesti lämmönsiirrossa *lämpöä luovuttavan puolen entropia pienenee ja lämpöä vastaanottavan puolen entropia kasvaa*. Huomaa myös, että kaavioon ei ole merkitty systeemin sisäisten prosessien aiheuttamia entropian muutoksia vaan ainoastaan systeemin ja sen ympäristön välisen energianvaihdon vaietus entropiaan. Systeemin entropia nimittäin kasvaa myös, jos sen sisällä tapahtuu irreversiibleitä prosesseja. Sisäiset prosessit eivät kuitenkaan toisen pääsäännön perusteella voi koskaan pienentää systeemin entropiaa.

Kuva 9.13: Entropian muutokset energian siirtymessä.



Kuva 9.14: Systeemin ja sen ympäristön entropian muutos. Systeeminä on tässä kuuma kaasu ja ympäristöä kylmä kaasu. Systeemin entropia pienenee, mutta ympäristön entropia kasvaa vielä enemmän ja kokonaisentropia lisääntyy.



9.25 Tarkastele kuvien 9.5, 9.4 sekä 9.8 prosesseja. Miten systeemin, sen ympäristön sekä näiden yhteen laskettu entropia muuttuu kussakin prosessissa (kasvaa, pienenee, on vakio)? Muuttuuko systeemin entropia lämmönvaihdon tai sisäisten prosessien kautta?

Kuvassa 9.14 on yksinkertainen esimerkki lämmönsiirtoprosessista. Tässä tarkasteltava systeemi on säiliö täynnä kuumaa kaasua ja systeemin ympäristöön on toinen kylmää kaasua sisältävä säiliö. Prosessissa lämpöä siirtyy kylmän ja kuuman kaasusäiliön välillä, jolloin kuuma kaasu luovuttaa lämmön dQ kylmälle kaasulle. Koska prosessi tapahtuu vakiotilavuudessa, entropian muutos noudattaa yhtälöä (9.58), jonka mukaan kummankin kaasun entropian muutos on suoraan verrannollinen kaasun lämpönä vastaanottamaan energiamäärään ja käantäen verrannollinen kaasun lämpötilaan. Kylmä kaasu vastaanottaa lämmön $dQ_{\text{kokonais}} = dQ$ lämpötilassa $T_{\text{kylmä}}$, joten sen entropian muutos on positiivinen eli entropia kasvaa,

$$dS_{\text{kylmä}} = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = \frac{dQ}{T_{\text{kylmä}}} > 0. \quad (9.70)$$

Kuuma kaasu sen sijaan luovuttaa lämpöä, joten sen vastaanottama lämpömäärä on negatiivinen, $dQ_{\text{kokonais}} = -dQ$, ja niinpä myös entropian muutos on negatiivinen eli entropia pienenee,

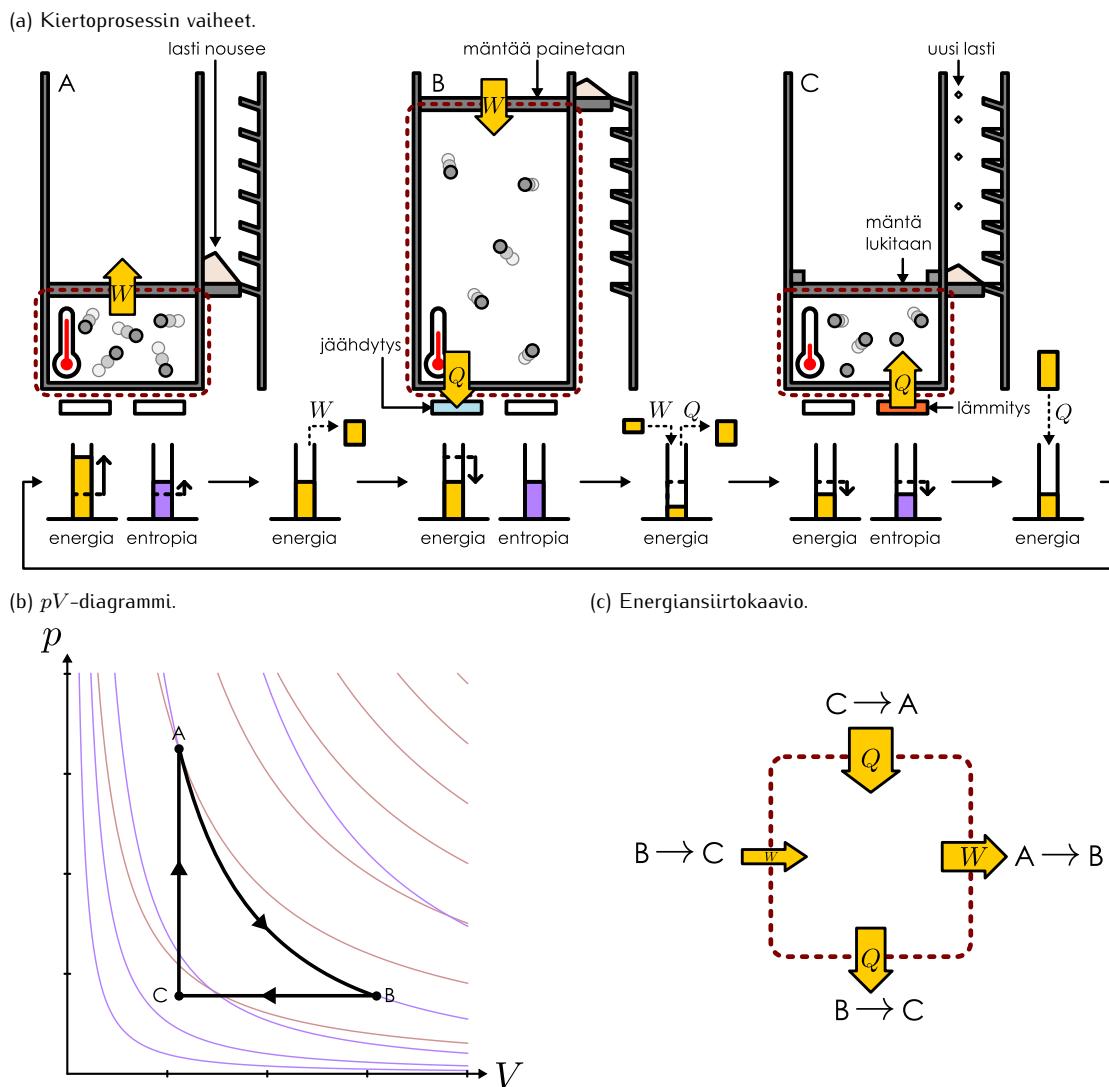
$$dS_{\text{kuuma}} = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T} = -\frac{dQ}{T_{\text{kuuma}}} < 0. \quad (9.71)$$

Prosessi jatkuu kunnes kaasut saavuttavat saman lämpötilan ja systeemi on tasapainossa ympäristönsä kanssa. Kaasujen lämpötilat muuttuvat prosessin aikana, mutta koko prosessin ajan kuuma kaasu jäähtyy ja kylmä kaasu lämpenee, jolloin kuuman kaasun entropia pienenee ja kylmän kasvaa. Koska lämpötilat eivät ole vakiot, entropian kokonaismuutos prosessin aikana pitää laskea integroimalla lausekkeita (9.70) ja (9.71) tai käyttämällä yhtälöä (9.51). Kuitenkin koska kuuman säiliön lämpötila on koko prosessin ajan korkeampi kuin kylmän säiliön, $T_{\text{kylmä}} < T_{\text{kuuma}}$, kylmän kaasun entropian täytyy koko prosessin ajan muuttua nopeammin kuin kuuman kaasun. Näin ollen systeemin entropia pienenee prosessissa vähemmän kuin ympäristön entropia kasvaa ja systeemin sekä sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia kasvaa,

$$dS_{\text{kokonais}} = dS_{\text{kylmä}} + dS_{\text{kuuma}} = dQ \left(\frac{1}{T_{\text{kylmä}}} - \frac{1}{T_{\text{kuuma}}} \right) > 0. \quad (9.72)$$

9.26 Onko kuvan 9.14 prosessi reversiibeli vai irreversiibeli? Oletetaan, että kylmää ja kuumaa kaasua on kumpaakin 1 mooli, kaasuilla on 5 vapausastetta, ja kaasujen alkulämpötilat ovat 300 K sekä 500 K, jolloin kaasujen lämpötila tasapainossa on 400 K. Laske kummankin kaasun entropian muutos sekä kaasujen kokonaisentropian muutos prosessissa.

Kuva 9.15: Kolmivaiheinen kiertoprosessi. Prosessissa kaasu laajenee isentrooppisesti, supistuu isobaarisesti, ja lämpenee isokoriseksi.

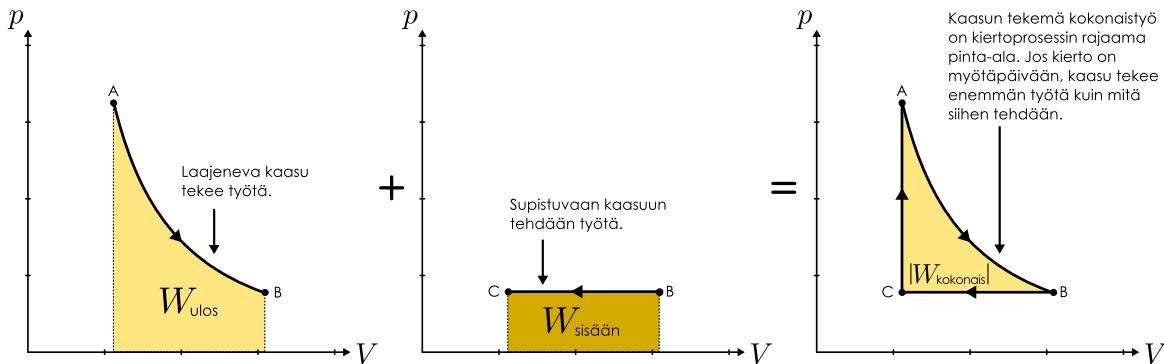


Kiertoprosessit ja lämpövoimakoneet

Eपार्जेस्टीन्यूट्टा लाम्पोएर्जीया वोदा नुमता जेरजेस्टीन्यैक्सि मेकानिक्सि एसिमर्किक्सि अन्तमा कासुन लाजेन्टुा इसेंत्रोप्पिस्टी। तेल्लौन कासुन एपार्जेस्टीन्यूट्टा एर्जी प्रैनेनी कासुन तेहद्दै त्योटा यंपारिस्टोंसे औ यंपारिस्टों जेरजेस्टीन्यूट्टा एर्जी वो कासा। तेल्लासें प्रोसेस्सि वो कुतेक्किन तोतुआ नेलासेनाव वान केर्रान, कोसा प्रोसेस्सि लोपुक्सि कासु वो एरि तिलासे कुन अलुक्सि एक्का वो वान लाजेन्टुा लोप्तुमीन्। जो प्रोसेस्सि हलुतान तोतुआ नेलेस्टान, कासु वो पुरिस्टेवा तकासिन अलुतिलासे।

जो कासुन लाजेन्मेन तपाहतु क्वासिटाट्टिस्टी औ एडिबाट्टिस्टी औ कासु पुरिस्टेवा तकासिन अलुतिलासे निन इकान क्वासिटाट्टिस्टी औ एडिबाट्टिस्टी, कासुन त्यैत्यु तेह्दे पुरिस्टेवा तकासिन यह याल्जन त्योटा कुन मिता वो लाजेन्मेन तेकि। तेल्लौन प्रोसेस्सि वान मुनता लाम्पोएर्जीया औ मेकानिक्सि एर्जीया एदेस्टकासिन तोसिक्से। कासु वोदा तुक्केक्किन पुरिस्टा तकासिन कोकोन एरि तवाला कुन मिते वो लाजेन। कुवास्सा 9.15 वो एसिमर्कि मोनिवाहेस्टा प्रोसेस्सिया, जो कासु एसिन लाजेन्ने इसेंत्रोप्पिस्टी तेह्दे त्योटा यंपारिस्टोंसे (वाये $A \rightarrow B$)। जेन जेल्केन कासु पुरिस्टेवा तकासिन अलुतिलावुतेसा इसोबारिस्टी एली वाकिपानीया (वाये $B \rightarrow C$)। पुरिस्टेवा कासु लाम्पोतिला औ पाने पर्किवा कासुमान, जेल्लौन कासु त्यैत्यु सामला जाहेद्यत्ता, जो कुन पाने वाकिया। तामान जाहेद्यत्तेक्सि तका कासु लाम्पोतिला वो तिलासे C वानेमी कुन अलुतिलासे A , जो कासु वोदा लाम्चित्ता वाकितिलावुतेसा तकासिन सामान लाम्पोतिला कुन अलुक्सि वो अलुक्सि वो लोपुक्सि तकासिन अलुतिलासे A ।

तेल्लास्ता मेकानिक्सि कुत्सुतान **कीर्तोप्रोसेस्सि**, जो कुन प्रोसेस्सि वोदा तोमिस्सा **कीर्तोन** एली **स्यक्लिन**, जो कुन प्रोसेस्सि वोदा तकासिन लाहेतिलासे। प्रोसेस्सि pV -कुवायाक्सि वोदा तेल्लौन सुल्जेवा सिल्मुकान, जो कुन त्यैत्यु वाला लोपुक्सि तकासिन सामान पिस्टेसीन मिते लाहि। कोसा कीर्तोप्रोसेस्सि वोदा लोपुक्सि अलुतिलासे, जो वोदा तोस्टा यह नेलेस्टान, जेन तामान वुक्सि पोल्ट्टोमोट्टोरिट औ क्यल्मलाईट्ट येलेस्टा वोरस्टुवाक्सि जुरी कीर्तोप्रोसेस्सिया।

Kuva 9.16: Kiertoprosessin tekemä työ on prosessin pV -diagrammissa rajaama pinta-ala.

Kuvan 9.15 kiertoprosessissa kaasun paine ja lämpötila ovat laajentumisvaiheessa suuremmat kuin supistumisvaiheessa, joten kaasu tekee laajentuessaan suurenman työn kuin mitä kaasuun tehdään sitä puristettaessa, $W_{\text{sisään}} < W_{\text{ulos}}$. Niinpä kaasun tekemä kokonaistyö yhden kierron aikana on positiivinen eli toisin sanoen kaasuun tehty kokonaistyö on negatiivinen, $W_{\text{kokonais}} = W_{\text{sisään}} - W_{\text{ulos}} < 0$. Kiertoprosessin tekemää työtä kuvaavat pV -diagrammissa prosessien kuvaajan sisään jäävä pinta-ala, kuten kuvassa 9.16 on havainnollistettu. Laajetessaan kaasu tekee työtä, jota kuvaava laajenemisprosessia $A \rightarrow B$ kuvaavan käyrän alle jäävä pinta-ala. Supistumisen aikana kaasuun tehdään työtä, jota kuvaava prosessin $B \rightarrow C$ alle jäävä ala. Kun nämä pinta-alat vähennetään toisistaan, jäljelle jää silmukan $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ sisään jäävä pinta-ala. Tässä tapauksessa kaasu laajenee korkeammassa paineessa kuin supistuu, jolloin kaasu tekee ympäristöönsä enemmän työtä kuin mitä kaasuun tehdään. Diagrammissa tämä näkyy siten, että kiertoa kuvaava silmukka kulkee *myötäpäivään*. Päinvastaisessa prosessissa kuvaaja kierrettäisiin vastapäivään, ja tällöin kaasuun tehtäisiin työtä enemmän kuin mitä kaasu tekee.

Systeemin sisäenergia ja entropia riippuvat ainoastaan sen tilasta, joten vaikka systeemin energia ja entropia voivat kiertoprosessin kuluessa muuttua, ne *palaavat aina takaisin alkuarvoihinsa kierron päätteeksi*, $E_{\text{systeemi, loppu}} = E_{\text{systeemi, alku}}$, $S_{\text{systeemi, loppu}} = S_{\text{systeemi, alku}}$. Niinpä systeemin kokonaisenenergian ja entropian muutos kierron jälkeen on *nolla*, $\Delta E_{\text{systeemi}} = E_{\text{systeemi, loppu}} - E_{\text{systeemi, alku}} = 0 \text{ J}$ ja $\Delta S_{\text{systeemi}} = S_{\text{systeemi, loppu}} - S_{\text{systeemi, alku}} = 0 \text{ J/K}$. Näin täytyy olla riippumatta siitä millainen kiertoprosessi on kyseessä.



9.27 Päteekö $\Delta E_{\text{systeemi}} = 0 \text{ J}$ ja $\Delta S_{\text{systeemi}} = 0 \text{ J/K}$ kiertoprosessille, johon kuuluu ei-kvasistaattisia prosesseja? Entä jos systeemissä vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia?

Tästä seuraa ensinnäkin se, että energian säilymislain perusteella systeemin tekemän kokonaistyön täytyy olla täsmälleen yhtä suuri kuin systeemin vastaanottaman kokonaislämmön,

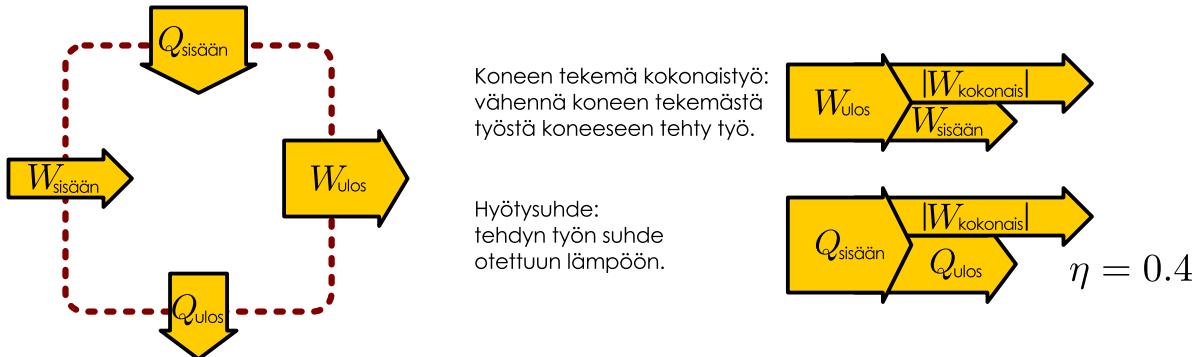
$$|W_{\text{kokonais}}| = -W_{\text{kokonais}} = Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}}. \quad (9.73)$$

Tässä työ on merkityt itseisarvoihin siksi, että määrittelimme symbolin W_{kokonais} tarkoittavan *systeemiin tehtyä* työtä, jolloin *systeemin tekemä* työ on $-W_{\text{kokonais}} = |W_{\text{kokonais}}|$, kun kyseessä on työtä tekevä prosessi. Energiansiirtokaaviossa energian säilyminen näkyy niin, että *kiertoprosessia kuvaavassa kaaviossa systeemiin tulevien ja sieltä poistuvien energiarakenteiden pitää olla yhtä suuret*.

Lämpöä työksi jalostavia prosesseja kutsutaan **lämpövoimakoneiksi**. Koneen sisällä olevaa ainetta kuten kaasua, jonka tilan muutoksiin koneen toiminta perustuu, kutsutaan puolestaan koneen **toimivaksi aineeksi**. Nimestään huolimatta lämpövoimakoneen ei tarvitse olla kone vaan se voi olla millainen tahansa lämpöä työksi muuntava prosessi. Samoin lämpövoimakoneen lämmitys ja jäähdytys voivat olla millaisia tahansa lämpöä siirtäviä prosesseja. Esimerkiksi kuvan 9.15 laite on lämpövoimakone kuten myös polttoaineen lämpö-energian hyödyntämiseen perustuvat laitteet polttomoottoreista voimaloiden turbiineihin. Tällaisissa koneissa lämmitys tapahtuu yleensä niin, että koneen polttoaineessa tapahtuu lämpöä vapauttavia kemiallisia (tai ydinfysiikaalisia) reaktioita, jotka nostavat koneen sisällä olevan aineen lämpötilaa. Jäähdytys puolestaan voi tapahtua esimerkiksi johtamalla kuumat pakokaasut ulos koneesta tai vaikkapa ympäröimällä laite kylmällä vedellä. Lämpövoimakoneet ovat yleisiä myös luonnossa. Esimerkiksi Maapallon ilmasto ja sää ovat valtavia lämpövoimakoneita, jotka jatkuvasti muuntavat Auringosta säteilynä saapuvaa lämpöä ilman ja veden liikkeen mekaaniseksi energiaksi. Sää tapauksessa koneen jäähdytys perustuu siihen, että Maapallo lähetää jatkuvasti lämpöä avaruuteen infrapunasäteilyinä.

Termodynamiikan pääsäännöt asettavat samanlaiset rajoitukset kaikkien lämpövoimakoneiden toiminnalle olipa kyseessä ihmisen rakentama laite tai luonnon prosessi. Koska lämpövoimakoneiden teknologinen

Kuva 9.17: Kokonaistyön ja hyötytuheen määrittäminen energiansiirtodiagrammista.



käyttötarkoitus on muuttaa lämpöä työksi, konetta voi pitää sitä parempana mitä suuremman osuuden vastaanottamastaan lämmöstä se pystyy muuttamaan työksi. Esimerkiksi auton moottori on taloudellinen, jos se pystyy kuljettamaan autoa pitkän matkan polttaen vain vähän bensiiniä. Tätä mittaa **hyötytuhe**, joka on koneen tekemän kokonaistyön $|W_{kokonais}|$ suhde koneen vastaanottamaan lämpöön $Q_{sisään}$ (kuva 9.17)

$$\eta = \frac{|W_{kokonais}|}{Q_{sisään}}. \quad (9.74)$$

Hyötytuhe ei tietenkään ole ainoa koneiden toimivuuden mittari, sillä hyötytuheeltaan hyvä moottori ei välttämättä ole tehokas eli se ei välttämättä pysty tekemään paljon työtä lyhyessä ajassa.

Toiseksi, koska systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia ei voi koskaan vähentyä, *kiertoprosessi voi ainoastaan kasvattaa ympäristön entropiaa tai pitää sen vakiona*. Tämä ehto asettaa *rajoituksia sille, kuinka paljon eri muodoissa energiaa voi siirtyä*, mikä ilmenee energiansiirtodiagrammissa niin, että eri nuoleet eivät voi olla minkä kokoisia tahansa. Esimerkiksi laite, joka pelkästään ottaisi lämpöä ja tekisi työtä on mahdoton, koska laitteen ottaessa lämpöä ympäristön entropia pienenee ja laitteen tehdessä työtä entropia ei muutu. Nämä ollen laite pienentäisi ympäristön entropiaa, mikä ei ole toisen pääsäännön mukaan mahdollista. Lämpöä työksi muuntava kiertoprosessi ei siis voi toimia pelkästään lämmityksen avulla, vaan tällaisen kierron pitää välttämättä myös luovuttaa lämpöä ympäristöönsä. Kiertoprosessi ei siis voi koskaan muuntaa kaikkea lämpöä työksi, vaan lämpöä hyödyntävät laitteet välttämättä hukkaavat osan vastaanottamastaan lämmöstä.

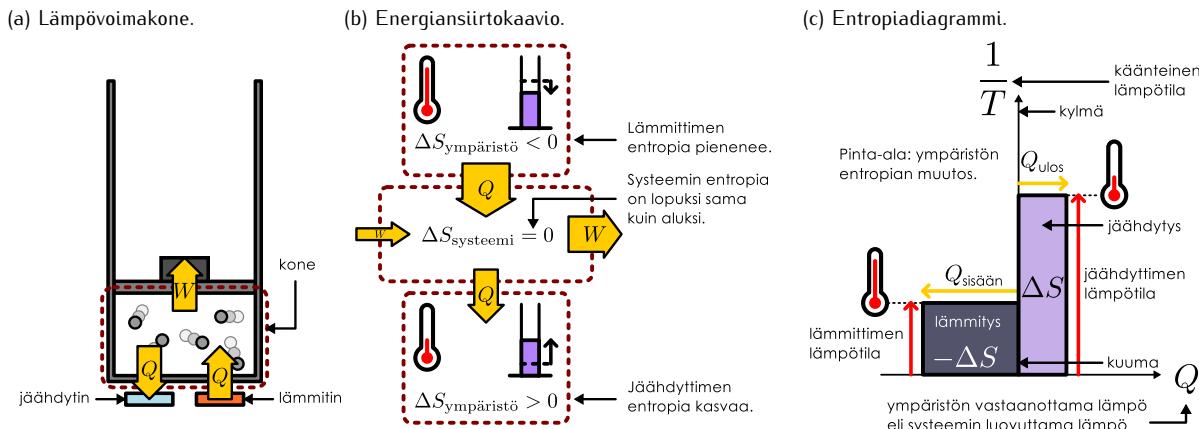
Koska lämpövoimakone ei voi luoda energian, hyötytuhe ei voi olla yli 1. Mutta itse asiassa termodynamikan toinen pääsääntö rajoittaa hyötytuhetta vielä paljon voimakkaammin, jolloin edes ideaalisen koneen hyötytuhe ei yleensä voi olla lähelläkään yhtä. Tämä johtuu siitä, että systeemin ja sen ympäristön yhteinen kokonaisentropia ei voi koskaan vähentyä. Koska kiertoprosessissa koneen entropia palaa kierron lopuksi samaan arvoon kuin alkuksi, *kiertoprosessi voi ainoastaan kasvattaa ympäristön entropiaa tai pitää sen vakiona*. Toisaalta lämpövoimakone muuttaa ympäristönsä entropiaa vain energian siirtymessä lämpöön koneen ja ympäristön välillä. Esimerkiksi laite, joka pelkästään ottaisi lämpöä ja tekisi työtä on mahdoton, koska laitteen ottaessa lämpöä ympäristön entropia *pienenee* ja laitteen tehdessä työtä ympäristön entropia *ei muutu*. Kokonaisuudessaan tällainen laite siis pienentäisi ympäristön entropiaa, mikä ei ole toisen pääsäännön mukaan mahdollista.

Sen sijaan ympäristön entropia kasvaa, kun energian siirryttävät lämpöön koneesta ympäristöön. Niinpä lämpöä vastaanottavan kiertoprosessin on *pakko* myös luovuttaa lämpöä ympäristöön, jotta ympäristön entropia ei vähentyisi. Mutta tämä tarkoittaa sitä, että kone ei voi muuntaa kaikkea lämpöön saamaansa energian työksi, sillä sen on pakko luovuttaa osa takaisin ympäristöön hukkalämpönä. Nämä ollen koneen hyötytuheen täytyy olla selvästi alle 1.

Seuraava kysymys onkin, kuinka hyvä lämpövoimakoneen hyötytuhe voisi teoriassa olla. Tähän vastauksen edellyttää koneen *ympäristön entropian muutosten analysointia*, koska koneen toimintaa rajoittaa nimenomaan termodynamiikan toisen pääsäännön asettama ehto, jonka mukaan *ympäristön entropian täytyy olla sama tai suurempi koneen palatessa alkutilaansa kierron jälkeen*. Kuvassa 9.18 on esitetty lämpövoimakonetta esittävä malli ja energiansiirtokaavio sekä koneen ympäristön entropian muutoksia esittävä **entropiadiagrammi**.

Koneen ympäristöksi voidaan entropiadiagrammissa huomioida vain lämmittimen ja jäähdytin, sillä kone muuttaa ympäristönsä entropiaa ainoastaan lämmön siirtymessä koneen ja ympäristön välillä. Yleisesti lämmittimen ja jäähdytimen lämpötilat voivat prosessin aikana muuttua, mutta tarkastellaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi konetta, jonka lämmittimen on vakiolämpötilassa T_{kuuma} ja jäähdytin vakiolämpötilassa $T_{kylmä}$. Tällainen kone pienentää ympäristönsä entropiaa määränpäätason $\Delta S_{ympäristö} = -Q_{sisään}/T_{kuuma}$ vastaanottaaan lämpöä ja kasvattaa

Kuva 9.18: Kiertoprosessin entropiadiagrammi. Ympäristön entropia kasvaa prosessin luovuttaessa lämpöä ja pienenee prosessin vastaanottessa lämpöä. Entropian muutos on siirtymän lämmön ja ympäristön lämpötilan suhde.



ympäristön entropiaa määräni $\Delta S_{ympäristö} = Q_{ulos}/T_{kylmä}$ luovuttaessaan hukkalämpöä. Entropiadiagrammissa näitä muutoksia voidaan kuvata pürtämällä koordinaatisto, jonka vaaka-akselilla on siirtymä lämpö Q ja pystyakselilla lämpötilan käänneisluku $1/T$. Kumpaakin lämmönsiirtoprosessia kuvaaa tässä koordinaatistossa suorakaide, jonka leveys vastaa lämpönä siirtymän energian määriä ja korkeus lämpötilaa, jossa lämpö siirtyy. Tässä tosin korkeus kuvaaa käänneistä lämpötilaa eli kuviot ovat sitä korkeammat mitä matalampi lämpötila on. *Entropian muutosta kuvaava suorakaiteen pinta-ala*, joista koneen lämmitystä kuvaava pinta-ala vastaa ympäristön entropian pienemistä ja jäähdytystä kuvaava ala esittää ympäristön entropian kasvua. Koska ympäristön entropia voi kiertoprosessissa kokonaisuudessaan vain kasvaa, *jäähdytystä kuvaavan suorakaiteen pinta-alan täytyy olla vähintään yhtä suuri kuin lämmitystä kuvaavan suorakaiteen*.



9.28 Laite, joka siirtäisi kiertoprosessilla lämpöä kylmästä kuumaan ilman että siihen tehtäisiin työtä, on mahdoton. Jääkaappi on kuitenkin aivan toimiva laite. (a) Millaiset ovat näiden laitteiden energiansiirtokaaviot ja entropiadiagrammit? (b) Perustele näiden avulla, miksi lämpö ei voi siirtyä itsestään kylmästä kuumaan.

Tämä ehto asettaa voimakkaita rajoituksia lämpönä siirtymien energiamäärien ja lämpötilojen suuruuksille. Jos kone toimii tiettyjen äärilämpötilojen T_{kuuma} ja $T_{kylmä}$ välillä, sen täytyy jäähdytyksessä luovuttaa vähintään lämpömäärä

$$Q_{ulos, \min} = Q_{sisään} \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}, \quad (9.75)$$

jotta jäähdytystä kuvaavan suorakaiteen pinta-ala olisi entropiadiagrammissa ainakin yhtä suuri kuin lämmitystä kuvaavan suorakaiteen. Prosessin tekemä työ on täsmälleen sen vastaanottaman ja luovuttaman lämpömäären erotus, joten kone voi tehdä työtä maksimissaan määräni

$$|W_{kokonais, \max}| = Q_{sisään} - Q_{ulos, \min} = Q_{sisään} \left(1 - \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}\right), \quad (9.76)$$

ja näin ollen minkä tahansa lämpövoimakoneen *paras mahdollinen hyötyuhde* on

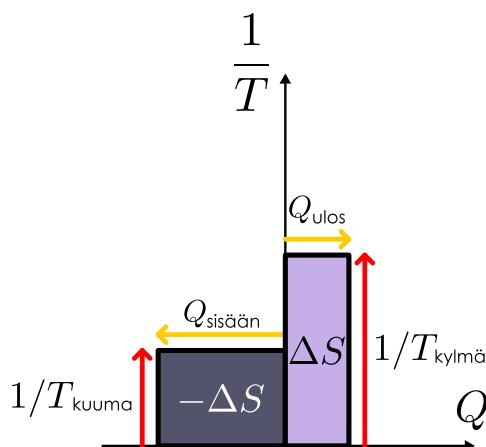
$$\eta_{\max} = \frac{|W_{kokonais, \max}|}{Q_{sisään}} = 1 - \frac{T_{kylmä}}{T_{kuuma}}, \quad (9.77)$$

kun koneen lämmitin ja jäähdytin ovat vakiolämpötilassa T_{kuuma} ja $T_{kylmä}$. Jos lämpövoimakoneen lämmitys ja jäähdytys tapahtuvat lämpötiloissa, jotka eivät ole kovin kaukana toisistaan, koneen hyötyuhde on siis välttämättä huono, eikä tämä rajoitus riipu lainkaan siitä, miten kone käytännössä toimii. Lämpövoimakoneiden hyötyuhdetta voidaan kuitenkin parantaa lämmittämällä niitä kuumemmissa lämpötiloissa ja jäähdyttämällä kylmemmissä.

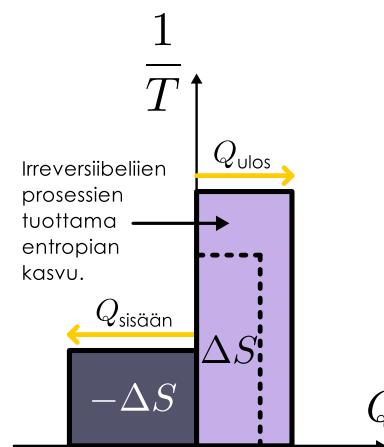
Todellisten lämpövoimakoneiden hyötyuhheet ovat tavallisesti paljon huonommat kuin tässä esitetty paras mahdollinen tapaus, koska todellisissa koneissa on aina myös dissipatiivisia vuorovaikutuksia, jotka lisäävät koneen entropiaa sen toimiessa. Koska koneen entropia palautuu kunkin kierron pääteeksi samaan arvoon kuin aluksi, täytyy jäähdytyksen näin ollen pienentää koneen entropiaa ja lisätä sen ympäristön entropiaa *enemmän* kuin ideaalisessa tapauksessa (kuva 9.19). Esimerkiksi moottorissa vaikuttava kitka muuttaa mekaanista energiaa lämpöenergiaksi, jolloin moottorin kuumenemisen estämiseksi jäähdytyksen täytyy poistaa moottorista enemmän lämpöä kuin ideaalisessa kitkattomassa koneessa. Samalla moottori tekee vähemmän työtä ja sen hyötyuhde on huonompi. Entropiadiagrammissa tämä ilmenee niihin, että jäähdytystä kuvaava suorakaide on pinta-alaltaan selkeästi *suurempi* kuin lämmitystä kuvaava suorakaide.

Kuva 9.19: Lämpövoimakoneiden entropiadiagrammeja. Ideaalinen kone ei muuta ympäristön entropiaa, jolloin entropian muutoksia kuvaavat pinta-alat ovat yhtä suuret. Todellisessa koneessa tapahtuu irreversiibeileitä prosesseja, jolloin entropia kasvaa ja entropian kasvua kuvaava pinta-ala on suuri. Entropiaa pienentävä kone on mahdoton.

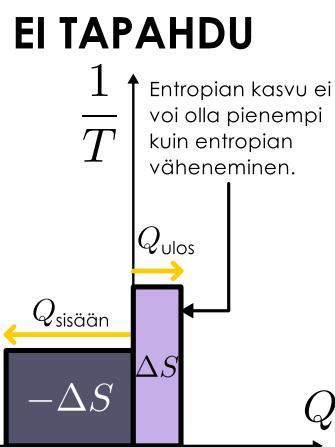
(a) Ideaalinen kone.



(b) Todellinen kone.



(c) Mahdoton kone.

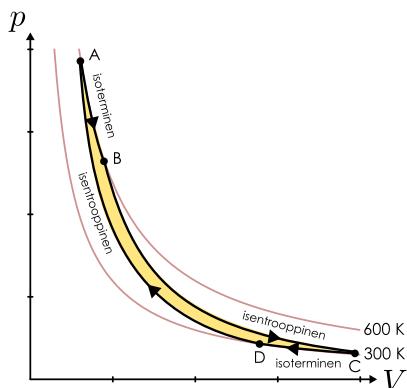


! 9.29 (a) Miten kuvan 9.19 (a) entropiadiagrammi muuttuu, jos (i) jäähdytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu enemmän lämpöä, (ii) jäähdytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu vähemmän lämpöä, (iii) jäähdytys tapahtuu korkeammassa lämpötilassa ja koneesta poistuu vähemmän lämpöä? (b) Mitkä näistä muutoksista ovat mahdollisia? (c) Miten nämä muutokset vaikuttavat koneen hyötysuhteeseen?

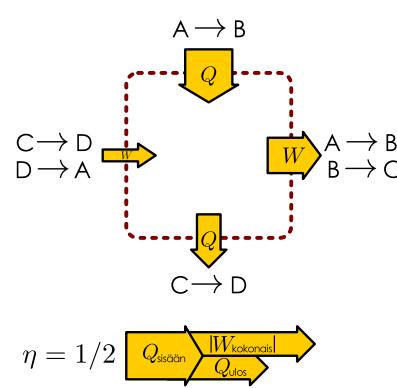
Tällaisen ideaalisen lämpövoimakoneen voi teoriassa toteuttaa esimerkiksi kuvassa 9.20 esitetyn kiertoprosessin avulla. Prosessissa kaasua lämmitetään ja jäähdytetään tuomalla kone vuorotellen kosketuksiin kuuman ja kylmän lämpösäiliön kanssa. Tilassa A koneen lämpötila on sama kuin kuuman lämpösäiliöön, T_{kuuma} . Kone pidetään kiinni tässä lämpösäiliössä ja sen sisältämän kaasun annetaan laajeta isotermisesti (prosessi $A \rightarrow B$), jolloin kone sekä vastaanottaa lämpöä että tekee työtä. Tämän jälkeen kone irrotetaan lämpösäiliöstä ja kaasun annetaan laajentua isentrooppisesti ($B \rightarrow C$), jolloin se tekee työtä mutta ei vastaanota lämpöä. Kun kaasun lämpötila on saavuttanut kylmäsäiliön lämpötilan $T_{kylmä}$, kone kiinnitetään kylmäsäiliöön ja kaasua puristetaan ensin isotermisesti ($C \rightarrow D$) ja lopuksi vielä isentrooppisesti lämpösäiliöstä erillään ($D \rightarrow A$). Tätä kiertoa kutsutaan **Carnot-kiertoprosessiksi** (Sadi Carnot'n mukaan), ja jos koneessa tapahtuvat prosessit ovat kvasistaattiset, siinä saavutetaan yhtälön (9.77) hyötyshuone, sillä kone vaihtaa lämpöä vain vakiolämpötilassa olevien lämpösäiliöiden kanssa.

Carnot-kierto on teoreettisesti tärkeä, koska siinä saavutetaan paras mahdollinen lämpötilojen $T_{kylmä}$ ja T_{kuuma} välillä toimivien koneiden hyötyshuone (9.77). Prosessi ei ole kuitenkaan tehokas, koska isotermiset prosessit ovat yleensä hitaita ja Carnot-prosessi tekee yhden kierron aikana melko pienien työn, mikä näkyy

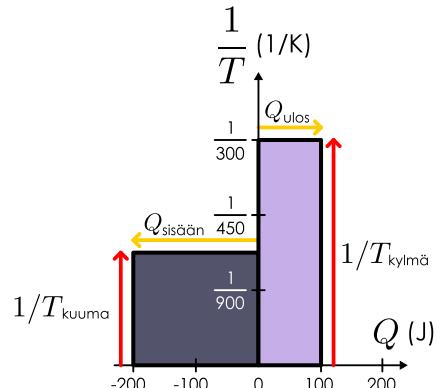
Kuva 9.20: Carnot-kiertoprosessilla saavutetaan paras mahdollinen hyötyshuone, kun prosessin äärilämpötilat on kiinnitetty.

(a) pV -diagrammi.

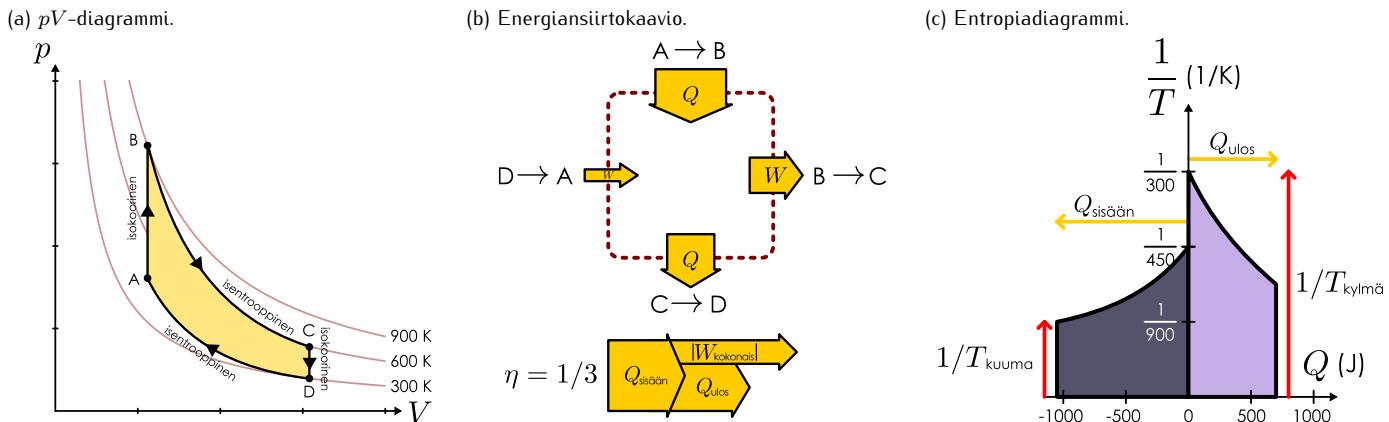
(b) Energiansiirtokaavio.



(c) Entropiadiagrammi.



Kuva 9.21: Otto-kiertoprosessilla voidaan saavuttaa parempi teho kuin Carnot-prosessilla, mutta sen hyötytuhde on vältämättä huonompi.



pV-kuvaajan rajaaman pinta-alan piennutena. Niinpä todellisissa moottoreissa käytetään muita kiertoprosesseja. Esimerkiksi isokoriset ja isobaariset prosessit voidaan toteuttaa käytännössä melko nopeasti ja niiden avulla saadaan muodostettua *pV*-diagrammissa suuremman pinta-alan rajaavia ja siis enemmän työtä yhden kierron aikana tekeviä prosesseja.

Kuvassa 9.21 on esitetty esimerkinä *Otto-prosessi* (Nikolaus Otton mukaan), joka on melko hyvä malli tavallisten bensiinikäyttöisten polttomoottoreiden toiminnalle. Tässä prosessissa kaasun isentooppinen laajentuminen ja supistuminen on yhdistetty isokorisilla lämmitys- ja jäähdytysprosesseilla. Käytännössä tämä tapahtuu niin, että polttoaine palaa moottorin sylinterissä likimain vakiotilavuudessa ($A \rightarrow B$), jolloin kuumat palokaasut laajenevat työntäen mäntää ($B \rightarrow C$), ja mäntää työntävä voima välitetään auton renkaita pyöriväksi momentiksi. Tämä laajeneminen on niin nopeaa, että lämpöö ei ehdi juurikaan siirtymään sylinterin ja moottorin muiden osien välillä, joten prosessi on likimain adiabaattinen. Sylinterin jäähdytys tapahtuu nopeasti likimain vakiotilavuudessa poistamalla sylinteristä kuumat pakokaasut ja korvaamalla ne uudella, kylmällä ilman ja polttoaineen seoksella ($C \rightarrow D$). Lopuksi mäntä puristaa kaasut takaisin alkutilavuteen utta polttoaa varten ($D \rightarrow A$).

Otto-kierrosto tavallisesti paljon tehokkaampi kuin Carnot-kierrosto, sillä se voi tehdä paljon työtä lyhyessä ajassa. Otto-kierrosto ei kuitenkaan voi olla hyötysuhteeltaan parempi kuin Carnot-kierrosto, jos kierrosten äärilämpötilat ovat samat. Tämä johtuu siitä, että Otto-kierrossa lämmitys ja jäähdytys eivät tapahdu vakiolämpötilassa kuten Carnot-kierrossa vaan koneen toimivan aineen lämpötila kasvaa lämmityksen aikana ja pienenee jäähdyksen aikana.



9.30 Tarkastele kuvan 9.21 Otto-kierroto esimerkin 9.6 pohjalta. Voit olettaa, että koneen toimivana aineena on kaksiatomista ideaalikaasua. (a) Mitkä ovat parametrit r ja s kuvassa esitetylle prosessille? (b) Paljonko kaasua moottorissa on? (c) Mikä on prosessin teoreettinen hyötytuhde?

Kuvan 9.20 esimerkissä Carnot-kierrosto tapahtuu lämpötilojen 300 K ja 600 K välillä, joten sen hyötytuhde on $\eta = 1 - 300\text{ K}/600\text{ K} = 1/2$. Kuvan 9.21 Otto-kierrosto tapahtuu lämpötilojen 300 K ja 900 K, mutta sen hyötytuhde on silti vain noin $\eta \approx 1/3$, kun vastaavalla lämpötilavälillä Carnot-kierron hyötytuhde olisi 2/3.

Syy tähän selviää tarkastelemalla entropiadiagrammia. Jäähdytyksen alaksi Otto-koneen lämpötila on 600 K ja lopuksi 300 K. Jos ympäristön lämpötila olisi sama kuin koneen, ympäristön entropian kasvua esittävä kuvaus ei olisi enää suorakaide vaan likimain puolisunnikas. Vastaavasti lämmityksen aikana prosessin lämpötila muuttuu arvosta 450 K arvoon 900 K. Tästä johtuen Otto-prosessissa entropian lisääntymistä esittävä oikeanpuoleinen kuvaus on *matala* ja entropian vähentymistä esittävä vasemmanpuoleinen kuvaus on *korkea* vastaan Carnot-kierroon verrattuna. Edelleen, koska näistä kuviista oikeanpuoleisen (entropian kasvun) on oltava pinta-alaltaan suurempi, sen on oltava siis myös suhteellisesti *leveämpi* kuin Carnot-kierrossa. Kuvion leveys kuitenkin esittää koneen hukkalämpöä, joten Otto-kierron vastaanottamasta lämmöstä poistuu hukkalämpöä suurempi *osuus* kuin Carnot-kierrossa. Esimerkissä 9.6 on analysoitu täsmällisesti Otto-kierron vastaanottama ja luovuttama lämpö sekä kierron tekemä työ ja hyötytuhde.



9.31 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä lämpövoimakoneista. Määrittele hyötytuhde. Selitä, miksi ja miten toinen pääsääntö rajoittaa lämpövoimakoneiden toimintaa sekä mitä erityistä on Carnot'n koneessa.

esimerkki 9.6

Otto-kierto

Otto-kiertoa suorittavan moottorin sylintereissä kaasun tilavuus vaihtelee välillä V_{\min} ja $V_{\max} = rV_{\min}$, missä $r = 10$ on niin sanottu puristussuhde. Kaasun suurin paine ja lämpötila kierron aikana on p_{\max} ja T_{\max} . Polttoaineen palaessa kaasun lämpötila kasvaa kertoimella $s = 2$. Tarkastellaan täysin ideaalista moottoria, jonka kaikki prosessit ovat reversiibeleitä ja kaasu käyttää enemmän energian määrää kuin ideaalikaasu, jolla on 5 vapausastetta. (a) Mikä on kaasun paine, tilavuus, ja lämpötila (suhteessa näiden maksimi- tai minimiarvoihin), kierron ääripisteissä (pV -kuvaajan kulmissa)? (b) Paljonko lämpöä moottori vastaanottaa kierron aikana? (c) Paljonko lämpöä moottori luovuttaa kierron aikana? (d) Mikä on moottorin tekemä kokonaistyö kierron aikana? (e) Mikä on moottorin hyötytuhde? (f) Mikä on vastaavien äärlämpötilojen välillä toimivan moottorin suurin mahdollinen hyötytuhde?

TILANNE Otto-kierrossa kaasu käy läpi vuorotellen isokoorisia ja isentrooppisia prosesseja. Piirretään kierron pV -diagrammi ja energiansiirtokaavio. Merkitään kierron ääripisteitä kirjaimin A – D (sama järjestys kuin kuvassa 9.21). Pisteessä B kaasun lämpötila on maksimissaan, joten käytetään tämän pisteen paineen, tilavuuden ja lämpötilan arvoja vertailukohtana muille pisteille. Kaasun tilavuus on minimissaan pisteissä A ja B, $V_A = V_B = V_{\min}$, ja maksimissaan pisteissä C ja D, $V_C = V_D = V_{\max} = rV_B$. Kaasu vastaanottaa lämpöä prosessissa A → B ja luovuttaa lämpöä prosessissa C → D. Kaasu tekee työtä prosessissa B → C ja kaasun tehäään työtä prosessissa D → A. Kaasun lämpötila muuttuu prosessissa A → B kertoimella s eli $T_A = T_B/s$. Ideaalikaasun tilanyhtälön mukaisesti paine on vakiotilavuudessa suoraan verrannollinen lämpötilaan, joten myös paine muuttuu tässä prosessissa samalla kertoimella $p_A = p_B/s$.

Koska kaasulla on viisi vapausastetta, sen adiabaattivakio on $\gamma = 1 + 2/5 = 1.4$. Tämä vastaa kaksiatomista kaasua, jota ilmakin suurimmaksi osaksi on.

SUUNNITELMA Paine kussakin pisteessä voidaan ratkaista adiabaattilain avulla ja lämpötila edelleen paineen ja tilavuuden perusteella ideaalikaasun tilanyhtälöstä. Kun tilanmuuttujien arvot kussakin pisteessä tunnetaan, voimme laskea kussakin prosessissa lämpönä tai työnä siirtyneen energian esimerkiksi taulukon 9.1 avulla. Hyötytuhde taas saadaan näiden avulla tehdyn kokonaistyön suhteena vastaanottettuun lämpöön. Paras mahdollinen hyötytuhde saadaan myös laskettua suoraan prosessin äärlämpötilojen perusteella.

RATKAISU (a) Prosessissa B → C pätee adiabaattilaki $pV^{\gamma} = \text{vakio}$, joten

$$p_C = p_B V_B^{\gamma} / V_C^{\gamma} = \frac{1}{r^{\gamma}} p_B. \quad (9.78)$$

Vastaavasti prosessissa D → A

$$p_D = p_A V_A^{\gamma} / V_D^{\gamma} = \frac{1}{r^{\gamma}} p_A = \frac{1}{s r^{\gamma}} p_B. \quad (9.79)$$

Lämpötilat eri pisteissä ovat näin ollen tilanyhtälön perusteella

$$T_A = \frac{p_A V_A}{N k_B} = \frac{\frac{1}{s} p_B V_B}{N k_B} = \frac{1}{s} T_B \quad (9.80)$$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{N k_B} = \frac{r^{-\gamma} p_B r V_B}{N k_B} = \frac{1}{r^{\gamma-1}} T_B \quad (9.81)$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{N k_B} = \frac{\frac{1}{s} r^{-\gamma} p_B r V_B}{N k_B} = \frac{1}{s r^{\gamma-1}} T_B. \quad (9.82)$$

Selkeyden vuoksi lienee parasta taulukoida tilanmuuttujien arvot. Taulukkoon on myös sijoitettu lukuarvot $r = 10$, $s = 2$ ja $\gamma = 1.4$.

tila	p/p_{\max}	V/V_{\min}	T/T_{\max}
A	$\frac{1}{s} = 0.5$	1	$\frac{1}{s} = 0.5$
B	1	1	1
C	$\frac{1}{r^{\gamma}} = 0.04$	$r = 10$	$\frac{1}{r^{\gamma-1}} = 0.40$
D	$\frac{1}{s r^{\gamma}} = 0.02$	$r = 10$	$\frac{1}{s r^{\gamma-1}} = 0.20$

(b) Moottorin vastaanottama lämpö prosessissa A → B on

$$Q_{\text{sisää}} = n c_V^n (T_B - T_A) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.83)$$

ja numeroarvot sijoittaen $Q_{\text{sisää}} = 1.25 N k_B T_{\max}$.

(c) Moottorin luovuttama lämpö prosessissa C → D on

$$Q_{\text{ulos}} = n c_V^n (T_C - T_D) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{\gamma-1}} \left(1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.84)$$

eli $Q_{\text{ulos}} = 0.50 N k_B T_{\max}$.

(d) Moottorin tekemä kokonaistyö on

$$|W_{\text{kokonais}}| = Q_{\text{sisään}} - Q_{\text{ulos}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.85)$$

eli $|W_{\text{kokonais}}| = 0.75 N k_B T_{\max}$.

(e) Hyötyuhde on

$$\eta = \frac{|W_{\text{kokonais}}|}{Q_{\text{sisään}}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}, \quad (9.86)$$

joka ei siis riipu prosessin ääriarvoista vaan ainoastaan puristussuhteesta. Tässä käytetyillä lukuarvoilla teoreettinen hyötyuhde on $\eta = 0.60$.

(f) Moottorin ylin lämpötila on T_B ja alin T_D . Hyötysuhteen paras mahdollinen arvo riippuu näiden suhteesta,

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{1}{sr^{\gamma-1}} = 0.80. \quad (9.87)$$

ARVIOINTI Todellisen moottorin hyötyuhde ei ole koskaan näin korkea, koska moottorissa vaikuttaa aina dissipatiivisia vuorovaikutuksia eikä lämmönvaihto ympäristön kanssa tapahdu reversiibelisti. Lasku kuitenkin osoittaa, että ensinnäkään näillä parametreilla Otto-kierto ei voi *mitenkään* saavuttaa hyötyuhdetta, joka olisi parempi kuin 0.6. Toiseksi *mikään* vastaavien lämpötilojen välillä toimiva lämpövoimakone ei voi saavuttaa hyötyuhdetta, joka olisi parempi kuin 0.8.

Koska hyötyuhde mittaa tehdyn työn ja vastaanotetun lämmön suhdetta, se ei riipu tekijöistä, jotka kasvattavat molempia samassa suhteessa. Jos esimerkiksi kierron maksimilämpötilaa kasvatetaan mutta minimi- ja maksimitilauudet pysyvät samoina, tämä muuttaa prosessin ottamaa ja luovuttamaa lämpöä sekä sen tekemää kokonaistyötä samassa suhteessa, eikä hyötyuhde muutu.

Lisätarkistukseksi voimme laskea prosessin tekemän ja siihen tehdyn työn yhtälön (9.22) avulla. Laajentuessaan kaasu tekee työn

$$W_{\text{ulos}} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_B V_B - p_C V_C) = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \quad (9.88)$$

ja puristuksessa kaasuun tehdään työ

$$W_{\text{sisään}} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_D V_D - p_A V_A) = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \frac{1}{s}. \quad (9.89)$$

Kaasun tekemä kokonaistyö on siten

$$|W_{\text{kokonais}}| = W_{\text{ulos}} - W_{\text{sisään}} = \frac{p_B V_B}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right). \quad (9.90)$$

Huomioimalla vielä, että $\gamma - 1 = N_{\text{vapaus}}/2$ ja $p_B V_B = N k_B T_B$, tämän voi kirjoittaa myös muotoon

$$|W_{\text{kokonais}}| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{s}\right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_B, \quad (9.91)$$

ja tämä on sama tulos kuin mitä edellä saatuiin.

Yhteenveton: Termodynamika

Termodynamiikka prosessit

- Termodynamiikan ensimmäinen pääsäntö** on energian säilymislaki: systeemin kokonaisenergian muutos on yhtä suuri kuin systeemin vastaanottama lämpö ja systeemiin tehty työ yhteensä.
- Termodynamiikan toisen pääsännön voi muotoilla esimerkiksi seuraavilla tavoilla:
 - Eristetyn systeemin kokonaisentropia ei voi vähentyä.
 - Systeemin ja sen ympäristön yhteen kokonaisentropia ei voi vähentyä.
 - Jatkuvasti toimiva laite, joka pelkästään ottaa lämpöä ja tekee työtä, on mahdoton.
 - Jatkuvasti toimiva laite, joka siirtää lämpöä kylmästä kuumaan ilman että siihen tehdään työtä, on mahdoton.
- Prosessi on **kvasistaattinen**, jos systeemi on prosessin aikana koko ajan likimain termodynamiisessa tasapainossa.
- Prosessi on **adiabaattinen**, jos systeemi ei vaihda lämpöä.
- Prosessi on **isentrooppinen**, jos systeemin entropia on vakio.
- Prosessi on **isokorinen**, jos systeemin tilavuus on vakio.
- Prosessi on **isobaarinen**, jos systeemin paine on vakio.
- Prosessi on **isoterminen**, jos systeemin lämpötila on vakio.
- Laajentuva systeemi tekee työtä ympäristöönsä ja ympäristö tekee työtä supistuvaan systeemiin. Kvasistaattisessa prosessissa systeemiin tehty kokonaistyö on

$$W_{\text{kokonais}} = - \int_{V_{\text{alku}}}^{V_{\text{loppu}}} pdV.$$

Lämpövoimakoneet

- Kiertoprosessi** on prosessi, joka palaa säännöllisesti takaisin alkutilaansa.
- Kiertoprosessin läpikäyneen systeemin tilanmuuttujat kuten sisäenergia ja entropia saavat kierroksen lopussa samat arvot kuin alussa, koska ne riippuvat vain systeemin tilasta. Prosessin tekemän työn ja sen vastaanottaman lämmön ei tarvitse kuitenkaan olla nolla.
- Kiertoprosessia suorittavan systeemin käydessä läpi yhden kierroksen systeemin entropia ei muutu ja ympäristön entropia joko ei muutu tai kasvaa.
- Lämpövoimakone** on prosessi, joka vastaanottaa ja luovuttaa lämpöä ja muuntaa osan lämmöstä työksi.

Graafinen esitys

- Tasapainossa olevan systeemin tilaa voidaan kuvata pV -diagrammissa yhtenä pisteenä (V, p). Epätasapainossa olevalle systeemille tämä ei onnistu, koska paine ei ole välittämättä koko systeemissä sama.
- Kvasistaattisessa prosessissa systeemi on koko ajan likimain tasapainossa, joten systeemiä kuvaaa jokaisella ajan hetkellä jokin pV -koordinaatiston piste. Ajan kuluessa systeemin tila muuttuu, joten tämä piste siirtyy. Prosessia voi kuvata pV -diagrammissa tämän pisteen piirtämänä käyränä.
- Prosessin tekemää työtä esittää pV -käyrän rajaama pinta-ala.
- Energiansiirtokaaviossa* systeemiin tai systeemistä siirtyvä työtä

Sanasto

- isokorinen (isochoric)
- isobaarinen (isobaric)
- isoterminen (isothermal)
- isentrooppinen (isentropic)
- adiabaattinen (adiabatic)
- adiabaattivakio (heat capacity ratio)
- kvasistaattinen (quasistatic)

- Systeemin lämmittäminen vakiopaineessa vaatii yleensä enemmän energiota kuin vakiotilauudessa, koska vakiopaineessa systeemi laajenee lämmetessään ja tekee työtä ympäristöönsä. Ideaalikaasun ominaislämpökapasiteetti vakiotilauudessa ja vakiopaineessa on

$$\begin{aligned} c_V^n &= \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}} R, \\ c_p^n &= c_V^n + R = \left(1 + \frac{1}{2} N_{\text{vapaus}}\right) R \end{aligned}$$

- Kvasistaattinen adiabaattinen prosessi on isentrooppinen. Jos kyseessä on ideaalikaasun prosessi, kaasun paine ja tilavuus nouattavat **adiabaattilakia**

$$pV^\gamma = \text{vakio},$$

missä **adiabaattivakio** on

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{2}{N_{\text{vapaus}}}.$$

- Reversiibeleissä prosesseissa systeemin entropian muutos on suojaan verrannollinen systeemin vastaanottamaan lämpöön ja kääntäen verrannollinen sen lämpötilaan

$$dS = \frac{dQ_{\text{kokonais}}}{T}.$$

- Hyötyuhde** on lämpövoimakoneen tekemän työn suhde sen vastaanottamaan lämpöön

$$\eta = \frac{|W_{\text{kokonais}}|}{Q_{\text{sisäänn}}}.$$

- Jos lämpövoimakoneen minimi- ja maksimilämpötilat sen kierron aikana ovat $T_{\text{kylmä}}$ ja T_{kuuma} , koneen hyötyuhde voi olla parhaillaan

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\text{kylmä}}}{T_{\text{kuuma}}}.$$

Tämä hyötyuhde saavutetaan ideaalisessa **Carnot-kierrossa**.

ja lämpöä kuvataan nuolin, joiden paksuus esittää siirtymän energian määrää.

- Entropiadiagrammi** kuvaa kiertoprosessin jäähdyttimen ja lämmittimen käänestä lämpötilaa $1/T$ niiden lämpöönä vastaanottaman energian funktiona. Diagrammissa kuvaajien rajaama pinta-ala esittää ympäristön entropian muutosta, joka on jäähdyttimelle positiivinen ja lämmittimelle negatiivinen.
- Ympäristön kokonaisentropia ei voi kiertoprosessissa vähentyä, joten entropiadiagrammin jäähdytystä edustavan kuvion pinta-alan on oltava aina suurempi kuin lämmitystä kuvavaan kuvion.

- kierto (cycle)
- kiertoprosessi (cyclic process)
- lämpövoimakone (heat engine)
- toimiva aine (working substance)
- hyötyuhde (efficiency)
- kylmäkone, jäälämmitys (refrigerator)
- lämpöpumppu (heat pump)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

- 9.1** (a) Siirtymisen männän koordinaatistoon muuttaa kaikkien kappaleiden nopeuksia 1 m/s. Tässä koordinaatistossa molekyylin nopeus on siis alkuksi 201 m/s.
 (b) Elastisessä törmäyksessä molekyylin nopeus kääntyy ympäri. Loppunopeus on siis -201 m/s.
 (c) Siirtymisen alkuperäiseen koordinaatistoon muuttaa nopeuksia -1 m/s. Molekyylin loppunopeus on siis -202 m/s. Molekyylin vauhdin muutos oli siis kaksinkertainen männän nopeuteen verrattuna.
- 9.2** Täsmällinen arvo on eksteniivisillä suureilla: tilavuus, ainemääri, entropia ja kokonaisenergia. Intensiivisillä suureilla (paine ja lämpötila) voi olla yksi arvo säiliön yhdessä osassa ja toinen arvo toisessa osassa, jolloin suureilla ei ole systeemissä mitään yhtä täsmällistä arvoa. Tasapainossa säiliössä on kuitenkin kaikkialla sama paine ja sama lämpötila, jolloin voidaan puhua koko systeemin paineesta ja lämpötilasta.
- 9.3** (a) Prosessi on irreversiibeli, koska kahviin liuennut sokeri ei itsestään erottu kahvista ja kiteydy. Prosessi ei ole kvasistaattinen, koska sokerin konsentraatio ei ole kaikkialla sama ennen kuin kaikki sokeri on liuennut.
 (b) Prosessi on irreversiibeli, koska kahvi ei itsestään ala lämmetä. Jos systeemän tarkastellaan vain kahvia, prosessi voi olla likimain kvasistaattinen, jos kahvissa on aina kauttaaltaan sama lämpötila. Jos systeemi on kahvi ja sitä ympäröivä ilma yhdessä, prosessi ei ole kvasistaattinen, koska kahvi ja ilma eivät ole keskenään tasapainossa.
 (c) Ilmapallon sisäinen paine on aina likimain yhtä suuri kuin ulkoisen paineen ja pallon kuoren jännityksen tuottama paine yhteensä. Niinpä prosessi on kvasistaattinen. Prosessi on myös reversiibeli, koska jos ilmanpaine kasvaa, pallo supistuu takaisin alkutilaansa.
 (d) Prosessi on selvästi irreversiibeli. Se ei ole kvasistaattinen, koska heliumin tiheys ei ole prosessin aikana kaikkialla sama.
- 9.4** (a) Energia ja entropia kasvavat.
 (b) Energia ja entropia pienenevät.
 (c) Jos kaasua ei samalla jäähdytetä eli jos prosessi on adiabaattinen, kaasun energia kasvaa, koska kaasuun tehdään työtä. Kaasun entropia on tällaisessa prosessissa vakio.
 (d) Kaasun entropia ei muutu. Kaasuun itseensä varastoitunut energiakaan ei muudu, mutta kaasun potentiaalienergia painovoimakentässä kasvaa.
 (e) Kaasun makroskoopinen liike-energia kasvaa. Kaasun sisäenergia ei muudu, joten myöskään sen entropia ei muudu.
- 9.6** (a) Kaasujen lämpötilat ovat ideaalikaasun tilanyhtälön mukaisesti $T_A = 300 \text{ K}$ ja $T_B = 286 \text{ K}$.
 (b) Kaasun entropia riippuu vakioiden V_0 ja T_0 arvosta, mutta voimme laskea entropioiden eron, joka ei riipu näistä. Kaasun A entropia on 75.3 J/K suurempi kuin kaasun B.
 (c) Kaasujen sisäenergia on suoraan verrannollinen niiden lämpötiloihin, $K_A = 5610 \text{ J}$ ja $K_B = 5350 \text{ J}$.
- 9.7** Jos prosessi ei ole kvasistaattinen, systeemin eri osissa voi olla eri paine prosessin aikana. Siispä systeemillä ei ole yhtä tiettyä paineen arvoa millään ajan hetkellä, eikä systeemin tilaa voi kuvata pV -diagrammin pisteenä. Prosessiakaan ei silloin voi kuvata pV -diagrammin käyränä. Jos prosessin alussa ja lopussa systeemi on tasapainossa, näitä pisteitä voi kuvata pisteinä, mutta prosessin kulkua näiden välillä ei voi piirtää diagrammiin.
- 9.8** Tähän on monia tapoja. Kaasusäiliön voi esimerkiksi ympäröidä aineella, jonka lämpötila pysyy hyvin tarkasti vakiona, kuten jäähivedellä. Jos prosessi sitten toteutetaan hyvin hitaasti, kaasun ja jääheden lämpötilat ehtivät aina tasaantua jolloin kaasu pysyy koko ajan samassa lämpötilassa kuin jäävesi.
- 9.9** (a) Piste A on $(V, p)_A \approx (0.03 \text{ m}^3, 80 \text{ kPa})$, joten ideaalikaasun tilanyhtälön perusteella $n = p_A V_A / (RT_A) = 0.96 \text{ mol}$.
 (b) Pisteet B ja C ovat $(V, p)_B \approx (0.08 \text{ m}^3, 30 \text{ kPa})$ ja $(V, p)_B \approx (0.08 \text{ m}^3, 20 \text{ kPa})$. Niinpä $T_B = p_B V_B / (nR) = 300 \text{ K}$ ja $T_C = p_C V_C / (nR) = 200 \text{ K}$. Koska prosessi $A \rightarrow B$ on isoterminen, täytyy olla $T_A = T_B$, kuten onkin.
 (c) Entropia voidaan laskea sijoittamalla kaasun tilavuus ja lämpötila ideaalikaasun entropian lausekkeeseen kussakin tilassa. Jos valitsemme $V_0 = 1 \text{ m}^3$ ja $T_0 = 1 \text{ K}$, saamme $S_A = 86 \text{ J/K}$, $S_B = 94 \text{ J/K}$ ja $S_C = 86 \text{ J/K}$. Entropian muutos (joka ei siis riipu vakioista V_0 tai T_0 on kummassakin prosessissa $\Delta S_{A \rightarrow B} = 8 \text{ J/K}$ sekä $\Delta S_{A \rightarrow C} = 0 \text{ J/K}$. Koska prosessi $A \rightarrow C$ on isentrooppinen, entropian muutoksen pitääkin olla siinä nolla).
- 9.10** (a) Vapausasteita on kolme, joten $\gamma = 5/3 \approx 1.7$.
 (b) Vapausasteita on viisi, joten $\gamma = 7/5 = 1.4$.
 (c) Vapausasteita on seitsemän, joten $\gamma = 9/7 \approx 1.3$.
- 9.11** Jos vapausasteita on vähän, adiabaattivakio on suuri ja adiabaattia kuvaava käyrä $p = p_0 V_0 V^{-\gamma}$ laskee jyrkästi V :n funktiona. Jos vapausasteita on paljon, adiabaattivakio lähestyy yhtä ja adiabaatti lähestyy isotermikäyrää.
- 9.13** Molekyylien nopeuden kasvaessa kunkin yksittäisen molekyylin törmäys tuottaa säiliön seiniin suuremman impulssin ja siis suuremman paineen. Kuitenkin säiliön tilavuuden kasvaessa törmäyksien välinen aika kasvaa, jolloin paine pienenee. Kun tilavuutta kasvatetaan sopivasti lämpötilan kasvaessa, nämä vaikutukset kumoavat toisensa täsmälleen.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

9.14 (a) Prosessi on todennäköisesti nopea, jolloin lämpöä ei ehdi siirtää kaasusta ympäristöön. Tällöin prosessi on adiabaattinen, ja voisimme laskea työn adiabaattilain kautta. Yksinkertaisuuden vuoksi voimme kuitenkin arvioida, että kaasusäiliön paine muuttuu likimain lineaarisesti arvosta 120 kPa arvoon 110 kPa kaasun laajentuessa, jolloin kaasun paine tekee työn

$$W_{\text{kaasu}} = p_{\text{keskiarvo}} \Delta V \approx \frac{1}{2} (p_{\text{alku}} + p_{\text{loppu}}) \Delta V = 1150 \text{ J.} \quad (9.92)$$

(b) Ulkoinen paine on vakio, joten sen tekemä työ on

$$W_{\text{ulkoo}} = -p_{\text{ulkoo}} \Delta V = -1000 \text{ J.} \quad (9.93)$$

Tämä on negatiivinen, koska ulkoinen paine työntää mäntää sisään, mutta mäntä liikkuu ulospäin.

(c) Koska energiaa ei ehdi siirtää lämpönä, kaasun sisäenergia muuttuu vain työn kautta. Kaasu tekee työtä mäntään, jolloin kaasu menettää energiaa,

$$\Delta E_{\text{sisä}} = -W_{\text{kaasu}} = -1150 \text{ J.} \quad (9.94)$$

(d) Koska mäntään tehdään työtä, männän liike-energia muuttuu. Liike-energian muutos on sama kuin mäntään tehty kokonaistyö,

$$\Delta K = W_{\text{kaasu}} + W_{\text{ulkoo}} = 150 \text{ J.} \quad (9.95)$$

Tämän lisäksi mäntä tekee työtä ympäröivään ilmaan, mikä lisää ympäristön sisäenergiaa.

Huomaa, että tässä tapauksessa kaasun sisäenergian muutosta ei voinut laskea ulkoisen paineen avulla, koska osa kaasun energiasta muuttui männän energiaksi. Kaasun ja männän kokonaisenergian muutos on kuitenkin yhtä suuri kuin ulkoisen paineen mäntään tekemä työ.

9.15 (a) Isobaarisessa prosessissa paine on vakio. Työ on siis

$$W = p \Delta V = 100 \text{ kPa} \cdot 0.02 \text{ m}^3 = 2000 \text{ J.} \quad (9.96)$$

(b) Adiabaattisessa laajenemisessa kaasun paine pienenee adiabaattilain mukaisesti. Adiabaattivakio on $\gamma = 1 + 2/5 = 7/5 = 1.4$. Loppupaine on $p_{\text{loppu}} = p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}^{\gamma} / V_{\text{loppu}}^{\gamma} = 37.9 \text{ kPa}$. Kaasun tekemä työ on näin ollen

$$W = \frac{1}{1-\gamma} (p_{\text{loppu}} V_{\text{loppu}} - p_{\text{alku}} V_{\text{alku}}) = -\frac{5}{2} (37.9 \text{ kPa} \cdot 0.04 \text{ m}^3 - 100 \text{ kPa} \cdot 0.02 \text{ m}^3) = 1210 \text{ J.} \quad (9.97)$$

(c) Isobaarisen prosessin kuvaaja on vaakasuora kun taas adiabaattisen prosessin kuvaaja on laskeva suora (ks. kuvat 9.8 ja 9.9). Työ on kuvaajan alle jäävä pinta-ala, joten adiabaattisen prosessin täytyy tehdä tässä vähemmän työtä kuin isobaarisen. Laskun tulos on siis järkevä.

9.16 Prosessi $A \rightarrow C$ on adiabaattinen, joten siinä ei siirry lainkaan lämpöä. Kaasun alku- ja lopputilat ovat samat prosesseissa $A \rightarrow B$ ja $A \rightarrow C \rightarrow B$, joten kaasun sisäenergian muutos on kummassakin tapauksessa sama. Kaasu kuitenkin tekee suuremman työn prosessissa $A \rightarrow B$, koska tämä on isobaarin prosessi (vrt. kysymys 9.13). Kaasun täytyy siis saada prosessissa $A \rightarrow B$ energiaa lämpönä enemmän kuin prosessissa $A \rightarrow C \rightarrow B$. Ja koska lämpöä ei siirry prosessissa $A \rightarrow C$ lainkaan, koko tämän lämpömäärän täytyy siirtyä prosessissa $C \rightarrow B$. Niinpä energiota siirtyy prosessissa $A \rightarrow B$ enemmän kuin prosessissa $C \rightarrow B$. Tämän näkee myös kuvien energiadiagrammeista, sillä lämpöä Q kuvava palkki on kuvassa 9.9 pienempi kuin kuvassa 9.8.

9.17 Lämpökapasiteetti mittaa lämpönä siirtynä energian ja lämpötilan muutoksen suhdetta. Isotermisesä prosessissa lämpötilan muutos on nolla, jolloin tämä suhde on ääretön. Adiabaattisessa prosessissa ei puolestaan siirry energiota lämpönä, joten suhde on nolla.

9.18 Jos kaasua puristetaan, siinä tehdään työtä. Tällöin kaasun sisäenergia kasvaa enemmän kuin vastavassa vakiotilavuudessa tapahtuvassa lämmitysprosessissa. Ts. jos kaasuun tuodaan lämpö Q vakiotilavuudessa ja kaasun lämpötilan muutos on ΔT_V , tässä prosessissa lämpö Q ja työ W yhdessä muuttavat lämpötilaa enemmän $\Delta T > \Delta T_V$. Ominaislämpökapasiteetti on näin olle pienempi kuin vastavaa suurea vakiopaineessa,

$$c^n = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} < \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T_V} = c_V^n. \quad (9.98)$$

Siten se on myös pienempi kuin ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa, $c^n < c_V^n < c_p^n$.

Mitä nopeammin kaasua puristetaan, sitä suuremalla teholla siihen tehdään työtä ja sitä nopeammin kaasun lämpötila muuttuu. Jos kaasua puristetaan hyvin hitaasti, prosessi tapahtuu likimain vakiotilavuudessa ja $c^n \approx c_V^n$. Jos kaasua puristetaan hyvin nopeasti, siihen ei ehdi siirtää energiota lämpönä, $Q \approx 0$, jolloin näin määritelly lämpökapasiteetti voi olla mielivaltaisen suuri $c^n = \frac{1}{n} \frac{Q}{\Delta T} \approx \infty$.

Tarinan opetus on se, että lämpökapasiteetti riippuu prosessista. Käytännössä lämpökapasiteetit on järkeväät määritellä vain vakiotilavuudessa ja vakiopaineessa, koska muissa prosesseissa lämpökapasiteetti voi olla melkein mitä vain.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

9.19 Ainemäärään ja hiukkasmäärään kohden määritettyjen suureiden suhde on

$$\frac{c^N}{c^n} = \frac{1}{N} / \frac{1}{n} = \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}. \quad (9.99)$$

Niinpä hiukkasten määrään kohden lasketulle ominaislämpökapasiteeteille pätee

$$c_p^N - c_V^N = (c_p^n - c_V^n)/N_A = R/N_A = k_B. \quad (9.100)$$

Tämä on järkevää, koska kaasuvakio R mittaa lämpöön liittyvää energiota suhteessa ainemäärään kun taas Boltzmannin vakio k_B mittaa samaa energiota hiukkasta kohden.

9.21 (a) Kertomalla Avogadron luvulla N_A , ks. vastaus 9.17.

(b) Isokorisisissa prosessissa kaasu ei tee työtä, joten lämpökapasiteetti vakiopaineessa mittaa kaasun sisäenergian muutosta. Niinpä kaasun sisäenergian muutos saadaan missä tahansa prosessissa laskettua lausekkeesta

$$\Delta E_{\text{sisä}} = N c_V^N \Delta T. \quad (9.101)$$

Isokorisisissa prosessissa tämä energia siirtyy lämpöön. Isentrooppisessa prosessissa energia siirtyy puolestaan työnä. Isobaarisessa prosessissa kaasu tekee työtä, joten kaasun pitää vastaanottaa energiota kattamaan sekä sisäenergian muutos että tehty työ. Sääntö pätee myös isotermisessä prosessissa, mutta koska tässä prosessissä $\Delta T = 0$, on myös $\Delta E_{\text{sisä}} = 0$.

9.22 (a) Veden lämpökapasiteetti on noin $C = c^m m = 42 \text{ J/K}$. Niinpä entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{vesi}} = \int_{T_{\text{alku}}}^{T_{\text{jäätyminen}}} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_{\text{jäätyminen}}}{T_{\text{alku}}} = 42 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{273.15 \text{ K}}{291.15 \text{ K}} = -2.7 \text{ J/K}. \quad (9.102)$$

(b) Jäätyminen tapahtuu vakiolämpötilassa ja vapauttaa latenttilämmön $Q_{\text{jäätyminen}} = -Lm = -3340 \text{ J}$, joten

$$\Delta S_{\text{jäätyminen}} = \frac{Q_{\text{jäätyminen}}}{T_{\text{jäätyminen}}} = \frac{-3340 \text{ J}}{273.15 \text{ K}} = -12.2 \text{ J/K}. \quad (9.103)$$

(c) Jään lämpökapasiteetti on noin $C = 21 \text{ J/K}$. Siispä

$$\Delta S_{\text{jää}} = \int_{T_{\text{jäätyminen}}}^{T_{\text{loppu}}} C \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_{\text{loppu}}}{T_{\text{jäätyminen}}} = 21 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{255.15 \text{ K}}{273.15 \text{ K}} = -1.4 \text{ J/K}. \quad (9.104)$$

(d) Kaikkiaan entropian muutos on

$$\Delta S = \Delta S_{\text{vesi}} + \Delta S_{\text{jäätyminen}} + \Delta S_{\text{jää}} = -16.3 \text{ J/K}. \quad (9.105)$$

9.24 Vakiotilavuusprosessissa energiansiirtokaaviossa on vain yksi nuoli systeemin sisään, $Q_{\text{sisään}}$. Systeemin sisäenergian muutos on yhtä suuri kuin sen vastaanottamaa lämpö. Vakiopaineprosessissa systeemin sisään kulkee nuoli $Q_{\text{sisään}}$ ja systeemistä ulos kulkee nuoli W_{ulos} . Työtä kuvava nuoli on pienempi kuin vastaanottua lämpöä kuvava nuoli, koska tässäkin prosessissa systeemin sisäenergia kasvaa.

9.25 Kuvaan 9.5 prosessi on isentrooppinen, joten siinä systeemin entropia on vakio. Samoin ympäristön entropia on vakio, joten myös systeemin ja ympäristön kokonaisentropia on vakio.

Kuvan 9.4 prosessi on adiabaattinen mutta ei isentrooppinen, koska se ei ole kvasistaattinen. Ympäristön entropia ei muudu, mutta systeemin entropia muuttuu. Tämä johtuu systeemin sisällä tapahtuvasta irreversiibelistä prosessista (kaasu laajenee tyhjään tilaan). Kokonaisentropia siis kasvaa.

Kuvan 9.8 prosessissa systeemi lämmittetään isobaarisesti. Systeemin tilavuus ja lämpötila kasvavat, joten myös sen entropia kasvaa. Tämä entropian kasvu johtuu siitä, että lämpöä siirtyy ympäristöstä systeemiin. Toisaalta koska ympäristö luovuttaa lämpöä, ympäristön entropian täytyy pienentyä. Kokonaisentropia voi joko kasvaa tai pysyä vakiona, mutta toisen pääsäännön mukaan se ei voi pienentyä. Kokonaisentropia on likimain vakio vain jos lämmittäminen tapahtuu likimain reversiibelisti. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että systeemi lämmittävän lieden pitää olla koko ajan likimain samassa lämpötilassa kuin systeemi, jolloin systeemin lämmitys tapahtuu hitaasti lieden lämpötilaa nostamalla. Jos liesi on kuumempi kuin kaasu (kuuden todellisessa lämmityksessä melko varmasti on), kyseessä on irreversiibeli prosessi, jossa lämpöä siirtyy kuumasta kylmään. Tällöin ympäristön entropia pienenee vähemmän kuin systeemin entropia kasvaa, jolloin kokonaisentropia kasvaa.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

9.26 Tilanne on samankaltainen kuin esimerkissä 8.5. Nyt kaasujen lämpökapasiteetit ovat $C = nc_V^n = \frac{1}{2}N_{\text{vapaus}}nR = \frac{5}{2}nR$. Kuuman kaasun entropian muutos on

$$\Delta S_{\text{kuuma}} = \int_{500 \text{ K}}^{400 \text{ K}} C \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}nR \ln \frac{4}{5} = -4.64 \text{ J/K} \quad (9.106)$$

ja kylmän kaasun

$$\Delta S_{\text{kylmä}} = \int_{300 \text{ K}}^{400 \text{ K}} C \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}nR \ln \frac{4}{3} = 5.98 \text{ J/K}. \quad (9.107)$$

Kokonaisuudeessaan kaasujen entropian muutos on

$$\Delta S = \Delta S_{\text{kuuma}} + \Delta S_{\text{kylmä}} = 1.34 \text{ J/K}. \quad (9.108)$$

Aluksi systeemi ei ole tasapainossa, koska kaasut ovat eri lämpötiloissa. Lämpötilojen tasaantuminen eli termodynamiiseen tasapainoon siirtyminen on irreversiibeli prosessi, joten kokonaisentropia kasvaa.

9.27 Pätee, kun tarkastellaan kokonaisen kierroksen alku- ja loppupisteitä, jotka ovat siis sama tila. Näin täytyy olla siksi, että energia ja entropia ovat tilanmuuttuja, jotka siis riippuvat vain systeemin tilasta. Jos systeemi on lopuksi samassa tilassa kuin aluksi, sillä on lopuksi myös sama energia ja entropia kuin aluksi. Kierron aikana systeemin energia ja entropia voivat kyllä muuttua. Jos prosessit ovat irreversiibeleitä tai niihin liittyy dissipatiivisia vuorovaikutuksia, systeemin entropia kasvaa kierron aikana enemmän kuin jos siihen liittyisi vain reversiibeleitä prosessja. Kuitenkin jotta systeemi saataisiin takaisin alkutilaan, systeemin täytyy vuorovaikuttaa ympäristön kanssa niin, että systeemin entropia pienenee. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että systeemiä täytyy jäähyttää, sillä systeemin entropia pienenee sen luovuttaessa lämpöä. Samalla ympäristön entropia kasvaa. Jos systeemin entropia on kasvanut irreversiibeleissä prosesseissa paljon, tarvitaan tehokkaampaa jäähytystä ja tällöin ympäristön entropia kasvaa paljon. Näin irreversiibelit prosessit päätyvät lopuksi kasvattamaan ympäristön entropiaa.

9.28 (a) Lämpöä kylmästä kuumaan siirtävän laitteen energiansiirtokaaviossa on kaksi nuolta, lämpö sisään kylmästä $Q_{\text{sisään}}$ ja lämpö ulos kuumaan Q_{ulos} . Jos kone toimisi ilman työtä, kaaviossa nämä nuolet olisivat yhtä suuret. Entropiadiagrammissa olisi kaksi laatikkoa, jotka olisivat yhtä leveät (sama Q). Kylmästä siirtymään lämpöä kuvava laatikko olisi korkeampi (suurempi $1/T$).

Jääkaapissa on lisäksi työtä kuvava nuoli koneen sisään $W_{\text{sisään}}$, jolloin energian säilymisen perusteella pitää olla $Q_{\text{ulos}} = W_{\text{sisään}} + Q_{\text{sisään}}$. Entropiadiagrammin laatikoista kylmästä siirtymään lämpöä kuvava olisi korkea ja kapea (suuri $1/T_{\text{kylmä}}$, pieni $Q_{\text{sisään}}$) kun taas lämpimään siirtymään lämpöä kuvava olisi matala ja leveä (pieni $1/T_{\text{kuuma}}$, suuri Q_{ulos}).

(b) Entropiadiagrammissa ympäristöstä koneeseen siirtymään lämpöä kuvavan laatikon pinta-ala $Q_{\text{sisään}}/T_{\text{kylmä}}$ kuvailee ympäristön entropian pienentymistä. Koneesta ympäristöön siirtymään lämpöä kuvavan laatikon pinta-ala $Q_{\text{ulos}}/T_{\text{kuuma}}$ puolestaan kuvailee ympäristön entropian kasvua. Ympäristön entropia ei voi kokonaisuudessaan pienentyä, joten laatikon, joka kuvailee lämmön siirtymistä koneesta ympäristöön, täytyy aina olla yhtä suuri tai suurempi kuin toinen laatikko. Koneessa, joka vain siirtää lämpöä kylmästä kuumaan, näin ei ole, koska laatikot ovat yhtä leveät mutta koneesta ympäristöön siirtymään lämpöä kuvava laatikko on matalampi. Tämä kone ei siis ole mahdollinen. Jääkaapin tapauksessa tämä laatikko on matalampi, mutta sen pinta-ala voi silti olla laatikoista suurempi, koska laatikon leveys voi olla periaatteessa kuinka suuri vain, sillä jääkaappi luovuttaa ympäristöön enemmän lämpöä kuin mitä se ottaa.

9.29 (a) Entropian kasvua kuvava laatikko muuttuu (i) korkeammaksi ja leveämmäksi eli saadaan kuva (b), (ii) korkeammaksi ja kapeammaksi, (iii) matalammaksi ja kapeammaksi eli saadaan kuva (c).

(b) Rajoitus on se, että entropian kasvua kuvava laatikko ei saa olla pienempi kuin entropian pienentymistä kuvava laatikko. Muutos (i) on siis aina mahdollinen ja (iii) aina mahdoton. Muutos (ii) voi olla mahdollinen, jos laatikon pinta-ala ei pienene.

(c) Hyötyuhde paranee, jos kone hukkaa vähemmän lämpöä. Niinpä hyötyuhde heikkenee muutoksessa (i) ja paranee muutoksissa (ii) ja (iii). Ts. hyötyuhteen huonontaminen on aina mahdollista, mutta sen parantaminen tällä tavalla onnistuu vain, jos jäähytys tapahtuu matalammassa lämpötilassa.

9.30 (a) Lämpötila kasvaa palaessa kaksinkertaiseksi, joten $s = 2$. Tilavuus puolestaan kolminkertaistuu laajenemisprosessin aikana, joten $r = 3$.

(b) Kaasun adiabaattivakio on $\gamma = 1.4$. Kaasu luovuttaa yhtälön (9.84) mukaan Otto-kierrossa energiaa hukkalämpönä määrään

$$Q_{\text{ulos}} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{\gamma-1}} \left(1 - \frac{1}{s} \right) N_{\text{vapaus}} N k_B T_{\text{max}} = (241 \text{ K}) n R. \quad (9.109)$$

Entropiadiagrammin perusteella Q_{ulos} on noin 700 J, joten $n = 0.35 \text{ mol}$.

(c) Hyötyuhde on yhtälön (9.86) perusteella

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} = 0.36. \quad (9.110)$$

Entropiadiagrammin perusteella kone ottaa kierron aikana lämpöä noin 1100 J ja luovuttaa hukkalämpöä 700 J, joten koneen tekemä työ on 400 J. Hyötyuhde on siis $\eta = 400/1100 = 0.36$, mikä täsmää.

Osa III

Sähkömagnetismi

10 Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkö on tuttu arkinen termi. Monet laitteet toimivat nykyään sähköllä, ja koko modernin yhteiskunnan toiminta on riippuvainen sähköstä. Sähkön merkitys on siis kaikille tuttu, mutta sähkön toiminta ei. Sähkölaitteista ei nimittäin näe päältä *miten* sähkö vaikuttaa niiden toimintaan. Sähköisten ilmiöiden ymmärtäminen vaatiikin niiden systeemattista tutkimista.

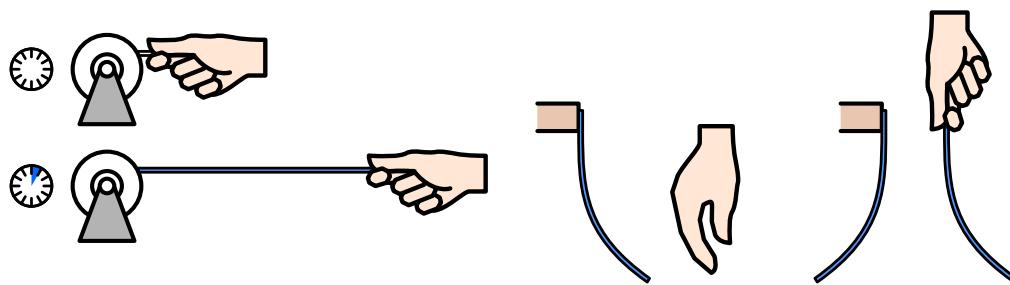
Tässä luvussa aloitamme sähköön liittyvien ilmiöiden opiskelun tarkastelemalla sähköiseksi varattuja kappaleita. Selvitämme mitä sähkövaraus on, ja miten sähkövaraukset vuorovaikuttavat keskenään sähkökentän välityksellä. Tutustumme myös erilaisiin tapoihin kuvata sähkökenttää ja määrittää varausten synnyttämän sähkökentän ominaisuudet. Lopuksi opimme, kuinka varausta voidaan siirtää paristoilla ja varastoida kondensaattoreihin.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää millä tavolla kappaleet voivat olla varautuneet ja miten tämä vaikuttaa niiden välisteeseen sähköiseen vuorovaikutukseen
- laskea pisteverausten ja symmetristen varausjakaumien sähkökenttä, sähkövuo ja potentiaali Coulombin ja Gaussian lakienvälistä
- selittää potentiaalin ja sähkökentän yhteyksien ja määrittää nämä kun sekä laskien että graafisesti, kun toinen tunnetaan
- laskea varaukseen kohdistuva voima ja sen potentiaalienergia sähkökentän ja potentiaalin avulla
- selittää miten erilaiset materiaalit käyttäytyvät sähkökentässä
- selittää pariston ja kondensaattorin toiminta sekä määritellä lähdejännite ja kapasitanssi

Kuva 10.1: Rullasta vedetyllä teipillä on sähkövaraus, sillä teippi vuorovaikuttaa sähköisesti toisten kappaleiden kanssa.

- (a) Vedetään rullasta pätä teippiä. (b) Käsi vetää teippiä puoleensa. (c) Teipit hylkivät toisiaan.



10.1 Sähkövaraus

Sähköinen vuorovaikutus

Kokeile seuraavaa: Revi paperista pieniä palasia. Kampaa sitten hiukiasi hetken aikaa ja tuo kampa paperipalojen yläpuolelle. Jos koe onnistuu, paperisilppu hyppää itsestään kiinni kampaan ja tarttuu siihen. Kappaleiden tarttuminen yhteen ei ole mitenkään erikoista, mutta merkittävää tässä kokeessa on se, että kampa vetää paperin itseensä kiinni *koskettamatta* sitä. Toisin sanoen paperin ja kamman välillä täytyy olla etävuorovaikutus, joka toimii vaikka vuorovaikutuksen osapuolet olisivat toisistaan erillään. Olemme tähän mennessä tutustuneet yhteen etävuorovaikutukseen, gravitaatioon. Mutta kampa ei selvästi käään vedä paperia puoleensa gravitaation avulla, koska se on siihen aivan liian pieni. Olemme havainneet uuden, **sähköisen vuorovaikutuksen**.

Havaittu vuorovaikutus voi vaikuttaa heikolta eikä kovin mielenkiintoiselta. Huomaa kuitenkin, että koska kampa vetää papereita ylöspäin, pienien kamman papereihin kohdistama sähköinen voima on suurempi kuin koko valtavan Maapallon niihin kohdistama painovoima! Sähköinen vuorovaikutus onkin siis itse asiassa paljon voimakkaampi kuin painovoima ja ehdottomasti tarkemman tutkimisen arvoinen.

Tavallisesti kappaleet eivät kuitenkaan koe voimakkaita sähköisiä vuorovaikutuksia. Tässäkin kokeessa paperi hyppää kampaan kiinni vain, jos kammalla on juuri kammattu. Kampaanminen siis muuttaa kamman ominaisuuksia niin, että se alkaa vuorovaikuttaa sähköisesti. Kutsumme kappaleiden kykyä vuorovaikuttaa painovoiman kautta painavaksi massaksi. Samaan tapaan kappaleiden kyvylle vuorovaikuttaa sähköisesti on annettu nimeksi **sähkövaraus** tai usein lyhyemmin pelkkä *vauraus*. Sähköisesti vuorovaikuttavilla kappaleilla on siis sähkövarausta, ja tällaisten kappaleiden sanotaan olevan *varattuja*. Kappaleita, joilla ei ole sähkövarausta, kutsutaan sähköisesti *neutraaleiksi*. Esimerkiksi edellisessä kokeessa kampaaminen tuottaa kampaan varauksen ja saa tällä tavalla kamman vuorovaikuttamaan sähköisesti. Jonkin ajan kuluttua kampa ei enää vedä paperisilppua puoleensa, joten sen sähkövaraus ilmeisesti katoaa ajan kuluessa. Tällöin varauksen sanotaan *purkautuvan*.

Jatketaan sähköisen vuorovaikutuksen tutkintaa ja käytetään seuraavissa kokeissa teippiä (esim. "Scotch Magic Tape" toimii hyvin). Vedä teippirullasta nopeasti pitkähkö (20 cm) pala teippiä ja kiinnitä se toisesta päästään esimerkiksi pöydän reunaan niin, että teippi roikkuu alas päin kuten kuvassa 10.1. Jos tuot kätesi teipin lähelle, huomaat teipin käännyvän kättäsi kohti. Teippi ja sen lähelle tuodut kappaleet vetävät siis toisiaan puoleensa. Tässäkin on kyseessä sähköinen vuorovaikutus, ja koska teipin lähelle tuodut kappaleet vetävät puoleensa teippiä mutta eivät toisiaan, juuri teipin täytyy olla sähköisesti varattu. Kokeen tulos on siis se, että *sähköisesti varattujen ja neutraalien kappaleiden välillä on attraktiivinen eli puoleensa vetävä vuorovaikutus*, kuten kamman ja paperinkin avulla jo havaittin.

Repäise sitten teippirullasta toinen samanlainen teipinpala. Pidä tästä teippiä kiinni toisesta päästä ja vie teippi lähelle ensimmäistä, pöytään kiinnitettyä teippiä (kuva 10.1 (c)). Nyt käy päinvastoin kuin edellisessä kokeessa. Teipit eivät käänny toisiaan kohti vaan *toisistaan poispäin*. Toisin sanoen *kahden samanlaisen varatun kappaleen välillä on repulsiivinen eli pois työntävä vuorovaikutus*. Tämä on merkittävä ero painovoimaan nähdyn. Painovoimahan on aina attraktiivinen vuorovaikutus eli kappaleet voivat ainostaan vetää toisiaan puoleensa painovoiman välityksellä. Sähköinen vuorovaikutus sen sijaan voi sekä olla attraktiivinen että repulsiivinen.

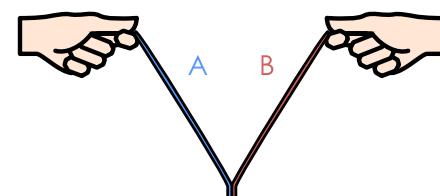
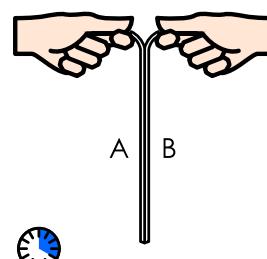
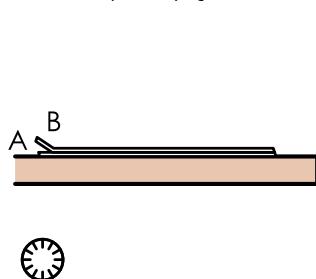
Jatketaan vielä tutkimusta. Seuraava askel vaatii hieman enemmän valmistelua kuten kuvassa 10.2 on näytetty. Vedä nyt varovasti pala teippiä ja kiinnitä se koko pituudeltaan sileään pöydän pintaan (kuitenkin niin että esimerkiksi yksi teipin kulma on irti, jotta saat teipin helposti irrottaua). Voit vielä hieroa teippiä kevyesti ylimääräisen varauksen poistamiseksi. Kutsutaan tästä teipiksi A. Ota sitten toinenkin pala teippiä

Kuva 10.2: Kahden eri tavoin varatun teipin valmistaminen.

(a) Liimataan kaksi teippiä toisiinsa. Tämä on helpointa pöydällä.

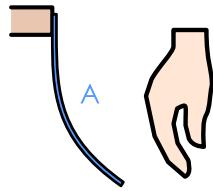
(b) Irrotetaan teipit pöydästä.

(c) Irrotetaan teipit nopeasti toisistaan.

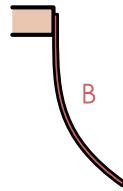


Kuva 10.3: Eri tavoin varautuneiden teippien vuorovaikutuksia.

(a) A ja käsi



(b) B ja käsi



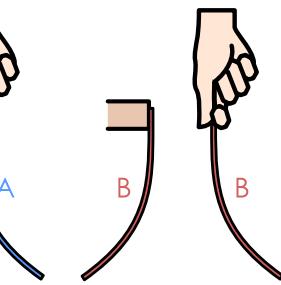
(c) A ja B



(d) A ja A



(e) B ja B



niin ikään hitaasti vetäen ja kiinnitä se täsmälleen edellisen teipin päälle. Tämä on teippi B. Tämän jälkeen irrota alempi teippi A pöydästä ja lopuksi vedä teipit A ja B nopeasti irti toisistaan.

Voit testata ovatko teipit A ja B varautuneet samaan tapaan kuin aikaisemmin. Kiinnitä kumpikin teippi yhdestä päästään pöydän reunaan ja tuo kätesi teippien lähelle. Huomaat, että *kumpikin* teippi käännyy kättäsi kohti (kuva 10.3 (a) ja (b)). Sekä A että B ovat siis sähköisesti varattuja. Irrota sitten teippi B pöydästä ja tuo se teipin A vireen kuten kuvassa 10.3 (c). Huomaat, että nämä teipit vetävät toisiaan puoleensa! Ne käyttäytyvät siis päinvastoin kuin kaksi suoraan teippirullasta vedettyjä teippiä, jotka pyrkivät kauas toisistaan. Kaksi samalla tavalla valmistettua teippiä ovat mitä ilmeisimmin myös samalla tavalla varautuneet, joten näiden kokeiden perusteella samalla tavalla varautuneet kappaleet kokevat repulsiivisen vuorovaikutuksen. Toisaalta koska teipit A ja B vuorovaikuttavat attraktiivisesti, ne eivät voi olla samalla tavalla varattuja. On siis olemassa erilaisia sähkövarauksia, ja *kahden eri tavoin varatun kappaleen välillä on attraktiivinen vuorovaikutus*.

Voit valmistaa lisää varattuja teippejä tai muita varattuja kappaleita ja testata, kuinka nämä vuorovaikuttavat A- ja B-typin teippien kanssa. Jos teet näin, huomaat kaikkien varattujen kappaleiden vetävän puoleensa toista teipeistä A tai B ja työntävän pois toista. Neutraalit kappaleet vetävät kumpaakin puoleensa, mutta mikään varattu kappale ei tee niin. Tämä on yleisesti tosi kokeellinen havainto. Jos meillä on kaksi eri tavoin varattua kappaleita kuten tässä teipit A ja B, kaikki muut varatut kappaleet kokevat näistä toisen kanssa attraktiivisen ja toisen kanssa repulsiivisen vuorovaikutuksen. Tämän kokeellisen faktan perusteella voimme päätellä, että *varausta on olemassa täsmälleen kahta lajia*, ja nämä vuorovaikuttavat siten, että samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan ja erilaiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Näitä sähkövarauksen lajeja kutsutaan **positiiviseksi** ja **negatiiviseksi** varaukseksi.

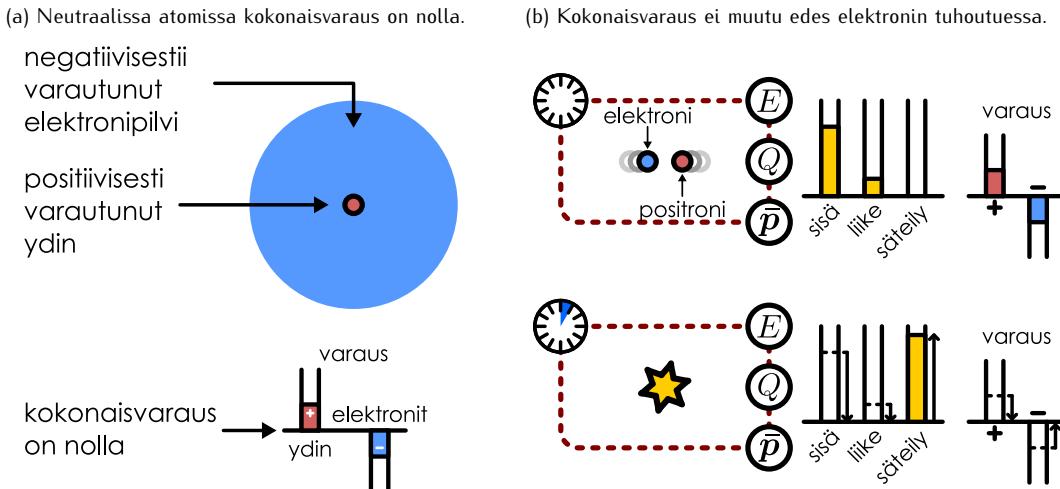


10.1 Oletetaan, että löytyisi kappale, joka vetää puoleensa neutraaleja kappaleita ja kumpaakin teippiä A sekä B. Miten tämä havainto muuttaisi edellä esitettyä kahden varauksen mallia?

Varauksen siirtyminen

Nykyään tiedetään, että aine koostuu sähköisesti varatuista hiukkasiista. Atomit ovat rakentuneet ytimisistä ja niitä ympäröivien elektronien muodostamasta pilvimäisestä kuoresta. Atomiytimissä olevilla protoneilla

Kuva 10.4: Tavallinen aine koostuu positiivisesti varatuista protoneista ja negatiivisesti varatuista elektroneista. Näitä hiukkasia voi luoda ja hävittää, mutta kokonaisvarausta ei voi.



on positiivinen varaus ja ytimiä ympäröivillä elektroneilla on negatiivinen varaus. Protonien lisäksi ytimissä on myös neutroneja, jotka ovat nimensä mukaisesti sähköisesti neutraaleja. Varausten lajit on historiallisesti sovittu näin pään. Aivan yhtä hyvin voitaisiin sopia, että elektronin varaus on positiivinen ja protonin negatiivinen. Fysikaalisesti oleellista on se, että näiden hiukkasten varaukset ovat *eri lajia*.

Sähkövaraus on ekstensiivinen suure aivan kuten massakin. Toisin sanoen usean hiukkisen muodostaman systeemin **kokonaissähkövaraus** saadaan laskemalla systeemin sisältämien hiukkasten varaukset yhteen, ja systeemi vuorovaikuttaa sähköisesti sitä voimakkaammin, mitä enemmän se sisältää varausta. Lisäksi koska negatiivinen ja positiivinen varaus vuorovaikuttavat täsmälleen päinvastaisilla tavoilla, negatiivisen varauksen lisääminen positiivisesti varattuun systeemiin muuttaa systeemin kykyä vuorovaikuttaa sähköisesti samalla tavalla kuin positiivisen varauksen vähentäminen. Nämä ollen on järkevä määritellä systeemin kokonaissähkövaraus Q_{kokonais} siten, että lasketaan yhteen systeemin sisältämä positiivinen varaus ja vähennetään siitä systeemin sisältämä negatiivinen varaus,

$$Q_{\text{kokonais}} = Q_{\text{positiivinen}} - |Q_{\text{negatiivinen}}|. \quad (10.1)$$

Juuri tämän ominaisuuden johdosta varauksen eri lajeja kutsutaankin positiiviseksi ja negatiiviseksi. Jos systeemissä on enemmän positiivista kuin negatiivista varausta, systeemi on kokonaisuudessaan positiivisesti varautunut. Samaten systeemi on negatiivisesti varautunut, jos siinä on enemmän negatiivista varausta kuin positiivista. Jos kumpaakin varauksen lajia on yhtä paljon, systeemi on neutraali.

Atomeissa on normaalista yhtä monta protonia ja elektronia, ja hyvin tarkkojen kokeellisten mittausten perusteella tällaiset atomit ovat aina täsmälleen neutraaleja (kuva 10.4 (a)). Tämä puolestaan tarkoittaa, että protonien ja elektronien sähkövarauksen täytyy olla itseisarvoltaan täsmälleen yhtä suuri. Tätä varauksen suuruutta kutsutaan **alkeisvaraukseksi**, ja sitä merkitään

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad (10.2)$$

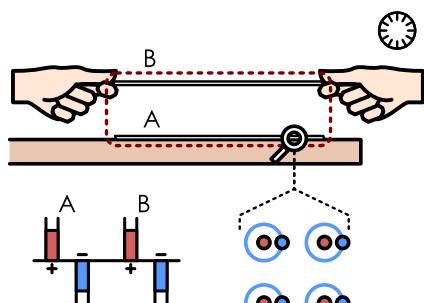
missä C on SI-järjestelmän sähkövarauksen yksikkö **coulombi** (Charles Augustin de Coulombi mukaan). Vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksesta lähtien tämä on ollut coulombin virallinen määritelmä, ja niinpä yhtälö 10.2 on tarkka. Protonin varaus on siis e ja elektronin $-e$.

10.2 Selvitä, onko yksi coulomb paljon vai vähän varausta. Arvioi sitten, paljonko 20 cm pituisessa teipissä on kaikkiaan atomeja, protoneja, ja elektroneja. Arvioi tämän perusteella, mikä on elektronien ja protonien lukumäärien suhde kuvan 10.1 negatiivisesti varattussa teipissä. Onko elektronien ylimäärä suuri vai pieni verrattuna neutraalissa teipissä olevien elektronien määrään?

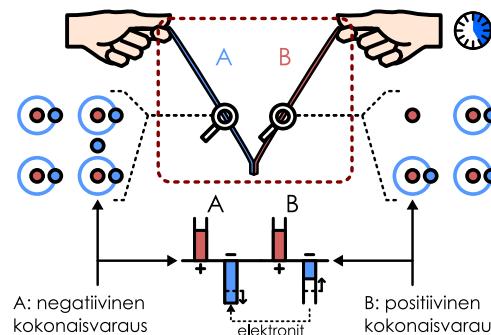
Protonien ja elektronien varaus ei voi muuttua, vaan jokaisen protonin ja elektronin varaus on aina sama. Siispä kappaleen varausta ei voi muuttaa muuttamalla sen sisältämien hiukkasten varauksia. Varausta voi kuitenkin muuttaa *siirtämällä* protoneja tai elektroneja. Jos esimerkiksi atomi menettää tai saa lisää elektroneja, siinä jää ylimäärä joko positiivista tai negatiivista varausta, jolloin atomista tulee varattu **ioni**. Samaan tapaan makroskooppiset kappaleet voivat varautua saamalla tai menettämällä protoneja tai elektroneja. Jokaisen elektronin tai protonin lisäys tai menetys muuttaa ionin tai kappaleen kokonaisvarausta aina yhden

Kuva 10.5: Varattujen teippien valmistuksessa sähkövarausta siirrytään teipistä toiseen.

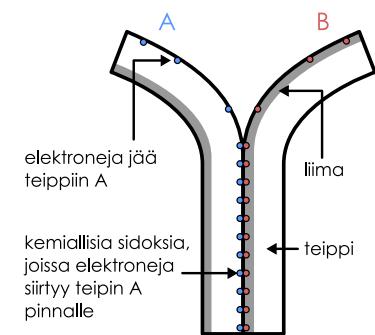
(a) Neutraalissa teipissä on yhtä monta protonia ja elektronia.



(b) Irrotuksessa osa elektroneista jää A-teippiin.



(c) Ylimääräinen varaus teipeissä.



alkeisvarauksen verran, joten kaikkien kappaleiden — niin mikroskooppisten kuin makroskooppistenkin — kokonaisvarauksen täytyy aina olla jokin alkeisvarauksen monikerta. Itse asiassa *kaikkien* luonnossa vapaasti havaittavien hiukkasten varaus on alkeisvarausten jollakin kokonaisluvulla kerrottuna (mahdollisesti myös nolla), joten alkeisvarausten todella on varauksen perusyksikkö.

Protonit ja elektronit ovat vakaita hiukkasia, jotka eivät tavallisesti häviä minnekään, joten varaus ei yleensä voi muuttua tälläkään tavalla. Tämä ei ole kuitenkaan yleisesti totta, sillä on olemassa hiukkasreaktioita, joissa alkeishiukkaset tuhoutuvat tai muuttuvat toisiksi hiukkasiksi. Protoneja ja elektroneja voi siis luoda ja hävittää, ja tällaisissa reaktioissa positiivisten ja negatiivisten varausten määrä voi muuttua. On esimerkiksi olemassa hiukan nimeltä positroni (tämä on eri hiukan kuin protoni), joka on ominaisuuksiltaan muuten samanlainen kuin elektroni paitsi että sen varaus on positiivinen, *e*. Kun elektroni ja positroni kohtaavat (kuva 10.4 (b)), voi tapahtua annihilaatioksi kusuttu reaktio, jossa kumpikin hiukan häviää ja jäljelle jää vain säteilyä, jolla ei ole sähkövarausta. Tässä reaktiossa häviää sekä positiivinen että negatiivinen alkeisvarausten varauksen eri lajit eivät erikseen säily. *Kokonaisvarausten* on kuitenkin edellä kuvatussa reaktiossa nolla sekä reaktion alussa että sen lopussa, joten se ei muutu. Itse asiassa kokonaisvarausten on muuttumaton vakio *kaikissa* tunnetuissa reaktioissa. Pätee siis suuri **varausten säilymislaki**: kokonaissähkövarausten on säilyvä suure, jota ei voi luoda eikä hävittää. Systeemin kokonaisvarausta voi muuttaa ainoastaan siirtämällä varausta systeemistä ja sen ympäristöön välillä, ja tavallisesti tämä tapahtuu siirtämällä elektroneja tai protoneja.

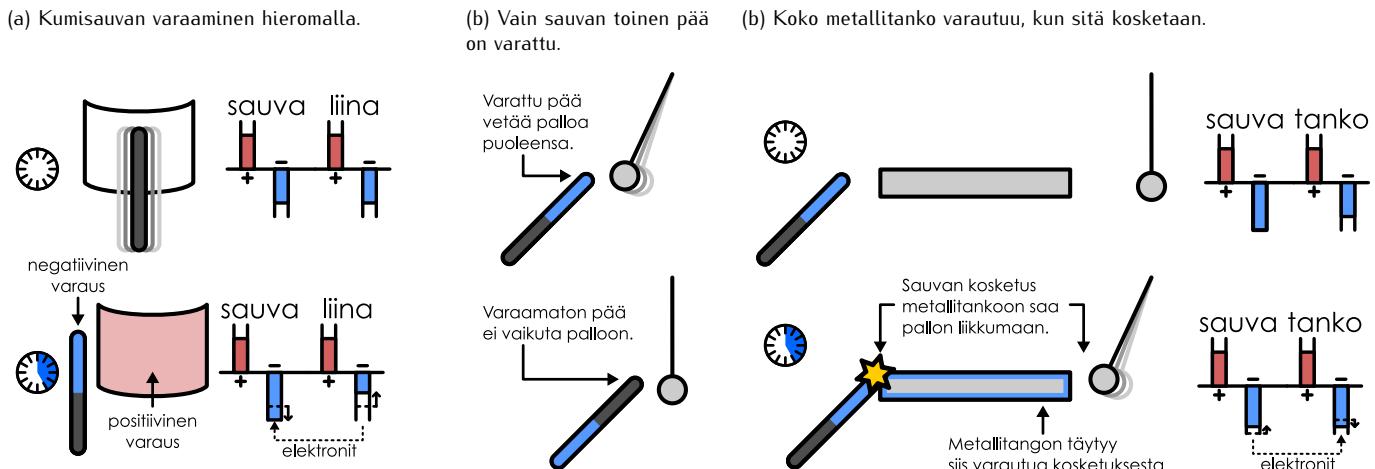
Varattuja hiukkasia kutsutaan yhteisesti **varaustenkuljettajiksi**, koska varaus liikkuu niiden mukana, ja *makroskooppisten kappaleiden varautuminen johtuu* *ainaa* *varaustenkuljettajien siirtymisestä*. Kappaleiden pintojen hierominen toisiaan vasten voi siirtää varattuja hiukkasia kappaleesta toiseen, jolloin kumpikin pinta varautuu. Tästä johtuu kamman varautuminen. Teippien tapauksessa liimapinnan rikkominen jättää pinnan eri puolille ylimääräisiä varauksia. Esimerkiksi varattujen teippien A ja B valmistus perustuu siihen, että hitaasti irrotetut teipit ovat lähes neutraalit, mutta kun kaksi teippiä revitään nopeasti irti toisistaan, toiseen teippiin jää hiukan enemmän positiivista ja toiseen negatiivista varausta (kuva 10.5).

Sähköisiä vuorovaikutuksia ei tavallisesti huomaa, koska yleensä aine on neutraalia tai ainakin likimain neutraalia. Edellisissä kokeissa käytetty varattu kampa ja teippi muuttuvat nekin varauamisen jälkeen melko pian sähköisesti neutraaleiksi. Tämä johtuu siitä, että erilaiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Esimerkiksi negatiivisesti varattu kappale vetää positiivisia kappaleita kuten ilmassa leijuvassa pölyssä olevia varattuja pölyhiutoja puoleensa. Kun positiiviset hiukkaset päätyvät negatiiviselle kappaleelle, kappaleessa oleva negatiivisen varauksen ylimäärä pienenee eli kappale muuttuu neutraalimmaksi. Vähitellen varaukset tasoittuvat ja kappaleesta tulee lopulta täysin neutraali ellei sitä varata uudestaan.

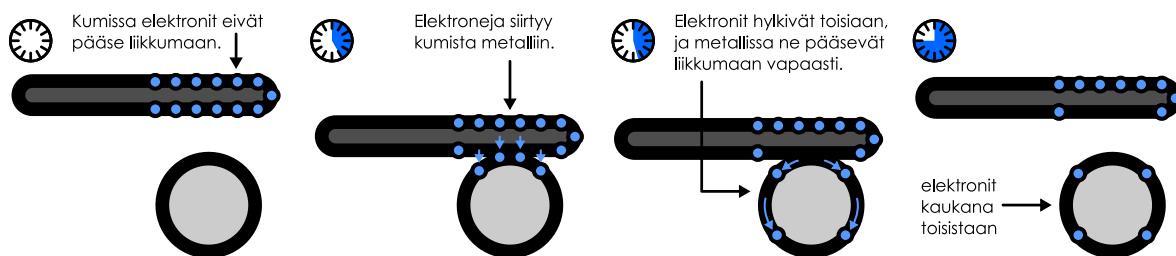
Varaus siis siirryttää varauksenkuljettajien mukana. Seuraavaksi haluammekin selvittää, *miten* varauksenkuljettajat käyttäytyvät erilaisissa materiaaleissa. Tutkitaan tästä varten kuvassa 10.6 esitettävää kokeita, joissa tarvitaan hieman enemmän välineitä kuin vain teippiä. Otetaan kuminen sauva ja hierotaan sen toista päätä kankaalla, jolloin varausta siirryttää sauvan sekä kankaan välillä ja kappaleet varautuvat. Tämä on samanlainen prosessi kuin hiusten kampaaminen, mutta kumisauvaan saadaan kerättä paljon suurempi varaus kuin kampaan. Ripustetaan pieni neutraali teräskuula roikkumaan langasta ja tuodaan kumisauva sen läheille. Varattu sauva ja neutraali pallo vetävät toisiaan puoleensa, mikä näkyi pallon siirtymisenä kohti sauvalta. Tämä koe osoittaa, että sauva on todella varautunut. (Koe onnistuu parhaiten ontolla kuulalla, koska umpiteräksinen kuula voi olla liian raskas.)

Käännetään sauva sitten ympäri ja tuodaan sauvan vastakkainen pää (jota ei hierottu kankaalla) läheille palloa. Nyt pallo ei liiku, joten sauvalta tähän pään täytyy olla neutraali (kuva 10.6 (b)). Toisin sanoen vaikka sauvalta yhdessä päässä on ylimääräistä varausta, varaus ei itsestään liiku sauvalta läpi sen toiseen päähän.

Kuva 10.6: Varaus ei liiku kumissa, joten kumi on eriste. Metalli on johde, ja siinä varaus pääsee liikkumaan.



Kuva 10.7: Johteessa varaus levää aina kappaleen pinnalle, koska samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan.

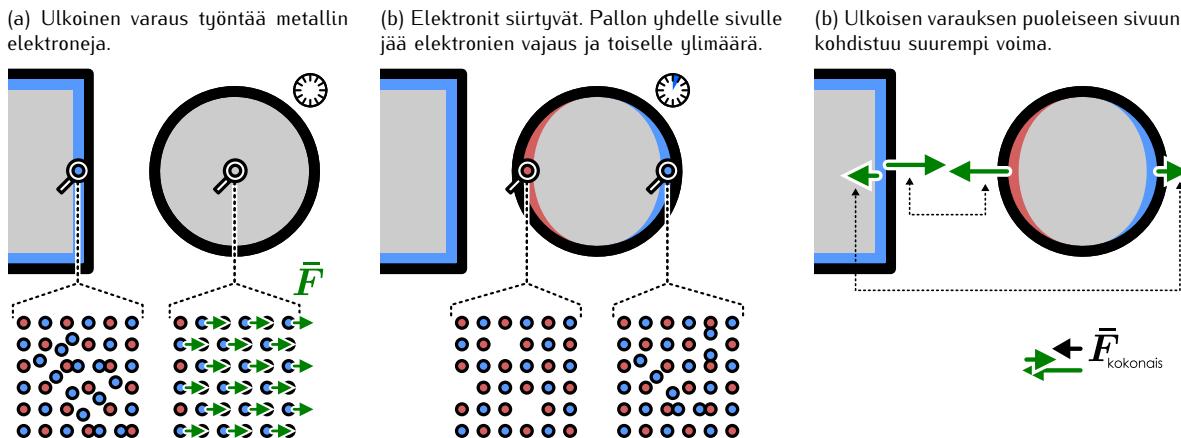


Otetaan seuraavaksi terästanko ja asetetaan se kuvan 10.6 (c) tapaan toinen pää metallikuulan lähelle. Kosketetaan sitten terästangon kuulaan nähdien vastakkaista päättä kumisauvan varatulla pääällä. Tämä saa kuulan heilahtamaan kohti metallitankoa, mikä osoittaa metallitangon varautuneen koskettajaessaan kumisauvaa. Varauksenkuljettajia siis siirtyy tankojen välillä niiden koskettajaessa toisiaan. Eritystä tässä kokeessa on se, että metallitankoa kosketettiin kuulasta *kaukana* olevaan päähän, mutta kuulan heilahdus osoittaa metallitangon varautuneen myös kuulaa *lähellä* olevasta päästä. Toisin sanoen metallitangon yhden pään varaaminen saa myös sen toisenkin pään varautumaan. *Varaus siis liikkuu metallin läpi itsestään.*

Aineita, joissa varaus liikkuu helposti, kutsutaan **johteiksi**. Aineet, joissa varaus ei pääse liikkumaan, ovat puolestaan **eristeitä**. Kyseessä on samankaltainen jaottelu kuin aineiden jako lämmönjohteisiin ja lämpöeristeisiin, ja itse asiassa sähköä hyvin johtavat aineet tavallisesti johtavat hyvin myös lämpöä. Sähköisten johteiden ja eristeiden erot ovat kuitenkin yleensä paljon selkeämät kuin lämmonjohteiden ja -eristeiden. Tämä johtuu siitä, että lämpöä siirtyy atomien väärähtelyjen levitessä, mitä tapahtuu katkissa aineissa. Sähkövarauksen siirtäminen vaatii kuitenkin varauksenkuljettajien siirtämistä paikasta toiseen, mikä on mahdollista vain jos varatut hiukkaset pääsevät liikkumaan aineessa kohtuullisen helposti. Esimerkiksi metallit ovat hyviä johteita, koska niissä osa elektroneista ei ole kiinnittyntä mihinkään yksittäiseen atomiytimeen vaan nämä elektronit pääsevät liikkumaan aineen läpi kuljettaen varausta mukanaan. Myös monet nestemäiset liukokset ovat tavallisesti hyviä johteita, koska niissä on paljon ioneja, jotka pääsevät liikkumaan nesteessä ja kuljettaa näin varausta. Kumissa sen sijaan kaikki elektronit ovat sitoutuneet atomeihin ja molekyyleihin, eivätkä nämäkin pääse liikkumaan toistensa suhteeseen. Kumi on siis eriste, koska siinä kaikki varauksenkuljettajat on vangittu tiukasti paikoilleen.

Eristekappaleessa varaus voi asettua melkein miten vain, koska varauksenkuljettajat eivät pääse siinä liikkumaan. Jos esimerkiksi varatulla kumisauvalla kosketetaan kumipalloa, varausta siirtyy ainoastaan kappaleiden kosketuspintojen välillä. Tällä tavalla kumipalloon voi "asetella" varausta haluttuihin kohtiin. Johteessa tämä ei onnistu. Jos metallista palloa kosketetaan varatulla sauvalla, varauksenkuljettajia siirtyy jälleen kosketuspintojen välillä. Jos esimerkiksi neutraalia palloa kosketetaan negatiivisesti varatulla sauvalla, palloon siirtyy ylimääräisesti negatiivisesti varautuneita elektroneja kuten kuvassa 10.7. Kuitenkin koska elektroneilla on keskenään samanlainen varaus, niiden välillä on repulsiivinen vuorovaikutus. Elektronit siis työntävät toinen toistaan kauemmaksi toisistaan. Metallissa elektronit pääsevät liikkumaan vapaasti, joten tämä työntävä

Kuva 10.8: Neutraali metallipallo polarisoituu ulkoisen varauksen lähellä.



voima saa ne liikkeelle. Elektronit pyrkivät levittymään metalliin, ja ne liikkuvat mahdollisimman kauas toisistaan. Pallossa tämä tarkoittaa sitä, että varaus jakautuu tasaisesti pallon pinnalle. Samalla periaatteella *kaikissa johteissa ylimääräinen varaus levittäätyy aina johteen pinnoille*.

10.3 Sinulla on punaisia ja sinisiä kuulia. Oletetaan, että samanväriset kuulat hylkivät toisiaan ja eriväriset vetävät toisiaan puoleensa. Miten kuulat käyttäytyvät, jos laitat ämpäriin (a) vain punaisia kuulia, (b) yhtä paljon molempia kuulia, (c) enemmän sinisiä kuin punaisia kuulia? Kuulia on niin vähän, että ne pääsevät liikkumaan vapaasti.

Polarisaatio

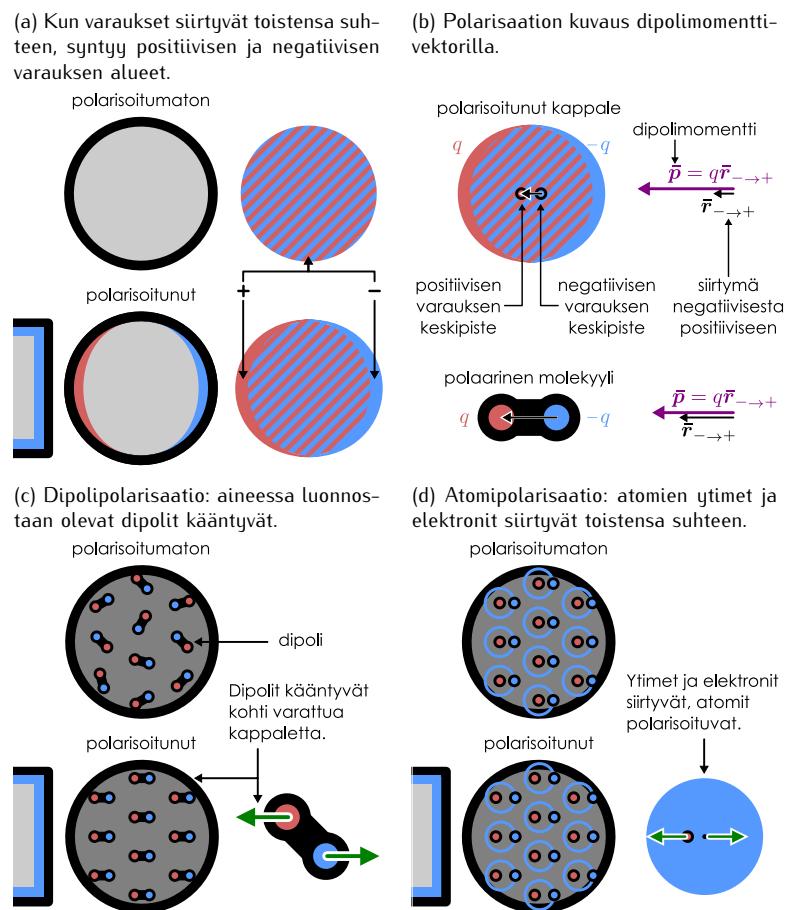
Vielä on selittämättä, miksi sähköinen voima vaikuttaa neutraalien ja varattujen kappaleiden välillä. Sähkövaraushan määriteltiin niin, että se kuvailee kappaleen kykyä vuorovaikuttaa sähköisesti. Tämän perusteella voisi ajatella, että neutraali kappale ei voi vuorovaikuttaa sähköisesti, koska sillä ei ole sähkövarausta. Tämä on kuitenkin väärä päätelmä, koska neutraalikin aine on täynnä sähkövarausta. Neutraaleissa kappaleissa positiivista ja negatiivista varausta vain on kumpaakin yhtä paljon. Tavallisesti positiivinen ja negatiivinen varaus jakautuvat aineeseen tasaisesti, jolloin eri varauksiin kohdistuvat sähköiset vuorovaikutukset kumoavat toisensa täydellisesti. Näin ei kuitenkaan tarvitse olla, koska varaus voi siirtyä myös neutraalin kappaleen sisällä.

Jos negatiivisesti varautuneen terästangon pää tuodaan neutraalin teräspallon läheille, tangon negatiivinen varaus vetää pallon sisäistä positiivista varausta puoleensa ja työntää negatiivista varauksta pois päin (kuva 10.8 (a)). Teräspallossa positiivisesti varautuneet atomiytimet eivät pääse juuriakaan liikkumaan, mutta elektronit pääsevät. Niinpä elektroneja alkaa siirtyä kohti pallon sitä puoliskoa, joka on kaukana varatusta tangosta. Tämä johtaa ylimääräisten elektronien kertymiseen pallon tangosta katsoen kaukaisemmalle sivulle, jolloin pallon tämä puoli varautuu negatiivisesti. Samalla tangonpuoleiselle sivulle jää vähemmän elektroneja kuin mitä siellä on protoneja atomiytimissä, jolloin tällä sivulla on ylimääräistä positiivista varausta (kuva 10.8 (b)). Pallon vastakkaiset sivut siis varautuvat vastakkaismerkkisesti, jolloin pallon sanotaan **polarisoituvan**.

10.4 Kuvassa 10.8 (b) on esitetty, kuinka osa teräspallon elektroneista siirrytävät pallon vasemmalta laidalta oikeaan laitaan. Mikseivät kaikki elektronit siirry pallon oikeaan laitaan?

Polarisoitunut pallo on edelleen kokonaisuudessaan neutraali, sillä siinä on yhtä paljon positiivista ja negatiivista varausta. Pallossa on kuitenkin positiivisesti ja negatiivisesti varautuneet alueet, jotka vuorovaikuttavat sähköisesti muiden varausten kanssa. Sähköinen vuorovaikutus toimii pitkienkin etäisyyksien päästä, eikä varauksien välissä oleva aine estää vuorovaikutusta. Niinpä varattu tanko vuorovaikuttaa pallon kummankin varatun puliskon kanssa. Tässä tapauksessa pallon positiivisesti varautuneeseen sivuun kohdistuva voima osoittaa kohti negatiivisesti varattua tankoa ja negatiivisesti varautuneeseen sivuun kohdistuva voima osoittaa tangosta pois päin (kuva 10.8 (c)). Sähköinen vuorovaikutus on kuitenkin sitä voimakkaampi, mitä lähempänä toisiaan sähkövaraukset ovat. Koska polarisoituneen pallon positiivinen sivu on lähempänä negatiivisesti varattua tankoa, siihen kohdistuu suurempi sähköinen voima kuin pallon negatiiviseen sivuun. Näin ollen neutraaliin mutta *polarisoituneeseen palloon kohdistuu kokonaivoima kohti varattua tankoa*. Vastaavasti sauvaan kohdistuu voima kohti palloa.

Kuva 10.9: Polarisaatio johtuu aina positiivisen ja negatiivisen varauksen erottumisesta. Metalleissa elektronit pääsevät liikkumaan vapaasti. Eristeissä varauksenkuljettajat siirtyvät vain vähän. Polarisaation suunta ja voimakkuutta kuvaavat dipolimomentti. Se on vektori, jonka suunta on negatiivisesta positiiviseen ja jonka suuruus on erotettujen varausten itseisarvon ja niiden välisen etäisyyden tulo.



10.5 Miten neutraali metallipallo polarisoituu, jos sen vieressä on positiivisesti varautunut sauva? Millainen voima pallon eri osiin silloin kohdistuu ja millainen kokonaisvoima palloon vaikuttaa? Millainen voima kohdistuu tällöin sauvaan?

Polarisaatiota voi kuvata myös kuvassa 10.9 (a) esitettyllä yksinkertaistetulla mallilla. Tässä mallissa neutraalin pallon ajatellaan koostuvan täsmälleen päällekkäin olevista positiivisen ja negatiivisen varauksen muodostamista palloista. Positiivinen pallo edustaa siis aineen atomiytimiä ja negatiivinen pallo sen elektroneja, mutta tässä mallissa aineen mikroskooppinen rakenne jätetään huomioimatta. Alue, jossa pallot ovat päällekkäin (kuvassa raidoitettu alue), on neutraali. Kun teräspallon lähellä ei ole muita varattuja kappaleita, pallo on kauttaaltaan neutraali, joten se on kuvassa pürretty kokonaan raidalliseksi.

Pallon lähelle tuotu negatiivisesti varattu tanko kohdistaa positiivisesti varattuun palloon voiman kuvassa vasemmalle ja negatiivisesti varattuun palloon voiman oikealle. Tämä saa varatut pallot siirtymään toistensa suhteeseen, ja näin pallon reunoihin muodostuu positiivisen ja negatiivisen varauksen alueet. Kuvassa varattujen alueiden koko on liioiteltu, eikä palloon todellisuudessa muodostu alueita, joissa olisi pelkästään positiivista tai negatiivista varausta. Tässäkin yksinkertaisessa mallissa on silti oikea perusajatus, ja monesti on kätevää kuvata polarisaatiota tällaisella yksinkertaisella mallilla. Erityisesti malli kuvaa polarisaation voimakkaiden yksinkertaisella tavalla: *mitä enemmän positiivinen ja negatiivinen pallo ovat siirtyneet toistensa suhteeseen ja mitä suurempia pallojen varaukset ovat, sitä voimakkaammin pallo on polarisoitunut*.

Tällaista mallia, jossa polarisoitunutta kappaleita kuvataan kahtena toistensa suhteeseen siirtyneenä positiivisena ja negatiivisena varauksena, kutsutaan **dipoliksi** (kreikkaa di 'kaksi', poli 'napa', 'puoli'). Dipoli on erittäin tärkeä malli, koska vaikka sekä useimmat makroskooppiset kappaleet että mikroskooppiset atomit ja molekyylit ovat kokonaisuudessaan neutraaleja, ne voivat silti olla polarisoituneita. Tällöin niiden kokeamaa sähköistä vuorovaikutusta ei voi kuvata kokonaisvarauksella (joka on nolla), vaan sitä täytyy kuvata polarisaation suunnan ja voimakkuuden kautta. Dipoli on yksinkertaisin tällaisia kappaleita kuvaava malli.

Matemaattisesti dipolin polarisaation suuntaa ja suuruutta kuvaa **dipolimomentti**, jota on havainnollistettu kuvassa 10.9 (b). Dipolimomentti on vektorisuure, jonka on sovittu osoittavan aina dipolin negatiivisesta päästä

kohti sen positiivista päätä. Dipolimomenttivektorin pituus on puolestaan dipolin muodostavien varausten itseisarvon ja niiden välisen etäisyyden tulo. Jos siis esimerkkimme varattujen pallojen varaukset ovat q ja $-q$, ja negatiivisen pallon keskipisteestä positiivisen pallon keskipisteesseen osoittava vektori on $\bar{r}_{- \rightarrow +}$, polarisaatiota kuvaava dipolimomenttivektori on

$$\bar{p} = q\bar{r}_{- \rightarrow +}. \quad (10.3)$$



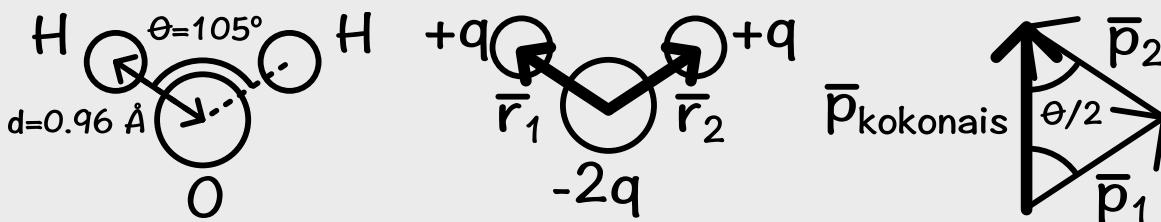
10.6 (a) Systeemissä on varaukset 1 nC pisteissä $(0, 0)$ ja $(1, 0)$ (nanometrejä) sekä varaukset -1 nC pisteissä $(1, 0)$ sekä $(2, 0)$. Mikä on systeemin dipolimomentin suuruus? (b) Onko dipolimomentti tämän perusteella ekstensiivinen suure? (c) Jos kahdella systeemillä on sama dipolimomenttivektori, täytyykö systeemien varaukset olla keskenään samanlaiset?

esimerkki 10.1

Vesimolekyylin dipolimomentti

Vesimolekyyllä H_2O atomit muodostavat leveän V-kirjaimen muotoisen molekyylin, jossa sidosten pituus on 0.096 nm ja niiden välinen kulma on noin 105° . Happi on hyvin elektronegatiivinen alkuaine, joten happiatomi vetää elektroneja voimakkaasti puoleensa. Tästä johtuen happiatomi on lievästi negatiivisesti varautunut ja vedyt positiivisesti. Molekyylin dipolimomentiksi mitataan $6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$. Mikä on happi- ja vetyatomien nimellinen varaus?

TILANNE Piirretään kuva molekyylistä. Merkitään sidosten pituuksia $d = 9.6 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0.96 \text{ \AA}$ (tässä esiintyvä erikoisyksikkö $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ on nimeltään Ångström, Anders Ångströmin mukaan), sidosten välistä kulmaa $\theta = 105^\circ$ ja vetyatomien varausta q . Symmetrian perusteella kummankin vedyn varauksen pitää olla sama, ja koska molekyyli on kokonaisuudessaan neutraali, hapen varauksen täytyy olla $-2q$. Molekyylin kokonaismomentti on $p_{\text{kokonais}} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$.



SUUNNITELMA Ajatellaan hapen varauksen koostuvan kahdesta pisteverauksesta $-q$. Tällöin voimme yhdistää yhden näistä varauksista q dipoliksi yhden vedyn varauksen q kanssa, ja toisen varauksen q dipoliksi toisen vedyn varauksen $-q$ kanssa. Nämä systeemistä voi ajatella sisältävän kaksi dipolimomenttivektoria. Kahden pisteverauksen dipolimomentin suuruus on varausten itseisarvon q ja niiden välisen etäisyyden d tulo, $p = p_1 = p_2 = qd$, ja momenttivektorin suunta on negatiivisesta (hapesta) positiiviseen (vetyyn). Koko molekyylin dipolimomentti saadaan näiden vektoreiden summana.

RATKAISU Dipolimomenttivektorit muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka kanta on kokonaismomenttivektori. Kannan puolikkaan pituus saadaan kyljen pituuden avulla,

$$\frac{1}{2}p_{\text{kokonais}} = p \cos \frac{\theta}{2} = qd \cos \frac{\theta}{2}, \quad (10.4)$$

ja tästä voidaan ratkaista varaukseksi

$$q = \frac{p_{\text{kokonais}}}{2d \cos(\theta/2)} = \frac{6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}}{2 \cdot 9.6 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \cos 52.5^\circ} = 5.3 \cdot 10^{-20} \text{ C}. \quad (10.5)$$

ARVIOINTI Vetyatomin varaus on siis $q = 0.3e$, eli vedyltä puuttuu noin puoli elektronia. Atomista ei voi poistaa puolikasta elektronia, mutta nyt kovalenttisen sidoksen muodostavat elektronit ovat levittyneet sekä hapen että vedyn ympärille ja väliin, ja elektronit ovat keskimäärin lähempänä happea. Yksinkertainen dipolimalli, jossa varausten ajatellaan olevan pistemäisiä, ei siis tässä tapauksessa ole täsmälleen totta. Tulos on silti järkevä, koska vetyatomissa on vain yksi protoni, joten vedylle ei voi mitenkään antaa suurempaa varausta kuin e .

Johteet polarisoituvat voimakkaasti, koska niissä varaukset pääsevät liikkumaan helposti. Myös eristeet polarisoituvat vaikkakaan eivät yhtä paljon kuin johteet, sillä vaikka varauksenkuljetajat eivät pääse liikkumaan eristeen läpi, varaukset pääsevät eristeissäkin siirtymään pieniä matkoja. Jotkin eristemateriaalit koostuvat molekyyleistä, jotka ovat luonnostaan dipoleja. Tällaiset dipolit ovat tavallisesti käännyneet satunnaisiin asentoihin, jolloin keskimäärin kaikkialla on yhtä paljon positiivista ja negatiivista varausta ja makroskoopisessa mittakaavassa aine on neutraalia. Jos tällaisen materiaalin lähelle tuodaan negatiivinen varaus, se vetää puoleensa dipolien positiivisia pääitä ja työntää pois negatiivisia. Vaikkeivät dipolit pääsisikään siirtymään, tämä vuorovaikutus saa dipolit silti käänymään yhdensuuntaisiksi niin, että kaikkien molekyylien

positiivisesti varautunut pää osoittaa ulkoista negatiivista varausta kohti (kuva 10.9 (c)). Näin aineen pinnalle kertyy pieni positiivinen varaus ulkoisen varauksen lähelle ja negatiivinen varaus vastakkaiselle pinnalle. Dipolimomenttivektoreiden avulla ilmaisten kaikkien molekyylien dipolimomentit kääntyvät osoittamaan samaan suuntaan, jolloin kappaleen kokonaisdipolimomentti saadaan laskemalla kaikkien mikroskooppisten dipolien dipolimomenttivektorit yhteen.

Jos eriste ei koostu dipoleista, yllä kuvattu polarisaatiomekanismi ei ole mahdollinen. Kaikki aine kuitenkin koostuu atomeista eli positiivisesti varatuista ytimistä ja niiden ympärillä olevista negatiivisesti varatuista elektroneista. Koska elektroneilla ja ytimellä on erilaiset sähkövaraukset, ne vetävät toisiaan sähköisesti puoleensa hyvin voimakkaasti. Näin elektronit pysyvät kiinni ytimestä. Tavallisesti elektronit ovat levittyneet symmetrisesti ytimen ympärille niin, että atomi vaikuttaa ulospäin täysin neutraalilta. Jos kuitenkin atomin lähellä on sähkövaraus, tämä varaus kohdistaa ytimeen ja elektroneihin vastakkaiset voimat. Esimerkiksi kuussa 10.9 (d) negatiivisesti varautunut kappale vetää ydinä puoleensa ja työntää elektroneja poispäin. Elektronit eivät irtoa ytimestä ellei atomin lähellä oleva sähkövaraus ole hyvin suuri ja hyvin lähellä atomia, mutta ydin ja elektronit kuitenkin siirtyvät hieman toistensa suhteeseen. Näin atomi itsessään polarisoituu muuttuen pieneksi dipoliksi. Tällä mekanismilla myös pelkästään neutraaleista atomeista koostuva eriste polarisoituu, kun sen lähelle tuodaan varattu kappale.



10.7 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä sähkövarauksista. Millainen vuorovaikutus varausten välillä havaitaan? Mistä tiedetään varausta olevan täsmälleen kahta tyyppiä? Mikä on dipoli ja miten se vuorovaikuttaa varausten kanssa?

10.2 Sähkökenttä

Pisteverausten välinen vuorovaikutus

Edellä tarkastelluissa kokeissa näimme, että sähkövaraukset kohdistavat toisiinsa voiman. Toistaiseksi kuitenkin selvitimme vasta sen, että samanlaiset varaukset kohdistavat toisiinsa repulsiivisen ja erilaiset varaukset attraktiivisen voiman. Nyt kuvaillemme tarkemmin, millainen sähkövarausten välinen voima on. Yleisesti varattujen kappaleiden väliset voimat riippuvat kappaleiden muodosta ja siitä, miten varaus on niissä jakautunut. Kokeellisesti kuitenkin havaitaan, että jos varatut kappaleet ovat pieniä niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, kappaleiden välinen voima ei riipu kappaleiden täsmällisestä muodosta vaan ainoastaan niiden välistä etäisyydestä ja varauksista. Tämän voi ajatella johtuvan siitä, että tarpeeksi kaukaa katsottuna min-kään äärellisen kokoinen kappaleen muotoa ei voi tarkkaan havaita vaan kaikki kappaleet näyttävät kaukaa vain yhdeltä pieneltä pisteeltä. Samaan tapaan minkä tahansa kahden äärellisen kokoinen varatun kappaleen väillä vaikuttava sähköinen voima on samanlainen kuin jos kummankin kappaleen kokonaisvaraus puristettaisiin yhteen pisteeseen, kunhan kappaleet ovat tarpeeksi kaukana toisistaan. Tämän havainnon ansiosta minkä tahansa tarpeeksi pienien varatun kappaleen voi ajatella olevan yksi varattu piste tai hiukanen. Tätä kutsutaan **pisteverausmalliksi**.

Pisteverausten välistä voimaa tutkittiin kokeellisesti jo 1700-luvulla. Tällöin havaittiin, että *kahden pisteverauksen välinen voima on suoraan verrannollinen varausten suuruuteen ja käänten verrannollinen varausten välichen etäisyyden neljöön* (kuva 10.10 (a)). Jos varauksilla on sama merkki, voima työntää varauksia toisistaan poispäin. Jos sen sijaan toinen varaus on positiivinen ja toinen negatiivinen, voima vetää varauksia kohti toisiaan (kuva 10.10 (b)). Tämä tulos tunnetaan **Coulombin lakin**. Matemaattisesti laki voidaan ilmaista seuraavasti: Merkitään pisteverauksia A ja B ja niiden paikkavektoreita \bar{r}_A ja \bar{r}_B . Tällöin voiman suuruus on

$$F_{\text{pisteveraukset}} = k_\varepsilon \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2}, \quad (10.6)$$

missä verrannollisuuskerroin $k_\varepsilon = 8.988 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$ on ns. Coulombin vakio ja $r_{A \rightarrow B} = |\bar{r}_B - \bar{r}_A|$ on varausten välinen etäisyys. Voiman suunnan voi puolestaan ilmaista varauksesta A kohti varausta B osoittavan yksikkövektorin avulla (kuva 10.10 (c)),

$$\hat{r}_{A \rightarrow B} = \frac{\bar{r}_{A \rightarrow B}}{r_{A \rightarrow B}} = \frac{\bar{r}_B - \bar{r}_A}{|\bar{r}_B - \bar{r}_A|}. \quad (10.7)$$

Yhdistämällä suuruus ja suunta saadaan varaukseen B kohdistuvan voimavektorin lausekkeeksi

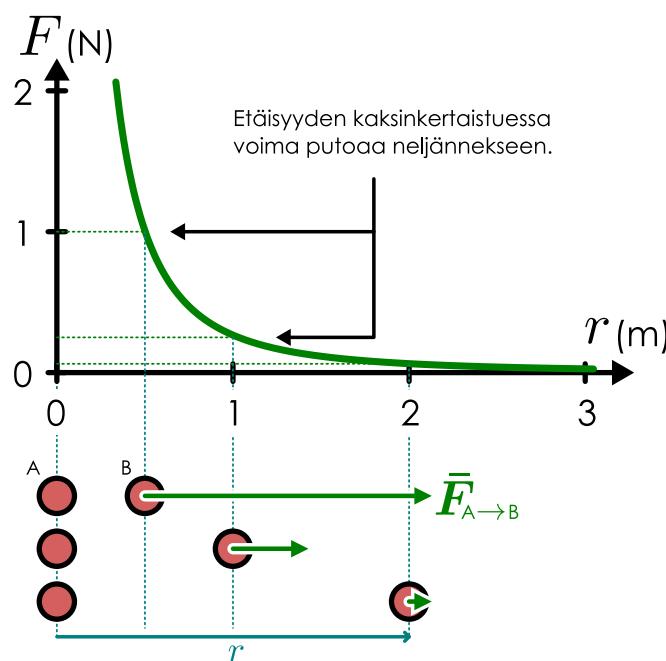
$$\bar{F}_{A \rightarrow B} = k_\varepsilon \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} \hat{r}_{A \rightarrow B}. \quad (10.8)$$

Varaukseen A kohdistuva voima on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen, $\bar{F}_{B \rightarrow A} = -\bar{F}_{A \rightarrow B}$.

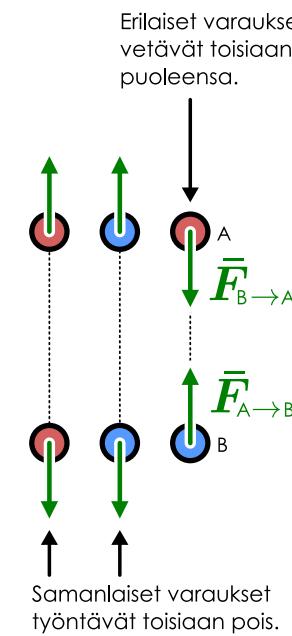
Coulombin laki on yksinkertainen ja helppo soveltaa, mutta siihen lüttyy joukko oletuksia. Kuten jo mainittiin, laki pätee vain pisteverauksille. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että laki toimii vain silloin, kun

Kuva 10.10: Kahden pistevarauksen välinen voima.

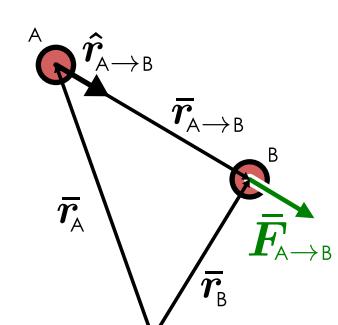
(a) Voiman suuruus on käänään verrannollinen varausten välisen etäisyyden neljänneksi.



(b) Voiman suunta.



(c) Vektoriesitys.



varattujen kappaleiden välinen etäisyys on paljon suurempi kuin kappaleiden halkaisija. Osoittautuu myös, että laki pätee tarkasti vain *paikoillaan oleville varauksille*. Se on hyvä approksimaatio varausten liikkuessa hitaasti, mutta nopeasti liikkuvien varausten väliset voimat eivät noudata Coulombin lakkia.

10.8 Pistevaraukset (suuruus 1 nC) ovat tason pisteissä A: (1.0, 1.0) ja B: (-2.0, 3.0) (yksiköt metrejä).

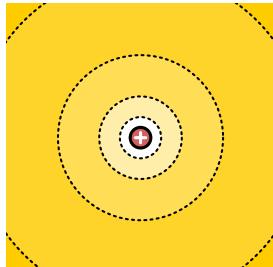
- (a) Mikä on varausten välinen etäisyys?
- (b) Mikä on pisteestä A pisteeseen B osoittava vektori (karteesisissa komponenteissa)?
- (c) Mikä on pisteestä A pisteeseen B suuntaan osoittava yksikkövektori?
- (d) Mikä on varaukseen B kohdistuvan voiman suuruus?
- (d) Mikä on varaukseen B kohdistuva voimavektori?

Vuorovaikutuksen välittäjä

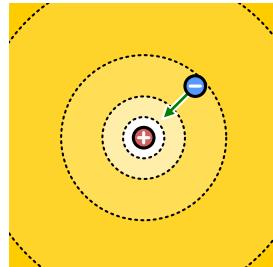
Sähköinen vuorovaikutus toimii periaatteessa äärettömän pitkien etäisyyksien yli. Coulombin lain mukaisesti kahden pisteverauksen välisen sähköisen voiman suuruus kyllä heikkenee etäisyyden kasvaessa, mutta se ei koskaan ole täsmälleen nolla. Tässä suhteessa vuorovaikutus toimii samaan tapaan kuin gravitaatio, joka sekä vaikuttaa mielivaltaisen kaukaa.

Kuva 10.11: Kenttä on malli, joka selittää vuorovaikutuksen välittymisen pitkien matkojen päähän.

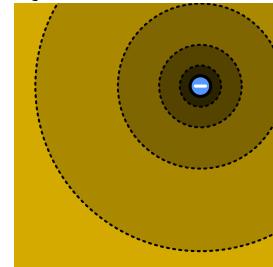
(a) Positiivinen varaus luo avaruuteen sähkökentän.



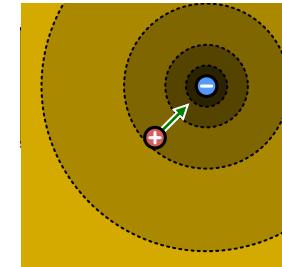
(b) Kenttä kohdistaa negatiiviseen varaukseen voiman.



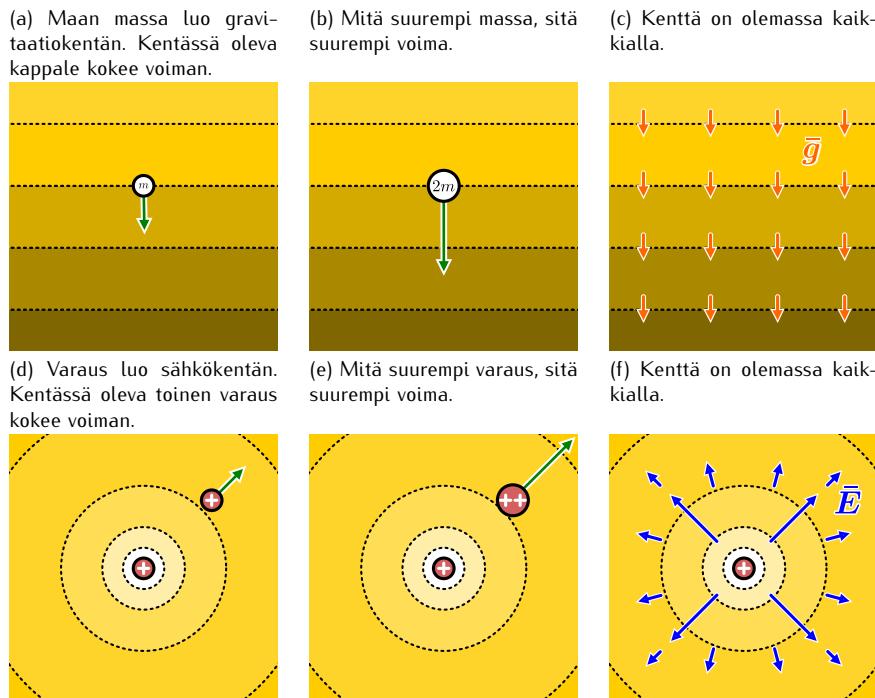
(c) Negatiivinen varaus luo myös sähkökentän.



(d) Positiivinen varaus tuntee tämän kentän.



Kuva 10.12: Sähköistä vuorovaikutusta ja gravaatiota voi kumpaan kuvata kenttämallilla.



Esittelimme jo luvussa 4 gravaatiokentän idean selittämään, kuinka painovoima toimii pitkien etäisyyksienkin päästää. Tämän mallin mukaan massiiviset kappaleet kuten Maapallo luovat ympärilleen gravaatiokentän — jonkinlaisen muutoksen avaruuden ominaisuuksissa — ja tämä kenttä levää kaikkielle avaruuteen. Muut massiiviset kappaleet tuntevat tämän kentän ja niihin kohdistuu kentässä painovoima, joka riippuu kappaleiden painavan massan suuruudesta että kentän ominaisuuksista. Aivan samaan tapaan sähkövarausten voi ajatella synnyttävän sähkökentän, joka levää varauksista kaikkielle avaruuteen. Kuva 10.11 on havainnollistettu positiivisen ja negatiivisen varauksen vuorovaikutus tämän kenttämallin avulla. Positiivinen varaus luo ympärilleen sähkökentän, joka on olemassa kaikkialla avaruudessa riippumatta siitä, onko avaruudessa muita varauksia. Kun tähän kenttään tuodaan toinen, negatiivinen varaus, tämä varaus tuntee kentän ja siihen kohdistuu kentässä sähköinen voima kohti kentän lähdettä eli positiivista varausta. Vastaavasti negatiivinen varaus synnyttää ympärilleen sähkökentän, ja tämä kenttä kohdistaa positiiviseen varaukseen voiman.



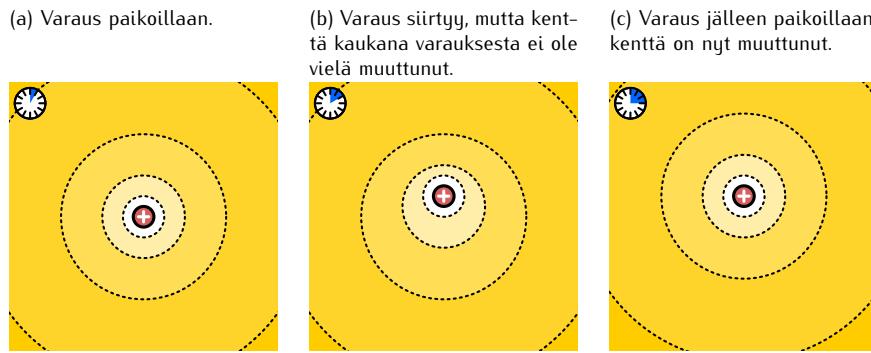
10.9 Kuva 10.11 varausten luoma kenttää on piirretty niin, että positiivisen varauksen lähellä kenttää kuva vaalea väri ja negatiivisen varauksen lähellä tumma väri. Kenttään tuodaan (i) positiivinen tai (ii) negatiivinen varaus. Voiko varaukseen kohdistuvan voiman suunnan päättää jotenkin näistä väreistä? Riippuuko tulos jotenkin siitä, onko kentän luonut positiivinen vai negatiivinen varaus?

Kuvassa 10.12 on havainnollistettu sähkökentän ominaisuuksia vertailemalla gravaatio- ja sähkökenttiä. Kuva 10.12 (a) on piirretty gravaatiokenttä sekä kentässä oleva kappale, johon kohdistuu painovoima kuvaassa alas päin, kohti kentän lähdettä eli Maapalloa. Kuvaassa (b) on täsmälleen sama kenttä, mutta nyt kentässä on massaltaan kaksinkertainen kappale, johon kohdistuu tieteenkin kaksinkertainen voima pienempään kappaleeseen verrattuna. Huomaa, että kuviin ei ole piirretty kentän synnyttänyttä massaa. Kyseessä voi olla Maapallon gravaatiokenttä, mutta sen ei tarvitse olla. Gravaatio vaikuttaa mielivaltaisen pitkien etäisyyksien päästää, eikä gravaatiokentässä oleva kappale "tiedä" miten kenttä on syntynyt. Kappale reagoi vain siihen, millainen gravaatiokenttä juuri sen kohdalla sattuu kulloinkin olemaan.

Painovoimakentän tapauksessa kentän voimakkuutta voidaan kuvata putoamiskiertyvyydyllä \bar{g} . Jos kentän tuodaan kappale, jonka massa on m , kappaleeseen kohdistuu painovoima $\bar{G} = m\bar{g}$. Putoamiskiertyvyyden suunta siis kertoo mihiin suuntaan kentässä olevaan kappaleeseen kohdistuva painovoima osoittaa ja voiman suuruus on putoamiskiertyvyyden ja kappaleen massan tulo. Lähellä maanpintaa kappaleeseen kohdistuu kaikkialla yhtä suuri ja samaan suuntaan osoittava painovoima, joten putoamiskiertyvyyden \bar{g} täytyy olla kaikkialla sama eli kentän täytyy olla homogeninen (kuva 10.12 (c)). Planeettojen välisessä avaruudessa näin ei ole, joten yleisesti painovoimakentän voimakkuus ja suunta riippuu siitä, missä avaruuden pisteessä ollaan.

Kuvassa 10.12 (d) on piirretty samaan tapaan sähkökenttä positiivisen pisteverauksen ympäillä sekä tässä kentässä olevaan toiseen varaukseen kohdistuva voima. Kuva (e) on sama kenttä, mutta kentässä oleva

Kuva 10.13: Tieto varausten siirtymisestä etenee kentässä äärellisellä nopeudella.



varauston kaksinkertainen edelliseen kuvaan verrattuna, joten varaukseen kohdistuva voimakin on voimakkuudeltaan kaksinkertainen. Aivan kuten kappaleen massaan kohdistuu painovoimakentän \bar{g} suuntainen ja kentän voimakkuteen verrannollinen voima, voimme määritellä myös sähkökenttää kuvaavan vektorikentän \bar{E} niin, että tässä kentässä levossa olevaan positiiviseen pistevaraukseen kohdistuu kentässä voima, jonka suunta on sama kuin sähkökentän \bar{E} suunta varauksen kohdalla ja jonka suuruus on varauksen suuruuden q ja kentän voimakkuuden tulo,

$$\bar{F} = q\bar{E}. \quad (10.9)$$

Sähkökentän yksikkö on tämän määritelmän mukaisesti $[E] = [F]/[q] = \text{N/C}$.

Negatiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa puolestaan sähkökenttään nähden vastakkaiseen suuntaan. Tämäkin on huomioitu määritelmässä (10.9), sillä jos varaus q on negatiivinen, vektorit \bar{F} ja \bar{E} ovat vastakkaisuuntaiset.

Coulombin lain mukaisesti kahden positiivisen pistevarauksen välillä vaikuttaa aina repulsiivinen vuorovaikutus, joten positiivisen pistevarauksen kenttään tuotuun toiseen positiiviseen pistevaraukseen kohdistuu aina voima poispäin kentän läheenä toimivasta varauksesta. Niinpä *positiivisen varauksen sähkökenttä osoittaa kaikkialla poispäin varauksesta*. Lisäksi koska sähköinen voima heikkenee pistevarauksesta kauemmas siirryttääessä, myös sähkökentän täytyy olla sitä heikompi, mitä kauempaana kentän läheestä ollaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.12 (f), jossa on piirretty kenttävektoreita muutamissa tarkastelupisteissä.

Coulombin laki ja tässä kuvattu kenttämalli voivat vaikuttaa saman asian sanomiselta kahdella eri tavalla. Kertoohan kumpikin malli meille, millainen voima kahden pistevarauksen välillä vaikuttaa. Malleissa on kuitenkin oleellisia fysikaalisia eroja. Jotta Coulombin lakia nimittäin voisit soveltaa, täytyy tietää täsmälleen missä pistevaraukset toistensa suhteeseen ovat. Coulombin laissa siis oletetaan implisiittisesti, että kaikki varaukset "tietävät" missä toiset varaukset ovat. Näin ajatellen varausten liikkuminen tuottaa kuitenkin ongelman. Jos Coulombin laki olisi totta myös liukkuville varauksille, yhden varauksen siirtäminen muuttaisi toiseen varaukseen kohdistuvaa voimaa heti riippumatta siitä, kuinka kaukana varaukset ovat toisistaan. Suhteellisuusteorian mukaan informaatio ei kuitenkaan voi edetä valonnopeutta nopeammin, joten *tämä ei voi olla mahdollista*. Niinpä Coulombin laki ei voi olla täsmällinen oikein, kun varaukset liikkuvat. Kenttämallissa tällaista ongelmaa ei ole. Varauksen siirtyminen nimittäin muuttaa varauksen luomaa sähkökenttää, ja tämä muutos voi edetä korkeintaan valonnopeudella, kuten kuvassa 10.13 on esitetty. Jos varaus siirtyy, hyvin kaukaisessa havaintopisteessä mitattu sähkökenttä ei voi muuttua ennen kuin tieto varauksen siirtymisestä saapuu kentän muutoksen mukana.



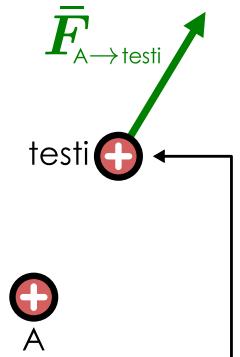
10.10 Kun 1 nC pistevarausta tuodaan avaruuden pisteeseen P, siihen kohdistuu voima $\bar{F} = (300 \text{ nN})\hat{i} + (400 \text{ nN})\hat{j}$. (a) Mikä oli sähkökenttä pisteessä P ennen kuin varaus tuotiin? (b) Jos tämän sijaan pisteeseen tuodaan -3 nC varaus, millainen voima siihen kohdistuu?

Sähkökentän vektorikenttäesitys

Sähkökenttä on periaatteessa olemassa avaruuden jokaisessa pisteessä rüppumatta siitä, onko pisteessä sähkövarausta, johon kenttä kohdistaisi voiman. (Toki kenttä voi olla joissakin pisteissä nolla, $\bar{E} = \bar{0}$.) Sähkökenttän havaitseminen kuitenkin edellyttää varauksen tuomista kenttään, koska sähkökenttä kohdistaa kentässä oleviin varauksiin voiman, ja tämä voima voidaan mitata. Nämä voimme siis määritellä ja mitata sähkökentän missä tahansa avaruuden pisteessä: Otetaan pieni varattu kappale, ideaalisesti pistevaraus, jonka varauksen suuruus q_{testi} tunnetaan. Tätä kutsutaan *testivaraukseksi*, koska sen avulla testataan sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa. Asetetaan tämä testivaraus pisteeseen, jossa sähkökenttä halutaan selvittää, ja mitataan sitten

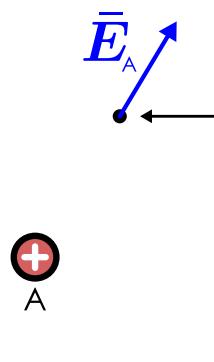
Kuva 10.14: Sähkökenttä voidaan mitata testivarausella. Tarkastelupisteessä olevaan testivaraukseen kohdistuu kentän suuntainen ja sen voimakkuuteen verrannollinen voima. Kenttä on olemassa kaikkialla, ja sen voi periaatteessa mitata kuinka monessa pisteessä tahansa. Kun kentän luo monta varausta, näiden tuottama sähkökenttä saadaan laskemalla yksittäisten varausten tuottamat kenttävektorit yhteen.

(a) Varaus A kohdistaa voiman testivaraukseen.



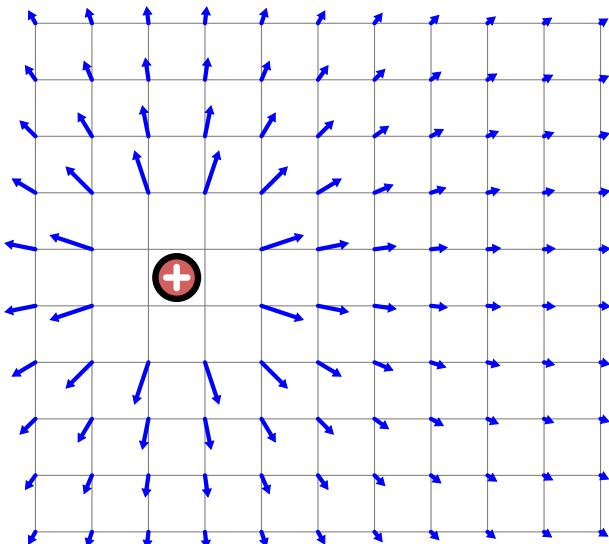
Jos tarkastelupisteeseen tuodaan testivaraus, A:n luoma sähkökenttä kohdistaa siihen voiman.

(b) Varauksen A kenttä pisteessä.

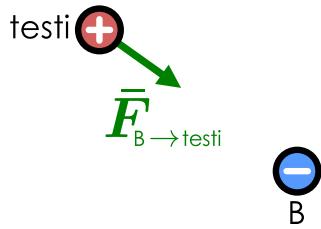


Kentän voimakkuus tarkastelupisteessä selviää jakamalla testivaraukseen kohdistava voima sen varauksen suuruudella.

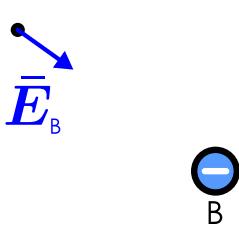
(c) Varauksen A kentän vektorikuvaaja.



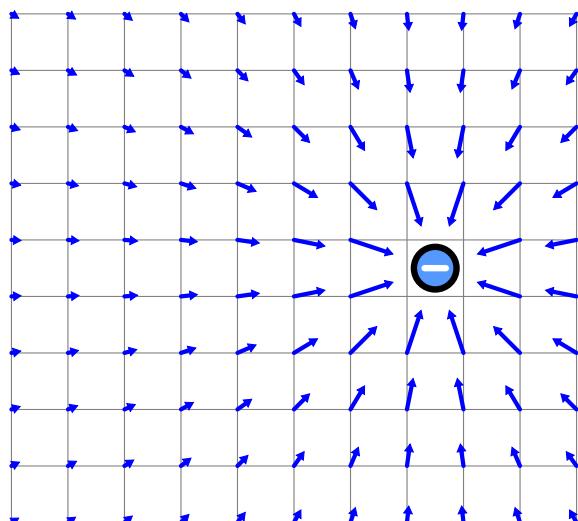
(d) Varaus B kohdistaa voiman testivaraukseen.



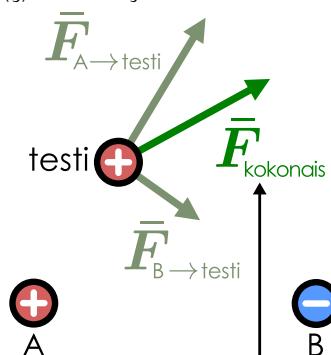
(e) Varauksen B kenttä pisteessä.



(f) Varauksen B kentän vektorikuvaaja.

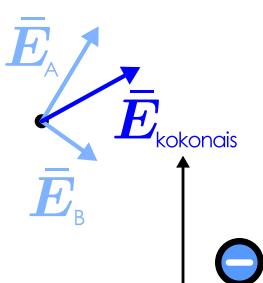


(g) Varausten yhdessä tuottama voima.



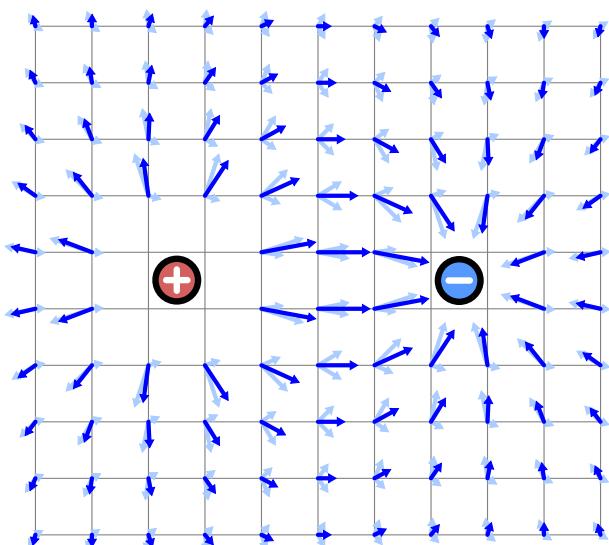
Testivaraukseen kohdistuva voima saadaan varausten A ja B siihen kohdistamien voimien vektorisummana.

(h) Varausten yhdessä luoma kenttä.



Sähkökentän täytyy siis myös olla varausten A ja B luomien kenttien summa.

(i) Varausten yhdessä luoman kentän vektorikuvaaja.



varaukseen kohdistuva voima. Yhtälön (10.9) mukaisesti testivaraukseen kohdistuva voima on suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja havaintopisteessä vallitsevaan sähkökenttään, joten *sähkökentän täytyy kyseisessä pisteessä olla voiman ja varauksen suhde*,

$$\bar{E} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{\text{testi}}. \quad (10.10)$$

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvissa 10.14 (a) ja (b), joissa positiivisen varauksen A sähkökenttää mitataan havaintopisteessä. Kuvassa (a) havaintopisteeseen on asetettu testivaraus, johon kohdistuu voima. Kuvassa (b) on piirretty tämän voiman aiheuttava sähkökenttä, joka on siis yhdensuuntainen kuvassa (a) piirretyn voimavektorin kanssa ja osoittaa poispäin kentän luovasta varauksesta A.

Koska sähkökentän synnyttää tässä tapauksessa paikoillaan oleva pistevaraus A, voimme päätellä kentän voimakkuuden Coulombin lain avulla. Coulombin lakihan sanoo, että pisteessä olevaan testivaraukseen kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_{A \rightarrow \text{testi}} = k_{\varepsilon} \frac{q_A q_{\text{testi}}}{r_{A \rightarrow \text{testi}}^2}. \quad (10.11)$$

Tämän perusteella varauksen A tuottama kenttä on havaintopisteessä voimakkuudeltaan

$$E_{\text{pistevaraus}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} F_{A \rightarrow \text{testi}} = k_{\varepsilon} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow \text{testi}}^2}. \quad (10.12)$$

Pistevaraukseen sähkökenttää on siis suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja käännettäen verrannollinen havaintopisteenvarauksesta mitattu etäisyyden neljöön.

Huomaa erityisesti, että tässä ei sanottu lainkaan, mikä testivaraukseen suuruus on. Mitä suurempaa testivarausta käytetään, sitä suurempi voima siihin kohdistuu, joten sekä $F_{A \rightarrow \text{testi}}$ että q_{testi} riippuvat kentän mittauksessa käytetyn varauksen suuruudesta. Kuitenkin koska voima on suoraan verrannollinen testivaraukseen suuruuteen, voiman ja varauksen suhde *ei riipu testivaraukseen suuruudesta*. Niinpä tämä määritelmä toimii, kunhan testivarausta voidaan pitää pistemäisenä.



10.11 Kuinka voit mitata gravaatiokentän voimakkuuden ja suunnan paikoillaan olevan testimassan avulla? Millaisella mittavälineellä tämä käytännössä onnistuu? Vertaa tästä sähkökentän mittaamiseen.

Sama mittaus voidaan toistaa niin monessa pisteessä kuin tarvitaan, ja näin voidaan selvittää sähkökenttää missä pisteessä tahansa. Kuvassa 10.14 (c) kenttää on määritetty kaksiluotettiseen tasoon tasavalein asetuissa pisteissä, ja kussakin pisteessä mitattu sähkökenttävektoria esittää havaintopisteeseen asetettu nuoli. Tällainen esitys on *vektorikenttäkuvaaja*. Kaikki kuvaajan sähkökenttävektorit on piirretty samassa mittakaavassa, joten nuolten pituus esittää kentän voimakkuutta kussakin pisteessä. Coulombin lain mukaisesti sähkökenttä heikkenee pistevarauksesta etäännystääressä, ja tämä näkyykin kuvaajassa niin, että lähellä pistevarausta nuolet ovat pitkät. Nuolten suunnat esittävät tienkenkin kentän suuntaa, ja osoittavat kaikilla poispäin positiivisesta varauksesta. Kenttää on olemassa kaikilla, myös kuvaajaan valittujen pisteiden välissä, mutta tienkenkään jokaiseen pisteeseen ei voi piirtää nuolta.

Kuvassa 10.14 (f) on esitetty samaan tapaan negatiivisen pistevaraukseen B sähkökenttää. Positiiviseen testivaraukseen kohdistuva voima osoittaa kohti negatiivista varausta, joten negatiivisen varauksen kenttää osoittaa kaikilla *kohdi* varausta. Muuten kenttää on samanlainen kuin positiivisen varauksen luoma kenttä.

Kuvassa 10.14 (g) on puolestaan määritetty testivaraukseen kohdistuva voima, kun sähkökenttän luovat edellisten kohlien varaukset A ja B *yhdessä*. Varaus A kohdistaa testivaraukseen voiman $\bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}}$ kuvassa yläviistoon oikealle aivan kuten kuvassa 10.14 (a), ja varaus B kohdistaa testivaraukseen $\bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}$ voiman oikealle alaviistoon kuvan 10.14 (d) tapaan. Testivaraukseen kohdistuva kokonaisvoima on voimien superpositioitaatteenvälinen summa,

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}} + \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}. \quad (10.13)$$

Havaintopisteenvaraukseen sähkökenttää saadaan määritelmän mukaisesti jakamalla tämä kokonaisvoima testivaraukseen suuruudella, joten sähkökenttää havaintopisteessä on

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{\text{kokonais}} = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}} + \frac{1}{q_{\text{testi}}} \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}. \quad (10.14)$$

Toisaalta varaus A loisi yksin kentän $\bar{E}_A = \bar{F}_{A \rightarrow \text{testi}}/q_{\text{testi}}$ ja varaus B loisi yksin kentän $\bar{E}_B = \bar{F}_{B \rightarrow \text{testi}}/q_{\text{testi}}$, joten kokonaiskenttää on varausten yksin luomien kenttien vektorisumma,

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_A + \bar{E}_B \quad (10.15)$$

kuten kuvan 10.14 (h) on piirretty. Sama periaate toimii riippumatta kentän tuottavien varausten lukumäärästä. Toisin sanoen *sähkökentälle pätee superpositioitaate* samaan tapaan kuin voimalle.

Kuvassa 10.14 (i) on piirretty varausten A ja B luoman kokonaissähkökentän vektorikenttäkuvaaja. Edellä kuvattu superpositioperiaate pätee erikseen kussakin avaruuden pisteessä, ja kuvaajan jokaisessa pisteessä onkin esitetty sekä varausten A ja B erikseen luomat kentät vaaleina nuolina että näiden superpositio eli kokonaissähkökenttä tummana nuolena. Vaaleat nuolet ovat täsmälleen samat kuin kuvaajissa 10.14 (c) ja (f), joissa on piirretty varausten A ja B kentät erikseen. Usean varauksen synnyttämä sähkökenttä saadaan siis määritettyä selvitämällä ensin erikseen jokaisen varauksen *yksinään* tuottama kenttä kussakin avaruuden pisteessä ja laskemalla sitten nämä kenttävektorit *pisteittäin* yhteen.



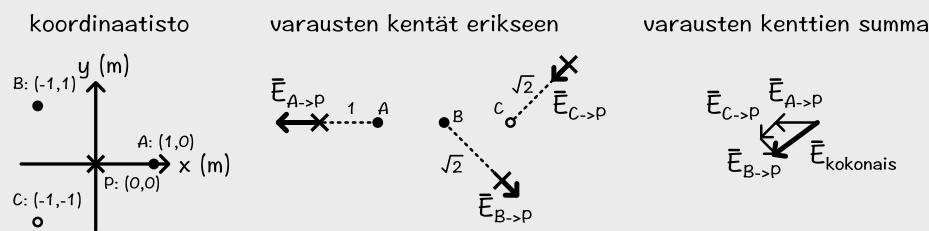
10.12 Varaus 1 nC on tason pisteessä (0, 1) (metrejä) ja varaus -2 nC on pisteessä (2, 0). Mikä on sähkökenttävektori origossa?

esimerkki 10.2

Pistevarausten sähkökenttä

Kolme varasta, A, B ja C, on asetettu pisteisiin A: (1, 0), B: (-1, 1), C: (-1, -1) (yksiköt metrejä). Varausten suuruudet ovat A: 1.0 nC, B: 1.0 nC ja C: -1.0 nC. Mikä on näiden varausten yhdessä synnyttämä sähkökenttä origossa?

TILANNE Piirretään koordinaatisto ja merkitään varausten paikat. Merkitään myös havaintopiste P: (0, 0). Merkitään $q = 1$ nC, jolloin $k_e q \approx 9.0 \text{ Nm}^2/\text{C}$.



SUUNNITELMA Positiiviset varaukset tuottavat niistä poispäin osoittavan sähkökentän ja negatiiviset varaukset niitä kohti osoittavan kentän. Varausten yhdessä synnyttämä kenttä saadaan kaikkien varausten yksin tuottamien kenttien superpositiona eli vektorisummana.

Vektorimuodossa yhden varauksen kenttä on

$$\bar{E}_{i \rightarrow P} = k_e \frac{q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P}. \quad (10.16)$$

Kokonaiskenttä on näiden vektorisumma, $\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_{A \rightarrow P} + \bar{E}_{B \rightarrow P} + \bar{E}_{C \rightarrow P}$. Tämä summa on helpoin laskea etsimällä ensin kaikkien vektoreiden x- ja y-komponentit ja summaamalla nämä erikseen.

RATKAISU Lasketaan ensin etäisyys kustakin varauksesta origoon. Kahden pisteen i ja P välinen etäisyys on

$$r_{i \rightarrow P} = \sqrt{(x_P - x_i)^2 + (y_P - y_i)^2}, \quad (10.17)$$

joten $r_{A \rightarrow P} = 1 \text{ m}$ ja $r_{B \rightarrow P} = r_{C \rightarrow P} = \sqrt{2} \text{ m}$. Varausten tuottamien sähkökenttien voimakkuudet ovat siis $E_{A \rightarrow P} = 9.0 \text{ N/C}$ sekä $E_{B \rightarrow P} = E_{C \rightarrow P} = 4.5 \text{ N/C}$.

Päättelään sitten sähkökenttiä suunnat. Varaus A on positiivinen, joten se tuottaa kentän itsestään poispäin eli kuvassa vasemmalle suuntaan $\hat{r}_{A \rightarrow P} = -\hat{i}$. Varaus B tuottaa myös kentän itsestään poispäin eli alaoikealle suuntaan $\hat{r}_{B \rightarrow P} = (\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$. Varaus C on sen sijaan negatiivinen, joten sen kenttä osoittaa kohti varausta suuntaan $-\hat{r}_{C \rightarrow P} = (-\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$. Varaukset tuottavat siis yksittäin sähkökentät $\bar{E}_{A \rightarrow P} = (-9.0 \text{ N/C})\hat{i}$, $\bar{E}_{B \rightarrow P} = (3.2 \text{ N/C})\hat{i} + (-3.2 \text{ N/C})\hat{j}$ sekä $\bar{E}_{C \rightarrow P} = (-3.2 \text{ N/C})\hat{i} + (-3.2 \text{ N/C})\hat{j}$ ja kokonaiskenttä on

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = (-9.0 \text{ N/C})\hat{i} + (-6.4 \text{ N/C})\hat{j}. \quad (10.18)$$

Mathematica:

```
(* vakiot *)
a = {1, 0}; b = {-1, 1}; c = {-1, -1}; p = {0, 0};
k = 8.988; qa = 1; qb = 1; qc = -1;

(* vektori A -> P, sen pituus ja suunta *)
vec[a_, p_] := p-a
dist[a_, p_] := Sqrt[(p-a).(p-a)]
unit[a_, p_] := vec[a,p] / dist[a,p]

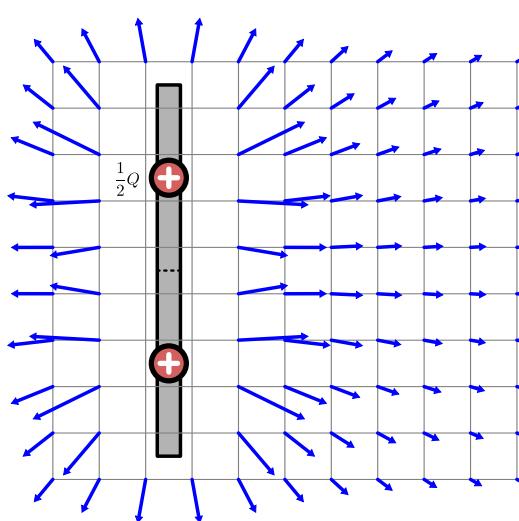
(* varauksen (suuruus qa, paikka a) kentta pisteessa p *)
e[a_, p_, qa_] := (k*q*a / dist[a,p]^2) * unit[a,p]

ekok = e[a, p, qa] + e[b, p, qb] + e[c, p, qc]
{-8.988, -6.35548}
```

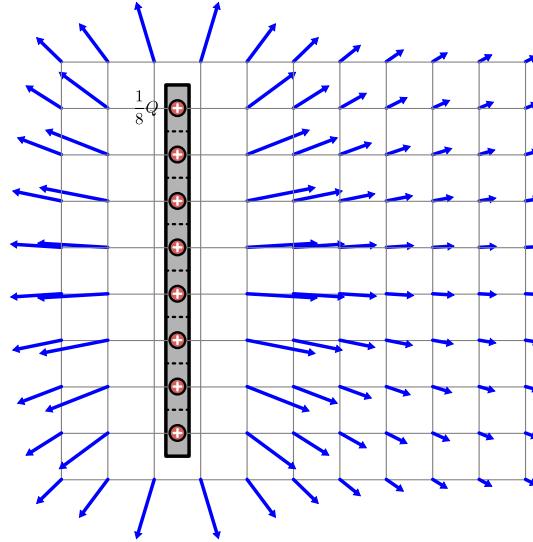
ARVIOINTI Kuvan perusteella kokonaissähkökenttää kuvaava vektori osoittaa koordinaatistossa viistoon alavasemmalle. Sähkökentän x- ja y-skalaarikomponenttien pitää siis olla negatiiviset, kuten laskemamme tuloksen mukaan on. Lisäksi vektori osoittaa hieman enemmän negatiivisen x-akselin suuntaan kuin negatiivisen y-akselin suuntaan, joten x-komponentin pitää olla itseisarvoltaan suurempi, kuten onkin.

Kuva 10.15: Suuren varatun kappaleen luoma sähkökenttä voidaan määrittää missä tahansa tarkastelupisteessä jakamalla kappale useaan pieneen osaan, laskemalla kunkin pieni osan tuottama kenttä tarkastelupisteessä ja summaamalla nämä kentät yhteen.

(a) Malli, jossa varattu tanko on jaettu 2 osaan.



(b) Malli, jossa varattu tanko on jaettu 8 osaan.



Varatun kappaleen sähkökenttä

Coulombin lain esittelyn yhteydessä totesimme, että pisteverausmalli toimii vain silloin, kun varatut kappaleet ovat pieniä verrattuna niiden etäisyyteen havaintopisteestä. On kuitenkin usein tarpeellista selvittää sähkökenttä *lähellä* suurta varattua kappaletta, jolloin yksinkertainen pisteverausmalli ei toimi. Tällaisessakin tapauksessa voimme kuitenkin käyttää pisteverausmallia kuvaamaan varatun kappaleen *osia*. Tällöin kunkin osan luoman sähkökentän voi laskea pisteverausmallin perusteella, jolloin kappaleen synnyttämä kokonaissähkökenttä saadaan laskemalla nämä kentät vektoreina yhteen sähkökentän superpositiooperaatteen mukaisesti.

Tarkastellaan esimerkinä ohutta, tasaisesti varattua sauvalle. Merkitään sauvan pituutta symbolilla L ja sen kokonaisvarausta Q . Yksinkertaisin malli sauvan sähkökentälle on pisteverauksen Q sähkökenttä, mutta tämä malli kuvailee sauvan kenttää huonosti, jos tarkastelupisteen etäisyys sauvasta on pienempi kuin sauvan pituus. Astetta parempi malli saadaan, kun sauvan ajatellaan jaetulle kahteen osaan ja kumpaakin osaa kuvaataan pisteverauksena $Q/2$, jolloin sauvan kokonaisvarausta on edelleen Q . Tämä malli ja sen mukaan laskettu sähkökenttä on esitetty kuvassa 10.15 (a). Kaukana sauvasta kenttä ei juuriakaan poikkeaa kuvaan 10.14 (c) piirretystä yhden pisteverauksen kentästä, mutta sauvan läheillä nämä kentät ovat selvästi erilaiset.

Mallia voi parantaa systemaattisesti jakamalla sauvan yhä useampaan osaan ja kuvaamalla jokaista osaa yhtenä pisteverauksena. Mitä pienempiä nämä osat ovat, sitä paremmin pisteverausmalli kuvailee niistä kutakin ja sitä paremmin malli kokonaisuutena toimii. Kuvaan 10.15 (b) on esimerkinä piirretty malli, jossa saava on jaettu kahdeksaan osaan ja kunkin osan varaus on $Q/8$. Kuvaan on myös piirretty sähkökentän kuvaaja, joka on laskettu näiden kahdeksan pisteverauksen sähkökentän superpositiona. Lähellä sauvaa tämä kuvaaja (10.15 (b)) poikkeaa edellisestä, kahden pisteverauksen mallin ennustamasta kuvaajasta (10.15 (a)), ja kahdeksan varauksen malli on luonnollisesti tarkempi.

Matemaattisesti tämän osiin jakamisen voi ilmaista seuraavasti. Numeroitaan sauvan osat indeksillä $i = 1, 2, \dots, N$ ja merkitään näiden osien paikkoja \bar{r}_i sekä varauksia $\Delta q_i = Q/N$, missä N on osien lukumäärä. Havaintopisteessä P kunkin yksittäisen osan tuottama sähkökenttä on pisteverausmallin mukaan

$$\bar{E}_i = k_\varepsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P}. \quad (10.19)$$

Sähkökentän superpositiooperaatteen mukaisesti saava tuottaa kokonaisuudessaan pisteessä P kentän

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots = k_\varepsilon \frac{\Delta q_1}{r_{1 \rightarrow P}^2} \hat{r}_{1 \rightarrow P} + k_\varepsilon \frac{\Delta q_2}{r_{2 \rightarrow P}^2} \hat{r}_{2 \rightarrow P} + \dots = \sum_{i=1}^N k_\varepsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P}. \quad (10.20)$$

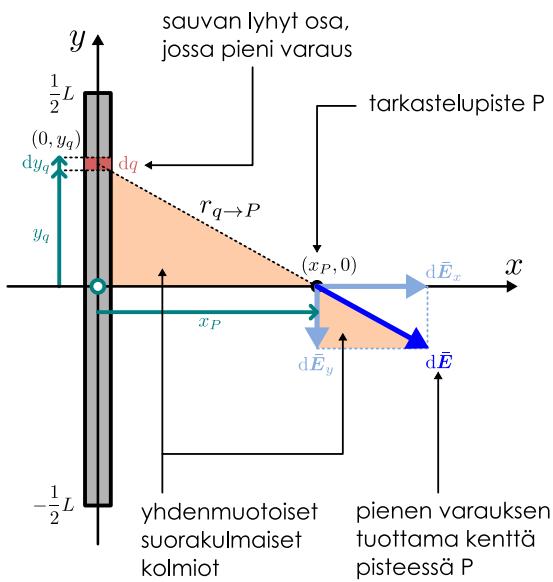
Tällaisen summan laskeminen ei ole vaikeaa, jos osia ei ole kovin monta. Lasku käy kuitenkin sitä työläämäksi, mitä useampaan osaan saava jaetaan. Ja mitä lähempänä sauvaa sähkökenttää halutaan laskea, sitä pienempiin osiin saava pitää jakaaa. Yleisen lausekkeen johtaminen vaatiikin käytännössä raja-arvon laskemista, kun saava jaetaan äärettömän moneen osaan, $N \rightarrow \infty$. Tällöin myös kunkin osan varaus lähestyy

nolla, $\Delta q_i \rightarrow dq$, jolloin päädytään laskemaan yhteen äärettömän monta infinitesimaalisen pieniä lukua. Tällainen summan raja-arvo on *integraali*, joten voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{kokonais}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N k_\varepsilon \frac{\Delta q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{i \rightarrow P} = \int k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}. \quad (10.21)$$

Tässä muodossa integraalia ei kuitenkaan voi vielä laskea. Etäisyys kulloinkin tarkasteltavasta sauvan osasta tarkastelupisteeseen samoin kuin tarkastelupisteeseen osoittava yksikkövektori nimittäin riippuvat siitä, mitä sauvan osaa kulloinkin tarkastellaan. Integroinnin mahdollistamiseksi kaikki suureet, jotka saavat sauvan eri osissa eri arvon, pitää kirjoittaa samojen integrointimuuttujien avulla. Käytännössä integrointimuuttujaksi valitaan aina jokin sopiva koordinaatti tai koordinaatit, jos varattu kappale on kaksi- tai kolmiulotteinen.

Kuva 10.16: Sauvan pienen osan tuottaman sähkökentän laskemisessa tarvittava geometria.



tarkasteltavasta sauvan osasta (pisteverauksesta) havaintopisteeseen ja tämä voidaan laskea helposti Pythagoraan lauseella, sillä origo, varaus ja tarkastelupiste muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat x_P sekä y_q ja hypotenuusan pituus on $r_{q \rightarrow P}$. Siispä

$$r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2} = (x_P^2 + y_q^2)^{1/2}. \quad (10.23)$$

Sähkökentän lausekkeessa esiintyvä vektori $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$ on puolestaan varauksesta tarkastelupisteeseen osoittava yksikkövektori eli pistestä $(0, y_q)$ pisteen $(x_P, 0)$ suuntaan osoittava yksikkövektori. Tämä on helppoin laskea seuraavasti: Merkitään varauksen ja tarkastelupisteiden paikkavektoreita $\bar{\mathbf{r}}_q = y_q \hat{\mathbf{j}}$ ja $\bar{\mathbf{r}}_P = x_P \hat{\mathbf{i}}$. Varauksesta tarkastelupisteeseen osoittava vektori saadaan näiden avulla loppu- ja alkupisteiden paikkavektoreiden erotuksena, joten tämä vektori on

$$\bar{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \bar{\mathbf{r}}_P - \bar{\mathbf{r}}_q = x_P \hat{\mathbf{i}} - y_q \hat{\mathbf{j}}. \quad (10.24)$$

Vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan edelleen jakamalla vektori omalla pituudellaan, joten

$$\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \frac{\bar{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}} = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}}. \quad (10.25)$$

Sijoittamalla nämä tulokset sähkökentän lausekkeeseen saamme sähkökenttävektorille esityksen karteesisissa komponenteissa,

$$d\bar{\mathbf{E}} = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \left(\frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}} \right) = k_\varepsilon \frac{dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} (x_P \hat{\mathbf{i}} - y_q \hat{\mathbf{j}}). \quad (10.26)$$

Sähkökentän x -skalarikomponentti on siis

$$dE_x = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.27)$$

Lasketaan esimerkin vuoksi sauvan synnyttämä sähkökenttä sauvan keskipisteen kautta kulkevalalla, sauvan pituussuuntaan näden kohtisuoralla aksellilla. Asetetaan tästä varten koordinaatiston origo sauvan keskipisteeeseen, y -akseli sauvan suuntaan ja x -akseli sauvaa vasten kohtisuoraan kuten kuvasa 10.16. Valitaan tarkastelupisteeksi P x -akselin piste etäisyydeltä x_P sauvasta — siis koordinaatiston piste $(x_P, 0)$. Lasketaan ensimmäiseksi sähkökenttä, jonka yksi sauvan infinitesimaalisen lyhyt varattu osa tähän pisteeeseen synnyttää. Olkoon tämä osa pistessä $(0, y_q)$ ja olkoon sen pituus dy_q sekä varaus dq . Tässä alaindeksi q viittaa siihen, että kyseessä on nimenomaan varauksen y -koordinaatti. Koska tarkasteltu sauvan osa on hyvin pieni, sitä voidaan kuvata pisteverauksena, ja sen synnyttämä sähkökenttä voidaan laskea pisteverauksen sähkökentän lausekkeesta (10.12).

$$d\bar{\mathbf{E}} = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} \hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}. \quad (10.22)$$

Kyseessä on infinitesimaalisen pieni sähkökenttä, koska sen synnyttää infinitesimaalisen pieni varaus. Siksi merkitsemme $d\bar{\mathbf{E}}$ eikä vain $\bar{\mathbf{E}}$.

Lausekkeessa esiintyvä symboli $r_{q \rightarrow P}$ on etäisyys

ja sen y -skalaarikomponentti on

$$dE_y = -k_\varepsilon \frac{y_q dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.28)$$

Kuvasta 10.16 nähdään, että kun x_P ja y_q ovat positiiviset, sähkökentän x -komponentin täytyy olla positiivinen ja y -komponentin negatiivinen, kuten tulokseksi saatuinkin.



10.13 Jos tarkastelupiste olisikin (x_P, y_P) , missä y_P ei ole nolla, mikä olisi (a) etäisyys $r_{q \rightarrow P}$, (b) yksikkövektori $\hat{r}_{q \rightarrow P}$ ja (c) sähkökentän komponentit dE_x ja dE_y ?

Sähkökentän komponentit voi päätellä myös kuvan 10.16 geometriasta laskematta yksikkövektorita, sillä sähkökenttävektori $d\vec{E}$ sekä sen vektorikomponentit $d\vec{E}_x$ ja $d\vec{E}_y$ muodostavat suorakulmaisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen varauksen, origon ja tarkastelupisteen P muodostaman kolmion kanssa. Näiden kolmioiden sivujen pituuksilla täytyy olla samat suhteet, joten yhdenmuotoisuuden nojalla täytyy päteä

$$\left| \frac{dE_x}{dE} \right| = \left| \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \right|, \quad (10.29)$$

ja valitsemalla oikea etumerkki tästä seuraa

$$dE_x = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} dE. \quad (10.30)$$

Pistevarauksen sähkökentän voimakkuus on

$$dE = k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (10.31)$$

joten sähkökentän x -komponentin täytyy olla

$$dE_x = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} k_\varepsilon \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{r_{q \rightarrow P}^3} = k_\varepsilon \frac{x_P dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}, \quad (10.32)$$

eli sama tulos kuin mitä edellä johdettiin.

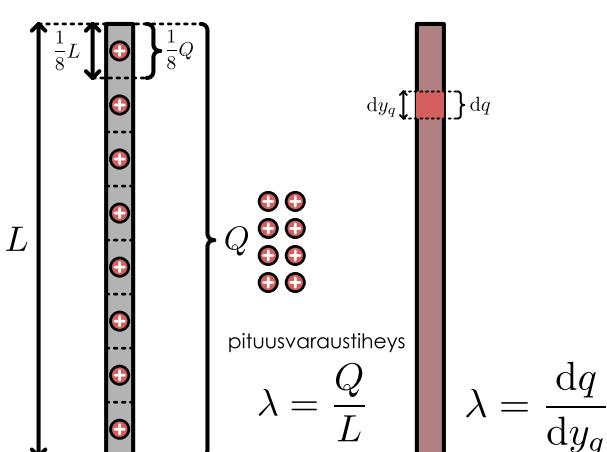


10.14 Johda sähkökentän y -komponentille dE_y lauseke kolmioiden yhdenmuotoisuutta käyttäen. Tarkista, että saat saman tuloksen kuin yhtälössä (10.28).

Jotta nämä lausekkeet voitaisiin integroida, myös niissä esiintyvä differentiaalinen varaus dq täytyy ilmaista geometristen suureiden avulla. Kuten kuvissa 10.15 (a) ja (b) nähtiin, mitä lyhyempiin osiin sauva jaetaan, sitä pienempi varaus kuhunkin osaan jää, koska sauva on tasaisesti varattu ja sen kokonaisvaraus on Q . Kun

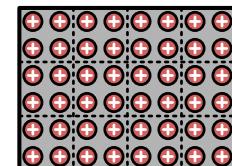
Kuva 10.17: Pituusvaraustiheys kuvailee kappaleen varausta pituusyksikköä kohti. Varauksen pinta-alaa kohden on pintavaraustiheys ja varauksen tilavuutta kohden on tilavuusvaraustiheys tai vain varaustiheys.

(a) Tasaisesti varatun sauvan pituusvaraustiheys.

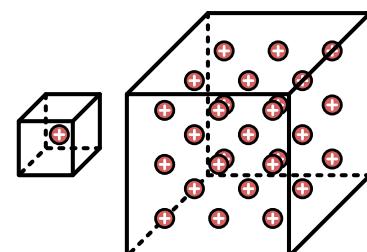


(b) Kuvan levyllä on sama pintavaraustiheys. Samoin laattoilla on keskenään sama varaustiheys.

$$\text{pintavaraustiheys} \quad \sigma = \frac{Q}{A}$$



$$\text{varaustiheys} \quad \rho = \frac{Q}{V}$$



sauva jaettiin 8 yhtä suureen osaan, kuhunkin osaan jää varausta $Q/8$. Tämä johtuu siitä, että varaus on ekstensiivinen suure. Varausta kuvaava intensiivinen suure on **varaustiheys**,

$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad (10.33)$$

joka kertoo varauksen määärän tilavuusyksikköä kohti samaan tapaan kuin massatiheys $\rho_m = m/V$ kertoo massan määärän tilavuusyksikköä kohti. Jos sauva on tasaisesti varattu, siinä on kaikkialla varausta yhtä tiheässä ja kunkin sauvan osan varaustiheys on sama riippumatta siitä, kuinka pieniin osiin sauva jaetaan. (Yleisesti varaustiheys voi kuitenkin riippua paikasta aivan kuten massatiheyskin, koska varausta voi olla yhtäällä tiheämässä kuin toisaalla.) Kääntäen, jos varatun kappaleen tai kappaleen osan tilavuus on V ja varaustiheys ρ on vakio, kappale sisältää kokonaisvarauksen

$$Q = \rho V. \quad (10.34)$$

Varaustiheys on käytökelpoinen suure, kun varaus on jakautunut koko kappaleen tilavuteen. Jos kappale on ohut levy tai kappaleen sisältämä varaus on levinnyt vain kappaleen pinnalle (kuten johteissa on), *pintavaraustiheys* eli varauksen määrä pinta-alaa kohden,

$$\sigma = \frac{Q}{A}, \quad (10.35)$$

on käytökelpoisempi suure. Yksilotteisessa kappaleessa kuten nyt tarkasteltavassa ohuessa sauvassa kannattaa puolestaan käsitellä *pituusvaraustiheyttä* eli varauksen määrää pituutta kohti,

$$\lambda = \frac{Q}{L}. \quad (10.36)$$

Nyt haluamme määrittää sauvan lyhyen osan sisältämän varauksen määän, ja tämä onnistuu pituusvaraustiheyden avulla helposti. Tasaisesti varattu sauva pituusvaraustiheys on kaikkialla sama, jolloin ΔL -pituisen sauvan osan sisältämä kokonaisvaraus on

$$\Delta Q = \lambda \Delta L. \quad (10.37)$$

Samalla periaatteella infinitesimaalisen lyhyen dy_q -pituisen sauvan osan sisältämä kokonaisvaraus on

$$dq = \lambda dy_q = \frac{Q}{L} dy_q. \quad (10.38)$$



10.15 Sauvan poikkipinta-ala on $1.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ ja sen pituus on 0.20 m. Sauvan kokonaisvaraus on 1.0 nC, ja sauva on tasaisesti varattu. (a) Mikä on sauvan varaustiheys ja pituusvaraustiheys? (b) Paljonko varausta sisältää sauvan osa, jonka pituus on 0.030 m?

Tämän tuloksen avulla voimme korvata sähkökentän lausekkeessa esiintyvän varauksen differentiaalin pituuden differentiaalilla, jolloin sähkökentän komponenteiksi saadaan

$$dE_x = k_\epsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.39)$$

sekä

$$dE_y = -k_\epsilon \frac{Q}{L} \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.40)$$

Nyt lausekkeet ovat vihdoin muodossa, jotka voidaan integroida, koska kaikki tarkasteltavasta varauksesta riippuvat suureet (varauksen suuruus, varauksen etäisyys tarkastelupisteestä ja varauksesta tarkastelupisteen osoittavan yksikkövektorin suunta) on ilmaistu koordinaattien x_P ja y_q avulla, ja lausekkeessa esiintyväksi differentiaaliksi on niin ikään vaihdettu dy_q . Koko sauvan synnyttämän sähkökentän x -komponentille saadaan näin ollen lauseke

$$E_x = \int dE_x = \int_{-L/2}^{L/2} k_\epsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.41)$$

Tämä on integraali *koordinaatin y_q ylitse*, ja koska tarkoitus on laskea yhteen kaikkien sauvan sisältämien varausten tuottamat sähkökentät, y_q -koordinaatin täytyy integroidessa kulkea sauvan yhdestä päästä toiseen. Tässä tapauksessa sauvan päät ovat pisteissä $(0, -L/2)$ ja $(0, L/2)$, joten integroimisväliksi valitaan $-L/2 \leq y_q \leq L/2$.

Sähkökentän y -komponenttia ei tarvitse erikseen laskea, koska sen täytyy olla symmetrian perusteella nolla. Kuten kuvasta 10.16 nähdään, tarkastelupiste P on systeemin symmetria-akselilla. Symmetrian perusteella mikään ei muutu, jos koko systeemi käännetään pystysuunnassa ympäri niin, että x -akseli pysyy paikoillaan. Niinpä myös sähkökenttää symmetria-akselilla olevassa pisteessä P ei saa muuttua. Tämä tarkoittaa sitä, että sähkökenttää ei voi pisteessä P osoittaa ylöspäin eikä alas päin, koska systeemin käännytessä ylöspäin osoittava kenttävektori kääntyisi osoittamaan alas päin ja päinvastoin. Niinpä sähkökentän täytyy osoittaa täsmälleen vaakasuoraan, jolloin kentän y -komponentti täytyy olla nolla.



10.16 Laske komponentti E_y integroimalla ja osoita tällä tavalla, että se todella on nolla.

Sähkökentän x -komponentti ei ole nolla, joten siinä esiintyvä integraali pitää todella laskea. Tässä tapauksessa integroitava funktio on muotoa $f(y) = x(x_P^2 + y^2)^{-3/2}$ ja integrointi tapahtuu muuttujan y suhteessa. Funktion f integraalifunktio on $F(y) = \frac{y}{x} (x_P^2 + y^2)^{-1/2}$. Sähkökentän x -komponentiksi saadaan siis

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.42)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \left|_{-L/2}^{L/2} \frac{y_q}{x_P(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \right. \quad (10.43)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \left(\frac{L/2}{x_P(x_P^2 + (L/2)^2)^{1/2}} - \frac{-L/2}{x_P(x_P^2 + (-L/2)^2)^{1/2}} \right) \quad (10.44)$$

$$= k_\varepsilon \frac{Q}{L} \frac{L}{x_P(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}}. \quad (10.45)$$

Sähkökenttävektori pisteessä $(x_P, 0)$ on näin ollen

$$\bar{E} = k_\varepsilon \frac{Q}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}} \hat{i}. \quad (10.46)$$



10.17 Derivoi funktio $F(y)$ muuttujan y suhteesta ja osoita, että tulos on $f(y)$. Tämä todistaa, että F on funktion f integraalifunktio, sillä integrointi ja derivoointi ovat käanteisoperaatiot.

Selvästikään sauvan sähkökentän lauseke ei ole sama kuin pisteverauksen sähkökentän lauseke, joten pisteverausmalli ei ole riittävä kuvamaan varattua sauvaltaa. Jos sauvaltaa kuitenkin tarkastellaan hyvin kaukaa, sitä ei voi erottaa pistestä, ja tällöin pisteverausmallin pitäisi toimia. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että jos etäisyys sauvaltaa on suuri verrattuna sauvaltaan pituuteen, sauvaltaan sähkökentän pitäisi olla likimain sama kuin sauvaltaan keskipisteesseen asetetun pisteverauksen Q sähkökentän. Näin todella onkin, sillä jos $x_P \gg L$ pätee likimain $x_P^2 + L^2/4 \approx x_P^2$ ja edelleen $x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4} \approx x_P$. Tässä approksimaatiossa sauvaltaan sähkökentän voimakkuudelle saadaan siten likimääriäinen lauseke

$$E \approx k_\varepsilon \frac{Q}{x_P^2}, \quad (10.47)$$

ja tämä on juuri pisteverauksen Q sähkökentän voimakkuus etäisyydellä x_P . Matematiikassa sanotaan, että lauseke $E_{\text{sauva}} = k_\varepsilon \frac{Q}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}}$ lähestyy asymptootisesti lauseketta $E_{\text{piste}} = k \frac{Q}{x_P^2}$, ja se tarkoittaa näiden lausekkeiden suhteesta lähestyvän yhtä, $E_{\text{sauva}}/E_{\text{piste}} \rightarrow 1$, kun etäisyys x_P kasvaa. Tätä merkitään $E_{\text{sauva}} \sim E_{\text{piste}}$.



10.18 Erään varausjakauman sähkökentän voimakkuus noudattaa funktiota $E = a/r^3$, missä a on jokin vakio. Voiko tämä funktio lähestyä asymptootisesti pisteverauksen sähkökentän lauseketta?

Tässä esimerkissä laskimme makroskooppisen kappaleen sähkökentän yhdessä pisteessä P jakamalla kappaleen osiin, käsittelymällä kutakin osaa pisteverauksena ja laskemalla kaikkien osien sähkökentät yhteen. Samalla periaatteella lasketaan myös kappaleeseen kohdistuva voima, jos tiedetään millaisessa sähkökentässä kappale on. Sähkökenttähän kohdistaa kentässä oleviin kappaleisiin voiman, joka riippuu sekä kentästä että varauksesta. Jos sähkökenttää on homogeeninen, voima on yksinkertaisesti kappaleen kokonaisvaraus kerrottuna sähkökentällä. Aivan samalla tavalla painovoima voidaan laskea homogenisessa kentässä kappaleen massan ja gravitaatiokentän (eli putoamiskiertyvyyden) tulona. Jos sähkökenttää ei kuitenkaan ole homogeeninen, sähkökentän suuruus ja suunta voi vaihdella kappaleen eri osien välillä, ja näihin voi kohdistua varsin erilaiset voimat. Tällöinkin voimme jakaa kappaleen useisiin pieniin osiin ja ajatella sähkökentän olevan

paikallisesti likimain vakio jokaan osaan kohdalla. Silloin jokaiseen osaan kohdistuva voima voidaan laskea erikseen osan varauksen dq ja osaa ympäröivän sähkökentän \bar{E} tulona, $d\bar{F} = \bar{E}dq$, ja kokonaisvoima on kaikkien näiden voimien summa eli integraali

$$\bar{F}_{\text{kokonais}} = \int \bar{E}dq. \quad (10.48)$$



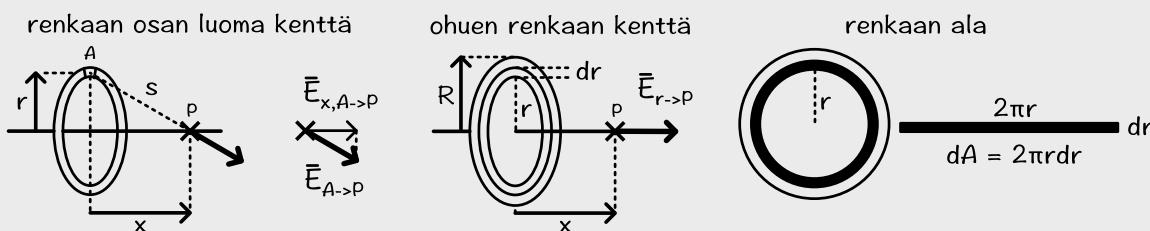
10.19 Kirjoita oman sanoin tiivistelmä varausten luomista sähkökentistä. Miten sähkökenttä voidaan havaita? Millaisen kentän yksi pistevaraus luo? Miten lasket sähkökentän, jonka monta pistevarausta luo yhdessä? Miten lasket sähkökentän, jonka luo varattu kappale?

esimerkki 10.3

Kiekon sähkökenttä

Mikä on tasaisesti varatun kiekon (säde R , varaus Q) sähkökenttä kiekon symmetria-akselille etäisyydellä x kiekon keskipisteestä?

TILANTE Lasketaan ensin ohuen renkaan (säde r , varaus q) tuottama sähkökenttä renkaan symmetria-akselilla. Kun renkaan luoma kenttä tunnetaan, kiekon kenttä voidaan laskea jakamalla kiekko ohuksi renkaaksi ja summaamalla näiden renkaiden synnyttämät kentät yhteen. Alla on piirretty kuvat näistä tilanteista. Symmetria-akselilla (x) oleva tarkastelupiste on merkityy symbolilla P . Renkaan jokainen piste on tästä yhtä kaukana, etäisyydellä s .



SUUNNITELMA Renkaan voi ajatella jaetuksi hyvin moneen pieneen osaan, jolloin kullekin osalle voidaan käyttää pistevarausmallia. Eri pisteiden luomat sähkökentät osoittavat eri suuntiin, mutta symmetrian perusteella näiden summana saatavan kokonaiskentän täytyy olla symmetria-akselin suuntainen. Niinpä riittää laskea yhteen renkaan eri osien tuottaman sähkökentän akselin suuntainen komponentti.

Kiekko voidaan jakaa puolestaan ohuiksi renkaiksi. Edellisen päättelyn mukaan jokaisen renkaan tuottama kenttä on symmetria-akselin suuntainen, joten koko kiekon kenttä saadaan suoraan laskemalla yhteen sen muodostamien renkaiden sähkökentät.

Tarkastellaan renkaan osaa A , jonka pituus on dl . Koko renkaan kaaren pituus on $L = 2\pi r$, ja renkaan pituusvarausstiheys on $\lambda = q/L$, joten tämän osan varaus on

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi r} dl. \quad (10.49)$$

Pistevarausmallin mukaisesti varaus luo pisteeeseen P sähkökentän, jonka voimakkuus on

$$dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s^2}. \quad (10.50)$$

Lisäksi etäisydet $s = \sqrt{x^2 + r^2}$ ja x muodostavat suorakulmaisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen sähkökenttävektorin $d\bar{E}_{A \rightarrow P}$ sekä sen symmetria-akselin suuntaisen komponentin $d\bar{E}_{x,A \rightarrow P}$ muodostaman kolmion kanssa, joten näiden kolmioiden sivujen pituuksien suhteesta täytyy olla sama,

$$\frac{dE_{x,A \rightarrow P}}{dE_{A \rightarrow P}} = \frac{x}{s}, \quad (10.51)$$

mistä voidaan ratkaista sähkökentän x -komponentin pituus. Koko renkaan tuottama sähkökenttä on x -suuntainen ja se saadaan x -komponenttien integraalina, kun integroidaan koko renkaan ympäri.

Jaetaan sitten kiekko renkaisiin, ja tarkastellaan r -säteistä ja dr -paksuista rengasta. Kiekon pinta-ala on $A = \pi R^2$ ja sen pintavaraustiheys on $\sigma = Q/A$, joten renkaan varaus on

$$dQ = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} dA. \quad (10.52)$$

Varaus riippuu siis renkaan pinta-alasta, ja tämä voidaan päätellä seuraavasti: Ajatellaan, että rengas katkaistaan jostakin kohdasta ja taivutetaan suoraksi. Näin muodostuu likimain suorakulmio, jonka korkeus on renkaan paksuus dr ja kannan leveys on renkaan ympärysmitta $L = 2\pi r$. Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo eli

$$dA = L dr = 2\pi r dr. \quad (10.53)$$

(Sama tulos saataisiin myös laskemalla funktion $A(r) = \pi r^2$ derivaatta $dA/dr = A'(r) = 2\pi r$, josta $dA = A'(r)dr = 2\pi r dr$.) Näin saadaan selville yhden renkaan varaus, ja tästä voidaan laskea edelleen renkaan tuottama sähkökenttä. Kokonaiskenttä saadaan laskemalla kaikkien renkaiden luomat kentät yhteen eli integroimalla koko kiekon yli.

RATKAISU Tarkastellun renkaan osan luoman sähkökentän voimakkuus on

$$dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{x^2 + r^2} dl, \quad (10.54)$$

ja sen x -skalarikomponentti on

$$dE_{x,A \rightarrow P} = \frac{x}{s} dE_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dl. \quad (10.55)$$

Koko renkaan tuottama kenttä saadaan integroimalla muuttujaa l renkaan ympäri eli arvosta $l = 0$ arvoon $l = L = 2\pi r$. Koska renkaan kaikki pistet ovat yhtä kaukana tarkastelupisteestä, integroitava funktio on vakio tämän muuttujan suhteeseen ja integraalin laskeminen on helppoa,

$$E_{\text{rengas}} = E_{x,A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xq}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10.56)$$

Tämän tuloksen avulla saamme laskettua kiekon sähkökentän. Tarkastellun dr -levyisen renkaan varaus on

$$dQ = Q \frac{2r}{R^2} dr, \quad (10.57)$$

joten sen luoma sähkökenttä on lausekkeen (10.56) perusteella

$$dE_{r \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{2xr}{R^2(x^2 + r^2)^{3/2}} dr. \quad (10.58)$$

Kokonaissähkökenttä saadaan integroimalla muuttujaa r koko kiekon yli eli arvosta $r = 0$ arvoon $r = R$. Tässä integrointi onnistuu huomaamalla, että funktio $f(r) = (x^2 + r^2)^{-1/2}$ derivaatta on $f'(r) = -1/2 \cdot 2r \cdot (x^2 + r^2)^{-3/2}$. Niinpä funktio $-f'(r) = r(x^2 + r^2)^{-3/2}$ integraalin tätyy olla $-f(r) = -(x^2 + r^2)^{-1/2}$, ja näin saamme tuloksen

$$E_{\text{kiekko}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xQ}{R^2} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xQ}{R^2} \Big|_0^R - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \quad (10.59)$$

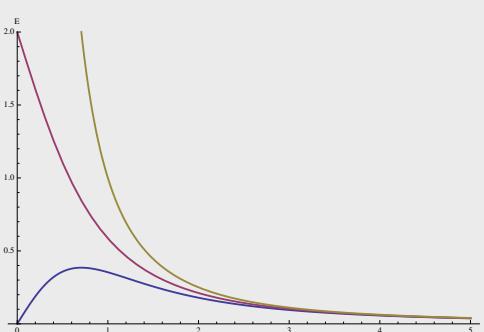
Mathematica:

```
(* vakiot *)
L = 2 Pi r; A = Pi R^2; s = Sqrt[x^2 + r^2]; lambda = q/L; sigma = Q/A;

(* pistevaraukseen kentta, sen x-komponentti, renkaan kentta *)
dEpiste = k q/s^2 /. q -> lambda;
dErengas = x/s dEpiste;
eRengas = Integrate[dErengas, {l, 0, L}]
(k q x)/(r^2 + x^2)^(3/2)

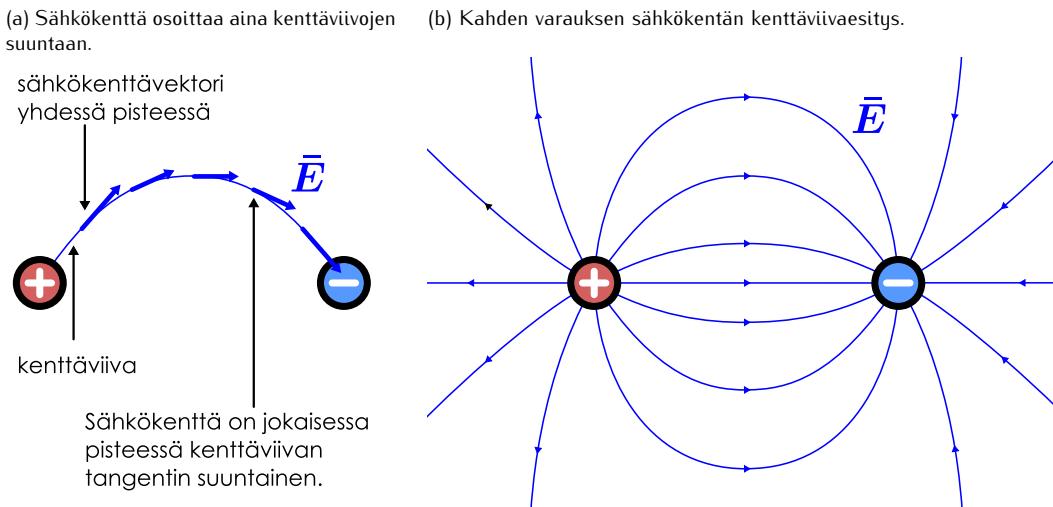
(* kiekon kentta *)
dEkiekko = eRengas /. q -> Q L/A;
eKiekko =
Integrate[dEkiekko, {r, 0, R},
Assumptions -> {x > 0, R > 0, k > 0, Q > 0}]
(2 k Q (1 - x/Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2

(* kentta etäisyyden funktiona *)
R = 1; k = 1; Q = 1; q = 1; r = 1;
Plot[{eRengas, eKiekko, 1/x^2}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {0, 2},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x", "E"}]
```



ARVIOINTI Yllä on piirretty ratkaisuna saadut renkaan ja kiekon sähkökenttien kuvaajat etäisyyden x funktiona sekä myös pistevaraukseen kentän $E_{\text{piste}} \sim 1/x^2$ kuvaja. (Kaikille vakiolle on kuvassa annettu yksinkertaisuuden vuoksi arvoksi 1.) Sekä renkaan että kiekon kentät lähestyvät tämän perusteella pistevaraukseen kenttää etäisyyden x kasvaessa kuten pitääkin. Lisäksi kuvaajasta nähdään, että renkaan sähkökentän voimakkuus on nolla, kun $x = 0$. Näin pitää olla, koska tällöin tarkastelupiste on kiekon keskipisteessä ja symmetrian perusteella tässä pistessä sähkökentän on oltava nolla.

Kuva 10.18: Sähkökentän esitys kenttäviivoilla.



10.3 Gaussian laki

Sähkökenttä on siis sähköistä vuorovaikutusta välittävä, koko avaruuden täyttävä rakenne, ja sähköisten ilmiöiden kuvamisen vaatii yleensä sähkökentän ominaisuuksien tuntemista. Tähän mennessä olemme opineet kuvamaan pienien tai kaukana olevien varauksen kappaleiden sähkökenttää pistevaraumallilla ja Coulombin lailla sekä laskemaan suurten kappaleiden kentän jakamalla kappaleet pieniin osiin ja laskemalla kaikkien osien tuottamat kentät yhteen integraalina.

Coulombin lain yhteydessä kuitenkin toteimme, että laki pätee vain paikoillaan oleviin varauksiin. Seuraava askeleemme onkin tutkia, millainen laki sähkökenttää kuvaaa *yleisesti*. Itse asiassa osoittautuu, että sähkökenttää kuvavia peruslajeja on *kaksi*, ja tässä luvussa tutustumme niistä ensimmäiseen, **Gaussian lakiin** (Carl Friedrich Gaussian mukaan), jonka erikoistapaus Coulombin lakikin on. Sähkökenttien tutkimus aikanaan luvussa 13.

Sähkökentän kenttäviivaesitys

Kuvasimme aikaisemmin sähkökenttää vektorikenttäkuvaajilla, joissa sähkökenttävektoreita piirretään nuolina avaruuden eri pisteisiin kuvamaan kussakin pisteessä vallitsevaa sähkökenttää. Tässä esityksessä nuolet piirretään tasaisin välein, joten nuolten määrä on vain valinta, joka ei itsessään kuva mitään. Nuolten pituus ja suunta sen sijaan kuvaavat sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa.

Voimme kuitenkin esittää sähkökentän muillakin tavoilla, ja **kenttäviivaesitys** on erityisen hyödyllinen. Kenttäviivojen ideaa on havainnollistettu kuvassa 10.18, jossa sähkökentän luovat positiivinen ja negatiivinen pistevaraust yhdessä. Kenttäviivaa aletaan piirtää positiivisesta varauksesta lähtien, ja jokaisessa pisteessä viiva etenee sähkökentän suuntaan. Kuvan 10.18 (a) tapauksessa tällä tavalla piirretty kenttäviiva päättyy lopulta negatiiviseen varaukseen, ja tänne kenttäviiva myös loppuu. Tämä on kenttäviivaesitykien perusominaisuus: *kenttäviivat alkavat aina positiivisista varauksista ja päättyvät negatiivisiin varauksiin elleivät jatku äärettömyksiin*. Kenttäviivoilla ei saa koskaan olla "vapaita pääitä" vaan kenttäviivat voivat alkaa ja päättyä ainoastaan sähkövaraukiin.

Näin piirtäen *sähkökenttä on kaikissa kenttäviivan pisteissä kenttäviivan tangentin suuntainen*. Yksi kenttäviiva ei tietenkään kuva sähkökenttää kuin pienessä avaruudenalueessa, mutta piirtämällä useita kenttäviivoja saadaan sähkökentälle luotua laajan alueen kattava esitys kuten kuvassa 10.18 (b). (Voit verrata tästä kenttäviivaesitystä kuvan 10.14 (i) vektorikenttäkuvaajaan, sillä molemmat esittävät täsmälleen samaa sähkökenttää.)

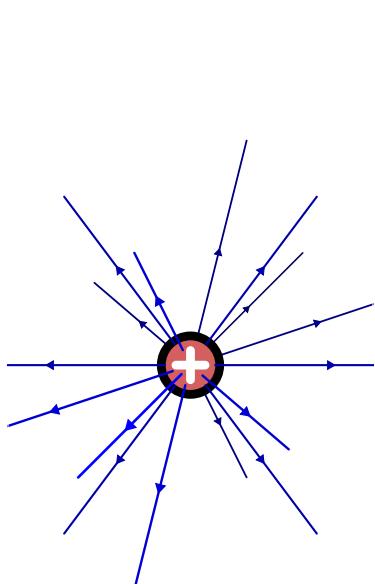
Kenttäviivojen kokonaismäärä kenttäviivaesityksessä on periaatteessa mielivaltainen. Esimerkiksi kuvan 10.18 (b) kenttäviivaesityksessä positiivisesta varauksesta lähtee 12 kenttäviivaa ja negatiiviseen varaukseen päättyy samaten 12 kenttäviivaa, mutta aivan yhtä positiivisesta varauksesta olisi voitu piirtää lähtemään vaikkapa 10 kenttäviivaa. Kenttäviivoja ei kuitenkaan pidä piirtää miten sattuu. Esimerkiksi pistevaraukseen sähkökenttä levää samanlaisena kaikkiin suuntiin, joten tällaisen sähkökentän kenttäviivaesityksenkin pitää olla symmetrinen. Varauksesta pitää siis lähteä joka suuntaan keskimäärin yhtä paljon kenttäviivoja.



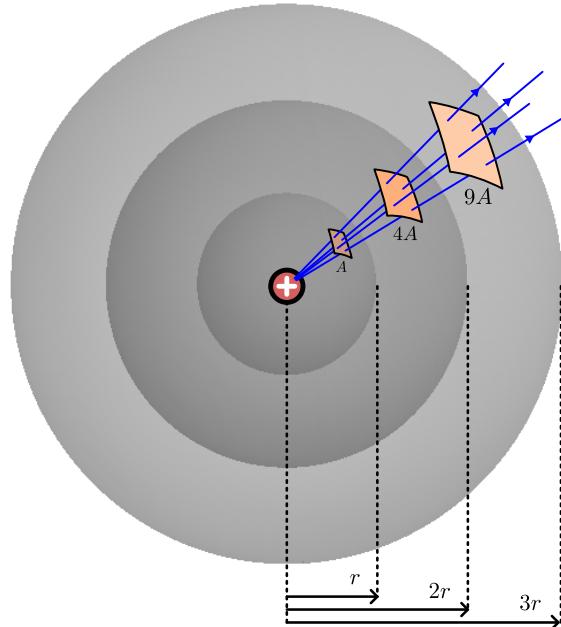
10.20 Voiko kaksi kenttäviivaa koskettaa toisiaan muualla kuin alku- tai loppupisteessään? Voivatko viivat leikata toisensa?

Kuva 10.19: Pistevarauksen kenttäviivat hajaantuvat joka suuntaan. Jos kenttäviivat läpäisevät etäisyydellä r kohtisuoran pinnan A , etäisyydellä $2r$ ne läpäisevät pinnan $4A$. Viivojen tiheys on siis kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon. Myös pistevarauksen sähkökentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon, joten viivojen tiheys on suoraan verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen.

(a) Kenttäviivoja kolmessa ulottuvuudessa.



(b) Kenttäviivojen tiheys pienenee kaukana pistevarauksesta.



Todellisuudessa sähkökenttä täyttää kolmiulotteisen avaruuden, joten periaatteessa kenttäviivaesityksetkin pitäisi piirtää kolmiulotteisiksi kuten kuvassa 10.19 (a). Tämä on kuitenkin hankala ja johtaisi usein liian monimutkaiseen kuvaan, joten piirräme yleensä kenttäviivaesitykset kaksiuotteisiksi. Tästäkin saa kohtullisen hyvän käsityksen kentän muodosta, jos tarkasteltava geometria ei ole kovin monimutkainen. Joissakin tapauksissa avaruuden kolmiulotteisuutta ei kuitenkaan voi jättää huomioidattaa.

Positiivisen pistevarauksen sähkökenttä osoittaa kaikkialla suoraan varauksesta pois päin, joten pistevarauksen sähkökenttää kuvaavien kenttäviivojen täytyy olla suoria viivoja. Lisäksi koska kenttäviivat alkavat positiivisesta varauksesta eivätkä ne saa katketa tyhjässä avaruudessa, kenttäviivat jatkuват äärettömyykiin ja niiden välinen etäisyys kasvaa sitä suuremmaksi mitä kauempana pistevarauksesta ollaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.19 (b), jossa pistevarauksen ympärille on piirretty erikokoisia pallopintoja. Yksinkertaisuuden vuoksi tähän kuvaan ei ole piirretty koko sähkökentän kenttäviivaesitystä vaan vain neljä kenttäviivaa, jotka kuvaavat ainostaan pieniä osuuksia pistevarauksen koko sähkökentästä. Mitä kauemmas varauksesta siirtytään, sitä suuremmalle pinta-alalle kenttäviivat levivät. Tämä näkyy kuvassa niin, että pallopintoista on väritetty se osuus, jonka läpi juuri nämä kenttäviivat kulkevat. Jos siis viivat kattavat etäisyydellä r alan A , etäisyydellä $2r$ ne ovat levinneet alalle $4A$ ja etäisyydellä $3r$ alalle $9A$ koska pallon pinta-ala on verrannollinen sen säteen nelioon.

10.21 Oletetaan, että kuvan 10.19 (b) varauksesta lähtee kaikkiaan $n_{\text{viiva}} = 360$ kenttäviivaa ja että $r = 1 \text{ m}$.

- (a) Montako kenttäviivaa läpäisee kunkin kuvan piirretyn pallopinnan?
- (b) Mikä on kenttäviivojen tiheys $n_{\text{viiva}}/A_{\text{pallo}}$ kullakin pallopinnalla?
- (c) Mikä on tämän perusteella kuvan piirretyn alan A suuruus?
- (d) Jos varauksen suuruus on Q , mikä on sähkökentän voimakkuus kullakin pallopinnalla?
- (e) Mikä on sähkökentän voimakkuuden ja kenttäviivojen tiheyden suhde kullakin pinnalla?

Kenttäviivojen levitessä yhä suuremmalle pinta-alalle niiden tiheys eli viivojen määrän n_{viiva} suhde viivojen läpäisemään pinta-alaan pienenee. Kuvassa 10.19 kenttäviivojen lukumäärä on $n_{\text{viiva}} = 4$, mutta viivojen läpäisemän pinnan ala riippuu siitä, kuinka kaukana pistevarauksesta kenttää tarkastellaan. Etäisyydellä r viivojen tiheys on $4/A$, mutta etäisyydellä $2r$ tiheys on tästä vain neljännes, $4/(4A) = 1/A$. Toisaalta Coulombin lain perusteella myös pistevarauksen luoman sähkökentän voimakkuus pienenee neljänneksiin, kun etäisyys varauksesta kaksinkertaistuu, koska sähkökentän voimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden nelioon. Tämä tarkoittaa siis sitä, että **kenttäviivojen tiheys on suoraan verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen**.

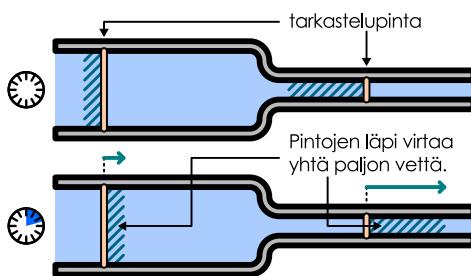
Tässä suhteessa kenttäviivaesitys on aivan erilainen kuin vektorikenttäesitys. Vektorikenttäkuvaajassa sähkökentän voimakkuus ilmenee nuolten pituudesta. Nuolten tiheys ja lukumäärä sen sijaan eivät merkitse mitään, koska nuolet püirretään tavallisesti tasaisin välein. Kenttäviivaesityksessä sen sijaan viivojen pituus on merkitysetön, koska viivat kulkevat joko positiivisista varauksista negatiivisiin tai vaihtoehtoisesti jatkuvat äärettömyyksiin. Sen sijaan *voimakasta sähkökenttää kuvaa se, että kenttäviivat kulkevat lähellä toisiaan.*

Sähkövuo

Gaussin lain muotoilemiseksi tarvitsemme uuden sähkökenttää kuvavan käsitteen, **sähkövuo**. Sähkövuo on kuitenkin varsin abstrakti suure, joten ennen sen määrittelyä tutkimme yleisemmin mitä *vuo* tarkoittaa fysiikassa. Tavoitteenamme on saada jonkinlainen käsitys siitä, mitä vuo kuvaa ja miten se lasketaan. Tarkastellaan siis ensin sähkövuoon mekaanista analogiaa, virtausvuota.

Vuo tarkoittaa fysiikassa yleisesti *pinnan läpi virtaavan suureen määrään aikayksikköö kohti*. Kohtasimme vuon käsitteen jo lämpöopin yhteydessä luvussa 7, kun määrittelimme *lämpövuron* kuvamaan kappaleen läpi lämpöön siirtynän energian tehoa. Lämpövuoissa virtavaa suure on lämpöön siirtynä energia ja lämpövuo kerää sekä kappaleen poikkileikkauspinnan läpi virtaavan energian määrään aikayksikköö kohti että virtauksen suunnan. Lämpövuo tarkasteltaessa virtaukselle määritellään aina *positiivinen suunta*, jolloin vuo on positiivinen, kun energiota siirtyy tähän suuntaan. Tässä tapauksessa tarkastelupinta oli todellisen, fysiikaalisen kappaleen rajaama. Vuon voi kuitenkin määrittää aivan hyvin myös *kuvitteellisten pintojen läpi*.

Kuva 10.20: Nopea virtaus kuljettaa pienennän pinnan läpi suuren vuon.



Kuvassa 10.20 on toinen esimerkki vuosta: putken läpi virtaavan nesteen määrä. Samaan tapaan kuin lämpövuo kuvaa pinnan läpi siirtynän energian määrään aikayksikkössä, voidaan määritellä virtauksen tilavuusvuo, Φ_V , joka kuvaa tarkastelupinnan läpi virtaavan nesteen tilavuutta aikayksikkössä. Virtausmekaniikkaa tutkiessamme päätelimme, että pinta-alan A läpi virtaa ajassa Δt tilavuus

$$\Delta V = A v \Delta t, \quad (10.60)$$

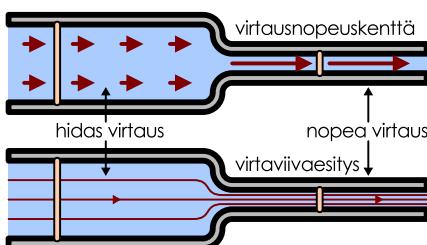
missä A on putken poikkipinta-ala ja v virtauksen nopeus. Tilavuusvuo putken läpi on siten

$$\Phi_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A v \quad (10.61)$$

eli *vuo on suoraan verrannollinen tarkasteltavan pinnan alaan ja virtauksen nopeuteen.*

Kuvaan on merkitty kaksi tarkastelupintaa, joiden kummankin läpi virtaa koko putken sisältö. Koska kyseessä on kokoonpuristumatonta virtausta, kummankin pinnan läpi kulkee samassa ajassa yhtä paljon nestettä eli vuo kummankin pinnan läpi on yhtä suuri. Pintojen pinta-alat eivät ole yhtä suuret, mutta neste virtaa kapeassa putkessa nopeammin kuin leveässä niin, että pinta-alan ja virtausnopeuden tulo on vakio.

Kuva 10.21: Nopeuden kuvaus vektorikentänä ja virtaviivoina.



Nesteenvirtausnopeus on vektorikenttä. Voimme nimittää määrittää nesteenvirtausnopeuden, joka on vektori, erikseen jokaisessa avaruuden pisteessä. Tätä vektorikenttää on havainnollistettu kuvassa 10.21 kahdella tavalla. Ylemmassä kuvassa nopeus on piirretty vektorikenttäkuvaajana, joka on samanlainen graafinen esitys kuin sähkökentän vektorikenttäkuvaaja. Alempassa kuvassa virtaus on kuvattu virtaviivaesityksenä, joka piirretään samaan tapaan kuin sähkökentän kenttäviivaesitys. Neste liikkuu jokaisessa virtaviivan pisteessä virtaviivan tangenttiin suuntaan. Pyörteettömässä virtauksessa neste myös kulkee virratessaan virtaviivaa pitkin niin, että virtaviivalla virtauksen alkupäässä oleva vesimassa on samalla virtaviivalla myös virtauksen lopussa. Virtaviivat eivät voi jatkuvassa virtauksessa myöskään katketa, koska

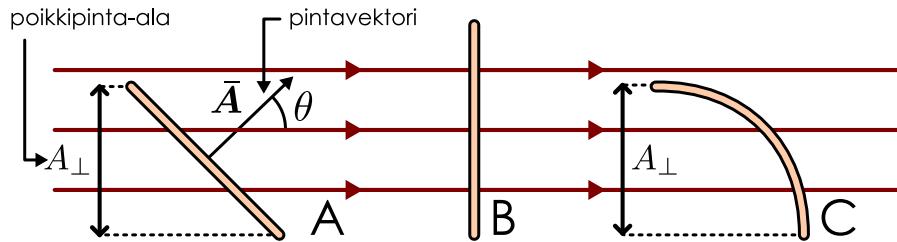
nestettä ei saa kadota minnekään. Kuvassa tämä näkyi siten, että putken kapeassa osassa on yhtä monta virtaviivaa kuin leveässäkin. Nämä viivat ovat kapeassa putkessa vain lähempänä toisiaan.

Kuvassa putken vasemmasta päästä saapuu sisään kolme virtaviivaa ja sen oikeasta päästä poistuu niin ikään kolme virtaviivaa. Toisaalta putken vasemmasta päästä saapuu yhtä paljon nestettä kuin sen oikeasta päästä poistuu. Tämä tarkoittaa sitä, että virtaviivojen lukumäärä on verrannollinen putken läpi virtaavan nesteen määräen aikayksikköö kohti. Mutta tämä on sama asia kuin virtauksen tilavuusvuo, joten *vuon täytyy olla suoraan verrannollinen tarkastelupinnan läpi kulkevien virtaviivojen lukumäärään*,

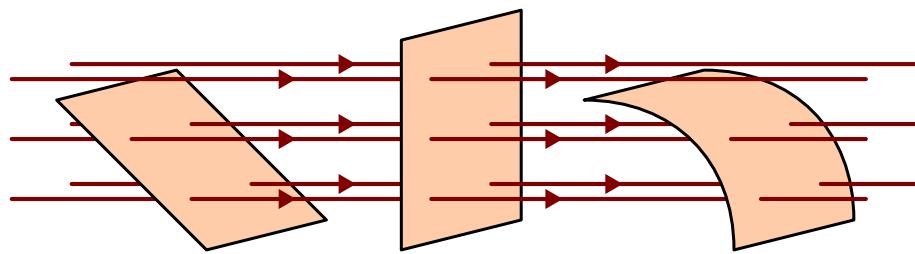
$$\Phi_V = a n_{\text{viiva}}. \quad (10.62)$$

Kuva 10.22: Vuo kuvaan pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrää. Kun virtaus on vakio, vuo on verrannollinen tarkastelupinnan poikkipinta-alaan.

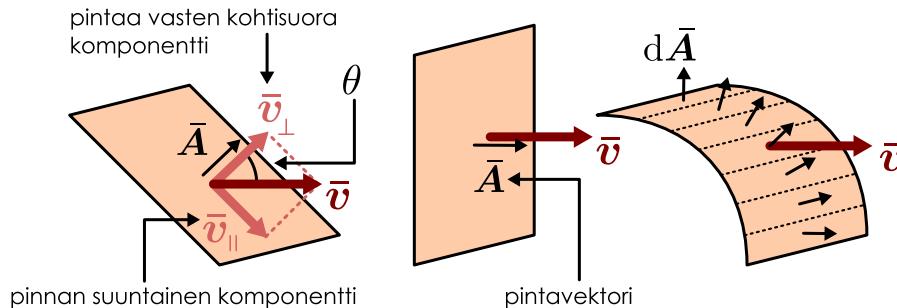
(a) Virtaviivojen ja pintojen kaksiulotteinen esitys.



(b) Virtaviivojen ja pintojen kolmiulotteinen esitys.



(c) Vuon laskeminen vektorien avulla.



Tässä vakiot μ_0 kuvaa sitä, kuinka suuren nestemääärän virtausta kukaan virtaviiva kuvaa, ja sen arvo riippuu siitä, kuinka virtaviivavesittys on piirretty. Virtaviivojen *tiheys* ei kuvaa virtaavan aineen määrää vaan *virtauksen nopeutta*. Kapeassa putkessa virtaus on nopeaa ja virtaviivat ovat tiheässä, kun taas leveässä putkessa virtaus on hidasta ja virtaviivat ovat toisistaan kaukana.

10.22 Kuvassa 10.21 kukaan tarkastelupinnan läpäisevä virtaviiva kuvaa 0.002 m^3 tilavuuden virtausta sekunnissa. Putken leveän osan poikkipinta-ala on 0.015 m^2 ja kapean 0.003 m^2 .

- (a) Paljonko nestettä putken läpi virtaa sekunnissa?
- (b) Mikä on nesteen virtausnopeus kummassakin putkessa?
- (c) Mikä on virtauksen tilavuus vuoden kummankin tarkastelupinnan läpi?

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin virtauksen vuota virtaukseen nähdyn kohtisuoran pinnan läpi, mutta edelliset havainnot voidaan yleistää myös tapauksiin, joissa virtaus ei suuntaudu kohtisuoraan pinnan läpi. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.22 (a). Kuvaan on piirretty kolme erilaista tarkastelupintaa (A, B ja C) sekä virtausta kuvava virtaviivavesittys. Pinta B on kohtisuorassa virtaviivoja vastaan, joten sen läpi kulkee mahdollisimman suuri määärä nestettä ja siis mahdollisimman suuri vuo. Pinta A on yhtä suuri kuin B, mutta se on noin 45° asteen kulmassa virtaukseen nähdyn, joten pienempi osa virtauksesta osuu siihen ja kulkee sen läpi. Tämä näkyy kuvassa siten, että pinnan A läpi kulkee vain kaksi virtaviivia kun pinnan B läpi viivoja kulkee kolme.

Pinta C on kaareva, mutta myös sen läpi kulkee kaksi virtaviivia eli yhtä monta kuin pinnan A läpi. Vuo pintojen A ja C läpi onkin yhtä suuri. Tämä johtuu siitä, että pinoilla A ja C on sama virtauksen suuntaan nähdyn kohtisuora *poikkipinta-ala* A_{\perp} , ja vuo on suoraan verrannollinen nimenomaan tähän poikkipinta-alaan,

$$\Phi_V = A_{\perp} v, \quad (10.63)$$

eikä siis pinnan kokonaismuodon.

Suoralle pinnalle poikkipinta-alan määrittäminen onnistuu helpoiten pinnan *normaalisuunnan* (eli pintaan nähdien kohtisuoran suunnan) ja virtauksen suunnan väisen kulman θ avulla. Jos pinnan normaalilla on virtauksen suuntainen, poikkipinta-ala on sama kuin pinnan todellinen ala ja vuo on suuri. Jos sen sijaan pinnan normaalilla on kohtisuorassa virtausta vastaan, virtaus on pinnan suuntainen eikä pinnan läpi kulje mitään. Tällöin vuo on nolla. Yleisesti suoran pinnan poikkipinta-ala on $A_{\perp} = A \cos \theta$, ja vuo on siten $\Phi_V = Av \cos \theta$. Saman voi kirjoittaa lyhyesti myös vektoreilla. Pintaa voidaan nimittää kuvata sitä vastaan kohtisuoraan asetetulla **pintavektorilla** \bar{A} , jonka pituus on sama kuin pinnan pinta-ala. Virtauksen nopeutta ja suuntaa kuvaa puolestaan vektori \bar{v} . Koska pistetulo määritellään vektoreiden pituksien ja niiden välisen kulman kosinin tulona, vuo on yksinkertaisesti pintavektorin ja nopeusvektorin pistetulo

$$\Phi_V = Av \cos \theta = \bar{v} \cdot \bar{A}. \quad (10.64)$$

Saman tuloksen voi päätellä myös tarkastelemalla virtausnopeusvektorin pinnan suuntaista komponenttia \bar{v}_{\parallel} ja pintaan nähdien kohtisuoraa komponenttia \bar{v}_{\perp} kuten kuvassa 10.22 (c). Pinnan suuntainen virtaus ei kuljeta nestettä pinnan läpi, joten se ei vaikuta lainkaan vuohon. Niinpä vuo riippuu ainoastaan pintaan kohtisuorasta komponentista \bar{v}_{\perp} , eli $\Phi_V = Av_{\perp}$. Mutta koska nopeuden kohtisuoran komponentin pituus on $v_{\perp} = v \cos \theta$, tämä johtaa samaan lopputulokseen kuin mitä edellä päätteliin.

Jos pinta on kaareva kuten kuvan pinta C, sillä ei ole yksikäsitteistä normaalialia eikä pintavektoria \bar{A} . Vuo on tällöinkin suoraan verrannollinen pinnan läpäisevien virtaviivojen määrään, mutta vuon täsmällinen laskeminen edellyttää pinnan jakamista pieniin osiin, vuon määritystä kullekin osalle erikseen, ja näiden laskemista yhteen. Esimerkiksi kuvassa 10.22 (c) Pinta C on jaettu osiin, joiden pintavektorit ovat $d\bar{A}$. Vuon kunkin osan läpi on $d\Phi_V = \bar{v} \cdot d\bar{A}$, ja kokonaisvuo saadaan summaamalla nämä yhteen. Kun pinta jaetaan tällä tavalla äärettömän moneen osaan, päädytään **pinta-integraaliin**

$$\Phi_V = \int \bar{v} \cdot d\bar{A}. \quad (10.65)$$

Yhteenvedona siis *virtauksen vuo* kuvaa pinnan läpi yhdessä aikayksikössä virtaavan nesteen tilavuutta ja se voidaan määrittää karkeasti laskemalla tarkasteltavan pinnan läpi kulkevien virtaviivojen lukumäärä. Suoran pinnan läpäisevä vuo voidaan laskea täsmällisesti pintaan kuvavaan pintavektorin ja virtausnopeusvektorin pistetulona. Sähkökenttä ei kuvaa aineen liikettä kuten virtaus, joten sähkökentän vuo eli *sähkövuo* ei kuvaa minkään siirtymän aineen määrästä. Sähkökenttä on kuitenkin matemaattisesti samanlainen vektorikenttä kuin virtausnopeuskenttäkin, joten voimme määritellä sähkövuo matemaattisesti täsmälleen samalla tavalla kuin virtauksen tilavuusvuon. Toisin sanoen *sähkövuo kuvaa pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrästä*,

$$\Phi_E = an_{\text{viiva}}, \quad (10.66)$$

samaan tapaan kuin virtauksen vuo kuvaa pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrästä. Tässä a on jokin kenttäviivaesityksen tiheydestä riippuva vakio. Lisäksi *suoran pinnan läpi kulkevan homogenisen kentän sähkövuo määritellään täsmällisesti sähkökenttävektorin ja pintavektorin pistetulona*,

$$\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{A} = EA \cos \theta, \quad (10.67)$$

josta saadaan myös sähkövuo yksiköksi $[\Phi_E] = [E][A] = \text{Nm}^2/\text{C}$. Sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määrään myös silloin kun pinnat ovat kaarevia tai kenttä on epähomogeenninen aivan kuten virtauksen tilavuusvuokin. Tällaisessa tapauksessa vuo määritellään täsmällisesti kentän pintaintegraalina

$$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{A}. \quad (10.68)$$

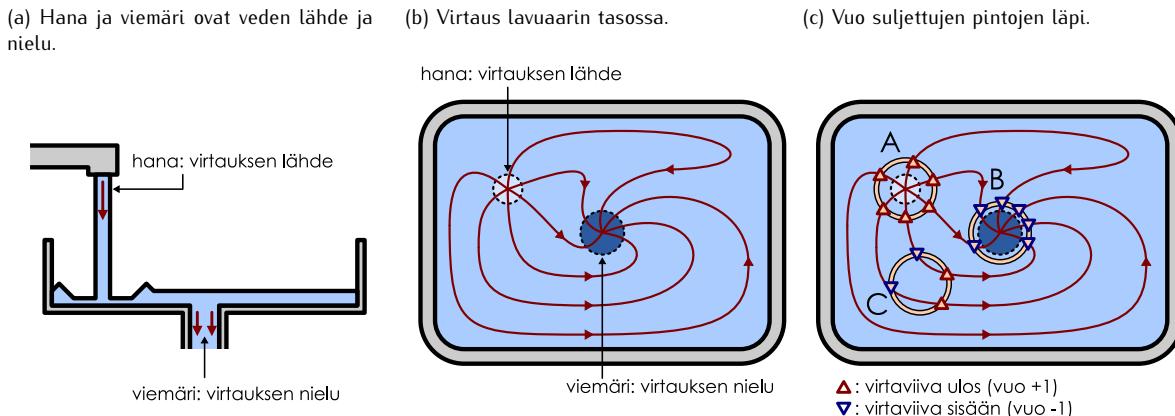


10.23 Selitä omin sanoin, mitä ovat kenttäviivat ja vuo? Miten kenttäviivoilla kuvataan sähkökenttää? Vertaa virtaviivoihin. Mitä virtauksen ja sähkökentän vuo kuvaa, ja miten vuo liittyy virta- ja kenttäviivoihin?

Gaussin laki

Vuon käsitteen avulla voimme vihdoinkin muotoilla sähkökenttien Gaussian lain, mutta lain sisällön ymmärtämiseksi palaamme vielä sitä ennen tutkimaan virtauksia ja virtaviivaesityksiä. Tarkastellaan nyt esimerkkinä kuvan 10.23 lavaaaria, johon virtaa vettä hanasta ja josta poistuu vettä viemärin kautta. Oletetaan, että virtaus on tasalista ja hanasta saapuu vettä täsmälleen yhtä nopeasti kuin mitä viemäristä poistuu, jolloin veden määrä altaassa ei muutu. Kuvassa 10.23 (b) on esitetty veden virtauksen virtaviivaesitys alaan pohjan tasossa. Hana on merkitty kuvan vaaleana ympyränä. Tässä kohdassa altaaseen saapuu lisää vettä, joka virtaa

Kuva 10.23: Tasainen virtaus lavuaarissa, jossa viemäriin kautta poistuu yhtä paljon vettä kuin hanasta saapuu eikä vettä kerry mihinkään. Lavuaarin tasossa virtauksen vuo hanaa ympäröivän suljetun pinnan sisältä ulos on yhtä suuri kuin hanasta saapuvan veden määrä aikayksikössä. Vuo viemäriä ympäröivän suljetun pinnan ulkoa sisään on yhtä suuri. Jos pinta ei ympäröi kumpaakaan, pinnan läpi täytyy virrata sisään ja ulos yhtä paljon vettä ja vuo on nolla.



heti altaaseen saavuttuaan nopeasti pois saapumispisteestään. Tämä näkyy kuvassa siten, että tästä pistestä lähtee virtaviivoja. Viemäri on puolestaan merkitytä kuvaan tummana ympyränä. Vesi virtaa viemäriin ja poistuu sitä kautta altaasta, ja tämä näkyy kuvassa viemäriin päättynä virtaviivoina. Tämän takia hanaa, josta virtaviivat lähtevät, kutsutaankin virtauksen *lähteeksi*. Vastaavasti viemäriä, johon virtaviivat päättyyvät, kutsutaan virtauksen *nieluki*.

Kuvassa 10.23 (c) on piirretty sama virtaviivakuvio uudelleen, mutta nyt kuvaan on lisätty kolme pinta, A, B ja C. Pinnat eivät ole mitään todellisia fysikaalisia pintoja vaan altaassa vain kuvitellaan olevan tällaiset pinnat, jotta voimme tarkastella virtauksen vuota. Toisin kuin aikaisemmin tarkastelemamme pinnat, nämä pinnat muodostavat suljetut ympyrät, ja koska kyseessä on kaksiluotteineste, kukaan pinnosta jakaa avaruuden kahteen osaan, pinnan sisä- ja ulkopuolelle (äärelliseen ja äärettömään alueeseen). Tällaisia kutsutaan **suljetuksi pinoiksi**. Tasossa suljettu pinta on silmukan muodostama käyrä kuten ympyrä. Kolmiulotteisessa avaruudessa suljettu pinta on aukoton kuori kuten pallon pinta.

Kuten edellisessä luvussa opimme, virtauksen vuo minkä tahansa pinnan läpi on verrannollinen pinnan läpi kulkevien virtaviivojen määrään, $\Phi_V = an_{\text{viiva}}$, sillä kukin virtaviiva esittää tiettyä virtaavan aineen määrää aikayksikössä. Ei ole kuitenkaan samantekivää, mihin *suuntaan* virtaviivat kulkevat, sillä vuo ilmaisee etumerkillään sen, mihin suuntaan virtaus tapahtuu. Vuon määritysessä käytettäville pinoille pitääkin aina määritellä *positiivinen läpäisy suunta*, jolloin vuo on positiivinen, jos ainetta virtaa pinnan läpi tähän suuntaan eli jos virtaviivat läpäisevät pinnan positiiviseen suuntaan. Erityisesti jos pinnan läpi kulkee virtaviivoja vastakkaisiin suuntiin, positiiviseen suuntaan kulkevat virtaviivat lasketaan positiivisina ja vastakkaiseen suuntaan kulkevat virtaviivat puolestaan negatiivisina, jolloin kokonaivuo on näiden summa

$$\Phi_V = a(n_{\text{viiva},+} - n_{\text{viiva},-}). \quad (10.69)$$

Jos pinta ei ole suljettu, positiivinen suunta voidaan valita vapaasti. Suljettujen pintojen tapauksessa yleinen käytäntö on kuitenkin se, että *positiivinen suunta valitaan aina sisältä ulos*. Näin valituen vuo suljettun pinnan läpi ilmaisee aina pinnan sisältä ulos virtaavan aineen määrä. Kuvassa 10.23 (c) pinnan A sisältä ulos kulkee 6 virtaviivaa eikä sisään kulje ainuttakaan viivaa, joten tälle pinnalle $n_{\text{viiva},+} = 6$ ja $n_{\text{viiva},-} = 0$. Oletetaan, että yksi virtaviiva kuvaa tässä $a = 1.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ virtausta. Tällöin virtauksen vuo pinnan A sisältä ulos on

$$\Phi_{V,A} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (6 - 0) = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.70)$$

Tämä tarkoittaa fysikaalisesti sitä, että hanasta saapuu joka sekunti $6.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ (eli 0.6 desilitraa) vettä, joka virtaa pinnan A läpi muualle altaaseen. *Vuo suljettun pinnan A läpi kuva siis sitä, paljonko vettä pinnan sisällä oleva virtauksen lähde eli hana tuottaa.*

Pinnan B läpi kulkee myös 6 virtaviivaa, mutta nämä kulkevat kaikki ulkoa sisään eli negatiiviseen läpäisy suuntaan. Niinpä tälle pinnalle $n_{\text{viiva},+} = 0$ ja $n_{\text{viiva},-} = 6$, jolloin vuo pinnan sisältä ulos on

$$\Phi_{V,B} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (0 - 6) = -6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.71)$$

Vuo on negatiivinen, koska vesi virtaa pinnan ulkopuolelta sen sisään. Vuon itseisarvo puolestaan ilmaisee sen, paljonko vettä pinnan sisällä oleva virtauksen nielu eli viemäri poistaa altaasta.

Pinnan C sisällä ei ole hanaa eikä viemäriä, joten sen sisällä veden määrä ei lisääny eikä väheny. (Virtaus oletettiin tasaiseksi, joten vettä ei myöskään saa kertyä pinnan sisälle varastoon.) Toisin sanoen vesi vain virtaa pinnan rajaaman alueen läpi sisään yhdestä reunasta ja ulos toisesta. Tämä näkyy virtaviivakuviossa siinä, että pinnan ulkoa sisään kulkee kaksi virtaviivaa ja samoin pinnan sisältä ulos kulkee kaksi virtaviivaa. Tälle pinnalle siis $n_{\text{viiva},+} = 2$ ja $n_{\text{viiva},-} = 2$, jolloin vuo pinnan läpi on

$$\Phi_{V,C} = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot (2 - 2) = 0 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}. \quad (10.72)$$

Nollavuo ilmaisee juuri sitä, että vettä virtaa pinnan läpi sisään ja ulos yhtä paljon eikä veden määrä pinnan sisällä siis muutu.



10.24 Kuvittele kuvan 10.23 (c) pinta, jonka sisällä ovat sekä hana että viemäri. Montako kenttäviivaa valitsemasi pinnan läpi kulkee sisään ja ulos? Mikä on vuo pinnan läpi? Mitä tämä kertoo pinnan sisältämistä lähteistä ja nieluista?

Yhteenvetona virtauksen vuo suljetun pinnan läpi on *positiivinen*, jos pinnan sisällä on virtauksen lähdet tai yleisemmin *enemmän lähteitä kuin nieluja*. Tällöin vuo kertoo, kuinka nopeasti virtaavan aineen määrä lisääntyy pinnan sisällä. Vastaavasti vuo on *negatiivinen*, jos suljetun pinnan sisällä on *enemmän nieluja kuin lähteitä*, ja vuon itseisarvo ilmaisee tällöin kuinka nopeasti ainetta poistetaan pinnan sisällä. Jos pinnan sisällä ei ole lähteitä tai nieluja tai jos näitä on yhtä paljon, vuo on nolla.

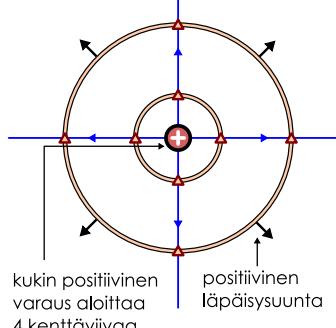
Samanlainen yhteys pätee myös sähkökentän lähteille ja nieluille sekä sähkövuolle, mitä on havainnollistettu kuvassa 10.24. Kuvassa (a) on positiivinen pisteveraus Q ja tämän sähkökentän kenttäviivasuoritus. Tässä kenttäviivasuoritus on püirretty niin, että varauksesta lähee neljä kenttäviivaa. Varauksen ympärille on püirretty myös kaksi suljettua pintaa. Kuvan kaksiulotteisuuden takia pinnat on püirretty ympyröinä, mutta todellisuudessa tilanne on kolmiulotteinen ja püirretty pinnat esittävät ontoja pallokuoria, joiden sisällä varaus on. Varauksesta lähtevät virtaviivat jatkuvat suorina äärettömyyksiin, joten kaikki neljä kenttäviivaa läpäisevät sekä pienemmän että suuremman tarkastelupinnan. Kummankin pinnan läpi kulkee siis neljä kenttäviivaa sisältä ulos, $n_{\text{viiva},+} = 4$, ja sähkövuo kummankin pinnan läpi on $\Phi_E = a(n_{\text{viiva},+} - n_{\text{viiva},-}) = 4a$, missä a on nyt jokin varauksen suuruudesta riippuva vakio.

Kuvassa 10.24 (b) on negatiivinen pisteveraus $-2Q$ ja tämän sähkökenttä samassa mittakaavassa kuin kuvassa (a). Koska varaus on negatiivinen, kenttäviivat kulkevat kuvan ulkoa keskelle ja päättvät varaukseen. Jos varaus olisi $-Q$, siihen päättynisi neljä kenttäviivaa aivan kuten kuvassa (a) positiivisesta varauksesta lähti neljä kenttäviivaa. Nyt varaus on kuitenkin suuruudeltaan kaksinkertainen kuvan (a) varaukseen verrattuna, joten sen luoman sähkökentän täytyy olla voimakkuudeltaan kaksinkertainen. Sähkökentän voimakkuus on kuitenkin verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen, joten kuvan (b) täytyy pürtää kenttäviivoja kaksinkertaisella tiheydellä kuvaan (a) verrattuna. Näin ollen kuvan tulee pürtää yhteensä kahdeksan kenttäviivaa. *Varatusta kappaleesta lähtevien tai siihen päättvien kenttäviivojen lukumäärä siis kuvaa kappaleen kokonaisvarausta*. Kuvassa (b) varausta ympäröivien pintojen läpi kulkee 8 kenttäviivaa negatiiviseen suuntaan, ja vuon pintojen läpi on $\Phi_E = -8a$.

Kuva 10.24: Sähköiset kenttäviivat lähtevät aina positiivisista varauksista ja päättvät negatiivisiin varauksiin tai jatkuvat äärettömyyksiin. Kenttäviivoja ei voi alkaa eikä loppua alueessa, jossa ei ole varausta. Tämän vuoksi suljetun pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen vuo on verrannollinen pinnan sisällä olevaan kokonaisvaraukseen.

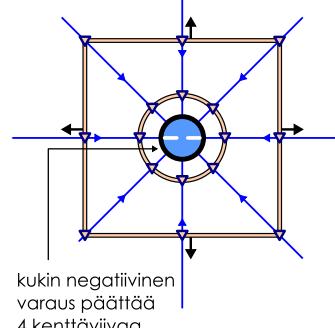
(a) Pinnan sisällä varaus $+Q$, vuo 4 kenttäviivaa.

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)



(b) Pinnan sisällä varaus $-2Q$, vuo -8 kenttäviivaa.

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)



(c) Kenttäviivojen vuo on aina $n_{\text{viiva},+} - n_{\text{viiva},-} = 4Q_{\text{sisällä}}$.

vuo: $2\Delta + 2\triangledown : 0$

vuo: $12\Delta : 12$

vuo: $12\triangledown : -12$

vuo: $9\Delta + 9\triangledown : 0$

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

△: kenttäviiva ulos (vuo +1)
▽: kenttäviiva sisään (vuo -1)

</div



- 10.25** Kuvassa 10.24 (b) ulompi suljettu pinta on neliö (kolmessa ulottuvuudessa kuutio). Jos tämä pinta korvattaisiin pinta-alaltaan yhtä suurella pallopinnalla, miten muuttuisi
 (a) pinnan läpäisevien kenttäviivojen määrä,
 (b) pinnan läpäisevän sähkövuon suuruus?
 (c) Entä jos varausta siirretään niin, että se pysyy kuution sisällä muttei ole enää keskellä?

Kuvassa 10.24 (c) on kahden varauksen $3Q$ ja $-3Q$ synnyttämä sähkökenttä sekä neljä erilaista suljettua pinta. Nyt kenttäviivat eivät ole enää suoria viivoja, mutta ne noudattavat edelleen kenttäviivojen sääntöjä, joiden mukaan viivat voivat alkaa vain positiivisista varauksista ja päättyä negatiivisiin varauksiin. Lisäksi kuten juuri päätelimme, kustakin varauksesta lähtevien kenttäviivojen määrä on verrannollinen varauksen suuruuteen. Tässä kuvassa varaukset ovat itseisarvoltaan kolminkertaiset kuvaan (a) nähdyn, jojen positiivisesta varauksesta lähtee 12 kenttäviivaa ja negatiiviseen varaukseen päättyy 12 kenttäviivaa, kolminkertainen määrä kuvaan (a) verrattuna.

Pinta A on positiivista varausta ympäröivä pallopinta, ja kaikki 12 tästä varauksesta lähtevää kenttäviivaa kulkevat pinnan läpi. Vuo pinnan läpi on siis $\Phi_{E,A} = 12a$. Samoin pinta B ympäröi negatiivista varausta ja sen läpi kulkee 12 kenttäviivaa ulkoa sisään. Vuo tämän pinnan läpi on $\Phi_{E,B} = -12a$. Pinta C on ellipsoidi, jonka sisällä ei ole varauksia. Pinnan läpi kulkee kaksi kenttäviivaa sisään ja kaksi kenttäviivaa ulos, jolloin kokonaivuo pinnan läpi on $\Phi_{E,C} = (2 - 2)a = 0$. Pinta D on jokin epäsäännöllisen muotoinen pinta, ja kumpikin varaus jää sen sisään. Tämän pinnan sisältä ulos kulkee 9 kenttäviivaa ja ulkoa sisään kulkee myös 9 kenttäviivaa. Niinpä vuo tämänkin pinnan läpi on $\Phi_{E,D} = (9 - 9)a = 0$.

Edelliset havainnot voidaan yhdistää seuraavasti. Jos suljetun pinnan sisällä on positiivinen kokonaivauraus, vuo pinnan läpi on positiivinen. Vastaavasti jos pinnan sisällä on negatiivinen kokonaivauraus, vuo pinnan läpi on negatiivinen. Lisäksi vuo on itseisarvoltaan sitä suurempi, mitä suurempi varaus pinnan sisällä on. Jos pinnan sisällä ei ole lainkaan varausta tai jos positiivista ja negatiivista varausta on yhtä paljon, vuo on nolla. Tämä johtuu siitä, että vuo laskee pinnan läpi kulkevia kenttäviivoja, ja kenttäviivat syntyvät varauksista. *Positiiviset varaukset ovat sähkökentän lähteitä* (vrt. hana), joista lähtee kenttäviivoja, ja *negatiiviset varaukset ovat sähkökentän nieluja* (vrt. viemäri), joihin kenttäviivat päättyvät. Jos vuo suljetun pinnan läpi on positiivinen, kenttäviivoja kulkee enemmän sisältä ulos kuin ulkoa sisään (vrt. nestettä virtaa ulos), ja niinpä pinnan sisällä täytyy olla *enemmän lähteitä kuin nieluja*. Kääntäen jos vuo on negatiivinen, kenttäviivoja kulkee enemmän ulkoa sisään (vrt. nestettä virtaa sisään) ja pinnan sisällä täytyy olla enemmän nieluja kuin lähteitä. Jos pinnan sisällä on yhtä paljon lähteitä ja nieluja, vuo on nolla.

Tämän päättelyn nojalla *suljetun pinnan ulkopuolistet varaukset eivät vaikuta pinnan läpi kulkevaan vuohon lankaan*. Tämä johtuu siitä, että jos vaikkapa positiivinen varaus on pinnan ulkopuolella, varauksesta lähtevät kenttäviivat *joko* kulkevat kokonaan pinnan ohitse eivätkä läpäise sitä lankaan *tai* ne kulkevat pinnan yhdeltä puolelta sisään ja toiselta puolelta ulos. Kenttäviivat muuttavat sähkövuota vain, jos ne alkavat tai päättyvät pinnan sisällä, ja tämä on mahdollista vain jos pinnan sisällä on varauksia.

Nämä havainnot yhdessä muodostavat *Gaussian laki*, jonka mukaan *suljetun pinnan läpi kulkeva sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan sisältämään kokonaivaraukseen*,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{sisällä}}. \quad (10.73)$$

Tässä esiintyvä verrannollisuuskerroin $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ on **sähkövakio** eli historialliselta nimeltään *tyhjiön permittivisyys* (engl. ‘permeate’, läpäistä tai levitä — nimi viittaa siihen, että vakio kuvailee varauksen kykyä luoda ja levittää sähkökenttää avaruuteen).

Gaussian laki voi vaikuttaa oudolta, koska se puhuu sähkövuosta eikä sähkökentästä itsestään. Gaussian laista ei yleensä voikaan suoraan päättää sähkökenttää yksittäisessä avaruuden pisteessä, sillä valittiinpa millainen suljettu pinta tahansa, on olemassa paljon erilaisia sähkökenttiä, jotka tuottavat saman sähkövuron. Gaussian lain soveltaminen ei olekaan yhtä suoravivaista kuin Coulombin lain. Gaussian laki on kuitenkin sähkökenttien fundamentaali laki, joka pätee *aina*.



- 10.26** Kirjoita tiivistelmä Gaussian laista. Selitä laki sekä sanoin että matemaattisesti. Mitä ovat lähteet ja nielut? Mitä laki sanoo sähkökentän kenttäviivavesityksestä?

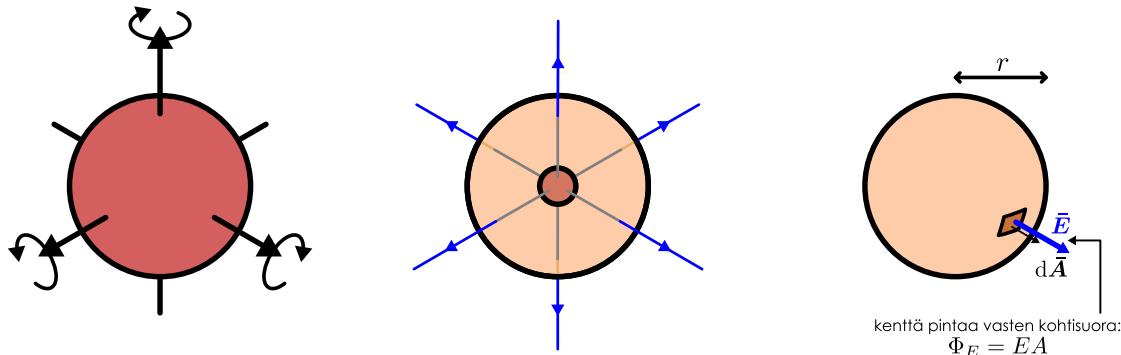
Symmetrisiä sähkökenttiä

Sähkökentän päättely Gaussian lain perusteella on yleensä vaikeaa, mutta *symmetrisissä systeemeissä* sähkökenttä on itse asiassa paljon helpompi päättää Gaussian lain avulla kuin Coulombin lain kautta varausjakamia integroiden. Tutkitaan nyt muutaman esimerkin avulla, kuinka tämä tapahtuu.

Johdetaan ensimmäiseksi Coulombin laki Gaussian lain ja symmetrian avulla. Symmetria tarkoittaa sitä, että systeemiä voi muuttaa jollakin tavalla ja systeemi on muutoksen jälkeen täsmälleen samanlainen kuin aluksi.

Kuva 10.25: Pallosymmetrisen varausjakauman sähkökenttiä päättely Gaussian lain avulla. Valitaan Gaussian pinta aina niin, että pinnalla on sama symmetria kuin varausjakaumalla. Tällöin sähkökenttä on kaikkialla Gaussian pintaan vastaan kohtisuora. Lisäksi kenttä on pinnalla suuruudeltaan vakio, joten vuo saadaan laskettua kertomalla keskenään kentän voimakkuus ja Gaussian pinnan pinta-ala.

- (a) Pallosymmetria: kiertosymmetria kaikkien akselien ympäri. (b) Varattu pallo ja pallomainen Gaussian pinta. (c) Gaussian pinnan ala on $A = 4\pi r^2$.



Esimerkiksi pallo on *kiertosymmetrinen* keskipisteensä suhteeseen, koska pallo pysyy samanlaisena vaikka sitä käännettäisiin minkä tahansa sen keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri (kuva 10.25 (a)). Tätä kutsutaan *pallosymmetriaksi*.

Pisteveraus on *pallosymmetrinen* systeemi, sillä pisteveraus näyttää aivan samalta kaikista suunnista ja asennoista tarkasteltuna. Kuvitellaan nyt varauksen ympärille suljettu pallopinta, jonka säde on r — Gaussian lain yhteydessä suljettuja pintoja kutsutaan *myös Gaussian pinnaksi* — jonka keskipisteessä varaus on (kuva 10.25 (b)). *Gaussian lain mukaan* sähkövuon tämän pinnan läpi täytyy olla

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (10.74)$$

koska varaus Q on pinnan sisällä.

Toisaalta koska systeemi on *pallosymmetrinen*, sähkökentän täytyy kaikkialla osoittaa suoraan poispäin varauksesta. Lisäksi koska valittu Gaussian pinta on pallo, jonka keskipiste on samassa pisteessä kuin pisteveraus, sähkökentän täytyy olla kaikkialla kohtisuorassa pintaan vasten (kuva 10.25 (c)). Sähkövuo *määriteltiin* sähkökenttävektorin pintaan vasten kohtisuoran komponentin ja pinnan alan tulona, ja koska nyt kenttä on kaikkialla kohtisuorassa Gaussian pintaan vasten, kentän pintaan vasten kohtisuora komponentti on sama kuin kentän suuruus. Pallon pinta-ala puolestaan on $A = 4\pi r^2$, joten sähkövuo on määritelmän mukaan

$$\Phi_E = EA = 4\pi r^2 E. \quad (10.75)$$

Nämä saimme sähkövulle kakso erilaista esitystapaa. Sähkövuo määritelmä on *matemaattinen säädötö*, joka kertoo miten vuo riippuu sähkökentästä sekä pinnan muodosta ja pinta-alasta. Gaussian laki sen sijaan on *fysiikaalinen laki*, joka yhdistää sähkövuo ja pinnan sisältämän varauksen. Kumpikin on totta, joten niiden perusteella johdettujen sähkökentän lausekkeiden täytyy olla yhtä suuret. Siispä valitulla Gaussian pinnalla täytyy olla $Q/\epsilon_0 = 4\pi r^2 E$, ja tästä voidaan ratkaista sähkökentän voimakkuudeksi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (10.76)$$

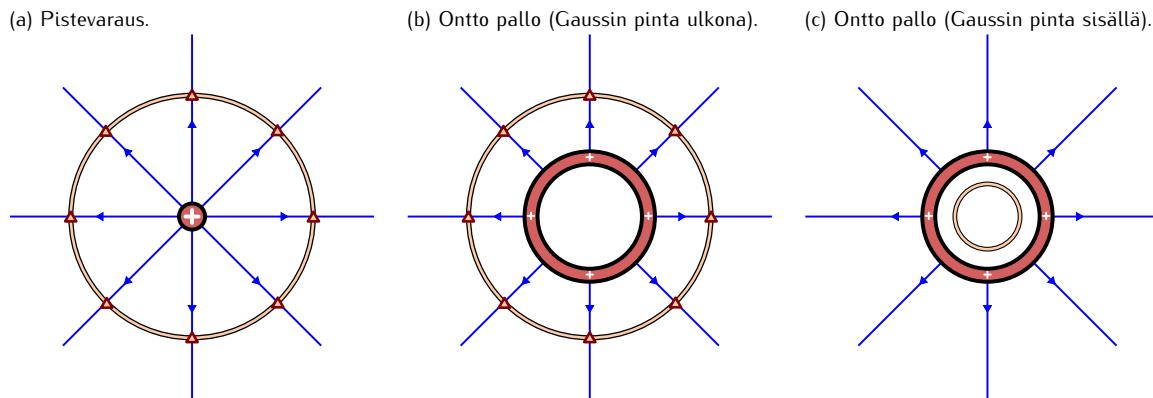
Nämä olemme johtaneet paikoillaan olevan pisteverauksen tuottaman sähkökentän voimakkuuden etäisyydellä r Gaussian laista.

Tulos on sama kuin Coulombin laista johdettu pisteverauksen sähkökentän lauseke (10.12). Pisteverauksen sähkökenttä on suoraan verrannollinen varauksen suuruuteen ja käännekkäin verrannollinen etäisyyden nelioon. Ainoa ero on verrannollisuuskerroin, joka on Coulombin lain mukaan Coulombin vakio k ja Gaussian lain mukaan lauseke $1/(4\pi\epsilon_0)$. Nämä ovat kuitenkin samaa vakio, sillä

$$k_\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (10.77)$$

Coulombin laki ja Gaussian laki ovat siis sopisoinnussa, kun sähkökentän tuottaa paikoillaan oleva pisteveraus. Gaussian laki kuitenkin pätee aina toisin kuin Coulombin laki, joten *Coulombin laki on Gaussian lain*

Kuva 10.26: Pistevaraksen, varatun pallon ja ontton varatun pallokuoren sähkökenttiä täytyy olla samat kappaleiden ulkopuolella, koska niillä on samanlainen symmetria. Vuoden palloa ympäröivän Gaussian pinnan läpi riippuu vain pallon kokonaisvarauksesta, ei lainkaan pallon koosta. Ontton pallon sisällä sen sijaan ei ole varausta, joten myös sähkövuo täytyy olla siellä nolla.



erikoistapaus. Tästä syystä myös sähkövakiota ϵ_0 pidetään fundamentaalina luonnonvakiona, josta Coulombin laki voidaan laskea, eikä toisin päin.

Tämä päättely antaa myös syyn sille, miksi etäisyys esiintyy Coulombin laissa juuri muodossa r^{-2} . Varausluoma sähkökenttä nimittäin jakautuu pallopinnalle, jonka pinta-ala on verrannollinen pallon säteen neljään. Gaussian lain mukaan sähkövuo on sama riippumatta pallopinnan koosta, joten sähkökentän voimakkuuden täytyy pienentyä yhtä nopeasti kuin pinta-ala kasvaa. Eksponentti -2 johtuu siis geometriasta, ja tästä syystä sen täytyy olla kokonaisluku.



10.27 Mikä olisi Gaussian laki mukaan pistevaraksen sähkökenttä etäisyydellä r , jos maailmankaikkeus olisi 2-ulotteinen?

Äsknen tarkastelimme pistevarausta, mutta Gaussian laki päätee kaikille varauksille ja niiden luomille sähkökentille. Se, että edellisessä päättelyssä tarkasteltiin pistevarausta, ilmeni *ainoastaan* siinä, että systeemin oletettiin olevan *pallosymmetrinen*. Päättely toimiinkin täsmälleen samalla tavalla *kaikille pallosymmetrisille systeemeille* kuten palloille ja pallokuorille. Kuvaassa 10.26 (a) ja (b) on verrattu pistevaraksen (tai pienien pallon) ja yhtä suuren varauksen sisältävän onton pallokuoren sähkökenttiä. Kumpikin systeemi on pallosymmetrinen, ja kappaleiden ympärillä on yhtä suuret Gaussian pinnat. Koska varattujen kappaleiden kokonaisvaraus on yhtä suuri, kummankin Gaussian pinnan läpi täytyy kulkea yhtä suuri sähkövuo. Edelleen symmetrian vuoksi sähkökentän täytyy osoittaa kummassakin tapauksessa poispäin systeemin keskipisteestä, joten kenttä on Gaussian pinnalla kaikkialla kohtisuorassa pintaa vasten, ja näin ollen sähkökentän voimakkuuden täytyy olla sama kummallakin Gaussian pinnalla. Kummassakin systeemissä sähkökenttä on siis Gaussian pinnalla samansuuntainen ja yhtä voimakas, joten kentän täytyy olla *sama*. *Pallon tai pallokuoren sähkökenttä on siis täsmälleen samanlainen kuin pallon keskipisteessä olevan pistevaraksen kenttä.*

Tämä kuitenkin päätee vain pallon ulkopuolella. Kuvaassa 10.26 (c) on tarkasteltu onton pallokuoren kenttää pallon *sisällä*. Nyt Gaussian pinta on asetettu varatun pallon sisään, ja koska pallo on ontu, Gaussian pinnan sisään ei jää lainkaan varausta. Siispä sähkövuo pinnan läpi on myös nolla. Vuoden pallo voi olla nolla siksi, että pinnan läpi kulkee yhtä paljon kenttäviivoja sekä sisään että ulos, mutta symmetrian vuoksi tämä ei ole mahdollista. Siksi *sähkökentän täytyy olla nolla varatun pallokuoren sisällä*. Esimerkiksi metallipallon varautuessa varaus levää itsestään pallon pinnalle, joten pallon pinta muodostaa itsestään varatun pallokuoren, eikä pallon sisään jää lainkaan ylimääräistä varausta. Niinpä varatun metallipallon sisällä ei ole lainkaan sähkökenttää.



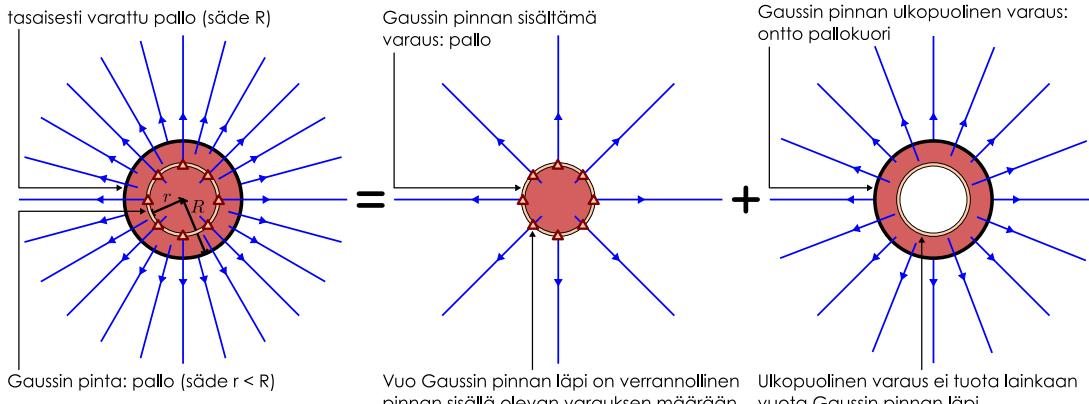
10.28 Seuraako Gaussian laista, että sähkökenttä on nolla kaikkien onttojen varattujen kappaleiden sisällä? Jos seurailee, miksi? Jos ei, millä ehdolla kenttä on nolla varatun kappaleen sisällä?

Johde ei voi olla sisältä varattu, koska toisiaan hylkivät varauksenkuljetajat hakeutuvat aina johteen pinnalle mahdollisimman kauas toisistaan. Eristepalloissa varauksen ei kuitenkaan tarvitse välttämättä olla pallon pinnalla vaan eriste voi olla kauttaaltaan varautunut. Tällaisenkin pallon sähkökenttä voidaan määritellä Gaussian lainsäädännän avulla, jos varaus on jakautunut palloon symmetrisesti. Tarkastellaan siis vielä esimerkkinä tasaisesti varautuneen pallon sähkökenttää.

Edellisten päättelyiden nojalla pallon ulkopuolella sähkökenttä on samanlainen kuin pistevaraksen kenttä. Pallon sisällä kenttä on kuitenkin erilainen kuin johdepallon sisällä tai pistevaraksen ympärillä. Tämän

Kuva 10.27: Sähkökenttä tasaisesti varatun pallon sisällä (säde R). Valitaan Gaussian pinnaksi pienempi pallo (säde r), jonka keskipiste on suuren pallon keskipisteessä. Gaussian lain mukaisesti sähkövuo tämän Gaussian pinnan läpi riippuu vain pinnan sisällä olevasta varauksesta, joten vuo voidaan laskea tuntumatta sähkökenttää. Symmetriarenkaan perusteella sähkökentän voimakkuus on pinnalla kaikilla sama, joten sähkökentän voimakkuus Gaussian pinnalla voidaan päättellä tunnetun sähkövuo perusteella.

(a) Varauksen jako Gaussian pinnan sisä- ja ulkopuoliseen osuuteen.



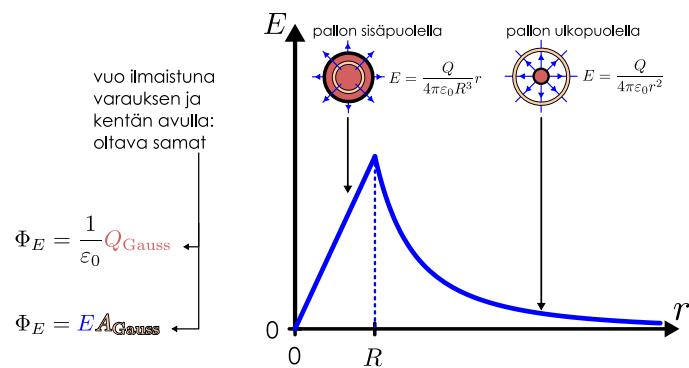
(b) Vuon päätely kahdella tavalla.

$$\begin{aligned} \text{koko pallo} & V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{Gaussian pinnan sisäpuoli} & V_{\text{Gauss}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ Q_{\text{Gauss}} &= Q \frac{V_{\text{Gauss}}}{V_{\text{pallo}}} \\ \text{Gaussian pinta} & A_{\text{Gauss}} = 4\pi r^2 \\ E & \end{aligned}$$

Gaussian laki
vuon määritelmä + symmetria

Vuo Gaussian pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisällä olevan varauksen määärään. Ulkopuolinen varaus ei tuota lainkaan vuoja Gaussian pinnan läpi.

(c) Sähkökentän voimakkuus pallon keskipisteestä mitattuna etäisyyden funktiona.



pallon sisäisen sähkökentän saamme selville asettamalla pallon sisään Gaussian pinnan, jonka säde r on pienempi kuin varatun pallon säde R kuten kuvassa 10.27. Nyt voimme tarkastella erikseen Gaussian pinnan sisään ja sen ulkopuolelle jäävästä varauksesta. Pinnan ulkopuolelle jäävä varaus muodostaa ontton pallokuoren, ja kuten juuri päättelimme, ontto varattu pallokuori ei luo sisäänsä lainkaan sähkökenttää. Niinpä Gaussian pinnan läpäisevä vuon tuottaa *pelkästään pinnan sisään jäävä varaus*.

Koko pallon tilavuus on $V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ ja koska pallo oli tasaisesti varattu, pallon varaustiheys on

$$\rho = \frac{Q}{V_{\text{pallo}}} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (10.78)$$

Gaussian pinnan sisään jää tilavuus $V_{\text{Gauss}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ja varaus

$$Q_{\text{Gauss}} = \rho V_{\text{Gauss}} = Q \frac{V_{\text{Gauss}}}{V_{\text{pallo}}} = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (10.79)$$

Gaussian lain mukaan sähkövuo Gaussian pinnan läpi on siten

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{Gauss}} = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}. \quad (10.80)$$

Toisaalta Gaussian pinnan pinta-ala on $A_{\text{Gauss}} = 4\pi r^2$ ja sähkökenttä on kaikilla pintaan vasten kohtisuorassa, joten vuo pinnan läpi on määritelmän mukaan

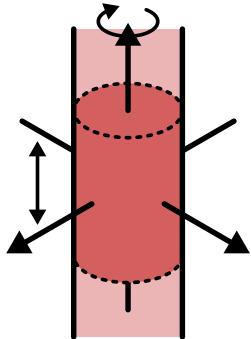
$$\Phi_E = EA = 4\pi r^2 E. \quad (10.81)$$

Tämän täytyy olla sama kuin Gaussian lain antama vuon lauseke, joten $Qr^3/(\epsilon_0 R^3) = 4\pi r^2 E$, ja tästä ratkeaa sähkökentäksi

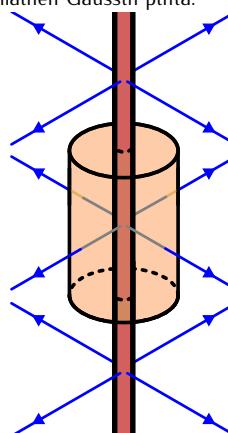
$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (10.82)$$

Kuva 10.28: Sylinterisymmetrisen varausjakauman sähkökentän päättely Gaussin lain avulla. Valitaan Gaussin pinta aina niin, että pinnalla on sama kiertosymmetria kuin varausjakaumalla. Tällöin sähkökenttä on kaikkialla joko Gaussin pinnan suuntainen tai sitä vastaan kohtisuora. Kentän vuo poikkeaa nollasta vain niissä paikoissa, joissa se on Gaussin pintaan nähdyn kohtisuorassa. Lisäksi kenttä on näissä alueissa aina suuruudeltaan vakio, joten vuo saadaan laskettua kertomalla keskenään kentän voimakkuus ja sen alueen pinta-ala, jossa kenttä on kohtisuorassa pintaan vasten.

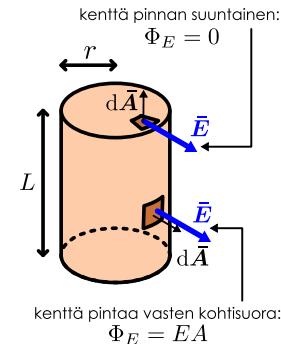
(a) Sylinterisymmetria: kierto- ja siirto-symmetria yhden akselin suhteessa.



(b) Äärettömän pitkä varattu sauva ja sylinterimäinen Gaussin pinta.



(c) Nollasta poikkeavan vuon tuottavan pinnan ala on $A = 2\pi rL$.



Pallon sisällä sähkökenttä ei siis heikkene pallon keskipisteestä mitatun etäisyyden r funktiona vaan kasvaa. Tämä johtuu siitä, että sähkökentän voimakkuuteen vaikuttaa kaksi kilpailevaa tekijää. Ensinnäkin mitä suurempi Gaussin pinnan sade on, sitä laajemmalle pinnalle sähkövuo levii. Tämä heikentää sähkökenttää käännekkäästi verrannollisesti säteen neliöön, r^{-2} . Toisaalta mitä suurempi Gaussin pinnan sade on, sitä suurempi tilavuus ja varaus sen sisään jää. Tämä voimistaa sähkökenttää suoraan verrannollisesti säteen kuutioon, r^3 . Kun nämä tekijät yhdistetään, jäljelle jää suora verrannollisuus säteeseen, $r^{-2} \cdot r^3 = r$. Jos sen sijaan koko varattu pallo on Gaussin pinnan sisällä, pinnan sisältämä kokonaisharjoitus ei riipu pinnan täsmällisestä koosta eli säteestä r . Tällöin sähkökentän voimakkuus heikkenee käännekkäästi verrannollisesti Gaussin pinnan pinta-alaan eli sen säteen neliöön, r^{-2} .

Gaussin lain avulla voidaan päättää myös sylinterisymmetrisen varatun kappaleen sähkökenttä. Sylinterisymmetria on esiteltty kuvassa 10.28 (a). Ympyräsylinteri on kiertosymmetrin sen keskeltä kulkevan akselin suhteessa. Äärettömän pitkä sylinteri on myös *siirtosymmetrinen* tämän akselin suunnassa, koska äärettömän pitkä sylinteri ei muuta sen akselin suuntasessa siirrossa mitenkään. Lisäksi sylinteri on *peilaussymmetrinen* akselinsa suunnassa, koska systeemi ei muuta myöskään silloin, jos se peilataan pystysuunnassa keskikohtansa suhteessa. Äärettömän pitkiä sylinteritietä ei tietenkään ole oikeasti olemassa, mutta äärettömyys on käytökkäinen malli hyvin suurille kappaleille. Jos esimerkiksi olet hyvin pitkällä, suoralla tiellä, et voi nähdä tien alku- tai loppupisteitä. Tällöin tie näyttää samalta kuin miltä äärettömän pitkä tie näyttäisi. Samaan tapaan jos haluamme määrittää sähkökentän esimerkiksi lähellä pitkän saulan pintaan, voi olla yksinkertaisempaa ajatella saulan olevan äärettömän pitkä, jolloin systeemi on ainakin likimain siirtosymmetrinen, vaikkei äärellinen systeemi sitä todellisuudessa tarkalleen ottaen ole.

Tarkastellaan siis hyvin pitkää ja ohutta varattua tankoa kuten kuvassa 10.28 (b). Jos ajattelemme tangon olevan äärettömän pitkä, systeemi on peilaus- ja siirtosymmetrinen tangon suunnassa. Tällöin sähkökentälä ei voi olla komponenttia pystysuunnassa vaan sähkökentän täytyy olla kaikkialla kohtisuorassa tangon symmetria-akseliin nähdyn.

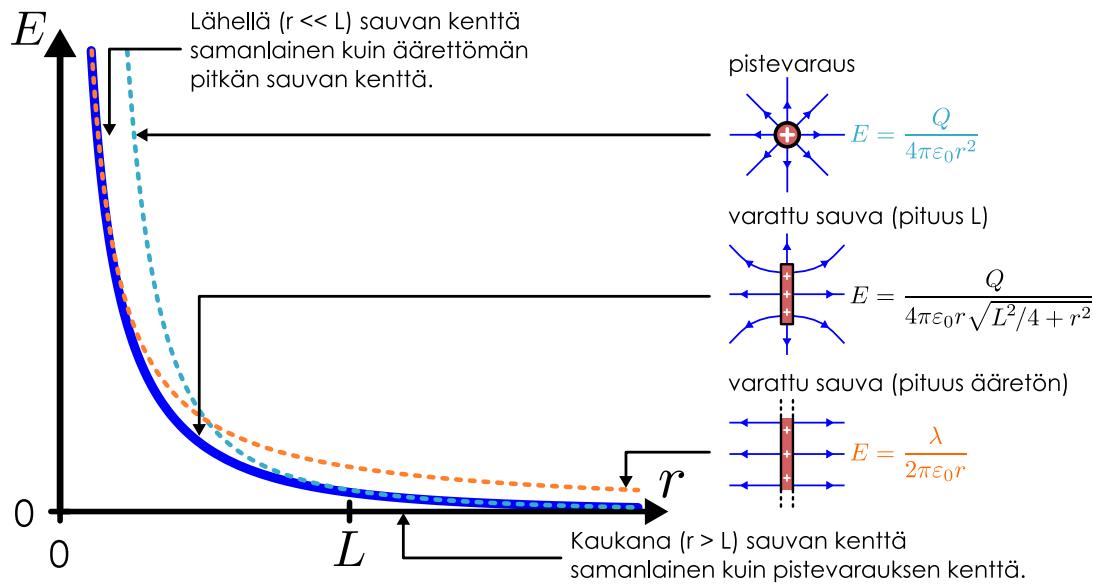
Valitaan nyt Gaussin pinnaksi umpinainen sylinteri, jonka pituus on L ja sade r , ja asetetaan pinta niin, että systeemin kiertosymmetria säilyy. Gaussin pinnan sisään jää tangosta pituus L , joten pinnan sisään jää varaus $Q = \lambda L$, missä λ on pituusvaraustieheys. Gaussin lain perusteella sähkövuo pinnan läpi on siten

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}. \quad (10.83)$$

Sähkökenttä on kaikkialla kohtisuorassa sylinterin muotoisen Gaussin pinnan vaippaa vasten, ja koska systeemi on kiertosymmetrinen, kentän täytyy olla tällä vaipalla myös kaikkialla yhtä voimakas (kuva 10.28 (c)). Niinpä vuo tämän vaipan läpi on sähkökentän voimakkuuden ja vaipan pinta-alan tulo. Sylinterin korkeus on L ja sen ympäryysmitta on ympyrän kaaren pituus $2\pi r$. Vaipan pinta-ala on sen korkeuden ja ympäryysmittan tulo, $A = 2\pi rL$, ja näin ollen vuo vaipan läpi on

$$\Phi_E = EA = 2\pi rLE. \quad (10.84)$$

Kuva 10.29: Sähkökenttä etäisyydellä r pisteverauksesta, L -pituisen varatun sauvan keskipisteestä ja äärettömän pitkän varatun sauvan akselilta. Kaukaa mikä tahansa äärellisen kokoinen kappale näyttää pisteeltä, joten lyhyen sauvan kenttä lähestyy pisteverauksen kenttää suurilla r . Toisaalta tarpeksi läheltä katsoen lyhytkin sauva näyttää pitkältä, joten pienillä r lyhyen sauvan kenttä lähestyy äärettömän pitkän sauvan kenttää.



Gaussian pinta on umpinainen joten siihen kuuluu myös sylinterin pohja ja kansi. Näillä pinnolla sähkökenttä on kuitenkin kaikkialla pinnan suuntainen, joten sähkövuo näiden pintojen läpi on nolla, ja vuo sylinterin vaipan läpi on siten kokonaisvuo koko Gaussian pinnan läpi.

Yhdistämällä Gaussian lain ja sähkövuo määritelmän antamat lausekkeet sähkövuolle saamme yhtälön $\lambda L/\epsilon_0 = 2\pi r L E$, ja tästä voimme ratkaista sähkökentän

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (10.85)$$

Lopputulos on samankaltainen kuin pisteverauksen ja pallon sähkökentän lauseke. Suurin ero on se, että pallon kentän lausekkeen nimitäjässä on pallon pinta-alaa kuvaava tekijä $4\pi r^2$, mutta varatun sauvan kentän lausekkeessa on ympyrän kaaren pituutta kuvaava tekijä $2\pi r$. Tämä johtuu siitä, että sylinterisymmetrisiin systeemiin on aivan samanlainen kuin kaksilottinen, ympyräsymmetrisiin systeemiin. Niinpä sylinterisymmetriassa sähkökenttä levää ympyrän kaarelle ja heikkenee säteen r funktiona yhtä nopeasti kuin ympyrän kaaren pituus kasvaa.

Kuvaan 10.29 on piirretty pisteverauksen, äärettömän pitkän sauvan, ja jo aikaisemmin laskemamme L -pituisen sauvan sähkökenttä eli lauseke (10.45), missä etäisyyttä sauvan keskipisteestä on nyt merkity symbolilla r aikaisemmin käytetty symbolin x_P sijaan. Kaukana äärellisen pituista sauvalta ei voi erottaa pisteverauksesta, jolloin sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti pisteverauksen sähkökenttää etäisyyden r kasvaessa. Vastaavasti hyvin läheltä katsoen äärellinen sauva vaikuttaa pitkältä, ja niinpä äärellisen sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti äärettömän pitkän sauvan kenttää, kun etäisyys sauvesta pienenee.

Erityisesti kuvaajasta nähdään, että sopivissa tilanteissa yksinkertaistetut mallit, joissa sauvan ajatellaan olevan piste tai äärettömän pitkä, ovat erittäin hyviä. Alue, jossa kumpikin yksinkertainen malli poikkeaa selvästi äärellisen sauvan mallista, on melko pieni. Toisaalta ei ole mitään etäisyyttä r , jossa kumpikin yksinkertainen malli toimisi hyvin. Yksinkertaisia malleja kannattaa siis käyttää silloin kun ne toimivat, mutta aina pitää ymmärtää milloin ja mikäkin malli toimii.

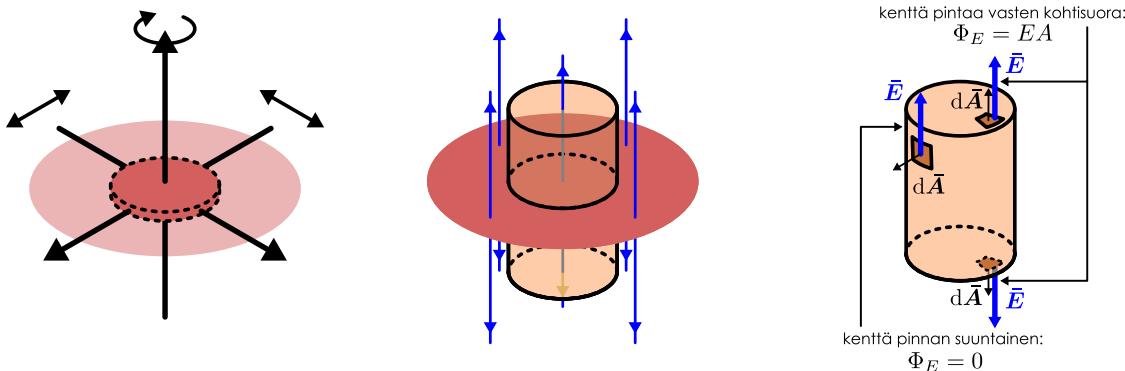


10.29 Miksei äärettömän pitkän sauvan sähkökenttä lähestyy asymptoottisesti pisteverauksen sähkökenttää pitkillä etäisyyksillä?

Pallo- ja sylinterisymmetrian ohella myös tasosymmetria on usein käytökelppoinen, sillä suuret levyt ovat likimain tasosymmetrisiä. Itse asiassa *mikä tahansa sileä pinta* vaikuttaa tarpeksi läheltä tarkasteltuna likimain äärettömältä, suoralta tasolta. Esimerkiksi maapallo on pyöreä pallo, mutta pinnalta katsoen planeetan pyöreyttä ei juurikaan huomaa vaan maapinta vaikuttaa valtavalta tasolta. Johdetaan siis vielä varatun tason sähkökenttä Gaussian lain ja tasosymmetrian avulla.

Kuva 10.30: Tasosymmetrisen varausjakauman sähkökentän päättely Gaussian lain avulla.

- (a) Tasosymmetria: kiertosymmetria yhden ja siirtosymmetria kahden akselin suhteeseen.
 (b) Ääretön varattu taso ja sylinterimäinen Gaussian pinta.
 (c) Nollasta poikkeavan vuon tuottavan pinnanala on $A = 2\pi r^2$.



Ääretön taso on kiertosymmetrinen tason normaalilin suuntaisen akselin ympäri sekä siirtosymmetrinen tason suunnassa (kuva 10.30 (a)). Tässä esitellään varattun tason sähkökentälläkin pitää olla tämä symmetria, joten sähkökentällä ei voi olla komponenttia tason suunnassa vaan kentän täytyy osoittaa kohtisuoraan tason pintaan nähdien (kuva 10.30 (b)).

Valitaan Gaussian pinnaksi samanlainen sylinteri kuin mitä käytimme sylinterisymmetrisen systeemien analysoinnissa. Sylinterin korkeus on L ja säde r . Asetetaan pinta niin, että sylinterin pohja ja kanssi ovat yhdensuuntaiset varattun tason kanssa. Tällöin sylinterin sisään jää varattusta tasosta ympyrän muotoinen osa, jonka pinta-ala on $A = \pi r^2$ ja joka sisältää varauksen

$$Q = \sigma A = \sigma \pi r^2, \quad (10.86)$$

missä σ on tason pintavaraustiheys. Gaussian lain mukaan vuon Gaussian pinnan läpi on siis

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0}. \quad (10.87)$$

Sähkökenttä on pystysuuntainen ja siten sähkökentällä ei ole komponenttia sylinterin muotoisen Gaussian pinnan väliin läpi. Niinpä sähkövuo väliin läpi on nolla. Sähkökenttä on kuitenkin kohtisuorassa sylinterin pohjaa ja kantta vasten, joten vuon näiden läpi on kentän voimakkuuden ja pinta-alan tulo. Sylinterin pohjan ala on jälleen πr^2 , ja koska pintoja on kaksi, pohja ja kanssi, kokonaispinta-ala on $A = 2\pi r^2$. Lisäksi jos Gaussian pinta on valittu niin, että varattu taso on täsmälleen sen keskellä, sähkökenttä on symmetrian johdosta varmasti yhtä voimakas kummallakin pinnalla. Niinpä sähkövuo Gaussian pinnan läpi on kaikkiaan

$$\Phi_E = EA = 2\pi r^2 E. \quad (10.88)$$

Yhdistämällä Gaussian lain ja vuon määritelmän avulla lasketut sähkövuo lausekkeet saamme yhtälön $\sigma \pi r^2 / \epsilon_0 = 2\pi r^2 E$ ja tästä ratkeaa sähkökentän voimakkuudeksi

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (10.89)$$

Sähkökenttä riippuu siis ainoastaan pintavaraustiheydestä mutta ei lainkaan siitä, kuinka kaukana pinnasta ollaan. Tämän olisi itse asiassa voinut päätellä jo kuvaan 10.30 (b) piirretystä kenttäviivaesityksestä. Sähkökenttää kuvaavat kenttäviivat ovat yhdensuuntaiset, jolloin niiden tiheyskin on vakio. Toisaalta kenttäviivaesityksessä sähkökentän voimakkuutta kuvaava nimenomaan viivojen tiheys, joten kentän voimakkuuden pitää olla vakio. Tulos on ehkä yllättävä, koska kentän kuvittelisi olevan aina sitä heikompi mitä kauempana varauksesta ollaan. Näin ei kuitenkaan ole, koska tässä tarkasteltiin ääretöntä varattua tasoa ja ääretönen taso näyttää äärettömältä riippumatta siitä, kuinka kaukaa sitä tarkastellaan. Äärellisen tason sähkökenttä kyllä heikkenee kaukana tasosta, kuten nähtiin esimerkissä 10.3.



10.30 Selitä omin sanoin, millaisia symmetristen varattujen kappaleiden sähkökentät ovat. Kerro erityisesti, millaisia ovat pistevarausten, pallojen, sauvojen ja tasojen luomat kentät. Kuinka nopeasti kentät heikkenevät etäisyyden funktiona? Miten symmetrisen systeemin sähkökenttä voidaan päättää Gaussian lain avulla?

esimerkki 10.4

Gaussin laki

Kuution (sivun pituus L) kulmassa on pistevaraus q . Mikä on sähkövuo yhden varaukselle vastakkaisen kuution sivun läpi?

SUUNNITELMA Kuvittele pistevarauksen ympärille kuutio, jonka sivun pituus on $2L$. Gaussin lain mukaan vuo tämän kuution pinnan läpi sisältä ulos on

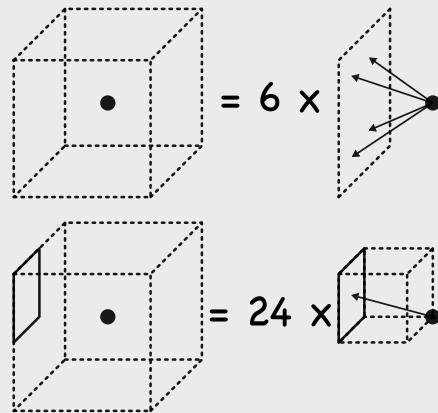
$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (10.90)$$

Jos varaus on kuution keskellä, vuo on symmetriallinen ja kunkin sivun läpi, ja niinpä vuo yhden sivun läpi on kuudenes kokonaisvuosta, $\Phi_{E,2L \times 2L} = \frac{1}{6\epsilon_0} q$.

Tehtävässä tarkasteltava L -sivuinen kuutio saadaan, kun kuvittelemme kuutio jaetaan kahdeksaan osaan. Erityisesti suuremman kuution kunkin sivu (ala $2L \times 2L$) tulee tällöin jaetuki neljään osaan (ala $L \times L$). Symmetriallinen vuo kunkin tällaisen osan läpi on neljännes koko sivun läpäisevästä vuosta,

$$\Phi_{E,L \times L} = \frac{1}{4} \Phi_{E,2L \times 2L} = \frac{1}{24\epsilon_0} q. \quad (10.91)$$

Toisaalta tämä on juuri tehtävässä kysytty sivu, joten tämä on myös vastaus annettuun kysymykseen. Tulos ei riipu sivun pituudesta.



ARVIOINTI Jos varaus on origossa, tarkasteltavan sivun keskipiste on sopivasti valitussa koordinaatistossa ($L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L$) (sivu on tällöin yz -suuntainen). Etäisyys varauksesta tähän pisteeseen on $r = L\sqrt{3/2}$, joten sähkökentän voimakkuus pisteessä on $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{3}{2}L^2} \approx 0.053 \frac{q}{\epsilon_0 L^2}$. Kentän suuntainen yksikkövektori on $\hat{E} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k})$, jolloin kentän sivua vasten kohtisuoran komponentin pituus on $E_\perp = \hat{E} \cdot \hat{i} = E\hat{E} \cdot \hat{i} = \sqrt{\frac{2}{3}}E \approx 0.043 \frac{q}{\epsilon_0 L^2}$. Jos kenttä olisi vakio, sähkövuo sivun läpi olisi $\Phi_E = E_\perp L^2 \approx 0.043 \frac{q}{\epsilon_0}$. Gaussin lain avulla saatu tarkka tulos $\phi_E = \frac{q}{24\epsilon_0} \approx 0.042 \frac{q}{\epsilon_0}$ on täällä hyvin lähellä.

10.4 Potentiaali

Sähköinen potentiaalienergia

Kun tunnemme sähkökentän, voimme laskea mihin tahansa varaukseen kohdistuvan voiman olipa varaus missä tahansa avaruudessa. Ja kun tiedämme varattuun kappaleeseen kohdistuvan voiman, voimme laskea sen liikeradan dynamikan peruslain avulla. Tämä ei kuitenkaan ole tavallisesti helpoin tapa tutkia varattujen kappaleiden ja hiukkasten liikettä, koska liikeratojen laskeminen voiman ja dynamikan peruslain kautta on usein vaikeaa. Yleensä prosesseja on helpompi analysoida energiaperiaatteen avulla.

Sähkökenttä vaikuttaa varauksiin samaan tapaan kuin gravitaatiokenttä vaikuttaa massallisiin kappaleisiin, joten sähkökenttää liittyvä potentiaalienergiakin toimii samaan tapaan. Tätä on havainnollistettu kuvassa 10.31. Kuvissa (a) ja (b) massallinen kappale liikkuu homogenisessa gravitaatiokentässä ylöspäin. Systeemissä on valittu kappale ja gravitaatiokenttä, joten kentän potentiaalienergia kuuluu systeemiin. Potentiaalienergian nollakohta voidaan valita vapaasti, ja nollakohdaksi on valittu kuvassa (a) esitetty alkutilanne, jossa kappale on maapinnalla. Painovoima pyrkii vetämään kappaleetta alas päin, joten kappaleen nostaminen ylöspäin on mahdollista vain, jos jokin ulkoinen voima nostaa kappaleita ylöspäin. Tätä voimaa ei ole kuvaan piirretty, mutta voit vaikkapa ajatella, että ihminen nostaa kappaleen ylös. Tällöin nostaja tekee kappaleeseen työtä, ja systeemin energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin systeemiin tehty työ.

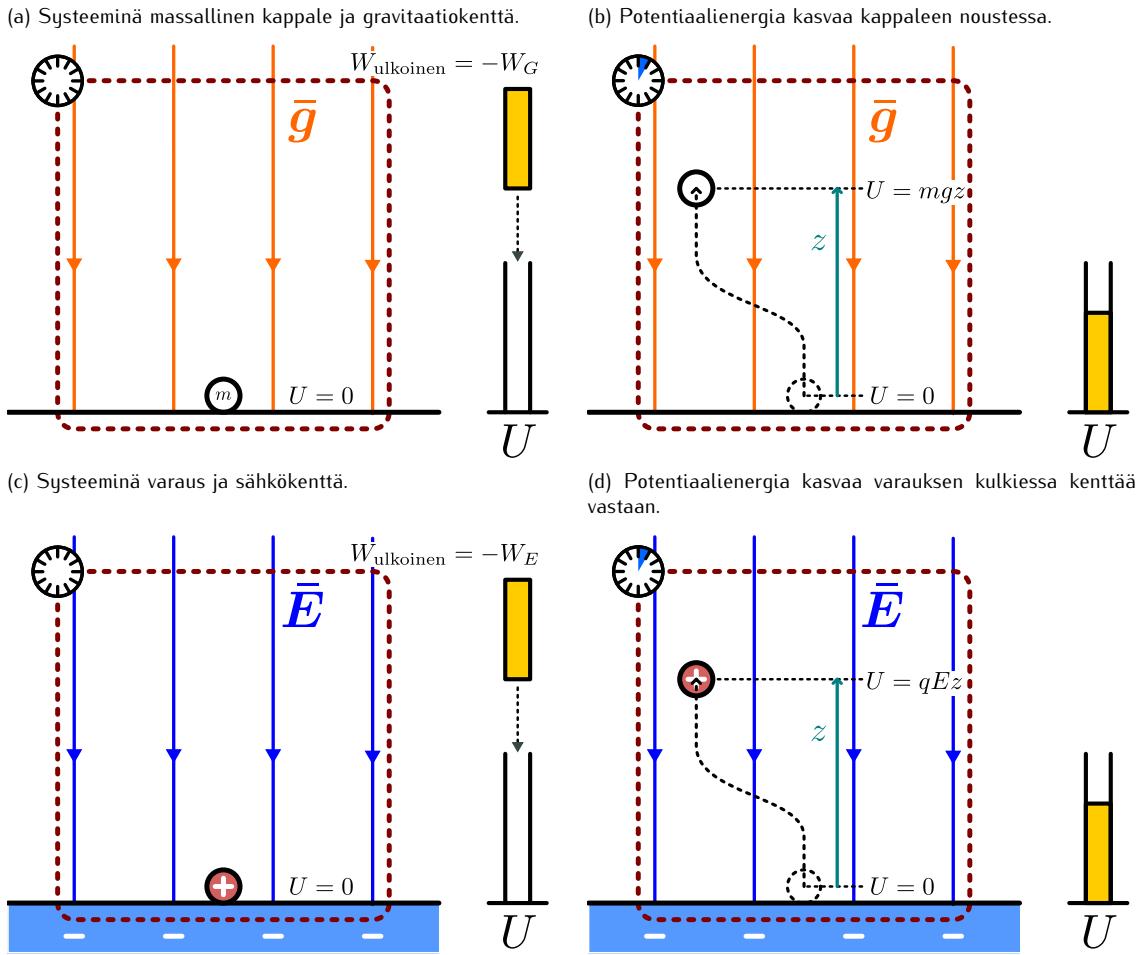
Mekaniikassa opimme, että homogenisessa gravitaatiokentässä potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = mg\Delta z \quad (10.92)$$

massan m siirtyessä kenttää vastaan (eli ylöspäin) matkan Δz riippumatta siitä, mitä reittiä kappale kulkee. Kerrataan nyt, miksi näin on.

Kappale lähtee liikkeelle levosta ja se myös pysähtyy nousun jälkeen, joten systeemin liike-energia on nolla sekä alussa että lopussa. Oletetaan myös dissipatiiviset vuorovaikutukset heikoiksi, jolloin systeemin sisäenergia ei muudu. Näin ollen prosessissa muuttuu ainoastaan potentiaalienergia, ja siksi potentiaalienergian

Kuva 10.31: Massa ja varaus homogeenisessa gravitaatio- ja sähkökenttässä.



muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin ulkoisen voiman systeemiin tekemän työn,

$$\Delta E_{\text{kokonais}} = \Delta U = W_{\text{ulkoinen}}. \quad (10.93)$$

Toisaalta jos systeeminä tarkastellaan *pelkästään kappaleetta*, sekä nostava voima että gravitaatio ovat systeemin ulkoisia voimia. Kappaleen kokonaisenergian muutos on siis nostavan voiman ja painovoiman tekemien töiden summa,

$$\Delta E_{\text{kappale}} = W_{\text{ulkoinen}} + W_G. \quad (10.94)$$

Mutta koska kappale on levossa sekä prosessin alussa että sen lopussa, sen energian muutos prosessissa on *nolla*, $\Delta E_{\text{kappale}} = 0$. Niinpä nostava voima tekee tässä prosessissa yhtä suuren mutta vastakkaismerkkisen työn gravitaatioon verrattuna $W_{\text{ulkoinen}} = -W_G$. Tämän perusteella potentiaalienergian muutoksen täytyy olla yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen painovoiman tekemään työhöin verrattuna.

$$\Delta U = W_{\text{ulkoinen}} = -W_G. \quad (10.95)$$

Tämän voi ajatella niin, että *jos* painovoimaa ei olisi, ulkoisen nostavan voiman tekemä työ työntäisi kappaleen liikkeeseen, jolloin se saisi liike-energiaa. Nyt painovoiman tekemä työ muuttaa tämän liike-energian kentän potentiaalienergiaksi. Painovoima siis vähentää *kappaleen* liike-energiaa, jolloin sen *kappaleeseen* tekemä työ on negatiivinen. Energia siirtyy kappaleesta kenttään itseensä, jolloin kentän potentiaalienergia lisääntyy.

Kappaleeseen kohdistuu maanpinnan lähellä painovoima

$$\bar{G} = -mg\hat{k} \quad (10.96)$$

alaspäin eli negatiiviseen z -suuntaan. Voima tekee kuitenkin työtä ainoastaan kappaleen siirtymessä voiman vaikutussuunnassa eli tässä tapauksessa z -suunnassa (kuva 10.32 (a)). Jos siis kappale siirtyy esimerkiksi vektorin

$$\Delta\bar{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \quad (10.97)$$

osoittaman reitin, painovoiman tekemä työ on yksinkertaisesti

$$W_G = \bar{\mathbf{G}} \cdot \Delta \bar{\mathbf{r}} = -mg\hat{\mathbf{k}} \cdot (\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\hat{\mathbf{k}}) = -mg\Delta z \quad (10.98)$$

ja näin ollen potentiaalienergian muutos on $\Delta U = mg\Delta z$, kuten pitääkin.

Jos kappale kulkee käyräviivaisen reitin, reitti voidaan aina ajatella jaetullaksi infinitesimaalisen lyhyisiin suoruiin osiin $d\bar{r}$ (kuva 10.32 (b)). Tällöin potentiaalienergian muutos on kyllakin osalla

$$dU = -dW = -\bar{\mathbf{G}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = mgdz, \quad (10.99)$$

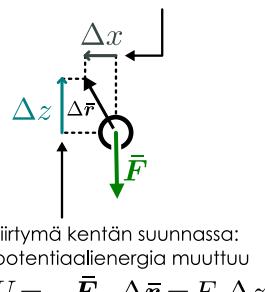
ja energian muutos koko prosessissa saadaan laskemalla nämä muutokset yhteen eli integroimalla

$$\Delta U = \int dU = \int_{z_{\text{alku}}}^{z_{\text{loppu}}} mgdz = mg(z_{\text{loppu}} - z_{\text{alku}}) = mg\Delta z. \quad (10.100)$$

Kuva 10.32: Potentiaalienergian muutos konservatiivisessa kentässä.

(a) Potentiaalienergia muuttuu vain siirtymässä kentän suuntaan.

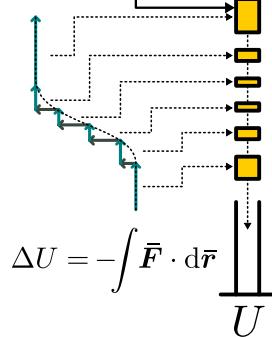
siirtymä kohtisuoraan kenttää vastaan: potentiaalienergia ei muudu



$$\Delta U = -\bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \bar{\mathbf{r}} = F_z \Delta z$$

(b) Käyrä reitti jaettuna pieniin osiin.

potentiaalienergian muutos kussakin siirtymässä



$$\Delta U = -\int \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad U$$

Kuvissa 10.31 (c) ja (d) on esitetty vasava prosessi, jossa varattu kappale siirtyy sähkökenttäässä. Prosessi toimii täsmälleen samalla tavalla kuin painovoimakenttäässä, sillä ainoa ero edelliseen tarkasteluun verrattuna on se, että varattuun hiukkaseen kohdistuu voima

$$\bar{\mathbf{F}} = -qE\hat{\mathbf{k}}, \quad (10.101)$$

missä q on hiukkasen varaus ja E sähkökentän voimakkuus. Verrattuna painovoimaan tässä siis massa on korvattu varauksella (kummatkin kuvaavat kappaleen kykyä reagoida kenttään) ja putoamiskiertyyys sähkökentän suuruudella (kummatkin kuvaavat kentän voimakkuutta).

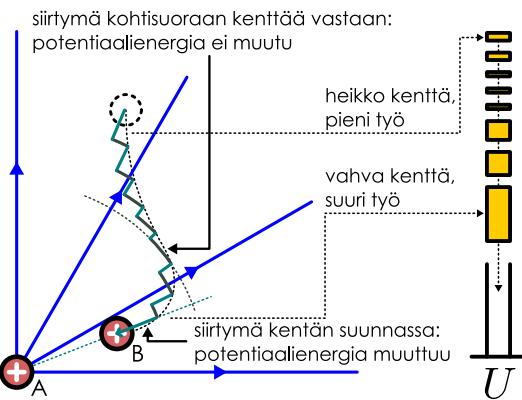
Kappaleen siirtymässä kuvassa ylöspäin eli *sähkökentän suuntaa vastaan* sähköinen voima tekee kappaleeseen negatiivisen

ta työtä, $W_E < 0$, mikä siirtää energiaa kappaleesta sähkökenttään. Tämä energia varastoituu sähkökenttään potentiaalienergiana ja kappaleen siirtymässä matkan Δz kentän suuntaa vastaan kentän potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = -W_E = qE\Delta z. \quad (10.102)$$

Potentiaalienergian ja z -akselin nollakohta voidaan valita vapaasti, joten jos nollakohdaksi valitaan kuvan 10.31 (c) tilanne, kuvassa (d) systeemin potentiaalienergia on $U = qEz$.

Kuva 10.33: Potentiaalienergia pistevaraus kentässä.



Edellinen tarkastelu pätee kuitenkin vain homogenisessa sähkökenttäässä, jonka kentän suunta ja voimakkuus ovat kaikkialla samat! Useimmat sähkökentät *eivät ole homogeenisia*. Esimerkiksi pistevarausluoman sähkökentän suunta ja suuruus riippuvat siitä, missä pistessä kenttää tarkastellaan, joten edellä johdettu sähköisen potentiaalienergian lauseke *ei kuvaa* kahden keskenään vuorovaikuttauksen pistemäisen hiukkasen potentiaalienergiaa. Potentiaalienergian määritelmä kentän tekemän työn vastalukuna, $\Delta U = -W_E$, kuitenkin pätee edelleen, ja voimme laskea pistevarausten potentiaalienergian sen avulla.

Tarkastellaan kahta pistevarausta, A ja B, joiden varaukset ovat q_A ja q_B . Varaus A pysyy paikoillaan ja varaus B siirtyy kuten kuvan 10.33 on piirretty. Koska varaus A on paikoillaan, siihen ei tehdä työtä.

Voimme siis laskea varausten välisen vuorovaikutuksen energian tarkastelemalla pelkästään hiukkaseen B kohdistuvan voiman tekemää työtä hiukkasen B siirtymässä. Kuvan onkin piirretty vain varauksen A luoma sähkökenttä, joka kohdistaa voiman varaukseen B. Kenttä osittaa kaikkialla suoraan poisspäin varauksesta A, joten voima tekee työtä vain varauksen B siirtymässä joko kohti varausta A tai siitä poisspäin. Jos varaus B kiertäisi kehää varauksen A ympäri, se liikkuisi aina kohtisuoraan siihen kohdistuvan voiman nähdien eikä voima tekisi silloin lainkaan työtä.



10.31 Kuvassa 10.33 varaukset A ja B ovat positiivisia. Onko (i) sähköisen voiman tekemä työ ja (ii) potentiaalienergian muutos positiivinen vai negatiivinen, kun varaus B lähestyy varausta A? Entä jos toinen varauksista tai molemmat olisi negatiivisia?

Kuvassa varaus B kulkee käyräviivaista reittiä, jolla se sekä lähestyy varausta A että kiertää sen ympäri. Tällöin voimme jälleen ajatella reitin jaetunsi suorin osiin. Lisäksi jokaisen osan voi jakaa edelleen kentän suuntaiseen ja kenttää vastaan kohtisuoraan komponenttiin, joista vain kentän suuntainen siirtymä vaikuttaa varaukseen B tehtyyn työhön. Jos siis varauksesta A varaukseen B osoittava vektori on $\bar{r}_{A \rightarrow B}$, varaukseen B tehty työ lyhyellä siirtymällä $d\bar{r}_{A \rightarrow B}$ riippuu vain siirtymän komponentista *kohti tai poispäin varauksesta A*. Jos siis merkitsemme etäisyyttä varauksesta A varaukseen B $r_{A \rightarrow B} = |\bar{r}_{A \rightarrow B}|$, kullakin lyhyellä siirtymällä varaukseen B tehty työ riippuu vain tämän etäisyyden muutoksesta $dr_{A \rightarrow B}$. Niiinpä systeemin potentiaalienergian muutos kullakin lyhyellä siirtymällä on

$$dU = -dW = -\bar{F}_{A \rightarrow B} \cdot d\bar{r}_{A \rightarrow B} = -F_{r,A \rightarrow B} dr_{A \rightarrow B}, \quad (10.103)$$

missä $F_{r,A \rightarrow B}$ on varauksen A varaukseen B kohdistaman voiman radiaalikomponentti eli poispäin A:sta osoittava komponentti.

Positiivinen pistevaraus A kuitenkin kohdistaa toiseen positiiviseen varaukseen B *aina* voiman itsestään poispäin, joten tämä radiaalikomponentti on sama kuin voiman suuruus, joka Coulombin lain mukaan on

$$F_{r,A \rightarrow B} = F_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2}. \quad (10.104)$$

Niiinpä systeemin potentiaalienergian muutos kullakin lyhyellä siirtymällä on

$$dU = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B} \quad (10.105)$$

ja potentiaalienergian kokonaismuutos saadaan laskemalla yhteen kaikki nämä pienet muutokset eli integroimalla

$$\Delta U = \int dU = \int_{r_{\text{alku}}}^{r_{\text{loppu}}} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B}. \quad (10.106)$$

Tässä integroimismuuttuja on nyt etäisyys varauksesta A varaukseen B ja integroitavassa funktiossa tämä esiintyy eksponentissa $r_{A \rightarrow B}^{-2}$. Tämän integrointi onnistuu säennöllä $\int r^n dr = \frac{1}{n+1} r^{n+1} + C$, missä nyt $n = -2$. Näin potentiaalienergian muutokseksi saadaan

$$\Delta U = \left| \int_{r_{\text{alku}}}^{r_{\text{loppu}}} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} dr_{A \rightarrow B} \right| = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{\text{loppu}}} - \frac{1}{r_{\text{alku}}} \right). \quad (10.107)$$

Tämä on siis potentiaalienergian *muutos* hiukkasen B siirtymessä etäisyydeltä r_{alku} etäisyydelle r_{loppu} varauksesta A. Emme saaneet potentiaalienergialle absoluuttista lauseketta, koska potentiaalienergian nollakohta voidaan aina valita mielivaltaisesti, eikä tässä laskussa nollakohtaa kiinnitetty minnekään. Pistevaraus tarkasteltaessa on kuitenkin tavanomaista valita nollakohdaksi tilanne, jossa varaukset ovat *äärettömän kaukan* toisistaan. Tällä valinnalla potentiaalienergialle saadaan nimittäin lauseke

$$U_{\text{pistevaraus}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (10.108)$$

Tämä on siis kahden pistevarauksen A ja B välisen sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia varausten ollessa etäisyydellä $r_{A \rightarrow B}$ toisistaan, *kun potentiaalienergia on nolla varausten ollessa äärettömän kaukan* toisistaan, $\lim_{r_{A \rightarrow B} \rightarrow \infty} U_{\text{pistevaraus}} = 0$.

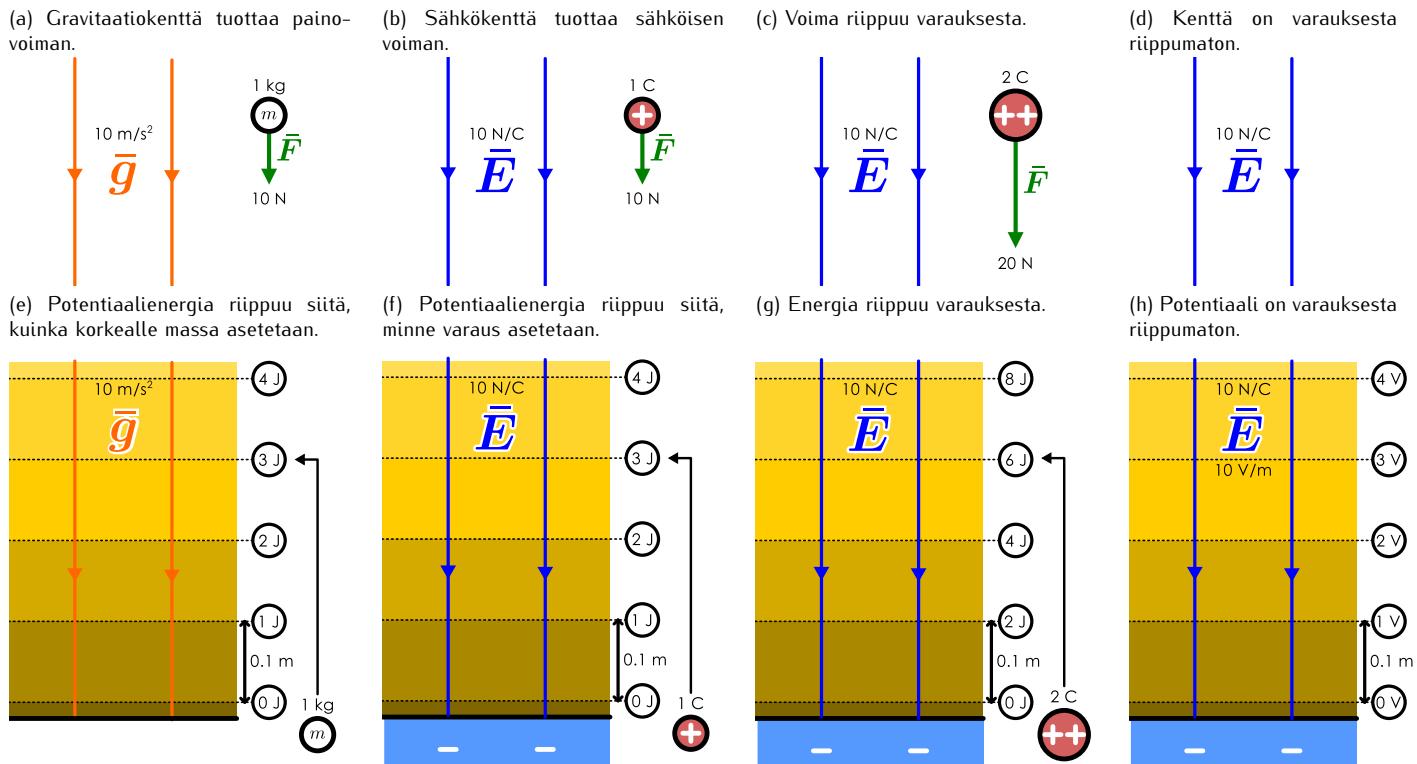


10.32 (a) Tarkista, että lauseke (10.108) (i) antaa potentiaalienergiaksi nollan, kun varaukset ovat äärettömän kaukan toisistaan ja (ii) toteuttaa yhtälön (10.107).

(b) Kasvaako vai pieneneekö potentiaalienergia varausten lähestymessä toisiaan, jos varauksilla on (i) sama merkki tai (ii) eri merkki?

(c) Onko potentiaalienergia tällöin positiivinen vai negatiivinen?

Kuva 10.34: Sähkökenttässä olevaan varaukseen kohdistuu kentässä voima ja tällöin kentällä on potentiaalienergia. Nämä riippuvat kentässä olevan varauksen suuruudesta ja paikasta. Kenttä itsessään on kuitenkin olemassa vaikkei siellä olisikaan varausta. Kentän voimakkuus kuvaava voima, joka 1 C varaukseen kohdistuisi, jos se tuotaisiin kenttään. Potentiaali puolestaan kuvailee potentiaalienergiaa, joka systeemillä olisi, jos kenttään tuotaisiin varaus.



Sähköinen potentiaali

Sähkökenttä, sähköinen voima ja sähköinen potentiaalienergia kuvavat kaikki omalla tavallaan sähköistä vuorovaikutusta, ja kuvassa 10.34 on esitetty yhteenvedo näiden suureiden välistä suhteista ja niiden analogiasta gravitaatioon. Aivan kuten gravitaatiokenttään tuotuu massaan kohdistuu painovoima (kuva (a)), sähkökenttään tuotuu varaukseen kohdistuu sähköinen voima (kuva (b)) kentän suuntaan. Voiman suuruus on massan tai varauksen ja kentän voimakkuuden tulo, joten mitä suurempi varaus sähkökenttään tuodaan, sitä suurempi voima siihen kohdistuu (kuva (c)). Tässä "sähkökenttä" tarkoittaa nimenomaan *muiden* varausten luomaa kenttää, johon ei lasketa mukaan kuvaan piirretyn positiivisen varauksen kenttää. Toki jokainen varaus luo ympärilleen oman sähkökenttänsä, joka muuttaa avaruudessa vallitsevaa kokonaissähkökenttää. Varaus ei voi kuitenkaan vuorovaikuttaa itsensä kanssa, joten kuhunkin varaukseen kohdistuvan voiman tuottaa *kaikkien muiden* varausten yhdessä luoma sähkökenttä, johon varauksen omaa kenttää ei lasketa mukaan. Tämä muiden varausten luoma kenttä on luonnollisesti riippumaton kuvaan piirretystä varauksesta ja on olemassa avaruuden kaikissa pistelissä vaikkei niissä olisikaan varausta, johon kenttä kohdistaisi voiman.

Samanlainen analogia pätee energialle. Massan tuominen gravitaatiokenttään muuttaa kentän potentiaalienergiaa (kuva (e)), ja samoin varauksen tuominen sähkökenttään muuttaa tämän kentän energiota (kuva (f)). Kuvaan piirretynä esimerkissä molemmat kentät ovat homogeeniset, jolloin kentän suunta ja voimakkuus ovat kaikkialla samat. Tällöin massaan tai varaukseen kohdistuu kaikkialla samanlainen voima. Siitä huolimatta potentiaalienergia riippuu siitä, minne massa tai kappale asetetaan. Maan painovoimakentässä potentiaalienergia on sitä suurempi, mitä korkeammalle eli mitä kauemmas maanpinnasta massa asetetaan. Sähkökentässä positiivisen varauksen potentiaalienergia on sitä suurempi, mitä kauemmas muista negatiivisista varauksista ja mitä lähemmäs muita positiivisia varauksia varaus asetetaan. Yleisesti gravitaation potentiaalienergia pienenee, kun massa siirtyy painovoimakentän suuntaan (alaspäin), ja potentiaalienergia kasvaa, kun massa siirtyy kenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan (ylöspäin). Samoin sähköinen potentiaalienergia pienenee positiivisen varauksen siirtyessä sähkökentän suuntaan ja kasvaa varauksen siirtyessä kenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Kuvaan (e) on merkitty katkoviivoin korkeudet, joille 1 kg massa pitää asettaa, jotta systeemin potentiaalienergia olisi 0 J, 1 J, 2 J jne., kun potentiaalienergian nollakohdaksi on valittu maapinta. Aivan samaan tapaan kuvaan (f) on piirretty katkoviivoin korkeus, jolle 1 C varaus täytyy asettaa, jotta systeemin potentiaalienergia olisi 0 J, 1 J, 2 J jne. Potentiaalienergia ei muudu, jos massaa tai varausta siirretään kenttään nähdyn kohtisuoraan, joten nämä katkoviivat ovat kuvissa vaakasuorat.

Aivan kuten sähköisen voiman suuruus riippuu kenttään tuodun varauksen suuruudesta, myös systeemin potentiaalienergia riippuu kenttään tuodun varauksen suuruudesta. Kuva (g) on muuten samanlainen kuin kuva (f) paitsi että kuvassa (g) sähkökenttään tuodaan kaksinkertainen varaus, 2 C. Potentiaalienergian nollakohta on valittu kummassakin kuvassa samaan tasoon, joten energiaksi 0 J kuvava viiva on kummassakin tilanteessa sama. Sähkökentän voimakkuus on kuvassa 10 N/C, joten 1 C varaukseen kohdistuu 10 N voima ja 2 C varaukseen 20 N voima. Tällöin 1 C varauksen potentiaalienergia muuttuu 0.1 m pystysuuntaisessa siirtymässä $10 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J}$ mutta 2 C varauksen potentiaalienergian muutos on samalla matkalla $20 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 2 \text{ J}$. Potentiaalienergia riippuu siis kenttään tuodusta varauksesta: mitä suurempi on kappaleen varaus, sitä enemmän potentiaalienergia muuttuu kappaleen siirtyessä. Riippuvuus on samanlainen kuin sähköisen voiman ja sähkökentän välinen yhteys, sillä sähkökenttää kohdistaa varattuun kappaleeseen sitä suuremman voiman mitä suurempi kappaleen varaus on.

Usein emme kuitenkaan halua tietää varauksiin kohdistuvia voimia vaan pelkästään niiden energian. Edellisissä esimerkeissä laskimme varatun kappaleen potentiaalienergian määrittämällä ensin kappaleeseen kohdistuvan voiman sähkökentän perusteella ja sitten potentiaalienergian laskemalla tämän voiman tekemän työn. Olisi kuitenkin helpompaa, jos meillä olisi sähkökenttää kuvaava suure, josta systeemin potentiaalienergia voitaisiin laskea yhtä helposti kuin sähköinen voima voidaan laskea sähkökenttää. Kuten kuvista 10.34 (f) ja (g) nähtiin sähköinen potentiaalienergia on suoraan verrannollinen sähkökenttään tuodun varauksen suuruuteen (kunhan potentiaalienergian nollakohtaa ei muuteta). Systeemin potentiaalienergia voidaan siis kirjoittaa sähkökenttään tuodun varauksen suuruuden q ja verrannollisuuskertoimen V tulona,

$$U = qV. \quad (10.109)$$

Potentiaalienergia U riippuu paikasta, johon varaus q asetetaan, joten verrannollisuuskerroin V on itse asiassa *paikan funktio* $V(x, y, z)$, missä (x, y, z) ovat systeemiin tuodun varauksen koordinaatit. Funktio V ei kuitenkaan riipu mitenkään kenttään tuodun varauksen suuruudesta, joten se on *ainaostaan sähkökenttää kuvava suure*. Funktio V on nimeltään sähköinen **potentiaali**.

Aivan kuten sähkökenttään \vec{E} pisteeseen (x, y, z) tuotuun varaukseen q kohdistuva voima saadaan varauksen ja kentän tulona, $\vec{F} = q\vec{E}(x, y, z)$, kenttään tuodun varauksen *potentiaalienergia saadaan varauksen ja kentän potentiaalin tulona*, $U = qV(x, y, z)$. Varausten energian laskeminen sähkökentän integraalina on vaikeaa, mutta energian laskeminen kertomalla varaus potentiaalin avulla tarkastelupisteessä on erittäin helppoa. Tämän vuoksi potentiaali onkin yleensä sähköisiä vuorovaikutuksia kuvaavista suureista tärkein ja laskuissa käytökelpoisin!

10.33 Sähkökenttä, sähköinen voima, potentiaali ja potentiaalienergia kuvaavat kaikki sähköistä vuorovaikutusta.



- (a) Mitkä näistä ovat skalaareja ja mitkä vektoreita?
- (b) Mitkä näistä voivat riippua kenttään tuodun varauksen suuruudesta?
- (c) Mitkä näistä voivat riippua kenttään tuodun varauksen paikasta?
- (d) Mitkä näistä poikkeavat nollasta, jos avaruudessa on vain yksi pisteveraus?

Kuvassa 10.34 (h) on esitetty sähkökentän potentiaali. Yhtälön (10.109) mukaisesti potentiaali saadaan jakamalla potentiaalienergia sähkövaraiksella,

$$V = \frac{U}{q}, \quad (10.110)$$

Kuvassa (f) systeemin potentiaalienergia on 1 J, kun 1 C varaus on 0.1 m etäisyydellä potentiaalienergian nollatasosta. Niiinpä potentiaali tällä etäisyydellä on $1 \text{ J}/1 \text{ C} = 1 \text{ J/C}$. Potentiaalin yksikölle on kuitenkin annettu oma erityinen nimi, *voltti* (Alessandro Voltan mukaan),

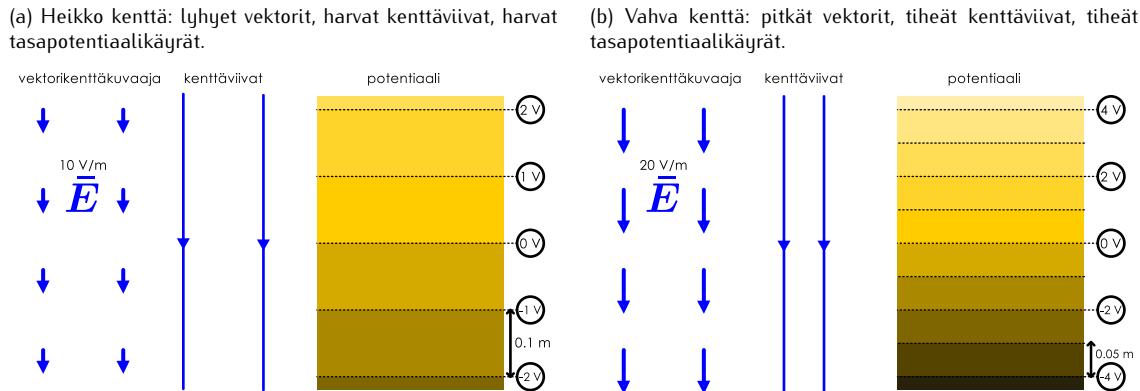
$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}. \quad (10.111)$$

Potentiaali on siis tarkastelupisteessä yksi voltti, jos systeemiin potentiaalienergia on yksi joule, kun tarkastelupisteeseen tuodaan yhden coulombin varaus. Vastaavasti kuvassa (g) potentiaalienergia on 2 J, kun 2 C varaus on 0.1 m etäisyydellä potentiaalienergian nollatasosta, joten tälläkin tavalla laskien potentiaaliksi saadaan tarkastelupisteessä $2 \text{ J}/2 \text{ C} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V}$. Nämä pitää olla, sillä potentiaali on vain kentän ominaisuus, joka ei riipu kenttään tuodusta varauksesta.



10.34 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä potentiaalienergiasta ja potentiaalista. Mitä samaa on sähkö- ja gravitaatiokenttien potentiaalienergioissa? Miten potentiaali ja potentiaalienergia liittyvät toisiinsa?

Kuva 10.35: Sähkökentän esitys vektorikenttäkuvaajana, kenttäviivoina ja tasapotentiaalikäyrinä. Potentiaalin nollakohta voidaan valita vapaasti.



Potentiaalin ja sähkökentän yhteys

Vaikka määrittelimme potentiaalin systeemin potentiaalienergian kautta, potentiaalia ei käytännössä kannata laskea tästä kautta. Sähkökentän ja potentiaalin käyttökelpoisuus matemaattisina työkaluina perustuu pitkälti juuri siihen, että ne kuvaavat kenttää vaikkei kentässä olisi varusta, johon kohdistuisi voima ja jolla olisi kentässä potentiaalienergiaa. Käytännössä yleensä halaummekin määrittää potentiaalin suoraan sähkökentän perusteella tai päinvastoin sähkökentän potentiaalin perusteella. Kuvasta 10.34 (h) voimme saada idean, kuinka tämä käytännössä onnistuu. Jos z -akseli on kuvassa ylöspäin, sähkökentän z -komponentti on

$$E_z = -10 \text{ N/C.} \quad (10.112)$$

Jos systeemiin tuotaisiin testivaraus $q_{\text{testi}} = 1 \text{ C}$, tähän kohdistuisi voima

$$F_{z,\text{testi}} = q_{\text{testi}} E_z = 1 \text{ C} \cdot (-10 \text{ N/C}) = -10 \text{ N.} \quad (10.113)$$

Jos testivarausta siirretään z -suuntaan matka $\Delta z = 0.1 \text{ m}$, systeemin potentiaalienergia muuttuu määränpäin:

$$\Delta U = -W_E = -F_{z,\text{testi}} \Delta z = -q_{\text{testi}} E_z \Delta z = 10 \text{ N} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J.} \quad (10.114)$$

Nämä ollen systeemin potentiaali muuttuu tällä matkalla

$$\Delta V = \frac{1}{q_{\text{testi}}} \Delta U = -E_z \Delta z = 10 \text{ N/C} \cdot 0.1 \text{ m} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V.} \quad (10.115)$$

Testivarauskuksen suuruus supistuu pois, jolloin potentiaalin muutos saadaan laskettua pelkästään sähkökentän ja siirtymän avulla. Tässä tapauksessa tarkastelupiste siirtyy kuvassa ylöspäin, $\Delta z > 0$, ja sähkökenttä osoittaa alaspäin $E_z < 0$, jolloin potentiaalin muutos on positiivinen $\Delta V > 0$. *Potentiaali siis kasvaa, kun siirrytään sähkökenttään näden vastakkaiseen suuntaan tai toisin sanoen sähkökenttä osoittaa siihen suuntaan, johon siirryttääessä potentiaali pienenee.*



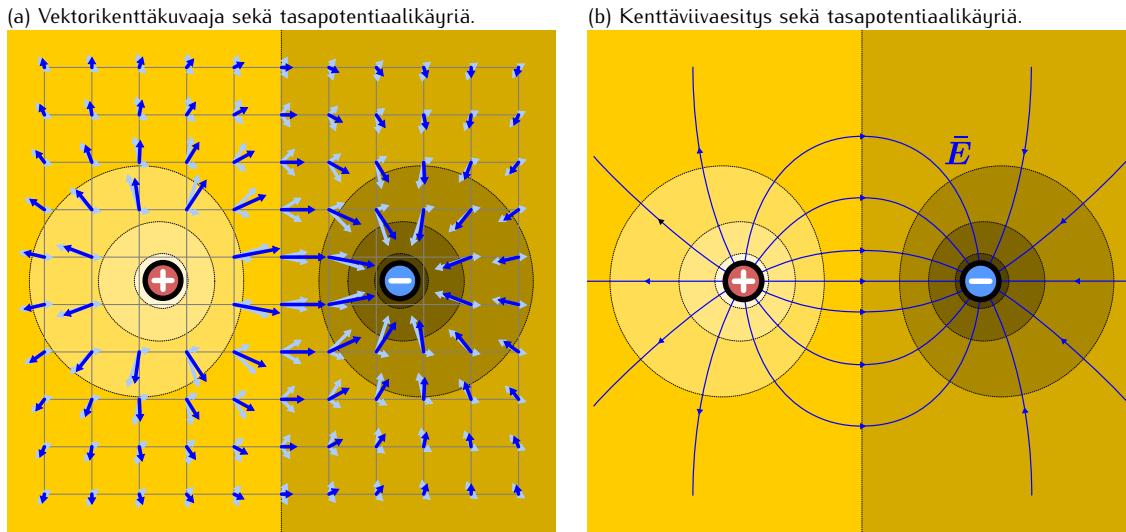
10.35 Vidaanko mihin tahansa vektorikenttään liittää potentiaalin kaltainen funktio, jolla on se ominaisuus, että funktio pienenee aina, kun avaruudessa siirrytään kentän suuntaan? Jos ei voi, keksi esimerkki vektorikentästä, jossa tämä ei ole mahdollista.

Potentiaalin muutos on yhtälön (10.115) perusteella suoraan verrannollinen siirtymän pituuteen ja sähkökentän voimakkuuteen, joten *potentiaali muuttuu sitä nopeammin, mitä suurempi sähkökenttä on*. Tästä yhtälöstä voi myös ratkaista sähkökentän z -komponentin, jolloin saadaan yhtälö

$$E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z} = -\frac{1 \text{ V}}{0.1 \text{ m}} = -10 \text{ V/m.} \quad (10.116)$$

Tästäkin muodosta nähdään, että mitä enemmän potentiaali muuttuu kuljettua matkaa kohti (suuri ΔV ja pieni Δz), sitä suurempi sähkökentän täytyy olla. Yhtälö osoittaa myös sen, että "voltia per metriä" on kelvollinen sähkökentän yksikkö. Sähkökentällä voikin käyttää kahta erilaista yksikköä, jotka viittaavat sähkökentän eri rooleihin. Sähkökenttään $E = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$ tuotun 1 C varaukseen kohdistuu 1 N voima. Toisaalta tässä sähkökenttässä potentiaali muuttuu 1 V , kun sähkökentän suunnassa siirrytään 1 m matka.

Kuva 10.36: Kahden varauksen sähkökentän ja potentiaalin esitys vektorikenttäkuvaajana, kenttäviivoina ja tasapotentiaalikäyrinä.



Kuvassa 10.34 (h) potentiaalia on kuvattu keltaisella värellä. Värin sävy kuvaan potentiaalin arvoa siten, että kirkkaat ja vaaleat sävyt esittävät suurta potentiaalia ja tummat värit pientä potentiaalia. Koska potentiaalin nollakohta on kiinnitetty potentiaalienergian nollakohtaan, ja potentiaalienergian nollakohta on mielivaltainen, myös potentiaalin nollakohta on mielivaltainen. Toisin sanoen *potentiaalin arvon nolla voi periaatteessa valita minne tahansa*, eikä sillä ole mitään fysikaalista merkitystä. Siksi suuri ja pieni ovat potentiaalista puhuttaessa suhteellisia käsitteitä. Potentiaalilla ei ole mitään absoluuttista arvoa, mutta potentiaalin muutoksilla on. Voidaan siis sanoa, että potentiaali on yhtäällä suurempi kuin toisaalla, ja tätä siis on kuvattu kuvan värellä: potentiaali kasvaa siirryttääessä tummasta väristä vaaleaan.

Potentiaali on esitetty kuvassa myös katkoviivoin. Kuhunkin katkoviivaan on merkitty potentiaalin arvo, ja potentiaali saa siis jokaisella viivan pistelle saman arvon. Näitä viivoja kutsutaan **tasapotentiaalikäyriksi**. Koska potentiaali muuttuu sähkökentän suuntaan liikuttaessa, se *ei muutu sähkökenttää vasten kohtisuoraan kuljettaessa*. Niinpä *tasapotentiaalikäyrät ovat aina kohtisuorassa sähkökentän suuntaan nähdyn*. Kuvassa tämä tarkoittaa sitä, että sähkökentän kenttäviivat leikkaavat tasapotentiaalikäyrät aina suorassa kulmassa. Koska tässä esimerkissä sähkökenttä kulkee pystysuoran, tasapotentiaalikäyrät ovat vaakasuoria. Yleisesti kenttäviivat voivat olla kaarevia ja kulkea mihin suuntaan tahansa, ja tällöin tasapotentiaalikäyrätkin ovat kaarevia käyriä. Ja itse asiassa tasapotentiaalikäyrät ovat "käyriä" vain kaksiulotteisessa kuvassa. Sähkökentän kenttäviivat ovat kolmessakin ulottuvuudessa edelleen käyriä, ja potentiaali muuttuu näiden käyrien suuntaan kuljettaessa. Tällöin pistet, joissa potentiaali saa saman arvon, muodostavat **tasapotentiaalipintoja**. Asia voi jälleen olla helpoin ymmärtää gravitaatioanalogn kautta. Homogenisessa gravitaatiokentässä kappale saa saman potentiaalienergian kaikissa *yhtä korkealla* olevissa pisteissä. Jos meillä on vaikkapa tasainen, täysin vaakasuora pöytä, kappaleen potentiaalienergian on tuon pyödän pääällä sama kaikialla. Tässä tapauksessa pyödän pinta on siis osa gravitaation tasapotentiaalipintaa.

Edellisten havaintojen perusteella potentiaali ei ole sähkökentästä riippumaton ominaisuus vaan se on *uusi tapa kuvata sähkökenttää*. Kuvaan 10.35 onkin tehty yhteenvetö, jossa verrataan eri tapoja esittää sähkökenttä. Vektorikenttäkuvaajassa nuolten pituus ja suunta kuvavat sähkökentän suuntaa ja voimakkuutta. Kenttäviivaesityksessä viivojen suunta kuvaa kentän suuntaa, mutta kentän suuruutta kuvaa viivojen *tiheys*. Mitä lähempänä viivat ovat toisiaan, sitä voimakkaampi kenttä on kyseessä. Kentän voi kuitenkin kuvata myös tasapotentiaalikäyrien avulla. Tällöin sähkökentän suunta on aina *kohtisuoraan tasapotentiaalikäyriä vastaan suuntaan, jossa potentiaali pienenee*, ja sähkökenttä on sitä voimakkaampi, mitä lähempänä toisiaan tasapotentiaalikäyrät ovat. Samat säännöt ilmenevät myös kuvassa 10.36, johon on piirretty kahden pistevarausken kenttä. Lähellä varauksia ja varausten välissä kenttä on voimakkaimillaan, ja siellä kenttävektorit ovat pitkät ja kenttäviivat sekä tasapotentiaalikäyrät lähellä toisiaan. Vaikka kenttäviivat ja tasapotentiaalikäyrät ovat kuvassa käyräviivaisia, ne ovat silti kaikki alla kohtisuorassa toisiinsa nähdyn.



10.36 Selitä kuvan 10.36 perusteella, miten seuraavat sähkökentän ominaisuudet muuttuvat lähestyttäessä positiivista tai negatiivista varausta: (a) kenttäviivojen välinen etäisyys, (b) tasapotentiaalikäyrien välinen etäisyys, (c) potentiaalin arvo, (d) potentiaalin jyrkkyys (muutosnopeus siirryttääessä), (e) sähkökentän voimakkuus. Selitä myös miten nämä asiat liittyvät toisiinsa!

Nämä päätelyt voidaan tieteenkin lausua myös matemaattisesti. Yhtälön (10.115) mukaan potentiaalin muutos on sähkökentän ja kentän suuntaisen siirtymän tulon vastaluku, $\Delta V = -E_z \Delta z$, mutta tämä pätee

vain z -suuntaiselle vakiokentälle. Yleisesti, jos sähkökenttä on vakio mutta ei z -suuntainen, myös siirtymät x - ja y -suuntiin muuttavat potentiaalia, ja tämä muutos riippuu näiden siirtymien pituudesta ja sähkökentän x - ja y -komponenttien suuruudesta. Yhdistämällä potentiaalin muutokset eri suunnissa saadaan kokonaismuutos sievennettyä yksinkertaiseen muotoon

$$\Delta V = -E_x \Delta x - E_y \Delta y - E_z \Delta z = -\bar{\mathbf{E}} \cdot \Delta \bar{r}. \quad (10.117)$$

Potentiaalin muutos on siis siirtymävektorin ja sähkökenttävektorin pistetulon vastaluku. Ja vielä yleisemmin, jos sähkökenttä ei ole vakio, siirtymä pitää jakaa lyhyisiin osiin $d\bar{r}$ ja potentiaalin muutos saadaan laskemalla nämä yhteen eli viivaintegraalina

$$\Delta V = - \int \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{r}. \quad (10.118)$$



10.37 Mikä fysiikalinen merkitys on yhtälöissä (10.117) ja (10.118) esiintyvillä miinusmerkeillä?

Kääntäen, yhtälön (10.116) mukaan sähkökenttä voidaan laskea potentiaalin muutoksen ja siirtymän suhteenvastalukuna, $E_z = -\frac{\Delta V}{\Delta z}$, mutta tämäkin pätee vain z -suuntaiselle vakiokentälle. Jos kenttä on z -suuntainen mutta kentän voimakkuus riippuu paikasta, täytyy tarkasteluvälin Δz antaa lähestyä nollaa, jolloin muutosten osamäärästä tulee derivaatta,

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (10.119)$$

Ja jos sähkökenttä ei ole z -suuntainen, potentiaali muuttuu myös x - ja y -suunnissa, jolloin sähkökentän kukin karteesinen skalaarikomponentti pitää laskea erikseen derivoimalla potentiaalia kyseisen koordinaatin suhteen,

$$\bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = -\nabla V. \quad (10.120)$$

Sähkökenttä saadaan siis määritelmällä potentiaalin gradientti.

Luvussa 4 tutkimme konservatiivisen voiman ja potentiaalienergian yhteyttä, ja johdimme silloin aivan vastaavan tuloksen, jonka mukaan konservatiivisen vuorovaikutuksen tuottama voima saadaan laskettua potentiaalienergian gradientin vastavektorina. Fysiikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että konservatiiviseen voimakenttään kuten painovoimaan liittyy potentiaalienergia, ja tämä potentiaalienergia riippuu siitä, missä kappale on. Kappaleen siirtäminen muuttaa potentiaalienergiaa, ja kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa aina siihen suuntaan, johon kappaletta siirtämällä potentiaalienergia pienenee nopeimmin. Esimerkkinä tästä käytimme mäkeä: mäen korkeudelle h voidaan myös laskea (kaksiulotteinen) gradientti $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{\mathbf{j}}$, ja tämä gradientti osoittaa aina suuntaan, jossa mäki kohoaa jyrkimmin. Gradientin vastavektori $-\nabla h$ osoittaa puolestaan suuntaan, jossa mäki laskee jyrkimmin.

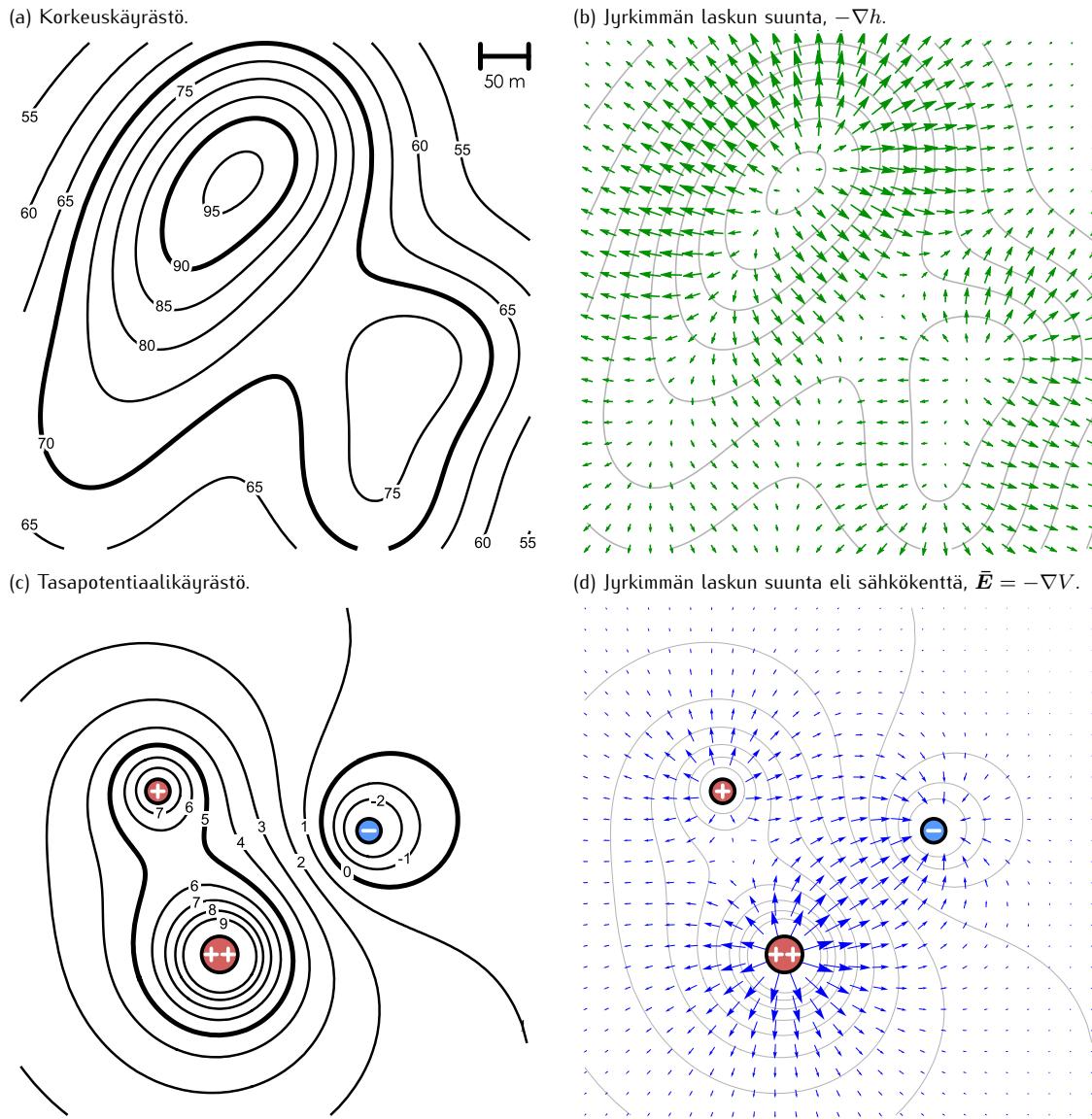
Mäen korkeus h , potentiaalienergia U ja potentiaali V ovat kaikki skalaarikenttiä, joiden gradientti osoittaa jyrkimmän kasvun suunnan ja gradientin vastavektori jyrkimmän laskun suunnan. Korkeuden gradientin vastavektori $-\nabla h$ on jyrkimmän alamäen suunta, potentiaalienergian gradientin vastavektori on potentiaalienergiaan liittyvä voima, $\bar{\mathbf{F}} = -\nabla U$, ja potentiaalin gradientin vastavektori on sähkökenttä $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla V$. *Potentiaali onkin sähkökentälle samantyyppinen ominaisuus kuin korkeus on painovoimakentälle.* Korkealle asetettu massallinen kappale pyrkii putoamaan alas (siis suuntaan johon korkeus pienenee) ja vapaassa pudotuksessa oleva kappale saa pudotessaan sitä suuremman liike-energian mitä korkeammalta kappale putoaa (siis mitä suurempi on korkeuden muutos). Samaan tapaan korkeaan potentiaaliin asetettu positiivinen varaus pyrkii "putoamaan" suuntaan, johon potentiaali pienenee, ja se saa sitä suuremman liike-energian, mitä suurempi on potentiaalin muutos. Kartalla yhtä korkealla olevat pistet muodostavat *korkeuskäyrän*, ja jyrkimmän laskun suunta on aina kohtisuorassa korkeuskäyrää vastaan (kuvat 10.37 (a) ja (b)). Aivan samaan tapaan sähkökentän graafisessa esityksessä samassa potentiaalissa olevat pistet muodostavat *tasapotentiaalkäyrän tai -pinnan*, ja sähkökenttä on aina kohtisuorassa tasapotentiaalkäyrää vastaan (kuvat 10.37 (c) ja (d)). Tämä korkeuden ja potentiaalin välinen analogia on niin vahva, että fysiikkassa puhutaankin tavallisesti korkeasta ja matalasta potentiaalista eikä suuresta tai pienestä.



10.38 Mihin suuntaan negatiivinen varaus pyrkii "putoamaan" (a) sähkökentän suhteen ja (b) potentiaalin suhteen?

Korkeutta, potentiaalienergiaa ja potentiaalia yhdistää myös se, että millään niistä ei ole absoluuttista nollakohtaa. Korkeuden nollatasoksi voidaan valita esimerkiksi merenpinnan taso, mutta tämä on vain yksi mahdollinen valinta. Samoin potentiaalin nollapisteeksi voidaan valita äärettömän kaukana oleva piste,

Kuva 10.37: Maaston korkeus h esitetään kartoissa korkeuskäyrillä. Samalla tavalla potentiaali V esitetään tasapotentiaalikäyrillä ja -pinoilla. Varausten lähellä potentiaali muuttuu jyrkästi ja tasapotentiaalikäyrät olisivat hyvin lähellä toisiaan. Tämän vuoksi kuvasta on jätetty piirtämättä hyvin suuria ja pieniä potentiaaleja kuvaavat käyrät. Paksummalla viivalla piirrettyihin käyriin ei liity mitään erikoista. Nämä on piirretty paksulla viivalla vain siksia, että viivojen hahmottaminen olisi helpompaa.



mutta tämäkin on vain valinta. Korkeuden ja potentiaalin ero kahden pisteen välillä on kuitenkin absoluutinen. Esimerkiksi huoneen lattian ja katon "korkeuden" arvo riippuu siitä, valitaanko korkeuden nollataso merenpinnan tai vaikkapa lattian tasoon. Katon ja lattian välinen korkeusero ei kuitenkaan riipu nollatason valinnasta mitenkään. Aivan samaan tapaan minkään yksittäisen avaruuden pisteen A potentiaalilla V_A ei ole yksikäsitteistä arvoa, koska potentiaalin nollakohta voidaan valita. Kahden pisteen, A ja B, potentiaalien ero

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A \quad (10.121)$$

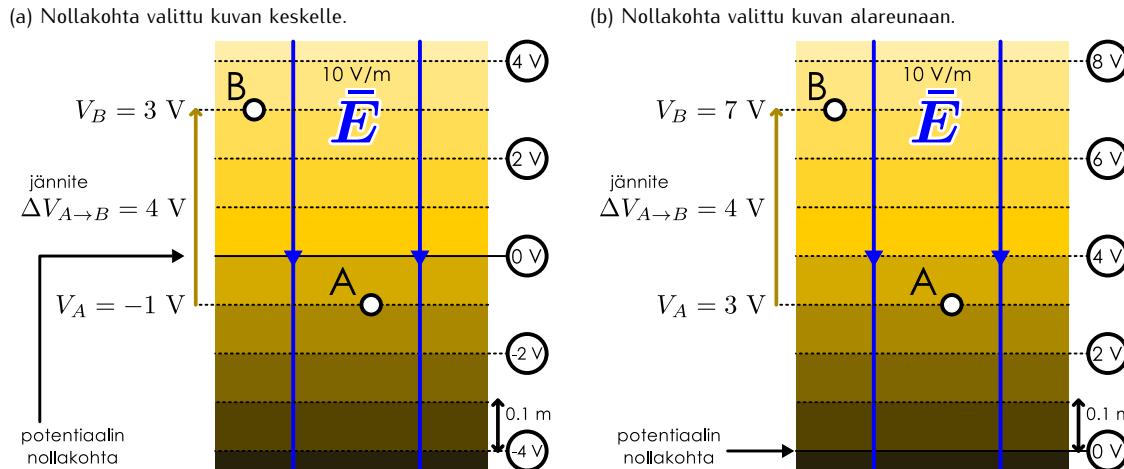
ei kuitenkaan riipu nollakohdan valinnasta mitenkään. Potentiaaliero on siis mitattavissa oleva suure, mutta potentiaali ei. Tämän vuoksi potentiaalierolle onkin annettu myös erikoisnimi **jännite**.

Potentiaali kertoo systeemin potentiaalienergian, kun systeemissä olevaan sähkökenttään tuodaan varaus q_{testi} . **Jännite puolestaan kertoo systeemin potentiaalienergian muutoksen, kun varaus siirretään pistestä A pisteesseen B,**

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = q_{\text{testi}} V_B - q_{\text{testi}} V_A = q_{\text{testi}} (V_B - V_A) = q_{\text{testi}} \Delta V_{A \rightarrow B}. \quad (10.122)$$

Jännitteellä on sama yksikkö kuin potentiaalilla, voltti, ja jos pisteen A ja B välinen jännite on yksi voltti, systeemin potentiaalienergia muuttuu yhden joulen, kun yhden coulombin varaus siirryy pistestä A pistee-

Kuva 10.38: Potentiaalin arvot riippuvat nollakohdan valinnasta. Siksi yksittäisten pisteen potentiaalien arvoilla ei ole fysikaalista merkitystä. Kahden pisteen potentiaalien ero eli jännite on kuitenkin nollakohdan valinnasta riippumaton suure.



seen B. Kun yksi *alkeisvaraus* e siirryt yhden voltin jännitteen yli, potentiaalienergian muutos on

$$\Delta U = e\Delta V = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (10.123)$$

Tätä energiamäärää kutsutaan **elektronivoltiksi** ja sitä merkitään $1 \text{ eV} = e \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Kyseessä on hyvin pieni *energian* yksikkö, mutta esimerkiksi atomiytimiin sitoutuneiden elektronien energiat ovat samaa suuruusluokkaa, ja siksi tämä yksikkö on tavallinen atomien ja alkeishiukkasten fysiikassa.



10.39 Selitä omin sanoin, miten potentiaali ja sähkökenttä liittyvät toisiinsa. Mitä sähkökenttä kertoo potentiaalista tai sen muutoksesta ja mitä potentiaali kertoo sähkökentästä tai sen muutoksesta? Jos tunnet yhden, miten lasket toisen? Miksi potentiaalia voi pitää varaukselle hiukan samanlaisena suureena kuin korkeutta massalliselle kappaleelle?

esimerkki 10.5

Kenttä ja potentiaali

Pisteiden A ja B välinen etäisyys on 2.0 metriä. Pisteessä A potentiaali on 20 V. Sähkökenttä osoittaa pisteestä A kohti pistettä B. Kenttä ei ole vakio vaan se voimistuu pistettä B lähestyttäessä niin, että voimakkuus on pisteen A kohdalla 10 V/m ja pisteen B kohdalla 15 V/m . Mikä on pisteen B potentiaali?

TILANNE Valitaan origoksi piste A ja asetetaan x -akseli kohti pistettä B, jolloin $x_B = 2.0 \text{ m}$. Merkitään potentiaalia A:ssa $V_A = 20 \text{ V}$. Emme tiedä, miten sähkökentän voimakkuus muuttuu pisteen välillä, joten tehtävää ei voi ratkaista täsmällisesti. Jotta saamme jonkinlaisen arvion, oletetaan kentän voimistuvan tasaisesti A:sta kohti B:tä siirryttäässä.

SUUNNITELMA Sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienemissuunnan, joten potentiaali pienenee A:sta B:hen siirryttäässä ja B:n potentiaali on siis pienempi kuin A:n. Kentän voimakkuus kertoo potentiaalin muutoksen jyrkkyyden. Nyt sähkökentän voimakkuus pisteen A ja B välillä on keskimäärin noin $E_{x,\text{keskiarvo}} = 12.5 \text{ V/m}$, joten potentiaali laskee keskimäärin 12.5 voltia jokaista metriä kohden kentän suuntaan kuljettaessa. Kahden metrin matkalla kokonaismuutos on siis 25 voltia, eli pisteen B potentiaali on

$$V_B = V_A + \Delta V_{A→B} = V_A - E_{x,\text{keskiarvo}} \Delta x_{A→B} = 20 \text{ V} - 12.5 \text{ V/m} \cdot 2 \text{ m} = -5 \text{ V}. \quad (10.124)$$

Täsmällisesti potentiaalin muutos saadaan sähkökentän integraalina.

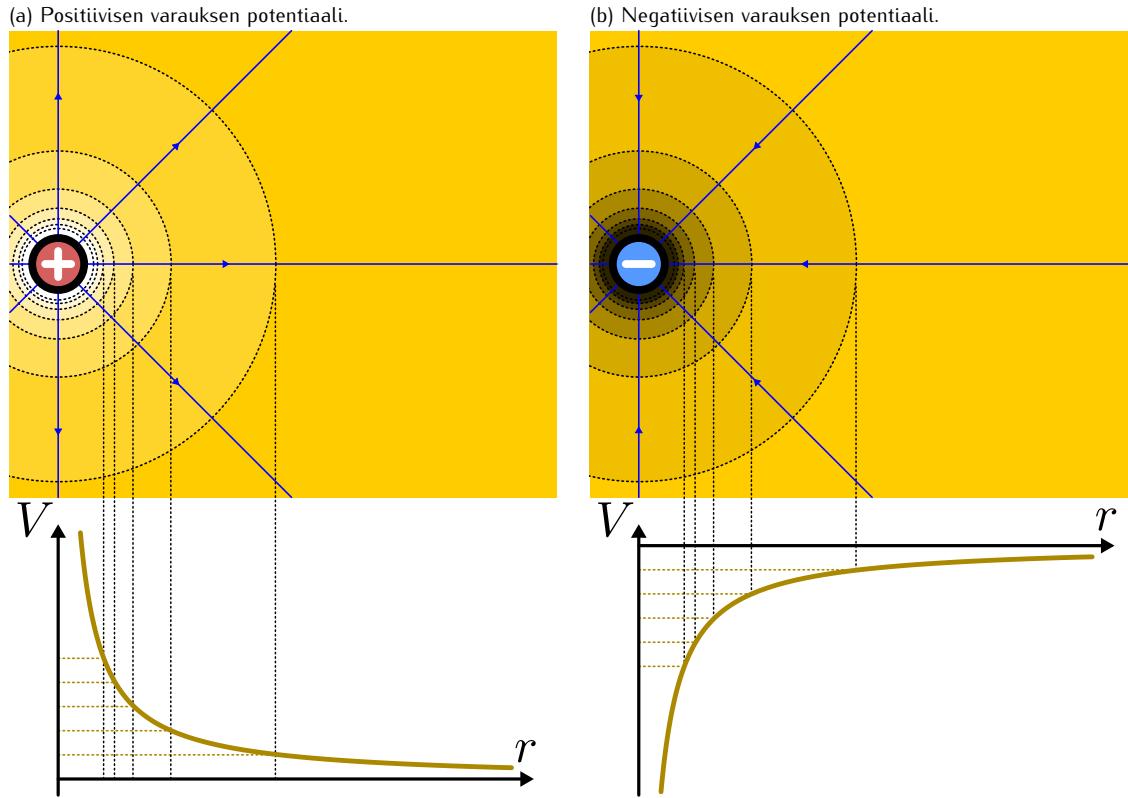
RATKAISU Jos sähkökenttä muuttuu tasaisesti tarkastelupisteiden välillä, sitä kuvaav funktio $E_x(x) = 10 \text{ V/m} + (2.5 \text{ V/m}^2)x$, sillä tälle pätee $E_x(x_A) = 10 \text{ V/m}$ ja $E_x(x_B) = 15 \text{ V/m}$. Potentiaali on siis

$$V(x) = V_A - \int_{x_A}^x E_x dx = 20 \text{ V} - (10 \text{ V/m})x - (1.25 \text{ V/m}^2)x^2, \quad (10.125)$$

mistä pisteen B potentiaaliksi ratkeaa $V_B = V(x_B) = -5 \text{ V}$.

ARVIOINTI Pisteiden A ja B väliseksi potentiaaleroksi saatuiin 25 volttia ensin yksinkertaisesti kertomalla sähkökentän voimakkuuden keskiarvo pisteen välillä etäisyydellä ja sitten hiukan monimutkaisemmin integroimalla sähkökentän lauseketta. Koska tulokset ovat samat, ne lienevät oikein. Huomaa erityisesti, että koska kenttä osoittaa A:sta kohti B:tä, potentiaalin täytyy olla B:ssä alempi kuin A:ssa.

Kuva 10.39: Pistevarauksen potentiaali esitettyynä sekä tasapotentiaalipinnoin etäisyyden funktiona, kun potentiaalin nollakohta on valittu äärettömän kauas. Positiivisen pistevarauksen lähellä potentiaali lähestyy ääretöntä ja negatiivisen varauksen lähellä negatiivista ääretöntä. Tämä näkyy tasapotentiaalkäyrissä niin, että tasaisin välein piirretut käyrät ovat sitä lähempänä toisiaan, mitä lähempänä varausta ollaan.



Varausten luoma potentiaali

Sähkökenttä ja potentiaali siis riippuvat toisistaan, ja kun niistä tunnetaan yksi, toinen voidaan laskea sen perusteella. Jos sähkökenttä tunnetaan, potentiaali saadaan laskettua viivaintegraalina yhtälön (10.118) mukaisesti. Jos taas potentiaali tunnetaan, sähkökenttä saadaan määritettyä gradienttina yhtälön (10.120) perusteella. Gradientin laskeminen tarkoittaa potentiaalfunktion derivointia eri koordinaattien suhteeseen, mikä on yleensä melko suoraviivaista. Integrointi voi puolestaan olla varsin vaikeaa, joten usein on helpompa laskea sähkökenttä potentiaalistaa kuin päinvastoin potentiaali sähkökentstä. Potentiaalin avulla voidaan siis selvittää helposti sekä systeemin potentiaalienergia että sähkökenttä, ja niinpä *potentiaali on usein kaikkein käyttökelpoisin tapa kuvata varausten luomia sähkökenttiä*. Tämän vuoksi onkin sytä tutkia, kuinka voimme laskea varausten tuottaman potentiaalin suoraan selvittämättä ensin sähkökenttää.

Aloitetaan tutkimalla yhden pistevarauksen (A) systeemiä. Potentiaali kertoo meille mikä systeemin potentiaalienergia U olisi, jos systeemiin tuotaisiin toinenkin varaus q_{testi} , sillä

$$U = q_{\text{testi}}V. \quad (10.126)$$

Toisaalta jos varauksen A luo tuodaan testivaraus, systeemistä tulee kahden pistevarauksen systeemi, jonka potentiaalienergian osaamme jo laskea lausekkeen (10.108) avulla. Jos siis testivaraus asetetaan etäisyydelle $r_{A \rightarrow \text{testi}}$, systeemin potentiaalienergia on

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_{\text{testi}}}{r_{A \rightarrow \text{testi}}}, \quad (10.127)$$

ja varauksen A luoma potentiaali on näin ollen

$$V = \frac{1}{q_{\text{testi}}} U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow \text{testi}}}. \quad (10.128)$$

Intuitiivisesti voisi arvata, että usean pistevarauksen potentiaali saadaan laskemalla yksittäisten varausten potentiaalit yhteen, ja näin todella on. Tämä johtuu sähkökenttien superpositioperiaatteesta. Jos nimittäin

systeemissä on useita sähkövarauksia q_1, q_2, \dots, q_N , ja kuka varaus luo yksin sähkökentän $\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{E}}_2$ jne., nämä luovat yhdessä sähkökentän

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{kokonais}} = \bar{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_2 + \dots + \bar{\mathbf{E}}_N = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{E}}_i. \quad (10.129)$$

Yhtälön (10.118) perusteella tähän sähkökenttään liittyvän potentiaalin muutos saadaan sähkökentän viivaintegraalina,

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = - \int \bar{\mathbf{E}}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = - \int (\bar{\mathbf{E}}_1 + \dots + \bar{\mathbf{E}}_N) \cdot d\bar{r} = - \int \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{E}}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.130)$$

Integraali on kuitenkin lineaarinen laskutoimitus, joten summan voi siirtää integraalin ulkopuolelle säännön $\int(a+b)dx = \int adx + \int bdx$ avulla. Näin ollen potentiaalin muutoksen voi kirjoittaa myös muotoon

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = - \int \bar{\mathbf{E}}_1 \cdot d\bar{r} - \dots - \int \bar{\mathbf{E}}_N \cdot d\bar{r} = - \sum_{i=1}^N \int \bar{\mathbf{E}}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.131)$$

Nämä saimme jaettua usean varauksen yhdessä tuottaman sähkökentän integraalin osiin niin, että voimme laskea erikseen jokaisen varauksen yksin tuottaman sähkökentän integraalin. Nämä integraalit kuvaavat kuitenkin yhtälön (10.118) perusteella kunkin yksittäisen varauksen tuottamaa potentiaalin muutosta erikseen,

$$\Delta V_i = - \int \bar{\mathbf{E}}_i \cdot d\bar{r}. \quad (10.132)$$

Niinpä kaikkien varaus yhdessä tuottaman potentiaalin muutokset saadaan laskettua kunkin varauksen yksinään tuottaman potentiaalin muutosten summana,

$$\Delta V_{\text{kokonais}} = \Delta V_1 + \dots + \Delta V_N = \sum_{i=1}^N \Delta V_i. \quad (10.133)$$

Tämä tulos pätee kaikille varauksille. Mutta erityisesti jos varaukset q_i ovat pistemäisiä ja potentiaalin nollakohta valitaan äärettömän kauas kaikista varauksista, kunkin pisteverauksen potentiaalille voidaan käyttää lauseketta (10.128), ja potentiaalille saadaan tarkastelupisteessä P lauseke

$$V_{\text{kokonais}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{i \rightarrow P}}, \quad (10.134)$$

missä $r_{i \rightarrow P}$ on etäisyys varauksesta q_i tarkastelupisteeseen P.



10.40 Varaus 1 nC on tason pisteessä (0, 1) (metrejä) ja varaus -2 nC on pisteessä (2, 0). Mikä on sähkökentän voimakkuus ja potentiaali origossa?

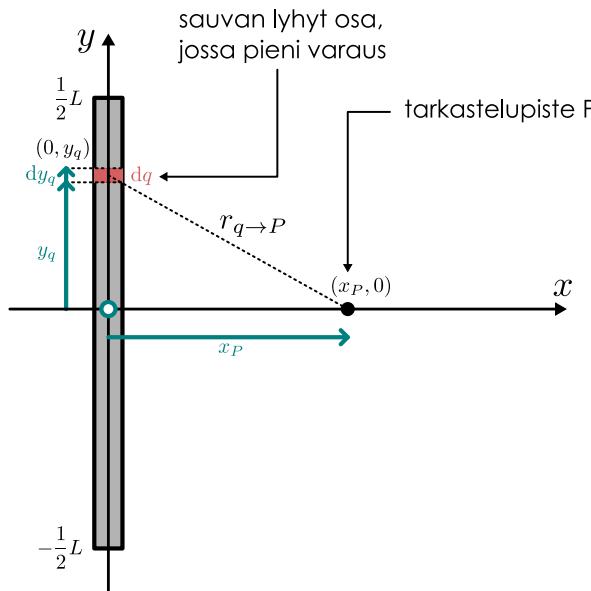
Tämän päättelyn perusteella voimme laskea myös suuren varattujen kappaleiden luoman potentiaalin samaan tapaan kuin niiden sähkökentänkin. Jos varattu kappale on pieni ja sitä tarkastellaan kaukaa, sillä voidaan käyttää pisteverausmallia. Tällöin kappaleen luoma potentiaalia kuvaav lauseke (10.128). Jos kappale on suuri, pisteverausmalli ei toimi, mutta kappale voidaan silti jakaa pieniin osiin, ja näitä osia voidaan kuvata pisteverauksina q_i . Tällöin voimme valita avaruudesta tarkastelupisteen, laskea kunkin pisteverauksen tuottaman potentiaalin tässä pisteessä erikseen, ja laskea lopuksi nämä potentiaalit yhteen. Kun osien määrä lähestyy äretöntä ja niiden varaus nolla, $q_i \rightarrow dq$, summa muuttuu integraaliksi

$$V_{\text{kokonais}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}}. \quad (10.135)$$

Laskimme aikaisemmin luvussa 10.2 esimerkkinä L-pituisen sauvan sähkökentän jakamalla sauvan osiin ja laskemalla integroiden kaikkien osien tuottamat sähkökentät yhteen. Lasketaan nyt integroiden saman sauvan potentiaali sauvan keskipisteen kautta kulkevalla sauvan nähdyn kohtisuoralla suoralla. Käytetään samaa geometriaa ja merkintöjä kuin aikaisemmin: y-askeli kulkee sauvan suuntaan ja origo on sauvan keskipisteessä. Tarkastelupisteen koordinaatit ovat $(x_P, 0)$ ja varatun sauvan pienien osien koordinaatit $(0, y_q)$. Osan pituus on dy_q ja sen varaus on $dq = \lambda dy_q = (Q/L)dy_q$. Etäisyys varatusta osasta pisteeseen P on

$$r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2}. \quad (10.136)$$

Kuva 10.40: Sauvan pienen osan tuottaman potentiaalin laskemisessa tarvittava geometria.



Sijoittamalla nämä tekijät lausekkeeseen (10.135) potentiaaliksi pisteessä P saadaan integraali

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy_q}{\sqrt{x_P^2 + y_q^2}}. \quad (10.137)$$

Funktion $f(y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ integraalifunktio on $F(y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + y) + C$, joten potentiaaliksi saadaan

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left|_{-L/2}^{L/2} \right. \ln \left(\sqrt{x_P^2 + y_q^2} + y_q \right) \quad (10.138)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[\ln \left(\sqrt{x_P^2 + L^2/4} + L/2 \right) - \ln \left(\sqrt{x_P^2 + L^2/4} - L/2 \right) \right] \quad (10.139)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{\sqrt{x_P^2 + L^2/4} + L/2}{\sqrt{x_P^2 + L^2/4} - L/2}. \quad (10.140)$$

Tämä on siis L -säteisen tasaisesti varatun sauvan potentiaali kohtisuoralla etäisyydlä x_P sauvan keskipisteestä.



10.41 Derivoi funktio $F(y)$ muuttujan y suhteeseen ja osoita, että tulos on $f(y)$. Tämä todistaa, että F on funktion f integraalifunktio, sillä integrointi ja derivoointi ovat käänneisoperaattot.

Laskussa esiintyvä integraali ei ole aivan helppo laskea, mutta integraalifunktion voi etsiä taulukkokirjoista tai laskea tietokoneella. Integraalin muodostaminen oli kuitenkin nyt huomattavasti helpompaa kuin sähkökenttää laskettaessa, koska *potentiaali on skalaari ja sähkökenttä on vektori*. Sähkökenttien yhteenlaskussa täytyy huomioida sähkökenttävektorien komponentit, mutta potentiaalien yhteenlaskussa ei, koska potentiaalilla ei ole komponentteja. Tämä näkyy myös kuvissa 10.16 ja 10.40, joissa on esitetty sähkökentän ja potentiaalin laskussa tarvittava geometria. Sähkökentän määritykssä tarvittu kuva 10.16 on monimutkaisempi, sillä siihen on täytynyt piirtää myös vektoreiden komponentteja ja yhdenmuotoisia kolmioita.



10.42 Sauvan sähkökenttä on x -akselilla symmetrian perusteella x -suuntainen, ja sähkökentän x -komponentti pisteessä P on yhtälön (10.120) mukaisesti potentiaalin derivaatta tarkastelupisteen x_P -koordinaatin suhteen, $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x_P}$. Laske sähkökenttä tämän säännön avulla ja vertaa aikaisemmin laskettuun tulokseen (10.45).

esimerkki 10.6

Kiekon potentiaali

Mikä on tasaisesti varatun kiekon (säde R , varaus Q) potentiaali kiekon symmetria-akselille etäisyydellä x kiekon keskipisteestä?

TILANNE Kyseessä on sama tilanne kuin esimerkissä 10.3. Lasketaan jälleen ensin ohuen renkaan (säde r , varaus q) tuottama potentiaali renkaan symmetria-akselilla. Kiekon potentiaali voidaan laskea jakamalla kiekko ohuksi renkaaksi ja summaamalla näiden renkaiden potentiaalit yhteen.

SUUNNITELMA Lasku tapahtuu samalla periaatteella kuin esimerkissä 10.3 paitsi että nyt laskemme potentiaalia sähkökentän sijaan. Koska potentiaali on skalaari, vektoreiden komponenteista ei tarvitse välittää.

Tarkastellaan renkaan osaa A, jonka pituus on dl ja varaus $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi r} dl$. Pistevaraumallin mukaisesti varaus luo pisteeseen P potentiaalin

$$dV_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{s}. \quad (10.141)$$

Jaetaan sitten kiekko renkaisiin, ja tarkastellaan r -säteistä ja dr-paksuista rengasta, jonka varaus on

$$dQ = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} dA. \quad (10.142)$$

Kokonaispotentiaali saadaan laskemalla kaikkien renkaiden luomat potentiaalit yhteen eli integroimalla koko kiekon yli.

RATKAISU Tarkastellun renkaan osan luoma potentiaali on

$$dV_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} dl. \quad (10.143)$$

Koko renkaan potentiaali saadaan integroimalla muuttujaa l renkaan ympäri eli arvosta $l = 0$ arvoon $l = L = 2\pi r$. Integroitava funktio on jälleen vakio, koska renkaan kaikki pistet ovat yhtä kaukana pisteestä P,

$$V_{\text{rengas}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + r^2}}. \quad (10.144)$$

Tämän tuloksen avulla saamme laskettua kiekon potentiaalin. Tarkastellun dr-levyisen renkaan varaus on

$$dQ = Q \frac{2r}{R^2} dr, \quad (10.145)$$

joten sen luoma potentiaali on lausekkeen (10.144) perusteella

$$dV_{r \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{2r}{R^2 \sqrt{x^2 + r^2}} dr. \quad (10.146)$$

Kokonaispotentiaali saadaan integroimalla muuttujaa r koko kiekon yli eli arvosta $r = 0$ arvoon $r = R$. Tässä integrointi onnistuu huomaamalla, että funktio $f(r) = (x^2 + r^2)^{1/2}$ derivaatta on $f'(r) = 1/2 \cdot 2r \cdot (x^2 + r^2)^{-1/2}$, joten funktio $f'(r) = r(x^2 + r^2)^{-1/2}$ integraalin täytyy olla $f(r) = (x^2 + r^2)^{1/2}$, ja näin saamme tuloksen

$$V_{\text{kiekko}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left|_0^R \right. \sqrt{x^2 + r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right). \quad (10.147)$$

Mathematica:

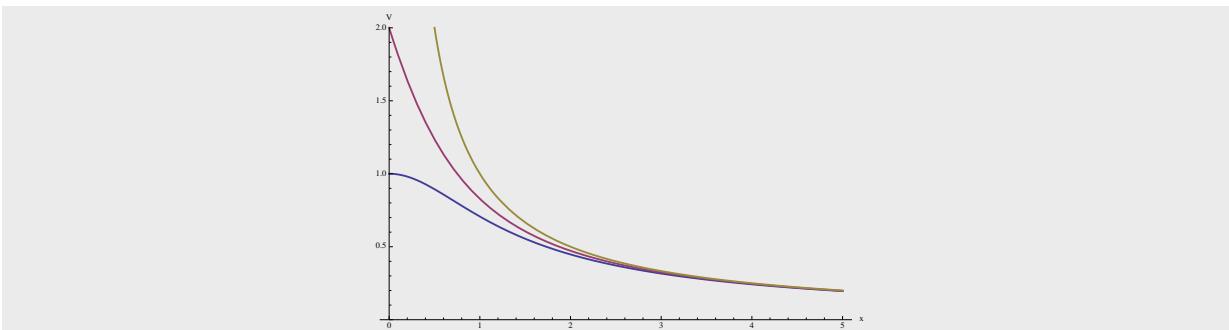
```
(* vakiot *)
L = 2 Pi r; A = Pi R^2; s = Sqrt[x^2 + r^2]; lambda = q/L; sigma = Q/A;

(* pistevarauksen ja renkaan potentiaali *)
dVpiste = k q/s /. q -> lambda;
vRengas = Integrate[dVpiste, {l, 0, L}]
(k q)/Sqrt[r^2 + x^2]

(* kiekon potentiaali *)
dVkiekko = vRengas /. q -> Q L/A;
vKiekko =
Integrate[dVkiekko, {r, 0, R},
Assumptions -> {x > 0, R > 0, k > 0, Q > 0}]
(2 k Q (-x + Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2

(* sahkokentta *)
eKiekko = -D[vKiekko, x]
-((2 k Q (-1 + x/Sqrt[R^2 + x^2]))/R^2)

(* potentiaali etäisyyden funktiona *)
R = 1; k = 1; Q = 1; q = 1; r = 1;
Plot[{vRengas, vKiekko, 1/x}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {0, 2},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x", "V"}]
```



ARVIOINTI Potentiaalin kuvaajasta nähdään potentiaalin heikkenevän asymptoottisesti nopeudella $V \sim 1/x$, kun x on suuri. Tämä on järkevää, koska kauaa katsoen kiekko näyttää pisteveraukselta, jonka potentiaali on käantäen verrannollinen etäisyyteen. Lisäksi sähkökenttä on potentiaalin gradientin vastavektori, ja erityisesti sähkökentän x -komponentti on potentiaalin x -derivaatan vastaluku,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (10.148)$$

Funktion V_{kiekko} derivaatta on

$$-\frac{\partial V_{\text{kiekko}}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2Q}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + R^2)^{1/2} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \quad (10.149)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2Q}{R^2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (x^2 + R^2)^{-1/2} - 1 \right) \quad (10.150)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2Q}{R^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right), \quad (10.151)$$

mikä on sama funktio kuin esimerkissä 10.3 laskettu sähkökenttä $E_{x,\text{kiekko}}$. Niinpä laskettu sähkökenttä ja potentiaali vastaavat toisiaan kuten pitääkin. Huomaa myös, että on helpompi laskea potentiaali ja päättellä siitä sähkökenttä kuin laskea sähkökenttä ja päättellä siitä potentiaali.

10.5 Sähkövarausten ja -kentän manipulointi

Tähän mennessä olemme pääasiassa tutkinneet sähkövarausten ja -kenttien perusominaisuksia sekä tapoja kuvata näitä suureita. Olemme oppineet määrittämään varausten luoman sähkökentän ja potentiaalin, ja tiedämme myös millaisen voiman sähkökenttä kohdistaa varattuihin kappaleisiin sekä mikä on tällöin sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia. Sähköisistä ilmiöistä olemme tutustuneet staattiseen varautumiseen, polarisaatioon sekä varautuneiden kappaleiden välisiin vuorovaikutuksiin.

Jotta sähköisistä ilmiöistä olisi joitain hyötyjä, niitä pitää kuitenkin pystyä hallitsemaan. Tavoitteenaamme onkin oppia ymmärtämään, miten varaukset asettuvat erilaisissa materiaaleissa ja rakenteissa, ja millaisia sähkökenttiä näin voidaan luoda. Luvun pääteksi tutustumme yksinkertaiseen sähkötekniiseen komponenttiin, kondensaattoriin, jolla voidaan varastoida sähkövarausta ja sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergiaa.

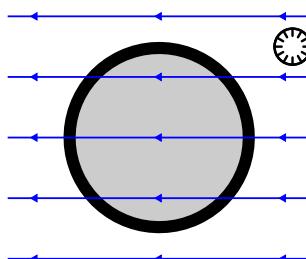
Aineet sähkökentässä

Aloitimme sähköoppaan tutustumisen tutkimalla varattujen ja neutraalien kappaleiden välisiä vuorovaikutuksia, jolloin havaitsimme varattujen kappaleiden vetävän puoleensa sekä vastakkaismerkkisesti varautuneita että neutraaleja kappaleita. Neutraalitkin kappaleet nimitään polarisoituvat varatun kappaleen läheisyydessä niiden sisältämien positiivisten ja negatiivisten varausten siirtyessä, jolloin nekin kokevat sähköisen vuorovaikutuksen. Selitimme polarisaation alunperin tarkastelemalla erilaisten varausten välisiä voimia, mutta nyt tiedämme, että näitä voimia välittää sähkökenttä. Kappaleet ja materiaalit eivät siis oikeastaan polarisoidu siksi, että niiden lähellä on toinen, varattu kappale, vaan siksi että ne joutuvat tämän varatun kappaleen luomaan sähkökenttään. Polarisaatiota onkin parempi tarkastella nimenomaan sähkökentän ja aineen välisenä vuorovaikutuksena.

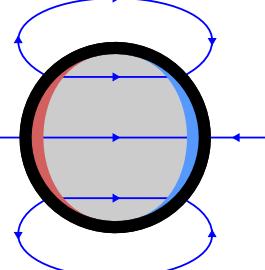
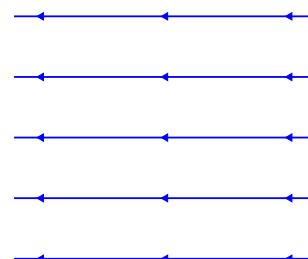
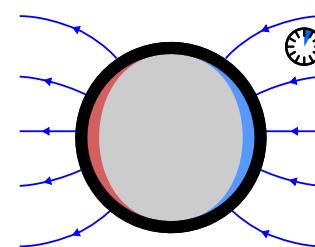
Kuvassa 10.41 on esitetty, kuinka johdekappale (metallikuula) reagoi ulkoiseen sähkökenttään, missä "ulkoinen" tarkoittaa sitä, että sähkökenttä luo jokin kentässä olevasta kappaleesta riippumaton ja tarkasteltavan syteemmin ulkopuolin varaus. Kun ulkoista sähkökenttää ei ole, kuula on täysin neutraali ja polarisoitumaton. Ajatellaan sitten, että kuulan ympärille luodaan yhtäkkiä homogeeninen sähkökenttä, joka ei ilmestymisensä jälkeen enää muutu. Sähkökenttä voisi syntyä esimerkiksi niin, että kuulan lähelle tuodaan nopeasti muita varauksia, mutta periaatteessa kentän syntytavalla ei ole mitään väliä, sillä kuula reagoi

Kuva 10.41: Johdekappale ulkoisessa kentässä. Kenttä liikuttaa varauksenkuljettajia ja johde polarisoituu. Varaukset ovat tasapainossa, kun johteen sisällä ei ole lainkaan sähkökenttää. Tällöin johteen polarisaation luoma kenttä kumoa ulkoisen kentän sisällä täydellisesti.

(a) Kenttä ilmestyy, varaus ei ole vielä siirtynyt.



(b) Varaus on siirtynyt, johteen sisällä ei ole kenttää.



vain kenttään tietämättä lainkaan, mistä kenttä on peräisin. Sähkökenttä läpäisee kuulan, jolloin sen vapai-siin varauksenkuljettajiin kohdistuu sähköinen voima. Metallikuulassa varauksenkuljettajat ovat elektroneja, joihin negatiivisesti varattuina hiukkasina kohdistuu voima sähkökenttään nähdien pääinvastaiseen suuntaan. Tähän suuntaan elektronit myös alkavat liikkua, jolloin kuulan vastakkaisille reunoille syntyy positiivisen ja negatiivisen varauksen alueet eli kuula polarisoituu.

Polarisoituvan kuulan positiivisesti ja negatiivisesti varatut reunat synnyttävät luonnollisesti myös oman sähkökenttänsä, ja kuulassa sekä sen ulkopuolella vallitseva kokonaissähkökenttä on alkuperäisen, ulkoisen sähkökentän ja polarisoituneen kuulan synnyttämien sähkökenttien superpositio. Kuvassa 10.41 ulkoinen sähkökenttä osoittaa oikealta vasemmalle, jolloin kuulan vasempaan reunaan kertyy positivista ja oikeaan reunaan negatiivista varausta. Näiden varausten synnyttämä sähkökenttä osoittaa positiivisesti varatusta reunasta negatiivisesti varattuun reunaan eli kuvassa vasemmalta oikealle, ulkoista sähkökenttää vastaan. Niinpä kuulan polarisoituminen *heikentää sähkökenttää kuulan sisällä*. Koska aine on johde, varaukset liikkuvat siinä niin kauan kuin sen sisällä on sähkökenttä. Polarisaatio siis vahvistuu, jolloin sähkökenttä kuulan sisällä heikkenee entisestään. Tämä johtaa siihen, että *lopulta polarisaation tuottama sähkökenttä kumoa ulkoisen kentän täydellisesti kuulan sisällä*. Tällöin varauksenkuljettajiin kohdistuva voima on nolla, eikä varausta siirry enempää.

Käytännössä tämä prosessi tapahtuu johteissa hyvin nopeasti. Esimerkiksi metallieissa on paljon vapaita elektroneja, ja elektronien pienikin siirtymä tuottaa varsin voimakkaan polarisaation ja sähkökentän. Niinpä ulkoiseen sähkökenttään tuotu metallikappale polarisoituukin lähes välittömästi. Lopputulos on kuitenkin aina sama: lopujen lopuksi *ulkoinen sähkökenttä ei pääse metallin tai minkään muunkaan johteen sisään*. Nimittäin niin kauan kuin metallin sisällä on sähkökenttä, sen elektroneihin kohdistuu voima, joka pitää elektronit liikkeessä. Kun elektronit lopulta löytävät tasapainon, metallin sisään ei voi jäädä sähkökenttää. Käytännössä tällainen tasapaino löytyy hyvin nopeasti.

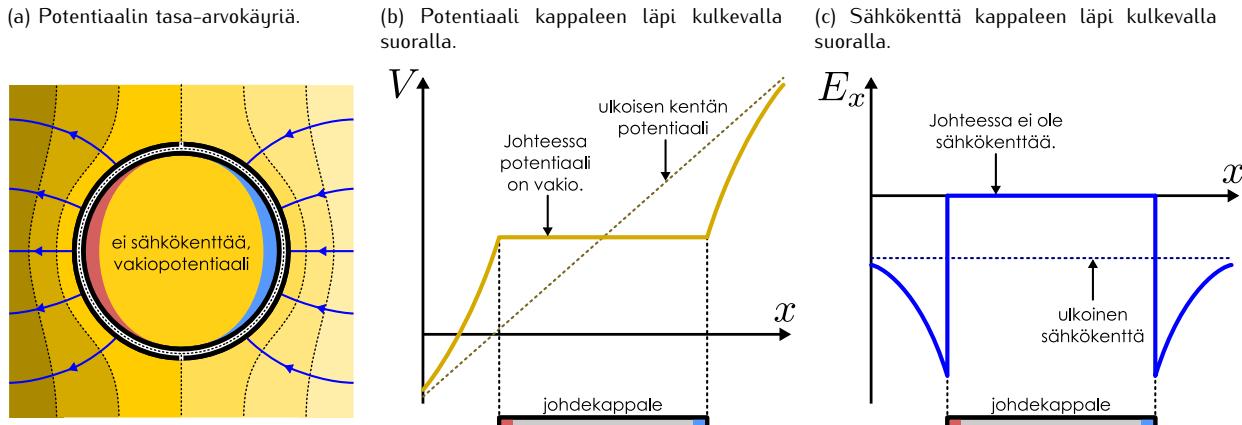
Polarisoituneen kuulan varautuneet sivut tuottavat tietenkin sähkökentän myös kuulan ulkopuolelle kuten kuvaan 10.41 (b) on piirretty. Täälläkin kenttäviivat lähtevät positiivisista varauksista ja päättyvät negatiivisiin varauksiin, mutta nyt kuulan ulkopuolelta kiertäen. Metallin ulkopuolella polarisaation tuottama kenttä ei kuitenkaan kumoa ulkoista kenttää vaan muuttaa sitä vain hiukan. Itse asiassa kuvasta nähdään, että kokonaissähkökenttää kuvaavat kenttäviivat taipuvat kohti metallin pintaa. Nämä käy kaikissa johteissa, ja selitys on sama kuin sillä, miksei johteen sisällä voi olla sähkökenttää. Jos johtavan kappaleen pinnalla olisi nimittäin pinnan suuntainen sähkökenttä, tämä kenttä kohdistaisi pinnan varauksenkuljettejien voiman, ja nämä lähisivät liikkeelle. Tasapainossa varauksenkuljettajat ovat kuitenkin myös pinnalla paikoillaan, joten *johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista sähkökenttää*.



10.43 Miksi johteen pinnalla sen ulkopuolella voi olla pinta vasten kohtisuora sähkökenttä? Toisin sanoen, miksi yllä esitetty päättely, jonka mukaan johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista kenttää, ei päde pinta vasten kohtisuoralle kentälle?

Edellä tarkasteltua sähkökenttää vastaava potentiaali on piirretty kuvan 10.42 (a) tasapotentiaalikäyrin. Sähkökenttä osoittaa aina pieneneväntä potentiaalin suuntaan, joten ulkoisen kentän potentiaali on kuvan vasemmassa reunassa pieni ja oikeassa reunassa suuri. Kun metalli on polarisoitunut, sähkökenttä sen sisällä on nolla. Toisaalta sähkökenttä kertoo potentiaalin muuttumisen suunnan, joten jos kenttää ei ole, potentiaalikäyrä ei muuta mihinkään suuntaan. *Johteessa potentiaali on siis vakio*. Potentiaalin ei kuitenkaan tarvitse olla nolla. Potentiaalin nollakohtahan on mielivaltainen, ja tässä tilanteessa nollakohdan voi valita muuallekin. Potentiaalin arvolla nolla ei ole mitään erityistä fysikaalista merkitystä, eikä se kerro sähkökentstä

Kuva 10.42: Potentiaali ja sähkökenttä polarisoituneen joteen sisällä ja sen ympäristössä.



mitään. Erityisesti se, että potentiaali on nolla, ei tarkoita sähkökentän olevan nolla. Myöskään päinvastainen ei ole totta: nollakenttä ei tarkoita, että potentiaalin pitäisi olla nolla.

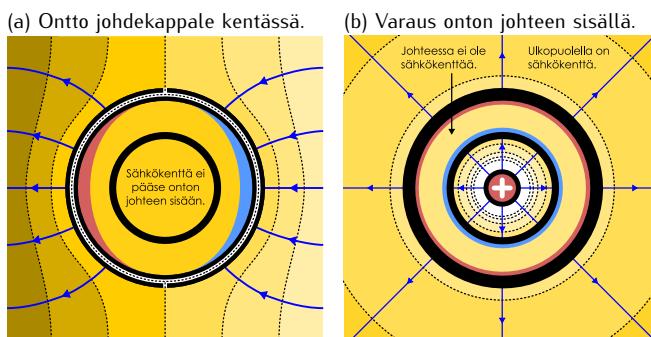
Kuvaan 10.42 (b) on piirretty potentiaalin profili kuulan läpi kulkevalla x -akselillä ja kuvaan 10.42 (c) sähkökentän komponentti tämän akselin suunnassa. Kuviin on piirretty katkoviivoin myös ulkoinen potentiaali ja sähkökenttä, ja nämä kertovat millainen kenttä olisi, jos metallikuula poistettaisiin. Kaukana kuulasta ulkoinen potentiaali ja todellinen potentiaali eivät poikkea paljonkaan toisistaan, koska polarisoituneen kuulan sähkökenttä heikkenee nopeasti kuulasta loitottaessa. Lähellä kuulaa potentiaali ja sähkökenttä kuitenkin poikkeavat ulkoisesta kentästä selvästi. Potentiaali on joteen sisällä vakio, joten sen kuvaaja on vaakasuora. Koska sähkökenttä on potentiaalin derivaatta, se voidaan määritellä graafisesti potentiaalin kuvaajasta tangentin kulmakertoimena. Vaakasuoralle kuvaajalle tämä on nolla, joten sähkökenttä on nolla joteen sisällä. Kuulan ulkopuolella lähellä johteen pintaa potentiaalin kuvaaja nousee jyrkästi, jolloin kuvaajan tangentin kulmakerroin on suuri ja sähkökenttä on siis ulkoista kenttää voimakkampi.

Potentiaalin kuvaaja muistuttaa vasemmalta oikealle kohoavaa mäkeä, ja potentiaalin sekä sähkökentän käytös voikin olla jälleen helpompi ymmärtää vertaamalla potentiaalia mäen korkeuteen ja sähkökenttää mäen jyrkkyyteen. Mäen korkeutta voidaan mitata vaikkapa merenpinnan suhteeseen, jolloin meren pinnalla korkeus on nolla. Jos ajattelemme potentiaalin kuvaajan esittävän mäkeä, merenpinta olisi siis x -akselilla. Selvästi käään rinteentä jyrkkyys meren pinnalla eli kuvaajan tangentin kulmakerroin ei kuitenkaan ole nolla. Potentiaalin jyrkkyyttä kuvaava sähkökenttä, joten myöskään sähkökentän ei tarvise olla nolla, vaikka potentiaali olisikin nolla. Sen sijaan rinteentä jyrkkyys on nolla, kun mäessä on tasanne, sillä tasanteella korkeus on vakio. Samoin sähkökenttä on nolla, kun potentiaalin kuvaajassa on "tasanne" eli kun potentiaali on vakio.



10.44 Mitataan korkeutta merenpinnan suhteeseen. Missä tilanteessa rinteentä jyrkkyys ja korkeus ovat yhtä aikaa nollia? Sitten meren pinta nousee. Miten korkeus ja rinteentä jyrkkyys muuttuvat? Millaista sähkökenttää ja potentiaalia nämä tilanteet vastaisivat?

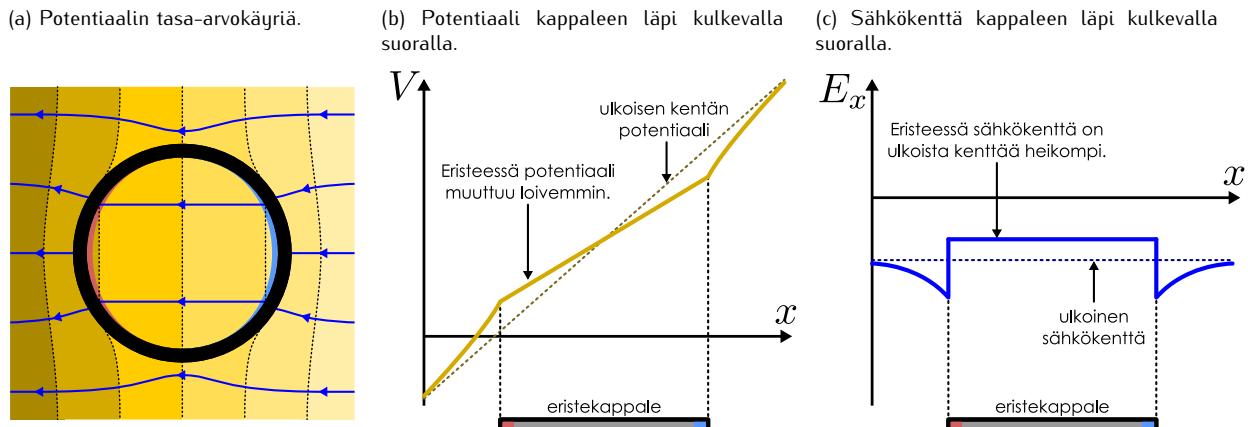
Kuva 10.43: Faradayn häkki.



Siispä kun johdekappale on ulkoisessa sähkökenttässä, johde polarisoituu aina niin, että sähkökenttä johteen sisällä hävitää ja potentiaali on johteessa kaikkialla vakio. Tämä tulos ei riipu mitenkään johteen muodosta, joten se pätee kaikenlaisille yhtenäisille johdekappaleille. Erittäin tulos on voimassa myös *ontoille* kappaleille, ja tällä onkin itse asiassa tärkeä käytännön sovellus. Kuvaan 10.43 (a) on piirretty esimerkkinä ontto metallinen pallokuori ulkoisessa sähkökenttässä. Pallo polarisoituu sähkökenttässä, ja koska se on johde, varauksenkuljetajien täytyy asettua siinä niin, että metallissa ei ole sähkökenttää. Tällöin myös potentiaalin täytyy olla pallokuorella vakio. Jos

nyt pallon sisällä ei ole varauksia, ei ole mitään syytä, miksi potentiaali muuttuisi vakiotentiaalissa olevan pallokuoren sisällä. Siispä **potentiaali on vakio myös pallokuoren sisällä**. Toisaalta potentiaalin ollessa vakio sähkökenttä on nolla, joten sähkökenttä on kuoren sisällä nolla. **Metallinen pallokuori siis estää ulkoisen**

Kuva 10.44: Potentiaali ja sähkökenttä polarisoituneen eristeen sisällä ja sen ympäristössä.



sähkökentän pääsyn sisälle. Tätä ilmiötä kutsutaan *Faradayn häkiksi* (Michael Faraday mukaan), ja sen avulla voidaan suojauduttaa ulkoisilta sähkökentiltä.

Faradayn häkkin sisällä voi toki olla sähkökenttiä, mutta näiden lähteiden täytyy olla häkin sisällä kuten kuussa 10.43 (b). Tässäkin tapauksessa pallokuoren täytyy olla vakiopotentiaalissa. Jos kuitenkin sähkökentän tuottava varaus on pallokuoren sisällä, polarisoituminen tapahtuu kuoren sisä- ja ulkopintojen välillä. Esimerkiksi kuussa pallon sisällä on positiivinen varaus, jolloin tämän varauksen sähkökenttä vetää kuoren sisäpinnalle negatiivisen varauksen ja ulkopinnalle jää vastavasti positiivinen varaus. Pallon sisäpinnan varaus tuottaa sähkökentän, joka kumoaa pallon sisällä olevan varauksen kentän täydellisesti johteen sisällä. Pallon ulkopinnan positiivinen varaus kuitenkin luo pallon ulkopuolelle samanlaisen kentän kuin mitä pallon sisällä oleva pisteverauskin tuottaa. Toisin sanoen pallon sisällä olevan varauksen synnyttämä sähkökenttä pääsee Faradayn häkistä ulos, vaikka ulkoinen kenttä ei pääsekaän häkkiin sisälle.

10.45 Ajattele kuavaan 10.43 (b) Gaussian pinta, jonka sisään jää pallon sisäpinta mutta ei ulkopintaan.



- Mikä on sähkövuo tämän pinnan läpi?
- Mikä on pinnan sisältämä kokonaisvaraus?
- Mitä tämän perusteella voidaan päätellä pallon sisällä olevan varauksen ja pallon sisä- ja ulkopinnoille kerääntyneiden varausten suuruksista?

Myös eristeet polarisoituvat ulkoisessa sähkökentässä, mutta koska niissä ei ole vapaasti liikkuvia varauksenkuljettajia, polarisaatio jää heikommaksi kuin johteissa. Eristeen polarisoitumisen tuottama sähkökenttä ei siis ole riittävä voimakas kumoamaan ulkoista sähkökenttää eristen sisältä, ja näin ollen ulkoinen sähkökenttä pääsee tunkeutumaan eristeiden sisään. Kokonaiskenttä on kuitenkin eristen polarisoitumisen takia aineen sisällä ulkoista kenttää heikompi kuten kuvaan 10.44 on piirretty.

Sähkökentän voimakkuutta eristeissä kuvataan aineen *suhteellisella permittiivisyydellä*, ja tästä suuretta merkitään tavallisesti symbolilla κ tai ϵ_r . Suhteellinen permitiivisys voidaan määritellä nün, että kun eriste tuodaan ulkoiseen sähkökenttään $\bar{E}_{\text{ulkoinen}}$, eristen sisälle muodostuu sähkökenttä

$$\bar{E}_{\text{aine}} = \frac{1}{\kappa} \bar{E}_{\text{ulkoinen}}. \quad (10.152)$$

Tyhjiön suhteellinen permitiivisys on yksi, ja eristeillä suhteellinen permitiivisys on yhtä suurempi, koska niiden sisällä oleva kenttä on ulkoista kenttää heikompi. Mitä suurempi aineen suhteellinen permitiivisys on, sitä voimakkaammin aine polarisoituu ulkoisessa sähkökentässä ja sitä heikompi sähkökenttä aineen sisään pääsee.



10.46 Permittiivisyydellä kuvataan yleensä eristeitä, mutta mikä olisi johteen permitiivisys?

Varausten erottelu ja varastoiminen

Aloitimme sähköisiin ilmiöihin tutustumisen tarkastelemalla, kuinka kappaleita voidaan varata. Havaitsimme, että varausta voidaan siirtää kappaleesta toiseen esimerkiksi hieromalla kappaleita yhteen tai koskettamalla varatulla kappaleella neutraalia kappaletta. Nämä teknükät yhdistämällä voidaan kerätä hyvin suuriakin varauksia kuvan 10.45 tapaan. Kuvassa johdepallon sisäpintaa kosketaan varatulla sauvalla, jolloin varausta siirtyy sauvesta palloon. Ylimääräiset varauksenkuljettajat pyrkivät johteissa aina mahdollisimman kauas toisistaan, jolloin varaus kulkeutuu itsestään onton johdekappaleen ulkopinnalle jättäen sisäpinnan neutraaliksi. Niinpä sauva voidaan varata uudelleen, ja kun sillä kosketetaan jälleen

pallon sisäpintaa, varauksenkuljettaja siirtyy sauvesta pallon neutraaliin pintaan, vaikka pallo kokonaisuudessaan olisikin varattu. Samaan tapaan jatkaen palloon voidaan kerätä varsin suuri sähkövaraus. Samaan ideaan perustuu esimerkiksi *Van de Graaff -generaattori* (nimetty Robert Van de Graaffin mukaan), jossa varausta siirretään onttoon metallikappaleeseen liukkuvan varatun hihnan avulla.

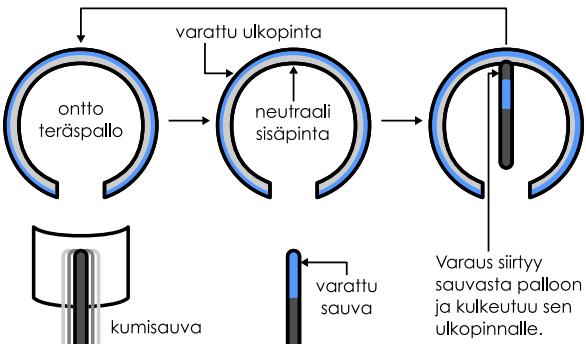
Tämä menetelmä ei kuitenkaan ole yleensä kovin käytännöllinen tapa varastoida varausta, koska suuren varausten tuottamat voimakkaat sähkökentät voivat olla vaarallisia. Lisäksi varauksen siirto tapahtuu tässä mekaanisesti, mikä on hidasta ja vaivalloista. On kuitenkin mahdollista varastoida suuria sähkövaraustia niin, että varausten synnyttämät sähkökentät saadaan samalla vangittua turvallisesti rajattuun tilaan. Lisäksi tämä varauksen varastointi on mahdollista tuottaa sähkökemiallisesti ilman mekaanista työtä ja kappaleiden siirtämistä, mikä on yleensä nopeaa ja tehokasta. Tutkitaan nyt, kuinka tämä onnistuu.

Sähkökentän kenttäviivaesityksessä kustakin kappaleesta lähtevien kenttäviivojen lukumäärä on Gaussian lain mukaisesti *aina* verrannollinen kappaleen omaan varaukseen. Muut kappaleet voivat kuitenkin vaikuttaa kenttäviivojen suuntaan ja tiheyteen. Erityisesti kun positiivisesti ja negatiivisesti varatut kappaleet ovat lähellä toisiaan, niiden sähkökentät vahvistavat toisiaan kappaleiden välissä ja heikentävät toisiaan muualla. Tämän vuoksi sähkökenttä keskittyy sitä voimakkaammin kappaleiden välille mitä lähempänä kappaleet ovat toisiaan, kuten kuvissa 10.46 (a) ja (b) nähdään. Tämä pätee kaikenmuotoisille kappaleille, mutta ilmiö on erityisen voimakas levyillä, sillä kaksi levyä voidaan asettaa niin, että niiden pinnat ovat lähellä toisiaan *kaikkialla*, jolloin niiden luoma sähkökenttä jää suurimmaksi osaksi levyjen välille ja vain pieni osa kentästä pääsee karkaamaan muualle (kuva 10.46 (c)). Itse asiassa levyjen sähkökenttä onkin keskittynyt levyjen välille sitä täydellisemmin, mitä leveämpää levyt ovat ja mitä lähempänä ne ovat toisiaan. Suurille levyille voikin tavallisesti käyttää yksinkertaistettua mallia, jossa levyjen sähkökenttä on keskittynyt *kokonaan* levyjen välille.

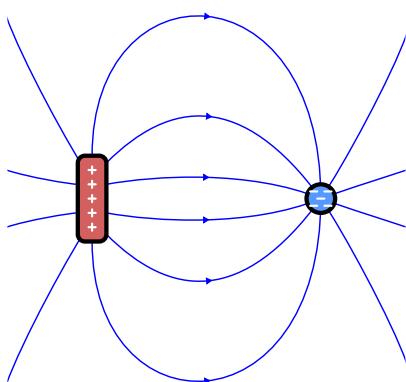
Suuria, lähellä toisiaan olevia levyjä voidaan varsin tarkasti kuvata äärettömän varatun levyn mallilla, ja

Kuva 10.46: Positiivisesti ja negatiivisesti varattujen kappaleiden välillä on sähkökenttä. Kappaleiden lähestyessä toisiaan kenttä voimistuu niiden välissä ja heikkenee muualla. Varsinkin yhdensuuntaisten varattujen levyjen kenttä on keskittynyt lähes pelkästään levyjen välille.

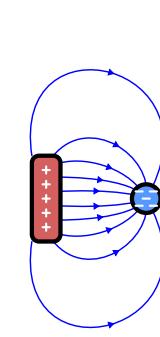
Kuva 10.45: Staattisen varauksen varastoiminen.



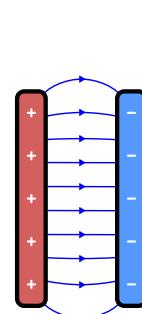
(a) Kappaleet kaukana toisistaan.



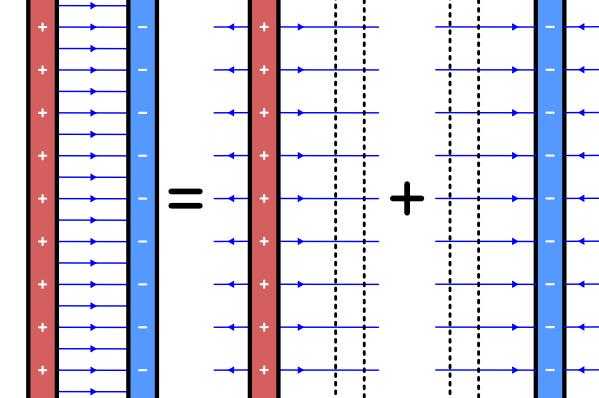
(b) Kappaleet lähekkäin.



(c) Kaksi levyä lähekkäin.



(d) Kaksi hyvin leveää levyä lähekkäin.



tällaisten levijen luoman sähkökentän ominaisuudet päättelimme jo aikaisemmin Gaussin lain avulla. Yksi varattu levy luo sähkökentän kummallekin puolelleen. Positiivisesti varatun levyn kenttä osoittaa kaikkialla levystä pois päin ja sen voimakkuus on vakio,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (10.153)$$

Negatiivisesti varatun levyn kenttä on muuten samalainen, paitsi että se osoittaa kaikkialla kohti levyä. Kun kaksi tällaista levyä on vierekkäin, niiden kentät lasketaan yhteen (kuva 10.46 (d)). Levijen välissä kummankin levyn erikseen luoma kenttä osoittaa positiivisesta levystä negatiiviseen, joten kentät vahvistavat toisiaan. Tässä alueessa kokonaiskentän voimakkuus on siten kaksinkertainen yksittäisen levyn luomaan kenttään verrattuna,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (10.154)$$

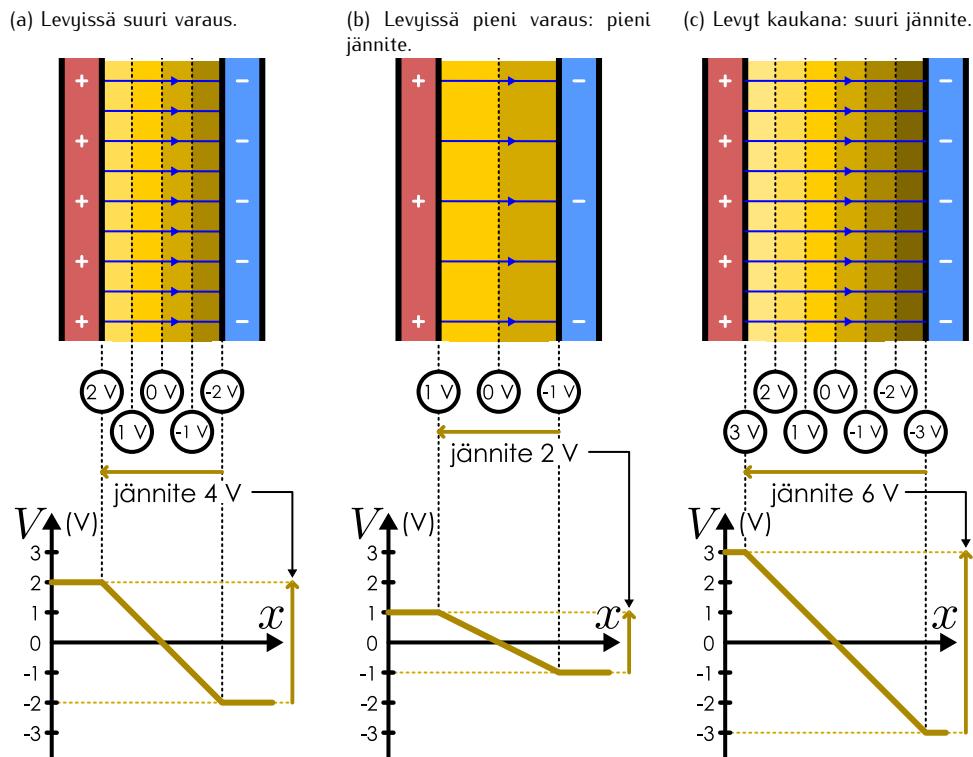
Kummassakin levissä on itseisarvoltaan yhtä suuri varaustiheys, mutta negatiivisesti varautuneessa levissä varaustiheys on luonnollisesti negatiivinen. Tässä yhtälössä σ kuvailee kummankin levyn varaustiheyden itseisarvoa, joka on siis sama kuin positiivisesti varautuneen levyn varaustiheys.

Levijen välisiin jäävän alueen ulkopuolella positiivisen ja negatiivisen levyn luomat sähkökentät osoittavat päinvastaisiin suuntiin, jolloin ne kumoavat toisensa täydellisesti. Niinpä levijen välisen alueen ulkopuolella sähkökenttä on täsmälleen nolla eli äärettömän suuren levyn luovat sähkökentän *vain* väliinsä. Tämä tulos pätee todellisille levylle sitä tarkemmin, mitä suurempia levyt ovat ja mitä lähempänä ne ovat toisiaan.

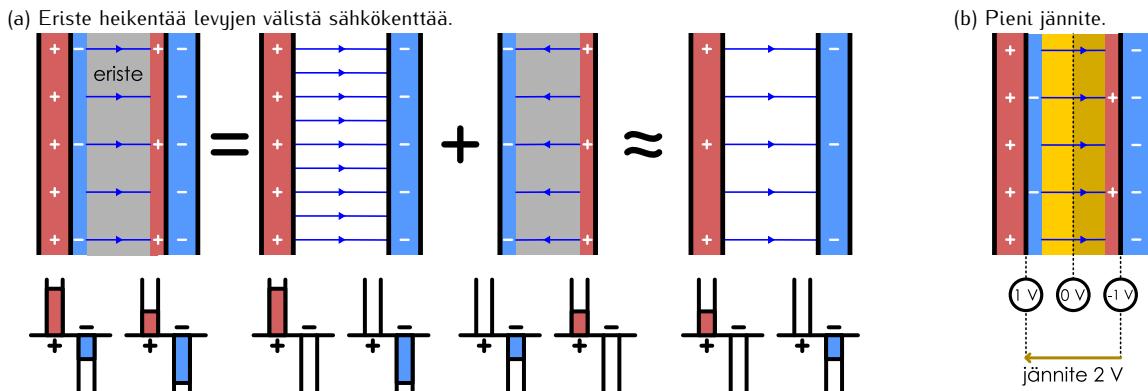
Tutkitaan sitten, miten levijen varaus ja niiden välinen etäisyys vaikuttavat levijen väliseen potentiaaliieroona eli jännitteeseen. Tarkastellaan ensin kuva 10.47 (a). Levijen varaus on esitetty kuvassa plus- ja miinus-symbolein, sähkökenttä kenttäviivoin, ja potentiaali sekä värein että tasapotentiaalikäyrin. Sähkökenttä osoittaa positiivisesta varauksesta negatiiviseen, ja toisaalta sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienennemisen suuntaan, joten *potentiaalin täytyy laskea levijen välillä positiiviselta levyltä negatiiviselle siirryttääessä*. Kuvan esimerkissä potentiaalin nollakohta on valittu levijen välisiin ja levijen potentiaalit ovat 2 V sekä -2 V, jolloin levijen välinen jännite on 4 V.

Kuvassa 10.47 (b) on muuten samalaiset levyt, mutta nyt levijen varaustiheys on vain puolet kuvan (a) verrattuna. Gaussin lain mukaisesti levijistä lähtevien kenttäviivojen määrä on suoraan verrannollinen levijen varaukseen (eli kuvassa plus- ja miinusmerkkien määrään), joten myös kenttäviivojen tiheys on kuvassa (b) vain puolet kuvan (a) vastaavasta. Toisaalta kenttäviivojen tiheys kuvaa sähkökentän voimakkuutta, joten kuvassa

Kuva 10.47: Potentiaali ja sähkökenttä kahden varatun levyn välissä. Mitä enemmän levijissä on varusta, sitä enemmän kenttäviivoja niistä lähee. Toisaalta mitä tiheämässä kenttävivat ovat, sitä voimakkaampi sähkökenttä on ja sitä jyrkemmin potentiaali muuttuu. Levijen välinen jännite on siten verrannollinen levijen varaustiheyteen ja levijen väliseen etäisyyteen toisistaan.



Kuva 10.48: Kahden varatun levyn välin asetettu eriste polarisoituu. Tämä heikentää levijen välistä sähkökenttää ja pienentää levijen välistä jännitettä.



(b) sähkökentän voimakkuus on puolet siitä mitä kuvassa (a). Sähkökenttä kuvailee potentiaalin muutoksen jyrkkyyttä, joten kuvassa (b) potentiaali muuttuu samalla matkalla vain puolet siitä, mitä kuvassa (a), ja levijen välinen jännite on siis 2 V eli puolikas kuvaan (a) verrattuna. *Toisin sanoen levijen välisen jännite on suoraan verrannollinen niiden varaustiheyteen.*

Kuvassa 10.47 (c) levijen varaus on puolestaan sama kuin kuvassa (a), mutta levijät ovat nyt kauempana toisistaan. Levijen välinen sähkökenttä on kuvissa (a) ja (c) sama, joten myös potentiaali muuttuu niiden välillä yhtä jyrkästi. Pidemmällä matkalla potentiaali ehtii kuitenkin muuttua enemmän, joten levijen välinen jännite on kuvassa (c) suurempi kuin kuvassa (a).

Voimme koota edelliset tulokset myös matemaattiseksi lausekkeeksi. Valitaan x -akseli kohtisuoraan levijä vastaan, jolloin sähkökenttä on siis x -suuntainen. Sähkökenttä kuvailee potentiaalin jyrkkyyttä, joten potentiaalin muutos matkalla Δx on

$$\Delta V = -E_x \Delta x. \quad (10.155)$$

Tässä miinusmerkki johtuu siitä, että sähkökentän osoittaaessa positiiviseen x -suuntaan potentiaali laskee tähän suuntaan kuljettaessa. Emme nyt kuitenkaan halua mitata potentiaalin muutosta x -akselin suunnassa vaan negatiivisesti varautuneelta levyltä positiiviselle levylle, joten voimme kirjoittaa potentiaalin muutoksen sähkökentän voimakkuuden $E = |E_x|$ sekä levijen välisen etäisyyden $d = |\Delta x|$ avulla muodossa

$$\Delta V = Ed. \quad (10.156)$$

Sähkökentän voimakkuus on yhtälön (10.154) mukaisesti suoraan verrannollinen levijen varaustiheyteen, joten

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (10.157)$$

Jännite on siis suoraan verrannollinen levijen varaustiheyteen ja niiden väliseen etäisyyteen aivan kuten kuvasarjassa 10.47 nähtiin. Varaustiheyden voi ilmaista myös levyn kokonaisvaraukseen ja sen pinta-alan suhteena, $\sigma = Q/A$, joten jännitteen voi kirjoittaa myös näiden avulla muodossa

$$\Delta V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d. \quad (10.158)$$

Koska σ oli positiivisen levyn varaustiheys, myös Q on siis positiivisen levyn varaus.

Levijen väliseen jännitteeseen voi vaikuttaa myös lisäämällä levijen välistä eristeen kuten kuvassa 10.48. Eriste polarisoituu levijen luomassa sähkökenttää, ja tällöin eristeen sisälle muodostuva kenttä on voimakkuudeltaan heikompi kuin levijen yksinään muodostama kenttä olisi. Heikommassa kenttässä potentiaalikin muuttuu loivemmin, joten *eriste pienentää levijen välistä potentiaalieroa*. Yhtälön (10.152) mukaisesti eristeeseen muodostuva sähkökenttä on

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}, \quad (10.159)$$

ja näin ollen levijen välinen potentiaaliero on

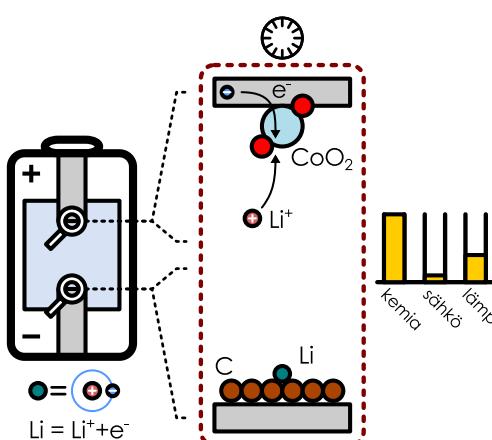
$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} d = \frac{Q}{A\kappa\epsilon_0} d. \quad (10.160)$$



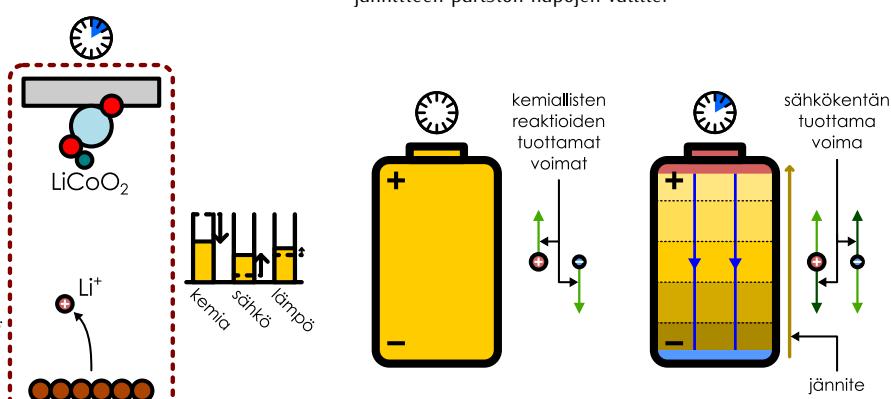
10.47 Haluamme varastoida kahteen levyn mahdollisimman paljon varausta mutta pitää levijen välisen jännitteen ja sähkökentän mahdollisimman pieninä. Jos voimme muuttaa levijen kokoa, niiden välistä etäisyyttä sekä levijen välissä olevan aineen permittivisyyttä, miten nämä suuret kannattaa valita?

Kuva 10.49: Pariston toimintaperiaate. Positiivisella elektrodilla kemialliset reaktiot yhdistävät elektrodiin elektroneja liuoksen positiivisiin ionieihin. Negatiivisella elektrodilla reaktiot hajottavat neutraaleja molekyylejä vapaiksi elektroneiksi ja ioneiksi. Samalla kemiallista energiaa muuttuu elektronien ja ionien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Kokonaisuudessaan paristo siis siirtää elektroneja positiiviselta navalta negatiiviselle. Tämä ylläpitää jänitettä pariston napojen välillä.

(a) Litiumioniakun perusreaktiot.



(b) Varauksen siirtyminen synnyttää potentiaalieron eli jänitteen pariston napojen välille.

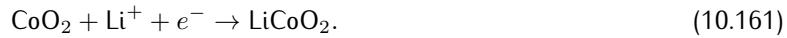


Jänitelähte

Edellä kuvatut kahden varaten levyn systeemit voitaisiin valmistaa keräämällä varausta kahteen levyn ja asettamalla levyt vastakkain, jolloin varausten luoma sähkökenttä saataisiin vangittua levyjen väliin. Varausta ei kuitenkaan gleensä kerätä mekanisesti kuten kuvassa 10.45 vaan on paljon tehokkaampaa ohjata varauksia niin, että ne siirtyvät levyille itse. Tämä on mahdollista **jäniteläheen** kuten pariston tai akun avulla. Paristoja ja akkuja on monenlaisia, mutta niiden kaikkien toiminta perustuu *sähköpariksi* kutsuttuun ilmiöön. Nimisenä mukaisesti paristo on useiden sähköparien yhdistelmä.

Sähköparissa kaksi eri johdetta eli *elektrodia* yhdistetään ioneja sisältävällä liuoksella eli *elektrolyytille*. Elektrodeja kutsutaan myös sähköparin *navoiksi*. Elektrodien ja elektrolyytin kohdatessa niiden rajapinnoilla tapahtuu kemiallisia reaktioita, joissa positiiviset ionit ja elektronit voivat yhdistyä neutraaleiksi molekyyleiksi tai pääinvastoin molekyylit voivat hajota ioneiksi ja elektroneiksi. Periaatteessa näitä elektroneja sitovia ja vapauttavia reaktioita voi tapahtua kummallakin elektrodilla, mutta koska elektrodit valmistetaan *eri materiaaleista*, varausenkuljettajia sitovat reaktiot tapahtuvat *helpommin* yhdellä elektrodilla ja niitä vapauttavat reaktiot toisella. Lopputulos on se, että sähköparissa alkaa tapahtua itsestään kemiallisia reaktioita, joissa elektrodimateriaalit muuttuvat uusiksi kemiallisiksi yhdisteiksi vapauttaen samalla kemiallista energiasta (eli atomien välisten kemiallisten sidosten potentiaalienergiaa). Tämä vapautuva energia muuttuu vapautuvien varausenkuljettajien liike- ja potentiaalienergiaksi.

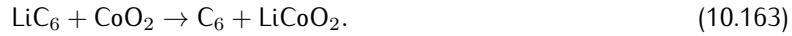
Kuvassa 10.49 (a) on piirretty tästä yksinkertaistettu kuva, jossa esimerkkinä on litiumioniakussa tapahtuva reaktio. Kuvassa ylemmäksi piirretyllä navalla elektrolyytissä olevat lithium-ionit yhdistyvät elektrodilla olevien elektronien kanssa, jolloin lithium-atomeja tarttuu elektrodiin reaktiossa



Samalla toisella elektrodilla lithium-atomit hajoaa ioniksi ja vapaaksi elektroniksi. Elektroni siirtyy elektrodille ja ioni liukenee elektrolyyttiin reaktiossa



Kokonaisuudessaan elektrodeilla tapahtuu reaktio



Kuvassa ylemmäksi piirretyllä elektrodilla lithiumionit sieppaavat elektroneja, jolloin elektrodille jää positiivisen varauksen ylimäärä. Kuvan alemmalla elektrodilla lithiumatomit puolestaan luovuttavat elektronin ja jäljelle jääneet positiiviset ionit siirtyvät elektrolyytiliuokseen. Tälle elektrodiille siis kertyy negatiivista varausta. Kaikkiaan nämä kemialliset reaktiot siis siirtävät elektroneja ylemmältä, positiiviselta elektrodilta alemalle, negatiiviselle elektrodille ja lithiumioneja negatiiviselta elektrodilta positiiviselle.



10.48 Muuttuuko elektrolyytin koostumus paristossa tapahtuvissa reaktioissa?

Positiiviselle elektrodille kerääntyvä positiivinen varaus ja negatiiviselle elektrodille kertyvä negatiivinen varaus tuottavat pariston sisään sähkökentän, joka osoittaa positiivisesta varauksesta negatiiviseen. Kemialliset reaktiot siis pyrkivät siirtämään varausta negatiiviselta navalta positiiviselle, mutta sähkökenttä vetää varausta pääinvastaiseen suuntaan positiiviselta navalta negatiiviselle (kuva 10.49 (b)). Sähkökenttä siis vastustaa varauksen siirtymistä. Saman asian voi ilmaista myös potentiaalin kautta: sähkökenttä osoittaa potentiaalin laskun suuntaan, joten positiivisen elektrodon täytyy olla korkeammassa potentiaalissa kuin negatiivisen elektrodon. Elektrodien välille siis syntyy potentiaaliero eli jännite ΔV , ja yhden elektronin siirtämiseen positiiviselta elektrodilta negatiiviselle liittyy sähköisen potentiaalienergian muutos

$$\Delta U = e\Delta V. \quad (10.164)$$

Varausten siirtäminen siis vaatii energiaa, ja tämä energia on peräisin navoilla tapahtuneissa reaktioissa vapautuneesta kemiallisesta energiasta.

Mitä enemmän varausta parin navolle on kertynyt, sitä voimakkaampi sähkökenttä ja suurempi jännite paristossa on. Niinpä varauksen siirtäminen elektrodilta toiselle tulee sitä vaikeammaksi ja vaatii sitä enemmän energiata, mitä enemmän varausta on jo siirtynyt. Jossakin vaiheessa varauksen siirtäminen sähköparin läpi vaatii enemmän energiata kuin mitä kemiallisista reaktioista on saatavilla, ja tällöin kemialliset reaktiot sekä varauksen siirtyminen loppuu. Tämä tapahtuu viimeistään silloin, kun varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutos vastaa vapautuvan kemiallisen energian määräää,

$$\Delta U = e\Delta V = -\Delta E_{\text{kemia}}. \quad (10.165)$$

Vapautuvan kemiallisen energian määärä riippuu luonnollisesti elektrodeilla tapahtuvista reaktioista, ja nämä puolestaan riippuvat sähköparissa käytetyistä materiaaleista.

Varauksenkuljettajien vastaanottaman energian suhetta siirtymään varaukseen kutsutaan **lähdejännitteeksi** ja sitä merkitään

$$\mathcal{E} = \frac{-\Delta E_{\text{kemia}}}{e}. \quad (10.166)$$

Kun kaikki kemiallinen energia muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi, lähdejännitteeksi saadaan

$$\mathcal{E} = \frac{e\Delta V}{e} = \Delta V. \quad (10.167)$$

Tällöin lähdejännite on siis yhtä suuri kuin pariston napojen potentiaaliero. Tämä onkin paristojen perusoimaisuus: *paristoissa tapahtuvat kemialliset reaktiot pyrkivät siirtämään varausta pariston napojen välillä niin, että napojen välinen jännite pysyy vakiona, samana kuin pariston lähdejännite*.

Pariston napojen välinen jännite ei kuitenkaan ole *välttämättä* sama kuin sen lähdejännite, sillä dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat muuttaa osan vapautuvasta kemiallisesta energiasta myös lämpöenergiksi. Energiaa ei voi luoda, joten kemiallisen energian muutoksen täytyy kattaa myös tällaiset energian muutokset, jolloin vapautuvan kemiallisen energian määärän täytyy olla suurempi kuin sähköisen potentiaalienergian muutos,

$$-\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta U + \Delta E_{\text{lämpö}} > \Delta U = e\Delta V. \quad (10.168)$$

Tällöin elektrodien välinen potentiaaliero jää lähdejännitettä pienemmäksi,

$$\mathcal{E} = \frac{-\Delta E_{\text{kemia}}}{e} > \Delta V. \quad (10.169)$$

Usein on kuitenkin hyödyllistä ajatella paristojen olevan täysin ideaalisia, jolloin dissipatiiviset vuorovaikutukset voidaan jäätää huomioimatta ja lähdejännite on sama asia kuin pariston napojen välinen jännite.

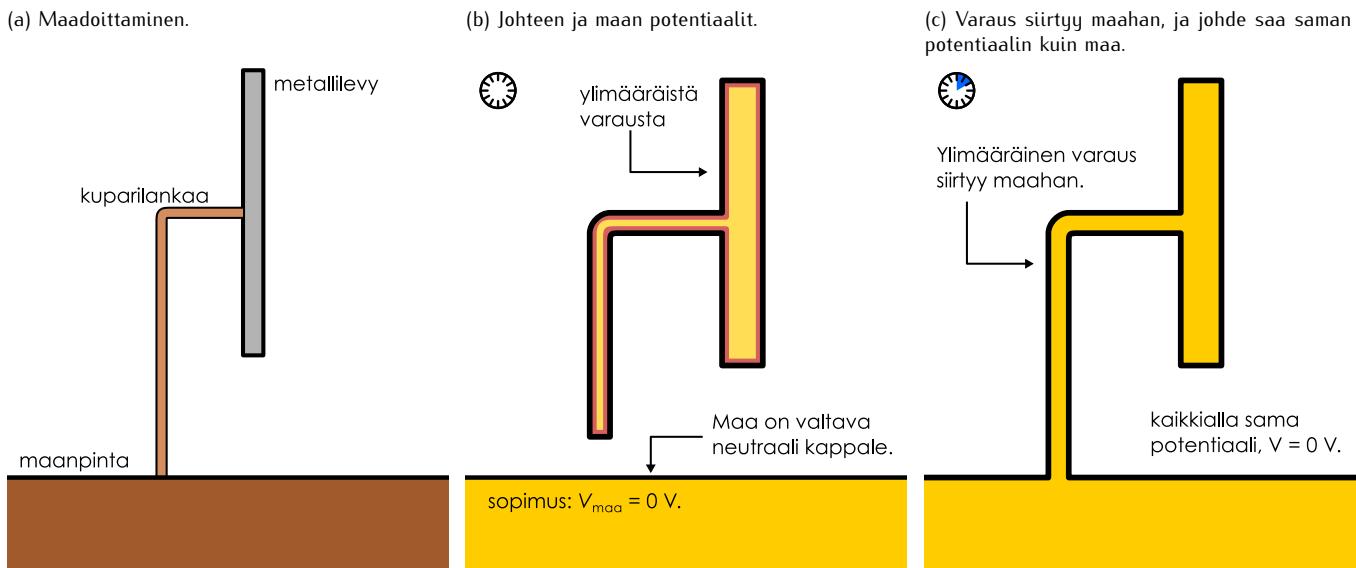


10.49 Ideaalisen pariston lähdejännite on 9 V. (a) Mikä on pariston positiivisen navan potentiaali, jos sen negatiivisen navan potentiaali on 2 V? (b) Mikä on negatiivisen navan potentiaali, jos positiivisen navan potentiaali on 6 V? (c) Mikä on positiivisen navan potentiaali, jos negatiivinen napa on kytketty toisen 9 V pariston positiviseen napaan?

Paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot siis siirtävät varausta, ja niinpä paristojen ja muita vastaavia jännitelähteitä voidaan käyttää myös sähkövarauksen varastoiniseksi toisiin johdinkappaleisiin. Tutkitaan, miten tämä tapahtuu käytännössä.

Kuten aikaisemmin huomasimme, varausta voidaan varastoida kahdelle lähekkäin asetetulle levylle. Oteaan siis kaksi metallilevyä, ja kiinnitetään levyihin johtavat kuparilangat, joita pitkin varausta voidaan siirtää. Aivan ensimmäiseksi levyt on sytytä **maadoittaa** niissä mahdollisesti jo ennestään olevan varauksen polstamiseksi. Maadoittaminen tarkoittaa metallilevyn kiinnitetyn johtimen yhdistämistä maanpintaan, mikä on esitetty kuvassa 10.50. Maa on levyihin verrattuna käytännössä äärettömän suuri neutraali kappale, ja jos

Kuva 10.50: Johteen maadoittaminen. Maa on valtava neutraali kappale, joka voi helposti vastaanottaa tai luovuttaa paljon varauksen-kuljettajia. Jos varattu johdekappale koskettaa maata, kaikki johteessa oleva ylimääräinen varaus siirryttää maahan ja kappale neutraloituu. Tällöin johde saa myös saman potentiaalin kuin maa, ja tavallinen sopimus on valita potentiaalin nollakohta maahan, $V_{\text{maa}} = 0 \text{ V}$.



metallilevyissä oli alunperin ylimääräistä varausta, tämä varaus pääsee nyt siirtymään maahan, jolloin levynkin neutraloituvat. Samalla levyn ja kuperilangat saavat saman potentiaalin kuin maapinta, sillä johteissa varausten täytyy asettua niin, että potentiaali on vakio. Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen, mutta on tavallista valita nollakohdaksi maa, jolloin *maadoitettujen levyjen potentiaali on 0 V*.

Asetetaan sitten levyn lähekkäin ja yhdistetään niihin kiinnitetty kuperilangat pariston vastakkaisiin napoihin (kuva 10.51 (a)). Koska levyn maadoitettiin, kummankin potentiaali on ennen paristoon kiinnittämistä nolla. Levijen välillä ei siis ole potentiaaliteroa eikä myöskään sähkökenttää (kuva 10.51 (b)). Kun levyn yhdistetään pariston positiiviseen napaan, tälle navalle kertynyt positiivinen varaus pääsee nyt siirtymään johtavaan kuperilankaan. Varaukset pyrkivät levämään johteiden pinnoille mahdollisimman kauas toisistaan, joten tämä varaus levää nyt kuperilangan sekä lankaan kiinnitetyn metallilevyn pinnalle. Lisäksi koska kuparin pintaala on pieni ja levyn suuri, suurin osa varauksesta kertyy levyn pinnalle. Samaan tapaan negatiiviselle navalle kerääntynyt negatiivinen varaus levää tähän napaan kiinnitettyyn kuperilankaan ja metallilevyn. Levyjen positiivinen ja negatiivinen varaus vetävät toisiaan puoleensa ja niinpä lähes kaikki varaus kertyy toisiaan lähellä oleville levijen pinnoille. Koska levyn eivät kosketa, varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle.

Varauksen siirtäminen pariston navoilta metallilevylle luonnollisesti vähentää navolle kertyneen varauksen määriä. Samalla kuitenkin pariston sisäinen sähkökenttä heikkenee, ja paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot käynnistyvät jälleen. Nämä reaktiot käynnistyvät aina, kun pariston napojen välinen todellinen jännite ΔV putoaa pariston kemian määräämää lähdejännittettä \mathcal{E} pienemmiksi, ja pysähtyy jos todellinen jännite nousee yhtä suureksi kuin lähdejännite. *Paristo pyrkii siis aina säilyttämään napojensa välillä saman lähdejännitteen*. Tässä tilanteessa paristo siirtää jatkuvasti lisää elektroneja positiiviselta navaltaan negatiiviselle, jottei napojen välinen jännite laskisi. Positiiviselle navalle siis kertyy lisää positiivista varausta, joka kuitenkin pääasiassa siirryttää tähän napaan yhdistetylle metallilevylle. Vastaavasti negatiiviselle navalle siirryttää negatiivista varausta, joka niihin kulkeutuu napaan kiinnitettylle levylle. Käytännössä paristo pumpaa elektroneja positiiviseen napaan kiinnitetystä levyltä negatiiviseen napaan kiinnitetystä levylle.

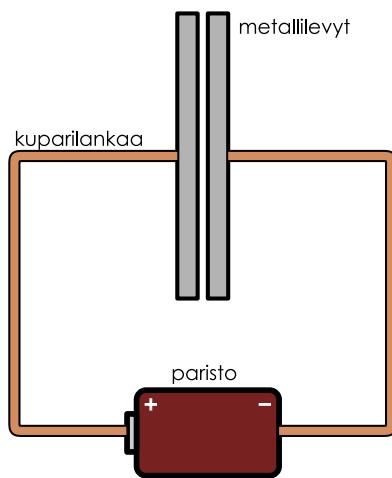
Kun levylle kertyy varausta, niiden välille syntyy likimain homogeeninen sähkökenttä, ja sähkökenttää liittyy aina potentiaalin muutos. Levyjen välille siis syntyy potentiaaliero eli jännite, ja tämä jännite kasvaa yhtälön (10.158) mukaisesti sitä suuremmaksi, mitä enemmän varausta levyllä on. Paristo jatkaa levijen varaanmista siihen asti, kunnes levyt ovat samassa potentiaalissa kuin pariston navat (kuva 10.51 (c)). Tässä tilanteessa systeemi on jälleen tasapainossa: pariston napojen välinen jännite on sama kuin pariston lähdejännite ja kaikki johdekappaleet ovat kauttaaltaan vakiopotentiaalissa. Lopputuloksena saimme eroteltua metallilevylle positiivista ja negatiivista sähkövarausta pelkän kemiallisen energian avulla ilman mekaanista työtä, ja tämän varauksen tuottama sähkökenttä on turvallisesti vangittu levijen väliltä.



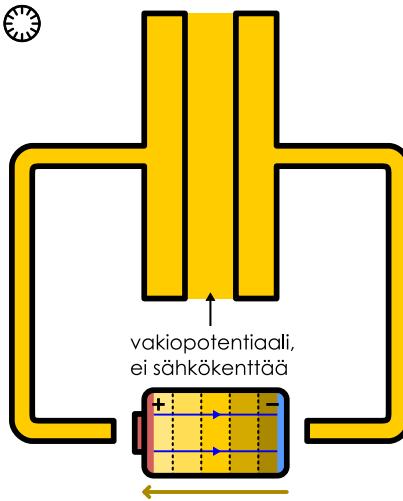
10.50 Olkoot kuvan 10.51 levijen varaukset Q ja $-Q$ ja niiden välinen jännite $\Delta V = \mathcal{E}$. Miten varaus ja jännite muuttuvat, jos (a) levijä siirretään kauemmas toisistaan tai (b) levijen väliltä asetetaan eristekappale, kun (i) kuperilangat on kiinni paristossa tai (ii) kuperilangat irrotetaan ensin paristosta?

Kuva 10.51: Levijen varauksen paristolla. Aluksi levijät ovat samassa potentiaalissa. Johteen varaus pyrkii asettumaan niin, että potentiaali on johteen sisällä vakiokenttää. Niinpä pariston vastakkaisiin napoihin kiinnitettyt levijät saavat samat potentiaalit kuin mitä pariston navoilla on. Näin levijät joutuvat eri potentiaaleihin, jolloin niiden välissä on pakko olla muuttuva potentiaali ja siis sähkökenttää.

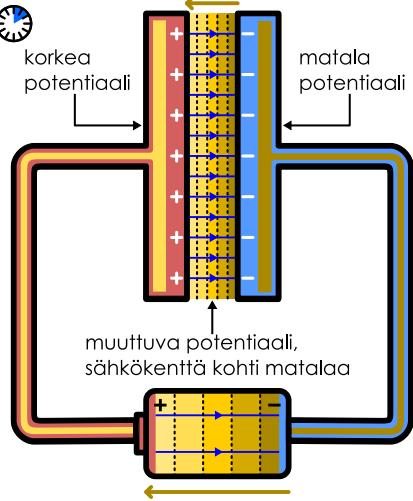
(a) Koetilanne.



(b) Aluksi levijät ovat vakiopotentiaalissa.



(c) Paristo siirtää varausta ja levijät saavat eri potentiaalit.



Kapasitanssi

Kuvassa 10.51 esiteltyn sähkövarauksen varastoiva kahden levyn systeemi on yksinkertainen esimerkki **kondensaattoriksi** kutsutusta sähköisestä komponentista. Kondensaattori on tyypillisesti kahdesta johtimesta koostuva laite, joka varastoi itseensä sähkövarauksen, kun johdinten eli päiden välillä on jännite. Tyypillisesti kondensaattori varastoi sitä enemmän varausta mitä suurempi jännite sen päiden välillä on. Kondensaattorin toimintaa kuvataankin siihen varastoidun sähkövarauksen Q ja johdinten välisen jännitteen ΔV suhteella, jota kutsutaan **kapasitanssiksi**

$$C = \frac{Q}{\Delta V}. \quad (10.170)$$

Kapasitanssin yksiköllä on erikoisnimi **faradi** (jälleen Michael Faradayn mukaan)

$$[C] = [Q]/[V] = C/V = F. \quad (10.171)$$

Suuri kapasitanssi tarkoittaa sitä, että kondensaattori pystyy varastoimaan itseensä paljon varausta pienelläkin jännitteellä. Tämä on hyvä asia, sillä kondensaattorin tehtävä on juuri sähkövarauksen varastointi. Suurten jännitteiden tuottaminen vaatii paljon energiota ja voi olla vaarallistakin, joten yleensä on sitä parempia, mitä pienemmällä jännitteellä kondensaattorit saadaan toimimaan. Kuten coulomb, myös faradi on erittäin suuri yksikkö, ja tyypillisten kondensaattoreiden kapasitansseja mitataan nano- ja mikrofaradeissa. Periaatteessa mitkä tahansa kaksi johdetta toimivat kondensaattorina, mutta elleivät kappaleet ole hyvin suuret tai hyvin lähellä toisiaan, niiden kapasitanssi on yleensä erittäin pieni.

Kondensaattoriin varastoitu sähkövaraus pystytään yleensä vapauttamaan nopeasti — paljon nopeammin kuin mitä paristot siirtävät varausta — joten kondensaattoreita käytetään varauksen lähteenä laitteissa, joissa tarvitaan paljon varausta nopeasti. Joissakin laitteissa suuria kondensaattoreita käytetään myös väliaikaisina varauksen lähteenä esimerkiksi paristojen vaihtojen aikana. Kondensaattoreita käytetään myös muiden sähkölaitteiden suojaamisessa ja varausten liukkeen säätelyssä, koska ylimääräinen varaus voidaan väliaikaisesti varastoida kondensaattoreihin.

Kahden vierekkäisen levyn muodostama rakenne on **levykondensaattori**. Kuten edellä päättelimme, levykondensaattorissa levyjen välinen jännite riippuu levyjen varauksesta, pinta-alasta ja etäisyydestä sekä levyjen välisen aineen permittivisyydestä. Yhtälön (10.160) mukaisesti levyjen välinen jännite on

$$\Delta V = \frac{Q}{A\kappa\varepsilon_0} d, \quad (10.172)$$

joten kummallekin levylle varastoituneen sähkövarauksen itseisarvoksi voidaan tästä ratkaista

$$Q = \frac{1}{d} A\kappa\varepsilon_0 \Delta V. \quad (10.173)$$

Levykondensaattoriin kapasitanssi on siis määritelmän mukaisesti

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{d} A \kappa \epsilon_0. \quad (10.174)$$

Kapasitanssi on siis suuri ja kondensaattori on hyvä, jos levyjen pinta-ala on suuri. Tämä johtuu siitä, että suurelle pinta-alalle levinnäisen varauksen *varaustiheys* on pieni, jolloin kondensaattoriin sähkökenttä on heikko ja levyjen välinen jännite on pieni. Kapasitanssia voi kasvattaa myös asettamalla levyjen väliin eristettä, jonka permittiivisyys on suuri, koska tämäkin heikentää levyjen välistä sähkökenttää. Kapasitanssi on myös sitä suurempia mitä lähempänä levyt ovat toisiaan. Tämä ei vaikuta levyjen väliseen sähkökenttään eli potentiaalin muutoksen jyrkkyteen, mutta lyhyellä matkalla potentiaali ei ehdi muuttua paljon, jolloin lähekkäisten levyjen välinen potentiaaliero on pieni.



- 10.51** (a) Jos levykondensaattori (levyjen ala $A = 0.01 \text{ m}^2$, levyjen etäisyys $d = 0.001 \text{ m}$, eristeen permittiivisyys $\kappa \approx 1.1$) kestääsi mielivaltaisen suuria jännitteitä, kuinka paljon varausta se voisi enimmillään varastoida? (b) Entä jos levyjen välillä oleva eriste hajoaa sähkökenttäässä $E = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$?

Oikeat sähkölaitteissa käytettävät kondensaattorit eivät ole yleensä levykondensaattoreita vaan niissä johteet voivat olla esimerkiksi ohuita eristeen erottamia kalvoja, jotka on kierretty rullalle. Tällaisten kondensaattoreiden kapasitanssia ei voi laskea suoraan lausekkeesta (10.174) vaan yleisesti kapasitanssi selviää määritelmän (10.170) mukaisesti kondensaattorin varauksen ja jännitteen suhteesta. Kapasitanssi riippuu kuitenkin aina samoista perusperiaatteista: kapasitanssi on sitä suurempia mitä suurempi on kondensaattorin muodostavien johteiden pinta-ala, mitä lähempänä toisiaan johteet ovat, ja mitä parempi eriste niiden välillä on.

Suurten yksittäisten kondensaattoreiden valmistaminen on vaikeaa, mutta kondensaattoreita voidaan myös yhdistää niiden kapasitanssin kasvattamiseksi. Kuvassa 10.52 (a) on esitetty tilanne, jossa kaksi kondensaattoria on yhdistetty johtimilla toisiinsa ja paristoon. Kuvassa kondensaattoreiden vasemmanpuoleiset levyt on yhdistetty johtimilla sekä toisiinsa että pariston positiiviseen napaan, joten nämä levyt ovat samassa, korkeassa potentiaalissa. Kondensaattoreiden oikeanpuoleiset levyt on yhdistetty pariston negatiiviseen napaan, joten niilläkin on keskenään sama, matala potentiaali. Potentiaaliero eli jännite on näin ollen kummassakin kondensaattorissa sama, ΔV . Tällaista tapaa yhdistää kondensaattorit toisiinsa kutsutaan *rinnankytkenäksi*.

Jos kondensaattoreiden kapasitanssit ovat C_1 ja C_2 , niiden varaukset ovat kapasitanssin määritelmän perusteella $Q_1 = C_1 \Delta V$ sekä $Q_2 = C_2 \Delta V$. Yhteensä kondensaattoreihin on varastoitunut sähkövaraus

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V, \quad (10.175)$$

joten kapasitanssin määritelmän mukaisesti kondensaattorit muodostavat yhdessä laitteen, jonka kokonaiskapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2. \quad (10.176)$$

Rinnan kytkettyjen kondensaattoreiden kapasitanssit lasketaan siis suoraan yhteen, jolloin kondensaattorit toimivat yhdessä kuin yksi suuri kondensaattori. Sama periaate toimii riippumatta kondensaattoreiden määristä, kunhan kaikki kondensaattorit kytketään rinnan. Tällä tavalla voidaan hyvin suuren kapasitanssin kondensaattorikytentöjä, joihin voidaan varastoida suuri sähkövaraus.

Kondensaattorit voi yhdistää toisellakin tavalla, kuten kuvassa 10.52 (c). Kuvassa vasemmanpuoleisen kondensaattorin yksi levy on yhdistetty pariston positiiviseen napaan ja sen toinen levy oikeanpuoleisen kondensaattorin levyn. Tämän kondensaattorin toinen levy on edelleen yhdistetty pariston negatiiviseen napaan. Tätä kutsutaan *sarjaankytkenäksi*. Tässä kytkenässä on nyt kolme toisistaan erillistä johdekappaletta: pariston positiiviseen napaan kytetty levy, pariston negatiiviseen napaan kytetty levy sekä toisiinsa kytetyt levyt, joita ei ole yhdistetty paristoon. Nämä kaikki voivat olla eri potentiaaleissa, joten kondensaattoreiden jännitteet eivät vältämättä ole yhtä suuret. Kondensaattoreiden varauksen sen sijaan täytyy olla yhtä suuri. Tämä johtuu siitä, että kun paristo siirtää varausta kytkenän uloimpiin levyihin, tämä varaus vetää puoleensa kytkenän keskelle jääneen kappaleen varauksia. Näin tämä keskimmäinen kappale polarisoituu, ja sen täytyy vieläpä polarisoitua niin, että kappaleen kokonaisvaraus on vakio, nolla. Niinpä yhdistetylle levylle kertyy toiselle positiivinen ja toiselle itseisarvoltaan yhtä suuri negatiivinen varaus. *Kaikilla* kondensaattorilevylillä on siis oltava tässä kytkenässä itseisarvoltaan yhtä suuri varaus, Q .

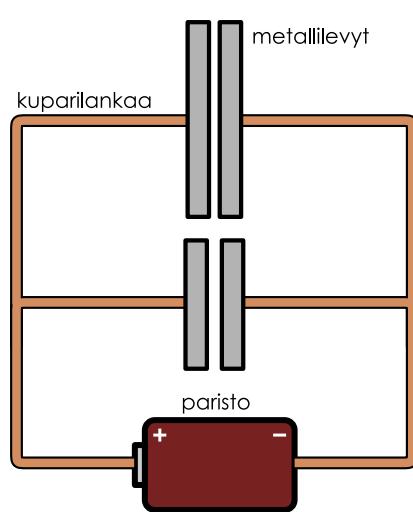
Jos siis kondensaattoreiden kapasitanssit ovat erillään C_1 ja C_2 , kondensaattoreiden jännitteiden pitää olla $\Delta V_1 = Q/C_1$ ja $\Delta V_2 = Q/C_2$. Koska keskenään yhteen kytkettyjen levyjen täytyy olla samassa potentiaalissa, potentiaaliero kytkenän päiden välillä saadaan laskemalla yhteen potentiaaliero kummankin kondensaattorin yli,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}. \quad (10.177)$$

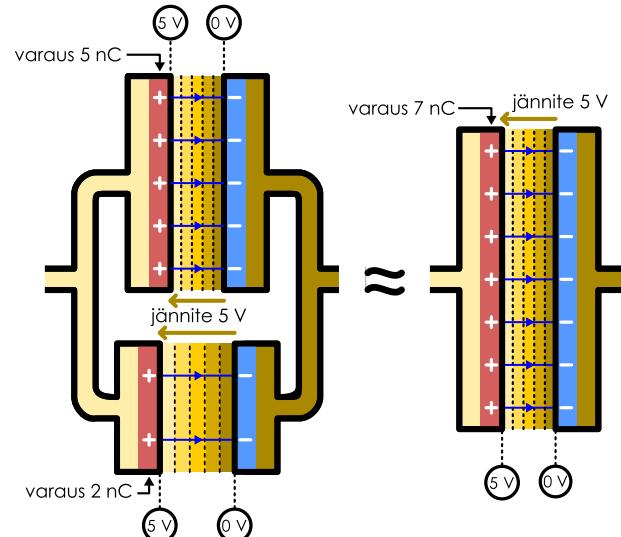
SÄHKÖVARAUS JA -KENTTÄ

Kuva 10.52: Kondensaattoreiden yhdistäminen. Vierakkain eli rinnan kytketyissä kondensaattoreissa on sama jännite, koska potentiaali on vakio toisiinsa yhdistetyissä johteissa. Peräkkäin eli sarjaan kytketyissä kondensaattoreissa on sama varaus, koska kondensaattoreiden välillä jäävän johteen kokonaisvarauksen täytyy olla nolla.

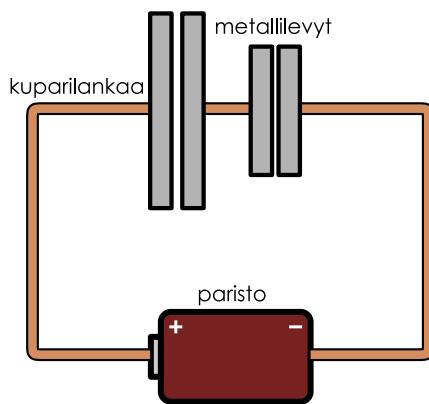
(a) Rinnankytentä.



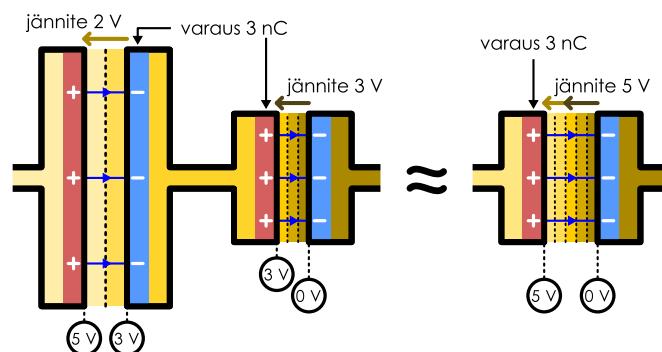
(b) Rinnankytettijen kondensaattoreiden potentiaali ja varaus.



(c) Sarjaakytentä.



(d) Sarjaakyttijen kondensaattoreiden potentiaali ja varaus.



Nämä kondensaattorit muodostavat siis yhdessä laitteen, jonka kapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (10.178)$$

Tulos sievenee yksinkertaisempaan muotoon laskemalla kapasitanssin käänneisluku,

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (10.179)$$

Toisin sanoen sarjaan kytkettyjen kondensaattoreiden kapasitanssien käänneisluvut lasketaan yhteen.

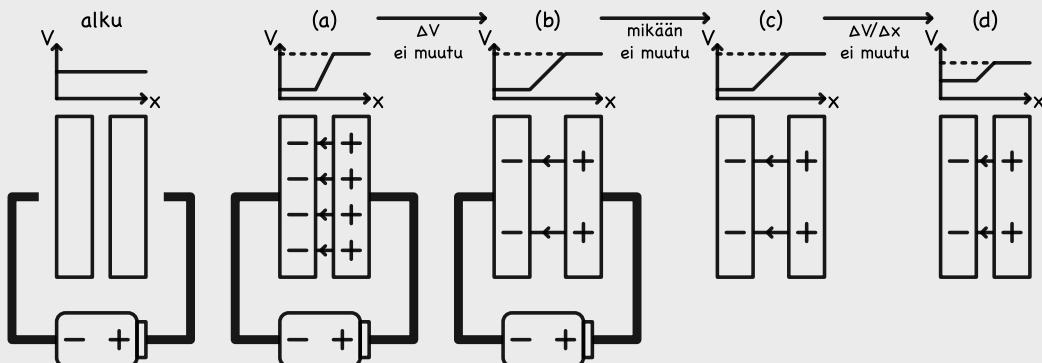


- 10.52 (a) Tarkista, että kuvan 10.52 kytkennät toteuttavat kapasitanssien yhteenlaskusäännöt.
 (b) Parantaako sarjan- tai rinnankytentä kondensaattorien kykyä varastoida varausta?

esimerkki 10.7

Kondensaattorit

Kaksi metallilevyä muodostavat levykondensaattorin. Levyjen ala on 0.010 m^2 ja niiden välinen etäisyys 0.1 mm . Laske seuraavissa tapauksissa levyjen kapasitanssi, jännite ja varaus. (a) Levyt yhdistetään 100 V jännitelähteellä. (b) Levyt siirretään etäisyydelle 0.2 mm . (c) Paristo poistetaan, jolloin jää kaksi erillistä levyä. (d) Levyt siirretään takaisin etäisyydelle 0.1 mm .



SUUNNITELMA Levykondensaattorin kapasitanssin voimme laskea yksinkertaisesti lausekkeella (10.174),

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{d} A \varepsilon_0. \quad (10.180)$$

Oletetaan, että levyjen välissä on ilmaa, jolle $\kappa \approx 1$.

Kun paristo yhdistää levyt, se pitää levyjen välisten jännitteiden vakiona, $\Delta V = \mathcal{E} = 100 \text{ V}$. Tämän se tekee siirtämällä tarpeen mukaan varausta levyltä toiselle. Kun paristo poistetaan, varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle. Tällöin kondensaattorin varauksen täytyy olla vakio.

RATKAISU (a) Kapasitansiksi saadaan noin $C = 890 \text{ pF}$. Jännitelähde pakottaa jännitteeksi $\Delta V = 100 \text{ V}$, jolloin kondensaattorin varaus on $Q = C \Delta V = 89 \text{ nC}$. Tämä tarkoittaa sitä, että yhdellä levyllä on varaus 89 nC ja toisella -89 nC . Systeemi on kokonaisuudessaan neutraali.

(b) Paristo pitää jännitteen vakiona, joten nytkin $\Delta V = 100 \text{ V}$. Kapasitanssi pienenee levyjen etääntymessä, ja uusi kapasitanssi on $C = 440 \text{ pF}$. Kondensaattorin uusi varaus on $Q = 44 \text{ nC}$. Paristo siis pitää jännitteen vakiona siirtämällä varausta positiivisesti varatulta levyltä negatiivisesti varatulle levylle, jolloin kondensaattorin nimellisvaraus Q pienenee. Systeemin kokonaisvaraus on koko ajan nolla.

(c) Pariston poistaminen ei muuta mitään, koska varaus ei pääse poistumaan levyltä. Paristohan pyrkii vain pitämään napojensa välistä jännitteenvakiona, ja koska mikään muu asia ei muudu, levyjen jännite on sama 100 V kuin ennen pariston poistamista. Levyllä on siis edelleen $\pm 44 \text{ nC}$ varaus ja kondensaattorin kapasitanssi on yhä 440 pF .

(d) Kun levyt siirretään takaisin alkuperäisille paikoilleen, kondensaattorin kapasitanssi kasvaa takaisin alkuperäiseen arvoonsa $C = 890 \text{ pF}$. Varaus ei pääse siirtymään levyltä toiselle, joten positiivisesti varatun levyn varaus on edelleen 44 pC ja negatiivisesti varautun levyn varaus on -44 pC . Kondensaattorin nimellisvaraus on siis yhä $Q = 44 \text{ pC}$ ja levyjen välinen jännite on $\Delta V = Q/C = 50 \text{ V}$.

ARVIOINTI Huomaa, että kondensaattorin kapasitanssi ei riipu siitä, onko kondensaattori kytketty paristoon vai ei. Siksi kapasitanssi on sama kohdissa (a) ja (d). Kapasitanssi kertoo kondensaattorin varauksen ja jännitteenvakion suhteesta, ja kapasitanssin muuttaminen muuttaa siis aina jompakumpaa. Kun levyjä yhdistää paristo, jännite on vakio ja varauksen täytyy muuttua siirtymällä pariston läpi levyltä toiselle. Kun levyjä ei yhdistää mitään, varaus ei pääse siirtymään ja niinpä jännitteenvakio on täytyy muuttua.



10.53 Selitä omin sanoin, millaisia komponentteja ovat ideaalinen paristo ja kondensaattori. Miten jännite ja kapasitanssi kuvaavat niiden toimintaa? Mistä tekijöistä pariston napojen välinen potentiaaliero riippuu? Entä kondensaattorin?

Yhteenvetö: Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkövaraus ja -kenttä

- **Sähkövaraus** kuvailee aineen kykyä kokea sähköisiä vuorovaikutuksesta. Varausta on kahta lajia, positiivista ja negatiivista.
- Protonin varaus on

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (10.181)$$

ja elektronin varaus on $-e$. Tämä on **alkeisvaraus**, ja kaikki luonnonissa vapaasti esiintyvät sähkövaraukset ovat sen monikertoja.

- Sähkövarausta ei voi luoda eikä hävittää vain siirtää

$$\Delta q_{\text{kokonais}} = 0, \text{ eli } q_{\text{kokonais}} = \text{vakio}.$$

Tämä on **varaksen säilymislaki**.

- Varaukset luovat ympärilleen koko avaruuden täyttävän **sähkökentän**. Pistevaraukseen A sähkökenttä pisteessä P on *Coulombin lain* mukaan

$$\bar{E}_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow P}^2} \hat{r}_{A \rightarrow P},$$

missä $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ on **sähkövakio**.

- Usean varauksen tuottama kokonaissähkökenttä saadaan laskemalla yhteen kunkin varauksen yksinään tuottama kenttä,

$$\bar{E}_{\text{kokonais}} = \sum_i \bar{E}_i.$$

Varatun kappaleen sähkökenttä voidaan laskea jakamalla kappale pieniin osiin, laskemalla kunkin osan luoma kenttä pistevarausmallin kautta ja laskemalla kaikkien osien tuottamat kentät yhteen.

- Sähkökentässä \bar{E} olevaan varaukseen q kohdistuu voima

$$\bar{F} = q\bar{E}.$$

- **Sähkövuo** kuvailee pinnan läpäisevän sähkökentän määritelmää samaan tapaan kuin virtauksen tilavuusvuo kuvailee pinnan läpi aikayksikössä virtaavan nesteen tilavuutta.
- Vakiosähkökentän vuo suoran pinnan läpi on sähkökenttävektorin ja pintavektorin pistetulo,

$$\Phi_E = \bar{E} \cdot \bar{A}.$$

Yleisesti sähkövuo on sähkökentän pintaintegraali

$$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{A}.$$

- Sähkövuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on suoraan verrannollinen pinnan sisältämään kokonaissähkövaraukseen,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{sisällä}}.$$

Tämä on **Gaussin laki**, yksi sähkökenttien fundamentaaleista peruslauseista.

Sähköinen potentiaalienergia ja potentiaali

- Sähkövarausten synnyttämä sähkökenttä on konservatiivinen ja siihen liittyy potentiaalienergia.
- **Potentiaali** kuvailee sähkökenttää samaan tapaan kuin korkeus kuvaa painovoimakenttää. Potentiaalin V tuodun varauksen q potentiaalienergia on

$$U = qV.$$

- Potentiaalin muutos on sähkökentän viivaintegraali

$$\Delta V = - \int \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

ja sähkökenttä on potentiaalin gradientin vastavektori

$$\bar{E} = -\nabla V.$$

Sähkökenttä siis osoittaa potentiaalin jyrkimmän laskun suuntaan. Sähkökentän suuruus kertoo potentiaalin muutoksen kuljetta matkaa kohti tässä suunnassa.

- Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen. Tavallisesti nollakohta valitaan äärettömän kauas tarkasteltavasta systeemistä tai **maadoitettuun** pisteeseen. Potentiaaliero eli **jännite** on fysikaalisesti mittavissa oleva suure, joka ei riipu nollakohdasta.
- Pistevaraukseen A potentiaali pisteessä P on

$$V_{A \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{r_{A \rightarrow P}}.$$

- Usean varauksen tuottama kokonaispotentiaali saadaan laskemalla yhteen kunkin varauksen yksinään tuottama potentiaali,

$$V_{\text{kokonais}} = \sum_i V_i.$$

Varatun kappaleen potentiaali voidaan laskea jakamalla kappale pieniin osiin, laskemalla kunkin osan luoma potentiaali pistevarausmallin kautta ja laskemalla kaikkien osien tuottamat potentiaalit yhteen.

Graafinen esitys

- Sähkökentän **vektorikenttäkuvaajassa** sähkökenttää kuvaa nuolia piirretään tasaisin välein valittuihin avaruuden pisteisiin. Kunkin nuolen suunta ja pituus kuvaa sähkökentän suuntaa ja voimakkuutta kyseisessä pisteessä.
- Sähkökentän **kenttäviivaeesyksessä** sähkökenttää kuvataan jatkuvin kenttäviivoineen. Kenttäviivaesitys noudataa seuraavia sääntöjä:
 - Sähkökenttä on kenttäviivojen tangentin suuntainen.
 - Kenttäviivat eivät voi koskaan leikata toisiaan.
 - Kenttäviivat alkavat positiivisista varauksista ja päättyvät negatiivisiin varauksiin (tai jatkuvat äärettömyksiin). Kenttäviivat eivät voi katketa tai päättyä tyhjään avaruuteen.
 - Kustakin kappaleesta alkavien tai siihen päättyvien kenttäviivojen lukumäärä on suoraan verrannollinen kappaleen kokonaivaraukseen.
 - Sähkökentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttä-

viivojen tiheyteen (eli käänthen verrannollinen viivojen väliin etäisyyskiin).

– Pinnan läpäisevä sähkövuo on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärään.

- Potentiaalia voi kuvata **tasapotentiaalikäyrillä ja -pinnoilla**. Tasapotentiaalikäyrän kussakin pisteessä potentiaalilla on sama arvo.
- Kenttäviivaesityksellä ja tasapotentiaalikäyrillä on seuraavat riippuvuudet:

- Kenttäviivat leikkaavat tasapotentiaalikäyrät kohtisuoraan.
- Kenttäviivat osoittavat suuntaan, jossa potentiaali pienenee.
- Mitä tiheämässä tasapotentiaalikäyrät ovat, sitä jyrkemmin potentiaali muuttuu, sitä voimakkaampi on sähkökenttä, ja sitä tiheämässä kenttäviivat kulkevat.

Polarisaatio, lähdejännite ja kapasitanssi

- **Johde** on aine, jossa varauksenkuljettajat pääsevät liikkumaan helposti. **Eristeessä** varauksenkuljettajat on vangittu paikoilleen.
- Kaksi yhtä suurta mutta vastakkaisista varausta muodostavat yhdessä **dipolin**. Dipolin suuntaa ja kykyä kokea sähköisiä vuorovaikutuksia kuvaa **dipolimomentti**

$$\bar{p} = q\bar{r} - \rightarrow +.$$

Neutraalitkin aineet polarisoituvat ulkoisessa sähkökenttässä, jolloin ne kokevat sähköisen vuorovaikutuksen.

- Johteen polarisoituvat ulkoisessa kentässä täydellisesti, jolloin sähkökenttä niihin sisällä on nolla ja potentiaali vakio.
- Eristeen polarisoituvat ulkoisessa kentässä osittain, jolloin niiden sisään jää heikko kenttä

$$\bar{E} = \frac{1}{\kappa} \bar{E}_{\text{ulkoinen}},$$

missä κ on aineen **permittivisyys**.

- Paristot ja akut ovat **jännitelähteitä**, jotka pyrkivät aina pitämään napojensa välillä saman **lähdejännitteen**.
- **Kondensaattori** on sähkövarausta varastoiva laite. Sen toimintakykyä kuvaa **kapasitanssi**

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

- Levykondensaattorin kapasitanssi on

$$C = \frac{1}{d} A \kappa \epsilon_0.$$

- Rinnan kytketyt kondensaattorit vastaavat yhtä kondensaattoria, jonka kapasitanssi on alkuperäisten kondensaattoreiden kapasitanssien summa,

$$C = \sum_i C_i.$$

- Sarjaan kytketyt kondensaattorit vastaavat yhtä kondensaattoria, jonka kapasitanssin käänneisluku on alkuperäisten kondensaattoreiden kapasitanssien käänneislujen summa,

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

Sanasto

- sähkövaraus (electric charge)
- johde (conductor)
- eriste (insulator, dielectric)
- varauksenkuljettaja (charge carrier)
- polarisaatio (polarisation)
- dipoli (dipole)
- sähkökenttä (electric field))
- pinta (surface)
- kenttäviiva (field line)
- lähde (source)
- nielu (drain)
- sähkövuo (electric flux)
- permittivisyys (permittivity)

- asymptootti (asymptote)
- sähköinen potentiaali (electric potential)
- tasapotentiaalikäyrä (equipotential line)
- jännite (potential difference)
- lähdejännite (electromotive force)
- paristo (battery)
- elektroodi (electrode)
- elektrolyytti (electrolyte)
- maadoitus (grounding)
- kondensaattori (capacitor)
- kapasitanssi (capacitance)
- rinnankytentä (parallel connection)
- sarjaankytentä (serial connection)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

10.1 Jos kappale vetää puoleensa neutraaleja kappaleita, sen täytyy olla sähköisesti varattu (tai sitten olemme löytäneet jälleen uuden vuorovaikutuksen). Jos tämä varattu kappale vetää puoleensa teippejä A ja B, sen varauksen täytyy olla erilainen kuin kummankaan teipin. Niinpä tämä havainto tarkoittaisi, että sähköisiä varauksia onkin kolmea eri tyyppiä. (Näinhän ei kuitenkaan ole.)

10.2 Coulomb on hyvin suuri sähkövaraus, joten varatun teipin varauksen täytyy olla tätä paljon, paljon pienempi. Teipin ainemäärä on noin 1 mol eli atomeja on luokkaa 10^{23} kpl, ja näissä on noin kymmenkertainen määrä protoneja ja elektroneja, $n_e = n_p = 10^{24}$. Elektronin varaus on noin $e = 10^{-19}$ C, joten kaikkiaan teipissä on positiivista ja negatiivista varausta luokkaa $n_e e = 10^5$ C. Jos teipin kokonaismvaraus olisi esimerkiksi pikocoulombi eli $\pm 10^{-12}$ C, tämä tarkoittaisi, että teipissä on noin $n_{\text{yli}} = 10^7$ elektronia lükkää tai liian vähän. Vaikka tämä on monta elektronia, sen suhde elektronien kokonaismäärään on vain $n_{\text{yli}}/n_e = 10^{-17}$. Toisin sanoen havaitsemme teippikokeessamme aivan minimaalisen poikkeaman elektronien ja protonien tasapainosta. Tämä osoittaa, kuinka voimakas sähköinen vuorovaikutus on.

10.3 (a) Kuulat ajautuvat tasaisesti ämpärin reunolle, mahdollisimman kauas toisistaan. (b) Kuulat pyrkivät muodostamaan punaisten ja sinisten kuulien pareja. Ne voivat muodostaa esimerkiksi "shakkilautakuvion", jossa punaiset ja siniset kuulat vuorottelevat. (c) Kuulat jälleen muodostavat pareja ja mahdollisesti shakkilautakuvion, mutta koska sinisiä kuulia on enemmän, ylimääräiset siniset kuulat kerääntyvät kuvion reunolle. Nämä sähkövarauksetkin käyttää johteissa: Jos kappaleessa on jompaakumpaa varausta toista enemmän, ylimääräiset varaukset kerääntyvät kappaleen pinnoille.

10.4 Pallon sisällä olevat protonit muodostavat valtavan positiivisen sähkövarauksen, joka vetää elektroneja puoleensa. Toisen kappaleen sähkövarausta voi vetää tai työntää elektronit hieman pois normaalelta paikoiltaan, mutta se ei mitenkään pysty erottamaan kaikkia elektroneja ja protoneja toisistaan.

10.5 Positiivisesti varatun sauvan puolelle kerääntyvä negatiivista varausta ja vastakkaiselle puolelle positiivista varausta. Sauva vetää puoleensa pallon kappaleen puoleista (negatiivista) sivua ja hylkii vastakkaista (positiivista) sivua. Palloon kohdistuva kokonaivoima on kohti sauvalla ja sauvalle kohdistuva voima on kohti palloa.

10.6 (a) Tämän voi ajatella kahdella tavalla. Ensinnäkin voit ajatella, että systeemissä on kaksi dipolia, joiden varaukset ovat 1 nm etäisyydellä toisistaan. Kummankin dipolin dipolimomentti on siten erikseen $1 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 1 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$. Voit myös ajatella niin, että pisteen (1, 0) varaukset kumoavat toisensa, jolloin dipolin muodostavat vain pisteiden (0, 0) ja (2, 0) varaukset. Varausten välinen etäisyys on 2 nm, joten niiden dipolimomentti on $2 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$.

(b) Systeemin dipolimomentti on $2 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$, mutta toisaalta systeemin voi ajatella koostuvan kahdesta samansuuntaisesta dipolista, joiden kummankin dipolimomentti on $1 \cdot 10^{-18} \text{ Cm}$, joten ilmeisesti dipolimomentit voi laskea yhteen ja kyseessä on ekstensiivinen suure. (Nämä todella on, mutta tässä pitää muistaa, että dipolimomentti on vektori. Kaksi vastakkaissuuntaista momenttia kumoa toisensa.)

(c) Ei. Esimerkiksi $\pm 2 \text{ nC}$ varaukset 1 nm päässä toisistaan muodostavat saman dipolimomentin kuin $\pm 1 \text{ nC}$ varaukset 2 nm päässä toisistaan.

10.8 (a) Siirtymän komponentit A:sta B:hen ovat $\Delta x = -3.0 \text{ m}$ ja $\Delta y = 2.0 \text{ m}$, joten $r_{A \rightarrow B} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 3.61 \text{ m}$.

$$(b) \bar{r}_{A \rightarrow B} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} = (-3.0 \text{ m}) \hat{i} + (2.0 \text{ m}) \hat{j}.$$

$$(c) \hat{r}_{A \rightarrow B} = \bar{r}_{A \rightarrow B} / r_{A \rightarrow B} = (-0.83) \hat{i} + (0.55) \hat{j}.$$

$$(d) \text{Coulombin lain mukaan } F_{A \rightarrow B} = k \frac{q_A q_B}{r_{A \rightarrow B}^2} = 0.69 \text{ nN}.$$

$$(e) \bar{F}_{A \rightarrow B} = F_{A \rightarrow B} \hat{r}_{A \rightarrow B} = (-0.57 \text{ nN}) \hat{i} + (0.38 \text{ nN}) \hat{j}.$$

10.9 (i) Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima kohti negatiivista varausta ja poispäin positiivisesesta varauksesta eli aina kohti tummaa väriä. (ii) Negatiiviseen varaukseen kohdistuu aina voima päinvastaiseen suuntaan eli kohti vaaleaa väriä. Tämä tulos ei riipu mitenkään siitä, millaiset varaukset kentän ovat luoneen. Myöhemmin opimme, että tällä tavalla kenttää kuvattaessa väri liittyy kentän potentiaaliksi kutsuttuun ominaisuteen. Tässä kuvassa tämä potentiaali on sitä suurempi, mitä vaaleammalla värellä kenttä on kuvattu. Siispä se, että positiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa kohti tummaa väriä, tarkoittaa fysikaalisesti sitä, että positiiviseen varaukseen kohdistuva voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaali pienenee.

10.10 (a) Sähkökenttä oli $\bar{E} = \bar{F}/q = (300 \text{ N/C}) \hat{i} + (400 \text{ N/C}) \hat{j}$.

(b) Voima on nyt $\bar{F} = q \bar{E} = (-900 \text{ nN}) \hat{i} + (-1200 \text{ nN}) \hat{j}$.

10.11 Jos massan suuruus m tunnetaan, voimme mitata siihen kohdistuvan painovoiman \bar{G} esimerkiksi vaa'alla. Gravitatiokentäksi (mittauspisteeessä) saadaan näin ollen painovoiman ja massan suhde, $\bar{g} = \bar{G}/m$. Lähellä maanpintaa tämä on kaikkiällä likimain sama putoamiskiertyvyys kohti maapallon keskipistettä, mutta avaruudessa painovoimakenttä ei ole vakio.

Sähkökenttä mitataan aivan samalla tavalla. Otetaan tunnettu varaus q ja mitataan siihen kohdistuva sähköinen voima \bar{F} , jolloin sähkökenttä mittauspisteeessä on $\bar{E} = \bar{F}/q$.

10.12 Piirrä kuva! Varaus 1 nC tuottaa origoon sähkökentän $\bar{E}_1 = (-9.0 \text{ N/C}) \hat{j}$ ja -2 nC kentän $\bar{E}_2 = (4.5 \text{ N/C}) \hat{i}$. Kokonaiskenttä on $\bar{E} = (4.5 \text{ N/C}) \hat{i} + (-9.0 \text{ N/C}) \hat{j}$. (Tätä ei kysytty, mutta kentän voimakkuus on noin $E = 10.0 \text{ N/C}$.)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

10.13 (a) $r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + (y_P - y_q)^2}$.

(b) $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P} = \frac{x_P}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y_P - y_q}{r_{q \rightarrow P}} \hat{\mathbf{j}}$.

(c) $dE_x = k \frac{x_P dq}{r_{q \rightarrow P}^3}$ ja $dE_y = k \frac{(y_P - y_q) dq}{r_{q \rightarrow P}^3}$.

10.14 Geometriasta seuraa

$$\left| \frac{dE_y}{dE} \right| = \left| \frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} \right|, \quad (10.182)$$

jolloin etumerkin oikealla valinnalla

$$dE_y = -\frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} dE. \quad (10.183)$$

Kentän voimakkuus on

$$dE = k \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (10.184)$$

joten sähkökentän y -komponentiksi saadaan

$$dE_y = -\frac{y_q}{r_{q \rightarrow P}} k \frac{dq}{r_{q \rightarrow P}^2} = -k \frac{y_q dq}{r_{q \rightarrow P}^3} = -k \frac{y_q dq}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (10.185)$$

Saatiin siis sama tulos kuin yhtälössä (10.28) kuten pitikin.

10.15 (a) Sauvan tilavuus on $V = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, joten jos sauvan kokonaisvaraus on Q , sen varaustiheys on $\rho = Q/V = 5.0 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^3$. Sauvan pituusvaraustiheys on $\lambda = Q/L = \rho A = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}$.

(b) L -pituisen osan varaus on $q = L\lambda = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$. Voi laskea myös osan tilavuuden $V = LA = 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, jolloin sen varaus on $q = \rho V$. Näin saadaan tietenkin sama tulos, ja lasku on helpompi käytäällä suoraan pituusvaraustiheyttä.

10.16 Funktion $F(y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ derivaatta y :n suhteeseen on $f(y) = F'(y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y = -y/(x^2 + y^2)^{-3/2}$. Niiinpä funktion f integraali on funktio F eli

$$\int \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} + C. \quad (10.186)$$

Näin saamme laskettua sähkökentän y -komponentin,

$$E_y = -k \frac{Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{y_q dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (10.187)$$

$$= -k \frac{Q}{L} \left| \frac{1}{(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \right|_{-L/2}^{L/2} \quad (10.188)$$

$$= -k \frac{Q}{L} \left(\frac{1}{(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}} - \frac{1}{(x_P^2 + L^2/4)^{1/2}} \right) \quad (10.189)$$

$$= 0. \quad (10.190)$$

10.17 Funktion $F(y)$ derivaatta y :n suhteeseen on

$$F'(y) = \frac{1}{x} (x^2 + y^2)^{-1/2} + \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y \quad (10.191)$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.192)$$

$$= \frac{x^2}{x(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.193)$$

$$= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (10.194)$$

$$= f(y). \quad (10.195)$$

Siiispä F on funktio f integraalifunktio.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

10.18 Ei voi. Asympoottinen käytös tarkoittaisi sitä, että $\frac{E}{a/r^2} \rightarrow 1$, mutta nyt $\frac{E}{a/r^2} = \frac{1}{r} \rightarrow 0$. Siis vaikka pisteverauksen kenttä ja nyt tarkasteltu kenttä kumpikin heikkenevät etäisyyden kasvaessa ja lähestyvä nolla, $E = a/r^3$ lähestyy nolla nopeammin kuin pisteverauksen kenttä. Asympoottisuus ei siis tarkoita sitä, että funktion raja-arvo. Tällaisia kenttiä on myös olemassa, sillä sähköisen dipolin kentän voimakkuus heikkenee nopeudella $E \sim 1/r^3$.

10.20 Ei voi kumpaakaan. Kussakin pisteesä kentällä on yksikäsiteinen suunta, joten jos kenttäviivaa ale-ataan piirtämään yhdestä pistestä, voidaan saada vain yksi käyrä (ellei kenttää muuteta). Jos viivat sivuaivat, yhdestä pistestä lähtisi kaksi käyrää. Jos viivat risteäisivät, niiden risteyskohdassa ei olisi edes yksikäsiteistä viivan tangentin suuntaa.

10.21 (a) Kaikki 360 viivaa.

(b) 1. pallo: $360/4\pi(1 \text{ m})^2 = 28.6 \text{ m}^{-2}$, 2. pallo: $360/4\pi(2 \text{ m})^2 = 7.2 \text{ m}^{-2}$, 3. pallo: $360/4\pi(3 \text{ m})^2 = 3.2 \text{ m}^{-2}$.

(c) Alan A läpi kulkee 1. pallossa 4 viivaa, joten $A = 4/28.6 \text{ m}^{-2} = 0.14 \text{ m}^2$.

(d) 1. pallo: $E = \frac{kQ}{(1 \text{ m})^2}$, 2. pallo: $E = \frac{kQ}{(2 \text{ m})^2}$, 3. pallo: $E = \frac{kQ}{(3 \text{ m})^2}$.

(e) Suhde on jokaisella pinnalla sama. Esim. 1. pallon arvoilla laskien $\frac{kQ}{(1 \text{ m})^2}/\frac{360}{4\pi(1 \text{ m})^2} = \frac{kQ\pi}{90}$.

10.22 (a) Kolme virtaviivaa vastaa $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ virtausta.

(b) Leveässä putkessa $v = \frac{0.006 \text{ m}^3/\text{s}}{0.015 \text{ m}^2} = 0.4 \text{ m/s}$ ja kapeassa $v = \frac{0.006 \text{ m}^3/\text{s}}{0.003 \text{ m}^2} = 2.0 \text{ m/s}$.

(c) Tilavuusvuo on sama kuin putken läpi virtaavan nesteen määrä aikayksikössä, $\Phi_V = 0.006 \text{ m}^3/\text{s}$.

10.24 Vastaus riippuu siitä, millaisen pinnan valitset. Kuitenkin kaikilla pinnoilla ulos ja sisään täytyy kulkea yhtä monta virtaviivaa, jolloin koko pinnan läpi kulkeva tilavuusvuo on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että pinnan sisällä on oltava yhtä paljon lähteitä ja nieluja. Huomaa, että tämä EI tarkoita sitä, että pinnan sisällä ei olisi lähteitä tai nieluja lainkaan.

10.25 (a) Ei mitenkään. Pinnan läpi kulkisi silti 8 viivaa.

(b) Ei mitenkään. Sähkövuo on suoraan verrannollinen kenttäviivojen määrään.

(c) Ei vaikutusta, koska edelleen pinnan läpäisisi 8 viivaa. Varauksen siirtäminen kyllä muuttaisi sähkökentän voimakkuutta ja suuntaa kuution kaikilla pinnoilla, mutta näiden muutosten täytyy täsmälleen kumota toisensa niin, että sähkövuo pysyy vakiona.

10.27 Jos maailma olisi 2-ulotteinen, kenttäviivat leväisivät vain kahteen eikä kolmeen ulottuvuuteen. Jos varauksen ympäri pürrettäisiin ympyrä, kaikki viivat läpäisivät tämän ympyrän, ja niinpä viivojen tiheys olisi kääntäen verrannollinen tällaisen ympyrän kaaren pituuteen eikä pallon pinta-alaan. Siispä pisteverauksen kentän lausekkeessa pallon ala $4\pi r^2$ pitäisi korvata ympyrän kaaren pituudella $2\pi r$, eli $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}$. Juuri tämä tulos saadaan äärettömän pitkän varatun sauvan sähkökentälle, koska sauvan kenttä levää sylinterisymmetrisesti.

10.28 Ei. Pallokuoren sisällä kentän saattoi päästellä olevan nolla siksi, että varausjakauma on kuorella symmetrinen. Jos esimerkiksi vain toinen puoli pallosta on varattu, sen sisällä on sähkökenttä.

10.29 Äärellisen kokoisten varattujen kappaleiden kenttä lähestyy aina pisteverauksen kenttää, kun mennään tarpeeksi kauas, koska mikä tahansa äärellinen kappale näyttää pistemäiseltä kyllin kaukaa katsottuna. (Esim. tähdet ovat aivan valtavia, mutta nekin näyttävät taivaalla pistemäisiltä.) Äärettömän pitkä sauva sen sijaan näyttää äärettömän pitkältä — ei siis pisteltä — riippumatta siitä, kuinka kaukaa sitä tarkastelee. Niinpä äärettömän kappaleen kenttä ei ikinä lähesty pisteverauksen kenttää.

Tietysti äärettömiä kappaleita ei ole olemassakaan, mutta esimerkiksi ääretön sauva on hyvä malli niin kauan kuin sauva on selvästi pidempi kuin etäisyys, jolta sauvaan tarkastellaan.

10.31 Varaukseen B kohdistuu voima poispaan A:sta. Niinpä (i) voiman tekemä työ on negatiivinen ja (ii) potentiaalienergian muutos on positiivinen. Jos toinen varaus olisi negatiivinen, tulos olisi päinvastainen. Jos molemmat varaukset olisivat negatiiviset, tulos olisi sama.

10.32 (a) Nän on, koska $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$.

(b, c) Jos varaukset ovat samat, $q_A q_B > 0$, joten myös $U > 0$. Tällöin varausten lähestyessä potentiaalienergia kasvaa. Jos etumerkit ovat erilaiset, potentiaalienergia on negatiivinen ja se siis pienenee.

10.33 (a) Skalarit: potentiaalienergia, potentiaali. Vektorit: voima, sähkökenttä.

(b) Riippuvat testivarauksesta: potentiaalienergia, voima.

(c) Kaikki voivat riippua paikasta.

(d) Nollasta poikkeavat: sähkökenttä, potentiaali ja mahdollisesti potentiaalienergia. Koska varauksia on vain yksi, ei ole mitään toista varausta, jonka kanssa tämä varaus voisi vuorovaikuttaa. Niinpä voima ainakin on nolla. Potentiaalienergian nollakohdan voi valita vapaasti.

10.35 Ei voi. Ainoastaan konservatiivisiin vektorikenttiin liittyy potentiaalia vastaava funktio. Mikä tahansa vektorikenttä, jossa on pyörre, on ei-konservatiivinen.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

- 10.36** (a) Viivojen välinen etäisyys pienenee.
 (b) Tasapotentiaalikäyrien välinen etäisyys pienenee.
 (c) Potentiaali kasvaa lähellä positiivista varausta ja pienenee lähellä negatiivista varausta.
 (d) Potentiaalin jyrkkyys kasvaa.
 (e) Sähkökentän voimakkuus kasvaa.

Kaikki tähän listatut ominaisuudet paitsi (c) ovat merkkejä sähkökentän voimakkuuden kasvusta. Voimakkaassa kentässä kenttäviivat ja tasapotentiaalikäyrät ovat tiheässä ja potentiaali muuttuu jyrkästi.

10.37 Ilman münusmerkkiä sähkökenttää osoitti potentiaalin kasvun suuntaan. Miinus käantää suunnan niin, että kenttä osoittaa potentiaalin laskusuuntaan. Vastaavasti potentiaali pienenee kuljetaessa sähkökentän suuntaan.

10.38 Negatiivinen varaus "putoaa" (eli siihen kohdistuu voima) vastakkaiseen suuntaan sähkökenttään nähdien eli kohti korkeaa potentiaalia.

10.40 Jos valitaan potentiaalin nollakohta äärettömän kauas, 1 nC varaus tuottaa origoon potentiaalin $V_1 = 9.0 \text{ V}$ ja -2 nC potentiaalin $V_2 = -9.0 \text{ V}$. Kokonaispotentiaali on $V = 0.0 \text{ V}$. Huomaa, että tämä on sama tilanne kuin kysymyksessä 10.12, jossa toteimme, että sähkökentän voimakkuus origossa on noin $E = 10.0 \text{ N/C}$. Se, että potentiaalin arvo origossa sattuu olemaan nolla, ei tarkoita sitä, että sähkökentänkin pitäisi hävitää. Sähkökenttä riippuu potentiaalin muutoksen jyrkkydestä eikä sen arvosta.

10.41 Derivaatta on

$$F'(y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{x^2 + y^2} + y) \quad (10.196)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} [\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2y + 1] \quad (10.197)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2} + y} \left(\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (10.198)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(y). \quad (10.199)$$

10.42 Jätetään alaindeksi P pois. Merkitään $f(x) = \sqrt{x^2 + L^2/4}$, jolloin $f'(x) = x/\sqrt{x^2 + L^2/4}$. Niiinpä

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (10.200)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{f(x) + L/2}{f(x) - L/2} \quad (10.201)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{f(x) - L/2}{f(x) + L/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x) + L/2}{f(x) - L/2} \quad (10.202)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{f(x) - L/2}{f(x) + L/2} \frac{f'(x)[f(x) - L/2] - f'(x)[f(x) + L/2]}{[f(x) - L/2]^2} \quad (10.203)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{1}{f(x) + L/2} \frac{f'(x)L}{f(x) - L/2} \quad (10.204)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{xL}{f(x)[f(x)^2 - L^2/4]} \quad (10.205)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2/4} \cdot (x^2 + L^2/4 - L^2/4)} \quad (10.206)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{x\sqrt{x^2 + L^2/4}}. \quad (10.207)$$

Tämä on sama lauseke kuin mitä aikaisemmin johdettiin sähkökentän superpositioperiaatteella.

10.43 Johteen pinnalla ei voi olla pinnan suuntaista kenttää, koska tällainen kenttä saa varaukset liukumaan niin kauan kunnes kenttää ei enää ole. Pinnalla voi kuitenkin olla pintaan nähdyn kohtisuora kenttä, koska pinta pysyytää varausten liikkeen. Ts. varaukset eivät pääse johteesta irti, jolloin ne eivät voi siirtyä loputonmiin vaikka pinnalla olisikin pinnan suuntainen kenttä.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

10.44 Jyrkkyys ja korkeus ovat nollia vain, jos pinnan tasolla on tasainen maa. Kun meren pinta nousee, rinteen jyrkkyys pysyy tällä tasaisella maalla nollassa, mutta maan korkeudesta tulee negatiivinen. Korkeus vastaa potentiaalia ja jyrkkyys sähkökentän voimakkuutta. Alkutilanne vastaa siis tilannetta, jossa potentiaali on vakio, nolla ja sähkökenttä on myös nolla. Jälkimmäinen tilanne vastaa sitä, että sähkökenttä on nolla ja potentiaali vakio, mutta potentiaali ei ole enää nolla vaan negatiivinen. Tästä analogiasta on tarkoitus huomata, että sähkökenttä on nolla, kun potentiaali on vakio, mutta potentiaalin nollakohdan voi siirtää ilman että sähkökenttä siitä muuttuisi. Potentiaalin ei tarvitse olla nolla vaikka sähkökenttä olisi ja päinvastoin.

10.45 (a) Nolla. (b) Gaussian lain perusteella nolla. (c) Pallon sisäpinnan varauksen täytyy olla yhtä suuri kuin pallon sisällä oleva varaus. Toisaalta varauksen säilymisen perusteella pallon sisä- ja ulkopintojen varauksen täytyy olla yhteenä nolla. Niinpä pallon ulkopinnalla täytyy olla täsmälleen yhtä suuri varaus kuin pallon sisällä.

10.46 Ulkoinen kenttä ei pääse johteen sisään, joten $E_{\text{aine}} = 0$. Siispä $\kappa = E_{\text{ulkoinen}}/E_{\text{aine}} = \infty$.

10.47 Levijistä kannattaa tehdä pinta-alaltaan mahdollisimman suuret (pieni varaustieheys, vaikka varaus olisikin suuri) ja ne kannattaa asettaa lähelle toisiaan (pieni jännite, vaikka sähkökenttä olisikin suuri). Levijen välisiin kannattaa valita aine, jolla on suuri permittiivisyys (heikko sähkökenttä, vaikka varaus olisikin suuri).

10.48 Kokonaisuudessaan ei, ainakaan jos reaktiot ovat ideaaliset. Yhdellä elektrodilla liuoksesta poistuu litiumioneja ja toisella elektrodilla ioneja tulee yhtä paljon lisää. Sen sijaan reaktio kuluttaa elektrodimateriaaleja.

10.49 (a) Paristo pitää napojensa välichen potentiaalieron vakiona, ja positiivisen navan potentiaali on korkeampi. Siis potentiaali on 11 V. (b) –3 V. Negatiivinen arvo ei tarkoita mitään erikoista. (c) Tähän ei voi vastata. Potentiaalin nollakohta on mielivaltainen, eikä kumpikaan paristo kiinnitää sitä.

10.50 (a) (i) Paristo pitää levijen välichen potentiaalieron eli jännitteen koko ajan samana. Toisaalta potentiaali muuttuu levijen välissä, koska siellä on sähkökenttä. Jos jännite pysyy samana mutta levijen välinen etäisyys kasvaa, sähkökentän täytyy heikentyä (koska kentän voimakkuus riippuu potentiaalin muutoksen jyrkkyydestä). Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että levijen varauksen täytyy pienentyä, koska levijen välinen kenttä on verrannollinen levijen pintavaraustiehyteen. (ii) Levijen varaus pysyy vakiona, koska varaus ei pääse irrallisia levijiltä minnekään. Tällöin levijen välinen sähkökenttä pysyy vakiona, ja jos levyt siirrytät toisistaan kauemmas, niiden välinen jännite kasvaa. (b) (i) Eriste polarisoituu ja heikentää näin sähkökenttää levijen välissä. Paristo pyrkii pitämään levijen välichen jännitteensä samana, joten myös sähkökenttän täytyy pysyä samana. Niinpä pariston täytyy siirtää levijille lisää varausta. (ii) Varaus pysyy vakiona, jolloin eristeen lisääminen heikentää levijen välistä sähkökenttää. Niinpä levijen välinen jännitekin pienenee.

10.51 (a) Jos kondensaattori ei ikinä hajoa, se voi varastoida äärettömästi varausta. Kondensaattorissa varaus ja jännite ovat suoraan verrannolliset.

(b) Sähkökenttä eristeessä on $E = Q/(A\kappa\epsilon_0)$, joten maksimivaraus on

$$Q_{\max} = E_{\max} A \kappa \epsilon_0 \approx 2.9 \cdot 10^{-7} \text{ C}. \quad (10.208)$$

Tätä ei kysytty, mutta maksimijännite, jonka kondensaattori kestää, on $\Delta V_{\max} = E_{\max} d = 3000 \text{ V}$.

10.52 (a) Kuva (b): Erikseen jännite $\Delta V = 5 \text{ V}$, varaus $Q_1 = 5 \text{ nC}$ ja $Q_2 = 2 \text{ nC}$. Kapasitanssit ovat siis $C_1 = Q_1/\Delta V = 1 \text{ nF}$ sekä $C_2 = Q_2/\Delta V = 0.4 \text{ nF}$. Yhdessä $\Delta V = 5 \text{ V}$ ja $Q = 7 \text{ V}$, joten $C = Q/\Delta V = 1.4 \text{ nF} = C_1 + C_2$. Kuva (d): Erikseen varaus $Q = 3 \text{ nC}$, jännite $\Delta V_1 = 2 \text{ V}$ ja $\Delta V_2 = 3 \text{ V}$. Siispä kapasitanssit ovat $C_1 = Q/\Delta V_1 = 1.5 \text{ nF}$ ja $C_2 = Q/\Delta V_2 = 1.0 \text{ nF}$. Yhdessä $Q = 3 \text{ nC}$ ja $\Delta V = 5 \text{ V}$, joten $C = Q/\Delta V = 0.6 \text{ nF}$. Pätee

$$\frac{1}{0.6 \text{ nF}} = \frac{1}{1.0 \text{ nF}} + \frac{1}{1.5 \text{ nF}}. \quad (10.209)$$

(b) Rinnankytentä parantaa kondensaattorien kykyä varastoida varausta. Sarjaankytentä heikentää tätä.

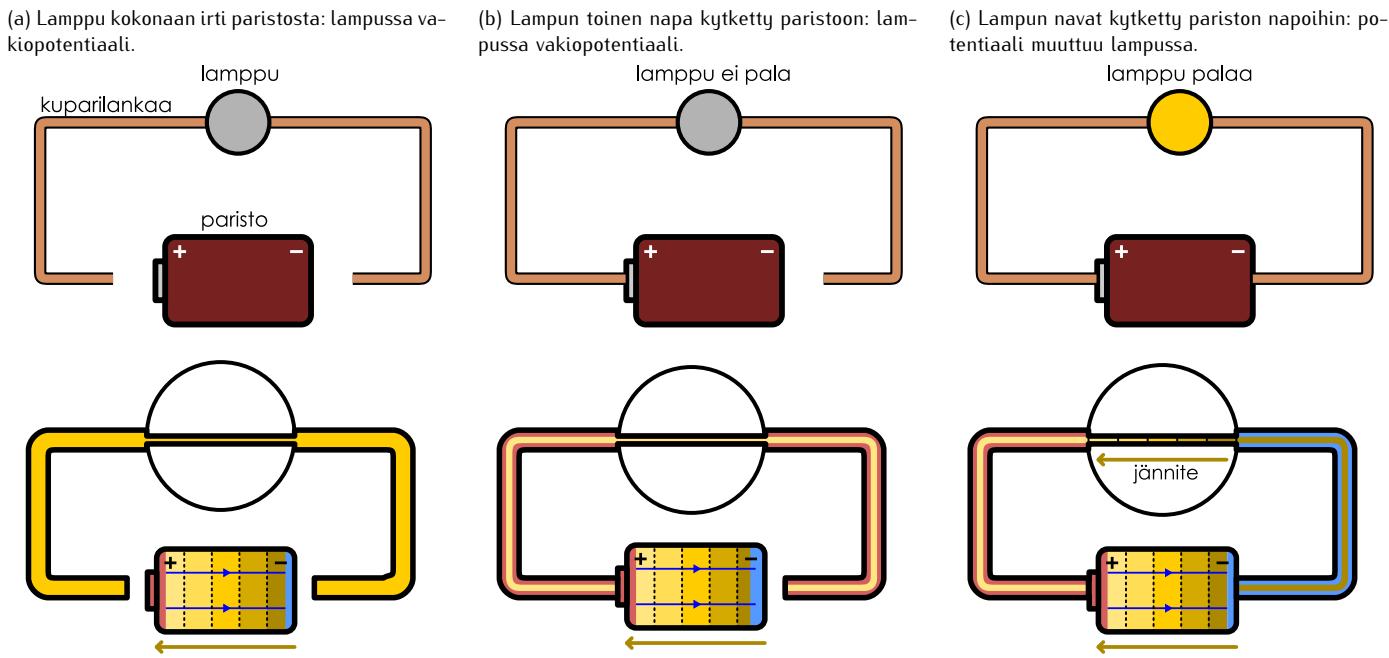
11 Sähkövirta

Tähän asti olemme tarkastelleet sähköstatuikkaa eli tilanteita, joissa sähkövaraaukset ovat tasapainossa. Toki esimerkiksi kappaleen tuominen sähkökenttään tai pariston kiinnittäminen kondensaattoriin siirtää varauksia, mutta tällöinkin varaukset järjestyvät hyvin nopeasti uuteen tasapainotilaan ja jäävät paikoilleen. Useimmat sähköisten ilmiöiden käytännön sovellukset kuitenkin perustuvat varaustenkuljettajien liikkumiseen, koska liikkuvan sähkövarauksen avulla voidaan siirtää hyvin järjestynyt energiataustainen tehdä työtä (esim. sähkömoottorissa) tai informaatiota (esim. mikroprosessorissa). Tuttummekin nyt liikkuvien varausten ja niitä kuvaavan sähkövirran perusominaisuksiin. Opimme myös analysoimaan yksinkertaisten paristoista, johteista, vastuksista ja kondensaattoreista rakennettujen laitteiden eli sähköpiirien toimintaa.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- Määritellä sähkövirta ja virrantiheys sekä laskea yksi kun toinen tunnetaan.
- Selittää Ohmin laki virrantiheydelle ja virralle sekä määritellä resistanssi ja johdavuus.
- Selittää Kirchhoffin säännöt ja soveltaa niitä piirianalyysissä.
- Tulkita piirikaaviota ja tunnistaa johteen, jännitelähteen, vastuksen, kondensaattorin ja maadoituksen symbolit.
- Ratkaista potentiaali ja virta paristoista, vastuksista ja kondensaattoreista koostuvissa tasavirtapiireissä.
- Ratkaista latautuvien ja purkautuvien kondensaattoreiden varaus ajan funktiona.
- Määrittää energian muutokset sähköisissä komponenteissa.

Kuva 11.1: Lampun kytkeminen paristoon. Lampussa on kaksi napaa, ja se ei pala, jos vain toinen navoista on kytketty paristoon. Vasta molempien napojen yhdistäminen saa lampun palamaan. Tällöin paristo tuottaa lampun napojen välille potentiaalieron eli jännitteen.



11.1 Sähkövirta

Opimme edellisessä luvussa, että johdekappaleen sisällä ei tavallisesti voi olla sähkökenttää. Jos johdekappaleen tuo sähkökenttään, tämä kenttä saa johteen polarisoitumaan, ja varaukset hakeutuvat sellaiseen tasapainotilaan, jossa sähkökenttä johteen sisällä on nolla. Tämä johtuu siitä, että sähkökenttä kohdistaa varauksenkuljetajiin niitä liukkeelle työntävän voiman, ja varaus pysyy liukkeessa, kunnes sähkökenttä katoaa johteen sisältä. Tavallisesti johteen johtekenttä polarisoituvat erittäin nopeasti, eikä ulkoinen sähkökenttä siis pääse tunkeutumaan johteen sisälle.

Ulkoinen sähkökenttä ei ole kuitenkaan ainoa tapa siirtää varausta johteessa, sillä paristo pyrkii ylläpitämään napojensa välillä lähdejännitteensä suuruista potentiaalieroja. Myös potentiaalieron avulla voidaan ohjata varauksen liikkettä, ja kuten varmasti tiedät, paristojen avulla voidaan käyttää monia sähkölaitteita. Paristokäytöisten laitteiden toiminnan ymmärtämiseksi tutkimme seuraavaksi kuvassa 11.1 esitettyä koetta, jossa tavallinen, vanhanaikainen hehkulamppu saadaan palamaan pariston avulla. Hehkulampussa on kaksi napaa hiukan samaan tapaan kuin paristossakin, joten otamme ensin kaksi kuparilankaa ja kiinnitämme kumpaankin lampun napaan yhden kuparilangan pään (kuva 11.1 (a)). Seuraavaksi otamme lankoja vapaista päästä yhden ja yhdistämme sen pariston positiiviseen napaan (kuva 11.1 (b)). Tässä vaiheessa lamppu ei vielä syty palamaan. Lopuksi otamme kuparilangojen viimeisen vapaan pään ja yhdistämme sen pariston negatiiviseen napaan (kuva 11.1 (c)). Nyt lamppu alkaa loistaa! Hehkulampu myös kuumenee loistaessaan, mutta kuparijohtimet eivät tässä kokeessa juurikaan lämpene. Valon tuottaminen ja lampun lämpeneminen vaativat molemmat energiota, ja selvästikin ainoa energia varastoiva laite systeemissä on paristo, joten energian täytyy siirtyä paristosta sähköisesti johtimia pitkin lampun, jossa osa energiasta muuttuu lämpöenergiaksi ja osa poistuu lämpö- ja valosäteilyn mukana.

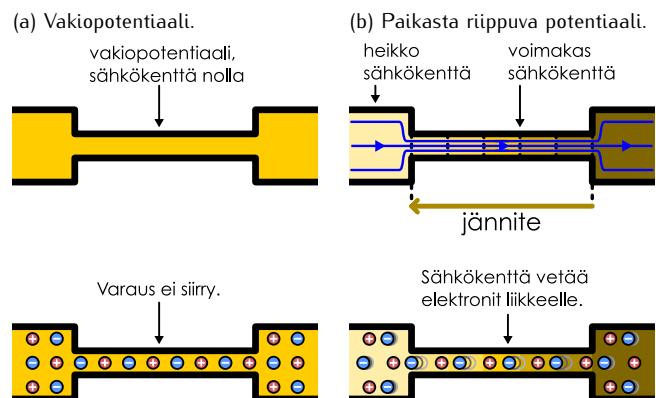
Kuvassa 11.1 on esitetty myös sähkövarauksen ja potentiaalin käyttäytyminen kokeen aikana. Paristossa tapahtuvat kemialliset reaktiot pyrkivät siirtämään varausta navalta toiselle, minkä vuoksi pariston positiivisella navalla on ylimääräistä positiivista varausta ja negatiivisella navalla negatiivista varausta. Kuparilangat ovat aluksi neutraaleja, joten niissä ei ole lainkaan ylimääräistä varausta. Ne ovat myös johtavia, joten potentiaalin täytyy olla niissä kaikkialla sama. Hehkulampun hehkulankakin on vain ohut, ympäristöltään suojuva johdin, joten sekin on aluksi samassa potentiaalissa kuin siihen yhdistetyt kuparilangat.

Kun yksi kuparilanka kiinnitetään pariston napaan, siihen siirtyy paristosta hyvin pieni sähkövaraus, ja *johdin saa saman potentiaalin kuin pariston napa*, johon johdin kytkettiin. Johdin toimii siis periaatteessa samalla tavalla kuin paristoon kiinnitettä kondensaattorin levy, mutta kuparilangan kapasitanssi on erittäin pieni, joten langan potentiaalin muuttamiseen riittää äärimmäisen pieni sähkövaraus. Johtimen saama varaus on itse asiassa niin pieni, että johdinta voi aivan hyvin pitää edelleen likimain neutraalina. Erityisesti varausta siirtyy niin vähän ja niin nopeasti, että lamppu ei tähän reagoi.

Kun toinenkin kuparilanka kytketään pariston vastakkaiseen napaan, tämäkin lanka saa saman potentiaalin kuin pariston napa. Tähänkin kuparilankaan siirtyy paristosta hyvin pieni varaus, jolloin kuparilangat saavat pienet, vastakkaismerkkiset sähkövaraukset. Koko ajan paristo pyrkii pitämään napojensa välisen potentiaalieron vakiona, samassa arvossa kuin pariston kemian määräämä lähdejännite, $\Delta V = \mathcal{E}$. Toisaalta joheet pyrkivät pysymään kauttaaltaan samassa potentiaalissa eli pitämään päädensä välisen potentiaalieron nollassa, $\Delta V = 0$ V, joten *pariston vastakkaisiin napoihin kytketyt kuparijohtimet saavat eri potentiaalit*. Edelleen koska lampun navat on yhdistetty näihin kuparijohtimiin, lampun napojen välille syntyy potentiaaliero eli jännite.

Lampun potentiaalin muuttaminen ei siis saanut lamppua palamaan, mutta potentiaaliereon eli jännitteen tuottaminen lampun napojen välille sai. Tämä johtuu siitä, että potentiaalin arvo itsessään on merkityksetön, mutta potentiaalieroihin liittyy aina sähkökenttä. Jos lampun hehkulanka on kauttaaltaan samassa potentiaalissa, sen sisällä ei voi olla sähkökenttää. Tällöin langassa olevat varauksenkuljetajat ovat tasapainossa kuten kuvassa 11.2 (a). Potentiaalin nollakohta on vain valinta, joten ei ole väliä onko hehkulangan potentiaali 0 V tai vaikka 1000 V. Jos kuitenkin hehkulangan päät ovat *eri* potentiaaleissa, potentiaalin täytyy muuttua langan sisällä. Sähkökenttä osoittaa aina korkeasta potentiaalista matalaan potentiaaliin, joten tällöin *langan sisälä on sähkökenttä* (kuva 11.2 (b)). Tämä sähkökenttä kohdistaa langassa oleviin elektroneihin niitä liukkeelle vetävän voiman sähkökenttään nähdien vastakkaiseen suuntaan, ja niinpä *elektronit alkavat liikkua hehkulangassa potentiaalin kasvusuuntaan*.

Kuva 11.2: Potentiaaliero luo sähkökentän ja virran.



11.1 Tarkastellaan kuvan 11.1 hehkulankaa.

- Mihin suuntaan sähkökenttä osoittaa hehkulangassa?
- Selitä sähkökentän synty ja suunta kuparijohdinten varausten avulla.

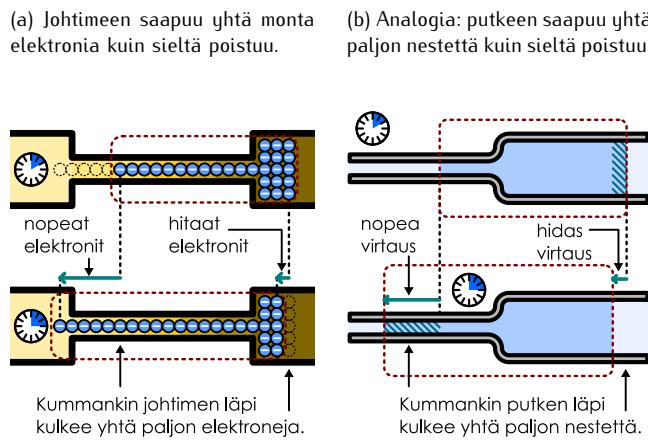
Sähkökenttä tekee hehkulangassa liukkuihin elektroneihin työtä, jolloin elektronien sähköinen potentiaalienergia muuttuu niiden liike-energiaksi. Positiivisesti varatuille hiukkasillehan potentiaali on samantapainen käsite kuin korkeus on painovoimakentässä oleville kappaleille, joten ne tavallaan "putoavat" korkeasta potentiaalista matalaan. Elektronit ovat kuitenkin negatiivisesti varautuneita hiukkasia, joten ne käytäytyvät pääinvastoin ja "putoavat" hehkulangan läpi matalasta potentiaalista korkeaan. Koska lanka on johde, elektronit pääsevät liukumaan siinä helposti, mutta eivät kuitenkaan täysin vapaasti. Lankaa pitkin *liukkuviin elektroneihin kohdistuu nimitään langassa niiden liikettä vastustava dissipatiivinen vuorovaikutus*, joka muuttaa niiden liike-energian nopeasti lämpöenergiaksi samaan tapaan kuin ilmanvastus muuttaa putoavan kappaleen liike-energiaa lämpöenergiaksi. Näin hehkulanka kuumenee, ja tarpeeksi kuumana metalli alkaa hehkua, jolloin lamppu säteilee valoa.

Elektronit siis liikkuvat hehkulangassa ja lämmittävät sitä. Kuparijohtimet ja paristo eivät kokeessa juuri-kaan lämpene, joten ei ole ilmeistä, liukkuuko varaus myös niissä. Voimme kuitenkin epäsuorasti päätellä, että varaus ei voi siirtyä vain hehkulangassa vaan varauksenkuljetajien *täytyy* liikkua kaikissa toisiinsa yhdistetyissä johtimissa. Elektronit lähtivät alunperin liukkeelle hehkulangassa siksi, että kuparijohdinten kiinnittäminen paristoon siirsi johtimiin hyvin pienien ylimäärän positiivista ja negatiivista varauusta. Tämä pieni ylimääräinen varaus synnyttää hehkulankaan sähkökentän ja potentiaalieron sekä saa siten langan elektronit liikkeelle. Pariston negatiiviseen napaan kiinnitetystä johtimessa on pieni ylimäärä elektroneja (negatiivinen varaus) ja pariston positiiviseen napaan kiinnitetystä johtimessa on pieni elektronien vajaus (positiivinen varaus). Elektronit siirtävät hehkulangassa nimenomaan negatiiviselta johtimelta positiiviselle, joten jos varausta siirtyisi ainoastaan hehkulankaa pitkin, negatiivisessa johtimessa oleva elektronien ylimäärä siirtäisi erittäin nopeasti korvaamaan positiivisen johtimen elektronivajausta. Tällöin kummastakin johtimesta tulisi jälleen neutraali ja ne saisivat saman potentiaalin. Varaus ei tietenkään enää kulkisi hehkulangassakaan eikä lamppu palaisi. Näin tapahtuu, jos toinen kuparijohdin irrotetaan paristosta, ja tällöin lamppu sammuu väliittömästi.

Paristoon kytketty lamppu kuitenkin loistaa jatkuvasti, joten johtimissa olevan pienen varausepätasapainon täytyy säilyä muuttumattomana niin kauan kuin johtimet on yhdistetty paristoon. Langassa kulkevat elektronit siirtävät *negatiivista* varausta negatiiviselta johtimelta positiiviselle, joten pariston täytyy siirtää *positiivista* varausta negatiiviselta johtimelta positiiviselle. Näin tapahtuu, koska paristo pyrkii pitämään napojensa

välisen potentiaalieron vakiona, samana kuin mikä pariston lähdejännite on. Elektronien siirtyminen hehkulangan kautta johtimelta toiselle pienentää johdinten välistä potentiaalieroaa, jolloin pariston elektrodien kemialliset reaktiot käynnistyvät ja siirtävät kupariohjimiin varausta korvaamaan hehkulangan kautta siirtynytä varausta. Systeemi saavuttaa hyvin nopeasti *tasaisen virtauksen tilan*, jossa varausta siirtyy johdinten välillä jatkuvasti pariston ja hehkulangan kautta täsmälleen yhtä nopeasti eikä johdinten varaus muutu.

Kuva 11.3: Varausenkuljettajat liikkuvat kuin kokoonpuristumaton neste.



nia kuutiometrissä. Metallijohdin on siis "täynnä" elektroneja ja sen voikin ajatella toimivan kuin nestettä täynnä olevan putki (kuva 11.3). Jos haarattoman putken yhdessä kohdassa oleva neste siirtyy, nesteen täytyy siirtyä putkessa *kaikkialla*, koska yksikään nestepisara ei voi puristua kasaan, venyä tai kulkea toisten pisaroiden "läpi". Samaan tapaan elektronien siirtäminen metallisen johtimen yhdessä kohdassa on mahdollista vain, jos elektronit samalla siirtävät *kaikkialla* johtimessa. Lampun ja kuparijohdinten tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että jos negatiivisesta kupariohjimesta siirtyy hehkulankaan tietty määrä elektroneja, hehkulangan toisesta päästä täytyy samanaikaisesti siirtyä positiiviseen johtimeen yhtä paljon elektroneja, ja samalla kaikki muitkin elektronit siirtävät hehkulangassa eteenpäin. Elektronit liikkuvat tällöin myös kupariohjimissa, koska negatiivisen johtimen elektronien täytyy liikkua eteenpäin täyttämään hehkulankaan siirtyneiden elektronien jättämä tila, ja positiivisessa johtimessa olevien elektronien pitää siirtyä tekemään tilaa hehkulangasta saapuville uusille elektroneille.

Pariston sisällä olevassa elektrolyytissä ei ole vapaita elektroneja, joten paristo *ei* kuljeta varausta johdinten välillä siirtämällä elektroneja. Sen sijaan elektrolyytissä on positiivisesti varautuneita ioneita, ja varaus kulkeekin pariston läpi niiden välityksellä. Elektronit siis kuljettavat *negatiivista* varausta johtimia pitkin pariston negatiiviselta navalta positiiviselle, ja samalla ionit kuljettavat täsmälleen yhtä paljon *positiivista* varausta pariston läpi negatiiviselta navalta positiiviselle. Negatiivisella elektrodilla neutraaleja molekyylejä hajoaa ioneiksi ja elektroneiksi, ja samalla positiivisella elektrodilla ionit ja elektronit yhdistyvät jälleen neutraaleiksi yhdisteiksi. Kaikkiaan vapaiden elektronien ja ionien kokonaismäärä pysyy vakiona ja ainoastaan elektrodien kemiallinen koostumus muuttuu prosessissa.

Tällaista varausenkuljettajien virtausta kutsutaan **sähkövirraksi**. Kun virtaus on tasainen, sähkövirta määritellään *siirtyneen kokonaisvarausten määrän* Δq suhteena *suurtoon kuluneeseen aikaan* Δt ,

$$i_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (11.1)$$

Jos virtaus muuttuu ajan kuluessa, hetkellinen sähkövirta saadaan tarkastelemalla infinitesimaalisen lyhyttä aikaa dt , jolloin virraksi saadaan siis varauksen derivaatta ajan suhteeseen

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (11.2)$$

Sähkövirran yksiköllä on erityisnimi **ampeeri** (André-Marie Ampèreen mukaan),

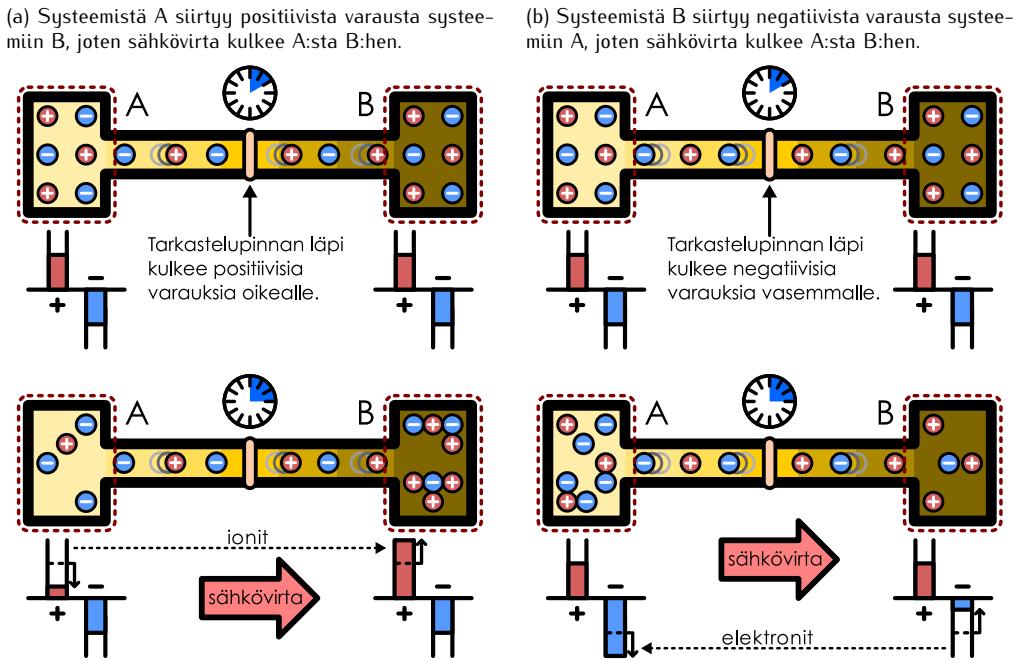
$$[i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{C}{s} = A. \quad (11.3)$$

Vuoteen 2019 asti coulombi määriteltiin sähkövaraukseksi, jonka yhden ampeerin virta siirtää sekunnissa, ja ampeeri määriteltiin sähkövirran magneettisten ominaisuuksien kautta. Nykyään ampeeri on määritelmin mukaisesti sähkövirta, joka syntyy, kun yhdessä sekunnissa siirtyy yksi coulombi varausta.

Sähkövarausten tasainen virtaus muistuttaa hyvin paljon putkessa virtaavan kokoonpuristumattoman nesteen tasaista virtausta. Aivan kuten kokoonpuristumattoman nesteen tiheys ei voi muuttua, myöskään johtimissa liikkuvien elektronien tiheys ei saa muuttua. Jos nimitään elektronien tiheys muuttuisi, jonnekin kerääntyisi enemmän tai vähemmän elektroneja, jolloin tämän alueen varaus muuttuisi. Tämä muuttuisi heti myös johteen potentiaalia ja sähkökenttää, jolloin varausten virtauskin muuttuisi. Johtimissa on hyvin, hyvin pieni sähkövaraus myös tasaisen virtauksen tilassa, mutta koska varaukset virtaavat tasaisesti, johdinten varauksen täytyy olla *muuttumaton*. Niinpä myös liikkuvien varausten tiheyden täytyy pysyä muuttumattomana.

Varausenkuljettajien tiheys on metallissa tyypillisesti hyvin suuri. Esimerkiksi kuparissa on luokkaa 10^{29} varausta kuljettavaa elektro-

Kuva 11.4: Sähkövirta määritellään siirtyneen kokonaisvarausten ja siirtoon kuluneen ajan suhteena.



! 11.2 Laitteen A läpi kulkee keskimäärin yksi elektroni sekunnissa nopeudella 100 m/s. Laitteen B läpi kulkee kaksi elektronia sekunnissa nopeudella 1 m/s. Kumman laitteen läpi kulkee itseisarvoiltaan suurempi sähkövirta?

Tätä sähkövirran määritelmää on havainnollistettu kuvassa 11.4. Kuvassa on tarkasteltu kahta systeemiä, A ja B, joiden välillä siirtyy varauksia. Kuvassa (a) systeemistä A siirtyy positiivisia varauksenkuljettajia systeemiin B, jolloin systeemin A kokonaisvaraustien määrä pienenee ja systeemin B kasvaa. Systeemistä A kulkee siis sähkövirta systeemiin B, ja virta on sitä suurempi mitä enemmän varausta siirtyy aikayksikössä. Samaan tapaan kuvassa (b) systeemistä B siirtyy negatiivisia varauksenkuljettajia systeemiin A, jolloin jälleen systeemin A kokonaisvaraustien määrä pienenee ja B:n kasvaa. Tässäkin tapauksessa *sähkövirta kulkee systeemistä A systeemistä B*, vaikka varauksenkuljettajat siirtyvät päinvastaiseen suuntaan, koska sähkövirta mittaa nimenomaan *kokonaisvaraustien siirtymisen nopeutta* eikä suinkaan varauksenkuljettajien liikkeen nopeutta.



11.3 Onko sähkövirta skalaari- vai vektorisuure?

Kuvan 11.4 esimerkeissä sähkövirta määritettiin systeemien A ja B varauksen muutoksen perusteella, mutta voimme määritellä sähkövirran myös yleisemmin. Kuvassa systeemejä A ja B yhdistää johdin, jota pitkin varauksenkuljettajat siirtyvät, ja voimme määrittää virran myös tarkastelemalla tämän johtimen läpi kulkevien varausten määrää. Kuvissa johtimen keskelle on piirretty tarkastelupinta (samanlainen kuin mitä käytimme vuon määrittelyyn luvussa 10), ja *tämän pinnan läpi täytyy kulkea yhtä paljon varausta kuin mitä systeemistä toiseen siirtyy*. Voimme siis määritellä johtimen läpi kulkevan sähkövirran tarkastelupinnan (johtimen poikkileikkauskiven) läpi kulkevana kokonaisvarausena Δq jaettuna tarkasteluajalla Δt .

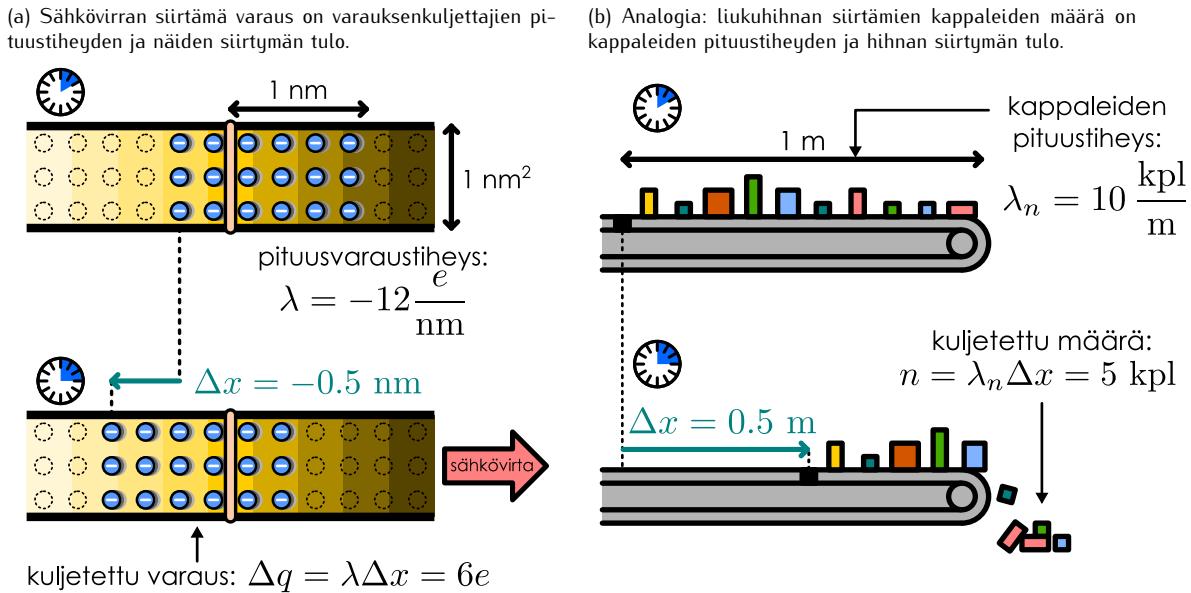
Tämä ajatus on esitetty täsmällisemmin kuvassa 11.5, jossa on tarkasteltu metallijohtimessa kulkevien elektronien kuljettamaa varausta. Metalli on tieteenkin täynnä sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta kuvaan piirretty hiukkaset edustavat nyt ainoastaan liukkavia ja siten varausta kuljettavia elektroneja. Kuvassa näitä elektroneja on piirretty 12 kpl yhden nanometrin pituiselle matkalle, joten varausta kuljettavien elektronien pituusvaraustiheys on nyt $\lambda = q/L = -12e/1 \text{ nm}$. Johtimen poikkipinta-ala on $A = 1 \text{ nm}^2$, joten elektronien varaustiheys on $\rho = q/V = -12e/1 \text{ nm}^3$. Kuten nähdään, pituus- ja tilavuusvaraustiheyksistä yhdistää relaatio

$$\lambda = \rho A, \quad (11.4)$$

joka pätee suorassa, tasapaksussa johtimessa.

Kun aika kulkee eteenpäin pienen määrän Δt , elektronit ovat siirtyneet 0.5 nm matkan kuvassa vasemmalle. Valitaan positiivinen suunta oikealle, jolloin elektronien siirtymä on $\Delta x = -0.5 \text{ nm}$. Johtimeen on

Kuva 11.5: Sähkövaraus voidaan määritellä myös tarkastelupinnan (johtimen poikkileikkaus) läpi kulkevan varauksen avulla. Tämän varauksen määrä on suoraan verrannollinen varausta kuljettavien hiukkasten pituusvaraustiheyteen ja niiden kulkemaan matkaan.



merkitty myös tarkastelupinta, ja tarkastellulla aikavälillä pinnan läpi on kulkenut kuusi elektronia oikealta vasemmalle. Pinnan läpi siirtynyt varaus on nyt siis

$$\Delta q = \lambda \Delta x = 6e. \quad (11.5)$$

Pinnan läpi kulkenut varaus on positiivinen, koska positiivinen suunta valittiin kuvassa oikealle, ja nyt meillä kului negatiivista varausta vastakkaiseen suuntaan. Tämän perusteella myös sähkövirta kulkee positiiviseen suuntaan eli kuvassa oikealle, ja sen suuruus on $i = \Delta q / \Delta t = 6e / \Delta t$. Yleisesti, jos tarkastelupinnan läpi kulkee positiivinen kokonaivarauus, sähkövirran suunta on sama kuin varauksen kulkusuunta. Jos pinnan läpi kulkee negatiivinen kokonaivarauus, virran suunta on varausten liikkeen suuntaan nähdyn vastakkainen.

Asia voi olla helpompi sisäistää ajattelemana kuvassa 11.5 (b) esitetyä analogiaa liukuhihnnalla kulkeviin kappaleisiin. Jos liukuhihnnalla on jonossa esimerkiksi 10 kappaletta metrin matkalla, kappaleiden lukumäärän pituustiheys on 10 kpl/m. Jos hihnan nopeus on puoli metriä sekunnissa, yhden sekunnin aikana hihna etenee puoli metriä ja kaikkiaan kappaletta saapuu tänä aikana hihnan päähän 5 kappaletta. Kappaleiden siirtonopeus on siis 5 kappaletta sekunnissa, mikä on kappaleiden tiheyden ja hihnan nopeuden tulo. Samaan tapaan johteen siirtämän varauksen määrä voidaan ilmaista johteessa liukuvien varauksenkuljettajien pituustiheyden ja niiden siirtymän tulona.

Toinen hyvä analogia sähkövirralle on jo aikaisemmin mainittu nesteenvirtaus putkessa. Jos putken poikkileikkaus on A ja putkessa virtaa nestettä nopeudella v_x , virtauksen tilavuusvuo putken läpi on $\Phi_V = Av_x$ ja ajassa Δt putken läpi virtaa tilavuus

$$\Delta V = \Phi_V \Delta t = Av_x \Delta t. \quad (11.6)$$

Edelleen jos nesteen tiheys on ρ_m , putken läpi virtaa tässä ajassa massa

$$\Delta m = \rho_m \Delta V = \rho_m A v_x \Delta t. \quad (11.7)$$

Aivan samalla periaatteella jos varausta kuljettavien elektronien varaustiheys johtimessa on ρ ja ne kulkevat keskimäärin nopeudella $v_{x,\text{keskiarvo}}$, elektronit kuljettavat positiiviseen x -suuntaan johtimen läpi varauksen

$$\Delta q = \lambda \Delta x = \rho A v_x \Delta t, \quad (11.8)$$

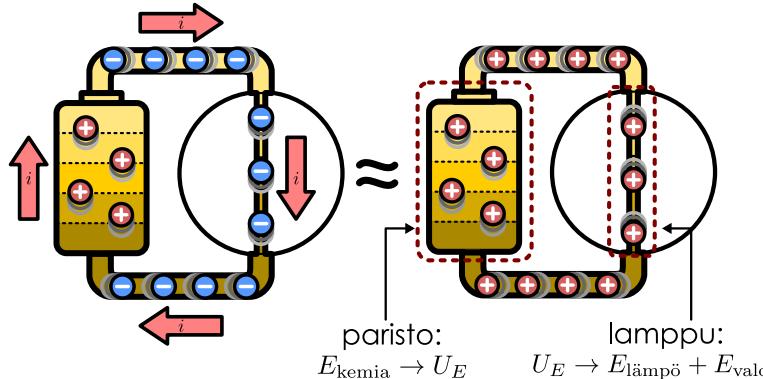
sillä $\lambda = \rho A$ ja $\Delta x = v_{x,\text{keskiarvo}} \Delta t$. Johtimessa kulkeva sähkövirta on näin ollen suoraan verrannollinen varauksenkuljettajien varaustiheystä johtimena, johtimen poikkipinta-alaan sekä varauksenkuljettajien keskinopeuteen,

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho A v_{x,\text{keskiarvo}}. \quad (11.9)$$

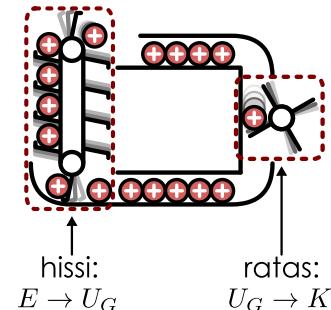
SÄHKÖVIRTA

Kuva 11.6: Energian muutokset virtapiirissä sekä sitä vastaavassa mekaanisessa laitteessa. Paristo nostaa positiivista varausta korkeaan potentiaaliin ja muuntaa näin varastoimansa kemiallista energiota varauksenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Lampussa tämä potentiaalienergia muuttuu lämpö- ja säteilyenergiaksi. Piiri toimii kuin laite, jossa hissi nostaa kuulia ylös, ja kuulat rullaavat alas omalla painollaan.

(a) Varauksenkuljettajat kiertävät virtapiirissä kehää.



(b) Analogia: virtapiiri toimii kuin kuularata.



11.4 Suorassa putkessa virtaa vettä vakionopeudella 1.5 m/s . Putken poikkipinta-ala on 0.01 m^2 .

(a) Mikä on veden pituustiheys (massa metrin pituisen putken osan sisällä)?

(b) Paljonko vettä (yksiköissä kg) putkesta virtaa yhdessä sekunnissa?

Kuparijohtimessa kulkee elektroneja keskinopeudella 0.15 mm/s . Kuparissa on noin $8.5 \cdot 10^{28}$ vapaata elektronia kuutiometrissä. Johtimen poikkipinta-ala on 0.5 mm^2 .

(c) Mikä on elektronien pituusvaraustiheys?

(d) Paljonko varausta johtimen läpi kulkee yhdessä sekunnissa (eli mikä on sähkövirta)?

Tarkastelemassamme lamppuesimerkissä sähkövirtaa kuljettavat sekä positiiviset varauksenkuljettajat. Kuparijohtimet ja lampun hehkulanka ovat metallia, joissa varausta kuljettavat negatiiviset elektronit. Elektronit kulkevat kohti korkeaa potentiaalia, jolloin sähkövirta kulkee päinvastaiseen suuntaan kohti matalaa potentiaalia. Pariston negatiivinen napa on matalassa potentiaalissa, joten *johtimissa sähkövirta kulkee siis positiiviselta navalta negatiiviselle*. Paristossa sen sijaan positiivisesti varautuneet ionit kulkevat negatiiviselta navalta positiiviselle, ja siispä *pariston sisällä kulkee sähkövirta negatiiviselta navalta positiiviselle*.

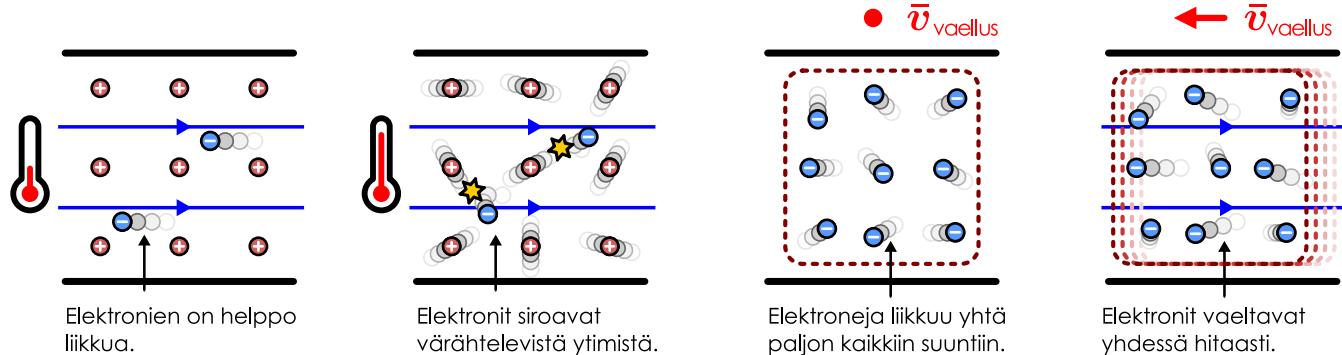
Varauksenkuljettajien liike paristossa ja johtimissa on esitetty kuvassa 11.6 (a), ja samaan kuvaan on merkitty myös virran kulkusuunta, joka on kaikkialla *myötäpäivään*. Todellisuudessa varauksenkuljettajat liikkuvat nuolten osoittamaan suuntaan vain pariston sisällä, ja suurimmassa osassa püriä varauksenkuljettajina toimivat *vastapäivään* liikkuvat, negatiivisesti varatut elektronit. Tällä ei ole kuitenkaan väliä, koska *piiri toimisi aivan samoin, vaikka piirissä todella kiertäisi positiivisia varauksenkuljettajia myötäpäivään*. Siksi yleensä voidaan unohtaa, että varausta kuljettavat sekä ionit että elektronit. Sen sijaan voidaan ajatella yksinkertaisemmin, että *sähkövirta kiertää kehää*. Pariston sekä siihen kytkettijen johdinten ja lampun sanotaankin muodostavan **virtapiirin**, koska sähkövaraus pyörii niissä ympäri kuin pürissä.

Virtapiirin toiminnan fysiikkaa voi olla helpompi ymmärtää vertaamalla sitä kuvassa 11.6 (b) kuvattuun mekaaniseen laitteeseen. Siinä missä virtapiirissä energia kuljetaan sähkövirta, piiriin mekaanisessa vastineessa energia siirtyy liikkuvien kuulien mukana. Paristo on piiri energianlähte, joka muuntaa varastoimansa kemiallista energiota varausten sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Piiriä vastaavassa mekaanisessa koneessa pariston toimintaa vastaa kuulia nostava hissi, sillä se lisää kuulien potentiaalienergiaa gravitaatiokentässä. Lampussa sähköistä potentiaalienergiaa hyödynnetään valon tuottamisessa, vaikkakin suurin osa potentiaalienergiasta muuttuu lämpöenergiaksi. Koneessa lampun vastine on pyörivä ratas, joka muuttaa osan sen läpi kulkevien kuulien potentiaalienergiasta hyötykäyttöön rattaan liike-energiaksi.

11.5 Kirjoita oman sanoineen tiivistelmä sähkövirrasta. Miten virta määritellään? Miksi pariston napojen yhdistäminen suljetuksi piiriksi saa virran kulkemaan ja millaisia varauksenkuljettajia virtapiireissä liikkuu? Miten virta liittyy varauksenkuljettajien määrään ja niiden liikkeeseen?

Kuva 11.7: Elektronit ovat sähkökentässä kiihtyvässä liikkeessä. Johteessa elektronit kuitenkin törmäävät atomiytimiin, jolloin osa elektronien energiasta siirrytä atomien satunnaisliukkeen energiaksi. Näin elektronien järjestynyt liike kentän suunnassa muuttuu nopeasti satunnaisliukkeeksi. Lopputulos on se, että elektronien joukko liikkuu keskimäärin vakionopeudella, jonka suuruus on verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen.

(a) Elektronit siroavat atomiytimistä sitä enemmän, mitä voimakkaammin ytimet värähtelevät. (b) Vaellusnopeus on elektronien keskimääräinen nopeus.



11.2 Johtavuus ja resistanssi

Ohmin laki

Hehkulamppu siis palaa täsmälleen silloin, kun sen napojen välillä on potentiaaliero, koska tällöin lampun läpi kulkee hehkulankaa lämmittävä sähkövirta. Totesimme aikaisemmin, että liikkuviin elektroneihin kohdistuu metallissakin ilmanvastusta muistuttava dissipatiivinen vuorovaikutus, joka muuttaa elektronien liike-energiaa lämpöenergiaksi. Seuraava tehtäväämme onkin tutkia tästä varauksenkuljettajia jarruttavaa vuorovaikutusta, ja aloitamme selittämällä, miksi liikkuviin elektroneihin kohdistuu niiden liikettä vastustava voima.

Potentiaalieroihin liittyy aina sähkökenttä, ja tämä sähkökenttä vetää johdinten elektronit liikkeelle. Jos elektronit olisivat sähkökentässä tyhjässä avaruudessa, niiden pitäisi olla kiihtyvässä liikkeessä. Lampun hehkulanka kuten muutkin metallit koostuvat kuitenkin elektronien lisäksi myös atomiytimistä. Metallissa varausta kuljettavat elektronit liikkuvat siis ydinten muodostamassa säänöllisessä rakenteessa eli *hilassa*, ja elektronit voivat vuorovaikuttaa ydinten kanssa. Nämä vuorovaikutukset voivat olla varsin monimutkaisia, emmekä tässä ala niitä tarkkaan analysoimaan. Yksinkertaistaen voimme kuitenkin ajatella, että *elektronit voivat törmätä ytimiin*.

Törmäykissä elektronien liikkeen suunta muuttuu, ja tavallisesti elektroneilta siirrytään liike-energiaa ytimille (kuva 11.7 (a)). Tätä kutsutaan elektronien **sironnaksi**. Lopputulos on se, että vaikka sähkökenttä pyrkii vetämään kaikkia elektroneja samaan suuntaan, sironnat muuttavat tämän järjestyneen liikkeen hyvin nopeasti elektronien sekä atomiytimien satunnaiseksi liukkeeksi, mikä havaitaan makroskooppisessa mittakaavassa metallin läppenemisenä.

Sirontojen takia elektronien liike on johteessa pääasiassa satunnaista (kuva 11.7 (b)). Vaikka johteen sisällä olisi elektroneja tiettyyn suuntaan vetävä sähkökenttä, elektronit pääasiassa poukkoilevat sinne tänne. Elektronien joukon liikettä voidaan kuvata elektronien keskimääräisellä nopeudella (eli niiden massakeskipistenopeudella), jota kutsutaan myös elektronien **vaellusnopeudeksi**, \bar{v}_{vaellus} . Tavallisesti vaellusnopeus on hyvin pieni verrattuna yksittäisten elektronien keskimääräiseen vauhtiin.

11.6 Koordinaatistossa A levossa olevassa pitkässä kuparitangossa kulkee sähkövirta. Virtaa kuljettavat vaellusnopeudella $v_{x,\text{vaellus}} > 0 \text{ m/s}$ kulkevat elektronit.

(a) Kulkeeko virta positiiviseen vai negatiiviseen x -suuntaan?

Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $v_{x,B,(A)} = v_{x,\text{vaellus}}$.

(b) Mikä on elektronien vaellusnopeus B:ssä?

(c) Kuljettavatko elektronit virtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

(d) Kuljettavatko atomiytimet virtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

(e) Kulkeeko liikkuvan tangon mukana sähkövirtaa B:ssä? Mihin suuntaan?

Jos sähkökenttä häviää johteen sisältä, sironnat pysäyttävät elektronijoukon vaelluksen lähes välittömästi. Yksittäiset elektronit eivät tällöinkään pysähdyn, vaan ne päätyvät liikkumaan täysin satunnaisesti. Elektronien vauhti voi olla hyvin suuri, mutta niitä liikkuu yhtä paljon kaikkiin suuntiin, jolloin niiden vaellusnopeus on edelleen nolla. Tällöin varausta ei keskimäärin siirry mihinkään suuntaan, joten tällaiset elektronit eivät myöskään kuljeta sähkövirtaa mihinkään suuntaan.

Kun metalli on hyvin kylmä, atomiytimet ovat lähes paikoillaan ja elektronit törmäilevät ytimiin varsin harvoin. Kuitenkin mitä lämpimämpi metalli on, sitä enemmän ytimet värähtelevät ja sitä enemmän ydinten ja elektronien välisiä törmäyksiä tapahtuu. Elektronien vaellusnopeus on hyvin pieni yksittäisten elektro- nien keskimääräiseen vauhtiin verrattuna, joten vaellusnopeuden suuruus ei juurikaan vaikuta siihen, kuinka usein elektronit törmäävät ytimiin ja kuinka suuria impulsseja elektronit näissä törmäyksissä saavat. Kuitenkin mitä suurempi vaellusnopeus on, sitä todennäköisemmin kullakin yksittäisellä elektronilla on nopeuden komponentti vaellusnopeuden suuntaan, ja sitä todennäköisemmin *siihen kohdistuu törmäyksessä voima vaellusnopeuteen nähdyn vastakkaiseen suuntaan*. Niinpä yksittäiseen elektroniin kohdistuu sen kokemissa törmäyksissä keskimäärin voima

$$\langle \bar{F}_e \rangle = -a\bar{v}_{\text{vaellus}}, \quad (11.10)$$

missä a on jokin (metallin ominaisuuksista ja lämpötilasta riippuva) verrannollisuuskerroin. Kokonaisen elektronijoukon (n_e elektronia) vaellusta jarruttaa siis voima

$$\bar{F}_{\text{sironota}} = n_e \langle \bar{F}_e \rangle = -n_e a \bar{v}_{\text{vaellus}}. \quad (11.11)$$

Elektroneja kiipyttävä voima on puolestaan verrannollinen niiden kokonaisvaraukseen $q = -n_e e$ ja sähkökenttään \bar{E} ,

$$\bar{F}_E = q\bar{E} = -n_e e \bar{E}. \quad (11.12)$$

Jos sähkökentän tuottama voima on suurempi kuin liikettä vastustava voima, elektronien vaellusnopeus kasvaa. Ja päinvastoin jos liikettä vastustava voima on sähkökentän voimaa suurempi, vaellusnopeus pienenee. Lopujen lopuksi elektronijoukko saavuttaa tasapainotilan, jossa nämä voimat keskimäärin kumoavat toisensa,

$$\bar{F}_E + \bar{F}_{\text{sironota}} = -n_e e \bar{E} - a n_e \bar{v}_{\text{vaellus}} = 0. \quad (11.13)$$

Tämä tapahtuu täsmälleen silloin, kun elektronien vaellusnopeus on

$$\bar{v}_{\text{vaellus}} = -\frac{e}{a} \bar{E}. \quad (11.14)$$

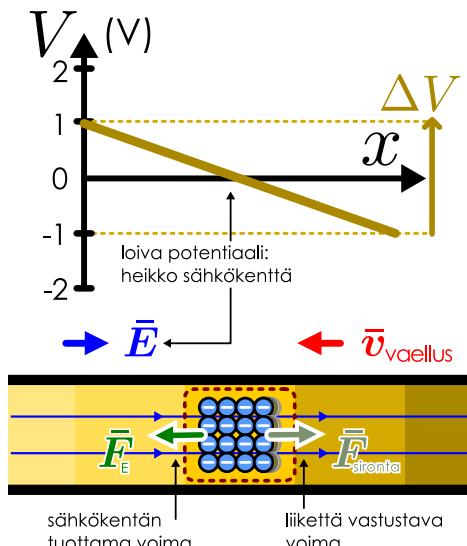
Toisin sanoen *elektronien vaellusvauhti on suoraan verrannollinen johteen sisäisen sähkökentän voimakkuuteen*.

Pohditaan tämän tuloksen merkitystä tarkastelemalla jälleen lampun hehkulankaa. Asetetaan x -akseli langan suuntaan ja merkitään langan pituutta Δx sekä poikkipinta-alaa A . Oletetaan myös langan koostuvan kauttaaltaan samasta metallista. Jos langan päiden välille tuotetaan potentiaaliero ΔV , tämä luo lankaan sähkökentän

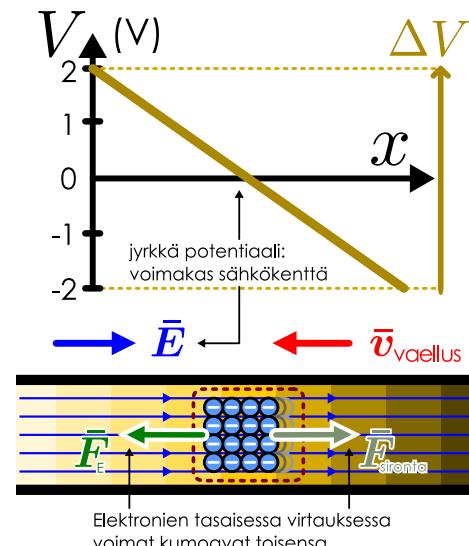
$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad (11.15)$$

Kuva 11.8: Metallin läpi kulkeviin elektroneihin kohdistuu sironoista johtuen niiden liikettä vastustava voima. Kun metallissa on sähkökenttä, elektronit saavuttavat nopeasti sellaisen vaellusnopeuden, jolla sironojen tuottama voima kumoaa sähkökentän tuottaman voiman.

(a) Loivasti muuttuvassa potentiaalissa sähkökenttä on heikko ja vaellusnopeus pieni.



(b) Jyrkästi muuttuvassa potentiaalissa sähkökenttä on voimakas ja vaellusnopeus suuri.



joka siis osoittaa korkeasta potentiaalista kohti matalaa potentiaalia (kuva 11.8). Yhtälön (11.14) mukaan tämä sähkökenttä saa hehkulangan elektronit kulkemaan kohti korkeaa potentiaalia vaellusnopeudella

$$v_{x,\text{vaellus}} = \frac{e}{a} \frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad (11.16)$$

jolloin johtimessa kulkee sähkövirta päinvastaiseen suuntaan, korkeasta potentiaalista matalaan.

Johdimme jo aikaisemmin lausekkeen (11.9), $i = \rho A v_{x,\text{keskiarvo}}$, joka kertoo johtimessa kulkevan virran suuruuden johtimen ominaisuuksien ja varauksenkuljettajien keskimääräisen nopeuden perusteella. Yhtälössä esiintyvä keskimääräinen nopeus on nimenomaan vaellusnopeus, $v_{x,\text{keskiarvo}} = v_{x,\text{vaellus}}$, joten voimme sijoittaa sen paikalle lausekkeen (11.16), ja näin saamme johtimessa kulkevaksi sähkövirkaksi

$$i = \frac{\rho e}{a} A \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.17)$$

Tämän yhtälön mukaan *johtimessa kulkeva sähkövirta i on suoraan verrannollinen johtimen pääiden väliseen potentiaalieroona ΔV* . Yhtälössä esiintyvä verrannollisuuskerroin riippuu johdinmateriaalin ominaisuuksista: elektronien varaustiheydestä ρ sekä elektroneja hidastavan vuorovaikutuksen voimakkuutta kuvaavasta kerroimesta a . Nämä ominaisuudet voidaan yhdistää yhdeksi vakioksi

$$\sigma = \left| \frac{\rho e}{a} \right| = -\frac{\rho e}{a}, \quad (11.18)$$

jota kutsutaan johdinmateriaalin **johtavuudeksi**. (Tässä on miinusmerkki siksi, että elektronien varaustiheys on negatiivinen, mutta johtavuus on positiivinen vakio. Johtavuudelle käytetään usein samaa symbolia kuin pintavaraustiheydelle, mutta kyseessä on aivan erilainen suure.) Näin yhtälö (11.17) voidaan kirjoittaa hieman yksinkertaisempaan muotoon

$$i = -\sigma A \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.19)$$

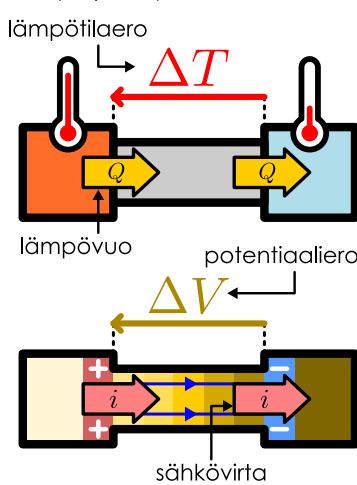
Sähkövirran ja potentiaalin muutoksen yhdistävä laki (11.19) on matemaattisesti samaa muotoa kuin lämmönjohtavuutta kuvaava yhtälö (7.55),

$$\Phi_Q = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (11.20)$$

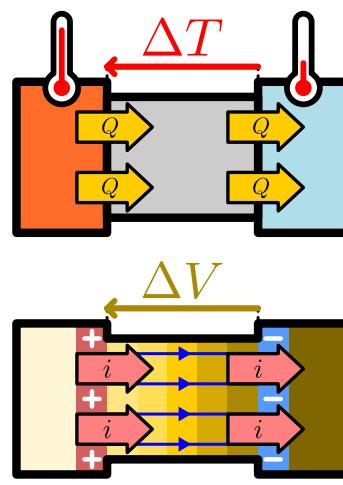
joka yhdistää lämpövuon, lämmönjohtavuuden ja lämpötilaeron. Lämmön- ja sähköjohtavuuden välillä onkin täsmällinen analogia (kuva 11.9). Lämmön siirtymisen johtumalla vaatii lämpötilaeron, ja lämpöä siirtyy sitä nopeammin, mitä jyrkemmin lämpötila muuttuu paikan funktiona ja mitä parempi lämmönjohde on kyseessä. Vastaavasti yhtälön (11.19) mukaan sähkövirran kulku johteessa vaatii potentiaalieron, ja sähkövarausta siirtyy sitä nopeammin, mitä jyrkemmin potentiaali muuttuu paikan funktiona ja mitä parempi sähköjohde on kyseessä. Lämpö siirtyy johtumalla korkeasta lämpötilasta kohti matalaa lämpötilaa, ja sähkövirta kulkee korkeasta potentiaalista kohti matalaa potentiaalia.

Kuva 11.9: Sähkö- ja lämmönjohtavuuden analogia.

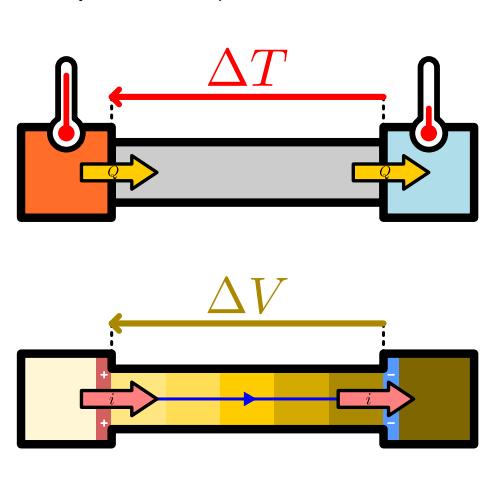
(a) Varaus (lämpö) virtaa kohti matalaa potentiaalia (lämpötilaa).



(b) Paksuun johteseen mahtuu suuri virta.



(c) Pitkässä johteessa potentiaali (lämpötila) muuttuu loivasti, jolloin virta on pieni.



Yhtälö (11.19) ei ole aina kovin käytökelpoinen, koska siinä on mukana vielä johtimen pituus, poikkipinta-ala ja johtavuus, ja näitä voi olla vaikea määrittää esimerkiksi lampun hehkulangalle. Siksi on kätevämpää koota ne kaikki yhdeksi vakioksi

$$R = \frac{\Delta x}{\sigma A}, \quad (11.21)$$

jota kutsutaan johtimen **resistanssiksi**. Tämän vakion avulla yhtälö (11.19) voidaan kirjoittaa hyvin yksinkertaiseen muotoon

$$i = -\frac{1}{R} \Delta V, \quad (11.22)$$

jota kutsutaan *Ohmin laiksi* (Georg Ohmin mukaan). Resistanssin yksikkö on helppo päättää Ohmin laista, mutta tällä yksiköllä on myös erikoisnimi **ohmi**, ja sitä merkitään suurella kreikkalaisella omega-kirjaimella,

$$[R] = \frac{[\Delta V]}{[i]} = \frac{V}{A} = \Omega. \quad (11.23)$$

Ohmin lain mukaan johtimen läpi kulkeva virta i on sitä suurempi, mitä suurempi potentiaaliero ΔV johtimen päiden välillä on. Virran ja potentiaalieron välinen verrannollisuuskerroin on johtimen resistanssi, ja virta on siis sitä suurempi, mitä pienempi resistanssi on. Toisin sanoen *johteen päiden välille luotu potentiaaliero saa johteessa aikaan sähkövirran, ja resistanssi kuvailee johteen kykyä vastustaa tämän virran kulkuua*. Yhtälössä (11.22) esiintyvä miinusmerkki muistuttaa siitä, että kun johtimen läpi kuljetaan virran kulkusuuntaan (eli i on positiivinen), potentiaali pienenee (eli ΔV on negatiivinen). Monissa lähteissä laki kirjoitetaan ilman tästä miinusmerkkiä, mutta tällöin on erikseen huolehdittava siitä, että potentiaalin muutos tulee laskettua oikein päin.

Ohmin laki pätee vain materiaaleille, joissa varauksenkuljettajien lükettä vastustaa niiden vaellusnopeuteen verrannollinen voima. Johtetut kuten metallit ovat tällaisia, vaikkakin esimerkiksi metallien johtavuus on hyvin suuri, jolloin suurten metallikappaleiden resistanssi on hyvin pieni. Sähkötekniikassa komponentteja, joilla on resistanssia ja joita siis kuvaa Ohmin laki, kutsutaan **vastuksiksi**, koska ne vastustavat sähkövirran kulkuua. Huomaa kuitenkin, että Ohmin laki pätee *vain* vastuksille, eikä kyseessä siis ole yleispätevä virran ja potentiaalierojen välinen laki. Muissa komponenteissa sähkövirran ja jännitteen välinen riippuvuus on erilainen.



11.7 Erään sähköisen komponentin navalle A saapuu 5 A sähkövirta ja navalta B poistuu 5 A sähkövirta. Mikä on potentiaaliero $\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A$ napojen välillä, jos kyseessä on (a) ideaalinen johdin, (b) 10 V ideaalinen paristo (plusnapa B:n puolella), (c) 10 nF ideaalinen varaamaton kondensaattori tai (d) 10 Ω ideaalinen vastus?

esimerkki 11.1

Virta ja vastus

Kupariohdimen pituus on 15.0 m ja säde 0.10 mm. Johtimen pääti yhdistetään ideaaliseen paristoon, jonka jännite on 1.5 V. (a) Mikä on johtimen resistanssi? (b) Kuinka suuri virta johtimen läpi kulkee? (c) Kuinka nopeasti elektronit vaeltavat?

TILANNE Kuparin johtavuus on $\sigma = 6.0 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$ ja sähköä kuljettavien elektronien tiheys on kuparissa noin $\rho_e = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, jolloin elektronien varaustiheys on $\rho = \rho_e e$.

SUUNNITELMA Johtimen resistanssi on suoraan verrannollinen johtimen pituuteen L ja käantäen verrannollinen sen poikkipinta-alaan A ja johtavuuteen,

$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{L}{\sigma \pi R^2}. \quad (11.24)$$

Paristo tuottaa johtimen pääden välille potentiaalieron, jolloin johtimessa alkaa kulkea Ohmin lain mukaisesti sähkövirta

$$|i| = \frac{1}{R} \Delta V \quad (11.25)$$

korkeasta potentiaalista (pariston plusnapa) kohti matalaa potentiaalia (pariston miinusnapa). Virran voi kirjoittaa myös varauksen määräin ja sen nopeuden avulla muodossa $i = \rho A v_{\text{vaellus}} = \rho_e e \pi R^2 v_{\text{vaellus}}$, jolloin vaellusnopeudeksi ratkeaa

$$v_{\text{vaellus}} = \frac{i}{\rho_e e \pi R^2} : \quad (11.26)$$

RATKAISU (a) Resistanssi on $R = 8.0 \Omega$, (b) virta $i = 0.19 \text{ A}$ ja (c) vaellusnopeus $v_{\text{vaellus}} = 0.44 \text{ mm/s}$.

ARVIOINTI Kupari on erinomainen johde, ja usein lyhytä kupariohdimia voikin pitää ideaalisina johtimina, joilla ei ole lainkaan vastusta. Tässä tarkasteltu johdin on kuitenkin pitkä ja hyvin ohut, joten sen resistanssi ei ole aivan mitätön. Huomaa myös, kuinka hitaasti elektronit vaeltavat.

Virrantiheys

Sähkövirta kuvaa koko johtimen kautta kulkevan sähkövarauksen kokonaismäärää, mutta joskus on tarpeellista tietää tarkemmin, miten varauksenkuljettajat liikkuvat. Esimerkiksi jos virta kulkee eri materiaaleista koostuvan tai epäsäännöllisen muotoisen kappaleen läpi, varauksenkuljettajien tiheys sekä niiden vaellusnopeus saattavat olla eri paikoissa erilaiset, jolloin myös varausta siirtyy eri paikoissa eri nopeudella. Tällaisissa tapauksissa **virrantiheys** on käytökkelinpoinen suure varausten liikkeen kuvaamisessa.

Virrantiheys kuvaa varaustenkuljettajien siirtämän varauksen määrää aikaa ja pinta-alaa kohden. Esimerkiksi suorassa virtajohtimessa, jonka poikkipinta-ala on A ja jossa kulkee homogeeninen sähkövirta i , virrantiheys on

$$j_x = \frac{i}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (11.27)$$

Päättelimme jo aikaisemmin, että kun kytkimme lampun kuparijohtimilla paristoon virtapiiriksi, kaikkialla piirissä alkoi kulkea sama virta i . Kuitenkin koska lampun hehkulanka on hyvin ohut verrattuna kuparijohtimiin, hehkulangassa kulkee tällöin paljon suurempi virrantiheys kuin kuparissa. Tästä syystä hehkulanka kuumenee mutta kupari ei. Samalla periaatteella hyvin pienissä elektronisissa komponenteissa voi olla suuri virrantiheys, vaikka niissä kulkisikin vain hyvin pieni sähkövirta, ja tämä on otettava huomioon elektronisten laitteiden suunnittelussa.

Virrantiheyden voi yhdistää myös varauksenkuljettajien määrään ja liikkeeseen. Suorassa johtimessa kulkeva sähkövirta on nimitäin yhtälön (11.9) mukaisesti verrannollinen varauksenkuljettajien varaustiheyteen ρ , niiden vaellusnopeuteen $v_{x,\text{vaellus}}$ ja johtimen poikkipinta-alaan A . Toisaalta koska virrantiheys on sähkövirran ja johtimen pinta-alan suhde, virrantiheyden täytyy olla verrannollinen vain varauksenkuljettajien varaustiheyteen ja nopeuteen,

$$j_x = \rho v_{x,\text{vaellus}}. \quad (11.28)$$

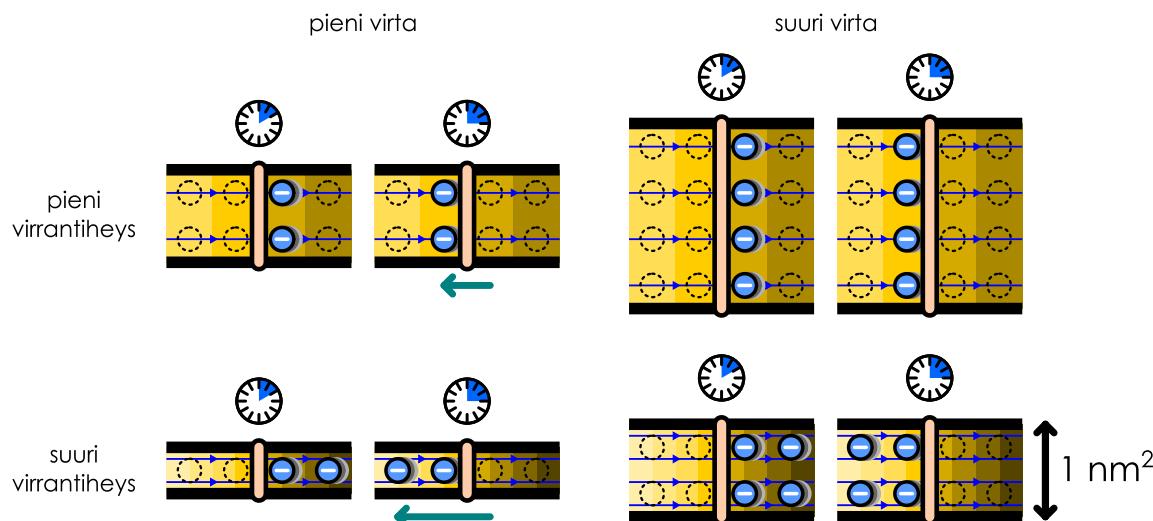
On tavallinen väärinkäsitys ajatella sähkövirran kuvavan varauksenkuljettajien liikkeen nopeutta. Näinhän ei ole, vaan sähkövirta kuvaa siirtyneen varauksen kokonaismäärää. Varausta toki siirtyy sitä nopeammin mitä nopeammin varauksenkuljettajat liikkuvat, mutta virta riippuu myös johtimen poikkipinta-alasta, ja paksuman johtimen läpi voi kulkea suuri virta vaikka varauksenkuljettajat liikkuisivatkin siivä hitaasti (kuva 11.10). Virrantiheyden voi sen sijaan ajatella todella kuvavan varauksen liikkeen nopeutta. Sekin riippuu toki varaustiheydestä, mutta varaustiheys on johdinmateriaalista riippuva vakio, johon esimerkiksi johtimen koko tai muoto ei vaikuta mitenkään.



- 11.8** (a) Kuvassa 11.10 kukin pallo on yksi elektroni ja vierekkäisten kuvien välinen aikaero on $\Delta t = 1.0\mu\text{s}$. Mikä on (i) virta ja (ii) virrantiheys kussakin kuvassa?
 (b) Mikä olisi virta johtimessa, jonka poikkipinta-ala on 1 mm^2 ja jossa on yhtä suuri virrantiheys kuin kuvissa?

Myös Ohmin lain voi kirjoittaa virrantiheyden avulla kokonaivirran sijaan. Suoran johtimen läpi kulkevan virran voi nimitäin kirjoittaa yhtälön (11.19) perusteella potentiaalin muutoksen avulla, joten virrantiheydeksi

Kuva 11.10: Virta kertoo johtimen läpi kulkevan varauksen määrän. Virrantiheys on tämän varauksen määrä pinta-alayksikköö kohti, ja se on myös verrannollinen varauksenkuljettajien nopeuteen.



saadaan

$$j_x = \frac{i}{A} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta x}. \quad (11.29)$$

Ja edelleen koska sähkökenttä osoittaa potentiaalin pienemissuuntaan yhtälön $E_x = -\Delta V/\Delta x$ mukaisesti, *virrantiheyden täytyy olla verrannollinen sähkökenttään ja johtavuuteen*,

$$j_x = \sigma E_x. \quad (11.30)$$

Tämä tulos pätee siis suorassa johtimessa, joka on x -akselin suuntainen. Yleisesti sama tulos pätee kaikkien koordinaattiakselien suunnissa, jolloin saamme yhtälön

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}. \quad (11.31)$$

Tämä on *Ohmin laki virrantiheydelle*.

Kokonaista johdetta koskeva Ohmin laki (11.22) kertoi meille, että johtimen pääiden välinen potentiaaliero tuottaa johtimeen sähkövirran. Ohmin lain muoto (11.31) puolestaan osoittaa sen, että johtimessa oleva sähkökenttä synnyttää johtimeen virrantiheyden. Fysikaalisesti nämä ovat sama asia, mutta vain eri näkökulmasta. Kokonaisvirtaa koskeva muoto puhuu *koko johtimen* pääiden potentiaaleista ja johtimen läpi kulkevan varauksen kokonaismäärästä. Virrantiheyttä koskeva muoto puolestaan tarkastelee johtimen *yhtä pistettä* yhdistäen tässä pisteessä vaikuttavan sähkökentän varauksenkuljetajien liikkeeseen tässä kyseisessä pisteessä.

esimerkki 11.2

Virta ja virrantiheys

Eräs poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoinen johdin (säde $R = 4.0 \cdot 10^{-4}$ m) ei ole kauttaaltaan samanlaista materiaalia, ja siiä virrantiheys riippuu keskiakselista mitatusta etäisyydestä r funktion $j_x = ar^2$ mukaisesti ($a = 3.0 \cdot 10^{12}$ A/m⁴). Kuinka suuri virta johtimessa kulkee?

TILANNE Piirretään kuva johtimesta. Jaetaan johdin analyysiä varten kapeisiin renkaisiin, joiden paksuus on dr . Näiden renkaiden pinta-ala on $dA = 2\pi r dr$.

SUUNNITELMA Jos virrantiheys on vakio, virta on virrantiheyden ja johtimen poikkipinta-alan tulo. Nyt virrantiheys ei ole vakio, mutta voimme jakaa johtimen pieniin osiin, joissa virrantiheys on likimain vakio. Tällöin kunkin osan läpi kulkeva virta saadaan osan pinta-alan ja sen läpi kulkevan virrantiheyden tulona. Nyt virrantiheys riippuu vain säätestä, joten johdin voidaan jakaa ohuisiin renkaisiin, ja virrantiheys kunkin renkaan läpi on likimain vakio. Kokonaisvirta koko johtimen läpi saadaan laskemalla kaikkien renkaiden läpi kulkeva virta yhteen.

Virta kunkin renkaan läpi on

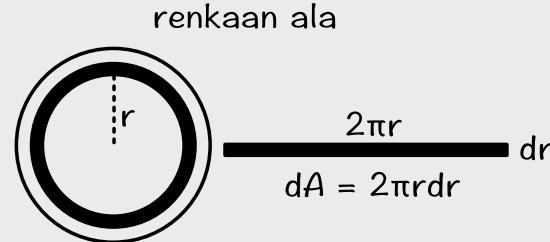
$$di = j_x(r)dA = 2\pi ar^3 dr \quad (11.32)$$

ja kokonaisvirta on integraali $i = \int di$.

RATKAISU Kokonaisvirta on siis

$$i = \int_0^R 2\pi ar^3 dr = 2\pi a \left[\frac{1}{4}r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2}\pi a R^4 = 120 \text{ mA.} \quad (11.33)$$

ARVIOINTI Virrantiheyden maksimi on $j_{x,\max} = aR^2 = 4.8 \cdot 10^5$ A/m² ja johtimen pinta-ala on $A = \pi R^2 = 5.0 \cdot 10^{-7}$ m². Kokonaisvirran pitää siis olla samaa luokkaa mutta pienempi kuin $i_{\max} = j_{x,\max} A = 240$ mA kuten onkin.



11.9 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä resistanssista ja vastuksista. Määrittele johtavuus ja resistanssi. Selitä miksi ja miten vastuksessa virta ja jännite sekä toisaalta virrantiheys ja sähkökenttä ovat toisiinsa verrannolliset.

Ideaalinen johde ja jännitelähde

Palataan vielä analysoimaan pariston, kuparijohdinten sekä lampun muodostamaa virtapiiriä, ja tarkastellaan sitä nyt erityisesti johtavuuden ja resistanssin näkökulmasta. Tämä piirihän toimii niin, että paristo pyrkii pitämään napojensa välisen potentiaalieron vakiona, jolloin vastakkaisiin napoihin kiinnitetyt johtimet saavat eri

potentiaalit. Tämä saa aikaan potentiaaliero hehkulampun napojen välille, ja tämä potentiaaliero synnyttää hehkulankaan Ohmin lain mukaisen sähkövirran. Mutta toisaalta päättelimme jo aikaisemmin, että jos elektronit liikkuvat hehkulangassa, niiden täytyy liikkua myös kuparijohtimissa. Näin ollen myös kuparijohtimissa kulkee sähkövirta, ja koska kuparikin on johde, Ohmin laki pätee myös sille. Näin ollen myös kuparijohdinten päiden välillä pitäisi olla potentiaaliero, vaikka aikaisemmin väitimme näiden johdinten olevan kauttaaltaan samassa potentiaalissa. Tässä on ristiriita, joka kaipaa selvittämistä.

Piirissä liikkuvat elektronit käyttäytyvät kuin kokoontumaton neste, jolloin sekä kuparijohdinten että hehkulangan läpi täytyy kaikkialla kulkea yhtä paljon elektroneja (vrt. kuva 11.2). Hehkulanka on kuitenkin hyvin paljon ohuempi kuin kuparilangat, jolloin elektronien täytyy vaeltaa hehkulangassa selvästi nopeammin kuin kuparissa (vrt. nesteen nopeus ohessa ja paksussa putkessa). Elektronien vaellusnopeus on yhtälön (11.28) mukaisesti suoraan verrannollinen virrantiheyteen, joten virrantiheys on hehkulangassa paljon suurempi kuin kuparissa,

$$j_{\text{hehkulanka}} \gg j_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.34)$$

Virrantiheys on puolestaan yhtälön (11.31) mukaan verrannollinen johteessa vaikuttavaan sähkökenttään, joten hehkulangassa täytyy olla selvästi voimakkaampi sähkökenttä kuin kuparijohtimissa

$$E_{\text{hehkulanka}} \gg E_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.35)$$

Toisaalta sähkökenttä kertoo potentiaalin jyrkkyyden, joten hehkulangassa potentiaalin täytyy muuttua paljon lyhyellä matkalla. Kuparijohtimessa sähkökenttä on heikko, joten potentiaali muuttuu pitkilläkin matkoilla vain vähän. Niiinpä hehkulangan päiden välillä on suuri potentiaaliero, mutta kuparijohtimissa potentiaali on melkein sama johtimen kummassakin päässä.

Saman asian voi päättää myös suoraan sähkövirran kautta. Kuten sanottu, sekä kuparijohdinten että hehkulangan läpi täytyy kaikkialla kulkea yhtä paljon elektroneja. Tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että *piirissä kulkee kaikkialla sama sähkövirta*, koska sähkövirta mittaa nimenomaan siirtyneen varauksen määrää (eikä esimerkiksi elektronien vaellusnopeutta, joka ei ole sama kaikkialla). Siispä

$$i_{\text{hehkulanka}} = i_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.36)$$

Kuparijohtimet ovat kuitenkin huomattavasti paksummat, lyhyemmät ja paremmin johtavat kuin hehkulampun hehkulanka (joka on yleensä hyvin ohut ja pitkä, spiraalille kierretty wolframlanka), joten niiden resistanssi on paljon pienempi kuin hehkulangan,

$$R_{\text{hehkulanka}} \gg R_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.37)$$

Ohmin laki (11.22) pätee molemmille, ja jos ratkaisemme siihen potentiaalin muutoksen, saamme epäyhtälön

$$\Delta V_{\text{hehkulanka}} = R_{\text{hehkulanka}} i_{\text{hehkulanka}} \gg R_{\text{kuparijohdin}} i_{\text{kuparijohdin}} = \Delta V_{\text{kuparijohdin}}. \quad (11.38)$$

Kuparijohtimet eivät siis ole täsmälleen vakiopotentiaalissa vaan niissä on jännite. Potentiaaliero kuparijohdinten päiden välillä on kuitenkin huomattavasti pienempi kuin lampun napojen välinen jännite, joten yksinkertaistettu malli, jossa kuparijohdinten ajatellaan olevan vakiopotentiaalissa, on varsin hyvä. Tämä malli vastaa approksimaatiota $R_{\text{kuparijohdin}} = 0$, ja sitä kutsutaan *ideaalisen johteen malliksi*. Ideaalisessa johteessa johtavuus on ääretön ja varaus pääsee liikkumaan täysin ilman resistanssia. Tällöin minkä tahansa sähkövirtan tuottamiseen riittää mielivaltaisen heikko sähkökenttä ja siten kuinka pieni potentiaaliero tahansa. Niinpä siinä missä todelliset joheet ovat vakiopotentiaalissa vain, jos niissä ei kulje sähkövirtaa, *ideaalisessa johteessa potentiaali on aina sama kaikkialla*. Jos virtapiirissä on komponentteja kuten lamppuja, joiden resistanssi on paljon suurempi kuin piirissä käytettävien johdinten, johtimet ovat likimain vakiopotentiaalissa. Tällöin on yleensä helpointa ajatella johdinten olevan ideaalisia, jolloin ne ovat täsmälleen vakiopotentiaalissa.

Myös paristoissa kulkeviin ioniin kohdistuu välialineen vastus niiden liikkuessa elektrolyytissä, ja niinpä myös paristoilla on sisäistä resistanssia, $R_{\text{sisäinen}}$. Virran kulkissa pariston läpi tämä resistanssi aiheuttaa potentiaalin muutoksen pariston napojen välillä, ja Tästä syystä napojen välinen jännite vastaa lähdejännitettä vain silloin, kun pariston läpi ei kulje lainkaan sähkövirtaa. Virran kulkissa pariston läpi negatiiviselta navalta positiiviselle napojen välinen potentiaaliero on resistanssin vuoksi hieman lähdejännitettä pienempi,

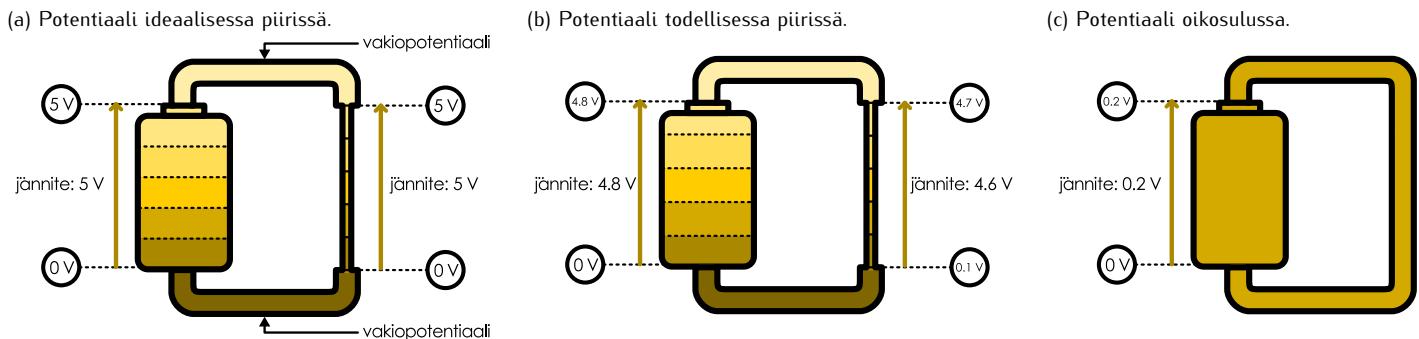
$$\Delta V = \mathcal{E} - R_{\text{sisäinen}} i. \quad (11.39)$$

Tavallisesti paristojen sisäinen resistanssi on kuitenkin varsin pieni, joten sekin voidaan usein jättää huomioidottomaksi. Tätä kutsutaan *ideaalisen jännitelähteen malliksi*. Ideaalinen jännitelähde pitää napojensa välisen potentiaalin *aina* täsmälleen samana.



11.10 Luvussa 10.5 tarkastelimme energian muutoksia paristossa. Vertaa energiatarkastelua ja tässä esitettyä sisäisen resistanssin mallia. Miten resistanssi ilmenee luvun 10.5 tarkastelussa?

Kuva 11.11: Ideaalisen johtimen ja jännitelähteen malli. Ideaalinen johdin on aina kauttaaltaan vakiopotentiaalissa. Ideaalisen pariston napojen välinen jännite on aina sama kuin pariston lähdejännite. Nämä ideaaliset mallit toimivat tavallisesti melko hyvin, mutta oikosulkutilanteessa johdinten ja paristojen resistanssit ovat merkittävät.



Ideaalisen johteen ja jännitelähteen malli on havainnollistettu kuvassa 11.11. Kuvassa (a) on ideaalinen paristo, jonka napojen välinen jännite on täsmälleen 5 V. Potentiaalin nollatasoksi on valittu pariston negatiivinen napa, joten pariston positiivisen navan potentiaali on siis 5 V. Paristoon on kiinnitetty ideaaliset johtimet, joissa potentiaali on vakio. Niinpä positiiviseen napaan kiinnitetty johdin on kauttaaltaan potentiaalissa 5 V ja negatiiviseen napaan kiinnitetty potentiaalissa 0 V. Johtimet on yhdistetty lamppuun, jonka hehkulangan pääiden välinen potentiaaliero on siis sama kuin pariston, 5 V.

Kuvassa (b) on esitetty vastaava tilanne, kun paristo ja johtimet ovat epäideaaliset. Pariston lähdejännite on yhä 5 V, mutta sen napojen välinen jännite on hieman tätä pienempi, 4.8 V. Paristoon kytketyt johtimet kaan eivät ole täysin vakiopotentiaalissa, vaan potentiaali muuttuu kummassakin johtimessa 0.1 V. Näin ollen hehkulangan pääiden välinen potentiaaliero on 4.6 V, mikä on hieman vähemmän kuin mitä ideaalisten johdinten ja pariston malli ennusti. Riippuu tilanteesta ja vaaditusta tarkkuudesta, onko ideaalisten komponenttien malli tarpeeksi hyvä vai pitääkö paristojen ja johdinten resistanssi ottaa erikseen huomioon.

On kuitenkin eräs tilanne, jossa ideaalisten komponenttien malli ei koskaan toimi, ja tämä on esitetty kuvassa (c). Tässä kytkennessä pariston navat yhdistetään suoraan künni toisiinsa johtimilla. Tällöin paristo yrittää pitää napojensa välillä aina saman *potentiaaliero*, kun taas johdin yrittää pitää pariston navat *samaassa potentiaalissa*. Ehdot on mahdoton toteuttaa samanaikaisesti, joten ideaalisten komponenttien malli johtaisi tässä tilanteessa ristiriitaan. Tätä tilannetta kutsutaan **oikosuluksi**. Ohmin lain (11.22) mukaan virtapiirissä kiertyvä sähkövirta on käänten verrannollinen piirin resistanssiin, ja ideaalisissa komponenteissa resistanssi on nolla, jolloin piirissä pitäisi kulkea äärettömän suuri *oikosulkuvirta*. Tämä ei ole tietenkään mahdollista, joten pariston ja johdinten pieni mutta nollaa suurempi resistanssi on otettava huomioon. Kuitenkin koska komponenttien resistanssi on hyvin pieni, oikosuljetussa piirissä kulkee hyvin suuri virta, jolloin potentiaaliero pariston napojen välillä on selvästi pienempi kuin lähdejännite.



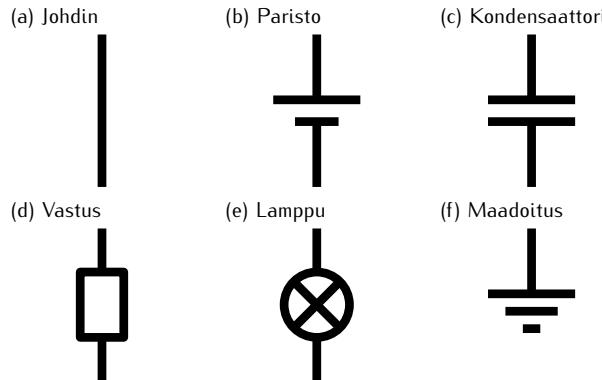
- 11.11** (a) Mihin muotoihin pariston varastoima kemiallinen energia muuttuu kuvan 11.11 (b) ja (c) tilanteissa
 (i) paristossa ja (ii) johtimissa ja hehkulangassa?
 (b) Kummassa tilanteessa kemiallista energiota muuttuu nopeammin (eli suuremmalla teholla)?
 (c) Oikosulku voi olla vaarallinen. Selitä tämän perusteella miksi.

11.3 Virtapiirit

Sähkötekniikassa ja elektroniikassa käytetään monenlaisia komponentteja, ja niistä voidaan rakentaa monimutkaisia virtuja ja jännitteitä ohjaavia virtapiirejä. Tähän mennessä olemme tutustuneet johtimiin, kondensaattoreihin, jännitelähteisiin, vastuksiin, lamppuihin sekä maadoituukseen, ja tietuenkin elektronisia komponentteja on olemassa paljon muitakin kuin tässä mainitut. Kerrataan näiden komponenttien ideaaliset ominaisuudet:

- Johtimen kaikki pistet ovat aina samassa potentiaalissa.
- Kondensaattoriin voi kulkea virta vain silloin, kun kondensaattorin varaus muuttuu, ja potentiaaliero kondensaattorin napojen välillä on suoraan verrannollinen varaukseen.
- Jännitelähteen napojen välillä on aina sama potentiaaliero.
- Vastuksen ja lampun läpi kulkee virta laskevan potentiaalin suuntaan. Virta on suoraan verrannollinen potentiaalieroona.
- Maadoituspisteen potentiaaliksi on sovittu nolla.

Kuva 11.12: Tavallisia sähköisten komponenttien symboleja.



Piirien rakenne esitetään tavallisesti *piirikaavioina*, joissa kutakin komponenttia kuvaaa oma symbolinsa (kuva 11.12). Joistakin komponenteista on käytössä myös muita vaihtoehtoisia symboleita, mutta tässä materiaalissa käytämme näitä. Seuraava tehtäväämme onkin siirtää yksittäisten komponenttien tarkastelusta tutkimaan piirien toimintaa.

esimerkki 11.3

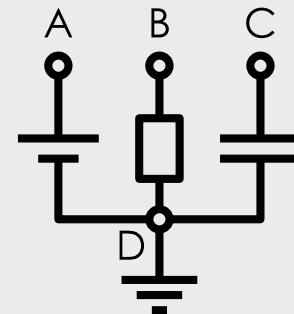
Komponentit

Paristo (9 V), vastus ($4.5 \text{ k}\Omega$) ja kondensaattori (300 nF , ei varausta) on kytketty toisesta navastaan maahan kuten kuvassa. (a) Mikä on potentiaali pürin pisteissä A–D? (b) Mikä on virta jokaan komponenttiin läpi? (c) Komponenttien toisetkin navat (pisteet A–C) yhdistetään johtimella. Miten ovat tämän jälkeen potentiaalit ja virrat? (d) Pisteet A–C yhdistävä johdin poistetaan jälleen, jolloin kytkentä on jälleen sama kuin alkuksi. Miten ovat nyt potentiaalit ja virrat?

RATKAISU Maadoituspisteen D potentiaaliksi on sovittu nolla, joten aina pätee $V_D = 0$ V. Maadoitus ei tässä vaikuta pürin toimintaan millään muulla tavalla.

Paristo pitää napojen välichen jännitteen vakiona, ja nyt plusnapa on kytketty pisteeseen A, joten $\Delta V_{D \rightarrow A} = V_A - V_D = 9$ V ja siis aina $V_A = 9$ V.

Vastuksen napojen välillä on jännite, jos vastuksen läpi kulkee virta, ja kondensaattorin napojen välillä on jännite, jos kondensaattorissa on varaus. Alkutilanteessa ei ole suljettua piirriä, joten virta ei voi kulkea (pisteeseen B ei voi kerääntyä varausta) ja siis $V_B = 0$ V. Kondensaattorissa ei myöskään ole varausta, joten $V_C = 0$ V. Virta on nolla kaikkialla.



Kun pistet A, B ja C yhdistetään, ne saavat kaikki saman potentiaalin. Siispä $V_A = V_B = V_C = 9$ V, koska paristo pitää pisteen A potentiaalin aina 9 volttia pisteen D potentiaalia korkeammalla. Nyt vastuksen päiden välillä on jännite, joten sen läpi kulkee virta

$$i_{B \rightarrow D} = -\frac{1}{R} \Delta V_{B \rightarrow D} = -\frac{1}{R} (V_D - V_B) = -\frac{1}{4.5 \text{ k}\Omega} \cdot (-9 \text{ V}) = 2 \text{ mA.} \quad (11.40)$$

Virta kulkee siis pisteestä B kohti pistettä D.

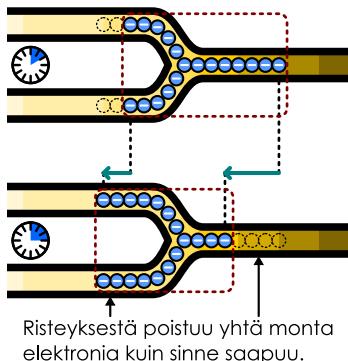
Kondensaattorin navat ovat nyt myös eri potentiaalissa, joten kondensaattorilla täytyy olla varaus $Q = C\Delta V = 2700$ nC. Paristo siis siirtää positivista varausta kondensaattorin yhdelle levylle ja negatiivista toiselle, kunnes yhden levyn varaus on $+Q$ ja toisen $-Q$. Varautumisen aikana kondensaattoriin kulkee hyvin lyhyen hetken virta, mutta kun kondensaattori on varautunut niin että sen jännite on yhtä suuri kuin pariston jännite, varausta ei enää siirry eikä kondensaattorin siis kulje virtaa. Virta kulkee siis vain pariston ja vastuksen läpi reittiä $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$.

Kun pisteet A–C yhdistävää johdin jälleen poistetaan, kytkentä palaa samanlaiseksi kuin alkuksi. Virta ei enää pääse kulkemaan, ja pisteen B potentiaali on jälleen sama kuin pisteen D potentiaali, $V_B = 0$ V. Kondensaattori on kuitenkin edelleen varattu, sillä nyt pisteen C puoleinen kondensaattorin levy on täysin eristetty muista komponenteista eikä sinne varastoitunut sähkövaraus pääse poistumaan. Niinpä kondensaattorissa on edelleen varaus $Q = 2700$ nC. Levyjen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero $\Delta V_{D \rightarrow C} = Q/C = 9$ V. Pisteen C potentiaali on siis $V_C = 9$ V.

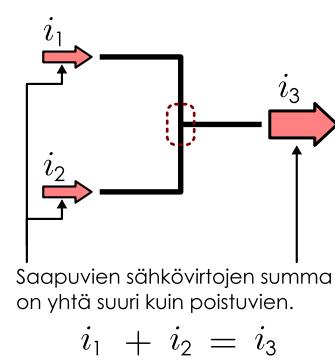
Vastuskytkennät

Kuva 11.13: Kirchhoffin risteysäännön mukaan johdinten risteykseen saapuvien virtojen summa on nolla.

(a) Elektroneja täytyy saapua ja poistua yhtä paljon.



(b) Risteysääntö piirikaaviossa.



Monimutkaisten pürien analyysi perustuu tavallisesti pürien tarkastelemiseen osissa. Tavoite on yleensä pürin jakaminen niin pieniin osiin, että kuhunkin osaan kuuluu vain yksi sähkökomponentti. Tällöin näihin osiin voidaan soveltaa yksittäisten komponenttien toimintaa kuvaavia sääntöjä. Ja kun jokaisen yksittäisen osan toiminta tunnetaan, voidaan koko püriin toiminta päätellä niiden pohjalta.

Sähkökomponenttien lisäksi pürien perusyksikköjä ovat **silmukat** ja **risteykset**. Risteys on kohta, jossa kolmen tai useamman johtimen päättävät toisensa eli johdin haarautuu kuten kuvassa 11.13. Päättelimme jo aikaisemmin, että kun pöri on tasaisen virtauksen tilassa, minkä tahansa suoran johtimen läpi kulkee kaikkialla yhtä suuri sähkövirta. Tasaisessa virtauksessahan elektronit liikkuvat kuin kokoonpuristumaton neste, jonka tiheys

ei muutu. Jos siis johtimen yhdestä päästä saapuu elektroneja, niitä on poistuttava johtimen toisesta päästä yhtä paljon. Sama periaate pätee myös johdinten risteyksessä. Jos joitakin johtimia pitkin risteykseen saapuu elektroneja, niitä on poistuttava toisia johtimia pitkin aivan yhtä paljon. Muutoin risteykseen kertyisi elektronien ylimäärä tai vajaus ja risteys varautuisi. Koska sähkövirta kuvaa siirtyneen varauksen määrään, tämän periaatteen mukaisesti **risteykseen saapuvien ja sieltä poistuvien sähkövirtojen täytyy olla yhtä suuret**,

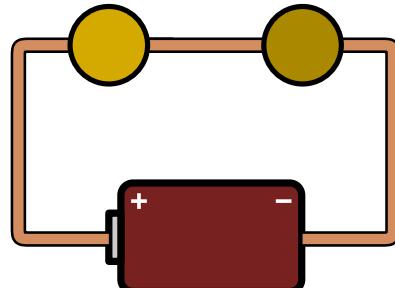
$$\sum_{\text{saapuva}} i = \sum_{\text{poistuva}} i \quad (11.41)$$

Tämä on **Kirchhoffin risteysääntö** tai **virtasääntö** (Gustav Kirchhoffin mukaan).

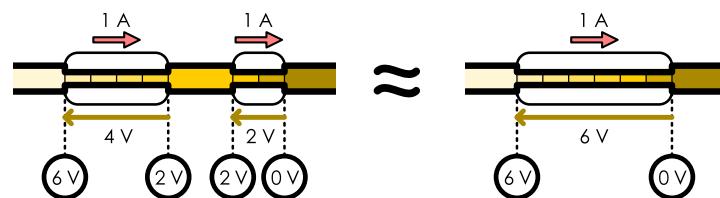
Risteysäännön perusteella voimme johtaa vastuksille samankaltaiset yhteenlaskusäännöt kuin kondensaattoreille. Kun kaksi vastusta tai lamppua kytketään sarjaan kuten kuvassa 11.14 (a) ja (b), vastukset ja johtimet muodostavat sähkövirralle yhden katkeamattoman kulkuväylän. Sähkövirran pitää olla tällä väylällä kaikilla sama, joten erityisesti kummankin vastuksen läpi täytyy kulkea sama virta i . Merkitään vastusten resistansseja R_1 ja R_2 sekä niiden napojen välillä olevaa potentiaalieroa ΔV_1 ja ΔV_2 . Sarjaankytkennessä nämä potentiaalierot ovat tavallisesti erisuuret. Joka tapauksessa potentiaaliero koko kytkennän yli on näiden summa, $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$. Tässä kytkennässä kokonaispotentiaalieron ΔV määräää pariston lähdejännite, ja kytkennän läpi kulkeva virta riippuu tästä jännitteestä sekä kytkennän kokonaisresistanssista R

Kuva 11.14: Vastusten yhdistäminen. Peräkkäin eli sarjaan kytketyissä vastuksissa kulkee sama virta, koska virtaavien elektronien tiheys on vakio.

(a) Sarjaankytentä.

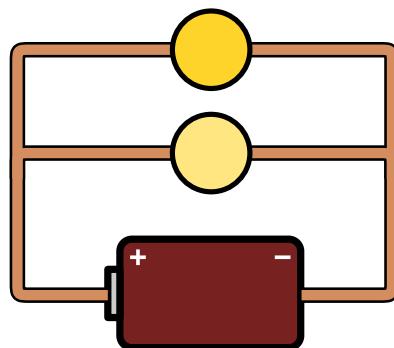


(b) Sarjaankytettyjen vastusten potentiaali ja virta.

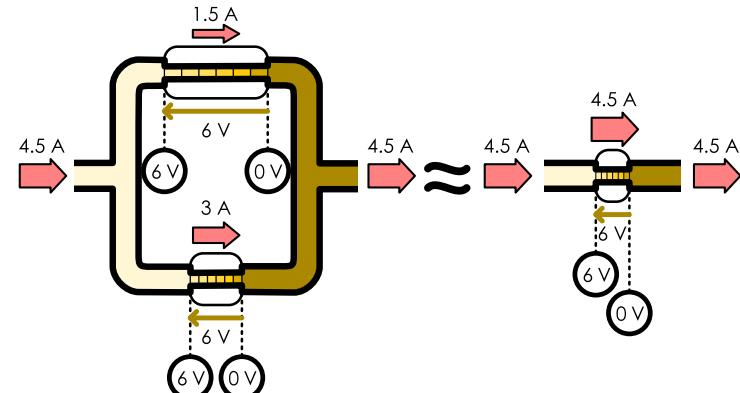


Kuva 11.15: Vastusten yhdistäminen. Viereen eli rinnan kytketyissä vastuksissa on sama jännite, koska potentiaali on ideaalisissa johtimissa vakio.

(a) Rinnankytentä.



(b) Rinnankytettyjen vastusten potentiaali ja virta.



Ohmin lain mukaisesti, $i = -\Delta V/R$. Toisaalta potentiaalieron ja virran yhteys noudattaa Ohmin lakiä myös kummassakin vastuksessa erikseen, joten potentiaali muuttuu vastuksessa 1 määärän $\Delta V_1 = -R_1 i$ ja vastuksessa 2 $\Delta V_2 = -R_2 i$. Sarjaankytentä toimii siis kokonaisuudessaan kuin yksi vastus, jonka resistanssi on

$$R = -\frac{\Delta V}{i} = -\frac{\Delta V_1}{i} - \frac{\Delta V_2}{i} = R_1 + R_2. \quad (11.42)$$

Sarjaankytettyjen vastusten resistanssit lasketaan siis suoraan yhteen, ja sama periaate toimii riippumatta siitä, kuinka monta vastusta sarjassa on.

Kuvassa 11.15 (a) ja (b) on puolestaan esitetty kahden vastuksen rinnankytentä. Tässä kytkennässä vastusten kuvassa vasemmanpuoleiset navat on yhdistetty keskenään johtimella, joten ne ovat samassa potentiaalissa. Samoin vastusten oikeanpuoleiset navat on kytketty yhteen samaan potentiaaliin. Niinpä potentiaaliero ΔV on sama kummassakin vastuksessa. Kummankin vastuksen läpi kulkeva virta on kään்றäen verrannollinen vastuksen resistanssiin, joten virrat ovat $i_1 = -\Delta V/R_1$ sekä $i_2 = -\Delta V/R_2$. Risteyssäännön perusteella koko kytkennän läpi kulkeva virta saadaan laskemalla eri reittejä kulkevat virrat yhteen, koska saapuvia virtuja jakautuu kytkennässä kulkemaan kummankin vastuksen läpi, $i = i_1 + i_2$. Toisaalta kytkennän voi ajatella toimivan kuin yksi vastus, jolloin virran voi esittää myös potentiaalieron ja kytkennän kokonaisresistanssin R avulla,

$$-\frac{1}{R} \Delta V = i = i_1 + i_2 = -\frac{1}{R_1} \Delta V - \frac{1}{R_2} \Delta V. \quad (11.43)$$

Potentiaaliero ΔV voidaan supistaa tästä yhtälöstä pois, jolloin jäljelle jää

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (11.44)$$

Siispä rinnankytennässä vastusten resistanssien käänneisluvut lasketaan yhteen.

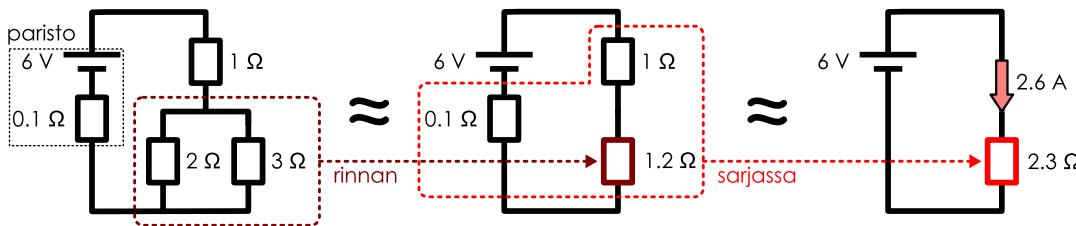


- 11.12 (a) Tarkista vastusten sarjaan- ja rinnankytentäsäännöt kuvissa 11.14 ja 11.15.
 (b) Mikä on kunkin lampun resistanssi?

Vastusten kytkentäsäännöt ovat samantyypiset kuin kondensaattoreidenkin, mutta resistanssit käyttäytyvät sarjaan- ja rinnankytennässä päinvastoin kuin kapasitanssit: resistanssit lasketaan suoraan yhteen sarjaankytennässä ja kapasitanssit rinnankytennässä. Pohjimmiltaan kyse on siitä, että *sarjaankytennässä komponenttien jännitteet eli potentiaalierot lasketaan suoraan yhteen, mutta rinnankytennässä summaataan sähkövaraukset tai -virrat*. Resistanssi on määritelty suoraan verrannolliseksi potentiaalieroona, joten resistanssit lasketaan sarjaankytennässä suoraan yhteen. Kapasitanssi taas on suoraan verrannollinen varaukseen, joten kapasitanssit lasketaan yhteen rinnankytennässä.

Vastuskentöjen korvaaminen yhdellä kokonaisresistansilla on joskus helpoin tapa selvittää piirissä kulkeva kokonaivirta. Tätä tekniikkaa on havainnollistettu kuvassa 11.16, jossa halutaan selvittää paristosta ja kolmesta vastuksesta koostuvan piirin toiminta. Piirissä on kolme vastusta, joiden resistanssit ovat yhden ohmin kokoluokkaa. Pariston sisäinen resistanssi on 0.1Ω , mikä on vain kertaluokkaa pienempi, joten myös pariston resistanssi on otettu huomioon. Tämä onnistuu kuvamalla paristo idealisen jännitelähteen sekä ideaalisen vastuksen sarjaankytentänä. Nämä komponenttit kuvaavat siis pariston lähdejännitettä (tässä 6

Kuva 11.16: Vastuskytkennän pelkistäminen kokonaisresistanssiksi. Paristo voidaan erottaa ideaaliseksi jännitelähteeksi (lähdetjännite) sekä vastukseksi (sisäinen resistanssi). Rinnan- ja sarjaankytkeytetyt vastukset voidaan puolestaan yhdistää yhdeksi piirin kokonaisresistanssia kuvavaksi vastukseksi. Kun kokonaisresistanssi on selville, pariston läpi kulkeva virta selviää suoraan Ohmin laista.



V) ja sisäistä resistanssia, ja yhdessä tämä kytkentä tuottaa yhtälöä (11.39) noudattavan virrasta riippuvan napajännitteen.

Kun pariston sisäinen resistanssi on erotettu omaksi komponentikseen, se ei poikkea mitenkään piirin muiden komponenttien resistansseista. Seuraava askel onkin vastusten resistanssien yhdistäminen yhdeksi, koko piirin kuvaavaksi resistanssiksi. Tässä esimerkissä tämä onnistuu askeleittain. Ensinnäkin rinnankytkeytetyt $2\ \Omega$ ja $3\ \Omega$ ohmin vastukset voidaan kuvata kokonaisresistansilla R , jonka suuruus saadaan laskettua rinnankytentäsäännöllä (11.44),

$$R_{\text{rinnan}} = \left(\frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} \right)^{-1} = \left(\frac{5}{6\ \Omega} \right)^{-1} = \frac{6}{5}\ \Omega = 1.2\ \Omega. \quad (11.45)$$

Tämän jälkeen piirissä on jäljellä kolme sarjaankytkeytetyä vastusta, joiden kokonaisresistanssi saadaan sarjaankytentäsäännön (11.42) perusteella suoralla yhteenlaskulla

$$R_{\text{sarjassa}} = 1\ \Omega + 1.2\ \Omega + 0.1\ \Omega = 2.3\ \Omega. \quad (11.46)$$

Nyt kaikki piirin resistanssit on yhdistetty, joten tämä on koko piirin resistanssi. Piirissä kulkeva kokonaisvirta on Ohmin lain mukaisesti siis

$$|i| = \frac{1}{R} \Delta V = \frac{6\ \text{V}}{2.3\ \Omega} = 2.6\ \text{A}. \quad (11.47)$$

Kun virta tunnetaan, potentiaalierot on helppo laskea sarjaankytkeytetyissä vastuksissa, ja edelleen kun potentiaalierot tunnetaan, on helppo laskea virta rinnankytkeytetyissä vastuksissa. Näin voidaan tarvittaessa selvitää alkuperäisen piirin kaikkien komponenttien läpi kulkevat virrat ja niiden napojen väliset potentiaalierot.



11.13 Mikä on kytkennän kokonaisresistanssi, jos kytket vastuksen R kanssa (a) sarjaan tai (b) rinnan ideaalisen johtimen? Selitä oman sanoin, mitä tulos tarkoittaa!

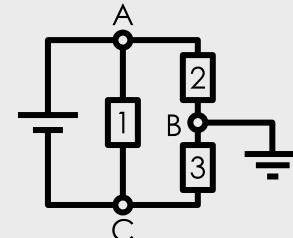
esimerkki 11.4

Vastuskytkentä

Paristo ja kolme vastusta on kytketty piiriin kuten kuvassa. Pariston jännite on 6 V ja vastusten resistanssit ovat $1\ \text{k}\Omega$, $2\ \text{k}\Omega$ ja $3\ \text{k}\Omega$. Ratkaise potentiaali pisteissä A-C sekä virta kunkin komponentin läpi.

SUUNNITELMA Maadoituspisteen potentiaali on sovitusti nolla, joten $V_B = 0\ \text{V}$. Paristo pitää napojensa välisen potentiaalieron vakiona, joten $\Delta V_{C \rightarrow A} = 6\ \text{V}$. Vastuksissa potentiaaliero ja virta ovat suoraan verrannolliset Ohmin lain mukaisesti,

$$\Delta V = -R_i. \quad (11.48)$$



Vastuksen 1 napojen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston jännite, joten sen läpi kulkeva virta voidaan ratkaista heti. Jotta saisimme selville vastusten 2 ja 3 läpi kulkevan virran, voimme laskea niiden kokonaisresistanssin vastusten yhteenlaskusäännöllä ja soveltaa Ohmin lakiä kuvitteelliseen vastukseen, jonka resistanssi on sama kuin vastusten 2 ja 3 resistanssit yhteen. Tämä virta kulkee sekä vastuksen 2 että 3 läpi, joten sen avulla voimme lopuksi laskea potentiaalin muutoksen kummassakin vastuksessa erikseen.

RATKAISU Virta vastuksen 1 läpi on

$$i_{1,A \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C} / R_1 = 6.0\ \text{mA}. \quad (11.49)$$

Vastukset 2 ja 3 on kytketty sarjaan, joten niiden kokonaisresistanssi saadaan suoraan summana $R_{2+3} = R_2 + R_3 = 5 \text{ k}\Omega$. Virta näiden vastusten läpi on siis

$$i_{2,A \rightarrow B} = i_{3,B \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C} / R_{2+3} = 1.2 \text{ mA.} \quad (11.50)$$

Pariston kautta kulkeva virta jakautuu pisteessä A kahtia, joten Kirchhoffin risteyssäännön mukaisesti pariston läpi kulkevan virran täytyy olla näiden virtojen summa, $i_{\text{paristo},C \rightarrow A} = i_{1,A \rightarrow C} + i_{2,A \rightarrow B} = 7.2 \text{ mA}$.

Potentiaaliero vastukseen 2 päiden välillä on $\Delta V_{A \rightarrow B} = -R_2 i_{2,A \rightarrow B} = -2.4 \text{ V}$, eli pisteen A potentiaali on $V_A = V_B + \Delta V_{B \rightarrow A} = V_B - \Delta V_{A \rightarrow B} = 2.4 \text{ V}$. Vastaavasti potentiaaliero vastukseen 3 päiden välillä on $\Delta V_{B \rightarrow C} = -R_3 i_{3,B \rightarrow C} = -3.6 \text{ V}$ joten pisteen C potentiaali on $V_C = V_B + \Delta V_{B \rightarrow C} = -3.6 \text{ V}$. Yhteenvetona siis $V_A = 2.4 \text{ V}$, $V_B = 0 \text{ V}$ ja $V_C = -3.6 \text{ V}$.

ARVIOINTI Pisteen A potentiaali on korkeampi kuin pisteen C kuten pitääkin, koska näitä pisteitä erottaa paristo, ja A on kytketty pariston positiiviseen napaan. Pariston jännite on $\Delta V_{C \rightarrow A} = V_A - V_C = 2.4 \text{ V} - (-3.6 \text{ V}) = 6.0 \text{ V}$ kuten pitääkin. Kytkennän kokonaisresistanssi on $R_{1+2+3} = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1} = 0.83 \text{ k}\Omega$, minkä perusteella kokonaisvirta on $i_{A \rightarrow C} = -\Delta V_{A \rightarrow C} / R_{1+2+3} = 7.2 \text{ mA}$ eli sama kuin edellä laskettu virta pariston läpi.

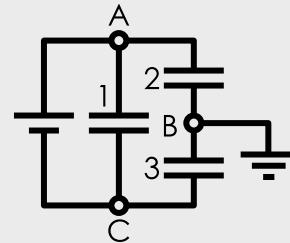
esimerkki 11.5

Kondensaattoriytkentä

Paristo ja kolme kondensaattoria on kytketty piiriin kuten kuvassa. Pariston jännite on 6 V ja kondensaattoreiden kapasitanssit ovat 1 nF, 2 nF ja 3 nF. Ratkaise potentiaali pistessä A-C sekä kunkin kondensaattorin varaus.

SUUNNITELMA Maadoituspisteen potentiaali on sovitusti nolla, joten $V_B = 0 \text{ V}$. Paristo pitää napojensa välisen potentiaaleron vakiona, joten $\Delta V_{C \rightarrow A} = 6 \text{ V}$. Kondensaattorien läpi ei kulje virtaa, ja niissä potentiaaliero ja varaus ovat suoraan verrannolliset,

$$\Delta V = \frac{1}{C} Q. \quad (11.51)$$



Kondensaattorin 1 napojen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston jännite, joten sen varaus voidaan ratkaista heti. Jotta saisimme sellville kondensaattoreiden 2 ja 3 varaukset, voimme laskea niiden kokonaiskapasitanssin kondensaattoreiden yhteenlaskusäännöllä ja soveltaa yhtälöä 11.51 kuvitteelliseen kondensaattoriin, jonka kapasitanssi on sama kuin kondensaattorien 2 ja 3 kokonaiskapasitanssi. Kondensaattoreissa 2 ja 3 on sama varaus, joten sen avulla voimme lopuksi laskea jännitteen kummassakin kondensaattorissa erikseen.

RATKAISU Kondensaattorin 1 varaus on

$$Q_1 = C_1 \Delta V_{A \rightarrow C} = 6.0 \text{ nC.} \quad (11.52)$$

Kondensaattorit 2 ja 3 on kytketty sarjaan, joten niiden kokonaiskapasitanssi saadaan käänteisarvojen summana $C_{2+3} = (C_2^{-1} + C_3^{-1})^{-1} = 1.2 \text{ nF}$. Näiden kondensaattoreiden varaus on siis

$$Q_2 = Q_3 = C_{2+3} \Delta V_{A \rightarrow C} = 7.2 \text{ nC.} \quad (11.53)$$

Kondensaattorissa 2 pisteen A puoleinen levy varautuu positiivisesti ($q_{2,A} = 7.2 \text{ nC}$) ja pisteen B puoleinen levy negatiivisesti ($q_{2,B} = -7.2 \text{ nC}$). Kondensaattorissa 3 pisteen B puoleinen levy varautuu positiivisesti ($q_{3,B} = 7.2 \text{ nC}$) ja pisteen C puoleinen levy negatiivisesti ($q_{3,C} = -7.2 \text{ nC}$). Kondensaattoreilla täytyy olla sama varaus, koska ne varautuvat niin, että varausta siirtyy pisteen B kautta kondensaattorista 2 kondensaattoriin 3, ja siis ($q_{2,B} = -q_{3,B}$).

Potentiaaliero kondensaattorin 2 levijen välillä on $|\Delta V_{A \rightarrow B}| = \frac{Q_2}{C_2} = 3.6 \text{ V}$, ja koska pisteen A puoleinen levy on positiivisesti varattu, sen täytyy olla korkeammassa potentiaalissa, $\Delta V_{A \rightarrow B} < 0 \text{ V}$. Siispä pisteen A potentiaali on $V_A = V_B + \Delta V_{B \rightarrow A} = V_B - \Delta V_{A \rightarrow B} = 3.6 \text{ V}$. Vastaavasti potentiaaliero kondensaattorin 3 levijen välillä on $\Delta V_{B \rightarrow C} = Q_3 / C_3 = -2.4 \text{ V}$ ja pisteen C potentiaali on $V_C = V_B + \Delta V_{B \rightarrow C} = -2.4 \text{ V}$. Yhteenvetona siis $V_A = 3.6 \text{ V}$, $V_B = 0 \text{ V}$ ja $V_C = -2.4 \text{ V}$.

ARVIOINTI Kytkennän kokonaiskapasitanssi on $C_{1+2+3} = C_1 + C_{2+3} = 2.2 \text{ nF}$, minkä perusteella kokonaisvaraus on $Q = C_{1+2+3} \Delta V_{C \rightarrow A} = 13.2 \text{ nC}$. Tämä on sama kuin pisteeseen A (tai C) kytkettyjen kondensaattorilevijen kokonaisvaraus $Q = q_{1,A} + q_{2,A}$, kuten pitääkin. Huomaa, että tässä piirissä on vain korvattu tehtävän 11.4 vastukset kondensaattoreilla, ja loppululos on monin tavoin erilainen.



11.14 Miksi esimerkin 11.5 lopuksi laskettu kokonaisvaraus ei ole sama kuin kondensaattoreiden varauksen summa, eli miksi $Q \neq Q_1 + Q_2 + Q_3$?

Piirianalyysi

Vastusten korvaaminen kokonaispersianssilla toimii silloin, kun pöörin voi palauttaa *yhdeksi silmukaksi*. Silmukka tarjoittaa tässä johdinten ja niiden yhdistämien komponenttien muodostamaa suljetta polkuja, jota pitkin kiertämällä päästään takaisin lähtöpisteeseen kuten kuvassa 11.17. Kaikkia piirejä ei kuitenkaan voi kuvata yhtenä silmukkana, sillä pöörät voivat sisältää monimutkaisilla tavoilla haarautuvia johtimia, joiden muodostamia kytkentöjä ei voi välittämättä palauttaa sarjaan- ja rinnankytkenöiksi. Lisäksi pöörät voivat koostua monenlaisista muistakin komponenteista pelkkien vastusten lisäksi. Tarvitsemme siis yleisemän tavan analysoida pööräjä.

Palataan kuitenkin vielä tutkimaan yksittäistä silmukkaa. Voimme valita silmukasta minkä tahansa kohdan alkupisteeksi ja lähteä kiertämään silmukkaa ympäri. Yleensä silmukkaan kuuluu komponentteja, joiden napojen välillä on potentiaaliero, ja niinpä potentiaali muuttuu silmukkaa pitkin kuljettaessa. Potentiaali on kuitenkin paikan funktio, joten riippumatta siitä, millainen potentiaali on silmukan eri kohdissa, valitun alkupisteen potentiaali on se mikä on. Niinpä kun seuraamme koko silmukan ympäri ja palaamme takaisin alkupisteeseen, päädyimme takaisin samaan potentiaaliin kuin mistä aloitimme. Niinpä *suljettua silmukkaa pitkin kuljettaessa mitattujen potentiaalin muutosten täytyy summautua nollaksi*,

$$\sum_{\text{silmukka}} \Delta V = 0 \text{ V.} \quad (11.54)$$

Tämä on Kirchhoffin silmukkasääntö tai jännitesääntö.

Silmukka- ja risteyssääntö riittävät yhdessä paristoja, vastuksia ja kondensaattoreita kuvaavien sääntöjen kanssa minkä tahansa näistä komponenteista koostuvan pöörin toiminnan kuvaamiseen. Kuvassa 11.18 (a) on esimerkki virtapiiristä sekä sen analyysistä silmukoiden ja risteysten avulla. Piirianalyysissä tavoite on ratkaista sekä potentiaali kaikissa pöörin pisteissä että jokaisen johtimen ja komponentin läpi kulkeva virta, ja tästä varten potentiaalit sekä virrat pitää nimetä. Kuvassa 11.18 (b) onkin valittu pööristä joukko pisteitä, ja nämä on merkitty kirjaimin A–H. Tavoitteemme on laskea potentiaali näissä pisteissä. Kuvaan on myös piirretty joukko johtimien suuntaan osoittavia nuolia, jotka on merkitty numeroin 1–6. Toinen tavoitteemme on laskea nuolten suuntaan kulkeva virta kussakin johtimessa. Nuolten suunta pitää valita, mutta tällä valinnalla ei loppujen lopuksi ole mitään väliä. Jos virta kulkee johtimessa päinvastaiseen suuntaan kuin mihin nuoli oli valittu osoittamaan, tälle virralle saadaan ratkaisussa negatiivinen arvo.

Nyt voimme analysoida pöörin kunkin komponentti, silmukka ja risteys kerrallaan. Aivan ensimmäiseksi kannattaa etsiä ilmiselvät yhteydet. Ensinnäkin piste G on maadoitettu, joten sen potentiaali on sopimuksen mukaisesti nolla,

$$V_G = 0 \text{ V.} \quad (11.55)$$

Toiseksi jos oletamme kaikki komponentit ideaalisiksi, kunkin johdin on vakiopotentiaalissa. Pisteitä E ja H yhdistää vain ideaalinen johdin, joten niiden potentiaalien täytyy olla samat,

$$V_E = V_H. \quad (11.56)$$

Huomaa myös, että joillakin kuvaan piirrettyillä nuolilla on sama numero. Yhtenäisessä johtimessa täytyy kulkea kaikkialla sama virta, joten myös *sarjaan kytkettyjen komponenttien läpi kulkee yhtä suuri virta*. Niinpä esimerkiksi numerolla 1 merkitty virta kulkee sekä pariston että kahden vastuksen läpi.

Seuraavaksi voimme soveltaa kunkin komponentin tunnettuja ominaisuuksia. Esimerkiksi koska pisteen F ja A välissä on paristo, niiden potentiaaliero täytyy aina olla sama kuin pariston lähdejännite,

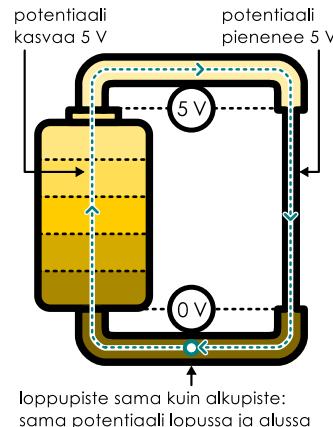
$$V_A - V_F = \Delta V_{F \rightarrow A} = \mathcal{E}. \quad (11.57)$$

Pisteitä A ja B puolestaan erottaa vastus, jonka läpi kulkee virta i_1 , joten jos vastuksen resistanssi on R , näiden pisteen välisen potentiaaliero on

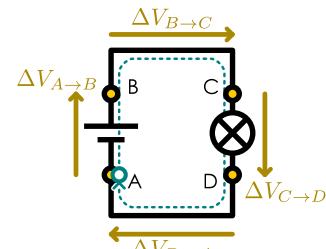
$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = -R i_1. \quad (11.58)$$

Kuva 11.17: Kirchhoffin silmukkasäännön mukaan potentiaalin muutos on nolla, kun kierretään kokonaista silmukkaa.

(a) Suljetun polun alussa ja lopussa on sama potentiaali.



(b) Silmukkasääntö piirikaaviossa.

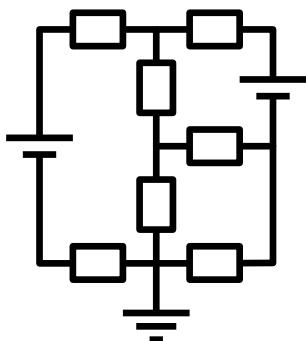


Potentiaalin muutosten summa on nolla.

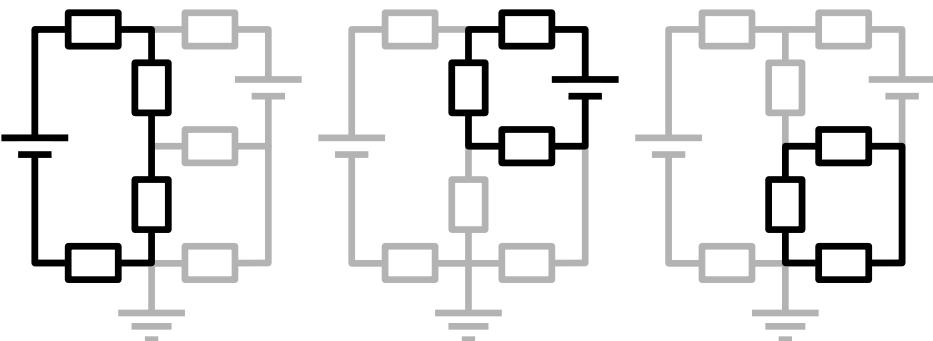
$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow A} = 0 \text{ V}$$

Kuva 11.18: Piirin jakaminen silmukoihin ja risteyksiin analyysiä varten.

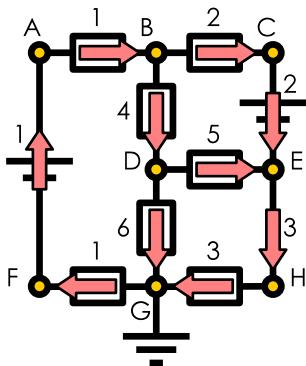
(a) Virtapiirin kaaviokuva.



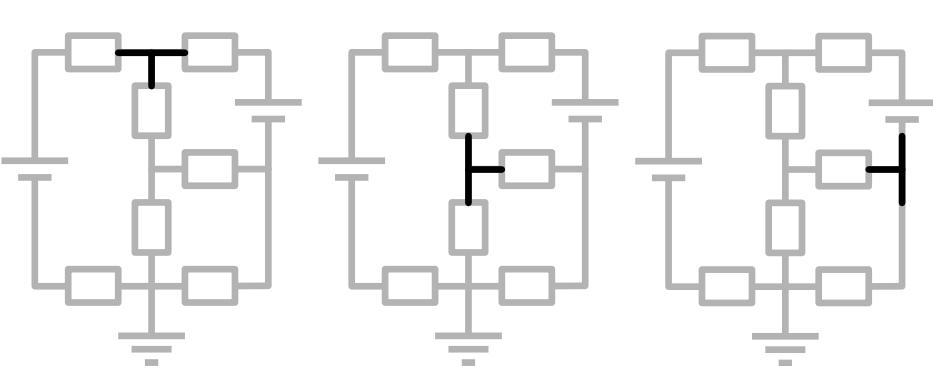
(c) Virtapiiristä valittuja silmukoita.



(b) Merkitään kirjaimilla potentiaaleja ja numeroilla virtajoja.



(d) Virtapiiristä valittuja risteyksiä.



Samaan tapaan voimme muodostaa lausekkeet kaikkien vierekkäisten (yhden komponentin erottamien) pisteen välisille potentiaalieroille.

Pelkkä komponenttien analyysi ei kuitenkaan riitä, vaan tarvitsemme myös risteyks- ja silmukkasääntöjä (11.41) ja (11.54). Piiristä voidaan valita silmukoita hyvin monin tavoin, mutta yleensä kannattaa valita mahdollisimman pienet ja yksinkertaiset silmukat. Piirin kolme pienintä silmukkaa on esitetty kuvassa 11.18 (c). Kullekin silmukalle voidaan soveltaa silmukkasääntöä erikseen. Esimerkiksi ensimmäiselle kuvaan piirrettylle silmukalle pätee

$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow G} + \Delta V_{G \rightarrow F} + \Delta V_{F \rightarrow A} = 0 \text{ V.} \quad (11.59)$$

Tässä muodossa yhtälö ei ole vielä kovin hyödyllinen, mutta kukin yhtälössä esiintyvä potentiaaliero edustaa yhden komponentin jännitettä, joten voimme sijoittaa komponentteja kuvaavat lausekkeet tähän yhtälöön. Esimerkiksi $\Delta V_{F \rightarrow A}$ on pariston jännite yhtälön (11.57) mukaisesti, $\Delta V_{A \rightarrow B}$ on yhtälön (11.58) kuvama vastuksen jännite jne. Lopputulokseksi yhtälö (11.59) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathcal{E} - 2Ri_1 - Ri_4 - Ri_6 = 0 \text{ V.} \quad (11.60)$$

Tässä silmukassa siis potentiaali kasvaa kuljettaessa pariston läpi virran 1 kulkusuuntaan, mutta potentiaali pienenee kuljettaessa vastusten läpi virtojen 1, 4 ja 6 kulkusuuntiin. Yhteensä potentiaalin täyttyä pienentyä vastuksissa täsmälleen yhtä paljon kuin se kasvoi paristossa.

Yhtälössä (11.60) jännytteet on kirjoitettu komponenttien ominaisuuksien ja piirissä kulkevien *virtojen* avulla, joten tästä yhtälöä voidaan käyttää näiden tuntemattomien virtojen ratkaisemisessa. Kaksi muuta kuvaan 11.18 (c) piirrettyä silmukkaa voidaan analysoida samaan tapaan, ja näin saatavat yhtälöt on johdettu esimerkissä 11.6. Yhdessä nämä kolme silmukkaa käyvät läpi *kaikki* piirin johtimet ja komponentit, joten enempää silmukoita ei kannata etsiä. Piirissä on kyllä enemmänkin silmukoita. Esimerkiksi piirin "ulkoreunaa" kulkeva, virtojen 1, 2 ja 3 reittiä kulkeva polku on myös aivan kelvollinen silmukka, ja sille voidaan kirjoittaa silmukkasäännön perusteella oma jännyteyhtälönsä, joka on näennäisesti erilainen kuin 11.18 (c) kolmesta silmukasta saatuihin yhtälöihin verrattuna. Tämä neljäs yhtälö ei kuitenkaan sisältää mitään uutta informaatiota, sillä sen voisi johtaa jo kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä. (Matematiikassa sanotaan, että nämä neljä yhtälöä olisivat toisiaan lineaarisesti riippuvaiset.) Yhteensä jännytesääntö antaa meille tässä esimerkissä siis täsmälleen kolme toisistaan riippumaton yhtälöä.

Piirissä on myös useita risteyksiä, mutta näistäkin riittää poimia vain niin monta, että saamme tarpeeksi yhtälöitä kaikkien virtojen ratkaisemiseksi. Tässä tapauksessa riittää kolme risteystä, ja kuvaan 11.18 (d) on valittu jotkin kolme risteystä. Kuvan ensimmäiseen risteykseen saapuu virta 1 ja sieltä lähtevät virrat 2 ja 4, joten risteyssäännön mukaan

$$i_1 = i_2 + i_4. \quad (11.61)$$

Muistakin risteyksistä saadaan yhtälöt samaan tapaan.

Risteyssäännön avulla saamme siis muodostettua yhtälöitä, jotka yhdistävät eri johtimissa kulkevat virrat toisiinsa. Silmukkasäännön perusteella saamme puolestaan johdettua pürin komponenttien ominaisuuksia virtoihin yhdistäviä lausekkeita. Kun püri käydään tällä tavalla järjestelmällisesti läpi, päädyymme loppujen lopuksi *yhtälöryhmään*, jonka avulla virrat voidaan ratkaista.

Yleisesti yhtälöryhmien ratkaiseminen perustuu tuntemattomien muuttujien systemaattiseen eliminointiin. Tarkastellaan esimerkkinä kahden yhtälön ryhmää

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 = a_3 \quad (11.62)$$

$$b_1 i_1 + b_2 i_2 = b_3, \quad (11.63)$$

missä i_1 ja i_2 ovat tuntemattomat muuttujat ja a sekä b ovat tunnettuja vakioita. Ryhmän ensimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista muodollisesti i_1 , jolloin saadaan

$$i_1 = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2. \quad (11.64)$$

Tulos voidaan sitten sijoittaa ryhmän toiseen yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö pelkästään tuntemattomalalle i_2 ,

$$b_1 \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2 \right) + b_2 i_2 = b_3. \quad (11.65)$$

Näin päästiin yhdestä tuntemattomasta eroon, eli tässä tapauksessa kahden yhtälön ja tuntemattoman ryhmästä tuli yhden tuntemattoman yhtälö. Ratkaisuksi saadaan

$$i_2 = \left(b_2 - \frac{b_1 a_2}{a_1} \right)^{-1} \left(b_3 - \frac{b_1 a_3}{a_1} \right) = \left(\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1} \right)^{-1} \left(\frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1} \right) = \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2}. \quad (11.66)$$

Tämä voidaan sijoittaa takaisin yhtälöön (11.64), jolloin saadaan selville myös i_1 ,

$$i_1 = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{1}{a_1} \frac{a_3 a_1 b_2 - a_3 b_1 a_2 - a_2 a_1 b_3 + a_2 b_1 a_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - b_1 a_2}. \quad (11.67)$$

Yhtälöryhmien ratkaisemisessa voidaan käyttää myös lineaarialgebraa, ja tavallisesti etenkin hyvin suuret yhtälöryhmät ratkaistaan tietokoneilla matriisimuotoisina yhtälöinä. Esimerkiksi tässä esitetyn laskun voisi kirjoittaa matriisina muodossa

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (11.68)$$

Tarkastelemassamme virtapiirissä silmukka- ja risteyssäännöt antavat yhteensä *kuusi* toisistaan riippumattonta yhtälöä, ja näiden kuuden yhtälön perusteella saamme ratkaistua *kuusi* tuntematonta sähkövirtaa. Kun virrat tunnetaan, voimme helposti laskea potentiaalin pürin jokaisessa pisteessä. Laskun yksityiskohdat on esitetty esimerkissä 11.6.



11.15 Kirjoita oman sanoineen tiivistelmä tasavirtapiireistä. Selitä erityisesti Kirchhoffin säännöt sekä miten niitä sovelletaan paristoista ja vastuksista koostuvien pürien analysoinnissa.

esimerkki 11.6

Virtapiiri

Mitkä ovat potentiaalit ja virrat kuvan 11.18 (b) piirin merkityissä pisteissä ja johtimissa? Kaikkien vastusten resistanssi on R ja paristojen jännite \mathcal{E} .

TILANNE Tarkasteltava tilanne on piirretty jo kuvaan. Käytetään myös kuvaan merkittävää kirjaimia ja numeroita, ja merkitään potentiaaleja V_A , V_B jne. ja virtoja i_1 , i_2 jne.

SUUNNITELMA Oletetaan kaikki komponentit ideaalisiksi. Tällöin jokaisen pariston napojen välillä on lähejännitettä vastaava potentiaaliero ja jokaisen vastuksen napojen välinen potentiaaliero on Ohmin lain mukaisesti suoraan verrannollinen vastuksen läpi kulkevan virtaan. Erityisesti vastuksissa potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa. Kirchhoffin silmukkasääntö pätee jokaisessa johdinsilmukassa, mutta sitä riittää soveltaa kuvassa 11.18 (c) valittuihin silmukoihin. Samoin jokaisessa risteyksessä pätee Kirchhoffin risteyssääntö, ja sitä sovellamme kuvan 11.18 (d) risteyksiin. Tuntemattomia virtoja on kuusi, joten tarvitsemme kuusi yhtälöä. Näistä kaksi, (11.60) ja (11.61) johdettiin jo edellä. Kun virrat tunnetaan, potentiaalit voidaan ratkaista laskemalla potentiaaliero kussakin komponentissa.

Muodostetaan aivan ensin komponentteja kuvaavat yhtälöt. Tekstissä mainittu yhtälö (11.57) kuvailee pariston 1 jännitettä. Vastaava yhtälö paristolle 4 on

$$V_E - V_C = \Delta V_{C \rightarrow E} = -\mathcal{E}. \quad (11.69)$$

Huomaamme, että tämä potentiaaliero on negatiivinen, koska pariston positiivinen napa (symbolin pitkä viiva) on kytketty pisteeseen C ja negatiivinen napa (lyhyt viiva) pisteeseen E. Päinvastaiseen suuntaan potentiaaliero on positiivinen, $V_C - V_E = \Delta V_{E \rightarrow C} = \mathcal{E}$.

Yhtälö (11.58) kuvailee puolestaan vastuksen 2 jännitettä. Vastaavat yhtälöt muille vastuksille ovat

$$V_F - V_G = \Delta V_{G \rightarrow F} = -Ri_1 \quad (11.70)$$

$$V_C - V_B = \Delta V_{B \rightarrow C} = -Ri_2 \quad (11.71)$$

$$V_G - V_H = \Delta V_{H \rightarrow G} = -Ri_3 \quad (11.72)$$

$$V_D - V_B = \Delta V_{B \rightarrow D} = -Ri_4 \quad (11.73)$$

$$V_E - V_D = \Delta V_{D \rightarrow E} = -Ri_5 \quad (11.74)$$

$$V_G - V_D = \Delta V_{D \rightarrow G} = -Ri_6. \quad (11.75)$$

Tarvitsemme näitä potentiaalierooja silmukkasäännön perusteella muodostettujen jänniteyhtälöiden muuttamiseksi virtuja kuvaviksi yhtälöiksi.

Tekstissä analysoitiin jo yksi silmukka, mistä saatuu yhtälö (11.60). Kuljemalla kuvan 11.18 (c) toinen silmukka ympäri myötäpäivään saadaan jänitteille yhtälö

$$\Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow E} + \Delta V_{E \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow B} = 0 \text{ V}, \quad (11.76)$$

ja sijoittamalla tähän edellä listatut potentiaalierojen lausekkeet yhtälö saadaan kirjoitettua virtojen avulla muotoon

$$-Ri_2 - \mathcal{E} + Ri_4 + Ri_5 = 0 \text{ V}. \quad (11.77)$$

Huomaamme, että tässä pariston jänitteen edessä on miinusmerkki kun taas kahden vastuksen jänitteellä on plusmerkki. Koska silmukka kuljetaan myötäpäivään, siihen kuuluvan pariston läpi kuljetaan positiiviselta navalta negatiiviselle, jolloin potentiaali laskee. Kaksi vastuksista puolestaan ohitetaan nuolten 4 ja 5 kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, jolloin niissä potentiaali kasvaa (jos virta todella kulkee nuolen osoittamaan suuntaan).

Kuvan kolmannelle silmukalle pätee

$$\Delta V_{D \rightarrow E} + \Delta V_{E \rightarrow H} + \Delta V_{H \rightarrow G} + \Delta V_{G \rightarrow D} = 0 \text{ V}, \quad (11.78)$$

josta saadaan yhtälö

$$-Ri_5 + 0 \text{ V} - Ri_3 + Ri_6 = 0 \text{ V}. \quad (11.79)$$

Tässä silmukassa ei ole yhtään paristoa, mutta yksi vastuksista ohitetaan virran kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, joten siinä potentiaali kasvaa.

Yhtälö (11.61) saatuu risteyssäännöllä. Kuvan 11.18 (d) kaksi muuta risteystä antavat virroille yhtälöt

$$i_4 = i_5 + i_6 \quad (11.80)$$

$$i_2 + i_5 = i_3. \quad (11.81)$$

RATKAISU Meillä on kuuden yhtälön ryhmä, (11.60), (11.61), (11.77), (11.79), (11.80) sekä (11.81), eli

$$2Ri_1 + Ri_4 + Ri_6 = \mathcal{E} \quad (11.82)$$

$$-Ri_2 + Ri_4 + Ri_5 = \mathcal{E} \quad (11.83)$$

$$-Ri_3 - Ri_5 + Ri_6 = 0 \text{ V} \quad (11.84)$$

$$i_1 - i_2 - i_4 = 0 \text{ A} \quad (11.85)$$

$$-i_4 + i_5 + i_6 = 0 \text{ A} \quad (11.86)$$

$$i_2 - i_3 + i_5 = 0 \text{ A} \quad (11.87)$$

Näistä yhtälöistä voimme ratkaista tuntemattomat kuusi virtaa normaaleilla yhtälöryhmien ratkaisumenetelmillä. Esimerkiksi kolmesta viimeisestä yhtälöstä voidaan ratkaista virrat i_1, i_4 ja i_3 muiden virtojen avulla, ja tulokset voidaan sijoittaa kolmeen ensimmäiseen yhtälöön. Tämän jälkeen ensimmäisestä yhtälöstä ratkeaa virta i_6 , sitten kolmannesta yhtälöstä i_3 ja lopuksi toisesta yhtälöstä i_5 . Nämä tulokset voidaan sijoittaa takaisin kolmeen viimeiseen yhtälöön, jolloin loputkin virrat ratkeavat.

Yhtälöryhmän voi kirjoittaa myös kompaktisti matriisina:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}/R \\ \mathcal{E}/R \\ 0A \\ 0A \\ 0A \\ 0A \end{bmatrix}. \quad (11.88)$$

Tämän matriisiyhtälön voi ratkaista käsin aivan samaan tapaan kuin yhtälöryhmän. Matriisiesityksessä on kuitenkin se etu, että tietokoneet ovat hyvin tehokkaita suurtenkin matriisiyhtälöiden ratkaisemisessa. Nyt ratkaisuksi saadaan

$$i_1 = \frac{4}{24} \mathcal{E}, i_2 = -\frac{7}{24} \mathcal{E}, i_3 = -\frac{1}{24} \mathcal{E}, i_4 = \frac{11}{24} \mathcal{E}, i_5 = \frac{6}{24} \mathcal{E}, i_6 = \frac{5}{24} \mathcal{E}. \quad (11.89)$$

Virtojen avulla voimme ratkaista potentiaalierot vastuksissa, jolloin saamme vierekkäisten pisteiden välisiksi potentiaalieroiksi

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = -\frac{4}{24} \mathcal{E}, \quad V_F - V_G = \Delta V_{G \rightarrow F} = -\frac{4}{24} \mathcal{E} \quad (11.90)$$

$$V_C - V_B = \Delta V_{B \rightarrow C} = \frac{7}{24} \mathcal{E}, \quad V_G - V_H = \Delta V_{H \rightarrow G} = \frac{1}{24} \mathcal{E} \quad (11.91)$$

$$V_D - V_B = \Delta V_{B \rightarrow D} = -\frac{11}{24} \mathcal{E}, \quad V_E - V_D = \Delta V_{D \rightarrow E} = -\frac{6}{24} \mathcal{E} \quad (11.92)$$

$$V_G - V_D = \Delta V_{D \rightarrow G} = -\frac{5}{24} \mathcal{E}, \quad V_H - V_E = \Delta V_{E \rightarrow H} = 0V \quad (11.93)$$

$$V_A - V_F = \Delta V_{F \rightarrow A} = \mathcal{E}, \quad V_E - V_C = \Delta V_{C \rightarrow E} = -\mathcal{E}. \quad (11.94)$$

Yksittäisten pisteiden potentiaalit ratkeavat näiden potentiaalierojen avulla. Maadoituspisteen G potentiaali on nolla, joten esimerkiksi pisteen F potentiaali on $V_F = V_G + \Delta V_{G \rightarrow F} = -\frac{4}{24} \mathcal{E}$. Samaan tapaan voidaan ratkaista potentiaali kaikissa pisteissä, ja tulokseksi saadaan

$$V_A = \frac{20}{24} \mathcal{E}, V_B = \frac{16}{24} \mathcal{E}, V_C = \frac{23}{24} \mathcal{E}, V_D = \frac{5}{24} \mathcal{E}, V_E = -\frac{1}{24} \mathcal{E}, V_F = -\frac{4}{24} \mathcal{E}, V_G = 0V, V_H = -\frac{1}{24} \mathcal{E}. \quad (11.95)$$

Mathematica:

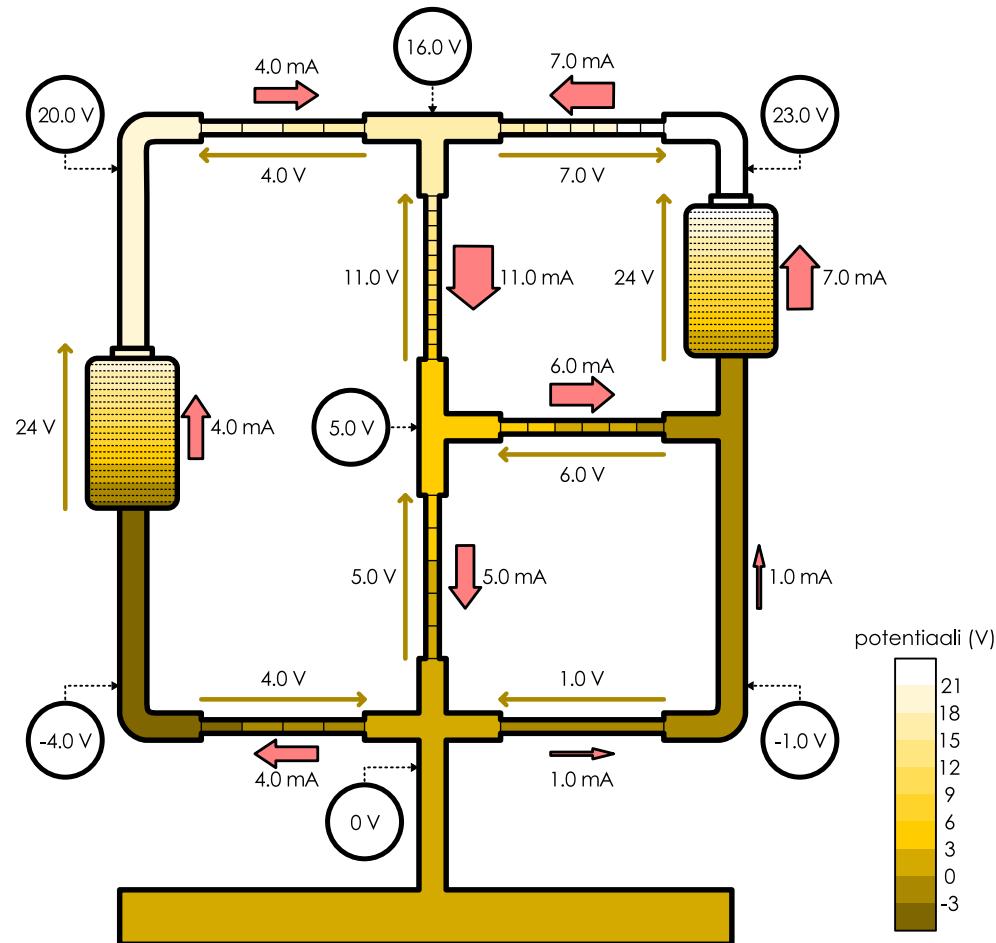
```
(* ratkaistaan virrat *)
m = { {2, 0, 0, 1, 0, 1},
      {0, -1, 0, 1, 1, 0},
      {0, 0, -1, 0, -1, 1},
      {1, -1, 0, -1, 0, 0},
      {0, 0, 0, -1, 1, 1},
      {0, 1, -1, 0, 1, 0} };
v = {e/r, e/r, 0, 0, 0, 0};
{i1, i2, i3, i4, i5, i6} = LinearSolve[m, v]
fe/(6 r), -(7 e)/(24 r)), -(e/(24 r)), (11 e)/(24 r), e/(4 r), (5 e)/(24 r)}

(* ratkaistaan potentiaalit *)
Solve[{ 
    vb - va == -r i1,
    vf - vg == -r i1,
    vc - vb == -r i2,
    vg - vh == -r i3,
    vd - vb == -r i4,
    ve - vd == -r i5,
    vg - vd == -r i6,
    vh - ve == 0,
    va - vf == e,
    ve - vc == -e,
    vg == 0
}, {va, vb, vc, vd, ve, vf, vg, vh}]
{ {va -> (5 e)/6, vb -> (2 e)/3, vc -> (23 e)/24, vd -> (5 e)/24,
  ve -> -(e/24), vf -> -(e/6), vg -> 0, vh -> -(e/24)} }
```

ARVIOINTI Voimme tarkistaa, että risteyssääntö toteutuu kaikissa risteyksissä. Esimerkiksi pisteeeseen G saapuu virta $i_6 = \frac{5}{24} \mathcal{E}$ ja sieltä poistuu virrat $i_1 = \frac{4}{24} \mathcal{E}$ ja $-i_3 = \frac{1}{24} \mathcal{E}$. (Huom. virran i_3 etumerkki on ratkaisussa negatiivinen, joten tämän virran suunta arvattiin kuvassa 11.18 (b) väärin!). Näille pätee $i_6 = i_1 - i_3$, joten risteyssääntö toteutuu kuten pitääkin. Samalla tavalla voidaan tarkistaa risteyssääntö kaikissa risteyksissä.

Voimme ottaa myös mitkä tahansa kaksi vierekkäistä pistettä ja tarkistaa niiden välisen potentiaalieron ja virran yhteensopivuuden. Esimerkiksi pisteen D ja E välisen potentiaaliero on $\Delta V_{D \rightarrow E} = V_E - V_D = -\frac{1}{24} \mathcal{E} - \frac{5}{24} \mathcal{E} = -\frac{6}{24} \mathcal{E}$, joten niiden välisen vastuksen läpi pitääsi kulkea virta $i_5 = -\frac{1}{R} \Delta V_{D \rightarrow E} = \frac{6}{24} \mathcal{E}$. Nämä on, joten ratkaistut potentiaali ja virta ovat näissä pisteissä järkevät. Kaikki vierekkäiset pistet voidattaa tarkistaa samalla tavalla.

Kuva 11.19: Esimerkissä 11.6 laskettujen potentiaalien ja virtojen havainnollistus.



Esimerkissä 11.6 ratkaistiin kuvan 11.18 virtapiirissä kulkevat virrat ja potentiaali piirin eri pisteissä. Tulos on piirretty kuvaan 11.19, kun paristojen lähdejännite on $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$ ja vastusten resistanssi on $R = 1 \text{ k}\Omega$. Laskuesimerkissä virroille i_2 ja i_3 saatiin negatiiviset lukuarvot, mikä tarkoittaa näiden virtojen kulkevan vastakkaiseen suuntaan kuvaan 11.18 piirrettyihin nuoliin nähden. Kuvassa 11.19 näitä virtoja kuvavat nuolet on piirretty virran kulkusuuntaan, joten nämä nuolet osoittavat siis näissä kahdessa kuvassa vastakkaisiin suuntiin. Nuolten paksuus osoittaa virtojen suuruuden.

Vastuksissa potentiaali laskee, kun siirrytään virran kulkusuuntaan, ja potentiaalin muutos on Ohmin lain mukaisesti suoraan verrannollinen virran suuruuteen. Kuvan 11.19 kilohmin vastuksissa yhden voltin potentiaaliero tuottaa yhden milliampeerin virran.

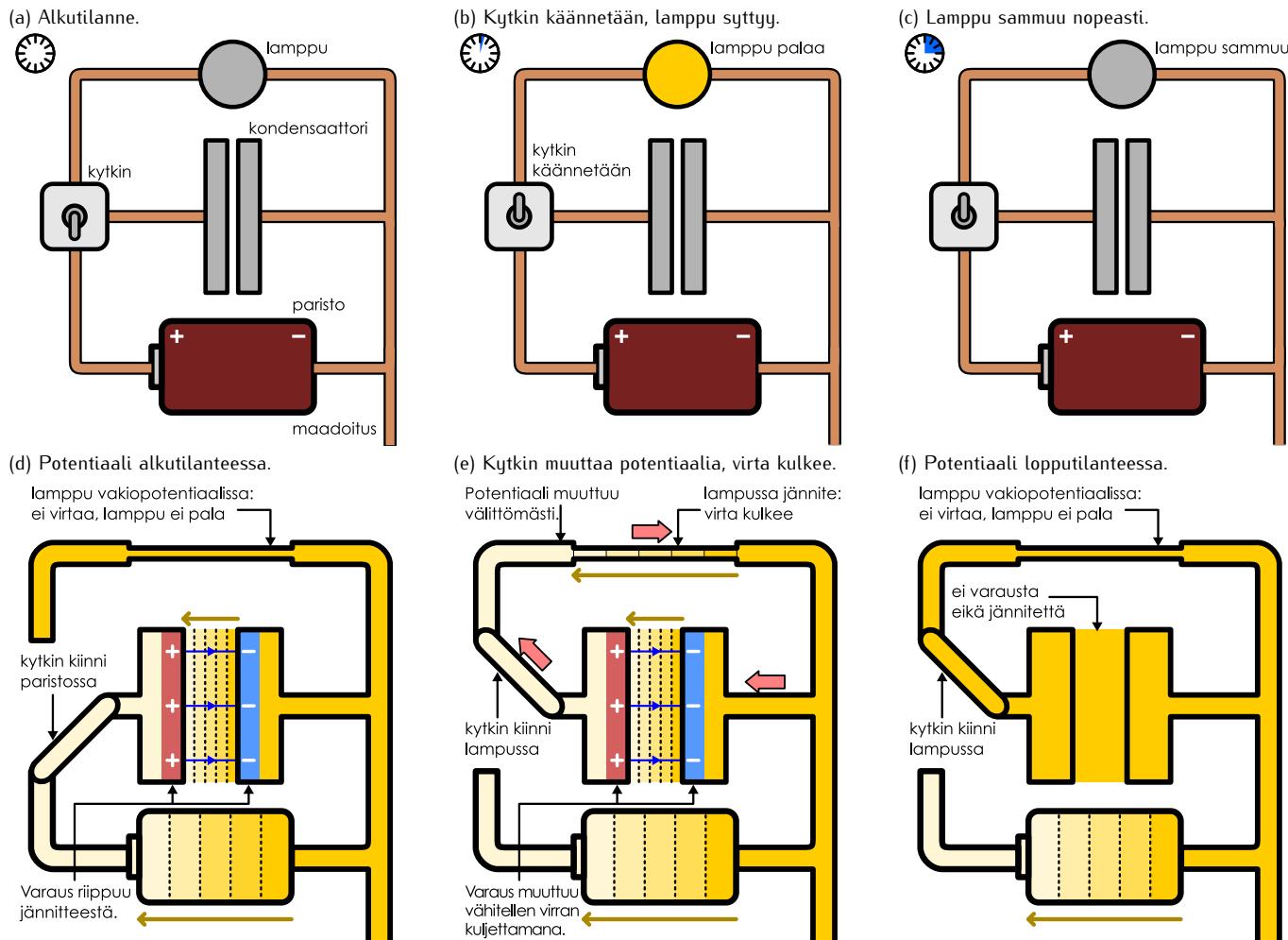
Jos piiriä ei olisi maadoitettu, yhdelläkään pisteellä ei olisi täsmällistä potentiaalin arvoa, koska potentiaalin nollakohta on mielivaltainen. Tällöin voitaisiin laskea ainoastaan pisteiden väliset potentiaalierot. Nyt kuitenkin maadoitettu johdin on samassa potentiaalissa kuin maa eli sen potentiaali on sopimuksen mukaisesti nolla, ja niinpä kaikilla piirin pisteillä on täsmällinen potentiaalin arvo.

Maadoitusta pisteestä kulkee virta vastusten kautta pisteisiin F ja H (kuva 11.18), joten näiden pisteiden potentiaalin täytyy olla matalampi kuin maadoituspisteen. Toisin sanoen näiden pisteiden potentiaalin täytyy olla negatiivinen. Tässä ei ole mitään ihmeellistä, koska potentiaalin nollakohdalla tai negatiivisilla arvoilla ei ole mitään fysikaalista merkitystä.



11.16 Maadoitus tarkoittaa piirin yhdistämistä maahan johtimella. Kuvan 11.19 mukaan maadoitusjohtimessa ei kulje sähkövirtaa. (a) Jos maadoitusjohtimessa kulkisi jatkuva virta, mitä se tarkoittaisi piirin kokonaismuodolle? Selitä tämän perusteella, miksi maadoitusjohtimessa ei voi kulkea virtaa. (b) Päätös edellinen päätely, jos myös piirin piste A olisi yhdistetty maahan maadoitusjohtimella?

Kuva 11.20: Kondensaattori latautuu ollessaan kytkettynä paristoon. Kondensaattori saa varauksen, jolla sen levijen välinen potentiaali on sama kuin pariston lähdejännite. Kun ladatun kondensaattorin levy yhdistetään lampun (vastuksen) napoihin, lampun navat saavat saman potentiaalieron. Tämä potentiaaliero synnyttää sähkövirran, ja näin varaus alkaa siirtää lampun kautta kondensaattorilevyltä toiselle. Tällöin lampu palaa. Levyistä tulee nopeasti jälleen neutraalit, jolloin kondensaattori ja lampu ovat kauttaaltaan samassa potentiaalissa eikä virta kulje.



Muuttuva virtapiiri

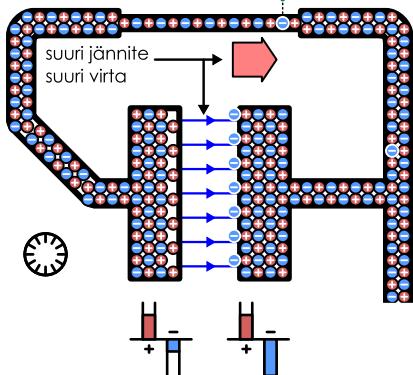
Edellä tarkastelimme tasaisia, samanlaisena pysyviä sähkövirtoja. Jos virtapiirissä ei tapahdu muutoksia, piiri saavuttaa nopeasti tasaisen virtauksen tilan, jossa virrat ja potentiaalit ovat ajasta riippumattomia. Jos piiri kuitenkin muuttuu, myös potentiaalit ja virrat muuttuvat ja riippuvat siis ajasta. Tutkimme nyt esimerkkinä tällaisesta tilanteesta kuvan 11.20 paristosta, kondensaattorista ja lampusta koostuvaa piiriä, joka voisi olla vaikkapa yksinkertaistettu versio kameran salamavalosta. Kytke tää kutsutaan *RC-piiriksi*, koska sen toiminta riippuu lampun resistanssista R sekä kondensaattorin kapasitanssista C .

Pariston negatiivinen napa (kuvan oikea puoli) on kytketty kondensaattorilevyn ja lampun toiseen napaan. Tämä puoli piiristää on myös maadoitettu, joten sen potentiaali on sopimuksen mukaan nolla. Kaikkien komponenttien vastakkaiset navat on yhdistetty kytkimeen, joka aluksi yhdistää pariston kondensaattoriin. Näistä kumpikaan ei ole yhteydessä lampuun. Alkutilanteessa kondensaattori on siis yhdistetty paristoon, jolloin paristo lataa kondensaattorin. Kondensaattorilevyn välille tulee näin sama potentiaaliero kuin pariston napojen välille (kuva 11.20 (a) ja (d)), ja koska pariston negatiivisen navan potentiaali on nolla, positiivisella navalla potentiaalin täytyy olla positiivinen. Samoin kondensaattorin positiivisesti varatun levyn potentiaalin täytyy olla positiivinen. Lampu on kytketty vain yhdestä navastaan maadoitettuun piirin puoliskoon, joten potentiaali on koko lampussa nolla. Lampu ei pala, koska sen napojen välillä ei ole potentiaalieroa.

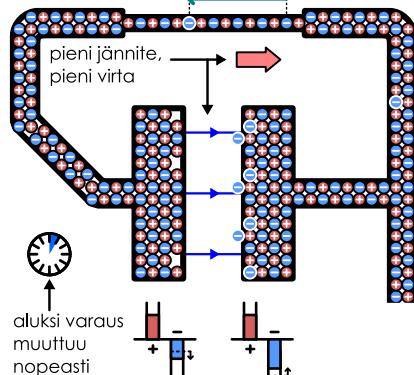
Sitten kytkin käännetään niin, että se yhdistää kondensaattorin ja lampun toisiinsa mutta ei paristoon (kuva 11.20 (b) ja (e)). Kytkin toimii ideaalisen johteen tavoin, joten kytkimen käänteminen yhdistää kondensaattorin positiivisesti varatun, positiivisessa potentiaalissa olevan levyn lampun napaan. Tämä lampun napa oli aikaisemmin nollapotentiaalissa, joten johde yhdistää nyt kaksi piirin osaa, jotka olivat aluksi eri potentiaaleissa. Ideaalisessa johteessa potentiaali on kuitenkin kaikkialla sama, joten kytkin pyrkii saamaan kon-

Kuva 11.21: Mitä suurempi potentiaaliero kondensaattorilevijen välillä on, sitä suurempi virta vastuksen läpi kulkee. Virta siirtää varausta levyltä toiselle, joten levijen välinen sähkökenttä heikkenee ja potentiaaliero pienenee. Tällöin myös virta pienenee. Varaus muuttuu siis aluksi nopeasti, mutta varauksen muuttuminen hidastuu nopeasti. Varauksenkuljettajat eivät kuitenkaan kulje prosessissa levyltä toiselle. Sen sijaan kaikki johteden elektronit siirtyvät vain lyhyen matkan. Tilanne on samantyypininen kuin nesteen virtaus kahden säiliön välillä.

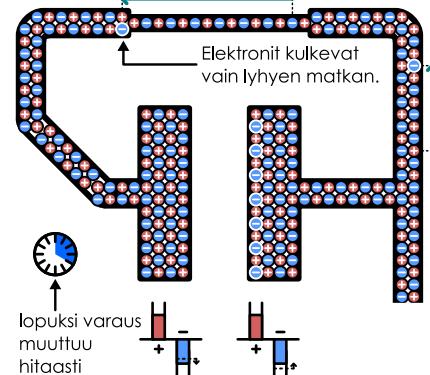
(a) Alkutilanne: levijissä suuri varaus, varaus muuttuu nopeasti.



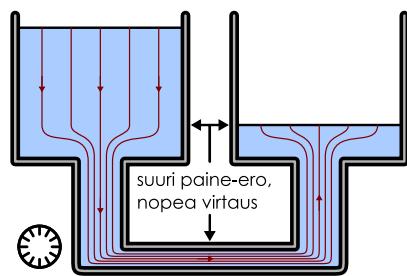
(b) Hetken päästä: levijissä pieni varaus, varaus muuttuu hitaasti.



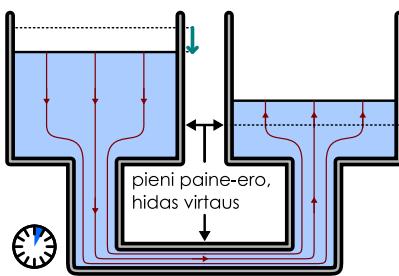
(c) Lopputilanne: levijen kokonaivaraus nolla, piiri tasapainossa.



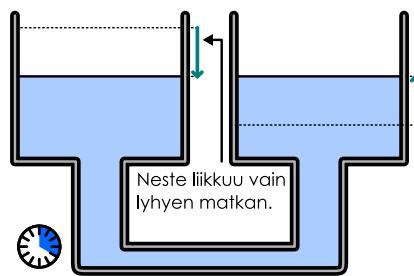
(d) Alkutilanne: neste selvästi eri korkeuksilla, nopea virtaus.



(e) Hetken päästä: neste hiukan eri korkeuksilla, hidaskin virtaus.



(f) Lopputilanne: nestepinnat samalla korkeudella, tasapaino.



densaattorilevyn ja lampun navan samaan potentiaaliin. Kondensaattorilevijillä on edelleen sähkövaraus, joka tuottaa levijen väluiin sähkökentän. Sähkökentässä potentiaali muuttuu, joten varattujen levijen välillä täytyy olla edelleen potentiaaliero. Kondensaattorin negatiivisesti varattu napa on maadoitettu, joten sopimuksen mukaisesti sen potentiaali on aina nolla. Niinpä *positiivisesti varatun kondensaattorilevyn potentiaali ei voi muuttua heti* vaan sen täytyy olla positiivinen vielä kytkimen käänämisen jälkeenkin. Myös lampun maadoitettu napa pysyy nollapotentiaalissa, mutta lampun kytkimeen yhdistetyn navan potentiaalin muuttaminen vaatii vain sitä, että lampun hehkulankaan syntyy jännite. Tähän riittää hyvin pieni elektronien paikkojen muutos johtimissa, joten *lampun napa saa saman potentiaalin kuin kondensaattorilevy lähes välittömästi*.

Kun lampun napojen välillä on jännite, hehkulangassa täytyy olla sähkökenttä ja tämä kenttä vetää elektronit liikkumaan. Lampussa alkaa siis kulkea sähkövirta. Piirissä on kaikkialla paljon sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta positiivisesti varautuneella levyllä on elektronien vajaus ja negatiivisella levyllä on ylimääräisiä elektroneja. Levijen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero, ja niinpä elektronit lähtevät liikkumaan negatiivisesti varatulta levyltä kasvavan potentiaalin suuntaan positiiviselle levälle.

11.17 Jos kuvan 11.20 piirissä olisikin maadoitettu pariston positiivinen napa, mikä olisi potentiaali (i) kummallakin kondensaattorilevyllä ja (ii) lampun navoilla (a) ennen kytkimen käänämistä, (b) heti käänämisen jälkeen, (c) lopuksi? Pariston jännite on 6 V.

Kuvassa 11.21 on tarkasteltu kondensaattorin purkautumista varauksenkuljettajien näkökulmasta. Kuvassa (a) on esitetty tilanne heti kytkimen käänämisen jälkeen. Piirissä on kaikkialla paljon sekä positiivista että negatiivista varausta, mutta positiivisesti varautuneella levyllä on elektronien vajaus ja negatiivisella levyllä on ylimääräisiä elektroneja. Levijen välillä on siis sähkökenttä ja potentiaaliero, ja niinpä elektronit lähtevät liikkumaan negatiivisesti varatulta levyltä kasvavan potentiaalin suuntaan positiiviselle levälle.

Varauksen siirto ei kuitenkaan tapahdu niin, että negatiivisesti varatulla levyllä olevat elektronit kulkisivat johdinta pitkin koko piirin ympäri positiivisesti varatulle levylle. Sen sijaan elektronit vaeltavat *kaikkialla* piirissä ja yksittäisten elektronien keskimääräinen siirtymä on hyvin pieni. Varausten tasoittumiseen riittääkin se, että kondensaattorilevyn elektronit siirtyvät vain hiukan, joten purkautuminen on kuitenkin ihmisten mittakaavassa tavallisesti varsin nopeaa. Elektronien liikkeen vastus syntyy siitä, että vaikka elektronit vaeltavat muualla piirissä hitaasti, ne joutuvat virtaamaan kapean hehkulangan läpi varsin nopeasti. Hehkulanka on siis elektronien virtauksen pullonaula.

Prosesia voi tarkastella jälleen myös nesteanalogian kautta kuten kuvissa 11.21 (d) – (f). Alkutilanteessa kondensaattorilevylle on varastoitunut eri määrä elektroneja, joten levyt toimivat hiukan samoin kuin kaksi nestesäiliötä, joissa ei ole yhtä paljon nestettä. (Huom. tämä analogia *ei* kuvailee kondensaattoria yleisesti.) Levyjen yhdistäminen johtimella vastaa analogiassa sitä, että säiliöt yhdistetään putkella, ja ohutta hehkulankaa kuvaava hyvin kapea putki. Koska nestepinta on toisessa säiliössä korkeammalla kuin toisessa, hydrostaattinen paine säiliöiden pohjalla on erisuuri. Tämä paine-ero työntää nesteen liikkeeseen kohti säiliötä, jossa nesteen pinta on matalammalla. Kondensaattorin purkautumista vastaa tässä tilanteessa nestepintojen tasaantuminen. Kapea putki muodostaa kuitenkin virtaukseen pullonaulan, joten nestepintojen tasaantuminen tapahtuu vähitellen.

Mitä enemmän nestepinnat poikkeavat toisistaan, sitä suurempi paine-ero säiliöiden välillä on ja sitä nopeammin neste virtaa. Tällöin säiliöiden nestemäärät myös muuttuvat nopeasti. Kuitenkin kun pinnat ovat lähes samalla tasolla, paine-ero pienenee ja virtaus hidastuu. Nesteen pinta laskee siis täydemmassä säiliössä aluksi nopeammin kuin lopuksi, ja vastaavasti vähemmän täydessä säiliössä pinta nousee aluksi nopeasti ja sitten hitaammin. Nesteen ja varauksen virtaukset eivät käytädy täsmälleen samoin, mutta samantapainen ilmiö tapahtuu myös kondensaattorin ja vastuksen muodostamassa piirissä. Aluksi kondensaattorilevylissä on paljon varasta ja niiden välinen potentiaaliero on suuri. Vastuksen napojen välinen potentiaaliero on yhtä suuri kuin kondensaattorin jännite, joten tällöin potentiaalin muutos on suuri myös vastuksessa, ja niinpä vastuksen läpi kulkee suuri virta. Koska virta siirtää varasta kondensaattorin levyltä toiselle, kondensaattorin varaus pienenee aluksi nopeasti. Kuitenkin sitä mukaa kun kondensaattorin varaus pienenee, myös potentiaaliero kondensaattorissa ja vastuksessa pienenee, ja siispä myös varusta siirtävän sähkövirran täytyy pienentyä. Mitä pienempi varaus kondensaattorissa siis on, sitä hitaammin varaus muuttuu.

Ratkaistaan nyt täsmällisesti piirissä kulkeva virta ja kondensaattorin varaus ajan funktiona. Kuvaan 11.22 on piirretty kytkentää kuvava piirikaavio ja siihen on merkitty neljä piiristä valittua pistettä A–D. Piste D on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina nolla, $V_D = 0$ V. Paristo pitää pisteen B ja D välisen potentiaalieron vakiona, joten jos pariston lähdejännite on \mathcal{E} , pisteen B potentiaali on aina $V_B = V_D + \Delta V_{D \rightarrow B} = \mathcal{E}$. Pisteiden B ja D potentiaalit eivät siis muudu.

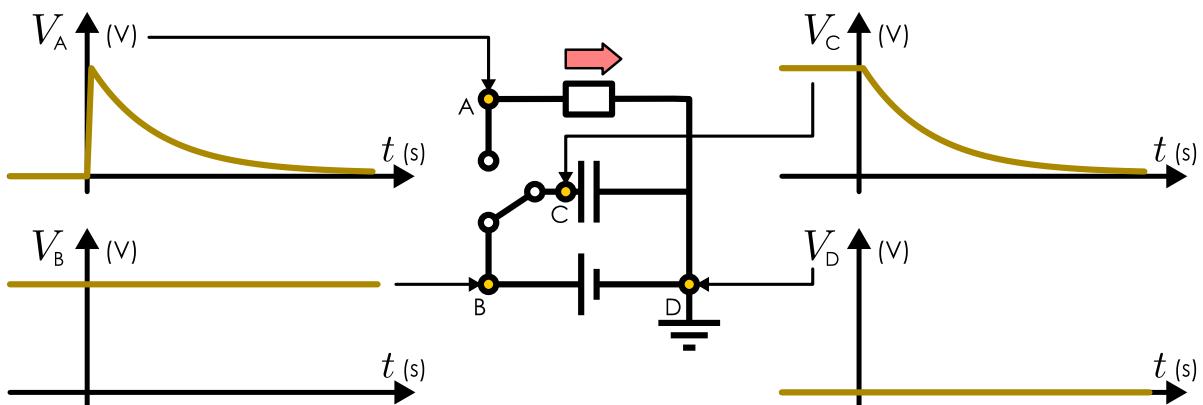
Pisteen C potentiaali on aluksi sama kuin pisteen B, koska kytkin yhdistää nämä pisteet. Toisaalta pistettä C erottaa pistestä D kondensaattori (kapasanssi C), jonka jännite on verrannollinen sen levijen varaukseen q ,

$$V_C = V_D + \Delta V_{D \rightarrow C} = \frac{q}{C}. \quad (11.96)$$

Aluksi levijen välinen potentiaaliero on sama kuin pariston lähdejännite, joten kondensaattorin varauksen täytyy olla alussa

$$q_{\text{alku}} = C \Delta V_{D \rightarrow C} = C \mathcal{E}. \quad (11.97)$$

Kuva 11.22: Potentiaali ajan funktiona RC-piirin eri osissa. Kytkin käännetään ajan hetkellä nolla. Piste D on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina nolla. Paristo pitää pisteen B aina korkeassa potentiaalissa. Piste C on aluksi korkeassa potentiaalissa, mutta sen potentiaali lähestyy nollaa kondensaattorin purkautuessa. Piste A saa kytkimen käännyessä saman potentiaalin kuin piste C.



Kondensaattorin varaus ei muutu välittömästi kytkintä käännettääessä, joten myöskään sen jännite ei muutu. Niinpä pisteen C potentiaalin täytyy olla heti kytkimen käänämisen jälkeen edelleen \mathcal{E} . Lopuksi kondensaattorelevyjen varaus on nolla, jolloin ne päätyvät samaan potentiaaliin. Pisteen C potentiaalin täytyy siis lopuksi olla sama kuin pisteen D eli nolla.

Pistettä A erottaa pisteestä D vastus (resistanssi R), joten näiden pisteen välinen jännite riippuu vastuksen läpi kulkevan sähkövirran i suuruudesta,

$$V_A = V_D + \Delta V_{D \rightarrow A} = Ri \quad (11.98)$$

Tässä sähkövirran positiivinen suunta on valittu pisteestä A kohti pistettä D, joten piste A on korkeammassa potentiaalissa kuin piste D, kun virta on positiivinen. Ennen kytkimen käänämistä pistet A ja D ovat samassa potentiaalissa ja vastuksen läpi kulkeva virta on nolla. Kun kytkin käännetään, piste A yhdistyy pisteesseen C, jonka potentiaali on kytkimen käänämisen jälkeen edelleen \mathcal{E} . Johdin tasaa pisteen A ja C potentiaalit lähes välittömästi, ja koska pisteen C potentiaali ei voi muuttua nopeasti, pisteen A potentiaaliksi pitää tulla \mathcal{E} lähes välittömästi kytkimen käänämisen jälkeen. Tällöin pisteen A ja D välille tulee potentiaaliero ja piirissä alkaa kulkea sähkövirta

$$i = \frac{1}{R} \Delta V_{D \rightarrow A} = \frac{1}{R} V_A. \quad (11.99)$$

Kun kytkin yhdistää pistet A ja C, näillä on aina sama potentiaali, $V_A = V_C$. Toisaalta pisteen C potentiaali riippuu kondensaattorin varauksesta yhtälön (11.96) mukaisesti, joten piirissä kulkeva virta riippuu kondensaattorin varauksesta,

$$i = \frac{1}{R} V_C = \frac{q}{RC}. \quad (11.100)$$

Toisaalta piirissä kulkeva sähkövirta ilmaisee varauksen siirtymisen nopeutta, joten yhtälön (11.2) mukaisesti

$$i = -\frac{dq}{dt}. \quad (11.101)$$

Yhtälössä on miinusmerkki, koska virran suunta on valittu positiiviselta levyltä negatiiviselle, jolloin positiivinen virta pienentää kondensaattorin varausta. Yhtälöt (11.100) ja (11.101) yhdistämällä saamme kondensaattorin varaukselle *differentiaaliyhtälön*

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q. \quad (11.102)$$

Tämä on samankaltainen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö kuin aikaisemmin tarkastelemamme jäähtymistä kuvava yhtälö (7.62), ja se voidaan ratkaista samalla tavalla separoiden tai yritteellä. Jäähtymistä tutkiessamme opimme, että jos suureen muutosnopeus on suoraan verrannollinen suureeseen itseensä, suureen muuttumista ajan kuluessa kuvaaa eksponenttifunktio. Nyt kondensaattorin varauksen muutosnopeus on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen, joten varakseen täytyy noudattaa eksponenttifunktioita

$$q(t) = a + be^{-t/c}, \quad (11.103)$$

missä a , b ja c ovat jotkin vakiot. Voimme siis käyttää tästä funktiota yritteenä ja sijoittaa sen differentiaaliyhälöön (11.102). Yritteen derivaatta on

$$\frac{dq}{dt} = q'(t) = -\frac{b}{c} e^{-t/c}, \quad (11.104)$$

joten sijoitus differentiaaliyhälöön antaa meille tavallisen yhtälön

$$\frac{b}{c} e^{-t/c} = \frac{1}{RC} (a + be^{-t/c}). \quad (11.105)$$

Erottelemalla ajasta riippuvat ja riippumattomat termit tämä yhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$b \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{RC} \right) e^{-t/c} = \frac{a}{RC}. \quad (11.106)$$

Yhtälön pitää toteutua kaikilla ajan hetkillä t , ja koska sen oikea puoli on vakio, myös vaseman puolen täytyy olla vakio. Vasemmalla puolella esiintyy kuitenkin ajasta riippuva eksponenttifunktio, joten vasen puoli voi olla vakio vain, jos eksponenttifunktion kerroin on nolla. Näin on, jos

$$c = RC. \quad (11.107)$$

Tällöin siis yhtälön vasen puoli on nolla, joten oikean puolen on myös oltava nolla, ja tästä ratkeaa $a = 0$ C.

- 11.18** (a) Tarkista, että vakion $c = RC$ yksikkö on sekunti. Miksi näin pitää olla?
 (b) Jos $a = 0$ ja $b = 1$, mikä on funktion (11.103) arvon suhteellinen muutos, kun aika t muuttuu arvosta 0 arvoon c ?
 (c) Mikä on funktion suhteellinen muutos, kun t muuttuu arvosta c arvoon $2c$?
 (d) Vakiota $c = RC$ kutsutaan piirin aikavakioksi. Miksiköön?

Vakio b ei voida ratkaista differentiaaliyhälöstä vaan se täytyy päättää alku- ja loppuehdon perusteella. Tiedämme, että tässä piirissä kondensaattoriin varaus on aluksi $q_{\text{alku}} = C\mathcal{E}$ ja lopuksi varaus on $q_{\text{loppu}} = 0$ C. Valitaan siis ajan nollahetkeksi $t = 0$ s hetki välittömästi kytkimen käänymisen jälkeen. Yritefunktio saa ajan hetkellä nolla arvon $q(0) = a + b = b$, joten saamme alkuehdon

$$q(0) = b = q_{\text{alku}} = C\mathcal{E}. \quad (11.108)$$

Nämä kaikki tuntemattomat vakiot on ratkaistu ja kondensaattorin varaukselle on saatu funktio

$$q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.109)$$

Voimme vielä tarkistaa, että ratkaisu lähestyy nollaa ajan kuluessa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0 \text{ C} = q_{\text{loppu}}. \quad (11.110)$$

Tämäkin ehto toteutuu, joten ratkaisu on järkevä.

Kun varaus tunnetaan, sähkövirta ja potentiaalit eri pisteissä on helppo laskea. Kytkimen käänämisen jälkeen (eli kun $t > 0$) potentiaali pisteessä A ja C on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen,

$$V_A(t) = V_C(t) = \frac{1}{C}q(t) = \mathcal{E}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.111)$$

Mjös sähkövirta on verrannollinen varaukseen,

$$i(t) = \frac{1}{RC}q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (11.112)$$

- 11.19** (a) Mikä on yllä ratkaistujen lausekkeiden mukaan (i) pisteen A potentiaali ja (ii) piirissä kulkeva sähkövirta hetkellä $t = 0$ ja pitkän ajan kuluttua?
 (b) Päättelimme jo aikaisemmin differentiaaliyhälöä ratkaisematta, miten potentiaalin ja virran täytyy muuttua kondensaattorin purkautuessa. Onko laskettu ratkaisu sopusoinnissa näiden päättelmiä kanssa?

esimerkki 11.7

Nopeat ja hitaat muutokset

Paristo (6 V), vastukset ($10 \text{ k}\Omega$), kondensaattori ($1 \mu\text{F}$) ja kytkin muodostavat piirin kuten kuvassa. Aluksi kytkin on auki, sitten kytkin suljetaan, ja lopuksi se avataan jälleen. Mitkä ovat pisteiden A–D potentiaalit, virrat vastusten 1 ja 2 läpi sekä kondensaattorin varaus (a) aluksi, (b) heti suljemisen jälkeen, (c) jonkin aikaa suljemisen jälkeen, (d) heti avaamisen jälkeen ja (e) jonkin aikaa avaamisen jälkeen?

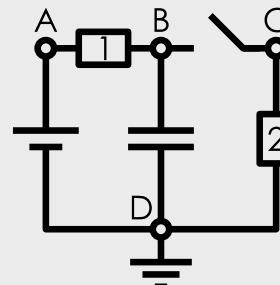
SUUNNITELMA Maadoituspisteen D potentiaali on sovittu nollaksi, $V_D = 0$ V. Pariston napojen välinen potentiaaliero on aina 6 V, joten $V_A = 6$ V. Vastuksessa potentiaaliero riippuu Ohmin lain mukaisesti virrasta

$$\Delta V_{\text{vastus}} = -Ri, \quad (11.113)$$

ja kondensaattorissa varauksesta

$$\Delta V_{\text{kondensaattori}} = \frac{Q}{C}. \quad (11.114)$$

Kun kytkin suljetaan, pistettiä B ja C yhdistää ideaalinen johde, ja tällöin pistetut saavat saman potentiaalin lähes välittömästi. Kondensaattorin varaus ja siten myös sen jännite sen sijaan muuttuu vähitellen, koska varauksen siirtäminen vie aikaa.



RATKAISU (a) Aluksi piirissä ei kulje lainkaan virtaa, koska kondensaattori on latautunut ja kytkin on auki. Niinpä kummassakaan vastuksessa ei ole jännitettä. Siispä $V_B = V_A = 6$ V ja $V_C = V_D = 0$ V. Kondensaattorin jännite on $|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 6$ V, joten kondensaattorissa on varaus $Q = C|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 6 \mu\text{C}$.

(b) Kondensaattorissa on edelleen sama varaus $Q = 1 \mu\text{C}$, joten kondensaattorin jännite on yhä 6 volttia ja siispä $V_B = 6 \text{ V}$. Vastuksen 1 päiden väillä ei siis ole jännitettä ja niinpä $i_{1,A \rightarrow B} = 0 \text{ A}$. Kytkin yhdistää pisteen B ja C, joten $V_C = V_B = 6 \text{ V}$. Vastuksen 2 päiden väillä on nyt jännite $\Delta V_{C \rightarrow D} = -6 \text{ V}$, joten sen läpi kulkee virta $i_{2,C \rightarrow D} = 0.6 \text{ mA}$. Tämä virta ei siis tule aluksi paristosta vaan kondensaattorista. Kondensaattori alkaa purkautua.

(c) Kondensaattorin purkautuessa potentiaalit ja virrat muuttuvat eksponentiaalisesti kunnes ne hetken kuluttua saavutavat uudet vakioarvot. Tällöin kondensaattorin varaus on jälleen vakio eikä kondensaattoriin kulje virtaa. Tämä tarkoittaa sitä, että virta kulkee vain vastusten läpi reittiä $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Tällöin kummankin vastuksen läpi kulkee sama virta ja koska resistanssit ovat yhtä suuret, potentiaali muuttuu kummassakin vastuksessa yhtä paljon. Siispä yhdessä vastuksessa jännitteet täytyy olla puolet pariston jännitteestä, $\Delta V_{A \rightarrow B} = \Delta V_{C \rightarrow D} = -\frac{1}{2}\Delta V_{D \rightarrow A} = -3 \text{ V}$. Siispä pisteen B ja C potentiaalin täytyy olla $V_B = V_C = 3 \text{ V}$. Virta vastusten läpi on $i_{1,A \rightarrow B} = i_{2,C \rightarrow D} = 0.3 \text{ mA}$. Kondensaattorin jännite on $|\Delta V_{B \rightarrow D}| = 3 \text{ V}$, joten kondensaattorin jää varaus $Q = 3 \mu\text{C}$.

(d) Kytkimen avaaminen katkaisee vastuksen 2 kautta kulkevan piirin, joten virta tämän vastuksen läpi katkeaa heti. Niinpä vastuksessa 2 ei ole jännitettä, $\Delta V_{C \rightarrow D} = 0 \text{ V}$, ja pisteen C potentiaali on $V_C = V_D = 0 \text{ V}$. Kondensaattorin varaus on yhä $Q = 3 \mu\text{C}$, joten kondensaattorin jännite on 3 voltia ja siis $V_B = 3 \text{ V}$. Vastuksen 1 päiden välinen potentiaaliero on $\Delta V_{A \rightarrow B} = -3 \text{ V}$, joten virta sen läpi on $i_{1,A \rightarrow B} = 0.3 \text{ mA}$. Tämä virta menee kondensaattorin, joten kondensaattori alkaa jälleen varautua.

(e) Kun kondensaattori on jälleen varautunut, tilanne on sama kuin alussa. Alla on yhteenvedo tuloksista.

	V_A	V_B	V_C	V_D	$i_{1,A \rightarrow B}$	$i_{2,C \rightarrow D}$	Q
(a, e)	6 V	6 V	0 V	0 V	0.0 mA	0.0 mA	6 μC
(b)	6 V	6 V	6 V	0 V	0.0 mA	0.6 mA	6 μC
(c)	6 V	3 V	3 V	0 V	0.3 mA	0.3 mA	3 μC
(d)	6 V	3 V	0 V	0 V	0.3 mA	0.0 mA	3 μC

ARVIOINTI Taulukosta voidaan tarkistaa, että Q on sama kohdissa (a) ja (b) sekä (c) ja (d) kuten pitääkin, koska varaus muuttuu vähitellen. Potentiaalit V_A ja V_D ovat vakiot, V_B on suoraan verrannollinen varaukseen Q ja $V_C = V_B$ tapauksissa (b) ja (c) eli kytkimen ollessa kiinni. Virta vastuksen 1 läpi on verrannollinen erotukseen $V_A - V_B$ ja virta vastuksen 2 läpi erotukseen $V_C - V_D$.

Tässä piirissä nähdään, kuinka kondensaattoria voidaan käyttää vastuksen 1 suojan. Koska kondensaattori estää pisteen B potentiaalin nopean muutoksen, myöskin vastuksen 1 jännite ja sen läpi kulkeva virta eivät voi muuttua nopeasti. Tällä tavalla kondensaattoreita voidaan käyttää muutosten tasaamiseen ja herkkien komponenttien suojaamiseen.



11.20 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä muutoksista vastusten ja kondensaattoreiden muodostamissa piireistä. Selitä erityisesti mitkä asiat voivat muuttua nopeasti (epäjatkuvasti) ja mitkä hitaasti (jatkuvasti) sekä miksi näin on. Miten ratkaiset tarkasti virran ja potentiaalit tällaisessa piirissä ajan funktioina?

11.4 Energia virtapiirissä

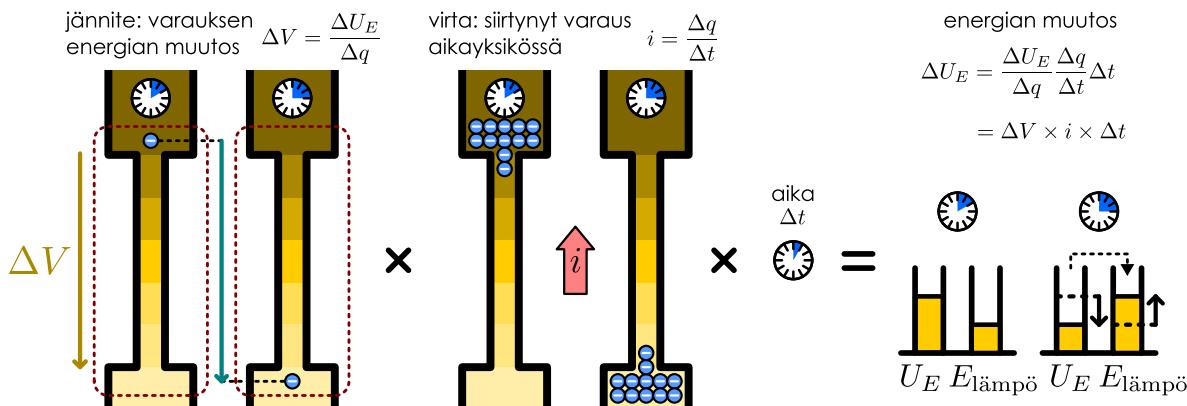
Sähköisten laitteiden ja virtapiirien toiminta perustuu potentiaalien ja virtojen ohjaamiseen, mutta jotta näillä laitteilla voitaisiin saada aikaan jotakin hyödyllistä kuten liikuttaa moottoreita tai tuottaa valoa, sähkövirran täytyy myös kuljettaa energiota. Opimme jo aikaisemmin, että esimerkiksi paristot muuttavat kemiallista energiota varauksenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi, mutta nyt tarkastelemme täsmällisemmin sähkövirtojen kuljettamaa energiota ja sen tehoa.

Sähkövirran siirtämä energia

Virtapiireissä sähköä kuljettavien elektronien massa on hyvin pieni, ja vaikka niiden satunnaisliike on nopeaa, ne vaeltavat hyvin hitaasti. Niinpä elektronien vaellukseen liittyvä liike-energia on mitättömän pieni, eikä sähkövirran mukana siirtyvä energia liity käytännössä lainkaan elektronien liike-energiaan. Tässä mielessä sähkövirta on aivan erilainen kuin esimerkiksi nesteen virtaus, jota olemme käyttäneet sähkövirran analogiana. Nesteen virtauksessa siirtyy paljon massaa, ja virtaavan nesteen liike-energia voi olla hyvin suuri. Elektronienkin avulla voi kuitenkin siirtää paljon energiota, koska esimerkiksi metallissa on hyvin paljon vapaasti liikkuvia elektroneja, ja niiden potentiaalienergia voi muuttua niiden liikuessa huomattavasti.

Potentiaali *määriteltiin* alunperin sähkövarauksen potentiaalienergian ja sen varauksen suhteena yhtälön (10.109), $U_E = qV$, mukaisesti. Tässä ideana oli se, että kun tiedämme potentiaalin jossakin pisteesä, saamme selville varatun hiukkasen potentiaalienergian kyseisessä pisteesä yksinkertaisesti kertomalla potentiaalin arvon varauksen suuruudella. Virtapiireissä voimme määrittää potentiaalin kaikissa piirin pistelissä, joten tällä periaatteella on helppo laskea piirissä liikkuvien varauksenkuljettajien potentiaalienergia missä tahansa.

Kuva 11.23: Varauksenkuljettajien potentiaalienergia muuttuu niiden kulkiessa potentiaalieron ylitse. Sähkövirran kulkiessa varauksia kulkee jatkuvasti. Sähköisen komponentin läpi kulkevan virran potentiaalienergian kokonaismuutos saadaan siis potentiaalieron, virran ja kuluneen ajan tulona.



Paikoillaan olevien varausten sähköinen potentiaalienergia ei muudu, joten ne eivät siirrä energiota. Varausten potentiaalienergia ei muudu myöskään silloin, kun ne liikkuvat vakiopotentiaalissa. Jos varaus kuitenkin siirtyy eri potentiaaliin, myös sen potentiaalienergia muuttuu, ja potentiaalienergian muutos on suoraan verrannollinen varauksen alku- ja loppupisteiden potentiaalien eroon,

$$\Delta U_E = q \Delta V. \quad (11.115)$$

Yleisemmin infinitesimaalisen pienien varauksen dq siirto potentiaalieron ΔV yli muuttaa systeemin potentiaalienergiaa määrään

$$dU_E = dq \Delta V. \quad (11.116)$$

Tyypillisessä virtapiirissä paristo siirtää positiivisia ionia korkeampaan potentiaaliin, jolloin niiden potentiaalienergia kasvaa. Tällöin siis pariston varastoima kemiallinen energia muuttuu sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Vastuksissa puolestaan negatiiviset elektronit kulkevat aina kohti korkeaa potentiaalia, jolloin niiden potentiaalienergia pienenee. Tällöin elektronien potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi.

Riippumatta siitä, siirryykö varaus ionien vai elektronien välityksellä, sähkövirta kuvailee aina kokonaisvarauksen siirtymistä. Niinpä varauksenkuljettajien potentiaalienergia kasvaa, jos sähkövirta kulkee kohti kasvavaa potentiaalia, ja potentiaalienergia pienenee, jos virta kulkee kohti pienenevää potentiaalia. Täsmällesemmin sähkövirta kertoo siirtyneen varauksen määräntoisen siirtoon kulunutta aikaa kohti,

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (11.117)$$

joten sähkövirran avulla voidaan esittää potentiaalienergian muutos siihen kulunutta aikaa kohti eli energian muutoksen *teho*,

$$P = \frac{dU_E}{dt} = \frac{dq}{dt} \Delta V = i \Delta V. \quad (11.118)$$

Toisin sanoen jos sähköisen komponentin läpi kulkee virta i ja potentiaali muuttuu komponentin läpi kuljettaessa virran kulkusuunnassa määräntoisen ΔV , varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutosnopeus on virran ja potentiaalin muutoksen tulo.

Edellisessä päättelyssä käytettiin vain virran ja potentiaalin määritelmiä, joten se pätee *mille tahansa* sähköiselle komponentille riippumatta siitä, millaiseen muotoon potentiaalienergia muuttuu. Tilanne on samanlainen kuin painovoimakentässä liikkuvilla kappaleilla: kappaleen gravitaatiopotentiaalienergia pienenee sen siirtymessä alaspin ja kasvaa sen siirtymessä ylös. Riippuu tieteenkin tilanteesta, millaisten muotojen välillä energia tällaisissa tapauksissa muuttuu. Vapaasti putoavalla kappaleella potentiaalienergia muuttuu liike-energiaksi, mutta esimerkiksi tasaisella nopeudella pitkin kaltevaan tasoa liukuvalla kappaleella kitka muuttaa potentiaalienergian lämpöenergiaksi. Jos ihminen nostaa kappaleen ylös, hän muuttaa varastoimaan sa kemiallista energiasta kappaleen potentiaalienergiaksi. Jokaisessa tapauksessa potentiaalienergian muutos riippuu kuitenkin vain siitä, miten korkeus muuttuu niiden siirtymessä. Täsmälle samalla tavalla sähkövarausten potentiaalienergian muutos riippuu vain siitä, paljonko potentiaali muuttuu niiden siirtymessä.

Jos ideaalisen pariston läpi kulkee virta i negatiiviselta navalta positiiviselle, potentiaalin muutos virran kulkusuunnassa on sama kuin pariston lähdejännite,

$$\Delta V = \mathcal{E}, \quad (11.119)$$

ja niinpä paristosta siirtyy virtapiiriin varauksenkuljettajille energiaa teholla

$$P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = i\mathcal{E}. \quad (11.120)$$

Huomaa kuitenkin, että virran ei ole pakko kulkea paristossa tähän suuntaan. Esimerkiksi akkuja ladattaessa ne kytetään toisten jännitelähteiden kanssa pöriin "takaperin" niin, että niissä kulkee virta positiiviselta navalta negatiiviselle. Tällöin potentiaaliero virran kulkissa akun läpi on negatiivinen,

$$\Delta V = -\mathcal{E}, \quad (11.121)$$

ja varauksenkuljettajien energia muuttuu teholla

$$P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -i\mathcal{E}. \quad (11.122)$$

Energiaa siis siirtyy varauksenkuljettajilta akkuun teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{paristo}} = -P_{\text{paristo} \rightarrow \text{varaus}} = i\mathcal{E}. \quad (11.123)$$

Ladattavan akun tapauksessa virran ajaminen akun läpi "väärään suuntaan" käääntää kemiallisten reaktioiden suunnan, jolloin varauksenkuljettajien luovuttama energia muuttuu takaisin akun kemialliseksi energiaksi. Jos paristo ei ole ladattava, reaktioita ei voi käääntää virran avulla, ja tällöin varauksenkuljettajien luovuttama energia kuluu pääasiassa pariston lämmittämiseen.

Vastuksessa virta sen sijaan kulkee aina Ohmin lain mukaisesti potentiaalin laskusuuntaan,

$$i = -\frac{1}{R}\Delta V. \quad (11.124)$$

Niinpä varauksenkuljettajien potentiaalienergia aina pienenee vastuksessa. Varauksenkuljettajien energia muuttuu teholla

$$P_{\text{vastus} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -\frac{1}{R}(\Delta V)^2, \quad (11.125)$$

missä miinusmerkki siis tarkoittaa sähköisen potentiaalienergian pienenevän. Vastuksessa potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi, joten virta siis lämmittää vastusta teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{vastus}} = -P_{\text{vastus} \rightarrow \text{varaus}} = \frac{1}{R}(\Delta V)^2. \quad (11.126)$$

Ohmin lain mukaisesti potentiaalin muutos vastuksessa on

$$\Delta V = -Ri, \quad (11.127)$$

joten vastuksessa kuluvan tehon voi ilmaista myös virran avulla muodossa

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{vastus}} = Ri^2. \quad (11.128)$$



11.21 Kuvissa 11.14 ja 11.15 oli kahden lampun rinnan- ja sarjaankytkenät.

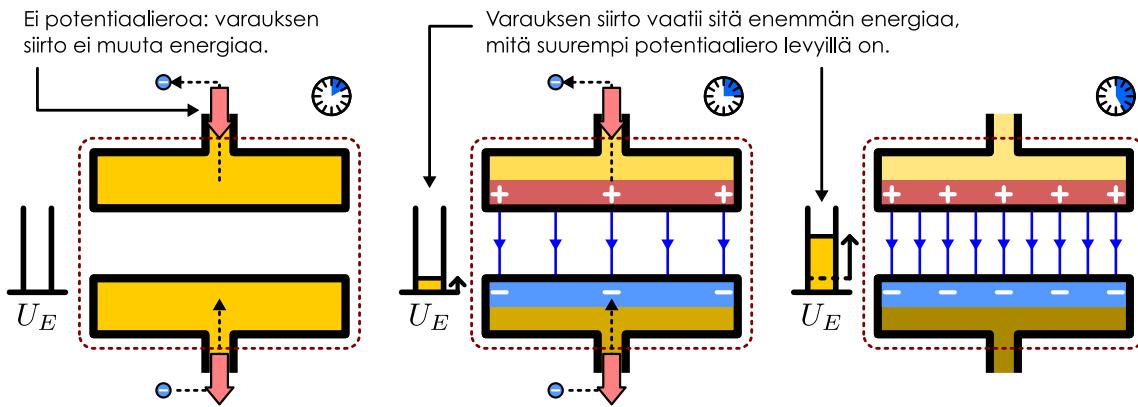
- (a) Mitkä ovat lamppujen resistanssit?
- (b) Mikä on kussakin lampussa kuluva teho (kaikissa tapauksissa)?
- (c) Hehkulamppu on sitä kirkkaampi, mitä suurempi teho siinä kuluu. Järjestä lamput kirkkauden mukaan.
- (d) Kuinka suurella teholla pariston energia muuttuu?

Sähkökentän energia

Kun virtapiiri on tasaisen virtauksen tilassa, kondensaattoreiden läpi ei kulje sähkövirtaa. Tällöin niiden varaus ja energia ovat vakiot. Kondensaattorin latautuessa tai purkautuessa kondensaattorin varaus kuitenkin muuttuu. Kondensaattorin *läpi* ei tällöinkään varsinaisesti kulje sähkövirtaa, koska kondensaattorilevyjen välillä on eristettä. Kuitenkin esimerkiksi kondensaattorin latautuessa sen positiiviselle levylle saapuu sähkövirta ja sen negatiiviselta navalta lähtee yhtä suuri sähkövirta. Kondensaattorin näkökulmasta varausta siirtyy sen matalassa potentiaalissa olevalta levyltä sen korkeassa potentiaalissa olevalle levylle, jolloin varauksen potentiaalienergia kasvaa. Latautuva kondensaattori siis *varastoi* varauksenkuljettajien sähköisistä potentiaalienergiasta. Vastaavasti kondensaattorin purkautuessa varausta siirtyy korkeasta potentiaalista matalaan potentiaaliin, jolloin varauksen potentiaalienergia pienenee.

Ulkoa katsoen kondensaattorin yhdelle navalle saapuu virta ja toiselta navalta lähtee virta, joten vaikuttaa siltä kuin virta todella kulkisi kondensaattorin läpi. Kondensaattorin latautuessa tämä virta näyttäisi kulkevan

Kuva 11.24: Kondensaattori varastoi potentiaalienergiaa, kun sille kerääntyy positiivista varausta korkeaan potentiaaliin ja negativista varausta matalaan potentiaaliin.



kondensaattorin positiviselta levyltä eli korkeasta potentiaalista negatiiviselle levylle eli matalaan potentiaaliin, jolloin *näennäisesti* virta kulkee kondensaattorissa laskevan potentiaalin suuntaan. Potentiaaliero kondensaattorin levijen välillä on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen, joten

$$\Delta V = -\frac{1}{C}q. \quad (11.129)$$

Todellisuudessa kondensaattoriin saapuvien varauksenkuljettajien potentiaalienergia ei muutu, koska kondensaattorin kytketyt johtimet ovat samassa potentiaalissa kuin kondensaattorilevytkin. Kuitenkin jos ajattelemme virran todella kulkevan kondensaattorin läpi, varauksenkuljettajien potentiaalienergia näyttäisi tällöin pienenevä teholla

$$P_{\text{kondensaattori} \rightarrow \text{varaus}} = i\Delta V = -\frac{1}{C}qi. \quad (11.130)$$

Toisin sanoen energiaa näyttäisi siirttyvän varauksenkuljettajilta kondensaattorille teholla

$$P_{\text{varaus} \rightarrow \text{kondensaattori}} = -P_{\text{kondensaattori} \rightarrow \text{varaus}} = \frac{1}{C}qi, \quad (11.131)$$

ja tämä energia siis varastoituu kondensaattoriin sähköisenä potentiaalienergiana (kuva 11.24). Kun kondensaattori sitten purkautuu, tämä potentiaalienergia näyttäisi palautuvan varauksenkuljettajille.

Kondensaattorin latautuessa sekä varaus että virta muuttuvat ajan kuluessa, mutta voimme jälleen käyttää virran ja varauksen välistä yhtälöä (11.2), jonka mukaan virta on varauksen aikaderivaatta,

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (11.132)$$

Tässä tapauksessa positiivinen virta tarkoittaa varauksen kasvavan, joten yhtälössä ei ole miinusmerkkiä. Tämän perusteella kondensaattorin energia muuttuu teholla

$$\frac{dU}{dt} = P_{\text{varaus} \rightarrow \text{kondensaattori}} = \frac{1}{C}qi \frac{dq}{dt}. \quad (11.133)$$

Kun kondensaattorin varaus muuttuu infinitesimaalisen määrän dq , sen energian muutos on siis

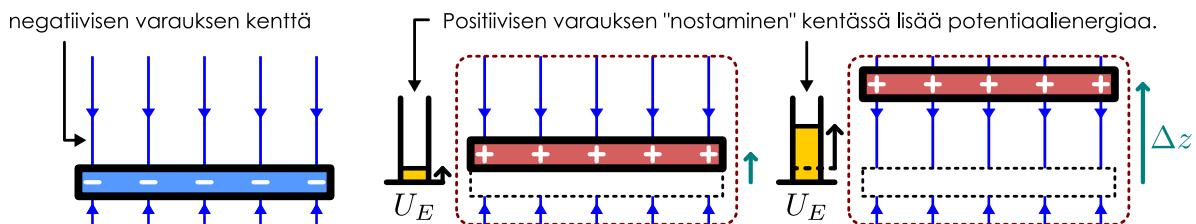
$$dU_E = \frac{1}{C}qdq. \quad (11.134)$$

Jos varamattoman kondensaattorin energia on nolla, varaukseen Q asti varatun kondensaattorin energia saadaan laskemalla yhteen kaikki pienet energian muutokset varauksesta $q = 0$ varaukseen $q = Q$ eli integroimalla,

$$U_E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{C} \left|_0^Q \frac{1}{2}q^2 \right| = \frac{Q^2}{2C}. \quad (11.135)$$

Kondensaattorin varastoima energia on siis verrannollinen sen varauksen neliöön. Tässä suhteessa kondensaattori toimii siis samaan tapaan kuin mekaaninen jousi. Levossa olevaa jousta on helppo venyttää, mutta venyttäminen tulee sitä vaikeammaksi, mitä enemmän jousi on jo venynyt, ja jouseen varastoitunut energia on

Kuva 11.25: Kondensaattorin potentiaalienergian voi määrittää myös laskemalla kondensaattori keräämän positiivisen varauksen energian negatiivisen varauksen kentässä.



verrannollinen jousen venymän neliöön. Samalla tavalla varauksen lisääminen kondensaattoriin on sitä vaikeampaa, mitä enemmän varausta kondensaattorissa jo on, ja siksi kondensaattorin energia on verrannollinen sen varauksen neliöön. Lisäksi koska kondensaattorilevyjen välinen potentiaaliero on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen,

$$Q = C\Delta V, \quad (11.136)$$

varastoituneen energian voi kirjoittaa myös potentiaalieron avulla muodossa

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(C\Delta V)^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2. \quad (11.137)$$



11.22 Tarkastellaan kuva 11.24. Levyjen välinen jännite on $\Delta V = q/C$ ja kondensaattorin positiivisen levyn varaus muuttuu dq sekä negatiivisen $-dq$. Miksi siis $dU_E = \frac{1}{C}qdq = \Delta V dq$ eikä $dU_E = \Delta V dq + (-\Delta V)(-dq) = 2\Delta V dq$?

Pohditaan hiukan tämän tuloksen merkitystä. Kondensaattorihan varastoi energiaa siihen kerättyjen varausten sähköisenä potentiaalienergiana. Painovoimakentässä kappaleilla on sitä enemmän potentiaalienergiaa mitä korkeammalla ne ovat ja mitä suurempi niiden massa on, koska Maa ja kappaleet vetävät toisiaan gravitaation välityksellä puoleensa. Samaan tapaan kondensaattorin positiivinen ja negatiivinen varaus vetävät toisiaan puoleensa sähköisellä voimalla, joten niiden välisen sähköisen vuorovaikutuksen potentiaalienergian täytyy olla sitä suurempi mitä suuremmat varaukset ovat ja mitä kauemmaksi toisistaan ne on erotettu. Esimerkiksi levykondensaattorin energia vastaa siis sitä energiota, mikä periaatteessa tarvittaisiin neutraalin levyn jakamiseksi kahteen varattuun levyn (varaukset Q ja $-Q$) sekä näiden levysten erottamiseen toisistaan (kuva 11.25). Homogenisessa painovoimakentässä $\vec{G} = -g\hat{k}$ massan m nostaminen korkeudelle Δz vaatii työn $W = mg\Delta z$. Samalla tavalla homogenisessa sähkökentässä $\vec{E} = -E\hat{k}$ varauksen Q siirtäminen etäisyydelle Δz vaatii työtä

$$W = QE\Delta z. \quad (11.138)$$

Kondensaattorin varastoinan potentiaalienergian täytyy olla yhtä suuri kuin työ, joka kondensaattorin varausten Q ja $-Q$ vetäminen erilleen toisistaan vaatii, $U_E = W$.

Levykondensaattorin sisäinen sähkökenttä on $E = \sigma/(\kappa\varepsilon_0)$, missä σ on levyjen varaustihveys, mutta tämä on positiivisen ja negatiivisen varauksen *yhdessä* tuottama kokonaiskenttä. Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima vain negatiivisen varauksen tuottamasta kentästä, joka on *puolet kokonaiskentästä*,

$$E = \frac{\sigma}{2\kappa\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\kappa\varepsilon_0}, \quad (11.139)$$

missä A on yhden levyn pinta-ala. Kondensaattorin varausten siirtäminen varastoi siis potentiaalienergian

$$U_E = W = \frac{\Delta z}{2A\kappa\varepsilon_0} Q^2. \quad (11.140)$$

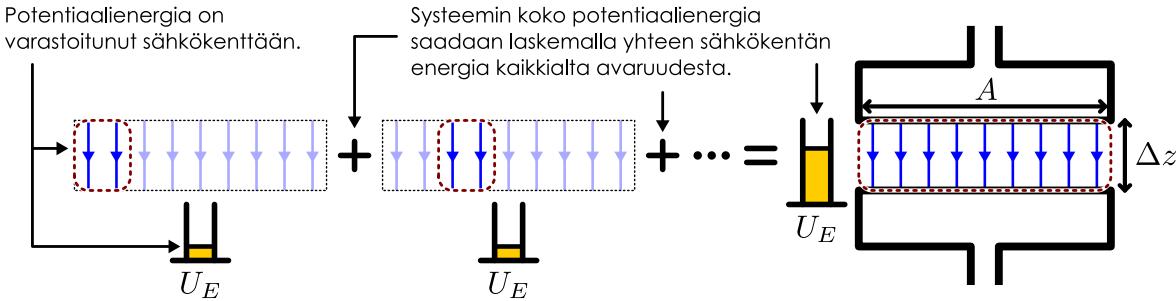
Tämä on sama energia kuin aikaisemmin johdettu yhtälö (11.135), sillä levykondensaattorin kapaistanssi on yhtälön (10.174) mukaan

$$C = \frac{1}{\Delta z} A\kappa\varepsilon_0. \quad (11.141)$$



11.23 Miksi edellä laskettuun tulokseen ei pidä listätä negatiivisen varauksen potentiaalienergiaa positiivisen varauksen kentässä?

Kuva 11.26: Sähköinen potentiaalienergia varastoituu sähkökenttään. Energiaa on kaikkialla, missä sähkökenttä ei ole nolla, ja ideaalisessa levykondensaattorissa kenttä ja sen energia on vangittu levijen välissä.



Voimme tarkastella kondensaattorin varastoimaa energiota vielä kolmannestakin näkökulmasta. Sähköinen potentiaalienergia ei nimittäin ole oikeastaan varattujen hiukkasten potentiaalienergiaa vaan *sähköisen vuorovaikutuksen* potentiaalienergiaa. Nämäkin sen sijaan, että ajattelisimme sähköisen potentiaalienergian olevan hiukkasten sijaintiin liittyvää energiota, on parempi ajatella sen olevan hiukkasten muodostamaan *sähkökenttään itseensä sitoutunutta energiota*. Varaamaton kondensaattori ei luo lainkaan sähkökenttää, joten siihen ei ole varastoitunut myöskään energiota. Kun kondensaattoriin kerätään varausta, sen sisään syntyy myös sähkökenttä, ja mitä voimakkaampi tämä kenttä on, sitä enemmän energiota siihen liittyy.

Sähkökenttään liittyvä energia on helppo laskea tarkastelemalla suurta levykondensaattoria. Kondensaattoriin varastoitunut potentiaalienergia on

$$U_E = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2, \quad (11.142)$$

mutta toisaalta kondensaattorilevijen välinen potentiaaliero on sähkökentän voimakkuuden E ja levijen välisten etäisyyden Δz tulo, $\Delta V = E\Delta z$. Nämäkin kondensaattorin energian voi ilmaista sähkökentän voimakkuuden avulla muodossa

$$U_E = \frac{1}{2}C(\Delta z)^2 E^2. \quad (11.143)$$

Äärettömien levijen mallissa kondensaattorin sähkökenttä on levijen ulkopuolella nolla ja levijen välissä homogeeninen. Sähkökenttä on siis vangittu tilavuuteen $V = A\Delta z$, ja kenttä on siellä voimakkuudeltaan vakio, joten voimme määritellä **sähkökentän energiatiheden** jakamalla sähkökentän kokonaisen energian sen täytäntöllä tilavuudella (kuva 11.26)

$$u_E = \frac{U_E}{V} = \frac{1}{2A}C\Delta z E^2. \quad (11.144)$$

Näennäisesti tämä lauseke riippuu kondensaattorin ominaisuuksista, mutta sähkökentän energiatiheden pitäisi olla vain sähkökentän ominaisuus, joka ei riipu lainkaan siitä, millaisen kondensaattorin sisällä kenttä on. Näin onkin, mikä nähdään sijoittamalla yhtälöön kapasitanssin lauseke (11.141). Tällöin kondensaattorin kokoa kuvaavat suureet supistuvat pois, ja jäljelle jää lauseke

$$u_E = \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{\Delta z} A \kappa \epsilon_0 \right) \Delta z E^2 = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2. \quad (11.145)$$

Erityisesti tyhjiössä $\kappa = 1$ ja sähkökenttään sitoutuneen energian tiheys on

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (11.146)$$

Vaikka johdimme tuloksen käyttäen ideaalista levykondensaattoria, se pätee yleisesti. Toisin sanoen minkä tahansa varauksista koostuvan systeemin potentiaalienergian voidaan ajatella olevan varausten muodostaman kentän energiota, ja tämän energian määriä tilavuusyksikköö kohti on kaikkialla suoraan verrannollinen kentän voimakkuuden neliöön.

- 11.24** Elektronit ovat jakautuneet tasaisesti pieniin johdepallon pinnalle. Elektronit hylkivät toisiaan, joten systeemillä on potentiaalienergiaa. Sitten elektronit siirretään toisen suuremman johdepallon pinnalle, jolloin niiden välinen keskimääräinen välimatka kasvaa.
- Kasvako vai pieneneekö elektronien välisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia?
 - Vertaa elektronien syntyttämää sähkökenttää alussa ja lopussa. Mitä eroa kentissä on?
 - Selitä potentiaalienergian muutos kentän muutoksen ja kentän energiatiheden kautta.

esimerkki 11.8

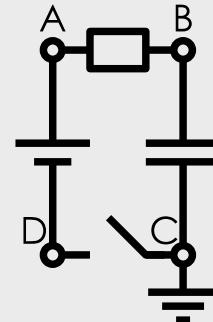
Latautuva kondensaattori

Jännitelähde (60 V), vastus ($50\text{ k}\Omega$), kondensaattori (500 nF) ja kytkin muodostavat piirin kuten kuvassa. Aluksi kondensaattorissa ei ole varausta, mutta kytkimen sulkemisen jälkeen kondensaattori latautuu. (a) Mitkä ovat pisteen A–D potentiaalit aluksi, heti kytkimen sulkemisen jälkeen ja jonkin ajan kuluttua? (b) Ratkaise virta ja potentiaalit ajan funktiona. (c) Ratkaise teho ja energian kokonaismuutos kussakin komponentissa ajan funktiona. Mitä energian muotoja prosessiin liittyy?

SUUNNITELMA Piste C on maadoitettu, joten sen potentiaali on aina $V_C = 0\text{ V}$. Jännitelähde toimii kuin paristo ja sen napojen välillä on aina 60 voltin potentiaaliero, $\Delta V_{D \rightarrow A} = 60\text{ V}$. Vastuksessa potentiaaliero on verrannollinen virtaan, $\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ri_{A \rightarrow B}$ ja kondensaattorissa varaukseen $|\Delta V_{B \rightarrow C}| = q/C$.

Kun kytkin on auki, virta ei pääse kulkemaan ja vastuksen jännite on nolla. Samoin kondensaattori oli varamatton, joten senkin jännite on nolla. Niinpä ainoa potentiaaliero on paristossa, eli $V_A = V_B = 0\text{ V}$ ja $V_D = -60\text{ V}$.

Kun kytkin suljetaan, virta pääsee kulkemaan ja pisteen C ja D saavat saman potentiaalin, $V_D = V_C = 0\text{ V}$. Pariston vuoksi pisteen A potentiaaliksi tulee siis $V_A = 60\text{ V}$. Varaus siirtäminen kondensaattoriin vie hetken, joten heti kytkimen sulkemisen jälkeen kondensaattorin varaus on yhä nolla ja niinpä sen jännitekin on nolla, eli $V_B = 0\text{ V}$. Vastuksen pääden välillä on nyt potentiaaliero $\Delta V_{A \rightarrow B} = -60\text{ V}$, joten virta sen läpi on $i_{A \rightarrow B} = -\Delta V_{A \rightarrow B}/R = 1.2\text{ mA}$.



Virta siirtää varausta pisteeeseen C kiinnitetystä kondensaattorin levyltä pisteeeseen B kiinnitettylle levylle, jolloin kondensaattori latautuu. Tällöin kondensaattorilevyn välinen potentiaaliero kasvaa niin, että levy B saa korkeamman potentiaalin. Lopulta piiri asettuu uuteen tasapainotilaan, jolloin kondensaattorin varaus on vakio eikä virta enää kulje. Pisteen C ja D potentiaali on koko ajan $V_C = V_D = 0\text{ V}$ ja pisteen A potentiaali on $V_A = 6\text{ V}$. Kun virtaa ei enää ole, vastuksen pääden välillä ei enää ole potentiaalieroja ja pisteen B potentiaalin täytyy siis olla $V_B = V_A = 6\text{ V}$. Kondensaattori saa siis lopuksi saman jännitteen kuin paristo, jolloin siinä täytyy olla varaus $q = C|\Delta V_{B \rightarrow C}| = 30\text{ }\mu\text{C}$. Voimme laskea suureet ajan funktiona kirjoittamalla Kirchoffin silmukkasäännön mukaisen jänniteyhtälön piirille, kun kytkin on suljettu:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} + \Delta V_{B \rightarrow C} + \Delta V_{C \rightarrow D} + \Delta V_{D \rightarrow A} = -Ri - \frac{1}{C}q + \mathcal{E} \quad (11.147)$$

Koska piirissä kulkee kaikkialla sama virta, merkitään virtaa vastuksessa yksinkertaisesti $i = i_{A \rightarrow B}$. Virta kuljettaa positiivista varausta kondensaattoriin B-levylle ja negatiivista C-levylle, joten kondensaattorin varauksen muutosnopeus on $i = \frac{dq}{dt}$. Huomaa, että koska kondensaattorin B-levy saa positiivisen varauksen, potentiaali pienenee B:stä C:hen ja $\Delta V_{B \rightarrow C} = -\frac{1}{C}q < 0\text{ V}$. Sijoittamalla virran ja varauksen välinen yhteys jänniteyhtälöön saamme varaukselle differentiaaliyhtälön

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E} \quad (11.148)$$

Varaus saadaan ajan funktiona tämän differentiaaliyhtälön ratkaisuna, kun huomioidaan alkuehto $q(0) = 0\text{ C}$, jonka mukaan kondensaattorissa ei ole varausta kytkimen sulkeutuessa eli ajan hetkellä $t = 0\text{ s}$. Virta saadaan edelleen varauksen aikaderivaattana ja pisteen B potentiaali on suoraan verrannollinen varaukseen.

Varauksenkuljettajien potentiaalienergian muutoksen teho on kaikissa sähkökomponenteissa virran ja jännitteiden tulon, $P_{\text{varaus}} = i\Delta V$, jolloin komponentin energian muutos on tämän vastaluku

$$P_{\text{komponentti}} = -P_{\text{varaus}} = -i\Delta V. \quad (11.149)$$

Virran kulkiessa paristo muuttaa kemiallista energiota elektronien potentiaalienergiaksi, jolloin pariston varastoima energia muuttuu teholta $P_{\text{paristo}} = -i\Delta V_{D \rightarrow A} = -i\mathcal{E}$. Vastus kuluttaa elektronien energiota lämpöenergiaksi teholta $P_{\text{vastus}} = -i\Delta V_{A \rightarrow B} = Ri^2$, jolloin vastus siis lämpenee tällä teholta. Kondensaattori varastoi energiota teholta $P_{\text{kondensaattori}} = -i\Delta V_{B \rightarrow C} = i\frac{q}{C}$. Energian kokonaismuutos kussakin komponentissa saadaan integroimalla tehoa ajan suhteen,

$$\Delta E_{\text{komponentti}} = \int_0^\infty P_{\text{komponentti}} dt. \quad (11.150)$$

RATKAISU (a) Tulokset on taulukoitu alla.

	V_A	V_B	V_C	V_D	i	q
alku ($t < 0$)	0 V	0 V	0 V	-60 V	0.0 mA	0 μC
heti ($t = 0$)	60 V	0 V	0 V	0 V	1.2 mA	0 μC
loppu ($t \rightarrow \infty$)	60 V	60 V	0 V	0 V	0.0 mA	30 μC

(b) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö yritteellä $q(t) = a + be^{-t/c}$. Yritteen sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa

$$-R\frac{b}{c}e^{-t/c} + \frac{a}{C} + \frac{b}{C}e^{-t/c} = \mathcal{E}, \quad (11.151)$$

ja tämä toteutuu kaikilla ajan hetkinä, kun ajasta riippuvien termien kertoimien summa on nolla, $-R\frac{b}{c} + \frac{b}{C} = 0$, ja kun yhtälön kummallakin puolella on sama vakiotermi, $\frac{a}{C} = \mathcal{E}$. Ratkaisu on $c = RC$ ja $a = C\mathcal{E}$. Alkuehdosta saadaan vielä $q(0) = a + b = 0$ eli $b = -a = -C\mathcal{E}$. Varaus, virta ja pisteen B potentiaali ovat siis

$$q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right), \quad i(t) = q'(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad V_B(t) = \frac{1}{C}q(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right). \quad (11.152)$$

(c) Paristo muuttaa kemiallista energiota elektronien potentiaalienergiaksi teholle $P_{\text{paristo}} = -i\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$. Kaikkaan pariston varastoimaa energiaa kuluu

$$\Delta E_{\text{paristo}} = -\frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{RC}t} dt = C\mathcal{E}^2 \left| e^{\frac{1}{RC}t} \right|_0^\infty = C\mathcal{E}^2 = -1.8 \text{ mJ}. \quad (11.153)$$

Vastus muuttaa elektronien paristolta saamaa energiota lämmöksi teholle $P_{\text{vastus}} = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}$, jolloin kokonaismuutos on

$$\Delta E_{\text{vastus}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{RC}t} dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 = 0.9 \text{ mJ}. \quad (11.154)$$

Kondensaattori varastoi energiota teholle $P_{\text{kondensaattori}} = i\frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} (e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{2}{RC}t})$, ja kokonaisuudessaan kondensaattoriin varastoituu energiota

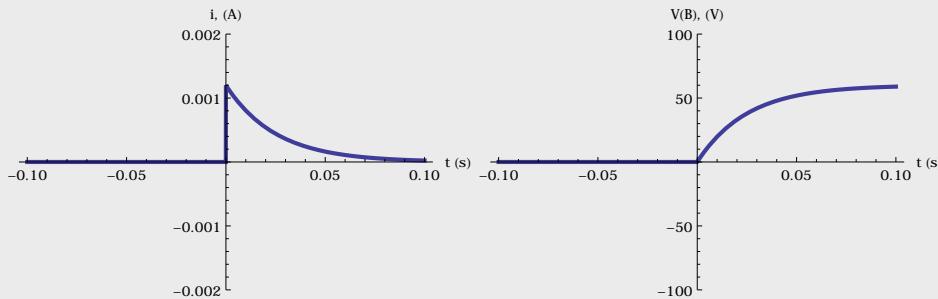
$$\Delta E_{\text{kondensaattori}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{1}{RC}t} - e^{-\frac{2}{RC}t} \right) dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2 = 0.9 \text{ mJ}. \quad (11.155)$$

Mathematica:

```
(* ratkaistaan varaus differentiaaliyhtälöstä *)
lukuarvot = {e -> 60, R -> 50000, c -> 500*10^-9};
ratkaisu = DSolve[ {R q'[t] + q[t]/c == e, q[0] == 0}, q, t ];
q[t] /. ratkaisu[[1]] // Simplify
c e (1 - E^(-(t/(c R))) )

(* virta ja pisteen B potentiaali *)
i[t_] := If[ t < 0, 0, q'[t] /. ratkaisu[[1]] ]
vb[t_] := If[ t < 0, 0, q[t]/c /. ratkaisu[[1]] ]
Plot[ i[t] /. lukuarvot, {t, -0.1, 0.1},
PlotRange -> {-0.002, 0.002},
PlotStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {"t (s)", "i, (A)" } ]
Plot[ vb[t] /. lukuarvot, {t, -0.1, 0.1},
PlotRange -> {-100, 100},
PlotStyle -> Thickness[0.01], AxesLabel -> {"t (s)", "V(B), (V)" } ]

(* energia *)
Eparisto = Integrate[ -e i[t], {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
-c e^2
Evastus = Integrate[ R i[t]^2, {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
(c e^2)/2
Ekondensaattori = Integrate[ i[t] vb[t], {t, 0, Infinity}, Assumptions -> c R > 0 ]
(c e^2)/2
{Eparisto, Evastus, Ekondensaattori, Eparisto + Evastus + Ekondensaattori} /. lukuarvot
t-0.00018, 0.0009, 0.0009, 0}
```



ARVIOINTI Tarkistetaan, että ratkaisuna saadut funktiot saavat oikeat alku- ja loppuarvot. Varaus on aluksi $q(0) = 0$ C ja lopuksi $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = C\mathcal{E} = 30 \mu\text{C}$. Virta on aluksi $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1.2 \text{ mA}$ ja lopuksi $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \text{ A}$. Pisteen B potentiaali on aluksi $V_B(0) = q(0)/C = 0 \text{ V}$ ja lopuksi $\lim_{t \rightarrow \infty} V_B(t) = \mathcal{E} = 60 \text{ V}$. Kaikki siis toimii.

Energian pitää säilyä, joten vastuksen ja kondensaattorin täytyy kuluttaa energiota täsmälleen yhtä paljon kuin mitä paristo antaa. Näin tapahtuu. Itse asiassa täsmälleen puolet pariston antamasta energiasta varastoituu kondensaattoriin ja puolet muuttuu vastuksessa lämmöksi, eikä tämä rüpu komponenttien ominaisuuksista. Jos energiota ei haluta hukata lämmöksi, kondensaattori täytyy ladata jännitelähteellä, jonka jännitetä voidaan kasvattaa vähitellen.



11.25 Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä energiasta virtapiireissä. Mistä riippuu sähköisen komponentin teho yleisesti? Selitä miksi! Miten teho lasketaan paristossa, vastuksessa ja kondensaattorissa? Miten määrität kondensaattoriin varastoituneen energian?

Yhteenveton Sähkövirkta

Virta, resistanssi ja energia

- Sähkövirta ilmaisee siirryvän varauksen määrää aikajaksikossa,

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

- Virrantihesys ilmaisee sähkövirran pinta-alaa kohti. Jos virrantihesys on vakio ja x -suuntainen,

$$j_x = \frac{i}{A}.$$

Virrantihesys on varauksenkuljetteiden tiheyden ja niiden väellusnopeuden tulo,

$$\bar{j} = \rho \bar{v}_{\text{vaelius}}.$$

- Jos johteessa on sähkökenttä ja siis muuttuva potentiaali, siinä kulkee virta. Ohmin lain mukaan virta on verrannollinen johtimen pääiden potentiaalieroona

$$i = -\frac{1}{R} \Delta V,$$

ja virrantihesys sähkökenttään

$$\bar{j} = \sigma \bar{E}.$$

Tässä R on **resistanssi** ja σ **johtavuus**.

- Sarjaankytettujen vastusten resistanssit lasketaan yhteen

$$R = \sum_i R_i$$

ja samoin rinnankytettujen resistanssien käänteisluvut

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

- Potentiaaliero ΔV yli kulkevan virran i potentiaalienergia muuttuu teholla

$$P = \frac{dU_E}{dt} = i \Delta V.$$

- Vastuksessa potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi teholla

$$P = \frac{1}{R} (\Delta V)^2 = Ri^2.$$

- Kondensaattori varastoii energian sähkökenttään. Kondensaattorin varastoima energia on

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2.$$

- Sähkökentän energiatihesys on

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

Virtapiirit

- Oikosulku tarkoittaa sähköisen komponentin napojen yhdistämistä johtimella. Pariston napojen oikosulku tuottaa hyvin suuren oikosulkuvirran.
- Suorassa virtajohtimessa kulkee kaikkialla yhtä suuri virta. Usean johtimen risteykseen saapuvien virtojen summan on oltava sama kuin sieltä poistuvien virtojen,

$$\sum_{\text{saapuva}} i = \sum_{\text{poistuva}} i.$$

Tämä on *Kirchhoffin risteysääntö*.

- Potentiaalin muutosten summa on nolla kierrettäessä johdinsilmukan ympäri

$$\sum_{\text{silmukka}} \Delta V = 0 \text{ V}.$$

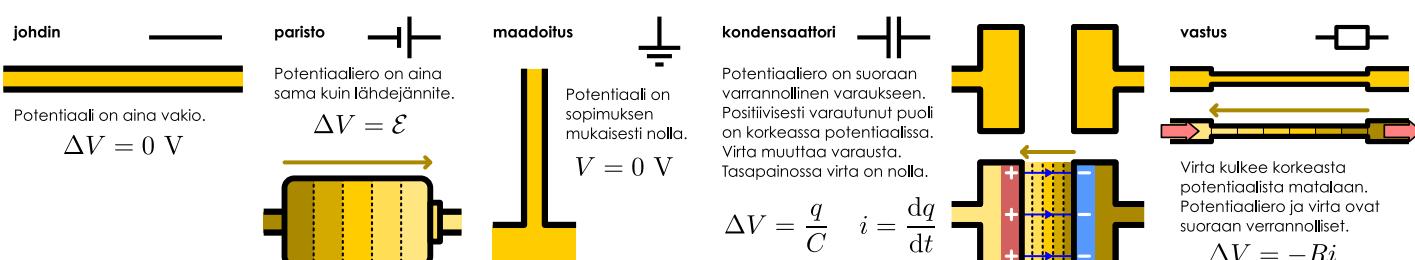
Tämä on *Kirchhoffin silmukkasääntö*.

- Virtapiirissä kulkevat virrat voidaan määrittää muodostamalla Kirchhoffin säätöjen avulla virtoja kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaisemalla se.
- Virtapiirin muuttuessa potentiaalit muuttuvat lähes välittömästi, mutta suurten kondensaattoreiden varausten muutos tapahtuu vähitellen.

Sanasto

- virta (current)
- hehkulamppu (lightbulb)
- hehkulanka (filament)
- vastus (resistor)
- resistanssi (resistance)
- johtavuus (conductivity)
- sironta (scattering)
- vaellusnopeus (drift velocity)

- virrantihesys (current density)
- virtapiiri (electric circuit)
- oikosulku (short circuit)
- pürikaavio (circuit diagram)
- risteys (junction)
- silmukka (loop)
- kytkin (switch)



Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

11.1 (a) Langan vasen pää on korkeassa ja oikea pää matalassa potentiaalissa, joten sähkökenttä osoittaa vasemmalta oikealle, potentiaalin pienemisen suuntaan.

(b) Pariston positiiviseen napaan kiinnitetyn kuparilangan pinnalle kerääntyy hyvin pieni positiivinen sähkövaraus. Negatiiviseen napaan kiinnitetyn langan pinnalle puolestaan kerääntyy hyvin pieni negatiivinen sähkövaraus. Nämä varaukset luovat positiivisesti varautuneesta puoliskosta negatiivisesti varautuneeseen puoliskoon osoittavan sähkökentän.

11.2 Virta A:n läpi on itseisarvoltaan $|i_A| = 1e/1 \text{ s} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ A}$. Virta B:n läpi on $|i_B| = 2e/1 \text{ s} = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ A}$. Siis $|i_B| > |i_A|$.

11.3 Sähkövirta on skalaari. Sähkövirran tulee helposti mieltäneeksi suureksi, jolla on suunta, mutta sillä ei itse asiassa ole suuntaa. Sähkövirta on määritelty varauksen muutoksen avulla, ja varauksen muutos on vain positiivinen tai negatiivinen eli siis skalaari. Myöhemmin näemme vielä ilmiötä, joissa sähkövirralle tarvitaan todella suunta, mutta tällöin suunnan määrittelee aina jokin toinen vektori.

11.4 (a) $\lambda = \rho A = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.01 \text{ m}^2 = 10 \text{ kg/m}$.

(b) $\Delta m/\Delta t = \lambda v_x = 10 \text{ kg/m} \cdot 1.5 \text{ m/s} = 15 \text{ kg/s}$.

(c) $\lambda = \rho A = -ena = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = -6800 \text{ C/m}$.

(d) $i = \Delta q/\Delta t = -6800 \text{ C/m} \cdot 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = -102 \cdot 10^{-2} \text{ C/s} = -1.0 \text{ A}$.

Huomasitko, että vaikka johtimessa kulkee varsin suuri sähkövirta (ampeeri on suuri yksikkö), elektronien keskimääräinen virtausnopeus on hyvin pieni, vain noin millimetri sekunnissa.

11.6 (a) Koska elektronit liikkuvat positiiviseen x -suuntaan, tähän suuntaan siirryt negatiivista varausta. Sähkövirta kulkee siis päinvastaiseen suuntaan eli negatiiviseen x -suuntaan.

(b) $v_{x,\text{vaellus},(B)} = 0 \text{ m/s}$.

(c) Elektronit eivät kulje varausta, koska ne ovat keskimäärin paikoillaan.

(d) Atomiytimet liikkuvat B:ssä negatiiviseen x -suuntaan, ja koska niiden varaus on positiivinen, ne kuljettavat siis virtaa negatiiviseen x -suuntaan.

(e) Kulkee, negatiiviseen x -suuntaan. B:ssä virtaa kuljettavat atomiytimet.

11.7 (a) Ideaalisessa johtimessa on vakiopotentiaali, $\Delta V_{A \rightarrow B} = 0 \text{ V}$. (b) Potentiaaliero pariston päiden välillä on vakio, $\Delta V_{A \rightarrow B} = 10 \text{ V}$. (c) Kondensaattorin jännite on verrannollinen varaukseen. Nyt varaus on nolla, joten jännite on nolla, $\Delta V_{A \rightarrow B} = 0 \text{ V}$. (d) Vastuksessa potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa, ja potentiaaliero on Ohmin lain mukaan $\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ri_{A \rightarrow B} = -50 \text{ V}$.

11.8 (a) (i) Vasemmanpuoleisissa kuvissa johtimen poikki kulkee ajassa $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$ kaksi elektronia eli $\Delta q = 2e = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Virta on siis $i = \Delta q/\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ A}$. Oikeanpuoleisissa kuvissa johtimen poikki kulkee neljä elektronia, joten virta on kaksinkertainen, $i = 6 \cdot 10^{-13} \text{ A}$. (ii) Ylemmissä kuvissa johtimen läpi kulkee 2 elektronia 1 nm^2 pinta-alalla ja 4 elektronia 2 nm^2 pinta-alalla, jolloin virrantiheys on $j_x = \Delta q/(A\Delta t) = i/A \approx 3 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$. Alemissa kuvissa kulkee 2 elektronia 0.5 nm^2 alan ja 4 elektronia 1 nm^2 alan läpi, jolloin virrantiheys on $j_x = 6 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$.

(b) Näillä virrantiheyksillä johtimen läpi kulkisi virta $i = j_x A = 3 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0.3 \text{ A}$ tai $i = 0.6 \text{ A}$. Nämä ovat aivan realistisia virtuja, joten kuvassa esitettyt virrantiheydet (n. 1 elektri mikrosekunnissa nelionanometrillä) ovat normaaleja tavallisissa sähköjohdoissa.

11.10 Jännitelähteessä kemiallista energiasta muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi sekä lämmökksi $-\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta U + \Delta E_{\text{lämpö}} = e\Delta V + \Delta E_{\text{lämpö}}$. Lähdejännite määriteltiin vapautuneen kemiallisen energian ja siirtymän varauksen suhteena, joten $\mathcal{E} = -\frac{1}{e}\Delta E_{\text{kemia}} = \Delta V + \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$ tai termejä siirtämällä $\Delta V = \mathcal{E} - \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$. Vertaamalla tästä yhtälöön (11.39) näemme, että sisäisestä resistanssistä johtuva jännitehääviö johtuu siitä, että resistanssi muuttaa osan pariston kemiallisesta energiasta lämmöksi, $R_{\text{sisäinen}} i = \frac{1}{e}\Delta E_{\text{lämpö}}$.

11.11 (a) Kuvassa (b) pariston kemiallinen energia muuttuu potentiaalienergiaksi, ja tämä potentiaalienergia muuttuu lämpöenergiaksi pääasiassa hehkulangassa. Kuvassa (c) pariston kemiallinen energia muuttuu paristossa pääasiassa lämpöenergiaksi. Pieni osa energiasta muuttuu potentiaalienergiaksi, joka muuttuu edelleen johtimessa lämpöenergiaksi.

(b) Kuvan (c) ikosulussa pürin resistanssi on pieni, jolloin pürissä kulkee suuri sähkövirta. Paristossa tapahuu siis paljon kemiallisia reaktioita, jolloin kemiallista energiasta myös vapautuu suuremalla teholla.

(c) Oikosulussa paristo muuttaa kemiallista energiansa lämpöenergiaksi suurella teholla, jolloin paristo lämpnee nopeasti. Tämä voi pahimillaan aiheuttaa jopa pariston räjähtämisen.

11.12 Ylemmässä kuvassa lamppujen läpi kulkee virta $i = 1 \text{ A}$ ja potentiaalierot ovat $\Delta V_1 = -4 \text{ V}$ sekä $\Delta V_2 = -2 \text{ V}$. Resistanssit ovat siis $R_1 = -\Delta V_1/i = 4 \Omega$ sekä $R_2 = -\Delta V_2/i = 2 \Omega$. Koko kytkennän virta on myös 1 A ja jännite $\Delta V = -6 \text{ V}$, joten $R = -\Delta V/i = 6 \Omega = R_1 + R_2$.

Alemmassa kuvassa kummankin lampun jännite on $\Delta V = -6 \text{ V}$. Ylemmän lampun läpi kulkee virta $i_1 = 1.5 \text{ A}$ ja alemman $i_2 = 3 \text{ A}$, joten lamppujen resistanssit ovat $R_1 = -\Delta V/i_1 = 4 \Omega$ sekä $R_2 = -\Delta V/i_2 = 2 \Omega$. Koko kytkennän läpi kulkee virta $i = i_1 + i_2 = 4.5 \text{ A}$, joten resistanssi on $R = -\Delta V/i = 1.333 \Omega$. Pätee siis $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

11.13 Ideaalisen johtimen resistanssi on nolla, $R_j = 0 \Omega$. (a) $R_{\text{sarjaan}} = R + R_j = R$. Sarjaankytkenessä johdin ei vaikuta resistanssiin. Tämä tarkoittaa sitä, että ideaalisessa piirissä resistanssi on keskitynyt vastuksiin eivätkä johtimet vaikuta tähän.

(b) $R_{\text{rinnan}} = (1/R + 1/R_j)^{-1} = 1/\infty = 0$. Rinnankytkenessä resistanssi on nolla eikä vastus vaikuta tähän mitenkään. Tämä johtuu siitä, että nyt vastus on oikosuljettu. Ts. sen navat on yhdistetty ideaalisella johtimella, jossa potentiaali on vakio. Vastuksessa ei siis voi olla potentiaalieroa eikä sen läpi kulje virtaa, joten se ei vaikuta virran kulkuun mitenkään. Asian voi ajatella myös niin, että jos vastus ja johde kytketään rinnan, virta voisi periaatteessa kulkea kumpaan tahansa reittiä, ja koska ideaalinen johdin ei vastusta virran kulkua lainkaan, kaikki virta kulkee johtimen kautta eikä vastuksen kautta kulje lainkaan virtaa.

11.14 Paristo lataa kondensaattorit niin, että kondensaattoreiden 1 ja 3 C-puolen levyltä poistuu hieman varausta (sinne tulee lisää elektroneja eli negatiivista varausta) ja kondensaattoreiden 1 ja 2 A-puolen levylle tulee lisää varausta (sieltä poistuu elektroneja). Pariston läpi kulkevan varauksen määrä on siis sama kuin näiden levijen varauksen muutos, $Q_1 + Q_2 = |\Delta q_{1,A} + \Delta q_{2,A}| = |\Delta q_{1,C} + \Delta q_{3,C}| = Q_1 + Q_3$. Pisteeseen B kytkettyjen levijen varaus muuttuu, kun varausta siirtyy kondensaattorista 3 kondensaattoriin 2, mutta tämä varaus ei kulje pariston kautta. Nyt jos ajatteleme, että kondensaattorit 1, 2 ja 3 korvattaisiin yhdellä kondensaattorilla, tämän kondensaattorin latautuminen tarkoittaisi vain varauksen $Q = Q_1 + Q_2 < Q_1 + Q_2 + Q_3$ siirtämistä sen levyltä toiselle. Se, että todellisessa kytkennässä varausta siirtyy kondensaattoreiden 2 ja 3 välillä ei "näy" kytkennän ulkopuolelle.

11.16 (a) Jos piiri ja maan välillä kulkevassa johtimessa kulkee sähkövirta, varausta siirtyy piiriin ja maan välillä. Jatkuva virta tarkoittaisi kuitenkin sitä, että piiri alkaa varautua yhä enemmän ja enemmän. Mutta maahan yhdistetty virtapiiri nimenomaan ei voi varautua vaan piirissä mahdollisesti ollut ylimääräinen varaus poistuu maadoitusjohtoa pitkin maahan ja piiri pysyy sen jälkeen neutraalina. Jos siis piirissä oli alunperin varausta, maadoitusjohdossa kulkee hetken virta, kun tämä varaus siirtyy maahan, ja sen jälkeen johdossa ei voi kulkea virtaa.

(b) Jos piiristä on yhdistetty maahan kaksi pistettä, maadoitusjohdoissa voi kulkea virta. Jos nimittäin yhtä maadoitusjohtoa pitkin kulkee piiriin virta i ja toista pitkin piiristä kulkee pois yhtä suuri virta, piiri pysyy neutraalina. Itse asiassa näin tapahtuu, jos jokin piirin komponentti pyrkii luomaan potentiaalieron maadoitettujen pisteiden välillä. Koska kaikkien maadoitettujen pisteiden potentiaali on nolla, tämä johtaa oikosulkun.

11.17 (a) Aluksi kondensaattorin levyt olisivat potentiaaleissa 0 V sekä -6 V. Lampun navat olisivat keskenään samassa potentiaalissa, -6 V. (b) Pariston napojen potentiaali ei muutu kytkimen käänämisenestä mitenkään, koska maadoituspisteiden potentiaaliksi on valittu 0 V ja paristo pitää negatiivisen navan aina potentiaalissa -6 V. Kondensaattorin negatiivisesti varattu levy on puolestaan kytketty pariston negatiiviseen napaan, joten sen potentiaali on koko ajan niin ikään -6 V. Kondensaattorin varauksen muutos tapahtuu vähitellen, joten välittömästi kytkimen käänämisen jälkeen kondensaattorin positiivinen Levy on edelleen potentiaalissa 0 V. Kytkin yhdistää lampun navat kondensaattorin levyihin, joten nyt lampun napojen potentiaalit ovat 0 V sekä -6 V. Lampun läpi kulkee nyt virta, koska sen napojen välillä on jännite.

(c) Lopuksi kondensaattori on purkautunut, jolloin sen levyt ovat samassa potentiaalissa -6 V. Myös lampun navat ovat tässä potentiaalissa.

11.18 (a) $[RC] = \Omega \cdot F = V/A \cdot C/V = 1/A \cdot As = s$. Näin pitää olla mm. siksi, että eksponenttifunktio $e^{-t/c} = e^{-\frac{1}{RC}t}$ eksponentin tätyy olla paljas luku ilman yksikköä, jolloin suureella RC tätyy olla sama yksikkö kuin suurella t eli ajalla.

(b) Aluksi funktio saa arvon $q(0) = 1$ ja sitten $q(c) = e^{-1} \approx 0.368$. Suhteellinen muutos on siis $[q(c) - q(0)]/q(0) = -0.632$ eli funktion arvo pienenee noin 63 %.

(c) Suhteellinen muutos on sama kuin (b)-kohdassa.

(d) Kondensaattori menettää varauksestaan 63 % jokaisen aikajakson $\Delta t = c = RC$ aikana.

11.19 (a) Aluksi potentiaali on $V_A(0) = \mathcal{E}$ ja lopuksi $V_A(t) \rightarrow 0$. Virta on aluksi $i(0) = \mathcal{E}/R$ ja lopuksi $i(t) \rightarrow 0$.

(b) Aluksi pisteen A potentiaali on sama kuin kondensaattorin ja pariston alkujännite ja lopuksi nolla, kun kondensaattori on tyhjä. Virta lähtee heti kulkemaan ja pienenee kondensaattorin varauksen vähentymessä. Ratkaisu toteuttaa nämä ehdot.

11.21 (a) Resistanssit laskettiin kysymyksessä 11.12. Ne ovat $R_1 = 4 \Omega$ ja $R_2 = 2 \Omega$.

(b) Teho on sarjaankytkenessä $P_1 = R_1 i^2 = 4 \text{ W}$ ja $P_2 = R_2 i^2 = 2 \text{ W}$ ja rinnankytkenessä $P_1 = (\Delta V)^2/R_1 = 9 \text{ W}$ sekä $P_2 = (\Delta V)^2/R_2 = 18 \text{ W}$.

(c) Järjestys kirkkaimmasta himmeimpään on lampu 2 rinnankytkenessä, lampu 1 rinnankytkenessä, lampu 1 sarjaankytkenessä, lampu 2 rinnankytkenessä. Huomaa, että yhdessä tapauksessa lampu 2 kirkkaampi, toisessa himmeämpi. Kirkkaus ei siis ole vain lampun ominaisuus.

(d) Sarjaankytkenessä pariston energian muutosteho on $P = i\Delta V = 1 \text{ A} \cdot -6 \text{ V} = -6 \text{ W}$ ja rinnankytkenessä $P = 4.5 \text{ A} \cdot -6 \text{ V} = -27 \text{ W}$. Kummassakin kytkennässä paristo muuttaa kemiallista energiaa varausten potentiaalienergiaksi yhtä suurella teholla kuin millä lamput muuttavat potentiaalienergiaa valo- ja lämpöenergiaksi.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

11.22 Levyjen potentiaali ei ole $V = \pm\Delta V$ vaan tämä on levyjen potentiaalien ero. Ts. jos levyt ovat A (negatiivinen) ja B (positiivinen) ja levyjen potentiaalit ovat V_A sekä V_B , kondensaattorin jännite on $\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A$. Jos nyt levyltä A poistetaan varaus dq , levyn energian muutos on $dU_A = -V_A dq$. Ja kun levylle B lisätään varaus dq , energian muutos on $dU_B = V_B dq$. Koko kondensaattorin energian muutos on siis

$$dU = dU_B + dU_A = (V_B - V_A)dq = \Delta V dq. \quad (11.156)$$

11.23 Idea tässä laskussa on se, että aluksi positiivinen ja negatiivinen varaus ovat yhdessä, ja ne vedetään toisistaan erilleen. Voimme valita koordinaatiston niin, että negatiivinen varaus pysyy paikoillaan ja positiivinen liikkuu. Kumpaankin varaukseen kohdistuu prosessissa voima. Tämä voima tekee negatiivista työtä positiviseen varaukseen, koska varaus liikkuu voimaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, ja potentiaalienergia määritellään työn kautta, $\Delta U = -W$. Negatiiviseen varaukseen kuitenkaan ei tehdä työtä, koska siihen kohdistuvan voiman vaikutuspiste ei liiku. Niinpä potentiaalienergia voidaan laskea pelkästään positivista varausta tarkastelemalla. Positiivinen varaus ei kuitenkaan ole mitenkään erikoisasemassa, ja toisella koordinaatiston valinnalla potentiaalienergian laskussa pitäisi huomioida kummankin varauksen siirtymää.

11.24 (a) Elektronit hylkivät toisiaan, joten niihin kohdistuu pallon pinnalla voima poispäin pallon keskustasta. Tämä tarkoittaa myös sitä, että elektronien potentiaalienergia pienenee elektronien siirtyessä poispäin pallon kesuksesta. Elektronien siirto suuren pallon pinnalle siis pienentää systeemin potentiaalienergiaa. (Tämän voi päättää myös pisteverausten potentiaalienergian lausekkeen avulla. Elektronien potentiaalienergia pienenee niiden välisen etäisyyden kasvaessa.)

(b) Pallokuoren kenttä on nolla pallon sisällä ja samanlainen kuin pisteverauksen kenttä pallon ulkopuolella. Niinpä elektronit luovat kummankin pallon pinnalla täsmälleen samanlaisen sähkökentän pallon ulkopuolelle. Pallon sisäpuolin linnevuus on tieteenkin suurella pallolla suurempi, joten sähkökentätön alue on suurella pallolla suurempi.

(c) Sähkökenttään liittyy positiivinen potentiaalienergia. Niinpä sähkökenttämän alueen kasvattaminen pienentää systeemin potentiaalienergiaa. Siispä suuren varatun pallokuoren potentiaalienergian pitää olla pienempi kuin pienen pallokuoren.

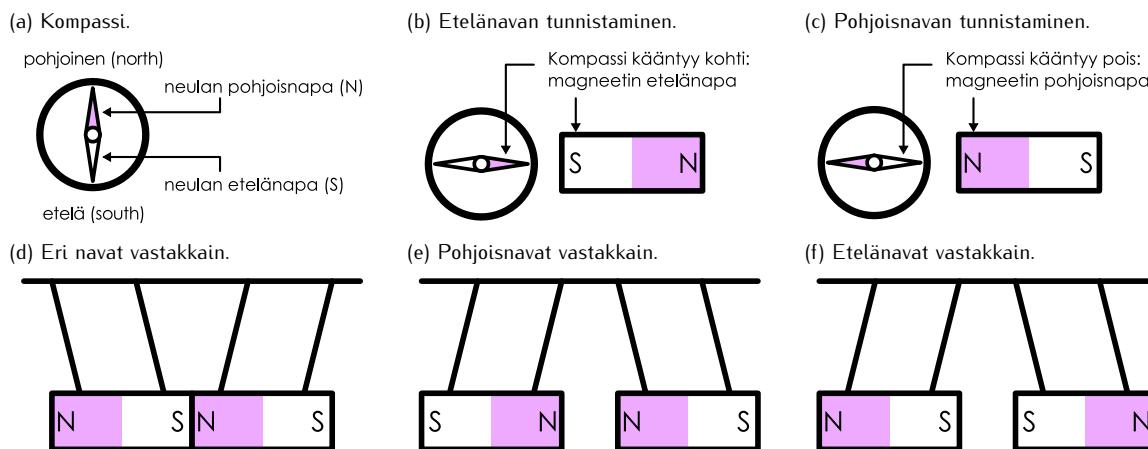
12 Magneettikenttä

Magneetit ovat kaikille tuttuja arkipäiväisiä esineitä. Magneettien tunnetuin erityisominaisuus on tietseenkin se, että magneetit vetävät puoleensa joitakin mutta ei kaikkia materiaaleja. Esimerkiksi rautanaula tarttuu magneettiin mutta muovikappale ei. Magneettisuus on onkin varsin erikoinen aineen ominaisuus, ja tässä luvussa tutkimme tämän ilmiön toimintaa.

Magnetismilla ja sähköllä ei ensialkuun vaikuta olevan mitään yhteyttä. Magneetit ovat tavallisesti sähköisesti neutraaleja, joten magneettinen vuorovaikutus vaikuttaisi olevan eri asia kuin sähköinen vuorovaikutus. Osoittautuu kuitenkin, että sähköinen ja magneettinen voima ovat saman sähkömagneettisen vuorovaikutuksen eri ilmenemismuotoja. Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvalla magneettisten materiaalien rakenne ja selittää, miten magneetit vuorovaikuttavat
- määritellä magneettikenttä ja kuvalla millaisen kentän kestomagneetti ja virtajohdin tuottavat
- määrittää liikkuviin varauksiin ja sähkövirtoihin kohdistuva magneettinen voima
- selittää magneettikenttää kuvavat Biot'n ja Savartin, Gaussin sekä Ampèren lait ja laskea magneettikenttä niiden avulla
- kuvalla dipolin luoma kenttä ja laskea dipoliin kohdistuva momentti sekä dipolin energia ulkoisessa kentässä

Kuva 12.1: Magneeteilla on kaksi napaa, joita kutsutaan pohjois- ja etelännavoiksi. Nimet tulevat siitä, että kompassineulakin on magneetti, ja sen pohjoisnapa pyrkii käänymään pohjoiseen. Magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset navat hylkivät toisiaan.



12.1 Magneetit

Magneetisista ilmiöistä varmasti yleisesti tunneituin on **magneettien** kyky vetää puoleensa joitakin materiaaleja kuten rautaa. Itse asiassa nimi "magneetti" tulee kreikkalaiselta Magnesian alueelta, jossa esiintyy tällaista rautaan tarttuvaa magneettista magnetitti-mineraalia. Magneettien vanhin käytännön sovellus lienee puolestaan kompassi, jossa magneettinen nuoli pyrkii aina osoittamaan kohti pohjoista. Nykyisin magneetteja käytetään monissa laitteissa sähkömoottoreista lääketieteellisiin instrumentteihin. Aloitamme kuitenkin magnetismin tutkimisen yksinkertaisista kestomagneeteista ja kompasseista.

Kompassineula pyrkii tavallisesti aina käänymään kohti pohjoista. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka kompassia itsessään käännettäisiin, neulaan täytyy kohdistua voimia, joiden momentti väentää neulan osoittamaan pohjoiseen (kuva 12.1 (a)). Neulaan täytyy siis kohdistua jonkinlainen etävuorovaikutus. Kompassineula käännyy samaan suuntaan, vaikka neula tuotaisiin ulkoiseen sähkökenttään, joten kyseessä ei voi olla luvussa 10 tarkasteltu sähköinen vuorovaikutus. Sen sijaan jos kompassin lähelle tuodaan magneetti, tämä saa neulan käänymään (kuva 12.1 (b)). Kompassineulan ja magneetin välillä on siis vuorovaikutus, joka on *erilainen* kuin sähköinen vuorovaikutus, ja kutsumme tästä **magneettiseksi vuorovaikutukseksi**. Päättävättemme tässä luvussa on selvittää tämän vuorovaikutuksen toimintaperiaate.

Koska kompassi reagoi magneettiin, voimme käyttää kompassia magneettisen vuorovaikutuksen havaitsemiseen. Jos jokin kappale saa kompassineulan käänymään, kappaleen täytyy vuorovaikuttaa neulan kanssa magneettisesti. Esimerkiksi kompassineulan pyrkimys kääntyä kohti pohjoista johtuu *neulan ja Maapallon välisestä magneettisesta vuorovaikutuksesta*.

Kompasseissa neulan päät on yleensä väritetty eri väriillä. Näin tehdään tieteenkin siksi, että jos neulan yksi pää osoittaa pohjoiseen, sen toinen pää osoittaa etelään, ja nämä suunnat täytyy tunnistaa. Pohjoiseen käännyy aina neulan *sama päät*, joten neulan päiden täytyy olla jollakin tavalla erilaiset. Sanotaankin, että neulalla on kaksi napaa. Pohjoiseen kääntyvä neulan päätä kutsutaan **pohjoisnavaksi** ja etelään kääntyvä **etelännavaksi**. Näitä merkitään tavallisesti kirjaimilla N (englannin tai ranskan sanojen north tai nord, 'pohjoinen', mukaan) sekä S (south tai sud, 'etelä').

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin kompassin reagointia sen lähellä olevaan sauvalmagneettiin. Ensimmäiseksi voimme tutkia, onko magneettilakin kaksi napaa kompassineulan tavoin. Tämä onnistuu kuvissa 12.1 (b) ja (c) esitetyllä kokeella. Kuvan (b) tilanteessa kompassin pohjoisnapa käännyy kohti magneettia, joten magneetti näyttäisi vetävän kompassin pohjoisnapaa puoleensa. Jos kuitenkin magneetti käännetään ympäri kuten kuvassa (c), kompassineulakin käännyy ympäri. Nyt magneetti siis vetääkin puoleensa kompassineulan etelännapaa. Erilaisilla magneeteilla pohjois- ja etelänapoja puoleensa vetävät alueet voivat olla eri paikoissa, mutta *kaikilla* magneeteilla saadaan sama tulos: magneetin yksi alue vetää puoleensa kompassin pohjoisnapaa ja toinen alue vetää puoleensa kompassin etelännapaa.

Kokeen voi selittää ajattelemalla pohjois- ja etelänavan käyttäytymän kuin positiivisen ja negatiivisen vauksen. Tiedämme, että samanlaiset varaukset hylkivät toisiaan ja erilaiset vetävät toisiaan puoleensa. Ehkä siis sauvalmagneetissakin on erikseen pohjois- ja etelänapa, ja ehkä sauvalmagneetin etelänapa vetää puoleensa kompassineulan pohjoisnapaa ja päinvastoin. Tämän mallin mukaan kompassineulan pohjoisnapa käännyy kohti magneettia, jos kompassin lähelle tuo magneetin etelänavan. Sen sijaan jos kompassin viereen tuo magneetin pohjoisnapa edellä, magneetti pääntää käännykkin kompassineulan etelännapa.

Tämä koe ei vielä kuitenkaan osoita tätä mallia oikeaksi. Kompassin avulla voimme todeta, että sauvamagneetissakin on kaksi erilaista napaa, mutta se ei vielä todista, että *erilaiset* navat vetävät toisiaan puoleensa. Voisihan aivan hyvin olla niin, että sauvamagneetin pohjoisnapa vetää kompassineulan pohjoisnapaa puoleensa. Kuvissa 12.1 (d) – (f) esitetyt kokeet kuitenkin osoittavat, että nimenomaan erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa. Voimme nimittäin ottaa kaksi sauvamagneettia ja etsiä niistä kompassin avulla samanlaiset navat. Voimme merkitä kumpaankin magneettiin neulan pohjoisnapaa puoleensa vetävän pään kirjaimella S ja neulan etelänapaa puoleensa vetävän pään kirjaimella N. Jos nyt asetamme sauvamagneetit niin, että toisen S-napa kohtaa toisen N-navan, magneetit tarttuvat toisiinsa (kuva (d)). Vastaavasti jos asetamme vastakkain kaksi N-napaa tai kaksi S-napaa, magneetit hylkivät toisiaan (kuvat (e) ja (f)). Tämä koe osoittaa, että nimenomaan magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset navat hylkivät toisiaan.



12.1 Kuvitellaan, että magneetit toimisivatkin niin, että niiden samanlaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja erilaiset hylkivät toisiaan. Miten magneettisten napojen tunnistaminen nyt tapahtuisi ja mitä tapahtuisi kuvan 12.1 kokeissa? Selitä tämän perusteella, miksi tämä koe osoittaa, että todellisuudessa nimenomaan eri navat vetävät toisiaan puoleensa.

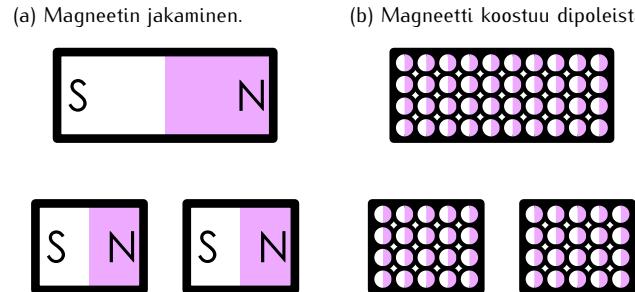
Magneettien N- ja S-napojen välillä oleva magneettinen vuorovaikutus näyttäisi siis toimivan samalla tavalla kuin positiivisten ja negatiivisten sähkövarausten välillä vaikuttava sähköinen vuorovaikutus. Yhdessä suhteessa magneettien navat kuitenkin toimivat eri tavalla kuin varautuneet kappaleet. Kappaleella voi nimittäin olla positiivinen tai negatiivinen kokonaisvaraus, mutta ainakaan toistaiseksi *ei ole löydetty ainetta, joka voisi olla magneettisesti varautunut*. Toisin sanoen magneetissa täytyy *aina* olla sekä pohjois- että etelänapa. Ei ole mahdollista, että kappaleessa olisi vain yksi napa tai että napojen voimakkuus olisi erilainen. Vaikka sauvamagneetin leikkaisi keskeltä kahtia, tuloksena ei ole erillisä pohjois- ja etelänapoja vaan kaksi pienempää magneettia, joilla kummallakin on omat pohjois- ja etelänapanansa (kuva 12.2).

Tämä johtuu siitä, että ainakaan mitkään toistaiseksi tunnetut hiukkaset eivät ole magneettisesti varautuneet. Kappaleethan varautuvat sähköisesti, jos niissä olevien positiivisten ja negatiivisten hiukkasten määrä muuttuu. Mutta koska ei ole olemassa magneettisesti varautuneita hiukkasia, kappaleitakaan ei voi varata magneettisesti. Sen sijaan monet hiukkaset ovat magneettisesti polarisoituneet. Esimerkiksi elektronilla on magneettinen pohjois- ja etelänapa ja hiukanen toimii kuin äärimmäisen pieni magneetti. Elektroni on siis **magneettinen dipoli**. Edelleen koska atomeissa on elektroneja, myös atomit ja niiden muodostamat rakenteet voivat polarisoitua magneettisesti. Elektronille magneettisuus on pysyvä ominaisuus, ja kaikkien elektronien magneettiset navat ovat yhtä voimakkaita. Elektronien magneettisten napojen asento voi kuitenkin muuttua, ja atomien sekä niiden muodostamien rakenteiden magneettisuus riippuukin pääasiassa siitä, millaisissa asennoissa elektronit ovat. Tavallisesti elektronit asettuvat aineessa pareittain niin, että kussakin parissa elektronit ovat täsmälleenvastakkaisissa asennoissa. Jos parin yhden elektronin pohjoisnapa on vaikkapa yläpuolella, toisella elektronilla pohjoisnapa on alapuolella. Tällöin elektronien magneettiset ominaisuudet kuomoavat toisensa eikä pari yhdessä ole magneettinen.

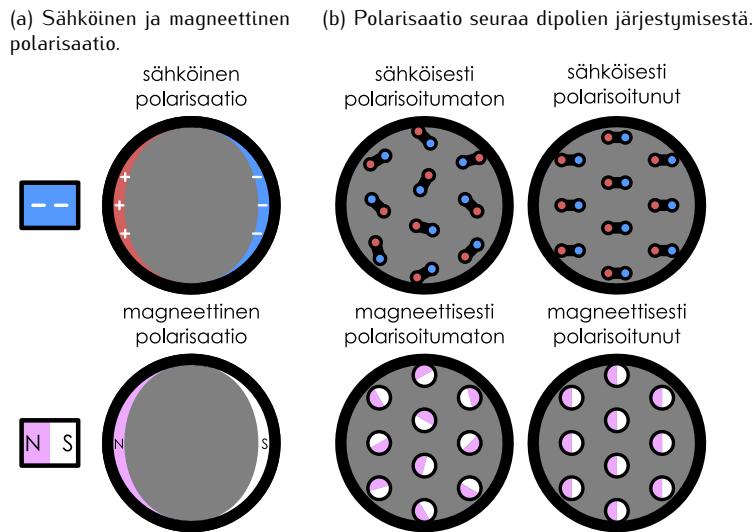
Magneettisissa aineissa näin ei kuitenkaan tapahdu vaan jotkin elektronit jäävät ilman pareja. Tällaisessa tapauksessa aineen atomeillakin on magneettiset pohjois- ja etelännavat eli atomitkin ovat magneettisia dipoleja. Tämäkään ei vielä tarkoita, että kyseinen aine olisi magneetti, sillä myös atomit voivat muodostaa pareja, joissa dipolit asettuvat vastakkaisiin suuntiin. Silloin atomien magneettiset dipolit kumoavat toisensa eikä materiaali ole makroskooppisessa mittakaavassa magneetti. Joissakin erikoisissa materiaaleissa atomien magneettiset dipolit kuitenkin pyrkivät käänymään samansuuntaisiksi, jolloin niiden magneettiset ominaisuudet vahvistavat toisiaan ja materiaali on *magneettisesti polarisoitunut*. Kaikki magneetit on tehty tällaisista aineista. Magneeteilla ei siis itse asiassa ole kahta suurta pohjois- ja etelänapaa, vaan magneetti koostuu valtavasta määrästä mikroskooppisia magneettisia dipoleja. Kun tällaisen magneetin jakaa kahteen osaan, kumpikin osa koostuu edelleen mikroskooppisista magneettista dipoleista. Kumpikin osa on siis edelleen magneettisesti polarisoitunut, jolloin kummassakin on oma pohjois- ja etelänpanansa.

Magneettiset materiaalit koostuvat siis mikroskooppisista magneettisista dipoleista, ja aine on magneettinen makroskooppisessa mittakaavassa, jos nämä dipolit kääntyvät osoittamaan samaan suuntaan. Magneettinen aine muistuttaakin ominaisuksiltaan sähköisistä dipoleista koostuvaa eristemateriaalia. Jos sähködipo-

Kuva 12.2: Magneettisia napoja ei voi erottaa. Magneetin jakaminen luo kaksi uutta kaksinapaisista magneettia.



Kuva 12.3: Magneettisessa polarisaatiossa aineen mikroskooppiset magneettiset dipolit kääntyvät samansuuntaisiksi. Ilmiö on samankaltainen kuin sähköisistä dipoleista koostuvan aineen sähköinen polarisaatio.



lit ovat satunnaisissa asennoissa, aineella ei ole makroskooppisessa mittakaavassa sähköisesti varautuneita alueita. Sen sijaan jos dipolit kääntyvät samansuuntaisiksi, aine polarisoituu ja sen vastakkaisilla pinoilla havaitaan makroskooppinen sähkövaraus. Tämä voidaan saada aikaan tuomalla aineen lähelle toinen, sähköisesti varattu kappale, jonka luoma sähkökenttä vetää dipoleja samaan suuntaan ja polarisoi aineen.

Joissakin aineissa dipolit järjestyvät itsestään osoittamaan samaan suuntaan, jolloin aine on aina magneettisesti polarisoitunutta. On kuitenkin myös magneettisia materiaaleja, joissa magneettiset dipolit ovat normaalisti epäjärjestyneet ja osoittavat satunnaisiin suuntiin. Tällainen aine ei ole magneetti, mutta sekin voidaan polaroida magneettisesti tuomalla sen lähelle magneetti, joka vetää aineen sisäiset dipolit samansuuntaisiksi. Tällöin aineen vastakkaisilla pinoilla havaitaan magneettiset navat samaan tapaan kuin sähköisesti polarisoituneen kappaleen pinoilla havaitaan vastakkaismerkkiset sähkövaraukset (kuva 12.3).

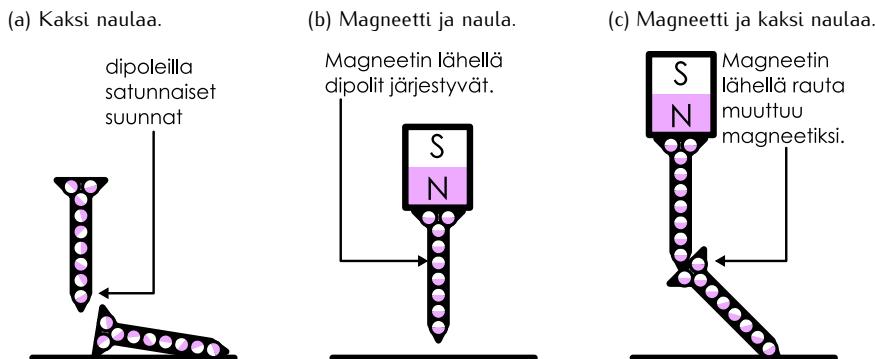
Kaikki magneettiset aineet eivät polarisoidu yhtä voimakkaasti. Jotkin aineet voivat polarisoitua magneettisesti magneetin lähellä mutta menettävät magneettisuutensa heti, kun magneetti poistetaan. Jotkin aineet kuten rauta kuitenkin polarisoituvat voimakkaasti ja voivat säilyttää osan magneettisesta polarisaatiostaan vielä senkin jälkeen, kun magneetti on viety pois niiden luota. Magneettinen materiaali voi siis muuttua itsekin magneetiksi toisen magneetin läheisyydessä, mitä kutsutaan **magnetoitumiseksi**.



12.2 Selitä oman sanoin, miten magneettiset aineet vuorovaikuttavat. Mitä ovat N- ja S-navat ja miten ne liittyvät aineen mikroskooppiseen rakenteeseen?

Kuvassa 12.4 on esitetty magnetoitumisen havainnollistava koe magneeteilla ja rautanauloilla. Rauta on magneettinen materiaali, jonka atomit muodostavat magneettisia dipoleja. Rautanaulat eivät kuitenkaan nor-

Kuva 12.4: Magneetit vetävät puoleensa magneettisia materiaaleja kuten rautaa, koska nämä materiaalit magnetoituvat toisten magneettien lähellä muuttuen itsekin magneetiksi.



maalisti ole itse magneetteja, koska niiden dipolit osoittavat yleensä eri suuntiin. Niinpä kaksi rautanaulaa eivät tartu toisiinsa vaikka ne asetettaisiin vierekkäin. Jos kuitenkin rautanaulan lähelle tuodaan magneetti, tämä magneetti saa naulan sisäiset magneettiset dipolit käänymään samansuuntaisiksi, jolloin naula magneitoituu. Kuvassa (b) magneetin pohjoisnapa on kohti naulaa, jolloin naulan polarisoituminen luo sen yläpäähän magneettisen etelänavan ja alapäähän pohjoisnavan. Magneetin pohjoisnapa vetää naulan etelänapaa puoleensa, jolloin naula tarttuu magneettiin. Magneettiin kiinnittynyt rautanaula on nyt itsekin magneetti, joten jos se viedään toisen naulan viereen, naulat tarttuvat yhteen (kuva (c)).

Jos magneetti ja naula irrotetaan, osa magneettisista dipoleista naulan sisällä pääsee käänymään ja näin naulan magneettinen polarisaatio heikkenee. Tällöin toinen naula todennäköisesti irtoaa. Naula voi kuitenkin säilyttää osan magneettisesta polarisaatiostaan, jolloin kevyempi esine kuten paperiliitin saattaa siihen vielä tarttua. Vähitellen naulan magnetoituma kuitenkin häviää, kun satunnainen lämpöliike sekoittaa dipolien suunnat. Naulasta voidaan siihen tehdä väliaikaisesti magneetti, mutta se ei pysy magneettina ilman että toinen magneetti vetää sen dipoleita jatkuvasti samansuuntaisiksi. Sellaisia magneettisia materiaaleja, jotka magnetoituvat itsestään ja pysyvät magneetteina kutsutaankin *kestomagneeteiksi*.



12.3 Magneettisessa rakennussarjassa on teräskuulia ja sauvalamagneetteja. Yhden kuulan yläpuolelle kiinnitetään magneetti niin, että kuula on kiinni S-navassa. Kun tämän kuulan alapuolelle tuodaan toinen teräskuula, kuulat tarttuvat yhteen. Mitä tapahtuu, jos ylempään kuulaan kiinnitetään toinenkin magneetti niin, että kuulan yläosaan koskee (a) S-napa tai (b) N-napa? Entä jos alemman kuulan alaosaan kiinnitetään magneetin (c) S-napa tai (d) N-napa?

12.2 Magneettikenttä

Magneettiset kenttäviivat

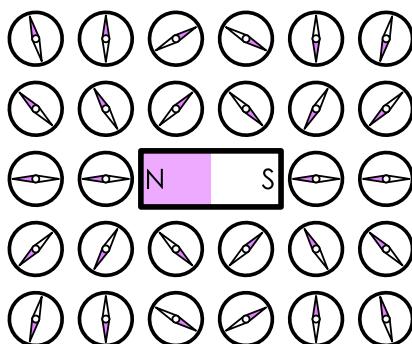
Koska magneettinen vuorovaikutus on etävuorovaikutus, sitä voidaan kuvata kenttämallilla samaan tapaan kuin sähköistä vuorovaikutusta kuvataan sähkökentällä. Toisin sanoen voimme ajatella, että kahden magneetin välistä magneettista vuorovaikutusta välittää **magneettikenttä**. Yksi magneetti synnyttää ympärilleen magneettikentän, ja tässä kentässä olevaan toiseen magneettiin kohdistuu kentässä magneettinen voima.

Sähkökenttä määriteltiin niin, että jos otamme testivarauksen ja mittaamme siihen kohdistuvan sähköisen voiman, sähkökentän voimakkuuden täytyy olla mitatun voiman ja varauksen suuruuden suhde. Emme kuitenkaan voi mitata magneettikenttää tällä tavalla, koska magneettisia varauksia ei ole olemassa. Voimme silti käyttää jälleen kompassia magneettikentän havaitsemisessa. Kompassi ei kerro meille kentän voimakkuutta, mutta voimme määritellä magneettikentän suunnaksi kussakin avaruuden pisteessä sen suunnan, johon kompassineulan pohjoisnapa pyrkii kyseisessä pisteessä käänymään. Esimerkiksi kuvassa 12.5 (a) sauvalamagneetti on ympäröity kompasseilla, joista kukin osoittaa omalla kohdallaan vallitsevan magneettikentän suunnan. Näemme kuvasta, että kompassit kääntyvät kaikkialla likimain niin, että kompassineulojen etelännavat ovat kohti magneetin pohjoisnapaa ja neulojen pohjoisnavat osoittavat puolestaan kohti magneetin etelänapaa. Samalla periaatteella voimme mitata kentän suunnan käytännössä missä tahansa pisteessä.

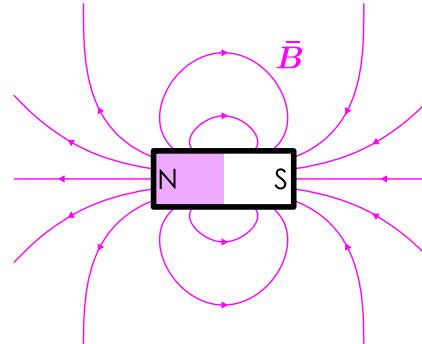
Magneettikenttä voidaan esittää kenttäviivoilla samaan tapaan kuin sähkökenttäkin, ja magneettikentän kenttäviivojen täytyy olla jatkuvia käyriä sähkökentän kenttäviivojen tapaan. Voimme aloittaa kenttäviivan

Kuva 12.5: Magneettikentän havaitseminen. Määritellään magneettikentän suunnaksi kompassineulan osoittama pohjoissuunta. Magneettikenttää kuvaavat kenttäviivat kulkevat kaikkialla kompassin näyttämään suuntaan.

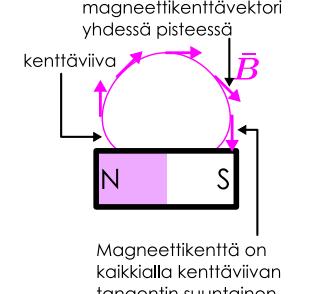
(a) Kompassit sauvalamagneetin ympärillä.



(b) Kenttäviivaesitys.



(c) Kenttä on kenttäviivan suuntainen.



pürtämisen periaateessa mistä tahansa pisteestä. Mittaus kompassilla kertoo meille kentän suunnan, jolloin kenttäviivan pürtäminen voidaan aloittaa kompassinuolen osoittamaan suuntaan. Kun viivaa on piirretty hyvin lyhyt matka, voimme mitata kentän suunnan uudelleen viivan kärkipisteessä ja muuttaa viivan suuntaa tämän mukaisesti. Näin jatkaen pürttyy katkeamaton käyrä, jonka tangentti osoittaa kaikkialla kompassineulan osoittamaan suuntaan. Piirtämällä useita viivoja sopivilta etäisyyksiltä alkaen saadaan koko kenttää kuvava kenttäviivaesitys kuten kuvassa 12.5 (b). Näin määritellen magneettikenttä on jokaisella kenttäviivan pistellä viivan tangentin suuntainen (kuva 12.5 (c)). Osoittautuu myös, että magneettikentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen aivan sähkökentälläkin on.



12.4 Kompassien kyky osoittaa pohjoiseen perustuu siihen, että Maapallon ydin on valtava magneetti. Se- litä kuvan 12.5 avulla, miin suuntaan Maan magneettikenttä osoittaa maanpinnalla (a) pohjoisella ja (b) eteläisellä pallonpuoliskolla sekä (c) missä maapallon magneettiset N- ja S-navat ovat.

Liikkuvien varausten magneettisuus

Kaikki tähän asti oppimamme asiat magneettisesta vuorovaikutuksesta ovat olleet täysin analogisia sähköisen vuorovaikutuksen kanssa. Magneetin navat toimivat kuin positiiviset ja negatiiviset varaukset. Napojen välinen vuorovaikutus toimii samaan tapaan kuin sähköinen vuorovaikutus, ja sitä välittävä magneettikenttää voi kuvata samanlaisella kenttäviivaesityksellä kuin sähkökenttää. Pitkään ajateltiinkin, että sähkö ja magnetismi ovat samanlaisia mutta aivan erillisiä ilmiöitä. Tämä käsitys kuitenkin muuttui, kun virtajohdinten havaittiin vaikuttavan kompasseihin. Täsmällisemmin havaittiin, että virtajohtimen lähellä olevan kompassin neula kääntyy, kun johtimessa kulkee sähkövirta. Tämä oli ensimmäinen todiste sähköisten ja magneettisten ilmiöiden välisestä yhteydestä.

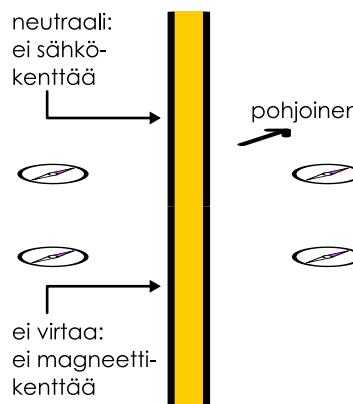
Kuvassa 12.6 nähdään, kuinka johtimen magneettikenttä voidaan havaita kompasseilla. Kuvassa (a) on pitkä, suora johdin, jossa ei kulje virtaa. Johtimen ympärille on asetettu kompasseja, mutta tässä vaiheessa nämä kompassit osoittavat tavalliseen tapaan pohjoiseen. Johdin on neutraali, joten se ei synnytä sähkökenttää, ja koska johdin ei vaikuta kompasseihin, se ei ilmeisesti synnytä myöskään magneettikenttää.

Kuvassa (b) on esitetty johdin ja kompassit, kun johtimessa kulkee virta. Virta voidaan saada esimerkiksi yhdistämällä johtimen päät paristoon, jolloin johtimen pääiden välille syntyy potentiaaliero ja johtimen sisään sähkökenttä. Kuvassa sähkökenttä osoittaa ylöspäin jolloin kenttä vetää johtimessa olevat elektronit liikkeelle alas päin ja johtimessa kulkee sähkövirta ylöspäin eli kentän suuntaan. Johtimen ympärillä olevien kompassien nuolet kääntyvät virran kulkiessa, ja näiden nuolten osoittama suunta näyttää kiertävän johtimen ympäri. Tämän perusteella *virta synnyttää johdinta kiertävän magneettikentän*. Tätä havaintoa kutsutaan *Ørstedin laiksi* (Hans Christian Ørstedin mukaan). Kuvassa johtimen ympärille on piirretty vain yksi magneettikenttää kuvaava kenttäviiva, mutta koska systeemi on johtimen pituussuunnassa symmetrinen, magneettikentän täytyy kiertää johdinta kaikilla.

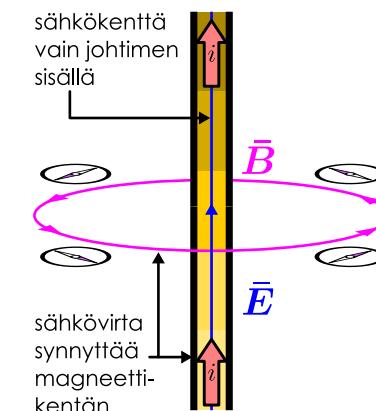
Tässä esimerkissä virta kulkee kuvassa ylöspäin, jolloin sitä kiertää magneettikenttä "vastapäivään" eli kuvassa vasemmalta oikealle johtimen edessä ja oikealta vasemmalle johtimen takana. Jos virran suunta käännetäisiin ympäri, myös kompassinuulet kääntyisivät ympäri ja siis myös magneettikenttä kiertäisi johdinta vastakkaiseen suuntaan. Virran kulkusuunnan ja magneettikentän kiertosuunnan välisen yhteyden muistaa

Kuva 12.6: Virtajohtimen magneettikenttä.

(a) Kun virta ei kulje, johdin ei luo magneettikenttää.



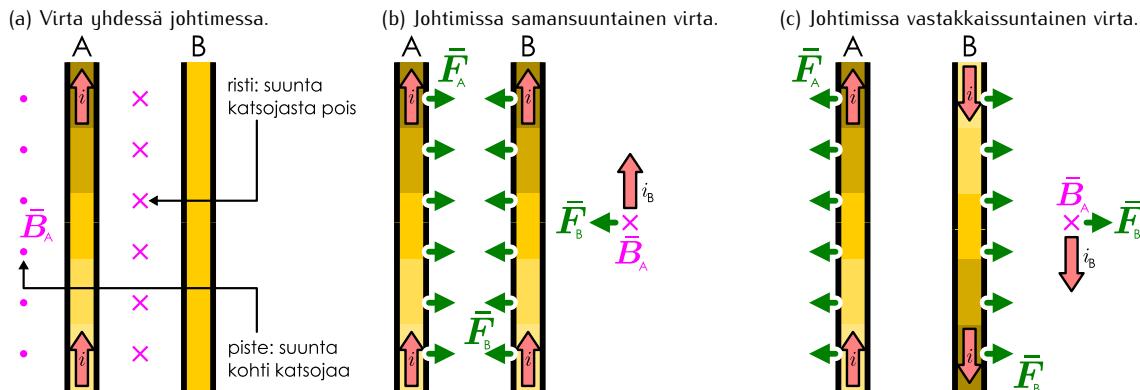
(b) Virta synnyttää pyörteisen magneettikentän.



(c) Oikean käden säätö.



Kuva 12.7: Virtajohtimien välinen magneettinen voima. Johtimiin kohdistuu voima vain, jos kummassakin johtimessa kulkee virta. Voiman suunta ja suuruus riippuu myös virtajohdinten asennoista.



helpoiten kuvassa (c) esitetyllä oikean käden säännöllä. Jos oikean käden peukalo asetetaan osoittamaan virran kulkusuuntaan, koukistetut sormet osoittavat virran synnyttämän magneettikentän kiertosuunnan.

Magneettikentän voi siis synnyttää kestomagneetti lisäksi myös virtajohtimella. Toisaalta ulkoisessa magneettikentässä olevaan kestomagneettiin kohdistuu voima, joten seuraavaksi on selvittää, kohdistuuko myös virtajohtimeen voima, kun johdin tuodaan magneettikenttään. Tämä voidaan selvittää kuvan 12.7 kokeen avulla. Kuvassa on kaksi yhdensuuntaista pitkää johdinta, A ja B. Kuvassa (a) johtimessa A kulkee virta, ja johtimen ympärillä on samanlainen pyörteinen magneettikenttä kuin kuvassa 12.6 (b). Nyt kenttä on kuitenkin esitetty hieman eri tavalla. Sen sijaan että kuvan olisi piirretty kokonaisen silmukan piirtävä kenttäviiva, magneettikenttä on esitetty vain kuvan tasossa. Magneettikenttä kiertää johdinta A oikean käden säännön mukaisesti niin, että kentän suunta on johtimen A vasemmalla puolella kohti katsojaa. Tästä kenttä kulkee johtimen edestä ja kiertää takaisin kuvan tasoon niin, että kenttä osoittaa johtimen oikealla puolella poispäin katsojasta. Kuvassa katsojaa kohti osoittavaa kenttää on kuvattu pisteillä, jotka esittävät katsojaa kohti osoittavien nuolten kärkiä. Katsojasta poispäin osoittavaa kenttää on kuvattu risteillä, jotka esittävät katsojasta poispäin osoittavien nuolten kantoja.

Vaikka johtimen A ympärillä on kuvassa (a) magneettikenttä, johtimeen B ei silti kohdistu voimaa, koska siinä ei kulje sähkövirta. Tilanne kuitenkin muuttuu, kun myös johdin B yhdistetään paristoon ja siinäkin alkaa kulkea sähkövirta (kuva (b)). Kummassakin johtimessa kulkee virta samaan suuntaan, ja kumpaankin johtimeen kohdistuu voima. Toisin sanoen *magneettikentässä olevaan virtajohtimeen voi kohdistua voima, kun johtimessa kulkee virta*. Itse asiassa ampeerin vanha määritelmä SI-yksikkönä perustui tähän ilmiöön. Ampeeri nimittää määriteltyiin aikaisemmin niin, että kun kaksi pitkää yhdensuuntaista johdinta A ja B asetetaan metrin päähän toisistaan ja kummassakin kulkee samansuuntainen yhden ampeerin virta, kumpaankin johtimeen kohdistuu $2 \cdot 10^{-7}$ N voima metrin pituutta kohden.

Tarkkojen kokeellisten mittausten mukaan täälläistä yhdensuuntaisten virtajohdinten välisen magneettisen voiman on itse asiassa suoraan verrannollinen kummassakin johtimessa kulkevan sähkövirran suuruuteen i_A ja i_B sekä johdinten pituuteen L ja käänä verrannollinen johdinten väliseen etäisyyteen $r_{A \rightarrow B}$,

$$F_{A \rightarrow B} = k_\mu L \frac{i_A i_B}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (12.1)$$

Tässä ampeerin määritelmän mukaisesti verrannollisuuskerroin on $k_\mu = 2.000 \cdot 10^{-7}$ N/A².



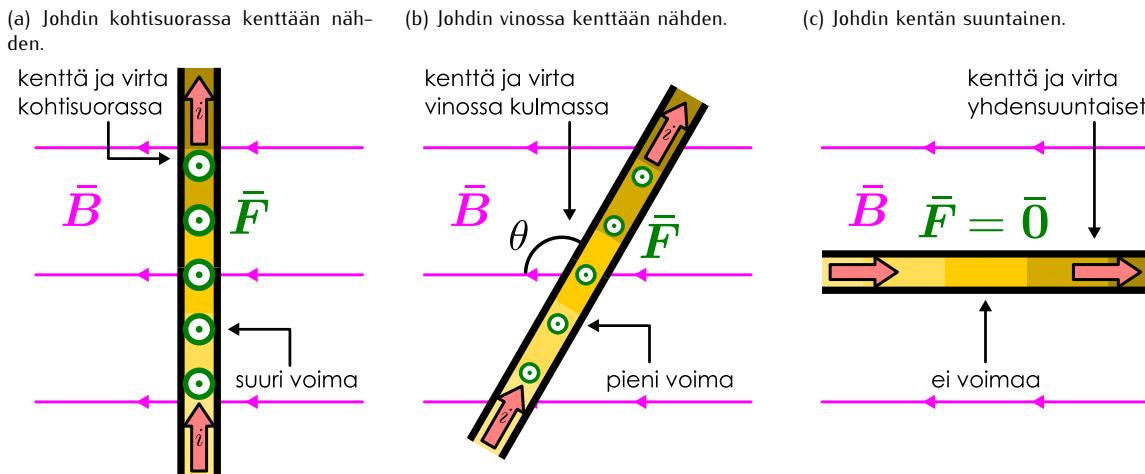
12.5 Tarkista vakion k_μ yksikkö ja arvo ampeerin vanhan määritelmän avulla.

Voimme ajatella, että johdin A luo ympärilleen magneettikentän \bar{B}_A ja tämä kenttä kohdistaa voiman toisessa johtimessa B kulkevaan virtaan. Lisäksi johtimen jokaiseen pisteeeseen kohdistuu tässä symmetrian perusteella yhtä suuri voima. Tämän mallin perusteella johtimeen B kohdistuva voima olisi kentän B_A voimakkuuden, johtimen pituuden L ja virran i_B tulo, $F_{A \rightarrow B} = B_A i_B L$, jolloin johtimen A synnyttämän magneettikentän voimakkuuden täytyy olla

$$B_A = \frac{1}{i_B L} F_{A \rightarrow B} = k_\mu \frac{i_A}{r_{A \rightarrow B}}. \quad (12.2)$$

Suoran johtimen magneettikentän voimakkuus heikkenee siis käänä verrannollisesti johtimesta mitattuun etäisyyteen.

Kuva 12.8: Virtajohtimeen kohdistuva magneettisen voiman suuruus riippuu johtimen ja kentän välisestä kulmasta.



Magneettikentän yksikkö on erikoisnimi **tesla** (Nikola Teslan mukaan) ja sitä merkitään symbolilla T. Yhtälön (12.2) perusteella tesla on SI-perusyksikköjen avulla ilmaistuna

$$T = [B] = [k_\mu] \frac{[i]}{[r]} = \frac{\text{N A}}{\text{A}^2 \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{As}^2}. \quad (12.3)$$

Siispä sekä sähköistä että magneettista vuorovaikutusta voi kuvata kentämallilla, jossa vuorovaikutukseen yksi osapuoli luo avaruuteen kentän ja toinen osapuoli tuntee tässä kentässä voiman. Magneettinen voima on kuitenkin monimutkaisempi kuin sähköinen voima, sillä siinä missä varattuun hiukkaseen kohdistuva sähköinen voima riippuu vain varauksen suuruudesta sekä sähkökentästä, virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima riippuu johtimessa kulkevan virran suuruuden ja magneettikentän lisäksi myös siitä, missä asennossa johdin on magneettikenttää nähdessä.

Kuvassa (b) johtimen A synnyttämä magneettikenttä \bar{B}_A osoittaa johtimen B kohdalla katsojasta pois-päin, virta kulkee kuvassa ylöspäin ja voima kohdistuu kuvassa vasemmalle. Tässä tapauksessa johtimet siis vetävät toisiaan puoleensa. Voima ei siis osoita magneettikentän suuntaan eikä edes virran kulkusuuntaan vaan *kohtisuoraan* näihin kumpaankin nähdessä. Kuvassa (c) johtimen A luoma magneettikenttä osoittaa samaan suuntaan kuin kuvassa (b), mutta johtimessa B kulkee virta vastakkaiseen suuntaan, jolloin johtimeen B kohdistuu voima päinvastaiseen suuntaan kuin kuvassa (b), ja johtimet hylkivät toisiaan.

Täsmällisemmin johtimeen kohdistuva voima riippuu *virran kulkusuunnan ja magneettikentän suunnan välisestä kulmasta*. Kokeellisesti voidaan havaita, että voima on suurimmillaan, kun virtajohdin on kohtisuorassa magneettikenttää nähdessä. *Voima on sen sijaan nolla, jos virta kulkee samaan tai vastakkaiseen suuntaan kuin magneettikenttä*. Itse asiassa voiman suuruus riippuu virran i ja kentän \bar{B} suunnan välisen kulman θ sinistä (kuva 12.8),

$$F_{\text{johdin}} = |iLB \sin \theta|. \quad (12.4)$$

Lauseke (12.4) kertoo meille pitkään suoraan johtimeen vaikuttavan voiman suuruuden, mutta ei suuntaa. Voiman suunnan päättelyyn on kuitenkin olemassa oma oikean käden säätönsä. Jos nimittäin kuvassa 12.7 (b) *asetetaan oikean käden ojennettu peukalo virran kulkusuuntaan ja etusormi magneettikentän suuntaan, johtimeen kohdistuvan voiman suunta osoittaa koukistetun keskisormen suunta*. Sama säätö pätee myös kuvassa (c).

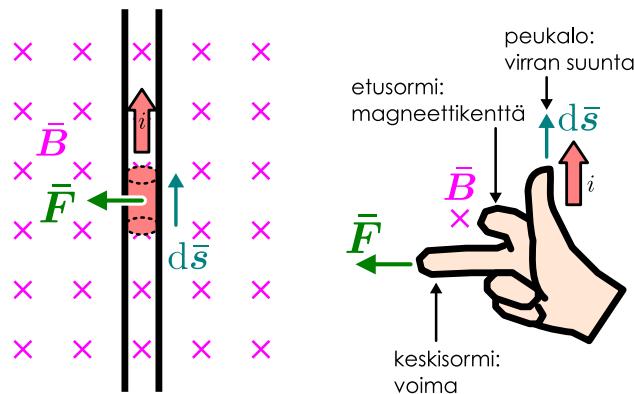


12.6 Virtajohtimen viereen tuodaan magneetti (a) S-napa johtimeen pään, (b) N-napa johtimeen pään, (c) johtimen suuntaiseksi N-napa virran kulkusuuntaan. Kohdistuuko johtimeen voima? Jos kohdistuu, mihin suuntaan (virran kulkusuuntaan nähdessä)?

Näimme vastaavan oikean käden säännon luvussa 5 pyörimislükkeen tarkastelun yhteydessä. Määrittelimme nimittäin silloin kahden vektorin *ristikulon* suunnan niin, että jos vektori \bar{A} osoittaa peukalon suuntaan ja vektori \bar{B} etusormen suuntaan, ristikulot $\bar{A} \times \bar{B}$ osoittaa keskisormen suuntaan. Tämän perusteella magneettisen voiman suunta voidaan ilmaista ristikulon avulla, kun *voima määritellään virran kulkusuuntaan osoittavan vektorin sekä magneettikenttävektorin ristikulona*. Tämän lisäksi magneettisen voiman suuruus on yhtälön (12.4) perusteella verrannollinen kentän voimakkuuteen, virran suuruuteen ja näiden suuntien välisen kulman sinin aivan kuten vektoreiden ristikulokin on.

Kuva 12.9: Virtajohdin magneettikentässä.

(a) Johtimen osaan kohdistuva voima ja (b) Oikean käden sääntö.



ka on homogeenisessa magneettikentässä. Jos johtimessa on mutkia tai jos kenttä ei ole kaikkialla vakio, lauseketta ei voi käyttää sellaisenaan. Tällöin johdin voidaan kuitenkin jakaa lyhyisiin osiin, joita voidaan pitää likimain suorina ja joiden kohdalla magneettikenttää voidaan pitää likimain vakiona. Jos tällaisen osan suuntaa ja pituutta kuvaa vektori $d\bar{s}$, osaan kohdistuva voima on

$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = id\bar{s} \times \bar{B}, \quad (12.6)$$

ja koko johtimeen kohdistuva voima saadaan laskemalla kaikkiin sen osiin kohdistuvat voimat yhteen. Tämä laki ja siinä esiintyvät suureet on piirretty kuvaan 12.9 (a). Ristituloon liittyyvä oikean käden sääntö on esitetty puolestaan kuvassa 12.9 (b).

Virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman voi laskea myös virrantiheyden \bar{j} avulla. Virrantiheys on vektori, joka osoittaa johtimen suuntaan eli samaan suuntaan kuin vektori $d\bar{s}$, ja virrantiheys on suuruudeltaan virran i ja johtimen poikkileikkausalueen pinta-alan A suhde (jos virrantiheys johtimessa on vakio), $j = \frac{1}{A}i$. Jos tarkastelemme ds -pituisista johtimen osista, tämän osan tilavuus on $dV = Ads$ ja niin virrantiheyden voi kirjoittaa muodossa

$$\bar{j} = \frac{1}{A}i \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{dV}id\bar{s} \quad (12.7)$$

Tämän perusteella magneettisen voiman lausekkeessa esiintyvä virran ja johtimen suuntainen vektorin tulo voidaan kirjoittaa muotoon

$$id\bar{s} = \bar{j}dV. \quad (12.8)$$

Toisaalta yhtälön (11.28) mukaisesti virrantiheyden voi ilmaista varauksenkuljettajien varaustiheyden ρ ja niiden vaellusnopeuden \bar{v}_{vaellus} avulla muodossa

$$\bar{j} = \rho\bar{v}_{\text{vaellus}}. \quad (12.9)$$

Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (12.8) ja huomioimalla, että johtimen tilavuuden ja sen varaustiheyden tulo on sama asia kuin johtimessa kulkevien varauksenkuljettajien varaus, $\rho dV = dq$, saadaan virran ja vaellusnopeuden välille yhtälö

$$id\bar{s} = \bar{v}_{\text{vaellus}}\rho dV = \bar{v}_{\text{vaellus}}dq. \quad (12.10)$$

Kun vielä sijoitamme tämän tuloksen johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman lausekkeeseen (12.6) saamme ilmaistua voiman varauksenkuljettajien vaellusnopeuden avulla

$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = dq\bar{v}_{\text{vaellus}} \times \bar{B}. \quad (12.11)$$

Tämän perusteella voimme tulkita virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman syntyvän itse asiassa siitä, että *liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikenttässä voima*.

- 12.7** Kuparissa on noin 10^{29} virtaa kuljettavaa elektronia kuutiometrissä. Tarkastellaan kuparijohtimen osaa, jonka pituus on 10^{-3} m ja poikkipinta-ala 10^{-6} m². Johtimessa kulkee 1 A virta kohtisuorassa 1 T magneettikenttään nähdyn. Mitä on
- johtimeen kohdistuvan voiman suuruus,
 - johtimessa kulkevien elektronien lukumäärä, kokonaisvaraus ja vaellusnopeus,
 - yksittäiseen elektroniin kohdistuvan voiman suuruus?

Ainoa ongelma tässä on se, että sähkövirta ei ole vektori vaan skalaari, joten siitä ei voi suoraan ottaa ristituloa. Ristituloon laskemiseksi on siis määriteltävä jokin toinen virran kulkusuuntaa osoittava vektori. Tässä voidaan käyttää virrantihettä, joka on vektori, tai vaihtoehtoisesti virtajohtimen suuntaan osoittavaa vektoria. Koska lausekkeessa (12.4) esiintyy johtimen pituus, on kätevä määritellä johdinvektori \bar{L} , joka on yhdensuuntainen johtimen kanssa osoittavan virran kulkusuuntaan ja jonka pituus on sama kuin johtimen pituus L . Tämän vektorin avulla voimme ilmaista kenttässä \bar{B} olevaan suoraan johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman suunnan ja suuruuden yksinkertaisella vektorilausekkeella

$$\bar{F}_{\text{johdin}} = i\bar{L} \times \bar{B}. \quad (12.5)$$

Tämä lauseke pätee suoralle johtimelle, jo-

ka on homogeenisessa magneettikentässä. Jos johtimessa on mutkia tai jos kenttä ei ole kaikkialla vakio, lauseketta ei voi käyttää sellaisenaan. Tällöin johdin voidaan kuitenkin jakaa lyhyisiin osiin, joita voidaan pitää likimain suorina ja joiden kohdalla magneettikenttää voidaan pitää likimain vakiona. Jos tällaisen osan suuntaa ja pituutta kuvaa vektori $d\bar{s}$, osaan kohdistuva voima on

$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = id\bar{s} \times \bar{B}, \quad (12.6)$$

ja koko johtimeen kohdistuva voima saadaan laskemalla kaikkiin sen osiin kohdistuvat voimat yhteen. Tämä laki ja siinä esiintyvät suureet on piirretty kuvaan 12.9 (a). Ristituloon liittyyvä oikean käden sääntö on esitetty puolestaan kuvassa 12.9 (b).

Virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman voi laskea myös virrantiheyden \bar{j} avulla. Virrantiheys on vektori, joka osoittaa johtimen suuntaan eli samaan suuntaan kuin vektori $d\bar{s}$, ja virrantiheys on suuruudeltaan virran i ja johtimen poikkileikkausalueen pinta-alan A suhde (jos virrantiheys johtimessa on vakio), $j = \frac{1}{A}i$. Jos tarkastelemme ds -pituisista johtimen osista, tämän osan tilavuus on $dV = Ads$ ja niin virrantiheyden voi kirjoittaa muodossa

$$\bar{j} = \frac{1}{A}i \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{dV}id\bar{s} \quad (12.7)$$

Tämän perusteella magneettisen voiman lausekkeessa esiintyvä virran ja johtimen suuntainen vektorin tulo voidaan kirjoittaa muotoon

$$id\bar{s} = \bar{j}dV. \quad (12.8)$$

Toisaalta yhtälön (11.28) mukaisesti virrantiheyden voi ilmaista varauksenkuljettajien varaustiheyden ρ ja niiden vaellusnopeuden \bar{v}_{vaellus} avulla muodossa

$$\bar{j} = \rho\bar{v}_{\text{vaellus}}. \quad (12.9)$$

Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (12.8) ja huomioimalla, että johtimen tilavuuden ja sen varaustiheyden tulo on sama asia kuin johtimessa kulkevien varauksenkuljettajien varaus, $\rho dV = dq$, saadaan virran ja vaellusnopeuden välille yhtälö

$$id\bar{s} = \bar{v}_{\text{vaellus}}\rho dV = \bar{v}_{\text{vaellus}}dq. \quad (12.10)$$

Kun vielä sijoitamme tämän tuloksen johtimeen kohdistuvan magneettisen voiman lausekkeeseen (12.6) saamme ilmaistua voiman varauksenkuljettajien vaellusnopeuden avulla

$$d\bar{F}_{\text{johdin}} = dq\bar{v}_{\text{vaellus}} \times \bar{B}. \quad (12.11)$$

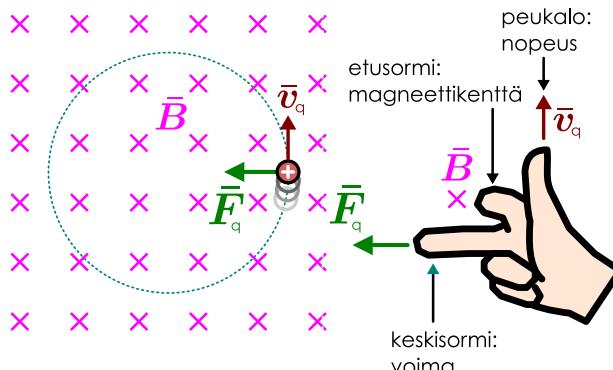
Tämän perusteella voimme tulkita virtajohtimeen kohdistuvan magneettisen voiman syntyvän itse asiassa siitä, että *liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikenttässä voima*.



- 12.7** Kuparissa on noin 10^{29} virtaa kuljettavaa elektronia kuutiometrissä. Tarkastellaan kuparijohtimen osaa, jonka pituus on 10^{-3} m ja poikkipinta-ala 10^{-6} m². Johtimessa kulkee 1 A virta kohtisuorassa 1 T magneettikenttään nähdyn. Mitä on
- johtimeen kohdistuvan voiman suuruus,
 - johtimessa kulkevien elektronien lukumäärä, kokonaisvaraus ja vaellusnopeus,
 - yksittäiseen elektroniin kohdistuvan voiman suuruus?

Kuva 12.10: Liikkuva varaus magneettikentässä.

(a) Varauksen kohdistuva voima. (b) Oikean käden sääntö.



yksittäiseen hiukkaseen kohdistuu magneettinen voima, kun hiukkanen liikkuu magneettikentässä. Yhtälössä (12.11) tarkasteltiin infinitesimaalisen lyhyttä johtimen osaa, joten siinä esiintyi infinitesimaalisen pieni varaus dq . Varattuun hiukkasen varaus on kuitenkin yleensä jokin tunnettu vakio, q . Samoin yhdellä hiukkasella ei ole vaellusnopeutta vaan vain sen oma nopeus \bar{v}_q . Tekemällä nämä muutokset johtimelle pätevästä yhtälöstä (12.11) saadaan yksittäiseen hiukkaseen kohdistuvaa magneettista voimaa kuvaava yhtälö

$$\bar{F}_q = q\bar{v}_q \times \bar{B}. \quad (12.12)$$

Kuvassa 12.10 (a) on esimerkki magneettikentässä liikkuvasta positiivisesti varatusta hiukkasesta ja kuvassa (b) on oikean käden sääntö voiman suunnan määrittämiseksi. Tämä sääntö on sama kuin virtajohtimeen kohdistuvaa voimaa kuvaava sääntö, kunhan virran kulkusuunta korvataan positiivisen varauksen liikkeen suunnalla. Kuvassa hiukkasen nopeus ja magneettikenttä ovat kohtisuorassa, jolloin hiukkaseen kohdistuva voima on suurimmillaan. Magneettinen voima osoittaa *aina* kohtisuoraan sekä varauksen liikkeen suuntaa että magneettikenttävektoria vastaan. Koska kuvan 12.10 (a) hiukkaseen kohdistuu vain magneettinen voima, hiukkasen kiertyvyyden täytyy olla kohtisuorassa sen nopeutta vastaan, jolloin hiukkanen on *ympyräliikkeessä*.



12.8 Millaista rataa varattu hiukkanen kulkee homogeenisessa magneettikentässä, jos sen nopeuden ja magneettikentän välinen kulma on aluksi 45° ?

Jos varattu hiukkanen on sekä sähkö- että magneettikentässä, siihen kohdistuu samanaikaisesti sekä sähköinen voima (10.9) että magneettinen voima (12.12). Sähkö- ja magneettikenttiä *ei voi* laskea yhteen, mutta voimat voi, joten varattuun hiukkaseen kohdistuvan voiman yleinen lauseke on

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (12.13)$$

Tätä kutsutaan **Lorentzin voimalaaksi** (Hendrik Lorentzin mukaan).

Edellisessä analyysissä käsiteltiin nimenomaan *positiivisesti varattua hiukkasta* kuten esimerkiksi protonia. Virtajohtimessa varusta kuljettavat negatiivisesti varatut elektronit, mutta tällä ei ole itse asiassa väliä. Virtajohtimeen kohdistuva magneettinen voima riippuu nimenomaan virran kulkusuunnasta eikä varauksenkuljettajien liikkeen suunnasta. Kuitenkin koska elektronit kulkevat virran kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan, kuvan 12.10 (b) oikean käden sääntö ei voi pätee niille. Päinvastoin *negatiivisesti varattuihin hiukkasiin kohdistuva voima osoittaa juuri vastakkaiseen suuntaan kuin mitä oikean käden sääntö ennustaa*. Lauseke (12.13) kuitenkin pätee sekä positiivisesti että negatiivisesti varatuille hiukkasille, sillä jos hiukkasella on negatiivinen varaus, $q < 0$, tämä vaihtaa lausekkeen etumerkin ja siten käänää voimavektorin suunnan.



12.9 Hiukkasen varaus on 1 nC ja sen nopeus on $\bar{v} = (2.0 \text{ km/s})\hat{i} + (3.0 \text{ km/s})\hat{j}$. Mikä on hiukkaseen kohdistuva voima, kun hiukkanen on sähkökentässä $\bar{E} = (100 \text{ V/m})\hat{j} + (400 \text{ V/m})\hat{k}$ ja magneettikentässä $\bar{B} = (0.50 \text{ T})\hat{k}$?

Virtajohtimessa varusta kuljettavien elektronien liike on pääasiassa satunnaista, jolloin elektroneja liikkuu yhtä paljon kaikkiin suuntiin. Myös satunnaisesti liikkuvien elektroneihin kohdistuu magneettikentässä voima, mutta koska magneettinen voima riippuu elektronien liikkeen suunnasta, eri elektroneihin kohdistuvat voimat osoittavat nekin satunnaisiin suuntiin. Satunnaisesti liikkuvien elektronien joukkoon kohdistuu näin ollen keskimäärin yhtä paljon voimia kaikkiin suuntiin, ja näin ollen elektroneihin kohdistuva kokonaisvoima on nolla. Kokonaisvoima poikkeaa nollasta vain elektronien vaeltaessa yhdessä samaan suuntaan, ja tästä syystä johtimeen kohdistuva voima riippuu elektronien vaellusnopeudesta.

Tämä pätee siis makroskooppiselle johtimille, joka sisältää paljon varauksenkuljettajia. Kuitenkin aivan samalla periaatteella myös

Magneettikentän superpositio

Johdimme aikaisemmin sähkökentälle superpositioperiaatteen, jonka mukaan useiden varausten yhdessä synnyttämä kenttä voidaan laskea jokaisessa avaruuden pisteessä määrittämällä ensin erikseen kunkin varauksen yksinään luoma sähkökenttä tässä pisteessä ja laskemalla kaikkien varausten sähkökentät vektoreina yhteen. Tämä periaate seurasi siitä, että sähkökenttä määriteltiin testivaraukseen kohdistuvan voiman kautta, ja sillä pääsee vastaava superpositioperiaate. Koska myös magneettikenttä voi kohdistaa liukkuviin varauksiin voiman, voimme samalla periaatteella päätellä, että voimien superpositioperiaatteet takia myös magneettikentille täytyy päättää superpositioperiaate. Toisin sanoen usean virtajohtimen (tai virtajohtimen osan) yhdessä tuottama magneettikenttä saadaan laskettua missä tahansa tarkastelupisteessä määrittämällä ensin jokaisen johtimen yksinään tuottama magneettikenttä tässä pisteessä ja laskemalla sitten nämä kentät vektoreina yhteen.

Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 12.11, johon on piirretty virtajohdinten magneettikenttiä sekä yksittäisessä tarkastelupisteessä että säännöllisin välein valituissa pisteissä vektorikenttäkuvaajana. Kuvissa (a) ja (b) on vain yksi johdin (A), jossa virta kulkee katsojaa kohti. Oikean käden säännön perusteella tällaisen virran synnyttämä magneettikenttä kiertää johdinta vastapäivään. Tämä näkyy kuvassa (a) siinä, että kenttävektori on kohtisuorassa johtimesta tarkastelupisteeseen piirrettyyn suoraan nähden. Tämä on totta kaikissa pisteissä, jolloin kuvassa (b) kenttää kuvaavat nuolet muodostavat johdinta kiertävän pyörteen. Lisäksi lausekkeen (12.2) perusteella kentän voimakkuus on käännetä verrannollinen johtimesta mitattuun etäisyteen, mikä ilmenee vektoriuolten pituuksissa. Kuvissa (c) ja (d) on myös yksi johdin (B), jossa virta kulkee katsojasta poispäin. Tämän johtimen kenttä on muuten samanlainen kuin kuvien (a) ja (b) johtimen kenttä paitsi että nyt kenttä kiertää johdinta kuvassa myötäpäivään.

Kuvaan (e) on piirretty kuvien (a) ja (c) johdinten yhdessä muodostama kenttä tarkastelupisteessä. Johtimen A kenttää kuvaava vektori osoittaa yläviistoon vasemmalle samoin kuin kuvassa (a), ja johtimen B kenttävektori osoittaa yläviistoon oikealle kuten kuvassa (c). Magneettikenttä tarkastelupisteessä on näiden vektorisumma, joka on tässä tapauksessa likimain ylöspäin osoittava vektori. Kuvaan (f) on piirretty samalla periaatteella lasketut kenttävektorit jokaisessa kuvajan pisteessä. Nähden, että johdinten välissä kummanakin johtimen kenttä osoittaa samaan suuntaan, jolloin kentät vahvistavat toisiaan ja kenttää kuvaavat pitkät nuolet. Johdinten ulkopuolella kuvan vasemmassa ja oikeassa laidassa johdinten kentät ovat likimain vastakkaisuuntainen, joten kentät heikentävät toisiaan. Kokonaisuudessaan johtimet muodostavat magneettikentän, joka kulkee voimakkaana johdinten välistä ja kiertää kummankin johtimen ympäri.

Kuvassa 12.11 tarkasteltiin vain suorien virtajohdinten kenttiä, mutta superpositioperiaate pääsee kaikille magneettikentille riippumatta kentän synnyttäjästä. Erityisesti jos virtajohtimet eivät ole suoria vaan käyräviä, emme voi päätellä niiden magneettikenttiä suoran virtajohtimen kentän lausekkeesta (12.2). Sen sijaan tällaisten johdinten magneettikenttä täytyy määrittää jakamalla johdin pieniin osiin, laskemalla kunkin osan yksinään tuottama kenttä tarkastelupisteessä ja lopuksi summamalla kentät vektoreina yhteen kentien superpositioperiaatteen mukaisesti. Tätä varten on kuitenkin ensin selvitetvä, millaisen kentän *lyhyt* virtajohtimen osa synnyttää.

Voimme päätellä joitakin lyhyen johtimen magneettikentän ominaisuuksia tutkimalla suoran johtimen kenttää. Pitkä johdin on nimittäin hyvin monen lyhyen johtimen yhdistelmä, joten pitkän johtimen kentän täytyy syntyä lyhyiden johdinten kentien superpositiona. Ensinnäkin pitkän, suoran johtimen magneettikenttä on verrannollinen johtimessa kulkevan virtaan *i*, joten myös jokaisen tällaisen johtimen osan yksinään tuottaman kentän täytyy olla. Toiseksi *lyhyessä* johtimessa on sitä enemmän liikkuva varaus mitä pidempi johdin on, joten johtimen luoman kentän voimakkuuden täytyy olla suoran verrannollinen johtimen pituuteen ds. Kolmannaksi pitkän johtimen kenttää kiertää johdinta oikean käden säännön mukaisesti, joten myös lyhyiden johdinten täytyy tuottaa niitä kiertävää kenttää. Neljänneksi pitkän johtimen kentän voimakkuus heikkenee käännetä verrannollisesti johtimesta mitattuun etäisyteen. Tästä seuraa, että myös jokaisen johtimen osan tuottaman kentän voimakkuuden täytyy riippua osasta mitatusta etäisyydestä. Tästä ei kuitenkaan seuraa, että voimakkuuden pitäisi olla käännetä verrannollinen osasta mitattuun etäisyyteen, koska tämä verrannollisuus voi muuttua, kun lasketaan yhteen äärettömän monen lyhyen osan tuottama kenttä.

Itse asiassa osoittautuu, että lyhyen johtimen magneettikenttä heikkenee käännetä verrannollisesti osasta mitatun etäisyyden *neliöön* aivan samalla tavalla kuin pistevarauksen sähkökenttä heikkenee. Jos tarkasteltava lyhyt johdin on pisteessä, jonka paikkavektori on \bar{r}_q , ja magneettikenttä halutaan määrittää pisteessä P, jonka paikkavektori on \bar{r}_P , vektori johtimesta pisteesseen P on

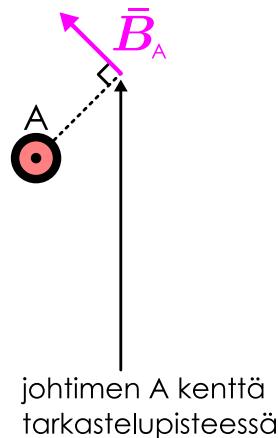
$$\bar{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_P - \bar{r}_q. \quad (12.14)$$

Etäisyyden johtimesta tarkastelupisteeseen on siis $r_{q \rightarrow P} = |\bar{r}_{q \rightarrow P}|$ ja johtimen luoman magneettikentän voimakkuus riippuu tästä etäisyydestä funktion $1/r_{q \rightarrow P}^2$ mukaisesti. Ei ole sattumaa, että pistemäisen varauksen sähkökenttä ja pistemäisen johtimen magneettikenttä heikkenevät yhtä jyrkästi, mutta tässä vaiheessa emme pysty vielä perustelemaan, miksi näin täytyy olla.

Lisäksi osoittautuu, että lyhyen johtimen tuottaman kentän voimakkuus riippuu myös tarkastelupisteen suunnasta suhteessa johtimen suuntaan. Kenttä on kaikkein voimakkain johtimen suuntaan nähden kohti-

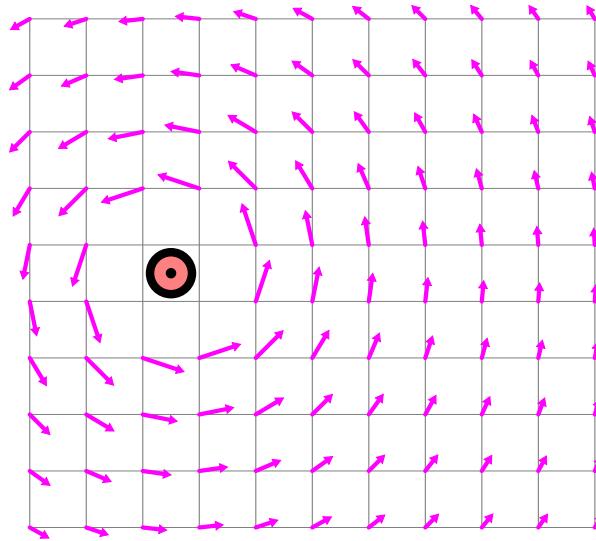
Kuva 12.11: Virtajohtimia ympäröivän magneettikentän vektorikenttäkuvaaja. Kun kentän luo monta johdinta, näiden tuottama magneettikenttä saadaan laskemalla yksittäisten johdinten tuottamat kenttävektorit yhteen.

(a) Johtimen A kenttä yhdessä pisteessä.

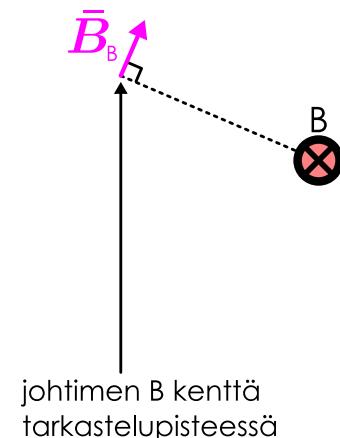


johtimen A kenttä tarkastelupisteessä

(b) Johtimen A kentän vektorikuvaaja.

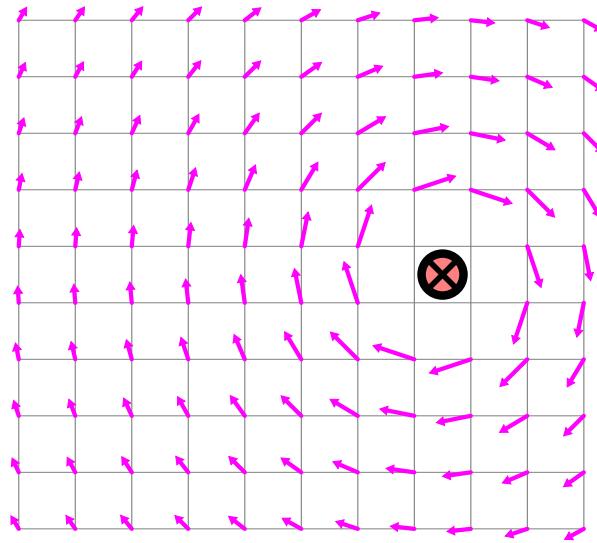


(c) Johtimen B kenttä pisteessä.

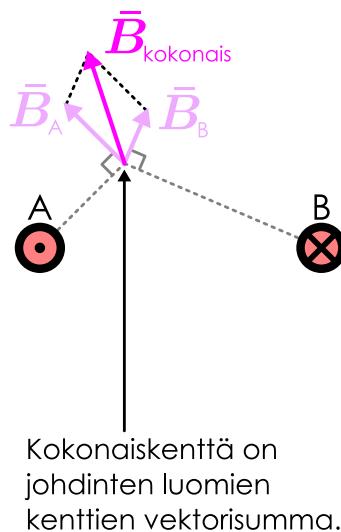


johtimen B kenttä tarkastelupisteessä

(d) Johtimen B kentän vektorikuvaaja.

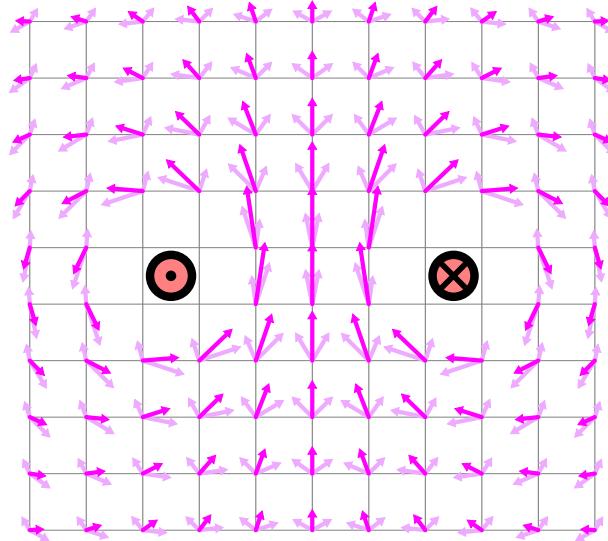


(e) Juhdinten yhdessä luoma kenttä.



Kokonaiskenttä on
johdinten luomien
kenttien vektorisumma.

(f) Juhdinten yhdessä luoman kentän vektorikuvaaja.



MAGNEETTIKENTTÄ

suorassa tasossa ja *nolla* johtimen kautta kulkevalla, johtimen suuntaisella suoralla. Täsmällisesti kentän voimakkuus on verrannollinen johtimen suunnan $d\bar{s}$ ja johtimesta tarkastelupisteesseen osoittavan vektorin $\hat{r}_{q \rightarrow P}$ välisen kulman θ siniin. Yhdistämällä kaikki nämä ominaisuudet lyhyen johtimen magneettikentän voimakkuudeksi pisteessä P saadaan

$$dB_P = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i}{r_{q \rightarrow P}^2} \sin \theta ds. \quad (12.15)$$

Tässä verrannollisuuskerroin on juuri $\frac{1}{2} k_\mu = 1.0 \cdot 10^{-7}$ N/A² eikä k_μ , minkä perustelemme hieman myöhemmin.

Edellä esitellyt lauseke ei kuitenkaan vielä huomioida magneettikentän suuntaa. Koska magneettikenttä on johdinta kiertävä pyörre, kenttävektorin \bar{B}_P täytyy olla kohtisuorassa sekä johtimen suuntaa osoittavaa vektoria $d\bar{s}$ että johtimesta tarkastelupisteesseen osoittavaa vektoria $\hat{r}_{q \rightarrow P}$ vastaan. Ristituloilla on tämä ominaisuus ja lisäksi ristituloon sisältyy valmiaksi näiden vektoreiden välisen kulman sini, joten magneettikenttä pisteessä P voidaan kirjoittaa vektorimuodossa näppärästi ristituloon avulla muodossa

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P, \text{johdin}} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{id\bar{s} \times \hat{r}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}^2}, \quad (12.16)$$

missä ristituloissa esiintyy johtimesta tarkastelupistettä kohti osoittava *yksikkövektori* $\hat{r}_{q \rightarrow P}$. Tätä kutsutaan **Biot'n ja Savartin laiksi** (Jean-Baptiste Biot'n ja Félix Savartin mukaan).

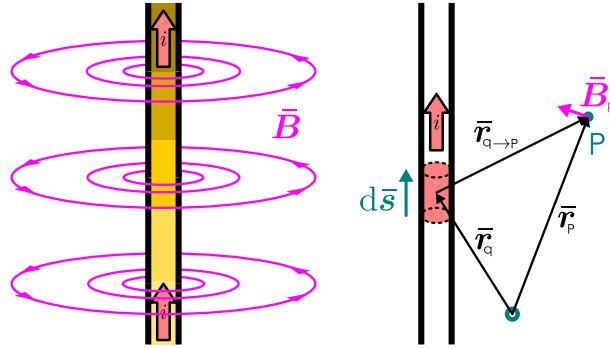
Koska virta on varausten liikettä, liikkuvan pistevaraukseen täytyy tuottaa samanlainen magneettikenttä kuin mitä hyvin lyhyt virtajohdin synnyttää. Voimme jälleen muuttaa lyhyttä johdinta kuvaavan yhtälön pistevarausta kuvavaksi yhtälöksi sijoituksesta (12.10) eli korvaamalla virran ja johtimen pituutta osoittavan vektorin tulon $id\bar{s}$ hiukkasen varauksen ja nopeuden tulolla $q\bar{v}_q$. Näin ollen liikkuvan varatun hiukkasen magneettikentälle saadaan lauseke

$$\bar{B}_{q \rightarrow P, \text{varaus}} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{q\bar{v}_q \times \hat{r}_{q \rightarrow P}}{r_{q \rightarrow P}^2}. \quad (12.17)$$



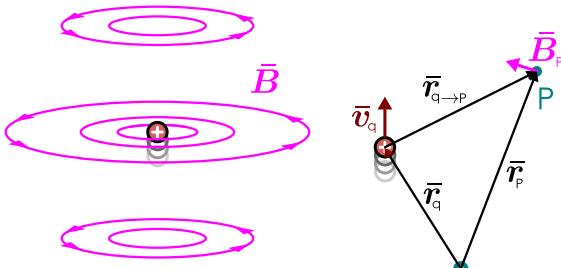
12.10 Tarkista ristituloon oikean käden säennöllä, että lausekkeen (12.17) antama magneettikenttä osoittaa samaan suuntaan kuin kuvaan 12.13 (b) piirretty nuoli.

(a) Kenttäviivaesitys. (b) Kenttä pisteessä P.



Kuva 12.12: Suoran johtimen magneettikenttä.

(a) Kenttäviivaesitys. (b) Kenttä pisteessä P.



esimerkki 12.1

Magneettinen ja sähköinen voima

Kaksi varattua hiukkasta, A: 2 nC ja B: 3 nC on koordinaatiston pisteissä A: (1, 2, 3) ja B: (2, 3, 3) (yksiköt metrejä). Varausten nopeudet ovat $\bar{v}_A = (2.0 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{i} + (5.0 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}$ ja $\bar{v}_B = (1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{j} + (-0.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}$. Laske varaukseen A kohdistuva voima.

TILANNE Merkitään hiukkasten varauksia $q_A = 2 \text{ nC}$ ja $q_B = 3 \text{ nC}$. Paikkavektori B:stä A:han on $\bar{r}_{B \rightarrow A} = \bar{r}_A - \bar{r}_B = (-1 \text{ m})\hat{i} + (-1 \text{ m})\hat{j}$. Tämän pituus on $r_{B \rightarrow A} = \sqrt{(-1 \text{ m})^2 + (-1 \text{ m})^2} = \sqrt{2} \text{ m} \approx 1.41 \text{ m}$ ja sen suuntainen yksikkövektori on $\hat{r}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{r_{A \rightarrow B}} \bar{r}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} - \hat{j}) \approx -0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}$.

SUUNNITELMA Lasketaan ensin sähkö- ja magneettikenttä, jonka B luo varauksen A kohdalle. Kun nämä tunnetaan, voimme laskea varaukseen A kohdistuvan voiman.

Sähkökenttä on Coulombin lain mukaan

$$\bar{E}_{B \rightarrow A} = k_\epsilon \frac{q_B}{r_{B \rightarrow A}^2} \hat{r}_{B \rightarrow A} \quad (12.18)$$

ja magneettikenttä Biot'n ja Savartin lain mukaan

$$\bar{B}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{q_B \bar{v}_B \times \hat{r}_{B \rightarrow A}}{r_{B \rightarrow A}^2}. \quad (12.19)$$

Lorentzin voima on

$$\bar{F}_A = q_A(\bar{E}_{B \rightarrow A} + \bar{v}_A \times \bar{B}_{B \rightarrow A}). \quad (12.20)$$

RATKAISU Sähkökentäksi saadaan

$$\bar{E}_{B \rightarrow A} = (13.48 \text{ V/m})(-0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}) = (-9.53 \text{ V/m})\hat{i} + (-9.53 \text{ V/m})\hat{j} \quad (12.21)$$

ja magneettikentäksi

$$\bar{B}_{B \rightarrow A} = (1.5 \cdot 10^{-17} \text{ T s/m})[(1.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{j} + (-0.5 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}] \times [-0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}] \quad (12.22)$$

$$= (1.5 \cdot 10^{-16} \text{ T s/m})[(-3.54 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{i} + (3.54 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{j} + (1.06 \cdot 10^7 \text{ m/s})\hat{k}] \quad (12.23)$$

$$= (-5.30 \cdot 10^{-10} \text{ T})\hat{i} + (5.30 \cdot 10^{-10} \text{ T})\hat{j} + (1.59 \cdot 10^{-9} \text{ T})\hat{k}. \quad (12.24)$$

Hiukkaseen kohdistuva sähköinen voima on

$$\bar{F}_{A,E} = q_A \bar{E}_{B \rightarrow A} = (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{i} + (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{j} \quad (12.25)$$

ja magneettinen voima on

$$\bar{F}_{A,B} = q_A \bar{v}_A \times \bar{B}_{B \rightarrow A} = (-5.30 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{i} + (-1.17 \cdot 10^{-10} \text{ N})\hat{j} + (2.12 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{k}. \quad (12.26)$$

Kokonaisvoima on siis

$$\bar{F}_A = \bar{F}_{A,E} + \bar{F}_{A,B} = (-1.91 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{i} + (-1.92 \cdot 10^{-8} \text{ N})\hat{j} + (2.12 \cdot 10^{-11} \text{ N})\hat{k}. \quad (12.27)$$

Huomaa, että vaikka hiukkasten nopeus on hyvin suuri, magneettinen voima on paljon heikompi kuin sähköinen voima. Yleensä näin onkin. Kuitenkin jos sähköistä voimaa ei ole — esimerkiksi jos magneettikentän luo sähköisesti neutraali virtajohdin — magneettinen voima voi olla erittäin merkittävä.

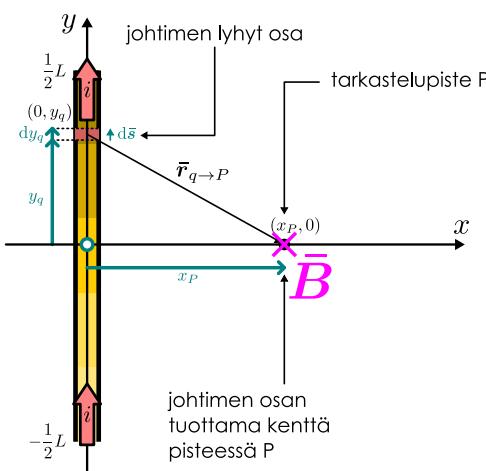
Mathematica:

```
(* vakiot *)
ke = 1/(4 Pi 8.854*10^-12); km = 2*10^-7;
qa = 2*10^-9; qb = 3*10^-9; va = {2, 0, 5}*10^-7; vb = {0, 1.5, -0.5}*10^-7;
rvec = {-1, -1, 0}; r = Sqrt[rvec.rvec]; ruv = rvec/r;

(* sähkö- ja magneettikenttä *)
e = ke qb/r^2 ruv
b = 0.5 km qb Cross[vb, ruv]/r^2
{-9.53294, -9.53294, 0}
{f-5.3033*10^-10, 5.3033*10^-10, 1.59099*10^-9}

(* voima *)
fe = qa e
fm = qa Cross[va, b]
f = fe + fm
{f-1.90659*10^-8, -1.90659*10^-8, 0}
{f-5.3033*10^-11, -1.16673*10^-10, 2.12132*10^-11}
{f-1.91189*10^-8, -1.91826*10^-8, 2.12132*10^-11}
```

Kuva 12.14: Johtimen lyhyen osan tuottaman magneettikentän laskemisessa tarvittava geometria.



on jälleen laskea johtimen kaikkien osien tuottama magneettikenttä tarkastelupisteessä ja laskea nämä sitten

Emme pysty tässä vaiheessa perustelemaan, miksi lyhyen virtajohtimen ja pistemäisen varauksen magneettikenttä riippuu paikasta juuri tällä tavalla — palaamme tähän myöhemmin. Sen sijaan osoitamme Biot'n ja Savartin lain olevan ainakin uskottava johtamalla sen avulla suoran virtajohtimen magneettikentän lausekkeen, jonka tunnemme kokeellisesti. Tämä ei suoranaisesti osoita lakia oikeaksi, mutta se on kuitenkin todiste lain järkeyydestä ja sopisoinnusta kokeellisten tulosten kanssa.

Lasketaan ensin L -pituisen suoran johtimen magneettikenttä johtimen keskipisteen kautta kulkevassa, johtimen suuntaan nähdyn kohtisuorassa tasossa. Lasku tapahtuu samalla periaatteella kuin vastaan varattun sauvan sähkökentän lasku, jonka teimme luvussa 10. Asetamme kuvan 12.14 mukaisesti koordinaatiston origon johtimen keskipisteen ja y -akselin kulmemaan johtimen suuntaiseksi niin, että virta kulkee positiiviseen y -suuntaan. Tarkastelupiste P , jossa magneettikenttä lasketaan, asetetaan pisteeeseen $(x_P, 0)$. Jaamme johtimen dy_q -pituisiin osiin, ja kulloinkin tarkastelussa olevan osan paikka olkoon $(0, y_q)$. Ideana

superpositioperiaatteen mukaisesti yhteen. Tätä varten kaikki paikasta riippuvat suureet pitää ensin kirjoittaa muuttujan y_q avulla, jolloin yhteenlasku onnistuu integraalina muuttujan y_q suhteen. Koska johtin ulottuu y -akselin välille $[-L/2, L/2]$, tämä on myös integroitava väli.

Johtimen osan pituutta ja suuntaa osoittava vektori on

$$d\bar{s} = dy_q \hat{j}, \quad (12.28)$$

koska kunkin osan pituus on dy_q ja johtin on y -akselin suuntainen (virta positiiviseen suuntaan). Vektori johtimen osasta tarkastelupisteeseen P on puolestaan

$$\bar{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_P - \bar{r}_q = x_P \hat{i} - y_q \hat{j}. \quad (12.29)$$

Tämän pituus on $r_{q \rightarrow P} = \sqrt{x_P^2 + y_q^2}$ ja vektorin suuntainen yksikkövektori on $\hat{r}_{q \rightarrow P} = \bar{r}_{q \rightarrow P}/r_{q \rightarrow P}$. Johtimen osa tuottaa pisteesseen P siis lausekkeen (12.16) mukaan magneettikentän

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i dy_q \hat{j} \times (x_P \hat{i} - y_q \hat{j})}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (12.30)$$

Tässä lausekkeessa esiintyvä ristitulo voidaan kertoa auki. Yksikkövektoreille pätee $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$ ja $\hat{j} \times \hat{j} = \bar{0}$, joten

$$\hat{j} \times (x_P \hat{i} - y_q \hat{j}) = x_P (\hat{j} \times \hat{i}) - y_q (\hat{j} \times \hat{j}) = -x_P \hat{k}. \quad (12.31)$$

Nämä magneettikentän lauseke sievenee muotoon

$$d\bar{B}_{q \rightarrow P} = -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}}. \quad (12.32)$$



- 12.11** (a) Osoita, että minkä tahansa kahden yhdensuuntaisen vektorin ristitulo on nollavektori.
 (b) Olkoon $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ ja $\bar{b} \times \bar{c} = 2\bar{a}$. Mitä on $\bar{b} \times (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$?

Tämän lausekkeen mukaan magneettikentän suunta ei riipu koordinaatista y_q . Tämä tarkoittaa sitä, että johtimen *jokainen* osa tuottaa pisteesseen P magneettikentän suuntaan $-\hat{k}$. Niinpä vektoreiden suuntia ei tarvitse erikseen tarkastella ja lopputuloksen täytyy myös osoittaa suuntaan $-\hat{k}$. Koko johtimen magneettikenttä saadaan nyt integroimalla lauseke 12.32 muuttujan y_q suhteen,

$$\bar{B} = -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{x_P dy_q}{(x_P^2 + y_q^2)^{3/2}} \quad (12.33)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \left|_{-L/2}^{L/2} \right. \frac{y_q}{x_P(x_P^2 + y_q^2)^{1/2}} \quad (12.34)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu i \hat{k} \left(\frac{L/2}{x_P(x_P^2 + (L/2)^2)^{1/2}} - \frac{-L/2}{x_P(x_P^2 + (-L/2)^2)^{1/2}} \right) \quad (12.35)$$

$$= -\frac{1}{2} k_\mu \frac{iL}{x_P \sqrt{x_P^2 + L^2/4}} \hat{k}. \quad (12.36)$$

Tuloksena saatu lauseke on *täsmälleen* samaa muotoa kuin vastaavan varatun sauvan sähkökentän lauseke (10.45) muuten paitsi että nyt tangon varauksen on korvannut johtimessa kulkevan virran ja johtimen pituuden tulo, sähkökentään liittyvä vakio k on korvattu magneettikentän vakiolla $k_\mu/2$ ja kentän suunta on nyt $-\hat{k}$ eikä \hat{i} .

Kun johtimen pituuden L annetaan lähestyä ääretöntä, saadaan raja-arvona äärettömän pitkän johtimen magneettikentän lauseke. Tämä raja-arvo on

$$\bar{B} = \lim_{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} k_\mu \frac{i}{x_P \sqrt{x_P^2/L^2 + 1/4}} \hat{k} = -k_\mu \frac{i}{x_P} \hat{k}. \quad (12.37)$$

Tässä x_P on johtimesta mitattu etäisyys, ja voimme merkitä sitä selvyyden vuoksi myös symbolilla r . Tämä lasku osoittaa, että Biot'n ja Savartin laista (12.16) seuraa se, että äärettömän pitkän ja suoran virtajohtimen magneettikentän voimakkuus etäisyydellä r on

$$B = k_\mu \frac{i}{r}, \quad (12.38)$$

mikä on sama kuin kokeellisesti tunnettu tulos (12.2). Laskusta käy myös ilmi, miksi Biot'n ja Savartin laissa (12.16) olevan verrannollisuuskertoimen pitää olla juuri $\frac{1}{2} k_\mu$. Jos kerroin olisi k_μ , pitkän johtimen magneettikentän voimakkuudesta tulisi kaksinkertainen oikeaan tulokseen verrattuna.

esimerkki 12.2

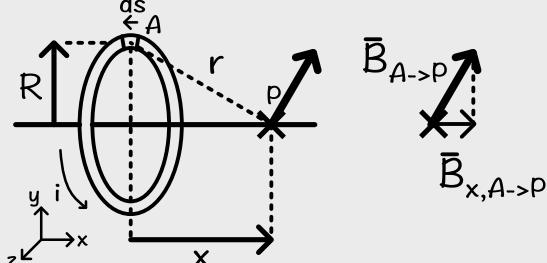
Virtasilmukan magneettikenttä

Virtajohdin muodostaa R -säteisen ympyrän. Johtimessa kulkee virta i . Mikä on magneettikentän voimakkuus ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla ympyrän tasoon nähden kohtisuoralla aksellilla etäisyydellä x ympyrästä?

TILANNE Pürretään tilanteesta kuva. Jaetaan kiekko lyhyisiin osiin, joiden pituutta ja suuntaa merkitään vektoreilla $d\vec{s}$. Kiekon jokainen piste on yhtä kaukana tarkastelupisteestä, joten merkitään tästä etäisyyttä r . Asetetaan x -akseli kulkemaan kiekon keskipisteen kautta ja origo kiekon keskelle. Valitaan tarkastelupisteeksi P piste $(x, 0, 0)$.

renkaan osan luoma kenttä

SUUNNITELMA Johtimen kiekon lyhyt osa tuottaa ympärilleen magneettikentän Biot'n ja Savartin lain mukaisesti. Magneettikenttää tarkastelupisteessä voidaan laskea kaikkien johtimien osien tuottamien kenttien superpositiona eli käytännössä integraalina. Virtajohtimien eri osien tuottamat magneettikentät ovat erisuuntaiset, mutta symmetriarenkaalla niiden y - ja z -komponenttien täytyy kumota toisensa. Siispä riittää tarkastella vain kentän x -komponenttia.



Tarkastellaan pisteessä $(0, R, 0)$ (A) olevaa johtimen osaa. Biot'n ja Savartin lain mukaan osa tuottaa magneettikentän

$$d\bar{B}_{A \rightarrow P} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i d\vec{s} \times \hat{r}_{A \rightarrow P}}{r_{A \rightarrow P}^2} = \frac{1}{2} k_\mu \frac{i d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (12.39)$$

missä johtimesta tarkastelupisteeseen osoittava vektori on

$$\bar{r}_{A \rightarrow P} = \bar{r} = x\hat{i} - R\hat{j} \quad (12.40)$$

ja sen pituus on

$$r_{A \rightarrow P} = r = \sqrt{x^2 + R^2}. \quad (12.41)$$

Tässä käytettiin myös aina pätevää yhtälöä $\hat{r}/r^2 = \bar{r}/r^3$. Johdin on pisteessä A z-suuntainen, ja jos virta kiertää kuavan merkityyn suuntaan, virta kulkee positiiviseen z-suuntaan, jolloin

$$i d\vec{s} = i d\vec{s} \hat{k}. \quad (12.42)$$

Koko johtimen kenttä saadaan integroimalla renkaan ylitse, ja symmetriasta johtuen riittää tarkastella x-komponenntia,

$$B = B_x = \int d\bar{B}_x. \quad (12.43)$$

RATKAISU Tarkasteltu johtimen osa tuottaa kentän

$$d\bar{B} = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{\hat{k} \times (x\hat{i} - R\hat{j})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{x(\hat{k} \times \hat{i}) - R(\hat{k} \times \hat{j})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds = \frac{1}{2} k_\mu i \frac{x\hat{j} + R\hat{i}}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds, \quad (12.44)$$

sillä $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ja $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$. Tämän x-skalaarikomponentti on

$$dB_x = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (12.45)$$

Kokonaiskenttä saadaan tämän lausekkeen integraalina, ja koska integroitava lauseke ei riipu johtimen pituudesta s , lasku on helppo. Integointi tapahtuu johtimen osien pituuskien suhteen, jolloin lopputulokseksi saadaan johtimen kokonaispituus $L = 2\pi R$.

$$B_x = \int dB_x = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{2} k_\mu \frac{iR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = k_\mu \frac{\pi i R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.46)$$

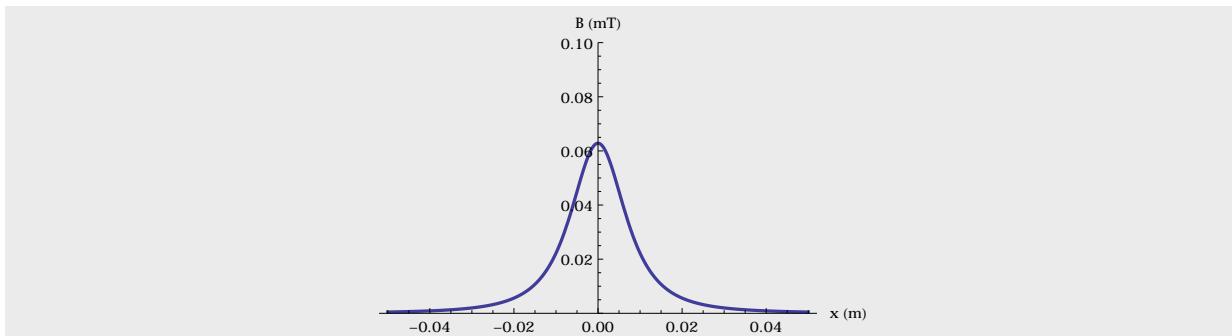
Mathematica:

```
(* vektorit *)
rVec = {x, -R, 0};
r = Sqrt[rVec.rVec];
rUnit = rVec/r;
kUnit = {0, 0, 1};

(* johtimen osan kenttä ja sen x-komponentti *)
dB = kmu/2 i Cross[kUnit, rVec]/r^3;
dBx = dB[[1]];
(i kmu R)/(i (R^2 + x^2)^(3/2))

(* koko renkaan kenttä *)
b = Integrate[dBx, {s, 0, 2 Pi R}]
(i kmu Pi R^2)/(R^2 + x^2)^(3/2)

(* kenttä paikan funktiona *)
Plot[1000 b /. {R -> 0.01, kmu -> 2*10^-7, i -> 1}, {x, -0.05, 0.05},
PlotRange -> {0, 0.1},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (m)", "B (mT)"}]
```



ARVIOINTI Saatu lauseke on melko monimutkainen, mutta ylläpiirretyn kuvajen perusteella kenttä on voimakkaimillaan renkaan keskipisteessä $x = 0$, ja kentän voimakkuus pienenee renkaasta kauemmas siirryttäässä kuten pitääkin.

Voimme tarkastella kentän voimakkuutta renkaan keskipisteessä erikoistapauksena. Tässä pisteessä magneettikentän voimakkuudeksi saadaan $B_x = \pi k_\mu i R^2 / (R^2)^{3/2} = \pi k_\mu i / R$. Kenttä on siis renkaan keskellä käantäen verrannollinen renkaan säteeseen. Biot'n ja Savartin lain mukaan renkaan jokaisen osan luoman kentän voimakkuus on käantäen verrannollinen säteen neljöön, $B \sim R^{-2}$, mutta toisaalta kenttä on suoraan verrannollinen johtimen pituuteen, $B \sim L = 2\pi R$, koska pitkässä johtimessa on enemmän liikkuvia varauksia. Näiden tekijöiden yhteisvaikutuksesta kentän pitää olla käantäen verrannollinen ympyrän säteeseen, $B \sim R^{-2} \cdot R = R^{-1}$. Tulos on siis järkevä.



12.12 Selitä omiin sanoin, millaisia magneettikenttiä virtajohtimet ja liikkuvat varaukset luovat. Miltä kentät näyttävät? Millainen oikean käden sääntö niihin liittyy? Miten lasket johtimen osan tai liikkuvan varauksen luoman kentän yhdessä pisteessä? Miten lasket kokonaisen johdinsilmukan luoman kentän?

12.3 Gaussin ja Ampèren lait magneettikentälle

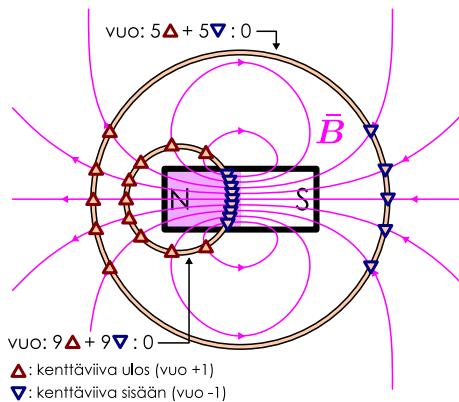
Biot'n ja Savartin laki magneettikentille on hyvin samantyyppinen kuin Coulombin laki sähkökentille. Näiden lakienvälinen ero on se, että Coulombin laki soveltuu vain sähkövarauksille, kun taas Biot'n ja Savartin laki soveltuu kaikenlaisiin sähkö- ja magneettikenttiin. Samaan tapaan myös Biot'n ja Savartin laki pätee täsmälleen vain sähkövarauksille, joissa kulkee tasainen, ajassa muuttumaton virta. Todelliset peruslakit sähkövirtojen ja liikkuvien varausten synnyttämille magneettikentille ovat **Gaussin ja Ampèren lait magneettikentille** (Carl Friedrich Gauss ja André-Marie Ampère mukaan).

Gaussin laki magneettikentille

Gaussin laki sähkökentille sanoo, että sähkövirta minkä tahansa suljetun pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisältämän sähkövarauksen kokonaismäärään. Tämä johtuu siitä, että sähkövirta mittaa pinnan läpi kulkevia kenttäviivoja lukumäärää, ja sähkökentän kenttäviivat voivat alkaa vain positiivisista varauksista ja päättyä vain negatiivisiin varauksiin. Jos suljetun pinnan sisältä tulee ulos enemmän kenttäviivoja kuin sinne menee sisään, pinnan sisällä täytyy olla enemmän viivoja lähteitä eli positiivisia varauksia kuin viivojen nieluja eli negatiivisia varauksia.

Magneettikentän kenttäviivaesitykselle pätee samat säännöt kuin sähkökentän kenttäviivaesitykselle. Kenttä osoittaa kaikkialla kenttäviivojen suuntaan ja kentän voimakkuus on suoraan verrannollinen viivojen tiheyteen. Kenttäviivat eivät voi myöskään alkaa tai päättyä tyhjään avaruuteen vaan ainoastaan varauksiin. Totesimme kuitenkin aikaisemmin, että *magneettisia* varauksia ei ole olemassa tai ainakaan niitä ei ole vielä löydetty luonnosta, joten *magneettiset* kenttäviivat eivät voi päättyä

Kuva 12.15: Magneettivuo suljetun pinnan läpi on aina nolla.



minnekään vaan ne joko jatkuvat äärettömyyksiin tai muodostavat suljettuja silmukoita. Tämä pääte myös kestomagneeteille, joissa on näennäisesti erilliset pohjois- ja etelännavat, sillä magneettiset kenttäviivat eivät pääty magneettisiin napoihin vaan ne muodostavat napojen kautta kulkevia silmukoita kuten kuvassa 12.15.

Koska minkään suljetun pinnan sisällä ei voi olla magneettikentän lähteitä tai nieluja, *jokaisen suljetun pinnan läpi täytyy kulkea yhtä monta magneettista kenttäviivaa ulos ja sisään*. Pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärä kertoo magneettikentän vuon tai lyhyemmin **magneettivuon** Φ_B pinnan läpi, joten *magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla*,

$$\Phi_B = 0. \quad (12.47)$$

Tämä on Gaussin laki magneettikentille.

Magneettivuo lasketaan magneettikentästä samalla tavalla kuin sähkövuo laskettiin sähkökentästä. Homogenisen kentän vuo tasomaisen pinnan läpi on kentän voimakkuuden, pinnan alan ja kentän sekä pinnan normaalilin välichen kulman kosinin tulo,

$$\Phi_B = BA \cos \theta = \bar{B} \cdot \bar{A}. \quad (12.48)$$

Jos kenttä ei ole vakio tai pinta ei ole suora taso, vuo saadaan pintaintegraalina

$$\Phi_B = \int \bar{B} \cdot d\bar{A}. \quad (12.49)$$

Magneettivuo yksiköllä on erikoisnimi weber (Wilhelm Weberin mukaan) sekä symboli Wb,

$$Wb = [\Phi_B] = [B][A] = \text{Tm}^2. \quad (12.50)$$

Itse asiassa monissa lähteissä vektorikenttää \bar{B} ei kutsuta "magneettikentäksi" vaan sille käytetään nimeä **magneettivuon tiheys**. Tässä materiaalissa kuitenkin \bar{B} -kenttää yksinkertaisuuden vuoksi vain magneettikentäksi.



12.13 Miksi kuvassa 12.15 magneettivuo pienemmän pinnan läpi on nolla, vaikka se ympäröi magneetin pohjoisnavan? Jos magneetin N- ja S-navat korvattaisiin positivisella ja negativisella varauksella, millainen olisi sähkövuo pinnan läpi? Miksi tulokset ovat erilaiset?

Ampèren laki magneettikentille

Gaussin laki magneettikentille on luonnon peruslaki aivan kuten Gaussin laki sähkökentillekin. Se pääte aina kaikille magneettikentille olipa kentän synnyttänyt virtajohdin tai kestomagneetti. Sen avulla ei kuitenkaan ole gleensä mahdollista määritää magneettikentän voimakkuutta, koska se ei millään tavalla yhdistä kenttää sen luojan ominaisuuksiin. Esimerkiksi virtajohtimen magneettikentän voimakkuus riippuu johtimessa kulkevan virran voimakkuudesta, mutta Gaussin laki ei mitenkään riipu johtimen virrasta. Magneettikentillä täytyy siis olla olemassa *toinenkin* peruslaki, joka yhdistää magneettikentän ja sen synnyttävän sähkövirran.

Tämä toinen peruslaki on *Ampèren laki*, jota on havainnollistettu kuvasarjassa 12.16. Kaikissa kuvissa tarjastellaan samaa suoraa virtajohdinta, jossa kulkee sähkövirta kohti katsojaa. Kuten jo aikaisemmin opimme, tämän johtimen kenttä kiertää virtajohdinta oikean käden säännön mukaan eli kuvassa vastapäivään. Lisäksi tiedämme magneettikentän voimakkuuden heikkenevän johtimesta etäännystääessä.

Koska magneettikenttä muodostaa pyörteen johtimen ympärille, magneettikenttä ei ole konservatiivinen vektorikenttä. Tämä tarkoittaa ensinnäkin sitä, että ei ole olemassa magneettista skalaaripotentiaalia, jonka gradienttina magneettikenttä voitaisiin laskea. Toisin sanoen *ei* ole olemassa funktiota V_B , jolle päitsi $\bar{B} = -\nabla V_B$. Lisäksi tämä tarkoittaa sitä, että jos laskemme magneettikentän viivaintegraalin johdinta kiertävällä suljetulla polulla, tulos *ei* ole nolla. Kuvassa (b) on kuvattu tästä esimerkinä viivaintegraali r -säteistä ympyrää pitkin. Koska reitti kierretään vastapäivään eli samaan suuntaan kuin mihin magneettikenttä kiertää, viivaintegraali on positiivinen. Jos reitti kierretäisiin myötäpäivään, viivaintegraali olisi negatiivinen.

Täsmällisemmin valittu integrointireitti on tässä kuvassa kaikkialla etäisyydellä r johtimesta, joten magneettikentän voimakkuus on reitillä vakio,

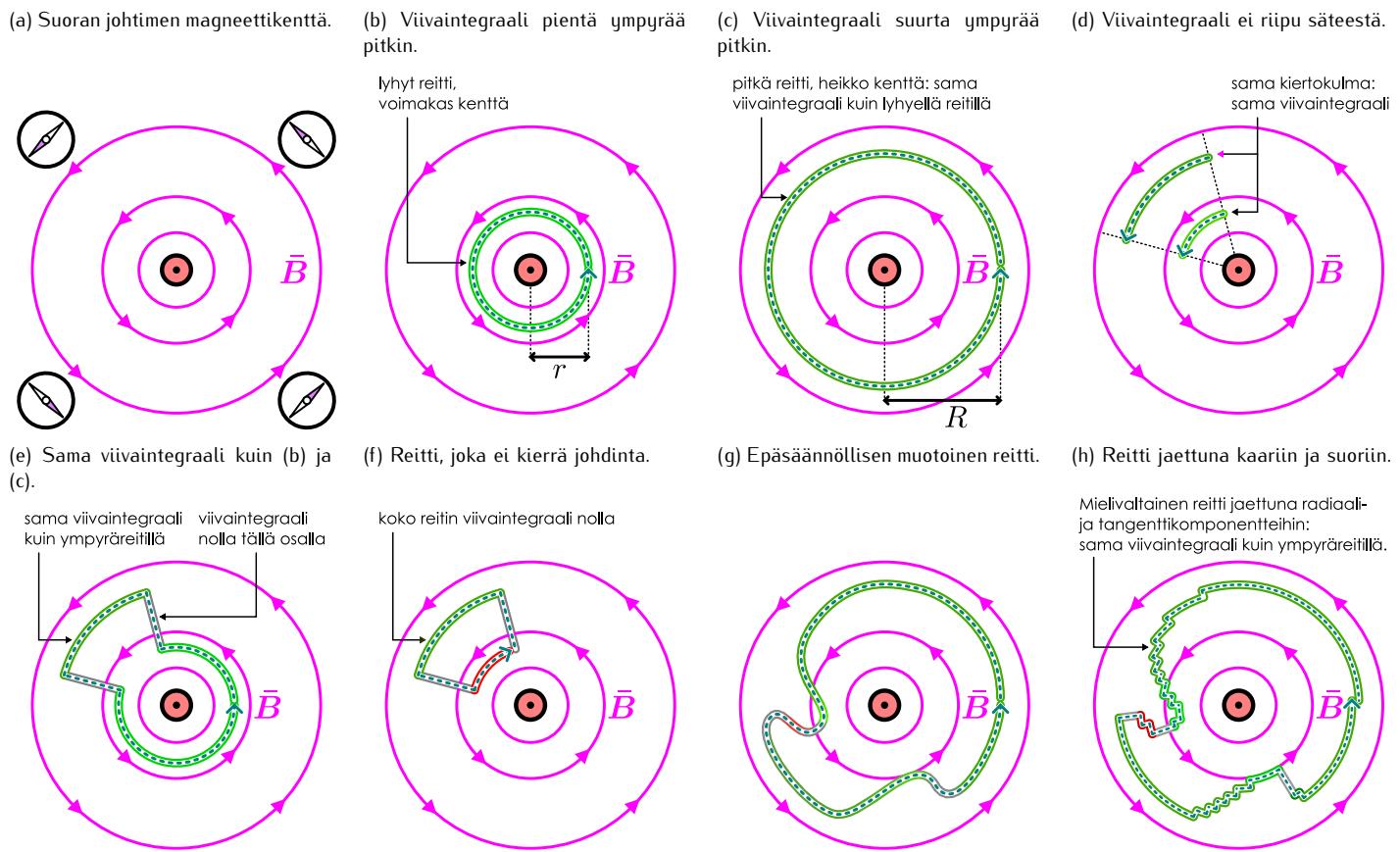
$$B = k_\mu \frac{i}{r}. \quad (12.51)$$

Lisäksi kenttä osoittaa kaikkialla reitin tangentin suuntaan, joten viivaintegraali on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden B ja reitin pituuden $L = 2\pi r$ tulo,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = BL = k_\mu \frac{i}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi k_\mu i. \quad (12.52)$$

MAGNEETIKENTTÄ

Kuva 12.16: Magneettikenttä muodostaa pyörteen virtajohtimen ympärille, joten kentän viivaintegraali johdinta kiertävällä reitillä on positiivinen, jos johdin kierretään kentän suunnassa. Viivaintegraalin arvo ei kuitenkaan riipu siitä, millainen tämä reitti täsmälleen on.



Tässä pieni ympyrä integroitimerkissä on muistutus siitä, että viivaintegraali lasketaan *suljettua* reittiä pitkin. Sillä ei ole mitään muuta merkitystä.

Huomionarvoista tuloksessa on erityisesti se, että sen mukaan magneettikentän *viivaintegraalin arvo ei riipu valitun reitin sääteestä*. Esimerkiksi kuvassa (c) reitiksi on valittu suurempi ympyrä, jonka säde on R . Tämä reitti on pidempi kuin kuvassa (b), mutta samalla magneettikenttä reitillä on heikompi, ja nämä tekijät kumoavat toisensa täydellisesti. *Viivaintegraalin arvo riippuu kuitenkin reitin läpi kulkevan virran i suuruudesta*.

Magneettikentän viivaintegraali on siis sama millä tahansa ympyrällä, jonka keskipisteessä johdin on. Tämä tarkoittaa myös sitä, että jos laskemme viivaintegraalin kahta sellaista ympyränkaarta pitkin, jotka kiertävät johtimen ympäri yhtä suuren kulman kuten kuvassa (d), tuloksen pitää olla kummallakin kaarella sama. Näin saksi, että kumpikin kaari erottaa yhtä suuren osuuden kokonaista ympyrästä.

Toisaalta viivaintegraali on nolla, kun integroimisreitti kulkee kohtisuoraan kenttää vastaan, koska tällöin $\bar{B} \cdot d\bar{r} = 0$. Niinpä jos esimerkiksi kuvan (b) r -säteisestä ympyräreitistä erotetaan kuvan (d) pienempää kaarta vastaava osuus ja korvataan se vastaavalla R -säteisellä kaarella kuten kuvassa (e), viivaintegraalin arvo ei muutu, sillä kaarta pitkin lasketun integraalin arvo ei operaatiossa muutu ja toisaalta integraali on nolla kaaret yhdistävillä suorilla. Siispä myös kuvan (e) reittiä pitkin lasketun viivaintegraalin arvo noudattaa yhtälöä (12.52).

12.14 Johdin on xy -tason origossa ja siinä kulkee 1 A virta z -suuntaan. Mitä ovat (i) magneettikentän komponentti reitin suunnassa, (ii) reitin pituus ja (iii) kentän viivaintegraali, kun reitti on
 (a) origokeskisen ympyrän kaari pisteestä $(1, 0)$ pisteesseen $(0, 1)$ vastapäivään (yksiköt metrejä),
 (b) origokeskisen ympyrän kaari pisteestä $(0, 2)$ pisteesseen $(2, 0)$ myötäpäivään,
 (c) suora pisteestä $(1, 0)$ pisteesseen $(2, 0)$?

Samalla periaatteella voimme päätellä viivaintegraalin arvon myös kuvassa (f) esitettyllä reitillä, jossa kuvan (d) kaaret on yhdistetty yhdeksi suljetuksi poluki. Nyt lyhyempi kaari kuljetaan kenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan, joten integraali sitä pitkin on negatiivinen. Toisaalta integraalin itseisarvo on kaarilla edelleen yhtä suuri, ja kaarta yhdistävillä suorilla integraali on nolla, joten kaikkiaan *viivaintegraali on tällä polulla nolla*. Toisaalta tämän reitin läpi ei kulje lainkaan sähkövirtaa, joten tämäkin tulos on sopusoinnussa yhtälön (12.52) kanssa.

Itse asiassa tulos (12.52) pätee *millä tahansa* reitillä riippumatta siitä, kiertääkö se johtimen vai ei. Mitä tahansa reittiä voidaan nimittäin approksimoida johdinta kiertävällä kaarilla ja johtimesta poispäin osoittavilla suorilla, jolloin sama päättely toimii edelleen. Esimerkiksi kuvan (g) epäsäännöllisen muotoinen reitti voidaan jakaa kaariin ja suoriin kuvan (h) tapaan. Käyräviivaisia reittejä voi kuvata tällaisella suorista ja kaarista koostuvalla reitillä mielivaltaisen tarkasti. Toisaalta viivaintegraalin arvo on verrannollinen reitin läpi kulkevan virran suuruuteen *millä tahansa* kaarista ja suorista koostuvalla reitillä. Niinpä viivaintegraalin täytyy riippua vain sen läpi kulkevan virran suuruudesta myös kuvan (g) käyrällä reitillä.

Kuvassa 12.16 tarkasteltiin vain yhden johtimen kenttää, mutta periaate yleistyy myös systeemeihin, joissa on useita virtajohtimia. Kuvassa 12.17 on esimerkki systeemistä, jossa on kaksi suoraa johdinta, ja näissä johtimissa kulkee samansuuruinen virta vastakkaisiin suuntiin. Näimme tällaisen kentän jo kuvassa 12.11 magneettikentän superposition tarkastelun yhteydessä. Kenttä kulkee voimakkaana johdinten välistä ja käännyy sitten kiertämään kummankin johtimen ympäri.

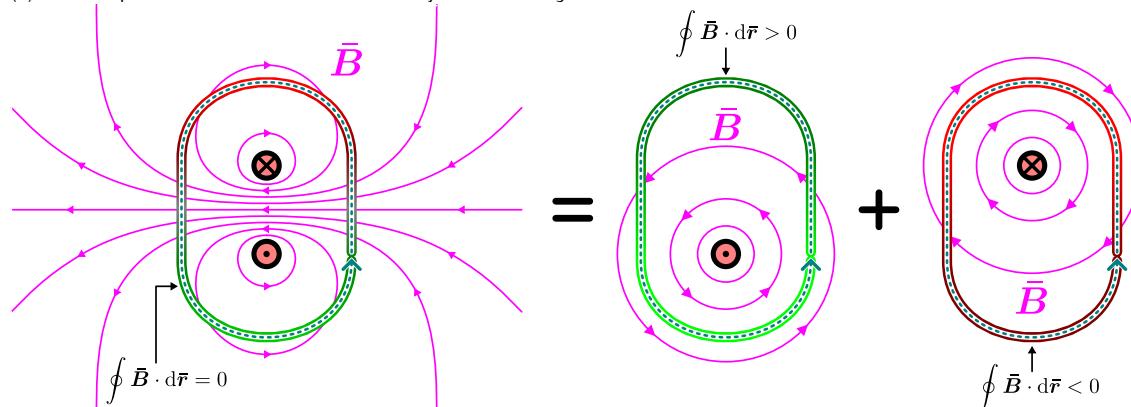
Kuvassa 12.17 (a) tarkastellaan magneettikentän viivaintegraalia reitillä, joka kiertää molemmat johtimet vastapäivään. Alemmassa johtimessa kulkee virta kohti katsojaa, joten tämän johtimen ympäri magneettikenttässä on pyörre reitin suuntaan. Niinpä viivaintegraali on reitin alaosassa positiivinen. Ylemmässä johtimessa virta kulkee kuitenkin pois katsojasta, joten oikean käden säännön mukaan magneettikenttä kiertää tätä johdinta myötäpäivään, reitin kulkusuuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Niinpä viivaintegraalin arvo on reitin yläosassa negatiivinen. Positiiviset ja negatiiviset osuudet kumoavat tällöin toisensa ja viivaintegraali on kokonaisuudessaan nolla. Tämä on sopusoinnussa yhtälön (12.52) kanssa, sillä vaikka reitin läpi kulkee virtaa kahta johdinta pitkin, nämä johtimet kuljettavat virtaa eri suuntiin. Reitin läpi siirtyy siis yhtä paljon varausta kumpaankin suuntaan, jolloin *kokonaisvirta on nolla*.

Päättelään vielä täsmällisesti, että viivaintegraalin täytyy olla nolla millä tahansa reitillä, jonka läpi kulkee yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset virrat i_A ja i_B . Kentien superpositioperiaatten mukaisesti kahden johtimen magneettikenttä on kaikkialla johdinten yksinään tuottamien kenttien summa,

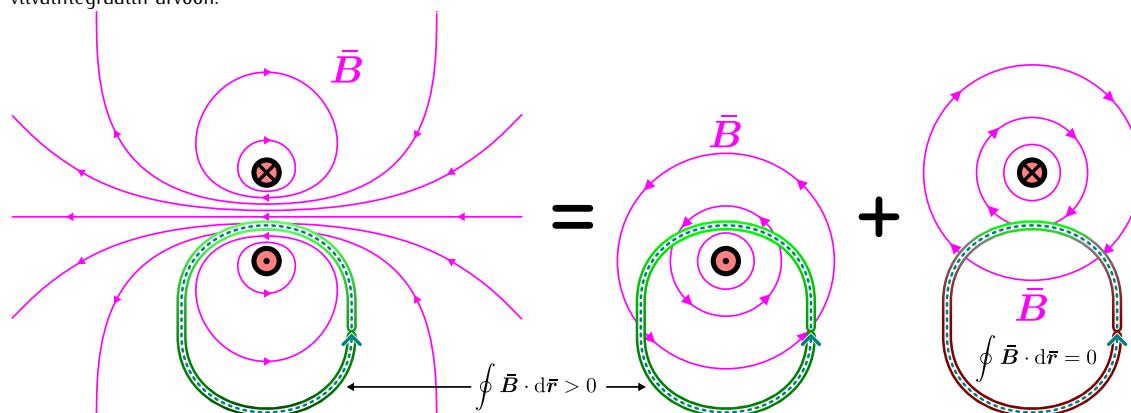
$$\bar{B}_{\text{kokonais}} = \bar{B}_A + \bar{B}_B. \quad (12.53)$$

Kuva 12.17: Ampèren laki virtajohtimille. Magneettikentän viivaintegraali suljettua reittiä pitkin riippuu ainostaan reitin läpi kulkevasta kokonaisvirrasta. Kokonaiskentän viivaintegraalin voi määrittää myös laskemalla jokaisen johtimen yksinään tuottaman kentän viivaintegraalin ja laskemalla nämä yhteen.

(a) Reitin läpi kulkeva kokonaisvirta on nolla, joten viivaintegraali on nolla.



(b) Reitin läpi kulkee nollasta poikkeava virta, joten viivaintegraali ei ole nolla. Reitin ulkopuolelle jäävät virrat eivät vaikuta viivaintegraalin arvoon.



Toisaalta integraalin voi laskea termi kerrallaan, joten

$$\oint \bar{B}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = \oint (\bar{B}_A + \bar{B}_B) \cdot d\bar{r} = \oint \bar{B}_A \cdot d\bar{r} + \oint \bar{B}_B \cdot d\bar{r}. \quad (12.54)$$

Niinpä viivaintegraalin voi laskea tarkastelemalla erikseen jokaisen johtimen yksinään luoman kentän viivaintegraaleja ja summaamalla nämä yhteen. Tiedämme myös, että kumpikin johdin tuottaa yksinään kentän, jonka viivaintegraali riippuu vain johtimen läpi kulkevan virran suuruudesta yhtälön (12.52) mukaisesti,

$$\oint \bar{B}_A \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu i_A \quad (12.55)$$

$$\oint \bar{B}_B \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu i_B, \quad (12.56)$$

joten kokonaiskentän viivaintegraali on

$$\oint \bar{B}_{\text{kokonais}} \cdot d\bar{r} = 2\pi k_\mu (i_A + i_B) = 2\pi k_\mu i_{\text{kokonais}}. \quad (12.57)$$

Kuvassa 12.17 (a) viivaintegraali valitulla reitillä on alemman johtimen kentässä positiivinen ja ylemmän kentässä negatiivinen, jolloin kokonaiskentän integraali on nolla. Vastaavasti kuvassa (b) integrointireitti kiertää vain alemman johtimen, jolloin alemman johtimen kentän integraali on positiivinen ja ylemmän johtimen kentän integraali on nolla. Näin ollen kokonaiskentän integraali on sama kuin jos ylempää johdinta ei olisi lainkaan.

Sama päätteily toimii olipa virtajohtimia kuinka monta. Tulos yleistyy myös tapauksiin, joissa johtimet eivät ole suorat. Integroimisreitinkään ei itse asiassa tarvitse olla tasokäyrä, vaan mikä tahansa suljettu reitti kelpaa, kunhan reitillä on olemassa sisäpuoli, jotta reitin läpi kulkeva virta voidaan määrittää yksikäsitteisesti. *Ampèren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali suljetulla reittiläpitkin on aina suoraan verrannollinen reitin läpi kulkevaan kokonaissähkövirtaan,*

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (12.58)$$

Tässä virran ja viivaintegraalin suunnat valitaan jälleen oikean käden säännöllä. Jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat integrointireitin suuntaan, ojennettu peukalo osoittaa sähkövirran positiivisen suunnan.

Laissa esiintyvä verrannollisuuskerroin μ_0 on **magneettivakio**, jonka historiallinen nimi on *tyhjiön permeabiliteetti*. Vertaamalla yhtälöitä (12.52) ja (12.58) näemme, että magneettivakion ja aikaisemmin mm. Biot'n ja Savartin laissa esiintyneen vakion k_μ välinen yhteys on

$$k_\mu = \frac{\mu_0}{2\pi}. \quad (12.59)$$

Koska Ampèren laki on yleispätevä laki ja Biot'n ja Savartin laki vain sen erikoistapaus (samaan tapaan kuin Gaussin laki on sähkökenttien fundamentali laki ja Coulombin laki sen erikoistapaus), magnetismia kuvavissa laeissa käytetään yleisesti nimenomaan magneettivakioita μ_0 . Edelleen koska ampeerin määritelmä antoi vakiolle k_μ arvon $2.0 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$, magneettivakion arvo on likimain

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (12.60)$$

Vanhassa SI-järjestelmässä tämä arvo oli täsmällinen. Koska nykyään ampeeri määritellään vakion e kautta, arvo ei ole enää aivan täsmällinen, mutta se on edelleen erittäin tarkka likiarvo.

Gaussin ja Ampèren lait ovat luonteeltaan geometrisia. Gaussin laki sanoo, että kentän ominaisuudet mielivaltaisella suljetulla pinnalla riippuvat pinnan sisällä olevista kentän lähteistä. Mitä enemmän pinnan sisällä on kentän lähteitä, sitä enemmän pinnan sisältä ulos kulkee kenttäviivoja, ja tätä mittaa kentän vuo pinnan läpi. Viivaintegraali suljetulla reitillä mittaa puolestaan kentän pyörteisyiden voimakkuutta. Ampèren lain mukaan siis magneettikentän pyörteisyys millä tahansa suljetulla reitillä riippuu reitin läpi kulkevasta sähkövrrasta, ja tämän voi tulkita tarkoittavan sitä, että *sähkövrrat toimivat kentän pyörteiden keskuksina*. Ampèren laki siis kertoo yleisesti sen, että minkä tahansa alueen reunalla on sitä voimakkaampi pyörre, mitä voimakkaampi pyörteen keskus alueen sisällä on.



12.15 Tarkastellaan magneettikenttää suljetulla reitillä, joka muodostaa xy -tasoon r -säteisen origokeskisen ympyrän. Suora virtajohdin kulkee origon kautta, ja johtimessa kulkee virta i suuntaan $(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$.

(a) Mikä on reitin läpi kulkeva kokonaissvirta?

(b) Mikä on magneettikentän viivaintegraali reitin ympäri?

(c) Voiko tämän perusteella päättää magneettikentän voimakkuuden reitillä? Jos voi, miten? Jos ei voi, miksi?

esimerkki 12.3

Ampèren laki

Eräs poikkileikkauseltaan ympyrän muotoinen johdin (säde R) ei ole kauttaaltaan samanlaista materiaalia, ja siinä virrantihes riippuu keskiakselista mitatusta etäisyydestä r funktion $j_x = ar^2$ mukaisesti. Mikä on johtimen tuottaman magneettikentän voimakkuus etäisyyden r funktiona?

TILANNE Kyseessä on samanlainen johdin kuin esimerkissä 11.2.

SUUNNITELMA Ampèren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali millä tahansa suljetulla reitillä on verrannollinen reitin läpi kulkevan sähkövirtaan. Nyt tilanne on lisäksi sylinterisymmetrinen, joten magneettikentän täytyy muodostaa johtimen keskiakselia kiertäviä pyörteitä ja kentän voimakkuus voi riippua vain johtimen keskipisteestä mitatusta etäisyydestä r . Jos valitsemme integroimisreitiksi r -säteisen ympyrän, jonka keskipiste on johtimen keskiakselillä, magneettikentän täytyy olla kaikkialla reitin tangentin suuntainen ja voimakkuudeltaan vakio, $B(r)$. Näin ollen kentän viivaintegraali on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja reitin pituuden tulo. Toisaalta Ampèren lain mukaan integraalin arvo riippuu vain polun läpi kulkevasta virrasta, mistä voi ratkaista kentän voimakkuuden. Jos koko johdin kulkee integroimispolun läpi ($r > R$), Ampèren laissa esiintyvä virta on sama kuin johtimessa kulkeva kokonaisvirta. Jos integroimispolku kulkee johtimen sisällä ($r < R$), täytyy huomioida vain polun läpi kulkeva osuus virrasta.

Ampèren lain mukaan siis

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (12.61)$$

Magneettikentän viivaintegraali r -säteisen reitin ympäri on

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = 2\pi r B. \quad (12.62)$$

Esimerkissä 11.2 laskettiin, että johtimen R -säteisen osuuden läpi kulkee sähkövirta

$$i(R) = \frac{1}{2}\pi a R^4. \quad (12.63)$$

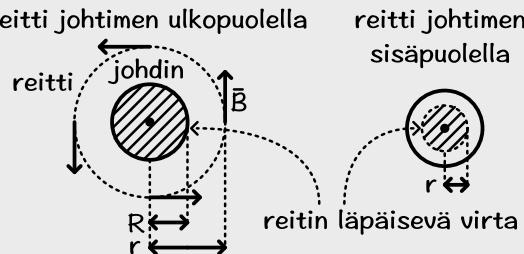
RATKAISU Jos $r > R$, integroimispolun läpi kulkee virta $i_{\text{kokonais}} = i(R)$. Tällöin Ampèren laista saadaan $2\pi r B = \mu_0 i(R)$ eli

$$B = \frac{\mu_0 i(R)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 a R^4}{4r}. \quad (12.64)$$

Jos $r < R$, integroimispolun läpi kulkee virta $i_{\text{kokonais}} = i(r)$. Nyt siis

$$B = \frac{\mu_0 i(r)}{2\pi r} = \frac{1}{4}\mu_0 a r^3. \quad (12.65)$$

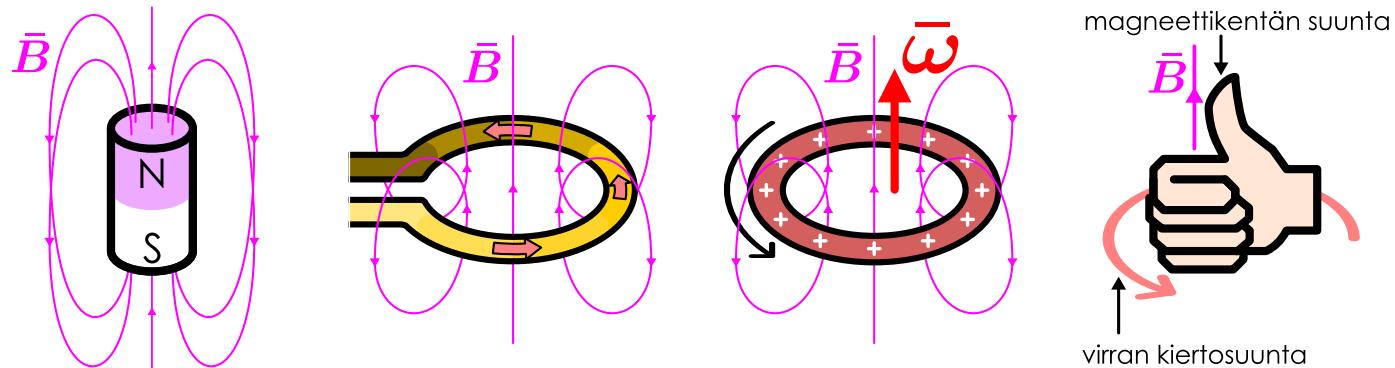
ARVIOINTI Johtimen ulkopuolella kenttä olisi voitu laskea myös pitkän suoran johtimen kentän lausekkeesta, ja lopputulos on se, että kentän voimakkuus on käännetään verrannollinen etäisyyteen r . Johtimen sisällä kenttä kasvaa etäisyyden r -funktiona. Johtimen keskipisteessä kentän voimakkuus on nolla, kuten symmetrian perusteella pitääkin olla. Sijoittamalla $r = R$ nähdään myös, että kumpikin yhtälö antaa johtimen pinnalla saman tuloksen $B(R) = \frac{1}{4}\mu_0 a R^3$ kuten niiden pitääkin.



12.16 Selitä omin sanoin Gaussian ja Ampèren lait magneettikentille. Selitä erityisesti, miten Ampèren lain avulla voidaan päätellä magneettikenttä symmetrisessä systeemissä.

Kuva 12.18: Samantyyppinen magneettikenttä kulkee magneetin, virtasilmukan ja pyörivän varatun kappaleen läpi.

(a) Kestomagneetin magneettikenttä. (b) Virtasilmukan magneettikenttä. (c) Pyörivän varatun renkaan magneettikenttä. (d) Oikean käden sääntö.



12.4 Dipolit

Ampéren lain mukaan magneettikentän pyörteet syntyvät sähkövirtojen ympärille. Mutta toisaalta magneettikenttiä voi luoda sähkövirtojen lisäksi myös kestomagneeteilla, joissa ei ainakaan makroskooppisessa mitata avassa kulje sähkövirtaa. Tämä on selvästikin ristiriita. Joko Ampéren laki ei pädekaan magneeteille vaan niitä kuvaa jokin toinen laki *tai* magneettienkin kyky luoda magneettikenttiä liittyy pohjimmiltaan mikroskooppisiin sähkövirtoihin. Luvun alussa opimme kestomagneettien magneettisuuden olevan peräisin siitä, että elektronit toimivat magneettisten dipolien tavoin, ja nyt tavoitteemme on selvitää, miten nämä dipolit todella käyttäytyvät.

Virtasilmukan magneettikenttä

Kuvaan 12.18 (a) on piirretty kestomagneetin magneettikenttä. Kenttä on voimakkaimmillaan magneetin sisällä (ei näy kuvassa), missä kenttä osoittaa S-navalta N-nolle. Magneetin ulkopuolella magneettikenttä levää N-navalta kaikkiin suuntiin kiertäen lopulta takaisin S-nolle. Kestomagneetin magneettikenttä muodostaa siis silmukoita, joiden keskukset ovat magneetin kyljissä. Kentällä täytyy olla tällainen muoto, koska magneettisen Gaussian lakan mukaan magneettikentän kenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita. Jokaisen magneetin läpi kulkevan kenttäviivan täytyy siis jatkuä äärettömyksiin tai tehdä silmukka magneetin ympärille.

Samanlainen kenttä on mahdollista tuottaa myös sähkövirralla, sillä Ampéren lain mukaan virta toimii magneettikentän pyörteiden keskuksena. Jos siis teemme virtajohtimesta *silmukan* kuten kuvassa 12.18 (b), magneettikenttä muodostaa virtajohtimen ympärille samanlaisia pyörteitä kuin kestomagneetissa. Kuvassa silmukan jokaisessa pisteesä kulkeva virta tuottaa silmukan keskelle ylöspäin osoittavan magneettikentän, joten kentän superpositiooperaation mukaan silmukan keskellä on voimakas ylöspäin suuntautuva magneettikenttä (vrt. kuva 12.11 (c)). Silmukan ulkopuolella on puolestaan heikko magneettikenttä, joka osoittaa kuvassa alas päin aivan kuten kestomagneetissakin.

Silmukaksi kierretynä johtimessa magneettikentän synnyttää ympyrää kiertävä sähkövirta. Toisaalta sähkövirta on varauksenkuljetusten järjestynyttä liikettä, joten myös liukkeessa olevat varatut kappaleet kuljettavat sähkövirtaa ja synnyttävät ympärilleen magneettikentän. Erityisesti varatun kappaleen *pyöriessä* siinä olevat varaukset lükkuvat ympyräradalla, joten pyörivät varaukset muodostavat virtasilmukoita ja nämä virtasilmukat synnyttävät magneettikentän. Esimerkiksi kuvan 12.18 (c) varattu rengas pyörii keskipisteensä ympäri, jolloin se synnyttää aivan samanlaisen magneettikentän kuin vastaava johdin, jossa kulkee sähkövirta.



12.17 Varattu tanko, jonka varaustihelsys on 10.0 kC/m^3 , poikkipinta-ala 2.0 mm^2 ja pituus 2.0 cm taivutetaan täydelliseksi ympyräksi. Näin syntynyt rengasta pyöritetään kulmanopeudella 500 s^{-1} keskipisteensä ympäri. (a) Kuinka suuri sähkövirta pyörivän renkaan mukana kulkee? (b) Mikä on magneettikentän voimakkuus renkaan keskellä?

Virtasilmukoiden ja pyörivien varattujen kappaleiden magneettikentän suunnan muistamiseksi on olemassa oma oikean käden sääntönsä, joka on esitetty kuvassa 12.18 (d). Kun oikean käden sormet kierretään osoittamaan virran kulkuunsaan tai positiivisesti varatun kappaleen pyörimissuuntaan, peukalo osoittaa magneettikentän suunnan silmukan tai kappaleen keskellä. Samanlainen oikean käden sääntö pätee pyörivän kappaleen pyörimissuunnan sekä sen kulmanopeus- tai kulmaliijemäärävektorin välillä (kuva 5.23), joten

pyörivän positiivisesti varatun kappaleen magneettikenttä läpäisee siis kappaleen suunnassa, johon kappaleen kulmanopeus- ja kulmalükemääärävektorit osoittavat.



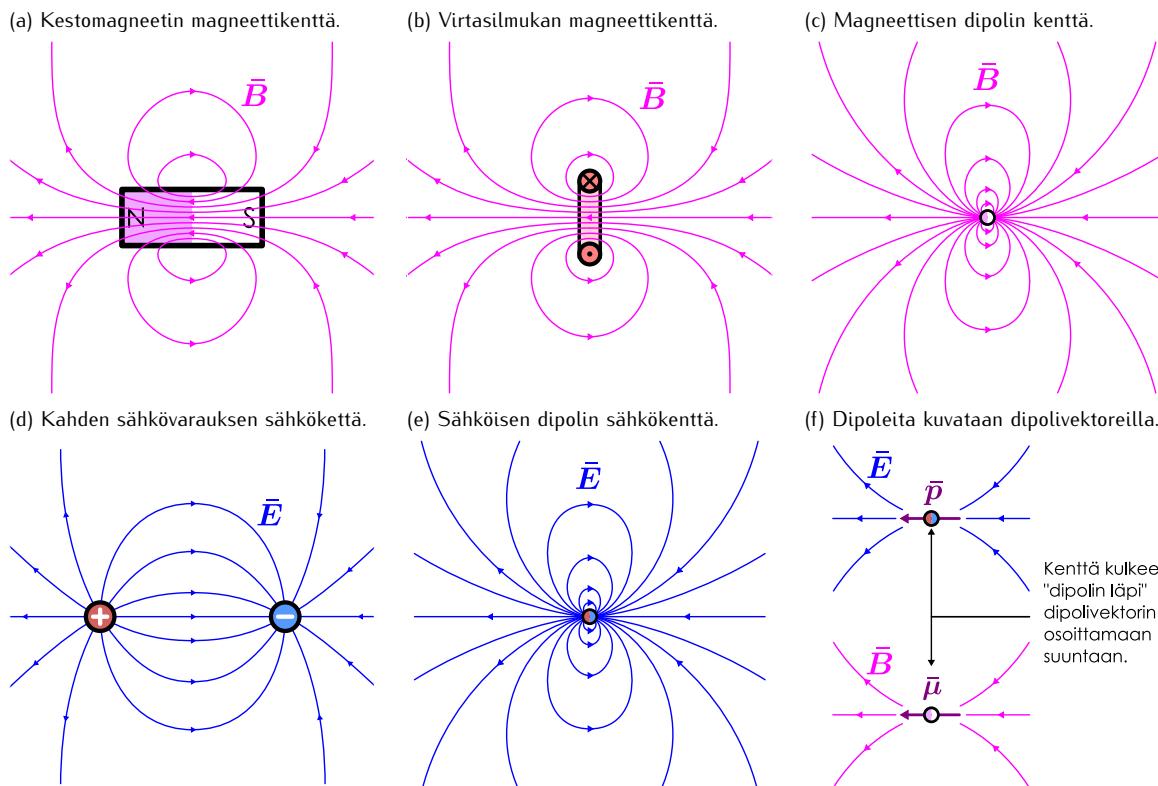
12.18 Katsot negatiivisesti varatun renkaan läpi ja rengas pyörii sinun näkökulmastasi myötäpäivään. Mihin suuntaan renkaan synnyttämä magneettikenttä osoittaa renkaan keskellä?

Magneettiset ja sähköiset dipolit

Kestomagneetin, virtasilmukan ja pyörivän varatun kappaleen magneettikentät ovat siis samantyyppiset, vaikka magneettikentän täsmällinen muoto riippuu tieteenkin kentän tuottavan kappaleen muodosta samalla lailalla kuin sähköisesti varatun kappaleen tuottaman sähkökentän muoto riippuu varatun kappaleen muodosta. Opimme kuitenkin sähkökenttiä tutkiessamme, että minkä tahansa varatun kappaleen sähkökenttä on täsmälleen samanlainen kuin pisteverauksen kenttä, kun kappaletta tarkastellaan tarpeeksi kaukaa, koska kaukaa katsoen kappaleiden yksityiskohtaista muotoa ei voi havaita. Aivan samalla tavalla minkä tahansa kestomagneetin, virtasilmukan tai pyörivän varatun kappaleen täsmällinen muoto on merkityksetön, kun niiden muodostamaa magneettikenttää tarkastellaan hyvin kauhaa. Esimerkiksi kuvaan 12.19 (a) on piirretty kestomagneetin magneettikenttää magneetin kautta kulkevassa tasossa ja vastaavasti kuvaan 12.19 (b) on piirretty virtasilmukan magneettikenttää silmukan halkaisevassa tasossa. (Puolel silmukasta on siis kuvaan piirretyn tason takana ja puolel sen edessä.) Kuvaan 12.19 (c) on puolestaan piirretty *pistemäisen magneettisen dipolin kenttä*. Magneetin ja silmukan kentät ovat kappaleiden lähellä hieman erilaiset, mutta tarpeeksi kaukaa tarkasteltuna sekä kestomagneetin että virtasilmukan kentät ovat täsmälleen samanlaiset kuin pistemäisen dipolin kenttä. Tai vaihtoehtoisesti, jos kestomagneetti tai virtasilmukka kutistettaisiin mielivaltaisen pieniksi, niihin kummankin magneettikenttää tulisi täsmälleen samanlainen kuin pistemäisen dipolin kenttä.

Luvun alussa opimme, että elektronit ovat mikroskooppisia magneettisia dipoleja ja että kestomagneettien magneettisuus johtuu elektronien muodostamien dipolien järjestymisestä yhdensuuntaisiksi. Nyt voimme selettää, miksi näin on. Atomeissa olevien elektronien liikkeen tarkka ymmärtäminen vaatii kvanttimekanikkaa, johon tutustumme vasta luvussa 17. Oleellista atomien magneettisuuden kannalta on kuitenkin se, että elektronit voivat *kiertää* atoimydintä, jolloin niillä on *kulmalükemäärä*. Tämän lisäksi elektroneilla on sisäistä kulmalükemäärä. Ja koska elektroni on negatiivisesti varautunut hiukkasen, sen kiertolüke muodostaa mik-

Kuva 12.19: Kestomagneetin ja virtasilmukan kentät ovat keskenään samankaltaiset. Kauaa katsoen kummankin kenttä on täsmälleen samanlainen kuin magneettisen dipolin kenttä. Se on puolestaan täsmälleen samanlainen kuin sähköisen dipolin synnyttämä sähkökenttä.



roskooppisen virtasilmukan. Näin elektroni synnyttää ympärilleen dipolin magneettikentän, jonka suunnan ja voimakkuuden määrää elektronin kulmaliikeämärän suunta ja suuruus.

Makroskooppisessa mittakaavassa atomit ja elektronit ovat aina erittäin pieniä, joten magneettisia atomeja voidaan makroskooppisessa mittakaavassa pitää pistemäisinä magneettisina dipoleina, joiden magneettikenttä on kuvan 12.19 (c) muotoinen. Kestomagneeteissa on valtava määrä näitä dipoleja, joten niiden kenttä on kaikkien näiden dipolien kentien superpositio.



12.19 Päteekö Ampéren laki myös kestomagneeteille, jos otetaan magneettisissa atomeissa pyörivien elektronien kuljettamat mikroskooppiset sähkövirrat huomioon?

Magneettiset "dipolit" ovat siis pohjimmiltaan virtasilmukoita eivätkä suinkaan kahden magneettisen navan yhdistelmiä. Tässä mielessä magneettisia napoja ei oikeastaan ole olemassakaan. Virtasilmukoita kuitenkin kutsutaan magneettisiksi dipoleiksi, koska ne käyttäytyvät samalla tavalla kuin sähköiset dipolit, jotka todella koostuvat kahdesta navasta. Kuvassa 12.19 (d) on kuvattu sähköisen dipolin sähkökenttä dipolin sisällä. Sähkökentän kenttäviivat lähtevät positiivisesta varauksesta ja päättyvät negatiiviseen varaukseen, joten kenttä kulkee kaikkialla positiivisesta navasta negatiiviseen. Magneetin magneettikenttä kulkee magneetin ulkopuolella N-navasta S-napaan, joten ulkopuolelta tarkastellen magneetin N-napa toimii kuin sähköisen dipolin positiivinen varaus ja S-napa kuin negativinen varaus. Magneetin sisällä magneettikenttä kuitekin kulkee S-navasta N-napaan eli päinvastaiseen suuntaan kuin sähköisessä dipolissa. Sähköisen ja magneettisen dipolin sisäinen rakenne on siis aivan erilainen. Kaukaa tarkasteltuna dipolin sisäistä kenttää on kuitenkin mahdoton havaita. Jos sähköinen dipoli kutistetaan hyvin pieneksi tai jos suurta dipolia tarkastellaan hyvin kaukaa, sen sähkökenttä vastaa aina kuvan 12.19 (e) piirrettyä pistemäisen sähköisen dipolin kenttää. Tämä sähkökenttä on muodoltaan *täsmälleen samanlainen* kuin kuvan 12.19 (c) pistemäisen magneettisen dipolin kenttä. Edelleen jos magneettisia varauksia todella olisi olemassa, tällaisten varausten muodostaman dipolin magneettikenttää ei voisi mitenkään erottaa mikroskooppisen virtasilmukan magneettikentstä. Ja koska virtasilmukoita ei voi erottaa aidoista magneettista dipoleista, voimme aivan hyvin ajatella niiden olevan S- ja N-navoista koostuvia magneettisia dipoleja vaikkeivat ne sitä todellisuudessa olekaan.

Edellissä esimerkeissä tarkasteltiin täsmällisesti ottaen vain kentien muotoa. Kaikilla pistemäisillä dipoleilla on samanmuotoinen kenttä, mutta kentän voimakkuus riippuu kuitenkin dipolin voimakkuudesta. Jos esimerkiksi sähköisen dipolin muodostavien varausten suuruudet kaksinkertaistetaan, myös sähkökentän voimakkuus kaksinkertaistuu kaikkialla, mutta kentän muoto ei muutu. Vastaavasti jos virtasilmukassa kulkevan sähkövirran suuruus kaksinkertaistetaan, magneettikentän voimakkuus kaksinkertaistuu.

Luvussa 10 määrittelimme sähköisen dipolin suuntaa ja voimakkuutta kuvaavan *dipolimomenttivektorin* \vec{p} . Tämän vektorin suunta määriteltiin niin, että vektori osoittaa dipolin negatiivisesta varauksesta kohti positiivista varausta. Kuvassa 12.19 dipolin positiivinen napa on kuvassa vasemmalla, joten dipolimomenttivektori osoittaa kuvassa määritelmän mukaan oikealta vasemmalle.

Dipolimomenttivektorin suunan ja dipolin luoman kentän suunnan välinen yhteyksä näkyi puolestaan kuvassa 12.19 (f). Sähkökenttä lähee positiivisesta navasta ja päättyy negatiiviseen napaan, joten dipolin ulkopuolella kenttäviivat näyttävät "suihkuavan" dipolin positiivisesta navasta kuvassa oikealta vasemmalle. Kenttä myös päättyy negatiiviseen napaan ikään kuin napa "imisi" kenttäviivoja itseensä, jolloin kenttäviivat saapuvat dipoliin osoittaa kuvassa niin ikään oikealta vasemmalle. *Sähkökenttä siis lähee dipolista ja saapuu dipoliin dipolimomenttivektorin osoittamassa suunnassa.*

Voimme määritellä samalla tavalla myös **magneettisen dipolimomenttivektorin**, jonka suunta osoittaa suunnan, jossa magneettikentän kenttäviivat läpäisevät dipolin, ja jonka suuruus määrää magneetikentän suuruuden. Tätä magneettista dipolimomenttivektoria merkitään tavallisesti symbolilla $\vec{\mu}$. (Symboli on sama kuin magneettivakion symboli, mutta nämä ovat aivan eri suureet.) Virtasilmukan magneettikenttä läpäisee silmukan kuvan 12.18 (d) oikean käden säännön mukaisesti ja dipolimomenttivektori osoittaa silmukan läpäisevän magneetikentän suuntaan, joten sama oikean käden sääntö pätee myös dipolimomentin suunnalle. Toisin sanoen *jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat silmukassa kulkevan virran kiertosuunnan, ojennettu peukalo osoittaa silmukkaa kuvaavan magneettisen dipolimomenttivektorin suunnan*.



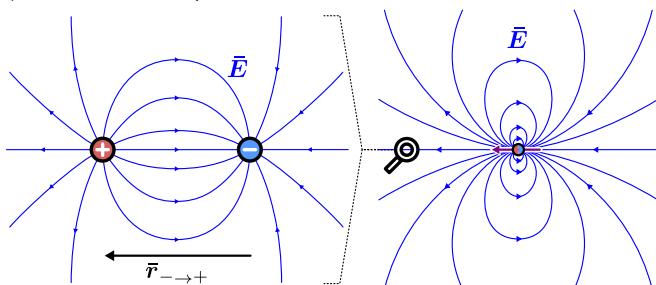
12.20 Neliön muotoisessa virtasilmukassa kulkee elektroneja. Silmukan kärjet ovat pisteissä $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ ja $(1, -1, 0)$, ja virran kiertosuunta on sama kuin pisteiden järjestys edellä. (a) Mihin suuntaan silmukan magneettinen dipolimomenttivektori osoittaa?

(b) Mihin suuntaan silmukan magneettikenttä osoittaa pisteessä (i) $(0, 0, 0)$, (ii) $(0, 0, 2)$, (iii) $(2, 0, 0)$?

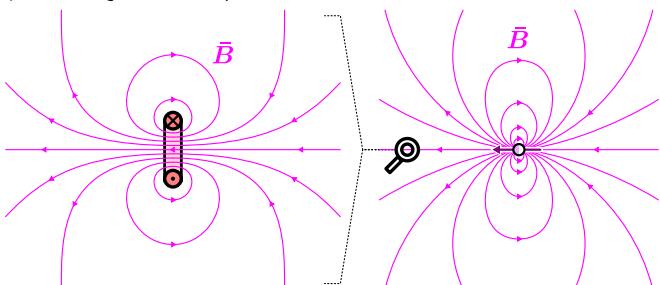
Sähköisen dipolin luoman sähkökentän voimakkuus on verrannollinen dipolin muodostavien varausten suuruuteen q , mutta dipolin sähkökentän voimakkuus riippuu kuitenkin myös varausten välisestä etäisyydestä $r_{-\rightarrow+}$ kuten kuvissa 12.20 (a) ja (b) on havainnollistettu. Mitä lähempänä toislaan varaukset ovat, sitä voimakkaammin niiden luoma sähkökenttä keskittyy varausten välille, mikä näkyy kenttäviivojen siirtymisenä. Gaussin lain mukaan kenttäviivojen kokonaismäärä ei muutu, mutta kuvassa (b) suurin osa kenttäviivoista on

Kuva 12.20: Sähköisen dipolin dipolimomentti riippuu varausten suuruudesta ja niiden välisestä etäisyydestä. Magneettisen dipolin dipolimomentti riippuu virran suuruudesta ja silmukan koosta.

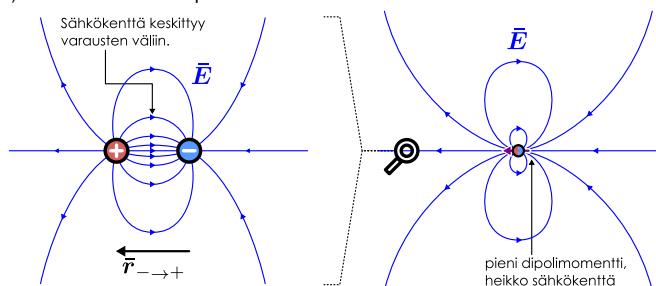
(a) Suuri sähköinen dipolimomentti.



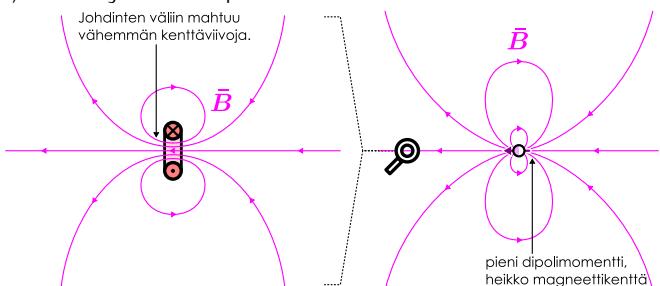
(c) Suuri magneettinen dipolimomentti.



(b) Pieni sähköinen dipolimomentti.



(d) Pieni magneettinen dipolimomentti.



varausten välissä. Tällöin *dipolista poispäin suuntautuvien kenttäviivojen määrän täytyy vähentyä*, mikä tarjoittaa kaukana dipolista havaitun sähkökentän heikentyvän. Sähködipolin sähkökenttää siis heikkenee, kun dipolin muodostavat varaukset lähestyvät toisiaan, ja esimerkissä 12.4 osoitetaan vielä täsmällisellä laskulla, että sähkökentän voimakkuus kaukana dipolista on suoraan verrannollinen varausten väliseen etäisyyteen.

Näiden tulosten perusteella kaksi dipolia tuottaa samanlaisen sähkökentän, jos dipolin muodostavien varausten suuruuden ja niiden välisen etäisyyden tulo on yhtä suuri. Mutta toisaalta tämä tulo on yhtälön (10.3) mukaisesti sähköisen dipolimomentti, $p = qr_{- \rightarrow +}$. Siispä *dipolin sähkökentän voimakkuus on suoraan verrannollinen sen dipolimomentin suuruuteen*. Tämän ominaisuuden ansiosta dipolimomentti on hyvä suure kuvaamaan dipolin ominaisuuksia.

Magneettisen dipolin kentän voimakkuuden pitäisi samaan tapaan olla verrannollinen magneettisen dipolimomentin suuruuteen. Virtasilmukan magneettikentän voimakkuus on tieteenkin verrannollinen silmukassa kulkevan virran voimakkuuteen, mutta kentän voimakkuus riippuu myös silmukan koosta kuten kuvista 12.20 (c) ja (d) nähdään. Magneettiset kenttäviivat muodostavat pyörteitä vailla alkua ja loppua, joten kaikki virtasilmukan magneettikentän kenttäviivat kulkevat myös silmukan läpi. Suuresta silmukasta "mahtuu" läpi enemmän kenttäviivoja, joten karkeasti mitä suurempi silmukka on kyseessä, sitä enemmän kenttäviivoja sen magneettikentässä on. Toisaalta magneettikentän voimakkuus on suoraan verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen, joten kaukana virtasilmukasta suuren silmukan kentän täytyy olla pienien silmukan kenttää voimakkampi.

Täsmällisesti virtasilmukan magneettinen dipolimomentti on verrannollinen silmukan rajaamaan *pinta-alaan*. Jos virtasilmukka on rajoitettu tasoon (eli se ei muodosta kolmiulotteista käyrää), silmukan magneettisen dipolimomentin *määritellään* olevan vektori, jonka suuruus on silmukassa kulkevan sähkövirran i ja silmukan pinta-alan A tulo,

$$\mu = iA. \quad (12.66)$$

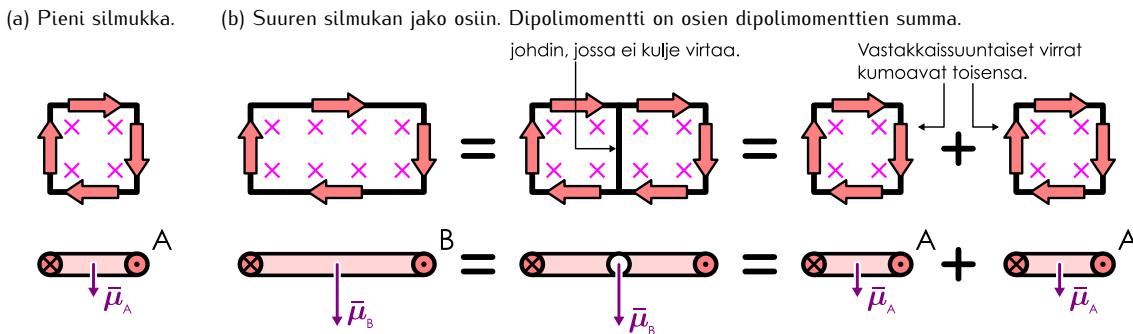
Vektori osoittaa oikean käden säännön mukaisesti kohtisuoraan silmukan tasoon nähdien. Merkitsemällä silmukan tasoon nähdien kohtisuoraa vektoria eli tason normaalivektoria \hat{n} , dipolimomentivektoriksi saadaan

$$\bar{\mu} = iA\hat{n}. \quad (12.67)$$

Kuvassa 12.21 on havainnollistettu, miksi dipolimomentin täytyy riippua nimenomaan silmukan pinta-alasta eikä esimerkiksi sen reunan pituudesta. Kuvassa (a) on pieni virtasilmukka A, jonka dipolimomentti olkoon $\bar{\mu}_A$. Kuvassa (b) on toinen, pinta-alaltaan kaksinkertainen silmukka B, jossa kulkee yhtä suuri virta kuin kuvan (a) silmukassa. Tämän silmukan dipolimomentti on $\bar{\mu}_B$. Koska kuvan (b) silmukka on suurempi, siinä on enemmän liukkuavia varausenkuljettajia ja niinpä se tuo voimakkaimman magneettikentän ja sillä täytyy olla suurempi dipolimomentti.

Silmukka A on muodoltaan neliö ja silmukka B on suorakaide. Jos silmukan A sivun pituus on L , sen reunan pituus on $4L$ ja pinta-ala L^2 . Vastaavasti silmukan B reunan pituus on $6L$ ja ala $2L^2$. Toisin sanoen

Kuva 12.21: Suuren virtasilmukan magneettikenttä on samanlainen kuin usean pienien silmukan kentät. Näin ollen virtasilmukan magneettinen momentti on suoraan verrannollinen silmukan pinta-alaan.



vaikka silmukan B pituus on vain puolitoistakertainen silmukkaan A nähdin, sen pinta-ala on kaksinkertainen. Osoitamme nyt, että *suuren silmukan B dipolimomentti on kaksinkertainen pienempään silmukkaan A verrattuna*. Tästä seuraa, että dipolimomentti on verrannollinen nimenomaan silmukan pinta-alaan eikä sen reunan pituuteen.

Magneettikentän pyörteitä synnyttävät vain virtaa kuljettavat johtimet, joten jos silmukan B keskelle lisättäisiin virtajohdin, jossa ei kulje virtaa, silmukan magneettikenttä ja siten myös dipolimomentti pysyisi muuttumattomana. (Kysessä on ajatuskoe, joten ei nyt välitetä siitä, miksi virta kulkee silmukassa ja miksi se ei kulje silmukkaan lisätyssä johtimessa.) Toisaalta sähkövirta mittaa siirtymän varauksen kokonaismäärää, joten johtimessa kulkeva virta on nolla sekä silloin, kun johtimessa ei liiku lainkaan varausta, että silloin, kun varauksia liikkuu yhtä paljon kumpaankin suuntaan. Ei ole myöskään magneettikentän kannalta mitään eroa, ovatko varauksenkuljettajat johtimessa paikoillaan vai liikkuuko niitä yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin, koska eri suuntiin kulkevat virrat tuottaisivat magneettikenttään vastakkaisiin suuntiin kertyvät pyörteet, jotka kumoaisivat toisensa täydellisesti. Niinpä voimme aivan hyvin ajatella, että silmukkaan B lisätyssä johtimessa kulkee virta yhtä aikaa kumpaankin suuntaan.

Silmukan B keskelle lisättä johdin jakoi silmukan kahteen pienempään osaan, jotka ovat täsmälleen yhtä suuret kuin silmukka A. Jos nyt ajattelemme, että johtimessa kulkee virtaa kumpaankin suuntaan eli kuvassa sekä ylös- että alas päin, voimme aivan hyvin ajatella kuvassa alas päin kulkevan virran olevan osa kuvan vasemmanpuolesta silmukkaa ja ylöspäin kulkevan virran kuuluvan oikeanpuoleiselle silmukalle. Nämä ajatellen silmukan B kummassakin puoliskossa kiertää sähkövirta, jolloin suuri silmukka B onkin itsessään kahden A-silmukan yhdistelmä. Suussa silmukassa B ei tienekään tarvitse olla keskellä sen kahteen osaan jakavaa virtajohdinta, mutta *suuren silmukan B magneettikentän täytyy tämän päättelyn perusteella olla täsmälleen samanlainen kuin kenttä, jonka kaksi pienempää silmukkaa A yhdessä tuottaisi*. Edelleen koska silmukan synnyttämän magneettikentän voimakkuus on verrannollinen silmukan dipolimomenttiin, silmukan B magneettisen dipolimomentin täytyy olla kaksinkertainen silmukan A magneettiseen dipolimomenttiin nähden.

Täsmälleen samanlainen päättely toimii riippumatta silmukan muodosta. *Mikä tahansa silmukka voidaan jakaa pienempiin osiin*, jolloin suuren silmukan magneettinen dipolimomentti on sen osien dipolimomenttien summa. Dipolimomentti on siis ekstensiivinen suure, ja koska kaksiulotteiselle kappaleelle pinta-ala on eksensiivinen ominaisuus, dipolimomentin täytyy olla verrannollinen silmukan pinta-alaan. Tämä periaate toimii myös silloin, kun silmukka ei ole kaksiulotteinen. Tällöinkin silmukka voidaan jakaa osiin, joista jokainen on ainakin likimain tasomainen. Näille osille voidaan määrittää dipolimomenttivektorit erikseen yhtälön (12.67) perustella, ja koko silmukan dipolimomenttivektori saadaan laskemalla sen osien dipolimomentit yhteen vektoreina.

12.21 Virtasilmukka muodostuu seuraavien pisteiden välisistä suorista: $(0, 1, -1)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(0, -1, 0)$ ja $(0, -1, -1)$ (yksiköt millimetrejä). Silmukassa kulkee 5 A virta ja virran kiertosuunta on sama kuin pisteiden järjestys edellä.

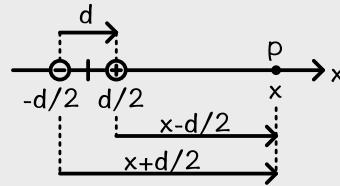
- (a) Mikä on silmukan dipolimomenttivektori karteesisissa komponenteissa?
- (b) Mikä on dipolimomentin suuruus?

esimerkki 12.4

Sähköisen dipolin kenttä

Laske sähköisen dipolin kentän voimakkuus dipolin kautta kulkevalla dipolimomenttivektorin suuntaisella suoralla.

TILANNE Sähköinen dipoli muodostuu kahdesta erimerkkisestä sähkövarauksesta, q ja $-q$, joiden välinen etäisyys on $r_{- \rightarrow +}$. Merkitään kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi lyhyemmin $r_{- \rightarrow +} = d$, jolloin dipolimomentti on siis $p = qd$. Asetetaan dipolin keskipiste origoon ja x -akseli dipolimomenttivektorin suuntaan, jolloin varaukset ovat siis pisteissä $x_- = -\frac{1}{2}d$ ja $x_+ = \frac{1}{2}d$. Tarkastelupiste P on piste $(x, 0, 0)$, missä $x \gg d$.



SUUNNITELMA Sähkökentän täytyy olla systeemin symmetriasta johtuen pisteessä P x -suuntainen, joten riittää määrittää kentän x -komponentti. Tämä on kaikkein helppointa niihin, että lasketaan ensin kentän potentiaali x -akselilla, jolloin sähkökentän x -komponentti selviää derivoimalla potentiaalia. Jos halutaan selvittää idealisen, pistemäisen dipolin kenttää, voidaan lopuksi vielä tarkastella ratkaisun asymptottista käytöstä, kun tarkastelupisteet etäisyyssä dipolista on paljon suurempia kuin dipolin koko, $x \gg d$.

Pistevarauksen potentiaali on

$$V_{q \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{q \rightarrow P}}, \quad (12.68)$$

ja dipolin kokonaispotentiaali on pistevarauksien potentiaalien summa, $V_P = V_{+ \rightarrow P} + V_{- \rightarrow P}$. Sähkökentän x -komponentti saadaan potentiaalin derivaatasta x -koordinaatin suhteenvastaisena:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (12.69)$$

RATKAISU Etäisyys positiivisesta varauksesta tarkastelupisteeseen on $r_{+ \rightarrow P} = x - x_+ = x - \frac{1}{2}d$ ja negatiivisesta $r_{- \rightarrow P} = x - x_- = x + \frac{1}{2}d$. Niinpä potentiaali pisteessä P on

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x - d/2} - \frac{1}{x + d/2} \right). \quad (12.70)$$

Lauseke sievenee, kun murtoluvut lannettaan samannimisiksi ja muistetaan yhtälö $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, sillä

$$\frac{1}{x - d/2} - \frac{1}{x + d/2} = \frac{(x + d/2) - (x - d/2)}{(x - d/2)(x + d/2)} = \frac{d}{x^2 - d^2/4}. \quad (12.71)$$

Kun vielä huomioidaan dipolimomentin lauseke $p = qd$, potentiaaliksi saadaan

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^2 - d^2/4}. \quad (12.72)$$

Jos tarkastelupiste on hyvin kaukana, $x^2 \gg d^2$ ja $x^2 - d^2/4 \approx x^2$. Näin pistemäisen dipolin potentiaaliksi saadaan

$$V_P \sim \frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (12.73)$$

Sähkökenttä pisteessä P on puolestaan

$$E_{x,P} = -\frac{\partial V_P}{\partial x} \sim \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3}. \quad (12.74)$$

Mathematica:

```
(* dipolin potentiaali *)
q = p/d;
v = 1/(4 Pi eps0) q (1/(x - d/2) - 1/(x + d/2));
vDipoli = Limit[v, d -> 0]
p/(4 eps0 Pi x^2)

(* dipolin kentta *)
eDipoli = -D[vDipoli, x];
p/(2 eps0 Pi x^3)
```

ARVIOINTI Dipolin sähkökentän voimakkuus on saamamme tuloksen mukaan käännettäen verrannollinen etäisyyden kuutioon, $E_x \sim x^{-3}$. Tämä on järkevä, koska dipoli on sähköisesti neutraali ja siksi sen sähkökentän täytyy heikentyä jyrkemmin kuin pistevarauksen sähkökenttä, $E_x \sim x^{-2}$.

esimerkki 12.5

Magneettisen dipolin kenttä

Laske magneetisen dipolin kentän voimakkuus dipolin kautta kulkevalla dipolimomenttivektorin suuntaisella suoralla.

TILANNE Magneettiset dipolit ovat pieniä virtasilmukoita, joten voimme käyttää tässä dipolin mallina jo esimerkissä 12.2 tarkastelemamme ympyrän muotoista johdinta. Johdinsilmukan säde on R , joten sen rajaama pinta-ala on $A = \pi R^2$. Silmukka kuvaa ideaalista, pistemäistä dipolia, kun sen koko lähestyy nolla, $R \rightarrow 0$.

SUUNNITELMA Virtasilmukan magneettisen dipolimomentin suuruus on silmukan pinta-alan ja silmukassa kulkevan virran tulo, ja dipolimomentti on kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan.

Ympyräjohtimen dipolimomentin suuruus on siis

$$\mu = iA = \pi iR^2. \quad (12.75)$$

Esimerkissä 12.2 silmukan magneettikentän voimakkuudeksi silmukan läpi kohtisuoraan kulkevalla aksellilla (eli dipolimomenttivektorin suunnassa) saatin

$$B = k_\mu \frac{\pi iR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.76)$$

Magneettikentän lausekkeessa esiintyy jo valmiina dipolimomentin voimakkuuden lauseke $\mu = \pi iR^2$, joten voimme kirjoittaa kentän voimakkuuden dipolimomentin suuruuden avulla. Lisäksi voimme käyttää yhtälöä $k_\mu = \frac{\mu_0}{2\pi}$, jotta saamme kentän lausekkeen kirjotettua magneettivakion avulla. Ideaalisen, pistemäisen dipolin kenttä saadaan tarkastelemalla asymptoottia $x \gg R$, jolloin silmukan koko on siis paljon pienempi kuin tarkastelupisteen etäisyys silmukasta.

RATKAISU Magneettikentän lauseke sievenee muotoon

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (12.77)$$

Kun kenttää tarkastellaan kaukana virtasilmukasta, $x^2 \gg R^2$, voidaan approksimoida $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx (x^2)^{3/2} = x^3$. Niiinpä magneettikentälle saadaan asymptoottinen muoto

$$B \sim \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3}. \quad (12.78)$$

Tämä on siis ideaalisen magneettisen dipolin kenttä dipolin symmetria-akselilla.

ARVIOINTI Esimerkissä 12.4 johdimme sähköisen dipolin sähkökentälle lausekkeen $E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 x^3}$ ja nyt saimme magneettisen dipolin magneettikentälle lausekkeen $B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3}$. Nämä ovat aivan samanlaiset funktiot. Täsmällisemmin, jos sähköisen dipolin kentän lausekkeessa korvataan sähkövakioksi $1/\epsilon_0$ magneettivakiolla μ_0 ja sähköinen dipolimomentti p magneettisella dipolimomentilla μ , saadaan magneettisen dipolin kentän lauseke. Kaukaa tarkasteltuna virtasilmukan kenttä on siis todellakin täsmälleen samanlainen kuin todellisen kaksinapaisen dipolin kenttä. Tästä nähdään myös se, että magneettisen dipolimomentin määrittely virran ja pinta-alan tulona on vastaa täsmälleen sähköisen dipolimomentin määritelmää varausten suuruuden ja niiden välisen etäsyden tulona.

Dipolit ulkoisessa kenttässä

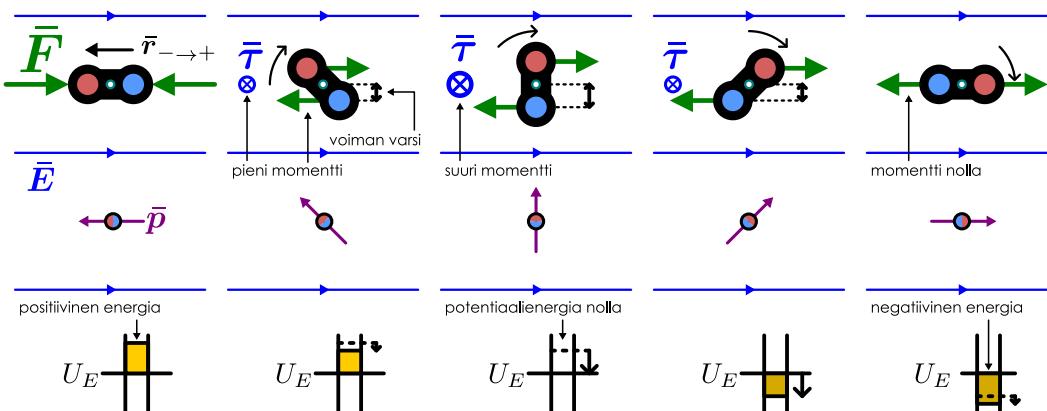
Sähköiset ja magneettiset dipolit tuottavat siis ympärilleen samanlaiset sähkö- ja magneettikentät. Kuitenkin jotta virtasilmukoita voisi todella pitää magneettisina dipoleina, niiden pitää myös reagoida ulkoiseen magneettikenttään samalla tavalla kuin sähköiset dipolit reagoivat ulkoiseen sähkökenttään. Osoitamme vielä, että näin todella tapahtuu.

Kuvaan 12.22 (a) on piirretty sähköinen dipoli homogenisessa sähkökentässä. Dipolin positiiviseen varauksen kohdistuu voima kentän suuntaan ja sen negatiiviseen varaukseen kohdistuu yhtä suuri voima kenttään nähden vastakkaiseen suuntaan, koska varaukset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret. Koska nämä voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaisuuntainen, *dipoliin kohdistuva kokonaivoima on nolla*. Homogeninen sähkökenttä ei siis vaikuta dipolin suoraviivaiseen liikkeeseen. Sen sijaan kenttä vaikuttaa dipolin asentoon. Dipolin positiivisen navan potentiaalienergia on sitä pienempi, mitä kauemmas varaus pääsee siirtymään kentän suuntaan (vrt. kappale siirtyy painovoimakentässä alaspäin), ja vastaavasti negatiivisen navan potentiaalienergia pienenee sen siirtymässä kenttää vastaan.

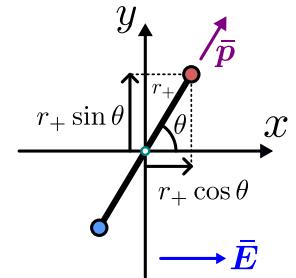
Valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi dipolin keskipiste. Tällöin dipolin potentiaalienergia on nolla dipolin ollessa kohtisuorassa kenttää vastaan kuten kuvasarjan 12.22 (a) keskimmäisessä tilanteessa. Dipolin potentiaalienergia kasvaa, jos dipolin negatiivista napaa käännetään kentän suuntaan ja potentiaalienergia pienenee, kun positiivinen napa käännytettiin kentän suuntaan. Koska dipolimomenttivektori osoittaa negatiivisesta varauksesta positiiviseen, tämä tarkoittaa potentiaalienergian olevan suurimmillaan (positiivinen) dipolimomenttivektorin ollessa kenttään nähden vastakkaisuuntainen. Potentiaalienergia on pienimmillään (negatiivinen) dipolimomenttivektorin ollessa kentän suuntainen. Dipoli pyrkii käänymään asentoon, jossa

Kuva 12.22: Sähköiseen dipoliin kohdistuu ulkoisessa sähkökentässä momentti, joka pyrkii käantämään dipolimomentin kentän suuntaiseksi. Homogenisessa kentässä dipoliin kohdistuva kokonaisvoima on kuitenkin nolla.

(a) Sähköinen dipoli homogenisessa sähkökentässä.



(b) Varausten koordinaatit.



potentiaalienergia minimoituu, joten *ulkoisessa kentässä oleva dipoli pyrkii siis käantymään niin, että sen dipolimomenttivektori on kentän suuntainen*.

Merkitään varausten välistä etäisyyttä jälleen $r_{-\rightarrow+}$ ja dipolimomenttivektorin sekä sähkökentän välisyyttä kulmaa θ . Kiinnitetään lisäksi koordinaatisto kuten kuvassa 12.22 (b), jossa origo on asetettu dipolin keskipisteeseen ja x -akseli sähkökentän suuntaan. Positiivisen varauksen etäisyys dipolin keskipisteestä on nyt $r_+ = \frac{1}{2}r_{-\rightarrow+}$ ja yksinkertaisella trigonometrialla positiivisen varauksen koordinaateiksi saadaan $(x_+, y_+) = (r_+ \cos \theta, r_+ \sin \theta)$. Varauksen potentiaalienergia on näin ollen

$$U_+ = -E_x q x_+ = -\frac{1}{2} E_x q r_{-\rightarrow+} \cos \theta = -\frac{1}{2} E p \cos \theta. \quad (12.79)$$

Energia riippuu vain varauksen x -koordinaatista, koska sähkökenttä on x -suuntainen, $E = E_x$. Lisäksi varauksen suuruus ja dipolin pituus on tässä kirjoitettu dipolimomentin avulla käyttäen yhtälöä (10.3) eli $p = qr_{-\rightarrow+}$.

Samalla tavalla negatiivisen navan potentiaalienergiaksi saadaan

$$U_- = -E_x (-q) x_- = -\frac{1}{2} E p \cos \theta, \quad (12.80)$$

sillä navan varaus on $-q$ ja sen x -koordinaatti on $x_- = -r_- \cos \theta = -\frac{1}{2}r_{-\rightarrow+} \cos \theta$. Kaikkiaan dipolin potentiaalienergia on siis

$$U_E = U_+ + U_- = -E p \cos \theta. \quad (12.81)$$

Tuloksen voi esittää vielä tiiviimmin vektoreina, sillä kulma θ oli sähkökenttävektorin \bar{E} ja dipolimomenttivektorin \bar{p} välinen kulma. Niinpä yhtälössä (12.81) esiintyy itse asiassa vektoreiden välisen pistetulon määritelmä, ja potentiaalienergia voidaan kirjoittaa muotoon

$$U_E = -\bar{p} \cdot \bar{E}. \quad (12.82)$$

Tämä funktio saa miniminsä vektoreiden ollessa yhdensuuntaiset ja maksiminsa vektoreiden ollessa vastakkaisuuntaiset, kuten pitääkin.

Dipolin pyrkimystä käantymään kentän suuntaiseksi voidaan kuvata myös siihen kohdistuvien voimien momentilla dipolin keskipisteen suhteeseen. Voiman momentti riippuu sekä voiman suuruudesta että sen varren pituudesta eli pyörimisakselista mitatusta voimaan nähdyn kohtisuorasta etäisyydestä. Tässä dipolin napoihin kohdistuvat voimat ovat x -suuntaiset, joten kumpaankin napaan kohdistuvan voiman varren pituus on yksinkertaisesti kyseisen navan y -koordinaatin suuruus. Näin ollen positiiviseen napaan kohdistuvan voiman momentti on suuruudeltaan

$$\tau_{\theta,+} = -F_{x,+} y_+ = -F_+ r_+ \sin \theta = -\frac{1}{2} E q r_{-\rightarrow+} \sin \theta = -\frac{1}{2} E p \sin \theta \quad (12.83)$$

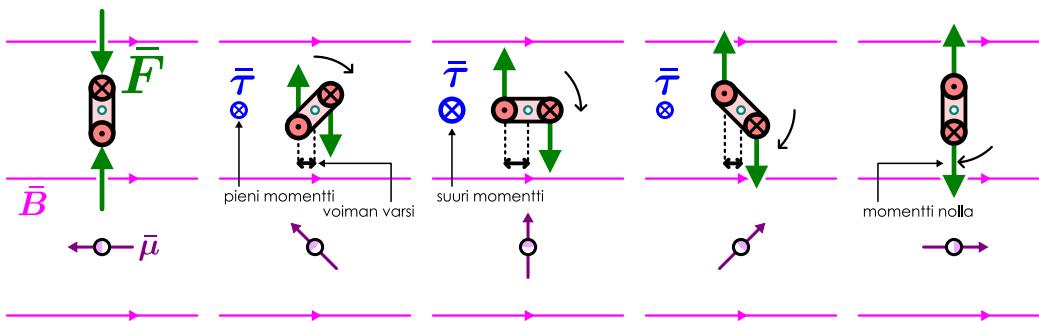
Momentti on negatiivinen, kun $0 < \theta < \pi/2$, koska näillä kulmilla voima pyrkii käantämään dipolia myötäpäivään eli suuntaan, jossa kulma θ pienenee. Negatiiviseen napaan kohdistuvaksi momentiksi saadaan samanlaisella päättelyllä niin ikään

$$\tau_{\theta,-} = -\frac{1}{2} E p \sin \theta. \quad (12.84)$$

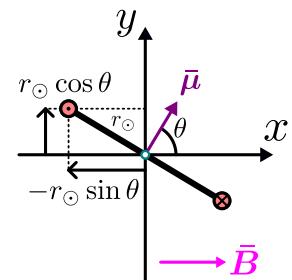
MAGNEETTIKENTTÄ

Kuva 12.23: Magneettiseen dipoliin kohdistuu ulkoisessa magneettikenttässä momentti, joka pyrkii käänämään dipolimomentin kentän suuntaiseksi. Homogenisessa kentässä dipoliin kohdistuva kokonaivoima on kuitenkin nolla.

(a) Magneettinen dipoli homogenisessa magneettikenttässä.



(b) Johdinten koordinaatit.



Dipolia käänvävän kokonaismomentin suuruus on siis

$$\tau_\theta = \tau_{\theta,+} + \tau_{\theta,-} = -E_p \sin \theta. \quad (12.85)$$

Täsmällisesti voiman momentti on vektori, jonka suunta määräytyy oikean käden säännön mukaan. Jos oikean käden koukistetut sormet osoittavat suunnan, johon voima pyrkii dipolia käänämään, momenttivektori osoittaa ojennetun peukalon suuntaan. Kuvassa 12.22 voiman momentti siis osoittaa katsojasta pois päin. Sama asia voidaan ilmaista myös kirjoittamalla momenttivektori ristituloona

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}. \quad (12.86)$$



12.22 Potentiaalienergia määritellään momentin tekemän työn kautta $U = -W = - \int \tau_\theta d\theta$. Tarkista, että yhtälö (12.85) antaa tämän perusteella oikean tuloksen (12.81).

Tutkitaan sitten vastaavaa magneettista dipolia eli virtasilmukkaa ulkoisessa homogenisessa magneettikenttässä. Kuvasarjassa 12.23 (a) on esitetty tällainen virtasilmukka ja siihen kohdistuvat voimat. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi nelion muotoista silmukkaa, jonka sivun pituus on L ja jossa kulkee virta i . Virtasilmukka on piirretty kuvaan niin, että kaksi sen sivuista on kuvan tasoon nähdyn kohtisuorat, ja yksinkertaisuuden vuoksi näkyviin on piirretty vain nämä sivut sekä niihin kohdistuvat magneettiset voimat.

Kuvasarjan vasemmanpuoleisimmassa kuvassa ylemmässä johtimessa virta kulkee pois katsojasta ja alempassa kohti katsojaa, jolloin oikean käden säännön perusteella magneettinen dipolimomenttivektori osoittaa kuvassa vasemmalle, magneettikenttään nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Johtimissa kulkee yhtä suuret virrat, joten niihin kohdistuu myös yhtä suuret voimat. Täsmällisesti silmukan yhteen sivuun kohdistuvan voiman suuruus on

$$F = iLB, \quad (12.87)$$

koska johdin on kohtisuorassa magneettikenttään nähdyn. Lisäksi koska virrat kulkevat vastakkaisiin suuntiin, niihin kohdistuvat voimat osoittavat myös vastakkaisiin suuntiin. Oikean käden säännön perusteella johtimeen, jossa virta kulkee kohti katsojaa, kohdistuva voima osoittaa ylöspäin. Vastaavasti johdin, jossa virta kulkee katsojasta pois, kokee alas päin osoittavan voiman.

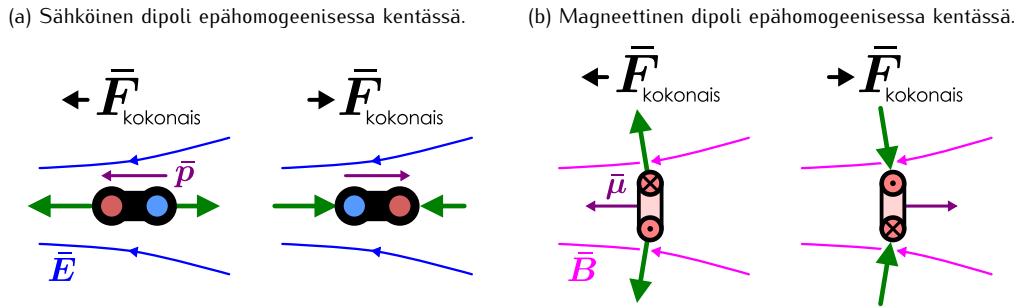
Seuraavassa kuvassa silmukka käännyy hieman myötäpäivään, jolloin dipolimomenttikin käännyy osoittamaan yläviistoon vasemmalle. Tällöin johtimiin kohdistuvat voimat tuottavat silmukkaan voiman momentin, joka pyrkii käänämään silmukkaa kuvassa myötäpäivään. Silmukkaan kohdistuva momenttivektori osoittaa siis katsojasta pois päin aivan kuten kuvan 12.22 (a) sähköiseen dipoliin kohdistuva voiman momentti. *Magneettinen voima pyrkii siis käänämään silmukan sellaiseen asentoon, että silmukan dipolimomenttivektori osoittaa samaan suuntaan kuin ulkoinen magneettikenttä.*



12.23 Mihin suuntaan osoittavat kuvassa 12.23 (a) piirtämättä jätettyihin silmukan sivuihin kohdistuvat voimat? Tuottavatko nämä silmukkaa käänvävän voiman momentti?

Momentin suuruuden voimme päättää jälleen kiinnittämällä koordinaatiston x -akselin kentän suuntaan ja asettamalla origon silmukan keskipisteeseen kuten kuvassa 12.23 (b). Merkitään lisäksi magneettisen dipolimomenttivektorin ja magneettikentän välistä kulmaa θ ja etäisyyttä origosta johtimiin $r_\odot = \frac{1}{2}L$. Näillä

Kuva 12.24: Epähomogenisessa sähkökentässä sähköiseen dipoliin kohdistuu nollasta poikkeava kokonaisvoima. Samoin epähomogenisessa magneettikentässä magneettiseen dipoliin kohdistuu voima.



merkinnöillä virtaa kohti katsojaa kuljettavan johtimen koordinaatit ovat $(x_{\odot}, y_{\odot}) = (-r_{\odot} \sin \theta, r_{\odot} \cos \theta)$. Koska tähän johtimeen kohdistuva voima osoittaa y -suuntaan, voiman momentti on

$$\tau_{\theta, \odot} = F_{y, \odot} x_{\odot} = -iLBr_{\odot} \sin \theta = -\frac{1}{2}iL^2B \sin \theta = -\frac{1}{2}\mu B \sin \theta, \quad (12.88)$$

missä virran ja silmukan sivun pituuden neliö on korvattu silmukan magneettisen dipolimomentin suuruudella, $\mu = iL^2$, dipolimomentin määritelmän (12.67) mukaisesti.

Toisessa johtimessa kulkee virta pois päin katsojasta ja siihen kohdistuu voima negatiiviseen y -suuntaan. Tähänkin johtimeen kohdistuva voima tuottaa momentin

$$\tau_{\theta, \odot} = -\frac{1}{2}\mu B \sin \theta, \quad (12.89)$$

ja silmukkaan kohdistuva kokonaismomentti on siis

$$\tau_{\theta} = \tau_{\theta, \odot} + \tau_{\theta, \odot} = -\mu B \sin \theta. \quad (12.90)$$

Vektorimuodossa sama yhtälö voidaan kirjoittaa dipolimomentin ja magneettikentän ristituloona,

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}. \quad (12.91)$$

Tulos (12.91) on täsmälleen sama kuin vastaavalle sähköiselle momentille johdettu momentin yhtälö (12.86), paitsi että sähköinen dipoli \bar{p} ja sähkökenttä \bar{E} on nyt korvattu magneettisella dipolilla $\bar{\mu}$ ja magneettikentällä \bar{B} . Magneettinen dipoli käyttääsiis homogenisessa magneettikentässä täsmälleen samalla tavalla kuin sähköinen dipoli käyttääsiis homogenisessa sähkökentässä. Tästä seuraa myös suoraan, että magneettisen dipolin potentiaalienergiaa magneettikentässä täytyy kuvata yhtälöä (12.82) vastaava lauseke

$$U_B = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}. \quad (12.92)$$

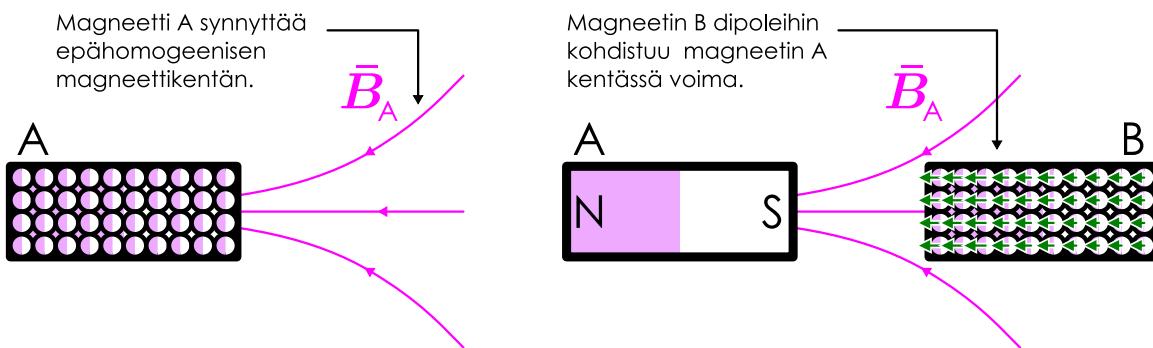


12.24 Selvitä jonkin sähkömoottorin toiminnan pääperiaate (moottoreita on erilaisia). Miten virtasilmukkaan kohdistuvaa magneettisen voiman momenttia voidaan hyödyntää sähkömoottorissa?

Edellisissä esimerkeissä dipolit olivat homogenisessa kentässä, mutta yleensä sähkö- ja magneettikentät ovat epähomogenisia eli paikasta riippuvia kuten kuvassa 12.24. Homogenisessa kentässä sähköisen dipolin napoihin ja virtasilmukan sivuihin kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaisuuntiset, mutta epähomogenisessa kentässä näin ei tarvitse olla. Dipolit pyrkivät käänymään kentän suuntaisiksi epähomogenisessa kentässä samaan tapaan kuin homogenisessakin kentässä. Kuitenkin toisin kuin homogenisessa kentässä, epähomogenisessa kentässä dipoliin kohdistuvan kokonaisvoiman ei tarvitse olla nolla. Esimerkiksi kuvassa 12.24 (a) sähköinen dipoli on sähkökentässä, jonka voimakkuus riippuu paikasta. Tällöin voimakkaassa kentässä olevaan napaan kohdistuu suurempi voima kuin heikossa kentässä olevaan napaan. Kuvassa kenttäviivat lähestyvät toisiaan vasemmassa reunassa, joten kenttä voimistuu kuvassa oikealta vasemmalle siirryttääseen. Kun dipolin positiivinen napa on vasemmalla, siihen kohdistuu suurempi voima kuin negatiiviseen napaan, ja tällöin dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa sähkökentän suuntaan eli kuvassa vasemmalle. Toisaalta jos dipoli käännetään ympäri, negatiiviseen napaan kohdistuu suurempi voima ja dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa kuvassa oikealle. Dipoliin siis kohdistuu epähomogenisessa sähkökentässä voima, jonka suunta riippuu dipolin asennosta.

Kuva 12.25: Kestomagneettien eli magneettisten dipolien välinen voima.

(a) Magneetti synnyttää ympärilleen epähomogenisen magneettikentän.
 (b) Epähomogenisessa kentässä toiseen magneettiin kohdistuu voima.



! 12.25 Mihin suuntaan dipoliin kohdistuva kokonaisvoima osoittaa, jos sähkökenttä osoittaa vasemmalle, sähkökentän voimakkuus kasvaa siirryttäässä oikealle, ja dipolimomenttivektori osoittaa (a) vasemmalle, (b) oikealle? (c) Yhtälö $U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ pääte myös epähomogenisessa kentässä. Päätteli sen avulla, että dipoliin voi kohdistua nollasta poikkeava voima, jos \vec{E} ei ole vakio.

Kuvassa 12.24 (b) on virtasilmukka eli magneettinen dipoli epähomogenisessa magneettikentässä. Tässäkin kuvassa kenttä osoittaa vasemmalle ja kenttä voimistuu siirryttäässä vasemmalle. Erityisesti magneettiset kenttäviivat eivät ole yhdensuuntaiset vaan ne lähestyvät toisiaan kuvan vasemmassa reunassa. Niihin silmukan vastakkaisiin sivuihin kohdistuvat voimat eivät ole vastakkaisuuntaiset. Esimerkiksi kuvan (b) ensimmäisessä esimerkissä silmukan ylemmässä johtimeessa kulkee virta kasojasta pois päin, jolloin siinä kohdistuu voima vasemmalle gläviistoon. Alempassa johtimeessa kulkee virta kohti katsojaa, ja siinä kohdistuu voima vasemmalle alaviistoon. Näiden voimien pystysuuntaiset komponentit kumoavat toisensa, mutta niiden vaakasuuntaiset komponentit vahvistavat toisiaan, jolloin silmukkaan kohdistuva kokonaisvoima osoittaa vasemmalle. Jos silmukka käännetään toisin päin, ylempään johtimeen kohdistuva voima osoittaa alaviistoon oikealle ja alempaan johtimeen kohdistuva voima osoittaa gläviistoon oikealle. Tällöin johtimeen kohdistuva kokonaisvoima osoittaa oikealle. Magneettiseenkin dipoliin kohdistuu siis epähomogenisessa magneettikentässä voima, jonka suunta riippuu dipolin asennosta. Ja kuten kuvista 12.24 (a) ja (b) nähdään, sähköisiin ja magneettisiin dipoleihin kohdistuvat voimat riippuvat dipolin suunnasta ja kentän muodosta samalla tavalla.

Tämä on pohjimiltaan syy siihen, että magneetit voivat kohdistaa voiman toisiinsa. Kestomagneetit ja magneettiset materiaalit koostuvat magneettisista dipoleista, jotka luovat ympärilleen epähomogenisen magneettikentän ja kokevat voiman toisten magneettien luomassa epähomogenisessa magneettikentässä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 12.25. Kuvan (a) magneetti (A) N-napa on sen vasemmassa reunassa ja S-napa oikeassa, jolloin magneetti luoma magneettikenttä kulkee kuvassa oikealta vasemmalle. Magneettikenttä heikkenee siirryttäässä magneetista pois päin, mikä näkyy hajaantuvina kenttäviivoina. Kuvassa (b) magneetti A viereen on tuotu toinen magneetti B. Tämänkin magneetti N-napa on sen vasemmassa reunassa ja S-napa oikeassa reunassa. Tämä tarkoittaa sitä, että magneetti sisäisten mikroskooppisten dipolien dipolimomenttivektorit osoittavat kuvassa vasemmalle. Näiden dipolien näkökulmasta tilanne on siis samalainen kuin kuvan 12.24 (b) esimerkissä, jossa kenttä ja dipolimomentit osoittavat vasemmalle ja lisäksi kenttä vahvistuu oikealta vasemmalle siirryttäässä. Kuhunkin dipoliin kohdistuu tällöin pieni voima vasemmalle, kohti magneettia A, ja magneettiin B kohdistuva kokonaisvoima on näiden summa. Niihin magneettiin B kohdistuu suuri kokonaisvoima vasemmalle, jolloin magneetti A siis vetää magneettia B puoleensa.

! 12.26 Kuvan 12.25 (b) magneetti A käännetään ympäri ja magneetti B pysyy samassa asennossa. Piirrä kuva 12.24 vastaava kuva magneetti B yhdelle magneettiselle dipolille ja päätteli tämän perusteella, millainen voima yksittäiseen dipoliin kohdistuu. Selitä tämän perusteella, miksi magneetti A käänteminen muuttaa magneettiin B kohdistuvaa voimaa.

esimerkki 12.6

Dipoli ulkoisessa kentässä

Erään magneettisen dipolin dipolimomenttivektori on $\bar{\mu} = (1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}$. Dipoli on homogeenisessa sähkökentässä $\bar{E} = (2.0 \text{ kV/m})\hat{i} + (3.0 \text{ kV/m})\hat{k}$ ja magneettikentässä $\bar{B} = (-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}$. (a) Mikä on dipolin potentiaalienergia? (b) Mikä on dipoliin kohdistuvan voiman momentti (vektori)?

TILANNE Tilanne on kolmiulotteinen, mutta dipolimomenttivektori on xy -tasossa ja magneettikenttäkin poikkeaa vain vähän tästä tasosta, joten piirretään kuva systeemistä xy -tasossa.

SUUNNITELMA Dipolin potentiaalienergia saadaan dipolimomentin ja magneettikentän pistetulona,

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}. \quad (12.93)$$

Dipoliin kohdistuva voiman momentti saadaan dipolimomentin ja magneettikentän ristituloona,

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B} \quad (12.94)$$

Sähkökenttä ei vaikuta magneettiseen dipoliin.

RATKAISU Potentiaalienergiaksi saadaan

$$U = -[(1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}] \cdot [(-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}] = -0.4 \text{ J} \quad (12.95)$$

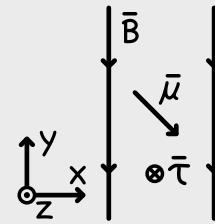
ja momentiksi

$$\bar{\tau} = [(1.0 \text{ Am}^2)\hat{i} + (-1.0 \text{ Am}^2)\hat{j}] \times [(-400 \text{ mT})\hat{j} + (100 \text{ mT})\hat{k}] = (-0.1 \text{ Nm})\hat{i} + (-0.1 \text{ Nm})\hat{j} + (-0.4 \text{ Nm})\hat{k} \quad (12.96)$$

```
Mathematica:
mu = {1, -1, 0};
b = {0, -0.4, 0.1};
u = -mu.b
tau = Cross[mu, b]
-0.4
{-0.1, -0.1, -0.4}
```

ARVIOINTI Magneettinen dipoli pyrkii käänymään niin, että sen dipolimomentti on ulkoisen magneettikentän suuntainen. Tämä tarkoittaa sitä, että potentiaalienergian pitää pienentyä momentin kääntyessä magneettikentän suuntaan. Käytimme potentiaalienergian laskussa yhtälöä, joka on johdettu asettamalla potentiaalienergian nollataso tilanteeseen, jossa dipolivektori on kohtisuorassa magneettikenttään nähdyn, ja kuvasta nähdään, että nyt dipolimomentilla on komponentti kentän suuntaan. Siispä potentiaalienergian pitää olla nollatasoa pienempi eli negatiivinen, kuten onkin.

Samaten voimme kuvasta päättää oikean käden säännöllä, että dipolia kentän suuntaiseksi kääntyvän vään tömomenttivektorin täytyy osoittaa kuvan sisään eli negatiiviseen z -suuntaan. Lasketun momenttivektorin z -komponentti on negatiivinen, joten tämäkin tulos on järkevä.



12.27 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä sähköisistä ja magneettisista dipoleista. Millaisen kentän dipolit luovat ympärilleen? Miten dipolit käyttäytyvät ulkoisessa kentässä, jos kenttä on homogeinen tai epähomogeinen? Selitä tämän perusteella, miksi magneettien N- ja S-nauat vuorovaikuttavat kuten tekevät.

Yhteenveton Magneettikenttä

Magneetit ja dipolit

- Virtasilmukat ja pyörivät varatut kappaleet toimivat kuin **magneettiset dipolit**. Virtasilmukan dipolimomentti on

$$\bar{\mu} = iA\hat{n},$$

missä vektorin suunnan määritetään oikean käden sääntö (sormet virran suuntaan, peukalo dipolimomentin suuntaan).

- Dipolin magneettikenttä kulkee dipolin läpi dipolimomentin suunnassa ja kentän voimakkuus on suoraan verrannollinen dipolimomentin suuruuteen.
- Magneettiset dipolit pyrkivät kääntymään ulkoisen magneettikentän suuntaisiksi ja sähköiset dipolit ulkoisen sähkökentän suuntaisiksi. Sähköisen dipolin potentiaalienergia sähkökenttää on

$$U = -\bar{p} \cdot \bar{E}$$

ja siihen kohdistuva momentti on

$$\bar{\tau} = \bar{p} \times \bar{E}.$$

Magneettisen dipolin potentiaalienergia on vastaavasti

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}$$

ja siihen kohdistuva momentti on

$$\bar{\tau} = \bar{\mu} \times \bar{B}.$$

- Homogeenisessa kentässä dipoliin kohdistuva kokonaivoima on nolla. Epähomogeenisessa kentässä dipoliin voi kohdistua nollasta poikkeava kokonaivoima.
- Magneettiset aineet koostuvat mikroskooppisista magneettisista dipoleista. **Magneeteissa** nämä dipolit ovat samansuuntaisia, jolloin niiden magneettiset ominaisuudet vahvistavat toisiaan.
- Magneettiset dipolit eivät todellisuudessa koostu erillisistä **magneettisista navoista**, mutta ne käyttäytyvät aivan kuin koostuisivat. Näitä näennäisiä magneettisia napoja kutsutaan pohjois- (N) ja etelännavaksi (S). Aivan kuten sähkövaraukset, erilaiset magneettiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset hylkivät toisiaan.

Magneettikenttä ja magneettinen voima

- Magneettikentän** voi esittää vektorikenttäkuvaajana tai kenttäviivästeiksenä aivan kuten sähkökentänkin. Magneettisilla kenttäviivoilla ei voi koskaan olla alkua eikä loppua vaan ne muodostavat aina silmukoita tai jatkuvat äärettömiksiin.
- Liikkuvat varaukset ja sähkövirrat synnyttävät magneettikenttäänsä pyörteitä, joiden suunnan voi päättää oikean käden säännöllä (sormet kentän suuntaan, peukalo virran suuntaan).
- Biot'n ja Savartin lain mukaan liikkuvan varauksen magneettikenttä on

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Lyhyen virtajohtimen magneettikenttä on

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\bar{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Tässä $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ on **magneettivakio**.

- Magneettikentien** **Gaussian lain** mukaan magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on aina nolla,

$$\Phi_B = \oint \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0.$$

- Tämä johtuu siitä, että erillisiä magneettisia napoja ei ole löydetty.
- Ampéren lain** mukaan magneettikentän viivaintegraali suljetulla reitillä on verrannollinen reitin läpi kulkevan sähkövirran,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}.$$

- Liikuvaan varattuun hiukkaseen kohdistuu sähkö- ja magneettikenttässä voima

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}).$$

Neutraaliin virtajohtimeen kohdistuu voima

$$d\bar{F} = id\bar{s} \times \bar{B}.$$

Voiman suunnan voi päättää oikean käden säännöllä (peukalo virran suuntaan, etusormi kentän suuntaan, keskisormi voiman suuntaan).

Sanasto

- magneetti (magnet)
- kestomagneetti (permanent magnet)
- kompassi (compass)
- pohjoisnapa (north pole)
- etelännapa (south pole)

- magnetoituminen (magnetization)
- magneettikenttä (magnetic field)
- pyörre (vortex)
- magneettivuo (magnetic flux)
- permeabiliteetti (permeability)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

12.1 Jos samanlaiset navat vetäisivät toisiaan puoleensa, kompassin N-puoli kääntyisi kohti magneettin N-napaa ja S-puoli kohti S-napaa. Siispä kokeen magneettin N- ja S-navat olisivatkin juuri toisin päin. Tässäkin tapauksessa kuvassa (d) olisi S- ja N-napa vastakkain (vain eri päin), kuvassa (e) olisi vastakkain kaksi S-napaa ja kuvassa (f) kaksi N-napaa. Nähtäisiin jälleen, että magneettien erilaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ja samanlaiset hylkivät toisiaan. Eli alkuperäinen oletus siitä, että samanlaiset navat vetävät toisiaan puoleensa ei toimi.

12.3 Kuulaan kiinnitetti yksi S-napa magnetoil kuulan niin, että sen sisällä mikroskooppiset magneettiset dipolit kääntyvät N-napa ylöspäin ja S-napa alas päin. Kuula siis polarisoituu magneettisesti ja sen S-napa on alhaalla. Kuula on nyt itsekin magneetti. (a) Kun kuulan yläosaan kiinnitetään toinen S-napa, polarisaatio voimistuu ja kuulasta tulee voimakkaampi magneetti. Alempi kuula pysyy kiinni. (b) Kun kuulan yläosaan kiinnitetään N-napa, kuulan polarisaatio muuttuu niin, että sen sisäisten dipolien N-napa osoittaa kohti ensimmäistä magneettia ja S-napa toista magneettia. Jos kumpikin magneetti on kiinni kuulan yläosassa, dipolit siis kääntyvät kuulan sisällä sivuttain. Kuula on edelleen magneettisesti polarisoitunut, mutta sen magneettiset navat ovat nyt kuulan yläosassa, jolloin kuulan alaosaa ei ole magneettisesti polarisoitunut. Toinen kuula putoaa. (c) Ylempi kuula on siis magneetti, jonka S-napa on sen alaosassa. Tämä polarisoii myös aleman kuulan niin, että sen yläosassa on N-napa. Nän kuulat tarttuvat toisiinsa. Jos aleman kuulan alaosaan kiinnitetään magneettin S-napa, aleman kuulan polarisaatio kääntyy. Nyt kuulien kosketuspisteessä on kummankin kuulan S-napa, ja samanlaiset magneettiset navat hylkivät toisiaan. Alempi kuula putoaa. (d) Jos aleman kuulan alaosaan kiinnitetään magneettin N-napa, aleman kuulan polarisaatio vahvistuu ja magneettiset kuulat vetävät toisiaan puoleensa yhä voimakkaammin. Alempi kuula pysyy kiinni.

12.4 Kompassineula kääntyy magneettikentän kenttävivojen suuntaan niin, että N-napa osoittaa kentän suuntaan. Kenttä osoittaa siis likimain pohjoiseen sekä pohjoisella että eteläisellä pallonpuoliskolla. (Kentällä on lisäksi myös komponentti pystysuunnassa). Tällaisen kentän luo magneetti, jonka S-napa on maapallon pohjoisnavalla ja N-napa etelännavalla. (Siis päinvastoin kuin nimistä voisi luulla.)

12.5 Yksiköille täytyy päteä

$$[k_\mu] = [F][r]/[i^2][L] = \text{N/A}^2. \quad (12.97)$$

Lukuarvo puolestaan selviää sijoittamalla $i = 1 \text{ A}$, $r = 1 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$ sekä $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, mistä

$$k_\mu = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot 1 \text{ m}/(1 \text{ A})^2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/A}^2. \quad (12.98)$$

12.6 (a) Magneettikenttä osoittaa kohti magneettia, kohtisuoran johtimen suuntaan nähdyn. Johtimeen kohdistuu virran suuntaan nähdyn kohtisuora voima, jonka suunta selviää oikean käden säännöllä. Jos katsomme tilannetta niin, että johdin on pystysuora, virta kulkee ylöspäin ja magneetti on meistä katsoen johtimen oikealla puolella, kenttä osoittaa oikealle ja voima meistä poispäin.

(b) Kenttä on nyt vastakkaisuuntainen edelliseen kohtaan nähdyn, joten voimakin on vastakkainen. Nyt voima osoittaa siis meitä kohti.

(c) Kenttä osoittaa johtimen kohdalla likimain johtimen suuntaisesti virran suuntaan nähdyn vastakkaiseen suuntaan. Virran suuntasessa kentässä johtimeen ei kohdistu voimaa.

12.7 (a) Koska kenttä ja johdin ovat kohtisuorassa, voiman suuruus on yksinkertaisesti

$$F = isB = 1 \text{ A} \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1 \text{ T} = 10^{-3} \text{ N}. \quad (12.99)$$

(b) Elektroneja on

$$N_e = 10^{-3} \text{ m} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} = 10^{20} \quad (12.100)$$

ja niiden varaus on

$$q = -eN_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{20} = 16 \text{ C}. \quad (12.101)$$

Johtimen läpi kulkee varausta nopeudella $i = \lambda v_{\text{vaellus}} = \frac{q}{s} v_{\text{vaellus}}$, joten vaellusnopeus on

$$v_{\text{vaellus}} = is/q = 1 \text{ A} \cdot 10^{-3} \text{ m}/16 \text{ C} = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}. \quad (12.102)$$

(c) Yksittäiseen elektroniin kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_e = ev_{\text{vaellus}}B = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \cdot 1 \text{ T} = 10^{-23} \text{ N}. \quad (12.103)$$

Koko johtimeen kohdistuva voima saadaan tieteenkin laskemalla yhteen elektroneihin kohdistuvat voimat,

$$F = N_e F_e = 10^{20} \cdot 10^{-23} \text{ N} = 10^{-3} \text{ N}. \quad (12.104)$$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

12.8 Hiukkasella on nyt nopeuden komponentti kentän suuntaan sekä kenttään nähdien kohtisuoraan. Kentän suuntainen liike ei vaikuta magneettiseen voimaan. Kenttää vastaan kohtisuora nopeuden komponentti puolestaan tuottaa voiman, joka on kohtisuorassa kenttää vasten, joten se ei voi vaikuttaa hiukkasen kentän suuntaiseen nopeuden komponenttiin. Niinpä hiukkasen nopeuden komponentti kentän suunnassa on vakio. Kenttää vastaan kohtisuorassa tasossa hiukkanen on ympyrälükkeessä. Kun nämä liikkeet yhdistetään, lopputulos on spiraalin muotoinen rata, joka siis seuraa magneettikenttää kiertyen kenttäviivojen ympäri.

12.9 Sähköinen voima on

$$\bar{\mathbf{F}}_E = q\bar{\mathbf{E}} = (1.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{j}} + (4.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{k}}. \quad (12.105)$$

Magneettinen voima on

$$\bar{\mathbf{F}}_B = q\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}} = (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-1.0 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{j}}. \quad (12.106)$$

Kokonaisvoima on

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_E + \bar{\mathbf{F}}_B = (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (-9.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{j}} + (4.0 \cdot 10^{-7} \text{ N})\hat{\mathbf{k}}. \quad (12.107)$$

12.10 Nuoli osoittaa kuvassa viistosti kuvan sisään. Kenttävektorin pitää olla vektorien $d\bar{s}$ ja $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$ ristituloon suuntainen. Nyt $d\bar{s}$ osoittaa kuvassa ylöspäin ja $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$ osoittaa pääasiassa oikealle (hieman viistoon ylös ja kuvan sisään). Jos asetamme nyt peukalon ylöspäin eli $d\bar{s}$ suuntaan ja etusormen oikealle eli $\hat{\mathbf{r}}_{q \rightarrow P}$ suuntaan, keskisormi osoittaa kuvan sisään kuten pitääkin.

12.11 (a) Ristitulovektorin pituus on $|\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{B}}| = AB \sin \phi$, missä ϕ on vektorien välinen kulma. Jos vektorit ovat yhdensuuntaiset, $\phi = 0$ tai $\phi = \pi = 180^\circ$, jolloin $\sin \phi = 0$. Niinpä ristituloon pituus on nolla, jolloin kyseessä on nollavektori.

(b) Suoralla laskulla

$$\bar{\mathbf{b}} \times (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}) = \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}}. \quad (12.108)$$

Näistä $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = -\bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} = 2\bar{\mathbf{a}}$ ja (a)-kohdan mukaisesti $\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, joten

$$\bar{\mathbf{b}} \times (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}}) = 2\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}. \quad (12.109)$$

12.13 Magneettiset kenttäviivat ovat katkeamattomia myös magneetin sisällä, jolloin jokainen pinnan ulkoa sisään kulkeva kenttäviiva kulkee myös pinnan sisältä ulos. Niinpä kokonaivo pinnan läpi on nolla. Jos N korvattaisiin positiivisella varauksella, sähkövuo pinnan läpi olisi positiivinen. Tämä johtuu siitä, että sähköiset kenttäviivat lähtevät positiivisista varauksista. Magneettiset kenttäviivat eivät kuitenkaan lähde N-navoista.

12.14 (a) Kentän voimakkuus on $B = k_{mu}i/r = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ ja se osoittaa reitin suuntaan, joten tämä on myös kentän reitin suuntaisen komponentin suuruus. Reitin pituus on $L = 0.5\pi r = 1.6 \text{ m}$ ja viivaintegraali $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = BL = 3.1 \cdot 10^{-7} \text{ Tm}$, koska kenttä on kaikkialla reitin suuntainen.

(b) Nyt kentän voimakkuus on puolet äskeisestä ja reitin pituus kaksinkertainen. Kenttää osoittaa kuitenkin vastakkaiseen suuntaan reittiin nähdien, joten viivaintegraali on $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = -BL = -3.1 \cdot 10^{-7} \text{ Tm}$.

(c) Nyt kenttää on kohtisuorassa reittiä vastaan, joten sen komponentti reitin suunnassa on nolla. Reitin pituus on 1 m ja viivaintegraali on $\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = 0 \text{ Tm}$.

12.15 (a) Tilanne on nyt sellainen, että johdin kulkee reitin läpi vinossa. Johtimen ja reitin määräämän tason välillä kulmalla ei ole kuitenkaan mitään väliä, koska johdin kuljettaa reitin läpi virran 1 A riippumatta kulmasta. Muista, että virta ei ole vektori vaan skalaari, joka mittaa siirtynyttä varausta. Yhden ampeerin virta siirtää yhden coulombin varauksen johtimen päiden välillä, ja jos johdin kulkee reitin läpi, koko tämä varaus siirtyy reitin läpi riippumatta siitä, onko johdin suorassa tai vinossa.

(b) Magneettikentän viivaintegraali on siis

$$\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm}. \quad (12.110)$$

(c) Ei voi. Koska johdin on vinossa, kenttää ei ole tutkitulla reitillä voimakkuudeltaan vakio eikä edes reitin suuntainen. Niinpä kentän voimakkuutta ei voi laskea jakamalla viivaintegraalin arvoa reitin pituudella.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

12.17 (a) Virrantihesys on varaustiheyden ja nopeuden tulo, $j = \rho v$, ja virta on virrantiheden ja poikkipinta-alan tulo, $i = jA = \rho Av = \lambda v$ eli pituusvaraustiheyden ja nopeuden tulo. Renkaan ympärysmitta on $L = 2\pi r$, joten sen säde on $r = L/(2\pi) = 0.32$ cm. Siispä renkaan pyöriessä sen osat liikkuvat nopeudella $v = \omega r = 1.6$ m/s. Virta on siis

$$i = \rho Av = 1.0 \cdot 10^4 \text{ C/m}^3 \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 1.6 \text{ m/s} = 3.2 \cdot 10^{-2} \text{ A.} \quad (12.111)$$

(b) Jaetaan rengas dL -pituisiin osiin. Kukin osa on renkaan keskipisteestä etäisyydellä r . Osat kiertävät keskusta samaan suuntaan niin, että kunkin osan suunta $d\bar{\mathbf{L}}$ on kohtisuorassa osasta renkaan keskukseen osoittavaan vektoriin nähdien. Niinpä ne tuottavat kaikki magneettikentän renkaan normaalilin suuntaan (siis samaan suuntaan), jolloin kokonaiskenttä saadaan laskemalla yhteen kaikkien renkaan osien luomat kentät (skalaareina, koska vektorit ovat samansuuntaisia). Yhden osan kenttä on

$$dB = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\bar{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idL}{r^2}, \quad (12.112)$$

joten koko renkaan kenttä saadaan integroimalla renkaan ympäri

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} \int_0^{2\pi r} dL = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{r} = \frac{\mu_0}{2} \rho A \omega = 6.3 \cdot 10^{-6} \text{ T.} \quad (12.113)$$

12.18 Rengas kuljettaa sähkövirtaa vastapäivään, koska se on negatiivisesti varattu. Oikean käden säännön mukaisesti magneettikenttä osoittaa siis kohti sinua.

12.19 Jos elektronien magneettisuuden ajatellaan johtuvan niiden klassisesta kiertolikkeestä, Ampèren laki pätee myös kestomagneeteille, joiden magneettisuus johtuu juuri elektronien magneettisuudesta. (Osoittautuu kuitenkin, että elektroneilla on myös sisäinen kvanttimekaaninen kulmaliikeämärä, joka on niiden magneettisuuden pääasiallinen syg. Tätä magneettisuutta ei voi selittää pelkästään klassisen fysiikan avulla.)

12.20 (a) Kannattaa piirtää kuva. Jos silmukkaa katsotaan positiivisen z -akselin suunnasta ("ylhäältä alas") virta kulkee vastapäivään, jolloin dipolimomenttivektori osoittaa kohti katsoaja eli positiiviseen z -suuntaan, $\bar{\mu} = \mu \hat{k}$.

(b) Magneettikenttä osoittaa z -akselilla kaikkialla positiiviseen z -suuntaan, joten tämä on kentän suunta pisteissä (i) ja (ii), $\bar{\mathbf{B}} = B \hat{\mathbf{k}}$. (Kenttä on voimakkaimillaan origossa.) Piste (iii) on xy -tasossa eli dipolin "vieressä". Koska dipolin kenttä muodostaa silmukoita, kentän täytyy osoittaa tässä pisteessä negatiiviseen z -suuntaan, $\bar{\mathbf{B}} = -B \hat{\mathbf{k}}$.

12.21 Kannattaa taas piirtää kuva. Silmukan voi jakaa kahteen osaan: Määritellään silmukka A pisteiden $(0, 1, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, -1, 0)$ ja $(0, -1, 0)$ avulla. Tämä silmukka on neliön muotoinen ja sen sivun pituus on 2 mm, joten silmukan ala on $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Silmukan normaali osoittaa oikean käden säännön mukaisesti negatiiviseen z -suuntaan, joten silmukan dipolimomentti on

$$\bar{\mu}_A = iA_A \hat{\mathbf{n}} = (-2 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{\mathbf{k}}. \quad (12.114)$$

Määritellään silmukka B pisteiden $(0, 1, -1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$ ja $(0, -1, -1)$ avulla. Tämän silmukan ala on $2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ ja sen normaali osoittaa positiiviseen x -suuntaan.

$$\bar{\mu}_B = iA_B \hat{\mathbf{n}} = (1 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{\mathbf{i}}. \quad (12.115)$$

(a) Silmukat A ja B muodostavat yhdessä kysymyksessä tarkasteltavan silmukan, joten koko silmukan dipolimomentti saadaan silmukoiden A ja B dipolimomenttien vektorisummana

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_A + \bar{\mu}_B = (1 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{\mathbf{i}} + (-2 \cdot 10^{-5} \text{ Am}^2) \hat{\mathbf{k}} \quad (12.116)$$

(b) Dipolimomentin suuruus lasketaan Pythagoraan lauseella

$$\mu = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_z^2} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ Am}. \quad (12.117)$$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

12.22 Valitaan potentiaalienergian nollakohdaksi $\theta = \pi/2$ eli tilanne, jossa dipolimomenttivektori on kohtisuorassa kenttää vasten. Tällöin dipoliin tehty työ dipolin kääntyessä kulmaan θ on

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -Ep \sin \theta d\theta = Ep \left[\cos \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} = Ep(\cos \theta - 0) = Ep \cos \theta. \quad (12.118)$$

Potentiaalienergia on siis

$$U = -W = -Ep \cos \theta \quad (12.119)$$

kuten pitkin.

12.23 Kun dipolimomentti on kenttää vasten kohtisuorassa, piirtämättä jätetyt sivut ovat kentän suuntaiset. Niihin ei siis kohdistu voimaa lainkaan. Kun dipolimomentti on kentän suuntainen, piirtämättä jätetyt sivut ovat kenttään nähdyn kohtisuorat ja niihin siis kohdistuu magneettinen voima. Tämä voima osoittaa kuitenkin aina joko kohti silmukan keskustaa tai keskustasta poispäin, jolloin voimien momentti silmukan keskipisteen suhteeseen on nolla.

12.24 Moottoreita on erilaisia. Sähkömoottorin toiminta perustuu yleisesti siihen, että moottorissa on magneetteja ja johdinsilmukoita, joissa kulkeva virtaa voidaan säädellä. Kun silmukka on magneettikentässä sovelvassa asennossa, siihen kohdistuu voiman momentti, joka pyrkii käänämään sitä. Nämä sähköinen energia muutetaan mekaniseksi energiaksi ja moottori saadaan pyörimään. Useimmissa moottorimalleissa silmukkaan kohdistuva momentti pyrkisi vain käänämään silmukan tiettyyn asentoon, jos siinä kulkisi vakiovirta. Siksi virran suunta käännetään ympäri jokaisen puolikkaan kierroksen välein, jolloin magneettinen voima pyrkii käänämään silmukkaa aina samaan suuntaan.

12.25 (a) Positiivinen varaus on nyt vasemmalla ja negatiivinen oikealla. Positiiviseen varaukseen kohdistuu voima vasemmalle ja negatiiviseen oikealle. Mutta koska kenttä heikkenee vasemmalle siirryttääessä, positiiviseen varaukseen kohdistuu pienempi voima. Niinpä kokonaisvoima osoittaa oikealle.

(b) Vastaavalla päätelyllä kokonaisvoima osoittaa vasemmalle.

(c) Kohdassa (a) dipolimomentti on kentän suuntainen, joten potentiaalienergia on negatiivinen. Voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaalienergia pienenee, ja tässä tapauksessa potentiaalienergia pienenee, kun se muuttuu yhä enemmän negatiiviseksi. Niinpä voima osoittaa suuntaan, jossa sähkökenttä voimistuu eli oikealle. Kohdassa (b) potentiaalienergia on positiivinen, joten voima osoittaa suuntaan, jossa potentiaalienergia muuttuu vähemmän positiiviseksi. Tämä on suunta, jossa sähkökenttä heikkenee. Siispä voima osoittaa vasemmalle.

12.26 Kun A käännetään ympäri, magneettikentän suunta vaihtuu. Magneetin B dipolit ovat edelleen samaan suuntaan kuin ennenkin eli niiden dipolimomentit osoittavat vasemmalle. Jos dipolimomentit ajatellaan virtasilmukoiksi, silmukan yläreunaan kohdistuu voima alaviistoon oikealle ja silmukan alareunaan kohdistuu voima yläviistoon oikealle. Kokonaisvoima osoittaa siis oikealle. Niinpä tässä asennossa magneetit hylkivät toisiaan.

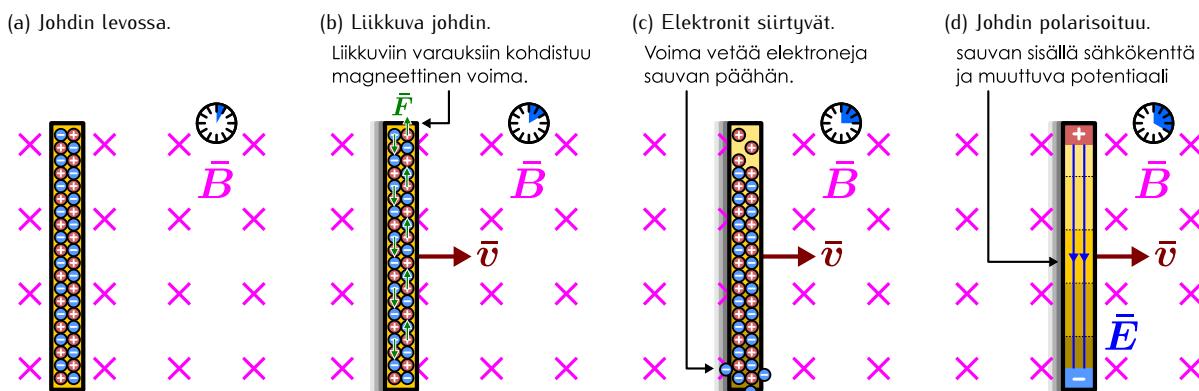
13 Sähkömagnetismi

Edellisessä luvussa opimme, että liikkuvat sähkövaraukset luovat ympärilleen pyörteisen magneettikentän. Sähkövaraukset voivat siis vuorovaikuttaa sekä sähköisesti että magneettisesti, mikä osoittaa näiden ilmiöiden liittyvän toisiinsa. Tässä luvussa jatkamme sähkön ja magnetismin yhteyden tutkimista ja tutustumme uusiin ilmiöihin kuten sähkömagneettiseen induktioon. Opimme, että pohjimmiltaan sähköinen ja magneettinen vuorovaikutus ovat yhden ja saman sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ilmenemismuotoja. Tätä vuorovaikutusta välittää sähkömagneettinen kenttä, jonka ilmeneminen sähkö- ja magneettikenttinä riippuu tavastamme havainnoida sitä. Lisäksi havaitsemme, että kentän muuttuessa sen sähköinen ja magneettinen osuus vaikuttavat toisiinsa. Kun pääsemme luvun loppuun, olemme viimeinkin löytäneet kaikki Maxwellin yhtälöiksi kutsutut klassisen sähkömagnetismin peruslait.

Tämän luvun opiskeltuaasi sinun tulee osata:

- määritää virtajohtimeen indusoitava lähdejännite johtimen liikuessa tai magneettikentän muuttuessa
- selittää, kuinka sähkö- ja magneettikentät muuntuvat koordinaatistoa vaihdettaessa
- kuvailla kämin toiminta ja määritellä keskinäis- ja itseinduktanssi
- määritellä ja laskea magneettikentän energiatihleys
- selittää Faradayn lain perusteella, kuinka muuttuva magneettikenttä vaikuttaa sähkökenttään
- selittää Maxwellin lain perusteella, kuinka muuttuva sähkökenttä vaikuttaa magneettikenttään
- selittää Maxwellin yhtälöt sanallisesti ja muotoilla ne matemaattisesti

Kuva 13.1: Magneettikentässä liikkuvan johtimen induktio. Johtimen mukana liikkuihin elektroneihin kohdistuu magneettikentässä voima, joka saa ne liikkumaan. Johdin polarisoituu, ja tasapainossa elektroneihin kohdistuva magneettinen sekä sähköinen voima kumoavat toisensa.



13.1 Sähkömagneettinen induktio

Tähän mennessä olemme jo oppineet, että liikkuvat sähkövaraukset ja sähkövirrat luovat ympärilleen magneettikentän ja toisaalta liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikentässä voima. Tätä ilmiötä hyödynnetään esimerkiksi *sähkömoottoreissa*, joissa akkujen varastoima kemiallinen energia muuttuu ensin elektronien potentiaalienergiaksi ja edelleen elektronien liükkeen ja magneettisen voiman kautta johdinten liike-energiaksi.

Myös käänneinen prosessi on mahdollinen. Osoittautuu nimitään, että magneettikentässä liikkuvien johdinten liike-energia voidaan muuttaa elektronien potentiaalienergiaksi. Tämä ilmiö on nimeltään **sähkömagneettinen induktio**, ja sitä hyödynnetään etenkin *sähkögeneraattoreissa*, joissa mekaanisen liükkeen avulla synnytetään jännitteitä ja sähkövirtoja.

Liikkuvan johtimen induktio

Kuvassa 13.1 on havainnollistettu induktioilmiö mahdollisimman yksinkertaisessa tilanteessa. Kuvassa metallinen sauva liikkuu homogenisessa magneettikentässä. Sauva on asetettu kuvassa pystysuuntaiseksi, sauva liikkuu vasemmalta oikealle, ja magneettikenttä osoittaa kuvan sisään, katsojasta poispäin. Sauva, sen liukkeen suunta sekä magneettikenttä ovat siis kaikki kohtisuorassa toisiinsa nähdyn.

Kuvassa (a) sauva on vielä levossa, jolloin sen sisältämiin varauksiin ei kohdistu magneettista voimaa. Sauva on neutraali, joten varaukset ovat jakautuneet tasaisesti sauvan sisällä. Kuvassa (b) sauva alkaa liikkua, jolloin sen sisältämät varaukset liikkuvat sen mukana. Liikkuihin varauksiin kohdistuu magneettikentässä magneettinen voima, ja oikean käden säännön mukaisesti positiivisiin varauksiin kohdistuu kuvassa voima ylöspäin ja negatiivisiin varauksiin alas.

Sauva on metallia, joten positiiviset varaukset eli atomiytimet eivät pääse liikkumaan, mutta negatiiviset varaukset eli elektronit pääsevät. Niiinpä magneettinen voima vetää elektroneja kuvassa alas, jolloin sauvan yläpäähän jää positiivisen varauksen ylimäärä ja sen alapäähän kerääntyy negatiivisen varauksen ylimäärä kuten kuvassa (c).

Sauva siis polarisoituu, ja tämä polarisaatio synnyttää positiivisesta varauksesta negatiiviseen osoittavan sähkökentän. Sauvan sisään syntyvä kenttä on piirretty kuvaan (d), ja se osoittaa siis kuvassa ylhäältä alas. (Myös sauvan ulkopuolelle syntyy sähkökenttä, mutta tästä ei ole kuvaan piirretty.) Varausten synnyttämä sähkökenttä osoittaa aina potentiaalin laskusuuntaan, joten potentiaalin täyttyä siis olla sauvan positiivisesti varatuissa päässä (kuvassa yläpää) korkeampi kuin sauvan negatiivisesti varatuissa päässä (kuvassa alapää).

Edellinen esimerkki osoittaa, että *potentiaaliero voi tuottaa liikuttamalla johdinta magneettikentässä*, ja tällaista *indusoitunutta jännitettä* voi myös hyödyntää, kuten kuvan 13.2 esimerkistä nähdään. Tässä kuvassa sauva on asetettu metallisille kiskoille, joita pitkin se pääsee vapaasti liikkumaan sivusuunnassa. Kiskot on yhdistetty toisesta päästään vastuksella, jolloin sauva, kiskot ja vastus muodostavat piirin. Vastus voi olla esimerkiksi lamppu, jolloin piirissä kulkeva sähkövirta havaitaan lampun sytytymisenä.

Sauva liikkuu kuvassa vasemmalta oikealle, jolloin sen päiden välille indusoituu potentiaaliero. Aivan kuten kuvassa 13.1 (d), sauvan yläpäähän indusoituu korkea potentiaali ja alapäähän matala potentiaali. Kumpikin kisko on samassa potentiaalissa kuin kiskoon koskettava sauvan pää, joten myös kiskojen välille syntyy potentiaaliero. Erityisesti kiskoja yhdistävän vastuksen päiden välille syntyy potentiaaliero, jolloin vastuksen läpi alkaa kulkea sähkövirta korkeasta potentiaalista kohti matalaa, ja näin sauva, kiskot sekä vastus muodostavat suljetun virtapiirin, jossa liikkova sauva toimii jännitelähteenä.

13.1 Tarkastele kuvan 13.2 (a) tilannetta sauvan elektronien näkökulmasta.

- (a) Mihin suuntaan sauvan elektroneihin kohdistuva magneettinen voima osoittaa?
- (b) Mihin suuntaan elektronien pitäisi tämän mukaan alkaa piirissä kiertää?
- (c) Mihin suuntaan sähkövirran pitäisi siis alkaa kulkea?

Magneettikentässä liikkuvan johdinkappaleen päiden välille indusoituu siis potentiaaliiero, jota voidaan käyttää jännitelähteenä pariston tapaan. Paristossa kemialliset reaktiot tekevät varauksenkuljettajiin työtä siirtäen positiivista varausta matalasta potentiaalista korkeaan, jolloin paristoon varastoitunutta kemiallista energiota muuttuu varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi. Tätä potentiaalienergiaa voidaan edelleen muuttaa muihin muotoihin esimerkiksi lampuilla tai sähkömoottoreilla. Liikkuvan sauvaan ei ole varastoitunut kemiallista energiota kuten paristoon, mutta sauvalla on lüke-energiaa, ja *induktio muuttaakin sauvan liike-energian varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi*.

Sauvassa kulkee sähkövirta, jolloin siihen kohdistuu myös magneettinen voima. Voiman suunta voidaan päättää oikean käden säännöllä: kun kuvassa virta kulkee ylöspäin (peukalo) ja magneettikenttä osoittaa pois katsojasta (etusormi), voima osoittaa kuvassa vasemmalle (keskisormi). Erityisesti koska johdin on suora, siihen kohdistuva voima on yhtälön (12.6) perusteella

$$\bar{F} = i\bar{L} \times \bar{B}, \quad (13.1)$$

missä \bar{L} on sauvan suuntainen virran kulkusuuntaan osoittava vektori. Tämän vektorin pituus vastaa sitä osuutta sauvesta, jossa kulkee sähkövirta, eli tässä tapauksessa kiskojen välistä etäisyyttä. Vaikka sauva olisi tätä pidempi, virta kulkee vain kiskojen välillä ja vain tähän osaan sauvesta kohdistuu voima.

Sauvan kohdistuva voima osoittaa siis sauvan lükkeeseen nähden vastakkaiseen suuntaan, jolloin se tekee sauvaan negatiivisen työn. Jos sauvan siirtymä on $\Delta\bar{r}$, sauvaan tehty työ on

$$W_{\text{sauva}} = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r} = i\bar{L} \times \bar{B} \cdot \Delta\bar{r}, \quad (13.2)$$

ja tämän verran sauva siis menettää mekaanista energiota liikuessaan tämän siirtymän. Kuvan 13.3 tapauksessa kaikki vektorit ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, jolloin vektorien kertolasku antaa tulokseksi yksinkertaisesti vektorien pituuskilometriksen tulon

$$W_{\text{sauva}} = -iLB\Delta r. \quad (13.3)$$

Yleisesti kuitenkin sauvan, lükkeen ja magneettikentän suunnat voivat olla mitä tahansa, jolloin työ täytyy laskea vektorien avulla.

13.2 (a) Mihin suuntaan (i) sähkövirta kulkisi ja (ii) sauvaan kohdistuva voima osoittaisi kuvassa 13.3, jos sauva kulkisikin oikealta vasemmalle?

(b) Vaikuttaisiko tämä sauvaan tehdyn työn etumerkkiin tai energian muutoksiin?

Sauvan menettämä energia ei voi kadota vaan sen täytyy muuttua toisiin muotoihin. Erityisesti jos sauvan resistanssi on pieni, energiaa ei sauvassa muutu lämpöenergiaksi vaan ainostaan varauksenkuljettajien potentiaalienergiaksi, jolloin varauksenkuljettajien saaman potentiaalienergian täytyy olla yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen sauvaan tehtyyn työhön nähden,

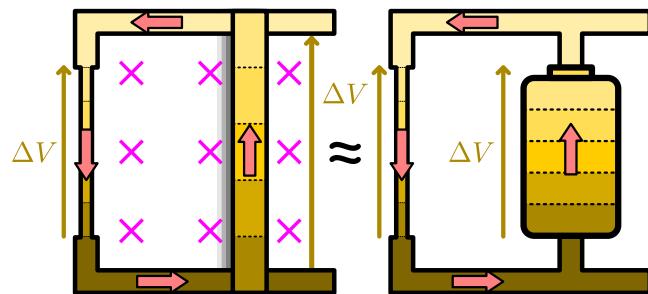
$$\Delta U_E = W_E = -W_{\text{sauva}} = -i\bar{L} \times \bar{B} \cdot \Delta\bar{r} = i\bar{B} \times \bar{L} \cdot \Delta\bar{r}. \quad (13.4)$$

Tässä miinusmerkistä päästää eroon vaihtamalla tekijöiden järjestystä säännön $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$ mukaisesti.

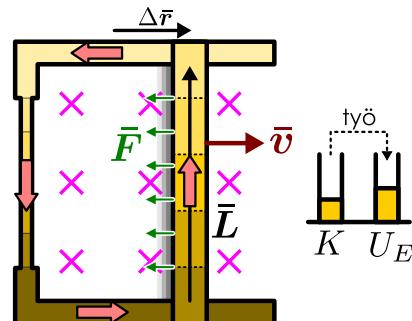
Sauvan läpi kulkeva virta mittaa sauvan läpi siirtynän kokonaivarauksen määriä kulunutta aikaa kohden, $i = \Delta q / \Delta t$, joten sähköisen potentiaalienergian muutos voidaan kirjoittaa myös siirtyneen varauksen avulla muodossa

$$\Delta U_E = \frac{\Delta q}{\Delta t} \bar{B} \times \bar{L} \cdot \Delta\bar{r} = \Delta q \bar{B} \times \bar{L} \cdot \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \Delta q \bar{B} \times \bar{L} \cdot \bar{v}, \quad (13.5)$$

Kuva 13.2: Liikkuvan sauvan päiden välille indusoituu potentiaaliiero, ja johdin toimii samaan tapaan kuin paristo.



Kuva 13.3: Johtimeen kohdistuu sen lükettä vastustava magneettinen voima.



missä $\bar{v} = \Delta\bar{r}/\Delta t$ on sauvan nopeus, joka oletettiin tässä vakioksi.

Paristojen toimintaa tarkastellessamme määrittelimme pariston lähdejännitteen siten, että jos paristo antaa sen läpi kulkevalle varaukselle Δq potentiaalienergian ΔU_E , pariston lähdejännite on

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta U_E}{\Delta q}. \quad (13.6)$$

Samalla tavalla magneettikentässä liikkuvan sauvan läpi kulkevan varauksen potentiaalienergia kasvaa, jolloin sauvan jännite saadaan jakamalla yhtälö (13.5) silityneen varauksen määrällä. Siispä jännite on

$$\mathcal{E} = \bar{B} \times \bar{L} \cdot \bar{v}. \quad (13.7)$$

Koska kuvan 13.3 esimerkissä nämä vektorit ovat kohtisuorat, sauvan jännitteeksi saadaan yksinkertaisesti

$$\mathcal{E} = BLv, \quad (13.8)$$

mutta yleisesti vektorien suunnat pitää huomioida yhtälön (13.7) mukaisesti.



- 13.3** Magneettikentän voimakkuus on 1 T ja metallisauvan pituus 1 m sekä nopeus 1 m/s. Mikä on sauvaan indusoitunut jännite, kun
 (a) sauva liikkuu pituussuunnassaan,
 (b) kentän suunta on \hat{i} , sauvan suunta $(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ ja nopeuden suunta $(\hat{i} + \hat{k})/\sqrt{2}$?

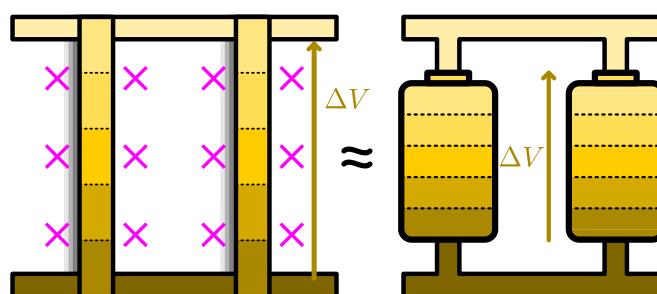
Vaikka edellisessä tarkastelussa laskimme sauvan läpi kulkevan varauksen saaman energian magneettisen voiman lausekkeen avulla, magneettinen voima ei itse asiassa tee liikkuihin varauksiin koskaan työtä, koska magneettinen voima on *aina* varausten lükkeen suuntaan nähdyn kohtisuorassa. Täsmällisesti työtä sauvassa kulkevan varaukseen tekee sähköinen voima, joka vetää varauksenkuljettajia liikkuvan sauvan mukana ja kohdistaa niihin sauvan lükkeen suuntaisen voiman. Sähkövirta ei kuitenkaan ala kulkea ellei sauva ole magneettikentässä, koska magneettinen voima käänää sauvan mukana liikkuvat elektronit kulkemaan sauvan pituussuunnassa.

Faradayin induktiolaki

Yhtälö (13.7) kuvaa magneettikentässä liikkuvan suoraan johtimeen indusoituvan jännitteen johtimen nopeuden, pituuden ja asennon avulla. Jos piiri koostuu useista eri suuntasista tai eri suuntiin liikkuvista johtimista, voimme periaatteessa määrittää kuhunkin johtimeen indusoituvan jännitteen erikseen ja päätellä tästä kautta potentiaalin piirin eri pisteissä. Tämä voi kuitenkin olla varsin hankala, joten nyt tarvitteenamme onkin löytää jokin helpompi tapa määrittää muuttuvaan piiriin indusoituvan jännitteen suuruus.

Tarkastellaan vielä kiskoilla liikkuvia johtimia. Kuvan 13.4 esimerkki on muuten samanlainen kuin aikaisemmin tutkimamme kuvan 13.2, paitsi että nyt piirissä on liikkuvan sauvan ja vastuksen sijaan kaksi liikkuvaa sauvaaa. Nyt kumpaanakin sauvaan indusoituu yhtä suuri jännite, jolloin piirin kiskot ovat kyllä keskenään eri potentiaaleissa, mutta piirissä ei silti kulje sähkövirtaa, koska induktiojännitteet kumovat toisensa kierrettäessä piiri ympäri. Piirissä kulkee siis virta vain silloin, kun kiskoihin kiinnitettyjen johdinten välinen etäisyys muuttuu.

Kuva 13.4: Kahteen samalla nopeudella liikkovaan yhtä pitkään johtimeen indusoituu homogenisessa magneettikentässä yhtä suuret jännitteet. Virta ei kulje.

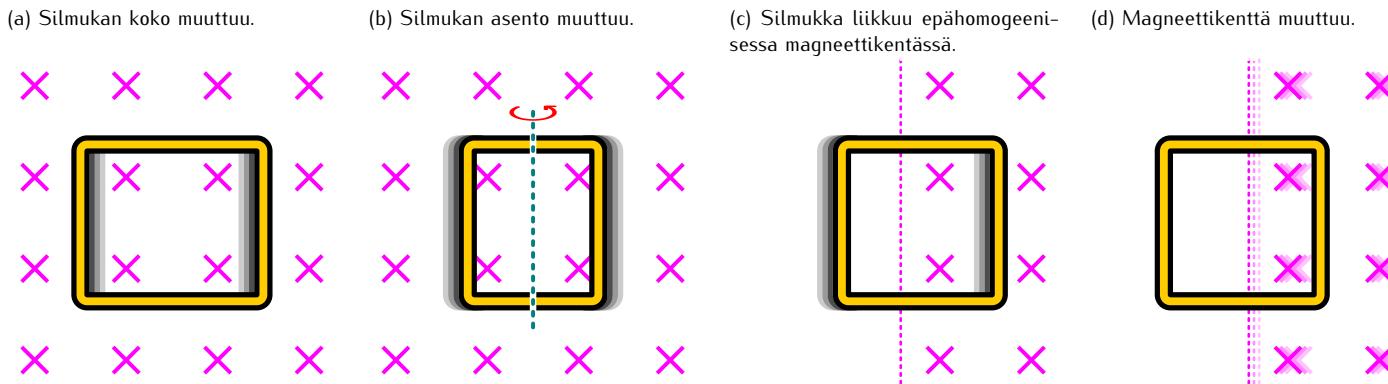


- 13.4** Kuvassa 13.4 piirissä kulkee virta i vastapäivään, kun oikeanpuoleinen sauva liikkuu nopeudella \bar{v} ja vasemanpuoleinen on paikoillaan. Millainen jännite piirin eri osiin indusoituu ja millainen virta piirissä kulkee, jos vasemanpuoleinen sauva liikkuukin nopeudella (a) $2\bar{v}$ tai (b) $-\bar{v}$?

Johdinten etäisyyden muuttuminen tarkoittaa kuitenkin myös sitä, että *piirin rajaama pinta-ala muuttuu*. Jos johdinten välinen etäisyys on x , piirin pinta-ala on $A = Lx$. Edelleen jos etäisyys muuttuu vauhdilla $v_x = \Delta x/\Delta t$, piirin rajaaman pinta-alan muutosnopeus on

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = L \frac{\Delta x}{\Delta t} = Lv_x. \quad (13.9)$$

Kuva 13.5: Silmukan läpi kulkeva magneettivuo voi muuttua monella tavalla. Silmukan koko tai asento voi muuttua, silmukka voi siirtyä erilaiseen magneettikenttään, tai magneettikenttä itsessään voi muuttua.



Sauvaan indusoituvan jännitteen voi näin ollen kirjoittaa yhtälön (13.8) mukaisesti muotoon

$$\mathcal{E} = BLv_x = B \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (13.10)$$

Tässä magneettikenttä on homogeeninen ja muuttumaton sekä kohtisuorassa piirin rajaamaa pintaa vasten, joten kentän ja piirin alan tulo on sama asia kuin *piirin läpäisevä magneettivuo*,

$$\Phi_B = \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{A}} = -BA. \quad (13.11)$$

Tässä miinusmerkki tulee siitä, että positiivinen suunta piirin läpi on valittu kuvassa kohti katsojaa. Magneettikenttä osoittaa kuitenkin katsojasta pois päin, jolloin se siis läpäisee pinnan negatiiviseen läpäisyysuuntaan ja magneettivuo on negatiivinen. Syy tähän valintaan selviää hetken päästää.

Magneettivuon muutos on edellisen päättelyn perusteella

$$\Delta\Phi_B = \Delta(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{B}} \cdot \Delta\bar{\mathbf{A}} = -B\Delta A, \quad (13.12)$$

koska nyt $\bar{\mathbf{B}}$ on vakio, ja piiriin indusoitunut jännite (13.10) voidaan esittää magneettivuon avulla muodossa

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \quad (13.13)$$

Tässä tapauksessa liike oli tasaista, jolloin magneettivuon muutosnopeus ja induktiojännite ovat vakiot. Yleisesti muutosten ei tienekään tarvitse olla tasaisia, jolloin on tarkasteltava infinitesimaalisia aikavälejä ja induktiojännitteksi saadaan

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.14)$$

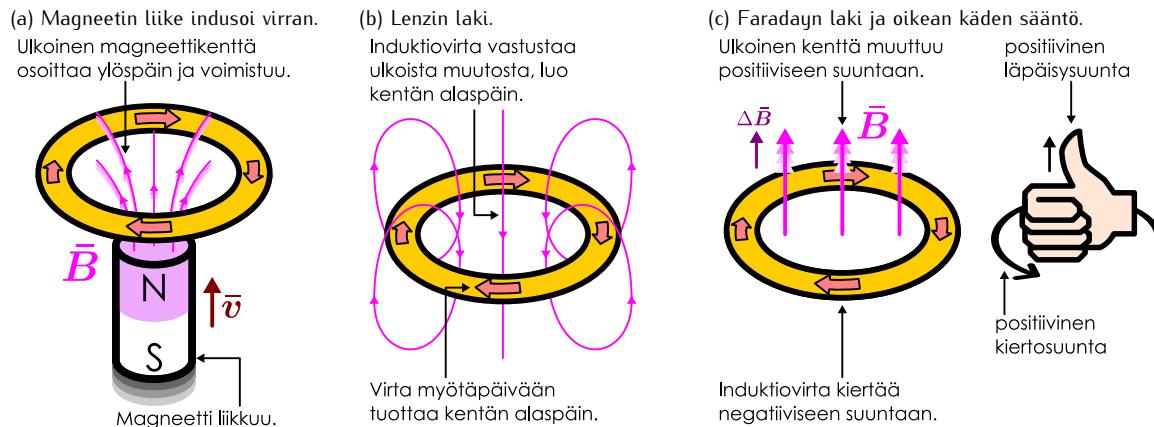
Tämä tulos on **Faradayn induktiolaki** (taas Michael Faraday mukaan). Johdimme tämän lain lükkivan johdimen induktiolain avulla tarkastelemalla ainoastaan yhtä erikoistapausta, mutta itse asiassa laki on yleispätevä. Mihin tahansa johdinsilmukkaan indusoituu jännite, kun sen läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, ja jännitteen suuruuden voi päätellä Faradayn induktiolain avulla.

Magneettivuo mittaa karkeasti ilmaisten johdinsilmukan läpi kulkevien magneettikentän kenttäviivojen lukumäärää, joten silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu silloin, kun silmukan läpi kulkevien kenttäviivojen määrä muuttuu. Tämä voi tapahtua erilaisilla tavoilla kuten kuvassa 13.5 on havainnollistettu. Äsknen analysoimassamme esimerkissä *johdinsilmukan kokoa muutettiin* (kuva (a)). Magneettivuo voi kuitenkin muuttua myös silmukan käentyessä, koska tämä muuttaa sen läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärää (kuva (b)). Vuo voi muuttua myös silloin, kun silmukka liikkuu epähomogeenisessa kentässä, koska kenttäviivojen tiheys muuttuu kentän voimakkuuden muuttuessa, ja tällöinkin piirin läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärä muuttuu (kuva (c)). Ja sekin on mahdollista, että piiri itsessään ei muudu mitenkään, mutta magneettikentän voimakkuus tai suunta muuttuu (kuva (d)), sillä tämäkin muuttaa piirin läpi kulkevien kenttäviivojen määrää. Induktion havaitaan tapahtuvan kaikissa näissä tilanteissa ja noudattavan Faradayn induktiolakia.

Jos johdinsilmukan resistanssi on R tai se on kytketty virtapiiriin, jonka kokonaisresistanssi on R , indusoitunut jännite tuottaa Ohmin lain mukaisesti *induktiovirran*, jonka suuruus on

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.15)$$

Kuva 13.6: Induktiovirran suunnan voi päätellä Lenzin tai Faradayin laeilla. Lenzin lain mukaan induktiovirta vastustaa induktion tuottavaa muutosta. Faradayin lain mukaan induktiovirta kulkee negatiiviseen suuntaan, jos magneettivuo muuttuu positiiviseen suuntaan.



Induktiovirran suunnan voi päätellä usealla tavalla. Esimerkiksi kuvalta 13.2 magneettinen voima vetää johtimen elektroneja liikkumaan myötäpäivään, jolloin virran täytyy kulkea kuvalta vastapäivään. Toisaalta koska induktio muuttaa liikkuvan johtimen liike-energiaa varauksen potentiaalienergiaksi ja edelleen vastuksesta lämpöenergiaksi, virran täytyy kulkea sellaiseen suuntaan, että liikkuvan johtimeen kohdistuva voima vastustaa johtimen liikkettä ja tekee siihen negatiivisen työn. Näin täytyy itse asiassa tapahtua *aina riippumatta siitä millainen muutos silmukassa tai magneettikentässä induktion saa aikaan*. Jotta energia säilyisi, *induktion tuottaman virran täytyy aina kulkea niin, että virta vastustaa sitä muutosta, joka induktion aiheuttaa*. Jos induktion aiheuttaa johtimen liike, induktiovirta kulkee niin, että johtimiin kohdistuu niiden liikkettä vastustava voima. Jos induktion aiheuttaa ulkoisen magneettikentän muutos, induktiovirta kulkee niin, että virran itsensä tuottama magneettikenttä pyrkii kumoamaan ulkoisen kentän muutoksen. Tätä periaatetta kutsutaan **Lenzin laiksi** (Heinrich Lenzin mukaan).



13.5 Mihin suuntaan induktiovirta kulkee kuvalta 13.5 esimerkeissä Lenzin lain mukaan?

Lenzin lain kautta voimme perustella myös sen, miksi valitsimme kuvalta 13.2 positiivisen läpäisy suunnan nimenomaan kohti katsojaa, jolloin magneettivuoille saatiin negatiivinen arvo. Induktio tuottaa liikkuvan sauvan päiden välille potentiaalieron niin, että kuvalta ylempänä oleva pää on korkeassa potentiaalissa ja alempana oleva pää matalassa potentiaalissa. Potentiaali siis kasvaa sauva pitkin siiressä kuvalta alhaalta ylös, jolloin sauvaan induoitunut jännite on positiivinen tässä suunnassa. Toisaalta kun sauva kuljetaan alhaalta ylös, sauvan, kiskojen ja vastuksen muodostamaa piiriä kuljetaan vastapäivään. Tämä tarkoittaa siis sitä, että *piiriin induoitunut jännite on positiivinen, kun piiri kierretään vastapäivään*. Toki vastuksenkin päiden välillä on potentiaaliero, mutta tämä ei ole *indusoitunut* jännite vaan tämä potentiaaliero johtuu vastuksen läpi kulkevasta virrasta ja resistanssista. Induktio tuottaa jännitteen vain liikkuvan sauvan.

Valitsimme siis kuvalta 13.2 positiivisen kiertosuunnan piiriin vastapäivään, jotta saimme induktio-jännitteelle positiivisen arvon. Kuitenkin kuten Ampéren lain yhteydessä opimme, *positiivinen kiertosuunta suljetun reitin ympäri ja positiivinen läpäisy suunta reitin läpi on sovittu riippumaan toisistaan oikean käden säännön mukaisesti*. Kun oikean käden koukistetut sormet osoittavat positiivisen kiertosuunnan, peukalo osoittaa positiivisen läpäisy suunnan. Jos oikean käden sormet asetetaan kuvalta 13.2 virran suuntaan, peukalo osoittaa kohti katsojaa, joten *jos valitsemme positiivisen kiertosuunnan vastapäivään, positiivisen läpäisy suunnan täytyy osoittaa kohti katsojaa*.

Oikean käden säännön ja Lenzin lain käyttöä induktiovirran suunnan päätelyssä on havainnollistettu kuvalta 13.6. Tarkasteltavana systeemina on nyt metallirengas ja sauvamagneetti, ja induktio tuotetaan liikuttamalla magneettia kohti rengasta. Magneetti lähestyy rengasta alhaalta, N-napa edellä, joten sen tuottama magneettikenttä kulkee renkaan läpi alhaalta ylös voimistuen magneetin liikkessä. Lenzin lain mukaan silmukkaan induoituu muutosta vastustava induktiovirta. Nyt ulkoinen kenttä vahvistuu, joten *induktiovirran täytyy luoda renkaan sisään ulkoista magneettikenttää heikentää magneettikenttä*. Näin tapahtuu silloin, kun virta kulkee kuvalta myötäpäivään, joten tähän suuntaan virran siis täytyy kulkea (kuva (b)).

Virran suunta voidaan päätellä myös Faradayin induktiolain ja oikean käden säännön perusteella. Jos nyt valitsemme positiivisen kiertosuunnan renkaan ympäri vastapäivään kuten kuvalta (c), positiivinen läpäisy suunna on kuvalta ylöspäin oikean käden säännön mukaisesti. Kun valitsemme näin, magneettikenttä läpäisee renkaan positiiviseen suuntaan, joten *magneettivuo on positiivinen*. Koska magneettikenttä voimistuu, mag-

neettivuo kasvaan ja erityisesti *magneettivuon muutos on positiivinen*. Faradayin induktiolaisissa (13.14) olevan miinusmerkin mukaan magneettivuon positiivinen muutos tarkoittaa kuitenkin negatiivista induktiojännitettä, joten *induktiovirran täytyy kulkea negatiiviseen suuntaan* eli kuvassa myötäpäivään. Tulos on tieteenkin sama kuin mitä edellä päätteli Lenzin laista. Voin aikoin sanoa, että Lenzin laki tarkoittaa samaa kuin Faradayin laissa esiintyvä miinusmerkki.



13.6 Päättele induktiovirran suunta kuvan 13.6 tilanteessa, jos magneetti on paikoillaan ja rengas liikkuu vasemmalle (a) Lenzin lailla ja (b) Faradayin lailla.

Huomaa, että Faradayin laissa esiintyy nimenomaan magneettivuon muutos ajan suhteen eikä magneettivuon *suuruuden* muutos. Magneettivuo on skalaari mutta se voi kuitenkin olla negatiivinen. Vuon etumerkki riippuu positiivisen läpäisyksen valinnasta samaan tapaan kuin esimerkiksi nopeuden x -komponentin etumerkki riippuu x -akselin suunnan valinnasta. Nopeus v_x on positiivinen, jos kappale liikkuu positiiviseen x -suuntaan, ja negatiivinen, jos kappale liikkuu negatiiviseen x -suuntaan. Akselin suunnan valinta on periaatteessa mielivaltainen, mutta kun valinta on kerran tehty, sitä ei saa enää muuttaa.

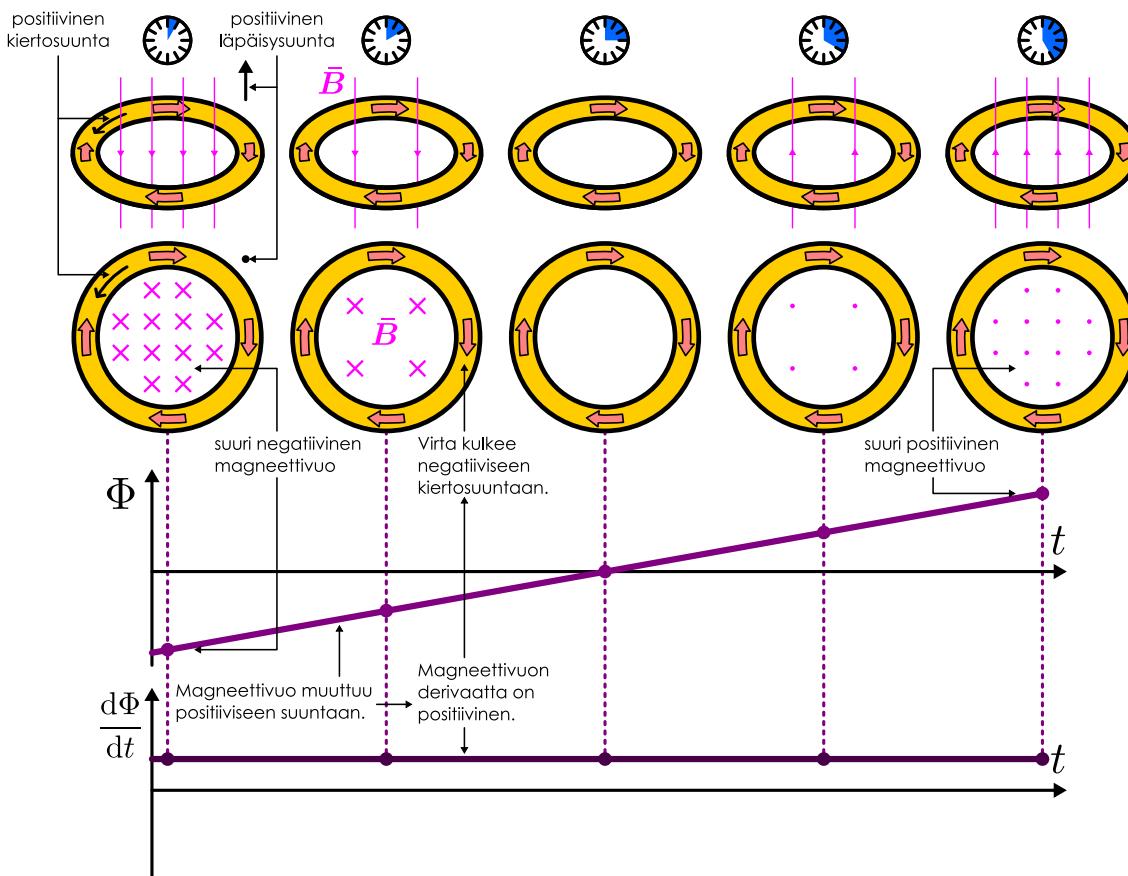


13.7 Kappale liikkuu negatiiviseen x -suuntaan ja sen vauhti kasvaa. Mikä on (a) nopeuden v_x , (b) kiihyvyden a_x , (c) nopeuden muutoksen dv_x/dt etumerkki?

Samalla tavalla *magneettivuon muutoksen etumerkki kuvaa sitä, muuttuuko vuo positiiviseen vain negatiiviseen suuntaan*. Magneettivuon muutos on positiivinen silloin, kun positiiviseen suuntaan kulkeva magneettikenttä voimistuu, sillä tällöin positiivinen magneettivuo muuttuu vielä positiivisemmaksi. Vuon muutos on kuitenkin positiivinen myös silloin, kun negatiiviseen suuntaan kulkeva magneettikenttä heikkenee, sillä tällöin negatiivinen vuon muutos on negatiivisempi.

Tätä sääntöä on havainnollistettu kuvassa 13.7, jossa magneettikenttä muuttuu negatiivisesta positiiviseksi ja vuon muutos on siis koko ajan positiivinen, vaikka vuon suuruus alkuksi pieneneekin. Kuvan on piirretty myös vuon kuvaja $\Phi_B(t)$ ajan funktiona, ja tämä kuvaja on nouseva suora. Vuon muutosnopeus $\Phi'_B(t) = d\Phi_B/dt$ on

Kuva 13.7: Faradayin induktiolaki. Kun silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu positiiviseen suuntaan, silmukkaan indusoituva sähkövirta kulkee negatiiviseen kiertosuuntaan.



vuon kuvaajan kulmakerroin, ja se on kuvan esimerkissä siis positiivinen vakio. Edelleen koska magneettivuon muutosnopeus on positiivinen, induusoitunut jännite on Faradayn lain mukaan negatiivinen, ja induktiovirran täytyy kiertää silmukassa negatiiviseen kiertosuuntaan.



13.8 Mihin suuntaan induktiovirta kulkee kuvan 13.5 esimerkeissä Faradayin lain ja oikean käden säännön mukaan?

esimerkki 13.1

Generaattori

Neliön muotoinen johdinsilmukka (sivun pituuus L) pyörii kulmanopeudella ω sivunsa suuntaisen akselin ympäri. Silmukka on homogeenisessa, pyörimisakseliin nähden kohtisuorassa magneettikenttää \bar{B} . Millainen jännite silmukkaan indusoituu?

TILANNE Pürretään tilanteesta kuva. Merkitään silmukan normaalilta ja magneettikentän välistä kulmaa θ . Tämä on siis myös silmukan tason ja magneettikenttää vastaan kohtisuoran tason välinen kulma. Jännite riippuu ajasta, joten valitaan ajan nollahetki niin, että $\theta(0) = \theta_{\text{alku}} = 0$.

SUUNNITELMA Induktiojännite riippuu Faradayn induktiolain mukaisesti silmukan läpi kulkevan magneettivuon muutosnopeudesta. Koska magneettikenttä on homogeeninen, magneettivuo on yksinkertaisesti kentän voimakkauden ja silmukan kenttää vastaan kohtisuoran pinta-alan tulo, koska vuo mittaa silmukan läpi kulkevan vuon suuruutta.

Silmukan pinta-ala on L^2 , mutta sen kenttää vastaan kohtisuora pinta-ala on vain

$$A_{\perp B} = L^2 \cos \theta. \quad (13.16)$$

Magneettivuon muutosnopeudesta riippuva jännite on siis

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{dA_{\perp B}}{dt}. \quad (13.17)$$

Pinta-alan derivaatan laskussa pitää tietää, että pyörimislükkeessä kulma riippuu ajasta,

$$\theta = \omega t + \theta_{\text{alku}} = \omega t. \quad (13.18)$$

RATKAISU Jännitteeksi saadaan

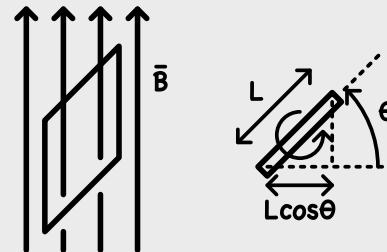
$$\mathcal{E} = -BL^2 \frac{d}{dt} \cos \omega t = BL^2 \omega \sin \omega t. \quad (13.19)$$

ARVIOINTI Magneettivuon maksimi on $\Phi_{B,\max} = BL^2$ mikä saavutetaan silloin, kun silmukan normaali osoittaa kentän suuntaan. Vuon minimi on $\Phi_{B,\min} = -BL^2$, mikä tarkoittaa silmukan normaalilta osoittavan kenttään nähden vastakkaiseen suuntaan. Silmukalla on siis positiivinen läpäisyysuunta, ja silmukan kääntyminen ympäri muuttaa vuon negatiiviseksi. Silmukka kääntyy ympäri (kulman $\Delta\theta = \pi$) ajassa $\Delta t = \Delta\theta/\omega = \pi/\omega$, ja tällöin sen vuon muutos on $\Delta\Phi_B = \Phi_{B,\min} - \Phi_{B,\max} = -2BL^2$. Keskimääräinen jännite on siis

$$\mathcal{E}_{\text{keskiarvo}} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{2}{\pi} BL^2 \omega \approx 0.6 BL^2 \omega. \quad (13.20)$$

Ratkaisuna saatu funktio $BL^2 \omega \sin \omega t$ saa tarkastellun puolen kierroksen aikana arvoja väliltä $[0, BL^2 \omega]$, ja sen keskiarvon pitää olla melko lähellä välin keskikohtaa. Koska näin on, tulos vaikuttaa järkevältä.

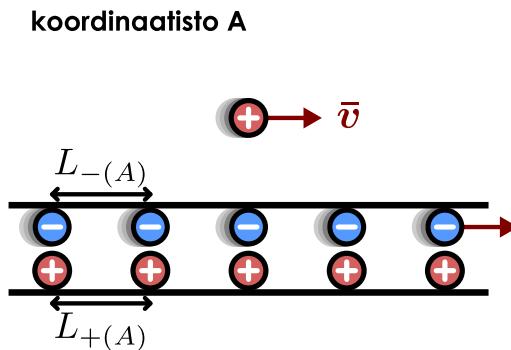
Åskeni tarkasteltiin vain sitä puolta kierroksesta, jolla jännite on positiivinen. Kaikkiaan jännite kuitenkin vaihtelee sinimuotoisesti välillä $[-BL^2 \omega, BL^2 \omega]$. Tätä kutsutaan vaihtojännitteeksi, ja tällä periaatteella toimivalla generaattorilla voidaan tuottaa vaihtovirtaa, jonka suunta vaihtuu tasaisin väliajoin.



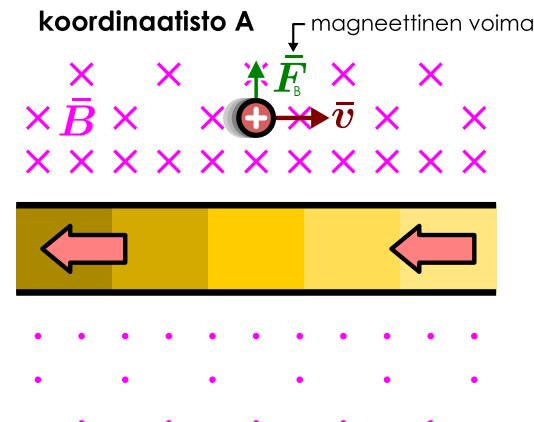
13.9 Kirjoita omien sanojen tiivistelmä sähkömagneettisesta induktiosta. Millaisissa tilanteissa induktio voi synnyttää sähkövirran? Selitä, miten voit päätellä induktiovirran suunnan. Selitä myös ainakin yksi tapa laskea induktiojännitteen suuruus.

Kuva 13.8: Koordinaatistossa A neutraalissa virtajohdimessa kulkee elektronien kuljettama virta ja johtimen vierellä liikkuu positiivisesti varattu hiukkasan. Liikkuvan hiukkaseen kohdistuu johtimen magneettikenttää magneettinen voima.

(a) Hiukkasan ja johtimen elektronit liikkuvat.



(b) Liikkuvan hiukkaseen kohdistuu johtimen magneettinen voima.



13.2 Sähkömagneettinen yhteisvuorovaikutus

Tähän mennessä olemme oppineet, että sähkövirtojen avulla voidaan luoda magneettikenttiä ja toisaalta magneettikenttiä avulla voidaan luoda sähkövirtoja. Tämä osoittaa sähkön ja magnetismin lähtevän läheisesti toisiinsa, mutta näiden ilmiöiden yhteys on vielä paljon syvämpi kuin mitä tähän asti olemme nähneet. Sähköinen ja magneettinen vuorovaikutus eivät vain ole sukua toisilleen, vaan oikeastaan ne *ovat sama asia* vain hieman eri näkökulmista tarkasteltuina. Fysiikassa sähköistä ja magneettista vuorovaikutusta ei pidetä kään omina erillisinä ilmiöinä vaan puhutaan vain yhdestä **sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta**, jonka ilmenemismuotoja sähköinen ja magneettinen voimakin ovat. Seuraavaksi opimme, miksi näin on.

Sähköinen vai magneettinen voima?

Kuvassa 13.8 (a) tarkastellaan virtajohdinta sekä sen vieressä kulkevaa hiukkasta. Johdin koostuu levossa olevista positiivisesti varatuista atomiytimistä sekä kuvassa oikealle nopeudella \bar{v} liikkuvista negatiivisesti varatuista elektroneista. Johtimen vieressä olevalla hiukkasella on positiivinen varaus ja se liikkuu johtimen suuntaan samalla nopeudella kuin elektronit johtimessa.

Johdin on neutraali, joten ytimiä ja elektronien varausten täytyy kumota toisensa täydellisesti. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että ydinten varaus on yksi alkeisvaraus, e , jolloin ytimiä ja elektroneja täytyy olla johtimessa yhtä tiheässä. Tällöin johdinta voi kuvata yksinkertaisella mallilla, jossa ytimet muodostavat positiivisten varausten jonon, jossa hiukkasten välinen etäisyys on L_+ . Vastaavasti elektronit muodostavat negatiivisten varausten jonon, ja niiden välinen etäisyys on L_- . Koska johdin on neutraali, nämä etäisydet ovat yhtä pitkät, $L_+ = L_-$.

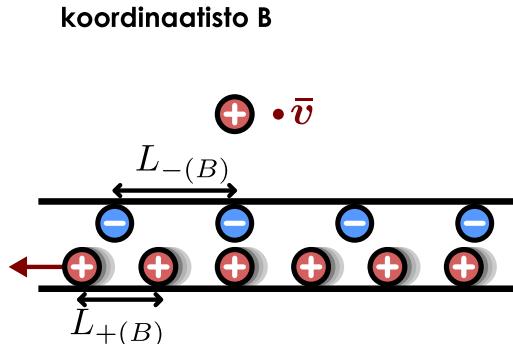
Koska negatiiviset elektronit kulkevat kuvassa oikealle, johtimessa kulkee sähkövirta vasemmalle, ja tämä virta luo johtimen ympärille pyörteisen magneettikentän kuten kuvassa 13.8 (b). Oikean käden säännön perusteella magneettikenttä osoittaa johtimen yläpuolella poispäin katsojasta, ja koska hiukkasan kulkee oikealle, siihen kohdistuvan magneettisen voiman täytyy osoittaa ylöspäin.

Tähän asti tilanne ei poikkea mitenkään edellisessä luvussa tarkastelemistamme tilanteista, mutta tutkitaan pa seuraavaksi, miltä tilanne näyttää *positiivisen hiukkisen lepokoordinaatistossa (B)* (kuva 13.9). Omassa koordinaatistossaan hiukkasan ei liiku, joten sen nopeus on nolla. Myös elektronit ovat tässä koordinaatistossa paikoillaan, mutta atomiytimet sen sijaan liikkuvat nyt kuvassa vasemmalle nopeudella $-\bar{v}$, koska johdin itsessään liikkuu.

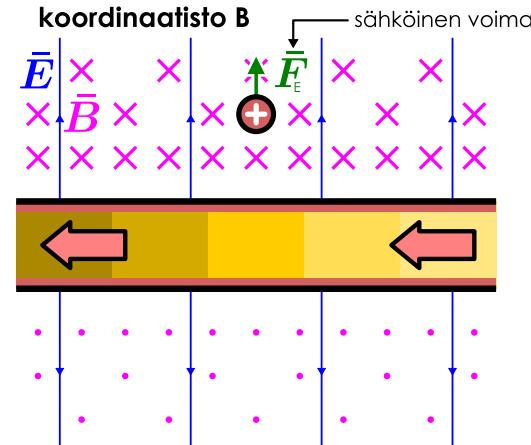
Tässäkin koordinaatistossa johtimessa kulkee virta vasemmalle, sillä nyt positiivinen varaus siirtyy tähän suuntaan. Niinpä johdin luo tässäkin koordinaatistossa ympärilleen pyörteisen magneettikentän. *Johtimen vierellä kulkevan varattuun hiukkaseen ei kuitenkaan voi kohdistua magneettista voimaa, koska hiukkasan ei liiku, ja magneettinen voima kohdistuu vain liikkuihin hiukkasiin!* Toisaalta koska johtimen lepokoordinaatistossa (A) hiukkaseen kohdistui voima johtimesta poispäin, hiukkasan täytyy olla tässä koordinaatistossa kiihtyvässä liikkeessä, jolloin se lähtee loittonemaan johtimesta. Mutta silloin hiukkasan täytyy olla kiihtyvässä liikkeessä poispäin johtimesta myös koordinaatistossa B, joten *hiukkaseen täytyy kohdistua voima myös tässä koordinaatistossa*. Voima ei kuitenkaan voi olla magneettinen, vaan sen täytyy syntyä jollakin toisella mekanismilla.

Kuva 13.9: Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteessa samalla nopeudella kuin hiukkasan, joten koordinaatistossa B hiukkasan on levossa. Tässä koordinaatistossa johtien on varattu, ja hiukkaseen kohdistuu sähköinen voima.

(a) Hiukkasan levossa, johtien liikkuvat.



(b) Levossa olevaan hiukkaseen kohdistuu vain sähköinen voima.



Tämän näennäisen ristiriidan ratkaisu on esitetty kuvassa 13.9 (a). Atomiytimet olivat koordinaatistossa A levossa, mutta koordinaatistossa B ytimien muodostama jono liikkui. Suhteellisuusteorian mukaan liikkuvan jonon kokee *pituuskontraktio*, jolloin jonossa kulkevien hiukkasten välistet etäisyysdet havaitaan koordinaatistossa B lyhentyneinä ja ydinten tiheys on näin ollen koordinaatistossa B suurempi kuin koordinaatistossa A. Vastaavasti elektronien muodostama jono on koordinaatistossa B levossa, joten elektronit kokevat pituuskontraktioon koordinaatistossa A, ja elektronien tiheys on koordinaatistossa B pienempi kuin koordinaatistossa A.



13.10 Koordinaatistossa A johtimen elektronit ovat levossa etäisyydellä L toisistaan. Johdin yhdistetään paristoon, jolloin elektronit lähtevät vaeltamaan likimain samanaikaisesti.

(a) Pysähtyvätkö elektronit samanaikaisesti koordinaatistossa B? Vertaa kuvan 6.23.

(b) Selitä tämän perusteella, miksi elektronit ovat koordinaatistossa B kauempaan toisistaan.

Varattujen hiukkasten muodostaman jonon pituusvarausasteys on hiukkasten varauksen q ja niiden välisen etäisyyden L suhde,

$$\lambda = \frac{q}{L}, \quad (13.21)$$

ja koska hiukkasten sähkövaraus on invariantti suure, hiukkasten välisten etäisyyksien suhteellisuus tarjoittaa myös johtimen varausasteiden olevan suhteellinen. Erityisesti koska koordinaatistossa B positiiviset varaukset ovat tiheämässä kuin negatiiviset, *johtimen täytyy olla tässä koordinaatistossa positiivisesti varautunut*, ja niinpä se luo ympärilleen johtimesta poispäin osoittavan sähkökentän kuten kuvassa 13.9 (b). Koordinaatistossa B johtimen vierellä olevaan hiukkaseen kohdistuu siis *sähköinen voima*, jolloin hiukkasan on myös tässä koordinaatistossa kiihtyvässä liikkeessä. Mitään ristiriita ei siis ole, mutta koordinaatiston A magneettinen voima ilmeneekin koordinaatistossa B puhtaasti sähköisenä voimanana!

Lasketaan vielä hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruus kummassakin koordinaatistossa. Oletetaan, että *tarkasteltavat nopeudet ovat huomattavasti valonnopeutta pienemmät, $v \ll c$* . Suhteellisuusteoriassa voima on suhteellinen suure, mutta klassisessa suhteellisuudessa voima on absoluuttinen. Niinpä jos koordinaatistot liikkuvat toistensa suhteeseen hitaasti, johtimen vierellä kulkevaan *hiukkaseen pitää kohdistua kummassakin koordinaatistossa yhtä suuri voima*.

Oletetaan, että varattu hiukkasan on protoni, jonka varaus on siis e . Koordinaatistossa A hiukkaseen kohdistuu magneettinen voima, ja koska hiukkasan liikkuu tarkasteluhetkellä kohtisuoraan kenttään nähden, voima on suuruudeltaan

$$F_{(A)} = |e\bar{v} \times \bar{B}_{(A)}| = qvB_{(A)}. \quad (13.22)$$

Voimme tässä olettaa, että varattu hiukkasan etäisyys johtimesta, r , on paljon suurempi kuin varattujen hiukkasten välinen etäisyys johtimen sisällä mutta silti paljon pienempi kuin johtimen pituus. Tällöin meidän ei tarvitse huomioida johtimen sisällä liikkuvia elektroneja yksitellen vaan voimme käyttää äärettömän pitkän suoran johtimen mallia magneettikentän laskemisessa. Suoran johtimen magneettikentän voimakkuus etäisyydellä r on yhtälön (12.2) mukaisesti

$$B_{(A)} = \frac{\mu_0 i_{(A)}}{2\pi r}, \quad (13.23)$$

joten hiukkaseen kohdistuva voima on

$$F_{(A)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{evi_{(A)}}{r}. \quad (13.24)$$

Koska elektronien välinen etäisyys on $L_{-(A)}$ ja ne kulkevat vauhdilla v , johtimen poikkileikkaus läpi kulkee yksi elektri eli varaus

$$\Delta q_{(A)} = -e \quad (13.25)$$

ajassa

$$\Delta t_{(A)} = \frac{1}{v} L_{-(A)}. \quad (13.26)$$

Elektronien kuljettaman sähkövirran suuruus on siis

$$i_{(A)} = \left| \frac{\Delta q_{(A)}}{\Delta t_{(A)}} \right| = \frac{1}{L_{-(A)}} ev \quad (13.27)$$

ja varattuun hiukkaseen kohdistuva voima on

$$F_{(A)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^2 v^2}{r L_{-(A)}}. \quad (13.28)$$

Koordinaatistossa B johdinta voidaan vastaavaan tapaan kuvata äärettömän pitkänä varattuna sauvana, jonka sähkökenttä noudattaa Gaussin lain perusteella yhtälöä (10.85),

$$E_{(B)} = \frac{\lambda_{(B)}}{2\pi \epsilon_0 r}, \quad (13.29)$$

missä $\lambda_{(B)}$ on sauvan pituusvaraustiheys. Sähkökenttä kohdistaa varattuun hiukkaseen voiman

$$F_{(B)} = e E_{(B)} = \frac{e \lambda_{(B)}}{2\pi \epsilon_0 r}, \quad (13.30)$$

ja tämän pitäisi olla sama kuin hiukkaseen koordinaatistossa A kohdistuva magneettinen voima.

Varaustiheyden laskemisessa tarvitsemme suhteellisuusteoriaa, vaikka koordinaatistojen A ja B välisen nopeus on hyvin pieni. Ydinten välinen etäisyys koordinaatistossa B on

$$L_{+(B)} = \frac{1}{\gamma_{B(A)}} L_{+(A)} \quad (13.31)$$

ja elektronien välinen etäisyys on puolestaan

$$L_{-(B)} = \gamma_{B(A)} L_{-(A)}. \quad (13.32)$$

Sauvan varaustiheys koordinaatistossa B on näin ollen

$$\lambda_{(B)} = \lambda_{+(B)} + \lambda_{-(B)} = \frac{e}{L_{+(B)}} - \frac{e}{L_{-(B)}} = \frac{e}{L_{-(A)}} \left(\gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \right) \quad (13.33)$$

ja hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruudeksi saadaan

$$F_{(B)} = \frac{e^2}{2\pi \epsilon_0 r L_{-(A)}} \left(\gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \right). \quad (13.34)$$



- 13.11** (a) Miten tekijä $\gamma - 1/\gamma$ muuttuu, kun v kasvaa?
 (b) Onko $\lambda_{(B)}$ tämän perusteella siis positiivinen vai negatiivinen?
 (c) Vertaa laskun tulosta kuvaan 13.9.

Lauseke ei näytä samalta kuin koordinaatistossa A laskettu voima (13.28), mutta voimme vielä sieventää sitä kirjoittamalla Lorentzin tekijät koordinaatistojen välisten nopeuden $v_{B(A)} = v$ avulla. Koska oletimme tämän nopeuden olevan pieni, voimme käyttää approksimaatioita

$$\gamma_{B(A)} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (13.35)$$

sekä

$$\frac{1}{\gamma_{B(A)}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}, \quad (13.36)$$

jolloin lausekkeen (13.34) viimeinen termi sievenee muotoon

$$\gamma_{B(A)} - \frac{1}{\gamma_{B(A)}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.37)$$

Näin ollen koordinaatistossa B hiukkaseen kohdistuvalle sähköiselle voimalle saadaan lauseke

$$F_{(B)} \approx \frac{e^2 v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r L_{-(A)}}. \quad (13.38)$$



13.12 Laske tekijät γ ja $1/\gamma$ sekä täsmällisesti että approksimaatioilla (13.35) ja (13.36), kun v on (a) $0.5c$, (b) $0.1c$, (c) $0.01c$, (d) Toimiiko approksimaatio? Voiko lauseketta (13.38) pitää tarkkana, kun $v \ll c$?

Hiukkaseen kohdistuvan voiman suuruus noudattaa siis koordinaatistossa A lauseketta (13.28) ja koordinaatistossa B lauseketta (13.38), ja koska voiman pitää olla kummassakin koordinaatistossa sama (kun koordinaatistojen välinen nopeus on pieni), näiden lausekkeiden täytyy olla arvoltaan samat, $F_{(A)} = F_{(B)}$, eli

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^2 v^2}{r L_{-(A)}} = \frac{e^2 v^2}{2\pi\epsilon_0 c^2 r L_{-(A)}}. \quad (13.39)$$

Lausekkeet ovatkin muuten samat paitsi että koordinaatistossa A vaikuttava magneettinen voima riippuu magneettivakiosta μ_0 kun taas koordinaatistossa B mitattu sähköinen voima riippuu sähkövakiosta ϵ_0 ja valonnopeudesta c . Koska lausekkeiden täytyy olla samat, näille vakioille täytyy päteä ehto

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (13.40)$$

tai toisin kirjoittaen

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (13.41)$$



13.13 (a) Sijoita lukuarvot yhtälöön (13.41) ja tarkista, että se pätee.
 (b) Tee yhtälölle myös yksikkötarkastelu.

Tämä ajatuskoe on monella tavalla merkittävä. Sen mukaan sähkö- ja magneettikenttiä kuvaavat vakiot määritävät myös valonnopeuden, mikä vihjaa valon liittyvän sähkömagnetismiin. Tämä tarkastelu osoittaa myös sen, että *sähkö- ja magneettikenttä ovat suhteellisia suureita*. Tässä esimerkissä koordinaatistossa A sähkökenttä on kaikkialla nolla ja hiukkaseen kohdistuva voima on pelkästään magneettinen, kun taas koordinaatistossa B on sähkökenttä ja hiukkaseen kohdistuva voima on puhtaasti sähköinen. Johtimen varaukset vuorovaikuttavat johtimen rinnalla olevan hiukkasen kanssa kaikissa koordinaatistoissa, mutta riippuu näkökulmasta, onko tämä vuorovaikutus mielestämmeksi sähköinen vai magneettinen.

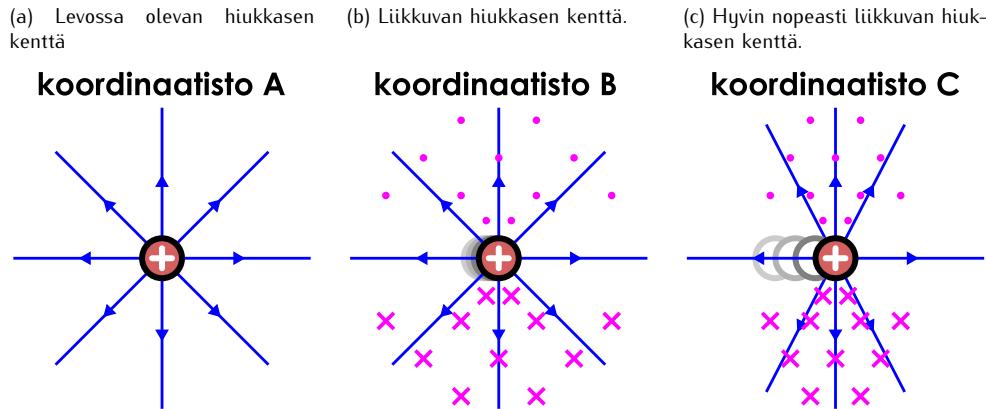
Sähkömagneettisen kentän suhteellisuus

Kuvissa 13.8 ja 13.9 johtimen ja varatun hiukkasen välillä on *sähkömagneettinen vuorovaikutus*, jota välittää *sähkömagneettinen kenttä*. Me kuvamme sähkömagneettista kenttää suureilla \vec{E} ja \vec{B} , jotka on *määritelty* niin, että \vec{E} kohdistaa voiman *kaikkiin* varattuihin hiukkasiin ja \vec{B} kohdistaa voiman *vain* liikkuihin hiukkasiin. Yhdessä koordinaatistossa liikkuva varaus voi kuitenkin olla toisessa koordinaatistossa levossa, joten sähkömagneettisen kentän jaon suureisiin \vec{E} ja \vec{B} täytyy olla eri koordinaatistoissa erilainen. Tässä mielessä siis sähköisyyys ja magneettisuus todella ovat yhden ja saman sähkömagneettisuuden ilmenemismuotoja, ja riippuu näkökulmasta, määritelläänkö voima sähköiseksi vai magneettiseksi.

Esimerkiksi pistevaraus luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän, jolla voi olla sekä sähköinen että magneettinen luonne riippuen koordinaatistosta. Varauksen lepokoordinaatistossa sähkömagneettinen kenttä on puhtaasti sähköinen, ja kentän sähköistä luonnetta kuvaa Coulombin laki (kuva 13.10 (a)). Koordinaatistoissa, joissa varaus liikkuu, kentällä on myös magneettinen luonne, jota kuvaa Biot'n ja Savartin laki (kuva 13.10 (b)).

Tämä myös selittää, miksi pistevaraus luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän, jolla voi olla sekä sähköinen että magneettinen luonne riippuen koordinaatistosta. Varauksen lepokoordinaatistossa sähkömagneettinen kenttä on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, $E \sim r^{-2}$. Mutta jos tämä sähkömagneettinen kenttä ilmenee toisessa koordinaatistossa myös magneettisena, tämän magneettisen osan voimakkuuden täytyy niin ikään olla kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, $B \sim r^{-2}$. Tästä syystä Biot'n ja Savartin laissa (12.17) on samalainen r -riippuvuus kuin Coulombin laissa.

Kuva 13.10: Sähkömagneettisen kentän suhteellisuus. Varattu hiukkasan luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän. Eri koordinaatistoiissa sähkömagneettisen kentän jakautuminen sähköiseen ja magneettiseen osuuteen havaitaan kuitenkin eri tavoin.



13.14 Millaisen sähkökentän pitkä varattu sauva luo? Entä millaisen magneettikentän luo pitkä virtajohdin? Mitä samaa kentissä on ja miksi niiden pitää olla tällä tavalla samanlaiset?

Johdetaan nyt varauksen luomalle sähkö- ja magneettikentälle täsmällinen yhteyks. Jos varattu hiukkasan on levossa koordinaatiston A origossa, sen sähkökenttä on Coulombin lain mukaan tässä koordinaatistossa

$$\bar{E}_{(A)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (13.42)$$

Toisaalta jos koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $\bar{v}_{B(A)}$, varattu hiukkasan liikkuu koordinaatistossa B nopeudella $\bar{v}_{(B)} = -\bar{v}_{B(A)}$. Ollessaan koordinaatiston origossa hiukkasan luo siis Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikentän

$$\bar{B}_{(B)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{(B)} \times \hat{r}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{B(A)} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.43)$$

Toisaalta voimme laventaa tämän lausekkeen sähkövakiolla, jolloin magneettikentäksi saadaan

$$\bar{B}_{(B)} = -\frac{\mu_0\epsilon_0}{4\pi} \frac{q\bar{v}_{B(A)} \times \hat{r}}{r^2} = -\mu_0\epsilon_0\bar{v}_{B(A)} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = -\mu_0\epsilon_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}, \quad (13.44)$$

joten magneettikentän ja sähkökentän välille saadaan yhteyks

$$\bar{B}_{(B)} = -\epsilon_0\mu_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.45)$$

Jos sähkökentän luo monta sähkövarausta yhdessä, niiden kaikkien kentät muuntuvat samalla tavalla. Tämä tarkoittaa sitä, että koordinaatistossa A havaittu sähkökenttä havaitaan siis todellakin koordinaatistossa B sekä sähkö- että magneettikentänä.

Muunnosyhtälö (13.45) pätee kuitenkin vain siinä tapauksessa, että koordinaatistossa A on vain sähkökenttä eikä lainkaan magneettikenttää. Jos koordinaatistossa A on pisteverauksen luoman sähkökentän lisäksi myös magneettikenttä $\bar{B}_{(A)}$, tämä kenttä vaikuttaa edelleen myös koordinaatistossa B. Kokonaisuudessaan magneettikentän muunnos koordinaatistoa vaihdettaessa noudattaa yhtälöä

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0\mu_0\bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.46)$$

13.15 Tarkastellaan kolmea koordinaatistoa A, B ja C. Varattu hiukkasan on levossa koordinaatistossa A, ja tässä koordinaatistossa havaitaan vain hiukkasan sähkökenttä. Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen nopeudella $\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}$ ja koordinaatisto C liikkuu A:n suhteeseen nopeudella $\bar{v}_{C(A)} = 2\bar{v}$, missä $v \ll c$.

- (a) Millainen magneettikenttä havaitaan koordinaatistoissa B ja C Biot'n ja Savartin lain mukaan?
- (b) Millainen magneettikenttä koordinaatistoissa B ja C pitäisi olla yhtälön (13.46) perusteella, kun muunnos lasketaan koordinaatiston A suhteeseen?
- (c) Millainen magneettikenttä koordinaatistossa C pitäisi olla yhtälön (13.46) perusteella, kun muunnos lasketaan koordinaatiston B suhteeseen?
- (d) Ovatko tulokset sopusoinnussa eli näyttääkö yhtälö (13.46) pätevän?

Yhtälö (13.46) pätee, kun koordinaatistojen välinen nopeus ei ole kovin suuri. Kyseessä on siis **magneettikentän Galilei-muunnos**. Yhtälö ei kuitenkaan päde enää silloin, kun koordinaatistojen välinen nopeus on suuri, koska tällöin avaruudelliset etäisyydet muuttuvat suhteellisuusteoreettisen pituuskontraktions takia, ja tämä muuttaa myös sähkömagneettista kenttää. Lähellä valonnopeutta kulkevan varatun hiukkasen sähkö- ja magneettikentät muistuttavatkin kuva 13.10 (c). Kentät eivät ole pallosymmetriset vaan liukkeen suunnassa "litistyneet", jolloin Coulombin laki sekä Biot'n ja Savartin laki eivät enää päde.



13.16 Selitä, miksi Coulombin laki ei päde kuussa 13.10 (c) mutta Gaussian laki pätee. Perustele kuvan avulla!

Edellisessä esimerkissä tutkimme pistevarauksen luoman kentän muuttumista, mutta kenttämallin hienous on siinä, että gleensä meidän ei tarvitse tietää, *millaiset* varaukset kentän ovat luoneet. Voimmekin siis käyttää yhtälöä (13.46) magneettikentän laskemiseksi koordinaatistossa B, vaikka emme tietäisi kääni, milloiset varaukset ovat luoneet koordinaatistossa A havaitut kentät. Kuitenkin jotta voisimme määrittää koko sähkömagneettisen kentän muutoksen koordinaatistoa vaihdettaessa, meidän pitää lisäksi tietää, kuinka sähkökenttä muuttuu, ja seuraava tehtäväämme on siis määrittää sähkökentän Galilei-muunnos.

Tarkastellaan ensin kuva 13.11 (a), joka olkoon koordinaatisto A. Kuvassa on positiivisesti varattu hiukkanen sähkökentässä $\bar{E}_{(A)}$ ja magneettikentässä $\bar{B}_{(A)}$. Sähkökenttä osoittaa kuussa suoraan oikealle ja kohdistaa hiukkaseen sähköisen voiman

$$\bar{F}_{\text{sähkö},(A)} = q\bar{E}_{(A)}. \quad (13.47)$$

Magneettikenttä osoittaa kuussa katsojasta poispäin. Hiukkanaan liikkuu sähkökentän suuntaan nopeudella $\bar{v}_{(A)}$, jolloin siihen kohdistuu magneettinen voima

$$\bar{F}_{\text{magneetti},(A)} = q\bar{v}_{(A)} \times \bar{B}_{(A)}. \quad (13.48)$$

Kuvassa sähköinen voima osoittaa suoraan oikealle ja magneettinen voima suoraan ylöspäin, jolloin hiukkaan kohdistuva kokonaisvoima

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(A)} = \bar{F}_{\text{sähkö},(A)} + \bar{F}_{\text{magneetti},(A)} = q(\bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{(A)} \times \bar{B}_{(A)}) \quad (13.49)$$

osoittaa kuussa yläviistoon oikealle.

Kuvassa 13.11 (b) on sama tilanne hiukkasen lepoonkoordinatistossa B. Koordinaatistojen välinen nopeus on sama kuin hiukkasen nopeus A:ssa, $\bar{v}_{B(A)} = \bar{v}_{(A)}$, ja oletetaan jälleen tämän nopeuden olevan pieni verrattuna valonnopeuteen. Tällöin hiukkaseen kohdistuvan voiman täytyy olla kummassakin koordinaatistossa sama,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(A)} = \bar{F}_{\text{kokonais},(B)}. \quad (13.50)$$

Kokonaisvoimavektori osoittaa siis tässäkin kuussa yläviistoon.

Koordinaatistossa B hiukkanen on levossa, jolloin siihen ei kohdistu lainkaan magneettista voimaa. Kokonaisvoiman täytyy siis olla puhtaasti sähköinen,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},(B)} = \bar{F}_{\text{sähkö},(B)} = q\bar{E}_{(B)}, \quad (13.51)$$

ja sähkökentän täytyy osoittaa samaan suuntaan kuin hiukkaseen kohdistuvan voiman. Jotta lausekkeet (13.49) ja (13.51) olisivat samat, **sähkökentän Galileimuunnoksen** täytyy noudattaa yhtälöä

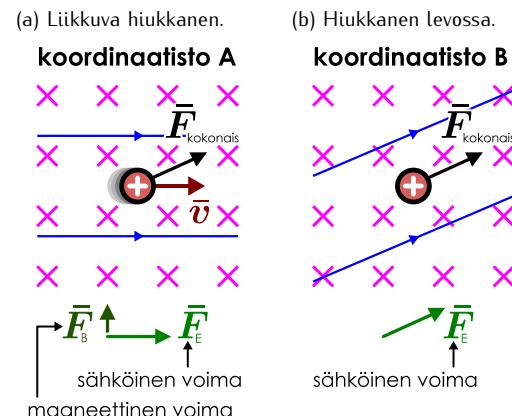
$$\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}. \quad (13.52)$$

Yhtälöt (13.46) ja (13.52) kertovat, miten sähkömagneettisen kentän sähköinen ja magneettinen osuus muuttuvat koordinaatistoa vaihdettaessa. Yhtälöt eivät ole yleispäteviä vaan ne toimivat vain koordinaatistojen välisten nopeuksien ollessa pienet. Yleiset, suhteellisuusteoreettiset muunno syhtälöt ovat hieman monimutkaisemmat, emmekä esittele niitä tässä. Oleellista on kuitenkin ymmärtää, että eri koordinaatistissa havaitaan erilaiset sähkö- ja magneettikentät, ja näiden kenttien välillä on täsmällinen yhteyts.



13.17 Kuvassa 13.8 on magneettikenttä. Päätteli yhtälöstä (13.52), mihin suuntaan sähkökenttä osoittaa koordinaatistossa, joka liikkuu kuvan suhteen oikealle. Vertaa kuvaan 13.9.

Kuva 13.11: Sähkömagneettinen kenttä havaitaan eri koordinaatistossa eri tavoin.



esimerkki 13.2

Suhteellinen kenttä

Koordinaatistossa A on sähkökenttä $\bar{E}_{(A)} = (100 \text{ V/m})\hat{i} + (200 \text{ V/m})\hat{j}$ ja magneettikenttä $\bar{B}_{(A)} = (0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}$. Varaus 1.0 C liukkuu koordinaatistossa nopeudella $\bar{v}_{(A)} = (-250 \text{ m/s})\hat{j}$. (a) Millainen voima hiukkaseen kohdistuu? (b) Koordinaatisto B liukkuu A:n suhteeseen nopeudella $\bar{v}_{B(A)} = (50 \text{ m/s})\hat{i}$. Millainen sähkö- ja magneettikenttä B:ssä on? (c) Millainen voima hiukkaseen kohdistuu B:ssä?

SUUNNITELMA Hiukkaseen kohdistuva Lorentzin voima on

$$\bar{F} = \bar{F}_E + \bar{F}_B = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \quad (13.53)$$

Koordinaatiston B kentät voidaan laskea muunnoksilla

$$\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)} \quad (13.54)$$

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0 \mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}. \quad (13.55)$$

RATKAISU (a) Koordinaatistossa A sähköinen ja magneettinen voima on

$$\bar{F}_{E(A)} = (1 \text{ C})[(100 \text{ V/m})\hat{i} + (200 \text{ V/m})\hat{j}] = (100 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} \quad (13.56)$$

$$\bar{F}_{B(A)} = (1 \text{ C})(-250 \text{ m/s})\hat{j} \times [(0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}] = (50 \text{ N})\hat{i} + (25 \text{ N})\hat{k}. \quad (13.57)$$

Kokonaisvoima on näiden summa, $\bar{F}_{(A)} = (150 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}$.

(b) Koordinaatistossa B kentät ovat $\bar{E}_{(B)} = (100 \text{ V/m})\hat{i} + (210 \text{ V/m})\hat{j}$ ja $\bar{B}_{(A)} \approx (0.10 \text{ T})\hat{i} + (-0.20 \text{ T})\hat{k}$. Magneettikentälle tämä on likiarvo, mutta tekijä $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ on niin pieni, että se voidaan tässä jättää huomioimatta.

(c) Varauksen nopeus B:ssä on $\bar{v}_{(B)} = \bar{v}_{(A)} - \bar{v}_{B(A)} = (-50 \text{ m/s})\hat{i} + (-250 \text{ m/s})\hat{j}$. Voimat ovat nyt siis $\bar{F}_{E(B)} = (100 \text{ N})\hat{i} + (210 \text{ N})\hat{j}$, $\bar{F}_{B(B)} = (50 \text{ N})\hat{i} + (-10 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}$ ja kokonaisvoima on

$$\bar{F}_{(B)} = (150 \text{ N})\hat{i} + (200 \text{ N})\hat{j} + (25 \text{ N})\hat{k}. \quad (13.58)$$

ARVIOINTI Kummassakin koordinaatistossa saadaan sama kokonaisvoima kuten pitääkin. (Ainakin likimain. Käytetty Galilei-muunnos ei ole tarkka.) Tämän voiman jakautuminen sähköiseen ja magneettiseen osuuteen on kuitenkin eri koordinaatistoissa erilainen.



13.18 Selitä omin sanoin, miksi eri koordinaatistoissa havaitaan erilaiset sähkö- ja magneettikentät. Jos tunnet kentät yhdessä koordinaatistossa, miten lasket kentät muissa koordinaatistoissa? Miksi on järkevää puhua sähkömagneettisesta kentästä eikä vain erikseen sähköisestä ja magneettisesta kentästä?

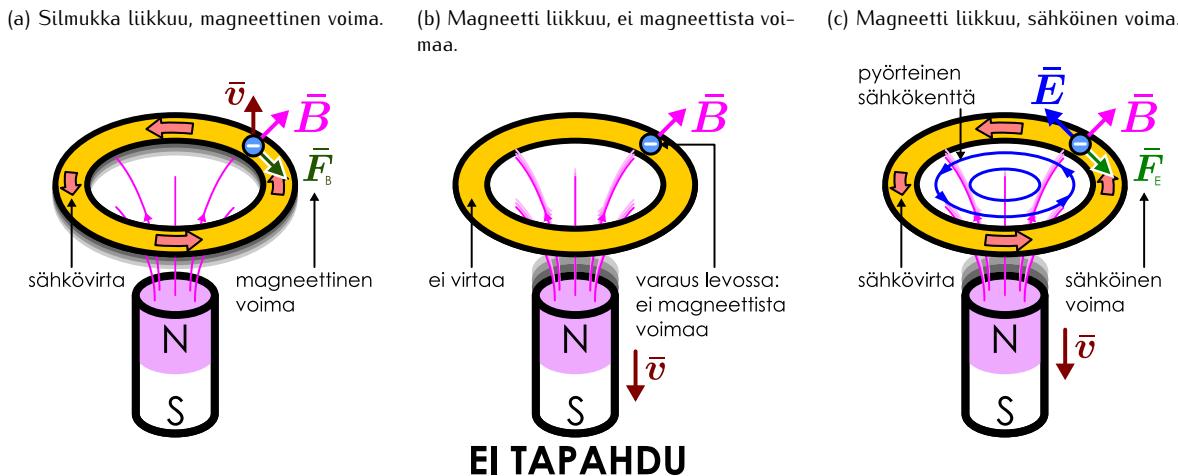
Faradayn laki sähkökentille

Palataan nyt takaisin tutkimaan induktioilmiötä sähkömagneettisen kentän suhteellisuuden näkökulmasta. Opimme jo aikaisemmin, että johdinsilmukkaan indusoituu jännite ja sähkövirta, kun johtimen läpi kulkeva magneettivuo muuttuu, ja kuvassa 13.12 (a) on tästä esimerkki: metallinen rengas on sauvalmagnetin luomassa epähomogeenisessa magneettikentässä. Magneettikenttä läpäisee renkaan kuvassa alhaalta ylöspäin, ja jos valitsemme positiivisen läpäisyysuunnan kentän suuntaan, magneettivuo on siis positiivinen. Tämä valinta tarkoittaa samalla sitä, että positiivinen kiertosuunta renkaan ympäri on oikean käden säännön mukaan vastapäivään. Rengas liukkuu kuvassa ylöspäin, jolloin se siirtyy heikkompaan magneettikenttään ja magneettivuo renkaan läpi pienenee muuttuen negatiiviseen suuntaan. Koska vuon muutos on negatiivinen, renkaaseen indusoituu Faradayn induktiolain (13.14) mukaisesti positiivinen jännite ja positiiviseen suuntaan kiertävä induktiovirta.

Virtaa kuljettavien elektronien näkökulmasta virta syntyy siksi, että liikkuva rengas vetää elektroneja mukanaan, jolloin liikkuihin elektroneihin kohdistuva magneettinen voima vetää ne liikkeelle renkaan suuntaan. Kuvaan 13.12 (a) on piirretty tästä esimerkkinä yksi elektroni, jonka nopeusvektori osoittaa ylöspäin. Magneettikenttävektori osoittaa elektronin kohdalla yläviistoon taaksepäin kohtisuoraan metallirenkaan tangenttiin nähdien, joten elektronin kohdista magneettinen voima osoittaa oikean käden säännön mukaisesti renkaan suuntaan kuvassa myötäpäivään. Systeemi on sylinterisymmetrinen, joten tarkasteltiinpa mitä tahansa renkaan elektronia, magneettinen voima osoittaa aina renkaan suuntaan myötäpäivään, ja tähän suuntaan elektronit siis alkavat kulkea. Virta kulkee elektronien liikkeseen nähdien vastakkaiseen suuntaan eli vastapäivään.

Voimme kuitenkin tarkastella samaa tilannetta myös renkaan mukana liikkuvassa koordinaatistossa, jossa magneetti liukkuu renkaasta poispäin kuten kuvissa 13.12 (b) ja (c). Koska induktioilmiö tapahtui koordinaatistossa, jossa rengas liukkuu, sen täytyy tapahtua myös tässä koordinaatistossa, jossa rengas on paikoillaan.

Kuva 13.12: Suhteellisuus sähkömagneettisessa induktiossa. Riippuu koordinaatistosta, liukuuko johdinsilmukka vai magneetti. Kummassakin koordinaatistossa kuitenkin havaitaan sähkövirta. Niinpä silmukan lepokoordinaatistossa täytyy olla pyörteinen sähkökenttä.



Tässä koordinaatistossa induktio ei kuitenkaan joudu renkaan liikkeestä kohti heikompaa magneettikenttää, koska rengas on paikoillaan. Sen sijaan magneettikentän voimakkuus renkaan kohdalla heikkenee, sillä magneetti siirtyy kauemmas renkaasta. Tässäkin koordinaatistossa magneettivuo renkaan läpi siis heikkenee, ja Faradayn induktiolaki selittää induktion johtuvan renkaan läpi kulkevan magneettivuon muutoksesta.

Elektronien näkökulmasta tilanne on kuitenkin erilainen verrattuna koordinaatistoon, jossa rengas liikkuu. Nyt rengas ja sen elektronit ovat nimitäin aluksi levossa, joten *niihin ei voi kohdistua magneettista voimaa*. Jos tässä koordinaatistossa olisi vain magneetin tuottama magneettikenttä kuten kuvassa 13.12 (b), elektroneihin ei kohdistuisi lainkaan voimaa, eivätkä ne siis myöskaan lähtisi liikkeelle! Koska elektronit kuitenkin lähtevät kiertämään rengasta myös tässä koordinaatistossa, *niihin täytyy kohdistua sähköinen voima*, joka pitää ne liikkeessä. Erityisesti elektroneihin kohdistuvan sähköisen voiman täytyy vetää niitä renkaan suunnassa myötäpäivään, joten renkaan kohdalla täytyy olla renkaan suuntaan vastapäivään osoittava sähkökenttä. Kuva 13.12 (b) on siis väärin, ja renkaan lepokoordinaatiston täytyy olla kuvan 13.12 (c) mukainen.



13.19 Olkoon kuva 13.12 (a) koordinaatisto A ja kuva (c) koordinaatisto B. Selitä sähkökentän muunnosyhälön (13.52) perusteella, miksi koordinaatistossa B täytyy olla kuvassa esitetyn kaltainen sähkökenttä.

Sähkömagneettisen kentän suhteellisuuden takia induktioilmio syntyy siis eri koordinaatistoissa eri tavoilla. Kun johtimet liikkuvat, niissä olevat varauksenkuljettajat liikkuvat johdinten mukana ja kokevat magneettisen voiman. Kun johtimet ovat paikoillaan, niissä olevat varaukset eivät voi kokea magneettista voimaa. *Muuttuvien magneettikenttiin kuitenkin liittyy sähkökenttä*, ja varauksenkuljettajiin kohdistuu tässä sähkökentässä sähköinen voima.

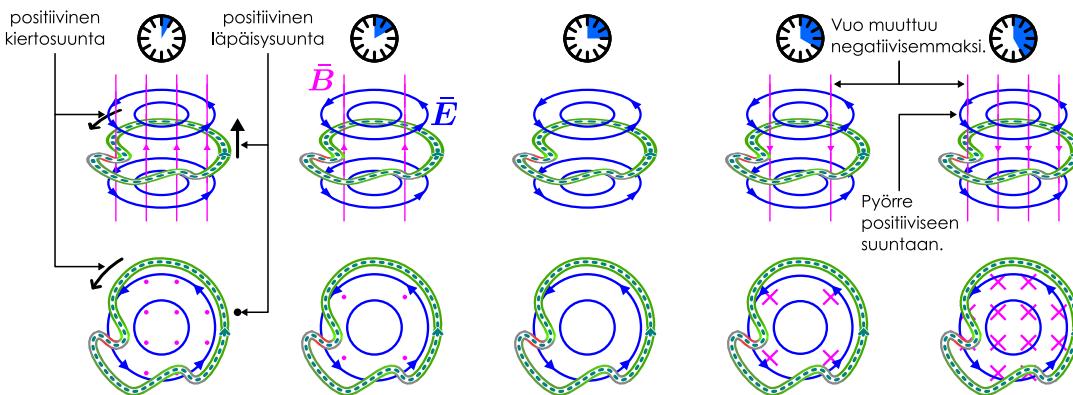
Aikaisemmin olemme tarkastelleet vain sähkövarauksien luomia sähkökenttiä, joita kuvaavat Gaussin laki. Tämän lain mukaan positiiviset sähkövaraukset ovat sähkökentän lähteitä eli kenttäviivojen alkupisteitä ja negativiset varaukset ovat sähkökentän nieluja eli kenttäviivojen loppupisteitä. Kaikki näkemämme kentät ovat lähteneet positiivisista varauksista (tai äärettömyysistä) ja loppuneet negatiivisiin varauksiin (tai äärettömyksiin). Kuvan 13.12 (c) kenttä *ei kuitenkaan ole tällainen*. Koska tämä sähkökenttä vetää elektroneja liikkumaan metallirenkaan ympäri, kentän täytyy osoittaa renkaan tangentin suuntaan. Tällöin *kenttäviivat kuitenkin muodostavat renkaan suunnassa kiertävän pyörteen*. Sähkövarausten luomat sähkökentät ovat aina konservatiivisia ja siis *pyörteettömiä*, mutta tämä muuttuvaan magneettikenttään liittyvä sähkökenttä muodostaa *pyörteen*. Kenttä on siis erilainen kuin varauksista lähtevät sähkökentät, ja sitä täytyy kuvata jokin uusi fysiikaalinen laki. Tämä laki on nimeltään **Faradayn laki sähkökentille**.

Voimme johtaa Faradayn lain sähkökentille Faradayn induktiolain avulla. Tarkastellaan tästä varten mielellalaisen muotoista johdinsilmukkaa omassa lepokoordinaatistossaan. Silmukkaan indusoituu jännite, jos magneettivuo sen läpi muuttuu ajan kuluessa,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (13.59)$$

ja koska silmukka on tässä koordinaatistossa paikoillaan, vuon muutos voi johtua vain muuttuvasta magneettikentästä.

Kuva 13.13: Faradayin laki: muuttuva magneettikenttä luuo pyörteisen sähkökentän.



Indusoitunut jännite tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jos varaus q kiertää silmukan ympäri positiiviseen kiertosuuntaan, sen energian täytyy muuttua määräni

$$\Delta E = q\mathcal{E}. \quad (13.60)$$

Toisaalta varaukset saavat energiansa siitä, että muuttuvaan magneettikenttään liittyvä pyörteinen sähkökenttä tekee silmukassa oleviin varauksenkuljettajiin työtä. Erityisesti jos varaus q kulkee kerran silmukan ympäri, siihen tehty työ saadaan varaukseen kohdistuvan sähköisen voiman viivaintegraalina,

$$W = \oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = \oint q\bar{E} \cdot d\bar{r}. \quad (13.61)$$

Varauksen energian muutoksen täytyy olla yhtä suuri kuin siihen tehdyn työn,

$$\Delta E = W, \quad (13.62)$$

joten muuttuvan magneettivuon ja sähkökentän viivaintegraalin välillä täytyy olla yhteyts

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \mathcal{E} = \frac{1}{q}\Delta E = \frac{1}{q}W = \oint \bar{E} \cdot d\bar{r}. \quad (13.63)$$

Huomaa, että nyt jännite on positiivinen, kun silmukassa kuljetaan sähkökentän suuntaan. Tavallisesti jännitteellä tarkoitetaan potentiaalieroaa, jolloin sähkökenttä osoittaa pienenevän potentiaalin suuntaan. Esimerkiksi vastuksissaan virta kulkee sähkökentän suuntaan ja potentiaali pienenee virran kulkusuunnassa, jolloin potentiaali siis pienenee sähkökentän suuntaan siirryttäässä ja jännite on negatiivinen. Samoin tapahtuu kondensaattoreissa. *Potentiaali liittyy kuitenkin aina varausten luomiin konservatiivisiin sähkökenttiin.* Muuttuvan magneettikentän luoma pyörteinen sähkökenttä ei ole konservatiivinen eikä sitä voi kuvata potentiaalin avulla. Niinpä tähän asti pätenyt sääntö, jonka mukaan sähkökenttä osoittaa aina potentiaalin pienemissuuntaan, ei enää pädekkään tarkasteltaessa pyörteisiä sähkökenttiä.

Tässä tarkastelussa magneettivuo laskettiin jonkin mielivaltaisen muotoisen suljetun, levossa olevan johdin-silmukan läpi ja viivaintegraali laskettiin kiertämällä kyseinen silmukka kerran ympäri. Mutta johdinsilmukka oli tässä analyysissä vain ajattelun apuväline. Todellisuudessa muuttuva magneettikenttä luuo ympärilleen pyörteisen sähkökentän riippumatta siitä, onko kentässä johdinsilmukkaa vai ei. Edellä kuvattu yhtälö (13.63) pääte siis *mille tahansa todelliselle tai kuvitteelliselle suljetulle polulle.*

Yhteenvedona Faradayin laki sähkökentille sanoo siis seuraavaa. Muuttuvaan magneettikenttään liittyy pyörteinen sähkökenttä, jonka suunta on oikean käden säännölle vastakkainen: Jos oikean käden peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suunnan, sähkökentän pyörre osoittaa koukistettuihin sormiin nähdien vastakkaiseen suuntaan. Jos avaruuteen valitaan millainen tahansa muuttumaton suljettu polku, *polkuun kiertävän sähkökentän viivaintegraali on aina yhtä suuri kuin polun läpi kulkevan magneettivuon muutosnopeus,*

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.64)$$

Tämä on Gaussin lain tapaan sähkömagneettisen kentän peruslaki, joka pätee kaikissa koordinaatistoissa sekä klassisessa fysiikassa että suhteellisuusteoriassa.

Faradayin lakia on havainnollistettu kuvassa 13.13. Kuvassa magneettikenttä osoittaa aluksi ylöspäin (kohti katsojaa). Kenttä kuitenkin ensin heikkenee ja muuttuu sitten vastakkaisuuntaiseksi voimistuvaksi kentäksi.

Kentän muutoksen suunta on kuvasarjassa koko ajan alaspäin (katsojasta pois päin), jolloin muuttuva magneettikenttä luo vastapäivään kiertävän pyörteisen sähkökentän. Kentät ovat tyhjässä avaruudessa, eikä kuvalla siis ole mitään varauksia, joihin kentät voisivat kohdistaa voimia. Kuvaan on kuitenkin piirretty kuvitteellinen polku, jonka kiertosuunta on valittu vastapäivään. Koska sähkökenttä muodostaa vastapäivään kiertävän pyörteen, kentän viivaintegraali tällä polulla on positiivinen. Faraday laki sanoo, että sähkökentän viivaintegraalin tällä polulla (kuten millä tahansa muullakin suljetulla polulla) täytyy olla yhtä suuri kuin polun läpi kulkevan magneettivuon muutosnopeus.



13.20 Miten kuva 13.13 muuttuisi, jos magneettivuon muutos tapahtuisi kaksinkertaisella nopeudella eli jos ensimmäisen ja viidennen kuvan välillä kulunut aika puolittuisi? Miten tämä muuttuisi sähkökentän viivaintegraalia ja kenttäviivaesitystä?

esimerkki 13.3

Faraday laki

Sylinterin muotoisessa alueessa (säde 0.10 m) on magneettikenttä, mutta alueen ulkopuolella magneettikenttää ei ole. Kenttä on alueessa homogeeninen, ja kentän voimakkuus on aluksi 0.035 T. Kentän voimakkuus kuitenkin muuttuu tasaisesti ja ajan 0.050 s kuluttua kenttä on yhtä voimakas mutta vastakkaisuuntainen. Mikä on sähkökentän voimakkuus sylinterin pinnalla?

TILANNE Piirretään tilanteesta kuva. Merkitään sylinterin sädettä $r = 0.10$ m, magneettikentän alkuvoimakkuutta $B = 0.035$ T ja kentän käantymiseen kuluvaa aikaa $\Delta t = 0.050$ s. Valitaan kentän alkuperäinen suunta positiiviseksi suunnaksi. Kuvalla tämä suunta on kohti katsojaa.

SUUNNITELMA Muuttuvaan magneettikenttään liittyy Faraday lain mukainen pyörteinen sähkökenttä, ja induoituneen sähkökentän viivaintegraali sylinterin reunan ympäri on yhtä suuri kuin sylinterin läpäisevän magneettivuon muutosnopeus. Koska systeemi on sylinterisymmetrisen, sähkökentän voimakkuuden täytyy olla sylinterin pinnalla vakio, ja kentän on myös oltava pinnan tangettiin suuntainen, jolloin viivaintegraalin arvo on sama kuin kentän voimakkuuden ja sylinterin ympäryysmitan tulo.

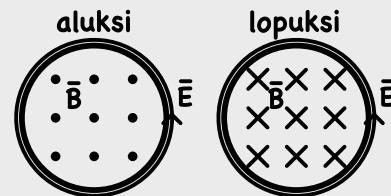
Magneettivuo on homogenisen kentän tapauksessa kentän voimakkuuden ja tarkasteltavan pinnan kenttään nähdyn kohtisuoran alan eli tässä sylinterin poikkipinta-alan tulo. Nyt kentän voimakkuus muuttuu tasaisesti positiivisesta negatiiviseksi, joten magneettivuo muuttuu positiivisesta negatiiviseksi. Faraday ja Lenzin lakienvälinen induoituneen sähkökentän täytyy siis muodostaa pyörre positiiviseen suuntaan (kuvalla vastapäivään).

Magneettivuo on aluksi $\Phi_B = AB = \pi r^2 B$, ja koska lopuksi vuo on $-\Phi_B$, vuon muutos on $\Delta\Phi_B = -2\Phi_B = -2\pi r^2 B$. Faraday laki mukaan sähkökentän viivaintegraali on

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (13.65)$$

ja toisaalta sylinterisymmetrian ja viivaintegraalin määritelmän perusteella

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = LE = 2\pi r E. \quad (13.66)$$



RATKAISU Sähkökentän voimakkuudeksi sylinterin pinnalla ratkeaa

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{Br}{\Delta t} = \frac{0.035 \text{ T} \cdot 0.10 \text{ m}}{0.050 \text{ s}} = 0.070 \text{ V/m.} \quad (13.67)$$

ARVIOINTI Ratkaisuna yksiköksi saadaan sähkökentän yksikkö

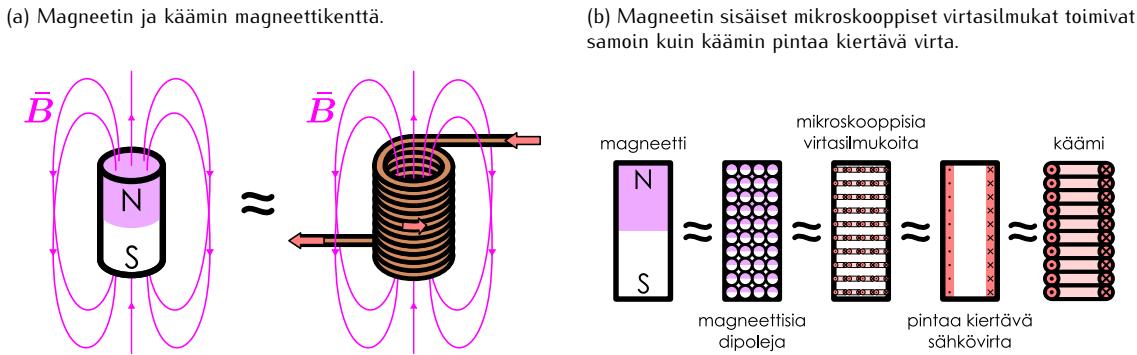
$$[E] = \frac{[B][r]}{[t]} = \frac{\text{Tm}}{\text{s}} = \frac{\text{kgm}}{\text{As}^3} = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (13.68)$$

Indusoitunut sähkökenttä on hyvin heikko. Jos sylinterin pintaa kiertäisi metallinen renkas, renkaan pituus olisi noin $L = 2\pi r = 0.6$ m ja tämä kenttä tuottaisi renkaaseen jännitteen $\mathcal{E} = EL = 40$ mV. Todellisuudessa merkittävästi induktiojäntiteitä saadaankin aikaan niin, että yhden renkaan sijaan johdin kierretään useille kierroksille, jolloin kuhunkin kierrokseen induoituvat jäntitteet lasketaan yhteen. Tässä tilanteessa sata kierrosta riittäisi tuottamaan kokonaisjännitteen $100 \cdot 40 \text{ mV} = 4 \text{ V}$, mikä on aivan järkevä kokoluokka. Seuraavaksi tutkimmekin tarkemmin tällaisten silmukoille kierrettävien johdinten induktio ominaisuuksia.



13.21 Selitä omin sanoin Faraday laki sähkökentille. Milloin sähkökentässä voi olla pyörteitä? Miksi tämä riippuu valitusta koordinaatistosta? Miten tämä liittyy induktioon?

Kuva 13.14: Hyvin monelle kierrokselle kierretty virtajohdin muodostaa käämin eli kelan. Käämin magneettikenttä on samanlainen kuin sauvamagneetin kenttä.



13.3 Induktanssi

Induktioilmiö on teknologisesti erittäin tärkeä, koska sen avulla voidaan muuntaa makroskooppisten kapaleiden liikkeen energiaa varauksenkuljettajien sähköiseksi potentiaalienergiaksi. Nykyisin merkittävä osa kaikesta ihmisten tuottamasta energiasta muutetaankin induktioon perustuvilla generaattoreilla sähköiseen muotoon.

Induktion tekniikan merkitys ei kuitenkaan rajoitu vain generaattoreihin, sillä kaikki sähkövиррат synnyttävät magneettikenttiä ja kaikki muuttuvat magneettikentät synnyttävät pyörteisiä sähkökenttiä. Siispä muuttuvat sähkövиррат voivat synnyttää sähkökenttiä, jotka voivat muuttaa sähkövirtoja, ja näin siis *sähkövиррат voivat vaikuttaa toisiaan ja itseensä*. Tätä ominaisuutta kutsutaan **induktanssiksi**, ja tutustumme seuraavaksi sen vaikutuksiin virtapiireissä.

Käämit

Yksittäinen virtajohdin ei tavallisesti voi tuottaa kovin voimakasta magneettikenttää, sillä voimakkaiden magneettikenttien tuottaminen vaatii hyvin suuria sähkövirtoja. Monta rinnakkain kulveva johdinta voivat kuitenkin tuottaa toisiaan vahvistavat magneettikentät, jolloin niiden yhdessä luoma kenttä voi olla varsin voimakas. Myös johdinsilmukalla voidaan tuottaa melko voimakas kenttä, koska silmukan eri osien tuottamat magneettikentät vahvistavat toisiaan silmukan sisällä.

Jos haluamme luoda voimakkaan magneettikentän, voimme hyödyntää kumpaakin ilmiötä kiertämällä johtimen rullalle kuten kuvassa 13.14 (a) on näytetty. Näin syntyy **käämi** eli **kela**. Kyseessä on sähköinen komponentti, joka luo sisälleensä voimakkaan magneettikentän. Käämi on tässä mielessä hiukan samantyypinen komponentti kuin kondensaattori, joka luo sisäänsä sähkökentän.

Käämin jokaisen kierroksen voi ajatella muodostavan yhden johdinsilmukan, jonka magneettikenttä noudattaa oikean käden säätöä kuten opimme jo kuvasta 12.18. Koska silmukat ovat käämissä lähekkäin, niiden magneettikentät vahvistavat toisiaan synnyttäen käämin läpi kulkevan voimakkaan magneettikentän. Magneettikentän kenttäviivat muodostavat suljettuja silmukoita, joten käämin läpi kulkevat kenttäviivat kiertävät käämin ulkopuolella takaisin lähtöpisteesensä. Käämin sisällä kulkee yhtä monta kenttäviivaa kuin sen ulkopuolelle, joten kenttäviivojen *tilveys* on käämin sisällä suuri ja sen ulkopuolella pieni.

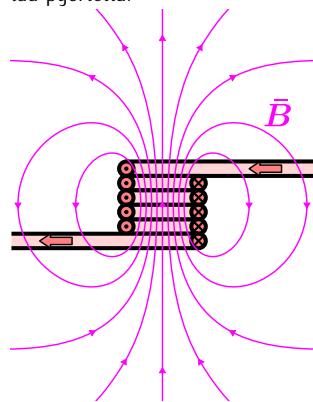
Käämin magneettikenttä on itse asiassa hyvin samanlainen kuin samankokoisen sauvamagneetin magneettikenttä, kuten kuvasta 13.14 nähdään. Tämä ei ole sattumaa. Sauvamagneetin magneettisuushan on magneetin sisältämien lukemattomien mikroskooppisten magneettisten dipolioiden ansiota, ja näiden dipolioiden voi ajatella olevan mikroskooppisia virtasilmukoita. Magneetin sisällä vierekkäisiin virtasilmukoihin liittyvät sähkövиррат kulkevat vastakkaisiin suuntiin, jolloin niiden vaikutus magneettikenttään likimain kumoutuu. Magneetin pinnalla näin ei kuitenkaan käy, koska pinnalla olevilla virtasilmukoilla ei ole vierustoveria yhdellä puolellaan. Niinpä virtasilmukat tuottavat yhdessä likimain samanlaisen kentän kuin mitä magneetin pintaan kiertävä sähkövirta tuottaisi. Käämissä todella kiertää sähkövirta, joten käämin magneettikentän täytyy olla samankaltainen kuin samanmuotoisen magneetin magneettikenttän.

Lyhyen käämin magneettikentän täsmällinen laskeminen on melko työlästä aivan kuten pienien kondensaattorin sähkökentän laskeminen. Tästä syystä todellisille kondensaattoreille käytetään usein äärettömän suuren kondensaattorin mallia, jonka mukaan kondensaattorin sähkökenttä on homogeeninen ja rajottunut täsmälleen kondensaattorilevyjen välin. Samaan tapaan äärettömän pitkän käämin magneettikenttä on paljon yksinkertaisempi kuin lyhyen käämin kenttä, ja siksi hyvin pitkän käämin mallia käytetään myös oikeille käämeille, kun se on mahdollista. Kuvaan 13.15 on piirretty lyhyen ja pitkän käämin magneettikentät, ja

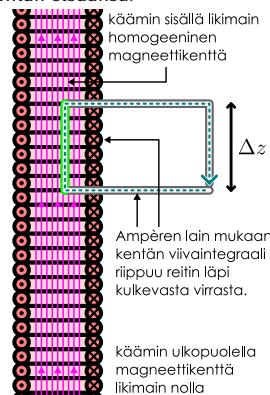
vaikka käämin ulkopuolella lyhyen käämin kenttä on monimutkainen (kuva (a)), käämin sisällä se on hyvin samankaltainen kuin pitkän käämin kenttä (kuva (b)).

Kuva 13.15: Lyhyen ja hyvin pitkän käämin magneettikenttä.

(a) Lyhyen käämin kenttä muodostaa pyörteitä.



(b) Hyvin pitkä käämi vangitsee kentän sisäänsä.



Kuva 13.15 (b) on valittu tätä varten sulkettu polku, jonka leveys käämin suunnassa on L . Jos käämin muodostavassa johtimessa kulkee virta i ja käämässä on N kierrosta pituudella L , polun läpi kulkee kokonaisvirta

$$i_{\text{kokonais}} = Ni. \quad (13.69)$$

Toisaalta Ampéren lain mukaan magneettikentän viivaintegraalin polun ympäri kuljettaessa täytyy olla verrannollinen tähän virtaan,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i_{\text{kokonais}}. \quad (13.70)$$

Koska äärettömän pitkä käämi on sylinterisymmetrisen, sen magneettikentällä ei voi olla missään radiaalikomponenttia vaan kentän täytyy osoittaa kaikkialla käämin pituussuuntaan. Ku-

13.22 (a) Riippuko kuvan 13.15 (b) polun läpi kulkeva kokonaisvirta polun vaakasuuntaisesta leveydestä?

(b) Mikä on viivaintegraali pitkin polun vaakasuoria sivuja?

(c) Mikä on viivaintegraali pitkin polun pystysuoria, käämin ulkopuoleista sivua, jos tämä sivu on hyvin kaukana käämistä? Entä jos sivu on lähellä käämiä?

(d) Perustele tämän perusteella, miksi magneettikentän täytyy olla käämin sisällä homogeenninen ja käämin ulkopuolella nolla.

Yllä esitetyn päätelytehtävän lopputulos on se, että magneettikentän täytyy olla käämin ulkopuolella täsmälleen nolla ja käämin sisällä homogeenninen. Äärettömän pitkä käämi siis vangitsee magneettikentän sisäänsä aivan kuten äärettömän suuri kondensaattori vangitsee sähkökentän sisäänsä. Tällöin viivaintegraali kuvan 13.15 (b) polku pitkin on nolla kaikkialla muualla paitsi käämin sisällä kulkevalla sivulla. Tämä sivu on magneettikentän suuntainen, joten viivaintegraali sitä pitkin on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja sivun pituuden tulo,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = B \Delta z, \quad (13.71)$$

ja niinpä Ampéren lain mukaan

$$B \Delta z = \mu_0 N i. \quad (13.72)$$

Tästä voidaan ratkaista edelleen käämin sisäinen magneettikenttä

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.73)$$

Käämin kenttä on siis suoraan verrannollinen käämässä kulkevan virran voimakkuuteen sekä kierrosten määärään pituusyksikköä kohden, $N/\Delta z$. Kentän voimakkuus ei riipu esimerkiksi käämin silmukoiden säteestä.

13.23 Miten käämin magneettikentän kenttiäviivaesitys muuttuu, jos käämin (a) halkaisija, (b) pituus, (c) kierrosten tihleys tai (d) virta kaksinkertaistuu, kun muut suureet pysyvät vakioina?

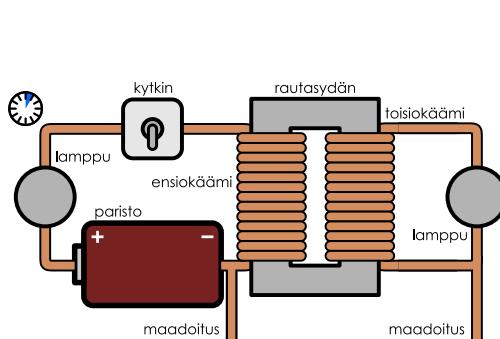
Keskinäisinduktanssi

Käämien avulla voidaan siis tuottaa voimakkaita magneettikenttiä, ja näiden kenttien voimakkuus on suoraan verrannollinen käämässä kulkevan sähkövirran voimakkuuteen. Niinpä kun käämässä kulkeva sähkövirta muuttuu, käämin luoma magneettikenttäkin muuttuu, ja tällä tavalla voidaan tuottaa induktiojännite *toiseen käämin*. Toisin sanoen virran kulun muuttuminen yhdessä käämässä voi muuttaa virran kulkua täysin erillisessä käämässä.

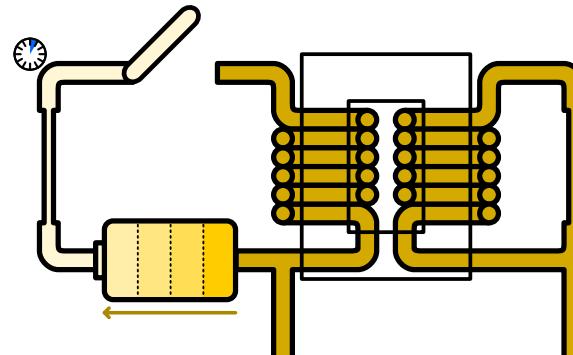
SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.16: Keskinäisinduktanssi. Yhdessä käämässä kulkeva muuttuva virta luo muuttuvan magneettikentän, joka indusoi jännitteen toiseen käämään.

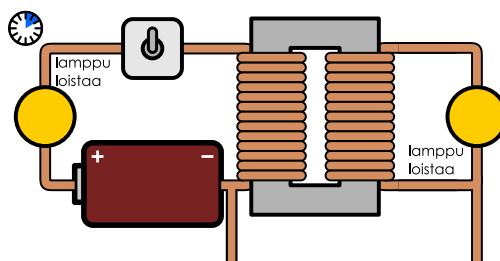
(a) Kytkin auki, lamput eivät pala.



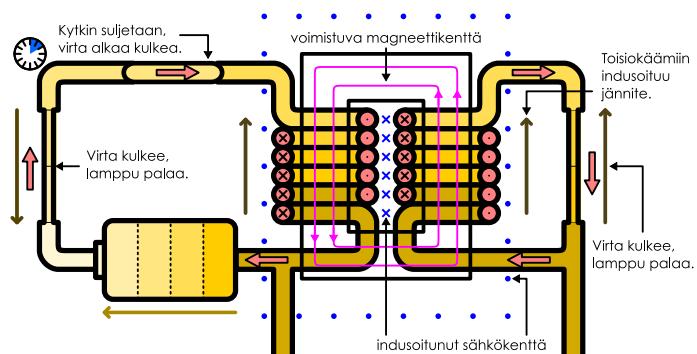
(d) Potentiaali toisiopiirissä vakio.



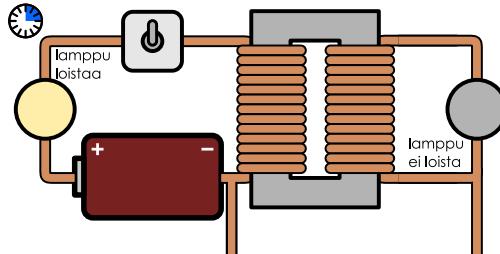
(b) Kytkin suljetaan, molemmat lamput palavat.



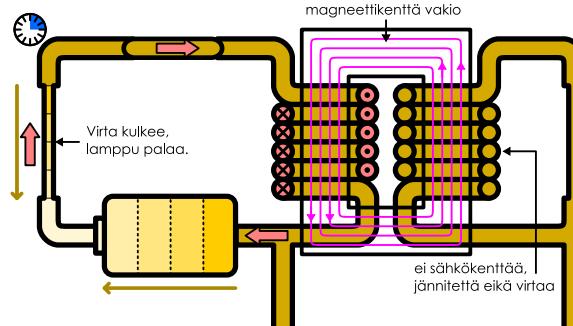
(e) Toisiokäämiin indusoituu jännite.



(c) Hetken päästä vain ensiöpiirin lampu palaa.



(f) Potentiaali toisiopiirissä vakio.



Kuvassa 13.16 on esimerkki tästä ilmiöstä. Kuvassa on paristosta, lampusta, kytkimestä sekä käämistä koostuva sähköpiiri, jota kutsutaan *ensiöpiiriksi*. Kuvassa on myös toinen, pelkästään käämistä ja lampusta koostuva piiri, joka on nimeltään *toisioppiiri*. Käämät on kiedottu yhteen raudasta valmistetun renkaan eli rautaytimen ympärille, mutta johdinten pinnoilla on eristettä niin, että käämessä kulkeva sähkövirta ei pääse kulkemaan täitä rautaydintä pitkin.

Aluksi ensiöpiirin kytkin on auki, jolloin piirissä ei kulje virtaa (kuva (a)). Kun kytkintä käännetään, virta alkaa kulkea, mikä saa ensiöpiirissä olevan lampun loistamaan (kuva (b)). Samalla kuitenkin *lamppu sytyyy myös toisioppiirissä*, joka ei ole suorassa yhteydessä paristoon. Hetken päästä toisioppiirin lampu sammuu ja lopulta vain ensiöpiirin lampu palaa (kuva (c)).

Tarkastellaan ilmiön ymmärtämiseksi piirien virtuja ja potentiaaleja sekä käämienv luomia sähkö- ja magneettikenttiä. Paristo ylläpitää ensiöpiirissä potentiaalieroaa, mutta aluksi kytkin on auki, jolloin käämä on vakiopotentiaalissa (kuva (d)). Toisioppiiri on tällöin kauttaaltaan samassa potentiaalissa. Kun kytkin suljetaan, ensiöpiirissä ja erityisesti sen käämässä alkaa kulkea virta (kuva (e)). Mitä suurempi virta käämässä kulkee, sitä voimakkaamman magneettikentän se synnyttää, ja koska käämä sisällä on rautakappale, käämä magneettikenttä saa raudan magnetoitumaan. Magnetoituminen voimistaa käämä luomaa magneettikenttää entisestään ja lisäksi rautakappale pyrkii magnetoitumaan niin, että magneettikenttä pysyy pääasiassa sen sisällä. Ensiöpiirin käämä synnyttää siis rautakappaletta pitkin kiertävän magneettikentän, joka voimistuu ajan kuluessa ja ensiöpiirissä kulkevan virran kasvaessa.

Rautasydän ohjaa tämän voimistuvan magneettikentän toisioppiirissä olevan käämän läpi, jolloin tämän kää-

min jokaiseen silmukkaan indusoituu Faradayin induktiolain mukaisesti jännite. Yhteen silmukkaan indusoitunut jännite voi olla melko pieni, mutta koska silmukat ovat käämissä peräkkäin, niihin indusoituneet jännitteet summautuvat yhteen ja lopputuloksena käämiin voi indusoitua suuri jännite. Indusoitunut jännite tuottaa potentiaalieron toisiokäämisenä olevan lampun napojen välille, jolloin lampun läpi kulkee sähkövirta ja lamppu loistaa.

Hetken päästä ensiöpürissä kulkeva virta saavuttaa maksiminsa, minkä jälkeen myöskään magneettikenttä ei enää muutu (kuva (f)). Induktio edellyttää muuttuvaa magneettivuota, joten vaikka toisiopirin läpi kulkee voimakas magneettikenttä, tähän kenttään liittyvä magneettivuo ei enää muutu ajan kuluessa eikä toisiopirin käämiinkään siis indusoidu enää jännitettä. Toisiopiri on nyt jälleen vakiopotentiaalissa, siinä ei kulje sähkövirta, eikä pürin lamppu loista.



13.24 Mitä havaitaan ja miksi, jos ensiöpürin kytkin jälleen avataan?

Tämä koe osoittaa, kuinka toisiopirin voidaan indusoida jännite muuttamalla ensiöpürissä kulkevaa sähkövirtaa, ja tätä ominaisuutta kutsutaan **keskinäisinduktanssiksi**. Ilmiötä hyödynnetään esimerkiksi muuntajissa, joissa ensiöpürissä muuttuva jännite tuottaa muuttuvan jännitteentä myös toisiopirin. Jännitteiden suhde rüppuu pürrien keskinäisinduktanssistä, joten sopivalla muuntajalla voidaan muuttaa suuri jännite pieneksi tai pääinvastoin.

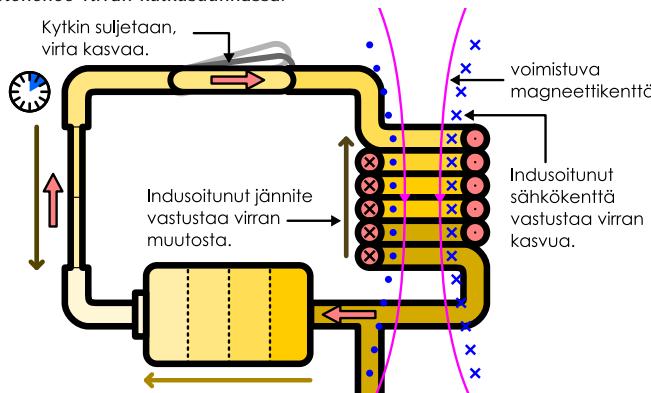
Itseinduktanssi

Keskinäisinduktanssi vaikuttaa kahden erillisen johtimen välillä, mutta induktanssi on tärkeä ilmiö myös yksittäisissä käämeissä. Käämissä kulkeva sähkövirta nimittäin tuottaa magneettikentän käämin itsensä sisään, ja jos virta muuttuu, myös magneettikenttä muuttuu. Tällöin käämin läpäisevä magneettivuo muuttuu, ja käämiin indusoituu Faradayin induktiolain mukaisesti jännite. *Käämi itse voi siis luoda muuttuvan magneettikentän, joka indusoi siihen itseensä jännitteen.* Tätä kutsutaan **itseinduktanssiksi**.

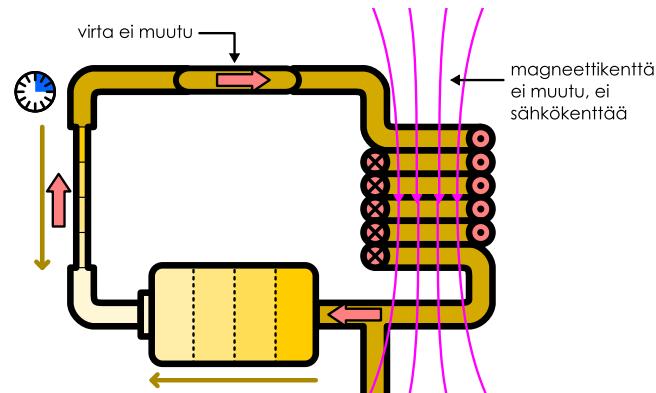
Itseinduktanssi-ilmiö on havainnollistettu kuvassa 13.17, jossa tarkastellaan vain kuvan 13.16 ensiöpürin. Pürin kuuluu siis paristo, lamppu, kytkin ja käämi, mutta käämin vieressä ei ole toista käämiä. Kytkin on aluksi auki, jolloin pürissä ei kulje sähkövirtaa. Kuvassa (a) kytkin suljetaan ja virta alkaa kulkea pürin ympäri. Erityisesti käämissä kulkeva virta luo käämin läpi kulkevan magneettikentän. Kuvassa virta kulkee käämissä niin pään, että magneettikenttä osoittaa alas päin. Lisäksi koska virta kasvaa (virta oli aluksi nolla), magneettikentän täytyy voimistua, jolloin magneettikentän muutoksen suunta on myös alas päin. Tähän muuttuvaan magneettikenttään liittyy pyörteinen sähkökenttä, jonka suunta on oikean käden säädön näiden vastakkainen. Ts. jos oikean käden peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suuntaan eli alas päin, sähkökenttä kiertää pääinvastaiseen suuntaan kuin oikean käden sormet. Tämä tarkoittaa sitä, että sähkökenttä kiertää käämissä pääinvastaiseen suuntaan virran kulkusuuntaan nähdyn. Niinpä sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, ja varauksenkuljettajien energia pienenee niiden kulkiessa käämin läpi. Tämä tarkoittaa myös sitä, että käämissä on negatiivinen jännite eli potentiaali pienenee, kun käämin läpi kuljetaan virran kulkusuunnassa.

Kuva 13.17: Itseinduktanssi. Kun virta alkaa kulkea käämissä, se synnyttää muuttuvan magneettikentän ja indusoi pyörteisen sähkökenttää, joka vastustaa aina virran kasvua.

(a) Virta kasvaa, sähkökenttä vastustaa virran kasvua, potentiaali käämissä pienenee virran kulkusuunnassa.

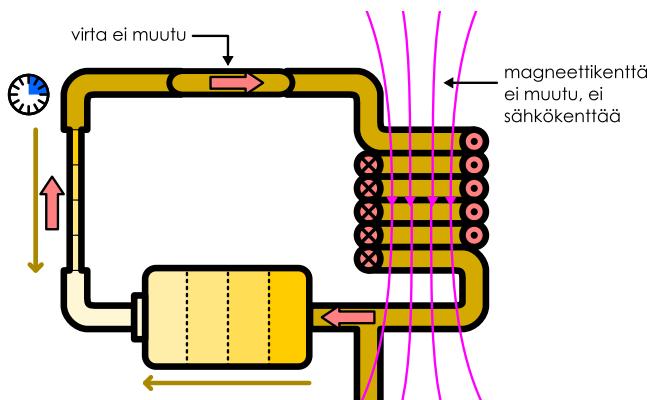


(b) Virta vakio, ei sähkökenttää, potentiaali käämissä vakio.

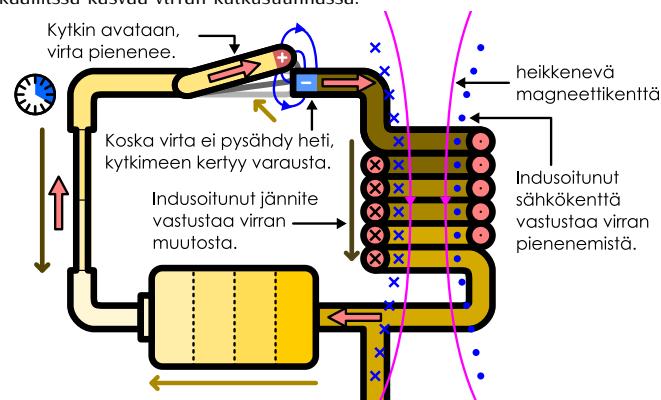


Kuva 13.18: Itseinduktanssi. Kun virta pienenee käämissä, se synnyttää muuttuvan magneettikentän ja indusoi pyörteisen sähkökentän, joka vastustaa virran pienemistä.

(a) Virta vakiota, ei sähkökenttää, potentiaali käämissä vakiota.



(b) Virta pienenee, sähkökenttää vastustaa virran pienemistä, potentiaali käämissä kasvaa virran kulkusuunnassa.



13.25 Perustele se, että kuvan 13.17 (a) käämissä on virran kulkusuuntaan kuljettaessa negatiivinen jännite (a) Lenzin lailla, (b) Faradayin induktiolalla.

Kuvassa (a) on siis virran kulkusuuntaan kuljettaessa positiivinen jännite paristossa ja negatiivinen jännite sekä lampussa että käämissä. Toisin sanoen potentiaali kasvaa, kun siirrytään pariston läpi, mutta se pienenee, kun siirrytään lampun ja käämin läpi. Lampussa potentiaalin muutos noudattaa Ohmin lakiä ja on suoraan verrannollinen lampun läpi kulkevaan sähkövirtaan. Käämissä potentiaalin muutos ei kuitenkaan riipu virran suuruudesta itsestään, koska virran kulkua ei vastusta resistanssi. (Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että käämi on tehty ideaalisesta johteesta.) Sen sijaan virran kulkua käämissä vastustaa käämiin indusoitunut sähkökenttä, joka riippuu magneettikentän muutosnopeudesta. Magneettikentän muutosnopeus puolestaan riippuu siitä, kuinka nopeasti käämissä kulkeva virta muuttuu, joten *käämin jännitteen täytyy riippua käämissä kulkevan virran muutosnopeudesta*.

Kuvan (a) tilanteessa virta kasvaa. Mitä enemmän aikaa kuluu, sitä suuremmaksi virta tulee, ja sitä suurempi potentiaaliero lampun napojen välille tulee. Potentiaalin muutoksen lampussa ja käämissä on kuitenkin oltava aina yhteensä yhtä suuri kuin pariston tuottama jännite, koska Kirchhoffin silmukkasäännön mukaisesti potentiaalin täytyy palata takaisin alkuarvoonsa, kun piirin ympäri kuljetaan yksi kokonainen kierros. Siispä virran kasvaessa lampun jännite kasvaa ja käämin jännitteen täytyy pienentyä. Lopulta päädytään kuvan (b) tilanteeseen, jossa virta on saavuttanut maksimiarvonsa. Tällöin virta ei enää muudu, jolloin kääminkään ei enää indusoida jännitettä. Tässä tilanteessa pariston ja lampun napojen välillä on itsesarvoltaan yhtä suuret potentiaalierot ja käämin navat ovat samassa potentiaalissa.

Jos kytkin sitten avataan, piiri käyttäätyy kuten kuvassa 13.18. Jos piirissä ei olisi käämiä, sähkövirran kulku lakkaisi välitömästi. Käämin läpi kulkeva virta ei voi kuitenkaan muuttua mielivaltaisen nopeasti, koska mitä nopeammin virta muuttuu, sitä suurempi jännite käämiin indusoituu. Lisäksi Lenzin lain mukaisesti indusoituneen jännitteen täytyy aina vastustaa induktion tuottavaa muutosta eli käämin tapauksessa virran muutosta, joten *käämi aina vastustaa sähkövirran muutoksia*. Kun muut muutokset piirissä aiheuttavat sähkövirran kasvun, käämin induktanssi vastustaa virran kulkua. Jos taas piirin muut komponentit pyrkivät pienentämään virtaa, käämi vastustaa virran pienemistä ja pyrkii ylläpitämään virran kulun.



13.26 Induktanssin voi ajatella antavan sähkövirralle inertiaa. Selitä miksi.

Magneettikenttä käämissä osoittaa alaspäin myös kuvassa 13.18, koska virran suunta on sama kuin kuvassa 13.17. Kuitenkin koska virta pienenee, magneettikentän *muutoksen* suunta on ylöspäin, ja niinpä magneettikenttää liittyvä pyörteinen sähkökenttä kiertää nyt vastakkaiseen suuntaan kuin kuvassa 13.17. Erityisesti sähkökenttä kiertää kuvassa 13.18 samaan suuntaan kuin mihin sähkövirta käämissä kulkee, jolloin sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin positiivista työtä ja työntää niitä eteenpäin. Näin induktanssi pyrkii pitämään varauksenkuljettajat liikkeessä vaikka kytkimen avaaminen pyrkii pysäytämään virran kulun.

Kytkimen aukaisu on tässä vaiheessa jo katkaissut virtapiirin, joten varaukset eivät pääse kiertämään piirin ympäri. Kuitenkin koska käämi estää virran välittömän pysähtymisen, jonkin verran varausta siirtyy vielä kytkimen avaamisen jälkeenkin. Tämä tarkoittaa sitä, että kytkimen toiselle puolle kerääntyy hieman positiivista varausta ja toiselle negatiivista varausta, jolloin kytkin toimii kuin hyvin pieni kondensaattori. Jos

käämin itseinduktanssi on pieni, varausta kertyy vain vähän, ja tämä varaus siirtyy pian takaisin alkuperäiselle paikalleen. Jos käämin itseinduktanssi on suuri, varausta voi kertyä paljon. Tällöin kytkimeen voi syntyä niin suuri jännite ja niin voimakas sähkökenttä, että ilman eristävyys häviää. Tällöin ilmastakin tulee hetkellisesti johde ja varaukset pääsevät tasoittumaan siirtymällä kytkimen läpi ilman halki. Tätä kutsutaan *läpilyönniksi*, ja se nähdään kytkimen läpi iskeväänä pienenä "salamana".

Johdetaan vielä käämin itseinduktanssia kuvaava matemaattinen laki. Kuvataan käämiä hyvin pitkän käämin mallilla (13.73), jonka mukaan käämin sisällä oleva magneettikenttä on likimain homogeeninen ja voimakkudeltaan

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i, \quad (13.74)$$

missä N on nyt käämin kierrosten kokonaismäärä ja Δz on käämin pituus. Jos käämin yhden silmukan pintaala on A , magneettivuo tällaisen silmukan läpi on

$$\Phi_B = BA = \frac{NA}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.75)$$

Käämin jokainen kierros muodostaa johdinsilmukan, jolloin Faradayn induktiolain perusteella yhteen kierrokseen indusoituu jännite

$$\mathcal{E}_{\text{kierros}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{NA}{\Delta z} \mu_0 \frac{di}{dt} \quad (13.76)$$

ja koko käämiin indusoituva jännite on

$$\mathcal{E} = N\mathcal{E}_{\text{kierros}} = -\frac{N^2 A}{\Delta z} \mu_0 \frac{di}{dt}. \quad (13.77)$$

Indusoitunut jännite on siis suoraan verrannollinen käämin läpi kulkevan virran muutosnopeuteen eli aikaderivaattaan. Yhtälössä esiintyvä verrannollisuuskerroin on käämin ominaisuuksista riippuva vakio, jota kutsutaan käämin itseinduktanssiksi tai vain **induktanssiksi** ja merkitään symbolilla L . Induktanssin avulla lausuttuna käämiin indusoitunut jännite eli potentiaaliero käämin päiden välillä on siis

$$\Delta V = \mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}. \quad (13.78)$$

Induktanssin yksiköllä on erikoisnimi **henry**, ja sitä merkitään symbolilla H , jonka yhteys muihin SI-yksiköihin on

$$H = [L] = \frac{[V][t]}{[i]} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}. \quad (13.79)$$



13.27 Selitä yhtälössä (13.78) esiintyvän miinusmerkin fysikaalinen merkitys.

Yhtälöiden (13.77) ja (13.78) perusteella pitkän, suoran käämin induktanssi on

$$L = \frac{N^2 A}{\Delta z} \mu_0. \quad (13.80)$$

Tämä tulos pätee kuitenkin vain pitkälle suoralle käämille, ja käämin muodon muuttaminen muuttaa myös sen induktanssia aivan kuten kondensaattoriin muodon muuttaminen muuttaa kondensaattorin kapasitanssia. Yhtälö (13.78) kuitenkin pätee yleisesti, ja induktiojännite on verrannollinen virran muutosnopeuteen kaikissa käämeissä.

13.28 Käämin säde on 1 cm, pituus 5 cm ja käämissä on 500 kierrosta.

- (a) Arvioi käämin induktanssi pitkän käämin mallilla.
- (b) Kuinka suuri jännite käämiin indusoituu, jos virta kasvaa nollasta yhteen ampeeriin 10 millisekunnissa?
- (c) Kumpi käämin napa on tällöin korkeammassa potentiaalissa (se, josta virta saapuu, vai se, josta virta poistuu)?

esimerkki 13.4

LR-piiri

Kuvan 13.17 piirin pariston jännite on \mathcal{E} , lampun resistanssi R ja käämin induktanssi L . Miten piirissä kulkeva virta muuttuu ajan funktiona, kun kytkin suljetaan?

TILANNE Tilanne on sama kuin kuvassa 13.17. Pürretään piirikaavio. Oletetaan kaikki komponentit ideaalisiksi. Merkitään piirissä kulkevaa virtaa $i(t)$. Alkutilanteessa virta on nolla, $i(0 \text{ s}) = 0 \text{ A}$, eikä virta voi muuttua yhtäkkiä epäjatkuvasti, koska käämi vastustaa virran nopeita muutoksia.

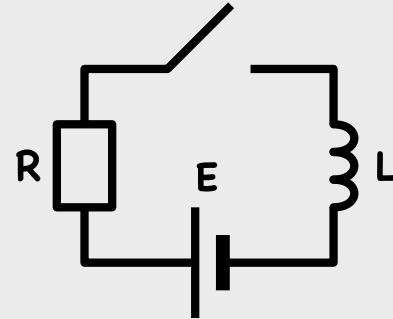
SUUNNITELMA Potentiaaliero pariston napojen välillä on vakio. Potentiaaliero lampun napojen välillä riippuu Ohmin lain mukaisesti resistanssista ja virrasta. Ja potentiaaliero käämin napojen välillä riippuu induktanssin määritelmän mukaisesti induktanssista sekä virran muutosnopeudesta. Kirchhoffin silmukkasäännön perusteella potentiaali palaa takaisin alkuarvoonsa, kun tehdään kierros koko piirin ympäri.

Potentiaaliero paristossa on $\Delta V = \mathcal{E}$, vastuksessa $\Delta V = -Ri$ ja käämissä $\Delta V = -Ldi/dt$. Jänniteyhtälö saa siis muodon

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0, \quad (13.81)$$

joten virtaa kuvaan differentiaaliyhtälö. Yritetään ratkaista tämä yritteellä

$$i(t) = a + be^{-ct}. \quad (13.82)$$



RATKAISU Yritteiden derivaatta on

$$\frac{di}{dt} = i'(t) = -bce^{-ct}, \quad (13.83)$$

joten differentiaaliyhtälö saa muodon

$$\mathcal{E} - R(a + be^{-ct}) + Lbce^{-ct} = 0. \quad (13.84)$$

Ajasta riippuvien ja vakiotermien eroteltulla yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$b(Lc - R)e^{-ct} = -\mathcal{E} + Ra, \quad (13.85)$$

ja tämä toteutuu kaikilla t vain jos yhtälön kumpikin puoli on nolla. Vasen puoli on nolla, jos

$$c = \frac{R}{L}, \quad (13.86)$$

ja oikea puoli on nolla, jos

$$a = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.87)$$

Lisäksi alkuehdon $i(0 \text{ s}) = 0 \text{ A}$ perusteella $a + b = 0 \text{ A}$, joten täytyy olla

$$b = -a = -\frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.88)$$

Piirissä kulkeva virta on siis

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (13.89)$$

ARVIOINTI Ratkaisuna saadun lausekkeen yksikkö on ampeeri ja eksponenttifunktion argumentti on yksikötön kuten pitääkin,

$$[i] = \frac{[\mathcal{E}]}{[R]} = \frac{V}{\Omega} = A, \quad [R][t] = \frac{\Omega}{H}s = \frac{V}{A \text{ Vs}}s = 1. \quad (13.90)$$

Aluksi virta on nolla, koska käämi estää virtaa muuttumasta liian nopeasti. Ajan kuluessa virta kuitenkin lähestyy vakiota

$$i \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - 0) = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (13.91)$$

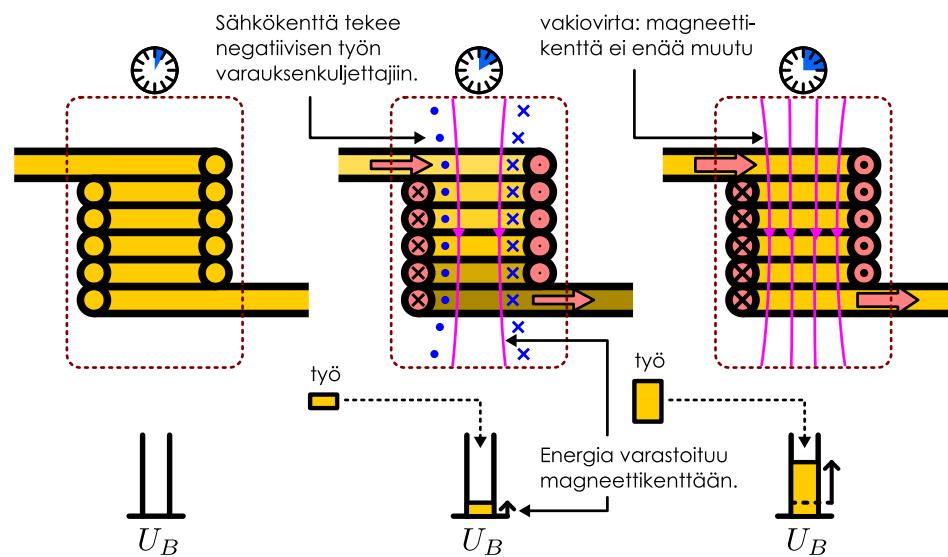
Tämä on järkevää, koska piirin täytyy asettua loppujen lopuksi tilaan, jossa jännite käämissä on nolla (koska virta ei muudu), jolloin potentiaaliero lampussa on itseisarvoltaan yhtä suuri kuin paristossa, $Ri = \mathcal{E}$.

Se, kuinka nopeasti virta lähestyy tästä arvoa, riippuu eksponenttifunktiossa esintyvästä vakiosta L/R . Mitä suurempi induktanssi käämillä on ja mitä pienempi resistanssi lampulla on, sitä kauemmin kestää saavuttaa maksimivirta.



13.29 Selitä omin sanoin, mikä on käämi ja miten keskinäis- sekä itseinduktanssi kuvaavat käämin toimintaa. Miten suuren induktanssin käämi vaikuttaa virtapiirin toimintaan?

Kuva 13.19: Virran kasvaessa käämin luoma magneettikenttä voimistuu, ja muuttuva magneettikenttä luo virran kulkua vastustavan pyörteisen sähkökentän. Sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, jolloin varauksenkuljettajien energia pienenee. Tämä energia varastoituu käämin magneettikenttään.



Magneettikentän energia

Käämien suhde sähkövirtaan ja magneettikenttään on monella tavalla samankaltainen kuin kondensaattoreiden suhde sähkövaraukseen ja sähkökenttään. Kondensaattoreilla voidaan varastoida ja säädellä sähkövarausta, ja koska kondensaattoreiden jännite riippuu niiden varauksesta, kondensaattoreilla voidaan estää jännitteen nopeat vaihtelut. Käämeillä voidaan puolestaan säädellä sähkövirtoja, sillä käämit vastustavat virtojen nopeita muutoksia.

Kondensaattorit luovat sisälleensä sähkökentän ja varastoivat energian tähän kenttään. Käämit puolestaan luovat sisälleensä magneettikentän, ja voisi kuvitella, että magneettikenttääkin varastoituu energian, jos kerran sähkökenttääkin sitä sisältyy. Osoitamme nyt, että näin todella on ja määritämme myös paljonko energian magneettikenttään täsmälleen varastoituu.

Tarkastellaan kuvan 13.19 käämiä. Käämin läpi ei aluksi kulje lainkaan virtaa, mutta ajan kuluessa käämin läpi kulkeva virta kasvaa ja samalla käämin magneettikenttä voimistuu. Lopulta virta saavuttaa jonkin maksimiarvon, minkä jälkeen se on vakio eikä magneettikenttä enää muudu. Kun virta kasvaa, magneettikenttä käämin sisällä voimistuu, ja tähän muuttuvaan magneettikenttään liittyy myös pyörteinen sähkökenttä, joka vastustaa virran kasvua. Jokin ulkoinen tekijä kuitenkin kasvattaa virtaa induktanssista huolimatta, jolloin varaus kulkee käämin läpi sähkökenttään nähden vastakkaiseen suuntaan ja *kenttä tekee varaukseen negatiivista työtä*. Varauksen energia siis pienenee, mikä näkyy myös siitä, että varaus kulkee käämisen laskevan potentiaalin suuntaan.

Energia ei voi kuitenkaan kadota mihinkään, joten jos käämin läpi kulkeva varaus menettää energian, *käämin energian täytyy lisääntyä*. Ideaalisesta johteesta tehdynässä käämisenä ei ole lainkaan resistanssia, joka muutaisi energian lämpöenergiaksi tai muihin epäjärjestyneisiin muotoihin, joten energia ei voi poistua käämistä. Niinpä käämin täytyy varastoida energian.

Toisaalta ainoat muutokset käämisenä ovat kasvava virta ja voimistuva magneettikenttä. Pelkkä sähkövirta ei juurikaan varastoi energian, koska varauksenkuljettajien vaellusnopeus on normaalistaan hyvin pieni ja tähän liittyvä liike-energia on mitätön. Ainoa mahdollisuus on siis se, että *energia varastoituu käämin magneettikenttään*, ja magneettikentän varastoiman energian täytyy olla yhtä suuri kuin käämin läpi kulkevan varauksen menettämä energia.



- Mihin suuntaan sähkökenttä kulkee käämisenä (virran suuntaan nähden), jos virta pienenee?
- Miten energia tällöin siirtyy käämin ja varauksenkuljettajien välillä?
- Miten käämin energia siis muuttuu ja mistä tämä energia tulee?

Lasketaan siis, paljonko energian varaus luovuttaa käämille virran muuttuessa. Virtapiirejä tutkiessamme opimme, että kun virta i kulkee potentiaalieron ΔV yli, virtaa kuljettavien hiukkasten energia muuttuu yhtälön (11.118) mukaisesti teholla

$$P = i\Delta V. \quad (13.92)$$

Käämissä potentiaaliero virran kulkusuunnassa riippuu induktanssin määritelmän (13.78) mukaisesti virran muutosnopeudesta, joten käämin läpi kulkevan varauksen energia muuttuu teholla

$$P_{\text{käämi} \rightarrow \text{varaus}} = i \cdot \left(-L \frac{di}{dt} \right). \quad (13.93)$$

Ja koska teho kuvailee energian muutosnopeutta, varauksenkuljettajien energian kokonaismuutos on

$$\Delta E_{\text{varaus}} = \int P_{\text{käämi} \rightarrow \text{varaus}} dt \quad (13.94)$$

Tehon lausekkeen (13.93) sijoitus tähän integraaliin antaa energian muutokseksi

$$\Delta E_{\text{varaus}} = \int -L i \frac{di}{dt} dt = -L \int_{i_{\text{alku}}}^{i_{\text{loppu}}} i di = -L \left[\frac{1}{2} i^2 \right]_{i_{\text{alku}}}^{i_{\text{loppu}}} = -\frac{1}{2} L (i_{\text{loppu}}^2 - i_{\text{alku}}^2). \quad (13.95)$$

Käämi varastoi kaiken tämän energian, joten käämin energian muutos on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen varauksen energian muutokseen nähden.

$$\Delta E_{\text{käämi}} = -\Delta E_{\text{varaus}} = \frac{1}{2} L (i_{\text{loppu}}^2 - i_{\text{alku}}^2). \quad (13.96)$$

Jos alkutilanteessa ei kulje lainkaan virtaa, $i_{\text{alku}} = 0$ A, ja käämissä ei ole tällöin myöskään magneettikenttää. Käämin magneettikentän energia on tällöin nolla. Jos nyt käämin läpi kulkeva virta muuttuu nollasta arvoon $i_{\text{loppu}} = i$, ja käämiin syntyy magneettikenttää, tähän kenttään varastoituneen energian täytyy olla

$$E_{\text{käämi}} = \frac{1}{2} L i^2. \quad (13.97)$$

Tulos ei riipu siitä, kuinka nopeasti virta muuttuu vaan ainoastaan virran lopullisesta arvosta. Näin täytyy olla, koska käämi varastoi kaiken energiansa magneettikenttäänsä, ja käämin kentän voimakkuus riippuu vain käämin läpi kulkevan virran suuruudesta.



- 13.31** Tarkastele kuvea 13.19. Virta kasvaa käämissä tasaisesti, joten toisessa kuvassa virta on $i = \frac{1}{2} i_{\text{loppu}}$ ja kolmannessa $i = i_{\text{loppu}}$.
- Mikä on käämen varastoimien energoiden suhde, E_2/E_3 ?
 - Selitä sähkökentän tekemän työn avulla, miksi energia muuttuu enemmän 2. ja 3. kuvan välillä kuin 1. ja 2. kuvan välillä.

Lauseke (13.97) seuraa induktanssin määritelmäästä, ja se pääte kaikille käämeille. Erityisesti se pääte pitkille, suorille käämeille, joiden induktanssia kuvaava lauseke (13.80). Tällaisen käämin energia on siis

$$E_{\text{käämi}} = \frac{N^2 A}{2\Delta z} \mu_0 i^2. \quad (13.98)$$

Toisaalta tällaisen pitkän käämin kenttä on vangittu käämin sisään ja kentän voimakkuus on yhtälön (13.73) mukaan vakio,

$$B = \frac{N}{\Delta z} \mu_0 i. \quad (13.99)$$

Erityisesti kentän voimakkuuden neliö on

$$B^2 = \frac{N^2}{(\Delta z)^2} \mu_0^2 i^2, \quad (13.100)$$

Joten käämin energian (13.97) voi kirjoittaa myös käämin magneettikentän voimakkuuden avulla,

$$E_{\text{käämi}} = \frac{A \Delta z}{2\mu_0} \frac{N^2}{(\Delta z)^2} \mu_0^2 i^2 = A \Delta z \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.101)$$

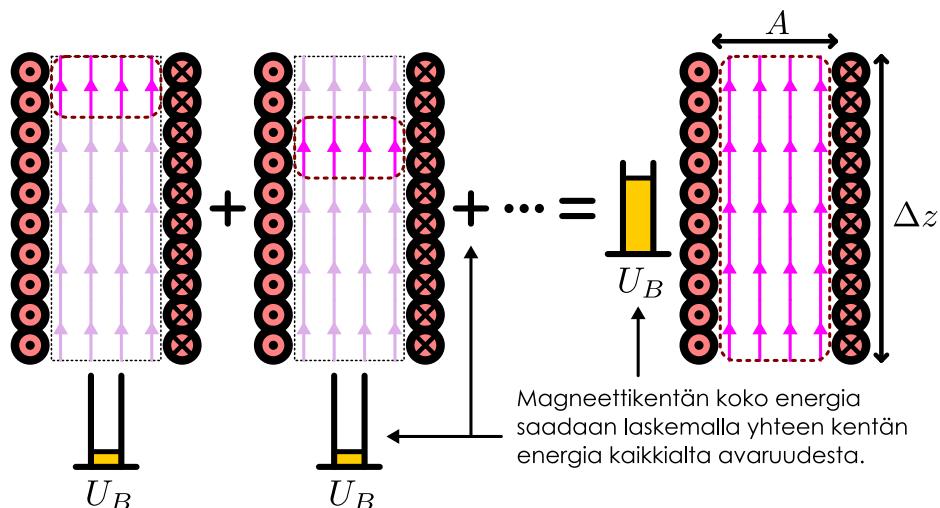
Tässä lausekkeessa esiintyy käämin itsensä ominaisuuksista enää silmukoitten pinta-ala A sekä käämin pituus Δz , joiden tulo on *käämin tilavuus*,

$$V_{\text{käämi}} = A \Delta z. \quad (13.102)$$

Niinpä käämin energia on

$$E_{\text{käämi}} = V_{\text{käämi}} \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.103)$$

Kuva 13.20: Magneettikentän liittyy energiaa aivan kuten sähkökenttääkin. Energiaa on kaikkialla missä kenttääkin on, ja kentän kokonaisenergia saadaan laskemalla yhteen kenttään varastoitunut energia kaikkialta avaruudesta.



Tuloksen tulkinta on seuraava. Käämin energia on varastoitu sen magneettikenttään, ja magneettikenttä on pitkän käämin sisällä homogeeninen. Niinpä magneettikenttään varastoitunut energia on levinnyt tasaisesti käämin rajaamaan avaruuteen, ja kentän koko energia saadaan laskemalla yhteen kentän energia kaikkialta avaruudesta (kuva 13.20). Magneettikenttään varastoituneen *energian tiheys* on siten kenttään varastoituneen kokonaisenergian ja kentän täyttämän tilavuuden suhde,

$$u_B = \frac{E_{\text{käämi}}}{V_{\text{käämi}}}. \quad (13.104)$$

Siispä magneettikentän energiatihedyn täytyy olla yhtälön (13.103) perusteella

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (13.105)$$

Johdimme tässä magneettikentän energiatihedyden tarkastelemalla hyvin pitkää käämiä, mutta magneettikenttä varstoi toki energiaa samalla tiheydellä olipa kenttä käämin sisällä tai jossakin muualla. Niinpä energiatihedyn lausekkeen (13.105) täytyy päteä yleisesti.

13.32 Vertaa sähkökentän energiatihettä (11.146) ja magneettikentän energiatihettä (13.105).

- (a) Mitä yhteistä lausekkeissa on?
- (b) Jos sähkökentän voimakkuus on E , kuinka voimakkaalla magneettikentällä on yhtä suuri energiatihveys?
- (c) Jos magneettikentän voimakkuus on 1 T, kuinka voimakkaalla sähkökentällä on yhtä suuri energiatihveys?

13.4 Sähkömagnetismin peruslait

Olemme tutustuneet moniin tärkeisiin sähkömagneettisiin ilmiöihin, ja on olemassa vielä paljon enemmän mielenkiintoisia ilmiöitä, joita emme tässä materiaalissa käsittele. Nyt on kuitenkin aika päättää tutkimusmatkamme sähkömagneettisten ilmiöiden parissa ja koota yhteen oppimamme.

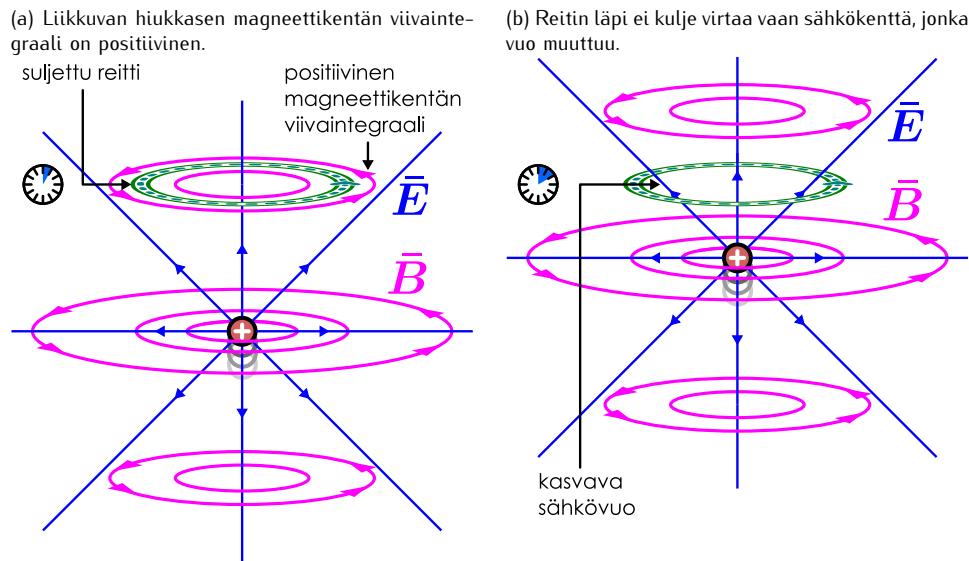
Monet käsittelemämme lait pätevät erikoistapauksissa. Coulombin laki pätee vain hitaasti liukuville vauruksille ja Ohmin laki pätee vain vastuksissa. Muutama laki on kuitenkin erikoisasemassa, sillä ne ovat *aina* päteviä peruslakeja, joista muut lait voidaan johtaa. *Gaussian laki sähkö- ja magneettikentille* sekä *Faraday'n laki sähkökentille* ovat tällaisia peruslakeja. Yksi peruslaki meiltä kuitenkin vielä puuttuu. Viimeinen tehtävämme onkin johtaa tämä neljäs sähkömagneettisen kentän peruslaki ja koota yhteen kaikki sähkömagnetismin peruslait.

Maxwellin laki magneettikentille

Sähkömagneettisten kentien neljäs peruslaki liittyy Ampèren lakiin magneettikentille eli yhtälöön (12.58). Tämän lain mukaan magneettikentän viivaintegraali suljettua reittiä pitkin on suoraan verrannollinen reitin

SÄHKÖMAGNETISMI

Kuva 13.21: Liikkuva varaus luo pyörteisen magneettikentän. Magneettikentän viivaintegraali suljetulla reitillä ei ole nolla, vaikka reitin läpi ei kulje lainkaan virtaa. Reitin läpi kuitenkin kulkee muuttuva sähkövuo.

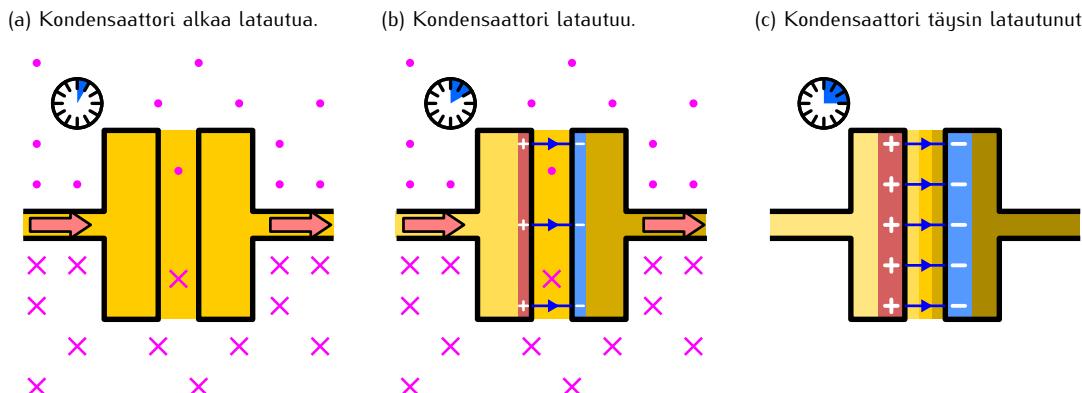


läpi kulkevaan kokonaismuuntaan. Ampèren laki pätee virtajohtimille, mutta se ei voi mitenkään kuvata esimerkiksi liikkuvien sähkövarausten magneettikenttiä. Liikkuva varattu hiukkanen luo Biot'n ja Savartin lain mukaisesti ympärilleen pyörteisen magneettikentän. Jos siis valitsemme integroimispolun, joka muodostaa suljetun reitin kentän suunnassa, magneettikentän integraalin tällä polulla täytyy olla positiivinen. Tämä tilanne on piirretty kuvaan 13.21. Polun läpi ei kuitenkaan varmasti kulje sähkövirtaa, koska magneettikentän syntyy vain yksi liikkuva hiukkanen ja avaruus on muuten tyhjä. Selvästi kään Ampèren laki ei siis pade tässä tilanteessa.

Ampèren laki ei ole sinänsä väärin, mutta se on *puutteellinen*. Sähkövirrat luovat magneettikenttään pyörteitä, ja Ampèren laki kuvaa täitä. Tavallisesti sähkövirrat kuitenkin kulkevat suljetuissa virtapiireissä, jolloin varauksenkuljetajat liikkuvat mutta kokonaismuuntaa ei missään muutu. Kuvaassa 13.21 siirtymä varaus luo magneettikenttään pyörteitä, ja tästä Ampèren laki ei pysty kuvamaan. Ampèren lakiin pitää siis lisätä jotakin, jotta se voisi kuvata *kaikkia* tapauksia.

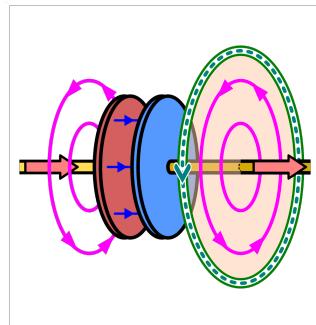
Kuvassa 13.21 valitun reitin läpi ei kulje lainkaan varausta, mutta hiukkasen *sähkökenttä läpäisee sen*. Jos hiukkanen olisi paikoillaan, se syntyy sähkökenttää mutta ei loisi magneettikenttää, joten sähkökenttää olemassaolo itsessään ei riitä luomaan magneettikenttää. Nyt varaus kuitenkin liikkuu ja tarvitaan reitti on paikoillaan, joten *reitin läpäisevän sähkövuo muuttuu*. Tässä tilanteessa magneettikentän viivaintegraali ei siis liity reitin läpi kulkevan varauksen määriin vaan reitin läpäisevän sähkövuoon muutokseen. Tätä magneettikenttää ja muuttuvan sähkövuoon välistä yhteyttä kuvaa **Maxwellin laki** (James Clerk Maxwellin mukaan).

Kuva 13.22: Latautuvaan kondensaattoriin kulkee sähkövirta, ja sitä ympäröi magneettikenttä. Kondensaattorilevyjen välissä oleva sähkökenttä voimistuu niihin kauan kuin virta kulkee ja kondensaattorin varaus kasvaa.

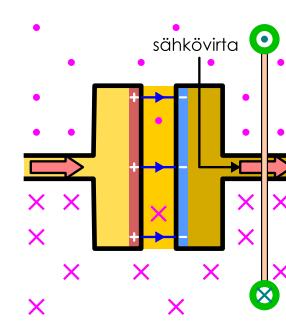


Kuva 13.23: Ampéren lain mukaan magneettikentän integraali pinnan reunan ympäri on verrannollinen pinnan läpi kulkevan kokonaishintaan. Voimme valita useita pintoja, joilla on sama reuna, mutta joiden läpi kulkee erilaiset virrat. Ampéren laki pitää siis laajentaa. Virran lisäksi myös muuttuva sähkökenttä toimii magneettikentän pyörteen keskuksena.

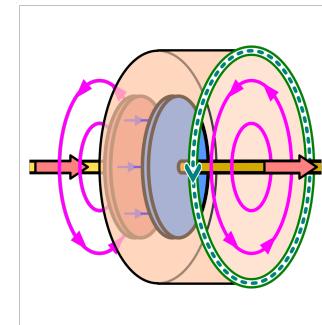
(a) Virtajohdin kulkee pinnan läpi.



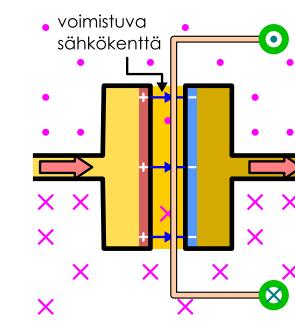
(b) Toinen kuvakulma.



(c) Pinta kulkee kondensaattorilevyn välissä.



(d) Toinen kuvakulma.



13.33 (a) Miten valitun reitin läpäisevän sähkövuon muutos näkyy kuvassa 13.21?

(b) Mihin suuntaan sähkövuon muuttuu?

(c) Millaista oikean käden säätöä sähkövuon muutos ja magneettikentän pyörre noudattavat?

Voimme muotoilla Maxwellin lain täsmällisesti tarkastelemalla kuvan 13.22 latautuvaa kondensaattoria. Kondensaattorilevyihin on kiinnitetty suorat, hyvin pitkät johtimet, ja kondensaattori on aluksi ilman varausta. Kuvassa (a) johtimissa alkaa kulkea sähkövirta, joka kuljettaa positiivista varausta yhdelle kondensaattorilevylle ja negatiivista varausta toiselle, jolloin kondensaattori latautuu. Kuvassa (b) kondensaattoriin on varastoitunut jonkin verran varausta, mutta virta kulkee edelleen ja kondensaattorin varaus kasvaa yhä. Kuvassa (c) virta ei enää kulje, ja kondensaattoriin on varastoitunut paljon sähkövarausta. Tällöin myös sähkökenttä kondensaattorilevyjen välissä on voimakas.

Kun virta kulkee, se synnyttää johdinta kiertäviä magneettikentän pyörteitä. Jos valitsemme johdinta kiertävän suljetun polun kuten kuvassa 13.23 (a), magneettikentän viivaintegraali tästä reittiä pitkin on positiivinen. Tämän reitin läpi kulkee myös sähkövirta, ja Ampéren lain mukaan magneettikentän viivaintegraali on suoraan verrannollinen pinnan läpi kulkevaan kokonaishintaan.

Nyt meidän täytyy kuitenkin määritellä täsmällisesti, mitä Ampéren laissa tarkoitetaan, kun puhutaan suljetun reitin läpi kulkevasta virrasta. Kuvassa 13.23 (a) reitti on ympyrä, ja voimme ajatella että reitin keskellä on ympyrän muotoinen pinta (piirretty kuvaan oranssina). Tai toisin päin, voimme ensin valita ympyrän muotoinen pinnan ja määritellä sen jälkeen tästä pintaan rajaavan suljetun reitin kiertämällä pinnan ympäri sen reunaa pitkin. Kumpikin ajattelutapa johtaa siihen, että meillä on täsmällisesti määritelty pinta ja sitä rajaava reitti. *Tällöin sanomme virran kulkevan reitin läpi, jos se kulkee reitin rajaaman pinnan läpi.*

Edellä valitsimme pinnaksi ympyrän, mutta tämä ei ole kuitenkaan ainoa mahdollinen valinta. Tarkasteltavan pinnan ei nimittäin tarvitse olla tasomainen, vaan voimme valita minkä muotoisen pinnan tahansa, kunhan tarkastelemamme suljettu reitti kulkee pinnan reunaa pitkin. Nyt reittimme on ympyrä, joten reitin rajaamaksi pinnaksi voidaan valita ympyrän sijaan myös esimerkiksi puolipallo tai vaikkapa toisesta päästään avoin sylinteripinta (eli ämpärin muotoinen pinta). Jos magneettikentän synnyttää *katkeamaton* virtajohdin, Ampéren laki pätee näille kaikille riippumatta valitun pinnan muodosta.

Kuvassa 13.23 kondensaattori kuitenkin *katkaisee* virtajohtimen, ja voimme valita juuri sellaisen pinnan, jonka pohja kulkee kondensaattorilevyjen välistä. Tällainen pinta on piirretty kuvien 13.23 (c) ja (d). Tällä pinnalla on sama reuna kuin kuvien 13.23 (a) ja (b) ympyrällä, joten magneettikentän viivaintegraalin tämän pinnan ympäri täytyy olla kummassakin kuvassa sama. Kondensaattorilevyjen välissä ei kulje sähkövirtaa, joten *virta pinnan läpi on nolla*. Sen sijaan kondensaattorilevyjen välissä on voimistuva sähkökenttä, joten *sähkövuon pinnan läpi muuttuu virran kulkessa*.

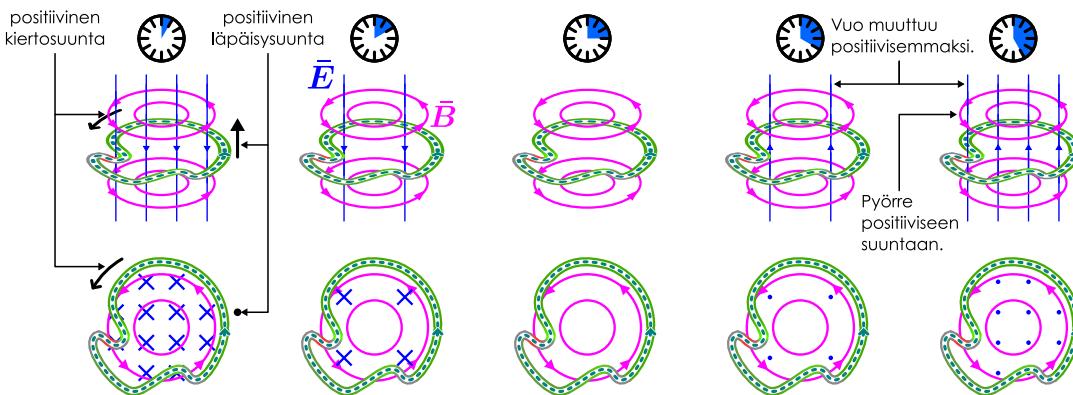
Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kondensaattorin levyt ovat hyvin lähellä toisiaan niiden leveyteen nähdien, koska tällöin kondensaattoria voidaan kuvata äärettömän suuren kondensaattorin mallilla. Toisin sanoen oletamme, että kondensaattorin sähkökenttä on levyjen välissä homogeeninen ja nolla levyjen ulkopuolella. Kentän voimakkuus tällaisessa kondensaattorissa on Gaussin lain ja yhtälön (10.154) perusteella

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{A\epsilon_0} \quad (13.106)$$

eli kenttä on suoraan verrannollinen kondensaattorin varaukseen q .

Kondensaattorin varaus muuttuu, koska kondensaattorilevylle kulkee virta, ja virta on määritelty varauksen muutoksen nopeutena, $i = dq/dt$. Niinpä yhtälön (13.106) derivoointi antaa kondensaattorin sähkökentän

Kuva 13.24: Maxwellin laki: muuttuva sähkökenttä luon pyörteisen magneettikentän.



muutosnopeuden ja kondensaattoriin kulkevan virran välille yhteyden

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\epsilon_0} \frac{dq}{dt} = \frac{i}{A\epsilon_0}. \quad (13.107)$$

Tästä lausekkeesta voidaan myös ratkaista sähkövirta sähkökentän derivaatan funktiona,

$$i = A\epsilon_0 \frac{dE}{dt}. \quad (13.108)$$

Tarkasteltava pinta kulkee kondensaattorilevyjen välin jäävän raon poikki, joten kaikki kondensaattorilevyjen väliset sähkökentän kenttäviivat läpäisevät tarkastelupinnan. Siis koko levyjen välinen sähkövuo kulkee tarkastelupinnan läpi. Edelleen koska sähkökenttä on kondensaattorilevyjen välissä vakio ja muualla nolla, sähkövuo on yksinkertaisesti kentän voimakkuuden ja *levyjen* pinta-alan tulo,

$$\Phi_E = EA. \quad (13.109)$$

Toisaalta kondensaattoriin kulkeva virtaa kuvaavassa yhtälössä (13.108) esiintyy levyjen pinta-alan ja sähkökentän muutosnopeuden tulo, jonka täytyy tämän perusteella olla sama asia kuin sähkövuoon muutosnopeus, koska levyjen pinta-ala ei muudu,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt}(EA) = \frac{dE}{dt} A. \quad (13.110)$$

Siiispä kondensaattorilevyjen välinen sähkövuo muuttuu sitä nopeammin mitä voimakkampi virta johtimissa kulkee,

$$i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.111)$$



13.34 Selitä, miksi sekä yhtälössä (13.108) että (13.109) esiintyvä ala A on kondensaattorilevyjen ala eikä tarkastelupinnan ala.

Kerrataanpa: Kuvioon 13.23 on piirretty sama latautuva kondensaattori, jota ympäröi kaikissa kuvissa sama pyörteinen magneettikenttä. Kaikissa kuvissa on myös piirretty sama suljettu reitti, jota pitkin laskettu magneettikentän viivaintegraali on positiivinen ja jolla täytyy olla sama arvo kaikissa kuvissa. Ainoa ero kuvissa on se, että kuvassa (a) reitti rajoittaa suoraa ympyräpintaa, jonka läpi kulkee virta i eikä lainkaan sähkökenttää, kun taas kuvassa (c) reitti on sylinterin muotoisen pinnan reuna, ja tämän pinnan läpi kulkee muuttuva sähkökenttä eikä lainkaan sähkövirtaa.

Ampèren lain mukaan reittiä pitkin lasketun viivaintegraalin arvon voi ilmaista kuvan (a) pinnan läpi kulkevan sähkövirran avulla muodossa.

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i. \quad (13.112)$$

Toisaalta *Maxwellin lain* mukaan tämän saman viivaintegraalin voi ilmaista kuvan (c) pinnan läpi kulkevan sähkövuoon avulla. Jos sijoitamme yhtälön (13.111) Ampèren lakiin, saamme magneettikentän viivaintegraalin ja sähkövuoon välille yhtälön

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.113)$$

Tämä on Maxwellin lain täsmällinen muotoilu: *magneettikentän viivaintegraali pinnan reunaa pitkin on suojaan verrannollinen pinnan läpi kulkevan sähkövuoon muutosnopeuteen, ja verrannollisuuskerroin on sähkö- ja magneettivakioiden tulo.*



13.35 Vertaa Faradayn lakia (13.64) ja sähkökentän Galilei-muunnosta (13.52). Vertaa sitten Maxwellin lakia (13.113) sekä magneettikentän Galilei-muunnosta (13.46). Mitä huomaat? Osaatko selittää, miksi näiden laken välillä on yhteyts?

Maxwellin laki on havainnollistettu kuvaan 13.24 tilanteessa, jossa ei ole lainkaan varauksia vaan ainoastaan muuttuva sähkökenttä. Kuvaan on piirretty suljettu reitti, ja reitin positiivinen kiertosuunta on kuvassa vastapäivään. Tällöin positiivinen läpäisy suunta on reitin läpi oikean käden säännön mukaisesti ylöspäin (kohti katsojaa). Sähkövuo muuttuu kuvassa positiiviseen suuntaan, jolloin Maxwellin lain mukaisesti magneettikentän viivaintegraali on myös positiivinen. Magneettikenttä kiertää siis positiiviseen suuntaan eli kuvassa vastapäivään.

Ampèren lain mukaan sähkövirrat voivat toimia magneettikentän pyörteiden keskuksina, ja Maxwellin lain mukaan myös muuttuvat sähkökentät ovat magneettikentän pyörteiden keskuksia. Edellisessä esimerkissä sovelsimme näitä lakeja pintoihin, joista toisen läpi kulki vain sähkövirta ja toisen läpi vain muuttuva sähkövuo. Yleisesti pinnan läpi voi tieteenkin kulkea sekä sähkövirta että muuttuva sähkökenttä, jolloin *kumpaanakin* liittyy magneettikentän pyörre. Tällöin magneettikentät lasketaan superpositioperiaatteen mukaisesti yhteen, jolloin pinnan reunaa pitkin laskettu magneettikentän integraali saadaan laskemalla Ampèren ja Maxwellin lakienv ennusteet *yhteen*,

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.114)$$

Tämä on **Ampèren ja Maxwellin laki magneettikentille**, sähkömagneettisten kenttien viimeinen peruslaki.



13.36 Vertaa Faradayn lakia sähkökentille sekä Ampèren ja Maxwellin lakia magneettikentille.

- (a) Mitä yhteistä ja mitä eroa lakienv matemaattisessa muodossa on?
- (b) Miten nämä erot vaikuttavat lakienv kuvamien pyörteisten kenttien suuntiin?

Maxwellin yhtälöt

Maxwellin lain magneettikentille löysi James Clerk Maxwell 1800-luvun puolivälissä. Muut sähkömagnetismin peruslait tunnettiin jo tuolloin, joten Maxwellin työn myötä klassinen sähkömagnetismin teoria valmistui, ja tästä syystä sähkömagnetismin peruslakeja kutsutaan yhdessä **Maxwellin yhtälöiksi**. Ne ovat klassisessa sähkömagnetismissa yhtä tärkeäää asemassa kuin esimerkiksi Newtonin lait ovat klassisessa mekaniikassa, ja Maxwellin yhtälöiden löytyminen on fysiikan historian merkittävimpä saavutuksia.

Erityisesti Faradayn sekä Ampèren ja Maxwellin lakienv löytymisen myötä ymmärrettiin, että sähkömagneettinen kenttä ei ole vain varausten luoma vaan *sähkö- ja magneettikenttä voivat vaikuttaa toinen toisiinsa myös tyhjässä avaruudessa*. Jos sähkömagneettiseen kenttään tuotetaan muutos vaikkapa siirtämällä varattua hiukkasta, muutos sähkökentässä vaikuttaa magneettikenttään, ja muutos magneettikentässä vaikuttaa vastaavasti sähkökenttään. Näin sähkö- ja magneettikenttät päätyvät loputtomasti muuttamaan toinen toistaan senkin jälkeen kuin muutoksen alulle pannut varaus on jälleen pysähtynyt. Maxwell osoitti, että tämä prosesi johtaa siihen, että kerran alkuun saatettu muutos etenee sähkömagneettisessa kentässä valonnopeudella, ja että valo itsessään on tällainen sähkömagneettisessa kentän etenevä muutos eli sähkömagneettinen aalto. Me todistamme tämän asian Faradayn ja Maxwellin lakienv avulla aalto-oppia ja optiikkaa tutkiessamme luvussa 16.

Päättämme nyt sähköopin kertaamalla Maxwellin yhtälöiden eli sähkömagnetismin peruslakien sisällön. Lakeja on neljä:

- *Gaussian laki sähkökentille*, yhtälö (10.73),

$$\Phi_{E,\text{suljettu}} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{sisällä}}. \quad (13.115)$$

- *Gaussian laki magneettikentille*, yhtälö (12.47),

$$\Phi_{B,\text{suljettu}} = 0. \quad (13.116)$$

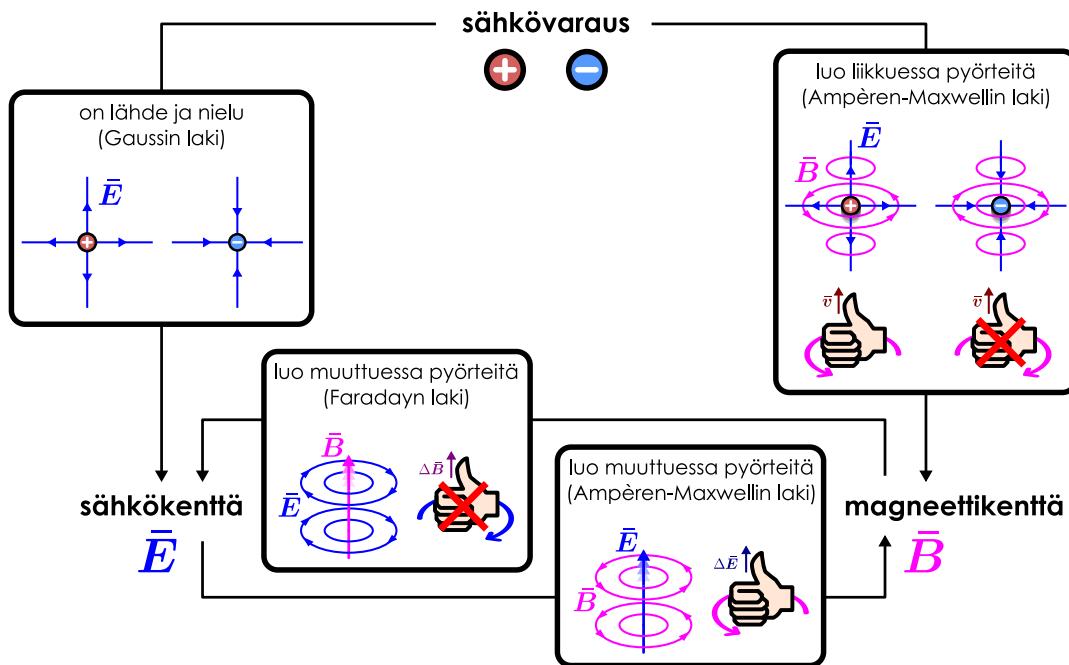
- *Faradayn laki sähkökentille*, yhtälö (13.64),

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (13.117)$$

- *Ampèren ja Maxwellin laki magneettikentille*, yhtälö (13.114),

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (13.118)$$

Kuva 13.25: Maxwellin yhtälöt eli sähkömagnetismin peruslait kaaviona.



Sähkökentien Gaussian laki mukaan sähkövuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi riippuu vain pinnan sisältämästä kokonaivarauksesta. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että *positiiviset varaukset toimivat sähkökentän lähteinä ja negatiiviset sen nieluina*. Jos suljetun pinnan sisällä on enemmän positiivisia varauksia kuin negatiivisia, pinnan sisällä alkaa enemmän sähköisiä kenttäviivoja kuin loppuu, jolloin ylimääräisten viivojen täytyy kulkea pinnan sisältä ulos. Vastaavasti jos pinnan sisällä on enemmän negatiivista varausta kuin positiivista, pinnan sisään kulkee enemmän kenttäviivoja kuin sieltä ulos. Sähkövuo mittaa pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen määräät, joten sähkövuo ja pinnan sisältämä kokonaivaraus ovat suoraan verrannolliset.

Magneettisen Gaussian laki mukaan magneettivuo minkä tahansa suljetun pinnan läpi on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että *magneettisia varauksia ei ole olemassa*, joten magneettiset kenttäviivat eivät voi alkaa mistään eikä päättyä minnekään, jolloin suljettujen pintojen läpi täytyy aina kulkea sisältä ulos yhtä paljon kenttäviivoja kuin ulkoa sisään. Periaatteessa ei ole mitään syytä, miksei magneettisia varauksia voisi olla olemassa, mutta ainakaan toistaiseksi ei tunneta hiukkasia, joilla olisi magneettinen varaus. Jos tällaisia hiukkasia joskus löydetään, magneettinen Gaussian laki muuttuu samanlaiseksi kuin sähköinen Gaussian laki. Toisin sanoen silloin laki sanoisi, että suljetun pinnan läpi kulkeva magneettivuo on verrannollinen pinnan sisältämään magneettiseen varaukseen.

Faradayin laki sähkökentille sanoo, että sähkökentän viivaintegraali minkä tahansa suljetun reitin ympäri on yhtä suuri kuin reitin läpi kulkevan magneettivuo muutosnopeus. Tämä tarkoittaa sitä, että *muuttuvat magneettikentät toimivat sähkökentän pyörteiden keskuksina*, jolloin magneettikentän muutos luo sähkökenttään pyörteen. Pyörteen suunta on oikean käden säännölle vastakkainen: jos peukalo osoittaa magneettikentän muutoksen suunnan, sähkökentän pyörre kiertyy päinvastaiseen suuntaan kuin sormet.

Ampéren ja Maxwellin laki on samanlainen laki magneettikentille kuin mitä Faradayin laki on sähkökentille. Sen mukaan magneettikentän viivaintegraali minkä tahansa suljetun reitin ympäri on verrannollinen reitin läpi kulkevaan sähkövirtaan sekä sähkövuoon muutokseen. Toisin sanoen sekä *sähkövirrat että muuttuvat sähkökentät toimivat magneettikentän pyörteiden keskuksina*. Magneettikentän pyörteet noudattavat oikean käden sääntöä. Jos siis oikean käden peukalo osoittaa virran ja sähkökentän muutoksen suunnan, magneettikentän pyörteet kulkevat koukistettujen sormien suuntaan.

Sen lisäksi että Maxwellin yhtälöt ovat yleispäteväät, ne ovat myös *kattavat* sähkömagneettisten kenttien lait. Toisin sanoen klassisten sähkömagneettisten kenttien kuvaamiseen ei tarvita muita lakeja näiden lisäksi. Kun Maxwellin yhtälöihin lisätään vielä varattuihin hiukkasiin kohdistuva sähköistä voimaa kuvaava *Lorentzin voimalaki* (12.13), pystymme periaatteessa kuvaamaan näiden lakien avulla kaikki klassiset sähkömagneettiset ilmiöt ja johtamaan niistä kaikki muut sähköopin lait.



13.37 Kirjoita omien sanojen tiivistelmä sähkömagnetismin peruslaeista. Selitä Maxwellin yhtälöt ja Lorentzin voimalaki omien sanojen ja kirjoita ylös niitä kuvaavat yhtälöt. Täydennä kuvan 13.25 käsitekartta niin, että se sisältää myös Lorentzin voimalain.

Yhteenvedo: Sähkömagnetismi

Induktio ja induktanssi

- Magneettikentässä liikkuvaan johtimeen indusoituu jännite
$$\mathcal{E} = \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$$
.

- Jos johdinsilmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu, silmukkaan indusoituu jännite

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Tämä on **Faraday'n induktiolaki**.

- Induktiojännitteet ja -virran suunnan voi päättää **Lenzin laista**, jonka mukaan induktiojännite aina vastustaa muutosta, joka aiheuttaa induktion.
- Käämi** on sähköinen komponentti, joka voidaan valmistaa kiertämällä johdin silmukoille. Käämiin indusoituu jännite, kun sen läpäisevä magneettivuo muuttuu.

- Käämin läpi kulkeva muuttuva sähkövirta indusoii käämiin itseensä jännitteen

$$\mathcal{E} = \Delta V = -L \frac{di}{dt},$$

missä L on käämin **induktanssi**.

- Käämi varastoi energiaa magneettikenttään. Käämin energia on

$$E = \frac{1}{2} Li^2.$$

- Magneettikentän energiatihleys on

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Sähkömagneettinen kenttä

- Sähkömagneettista vuorovaikutusta välittää **sähkömagneettinen kenttä**, joka ilmenee sähkökenttänä $\bar{\mathbf{E}}$ ja magneettikenttänä $\bar{\mathbf{B}}$. Nämä ovat kuitenkin suhteelliset eli eri koordinaatistoissa mitataan erilaiset sähkö- ja magneettikentät. Kentien Galileimuunnokset ovat

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_{(B)} &= \bar{\mathbf{E}}_{(A)} + \bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{B}}_{(A)} \\ \bar{\mathbf{B}}_{(B)} &= \bar{\mathbf{B}}_{(A)} - \varepsilon_0 \mu_0 \bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{E}}_{(A)}.\end{aligned}$$

- Muuttuvaan magneettikenttään liittyy pyörteinen sähkökenttä. Sähkökentän pyörrettä mittaa kentän viivaintegraali suljetulla reitillä, ja tämä on yhtä suuri kuin reitin läpäisevän magneettivuon muutosnopeus,

$$\oint \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Tämä on **Faraday'n laki sähkökentille**.

- Sekä sähkövirtaan että muuttuvaan sähkökenttään liittyy pyörteinen magneettikenttä. Magneettikentän pyörrettä mittaa kentän viivaintegraali suljetulla reitillä, ja tämä on verrannollinen reitin läpäisevään virtaan ja sähkövuon muutosnopeuteen,

$$\oint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{r} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Tämä on **Ampéren ja Maxwellin laki magneettikentille**.

- Sähkömagnetismin peruslait eli **Maxwellin yhtälöt** ovat:

- Gaussion laki sähkökentille
- Gaussion laki magneettikentille
- Faraday'n laki sähkökentille
- Ampéren ja Maxwellin laki magneettikentille

Sanasto

- sähkömagneettinen (electromagnetic)
- induktio (induction)
- käämi (coil, inductor)
- ensiöpötri (primary circuit)
- toisiopötri (secondary circuit)

- generaattori (generator)
- induktanssi (inductance)
- muuntaja (transformer)
- Maxwellin yhtälöt (Maxwell's equations)

Taulukko 13.1: Sähkömagnetismin peruslait taulukkona. Miten pyörteiset ja pyörteettömät kentät syntyvät, ja mitkä lait näitää kuvavat?

kentän luo	sähkökenttä		magneettikenttä	
	pyörteeton	pyörteinen	pyörteeton	pyörteinen
varaus levossa	Gauss	-	-	-
varaus liikkeessä	Gauss	-	-	Ampère-Maxwell
vakio $\bar{\mathbf{E}}$	-	-	-	-
muuttuva $\bar{\mathbf{E}}$	-	-	-	Ampère-Maxwell
vakio $\bar{\mathbf{B}}$	-	-	-	-
muuttuva $\bar{\mathbf{B}}$	-	Faraday	-	-

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

13.1 (a) Elektronit liikkuvat sauvan mukana kuvassa oikealle ja magneettikenttä osoittaa kuvan sisään. Koska elektronit ovat negatiivisia, niihin kohdistuu voima vastakkaiseen suuntaan kuin mihin oikean käden sääntö ennustaa eli kuvassa alaspäin.

(b) Elektronit alkavat kulkea kuvassa myötäpäivään.

(c) Virta kulkee siis vastapäivään.

13.2 (a) Jos sauvan suunta vaihtuu, myös virran suunta ja voiman suunta käänny ympäri. Siispä virta kulkee myötäpäivään ja voima osoittaa oikealle. (b) Ei. Kun kaikki vektorit käännyvät ympäri, pistetulo ei muuttu. Siispä työ on edelleen negatiivinen. Näin tietysti pitää ollakin, koska prosessissa mekaanista energiota muutuu

13.3 (a) Kun sauva liikkuu pituussuunnassaan, jännite indusoituu sen sivujen välille. Jos sauva on kapea, tämä jännite on hyvin pieni. Sauvan päiden välillä jännitetä ei ole.

(b) Jännite lasketaan vektorikolmitulona

$$\mathcal{E} = \bar{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (13.119)$$

$$= (1 \text{ T})\hat{\mathbf{i}} \times (1 \text{ m}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \cdot (1 \text{ m/s}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \quad (13.120)$$

$$= (1 \text{ Tm}) \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\mathbf{k}} \cdot (1 \text{ m/s}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) \quad (13.121)$$

$$= (1 \text{ V}) \frac{1}{2} \quad (13.122)$$

$$= 0.5 \text{ V.} \quad (13.123)$$

13.4 Oikeanpuoleinen sauva liikkuu siis kaikissa tapauksissa oikealle nopeudella v , jolloin sen kuvassa ylempi pää on korkeammassa potentiaalissa. (a) Vasemmanpuoleisen sauvan pää on korkeassa potentiaalissa, koska sauvan nopeus on kaksinkertainen, sen jännitekin on. Tämä saa virran kulkemaan myötäpäivään. (b) Vasemmanpuoleisen sauvan ylempi pää on matalassa potentiaalissa. Nyt silmukassa kulkee kaksinkertainen virta vastapäivään.

13.5 (a) Magneettivuo kasvaa, joten induktiovirta pyrkii tuottamaan magneettikentän, joka vastustaa vuon kasvua. Kenttä osoittaa siis kohti katsojaa ja virta kulkee vastapäivään.

(b) Magneettivuo pienenee. Virta kulkee myötäpäivään.

(c) Vuo kasvaa, virta kulkee vastapäivään.

(d) Vuo kasvaa, virta kulkee vastapäivään.

13.6 (a) Jos rengas liikkuu sivuttain, se kulkee pois voimakkaan magneettikentän alueesta ja magneettivuo suuruus siis pienenee. Induktiovirta pyrkii kasvattamaan magneettivuota. Indusoitunut magneettikenttä osoittaa siis ylöspäin eli induktiovirta kulkee vastapäivään.

(b) Valitaan positiivinen läpäisy suunta ylöspäin, jolloin positiivinen kiertosuunta on vastapäivään. Nyt magneettivuo muuttuu negatiiviseen suuntaan, joten virta indusoituu positiiviseen suuntaan eli vastapäivään.

13.7 Nopeus ja nopeuden muutos osoittavat molemmat negatiiviseen x -suuntaan. Siispä $v_x < 0$ ja $a_x = dv_x/dt < 0$.

13.8 Valitaan positiivinen läpäisy suunta pois päin katsojasta jolloin positiivinen kiertosuunta on myötäpäivään.

(a) Vuo on positiivinen ja kasvaa eli muutos on positiivinen. Siispä jännite on negatiivinen ja virta kulkee negatiiviseen suuntaan eli vastapäivään.

(b) Nyt vuon muuttuu negatiiviseen suuntaan, joten virta kulkee positiiviseen suuntaan.

(c) Vuon muuttuu positiiviseen suuntaan, virta kulkee vastapäivään.

(d) Vuon muuttuu positiiviseen suuntaan, virta kulkee vastapäivään.

13.10 A:ssa elektronit ovat aluksi paikoillaan ja lähtevät liikkeelle samanaikaisesti. B:ssä elektronit liikkuvat aluksi johtimen mukana ja pysähtyvät pariston kytkemisen takia. Kunkin elektronin nopeuden muutos voidaan ajatella omaksi tapahtumakseen. Jos A:ssa nämä tapahtumat ovat samanaikaiset, ne eivät ole sitä B:ssä elleivät ne tapahdu samassa paikassa (koordinaatistojen liikkeen suunnassa). B:ssä johtimen liikkeen suunnassa takimaiset elektronit pysähtyvät ensin ja liikkeen suunnassa etumaiset elektronit viimeisenä. Siispä takana tulevat elektronit pysähtyvät ensimmäisenä ja niiden edellä kulkevat ehtivät kulkea niistä kauemmas ennen pysähtymistään. Niinpä elektronien välinen etäisyys on B:ssä suurempi kuin A:ssa. Huomaa, että koordinaatistojen välinen nopeus on hyvin pieni ja niinpä nämä suhteellisuusteoreettiset ilmiöt ovat erittäin heikkoja. Sähköinen vuorovaikutus on kuitenkin niin voimakas, että nämä äärimmäisen pienetkin vaikutukset tuottavat havaittavan sähkömagneettisen voiman.

13.11 (a) Kun v kasvaa, myös γ kasvaa. Niinpä $1/\gamma$ pienenee ja $-1/\gamma$ kasvaa. Siispä koko lauseke $\gamma - 1/\gamma$ kasvaa.

(b) Kun v on nolla, $\gamma = 1$ ja $\gamma - 1/\gamma = 0$. Kun v kasvaa, tämä tekijä kasvaa ja tulee siis positiiviseksi. Pituusvaraustiheys $\lambda_{(B)}$ on tähän verrannollinen, joten se on positiivinen.

(c) Tämä täsmää kuvan kanssa. Johdin on koordinaatistossa B positiivisesti varattu.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

13.12 (a) Kun $v = 0.5c$, tarkasti laskien saadaan likiarvot $\gamma = 1.1547$ ja $1/\gamma = 0.8660$. Approximaatio antaa $\gamma \approx 1.125$ ja $1/\gamma \approx 0.875$.

(b) Kun $v = 0.1c$, saadaan $\gamma = 1.00504$, $1/\gamma = 0.99499$ ja $\gamma \approx 1.005$, $1/\gamma \approx 0.995$.

(c) Kun $v = 0.01c$, saadaan $\gamma = 1.00005$, $1/\gamma = 0.99995$ ja $\gamma \approx 1.00005$, $1/\gamma \approx 0.99995$.

(d) Approximaatio tulee selvästikin sitä paremmaksi, mitä pienempi v on, ja jos siis $v \ll c$, approximaatiota voi pitää tarkkana.

13.13 Vakiot ovat $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}$ ja $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$. Näiden tulo on $\epsilon_0\mu_0 = 1.113 \cdot 10^{-17} \text{ CN/VmA}^2$, missä yksiköt sievenevät muistamalla relatiot $C = As$ ja $N/C = V/m$. Näiden avulla saadaan

$$\frac{CN}{VmA^2} = \frac{sN}{Vm} = \frac{sC}{Am^2} = \frac{s^2}{m^2} \quad (13.124)$$

Tämän neliöjuuri on $\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3.336 \cdot 10^{-9} \frac{s}{m}$ ja tämän käänteisluku on $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Tämä on valonnopeus kuten pitikin.

13.14 Ääretömän pitkän suoran sauvan sähkökenttä on kääntäen verrannollinen sauvasta mitattuun etäisyteen $E \sim r^{-1}$. Pitkän, suoran virtajohitimen magneettikenttä on myös kääntäen verrannollinen johtimesta mitattuun etäisyteen $B \sim r^{-1}$. Nämä täytyy olla, koska jos siirrymme koordinaatistoon, jossa sauva liikkuu pituussuunnassaan, liikkuva sauva kuljettaa sähkövirtaa ja toimii kuin virtajohdin. Voidaan ajatella, että sauva luo ympärilleen sähkömagneettisen kentän, jonka voimakkuus heikkenee kääntäen verrannollisesti sauvasta mitattuun etäisyteen. Sauvan lepokoordinaatistossa tämä kenttä havaitaan puhtaasti sähkökentänä, mutta koordinaatistossa, jossa sauva liikkuu, kentällä on myös magneettinen luonna.

13.15 (a) Koordinaatistossa B varaus liikkuu nopeudella $\bar{v}_{q(B)} = \bar{v}_{A(B)} = -\bar{v}_{B(A)} = -\bar{v}$. Vastaavasti C:ssä varauksen nopeus on $\bar{v}_{q(C)} = -2\bar{v}$. Kentät ovat siis

$$\bar{B}_{(B)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \bar{B}_{(C)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q2\bar{v} \times \hat{r}}{r^2} = 2\bar{B}_{(B)}. \quad (13.125)$$

(b) Koordinaatistossa A on sähkökenttä $\bar{E}_{(A)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ ja magneettikenttä nolla. Koordinaatistossa B sähkökenttä muuntuu myös magneettikenttäksi,

$$\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)} \quad (13.126)$$

$$= 0 - \epsilon_0\mu_0 \bar{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (13.127)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.128)$$

Mikä on sama tulos kuin mitä Biot'n ja Savartin laki antoi. Samalla tavalla koordinaatistossa C saadaan sama kenttä kuin (a)-kohdassa. (Huom. koordinaatistoissa B ja C on likimain sama sähkökenttä kuin A:ssa, kun $v \ll c$.)

(c) Koordinaatiston C nopeus B:n suhteeseen on $\bar{v}_{C(B)} = \bar{v}$. Niinpä

$$\bar{B}_{(C)} = \bar{B}_{(B)} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v}_{C(B)} \times \bar{E}_{(B)} \quad (13.129)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2} - \epsilon_0\mu_0 \bar{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (13.130)$$

$$= -2\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\bar{v} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (13.131)$$

Tämä on sama tulos kuin mitä aikaisemmin laskettiin.

(d) Kaikilla laskutavilla saatiin sama tulos, joten muunno syhtälö näyttää järkevältä.

13.16 Coulombin lain mukaan pisteverauksen sähkökenttä on pallosymmetrinen eli kaikissa suunnissa yhtä voimakas. Kuaan piirrettä kenttää ei kuitenkaan ole tällainen, koska kentän voimakkuus on verrannollinen kenttäviivojen tiheyteen ja selvästi kenttäviivojen tiheys riippuu kuvassa suunnasta. Coulombin laki ei siis enää päde, kun varaus liikkuu hyvin nopeasti. Gaussian laki sen sijaan sanoo oleellisesti sen, että varauksesta lähtevien kenttäviivojen lukumäärä on verrannollinen varauksen suuruuteen. Varauksen suuruus on invariantti, nopeudesta riippumaton suure. Vaikka kenttäviivojen suunta muuttuu varauksen nopeuden kasvaessa, niiden lukumäärä ei muudu, joten viivojen määrä on myös invariantti. Viivojen määrän ja varauksen suuruuden välinen suhde on siis aina sama ja Gaussian laki pätee. Tästä syystä Gaussian laki onkin sähkökenttien peruslaki mutta Coulombin laki ei ole.

13.17 Koordinaatiston A yläosassa magneettikenttä osoittaa poisspäin katsojasta ja alaosassa kohti. Jos koordinaatisto B liikkuu oikealle, ristitulo $\bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}$ osoittaa oikean käden säännön mukaan kuvan yläosassa ylöspäin ja alaosassa alaspäin. Niinpä B:ssä täytyy muunno syhtälön mukaan olla tällainen sähkökenttä kuten kuvan 13.9 perusteella onkin.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

13.19 A:ssa on magneettikenttä, joka osoittaa renkaan kohdalla yläviistoon poispäin renkaan keskustasta. Koordinaatisto B liikkuu A:n suhteeseen ylöspäin. Tarkastellaan nyt ristituloa $\vec{v}_{B(A)} \times \vec{B}_{(A)}$. Kuvaan piirretyn elektronin kohdalla siis $\vec{v}_{B(A)}$ osoittaa ylöspäin (suuntaan \hat{k} , jos kiinnitämme koordinaatiston niin, että x -suunta on kohti katsojaa, y -suunta oikealle ja z -suunta ylöspäin) ja $\vec{B}_{(A)}$ Viistoon ylös, oikealle ja taaksepäin (siis likimain suuntaan $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$). Oiken käden säännön mukaan näiden ristitulovektori on vaakasuuntainen ja se osoittaa viistoon takavasemmalle (sillä $\hat{k} \times (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -\hat{k} \times \hat{i} + \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{j} - \hat{i}$). Sähkökenttä osoittaa siis B:ssä renkaan suuntaan ylhäältä katsoen vastapäivään. Ja koska systeemi on sylinterisymmetrinen, samanlainen päätely toimii missä tahansa renkaan pisteessä. Sähkökentän kenttäviivojen täytyy siis muodostaa renkaita kuten kuvass (c).

13.20 Jos magneettivuo muuttuu nopeammin, derivaatta $d\Phi_B/dt$ on suurempi ja Faradayn lain mukaan myös sähkökentän viivaintegraali on suurempi. Sähkökentän pitäisi siis olla voimakkaampi, jolloin kuvaan täytyisi piirtää enemmän ja tihemmin sähköisiä kenttäviivoja.

13.22 (a) Ei. (b) Koska käämi on äärettömän pitkä, sen kentän täytyy olla sylinterisymmetrinen. Tämä tarjoittaa sitä, että magneettikentän radiaalikomponentti on joko nolla tai kaikkialla samansuuntainen. Kummassakin tapauksessa vaakasuuntaisten sivujen viivaintegraaliksi tulee yhtensä nolla. (c) Kaukana käämistä kenttä on likimain nolla, joten viivaintegraali on nolla. Niinpä viivaintegraali poikkeaa nollasta vain käämin sisällä. Toisaalta koska polun läpi kulkeva virta ei riipu polun leveydestä, näin täytyy tapahtua riippumatta siitä, kuinka kaukana käämistä polku kiertää. Siispä käämin ulkopuolella viivaintegraalin täytyy olla nolla mitä tahansa polkua pitkin. (d) Jos viivaintegraali on käämin ulkopuolella nolla kaikilla poluilla, kentän täytyy olla nolla. Vastaavalla päätelyllä viivaintegraalin arvo ei riipu myöskään siitä, mihin kohtaan pystysuora polku asetetaan käämin sisällä, joten kentän täytyy olla käämin sisällä kaikkialla yhtä voimakas.

13.23 Kenttäviivaesityksessä viivojen tiheys on verrannollinen kentän voimakkuuteen. Jos käämi on pitkä, sen sisällä kenttä ei riipu käämin täsmällisestä halkaisijasta eikä pituudesta. Kenttä on verrannollinen sekä silmukoiden tiheyteen että virtaan, joten kummankin kaksinkertaistaminen kaksinkertaistaa kentän voimakkuuden ja siten kenttäviivaesityksessä viivojen tiheys ja lukumäärä niin ikään kaksinkertaistuvat.

13.24 Kytkimen avaaminen katkaisee virran kulun ensökämissä nopeasti. Tällöin magneettikenttä käämeissä heikkenee nopeasti, mikä indusoittoi toisiokäämiin jännitteen ja virran päinvastaiseen suuntaan kuin kytkintä suljetaessa. Tämä virta saa toisiopuuriin lampun syttymään hetkeksi.

13.25 (a) Kytkin suljetaan, jolloin virta kasvaa. Lenzin lain mukaan induktio vastustaa sen synnyttää ilmiötä, joten käämiin indusoituu virtaa vastustava jännite. Jännite on siis negatiivinen.

(b) Valitaan positiivinen läpäisy-suunta alas päin, jolloin positiivinen kiertosuunta on virran kulkusuunta. Nyt kasvava virta tuottaa positiivisen, kasvavan magneettivuon, joten Faradayn lain mukaan käämiin indusoituu negatiivinen jännite.

13.26 Esimerkiksi vastuksessa virta voi muuttua lähes välittömästi, koska elektronit itsessään vaeltavat hitaasti ja niiden massa on pieni, joten elektronien virralla itsellään ei ole inertiaa. Induktanssi kuitenkin estää virtaa muuttumasta nopeasti, koska, käämiin indusoituva jännite pyrkii aina vastustamaan virran muutosta. Induktanssi toimii siis virralle samaan tapaan kuin inertia kappaleille. Mitä suurempi inertia, sitä vaikeampaa kappaleen liikkeen muuttaminen on ja sitä enemmän aikaa se vaatii. Mitä suurempi induktanssi käämillä on, sitä vaikeampaa käämin läpi kulkevan virran muuttaminen on.

13.27 Münus tarkoittaa sitä, että indusoitunut jännite aina vastustaa virran muutosta Lenzin lain mukaisesti. Jos käämin läpi kulkeva virta muuttuu positiiviseen suuntaan, indusoitunut jännite on negatiivinen, jolloin se pyrkii muuttamaan virtaa negatiiviseen suuntaan. Jos virta muuttuu negatiiviseen suuntaan, jännite on positiivinen ja se pyrkii muuttamaan virtaa positiiviseen suuntaan. Kummassakin tapauksessa induktiojännite siis pyrkii muuttamaan virtaa vastakkaiseen suuntaan kuin mihin virta todella muuttuu, jolloin virta siis muuttuu hitaanmin kuin miten se muuttuisi ilman induktanssia.

13.28 (a) Mallin mukaan

$$L = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2 \cdot \frac{500^2 \pi (0.01 \text{ m})^2}{0.05 \text{ m}} = 2.0 \text{ mH.} \quad (13.132)$$

(b) Virran keskimääräinen muutosnopeus on

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{1 \text{ A}}{0.01 \text{ s}} = 100 \text{ A/s,} \quad (13.133)$$

jolloin jännite on keskimäärin

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0.2 \text{ V.} \quad (13.134)$$

(c) Koska virta kasvaa, käämiin indusoituu negatiivinen jännite. Siispä potentiaali pienenee käämissä virran suunnassa eli korkeammassa potentiaalissa on käämin se päät, josta virta saapuu.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

13.30 (a) Jos virta pienenee, indusoitunut sähkökenttä pyrkii kasvattamaan virtaa. Sähkökenttä osoittaa siis virran kulkusuuntaan.

(b) Sähkökenttä tekee liukkuviin varauksenkuljettajiin positiivista työtä. Energiaa siis siirrytään käämistä varauksenkuljettajiille.

(c) Käämin energia pienenee, koska käämin magneettikenttää varastoitunutta energiota siirrytään varauksenkuljettajiille. Samalla magneettikentän voimakkuus pienenee.

13.31 (a) Käämin energia on verrannollinen virran neliöön, joten $E_3 = 4E_2$ eli $E_2/E_3 = 1/4$.

(b) Käämin indusoitunut sähkökenttä tekee varauksenkuljettajiin negatiivista työtä, jolloin varauksenkuljettajien energia pienenee ja käämin energia kasvaa. Sähkökentän tekemän työn teho on verrannollinen sekä kentän voimakkuuteen että käämin läpi kulkevan virtaan. Jos virta kasvaa tasaisesti, indusoitunut sähkökenttä on voimakkuudeltaan vakio, mutta virta ei. Kahden ensimmäisen kuvan välillä virta on keskimäärin $\frac{1}{4}i_{\text{toppu}}$ ja kahden viimeisen kuvan välillä $\frac{3}{4}i_{\text{toppu}}$. Niinpä tehty työkin on ensimmäisellä puoliskolla neljännes kokonaistyöstä ja jälkimmäisellä puoliskolla kolme neljännestä. Tämä näkyy myös kuvan energiadiagrammissa.

13.32 (a) Kumpikin energiatihelsys riippuu kentän voimakkuuden neliöstä ja kyseiseen kenttään liittyvästä luonnonvakiosista ϵ_0 tai μ_0 .

(b) Pitää siis olla $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2$, josta magneettikentäksi ratkeaa

$$B = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E = \frac{1}{c} E. \quad (13.135)$$

(c) Kääntäen edellinen yhtälö saadaan

$$E = cB = 3.0 \cdot 10^8 \text{ V/m}. \quad (13.136)$$

Tämä on voimakas sähkökenttä, mutta huomaa että 1 T on myös hyvin voimakas magneettikenttä.

13.33 (a) Aluksi reitin läpi kulkee yksi kenttäviiva, sitten kolme. Sähkövuo on verrannollinen pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen lukumäärään, joten vuon itseisarvo selvästikin kasvaa.

(b) Kiertosuunta on valittu kuvassa vastapäivään, joten positiivinen läpäisyssuunta on oikean käden säännön mukaan ylöspäin. Sähkökenttä kulkee reitin läpi ylöspäin, joten sähkövuo on positiivinen, ja koska vuon itseisarvo kasvaa, vuo muuttuu positiiviseen suuntaan (eli kuvassa ylöspäin).

(c) Esimerkiksi näin: kun oikean käden peukalo osoittaa sähkövuo muutoksen suuntaan, koukistetut sormet osoittavat magneettikentän pyörteen suunnan.

13.34 Aluksi tarkastellaan kondensaattoria itseään, jolloin ala on luonnollisesti kondensaattorilevyjen ala. Sitten tarkastellaan sähkövuo valitun pinnan läpi. Valitun pinnan ala on suurempi kuin kondensaattorilevyjen ala, mutta sähkökenttä on nolla kaikkialla muualla paitsi kondensaattorilevyjen välissä. Kun sähkökenttä on kondensaattorin sisällä vakio, vuo saadaan laskettua kentän voimakkuuden ja sen alueen pinta-alan tulona, missä sähkökenttä on nollasta poikkeava. Tämän alueen ala on sama kuin kondensaattorilevyjen ala, ei koko tarkastelupinnan ala.

13.35 Faradayn lain mukaan $\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ ja vastaava Galilei-muunnos on $\bar{E}_{(B)} = \bar{E}_{(A)} + \bar{v}_{B(A)} \times \bar{B}_{(A)}$. Maxwellin laki sanoa puolestaan $\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ ja muunnos on $\bar{B}_{(B)} = \bar{B}_{(A)} - \epsilon_0 \mu_0 \bar{v}_{B(A)} \times \bar{E}_{(A)}$. Huomataan, että vuon derivaatan edessä oleva kerroin on etumerkkiä vaille sama kuin vastaavassa Galilei-muunnoksessa esiintyvä kerroin.

Syy tähän on oleellisesti se, että sähkömagneettinen kenttä on suhteellinen, ja niinpä myös kenttien viivaintegraalit ja vuot ovat suhteelliset. Jos esimerkiksi liikutamme metallirengasta magneetin lähellä, renkaaseen indusoituu jännite ja virta, jotka havaitaan kaikissa koordinaatistoissa. Magneetin koordinaatistossa on vain magneettikenttä, ja ilmiö syntyy magneettisen voiman vaikuttaessa varauksenkuljettajiin. Renkaan koordinaatistossa magneetti liikkuu. Magneettinen voima ei voi saada virtaa kulkeaan, koska varauksenkuljettajat ovat tässä koordinaatistossa aluksi keskimäärin paikoillaan. Niinpä tässä koordinaatistossa täytyy olla sähkökenttä. Galilei-muunnos kertoo, miten renkaan koordinaatiston sähkökenttä riippuu magneetin koordinaatiston magneettikentästä. Sama havainto sisältyy myös Faradayn lakiin, sillä magneetin koordinaatistossa magneettivuo minkä tahansa paikoillaan olevan polun läpi on vakio, jolloin sähkökenttä ei ole pyörteitä. Renkaan koordinaatistossa sen sijaan liikkuva magneetti tuottaa muuttuvan magneettivuon ja siten pyörteisen sähkökentän. Täsmälleen samalla tavalla yhdessä koordinaatistossa havaittuun sähkökenttään liittyy muissa koordinaatistoissa myös magneettikenttä, ja sekä Galilei-muunnos että Maxwellin laki kuvaaavat tätä. Huomaa kuitenkin, että Faradayn sekä Ampéren ja Maxwellin lait ovat yleispäteviä kun taas tässä esitetty Galilei-muunnokset ovat vain likimäärin oikein.

13.36 (a) Esim. Faradayn laissa ei ole vakiotermiä kun Ampéren laissa on (virta). Faradayn laissa vuon derivaatan kerroin on negativinen kun taas Maxwellin laissa kerroin on positiivinen ja numeroarvoltaan hyvin pieni.

(b) Koska magneettivuo kerroin on Faradayn laissa negativinen, muuttuvan magneettikentän tuottama sähkökenttä pyörre ei noudata oikean käden sääntöä. (Ts. jos magneettikenttä muuttuu oikean käden peukalon suuntaan, sähkökenttä pyörre on sormien osoittamalle suunnalle vastakkainen.) Sen sijaan Maxwellin laissa vuon kerroin on positiivinen, joten muuttuva sähkökenttä tuottaa pyörteen magneettikenttään oikean käden säännön mukaisesti.

Osa IV

Klassiset ja kvanttimekaaniset aallot

14 Jaksollinen liike

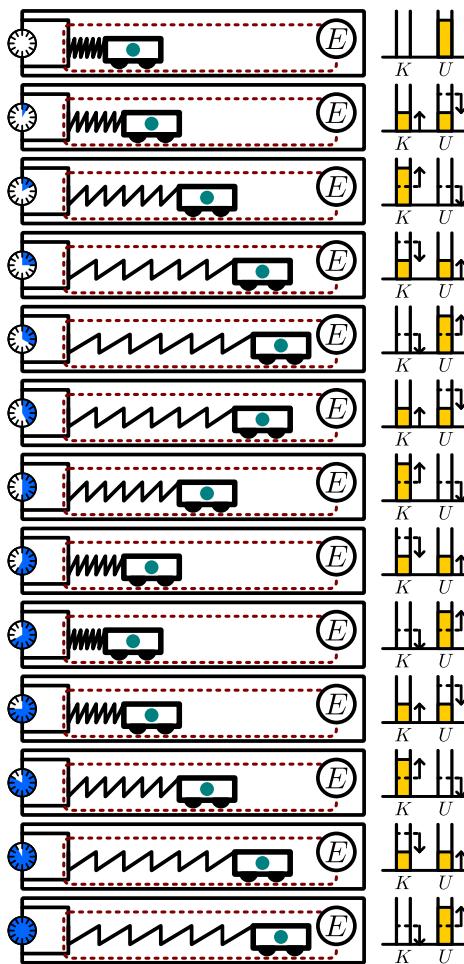
Jaksollisella liikkeellä tarkoitetaan kaikkea liikettä, joka palaa säännöllisesti takaisin alkutilaansa ja toistuu sitten täsmälleen samanlaisena uudelleen. Kappaleet voivat yleensä liikkua miten tahansa, jolloin niiden liike ei ole jaksollista, mutta jaksollinen liike on itse asiassa luonnossa erittäin yleistä: heilurin heilahdus, kitaran kielen värähely, Kuun kiertoliike, moottorin sykli ja molekyylin värähely ovat kaikki esimerkkejä jaksollisesta liikkeestä. Ja vaikka nämä esimerkit vaikuttavat fysikaalisina systeemeinä hyvin erilaisilta, kaikkien näiden prosessien jaksollista luonnetta voidaan kuvata hyvin samankaltaisin menetelmin. Tässä luvussa tarkastelemmekin erilaisia tapoja kuvata jaksollista liikettä. Erityisesti tutkimme jaksollisen liikkeen yksinkertaisinta erikoistapausta eli harmonista liikettä ja opimme, että kaikki jaksollinen liike voidaan esittää harmonisen liikkeen mallin avulla.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

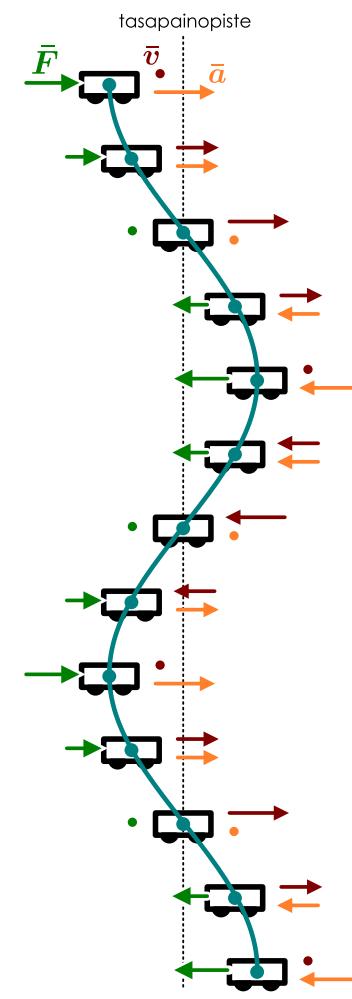
- määrittää harmonisen värähtelyn amplitudi, vaihe, taajuus, kulmataajuus, jaksonaika sekä kokonaisenergia
- kuvata harmonista värähtelyä graafisesti vaiheenosittimella sekä kuvaajin
- määritellä kompleksiluvut ja selittää kuinka harmonista liikettä voidaan kuvata kompleksiluvuilla
- selittää miksi harmonisen värähtelyn malli kuvaaa niin monia systeemejä ja määrittää värähtelevän systeemin ominaisuudet, kun voima tai potentiaalienergia tunnetaan
- määrittää harmonisten komponenttien yhdistelmänä syntynyt liikkeen rata
- määrittää vaimennetun värähtelijän liikerata ja energia
- määritellä resonanssi sekä kuvalla värähtelijän käyttäytyminen resonanssissa

Kuva 14.1: Jousen päässä liikkuva kappale on yksinkertainen jaksollisen liikkeen malli.

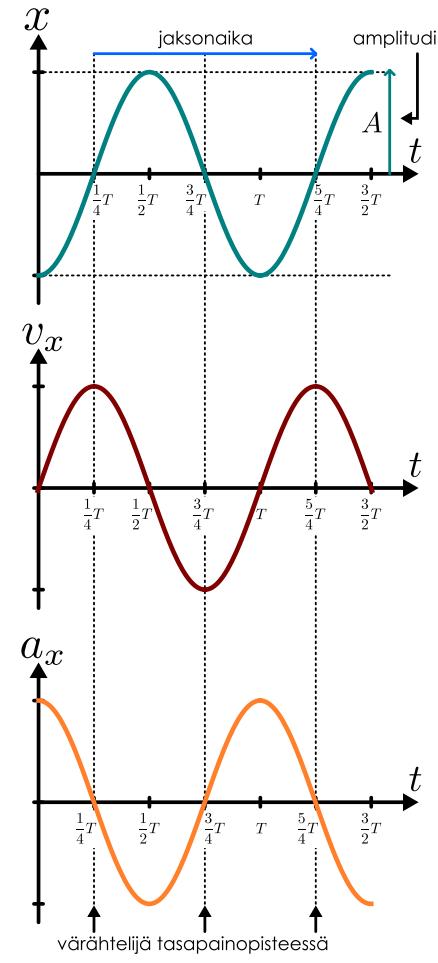
(a) Systeemin energia muuttuu potentiaalienergiasta liike-energiaksi ja takaisin.



(b) Voima-, nopeus- ja kihihtyvyysvektorit.



(c) Paikka, nopeus ja kihihtyvyys.



14.1 Harmoninen liike

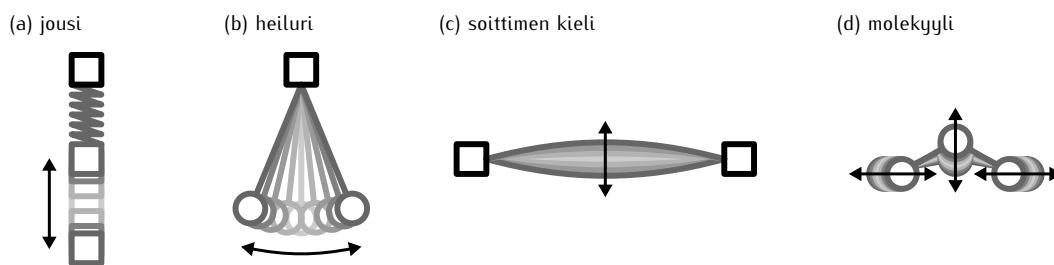
Värähtelyn perusmalli

Jaksollisessa liikkeessä systeemi palaa säännöllisin väliajoin takaisin alkutilaan ja toistaa samaa liikettä yhä uudestaan. Tyypillinen esimerkki täällästä liikkeestä on heilurin heilahtelu tai jouseen kiinnitetyn kappaleen värähtely, joka toistuu kerta toisensa jälkeen samanlaisena. Tällainen liike on **värähtelyä** eli **oskillaatiota**, jossa liikkuva kappale kulkee *edestakaistaan* tasapainoasemansa ympäri. Esimerkiksi heilurilla on ollut aikoinaan suuri teknologinen merkitys kelloissa, koska aikoinaan heilurin heilahduksien laskemiseen perustuneet kelloot ovat olleet tarkin tapa mitata aikaa. Nykyään näin ei enää ole, mutta modernitkin kelloet perustuvat yleensä jonkinlaisen värähtelyliikkeen toistojen laskemiseen. Värähtelyliike on myös luonnossa erittäin yleistä. Jos esimerkiksi lyöt kaksi kappaletta yhteen, kuulet yleensä äänisen. Tämä johtuu siitä, että kappaleiden pinnat hieman joustavat osuessaan yhteen. Jos muodonmuutos on pieni ja siis elastinen, kappaleet pyrkivät takaisin alkuperäiseen muotoonsa ja värähtelevät hetken tämän tasapainoasemansa ympäri. Kappaleen pinnan värähtely saa edelleen ilman värähteleämään, mikä kuullaan lopulta äänisen.

Aloitamme harmonisen liikkeen tutkimisen tarkastelemalla kuvassa 14.1 esitettävä kitkattomalla radalla liikuvaa jouseen kiinnitettyä vaunua. Oletetaan vaunuun kohdistuvien dissipatiivisten vuorovaikutusten olevan heikkoja, jolloin vaunun ja jousen muodostaman systeemin kokonaisenergia on likimain vakio. Tavoitteemme on ymmärtää vaunun liikettä tutkimalla vaunuun kohdistuvia voimia ja systeemin energian muutoksia muodosta toiseen.

Aluksi vaunu siirretään hieman pois tasapainoasemastaan, jolloin jousi puristuu kasaan. Sitten vaunu vapautetaan ja se pääsee liikkeelle. Koska jousi on puristunut ja pyrkii oikenemaan tasapainopisteeseen, se kohdistaa vaunuun voiman ja työntää vaunua kohti tasapainoasemaa. Tällöin jouseen varastoitunut

Kuva 14.2: Harmonisia väärähtelijöitä.



potentiaalienergia alkaa muuttua vaunun liike-energiaksi. Jousi kohdistaa vaunuun kuvassa oikealle positiiviseen x -suuntaan osoittavan voiman kunnes vaunu saavuttaa tasapainoasemansa ja jousi lepopituutensa. Tässä vaiheessa jousen potentiaalienergia on nolla, joten *kaikki potentiaalienergia on muuttunut vaunun liike-energiaksi*. Todellisuudessa tieteenkin osa potentiaalienergiasta muuttuu kitkan ja ilmanvastuksen vaikeudesta lämpöenergiaksi, mutta oletamme tässä yksinkertaisuuden vuoksi, että tämä osuuus on hyvin pieni.

Koska systeemin koko energia on nyt liike-energiaa, vaunun vauhdin täytyy olla tässä vaiheessa maksimissaan. Vaunu ei siis pysähdy tasapainoasemansa vaan jatkaa matkaansa sen ohi. Tällöin vaunu vetää jousen päättä mukanaan ja jousi alkaa venyä lepopituuttaan pidemmäksi. Jousi kohdistaa tässä vaiheessa vaunuun negatiiviseen x -suuntaan osoittavan voiman, joka hidastaa vaunun nopeutta ja tekee vaunuun negatiivista työtä, mutta vaunu ei silti pysähdy heti vaan vasta vähitellen liike-energian muuttuessa taas jousen potentiaalienergiaksi. Vaunu pysähtyy vasta kaiken liike-energian muuttuessa potentiaalienergiaksi, mikä tapahtuu jousen venymän ollessa yhtä pitkä kuin jousen puristuma oli vaunun lähtiessä liukeelle.

Tämän jälkeen liike toistuu päinvastaisena. Jousi vetää vaunua negatiiviseen x -suuntaan ja vaunu saa nopeuden negatiiviseen suuntaan. Systeemin kaikki energia on muuttunut vaunun liike-energiaksi vaunun ollessa tasapainoasemassa, jolloin vaunu jatkaa jälleen matkaansa tasapainopisteeseen ohi ja pysähtyy systeemin kokonaisenergian muuttuessa kokonaan jousen potentiaalienergiaksi, mikä tapahtuu vaunun ollessa jälleen lähtöpisteessään. Vaunun matkaa alkutilastaan takaisin samaan tilaan kutsutaan yhdeksi väärähtelyn **jaksoksi** eli **periodiksi**, ja liike toistuu tämän jälkeen uudestaan alusta.

Samanlainen potentiaali- ja liike-energian vuorottelu voi tapahtua missä tahansa systeemissä, jos systeemissä on *vaka tasapainopiste*. Vaka tasapainopiste on nimittäin potentiaalienergian minimi, ja jos systeemiä hiukan poikkeutetaan tästä tasapainosta, sen potentiaalienergian on pakko olla suurempi kuin tasapainossa. Jos systeemi päästetään sitten vapaaksi, seuraa samanlainen energian muotojen vuorottelu kuin tässä esitettyssä esimerkissä. Vakaat tasapainopisteet ovat erittäin yleisiä, sillä kaikki jäykät kappaleet ovat hieman elastisia ja käyttäytyvät aivan samoin kuin esimerkin jousi. Myös esimerkiksi heiluri tai kuopassa oleva pallo on vakaassa tasapainossa, ja niinpä nekin voivat väärähdellä.

Jos mekaanista energiota ei muutu prosessissa lainkaan lämpöenergiaksi, prosessi jatkuu samanlaisena ikuisesti. Tämä ei ole makroskooppiselle systeemille mahdollista vaan esimerkiksi jouseen kiinnitettynä vaunu väältämättä pysähtyy ennen pitkää kitkan ja ilmanvastuksen vaikutuksesta. Tämä yksinkertainen malli voi kuitenkin kuvata myös esimerkiksi atomien väärähtelyä molekyyleissä. Atomien liikkeeseen ei vaikuta dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joten tällainen väärähtely voi jatkua periaatteessa ikuisesti.



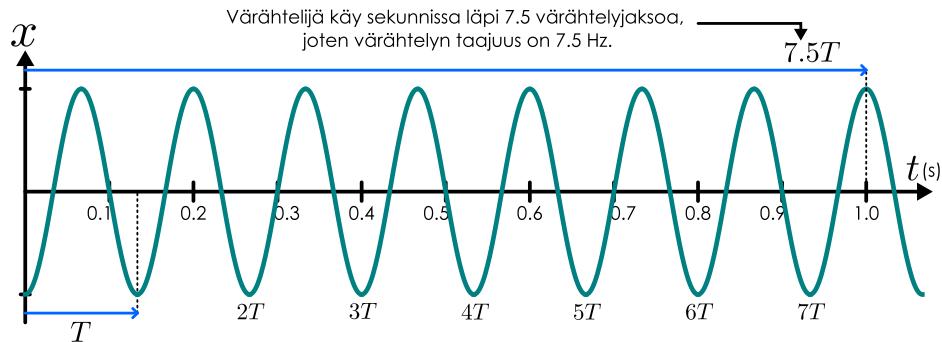
14.1 Keksi lisää esimerkkejä jaksollisesta liikkeestä, joka tapahtuu tasapainopisteiden ympärillä. Keksi myös esimerkki jaksollisesta liikkeestä, joka ei tapahdu tasapainopisteiden ympärillä.

Harmonisen liikkeen kuvajat

Tarkastellaan seuraavaksi vaunun paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden kuvajia (kuvat 14.1 (b) ja (c)). Koordinaatiston origoksi on tässä valittu vaunun tasapainopiste. Aluksi vaunu on tasapainopisteeseen nähdyn negatiivisessa suunnassa, joten sen x -koordinaatti on negatiivinen. Vaunu on myös aluksi levossa, joten paikan kuvajaan tangentin kulmakertoimen täytyy olla aluksi nolla. Kuvaaja siis alkaa vaakasuorana mutta käantyy välittömästi ylöspäin jousen työntäessä vaunu suurempaan vauhtiin. Vaunun vauhti on maksimissaan tasapainopisteessä, joten kuvaaja nousee tässä kohtaa jyrkimmin. Tasapainopisteiden ohitettuaan vaunu hidastuu, joten kuvaaja loivenee kunnes vaunu lopulta saavuttaa liikkeen toisen ääripään ja sen suunta vaihtuu. Suunnan vaihtuessa on hetki, jolloin vaunu ei enää liiku positiiviseen suuntaan mutta ei myöskään vielä negatiiviseen suuntaan, jolloin vaunu on hetkellisesti paikoillaan. Tällöin kuvaajan tangentti on vaakasuora.

Ideaalisen jousen vaunuun kohdistama voima on symmetrinen tasapainopisteeseen suhteeseen, joten vaunun ollessa tietyllä etäisyydellä tasapainopisteestään siihen kohdistuu aina yhtä suuri voima riippumatta siitä,

Kuva 14.3: Taajuus mittaa sekunnin aikana tapahtuvien värähdysten lukumäärää.



millä puolella tasapainopistettä vaunu on (eli olipa jousi puristettu tai venytetty). Tämän takia vaunun vauhti pienenee tasapainopisteen ohituksen jälkeen samalla tavalla kuin se kasvoi ennen tasapainopisteen ohitusta, ja niinpä paikan kuvaaja on symmetrinen tasapainopisteen suhteeseen. Samalla periaatteella kappaleen liike yhdestä ääriasemasta toiseen tapahtuu aivan samalla tavalla riippumatta siitä kumpaan suuntaan vaunu liikkuu, ja kuvaaja on symmetrinen myös ääriarvopisteiden suhteeseen. Näin kuvaaja piirtää aaltoilevan käyrän, joka periaatteessa toistuu samanlaisena äärettömyyksiin.

Värähtelevän kappaleen ääriaseman etäisyyttä tasapainosta kutsutaan **amplitudiksi** ja sitä merkitään tavallisesti symbolilla A . Vaunun nopeuden kuvaajassa toinen ääriarvoista on siis $x = A$ ja toinen $x = -A$. Tämä kuitenkin pätee vain koska koordinaatiston nollakohta on asetettu vaunun tasapainopisteeseen. Jos näin ei ole, amplitudi voidaan silti määrittää lukemalla kuvaajasta ääriarvopisteiden koordinaatit, sillä näiden välinen etäisyys on $2A$ riippumatta koordinaatiston origosta. Jos siis ääriarvopisteet ovat x_{\max} ja x_{\min} , amplitudi on $A = (x_{\max} - x_{\min})/2$.

Yhteen edestakaiseen liikkeeseen kuluu aikaa nimitetään puolestaan **jaksonajaksi** ja sitä merkitään symbolilla T . Jaksonajan voi lukea paikan kuvaajasta esimerkiksi valitsemalla kaksi peräkkäistä ajan hetkeä, joissa vaunu on ääriasemassa $x = -A$ ja määritämällä näiden välisen aikaeron. Jaksonajan voi määrittää myös tarkastelemalla hetkiä, jolloin vaunu on tasapainoasemassa, mutta jaksonaika *ei ole* kahden peräkkäisen tällaisen hetken välinen aikaero. Jos nimittäin vaunu on ensin tasapainoasemassa lükkeessä positiiviseen suuntaan, seuravaan kerran saapuessaan tähän pisteeseen vaunu liikkuu negatiiviseen suuntaan. Toisin sanoen vaunu käy yhden jakson kuluessa kahdesti tasapainopisteessä liikkuen eri suuntiin. Jakso on kulunut vasta silloin, kun vaunu on jälleen tasapainoasemassa ja liikkuu samaan suuntaan kuin aluksi.

Jaksonajan voi ilmaista myös ilmoittamalla *montako jaksoa värähtelijä ehtii käymään läpi yhden sekunnin aikana*, ja tästä kuvaava suure on **taajuus**. Taajuus on jaksonajan käänteisluku,

$$f = \frac{1}{T}. \quad (14.1)$$

Nimittäin jos yhteen värähdykseen kuluu esimerkiksi sadasosasekundi, $T = 0.01$ s, värähtelijän taajuus on sata "käänteissekuntia" $f = 100 \text{ s}^{-1}$. Toisaalta sataan tällaiseen värähdykseen kuluu yhteensä täsmälle yksi sekanti, joten taajuus toisiaan mittaa sekunnissa tapahtuvien värähdysten määrää. Taajuuden yksikölle on annettu erikoisnimi **herts** (Heinrich Hertzin mukaan), ja sen symboli on Hz.

14.2 Värähtelijän paikan kuvaaja leikkää t -akselin 500 kertaa yhden sekunnin aikana. Mikä on värähtelyn taajuus?

Vaunun nopeuden kuvaaja lähtee lükkeelle nollasta, koska vaunu on aluksi paikoillaan. Jousivoima työntää vaunun lükkeelle, jolloin vaunun nopeus kasvaa ja nopeuden kuvaaja on nouseva. Vaunu saavuttaa suurimman vauhtinsa tasapainopisteessä, joten nopeuden kuvaajassa on maksimi vaunun ollessa tasapainopisteessä. Tasapainopisteen ohituksen jälkeen jousi vetää vaunua negatiiviseen suuntaan, joten nopeuden kuvaaja laskee. Koska paikan kuvaaja on symmetrinen tasapaino- ja ääripisteiden suhteeseen, myös nopeuden kuvaajan täytyy olla näiden pisteiden suhteeseen symmetrinen. Lisäksi koska vaunun lüke toistuu täsmälle samanlaisena jaksonajan T välein, myös nopeuden täytyy palata takaisin alkuarvoonsa ajan T välein ja nopeuden kuvaajan täytyy toistaa samaa muotoa ajan T välein aivan kuten paikan kuvaajankin. Näin ollen nopeuden kuvaajan täytyy olla muodoltaan likimain samanlainen kuin paikan kuvaaja. Itse asiassa osoittautuu, että harmonisessa lükkeessä nopeuden kuvaaja on amplitudia lukuunottamatta *täsmälle saman muotoinen* kuin paikan kuvaaja. Kuvaajat eroavat kuitenkin siinä, milloin ne leikkaavat nollatason. Tässä esimerkissä nopeus on nolla ajan hetkellä $t = 0$ kun taas vaunu on tasapainopisteessä ajan hetkellä $t = T/4$. Nopeuden kuvaaja on

siis samanlainen kuin paikan kuvaja, mutta sitä on siirretty aika-akselilla negatiiviseen suuntaan jaksonajan neljänneksen.

Vaunun kiihtyvyys aiheutuu ainoastaan jousen vaunuun kohdistamasta voimasta, joka Hooken lain mukaisesti on suuruudeltaan suoraan verrannollinen vaunun poikkeamaan tasapainosta ja osoittaa aina kohti tasapainopistettä. Aluksi jousi on puristunut ja vaunun x -koordinaatti on negatiivinen, jolloin jousi kohdistaa vaunuun positiiviseen x -suuntaan osoittavan voiman. Vaunun liikkumessa kohti tasapainopistettä jousivoima heikkenee ja vaunun kiihtyvyys lähestyy nolla. Vaunun ohitettua tasapainopisteeseen eli sen x -koordinaatin ollessa positiivinen jousi venyy ja vetää vaunua negatiiviseen x -suuntaan. Jos siis vaunun paikkakoordinaatti x on negatiivinen, sen kiihtyvyyden x -komponentti on positiivinen, ja vastavasti paikan ollessa positiivinen kiihtyvyys on negatiivinen. Vaunun kiihtyvyyden kuvajan tätyy näin ollen olla muodoltaan samanlainen kuin paikan kuvajan paita etä kiihtyvyys on positiivinen paikan ollessa negatiivinen ja päinvastoin.

Toisaalta kiihtyvyyden kuvaja voidaan johtaa myös nopeudesta. Nopeushan kuvaa paikan muutosta ja kiihtyvyys puolestaan nopeuden muutosta, jotka kiihtyvyyden kuvajasta saadaan nopeuden kuvajasta täsmälleen samalla päättelyllä kuin nopeuden kuvajasta paikan kuvajasta. Nämä koska nopeuden kuvaja on samanlainen kuin paikan kuvaja mutta ajan $T/4$ siirrettynä, kiihtyvyyden kuvajan tätyy olla samanlainen kuin nopeuden kuvaja siirrettynä ajassa $T/4$. Toisin sanoen kiihtyvyyden kuvaja on samanlainen kuin paikan kuvaja siirrettynä ajassa $T/2$ eli puoli jaksoa. Toisaalta kuvajan symmetrian vuoksi tämä puolen jaksonajan siirto vastaa kuvajan peilaamista t -akselin suhteeseen. Siispä myös tämä päättely osoittaa, että kiihtyvyys ja paikka ovat suoraan toisiinsa verrannolliset mutta vastakkaismerkkiset.



14.3 Kuvan vaunun paikkakoordinaatti on positiivinen ja sen nopeus on negatiivinen. Mihin suuntaan muuttuu vaunun (a) paikka, (b) nopeus, (c) kiihtyvyys?

Kuvaajien muoto on toivottavasti jo ennestään tuttu, sillä ne muistuttavat trigonometristen sini- ja kosinofunktioita eli yleisesti *sinimuotoisten funktioiden* kuvaajia. Itse asiassa ne eivät vain muistuta näitä kuvaajia vaan idealisen jouseen kiinnitetyn kappaleen paikan kuvaja on *täsmälleen sinimuotoinen* funktio, minkä todistamme matemaattisesti hieman myöhemmin. Tälläistä sinimuotoista jaksollista liikettä kutsutaan yleisesti **harmoniseksi** liikkeeksi ja jouseen kiinnitetty vaunu on *harmoninen värähtelijä* eli *harmoninen oskillaatori*. Harmoninen liike on jaksollisen liikkeen perusmuoto. Kuten jo aiemmin totesimme, harmoninen liike on tärkeä malli siksi että likimain harmoninen liike on luonnossa erittäin yleistä. Harmoninen liike on tärkeää myös siksi, että sen kautta voidaan analysoida myös monimutkaisempia jaksollisen liikkeen muotoja. Siksi tavoitteemme tässä luvussa onkin ymmärtää juuri harmonista liikettä ja oppia kuvamaan jaksollista liikettä yleisesti sen avulla.

Vaihe

Tasainen ympyräliike on myös esimerkki jaksollisesta liikkeestä, sillä myös ympyrärataa kiertävä kappale palaa säännöllisesti lähtöpisteesensä aloittaakseen uuden kierroksen. Ympyräliike on fysikaalisesti erilaista kuin värähtely, sillä värähtelevä kappale liikkuu edestakaisin tasapainopisteenvälistä välillä pysähtyen ja suuntaansa vaihtuen kun taas tasaisessa ympyräliikkeessä oleva kappale liikkuu jatkuvasti samalla vauhdilla. Jaksollisena liikkeenä ympyräliike ja värähtely ovat kuitenkin hyvin samanlaisia. Kuvassa 14.4 on esitetty tästä ilmentävä koe, jossa tutkitaan jouseen kiinnitettyä vaunua sekä pyörivää kiekkoa. Kiekko on kiinnitetty tappi, jonka liikkeestä voidaan helposti nähdä, kuinka kiekkoon pyörivä on säädetty niin, että kiekkoon tekee yhden kierroksen täsmälleen samassa ajassa kuin vaunu kulkee kerran edestakaisin, jolloin kiekkoon tekevät jaksollista liikettä samalla taajuudella.

Koelaitteiston vieressä on valo, joka heijastaa laitteiston varjon viereiselle seinälle. Vaunu liikkuu valon tulosuuntaan nähdien kohtisuorassa suunnassa, joten sen varjon liike näyttää täsmälleen samalta kuin oikean vaunun liike. Levystä sen sijaan nähdään vain siihen kiinnitetyn tapin varjo. Kulkiessaan ympyrää tappi liikkuu välillä kohti valoa tai valosta poispäin, mutta tästä liikettä varjo ei näytä. Sen sijaan varjo ilmentää vain tapin liikettä valon tulosuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Varjon liikettä kutsutaankin tapin liikkeen **projektioksi**.

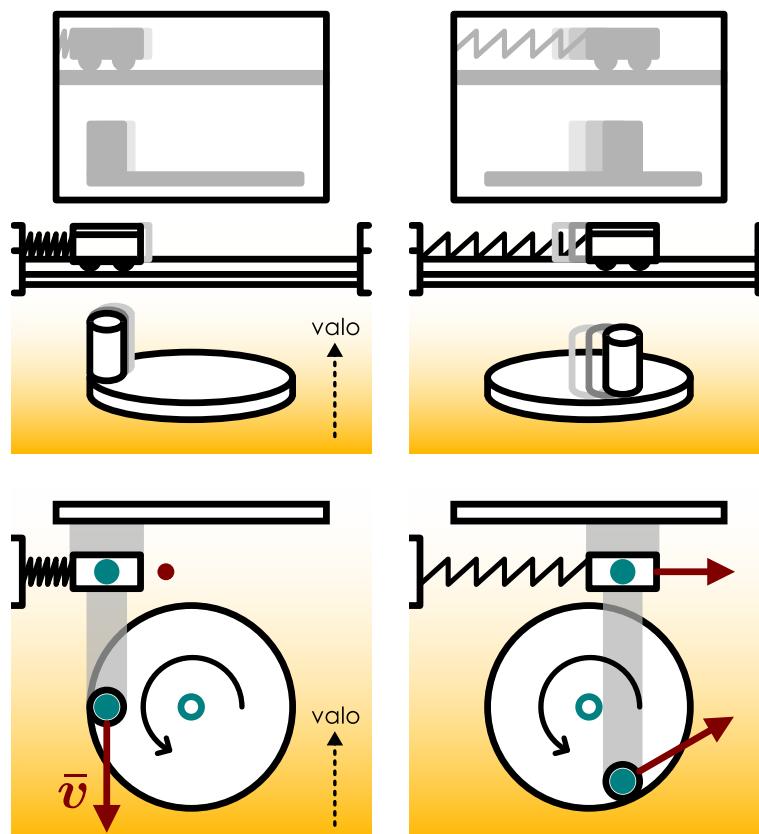
Kokeessa huomataan, että tapin ja heilurin *varjot* liikkuvat edestakaisin täsmälleen samalla tavalla. Varjojen vauhdit ovat suurimmillaan liikkumavälin keskellä ja liikkeen ääripäissä varjot hidastuvat ja pysähtyvät hetkellisesti vaihtaessa suuntaansa. Toisin sanoen *harmonisen värähtelijän jaksollinen liike on täsmälleen samanlaista kuin tasaisen ympyräliikkeen projektion jaksollinen liike*. Kaikki jaksollinen liike ei toki ole tältäistä. Esimerkiksi kilparataa kiertävän kilpa-auton liike on myös ainakin likimain jaksollista, jos auto kiertää radan aina yhtä nopeasti samoja ajolinjoja käyttäen, mutta auton liikeradan projektio ei varmastikaan liiku samalla tavalla kuin harmoninen värähtelijä.



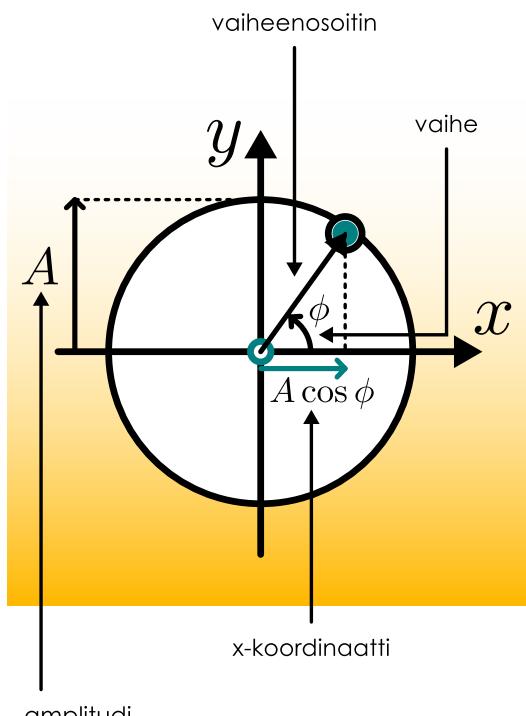
14.4 Millaista liikettä tekee neliörataa kulkevan lelun varjo, jos valo tulee neliön sivun suuntaiseksi? Onko liike jaksollista tai harmonista?

Kuva 14.4: Harmoninen väärätelijä ja ympyräliikkeessä olevan kappaleen projektio liikkuvat täsmälleen samalla tavalla.

(a) Varjot liikkuvat identtisesti.



(b) Liikettä kuvava vaiheenosoitin.



Ympyräliukkeen projektiota on harmonista, koska se on sinimuotoista. Jos pyörivän kiekon esimerkissä asetamme origon kiekon keskipisteeseen ja asetamme y -akselin valon kulkuun, tapin varjon paikan määritetään tapin x -koordinaatti. Kun vielä merkitsemme symbolilla ϕ kiekon kiertymäkulmaa asennosta, jossa tappi on x -akselilla, tapin x -koordinaatille saadaan napakoordinaattiesitys

$$x(t) = A \cos \phi(t) \quad (14.2)$$

missä A on tapin etäisyys kiekon keskipisteestä. Jos kiekkoo pyörii vakiokulmanopeudella ω , kiertokulman riippuvuus ajasta on

$$\phi(t) = \omega t + \phi_{\text{alku}} \quad (14.3)$$

ja niinpä tapin varjon paikkaa kuvaava sinimuotoinen ajan funktio $x = A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}})$. Päättelimme jo aikaisemmin jouseen kiinnitetyn vaunun lükkeen olevan niin ikään sinimuotoista, joten jos kiekon kulmataajuus säädetään oikein, tapin varjo liikkuu täsmälleen samalla tavalla kuin jouseen kiinnitetty väärätelevä vaunu.

Tapin varjon x -koordinaatin minimi- ja maksimiarvot ovat $-A$ ja A , joten etäisyys A on varjon lükkeen amplitudi. Kulma ϕ on puolestaan lükkeen **vaihe** ja jaksollisen lükkeen yhteydessä kulmanopeutta ω kutsutaan **kulmataajuudeksi**. Koska vaihe kuvailee kiekon kiertokulmaa, vaiheen muutos $\Delta\phi_{\text{jakso}} = 2\pi$ vastaa yhtä kokonaista kierrosta. Toisaalta koska kiekon yhteen pyörähdykseen kuluva aika on sama kuin sen varjon lükkeen jaksonaika $\Delta t_{\text{jakso}} = T$, kulmataajuuden ja jaksonajan välillä on yhteys

$$\omega = \frac{\Delta\phi_{\text{jakso}}}{\Delta t_{\text{jakso}}} = \frac{2\pi}{T}. \quad (14.4)$$

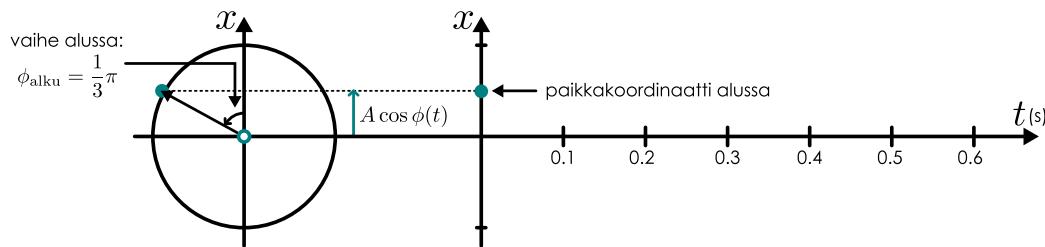
Edelleen koska taajuus on jaksonajan käänneisluku, $f = 1/T$, pätee myös

$$\omega = 2\pi f. \quad (14.5)$$

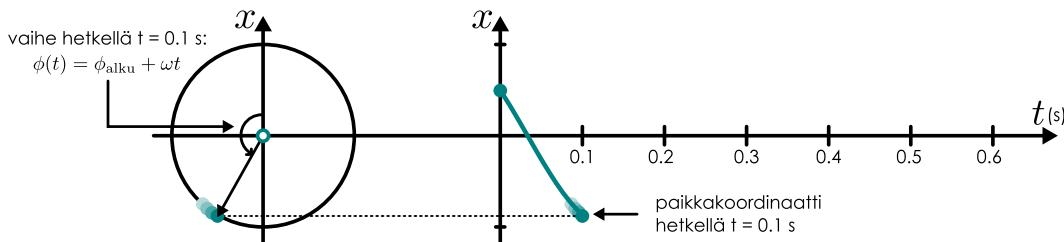
Nimitys kulmataajuus oikeastaan viittaa siihen, että ω liittyy sekä ympyräkehän kiertävän kappaleen kulmanopeuteen että kappaleen projektiotaan taajuuteen. Kulmataajuuden dimensio on sama kuin taajuuden. Kulmataajuuden yksikköön ei kuitenkaan ole tapana käyttää hertsia vaan tämä on varattu nimenomaan taajuuden yksiköksi. Kulmataajuuden yksikköön käytetään vastaavaa SI-perusyksikköä 1/s.

Kuva 14.5: Pyörivä vaiheenosoitin piirtää harmonisen liikkeen kuvaajan. Huoma, että tässä x -akseli on piirretty pystyyn.

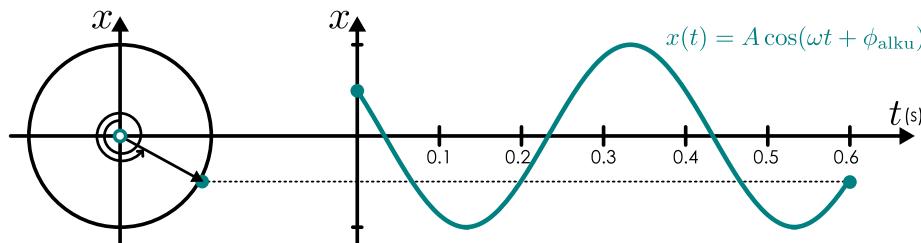
(a) Vaiheen alkuarvo määrittelee vaiheenosittimen asennon hetkellä $t = 0$.



(b) Ajan kullessa vaiheenosoitin käännyt ja sen x -komponentti piirtää kuvaajan.



(c) Vaiheenosittimen pyöriessä piirtyy sinimuotoinen kuvaaja.



- 14.5 Ympyräliikettä tekevä kappale kiertää sekunnissa kulman $\pi/3$. (a) Mikä on kappaleen kulmanopeus? (b) Kauanko kappaleella kestää kiertää kokonainen kierros? (c) Mikä on kappaleen projektiotaajuus ja jaksonaika?

Harmonisen liikkeen kuvaajan muodon piirtämiseksi riittää tietää värähtelyn amplitudi sekä jaksonaika tai taajuus. Amplitudi kertoo kuinka "korkea" kuvaaja on ja jaksonaika puolestaan määräätä kuvaajan "leveyden". Tämä ei kuitenkaan riitä kertomaan missä kohtaa värähtelyjaksoa värähtelijä kulloinkin on. Esimerkiksi kiekon tapin varjon amplitudi kertoo millä välillä varjo liikkuu, mutta varjo voi silti olla yhdellä ajan hetkellä missä tahansa liikkeensä ääripäiden välillä. Ja vaikka tietäisimmekin varjon olevan esimerkiksi täsmälleen ääripäiden keskellä "tasapainopisteessä", tämä ei vielä kerro *kumpaan suuntaan* varjo liikkuu. Vaihe kuitenkin määrittelee täsmällisesti sekä varjon paikan että sen nopeuden. Jos esimerkiksi varjon vaihe on neljänneskierroksen eli $\phi = \frac{1}{4}\Delta\phi_{jakso} = \frac{1}{2}\pi$, sen paikkakoordinaatti on $x = A \cos(\pi/2) = 0$ eli varjo on täsmälleen liikkeensä ääripäiden puolivälissä. Toisaalta koska kiekko pyörii kuvan mukaan ylhäältä katsoen vastapäivään ja se on kiertänyt neljänneskierroksen, kiekkoon kiinnitettä tappi on kiekon keskipisteestä katsoen positiivisessa y -suunnassa (kuvaissa siis keskipisteen yläpuolella) ja liikkeessä *negatiiviseen* x -suuntaan. Varjon ollessa samassa paikassa mutta liikkeessä *positiiviseen* x -suuntaan tapin täyttyä olla kiekon keskustaan näden negatiivisessa y -suunnassa (kuvaissa keskipisteen alapuolella) eli asemassa, jossa kiekko on kiertänyt kolme neljänneskierrostta. Tällöin vaihe on siis $\phi = \frac{3}{4}\Delta\phi_{jakso} = \frac{3}{2}\pi$.

Tässä nähty pyörimisen ja värähtelyn välinen yhteys osoittautuu myös hyvin tärkeäksi apuvälineeksi harmonisen liikkeen analyysissä. Koska pyörivän kiekon projektio liikkuu harmonisesti, voimme kuvata harmonista värähtelyä pyörimislukkeen avulla. Olipa kyseessä millainen harmoninen värähtelijä tahansa, voimme aina kuvitella samalla taajuudella pyörivän kiekon ja analysoida sen liukkeen. Käytännössä tämä onnistuu niin, että piirrämme xy -tasoon nuolen, jonka pituus esittää värähtelyn amplitudia, ja kuvittelemme nuolen pyörivän kulmataajuudella $\omega = 2\pi f$. Tällöin värähtelijän vaihetta kuvaavat nuolen x -akselista mitattu kulma ja värähtelijän paikkaa kuvaavat nuolen x -koordinaatti.



14.6 Mihin suuntaan ympyrärtaa kulkevan kappaleen nopeus- ja kiilthyvysvektorit osoittavat? Miten nämä liittyvät kappaleen projektiotaan nopeuteen ja kiilthyvytteen?

Tällaista harmonisen väärähtelyn graafista esitystä kutsutaan **vaiheenosoittimeksi**. Vaiheenosoitimen pyöriessä vakiokulmanopeudella sen kärki kulkee ympyräradalla. Vaiheenosoitimen kärjen x -koordinaatti liikkuu tällöin harmonisesti. Kuvassa 14.5 on esitetty, kuinka tämän harmonisen liikkeen kuvaaja voidaan helposti piirtää vaiheenosoitimen avulla. Tässä vaihe on aluksi $\phi_{\text{alku}} = \frac{1}{3}\pi$ eli kuudesosakierroksen. Tämä tarkoittaa, että alkuhetkellä $t = 0$ vaiheenosoitin on jo valmiaksi kiertynyt kulman $\phi_{\text{alku}} = \frac{1}{3}\pi$ x -akseliin nähdyn. Väärähtelijän paikka on tällöin $x_{\text{alku}} = A \cos \phi_{\text{alku}} = \frac{1}{2}A$. Ajan kuluessa vaihe muuttuu, mutta voimme määrittää väärähtelijän paikan minä tahansa ajan hetkenä t laskemalla ensin vaiheen tuona hetkenä, piirtämällä täitä vastaavan vaiheenosoitimen ja määrittämällä sen avulla graafisesti väärähtelijän x -koordinaatin. Sama tekniikka toimii myös takaperin: jos tiedämme väärähtelyn amplitudin sekä väärähtelijän paikan ja liikkeen suunnan, voimme piirtää näitä vastaavan vaiheenosoitimen ja päättää sen avulla väärähtelyn vaiheen varsinaisesti laskematta mitään. Toki ongelman voi ratkaista myös laskemalla, mutta tämä vaatii trigonometristen käynteisfunktioiden käyttöä sekä funktioiden jaksollisuuden huomioimista, mikä on varsin työlästä ja virheältä.



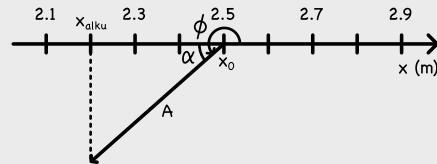
14.7 Harmonisen väärähtelijän amplitudi on 1.00 m ja jaksonaika 1.00 s. Ajan hetkellä $t = 0$ väärähtelijän poikkeama tasapainopisteestä on $x = 0.80$ m ja väärähtelijä liikkuu kohti positiivista x -suuntaa. (a) Mikä on väärähtelijän vaihe? (b) Millä ajan hetkellä väärähtelijä on seuraavan kerran pistessä $x = -1.00$ m?

esimerkki 14.1

Vaiheenosoitin

Kappale väärtelee harmonisesti amplitudilla 0.400 m pisteen $x_0 = 2.500$ m ympärillä. Ajan hetkellä $t = 0$ s kappale on pistessä $x_{\text{alku}} = 2.200$ m ja sen nopeus on $v_{x,\text{alku}} = 0.100$ m/s. Mikä on väärähtelijän (a) vaihe ja (b) x -koordinaatti ajan hetkellä $t = 5.00$ s?

TILANNE Kuvataan väärähtelyä vaiheenosoitimella. Osoittimen pituus on amplitudi $A = 0.4$ m, sen kanta on tasapainopisteessä $x_0 = 2.50$ m ja sen kärjen x -koordinaatti on $x_{\text{alku}} = 2.20$ m. Vaiheenosoitin pyörii positiiviseen suuntaan eli kuvassa vastapäivään. Koska nopeus on positiivinen, vaiheenosoitimen kärjen täytyy olla liukkeessa positiiviseen suuntaan ja osoittimen täytyy siis osoittaa alaviistoon.



SUUNNITELMA Ratkaistaan ensin vaihe, joka on positiivisen x -akselin ja vaiheenosoitimen välinen kulma. Osoittimen ja negatiivisen x -suunnan välinen kulma α ratkeaa kuvasta trigonometrialla,

$$\cos \alpha = \frac{x_0 - x_{\text{alku}}}{A}, \quad (14.6)$$

ja vaihe saadaan lisäämällä tähän puoli kierrostaa $\phi_{\text{alku}} = \pi + \alpha$. Vaihe ajan funktio on $\phi(t) = \omega t + \phi_{\text{alku}}$, missä kulmataajuus ω on tuntematon.

Kappaleen paikkakoordinaatti on vaiheenosoitimen kärjen x -koordinaatti,

$$x(t) = x_0 + A \cos \phi(t), \quad (14.7)$$

ja kappaleen nopeus on tämän derivaatta, $v_x(t) = x'(t) = -A \sin \phi(t) \cdot \phi'(t) = -A\omega \sin \phi(t)$. Tästä saadaan ratkaistua kulmataajuus, minkä jälkeen voimme laskea vaiheen ja paikan funktioista $\phi(t)$ ja $x(t)$.

RATKAISU Vaihe on alussa (radiaaneissa) $\phi_{\text{alku}} = \pi + \arccos \frac{0.30 \text{ m}}{0.40 \text{ m}} = 3.864$. Nopeuden lausekkeesta puolestaan ratkeaa kulmataajuus

$$\omega = \frac{v_x(0)}{-A \sin \phi(0)} = \frac{0.10 \text{ m/s}}{(-0.40 \text{ m}) \cdot \sin 3.864} = 0.378 \text{ s}^{-1}. \quad (14.8)$$

Vaihe hetkellä $t = 5$ s on siis $\phi(5) = (0.378 \text{ s}^{-1}) \cdot (5 \text{ s}) + 3.864 = 5.75$ ja paikka $x(5) = x_0 + A \cos \phi(5) = 2.85$ m.

ARVIOINTI Kappaleen jaksonaika on $T = 2\pi/\omega = 16.6$ s. Viisi sekuntia on hieman alle kolmannes täästää eli vaiheenosoitin kiertyy viidessä sekunnissa noin kolmanneskerroksen. Kuvasta voimme päättää, että vaiheenosoitin päätyy tällöin osoittamaan lähes vaakasuoraan oikealle, joten kappaleen paikan täytyy olla lähellä ääripistettä $x = 2.90$ m.



14.8 Selitä omien sanoin, mitä on harmoninen väärähtely. Mikä on vaihe ja miten liikettä kuvataan vaiheenosoitimella? Mitä ovat taajuus, kulmataajuus, jaksonaika, amplitudi?

14.2 Harmonisen liikkeen dynamiikka

Harmoninen liikeyhtälö

Edellisessä luvussa tutkimme harmonisen väärähelyn ominaisuuksia mutta perustelimme tulokset vain peri-aatteellisella tasolla. Seuraavaksi tutkimme täsmällisesti harmonisen liikkeen matemaattista kuvausta.

Määritelimme harmonisen väärähelyn sinimuotoiseksi liukkeeksi, jota kuvaa funktio

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.9)$$

Ensimmäinen tehtävämme onkin tutkia millaisessa tilanteessa kappaleen paikkaa kuvaava tällainen funktio. Samalla todistamme, että esimerkkinä käytämämme jouseen kiinnitettävaunu todella liikkuu harmonisesti.

Jos kappaleen paikkaa kuvaava funktio 14.9, voimme laskea sen nopeuden määritelmän mukaisesti paikan aikaderivaattana. Derivoititsäännön $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$ perusteella harmonisesti väärähelyvän kappaleen nopeus on siis ajan funktiona

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.10)$$

Huomaa, että kulmamuuttujat pitää aina ilmaista *radiaaneissa*, joka on absoluuttinen kulman yksikkö! Esimerkiksi kulmataajuus täytyy käsitellä yksiköissä radiaania sekunnissa eli 1/s. Jos kulmataajuuden esittää esimerkiksi muodossa astetta sekunnissa, yllä esitetystä lausekkeesta saa väärän lukuarvon kappaleen nopeudelle.

Kiihtyvyys saadaan puolestaan nopeuden derivaattana säännön $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$ avulla, joten

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.11)$$

Paikan ja kiihtyvyyden lausekkeet ovat siis *samat* lukuunottamatta kiihtyvyyden lausekkeessa esiintyvä termiä $-\omega^2$, joten harmoniselle liukkeelle täytyy päteä yhtälö

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0). \quad (14.12)$$



14.9 Piirrä kuvaajat edellä laskettuille funktioille x , v_x ja a_x , kun kaikki fysikaaliset parametrit saavat esimerkiksi arvon 1. Miten derivointi muuttaa funktioiden $\sin t$ ja $\cos t$ kuvaajia? Vertaa tulosta kuvaan 14.1.

Tämä differentiaaliyhtälö on *harmoninen liikeyhtälö*. Yhtälön johto perustui ainoastaan oletukseen, että väärähelijän paikkaa kuvaava sinimuotoinen funktio (14.9). Niinpä harmoninen liikeyhtälö (14.12) on sinimuotisten funktioiden yleinen ominaisuus, joka pätee mille tahansa kappaleelle, jonka liike on harmonista ja jota kuvaa sinimuotoinen funktio. Myös käänneinen tulos on totta: jos kappaleen kiihtyvyydelle ja paikalle pätee harmoninen liikeyhtälö (14.12), kappaleen *täytyy* joko olla levossa tai väärähellä harmonisesti kulmataajuudella ω , koska tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on funktio (14.9).

Tarkastellaan sitten jälleen kuvan 14.1 jouseen kiinnitettävä vaunua harmonisen liukkeen esimerkkinä ja analysoidaan nyt vaunun liike matemaattisesti. Tavoitteenaamme on johtaa kappaleen kiihtyvyydelle ja paikalle muotoa (14.12) oleva liikeyhtälö, koska jos pystymme tähän, todistamme samalla vaunun liukkeen olevan harmonista väärähelyä. Tämä onnistuu tarkastelemalla vaunuun kohdistuvia voimia.

Jousi kohdistaa Hooken lain mukaisesti vaunuun voiman

$$F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}} = -k(x - x_0) \quad (14.13)$$

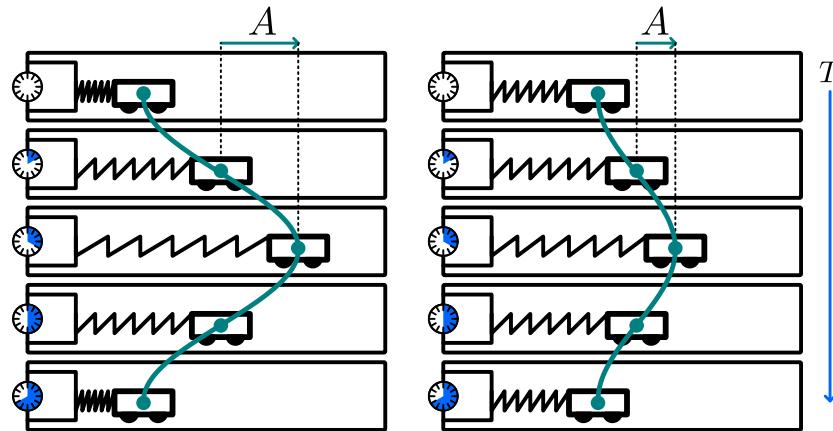
missä k on jousen jousivakio ja x_0 on vaunun tasapainopisteenvaakaus. Koska koordinaatiston origo asetettiin juuri tasapainopisteeseen, $x_0 = 0$. Hooken lain miinusmerkki puolestaan kuvaa sitä, että voima osoittaa aina kohti tasapainoasemaa. Esimerkiksi vaunun siirtymässä tasapainopisteestä positiiviseen suuntaan eli jousen venyessä voima osoittaa negatiiviseen suuntaan. Vaunuun kohdistuu myös painovoima ja pinnan normaalivoima, mutta nämä kumoavat toisensa. Lisäksi dissipatiiviset voimat kuten kitka oletettiin hyvin heikoiksi, joten vaunuun kohdistuva kokonaisvoima on sama kuin jousen vaunuun kohdistama voima, $F_{x,\text{kokonais}} = F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}}$. Niinpä dynamiikan peruslain mukaisesti vaunun kiihtyvyys on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonais}} = -\frac{k}{m} x. \quad (14.14)$$

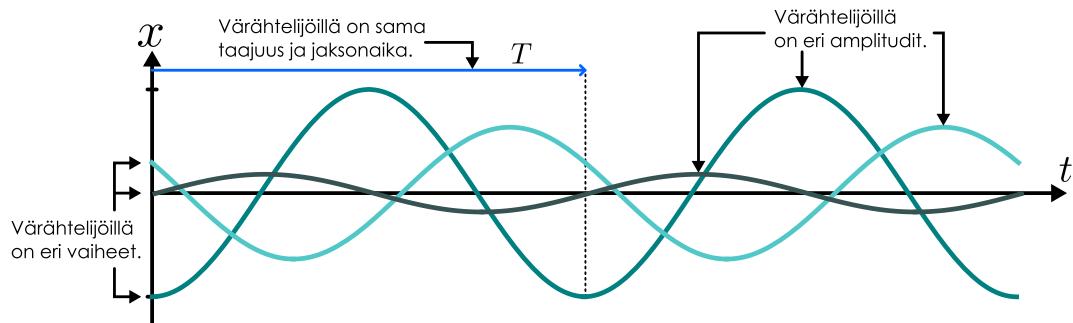
Tämä yhtälö sanoo, että vaunun kokema kiihtyvyys on suoraan verrannollinen vaunun paikkakoordinaatin arvoon, mutta vastakkaisuuntainen. Sama tulos pääteltiin sanallisesti jo liikkeen kuvajalta piirrettäessä, sillä tällöin totesimme vaunun kiihtyvyyden kuvajan olevan paikan kuvajan peilikuva t -akselin suhteen, mikä siis matemaattisesti vastaa x -kuvalan kertomista negatiivisella vakiolla.

Kuva 14.6: Harmoninen väärähtelijä voidaan saada värähtelemään eri amplituudeilla ja eri vaiheissa, mutta sen taajuus ja jaksonaika riippuvat väärähtelijän ominaisuuksista.

(a) Jos jouseen kiinnitetty vaunu lasketaan liikkeelle eri pisteistä, väärähtelyn amplitudi muuttuu mutta jaksonaika ei.



(b) Kaikki samanlaiset väärähtelijät värähtelevät samalla taajuudella vaikka niillä olisi eri vaiheet ja amplitudit.



Jouseen kiinnitetyn vaunun likeyhtälö (14.14) ja harmoninen likeyhtälö (14.12) ovat siis samanlaiset paitsi että toisessa esiintyy vakio ω^2 ja toisessa vakio k/m . Mutta tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että vaunun paikkaa kuvaavan funktion $x(t)$ on oltava muotoa (14.9), missä kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14.15)$$

Periaatteessa myös negatiivinen ratkaisu olisi mahdollinen, mutta koska sinimuotoiset funktiot ovat symmetrisiä, tämä antaa saman ratkaisun vaunun paikalle kuin positiivinen arvo. Tavallisesti kulmataajuudelle hyväksytäänkin vain positiivisia arvoja aivan kuten taajuus ja jaksonaikakin ovat positiivisia suureita.

14.10 Eräs kappale on kiinnitetty akseliin ja sen hitausmomentti tämän akselin suhteeseen on I_θ . Kun kappaleella kierretään kulma θ , siihen kohdistuu momentti $\tau_\theta = -\kappa\theta$, missä κ on ns. torsiovakio. Jos kappale päästetään kierron jälkeen vapaasti liikkumaan, se alkaa pyörähdellä edestakaisin. Kuinka pitkä aika yhteen edestakaiseen heilahdukseen kuluu?

Kulmataajuuden lausekkeessa (14.15) k ja m ovat jousen ja vaunun ominaisuuksia. Mitä suurempi jousivakio on, sitä jäykempi jousi on ja sitä voimakkaammin se vetää ja työntää vaunua kohti tasapainoa. Tämä saa vaunun värähtelemään nopeammin ja kulmataajuus on suuri. Toisaalta mitä suurempi inertia vaunulla on, sitä vaikeampi jousen on muuttaa vaunun liikettä. Siispä massiivinen vaunu lükkiu hitaasti ja sen kulmataajuus on pieni. Liikkeen amplitudi ja vaihe alkuperäkellä sen sijaan eivät ratkeaa likeyhtälöstä. Tämä on järkevää, koska voimme laittaa vaunun värähtelemään eri tavoin. Jos venytämme jousta paljon ja päästämme vaunun liikkeelle, vaunun amplitudi on suuri. Toisaalta voimme venyttää jousta myös hyvin vähän, jolloin vaunu värähtelee pienellä amplitudilla. Tai vaihtoehtoisesti voimme tönäistää vaunun liikkeelle, jolloin vaunu ei ole aluksi värähdysliikkeen ääriasennossa eikä vaihe alkuperäkellä ole nolla. Amplitudi ja vaihe alkuperäkellä riippuvat siis siitä, kuinka vaunu saatetaan liikkeelle. Ne riippuvat tilanteen *alkuehdoista*.

Tämä tarkoittaa myös sitä, että väärähtelyn kulmataajuuteen *ei voi vaikuttaa* esimerkiksi venyttämällä jousta enemmän tai antamalla vaunulle alkuvauhtia, koska kulmataajuus riippuu *vain* jousen jäykkyydestä ja vaunun inertialta. Lisäksi koska jaksonaika on käännekkäinen verrannollinen kulmataajuuteen, myös jaksonaika riippuu

vain jousesta ja vaunusta. Niinpä jos valmistamme useita samanlaisia värähtelijöitä ja asetamme ne väräh-telemään eri amplitudeilla, *kaikki samanlaiset värähtelijät värähtelevät samalla taajuudella*. Jos värähtelijän amplitudi on suuri, se joutuu kulkemaan pitkän matkan, mutta toisaalta mitä kauempana tasapainopisteestä värähtelijä kulkee, sitä suurempi voima siihen kohdistuu ja sitä suuremman kühityvyyden ja nopeuden se saa. Harmonisessa värähtelijässä nämä tekijät täsmälleen kumoavat toisensa, jolloin värähtelijältä kuluu yhteen jaksoon aina yhtä pitkää aika riippumatta amplitudista. Tämä ominaisuus pätee kaikille harmonisille värähteli-jöille. Myös esimerkiksi heilurin jaksonaika on riippumaton heilahduksen laajuudesta ja kielisoittimen kielen värähtelytaajuus on riippumaton siitä, kuinka voimakkaasti kielty vedetään. Tämä on tärkeää harmonisen vä-rähtelyn ominaisuus, koska sen ansiosta esimerkiksi heilurikellon tai muun värähtelyihin perustuvan kellon käyntinopeus ei riipu heilurin heilahduksen amplitudista.

Harmonisen liikkeen energia

Harmonisen värähtelijän käytös perustuu siihen, että värähtelijä liikkuu vakaan tasapainopisteeseen ympärillään ja siihen kohdistuu aina kohti tasapainoasemaa osoittava voima, jonka suuruus on suoraan verrannollinen värähtelijän etäisyyteen tasapainopisteestä. Sama asia voidaan ilmaista myös systeemin potentiaalienergian avulla, sillä kappaleeseen kohdistuva voima osoittaa aina kohti pienenevän potentiaalienergian suuntaa. Esimerkiksi ideaalisen jousen potentiaalienergia on

$$U_{\text{jousi}} = - \int_{x_0}^x F_x dx = \int_{x_0}^x k(x - x_0) dx = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (14.16)$$

Harmonisen väärätelijän potentiaalienergia on siis paikan funktiona paraabeli. Potentiaalienergiassa on minimi tasapainopisteen kohdalla ja energia on verrannollinen tasapainopisteestä mitattu etäisyyden *neliöön*.

Harmonisesti värähtelevän systeemin energia vaihtelee potentiaali- ja liike-energian välillä kuten kuvasa 14.1 esitettiin. Esimerkiksi jousen ja vaunun muodostaman systeemin kokonaisenergia on pelkkää liike-energiaa tasapainopisteessä ja pelkkää potentiaalienergiaa värähtelyn ääripisteissä vaunun ollessa maksimietäisydellä tasapainopisteestä. Värähtelyn laajuutta mittaa amplitudi, joten tämä maksimitäisyys on $x_{\max} = A$ ja systeemin suurin mahdollinen potentiaalienergia on

$$U_{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (14.17)$$

Edelleen koska systeemin energia on näissä pisteissä pelkkää potentiaalienergiaa, tämä on myös systeemin kokonaisenergia,

$$E_{\text{kokonais}} = U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2. \quad (14.18)$$

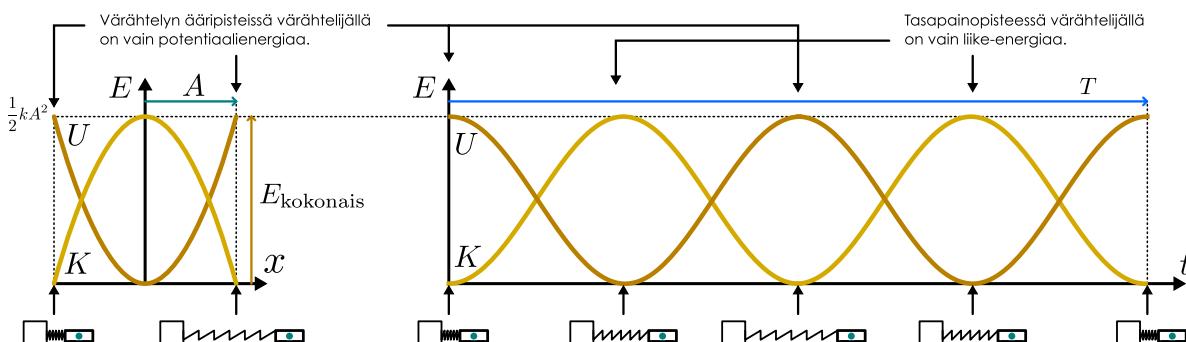
Voimme johtaa saman tuloksen myös suoraan aiemmin ratkaistuista vaunun paikan ja nopeuden lausekkeista. Jouseen kiinnitetyn vaunun liike-energia on nimittäin vaiheen funktio

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \phi = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \phi, \quad (14.19)$$

mihin on sijoitettu kulmataajuuden lauseke (14.15). Jousen potentiaalienergia on puolestaan

$$U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \phi, \quad (14.20)$$

Kuva 14.7: Harmonisen väärähtelijän potentiaalienergia ja liike-energia paikan ja ajan funktiona.



joten trigonometristen funktioiden perusyhteyden $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ perusteella systeemin kokonaisenergia on

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (14.21)$$

kuten pitääkin.

Harmonisen väärätelijän kokonaisenergia on siis suoraan verrannollinen *amplitudin neliöön*. Tämä on totta kaikille harmonisille väärätelijöillä, koska harmonisten väärätelijöiden potentiaalienergia on aina verrannollinen tasapainopisteestä mitatun poikkeaman neliöön. Väärätelijän ei kuitenkaan tarvitse olla künny jousessa, joten energiota ei välittämättä kuvaaa jousivakio vaan jokin muu systeemiä kuvaava vakio. Esimerkiksi koska jousivakion ja kulmataajuuden välillä on yhteys $k = m\omega^2$, jouseen kiinnitetyn kappaleen kokonaisenergian voi kirjoittaa vaihtoehtoiseen muotoon

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (14.22)$$

Tämä muoto pääte kaikille liikkuvista kappaleista koostuville väärätelijöille.



14.11 (a) Montako kertaa harmonisen väärätelijän potentiaali- ja liike-energia ovat yhtä suuret jakson aikana? (b) Mikä on väärätelijän vaihe näinä hetkinä ja millainen vaiheenosoitin kuvaaa näitä tilanteita? (c) Mikä on tällöin väärätelijän paikkakoordinaatti ja nopeus?

Kompleksiluvut

Osoittautuu, että harmonista liikettä on matemaattisesti kaikkein helpoin kuvata käyttämällä **kompleksilukuja**. Kompleksiluvut eivät suinkaan ole välittämättömiä väärähtelyliukkeen kuvaamiseksi vaan reaaliluvut ovat tässä aivan riittävät. Tässä materiaalissa käytämme jatkossakin pääasiassa reaalifunktioita väärähtelyjen ja aaltojen kuvamiseen, mutta esittemme kuitenkin väärähtelyjen kompleksiesityksen idean. Lisäksi opimme luvussa 17, että kvanttimekanikaassa reaaliluvuilla *ei enää selviä* vaan kompleksilukuja tarvitaan välittämättä, ja tästäkin syystä on hyvä tutustua kompleksilukuihin jo nyt.

Kompleksiluvut muistuttavat matemaattisesti reaalilukuja. Ainoa lisäys reaalilukuihin on se, että kompleksilukuihin sisällytetään ns. **imaginääriyksikkö** i , jolla on reaaliluvuille mahdoton ominaisuus

$$i^2 = -1. \quad (14.23)$$

Ei ole syytä pohtia mitä tämä tarkoittaa, sillä imaginääriyksikkö ei ole määrä ilmaiseva reaaliluku vaan vain matemaattinen olio, jolle on sovittu tällainen laskusääntö. Kun hyväksymme tällaisen säännön käytön, voimme yleisesti määritellä kompleksiluvut muotoa

$$z = x + iy \quad (14.24)$$

olevana lukuina, missä x ja y ovat reaalilukuja. Näitä reaalilukuja kutsutaan kompleksiluvun z *reaaliosaksi* ja *imaginääriosaksi*, ja niitä voidaan merkitä esimerkiksi $\text{Re}[z] = x$ sekä $\text{Im}[z] = y$. Kompleksiluvuille pätevät täsmälleen samanlaiset laskusäännöt kuin reaaliluvullekin. Niitä voi summata, vähentää, kertoa, jakaa, korottaa potenssiin jne. Kertolaskuissa pitää vain aina muistaa käyttää sääntöä (14.23).

Kompleksiluvuille on määritelty yhtäsuuruus niin, että kaksi kompleksilukua $z_1 = x_1 + iy_1$ ja $z_2 = x_2 + iy_2$ ovat samat jos ja vain jos niiden reaaliliike- ja imaginääriosat ovat samat,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ja } y_1 = y_2. \quad (14.25)$$

Kompleksiluvuille *ei kuitenkaan ole määritelty järjestystä*. Ei siis voida sanoa, että luku z_1 olisi suurempi tai pienempi kuin z_2 .

Kompleksiluvut voivat algebrallisesti tuntua oidoilta, mutta niillä on hyvin selkeä geometrinen tulkinta. Kompleksilujen voidaan nimittää ajatella olevan kaksiuotteisen koordinaatiston pisteitä, kun koordinaatiakselina ovat reaaliliike- ja imaginääriosat. Tätä kutsutaan **kompleksitasoksi**, ja kompleksilukua $z = x + iy$ vastaa tämän tason piste (x, y) tai vaihtoehtoisesti origosta tähän pisteesseen osoittava vektori $x\hat{i} + y\hat{j}$. Tässä esityksessä imaginääriyksikkö on sama asia kuin kompleksitason piste $(0, 1)$ tai y -suuntainen yksikkövektori \hat{j} . Nämä ajatellen imaginääriyksikkökään ei tunnu toivottavasti niin kummalliselta — se yksinkertaisesti erottelee kompleksiluvun “ y -komponentin”.

Koska kompleksiluvut voidaan ajatella tason vektoreiksi, on luonnollista määritellä kompleksiluvun itse-sarvoksi tämän vektorin pituus

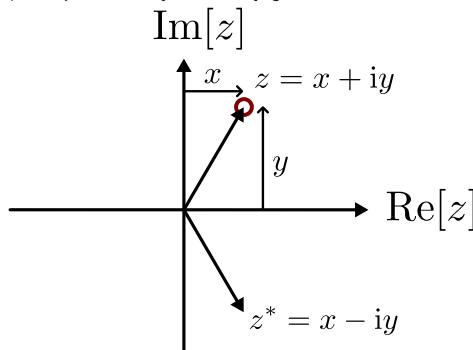
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (14.26)$$

Tämä on usein helpoin laskea luvun $z = x + iy$ *kompleksikonjugaatin*

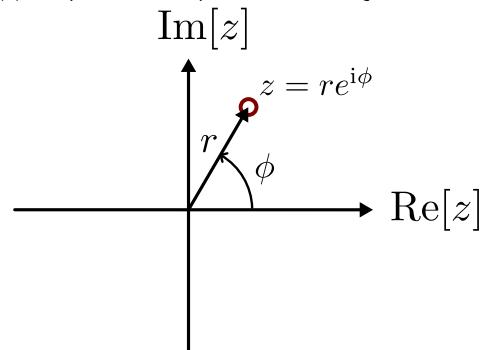
$$z^* = x - iy \quad (14.27)$$

Kuva 14.8: Kompleksilukujen esitys tason vektoreina. Vaaka-akseli kuvailee luvun reaali- ja pystyakseli imaginääriosaan.

(a) Kompleksiluku ja sen konjugaatti.



(b) Kompleksiluvun napakoordinaattiesitys.



avulla, sillä

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (14.28)$$

Kompleksikonjugoinnissa siis imaginääriosaan etumerkki vaihtuu, ja kompleksiluvun itseisarvon neliö saadaan luvun ja sen konjugaatin tulona. Graafisesti konjugointi tarkoittaa luvun peilaamista reaaliakselin suhteen, kuten kuvassa 14.8 (a).

Alkeisfunktioit määritellään kompleksiluvuille yleensä *sarjakehitelmien* avulla. Sarja tarkoittaa matematiikassa päättymätöntä summaa eli laskutoimitusta, jossa lasketaan yhteen äärettömän monta lukua. Emme tietenkään todellisuudessa voi laskea yhteen äärettömän monta lukua, mutta yleensä niihin ei ole tarkoitusta. Sen sijaan sarjojen avulla halutaan usein kirjoittaa matemaattisia funktioita uuteen, helpommin käsiteltävään muotoon.

Esimerkiksi eksponenttifunktio määritellään kompleksiluvuille päättymättömänä summana

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \frac{(i\phi)^5}{5!} \dots \quad (14.29)$$

Tämä ei ole käytännön laskemisen kannalta kovin kätevää, mutta voimme tämän esityksen avulla tehdä uusia pääteliä. Jos nimittäin yllä esitetty lauseke sievennetään huomioiden imaginääriyksikön neliön olevan $i^2 = -1$, saadaan tulos

$$e^{i\phi} = \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} \dots \right) + i \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + \dots \right). \quad (14.30)$$

Tässä suluissa olevat lausekkeet ovat kuitenkin kosini- ja sinifunktoiden sarjakehitelmät. Näin saadaan johdettua tärkeää **Eulerin kaava** kompleksiselle eksponenttifunktiolle,

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi. \quad (14.31)$$

Tämän mukaan *kompleksisen eksponenttifunktion reaali- ja imaginääriosat ovat kulman ϕ kosini ja sini*, joten kompleksiluku $e^{i\phi}$ esittää siis kompleksitaso pistettä $(\cos \phi, \sin \phi)$.

Jos $\phi = 0$, tämä on piste $(1, 0)$. Jos $\phi = \pi/2$, kyseessä on piste $(0, 1)$. Yleisesti olipa ϕ mikä tahansa reaaliluku, $e^{i\phi}$ kuvailee origosta etäisyydellä 1 olevaa pistettä. Nämä pisteet siis muodostavat yhdessä kompleksitaso *yksikkömpyrän*, ja täsmällisemmin kompleksiluku $z = e^{i\phi}$ esittää kompleksitaso yksikkövektoria, jota on kierretty kompleksitasossa kulma ϕ vastapäivään.

Yleisesti mikä tahansa kompleksiluku voidaan kirjoittaa napakoordinaattien avulla muodossa

$$z = re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad (14.32)$$

missä $r = |z|$ on luvun itseisarvo ja kulmaa ϕ kutsutaan kompleksiluvun *vaihekulmaksi*. Tämän luvun kompleksikonjugaatti on

$$z^* = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r[\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)] = re^{-i\phi}. \quad (14.33)$$

Konjugointi siis vaihtaa kompleksiluvun vaihekulman etumerkin, kuten myös kompleksitaso graafisen esityksen perusteella voi päättää.



14.12 Vertaa kuvia 14.4 (b) sekä 14.8 (b). Miten kompleksiluvun $z = re^{i\phi}$ ominaisuudet vastaavat vaiheeno- soittimen ominaisuuksia ja edelleen harmonisen väärähtelijän ominaisuuksia?

Kahden napakoordinaatein kirjoitetun luvun $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ sekä $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ tuloksi saadaan suoralla laskulla

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1 + \phi_2)}. \quad (14.34)$$

Toisin sanoen kompleksilukujen kertolaskun graafinen tulkinta on se, että lukujen *itseisarvot kerrotaan keskenään ja vaihekulmat lasketaan yhteen*. Esimerkiksi kertominen i:llä yksinkertaisesti käänää kompleksiluvun vektoriesitystä kulman $\frac{\pi}{2}$ (eli 90°) vastapäivään ja yleisemmin kertominen tekijällä $e^{i\phi}$ käänää vektoria kulman ϕ .



- 14.13** (a) Mitkä ovat kompleksilukujen $a = 1 + 2i$ ja $b = -2 + i$ (i) reaaliosuuus, (ii) imaginääriosuuus, (iii) vaihekulma ja (iv) itseisarvo? (b) Entä luvun $a + b$? (c) Entä luvun ab ?

Opimme juuri kuvaamaan harmonista liikettä *vaiheenosoittimella* eli origon ympäri pyörivällä vektorilla, jonka *projektilo* eli x -komponentti valittiin kuvaamaan harmonista liikettä. Kompleksisen eksponenttifunktion $e^{i\phi}$ voi niin ikään ajatella esittäväni origon ympäri pyörivää vektoria, joten voimme aivan yhtä hyvin *kuvata harmonista liikettä ottamalla siitä x-komponentin eli reaalikomponentin* $\operatorname{Re}[e^{i\phi}] = \cos \phi$. Tämä voi vaikuttaa vain asioiden hankaloittamiselta, mutta juun idea on siinä, että voimme tehdä kaikki laskut ensin eksponenttifunktioilla ja erottaa reaaliosan vasta lopuksi. Tavalliselle eksponenttifunktiolle tutut laskusäännöt pätevät myös kompleksiselle eksponenttifunktiolle, ja kompleksisilla eksponenttifunktioilla laskeminen on helpompaa kuin trigonometrisillä funktioilla. Muun muassa derivointi onnistuu tutulla eksponenttifunktion derivoimis-säännöllä

$$\frac{d}{dt} e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})} = i\omega e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}. \quad (14.35)$$

Myös kahden eksponenttifunktion yhdistäminen onnistuu eksponenttien laskusäännöillä. Esimerkiksi

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \Delta\phi)} = e^{i\omega t} + e^{i\omega t} e^{i\Delta\phi} = e^{i\omega t} (1 + e^{i\Delta\phi}). \quad (14.36)$$

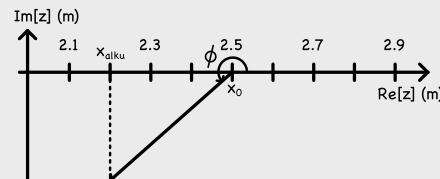
Trigonometrisillä funktioilla vastaava lasku $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \Delta\phi)$ olisi huomattavasti hankalampi. Tämän luvun loppupuolella on muutama laskuesimerkki, joissa väärähtelyjä analysoidaan kompleksiluvuilla.

esimerkki 14.2

Vaiheenositin kompleksilukuna

Kappale väärähtelee harmonisesti amplitudilla 0.400 m pisteen $x_0 = 2.500$ m ympärillä. Ajan hetkellä $t = 0$ s kappale on pisteessä $x_{\text{alku}} = 2.200$ m ja sen nopeus on $v_{x,\text{alku}} = 0.100$ m/s. Miten kappaleen liike kuvataan kompleksiluvulla?

TILANNE Tämä on täsmälleen sama tilanne kuin esimerkissä 14.1, jossa ratkaisimme vaiheeksi alkuperäisellä $\phi_{\text{alku}} = 3.864$ ja kulmataajuudeksi $\omega = 0.378 \text{ s}^{-1}$.



RATKAISU Voimme kuvata väärähtelyä kompleksifunktioilla

$$z(t) = x_0 + A e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})} = (2.5 \text{ m}) + (0.4 \text{ m}) e^{i[(0.378 \text{ s}^{-1})t + 3.864]}, \quad (14.37)$$

kun ajattelemme tämän funktion reaaliosan kuvaavan kappaleen todellista paikkaa,

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = x_0 + A \operatorname{Re}[e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}] = x_0 + A \operatorname{Re}[\cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}) + i \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}})] = x_0 + A \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.38)$$

Vastaavasti kappaleen nopeus on tämän kompleksifunktion derivaatan reaaliosa,

$$v_x(t) = \operatorname{Re}[z'(t)] = \omega A \operatorname{Re}[i e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku}})}] = \omega A \operatorname{Re}[i \cos(\omega t + \phi_{\text{alku}}) - i \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}})] = -\omega A \sin(\omega t + \phi_{\text{alku}}). \quad (14.39)$$

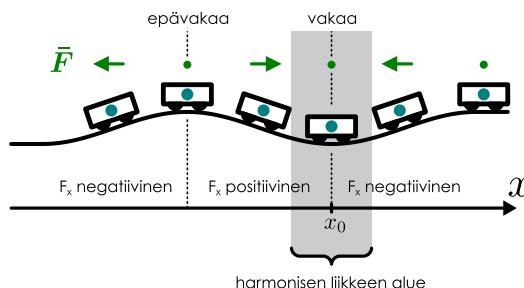
ARVIOINTI Päädyimme samaan paikan funktoon kuin aikaisemmin. Tässä kompleksiesityksestä ei ollut erityisemmin iloa, mutta näemme myöhemmin esimerkkejä, joissa kompleksiluvuilla laskeminen on helpompaa kuin reaaliluvuilla.



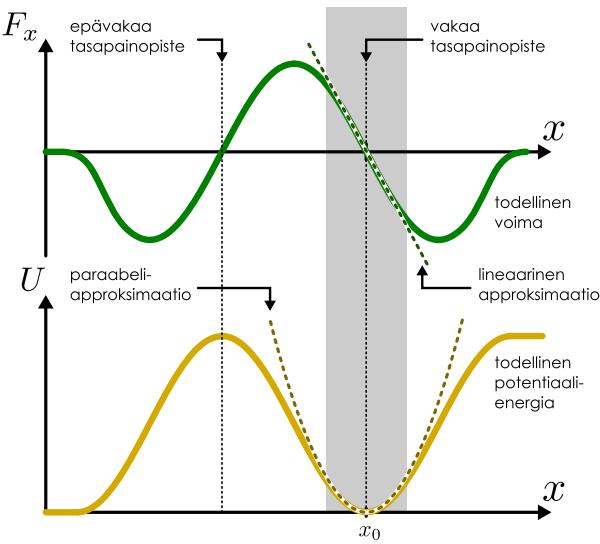
- 14.14** Kirjoita omia sanoin tiivistelmä harmonisen väärähtelyn matemaattisesta kuvauksesta. Millainen funktio kuvailee väärähtelijän paikkaa, nopeutta ja kiihtyvyyttä? Miten nämä liittyvät kompleksilukuihin? Mistä ominaisuuksista mekaanisen väärähtelijän kulmataajuus, amplitudi, vaihe ja kokonaisenergia riippuvat? Mitkä näistä ovat väärähtelijän omia ominaisuuksia ja mitkä riippuvat siitä, millaista väärähtely on?

Kuva 14.9: Lähellä vakaata tasapainopistettä voima on likimain verrannollinen poikkeamaan ja potentiaalienergia poikkeaman nelioön. Tällöin kappaleen liike on likimain harmonista.

(a) Vaunuun kohdistuvat voimat epätasaisessa maastossa.



(b) Voiman x -skalaarikomponentti ja potentiaalienergia painkan funktioina.



14.3 Likimain harmoninen liike

Pienet poikkeamat

Hooken laki on ideaalinen jousen malli. Todellisen jousen jännitysviima on suoraan verrannollinen jousen pituuden muutokseen vain venymän tai puristuman ollessa kyllin pieni. Jos jousta venytetään liikaa, se oikenee eikä enää palaa takaisin alkuperäiseen muotoonsa, koska materiaalissa tapahtuu plastisia muodonmuutoksia. Niinpä jouseen kiinnitettä kappalekin värähtelee harmonisesti ainoastaan värähtelyn amplitudin ollessa kyllin pieni. Toisaalta jos amplitudi on pieni, Hooken laki on erittäin hyvä malli jousille ja samoin harmoninen värähtely on erittäin hyvä malli jouseen kiinnitetylle kappaleelle.

Samaa ideaa voidaan soveltaa muihinkin systeemeihin. Kuvassa 14.9 on esimerkki, jossa vaunu asetetaan epätasaiseen maastoon. Vaunulla on tasapainopiste kaikissa niissä pisteissä, joissa maanpinta on vaakasuora, mutta näistä vain kuovan pohjalla oleva tasapainopiste on vakaa, sillä vaunuun kohdistuva voima osoittaa kohti tasapainoa ja pyrkii palauttamaan vaunun takaisin tasapainoon vain sen ympäristössä. Jos siis vaunun siirtää rinteeseen ja päästää irti, se rullaa alamäkeen ja jää heilahtelemaan edestakaisin kuovan pohjalle samaan tapaan kuin jouseen kiinnitettä vaunu heilahtelee jousen tasapainoaseman ympäillä. Tämä näkyy voiman kuvajassa niin, että vakaan tasapainopisteeseen x_0 kohdalla voima muuttuu positiivisesta negatiiviseksi ja laskeva kuvaaja leikkää x -akselin. Potentiaalienergian kuvajassa on puolestaan tasapainopisteessä minimi.

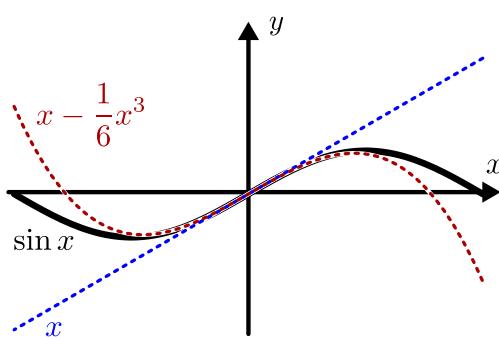


14.15 Miten kappale käyttäätyy lähellä pistettä, jossa siihen kohdistuva voima kuvailee x -akselin leikkaava nouseva suora? Millainen on kappaleen potentiaalienergian kuvaaja tällöin?

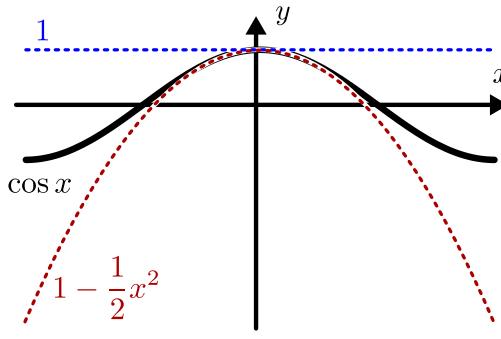
Kuopassa oleva vaunu on siis värähtelijä, koska se liikkeelle lähdettyään kulkee edestakaisin. Seuraava kysymys on, voiko vaunun liikettä kuvata *harmonisena* värähtelijänä? Aikaisemmin jo päättelimme, että harmoniseen värähtelijään kohdistuva voima on suoraan verrannollinen värähtelijän tasapainosta mitattuun poikkeamaan. Jousen tapauksessa verrannollisuuskerroin on jousivakio, mutta yleisemmin voidaan kirjoittaa $F_x = -m\omega^2 x$, missä jousivakio on korvattu värähtelijän massalla ja kulmataajuudella. Tällaisen funktion kuvaaja on *laskeva suora*. Toisaalta värähtelijän potentiaalienergia on verrannollinen poikkeaman nelioon, $U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, ja tämän funktion kuvaaja on *ylöspäin aukeava paraabeli*. Koska maaston muoto voi olla millainen tahansa, vaunuun kohdistuvan voiman kuvaaja ei ole täsmälleen suora eikä potentiaalienergia paraabeli, jolloin vaunu *ei ole* harmoninen värähtelijä. Jos vaunua ei kuitenkaan siirretä kuovan pohjalta kovin paljon, siihen kohdistuvan voiman kuvaaja on likimain suora eli voima on likimain suoraan verrannollinen poikkeamaan. Samoin vaunun potentiaalienergian kuvaaja on tällöin likimain paraabelin muotoinen. Toisin sanoen vaunu käyttäätyy kuin harmoninen värähtelijä, *jos sen liikkeen amplitudi on tarpeeksi pieni* eikä vaunu siirry liian kauas tasapainopisteestä. Tätä harmonisen liikkeen aluetta on merkitty kuvassa 14.9 harmaalla taustalla.

Kuva 14.10: Trigonometristen funktioiden ensimmäiset polynomiapproksimaatiot origossa.

(a) Sinin approksimaatioita.



(b) Kosinin approksimaatioita.



Sama periaate pätee käytännössä kaikille systeemeille, joissa on vakaa tasapainopiste. Jos systeemiä poikkeutetaan tasapainosta vain *vähän*, systeemiä *tasapainoon palauttavat voimat ovat likimain verrannolliset systeemin poikkeamaan*. Samoin systeemin *potentiaalienergia on likimain verrannollinen poikkeaman neljöön*. Tällöin systeemi käyttäätyy likimain harmonisen väärähtelijän tavoin, ja juuri tämän takia harmonisen väärähtelyn malli on niihin tärkeä — likimain harmonisesti väärähteleviä systeemejä on kaikkialla. Riippuu luonnollisesti tilanteesta, mikä on ”vähän”. Tuussa huojuva pilvenpiirtäjä voi väärhdellä harmonisesti, vaikka sen huipu siirtyisi useita metrejä, kun taas väärähtevien molekyylien tapauksessa harmonisen väärähtelyn malli toimii atomien siirtymien ollessa nanometrien osien pituusluokkaa.

Harmoninen approksimaatio

Kuvassa 14.9 esitettiin graafisesti *harmoninen approksimaatio*, jossa kappaleeseen kohdistuvan voiman kuvaajaa arvioitiin laskevalla suoralla. Suora leikkaa x -akselin tasapainopisteessä x_0 ja sen kulmakerroin on tässä pisteessä yhtä suuri kuin kappaleeseen todellisuudessa vaikuttavan voiman kuvaajan kulmakerroin. Tarkempaa analyysiä varten haluamme seuraavaksi muotoilla tämän ajatuksen matemaattisesti. Tämä onnistuu *sarjakehitelmien* avulla.

Sarjakehitelmiä on monenlaisia, mutta nyt määrittelemme ainoastaan niin sanotun **Taylorin sarjan**: Olkoon $f(x)$ funktio, jolle haluamme muodostaa sarjakehitelmän. Merkitään tästä sarjaa $s(x)$. Funktion Taylorin sarja pisteen x_0 ympäristössä on päättymätön summa

$$s(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \quad (14.40)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \quad (14.41)$$

Tässä $f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0}$ tarkoittaa siis funktion n kertaluvun derivaatan arvoa pisteessä $x = x_0$. Taylorin sarjan jokainen termi riippuu etäisyystä $x - x_0$, joka esiintyy yhä korkeammassa potensseissa mitä pidemmälle sarjassa edetään. Näitä etäisyyskiä painotetaan funktion f derivaatoilla, joiden arvo lasketaan pisteessä x_0 . Sarjakehitelmä on luonnollisesti järkevä vain jos funktiota f voi derivoida monta kertaa.

Taylorin sarjan perusidea on se, että funktiolla f ja sarjalla s on pisteessä x_0 samat derivaatat. Tämä nähdään suoralla laskulla. Esimerkiksi sarjan ensimmäinen derivaatta on

$$s'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f'''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (14.42)$$

ja pisteessä $x = x_0$ tämä saa arvon

$$s'(x_0) = f'(x_0) + f''(x_0)(x_0 - x_0) + \frac{1}{2}f'''(x_0)(x_0 - x_0)^2 + \dots = f'(x_0) + 0 + 0 + \dots = f'(x_0). \quad (14.43)$$

Vastaavasti derivoimalla toisen kerran saadaan tulos $s''(x_0) = f''(x_0)$ ja niin edelleen.

Riippuu funktiosta, onko Taylorin sarja hyödyllinen. On olemassa funktioita, joille Taylorin sarja antaa äärettömiä tuloksia, mutta monille tavallisille funktioille sarja suppenee, kun x on tarpeeksi lähekkä pistettä x_0 . Tämä tarkoittaa sitä, että mitä enemmän sarjassa esiintyviä termejä lasketaan yhteen, sitä läheppänä alkuperäistä funktiota $f(x)$ summa on. Jos sarja suppenee, sen termien täytyy tulla yhä pienemmiksi ja pienemmiksi.

Jos jo muutaman ensimmäisen termin summa on tarpeeksi lähellä funktiota $f(x)$, koko sarja voidaan approksimoida vain sarjan muutamalla ensimmäisellä termillä. Näin saadaan systemaattinen ja fysiikassa erittäin hyödyllinen tapa approksimoida funktioita *polynomilla*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \dots \quad (14.44)$$

Kuvassa 14.10 on piirretty esimerkinä sini- ja kosinifunktioiden kaksi ensimmäistä polynomiaapproksimaatiota origon ympärillä eli kun $x_0 = 0$. Esimerkiksi sinifunktion $f(x) = \sin x$ ensimmäinen derivaatta on $f'(x) = \cos x$, joten sinin yksinkertaisin approksimaatio origon lähellä on

$$\sin x \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot (x - 0) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x, \quad (14.45)$$

mikä on piirretty kuvaan origon kautta kulkevana nousevana suorana. Samoin kompleksilukujen yhteydessä mainittiin eksponenttifunktion sarjaesitys (14.29) on sama kuin funktion pisteen $x_0 = 0$ ympärillä kehitetty Taylorin sarja.



14.16 Millainen on sinin kaksiterminen approksimaatio pisteen $x_0 = \pi/2$ ympärillä?

Taylorin sarjan avulla voimme laskea myös harmonisen approksimaation kappaleeseen vaikuttavalle voimalle ja kappaleen potentiaalienergialle. Jos nimittäin kappaleella on vakaa tasapainopiste x_0 , kappaleeseen kohdistuvan voiman täytyy olla tässä pisteessä nolla, $F_x(x_0) = 0$. Samoin kappaleen potentiaalienergialla täytyy olla tässä pisteessä minimi, ja potentiaalienergian kuvaajan tangentin kulmakertoimen eli ensimmäisen derivaatan pitää olla nolla, $U'(x) = 0$. Nämä ovat fysikaalisesti sama ehto, koska voima on potentiaalienergian derivaatan vastaluku, $F_x(x) = -U'(x)$. Niinpä kappaleeseen kohdistuvaa voimaa voidaan arvioida tasapainopisteen ympärillä polynomilla

$$F_x(x) \approx F_x(x_0) + F'_x(x_0)(x - x_0) = F'_x(x_0)(x - x_0). \quad (14.46)$$

Esimerkiksi jouselle voiman kuvaajan kulmakerroin on jousivakio, joten $F'_x(x_0) = -k$ ja tuloksena saadaan Hooken laki $F(x) = -k(x - x_0)$. Vastaavasti kappaleen potentiaalienergialle saadaan approksimaatio

$$U(x) \approx U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 = U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (14.47)$$

Esimerkiksi jouselle $U''(x) = -F'_x(x) = k$ ja potentiaalienergialle saadaan tuttu lauseke $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$. Jos siis voimalle ja potentiaalienergialle voidaan tehdä tällaiset approksimaatiot ja pysytää alueella, jolla approksimaatiot ovat kyllin tarkkoja, systeemi on harmoninen ja sen liike on harmonista väärähtelyä. Ei ole mitään väliä, millaiset vuorovaikutukset voiman ja potentiaalienergian tuottavat.



14.17 Eräään kappaleen potentiaalienergiaa kuvaava funktio $U(x) = a/x + bx$, missä $a = 1 \text{ Jm}$ ja $b = 1 \text{ J/m}$. (a) Missä on kappaleen vakaa tasapainopiste x_0 ? (b) Mikä on potentiaalienergia harmonisessa approksimaatiossa? (d) Kuinka suuri on potentiaalienergian ja approksimaation ero pisteessä $x = x_0 + \Delta x$, missä poikkeama tasapainosta on (i) $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ tai (ii) $\Delta x = 0.5 \text{ m}$?

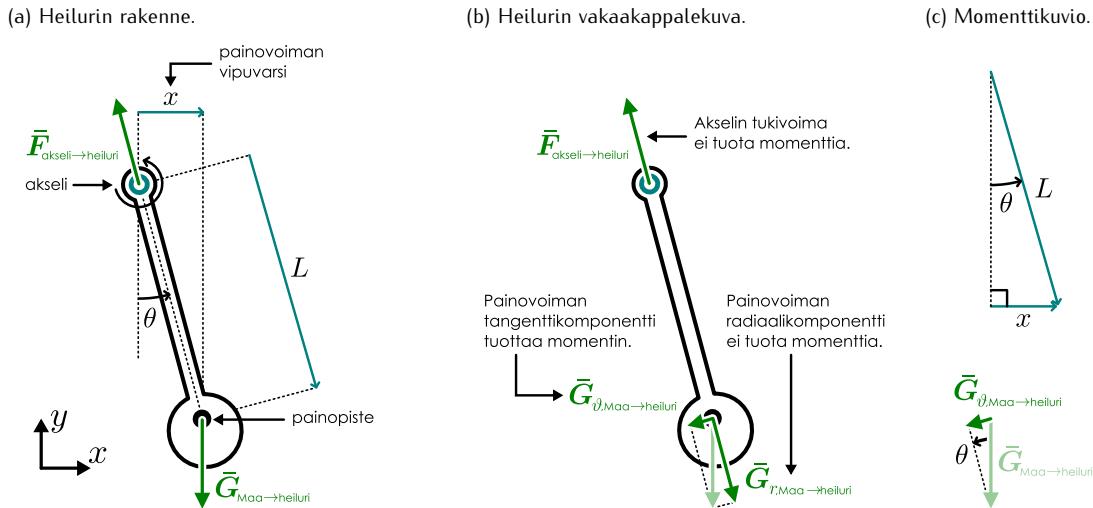
Heiluri

Heiluri on mikä tahansa tukipisteestä tai akselista roikkuva kappale, joka pääsee käänymään vapaasti tämän akselin ympäri. Jos kappaleen painopiste on akselin alapuolella, painovoima pyrkii käänämään kappaleen asentoon, jossa sen painopiste on täsmälleen akselin alapuolella. Tällöin painovoiman momentti akselin suhteen on nimittäin nolla, joten kyseessä on kappaleen tasapainoasento *pyörimisen suhteeseen*.

Heiluri on harmonisen väärähtelyn ensimmäisiä teknisiä sovelluksia. Jo Galilei aikoinaan huomasi heilurin jaksonajan olevan riippumaton heilahduksen laajuudesta (amplitudista), mikä johti aikanaan heilurikelon keksimiseen. Heilurikelloit eivät nykyään ole enää erityisen tärkeitä, mutta heilurit käyvät yhä erinomaisesti harmonisen väärähtelyn ominaisuuksien tutkimiseen, koska heilurin liike on helppo nähdä ja eri taajuudella vääräteleviä heilureita on helppo valmistaa.

Tutkimme kuvassa 14.11 esitettyä jäykästä kappaleesta koostuvaa heiluria. Olkoon heilurin massa m , hidastusmomentti I_θ ja painopisteen etäisyys pyörimisakselista L . Akseli kannattelee kappaletta, joten se kohdistaa kappaleeseen voiman. Tämä voima kuitenkin osoittaa kohti akselia, joten sen momentti akselin suhteen on nolla eikä se pyri käänämään heiluria miinhinkään suuntaan. Heiluriin kohdistuu myös painovoima $G_y = -mg$.

Kuva 14.11: Heiluri on pyörimisakselista vapaasti roikkuva kappale.



Painovoima ei riipu heilurin asennosta, mutta painovoiman heiluriin kohdistama momentti riippuu. Jos heiluria on poikkeutettu tasapainoasemasta kiertokulma θ , sen painopiste on siirtynyt sivusuunnassa etäisyysdelle

$$x = L \sin \theta \quad (14.48)$$

tasapainoasemastaan, kuten kuvan 14.11 (c) kuviosta voidaan päätellä. Momentin suuruus on voiman ja sen vipuvarren pituuden tulo, ja tässä tapauksessa voima pyrkii käänämään kappaleen takaisin tasapainoasemaan eli negatiiviseen θ -suuntaan. Siispä momentin θ -komponentti on

$$\tau_\theta = xG_y = -mgL \sin \theta. \quad (14.49)$$

Vaihtoehtoisesti momentti voidaan laskea määrittämällä painovoiman tangenttikomponentti akselin suhteeseen, sillä voimien radiaalikomponentit eivät tuota momenttia. Tämä komponentti on $G_\theta = -mg \sin \theta$, joten momentiksi saadaan tälläkin päättelyllä $\tau_\theta = LG_\theta = -mgL \sin \theta$. Niiinpä heilurin pyörimisen likeyhtälö $\tau_\theta = I_\theta \alpha_\theta$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$I_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta. \quad (14.50)$$

Tämä yhtälö muistuttaa harmonista likeyhtälöä (14.12), missä paikkakoordinaatin x sijaan esiintyy kulma θ , mutta erona harmoniseen yhtälöön heilurin likeyhtälössä esiintyy sinifunktio. Voimme kuitenkin kirjoittaa tälle approksimaation sarjakehitelmien avulla, sillä $\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots \approx \theta$, ja tämä arvio on hyvä, jos $\frac{1}{6}\theta^3 \ll \theta$ eli jos heilurin heilahduskulma on pieni. Tällöin heilurin heilahotelua kuvaa likimain likeyhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I_\theta} \theta. \quad (14.51)$$

Tämä on harmoninen likeyhtälö kulmalle θ , joten heilurin kulma muuttuu harmonisesti kulmataajuudella

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_\theta}}. \quad (14.52)$$

Huomaa, että tämä on nimenomaan heilurin väärähtelyä kuvava kulmataajuus, joka on täysin eri asia kuin kappaleen liikkeen kulmanopeus ω_θ . Kulmataajuus on väärähtelyä kuvavan vaiheenosoitteen kulmanopeus, joka on siis vakio. Kappaleen kulmanopeus sen sijaan oskilloi harmonisesti aivan kuten jouseen kiinnitetyn kappaleen nopeus.

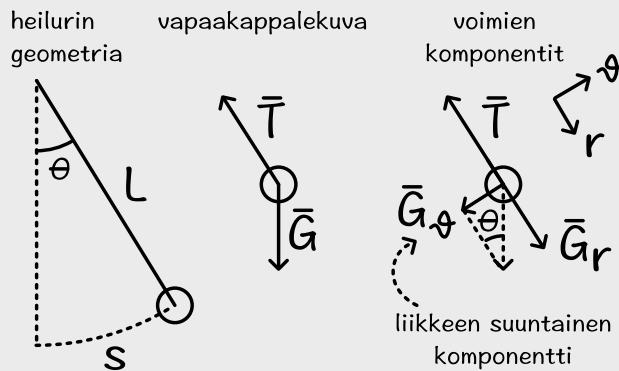
14.18 Heiluri koostuu kappaleesta, jonka massa on $m = 0.10 \text{ kg}$, painopisteen etäisyys akselistä $L = 0.10 \text{ m}$ ja jonka hitausmomentti on $I_\theta = 2mL^2$. Heiluri nostetaan kulmaan $\theta = \pi/10 = 18^\circ$ ja päästetään liukumaan vapaasti. (a) Mikä on heilurin kulmataajuus? (b) Mikä on heiluriin kohdistuva momentti lähtöhetkellä? (c) Mikä on heilurin kulmanopeus tasapainoasemassa?

esimerkki 14.3

Matemaattinen heiluri

Niin sanottu matemaattinen heiluri koostuu kevyestä langasta ja siihen kiinnitetystä pienestä massiivisesta kappaleesta. Mikä on heilurin kulmataajuus?

TILANNE Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään langan pituutta L ja kappaleen massaa m . Langan massa oletetaan hyvin pieneksi. Kun kappale on siirtynyt tasapainopisteestä matkan s ympyräraita pitkin, lanka muodostaa kulman $\theta = \frac{s}{L}$ ympyräradan suuntaan nähdien. Kappaleeseen kohdistuu vain painovoima ja langan kosketusvoima. Langan voima osoittaa aina langan suuntaan kohti kappaleen liikeradan keskipistettä ja painovoima suoraan alaspäin.



SUUNNITELMA Voimme ratkaista heilurin liikkeen kahdella tavalla. Yksi tapa on laskea heilurin hitausmomentti ja käyttää lauseketta (14.52) kulmataajuuden laskemiseksi. Toinen tapa on ajatella kappale ympyräradalle vangituksi hiukkaseksi ja määrittää kappaleen liike tutkimalla siihen kohdistuvia voimia. Jos voimme johtaa kappaleelle harmonisen likeyhtälön, voimme siitä päättää suoraan sen liikkeen kulmataajuuden.

RATKAISU Ensimmäinen tapa: Jos kappaleetta pidetään pistemassana, sen hitausmomentti langan yläpään suhteeseen on

$$I_\theta = mL^2. \quad (14.53)$$

Tämän perusteella heilurin kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_\theta}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (14.54)$$

Toinen tapa: Ainoastaan painovoima kohdistaa kappaleeseen voiman komponentin sen liikeradan suunnassa. Tämä painovoiman tangenttikomponentti on kuvan perusteella

$$G_\vartheta = -mg \sin \theta. \quad (14.55)$$

Tässä on miinusmerkki, koska jos kulma on positiivinen, painovoima osoittaa kulman pienemisen suuntaan (kohti tasapainoasemaa). Kappaleen kiihtyvyys ympyräradan tangentin suunnassa on siten

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a_\vartheta = \frac{1}{m} F_{\vartheta, \text{kokonais}} = -g \sin \theta. \quad (14.56)$$

Tämä ei ole harmoninen likeyhtälö, mutta jos heiluri väärähtelee pienellä amplitudilla, voimme tehdä jälleen pienen kulman approksimaation $\sin \theta \approx \theta = \frac{s}{L}$ ja saamme harmonisen likeyhtälön

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s, \quad (14.57)$$

missä kulmataajuuden paikalla on vakio

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (14.58)$$

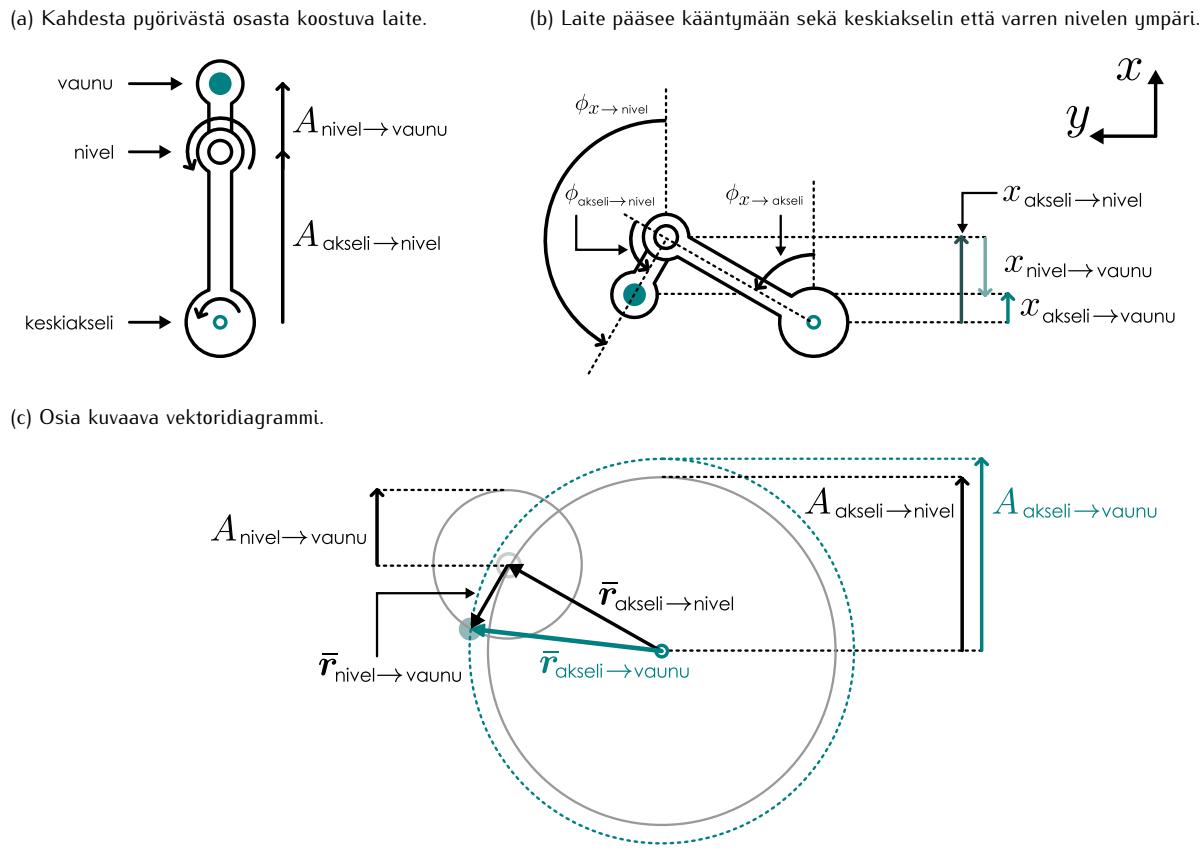
ARVIOINTI Kumpikin laskutapa antoi saman tuloksen kulmataajuudelle kuten tietysti pitääkin. Laskettaessa voimilla joudimme tekemään pienen kulman approksimaation, mutta sama approksimaatio sisältyy jo valmiiksi heilurin kulmataajuuden lausekkeeseen (14.52), joten kumpikaan laskutapa ei ole toista tarkempi.

Tuloksen mukaan heilurin taajuus riippuu vain langan pituudesta ja putoamiskiihtyvyydestä, mutta ei lainkaan heilurin massasta. Nämä käy samasta syystä kuin miksi erimassaiset kappaleet putoavat yhtä nopeasti: suurimassaiseen kappaleeseen kohdistuu suuri painovoima, mutta sen liikkeen muuttaminen myös vaatii suuren voiman, ja nämä vaikutukset kumoavat toisensa.



14.19 Kirjoita omiin sanoisin tiivistelmä likimain harmonisesta liikkeestä. Millaisissa tilanteissa liike on lähes harmonista? Millainen voima ja energia näissä systeemeissä on? Mikä on Taylorin sarja ja millainen approksimaatio voimalle ja energialle saadaan likimain harmonisessa systeemissä?

Kuva 14.12: Kaksi pyörimislukkettä yhdistävä laite.



14.4 Yhdistetty harmoninen liike

Harmonisen liikkeen malli kuvailee siihen yleisesti kaikkia *pieniä värähtelyitä*, koska mikä tahansa värähtelevä systeemi on likimain harmoninen lähellä vakaata tasapainoasemaa. Kaikki jaksollinen liike ei kuitenkaan ole puhtaasti harmonista, joen yksinkertainen harmonisen liikkeen malli ei ole riittävä kuvaamaan kaikkia värähtelyjä. Osoittautuu kuitenkin, että *mikä tahansa jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten värähtelyjen yhdistelmänä*. Niinpä kun osaamme analysoida harmonisen liikkeen ja tiedämme miten harmoniset värähtelyt voidaan yhdistää, pystymme kuvaamaan kaiken jaksollisen liikkeen.

Tällaiset yhdistetyt harmoniset värähtelyt ovat yleisiä. Jouseen kiinnitetty kappale värähtelee yhdellä tiellä taajuudella, mutta jos useampi kappale yhdistetään jousin, niiden muodostama systeemi voi värähdellä *useilla eri tavoilla yhtä aikaa*. Näillä erilaisilla värähtelyillä on yleensä myös eri taajuudet, jolloin systeemi värähtelee useilla taajuuksilla yhtä aikaa ja systeemin osien liike on näiden värähtelyiden yhdistelmä. Eri-tyisesti jäykät kappaleet koostuvat monista keskenään vuorovaikuttavista atomeista, joten jäykät kappaleet itse voivat värähdellä useilla eri tavoilla samanaikaisesti.

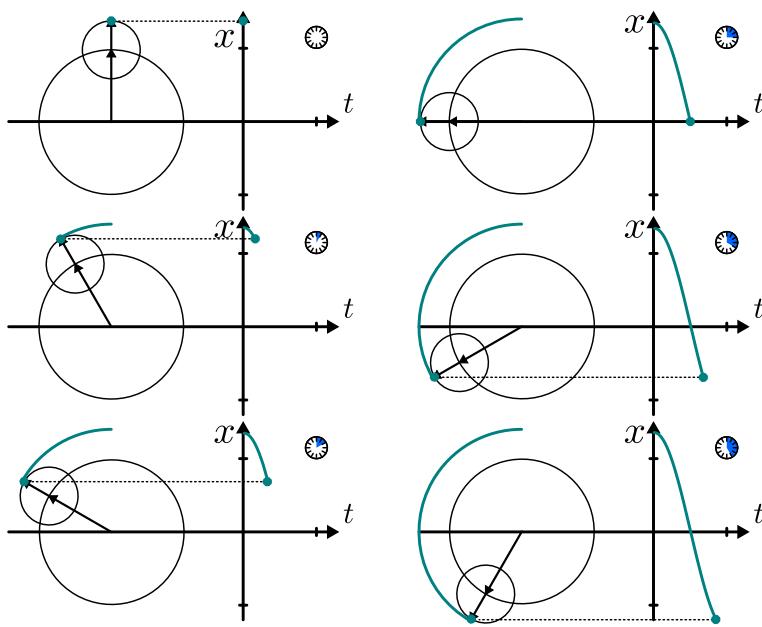
Näitä yhdistettyjä värähtelyjä voi myös kuulla. Värähtelevän kappaleen pinta nimittäin työntää ympäröivää ilmaa, joka alkaa myös värähtelemään *samoilla taajuuksilla* kuin millä kappale värähtelee. Nämä värähtelyt alkavat liikkua *aaltoina*, mihin tutustumme tarkemmin luvussa 15. Aaltojen saapuessa korvaan ne saavat korvan tärykalvon värähtelemään jälleen *samoilla taajuuksilla*. Tämä on *ääntä*, ja kuulo perustuu fysikaalisesti juuri siihen, että tärykalvo värähtelee *samoilla taajuuksilla* kuin äänen läheinen toimivat kappaleet. Erityisesti voimme kuulla useita ääniä samanaikaisesti, koska korvan tärykalvo pystyy värähtelemään kaikkien sinne saapuvien äänten taajuuksilla yhtä aikaa ja aivot pystyvät erottelemaan tästä liikkeestä sen alunperin synnyttäneet värähtelyt.

Värähtelyjen yhteenlasku

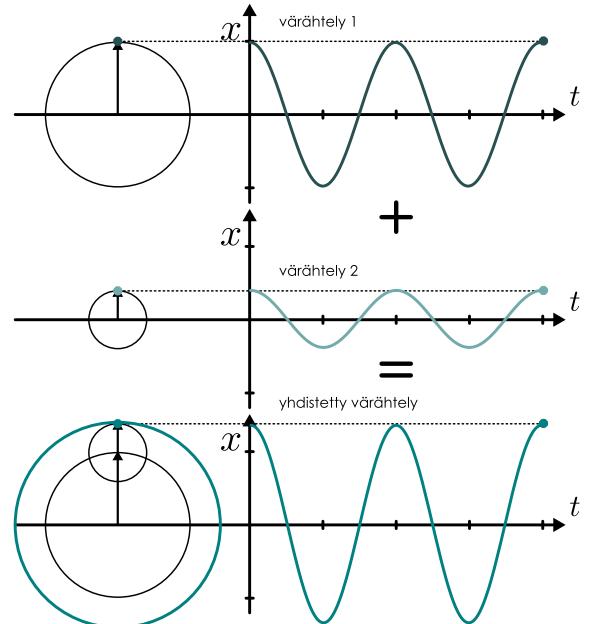
Aloitetaan yhdistettyjen värähtelyjen tutkiminen tarkastelemalla yksinkertaisinta mahdollista tapausta: kahden värähtelyn yhdistelmää. Esimerkkinä tällaisesta yhdistetyistä harmonisesta liikkeestä tarkastelemme kuvassa 14.12 kaavakuvalta esitettävää huvipuistolaitetta. Laitteessa on pitkä "käsivarsi", jonka päässä matkustajan vaunu on. Tämä varsi pyörii tasaisella kulmanopeudella maahan kiinnitetyn keskiakselin ympäri kuin

Kuva 14.13: Samalla kulmataajuudella pyörivät ja samassa vaiheessa olevat vaiheenosittimet.

(a) Vaiheenosittimet pyörivät yhtä nopeasti ja pürtävät ympyrän.

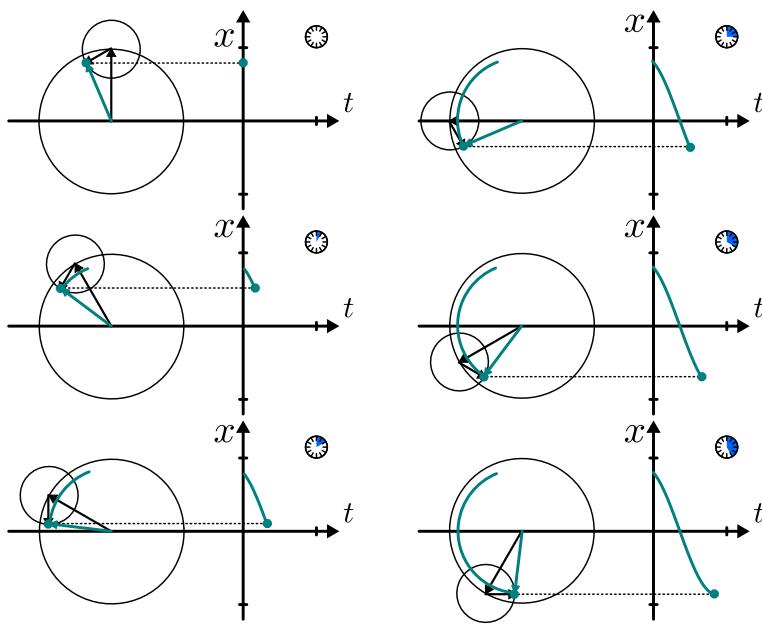


(b) Kahden harmonisen liikkeen summa, kun taajuudet ja vaiheet ovat samat.

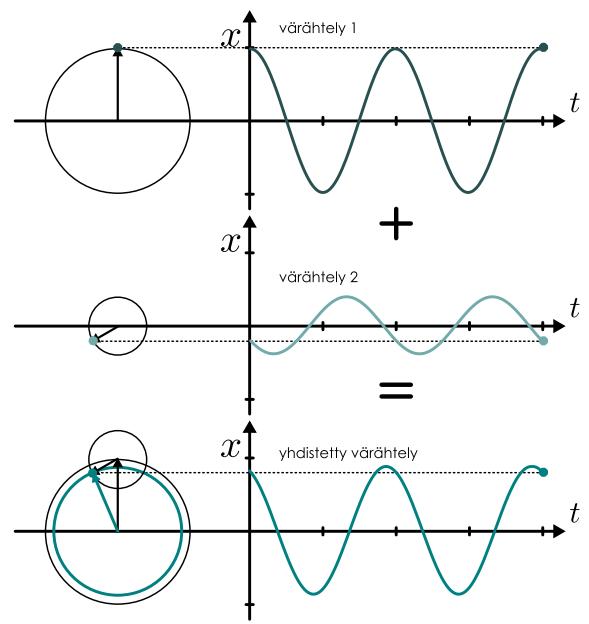


Kuva 14.14: Samalla kulmataajuudella pyörivät ja eri vaiheissa olevat vaiheenosittimet.

(a) Vaiheenosittimet pyörivät yhtä nopeasti ja pürtävät ympyrän.

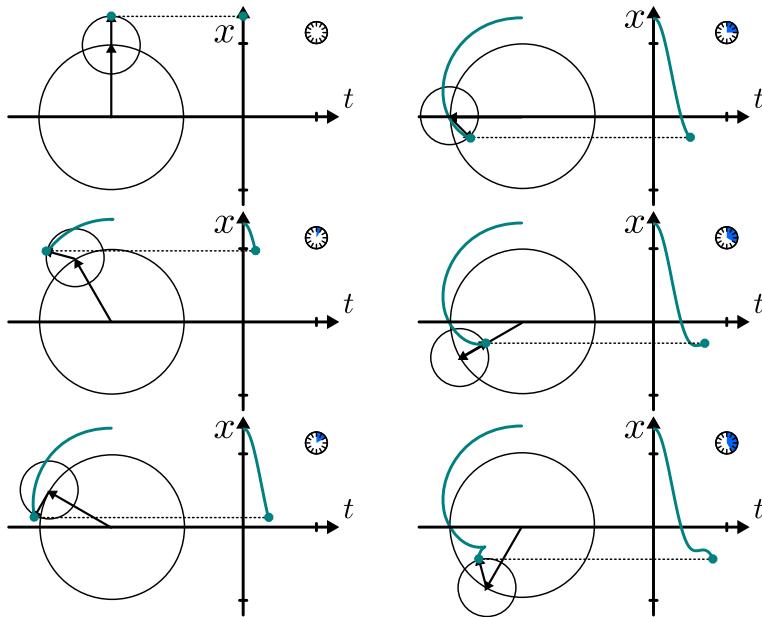


(b) Kahden harmonisen liikkeen summa, kun taajuudet ovat samat.

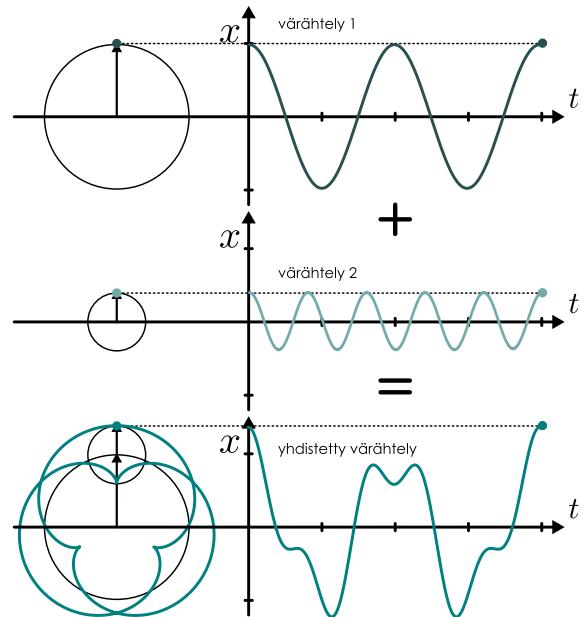


Kuva 14.15: Eri kulmataajuksilla pyörivät vaiheenosoitimet.

(a) Vaiheenosoitimet pyörivät eri nopeuksilla eivätkä piirrä ympyrää.



(b) Kahden erittäjaisen harmonisen liikkeen summa.



karuselli, mutta lisäksi varressa on niveli ja häveli pyörii tasaisesti myös tämän nivelen ympäri. Matkustajan kannalta oleellista on luonnollisesti varren päässä olevan istuimen liike.

Koska tasaisen ympyräliikkeen projektiot ovat harmonisia liukkauksia, nivelen x -koordinaatti liikkuu harmonisesti. Samoin matkustajan vaunu liikkuu nivelen suhteeseen harmonisesti x -suunnassa. Vaunun liike keskiakselin ja maan suhteen on puolestaan näiden liikkeiden yhdistelmä kuten kuvassa 14.12 on piirretty, joten *vaunun x -koordinaatin liike on kahden harmonisen liikkeen yhdistelmä*. Siispä vaikka tässä esimerkissä ei ole kysymys väärähtelystä, vaunun projektiolliike vastaa täsmälleen yhdistetystä väärähtelyä.

Merkitään x -suuntaista siirtymää akselista niveleen $x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}}$ ja nivelestä vaunuun $x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}$. Siirtymä akselista vaunuun on näiden summa, sillä voimme aina siirtää ensin akselista niveleen ja edelleen nivelestä vaunuun kuten kuvassa 14.12. Siispä

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}. \quad (14.59)$$

Kuvassa on merkitty myös laitteen asennon määritteleviä kulmia. Kulma x -suunnasta laitteen akselin ja nivelen määritämälle suoralle on $\phi_{x \rightarrow \text{akseli}}$ ja x -suunnasta nivelen ja vaunun kautta kulkevalle suoralle $\phi_{x \rightarrow \text{vaunu}}$. Käsivarren akselista niveleen mitattu osuuden pituus puolestaan on $A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}}$ ja vastaavasti etäisyys nivelestä vaunuun on $A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}$. Perustrigonometrian avulla voidaan siis päätellä, että edellä mainitut x -suuntaiset siirtymät ovat

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} = A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{akseli}} \quad (14.60)$$

$$x_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} = A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{nivel}} \quad (14.61)$$

ja edelleen näiden perusteella matkustajan x -koordinaatti on

$$x_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = A_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{akseli}} + A_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}} \cos \phi_{x \rightarrow \text{nivel}}. \quad (14.62)$$

Matkustajan liike on siis kahden harmonisen liikkeen yhdistelmä eli matemaattisesti kahden sinimuotoisen funktion summa. Tehtävämme on nyt selvittää, millaista liikettä matkustajan x -koordinaatti tekee. Samalla opimme yleisen tekniikan harmonisten liikkeiden yhdistelmän analysoimiseksi.

14.20 Kappale väärhtelee yhtä aikaa amplitudilla 5.0 mm sekä amplitudilla 2.0 mm ja erällä ajan hetkellä väärähtelyiden vaiheet ovat $\pi/3$ sekä $3\pi/2$. (a) Millainen vaiheenosoitinkuvio kuvaaa kappaleen yhdistetystä väärähtelyä tällä hetkellä? (b) Mikä on kappaleen poikkeama tasapainosta?

Voimme kuvata karusellia yksinkertaisemmin piirtämällä vain kaksi nuolista. Ensimmäinen nuolista kuvaa siirtymää akselista niveleen ja toinen siirtymää nivelestä matkustajaan. Toisin sanoen matkustajan paikkavektori saadaan laskemalla vektoreina yhteen nivelen paikkavektori akselin suhteen ja matkustajan paikkavektori

nivelen suhteen. Toisaalta laitteen pyöriessä myös nämä nuolet pyörivät, joten ne ovat samalla laitteen osien x -suuntaista liikettä kuvaavat *vaiheenosoitimet*, jotka lasketaan yhteen kuin vektorit. Kuvassa 14.13 on esitetty matkustajan liike tästä mallia käyttäen, kun laitteen niveli ei kierry lainkaan ja varsi on koko ajan suora. Tällöin vaiheenosoitimet ovat aina yhdensuuntaiset ja ne pyörivät yhtä nopeasti, mikä siis tarkoittaa laitteen kaikkien osien pyörivän samalla kulmataajuudella. Matkustajan paikkaa esittää kuviossa viimeisen vaiheenosoitimen kärki, joka piirtää nuolten pyöriessä ympyrän aivan kuten yksinkertaisen harmonisen liikkeen tapauksessa. Tämän ympyräliikkeen projektio x -suuntaan on myös harmonista liikettä, jonka amplitudi on yksinkertaisesti vaiheenosoitimien pituuksien summa.

Kuvassa 14.14 on puolestaan piirretty laitteen liike, jos niveli ei kierry mutta varsi ei myösään ole suora. Varsi pyörii siis jälleen muotoaan muuttamatta, mutta nyt matkustajan paikka keskiakselin suhteeseen on erilainen kuin kuvan tapauksessa 14.13. Erityisesti matkustajan vaunu on nyt lähempänä akselia eikä se ole alkuperäistä suoraan akselistä x -suuntaan. Laitteen pyöriessä matkustaja kulkee edelleen ympyrärataa, mutta radan sade on pienempi. Matkustajan liikkeen x -komponentti liikkuu harmonisesti, koska rata on ympyrä, mutta liikkeen *amplitudi on pienempi kuin sen muodostavien harmonisten liukkeiden amplituiden summa*. Myösään liikkeen *vaihe alussa ei ole nolla*. Tällaisen yhdistetyn harmonisen liikkeen amplitudia ja vaihetta on varsin vaikea ratkaista yhtälöstä (14.62), mutta geometrisesti se onnistuu helposti vaiheenosoitinkuvista. Nimittäin koska matkustajan vaunu liikkuu ympyräradalla, sen liikettä voi kuvata *yhdellä vaiheenosoitimella, joka on alkuperäisten vaiheenosoitinten vektorisumma*

$$\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}} = \bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + \bar{r}_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}. \quad (14.63)$$

Edelleen matkustajan x -suuntaisen liikkeen amplitudi on tämän vaiheenosoitimen pituus

$$A = |\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{vaunu}}| = |\bar{r}_{\text{akseli} \rightarrow \text{nivel}} + \bar{r}_{\text{nivel} \rightarrow \text{vaunu}}| \quad (14.64)$$

ja matkustajan liikkeen vaihe alkuperäistä on tämän vaiheenosoitimen ja x -suunnan välinen kulma.

Edelliset päättelyt pätevät yleisesti, koska mitä tahansa harmonista liikettä voidaan kuvata vaiheenosoitimin. Jos kaksi *samantajuista* harmonista liikettä yhdistetään, niiden summa on edelleen harmoninen. Yhtälöin ilmaisten kahden sinimuotoisen funktion summa on edelleen sinimuotoinen funktio,

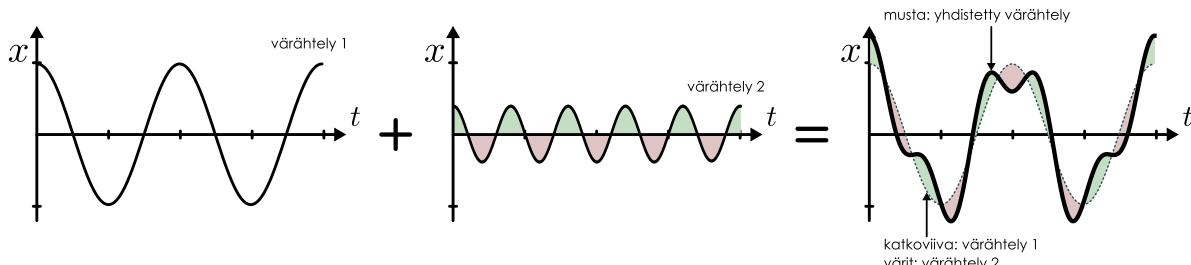
$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) = A_{\text{summa}} \cos(\omega t + \phi_{\text{summa}}), \quad (14.65)$$

jos funktionen kulmataajuus ω on sama. Tämän summan amplitudi ja vaihe voidaan määrittää piirtämällä vaiheenosoitinkuvio, jossa yhdistettyjä liikettä kuvaava vaiheenosoitin on alkuperäisten väärähtelyjen vaiheenosoitinten vektorisumma. Toisin sanoen alkuperäiset vaiheenosoitinnuolet piirretään kuviossa peräkkäin ja yhdistetyt liikkeen vaiheenosoitinta kuvaavat kuvion keskipisteestä viimeisen nuolen kärkeen osoittava nuoli.

14.21 Kappale väärähtelee yhtä aikaa amplitudilla 5.0 mm sekä amplitudilla 2.0 mm, ja eräällä ajan hetkellä kappaletta kuvaava vaiheenosoitinkuvio koostuu suoraan vasemmalle osoittavasta pitkästä nuolesta ja suoraan alas päin osoittavasta lyhyestä nuolesta. (a) Mitkä ovat tällöin alkuperäisten väärähtelyiden vaiheet? (b) Mikä on yhdistetyn väärähtelyn vaihe ja amplitudi?

Tietenkin on myös mahdollista, että kahden harmonisen liikkeen *kulmataajuudet eivät ole samat*. Karuseliesimerkissämme tämä tarkoittaa tilannetta, jossa niveli pyörii ja laitteen käsivarren asento muuttuu. Kuvassa 14.15 on esitetty matkustajan liike tässä tapauksessa, kun varren loppupää nivelestä matkustajan vaunuun kiertää x -suunnasta mitattuna kaksi ja puoli kierrosta samassa ajassa kuin varren alkupää keskiakselistä niveleen kiertää yhden kierroksen. Nyt *vaiheenosoitinkuvion muoto ei pysy samana*, joten matkustaja ei kulje ympyräradalla eikä matkustajan liikkeen projektio ole harmonista. Siispä jos kahden harmonisen liikkeen *kulmataajuudet ovat eri suuret*, näiden liukkeiden yhdistelmä *ei ole harmonista liikettä*.

Kuva 14.16: Laskemalla kahden väärähtelijän kuvaajan arvot pisteittäin yhteen saadaan niiden yhdistetyn väärähtelyn kuvaaja.



Usean harmonisen liikkeen yhdistelmän kuvajan voi piirtää vaiheenosoittimien avulla myös vaiheenosoittimien kulmataajuksien ollessa eri suuret kuten kuvassa 14.15, mutta tämä ei itse asiassa ole kovin helpoaa, koska vaiheenosoitinkuvion muoto ei pysy vakiona. Kuvassa 14.16 onkin esitetty toinen tapa yhdistetyn liikkeen kuvajan piirtämiseksi, kun kahden värähtelijän, 1 ja 2, liikkeen kuvajat tunnetaan. Yhdistetyssä liikkeessä x -koordinaatti kullakin ajan hetkellä t saadaan laskemalla yhteen kahden harmonisen värähtelijän x -koordinaatit tällä kyseisellä hetkellä. Graafitesti tämä tarkoittaa sitä, että jos värähtelijän 2 paikka on tiettyllä hetkellä positiivinen (kuvassa vihreä väri), yhdistetyn liikkeen kuvaja kulkee tällä hetkellä korkeamalla kuin värähtelijän 1 kuvaja. Vastaavasti jos värähtelijän 2 paikka on negativinen (kuvassa punainen väri), yhdistetyn liikkeen kuvaja kulkee matalammalla kuin värähtelijän 1 kuvaja. Yhdistetyn värähtelyn kuvajan voikin ajatella koostuvan hitaan värähtelyn kuvajasta, jonka "päällä" on toinen, nopeamman värähtelyn kuvaja.

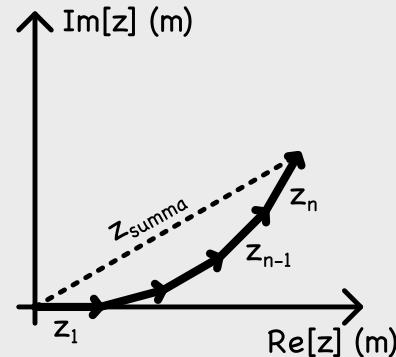
esimerkki 14.4

Usean värähtelijän summa

- (a) Mikä on värähtelyn kulmataajuus ja amplitudi, kun yhdistetään $n = 5$ harmonista värähtelijää, joilla on kaikilla sama kulmataajuus $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ ja amplitudi $A = 1.0 \text{ V/m}$, mutta joiden vaiheet poikkeavat toisistaan $\Delta\phi = \pi/12$?
(b) Johda amplitudille yleinen lauseke.

SUUNNITELMA Koska värähtelijöillä on sama kulmataajuus, niiden yhdistelmäkin värähtelee harmonisesti tällä samalla kulmataajuudella. Yhdistetyn värähtelyn kuvava vaiheenosoitin saadaan periaatteessa laskemalla alkuperäisten värähtelijöiden vaiheenosoittimet vektoreina yhteen, jolloin yhdistetyn värähtelyn amplitudi on sitä kuvavan vaiheenosoitimen pituus.

Piirretään vaiheenosoitinkuvio. Indeksoidaa värähtelijät alaindeksillä $i = 1, 2, \dots, n$. Valitaan ajan nollahetki niin, että ensimmäisen värähtelijän vaihe on silloin nolla, $\phi_{\text{alku},1} = 0$. Seuraavan värähtelijän vaihe alkukhetkellä on silloin $\phi_{\text{alku},2} = \Delta\phi$ ja yleisesti värähtelijän i vaihe on $\phi_{\text{alku},i} = (i-1)\Delta\phi$.



Periaatteessa voisimme laskea vaiheenosoittimien summan geometrisesti, mutta se on varsin hankala. Kuitenkin sen sijaan että ajattelemme nuolet geometrisiksi vektoreiksi, tässä tilanteessa osoittautuu paljon hyödyllisemmäksi ajatella nuolten kuvavan kompleksilukuja komplexitasossa. Kutakin värähtelijää kuvaava siis funktio

$$z_i(t) = A e^{i(\omega t + \phi_{\text{alku},i})} = A e^{i\omega t} e^{i(i-1)\Delta\phi} \quad (14.66)$$

ja niiden summa on $z_{\text{summa}} = z_1 + z_2 + \dots + z_n$. Yhdistetyn värähtelyn amplitudi on tämän pituus eli itsesarvo $A_{\text{summa}} = |z_{\text{summa}}|$.

RATKAISU Värähtelijöiden summa on

$$z_{\text{summa}}(t) = z_1(t) + z_2(t) + \dots + z_n(t) = A e^{i\omega t} (1 + e^{i\Delta\phi} + e^{2i\Delta\phi} + \dots + e^{(n-1)i\Delta\phi}). \quad (14.67)$$

Tässä ajasta riippuva tekijä voidaan erotella jokaisesta termistä laskussäädöllä $e^{A+B} = e^A e^B$ ja ottaa yhtiseksi tekijäksi.

Seuraavaksi sivennämme lausekkeen käyttämällä paria matemaattista kikkaa, joita et ehkä olisi tullut itse ajatelleeksi. Ensinnäkin yllä kirjoitetussa summassa lasketaan yhteen termejä, joiden suhde on aina $Z = e^{i\Delta\phi}$. Tämä on geometrinen summa, jolle pätee laskusäätö $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{n-1} = \frac{Z^n - 1}{Z - 1}$, ja niin saamme tuloksen

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{e^{ni\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} e^{i\omega t}. \quad (14.68)$$

Nyt voimme edelleen kirjoittaa $e^{ni\Delta\phi} - 1 = (e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-ni\frac{\Delta\phi}{2}})e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}}$ ja $e^{i\Delta\phi} - 1 = (e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}})e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}$, jolloin siis

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{e^{ni\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-ni\frac{\Delta\phi}{2}}}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}}} e^{(n-1)i\frac{\Delta\phi}{2}} e^{i\omega t}. \quad (14.69)$$

Tämä on hyödyllistä siksi, että Eulerin kaavasta seuraa

$$e^{iz} - e^{-iz} = [\cos z + i \sin z] - [\cos(-z) + i \sin(-z)] = [\cos z + i \sin z] - [\cos z - i \sin z] = 2i \sin z, \quad (14.70)$$

joten saamme lopputulokseen

$$z_{\text{summa}}(t) = A \frac{\sin n\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} e^{i[\omega t + (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}]} \quad (14.71)$$

Tämä kompleksiluku on muotoa $z_{\text{summa}}(t) = r e^{i\phi(t)}$, missä $r = A \frac{\sin n\frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}$ ja $\phi(t) = \omega t + (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}$. Toisin sanoen sen pituus eli itsesarvo on vakio, $|z| = r$, se pyörii kulmataajuudella ω ja sen vaihe alussa on $\phi_{\text{alku}} = (n-1)\frac{\Delta\phi}{2}$.

Tämä lasku siis todistaa algebrallisesti sen mitä päätelisimme jo geometrisesti: kun yhdistämme värähtelyjötä, joilla on sama kulmataajuus, tuloksena on uusi värähtelyjä, jolla on yhä tämä sama kulmataajuus. Tässä tapauksessa yhdistetyn värähtelyn amplitudi on

$$A_{\text{summa}} = |z_{\text{summa}}| = A \frac{\sin n \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}. \quad (14.72)$$

Jos värähtelyjötä on $n = 5$ ja niiden alkuperäiset amplitudit ovat $A = 1.0 \text{ V/m}$ sekä vaihe-erot $\Delta\phi = \pi/12$, summa-amplitudiksi saadaan $A_{\text{summa}} = A \sin \frac{5}{24}\pi / \sin \frac{1}{24}\pi \approx 4.66 \text{ V/m}$.

ARVIOINTI Summa-amplitudi on hieman pienempi kuin viiden alkuperäisen värähtelyjän amplituidien summamäärä, $4.66 < 5.0$. Kuvan perusteella tämä on järkevä, sillä kuvassa etäisyys origosta viimeisen nuolen kärkeen on selvästikin vähemmän kuin 5 nuolen pituutta mutta enemmän kuin 4.

Tämä esimerkki on melko monimutkainen, eikä ole tarkoituskaan, että osaisit tehdä sen itse. Lasku on kuitenkin syytä lukea läpi kahdesta syystä. Ensinnäkin tämä on esimerkki kompleksilukujen käytöstä ja niiden hyödyllisyystä. Lisäksi lopputulos osoittautuu hyödylliseksi. Tutkimme nimittäin juuri tällaisia vaiheenoitinkuvioita aikanaan luvussa 16.4 tiettyjen optisten ilmiöiden yhteydessä!



14.22 Millainen vaiheenoitinkuva esimerkissä 14.4 saataisiin, jos (a) $n = 5$ värähtelyjän vaihe-ero olisi $\Delta\phi = \frac{2}{5}\pi$ tai (b) $n = 24$ värähtelyjän vaihe-ero olisi $\Delta\phi = \frac{1}{12}\pi$? Päättele yhdistetyn värähtelyn amplitudi graafisesti ja tarkista esimerkissä johdetulla lausekkeella. Millaista värähtelyä siis on?

Lähes samantaaajuiset värähtelyt

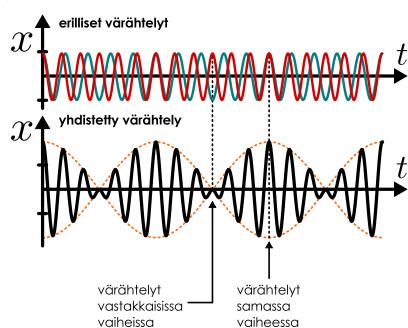
Yhdistelemällä harmonisia värähtelyjä voidaan siis tuottaa jaksollista liikettä, joka ei ole harmonista. Täsmällisemmin harmonisten värähtelyjen yhdistemä on harmonista *vain* jos värähtelyillä on täsmälle sama taajuus. Harvoin kuitenkaan värähtelyillä on *täsmälle* samat taajuudet. Tutkimme seuraavaksi, miten yhdistetty värähtely poikkeaa puhtaasti harmonisesta liikkeestä, jos alkuperäisten värähtelyjen taajuudet ovat hyvin lähellä toisiaan.

Kuvassa 14.17 (a) on esitetty kuvaajat kahdelle lähes samantaajuiselle värähtelyjälle sekä näiden yhdistelmälle. Yhdistetty värähtely (musta käyrä) muistuttaa harmonista värähtelyä, jonka taajuus on likimain sama kuin alkuperäisten värähtelyjöiden taajuus. Yhdistetyn värähtelyjän *amplitudi* kuitenkin niin ikään värähtelee. Kuvassa tästä amplitudia on kuvattu oranssilla käyrällä, jota kutsutaan *verhokäyräksi*. Signaalinkäsittelyssä sanotaan, että verhokäyrä *modului* mustaa käyrää säätelemällä sen korkeutta. Fysiikassa tästä ilmiötä, jossa kahden lähes samantaajuisen värähtelyn yhdistelmän amplitudi vaihtelee, kutsutaan **huojunnaksi**.

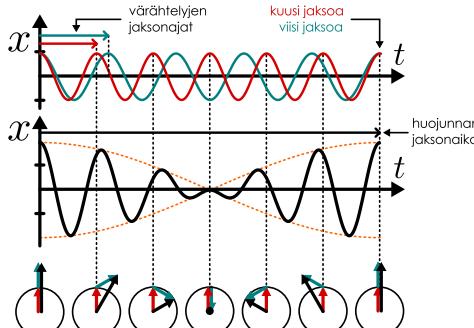
Huojunnan dynamiikka näkyy paremmin kuvassa 14.17 (b), jossa aika-akselia on venytetty kattamaan täsmälle yhden huojunjakson. Alkuperäisten värähtelyjöiden ollessa samassa vaiheessa yhdistetyn värähtelyjän amplitudi on suuri ja vastaavasti värähtelyjöiden ollessa vastakkaisissa vaiheissa yhdistetty amplitudi on pieni. Koska alkuperäisillä värähtelyjöillä on hieman eri taajuudet, ne ajautuvat ajan kuluessa eri vaiheisiin. Niinpä yhdistetyn värähtelyn amplitudi vaihtelee suuren ja pienen välillä. Huojunnan jaksonaika on huomattavasti pidempi kuin alkuperäisten värähtelyjen jaksonajat eli toisin sanoen huojuntataajuus on alkuperäisten värähtelyjöiden taajuuksia pienempi. Esimerkissä punaisella piirretty värähtelyä ehti käymään kuusi värähdysjaksoa yhden huojunjakson aikana.

Kuva 14.17: Lähes samantaajuiset värähtelyt johtavat yhdistettynä huojuntaan eli yhdistetyn värähtelyn amplitudin värähtelyyn.

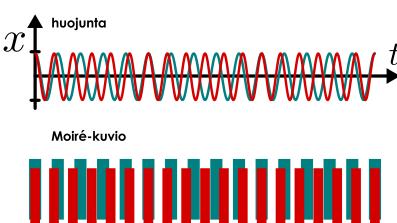
(a) Kahden värähtelyjän kuvaajat ja näiden yhdistelmän kuvaaja.



(b) Yksi huojunjakso.



(c) Kahden erilevyisen viivaston yhdistäminen tuottaa tummia ja vaaleita alueita.



Kuvaan on myös merkitty väärähtelyjen vaiheenosoittimet niinä hetkinä, joina punaisella pürretty väärähtelijä on käynyt täsmälleen yhden jakson. Toinen, turkoosilla pürretty väärähtelijä väärähtelee hieman punaista väärähtelijää hitaanmin ja sen vaiheenosoitin kiertää punaista hitaanmin. Toisin sanoen turkoosi vaiheenosoitin jää punaisesta jälkeen. Kun punainen nuoli on pyörähtänyt yhden kokonaisen kierroksen, turkoosi nuoli on ehtinyt käentyä vasta vajaan kierroksen. (Muista, että valitsimme vaiheenosoittajien pyörivän positiiviseen kiertosuuntaan vastapäivään.) Jokaisella kierroksella turkoosi nuoli jää yhä enemmän jälkeen, kunnes lopulta nulet osoittavat jälleen samaan suuntaan, koska *punainen nuoli on kiertänyt yhden kierroksen enemmän*. Kuvan esimerkissä tämä tapahtuu, kun punainen väärähtelijä on ehtinyt käydä kuusi jaksoa ja turkoosi viisi eli täsmälleen yhden jakson vähemmän. Jos alkuperäisten väärähtelijöiden taajuudet ovat f_{hidas} ja f_{nopea} , ne osuvat samaan vaiheeseen jaksollisesti *huojuntataajuudella*

$$f_{\text{huojunta}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}, \quad (14.73)$$

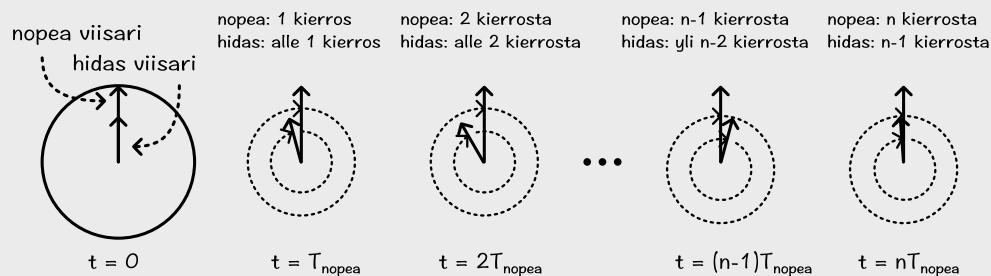
mikä osoitetaan esimerkissä 14.5.

esimerkki 14.5

Rikkinäinen kello

Erässä rikkinäisessä kellossa kaksi viisaria kiertää kellotaulua nopeasti. Toinen viisareista liikkuu hieman toista nopeammin. Nopeamman viisarin kiertoaika on T_{nopea} ja hitaanman T_{hidas} . (a) Kuinka kauan kestää, että nopeampi viisari ohittaa hitaanman kierroksella? (b) Nopeampi viisari ohittaa hitaanman säännöllisesti. Mikä on ohitusten taajuus?

TILANNE Kellon viisarit vastaavat kahden likimain samantaaajuisen väärähtelijän vaiheenosoittimia. Kyseessä on siis samanlainen tilanne kuin kuvassa 14.17. Merkitään aikaa, jonka jälkeen viisarit ovat jälleen samansuuntaiset, T_{ohitus} , ja nopean viisarin tekemien kierrosten määrää tässä ajassa n .



SUUNNITELMA Oletetaan viisarien olevan aluksi samansuuntaiset. Kun nopea viisari on kiertänyt yhden kierroksen, hidas viisari on hieman sitä jäljessä. Hidas viisari jää jokaisella kierroksella lisää jälkeen, jolloin lopulta nopea viisari ohittaa sen kierroksella. Jos viisarit ovat likimain yhtä nopeita, nopeampikin viisari joutuu kiertämään monta kierrosta ennen kuin se tavoittaa hitaanman viisarin. Kierrosten lukumäärän ei tarvitse olla kokonaisluku, sillä voi aivan hyvin käydä niin, että nopea viisari kiertää esimerkiksi $n = 10.4$ kierrosta samassa ajassa kuin hidas viisari kiertää $n - 1 = 9.4$ kierrosta. Toisin sanoen viisareiden ei tarvitse osoittaa alkuperäiseen suuntaan niiden jälleen kohdateessa. Joka tapauksessa nopeampi viisari tavoittaa hitaanman täsmälleen silloin kun hidas viisari on kiertänyt yhden kierroksen vähemmän kuin nopea. Nopea viisari siis tekee tässä ajassa n kierrosta ja hidas $n - 1$, ja tähän kuluu kaikkiaan siis aikaa

$$T_{\text{ohitus}} = nT_{\text{nopea}} = (n - 1)T_{\text{hidas}}. \quad (14.74)$$

RATKAISU Yhtälöstä (14.74) voidaan edelleen ratkaista

$$n = \frac{T_{\text{hidas}}}{T_{\text{hidas}} - T_{\text{nopea}}}. \quad (14.75)$$

Sijoittamalla tämä tulos takaisin lausekkeen (14.74) alkuosaan saadaan ajaksi

$$T_{\text{ohitus}} = \frac{T_{\text{nopea}} T_{\text{hidas}}}{T_{\text{hidas}} - T_{\text{nopea}}}. \quad (14.76)$$

Ottamalla tästä puolittain käänneisluvut voidaan tulos kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{T_{\text{ohitus}}} = \frac{1}{T_{\text{nopea}}} - \frac{1}{T_{\text{hidas}}}. \quad (14.77)$$

Taajuuden ja jaksonajan yhteyden $f = 1/T$ perusteella tämä on kuitenkin sama asia kuin

$$f_{\text{ohitus}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}. \quad (14.78)$$

ARVIOINTI Täytyy olla $T_{\text{hidas}} > T_{\text{nopea}}$ ja $f_{\text{hidas}} < f_{\text{nopea}}$, joten lasketut ratkaisut ovat positiivisia kuten pitääkin. Kuvassa 14.17 on $n = 6$. Jos nopeamman väärähtelyn jaksonaika on esim. $T_{\text{nopea}} = 1.0$ s, täytyy hitaan väärähtelyn jaksonajan olla $T_{\text{hidas}} = \frac{6}{5}T_{\text{nopea}} = 1.2$ s ja huojunnan jaksonajan $T_{\text{ohitus}} = 6.0$ s, mikä on sopusoinnussa tässä laskettujen tulosten kanssa.



14.23 Millaista yhdistetty värähtely on, jos alkuperäisten värähtelyiden taajuudet ovat täsmälleen samat? Miten huojunta käyttäätyy, kun alkuperäisten värähtelyiden taajuudet poikkeavat toisiaan hyvin vähän? Mitä tapahtuu, kun taajuudet lähestyvät toisiaan?

Huojunnan voi kuulla. Jos korvaan saapuu kaksi lähes samantaaajuista ääntä, niiden yhdistelmä saa korvan tärykalvon värähtelemään ja värähtelyn amplitudi vaihtelee huojuntataajuudella. Tavalliset ihmisen kuulemat äänet saavat korvan värähtelemään satojen tai tuhansien hertsien taajuuksilla. Niinpä jos korvaan saapuu esimerkiksi 399.9 Hz ja 400.1 Hz taajuiset äänet, nämä saavat tärykalvon värähtelemään 400 kertaa sekunnissa huojuntataajuuden ollessa 0.2 Hz. Ääni aistitaan niin, että korvaan saapuvien värähdysten *amplitudi* havaitaan äänen voimakkuutena (suuri amplitudi vastaa voimakasta ääntä) kun taas *taajuus* määritetään äänen *korkeuden* (suuri taajuus vastaa korkeaa ääntä). Aistimus on tällöin sellainen, että kuulija kuulee 400 Hz taajuutta vastaavan äänen, ja tämän äänen voimakkuus vaihtelee viiden sekunnin jaksoissa.

Huojuntaa vastaavan ilmiön voi myös nähdä kuten kuvassa 14.17 (c). Asettamalla pääallekäin kaksi läpinäkyvää kuvioita, joissa on säännöllisin mutta hiukan eripituisin välein raitoja, kuvioiden nähdään yhdessä muodostavan säännöllisin välimatkoineen tummia ja vaaleita alueita. (Ilmiö on helppo nähdä esimerkiksi katsottaessa sopivan aidan tai säleikön läpi, jos niiden takana on jokin raidallinen esine.) Tätä kutsutaan *moiré-kuvioksi*, ja kyseessä on oleellisesti aivan samanlainen ilmiö kuin huojunnassa vaikkei asiaan liitykään liikettä. Kuvaan vaaleat alueet syntyvät kuvioiden ollessa "samassa vaiheessa", jolloin toinen kuvioista on piilossa toisen takana ja kuviossa olevat aukot ovat pääallekäin. Tummat alueet puolestaan syntyvät kuvioiden ollessa "vastakkaisissa vaiheissa", jolloin yhden kuvion aukot peittivät toisen kuvion alle.



14.24 Vastaako moiré-kuvion tumma alue huojunnassa suuren vai pienen amplitudin aluetta?

Harmoninen analyysi

Olemme nyt päättelleet, että kahden samantaajuisen harmonisen liikkeen yhdistelmä on edelleen harmonista liikettä samalla taajuudella. Jos taajuudet poikkeavat hieman toisistaan, yhdistetty liike on likimain harmonista, mutta huojunnan vuoksi värähtelyn amplitudi muuttuu. Toisaalta kuvan 14.16 perusteella kahden harmonisen värähtelyn yhdistelmä ei ole harmonista, jos värähtelyjen taajuudet poikkeavat selvästi toisistaan. Harmonisia värähtelyitä yhdistämällä voidaan siis tuottaa myös muitakin kuin harmonista liikettä. Tähän asti olemme tutkinneet millaista liikettä kahden harmonisen värähtelyn yhdistäminen tuottaa, mutta onkin aiheellista pohtia päinvastoin *millaista liikettä voidaan kuvata yhdistämällä harmonisia värähtelyjä*. Ehkä hieman yllättäen osoittautuu, että *kaikki jaksolliset liikkeet voidaan esittää harmonisten värähtelyiden yhdistelmänä*. Tämän tuloksen perusteella pystymme kuvamaan *mitä tahansa värähtelyä* kunhan osaamme kuvata harmonista liikettä.

Emme todista tätä väitetä. Kuitenkin *Fourier'n lauseena* tunnettu matemaattinen sääntö sanoo, että *mitä tahansa jaksollinen funktio voidaan esittää sinimuotoisten funktioiden summana* eli **Fourier-sarjana**. Jos meillä siis on jaksollinen funktio $x(t)$, joka kuvaa kappaleen liikettä, tämä funktio voidaan aina kirjoittaa summana

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t]. \quad (14.79)$$

Vaihtoehtoisesti tämä sarja voidaan esittää esimerkiksi muodossa

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (14.80)$$

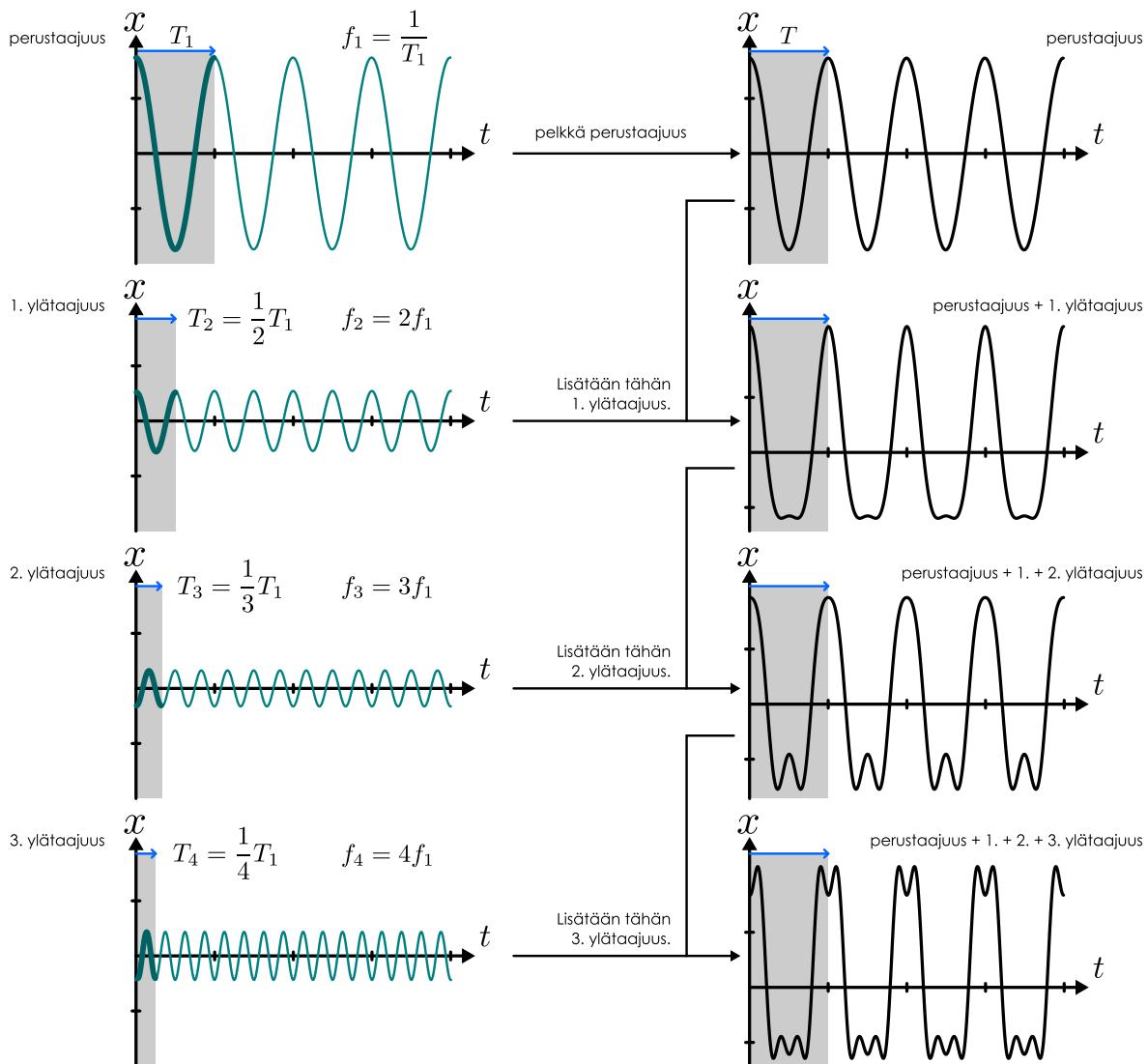
koska kahden harmonisen funktion summa on edelleen harmoninen, *jos niiden taajuudet ja aallonpituuudet ovat samat*. Jos nimittäin $A^2 = a^2 + b^2$ ja $\tan \phi = -b/a$, pätee $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$, minkä perusteella yllä esitetty summat ovat sama asia.



14.25 Piirrä kuvan 14.14 kaltainen vaiheenosoitinkuvio harmonisten funktioiden $3 \cos(\omega t)$ sekä $4 \sin(\omega t) = 4 \cos(\omega t - \pi/2)$ yhdistelmälle. Määritä kuvion avulla vakiot A ja ϕ niin, että pätee $3 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Erityisesti jos funktio $x(t)$ jaksonaika on T , summa voidaan kirjoittaa käyttäen ainoastaan sinimuotoisia funktioita, joiden jaksonajat ovat $T_1 = T$, $T_2 = T/2$, $T_3 = T/3$ jne. Näin siksi että jos jaksollinen funktio palaa takaisin lähtöarvoonsa ajan $T_n = \frac{1}{n}T$ jälkeen, funktio palaa takaisin lähtöarvoonsa myös ajan T välein. Mikä tahansa tälläisten funktioiden summa on siten jaksollinen jaksonajalla T . Sama asia voidaan ilmaista myös niin, että ensimmäisen summattavan funktion taajuus on $f_1 = 1/T_1$, jolloin toisen funktion taajuus

Kuva 14.18: Mielivaltainen jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten liukkaiden yhdistelmänä.



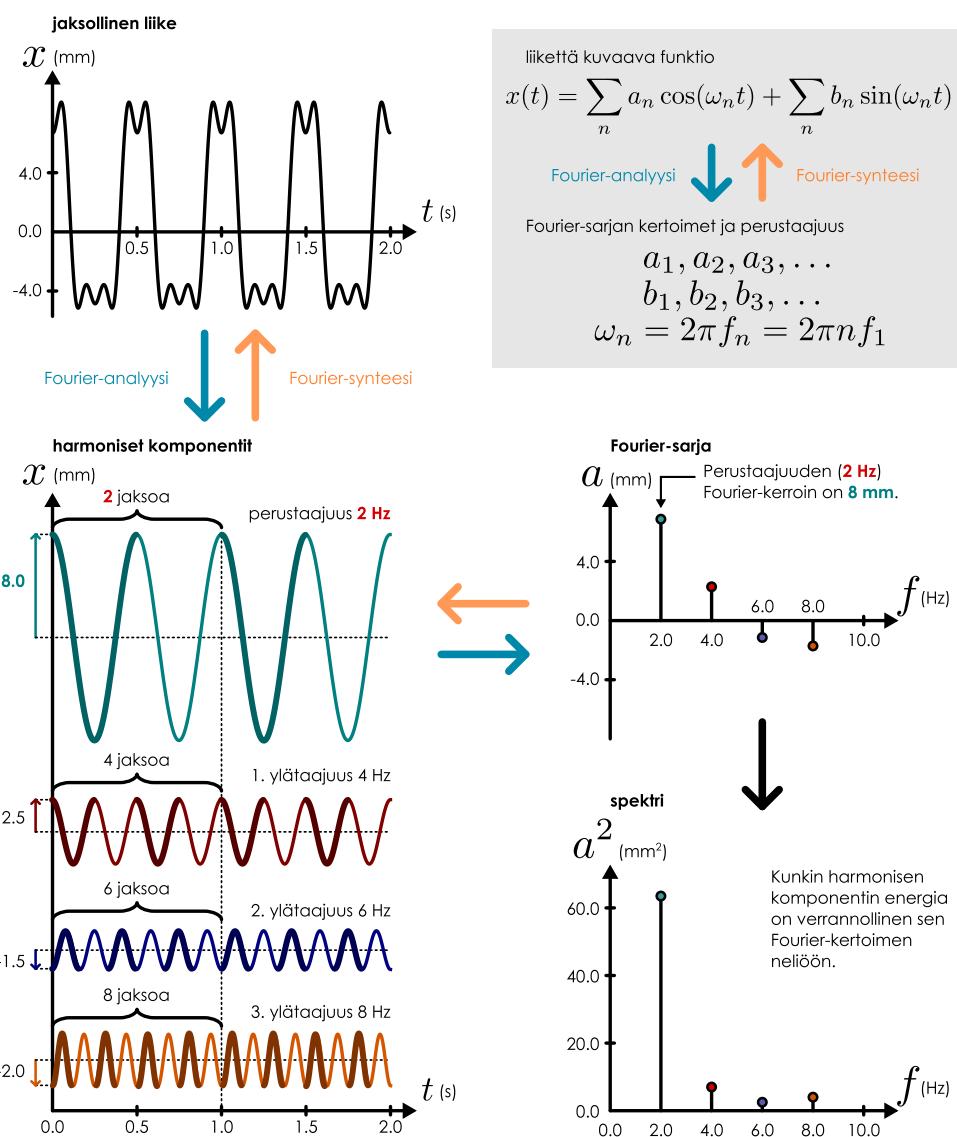
on $f_2 = 2f_1$, kolmannen $f_3 = 3f_1$ jne. (Itse asiassa funktio $x(t)$ voidaan koostaa yhdistämällä harmonisia värähtelyitä myös siinä tapauksessa, että funktio ei ole jaksollinen. Tällöin kuitenkin summassa voi esiintyä mitä tahansa taajuuksia.) Tällaisten harmonisten värähtelyiden yhdistelmän taajuus on sama kuin summan ensimmäisen värähtelyn taajuus, minkä vuoksi tästä ensimmäistä taajuutta kutsutaankin värähtelyn **perustajudeksi**. Seuraavat taajuudet ovat **harmonisia glätaajuuksia**, ja ne ovat siis perustajuuuden monikertoja. Yhdessä näitä sinimuotoisia värähtelyjä kutsutaan jaksollisen liukkeen **harmonisiksi komponenteiksi**.

Kuvassa 14.18 on esitetty esimerkkinä neljän harmonisen värähtelyn yhteenlasku kuvaajina. Kuvan vasemalla puolella on summattavien funktioiden kuvaajat ja kuvan oikealla puolella on näiden summa, kun funktiot lasketaan yhteen yksi kerrallaan. Perustajuuudella värähtelevän funktion jaksonaika on T_1 , ensimmäisen ylätajuuden puolet tästä jne. Funktioiden summan taajuus on kuitenkin aina sama kuin värähtelyn perustajuuus $f = f_1$ ja sen jaksonaika on $T = T_1$.

Yhtälössä (14.79) esiintyvät kertoimet a_0, a_1, a_2, \dots ja b_1, b_2, b_3, \dots ovat funktion **Fourier-kertoimet**. Jos tuntemme jaksollisen funktion Fourier-kertoimet ja perustajuuuden f_1 , voimme laskea funktion arvon minä tahansa ajan hetkenä Fourier-sarjan (14.79) avulla. Myös käänneinen on totta: olipa meille *millainen tahansa* jaksollinen funktio $x(t)$, on olemassa Fourier-kertoimet, joiden avulla funktio voidaan kirjoittaa Fourier-sarjana. Lisäksi osoittautuu, että nämä kertoimet ovat **yksikäsitteiset**, eli on olemassa vain yhdet kertoimet, joilla Fourier-sarja toimii. Toisin sanoen kutakin jaksollista funktiota vastaa täsmälleen yksi Fourier-kertoimien joukko, ja jokaista Fourier-kertoimien joukkoa vastaa täsmälleen yksi jaksollinen funktio. Fourier-kertoimiin siis sisältyy yhtä paljon informaatiota kuin alkuperäiseen funktion.

Fourier-kertoimien selvittämistä kutsutaan **Fourier-analyysiksi**, ja siinä on kyse jaksollisen funktion ja-

Kuva 14.19: Jaksollisen liikkeen jakoa harmonisiin komponentteihin kuva Fourier-sarja. Spektri puolestaan kertoo harmonisten komponenttien suhteelliset energiat.



kamisesta *harmonisiin komponentteihin*. Käänteinen operaatio eli funktion rekonstruointi Fourier-kertoimien perusteella on puolestaan *Fourier-synteesiä*. Tämä on havainnollistettu kuvassa 14.19. Samassa kuvassa on esitetty Fourier-kertoimet myös graafisena esityksenä kuvajana, jonka vaaka-akselilla on kunkin Fourier-sarjassa esiintyvän komponentin taajuus ja pystyakselilla komponenttien Fourier-kertoimet. Jos Fourier-kerroin on positiivinen, se on sama kuin kyseisen komponentin amplitudi. Kuitenkin toisin kuin amplitudi, Fourier-kertoimet voivat olla myös negatiivisia. Tässä esimerkissä kaikki harmoniset funktiot ovat kosinifunktioita, joten ne vastaavat Fourier-kertoimia a_1 , a_2 , a_3 sekä a_4 . Kertoimet b_n ovat kaikki nollia.



14.26 (a) Mitä ovat funktion $x(t) = (1.1 \text{ m}) \cos[(0.6 \text{ s}^{-1})t] + (0.3 \text{ m}) \cos[(1.2 \text{ s}^{-1})t]$ Fourier-kertoimet ja perustajuus? (b) Funktion Fourier-kertoimet ovat $a_0 = 0.2 \text{ m}$, $a_1 = 2.1 \text{ m}$ sekä $a_2 = 1.3 \text{ m}$ (muut nollia) ja perustajuus $f_1 = 2.0 \text{ Hz}$. Mikä on funktion arvo ajan hetkellä $t = 0.25 \text{ s}$?

Fourier-analyysi on erittäin voimakas matemaattinen työkalu, jolla on paljon sovelluksia sekä fysiikassa että teknologiassa. Jätämme Fourier-sarjojen matemaattisen teorian kuitenkin tässä vaiheessa matematiikan kursseille ja tarkastelemme sen sijaan tämän tuloksen fysikaalista merkitystä. Tulos on merkittävä ensinnäkin siksi, että olemme tässä luvussa jo oppineet kuvaamaan ideaalista harmonista värähtelyä. Jos siis joudumme analysoimaan epäharmonista jaksollista liikettä, Fourier-sarjojen avulla voimme aina kuvata tämän liikkeen harmonisten värähtelyjen summana, ja osaamme analysoida tämän summan jokaisen termin käyttäytymisen erikseen. Myös aaltoliikkeen tapauksessa luvussa 15 nähdään, että sinimuotoisten aaltojen käyttäytyminen

on helppo kuvata ja joskus muiden aaltojen liikkeen ymmärtäminen vaatii niiden esittämistä sinimuotoisten aaltojen summana. Toinen syy Fourier-analyysin tärkeyteen on se, että luonnossa on monia prosesseja, jotka perustuvat harmonisten komponenttien erotteluun. Esimerkiksi *kuulo* toimii näin. Korvaan saapuvat äänet saavat tärykalvon värähtelemään yhtä aikaa useilla taajuksilla ja tuottaessaan kuuloaistimuksen aivot tekevät tälle värähtelylle Fourier-analyysin. Toisin sanoen aivot tunnistavat mitä taajuuksia korvaan saapuneissa värähtelyissä on sekä laskevat näiden värähtelyjen amplitudit. Eri taajuudet kuullaan äänien korkeusina ja amplitudien neliöt voimakkuuksina. Erityisesti aivot pystyvät näin erottelemaan erilaiset äänet kuten musiikin, puheen ja ympäristön äänet toisistaan. Jos tärykalvon värähtelyä ei voisi erottella harmonisiin komponentteihin, äänet sekoittuisivat emmekä voisi erottaa eri lähteistä tulevia ääniä toisistaan.

Fourier-kertoimien etumerkkejä *ei voi kuulla*. Ne voidaan toki määrittää esimerkiksi mittaanalla ilman värähtelyä mikrofonilla ja analysoimalla värähtelyliiken tietokoneella, mutta kuulo erottlee vain harmonisten komponenttien amplitudit — ei niiden vaiheita. Tarkemmin sanoen äänän kuultavan värähtelyn voimakkuus riippuu värähtelyn *energiasta*. Kunkin harmonisen komponentin energia on puolestaan verrannollinen sen *amplitudin neliöön* joka on sama kuin *Fourier-kertoimen neliö*. Äänens tapaan myös valo on aaltoliikettä, ja valostakin voidaan erottella eri taajuudella värähtelevät komponentit eli *eri värit*. Käytännössä tämä voidaan tehdä niin, että valkoisen valon annetaan kulkea prisman tai hilan läpi, jolloin valo hajaantuu eri suuntiin kulkeviin eri väreihin. (Miksi näin tapahtuu selitetään luvuissa 15 ja 16.) Kunkin värin *kirkkaus* on tällöin verrannollinen kyseisen harmonisen komponentin energian eli amplitudin neliöön.

Nämä esimerkit osoittavat, että tavallisesti värähtelyn vaikutus riippuu sen sisältämien harmonisten komponenttien taajuudesta ja energiasta. Niinpä Fourier-kertoimien a_n sijaan monimutkaista yhdistettyä värähtelyä kuvataan usein ilmoittamalla mitä taajuuksia värähtely sisältää ja mitkä ovat näiden taajuuksien amplitudien neliöt, a_n^2 , kuten kuvassa 14.19. Tälläista esitystä kutsutaan **spektriksi**. Spektri siis kertoo sekä taajuudet, joita yhdistämällä kyseinen jaksollinen funktio on muodostettu, että näihin taajuksiin liittyvät energiat.



14.27 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä yhdistetyistä värähtelijöistä. Millainen liike saadaan yhdistämällä kaksi värähtelijää, joilla on sama taajuus, lähes sama taajuus tai selvästi erilainen taajuus? Miten näitä tilanteita kuvataan vaiheenosottimi ja Fourier-analyysin avulla?

14.5 Resonanssi

Luvun alussa analysoimme harmonista värähtelyä, kun värähtelijään ei kohdistu lainkaan dissipatiivisia vuorovaikutuksia. Tällöin värähtelevän systeemin mekaaninen energia on vakio. Makroskooppisille kappaleille tämä ei kuitenkaan voi koskaan olla täsmälleen totta, sillä dissipatiivisia vuorovaikutuksia kuten kitkaa ja ilmanvastusta ei voi koskaan täysin välttää. Päättämekin värähtelyliukkeen tarkastelun tutkimalla kuinka värähtelijät käyttäytyvät, kun niihin vaikuttaa tällaisia vuorovaikutuksia.

Vaimennettu värähtely

Jos harmoniseen värähtelijään kohdistuu dissipatiivinen vuorovaikutus kuten ilmanvastus, tämä vuorovaikutus siirtää värähtelijän mekaanista energiota ympäristöön värähtelijän liikkessa. Tällöin värähtely vähitellen hidastuu ja sen amplitudi pienenee, jolloin värähtelijä kulkeutuu kohti tasapainopistettä. Tätä kutsutaan **vaimennetuksi värähtelyksi**.

Dissipatiiviset vuorovaikutukset voivat tuottaa erilaisia voimia. Esimerkiksi kitkavoiman suuruus ei riipu kappaleen nopeudesta kun taas hitaasti liikkuvaan kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus riippuu. Mitä nopeammin kappale nimitään liikkuu, sitä voimakkaammin ilmanvastus jarruttaa sen liikettä. Kitka ja ilmanvastus siis vaimentavat värähtelyä eri tavoin, mutta lopputulos on kummankin vuorovaikutuksen tapauksessa sama: värähtelijä pysähtyy. Analysoimme tässä tilanteen, jossa värähtelijä vaimentaa niemenomaan ilmanvastust, koska tällaiset nopeudesta riippuvat vastusvoimat ovat usein värähtelyä vaimentavista vuorovaikutuksista merkittävämmät.

Ilmanvastus kohdistaa liikkuvaan kappaleeseen voiman, jonka suunta on kappaleen liikettä vastaan ja jonka suuruus on suoraan verrannollinen kappaleen vauhtiin (ainakin vauhdin ollessa pieni). Yhtälönä tämä voidaan kirjoittaa muotoon

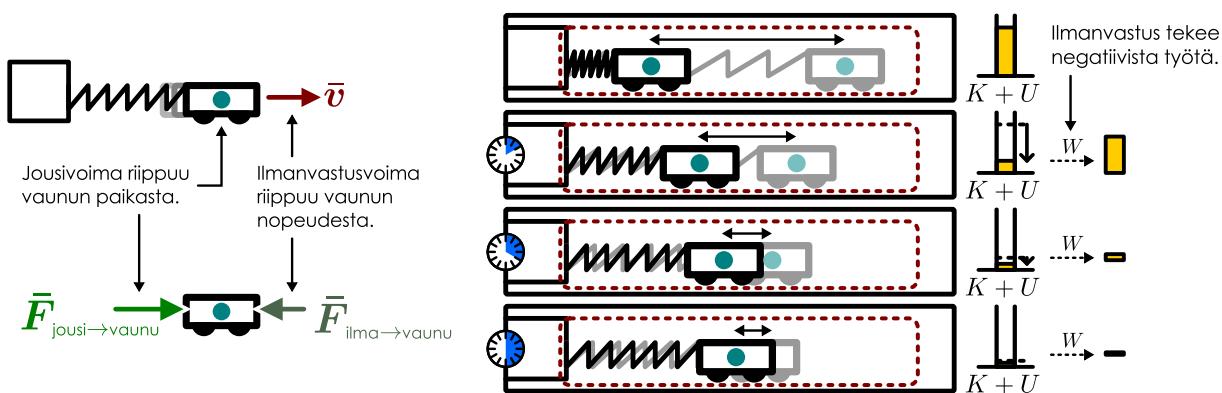
$$F_{x,\text{ilmanvastus}} = -bv_x = -b \frac{dx}{dt}, \quad (14.81)$$

missä b on *vaimennuskerroin*, joka riippuu mm. kappaleen koosta ja muodosta. Jos kyseessä on esimerkiksi jouseen kiinnitettävä vaunu, vaunuun kohdistuva kokonaivoima on jousivoiman ja ilmanvastusvoiman summa, ja kappaleen kiiltovyys on

$$a_x = \frac{1}{m} F_{x,\text{kokonaish}} = \frac{1}{m} (F_{x,\text{ilma} \rightarrow \text{vaunu}} + F_{x,\text{jousi} \rightarrow \text{vaunu}}). \quad (14.82)$$

Kuva 14.20: Jouseen kytketyn vaunun käytös ilmanvastuksen ollessa merkittävä. Ilmanvastuksen tekemä työ siirtää värähtelijän energiota ympäristöön.

(a) Vaimennettuun värähtelijään kohdistuvat voimat. (b) Värähtelyn amplitudi pienenee mekaanisen energian vähentymessä.



Tähän voidaan sijoittaa kiihtyvyyden määritelmä paikan derivaattana sekä voimien lausekkeet, jolloin päädytään muotoon

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x. \quad (14.83)$$

Tämä on *vaimennetun värähtelijän likeyhtälö*.

Jos vaimennuskerroin on pieni, kappale värähtelee mutta värähtelyn amplitudi pienenee. Differentiaaliyhtälön ratkaisuna saadaan tällöin

$$x(t) = Ae^{-t/(2\tau)} \cos(\omega_{vaimennettu} t + \phi_{alku}), \quad (14.84)$$

missä kosinifunktio kuvailee värähtelyä ja eksponenttifunktio amplitudin vaimentumista (ks. esimerkki 14.6). Voimmekin pitää funktiota

$$A_{vaimennettu} = Ae^{-t/(2\tau)} \quad (14.85)$$

vaimennetun värähtelyn amplitudina. Värähtelijän kulmataajuus ratkeaa likeyhtälöstä, ja se on

$$\omega_{vaimennettu} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (14.86)$$

Amplitudifunktio puolestaan sisältää *aikavakion*, jonka arvoksi ratkeaa myös likeyhtälöstä

$$\tau = \frac{m}{b}. \quad (14.87)$$

Vakiot A ja ϕ_{alku} eivät ratkea likeyhtälöstä, vaan nämä riippuvat värähtelijän alkutilasta kuten vastaavat suuret vaimentamattomakin värähtelijän tapauksessa.



14.28 Laske vaimennetun värähtelijän paikan (14.84) ensimmäinen ja toinen derivaatta ajan suhteeseen (nopeus ja kiihtyvyys). Sijoita nämä värähtelijän likeyhtälöön (14.83) ja osoita, että yhtälö todella toteutuu.

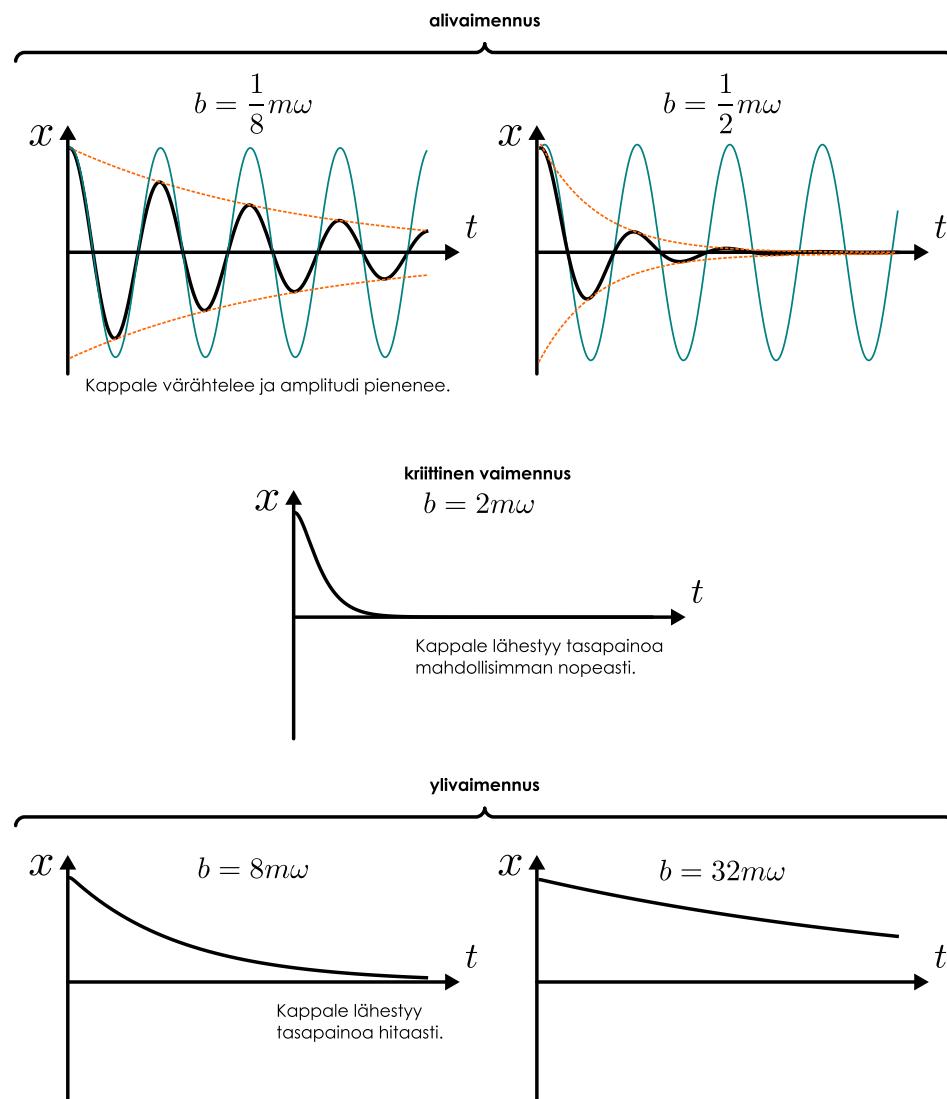
Oskillaattorin energia on vaimennettunakin likimain verrannollinen sen amplitudin neliöön, joka siis pienenee eksponentiaalisesti. Nämä oskillaattorin energioiden ajan funktiona kuvaa likimain lauseke

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A_{vaimennettu}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 e^{-t/\tau} = E_{alku} e^{-t/\tau}. \quad (14.88)$$

Värähtelijän mekaaninen energia vähennee siis likimain eksponentiaalisesti niin, että aina ajan kuluessa jakson τ , energia putoaa osuuteen $e^{-1} \approx 0.37$ alkuperäisestä arvostaan. Tämä ei ole täsmälleen totta, koska mekaaninen energia kuluu ilmanvastuksen tehdessä kappaleeseen negatiivista työtä, ja tämän työn teho riippuu kappaleen vauhdista. Nämä värähtelijä menettää energiota suurella teholla liikkuesaan nopeasti ja pienellä teholla värhdyslukkeen hitaassa vaiheessa. Värähtelijän energia kuitenkin pienenee *keskimäärin* funktion (14.88) kuvaamalla tavalla.

Edellistä tapausta, jossa vaimennuskerroin b on pieni, kutsutaan *alivaimennukseksi*. Tällainen pieni vaimennus ei estä värähtelijää liikkumasta edestakaisin, mutta se johtaa siis ajan myötä pienenevään amplitudiin. Mitä suurempi vaimennuskerroin on, sitä nopeammin värähtelijän liike-energia muuttuu lämpöenergiaksi ja

Kuva 14.21: Vaimennetun värähtelijän paikka ajan funktiona vaimennuskertoimen eri arvoilla, kun värähtelijä on aluksi paikoillaan. Alivaimennetuissa tapauksissa turkoosi käyrä kuvaavat vastaan vaimentamattoman värähtelijän liikettä ja oranssi käyrä vaimennetun värähtelijän amplitudia.



sitä nopeammin värähtelyn amplitudi pienenee. Lausekkeen (14.86) mukaan vaimennus myös pienentää kulmataajuutta. Jos vaimennuskerroin on nolla, kyseessä on vaimentamaton värähtelijä ja $\omega_{vaimennettu} = \omega$ kuten pitääkin. Vaimennuskertoimen kasvaessa kulmataajuus kuitenkin pienenee, mikä tarkoittaa siis jaksonajan pitenevän. Nämä käy siksi, että ilmanvastus pyrkii jatkuvasti jarruttamaan värähtelijän liikettä, ja niinpä värähtely hidastuu, jos ilmanvastus on merkittävä.

Vaimennuskertoimen ollessa $b = \sqrt{4km} = 2m\omega$ värähtelyn kulmataajuus on lausekkeen (14.86) mukaan *nolla*, eli kappale ei enää värähtele lainkaan, koska ilmanvastus jarruttaa sitä liian voimakkaasti. Tätä tilannetta kutsutaan *kriittiseksi vaimennukseksi*, ja itse asiassa tällöin ratkaisu (14.84) ei enää päde. Tällöin kappale nimitään liikkuvan kohti tasapainoa ja *jää sinne*. Jos vaimennuskerroin on vielä tätkin suurempi on kyseessä *ylivaimennus*. Tällöinkään kappale ei värähtelee vaan liikkuvan kohti tasapainoa. Värähtelijä lähestyy tasapainosuhteensa kaikkein nopeimmin vaimennuksen ollessa kriittinen, ja mitä enemmän vaimennuskerroin poikkeaa kriittisestä arvosta, sitä hitaammin värähtelijä lähestyy tasapainoa. Alivaimennuksessa kappale jää värähtelemään tasapainon ympärille joksikin aikaa, koska heikot vastusvoimat kuluttavat värähtelijän mekanista energiaa hitaasti. Tällöin tasapainoa lähestytään sitä hitaammin mitä pienempi vaimennuskerroin on. Ylivaimennuksessa vastusvoimat ovat suuret, mutta kappaleen *nopeus* on tällöin pieni, joten tässäkin tapauksessa värähtelijän mekaaninen energia muuttuu lämpöenergiaksi hitaasti, ja kappale kulkee kohti tasapainoa sitä hitaammin, mitä suurempi vaimennuskerroin on.

Vaimennusta ei voi makroskooppisessa mittakaavassa välittää, mutta sen voimakkuutta voidaan jossakin määrin kontrolloida. Värähtelyyn perustuvissa laitteissa kuten soittimissa värähdysten halutaan yleensä kestävän

pitkään, jolloin vaimennuksen pitäisi olla heikkoa ja aikavakion suuri. Sen sijaan esimerkiksi auton jousituksen ei pidä jäädä värähtelemään jokaisen kuopan jälkeen ja niinpä iskunvaimentimissa yritetään päästää lähelle kriittistä vaimennusta, jolloin jousitus palaa tasapainoon mahdollisimman nopeasti.



14.29 Äänirauta soi taajuudella 262 Hz ja sen värähtelyn amplitudi putoaa viidessä sekunnissa kolmasosaan. (a) Mikä on ääniraudan aikavakio? (b) Kuinka monta jaksoa äänirauta ehtii värähtelemään sinä aikana kun se menettää 95 % mekaanisesta energiastaan?

esimerkki 14.6

Vaimennettu värähtelijä

Johda vaimennetun värähtelijän paikka ajan funktiona.

SUUNNITELMA Vaimennetun värähtelijän likeyhtälö on

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx. \quad (14.89)$$

Tehdään ratkaisuyrite $x = Ae^{ct}$, sijoitetaan tämä likeyhtälöön ja ratkaistaan sen perusteella vakio c .

RATKAISU Yritteen derivaatat ovat $\frac{dx}{dt} = cAe^{ct}$ sekä $\frac{d^2x}{dt^2} = c^2Ae^{ct}$, ja näiden sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa yhtälön

$$mc^2 Ae^{ct} = -bcAe^{ct} - kAe^{ct}. \quad (14.90)$$

Tästä voidaan supistaa pois eksponenttifunktio, joten jäljelle jää toisen kertaluvun yhtälö vakiolle c

$$mc^2 + bc + k = 0, \quad (14.91)$$

ja tämän ratkaisut ovat

$$c = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \quad (14.92)$$

Nyt on kolme vaihtoehtoa. Jos $b > \sqrt{4km}$ eli jos vaimennuskerroin on suuri, vakiolla c on kaksi mahdollista reaaliarvoa. Tällöin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} = A_1 e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4km}}{2m} t} + A_2 e^{-\frac{b+\sqrt{b^2-4km}}{2m} t}, \quad (14.93)$$

missä A_1 ja A_2 ovat alkuehdoista riippuvat vakiot. Tämä on ylivaimennettu värähtelijä, joka siis lähestyy eksponentiaalisesti tasapainoaa.

Jos $b = \sqrt{4km}$ eli jos värähtelijä on kriittisesti vaimennettu, vakiolla c on vain yksi mahdollinen arvo. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä täytyy olla toinenkin ratkaisu, ja tässä tapauksessa osoittautuu, että $x = te^{ct}$ on myös yhtälön ratkaisu. (Voit tarkastaa tämän sijoittamalla differentiaaliyhtälöön.) Likeyhtälön ratkaisu on siis

$$x = A_1 e^{-\frac{b}{2m} t} + A_2 te^{-\frac{b}{2m} t}. \quad (14.94)$$

Mielenkiintoisin tapaus on $b < \sqrt{4km}$ eli alikriittinen vaimennus, koska tällöin vakiolla c on kaksi *kompleksista ratkaisua*

$$c = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (14.95)$$

Kumpikin juuri johtaa loppujen lopuksi samaan fysikaaliseen ratkaisuun, joten voimme tässä valita esimerkiksi plusmerkin.

Värähtelijän paikkaa esittää tällöin funktilo $x = Ae^{-\frac{b}{2m} t} e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} t}$. Koska kyseessä on kompleksinen ratkaisu, voimme valita myös vakion A kompleksiluvuksi. Voimme kirjoittaa sen eksponenttimuodossa, $A = ae^{i\phi_{alku}}$, jolloin ratkaisuksi saadaan

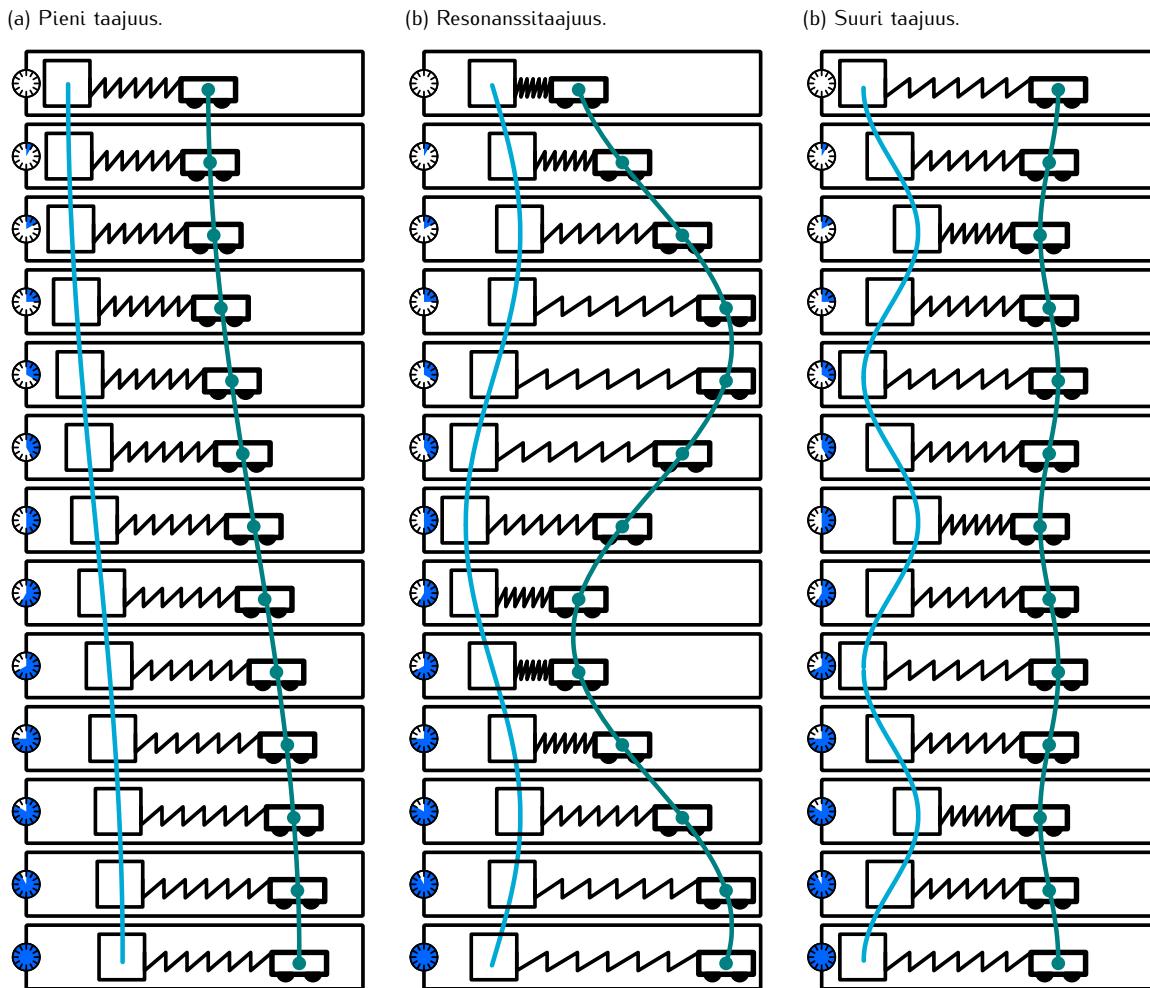
$$x = ae^{-\frac{b}{2m} t} e^{i\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} t + \phi_{alku}\right)}. \quad (14.96)$$

Kompleksifunktio ei sellaisenaan tietenkään kuvaan värähtelijän paikkaa, mutta voimme jälleen poimia ratkaisun reaaliosan, joka on myös likeyhtälön ratkaisu. Siispä todellista värähtelijää kuvaan reaalifunktio

$$x = ae^{-\frac{b}{2m} t} \cos(\omega_{vaimennettu} t + \phi_{alku}), \quad (14.97)$$

missä $\omega_{vaimennettu} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleiseen ratkaisuun täytyy kuulua kaksi vapaata parametria, jotka tässä ovat a sekä ϕ_{alku} joten tämä on yleinen ratkaisu.

Kuva 14.22: Jouseen kiinnitetyn vaunun liike, kun jousen toinen pää on kiinni harmonista liikettä tekevää kappaleessa. Vaunun amplitudi on suuri, jos kappaleen lükkien taajuus on lähellä vaunun luonnollista taajuutta.



Pakotettu väärähtely

Kaikki makroskooppisten kappaleiden väärähtelyt ovat enemmän tai vähemmän vaimennettuja, joen väärähtelemään saatettu kappale ennen pitkää pysähtyy. Monesti kuitenkin väärähtelijöiden halutaan jatkavan väärähtelyään, jolloin niiden väärähtelyä täytyy pitää yllä ulkoisen voiman avulla. Esimerkiksi keinumista voi jatkaa niin pitkään kuin haluaa, vaikka kitka ja ilmanvastus hidastavatkin keinun liikettä, kunhan keinuessa ottaa vauhtia. Väärähtelyä on helpoin tuottaa ja ylläpitää väärähtelevällä voimalla, jonka väärähtelytaajuus on mahdollisimman lähellä väärähtelijän omaa luonnollista väärähdystaajuutta, koska väärähtelijän on helpoin vastaanottaa energiaa juuri tällä taajuudella. Esimerkiksi keinun liike jää kovin piteneksi, jos vauhtia yrittää ottaa liian nopealla tai hitaalla taajuudella, mutta täsmälleen keinun luontaisella taajuudella otettu vauhti saa keinun heilahtelemaan yhä suuremmalla amplitudilla. Tätä kutsutaan **resonanssiksi** väärähtelyn tuottajan ja energian vastaanottavan väärähtelijän välillä.

Resonanssi toimii väärähtelyn vahvistajana, sillä pienikin väärähtely voi resonoidessaan siirtää ajan kullessa suuren määrän energian toisiin väärähtelijöihin. Se myös on erittäin yleinen ilmiö, eikä kyseessä ole vain mekaanisten väärähtelijöiden ominaisuus, vaan resonanssia tapahtuu kaikissa väärähtelevissä systeemeissä virtapiireistä atomeihin. Resonanssi voi olla sekä hyödyllinen että haitallinen. Esimerkiksi pyörivän moottorin tärinä voi resonoida muiden kappaleiden kanssa saaden ne väärähtelemään ja pitämään ääntä. Voimakas resonanssi voi saada kappaleet väärähtelemään jopa niin voimakkaasti, että ne rikkoutuvat. Toisaalta resonanssin avulla voidaan vahvistaa väärähtelyjä, ja esimerkiksi kuultavat äänet syntyvät yleensä jonkinlaisen resonanssin kautta. Resonanssin avulla voidaan myös poimia useita taajuuksia sisältävästä spektristä yksittäisiä taajuuksia, koska resonanssissa vain resonanssitaajuutta lähellä olevat taajuudet vahvistuvat. Monien instrumenttien ja mittalaitteiden toiminta perustuukin resonanssiin.

Totesimme aikaisemmin, että harmonisessa liikkeessä kappale väärähtelee aina samalla taajuudella riippumatta väärähtelyn vaiheesta ja amplitudista. Tämä on kuitenkin totta vain, jos kappale päästetään liikkeelle ja sen annetaan väärhdellä itsekseen. Jos kappaleen liikettä jatkuvasti ohjataan ulkoa, se voidaan luonnollisesti

saada liikkumaan miten tahansa. Erityisesti jos kappaleen värähtelyä ylläpitävän ulkoisen voiman suuruus ja suunta vaihtelee harmonisesti, kappale alkaa värähtelemaan *samalla taajuudella kuin ajava voima* riippumatta siitä, mikä sen oma luonnollinen värähtelytaajuus on. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi kulmataajuudella ω_{ulkoinen} pyörivään moottoriin koskevat kappaleet alkavat värähtelemaan myös kulmataajuudella ω_{ulkoinen} riippumatta kappaleiden ominaisuuksista. Kappaleiden liikettä kutsutaan tällöin **pakotetuksi värähtelyksi**, koska ulkoinen voima pakottaa ne värähtelemaan tietyllä taajuudella.

Pakotettua värähtelyä on havainnollistettu kuvassa 14.22, jossa vaunu on kiinnitetty jousella harmonisesti liikkuvaan kappaleeseen. Oletetaan, että tämä toinen kappale on paljon vaunua raskaampi tai osa jotain suurempaa laitetta niin, että jousen kappaleeseen kohdistaman voiman vaikutus kappaleen liikkeeseen on mitätön. Tällöin raskas kappale puristaa ja venyttää joustaa ja toimii vaunun värähtelyä ylläpitävänä energian läheenä. Kuvassa 14.22 (a) raskas kappale lükkiu *hitaasti*, jolloin ulkoisen voiman *taajuus on pieni* verrattuna vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnolliseen taajuuteen, $\omega_{\text{ulkoinen}} < \omega$. Tällöin vaunu liikkuu kappaleen mukana värähdellem pienellä amplitudilla, eikä jousen tarvitse paljon puristua tai venyä, koska vaunun liikuttaminen hitaasti (pienellä kihitysvyödellä) ei vaadi suurta voimaa.

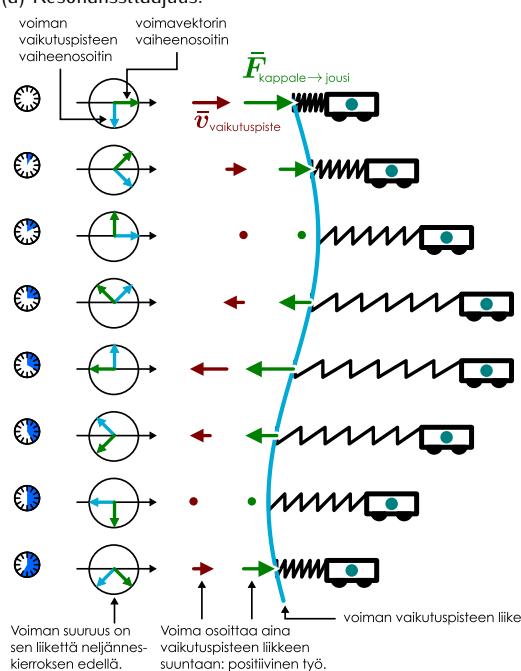
Kuvassa 14.22 (c) raskas kappale lükkiu puolestaan *nopeasti*, jolloin ajavan voiman *taajuus on suuri* verrattuna vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnolliseen taajuuteen, $\omega_{\text{ulkoinen}} > \omega$. Tällöinkään vaunu ei liiku kovin paljon. Jotta vaunu alkaisi liikkua johonkin suuntaan, siihen täytyy kohdistua voima samaan suuntaan tarpeeksi kauan. Nyt vaunuun kohdistuvan voiman suunta muuttuu jatkuvasti, jolloin vaunun kihitysyiden suunta vaihtelee ja vaunu värähtelee pienellä amplitudilla pysyen lähes paikoillaan.

Kuvassa 14.22 (b) raskas kappale lükkiu likimain vaunun ja jousen muodostaman värähtelijän luonnollisella taajuudella, $\omega_{\text{ulkoinen}} \approx \omega$ eli kyseessä on resonanssi. Tässä tapauksessa vaunu värähtelee *suarella amplitudilla*. Resonanssissa vaunun liike seuraa raskasta kappaletta noin neljännesjakson perässä. Tällöin kappale "vetää joustaa perässään" eli täsmällisemmin kappaleen jouseen kohdistama voima osoittaa aina samaan suuntaan kuin mihiin voiman vaikutuspiste liikkuu (kuva 14.23). Näin ollen ulkoinen voima tekee jousen ja vaunun muodostamaan värähtelijään jatkuvasti *positiivista työtä*, ja värähtelijän energia lisääntyy.

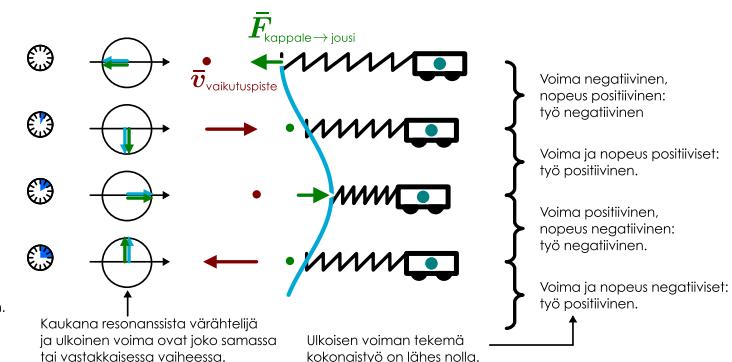
Jos raskas kappale värähtelee selvästi eri taajuudella kuin vaunun luonnollinen taajuus, vaunu lükkiu joko likimain samassa tai vastakkaisessa vaiheessa kappaleeseen verrattuna. Tällöin jouseen kohdistuva ulkoinen voima osoittaa ajoittain samaan ja ajoittain vastakkaiseen suuntaan voiman vaikutuspisteiden liikkeen suuntaan nähdien, ja näin ollen voima tekee välillä positiivista ja välillä negatiivista työtä. Lopputulos on se, että kaukana resonanssista ulkoinen voima tekee kappaleeseen lähes yhtä paljon positiivista ja negatiivista työtä eikä värähtelijälle näin ollen siirry paljonkaan energiaksi.

Kuva 14.23: Resonanssissa ulkisen voiman ja värähtelijän paikan liikkeessä on neljännesjakson ero, jolloin voima osoittaa aina liikkeen suuntaan ja tekee positiivista työtä. Kaukana resonanssista voima ja värähtelijä ovat likimain samassa tai vastakkaisessa vaiheessa, jolloin ulkoinen voima tekee vuoroin positiivista ja negatiivista työtä.

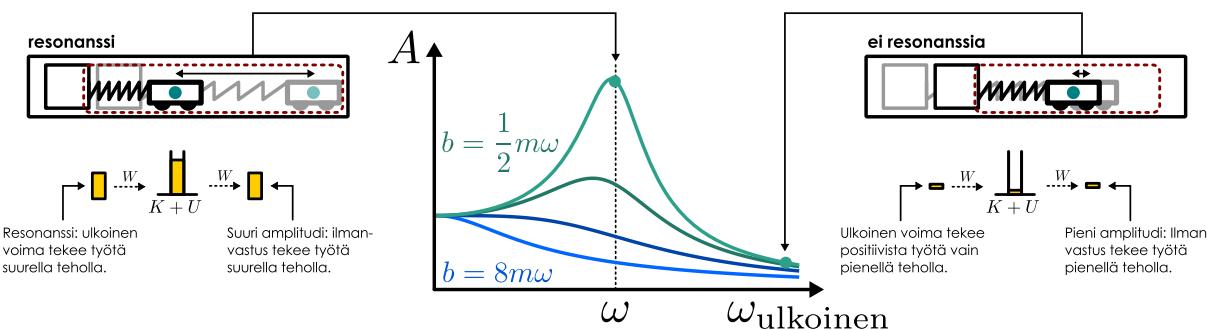
(a) Resonanssitaajuus.



(b) Ulkisen voiman taajuus suurempi kuin resonanssitaajuus.



Kuva 14.24: Kappaleen amplitudi asettuu niin, että ulkoisen voiman ja dissipatiivisten voimien tekemät työt kumoavat toisensa. Resonanssissa ulkoinen voima tekee työtä suurella teholla, jolloin myös värähtelyn amplitudi kasvaa kunnes vastusvoimat kuluttavat energiota samalla teholla.



14.30 Tee samanlainen analyysi kuin kuvassa 14.23 tilanteelle, jossa ulkoisen voiman taajuus on huomattavasti pienempi kuin resonanssitaajuus (kuva 14.23 (a)). (a) Mihin suuntaan ulkoinen voima ja sen vaikutuspiste osoittavat värähdyn eri vaiheissa? (b) Mikä on voiman ja sen vaikutuspisteen liikkeen välinen vaihe-ero? (c) Milloin voima tekee positiivista ja milloin negatiivista työtä?

Kuvassa 14.24 on esitetty pakotetun värähtelijän amplitudi ulkoisen voiman kulmataajuuden funktiona eri vaimennuskertoimien arvoilla. Amplitudia kuvaava matemaattinen lauseke on johdettu esimerkissä 14.7. Lasku olisi reaaliluvuilla jälleen varsin työläs, mutta kompleksiluvuilla se onnistuu melko helposti. Kuitenkaan itse lasku tai edes sen lopputulos ei ole kovin tärkeää, vaan oleellista on ymmärtää, mitä tulos tarkoittaa.

Jos vaimennuskerroin b on pieni, värähdysamplitudi kasvaa voimakkaasti ulkoisen taajuuden ω_{ulkoinen} lähestyessä resonanssitaajuutta eli vaimentamattoman värähtelijän luontaisa värähtelytaajuutta ω , koska resonanssissa ulkoinen voima pumpaa värähtelijään koko ajan lisää energiota ja niinpä värähtelyn amplitudi pääsee kasvamaan yhä suuremmaksi ja suuremmaksi. Toisaalta amplituden kasvaessa myös dissipatiivisten voimien tekemä negatiivinen työ kasvaa, kunnes ulkoinen voiman ja dissipatiivisten voimien työt tasapainottavat toisensa. Mitä pienempi vaimennuskerroin b on eli mitä heikompia dissipatiiviset voimat ovat, sitä suuremmaksi amplitudi kasvaa, mikä näkyy kuvajassa yhä korkeampana *resonanssiykkinä*. Itse asiassa jos värähtelijä on ylivaimennettu eli b on suuri, resonanssiykkää ei synny lainkaan. Kuvaajasta nähdään myös, että kaukana resonanssista värähtelijän amplitudi ei juurikaan riipu vaimennuskertoimesta. Tämä johtuu siitä, että jos ulkoinen voima ja värähtelijä eivät ole resonanssissa, ulkoinen voima tekee värähtelijään sekä positiivista että negatiivista työtä ja niinpä värähtelijän energia ei pääse milloinkaan kasvamaan kovin suureksi riippumatta siitä onko värähtelijä vaimennettu vai ei.



14.31 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä vaimennetuista ja pakotetuista värähtelijöistä. Mitä tarkoittaa ali- ja ylikrüttinen vaimennus ja miten värähtelijä näissä tilanteissa käyttäätyy? Miten pakotettu värähtelijä liikkuu ja mitä tarkoitetaan resonanssilla?

esimerkki 14.7

Resonanssiamplitudi

Johda lauseke pakotetun värähtelijän amplitudille, kun värähtelijään vaikuttaa ulkoinen voima $F_x(t) = F \cos(\omega_{\text{ulkoinen}}t)$.

SUUNNITELMA Tilanne on samankaltainen kuin esimerkissä 14.6, paitsi nyt likeyhtälöön pitää lisätä ulkoista voimaa kuvava termi. Lasketaan taas kompleksiluvuilla, joiden reaaliosuuden tulkitaan kuvavan varsinaista ratkaisua. Tällöin ulkoista voimaa kuvaava termi $F e^{i\omega_{\text{ulkoinen}}t}$, koska $\text{Re}[F e^{i\omega_{\text{ulkoinen}}t}] = F \cos(\omega_{\text{ulkoinen}}t)$. Värähtelijää kuvaaa siis nyt differentiaaliyhtälö

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F e^{i\omega_{\text{ulkoinen}}t}. \quad (14.98)$$

Tehdään harmonista värähtelyä kuvaava yrite $x = A e^{i\omega t + \phi}$, sijoitetaan tämä likeyhtälöön ja ratkaistaan sen perusteella vakio A .

RATKAISU Yritteen derivaatat ovat $\frac{dx}{dt} = i\omega A e^{i\omega t} e^{i\phi}$ sekä $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\phi}$, ja näiden sijoitus differentiaaliyhtälöön antaa yhtälön

$$-m\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\phi} + ib\omega A e^{i\omega t} e^{i\phi} + kA e^{i\omega t} e^{i\phi} = F e^{i\omega_{\text{ulkoinen}}t}. \quad (14.99)$$

Tästä muodosta nähdään suoraan, että jotta yhtälö toteutuisi kaikilla ajan hetkillä, täytyy olla $\omega = \omega_{\text{ulkoinen}}$, koska vain silloin voimme supistaa kaikki ajasta riippuvat tekijät $e^{i\omega t}$ pois. Värähtelijän täytyy siis värähdellä ulkoisen voiman määräämällä taajuudella eikä omalla luontaisella värähtelytaajuudellaan.

Supistuksen jälkeen jäljelle jää yhtälö

$$Ae^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k) = F. \quad (14.100)$$

Tiedämme, että kaikki suureet yhtälössä ovat positiivisia reaalilukuja. Erityisesti F ja A ovat positiiviset, joten myös lausekkeen $e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)$ täytyy olla positiivinen ja reaalinen. Kulma ϕ täytyy siis valita sopivasti niin, että tämä ehto toteutuu. Toisaalta jos lauseke on positiivinen ja reaalinen, sen arvo on sama kuin sen itseisarvo, $z > 0 \Rightarrow z = |z|$. Eksponenttifunktion itseisarvo on yksi, $|e^{i\phi}| = 1$ ja suluissa olevan lausekkeen itseisarvo on Pythagoraan lauseen mukaisesti $|(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2) + ib\omega_{\text{ulkoinen}}| = \sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}$, joten näiden tulon itseisarvo on

$$e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k) = |e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)| = \sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}. \quad (14.101)$$

Näin saamme ratkaistua amplitudiksi

$$A = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + b^2\omega_{\text{ulkoinen}}^2}}. \quad (14.102)$$

Huomioimalla vielä, että värähtelijän luontainen värähtelytaajuus on $\omega_{\text{luontainen}} = \sqrt{k/m}$, tulos voidaan sieventää muotoon

$$A = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_{\text{luontainen}}^2 - \omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_{\text{ulkoinen}}^2}}. \quad (14.103)$$

ARVIOINTI Amplitudi on sitä suurempi, mitä pienempi lauseke $(\omega_{\text{luontainen}}^2 - \omega_{\text{ulkoinen}}^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_{\text{ulkoinen}}^2$ on. Erityisesti amplitudi kasvaa hyvin suureksi, jos vaimennuskerroin b on pieni ja jos ulkoisen voiman kulmataajuus on lähellä värähtelijän luontaista taajuutta $\omega_{\text{ulkoinen}} \approx \omega_{\text{luontainen}}$. Juuri tästä on resonanssi: kun ulkoinen voima muuttuu likimain samalla taajuudella kuin millä värähtelijä luonnostaan pyrkii värähtelemaan, värähtelijä pystyy vastaanottamaan paljon energiota ja sen amplitudi kasvaa suureksi.

Voimme ratkaista voiman ja värähtelijän vaihe-eron ϕ ehdosta, että lausekkeen $e^{i\phi}(-m\omega_{\text{ulkoinen}}^2 + ib\omega_{\text{ulkoinen}} + k)$ piti olla positiivinen reaaliluku. Erityisesti resonanssitaajuudella $\omega_{\text{ulkoinen}} = \omega_{\text{luontainen}} = \sqrt{k/m}$ lauseke sievenee muotoon $e^{i\phi}ib\omega_{\text{ulkoinen}}$ ja tämä on positiivinen reaaliluku vain jos $e^{i\phi} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ eli kun $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Värähtelijän liikenne täytyy siis olla resonanssissa neljännesjakson ulkoista voimaa jäljessä. Näinhän juuri todettiin kuvassa 14.23.

Pieni lisähuomautus: tämä ei ole tarkastellun differentiaalitähden yleinen ratkaisu. Jos alamme heiluttaa värähtelijää, se ei heti ala värähdellä samalla taajuudella kuin millä sitä heilutetaan, eikä värähtelijä resonanssissaakaan saa heti valtavaa amplitudia, vaan siihen kuluu jonkin verran aikaa. Tämä ei sisällä ratkaisumme. Ratkaisumme kertoo vain lopputilan, johon pakotettu värähtelijä ajan myötä päättyy.



14.32 Miten jouseen kiinnitetyn vaunun resonansskäyrä muuttuu, jos muut ominaisuudet pidetään vakiona mutta (a) vaunun massa kasvaa, (b) jousen jousivakio kasvaa, (c) sekä massa että jousivakio kasvavat niin että niiden suhde pysyy samana? Tarkastele resonanssipiükki leveyttä, korkeutta ja paikkaa.

Yhteenveton: Jaksollinen liike

Harmoninen liike

- Kappaleen liike on **jaksollista** ja liikkeen **jaksonaika** on T , jos kappale toistaa samaa liikettä ja palaa takaisin alkutilaansa ajan T välein. Liike, jonka kappale suorittaa ajan T kuluessa on **jaksot**.
- Jaksollisen liikkeen **taajuus** on

$$f = \frac{1}{T}.$$

Taajuus ilmaisee montako jaksoa tapahtuu yhden sekunnin aikana ja sen yksikkö on **herts**.

- Harmoninen värähtely** on jaksollista liikettä, jota kuvaavat ajan funktioina sinimuotoiset funktiot

$$x(t) = A \cos \phi(t).$$

Vakio A on **amplitudi**, joka ilmaisee värähtelijän suurimman etäisyyden tasapainoasemasta. Funktio

$$\phi(t) = \omega t + \phi_{\text{alku}}$$

on värähtelyn **vaihe**, ja siinä esiintyvä vakio

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

on värähtelyn **kulmataajuus**.

- Harmonista värähtelyä voidaan kuvata **vaiheenosottimella**. Vaiheenosoitin on xy -tason nuoli, jonka kanta on origossa ja joka pyörii kulmanopeudella ω (joka on sama kuin harmonisen värähtelijän kulmataajuus). Nuolen pituus ilmaisee liikkeen amplitudin ja nuolen x -akselista mitattu kulma ilmaisee liikkeen vaiheen. Vaiheenosottimen projektio x -akselilla kuvaava harmonisesti liikkuvan kappaleen paikkaa.
- Mikä tahansa systeemi, jossa on vakaa tasapainopiste, käyttää hyvänsä harmonisen värähtelijän tavoin ollessaan tarpeksi lähellä tästä tasapainopistettä.
- Harmonisessa värähtelyssä systeemin mekaaninen energia muuttuu jatkuvasti potentiaalienergiasta liike-energiaksi ja takaisin.

- Harmonisen värähtelijän kokonaisenergia on verrannollinen sen amplitudin neliöön. Jouseen kiinnitetyn kappaleen tapauksessa energia on

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2.$$

- Harmonisen värähtelijän taajuus ei riipu värähtelyn amplitudista vaan ainoastaan värähtelijän ominaisuuksista. Jouseen kiinnitetyn kappaleen kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

ja heilurin

$$\omega = \sqrt{mgL/I_\theta}.$$

Pistemäisen massan muodostaman heilurin kulmataajuus on

$$\omega = \sqrt{g/L}.$$

- Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä (jos kappale toteuttaa yhden, se toteuttaa kaikki muutkin) ja ne kaikki pätevät kulmataajuudella ω liikkuvalle harmoniselle värähtelijälle:

- Kappaleeseen kohdistuva voima on verrannollinen kappaleen etäisyysteen tasapainosta ja sen suunta on kohti tasapainoa

$$F_{x,\text{kokonais}} = -m\omega^2 x.$$

- Kappaleen kiintymys on verrannollinen kappaleen etäisyysteen tasapainosta ja sen suunta on kohti tasapainoa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

- Kappaleen potentiaalienergia on verrannollinen kappaleen tasapainosta mitattu etäisyyden neliöön

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Yhdistetty harmoninen liike

- Jos kaksi samantapaisia harmonista värähtelyä yhdistetään, niiden summa on edelleen harmonista värähtelyä samalla taajuudella. Yhdistelmän amplitudi ja vaihe voidaan määritellä vaiheenosottimilla.
- Jos kaksi lähes samantapaisia harmonista värähtelyä yhdistetään, niiden summa on likimain harmonista värähtelyä, jonka taajuus on alkuperäisten värähtelijöiden taajuuksien keskiarvo. Jos alkuperäiset taajuudet ovat $f_{\text{nopea}} > f_{\text{hidas}}$, yhdistetyn värähtelyn amplitudi vaihtelee taajuudella

$$f_{\text{huojunta}} = f_{\text{nopea}} - f_{\text{hidas}}.$$

Resonanssi

- Makroskooppisiin värähtelijöihin kohdistuu aina dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joiden vaikutuksesta värähtelijä menettää mekaanista energiota ja värähtely lopulta lakkaa. Tämä on **vaimennettua värähtelyä**.
- Välistaineen vastus on usein merkittävin värähtelyä vaimentava vuorovaikutus. Se kohdistaa värähtelijään voiman, jonka suunta on värähtelijän liikettä vastaan ja jonka suuruus on verrannollinen värähtelijän nopeuteen.
- Jos vaimennus on heikkoa eli värähtelijä on **alivaimennettu**, värähtelyn amplitudi pienenee hitaasti.
- Jos vaimennus on voimakasta eli värähtelijä on **ylivaimennettu**, se ei värähtele lainkaan vaan palaa hitaasti tasapainoon.

Tätä kutsutaan **huojunnaksi**.

- Kaikki jaksollinen liike voidaan esittää harmonisten värähtelyiden yhdistelmänä eli jaksollinen liike voidaan jakaa **harmonisiin komponentteihin**, joiden taajuudet ovat tämän jaksollisen liikkeen perustajuuden f_1 monikertoja eli **harmonisia ylätaajuuksia** $f_n = n f_1$. Liikkeen jakoa harmonisiin komponentteihin kutsutaan **Fourier-analyysiksi**.
- Harmonisista komponenteista koostuvan liikkeen **spektri** ilmaisee kuhunkin komponenttiin liittyvän energian komponentin taajuuden funktiona.

- Näiden välissä on **kriittinen vaimennus**, jolloin värähtelijä lähestyy tasapainoasemaa mahdollisimman nopeasti.
- Jos harmoniseen värähtelijään kohdistuu ulkoinen harmonisesti muuttuva voima, värähtelijä alkaa värähtelemään samalla taajuudella kuin ulkoinen voima. Tätä kutsutaan **pakotetuksi värähtelyksi**.
- Jos ulkisen voiman taajuus on lähellä värähtelijän luontaista taajuutta, ulkoinen voima pystyy säästämään värähtelijään tehokkaasti energiota ja värähtelyn amplitudi kasvaa. Tätä kutsutaan **resonanssiksi**.

Sarjat ja kompleksiluvut

- Funktion f **Taylorin sarja** s pisteen x_0 ympärillä on summa

$$s(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Funktion f ja sarjan s derivaatoilla on pisteessä x_0 samat arvot.

- Seuraavat sarjakehitelmät pätevät kaikilla x :n arvoilla

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

- Jaksollisen funktion f **Fourier-sarja** on summa

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t].$$

Vakiot a_0, a_1, \dots ja b_1, b_2, \dots ovat funktion **Fourier-kertoimet** ja funktiot $\cos \omega_n t$ ja $\sin \omega_n t$ funktion harmoniset komponentit. Näiden taajuudet ovat perustaaajuiden monikertoja,

$$\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n f_1.$$

- Kompleksiluku voidaan kirjoittaa reaali- ja imaginääriosan summana $z = x + iy$. Luvun voi tulkita esittävän kompleksitaslon pistettä (x, y) .

- Kompleksiluvun konjugaatti on luku, jossa imaginääriosan etumerkki on vaihdettu $z^* = x - iy$. Tämä on siis kompleksitaslon piste $(x, -y)$.

- Kompleksiluvun itseisarvon neliö voidaan kirjoittaa muodossa $|z|^2 = zz^*$. Tämä kuvaa pisteen (x, y) etäisyyttä kompleksitaslon origosta.

- Kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätee **Eulerin kaava**

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Tämä on siis kompleksitaslon yksikköympyrän piste $(\cos \phi, \sin \phi)$.

- Kompleksiluku voidaan kirjoittaa napakoordinaattiesityksessä $z = re^{i\phi}$, missä $r = |z|$ on luvun itseisarvo ja ϕ sen vaihekulma. Tämä kuvaa pistettä, jonka etäisyys origosta on r ja jonka paikkavektorin kulma reaaliakselin suhteen on ϕ .

- Kahden kompleksiluvun kertolasku tuottaa kompleksiluvun, jonka itseisarvo on alkuperäisten itseisarvojen tulo ja vaihekulma on alkuperäisten vaihekulmien summa

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1 + \phi_2)}.$$

- Kompleksisen eksponenttifunktion $Ae^{i\phi(t)}$ reaaliosa kuvaaa harmonista liikettä.

Sanasto

- jaksollinen (periodic)
- harmoninen (harmonic)
- väähely (vibration)
- oskillaatio (oscillation)
- jakso (cycle)
- amplitudi (amplitude)
- jaksonaika (period)
- taajuus (frequency)
- kulmataajuus (angular frequency)
- vaihe (phase)
- vaiheenosoitin (phasor)
- heiluri (pendulum)
- huojunta (beats)
- verhokäyrä (envelope)
- perustaaajuus (fundamental frequency)

- ylätaajuus (harmonic frequency)
- Fourier-kerroin (Fourier coefficient)
- spektri (spectrum)
- ääni (sound)
- vaimennettu (damped)
- alivaimennus (underdamping)
- ylivaimennus (overdamping)
- krüttinen (critical)
- pakotettu (forced)
- resonanssi (resonance)
- sarja (series)
- kompleksiluku (complex number)
- imaginääriyksikkö (imaginary unit)
- kompleksikonjugaatti (complex conjugate)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/3)

14.1 Tähän voi keksiä paljon erimerkkejä. Tasapainopisteen ympärillä: kuopan pohjalla edestakaisin vierivä pallo, heiluri, värähtelevä tanko. Ei tasapainopisteen ympärillä: pomppiva pallo, pyörivä rengas, kilparataa tasaisella vauhdilla kiertävä auto.

14.2 Kuvaaja leikkää t -akselin kahdesti yhden jakson aikana (kerran alhaalta ylös ja kerran ylhäältä alas). Niinpä värähtelijä kulkee sekunnissa 250 jaksoa eli taajuus on $f = 250$ Hz.

14.3 (a) Paikan muutosnopeus on sama kuin nopeus, joten paikka muuttuu negatiiviseen suuntaan. (b) Nopeuden muutosnopeus on sama kuin kiihtyvyys. Kiihtyvyys on puolestaan paikalle vastakkainen, joten se on negatiivinen. Nopeus muuttuu siis negatiiviseen suuntaan. (c) Vaunun paikka muuttuu negatiiviseen suuntaan eli kohti nollaa. Siispä myös vaunun kiihtyvyys muuttuu kohti nollaa. Koska kiihtyvyys on negatiivinen, se muuttuu siis positiiviseen suuntaan.

14.4 Kun lelu liikkuu valon suunnassa, varjo pysyy paikoillaan. Kun lelu liikkuu valon suuntaan kohtisuoraan, varjo liikkuu yhtä nopeasti kuin lelu. Varjo siis liikkuu edestakaisin niin, että se on vuorotellen paikoillaan ja vuorotellen tasaisessa liikkeessä. Liike on jaksollista mutta ei harmonista.

14.5 (a) $\omega = \Delta\theta/\Delta t = \pi/3 \text{ s}^{-1} \approx 1.05 \text{ s}^{-1}$.

(b) Koko kierros on 2π , joten kierrokseen kuluu aikaa 6 sekuntia.

(c) Projektion kulmataajuus on sama kuin kappaleen kulmanopeus. Sen jaksonaika on kierroseen kuluva aika eli $T = 6$ s ja taajuus on $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = 0.167$ s.

14.6 Ympyräradalla nopeus on aina ympyrän tangentin suuntainen ja se osoittaa kiertosuuntaan. Jos vauhti on vakio, kiihtyvyys osoittaa kohti ympyrän keskipistettä. (Jos vauhti ei ole vakio, kiihtyvyydyllä on myös tangenttikomponentti.) Projektion nopeus- ja kiihtyvyysvektorit ovat täsmälleen samat kuin ympyrätaraa kiertävän kappaleen nopeus- ja kiihtyvyysvektoreiden projektiot (eli x -komponentit).

14.7 (a) Tämä ratkeaa helpoiten piirtämällä vaiheenosoitin. Koska kappaleen koordinaatti on $x = 0.80$ m, tämän täytyy olla myös vaiheenosottimen x -komponentti. Vaiheenosottimen pituus on sama kuin amplitudi, 1.00 m. Tästä ratkeaa vaiheenosottimen ja x -akselin väliseksi kulmaksi trigonometrialla 0.6435. Lisäksi koska kappale liikkuu positiiviseen suuntaan, vaiheenosoitin on juuri käänymässä x -akselin suuntaiseksi (se ei ole juuri ohittanut x -akselia). Tämä tarkoittaa sitä, että vaiheeksi voi valita $\phi = -0.6435$. (Tähän tulokseen voi myös lisätä 2π tai sen monikerran, joten myös esim. $\phi = 5.6397$ käy vastaukseksi.

(b) Kysyttyssä pisteessä vaihe on $\phi = \pi + n2\pi$. Värähtelijä saavuttaa tämän pisteen, kun vaihe on muuttunut $\Delta\phi = \pi - (-0.6435) = 3.785$. Tähän kuluu aikaa $\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = 0.60$ s.

14.9 Kuvaajat kannattaa piirtää tietokoneella. Sinimuotoisten funktioiden derivoointi "siirtää" niitä aika-akselilla neljännesjakson kohti negativista suuntaa. Esim. sinillä on huippu kohdassa $t = \pi/2$ kun taas kosinin huippu on kohdassa $t = 0$. Tämä nähdään myös kuvassa 14.1.

14.10 Tämä on ns. torsioheiluri. Sen pyörimisen likeyhtälö on

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{I_\theta}\tau_\theta = -\frac{\kappa}{I_\theta}\theta, \quad (14.104)$$

joka on samaa muotoa kuin harmoninen likeyhtälö $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$, missä kulmataajuus on $\omega = \sqrt{\kappa/I_\theta}$. (Huom. kulmataajuus ω on eri asia kuin kappaleen kulmanopeus ω_θ . Kulmataajuus on vakio, mutta kulmanopeus muuttuu harmonisesti.) Kappale siis pyörii edestakaisin harmonisesti, ja yhden heilahduksen jaksonaika on

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa}{I_\theta}}. \quad (14.105)$$

14.11 (a) Neljä kertaa. (b) Värähtelijän vaihe on $(\pi/4 + n\pi/2)$ eli vaiheenosoitin osoittaa viistoon 45° asteen kulmassa x - ja y -akseliin nähden. (c) Paikkakoordinaatti on $x = A/\sqrt{2} = 0.707A$ ja kappaleen vauhti on myös $v = 0.707v_{\max}$, jolloin $U = K = E_{\text{kokonais}}/2$.

14.12 Kompleksiluvun itseisarvo $|z| = r$ vastaa vaiheenosottimen pituutta eli värähtelijän amplitudia. Eksponentin imaginääriosa ϕ vastaa vaiheenosottimen x -akselista mitattua kulmaa eli värähtelijän vaihetta. Jos kyseessä on harmoninen värähtelijä, vaihe on muotoa $\phi = \omega t + \phi_{\text{alku}}$, jolloin siis kompleksiluvussa eksponentti muuttuu lineaarisesti ajan kuluessa. Tällöin kompleksiluku $z = re^{i\phi}$ kiertää ympyrää origon ympäri, mikä vastaa sitä, että vaiheenosoitin pyörii ympäri vakiokulmanopeudella ω . Kompleksiluvun reaaliosa ja vaiheenosottimen x -komponentti värähtelevät tällöin harmonisesti, ja juuri tämän tulkitaan kuvaavan varsinaisen värähtelijän liikettä.

14.13 (a) $\text{Re}[a] = 1$, $\text{Re}[b] = -2$, $\text{Im}[a] = 2$, $\text{Im}[b] = 1$, $\phi_a \approx 1.107$, $\phi_b \approx 2.678$, $|a| = |b| = \sqrt{5}$. (b) $a + b = -1 + 3i$, joten $\text{Re}[a + b] = -1$, $\text{Im}[a + b] = 3$, $\phi_{a+b} \approx 1.893$ ja $|a + b| = \sqrt{10}$.

(c) $ab = -4 - 3i$, joten $\text{Re}[ab] = -4$, $\text{Im}[ab] = -3$, $\phi_{ab} = 3.785$ ja $|ab| = 5$.

Huom. $\text{Re}[a + b] = \text{Re}[a] + \text{Re}[b]$ ja $\text{Im}[a + b] = \text{Im}[a] + \text{Im}[b]$ mutta $\phi_{ab} = \phi_a + \phi_b$ ja $|ab| = |a||b|$.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/3)

14.15 Jos kappaleen x -koordinaatti on tasapainopistettä pienempi, kappaleeseen kohdistuu voima negatiiviseen suuntaan eli poispäin tasapainosta. Jos koordinaatti taas on tasapainoa suurempi, voima on positiivinen eli jälleen poispäin tasapainosta. Tämä on siis epästabili tasapainopiste, ja pienikin häiriö saa kappaleen poistumaan tasapainopisteestä. Potentiaalienergian kuvaaja on alas päin aukeava paraabeli.

14.16 Nyt siis $f(x) = \sin x$ joten $f(\pi/2) = 1$, $f'(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$ ja $f''(\pi/2) = -\sin \pi/2 = -1$. Taylorin sarjan alku on siis

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (14.106)$$

Tämä approksimaatio on alas päin aukeava paraabeli, sillä sinillä on maksimi pisteessä $\pi/2$. Itse asiassa tämä on sama kuin kosinin sarjakehitelmä origon ympäristössä, koska $\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$.

14.17 (a) Vakaa tasapainopiste on potentiaalienergian minimi, ja sen täytyy olla derivaatan nollakohdassa, $U'(x_0) = b - a/x_0^2 = 0$ eli $x_0 = \sqrt{a/b} = 1$ m.

(b) Potentiaalienergian toinen derivaatta on $U''(x) = 2b/x^3$ joten $U''(x_0) = 2 \text{ J/m}^2$ ja harmoniseksi approksimaatioksi saadaan

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 = 2 \text{ J} + (1 \text{ J/m}^2)(x - 1 \text{ m})^2. \quad (14.107)$$

(c) Approksimaatio ja tarkka lauseke antavat potentiaalille pisteesä 1.1 m arvot 2.00909 sekä 2.01, eli näiden ero on noin 0.001. Pisteessä 1.5 vastaavat arvot ovat 2.167 ja 2.25, joten ero on 0.083. Approksimaatio toimii sitä paremmin, mitä lähempänä pistettä x_0 ollaan.

14.18 (a) Kulmataajuus on $\omega = \sqrt{mgL/I_\theta} = \sqrt{g/(2L)} = 7 \text{ s}^{-1}$.

(b) Momentti on $\tau_\theta = mgL \sin \theta = 0.03 \text{ Nm}$.

(c) Tämä on helpoin laskea energiaperiaatteella. Jos potentiaalienergia tasapainossa on nolla, potentiaalienergia on aluksi $U_{\text{alku}} = mgL(1 - \cos \theta) = 0.0048 \text{ J}$. Tasapainopisteessä tämä energia on muuttunut liike-energiaksi, $K = \frac{1}{2}I_\theta \omega^2 = U_{\text{alku}}$, josta kulmanopeudeksi saadaan $\omega_\theta = \sqrt{2U_{\text{alku}}/I_\theta} = \sqrt{g(1 - \cos \theta)/L} = 2.2 \text{ s}^{-1}$. Huomaa, että heilurin kulmataajuus (värähtelyn jaksollisuutta kuvava suure) on vakio, mutta sen kulmanopeus (heilurin pyörimislukkettä kuvava suure) ei ole.

14.20 (a) Vaiheenosottimien pituudet ovat 5 mm ja 2 mm. Ensimmäinen on 60° asteen kulmassa x -akseliin nähden ja toinen osoittaa negatiiviseen y -suuntaan.

(b) Poikkeama saadaan laskemalla vaiheenosottimien x -skalaarikomponentit yhteen. Nämä ovat 2.5 mm ja 0 mm, joten kokonaispoikkeama on 2.5 mm.

14.21 (a) Vaiheet ovat $\pi/2$ ja $3\pi/2$. (b) Yhdistetyn värähtelyn vaihe ja amplitudi luetaan vaiheenosottimien summan suunnasta ja pituudesta. Summa on vektori $(-5.0 \text{ mm})\hat{i} + (-2.0 \text{ mm})\hat{j}$. Tämän pituus eli amplitudi on 5.4 mm ja sen kulma x -akselista eli vaihe on $\phi = 3.522$.

14.22 (a) Vaiheenosottimet muodostavat suljetun viisikulmion. Viimeisen osoittimen kärki on ensimmäisen osoittimen kannassa, joten osoittimien vektorisumma on nolla. Yhdistetyn värähtelyn amplitudikin on siis nolla eli mitään värähtelyä ei tapahdu. Värähtelyt siis kumoavat toisensa, mitkä on aivan mahdollista. Sama tulos saadaan myös yhtälöstä (14.72), koska nyt $\sin n\Delta\phi/2 = \sin 2\pi = 0$. (b) Nyt vaiheenosottimet muodostavat suljetun 24-kulmion eli likimain ympyrän. Niiden summa on jälleen nolla eli yhdistetyn värähtelyn amplitudi on nolla.

14.23 Jos taajuudet ovat täsmälleen samat, niiden yhdistelmä on myös harmonista värähtelyä samalla taajuudella. Jos taajuudet ovat hyvin lähellä toisiaan, huojuntataajuus on hyvin pieni eli huojunta tapahtuu hitaasti. Kun taajuudet lähestyvät toisiaan, huojuntataajuus lähestyy nollaa eli huojunnan jaksonaika lähestyy ääretöntä, mikä tarkoittaa värähtelyn lähestyvän täysin harmonista värähtelyä, kuten pitääkin.

14.24 Tummassa alueessa kuviot ovat "vastakkaisissa vaiheissa", joten tumma alue vastaa huojunnan pienien amplitudin aluetta.

14.25 Vaiheenosottimien summan pituus on 5 ja sen kulma x -akselista mitattuna on -0.927 (nuoli osoittaa xy -tasossa oikealle alaviistoon), joten $A = 5$ ja $\phi = -0.927$.

14.26 (a) Kertoimet ovat 1.1 m sekä 0.3 m. Peruskulmataajuus on $\omega_1 = 0.6 \text{ s}^{-1}$, joten perustajajuus on $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 0.095 \text{ Hz}$.

(b) Kysytty arvo on

$$(0.2 \text{ m}) + (2.1 \text{ m}) \cos(2\pi \cdot (2.0 \text{ Hz}) \cdot (0.25 \text{ s})) + (1.3 \text{ m}) \cos(4\pi \cdot (2.0 \text{ Hz}) \cdot (0.25 \text{ s})) = 0.2 \text{ m} - 2.1 \text{ m} + 1.3 \text{ m} = -0.6 \text{ m}. \quad (14.108)$$

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/3)

14.28 Derivaatat ovat

$$v_x(t) = x'(t) = -Ae^{-t/(2\tau)} \left(\frac{1}{2\tau} \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi) \right). \quad (14.109)$$

$$a_x(t) = x''(t) = Ae^{-t/(2\tau)} \left[\left(\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \phi) + \frac{\omega}{\tau} \sin(\omega t + \phi) \right]. \quad (14.110)$$

Lükeyhtälön oikea puoli sievenee muotoon

$$-\frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{k}{m} x = Ae^{-t/(2\tau)} \left[\left(\frac{b}{2m\tau} - \frac{k}{m} \right) \cos(\omega t + \phi) + \frac{b\omega}{m} \sin(\omega t + \phi) \right] \quad (14.111)$$

Jotta tämä olisi sama kuin yllä laskettu a_x , kuten differentiaaliyhtälön mukaan pitää olla, täytyy lausekkeiden kosini- ja sinitermiin kertoimien olla samat eli $\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 = \frac{b}{2m\tau} - \frac{k}{m}$ ja $\frac{\omega}{\tau} = \frac{b\omega}{m}$. Jälkimmäinen yhtälö toteutuu, kun $\tau = m/b$, ja tämän sijoitus ensimmäiseen yhtälöön antaa $\frac{b^2}{4m^2} - \omega^2 = \frac{b^2}{2m^2} - \frac{k}{m}$, josta ratkeaa $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$. Kulmataajuudeksi on tapana valita positiivinen juuri.

14.29 (a) Amplitudia kuvaa lauseke $A(t) = A_{\text{alku}} e^{-t/(2\tau)}$, ja nyt $A(5 \text{ s}) = A_{\text{alku}}/3$ eli $e^{-(5 \text{ s})/(2\tau)} = 1/3$, josta $-(5 \text{ s})/(2\tau) = -\ln 3$ ja edelleen $\tau = (5 \text{ s})/(2 \ln 3) = 2.276 \text{ s}$.

(b) Energiaa kuvaa lauseke $E(t) = E_{\text{alku}} e^{-t/\tau}$ ja nyt tarvitaan aika t , jolloin $E(t) = 0.05E_{\text{alku}}$. Siispä $e^{-t/\tau} = 0.05$ eli $t = -\tau \ln 0.05 = 6.817 \text{ s}$. Tässä ajassa väärätelijä ehtii tehdä $ft = 262 \text{ Hz} \cdot 6.817 \text{ s} = 1786$ väähdystä.

14.30 Tässä voi käyttää kuvaan 14.22 apuna. Kun taajuus on pieni, jousi on puristunut kappaleen ja vaunun ollessa kuvan vasemmassa laidassa. Jousi on venyntä kappaleen ja vaunun ollessa kuvan oikeassa laidassa. Tilanne on siis päinvastainen verrattuna tilanteeseen, jossa taajuus on suuri. Nyt voiman vaikutuspisteen vaiheenosoitin (sininen nuoli) ja voiman vaiheenosoitin (vihreä nuoli) osoittavat koko ajan likimain vastakkaisiin suuntiin. Lopputulos on sama kuin suurella taajuudella: voima tekee puolet ajasta positiivista ja toisen puolen negatiivista työtä, jolloin väärätelijän energia ei juuri muutu.

14.32 (a) Kun massa kasvaa, ominaistaajuus pienenee, sillä raskas kappale väärähelee hitaanmin, $\omega \sim 1/\sqrt{m}$. Niinpä resonanssipiikki siirtyy kuvassa vasemmalle. Tulo $m\omega$ kuitenkin kasvaa, joten suhde $b/(m\omega)$ pienenee eli resonanssipiikistä tulee kapeampi ja korkeampi.

(b) Jos jousivakio kasvaa, ominaistaajuus kasvaa, sillä jäykä jousi saa kappaleen väärätelemään nopeammin, $\omega \sim \sqrt{k}$. Niinpä resonanssipiikki siirtyy kuvassa oikealle. Nytkin tulo $m\omega$ kasvaa, joten resonanssipiikistä tulee kapeampi suhteessa ominaistaajuuteen. (Jäykää jouta on kuitenkin vaikeampi venyttää ja puristaa, joten amplitudi itse asiassa pienenee kaikilla ulkoisilla taajuuksilla.)

(c) Nyt ominaistaajuus $\sqrt{k/m}$ ei muutu, joten resonanssipiikki pysyy samassa paikassa. Tulo $m\omega$ kasvaa, joten piikistä tulee nytkin kapeampi.

15 Aaltoliike

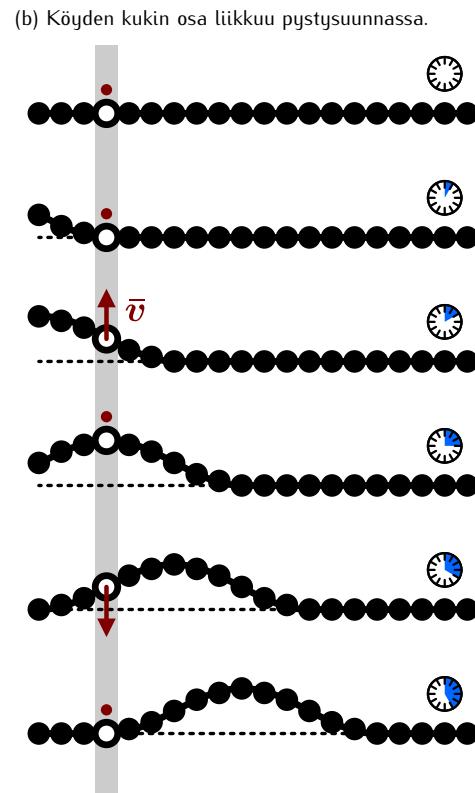
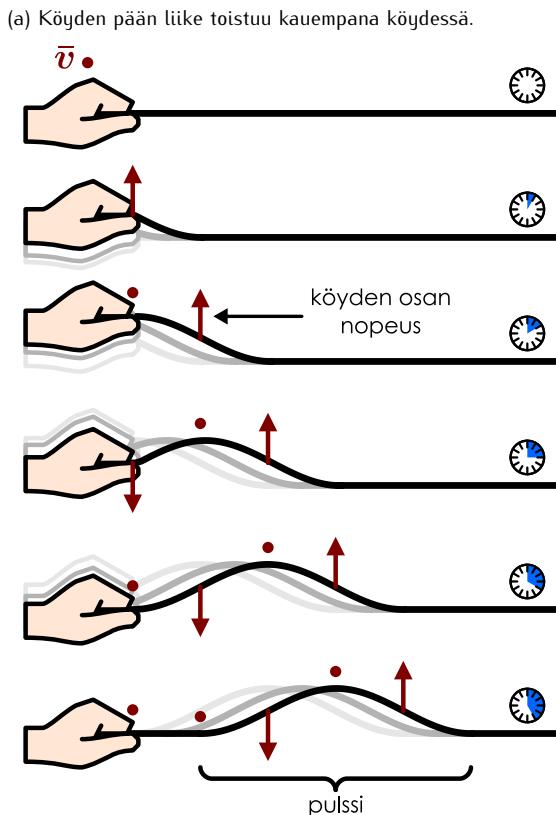
Aallot ovat tuttu ilmiö. Esimerkiksi veteen heitetty kivi synnyttää veden pintaan aaltoja, jotka levivät osumakohdasta katsoen joka suuntaan. Meille ihmisiille aallot ovat erityisen tärkeitä siksi, että tärkeimmät aistimme näkö ja kuulo perustuvat valon ja äänien havaitsemiseen, ja nämä ovat kummakin aaltoja. Aaltojen liike muistuttaa joiltakin ominaisuuksiltaan kappaleiden tai hiukkasten liikkettä, mutta joissakin suhteissa aallot käyttäytyvät aivan eri tavoin kuin kappaleet. Aallot esimerkiksi näyttävät liikkuvan jollakin täsmällisellä nopeudella kuten kappaleet, mutta kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkeva aaltoa voi kulkea toistensa läpi, mitä jälkät kappaleet eivät voi tehdä.

Vaikka esimerkiksi valo, ääni ja veden pinnalla kulkevat aallot ilmenevät aisteillemme eri tavoin, kaikkien näiden aaltojen käytöstä ohjaavat pohjimmiltaan samanlaiset lait. Tässä luvussa tutkimmekin aaltojen yleisiä ominaisuuksia. Aloitamme aaltoihin tutustumisen tarkastelemalla yhdessä ulottuvuudessa liikkuvia aaltoja, sillä monia aalloille tyypillisiä ilmiöitä voidaan havaita jo tässä yksinkertaisessa tapauksessa.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- kuvata aallon muoto ja väliaineen yksittäisen pisteen liike ajan funktiona, kun aallon aaltofunktio tunnetaan
- määritellä yksiulotteisen sinimuotoisen aallon taajuus, kulmataajuus, aallonpiisuus, aaltoluku ja vaihe sekä muodostaa aallon aaltofunktio
- määrittää päälekäisten aaltojen muoto superpositioperiaatteella
- määrittää rajapinnalta heijastuvan ja sen läpäisevän aallon aaltofunktiot
- määrittää seisovien aaltojen muoto ja sallitut taajuudet
- kuvilla seisovat aallot ja aaltopulssit sinimuotoisten aaltojen superpositiona
- määrittää sinimuotoisen aallon teho
- kuvilla Doppler- ja dispersioilmiöt
- tunnistaa aaltoyhtälö ja perustella, mitkä aaltoliikkeen ominaisuudet se määritää

Kuva 15.1: Köyden nopea heilautus tuottaa aaltopulssin.



15.1 Aaltoliike

Liikkuvat häiriöt

Urheilutapahtuman katsomossa kulkeva aalto on hauska esimerkki aaltoliikkeestä. Katsomossa ihmiset tavallisesti istuvat paikoillaan, mutta "yleisöaallossa" katsojat nousevat seisomaan hetkeksi heti, kun heidän vieressään istuva nousee, ja istuuutuvat, kun vierustoveri istuu. Koska reagointi toisten liikkeeseen tapahtuu hitaasti, syntyy katsomoon liikkuva seisovien ihmisten alue. Toinen, mekaaninen esimerkki allostaa on köysi, jonka pään nopea heilautus synnyttää köydessä etenevän "mutkan" kuten kuvassa 15.1.

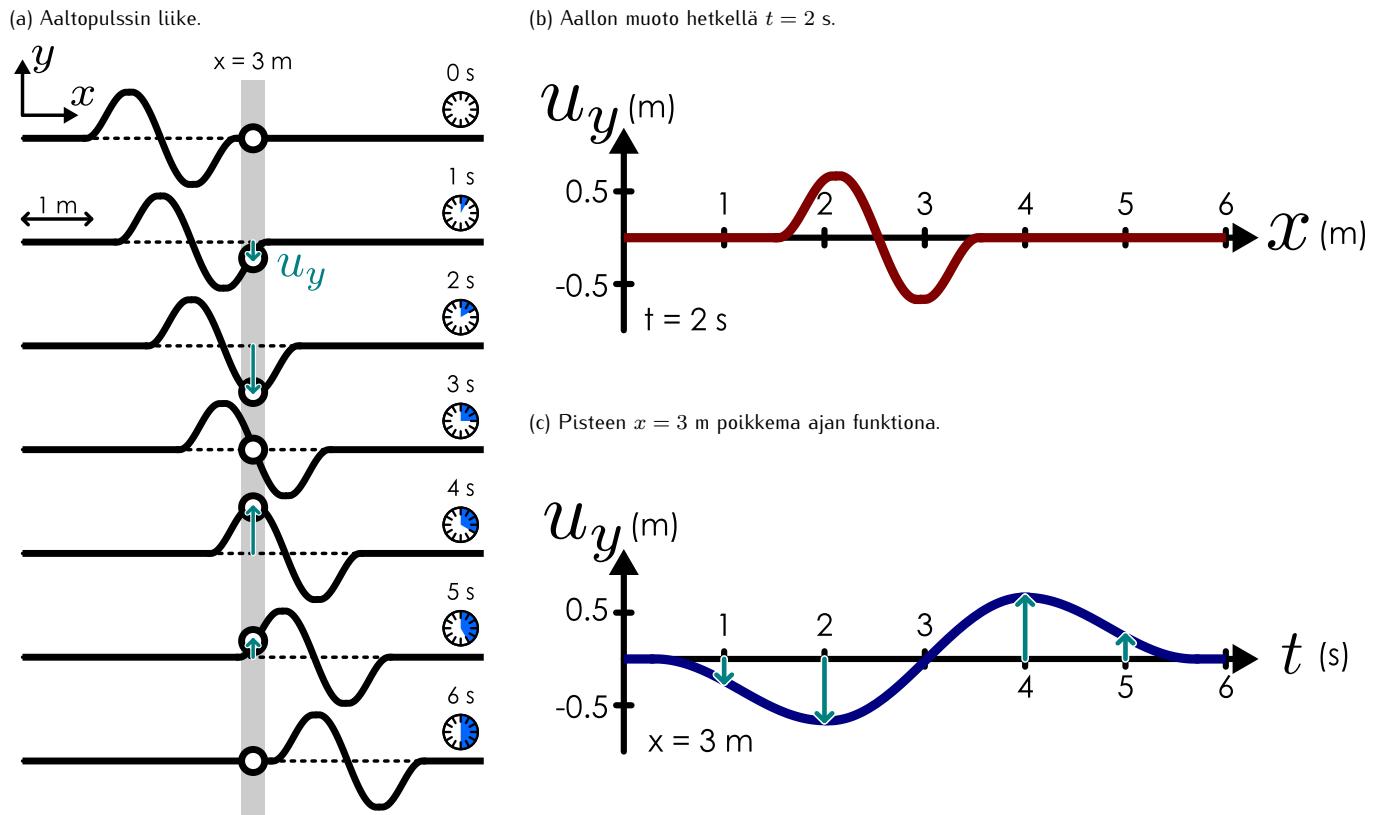
Katsomon normaali tila on se, että kaikki istuvat. Samoin esimerkiksi kireäksi vedetty köysi on suora. Kuitenkin aallon kulkiessa katsomossa tai köydessä systeemi on paikallisesti pois tasapainosta: katsojat seisovat istumisen sijaan ja köysi on mutkalla. Aalto on siis paikallinen *poikkeama tasapainosta* eli *liikkuva häiriö*. Aaltoa voikin syntyä nimenomaan sellaisiin materiaaleihin ja systeemeihin, joissa tällaiset poikkeamat tasapainosta kerran synnytyyään pyrkivät itsestään liikkumaan. Aaltoa kuljettavaa ainetta kuten katsomon ihmisiä tai köytää kutsutaan tällöin aallon *välialineeksi*.

Aallot voivat kuljettaa energiaa ja liikemäärää, mutta ne eivät *kuljeta ainetta* ainakaan pitkiä matkoja. Esimerkiksi aallon liikkuessa katsomon ympäri liikkeessä on seisovien ihmisten alue, mutta yksikään ihminen ei liiku aallon mukana. Kunkin katsojan on aallon kuljettua hänen ohitseen edelleen samalla paikalla kuin missä hän oli aluksinkin. Aalto ei siis synny siksi, että joukko ihmisiä kiertäisi katsomoa, vaan siksi että *eri ihmiset* nousevat vuorollaan seisomaan. Samaan tapaan aallon kulkiessa köydessä köyden osat siirtyvät köyden pituussuuntaan nähdyn kohtisuoraan, mutta aallon kuljettua köysi palautuu suoraksi ja köyden osat palavat tasapainoasemaan.

Aallot ovat tämän vuoksi aina kollektiivisia ilmiöitä. Yksi ihminen voi nousta seisomaan ja istuutua, mutta hän ei voi tehdä aaltoa, sillä aalto vaatii joukon ihmisiä, jotka reagoivat toistensa liikkeeseen. Samoin köydessä liikkuva aalto syntyy, kun köyden eri osat poikkeavat vuorollaan tasapainosta.

Tutkitaan tarkemmin kuvan 15.1 köydessä kulkevaa aaltoa. Köysi on aluksi suora, mutta sitten sen toista päätä heilautetaan nopeasti ylös ja alas. Köysi ei ole jäykkiä kappale, joten heilautuksen ollessa nopea köysi ei pysy suorana vaan ainoastaan köyden pää ehtii seurata heilautusta muun köyden pysyessä suunnilleen suorana. Köyden voi ajatella koostuvan useista lyhyistä, elastisista osista. Köyden pään nopea siirtäminen saa köyden *venymään*, jolloin köyden pää vetää vieressään olevaa köyden osaa puoleensa venytetyn jousen tapaan. Tämä elastinen voima vetää köyden seuraavan osan liukkeelle, jolloin tämä alkaa vetää perässään

Kuva 15.2: Aallon graafinen esitys aaltofunktion avulla.



seuraavaa osaa jne. Näin köyteen syntynyt häiriö — siis aalto — alkaa liikkua köyden pituussuunnassa, ja liikettä ylläpitävät köyden osien väliset vuorovaikutukset. Jos köysi on kauttaaltaan samanlainen, nämä vuorovaikutukset ovat kaikkien köyden osien välillä samanlaiset. Näin kuitenkin köyden osa itse lükkeeseen päästää vetää seuraavan osan liukkeelle aina yhtä nopeasti, ja niinpä *aalto etenee köydessä vakionopeudella*, joka riippuu köyden ominaisuuksista. Köysi itsessään ei kuitenkaan kulje pituussuunnassaan minnekään vaan kuitenkin köyden osa liikkuu ainoastaan kohtisuoraan köyden pituuteen nähden.

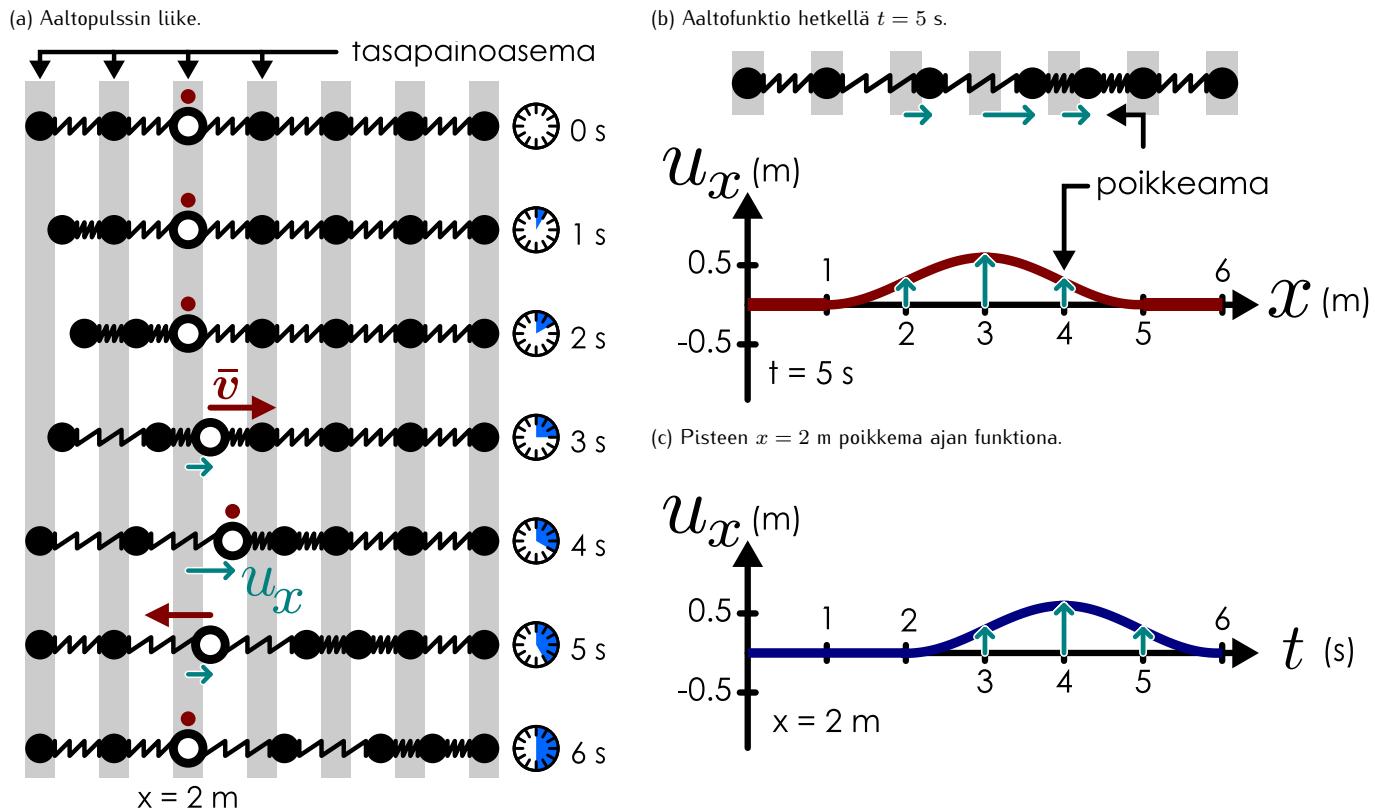
Kun köyttä heilauttanut käsi palaa heilahduksen jälkeen takaisin lähtöpisteesseen, se vetää myös köyden pään takaisin lähtöpaikkaansa. Nyt köyden pää vetää vieressään olevaa köyden osaa alaspin, tämä vetää edelleen seuraavaa osaa jne., ja näin köysi palautuu suoraksi. Tässä vaiheessa heilautuksen synnyttämä häiriö on kuitenkin ehtinyt jo siirtymä kauas lähtöpisteestään, ja se etenee itsestään vaikkei köyttä enää liikuteta lainkaan. Koska heilautus tehtiin vain kerran ja tämän jälkeen köyden pää pysäytettiin, myös syntyneessä aallossa on vain yksi kumpu eli *aallonharja*. Tällaista pieneen alueeseen rajattua aaltoa kutsutaan **aaltopulssiksi**.

Aallon graafinen esitys

Kuvassa 15.2 on tutkittu tarkemmin köyden yksittäisen osan liikettä aaltopulssin kulkiessa köydessä. Kun aallon eturintama saavuttaa tarkasteltavan pisteen $x = 3$ m, piste alkaa liikkua alaspin eikä se enää ole köyden tasapainoasemaa vastaavassa paikassa. Tämän jälkeen tarkastelupiste siirtyy tasapainoaseman yläpuolelle, ja lopuksi piste palaa tasapainoon. Kuvassa symbolilla u_y merkitty siirtymä on pisteen y -suuntainen **poikkeama tasapainosta**. Poikkeama on positiivinen, kun köysi on siirtynyt positiviseen y -suuntaan ja negatiivinen siirtymän ollessa negatiiviseen y -suuntaan. Mitä enemmän köysi on siirtynyt pois tasapainosta, sitä suurempi poikkeama on itseisarvoltaan.

Köyden muotoa esittävää funktiota kutsutaan **aaltofunktioksi**, ja se kertoo köyden kunkin osan poikkeaman tasapainoasemasta jokaisella ajan hetkellä. Koska poikkeama riippuu sekä ajasta t että paikasta x (kun valitaan x -akseli köyden suuntaiseksi), kyseessä on yksiuotiseen aallon tapauksessa matemaattisesti kahden muuttujan funktio $u_y(x, t)$. Kuvaan 15.2 on piirretty tämän funktion kuvaaja sekä paikan funktiona ajan hetkenä $t = 2$ s (b) että ajan funktiona tarkastelupisteessä $x = 3$ m (c). Kun aaltofunktio piirretään **paikan funktiona** pitäen aika vakiona, saadaan näkyville **köyden muoto** yhtenä ajan hetkenä. Sen sijaan piirrettäessä **aaltofunktio ajan funktiona** yhdessä pisteessä tuloksena on **köyden yksittäisen pisteen poikkeaman kuvaaja**.

Kuva 15.3: Pitkittäinen aaltoliike.



Ajan ja paikan suhteeseen piirrettyt aaltofunktiot ovat selvästikin toistensa peilikuvat, minkä voi niinikään päätellä kuvan 15.2 perusteella. Aaltopulssin oikeassa reunassa on *aallonpohja* eli siellä köysi on siirtynyt negativiseen y -suuntaan. Aallon vasemmassa reunassa on puolestaan *aallonharja*. Aallon muotoa esittävässä kuvajassa 15.2 (b) on siis aallonharja vasemmalla ja -pohja oikealla. Koska aalto kulkee oikealle, aallonpohja saapuu tarkastelupisteeseen ensin, ja niinpä tarkastelupisteen liikettä esittävässä kuvan 15.2 (c) funkossa piirtyy ensin (vasemmalle) aallonpohja ja vasta sitten (oikealle) aallonharja. Kuvassa 15.2 (c) kuvajan muoto on siis käännytynyt ympäri kuvajaan (b) verrattuna.

! 15.1 Jos kuvan 15.2 (b) ja (c) kaltaiset kuvajat piirretäisiin negativiseen x -suuntaan kulkevalle aalloille, olisivatko paikan ja ajan suhteeseen piirrettyt kuvajat keskenään samanlaiset vai peilikuvat?

Köydessä etenevä aalto on **mekaaninen aalto**, koska se syntyy köyden atomien mekaanisen liikkeen kautta. Se on myös **poikittainen aalto**, koska siinä poikkeamat tasapainosta tapahtuvat aallon liikkeen suuntaan nähdyn poikittaiseen suuntaan. Aallot voivat olla myös **pitkittäisiä**, jos poikkeamat tapahtuvat niissä aallon liikkeen suuntaisesti. Esimerkiksi ääni on pitkittäinen aalto, sillä ilmassa kulkevissa ääniaalloissa ilman molekyylejä aallon kulkusuunnassa vuoroin eteenpäin ja vuoroin taaksepäin muodostetaan korkean ja matalan paineen alueita. Pitkittäisiä aaltoja syntyy myös kiinteissä aineissa, ja kuvassa 15.3 pitkittäistä aaltoliikettä onkin kuvattu yksinkertaisella mallilla, jossa kiinteän aineen atomeja kuvataan toisiinsa jousin yhdistettyinä palloina. Kun systeemini ensimmäistä hiukkasta työnnetään eteenpäin, sen edessä oleva jousi puristuu kohdistuen seuraavaan hiukkaseen työntävän voiman. Tämä saa toisen hiukkisen lükkeelle, mikä johtaa seuraavan jousen puristumiseen jne.

! 15.2 Mikä on kuvan 15.2 aallon etenemisnopeus? Entä kuvan 15.3?

Voimme määritellä myös pitkittäiselle aalloille poikkeamia kuvaavan aaltofunktion $u_x(x, t)$. Kyseessä on jälleen funktio, joka kertoo paljonko tasapainollassa pisteessä x olevat hiukkaset ovat siirtyneet x -suunnassa hetkellä t . Myös tämän aaltofunktion voi piirtää kuvajana kuten kuvassa 15.3 on esitetty, mutta tässä tapauksessa kuvajan muoto ei tietenkään vastaa aallon muotoa yhtä kirjaimellisesti kuin poikittaisen aaltoliikkeen tapauksessa. Nyt kuvaja piirtyy ylöspäin "y-suuntaan" vaikka hiukkaset ovat siirtyneet todellisuudessa x -suunnassa.

Ilmassa kulkevien ääniaaltojen tapauksessa aaltofunktioilla voi kuvata molekyylien siirtymää, mutta yhtä hyvin ääniaaltoja kuvaavana aaltofunktiona voi käyttää ilmanpaineita $p(x, t)$, koska hiukkasten liikkuessa myös ilmanpaine muuttuu. Lisäksi on olemassa myös muita kuin mekaanisia aaltoja. Valo nimittäin on *sähkömagneettisen kentän aalto*, jossa aaltoja muodostavat suureet ovat sähkö- ja magneettikenttä. Sähkömagneettista aaltoa kuvaavana aaltofunktiona käytetäänkin yleensä sähkökenttää $\vec{E}(x, t)$. Aaltofunktion kuvaajan voi toki laattia myös paineelle ja sähkökentälle, mutta tällöin pitää olla erityisen tarkkana kuvaajaa tulkittaessa.

15.3 (a) Kuvassa 15.3 pitkittäisen aallon aaltofunktio on piirretty symmetrisenä pulssina, vaikka systeemiä esittävässä kuvissa aalto ei näytä symmetriseltä. Selitä miksi näin on. (b) Millainen aaltofunktion kuvaaja olisi, jos aalto synnytettiisiin vetämällä ensimmäistä hiukkasta vasemmalle?

15.2 Aallon eteneminen

Aallon nopeus

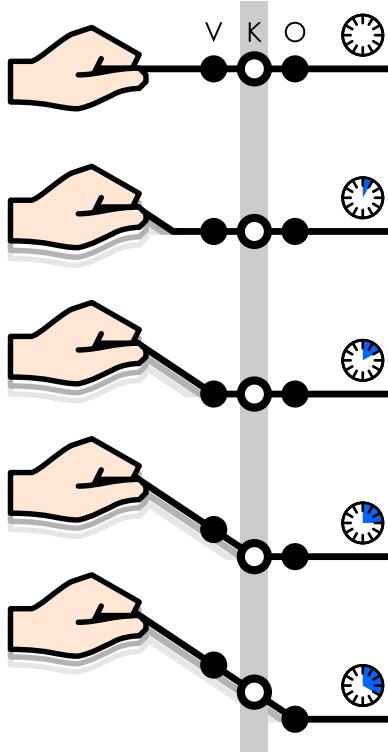
Edellä tarkastelimme köydessä kulkevien aaltopulssien kuvaamista ja käytöstä, mutta emme vielä selittäneet *miksi* aalto etenee kuten etenee. Vaikka köyden osat liikkuvat pystysuunnassa, aaltopulssi itsessään liikkuu köyttä pitkin, ja yleensä aaltoliikettä tarkasteltaessa halutaan ymmärtää nimenomaan aallon liikettä väliaineen osien sijaan. Tutkimmekin seuraavaksi aallon nopeuden, muodon ja köyden ominaisuuksien riippuvuutta toisistaan.

Kuvassa 15.4 tarkastellaan köytä, jonka päästä vedetään ylöspäin vakionopeudella $v_{y,pää}$. Nämä tehtäessä köyden pää vetää köyden seuraavaa osaa ylöspäin, tämä vetää edelleen seuraavaa osaa ja niin poispäin. Nämä syntyy köydessä etenevä poikkeama tasapainosta eli aalto, ja koska köyden kunkin osa saa saman nopeuden $v_{y,pää}$, köysi on muodoltaan nouseva suora. Aaltopulssilla ei ole kuvassa loppua, koska köyden päästä ei kuvasarjassa vielä tuoda takaisin tasapainoasemaan, mutta aallolla on selkeä "alkupiste", jossa köyden kulma muuttuu. Tämä piste siirtyy köydessä eteenpäin ajan kuluessa, joten *aallon nopeus* voidaan mitata tämän pisteen siirtymän ja kuluneen ajan suhteena

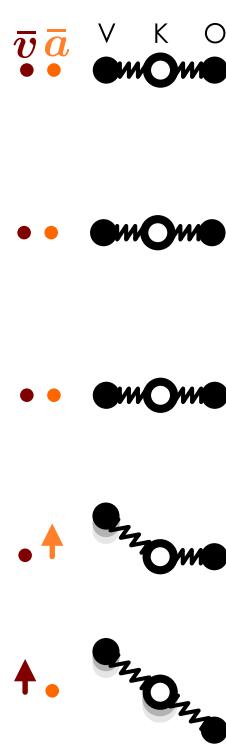
$$v_{x,\text{alto}} = \frac{\Delta x_{\text{alto}}}{\Delta t}. \quad (15.1)$$

Kuva 15.4: Käyden päätä vedetään ylöspäin vakionopeudella. Tarkastellaan köyteen merkityä pistettä "K" (keskellä) ja sen viereisiä osia "V" (vasen) ja "O" (oikea).

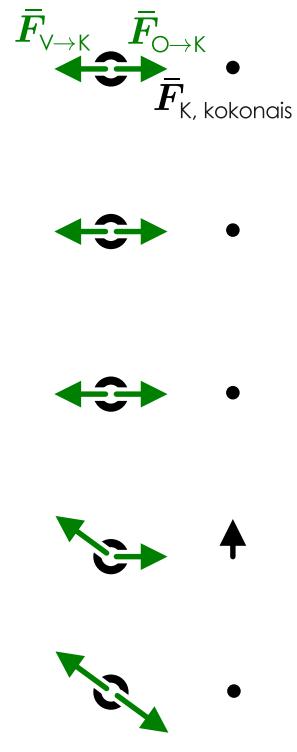
(a) Aalto liikkuu köydessä.



(b) Pisteen K nopeus ja kiihtyvyys.



(c) Pisteen K vapaakappalekuva.



Köysi on makroskooppisessa mittakaavassa jatkuva, mutta se ei ole täysin venymätön. Itse asiassa jotta köydessä voisi kulkea aalto, köyden täytyy olla jännitetty eli suoraksi vedetty. Tällöin köysi myös välttämättä hieman venyy. Kuvassa 15.4 (b) köyttä kuvataan yksinkertaistetulla mallilla, jossa köysi ajatellaan jaetuksi pieniin jousin yhdistetyihin kappaleisiin. Kukin kappale kuvailee köyden lyhyen osan massaa ja jouset köyden elastisuutta. Erityisesti kuvassa tarkastellaan kolmea pistettä V (vasen), K (keski) ja O (oikea), joiden välinen etäisyys on Δx . Koska köysi on jännitetty, kappaleiden väliset jouset ovat aina hieman venyneet ja pisteet V ja O vetävät keskipistettä K aina puoleensa. Tällöin jousien pisteeseen K kohdistamien voimien suuruus on sama kuin köyden jännitysvoiman \bar{T} suuruus

$$F_{V \rightarrow K} = F_{O \rightarrow K} = T. \quad (15.2)$$

Köyden ollessa suora nämä voimat kumoavat toisensa ja pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima $\bar{F}_{\text{kokonais},K}$ on nolla. Pisteen K kiilthyvyys on tällöin nolla ja se pysyy levossa.

Kuvasarjassa on esitetty köyden muoto ajan Δt välein. Ensinnäkin köysi on suora, mutta kun sen pää siirtyy ylöspäin, köydessä etenee kolmion muotoinen aalto. Kolmannessa kuvassa — olkoon tämä ajan hetki t — köyden taitoskohta eli aalton alku piste on piste V kohdalla ja köysi on pisteen K kohdalla vielä suora. Neljännessä kuvassa hetkellä $t + \Delta t$ taitoskohta on siirtynyt pisteeksi K kohdalle. Tässä tapauksessa aalto on siis edennyt matkan Δx ajassa Δt , joten aallon nopeus on $v_{x,\text{aalto}} = \Delta x / \Delta t$. Köyden päättä on samassa ajassa vedetty ylöspäin siirtymä $\Delta u_{y,pää} = v_{y,pää} \Delta t$. Viidennessä kuvassa hetkenä $t + 2\Delta t$ köyden taitoskohta on siirtynyt pisteeksi O kohdalle, jolloin köysi on keskimmäisen pisteeksi K kohdalla jälleen suora — ei kuitenkaan enää vaakasuora.

Kuvaan 15.4 (c) on piirretty pisteeksi K vapaakkappalekuva eri ajan hetkinä. Aallon lähestyessä pistettä K tämän viereinen piste V alkaa ensin siirtymään ylöspäin. Koska piste K on vielä tällöin tasapainoasemassa, täytyy pisteen V ja K välisen jousen käantyä ja venyä. Tällöin siis pisteen V ja K välisen jousen tarkastelupisteeseen K kohdistama jännitysvoima myös käantyy yläviistoon ja voimistuu. Koska pisteen K ja O ovat vielä tasapainoasemassa, näiden pisteen välisen jousen pisteeeseen K kohdistama jännitysvoima osoittaa vaakasuoran. Voimien $\bar{F}_{V \rightarrow K}$ ja $\bar{F}_{O \rightarrow K}$ x-suuntaisten komponenttien täytyy kumota toisensa, koska piste K liikkuu vain y-suunnassa. Nämä näiden komponenttien täytyy olla yhtä suuret mutta vastakkaisuuntainen, $\bar{F}_{x,V \rightarrow K} = -\bar{F}_{x,O \rightarrow K}$. Kuitenkin ainoastaan voimalla $\bar{F}_{V \rightarrow K}$ on nollasta poikkeava komponentti y-suunnassa eli pystysuunnassa, joten pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima on pisteen V ja K välisen jousen tuottaman voiman y-komponentti,

$$\bar{F}_{\text{kokonais},K} = \bar{F}_{y,V \rightarrow K}. \quad (15.3)$$

Pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa siis ylöspäin. Nämä pisteen K saa pystysuoran kiilthyvyyden ja alkaa seuraavaksi itse lükkiä ylöspäin, koska piste V vetää sitä mukanaan. Näin aalto etenee.

Seuraavaksi piste K vetää piste O mukanaan ylös ja pulssi lükkiä jälleen eteenpäin. Toisaalta K:n vetäessä pistettä O ylöspäin piste O vetää K:tä alaspaan, ja tämä kohdistaa pisteeeseen K voiman komponentin alaspaan. Pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa kuitenkin ylöspäin niin kauan kuin pystysuora etäisyys pisteen V ja K välillä on suurempi kuin pisteen K ja O välillä, koska tällöin piste V vetää K:tä ylöspäin voimakkaammin kuin O vetää sitä alaspaan. Hetkellä $t + 2\Delta t$ ja siitä eteenpäin nämä etäisyys ovat kuitenkin yhtä suuret, koska köysi on suora, joten pisteeeseen K kohdistuva kokonaisvoima on tällöin nolla ja pisteen kiilthyvyys on siten myös nolla. Pisteen K nopeus on edelleen ylöspäin, joten piste jatkaa liikkettään tähän suuntaan vakionopeudella.

Piste K oli aluksi levossa ja aallon saavutettua pisteen sen nopeus on $v_{y,pää}$ eli sama nopeus, jolla köyden päättä vedetään ylöspäin. Nämä pisteen liikemääärän muutos prosessin aikana on

$$\Delta p_{y,K} = m_K \Delta v_{y,K} = m_K v_{y,pää}. \quad (15.4)$$

Tämän liikemääärän muutoksen aiheuttaa pisteeeseen kohdistuvan kokonaisvoiman impulssi, $I_{y,K} = \Delta p_{y,K}$. Toisaalta impulssi on pisteeeseen kohdistuvan kokonaisvoiman integraali ajan suhteena. Pisteeeseen K kohdistuvan voiman ei ole vakio sen lähiessä liikkeelle, mutta impulssi on likimain pisteeeseen kohdistuvan voiman ja tarkasteluhetken välisen aikajakson pituuden tulo eli

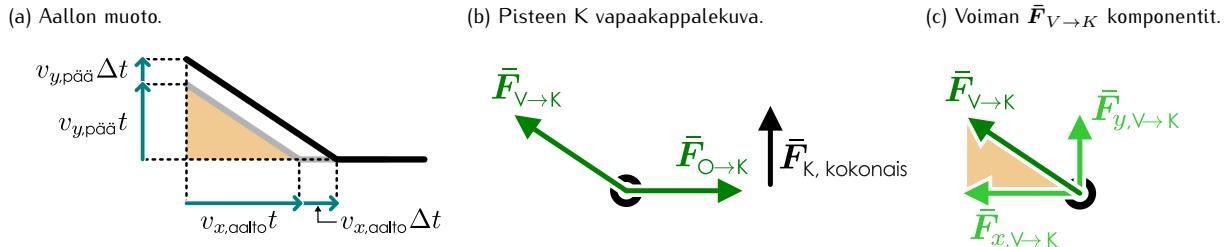
$$I_{y,K} = F_{y,\text{kokonais},K} \Delta t = F_{y,V \rightarrow K} \Delta t. \quad (15.5)$$

Hetkellä $t + \Delta t$ eli köyden taitoskohdan ollessa pisteen K kohdalla piste V siis vetää pistettä K voimalla

$$F_{y,V \rightarrow K} = \frac{I_{y,K}}{\Delta t} = \frac{p_{y,K}}{\Delta t} = m_K \frac{v_{y,pää}}{\Delta t} = \frac{m_K}{\Delta x} v_{y,pää} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu v_{y,pää} v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.6)$$

Tässä on otettu käyttöön uusi vakio $\mu = m_K / \Delta x$. Pituus Δx on mallissa käytetty köyden lyhyen osan pituus ja m_K on tällaisen osan massa, joten tämä vakio kertoo, paljonko massaa köydessä on pituusyksikköä kohti. Toisin sanoen μ on köyden pituustiheys.

Kuva 15.5: Aallon muodon ja pisteeseen K kohdistuvien voimien yhteys.



Koska köyden jännitysvoima osoittaa aina köyden suuntaiseksi, hetkellä $t + \Delta t$ voimavektorin $\bar{F}_{V \rightarrow K}$ täytyy osoittaa yläviistoon samassa kulmassa kuin minkä köysi aaltopulssissa muodostaa. Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.5: voimavektorien rajaama oranssi kolmio on yhdenmuotoinen aaltopulssin muotoa kuvaavan oranssin kolmion kanssa. Edelleen koska yhdenmuotoisten kolmioiden sivujen pituukset ovat samat, voimme kirjoittaa kolmioiden kateettien avulla

$$\frac{F_{y,V \rightarrow K}}{F_{x,V \rightarrow K}} = \frac{v_{y,pää} \Delta t}{v_{x,aalto} \Delta t} = \frac{v_{y,pää}}{v_{x,aalto}}. \quad (15.7)$$

Tähän voidaan sijoittaa edellä johdettu lauseke (15.6). Lisäksi köyden jännitys sen ollessa tasapainossa on sama kuin köyteen kohdistuva vaakasuuntainen voima, $|F_{x,V \rightarrow K}| = |F_{x,O \rightarrow K}| = T$. Näillä merkinnöillä yhtälö saa muodon

$$\frac{\mu}{T} v_{y,pää} v_{x,aalto} = \frac{v_{y,pää}}{v_{x,aalto}}. \quad (15.8)$$

Tästä voidaan edelleen supistaa pois köyden pään nopeus $v_{y,pää}$ sekä ratkaista aallon nopeus $v_{x,aalto}^2 = \frac{T}{\mu}$. Tässä tapauksessa aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan, joten nopeus on positiivinen. Aalto voisi kuitenkin kulkea myös negatiiviseen suuntaan, jolloin nopeus olisi negatiivinen mutta itseisarvoltaan yhtä suuri. Yleisesti *aallon vauhti* jännitettyssä köydessä on

$$v_{aalto} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (15.9)$$

Usein puhuttaessa aallon nopeudesta tarkoitetaankin täsmällisemmin aallon vauhtia.



15.4 Köyden toinen pää on kiinnitetty seinään ja toinen pää on sinulla kädessä. Haluat synnyttää köyteen aallon heiluttamalla köyden päätä. Miten voit vaikuttaa syntyvän aallon etenemisnopeuteen?

Edellä johdetun tuloksen mukaan aalto kulkee sitä nopeammin mitä suurempi jännitys köydessä on ja mitä kevyempi köysi on pituusyksikköö kohti. Tämä on järkevä, sillä köyden jännitys synnyttää köytä takaisin tasapainoasemaan vetävän voiman, jolloin suurempi jännitys saa köyden osat reagoimaan nopeammin niiden viereisten osien liikkeeseen. Tällöin aalto myös liikkuu nopeasti. Köyden pituustiheydellä on puolestaan päinvastainen vaikutus: mitä suurempi massa köyden osilla on, sitä kauemmin niiden nopeuden muuttaminen kestää ja sitä hitaammin köyden osat reagoivat häiriöihin niiden lähistöllä. Tällöin aalto etenee hitaasti.

Köydessä liikuvat aallot ovat vain eräs mekaanisten aaltojen erikoistapaus, mutta samantapaisella analyysillä voidaan päättää muissakin väliaineissa kulkevien aaltojen vauhti. Tulos on yleensä aina samanlainen: *aallon vauhdin neliö on suoraan verrannollinen väliainetta takaisin tasapainoon palauttavan vuorovaikutksen voimakkuuteen* (köydessä jännitysvoima) ja *kääntäen verrannollinen väliaineen inertian* (köydessä pituustiheys).

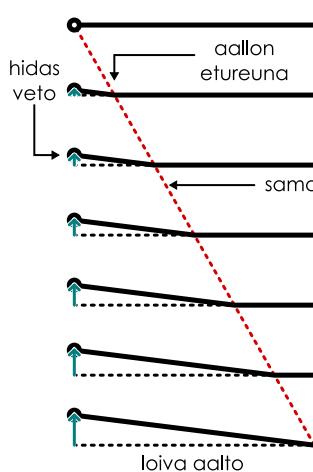


15.5 (a) Mikä on äänen nopeus (i) ilmassa ja (ii) vedessä? (b) Selitä ero yhtälöön (15.9) verraten.

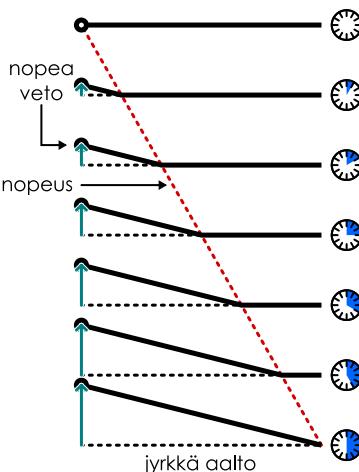
Erityisen tärkeää tässä tuloksessa on se, että *aallon vauhti riippuu vain väliaineen ominaisuuksista*. Erityisesti aalto etenee yhtä nopeasti riippumatta siitä, millainen häiriö väliaineessa liikkuu. Köyden tapauksessa aallon nopeus ei riipu siitä, kuinka nopeasti köyden päättä nostettiin (eli nopeudesta $v_{y,pää}$), kuten kuvassa 15.6 (a) on esitetty. Tämä tarkoittaa sitä, että nostettaessa köyden päättä nopeasti köyteen syntyy jyrkästi nouseva aalto kun taas nostossa syntynyt aalto on loiva. Kumpikin aalto kuitenkin liikkuu *yhtä nopeasti* köytä pitkin. Edelleen aaltopulssin voi ajatella koostuvan useasta osasta, jotka kaikki etenevät yhtä

Kuva 15.6: Erilaiset aallot kulkevat samassa välinneessä yhtä nopeasti.

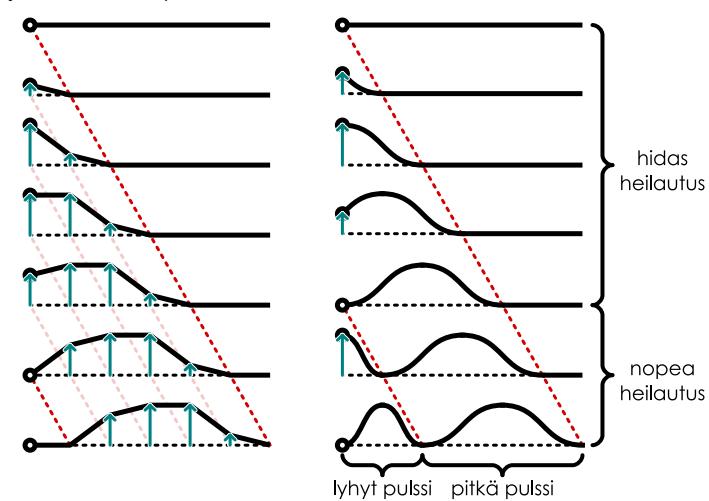
(a) Köyden pään hidas ja nopea vето.



(b) Aaltopulssi koostuu osista, joilla on sama nopeus.



(c) Nopea häiriö tuottaa kapean pulssin.



nopeasti vaikka köyden jyrkkyys olisikin niissä erilainen (kuva 15.6 (b)). Koska kokin pulssin osa etenee samalla nopeudella, osien etäisyys toisistaan ei muutu ja niin pulssin muoto säilyy samana aallon liikkussa.

Koska heilahduksen nopeus ei vaikuta aallon nopeuteen, sen täytyy vaikuttaa pulssin muotoon (kuva 15.6 (c)). Mitä nopeammin köyden päättä heilautetaan, sitä lyhyemmän matkan aalto ehtii heilautuksen aikana kulkea ja sitä kapeampi pulssista tulee. Edelleen koska aaltopulssi etenee köydessä vakionopeudella, *jokainen köyden piste kokee samanlaisen liikkeen pulssin kulkiessa sen ohi*. Niinpä myös kunkin pisteen poikkeamaa ajan funktiona esittävä kuvaaja on samanlainen. Erityisesti *köyden kunkin pisteen liike toistaa köyden pään liikkeen*. Jos aaltopulssi on synnytetty heilauttamalla köyttä nopeasti, jokainen köyden piste heilahtaa nopeasti aaltopulssin kulkiessa sen ohi. Jos köyden päättä heilautetaan hitaasti, kukin köyden piste heilahtaa hitaasti.

15.6 Sinulla on kaksi samanlaista köyttä, joissa etenevien aaltojen vauhti on 2 m/s . Sinä ja ystäväsi heilautatte köysien päättä edestakaisin, jolloin köysiin syntyy aaltopulssit. Aloitatte heilautukset samanaikaisesti, mutta sinä teet heilautuksen ajassa 0.4 s kun taas ystäväsi heilautus kestää 1.0 s . (a) Kuinka leveät aaltopulssit köysiin syntyy? (b) Kumpaankin köytteen on merkitty tarkastelupiste 1.0 m etäisyydelle köyden päästä. Millainen on pisteen liikkeen kuvaaja kummassakin köydessä?

Aaltopulssin aaltofunktio

Tarkastellaan vielä köydessä kulkevan aaltopulssin matemaattista esitystä. Kuvaan 15.7 on piirretty pulssi, joka kulkee köydessä oikealle, positiiviseen x -suuntaan, nopeudella $v_{x,\text{aalto}}$. Ajan nollahetkeksi on valittu ensimmäinen kuva, jossa pulssin muotoa kuvaa funktio $u_y(x, t = 0) = f(x)$. Emme tässä esimerkissä tiedä täsmälleen tämän funktion matemaattista lauseketta, mutta funktion *kuvaaja* voidaan lukea köyden muodosta ja periaatteessa funktio voitaisiin selvittää tämän perusteella. Aallon muoto ei nyt kuitenkaan ole oleellinen, vaan kuvan 15.7 esimerkki toimii *millä tahansa* aallon muodolla ja sileällä funktiolla $f(x)$.

Kun kuluu aika Δt , aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan siirtymän $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} \Delta t$. Koska aaltopulssin muoto ei muutu, aaltoa voidaan kuvata edelleen samalla funktiolla $f(x)$. Kuitenkin koska aalto on siirtynyt, *argumenttia x täytyy muuttaa*. Tämän muutoksen voi päättää tarkastelemalla mitä tahansa aaltopulssin kohtaa, ja kuvassa 15.7 on tästä varten merkitty aaltopulssin huippu. Ajan hetkellä $t = 0$ huippu on pisteesä $x_{\text{huippu,alku}} = 2.2 \text{ m}$, joten aaltofunktion maksimin täytyy olla tässä pisteesä,

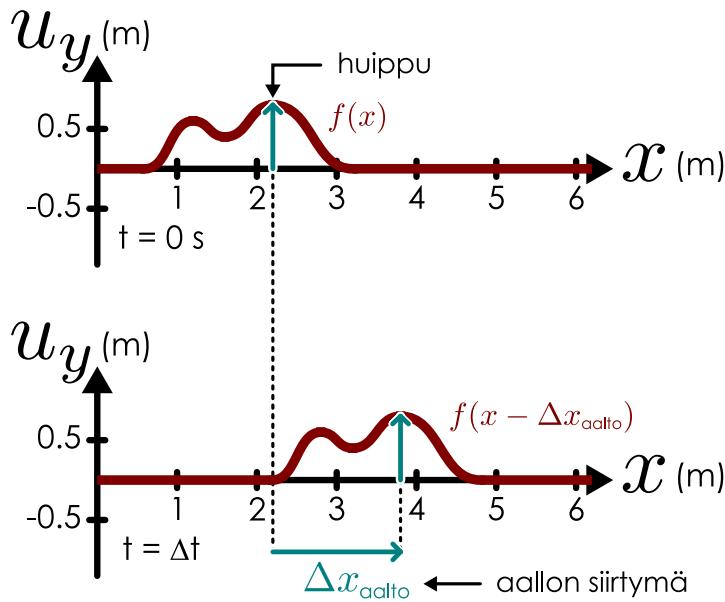
$$u_{y,\max} = u_y(x_{\text{huippu,alku}}, 0). \quad (15.10)$$

Toisaalta koska aallon muotoa kuvaa funktio $f(x)$, tällä funktiolla täytyy olla maksimi pisteesä $x_{\text{huippu,alku}}$, ja voimme merkitä

$$u_{y,\max} = f(x_{\text{huippu,alku}}). \quad (15.11)$$

Ajan kuluessa aalto liikkuu, ja hetkellä $t = \Delta t$ huippu on kuvassa siirtynyt pisteesiin $x_{\text{huippu,loppu}} = 3.8 \text{ m}$. Yleisesti voimme kirjoittaa huipun uuden paikan sen alkuperäisen paikkakoordinaatin ja aallon siirtymän

Kuva 15.7: Positiiviseen suuntaan kulkeva aaltopulssi. Hetkellä $t = 0$ aallon huippu on pisteessä $x_{\text{huippu}} = 2.2$ m, jossa funktion f maksimi on. Kun aalto on siirtynyt $\Delta x_{\text{aalto}} = 1.6$ m, sen muotoa kuvaaa funktio $f(x - \Delta x_{\text{aalto}})$. Tämän maksimi on pisteessä $x - \Delta x_{\text{aalto}} = 2.2$ m eli $x = 3.8$ m.



avulla, $x_{\text{huippu,loppu}} = x_{\text{huippu,alku}} + \Delta x_{\text{aalto}} = x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t$. Nyt aaltofunktion maksimi on tässä uudessa pisteessä

$$u_{y,\text{max}} = u_y(x_{\text{huippu,loppu}}, \Delta t) = u_y(x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t, \Delta t). \quad (15.12)$$

Toisaalta funktio $f(x)$ ei riipu ajasta joten sen maksimi on edelleen pisteessä $x_{\text{huippu,alku}}$ eli yhtälö (15.11) pätee yhä. Niinpä aaltofunktion u_y ja muotofunktion $f(x)$ välillä pätee

$$u_y(x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t, \Delta t) = u_{y,\text{max}} = f(x_{\text{huippu,alku}}). \quad (15.13)$$

Toisin sanoen jos aaltofunktiossa u_y sekä annetaan ajan edetä Δt että siirretään paikkakoordinaattia $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}}\Delta t$, pysytäään aaltopulssin samassa kohdassa — tässä tapauksessa aallon huipulla.



15.7 (a) Jos kuvan 15.7 esimerkissä $\Delta t = 2.0$ s, mikä on aallon nopeus? (b) Milloin tässä tapauksessa $u_y(4.5 \text{ m}, t) = u_{y,\text{max}}$?

Tämän huomion avulla voimme ratkaista yleisen lausekkeen ajasta riippuvalle aaltofunktiolle. Voimme niimittäin tehdä yhtälössä (15.13) muuttujanvaihdon $t = \Delta t$ sekä $x = x_{\text{huippu,alku}} + v_{x,\text{aalto}}\Delta t$. Tästä voidaan ratkaista funktio f argumentti $x_{\text{huippu,alku}} = x - v_{x,\text{aalto}}t$ ja aaltofunktioksi saadaan

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t). \quad (15.14)$$

Tämä on yleinen muoto vakionopeudella $v_{x,\text{aalto}}$ liikkuvaa aaltoa kuvaavalle aaltofunktiolle riippumatta siitä, millainen aallon muotoa kuvaava funktio f on. Vaikka edellisessä päättelyssä tarkasteltiin nimenomaan aallon huippupistettä, samanlainen päättely toimii millä tahansa aaltopulssin pisteellä, ja niinpä tulos onkin yleispätevä.

Aaltofunktiossa (15.14) kannattaa erityisesti huomata, että vaikka aalto kulkee positiiviseen suuntaan, funktio $f(x)$ argumentissa funktio siirtoa kuvaavan nopeustermin edessä on *miinusmerkki*. Tämä miinus tulee siitä, että funktio $f(x)$ huippu on aina samassa pisteessä $x_{\text{huippu,alku}}$. Jos tarkastelemme positiiviseen x -suuntaan kulkevaa aaltoa, jonka huippu on ajan kuluessa siirtynyt tästä pisteestä oikealle, meidän pitää siirtyä tämän siirretyn funktion huippupisteestä *vasemmalle, negatiiviseen suuntaan*, jotta pääsisimme takaisin alkuperäisen funktion $f(x)$ huippupisteeseen.



15.8 Mitkä seuraavista funktioista kuvaavat vakionopeudella liikkuvia aaltoja ja mikä on aallon nopeus?

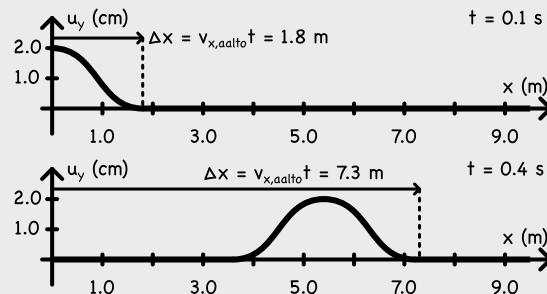
- $(0.10 \text{ m})e^{-(0.10 \text{ m}^{-2})(x+(0.30 \text{ m/s})t)^2}$,
- $(0.20 \text{ m}^3)/(x^2 - (0.40 \text{ m}^2/\text{s}^2)t^2 + 0.10 \text{ m}^2)$,
- $(0.30 \text{ m}) \cos[(0.20 \text{ m}^{-1})x - (0.50 \text{ s}^{-1})t]$

esimerkki 15.1

Aaltofunktio

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Sitten köyden päättä heilautetaan niin, että aikavälillä $0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s}$ pään poikkeamaa tasapainosta kuvaavat funktiot $u_{y,\text{pää}}(t) = (1.0 \text{ cm})[1 - \cos(2\pi t/0.2 \text{ s})]$ (muuten $u_{y,\text{pää}} = 0$). Mikä on aallon aaltofunktio (ennen kuin aalto saavuttaa köyden toisen pään)?

TILANNE Piirretään kuva aallostaa. Funktio $u_{y,\text{pää}}(t)$ on aluksi nolla, hetkellä $t = 0.1 \text{ s}$ se saa arvon $u_{y,\text{pää}}(0.1 \text{ s}) = 2.0 \text{ cm}$ ja hetkellä $t = 0.2 \text{ s}$ funktilta on jälleen nolla. Köyden päättä siis heilautetaan kerran ylös-alas, ja täällöin köyteen syntyy aaltopulssi, jonka korkeus on 2.0 cm. Valitaan koordinaatisto niin, että köyden pää on pisteessä $x = 0$ ja aalto lähtee kulkemaan positiiviseen x -suuntaan.



SUUNNITELMA Aallon nopeus ei riipu heilautuksen nopeudesta vaan vain köyden pituustihetydestä ja jännityksestä,

$$v_{\text{aalto}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (15.15)$$

Aaltofunktio on yleisesti muotoa

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t), \quad (15.16)$$

missä funktio f ratkeaa siitä, että köyden pään liikkettä kuvaava funktio

$$u_y(0, t) = f(-v_{x,\text{aalto}}t) = u_{y,\text{pää}}(t) \quad (15.17)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{0.2 \text{ s}} \right), \quad 0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s}. \quad (15.18)$$

RATKAISU Aallon nopeus on $v_{x,\text{aalto}} = \sqrt{\frac{50 \text{ N}}{4.5 \text{ kg}/30 \text{ m}}} = 18.3 \text{ m/s}$. Aaltofunktiossa esiintyvä funktio f voimme puolestaan päätellä tekemällä muuttujanvaihdon $y = -v_{x,\text{aalto}}t$ eli $t = -y/v_{x,\text{aalto}}$. Sen avulla voimme kirjoittaa

$$f(y) = f(-v_{x,\text{aalto}}t) \quad (15.19)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left(1 - \cos \frac{-2\pi t}{0.2 \text{ s}} \right), \quad 0 \text{ s} < t < 0.2 \text{ s} \quad (15.20)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{3.66 \text{ m}} \right), \quad 0 \text{ m} > y > -3.66 \text{ m}. \quad (15.21)$$

Varsinainen aaltofunktio saadaan sijoittamalla $y = x - v_{x,\text{aalto}}t$ eli

$$u_y(x, t) = (1.0 \text{ cm}) \left(1 - \cos \left[\frac{2\pi(x - v_{x,\text{aalto}}t)}{3.66 \text{ m}} \right] \right), \quad 0 \text{ m} > x - (18.3 \text{ m/s})t > -3.66 \text{ m} \quad (15.22)$$

$$= (1.0 \text{ cm}) (1 - \cos [(1.72 \text{ m}^{-1})x - (31.4 \text{ s}^{-1})t]), \quad (18.3 \text{ m/s})t > x > (18.3 \text{ m/s})t - 3.66 \text{ m}. \quad (15.23)$$

ARVIOINTI Köyteen syntyy aaltopulssi, jonka etureuna on pisteessä $x = 0 \text{ m}$ heilautuksen alkaessa hetkellä $t = 0 \text{ s}$ ja huippu $u_y = 2.0 \text{ cm}$ heilautuksen puolivälissä eli hetkellä $t = 0.1 \text{ s}$. Pulssi liikkuu nopeudella $v_{x,\text{aalto}} = 18.3 \text{ m/s}$, joten esimerkiksi hetkellä $t = 0.4 \text{ s}$ etureunan pitäisi olla pisteessä $x = v_{x,\text{aalto}}\Delta t = (18.3 \text{ m/s}) \cdot (0.4 \text{ s}) = 7.3 \text{ m}$ ja huipun pisteessä $x = v_{x,\text{aalto}}\Delta t = (18.3 \text{ m/s}) \cdot (0.3 \text{ s}) = 5.5 \text{ m}$ (ks. kuva). Johdettu aaltofunktio toteuttaa nämä ehdot, koska esimerkiksi

$$u_y(5.5 \text{ m}, 0.4 \text{ s}) = (1.0 \text{ cm}) (1 - \cos [(1.72 \text{ m}^{-1})(5.5 \text{ m}) - (31.4 \text{ s}^{-1})(0.4 \text{ s})]) = 2.0 \text{ cm} \quad (15.24)$$

eli huippu $u_y = 2.0 \text{ cm}$ on todellakin pisteessä $x = 5.5 \text{ m}$ hetkellä $t = 0.4 \text{ s}$.



15.9 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä yksilötteisten aaltojen kuvauksesta. Selitä yleisesti, mitä aallot ovat. Mikä on aaltofunktio? Mikä vaikuttaa mekaanisen aallon nopeuteen? Mikä vaikuttaa mekaanisen aallon muotoon? Miten voit päätellä aallon nopeuden pelkästään sen aaltofunktion avulla?

15.3 Sinimuotoiset aallot

Edellisessä luvussa opimme, että aaltojen muoto riippuu siitä, millainen häiriö ne synnyttää. Esimerkiksi yksittäinen, lyhytkestoinen häiriö tuottaa lyhyen aaltopulssin. Toinen ääripää on *aaltolähde*, joka lähettilä jatkuvasti aaltonaikettä ympärilleen. Tällainen lähe synnyttää aallon, jolla ei ole periaatteessa alkua eikä loppua lainkaan. (Tai ainakin jos lähe on lähettilä aaltoa pitkään, aallon alkupiste on ehtinyt kulkea jo kauas.) Tällaiset aallot ovat varsin tavallisia, sillä esimerkiksi ääni syntyy ääniliheteiden väärähtelyn siirtymässä ilman väärähtelyksi, joka puolestaan etenee ilmassa paineaaltona. Samoin esimerkiksi radiosignaalit lähettiläät antennit voivat synnyttää jatkuvan sähkömagneettisen aallon.

Sinimuotoisen aallon nopeus

Erityisen tärkeä erikoistapaus on aalto, jonka synnyttää *harmonisesti väärätelevä lähe*. Kuvassa 15.8 on esitetty yksinkertainen esimerkki tällaisesta tilanteesta: köyden pää on kiinnitetty jousen varassa harmonisesti väärätelevään kappaleeseen. Koska kappaleen massa on suuri köyden massaan verrattuna, köyden pää seuraa kappaletta eikä juurikaan vaikuta kappaleen liikkeeseen. Kappaleen liikkeen köyteen syntymä häiriö kuitenkin etenee köytiä pitkin, jolloin köyteen syntyy jatkuva aalto.

Kuten kuvasta nähdään, tällaisen harmonisen läheen syntymän aallon muotoa kuvaava aaltonfunktio on sinimuotoinen, minkä vuoksi aaltoa kutsutaan *sinimuotoiseksi aalloksi*, *harmoniseksi aalloksi* tai yksinkertaisesti vain *siniäalloksi*. Tämä johtuu siitä, että kappaleen väärhdys tuottaa köyteen liikkulan häiriön. Kun kappale on väärhdysensä huippukohdassa (kuva 15.8, toinen ylhäältä), köydessä on aallonharja. Kappaleen liikkuessa myös köyden pää kulkee pystysuunnassa (kuten muutkin köyden pisteet) ja samalla tämä aallonharja kulkee köytiä pitkin poispäin köyden päästä. Hetken päästä kappale on väärhdysensä alimmassa pisteessä, ja tällöin köyden pään kohdalla on aallonpohja (neljäs kuva ylhäältä). Äsknen syntynyt aallonharja on sillä välin jo ehtinyt siirtyä poispäin kappaleesta. Kun aika taas kulkee hieman eteenpäin, kappale palaa jälleen väärähtelyliikkeen huippuun, jolloin köyden päässä on uusi aallonharja (kuudes kuva ylhäältä).

Hetkestä, jolloin köyden päässä on aallonharja, kuluu aikaa seuraavaan hetkeen, jolloin köyden päässä on jälleen aallonharja, täsmälle yksi jaksonaika T . Näin siksi, että väärätelevä kappale suorittaa yhden kokonaisen väärhdysen täsmälle tässä ajassa. Samoin ne köyden osat, jotka aalto on jo saavuttanut, palaavat takaisin samaan tilaan jokaisen jaksonajan jälkeen. Toisin sanoen *köyden jokainen piste* (jonka aalto on saavuttanut) *väärätelee harmonisesti samalla taajuudella kuin aallon lähe*.

Valitaan nyt köydestä jokin kiintopiste. Tämä voi olla köyden pää tai yhtä hyvin mikä tahansa muu köyden piste. Aallonharjan saavuttaessa tarkasteltavan pisteen piste on väärhdysliikkeensä huippukohdassa. Kahden peräkkäisen aallonharjan välissä on aallonpohja, joten aallonharjan kuljettaa pisteen ohitse piste siirryy pystysuunnassa alas päin. Piste palaa jälleen huippuasemaansa, kun seuraava aallonharja saavuttaa sen. Tällöin piste tekee täsmälle yhden väärhdysen, ja niinpä tähän edestakaiseen liikkeeseen täytyy kulua aikaa täsmälle yksi jaksonaika, $\Delta t = T$.

Jaksollisessa aallossa kahden peräkkäisen aallonharjan välistä matkaa kutsutaan *aallonpituudeksi* ja sitä merkitään tavallisesti kreikkalaisella lambda-kirjaimella, λ . Jos tarkastelupisteessä on aluksi aallonharja ja ajan Δt kuluttua siinä on seuraava aallonharja, *aalto on kulkenut tässä ajassa täsmälle yhden aallonpituuden matkan*, $|\Delta x_{\text{aalto}}| = \lambda$. Näin ollen aallon vauhti on

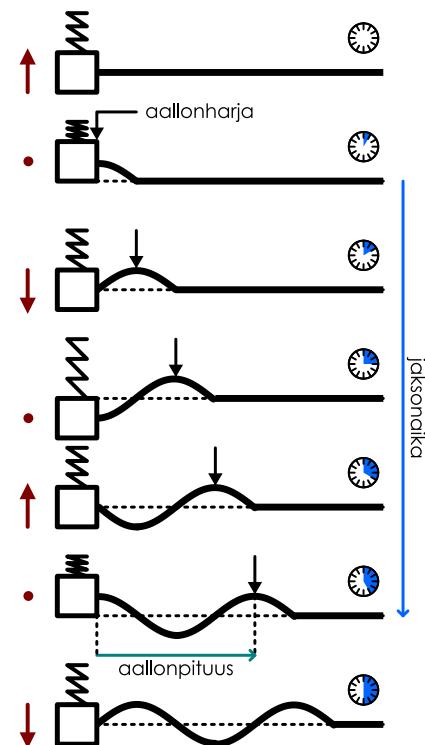
$$v_{\text{aalto}} = \left| \frac{\Delta x_{\text{aalto}}}{\Delta t} \right| = \frac{\lambda}{T}. \quad (15.25)$$

Koska taajuus on jaksonajan käänneisluku, tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$v_{\text{aalto}} = f\lambda. \quad (15.26)$$

Näitä aallon vauhdin lausekkeita kutsutaan *aaltonaikkeen perusyhtälöiksi*. Nimi on kuitenkin hieman harhaanjohtava, koska yhtälö pätee vain *jaksolliselle aalolle*. Esimerkiksi aaltopulssillehan ei yleensä voida määritellä aallonpituitta eikä jaksonaikaa, joten yhtälöitä ei voi niihin suoraan soveltaa.

Kuva 15.8: Harmonisesti väärätelevä aaltolähde synnyttää sinimuotoisen aalon.





15.10 (a) Taajuudella 170 Hz värähtelevä lähde tuottaa aallon, jonka aallonpituuus on 2.0 m. Mikä on aallon vauhti? (b) Värähtelijän taajuus kasvaa arvoon 200 Hz. Mikä on nyt aallonpituuus ja aallon etenemisvauhti?

Sinimuotoisen aallon aaltofunktio

Sinimuotoisen aallon muotoa kuvaava nimen mukaisesti sinimuotoinen funktio eli sini tai kosini. Valitsemme tässä kosinifunktion, jolloin esimerkiksi ajan hetkellä $t = 0$ aaltofunktio on muotoa

$$u_y(x, 0) = A \cos[\phi(x, 0)] = A \cos(kx + \phi_0). \quad (15.27)$$

Tässä

$$\phi(x, 0) = kx + \phi_0 \quad (15.28)$$

on aallon *vaihe* ja vakio ϕ_0 määräytyy siitä, mikä on käyden poikkeama tasapainosta origossa. Sillä on siis samanlainen merkitys kuin vaihetekijällä ϕ_{alku} harmonisen värähtelijän liikkeen kuvauksessa.

Vakio k puolestaan lüttyy aallon muotoon. Ensinnäkin tämän vakion dimension on oltava $1/\text{m}$, koska vaihe on yksikötön suure. (Vaiheen täytyy olla dimensioton, koska kosinifunktion argumentilla ei voi olla yksikkö.) Kosinifunktio on 2π -jaksollinen, joten se saa saman arvon aina, kun vaihetta muutetaan 2π verran. Jos esimerkiksi $k = 1.0 \text{ m}^{-1}$ ja $\phi_0 = 0$, vaihe on origossa nolla ja tässä pisteessä on siis aallonharja. Seuraava aallonharja on pisteessä, jossa vaihe on $\phi(x, 0) = 2\pi$ eli pisteessä $x = 2\pi \text{ m} \approx 6.3 \text{ m}$, ja niin edelleen. Tällöin aallon aallonpituuus on 2π metriä. Jos vakio k on suurempi, esimerkiksi $k = 2.0 \text{ m}^{-1}$, vaihe saa arvon 2π jo pisteessä $x = \pi \text{ m} \approx 3.1 \text{ m}$, jolloin aallonpituuuskin on vain π metriä. Siispä *aallonpituuus on kääntäen verrannollinen vakioon k* . Lisäksi koska aallonpituuus on 2π metriä kun vakion k arvo on 1 m^{-1} , suureiden välisen verrannollisuuskertoimen täytyy olla 2π . Toisin sanoen

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (15.29)$$

Vakiota k kutsutaan aallon **aaltoluvuksi**. Aaltoluvun suhde aallonpituiteen on täsmälleen samanlainen kuin kulmataajuuden suhde jaksonaikaan, sillä $\omega = 2\pi/T$ ja $k = 2\pi/\lambda$. Fysikaalisesti jaksonaika kertoo *ajan*, jossa värähtelijä suorittaa yhden edestakaisen liikkeen. Kulmataajuus puolestaan kertoo millä kulmanopeudella värähtelyn vaiheenosoitin pyörii. Toisaalta taajuus f kertoo montako värähdystä tapahtuu sekunnissa, ja kulmataajuus on taajuus kerrottuna luvulla 2π , $\omega = 2\pi f$, joten kulmataajuuden voi ajatella myös mittavaan sitä, *montako värähdystä tapahtuu ajassa 2π sekuntia*. Vastaavasti aallonpituuus ilmaisee *matkan*, jossa aalto suorittaa yhden edestakaisen liikkeen, ja aaltoluku mittaa sitä, *montako aallonpituitta mahtuu matkalle 2π metriä* (kuva 15.9). Mitä lyhyempi on aallonpituuus, sitä enemmän aaloja 2π -pituiselle matkalle mahtuu.



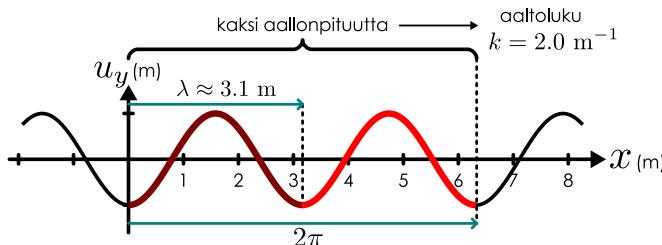
15.11 Erään soittimen rakenne tuottaa vain sellaisia aaloja, joissa matkalle 0.50 m mahtuu joko täsmälleen yksi, kaksi tai kolme aallonpituitta. Mitkä ovat näiden aalojen aaltoluvut?

Aaltofunktion aikariippuvuuden määrittämiseksi voimme käyttää liikkuvan aallon aaltofunktion yleistä lauseetta (15.14), jonka mukaan aaltofunktion on oltava muotoa $u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t)$, missä $f(x)$ on aallon muotoa ajan hetkellä nolla kuvaava funktio. Nyt aallon muotoa ajan hetkellä nolla kuvaava funktio (15.27) eli

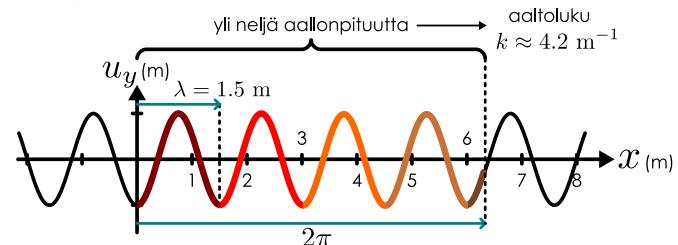
$$u_y(x, 0) = f(x) = A \cos(kx + \phi_0), \quad (15.30)$$

Kuva 15.9: Aaltoluku laskee montako aalonpituitta mahtuu 2π -pituiselle matkalle. Kuvassa tälle välille sijoittuvat aalonpituidet on korostettu eri värein.

(a) Pitkä aalonpituuus, pieni aaltoluku.



(b) Lyhyt aalonpituuus, suuri aaltoluku.



joten ajasta riippuvan aaltofunktion täytyy olla

$$u_y(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t) = A \cos[k(x - v_{x,\text{aalto}}t) + \phi_0] = A \cos(kx - kv_{x,\text{aalto}}t + \phi_0). \quad (15.31)$$

Aallon vauhti saadaan perusyhtälöstä (15.25), ja relaatioiden $\lambda = 2\pi/k$ ja $T = 2\pi/\omega$ avulla tämän voi kirjoittaa myös kulmataajuuden ja aaltoluvun suhteena

$$v_{\text{aalto}} = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k}. \quad (15.32)$$

Niinpä jos aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan, aaltofunktion lausekkeessa esüntyvä ajan t kerroin sievenee yksinkertaiseen muotoon $kv_{x,\text{aalto}} = \omega$ ja aaltofunktioksi saadaan

$$u_y(x, t) = A \cos[\phi(x, t)] = A \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.33)$$

Tämän vaihe on funktio

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0. \quad (15.34)$$



15.12 Pisteessä $x = 0$ m on aaltolähde, jonka taajuus on 2 Hz. Lähteen tuottama aalto kulkee nopeudella 3 m/s positiiviseen x -suuntaan, ja aallon amplitudi on 0.1 m. (a) Mikä on aaltofunktio pisteessä $x = 0$ m, eli $u_y(0, t)$, jos aallon vaihe hetkellä nolla on $\pi/4$? (b) Mikä on aaltofunktio yleisesti, $u_y(x, t)$? (c) Mikä on välinaineen poikkeama pisteessä $x = 0.2$ m hetkellä $t = 0.2$ s?

Koska aallonpituuus sekä aaltoluku liittyvät toisiinsa samoin kuin jaksonaika, taajuus ja kulmataajuuskin, tämän aaltofunktion voi muokata useisiin eri muotoihin. Esimerkiksi aaltoluvun voi korvata aallonpituuudella ja kulmataajuuden jaksonajalla, jolloin päädytään funktioon

$$u_y(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \phi_0\right). \quad (15.35)$$

Tämä on sama lauseke kuin (15.33), mutta se sisältää enemmän symboleita ja on siten matemaattisesti hiukan hankalampi käsitellä. Yleisestikin aaltojen matemaattisessa käsitellyssä juuri *aaltoluku ja kulmataajuus ovat tärkeimmät suureet*, joiden avulla laskutoimitukset onnistuvat helpoiten. Niinpä vaikka esimerkiksi aallonpituuus voi tuntua yksinkertaisemmalta käsitleltä kuin aaltoluku, on syytä opetella ymmärtämään aaltoluvun fysikaalinen merkitys ja totutella käyttämään sitä aaltojen matemaattisessa analyysissä.



15.13 Äänen nopeus ilmassa on normaaliolosuhteissa noin 340 m/s. Äänirauta väärtelee taajuudella 440 Hz. (a) Mitä ovat syntyvän ääniaallon (i) taajuus, (ii) jaksonaika, (iii) kulmataajuus, (iv) aallonpituuus, (v) aaltoluku? (b) Erällä ajan hetkellä ääniaallossa on paineminimi (paineaallon vaihe π) juuri ääniraudan kohdalla. Mikä on tällä samalla hetkellä paineaallon vaihe etäisyydellä 1 m ääniraudasta?

Koska kosini on symmetrinen funktio sen argumentin merkin voi vaihtaa eikä mikään muutu, $\cos -\theta = \cos \theta$. Tämän takia voisimme aivan yhtä hyvin valita aaltofunktioksi myös $u_y(x, t) = A \cos(\omega t - kx - \phi_0)$. Toisin sanoen aaltofunktio kuva edelleen positiiviseen x -suuntaan kulkeva sinimuotoista aaltoa, jos sekä aaltoluvun että kulmataajuuden etumerkit vaihdetaan. Sen sijaan esimerkiksi funktio $u_y(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \phi_0)$ ei ole sama kuin funktio (15.33), sillä jos vaihdamme *joko* aika- tai paikkakoordinaatin kertoimen etumerkin, *aallon etenemissuunta kääntyy*. Etumerkkien kanssa pitää siis olla tarkkana, mutta toisaalta tämä ominaisuus antaa meille helpon tavan ilmaista aallon kulkusuuntaa. Voimme nimittäin kääntää aallon kulkusuunnan vaihtamalla joko aaltoluvun k tai kulmataajuuden ω etumerkkiä. Tavallisesti valitaan niin, että . Kirjoitamme siis yksilölliseen sinimuotoisen aallon aaltofunktion *aina* muodossa (15.33), mutta *jos aalto kulkee negatiiviseen suuntaan, sen aaltoluku on negatiivinen*. Tämä voi aiheuttaa sekaannusta, koska joskus aaltoluvusta puhuttaessa tarkoitetaan sen itseisarvoa $|k|$ ja joskus taas huomioidaan aallon liikkeen suunta, jolloin k voi olla negatiivinenkin. Tässä tekstillä useimmiten tarkastellaan positiiviseen suuntaan kulkevia aaldoja, jolloin nämä ovat sama asia. Tapaukset, joissa aalto kulkee negatiiviseen suuntaan, mainitaan erikseen.

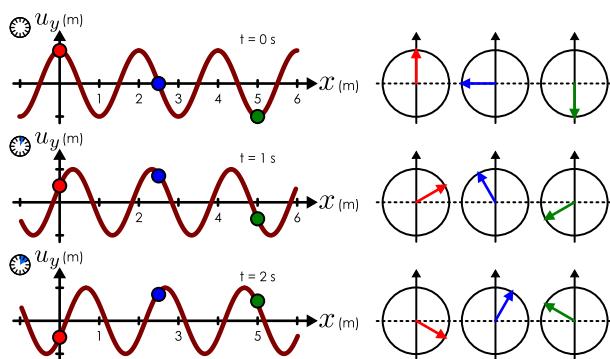


15.14 Kahden aallon aaltofunktiot ovat $u_1(x, t) = (-0.1 \text{ m}) \cos[(0.2 \text{ m}^{-1})x - (0.3 \text{ s}^{-1})t + (0.7)]$ ja $u_2(x, t) = (0.5 \text{ m}) \cos[(-0.4 \text{ m}^{-1})x - (0.6 \text{ s}^{-1})t + (-0.8)]$. Mikä on kummankin aallon (a) aaltoluku, (b) kulmataajuus, (c) amplitudi, (d) aallonpituuus, (e) taajuus, (f) vauhti, (g) liikkeen suunta?

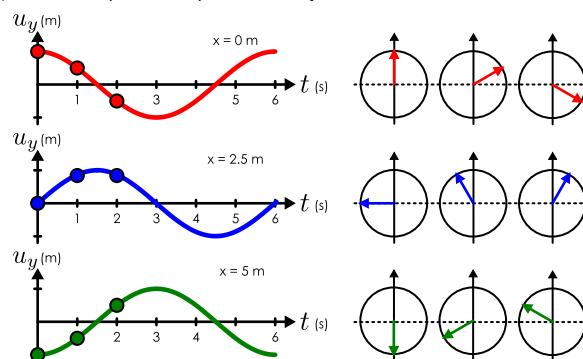
Vaiheenosoitin

Kuva 15.10: Sinimuotoisen aallon aaltofunktio ja vaiheenosoitin. Allostaa on valittu kolme tarkastelupistettä (punainen, sininen, vihreä).

(a) Aallon muoto eri ajan hetkinä.



(b) Tarkastelupisteiden poikkeama ajan funktio.

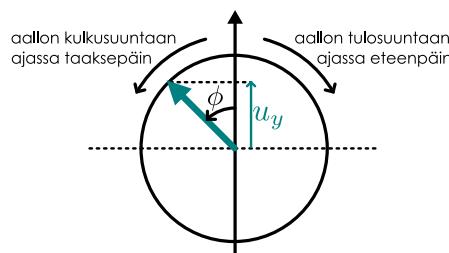


vaihe on kuitenkin muotoa $\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0$, joten vaihe pienenee, kun aika kulkee eteenpäin eli t kasvaa. Niinpä kuussa 15.10 vaiheenosoittimet pyörivät ajan kulkiessa myötäpäivään eli negatiiviseen kiertosuuntaan. Jos aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan, aaltoluku k on positiivinen, ja tällöin vaihe kasvaa kun x -koordinaatti kasvaa. Kuussa 15.10 tämä ilmenee niin, että vaiheenosoitin pyörii vastapäivään aallon kulkusuuntaan (oikealle) kuljetaessa.



15.15 Sinimuotoinen aalto kulkee negatiiviseen x -suuntaan. (a) Mikä on aaltoluvun etumerkki? (b) Kasvako vai pieneneekö aallon vaihe, kun x -koordinaatti kasvaa? (c) Mihin suuntaan vaiheenosoitin pyörii, kun kuljetaan positiiviseen x -suuntaan? (d) Mihin suuntaan vaiheenosoitin pyörii, kun kuljetaan aallon kulkusuuntaan?

Kuva 15.11: Vaiheenosoitin pyörii vastapäivään, kun siirrytään paikassa aallon kulkusuuntaan tai ajassa taaksepäin.



$\Delta x = 2.5 \text{ m} = \frac{5}{4}\lambda$ eli 1 ja $1/4$ aallonpituuutta, jolloin sininen vaiheenosoitin on kiertynyt yhden kokonaisen ja yhden neljänneskierroksen vastapäivään punaiseen vaiheenosoittimeen verrattuna. Samaan tapaan vaiheenosoitin tekee yhden kierroksen myötäpäivään, kun ajan annetaan kulua yhden jaksonajan verran. Tämä näkyy kuussa 15.10 (b), jossa peräkkäisten merkityjen hetkien välinen aika on $\Delta t = 1 \text{ s} = \frac{1}{6}T$ ja niitä vastaavat vaiheenosoittimet eroavat toisistaan kuudeneskierroksen verran myötäpäivään. Kuusta nähdään

sinimuotoisten aaltojen kuvaussa vaihe on keskeinen suure aivan kuten harmonisen väärähtelijän analyysissä. Harmonisen väärähtelijän tapauksessa vaihe on ajan funktio, joka avulla voidaan päättää sekä väärähtelijän paikka että nopeus. Sinimuotissa aallossa kuitenkin jokainen väliaineen piste väärtelee harmonisesti, joten aallossa vaiheella on arvo jokaisessa pisteessä. Niinpä aallon vaihe on sekä ajan että paikan funktio, $\phi(x, t)$.

Myös aallon vaihetta voi kuvata vaiheenosoittimella eli aallon kulmataajuudella pyörivällä nuolella. Kuussa 15.10 (a) on piirretty sinimuotoinen aallon muoto kolmena ajan hetkenä. Kuvaan on myös merkitty kolme väliaineen pistettä sekä näiden vaiheenosoittimet. Kuussa 15.10 (b) näiden tarkastelupisteiden poikkeamat tasapainosta on esitetty ajan funktio. Kuussa kunkin vaiheenosoittimen y -komponentti kuvaaa samanvärisen tarkastelupisteen poikkeamaa tasapainosta. Kun aika kuluu, kuvan aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan eli oikealle. Tällöin myös tarkastelupisteet liikkuvat ja niitä kuvavat vaiheenosoittimet pyörivät.

Periaatteessa voimme valita vapaasti, kumpaan suuntaan annamme vaiheenosoittimen pyörää. Harmonisen väärähtelijän tapauksessa sovimme, että vaiheenosoitin pyörii positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään ajan kuluessa eli vaiheen $\phi(t) = \omega t$ kasvaessa. Aallon

Koska määrittelimme aaltofunktion (15.33) käyttäen konisia, on aaltofunktiossa maksimi eli aallonharja aina, kun aallon vaihe on nolla tai jokin luvun 2π monikerta eli kun $\phi = 2\pi n$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku. Vaiheenosoitinkuviossa tämä tarkoittaa sitä, että aallossa on harja aina vaiheenosoittimen osoittaessa suoraan ylöspäin. Siirrytäessä aallonharjalta toiselle vaiheenosoittimen pitää tehdä yksi tai useampia kokonaisia kierroksia. Niinpä vaiheenosoitin tekee yhden kokonaisen kierroksen vastapäivään, kun siirrymme paikassa yhden aallonpituuuden aallon kulkusuuntaan, ja yhden kierroksen myötäpäivään, kun siirrymme yhden aallonpituuuden aallon tulosuuntaan. Esimerkiksi kuussa 15.10 (a) punaisen ja sinisen pisteenvälisen etäisyyksen

$\Delta x = 2.5 \text{ m} = \frac{5}{4}\lambda$ eli 1 ja $1/4$ aallonpituuutta, jolloin sininen vaiheenosoitin on kiertynyt yhden kokonaisen ja yhden neljänneskierroksen vastapäivään punaiseen vaiheenosoittimeen verrattuna. Samaan tapaan vaiheenosoitin tekee yhden kierroksen myötäpäivään, kun ajan annetaan kulua yhden jaksonajan verran. Tämä näkyy kuussa 15.10 (b), jossa peräkkäisten merkityjen hetkien välinen aika on $\Delta t = 1 \text{ s} = \frac{1}{6}T$ ja niitä vastaavat vaiheenosoittimet eroavat toisistaan kuudeneskierroksen verran myötäpäivään. Kuusta nähdään

myös, että koska jokainen piste värähtelee samalla taajuudella, niiden kaikkien vaiheenosoitimet pyörivät yhtä nopeasti.

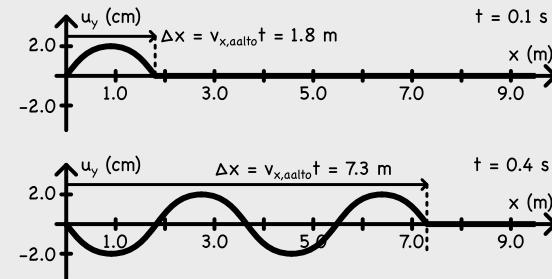
15.16 Sinimuotoinen aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan nopeudella 1 m/s. Ajan hetkellä nolla aallossa on aallonharjat pisteissä $x = -2$ m (olkoon tämä harja A), $x = 0$ m (B) ja $x = 2$ m (C). (a) Miten vaiheenosoitin muuttuu (kiertokulma ja -suunta), jos hetkellä $t = 0$ origosta siiirtyää pisteeseen $x = 1$ m? (b) Miten vaiheenosoitin muuttuu, kun tämän jälkeen odotetaan 3 s? (c) Miten vaiheenosoitin muuttuu, jos ajan hetkellä $t = 0$ origosta siiirtyää aallonharjan A kohdalle? (d) Miten vaiheenosoitin muuttuu, kun tämän jälkeen tarkastelupisteen annetaan kulkea aallonharjan A mukana 3 s? (e) Mikä on vaiheen kokonaismuutos kohdissa a ja b? Entä kohdissa c ja d?

esimerkki 15.2

Sinimuotoinen aaltofunktio

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Köyden päättä heilutetaan niin, että pään poikkeamaa tasapainosta kuvaava funktio $u_{y,\text{pää}}(t) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t/0.2 \text{ s} - \pi/2)$. Mikä on aallon aaltofunktio (ennen kuin aalto saavuttaa köyden toisen pään)?

TILANNE Tilanne on muuten sama kuin esimerkissä 15.1 paitsi että köyden päättä heilutetaan nyt harmonisesti. Niinpä köyteen ei nyt synny yksittäistä aaltopulssia vaan sinimuotoinen aalto.



SUUNNITELMA Aallon nopeus riippuu köyden pituustiheydestä ja jännityksestä, jotka ovat samat kuin edellisessä esimerkissä. Niinpä aallon nopeuskin on sama, $v_{x,\text{aalto}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 18.3 \text{ m/s}$.

Sinimuotaisen aallon aaltofunktio on yleisesti muotoa

$$u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0), \quad (15.36)$$

missä aaltolukua ja kulmataajuutta yhdistää aallon nopeus,

$$v_{x,\text{aalto}} = \frac{\omega}{k}. \quad (15.37)$$

Aaltofunktion täsmällinen muoto määräytyy siitä, miten köyttä heilutetaan eli ehdosta $u_y(0, t) = u_{y,\text{pää}}(t)$.

RATKAISU Sijoitetaan aaltofunktio yhtälöön (15.2). Koska yleensä kulmataajuudet määritellään positiivisina lukuina, käytetään vielä laskusääntöä $\cos(y) = \cos(-y)$, niin saadaan

$$u_y(0, t) = A \cos(-\omega t + \phi_0) = A \cos(\omega t - \phi_0) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t/0.2 \text{ s} - \pi/2) = u_{y,\text{pää}}(t). \quad (15.38)$$

Tästä nähdään suoraan amplitudi, kulmataajuus sekä vaihetekijä: $A = 2.0 \text{ cm}$, $\omega = 2\pi/0.2 \text{ s} = 31.4 \text{ s}^{-1}$ ja $\phi_0 = \pi/2$. Aaltoluku ratkeaa edelleen aallon nopeuden avulla, $k = \omega/v_{x,\text{aalto}} = 1.72 \text{ m}^{-1}$. Aaltofunktio on siis

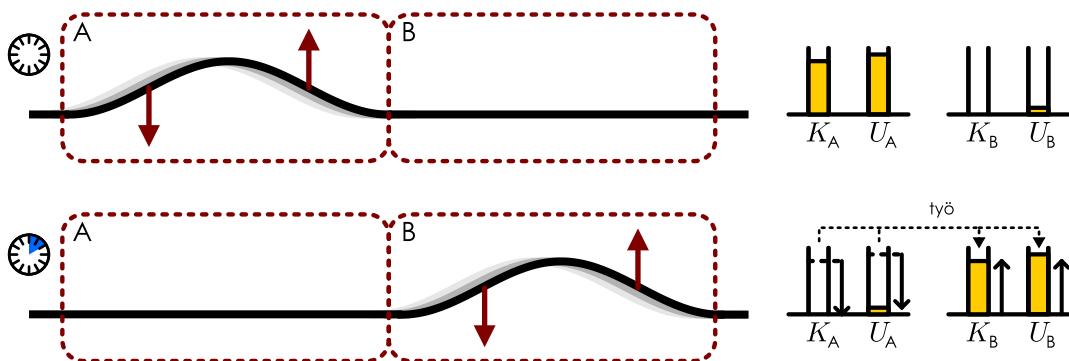
$$u_y(x, t) = (2.0 \text{ cm}) \cos \left[(1.72 \text{ m}^{-1})x - (31.4 \text{ s}^{-1})t + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (15.39)$$

Täsmällisesti tämä lauseke pätee vain alueessa $x < v_{x,\text{aalto}}t$, koska aalto etenee tällä vauhdilla. Muualla aaltofunktio on nolla.

ARVIOINTI Kosinifunktion sisään saatuiin tässä täsmälleenn samat kertoimet kuin esimerkissä 15.1, eikä tämä ole sattumaa. Edellisen esimerkin aaltopulssi luotiin 0.2 s kestävällä heilautuksella, ja myös nyt aallon jaksonaika on $T = 2\pi/\omega = 0.2 \text{ s}$. Siksi ajan t edessä oleva kerroin on sama. Toisaalta aallot kulkevat yhtä nopeasti, koska ne on luotu samanlaiseen köyteen. Aaltofunktion $\cos(kx - \omega t)$ kuvaama poikkeama kuitenkin etenee nopeudella $v_{x,\text{aalto}} = \omega/k$, eli nopeus saadaan jakamalla ajan kerroin paikan kertoimella. Niinpä jos aalloilla on sama nopeus 18.3 m/s ja aaltofunktiossa ajan kerroin on sama 31.4 s^{-1} , myös paikkakoordinaatin kertoimen täytyy olla kummassakin sama.

Myös aallonpituuus on tässä sama kuin esimerkin 15.1 aaltopulssin leveys, $\lambda = 2\pi/|k| = 3.66 \text{ m}$. Näin on siksi, että sinimuotoinen aalto etenee yhden jakson aikana yhden aallonpituuden, eli $\lambda = v_{\text{aalto}}T$. Samoin aaltopulssi etenee oman leveytensä verran sen luoneen heilautuksen aikana.

Kuva 15.12: Aaltopulssi kuljettaa energiaa. Aluksi aallon energia on systeemissä A ja myöhemmin systeemissä B.



15.17 Kirjoita oman sanoin tiivistelmä sinimuotoisista aalloista. Mitä ne ovat ja miten ne syntyvät? Miten sinimuotoiset aallot liittyvät harmoniseen väärähtelyyn ja miten aaltoa kuvataan vaiheenosittimella? Selitä käsitteet taajuus, kulmataajuus, jaksonaika, amplitudi, vaihe, aallonpituuus ja aaltoluku.

15.4 Aallon kuljettama energia

Energiapulssi

Kuten jo luvun alussa totesimme, aalto ei kuljeta ainetta, mutta se kuljettaa energiaa. Erelaisissa aalloissa tämä energia voi ilmetää eri tavoin, mutta sen täytyy lüttää aina jotenkin joko siihen, että aallossa väliaineen tila muuttuu. Esimerkiksi aaltopulssin kulkiessa köydessä köysi *venyy* paikallisesti, koska mutkalla oleva köysi on pidempi kuin suora. Tähän muodonmuutokseen liittyy *elastista potentiaalienergiaa*. Lisäksi aaltopulssin kulkiessa köyden pisteiden täytyy *liikkua* pystysuunnassa, jolloin liikkuvilla köyden osilla on myös *liike-energiaa*.

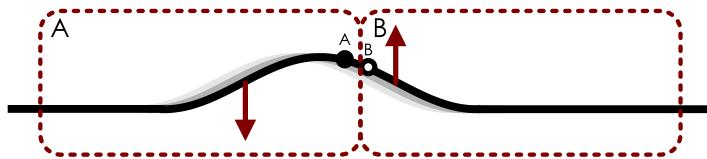
Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.12, jossa tarkastellaan köydessä kulkevan aaltopulssin energiasta. Tilanteessa on erotettu kaksi systeemiä, jotka kumpikin sisältäävät osan köytä. Ensimmäisessä kuvassa aaltopulssi on vasemmanpuoleisessa systeemissä A, jolloin tähän systeemiin kuuluva köysi on venyntä ja sen osat liikkuvat pystysuunnassa. Systeemissä A on siis sekä potentiaalienergiaa että liike-energiaa. Oikeanpuoleisessa systeemissä B köysi on suora. Tässäkin systeemissä on hieman potentiaalienergiaa, koska jännitetty köysi on hieman venyntä kaikkialla, mutta köysi ei liiku, joten sen liike-energia on nolla. Myöhempää ajan hetkeä esittävässä kuvassa aaltopulssi on kulkenut systeemiin B, ja tilanne on nyt päinvastainen: Systeemissä A ei ole juurikaan energiaa kun taas systeemissä B on paljon energiota. Energiaa on siis siirretty systeemistä A systeemiin B aallon mukana.

Kuvassa 15.13 tarkastellaan tämän energian siirtymistä, kun aaltopulssi on puolittain kummanakin systeemin sisällä ja liikkeessä kohti systeemiä B. Kuvassa köyden osia systeemien rajalla on kuvattu massallisilla pistellillä, joiden välinen jousi kuvailee köyden elastisuutta. Systeemien rajalla olevia tarkastelupisteitä on merkitty A ja B sen mukaan, kumpaan systeemiin pisteet kuuluvat. Pisteiden välinen jousi on valittu kuulumaan systeemiin A. Kuvan tilanteessa pisteen A poikkeama tasapainosta on hiukan suurempi kuin pisteen B. Kumpikin piste on liikkeessä ylöspäin eli kauemmas tasapainosta, ja pisteen A nopeus on hiukan pienempi kuin pisteen B.

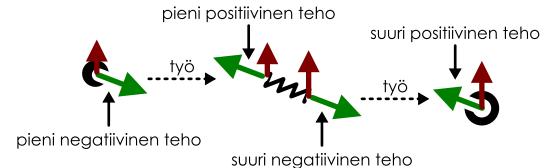
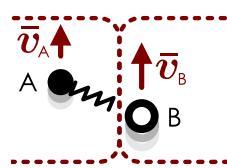
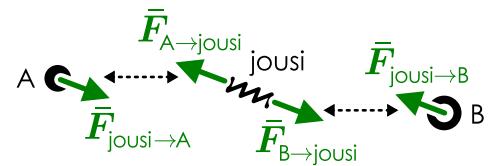
Pisteiden välinen jousi on venyntä ja siksi jännittyneet, ja niinpä se vetää pistettä A viistosti alaspäin ja pistettä B viistosti ylöspäin. Systeemissä B tekee nyt työtä pisteeseen B kohdistuvan voiman liikkeen suuntaisen komponentti $\bar{F}_{y,jousi \rightarrow B}$, joka osoittaa ylöspäin eli *samaan suuntaan kuin mihin piste B liikkuu*. Koska voima on liikkeen suuntaisen, sen tekemä työ on *positiivinen* eli systeemissä B energia kasvaa. Jouseen kohdistuvan voiman y -komponentti $\bar{F}_{y,B \rightarrow jousi}$ puolestaan osoittaa alaspäin eli *vastakkaiseen suuntaan kuin mihin jousen pää liikkuu*. Niinpä tämä voima tekee jouseen ja siis systeemissä A *negatiivista* työtä, jolloin systeemin energia vähenee. Tässä tapauksessa systeemissä B energian muutos ilmenee siinä, että *jousi vetää pistettä A hitaampaan vauhtiin*. Jousi välittää siihen kohdistuneen voiman pisteeseen A, ja tämä voima *vetää pistettä A hitaampaan vauhtiin*, jolloin systeemissä A liike-energia vähenee. Lisäksi koska piste A liikkuu ylöspäin hitaanmin kuin piste B, pallojen välisen jousen venymä pienenee ja siksi myös jousen potentiaalienergia vähenee, mikä niinikään vähentää systeemissä A kokonaisenergiaa. Jousen energian vähennyminen johtuu siitä, että voima $\bar{F}_{y,B \rightarrow jousi}$ tekee jouseen enemmän negatiivista työtä kuin voima $\bar{F}_{y,A \rightarrow jousi}$ tekee positiivista työtä,

Kuva 15.13: Köydessä kulkevassa aallossa energia siirtyy köyden osien tehessä toisiinsa työtä. Kuvassa köysi on jaettu systeemeihin A ja B, ja systeemi A tekee systeemiin B positiivista työtä aallon liikkussa.

(a) Köyden osat systeemien rajalla.



(b) Osien A ja B sekä näiden välisen jousen vapaakkappalekuvat.



jolloin jouseen tehty kokonaistyö on negatiivinen. Kaikkiaan energia kulkee köydessä aaltopulssin lükkeen suuntaan.



15.18 Toista kuvassa 15.13 esitettävä päätely, kun aaltopulssin huippu on juuri ohittanut pisteen B. Tekevätkö voimat näissä tilanteissa positiivista vai negatiivista työtä (i) pisteeseen A, (ii) jouseen, (iii) pisteeseen B? Siirrykö tällöin energiää systeemien A ja B välillä?

Virtaava energia

Aaltopulssissa aallon energia on keskittynyt pulssiin, jolloin sen siirtyminen on helppo havaita. Sinimuotoinessa aallossa energia liikkuu aallon mukana väliaineen eri osien tehessä työtä toisiinsa. Oleellinen ero pulssin ja sinimuotoisen aallon välillä on kuitenkin se, että pulssissa energia on keskittynyt pieneen alueeseen kun taas sinimuotoisessa aallossa energia on levittäytynyt koko aallon pituudelle. Niinpä sinimuotoinen aalto pystyy siirtämään energiota jatkuvana virtana, ja aallon kuljettaman energian määrä on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan aaltoa tuotetaan ja vastaanotetaan. Tutkitaan siis vielä, millainen on sinimuotoinen aallon kuljettama *teho* eli aallon siirtämä energia aikayksikköä kohden.

Kuvassa 15.13 (b) esitetty voimien tekemän työn analyysi perustui vain köyden osien dynamiikkaan, eikä päätelyssä mitenkään oletettu, että kyseessä on aaltopulssi. Aivan yhtä hyvin kyseessä olisi voinut olla esimerkiksi sinimuotoinen aallon aallonharja, joten päätely toimii myös sinimuotoisten aaltojen kuljettaman energian kuvauksessa. Jatketaan siis kuvassa esitetyn tilanteen analyysiä. Kuvassa pisteeseen B tekee työtä voima $\bar{F}_{\text{jousi} \rightarrow B}$, ja tämän voiman tekemän työn teho on voiman ja nopeuden pistetulo,

$$P = \bar{F}_{\text{jousi} \rightarrow B} \cdot \bar{v}_B. \quad (15.40)$$

Koska piste B liikkuu pystysuunnassa, vain voiman pystykomponentti tekee työtä, joten tehon voi ilmaista vektoreiden *y*-komponenttien tulona

$$P = F_{y,\text{jousi} \rightarrow B} v_{y,B}. \quad (15.41)$$

Tämän tehon voimme laskea käyttäen hyväksi aallon nopeutta johdettaessa saatua tulosta. Tällöin nimittäin päätelimme, että köyden osaan kohdistuva voima riippuu sekä köyden pystysuuntaisesta nopeudesta että köydessä kulkevan aallon nopeudesta yhtälön (15.6) mukaisesti. Tällöin käytimme köyden tarkastelupisteelle symbolia K, mutta jos korvaamme sen tässä käytettyllä symbolilla B, yhtälö saa muodon

$$F_{y,\text{jousi} \rightarrow B} = \mu v_{y,B} v_{x,\text{aalto}}, \quad (15.42)$$

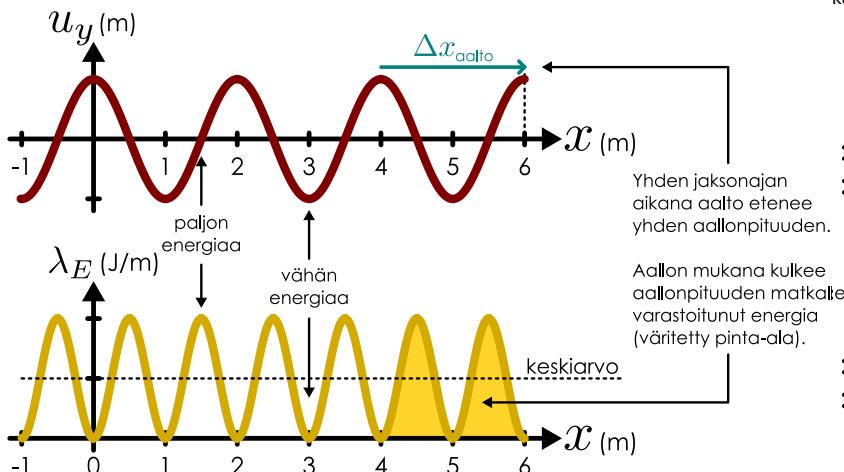
ja näin ollen aallon kuljettama teho on

$$P = \mu v_{y,B}^2 v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.43)$$

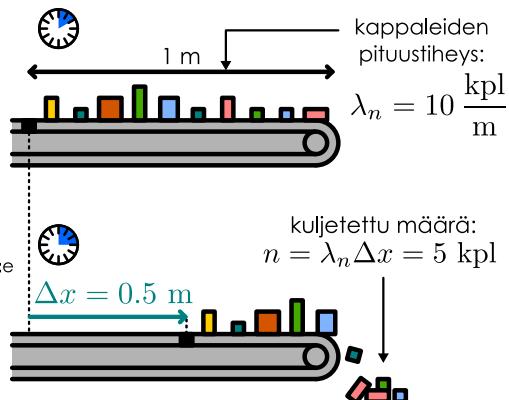
Edellinen päätely perustui vain köyden osien välisen vuorovaikutusten tarkasteluun, joten tulos pätee riippumatta aallon muodosta. Jos kuitenkin tiedämme köydessä kulkevan aallon muodon eli aalofunktion, voimme laskea köyden osien pystysuuntaisen nopeuden sen avulla. Jokaisen köyden pisteen pystysuuntainen nopeus

Kuva 15.14: Sinimuotoisen mekaanisen aallon aaltofunktio ja energiatihes. Aallon liikkumessa energian liikkuu, ja siirtynen energian määrä saadaan aallon kulkeman matkan ja tämän matkan sisältämän energian tulona.

(a) Aallon sisältämä kokonaisenergia on energiatiheden kuvaajan pinta-ala.



(b) Analogia: liukuhihnan siirtämiä kappaleiden määrä on kappaleiden tiheyden ja hihnan siirtymän tulon.



Saadaan nimitään sen y -koordinaatin eli poikkeamakoordinaatin u_y derivaattana ajan suhteeseen. Sinimuotoinen aallon tapauksessa aaltofunktio on muotoa $u_y = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$, joten köyden pystysuuntainen nopeus pisteessä x hetkellä t on

$$v_{y,B}(x, t) = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.44)$$

Köydessä kulkeva teho riippuu siis ajasta ja paikasta lausekkeen

$$P(x, t) = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) v_{x,aalto} \quad (15.45)$$

mukaisesti. Tämä tulos tarkoittaa sitä, että energiota ei siirry aallon jokaisessa kohdassa yhtä nopeasti. Syystä tähän on se, että **energia on keskittyntä aallossa tiettyihin kohtiin**. Ne aallon kohdat, joissa energiota on paljon, myös siirtävät sitä suurella teholla. Kohdat, joissa energiota on vähän, eivät voi kuljettaa energiota suurella teholla, koska niissä ei ole energiota mitä kuljettaa.

Köydessä kulkevassa mekaanisessa aallossa potentiaalienergiaa on eniten kohdissa, joissa köysi on venynyt eniten. Nämä ovat ne kohdat, joissa köyden muoto muodostaa jyrkimmän laskun tai nousun, ja sinimuotoinen aallon tapauksessa näissä kohdissa köysi on läheillä tasapainoasemansa. Liike-energiaa aallolla on puolestaan eniten kohdissa, joissa köysi liikkuu pystysuunnassa suurimmalla vauhdilla. Mutta myös nämä ovat juuri ne pisteet, joissa köysi joko nousee tai laskee jyrkästi. Niinpä köydessä kulkevan mekaanisen sinimuotoinen aallon kaikki energia on keskittynyt kohtiin, joissa köyden pisteet eivät merkittävästi poikkeaa tasapainoasemasta. Tätä on havainnollistettu kuvassa 15.14 (a), jossa on piirretty köydessä kulkevien aaltojen aaltofunktioita sekä näihin aaloihin sitoutunut **energatiheys** (tai tarkemmin pituusenergatiheys) λ_E eli **aaltoon sitoutunut energian määrä pituusyksikköö kohden**. Kuvasta nähdään, että energiatihes ja sen myötä siirtynen energian teho on suurin pisteissä, joissa aaltofunktio leikkaa x -akselin eli pisteissä, joissa köysi on tasapainoasemassa, koska sinimuotoinen aalto on jyrkin näissä pisteissä.

15.19 (a) Köydessä kulkee sinimuotoinen aalto. Valitaan köydestä yksi tarkastelupiste. Missä tarkastelupisteen väriahelyn vaiheessa pisteessä on paljon (i) potentiaali- ja (ii) liike-energiaa? (b) Jousesta roikkuva kappale muodostaa harmonisen väriahtelijän. Missä väriahelyn vaiheessa sillä on paljon (i) potentiaali- ja (ii) liike-energiaa?

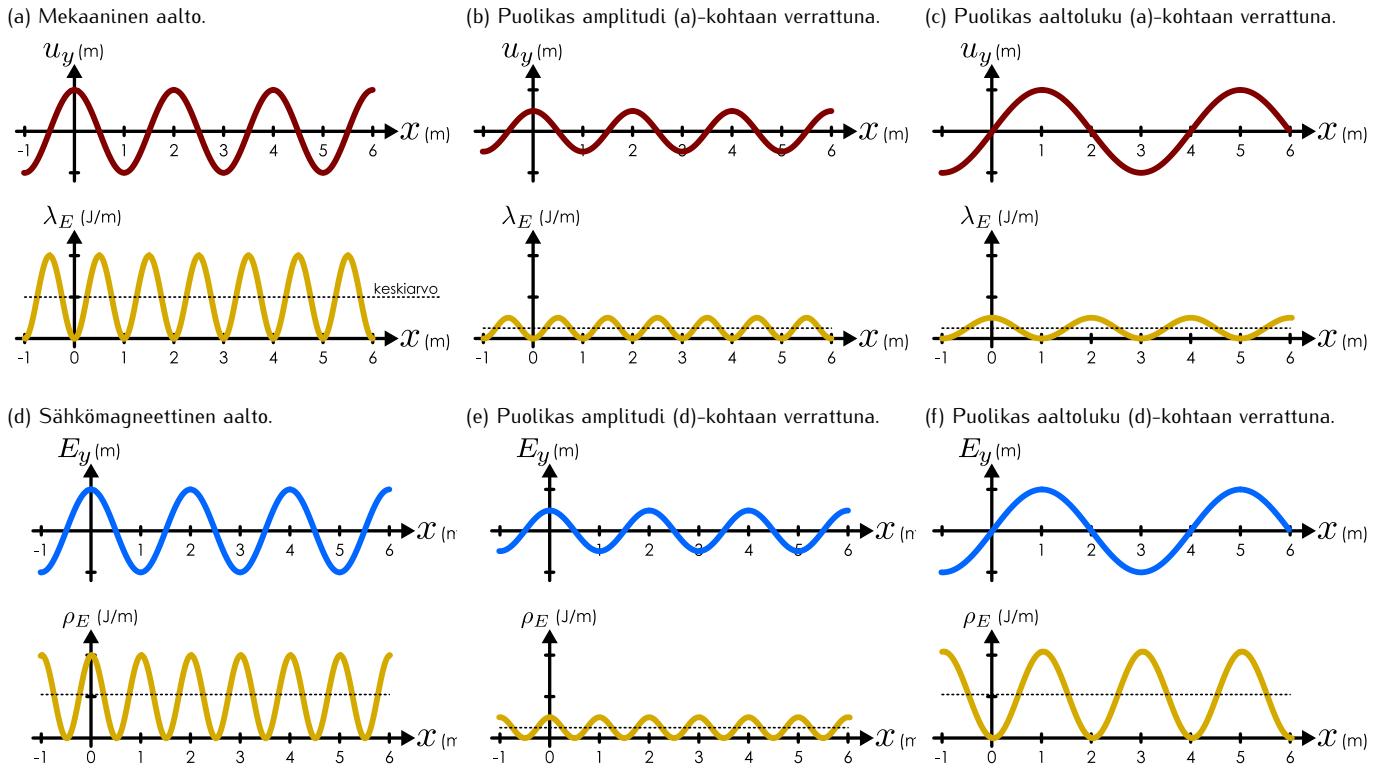
Jos aallon energiatihes tarkastelupisteessä x on $\lambda_E(x)$, aalton on sitoutunut välille $x \dots x + dx$ energiata kaikkiaan

$$dE = \lambda_E dx. \quad (15.46)$$

Pidemmälle välille sitoutuneen energian kokonaismäärä saadaan tämän lausekkeen integraalina eli graafiseksi λ_E -kuvaajan rajaamana pinta-alana. Kuvassa 15.14 (a) onkin esitetty yhden aallonpituisuuden matkalle sitoutuneen energian määrä energiatiheden kuvaajassa keltaisella väritettynä pinta-alana.

Vaikka energiatihes vaihtelee sinimuotoinesti, sen **keskiarvo** on sinifunktion symmetrisyden perusteella täsmälleen puolet maksimista. Tämä keskiarvo on piirretty kuvaan 15.14 (a) katkoviivalla, ja selvästikin tämän

Kuva 15.15: Mekaanisen aallon energia on verrannollinen amplitudin ja aaltoluvun neliöön. Sähkömagneettisen aallon energia on verrannollinen amplitudin neliöön mutta ei riipu aaltoluvusta.



viivan alle jäävä pinta-ala on keskimäärin sama kuin keltaisen kuvaajan rajaama pinta-ala. Merkitsemme tästä keskimääräistä energiatihyyttä $\langle \lambda_E \rangle$, jolloin yhden aallonpituuuden matkalle on sitoutunut energiaa määrä

$$E_\lambda = \langle \lambda_E \rangle \lambda. \quad (15.47)$$

Toisaalta aalto kulkee yhden jaksonajan kuluessa juuri yhden aallonpituuuden matkan, joten se kuljettaa jaksonajan aikana täsmälleen näin paljon energiota. Aallon kuljettaman energian *keskimääräinen teho* on näin ollen kuljetetun energian $\Delta E = E_\lambda$ ja tähän käytetyn ajan $\Delta t = T$ suhde,

$$P_{\text{keskiarvo}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \langle \lambda_E \rangle \frac{\lambda}{T}. \quad (15.48)$$

Mutta sinimuotoisen aaltoliukkeen perusyhdistelön mukaan aallonpituuuden ja jaksonajan suhde on aallon nopeus, joten aallon siirtämän energian *teho on energiatihyyden ja aallon nopeuden tulo*

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.49)$$

Tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että aalto kuljettaa energiota sitä tehokkaammin, mitä nopeammin aalto kulkee ja mitä enemmän energiota aalto sisältää.

Samanlainen tulos nähtiin luvussa 11, jossa tutkimme sähkövirran mukana siirtymisen varauksen määriä. Tällöin päätelimme, että aikayksikössä siirtymisen varauksen määriä on suoraan verrannollinen varauksenkuljetajien määriään pituusyksikköä kohden sekä näiden vaellusnopeuteen. Täsmälleen samalla tavalla aallon mukana siirtymisen energian määriä on verrannollinen aallon sisältämän energian määriään pituutta kohden sekä tämän energian kulkunopeuteen.

Edellä johdetussa aallon tehon lausekkeessa (15.45) energiatihyyttä edustaa termi

$$\lambda_E = \mu \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.50)$$

Kuten edellä graafisesti perusteltiin, tässä esiintyvän sinin neliön keskiarvo yhden jakson aikana on puolikas

$$\langle \sin^2(kx) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2}, \quad (15.51)$$

joten aallon keskimääräinen energiatihyys on

$$\langle \lambda_E \rangle = \mu \omega^2 A^2 \langle \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2. \quad (15.52)$$

Keskimääräinen aallon kuljettama teho on siten

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{x,\text{aalto}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v_{x,\text{aalto}}. \quad (15.53)$$

Teho riippuu siis köyden pituustiheydestä sekä aallon kulmataajuudesta, amplitudista ja etenemisnopeudesta.



15.20 (a) Yllä päätteliin, että koska pituuden suhteen lasketti keskiarvo $\langle \sin^2(kx) \rangle = 1/2$, pätee myös $\langle \sin^2(kx - \omega t + \phi_0) \rangle = 1/2$. Selitä, miksi tekijät $-\omega t + \phi_0$ eivät vaikuta tulokseen. (b) Laske integraali (15.51).

Tässä johdettu mekaanisen aallon energiatihleys (15.52) on samantyyppinen lauseke kuin harmonisen väähelijän energia $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$, sillä pituustiheys μ on köyden massa pituutta kohti. Sekä harmonisen väähelijän että harmonisen aallon energia ovat suoraan verrannolliset kulmataajuuden ja amplitudin neliöön. Näin siksi, että sekä väähelijän nopeus että sen elastisten osien venymä ovat näihin suoraan verrannolliset, ja liike-energia on puolestaan verrannollinen nopeuden neliöön ja potentiaalienergia venymän neliöön. Tätä energiatihyyden riippuvuutta aallon muodosta on havainnollistettu kuvassa 15.15 (a)–(c), jossa on piirretty aaltofunktioita ja näiden energiatihyyksiä eri amplituilla ja aaltoluvuilla. Kun amplitudi tai aaltoluku puolittuu (kuvat (b) ja (c)), aallon sisältämä energia putoaa neljäsosaan. Aalloissa (b) ja (c) on kuitenkin keskenään yhtä paljon energiaa.

Sama ajatus toimii kaikilla aalloilla: aallon kuljettama teho aallon kulkusuuntaan on aallon energiatihyyden ja nopeuden tulo. Esimerkiksi sinimuotoisten sähkömagneettisten aaltojen keskimääräinen energiatihleys tilavuusyksikköä kohden on $\langle \rho_E \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ missä E on sähkökentän väähelyamplitudi. (Tulos johdetaan luvussa 16.4.) Tämä energiatihleys ei riipu kulmataajuudesta kuten mekaanisen aallon energiatihleys, koska sähkökentän energia ei ole mekaanista liike- ja potentiaalienergiaa. Tämäkin energiatihleys on silti *suoraan verrannollinen aallon amplitudin neliöön*. Energian riippuvuus amplitudin neliöstä onkin harmonisten väähelijöiden ja aaltojen yleinen, tärkeä ominaisuus.

Kuvia 15.15 (d)–(f) on piirretty sähkömagneettisten aaltojen energiatihyyksiä. Nämä ovat erilaiset vastaan mukaanlaittavat mekaanisiin aaloihin verrattuna. Sähkömagneettisessa aallossa energia on keskittynyt alueisiin, joissa sähkökenttä on voimakas — siis aallonharjoihin ja -pohjiin, toisin kuin mekaanisissa aalloissa. Kuvan (f) energiatihleys on myös yhtä suuri kuin kuvassa (d), koska energia ei riipu aallon aaltoluvusta tai taajuudesta.



15.21 Tutki kuvan 15.15 aaltofunktioita. Mikä aaltofunktion ominaisuus on köydessä kulkevassa aallossa suurimmillaan, kun aallon energiatihleys on maksimissaan? Onko tämä ominaisuus kuvissa (b) ja (c) sama energiatihyyden maksimikohdissa? Entä mikä aaltofunktion ominaisuus on sähkömagneettisessa aallossa suurimmillaan energiatihyyden ollessa suurimmillaan? Onko tämä ominaisuus kuvissa (d) ja (f) sama energiatihyyden maksimikohdissa?

esimerkki 15.3

Sinimuotoisen aaltofunktion energia

Köyden pituus on 30 m ja sen massa on 4.5 kg. Köysi vedetään suoraksi 50 N voimalla. Köyden päättä heilutetaan nün, että pään poikkeamaa tasapainosta kuvaan funktio $u_{y,\text{pää}}(t) = (2.0 \text{ cm}) \cos(2\pi t / 0.2 \text{ s} - \pi/2)$. Mikä on köyteen syntynyt aallon pituusenergiatihleys ja sen kuljettama teho?

TILANNE Tilanne on sama kuin esimerkissä 15.2. Aallon ominaisuudet laskettiin jo siellä. Erityisesti aallon amplitudi on $A = 0.02 \text{ m}$, pituustiheys $\mu = 0.15 \text{ kg/m}$, kulmataajuus $\omega = 31.4 \text{ s}^{-1}$ ja nopeus $v_{\text{aalto}} = 18.3 \text{ m/s}$.

SUUNNITELMA Köydessä kulkevan aallon keskimääräinen energia pituusyksikköä kohti on

$$\langle \lambda_E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 = 0.030 \text{ J/m}. \quad (15.54)$$

ja sen kuljettama teho on tämän pituusenergiatihyyden sekä aallon nopeuden tulo,

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{\text{aalto}} = 0.54 \text{ W}. \quad (15.55)$$

ARVIOINTI Aallon amplitudi on 2 cm, ja jaksonaika 0.2 s, joten köyden pisteen kulkevat puolen jakson aikana 4 cm ajassa 0.1 s. Köyden kunkin osan keskimääräinen nopeus on siis noin 0.4 m/s. Metrin mittaisen köyden osan massa on 0.15 kg, joten sen liike-energia on noin $K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.012 \text{ J}$. Kaikkiaan aallossa on metrillä energiota $E = \langle \lambda_E \rangle \Delta x = 0.030 \text{ J}$, mikä on likimain kaksinkertainen lukema liike-energiaan verrattuna. Näin pitää ollakin, koska keskimäärin puolet mekaanisen siniallon energiasta on potentiaalienergiaa ja puolet liike-energiaa.



15.22 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä aaltojen kuljettamasta energiasta. Millaista energiota kuljettaa mekaaninen aalto? Entä sähkömagneettinen aalto? Mikä on energiatihleys ja mistä aallon ominaisuuksista se riippuu? Miten lasket aallon kuljettaman tehon?

15.5 Aaltojen superpositio

Etenevä aalto kuten köydessä liikkuva aaltopulssi muistuttaa hieman tasaisella nopeudella liikkuvaa kappaletta, mutta aaltojen ja kappaleiden tai hiukkasten käytätymisessä on eroja. Aallot eivät esimerkiksi kuljeta ainetta kuten hiukkaset. Erityisen tärkeä aaltojen ominaisuus on se, että *monta aaltoa voi olla samaan aikaan samassa paikassa*. Atomit ja niistä koostuvat kappaleet eivät voi kulkea toistensa lävitse, mutta aalloilla tälläista rajoitusta sen sijaan ei ole. Useimmissa väliaineissa aaltoja voi olla päälekäin kuinka monta tahansa, ja tällöin aallot liikkuvat toisistaan riippumatta. Tätä ominaisuutta kutsutaan **aaltojen superpositioksi**.

Kohtaavat aaltopulssit

Vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot eivät vuorovaikuta kulkiessaan toistensa läpi, jolloin erottuaan aallot palaavat takaisin alkuperäisiin muotoihinsa. Kun väliaineessa kulkee useita aaltoja, ne aiheuttavat jokaisessa väliaineen pisteessä poikkeman, joka on yhtä suuri kuin jos kunkin aallon yksinään aiheuttama poikkeama laskettaisiin yhteen. Toisin sanoen jos aalto A saisi yksinään väliaineen poikkeamaan tasapainosta tarkastelepisteessä määräni $u_{y,A}$ ja aalto B määräni $u_{y,B}$, näiden aaltojen osuessa tähän pisteeseen samanaikaisesti pisteen poikkeama tasapainosta onkin $u_{y,A} + u_{y,B}$. Koska tämä pätee jokaisessa pisteessä ja jokaisena ajan hetkenä, voidaan superpositiossa olevien aaltojen yhteen aaltofunktio kirjoittaa yksinkertaisesti summana

$$u_{y,\text{superpositio}}(x, t) = u_{y,A}(x, t) + u_{y,B}(x, t). \quad (15.56)$$

Jos aaltoja on useita, niiden kaikkien aaltofunktiot lasketaan samaan tapaan yhteen.

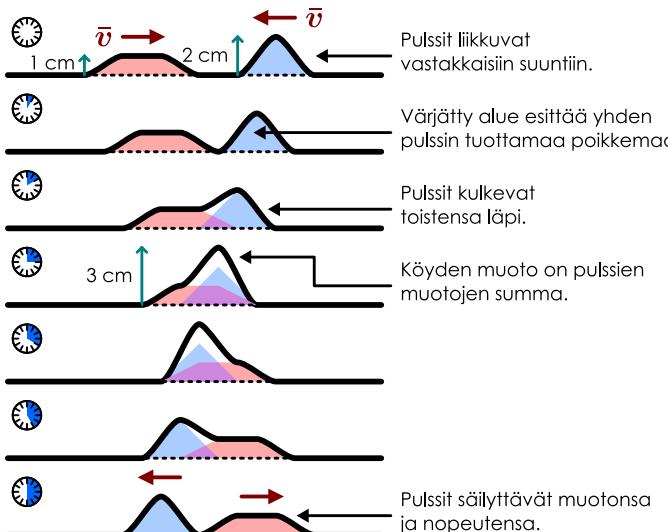


15.23 Köydessä kulkee kaksi tasakylkisen kolmion muotoista aaltopulssia kohti toisiaan vauhdilla 0.1 m/s. Yhden pulssin korkeus on 10 cm, kannan leveys 20 cm ja huippu aluksi pisteessä $x = 0.1$ m. Toisen pulssin korkeus on 5 cm, kannan leveys 40 cm ja huippu aluksi pisteessä $x = 1.0$ m. Mikä on pisteen $x = 0.5$ m poikkeama tasapainosta hetkillä $t = 3, 4, 5$ s?

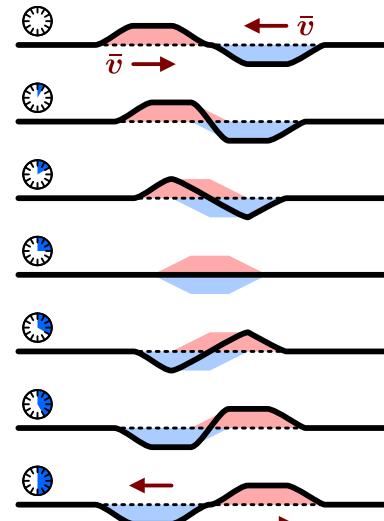
Tätä periaatetta on havainnollistettu kuvassa 15.16 (a), jossa kaksi köydessä vastakkaisiin suuntiin kulkevaa aaltopulssia kohtaa. Koska pulssit kulkevat samassa väliaineessa, niillä on sama vauhti. Toinen pulsseista on puolisunnikkaan ja toinen kolmion muotoinen. Puolisunnikkaan muotoisen aallon korkeus on 1 cm ja kolmion 2 cm. Pulssuja on selkeyden vuoksi kuvattu myös omilla väreillään. Pulssien kohdattessa ne kulkevat toistensa läpi tai "päälekäin", jolloin köyden muoto on pulssien muotojen summa. Koska kumpikin pulssi on tässä kuvassa köyden gläpuolella, ne saavat köyden pisteen poikkeamaan tasapainosta samaan suuntaan. Nämä pulssien huippujen ollessa samassa pisteenessä ne aiheuttavat köydessä poikkeaman, jonka maksimikorkeus on 3 cm. Tällöin aaltojen sanotaan *vahvistavan* toisiaan, millä siis tarkoitetaan yksinkertaisesti sitä, että nämä kaksi aaltoa saavat yhdessä köyden poikkeamaan tasapainosta enemmän kuin yksinään. Aallot eivät kuitenkaan vuorovaikuta, ja niinpä ohittuaan toisensa ne palaavat takaisin alkuperäiseen muotoonsa.

Kuva 15.16: Kahden vastakkaisiin suuntiin kulkevan aaltopulssin superpositio köydessä. Aallot kulkevat toistensa läpi, jolloin köyden muoto on aaltojen muotojen summa. Eroissa pulssit saavat jälleen alkuperäiset muotonsa.

(a) Kaksi aaltopulssia kohtaa.



(b) Vastakkaisilla puolilla kulkevat pulssit hetkellisesti hävittävät toisensa.



Kuvassa 15.16 (b) on samanlainen tilanne, mutta tässä tapauksessa kohtaavat pulssit kulkevat köyden eri puolilla. Vasemmalta saapuva pulssi aiheuttaa köydessä poikkeaman ylöspäin kun taas oikealta tuleva pulssi saa köyden pisteet siirtymään alas päin. Nämäkin poikkeamat summautuvat yhteen pulssien kulkissa toistensa läpi, jolloin aallot *kumoavat* toisensa. Tässä kuvassa aaltopulssit ovat yhdenmuotoiset, joten pulssien kohdatessa on itse asiassa hetki, jolloin köysi on täysin suora. Köyden pisteet ovat tällöin kuitenkin liikkeessä, joten köysi ei jää suoraksi vaan pulssit ilmestyyvät jälleen ja jatkavat liikettäään aivan kuin toista pulssia ei olisi ollutkaan. Vastakkaisetkaan aaltopulssit eivät siis tuhoa toisiaan, vaan aaltojen kumoutuminen on vain hetkellistä. Köyden muoto voidaan minä tahansa hetkenä määrittää laskemalla siinä etenevien aaltojen aaltofunktiot yhteen.



15.24 Mitä tapahtuu aaltojen energialle kuvan 15.16 (b) keskimmäisessä tilanteessa, jossa aallot kumoavat toisensa?

Sinimuotoisten aaltojen superpositio

Kuten jaksollisen liikkeen yhteydessä luvussa 14 opimme, kaikki jaksollinen liike voidaan kuvata harmonisten väärähtelyjen yhdistelmänä eli matemaattisesti kaikki jaksolliset funktiot voidaan kirjoittaa harmonisten eli sinimuotoisten funktioiden summana eli *Fourier-sarjana*. Sinimuotoisten aaltojen aaltofunktiot ovat niemensä mukaisesti sinimuotoisia ja aaltojen superpositioperiaatteen mukaan päälekäisten aaltojen muodostaman aallon aaltofunktio saadaan laskemalla alkuperäisten aaltojen aaltofunktiot yhteen, joten Fourier-sarjoja voidaan soveltaa myös aaltojen kuvamiseen. Erityisesti siis *mikä tahansa jaksollinen aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen summana*

$$u_y(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x - \omega_n t) + b_n \sin(k_n x - \omega_n t)]. \quad (15.57)$$

Vaihtoehtoisesti tämä sarja voidaan esittää esimerkiksi muodossa

$$u_y(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \phi_n). \quad (15.58)$$

Harmonisten väärähtelyjen tapauksessa tarkasteltiin ajan funktioita, jolloin Fourier-sarjassa summattiin harmonisia funktioita, joilla oli eri kulmataajuudet. Sinimuotoiset aallot ovat harmonisia funktioita sekä ajan että paikan suhteen, joten niiden Fourier-sarjassa lasketaan yhteen sinimuotoisia aaltoja, joilla on eri kulmataajuudet ja aaltoluvut. Lisäksi jos esimerkiksi aallon aaltoluku tunnetaan, aallon kulmataajuus voidaan tavallisesti päättää sen perusteella. Niinpä aaltojen Fourier-sarjoissa summattavien aaltojen ominaisuudet kuvataan tavallisesti aaltolukujen k_n ja Fourier-kertoimien a_n, b_n avulla.

Kuvassa 15.17 on esitetty sinimuotoisten aaltojen Fourier-sarjan periaate. Kuvassa (a) on esitetty kaksi harmonista aaltoa (punainen ja sininen) sekä näiden superpositio (musta), joka selvästiään ei ole sinimuotoinen. Kuvassa (b) on analysoitu summattavien aaltojen ominaisuudet. Aallot kulkevat origon kautta, joten niitä kuvaa sinifunktio. (Kosinifunktio saa origossa arvon 1). Lisäksi aaltojen kuvaajat laskevat alas päin origosta positiiviseen x -suuntaan kuljettaessa, joten niitä kuvaa sinifunktio, jolla on negatiivinen kerroin. Aaltojen Fourier-kertoimet ovat siis negatiiviset. Punaisen aallon amplitudi on noin 1.3 m, joten aallon Fourier-kerroin on $b_1 = -1.3$ m. Vastaavasti sinisen aallon amplitudi on noin 0.7 m ja sen Fourier-kerroin on siis $b_2 = -0.7$ m. Koska kuvan summassa käytetään vain sinifunktioita, sarjassa (15.57) esitetyt kertoimet a_n ovat kaikki nollia.

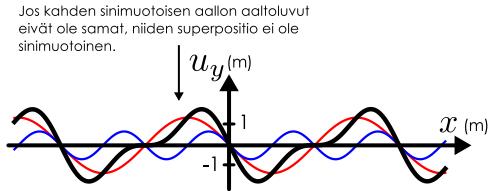
Myös aaltojen aaltoluvut voidaan lukea kuvasta (b), johon on merkitty 2π -pituinen matka. Aaltoluku laskee montako aallonpituitta tälle matkalle mahtuu, ja kuvan perusteella punaisella aallolla merkityllä alueella on vain kolme neljäsosaa yhdestä aallosta, joten aallon aaltoluku on $k_1 = 0.75 \text{ m}^{-1}$. Sinisellä aallolla samalle pituudelle mahtuu yksi kokonainen ja yksi puolikas aalto, joten tämän aallon aaltoluku on $k_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$.

Kuvassa (c) Fourier-kertoimet on esitetty kuvaajana, jonka vaaka-akselina on aaltoluku k ja pystyakselina Fourier-kerroin b . Koska aaltoa on vain kaksi, kuvaajassa on vain kaksi pistettä. Pisteet on yhdistetty k -akseliin viivalla selkeyden vuoksi helpottamaan pisteen k -arvojen lukemista — näillä pystyviivoilla ei ole mitään erityistä merkitystä, ja ne voisi aivan hyvin jättää poiskin. Punainen piste kertoo punaisella piirretyn aallon ominaisuudet: $k_1 = 0.75 \text{ m}^{-1}$ ja $b_1 = -1.3$ m. Sininen piste esittää puolestaan sinistä aaltoa: $k_2 = 1.5 \text{ m}^{-1}$ ja $b_2 = -0.7$ m. Kyseessä on siis aivan samanlainen kuvaaja kuin harmonisen väärähtelyn Fourier-sarjojen yhteydessä kuvassa 14.19 esitelty graafinen esitys. Erona on vain se, että nyt Fourier-kuvaajan vaaka-akselina on aaltoluku, kun harmonisen väärähtelyn tapauksessa vaaka-akselina käytetään kulmataajuutta tai taajuutta.

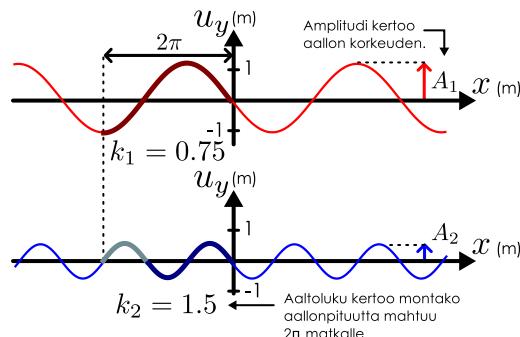
Kuvissa (d), (e) ja (f) on esitetty viiden sinimuotoisen aallon superpositio ja Fourier-esitys. Tässä esimerkissä kaikkien aaltojen aaltoluvut ovat punaisen aallon aaltoluvun monikertoja, joten aalloilla on sama jaksollisuus.

Kuva 15.17: Mielivaltainen aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Kun tässä esitettyyn superpositioon lisätään yhä enemmän aaltoja, superpositio alkaa muistuttaa yhä lähemmin sahalaita-aaltoa.

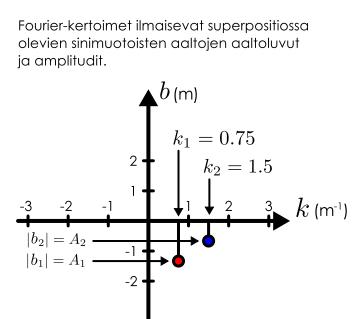
(a) Kahden sinimuotoisen aallon (punainen, sininen) superpositio (musta).



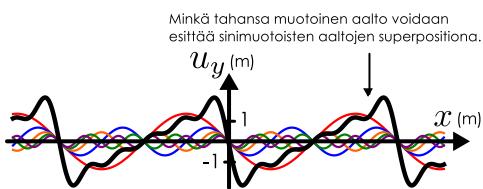
(b) Superposition muodostaneet aallot erikseen.



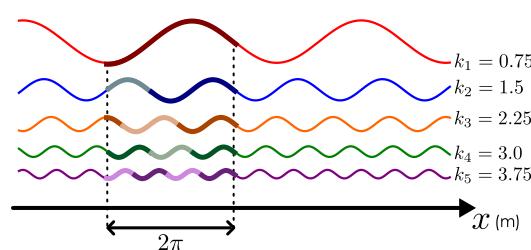
(c) Fourier-kertoimet.



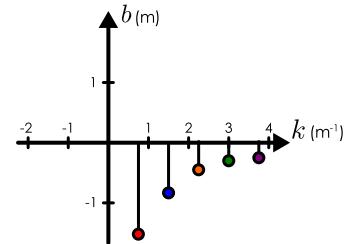
(d) Viiden aallon superpositio.



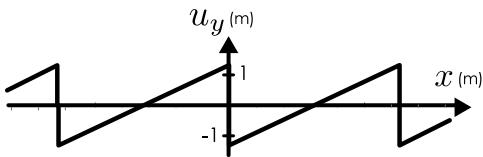
(e) Superposition muodostaneet aallot erikseen.



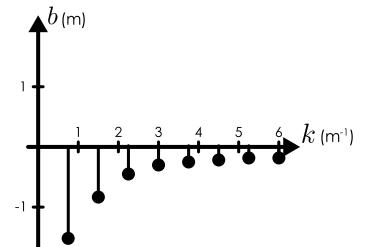
(f) Fourier-kertoimet.



(g) Äärettömän monen aallon superpositio.



(h) Fourier-kertoimia.



Punaisella piirretyn aallon aallonpituuus on $\lambda_1 = 2\pi/k_1 \approx 8.4$ m, sinisen puolel tästä, oranssin kolmannes, jne. Niinpä aaltojen superpositiollaakin on sama jaksollisuus, ja sen aallonpituuus on sama kuin punaisen aallon.

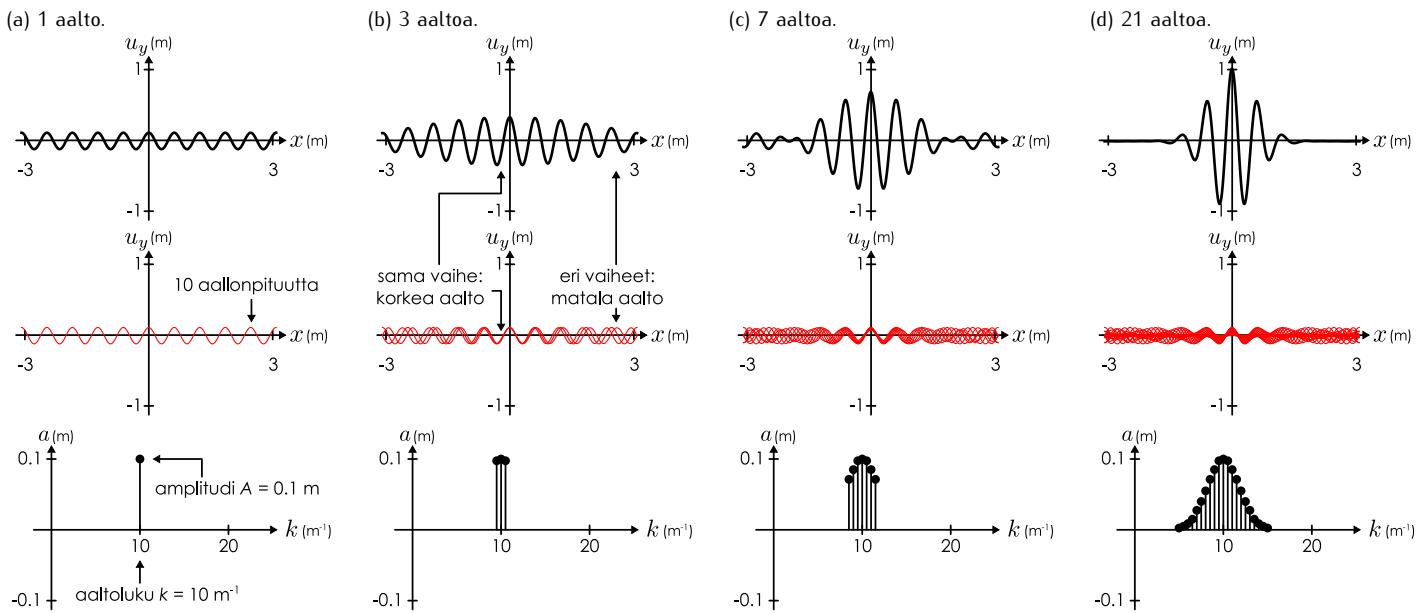
Kuvassa (g) on esitetty raja-arvo, joka saavutetaan, kun aaltoja lasketaan yhteen ääretön määrä. Aallon Fourier-kertoimet on puolestaan esitetty kuvaajassa (h). Tässä tapauksessa superpositio muodostaa niin sanotun sahalaita-aallon, jossa aallot muodostavat teräviä kolmioita. Oleellista esimerkissä ei ole kuitenkaan se, että näiden kyseisten aaltojen summana saadaan näin erikoisen näköisen aalto vaan se, että *valitsemalla harmoniset aallot sopivasti, niiden summana voidaan muodostaa millainen aalto tahansa*.

15.25 Erään aallon Fourier-kertoimet ovat $a_n = 0$, $b_n = 1/n$, kun n on pariton, ja $b_n = 0$, kun n on parillinen. Aallon aaltoluku on $k_1 = 1 \text{ m}^{-1}$. Piirrä tietokoneella kuva tästä aallosta hetkellä $t = 0$ s, kun Fourier-sarjaan lasketaan mukaan esimerkiksi 5, 7 ja 9 ensimmäistä nollasta poikkeavaa termiä. Millaista muotoa aaltojen superpositio näyttää lähestyvän, kun summaan otetaan myös enemmän aaltoja?

Harmonisten eli sinimuotoisten aaltojen käytökkelpoisuus ei kuitenkaan jää tähän, sillä myös *epäjaksoiset* aallot kuten aaltopulssit voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Tässä on myös syy sinimuotoisten aaltojen tärkeyteen aalto-opissa: Sinimuotoisilla aalloilla on täsmällinen taajuus, kulmataajuus, aallonpituuus ja aaltoluku, joiden kautta aallon ominaisuudet voidaan kuvata, ja tästä johtuen kaikista aalloista usein juuri sinimuotoisten aaltojen käytäytyminen on helpoin kuvata. Koska *kaikkien* aaltojen voidaan ajatella koostuvan sinimuotoisista aalloista eli *harmonisista komponenteista*, voimme oppia ymmärtämään kaikkien aaltojen käytäytymistä tutkimalla pelkästään sinimuotoisia aaltoja.

Erityisesti aaltopulssien voi ajatella koostuvan sinimuotoisista aalloista. Tätä tulosta on demonstroitu kuvassa 15.18. Kuvasarjassa esitetään harmonisten aaltojen superposition muuttuminen, kun yhteen lasketaan

Kuva 15.18: Aaltopulssin esitys sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Mitä enemmän aaltoja summataan yhteen, sitä tarkemmin rajattu aaltopulssi saadaan aikaan. Jokaisessa kuvassa on esitetty superpositio (musta käyrä), superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot (punaiset käyrät) sekä näiden aaltojen Fourier-kertoimet (mustat pisteet).



yhä enemmän aaltoa. Kussakin kuvassa ylin kuvaaja esittää superpositiona saatavaa aaltoa paikan funktiona hetkellä $t = 0$, pystysuunnassa keskimmäisessä kuvaajassa on piirretty päälekäin superpositiossa olevien harmonisten aaltojen aaltofunktioit, ja alimmassa kuvaassa on aallon Fourier-kertoimien kuvaaja.

Kuvassa (a) on vain yksi aalto, joten aallon kuvaaja on puhtaasti sinimuotoinen. Aallon Fourier-kuvaajassa on vain yksi piste, jonka korkeus on sama kuin aallon amplitudi, $a = A = 0.1 \text{ m}$, ja jonka paikka k -akselilla kertoo aallon aaltoluvun, $k = 10 \text{ m}^{-1}$. Tämä näkyy aaltofunktion kuvaajassa siten, että välillä $-3.1 \text{ m} \dots 3.1 \text{ m}$ on kymmenen aallonpituuutta. Aallon aallonpituuus on siis noin 0.63 m.

Kuvassa (b) superpositiossa on kolme sinimuotoista aaltoa, joiden aaltoluvut ovat hyvin lähellä toisiaan. Niinpä aaltojen aallonpituedet ovat myös varsin lähellä toisiaan. Origossa aallot ovat samassa vaiheessa, joten ne vahvistavat toisiaan, mutta koska aalloilla on hiukan erilaiset aallonpituedet, aallot ovat kaukana origosta eri vaiheissa eivätkä enää vahvista toisiaan. Niinpä superpositioaallon amplitudi on origossa suurimmillaan ja pienenee kuljetaessa origosta etäälle. Kyseessä on siis samantyypinen ilmiö kuin huojunta (kuva 14.17).

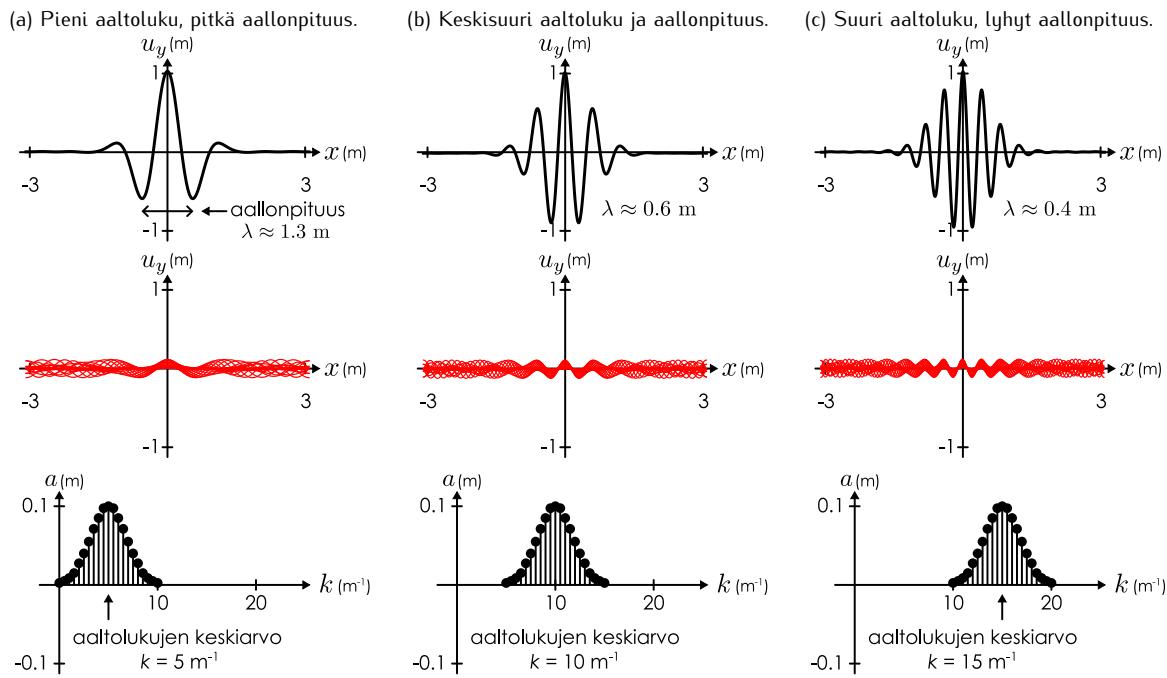
Kuvissa (c) ja (d) aaltoon lisätään yhä enemmän harmonisia komponentteja, jolloin aallossa muodostuu pulssi. Kuvassa (d) väliaine poikkeaa nollasta vain lähellä origoa ja kaukana origosta aaltofunktio on hyvin lähellä nollaa. Tämä johtuu siitä, että superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot ovat origossa samassa vaiheessa, mutta kaukana origosta jokaisessa pisteessä on yhtä paljon aaltoa x -akselin ylä- ja alapuolella, jolloin ne summautuvat likimain nollaksi.

Koska superpositioaalto ei ole enää sinimuotoinen, siinä esiintyvät aallonharjat eivät ole täsmälleen yhtä kaukana toisistaan eikä aallolla ole tarkkaa aallonpitutta eikä aaltolukua. Kuitenkin kuten kuvista 15.18 (a)–(d) huomataan, aallonharjat pysyvät *likimain* samalla etäisydyllä toisistaan, kun superpositioon lisätään aaltoa. Niinpä aaltopulssillakin voi olla *likimääräinen* aallonpituuus ja aaltoluku. Kuvassa 15.19 on vertailtu kolmea erilaista aaltopulssia ja niiden Fourier-esitystä. Kuvassa (a) aaltopulssin aallonharjat ovat likimain etäisydyllä 1.3 m toisistaan, joten tästä voidaan pitää pulssin likimääräisenä aallonpitutena. Fourier-kuvaajasta nähdään, että pulssi koostuu sinimuotoisista aalloista, joiden aaltoluvut ovat välillä $0 \dots 10 \text{ m}^{-1}$, ja suurimman amplitudin aallot ovat lähellä aaltolukua $k = 5 \text{ m}^{-1}$. Tätä voidaan pitää aallon keskimääräisenä aaltolukuna. Näille arvoille pätee likimain relaatio (15.29) eli $k_{\text{keskiarvo}} \approx 5 \text{ m}^{-1} \approx 2\pi/\lambda_{\text{pulssi}} \approx 2\pi/(1.3 \text{ m}) \approx 4.8 \text{ m}$, joten tämä tulkinta on järkevä.

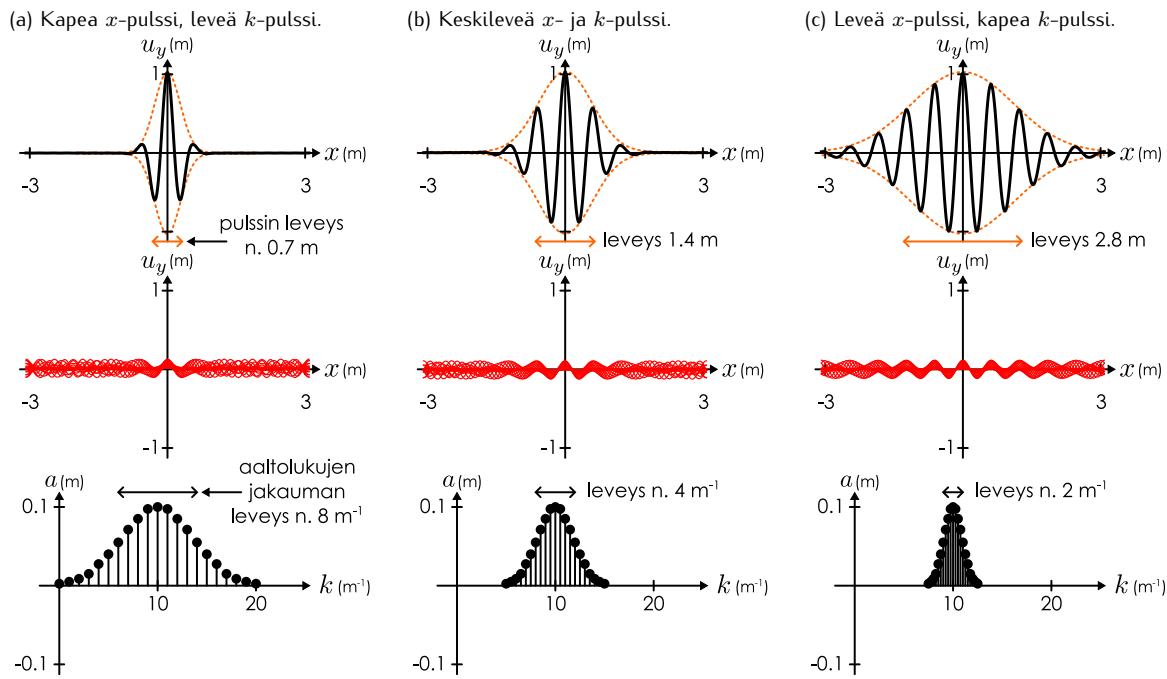
Kuvan 15.19 aalloissa aaltofunktio painuu kaikissa tapauksissa nollaan noin etäisydyllä 1.5 m origosta eli aaltopulssit ovat yhtä leveitä. Pulssien aallonpituedet ovat kuitenkin erilaiset, sillä kuvassa (b) aallonharjojen välinen etäisyys on noin 0.6 m ja kuvassa (c) noin 0.4 m. Aaltojen Fourier-kuvaajat puolestaan ovat kaikki samanmuotoiset, mutta niiden keskipisteenvaihtelee. Erityisesti *kunkin pulssin likimääräinen aallonpituuus on käänän verrannollinen aallon Fourier-esityksen keskimääräiseen aaltolukuun yhteyden* $k_{\text{keskiarvo}} \approx 2\pi/\lambda_{\text{pulssi}}$ mukaisesti.

Tarkastellaan vielä yhtä aaltopulssien sarjaa kuvassa 15.20. Tässä sarjassa jokaisen aaltopulssin likimääräinen aallonpituuus on sama, 0.6 m, mikä tarkoittaa myös sitä, että jokaisen aallon Fourier-esityksen keskipiste

Kuva 15.19: Aaltopulssi on rajoittunut pienelle alueelle, mutta se voi silti värähdellä. Pulssilla ei ole tarkkaa aallonpituitta eikä aaltokuja, koska sen aallonharjat eivät ole yhtä kaukana toisistaan. Pulssin aaltoluku on kuitenkin likimain sama kuin sen muodostaneiden sinimuotoisten aaltojen aaltolukujen keskiarvo.



Kuva 15.20: Aaltopulssien epätarkkuusperiaate. Mitä laajemmalta väliltä aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut valitaan, sitä kapeamman pulssin ne voivat muodostaa.



on $k = 10 \text{ m}^{-1}$. Pulssien leveydet ovat kuitenkin erilaiset, mitä on kuvassa korostettu oranssilla verhokäyrälä. Pulssin leveyden voi määritellä monella tavalla, ja tässä kuvassa leveyden mittana käytetään sen alueen leveyttä, jossa oranssin käyrän korkeus on vähintään puolet käyrän maksimiavusta (tätä mittaa kutsutaan *puoliarvoleveydeksi*). Kuvassa (a) tämä leveys on noin 0.7 m, kuvassa (b) 1.4 m ja kuvassa (c) 2.8 m. Toisaalta Fourier-esityksessä näiden pulssien aaltoluvut muodostavat myös "pulssit", joiden leveydet ovat (a) 8 m^{-1} , (b) 4 m^{-1} ja (c) 2 m^{-1} . Aaltopulssin *leveyden kasvaminen* näkyi siis Fourier-esityksessä aaltolukujen muodostaman kuvaajan *kaventumisenä*, ja itse asiassa pulssin aaltofunktion leveys ja sen Fourier-esityksen leveys ovat tässä *kääntäen verrannolliset*. Siispä kun aaltopulssi hajoitetaan Fourier-analyysillä harmonisiksi komponenteiksi, näiden komponenttien aaltoluvut välttämättä levivät sitä laajemmalle välille k -akselilla — eli aaltojen aallonpituuudet poikkeavat sitä enemmän toisistaan — mitä kapeampi aaltopulssi on.

Tämä on puhtaasti matemaattinen tulos, mutta havainnolla on myös fysikaalinen merkitys. Jos aaltopulssi nimitän on kapea, siihen mahtuu vain vähän aallonharjoja, ja niinpä aallonpituuuden päättely aallon muodon perusteella on vaikeaa. Näin määritetty aallonpituuus on epätarkka. Aallonpituuus liittyy kuitenkin suoraan aaltolukuun, joten myös aaltoluku on tällöin epätarkka. Fourier-esityksessä tämä näkyi niin, että aallon sisältämien harmonisten komponenttien aaltoluvut ovat levinneet laajalle alueelle. Kun aaltopulssi on leveä, sen alueelle mahtuu monta aallonharjaa ja aallonpituuuden määritys aallon muodon perusteella on melko tarkkaa. Tällöin myös aaltoluvun arvo on varsin täsmällinen eivätkä aallon harmonisten komponenttien aaltoluvut poikkea kovin paljon toisistaan.



15.26 Millainen on yhden ideaalisen sinimuotoisen aallon Fourier-esitys? Kuinka tarkasti tällaisen aallon aallonpituuus ja aaltoluku voidaan määrittää? Entä kuinka leveä tai kapea tämä aalto on? Voidaanko tässäkin tapauksessa sanoa, että aallon leveys ja sen aaltoluvun tarkkuus ovat verrannolliset?

Tätä ominaisuutta kutsutaan *Fourier-analyysin epätarkkuusperiaatteeksi*, ja sen mukaan mitä pienemmälle alueelle x -akselilla aaltopulssi on rajattu, sitä epätäsmällisempiä sen aallonpituuus ja aaltoluku ovat. Toisin sanoen aallolla ei voi olla samaan aikaan sekä täsmällistä paikkaa että täsmällistä aaltolukua. Tämä on matemaattinen fakta, joka myös asettaa absoluuttisen rajan sille, kuinka kapeita aaltopulssi sekä sen Fourier-esitys voivat minimissään olla. Palaamme tarkastelemaan ilmiötä luvussa 17 kvanttimekanikan yhteydessä. Osoittautuu nimitän, että myös hiukkasilla on aalto-ominaisuksia ja näiden aaltojen aaltoluku liittyy hiukkaseen liikkeeseen.



15.27 (a) Miten aallon Fourier-kuvaaja muuttuu, jos kaikkien harmonisten komponenttien aaltoluvut kaksinkertaistetaan? (b) Miten aaltofunktio tällöin muuttuu? (c) Selitä tämän perusteella, miksi Fourier-kuvaajan leveyden muuttamisen täytyy vaikuttaa aaltopulssin leveyteen. (d) Vertaa kuvan 15.19 ja 15.20 aaltopulssuja. Mikä pulsseista voidaan muuntaa toiseksi kaksinkertaistamalla aaltoluvut?

esimerkki 15.4

Fourier-sarja

Erään aallon Fourier-kertoimet noudattavat funktiota

$$a(k) = Ae^{-\frac{1}{2\alpha^2}k^2}, \quad (15.59)$$

missä aaltoluku saa arvot $k = -6.0 \text{ cm}^{-1}, -5.5 \text{ cm}^{-1}, -5.0 \text{ cm}^{-1}, \dots, 6.0 \text{ cm}^{-1}$ ja muut vakiot ovat $A = 1.0 \text{ cm}$ sekä $\alpha = 2.0 \text{ cm}^{-1}$.

- (a) Mikä on väliväinen poikkeama eli aaltofunktion arvo pisteissä $x = -1 \text{ cm}, 0 \text{ cm}, 1 \text{ cm}$ hetkellä $t = 0 \text{ s}$?
 (b) Aallot kulkevat tässä väliväineessä vauhdilla $v_{\text{aalto}} = 10 \text{ cm/s}$. Mikä on väliväinen poikkeama tasapainosta samoissa pisteissä hetkinä $t = 0.1 \text{ s}$ ja $t = 0.2 \text{ s}$?

SUUNNITELMA Tässä Fourier-sarjassa on vain kosinitermejä eli aaltofunktio on muotoa

$$u_y(x, t) = \sum_i a(k_i) \cos(k_i x - \omega(k_i) t). \quad (15.60)$$

Aaltoluvut saavat tehtävässä annetut arvot $k_i = -6.0 \text{ cm}^{-1}, -5.5 \text{ cm}^{-1}, \dots$, jolloin Fourier-kertoimien arvot voidaan laskea annetusta funktiosta, $a(-6.0 \text{ cm}^{-1}) = 0.011 \text{ cm}$, $a(-5.5 \text{ cm}^{-1}) = 0.023 \text{ cm}$, ... Kulmataajuus puolestaan riippuu aaltoluvusta sinimuotoisten aaltojen perusyhtälön $v_{x,\text{aalto}} = \omega/k$ kautta. Nyt kuitenkin pitää huomata, että nopeus $v_{x,\text{aalto}}$ ja aaltoluku k voivat olla negatiivisia, mutta kulmataajuus ω ja vauhti v_{aalto} ovat sopimuksen mukaan positiivisia. Niinpä

$$\omega(k) = v_{x,\text{aalto}} k = |v_{x,\text{aalto}}| k = |v_{\text{aalto}}| k. \quad (15.61)$$

Kulmataajuksi saadaan siis $\omega(-6.0 \text{ cm}^{-1}) = 60 \text{ s}^{-1}$, $\omega(-5.5 \text{ cm}^{-1}) = 55 \text{ s}^{-1}$, ...

RATKAISU Ratkaisu saadaan huolellisesti laskemalla. Esimerkiksi pisteessä $x = 0 \text{ cm}$ hetkellä $t = 0 \text{ s}$ aaltofunktio saa arvon

$$u_y(0 \text{ cm}, 0 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos(0) + (0.023 \text{ cm}) \cos(0) + \dots = 0.011 \text{ cm} + 0.023 \text{ cm} + \dots = 10.00 \text{ cm}. \quad (15.62)$$

Pisteessä $x = 1 \text{ cm}$ aaltofunktio on puolestaan

$$u_y(1 \text{ cm}, 0 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos((-6.0 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm})) + (0.023 \text{ cm}) \cos((-5.5 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm})) + \dots \quad (15.63)$$

$$= (0.011 \text{ cm}) \cdot 0.96 + (0.023 \text{ cm}) \cdot 0.71 + \dots \quad (15.64)$$

$$= 1.34 \text{ cm}. \quad (15.65)$$

Vastaavasti pisteessä $x = 1 \text{ cm}$ hetkellä $t = 0.1 \text{ s}$ saadaan

$$u_y(1 \text{ cm}, 0.1 \text{ s}) = (0.011 \text{ cm}) \cos[(-6.0 \text{ cm}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ cm}) - (60 \text{ s}^{-1}) \cdot (0.1 \text{ s})] + \dots \quad (15.66)$$

$$= (0.011 \text{ cm}) \cdot 0.84 + (0.023 \text{ cm}) \cdot 0.004 + \dots \quad (15.67)$$

$$= 5.00 \text{ cm}. \quad (15.68)$$

Kaikki kysyttyt arvot lasketaan samaan tapaan. Tulokset on taulukoitu alla. Paremman kuvan aallon käytöksestä saamme kuitenkin piirtämällä aaltofunktion tietokoneella.

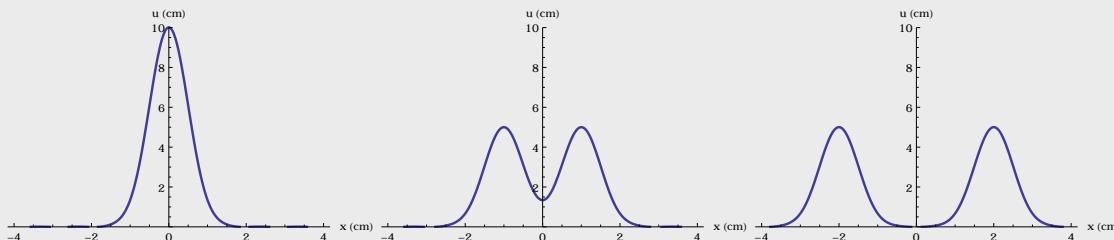
	$x = -1 \text{ cm}$	$x = 0 \text{ cm}$	$x = 1 \text{ cm}$
$t = 0.0 \text{ s}$	1.3 cm	10.0 cm	1.3 cm
$t = 0.1 \text{ s}$	5.0 cm	1.3 cm	5.0 cm
$t = 0.2 \text{ s}$	0.7 cm	0.0 cm	0.7 cm

Mathematica:

```
(* Fourier-sarja *)
amp = 1.0; alpha = 2.0; v = 10;
a[k_] := amp Exp[-k^2/(2 alpha^2)]
omega[k_] := v Abs[k]
u[x_, t_] := Sum[a[k] Cos[k x - omega[k] t], {k, -6, 6, 0.5}]

(* aaltofunktion arvot *)
{ f[-1, 0], f[0, 0], f[1, 0] }
{ f[-1, 0.1], f[0, 0.1], f[1, 0.1] }
{ f[-1, 0.2], f[0, 0.2], f[1, 0.2] }
{1.34344, 10.0092, 1.34344}
{5.00234, 1.34344, 5.00234}
{0.669412, -0.0044933, 0.669412}

(* kuvajat *)
Plot[f[x, 0], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
Plot[f[x, 0.1], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
Plot[f[x, 0.2], {x, -4, 4},
PlotRange -> {0, 10},
PlotStyle -> Thick,
AxesLabel -> {"x (cm)", "u (cm)"}]
```



ARVIOINTI Laskemamme lukuarvot vastaavat piirrettyjä kuvia kuten pitääkin. Näemme, että aluksi origossa on korkea aaltopulssi, joka kuitenkin jakautuu kahtia niin, että jäljelle jää kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa pienempää pulssia. Tilanne on hieman samankaltainen kuin jos pudotat kiven veteen. Kiven osuma luo tällöin veden pintaan paikallisen häiriön, joka etenee aaltona kaikkiin suuntiin poispäin osumakohdasta.

Fourier-analyysissä pulssien ajatellaan koostuvan sinimuotoisista aalloista. Nyt puolet näistä aalloista kulkee positiiviseen x -suuntaan, koska niillä on positiivinen aaltoluku k , ja puolet negatiiviseen suuntaan, koska niillä on negatiivinen aaltoluku. Nämä ovat järkeväitä, ettei loppuloksena ole kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa pulssia.

Voimme ajatella myös niin, että alkutilanne on näiden kahden pulssin superpositio. Erillään kummankin pulssin korkeus on 5 cm. Kun pulssit ovat aluksi superpositiossa niin, että kummankin huippu on origossa, superposition korkeus on 5 cm + 5 cm = 10 cm kuten pitääkin.



15.28 Selitä omin sanoin mitä aaltojen superpositio tarkoittaa ja millaisia ilmiöitä siihen liittyy. Selitä myös mitä tarkoitetaan aaltojen Fourier-analyysilla. Miten aaltopulssien ajatellaan Fourier-analyysissä rakentuvan? Mikä on epätarkkuusperiaate?

15.6 Väliaineet ja rajapinnat

Toistaiseksi olemme tarkastelleet aaltoja, jotka liikkuvat homogeenisessa eli kaikkialla samanlaisessa väliaineessa. Esimerkiksi köyden tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että köysi on kaikkialla yhtä paksu ja valmistettu samasta materiaalista, jolloin köyden pituustiheys ja jännitys ovat kaikkialla samat. Esimerkeissä tarkastellut köydet ovat myös olleet hyvin pitkiä niin etteivät aallot ole milloinkaan ehtineet kulkea koko köyden pituutta ja törmää köyden päähän. Todellisuudessa näin ei kuitenkaan ole. Mikään väliaine ei ulotu samanlaisena äärettömiin, ja väliaineet voivat olla eri paikoissa erilaisia. Seuraavaksi tutkimmekin väliaineen merkitystä aaltojen käyttäytymisessä.

Heijastuminen ja läpäisy

Kun yhdestä materiaalista tehty kappale tai aine loppuu, alkaa tavallisesti jostakin toisesta aineesta koostuva kappale. Esimerkiksi jos luet nyt sisätiloissa, ympärilläsi on ilmaa, jonka ympärillä on mm. seinät, jne. Paikkaa, jossa eri materiaalit kohtaavat, kutsutaan aineiden **rajapinnaksi**. Kolmessa ulottuvuudessa rajapinnat kuten esimerkiksi seinän pinta ovat nimensä mukaisesti pintoja, joiden yhdellä puolella on yhtä materiaalia (esim. ilmaa) ja toisella puolella toista (esim. betonia). Normaalisti rajapinnoilla on jokin pieni mutta nolla suurempi paksuus, sillä atomitasolla tasaiset pinnat ovat luonnossa harvinaisia. Usein rajapinnat ovat kuitenkin tarpeeksi ohuita ja tasaisia, jotta niitä voidaan kuvata täsmällisänä matemaattisina pintoina.

Yhdessä ulottuvuudessa rajapinta on piste. Esimerkiksi jos ohut ja paksu köysi sidotaan yhteen ja jännitetään suoraksi, voimme asettaa x -akselin köyden suuntaiseksi ja valita origoksi kohdan, jossa köyden paksuus muuttuu. Tällöin rajapinta on piste $x = 0$, sillä sen toisella puolella köysi on ohut ja toisella paksu.

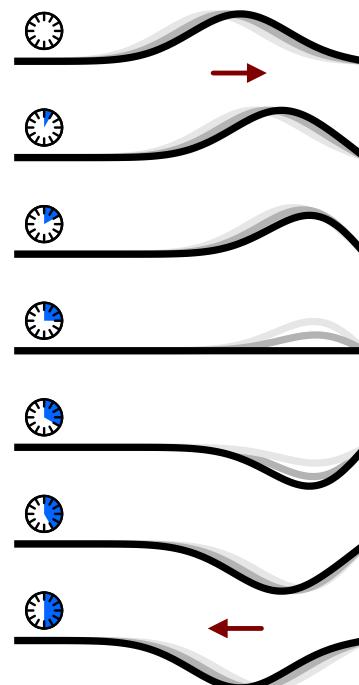
Jos väliaineen ominaisuudet rajapinnan eri puolilla ovat erilaiset, aalto ei voi kulkea rajapinnan läpi muuttumatta, koska aallon nopeus ja energiatihesys riippuvat väliaineen ominaisuuksista. Tällöin on mahdollista, että saapuva aalto **läpäisee** rajapinnan ja jatkaa matkaansa samaan suuntaan kuin aikaisemmin mutta mahdollisesti eri nopeudella, amplitudilla, ja aallonpituuksella. On myöskin mahdollista että aalto ei pääse rajapinnan läpi vaan **heijastuu** takaisin tulosuuntaansa. Koska tällöin aalto pysyy koko ajan samassa materiaalissa, esimerkiksi aallon vauhti ei muutu vaan vain nopeuden suunta. Yleisin tilanne on kuitenkin se, että molemmat ilmiöt tapahtuvat samanaikaisesti, jolloin osa aalosta läpäisee rajapinnan ja osa heijastuu takaisin. Esimerkiksi paineaaltona etenevä ääni voi kulkea kevyiden seinien läpi, mistä on osoituksena äänrenten kuuluminen ohuiden rakenteiden läpi. Tällaisessa tilanteessa aalto kulkee ensin ilmassa, siirtyy siitä seinään, kulkee seinän läpi, ja siirtyy siitä jälleen ilmaan. Tällöin ääni läpäisee ainakin kaksi rajapintaa. Toisaalta tyhjässä huoneessa kaikku, mikä johtuu siitä, että ääntä kuljettavat paineaallot voivat myös heijastua ilman ja seinien rajapinnoista.

Aloitetaan tämän ilmiön tutkiminen tarkastelemalla yksinkertaisinta mahdollista tapausta, jossa aalto heijastuu täydellisesti. Kuvassa 15.21 on esitetty tästä esimerkkinä seinään kiinnitetty köysi. Nyt rajapintana toimii köyden kiinnityskohta, koska tässä pisteessä köysi vaihtuu seinäksi. Köydessä kulkevan aaltopulssin energia ei riitä tuottamaan havaittavaa väärähtelyä seinässä, jolloin aalto ei pysty kulkemaan tämän rajapinnan läpi. Aallon kuljettama energia ei voi myöskään kadota minnekään, joten aaltopulssi ei voi myöskään vain hävitä saapuessaan köyden päähän. Ainoa mahdollisuus on siis se, että pulssi heijastuu takaisin.

Itse asiassa tässä tilanteessa pulssi heijastuu *kääntyen samalla köyden vastakkaiselle puolelle*. Pulssi kulki aluksi kuvassa köyden yläpuolella, jolloin se sai köyden poikkeamaan positiiviseen y -suuntaan, mutta heijastumisen jälkeen pulssi kulkee köyden alapuolella ja köyden poikkema on negatiiviseen y -suuntaan. Mekaanisesti tämä johtuu siitä, että pulssin saapuessa köyden päähän köysi venyy, koska sen pää ei pääse liikkumaan. Köyden muodossa tämä näkyy siten, että köyden pää muodostaa jyrkän kulman vaakataslon kanssa. Köyteen varastoituu tällöin potentiaalienergiaa. Tämän jälkeen köyden elastisuus vetää köyden takaisin suoraksi, jolloin köyden lähellä seinää olevat osat saavat suuren liike-energian ja suuren nopeuden alaspaan. Nämä osat jatkavat matkaansa köyden alapuolella ja synnyttävät sinne uuden aaltopulssin.

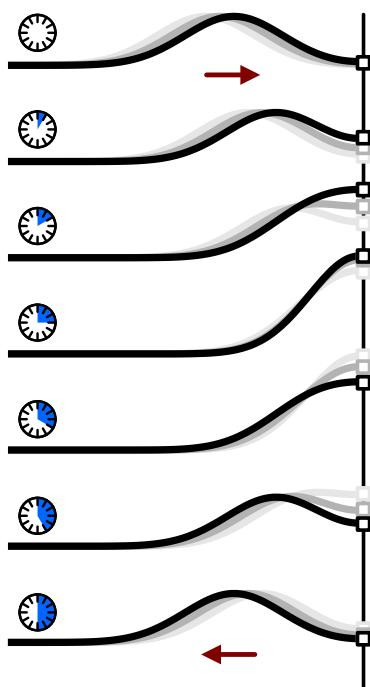
Kuvassa 15.22 on esitetty vastaava tilanne, jos köyden pää saa lükkua vapaasti pystysuunnassa. Tämän voi toteuttaa esimerkiksi kiinnittämällä seinään kiskon ja kiinnittämällä köyden tähän kiskoon. Jos köyden pää olisi aivan vapaana, köysi ei voisi olla jännitetty eikä mikään voima vetäisi sitä suoraksi. Tällöin köydessä

Kuva 15.21: Pulssi heijastuu köyden seinään kiinnitetystä päästä.



ei myöskään kulkisi aaltoa. Kun köysi kiinnitetään kiskoon, se voidaan jännittää suoraksi, mutta köyden pää saa silti liikkua pystysuunnassa.

Kuva 15.22: Pulssi heijastuu köyden vapaasta liikkuvasta päästä.



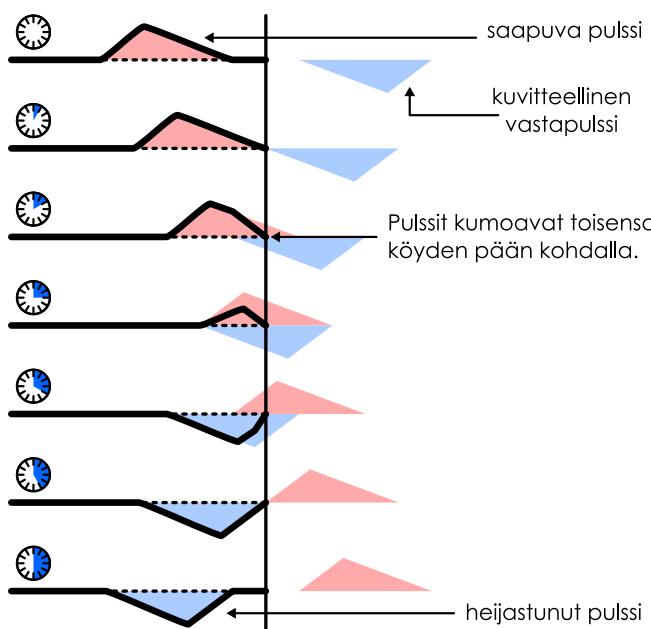
Tässäkin tapauksessa seinään törmäävä pulssi heijastuu seinästä takaisin, sillä aallon energia ei voi hävittää yhtäkkiä minnekään. Nyt pulssi kuitenkin pysyy köyden yläpuolella päinvastoin kuin köyden pään ollessa kiinnitettyä paikoilleen. Tämä johtuu siitä, että pulsin kulkissa köydessä kunkin köyden osa vetää vuorollaan seuraavan osan pystysuuntaiseen liukkeeseen, mutta köyden pää ei joudu vetämään enää seuraavaa köyden osaa liukkeelle, koska sellaista ei ole. Niinpä köyden pää heilahtaa ylöspäin suuremmalla nopeudella kuin köyden muut osat ja kohoa pulssin alkuperäistä korkeutta ylemmäs. Tällöin köysi myös venyy enemmän kuin alkuperäisessä pulssissa, ja köyden elastisuus vetää köyden pään lopulta takaisin alkuperäiseen asemaansa. Samalla syntyy takaisin tulosuuntaan kulkeva aaltopulssi.

15.29 Millainen heijastuminen tapahtuu, kun (a) veden pinta-alto kohtaa uima-altaan reunan tai (b) ilman paine-alto kohtaa seinän? Kääntyykö aalto ympäri vai ei?

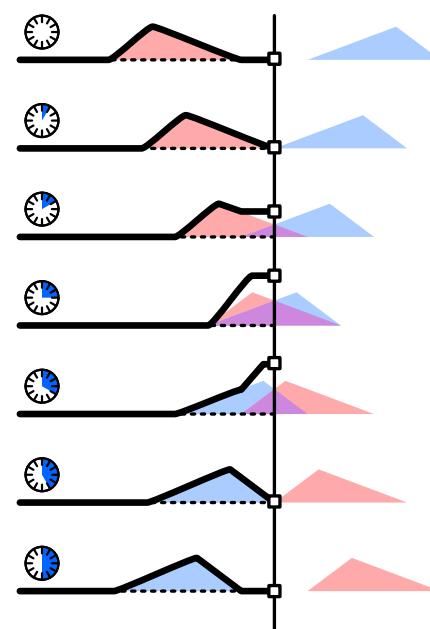
Köyden täsmällinen muoto aallon heijastuessa voidaan määrittää aaltofunktion kautta. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa köyden pää on kiinnitetty seinään eikä voi liikkua pystysuunnassa. Tällöin köyden pään poikkema tasapainosta on aina nolla, ja näin ollen köyden aaltofunktion on toteutettava **reunaehto**, jonka mukaan aaltofunktion arvo on tässä pisteessä nolla. Jos rajapinta on pisteessä $x = 0$, aaltofunktion on siis toteutettava ehto $u_y(0, t) = 0$ kaikilla ajan t arvoilla. Jos saapuva aaltopulssi kulkisi sellaisenaan köyden pähän asti, tämä ei toteutuisi, koska pulssi aiheuttaisi köyden pään siirtymisen ylöspäin. Aaltojen superpositioperiaatteen mukaan voimme kuitenkin ajatella, että alkuperäinen pulssi kulkee köyden loppuun asti muotoaan muuttamatta ja *samaanikaistesti* köyteen syntyy toinen pulssi köyden vastakkaiselle puolelle niin, ettei näiden pulssien superpositio pysyy pisteessä $x = 0$ koko ajan tasapainossa. Tämä toinen pulssi jatkaa matkaansa pitkin köyttä alkuperäisen pulssin tulosuuntaan, joten sen täytyy olla heijastunut pulssi. Kuvassa

Kuva 15.23: Köyden muodon määrittäminen saapuvan (punainen) ja heijastuneen (sininen) pulssin superpositiona. Heijastunut pulssi saadaan alkuperäisestä peilaamalla se y -akselin suhteeseen ja köyden pään pysyessä paikoillaan myös x -akselin suhteeseen.

(a) Köyden pää on kiinnitetty.



(b) Köyden pää saa liikkua vapaasti.



15.23 (a) on piirtämällä määritetty köyden muoto näiden pulssien superpositiona. Kuvasta nähdään, että köyden pään kohdalla saapuva ja heijastuva pulssi pyrkivät aina poikkeuttamaan köyttä yhtä paljon vastakkaisiin suuntiin, jolloin köyden poikkeama on nolla kuten pitääkin.

Kuvaan 15.23 (a) on tarkoituksesta valittu epäsymmetrinen pulssi, jotta heijastuneen aallon muoto näkyisi selvästi. Pulssin toinen reuna on loiva ja toinen jyrkkä, ja sekä saapuvassa että heijastuneessa pulssissa *loiva reuna kulkee edellä*. Heijastunut (sininen) pulssi saadaan siis saapuvasta (punaisesta) pulssista peilaamalla pulssi sekä pysty- että vaakasuunnissa.

Köyden pään päästessä liikkumaan vapaasti reunaeho ei ole yhtä ilmeinen. Kuussa 15.22 kuitenkin nähdään, että tässä tapauksessa köysi pysyy kiinnityspisteessä vaakasuorana. Tämä johtuu siitä, että jos köyden pää ei olisi vaakasuora, köyden jännitysvoima kohdistaisi pähän suuren pystysuuntaisen komponentin. Jos köyden pään massa on suuri tai jos pystysuuntasessa kiskossa, johon köysi on kiinnitetty, vaikuttaa merkitävä kitkavoima, köyden pään liikuttamiseen vaaditaankin merkitävä voima. Mutta jos kisko on lähes kitkaton ja köyden pää on kevyt, pään liikuttaminen onnistuu hyvin pienellä voimalla, eikä köyden muoto sen pään kohdalla voi poiketa kovin paljon vaakasuorasta. Ideaalisessa tapauksessa köyden pää pysyy aina täsmälleen vaakasuorana. Jos köysi on vaakasuora, sen aaltofunktion tangentti kuvaaja on nolla, eli aaltofunktion derivaatta x -koordinaatin suhteen on nolla.

Tämäkin tapaus voidaan kuvata saapuvan ja heijastuvan pulssin superpositiona kuten kuvassa 15.23 (b). Nyt heijastunut pulssi on saapuneen pulssin peilikuva x -suunnassa, jolloin heijastuneen ja saapuvan pulssin jyrkkyydet ovat rajapinnalla aina yhtä suuret mutta vastakkaisuuntiset ja näin ollen niiden superpositio on rajapinnalla vaakasuora.

Edellä graafisesti perustellut tulokset voidaan esittää myös matemaattisesti. Jos saapuvaa pulssia kuvaavat aaltofunktio

$$u_{y,\text{saapuva}}(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}} t), \quad (15.69)$$

kiinnitetystä päästä heijastuvaa pulssia kuvaava funktio

$$u_{y,\text{heijastuva,kiinni}}(x, t) = -f(-x - v_{x,\text{aalto}} t). \quad (15.70)$$

Tässä x -koordinaatin edessä oleva miinusmerkki käänää pulssin muodon ja liikkeen suunnan x -suunnassa ympäri. Funktion edessä oleva miinusmerkki puolestaan käänää pulssin köyden alapuolelle.

Näiden pulssien superpositiona saadaan kiinnitetyn pään tapauksessa aaltofunktio

$$u_{y,\text{kiinni}}(x, t) = u_{y,\text{saapuva}}(x, t) + u_{y,\text{heijastuva,kiinni}}(x, t) = f(x - v_{x,\text{aalto}} t) - f(-x - v_{x,\text{aalto}} t), \quad (15.71)$$

ja köyden kiinnityspisteessä $x = 0$ tämä saa arvon

$$u_{y,\text{kiinni}}(0, t) = f(-v_{x,\text{aalto}} t) - f(v_{x,\text{aalto}} t) = 0. \quad (15.72)$$

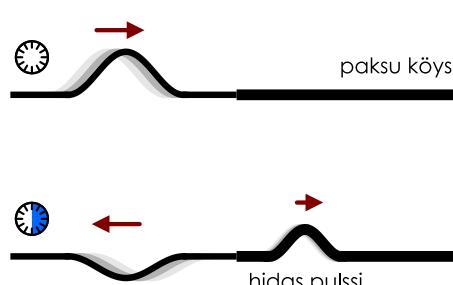
Toisin sanoen aaltofunktio on tässä pisteessä aina nolla, mikä tarkoittaa köyden kiinnityspisteen pysyvän paikoillaan kuten pitääkin.



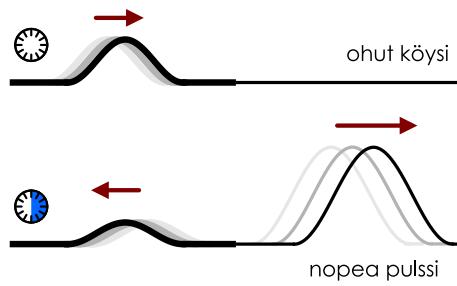
15.30 (a) Mikä on heijastuvaa pulssia kuvaava aaltofunktio, jos köyden pää saa liikkua vapaasti pystysuunnassa? (b) Jotta aalto olisi rajapinnalla vaakasuora, aaltofunktion täytyy toteuttaa reunaeho $\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ kaikilla ajan t arvoilla. Osoita, että saapuvan ja heijastuneen pulssin summa totuttuu tämän ehdon (oleettaen, että funktio f on derivoitava).

Köysillä voidaan demonstroida myös rajapintoja, jotka aallot läpäisevät. Tällainen rajapinta saadaan aikaan yksinkertaisesti jatkamalla köyttä toisella köydellä, jonka paksuisus tai tiheys on erilainen. Kun pulssi saapuu rajapinnalle, se pyrkii vetämään myös rajapinnan toisella puolella olevia köyden osia liikkeelle. Jos rajapinnan toisella puolella on paksu ja siis pituustiheydeltään suurempi köysi (kuva 15.24), tämän raskaan köyden saaminen liikkeelle on vaikeaa. Osa aalosta läpäisee rajapinnan, mutta paksuun köyteen syntynvä pulssi on alkuperäistä pulssia pienempi. Osa pulssista heijastuu käännyten köyden alapuolelle. Näin tapahtuu siksi, että saapuva pulssi saa köyksen kiinnityskohdan liikkumaan vain vähän ja rajapinta toimii hiukan samaan tapaan kuin jos köysi olisi kiinnitetty seinään.

Kuva 15.24: Aalto saapuu ohuesta köydestä paksuun.



Kuva 15.25: Aalto saapuu paksusta köydestä ohueen.



Paksun köyden pituustiheys on suuri, joten rajapinnan läpäissyt aalto kulkee alkuperäistä aaltoa hitaammin. Heijastunut aalto sen sijaan kulkee yhtä nopeasti kuin rajapinnalle saapunut aalto, koska se kulkee samassa väliaineessa. Yhtälön (15.52) mukaan köydessä kulkevan sinimuotoisen aallon energia on verrannollinen köyden pituustiheyteen sekä amplitudin neliöön. Samaan tapaan myös pulssin energia on verrannollinen sen korkeuden neliöön. Niinpä sekä rajapinnan läpäisseen että heijastuneen pulssin täytyy olla *matalampia* kuin alkuperäinen pulssi, koska aallon kuljettama energia ei elatisessa köydessä häviä minnekään.

(kuva 15.25), rajapinnalle saapuneen pulssin on helppo saada tämä köysi lükkeelle. Niinpä köysien kiinnityspiste pääsee liikkumaan pystysuunnassa lähes vapaasti ja siitä heijastunut pulssi pysyy samalla puolella köyttä kuin saapuva pulssi samaan tapaan kuin kuvassa 15.22. Läpäissyt pulssi on kevyessä köydessä nopea ja korkea. Tässäkin tilanteessa energian pitää säilyä, mutta ohuessa köydessä on pieni pituustiheys, ja niinpä läpäisseen aallon energia on pienempi kuin saapuvan aallon, vaikka sen amplitudi onkin suurempi.

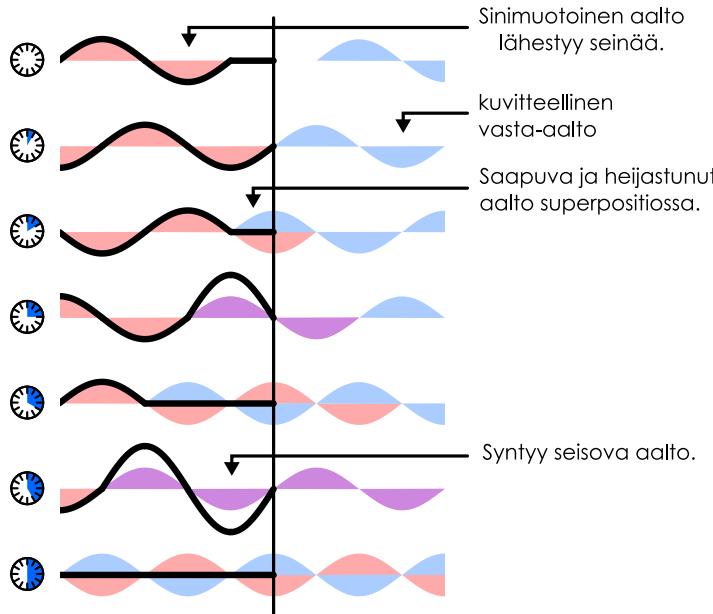
Samanlainen ilmiö voi tapahtua *kaikilla aalloilla*, jotka kohtaavat rajapinnan. Esimerkiksi ilman ja seinän rajapinnalle saapuvasta paineaallosta eli äänestä osa voi heijastua kaikuna ja osa voi jatkaa matkaansa seinän sisään. Samoin ilman ja lasin rajapinnalle saapuva sähkömagneettinen aalto eli valo voi osittain läpäistä lasin ja osittain heijastua. Riippuu kuitenkin aallon tyypistä ja väliaineiden ominaisuuksista, missä suhteessa heijastuminen ja läpäisy tapahtuvat ja millaisia aaltoja eri puolille rajapintaa syntyy. Tässä käsitletyssä köysesimerkissä rajapinnan läpäisseestä aallosta tulee sitä hitaampi, kapeampi ja matalampi, mitä tiheämpään ja paksumpaan köyteen aalto siirtyy. Toisaalta esimerkiksi rantaan saapuvat veden pinta-aallot hidastuvat niiden saapuessa matalaan veteen, ja tällöinkin aallot kaventuvat mutta ne eivät madallu vaan päinvastoin aaltojen korkeus kasvaa niiden saapuessa rantaan.



15.31 Tarkastellaan kuvien 15.24 ja 15.25 tilannetta. Kuinka korkeita heijastunut ja läpäissyt pulssi ovat saapuvaan pulssin verrattuna, jos köyden oikean puolen pituustiheys on vasempaan puoleen verrattuna (a) hyvin paljon suurempi, (b) hyvin paljon pienempi tai (c) lähes yhtä suuri?

Sinimuotoisten aaltojen heijastuminen ja vaihesiirto

Kuva 15.26: Vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositio on seisova aalto.

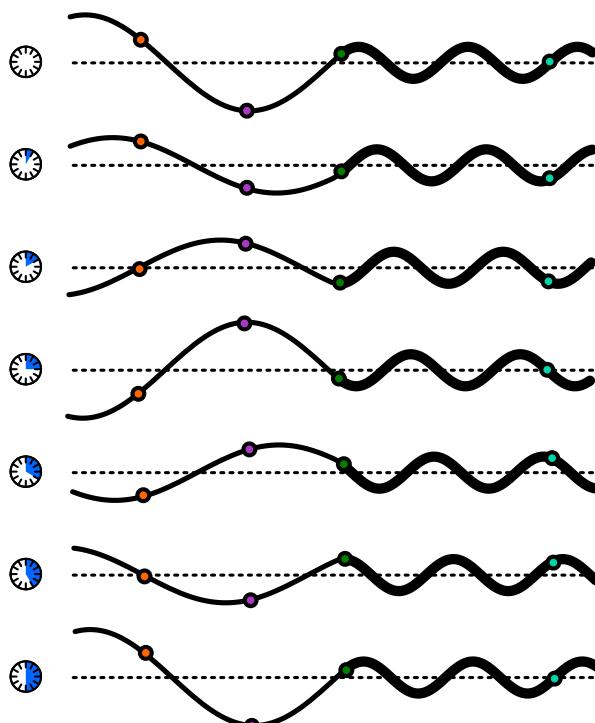


laus vaakasuunnassa tarkoittaa sitä, että heijastunut aalto kulkee vastakkaiseen suuntaan kuin saapuva

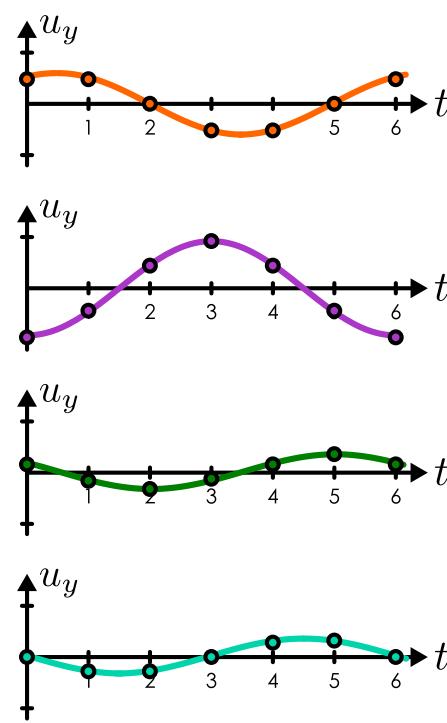
Myös sinimuotoiset aallot voivat heijastua kohdateensa rajapinnan tai läpäistä sen. Kuvassa 15.26 on piirretty köysi, jossa kulkee sinimuotoinen aalto vasemmalta oikealle (punainen). Aallon synnyttää köyden vasempaan pähän kiinnitetty väärätelijä, jota ei ole piirretty kuvan. Köyden oikea pää on kiinnitetty seinään, joten aallon täytyy heijastua täästää päästää niin, ettei pää pysy paikoillaan. Aivan samoin kuin kuvassa 15.23 (a), tämän heijastumisen voi ajatella tapahtuvan niin, että seinän puolelta köyteen saapuu heijastunut aalto (sininen), jolloin saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio pysyy rajapinnalla paikoillaan. Jotta näin tapahtuisi, täytyy heijastuneen aalon olla muuten identtinen saapuvan aallon kanssa paitsi että se on peilattu sekä seinän että köyden tasapainoaseman suhteen eli sekä pysty- että vaakasuunnassa. Pei-

Kuva 15.27: Köyden värähtely ohuen (vasen puoli) ja paksun (oikea puoli) köyden rajapinnalla. Aallon lähe on kuvan ulkopuolella köyden vasemmassa päässä.

(a) Köyden muoto yhden värähdysjakson kuluessa.



(b) Jokainen piste värähtelee samalla taajuudella.



aalto. Peilaus pystysuunnassa puolestaan tarkoittaa sitä, että siinä missä saapuva aalto kulkee aallonpohja edellään, heijastuneessa aallossa on kärjessä aallonharja.

Kuvassa 15.26 nähdään myös, että saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio ei ole enää etenevä sinimuotoinen aalto. Sen sijaan köyteen syntyy **seisova aalto**, jossa jotkin köyden alueet värähtelevät voimakkaasti ja toiset eivät lainkaan. Kun saapuvan ja heijastuneen aallon aallonharjat ja pohjet ovat päällekkäin, köydessä on korkeita aaltoja. Sen sijaan jos aallonpohjet ja -harjat osuvat samoihin paikkoihin, köysi on hetkellisesti suora.

Seisovat aallot ovat erittäin tärkeä ja yleinen aaltojen erikoistapaus. Jos nimittäin aalto vangitaan pieneen tilaan kuten kielisoittimen kieleen, sen on pakko heijastua kielessä jatkuvasti edestakaisin. Tällöin kielessä kulkee aaltoa superpositiossa vastakkaisiin suuntiin, ja tuloksena on seisova aalto. Palaamme hetken päästä tutkimaan seisavia aaltoja tarkemmin, mutta tarkastellaan sitä ennen, kuinka sinimuotoiset aallot käyttäytyvät rajapinnalla, jonka ne voivat myös osittain *läpäistä*.

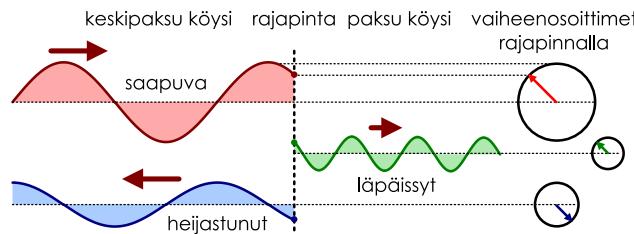
Kuvassa 15.27 (a) on piirretty köysi, jonka vasen puoli on ohuempi kuin oikea. Köyden keskellä on näitä alueita erottava rajapinta. Köyden vasen pää on kiinni harmonisessa värähtelijässä, joten rajapinnalle saapuu vasemmalta sinimuotoinen aalto. Kuten kuvassa 15.24, jossa aaltopulssi kohtasi samanlaisen rajapinnan, tässäkin tapauksessa saapuva aalto osittain heijastuu ja osittain läpäisee rajapinnan. Niinpä rajapinnan oikealla puolella paksussa köydessä havaitaan oikealle kulkeva sinimuotoinen aalto. Rajapinnan vasemmalla puolella saapuva ja heijastunut aalto ovat superpositiossa. Tämä muistuttaa kuvan 15.26 tilannetta, jossa vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot muodostavat seisovan aallon. Nyt heijastuneen aallon amplitudi on kuitenkin pienempi kuin saapuneen aallon, koska aalto heijastuu vain osittain, ja niinpä köyden vasemmalla puolella aalto ei ole puhtaasti etenevä eikä seisova vaan joitain näiltä.

Kuvaan 15.27 (b) on piirretty neljän tästä köydestä valitun tarkastelupisteiden värähtely ajan funktiona. Näiden värähtelyiden amplitudit ja vaiheet eivät ole samat, mutta niillä on kaikilla *sama taajuus*. Aaltona syntyy alunperin siitä, että köyden vasenta päättä (joka ei näy kuvassa) heilutetaan harmonisesti. Tämä harmoninen liike saa köyden seuraavan osan värähtelemaan harmonisesti samalla taajuudella, tämä sitä seuraavan ja niin edelleen. Lopulta värähtely saavuttaa rajapinnan, joka alkaa myös värähdellä harmonisesti samalla taajuudella. Rajapinnasta värähtely levää sekä eteenpäin paksuun köyteen että takaisinpäin ohuempaan köyteen edelleen samalla taajuudella. Lopputuloksena köyden jokainen piste värähtelee harmonisesti samalla taajuudella kuin aallon synnyttänyt lähde. Kyseessä on samanlainen ilmiö kuin pakotetussa harmonisessa värähtelijässä, joka oskilloi värähtelyä ajavan ulkoisen voiman taajuudella. Tässäkin tapauksessa köyden jokainen piste päätyy värähtelemaan samalla, ulkoisen aaltolähteen määräämällä taajuudella.

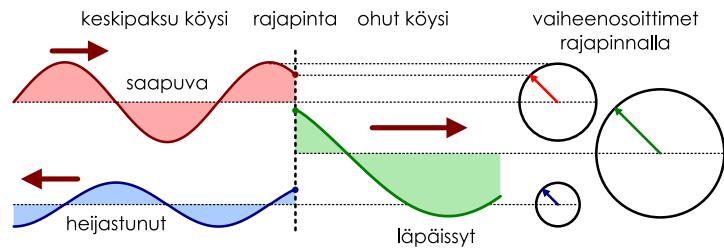
Kuvissa 15.28 (a) ja (b) on eroteltu saapuva (punainen), heijastunut (sininen) ja läpäissyt (vihreä) aalto. Kuva (a) nämä aallot on selkeyden vuoksi piirretty erikseen ja kuva (b) superpositioon, jolloin köyden

Kuva 15.28: Käydessä kulkevan sinimuotoisen aallon heijastuminen ja läpäisy rajapinnalla. Kuvassa aalto saapuu vasemmalta (punainen) ja siitä osa heijastuu takaisin oikealle (sininen) ja osa jatkaa matkaansa (vihreä). Kuvan vasemmalla puolella köyden muoto on saapuvan ja heijastuvan aallon superpositio.

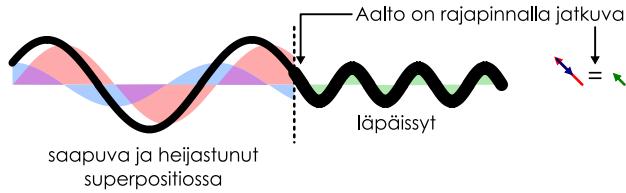
(a) Aalto saapuu ohuemmasta köydestä paksumpaan.



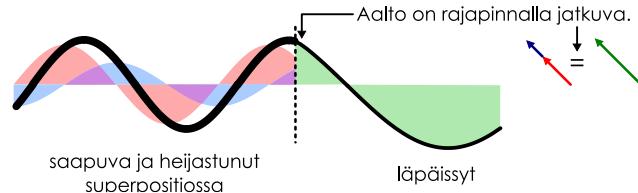
(c) Aalto saapuu paksummasta köydestä ohuempaan.



(b) Köyden muoto kuvan (a) tapauksessa.



(d) Köyden muoto kuvan (c) tapauksessa



todellinen muoto nähdään. Kuvatulla hetkellä saapuvan aallon aallonharja saavuttaa pian rajapinnan, mutta heijastuneen aallon rajapinnalle on syntymässä pian aallonpohja, eli tässäkin tapauksessa heijastunut aalto on "kääntynt ympäri köyden alapuolelle". Rajapinnan läpäisseessä aallossa rajapinnalle on muodostumassa aallonharja, joten tämä aalto ei ole kääntynt ympäri.

Sinimuotoisen aallon tapauksessa aallon "kääntymisen ympäri" voi ilmaista täsmällisesti aallon *vaiheen* avulla, ja siksi kuvaan (a) onkin piirretty aaltojen vaiheenosoitimet rajapinnalla. Saapuvan aallon vaihe rajapinnalla on kuvassa kahdeksasosakierros eli $\phi_{\text{saapuva}} = \pi/4$, mitä kuvaaa vaiheenosoitin, jota on kierretty tämän verran pystysuunnasta vastapäivään (positiiviseen kiertosuuntaan). Aallon kulkiessa sen vaihe rajapinnalla muuttuu, ja vaiheenosoitin pyörii myötäpäivään. Rajapinnan läpäisseen aallon vaihe on sama kuin saapuvan aallon vaihe, joten näiden aaltojen vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset. Heijastuneessa aallossa on kuitenkin rajapinnalla aallonpohja, joten tämän aallon vaiheenosoitin ei voi osoittaa ylöspäin vaan sen täytyy osoittaa alas päin. Itse asiassa *heijastuneen aallon vaiheenosoitin on kääntynt puoli kierrosta saapuvaan aaltoon verrattuna*. Aaltojen välillä on siten vaihe-ero $\Delta\phi = \phi_{\text{heijastunut}} - \phi_{\text{saapuva}} = \pi$, ja aallon sanotaan heijastuksessa kokevan puolen kierroksen *vaiheensiiron*.

Vaikka kuvassa (a) aallot piirrettiin erikseen, todellisuudessa aallot kulkevat tietenkin samassa käydessä, jonka todellinen muoto on piirretty kuvaan (b). Eritiisesti saapuva ja heijastunut aalto kulkevat köyden samassa osassa, jolloin köyden muoto on näiden aaltojen superpositio. Lisäksi köyden vasen ja oikea puoli eivät voi värähdellä toisistaan riippumatta, koska köysi on yhtenäinen. Köysi ei saa mennä rajapinnalla poikki, joten köyden muodon kuvajan pitää olla aina jatkuva — siihen ei saa milloinkaan tulla hypäystä rajapinnalla. Ohuen ja paksun köyden rajapinnalla kohtaavien päiden täytyy siis värähdellä täsmälleen samalla tavalla, mikä toteutuu jos ja vain jos niiden *vaiheenosoitimet ovat samat* (kuva 15.28 (b)). Rajapinnan vasemmalla puolella saapuva ja heijastunut aalto ovat superpositiossa, joten köyden värähtelyä kuvaan niiden vaiheenosoitimien vektorisumma (punainen + sininen nuoli). Rajapinnan oikealla puolella on vain läpäissyt aallo, joten köyden värähtelyä kuvaan sen vaiheenosoitin (vihreä). Siispä vihreän nuolen täytyy olla sama kuin punaisen ja sinisen nuolen summa. Tämän täytyy toteutua *aina* (koska köysi ei voi mennä välillä poikki ja yhdistyä uudelleen), joten vaiheenosoitinten täytyy myös pyörä yhtä nopeasti. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla kolmella aallolla täytyy olla *sama taajuus*, kuten kuvan 15.27 (b) perusteella jo aikaisemmin päätteliin. Luvun lopussa esimerkissä 15.5 näytetään, kuinka vastaavat ehdot kirjoitetaan yhtälöinä ja aaltofunktio voidaan laskea.



15.32 Kuvassa 15.28 (b) aallon amplitudi rajapinnan vasemmalla puolella on suurempi kuin oikealla puolella. Kuinka tämä on mahdollista vaikka köyden pitää aina olla rajapinnalla jatkuva?

Kuvissa 15.28 (c) ja (d) on esitetty vastaava tilanne, kun rajapinnan oikealla puolella on ohut köysi. Tämä muistuttaa kuvan 15.25 tilannetta, jossa heijastunut aaltopulssi pysyy köyden yläpuolella eli samalla puolella kuin saapuva aalto. Sinimuotoisten aaltojen tapauksessa tämä tarkoittaa saapuvan ja heijastuneen aallon olevan sama rajapinnalla. Niinpä tässä tapauksessa kaikkien kolmen aallon vaiheenosoitimet osoittavat samaan suuntaan. Tässäkin tapauksessa aallon täytyy olla rajapinnalla jatkuva, joten saapuvan ja heijastuneen aallon vaiheenosoitimien summan pitää aina olla sama kuin läpäisseen aallon vaiheenosoitin.



15.33 Kuvissa 15.28 (a) ja (c) punainen aalto on sama. Miten ja miksi siniset aallot ja niiden vaiheenosottimet eroavat toisistaan? Entä vihreät?

esimerkki 15.5

Aalto rajapinnalla

Eräässä köydessä on kaksi puoliskoa, josta toisen halkaisija on kaksinkertainen toiseen nähden (kummatkin puolet on tehty samasta materiaalista). Toisin sanoen köydessä on ohut ja paksu puolisko sekä näitä erottava rajapinta. Köyden ohutta päättää heilutetaan harmonisesti taajuudella 1.0 Hz, jolloin köyteen syntyy sinimuotoinen aalto. Ratkaise köyden aaltofunktio rajapinnan ympäristössä, kun saapuvan aallon amplitudi on 0.10 m ja nopeus 2.0 m/s.

TILANNE Asetetaan rajapinta origoon ja x -akseli köyden tasapainoaseman suuntaiseksi. Olkoon köyden ohut puoli alue $x < 0$ ja paksu puoli $x > 0$, jolloin rajapinnalle saapuva aalto kulkee positiiviseen x -suuntaan. Merkitään köyden ohuempaan puoliskoon liittyviä suureita indeksillä O ja paksumpaan liittyviä indeksillä P. Merkitään saapuvaa aaltoa indeksillä S, heijastunutta H ja läpäissytä L. Valitaan ajan nollahetki vielä niin, että saapuvan aallon vaihe on tällöin nolla rajapinnalla, eli $\phi_S(0, 0) = 0$.

SUUNNITELMA Köyden pituustiheys on verrannollinen sen poikkipinta-alaan, joten paksun köyden pituustiheys on nelinkertainen ohueeseen verrattuna,

$$\mu_P = \frac{\rho}{L} \pi r_P^2 = \frac{\rho}{L} \pi (2r_O)^2 = 4\mu_O. \quad (15.73)$$

Köyden jännitys on kaikilla sama, T , joten aaltojen vauhti on ohuessa köydessä kaksinkertainen paksuun verrattuna,

$$v_O = \sqrt{\frac{T}{\mu_O}} = \sqrt{\frac{4T}{\mu_P}} = 2v_P. \quad (15.74)$$

Saapuvan aallon nopeus tunnetaan, joten $v_O = 2.0$ m/s ja $v_P = 1.0$ m/s.

Köyden kaikki osat väärtelevät samalla taajuudella $f = 1.0$ Hz ja kulmataajuudella $\omega = 2\pi f = 6.28$ s⁻¹. Niinpä ohuessa köydessä kulkevien aaltojen aallonpituuus on kaksinkertainen ja aaltoluku puolikas paksuun köyteen verrattuna. Lukuarvoiksi saadaan $\lambda_O = \frac{v_O}{f} = 2.0$ m, $\lambda_P = \frac{v_P}{f} = 1.0$ m, $k_O = 2\pi/\lambda_O = 3.14$ m⁻¹ sekä $k_P = 2\pi/\lambda_P = 6.28$ m⁻¹.

Aalto saapuu rajapinnalle negatiivisesta x -suunnasta ja kulkee positiiviseen x -suuntaan. Aalto kulkee ohuessa käydessä, joten sen aaltoluku on k_O . Saapuvan aallon aaltofunktio on siis muotoa

$$u_{y,S}(x, t) = A_S \cos(k_O x - \omega t), \quad (15.75)$$

missä A_S on tehtävänannon mukaan 0.10 m. Ajan nollahetki valittiin niin, että aallon vaihetekijä on nolla, $\phi_0 = 0$.

Rajapinnan läpäisseen aallon vaihe on sama kuin rajapinnalle saapuneen aallon. Tämä aalto kulkee paksussa köydessä, joten sen aaltofunktio on

$$u_{y,L}(x, t) = A_L \cos(k_P x - \omega t). \quad (15.76)$$

Heijastuneen aallon vaiheen täytyy käyntiä puoli kierrosta, koska aalto heijastuu ohuen ja paksun köyden rajapinnalta ohuen köyden puolella. Lisäksi heijastunut aalto kulkee negatiiviseen x -suuntaan, joten sen aaltoluku on negatiivinen. Niinpä heijastuneen aallon aaltofunktio on

$$u_{y,H}(x, t) = A_H \cos(-k_O x - \omega t + \pi). \quad (15.77)$$

Jos tässä unohtaisi huomioida vaiheensiirron, saisimme laskussa lopulta vastaukseksi negatiivisen amplitudin heijastuneelle aallolle. Sen sijaan jos aallon kulkusuunnan unohtaa käänää, ratkaisua ei löydy lainkaan.

Ohuen köyden muotoa kuvaa saapuvan ja heijastuneen aallon superpositio,

$$u_{y,O}(x, t) = u_{y,S}(x, t) + u_{y,H}(x, t), \quad (15.78)$$

kun taas paksussa köydessä kulkee vain läpäissyt aalto,

$$u_{y,P}(x, t) = u_{y,L}(x, t). \quad (15.79)$$

Nämä funktiot kuvaavat siis köyden muotoa alueissa $x < 0$ ja $x > 0$. Köysi ei saa mennä rajapinnalla $x = 0$ poikki, joten aaltofunktion täytyy olla jatkuva

$$u_{y,O}(0, t) = u_{y,P}(0, t). \quad (15.80)$$

Köydessä ei saa olla rajapinnalla myöskään terävä kulmaa, koska köyden jännitys vetäisi sen heti suoraksi, joten aaltofunktion derivaatan paikkakoordinaatin suhteen täytyy olla myös jatkuva

$$\left. \frac{\partial u_{y,O}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_{y,P}}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (15.81)$$

Meillä on kaksi yhtälöä, (15.80) ja (15.81), sekä kaksi tuntematonta, A_L ja A_H , joten tässä on tarpeeksi informaatiota köyden muodon ratkaisemiseksi.

RATKAISU Aaltofunktoiden sijoitus jatkuvuusehtoon (15.80) antaa yhtälön

$$A_S \cos(-\omega t) + A_H \cos(-\omega t + \pi) = A_L \cos(-\omega t). \quad (15.82)$$

Aaltofunktioiden osittaisderivaatat paikan suhtein ovat

$$\frac{\partial u_{y,S}}{\partial x} = -k_O A_S \sin(k_O x - \omega t) \quad (15.83)$$

$$\frac{\partial u_{y,L}}{\partial x} = -k_P A_L \sin(k_P x - \omega t) \quad (15.84)$$

$$\frac{\partial u_{y,H}}{\partial x} = k_O A_H \sin(-k_O x - \omega t + \pi), \quad (15.85)$$

joten derivaatan jatkuvuusehsto (15.81) antaa yhtälön

$$-k_O A_S \sin(-\omega t) + k_O A_H \sin(-\omega t + \pi) = -k_P A_L \sin(-\omega t). \quad (15.86)$$

Näiden yhtälöiden on toteuduttava *aina*, eli ne pätevät kaikilla ajan t arvoilla. Erityisesti voimme antaa ajalle t minkä tahansa arvon, ja saamme pätevän yhtälön. Jos yhtälössä (15.82) annetaan ajalle arvo $t = 0$, saadaan yksinkertaisempi yhtälö

$$A_S - A_H = A_L, \quad (15.87)$$

koska $\cos 0 = 1$ ja $\cos \pi = -1$. Kuvan (15.28) (b) vaiheenosoitinesityksessä tämä ehto tarkoittaa sitä, että läpäisseen aallon vaiheenosoitimen pituus on sama kuin saapuvan ja heijastuneen aallon vaiheenosoitinten pituksien erotus.

Jos yhtälöön (15.86) sijoitetaan $t = 0$ saadaan tosi mutta käytökelvoton yhtälö $0 = 0$. Jotta voisimme hyödytää tästä yhtälöä, siihen voidaan sijoittaa esimerkiksi arvo $t = T/4$, koska $\sin -\frac{\omega T}{4} = \sin -\frac{\pi}{2} = -1$ ja $\sin(\pi - \frac{\omega T}{4}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Nämä saadaan yhtälö

$$k_O(A_S + A_H) = k_P A_L. \quad (15.88)$$

Tähän voidaan sijoittaa edellä ratkaistu $A_L = A_S - A_H$, jolloin

$$k_O(A_S + A_H) = k_P(A_S - A_H), \quad (15.89)$$

ja tästä heijastuneen aallon amplitudiksi ratkeaa

$$A_H = \frac{k_P - k_O}{k_P + k_O} A_S = \frac{1}{30} \text{ m} \approx 0.033 \text{ m}. \quad (15.90)$$

Sijoittamalla tämä takaisin esimerkiksi yhtälöön $A_L = A_S - A_H$ saadaan läpäisseen aallon amplitudiksi ratkaistua

$$A_L = \frac{2k_O}{k_P + k_O} A_S = \frac{1}{15} \text{ m} \approx 0.067 \text{ m}. \quad (15.91)$$

On kuitenkin ehkä havainnollisempaa ilmoittaa aaltojen amplitudien suhteet

$$\frac{A_H}{A_S} = \frac{1}{3} \quad (15.92)$$

$$\frac{A_L}{A_S} = \frac{2}{3}. \quad (15.93)$$

Tietysti mielessä rajapinnan läpäisee siis kaksi kolmannesta saapuvasta aallosta ja yksi kolmannes heijastuu takaisin. Kuten tuloksen arvioinnissa kuitenkin todetaan, on yleensä parempi tarkastella aallon kuljettaman energian jakautumista kuin amplitudeja.

Mathematica:

```

lukuarvot = {ko -> Pi, kp -> 2 Pi, omega -> 2 Pi, as -> 1/10};

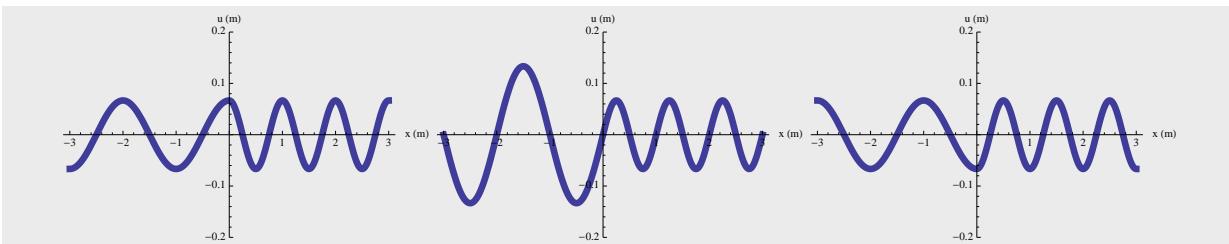
(* aaltofunktiot *)
us[x_, t_] := as Cos[ko x - omega t] (* saapuva *)
ul[x_, t_] := al Cos[kp x - omega t] (* lapaissyt *)
uh[x_, t_] := ah Cos[-ko x - omega t + Pi] (* heijastunut *)
uo[x_, t_] := us[x, t] + uh[x, t] (* ohut koysi *)
up[x_, t_] := ul[x, t] (* paksu koysi *)

(* ratkaistaan amplitudit jatkuvuusehdoista *)
ratkaisu = Solve[ {
    uo[0, 0] == up[0, 0],
    D[uo[x, t], x] == D[up[x, t], x] /. x -> 0
}, {al, ah}]
{{al -> (2 as ko)/(ko + kp), ah -> -((as ko - as kp)/(ko + kp))} }

ratkaisu /. lukuarvot
{{al -> 1/15, ah -> 1/30} }

(* aaltofunktion kuvaaja ajan T/4 valein *)
Table[
Plot[
If[x < 0, uo[x, t/4], up[x, t/4]]
/. ratkaisu /. lukuarvot,
{x, -3, 3},
PlotRange -> {-0.2, 0.2},
AxesLabel -> {"x (m)", "u (m)" },
PlotStyle -> Thickness[0.02]
], {t, 0, 2}]

```



ARVIOINTI Saapuvan aallon energia ei voi hävittää vaan sen pitää jakautua läpäissen ja heijastuneen aallon kesken. Niinpä heijastuneen ja läpäisseen aallon tehon täytyy olla yhteenä yhtä suuri kuin saapuvan aallon teho.

Aallon keskimääräinen teho on

$$P_{\text{keski}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v_{\text{aalto}}. \quad (15.94)$$

Vaikka emme tunnekaan köyden pituustiheytä, tiedämme kaikkien suureiden suhteet eri aalloille. Erittäin paksussä köydessä $\mu_P v_P = 4\mu_O \frac{1}{2} v_O = 2\mu_O v_O$, joten saapuvan aallon teho on $P_S = \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 A_S^2 v_O$ ja heijastuneen sekä läpäisseen aallon teho on yhteenä

$$P_H + P_L = \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 A_H^2 v_O + \frac{1}{2} \mu_P \omega^2 A_L^2 v_P \quad (15.95)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O (A_H^2 + 2A_L^2) \quad (15.96)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O \left[\left(\frac{1}{3} A_S \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3} A_S \right)^2 \right] \quad (15.97)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_O \omega^2 v_O A_S^2. \quad (15.98)$$

Tämä on sama kuin saapuvan aallon teho, joten energia säilyy, kuten pitääkin.

Tässä myös huomataan, että läpäisseen aallon tehon saapuvan aallon tehoon on $P_L/P_S = 8/9$ kun heijastuneen aallon teho on vain $1/9$ saapuvan aallon tehosta. Tässä mielessä onkin ehkä parempi sanoa, että rajapinnan läpäisee $8/9$ saapuvasta allostaa ja vain $1/9$ allostaa heijastuu takaisin.



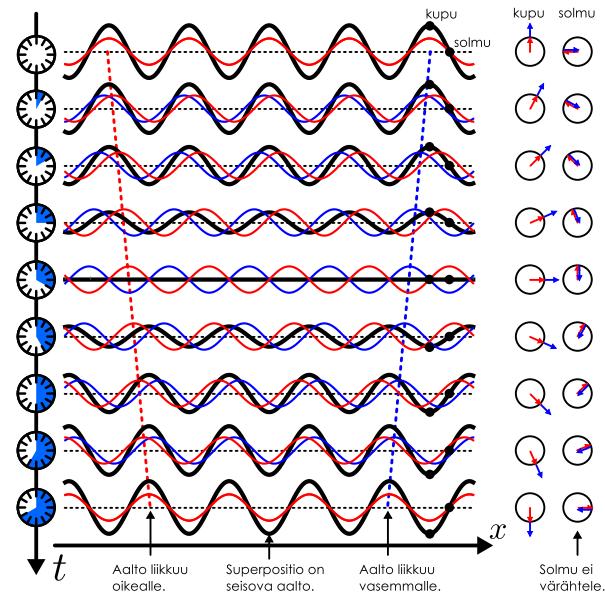
15.34 Selitä omia sanoin, kuinka aallot käyttäytyvät rajapinnoilla. Mitä rajapinnalle saapuvalle aaltopulssille voi tapahtua? Miten ja miksi tämä riippuu väliaineiden ominaisuuksista? Entä mitä tapahtuu sinimuotoiselle aalolle?

Seisovat aallot

Edellisessä luvussa opimme, että vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot muodostavat seisovia aaldoja. Tarkastellaan nyt näitä aaldoja hieman tarkemmin.

Kuvassa 15.29 on esitetty seisovan aallon väärähely puolen jaksonajan aikana. Vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot on tässä piirtetty punaisin ja sinisin käyrin ja näiden superpositio eli köyden todellinen muoto mustana käyränä. Aluksi sininen ja punainen aalto ovat täsmälleen päällekkäin, jolloin köyden amplitudi on *kaksinkertainen* näihin verrattuna. Ajan kuluessa punainen aalto siirtyy kuvassa oikealle ja sininen vasemmalle, jolloin aallot eivät enää vahvista toisiaan täydellisesti ja mustan käyrän amplitudi pienenee. Viidennessä kuvassa ylhäältä lukien musta käyrä on täysin suora, koska punaisen aallon harjat osuvat täsmälleen sinisen aallon pohjuun ja päinvastoin. Tämän jälkeen mustan käyrän amplitudi alkaa jälleen kasvaa. Kuten harmonisten väärähelyjen yhteydessä opimme, kahden sinimuotoisen funktion summa on edelleen sinimuotoinen, jos funktioiden taajuus — tai tässä tapauksessa aallonpititus — on sama. Niinpä köysi on muodoltaan sinimuotoinen jokaisena ajan hetkenä.

Kuva 15.29: Kahden sinimuotoisen aallon (punainen, sininen) superpositio (musta) sekä vaiheenoittimet kuvun ja solmun kohdalla.



Kuvaan 15.29 on merkitty myös kaksi tarkastelupistettä sekä sinisen ja punaisen aallon vaiheenosottimet näissä pisteissä. Yhdessä tarkastelupisteessä kumpikin aalto on aina täsmälleen samassa vaiheessa, jolloin niiden vaiheenosottimet osoittavat aina samaan suuntaan. Superposition värähtelyä tässä pisteessä kuvailee näiden vaiheenosottimien summaa, jota voidaan kuvata asettamalla punainen ja sininen vaiheenosoitin peräkkäin. Mustan käyrän vaiheenosoitin tässä pisteessä on siis pituudeltaan kaksinkertainen punaiseen ja siniseen aaltoon verrattuna, ja köysi värähtelee tässä pisteessä voimakkaasti. Toisessa tarkastelupisteessä sininen ja punainen aalto ovat täsmälleen vastakkaisessa vaiheessa, jolloin niiden superpositio on aina tasapainoasemassa eikä värähtelevä laikkaan. Tämä ilmenee vaiheenosotinkuviossa niin, että punaisen ja sinisen vaiheenosottimen summan pituus on nolla.

Köydessä on siis vuorotellen voimakkaasti värähteleviä ja paikoillaan pysyviä pisteitä. Värähtelyä kutsutaan seisovaksi aalloksi, koska aalto ei etene kumpaakaan suuntaan vaan värähtelee paikoillaan. Paikoillaan pysyviä seisovan aallon pisteitä kutsutaan **solmuiksi** ja värähteleviä alueita **kuvuiksi**.



15.35 Miten kuvassa 15.29 esitetyn aallon potentiaali- ja liike-energia muuttuvat ajan kuluessa? Missä alueissa köydessä on eniten kutakin energiatyyppiä? Siirtyykö energia aallon värähdellessä?

Seisovia aaltoja syntyy erityisesti silloin, kun aalto on vangittu pieneen tilaan. Esimerkiksi kitaran kieli on kummastakin päästään kiinnitetty vaijeri, jonka on *pakko* värähdellä niin, että sen päät pysyvät paikoillaan. Tällöin yksinkertaisin aalto, joka kieleen voi syntyä, on yksikupuinen seisova aalto. Seuraava mahdollisuus olisi seisova aalto, jossa on kaksi kupua, ja niin edelleen. Näitä erilaisia perusvärähtelyjä on piirretty kuvaan 15.30 (a). Seisovia aaltoja kutsutaan myös *moodiksi*, koska tällaisessa systeemissä ne kuvaavat systeemin erilaisia mahdollisia tapoja värähdellä (engl. mode, 'tapa' tai 'tila').

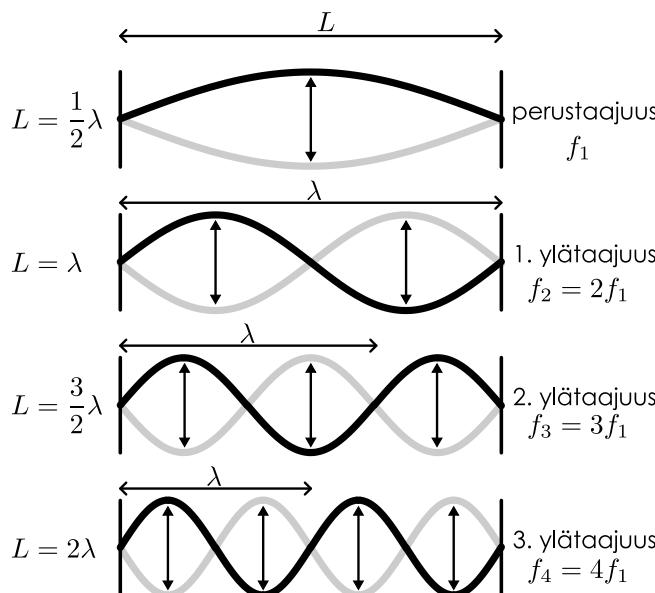
Seisovat aallot muodostuvat vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen summana, ja niiden peräkkäiset kuvut ovat siten vastakkaisissa vaiheissa. Toisin sanoen jos kielessä värähtelee kaksikupuinen seisova aalto, yhden kuvun muodostaessa aallonharjan toinen kupu on aallonpohja. Niinpä seisovan aallon aallonpituus ei ole kahden vierekkäisen solmun välinen etäisyys vaan *kolmen* peräkkäisen solmun rajaama pituus. Esimerkiksi yksikupuisessa seisovassa aallossa kielen pituus on *puolet* aallonpituudesta, kaksikupuisessa aallossa aallonpituus on sama kuin kielen pituus, kolmikupuisessa aallossa kieleen mahtuu 1.5 aallonpituitta ja niin edelleen. Yleisesti jokainen kupu on puolikkaan aallonpituuden levyinen, $L_{\text{kupu}} = \lambda/2$, ja kielen pituuden täytyy olla kuvun leveyden monikerta: $L_{\text{kieli}} = nL_{\text{kupu}}$, missä n on kupujen määrä ja siis positiivinen kokonaisluku. Niinpä päästään kiinnitetystä kielessä aallonpituuden ja kielen pituuden L välillä on yhteyks

$$L = n \frac{1}{2} \lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots \quad (15.99)$$

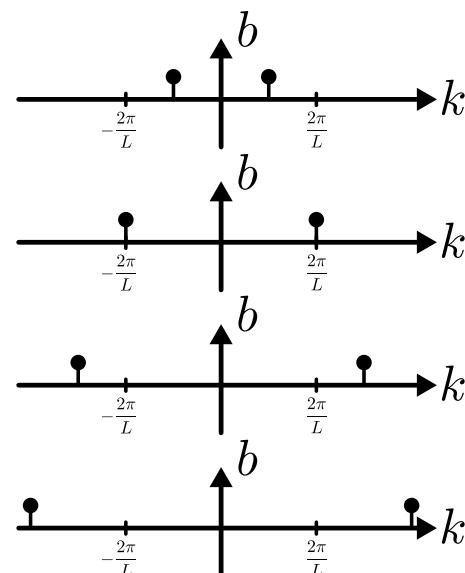
Lukua n kutsutaan myös *moodin kertaluvuksi*.

Kuva 15.30: Jos köysi tai soittimen kieli on kiinnitetty kummastakin päästään, siinä voi värähdellä seisovia aaltoja, joiden solmukohdat sijoittuvat köyden pähin.

(a) Alimpien taajuuksien seisovat aallot.



(b) Fourier-kertoimet.



Kuvassa 15.30 (b) on esitetty myös seisovien aaltojen Fourier-kuvaajat. Koska jokainen seisova aalto koostuu kahdesta vastakkaisiin suuntiin kulkevasta sinimuotoisesta aallosta, Fourier-kuvaajassa jokaista perusväärhtelyä kuvaaa kaksi pistettä. Seisovan aallon amplitudi on kaksinkertainen sen muodostaviin sinimuotoisiin aaltoihin verrattuna, joten Fourier-kuvaajissa pisteiden korkeus on vain puolet väärhtelyn amplitudista.



15.36 Puhallinsoittimet ovat gleensä ilmaputkia, joihin syntyy seisova paineaalto. Jos putken toinen pää on avoin ja toinen suljettu, paineaallossa on kupu likimain putken yhdessä päässä ja solmu toisessa. Millainen yhtälöä (15.99) vastaava säätöön pätee näiden aaltojen sallittujen aallonpituuksien λ_n ja putken pituuden L välillä?

Seisovan aallon väärhtelytaajuus riippuu sen kupujen lukumäärästä n . Tämäkin voidaan ymmärtää ajattelemalla seisovat aallot vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Sinimuotoisille aalloille nimitään pätee perusyhtälö $v_{\text{aalto}} = f\lambda$, (15.25), jonka mukaan aallon vauhti on taajuuden ja aallonpituuden tulo. Aaltojen etenemisvauhti riippuu vain väliaineen ominaisuuksista — kielen tapauksessa sen pituustiheydestä ja jännityksestä — joten v_{aalto} on sama riippumatta aallon kupujen määrästä. Kuitenkin koska aallonpituuus riippuu seisovan aallon kupujen määrästä n , myös taajuuden täytyy riippua siitä. Perusyhtölön ja seisovien aaltojen aallonpituuden lausekkeen (15.99) perusteella seisovien aaltojen taajuuden riipuvuus kupujen lukumäärästä on

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} v_{\text{aalto}} = \frac{n}{2L} v_{\text{aalto}}. \quad (15.100)$$

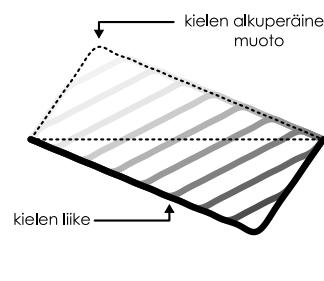
Taajuus f_1 on väärhtelyn perustajajuus, ja muut taajuudet ovat tämän monikertoja eli harmonisia ylätaajuuksia.



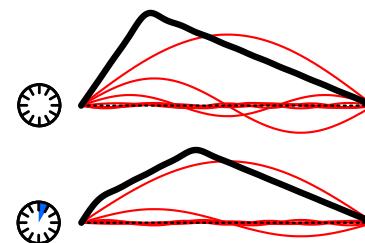
15.37 Millä taajuuksilla seisovat aallot voivat väärhdellä puhallinsoittimessa, jonka putki on toisesta päästään auki ja toisesta kiinni?

Kuva 15.31: Päästään kiinnitetyt kielen monimutkaisetkin väärhtelyt voidaan jakaa harmonisiin seisoviin aaltoihin.

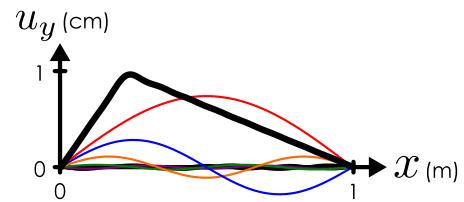
(a) Kielen väärhtely jaettuna seisoviin aaltoihin.



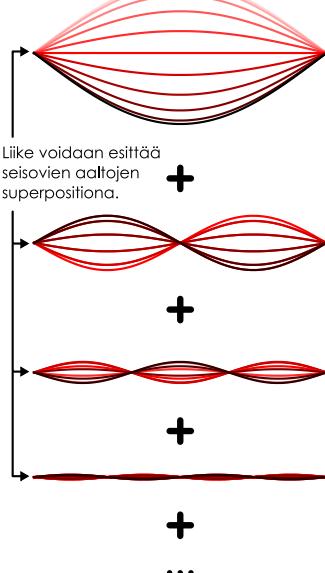
(b) Kielen muoto (musta) ja sen komponentit (punainen) eri ajan hetkinä.



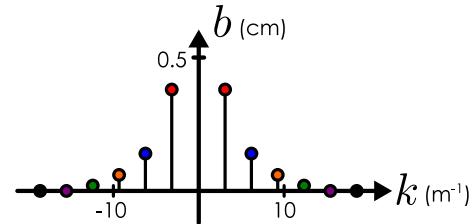
(c) Kielen aalofunktio alussa.



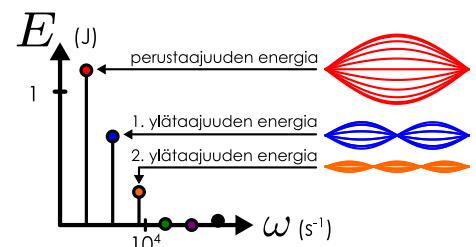
Liike voidaan esittää seisovien aaltojen superpositiona.



(d) Fourier-kertoimet.



(e) Spektri.



Vaikka kuvassa 15.30 esitettyjä seisovia aaltoja kutsutaan perusvärähelyiksi, tämä ei tarkoita, etteikö esimerkiksi kitaran kieli voisi värähdellä muillakin tavoilla. Kielellä voi esimerkiksi liikkua aaltopulssi heijastuen edestakaisin kielen kiinnitetyistä päästä. Kuitenkin aivan kuten etenevätkin aaltopulssit voidaan kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona, kielen *mikä tahansa aalto voidaan kuvata seisovien aaltojen superpositiona*. Kuvassa 15.31 on esimerkki, jossa kieltilä venytetään ensin sivuttain, minkä jälkeen kieli päästetään värähtelelemään vapaasti. Alkutilanteessa kielen muoto on likimain kolmio, ja kuvaan (a) on piirretty, kuinka kielen muoto alkaa muuttua sen päästessä vapaasti liikkumaan. Tässä tapauksessa kieli alkaa värähdellä niin, että sen muotoa alussa kuvannut kolmio käännyy ympäri kielen alapuolelle (kuvassa), minkä jälkeen kieli heilahtaa takaisin alkuperäiseen muotoonsa (ei kuvassa). Tämän värähdyksen voi kuitenkin ajatella syntynyt harmonisten seisovien aaltojen summana. Kuvassa (b) on esitetty kielen muodonmuutos puolen jaksonajan aikana. Musta käyrä kuvaa kielen todellista muotoa ja punaiset käyrät esittävät tämän harmonisia komponentteja.

Kuvassa (c) kieli on piirretty uudestaan alkuperäisestä, mutta tässä kuvassa harmoniset komponentit on piirretty eri välein ja kielen mittakaava on esitetty koordinaatiston avulla. Tässä kielen pituudeksi on valittu yksi metri, joten yksikupuisen seisovan aallon aaltoluku on $\pm 2\pi/2 \text{ m} = \pm 3.1 \text{ m}^{-1}$, kaksikupuisen $\pm 6.3 \text{ m}^{-1}$, jne. Värähtelyn merkittävimmät komponentit ovat yksi-, kaksi- ja kolmekupuiset seisovat aallot (punainen, sininen ja oranssi), mikä näkyy Fourier-kuvajassa (d) niin, että pisteen, joissa aaltoluku on itseisarvoiltaan pieni, ovat kuvajassa korkealla. Korkeamman kertaluvun värähtelyjen Fourier-kertoimet ovat pienet.

Värähtelyn spektri on esitetty kuvassa (e) $E(\omega)$ -kuvaajana, jossa on esitetty kunkin harmonisen komponentin energia komponentin kulmataajuuden funktiona. Vaikka kukaan seisova aalto koostuu kahdesta sinimuotoisesta aalosta, näillä on sama taajuus, ja niinpä jokaista seisovaa aaltoa edustaa spektrissä vain yksi piste. Kunkin harmonisen aallon energia on verrannollinen sekä amplitudin että kulmataajuuden neliöön, $E \sim \omega^2 A^2$, joten vaikka kolmikupuisen seisovan aallon (oranssi) amplitudi on pieni, sen energia on selvästi nollaan suurempi. Korkeamman kertaluvun aaltojen energia on pieni, vaikka niiden taajuus onkin suuri.



15.38 Mikä on kuvan 15.31 mustan käyrän väärähtelyn taajuus ja jaksonaika? Harmonisten komponenttien taajuudet voit arvioida kuvan (e) avulla.

Oleellisinta tässä analyysissä on se, että kielen monimutkainen liike (kuva (a)) voidaan jakaa harmonisiin komponentteihin, joilla on kyllakin täsmällinen taajuus ja energia (kuva (e)). Erityisesti saman kielen väähely voidaan aina jakaa näihin samoihin komponentteihin riippumatta siitä, mikä kielen täsmällinen muoto alussa on. Instrumenttien toiminta perustuukin yleensä juuri siihen, että ne voivat väähellä vain tiettyillä taajuuksilla. Esimerkiksi kitaran kunkin kieli soi perustaajuudellaan sekä tämän harmonisilla ylätaajuuksilla, ja nämä taajuudet riippuvat kielen pituudesta sekä kielessä kulkevien aaltojen nopeudesta. Kieli ei siis voi soida millä tahansa taajuudella, eikä kielen nuotti voi noin vain muuttua. Toisaalta taajuutta voidaan tarvittaessa helposti muuttaa säätämällä kielen jännitystä tai pituutta. Käytännössä kielen näpäytys synnyttää siihen aina useiden seisovien aaltojen superposition, jolloin kieli väähtelee yhtä aikaa useilla taajuuksilla. Kuitenkin koska kaikki ylätaajuudet ovat perustaajuuden monikertoja, niiden yhdistelmä väähtelee myös perustaajuudella (ks. kuva 14.18), joten kuultavan nuotin taajuus on aina kielen perustaajuus. Ylätaajuuksien osuuden instrumentin äänessä eli äänen spektrin ihmisen havaitsee siten, että eri instrumentit kuulostavat erilaisilta, vaikka ne soittaisivatkin samaa nuottia (eli samaa perustaajuutta).



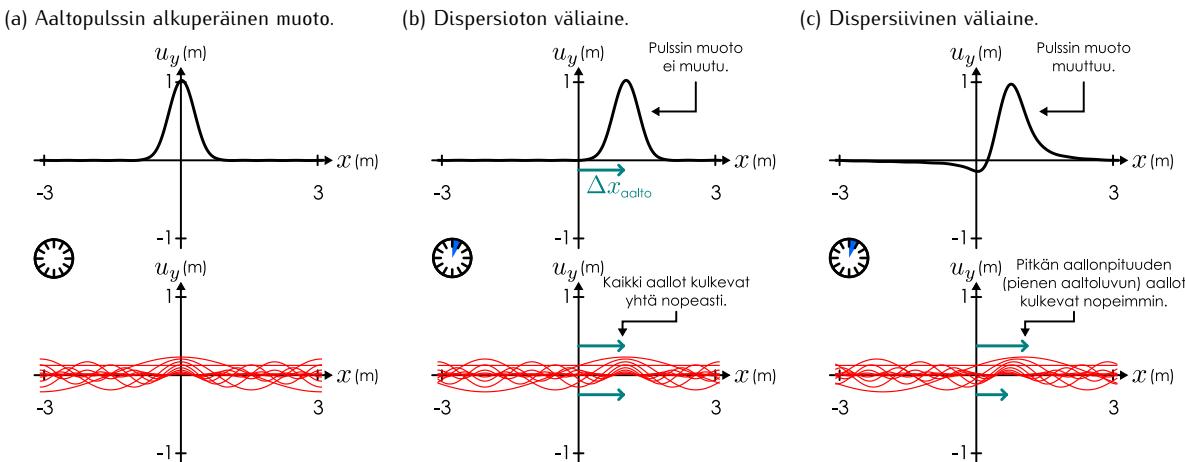
15.39 Tässä analysoitiin kitaran kielen värähtelyä. Ihminen ei kuitenkaan kuule kitaran värähtelyä vaan oman korvansa värähtelyn. (a) Selitä, miten kitaran kielen värähtelyt siirtyvät korvaan. (b) Pohdi, mitkä näistä ominaisuuksista pysyvät tämän prosessin aikana vakiona ja mitkä muuttuvat: (i) amplitudi, (ii) aallonpituuus, (iii) taajuus, (iv) aallon nopeus?

Dispersio

Luvussa 15.2 tarkastelimme aallon nopeutta köydessä, ja johdimme tuloksen, jonka mukaan aallon nopeus ei riipu aallon muodosta vaan ainoastaan köyden pituustiheydestä ja jännityksestä eli väliaineen ominaisuuksista. Tämä on totta usein, mutta ei aina. Joissakin väliaineissa aaltojen nopeus nimittäin riippuu myös aallon ominaisuuksista. Tätä ilmiötä kutsutaan **dispersioksi** (engl. dispersion, 'hajaantuminen'). Väliainetta, jossa dispersioita tapahtuu, kutsutaan *dispersiiviseksi*.

Esimerkiksi valkoisen valon hajaantuminen eri väreihin prismassa (tai vesipisaroissa, mikä synnyttää sateenkaaret) johtuu dispersiosta. Valo on sähkömagneettinen aalto, ja näköäisti havaitsee valon eri värisenä riippuen valon taajuudesta ja aallonpituuudesta. Violetin valon taajuus on noin 750 THz ja aallonpituuus tyhjiössä 400 nm, kun taas punaisen valon taajuus on 400 THz ja aallonpituuus 750 nm. Muut näkyvän valon värit asettuvat tälle välille. Valkoisella valolla ei ole taajuutta, vaan valkoinen valo on useiden eritaajuisen (eri-väristen) aaltojen superpositio. Vesi ja lasi ovat sähkömagneettisille aalloille dispersiivisistä väliaineita, joten eri väriinä nähtävät valoaallot kulkevat näissä aineissa hiukan eri vauhdilla. Luvussa 16 aikanaan opimme

Kuva 15.32: Dispersiivisessä väliaineessa sinimuotoisen aallon nopeus riippuu aallon taajuudesta ja aaltoluvusta. Jos dispersiota tapahtuu, sinimuotoisten aaltojen superpositio muuttuu ajan kuluessa.



lisäksi, että eri materiaalien rajapinnalle vinosti saapuvien aaltojen kulkusuunta voi muuttua riippuen aaltojen vauhdista rajapinnan eri puolilla. Tästä johtuen valkoisen valon sisältämät eri värit kääntyvät prismassa hiukan eri suuntiin, ja näin valkoinen valo hajaantuu eri väreihin.

Puhtaasti harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää dispersiivisessä väliaineessa sinimuotoisen aallon aivan kuten dispersiottomassakin väliaineessa. Näin siksi, että harmonisesti värähtelevän läheen värähtely leviää väliaineeseen saaden väliaineen jokaisen pisteen värähtelemään samalla taajuudella. Tällöin väliaineessa etenee sinimuotoinen aalto. Dispersiivisessä väliaineessa tämän värähtelyn leväminen kuitenkin riippuu taajuudesta, joten aallot liikkuvat eri nopeuksilla.

Aaltopulssit muuttavat muotoaan liikkuessaan dispersiivisessä väliaineessa. Tämä johtuu siitä, että mikä tahansa pulssi voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Jos dispersiota ei tapahdu, kaikki nämä sinimuotoiset aallot kulkevat yhtä nopeasti, ja niinpä niiden superpositio lükkiu myös tällä nopeudella. Tämä on piirretty kuvissa 15.32 (a) ja (b), joissa on esitetty pulssin alkuperäinen muoto (musta) sekä sinimuotoiset aallot (punainen), joista aalto koostuu. Jos väliaine kuitenkin on dispersiivinen, sinimuotoiset aallot kulkevat eri nopeuksilla ja näin ollen ne siirtyvät toistensa suhteen ajan kuluessa, kuten kuvassa (c) on esitetty. Tällöin myös niiden superposition muoto muuttuu. Tässä esimerkissä pitkän aallonpituuuden eli pienien aaltoluvun aallot kulkevat hieman nopeammin kuin lyhyen aallonpituuuden aallot, jolloin aluksi symmetrisen aaltopulssin perään muodostuu pieni aallonpohja. Dispersion ei tarvitse olla juuri näin pään, vaan joissakin väliaineissa lyhyen aallonpituuuden aallot voivat kulkea nopeammin kuin pitkän aallonpituuuden aallot.

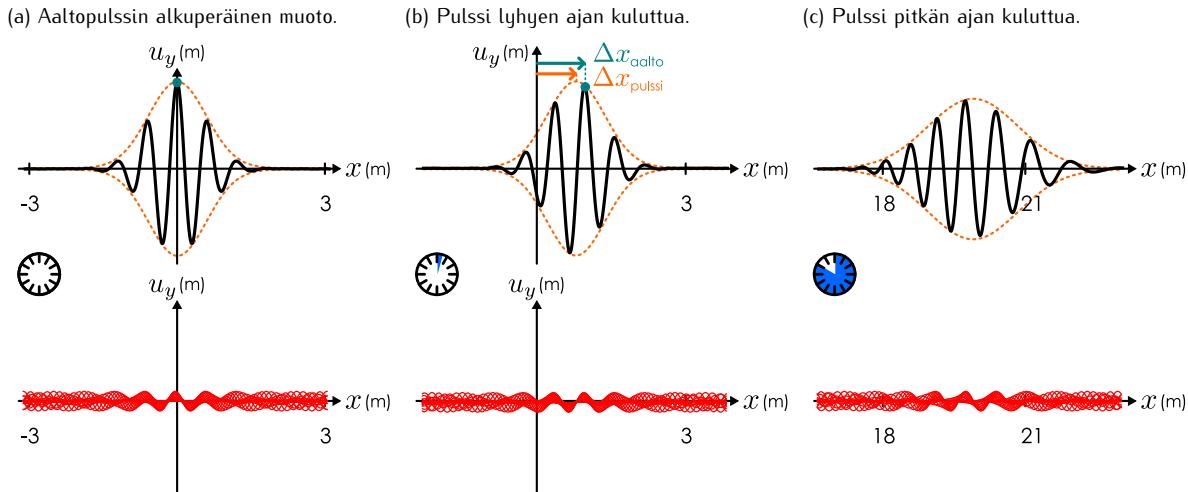
Voisi arvata, että pulssin nopeus on jonkinlainen keskiarvo sen muodostavien sinimuotoisten aaltojen nopeuksista, mutta *näin ei ole*, vaan pulssien nopeus riippuu siitä, kuinka sinimuotoisten aaltojen kulmataajuus ja aaltoluku riippuvat väliaineessa toisistaan. Sinimuotoinen aallon vauhti on *aina* aaltolükkeen perusyhtälön mukaisesti aallon kulmataajuuden ja aaltoluvun suhde, $v_{\text{aalto}} = \omega/k$. Jos väliaine on dispersioton, tämä vauhti on sama kaikilla aaltoluvilla ja kulmataajuksilla, ja niinpä kulmataajuus ja aaltoluku ovat suoraan verrannolliset toisiinsa. Jos kuitenkin dispersiota tapahtuu, kulmataajuus ja aaltoluku *eivät* voi olla suoraan verrannolliset toisiinsa vaan kulmataajuuden ja aaltoluvun välillä täytyy olla jokin toisenlainen yhteyts. Tätä yhteyttä kuvataan yleensä kirjoittamalla kulmataajuus aaltoluvun funktiona, $\omega(k)$, ja tästä funktiota kutsutaan väliaineen *dispersiorelaatioksi*.



15.40 Syvässä vedessä pinta-aaltojen dispersiorelaatio on $\omega = \sqrt{gk}$. Mikä on syvässä vedessä kulkevan sinimuotoinen aallon etenemisnopeus, jos (a) aaltoluku on 2 m^{-1} , (b) aallonpituuus on 2 m , (c) kulmataajuus on 2 s^{-1} , (d) taajuus on 2 Hz ?

Kuvassa 15.33 on havainnollistettu pulssin nopeuden ja sinimuotoisten aaltojen nopeuden eroa. Kuvan pulssi on sama aalto kuin kuvassa 15.18 (d). Se koostuu 21 sinimuotisesta aallosta, joiden aaltolukujen keskiarvo on $k_{\text{keski}} = 10 \text{ m}^{-1}$. Tämä on näkyjä pulssissa siten, että mustan käyrän tihään värähtelyn aallonpituuus on likimain $\lambda \approx 2\pi/k_{\text{keski}} \approx 0.6 \text{ m}$. Tämä värähtely myös etenee likimain samalla nopeudella kuin saman aallonpituuuden ja aaltoluvun sinimuotoinen aalto. Kuvassa 15.33 (a) on esitetty pulssin muoto ajan hetkellä $t = 0 \text{ s}$ ja kuvassa (b) hetkellä $t = 1 \text{ s}$. Aluksi pisteessä $x = 0.0 \text{ m}$ ollut mustan käyrän aallonharja (merkityt pisteellä) on siirtynyt kuvassa (b) paikkaan $x = 1.0 \text{ m}$, joten mustan käyrän aallonharjet etenevät nopeudella $\Delta x_{\text{aalto}}/\Delta t = 1.0 \text{ m/s}$. Myös aaltopulssia kuvaavan oranssin verhokäyrän huippu on aluksi pisteessä $x = 0 \text{ m}$,

Kuva 15.33: Aaltopulssi dispersiivisessä väliaineessa. Lyhyen aallonpituuden värähtely eli kantoaalto (musta) liikkuu vaihenopeudella ja aaltopulssi (oranssi) ryhmänopeudella. Ajan kuluessa dispersio johtaa myös pulssin hajaantumiseen.



mutta kuvassa (b) pulssin huippu on edennyt vain pisteesseen $x = 0.8$ m. Pulssin etenemisnopeus on siten vain $\Delta x_{\text{pulssi}}/\Delta t = 0.8$ m/s eli *pulssi etenee tässä väliaineessa hitaanmin kuin sinimuotoisen aalto*.

Mustan käyrän tihää värähtelyä kutsutaan *kantoaalloksi*, koska se "kantaa" oranssin verhokäyrän rajaamaa pulssia. Kantoaallon nopeutta kutsutaan aallon *vaihenopeudeksi*, ja tämä on siis ainakin likimain sama kuin vastaavan sinimuotoisen aallon nopeus,

$$v_{\text{vaihe}} = \frac{\omega}{k}. \quad (15.101)$$

Oranssin verhokäyrän kuvaaman pulssin nopeutta puolestaan kutsutaan aallon *ryhmänopeudeksi*. Osoittautuu, että jos aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltolukujen keskiarvo on k_{keski} , eivätkä aaltoluvut poikkeaa tästä keskiarvosta kovin paljon, ryhmänopeus saadaan laskemalla dispersiorelaation derivaatta pisteessä k_{keski} :

$$v_{\text{ryhmä}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_{\text{keski}}} = \omega'(k_{\text{keski}}). \quad (15.102)$$

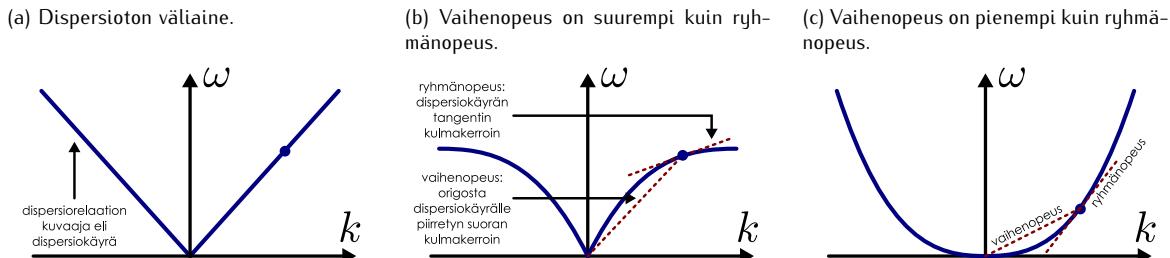
Kuvassa 15.34 tämä on esitetty graafisesti. Kuvaan on piirretty erilaisia dispersiorelaatiota, ja kullakin aaltoluvulla aallon vaihenopeus selviää origosta dispersiokäyrälle piirretyn suoran kulmakertoimesta kun taas ryhmänopeus on käyrän tangentin kulmakerroin. Vaihe- ja ryhmänopeuden eroa on havainnollistettu myös luvun lopussa esimerkissä 15.6.



15.41 Syvässä vedessä pinta-aaltojen dispersiorelaatio on $\omega = \sqrt{gk}$. Mikä on syvässä vedessä kulvan aaltopulssin etenemisnopeus, jos pulssin keskimääräinen aaltoluku on 2 m^{-1} ?

Vaihe- ja ryhmänopeuden ero on tärkeä, koska vaikka sinimuotoinen aalto liikkuu *vaihenopeudella*, aaltopulssi kuljettaa energian nimenomaan *ryhmänopeudella*. Näin siksi, että aallon energiatihesys on verrannollinen amplituuden neliöön ja aallon amplituudi poikkeaa nollasta vain pulssin kohdalla. Niinpä vaikka kantoaalto

Kuva 15.34: Vaihe- ja ryhmänopeus voidaan lukea dispersiorelaation kuvaajasta. Jos aallon aaltoluku on k ja kulmatajuus $\omega(k)$, vaihenopeuden kertoo origosta kuvajan pisteesseen (ω, k) piirretty suora. Ryhmänopeus on tästä pistettä sivuavan tangentin kulmakerroin.



kulkisi eri nopeudella kuin pulssi, se ei pysty siirtämään energiaa pois pulssin alueelta. Aallon energia kulkee siis pulssin mukana ryhmänopeudella. Tässä mielessä ryhmänopeus on usein tärkeämpi aallon liikettä kuvavaa suurea kuin vaihenopeus. On esimerkiksi mahdollista tuottaa aaltoja, joiden vaihenopeus on valonnopeutta suurempi. Suhteellisuusteoria kielää energian ja informaation siirtämisen valonnopeutta nopeammin, mutta tässä ei ole ristiriitaa, koska vaikka aalloissa voi olla valoa nopeammin kulkevia osia, energiaa tai informaatiota aallotkaan eivät voi koskaan kuljettaa valonnopeutta nopeammin.

Dispersio voi vaikuttaa myös pulssin muotoon. Kuvaan 15.33 (c) on pürretty pulssi hetkellä $t = 25$ s, ja pulssi on tällöin selkeästi leveämpi ja matalampi kuin kuvissa (a) ja (b). Alkuhetkellä kaikissa pulssin muodostavissa sinimuotoisissa aalloissa on aallonharja samassa pisteessä (origossa), jolloin pulssi on tässä kohdassa korkea. Ajan myötä aallot kuitenkin ajautuvat erilleen, jolloin ei enää ole pistettä, jossa aallot olisivat kaikki samassa vaiheessa. Sen sijaan aallot vahvistavat osittain toisiaan laajalla alueella, jolloin pulssista tulee leveä ja matala. Näin dispersio johtaa lopulta aaltopulssin hajaantumiseen.



15.42 (a) Vertaa lyhyen ja pitkän aallonpituuuden sinialtojen liikettä kuvan 15.34 esittämässä väliaineissa. Mikä kuvajista voisi sopia kuvaan 15.32 (c)? (b) Voiko aaltopulssi kulkea vastakkaiseen suuntaan kuin kantoaalto? Millainen pitäisi dispersiokuvauksen tällaisessa tapauksessa olla?

esimerkki 15.6

Ryhvä- ja vaihenopeus

Eräässä väliaineessa dispersiorelaatio on $\omega(k) = ak^2$, missä $a = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$. Aineessa on superpositiossa kaksi sinimuotoisesta aaltoa, joiden aaltoluvut ovat $k_1 = 5.0 \text{ m}^{-1}$ ja $k_2 = 6.0 \text{ m}^{-1}$ ja muut ominaisuudet samat. Millainen tämä aalto on ja erityisesti millä nopeudella se liikkuu?

TILANNE Aallon aaltofunktio on siis kahden sinimuotoisen funktion summa. Näiden funktioiden aaltoluvut poikkeavat vain vähän toisistaan, joten niiden superpositiossa vaihtelevat alueet, joissa aallot vahvistavat toisiaan, sekä alueet, joissa aallot heikentävät toisiaan. Toisin sanoen kyseessä on *huojuntailmiö*. Aalton syntyvä sinimuotoinen kantoaalto, jonka amplitudi vaihtelee jaksollisesti muodostaen loputtoman jonon aaltopulsseja.

SUUNNITELMA Valitaan ajan ja paikan nollakohta niin, että kummankin sinimuotoisen aallon vaihe on siinä nolla. Niinpä sinialtojen aaltofunktiot ovat

$$u_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad (15.103)$$

$$u_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t), \quad (15.104)$$

ja superposition aaltofunktio on näiden summa

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (15.105)$$

Oletettavasti kantoaallon pitäisi liikkua dispersiorelaation määräämällä vaihenopeudella ja aaltopulssien ryhmänopeudella. Niinpä lienee sytyt määrittää aaltolukujen kesiarvo ja kirjoittaa aaltofunktio tämän avulla.

RATKAISU Sinialtojen aaltolukujen kesiarvo on

$$k_{\text{keski}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 5.5 \text{ m}^{-1} \quad (15.106)$$

ja merkitsemällä aaltolukujen eroa kesiarvosta $\Delta k = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) = 0.5 \text{ m}^{-1}$, aaltoluvut voidaan kirjoittaa muodossa $k_1 = k_{\text{keski}} - \Delta k$ sekä $k_2 = k_{\text{keski}} + \Delta k$. Merkitään samaan tapaan kulmataajuudelle $\omega_{\text{keski}} = (\omega_1 + \omega_2)/2 = 30.5 \text{ s}^{-1}$ ja $\Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 = 5.5 \text{ s}^{-1}$ jolloin $\omega_1 = \omega_{\text{keski}} - \Delta \omega$ sekä $\omega_2 = \omega_{\text{keski}} + \Delta \omega$. Näillä merkinnöillä ensimmäisen siniallon aaltofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_1(x, t) = A \cos(k_{\text{keski}} x - \Delta k x - \omega_{\text{keski}} t + \Delta \omega t) = A \cos[(k_{\text{keski}} x - \omega_{\text{keski}} t) - (\Delta k x - \Delta \omega t)]. \quad (15.107)$$

Samaan tapaan toinen aaltofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$u_2(x, t) = A \cos[(k_{\text{keski}} x - \omega_{\text{keski}} t) + (\Delta k x - \Delta \omega t)]. \quad (15.108)$$

(Huomaat etumerkin vaihtuminen.)

Käyttäen hyväksi trigonometristä identiteettiä

$$\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2 \cos x \cos y \quad (15.109)$$

superposition aaltofunktio voidaan sieventää muotoon

$$u(x, t) = A \cos[(k_{\text{keski}} x - \omega_{\text{keski}} t) - (\Delta k x - \Delta \omega t)] + A \cos[(k_{\text{keski}} x - \omega_{\text{keski}} t) + (\Delta k x - \Delta \omega t)] \quad (15.110)$$

$$= 2A \cos(k_{\text{keski}} x - \omega_{\text{keski}} t) \cos(\Delta k x - \Delta \omega t). \quad (15.111)$$

Toisin sanoen keskiarvot ja poikkeamat erottuvat aaltofunktiossa omaksi kosinifunktioikseen. Funktio $\cos(k_{\text{keski}}x - \omega_{\text{keski}}t)$ kuvailee lyhytaallonpituudesta kantoaltoa, ja tämä funktio liikkuu selvästikin vaihenopeudella

$$v_{x,\text{vaihe}} = \frac{\omega_{\text{keski}}}{k_{\text{keski}}} = 5.5 \text{ m/s.} \quad (15.112)$$

Funktio $\cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ on aaltopulssin rajaava verhokäyrä, ja tämä puolestaan liikkuu nopeudella

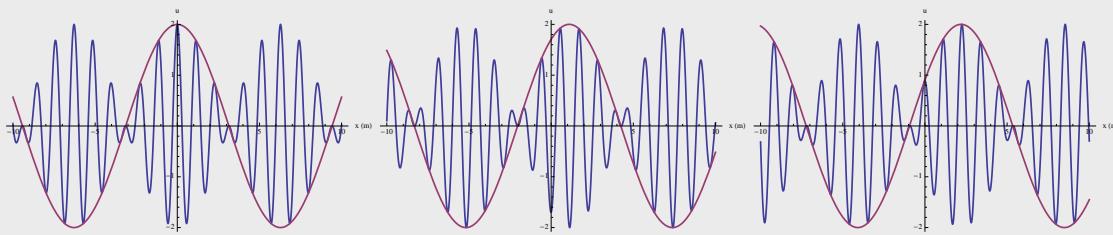
$$v_{x,\text{ryhmä}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = 11.0 \text{ m/s.} \quad (15.113)$$

Mathematica:

```
(* dispersio ja lukuarvot *)
w[k_] := k^2
k1 = 5; k2 = 6;
kavr = (k1 + k2)/2;
dk = (k2 - k1)/2;
wavr = (w[k1] + w[k2])/2;
dw = (w[k2] - w[k1])/2;

(* aaltofunktiot *)
u1[x_, t_] := Cos[k1 x - w[k1] t]
u2[x_, t_] := Cos[k2 x - w[k2] t]
u[x_, t_] := u1[x, t] + u2[x, t]
verho[x_, t_] := 2 Cos[dk x - dw t]

(* aaltofunktion ja verhokayran kuvaaja *)
Table[
  Plot[
    {u[x, 0.1 t], verho[x, 0.1 t]},
    {x, -10, 10},
    PlotStyle -> Thick,
    AxesLabel -> {"x (m)", "u"},
    {t, 0, 2}]
```



ARVIOINTI Dispersiorelaation mukaan kulmataajuus aaltoluvulla k_{keski} on $\omega(k_{\text{keski}}) = 30.25 \text{ s}^{-1}$. Tämä ei ole täsmälleen sama kuin $\omega_{\text{keski}} = 30.5 \text{ s}^{-1}$, koska dispersiorelaatio ei ole lineaarinen, mutta hyvin lähellä täetä. Kantoalto siis kulkee varsin tarkasti dispersiorelaation ennustamalla vaihenopeudella. Dispersiorelaation derivaatta on $\omega'(k) = 2k$, joten aallon ryhmännopeuden pitäisi tämän mukaan olla

$$v_{\text{ryhmä}} = \omega'(k_{\text{keski}}) = 2ak_{\text{keski}} = 11.0 \text{ m/s,} \quad (15.114)$$

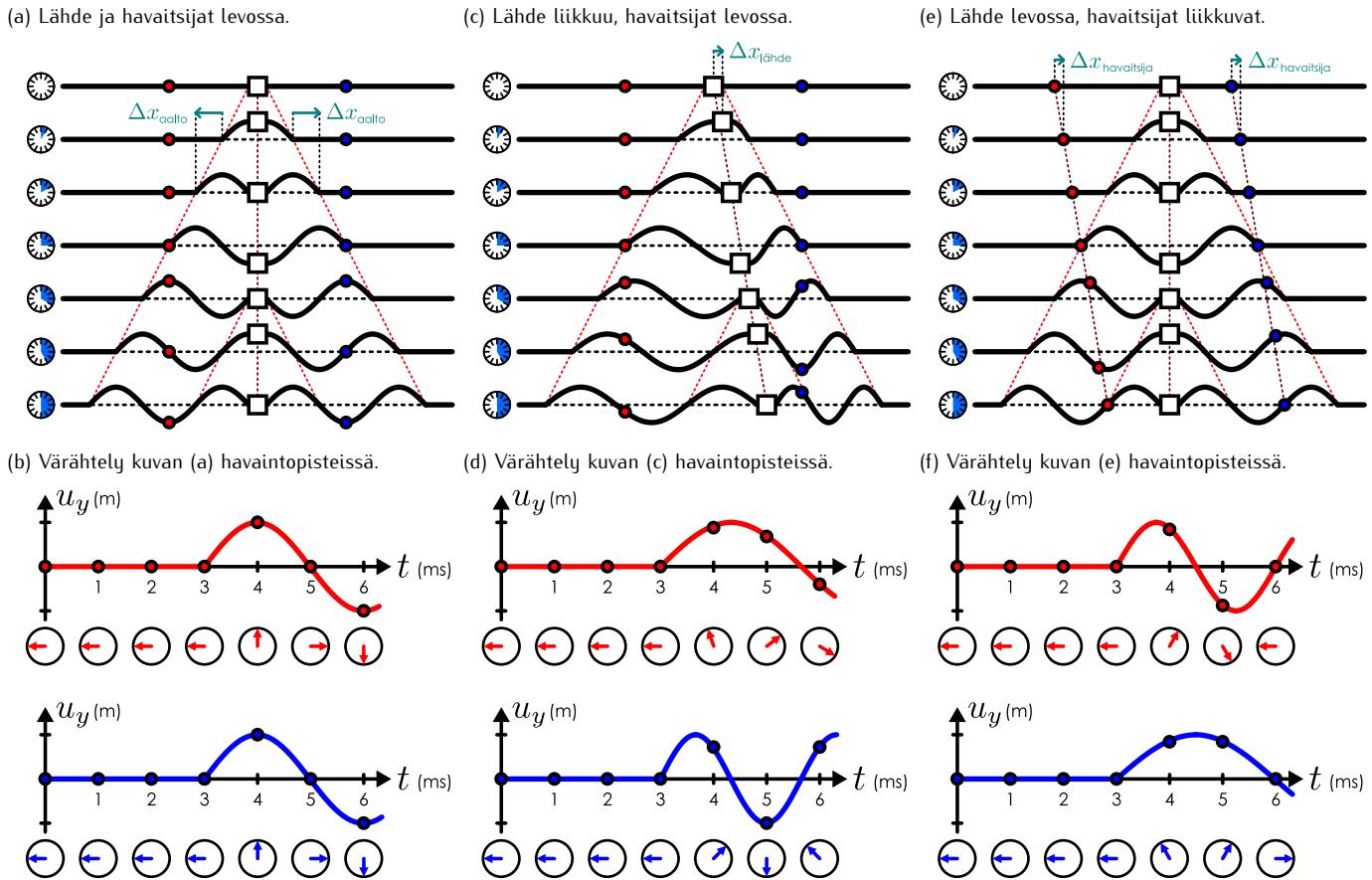
kuten onkin.

Doppler-ilmiö

Kuvassa 15.8 esitettiin, kuinka köyden päähän kiinnitetty harmonisesti värähtelevä kappale tuottaa sinimuotoista aaltoliikettä köyteen. Samanlainen tilanne syntyy aina, kun aaltolähde lähettilä sinimuotoista aaltoa. Esimerkiksi värähtelevä äänirauta synnyttää ilmaan sinimuotoisesti värähteleviä paineaaltoja. Kuvassa 15.35 (a) on esitettty vastaava tilanne, jossa aaltolähde on kuvan keskellä ja sen lähettilä aalto levii läheestä sekä oikealle että vasemmalle. Kuvaan on myös merkitty kaksi tarkastelupistettä (punainen ja sininen), jotka havaitsevat aallon tuottaman värähtelyn. Kuvan voi ajatella esittävän köyttä, jolloin aaltolähde on värähtelevä kappale ja tarkastelupisteet ovat köyteen merkityjä pisteitä. Toisaalta kuvan voi ajatella esittävän esimerkitä paineen muutoksia ilmassa. Tällöin aaltolähteenä voi toimia äänirauta ja havaintopisteet voivat kuvata kuulijoiden tärykalvoja. Kuulo perustuu siihen, että ilmassa kulkeva paineaalto saa paineen värähtelemaan tärykalvon kohdalla, ja tämä puolestaan saa tärykalvon värähtelemään samalla taajuudella. Kuvassa 15.35 (b) on esitettty tarkastelupisteiden värähtely ajan funktioita, ja äänen tapauksessa korva havaitsee nimenomaan tämän värähtelyn. Kuvaan on myös piirretty tämän värähtelyiden vaiheenoitimet.

Tilanne muuttuu, jos aaltolähde liikkuu. Jos kyseessä on köyttä liikuttava värähtelijä, tämä tarkoittaa värähtelevän kappaleen liukuvan köyttä pitkin. (Tällöin köysi ei voi olla kappaleessa kiinni vaan kappaleessa voi esimerkiksi olla reikä, jonka läpi köysi kulkee.) Jos kyseessä on äänilähde kuten äänirauta, tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että äänirauta liikkuu ilman suhteen. Tilanne on esitettynä kuvassa 15.35 (c). Aaltoliike etenee tässä tilanteessa poispäin läheestä täsmälleen samalla vauhdilla kuin kuvassa 15.35 (a).

Kuva 15.35: Aaltolähteen liike muuttaa aaltojen taajuutta. Havaitsijan liike muuttaa havaittua taajuutta.



Aallon nopeutta on kuvattu punaisilla katkoviivoilla, ja koska aaltoliikkenen nopeus on kuvissa sama, näiden viivojen kulma on sama. Punaiset katkoviivat on kuvissa pörrretty täsmälleen niiden pisteiden kautta, joissa välinaine on tasapainoasemassa liikkeessä ylöspäin. Toisin sanoen punaisien viivojen kohdalla aallon vaihe on neljänneskierros positiviseen kiertoasuuntaan, $\phi = \pi/2$, ja vaiheenosoitin osoittaa vaakasuoraan vasemmalle.

Koska punaiset viivat kuvaavat aallon samassa vaiheessa olevia pisteitä, niiden välinen vaakasuora etäisyys on yksi aallonpituuus. Kuvassa (a) sekä vasemmalle että oikealle kulkevien aaltojen aallonpituuus on sama, mutta kuvassa (c) näin ei ole, koska aaltolähde kulkee oikealle. Yhden värähdyn aikana aaltolähde siirtyy läheemmäs oikelle kulkevaa aaltoa ja kauemmas vasemmalle kulkevasta aalosta, jolloin oikealle kulkevaan aalton muodostuu lyhyempiä ja vasemmalle kulkevaan pidempiä aaltoja kuin lähteestä ollessa paikoillaan.

Jos aaltojen nopeus on $\pm v_{x,\text{aalto}}$ (etumerkki riippuu aallon kulkusuunnasta), yhden aaltolähteen värähdyn aikana $T_{\text{lähde}}$ aallot kulkevat matkan $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} T_{\text{lähde}}$. Jos aaltolähteen nopeus on $v_{x,\text{lähde}}$, lähde siirtyy tässä ajassa matkan $\Delta x_{\text{lähde}} = v_{x,\text{lähde}} T_{\text{lähde}}$, ja niinpä syntyvien aaltojen aallonpituuus on

$$\lambda = |\Delta x_{\text{aalto}} - \Delta x_{\text{lähde}}| = |v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| T_{\text{lähde}}. \quad (15.115)$$

Jos kyseessä on ääni, jonka vastaanottaa mikrofoni tai korva, havaitija ei mittaa aallonpituitta vaan aallon tuottaman värähtelyn taajuuden omalla kohdallaan eli kuvassa 15.35 (d) esitetyn värähtelyn. Tämä havaittu värähtelytaajuus voidaan kuitenkin ratkaista aallonpituden avulla, sillä sinimuotoisille aalloille pätee edelleen aaltoliukkeen perusyhtälö (15.32), jonka perusteella aallon taajuus riippuu aaltojen vauhdista ja aallonpitudesta

$$f_{\text{aalto}} = \frac{v_{\text{aalto}}}{\lambda} = \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| T_{\text{lähde}}} = \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.116)$$

Tämä on myös paikoillaan olevat havaitsjan vastaanottama taajuus.

Jos aaltolähde liikkuu samaan suuntaan kuin aalto, $|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| = v_{\text{aalto}} - v_{\text{lähde}} < v_{\text{aalto}}$, ja tällöin aallon aallonpituuus on lyhyempi kuin aaltolähteen ollessa levossa ja aallon taajuus on suurempi kuin aaltolähteen taajuus. Tämä tapaus vastaa kuvan (d) sinistä käyrää. Jos sen sijaan aaltolähde liikkuu vastakkaiseen suuntaan aaltoon nähden, $|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}| = v_{\text{aalto}} + v_{\text{lähde}} > v_{\text{aalto}}$. Tässä tapauksessa aallon taajuus on pienempi kuin aaltolähteen taajuus, kuten kuvan (d) punaisessa käyrässä. Äänen tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että

havaitsijaa kohti liikkuvan lähteen tuottaman äänen taajuus suurempi kuin vastaanlevossa olevan lähteen tuottama ääni, jolloin ääni kuullaan korkeana. Havaitsijasta poispäin kulkevan lähteen äänen taajuus on puolestaan pienempi kuin levossa olevan lähteen, jolloin ääni kuullaan matalana. Tätä kutsutaan **Doppler-ilmiöksi** (Christian Dopplerin mukaan). Klassinen esimerkki Doppler-ilmiöstä on liikkuvan ajoneuvon kuten ambulanssin ääni, jonka havaittu taajuus selvästi muuttuu ajoneuvon ajaessa havaitsijan ohitse.



15.43 Kuvassa 15.35 aaltojen vauhti on 345 m/s ja aaltolähteen vauhti on 115 m/s. (a) Mikä on kuvissa (a) ja (c) kunkin aallon aallonpituuus? (b) Mikä on kuvissa (b) ja (d) kunkin havaitun värähtelyn taajuus ja jaksonaika? Vertaa kuvia ja yhtälön (15.116) antamaa tulosta.

On tietenkin myös mahdollista, että havaitsijat liikkuvat. Jos kyseessä on esimerkiksi ääni, näin tapahtuu kuuntelijan liikkuessa. Tämä tilanne on piirretty kuvassa 15.35 (e), jossa punainen havaintopiste lähestyy aaltolähettää ja sininen loittonee siitä. Havaitsijat mittaavat jälleen väliaineen värähtelyn omalla kohdallaan, mutta koska he liikkuvat väliaineen suhteeseen, tämän havaitun värähtelyn taajuus ei ole sama kuin aallon värähtelytaajuus. Esimerkiksi kuvassa (e) punainen havaitsija kohtaa ensimmäisen punaisen katkoviivan (aallon etureunan) neljännessä kuvassa ylhäältä eli ajan hetkellä $t = 3$ ms ja toisen punaisen katkoviivan (ensimmäisen aallonpituuden) jo alimmassa kuvassa eli ajan hetkellä $t = 6$ ms. Punainen värähtelijä havaitsee siis yhden värähtelyjakson kestoksi vain kolme millisekuntia, vaikka aaltolähteen värähtelyn jaksonaika on neljä millisekuntia. Vastaavasti aallon etureuna saavuttaa sinisen havaintopisteen hetkellä $t = 3$ ms, mutta koska tämä piste kulkee aallon kanssa samaan suuntaan, hetkellä $t = 6$ ms sinisen pisteen ohi on kulkenut vasta puoli aallonpituutta. Sininen piste havaitsee kolmessa millisekunnissa vain puolikkaan värähtelyjakson, joten tämä piste havaitsee värähtelyn jaksonajaksi kuusi millisekuntia.

Havaitsija siis mittaa yhden värähdyn jaksonajaksi $T_{\text{havaitsija}}$ sen ajan, jossa yksi aallonpituuus kulkee havaitsijan ohitse. Jos siis havaitsija kulkee tänä aikana siirtymän $\Delta x_{\text{havaitsija}} = v_{x,\text{havaitsija}} T_{\text{havaitsija}}$ ja aalto kulkee samassa ajassa siirtymän $\Delta x_{\text{aalto}} = v_{x,\text{aalto}} T_{\text{havaitsija}}$, havaittu jaksonaika määräytyy niin, että havaitsijan siirtymä *aallon suhteeseen* on yhtä pitkä kuin yksi aallonpituuus, $|\Delta x_{\text{aalto}} - \Delta x_{\text{havaitsija}}| = \lambda$, eli

$$|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}| T_{\text{havaitsija}} = \lambda. \quad (15.117)$$

Tästä voidaan ratkaista havaittu taajuus, joka on jaksonajan käänteisluku,

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{1}{T_{\text{havaitsija}}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{\lambda}, \quad (15.118)$$

ja käyttäen jälleen aaltolükkeen perusyhtälöä $\lambda = v_{\text{aalto}}/f_{\text{aalto}}$ tuloksen voi kirjoittaa aallon taajuuden avulla

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{v_{\text{aalto}}} f_{\text{aalto}}. \quad (15.119)$$



15.44 Kuvassa 15.35 aaltojen vauhti on 345 m/s ja havaitojen vauhti on 115 m/s. Mikä on kuvassa (f) kummankin havaitun värähtelyn taajuus ja jaksonaika? Vertaa kuvia ja yhtälön (15.119) antamaa tulosta.

Yleisesti sekä aaltolähteet että havaitsijat voivat liikkua, jolloin kumpikin edellä kuvattu efekti tapahtuu yhtä aikaa. Yhtälö (15.116) kuvailee lähteen liikkeen vaikutusta aallon taajuuteen ja yhtälö (15.119) havaitsijan liikkeen vaikutusta havaittuun taajuuteen, ja koska nämä efektit ovat toisistaan riippumattomat, yhtälöt voidaan yhdistää muotoon

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{v_{\text{aalto}}} \frac{v_{\text{aalto}}}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsija}}|}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.120)$$

Tämäkin lauseke pätee kuitenkin vain silloin, kun havaitsija ja aaltojen lähde liikkuvat joko suoraan kohti toisiaan tai toisistaan poispäin.



15.45 Äänilähde värähtelee taajuudella 100 Hz. (a) Jos aaltolähde liikkuu äänen nopeudella, mikä on lähteen synnyttämien aaltojen aallonpituuus ja taajuus (i) lähteen liikkeen suunnassa (lähteen edessä) ja (ii) lähteen liikkeeseen nähden vastakkaisessa suunnassa (lähteen takana)? (b) Lähde on paikoillaan. Havaitsija A liikkuu kohti lähettää ja havaitsija B poispäin lähteestä äänen nopeudella. Millaiset taajuudet he havaitsevat?

On vielä eräs mahdollinen lüke, jota edellisissä tapauksissa ei huomioitu. Kuvassa 15.35 väliaineen nimitäin oletettiin olevan aina levossa, mutta on tietenkin mahdollista, että *väliaine liikuu*. Esimerkiksi ilmassa kulkevan äänen tapauksessa väliaine liikkuu, jos tuulee. Liikkova väliaine muuttaa aallon nopeutta, sillä aalto kulkee väliaineen suhteeseen. Liikkuvassa väliaineessa aallon nopeus onkin aallon väliaineen suhteeseen määritetyn nopeuden ja väliaineen nopeuden summa, ja erityisesti eri suuntiin kulkevat aallot liikkuvat tällöin eri vauhdeilla. Edellä esitetty analyysi pätee kuitenkin koordinaatistossa, jossa väliaine on paikoillaan, joten tällainen tilanne on gleensä helpoin ratkaista siirtymällä koordinaatistoon, jossa väliaine on levossa. Värähtelytaajuudet eivät klassisessa suhteellisuudessa riipu koordinaatistosta, joten taajuudet voidaan ratkaista missä tahansa koordinaatistossa, ja tulos on sama.



15.46 Äänilähde värähtelee taajuudella 100 Hz ja äänen nopeus on 345 m/s. Mikä on havaittu äänen taajuus, kun äänilähde ja havaitsi ja liikkuvat toisiaan kohti ja kummankin vauhti on 20 m/s, jos (a) on tyyni, (b) tuuli puhaltaa lähteen liikkeen suuntaan nopeudella 10 m/s, (c) tuuli puhaltaa havaitsi ja liikkeen suuntaan nopeudella 10 m/s?

Mainttakoon vielä, että tässä esitetty analyysi ei päde valolle. Valo on sähkömagneettisen kentän aalto, ja myös valo kokee Doppler-ilmiön. Kuitenkin suhteellisuusperiaatteesta mukaisesti kahdesta tasaisesti toistensa suhteen kulkevasta kappaleesta ei voida mitenkään määrittää, kumpi on paikoillaan ja kumpi liikkuu. Niinpä myöskään Doppler-ilmiö ei voi erottaa liikkuuko aaltojen lähteä vai niiden havaitsi. Väliaineessa kulkevien aaltojen tapauksessa sekä lähteen että havaitsiin liike mitataan *väliaineen suhteen*, joten Doppler-ilmiö on erilainen riippuen siitä kumpi liikkuu. Valo on kuitenkin sähkömagneettisen kentän aalto, joka ei tarvitse väliainetta, ja niinpä valon Doppler-ilmiössä lähteen ja havaitsiin liikettä ei voi määritellä väliaineen suhteen. Niinpä valon Doppler-ilmiö on symmetrinen, ja havaittu valon taajuuden muutos riippuu vain lähteen ja havaitsiin nopeudesta *toistensa suhteen*.



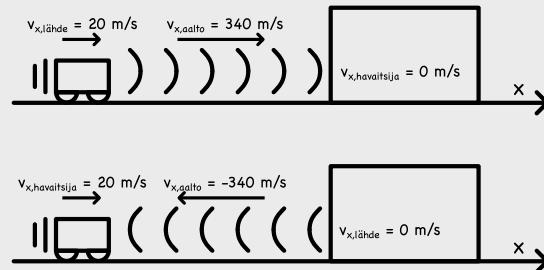
15.47 Selitä oman sanoin, mitä tarkoitetaan seisovilla aalloilla, dispersiolla ja Doppler-ilmiöllä. Millaisissa tilanteissa näyttää havaitaan ja mitä ilmiötä niihin liittyy?

esimerkki 15.7

Doppler-ilmiö

Ambulanssi ajaa kohti sairaalaan nopeudella 20 m/s ja äänen nopeus on 340 m/s. Ambulanssin sirenen taajuus on 1000 Hz. Ääni heijastuu sairaalan seinästä suoraan takaisin kohti ambulanssia, jolloin kuljettaja kuulee äänen kaiun. Millä taajuudella kuuluu?

SUUNNITELMA Kaiku syntyy ääniaallon heijastuessa seinästä kuin valo peilstää. Tällöin voi ajatella niihin, että seinä lähettilä ääniaallon kohti ambulanssia samalla taajuudella kuin mikä on seinään saapuvan aallon taajuus. Voimme siis ratkaista ongelmaa kahdessa osassa. Ensinnäkin ambulanssi on liikkuva aaltolähde taajuudella $f_{\text{lähde},1} = 1000 \text{ Hz}$ ja seinä aallon havaitsi, jolloin seinän "havaitsema" taajuus on $f_{\text{havaitsi},1}$. Tämän täytyy olla sireenin varsinaista taajuutta suurempi, koska ambulanssi liikkuu seinää kohti. Toisessa vaiheessa voimme ajatella seinän olevan aallon lähde taajuudella $f_{\text{lähde},2} = f_{\text{havaitsi},1}$, jolloin seinää kohti liikkuva ambulanssin kuljettaja havaitsee aallon vielä korkeammalla taajuudella $f_{\text{havaitsi},2}$.



Kummassakin tapauksessa taajuuden muutosta kuvaavat Doppler-ilmiöt

$$f_{\text{havaitsi}} = \frac{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{havaitsi}}|}{|v_{x,\text{aalto}} - v_{x,\text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}. \quad (15.121)$$

Jos valitsemme positiivisen x -suunnan ambulanssin suuntaan, ensimmäisessä osassa pätee $v_{x,\text{aalto}} = 340 \text{ m/s}$ ja $v_{x,\text{lähde}} = 20 \text{ m/s}$, koska sekä ääni että ambulanssi liikkuvat positiiviseen suuntaan mutta seinä on paikoillaan. Toisessa tapauksessa puolestaan $v_{x,\text{aalto}} = -340 \text{ m/s}$ ja $v_{x,\text{havaitsi}} = 20 \text{ m/s}$, koska nyt ääni kulkee negatiiviseen suuntaan ja ambulanssi on havaitsi.

RATKAISU Aalto saapuu seinälle taajuudella

$$f_{\text{havaitsi},1} = \frac{340 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1062.5 \text{ Hz}, \quad (15.122)$$

ja tämä on siis myös heijastuneen aallon taajuus. Ambulanssissa ääni havaitaan taajuudella

$$f_{\text{havaitsi},2} = \frac{360 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} f_{\text{havaitsi},1} = \frac{360 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}} \frac{340 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1125 \text{ Hz}. \quad (15.123)$$

ARVIOINTI Ongelman voi ratkaista toisellakin tavalla. Koska ääni heijastuu seinästä kuin valo peilstää, tilanne on täsmälleen samanlainen kuin jos äänen lähteenä toimisi ambulanssin "peilikuva", joka liikkuisi kohti ambulanssia nopeudella $v_{x,\text{lähde}} = -20 \text{ m/s}$. Tällöinkin lopputulos on se, että ääni havaitaan taajuudella $f_{\text{havaitsi}} = \frac{360 \text{ m/s}}{320 \text{ m/s}} 1000 \text{ Hz} = 1125 \text{ Hz}$.

15.7 Aaltoyhtälö

Tässä luvussa olemme kuvailleet aaltojen ominaisuuksia käyttäen esimerkinä pääasiassa köydessä kulkevia poikittaisia aaltoja. Selitimme näiden aaltojen etenemisen tarkastelemalla köyden vierekkäisten osien välistä vuorovaikutuksia, ja johdimme lausekkeen aallon nopeudelle sekä aallon kuljettaman energian teholle. Aallot ovat kuitenkin erittäin yleinen ilmiö, ja köysien lisäksi aaltoja kulkee monenlaisissa muissakin väliaineissa ja sähkömagneettisten aaltojen tapauksessa myös tyhjiössä kokonaan ilman väliainetta. Kuitenkaan esimerkiksi lämpötila ei muodosta aaltoja. Lopetammekin yksilöllisistä aaltojen tarkastelun tutkimalla, millaisissa tilanteissa aine tai kenttä voi kuljettaa aaltoja. Tarkastelemme jälleen esimerkinä köydessä kulkevaa aaltoa.

Kuvassa 15.36 on esitetty köydessä kulkeva aaltopulssi, ja köydestä on valittu kolme tarkastelupistettä. Nämä pistetut on merkitty indeksein V (vasen), K (keski) sekä O (oikea). Köyden elastisuutta kuvataan jälleen pistettä yhdistävällä jousilla. Aluksi köysi on pisteen K ympäristössä tasapainossa, jolloin se on suora ja liikkumaton. Aaltopulssin saapuessa tarkastelupisteiden kohdalle (toinen kuva ylhäältä) piste V alkaa liikkua ensimmäisenä ylöspäin. Tällöin pisteen V ja K välisen jousi venyy ja alkaa vetää pistettä K ylöspäin. Pisteeseen K kohdistuva kokonaisvoima osoittaa tällöin ylöspäin, jolloin pisteen K on kiihtyvyyttä ylöspäin.

Piste K lähee siis liukkeelle ylöspäin. Tällöin K alkaa vetää pistettä O ylöspäin, mutta niin kauan kuin pisteen V ja K välisen jousi on venynyt enemmän kuin pisteen K ja O välisen jousi (kolmas kuva ylhäältä), V vetää pistettä K ylöspäin suuremmalla voimalla kuin O vetää K:ta alas päin, ja K:n kiihtyvyysvektori osoittaa ylöspäin. K:n vauhti siis kasvaa.

Kuvasarjan 15.36 neljännessä kuvassa Pisteen V ja O vetävät pistettä K yhtä voimakkaasti, jolloin pisteen K kiihtyvyys on nolla. Pisteen K *nopeus* ei ole nolla, vaan köysi on yhä liukkeessä ylöspäin. Tämän jälkeen pulssin huippu saavuttaa pisteen V, jolloin V ei enää vedä K:ta yhtä voimakkaasti kuin O. Niinpä pisteen K kiihtyvyys käännyy osoittamaan alas päin. Pisteen vauhti alkaa siis hidastua, koska sen *nopeus*- ja kiihtyvyysvektorit ovat vastakkaisuuntainen. Pisteen K kuitenkin pysähtyy vasta aaltopulssin huipun ollessa sen kohdalla. Tällöin pisteen *nopeus* on hetkellisesti nolla, mutta sen *kiihtyvyys* ei ole nolla vaan kiihtyvyysvektori osoittaa alas päin, koska *kumpikin* pistestä V ja O vetää sitä alas päin. Pisteen K alkaa siis liikkua alas päin, ja koska tässä esimerkissä aaltopulssin muoto on symmetrinen, piste palaa takaisin tasapainoon samaan tapaan kuin lähti liukkeellekin.

Tarkastelupisteen K liike muistuttaa hieman jouseen kiinnitetyn harmonisen väärähtelijän liikettä, mutta nyt pisteesseen kohdistuvan voiman suuruus ei riipu siitä, kuinka kaukana pisteen K on tasapainoasemasta vaan siitä, kuinka kaukana se on *viereistä köyden pistestä*. Erityisesti kuvan 15.36 neljännellä rivillä pisteen kiihtyvyys on nolla, vaikka pisteen *nopeus* ei ole tasapainoasemassa, koska sen naapuripisteet ovat siitä yhtä kaukana mutta vastakkaisilla puolilla. Toisin sanoen tässä tilanteessa köysi on pisteen K kohdalla *suora* — se ei ole vaakasuora kuten kuvasarjan ensimmäisellä rivillä, mutta se ei ole myöskään mutkalla. Kuvan perusteella nähdäänkin, että pisteen K kiihtyvyys osoittaa ylöspäin täsmälleen silloin, kun köysi on pisteen kohdalla *ylöspäin kaareva* (siis likimain ylöspäin aukeavan paraabelin muotoinen). Jos köysi on alas päin kaareva, kiihtyvyys osoittaa alas päin, ja köyden ollessa suora kiihtyvyys on nolla.



- 15.48** (a) Millainen köyden muoto on silloin, kun pisteen K *nopeusvektori* osoittaa (i) ylöspäin, (ii) alas päin?
 (b) Millainen köyden muoto on silloin, kun *nopeus* on itseisarvoltaan suuri?

Harmoniselle väärähtelijälle johdimme harmonisen likeyhtälön (14.12), $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$, jonka mukaan väärähtelijän kiihtyvyys on suoraan verrannollinen väärähtelijän poikkeamaan tasapainosta. Edellisen päättelyn mukaan mekaanisessa aallossa väliaineen yksittäisen pisteen kiihtyvyys on verrannollinen aallon *kaarevuuteen* pisteen ympäristössä. Köyden tapauksessa kaarevuus kuvaa *jyrkkyuden muutosta köyttä pitkin siirryttäessä*, ja jyrkkyys on puolestaan köyden tangentin kulmakerroin eli matemaattisesti köyden muotoa kuvavaan aaltofunktion derivaatta paikan suhteena, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$. Niinpä aallon kaarevuutta kuvaa aaltofunktion derivaatan muuttuminen eli derivaatan derivaatta, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$.

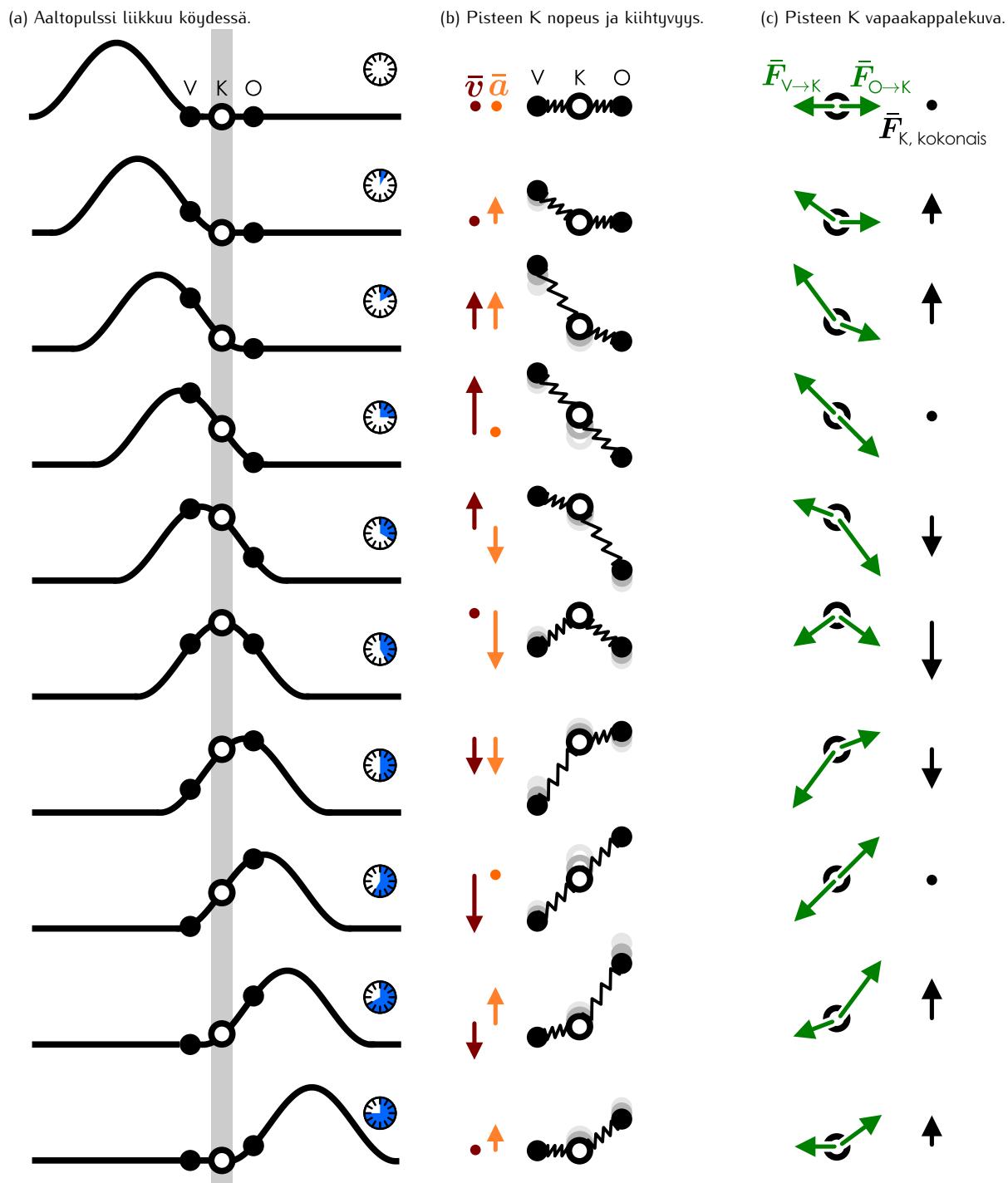


- 15.49** (a) Laske seuraavien käyrien kaarevuus $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$: (i) vakio $u_y = 1 \text{ m}$, (ii) suora $u_y = x$, (iii) ylöspäin aukeava paraabeli $u_y = (2.0 \text{ m}^{-1})x^2$, (iv) alas päin aukeava paraabeli $u_y = (-3.0 \text{ m})x^2$. (b) Vertaile käyrien muotoa ja niiden kaarevuutta. Miten kaarevuden suuruus ja etumerkki liittyy käyrän muotoon?

Köyden pystysuoraa kiihtyvyyttä pisteeessä K kuvaa puolestaan kiihtyvyyden määritelmän mukaisesti pisteen K y-koordinaatin toinen derivaatta ajan suhteesta. Toisaalta aaltofunktio kertoo meille pisteen poikkeaman tasapainosta y-suunnassa, joten pisteen K pystysuuntainen kiihtyvyys on aaltofunktion toinen aikaderivaatta $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$. Kuten äsken päättelimme, pisteen K *kiihtyvyys on verrannollinen köyden kaarevuuteen pisteen ympäristössä*, joten köyden aaltofunktion täytyy toteuttaa pisteen K ympäristössä yhtälö

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (15.124)$$

Kuva 15.36: Köyden osan dynaamikka aaltopulssin kulkiessa. Merkitään tarkastelupistettä "K" (keskellä) ja sen viereisiä osia "V" (vasen) ja "O" (oikea).



Tässä C on verrannollisuuskerroin, jonka arvo riippuu pisteen K massasta ja pisteiden välisten köysien jäykkyydestä. Lisäksi koska piste K oli mielivaltaisesti valittu, saman päättelyn voi toistaa *mille tahansa* köyden pistelle ja niinpä köyden aaltofunktion täytyy toteuttaa yhtälö (15.124) joka paikassa ja kaikilla ajan hetkillä eli kaikilla koordinaattien x ja t arvoilla.



15.50 Mikä on vakion C yksikkö yhtälössä (15.124)?

Vakion C arvon voi johtaa kirjoittamalla pistelle K liikeyhtälön Newtonin lakienv avulla. Päättelimme nyt kuitenkin vakion arvon epäsuorasti. Nimittäin vaikka kuvassa 15.36 käytettiin esimerkkinä aaltopulssia, täsmällen sama päättely toimisi millä tahansa aallon muodolla. Yhtälö (15.124) on siis yleispätevä matemaattinen ehto, joka kaikkien köydessä kulkevien aaltojen täytyy toteuttaa. Erityisesti myös köydessä kulkeva sinimuotoinen aalto toteuttaa yhtälön. Tällaisen aallon aaltofunktio on $u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$, ja derivoimalla funktiota kahdesti sekä ajan että paikan suhteeseen saamme

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.125)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.126)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t + \phi_0) \quad (15.127)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.128)$$

Näiden sijoitus yhtälöön (15.124) antaa tulokseksi

$$-A\omega^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0) = -CAk^2 \cos(kx - \omega t + \phi_0). \quad (15.129)$$

Yhtälön täytyy päteä aina (kaikilla ajan t arvoilla) kaikissa köyden pisteissä (kaikilla paikkakoordinaatin x arvoilla), ja tämä on mahdollista vain jos vakion C arvo on

$$C = \frac{\omega^2}{k^2} = v_{\text{aalto}}^2. \quad (15.130)$$

Niinpä aallon dynamiikkaa kuvaavan yhtälön (15.124) täytyy olla muotoa

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}. \quad (15.131)$$



15.51 Eräässä aineessa pätee yhtälö $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (5.0 \text{ m}^2/\text{s}^2) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$. Sijoita aaltopulssin aaltofunktio $u_y(x, t) = f(x - v_{\text{aalto}}t)$ tähän yhtälöön. (a) Millä ehdolla yhtälö toteutuu? (b) Voitko päättellä yhtälöstä aallon vauhdin v_{aalto} ? (c) Voitko päättellä yhtälöstä aallon muodon $f(x)$?

Yhtälö (15.131) kutsutaan **aaltoyhtälöksi**, eikä tätä pidä sekoittaa **aaltofunktioon**, joka on siis aallon muotoa ja väliaineen poikkeamaa tasapainosta kuvaava funktio $u_y(x, t)$. Aaltoyhtälö on dispersiotottomassa väliaineessa kulkevien aaltojen dynamiikkaa kuvaava perusyhtälö. (Dispersiivisissä väliaineissa yhtälö pätee vain likimain.) Jos väliaineen muoto ja nopeus tunnetaan ajan hetkellä $t = 0$, väliaineen liike voidaan aaltoyhtälön avulla ratkaista millä tahansa myöhemmällä ajan hetkellä joko analyyttisesti tai ainakin tietokoneella simuloiden. Huomaa erityisesti, että aaltoyhtälö kuvailee aaltoa kuljettavan **väliaineen tai kentän ominaisuuksia**, ja **kaikkien** väliaineessa kulkevien aaltojen aaltofunktioiden täytyy toteuttaa se.

Aaltoyhtälö ei voi mitenkään määritellä aaltojen niitä ominaisuuksia, jotka riippuvat aaltojen syntytavasta. Esimerkiksi sinimuotoinen aallon aallonpituuus ja amplitudi riippuvat aallon synnyttävän läheen väärähtelytaajuudesta ja -amplitudista. Näitä ei siis voi päättellä aaltoyhtälöstä. Sen sijaan aallon vauhdin määrävä väliaine, ja niinpä aallon vauhti voidaan päättellä aaltoyhtälöstä.

Teoreettisesti aaltoyhtälö on erityisen merkittävä siksi, että *mikä tahansa suure, jolle pätee aaltoyhtälö (15.131), muodostaa aaltoa*. Esimerkiksi tarkastelemalla ilman puristumisen ja paineen välistä yhteyttä, ilmanpaineelle voidaan johtaa aaltoyhtälö, mikä tarkoittaa sitä, että ilmanpaineen paikalliset muutokset synnyttävät ilmaan painealoja (eli ääntä). Aikanaan sähkömagneettisten aaltojen olemassaolo pystytettiin päättämään sillä perusteella, että sähkömagnetismin peruslaeista voidaan johtaa sähkömagneettiselle kentälle aaltoyhtälö. Myös hiljattain kokeellisesti havaittuja gravitaatioaaltoja osattiin etsiä juuri siksi, että yleisen suhteellisuusteorian gravitaatiota kuvaavasta matematiikasta voidaan johtaa aaltoyhtälö. Sen sijaan esimerkiksi kiinteän aineen lämpötila noudattaa erilaista differentiaaliyhtälöä (ns. diffuusioyhtälöä), joten lämpö ei siirry aaltoina vaan johtumalla.



15.52 Selitä omin sanoin, mikä on aaltoyhtälö. Millainen on sen matemaattinen muoto? Mitä aaltojen ominaisuuksia aaltoyhtälöstä voidaan päättellä ja mitä ominaisuuksia ei? Mitä eroa on aaltoyhtälöllä ja aaltofunktioilla?

Yhteenveton Aaltoliike

Aaltoliike

- **Aalto** on väliaineessa tai kentässä etenevä *poikkeama tasapainosta*. Aallot kuljettavat energiota mutta eivät ainetta.
- Esimerkiksi köydessä kulkeva aalto ja ääni ovat *mekaanisia aaloja*. Valo on *sähkömagneettinen aalto*.
- **Aaltopulssi** on aalto, jossa poikkeama tasapainosta on rajoittunut pienelle alueelle.
- **Poikittaisessa** allossa väliaine poikkeaa tasapainosta aallon kulkuunsaan nähden kohtisuraan. **Pitkittäisessä** allossa poikkeama tapahtuu aallon kulkusuunnassa.
- Aallon muotoa kuvataan **aaltofunktiolla**, esim. $u(x, t)$, joka kertoo väliaineen poikkeaman sekä paikan että ajan funktiona. Aaltopulsin aaltofunktio on yhdessä ulottuvuudessa muotoa

$$u(x, t) = f(x - v_{x, \text{aalto}} t).$$

- Aaltojen nopeus riippuu väliaineesta. Ideaalisessa väliaineessa

kaikki aallot kulkevat samalla vauhdilla riippumatta aaltojen muodosta.

- Aaltoja kulkee väliaineissa, jotka toteuttavat **aaltohtälön**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Aaltohtälö määräe aaltojen nopeuden mutta ei niiden muotoa. Aallon muoto riippuu sen synnyttäneestä häiriöstä.

- Aallot nouattavat **superpositioperiaatetta**, jonka mukaan samassa väliaineessa voi kulkea samanaikaisesti useita aaltoja päälekkäin. Tällöin väliaineen poikkeamaa kuvava aaltofunktio saadaan laskemalla yksittäisten aaltojen aaltofunktioit yhteen

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

Sinimuotoiset aallot

- Harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää **sinimuotoisen aallon**, jonka aaltofunktio on sinimuotoinen funktio

$$u(x, t) = A \cos \phi(x, t),$$

missä funktio

$$\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0 \quad (15.132)$$

on aallon **vaihe**. Tässä A on **amplitudi**, ω **kulmataajuus**, ϕ_0 **vaihetekijä** ja k **aaltoluku**.

- Aallon vaihetta voi kuvata graafisesti **vaiheenosoittimella**, joka pyörii myötäpäivään ajan kuluessa tai kuljetaessa aallon kulkuunsaan vastaan ja vastapäivään kuljetaessa aallon kulkuunsaan. Vaiheenosoitin pyörähtää yhden kierroksen, kun kuluu yksi jaksonaika tai kun siirrytään yhden aallonpituuuden matka.
- **Aallonpituus** λ on etäisyys, joka erottaa sinimuotoisen aallon kahda samassa vaiheessa olevaan pistettä (esim. kahden aallonharjan välinen etäisyys). Aaltoluku puolestaan ilmaisee 2π -pituisella välinillä olevien aallonpituuksien määrän. Nämä ovat käännekenverrannolliset,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

- Aaltoluvulle voidaan määritellä etumerkki niin, että positiiviseen x -suuntaan kulkevien aaltojen aaltoluku on positiivinen ja negatiiviseen suuntaan kulkevien negatiivinen.
- Sinimuotoinen aalto kulkee yhden jaksonajan aikana yhden aallonpituuden, joten aallon etenemisnopeus on

$$v_{\text{aalto}} = \frac{\Delta x_{\text{aalto}}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = f\lambda = \frac{\omega}{k}.$$

Tämä on **sinimuotoisen aaltoliikkeen perusyhtälö**.

- Sinimuotoisen aallon kuljettama teho on aallon energiatihedyn ja sen etenemisnopeuden tulo

$$P_{\text{keskiarvo}} = \langle \lambda_E \rangle v_{\text{aalto}}.$$

Mekaanisten aaltojen energiatihedsyys riippuu aallon taajuudesta, ja energiatihedsyys on aina verrannollinen aallon amplitudin nelioniöön. Esimerkiksi köydessä kulkevan aallon energiatihedsyys on

$$\langle \lambda_{E, \text{köysi}} \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2.$$

- Eri väliaineiden **rajapinnan** kohtaava aalto voi heijastua tai läpäistä rajapinnan. Tavallisesti osa aaltoa heijastuu ja osa kulkee rajapinnan läpi. Rajapinnan läpässeen aallon nopeus ja amplitudi riippuvat väliaineiden ominaisuuksista, mutta aallon taajuus ei muutu heijastuksessa eikä läpäisyssä. Jos läpässeen aallon amplitudi on pienempi kuin saapuvan aallon, heijastunut aalto "kääntyy ympäri", koska aaltofunktio pitää olla rajapinnalla jatkuva. Sinimuotoisten aaltojen tapauksessa heijastuneen aallon vaihe muuttuu puoli kierrosta, $\Delta\phi = \pi$.
- Jos aaltolähde tai aaltojen havaitseja liikkuu väliaineen suhteeseen, havaitseja mittaa aallon värähtelevän eri taajuudella kuin millä lähdetä värähtelee,

$$f_{\text{havaitseja}} = \frac{|v_{x, \text{aalto}} - v_{x, \text{havaitseja}}|}{|v_{x, \text{aalto}} - v_{x, \text{lähde}}|} f_{\text{lähde}}.$$

Tätä kutsutaan **Doppler-ilmiöksi**.

Seisovat aallot

- Kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkeva samanlaista sinimuotoista aaltoa muodostavat superpositiossa **seisovan aallon**.
- Seisova aalto ei etene vaan siinä muodostuu paikoillaan värähteleviä alueita eli **kupuja** ja näitä erottavia paikoillaan pysyviä pisteytä eli **solmuja**. Yksiulotteisessa seisovassa aallossa kahden solmun välinen etäisyys on puolikas aallonpituus.
- Rajoitettuun alueeseen vangitut aallot voidaan kuvata seisovien aaltojen superpositiona. Esimerkiksi soittimen kielessä voi värähdellä ainoastaan seisovia aaltoja, joissa on solmu kielen päässä.

Tällöin kielen pituuden täytyy olla puolikkaan aalonpituuden moninkerta eli

$$L = n \frac{1}{2} \lambda_n. \quad (15.133)$$

- Seisovien aaltojen taajuus riippuu niiden aalonpituudesta, joten soittimen kieli voi värähdellä vain tietyillä sallituilla taajuuksilla. Ideaalisessa soittimessa nämä taajuudet ovat perustajauus f_1 sekä sen harmoniset ylätaajuudet $f_n = nf_1$.

Fourier-analyysi

- Mikä tahansa aalto voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Aallon jakoa sinimuotoisiin eli harmonisiin komponentteihin kutsutaan *Fourier-analyysiksi*.
- Jos aalto on jaksollinen eli sillä on aallonpituuksia λ_1 ja aaltoluku k_1 , se koostuu sinimuotoisista komponenteista, joiden aaltoluvut ovat $k_n = nk_1$ ja aallonpituuudet $\lambda_n = \lambda_1/n$.
- Aaltopulsseissa on superpositiossa hyvin monta sinimuotoista aaltoa, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan. Aaltopulssien voidaan siis ajatella koostuvan useista toisistaan vain hiukan poikkeavista sinimuotoisista aalloista.
- Mitä enemmän aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut poikkeavat toisistaan, sitä kapeamman pulssin näiden superpositio muodostaa. Kääntäen, mitä lähempänä sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut ovat toisiaan, sitä leveämpi aaltopulssin

täytyy olla. Toisin sanoen mitä tarkemmin aaltopulssin paikka on rajattu, sitä epämääräisempi sen aallonpituuus ja aaltoluku ovat. Tämä on Fourier-muunnoksen **epätarkkuusperiaate**.

- Joissakin väliaineissa eri taajuudella värähtelevät sinimuotoiset aallot etenevät eri nopeuksilla. Tätä kutsutaan **dispersioksi**. Tällaisissa väliaineissa aaltopulssien muoto voi muuttua ajan kullessa.
- Aaltopulssi, jonka keskimääräinen aaltoluku on k_{keski} , kulkee dispersiivisessä väliaineessa **ryhmänopeudella**

$$v_{\text{ryhmä}} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_{\text{keski}}} = \omega'(k_{\text{keski}}).$$

Funktio $\omega(k)$ kutsutaan väliaineen **dispersiorelaatioksi**.

Sanasto

- aalto (wave)
- pulssi (pulse)
- sinimuotoinen (sinusoidal)
- häiriö (disturbance)
- poikkeama (displacement)
- poikittainen (transverse)
- pitkittäinen (longitudinal)
- aaltofunktio (wave function)
- aaltoyhälö (wave equation)
- superpositioperiaate (superposition principle)
- rajapinta (interface)

- heijastuminen (reflection)
- läpäisy (transmission)
- seisova aalto (standing wave)
- solmu (node)
- kupu (antinode)
- moodi (mode)
- dispersio (dispersion)
- vaihenopeus (phase velocity)
- ryhmänopeus (group velocity)
- Doppler-ilmiö (Doppler effect)
- puoliarvoileveys (full width at half maximum)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/4)

15.1 Kuvaajat olisivat nyt samanmuotoiset.

15.2 Ensimmäisessä kuvassa pulssin leveys on noin $\Delta x = 2$ m ja se ohittaa tarkastelupisteen ajassa $\Delta t = 6$ s, joten aallon nopeus on $v_x = \Delta x / \Delta t = 0.33$ m/s. Toisessa kuvassa $\Delta x = 4$ m ja $\Delta t = 4$ s, joten $v_x = 1$ m/s.

15.3 (a) Pulssi on symmetrinen, sillä kappaleiden siirtymät ovat pulssin kummallakin reunalla samanlaiset. Koska pulssi on pitkittäinen, jouset kappaleiden välissä puristuvat, kun jäljessä tuleva kappale siirtyy kohti seuraavaa enemmän kuin sen edessä oleva kappale (pulssin etupuoli), ja jouset venyvät, kun jäljessä tuleva kappale siirtyy vähemmän (pulssin takapuoli).

(b) Nyt siirtymät olisivat negatiiviseen suuntaan, joten pulssin kuvaaja kääntyisi ympäri, koordinaatiston negatiiviselle puolelle.

15.4 Et voi vaikuttaa aallon kulkun heilauttamalla köyttä eri tavalla, koska aallon nopeus riippuu vain väliaineesta. Sinun on siis muutettava väliaineen ominaisuuksia, mikä onnistuu muuttamalla köyttä jännittävästä voimasta. Jos vedät köyttä kovemmin itseäsi kohti, jännitysviima kasvaa ja aalto kulkee nopeammin.

15.5 Ilmassa äänen nopeus on noin 340 m/s riippuen ilman ominaisuuksista kuten lämpötilasta. Äänen nopeus vedessä on noin 1480 m/s. Väliaineiden tiheyserot eivät selitä tätä eroa, koska yleisesti aallot kulkevat tiheässä väliaineessa hitaammin, mutta ääni kulkee vedessä nopeammin kuin ilmassa. Oikea selitys erolla on se, että ilma on kaasu, jossa molekyylit vuorovaikuttavat keskenään heikosti. Nestemäisessä vedessä molekyylit sen sijaan vuorovaikuttavat varsin voimakkaasti. Aallot kulkevat siis vedessä nopeammin, koska vedessä välinettä takaisin tasapainoon palauttavat vuorovaikutukset ovat voimakkaimmat kuin ilmassa.

15.6 (a) Pulssien leveys on $\Delta x = v_x \Delta t = 2 \text{ m} / 0.4 \text{ s} = 0.8 \text{ m}$ sekä 2 m.

(b) Kummassakin köydessä merkitty piste tekee saman liukkeen kuin köyttä heilauttanut käsi. Sinun köydes-sästi merkitty piste heilahtaa siis ajassa 0.4 s ja ystävälläsi ajassa 1.0 s.

15.7 (a) $v_x = \Delta x_{\text{aalto}} / \Delta t = 1.6 \text{ m} / 2.0 \text{ s} = 0.8 \text{ m/s}$.

(b) Tämä tapahtuu, kun aalto on siirtynyt $\Delta x_{\text{aalto}} = 2.3 \text{ m}$, mihin kuluu aika $\Delta t = \Delta x_{\text{aalto}} / v_x = 2.875 \text{ s}$.

15.8 (a) Funktio on muotoa $f(x + (0.30 \text{ m/s})t)$, kun valitaan $f(X) = (0.10 \text{ m})e^{-(0.10 \text{ m}^{-2})X^2}$ ja $X = x + (0.30 \text{ m/s})t$. Tästä voidaan lukea nopeudeksi $v_x = -0.30 \text{ m/s}$.

(b) Funktio ei ole muotoa $f(x - v_x t)$, joten se ei kuvaa vakionopeudella liikkuvaa aaltoa.

(c) Funktio on muotoa $f(x - (0.5 \text{ s}^{-1})/(0.2 \text{ m}^{-1})t)$, kun valitaan $f(X) = (0.3 \text{ m}) \cos[(0.2 \text{ m}^{-1})X]$. Niinpä aallon nopeus on $v_x = (0.5 \text{ s}^{-1})/(0.2 \text{ m}^{-1}) = 2.5 \text{ m/s}$. Tästä muotoa olevat aaltofunktiot ovat erittäin tärkeitä, kuten seuraavaksi näemme, ja näiden aaltojen nopeus pitää osata laskea!

15.10 (a) Vauhti on $v_{\text{aalto}} = f\lambda = 340 \text{ m/s}$. Tämä voisi olla ilmassa kulkeva äänialto. (b) Aallon vauhti riippuu väliaineesta, joten vauhti ei muudu. (Äänen nopeus ilmassa ei riipu taajuudesta.) Aallonpituuus on nyt $\lambda = v_{\text{aalto}} / f = 1.7 \text{ m}$.

15.11 Tämän voi laskea aallonpituuden avulla, mutta järkeillään ratkaisu aaltoluvun määritelmän kautta. Aaltolukuhan kertoo, montako aallonpituutta mahtuu 2π metrille. Jos puoleen metriin mahtuu yksi aallonpituuus, kuhteen metriin mahtuu 12 aallonpituutta ja 2π metriin $2\pi/0.5 \approx 12.6$ aallonpituutta. Tämä on aallon aaltoluku, $k = 12.6 \text{ m}^{-1}$. Kun puoleen metriin mahtuu kaksi aallonpituutta, mille tahansa matkalle mahtuu kaksinkertainen määrä aallonpituuksia ja $k = 25.1 \text{ m}^{-1}$. Ja kun puolessa metrissä on kolme aallonpituutta, aaltoja on kolminkertainen määrä ja $k = 37.7 \text{ m}^{-1}$.

15.12 Kulmataajuus on $\omega = 2\pi f = 12.57 \text{ s}^{-1}$ ja aaltoluku $k = \omega/v_{\text{aalto}} = 4.189 \text{ m}^{-1}$. Aaltofunktio on siis origossa $u_y(0, t) = A \cos(-\omega t + \pi/4)$ ja yleisesti $u_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \pi/4)$. Erityisesti $u_y(0.2, 0.2) = (0.1 \text{ m}) \cos(0.838 - 2.513 + \pi/4) = 0.06 \text{ m}$.

15.13 (a) $f = 440 \text{ Hz}$, $T = 1/f = 2.3 \text{ ms}$, $\omega = 2\pi f = 2760 \text{ s}^{-1}$, $\lambda = v_{\text{aalto}}/f = 0.77 \text{ m}$, $k = 2\pi/\lambda = 8.1 \text{ m}^{-1}$.

(b) Valitaan tarkasteluhetkeksi $t = 0$, jolloin vaihe on $\phi(x) = kx + \phi_0$. Pisteessä $x = 0$ on $\phi(0) = \phi_0 = \pi$, joten $\phi(1 \text{ m}) = (8.131 \text{ m}^{-1}) \cdot (1.0 \text{ m}^{-1}) + \pi = 11.27$.

15.14 Aaltoluvut ovat 0.2 m^{-1} ja -0.4 m^{-1} , kulmataajuudet 0.3 s^{-1} ja 0.6 s^{-1} , amplitudit 0.1 m ja 0.5 m , aallonpituudet 31.4 m ja 15.7 m , taajuudet 0.048 Hz ja 0.095 Hz , vauhti molemmilla 1.5 m/s , ensimmäinen liikkuu positiiviseen ja toinen negatiiviseen x -suuntaan.

15.15 (a) Aaltoluku on negatiivinen. (b) Vaihe pienenee (muuttuu negatiiviseen suuntaan). (c) Vaiheenosoitin pyörii negatiiviseen suuntaan eli myötäpäivään. (d) Päinvastoin kuin c-kohdassa eli vastapäivään.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/4)

15.16 (a) Origossa vaiheenosoitin osoittaa ylöspäin (harja) ja se pyörii vastapäivään (positiiviseen suuntaan) aallon kulkusuuntaan siirryttääessä. Pisteessä $x = 1$ m vaiheenosoitin osoittaa alas päin, eli osoitin siis pyörähtää puoli kierrosta.

(b) Ajan kuluessa osoitin pyörii myötäpäivään (negatiiviseen suuntaan). Kolmessa sekunnissa aalto siirtyy kolme metriä eli puolitoista aallonpituitta, ja harja A saapuu tarkastelupisteesseen. Vaiheenosoitin siis pyörähtää puolitoistakierrosta myötäpäivään.

(c) Siirrytään yksi aallonpititus aallon kulkusuuntaa vastaan, joten vaiheenosoitin pyörähtää yhden kierksen myötäpäivään.

(d) Kun tarkastelupiste kulkee aallonharjan mukana, vaihe ei muutu eikä vaiheenosoitin pyöri.

(e) Kumpikin prosessi johtaa samaan pisteeseen $(x, t) = (1 \text{ m}, 3 \text{ s})$, joten kummassakin vaiheen täytyy yhteensä muuttua yhtä paljon. Tämä muutos on yksi kierros negatiiviseen suuntaan eli $\Delta\phi = -2\pi$.

15.18 Pisteet ovat lükkeessä alas päin. Pisteeseen B kohdistuu tällöin voima alaviistoon ja pisteeseen A yläviistoon. Pisteeseen B tehdään siis positiivista työtä ja pisteeseen A negatiivista. Koska piste A liikkuu nopeammin kuin B, A:han tehdyn työn teho on suurempi. Tämä tarkoittaa sitä, että energiota siirtyy A:sta pisteen väliseen jouseen enemmän kuin jousesta B:hen. A siis menettää energiota jouselle, joka puolestaan antaa osan tästä energiasta edelleen B:lle. Energiaa siirtyy systeemistä A systeemiin B.

15.19 (a) Potentiaalienergiaa on paljon, kun köysi on venynt. Tämä tapahtuu, kun aaltofunktio (köyden profili) nousee tai laskee jyrkästi, mikä sinimuotoisessa aallossa tarkoittaa sitä, että tarkastelupiste on tasapainoasemassa. Liike-energiaakin on paljon silloin, kun aaltofunktio on jyrkkä. Kumpikin energian muoto saa siis maksiminsa köyden ollessa tasapainossa.

(b) Jousella on potentiaalienergiaa, kun se on venynt tai puristunut eli kun kappale on mahdollisimman kaukana tasapainopisteestä. Liike-energiaa kappaleella on eniten tasapainopisteessä. Huomaa, että värähteliäjällä liike- ja potentiaalienergioiden summa on vakio, jolloin toisen ollessa suurimmillaan on toinen minimissään. Köyden aallossa sekä lüke- että potentiaalienergia saavat maksiminsa samassa pisteessä, ja yksittäisen tarkastelupisteen energia muuttuu ajan kuluessa.

15.20 (a) Keskiarvo lasketaan paikan suhteen, joten $-\omega t + \phi_0$ on vakio. Vakion lisääminen sinin argumenttiin vain siirtää funktiota x -akselilla, mutta jos laskemme funktion integraalin yhden jakson yli, ei ole väliä, mistä kohtaa jaksoa aloitamme. (b) Pätee $\sin^2 x = [1 - \cos(2x)]/2$, joten $\int_0^\lambda \sin^2(kx)dx = \frac{1}{2} \int_0^\lambda [1 - \cos(2kx)]dx$. Termeittäin saadaan $\frac{1}{2} \int_0^\lambda dx = \frac{\lambda}{2}$ ja $\frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos(2kx)dx = \frac{1}{4k} \Big|_0^\lambda \sin(2kx) = \frac{1}{4k} (\sin 4\pi - \sin 0) = 0$. Siispä $\frac{1}{2} \int_0^\lambda \sin^2(kx)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$.

15.21 Köydessä energiatihleys on maksimissaan, kun aaltofunktio on mahdollisimman jyrkkä (eli aaltofunktion derivaatan itseisarvo on suuri). Huomaa, että jyrkyys on sama kuvissa (b) ja (c), joten energiatihyyden maksimi on myös sama. Sähkömagneettisen aallon energiatihleys on suurin, kun aaltofunktio (sähkökenttä) poikkeaa nollasta mahdollisimman paljon (eli aaltofunktion itseisarvo on suuri). Huomaa, että amplitudi on sama kuvissa (d) ja (f), joten energiatihyyskin on.

15.23 Piirrä kuva! Jokaisella ajan hetkellä pitää määrittää kummankin pulssin tuottama poikkeama tasapainosta tarkastelupistessä, jolloin kokonaispoikkeama on näiden summa. Hetkellä $t = 3$ s pulssien reunat ovat tarkastelupistessä, joten poikkeama on $u_y = 0$ cm. Hetkellä $t = 4$ s pisteesä on korkeamman pulssin huippu ja matalamman pulssin reuna. Poikkeama on nyt $u_y = 10 \text{ cm} + 2.5 \text{ cm} = 12.5 \text{ cm}$. Hetkellä $t = 5$ s korkeampi pulssi on juuri ohittanut tarkastelupisteen ja matalamman pulssin huippu on pisteesä, joten $u_y = 5 \text{ cm}$.

15.24 Köysi on suora, joten sen potentiaalienergia on nolla (tai ainakin minimissään). Köyden hiukkaset ovat kuitenkin pystysuorassa lükkeessä, joten köydellä on liike-energiaa. Aaltojen energia on siis tällä hetkellä pelkästään liike-energiaa. Energia ei tietenkään voi kadota mihinkään, joten kokonaisenergia on sama kuin pulssien ollessa erillään.

15.25 Tässä on kyseessä sinisarja. Jos valitaan ajan hetki nolla, saadaan sarjaksi $\sum_i = 1^N \frac{1}{2i-1} \sin[(2i-1) \text{ m}^{-1}]x$, missä $N = 5, 7, 9$ jne. Tämän voi määritellä esimerkiksi Mathematicassa komennolla $f[x_] := \text{Sum}[1/(2i-1) \text{ Sin}[(2i-1) x], \{i, 1, 5\}]$ ja piirtää komennolla $\text{Plot}[f[x], \{x, 0, 2\pi\}]$. Lopputulos on aalto, jonka korkeus on välillä $[0, \pi]$ likimain $\pi/4$ ja välillä $[\pi, 2\pi]$ likimain $-\pi/4$ (ja luonnollisesti aalto toistuu 2π -jakosella).

15.26 Yhden sinimuotoisen aallon Fourier-esityksessä on vain yksi nollasta poikkeava kerroin (tai mahdollisesti nollasta poikkeavat molemmat kertoimet a_n ja b_n yhdellä ja samalla n) eli samalla aaltoluvulla k_n . Aallon aaltoluku ja aallonpituuus ovat täsmällisesti määriteltyt. Aalto on äärettömän leveä, koska se jatkuu äärettömyyksiin. Voidaan ajatella, että aaltoluku on sitä tarkempi, mitä leveämpi aalto on. Kun allostaa tulee äärettömän pitkä (leveä), sen aaltoluvusta tulee äärettömän tarkka eli täsmällinen.

15.27 (a) Fourier-kuvaaja venyy k -akselilla niin, että jokainen piste siirtyy kaksinkertaiselle k :n arvolle.

(b) Aaltofunktio muodostamien aaltojen aallonpituuudet puolittuvat, joten koko aalto kutistuu x -akselin suunnassa puoleen alkuperäisestä leveydestä.

(c) Kun siis Fourier-kuvaajaa venytetään jollakin vakiolla, aaltofunktio kutistuu x -akselin suunnassa samalla vakiolla.

Kuvan 15.19 (a) kuvajasta saadaan aaltoluvut kaksinkertaistamalla kuvaja 15.20 (a). Huomaa, että kuvan 15.19 (a) aaltofunktio on täsmälleen samanmuotoinen kuin kuvan 15.20 (a) aaltofunktio paitsi että jälkimmäisen leveys on vain puolet edellisestä.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/4)

15.29 (a) Veden pinta voi vapaasti liikkua seinän kohdalla pystysuunnassa, joten tilanne on vastaava kuin köydessä, jonka pää on vapaa. Aalto ei siis käänny ympäri.

(b) Ääniallon tapauksessa voimme tarkastella kahta suuretta: ilmanpainetta tai hiukkasten siirtymää. Seinä estää hiukkasia siirtymästä sisäänsä, joten hiukkasten siirtymälle tilanne on samanlainen kuin köysi, jonka pää on kiinnitetty seinään. Sen sijaan paine voi seinän kohdalla kasvaa tai pienentyä, joten paineen näkökulmasta tilanne on samanlainen kuin köydessä, jonka pää ei ole kiinnitetty. Jos piirräme ääniallon aaltofunktion hiukkasten siirtymän avulla, tämä aaltofunktio käännytsee seinän kohdalla ympäri. Sen sijaan paineen avulla pürretty aaltofunktio ei käänny seinän kohdalla ympäri (ja tästä tehtävässä kysytty). Tämä voi vaikuttaa ristiriitaiselta, mutta ei ole sitä, koska näiden aaltofunktioiden minimit ja maksimit ovat eri kohdissa.

15.30 (a) Koska nyt heijastunut pulssi ei käänny ympäri, sitä kuvaavalla aaltofunktio $u_{y,\text{heijastuva,vapaa}}(x,t) = f(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$.

(b) Nyt siis $u_{y,\text{vapaa}}(x,t) = f(x - v_{x,\text{aalto}}t) + f(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$ ja tämän derivaatta on $\frac{\partial}{\partial x} u_{y,\text{vapaa}} = f'(x - v_{x,\text{aalto}}t) - f'(-x - v_{x,\text{aalto}}t)$, missä mittenmerkki jälkimmäisen funktion edessä on sisäfunktio $-x - v_{x,\text{aalto}}t$ derivaatta x :n suhteen. Pisteessä $x = 0$ tämä on $\frac{\partial}{\partial x}|_{x=0} u_{y,\text{vapaa}} = f'(-v_{x,\text{aalto}}t) - f'(-v_{x,\text{aalto}}t) = 0$. Siispä tässä tapauksessa köyden pää on aina vaakasuorassa.

15.31 (a) Jos oikea puoli paljon tiheämpi kuin vasen, oikeaa puolta on paljon vaikeampi liikuttaa kuin vasenta. Niinpä vasemmalta tuleva aalto ei juuri tuota aaltoa köyden oikealle puolelle. Aalto siis heijastuu lähes kokonaan, jolloin läpäisseen pulssin korkeus on hyvin pieni ja heijastuneen lähes sama kuin saapuvan. Tilanne on lähes sama kuin jos köyden pää olisi kiinni seinässä.

(b) Jos oikean puolen tiheys on paljon pienempi, vasemmalta tuleva aalto tuottaa köyden kevyempään puoleen helposti hyvin korkean aallon. Läpäisseen aallon korkeus on siis suuri. Lisäksi kevyessä köydessä kulkevan aallon energia on pieni, joten suurin osa aallon energiasta heijastuu tässäkin tapauksessa takaisin. Heijastuneen pulssin korkeus on siis lähes sama kuin saapuvan aallon.

(c) Jos köydet ovat lähes samanlaiset, aalto käyttäätyy kuin rajapintaa ei olisikaan. Toisin sanoen läpäisseen aallon korkeus on likimain sama kuin saapuneen aallon ja heijastuneen aallon korkeus on pieni.

15.32 Aalto ei ole puhtaasti kohti rajapintaa etenevä aalto rajapinnan vasemmalla puolella, koska kyseessä on kahden vastakkaisiin suuntiin kulkevan aallon superpositio. Aalto muistuttaakin enemmän seisovaa aaltoa, jossa väärähely on joissakin pisteissä voimakasta ja toisissa heikkoa. Rajapinnalla väärähely on heikko, jolloin väliaineen maksimipolkkeama tasapainosta on sama kuin rajapinnan oikean puolen aallon amplitudi.

15.33 Sininen aalto on kuvissa peilikuva (pystysuunnassa), jolloin myös sen vaiheenosoitin on käännytetty ympäri. Tämä johtuu siitä, että kuvassa (a) sininen aalto kokee puolen kierroksen vaihesiirron. Vihreän aallon vaiheenosoitin on sama kuin punaisen ja sinisen aallon vaiheenosottimien summa, joten kuvassa (a) tämä vaiheenosoitin on lyhyt kun taas kuvassa (c) se on pitkä. Vihreän aallon amplitudi on sama kuin sen vaiheenosottimen pituus.

15.35 Kun köysi on suora, aallolla on vain lüke-energiaa, ja tämä energia on keskittynyt aallon kupuihin, koska näissä pisteissä köyden osat liikkuvat pystysuunnassa suurimmalla nopeudella. Kun aalto on väärähelynsä ääriasennossa, köysi on hetkellisesti paikoillaan ja sillä on vain potentiaalienergiaa. Tämä energia on keskittynyt solmuihin, koska näissä köysi venyy eniten. Energia siis vaihtaa muotoa ja se myös siirtyy kupujen ja solmujen välillä.

15.36 Piirrä kuva! Putkeen mahtuu aallonpituudesta $1/4$, $3/4$, $5/4$ jne. Siis

$$L = \left(n \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \lambda_n, n = 0, 1, 2 \dots \quad (15.134)$$

15.37 Ks. edellinen vastaus. Taajuudet ovat

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n} v_{\text{aalto}} = \frac{1}{L} \left(n \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) v_{\text{aalto}} = (2n+1) \frac{1}{4L} v_{\text{aalto}}. \quad (15.135)$$

15.38 Mustan käyrän eli koko kielen taajuus on sama kuin spektrin perustaajuus. Kuvan perusteella 2. ylätaajuus on hieman alle $\omega_3 \approx 10^4 \text{ s}^{-1}$, joten perustaajuutta vastaava kulmataajuus on noin $\omega_1 = \frac{1}{3}\omega_3 \approx 3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$. Perustaajuus itsessään on siis $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 480 \text{ Hz}$.

15.39 Kielen väärähely työntää ilman hiukkaset liikkeelle, jolloin ilmaan syntyy aaltoja, joiden taajuudet ovat samat kuin kielen väärähelytaajuudet. Nämä aallot kulkevat korvaan, jolloin siis ilmahiukkaset korvassa alkavat liikkua aallon taajuudella. Tämä liike (ja siihen liittyvä paine-ero) saavat korvan tärykalvon väärähelymään jälleen samalla taajuudella. Näin siis kielen väärähelyn taajuudet siirtävät ilmassa kulkevan paineaallon väli-tyksellä korvan tärykalvon väärähelytaajuksiksi, ja nämä ihmisen voi aistia. Prosessissa vakiona pysyy vain taajuus. Aallonpituuus, amplitudi ja aallon nopeus muuttuvat jokaisessa rajapinnan ylityksessä.

15.40 Sinimuotoisen aallon nopeus eli ns. vaihenopeus on $v = \frac{\omega}{k}$. Lausekkeen voi muokata moneen muotoon relatioiden $\omega = \sqrt{gk}$, $k = 2\pi/\lambda$ sekä $\omega = 2\pi f$ avulla,

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{2\pi f}. \quad (15.136)$$

Nopeudet ovat siis (a) 2.21 m/s, (b) 1.77 m/s, (c) 4.91 m/s, (d) 0.78 m/s.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/4)

15.41 Pulssin nopeus on ns. ryhmänopeus

$$v_{\text{ryhmä}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_{\text{vaihe}} = 1.11 \text{ m/s.} \quad (15.137)$$

15.42 (a) Kun dispersiokäyrä kaartuu ylöspäin (kuva c), suuren aaltoluvun eli lyhyen aallonpituuden aallot kulkevat nopeasti. Kun dispersiokäyrä kaartuu alas päin (kuva b), pienien aaltoluvun eli suuren aallonpituuden aallot kulkevat nopeasti. Kuvassa 15.32 (c) pitkät aallonpituudet kulkevat lyhyitä nopeammin, joten tämä vastaa alas päin kaartuvaa dispersiokäyrää (b).

(b) Kyllä. Nämä voi tapahtua, jos dispersiokäyrä käännyy laskevaksi, kun k on positiivinen, sillä tällöin vaiheenopeus on positiivinen mutta ryhmänopeus on negatiivinen.

15.43 (a) Kuvan (b) mukaan peräkkäisten kuvioiden välillä on kulunut aina 1 ms aikaa. Kuvan (a) perusteella värähtelijän jaksonaika on $T = 4$ ms eli taajuus on $f = 250$ Hz. Koska aalto kulkee yhden aallonpituuden tassä ajassa, aallonpituus on $\lambda = v_{\text{aalto}} T = 1.38$ m.

(b) Kuvassa (c) aallonpituudet ovat $\lambda_+ = (v_{\text{aalto}} - v_{\text{lähde}})T = 0.92$ m sekä $\lambda_- = (v_{\text{aalto}} + v_{\text{lähde}})T = 1.84$ m. Havaitut taajuudet ja jaksonajat ovat siis $f_+ = v_{\text{aalto}}/\lambda_+ = 375$ Hz, $T_+ = 1/f_+ = 2.67$ ms (sininen) sekä $f_- = v_{\text{aalto}}/\lambda_- = 187.5$ Hz, $T_- = 1/f_- = 5.33$ ms (punainen). Jaksonajat voisi lukea myös suoraan kuvajista.

15.44 Jaksonajat voi lukea suoraan kuvajista. Punaisen havaitsijan mukaan $T_+ = 3$ ms ja sinisen $T_- = 6$ ms. Taajuudet ovat $f_+ = 333.3$ Hz sekä $f_- = 166.7$ Hz. Liikkuvan havaitsijan Doppler-ilmiön yhtälöstä saadaan samat tulokset, $f_+ - = (345 + 115)/345 \cdot 250$ Hz = 333.3 Hz ja $f_- - = (345 - 115)/345 \cdot 250$ Hz = 166.7 Hz.

15.45 (a) Kun lähde liikkuu äänen nopeudella, lähde kulkee synnyttämisenä aaltojen mukana. Aallot pakkautuvat samaan pisteeseen lähteestä edessä, jolloin aallonpituus on nolla ja taajuus äretön. Tällaista aaltojen pakkautumista yhteen kutsutaan shokkiaalloksi. Lähteestä takana aallonpituus on kaksinkertainen levossa olevan lähteestä aaltoihin verrattuna ja taajuus puolet.

(b) Koska B liikkuu nyt aaltojen mukana, B ei havaitse lainkaan värähtelyä. B:ssa siis taajuus on nolla. Havaitsija A puolestaan ehtii liikkua aina puoli aallonpituutta kahden aallonharjan havaitsemisen välillä, jolloin myös aalto liikkuu puoli aallonpituutta. Tällöin A havaitsee aallonharjoja kaksi kertaa niin usein kuin levossa oleva havaitsija, ja näinpä A:n havaitsema taajuus on kaksinkertainen lähteestä taajuuteen verrattuna. Nämä tulokset ovat sopusoinnussa Doppler-ilmiölle johdetun taajuuden lausekkeen kanssa. Erityisesti huomataan, että tulokset ovat erilaiset riippuen siitä, liikkuko lähde vai havaitsija.

15.46 (a) Asetetaan x -akseli lähteen liikkeen suuntaan, jolloin $v_{x,\text{aalto}} = 345$ m/s, $v_{x,\text{lähde}} = 20$ m/s ja $v_{x,\text{havaitsija}} = -20$ m/s. Doppler-ilmiön yhtälön perusteella

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{345 + 20}{345 - 20} \cdot 100 \text{ Hz} = 112.3 \text{ Hz.} \quad (15.138)$$

(b) Siirrytään koordinaatistoon, jossa ilma on paikoillaan. Tässä koordinaatistossa $v_{x,\text{aalto}} = 345$ m/s, $v_{x,\text{lähde}} = 10$ m/s ja $v_{x,\text{havaitsija}} = -30$ m/s. Siispä

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{345 + 30}{345 - 10} \cdot 100 \text{ Hz} = 111.9 \text{ Hz.} \quad (15.139)$$

(c) Nyt ilman koordinaatistossa $v_{x,\text{aalto}} = 345$ m/s, $v_{x,\text{lähde}} = 30$ m/s ja $v_{x,\text{havaitsija}} = -10$ m/s. Siispä

$$f_{\text{havaitsija}} = \frac{345 + 10}{345 - 30} \cdot 100 \text{ Hz} = 112.7 \text{ Hz.} \quad (15.140)$$

Huomataan, että tuulen suunnalla on pieni mutta havaittava vaikutus Doppler-ilmiöön.

15.48 (a) K liikkuu ylöspäin, kun köysi on pisteen kohdalla laskeva. Vastaavasti jos köysi on nouseva, K liikkuu alas päin.

(b) K:n vauhti on suuri, jos köysi on jyrkästi laskeva tai nouseva. Jos köysi on vaakasuora, vauhti on nolla.

15.49 (a) (i) 0 m^{-1} , **(ii)** 0 m^{-1} , **(iii)** 4 m^{-1} , **(iv)** -6 m^{-1} .

(b) Suorien käyrien kaarevuus on nolla, kuten voisi arvata. Käyrän kuten paraabelin kaarevuus on itseisarvoaan sitä suurempi, mitä jyrkemmin käyriä taipuu. Kaarevuus on positiivinen, jos käyrä taipuu koordinaatistossa ylöspäin.

15.50 Koska $[\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}] = (\text{m/s})^2$ ja $[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}] = 1$, täytyy olla $[C] = (\text{m/s})^2$.

15.51 Derivaatat ovat $\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v_{\text{aalto}}^2 f''(x - v_{\text{aalto}}t)$ ja $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = f''(x - v_{\text{aalto}}t)$. Näinpä aaltoyhtälön mukaan $v_{\text{aalto}}^2 f''(x - v_{\text{aalto}}t) = (5.0 \text{ m}^2/\text{s}^2) f''(x - v_{\text{aalto}}t)$ eli $v_{\text{aalto}} = \pm \sqrt{5.0} \text{ m/s} = \pm 2.2 \text{ m/s}$. Aallon vauhti voidaan päättellä aaltoyhtälöstä (mutta nopeuden suuntaa ei). Aallon muotoa eli funktiota f ei voi päättellä. Nämä pitää olla, koska aaltoyhtälö kuvaa välinettä, ja välinneen ominaisuudet määritetään aallon vauhdin. Aallon syntytapa sen sijaan määritetään aallon muodon, joten sitä ei voi selvittää aaltoyhtälöstä.

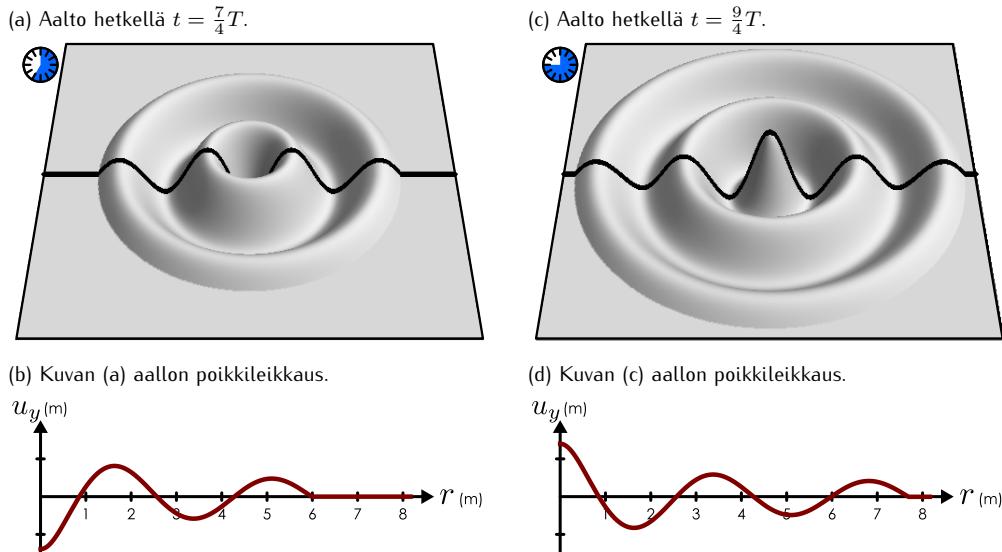
16 Moniulotteiset aallot

Nyt kun osaamme analysoida yhdessä ulottuvuudessa kulkevia aaltoja, voimme siirtyä tarkastelemaan kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa eteneviä aaltoja. Aaltojen lükkäävät perusperiaatteet ovat samat riippumatta ulottuvuuksien lukumäärästä, mutta moniulotteisessa avaruudessa voidaan havaita aaltojen ilmiötä, joita ei tapahdu yhdessä ulottuvuudessa. Jos ulottuvuuksia nimitään on monta, aallot voivat hajaantua ja kulkea eri reittejä. Hajaantuessaan aallot pääsevät levämään avaruuteen, jolloin niiden kuljettama energiakin jakautuu suurelle alueelle. Eri reittejä kulkevat aallot puolestaan voivat olla yhtäällä vahvistavassa ja toisaalla heikentävässä superpositiossa, mikä ohjaaa aaltojen kulkua. Lisäksi aaltoja kuljettavat väliaineet voivat muodostaa kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa paljon monimutkaisempia rakenteita kuin yhdessä, mikä mahdollistaa aaltojen tarkoituksellisen ohjaamisen. Tähän perustuu esimerkiksi optiikka ja akustiikka.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää aaltojen eteneminen Huygenson periaatteella ja kuvalla pistemäisten ja viivamaisten lähteiden synnyttämien aaltonrintamien muodot
- määritellä aallon intensiteetti ja määrittää sen riippuvuus amplitudista ja lähteestä mitatusta etäisyystä
- määrittää taittuvien ja heijastuneiden aaltojen kulkusuunnat ja selittää ilmiö aaltonrintamien käyttäytyksen pohjalta
- määritellä polarisaatio ja määrittää aallon värähtelyn ja intensiteetin muutos sen kulkissa polarisaattorin läpi
- selittää interferensi ja diffraktio aaltojen superpositioperiaatteen avulla
- määrittää millaisia kuvia peileistä ja linsseistä koostuvat optiset laitteet tuottavat
- määrittää kaksoisraon, hilan, aukon sekä kalvon läpi kulkevan valon intensiteetijakauma

Kuva 16.1: Värähtelevän kappaleen veden pinnalle synnyttämä aalto.



16.1 Hajaantuvat aallot

Aaltonrintamat

Veden pinnalla kulkeva aalto on tavanomainen ja helposti nähtävä esimerkki kaksiulotteisesta aaltoliukkeestä. Jos veteen vaikkapa heittää kiven, pinnalle syntyy ympyrän muotoisia väreitä, jotka levivät lähtöpisteestään samalla väliaineen määräämällä vauhdilla kaikkiin suuntiin. Vastaavasti jos veden pinnalla on harmonisesti värähtelevä kappale, se lähettää jatkuvasti aaloja kaikkiin suuntiin kuten kuvassa 16.1 on piirretty. Harmonisesti värähtelevä aaltolähde synnyttää veden pinnalle sinimuotoisia aaloja aivan samaan tapaan kuin köyden päähän kiinnitetty harmoninen värähtelijä synnyttää köyteen sinimuotoisia aaloja. Kummassakin tapauksessa väliaineen jokainen piste alkaa värhdellä harmonisesti samalla taajuudella kuin aalojen lähde.

Kuvaan on piirretty myös pinnan profili aaltolähteestä kautta kulkevalla suoralla. Koska tilanne on symmetrinen, profili on samanlainen kuljettiin lähteestä mihin tahansa suuntaan. Tästä johtuen pinta-aaltojen aallonharjat ja -pohjat muodostavat *renkaita*, joiden keskipisteessä on aalojen lähde. Aivan samaan tapaan kolmessa ulottuvuudessa kulkevan aallon aallonharjat ja -pohjat muodostavat avaruuteen *pallopintoja*. Esimerkiksi pistemäisen ääniläheen lähettämät paineaallot ovat tällaisia.

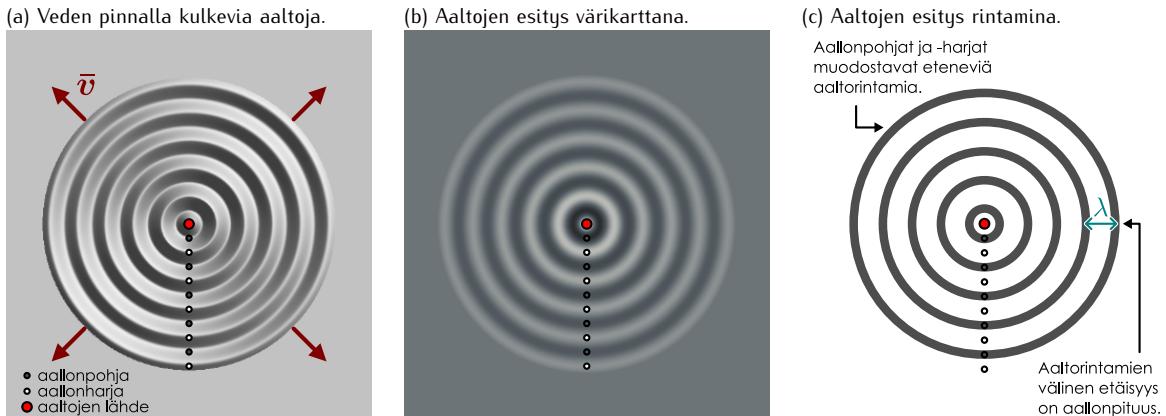
Veden pinnalla etenevä aallonharja muistuttaa hieman pintaan pitkin liukkuva seinämää, ja tästä syystä aallonharjoja ja -pohjia kutsutaan **aaltonrintamiksi**. Yleisesti sinimuotoisen aallon aaltonrintama määritellään käyränä, jonka pisteissä *aallon vaihe on vakio*. Esimerkiksi niihin väliaineen pisteissä, joissa aallon vaihe on $\phi = 0$, on kaikissa aallonharja. Vastaavasti pisteet, joissa vaihe on $\phi = \pi$, on aallonpohja.

Yhdessä ulottuvuudessa aaloja saattoi kuvata tarkasti piirtämällä niiden aaltofunktion. Kahdessa ja kolmessakin ulottuvuudessa aaltofunktion piirtäminen on kuitenkin hankalampaa, koska aaltofunktio riippuu useista paikkakoordinaateista. Kuvassa 16.2 on esitetty tapoja kuvata kaksiulotteinen aalto graafisesti. Kuvassa 16.2 (a) on kuva veden pinnasta yhtenä ajan hetkenä. Kuva on piirretty realistiseen näköiseksi, jolloin pinnan korkeudesta saa intuitiivisen käsityksen. Kuvassa käytetty varjostus kuitenkin aiheuttaa sen, ettei kuvasta pysty tarkasti lukemaan, missä pinta on korkealla ja missä matalalla.

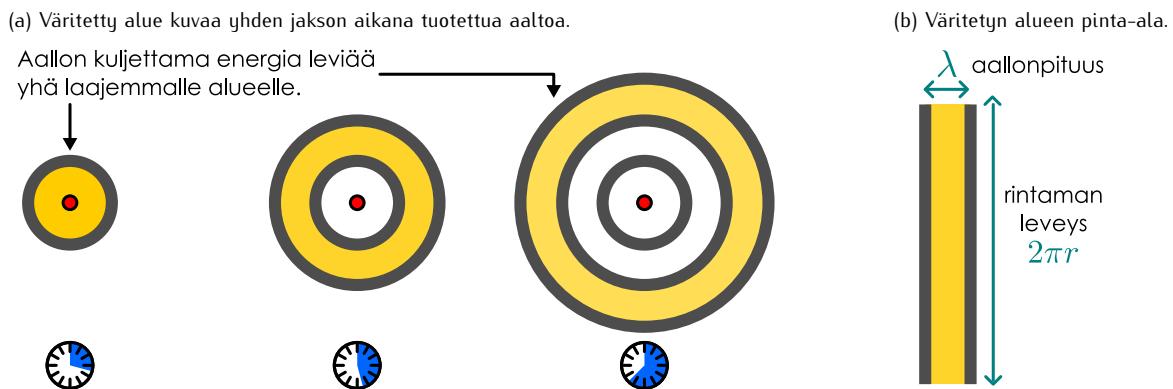
Kuvassa 16.2 (b) on kuva samasta aallosta värikarttana. Tässä kuvassa vaaleat alueet kuvaavat aallonharjoja ja tummat aallonpohjia. Toisin sanoen pinnan tasapainoasema on piirretty harmaalla, ja tästä korkeutta korkeammalla tai matalammalla olevat alueet on piirretty vaaleana ja tummana. Kuvasta pystyy lukemaan melko tarkasti, missä aallonharjat ja -pohjat ovat. Jotta eri kuvien vertailu olisi helpompaa, niihin on merkitty pistein joitakin aallonpohjia ja -harjoja.

Kuva 16.2 (c) muistuttaa kuvaa (b), mutta on vieläkin yksinkertaisempi. Kuvassa (c) aallonpohjat on piirretty mustina viivoina ja aallonharjat on jätetty valkoisiksi. Tällaisesta kuvasta ei näe pinnan täsmällistä muotoa, mutta esitystapa on yksinkertainen ja siitä näkee selkeästi *aaltonrintamien muodon*. Osoittautuu, että kahdessa ulottuvuudessa liikkuvien aalojen kuvauksessa juuri aaltonrintamien liikkeen ymmärtäminen ja kuvauksen on tärkeää, joten käytämme jatkossa paljon juuri tästä yksinkertaisinta esitystä. Ei ole sinänsä mitään väliä, piirretäänkö aaltonrintamat aallonharjojen tai aallonpohjien kohdalle, mutta johdonmukaisuuden vuoksi piirämme aaltonrintamat aina aallonpohjien kohdalle.

Kuva 16.2: Erilaisia tapoja kuvata aaltoja kahdessa ulottuvuudessa.



Kuva 16.3: Pistemäisestä aaltolähteestä lähtevä aalto hajaantuu. Tällöin aallon energia jakautuu suuremmalle alueelle.



Intensiteetti

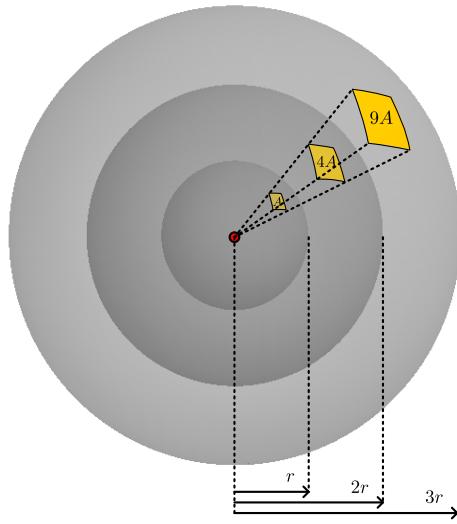
Aallot kuljettavat energian. Jos väliaineessa vaikuttaa dissipatiivisia vuorovaikutuksia kuten kitkaa tai väliaineen vastusta, aallon kuljettama mekaaninen energia muuttuu vähitellen lämpöenergiaksi. Tällöin aalto madaltuu kulkiessaan ja lopulta katoaa, koska aallon *energiatiheys on verrannollinen amplituden neliöön*. Tällöin sanotaan, että väliaine **absorboi** aallon. Todellisissa väliaineissa tapahtuu aina jonkin verran absorptiota, mutta monesti absorptio on niin heikkoa, että se voidaan jättää huomioimatta. Ideaalisessa, absorptiottomassa väliaineessa aallon energia säilyy periaatteessa ikuisesti. Se vain kulkee aallon mukana paikasta toiseen.

Yhdessä ulottuvuudessa aallon energia voi kulkea vain eteen- tai taaksepäin, ja tällöin aalto kulkee muutonsa säilyttäen ellei heijastu. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa energia pääsee kuitenkin virtaamaan eri suuntiin, mikä muuttaa tilanteen. Jos aallon lähde siirtää väliaineeseen energian keskimääräisellä teholla P , ajassa Δt lähteestä siirtyy väliaineeseen energia $\Delta E = P\Delta t$. Esimerkiksi yhden väärhdysjakson aikana lähde syöttää aaltoon energiamäärän $E_{jakso} = PT$. Toisaalta yhden väärhdynksen aikana syntyy yhden aallonpituuden verran uutta aaltoa, joten yhden aallonpituuden alueelle varastoitunut energia on juuri E_{jakso} . Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa tämä alue tarkoittaa *kahden aaltonrintaman välistä pinta-alaa tai tilavuutta*. Tämä on esitetty kuvassa 16.3 (a), jossa kahden peräkkäisen aallonpohjan välinen alue on väritetty eri ajan hetkinä. Jokaisessa kuvassa tähän alueeseen on varastoitunut sama määrä energiota, E_{jakso} .

Koska aaltonrintamien rajaama alue kasvaa aaltojen etäentyessä kauemmas lähteestä mutta tämän alueen sisältämä kokonaisenergia ei muudu, aallon *energiatiheyden täytyy pienentyä*. Kahdessa ulottuvuudessa aaltonrintamien välisen alueen pinta-ala on likimain aaltonrintamien välisen etäisyyden $\Delta r = \lambda$ ja aaltonrintamien leveyden (eli rintaman muodostaman ympyrän kaarenpituuuden) $2\pi r$ tulo, kuten kuvassa 16.3 (b) on havainnollisetettu. Siispä kuvassa väitetyn alueen pinta-ala on likimain $A_{rengas} \approx 2\pi r \Delta r = 2\pi r \lambda$, missä r on alueen keskimääräinen etäisyys aaltolähteestä. Kolmessa ulottuvuudessa pistemäisen lähteen tuottamat aaltonrintamat ovat pallopintoja, ja kahden rintaman välinen tilavuus on ohut pallon kuori. Tällaisen pallonkuoren tilavuus on likimain kuoren paksuuden $\Delta r = \lambda$ ja kuoren pinta-alan $4\pi r^2$ tulo, $V_{pallopinta} \approx 4\pi r^2 \Delta r = 4\pi r^2 \lambda$.

- !**
- 16.1 (a) Aalorintama muodostaa ympyrän, jonka säde on (i) λ , (ii) 3λ , (iii) 30λ . Mikä on tähän rintamaan nähdien sisemmän, pienemmän ympyrän muodostavan rintaman säde?
 (b) Mikä on näissä tapauksissa ulomman ja sisemmän aalorintaman säteen keskiarvo?
 (c) Mikä on ulomman ja sisemmän aalorintaman välin jäävän alueen pinta-ala?
 (d) Mikä on yhtälön $A_{\text{rengas}} \approx 2\pi r\lambda$ antama approksimaatio rintamien väliselle pinta-alalle, kun säteenä käytetään (b)-kohdassa laskettua keskiarvoa?

Kuva 16.4: Kolmessa ulottuvuudessa aalorintamat ovat pallopintoja, joiden ala on verrannollinen säteen neliöön.



asiassa näkyy myös kuvassa 16.1, jossa aaltojen poikkileikkuksista selvästi nähdään aallonharjojen madaltuvan etäisyyden r kasvaessa. Esimerkiksi kolmessa ulottuvuudessa energiatihesys on suoraan verrannollinen amplitudin neliöön ja käantäen verrannollinen etäisyysteen r , $A^2 \sim \langle \rho_{E,3D} \rangle \sim 1/r^2$, jolloin amplitudin täytyy olla käantäen verrannollinen etäisyysteen, $A \sim 1/r$.

- !**
- 16.2 Miten aallon amplitudi riippuu lähteestä mitatusta etäisyydestä r , jos kyseessä on
 (a) pistemäinen lähte, joka lähettilä aaltoja veden pinnalla,
 (b) hyvin pitkä sauva (pituus $L \gg r$), joka lähettilä ääntä (paineaaltoja ilmassa)?

Aaltojen energiatihesyn pienentymisen voi helposti havaita omin aistein. Esimerkiksi lampun valo näyttää sitä himmeämmältä, mitä kauempaa lampua katsotaan, koska sähkömagneettisena aaltona kulkevan valon energiatihesys pienenee etäisyyden kasvaessa. Samoin ääni kuuluu sitä heikommin, mitä kauempana äänen lähe on korvasta. Aaltojen leväminen eri suuntiin aiheuttaa luonnollisesti myös sen, että aaltojen energia päättyy eri paikkoihin. Esimerkiksi Aurinko säteilee jatkuvasti valtavan määärän energiota avaruuteen sekä hiukkasina että sähkömagneettisina aaloina, mutta Maapallolle tästä energiasta saapuu vain se osuuus, joka osuu Maahan (vrt. kuva 16.5). Tämä energiamäärä riippuu sekä säteilyn energiatihedestä Maan etäisyydellä Aurinkosta että Maan koosta. Esimerkiksi Kuuhun saapuvan energian kokonaismäärän täytyy olla pienempi kuin Maahan saapuvan, koska Kuu on Maata pienempi.

Sama periaate pätee yleisesti kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa: mitä suurempi kappale aaltoa, säteiljä, hiukkasia tai muuta energiavirtaa vastaanottaa, sitä enemmän energiota siihin kaikkiin osuu. Siksi tällaisissa tapauksissa ei ole mielekästä puhua aaltojen (tai hiukkasten tms.) kuljettamasta kokonaistihesystä tai -tehosta, koska havaitsjat vastaanottavat tyypillisesti vain osan aaltojen kuljettamasta energiasta, ja tämän osuuden suuruus riippuu havaitsjan koosta. Erityisesti koska havaitsjalle saapuva teho riippuu myös havaitsjasta itsestään, se ei ole pelkästään aaltoliukkeen ominaisuus.

Riippumatta ulottuvuuskien lukumäärästä, havaitsjan vastaanottama kokonaistihesys on suoraan verrannollinen siihen, kuinka kauan havaitsi vastaanottaa energiota, $\Delta E = P\Delta t$. Kolmessa ulottuvuudessa havaitsjan vastaanottama energia on lisäksi suoraan verrannollinen havaitsjan *aaltoliukkeen kulkusuuntaan nähdien kohtisuoraan poikkipinta-alan*, $\Delta E \sim A$. Jos siis jaamme havaitsjan vastaanottaman kokonaistihesyn sekä havaintoajalla että havaitsjan poikkipinta-alalla, saamme näistä molemmista riippumattoman, pelkästään aaltoliukkeen ominaisuuksia kuvavaan suureen **intensiteetiin**

$$I = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{A}. \quad (16.3)$$

Aallon keskimääräinen energiatihesys on sen sisältämä kokonaistihesys jaettuna aallon pinta-alalla (kahdessa ulottuvuudessa) tai tilavuudella (kolmessa ulottuvuudessa). Nämä koska kaksiulotteinen aalto levää renkaana, sen energiatihesys pienenee käantäen verrannollisesti renkaan kaarenpituuteen, joka on verrannollinen lähteestä mitattuun etäisyyteen,

$$\langle \sigma_{E,2D} \rangle = \frac{E_{\text{jaksot}}}{{A}_{\text{rengas}}} = \frac{PT}{2\pi r \lambda}. \quad (16.1)$$

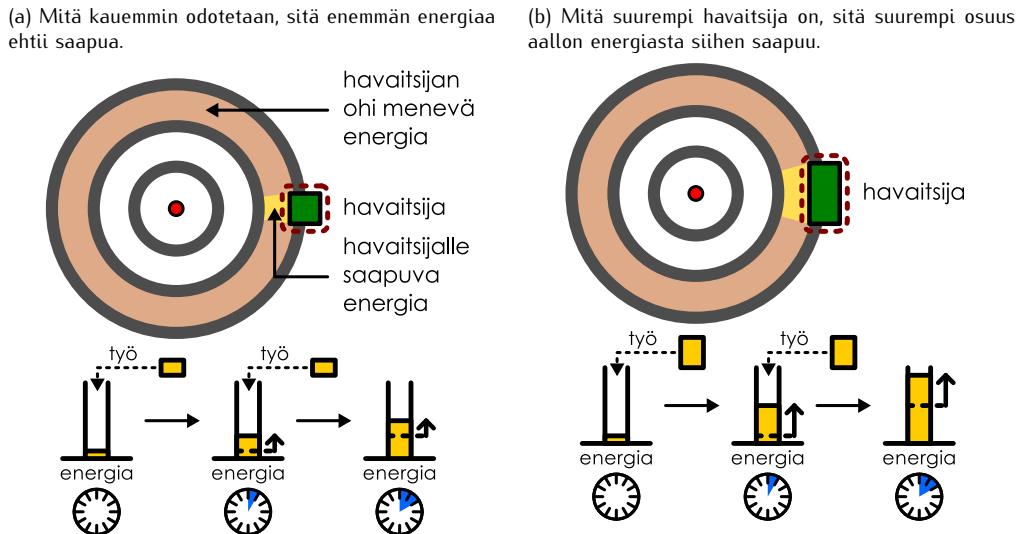
Kolmessa ulottuvuudessa aallon energia levää pallon pintana (kuva 16.4), jolloin energiatihesys on käantäen verrannollinen pallon pinta-alan ja siis etäisyyden neliöön,

$$\langle \rho_{E,3D} \rangle = \frac{E_{\text{jaksot}}}{V_{\text{pallopinta}}} = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda}. \quad (16.2)$$

Tästä johtuen aallon muoto ei voi kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa pysyä vakiona edes ideaalisessa väliaineessa. Koska aallon energiatihesys on verrannollinen amplitudin neliöön (vrt. köydessä kulkevan aallon energiatihesys (15.52), $\langle \lambda_E \rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$), ja energiatihesys pienenee kuljettaessa kauemmaksi aallon lähteestä, täytyy myös aallon amplitudin tällöin pienentyä. Tämä ilmiö itse

MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.5: Sinimuotoinen aalto kuljettaa energian kaikkiin suuntiin. Havaitsija kerää energian sitä enemmän mitä kauemmin se energian vastaanottaa ja mitä suurempi se on.



Intensiteetti siis kertoo, *paljonko energian aallon mukana saapuu neliömetrille yhden sekunnin aikana*.



16.3 Miten määrittelisit kahdessa ulottuvuudessa intensiteettiä vastaavan suureen, joka kuvailee aallon siirtämää energian ja sen riippumaton havaintoajasta ja havaitajan koosta?

Tarkastellaan pistemäistä aaltolähettää, joka säteilee energian teholla P kolmessa ulottuvuudessa. Ajatellaan, että lähteen ympärillä on r -säteinen pallopinta, jonka sisäpuoli mittaa saapuvan energian kokonaismääriä. Koska tämä pinta ympäröi lähteen, *kaiken* lähteen lähettilän energian täytyy päätyä tälle mittarille, ja niinpä sen havaitsema kokonaisenergia on $E = P\Delta t$. Toisaalta tämän pallopinnan pinta-ala on $A = 4\pi r^2$, joten intensiteetin määritelmän (16.3) perusteella aaltolähteen intensiteetti etäisyydellä r on

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (16.4)$$

Tulosta voi verrata jo aikaisemmin johdettuun yhtälöön (16.2), jonka mukaan palloaallon energiatihveys on myös suoraan verrannollinen lähteen tehoon ja käännettäen verrannollinen pallon pinta-alaan, $\langle\rho_{E,3D}\rangle = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda}$. Muistamalla lisäksi, että aallon vauhti on $v_{aalto} = \lambda/T$, intensiteetin ja energiatihyyden välille saadaan yhteyks

$$I = \frac{PT}{4\pi r^2 \lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} = \langle\rho_{E,3D}\rangle v_{aalto}. \quad (16.5)$$

Tulos on järkevä: Intensiteetin täytyy olla suoraan verrannollinen aallon energiatihyyteen, sillä mitä enemmän energian aallossa on, sitä enemmän energian aalto voi kuljettaa. Toisaalta aalto tuo havaitsijan sitä enemmän energian mitä nopeammin se kulkee. Itse asiassa tämä tulost on *sama* kuin yksiulotteisille alioille johdettu teho ja energiatihyyden yhteys (15.49). Ainoa ero on siinä, että yhdessä ulottuvuudessa ei tarvitse huomioida havaitajan kokoa, koska osa aallon kuljettamasta energiasta ei voi kulkea havaitajan ohi kuten useassa ulottuvuudessa. Siksi intensiteetti ja kokonaisteho ovat sama asia yhdessä ulottuvuudessa mutta eri asia kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa.



16.4 Aallon intensiteetti on 2.0 W/m^2 . Kuinka paljon energian saapuu yhdessä minuutissa pienelle kuution muotoiselle kappaleelle (särmän pituus 1.0 cm), jos aalto saapuu kuution erään sivun lävistäjän suuntaisesti eli 45° kulmassa kuution kahteen toiseen sivuun nähdyn?

Intensiteetti on kolmessa ulottuvuudessa etenevien aaltojen tärkeimpiä fysiikaalisia ominaisuuksia, koska se kuvailee paljonko energian aallon mukana siirtyy. Intensiteetti on usein myös suoraan havaitavissa. Aikaisemmin totesimme, että mitä kauemmaksi valon tai äänen lähteestä siirrytään, sitä himmeämmäksi valo käy ja hiljaisemaksi ääni muuttuu. Tämä johtuu siitä, että näiden aaltojen intensiteetti pienenee etäisyyden kasvaessa, ja valon kirkkaus sekä äänen voimakkuus riippuvat nimenomaan niiden intensiteistä.

esimerkki 16.1

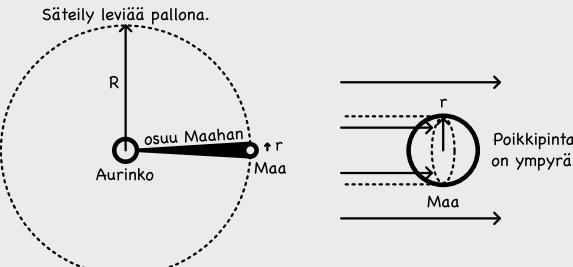
Auringon intensiteetti

Auringon säteilemä kokonaisteho on noin $4 \cdot 10^{26}$ W. Mikä on Maahan saapuvan säteilyn (a) intensiteetti ja (b) kokonaisteho? (c) Maailman energiankulutus oli 2010-luvulla noin 10^{21} J vuodessa. Missä ajassa Maahan saapuu tämä energiamäärä?

TILANNE Maan etäisyys Auringosta on noin $R = 1.5 \cdot 10^{11}$ m ja Maan säde on noin $r = 6.4 \cdot 10^6$ m. Merkitään Auringon tehoa $P = 4 \cdot 10^{26}$ W.

SUUNNITELMA Auringon säteily leviää pallopinnaa niin, että Maan etäisyydellä energia jakautuu alalle $A_{\text{säteily}} = 4\pi R^2$. Säteilyn intensiteetti on siis etäisyydellä R Auringon keskipisteestä

$$I = \frac{P}{A_{\text{säteily}}} = \frac{P}{4\pi R^2}. \quad (16.6)$$



Maahan saapuu siinä osuvaa säteilyä vastaava teho, joka riippuu siis siitä, kuinka suuren osuuden tämän pallooppinan alasta Maa peittää, $P_{\text{Maahan}} = IA_{\text{Maa}}$. Tämä ala ei ole Maan kokonaispinta-ala (pallon ala) vaan planeetan poikkipinta-ala (ympyrän ala) $A_{\text{Maa}} = \pi r^2$. Maahan saapuva energia on puolestaan verrannollinen tehoon ja kuluneeseen aikaan, $E = P\Delta t$.

RATKAISU (a) Intensiteetti Maan kohdalla on $I \approx \frac{4 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4\pi(1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} \approx 1400 \text{ W/m}^2$.

(b) Maahan saapuva kokonaisteho on $P_{\text{Maahan}} \approx 1.8 \cdot 10^{17}$ W.

(c) Tarvittava aika on $\Delta t = \frac{E}{P_{\text{Maahan}}} \approx 5600 \text{ s} = 1.5 \text{ h}$.

ARVIOINTI Pikainen haku osoittaa, että Auringon säteilyn intensiteetti avaruudessa Maan kohdalla on todellakin noin 1.4 kW/m^2 . Ilmakehä toki absorboi suuren osan tästä energiasta niin että maanpinnalla intensiteetti on maksimissaan noin 1.0 kW/m^2 .

Tämäkin on silti paljon, sillä Aurinko säteilee maahan kahdessa tunnissa enemmän energiota kuin kaikki ihmiskunnan moottorit ja voimalaitokset käsittlevät vuodessa. Jos haluaisimme kattaa nykyisen energiantarpeemme aurinkopaneeleilla, jotka hyödyntävät 10 % nüden vastaanottamasta säteilyenergiasta ($\eta = 0.1$), paneelien kokonaispinta-alan pitäisi olla $A = \frac{E}{\eta I \Delta t} = \frac{10^{21} \text{ J}}{10^{-1} \cdot 10^3 \text{ W/m}^2 \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ s}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^5 \text{ km}^2$. Tämä on suunnilleen Suomen pinta-ala, mikä on paljon muttei kuitenkaan mitenkään mahdoton suuruusluokka, sillä ihmisten rakennelmat kattavat jo nyt tätä suuremman pinta-alan.



16.5 Selitä oman sanoin, mitä tarkoitetaan intensiteetillä. Mistä aallon ominaisuuksista intensiteetti riippuu? Miten ja miksi intensiteetti muuttuu, kun aalto leviää avaruuteen?

Intensiteetti kuvailee kaikkia kolmessa ulottuvuudessa kulkevia aaloja, mutta äänen intensiteetin mittamiseen on vakiintunut oma erikoinen tapansa. Heikoin ääni, jonka ihminen voi kuulla, on intensiteetiltään noin $I_{\text{kynnys}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, mitä kutsutaan *kuulokynnyksi*. Toisessa ääripäässä painealto, jonka intensiteetti on noin $I_{\text{kipu}} = 1 \text{ W/m}^2$ tai suurempi, aistitaan kipuna eikä äänenä. Ihmisen kuulo ei kuitenkaan mitaa äänen intensiteettiä lineaarisesti vaan likimain logaritmisesti. Jos äänen intensiteetti on aluksi esimerkiksi $I_0 = 1.0 \text{ mW/m}^2$ ja se kaksinkertaistetaan arvoon $I_1 = 2.0 \text{ mW/m}^2$, ihmisen kuulee äänen voimakkuuden kasvavan. Jos intensiteetti jälleen kaksinkertaistetaan nyt arvoon $I_2 = 4.0 \text{ mW/m}^2$, äänen voimakkuuden lisäys *kuulostaa yhtä suurelta* kuin ensimmäisessä muutoksessa, vaikka ensin intensiteetti kasvoi määränpäin $\Delta I_{0 \rightarrow 1} = 1.0 \text{ mW/m}^2$ ja sen jälkeen suuremman määränpäin $\Delta I_{1 \rightarrow 2} = 2.0 \text{ mW/m}^2$. Tämän takia äänen voimakkuutta mitataan tavallisesti logaritmilla *desibelialasteikolla*. (Desibeli on nimensä mukaisesti kymmenenesabeli, $1 \text{ dB} = 0.1 \text{ B}$, missä yksikkö beli on nimetty Alexander Bellin mukaan.) Desibelin määritellään niin, että jos äänen intensiteetti on I , sen voimakkuus desibeleissä on

$$\beta(I) = \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnys}}}, \quad (16.7)$$

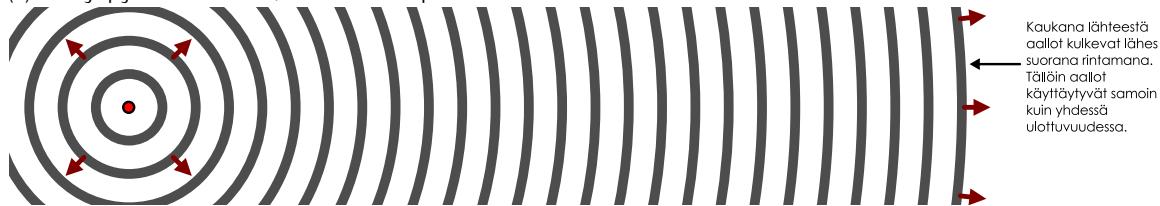
missä $\beta_0 = 10 \text{ dB}$ ja log on kymmenkantainen logaritmi. Tämän määritelmän mukaisesti heikoimman kuultavan äänen voimakkuus on $\beta(I_{\text{kynnys}}) = (10 \text{ dB}) \log 1 = 0 \text{ dB}$ ja kipurajalla äänen voimakkuus on $\beta(I_{\text{kipu}}) = (10 \text{ dB}) \log(1/10^{-12}) = 10 \text{ dB} \cdot 12 = 120 \text{ dB}$.



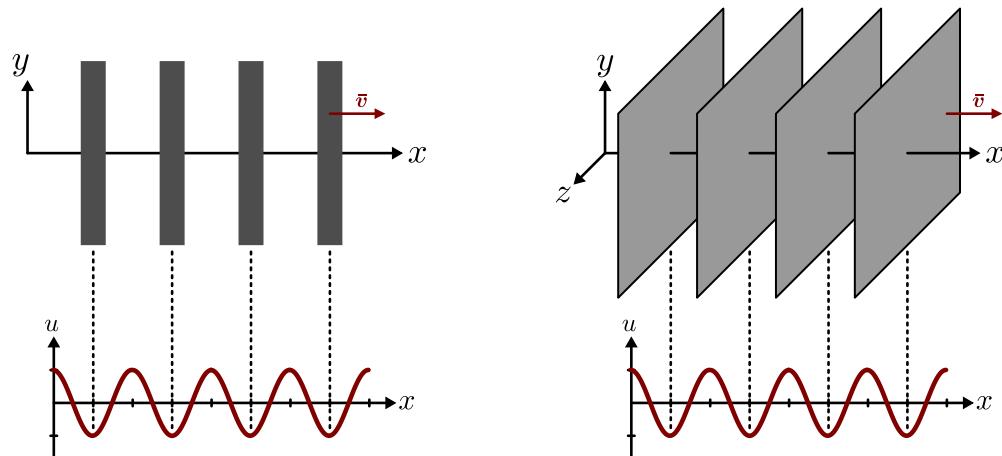
16.6 Soitin tuottaa ääntä, jonka voimakkuus on 70 dB. (a) Mikä on äänen voimakkuus, jos kaksi samanlaista soitinta soittaa yhtä aikaa? (b) Montako soitinta tarvitaan tuottamaan ääni, jonka voimakkuus on 80 dB?

Kuva 16.6: Kaukana lähteestä ympyrääallon kaarevuus on pieni. Tällöin aaltonrintamat ovat kahdessa ulottuvuudessa likimain suoria ja kolmessa ulottuvuudessa tasojen, ja aallot käyttäytyvät kuin yhdessä ulottuvuudessa.

(a) Kun ympyrän säde kasvaa, sen kaarevuus pienenee.



(b) Kaksi- ja kolmiulotteisia suoria aaltonrintamia.



Aaltonrintamien muoto

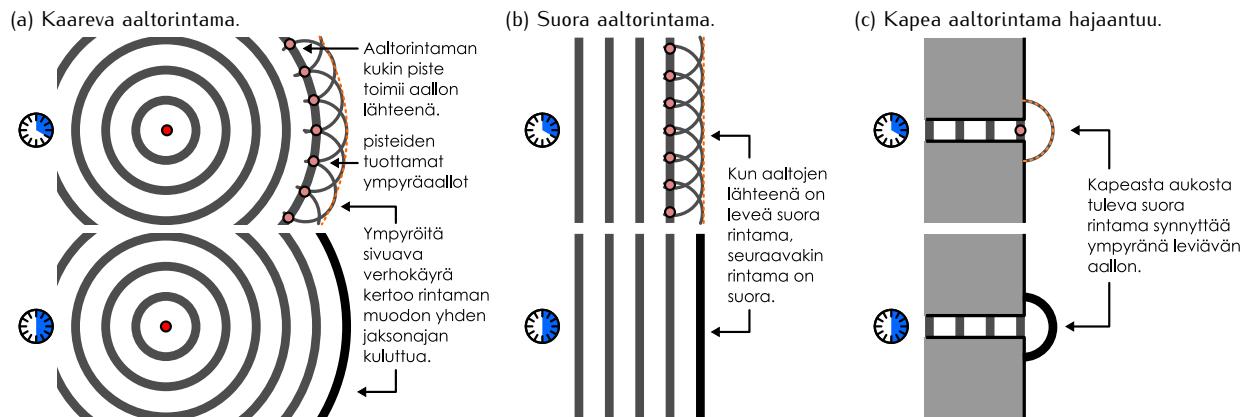
Lähellä pistemäistä lähdettä aaltonrintamien muodostamien ympyröiden tai pallopintojen säde on pieni ja kaarevuus suuri. Tällöin rintamien suhteellinen koko kasvaa nopeasti etäisyyden r kasvaessa ja siksi aaltojen energiatiheds ja amplitudi pienenevät nopeasti siirryttäessä kauemmas lähteestä. Sen sijaan kaukana lähteestä kohtuulliset muutokset lähteestä mitattuissa etäisyyksissä vaikuttavat aaltonrintaman suhteelliseen kokoon vain vähän. Tästä johtuen aaltojen amplitudi ja energiatiheds pienenevät kaukana lähteestä varsinkin hitaasti. Aaltonrintamien muodossa tämä näkyj siten, että aaltonrintamien kaarevuus pienenee, kuten kuvassa 16.6 (a) on havainnollistettu. Tällöin aaltonrintamista tulee lähes suoria ja lähellä toisiaan olevissa pisteissä aallon nopeutta kuvaavat vektorit ovat likimain yhdensuuntaiset. Esimerkiksi Aurinko on Maapallosta niin kaukana, että Maahan saapuvan valon suunta ei käytännössä muudu, vaikka havaitseja siirtyisi Maapallon pinnalla.

Jos aaltojen lähde on hyvin kaukana havaintopisteestä, kahdessa ulottuvuudessa aaltonrintamista tulee suoria viivoja (kuva 16.6 (b)) ja kolmessa ulottuvuudessa suoria tasojen (kuva 16.6 (c)), mikä vuoksi tälläistä aaltoa kutsutaan *tasoalalloksi*. Jos tasoalto kulkee esimerkiksi x -suuntaan, aallon vaihe ja aaltonfunktio riippuvat vain x -koordinaatista eivätkä laikaan kulkusuuntaan nähden kohtisuorista y - ja z -koordinaateista. Tämän vuoksi tasoalot käyttäytyvät samalla tavalla kuin yksilulitteiset sinimuotoiset aallot. On paljon helpompi analysoida suoria aaltonrintamia kuin kaarevia, joten aaltojen analyysissä aaltonrintamien ajatellaan olevan suoria melkein aina, kun aaltojen lähde on kaukana havaintopisteestä.

Edellä tarkastellut tilanteet, joissa aaltonrintamat ovat täydellisiä ympyröitä tai suoria, ovat yksinkertaisia erikoistapauksia. Nämä mallit eivät välttämättä päde, jos aallon lähde ei ole pistemäinen tai jos ulkoiset esteet vaikuttavat aaltojen kulkuun. Tällaisissa tilanteissa aaltonmuoto voi olla hyvin monimutkainen, ja tässä luvussa päätavoitteitamme onkin ymmärtää, millaiset periaatteet aaltojen käyttäytymistä ohjaavat.

Ensimmäinen työkalumme on niin sanottu **Huygensin periaate** (Christiaan Huygens mukaan). Tämän periaatteen mukaan *aaltonrintaman jokainen piste toimii kuin aallon lähde*. Tämän periaatteen mukaan aallon kulun voi ymmärtää seuraavasti: Aaltolähde värähtelee tietyllä taajuudella ja saa näin sitä ympäröivät väliaineen pisteen myös värähtelemään samalla taajuudella. Nämä väliaineen pisteen puolestaan saavat *niitä ympäröivät pisteet* värähtelemään ja niin edelleen. Aalto siis etenee siten, että kukaan väliaineen piste *levittää* värähtelyn lähiympäristöönsä. Koska jokainen värähtelijä saa ympäristönsä värähtelemään samalla taajuudella kuin millä se itse värähtelee, väliaineen pisteen päätyvät lopulta värähtelemään kaikkialla sa-

Kuva 16.7: Huygensin periaate. Aaltonrintaman jokaisen pisteen voi ajatella lähettyvän uutta aaltoa aallon kulkusuuntaan. Aallon tulevan muodon voi päättellä valitsemalla joukon pisteitä aaltonrintamasta ja piirtämällä näiden ympärille ympyrät, joiden säde on yksi aallonpituisus. Näiden ympyröiden rajaama käyrä näyttää, minne aaltonrintama on edennyt yhden jaksonajan kuluttua.



malla taajuudella riippumatta esimerkiksi siitä, onko väliaine kaikkialla samanlainen. Lisäksi aalto jatkaa etenemistään, vaikka aaltojen alkuperäinen lähde lakkaisi värähtelemästä, koska väliaineessa jo oleva aalto toimii uusien värähtelyjen lähteenä.

Kun aaltonrintaman muoto tunnetaan yhdellä ajan hetkellä, aaltonrintaman muoto tulevaisuudessa voidaan päättää Huygensin periaatteen avulla. Jos nimittäin rintaman jokainen piste toimii aallon lähteenä, voimme valita rintamasta joukon pisteitä ja piirtää niiden jokaisen ympärille ympyrän, joka esittää kyseisestä pistestä lähtevää uutta aaltoa, kuten kuvassa 16.7 on esitetty. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että aalto muuttuisi yhtäkkiä joukoksi pieniä ympyröitä kuten kuvaan on piirretty. Todellisuudessahan aaltonrintamassa on *äretön* määrä aallon lähteenä toimivia pisteitä, joista kuvaan on piirretty vain muutama, ja uusi aalto on näiden kaikkien *superpositio*. Aallon muoto saadaankin määritettyä kuvaan piirrettyjä ympyröitä sivuavana *verhokäyränä*. Erityisesti kun ympyröiden säteeksi valitaan täsmälleensä yksi aallonpituisus, tämä verhokäyrä piirryt yhteen, johon aaltonrintama on edennyt täsmälleensä yhden jaksonajan kuluttua.

Kuvissa 16.7 (a) ja (b) on esitetty etenevä aallon muodon määrittäminen Huygensin periaatteella, kun kyseessä on ympyräaalto ja suora aaltonrintama. Ympyräaallon tapauksessa aaltonrintamasta valitut pisteet ovat ympyrän kaarella, joten niiden ympärille piirrettyjen pienten ympyröiden verhokäyrä on niin ikään ympyrän kaari. Tämä on uloimman aaltonrintaman uusi muoto yhden jaksonajan kuluttua. Suorassa aaltonrintamassa verhokäyrä on puolestaan suora, joten aaltonrintama etenee pysyten suorana. Nämä tulokset ovat täsmälleensä samat kuin mitä näimme jo kuvassa 16.6.

Kuvassa 16.7 (c) on sen sijaan uusi tilanne, jossa suorat aaltonrintamat kulkevat pitkin kapeaa käytävää. Niin kauan kuin aalto on käytävässä, tilanne on sama kuin kuvassa 16.7 (b) ja etenevät rintamat pysyvät suorina. Kun käytävä aikanaan loppuu, tilanne kuitenkin muuttuu. Voisi ajatella, että suorana rintamana aikaisemmin edennyt aalto jatkaisi matkaansa suoraan, ja tietysti olosuhteissa näin tapahtuukin. Tässä tapauksessa kuitenkin Huygensin periaate sanoo, että käytävän päähän saapuneen aaltonrintaman pisteet toimivat aaltojen lähteenä, jotka levittävät aaltoliikettä ympäristöönsä joka suuntaan. Lisäksi koska käytävä oli kapea, sen päättä voi kuvata likimain yhtenä pisteenä. Näin ollen aallon muotoa tulevaisuudessa kuvaa tämän *yhden pisteen lähettemä ympyräaalto*. Siispä vaikka aalto etenee käytävässä suorina rintamina, käytävästä ulos tulevat aallot levivät puoliympyrän muotoisesti.

Näin todella tapahtuu, ja ilmiötä kutsutaan **diffraktioksi**. Varsinkin äänen diffraktio on hyvin jokapäiväinen ilmiö. Jos esimerkiksi puhallat pilliin tai torveen, soittimen sisään muodostuu aaltoja, jotka poistuvat äänen aallonpituuuteen nähdyn pienen aukon kautta. Jos ääniaallot jatkaisivat kulkuaan suoraan aukosta kuljettuaan, torvet lähettilsivät ääntä vain suoraan eteenä. Todellisuudessa torvesta poistuvat aallot kuitenkin levivät kaikkiin suuntiin, minkä ansiosta torven äänen voi kuulla vaikka seisoi torven takana. Diffraktio-ilmiötä tutkimme tarkemmin luvussa 16.3.



16.7 Tapahtuuko merkittävää diffraktiota, kun (a) normaalilin puheen tuottamat ääniaallot kulkevat avoimesta ovesta tai (b) taskulampun valo kulkee avoimesta ovesta? Miksi?

16.2 Aallot ja väliaineet

Heijastuminen ja taittuminen

Tarkastelimme yksiuotteisten aaltojen käyttäytymistä rajapinnoilla jo luvussa 15.6. Tällöin opimme, että rajapinnan kohtaava aalto voi heijastua, kulkea rajapinnan läpi tai tehdä osittain molempia. Näin tapahtuu myös kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa. Erona yksiuotteiseen tapaukseen on kuitenkin se, että kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa aalto voi saapua rajapinnalla *vinosti*.

Jos aalto saapuu rajapinnalle, jota se ei voi läpäistä, aallon on heijastuttava täydellisesti. Kaikki aallot voivat heijastua, mutta erityisen selkeä tämä ilmiö on valon tapauksessa, koska valon voi nähdä. Valoa lähes täydellisesti heijastavaa pintaa kutsutaan tieteenkin *peiliksi*. Jos peiliä osoittaa kohtisuoraan esimerkiksi laserosoittimella, valo heijastuu suoraan takaisin. Sen sijaan jos valo osuu peilin pintaan vinosti, huomataan valon heijastuvan *eri* suuntaan kuin mistä se tuli niin, että *peilille saapuva ja siitä heijastunut valonsäde muodostavat yhtä suuret kulmat peilin pintaan nähdyn*.

Aallon heijastuminen on esitetty kuvassa 16.8. Oletetaan, että saapuva aalto on tasoaalto, jonka aaltonrintamat ovat suoria. Aallon edetessä nämä rintamat kulkevat eteenpäin muotansa säilyttäen kunnes ne kohtaavat heijastavan rajapinnan. Nyt voimme päätellä aallon muodon Huygensin periaatteen avulla. Aaltonrintaman pisteet, jotka eivät ole vielä saavuttaneet rajapintaa, toimivat läheenä *kohti* rajapintaa kulkevalle aalloille. Rajapinnan saavuttanut aaltonrintaman piste toimii myös uuden aallon läheenä, mutta tällaisesta pisteestä lähtevä aalto kulkee *poispäin* rajapinnasta. Kuvassa 16.8 (a) Huygensin periaate on kuvattu valitsemalla aaltonrintamasta neljä pistettä yhtä kaukaa toisistaan, piirtämällä näiden ympärille renkaat, ja määrittämällä näiden avulla aaltonrintaman tuleva muoto.

Saapuva ja heijastunut aalto kulkevat samassa väliaineessa, joten niiden nopeus sekä aallonpituuus ovat samat. Kaikkien kuvaan piirrettyjen renkaiden sade on yksi aallonpituuus, joten renkaat ovat keskinään yhtä suuret. Niinpä jokainen aaltonrintama on täysin symmetrinen rajapintaa koskevan pisteen suhteeseen, ja siksi saapuvan ja heijastuneen aaltonrintaman täytyy olla samassa kulmassa rajapintaan nähdyn.

Tasoaallon liikesuunta on kohtisuorassa rintaman suuntaan nähdyn, joten aaltonrintaman ja rajapinnan välinen kulma on sama kuin aallon likesuunnan ja rajapinnan *normaalilin* välinen kulma, mikä on kuvassa 16.8 (b) merkitty symbolilla θ_A . Koska esimerkiksi valonsäteen tapauksessa näemme valon kulkusuunnan mutta emme sähkömagneettisen aallon aaltonrintamia, heijastuvien aaltojen suunta on tapana ilmoittaa nimenomaan aaltojen kulkusuunnan ja rajapinnan normaalilin välisen kulman avulla.



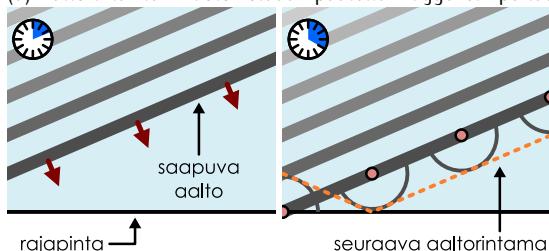
16.8 Kuvassa 16.8 (a) heijastuva aalto ei koe vaihesiirtoa. Heijastuva aalto kuitenkin voi kokea vaihesiirron. Miltä kuva tässä tapauksessa näyttäisi? Tapahtuuko valossa vaihesiirto, kun valo heijastuu tavallisesta peilstä?

Jos aalto saapuu rajapinnalle, jonka se voi läpäistä, aalto tyypillisesti osittain heijastuu ja osittain *läpäisee* rajapinnan. Rajapinnan läpäisevä aalto *ei kuitenkaan yleensä kulje suoraan* vaan sen suunta tyypillisesti käännyt rajapinnalla. Tämäkin tapahtuu kaikille aalloille, mutta jälleen valon tapauksessa ilmiö on erityisen helppo havaita. Esimerkiksi vesilasissa oleva lusikka näyttää sopivasta kulmasta katsoen taittuneelta, koska vedestä ilmaan saapuvan valon reitti ei ole suora, ja tämä vääristää havainnon.

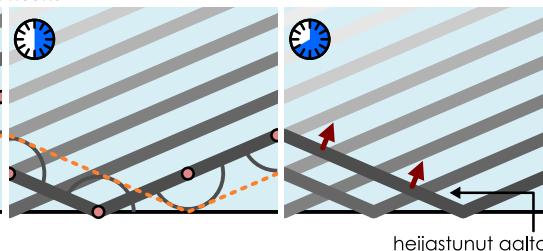
Kuvassa 16.9 on piirretty rajapinnalla taittuvan aallon kulku, kun aalto kulkee väliaineesta A väliaineeseen B. Aallon taajuus ei muutu sen ylittäessä rajapinnan, mutta sen nopeus ja aallonpituuus yleensä muuttuvat, koska nämä riippuvat väliaineesta. Voimme jälleen valita Huygensin periaatteen mukaisesti aaltonrintamasta joukon pistettä ja piirtää niiden ympärille näistä pistestä lähteviä aaloja kuvavat ympyrät. Nyt kuitenkin näiden ympyröiden täytyy olla eri väliaineissa erisuuret, koska ympyröiden sade vastaa aallonpituitta juuri tässä väliaineessa. Esimerkiksi kuvassa 16.9 (a) aalonpituuus on väliaineessa B suurempi kuin väliaineessa A,

Kuva 16.8: Rajapinnalle vinosti saapuva aalto heijastuu samassa kulmassa kuin missä se saapuu pinnalle.

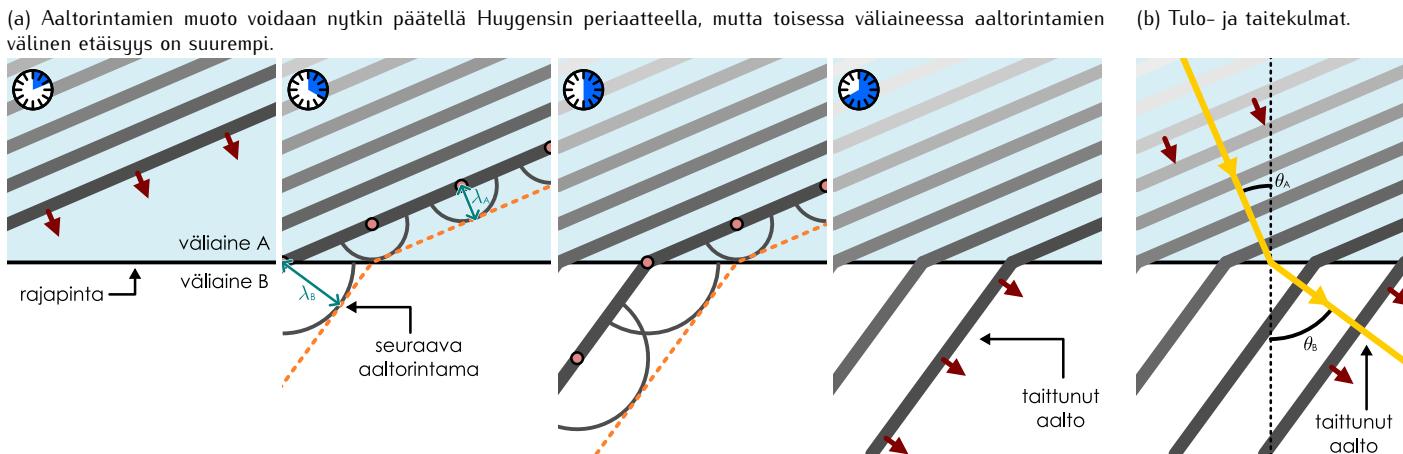
(a) Aaltonrintamien muoto voidaan päätellä Huygensin periaatteella.



(b) Tulo- ja heijastuskulmat.



Kuva 16.9: Rajapinnan läpäisevä aalto taittuu eli aallon suunta muuttuu, jos aallonpituuus on rajapinnan eri puolilla eri suuri.



$\lambda_A < \lambda_B$. Aaltorintaman muoto voidaan jälleen päätellä piirtämällä kaikkia ympyröitä sivuava verhokäyrä, ja koska ympyröiden säteet ovat rajapinnan eri puolilla eri suuret, tämän käyrän täytyy rajapinnan eri puolilla muodostaa erisuureiset kulmat rajapintaan nähdyn. Niinpä aaltojen kulkusuunnat ovat myös erilaiset. Tässä tapauksessa kulma väliaineessa A on pienempi kuin väliaineessa B, $\theta_A < \theta_B$.



16.9 Tarkastele kuva 16.9. (a) Kummassa väliaineessa aallon vauhti on suurempi? (b) Millainen kuvio olisi, jos vauhtien suhde olisi päinvastainen?

Aaltorintamien ja rajapinnan väliset kulmat voi päätellä geometrisesti kuvan 16.10 kuvion avulla. Väliaineessa A aaltorintamien välinen etäisyys on sama kuin aallonpituuus tässä väliaineessa, λ_A , ja vastaavasti väliaineessa B rintamien välinen etäisyys on λ_B . Kuviossa tämä tarkoittaa sitä, että merkitytten pisteiden Q ja R väinen etäisyys on $L_{QR} = \lambda_A$ ja pisteiden P ja S välinen etäisyys on $L_{PS} = \lambda_B$. Lisäksi aaltorintamien täytyy olla rajapinnalla jatkuvat, sillä aallon vaihe ei muutu sen läpäistessä rajapinnan. Niinpä rintamia kuvavissa viivoissa ei saa olla hyppäystä rajapinnalla. Kuvassa tämä näkyy niin, että aaltorintamat kohtaavat pisteissä P ja Q.

Kolmiot PQR sekä PQS ovat suorakulmaiset, ja jana PQ on niiden yhteinen hypotenuusa. Kolmiossa PQR kärkipisteen P kulma on aaltorintaman ja rajapinnan välinen kulma θ_A , joten tämän kolmion perusteella kulman siinä voidaan kirjoittaa kateetin QR ja hypotenuusan PQ pituuskertoja, $\sin \theta_A = L_{QR}/L_{PQ}$. Vaihtoehtoisesti tästä voidaan ratkaista janan PQ pituudeksi

$$L_{PQ} = \frac{L_{QR}}{\sin \theta_A} = \frac{\lambda_A}{\sin \theta_A}. \quad (16.8)$$

Samalla tavalla kolmiossa PQS kärkipisteen Q kulma on θ_B ja niinpä janan PQ pituus on tämän perusteella

$$L_{PQ} = \frac{L_{PS}}{\sin \theta_B} = \frac{\lambda_B}{\sin \theta_B}. \quad (16.9)$$

Yhdistämällä nämä kaksi relatiota saadaan aallonpituuksien ja kulmien välille yhteyts

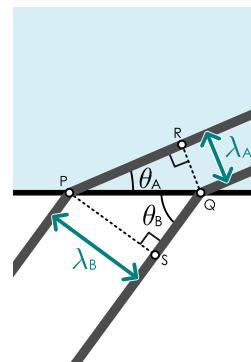
$$\frac{1}{\lambda_A} \sin \theta_A = \frac{1}{\lambda_B} \sin \theta_B. \quad (16.10)$$

Tämä on aaltojen **taittumislaki** eli Snellin laki (Willebrord Snelliuksen mukaan).

Taittumislain voi kirjoittaa moneen eri muotoon, koska sinimuotoisen aallon aallonpituuus, taajuus ja nopeus liittyvät toisiinsa perusyhtälön $v_{\text{aalto}} = f\lambda$ mukaisesti. Valon tapauksessa on tavallista määritellä **taitekerroin** n valonnopeuden ja sähkömagneettisen aallon väliaineessa mitatun vauhdin (täsmällisemmin vaihenopeuden) suhteena,

$$n = \frac{c}{v_{\text{aalto}}}. \quad (16.11)$$

Kuva 16.10: Taittumislain selittävä geometria.



Taitekerroin on yksikötön luku, joka on määritelmän mukaisesti tyhjiössä yksi ja väliaineissa yleensä suurempi kuin yksi. Sijoittamalla taitekertoimen määritelmään aallon nopeuden paikalle taajuuden ja aallonpituuden tulon, taitekerroin voidaan kirjoittaa myös muodossa $n = c/(f\lambda)$, ja tämän perusteella aallonpituuus on taajuuden ja taitekertoimen avulla kirjoitettuna $\lambda = \frac{c}{fn}$. Kun sijoitamme tämän lausekkeen taatumislakiin ja supistamme yhtälön kummaltakin puolelta pois tekijät c ja f , jotka eivät riipu väliaineesta, taatumislaki voidaan kirjoittaa muodossa

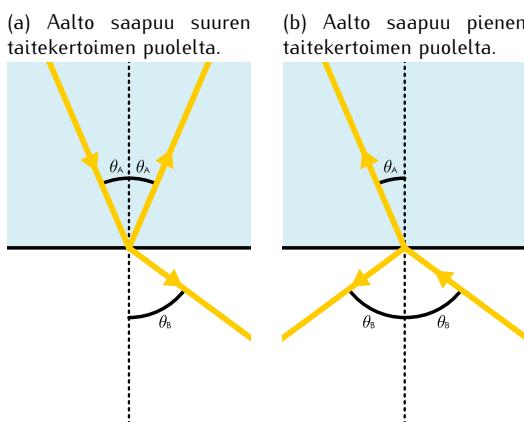
$$n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B. \quad (16.12)$$



16.10 Väliaineen A taitekerroin on 1.0 ja väliaineen B 1.3. Vertaa valon (a) nopeutta, (b) aallonpituitta, (c) taajuutta sekä (d) tulo- ja taitekulmia näissä väliaineissa.

Aineita, joiden taitekertoimet ovat suuret, kutsutaan *optisesti tiheiksi*, ja tyypillisesti ne ovat tiheitä myös massaltaan. Esimerkiksi ilman kuten muidenkin kaasujen taitekerroin on hyvin lähellä yhtä, mutta veden taitekerroin on noin 1.3 ja läpinäkyvien kiinteiden aineiden kuten lasin ja monien muovien taitekertoimet ovat tavallisesti välillä 1.3–2. Vesi ja lasi ovat sis optisesti tiheämpää kuin ilma. Joidenkin kristallien taitekertoimet ovat vielä suuremmat. Esimerkiksi timantin taitekerroin on noin 2.4.

Kuva 16.11: Tulo- ja taitekulmien symmetria.

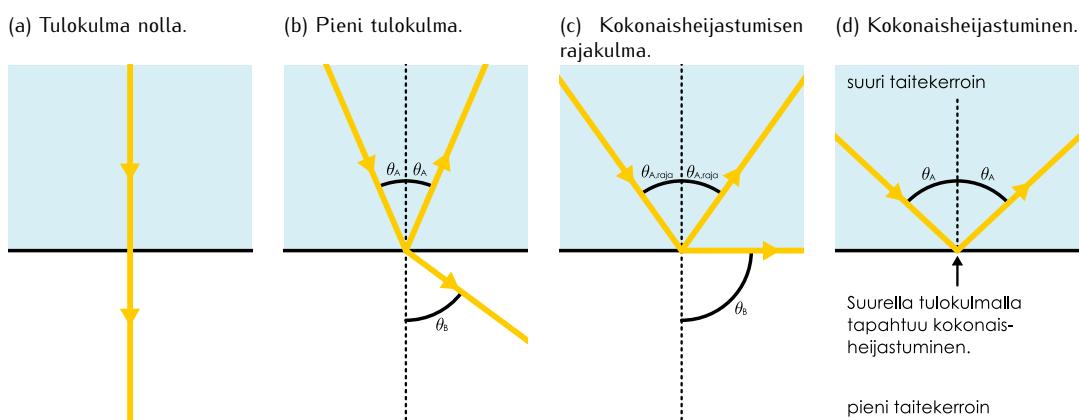


Kun valo saapuu optisesti tiheästä aineesta optisesti harvaan, osa valosta heijastuu ja osa läpäisee aineiden rajapinnan, ja läpäisseen valonsäteen kulkusuunta taittuu taatumislain mukaisesti *pois rajapinnan normaalista*. Tämä tilanne on piirretty kuvaan 16.11 (a), jossa sininen alue voisi olla esimerkiksi lasia ja valkeaa ilmaa. Vastaavasti jos valo saapuu optisesti harvasta aineesta, se taittuu *kohti rajapinnan normalia* kuten kuvassa 16.11 (b).

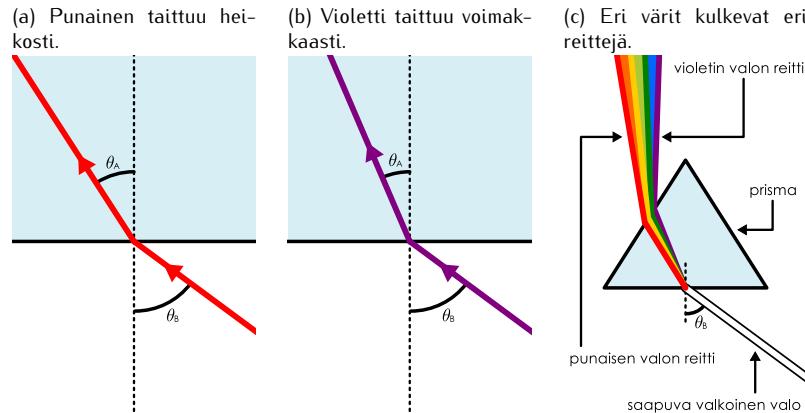
Huomaat erityisesti, että kuviossa 16.10 ei mainittu lainkaan aaltojen liikkeen suuntaa, joten sama kuva voi kuvata väliaineesta A väliaineeseen B (tiheästä harvaan) kulkevaa aaltoa sekä väliaineesta B väliaineeseen A (harvasta tiheään) kulkevaa aaltoa. Tämä ilmenee myös taatumislain matemaattisessa muodossa: yhtälö ei muutu vaikka väliaineita kuvavat indeksit vaihdetaan keskenään. Tämä symmetria näkyy myös kuvissa 16.11 (a) ja (b) siten, että tulevaa ja taittunutta valoa kuvavat suorat ovat kuvissa yhdensuuntaiset — vain valon kulkusuunta on käännytynyt ympäri.

Taatumiskulma kasvaa aina, jos tulokulma kasvaa. Lisäksi kulma kasvaa optisesti tiheämässä aineessa (suuri taitekerroin) *hitaammin* kuin optisesti harvassa aineessa. Tämä on piirretty kuvasarjaan 16.12, jossa tulokulma kasvaa vasemmalta oikealle ja valo saapuu optisesti tiheästä aineesta A. Tästä seuraa, että jos valo saapuu rajapinnalle optisesti harvasta aineesta (kuva aine B), suurin mahdollinen taatumiskulma saavutetaan tulokulman lähestyessä arvoa $\theta_B \rightarrow 90^\circ$. Taatumiskulman suurin arvo $\theta_{A,raja}$ voidaan tällöin ratkaista taatumislaita, $n_A \sin \theta_{A,raja} = n_B \sin 90^\circ = n_B$. Jos valo sen sijaan saapuu optisesti tiheästä aineesta (kuva aine A), tulokulma θ_A voi tieteenkin olla suurempi kuin edellä määritetty $\theta_{A,raja}$. Tällöin ei kuitenkaan ole olemassa taatumiskulmaa θ_B , joka toteuttaisi taatumislain, joten valo ei voi läpäistä rajapintaa lainkaan. Tätä ilmiötä kutsutaan *kokonaishiejastukseksi*.

Kuva 16.12: Kokonaishiejastuminen voi tapahtua, kun aalto saapuu rajapinnalla suuren taitekertoimen väliaineesta.



Kuva 16.13: Dispersiosta johtuen taitekerroin riippuu valon väristä. Niinpä eri värit taittuvat eri kulmiin. Valkoinen valo on eri värien yhdistelmä, ja nämä eri värit taittuvat hiukan eri suuntiin, mikä erottelee ne toisistaan.



16.11 Mikä on suurin mahdollinen taitekulma, jos valo saapuu ilmasta (taitekerroin 1.0) (a) veteen (taitekerroin 1.3) tai (b) muoviin (taitekerroin 1.5)?

Dispersio

Tutustuimme jo yhdessä ulottuvuudessa dispersioon eli tilanteisiin, joissa sinimuotoisen aallon nopeus riippuu sen taajuudesta. Yhdessä ulottuvuudessa tämä johtaa siihen, että superpositiossa olevat sinimuotoiset aallot ajautuvat aallon kulkusuunnassa eri kohtiin. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa dispersio voi aiheuttaa sen, että eri taajuuksilla värähtelevät aallot päättyvät kulkemaan *eri suuntiin*. Klassinen esimerkki dispersiosta on valkoisen valon hajautuminen eri väreihin prismassa tai vaikkapa sateenkaressa.

Valo, jonka ihminen näkee valkoisena, on itse asiassa superpositio useista eri väreistä eli eri taajuuksilla värähtelevistä sinimuotoisista sähkömagneettisista aalloista. Tyhjiössä kaikki sähkömagneettiset aallot kulkevat valonnopeudella c , mutta esimerkiksi vedessä ja lasissa eri taajuudella värähtelevät sähkömagneettiset aallot liikkuvat hiukan eri nopeuksilla. Edelleen koska taitekerroin riippuu määritelmiän (16.11) mukaisesti aallon nopeudesta, *eri värellä on hiukan erisuuruiset taitekeriotimet*.

Kuvassa 16.13 on kuvattu eri värien taittuminen valon saapuessa dispersiiviseen väliaineeseen. Näkyvä valon värestä punaisella on pienin taajuus ja suurin aallonpituuus kun taas violetilla on suurin taajuus ja pienin aallonpituuus. Lisäksi näkyvä valon taajuusalueella taitekerroin gleensä kasvaa, kun valon taajuus kasvaa. Niinpä esimerkiksi lasissa eri värestä punaisella on pienin taitekerroin, violetilla suurin ja muilla värellä kerroin on näiden välillä. Kun siis punainen ja violetti valonsäde saapuvat ilmasta lasiin, punainen taittuu vähemmän kuin violetti eli punaisen valon taitekulma on suurempi. Kuvassa 16.13 (c) nähdään, miten prisma erottelee nämä eri värit toisistaan, kun ne saapuvat yhdessä valkoisena valonsäteenä.



16.12 Punaisen valon taitekerroin vedessä on noin 1.33 ja violetin 1.34. Kuinka paljon näiden värien taitekulmat poikkeavat toisistaan, jos valon tulokulma ilmasta veteen on 45° ?

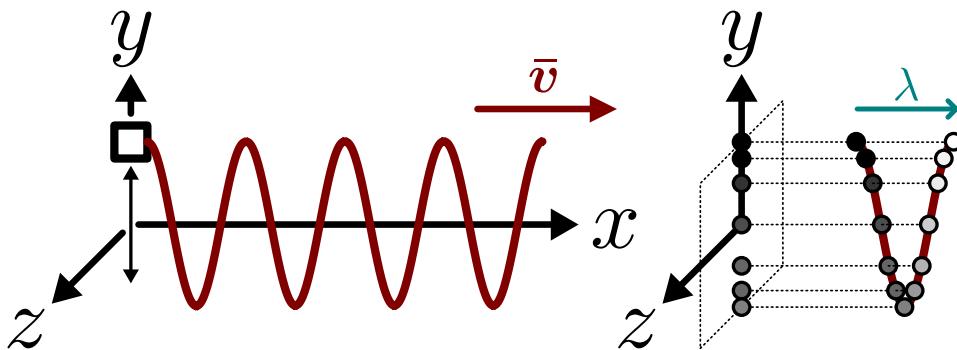
Polarisaatio

Erottelimme jo luvussa 15 pitkittäisen ja poikittaisen aaltoliikkeen. Esimerkiksi ääni on pitkittäinen aalto. Ääni koostuu tavallisesti ilmassa etenevistä aalloista, joissa ilman molekyyliit liikkuvat aallon etenemissuunnassa edestakaisin muodostaen tiheytyyi (korkean paineen alueita) ja harventumia (matalan paineen alueita). Sen sijaan jos köyden päättä heilutetaan, köyteen syntyy poikittaisia aaltoja, joissa köyden poikkeamat tasapainoisesta tapahtuvat köyden pituuteen nähden kohtisuoran. On vielä mahdollista, että väliaine liikkuu sekä aallon kulkusuunnassa että siihen nähden kohtisuoran. Esimerkiksi veden pinta-aallot ovat tällaisia, sillä vesi liikkuu aallon kulkissa edestakaisin sekä pystysuunnassa että aallon kulkusuunnassa.

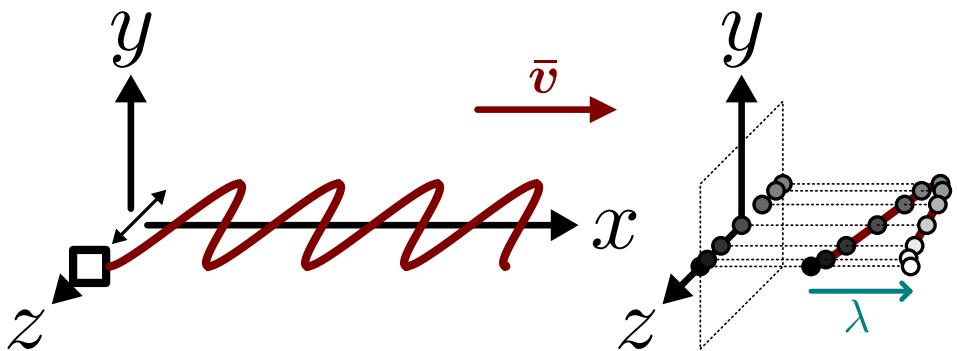
Tämän lisäksi kolmessa ulottuvuudessa on olemassa *erilaisia* poikittaisia aaltoja, koska aallon liikesuuntaan nähden on olemassa useita kohtisuoria suuntia. Kuvassa 16.14 on piirretty joitakin erilaisia aaltoja, joita x -suuntaan jännitettyssä köydessä voi kulkea. Kuvassa (a) köyden päättä heilutetaan harmonisesti pystysuunnassa eli valitun koordinaatiston y -suunnassa, jolloin köyteen syntyy pystysuuntainen värähtelevä sinimuotoinen aalto. Kuvassa (b) köyden päättä heilutetaan vaakasuunnassa eli z -suunnassa, jolloin aalto värähtelee

Kuva 16.14: Poikittainen aalton liike voi tapahtua eri suuntiin, mitä kutsutaan polarisaatioksi. Esimerkiksi x -suunnassa suoraksi jännitetyn köyden pää voi liikkua y -suunnassa z -suunnassa tai molemmissa suunnissa samanaikaisesti, jolloin köyteen syntyy näissä suunnissa värähteleviä aaltoja.

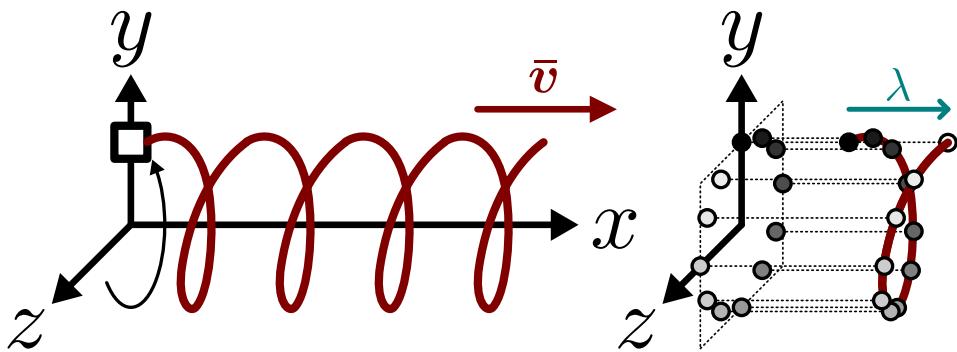
(a) Tasopolarisaatio y -suuntaan.



(b) Tasopolarisaatio z -suuntaan.



(c) Ympyräpolarisaatio.



vaakasuuntaisesti. Aallot ovat siis muuten täsmälleen samanlaiset paitsi että niissä väliaine värähtelee eri suuntiin.

Sitä, että aallon värähtelyillä on tietty suunta, kutsutaan **polarisaatioksi**. Kuvien 16.14 (a) ja (b) aallot ovat **tasopolarisoituneet**, koska niissä värähtelyt tapahtuvat yhdessä tasossa. Kaikki poikittaiset aallot voivat olla polarisoituneita, mutta niiden ei tarvitse olla. Jos köyden päättä heilutetaisiin satunnaisesti eri suuntiin yz -tasossa, myös köyteen syntyy aalto värähtelisi satunnaisesti eri suuntiin, jolloin aalto olisi **polarisoitumaton**.

Kuvassa 16.14 (c) on esitetty vielä köysi, jonka päättä pyöritetään. Tällaiseen köyteen syntyy **spiraalina** etenevä aalto, joka liikkuu samalla nopeudella kuin kuvien (a) ja (b) aallot. Tällaista aaltoa kutsutaan **ympyräpolarisoituneeksi**, jos spiraali on x -suunnasta katsoen ympyrä, tai **elliptisesti polarisoituneeksi**, jos spiraali on elliptinen.

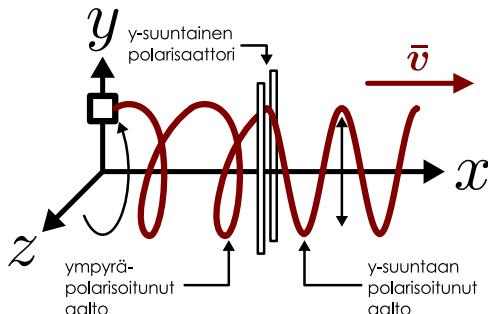


16.13 Millainen polarisaatio on aallossa, joka muodostuu y - ja z -suunnissa tasopolarisoituneiden sinimuo-
toisten aaltojen superpositiona, jos (a) aalloilla on sama amplitudi, taajuus ja vaihe, (b) aalloilla on sama
amplitudi, taajuus ja vaihe-ero $\pi/2$, (c) aalloilla on eri taajuudet?

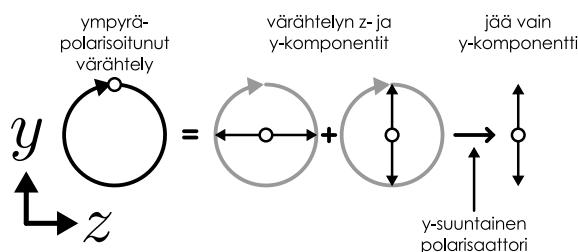
Polarisaatio on merkittävä ilmiö siksi, että valokin on poikittainen aalto, joka voi siis olla polarisoitunut. Sähkömagneettisessa aallossa sähkö- ja magneettikenttä nimitään värähtelevät kohtisuorassa sekä toisiaan

Kuva 16.15: Köysi kulkee kahden lähekkäisen, liukkaan tangon välistä, mikä estää köyden värähtelyn vaakasuunnassa. Tämä on polarisaattori, joka päästää lävitseen vain pystysuuntaisen värähtelyn.

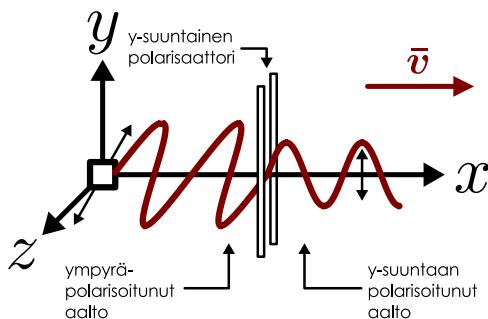
(a) Ympyräpolarisoitunut aalto kulkee polarisaattorista.



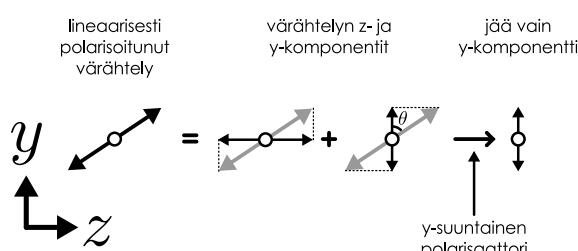
(b) Jäljelle jää tasopolarisoitunut aalto.



(c) Vinosti tasopolarisoitunut aalto kulkee polarisaattorista.



(d) Jäljelle jää värähtelyn pystykomponentti.



että valon kulkusuuntaa vastaan. Yleensä sähkömagneettisen aallon sähkökenttä vuorovaikuttaa ympäristön kanssa voimakkaammin kuin magneettikenttä, joten valon polarisaatiosuunta määritellään nimenomaan sähkökentän värähtelysuuntana.

Valon polarisoituminen on yleinen ilmiö. Valo voi polarisoitua osittain tai jopa täydellisesti heijastuessaan rajapinnasta. On myös olemassa aineita ja rakenteita, joissa valon absorptio riippuu polarisaatiosuunnasta. Nämä ovat *polarisaattoreita*, ja ne päästävät tiettyyn suuntaan polarisoituneen sähkömagneettisen aallon lävitseen mutta absorboivat tehokkaasti täetä suuntaa vastaan polarisoituneet aallot. Toisin sanoen tällaiset aineet ovat läpinäkyviä vain jos valo on polarisoitunut oikeaan suuntaan.

Polarisaattoreiden toiminta on esitetty kuvassa 16.15, jossa esimerkkinä on jälleen köysi. Köysi kulkee kaapeasta raosta, joka estää köyttä liikkumasta sivusuunnassa mutta antaa sen liikkua vapaasti pystysuunnassa. Tästä raosta pääsee lävitse vain pystysuuntainen värähtely, joten rako toimii polarisaattorina. Jos köydesä kulkee polarisoitumaton tai ympyräpolarisoitunut aalto, joka värähtelee sekä vaaka- että pystysuunnissa, polarisaattori poimii allostia sen pystysuuntaisen värähtelyn, jolloin polarisaattorin läpäissyt aalto on pystysuuntaan tasopolarisoitunut (kuvat 16.15 (a) ja (b)).

16.14 (a) Erään valoa polarisoivan materiaalin rakenne on sellainen, että siinä elektronit pääsevät liikkumaan helposti vain yhteen suuntaan (materiaali koostuu pienistä yhdensuuntaisista johtavista säikeistä). Mihin suuntaan polarisoitunutta valoa tämä materiaali absorboi ja mihin suuntaan polarisoituneen se päästää lävitseen? (b) Toimiiko kapea rako valon polarisaattorina? Miksi?

Samoin tapahtuu, jos polarisaattoriin saapuu jo valmiaksi tasopolarisoitunut aalto (kuvat 16.15 (c) ja (d)). Jos saapuva aalto on polarisoitunut pystysuuntaan, se pääsee polarisaattorin läpi sellaisenaan. Jos saapuva aalto on polarisoitunut vaakasuuntaan, se ei pääse polarisaattorin läpi lainkaan. Yleisesti saapuvan aallon värähtely voidaan jakaa kahteen komponenttiin: polarisaattorin salliman suunnan suuntaiseen (tässä pystysuunta) sekä täetä vastaan kohtisuoraan (tässä vaakasuunta). Näistä vain sallittu komponentti pääsee polarisaattorin läpi. Jos saapuvan tasopolarisoituneen aallon amplitudi on A_{saapuva} ja aallon polarisaatiosuunnan sekä polarisaattorin salliman polarisaatiosuunnan välillä on kulma θ , aallon komponentti sallitussa suunnassa värähtelee amplitudilla $A_{\text{läpäissyt}} = A_{\text{saapuva}} \cos \theta$. Polarisaattorin läpäisseen aallon polarisaatiosuunta siis muuttuu ja amplitudi pienenee. Edelleen koska aallon energiatihes ja intensiteetti ovat verrannolliset amplitudin neljöön, $I \sim A^2$, aallon intensiteettikin pienenee sen kulkissa polarisaattorista,

$$I_{\text{läpäissyt}} = I_{\text{saapuva}} \cos^2 \theta. \quad (16.13)$$

Tämä on *Malus'n laki* (Etienne-Louis Malus'n mukaan).



16.15 Tarkastellaan kuvan 16.15 aaltoja. Mikä on kummankin aallon intensiteetin suhteellinen muutos aaltojen kulkiessa polarisaattorin läpi?

esimerkki 16.2

Brewsterin laki

Valolla on sellainen ominaisuus, että jos rajapinnalta heijastunut alunperin polarisoitumaton valo kulkee täsmälleen kohtisuoraan taittuneeseen valoon nähdien, heijastunut valo on täysin tasopolarisoitunut. Tätä kutsutaan Brewsterin laiksi (David Brewsterin mukaan). Mikä pitää olla valon tulokulma, jotta ilmasta saapuva ($n_{ilma} = 1.0$) ja veden pinnasta heijastuva ($n_{vesi} = 1.3$) valo polarisoituisi täysin?

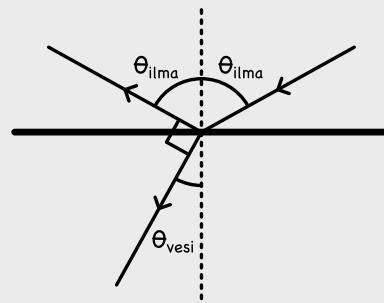
SUUNNITELMA Piirretään kuva. Heijastuskulma on sama kuin tulokulma, θ_{ilma} . Taitekulma θ_{vesi} puolestaan ratkeaa tattumislaista

$$n_{ilma} \sin \theta_{ilma} = n_{vesi} \sin \theta_{vesi}. \quad (16.14)$$

Brewsterin ehdon mukaan näille pitää päteä

$$\theta_{ilma} + \theta_{vesi} = 90^\circ, \quad (16.15)$$

sillä kuten kuvasta nähdään, heijastuskulma, taitekulma ja näiden välinen kulma muodostavat yhdessä oikokulman 180° . Niinpä jos välinen kulma on 90° , heijastuskulman ja taitekulman pitää yhteensä olla myös 90° .



RATKAISU Brewsterin ehdosta voidaan ratkaista taitekulma, $\theta_{vesi} = 90^\circ - \theta_{ilma}$, ja tämä voidaan sijoittaa tattumislakiin, jolloin saadaan $n_{ilma} \sin \theta_{ilma} = n_{vesi} \sin(90^\circ - \theta_{ilma})$. Toisaalta $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, joten saamme

$$\frac{\sin \theta_{ilma}}{\cos \theta_{ilma}} = \frac{n_{vesi}}{n_{ilma}}. \quad (16.16)$$

Edelleen koska $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$, kulmaksi ratkeaa

$$\theta_{ilma} = \arctan \frac{n_{vesi}}{n_{ilma}} = \arctan 1.3 = 0.915 = 52^\circ. \quad (16.17)$$

ARVIOINTI Valo tattuu vedessä kohti pinnan normaalialia, joten $\theta_{vesi} < \theta_{ilma}$. Niinpä jotta tattunut ja heijastunut valo kulkisivat kohtisuoraan toisiaan vasten, täytyy olla $\theta_{ilma} > 45^\circ$. Tulos on siis järkevä.

Tämän ilmiön vuoksi polarisoivat aurinkolasit ovat hyödylliset. Kun linssien polarisaatiotaso on kohtisuorassa heijastuneen valon polarisaatioluunnan nähdien, linssit absorboivat heijastuneen valon. Näin esimerkiksi juuri veden pinnasta heijastuva valo ei häikäise.



16.16 Kirjoita omien sanojen tiivistelmä tattumisesta, dispersiosta ja polarisaatiosta. Mihin tilanteisiin näitä ilmiöitä havaitaan ja miten aallot käyttäytyvät niissä? Millaisia matemaattisia lakeja ilmiöihin liittyy?

16.3 Interferenssi

Jo yhdessä ulottuvuudessa sinimuotoisten aaltojen superpositio osoittautui erittäin merkittäväksi ominaisudeksi, ja kuvasimme seisovat aallot sekä aaltopulssit sinimuotoisten aaltojen yhdistelminä. Kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa aalloilla on luonnollisesti vielä paljon enemmän mahdollisuuksia yhdistyä kuin yhdessä ulottuvuudessa, ja siksi kaksi- ja kolmiulotteiset aallot kokevat superpositiossa monia mielenkiintoisia ilmiöitä, joita yhdessä ulottuvuudessa ei havaita.

Tarkastelemme tässä luvussa erityisesti tilanteita, joissa samalla taajuudella värähtelevät eli *koherentit* sinimuotoiset aallot ovat keskenään superpositiossa. Tällöin aallot voivat joko vahvistaa tai heikentää toisiaan, jolloin ne saavat väliaineen värähtelemään yhtäällä voimakkaasti ja toisaalla heikosti. Tätä kutsutaan **interferenssiksi**. Tavoitteemme on ymmärtää tärkeimpiä ja tavallisimpia interferenssi-ilmiöitä.

Kahden aaltolähteen interferenssi

Aloitetaan interferenssin tutkiminen tilanteesta, jossa kaksi lähellä toisiaan olevaa pistemäistä aaltolähettää lähettilä sinimuotoista aaltoliukettä samalla taajuudella ja samassa vaiheessa. Kyseessä voisi olla esimerkiksi

kaksi veden pinnalla väärätelevää pienä kappaletta, kaksi ääntä lähettävää kovaäänistä tai kaksi radioaloja lähettävää antennia. Tilanne on piirretty kuvaan 16.16 (a), jossa on esitetty aaltojen eteneminen pian väärähtelyn alettua. Kuvien aikaväli on $\Delta t = T/4$ eli jaksonajan neljännes, joten aallot etenevät kuvien väillä aallonpituuden neljänneksen. Kuvaan on piirretty sekä väliaineen poikkeamaa esittävä värikartta että yksinkertaisempi aaltonrintamaesitys. Aallonpohjat on piirretty rintamaesitykseen jälleen tummina viivoina. Aallonharjat on piirretty ohuina katkoviivoina, jotta niiden paikka näkyisi selkeästi.

Sarjan ensimmäisessä kuvassa lähteistä loittonevat ympyrääallot ovat vielä erillään. Toisessa kuvassa aallot kuitenkin kohtaavat, ja superpositiooperaation mukaisesti ne jatkavat kulkuaan toisten lävitse. Nyt aaltolähteiden puolivälissä on piste, johon on saapunut kummastakin lähteestä aallonpohja. Jos yksi aalto sisi aallonpohjassa väliaineen poikkeamaan tasapainosta määrän $u = -A$, aallonpohjen kohtauspisteessä väliaineen poikkeama on aaltojen tuottamien poikkeamien summa, $u = -A - A = -2A$. Koska väliaineen poikkama tasapainosta on tässä pisteessä suurempi kuin yhden aallon tapauksessa, sanotaan aaltojen kokevan pisteessä *vahvistavan interferenssiä*. Vahvistavan interferenssin pisteet on merkitty kuvasarjaan vihreinä renkaina, ja värikartassa se ilmenee mustana alueena.

Kun aika kulkee eteenpäin, aaltonrintamat eivät enää sivua toisiaan yhdessä pisteessä vaan ne leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä. Tämä näkyy sarjan kolmannessa kuvassa. Nämä leikkauspisteet ovat vahvistavan interferenssin pisteitä, joten edellisessä kuvassa ollut yksittäinen vahvistavan interferenssin piste jakautuu kahtia ja näin syntyneet puoliskot kulkevat kuvassa ylös- ja alas päin. Tämä kulkureitti on piirretty kuvaan vihreällä katkoviivalla. Aaltolähteiden yhdysjalanalle puolestaan on nyt syntynyt kaksi pistettä, joissa kohtaavat toisen aallon pohja ja toisen aallon harja. Aallonharjalla aalto tuottaa väliaineessa poikkeaman $u = A$ (jätetään yksinkertaisuuden vuoksi amplitudin riippuvuus lähteestä mitatusta etäisyydestä nyt huomioimatta). Niinpä aallonharjan ja -pohjan kohdateissa väliaineen poikkeama tasapainosta on *nolla*, $u = A - A = 0$. Tätä sanotaan *tuhoaaksi interferenssiksi*, koska vaikka pisteeseen on saapunut kaksi aaltoa, väliaine on siinä edelleen tasapainoasemassaan. Kuvaan nämä tuhoaavan interferenssin pisteet on merkitty punaisin renkain. Värikartassa tuhoaavan interferenssin alue ilmenee harmaana, koska siinä väliaine on tasapainossa.

Sarjan neljännessä kuvassa lähteiden yhdysjalan puolivälissä on jälleen vahvistavan interferenssin piste, mutta nyt pisteessä kohtaa kaksi aallonharjaa. Väliaineen poikkeama on nyt siis $u = A + A = 2A$, mikä näkyy värikartassa valkoisena alueena. Ajan edelleen kuluessa aaltonrintamien muodostamat ympyrät lisääntyvät ja kasvavat, jolloin vahvistavan ja tuhoaavan interferenssin pisteitä syntyy yhä enemmän. Kuvassa 16.16 (b) on esitetty tilanne jonkin ajan kuluttua, jolloin aallot täyttävät tarkasteltavan alueen. Kuvassa on esitetty sama aalto aaltonrintamina, värikarttana sekä näiden yhdistelmänä.

Aaltonrintamaesitykseen on piirretty vahvistavan ja tuhoaavan interferenssin pisteiden kulkureitit vihreänä ja punaisena katkoviivana. Nämä käyrät piirtävät sillä säännöllä, että aallonpohjen leikkauspisteiden kautta kulkee aina vihreä käyrä, mutta aallonpohjen ja -harjojen keskinäisten leikkauspisteiden kautta kulkee punainen käyrä. *Vihreät käyrät edustavat niitä väliaineen pisteitä, joissa vahvistava interferenssi on voimakkaimillaan* ja aallon amplitudi on suurimmillaan. Aaltoa kuvavassa värikartassa tämä näkyy siten, että vihreiden käyrien suunnissa aallossa on vuorottelevia mustia ja valkoisia alueita eli aallonpohjia ja -harjoja. Punaiset käyrät puolestaan edustavat tuhoaavan interferenssin pisteitä. Nämä käyrät näkyvät aallon värikartassa tasaisen harmaina suorina, jotka erottavat mustia ja valkoisia alueita. *Punailla käyrillä väliaine ei siis väärätele lainkaan.*



16.17 Punaisia käyriä kutsutaan myös "solmukäyriksi", koska väliaine ei niillä väärätele lainkaan kuten seisovan aallon solmussa. Mitä yhteistä ja mitä eroa löydät kuvan 16.16 interferenssikuvista ja esimerkiksi kuvan 15.29 seisovaa aaltoa esittävästä kuvasta? Tarkastele erityisesti aaltolähteitä yhdistävää janaa.

Kahden lähteen interferenssikuviossa aalto siis jakautuu kiilamaisiin osiin (vahvistavan interferenssin alueet), ja näitä erottavat suorat, joilla väliaine ei väärätele (tuhoaavan interferenssin käyrät). Lisäksi kuten kuvasarjasta 16.16 (a) nähtiin, aaltonrintamien leikkauspisteet eli *vahvistavan interferenssin pisteet liikkuvat vihreitä käyriä pitkin*. Aallot siis edelleen loittonevat lähteistä, mutta interferenssistä johtuen aalto jakautuu osiin. Aallot kulkevat *vain* kuvan vihreillä käyrillä merkityjihin suuntiin. Punaisten käyrien suuntiin *ei kulje* lainkaan aaltoliikettä.



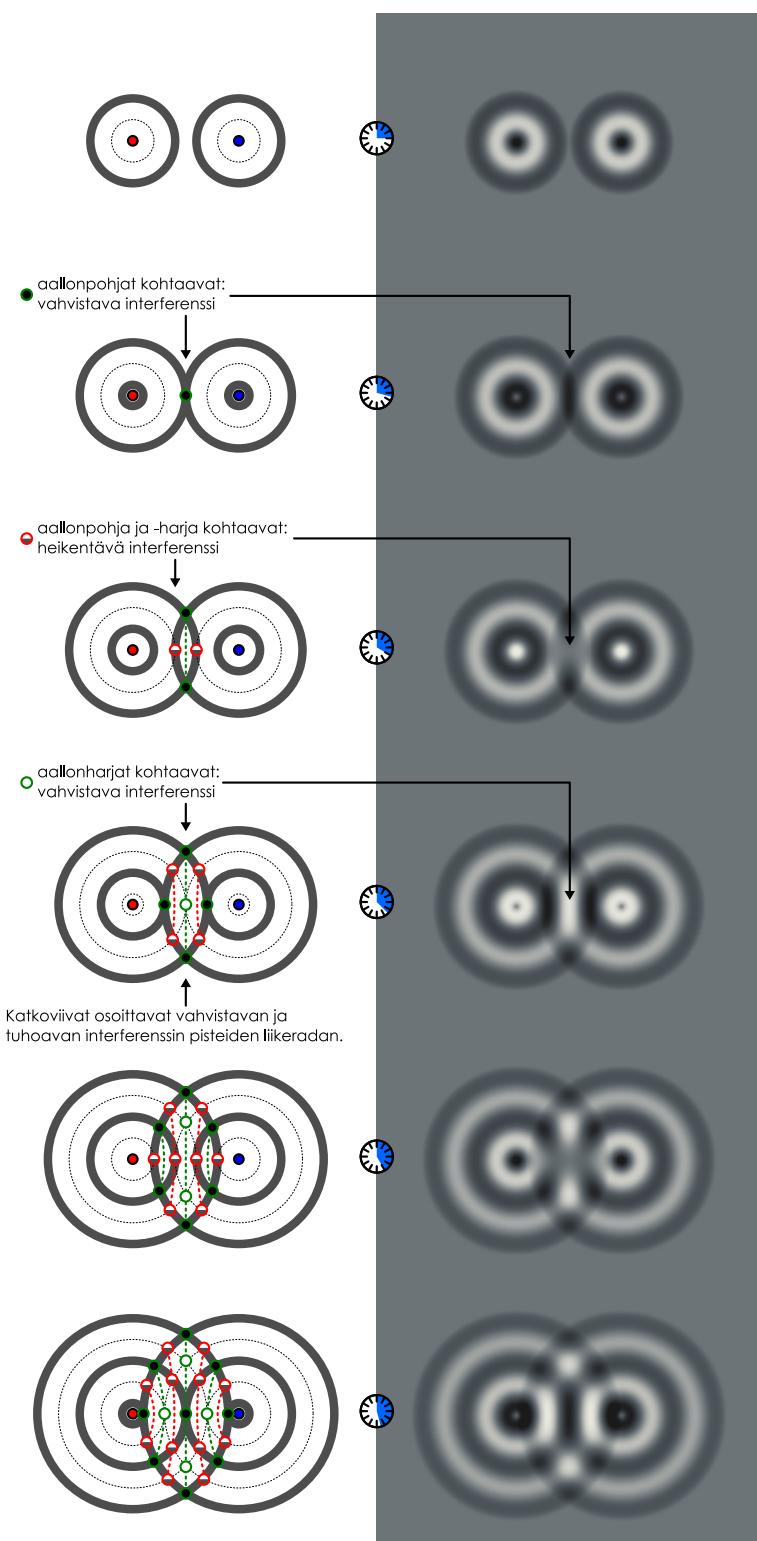
16.18 Tarkastele aaltolähteiden välistä yhdysjanaa kuvassa 16.16. Punaiset ja vihreät käyrät leikkaavat janan tasavälein. (a) Mikä on käyrien välisen etäisyyden suhde aallonpituuteen? (b) Jos lähteiden välinen etäisyys on $d = n\lambda$, montako punaista ja vihreää käyrää interferenssikuviossa täytyy siis olla?

Interferoivien aaltojen amplitudi ja intensiteetti

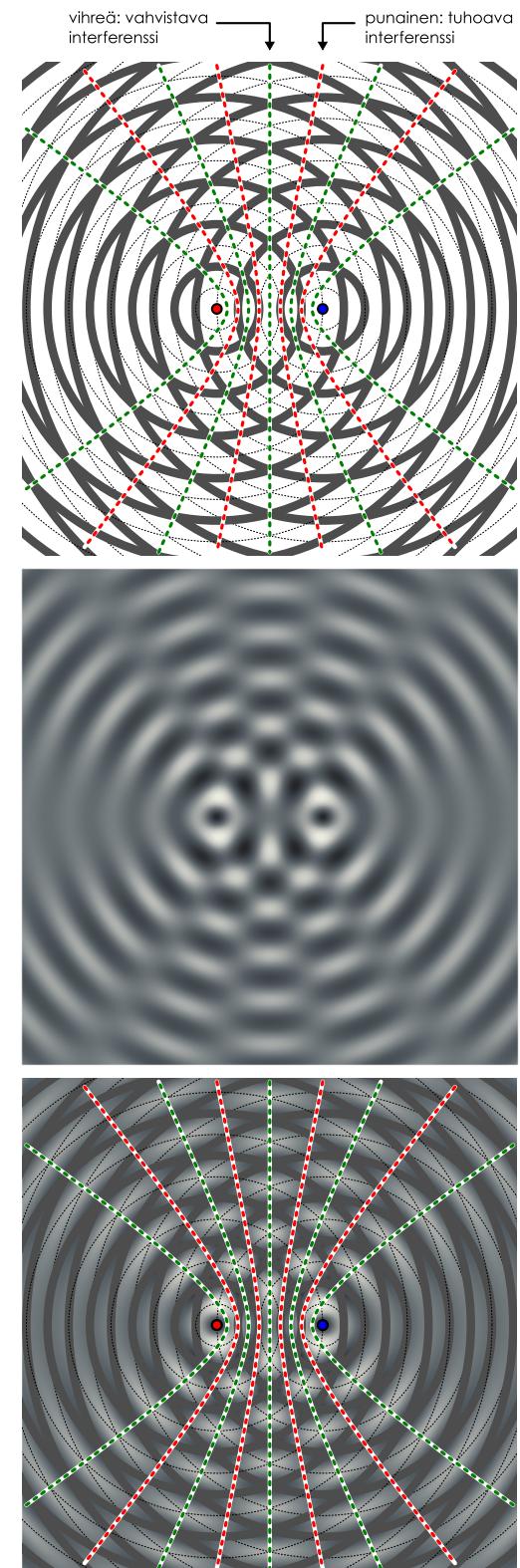
Interferenssi on yleinen ilmiö, mutta kuvan 16.16 (b) kaltaista interferenssikuvioita voidaan harvoin nähdä, koska monet aallot eivät ole näkyviä. Kun kuulemme ääntä, havaitsemme ilman väärähtelyn siinä pisteessä,

Kuva 16.16: Kahden aaltolähteen interferenssi. Lähteiden tuottamat aallot on kuvattu rintamina. Kun kaksi aallonpohja kohtaavat, ne vahvistavat toisiaan, ja aallon amplitudi on suuri (vihreä). Samoin kun kaksi aallonharja kohtaavat, aallon harja ja toisen pohja kohtaavat, aallot kumoavat toisensa eikä välinne värähtele lainkaan (punainen).

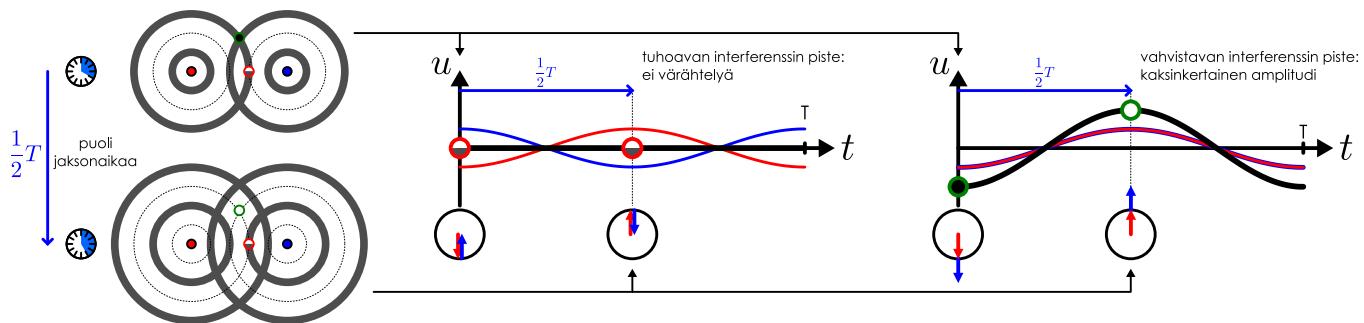
(a) Vahvistavan ja tuhoavan interferenssin pisteet eri ajan hetkienä.



(b) Lopullinen interferenssikuvio.



Kuva 16.17: Väliaineen värähtely tuhoavan (punainen rengas) ja voimistavan (vihreä rengas) interferenssin pisteissä. Tuhoavan interferenssin pisteessä eri lähteistä saapuvat aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa, jolloin niiden superpositio ei värähtele lainkaan. Aaltojen vaiheenosoitimet ovat vastakkaisuuntaiset. Vahvistavan interferenssin pisteessä aallot ovat samassa vaiheessa, jolloin niiden superposition amplitudi on kaksinkertainen alkuperäisiin aaltoihin verrattuna. Vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset.



jossa korvamme on. Vastaavasti nähdessämme valoa tai vastaanottaaessamme radioaaltoja antennilla, havaitsemme sähkömagneettisen kentän värähtelyn havaintopisteessä. Yleensä interferenssi siis ilmeneekin siten, että aaltoliukkeen kuljettama signaali havaitaan niissä paikoissa, joissa tapahtuu vahvistavaa interferenssiä, mutta ei tuhoavan interferenssin pisteissä.

Tämä periaate on havainnollistettu kuvassa 16.17, jossa on piirretty väliaineen värähtely ajan funktiona kahdessa tarkastelupisteessä. Kuvaajista vasemmanpuoleinen on tuhoavan interferenssin piste. Aluksi punaisena ympyränä merkityn lähteen aallolla on tässä pisteessä aallonpohja ja sinisellä merkityn lähteen aallolla aallonharja, jolloin aallot kumoutuvat. Kun aikaa kuluu puoli jaksonaikaa, pisteessä on punaisen lähteen aallonharja sekä sinisen lähteen aallonpohja, mutta edelleen interferenssi on tuhoavaa.

Itse asiassa pisteessä tapahtuu tuhoava interferensi *aina*. Nimittäin, kuten luvussa 14 opimme, kahden harmonisen värähtelyn summa on edelleen harmoninen, jos värähtelyjen taajuudet ovat samat. Nyt kumpikin aalto saa väliaineen värähtelemään havaintopisteessä harmonisesti, ja aalloilla on sama taajuus, joten niiden superposition täytyy edelleen värähdellä harmonisesti. Erityisesti tästä *värähtelyä voidaan kuvata aaltojen vaiheenosoitimiien summana*, ja koska aallot ovat aluksi vastakkaisissa vaiheissa, niiden vaiheenosoitimiien täytyy osoittaa vastakkaisiin suuntiin. Vaiheenosoitimiien summan pituus on siis nolla, mikä tarkoittaa värähtelyn amplitudin olevan tässä pisteessä nolla. Tässä pisteessä aaltoa ei siis havaita lainkaan!

Vahvistavan interferenssin pisteessä on aluksi kummastakin lähteestä saapuneen aallon aallonpohja, joten tässä pisteessä aaltojen vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset. Väliaineen värähtelyä kuvaaa siis vaiheenosoitin, jonka pituus on kaksinkertainen alkuperäisiin aaltoihin nähden, joten tässä pisteessä väliaine värähtelee kaksinkertaisella amplitudilla. Tässä pisteessä aalto siis havaitaan. Erityisesti koska värähtelyn amplitudi on *kaksinkertainen* verrattuna siihen, että aaltoa lähettäisi vain yksi lähde, havaittu intensiteetti on *nelinkertainen*, koska aallon energia on verrannollinen amplitudin neljöön.



16.19 Miten kuvan 16.17 tarkastelupisteissä havaittu aallon intensiteetti muuttuisi, jos toinen aaltolähde poistettaisiin? Onko väliä kumpi lähde poistetaan?

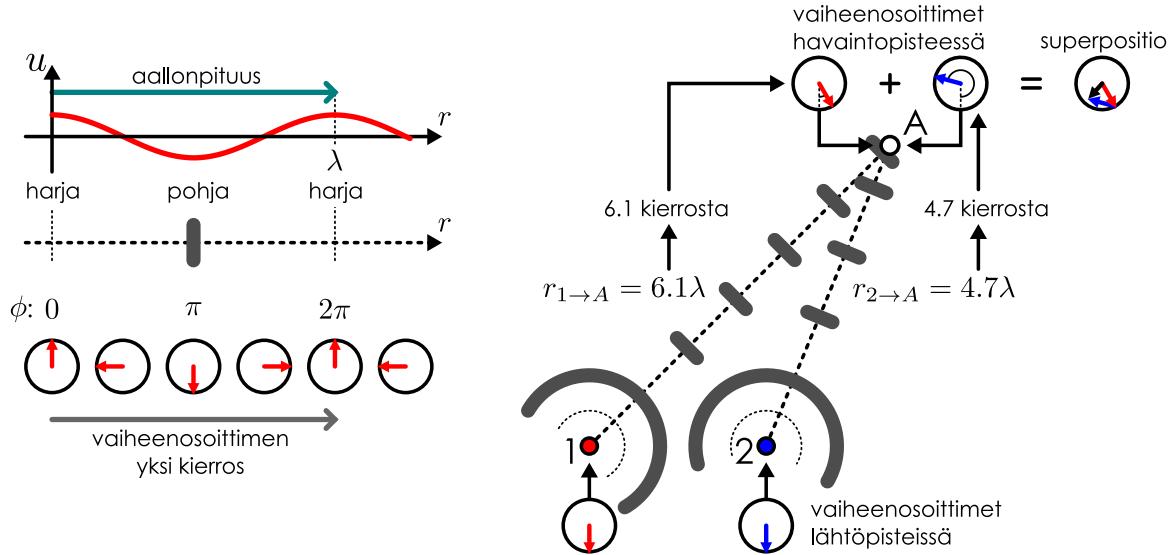
Voi aluksi vaikuttaa oudolta, että intensiteetti nelinkertaistuu, jos kaksi aaltoa vahvistaa toisiaan. Intensiteettihän kuvaaa aallon kuljettamaa energiota, ja voisi ajatella, että kahden aallon yhtyessä niiden energia kaksinkertaistuu. Näin ei kuitenkaan ole. Interferensi ei tietenkään voi rikkota energian säilymislakia. Interferenssi ei liity mitään dissipatiivisia vuorovaikutuksia, joten se ei voi poistaa aallon kuljettamaa energiota, eikä se tietenkään voi myöskään lisätä aaltoon energiota tyhjästä. Sen sijaan *interferensi ohja aaltojen kuljettamaa energiota*.

Kahden aaltolähteen kokonaisteho on luonnollisesti kaksinkertainen yhteen lähteeeseen verrattuna, ja niinpä lähteiden määrän kaksinkertaistaminen myös kaksinkertaistaa aaltojen kuljettaman energian kokonaismäärän. Interferensi kuitenkin ohja aallot kulkemaan vain tiettyihin suuntiin. Tuhoavan interferenssin suuntaan ei kulje energiota lainkaan, joten vahvistavan interferenssin suuntaan täytyy kulkea energiota *enemmän kuin kaksinkertainen määrä* verrattuna tilanteeseen, jossa on vain yksi lähde. Täsmällisemmin, jos yhden lähteen tuottaman aallon intensiteetti etäisyydellä r on I_1 , kahden lähteen yhdessä tuottaman aallon intensiteetti on vahvistavan interferenssin suunnissa $I_{\text{vahvistava}} = 4I_1$ ja tuhoavan interferenssin suunnissa $I_{\text{tuhoava}} = 0$. Vahvistavaa ja tuhoavaa interferenssiä tapahtuu yhtä paljon, jolloin interferovien aaltojen *keskimääräinen* intensiteetti on $I_{\text{keskiarvo}} = \frac{1}{2}(I_{\text{vahvistava}} + I_{\text{tuhoava}}) = 2I_1$. Tämä on kaksinkertainen verrattuna yhteen lähteeseen, kuten energian säilymisen perusteella pitääkin.

MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.18: Väärähtelyn amplitudin määrittäminen interferenssissä. Määritetään aaltojen kulkeman matkan pituuksina. Kierretään aaltojen vaiheenosottimia yhtä monta kierrosta vastapäivään. Lasketaan lopulliset vaiheenosottimet vektoreina yhteen.

(a) Vaihe muuttuu aallon kulkusuuntaan kuljettaessa. (b) Lähteiden 1 ja 2 tuottaman väärähtelyn amplitudi pisteessä A.



16.20 Onko mahdollista tuottaa tilanne, jossa aallot interferoivat kaikkialla toisiaan vahvistavasti?

Johdetaan vielä menetelmä interferoivien aaltojen tuottaman väärähtelyn amplitudin määrittämiseksi missä tahansa havaintopisteessä. Koska jokainen sinimuotoinen aalto saa väliaineen väärätelemään harmonisesti, voimme tehdä tämän vaiheenosoitintekniikalla. Jos määritämme erikseen jokaista aaltoa kuvaavan vaiheenosottimen, havaintopisteen väärähtelyä kuvaava vaiheenosoitin saadaan näiden vektorisummana. Merkitsemme nyt ja jatkossa havaintopisteitä kirjaimin ja aaltojen lähteitä numeroin. Tarkastellaan siis tilannetta, jossa aallon synnyttävät pistemäiset lähteet 1 ja 2, ja näiden synnyttämä väärähtely havaitaan pisteessä A.

Aallon amplitudi pienenee ja vaihe kasvaa kuljettaessa lähteestä poispäin. Yleensä kuitenkin olemme kiinnostuneet tilanteesta, joissa aaltojen lähteet ovat likimain yhtä kaukana havaintopisteestä (ts. lähteiden etäisyys toisistaan on paljon pienempi kuin niiden etäisyys havaintopisteestä), ja tällöin havaintopisteeseen saapuvilla aalloilla on lähes sama amplitudi. Tämän vuoksi yleensä oletamme, että kaikilla saapuvilla aalloilla on sama amplitudi. Vaiheenosoitinkuviossa tämä ilmenee siten, että jokaista aaltoa kuvaava yhtä pitkä vaiheenosoitin.

Vaiheenosottimien suunnat puolestaan riippuvat aaltojen vaiheesta havaintopisteessä, ja ne voidaan päätellä seuraavasti: Valitaan jokin tietty ajan hetki, jona aaltoa tarkastellaan. Jos aaltojen lähteet väärätelevät samassa vaiheessa, jokaisen aallon vaihe on valittuna hetkellä sen oman lähteen kohdalla sama, ϕ_0 . Esimerkiksi kuvassa 16.18 (b) aaltojen vaiheenosottimet osoittavat niiden lähtöpisteissä alaspin eli $\phi_0 = \pi$. Vaiheenosoitin kiertää yhden kierroksen, eli vaihe muuttuu määrään 2π , kun siirrytään paikassa yksi aallonpituuksista aallon kulkusuuntaan. Niinpä jos etäisyys lähteestä 1 havaintopisteeseen A on $r_{1\rightarrow A}$, lähteen 1 aallon vaiheen täytyy tällä matkalla muuttua

$$\Delta\phi_{1\rightarrow A} = 2\pi \frac{r_{1\rightarrow A}}{\lambda}. \quad (16.18)$$

Esimerkiksi kuvassa 16.18 (b) aallon 1 kulkema matka on $r_{1\rightarrow A} = 6.1\lambda$, joten aallon vaiheen muutos tällä matkalla on $\Delta\phi_{1\rightarrow A} = 6.1 \cdot 2\pi$. Aallon vaiheenosottimen suunta havaintopisteessä A saadaan näin ollen kiertämällä lähtöpisteen vaiheenosoitinta 6.1 kierrosta vastapäivään. Ja koska kokonaiset kierrokset eivät vaikuta vaiheenosottimen suuntaan, tämä on sama kuin että vaiheenosoitinta kierrettäisiin 0.1 kierrosta eli 36° . Tämä vaiheenosoitin on piirretty kuvaan punaisena nuolena.

Lähteen 2 tuottaman aallon vaiheenosoitin selviää samalla tavalla. Etäisyys lähteestä 2 pisteeseen A on kuvassa 16.18 (b) 4.7 aallonpituuutta, joten vaiheenosoitinta täytyy kiertää 4.7 kierrosta vastapäivään. Tämä on sama asia kuin jos vaiheenosoitinta kierrettäisiin ensin puoli kierrosta ja sitten vielä 0.2 kierrosta eli 72° . Tämä on piirretty kuvaan sinisenä nuolena.

Kun interferoivien aaltojen vaiheet on näin selvitetty, voimme ratkaista vaiheenosottimien summan pituuden geometrisesti. Kuvassa tämä vaiheenosoitin on esitetty mustana nuolena, ja tämän nuolen pituuksia on väärähtelyn amplitudi havaintopisteessä A. Tässä esimerkissä musta nuoli on lyhyempi kuin alkuperäisten aaltojen vaiheenosottimet (punainen ja sininen nuoli), jotka väliaineen väärätelee havaintopisteessä pienemmällä amplitudilla kuin jos vain toinen aaltojen lähteistä toimisi. Aallot siis interferoivat toisiaan heikentävästi tässä pisteessä.



- 16.21** (a) Millä ehdolla kahden samalla taajuudella samassa vaiheessa väärätelevän lähteen aallot ovat havaintopisteessä A täsmälleen samassa vaiheessa?
 (b) Millä ehdolla aallot ovat samassa vaiheessa, jos lähteen 2 vaihe on $\pi/2$ kun lähteen 1 vaihe on nolla?

esimerkki 16.3

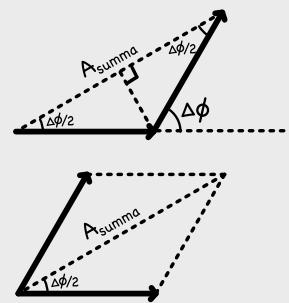
Kahden lähteen interferenssi

Aaltolähde tuottaa yksin aallon, jonka amplitudi on A ja intensiteetti I . Systeemissä on kaksi tällaista lähdettä, joiden tuottamat aallot saapuvat havaintopisteeeseen niin, että niiden välinen vaihe-ero on $\Delta\phi$. Mikä on summa-aallon amplitudi ja intensiteetti?

SUUNNITELMA Piirretään vaiheenosoitinkuvio, jossa on siis kaksi nuolta. Nuolten pituudet vastaavat aaltojen amplitudeja ja niiden välinen kulma on aaltojen vaihe-ero. Aaltojen superposition amplitudi on nuolten vektorisumman pituus.

RATKAISU Jaetaan vaiheenosoitinkuvioon syntynyt kolmio kahteen samanmuotoiseen suorakulmaiseen kolmioon. Kummankin kolmion hypotenuusan pituus on A ja sen toisen kateetin pituus on puolet vaiheenosittimien summan pituudesta. Kuvasta nähdään, että näiden välinen kulma on puolet vaihe-erosta eli $\Delta\phi/2$. Niinpä nuolten summan pituudeksi eli aaltojen summan amplitudiksi saadaan

$$A_{\text{summa}} = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (16.19)$$



Intensiteetti on suoraan verrannollinen amplituden neljöön, joten jos interferenssistä johtuen amplitudi kerrotaan tekijällä $2 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}$, intensiteetti kerrotaan tämän neljöllä. Siispä

$$I_{\text{summa}} = 4I \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (16.20)$$

ARVIOINTI Jos aallot ovat samassa vaiheessa eli $\Delta\phi = 0$, amplitudi on $2A$ ja intensiteetti $4I$, tämä on vahvistavaa interferenssiä. Jos aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa, amplitudi ja intensiteetti ovat kumpikin nollia, mikä on tuhoavaa interferenssiä. Näin pitääkin olla.

Voimme myös verrata tästä tilannetta esimerkissä 14.4 johdettuun tulokseen (14.72), jonka mukaan n vaiheenosittimen summan pituus on $A_{\text{summa}} = A \frac{\sin n \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}$. Nyt $n = 2$, joten säennön $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ avulla amplitudiksi saadaan $A_{\text{summa}} = A \frac{\sin 2 \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} = A \frac{2 \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cos \frac{\Delta\phi}{2}}{\sin \frac{\Delta\phi}{2}} = 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2}$. Tulokset ovat samat kuten tietysti pitääkin olla.

Usean lähteen interferenssi

Tähän asti olemme tutkineet vain tilanteita, joissa interfeeroivia aaltoja on kaksi. Superpositiossa voi olla kuitenkin mielivaltaisen monta aaltoa, ja siksi interferensiäkin voi tapahtua samanaikaisesti monen aallon kesken. Interferensi-ilmiöiden analyysi tapahtuu silti aina periaatteessa samalla tavalla. Jos havaintopisteessä on samanaikaisesti useita sinimuotoisia aaltoja, joilla on sama taajuus, voimme määrittää erikseen jokaisen aallon vaiheenosittimen. Havaintopisteen väärähtelyä kuvaava vaiheenosoitin saadaan selville yksittäisten aaltojen vaiheenosittimien summana.

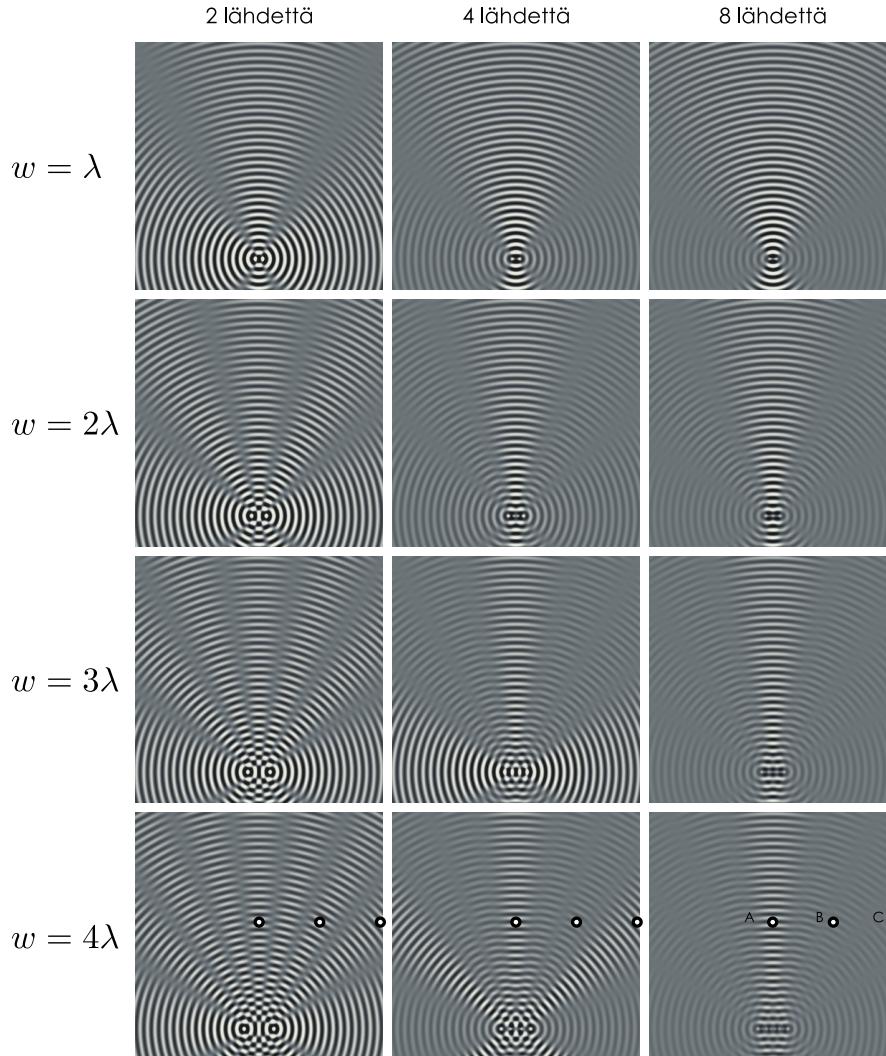
Aina ei ole kuitenkaan tarpeellista ratkaista välialueen väärähtelyn amplitudia täsmällisesti yllä kuvatulla menetelmällä, vaan voimme päättää myös joitakin interferensi-ilmiöitä kuvaavia nyrkkisääntöjä havainnoimalla interfeeroivien aaltojen käytöstä. Tutkimme erityisesti millaisen aallon suorassa rivissä olevat aaltojen lähteet tuottavat, ja miten lähteiden lukumäärän ja niiden muodostaman rivin leveys vaikuttaa interferensiin. Tätä varten kuvaan 16.19 (a) on piirretty interfeeroivien aaltojen värikarttaesitys, kun lähteitä on rivissä 2, 4 tai 8 kappaletta, ja rivin leveys on yhdestä neljään aallonpituutta. Lähteiden muodostaman rivin leveyttä on tässä merkitty symbolilla w , kuten kuvassa 16.19 (b) on esitetty.

Jos lähteitä on kaksi, vahvistavan ja tuhoavan interferenssin suuntia on sitä enemmän mitä kauempana toisistaan aaltojen lähteet ovat. Syyn tähän voi ymmärtää tarkastelemalla kuvaa 16.16 (b), jossa vahvistavan ja tuhoavan interferenssin suuntia kuvattiin vihreillä ja punaisilla käyrillä. Nämä käyrät ovat aaltojen lähteiden välissä tasaisin välein, ja näin ollen käyriä täytyy kulkea lähteiden välistä sitä useampi, mitä kauempana toisistaan lähteet ovat. Nämä käyrät ovat jatkuvia ja ne kaikki kulkevat lähteiden välistä, joten mitä kauempana toisistaan lähteet ovat, sitä useampaan kapeaan kiihaan interferensi aallot hajottaa. Tästä seuraa tietenkäytävä se, että mitä kauempana toisistaan aaltojen lähteet ovat, sitä *kapeampia* kiloja vahvistavan interferenssin alueet muodostavat.

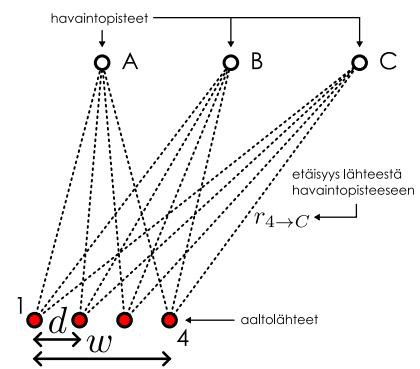
Kun aaltojen lähteiden lukumäärä kasvaa, vahvistavan interferenssin alueiden suhteelliset intensiteetit muuttuvat. Esimerkiksi kuvan 16.19 (a) alimmalla rivillä ($w = 4\lambda$) aallot muodostavat jokaisessa kuvassa

Kuva 16.19: Mitä kauempana toisistaan lähteet ovat, sitä kapeampia kiiloja aallot muodostavat. Kun lähteiden määrä kasvaa, aaltojen intensiteetti keskittyy vain joihinkin näistä kiiloista.

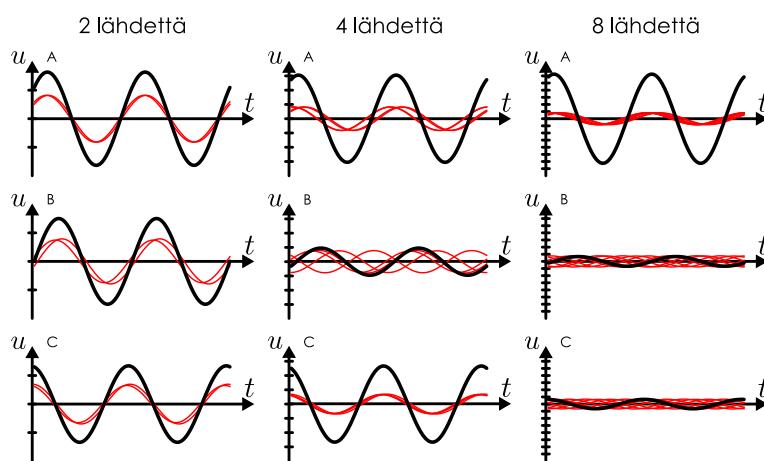
(a) Lähteiden lukumäärän ja etäisyyden vaikutus interferenssikuvioon.



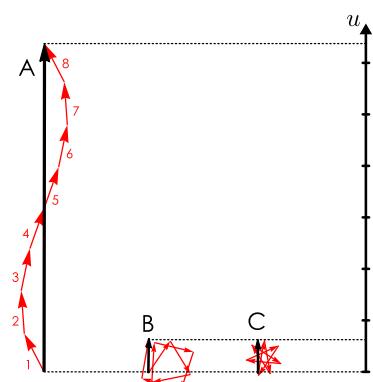
(b) Tarkasteltava geometria.



(c) Välialineen väärähtely havaintopisteissä ajan funktiona. Huomaa kuvaajien eri mittakaavat.

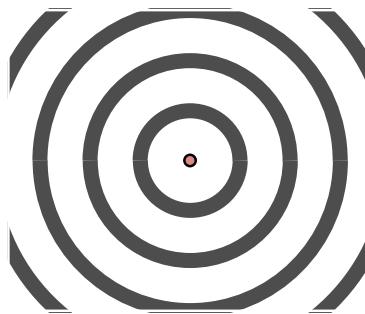


(d) Vaiheenosoitimet eri havaintopisteissä, kun lähteitä on kahdeksan.

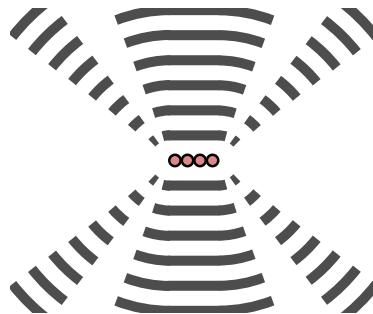


Kuva 16.20: Aallonpituuteen nähden pieni lähde tuottaa ympyrääaltoja. Interferenssin takia lähteiden rivistä (tai yhdestä leveästä lähteestä) lähtee aaltoja kiilamaisesti vain joihinkin suuntiin. Jos rivi on leveä aallonpituuteen nähden, syntyy lähes suoria aaltonrintamia, jotka liikkuvat riviin nähden kohtisuoraan.

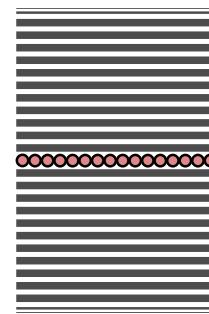
(a) Pistemäinen lähde.



(b) Kapea lähteiden rivi.



(c) Leveä lähteiden rivi.



yhtä monta kiilaäaltoa kuin lähteiden välissä. Kun aaltojen lähteitä on kaksi, näissä kaikissa on likimain sama amplitudi ja intensiteetti. Kuitenkin kun aaltojen lähteitä on neljä, kolmessa kiilassa aaltojen amplitudi ja intensiteetti on selkeästi muita kiiloja suurempi. Kun lähteitä on kahdeksan, syntyy vain yksi suuren intensiteetin kiila, joka kulkee kohtisuoraan lähteiden muodostamaan riviin nähden. Kaikissa muissa suunnissa intensiteetti on tähän verrattuna pieni.

Kuvien on merkitty myös kolme havaintopisteitä (A, B ja C), ja kuvaan 16.19 (c) on piirretty väliaineen värähtely ajan funktiona näissä pisteissä. Jokaisessa kuvassa on piirretty erikseen punaisina käyrinä kustakin lähteestä saapuvan aallon tuottama värähtely sekä mustana käyränä näiden superpositio, joka kertoo väliaineen todellisen liikkeen.

Havaintopiste A on lähteiden muodostaman rivin keskipisteestä katsoen rivin normaalilin suunnassa, joten se on likimain yhtä kaukana kaikista lähteistä. Koska lähteet värähtevät samassa vaiheessa, eri lähteiden tuottamat aallot saapuvat havaintopisteeseen likimain samassa vaiheessa vahvistaen toisiaan. Tästä syystä pisteessä A aallon amplitudi on suuri riippumatta lähteiden lukumäärästä.

Pisteet B ja C ovat sivussa lähteiden rivin normaalilta, ja niissä havaittavan värähtelyn amplitudi riippuu siitä, mitkä ovat saapuvien aaltojen *vaiheet*. Esimerkiksi pisteeseen B aallot saapuvat eri vaiheissa, jos lähteitä on 4 tai 8, jolloin niiden superposition amplitudi on huomattavasti matalampi kuin pisteessä A. Amplitudi ei ole kuitenkaan nolla, koska pisteen B suunnassa aallot heikentävät toisiaan mutta tuhoava interferenssi ei sammuta värähtelyä täydellisesti. Pisteeseen C aallot saapuvat samassa vaiheessa, jos lähteitä on 4, jolloin interferenssi on vahvistavaa. Jos lähteitä on 8, aallot ovat eri vaiheissa ja interferenssi on jälleen tuhoavaa.

Tarkastellaan sitten kuvan 16.19 (a) oikeanpuoleista pystysaraketta eli tapauksia, joissa on rivissä kahdeksan pistemäistä aaltolähettää. Ylimmässä kuvassa rivin leveys on yksi aallonpituus ja alimmassa kuvassa neljä aallonpituutta, joten lähteiden välinen etäisyys on kaikissa kuvissa pienempi kuin aallonpituus. Kaikissa näissä tapauksissa suurimman amplitudin aalto muodostaa kuvassa ylöspäin (ja alaspäin) kulkevan kiilan.

Ylimmässä kuvassa, jossa lähteiden rivin leveys on yksi aallonpituus, kiila on leveä. Sen sijaan alimmassa kuvassa, jossa rivin leveys on neljä aallonpituutta, muodostuu kapea, melkein suorista aaltonrintamista koostuva kiila. Toisin sanoen jos aaltojen lähteet ovat tiheässä rivissä tai aaltoa tuottaa viivamainen lähde pistemäisen sijaan, syntyy pääasiassa tämän rivin tai viivan normaalilin suuntaan kulkeva aalto.



16.22 Missä kaikissa kuvan 16.19 (a) tilanteissa lähteiden välinen etäisyys d on pienempi kuin yksi aallonpituus? Miten nämä eroavat tapauksista, joissa $d \geq \lambda$?

Mitä leveämpi tai pidempi tämä aallon lähde on aallonpituuteen verrattuna, sitä kapeampi kiila muodostuu. Aallonpituutta selvästi pienempi lähde toimii kuten pistemäinen lähde ja se lähettää joka suuntaan levijän ympyrääallon (kuva 16.20 (a)). Esimerkiksi ääntä tuottava kappale lähettää ääntä ympärilleen joka suuntaan etenevinä painealtoina. Kun lähteiden rivin pituus on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituus, aalto ei enää levijä kaikkiin suuntiin yhtä voimakkaasti, vaan se muodostaa yhden tai useita kiiloja (kuva 16.20 (b)). Jos puolestaan lähteiden rivi on huomattavasti pidempi kuin aallonpituus, syntyy suoraan kulkeva aalto, joka ei juurikaan hajaannu (kuva 16.20 (c)). Esimerkiksi valonsäteet käyttäytyvät tyypillisesti näin, sillä tavallisesti valo kulkee tasoaaltoina, joiden leveys on huomattavasti niiden aallonpituutta suurempi. Tästä syystä esimerkiksi lasersäde näyttää kulkevan suoraan hajaantumatta, ja valon voidaan ajatella kulkevan säteinä.



16.23 Kirjoita omien sanoin tüivistelmä interferenssistä. Mikä aiheuttaa interferenssin ja miten interferensi vaikuttaa aaltojen kulkueen? Miten vaihe liittyy interferensiin? Kuinka määrität kahden tai useamman interferoivan aallon intensiteetin?

16.4 Optiikka

Edellä tarkastellut ilmiöt kuten taittuminen, heijastuminen sekä interferenssi tapahtuvat kaikilla aalloilla. Erikoisista aalloista valo on kuitenkin meille ihmisille erityisen tärkeä, koska näköaistimme perustuu valon havaitsemiseen. Tämän vuoksi päättämme aaltojen tutkimisen tarkastelemalla nimenomaan valoa ja sen käyttäytymistä eli **optiikkaa**.

Sähkömagneettiset aallot

Olemme jo moneen otteeseen todenneet, että valo on sähkömagneettinen aalto. Nyt osoitamme sähkömagneettismin peruslaeista eli Maxwellin yhtälöistä lähtien, että sähkömagneettisessa kentässä todellakin voi kulkea aaltoa.

Rajoitutaan tarkastelemaan sähkömagneettista kenttää tyhjiössä, jossa ei ole sähkövarauksia eikä -virtoja. Tällöin Gaussin laki mukaan sekä sähkö- että magneettikenttä ovat lähteettömiä, ja avaruuden perustila on se, että sekä sähkö- että magneettikenttä ovat kaikkialla nollia. Kuitenkin Faradayn lain mukaan muuttuva magneettikenttä indusoi pyörteisiä sähkökenttiä, ja Maxwellin lain mukaan muuttuvan sähkökenttään liittyy aina pyörteisiä magneettikenttiä. Niinpä jos avaruuteen syntyy jostakin syystä ajassa muuttuva sähkö- tai magneettikenttä, kyseessä on poikkeama avaruuden perustilasta. Faraday ja Amperen lain mukaisesti muuttuvat sähkö- ja magneettikentät alkavat indusoimaan toisiinsa pyörteitä, nämä pyörteet muuttavat kenttiä lisää, jolloin indusoituu lisää muutoksia, ja niin edelleen. Näin kentät muuttavat jatkuvasti toisiaan, ja poikkeama homogenisuudesta alkaa levitä.

Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta, jossa sähkökenttä on y -suuntainen ja se riippuu ainoastaan x -koordinaatista eli matemaattisesti $\bar{E} = E_y(x, t)\hat{j}$. Sähkökenttä on siis olemassa kaikkialla avaruudessa (ei vain x -akselilla), mutta sen suunta ja voimakkuus ovat vakiot kaikkialla yz -tasossa.

Jos sähkökentän voimakkuus muuttuu, tämä muutos indusoi Maxwellin lain mukaan magneettikentän. Kuvassa 16.21 (b) on tutkittu indusoitunutta magneettikenttää, kun sähkökenttä muuttuu positiiviseen y -suuntaan eli $\frac{\partial E_y}{\partial t} > 0$. Kuvaan on piirretty sähkökenttä yhdessä pisteesä, ja tähän pisteeseen on asetettu infinitesimaalisen pieni nelion muotoinen Amperen-Maxwellin pinta. Pinnan normaali on y -suuntainen, pinnan reunat ovat x - ja z -suuntaiset, ja niiden pituudet ovat dx sekä dz (kuva 16.21 (a)). Positiivinen läpäisyysuunta on valittu ylöspäin, positiiviseen y -suuntaan, jolloin positiivinen kiertosuunta on ylhäältä katsoen vastapäivään. Pinta on siis kohtisuorassa sähkökenttää vastaan ja sähkövuo pinnan läpi on

$$\Phi_E = E_y dx dz. \quad (16.21)$$

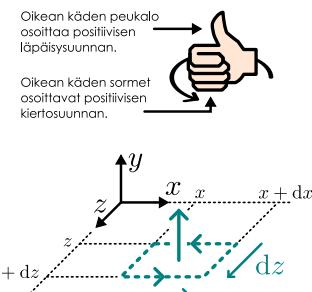
Sähkövuoon muutosnopeus ajan suhteon on

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y}{\partial t} dx dz, \quad (16.22)$$

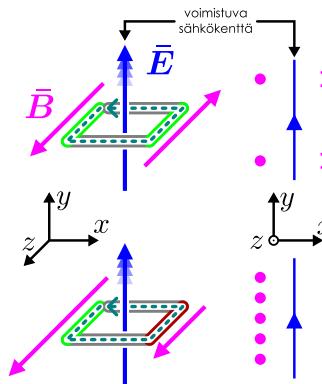
ja tämä on siis positiivinen kuvaassa 16.21 (b).

Kuva 16.21: Maxwellin laki, kun sähkökenttä on y -suuntainen ja magneettikenttä z -suuntainen.

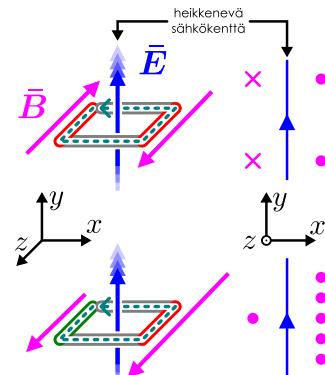
(a) Valitaan tarkastelupinnan läpäisy-suunta ylöspäin.



(b) Sähkökenttä muuttuu ajassa positiiviseen suuntaan, jolloin magneettikentän viivaintegraali on positiivinen.



(c) Sähkökenttä muuttuu ajassa negatiiviseen suuntaan, jolloin magneettikentän viivaintegraali on negatiivinen.



Koska sähkövuo muuttuu, magneettikentän viivaintegraalin pinnan reunaan pitkin täytyy olla eri suuri kuin nolla. Maxwellin lain mukaan positiiviseen läpäisy suuntaan muuttuva sähkövuo tuottaa magneettikentän, jonka viivaintegraali on positiivinen. Koska integrointipolku on xz -tasossa, vain magneettikentän x - ja z -komponentit vaikuttavat viivaintegraalin arvoon. Kuvassa 16.21 (b) magneettikenttä on oletettu z -suuntaiseksi. (Magneettikentällä voi olla x -komponentti, mutta koska systeemi oletettiin symmetriseksi yz -tasossa, tämä komponentti ei voi riippua z -koordinaatista eikä se näin ollen vaikuta viivaintegraalin arvoon.) Tällöin viivaintegraaliin jää vain z -komponentin osuuksia:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = B_z(x)dz - B_z(x+dx)dz = [B_z(x) - B_z(x+dx)]dz. \quad (16.23)$$



16.24 Miksi yhtälössä (16.23) termin $B_z(x+dx)dz$ edessä on miinusmerkki?

Kuvassa 16.21 (b) sähkövuo pinnan läpi muuttuu positiiviseen suuntaan, joten Maxwellin lain mukaan

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} > 0, \quad (16.24)$$

ja magneettikentän viivaintegraalin täytyy siis olla positiivinen. Tämä on mahdollista monin tavoin. Kuvan 16.21 (b) ylemmässä esimerkissä magneettikenttä osoittaa tarkastellun pinnan vasemmassa reunassa kohati katsojaa (positiiviseen z -suuntaan) ja oikeassa reunassa poispäin katsojasta (negatiiviseen z -suuntaan). On myös mahdollista, että magneettikenttä on kaikkialla kohti katsojaa, ja kenttä on voimakkaampi kuvan vasemmassa laidassa kuten kuvan 16.21 (b) alempassa esimerkissä. Kolmas vaihtoehto on se, että kenttä on kaikkialla poispäin katsojasta ja kentän voimakkuus on kuvan oikeassa laidassa suurempi (ei kuvassa). Kaikissa näissä tapauksissa magneettikentän z -komponentti muuttuu negatiiviseen suuntaan, kun kuvassa siirrytään vasemmalta oikealle eli positiiviseen x -suuntaan. Jos sähkövuo muuttuu negatiiviseen suuntaan, tilanne on päinvastainen kuten kuvassa 16.21 (c) on piirretty. Tällöin magneettikentän viivaintegraalin pitää olla negatiivinen ja magneettikentän z komponentti muuttuu positiiviseen suuntaan, kun kuvassa siirrytään vasemmalta oikealle.

Edellisen havainnon voi tiivistää seuraavasti: jos sähkökentän y -komponentti muuttuu *ajan kuluessa* positiiviseen y -suuntaan, magneettikentän z -komponentti muuttuu *x-suuntaan siirryttääessä* negatiiviseen z -suuntaan (ja päinvastoin). Matemaattisesti tämä tulos voidaan johtaa sijoittamalla Maxwellin lakiin lausekkeet (16.22) sekä (16.23), jolloin saadaan yhtälö

$$[B_z(x) - B_z(x+dx)]dz = \oint \bar{B} \cdot d\bar{r} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} dx dz. \quad (16.25)$$

Jakamalla tämä puolittain differentiaaleilla $dx dz$ ja vaihtamalla B_z -termien järjestystä saadaan

$$\frac{B_z(x+dx) - B_z(x)}{dx} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (16.26)$$

ja huomioimalla vielä, että yhtälön vasen puoli on osittaisderivaatan määritelmä

$$\frac{B_z(x+dx) - B_z(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{B_z(x+\Delta x) - B_z(x)}{\Delta x} = \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (16.27)$$

päädytään magneetti- ja sähkökenttien osittaisderivaattojen väliseen yhteyteen

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (16.28)$$

Jos sähkökenttä muuttuu ajan kuluessa y -suuntaan, $\frac{\partial E_y}{\partial t} > 0$, yhtälön kummankin puolen täytyy olla negatiivinen, ja niinpä magneettikentän täytyy muuttua negatiiviseen z -suuntaan x -suuntaan kuljettaessa.

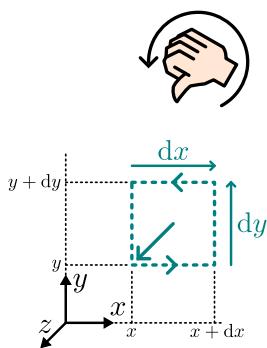


16.25 Koordinaatistossa A sähkökenttä on y -suuntainen ja magneettikenttä on nolla. Sähkökenttä ei muutu ajan kuluessa mutta se voimistuu x -suuntaan siirryttääessä. Koordinaatisto B liikkuu koordinaatiston A suhteeseen x -suuntaan. (a) Muuttuuko sähkökenttä koordinaatistossa B? (b) Onko koordinaatistossa B magneettikenttä Galilei-muunnoksen mukaan? (c) Riippuuko magneettikentän voimakkuus paikasta koordinaatistossa B? (d) Vertaa yhtälöön (16.28).

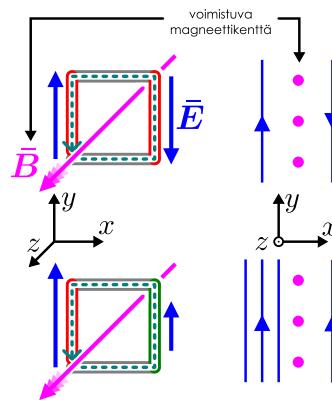
Faraday laki antaa meille samanlaisen yhteyden muuttuvan magneettikentän ja sähkökentän välille kuten kuvassa 16.22 (b) ja (c) on esitetty. Magneettikenttä on tässäkin tapauksessa asetettu z -suuntaiseksi ja

Kuva 16.22: Faradayyn laki, kun sähkökenttä on y -suuntainen ja magneettikenttä z -suuntainen.

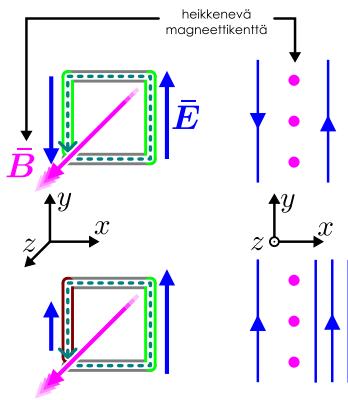
(a) Valitaan tarkastelupinnan läpäisyys-suunta kohti katsojaa.



(b) Magneettikenttä muuttuu ajassa positiiviseen suuntaan, jolloin sähkökentän viivaintegraali on negatiivinen.



(c) Magneettikenttä muuttuu ajassa negatiiviseen suuntaan, jolloin sähkökentän viivaintegraali on positiivinen.



sähkökenttä y -suuntaiseksi. Nyt tarkastellaan magneettivuo ja sähkökentän viivaintegraalia, joten tarkasteltava Faradayyn pinta on tässä tapauksessa xy -tason infinitesimaalinen neliö, jonka sivujen pituudet ovat dx ja dy . Magneettivuo tämän pinnan läpi on

$$\Phi_B = B_z dx dy, \quad (16.29)$$

ja tämän muutos ajan suhteeseen on

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy. \quad (16.30)$$

Sähkökentän viivaintegraali pinnan ympäri on

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = [E_y(x+dx) - E_y(x)] dy, \quad (16.31)$$

koska sähkökenttä on y -suuntainen.

Faradayyn lain perusteella

$$[E_y(x+dx) - E_y(x)] dy = \oint \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} dx dy, \quad (16.32)$$

mistä seuraa jakamalla differentiaaleilla $dxdy$

$$\frac{E_y(x+dx) - E_y(x)}{dx} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (16.33)$$

Huomioimalla jälleen osittaisderivaatan määritelmä, tämä on sama asia kuin

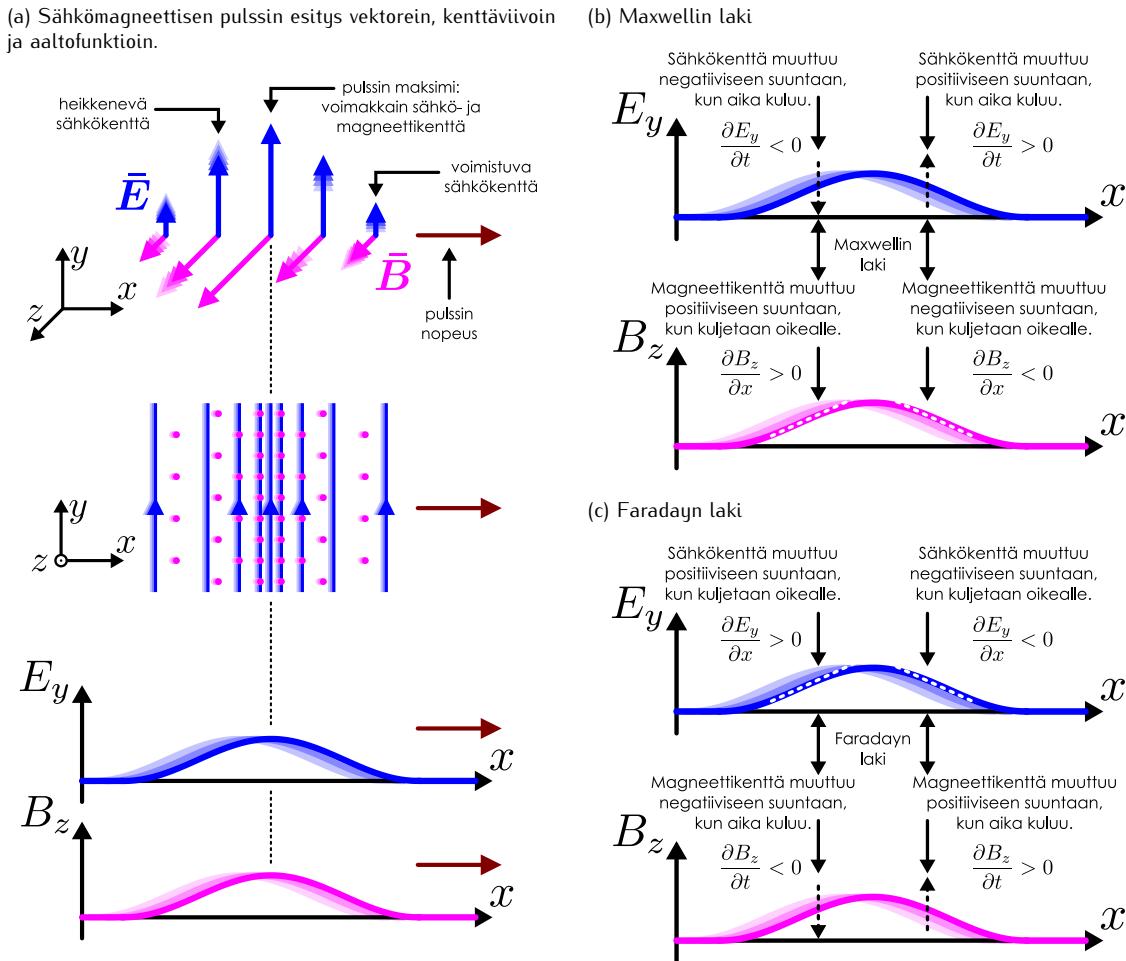
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (16.34)$$

Fysiikalisesti yhtälö tarkoittaa sitä, että jos magneettikenttä muuttuu *ajan kuluessa* positiiviseen z -suuntaan, sähkökentän y -komponentti täytyy muuttua negatiiviseen y -suuntaan, kun siirrytään positiiviseen x -suuntaan.

Kuvassa 16.23 on esitetty sähkömagneettinen aaltopulssi, jossa sähkökenttä osoittaa positiiviseen y -suuntaan ja magneettikenttä positiiviseen z -suuntaan ja joka liikkuu positiiviseen x -suuntaan. Kenttien voimakkuus on suurimmillaan pulssin keskellä ja pulssin ulkopuolella kenttä on nolla. Kuvassa 16.23 (a) pulssi on kuvattu kolmella eri tavalla. Ylimmässä kuvassa on piirretty pulssin sähkö- ja magneettikenttävektorit x -akselilla. Tässä kuvassa näkyvät sekä kenttävektoreiden suunnat että niiden muuttuminen, mutta kuva on siinä mielessä harhaanjohtava, että aalto ei kulje vain x -akselilla vaan kaikkialla avaruudessa. Keskimäisessä kuvassa pulssi on piirretty kenttäviivoin, ja tästä kuvasta nähdään paremmin, että sähkömagneettinen kenttä ei muutu y -suunnassa. Alimmassa kuvassa on piirretty sähkökentän y -komponentin ja magneettikentän z -komponentin kuvaajat x -koordinaatin funktiona. Nämä ovat pulssin *aaltofunktiot*.

Kuvassa 16.23 (b) on kerrattu Maxwellin lain toteutuminen tässä pulssissa. Pulssi kulkee kuvassa oikealle, joten pulssin oikea reuna on sen etureuna. Tässä reunassa sähkökentän voimakkuus kasvaa ajan kuluessa, jolloin kuvan 16.21 (b) tapaan magneettikenttä täytyy heikentyä kuvassa oikealle kuljettaessa, kuten tapahtuukin. Vastaavasti pulssin vasemmassa reunassa sähkökenttä heikkenee ajan kuluessa, koska pulssi on jo

Kuva 16.23: Sähkömagneettinen pulssi toteuttaa Maxwellin yhtälöt.



ohittamassa pisteen, ja niinpä magneettikentän täytyy kuvan 16.21 (c) mukaisesti voimistua kuvassa oikealle kuljettaessa. Näinkin tapahtuu, joten pulssi toteuttaa Maxwellin lain.

Samaan tapaan kuvassa 16.23 (c) on todettu, että pulssi toteuttaa myös Faradayin lain. Pulssin oikeassa reunassa magneettikenttä voimistuu ajan kuluessa, joten kuvan 16.22 (b) perusteella sähkökentän pitää heikentyä oikealle kuljettaessa. Pulssin vasemmassa reunassa tilanne on päinvastainen ja vastaa kuvaa 16.22 (c).

Koska sähkömagneettinen aaltopulssi toteuttaa Maxwellin yhtälöt, sähkömagneettilässä kentässä mitä ilmeisimmin voi edetä aaltoja. Todistetaan tämä lopuksi matemaattisesti osoittamalla, että sähkö- ja magneettikenttä toteuttavat *aaltoyhdyksin*. Tästä nimittäin seuraa automaattisesti, että sähkömagneettilässä kentässä voi edetä minkä muotoisia aaltoja tahansa ja että näille alolloille pätee superpositioperiaate. Lisäksi aaltoyhdykölö määärää nopeuden, jolla sähkömagneettiset aallot liikkuvat.

Tämä onnistuu yhtälöiden (16.28) ja (16.34) avulla. Osittaisderivoimalla yhtälöä (16.28) ajan suhteeseen ja yhtälöä (16.34) x -koordinaatin suhteeseen päädyimme nimittäin yhtälöihin

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (16.35)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}. \quad (16.36)$$

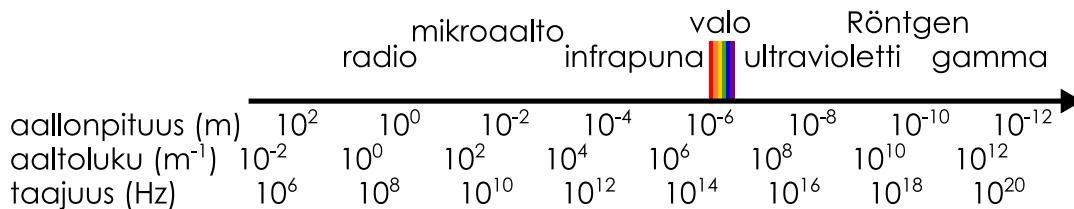
Lisäksi koska osittaisderivoinnin järjestyksen voi yleisesti vaihtaa, näissä esiintyvät magneettikentän derivaatat ovat samat,

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}, \quad (16.37)$$

ja niinpä sähkökentän toinen derivaatta paikan suhteeseen (vrt. köyden kaarevuus) on suoraan verrannollinen kentän toiseen derivaataan ajan suhteeseen (vrt. köyden kiihtyvyys)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (16.38)$$

Kuva 16.24: Sähkömagneettisten aaltojen spektri. Kuvassa on esitetty erilaisten sähkömagneettisten aaltojen aallonpituuksien, aaltolukujen ja taajuusten logaritmisia arvoja. Näkyvä valo on sähkömagneettisen aallonpiisuuden ja aaltolukun välillä.



Magneettikentälle voidaan johtaa aaltoyhtälö aivan samalla tavalla derivoimalla yhtälöä (16.28) paikan suhteen ja yhtälöä (16.34) ajan suhteen. Koska sähkö- ja magneettikenttä toteuttavat aaltoyhtälön, mikä tahansa kentään luotu häiriö alkaa edetä kentässä spontaanisti aaltona, joka kulkee tyhjiössä aaltoyhtälön määräämällä nopeudella

$$v_{\text{aalto}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (16.39)$$

eli valonnopeudella.

Erityisesti sähkömagneettisessa kentässä voi kulkea sinimuotoisia aaltoja, jolloin kaikki sähkömagneettiset aallot voi kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Lisäksi sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon sähkö- ja magneettikenttien välillä on täsmällinen yhteys. Jos nimitän sähkökentässä kulkee tasaoalto x -suuntaan, ja aallon sähkö- ja magneettikentät ovat y - ja z -suuntaiset, sähkökenttää kuvaava aaltofunktio

$$E_y(x, t) = E \cos(k_E x - \omega_E t + \phi_E) \quad (16.40)$$

ja magneettikenttää aaltofunktio

$$B_z(x, t) = B \cos(k_B x - \omega_B t + \phi_B). \quad (16.41)$$

Näiden derivaattojen täytyy noudattaa Faradayn laista johdettua yhtälöä (16.34), mistä saadaan

$$-Ek_E \sin(k_E x - \omega_E t + \phi_E) = -B\omega_B \sin(k_B x - \omega_B t + \phi_B). \quad (16.42)$$

Yhtälön kummallakin puolella on sinifunktio, ja yhtäsuuruus pääteee kaikilla x ja t vain, jos sekä sinifunktioita kertovat vakiot eettä niiden argumentit ovat samat. Jotta funktioiden argumentit olisivat samat, sähkö- ja magneettikentillä on oltava sama aaltoluku, $k_E = k_B$, kulmataajuus, $\omega_E = \omega_B$, sekä vaihe $\phi_E = \phi_B$. Niinpä voimme jättää alaindeksit pois ja merkitä näitä vakioita yksinkertaisesti k , ω ja ϕ . Yhtälön kummallakin puolella on sama kerroin, jos

$$Ek = B\omega, \quad (16.43)$$

minkä voi kirjoittaa myös muotoon

$$\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (16.44)$$

Tämän tuloksen mukaan sinimuotoisessa sähkömagneettisessa aallossa sähkö- ja magneettikenttien amplituuden suhteen täytyy olla sama kuin valonnopeus. Tässä esimerkkitapauksessa aaltoa kuvaava siis aaltofunktio

$$E_y(x, t) = E \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (16.45)$$

$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E \cos(kx - \omega t + \phi). \quad (16.46)$$

Koska sähkömagneettisten aaltojen nopeus on valonnopeus, on luonnollista arvata, että valokin on sähkömagneettinen aalto — kuten onkin. Valo ei ole kuitenkaan ainosa sähkömagneettisten aaltojen laji, sillä näkyvä valo muodostaa vain pieni osan sähkömagneettisten aaltojen spektristä. Valon aallonpituuksien joitakin satoja nanometrejä, mutta sähkömagneettisessa kentässä voi edetä aaltoja, joiden aallonpituuksien on tätä huomattavasti pidempi tai lyhyempikin. Eri taajuudella värähtelevät sähkömagneettiset aallot käyttäytyvät eri tavoin ja niillä on erilaisia teknologisia sovelluksia, jotka eri taajuusalueille on annettu omat nimensä (kuva 16.24). Valoa pidempi aallonpituuksien ja pienempi taajuus on infrapuna-, mikro- ja radioaaltoilla. Lyhyempi aallonpituuksien ja suurempi taajuus on puolestaan ultravioletti-, röntgen- ja gammasäteilyllä.

Edellisten tulosten perusteella voimme määrittää myös sähkömagneettisten aaltojen energiatiheden täsmällisesti. Sähkökentän energiatihes on yhtälön (11.146) mukaisesti $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, missä E on sähkökentän voimakkuus *tarkastelupisteessä*. Sinimuotoisessa aallossa sähkökentän keskimääräinen energiatihes on siten

$$\langle \rho_{E,E} \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{4}\epsilon_0 E^2, \quad (16.47)$$

missä E on nyt sähkökentässä kulkevan aallon *amplitudi*. Tässä käytimme jälleen yhtälöä (15.51), jonka mukaan sinimuotoisen funktion neliön keskiarvo on puoli, $\langle \cos^2(kx) \rangle = \langle \sin^2(kx) \rangle = 1/2$.

Magneettikentän energiatihes on puolestaan yhtälön (13.105) perusteella

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \frac{1}{4\mu_0} B^2, \quad (16.48)$$

missä B on magneettikentässä kulkevan aallon amplitudi. Toisaalta koska sähkö- ja magneettikentien amplituiden suhde on yhtälön (16.44) valonnopeus, voimme kirjoittaa magneettisen aallon energiatiheden muotoon

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \frac{E^2}{c^2}. \quad (16.49)$$

Lisäksi valonnopeuden neliön voi ilmaista yhtälön (13.41) avulla sähkö- ja magneettivakioiden avulla, $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$, jolloin magneettisen aallon energiatihes saa muodon

$$\langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \epsilon_0 \mu_0 E^2 = \frac{1}{4} \epsilon_0 E^2. \quad (16.50)$$

Tämä on kuitenkin *täsmälle sama kuin sähkökentässä etenevän aallon energiatihes*. Sinimuotoisessa sähkömagneettisessa aallossa on siis yhtä paljon energiaa sekä sähkö- että magneettikentissä. Aallon keskimääräinen energiatihes on näiden summa,

$$\langle \rho_E \rangle = \langle \rho_{E,E} \rangle + \langle \rho_{E,B} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (16.51)$$



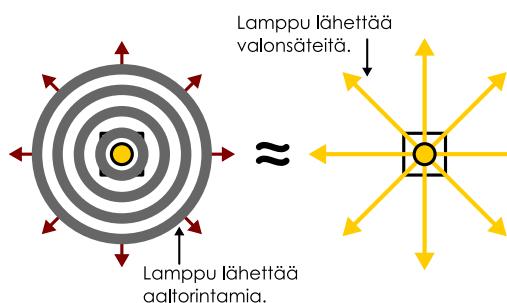
16.26 Sinimuotoisen sähkömagneettisen aallon sähkökentän amplitudi on 1.0 V/m. (a) Mikä on magneettikentän amplitudi? (b) Mikä on aallon energiatihes? (c) Mikä on aallon intensiteetti?

Sädeoptiikka

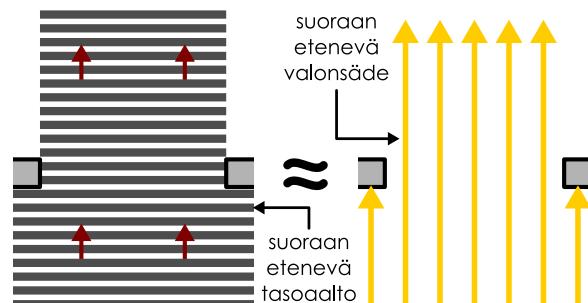
Valo muodostuu siis sähkömagneettisen kentän aalloista, mutta monissa tilanteissa valon aaltoluonnetta ei havaita. Tämä johtuu siitä, että näkyvän valon aallonpituuksien väristä riippuen joitakin satoja nanometrejä, mikä on ihmisen mittakaavassa hyvin pieni pituus. Tavallisesti havainnoimme valonlähteitä paljon aallonpituitta kauempaa, jolloin valoa voi pitää tasoaaltona (vrt. kuva 16.6). Lisäksi tarkastelemme usein valon kulkua huomattavasti aallonpituitta suurempien esineiden ja aukkojen ohi tai läpi, jolloin aallot eivät juurikaan koe interferenssiä vaan kulkevat suoraan (vrt. kuva 16.20). Koska tällaisissa tilanteissa valoaalot kulkevat suoraviivaisesti tasaisina rintamina, valo vaikuttaa koostuvan aaltojen sijaan suoraan etenevistä **valonsäteistä** (kuva 16.25). Todellisuudessa valo toki on aalto ja valonsäteet ovat vain yksinkertaistettu malli, mutta ellei

Kuva 16.25: Sädeoptiikassa valon ajatellaan kulkevan suoraviivaisesti säteinä. Näin voidaan tehdä, jos valon kulkun vaikuttavien kappaleiden ja aukkojen koko on paljon valon aallonpituitta suurempi.

(a) Valo levää aaltorintamina, mutta sen voi ajatella etenevän suoraan kulkevinä säteinä.



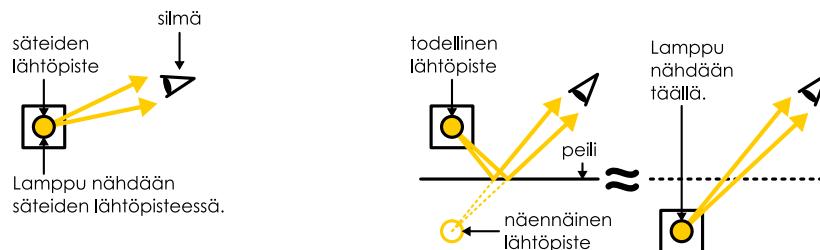
(b) Jos aallonpituuus on pieni, aallot kulkevat suoraan.



MONIULOTTEiset AALLOT

Kuva 16.26: Kappale havaitaan pisteessä, josta sen lähetämä valo näyttää tulevan. Jos valonsäteiden suunta muuttuu, niiden lähteen näennäinen paikka selviää etsimällä säteiden leikkauspiste.

- (a) Lamppu nähdään säteiden lähtöpisteessä.
 (b) Peili kääntää säteitä, jolloin säteet näyttävät tulevan peilistä.



valo kulje aallonpituuden kokoluokkaa olevista aukoista tai aallonpituuden suuruisten kappaleiden ohitse, tämä valonsädemalli kuvailee valon kulkua erittäin hyvin.

Valon kuvaamista säteinä kutsutaan **sädeoptiikaksi** tai *geometriseksi optiikaksi*. Sädeoptiikassa esimerkiksi lampun ajatellaan lähettyvän valoa säteinä kaikkiin suuntiin ympärilleen. Lamppu nähdään, kun sen lähettyvä valo saapuu katsojan silmään, ja erityisesti jos valo saapuu suoraan lampusta silmään, katsoja voi silmään saapuvien valonsäteiden kulkusuuntien perusteella havaita, missä valoa lähettyvä lamppu on. Jos nimittäin lamppu on pieni, säteiden voi ajatella lähtevän lükkeelle samasta pisteestä. Kun nyt silmään saapuvia valonsäteitä seurataan *takaisin niiden tulosuuntaan*, säteiden on täytynyt lähteä matkaan pisteestä, jossa ne leikkaavat toisensa (kuva 16.26 (a)). Tällä katsojan aivot päättelivät valoa lähettyvän lampunkin olevan.

Näemme toki myös kappaleita, jotka eivät itse lähetä valoa. Tällöin näemme esineiden pinnasta *siroavaa* valoa. Siroaminen tarkoittaa sitä, että kun valo osuu tällaisen esineen pintaan, se heijastuu johonkin satunnaiseen suuntaan. Tällöin valaistu esine lähettyy valoa ympärilleen kaikkiin suuntiin, jolloin se toimii lampun tavoin. Tällainen esine nähdään kaikista suunnista, ja sen sijainnin katsoja päättlee samaan tapaan kuin valoa lähettyvän lampunkin paikan.

Kaikki pinnat eivät kuitenkaan sirota valoa. Heijastumis- ja tattumislain yhteydessä puhuimme jo peileistä, jotka ovat valoa heijastavia pintoja. Niistä valo ei siis siro kaikkiin suuntiin vaan heijastuu niin, että valonsäteen tulokulma on aina yhtä suuri kuin sen heijastuskulma. Tämän ominaisuuden vuoksi peilit näyttävät aivan erilaisilta kuin valoa sirottavat pinnat. Peilipintaa itsessään voi olla vaikea nähdä, koska peilistä näkyy peilin edessä olevien esineiden kuvia. Tätä on havainnollistettu kuvassa 16.26 (b). Peilin edessä oleva lamppu lähettyy valonsäteitä, jotka matkalla silmään heijastuvat peilin pinnasta. Silmä havaitsee siihen saapuvien valonsäteiden suunnan, jonka perusteella aivot päättelivät valon saapuvan siitä pisteestä, josta valonsäteet näyttävät lähteneen. Silmä ei voi kuitenkaan suoraan havaita, että valonsäteiden kulkusuunta muuttui niiden heijastuessa peilistä. Niinpä aivot päättelivät lampun olevan siinä pisteessä, jossa sen pitäisi olla, jotta lampusta suoraan silmään kulkevat valonsäteet saapuisivat samasta suunnasta kuin mistä silmään saapuvat valonsäteet todella tulevat. Kuvassa 16.26 (b) tämä piste löytyy jatkamalla silmään saapuvia valonsäteitä peilin taakse ja etsimällä näiden jatkeiden leikkauspisteen. Koska säteiden tulo- ja heijastuskulmat ovat peilissä yhtä suuret, tämä leikkauspiste on yhtä kaukana peilin pinnasta kuin lamppu on todellisuudessaan, mutta *peilipinnan takana*. Niinpä katsojan aivot tulkitsevat silmiin saapuvan valon lähteneen peilin sisällä olevasta lampusta, jolloin peilissä siis nähdään lampun *peilikuvan*.

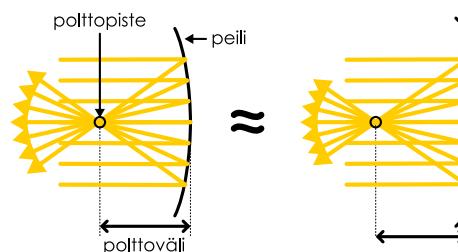


16.27 Kuvassa 16.26 (b) katsoja näkee kaksi lampua: todellisen lampun sekä lampun peilikuvan. Montako lampua katsoja näkee, jos kaksi peiliä muodostaa 90° kulman?

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin suoraa peilipintaa, mutta peili voi olla myös kaareva. Kaarevakin peilipinta heijastaa siihen osuvan valonsäteen niin, että valon tulova heijastuskulmat ovat samat. Kaarevalla pinnalla valonsäteen tulokulma voi kuitenkin olla pinnan eri kohdissa erilainen, jolloin säteet heijastuvat peilin eri kohdista eri suuntiin.

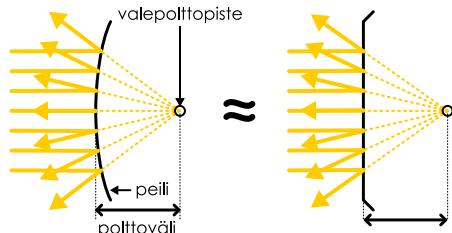
Kuvassa 16.27 on esitelty **kovera peili**, jossa peilipinta muodostaa symmetrisen "kuopan". Kuvassa valo saapuu peiliin yhdensuuntaisina, peilin symmetria-akselin suuntaan kulkevina säteinä. Peilin keskelle osuva säde saapuu peilipinnalle kohtisuoraan, jolloin se heijastuu takaisin tulosuuntaansa. Peilin reunolle saapuvat säteet sen sijaan eivät saavu pinnalle kohtisuoraan, jolloin ne heijastuvat peilistä *kohti peilin symmetria-akselia*. Jos peili on

Kuva 16.27: Kovera peili kokoa valonsäteet.

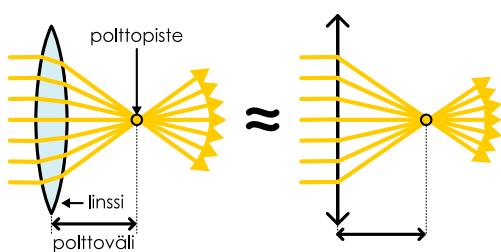


muotoiltu juuri sopivasti, kaikki sen symmetria-akselin suuntaiset valonsäteet heijastuvat kohti samaa pistettä, jota kutsutaan peilin **polttopisteeksi**. Polttopisteen etäisyys peilin pinnasta kutsutaan puolestaan **polttoväliksi**.

Kuva 16.28: Kupera peili levittää valonsäteet.

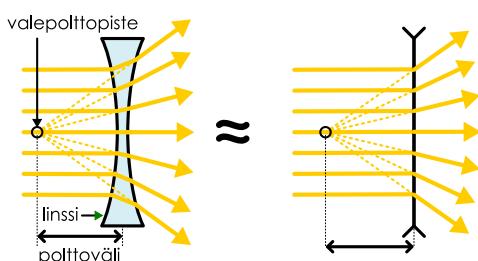


Kuva 16.29: Kupera linssi kokoaa valonsäteet.



nan läpi suoraan. Linssin sivulle osuvat valonsäteet kuitenkin kohtaavat rajapinnan viistossa kulmassa, jolloin rajapinnan läpi kulkeva valonsäde taittuu kohti linssin symmetria-akselia. Valo taittuu toisenkin kerran poistuessaan linssistä takaisin ilmaan, ja kuvan linssissä tämäkin taittuminen kääntyy säteen kulkusuuntaa kohti symmetria-akselia. Linssin muodosta johtuen säteen kulkusuunta muuttuu sitä enemmän, mitä kauemmas linssin keskipisteestä säde osuu, ja jos linssin muoto on sopiva, kaikki symmetria-akselin suuntaiset valonsäteet kääntyvät kulkemaan ainakin likimain kohti linssin polttopistettä. Kuperan linssin läpi kulkevat valonsäteet käyttäytyvät siis samaan tapaan kuin koverasta peilistä heijastuvat säteet.

Kuva 16.30: Kovera linssi levittää valonsäteet.



kunkin linssin ja peilin tarkka muoto. Peili- ja linssisysteemien analyysissä käytetäänkin usein yksinkertaistettua mallia, jossa valoa heijastavien ja taittavien pintojen ajatellaan olevan likimain suoria. Kuvien on pürretty kullekin peilille ja linssille myös tämän mallin mukainen yksinkertaistettu vastine. Tässäkin mallissa symmetria-akselin suuntaan kulkevat valonsäteet kääntyvät aina kohti polttopistettä tai poispäin valepolttopisteestä, mutta säteiden heijastumis- ja tattumispisteiden ajatellaan olevan samassa tasossa (kuvassa samalla suoralla), jolloin säteiden kulun geometrisen tarkastelun helpottuu huomattavasti. Malli ei vastaa todellisuutta, jos linssi tai peili kaareutuu voimakkaasti, mutta se on hyvä approksimaatio ainakin lähellä symmetria-akselia kulkeville valonsäteille.



16.28 Toimiiko lasipallo kuperan vai koveran linssin tavoin eli kokoako vai levittääkö se lävitseen kulevat yhdensuuntaiset säteet? Entä veden alla oleva pallon muotoinen ilmakupla?

Koska kaarevat peilit ja linssit muuttavat valonsäteiden kulkusuuntaa, ne myös muuttavat niiden kautta nähtävien kappaleiden ulkonäköä. Erityisesti sopivilla peili- tai linssisysteemeillä voidaan muuttaa havaittavien kappaleiden näennäistä kokoa, mikä onkin optisten suurennuslasien, mikroskooppien, kiikarien, kaukoputkien, kameroiden ja projektorien toiminnan perusta.

Kuvassa 16.31 on esitetty, miten kupera linssi muuttaa sen läpi katsotun esineen ulkonäköä. Kuvassa (a) linssin vasemmalla puolella on lamppu, jonka etäisyys linssistä on suurempi kuin linssin polttoväli. Lamppu lähetää valonsäteitä kaikkiin suuntiin, mutta kuvan on yksinkertaistettu vuoksi pürretty vain kolmen säteen kulureitit. Yksi kuvan pürretyistä säteistä kulkee aluksi linssin symmetria-akselin suuntaan, joten sen täytyy

Jos peilipinta on kaareva päinvastaiseen suuntaan eli peili muodostaa "kukkulan", peiliä kutsutaan **kuperaksi**. Tällainen peili on piirretty kuvaan 16.28. Kuperaan peiliin osuvat yhdensuuntaiset säteet hajaantuvat eli ne heijastuvat toisistaan poispäin. Tällöin ei ole olemassa polttopistettä, jota kohti kaikki säteet kulkisivat, mutta jälleen jos peili on muotoiltu juuri sopivasti, peilipinnan takana voi olla olemassa piste, jossa peilistä heijastuneiden säteiden jatkeet kohtaavat. Tätä kutsutaan peilin **valepolttopisteeksi**.

Valon kulkuun voi vaikuttaa peilien lisäksi myös **linseillä**. Linssi on läpinäkyvästä materiaalista valmistettu kaarevapintainen kappale, joka muuttaa sen läpi kulkevan valon kulkusuuntaa. Kuvassa 16.29 on esitetty **kupera linssi**, joka on keskeltä paksu ja reunoiltaan ohut. Linssiä ympäröi ilma, ja linssi itse on valmistettu materiaalista kuten lasista tai muovista, jonka taitekerroin on ilmaa suurempi. Kuvan on pürretty linssin symmetria-akselin suunnassa kulkevien valonsäiden kulku linssin läpi. Linssin keskeltä kulkeva valonsäde saapuu ilman ja lasin rajapinnalle kohtisuoraan, joten se kulkee rajapin-

nan läpi suoraan. Linssin sivulle osuvat valonsäteet kuitenkin kohtaavat rajapinnan viistossa kulmassa, jolloin rajapinnan läpi kulkeva valonsäde taittuu kohti linssin symmetria-akselia. Valo taittuu toisenkin kerran poistuessaan linssistä takaisin ilmaan, ja kuvan linssissä tämäkin taittuminen kääntyy säteen kulkusuuntaa kohti symmetria-akselia. Linssin muodosta johtuen säteen kulkusuunta muuttuu sitä enemmän, mitä kauemmas linssin keskipisteestä säde osuu, ja jos linssin muoto on sopiva, kaikki symmetria-akselin suuntaiset valonsäteet kääntyvät kulkemaan ainakin likimain kohti linssin polttopistettä. Kuperan linssin läpi kulkevat valonsäteet käyttäytyvät siis samaan tapaan kuin koverasta peilistä heijastuvat säteet.

Kuvaan 16.30 on pürretty vielä **kovera linssi**, jonka lä-

päisevä valo käyttää samaan tapaan kuin kuperasta

peilistä heijastuva valo. Tässä linssissä säteet taittuvat

symmetria-akselista poispäin, jolloin linssin läpäissyt valo siis hajaantuu. Näiden valonsäiden jatkeet kohtaavat

linssin valepolttopisteessä.

Kaarevien linssien ja peilien eri osiin osuvien valonsä-

teiden kulun täsmällinen analysointi on melko työlästä,

koska pinnat ovat kaarevia. Säteiden täsmällisen reitin

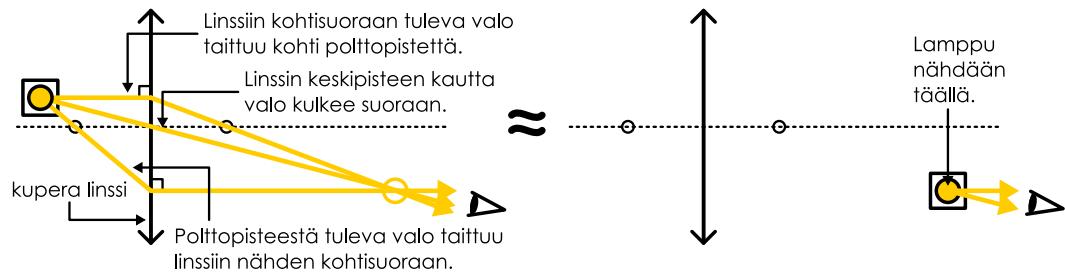
laskeminen vaatii kunkin säteen täsmällisen heijastus-

ta tai tattumispisteen määrittämistä, jolloin pitäisi tietää

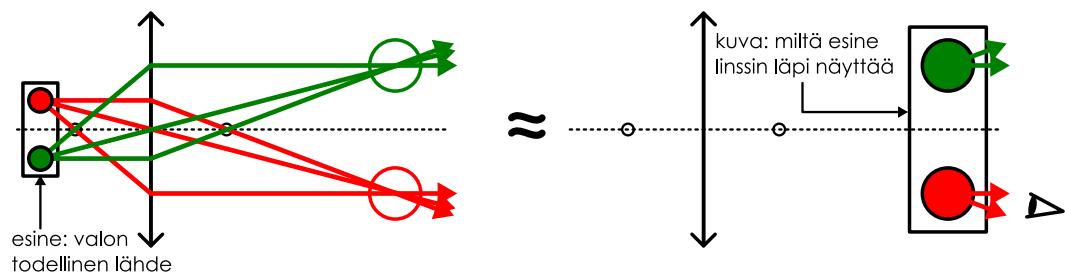
MONIULOTTEISET AALLOT

Kuva 16.31: Valon kulku kuperassa linssissä. Jos esine on linssistä polttopistettä kauempana, linssi luo esineestä kuvan linssin toiselle puolelle. Jos kuvan kohdalle asetetaan varjostin, kuva päätyy sille.

(a) Valonsäteiden kulku kuperan linssin läpi.



(b) Kuvan synty kuperassa linssissä.



linssissä tattua kohti linssin oikealla puolella olevaa polttopistettä. Toinen kuvaan piirretty säde kulkee linssin keskipisteen kautta. Tämän säteen suunta ei muutu, sillä sen reitin täytyy olla linssin keskipisteen suhteen symmetrinen.

Kolmas kuvaan piirretty säde kulkee lampusta kohti linssin vasemmanpuoleista polttopistettä. Tämä *valonsäde saapuu siis linssille polttopisteen suunnasta*, joten taituttuaan linssissä sen täytyy kulkea linssin symmetria-akselin suuntaan. Tämä johtuu siitä, että *valonsäteen kulkureitti ei saa muuttua, jos säteen kulkuunsa käännetään ympäri*, sillä tattumislaki on symmetrinen tulo- ja taitekulman suhteeseen. Jos siis linssiin saapuisi sen symmetria-akselin suuntaan oikealta vasemmalle kulkeva valonsäde, tämä valo tattuisi kohti linssin vasemmalla puolella olevaa polttopistettä. Niinpä jos linssiin saapuu valonsäde sen vasemmanpuoleisesta polttopisteestä, tämän säteen täytyy kulkea linssin oikealla puolella symmetria-akselin suuntaan.

Kaikki kolme kuvaan piirrettyä valonsäädettä leikkaavat samassa pisteessä, joka on kuvassa linssin oikealla puolella. Tämä piste *ei ole* linssin polttopiste, koska lampusta lähteneet valonsäteet eivät kulkeneet aluksi linssin symmetria-akselin suuntainen. Kuitenkin jos linssi on hyvin muotoiltu, *kaikki* lampusta linssin kulkevat valonsäteet tattuvat ainakin likimain kohti tästä samaa pistettä. Nyt havaitse, joka näkee lampun linssin läpi, vaikuttaa aivan siltä kuin hänen silmäänsä saapuvat valonsäteet olisivat lähteneet matkaan tästä valonsäteiden leikkauspisteestä. Niinpä havaitseja näkee lampun linssin oikealla puolella.

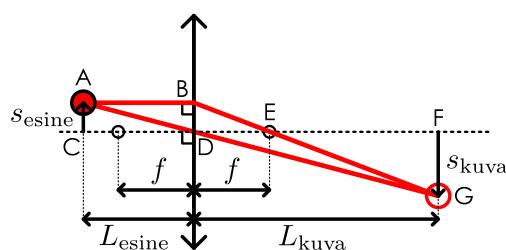
Samalla periaatteella voidaan päätellä, miltä ei-pistemäiset kappaleet näyttävät linssin läpi katsoen. Kuva 16.31 (b) linssin takana on esine, jonka yhdessä päässä on punainen ja toisessa vihreä lamppu. Punainen lamppu on kuvassa linssin vasemmalla puolella sen symmetria-akselin yläpuolella, ja lampun lähetämät valonsäteet tattuvat linssissä niin, että ne leikkaavat toisensa linssin oikealla puolella symmetria-akselin alapuolella. Vihreä lamppu on puolestaan symmetria-akselin alapuolella, ja siitä lähtevät valonsäteet leikkaavat toisensa symmetria-akselin yläpuolella. Linssin läpi katsottuna esine näyttää siis käännyneen ympäri. Lisäksi punaisten ja vihreiden valonsäteiden leikkauspisteiden välinen etäisyys on suurempi kuin lampujen välinen todellinen etäisyys, joten linssin läpi katsottuna esine näyttää *suuremmalta* kuin mitä se todellisuudessa on.

Optikassa sanotaan, että linssi muodostaa esineestä *kuvan*, ja tässä tapauksessa kuva on siis ylösalaisin käännyntävä rennes. Rüppuu sekä linssistä että esineen ja linssin välisestä etäisyydestä, minkä kokoinen kuva on sekä miten pään se muodostuu, ja seuraava tehtäväämme onkin analysoida kuvan muodostuminen tarkemmin. Kuvaan 16.32 on piirretty tästä varten valonsäteiden kulkua havainnollistava kuva, jonka avulla voimme määrittää muodostuvan kuvan koon ja paikan. Kuvaan on yksinkertaisuuden vuoksi piirretty vain esineen toinen pää (punainen lamppu) sekä sen kuva, sillä vastakkaisen pään (vihreän lampun) kuvaan paikka määrittyy täsmälleen samalla periaatteella.

Esine on kuvan pisteessä A etäisyydellä L_{esine} linssistä sekä etäisyydellä s_{esine} linssin symmetria-akselista. Kuvaan on nyt piirretty kaksi valonsäädettä. Ylempi säteistä kulkee aluksi symmetria-akselin suuntaan. Säde kohtaa linssin pisteessä B, jolloin se tattuu kohti polttopistettä E. Polttopisteen etäisyys linssistä eli poltto-

väli on merkity symbolilla f . Toinen kuvaan piirretty valonsäde kulkee linssin keskipisteen D kautta eikä siis taitu lainkaan. Valonsäteet kohtaavat pisteessä G, johon muodostuu kuva. Kuvan etäisyys linssistä on L_{kuva} ja sen etäisyys symmetria-akselista on $-s_{\text{kuva}}$. Tässä kuvan etäisyys symmetria-akselista on tapana valita negatiiviseksi, koska kuva muodostui eri puolelle symmetria-akselia esineeseen verrattuna eli linssi käensi kuvan ympäri.

Kuva 16.32: Linssiyhtälön selittävä geometria.



Kuvaan muodostuneet suorakulmaiset kolmiot ACD sekä GFD ovat yhdenmuotoiset, joten niiden kateettien pituuksien suhteista saadaan

$$\frac{s_{\text{esine}}}{L_{\text{esine}}} = -\frac{s_{\text{kuva}}}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.52)$$

Kuten kuvasta 16.31 (b) nähdään, kuvan koko riippuu siitä, kuinka kaukana sen päät ovat symmetria-akselista. Niinpä kuva on esinettä suurempi, jos $|s_{\text{esine}}| < |s_{\text{kuva}}|$. Kuvan **suurennussuhde** määritelläänkin näiden etäisyysien suhteena,

$$M = \frac{s_{\text{kuva}}}{s_{\text{esine}}} = -\frac{L_{\text{kuva}}}{L_{\text{esine}}}. \quad (16.53)$$

Nämä määriteltyt M on negatiivinen, jos kuva on ylösalaisten esineeseen verrattuna, ja positiivinen kuvan ollessa samassa asennossa kuin esine.

Myös kolmiot BDE sekä GFE ovat yhdenmuotoiset, ja näiden kateettien pituuksien suhteet antavat verrannon

$$-\frac{L_{\text{kuva}} - f}{s_{\text{kuva}}} = \frac{f}{s_{\text{esine}}}. \quad (16.54)$$

Voimme ratkaista yhtälöstä (16.52) kuvan etäisyydestä symmetria-akselista $s_{\text{kuva}} = -s_{\text{esine}}L_{\text{kuva}}/L_{\text{esine}}$, ja tämän sijoitus yhtälöön (16.54) antaa

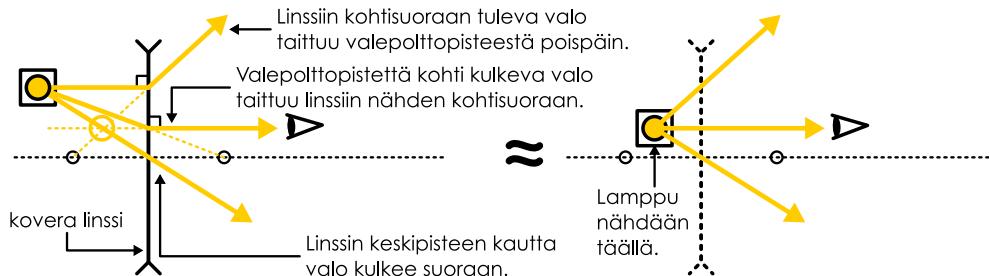
$$\frac{L_{\text{kuva}} - f}{L_{\text{kuva}}} = \frac{f}{L_{\text{esine}}}. \quad (16.55)$$

Kun vielä jaamme yhtälön puolittain tekijällä f ja järjestelemme termit sopivasti, saamme **linssiyhtälön**

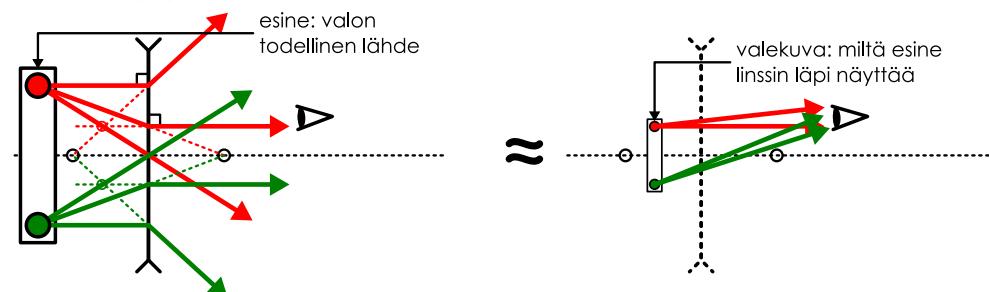
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuva}}}. \quad (16.56)$$

Kuva 16.33: Valon kulku koverassa linssissä. Kuva muodostuu valonsäteiden jatkeiden leikkauuspisteeseen, joten kyseessä on valekuva. Valekuva ei voi saada näkyviin varjostimelle, mutta se kertoo, miltä esine linssin läpi katsottuna näyttää.

(a) Valonsäiden kulku koveran linssin läpi.



(b) Valekuvan synty koverassa linssissä.



16.29 Kuvan 16.32 linssin polttoväli on 20 cm.

- (a) Arvioi kuvasta esineen ja sen kuvan etäisyys linssistä.
- (b) Tarkista, että linssiyhtälö toteutuu.
- (c) Mikä on kuvan suurennussuhde? Vertaa kuvaa.

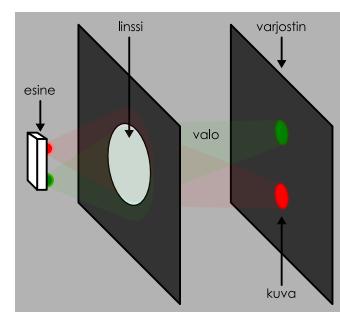
Kuvassa 16.33 on esitetty vastaavasti kuvan muodostuminen koverassa linssissä. Kuvassa (a) on jälleen analysoitu pistemäisestä lampusta lähtevien valonsäteiden kulku. Kohtisuoran linssiin saapuva valonsäde taittuu niin, että se kulkee kuvassa linssin oikealla puolella pois päin linssin vasemmanpuoleisesta valepoltopisteestä. Lampusta kohti linssin oikeanpuoleista valepoltopistettä lähtenyt valonsäde käännyy linssissä symmetria-akselin suuntaiseksi. Ja linssin keskipisteen kautta kulkeva säde etenee suoraan. Nämä valonsäteet eivät leikkaa missään, mutta niiden jatkeet leikkaavat kuvassa linssin vasemmalla puolelle eli samalla puolella kuin missä lamppu todellisuudessa on. Lamppua linssin läpi katsova havaitseja näkee lampun valonsäteiden jatkeiden leikkauspisteessä.

Kuvassa 16.33 (b) on esitetty ei-pistemäisen esineen kuvan muodostuminen samassa linssissä. Esineen päässä on jälleen punainen ja vihreä lamppu, ja esineen kuva selviää tutkimalla, missä nämä lamput nähdään. Nyt linssin muodostama kuva on *pienempi* kuin esine, *samalla puolella linssiä* kuin esine ja *samoin pään* kuin esine.

Koska tässä tapauksessa valonsäteet eivät aidosti leikkaa missään vaan vain niiden kuvitellut jatkeet kohtaavat, linssi ei muodosta kuvaaa vaan **valekuvan**. Kun esinettä katsotaan linssin läpi, kuvalla ja valekuvalta ei ole mitään eroa. Esine nähdään sen kuvan tai valekuvan näköisenä. Kuvan ja valekuvan ero on kuitenkin siinä, että *kuva voidaan projisoida* mutta valekuva ei. Tämä tarkoittaa sitä, että jos esine ja linssi asetetaan niin, että kuvan muodostumiskohdassa on esimerkiksi valkokangas, esineen kuva pürttyy tälle valkokankaalle (kuva 16.34). Fysiikkassa pintaa, jolle kuva pürttyy, kutsutaan **varjostimeksi**. Valekuva *ei piirry varjostimelle*, koska valekuvassa valonsäteet eivät todellisuudessa kohtaa.

Kuvan pürtyminen varjostimelle johtuu siitä, että jos linssin edessä on lamppu, linssi kooaa kaiken lampun lähetämän valon kuvan muodostumiskohdassa yhteen pisteesseen. Jos linssin edessä on ei-pistemäinen esine kuten tässä tarkasteltu punaisen ja vihreän lampun muodostama kappale, linssi kooaa kustakin esineen osasta lähtevän valon varjostimen eri pistesiin. Piste, johon punaisesta lampusta lähtenyt valo kokoontuu, hohtaa punaisena. Vastaavasti piste, johon vihreä valo kokoontuu, nähdään vihreänä.

Kuva 16.34: Kuvan pürtyminen.



16.30 Miten kuvan 16.34 varjostimella nähtävä kuva muuttuu, jos linssin eteen, aivan kiinni linssiin, asetetaan linssin alapuoliskon peittävä levy?

Johdimme edellä linssiyhtälön kuperalle linssille, mutta se toimii myös sekä koverissa linsseissä että kupeissä ja koverissa peileissä, kunhan pituuskien etumerkit valitaan sopivasti. Merkkisäännöt on sovittu tässä niin, että valonsäteet kokoavissa peileissä ja linsseissä, joissa on todellinen poltopiste, polttoväli f on positiivinen. Vastaavasti valonsäteet hajauttavissa peileissä ja linsseissä, joissa on valepoltopiste, polttoväli on negatiivinen. Esineen etäisyys linssistä, L_{esine} , on positiivinen, jos esine on samalla puolella linssiä kuin mistä valonsäteet saapuvat linssiin. Samoin kuvan etäisyys linssistä, L_{kuva} , on positiivinen, jos kuva tai valekuva pürttyy samalle puolelle linssiä kuin mistä valonsäteet poistuvat linssistä. Esimerkiksi kuvan 16.33 tapauksessa L_{esine} on positiivinen, koska esine on linssin vasemmalla puolella, ja valonsäteet saapuvat linssiin vasemmalta. Sen sijaan L_{kuva} on negatiivinen, koska valekuva muodostuu linssin vasemmalle puolelle, mutta valonsäteet poistuvat linssistä sen oikealle puolelle.

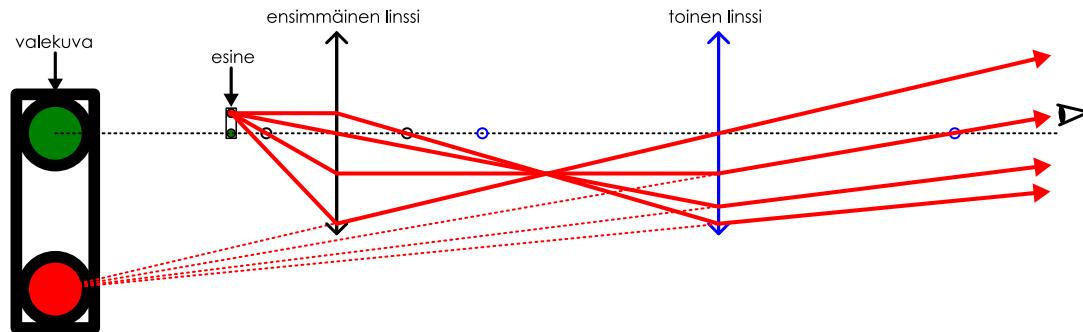
Suurennuslasi on esimerkki yhteen linssiin perustuvasta optisesta laitteesta, mutta yleensä yksi linssi ei riitä vaan optisissa instrumenteissä tarvitaan useita linssejä tai peilejä ohjaamaan valonsäteiden kulkua. Esimerkiksi optiset kaukoputket, kuumarit ja mikroskoopit koostuvat kaikki useista linsseistä.

Kun esinettä katsotaan usean linssin läpi, jokainen linssi käännytää sen läpi kulkevien valonsäteiden reittiä, kuten kuvan 16.35 esimerkissä. Tässä kuvassa on kaksi kuperaa linssia, jotka kumpikin taittavat niille saapuvia valonsäteitä toisiaan kohti. Ensimmäinen linssi kooaa säteet yhteen linssien välissä olevaan pisteesseen. Valo kuitenkin jatkaa kulkuaan, ja säteet hajaantuvat jälleen ennen saapumistaan toiseen linssiin. Toinen linssi taittaa valonsäteitä toisiaan kohti, mutta tässä esimerkissä toinen linssi ei ole kyllin vahva taittamaan sille saapuvia säteitä yhteen pisteesseen. Valonsäteet eivät siis hajaannu toisen linssin läpi kuljettuaan enää niin paljon kuin sille saapuessaan, mutta silti ne hajaantuvat ja niinpä linssiin katsovan havaitsejan mielestä valonsäteet näyttävät tulevan linssien takaa pistestä, jossa säteiden jatkeet leikkaavat.

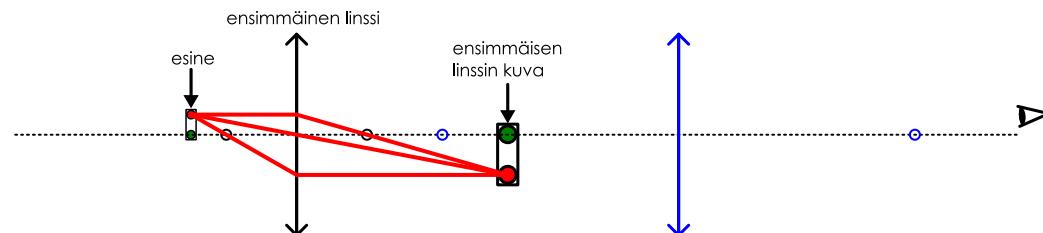
Valonsäteiden kulku usean linssin tai peilin systeemin läpi voi olla hyvin monimutkaista, mutta se voidaan silti analysoida varsin helposti. Toinen linssihän ei tiedä, miten siihen saapuneet valonsäteet ovat

Kuva 16.35: Valon kulku usean linssin läpi. Ensimmäinen linssi muodostaa esineestä kuvan, joka toimii esineenä toiselle linssille. Havaitsija näkee toisen linssin muodostaman valekuvan. Koska lopullinen valekuva on paljon suurempi kuin esine, laite voisi olla esimerkiksi mikroskooppi.

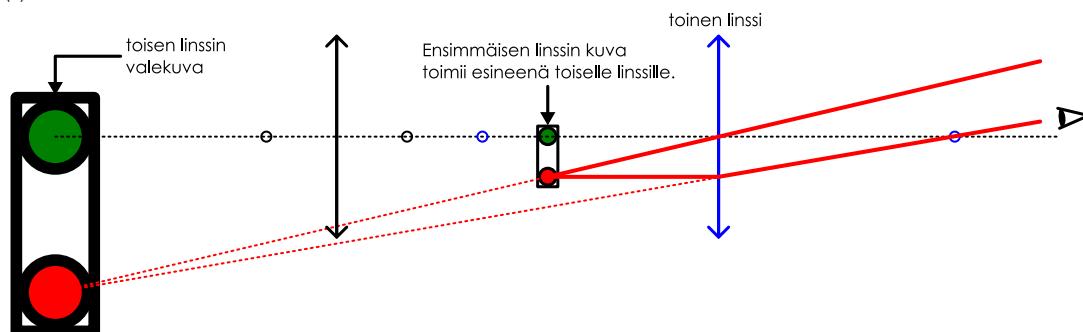
(a) Valonsäteiden kulku kahden kuperan linssin läpi.



(b) Ensimmäinen linssi muodostaa esineestä suurennetun kuvan.



(c) Toinen linssi muodostaa edellisestä kuvasta vielä suuremman valekuvan.



kulkenee vaan linssi toimii niin kuin valonsäteet olisivat alunperin lähteneet liikkeelle siitä pisteestä, jossa ne ensimmäisen linssin jälkeen leikkasivat. Toisaalta tämä on se piste, johon ensimmäinen linssi muodostaa kuvan, joten toisen linssin toiminta voidaan analysoida ajattelemana, että *ensimmäisen linssin muodostama kuva toimii toisen linssin esineenä* (kuvat 16.35 (b) ja (c)). Sama periaate toimii riippumatta linssien lukumäärästä tai niiden tyyppistä, ja linssisysteemin toimintaa voi tutkia linssi kerrallaan niin, että edellisen linssin kuva toimii aina seuraavan linssin esineenä. Jos linssejä on useita, linssit täytyy käydä läpi siinä järjestyksessä missä valo kulkee niiden läpi.

Piste, josta valo näyttää katsojan silmään tulevan, on viimeisen linssin luoma kuva tai valekuva. Tämä on siis myös koko linssisysteemin luoma kuva. Tässä esimerkissä ensimmäinen linssi muodostaa kuvan polttoväliä lähemmäs toista linssiä, jolloin toinen linssi muodostaa suuren valekuvan (vrt. esimerkin 16.4 (a)-kohta). Tässä linssit on asetettu vieläpä niin, että kumpikin niistä suurentaa. Ensimmäisen linssin suurennussuhde on noin $M_1 = 2$ ja toisen linssin noin $M_2 = 4$. Lopullinen suurennus on näiden tulo, $M = M_1 M_2 = 8$. Koska suurennukset kertautuvat, monista linsseistä koostuvat laitteet voivat tuottaa hyvin suuria suurennoksia.

On myös eräs tilanne, joka on mahdollinen kahden tai useamman linssin systeemissä mutta ei yhdelle linssille. Yksittäiselle linssille esine on nimitöin *aina* samalla puolella linssiä kuin mistä valo saapuu, koska muutenhan esinettä ei katsottaisi linssin läpi. Linssightälössä tämä tarkoittaa sitä, että L_{esine} on aina positiivinen. Linssisysteemeissä on kuitenkin aivan mahdollista, että ensimmäisen linssin muodostama kuva onkin seuraavaan linssiin verrattuna *eri puolella* kuin mistä valo saapuu. Kuvan 16.35 esimerkissä näin kävisi, jos toinen linssi sijrettiäisiin kyllin lähelle ensimmäistä linssiä, sillä piirroksessa valo saapuu systeemiin vasemmalta, mutta jos linssit ovat liian lähekkäin, ensimmäisen linssin kuva muodostuisi toisen linssin oikealle puolelle. Tämä ei ole mikään ongelma vaan tilanne voitaisiin edelleen analysoida pitämällä ensimmäisen linssin muodostamaa kuva esineenä toiselle linssille. Tällöin kuitenkin linssightälössä esineen etäisyydelle linssistä L_{esine} pitää käyttää negatiivista arvoa.



16.31 Millainen kuva tai valekuva syntyi, jos kuvassa 16.35 toinen linssi olisikin lähempänä ensimmäistä linssiä kuin ensimmäisen linssin muodostama kuva? Piirrä kuva ja tarkista linssiyhtälöllä.

esimerkki 16.4

Suurennuslasi

Suurennuslasi on kupera linssi, jonka polttoväli on 10 cm. Mikä on kuvan tai valekuvan paikka ja koko, jos esine on etäisyydellä (a) 6 cm tai (b) 30 cm linssistä?

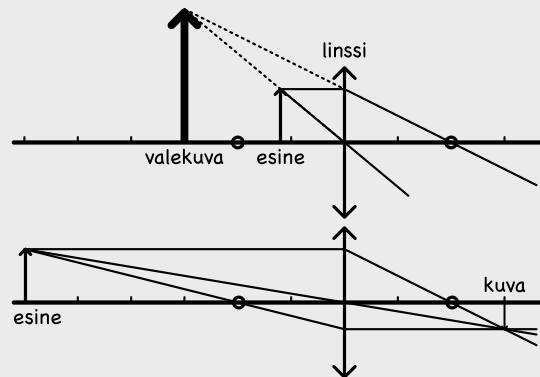
TILANNE Piirretään kuvat valonsäteiden kulusta. Merkitään esinettä nuolella, ja piirretään vain nuolen kärjestä lähtevät säeteet. Linssin keskipisteen kautta kulkeva säde kulkee suoraan. Linssille kohtisuoraan saapuva säde taittuu kohti polttopistettä. Linssille polttopisteen kautta saapuva säde taittuu kulkemaan kohtisuoraan linssiä kohtaan. Kuva syntyy valonsäteiden (jatkuva viiva) tai niiden jatkeiden (katkoviiva) laikkauspisteesseen. Kuva on aito kuva, jos valonsäteet leikkaavat. Jos säteiden jatkeet leikkaavat, kyseessä on valekuva.

SUUNNITELMA Voimme lukea kuvan koon ja paikan sädemia grammista tai laskea linssiyhtälöllä

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuvा}}}. \quad (16.57)$$

Esineen koko on suoraan verrannollinen siihen, mikä on esineen ja kuvan linssistä mitatutun etäisyden suhde. Tätä mitataa suurennussuhde

$$M = -\frac{L_{\text{esine}}}{L_{\text{kuvा}}}. \quad (16.58)$$



RATKAISU (a) Kuvan etäisyys linssistä on

$$L_{\text{kuvा}} = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{L_{\text{esine}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{6 \text{ cm}} \right)^{-1} = -15 \text{ cm}. \quad (16.59)$$

Negatiivinen tulos tarkoittaa sitä, että kuva muodostuu samalle puolelle linssiä kuin missä esine on. Linssin suurennussuhde on

$$M = -\frac{-15 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 2.5. \quad (16.60)$$

Koska tämä on ykköstä suurempi, kuva on esinettä suurempi. Ja koska tämä on positiivinen kuva nähdään samoin päin kuin esine. Tässä tapauksessa suurennuslasi siis todella toimii suurennuslasina.

(b) Nyt etäisyys linssistä on

$$L_{\text{kuvा}} = \left(\frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{30 \text{ cm}} \right)^{-1} = 15 \text{ cm}. \quad (16.61)$$

Koska tämä on positiivinen, kuva muodostuu esineestä katsoen linssin vastakkaiselle puolelle. Suurennussuhde on

$$M = -\frac{15 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = -0.5. \quad (16.62)$$

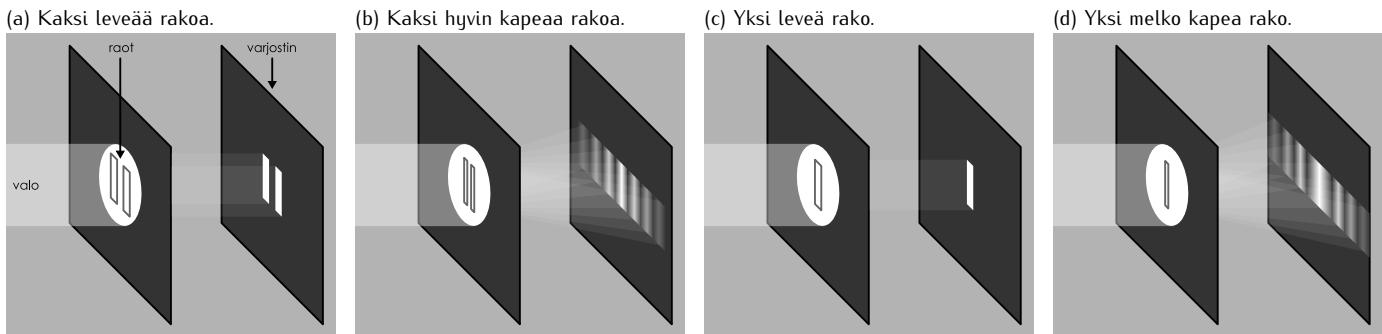
Kuva on siis esinettä pienempi ja se muodostuu väärin päin. Nyt linssi ei toimi suurennuslasina.

ARVIOINTI Verrataan laskuja kuviin. Ensimmäisessä tapauksessa kuva muodostuu valonsäteiden jatkeiden leikkauspisteeseen, joten kyseessä on valekuva. Valekuva on 2.5 kertaa suurempi kuin esine ja se muodostuu polttopistettä kauemmas linssistä, kuten laskettiin. Toisessa tapauksessa muodostuu aito kuva. Kuvan etäisyys linssistä on yhtä suuri kuin ensimmäisessä tilanteessa, mutta nyt kuva syntyy linssin vastakkaiselle puolelle ja se käännyy ympäri. Kuvan koko on puolet esineen koosta ja suurennussuhde on -0.5, eli lasku ja piirros vastaavat toisiaan.



16.32 Kirjoita omin sanoin tiivistelmä sädeoptiikasta. Miten kuperat ja koverat peilit ja linssit toimivat? Mikä on kuva ja valekuva, ja miten ne muodostuvat? Miten päättelet piirtäen ja linssiyhtälöllä laskien, millaisen kuvan linssi muodostaa? Miten analysoit useasta linssistä koostuvan laitteen toiminnan?

Kuva 16.36: Makroskooppisista aukoista kulkeva valo voi kuvata suoraan kulkevina valonsäteinä eli sädeoptiikan avulla. Valo kuitenkin kokee interferenssiä ja diffraktiota kulkissaan raoista, joiden leveys on valon aallonpituuuden luokkaa. Tätä kutsutaan aalto-optiikaksi.



Aalto-optiikka

Sädeoptiikassa valoa kuvataan suoria viivoja pitkin kulkevina säteinä. Aineiden rajapinnalla tällaisen säteen kulkusuunta voi muuttua, ja säde voi jakautua kahtia heijastuneeksi ja tatttuneeksi säteeksi, mutta muuten valon kulku on suoraviivaista. Niinpä esimerkiksi linssien ja peilien toiminnan voi ymmärtää pelkästään tatttumislain pohjalta. Itse asiassa tämä optiikan haara kehittyi jo kauan ennen kuin ymmärrettiin, että valo on sähkömagneettisen kentän aalto. Valo kuitenkin on aalto, ja niinpä kaikki aaltojen tyypilliset ilmiöt kuten interferensi havaitaan myös valolla, ja valon käyttäytymistä näissä ilmiöissä kuvaa **aalto-optiikka** eli **fysiikaalinen optiikka**.

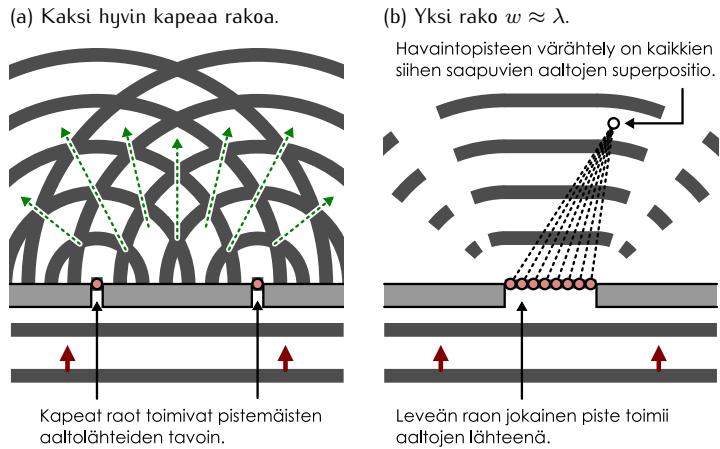
Kuvassa 16.36 on esitetty valon kulku erilaisista aukoista. Jokaisessa kuvassa valo saapuu vasemmalta, kulkee yhdessä levyssä olevan aukon läpi ja saapuu sitten varjostimelle. Kuvassa 16.36 (a) valo kulkee kahdesta aukosta, jotka ovat selvästi sen aallonpituuutta leveämät. Tällöin varjostimella nähdään kaksi kirkasta viivaa, ja tämä voidaan selittää yksinkertaisesti niin, että valonsäteet kulkevat aukoista suoraan. Kahden raon takana nähdään kaksi kirkasta viivaa, koska kummastakin raosta kulkeneet valonsäteet piirtävät oman, erillisen viivansa.

Kuvassa 16.36 (b) on esitetty sama koe, kun aukot ovat kapeat ja niiden välinen etäisyys on valon aallonpituuksen kokoluokkaa eli korkeintaan joitakin mikrometrejä. Nyt varjostimella ei nähdäkään kahta hyvin kapeaa viivaa vaan *joukko viivoja*. Nämä viivat eivät myöskään ole yhtä leveitä kuin aukot, joista valo kulki. Sen sijaan viivojen määrä, leveys ja keskinäinen etäisyys riippuu aukkojen välistä etäisyydestä. Mitä lähempänä aukot ovat toisiaan, sitä leveämpää viivoja varjostimella nähdään. Tämä johtuu siitä, että nyt valo kulkee aaltona kummastakin aukosta ja eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat aukkojen takana. Varjostimella nähdään kirkkaat viivat niissä paikoissa, joissa valon intensiteetti on suuri, eli vahvistavan interferenssin suunnissa. Tuhoavan interferenssin suuntiin ei kulje lainkaan valoa, ja niinpä näissä suunnissa varjostimella on tumma, valoton alue.

Kuvissa 16.36 (c) ja (d) on esitetty samanlainen vertailu, kun valo kulkee yhdestä raosta. Jos rako on leveä, nähdään varjostimella jälleen kirkas alue, jonka muoto on sama kuin raon muoto. Jos sen sijaan raon leveys on samaa suuruusluokkaa kuin valon aallonpituuus eli korkeintaan joitakin mikrometrejä, yhden viivan sijaan varjostimella nähdään useita valaistuja alueita.

Kuvan (b) tilannetta kutsutaan *kaksoisrakokokeeksi* tai Youngin kokeeksi (Thomas Youngin mukaan). Kuvan (d) tilannetta puolestaan kutsutaan valon *diffraktioksi* kapeassa raossa. Kummassakin tapauksessa kyse on interferenssistä, joka voidaan ymmärtää Huygensin periaatteen ja valon aaltoluonteen avulla. Valon kulkissa kahdesta kapeasta raosta *kumpikin rako toimii Huygensin periaatteen mukaisesti pistemäisen aaltolähteiden tavoin*, ja rakojen takana aallot interferoivat suunnissa, joissa ne ovat samassa vaiheessa (kuva 16.37 (a), vrt. kuva 16.16 (b)). Valon kulkissa yhdestä leveästä raosta *jokainen rako piste toimii aallon lähteenä*, ja tilanne on samanlainen kuin jos raon sijaan aallon synnyttäisi

Kuva 16.37: Aallon interferenssi ja diffraktio.



rivi pistemäisiä lähteitä (kuva 16.37 (b), vrt. kuva 16.20 (b)). Näillä kokeilla on ollut valtava historiallinen merkitys, sillä niiden perusteella aikoinaan hyväksytin, että valo koostuu aalloista eikä hiukkasia jo huomattavasti ennen sähkömagneettisten aaltojen löytymistä.

Kaksoisrakokokeessa on siis kyse kahden lähteen interferenssistä, jonka selitimme jo luvussa 16.3. Valon tapauksessa emme kuitenkaan havaitse sähkömagneettista aaltoa itsessään vaan näemme ainoastaan varjostimella kirkkaasti ja himmeästi valaistuja alueita. Toisaalta kirkas valo tarkoittaa sähkömagneettisen aallon suurta intensiteettiä ja himmeä valo pientä. Niinpä varjostimella nähtävä kuvio on suora mittari havaintopisteisiin saapuvan aallon intensiteetistä. Kun siis haluamme ymmärtää kaksoisrakokokeessa nähtävän kuvion synnyin, tahdomme tosiasissa selvittää, missä pisteissä aallot interferoivat toisiaan vahvistavasti ja missä heikentävästi.

Kaksoisrakokokeen geometria on esitetty kuvalle 16.38 (a). Aaltojen lähteet (eli raot) on piirretty punaisin ympyröin ja varjostimelta valittu havaintopiste valkoisena ympyränä. Havaintopisteessä mitataan suuri intensiteetti (nähdään kirkas valo), jos eri lähteistä tulevat aallot ovat samassa vaiheessa. Vastaavasti intensiteetti on nolla (nähdään valoton alue), jos aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa. Lähteet väärätelevät samassa vaiheessa, joten havaintopisteeseen saapuvien aaltojen vaihe-ero riippuu ainoastaan niiden kulkkien matkojen eroasta.



16.33 Edellä oletettiin, että lähteet väärätelevät samassa vaiheessa. Selitä kuvalle 16.37 (a) perusteella, miksi näin täytyy olla. Miten voisit muuttaa koejärjestelyä niin, että lähteet eivät olekaan samassa vaiheessa?

Matkaero voidaan ratkaista geometrisesti. Kuvalle vasemmanpuoleinen lähde on kauempana havaintopisteestä, ja tämän havainnollistamiseksi lähteestä havaintopisteesiin piirretty jana on jaettu kahteen osaan. Turkoosilla väritetty osa on yhtä pitkä kuin oikeanpuoleisesta lähteestä havaintopisteesiin mitattu matka, jolloin punaisella piirretty osuus on matkojen pituuskien erotus.

Valon tapauksessa interferensi havaitaan lähteiden välisen etäisyyden d ollessa valon aallonpituuuden suurelta varjostimelle voi sen sijaan olla metrejä eli paljon rakojen välistä etäisyyttä suurempi. Huomaan kuitenkin, että kuvalle (a) turkoosilla piirretty janat muodostavat tasakylkisen kolmion kyljet. Havaintopisteen ollessa hyvin kaukana lähteistä (etaisyyteen d verrattuna) tämä tasakylkinen kolmion on erittäin pitkä ja kapea, ja sen kyljet ovat lähes yhdensuuntainen suorat, mutta ne ovat silti yhtä pitkät. Tämä tilanne voidaan esittää erittäin hyvällä tarkkuudella kuvalle 16.38 (b) piirretyllä geometrialla, jossa havaintopiste on äärettömän kaukana ja suorat ovat todella yhdensuuntainen. Nyt kuvalle muodostuu harmaalla väritetty suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on lähteiden välinen jana ja toinen kateetti on punaisella piirretty aaltojen kulkemien matkojen ero. Kuvalle on merkitty valon alkuperäisen kulkusuunnan ja raoista havaintopisteesiin osoittavan suunnan välistä kulmaa symbolilla θ , ja tämä sama kulma on myös harmaalla piirretynä kolmiossa matkaeroa kuvaavan kateetin vastakkaisena kulmana. Tämän kulman sini voidaan siis ilmaista matkaeroa kuvaavan kateetin pituuden Δr ja hypotenuusan pituuden d suhteena, $\sin \theta = \frac{\Delta r}{d}$, tai toisin päin matkaeroa kuvaavan kateetin pituus on hypotenuksen pituus kerrottuna vastakkaisen kulman sinillä,

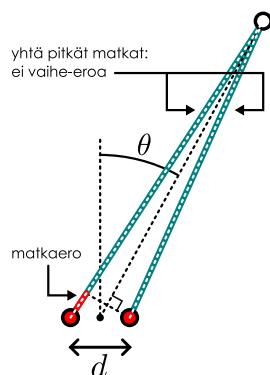
$$\Delta r = d \sin \theta. \quad (16.63)$$



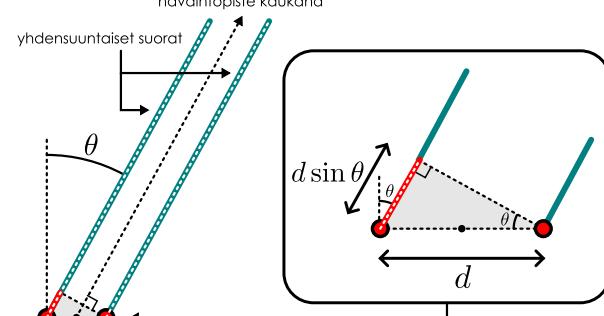
16.34 Osoita yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, että kuvalle 16.38 (b) harmaan kolmion terävä kulma θ on sama kuin raoista havaintopisteesiin osoittavan suunnan ja rakojen normaalisuunnan välinen kulma θ .

Kuva 16.38: Kaksoisrakokokeessa vahvistava interferensi tapahtuu, kun aaltojen kulkemien matkojen ero on aallonpituuuden monikerta.

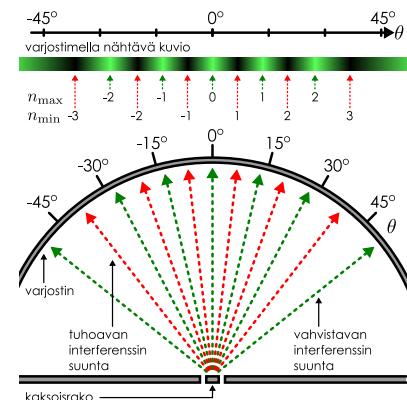
(a) Vaihe havaintopisteessä riippuu aaltojen kulkemasta matkasta.



(b) Jos havaintopiste on kaukana rakojen etäisyyteen nähdyn, aaltojen matkaero voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiossa.



(c) Havaitaan interferenssikuvio.



Yhden aallonpituisen matkalla aallon vaihe muuttuu yhden kokonaisen kierroksen, joten eri lähteiden aallot interferoivat vahvistavasti, jos matkaero on jokin aallonpituisen monikerta, $|\Delta r| = 0, \lambda, 2\lambda$ jne. (Tässä määritelty matkaero Δr voi luonnollisesti olla myös negatiivinen, sillä havaintopiste voi olla myös lähempänä vasemmanpuoleista lähdettä kuin oikeaa.) Jos puolestaan matkaero on jokin aallonpituisen monikerta plus puolikas aallonpituuus, $|\Delta r| = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$ jne., aallot ovat täsmälleen vastakkaisissa vaiheissa ja tapahtuu tuhoava interferenssi. Vahvistava interferenssi tapahtuu siis, jos $|\Delta r| = |n_{\max}| \lambda$, ja tuhoava interferenssi jos $|\Delta r| = |n_{\min}| - \frac{1}{2} \lambda$. Tässä kokonaislukuiindeksi $|n_{\max}| = 0, 1, 2, \dots$ on *intensiteettimaksimin kertaluku* ja $|n_{\min}| = 1, 2, \dots$ on *intensiteettiminimin kertaluku*.

Sijoittamalla näihin ehtoihin matkaeron lauseke (16.63), saamme ratkaistua suunnat, joissa havaitaan vahvistava ja tuhoava interferenssi. Valon intensiteetillä on maksimi, kulmissa θ_{\max} , joille pätee

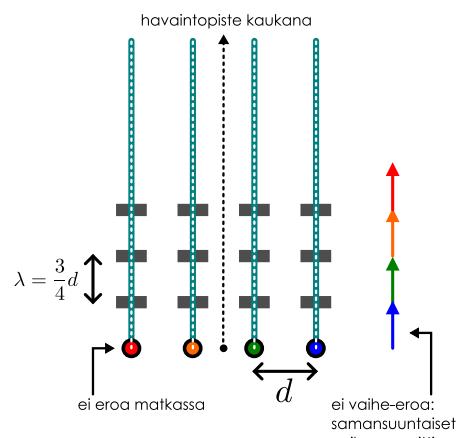
$$d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda. \quad (16.64)$$

Etumerkkien valinta on tässä sopimuskysymys. Kuvassa 16.38 (c) etumerkit on valittu niin, että kulma θ ja indeksi n_{\max} ovat kuvan vasemmalla puolella negatiiviset ja oikealla puolella positiiviset. Vastaavasti intensiteettiminimit havaitaan kulmissa θ_{\min} , joille pätee

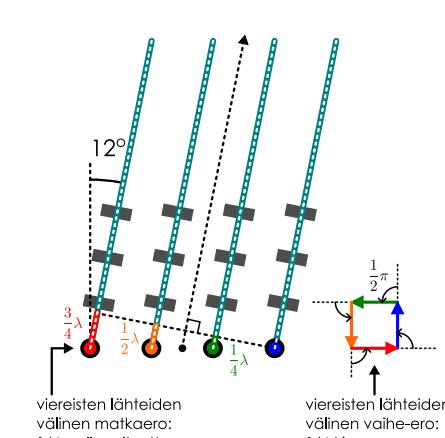
$$d \sin \theta_{\min} = \pm \left| n_{\min} - \frac{1}{2} \right| \lambda. \quad (16.65)$$

Kuva 16.39: Vahvistavan ja heikentävän interferenssin suuntien määrittäminen valon kulkiessa neljästä tasavälisestä raosta.

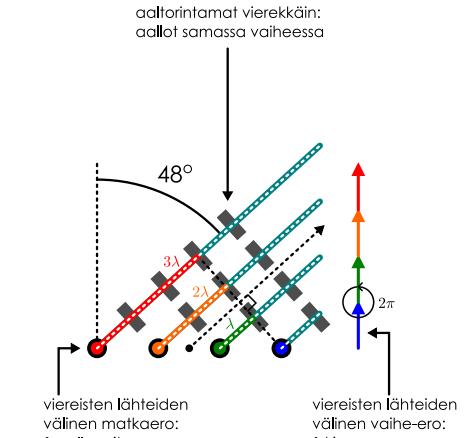
(a) Valo kulkee suoraan: keskuskaksimi.



(b) Ensimmäinen minimi.



(c) Sivumaksimi.

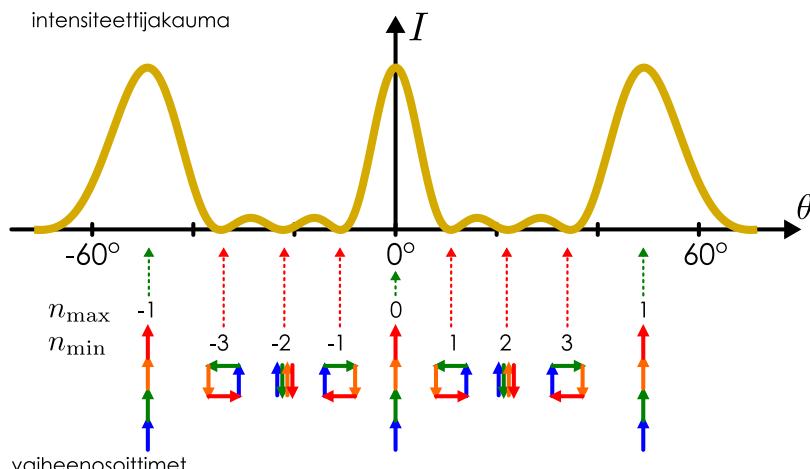


(d) Havaitaan muutama intensiteetin päämaksimi ja maksimien välissä kolme minimia.

varjostimella nähtävä kuva



intensiteettijakauma



Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa valo kulkee kahden raon sijaan useasta kapeasta raosta. Kuvasa 16.39 on esimerkinä neljän raon tapaus. Kuvassa jokainen rako eli aallon lähde on kuvattu väillisenä ympyränä ja ympyröistä lähtevät suorat kulkevat kaukana olevaan havaintopisteeseen. Myös aaltojen vaiheenosoitimet havaintopisteessä on piirretty. Kuvassa 16.39 (a) aallot kulkevat raoista suoraan, ja ne ovat kaikki samassa vaiheessa. Tämä näkyy siitä, että eri lähteistä tulevien aaltojen rintamat (paksut tummat viivat) ovat vierekkäin samassa linjassa. Vaiheenosoitimet ovat kaikki samansuuntaiset, ja niiden summana saadaan siis pitkä vaiheenosoitin. Tämän vaiheenosittimen pituus edustaa sähkömagneettisen aallon amplitudia havaintopisteessä, joten tässä suunnassa aallolla on suuri amplitudi ja intensiteetti.

Vaiheenosoitajien summan pituus on suurimmillaan silloin, kun vaiheenosoitimet osoittavat samaan suuntaan. Tällöin summan pituus on yksinkertaisesti nelinkertainen yhden lähteen vaiheenosittimeen verrattuna. Jos vaiheenosoitimien suunnat poikkeavat toisistaan, niiden summan pituus on välttämättä tästä lyhyempi. Kuvassa 16.39 (a) vaiheenosoitimet ovat samansuuntaiset siksi, että jokaisesta lähteestä on havaintopisteeseen yhtä pitkä matka. Vaiheenosoitimet voivat kuitenkin olla samansuuntaiset, vaikka aaltojen kulkemat matkat olisivat eri pituiset. Jos esimerkiksi kahdesta vierekkäisestä lähteestä havaintopisteeseen saapuvien aaltojen matkojen ero on yksi aallonpituuus kuten kuvassa 16.39 (c), vierekkäisten lähteiden vaiheenosoitimet poikkeavat toisistaan yhden kokonaisen kierroksen. Tällöin vaiheenosoitimet ovat jälleen samansuuntaiset. Samoin käy, jos vierekkäisistä lähteistä tulevien aaltojen matkaero on jokin aallonpituuuden monikerta. Tällöin jokainen vierekkäisten lähteiden pari on keskenään samassa vaiheessa, ja niihin kaikki lähteet ovat keskenään samassa vaiheessa.

Kuvat 16.39 (a) ja (c) esittävät tilanteita, joissa eri lähteiden aallot vahvistavat toisiaan täydellisesti. Näissä kulmissa varjostimella havaitaan intensiteettimaksimi. Toisin sanoen näissä kulmissa varjostimella on kirkas viiva. Näiden maksimien välillä aallon intensiteetin täytyy puolestaan välttämättä olla pienempi. Kuvassa 16.39 (b) on esitetty tilanne, jossa vierekkäisistä lähteistä tulevien aaltojen matkaero on neljännes aallonpituudesta. Esimerkiksi matka kuvassa vihreällä piirretystä lähteestä havaintopisteeseen on $\Delta r = \frac{1}{4}\lambda$ pidempi kuin matka sinisestä lähteestä. Tämä tarkoittaa sitä, että vihreän lähteen aallon vaiheenosoitin kiertyy neljänneskierroksen sinisen lähteen vaiheenosittimeen verrattuna eli vaiheenosoitimet ovat toisiinsa nähdyn kohtisuorassa. Samoin matka oranssistä lähteestä havaintopisteeseen on pidempi kuin vihreästä ja matka punaisesta pidempi kuin oranssista. Niihin nämäkin vaiheenosoitimet kääntyvät neljänneskierrokseen naapureihinsa verrattuna. Yhdessä kaikki neljä vaiheenosoitinta muodostavat *neliön*, ja niiden summana saatava vaiheenosoitin on näin ollen *nollamittainen*. Tämä tarkoittaa, että sähkökentän väärähtelyn amplitudi on havaintopisteessä nolla, eli tässä suunnassa tapahtuu täydellinen tuhoava interferensi.

Kuvassa 16.39 (d) on piirretty varjostimella nähtävä kuvio sekä valon intensiteetti havaintokulman θ funktiona. Intensiteettijakaumassa on maksimi kulmilla $\theta = 0^\circ$ sekä $\theta = \pm 48^\circ$, mitkä vastaavat kuvien (a) ja (c) tilanteita. Intensiteetti on nolla kaikissa niissä pisteissä, joissa vaiheenosoitinten summa on nolla, ja näitä ovat kulmat $\theta = \pm 12^\circ, \pm 24^\circ, \pm 36^\circ$. Ensimmäinen näistä vastaa kuvan (b) tilannetta. Valon intensiteettijakaumassa on siis kirkkaita intensiteettimaksimeja, ja näiden välissä on aina *kolme* intensiteettiminimiä sekä näiden erottamat alueet, joissa intensiteetti on hieman nollaa suurempi.



16.35 Vertaa intensiteettijakaumaa kuvassa 16.39 kuvan 16.19 (a) interferenssikuvioihin. Mitä interferenssikuvioita intensiteettijakauma vastaa? Ovatko intensiteettimaksimit ja -minimit samoissa kulmissa kummassakin kuvassa?

Kaksoisrakokoetta analysoidessamme johdimme relaation (16.64) intensiteettimaksimien kulmille. Tämä yhtälö johdettiin siitä ehdosta, että kahden lähteen aallot ovat samassa vaiheessa, jos niiden kulkemien matkojen ero on aallonpituuuden monikerta. Yllä päättelimme, että myös neljän raon tapauksessa intensiteettimaksimin ehto on se, että vierekkäisten lähteiden aaltojen matkaero on aallonpituuuden monikerta. Koska vahvistavan interferenssin ehto on kummassakin tilanteessa sama, intensiteettimaksimit voidaan määrittää yhtälöstä (16.64) myös neljän raon tapauksessa. Erityisesti *intensiteettimaksimit havaitaan samoissa kulmissa riippumatta rakojen määrästä*, kunhan vierekkäisten rakojen välinen etäisyys d on sama (kuva 16.40).

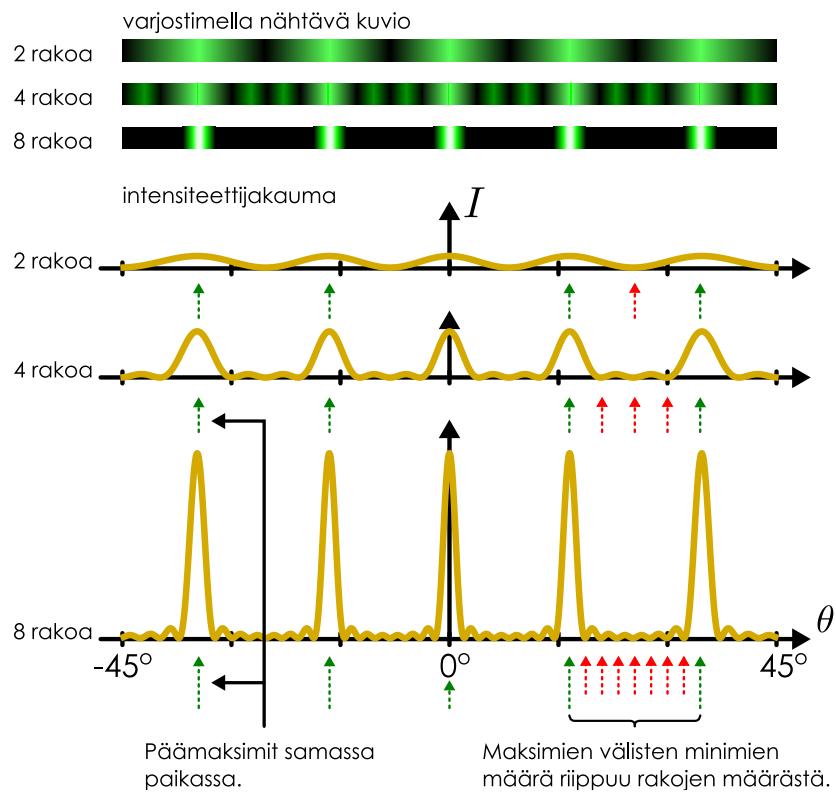
Maksimien välillä intensiteettijakauman muoto kuitenkin riippuu rakojen lukumäärästä. Kaksoisrakokokeessa kahden vierekkäisen intensiteettimaksimin välissä on aina yksi intensiteettiminimi, koska kaksi aaltoa kokevat tuhoavan interferenssin vain niiden vaiheenosoitinten ollessa vastakkaisuuntaiset. Neljän raon tapauksessa minimejä on kuitenkin *kolme*, koska neljän vaiheenosittimen summaksi voidaan saada nolla usealla tavalla. Kuvassa 16.39 (b) vierekkäisten aaltojen vaiheenosittimia on kierretty neljänneskierros, mutta vaiheenosoitimien summaksi tulee nolla myös, jos vierekkäisten osoittimien välinen kulma on puoli kierrostaa tai kolme neljännestä täydestä kierroksesta (kuva 16.39 (d)).



16.36 Kuvassa 16.39 (d) on piirretty neljän lähteen vaiheenosoitimet, jotka tuottavat aallon amplitudiksi nollan. Millaiset ovat vastaavat kuviot, jos lähteitä on viisi? Montako nütä on?

Yleisesti, jos meillä on N lähettä ja vierekkäisten lähteiden aaltojen välillä on vaihe-ero $\Delta\phi$, vaiheenosittimien summa on nolla jos ja vain jos tämä vaihe-ero on jokin murto-osa $1/N, 2/N, 3/N$ jne. täydestä

Kuva 16.40: Havaitut intensiteettijakaumat, kun valo kulkee kahden, neljän tai kahdeksan raon läpi, ja rakojen välinen etäisyys on kolme ja puoli aallonpituuutta, $d = 3.5\lambda$.



kierroksesta mutta ei täyden kierroksen monikerta. Toisin sanoen aallot kokevat täydellisen tuhoavan interferenssin, jos vaihe-ero on $\Delta\phi = \frac{n}{N}2\pi$, missä n on jokin kokonaisluku, joka ei ole jaollinen vaiheenoottimien lukumäärällä N . Esimerkiksi 4 lähteen tapauksessa intensiteetti on nolla, jos vierekkäisistä lähteistä saapuvien aaltojen vaihe-ero on 1/4, 2/4 tai 3/4 täydestä kierroksesta, mutta intensiteetillä on maksimi, kun vaihe-ero on 4/4 eli yksi kokonainen kierros.

Tästä johtuen N lähettä tuottavat intensiteettijakauman, jossa kahden vierekkäisen intensiteettimaksimin välissä on $N - 1$ kulmaa, joissa intensiteetti on nolla. Siispä mitä enemmän rakoja on, sitä kapeammaksi intensiteettimaksimit käyvät. Lisäksi rakojen läpi kulkevan energian määrä on suoraan verrannollinen rakojen määrään, joten intensiteetin täyttyy maksimien kohdalla olla sitä suurempi, mitä useammasta raosta valo kulkee, kuten kuvasta 16.40 nähdään.



16.37 Tehdään kaksi interferenssikoetta. Ensimmäisessä valo kulkee 3 ja toisessa 6 raon läpi. Rakojen leveys ja keskinen etäisyys on sama. Miten muuttuu intensiteettimaksimien (a) lukumäärä, (b) leveys, (c) korkeus? (d) Entä varjostimelle saapuvan energian kokonaismäärä? (e) Ovatko kohtiin (a)–(d) tulokset sopusioinnussa keskenään?

Siispä mitä useammasta raosta valo kulkee, sitä kapeammiksi ja kirkkaammiksi interferenssimaksimit käyvät. Vastaavasti maksimien väleillä intensiteettiminimien määrä kasvaa ja niinpä valon kuljettama energia keskittyy yhä enemmän maksimeihin, joiden välissä energiaa ei virtaa juuri lainkaan. Rakennetta, jossa on hyvin monta tasavälistä, erittäin kapeaa raka, kutsutaan *diffraktiohilaksi*. Tällaisesta hilasta kulkeva valonsäde haarautuu interferenssin takia useaksi säteeksi, joilla on kullakin täsmällinen kulkusuunta. Ilmiön voi havaita helposti esimerkiksi DVD-levyn avulla. Informaatio tallennetaan tällaisen levyn pinnassa kulkeviin hyvin kapeisiin ja tiheässä oleviin uruihin, ja valon heijastuessa levyn pinnasta kukin ura toimii uuden aallon lähteenä. Urista heijastuvat aallot interferoivat aivan samoin kuin rakojen läpi kulkevat aallo, joten levyn pinta toimii heijastavan diffraktiohilan tavoin. Jos pintaa valaisee esimerkiksi laserosoittimella, pinnasta heijastunut valo jakautuu useaksi säteeksi. Säteet kulkevat täsmälleen niihin suuntiin, joissa eri urista heijastuneet aallot interferoivat vahvistavasti.



16.38 DVD-levystä heijastuva valkoinen valo hajaantuu eri väreihin, mikä näkyy levyn pinnalla "sateenkaarina." Selitä ilmiö sen perusteella, että levyn pinta toimii diffraktiohilan tavoin.

esimerkki 16.5

Usean raon interferenssi

(a) Johda intensiteetin lauseke poikkeamakulman θ funktiona, kun valo (aallonpituuus λ) kulkee N tasaväisen (etäisyys d) hyvin kapean raon läpi. (b) Piirrä intensiteetti, kun $d = 4\lambda$ ja $N = 2, 4, 6$.

SUUNNITELMA Oletetaan, että valo saapuu raoille suorana rintamana samassa vaiheessa, jolloin kunkin rakan rakenne on samassa vaiheessa värähtelevä uuden aallon lähdde. Olkoon yhdestä rasta tulevan aallon amplitudi havaintoetäisyydellä A_0 ja intensiteetti I_0 . Jos havaintopiste on kaukana raoista niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, eri raoista tulevien aaltojen amplitudit ovat hyvin tarkasti samat.

Aaltojen superposition amplitudi ratkeaa laskemalla aaltojen vaiheenosottimien summan pituus. Koska vierekkäisten rakojen välinen etäisyys on vakio, d , vierekkäisistä raoista tulevien aaltojen vaihe-ero on myös vakio,

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta, \quad (16.66)$$

sillä aaltojen kulkemien matkojen pituusero on $\Delta r = d \sin \theta$. Vaiheenosotinkuviossa on siis N nuolta, joiden pituus on E , ja vierekkäisten nuolten välinen kulma on $\Delta\phi$. Tehtäväänä on ratkaista näiden nuolten vektorisumman pituus, mutta teimme tämän jo esimerkissä 14.4. Lopputulos oli

$$A_{\text{summa}} = A_0 \frac{\sin(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})}. \quad (16.67)$$

Koska intensiteetti on verrannollinen amplitudin neljään, intensiteettijakauma on siis

$$I_{\text{summa}} = I_0 \frac{\sin^2(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\Delta\phi}{2})}. \quad (16.68)$$

RATKAISU Vaihe-eron lausekkeen sijoitus intensiteettijakaumaan antaa funktion

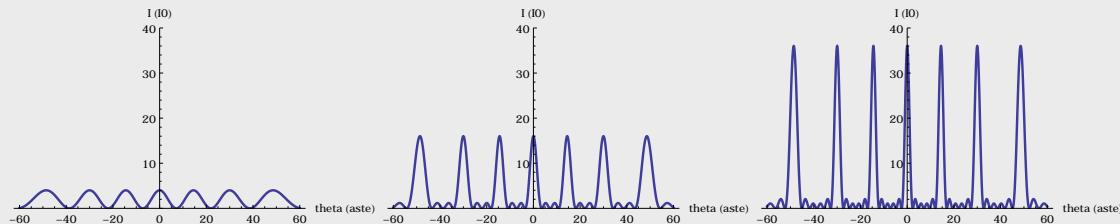
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}. \quad (16.69)$$

Nämä on piirretty alla välillä $\theta \in [-60^\circ, 60^\circ]$, pyydettyillä parametreilla.

Mathematica:

```
(* vaihe-ero, amplitudi, intensiteetti *)
lukuarvot = {d -> 4 lambda, a0 -> 1};
dphi[theta_] := 2 Pi d/lambda Sin[theta]
asumma[theta_, n_] := a0 Sin[n dphi[theta]/2]/ Sin[dphi[theta]/2]
isumma[theta_, n_] := asumma[theta, n]^2

(* kuvaajat *)
Plot[isumma[theta Degree, 2] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
Plot[isumma[theta Degree, 4] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
Plot[isumma[theta Degree, 6] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"}, PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 40}]
```



ARVIOINTI Kun $d = 4\lambda$, intensiteettimaksimeille saadaan yhtälöstä (16.64) ehto $\sin \theta_{\max} = \frac{1}{4}n_{\max}$, ja koska sinifunktion arvon täytyy olla -1 ja 1 välillä, mahdolliset ratkaisut ovat $n_{\max} = -4, -3, \dots, 4$, mitä vastaavat kulmat ovat $\theta_{\max} \approx -90^\circ, -49^\circ, -30^\circ, -14^\circ, 0^\circ, 14^\circ, 30^\circ, 49^\circ, 90^\circ$. Juuri näillä kulmissa kuvajissa onkin päämaksimit.

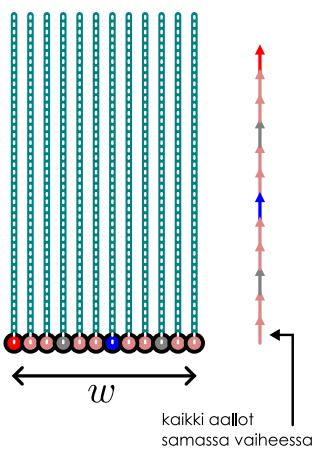
Huomaa erityisesti, että päämaksimit tulevat kaikissa tapauksissa samoihin paikkoihin. Rakojen lukumäärä ei siis vaikuta tähän vaan ainoastaan vierekkäisten rakojen välisen etäisyyden suhde aallonpituiteen. Kuitenkin kun rakojen lukumäärä kasvaa, päämaksimeista tulee kapeampia ja kirkkaampia.



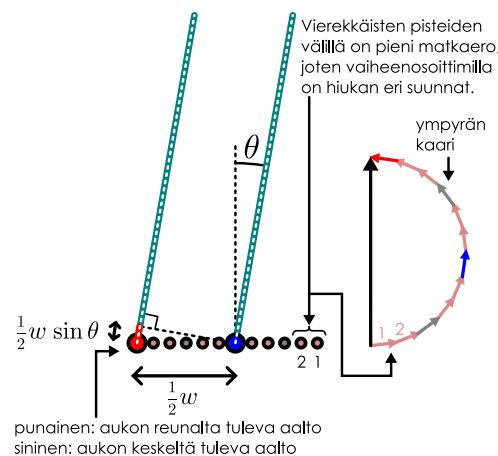
16.39 Millaisen intensiteettijakauman tuottaa esimerkin 16.5 perusteella yksi rako? Mitä tulos tarkoittaa?

Kuva 16.41: Vahvistavan ja heikentävän interferenssin suuntien määrittäminen valon kulkiessa yhdestä raosta, joka on neljän aallonpituisuden levijinen, $w = 4\lambda$. Raon jokainen piste toimii aallon lähteenä.

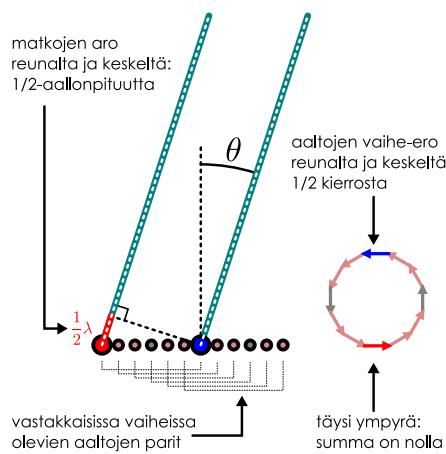
(a) Valo kulkee suoraan: keskuskaksimi.



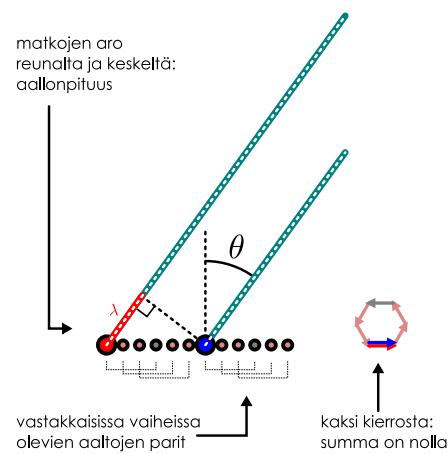
(b) Valo ei kulje suoraan: eri pisteiden lähettämät aallot ovat eri vaiheessa.



(c) Ensimmäinen intensiteettiminimi.



(d) Toinen intensiteettiminimi.



Edellisissä kahden ja usean raon interferenssikokeissa kaikkien rakojen oletettiin olevan valon aallonpituteen näiden hyvin kapeita, jolloin aukosta tuleva aalto toimii pistemäisen aaltolähteen tavoin synnyttäen ympyröinä leviväriä aaltonrintamia. Täsmällisemmin kuitenkin aukosta kulkevan aaltonrintaman *jokainen piste* toimii uuden aallon lähteenä (kuva 16.38 (b)). Siksi tämä malli ei toimi, jos valo kulkee raosta, jonka leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituuksista.

Itse asiassa näimme jo luvussa 16.3, että pistemäisten lähteiden rivin tuottaman aallon muoto riippuu rivin leveyden ja aallonpituuksen suhteesta. Hyvin leveä rivi aaltojen lähteitä tuottaa lähes suoraan kulkevia aaltonrintamia. Jos lähteiden rivin leveys puolestaan on samaa suuruusluokkaa aallonpituuksen kanssa, aalto leviväri ja muodostaa yhden tai useita kiilamaisia aaltonrintamia. Tällöin suurin osa aallon kuljettamasta energiasta virtaa suoraan, mutta osa energiavirrasta kääntyy ja hajaantuu eli *diffraktoituu*. Nämä käy myös yhdestä raosta kulkevalle valolle. Jos rako on valon aallonpituteen näiden leveä, diffraktio on heikkoa ja valo jatkaa matkaansa likimain suoraan. Jos aukon leveys on kuitenkin samaa suuruusluokkaa aallonpituuksen kanssa, diffraktio on merkittävä, ja valo hajaantuu.

Analysoidaan nyt yhdestä raosta kulkevan valon intensiteettijakauma kuvan 16.41 avulla. Raon jokainen piste toimii aallon lähteenä, ja näitä lähteitä on siis periaatteessa äärettömän monta. Yksinkertaisuuden vuoksi kuvassa rako on esitetty kahtenatoista ympyränä kuvattuna lähteenä. Tämä on approksimaatio, mutta se riittää ilmiön selittämiseksi.

Kuvassa 16.41 (a) on esitetty tilanne, jossa havaintopiste on suoraan raon takana. Tällöin kustakin lähteestä tuleva aalto kulkee raon normaalilinjan suuntaan, ja niinpä kaikki aallot ovat samassa vaiheessa. Aaltojen vaiheenosittimet ovat samansuuntaiset, jolloin niiden summan pituus on suurin mahdollinen. Tässä suunnassa valolla on siis suuri intensiteetti.

Tilanne, jossa valoa havaitaan hiukan vinosti raon takana, on esitetty kuvassa 16.41 (b). Nyt eri lähteistä

havaintopisteeseen mitatuissa matkoissa on pieni pituusero, joten eri lähteistä saapuvilla aalloilla on havaintopisteessä pieni vaihe-ero. Niinpä aaltojen vaiheenosoitimet muodostavat kaaren. Tässä kuvassa kaari on monikulmio, koska kuvaan on yksinkertaisuuden vuoksi piirretty vain äärellinen määrä lähteitä ja vaiheenosoitimia. Kuitenkin mitä useampaan lähteeseen rako jaetaan, sitä tarkemmin vaiheenosoitinkuvio muistuttaa sileää ympyrän kaarta. Todellisuudessa raon voi ajatella koostuvan äärettömän monesta pienestä lähteestä, ja niinpä tarkasti piirretty vaiheenosoitinkuvio olisikin täsmälleen ympyrän kaari.



16.40 Kuvassa 16.41 rako on kuvattu 12 lähteenä. Miten vaiheenosoitinkuviot muuttuisivat, jos rako jaettaisiin 24 lähteeseen? Entä jos rako jaettaisiin äärettömän moneen lähteeseen?

Havaintopisteeseen saapuvan valon amplitudia kuvaavat vaiheenosoitimien summa. Kuvassa 16.41 (a) tämän summan pituus on yksinkertaisesti vaiheenosoitajien pituuksien summa, koska kaikki vaiheenosoitinnuoleet osoittavat samaan suuntaan. Kuvaan 16.41 (b) summa on piirretty mustana nuolena, ja selvästikin tämän summan pituus on kuvassa (b) pienempi kuin kuvassa (a). Itse asiassa vaiheenosoitimien summan pituus saa maksiminsa *vain* kuvan (a) tilanteessa, jossa havaintopiste on suoraan aukon takana ja vaiheenosoitimet muodostavat yhdessä suoran nuolen. Kaikissa muissa suunnissa vaiheenosoitimet muodostavat ympyrän kaaren, ja tämän *kaaren pituus on aina sama kuin vaiheenosoitimien pituuksien summa*. Vaiheenosoitimien summaa kuvaavat tämän kaaren alkupisteestä loppupisteeseen osoittava nuoli, jonka täytyy aina olla lyhyempi kuin kaaren pituus. Edelleen koska valon intensiteetti on verrannollinen sen amplitudin (eli vaiheenosoitimien summan pituuden) neliöön, valon intensiteetin täytyy olla suurimmillaan suoraan raon takana. Kun havaintopiste siirtyy sivuun raon edestä, valon intensiteetin täytyy pienentyä. Toisin sanoen suurin osa valon energiasta kulkee raosta suoraan, mutta osa aallostaa taipuu ja energiaa virtaa raon takana myös jonkin verran raon normaalisuuntaan nähdyn sivulle.



16.41 Miksi esimerkiksi neljästä kapeasta raosta kulkevan valon tapauksessa voidaan havaita useita yhtä kirkkaita intensiteettimaksimeja, mutta yhdestä raosta kulkevan valon tapauksessa ei? Selitä tämä vaiheenosoitimien avulla.

Erityisen mielenkiintoinen havaintokulma on piirretty kuvan 16.41 (c). Tässä kuvassa raon reunasta saapuvan aallon (punainen) ja raon keskeltä saapuvan aallon (sininen) välinen matkaero on täsmälleen puoli aallonpituitta. Nämä aallot ovat siis täsmälleen vastakkaisissa vaiheissa, niiden vaiheenosoitimet ovat vastakkaissuuntaiset, ja aallot interferoivat keskenään tuhoavasti. Vaiheenosoitinkuvio on nytkin ympyrän kaari, ja kuvan piirrettyyn kuvioon on erikseen merkitty punaisella ja sinisellä näistä lähteistä saapuneiden aaltojen vaiheenosoitimet. Koska punainen ja sininen osoitin ovat vastakkaissuuntaiset, punaisen ja sinisen lähteen välisiä jäävät vaiheenosoitimet piirtävät *puoliympyrän* kaaren. Nämä vaiheenosoitimet vastaavat punaisen ja sinisen lähteen välissä olevien lähteiden tuottamia aaltoja eli kuvassa *raon vasemmasta puolesta tulevaa aaltoa*. Raon *oikean puolen* eli kuvassa sinisen lähteen oikealla puolella olevien lähteiden tuottamien aaltojen vaiheenosoitimet piirtävät *myös* puoliympyrän kaaren, ja yhdessä koko rakoa kuvaavat vaiheenosoitimet muodostavat *kokonaisen ympyrän*. Vaiheenosoitimien summa on siis *nolla*, joten tässä havaintopisteessä valon amplitudi ja intensiteetti on nolla ja kyseessä on intensiteettiminimi. Tässä kulmassa ei siis havaita lainkaan valoa.

Tämän voi ajatella myös niin, että koska punaisen ja sinisen lähteen aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa, ne kumoavat toisensa. Samoin punaisesta lähteestä seuraavan lähteen aalto on vastakkaisessa vaiheessa sinisestä lähteestä seuraavan aallon kanssa, ja nämä aallot myös kumoavat keskenään toisensa. Samaan tapaan jokaiselle aallon lähteelle löytyy pari, joka on sen kanssa täsmälleen vastakkaisessa vaiheessa, ja niinpä kaikki aallot lopulta interferoivat keskenään tuhoavasti.

Tämän intensiteettiminimin kulma voidaan päättää samaan tapaan kuin miten intensiteettimaksimien kulmat pääteltiin kaksoisrakokokeessa. Nyt sininen lähde on raon keskellä, joten sinisen ja punaisen lähteen välinen etäisyys on puolet raon leveydestä, $w/2$, ja matkaero näistä lähteistä havaintopisteeseen on

$$\Delta r = \frac{1}{2}w \sin \theta. \quad (16.70)$$

Aaltojen vaihe-ero on puoli kierrosta, jos tämä matkaero on puolikas aallonpituuksista, $\Delta r = \frac{1}{2}\lambda$, eli jos

$$\frac{1}{2}w \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda. \quad (16.71)$$

Tämä tilanne siis vastaa kuvaa 16.41 (c), jossa vaiheenosoitimet tekevät silmukan ja muodostavat täydellisen ympyrän.

Edellisessä tilanteessa raon vasemasta ja oikeasta puoliskosta saapuvat aallot kumoavat toisensa täydellisesti. Täydellinen tuhoava interferensi on mahdollista muillakin tavoilla. Kuvassa 16.41 (d) on esitetty tilanne, jossa punaisena merkityn lähteen aalto on vastakkaisessa vaiheessa sen viereisen *harmaalla* merkityn

lähteen aallon kanssa. Näiden lähteiden välinen etäisyys on tässä tapauksessa *neljännes* raon kokonaisleveydestä, $w/4$. Samaan tapaan *mitkä tahansa* aallot, joiden lähteiden välinen etäisyys on neljännes raon leveydestä, kumoavat toisensa tässä suunnassa. Niinpä jokaiselle aalolle on olemassa pari, jonka kanssa se on vastakkaisessa vaiheessa, ja aaltojen summan amplitudi on nolla.

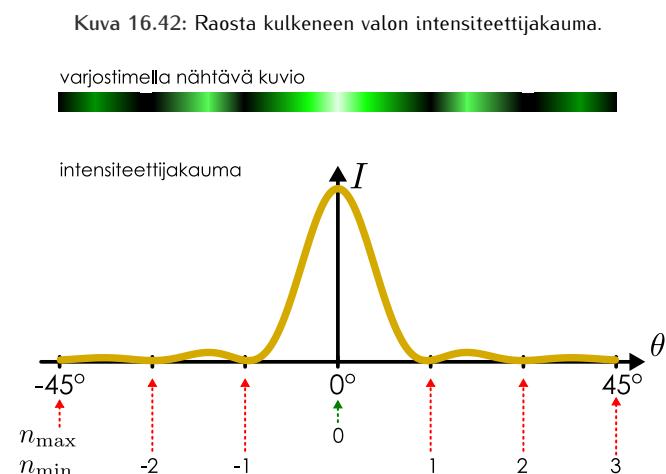
Kuvassa 16.41 (d) etäisyydellä $w/4$ toisistaan olevien lähteiden aaltojen välinen matkaero on $\Delta r = \frac{1}{4}w \sin \theta$. Jotta tapahtuisi tuhoava interferenssi, tämän täytyy olla puolikas aallonpituuus, eli havaintokululle täytyy päteä ehto

$$\frac{1}{4}w \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda. \quad (16.72)$$

Samanlainen päätely toimii, jos etäisyydellä $w/6$, $w/8$ jne. toisistaan olevien lähteiden aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa.



16.42 Miksi kyseessä ei ole intensiteettiminimi, jos etäisyydellä $w/3$ toisistaan olevat lähteet ovat vastakkaisissa vaiheissa?



Yleisesti siis valon intensiteetti on nolla kaikissa niissä kulmissa θ_{\min} , joille pätee

$$\frac{1}{2n_{\min}}w \sin \theta = \frac{1}{2}\lambda \quad (16.73)$$

jollakin kokonaislukuindeksillä n_{\min} , joka ei ole nolla. Tämä ehto sievenee muotoon

$$w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda, \quad (16.74)$$

joka on matemaattisesti aivan samaa muotoa kuin kaksoirakokokeen maksimeja kuvava yhtälö (16.64). Kuitenkin siinä missä yhtälö (16.64) kertoo intensiteetimaksimien havaintokulmat, tämä yhtälö kertoo kulmat, joissa havaitaan intensiteettiminimi.

Yhden raon diffraktion intensiteettijakauma on piirretty kuvaan 16.42. Jakaumassa on yksi päämaksimi ja useita si

vumaksimeja, joiden leveys on vain puolet päämaksimin leveydestä. Tämän mukaan ensimmäiset intensiteettiminimit $n_{\min} = \pm 1$ nimittäin havaitaan kulmissa

$$\theta = \pm \arcsin \frac{\lambda}{w}. \quad (16.75)$$

Sinin käänteisfunktio on kasvava funktio, joten kulma kasvaa aallonpituuuden λ kasvaessa ja pienenee raon leveyden w kasvaessa. Diffraktio on siis sitä voimakkaampaa, mitä kapeammasta raosta aalto kulkee, kuten aikaisemmin jo opimme (kuva 16.20).



16.43 (a) Kuinka leveästä raosta valo on kuvassa 16.42 kulkenut, jos valon aallonpituuus on 500 nm? (b) Valo kulkee 1 mm leveästä raosta. Arvioi, missä kulmassa ensimmäinen intensiteettiminimi havaitaan. (c) Ääni kulkee 1 mm leveästä raosta. Arvioi, missä kulmassa ensimmäinen intensiteettiminimi havaitaan.

esimerkki 16.6

Yhden raon diffraktio

(a) Johda intensiteetin lauseke poikkeamkulman θ funktiona, kun valo (aallonpituuus λ) kulkee yhden raon läpi (leveys w). (b) Piirrä intensiteetti, kun $w = 4\lambda$.

SUUNNITELMA Oletetaan, että valo saapuu rakoon suorana rintamana samassa vaiheessa. Tällöin voimme jakaa raon osiin ja kokin rako on samassa vaiheessa väärätelevä uuden aallon lähde. Tämän jälkeen intensiteettijakauman laskeminen tapahtuu periaatteessa samalla tavalla kuin esimerkissä 16.5, jossa laskettiin N erillisestä raosta kulkevan valoaallon intensiteettijakauma. Ero edelliseen esimerkkiin on kuitenkin siinä, että koska nyt valo ei kulje oikeasti erillisistä raoista vaan yhdestä raoista, jonka vain ajatteleme koostuvan useasta osasta. Voimme laskea likimääräisen intensiteettijakauman jakamalla raon N osaan, mutta periaatteessahan raon voi jakaa mielivaltaisen moneen osaan, joten täsmällisen tuloksen saamme ottamalla lopuksi raja-arvon $N \rightarrow \infty$ niin, että raon leveys w on vakio.

Jaetaan siis rako N osaan, jolloin kunkin osan leveys on w/N ja samoin kunkin osan keskipisteen etäisyys viereisen osan keskipisteestä on $d = w/N$. Vaihe-ero näiden osien kautta kulkeneiden aaltojen välillä on

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = 2\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta \quad (16.76)$$

ja tämä riippuu siis osien määristä N .

Myös yhdestä osasta tulevan aallon amplitudi ja intensiteetti riippuvat siitä, kuinka moneen osaan raon jaamme. Tarkastellaanpa kulmaa $\theta = 0$. Tässä suunnassa kaikista raon osista tulevat aallot ovat samassa vaiheessa, joten jos yhden osan läpi kulkevan aallon amplitudi on A_N , niiden summan amplitudin täytyy olla $A_{\text{summa}}(0) = N A_N$. Toisaalta havaitun aallon amplitudi ei voi riippua siitä, kuinka moneen osaan ajattelemme raon jaetuki, joten $A_{\text{summa}}(0)$ täytyy olla vakio ja siis yhdestä osasta tulevan aallon amplitudi on $A_N = \frac{1}{N} A_{\text{summa}}(0)$. Vaiheenosoitinkuviossa tämä tarkoittaa sitä, että vaiheenosittimien yhteenlasketun pituuden pitää olla vakio, joten mitä enemmän kuvioon tulee vaiheenosittimia, sitä lyhyempi kunkin yksittäisen osoittimen täytyy olla. Tämä on myös fysikaliseksi järkevä, sillä mitä kapeampia raot ovat, sitä vähemmän energiota kustakin raosta kulkee läpi.

Olkoon yhdestä raoista tulevan aallon amplitudi havaintoetäisyydellä A_0 ja intensiteetti I_0 . Jos havaintopiste on kaukana raoista niiden väliseen etäisyyteen verrattuna, eri raoista tulevien aaltojen amplitudit ovat hyvin tarkasti samat.

Nyt voimme laskea vaiheenosittimet yhteen. Voimme jälleen käyttää esimerkin 14.4 tulosta, jolloin saamme

$$A_{\text{summa},N} = A_N \frac{\sin(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})}, \quad (16.77)$$

ja intensiteetti on jälleen verrannollinen amplitudin neliöön.

RATKAISU Amplitudiksi saadaan

$$A_{\text{summa},N} = A_{\text{summa}}(0) \frac{1}{N} \frac{\sin(N \frac{\Delta\phi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\phi}{2})} = A_{\text{summa}}(0) \frac{\sin(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta)}{N \sin(\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta)}. \quad (16.78)$$

Lausekkeen nimittäjä riippuu osien lukumäärästä N , mutta saamme tarkan tuloksen rajalla $N \rightarrow \infty$. Tällöin sinilausekkeen sisällä oleva funktio $x = \pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta \rightarrow 0$, jolloin voimme käyttää Taylorin sarjasta saatavaa approksimaatiota $\sin x \approx x$ ja kirjoittaa $N \sin(\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta) \rightarrow N \cdot (\pi \frac{w}{N\lambda} \sin \theta) = \pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta$. Summa-amplitudiksi saadaan siis lopputulokseksi

$$A_{\text{summa}} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{\text{summa},N} = A_{\text{summa}}(0) \frac{\sin(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta)}{\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta}. \quad (16.79)$$

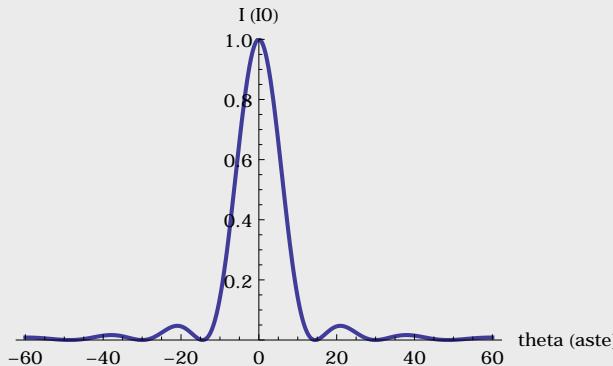
Intensiteetti on verrannollinen amplitudin neliöön, joten

$$I_{\text{summa}} = I_{\text{summa}}(0) \left[\frac{\sin(\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta)}{\pi \frac{w}{\lambda} \sin \theta} \right]^2. \quad (16.80)$$

Mathematica:

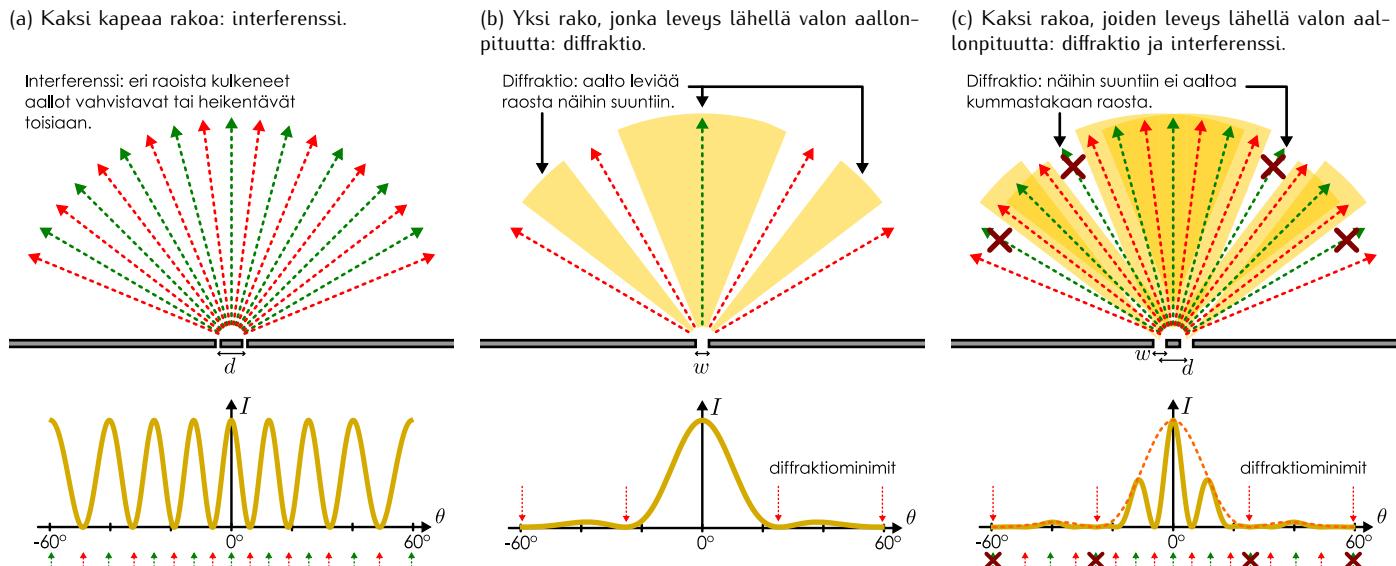
```
(* vaihe-ero, amplitudi, intensiteetti *)
lukuarvot = {w -> 4, lambda, a0 -> 1};
d = w/n;
dphi[theta_] := 2 Pi d/lambda Sin[theta]
asumma[theta_, n_] := a0/n Sin[n dphi[theta]/2]/Sin[dphi[theta]/2]
a[theta_] := Limit[asumma[theta, n], n -> Infinity]
i[theta_] := a[theta]^2

(* kuvaaja *)
Plot[i[theta Degree] /. lukuarvot, {theta, -60, 60},
AxesLabel -> {"theta (aste)", "I (IO)"},
PlotStyle -> Thick, PlotRange -> {0, 1}]
```



ARVIOINTI Piirretystä kuvaajasta on suuri keskuskaksimi, joka korkeus on $I_{\text{summa}}(0)$, ja pienempiä sivumaksimeja kuten odottettua. Voimme ratkaista minimien paikat yhtälöstä (16.74), ja saamme $\theta_{\min} \approx 0^\circ, \pm 14^\circ, \pm 30^\circ, \pm 49^\circ, \pm 90^\circ$. Juuri näissä kohdissa kuvaajassakin on nollakohdat. Huomaa, että tässä raon leveys oli sama kuin rakojen välinen etäisyys esimerkissä 16.5, mutta siinä missä edellisessä esimerkissä näillä kulmillilla havaittiin maksimit, nyt havaitaan minimit.

Kuva 16.43: Tavallisesti sekä diffraktio- että interferensi-ilmiöt havaitaan samanaikaisesti.



Aikaisemmin puhuimme interferensistä tarkastellessamme kaksoisrakokoetta mutta yhdestä raosta tai hiilasta kulkevan valon tapauksessa käytimme ilmiölle nimeä diffraktio. Nämä nimitykset ovat historiallisia. Diffraktiolla yleensä tarkoitetaan valon hajaantumista ja jakaantumista osiin (lat. 'diffingere', hajota osiin) ja interferensillä superpositiossa olevien aaltojen toisiaan vahvistavaa tai heikentävää vaikutusta (engl. 'interfere', häiritä). Nimet ovat peräisin ajalta, jolloin valo ei vielä tiedetty olevan aalto. Fysikaalisesti kuitenkin *diffraktio on interferensi-ilmiö*, ja aivan hyvin voitaisiin puhua valon interferensistä sen kulkissa yhdestä raosta.

Diffraktio ja interferensi perustuvat molemmat pohjimmiltaan aaltojen superpositioon, ja niinpä nämä ilmiöt voivat tapahtua samanaikaisesti ja vaikuttaa toisiinsa. Esimerkiksi jos valo kulkee kahdesta raosta, joiden leveys ja etäisyys toisistaan ovat molemmat aallonpituuden kokoluokkaa, varjostimella havaitussa kuvossa on pürteitä sekä yhden raon diffraktiosta että kahden raon interferensistä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 16.43.

Analysoimme kaksoisrakokokeen aikaisemmin sillä oletuksella, että raot ovat hyvin kapeat. Tällöin kustakin raosta kulkeva valo kookee voimakkaan diffraktion ja levää raon takana lähes tasaisesti ympyrääaltoina kaikkiin suuntiin. Interferensi tapahtuu näiden aaltojen kohdateissa (kuva 16.43 (a)). Jos kuitenkin rakojen leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituuksista, valo diffraktoituu heikommin eikä levää kaikkiin suuntiin. Kuva 16.43 (b) valo kulkee tällaisesta raosta ja muodostaa raon takana *kolme* kiihää, joista keskimmäinen on selkeästi kirkkain. Kuva 16.43 (c) valo kulkee kahdesta raosta, joiden etäisyys on sama kuin kuvassa (a) ja leveys sama kuin kuvassa (b). Nyt valo diffraktoituu kummassakin aukossa jakautuen kolmeen kiihään kuten kuvassa (b). Kiiholta etenevät aallot puolestaan interferoivat keskenään, jolloin interferenssimaksimit ja minimit muodostuvat samoissa suunnissa kuin kuvassa (a). Kuitenkaan *interferensia ei voi tapahtua niissä suunnissa, joihin diffraktio ei valoa levitä*, joten diffraktio rajoittaa havaittua intensiteettiä. Lopputulos on se, että havaittu intensiteetti on nolla sekä kuvien (a) että (b) intensiteettiminimien suunnissa. Täsmällisemmin kuvan (c) intensiteettijakauma on muodoltaan kuvissa (a) ja (b) esitetyjen intensiteettijakaumien tulo.



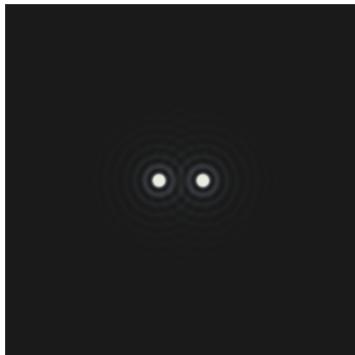
16.44 Mikä on kuvassa 16.43 (c) rakojen leveyden w sekä niiden etäisyyden d suhde aallonpituuteen λ ?

Edellä kuvatut kokeet, joissa valo kulkee ohuista raoista, ovat teoreettisesti merkittäviä. Interferensi on nimenomaan aaltojen ilmiö, ja näiden kokeiden tulokset kiistattomasti osoittavat, että valo on aalto. Edellä kuvatut ilmiöt on kuitenkin vaikea havaita, sillä interferensi on merkittävä vasta rakojen leveyksien ja niiden välisten etäisyyksien ollessa valon aallonpituuden suuruusluokkaa. Interferensi-ilmiötä kuitenkin havaitaan myös luonnossa, ja niillä on suuri käytännön merkitys optisissa laitteissa.

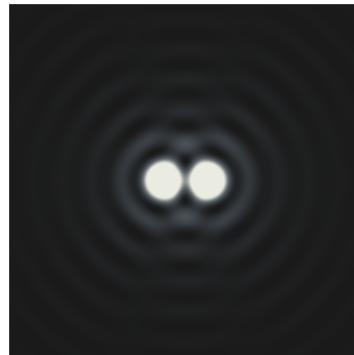
Mikroskooppien peilit ja linssit toimivat samaan tapaan kuin aukot, ja niissä tapahtuu väistämättä diffraktiota. Vaikka valon diffraktio on tavallisesti heikko ilmiö, optisilla laitteilla tutkitaan usein hyvin pieniä kohteita ja laitteiden kuvia suurentava vaikuttus vahvistaa myös diffraktiota. Niinpä diffraktiosta johtuvat ilmiöt voivat olla laitteiden tuottamissa kuvissa samaa suuruusluokkaa kuin tutkittavien kohteiden koko. Tämä asettaa rajoituksia laitteiden erottelukyvylle. Jos nimittäin laitteella kuvataan pieniä pistemäistä kohdetta,

Kuva 16.44: Diffraktion vaikutus kahden pistemäisen koteen kuvaan. Jos diffraktio on voimakas, lähellä toisiaan olevat yksityiskohdat eivät erotu kuvassa.

(a) Pieni diffraktio.



(b) Kohtuullinen diffraktio.



(c) Voimakas diffraktio.



havaittu kuva ei olekaan piste vaan kiekko, jonka halkaisija riippuu diffraktion voimakkuudesta. Kun tällaisella laitteella yritetään kuvata kahta kohdetta, nämä kohteet voidaan varmuudella erottaa toisistaan vain, jos niiden keskinäinen etäisyys on suurempi kuin havaitun kiekon halkaisija (kuva 16.44). Jos kuvattavat kohteet ovat esimerkiksi tähtiä, diffraktion vaikutusta voidaan pienentää suurentamalla kaukoputken kokoa. Sen sijaan mikroskooppisia kohteita tutkittaessa merkittävää diffraktiota voi tapahtua myös kuvattavassa näytteessä. Tällöin diffraktion vaikutusta voidaan pienentää käyttämällä kuvaamiseen säteilyä, jonka aallonpituuus on lyhyempi kuin näkyvällä valolla.



16.45 Kuinka pieniä yksityiskohtia tavallisilla valo käyttävillä mikroskoopeilla on mahdollista erottaa? Seitä tämä rajoitus diffraktioon perustuen. Millaisia menetelmiä täitä tarkemmissa mikroskoopeissa käytetään?

Myös saippuakuplien ja öljyläikkien pinnalla nähtävät värikkiset kuviot johtuvat interferenssistä. Kahden aineen kuten ilman ja veden rajapinnalle saapuva valonsäde tavallisesti osittain heijastuu ja osittain läpäisee pinnan. Esimerkiksi saippuakupla on kuitenkin ohut kalvo, jolla on kaksi pintaa — toinen kuplan ulkona ja toinen sisällä — ja valo voi heijastua tai läpäistä näistä kummatkin. Valo voi siis kulkea kalvon läpi useita eri reittejä, ja eri reittejä kulkeneet osuudet interferoivat kohdateissaan.

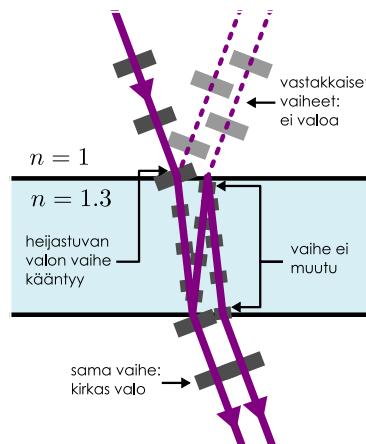
Kuvassa 16.45 (a) on piirretty kalvolle saapuvan violetin valon mahdollisia reittejä. Valo saapuu kuvassa ylhäältä ja kohdateissaan kalvon yläpinnan osa heijastuu takaisin ylös ja osa jatkaa kulkuaan kalvon sisään. Koska tässä tapauksessa valo saapuu optisesti harvasta aineesta, heijastunut aalto kokee puolen kierroksen vaihesiiron. Läpäisseen aallon vaihe ei muutu rajapinnalla. Kalvoon päässyt valo jatkaa matkaansa alas päin ja kohtaa kalvon alapinnan, jossa osa valosta jälleen heijastuu ja osa läpäisee pinnan. Nyt heijastunut valo ei koe vaihesiirtoa, koska se saapuu rajapinnalle optisesti tiheästä aineesta. Alapinnan läpäissyt valo jatkaa matkaansa kuvassa alas päin ja heijastunut valo palaa takaisin ylös kohti yläpintaa, jossa se jälleen osittain heijastuu. Valo siis heijastuu kalvossa *edestakaisin* ylä- ja alapinnan välissä, ja jokaisessa heijastuksessa osa valosta poistuu kalvosta.

Normaali valo ei koostu äärettömän pitkistä sinimuotoisista aalloista vaan lyhyistä pulsseista. Pulssi heijastuu kalvossa edestakaisin jakautuen jokaisessa heijastuksessa kahtia, ja jos kalvo on paksu, nämä heijastukset tapahtuvat yksi toisensa jälkeen. Lopputulos on se, että osa valosta päätyy kulkemaan kuvassa takaisin ylöspäin ja osa läpäisee kalvon jatkaa matkaansa alas päin. Jos kuitenkin kalvo on selvästi ohuempi kuin tyypillisen aaltopulssin pituus, aalto täytyy koko kalvon kuten kuvassa 16.45 (a). Tällöin sekä kalvon ala- että yläpinnalla on samanaikaisesti useita eri reittejä kulkeneita aaltoja, ja nämä pääsevät interferoimaan keskenään. Interferenssin vaikutus kalvosta poistuvan aallon intensiteettiin riippuu kalvon paksuuden ja siinä kulkevan aallon aallonpituuuden suhteesta. Kuvassa 16.45 (a) kalvon paksuus on juuri sellainen, että kalvon yläpinnasta poistuvat aallot ovat vastakkaisissa vaiheissa ja kokevat tuhoavan interferenssin kun taas kalvon alapinnalta poistuvat aallot ovat samassa vaiheessa ja vahvistavat toisiaan.

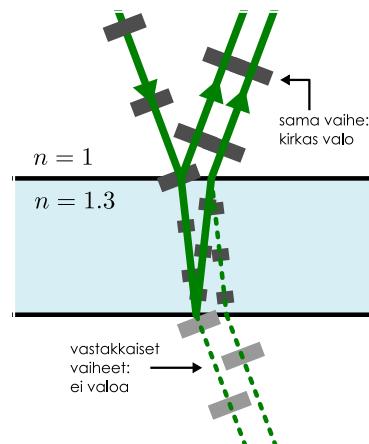
Vastaavasti kuvan 16.45 (b) on piirretty vihreän valon reitti samassa kalvossa. Tällä valolla on pidempi aallonpituuus kuin violetilla, minkä vuoksi nyt kalvosta takaisin ylöspäin heijastuneet aallot ovat samassa vaiheessa. Siispä violetti valo kulkee kuvan kalvon läpi lähes täydellisesti ja vihreä valo heijastuu siitä lähes täydellisesti. Muut värit heijastuvat osittain. Jos kalvoa siis valaistaan valkoisella valolla, joka sisältää kaikkia aallonpituuksia, kalvo näyttää ylhäältä katsoen vihreältä ja alhaalta violettilta. Nähtävä väri riippuu tieteenkin katselukulmasta ja kalvon paksuudesta, minkä vuoksi saippuakuplan pinnalla nähdään värikkisiä kuvioita. Koska ilmiö tapahtuu juuri ohuissa kalvoissa, sitä kutsutaan *ohutkalvointerferenssiksi*.

Kuva 16.45: Interferenssi ohuessa kalvossa. Eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat, ja tämä määräät heijastuvan ja läpäisevän aallon intensiteetin. Samaa ilmiötä sovelletaan interferometreissä hyvin tarkkojen pituusmittauksien tekemiseksi.

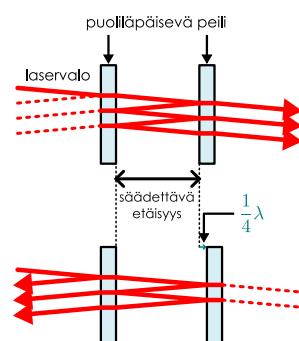
(a) Violettei valo läpäisee ohutkalvon.



(b) Vihreä valo heijastuu ohutkalvosta.



(c) Interferometri.



Samaa periaatetta sovelletaan *interferometreissä* tarkkojen pituusmittausten tekemiseksi. Nämä ovat laitteita, joissa yksivärinen valo (tavallisesti laser) ohjataan kulkemaan eri reittejä samaan havaintopisteeseen, jolloin havaittu intensiteetti riippuu eri reittejä kulkeneiden valonsäteiden vaihe-eroista. Muutokset eri reittejä kulkeneiden aaltojen matkoissa vaikuttavat aaltojen vaiheeseen ja sitä kautta myös havaittunut intensiteettiin. Erityisesti jos matkaero muuttuu puoli aallonpituutta, interferenssi muuttuu vahvistavasta tuhoavaksi tai pääinvastoin. Tarkkailemalla valon intensiteettiä voidaan siis mitata hyvin tarkasti pituuden muutoksia, jotka ovat selvästi käytettyä valon aallonpituutta lyhyempiä.

Interferometrejä on monenlaisia. Kuvassa 16.45 (c) on esitetty ns. Fabry-Perot-interferometri, jossa valo heijastuu edestakaisin kahden puoliläpäisevän peilin välillä. Puoliläpäisevät peilit heijastavat niihin saapuvasta valosta vain osan ja päästäävät osan valosta lävitseen, joten peilit toimivat samalla tavalla kuin ohutkalvon pinnat. Kun peilien välinen etäisyys säädettää sopivasti, laitteen läpäisseet aallot kokevat vahvistavan interferenssin ja lähes koko laitteeseen saapuvan valon intensiteetti kulkee sen läpi (kuvassa oikealle). Jos sitten peilien välimatkaa muutetaan noin aallonpituuden neljäsosa, laitteen läpi kulkeneet aallot kokevat tuhoavan interferenssin ja valon intensiteetistä suurin osa heijastuu takaisin tulosuuntaan (kuvassa vasemmalle).



16.46 Kirjoita omien sanoin tiivistelmä aalto-optiikasta. Millaisia ilmiöitä valon aaltoluonne tuottaa ja miksi? Millainen intensiteettijakauma havaitaan, kun valo kulkee usean hyvin kapean raon läpi tai yhden likimain aallonpituuden levyisen raon läpi? Miten määrität näissä tilanteissa valon intensiteetin valitussa havaintopisteessä?

Yhteenvetö: Moniulotteiset aallot

Aaltonrintamat

- Samassa vaiheessa olevat väliaineen pistet muodostavat **aaltonrintamat**. Esimerkiksi veden pinnalla kulkevan aallon harja on aaltonrintama. Kahdessa ulottuvuudessa aaltonrintamat ovat käyriä ja kolmessa ulottuvuudessa pintoja.
- Pistemäinen lähdde tuottaa kahdessa ulottuvuudessa ympyrän ja kolmessa ulottuvuudessa pallon muotoisia aaltonrintamia.
- Tasomaisen aaltolähteen tuottamien aaltojen rintamat ovat tasoja. Tällaisia aalloja kutsutaan *tasoalaltoiksi*. Myös pistemäisen lähteen aallot ovat likimain tasoaaltoja kaukana lähteestä.
- Huggensin periaatteet** mukaan aaltonrintaman jokainen piste toimii uuden aallon lähteenä.

Aallot väliaineissa

- Rajapinnalle saapuva aalto tavallisesti sekä *heijastuu* että *taittuu*. Heijastus- ja tulokulmat ovat yhtä suuret. Tulo- ja taitekulmien välillä pätee **tattumislaki**

$$\frac{1}{\lambda_A} \sin \theta_A = \frac{1}{\lambda_B} \sin \theta_B.$$

- Valolle määritellään **taitekerroin**

$$n = \frac{c}{v_{\text{aalto}}} = \frac{\lambda_{\text{tyhjö}}}{\lambda}.$$

Optiikka

- Valo on sähkömagneettisen kentän aalto. Usein valoa voi kuitenkin kuvata myös suoraan kulkevinä **säteinä**.
- Linssit ja peilit muodostavat esineistä **kuvan** pisteesseen, jossa esineen lähettämät valonsäteet leikkaavat. **Valekuva** muodostuu säteiden jatkeiden leikkauispisteesseen.

Interferenssi

- Interferenssi** tarkoittaa kahden tai useamman sinimuotoisen aallon superpositiota, jossa aallot voimistavat tai heikentävät toisiaan riippuen niiden välistä vaihe-eroista.
 - Interferoivien aaltojen superposition amplitudi on aaltojen vaiheenosittimiä summan pituus.
 - Kaksi pistemäistä lähettää tuottaa aallon, joka jakautuu useaksi kohdaksi. Valon kaksoisrakokoe on tästä esimerkki. Jos valo kulkee kahdesta kapeasta raosta, joiden välinen etäisyys on d , rakojen takana havaitaan intensiteettimaksimit kulmissa θ_{\max} , joille
- $$d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda, \quad n_{\max} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$
- Mitä useammasta tasavälistä raosta valo kulkee, sitä kapeammat ja kirkkaammat nämä intensiteettimaksimit ovat.

Sanasto

- aaltolähde (wave source)
- aaltonrintama (wave front)
- intensiteetti (intensity)
- palloaalto (spherical wave)
- tasoalalto (plane wave)
- tättuminen (refraction)
- tulokulma (incident angle)
- heijastuskulma (angle of reflection)
- taiuttumiskulma (angle of refraction)
- taitekerroin (refractive index)
- peili (mirror)
- linssi (lens)
- optiikka (optics)
- polttopiste (focus)
- polttoväli (focal length)

- Intensiteetti** kuva kolmessa ulottuvuudessa aallon kuljettaman energian määrästä aikaa ja pinta-alaa kohden

$$I = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{A}.$$

- Intensiteetti on energiatihedys ja aallon nopeuden tulo. Koska energiatihedys on verrannollinen amplitudin neljään, intensiteetti on.

$$I = \langle \rho_E \rangle v_{\text{aalto}} \propto A^2.$$

- Äänen intensiteetti mitataan desibeliasteikolla.

Suuren taitekertoimen aineita kutsutaan optiseksi tiheaksi.

- Valo kokonaishetkissä tullessaan rajapinnalle optiseksi tiheästä aineesta liian suressa tulokulmassa.
- Dispersiivisessä väliaineessa aallon nopeus riippuu taajuudesta, joten eri taajuudella värähtelevät aallot tattuvat eri tavoin. Tästä johtuu valkoisen valon jakautuminen osiin prismassa.
- Polarisaatiolla** tarkoitetaan poikittaisen aaltolukkien värähtelyn suuntaa. **Polarisaattori** on aine tai laite, joka päästää lävitseen vain tietyn komponentin aallon värähtelystä.

- Esineen ja kuvan paikat noudattavat likimain **linssiyltälöä**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kova}}},$$

missä f on polttoväli.

- Lähteiden rivit tuottaa kuumaisen aallon, joka hajaantuu sitä enemmän, mitä kapeamman rivin lähteet muodostavat. Jos rivin leveys on samaa suuruusluokkaa kuin aallonpituisuus, kiiroja syntyy useita. Valon **diffraktio** raossa on tästä esimerkki. Jos valo kulkee yhdestä raosta, jonka leveys on w , raon takana havaitaan intensiteettimaksimit kulmissa θ_{\min} , joille pätee

$$w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda, \quad n_{\min} = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$$

- Interferometreissä ja ohuissa kalvoissa valonsäteet jakautuvat osiin ja eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat keskenään.

- esine (object)
- kuva (image)
- valekuva (virtual image)
- varjostin (screen)
- suurennettuhde (magnification)
- polarisaatio (polarization)
- koherentti (coherent)
- interferenssi (interference)
- diffraktio (diffraction)
- rako (slit)
- kaksoisrako (double slit)
- diffraktiohila (diffraction grating)
- ohutkalvo (thin film)
- interferometri (interferometer)

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

16.1 (a) Jos tarkastellun ympyrän säde on $r_n = n\lambda$, seuraavan (pienemmän) aalton rintaman säde on $r_{n-1} = (n-1)\lambda$.

(b) Keskiarvo on $r_{\text{keski}} = (n-1/2)\lambda$.

(c) Tarkka pinta-ala on $A_{\text{rengas}} = \pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 = [n^2 - (n-1)^2]\pi\lambda^2$. Nyt siis $n = 1, 3, 30$, joten näitä vastaavat alat ovat $\pi\lambda^2$, $5\pi\lambda^2$ ja $59\pi\lambda^2$.

(d) Approximaatio antaa $A_{\text{rengas}} = 2\pi r_{\text{keski}}\lambda = (2n-1)\pi\lambda^2$ eli jälleen $\pi\lambda^2$, $5\pi\lambda^2$ ja $59\pi\lambda^2$. Likiarvo onkin nyt tarkka, koska $n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$.

16.2 Kummassakin tapauksessa aallon energia heikkenee käänään verrannollisesti etäisyyteen, $E \sim r^{-1}$. Pinnalla aalton rintama on ympyrän kaari, jonka pituus on $2\pi r$. Pitkä sauva tuottaa aalton rintaman, joka on lähellä sauvalle ympyräliterrion vaipan muotoinen. Sen pinta-ala on $2\pi rL$. Kummassakin tapauksessa energia levii alueelle, jonka koko on verrannollinen sääteeseen r . Toisaalta energia on verrannollinen amplituudin neljöön, $E \sim A^2$, joten täytyy olla $A \sim E^{1/2} \sim r^{-1/2}$. Amplitudi siis heikkenee käänään verrannollisesti etäisyyden neljännen potenssin mukaan, $A \sim r^{-1/2} = 1/\sqrt{r}$.

16.3 Kahdessa ulottuvuudessa intensiteettiä vastaava suure on aallon kuljettama teho pituusyksikkö kohti, $I_{2D} = P/L$, koska aalton rintamat ovat viivoja eivätkä tasoja.

16.4 Piirrä kuva! Aallon tulosuunnasta katsoen kuution poikkileikkauden pinta-ala on $\sqrt{2} \cdot 1.0 \text{ cm}^2 = 14.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Tälle pinta-alalle aallon energia siis osuu. Minuutissa energiota saapuu

$$E = P\Delta t = IA\Delta t = 2.0 \text{ W/m}^2 \cdot 14.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot 60 \text{ s} = 17 \text{ mJ}. \quad (16.81)$$

16.6 (a) Kaksi soitinta tuottaa kaksinkertaisen intensiteetin. Toisaalta $\beta_0 \log \frac{2I}{I_{\text{kynnyss}}} = \beta_0 \log 2 + \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnyss}}}$ eli äänen voimakkuus kasvaa $\beta_0 \log 2 \approx 3 \text{ dB}$. Uusi voimakkuus on siis noin 73 dB. Huomaa, että intensiteetin kaksinkertaistaminen lisää voimakkuutta noin 3 dB riippumatta siitä, mikä oli alkuperäinen voimakkuus.

(b) Nyt tarvitaan siis n soitinta niin, että intensiteetin muutos on 10 dB. Nyt siis uusi intensiteetti on $\beta_0 \log \frac{nI}{I_{\text{kynnyss}}} = \beta_0 \log n + \beta_0 \log \frac{I}{I_{\text{kynnyss}}}$, missä täytyy olla $\beta_0 \log n = 10 \text{ dB}$. Tästä ratkeaa $n = 10^{(10 \text{ dB})/\beta_0} = 10^1 = 10$. Siis kymmenen soitinta kymmenkertaistaa intensiteetin ja lisää äänen voimakkuutta 10 dB. Jälleen intensiteetin kymmenkertaistaminen lisää voimakkuutta 10 dB riippumatta siitä, mikä alkuperäinen voimakkuus oli.

16.7 (a) Kyllä. Muutenhan ääni ei kuuluisi kuin suoraan oven edessä. Tämä johtuu siitä, että äänen aallonpituus on tyypillisesti noin metrin kokoluokkaa eli samaa suuruusluokkaa kuin ovi.

(b) Ei. Taskulampun valo näkyvä vain suoraan ovesta sisään katsoen. Syg on se, että valon aallonpituus on satojen nanometrien luokkaa eli huomattavasti oven leveyttä pienempi. Tällöin diffraktio ei juuri tapahdu vaan aalto kulkee suoraan. Valokin kokee diffraction kulkissaan tarpeeksi pienestä aukosta, kuten myöhemmin tässä luvussa vielä opimme.

16.8 Jos heijastuva aalto kokee vaihesiiron, aallonharjat ja -pohjet vaihtavat heijastuneessa aallossa paikoja. Tällöin saapuvan ja heijastuneen aallon rintamat (tummat viivat) eivät kohtaa rajapinnalla. Sen sijaan heijastunutta aaltoa kuvavat viivat lähetevät rajapinnalla pisteistä, jotka ovat saapunutta aaltoa kuvavien viivojen puolivälissä.

Heijastuneen valoaallon vaihe muuttuu, jos valo saapuu rajapinnalle siitä materiaalista, jossa sen nopeus on suurempi. Tavallisessa peilissä valo heijastuu ilma-lasi- ja lasi-metalli-rajapinnoilta, ja näissä tapahtuu vaihesiirtö.

16.9 Vauhti on suurempi väliaineessa, jossa aallonpituus on suurempi, sillä aallon taajuus ei muutu rajapinnalla. Siis nopeus on suurempi kuvan alareunan materiaalissa. Jos aalto saapuisi materiaaliin, jossa sen nopeus olisi pienempi, rajapinnan läpäisyystä aaltoa kuvavat aalton rintamat olisivat lähempänä toisiaan. Tällöin viivojen pitäisi olla kuvan alareunassa lähempänä vaakasuoraa ja aallon liikkeen suunta siis lähempänä pystysuoraa.

16.10 (a) A:ssa valon nopeus on c ja B:ssä $c/1.3 = 0.77c$.

(b) Aallonpituus on suurempi A:ssa. Näiden suhde on $\lambda_A/\lambda_B = 1.3$.

(c) Aaltojen taajuus on sama kummassakin väliaineessa.

(d) Kulmat noudattavat taittumislakia $\sin \theta_A = 1.3 \sin \theta_B$ riippumatta siitä, kummasta aineesta valo saapuu. Jos esimerkiksi A:ssa $\theta_A = 45^\circ$, saadaan B:ssä $\theta_B = 33^\circ$. B:ssä valon kulkusuunnan ja rajapinnan normaalilin välinen kulma on pienempi.

16.11 Rajakulma $\theta_{A,\text{raja}}$ ratkeaa yhtälöstä $\sin \theta_A = \frac{n_B}{n_A}$. (a) $\theta_{A,\text{raja}} = 50^\circ$, (b) $\theta_{A,\text{raja}} = 42^\circ$.

16.12 Snellin laista saadaan punaiselle $\theta = 32.1^\circ$ ja violetille $\theta = 31.8^\circ$. Ero on $\Delta\theta = 0.3^\circ$.

16.13 (a) Väliaine siirtyy samanaikaisesti sekä y - että z -suuntiin, joten aalto on tasopolarisoitunut 45° kulmassa y - ja z -akseleihin nähden.

(b) Väliaine siirtyy vuorotellen y - ja z -suuntiin. Aalto on ympyräpolarisoitunut.

(c) Väliaine siirtyy y - ja z -suuntiin, mutta koska taajuudet ovat erilaiset, väliaineen liike ei välittämättä noudata mitään yksinkertaista kuviota. Aalto on polarisoitumaton.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

16.14 (a) Valon polarisaatiotaso on sähkökentän suunta. Nyt polarisaattorin elektronit liikkuvat yhdessä suunnassa, jolloin ne reagoivat vain liikkeensä suuntaiseen sähkökenttään. Elektronit liikkuvat niin, että elektronien liikkeen suuntainen sähkökenttä ei pääse tunkeutumaan polarisaattorin taakse (vrt. sähkökenttää ei pääse johteseen, koska elektronit liikkuvat niin, että niiden sähkökenttä kumoaa johteen sisällä ulkoisen sähkökentän). Johtavia säkeitä vastaan kohtisuorassa suunnassa elektronit eivät pääse liikkumaan, jolloin ne eivät myöskään pysty estämään sähkökentän aaltoa etenemästä. Siispä tämä polarisaattori estää kulun valolta, jonka sähkökenttä värähtelee elektronien liikesuunnassa (johtavien säkeitien suunnassa) mutta päästää läpi valon, jonka sähkökenttä värähtelee säikeistin nähden kohtisuorassa suunnassa. Tilanne on siis päinvastainen kuin ohuesta raosta kulkevan köyden polarisaatiossa.

(b) Ei. Sähkömagneettinen aalto ei ole mekaaninen aalto, jossa tapahtuisi lükettä. Sähkömagneetissa aallossa sähkökentän suunta ja voimakkuus värähtelevät, ja tällainen aalto mahtuu kulkemaan periaatteessa kuinka kapeasta raosta tahansa. Erittyisesti vaikka sähkömagneettinen aalto voidaan kuvata nuolilla (sähkökenttävektoreilla), nämä nuolet eivät ulotu avaruudessa mihinkään. Niillä kuvataan vain kentän suuntaa.

16.15 Kuvissa (a) ja (b) aalto koostuu aluksi x - ja y -suuntaisista värähtelyistä, joihin kumpaankin liittyy yhtä paljon energiota. Polarisaattori poistaa x -suuntaisen värähtelyn, jolloin jäljelle jää puolet energiasta. Intensiteetti siis puolittuu.

Kuvissa (c) ja (d) aallon amplitudi likimain puolittuu. Intensiteetti on verrannollinen amplitudin neliöön, joten intensiteetti putoaa neljäsosaan.

16.17 Tässä ei ole yhtä oikeaa vastausta. Tässä joitakin huomioita. Samaa: lähteiden välillä on seisova aalto, koska siellä kaksi sinimuotoista altoa kulkee vastakkaisiin suuntiin, ja seisova aalto on tällaisten aaltojen superpositio. Eriasta: kuvan interferoiva aalto kuljettaa energiota toisin kuin seisova aalto, koska lähteiden välillä lukuunottamatta interferenssi muodostaa eteneviä aaltoja solmukäyrien välillä.

16.18 (a) Lähteiden välissä aallonpituuus on kahden vihreän (tai punaisen) käyrän välinen etäisyys. Toisin sanoen vierekkäisten punaisen ja vihreän käyrän välinen etäisyys on $\lambda/4$.

(b) Jos lähteiden välinen etäisyys on täsmälleen aallonpiuuden monikerta, $n\lambda$, niiden välissä on yhteensä $4n - 1$ punaista ja vihreää käyrää. Lisäksi nyt aallot ovat lähteiden kohdalla samassa vaiheessa, joten lähteitä lähimmät käyrät ovat punaisia. (Kuvassa lähteiden välinen etäisyys on 2.5λ , jolloin uloimmat käyrät ovat vihreät.) Niinpä punaisia käyriä on tässä tapauksessa yksi enemmän kuin vihreitä. Siis punaisia käyriä on $2n$ ja vihreitä $2n - 1$ kpl.

16.19 Jos toinen lähde poistetaan, interferenssi katoaa. Siispä väliaine värähtelisi kummassakin havaintopisteessä eli punaisessa pisteessä intensiteetti kasvaisi (kuvassa se on nolla) ja vihreässä pieneni (noin neljänneksen, koska amplitudi puolittui). Olemme interferensiä tutkiessamme jättäneet huomioimatta sen, että aaltojen amplitudi pienenee niiden kulkissa kauemmas lähteestään. Jos tästä ei edelleenkään huomioioida, yksi aaltolähde tuottaisi kumpaankin pisteesseen saman intensiteetin, eikä ole väliä, kumpi lähde poistetaan. Jos amplitudin pieneminen etäisyyden funktiona huomioidaan, kuten täsmällisesti ottaen tietysti pitäisi, yhden lähteen tuottama intensiteetti on suurempi, kun jäljelle jää havaintopistettä lähempänä oleva lähde.

16.20 Ei ainakaan niin, että interferenssi olisi täydellisesti vahvistavaa kaikkialla. Kaksi aaltolähettä voi tuottaa aallot, jotka kuljettavat yhteensä kaksinkertaisen määrän energiota yhden lähteen tuottamien aaltoihin nähden. Jos aallot kokisivat kaikkialla täydellisesti voimistavan interferenssin, aaltojen intensiteetti ja niiden kuljettama energiamäärä nelinkertaistuisi. Täytyy siis käydä niin, että jos aallot interferoivat toisiaan voimistavasti yhdessä suunnassa, jossakin toisessa suunnassa niiden täytyy interferoida toisiaan heikentävästi, koska lähteistä ei yksinkertaisesti riitä energiota kaikkialle.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

16.21 (a) Aaltojen vaihe-eron pitää olla nolla tai jokin kokonaislukumääärä jaksoja eli 2π monikerta. Ts.

$$\Delta\phi_{2 \rightarrow A} - \Delta\phi_{1 \rightarrow A} = n2\pi, \quad (16.82)$$

missä n on jokin kokonaisluku. Tämä toteutuu, kun

$$r_{2 \rightarrow A} - r_{1 \rightarrow A} = n\lambda. \quad (16.83)$$

Ehto on siis se, että lähteistä tarkastelupisteeseen mittaujen etäisyyksien *eron* tätyy olla aallonpituuuden monikerta. Jos aallonpituuus on siis vaikkapa 2 m, lähteistä havaintopisteeseen mitatut etäisyydet voisivat olla esimerkiksi 4.5 m ja 8.5 m, sillä näiden erotus on $4 \text{ m} = 2 \times 2 \text{ m}$.

(b) Koska aalto 2 on lähtessään aaltoa 1 neljännesjakson edellä, aallot ovat havaintopisteessä samassa vaiheessa, jos aallon 1 vaihe muuttuu matkalla neljännesjakson (tai neljännesjakson ja jonkin kokonaislukumääärän jaksoja) enemmän kuin aallon 2. Ts.

$$\Delta\phi_{2 \rightarrow A} - \Delta\phi_{1 \rightarrow A} = n2\pi - \frac{1}{2}\pi. \quad (16.84)$$

Tämä toteutuu, kun matkaerolle pätee

$$r_{2 \rightarrow A} - r_{1 \rightarrow A} = \left(n - \frac{1}{4}\right)\lambda. \quad (16.85)$$

16.22 Lähteiden välinen etäisyys on $d = w/(n - 1)$, missä n on lähteiden määärä. Kun lähteitä on kaksi, d ei ole koskaan pienempi kuin λ , koska pienin rivin leveys on $w = \lambda$. Kun lähteitä on neljä, $d < \lambda$ kahdessa ylimmässä kuvassa. Ja kun lähteitä on kahdeksan, $d < \lambda$ kaikissa kuvissa. Kaikissa näissä tapauksissa lähteet tuottavat yhden voimakkaan aaltojen kiihan. Kun $d \geq \lambda$, lähteet tuottavat aaltoja useissa kiihoissa. Syg tähän on selitetty vastauksessa 16.16. Mitä kauempana lähteet ovat toisistaan, sitä useampia solmukäyriä niiden välillä mahtuu. Kukin solmukäyrä vastaa aluetta, jossa välinaine ei värähtele, joten mitä useampia solmuja, sitä useampaan erilliseen kiihan aalto jakautuu.

16.24 Silmukassa on kaksi z -suuntaista sivua, ja näistä kohdassa $x + dx$ oleva sivu kuljetaan negatiiviseen z -suuntaan. Niinpä pistetulo $\bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{r}}$ on negatiivinen, jos B_z on positiivinen, koska tällöin magneettikenttä osoittaa vastakkaiseen suuntaan kuljettuun reittiin nähdyn. Niinpä tällä sivulla $\bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = -B_z dz$.

16.25 (a) Koska A:ssa sähkökenttä voimistuu x -suuntaan ja B liikkuu A:n suhteeseen x -suuntaan, sähkökentän täytyy B:ssä voimistua ajan kuluessa. Jos esimerkiksi $E_{y,(A)}(x) = E'_y(x)x$ ja koordinaatistojen välinen nopeus on $v_{B(A)}$, B:n origon paikka A:ssa on $x_{B(A)}(t) = v_{B(A)}t$ ja kentän voimakkuus on

$$E_{y,(B)}(t) = E'_y(x)v_{B(A)}t. \quad (16.86)$$

(b) Galilei-muunnoksen mukaan magneettikenttä on $bsB_{(B)} = \bar{\mathbf{B}}_{(A)} - \varepsilon_0\mu_0\bar{\mathbf{v}}_{B(A)} \times \bar{\mathbf{E}}_{(A)}$ eli vaikka $\bar{\mathbf{B}}_{(A)} = \bar{\mathbf{0}}$, $\bar{\mathbf{B}}_{(A)} \neq \bar{\mathbf{0}}$. Täsmällisemmin nyt $\bar{\mathbf{E}}_{(A)} = E_{y,(A)}\hat{\mathbf{j}}$ ja $\bar{\mathbf{v}}_{B(A)} = v_{B(A)}\hat{\mathbf{i}}$, joten

$$\bar{\mathbf{B}}_{(B)} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E_{y,(A)}\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E_{y,(A)}\hat{\mathbf{k}}. \quad (16.87)$$

(c) Magneettikentän voimakkuus on (b)-kohdan perusteella verrannollinen sähkökentän voimakkuuteen, ja sähkökenttä voimistuu x -suuntaan, joten ilmeisesti myös magneettikenttä voimistuu x -suuntaan. Muutoksen jyrkkyyds on

$$\frac{dB_{z,(B)}}{dx} = -\varepsilon_0\mu_0v_{B(A)}E'_y(x). \quad (16.88)$$

(d) Sähkökentän muutos t :n suhteeseen on positiivinen ja magneettikentän muutos x :n suhteeseen on negatiivinen, mikä on yhteensoviva Maxwellin lain kanssa. Täsmällistä vertailua varten voimme sijoittaa (c)-kohdan tulokseen (a)-kohdasta saatava tulos $\frac{dE_{y,(B)}}{dt} = E'_y(x)v_{B(A)}$. Niin saamme

$$\frac{dB_{z,(B)}}{dx} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{dE_{y,(B)}}{dt}. \quad (16.89)$$

Tämä on täsmälleen sama tulos kuin mitä Maxwellin laista johdettiin.

16.26 (a) $B = E/c = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ T}$. (b) $\langle \rho_E \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = 4.4 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3$. (c) $I = \langle \rho_E \rangle c = 1.3 \text{ mW/m}^2$.

16.27 Piirrä kuvat! Vastaus on neljä. Olkoot peilit A ja B. Tällöin katsoja näkee (i) oikean lampun, (ii) heijastuksen peilistä A, (iii) heijastuksen peilistä B sekä (iv) heijastuksen molemmista peileistä. Jos tarkkoja olallaan, on mahdollista nähdä lampu niin, että matkalla valo heijastuu ensin peilistä A ja sitten peilista B tai niin että valo heijastuu ensin peilistä B ja sitten peilistä A. Nämä ovat periaatteessa eri kuvat, mutta kun peilit ovat 90° kulmassa, kuvat muodostuvat täsmälleen samaan paikkaan. Erityisesti näistä kuvista voi nähdä kerrallaan vain toisen (tai sitten puolet kummastakin), joten yhteensä lamppuja näyttäisi olevan neljä.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

16.28 Lasipallossa on kupera pinta joten se toimii kuperan linssin tavoin ja kokoaa valonsäteet. Nämä käy siksi, että jos valonsäde saapuu pallon pinnalle viistossa, se taittuu kohti pinnan normaalialia ja siis kohti pallon keskipistettä. Veden alla oleva ilmakupla on myös pallon muotoinen, mutta se toimii kuin kovera linssi eli se levittää valonsäteet. Nämä käy siksi, että ilmakuplan sisällä on ilmaa, jonka taitekerroin on pienempi kuin ympäröivän veden. Niinpä kuplan pinnalle vedestä viistosti saapuva valonsäde taittuu pinnan normaalista poispäin, päinvastaiseen suuntaan kuin lasipallossa.

16.29 Siis $f = 0.20$ m. Esine on tästä hieman kauempaan linssistä, arvioitaan $L_{\text{esine}} = 0.30$ m. Kuva puolestaan muodostuu huomattavasti kauemmaksi, noin etäisyydelle $L_{\text{esine}} = 0.60$ m. Linssiyhtälöksi saadaan

$$\frac{1}{L_{\text{esine}}} + \frac{1}{L_{\text{kuva}}} = \frac{1}{0.3 \text{ m}} + \frac{1}{0.6 \text{ m}} = 5.0 \text{ m}^{-1} = \frac{1}{0.2 \text{ m}} = \frac{1}{f}, \quad (16.90)$$

eli yhtälö pätee. Suurennussuhkeksi saadaan

$$M = -\frac{L_{\text{kuva}}}{L_{\text{esine}}} = -\frac{0.6 \text{ m}}{0.3 \text{ m}} = -2. \quad (16.91)$$

Kuva on kooltaan kaksinkertainen ja se on yllosalaisin esineeseen nähdyn, joten tämäkin tulos on yhteensopiva kuvan kanssa.

16.30 Kuva himmenee, mutta kumpikaan piste ei katoa kuvasta. Kuva syntyy varjostimelle siksi, että linssi kokoaa kaikki siihen osuvat vihreästä lampusta tulevat valonsäteet kuvan vihreään pisteeseen ja vastaavasti punaisesta lampusta tulevat säteet kuvan punaiseen pisteeseen. Kun linssiä peitetään, puolet vihreään pisteeseen kulkeneesta valosta ei pääse perille, ja samoin puolet punaiseen pisteeseen matkanneesta valosta. Varjostimelle siis saapuu vähemmän valoa, jolloin kuva himmenee.

16.31 Kuvassa 16.35 säteet ovat hajaantumassa niiden saapuessa toiseen linssiin. Toinen linssi kokoaa niitä yhteen, jolloin ne eivät enää hajaannu yhtä voimakkaasti. Tällöin syntyy suuri valekuva kauas linssin takase. Jos toinen linssi tuodaan lähelle ensimmäistä, linssiin saapuvat valonsäteet kulkevat toisiaan kohti ja toinen linssi kokoaa ne yhteen niin, että säteet leikkaavat toisensa vielä lähempänä ensimmäistä linssiä. Tällöin syntyy aito kuva, joka on pienempi kuin ensimmäisen linssin yksin luoma kuva.

Ensimmäisen linssin kuva toimii toisen linssin esineenä, joten toisen linssin esine on nyt linssin takana. Linssiyhtälössä tämä huomioidaan niin, että L_{esine} on negatiivinen. Jos esimerkiksi toisen linssin polttoväli on $f = 10.00$ cm ja ensimmäisen linssin kuva on linssin takana etäisyydellä 6.00 cm, on siis $L_{\text{esine}} = -6.00$ cm ja linssiyhtälöstä $1/f = 1/L_{\text{esine}} + 1/L_{\text{kuva}}$ saadaan $L_{\text{kuva}} = (1/10.00 \text{ cm} + 1/6.00 \text{ cm})^{-1} = 3.75$ cm. Toinen linssi siirtää kuvaa siis $6.00 \text{ cm} - 3.75 \text{ cm} = 2.25$ cm läheemmäs ensimmäistä linssiä.

16.33 Kaksoisraossa aaltojen lähteinä toimivat rakoihin saapuvat aallot. Nämä lähteet ovat samassa vaiheessa, jos aalto saapuu rakoihin samassa vaiheessa. Nämä puolestaan on silloin, kun aaltonrintama saavuttaa molemmat raot samanaikaisesti. Aallot eivät ole samassa vaiheessa, jos aaltonrintama saapuu toiseen rakoona ennen toista. Nämä käy, jos valo ei saavu raoille kohtisuoraan vaan vinosti.

16.34 Piirrä kuva! Jos jatkat harmaan kolmion ylempää kateettia, saat uuden, suuremman suorakulmaisen kolmion, jossa lähteiden välinen etäisyys d on nyt kateetti. Kuvaan punaisella merkitty jana on tämän suorakulmaisen kolmion korkeusjana, joka jakaa kolmion kahteen yhdenmuotoiseen suorakulmaiseen kolmioon. Kulma θ on näiden kolmioiden terävä kulma.

16.35 Kuvan 16.39 tilanne vastaa kuvan 16.19 (a) tapausta, jossa on neljä lähdettä ja $w = 3\lambda$. Kummassakin tapauksessa kulkee voimakas aalto likimain kulmissa $\theta = 0^\circ, \pm 50^\circ$ ja näiden välissä on kaksi suuntaa, joihin kulkee huomattavasti heikompi aalto.

16.36 Piirrä kuva! Kuvioita on neljä, ja niissä vierekkäisistä lähteistä tulevia aaltoja kuvavaien vaiheenosittimien välinen kulma on $\Delta\phi = \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi$ tai $\frac{8}{5}\pi$. Kuvioista kaksi on viisikulmioita ja kaksi viisisakaraisia tähtiä.

16.37 (a) Kun rakojen keskinäinen etäisyys pysyy samana, päämaksimien paikat eivät muutu. Sivumaksimien määrä kuitenkin muuttuu. Kun rakoja on kolme, päämaksimien välissä on kaksi minimiä, jotka erottavat yhden sivumaksimin. Kun rakoja on kuusi, päämaksimien välissä on viisi minimiä, jotka erottavat neljä sivumaksimia. **(b)** Koska minimien ja sivumaksimien määrä lisääntyy rakojen määrän kasvaessa, maksimeista täytyy tulla kapeampia. Erityisesti päämaksimien leveys pienenee.

(c) Rakojen määrän kasvaessa, sivumaksimien intensiteetti pienenee ja päämaksimien kasvaa.

(d) Raot toimivat aaltojen lähteinä, joten rakojen määrän kaksinkertaistuminen tarkoittaa varjostimelle saapuvan energian kaksinkertaistumista. Tämä näkyy intensiteettijakaumassa niin, että päämaksimien leveys pienenee, mutta niiden intensiteetti kasvaa niin, että aallon kuljettama kokonaisteho kasvaa. Sivumaksimien intensiteetti pienenee, eli rakojen määrän lisääntyessä aaltojen kuljettama energia keskittyy yhä tarkemmin päämaksimeihin, joista tulee kirkkaita ja kapeita valokuiloja.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

16.38 Levyyn pinnassa on hyvin kapeita uria, joten levy toimii kuin peili, jonka pintaan on kiinnitetty diffraktiohila. Hilan läpi kulkeva aalto siroaa vain tiettyihin kulmiin, jotka riippuvat aallonpituuudesta. Valkoinen valo on monien värien eli monien eri aallonpituuksien superpositio. Kun nämä erilaiset aallot osuvat hilaan, kukin siroaa johonkin tiettyyn kulmaan riippuen sen aallonpituuudesta. Niinpä kun katsot levyn pinnan yhtä pistettä, näen vain sen värin, joka siroaa ko. pisteestä juuri siihen kulmaan, jossa silmäsi on. Kulma pinnasta silmääsi riippuu tieteenkin siitä, mikä pinnan piste on kyseessä, joten eri pisteissä näkyy eri värejä.

16.39 Kun $N = 1$, intensiteettijakauma on $I(\theta) = I_0$ eli intensiteetti on vakio. Tulos on aivan oikein, koska oletimme valon kulkevan hyvin kapeiden rakojen läpi. Tällöin kukin rako toimii aallon läheenä ja lähetää sylinterimäisänä pintoina leviävä aaltorintamia kaikkiin suuntiin. Tällaisen aallon intensiteetti on kaikissa suunnissa sama eli intensiteettijakauma kulman funktiona on vakio.

16.40 Kuviot olisivat melko samanlaiset. Kuvioissa olisi nyt 24 nuolta 12 sijaan, mutta kukin nuoli olisi pituudeltaan puolet siitä mitä 12 läheen kuviossa ja peräkkäisten nuolten välinen kulma olisi puolikas siitä mitä kuvassa nyt. Lopputulos olisi se, että nuolet muodostaisivat lähes samanlaisia kaaria ja ympyrötä kuin nytkin, mutta esimerkiksi ympyrää muistuttava kuvio olisi nyt 24-kulmio 12-kulmion sijaan. Jos rako jaettaisiin äärettömän moneen osaan, kuvioista tulisi täydellinen ympyrä.

16.41 Kun raot ovat erillisiä ja tasavälistiä, on olemassa muitakin kulmia kuin $\theta = 0$, joissa kaikki vaiheenoitimet ovat samansuuntaiset. Kun kyseessä on yksi rako, joka jaetaan hyvin moneen osaan, eri osien vaiheenoitimet eivät ole ikinä yhdensuuntaiset ellei ole $\theta = 0$.

16.42 Ajatellaan rako jaetuksi 12 osaan. Nyt ensimmäinen ja viides osa ovat vastakkaisissa vaiheissa ja niiden tuottamat aallot kumoavat toisensa. Samoin on 2. ja 6. 3. ja 7. sekä 4. ja 8. läheen läita. Jäljelle jäävät kuitenkin lähteet 9–12. Nyt siis 2/3 raosta interferoi täydellisen tuhoavasti, mutta viimeinen 1/3 ei. Intensiteetti on siis pieni mutta ei nolla.

16.43 (a) Minimit ovat likimain kulmissa $\theta = \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$, joten raon leveys w ratkeaa yhtälöstä

$$w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda. \quad (16.92)$$

Erityisesti kulma $\theta = 30^\circ$ vastaa indeksiä $n_{\min} = 1$, joten $w = \lambda / \sin 30^\circ = 1000 \text{ nm}$.

(b) Nyt ratkaistaan kulma,

$$\theta_{\min} = \arcsin \frac{\lambda}{w} = \arcsin \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{10^{-3} \text{ m}} = \arcsin(5 \cdot 10^{-4}) \approx 5 \cdot 10^{-4} \approx 0.03^\circ. \quad (16.93)$$

Ensimmäinen intensiteettiminimi on siis erittäin lähellä nollakulmaa. Tämä tarkoittaa sitä, että valo kulkee raosta lähes täydellisen suoraan eikä diffraktoidu juuri lainkaan, sillä päämaksimi on lähes täsmälleen kulmassa $\theta = 0^\circ$. Valolla 1 mm on siis hyvin leveä aukko, ja siitä kulkeva valo kulkee suoraan noudattaen sädeoptiikan lakeja.

(c) Äänen aallonpituuus ilmassa riippuu taajuudesta. Äänen nopeus on noin 350 m/s. Esimerkiksi 500 Hz äänen aallonpituuus on siis noin $\lambda = v/f = 0.70 \text{ m}$. Yhtälöllä $w \sin \theta_{\min} = \lambda$ ei ole nyt kuitenkaan ratkaisua, koska $w < \lambda$. Tämä tarkoittaa sitä, että diffraktiominimejä ei ole lainkaan vaan ääni diffraktoituu kaikkiin kulmiin. Tämäkin on odotettu tulos. Äänelle 1 mm on hyvin pieni rako, ja tällaisesta raosta tuleva ääni kuuluu kaikissa suunnissa eikä vain suoraan raon takana.

16.44 Tarkimmin ongelma selviää huomaamalla, että kulmassa 60° on kahden raon interferenssikuvion neljäs maksimi ja yhden raon diffraktion toinen minimi. Rakojen välinen etäisyys ratkeaa kaksoisraon interferenssimaksimeja kuvavasta yhtälöstä $d \sin \theta_{\max} = n_{\max} \lambda$, josta saadaan $d = \lambda / \sin 60^\circ = 4.6 \lambda$.

Rakojen leveys selviää yhden raon diffraktionminimejä kuvavasta yhtälöstä $w \sin \theta_{\min} = n_{\min} \lambda$, josta saadaan $w = \lambda / \sin 60^\circ = 2.3 \lambda$.

16.45 Tavallisesti mikroskoopeilla voidaan erottaa yksityiskohtia, jotka ovat hieman pienempiä kuin käytetty aallonpituuus. Parhailla laitteilla voidaan erottaa kohteet, joiden etäisyys on luokkaa $\lambda/3$. Tämä johtuu siitä, että jos valon aallonpituuus on selvästi suurempi kuin tarkasteltavat yksityiskohdat, valo diffraktoituu kulkissaan näiden kohteiden ohjaamalla, jolloin havaitusta kuvasta tulee epäselvä.

Ongelma voidaan ohittaa esimerkiksi käyttämällä lyhyen aallonpituuuden aaltoja (esimerkiksi elektronimikroskooppi käyttää elektronialtoja) tai mikroskopiamenetelmää, jotka eivät perustu lainkaan aaltoihin (esimerkiksi atomivoimamikroskoopissa kohteita tutkitaan tunnustelemalla niitä neulalla, jonka kärki on muutaman atomin kokoinen).

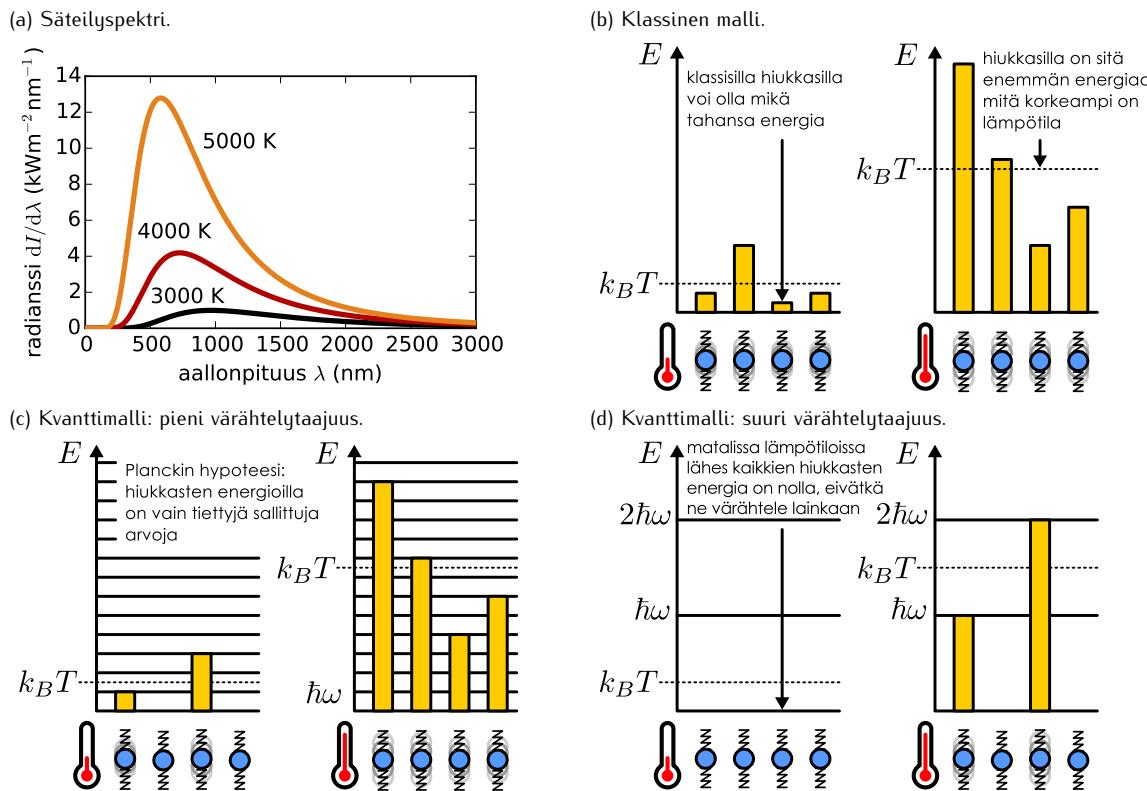
17 Kvanttimekaniikka

Tutustuimme mikroskooppisten hiukkasten fysiikkaan ensimmäisen kerran jo termodynamiikan yhteydessä. Tällöin pystyimme selittämään monia aineen ominaisuuksia oleellisesti ajattelemalla hiukkasten olevan "pieniä kumipalloja". Huomasimme kuitenkin myös, että joitakin ilmiötä kuten jäätyneitä vapausasteita ei voida ymmärtää tällaisella mallilla, vaan selvästikin ajattelussamme oli puutteita. 1800-luvun loppuun mennessä oli kokeellisesti löydetty muitakin vastaavia ilmiötä, joissa klassinen fysiikka oli riittämätön, ja nämä havainnot johtivat aivan uudenlaiseen tapaan kuvata luontoa — valon fotonimallün sekä elektronien ja muiden alkeishiukkasten kvantimekaniikkaan. Klassisen fysiikan käsitteet kuten paikka ja nopeus eivät ole kvantimekaniikassa enää riittäviä kuvamaan hiukkasten käyttäytymistä. Toisin kuin klassisilla "kumipallohiukkasilta", kvantimekaanisilla hiukkasilla ei välttämättä ole esimerkiksi yhtä tiettyä paikkaa vaan ne voivat aaltojen tapaan olla levittäytyneet avaruuteen. Toisaalta joissakin systeemeissä kvantihiuksella ei voi olla mitä tahansa energiaa vaan vain jotkin arvot ovat mahdollisia. Kummallisin kvantimekaniikan ominaisuus lienee kuitenkin se, että kvantimekaaniset hiukkaset eivät ole deterministisiä. Toisin sanoen vaikka tiedäsimme hiukkisen tilan täsmälleen, kvantimekaniikka ei salli meidän tietää esimerkiksi hiukkisen paikkaa varmasti vaan pystymme ainoastaan ennustamaan paikan tietyillä todennäköisyyksillä.

Tämän luvun opiskeltuasi sinun tulee osata:

- selittää miksi klassinen valon aaltomalli ei voi selittää valosähköistä ilmiötä tai kaksoisrakokoetta mutta fotonimalli voi
- määritellä kvantimekaaninen tila ja selittää miten tila kuvaa hiukkisen paikkaa, liikemäärä ja energiaa
- laskea hiukkisen paikan ja liikemäären odotusarvot
- muotoilla epätarkkuusperiaate paikan ja liikemäären hajontojen avulla
- muotoilla Schrödingerin yhtälö ja selittää kuinka hiukkisen mahdolliset tilat periaatteessa ratkaistaan
- kuvilla millaisia tiloja pieneen tilaan vangitulla hiukkassella voi olla
- kuvilla elektronin mahdollisia tiloja atomeissa

Kuva 17.1: Mustan kappaleen säteilyspektri. Klassinen teoria selittää ilmiön hyvin pitkillä aallonpituuksilla (pienillä taajuuksilla), mutta lyhyillä aallonpituuksilla (suurilla taajuuksilla) klassinen malli ennustaa intensiteetin kasvavan rajatta. Planckin mallissa suurtaaajuuksesta säteily ei voi syntyä lainkaan, koska elektroneilla ei ole tarpeeksi energiota värähdellä suurilla taajuuksilla, ja niinpä säteilyn intensiteetti lähestyy nolla aallonpituuuden lähestyessä nollaa.



17.1 Fotoni

Planckin hypoteesi

Kvanttimekaniikan katsotaan usein syntyneen vuonna 1900 Max Planckin esitetyä selityksen mustan kappaleen säteilyn ominaisuuksille. Musta kappale tarkoittaa fysiikassa kappaletta, joka absorboi täydellisesti kaiken siihen osuvan sähkömagneettisen säteilyn. Koska tällainen kappale ei heijasta lainkaan valoa, se on musta — ainakin kylmänä. Kun musta kappale on kuuma, se ei ole enää musta sanan puhekielisessä merkityksessä, koska kuuma aine lähetää eli **emittoi** sähkömagneettista säteilyä jota valokin on. Ihmisetkin ovat tarpeeksi lämpimää emittoidakseen infrapunasäteilyä, ja esimerkiksi metallit voivat kuumetessaan alkaa ensin punertaa, sitten kellertää ja lopulta hehkua valkoisenä.

Kokeellisesti siis selvästikin kappaleiden emittoiman säteilyn aallonpituuus riippuu niiden lämpötilasta, ja 1800-luvun lopulla mustan kappaleen spektri eli sen lähetämän säteilyn intensiteetin riippuvuus aallonpituuudesta, sekä spektrin riippuvuus lämpötilasta (kuva 17.1 (a)) tunnettiin kokeellisesti varsin hyvin. Mustan kappaleen säteilyn voimakkuudella on aina maksimi jollakin aallonpituuudella, joka riippuu kappaleen lämpötilasta. Tätä lyhyemmällä aallonpituuksilla kappale ei säteile juuri lainkaan. Jos lämpötila on matala, kappale ei lähetä säteilyä näkyvän valon aallonpituualueella vaan intensiteettimaksimi on tästä pidemmilä aallonpituuksilla, ja kappale on musta. Lämpötilan noustessa intensiteettimaksimi siirtyy kohti lyhyempää aallonpituuksia, jolloin kappale alkaa emittoimaan myös näkyvää valoa.

Klassisen sähkömagnetismin näkökulmasta tästä oli mahdoton ymmärtää. Klassisen kappaleen pitäisi pystyä emittoimaan säteilyjä *millä tahansa aallonpituuudella* ja erityisesti klassinen teoria ennusti säteilyn intensiteetin olevan sitä suurempi, mitä lyhyempää aallonpituitta tarkastellaan. Planckin selitys ilmiölle oli tämä: kappale lähetää säteilyä niillä taajuuksilla, joilla sen elektronit värähtelevät, ja jostakin tuntemattomasta syystä näiden elektronien energia *ei voinut saada mitä tahansa arvoja* vaan vain jotkin tiettyt energiat olivat nulle sallittuja. Erityisesti elektronien mahdolliset energiat ovat Planckin selityksessä niiden värähtelytaajuuden f ja jonkin uuden luonnonvakion h tulon monikertoja, $E = 0, hf, 2hf, 3hf$ jne.

Klassisen termodynamiikan ekvipartitioperiaatteen mukaan värähtelevän elektronin jokaisen värähtelysuunnan keskimääräinen energia lämpötilassa T on $\langle E \rangle = k_B T$ (kuva 17.1 (b)), ja kullakin yksittäisellä elektronilla voi olla läpöliükkeestä johtuen periaatteessa mikä tahansa satunnainen energia, kunhan energia ei

ole kovin paljon tästä keskiarvoa suurempi. Niinpä tässä mallissa kaikki elektronit värähtelevät ainakin vähän olipa lämpötila tai niiden värähtelytaajuus mikä tahansa.

Planckin malli ei poikkeaa klassisesta mallista kovin paljon, jos elektronien sallittujen energioiden erotus on pieni verrattuna lämpötilasta riippuvaan keskimääriseen energiaan (kuva 17.1 (c)). Kuitenkin jos lämpötila on matala tai elektronien värähtelytaajuus on suuri, elektronien ensimmäinen nollasta poikkeava sallittu energia hf voi olla *suurempi* kuin lämpötilaan liittyvä energia, $k_B T$ (kuva 17.1 (d)). Jotkin elektronit voivat sattumaalta saada enemmän energiaa kuin keskimääriinen energia $k_B T$, mutta on hyvin epätodennäköistä, että satunnainen lämpöliike antaisi millekään elektronille huomattavasti tästä enemmän energiota. Niinpä jos hf on paljon suurempi kuin $k_B T$, on hyvin epätodennäköistä, että mikään elektroni saa näin paljon energiota. Tällöin lähes kaikkien taajuudella f värähtelevien elektronien energian täytyy olla *nolla*, eli elektronit eivät värähtelevätkään. (Elektronien keskimääriinen energia ei myöskään ole tällöin $k_B T$ vaan sekin on likimain nolla joten *ekvipartitioperiaate ei päde* enää.)

Jos elektronit eivät värähtelevätkään, ne eivät myöskään voi lähetä sähelyjä, ja tämä on selitys sille, miksi musta kappale ei lähetä sähelyjä lyhyillä aallonpituuksilla: Mitä lyhyempi on aallonpituuus, sitä suurempi on taajuus. Niinpä jotta musta kappale voisi lähetä sähelyjä lyhyillä aallonpituuksilla, siinä täytyy olla suurella taajuudella värähteleviä elektroneja. Kuitenkin mitä suurempi elektronin värähtelytaajuus f on, sitä suuremman energian hf elektroni tarvitsee alkaakseen värähtelemaan. Jos elektroni ei saa näin paljon energiota, se eivät värähtelevätkään. Jos lämpötila on matala, kappaleessa ei yksinkertaisesti ole tarpeeksi sisäenergiaa, jotta elektronit voisivat värähdyttää suurilla taajuuuksilla. Niinpä elektronit värähtelevät ja lähetävät sähelyjä ainoastaan pienillä taajuuuksilla. Tässä "suuri taajuus" tarkoittaa siis taajuuksia, joihin liittyy energia on suurempi kuin lämpötilaan liittyvä energia, $hf > k_B T$. Lämpötilan noustessa tämä raja siirtyy kohti suurempia taajuuuksia eli pienempää aallonpituuksia. Näin ollen myös mustan kappaleen spektrissä esiintyvä maksimi siirtyy korkeissa lämpötiloissa kohti lyhyitä aallonpituuksia.

Planckin tarkka teoreettinen analyysi osoitti, että tällainen malli selittää täydellisesti, kuinka mustan kappaleen lähettämän sähelyn intensiteetti riippuu sähelyn aallonpituuudesta ja kappaleen lämpötilasta. Muutenkin Planckin hypoteesi hiukkasten värähtelytaajuuden ja energian verrannollisuudesta osoittautui erittäin tärkeäksi ideaksi kvantimekaniikan myöhemmässä kehityksessä. Planckin oletukselle ei kuitenkaan ollut vielä tuolloin mitään järkevää fysikaalista oikeutusta, ja nykyistä käsitystä vastaava selitys ilmiölle kehitettiin vasta 1920-luvulla. Joka tapauksessa mallissa esiintynyt uusi luonnonvakio $\hbar = 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js on sittemmin nimetty **Planckin vakioksi**. Tämä vakio osoittautui myöhemin niin keskeiseksi, että vuoden 2019 SI-järjestelmän uudistuksessa Planckin vakion arvon määriteltiin olevan tarkka. Koska vakion yksikkö on $\text{Js} = \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$, yhdessä metrin ja sekunnin määritelmän kanssa Planckin vakion arvo määrittelee kilogramman.

Kvantimekaniikassa on tavallisempaa käyttää kulmataajuutta $\omega = 2\pi f$ taajuuden sijaan, jolloin Planckin mallin energia hf voidaan kirjoittaa myös muodossa $hf = \frac{\hbar}{2\pi} 2\pi f = \hbar\omega$. Tässä esiintyvä uusi vakio $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js on nimeltään *redusoitu Planckin vakio* tai tuttavallisemmin "h-viiva".

Myös termi **kvantti** on peräisin Planckilta. Termi on johdettu latinan sanasta *quantum* ja tarkoittaa suoraan käännettynä 'näin paljon'. Planckin mallissa värähtelijän energia saattoi nimittäin muuttua vain määrän $\hbar\omega$ eli yhden *energiakvantin*.



17.1 Mitä suuruusluokkaa on punaisen valon taajuus? Mikä on sitä vastaavan energiakvantin suuruus? Mitä lämpötilaa se vastaa?

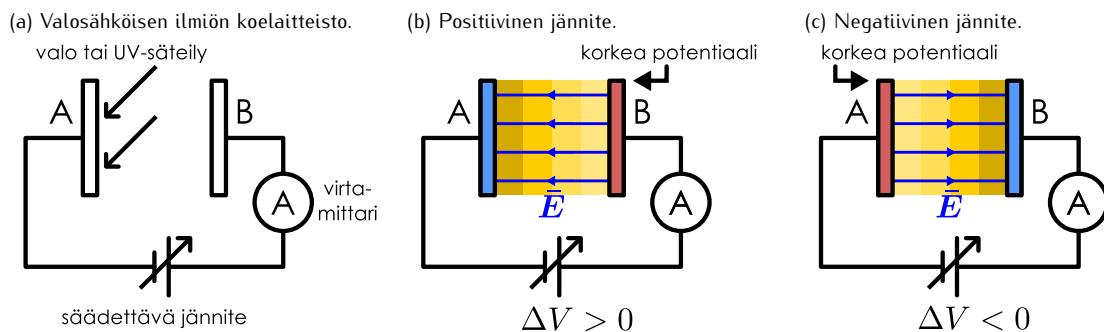
Valosähköinen ilmiö

Planckin hypoteesissa elektronien energiat riippuivat niiden taajuuksista, mutta elektronien lähettämä sähely oli hänen mallissaan edelleen klassista sähkömagneettista aaltoliikettä. Seuraavan mullistavan idean esitti Einstein 1905 selittääseen valosähköisen ilmiön eli sen, kuinka metalliin osuva valo irrottaa siitä elektroneja tuottaen mitattavan sähkövirran.

Valosähköistä ilmiötä voidaan kokeellisesti tutkia kuvassa 17.2 esitetyllä laitteistolla. Laitteessa on yksinkertaisessa virtapiirissä jännitelähde ja kondensaattori, jonka levijä on kuvassa merkitty A ja B. Virtapiirin jännitelähde on säädettävissä niin, että levijen välistä jännitetettä voidaan muuttaa ja erityisesti kummalle tahansa kondensaattorin levijästä voidaan antaa korkeampi potentiaali. Merkitään levijen välistä jännitetettä ΔV ja valitaan sen etumerkki niin, että $\Delta V > 0$ V silloin, kun levy A on matalammassa potentiaalissa. Lisäksi silmukassa on virtamittari, joka normaalisti luonnollisesti näyttää nollaa, koska kondensaattorin katkaisemassa tasavirtapiirissä ei kulje sähkövirtaa.

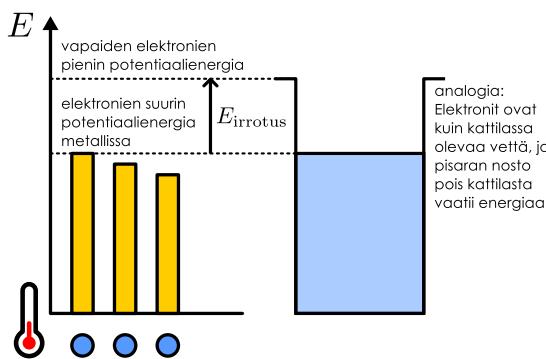
Kuitenkin jos kondensaattorin levijä A valaistaan, voidaan joissakin tapauksissa havaita, että silmukassa kulkee virta. Ilmiö johtuu yksinkertaisesti siitä, että valo antaa kondensaattorilevyllä oleville elektroneille energiota, jonka avulla ne voivat irrota levystä, kulkea kondensaattorilevijen välisen aukon yli, ja jatkaa matkaansa pitkin johdinta. Tässä ei sinänsä ole klassisen fysiikan näkökulmasta mitään ihmellistä, ja klassisen teorian (osittain väärä) selitys valosähköiselle ilmiölle on seuraava: Elektroneja sitoo metalliin attraktiivinen

Kuva 17.2: Yksinkertaistettu kuvaus valosähköisen ilmiön koelaitteistosta. Kokeessa kondensaattorille saapuu säteilyä, jonka energian turvin elektronit voivat kulkea kondensaattorin läpi ja kuljettaa virtaa. Kokeessa voidaan muuttaa säteilyn aallonpituitta ja intensiteettiä, kondensaattorissa käytettyjä materiaaleja sekä kondensaattorin jännitettä (sähkökenttää). Kokeessa mitataan piirissä kulkeva virta.



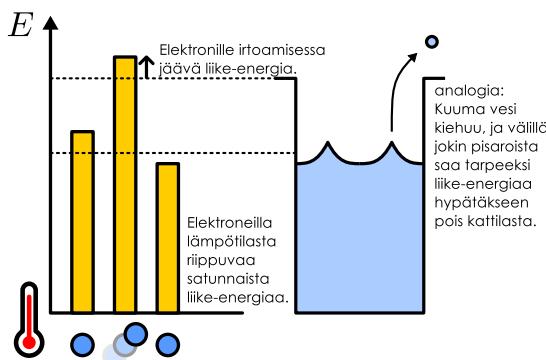
sähkömagneettinen vuorovaikutus atomiydinten kanssa, joten niiden potentiaalienergia on metallissa pienempi kuin jos ne olisivat vapaat (eli irti metallista). Niinpä elektronien irrottaminen metallista vaatii vähintään energian E_{irrotus} (tällä on historiallisista syistä outo nimi *työfunktio*) kuten kuvassa 17.3 on havainnollistettu. Metallissa olevilla elektroneilla ei ole aluksi kaikilla sama energia, ja E_{irrotus} kertookin paljonko energiota tarvitaan irrottamaan juuri ne elektronit, joilla on kaikkein *korkein* potentiaalienergia metallissa. Ne elektronit, joilla on aluksi tätä vähemmän energiota, tarvitsevat vielä enemmän energiota päästään pakenemaan metallista.

Kuva 17.3: Levyn A energiadiagrammi: elektronit kiinni levyssä.



peasti lämpöenergiaksi, jolloin metallin *lämpötila nousee*. Lämpötilan ollessa kyllin korkea yksittäiset elektronit voivat saada sattumalta tarpeeksi liike-energiaa irrotakseen metallista (kuva 17.4). Vesianalogiassa tämä vastaa likimain sitä, että kattilassa oleva vesi kiehuu, jolloin elektronit voivat sattumalta lentää ulos kattilasta.

Kuva 17.4: Elektronin irtoaminen klassisessa mallissa.



Tilannetta voi verrata kattilaan, jossa on vettä. Jotta vesipisaran saisi pois kattilasta, se pitää nostaa kattilan reunan ylitse. Tällöin pisaran potentiaalienergia painovoimakentässä kasvaa, ja pisaralle on siis annettava energiaa, jotta nosto onnistuisi. Vähiten energiota tarvitsevat pinnalla olevat pisarat. Jos vettä nostetaan kattilan pohjalta, tähän tarvitaan enemmän energiota.

Valo on klassisen fysiikan mukaan sähkömagneettisen kentän aalto, joten kondensaattorilevylle osuvan valon sähkökenttä kohdistaa elektroneihin voiman. Tämän voiman tekemän työn kautta sähkömagneettisen kentän energiota siirtyy elektroneille, jotka lähtevät siis metallissa liukkeelle. Resistanssin vuoksi elektronien liike-energia kuitenkin muuttuu nopeasti lämpöenergian muotoon.

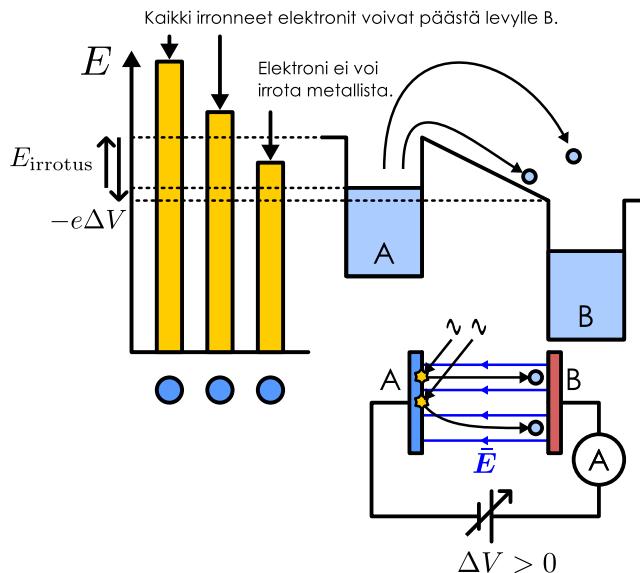
Jos valaistu kondensaattorilevy A on pienemmässä potentiaalissa kuin toinen levy B (eli $\Delta V > 0 \text{ V}$), levujen välinen sähkökenttä osoittaa kohti pienempää potentiaalia eli valaistua levyä A (kuva 17.5 (a)). Niinpä kenttä vetää kaikki irronneet elektronit kondensaattorilevyjen välisen raon ylitse levylle B, koska negatiivisesti varattuihin hiukkasiin kohdistuu sähkökentässä voima kenttään nähdyn päänvastaiseen suuntaan. Elektronien näkökulmasta ne siis "putoavat alaspäin" levylle B ja tällöin jokainen irronnut elektroni kulkee kondensaattorin läpi. Jos aikavälillä Δt irtoaa n_e elektronia, nämä kuljettavat varauksen $\Delta q = -n_e e$ ja kondensaattorin läpi kulkee virta

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{n_e e}{\Delta t}. \quad (17.1)$$

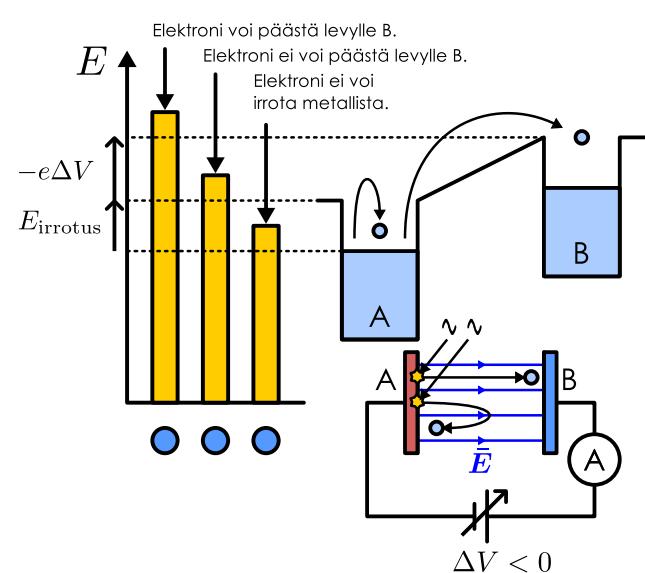
Kondensaattorin läpi kulkenut sähkövaraus ei voi kuitenkaan jäädä kondensaattorilevylle B, koska tällöin kondensaattorin varaus ja samalla sen jännite kasvaisi. Jännitelähde huolehtii siitä, että kondensaattorissa on aina sama jännite, ja se tekee sen työntämällä ylimääräisiä elektroneja johdinta pitkin levyltä B levylle

Kuva 17.5: Elektronien energiadiagrammi, kun pürissä on jännite. (a) Levyn B ollessa korkeassa potentiaalissa elektronien potentiaalienergia on suurempi levyllä A. Tällöin levy B vetää elektroneja puoleensa. Tällöinkin elektronien täytyy ensin päästä irti metallista ennen kuin voivat siirtää levylle B. (b) Levyn A ollessa korkeassa potentiaalissa elektronien potentiaalienergia on suurempi levyllä B. Tällöin levy B hylkii elektroneja eivätkä kaikki irronneet elektronit pääse kondensaattoriin läpi.

(a) Pürissä positiivinen jännite.



(b) Pürissä negatiivinen jännite.



A. Niinpä kondensaattorin läpi kulkeen virran täytyy kulkea koko virtapiirin ympäri ja näin ollen virtamittari mittaa saman virran kuin mitä kondensaattorissa kulkee. Negatiivisesti varautuneet elektronit kulkevat kondensaattorissa levyltä A levylle B ja pürissä levyltä B levylle A. Virta kulkee elektroneihin nähden vastakkaiseen suuntaan levyltä A levylle B. Asennetaan virtamittari püriin niin päin, että mitattu virta on positiivinen.



17.2 Selitä kuvan 17.5 (a) tilanne vesianalogian avulla. Selitä (a) miten kattilasta A pois päässeet pisarat käyttäätyvät, (b) mikä olisi jännitelähteen vastine tässä analogiassa, sekä (c) mikä on virtamittarin analogia. Selitä erityisesti, miten kattilasta A pois lentäneiden pisarojen määrä ja nopeus vaikuttaa mitattuun virtaan.

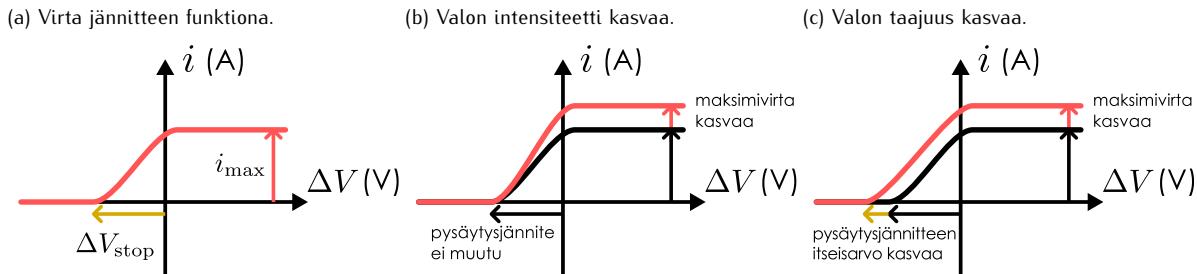
Nyt *mitattu virta ei riipu jännitteestä suuruudesta*, koska virta mittaa paljonko varausta eli *montako elektronia* kondensaattorin läpi kulkee. Erityisesti positiivisilla jännitteillä *kaikki* irronneet elektronit kulkevat kondensaattorin läpi, joten mitattu virta on sama, i_{\max} , kaikilla positiivisilla jännitteillä. Jännite vaikuttaa kyllä siihen, kuinka "korkealta elektronit putoavat" eli kuinka paljon energiaa ne saavat kulkiessaan kondensaattorin läpi, mutta jokainen elektroni kuljettaa varausta vain yhden alkeisvarauksen verran riippumatta siihän, kuinka nopeasti ne iskeytyvät levyn B. Pürissä mitattu maksimivirta i_{\max} on siis suoraan verrannollinen levystä A ironneiden elektronien määrään.

Jos valaistu kondensaattorilevy A on korkeammassa potentiaalissa kuin levy B, $\Delta V < 0$ V, levyjen välinen sähkökenttä pyrkii vetämään elektroneja takaisin levyille A (kuva 17.5 (b)). Tällöin vain ne elektronit, joiden liike-energia metallista irtoamisen jälkeen on suurempi kuin ero levyjen välisessä potentiaalienergiassa, voivat päästä kondensaattorin läpi. Nyt elektronit "putoavat takaisin" levylle A, joten aivan samoin kuin ylös-päin heitetystä palloista vain tarpeeksi nopeat voivat osua katteen, vain tarpeeksi suurella alkunopeudella irronneet elektronit voivat osua levyn B. Koska elektronien liike on lämpöliukkeen vuoksi satunnaista, myös irtoavien elektronien liike-energioissa on satunnaista vaihtelua. Siispä irtoaville elektroneille irtoamisen jälkeen jäävä liike-energia on satunnainen, ja elektroni voi kulkea kondensaattorin läpi, jos sillä on tarpeeksi energiava. Jokin kondensaattorin jännitteestä riippuva osuus irtoavista elektroneista pääsee siis kondensaattorin yli ja kuljettaa virtaa. Luonnollisesti mitä negatiivisempi jännite kondensaattorissa on, sitä vaikeampi elektronien on päästää siihän läpi ja niinpä pürissä mitattu virta pienenee jännitteen itseisarvon funktiona. Tarpeeksi negatiivisilla jännitteillä $\Delta V < \Delta V_{\text{stop}} < 0$ V elektroneja ei pääse kondensaattorin läpi käytännössä lainkaan eikä sähkövirta kulje. Tätä rajaa ΔV_{stop} kutsutaan *pysäytysjännitteeksi*.



17.3 Selitä kuvan 17.5 (b) tilanne vesianalogian avulla.

Kuva 17.6: Piirissä mitattu virta jännitteiden funktiona. Negatiivinen jännite pyrkii estämään elektroneja kulkemasta levyn yli, jolloin virta häviää kokonaan jännitteiden ollessa itseisarvoltaan kyllin suuri. Positiivinen jännite pyrkii vetämään irronneet elektronit levyn läpi, jolloin virta on likimain vakiota kaikilla positiivisilla jännitteillä. Mitattu virta-jännitekuvaajan muoto riippuu sääteilyn taajuudesta (aallonpituuudesta) ja intensiteetistä.



Kuvaan 17.6 on piirretty edellä kuvailtu virran ja jännitteiden välinen yhteyks. Kuvaaja on varsin erilainen kuin esimerkiksi vastuksella, ja kyseessä onkin *diodi* eli komponentti, joka päästää virtaa vain yhteen suuntaan. Tässä ei ole kuitenkaan vielä mitään odottamatonta, sillä juuri tällaisia mittaustuloksia kokeellisesti saadaan. Outoa klassisen fysiikan näkökulmasta on se, miten tulokset *muuttuvat*, kun jännitetä ΔV tai valon aallonpituutta muutetaan.

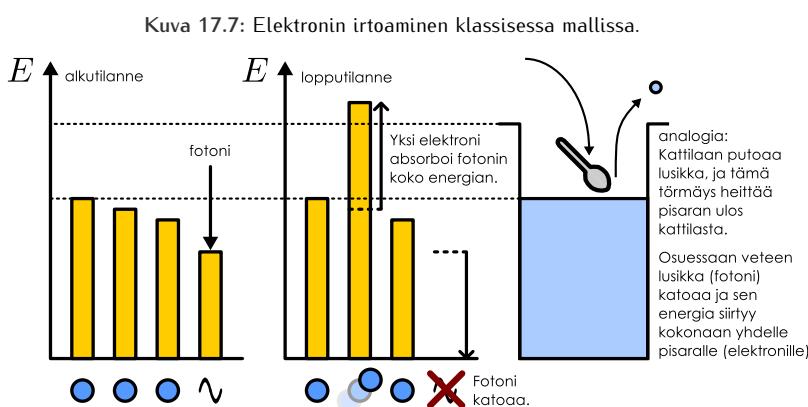
Klassisen teorian mukaan valon *aallonpituus* tai *taajuus* ei vaikuta sen kuljettamaan energian. Sen sijaan teho, jolla elektroneille siirrytt energiaa, riippuu ainoastaan valon *intensiteetistä*. Niinpä aallonpituuden ei pitäisi vaikuttaa mittaustuloksiin *mitenkään*. Toisaalta mitä suurempi on valon intensiteetti, sitä nopeammin ja kuumemmaksi levyn A pitäisi lämmetä. Tällöin elektroneja pitäisi irrota aikayksikössä *enemmän* ja irtoavilla elektroneilla voi olla *suurempia* energioita. Toisin sanoen intensiteetin kasvattamisen pitäisi suurentaa sekä mitattua maksimivirtaa i_{\max} että pysäytysjännitettä ΔV_{stop} . Lisäksi koska elektronit irtoavat klassisessa mallissa lämpöenergian ansiosta, malli ennustaa, että levijä pitää valaista jonkin aikaa ennen kuin se on lämmennyt tarpeeksi ja elektroneja voi irrota.

Kokeellisesti kuitenkin havaitaan, että

- virta alkaa kulkea välittömästi, kun levijä valaistaan,
- intensiteetin kasvattaminen suurentaa maksimivirtaa i_{\max} mutta *ei* pysäytysjännitettä ΔV_{stop} ,
- valon taajuuden kasvattaminen (aallonpituuden pienentäminen) *suurentaa sekä maksimivirtaa* i_{\max} *että pysäytysjännitteen itseisarvoa* $|\Delta V_{\text{stop}}|$ ja
- on olemassa jokin levyn A materiaalista riippuva sääteilyn kynnystaaajuus $f_{\text{raja}} = \omega_{\text{raja}}/2\pi$, jota pienemmillä taajuuksilla (pidemmillä aallonpituuksilla) virtaa *ei* kulje lainkaan.



17.4 Selitä vielä oman sanoin, miksi yllä mainitut asiat ovat klassisen fysiikan mukaan käsittämättömiä.



Kokeelliset havainnot ovat selkeästi ristiriidassa edellä tarkastellun klassisen mallin kanssa, joten *klassinen malli ei voi olla oikein*. Einsteinin ratkaisun mukaan käsitystä valosta sähkömagneettisena aaltona täytyy muuttua. Koska virta alkaa kokeessa kulkemaan heti, kun levijä A valaistaan, valon tuoma energia ei ilmeisesti jakaudu tasoon kaikkien levyn hiukkasten kesken vaan jotkin elektronit saavat kerralla huomattavan suuren määrän energiota. Edelleen koska virta havaitaan vain tarpeeksi lyhyillä aallonpituuksilla eli suurilla taajuuksilla, yksittäisten elektronien saaman energian täytyy riippua valon taajuudesta. Nämä vaatimukset toteutuvat, jos valo koostuu hiukkasista, **fotoneista**.

Yksittäisen fotonin energia riippuu sen taajuudesta Planckin hypoteesia muistuttavalla tavalla,

$$E_{\text{fotoni}} = h f = \hbar \omega. \quad (17.2)$$

Fotonin kohtaava elektroni voi absorboida fotonin, jolloin se saa kerralla *fotonin koko energian* (kuva 17.7). Niinpä jos levjä A valaistaan vain yhtä aallonpituuutta sisältävällä valolla, elektronien ja fotonien vuorovaikutuksessa kukin elektroni voi saada kerrallaan vain *joko* energian $\hbar\omega$ tai *ei lainkaan energiaa*. Niinpä jos levylle saapuvien fotonien energia on suurempi kuin elektronien irrottamiseen vaadittu minimienergia $E_{\text{fotoni}} = \hbar\omega > E_{\text{irrotus}}$, yksittäiset fotonit pystyvät irrottamaan elektroneja. Näin on jos fotonien taajuus on suurempi kuin kynnystaajuus

$$\omega > \frac{1}{\hbar} E_{\text{irrotus}} = \omega_{\text{raja}}. \quad (17.3)$$

Vaikka valon taajuus olisi suurempi kuin kynnystaajuus, *kaikki* fotonit eivät siltikään irrota elektroneja. Voi nimittäin käydä myös niin, että fotonin absorboi elektroni, joka tarvitsee metallista irrotakseen suuremman energian kuin E_{irrotus} .

Vesianalogiassa tämä prosessi vastaa suunnilleen sitä, että veteen heitetään jokin kappale (vaikkapa lusikka), joka törmätessään veteen voi antaa vesipisaralle tarpeksi suuren nopeuden, jolla pisara pääsee kattilasta pois. Analogia ei ole kuitenkaan aivan näin yksinkertainen, koska fotonin luovuttaa energiansa vain *yhdelle* elektronille ja *katoaa* samalla. Analogiassa veteen heitetty lusikka ei siis voi tuottaa suurta läiskähdytystä vaan se voi roiskauttaa vain yhden pisaran. Samalla lusikan pitäisi hävitää.



17.5 Selitä vesianalogian perusteella (a) miten fotonin taajuus liittyy analogiassa sitä edustavan lusikan ominaisuuksiin, (b) millainen pisara kuvailee elektronia, jonka irrottaminen vaatii enemmän energiota kuin E_{irrotus} , ja (c) mitä tarkoittaa se, että fotonin absorboi tällainen elektroni. (Huom. analogia ei enää tässä kohtaa toimi kovin hyvin.)

Koska yksittäinen elektroni voi absorboida aina *vain yhden* fotonin energian riippumatta fotonien lukumääristä, irtoavien elektronien suurin mahdollinen liike-energia on

$$K_{\max} = E_{\text{fotoni}} - E_{\text{irrotus}} = \hbar\omega - E_{\text{irrotus}}. \quad (17.4)$$

Irronneet elektronit voivat kulkea levyltä A levylle B ainoastaan silloin, kun niiden liike-energia levyltä A lähdettäessä on suurempi kuin niiden potentiaalienergian muutos kuljettaessa levyltä A levylle B,

$$K_{\max} > \Delta U_{A \rightarrow B} = -e\Delta V. \quad (17.5)$$

Jos jännite on positiivinen, *kaikki* elektronit kulkevat kondensaattorin läpi (kuva 17.5 (a)). Jos jännite on negatiivinen, osa elektroneista voi "pudota takaisin" levylle A, ja tällöin vain osa fotonien irrottamista elektroneista havaitaan sähkövirtana (kuva 17.5 (b)).

Pysäytysjännite, jolla kaikkein nopeimmatkin elektronit pysähtyvät juuri ennen levjä B on se jännite, jolla elektronien suurin mahdollinen liike-energia on yhtä suuri kuin elektronien potentiaalienergian muutos kondensaattorissa, $K_{\max} = -e\Delta V_{\text{stop}}$. Tästä voidaan ratkaista pysäytysjännitteeksi

$$\Delta V_{\text{stop}} = -\frac{1}{e} K_{\max} = -\frac{1}{e} (\hbar\omega - E_{\text{irrotus}}) = \frac{\hbar}{e} (\omega_{\text{raja}} - \omega). \quad (17.6)$$

Pysäytysjännite riippuu siis säteilyn *taajuudesta* ja *levyn A materiaalista*, kuten kokeellisesti havaitaan (kuva 17.6 (c)).

Tarkastellaan vielä fotoneista koostuvan säteilyn intensiteettiä. Jos säteily kuljettaa ajassa Δt kokonaisenergian E pinta-alalle A , sen intensiteetti on määritelmän mukaisesti

$$I = \frac{E}{A\Delta t}. \quad (17.7)$$

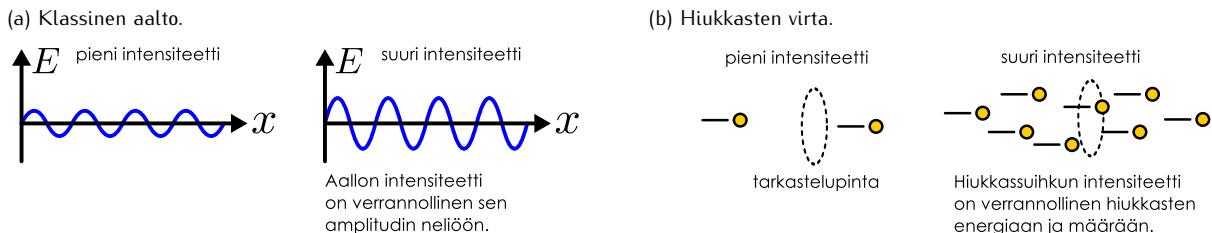
Toisaalta fotoneista koostuvan säteilyn kuljettama energia voidaan ilmaista saapuneiden *fotonien lukumäärä* n_{fotoni} ja *yhden fotonin energian* tulona, joten säteilyn intensiteetti on fotonimallissa

$$I = \frac{n_{\text{fotoni}} E_{\text{fotoni}}}{A\Delta t} = \frac{n_{\text{fotoni}} \hbar\omega}{A\Delta t}. \quad (17.8)$$

Jos valon taajuutta ei muuteta, intensiteetin kasvattaminen tarkoittaa yksinkertaisesti fotonien *lukumäärä* kasvattamista. Toisin sanoen pieni intensiteetti ei tarkoitakaan, että valo olisi matala aalto vaan että valo on kuin kevyt sade, jossa "pisaroita" eli fotoneja saapuu harvakseltaan. Vastaavasti suuri intensiteetti vastaa "rankkasadetta", jossa fotoneja saapuu paljon (kuva 17.8).

Säteilyn intensiteetin kasvattaminen lisää levylle A saapuvien fotonien lukumäärä ja sitä kautta irtoavien elektronien määrä. Nämä ollen intensiteetin kasvattaminen lisää myös piirissä kulveaa virtaa (17.1). Tämä selittää, miksi havaittu maksimivirta i_{\max} kasvaa säteilyn intensiteetin kasvaessa. Toisaalta säteilyn intensiteetti ei vaikuta yksittäisten fotonien energiaan, joten se *ei vaikuta pysäytysjänniteeseen*.

Kuva 17.8: Sähkömagneettisen säteilyn intensiteetti aalto- ja hiukkasmallissa. Klassisessa aaltomallissa intensiteetti on verrannollinen sähkökentän amplitudin neliöön. Fotonimallissa intensiteetti on verrannollinen ajassa pinta-alaysikön läpi kulkevien fotonien määrään.



Jos valon intensiteetti pidetään vakiona ja säteilyn taajuutta suurennetaan, fotonien energia kasvaa mutta samalla niiden lukumäärä vähenee yhtälön (17.8) mukaisesti. Tämän voisi ajatella johtavan maksimivirran i_{\max} pienentymiseen fotonien vähentyessä, mutta kokeellisesti myös virran havaitaan kasvavan. Tämä johduu siitä, että vaikka fotoneja saapuukin vähemmän, niiden energian kasvaessa *yhä useampi niistä irrottaa elektronin*. Näin siksi, että jos fotonin energia on täsmälleen E_{irrotus} , se voi irrotaa *vain* kaikkein helpoiten irtoavia elektroneja eli vesianalogiassa astian pinnalla olevia pisaroita. Mitä suurempi fotonin energia on, sitä syvempää "pinnan alta" fotonit voi elektroneja irrottaa. Näiden vastakkaisen efektien yhteisvaikutuksesta kondensaattorin läpi kulkevien elektronien lukumäärä voi kasvaa.

Idea valosta hiukkasina ei ollut Einsteininkaan aikaan uusi, sillä valon oli spekuloitu koostuvan hiukkasista jo Newtonin aikoihin. Fotonimalli oli kuitenkin radikaali mullistus siksi, että ilmiöt kuten valon interferenssi ja Maxwellin yhtälöt olivat kokeellisesti ja teoreettisesti osoittaneet, että *valon täytyy olla sähkömagneettisen kentän aalto*. Fotonimalli kuitenkin selitti valosähkön ilmiön täydellisesti ja oli kiistaton osoitus siitä, että *valon täytyy koostua hiukkasista*. Ainoa ratkaisu tähän ristiriitaan on se, että *valo ei ole klassisessa mielessä kumpakaan*, vaan jotakin muita, joka joissakin tilanteissa muistuttaa klassisia aaltoja ja toisissa hiukkasia.

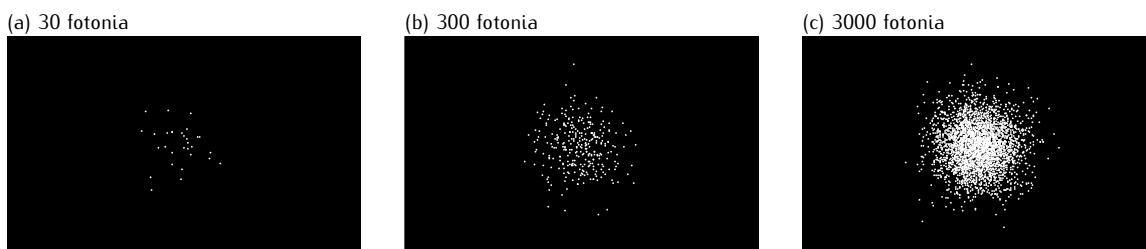
Fotonien kaksoisrakokoe

Tutustuimme klassiseen kaksoisrakokokeeseen jo aaltojen interferenssiä tarkasteltaessa. Aallon saapuessa kahdelle ohuelle raolle se kulkee molempien rakojen kautta. Rakojen takana aallot hajaantuvat ja yhdistyvätkin jälleen, mutta koska eri reittejä kulkevat aallot ovat eri vaiheissa, ne interferoivat joissakin suunnissa vahvistavasti ja toisissa heikentävästi. Valon tapauksessa tämä havaitaan niin, että vahvistavan interferenssin suunnissa valo on kirkas ja heikentävän interferenssin suunnissa valoa ei havaita lainkaan. Jos siis rakojen taakse asetetaan varjostin, sille piirtyy joukko kirkkaita raitoja niissä suunnissa, joissa aallot interferoivat toisiaan vahvistavasti.

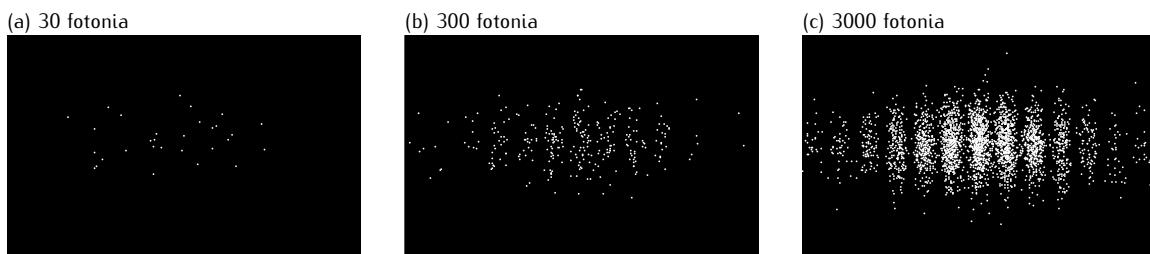
Ajatellaan sitten, että varjostin onkin ilmaisin, joka voi havaita yksittäisiä fotoneja ja tunnistaa *missä* kukaan fotonit ovat. Esimerkiksi herkkä valokuvauslaitteisto sopii tähän tarkoitukseen. Yksittäiset fotonit voidaan tunnistaa valokuvauslevylle ilmestynä pisteinä, joista ilmenee myös niiden paikka. Vaihtoehtoisesti ne voidaan rekisteröidä digitaalisen kameran valosensorilla, joka on pienten ilmaisimien ruudukko. Tällöin kunkin fotonin rekisteröi vain *yksi* sensorin ilmaisimista, ja tämän ilmaisimen paikka kertoo meille, mihin kohtaan fotonit osuvat.

Säädetään valonlähteen intensiteetti niin pieneksi, että se lähettiläätä fotoneja harvakseltaan, jopa yksi kerrallaan. Laitteiston toiminta voidaan testata osoittamalla valo ilmaisimeen, jolloin fotonien havaitaan saapuvan yksittäisen alueelle, johon valo kohdistuu kuvan 17.9 tapaan. Jos valo olisi klassinen aalto, ilmaisimeen ei rekisteröityisi yksittäisiä pisteitä vaan koko alue alkaisi vähitellen vaalenemaan. Nyt kuitenkin valo

Kuva 17.9: Varjostimelle syntyyvä kuvaus, kun fotonit saapuvat suoraan. Yksittäisten fotonien havaintopisteet ovat satunnaiset, mutta ne noudattavat todennäköisyysjakaumaa, jonka määrää sähkömagneettisen aallon intensiteetti. Korkean intensiteetin alueeseen osuu paljon fotonita.



Kuva 17.10: Varjostimelle syntyvä kuvio, kun fotonit kulkevat yksitellen kaksoisraon läpi. Yksittäisten fotonien havaintopisteet ovat jälleen satunnaiset, mutta nyt niiden todennäköisyysjakauma seuraa kasoisraosta kulkeneen sähkömagneettisen aallon interferenssikuvioita, jossa maksimit ja minimit vuorottelevat.



havaitaan yksittäisintä pisteinä, joiden lukumäärä ajan myötä kasvaa, joten tässäkin kokeessa saamme havaita valon koostuvan hiukkasista. Lisäksi näyttää siltä, että fotonien paikat ovat aivan *satunnaiset*. Jos valonsäde on poikkileikkauskeltaan ympyrä (esimerkiksi lasersäde), eniten fotoneja havaitaan säteen keskellä, mutta osa fotoneista osuu ympyrän reunalle. Fotonien osumapaikoissa on siis keskihajontaa. Voidaan melko tarkasti ennustaa, millaiseen alueeseen fotonien osumat keskittyvät, mutta yhdenkään yksittäisen fotonin paikka ei voi etukäteen tietää. Valon intensiteetti on verrannollinen saapuvien fotonien määrään, joten intensiteetti on suurin säteen keskellä, missä havaitaan paljon fotoneja, ja pieni säteen reunoilla, jonka fotoneja saapuu vähän.



17.6 (a) Ilmaisimen $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ alueelle saapuu yhdessä sekunnissa 10^9 fotonia, joiden taajuus on 500 THz . Mikä on valon intensiteetti? (b) Yhtä suuri ilmaisin mittaa valon (sama taajuus) tehoksi 1.0 W . Montako fotonia ilmaisimeen saapuu sekunnissa?

Seuraavaksi asetetaan kaksoisrako valonlähteen ja ilmaisimen väliin. Jos valo koostuisi klassisista hiukkasista, jokaisen hiukkisen täytyisi kulkea suoraan *jommastakummasta* raosta, ja näin ollen ilmaisimella pitäisi näkyä nyt *kaksi* (mahdollisesti päälekäistä) aluetta, johon hiukkasia osuu. Jälleen voitaisiin olettaa, että fotonien liikeradoissa on jonkin verran satunnaisuutta, eikä etukäteen voida tietää kummasta raosta kukin fotoni kulkee.

Kokeellisesti havaitaan, että yksittäisten fotonien osumakohdat ovat jälleen satunnaiset, kuten kuvassa 17.10 on esitetty. Kuitenkin fotonien lukumäärän kasvaessa niiden huomataan muodostavan kahden intensiteettimaksimin sijaan klassisten aaltojen interferenssikokeesta tutun raidallisen kuvion, jossa intensiteetinmaksimi ja -maksimit vuorottelevat. Alueille, joilla klassisen aaltoliikkeen teorian mukaan on intensiteettimaksimi, osuu paljon fotoneja. Intensiteettiminimien kohtiin puolestaan osuu hyvin vähän fotoneja. Toisin sanoen fotoneista koostuvalla säteilyllä on intensiteettimaksimit ja -minimit täsmälleen niillä paikoilla, jotka klassinen *aaltoliikkeen* teoria ennustaa.

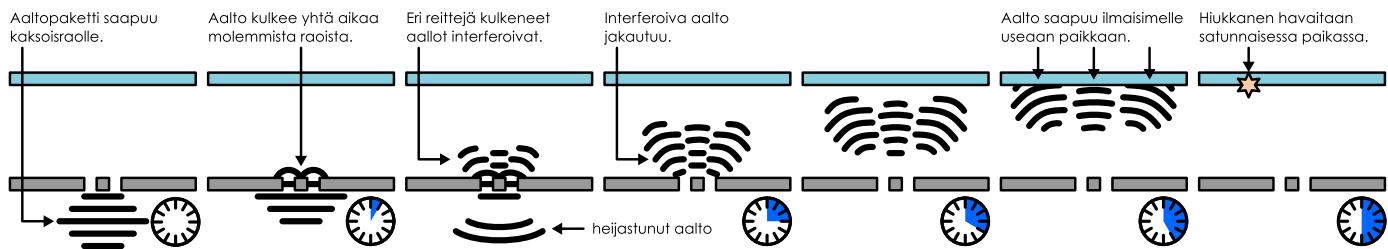
Eriyisen mielenkiintoisen tästä kokeellisesta tuloksesta tekee se, että fotonit muodostavat tämän intensiteettijakauman kulkissaan laitteiston läpi *yksitellen*. Yksittäinen fotoni havaitaan aina jossakin *tiettyssä*, *satunnaisessa pisteessä*, mutta fotoneja ei kuitenkaan havaita intensiteettiminimien kohdissa, joten havaintopisteet eivät ole mielivaltaiset, vaan jokaisen fotonin paikan täytyy *erikseen* noudattaa intensiteettikuvion määräämää *todennäköisyysjakaumaa*.



17.7 Kutsutaan kaksoisrakokokeen rakoja A ja B. Tehdään koe ensin niin, että rako A on auki ja B peitetty. Toistetaan koe sitten niin, että rako A on peitetty ja B auki. Lopuksi toistetaan koe niin, että molemmat raoat ovat auki. (a) Vertaa näissä kokeissa ilmaisimelle saapuvien fotonien määrää. (b) Vertaa ilmaisimille saapuvien fotonien muodostamia kuvioita.

Kaksoisrakokokeessa havaitun intensiteettijakauman raidat syntyvät siitä, että sähkömagneettinen aalto kulkee *molemmista* raoista ja nämä eri reittejä kulkevat aallot interferoivat kohdateessaan jälleen rakojen takana. Koska myös yksittäisen fotonin havaintopiste noudattaa samaa intensiteettijakaumaa, myös yksittäiseen fotoniin täytyy liittyä jonkinlainen aalto, joka kulkee *molemmista raoista yhtä aikaa* ja interferoi niiden takana. Koska *fotoni havaitaan todennäköisimmin alueissa, joissa sähkömagneettisen aallon intensiteetti on suuri*, tämän fotonia ohjaavan aallon täytyy olla sähkömagneettinen aalto tai ainakin jokin täsmälleen sähkömagneettisen aallon tavoin käyttäytyvä aalto.

Kuva 17.11: Fotoni kaksoisrakokokeessa. Sähkömagneettinen aalto kulkee yhtä aikaa kummastakin raoista ja interferoi rakojen takana. Interferenssistä johtuen alunperin yhtenä pakettina liikkunut aalto jakautuu useaksi pulssiksi. Fotoni voidaan havaita pakettien saapuessa ilmaisimelle. Fotoni havaitaan satunnaisesti jossakin niistä alueista, joihin aaltopulssit saapuvat.



Edellä esitettyt päätelmät yhdistään päädytään seuraavaan kvantimekaaniseen selitykseen kaksoisrakokokeelle (kuva 17.11):

- Fotonia kuvaa aalto, joka kulkee *yhtä aikaa molemmista raoista*.
- Eri reittejä kulkeneet aallot interferoivat rakojen takana. Interferenssistä johtuen aallon intensiteetillä on maksimeita ja minimeitä tietyissä suunnissa.
- Ilmaisimella yksittäinen fotoni havaitaan aina yhdessä pisteessä, mutta tämä piste on satunnainen.
- Fotoni havaitaan todennäköisimmin alueessa, jossa fotonin lüttivän aallon intensiteetti on suuri. Fotonia ei havaita koskaan alueessa, jossa aallon intensiteetti on nolla.
- Fotonin havaintopisteen todennäköisyysjakauma on sama kuin klassisen sähkömagneettisen aallon intensiteettijakauma.

Kaksoisrakokoe siis osoittaa, ettei valo ole klassinen aalto eikä hiukkanen, vaan sillä on sekä aaltojen että hiukkasten ominaisuuksia. Kulkissaan raoista ja interferoidessaan fotonin käyttäytyy puhtaasti aallon tavoin. Erityisesti foton voi kulkea *kummastakin raosta* samaan aikaan, eikä sillä siis ole täsmälleen määriteltyä paikkaa. Vasta vuorovaikutus ilmaisimen kanssa pakottaa fotonin olemaan jossakin täsmällisessä pisteessä, ja tällöinkin fotonin aalto-ominaisuudet määräväät *todennäköisyden* sille, missä fotoni havaitaan. Kunkin yksittäisen fotonin havaintopiste on aidosti satunnainen.



17.8 Kirjoita omiin sanoin tüvistämä valosähköisestä ilmiöstä ja kaksoisrakokokeesta. Miten ja miksi nämä kokeet osoittavat, että valolla on hiukkasluonne, jota klassinen aaltomalli ei voi selittää? Miten ja miksi kokeet osoittavat, että valolla on aaltoluonne, jota klassinen hiukkasmalli ei voi selittää? Millainen on kumman kokeen selittävä kvantimekaaninen malli?

17.2 Kvantimekaaniset hiukkaset

Aalofunktio

Valon aalto-hiukkasmallin löytymisen jälkeen Louis de Broglie esitti 1924 hypoteesin, jonka mukaan myös massallisilla hiukkasilta kuten elektroneilla on aaltomaisia ominaisuuksia. Planckin hypoteesin mukaan taaajuus ja energia ovat toisiinsa verrannolliset, joten sekä fotoneilla että massallisilla hiukkasilta on olemassa niiden kokonaisenergiasta riippuva värähtelytaajuus

$$E_{\text{kokonais}} = \hbar\omega. \quad (17.9)$$

Edelleen koska suhteellisuusteorian mukaan hiukkisen kokonaisen energian ja lükemäärän välillä on yhteys (6.131), $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, massattomille fotoneille pätee tämän mukaan $E^2 = p^2c^2$ ja niinpä niillä pitää olla lükemäärä

$$p_{\text{fotoni}} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (17.10)$$

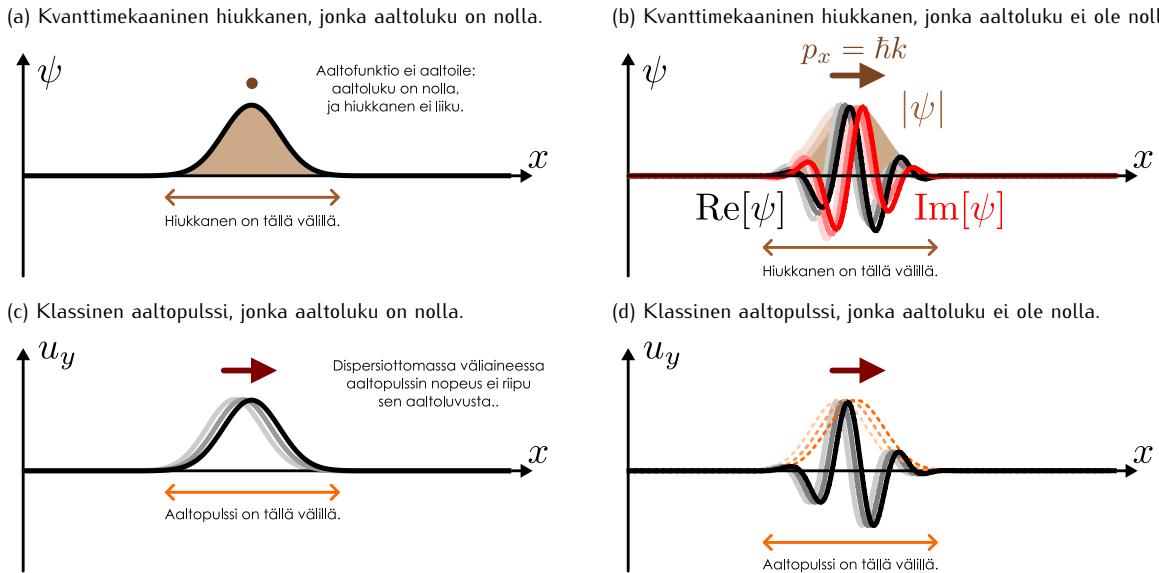
Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että valonnopeus on valoaaltojen kulmataajuuden ja aaltoluvun suhde, $c = \omega/k$. De Broglien hypoteesin mukaan myös massallisilla hiukkasilta on niiden lükemäärästä riippuva aallonpituuus ja aaltoluku

$$p_x = \hbar k. \quad (17.11)$$

Toisin sanoen *kaikkien hiukkasten lükemäärä on suoraan verrannollinen niiden aaltolukuun*.

Hypoteesi oli puhdas arvaus, joka perustui pääasiassa siihen ajatukseen, että luonnonlakien pitäisi olla samankaltaiset kaikille hiukkasille. Kokeellinen vahvistus elektronien aaltolunteesta löytyi kuitenkin jo

Kuva 17.12: Klassisen ja kvanttimekaanisen aaltofunktion vertailu. Kvanttimekaaninen hiukkasan ei ole pallo vaan aaltopulssi. Hiukkasan on siellä, missä sen aaltofunktio ei ole nolla. Hiukkasan liike riippuu aaltofunktion aaltoluvusta.



1928, kun elektronien diffraktio havaittiin. Näissä kokeissa myös vahvistettiin, että elektronien liikemäärä, aallonpituus ja aaltoluku riippuvat toisistaan juuri de Broglien hypoteesin (17.11) mukaisesti.

Sittemmin myös kaksoisrakokoe on toistettu elektroneilla täysin samoin tuloksinsa kuin fotoneilla: kaksoisraon läpi kulkevat elektronit saapuvat ilmaisimelle satunnaisiin paikkoihin, mutta yhdessä elektronit muodostavat ilmaisimelle samanlaisen interferenssikuvion kuin kuvassa 17.10. Siispä aivan kuten fotoni, myös yksittäinen elektroni kulkee kokeessa aaltona *molemista raoista yhtä aikaa*, interferoi itsensä kanssa, ja saapuu lopulta ilmaisimelle, jossa se havaitaan jossakin yhdessä pisteessä. Jälleen havaintopiste on satunnainen, mutta sen todennäköisyysjakauman määrästä elektroniallon amplitudi.

Tätä "elektroniaaltoa" kutsutaan nykyään elektronin **kvanttimekaaniseksi aaltofunktioksi** tai lyhyesti vain **aaltofunktioksi**, ja sitä merkitään usein kreikkalaisella psi-kirjaimella: yhdessä ulottuvuudessa $\psi(x, t)$ ja kolmessa ulottuvuudessa $\psi(\vec{r}, t)$. Aaltofunktio on nimensä mukaisesti koko avaruudessa määritelty funktio, jonka dynamiikka on hyvin samankaltainen kuin klassisten aaltojen aaltofunktioiden dynamiikka. Aaltofunktiot voivat esimerkiksi levittäytyä avaruuteen, kulkea useaa reittiä samaan aikaan, olla keskenään superpositiossa sekä interferoida.

Mutta miten aaltofunktio voi kuvata hiukkasta kuten elektronia, joka voidaan havaita yksittäin, ja joita voidaan laskea ja vaikkapa vangita paikoilleen sopivaan sähkökenttään? Tavallinen intuitiivinen mielikuva hiukkasta kuten elektronista on hyvin pieni pallo, mutta tämä klassisten hiukkasten käyttäytymiseen perustuva mielikuva on **vääriä**. Elektronin käyttäytyminen ei juurikaan muistuta klassisten kappaleiden käytöstä. Sen sijaan elektronin voi ajatella olevan pieni **aaltopulssi**, jonka muotoa kuvaa aaltofunktio.

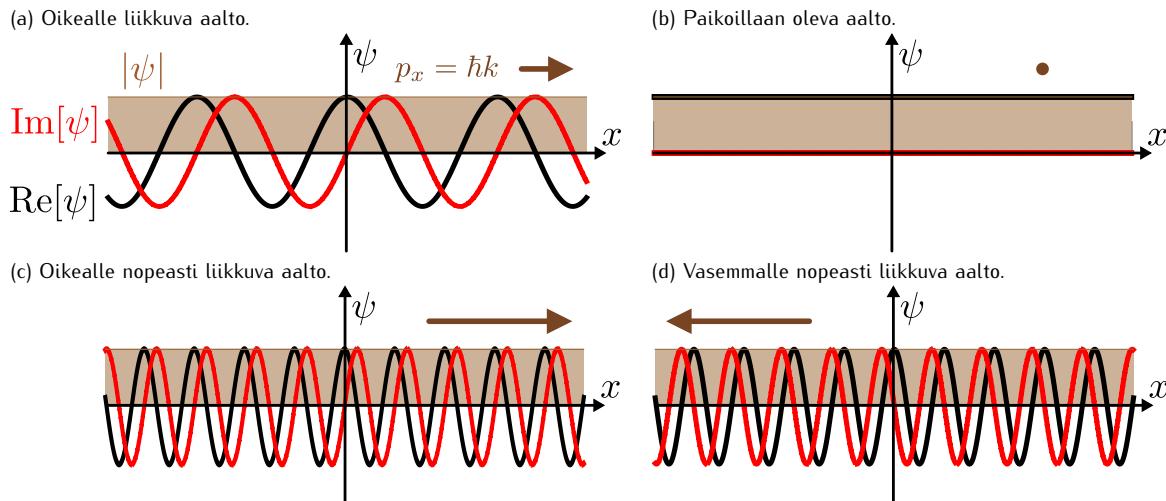
Elektronin kuvasta aaltopulssina on havainnollistettu kuvassa 17.12 (a), jossa on kuvattu paikoillaan olevan elektronin aaltofunktio. Elektroni ei ole pallo eikä pistemäinen hiukkasan, vaan se on kuin avaruuteen levittäytynyt pilvi. Elektroni on eräässä mielessä *levinnyt koko siihen alueeseen, jossa sen aaltofunktio ei ole nolla*. Kuvan (a) aaltopulssi ei liiku, joten se esittää levossa olevaa elektronia. Kuvassa 17.12 (b) on puolestaan esitetty liikkuva elektronia kuvava aaltofunktio. Tämänkin elektronin aaltofunktio muodostaa pulssin, ja kuvien (a) ja (b) pulssit ovat vieläpä yhtä leveitä. Kuvan (b) tapauksessa pulssi kuitenkin kulkee kuvassa vasemmalta oikealle.

Kuvaan (b) on piirretty itse asiassa kolme aaltoa: musta ja punainen käyrä sekä ruskealla väritetty alue. Nämä siksi, että kvanttimekaaninen aaltofunktio on *kompleksilukuarvoinen* funktio, ja kuvaan piirrettyt käyrät esittävät aaltofunktion reaali- ja imaginääriosia (musta ja punainen) sekä itseisarvoa (ruskea).

De Broglien hypoteesi ilmenee kuvassa (a) niin, että elektronin aaltofunktio ei lainkaan "aaltoile". Toisin sanoen aaltofunktiossa ei näy aallonharjoja, eikä aallolla siten ole aallonpituutta. Erityisesti aaltopulssin aaltoluku on nolla, $k = 0$, ja de Broglien hypoteesin mukaan hiukkasan liikemäärä on tällöin myös nolla, eikä hiukkasan siis liiku. Kuvassa (b) hiukkasan liikkuu ja samalla aaltofunktion reaali- ja imaginääriosat selvästikin muodostavat aallot. Niinpä tällä aaltopulssilla on myös aallonpituus ja aaltoluku, joka ei ole nolla, $k > 0$. De Broglien hypoteesin mukaisesti tällä aallolla siis on liikemäärä $p_x = \hbar k \neq 0$, kuten liikkuvalla hiukkassella pitääkin olla.

Kuvissa 17.12 (c) ja (d) on piirretty vastaavat *klassiset* aallot. Jos aalto kulkee dispersiotonmassa välai-

Kuva 17.13: Vapaan hiukkisen sinimuotoinen aalofunktio. Funktion reaaliosa on piirretty mustalla, imaginääriosa punaisella ja itseisarvo ruskealla. Hiukkisen liikemäärä on suoraan verrannollinen aaltolukuun eli käänään verrannollinen aallonpituteen.



neessa, sen nopeus ei riipu aallon muodosta eikä siis myöskään aaltoluvusta, vaan tälläisessä aineessa kaikki aallot kulkevat samalla vauhdilla. Siksi kuvan (c) klassinen aaltopulssi *liikkuu*, vaikka kuvan (a) kvanttimekaaninen pulssi *pysyy paikoillaan*.

Kuvien 17.12 (b) ja (d) aalloissa on toinenkin oleellinen ero, joka osaltaan selittää, miksi kvanttimekaaninen aalo on kompleksinen. Kuvan (d) klassisessa aaltopulssissa on nimitään pulssin itsensä sisällä useita pistettä, joissa aalofunktio on nolla. Jos elektronin kvanttimekaaninen aalofunktio olisi reaaliarvoinen, myös se menisi aaltopulssin sisällä välillä nollaan. Kuvan (b) kvanttimekaaninen aalofunktio on kuitenkin nollasta poikkeava *kaikkialla* pulssin alueella. Jos aalofunktion reaaliosa (musta käyrä) on nollassa, sen imaginääriosa (punainen) ei ole nolla, ja päinvastoin. Näin aalofunktion itseisarvoa kuvava ruskea kuvaaja voi muodostaa kuvissa 17.12 (a) ja (b) täsmälleen samanlaiset yhtenäiset pulssit vaikka aalloilla on eri aaltoluvut. Toisin sanoen se, miten kvanttimekaaninen aalofunktio aaltoilee (eli miten elektroni liikkuu), ei suoraan määrästä, missä aalofunktio poikkeaa nollasta (eli missä elektroni on).



17.9 Tarkastele funktioita $u(x, t) = \cos[kx - \omega t]$ sekä $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, missä vakioiden arvot ovat $k = 25.0 \text{ nm}^{-1}$ ja $\omega = 1.0 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

- Monessaako pisteessä funktio u saa arvon nolla 1 nanometrin matkalla?
- Monessaako pisteessä funktio ψ saa arvon nolla 1 nanometrin matkalla?

Vapaa hiukkanen

Kuvan 17.12 aaltopulssit kuvaavat tyhjässä avaruudessa olevaa hiukkasta. Koska tyhjässä avaruudessa ei ole mitään, minkä kanssa vuorovaikuttaa, tälläista kutsutaan **vapaaksi hiukkaseksi**. Tyhjä avaruus, jossa on vain yksi hiukkanen, on varmaankin yksinkertaisin kuviteltavissa oleva tilanne, joten aloitetaan kvanttimekaanisten hiukkasten ominaisuuksien tarkiminen tästä.

Tähän mennessä olemme selvittäneet nämä asiat:

- Kvanttimekaaniset hiukkaset ovat pieniä aaltopulsseja, joita kuvaaa kvanttimekaaninen aalofunktio.
- Kvanttimekaaninen aalofunktio on kompleksilukuarvoinen.
- Hiukkanen on levinyt avaruuteen sille alueelle, jossa sen aalofunktio ei ole nolla.
- Liikkuvan hiukkisen liikemäärä ja aalofunktion väärähtelyä yhdistää de Broglien hypoteesi $p_x = \hbar k$.

Luvussa 15 klassisten aaltojen yhteydessä opimme, että aaltoluku on määritelty täsmällisesti vain jaksolislille funktioille. Erityisesti sinimuotoisilla aalloilla on täsmällinen aaltoluku. Lisäksi *kaikki* aallot, myös aaltopulssit, voidaan kuvata sinimuotoisten aaltojen superpositiona. Tämä periaate pätee myös kvanttimekaanisille aaltopulssille, joten aloitetaan kvanttimekaanisten aaltojen tutkiminen tutustumalla *sinimuotoisten* aalofunktioiden ominaisuuksiin. Aikanaan voimme rakentaa kaikki muut aallot niiden superpositiona.

Kompleksilukujen tapauksessa sinimuotoinen funktio tarkoittaa kompleksista eksponenttifunktioita

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t). \quad (17.12)$$

Tällainen funktio on kaikkialla itseisarvoltaan 1, koska $|e^{i\theta}| = 1$, ja sen reaali- ja imaginääriosat muodostavat positiivisen x -akselin suuntaan liikkuvat sinimuotoiset aallot, joiden aaltoluku on k . Aalto ulottuu äretömyyksiin kaikissa suunnissa, joten se kuvailee koko avaruuteen levinnytä vapaata hiukkasta. Toisin sanoen jos hiukkasen paikka mitataan, se voidaan löytää mistä tahansa. (Tämä on kuitenkin vain ideaalinen malli. Todelliset hiukkaset ovat aina rajoittuneet jollekin äärelliselle alueelle.)

Kuvassa 17.13 on piirretty tällaisia aaltofunktioita. Ruskealla väritetyn alueen korkeus kuvailee aaltofunktion itseisarvoa, joka on näissä tapauksissa aina vakio. Mitä nopeammin hiukkanen liikkuu eli mitä suurempi on sen liikemääriä, sitä tiheämmin se värähtelee eli sitä pienempi on sen aallonpituuks ja suurempi sen aaltoluku, sopusoinnussa de Broglien relaation $p_x = \hbar k$ kanssa. Myös hiukkasen liikkeen suunta voidaan lukea aaltofunktiosista, sillä funktion reaali- ja imaginääriosien vaihe-ero on erilainen riippuen siitä, lükkääkö aalto oikealle vai vasemmalle. Tämä näkyy kuvaajassa siten, että punainen käyrä on siirtynyt neljännesaallonpituuuden mustasta käyrästä katsoen aallon liikkeen suuntaan.



17.10 Selitä aaltofunktion lausekkeen (17.12) perusteella, miksi aallon reaali- ja imaginääriosien välillä on vaihe-ero. Selitä erityisesti, miten vaihe-ero riippuu aaltoluvun k etumerkistä.

Verrataan sitten näiden aaltojen ominaisuuksia klassisten hiukkasten ominaisuuksiin. Mitä suurempi on hiukkasen liikemääriä, sitä nopeammin sen pitäisi klassisen fysiikan mukaan liikkua ja sitä suurempi liike-energia sillä täytyy myös olla. Klassisen hiukkasen liike-energia voidaan ilmaista sen nopeuden muodossa $K = \frac{1}{2}mv_x^2$. Toisaalta massallisen hiukkasen nopeus on verrannollinen liikemäärään, $v_x = p_x/m$, joten liike-energian voi kirjoittaa myös muotoon $K = p_x^2/(2m)$. Lisäksi koska liikemääriä on de Broglien hypoteesin perusteella verrannollinen aaltofunktion aaltolukuun, $p_x = \hbar k$, *hiukkasen liike-energia on verrannollinen aaltoluvun neliöön*

$$K = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (17.13)$$

Vapaa hiukkanen ei vuorovaikuta minkään kanssa, joten sen potentiaalienergia on nolla ja hiukkasen kokonaisenergia on siis pelkää liike-energiaa, $E_{\text{kokonais}} = K$. Toisaalta hiukkasen kokonaisenergia on Planckin hypoteesin mukaan verrannollinen sen aaltofunktion kulmataajuuteen, $E_{\text{kokonais}} = \hbar\omega$, joten hiukkasen aaltofunktion värähtelyn kulmataajuus on

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m} k^2. \quad (17.14)$$

Tämä on kvanttimekaanisen hiukkasen *dispersiorelaatio*. Koska kulmataajuus ei ole suoraan verrannollinen aaltolukuun, eri taajuudella värähtelevät aallot liikkuват eri nopeuksilla. Erityisesti tällaisten aaltojen superpositiona muodostetut aaltopulssit kulkevat *ryhmänopeudella*

$$v_{x,\text{ryhmä}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p_x}{m}. \quad (17.15)$$

Tämä on myös hiukkasen nopeus, koska kvanttimekaaninen hiukkanen on aaltopulssi.



17.11 Miten muuttuvat elektronin (a) aaltofunktion kuvaaja, (b) liikemääriä, (c) nopeus, (d) liike-energia, jos aaltoluku kaksinkertaistuu?

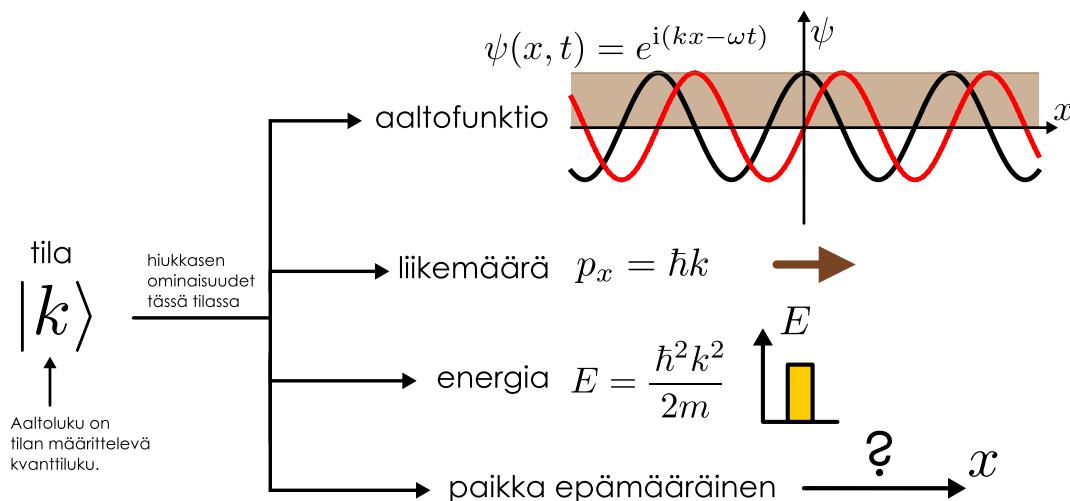
Erityisesti tämän tuloksen mukaan kvanttimekaaniselle hiukkaselle pätee klassinen nopeuden ja liikemääriän välinen yhteyks $p_x = mv_x$. Aaltofunktio (17.12) vaikuttaa siis järkevältä tavalta kuvata vapaata hiukkasta, koska se on yhtensopiva de Broglien hypoteesin sekä klassisen fysiikan liike-energian ja liikemäären lausekkeiden kanssa. Tämän parempaan perusteluun emme oikeastaan pystykään. Kvanttimekaniikka on laajempi teoria kuin klassinen fysiikka, joten sitä ei voi johtaa klassisesta fysiikasta. Sen sijaan *klassinen mekaanika pitää pystyä johtamaan kvanttimekaniikasta*.

Kvanttimekaaninen tila

Aaltofunktion käsite on peräisin Erwin Schrödingerin 1926 esittämästä "aaltomekaniikasta". Tämä ei kuitenkaan ollut ensimmäinen moderni kvanttimekaaninen teoria, vaan Werner Heisenberg kehitti kvanttimekaniikkaa kuvaavan "matriisimekanikan" jo vuonna 1925. Schrödingerin teoria oli alkuperäisesti abstrakti ja matemaattisesti monimutkainen. Myöhemmin kuitenkin osoitettiin, että kvanttimekaniikka voidaan esittää useilla matemaattisesti ekvivalentilla tavoilla ja *olemattomat* teoriat olivat oikeita.

Kvanttimekaniikka on usein epäintuitiivista, mutta aaltofunktiomallin tapa kuvata hiukkasia aaltopulssaina on melko helposti ymmärrettävissä, koska se muistuttaa niin vahvasti klassisten aaltojen teoriaa. Aaltofunktio on myös usein paras tapa kuvata kvanttimekaanisia hiukkasia, kun ollaan kiinnostuneita hiukkasten sijainnista

Kuva 17.14: Kvanttimekaaninen tila käsittää kaikki hiukkisen kvanttimekaaniset ominaisuudet. Usein tiloja voidaan indeksoida kvanttiluvuihin, joista hiukkisen muut ominaisuudet riippuvat. Esimerkiksi vapaan hiukkisen tilaa kuvaa aaltoluku.



avaruudessa. Näin ei kuitenkaan vältämättä ole, jos olaan kiinnostuttu esimerkiksi hiukkisen liikemäärästä tai energiasta. Lisäksi aaltofunktio ei kuva esimerkiksi hiukkasten sisäisiä ominaisuuksia mitenkään.

Koska hiukkisen ominaisuuksia voidaan luonnehtia eri tavoin, modernissa kvanttimekaniikassa ei puhuta kaan pelkästään hiukkisen aaltofunktiosta vaan sen **kvantimekaanisesta tilasta**, joka sisältää kaiken tiedon hiukkisen ominaisuuksista. Tätä kvantimekaanista tilaa merkitään hieman erikoiselta vaikuttavalla tavalla, pystyviivan ja kulmasulkeen avulla: $|\psi\rangle$. Tämä on ns. *Diracin notaatio* eli merkintätapa kvantimekaanisille tiloille (Paul Dirac mukaan), ja oliota $|\psi\rangle$ kutsutaan **tilavektoriksi** tai **ket-vektoriksi**. Merkinnän idea on siinä, että kvantimekaniikassa halutaan usein laskea laskutoimituksia, jotka riippuvat hiukkasten kvantimekaanisista tiloista ja näiden yhdistelmistä. Nämä laskutoimitukset voivat sisältää monimutkaisia integraaleja, summia tai matriisioperaatioita, eikä ole mielekästä kirjoittaa aina tarkalleen näkyviin miten laskutoimitukset täsmälleen tapahtuvat. (Samaan tapaan kuin on usein kätevämpää laskea suuresymboleilla numeroiden sijaan.) Jos halutaan esimerkiksi laskea hiukkisen paikan odotusarvo tilassa $|\psi\rangle$, tästä voidaan merkitä yksinkertaisesti $\langle\psi|x|\psi\rangle$ tai vielä lyhyemmin $\langle x \rangle$, jos on selvää mitä tilaa tarkastellaan. Emme tässä materiaalissa ehdi perehtymään Diracin notaation hienouksiin. Kvanttimekanikan opintojen jatkamista suunnittelevien on kuitenkin syytä tututella tähän merkintätapaan ja tunnistaa se, koska sitä käytetään modernissa fysiikassa nün yleisesti.

Kvantimekaanisia tiloja voidaan usein indeksoida, ja näitä indeksejä kutsutaan **kvanttiluvuiksi**. Tällä taroitetaan sitä, että useissa systeemeissä hiukkasten ominaisuudet riippuvat toisistaan niin, että joidenkin suureiden tietäminen riittää määräämään kaikkien muiden suureiden arvot. Esimerkiksi vapaan hiukkisen, jonka aaltofunktio on $\psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$, liikemäärä on $p_x = \hbar k$, taajuus $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$, energia $E_{\text{kokonais}} = K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ jne. Kaikkien näiden suureiden arvot voidaan laskea, kun tunnetaan hiukkisen aaltofunktio. Mutta toisaalta jos tiedämme, että kyseessä on sinimuotoinen aaltofunktio, tämän aaltofunktion muodon voi päätellä pelkästään hiukkisen *aaltoluvun* k perusteella. Tällöin sanotaan, että *aaltoluku on hiukkisen tilaa kuvaava kvanttiluku*. Tällöin tila voidaan kirjoittaa Diracin notaatiossa yksinkertaisesti kirjoittamalla sulkuihin kvanttiluku, $|k\rangle$, koska se riittää määrittelemään hiukkisen tilan ominaisuudet.



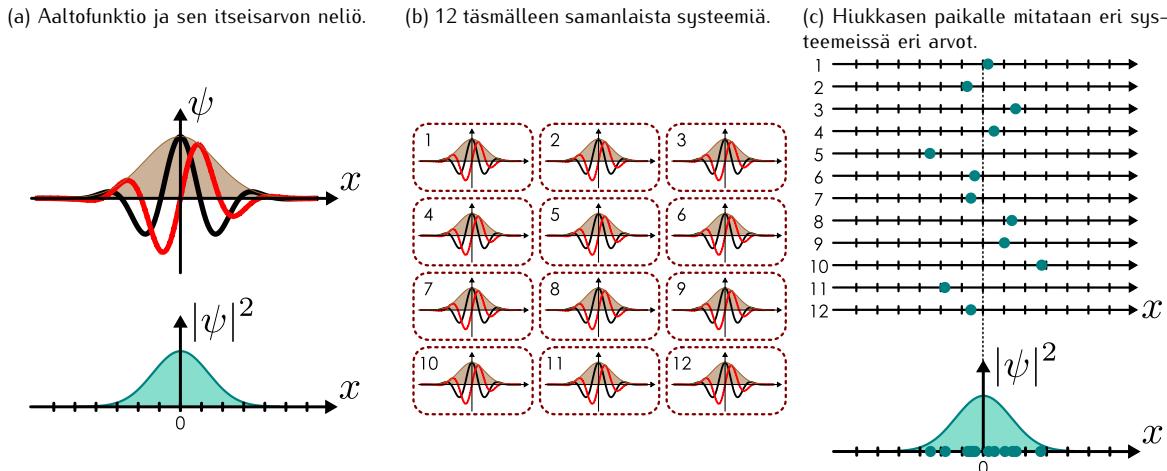
17.12 Koska elektronin liikemäärä on suoraan verrannollinen sen aaltolukuun, vapaan elektronin kvantimekaanista tilaa voisi kuvata myös kvanttiluvulla p_x . Miksi elektronin liike-energia K ei kuitenkaan ole hyvä kvanttiluku?

Riippuu tilanteesta, mitkä suuret sopivat määrittelemään tilan ominaisuudet eli mitkä suureet ovat hyviä kvanttilukuja. Esimerkiksi luvussa 17.4 opimme aikanaan, että kvantimekaaniset aallot voivat muodostaa seisovia aaltoja. Aivan kuten kitaran kielessä voi väärhdellä seisovia aaltoja vain tietyillä aallonpituuksilla, myös kvantimekaanisilla seisovilla aalloilla on vain tiettyjä sallittuja aallonpituuksia. Tällöin kvanttilukuna käytetään tavallisesti *seisovan aallon kupujen lukumäärää* n , ja kvantimekaanista tilaa merkitään $|n\rangle$.



17.13 Selitä oman sanoin, mikä on kvantimekaaninen aaltofunktio ja tila. Millainen on vapaan hiukkisen aaltofunktio ja miten sen reaali- ja imaginääriosouden ominaisuudet liittyvät hiukkisen liikkeeseen? Miten lasket tällaisen hiukkisen liikemäärän ja liike-energian?

Kuva 17.15: Vaikka joukko elektroneja on täsmälleen samanlaisessa tilassa, mitattaessa elektronien paikkakoordinaattia saadaan erilaiset, satunnaiset tulokset. Useimmiten elektroni havaitaan alueella, jolla sen aaltofunktion itseisarvon neliö on suuri.



esimerkki 17.1

Aaltofunktio

Mikä on elektronin paikka, aaltoluku, liikemääriä, nopeus, kulmataajuus ja energia tilassa $k = -1.0 \text{ nm}^{-1}$?

SUUNNITELMA Tässä tilassa elektronin aaltofunktio on muotoa $\psi(x, t) = e^{i(xk - \omega t)}$. Tämä on koko avaruuteen levinnyt aalto, joten ilmeisesti hiukkasella ei ole täsmällistä paikkakoordinaattia. Hiukkasella on kuitenkin täsmällinen aaltoluku

$$k = -1.0 \text{ nm}^{-1} = -1.0 \cdot (10^{-9} \text{ m})^{-1} = -1.0 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}. \quad (17.16)$$

Negatiivinen arvo tarkoittaa sitä, että elektroni liikkuu negatiiviseen x -suuntaan. Huomaa, että nm^{-1} on hyvin suuri yksikkö, vaikka siinä onkin etuliite nano.

Elektronin massa on $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Tämä on vakio, joka ei riipu siitä, millaisen aallon elektroni muodostaa.

Elektronin liikemääriä on $p_x = \hbar k$, nopeus $v_x = \frac{1}{m_e} p_x$ ja liike-energia $K = \frac{1}{2} m_e v_x^2$. Elektronit ovat ilmeisesti täysin vapaa eikä se vuorovaikuta minkään kanssa, joten sillä ei ole potentiaalienergiaa ja siispä elektronin kokonaisenergia on sama kuin sen liike-energia, $E = K$. Elektronin kulmataajuus on Planckin hypoteesin mukaisesti $\omega = \frac{1}{\hbar} E$.

RATKAISU Liikemääräksi saadaan $p_x = -1.1 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$, nopeudeksi $v_x = -120 \text{ km/s}$, energiaksi $K = 6.1 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ eli 0.038 eV ja kulmataajuudeksi $\omega = 5.8 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$.

ARVIOINTI Tuloksen voi tarkistaa esimerkiksi laskemalla liike-energian myös suoraan lausekkeesta $K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$. Tuloksen täytyy olla sama kuin mitä lauseke $K = \frac{1}{2} m_e v_x^2$ antaa. Voit myös laskea nopeuden lausekkeella $v_x = 2\frac{\omega}{k}$, ja sinun pitäisi saada sama (huomattavan suuri) vauhti kuin yllä. Jos kuitenkin laskisit $v_x = \frac{\omega}{k}$ saisit väärän tuloksen. Tämä johtuu siitä, että $\frac{\omega}{k}$ on sinimuotoisen aallon vaihenopeus, mutta todelliset elektronit ovat aina tällaisten sinimuotoisten superpositioina muodostuvia aaltopulsseja, jotka kulkeva ryhmännopeudella.

17.3 Todennäköisyystulkinta

Kvanttimekaanisen mittauksen satunnaisuus

Elektronit ovat siis aaltopulsseja, jotka voivat levittää avaruudessa suureenkin tilaan. Esimerkiksi kaksoisrakokeessa tällainen aalto voi kulkea kummastakin raosta samanaikaisesti ja eri raoista kulkeneet aallot interferoivat keskenään ennen kuin saapuvat ilmaisimelle. Jos ilmaisin on kaukana kaksoisraon takana, sillä syntyyvä interferenssikuvio voi olla varsin suuri, joten mitä ilmeisimmin kvantimekaaniset aallot voivat levittää avaruudessa hyvin laajoille alueille. Silti ilmaisimelle saapuvat *elektronit havaitaan aina jossakin tietyn pisteessä*. Siispä vaikka elektronin kvantimekaaninen aaltofunktio olisi ennen hiukkasen havaitsemista levittäytynyt laajalle alueelle, elektronin vuorovaikutus ilmaisimen kanssa pakottaa aallon palaamaan takaisin "hiukkaseksi" eli pieneen alueeseen keskittyneksi aaltopulssiksi.

17.14 (a) Selvitä, mikä on atomien keskimääräinen halkaisija. Kuinka laajalle alueelle yhden elektronin aaltofunktio voi levittää tyypillä atomissa? (b) Elektronidiffraktiorekokeessa sivumaksimit poikkeavat keskusmaksimista 10° . Elektronit havaitaan ilmaisimella, joka on 10 cm päässä näytteestä. Kuinka laajalle alueelle yhden elektronin aaltofunktio voi levittää tässä kokeessa?

Luvussa 17.1 tarkasteltiin fotoneilla tehtyä kaksoisrakokoetta, jonka tulosten perusteella pääteltiin, että fotonien havaitsemisen ja sähkömagneettisen aallon yhteys on *probabilistinen*: mitä suurempi on sähkömagneettisen aallon intensiteetti, sitä *todennäköisempää* on havaita fotonia. Toisaalta sähkömagneettisen aallon intensiteetti on verrannollinen sähkökentän amplitudin neliöön, joten karkeasti voidaan sanoa fotonin havaitsemisen todennäköisyuden pisteessä x olevan verrannollinen sähkömagneettisen aallon sähkökentän neliöön tässä pisteessä

$$P_{\text{fotoni}}(x) \sim I(x) \sim |\bar{\mathbf{E}}(x)|^2. \quad (17.17)$$

Aivan samaan tapaan todennäköisyys havaita elektroni pisteessä x on verrannollinen elektronin *aaltofunktion amplitudin neliöön* eli

$$P_{\text{elektroni}}(x) \sim |\psi(x)|^2. \quad (17.18)$$

Fotonin tapauksessa sähkökenttä on *vektori*, joten amplitudista puhuttaessa tarkoitetaan kenttävektorin piituuden maksimiarvoa. Aaltofunktio on skalaari, mutta sen arvot ovat *kompleksilukuja*, joten aaltofunktionkin tapauksessa itseisarvon ottaminen on vältämätöntä, koska todennäköisyyskseen täytyy olla positiivisia reaalilukuja.

Tämä on aaltofunktion *todennäköisyystulkinta*. Sen havainnollistamiseksi tarkastellaan seuraavaa kuvasa 17.15 esittelyä ajatuskoetta: Oletetaan, että meillä on suuri joukko täsmälleen samanlaisia systeemejä. Jokaisessa systeemissä on yksi elektroni, ja jokaisen elektronien aaltofunktio on *täsmälleen samanlainen* aaltopulssi. Nyt mittaamme elektronin paikan näissä systeemeissä yksi kerrallaan *aaltopulssin leveyttä tarkeimmin* (vrt. osumapaikan havaitseminen kaksoisrakokeessa). Nyt jokainen mittaus löytää elektronin jostakin täsmällisestä paikasta alkuperäisen aaltopulssin alueelta, mutta vaikka systeemit ja niiden elektronit olivat aluksi *täysin samanlaiset*, kustakin systeemistä mitataan elektronin paikalle *erilainen, satunnainen arvo*. Elektroni havaitaan *useimmin* alueissa, joissa aaltofunktion amplitudin neliö on *suurin*, eikä koskaan paikoissa, joissa amplitudin neliö on nolla. Kukin yksittäinen mittaus on siis aina satunnainen, ja aaltofunktio määrävä vain tämän mittauksen loppuloksen todennäköisyysjakauman.

Tämä ajatuskoe ei sitä osoita, mutta kvantimekanikan perinteisen tulkinnan mukaan *aaltofunktion antama todennäköisyysjakauma sisältää kaiken mahdollisen informaation elektronin paikasta ennen varsinaista mittausta*. Toisin sanoen kysymys ei ole siitä, että elektroni olisi jossakin täsmällisessä paikassa, jota emme vain tiedä, vaan että elektronilla *ei ole täsmällistä paikkaa ennen kuin mittalaite pakottaa elektronin johokin tiettyyn pisteeseen*. Tällöin tämän havaintopisteen paikka määräytyy satunnaisesti ja aaltofunktio antaa täydellisen ennusteen paikan todennäköisyysjakaumasta.

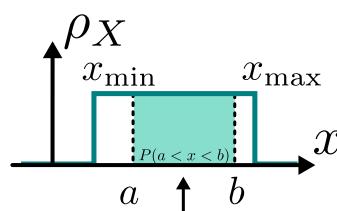
Kvantimekanikaan liittyy paljon epäintuitiivisia tuloksia, mutta suurin osa niistä selittyy yksinkertaisesti hyväksymällä, että "hiukkaset" kuten elektronit ovatkin aaltoja. Sen sijaan sille, että mittausten tulokset ovat satunnaisia ja että mittauksen väistämättä vaikuttaa mitattavaan systeemiin irreversiibeliisti, ei ole selkeää klassista vastinetta. On paljon erilaisia tulkintoja sille, miksi kvantimekaanisen mittauksen täytyy olla satunnaisprosessi, mutta yleisesti hyväksyttyä selitystä ei ole, ja aiheesta käydään edelleen filosofista keskustelua.



17.15 Etsi tietoa kvantimekanikan eri tulkinnoista. Mitä ovat esimerkiksi kööpenhaminalainen tulkinta, monet maailmat ja De Broglie–Bohm teoria?

Jatkuva todennäköisyysjakauma

Kuva 17.16: Tasainen jakauma.



Tasaisesti jakautuneen satunnaismuuttujan todennäköisyys olla välillä $[a, b]$ on verrannollinen välin pituuteen.

Paikka x on jatkuva suure, joka voi saada mitä tahansa reaaliarvoja. Niinpä jos aaltofunktion amplitudin neliö kuvailee paikan todennäköisyyttä, sen on oltava todennäköisyyslaskennan termiein *jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio*.

Koska reaalilukuja on äärettömästi, minkä tahansa tietyn reaalilukuarvon todennäköisyys on jatkuvassa todennäköisyysjakaumassa tavallisesti nolla. Siksi onkin mielekästä puhua vain todennäköisyydestä, että satunnaismuuttuja saa arvon joltakin *väliltä*. Esimerkiksi jos satunnaismuuttuja X on tasaisesti jakautunut välille $[x_{\min}, x_{\max}]$, X :n todennäköisyys saada arvo väliltä $[a, b]$ (joka kuuluu välille $[x_{\min}, x_{\max}]$) on näiden välien pituuskien suhde,

$$P(a < X < b) = \frac{b - a}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (17.19)$$

Jos esimerkiksi välillä $[a, b]$ on leveydeltään puolet väliltä $[x_{\min}, x_{\max}]$, satunnaismuuttujan todennäköisyys saada arvo tältä väliltä on $P = 1/2$, mikä on järkevä. Tämä on *tasainen jakauma* ja sen *todennäköisyystiheys*

ρ_X voidaan nyt määritellä niin, että satunnaismuuttujan todennäköisyys olla välillä $[a, b]$ on todennäköisyystiheyden ja välin pituuden tulo

$$P(a < X < b) = \rho_X \cdot (b - a). \quad (17.20)$$

Tässä tapauksessa todennäköisyystiheys on siis $\rho_X = 1/(x_{\max} - x_{\min})$.

Yleisesti todennäköisyystiheys ei kuitenkaan ole vakio, jolloin satunnaismuuttuja ei ole tasaisesti jakautunut. Tällöinkin kuitenkin todennäköisyystiheyttä voidaan pitää vakiona infinitesimaalisen lyhyllä välillä $[x, x+dx]$, jolloin yhtälön (17.20) mukaan satunnaismuuttujan arvon todennäköisyys olla tällä välillä on

$$dP = P(x < X < x+dx) = \rho_X(x)(x+dx-x) = \rho_X(x)dx. \quad (17.21)$$

Todennäköisyys mitata satunnaismuuttujalle arvo äärelliseltä välilä $[a, b]$ saadaan näin ollen jakamalla väli infinitesimaalisen pieniin osiin ja laskemalla näiden todennäköisyydet yhteen eli integroimalla

$$P(a < X < b) = \int_a^b \rho_X(x)dx. \quad (17.22)$$

Graafisesti tämä tarkoittaa sitä, että todennäköisyys on todennäköisyystiheyden ρ_X kuvaajan alle jäävä pinta-ala.

Todennäköisyystiheyden ja kokonaistodennäköisyden suhde on samanlainen kuin tiheyden ja kokonaismassan: tiheys ρ kertoo paljonko massaa dm yhtä pistettä ympärivässä piessä tilavuudessa dV on, $dm = \rho dV$. Todennäköisyystiheys puolestaan kertoo paljonko *todennäköisyyttä* dP satunnaismuuttujan yhden arvon ympärillä olevassa piessä välissä dx on, $dP = \rho_X dx$.

Koska satunnaismuuttujan pitää saada mittauksessa aina *jokin* arvo (esimerkiksi hiukkasen pitää olla *jossakin*), *kaikkien mahdollisten arvojen kokonaistodennäköisyden pitää olla yksi*

$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x)dx = 1. \quad (17.23)$$

Tätä kutsutaan **normitusehdoksi**. Lisäksi koska todennäköisydet ovat positiivisia, myös todennäköisyystiheyden pitää olla positiivinen. Itse asiassa todennäköisyksien pitää olla aina rajoitettu välille $[0, 1]$, missä $P = 0$ on mahdoton ja $P = 1$ on varma tapahtuma. Todennäköisyystiheys sen sijaan voi saada mielivaltaisen suuria arvoja, kunhan todennäköisyystiheyden *integraali* on yksi.



17.16 Satunnaismuuttujan X todennäköisyystiheys saa arvon $1/5 \text{ m}^{-1}$ välillä $[0 \text{ m}, 0.5 \text{ m}]$, A (tuntematon vakio) välillä $[0.5 \text{ m}, 1 \text{ m}]$, ja muualla nolla. (a) Mikä on vakio A ? (b) Millä todennäköisydellä $X < 0.5 \text{ m}$?

Kun satunnaismuuttujan arvo mitataan monta kertaa ja näille mittaustuloksille lasketaan keskiarvo, saadaan tilastollinen tunnusluku, joka lähestyy jakauman *odotusarvoa* mittausten lukumäärän kasvaessa. Tätä säädintöä käytimme jo hiukkasten statistiikan yhteydessä luvussa 8.3. Tällöin diskreetin jakauman tapauksessa odotusarvo laskettiin summaamalla yhteen satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen ja niiden todennäköisyksien tulot. Jatkuvan jakauman tapauksessa summaus muuttuu integroinniksi, ja todennäköisydet korvataan todennäköisyystiheydellä. Siispä jatkuvan jakauman odotusarvo on

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x)dx. \quad (17.24)$$

Odotusarvoa merkitään usein kreikkalaisella myy-kirjaimella, $\mu_X = \langle X \rangle$.

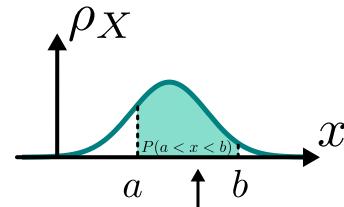


17.17 Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan X odotusarvo $\langle X \rangle$?

Jos suure Y riippuu satunnaismuuttujasta X , myös Y on satunnaismuuttuja. Esimerkiksi jos hiukkasella on satunnainen nopeus, sen liikemääräkin on satunnainen. Myös tällaisten satunnaismuuttujien odotusarvot voidaan laskea todennäköisyystiheyden ρ_X avulla, jos tunnetaan muuttujien välinen riippuvuus, $Y = y(X)$, sillä tällöin

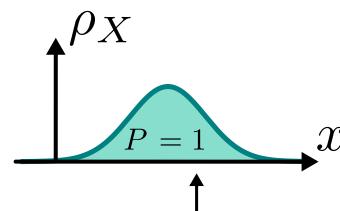
$$\langle Y \rangle = \langle y(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) \rho_X(x)dx. \quad (17.25)$$

Kuva 17.17: Muuttuva todennäköisyystiheys.



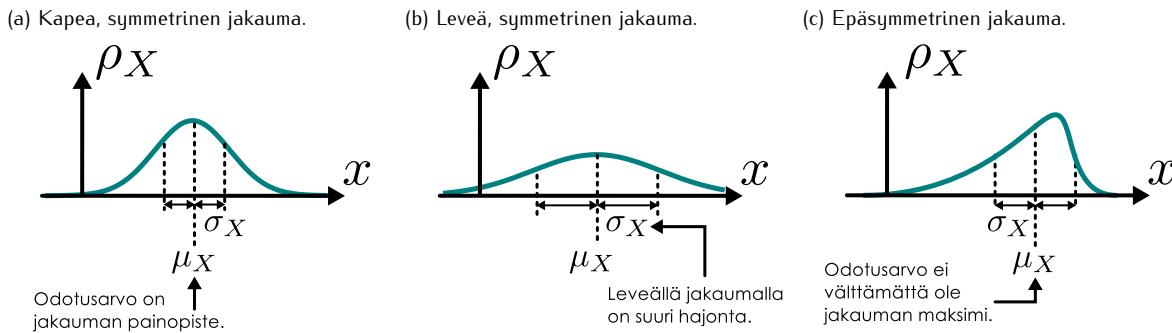
Satunnaismuuttujan todennäköisyyttä olla jollakin välillä $[a, b]$ kuvaa tiheysfunktion rajaama pinta-ala.

Kuva 17.18: Normitusehto.



Satunnaismuuttujan pitää saada jokin arvo, joten tiheysfunktion rajaama kokonaisala on yksi.

Kuva 17.19: Todennäköisyysjakauman odotusarvo ja keskijajonta.



Odotusarvoa laskettaessa siis yksinkertaisesti korvataan integraalissa satunnaismuuttujan arvo x funktiolla $y(x)$. Esimerkiksi suureen neliön odotusarvo on usein tärkeää,

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho_X(x) dx. \quad (17.26)$$



17.18 Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan X neliön odotusarvo $\langle X^2 \rangle$?

Todennäköisyysjakaumille voidaan määritellä paljon muitakin tunnuslukuja. **Varianssi** ja **keskijajonta** ovat näistä tärkeimmät. Varianssi σ_X^2 määritellään satunnaismuuttujan odotusarvosta laskettujen poikkeamien neliöiden odotusarvoksi

$$\sigma_X^2 = \langle (X - \mu_X)^2 \rangle \quad (17.27)$$

ja keskijajonta $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ on tämän neliöjuuri. Varianssi ja keskijajonta kuvavat satunnaismuuttujan vaihtelua eli sen jakauman leveyttä. Jos satunnaismuuttujan arvot eivät poikkea paljon toisistaan, erotus $X - \mu_X$ on yleensä pieni ja niinpä sen neliön odotusarvokin on pieni. Jos satunnaismuuttujan arvoissa on puolestaan paljon vaihtelua, X :n arvot voivat poiketa keskiarvosta paljon ja niinpä varianssi ja keskijajontakin ovat suuret. Erityisesti varianssi on aina positiivinen, koska se on neliölausekkeen odotusarvo.

Odotusarvon lineaarisuuden perusteella varianssin lauseke voidaan kirjoittaa esimerkiksi muotoon

$$\sigma_X^2 = \langle X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\mu_X \langle X \rangle + \mu_X^2 = \langle X^2 \rangle - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \langle X^2 \rangle - \mu_X^2, \quad (17.28)$$

eli varianssi on satunnaismuuttujan neliön odotusarvon ja odotusarvon neliön erotus. Tämä on usein kätevä tapa laskea varianssi.



17.19 Mikä on edellisen kysymyksen satunnaismuuttujan X keskijajonta σ_X ?

Hiukkasen paikan todennäköisyys

Palataan vielä takaisin tarkastelemaan elektronia ja sen aaltofunktioita. Elektronin *aaltofunktion itseisarvon neliö on siis sen paikan todennäköisyystiheys*, jolla on edellisessä luvussa kuvallut ominaisuudet. Erityisesti todennäköisyys mitata hiukkasen paikalle x arvo väliltä $[a, b]$ on

$$P(a < x < b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx. \quad (17.29)$$

Koska ψ voi olla kompleksiarvoinen, sen itseisarvo on usein helpoin laskea kompleksikonjugaatin avulla, $|\psi|^2 = \psi^* \psi$, jolloin todennäköisyys voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(a < x < b) = \int_a^b \psi^*(x) \psi(x) dx. \quad (17.30)$$

Jotta nämä todennäköisyyydet olisivat hyvin määritellyt, on normitusehdon (17.23) myös toteuduttava,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = 1. \quad (17.31)$$

Aaltofunktiota, joka toteuttaa tämän ehdon, kutsutaan **normitetuksi**. Monesti on hyödyllistä tarkastella myös funkchioita, jotka ovat *normittamattomia*, mutta tällöin on huomioitava, etteivät ne suoraan kuvaa minkään hiukkasen paikan jakaumaa.

Vastaavasti hiukkasen paikkakoordinaatin odotusarvo on

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx \quad (17.32)$$

ja paikkakoordinaatin neliön odotusarvo on

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x^2 \psi(x) dx. \quad (17.33)$$

Paikkakoordinaatin varianssi on näiden avulla

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (17.34)$$

17.20 Mitkä näistä väitteistä ovat totta? Perustele!

- (a) Hiukkasen paikan odotusarvo on sen paikan todennäköisin mittaustulos.
- (b) Hiukkasen paikan mittaus poikkeaa paikan odotusarvosta korkeintaan hajonnan verran.
- (c) Aaltofunktion itseisarvon neliö ei voi olla missään suurempi kuin 1.
- (d) Jos hiukkasen aaltofunktio poikkeaa nollasta vain välillä $[0, 2]$, on olemassa jokin piste, jossa $|\psi(x)| \geq 1/\sqrt{2}$.

esimerkki 17.2

Jatkuva jakauma

Elektronin aaltofunktio on $\psi(x) = a\sqrt{x}$ välillä $[0, 2]$ ja nolla muualla. (a) Mikä on vakion a itseisarvo? (b) Mikä on paikan odotusarvo? (c) Mikä on paikan hajonta?

Paikan todennäköisyysjakauma on $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2 = |a|^2 x$. Satunnaismuuttujan jakauman täytyy olla normitettu, eli pitää päteä

$$\int_0^2 \rho_X(x) dx = 1. \quad (17.35)$$

Tästä saadaan ratkaistua vakion a itseisarvo. Kun tämä tiedetään, paikan odotusarvo on

$$\mu_x = \langle x \rangle = \int_0^2 x \rho_X(x) dx \quad (17.36)$$

ja sen keskijajonta on

$$\sigma_x = \left(\int_0^2 (x - \mu_x)^2 \rho_X(x) dx \right)^{1/2}. \quad (17.37)$$

RATKAISU (a) Normitusehdosta saadaan

$$1 = \int_0^2 |a|^2 x dx = \left| \frac{|a|^2}{2} x^2 \right|_0^2 = 2|a|^2. \quad (17.38)$$

Jos valitsemme positiivisen reaaliarvon, saamme $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

(b) Odotusarvo on

$$\mu_x = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left| \frac{1}{6} x^3 \right|_0^2 = \frac{4}{3} \approx 1.33. \quad (17.39)$$

(c) Varianssi on

$$\sigma_x^2 = \int_0^2 \frac{1}{2} x \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 - \frac{8}{3} x^2 + \frac{16}{9} x \right) dx \quad (17.40)$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{4} x^4 - \frac{8}{9} x^3 + \frac{16}{9} x^2 \right|_0^2 = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{64}{9} + \frac{32}{9} \right) = \frac{2}{9} \quad (17.41)$$

joten keskijajonta on $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.47$.

ARVIOINTI Jakaumafunktio on kolmio, jonka kannan pituus on 2 ja korkeus 1, joten sen pinta-ala on 1, kuten pitääkin. Koska funktio on kasvava, odotusarvon on oltava välin $[0, 2]$ keskipistettä suurempi, kuten laskun mukaan onkin. Hajonnan puolestaan täytyy olla pienempi kuin etäisyys odotusarvosta jakauman reunille, kuten onkin.

Voimme laskea varianssin myös neliöllisen keskiarvon avulla. Nimittäin $\langle x^2 \rangle = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx = \left| \frac{1}{8} x^4 \right|_0^2 = 2$ ja tästä saadaan varianssiksi $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$ eli sama tulos kuin edellä.

Kvanttimekaaninen superpositio

Superpositio on aaltojen perusominaisuksia, ja myös kvantimekaaniset aalofunktiot voivat olla superpositiossa. Periaatteessa kvantimekaanisten aalofunktioiden superpositio toimii samalla tavalla kuin klassistenkin: superpositiossa olevat aalofunktiot lasketaan pisteittäin yhteen. Esimerkiksi köydessä kulkevien aalojen tapauksessa tämä tarkoittaa vain sitä, että köyden muoto saadaan köydessä kulkevien aalojen "muotojen summana". Kvantimekaanikassa ilmiön fysikaalinen tulkinta ei ole kuitenkaan sama, koska kvantimekaaninen aalofunktio kuvaa *hiukkisen tilaa*. Hiukkanen kuten elektroni ei synny minkään aaltolähteen värähtelystä vaan se voi olla olemassa ympäristöstään riippumatta, yksin tyhjässäkin avaruudessa. Kvantimekaanisen aalofunktion superpositio ei kuvaa useiden toisistaan riippumattomien aalojen tai useiden elektronien yhteistä käytöstä. Sen sijaan kvantimekaaninen superpositio merkitsee sitä, että hiukkisen tila voi olla erilaisten tilojen sekoitus tai yhdistelmä. Tästä seuraa, että hiukkisen ominaisuudet eivät välttämättä ole täsmällisiä ja tarkkaan määriteltävää vaan epämääriäisiä.

Tarkastellaan kvantimekaanista superpositiota esimerkin avulla. Kuvassa 17.20 (a) on piirretty elektronin aalofunktio ja tähän liittyvä paikan todennäköisyysjakauma. Aalofunktio on hyvin kapea piikki pisteen $x = a$ ympärillä, joten jos elektronin paikka mitataan tässä tilassa, tulokseksi saadaan varmasti jokin arvo lähestä täitä pistettä. Merkitään tästä tilaa $|a\rangle$ ja siihen liittyvää aalofunktioita $\psi_a(x, t)$. Vastaavasti kuvassa (b) elektroni on pisteesä $x = b$, joten merkitään tästä tilaa $|b\rangle$ ja sen aalofunktioita $\psi_b(x, t)$. Näiden tilojen *superposition* aalofunktio on piirretty kuvaan (c). Superpositiossa aalofunktiot lasketaan yhteen, $\psi_a(x, t) + \psi_b(x, t)$, joten lopputuloksena on aalofunktio, jossa on piikki sekä pisteen $x = a$ että pisteen $x = b$ kohdalla. Aalofunktion todennäköisyystulkinnan perusteella tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että superpositiotilassa olevan elektronin paikan mittaus antaa tulokseksi *joko* $x = a$ *tai* $x = b$. Toisin sanoen tällaisessa superpositiotilassa elektroni on tavallaan *kahdessa paikassa yhtä aikaa*, ja vasta paikan mittaaminen pakottaa elektronin aalofunktion keskittymään joko pisteen a tai pisteen b ympärille.

Tulos voi vaikuttaa kummalliselta, koska klassinen hiukkanen ei voi olla kahdessa paikassa yhtä aikaa. Tässä on kuitenkin jälleen muistettava, että kvantimekaaninen elektroni muistuttaa enemmän aaltoa kuin klassista hiukkasta. Aalto voi aivan hyvin koostua kahdesta tai useammasta pulssista, ja näin aalto voi jakautua moneen paikkaan samanaikaisesti.



17.21 (a) Mikä on kuvan 17.20 (c) elektronin paikan odotusarvo?

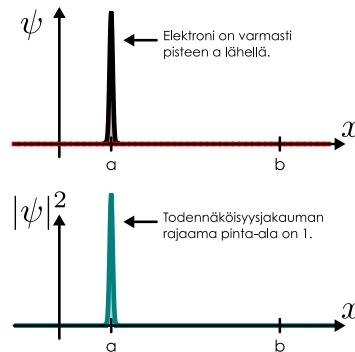
(b) Millä todennäköisyydellä elektronin paikan mittaus antaa tulokseksi tämän arvon?

Vaikka hiukkanen on kuvan 17.20 (c) tilassa "kahdessa paikassa yhtä aikaa", hiukkisen paikan mittaus antaa silti aina yksikäsitteisen tuloksen. Se, kummasta pistestä a vai b hiukkanen löytyy, on satunnaista. Hiukkanen havaitaan välittämättä *vain* jommassakummassa pisteesä. Ei ole mahdollista, että sama hiukkanen havaittaisiin samanaikaisesti molemissa pistessä. Tästä johtuen myös superpositiotilan täytyy toteuttaa normitusehto (17.23), jonka mukaan todennäköisyys mitata hiukkisen paikalle *jokin* arvo on täsmälleen yksi. Aalofunktiolle tämä tarkoittaa sitä, että aalofunktion itseisarvon neliön rajaaman pinta-ala on täytyy olla myös superpositiossa täsmälleen yksi.

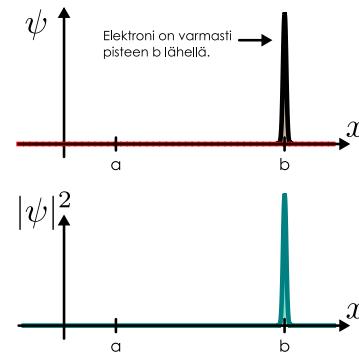
Normitusehdon takia kvantimekaanista superpositiota ei voi muodostaa suoraan summaamalla eri tilojen aalofunktioita yhteen. Jos nimittäin aalofunktion ψ_a itseisarvon neliön rajaama pinta-ala on yksi, ja tähän funktoon lisätään toinen funkció ψ_b , näiden funktioiden summan itseisarvon neliön rajaama pinta-ala on tavallisesti *suurempi kuin yksi*. Nämä kahden tilan summana muodostettu aalofunktio pitää vielä normeerata.

Kuva 17.20: Kvantimekaaninen superpositio tarkoittaa sitä, että hiukkisen ominaisuuksilla voi olla samanaikaisesti erilaisia mahdollisia arvoja.

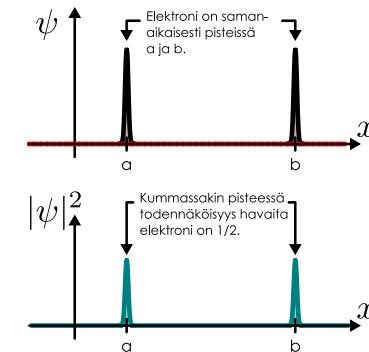
(a) Tilan $|a\rangle$ aalofunktio ja todennäköisyysjakauma.



(b) Tilan $|b\rangle$ aalofunktio ja todennäköisyysjakauma.



(c) Tilojen $|a\rangle$ ja $|b\rangle$ superpositio.



Esimerkiksi kuvien 17.20 (a) ja (b) aaltofunktioille pätee $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx = 1$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = 1$. Lisäksi koska aaltofunktiot ovat täysin toisistaan erillään, jokaisessa pisteessä x niistä vähintään toinen on nolla. Tässä erikoistapauksessa pätee $|\psi_a(x) + \psi_b(x)|^2 = |\psi_a(x)|^2 + |\psi_b(x)|^2$ (huom. *tämä ei ole totta kaikille funktioille*), jolloin funktioiden summalle pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x) + \psi_b(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = 2. \quad (17.42)$$



17.22 (a) Milloin vektoreille \bar{a} ja \bar{b} pätee $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$? (Vinkki: Pythagoras) (b) Milloin kompleksiluvuille z_1 ja z_2 pätee $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$?

Jotta tästä integraalista tulisi tulokseksi 1, pitää integroitava funktio kertoa siis tekijällä $1/2$. Toisaalta jos kerromme funktion neliön tekijällä $1/2$, voimme yhtä hyvin kertoa alkuperäisen funktion tekijällä $1/\sqrt{2}$. Nünä tässä tapauksessa aaltofunktioiden ψ_a ja ψ_b superpositio onkin tarkalleen ottaen

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(x, t) + \psi_b(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_a(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_b(x, t). \quad (17.43)$$

Tämä näkyy myös kuvassa 17.20 (c), jossa aaltofunktion muodostamien piikkien korkeus *ei ole sama* kuin kuvissa (a) ja (b). Todennäköisyysjakaumassa $|\psi|^2$ kuvan (c) piikkien korkeus on *puolittunut* verrattuna kuvien (a) ja (b) piukkeihin. Aaltofunktio on puolestaan kuvassa (c) tekijän $1/\sqrt{2} \approx 0.7$ verran matalampi kuin kuvissa (a) ja (b).

Kerrataanpa vielä, koska tämä on sekä tärkeää että varsin abstraktia. Kuvan 17.20 (c) aaltofunktio on siis yhdistelmä kahden tilan, $|a\rangle$ ja $|b\rangle$, aaltofunktioita ψ_a ja ψ_b . Tilassa $|a\rangle$ elektroni on melko tarkkaan pisteessä $x = a$ ja tilassa $|b\rangle$ se on pisteessä $x = b$. Tilat yhdistämällä luodaan *superpositiotila*, jossa elektroni voidaan havaita kummassa tahansa näistä pisteistä. Erityisesti jos elektronin paikka mitataan, elektroni havaitaan aina jommassakummassa pisteessä. Koskaan ei voi käydä niin, että elektronia ei havaita kummassakaan pisteessä tai että se havaittaisiin kummassakin pisteessä samanaikaisesti.

Esimerkissämme tilojen yhdistelmä on täysin symmetrinen. Aaltofunktion kuvaajassa on yhtä korkeat piikit pisteiden a ja b kohdilla ja aaltofunktion lausekkeessa (17.43) kummankin aaltofunktion edessä on sama kerroin, $1/\sqrt{2}$. Koska superpositio on symmetrinen, todennäköisyys löytää elektroni pisteestä a täytyy olla sama kuin todennäköisyys havaita se pisteessä b . Siis $P(a) = P(b) = 1/2$. Toisaalta lausekkeessa (17.43) tilojen $|a\rangle$ ja $|b\rangle$ kertoimina oli näiden *todennäköisyysjaksien neliöjuuret*, $\sqrt{P(a)} = \sqrt{P(b)} = 1/\sqrt{2}$. Näyttäisi siis silmä, että kun aaltofunktioista muodostetaan superpositio, todennäköisyys havaita elektronilla ne ominaisudet, joita kukin alkuperäinen aaltofunktio kuvaa, on verrannollinen aaltofunktioita kertovan luvun neliöön.

Havainto pitää paikkansa ja se yleistyykin lähes sellaisenaan koskemaan *kaikkia kvanttimekaanisia superpositiotiloja*. Nimittäin jos elektronin paikalla on tilassa $|a\rangle$ täsmällinen arvo $x = a$ ja tilassa $|b\rangle$ täsmällinen arvo $x = b$, näistä tiloista voidaan muodostaa superpositio kertomalla tilat sopivasti *normitetulla kertoimilla* c_a ja c_b ja laskemalla ne yhteen,

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = c_a\psi_a(x, t) + c_b\psi_b(x, t). \quad (17.44)$$

Tässä tilassa paikan mittaus antaa aina tulokseksi *joko* arvon a *tai* b ja nämä *havaitaan todennäköisyksillä*

$$P(a) = |c_a|^2, P(b) = |c_b|^2. \quad (17.45)$$

Tässä itseisarvot tarvitaan siksi, että kertoimet voivat olla myös kompleksilukuja. Sama periaate toimii myös silloin, kun yhteen lasketaan enemmän kuin kaksi tilaa.



17.23 Hiukanne on superpositiossa $\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = c_a\psi_a(x, t) + c_b\psi_b(x, t)$, missä tiloille $|a\rangle$ ja $|b\rangle$ pätee kaikilla $|c_a\psi_a(x) + c_b\psi_b(x)|^2 = |c_a\psi_a(x)|^2 + |c_b\psi_b(x)|^2$. Millainen ehto pitää kertoimien c_a ja c_b toteuttaa, jotta superpositio olisi oikein normitettu?

Hiukkasen liikemäärän todennäköisyys

Kvanttimekaanisen hiukkasen kuten elektronin muillakin ominaisuuksilla kuin paikalla voi olla samanaikaisesti useita arvoja. Elektroni voi esimerkiksi *liikkua useilla eri nopeuksilla samanaikaisesti*. Kuvassa 17.21 (a) on piirretty positiiviseen x -suuntaan kulkevan elektronin aaltofunktio, kun hiukkasen aaltoluku on K (vrt. kuvaa 17.13). Tässä tilassa $|K\rangle$ aaltofunktio on $\psi_K(x, t) = e^{i(Kx - \omega t)}$, joten funktion reaali- ja imaginääriosat muodostavat kuvassa oikealle etenevät sinimuotoiset aallot. Vastaavasti kuvassa (b) on piirretty tilassa $|-K\rangle$ olevan negatiiviseen x -suuntaan kulkevan elektronin aaltofunktio $\psi_{-K}(x, t) = e^{i(-Kx - \omega t)}$.

Elektroni voi olla myös näiden tilojen superpositiossa,

$$\psi_{\text{superpositio}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_K(x, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-K}(x, t), \quad (17.46)$$

joka on esitetty kuvassa (c). Kuten klassisten aaltojen yhteydessä opimme, vastakkaisiin suuntiin kulkevat sinimuotoiset aallot muodostavat *seisovan aallon*. Niinpä tässä superpositiotilassa elektronin aaltofunktio on seisova aalto. Seisova aalto ei kulje kumpaankaan suuntaan, joten elektroni on *keskimäärin paikoillaan*. Elektroni ei ole kuitenkaan absoluuttisesti paikoillaan vaan se kulkee nyt *samaanikaisesti sekä oikealle että vasemmalle*, ja jos elektronin liikemäärä mitattaisiin tässä superpositiotilassa, mittaustulokseksi voitaisiin saada *joko $p_x = \hbar K$ tai $p_x = -\hbar K$* , mutta *ei nolla*, koska aaltolukua $k = 0$ vastaava tila ei ole superpositiossa mukana.

Kvanttimekaaniset aaltofunktiot voidaan esittää sinimuotoisten aaltojen Fourier-sarjana aivan samaan tapaan kuin klassiset aallot. Erityisesti koska kompleksinen eksponenttifunktio sisältää sinimuotoiset reaalijä imaginääriosat, voidaan aaltofunktio esittää tällaisten kompleksisten eksponenttifunktioiden summana

$$\psi(x, t) = \sum_i a(k_i) e^{i(k_i x - \omega_i t)}. \quad (17.47)$$

Tämä on kompleksiarvoisten funktioiden Fourier-sarja, ja siinä esiintyvät Fourier-kertoimet $a(k_i)$ voivat olla kompleksilukuja. Kuvan 17.21 on pürretty myös kunkin aaltofunktion *Fourier-kuvaaja* eli sen Fourier-kertoimien graafinen esitys. Kuvassa (a) Fourier-kuvaaja $a_K(k)$ on vain yksi piste kohdassa $k = K$, koska aaltofunktio koostuu vain yhdestä sinimuotoisesta aallosta, jonka aaltoluku on K . Vastaavasti kuvan (b) Fourier-kuvaaja $a_{-K}(k)$ on yksi piste kohdassa $-K$. Koska kuvassa (c) on näiden tilojen superpositio, sen Fourier-kuvaajassa on *kaksi* pistettä.

Kvanttimekaaninen superpositio voidaan siis kirjoittaa myös Fourier-kertoimien avulla muodossa

$$a_{\text{superpositio}}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}a_K(k) + \frac{1}{\sqrt{2}}a_{-K}(k). \quad (17.48)$$

Tällä tavalla Fourier-kertoimien avulla kirjoitettu superpositio on matemaattisesti ekvivalentti aaltofunktioilla muodossa (17.46) kirjoitetun superposition kanssa. Toisin sanoen superpositioperiaate pätee sekä aaltofunktioille että niiden Fourier-kertoimille. Koska superposition voi ilmaista eri tavoin, kvantimekanikkassa se kirjoitetaankin usein tilavektoreiden avulla abstraktissa muodossa

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-K\rangle. \quad (17.49)$$

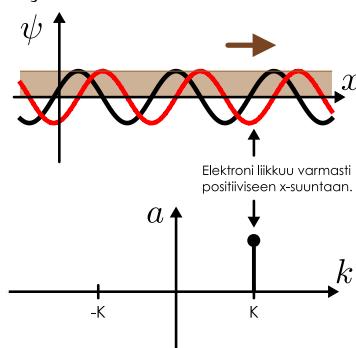
Tämä merkintä tarkoittaa sitä, että samanlainen yhteenlasku toimii riippumatta siitä, esitetäänkö tilat aaltofunktioina vai Fourier-kertoimina.

17.24 Elektronin Fourier-kuvaajassa on yhtä korkeat pükkit kohdissa $k = 5 \text{ nm}^{-1}$ ja $k = 6 \text{ nm}^{-1}$. Huom. $1 \text{ nm}^{-1} = 10^9 \text{ m}^{-1}$.

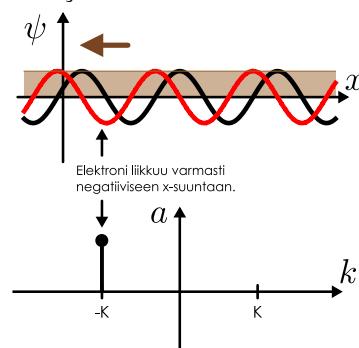
- (a) Mitä eri arvoja elektronin liikemäärälle voidaan mitata?
 (b) Mikä on elektronin nopeuden odotusarvo?

Kuva 17.21: Hiukkasan voi liikkua usealla nopeudella samanaikaisesti.

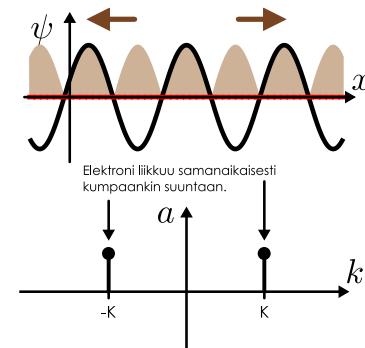
(a) Tilan $|K\rangle$ aaltofunktio ja aaltolukusitrys.



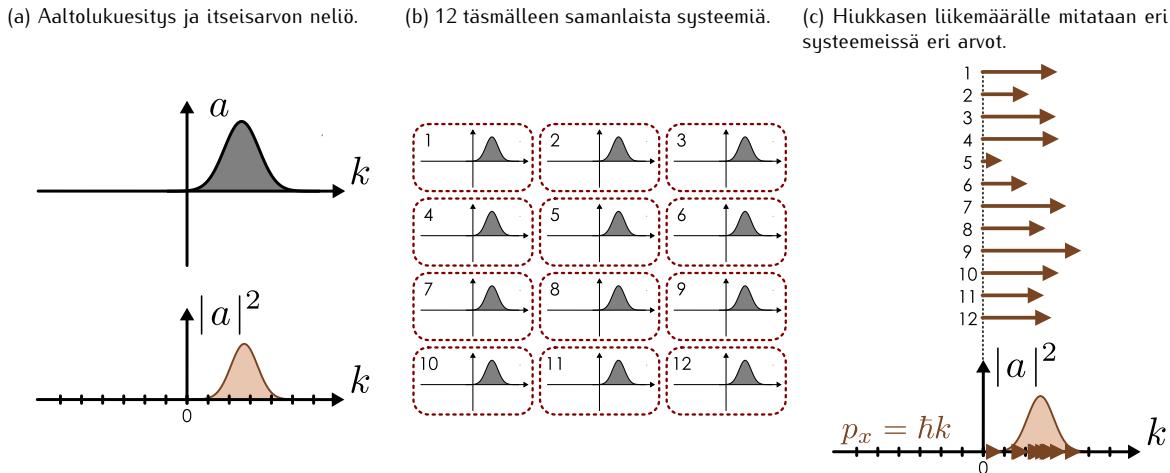
(b) Tilan $|-K\rangle$ aaltofunktio ja aaltolukusitrys.



(c) Tilojen $|K\rangle$ ja $|-K\rangle$ superpositio.



Kuva 17.22: Vaikka joukko elektroneja on täsmälleen samanlaisessa tilassa, mitattaessa elektronien liikemääriä saadaan erilaiset, satunnaiset tulokset. Useimmiten elektronilla havaitaan liikemääriä, jota vastaan aaltoluvulla $k = p_x/\hbar$ elektronin k -aaltofunktion itseisarvon neliö on suuri.



Vapailla hiukkilla aaltoluku voi saada mitä tahansa reaaliarvoja, jolloin yksittäisten aaltojen summaamisen sijaan voidaan aaltoja laskea yhteen myös jatkuvasti muuttuvan k -indeksin yli. Tällöin $a(k)$ on jatkuva funktio ja Fourier-sarjassa (17.47) esiintyvä summa muuttuu integraaliksi aaltoluvun suhteeseen

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (17.50)$$

Tässä esiintyvä funktio $a(k)$ kutsutaan aaltofunktion $\psi(x)$ **Fourier-muunnokseksi**. Kuten Fourier-sarja myös Fourier-muunnos on yksikäsitteinen, mikä tarkoittaa sitä, että on olemassa vain yksi funktio $a(k)$, josta aaltofunktio voidaan laskea muunnoksella (17.50). Toisin sanoen funktio $a(k)$ sisältää *yhtä paljon tietoa* hiukkisen tilasta kuin aaltofunktio ja on siten matemaattisesti *yhtä hyvä* tapa kuvata hiukkasta. Tästä syystä Fourier-muunnosta kutsutaan myös hiukkisen **aaltolukuesitykseksi**, koska se "esittää" hiukkisen tilan ominaisuudet aaltoluvun avulla.

Elektroni voidaan havaita vain sellaisessa paikassa x , jossa sen aaltofunktio ei ole nolla. Samaan tapaan elektronin aaltoluvuksi ja liikemääriksi voidaan mitata vain sellaiset arvot k ja $p_x = \hbar k$, joissa elektronin aaltolukuesitys $a(k)$ ei ole nolla. Itse asiassa *todennäköisyys* havaita aaltoluvun arvo k on verrannollinen *aaltolukuesityksen itseisarvon neliöön* aivan samaan tapaan kuin todennäköisyys havaita elektroni paikassa x on verrannollinen aaltofunktion itseisarvon neliöön. Jos aaltolukuesitys poikkeaa nollasta vain joissakin k -akselin pisteissä kuten kuvassa 17.21 (c), elektronin aaltoluvun mittaus antaa tulokseksi jonkin näistä arvoista, ja kunkin arvon havaitsemisen todennäköisyys on

$$P(k) = |a(k)|^2. \quad (17.51)$$

Vastaavasti todennäköisyys mitata hiukkasse liikemääri $p_x = \hbar k$ on

$$P(p_x) = P(k = p_x/\hbar) = |a(p_x/\hbar)|^2. \quad (17.52)$$

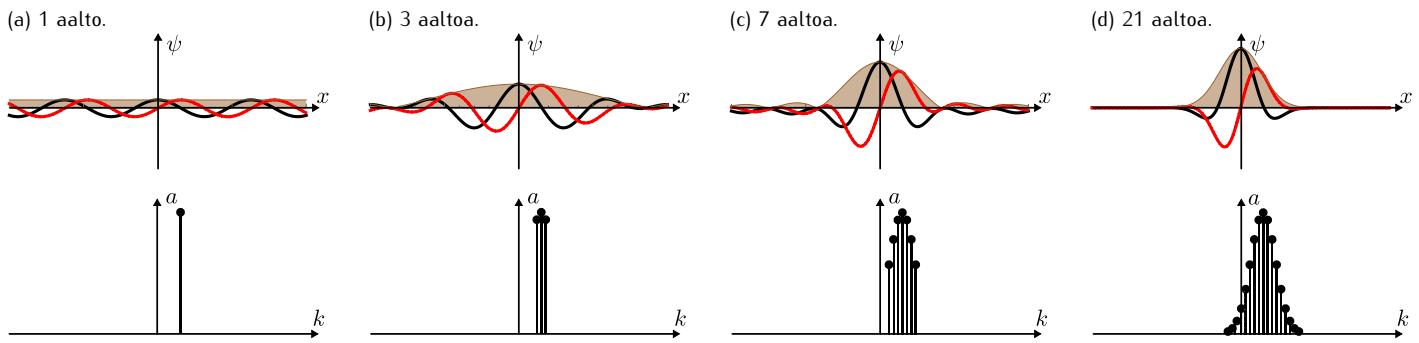
Jos aaltolukuesitys on jatkuva funktio, sen itseisarvon neliö on hiukkisen liikemäären todennäköisyysjakauman todennäköisyystihleys

$$P_K(k) = |a(k)|^2. \quad (17.53)$$

Aaltofunktion Fourier-muunnos kuvaa siis elektronin aaltoluvun ja sitä kautta liikemäären todennäköisyysjakaumaa täsmälleen samalla tavalla kuin aaltofunktio kuvaa elektronin paikan todennäköisyysjakaumaa.

Tämän merkitystä mittauksille on havainnollistettu kuvan 17.22 ajatuskokeessa. Valmistelemme joukon kvanttimekaanisia systeemejä, joissa on kussakin yksi hiukkanen *täsmälleen samanlaisessa tilassa*. Mitataamme näiden hiukkasten liikemäärit, jolloin saamme jälleen satunnaisia tuloksia aivan kuten paikankin mittauksista saatün. Minkään yksittäisen liikemääritämittauksen tulosta ei voi etukäteen täsmälleen tietää. Sen sijaan mitatut liikemäärit yhdessä muodostavat jakauman, jonka muoto seuraa funktion $|a(k)|^2$ muotoa. Useimpien hiukkasten mitattu liikemääri p_x vastaa aaltolukua $k = p_x/\hbar$, jolla tämä funktio saa suuria arvoja, eikä sellaisia liikemääriä mitata lainkaan, joita vastaan aaltoluvulla funktio saa arvon nolla.

Kuva 17.23: Kompleksieksponeentiaisten aaltofunktioiden superpositioita. Yksittäinen aalto ulottuu äärettömän kauas, mutta yhdistämällä useita aalloja, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan, saadaan pieneen alueeseen rajoittunut aaltopaketti. Kuvassa on esitetty kunkin tilan aaltofunktio $\psi(x)$ sekä aaltolukuesitys $a(k)$.



17.25 Elektronin aaltolukuesityksessä on kaksi piikkiä: $a(1 \text{ nm}^{-1}) = 3/5$ sekä $a(2 \text{ nm}^{-1}) = 4/5$.

- Mitä arvoja elektronin liikemääärän mittaus voi antaa?
- Millä todennäköisyydellä nämä arvot mitataan?
- Mikä on liikemääärän odotusarvo?

esimerkki 17.3

Kvanttimekaaninen superpositio

Elektroni on systeemissä, jossa sille voidaan mitata energiat $E_n = \epsilon n^2$, missä $n = 1, 2, 3, \dots$ ja ϵ on jokin pieni energia. Tilaa, jossa hiukkasen energia on E_n , merkitään $|n\rangle$. Nyt elektroni on superpositiotilassa $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|4\rangle$. (a) Mitä energian arvoja hiukkaselle on mahdollista mitata? (b) Millä todennäköisyyksillä hiukkaselle mitataan mikäkin energia? (c) Mikä on hiukkasen energian odotusarvo?

SUUNNITELMA Hiukkasen energialle voidaan mitata vain tiloja $|1\rangle$, $|2\rangle$ ja $|4\rangle$ vastaavat energiat $E_1 = \epsilon$, $E_2 = 4\epsilon$ ja $E_4 = 16\epsilon$. Kunkin energian mittauksen todennäköisyys P_n on ko. tilan kertoimen itseisarvon neliö. Odotusarvo on

$$\langle E \rangle = \sum_n P_n E_n = P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_4 E_4. \quad (17.54)$$

RATKAISU Mittaustodennäköisyydet ovat $P_1 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$, $P_2 = \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{4}{6}$, $P_4 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$, jolloin energian odotusarvo on $\langle E \rangle = \left(\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{4}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 16 \right) \epsilon = \frac{33}{6} \epsilon \approx 5.5\epsilon$.

ARVIOINTI Todennäköisyyksien summa on selkeästi yksi kuten pitääkin. Odotusarvo on puolestaan energioiden E_2 ja E_4 välillä lähellä arvoa E_2 , mikä on järkevä, koska arvon E_2 mittamisella on suurin todennäköisyys, mutta toisaalta E_4 on selvästi muita energian arvoja suurempi.

Paikan ja liikemääärän epätarkkuusperiaate

Luvussa 15.5 opimme, että aallot voidaan aina esittää sinimuotoisten aaltojen superpositiona, ja erityisesti yhdistämällä useita sinimuotoisia aalloja, joiden aaltoluvut ovat lähellä toisiaan, saadaan muodostettua aaltopulssi. Täsmälleen sama pätee myös kvantimekaanisille aaltofunktioille. Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.23, jossa aaltofunktiot on muodostettu summaamalla yhteen yhä enemmän sinimuotoisia aalloja. Kuvasta nähdään, kuinka jo muutaman aallon yhdistäminen johtaa aaltofunktioon, joka on yhdessä paikassa korkea ja toisaalla matala. Kun summaan lisätään yhä enemmän aalloja, aaltopulssista tulee yhä tarkemmin rajattu ja värähtely paketin keskipisteestä loitottaessa vähenee.

Klassisten aaltojen yhteydessä huomasimme myös sen, että mitä enemmän aaltopulssin muodostavien sinimuotoisten aaltojen aaltoluvut k poikkeavat toisistaan eli mitä leveämpi on aallon Fourier-kuvaja, sitä kapeamman pulssin ne muodostavat. Eli mitä tarkemmin aaltopulssi on rajattu tiettyyn paikkaan, sitä epämääritsempi tämän pulssin aallonpituuus ja aaltoluku ovat. Ja pisin vastoin jotta pulssin aallonpituuus ja aaltoluku olisivat täsmälliset, pulssin on välttämättä oltava paikka-akselilla leveä. Kutsuimme tästä ominaisuutta Fourier-muunnoksen epätarkkuusperiaatteeksi. Klassisille aalloille tulos ei ollut erityisen mielenkiintoinen, mutta sama periaate pätee myös kvantimekaanisille aaltofunktioille, ja kvantimekanikassa tämä ominaisuus on merkittävä. Jos kvantimekaanista hiukkasta kuten elektronia kuvava aaltopulssi on leveä, emme

voi ennustaa kovin tarkkaan, mikä arvo elektronin paikan mittauksessa saadaan. Toisaalta jos elektronin aaltolukuesityksen kuvaaja on leveä, emme voi ennustaa kovin tarkkaan, mikä arvo elektronin liikemääärin mittauksessa saadaan. Toisin sanoen sekä elektronin paikka että sen liikemääriä ovat epämääritetyt, ja epätarkkuusperiaatteen mukaan nämä epämääritetyt *riippuvat toisistaan*. Jos aaltopulssi on kapea, elektronin paikka on melko täsmällinen, mutta tällöin elektronin aaltoluku on epätarkka, jolloin elektronin liikemääriä ei voi ennustaa tarkasti (kuva 17.24 (a) ja (b)). Jos puolestaan elektronin aaltolukuesitys muodostaa kapean kuvaajan, aaltoluku ja siis liikemääriä ovat melko tarkat, mutta tällöin elektronia kuvaava aaltopulssi on välttämättä leveä eikä elektronin paikkaa voida ennustaa tarkasti (17.24 (d) ja (e)). Tätä paikan ja liikemäärin epämääritetyksien riippuvuutta kutsutaan **Heisenbergin epätarkkuusperiaatteeksi** (Werner Heisenbergin mukaan).

Epätarkkuusperiaate ei ole mittaustekninen vajavaisuus, vaan se sanoo, että elektronilla *ei ole olemassa kvanttimekaanista tilaa*, jossa x -paikkakoordinaatti ja x -suuntainen liikemääri saisivat yhtä aikaa tarkan arvon. Riippumatta siitä, millainen elektronin tila ja aaltofunktio on, elektronin paikan ja liikemäären todennäköisyysjakaumilla on *aina* jokin äärellinen leveys, ja toisen suureen todennäköisyysjakauman kaventaminen välttämättä leventää toista jakaumaa.

Tämä periaate voidaan muotoilla myös matemaattisesti täsmälliseksi hiukkasen paikan ja liikemäären todennäköisyysjakaumien leveyttä koskevaksi epäyhtälöksi. Todennäköisyysjakauman leveyttä kuvaaa sen keskijajonta, joten tavallisesti *paikan epätarkkuudeksi määritellään paikkakoordinaatin keskijajonta*

$$\Delta x = \sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (17.55)$$

Samoin liikemäären x -komponentin epätarkkuus tarkoittaa kyseisen liikemäären komponentin keskijajontaa, joka on suoraan verrannollinen aaltoluvun keskijajontaan

$$\Delta p_x = \sigma_{p_x} = \hbar \sigma_k = \hbar \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}. \quad (17.56)$$

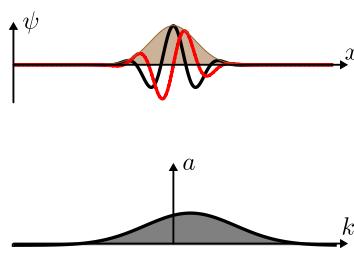
Fourier-muunnoksen ominaisuuksista seuraa, että *kaikissa aalloissa* paikan ja aaltoluvun *hajontojen tulo* on aina suurempi tai yhtä suuri kuin puolikas, $\sigma_x \sigma_k \geq 1/2$. Näin ollen elektronin x -koordinaatille sekä liikemäären x -komponentille pätee täsmällinen epäyhtälö

$$\Delta x \Delta p_x = \sigma_x \sigma_{p_x} = \sigma_x \hbar \sigma_k \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (17.57)$$

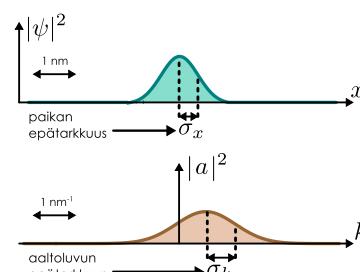
Vastaavia epätarkkuusperiaatteita voidaan kvanttimekaniikassa johtaa monille muillekin suurepareille.

Kuva 17.24: Aaltopaketteja $\psi(x)$, näitä vastaavia aaltolukuesityksiä $a(k)$ sekä hiukkasen paikan ja aaltoluvun (liikemäären) todennäköisyysjakaumat. Mitä leveämpi on aaltolukuesitys sitä kapeampi aaltopaketti ja päinvastoin. Paikan ja aaltoluvun (liikemäären) hajontojen tulot ei voi koskaan olla epätarkkuusperiaatteen määräämää alarajaan $1/2$ ($\hbar/2$) pienempi.

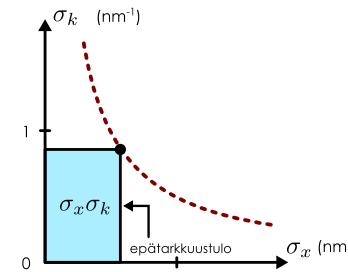
(a) Kapea aaltofunktio.



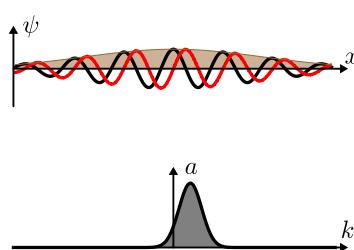
(b) Paikan ja aaltoluvun todennäköisyysjakaumat.



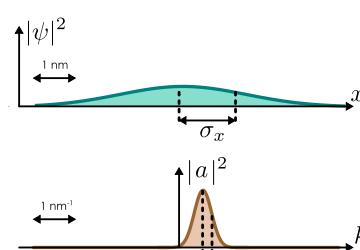
(c) Hajontojen tulo.



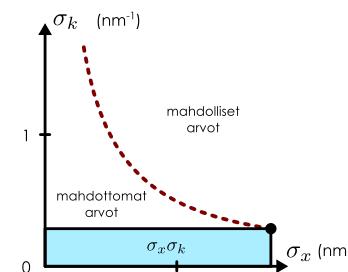
(d) Leveä aaltofunktio.



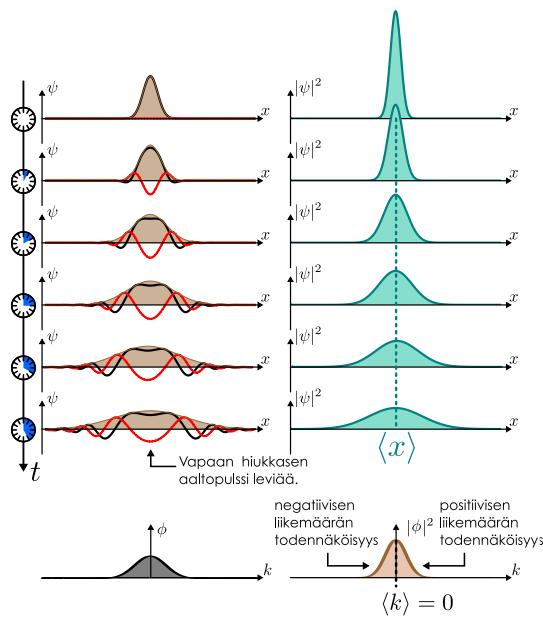
(e) Paikan ja aaltoluvun todennäköisyysjakaumat.



(f) Hajontojen tulo.

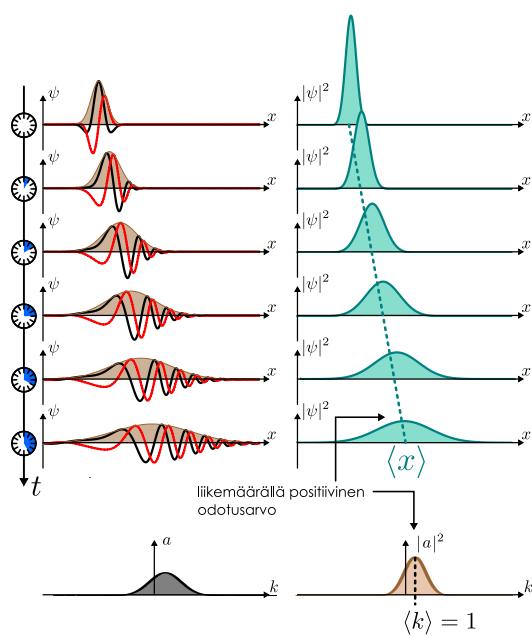


Kuva 17.25: Liikemääärän odotusarvo on nolla.



ää ajan kuluessa. Toisin sanoen vaikka elektroni on keskimäärin paikoillaan, sen paikan jakauma ei silti ole muuttumaton. Tämä johtuu siitä, että vaikka aaltoluvun ja liikemääärän odotusarvo on nolla, nämä suureet eivät ole täsmälleen nollia. Sen sijaan liikemäärä on tässä tilassa epämääriäinen ja sen mittaus voi antaa negatiivisen tai positiivisen mittauksen. Tavallaan elektronilla on samanaikaisesti sekä negatiivista että positiivista nopeutta, jolloin elektronin nopeuden odotusarvo on nolla ja sen paikan odotusarvo pysyy paikoillaan, mutta silti elektronin todennäköisyystiheys virtaa sekä negatiiviseen että positiiviseen suuntaan. Tällöin elektronin paikan todennäköisyysjakauma on, sitä täsmällisemmin elektronin nopeus on nolla ja sitä hitaanmin paikan todennäköisyysjakauma levää. Vapaan elektronin aaltoluvun, liikemäärä ja nopeuden epätarkkuus ei kuitenkaan voi koskaan olla täsmälleen nolla.

Kuva 17.26: Liikemääärän odotusarvo on positiivinen.



nopeus on todennäköisesti positiivinen, joten elektronin paikan todennäköisyysjakauma on positiiviseen suuntaan. Liikemäärä ja nopeuden mittaus voi kuitenkin tuottaa myös negatiivisen tuloksen, ja tämä näkyy myös aaltofunktiossa siten, että elektronia kuvaavan aaltopulssin vasen reuna liikkuu kuvassa vasemmalle, negatiiviseen suuntaan.

Aaltojen näkökulmasta kyseessä on *dispersioilmiö*. Kyseessä on tyhjässä avaruudessa vapaasti liikkova elektroni, jonka liikkeeseen ei vaikuta mikään ulkopuolin vuorovaikutus. Se on aaltopulssi, jonka voi ajatella

Epätarkkuusperiaatteen mukaan mitä tarkemmin hiukkasella on paikka, sitä epätarkempi sen liikemäärä ja sitä kautta nopeus on. Epätarkkuusperiaatteen merkitys ilmeneekin ehkä konkreettisemmin tarkastelemalla elektronia kuvaavan aaltopulssin liikettä. Kuvassa 17.25 on esitetty vapaata elektronia kuvaavan aaltopulssin kehitys ajan funktiona, kun elektronin aaltofunktio ja aaltolukuesitys ovat kumpikin aluksi origon suhteenvaihtoisesti symmetriset pulssit. Eritäyisesti koska aaltoluku on suoraan verrannollinen liikemäärä ja aaltoluvun todennäköisyysjakauma on nollan suhteenvaihtoisesti symmetrinen, aaltoluvun ja siis liikemääärän odotusarvon täytyy olla nolla. Elektroni on siis keskimäärin paikoillaan. Lisäksi koska tässä on kyse tyhjässä avaruudessa olevasta elektronista, johon ei kohdistu mitään vuorovaikutuksia, elektronin liikemäärä ei muutu ajan kuluessa. Aaltoluvun todennäköisyysjakauma ei siis muutu ajan kuluessa.

Aaltofunktio ja paikan todennäköisyysjakauma sen sijaan muuttuvat. Kuvasarjasta nähdään, että aluksi origossa ollut kapea aaltopulssi *hajaantuu ja levii*

Huomaa myös, että tässä esimerkissä liikemäären epätarkkuus on ei muutu ajan kuluessa mutta paikan epätarkkuus kasvaa. Tässä ei ole mitään ristiriitaa, koska epätarkkuusperiaate asettaa epätarkkuuskien tulolle vain alarajan mutta ei ylärajaa. Epätarkkuudet voivat olla kuinka suuret tahansa, ja vaikka yksi kasvaa, toisen ei välttämättä tarvitse pienentyä.

Aivan vastaava ilmiö nähdään myös kuvassa 17.26, jossa elektronin liikemääärän odotusarvo poikkeaa nollasta. Kuvan esimerkissä aaltoluvun ja siis myös liikemäären sekä nopeuden odotusarvo on positiivinen, joten elektroni liikkuu keskimäärin positiiviseen x -suuntaan. Tämä näkyy siinä, että elektronin paikan todennäköisyysjakauman keskikohta siirtyy ajan kuluessa. Aaltoluvun todennäköisyysjakauman leveys on sama kuin kuvassa 17.25, mikä tarkoittaa sitä, että elektronin liikemäärä ja nopeuden epätarkkuus on kuvissa yhtä suuri. Jos siis mittaamme elektronin liikemäären kummassa tahassa tilanteessa, mittaustuloksen odotettu poikkeama odotusarvosta on kummassakin tapauksessa yhtä suuri. Tämä tarkoittaa myös sitä, että paikan todennäköisyysjakauma levää kummassakin kuvassa ajan kuluessa yhtä nopeasti. Kuvan 17.26 esimerkissä elektronin

koostuvan sinimuotoisista aalloista, ja vapaasti liikkuvat sinimuotoiset aallot kulkevat tasaisella nopeudella. Näillä aalloilla on kuitenkin *eri nopeudet*, joten niiden superpositiona kuvattu aaltopulssi *muuttaa muotoaan ja hajaantuu* ajan kuluessa. Erityisesti näissä esimerkeissä aaltopulssi on superpositio sekä vasemmalle että oikealle kulkevista aalloista, jolloin pulssinkin tätyy liikkua sekä vasemmalle että oikealle. Esimerkissä 15.4 tutkimme kuvaaa 17.25 vastaavaa klassista aaltoa dispersiotomassa väliaineessa, ja silloin näimme aallon jakautuvan kahteen pienempään, vastakkaisiin suuntiin kulkevaan pulssiin. Kvanttimekaanisenkin aaltopulssin reunat liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, mutta koska tämä aalto kokee dispersiota, se ei jakaudu kahtia vaan levää yhä laajemmalle alueelle.



- 17.26** Tiedämme, että elektroni on eräällä ajan hetkellä x -akselin välillä [0 nm, 2 nm] ja sen keskimääräinen nopeus on $\langle v_x \rangle = 100$ km/s. Mikään ulkoinen vuorovaikutus ei muuta elektronin liikettä.
- (a) Mikä on elektronin liikemäärän epätarkkuus?
 - (b) Mikä on elektronin nopeuden epätarkkuus?
 - (c) Millä välillä voimme ennustaa elektronin olevan yhden mikrosekunnin päästä?

esimerkki 17.4

Epätarkkuusperiaate

Kvanttimekaanisen elektronin aaltolukuesitys on

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi\alpha^2)^{1/4}} e^{-\frac{1}{4\alpha^2} k^2}. \quad (17.58)$$

- (a) Mikä on aaltoluvun, liikemäään ja nopeuden epätarkkuus, jos $\alpha = 2.0 \text{ nm}^{-1}$? (b) Ratkaise elektronin aaltofunktio hetkellä $t = 0 \text{ s}$. (c) Mikä on paikan epätarkkuus? (d) Vertaa epätarkkuusperiaatteeseen.

SUUNNITELMA Aaltolukuesitys antaa kertoimet, joilla sinimuotoisia aaltoja $e^{ikx - \omega t}$ pitää Fourier-muunnoksessa painottaa, jotta saisimme muodostettua elektronin aaltofunktion. Aaltofunktio saadaan siis integroimalla funktioiden $a(k)$ ja $e^{ikx - \omega t}$ tuloa. Lisäksi nyt kysytiin erityisesti hetkeä $t = 0$, joten ajasta riippuvat termit ovat nollia. Jäljelle jää integraali

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk. \quad (17.59)$$

Aaltoluvun todennäköisyystiheys on aaltolukuesityksen itseisarvon neliö, $\rho_K(k) = |a(k)|^2$. Liikemäärä on aaltoluvun ja redusoidun Planckin vakion tulo, $p_x = \hbar k$, ja nopeus liikemäään ja massan suhde, $v_x = p_x/m_e$. Paikan todennäköisyystiheys on aaltofunktion itseisarvon neliö, $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2$. Epätarkkuudella tarkoitetaan näiden jakaumien hajontoja, ja epätarkkuusperiaatteeen mukaan pitää olla $\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$.

RATKAISU (a) Aaltoluvun todennäköisyysjakauma on

$$\rho_K(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{1}{2\alpha^2} k^2}. \quad (17.60)$$

Voit laskea jakauman odotusarvon ja hajonnan integroimalla todennäköisyystiheyttä, mutta se ei ole tarpeen, koska tämä on normaalijakauma. Yleisesti normaalijakauman tiheysfunktio odotusarvolla μ ja hajonnalla σ on

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (17.61)$$

ja vertaamalla tästä funktioon $\rho_K(k)$ nähdään, että nyt aaltoluvun odotusarvo on $\mu_k = 0$ ja keskijajonta $\sigma_k = \alpha = 2.0 \text{ nm}^{-1}$. Lükemäään ja nopeuden odotusarvot ovat siis myös nolla, ja niiden hajonnat ovat $\sigma_{p_x} = \hbar\sigma_k = 2.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ sekä $\sigma_{v_x} = \sigma_{p_x}/m_e = 230 \text{ km/s}$.

(b) Aaltofunktion määrittelevän integraalin voi laskea käsin, mutta se vaatii useiden matemaattisten kikkojen käyttämistä. Helpompa on laskea integraali tietokoneella. Saamme aaltofunktioksi ja siitä edelleen paikan todennäköisyysjakaumaksi

$$\psi(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2} \Rightarrow \rho_X(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-2\alpha^2 x^2}. \quad (17.62)$$

(c) Paikan todennäköisyysjakauma on myös normaalijakauma. Se on nimittäin sama funktio kuin lauseke (17.61), kun valitsemme $\mu = 0$ ja $2\alpha^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$. Paikan odotusarvo on siis nolla ja paikan keskijajonta on $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{1}{2\sigma_k} = 0.25 \text{ nm}$.

(d) Epätarkkuustuloksi saadaan

$$\sigma_x \sigma_k = \frac{1}{2\sigma_k} \sigma_k = \frac{1}{2}, \quad (17.63)$$

mikä on täsmälleen epätarkkuusperiaatteen määräämä alaraja.

```
(* aaltolukuesitys ja aaltofunktio *)
a = 1/(2 Pi alpha^2)^(1/4) Exp[-1/(4 alpha^2) k^2]
psi = 1/Sqrt[2 Pi] Integrate[a Exp[I k x], {k, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0]
E^(-alpha^2 x^2) (2/Pi)^(1/4) Sqrt[alpha]

(* hajonnat *)
deltak = Sqrt[ Integrate[k^2 a^2, {k, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0] ]
deltax = Sqrt[ Integrate[x^2 psi^2, {x, -Infinity, Infinity}, Assumptions -> alpha > 0] ]
deltax deltak /. alpha -> 2.0
Sqrt[alpha^2]
Sqrt[1/alpha^2]/2
0.5
```

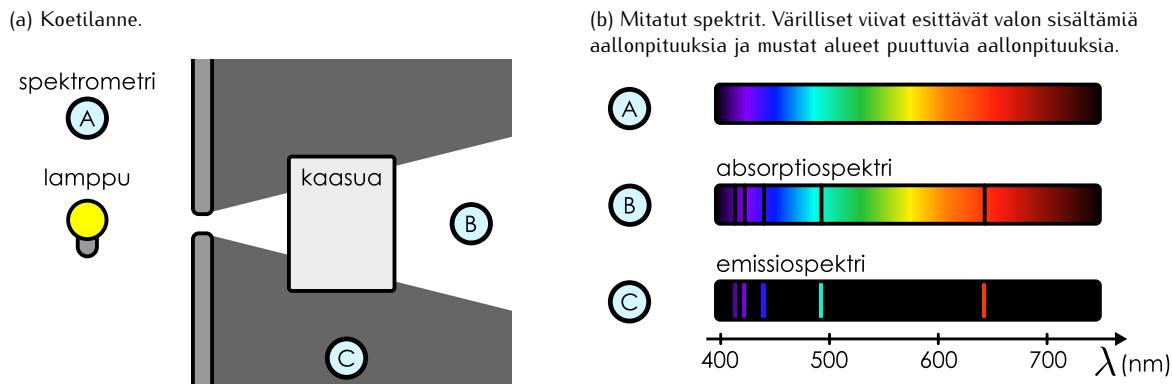
ARVIOINTI Koska epätarkkuusperiaate toteutuu, tulos vaikuttaa järkevältä. Huomaa erityisesti, että paikan epätarkkuus on käänän verrannollinen aaltoluvun epätarkkuuteen. Yhden pienentäminen siis väistämättä kasvattaa toista.



17.27 Kirjoita omiin sanoin tiivistelmä kvantimekanikan todennäköisyystulkinnasta ja epätarkkuusperiaatteesta. Miten aaltofunktio liittyy elektronin paikkaan? Miten aaltolukuesitys liittyy aaltolukuun ja liikemäärään? Miten aaltofunktio ja aaltolukuesitys liittyvät toisiinsa? Miksi tästä seuraa epätarkkuusperiaate?

KVANTTIMEKANIICKA

Kuva 17.27: Emissio- ja absorptiospektrin mittaus. Valonlähdde tuottaa valoa, joka sisältää kaikkia näkyvän valon aallonpituuksia (ja mahdollisesti myös infrapuna-, ultraviolettii- ym. aallonpituuksia). Spektrometri A mittaa valon sisältämät aallonpituuudet. Annetaan tämän valon kulkea kaasun läpi ja mitataan tämän valon aallonpituuudet spektrometrillä B. Mitataan myös kaasun lähetämän valon aallonpituuudet spektrometrillä C.



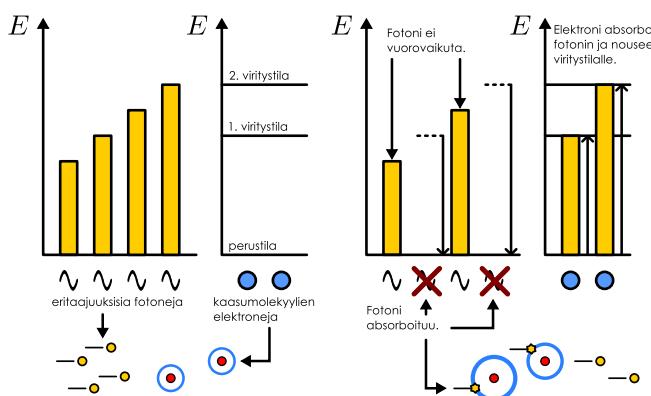
17.4 Kvanttuminen

Diskreetit spektrit

Planckin ratkaisu mustan kappaleen spektrin ominaisuuksille perustui oletukseen, että aineen elektronit voivat värähdellä vain joillakin tietyillä taajuuksilla. Samoin luvussa 8 ominaislämpökapasiteetin yhteydessä totesimme, että vapausasteiden jäätyminen johtuu siitä, etteivät molekyylit voi värähdellä tai pyöriä miten tahansa vaan ainoastaan jotkin taajuudet ja kulmanopeudet ovat niille mahdollisia. Toisin sanoen esimerkiksi värähtelevillä elektroneilla ja molekyyleillä on olemassa vain joitakin sallittuja värähtelytaajuuksia ja -energioita eivätkä ne voi värähdellä millään muilla taajuuksilla. Tällöin kvanttimekaniikassa sanotaan, että värähtelevien hiukkasten energia on **kvantittunut**.

Mustan kappaleen säteily ja vapausasteiden jäätyminen ovat epäsuoria todisteita siitä, että värähtelijöiden energiat eivät voi saada mitä tahansa arvoja, sillä kvantihypoteesi johti näiden ilmiöiden toimivaan teoreettiseen selitykseen. 1900-luvun alussa oli kuitenkin löydetty myös tapa mitata sallittujen energoiden välistä eroja suoraan. Oli nimittäin havaittu, että kun tietystä alkuaineesta koostuvaa kaasua valaistiin valkoisella, kaikkia eri aallonpituuksia sisältävällä valolla, kaasun läpi kulkeneesta valosta *puuttui* joitakin tiettyjä aallonpituuksia (kuva 17.27). Samalla kaasu itse alkoi säteilemään heikkoa valoa mutta ainoastaan *tietyillä* aallonpituuksilla. Kaasu siis *absorboi* itseensä sähkömagneettista säteilyä joillakin aallonpituuksilla ja *emittoi* näin saamansa energian niinkään sähkömagneettisena säteilynä. Kaasun läpi kulkeneen valon sisältämien aallonpituuksien joukkoon kutsutaan *absorptiospektriksi* ja kaasun lähetämien aallonpituuksien joukkoon *emissiospektriksi*. Koska absorptiospektristä puuttuu ja emissiospektriin kuuluu vain joitakin erillisiä aallonpituuksia, spektrejä kutsutaan *diskreeteiksi*.

Kuva 17.28: Fotonien absorptio.



Absorptiospektristä tällaiset fotonit puuttuvat, koska kaasun läpi kulkissaan ne kohtaavat elektroneja, jotka voivat ne absorboida. Suurin osa fotoneista kuitenkin kulkee kaasun läpi vuorovaikuttamatta sen kanssa, koska kaasussa ei ole sopivia elektroneja, jotka voisivat ne napata (kuva 17.28).

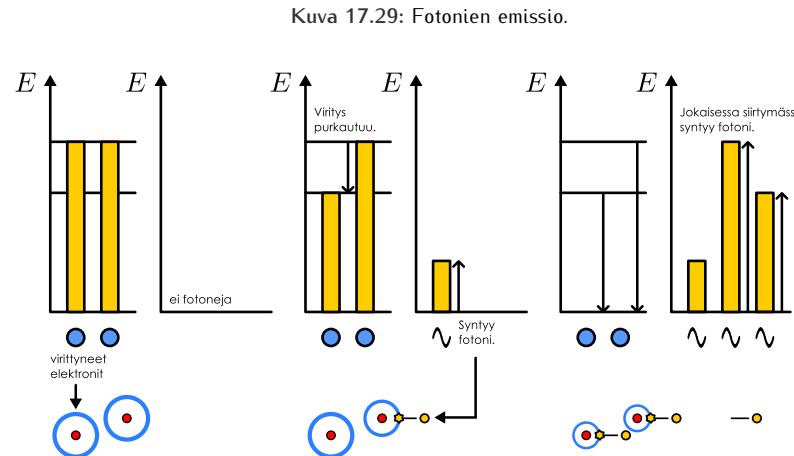
Absorptio- ja emissiospektrit riippuvat koekossa käytetystä kaasusta. Esimerkiksi vetykaasu absorboi ja emittoi aina tiettyjä juuri sille ominaisia aallonpituuksia. Klassisen sähkömagnetismin perusteella tästä on mahdoton ymmärtää, mutta kvantimekaniikan sallittujen energoiden idea antaa ilmiölle yksinkertaisen selityksen: Koska elektronin täytyy fotonin absorboidessaan saada itselleen fotonin *koko energia*, absorptio on mahdollinen vain silloin, jos fotonin energia on täsmälleen sopiva nostamaan elektronin energian johokin uuteen sallittuun arvoon. Toisin sanoen jos fotonin, jonka energia on $E_{fotoni} = \hbar\omega$, kohtaa elektronin, jonka energia on E_{alku} , foton voi absorboitua ainoastaan, jos energian arvo $E_{loppu} = E_{alku} + \hbar\omega$ on elektronille sallittu.

Jos kaasun lämpötila ei ole kovin korkea, lähes kaikki elektronit ovat alimman mahdollisen energian tilalla, jota kutsutaan **perustilaksi**. Tällöin absorptiospektristä puuttuvat taajuudet vastaavat kaikki perustilan ja sitä korkeamman energian tilojen eli **viritystilojen** väliä energioita, ja spektrin avulla voidaan siis suoraan mitata elektroneille sallittuja energian arvoja. Jos kaasun lämpötila on korkea, osa elektroneista voi olla noussut viritystiloille jo kaasun sisäenergian avulla, jolloin spektrissä näkyy myös viritystilojen väliä energiaeroja.

Fotonin absorboinut elektroni on *viritynyt*. Elektronit kuitenkin pyrkivät takaisin perustilaan samaan tapaan kuin kappaleet putoavat painovoiman vaikutuksesta alaspäin, eivätkä ne siis pysy virityyneinä pitkään. Sürtyessään pienemän energian tilalle elektronin on kuitenkin luovuttava energiansa jonnekin, koska energia ei voi häviää. Tämä tapahtuu niin, että syntyy fotoni, jonka energia vastaa täsmälleen elektronin tilojen energoiden eroa

(kuva 17.29). Näin kaasu alkaa emitoida valoa, jossa jokaisen fotonin energia vastaa täsmälleen jotakin elektronien sallittujen energoiden välistä eroa.

Diskreettejä spektrejä havaitaan juuri kaasuilla, koska kaasuissa molekyylit ja atomit vuorovaikuttavat keskenään hyvin heikosti. Tällöin elektronien sallitut tilat riippuvat juuri molekyylien ja atomien kvanttimekanisesta rakenteesta. Nesteissä ja kiinteissä aineissa atomien ja niiden elektronien välisen vuorovaikutusten johdosta sallittuja energioita on tavallisesti paljon enemmän kuin yksittäisissä atomeissa, jolloin absorptioita ja emissioita voi tapahtua hyvin monilla aallonpituuksilla.



Kuva 17.29: Fotonien emissio.

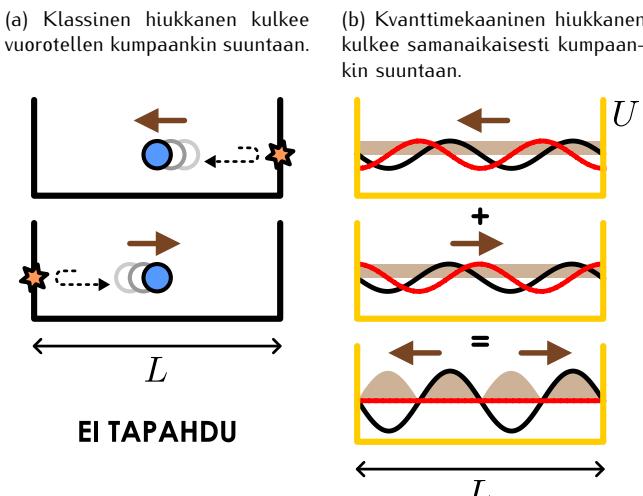
Kvanttimekaaniset seisovat aallot

Kaikki kvantimekaaniset systeemit eivät ole kvantittuneet. Esimerkiksi tilassa $|k\rangle$ olevan vapaan hiukkasen energia on $E_{\text{kokonais}} = K = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Koska mikään ei rajoita vapaan hiukkasen mahdollisia aaltoluvun k arvoja, hiukkasella voi olla myös *mikä tahansa* positiivinen liike-energia. Tässä suhteessa kvantimekaaninen hiukkanen ei poikkea klassisesta hiukkasta, koska klassisessakin mekaniikassa hiukkanen voi liikkua millä tahansa nopeudella ja hiukkasen liike-energia voi olla mikä tahansa. Energiat ovat kvantittuneet vain silloin, kun *systeemi asettaa rajoituksia siinä olevan hiukkasen aaltofunktion muodolle*. Näin tapahtuu, jos hiukkanen on vangittu pieneen tilaan.

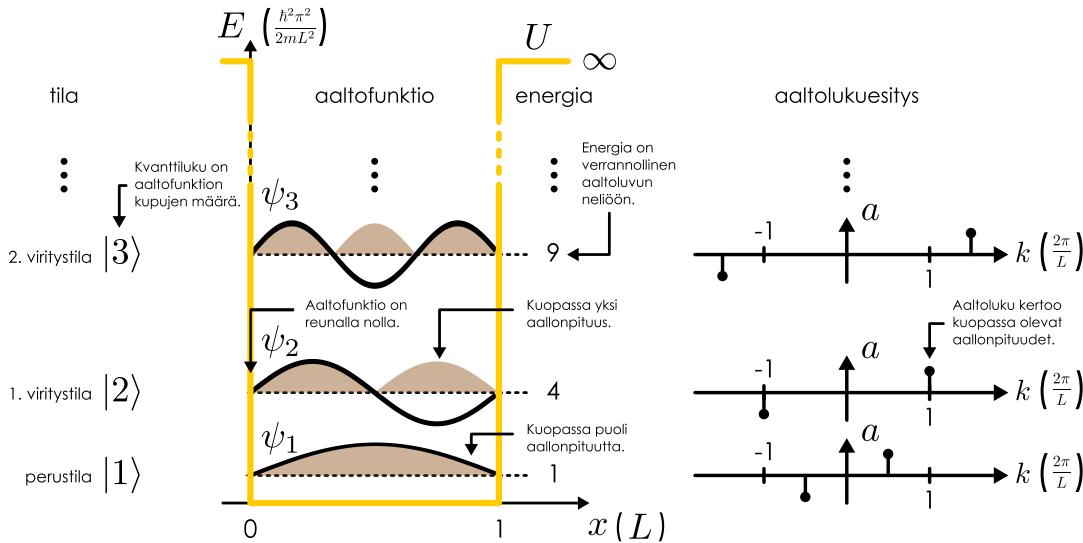
Yksinkertaisin tällainen tilanne on piirretty kuvaan 17.30, jossa elektroni on vangittu pieneen "laatikkoon". Elektronien mittakaavassa laatikkoja ei tietenkään ole olemassa. Tällainen tilanne kuitenkin syntyy, jos elektroni on ulkoisessa sähkökentässä, jossa sen potentiaalienergia riippuu paikasta. Tässä yksinkertaisessa esimerkissä elektronin potentiaalienergia on *nolla* laatikon sisällä ja *ääretön* laatikon ulkopuolella. Koska elektronin energia on äärellinen, se ei pääse pois laatikosta. Tällaisessa laatikossa olevan elektronin potentiaalienergia muistuttaa kuopassa olevan kappaleen potentiaalienergiaa, joten tilannetta kutsutaankin yleensä *äärettömän syväksi potentiaaliulopaksi*.

Jos elektroni olisi klassinen hiukkanen, se poukkoilisi kuopassa edestakaisin kuten kuvaan 17.30 (a). Elektroni *ei kuitenkaan ole klassinen hiukkanen*, vaan sitä kuvaavat aaltofunktio kuten kuvaan 17.30 (b) on piirretty. Aaltofunktio heijastuu kuopan reunoista aivan samaan tapaan kuin esimerkiksi köydessä etenevä mekaaninen

Kuva 17.30: Pieneen "kuoppaan" vangittu elektroni heijastuu edestakaisin kuopan reunoista.



Kuva 17.31: Hiukkasen ominaistiloja äärettömän syvässä potentiaalienergiakuopassa.



aalto heijastuu kiinnitetyn köyden päistä. Niinpä kuoppaan syntyy kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon superpositio eli *seisova aalto* (vrt. kuva 17.21). Elektronin ei siis kulje kuopassa edestakaisin vuorotellen vastakkaisiin suuntiin vaan *samanaisesti* kumpaankin suuntaan.

Elektronin aaltofunktio käyttääsiis potentiaalikuopassa samalla tavalla kuin päistään kiinnitetyn kitaran kielessä kulkevat aallot. Erityisesti kuoppaan voi syntyä *vain sellaisia seisovia aaloja, joissa kuopan reunalla on solmut* (kuva 17.31, vrt. kuva 15.30). Tämä johtuu siitä, että elektronin aaltofunktion täytyy olla kuopan ulkopuolella nolla, koska hiukkanen ei voi olla alueessa, jossa sen potentiaalienergia olisi ääretön. Aaltofunktion pitää olla myös jatkuva, joten aaltofunktion täytyy olla kuopan reunalla nolla. Niinpä kuopassa olevan elektronin aaltofunktiolla on vain tiettyjä sallittuja aallonpituuksia aivan kuten kitaran kielessä vain tiettyt aallonpituuudet ovat mahdollisia. Erityisesti *kuopan leveyden on oltava puolen aallonpituuden monikerta* eli

$$L = \frac{1}{2}\lambda_1, \lambda_2, \frac{3}{2}\lambda_3, \dots = n \frac{1}{2}\lambda_n, \quad (17.64)$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$ on aaltofunktion kupujen lukumäärä. Tässä tapauksessa n on myös tilan indeksoiva *kvanttiluku*, koska tämä luku yksin riittää kertomaan, mistä seisovasta aallosta on kyse. Näitä seisovia aaloja muodostavien aaltojen tiloja merkitäänkin $|n\rangle$ ja tilojen aaltofunktioita $\psi_n(x)$.

Koska aaltoluku ja aallonpituuus ovat käännekkäin verrannolliset toisiinsa, aaltoluku voi saada tilassa $|n\rangle$ arvot

$$k_n = \pm \frac{2\pi}{\lambda_n} = \pm n \frac{\pi}{L}. \quad (17.65)$$

(Koska aaltoluvulla on tässä tilassa useita mahdollisia arvoja, se ei nyt kelpaa tilan määritteleväksi kvanttiluvuksi.) Hiukkasen liike-energia riippuu aaltoluvusta yhtälön (17.13) mukaisesti, mutta tämä energia saa saman arvon riippumatta siitä, mikä on aaltoluvun k_n etumerkki (eli mihin suuntaan hiukkanen liikkuu). Niinpä hiukkasen liike-energia tilassa $|n\rangle$ on

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2. \quad (17.66)$$

Koska potentiaalienergia kuopassa oli nolla, tämä on myös hiukkasen kokonaisenergia.

Tämä on pohjimmainen syy elektronin energian kvantitatumiseen: kuoppaan sopii vain tietynlaisia seisovia aaloja, ja näillä aaltofunktiolla voi olla vain tiettyjä sallittuja energioita. Aivan samasta syystä kitaran kielikin voi värähdellä vain perustaajuudella ja sen harmonisilla ylätaajuuksilla.

17.28 Vertaa kuvien 15.30 ja 17.31 klassisia ja kvanttimekaanisia seisovia aaloja. Tarkastele ainakin aaltolukua, aallonpituuutta ja kulmataajuutta sekä näiden riippuvuutta kupujen lukumäärästä n .

Kuvaan 17.31 on piirretty hiukkasen perustilan aaltofunktio sekä kaksi alinta virystilaa. Kuvaajassa potentiaalienergiaa kuvaava keltainen viiva ja hiukkasen kokonaisenergia kullakin tilalla on piirretty vaakasuuntaisella katkoviivalla. Kutakin energiavaaraa vastaava aaltofunktio on piirretty kokonaisenergiaa kuvaavan vaakaviivan suhteeseen niin, että ko. viiva on aaltofunktion nollataso. Nämä aaltofunktiot on voitu piirtää samaan

kuvaan ilman, että niiden kuvaajat menevät päällekkäin. Myös tilojen aaltolukuesitykset on piirretty kuvaan. Mitä korkeamman energian tilasta on kyse, sitä lyhyempi on hiukkasen aaltofunktion aallonpituuus ja sitä suurempi (itseisarvoltaan) aaltoluku siihen liittyy.

Huomaa erityisesti, että hiukkasen energia perustilalla *ei ole nolla*. Hiukkasen energia on pelkkää liikeenergiaa, koska potentiaalienergia kuopassa on nolla, mutta hiukkanen ei voi koskaan olla täysin paikoillaan, vaan sen on *aina* pakko liikkua. Tämä johtuu siitä, että hiukkasen liikemäärä on verrannollinen aaltolukuun k , eikä kuopassa voi olla aaltofunktio, jonka aaltoluku olisi nolla. Havainto on yhteensopiva myös epätarkkuusperiaatteen kanssa: Koska hiukkanen on vangittu välille, jonka pituus on L , sen paikan epätarkkuus on rajoitettu ja niinpä sen liikemäärän epätarkkuuden on oltava nolla suurempi.

Tässä tarkasteltu äärettömän syvä potentiaalioppa on luonnollisesti vain *yksinkertaistettu malli*, jolla ei ole luonnossa vastinetta. Todellisissa, äärellisissä potentiaaleissa aaltofunktiot ovat sileitä funktioita, joissa ei ole "kulmia" kuten tässä tapauksessa kuopan reunolla oli. Aaltolukuesityksetkään eivät ole tarkkoja piükkejä vaan jatkuvia funktioita, jotka pitää laskea aaltofunktion Fourier-muunnoksesta. Kuitenkin edellä esitettyt johtopäätökset pätevät:

- äärelliseen alueeseen vangitun hiukkasen aaltofunktio voi aina muodostaa seisovia aaltoja
- näissä tiloissa hiukkanen voi saada vain tiettyjä, diskreettisia energioita
- hiukkasen tilaa kuvavaksi kvanttiluvuksi käy aaltofunktion kupujen lukumäärä n
- mitä enemmän kupuja on, sitä suurempi on hiukkasen energia.

Ajasta riippuvat ja riippumattomat tilat

Jatketaan vielä potentiaalioppaan muodostuvien seisovien aaltojen matemaattista analyysiä. Seisova aalto voidaan muodostaa kahden muutten samanlaisten mutta vastakkaisiin suuntiin kulkevien sinimuotoisten aaltojen superpositiona aivan kuten klassisessakin fysiikassa. Koska kvanttimekaanisen hiukkasen aaltofunktio tilassa $|k\rangle$ on sekä reaali- että imaginääriosiltaan sinimuotoinen,

$$\text{Re}[\psi(x, t)] = \cos(kx - \omega t), \quad \text{Im}[\psi(x, t)] = \sin(kx - \omega t), \quad (17.67)$$

tilojen $|k\rangle$ ja $|-k\rangle$ superpositio $|k\rangle - |-k\rangle$ muodostaa sekä reaali- että imaginääriosiltaan seisovia aaltoja. Näiden tilojen kvanttimekaanista superpositiota kuvaaa aaltofunktio

$$\psi_{\text{seisova}}(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} - e^{i(-kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{-i\omega t} - e^{-ikx} e^{-i\omega t} = (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-i\omega t}. \quad (17.68)$$

Aaltofunktio on tässä kirjoitettu muotoon, joka on ajasta riippuvan osan $e^{-i\omega t}$ ja paikasta riippuvan osan $e^{ikx} - e^{-ikx}$ tulo. Ajasta riippuva osuus kuvailee aallon reaali- ja imaginääriosien väriähtelyä ajan kuluessa. Paikasta riippuva osa puolestaan kuvailee aallon muotoa. Erityisesti huomioiden sini- ja eksponenttifunktion välinen yhteys

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (17.69)$$

aaltofunktio voidaan kirjoittaa muodossa

$$\psi_{\text{seisova}}(x, t) = 2i \sin(kx) e^{-i\omega t}. \quad (17.70)$$

(Huom. tämä aaltofunktio on normittamatonta. Aaltofunktion normitus on laskettu esimerkissä 17.5.)

17.29 Perustele yhtälöissä (17.68) esiintyvät yhtäsuuruudet eksponenttifunktion laskusäännöillä ja yhtälö (17.69) Eulerin kaavalla (14.31).

Tällä seisovalle aallolle on aina solmu pisteessä $x = 0$, koska sinifunktio on origossa nolla. (Jos oltaisiin tarkasteltu superpositiota $|k\rangle + |-k\rangle$, sinifunktion sijaan lopputulokseen olisi saatu kosini. Koska tässä esimerkissä kuopan toinen reuna on pisteessä $x = 0$, tämä ei kuitenkaan käy, koska kosini ei ole tässä pisteessä nolla.) Lisäksi funktiolla on solmut kaikissa muissakin pisteissä, joissa sinifunktio on nolla eli joissa sen argumentti on $\pi:n$ monikerta, $kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = n\pi$. Seisovan aallon ehto on se, että kuopan laidassa pisteessä $x = L$ täytyy olla solmu, joten tästäkin esityksestä saadaan sama kvantitumisehto $k_n L = n\pi$, joka pääteliin jo aaltofunktion graafisen esityksen avulla.

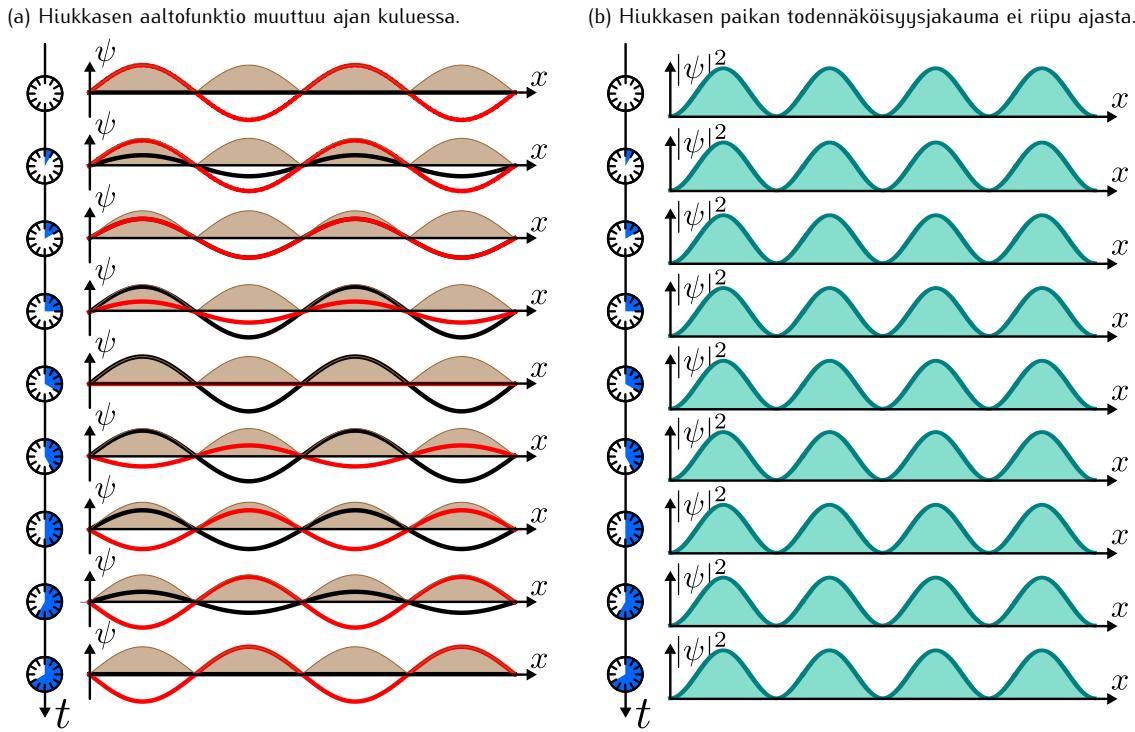
Aaltofunktio muuttuu ajan kuluessa kuten kuvassa 17.32 on osoitettu. Esimerkiksi ajan hetkellä $t = 0$ aaltofunktio on

$$\psi_n(x, 0) = 2i \sin(k_n x) \quad (17.71)$$

eli puhtaasti imaginääritinen, kun taas hetkellä $t = T/4$, missä $T = \frac{2\pi}{\omega}$ on väriähtelyn jaksonaika, aaltofunktio on

$$\psi_n(x, T/4) = 2 \sin(k_n x) \quad (17.72)$$

Kuva 17.32: Kvanttimekaanisessa seisovassa aallossa reaal- ja imaginääriosat värähtelevät samalla taajuudella niin, että aaltofunktion itseisarvon neljö pysyy vakiona ajan suhteen. Koska aallossa on neljä kupua, kyseessä on tilan $|4\rangle$ aaltofunktio.



eli puhtaasti reaalinen. Tämä värähtely jatkuu, jolloin aaltofunkcio vaihtelee jaksollisesti reaalisen ja imaginäärisen välillä. Aaltofunktion itseisarvon neljö kuitenkin on aina

$$|\psi_n(x, t)|^2 = 4 \sin^2(k_n x) |e^{-i\omega t}|^2 = 4 \sin^2(k_n x), \quad (17.73)$$

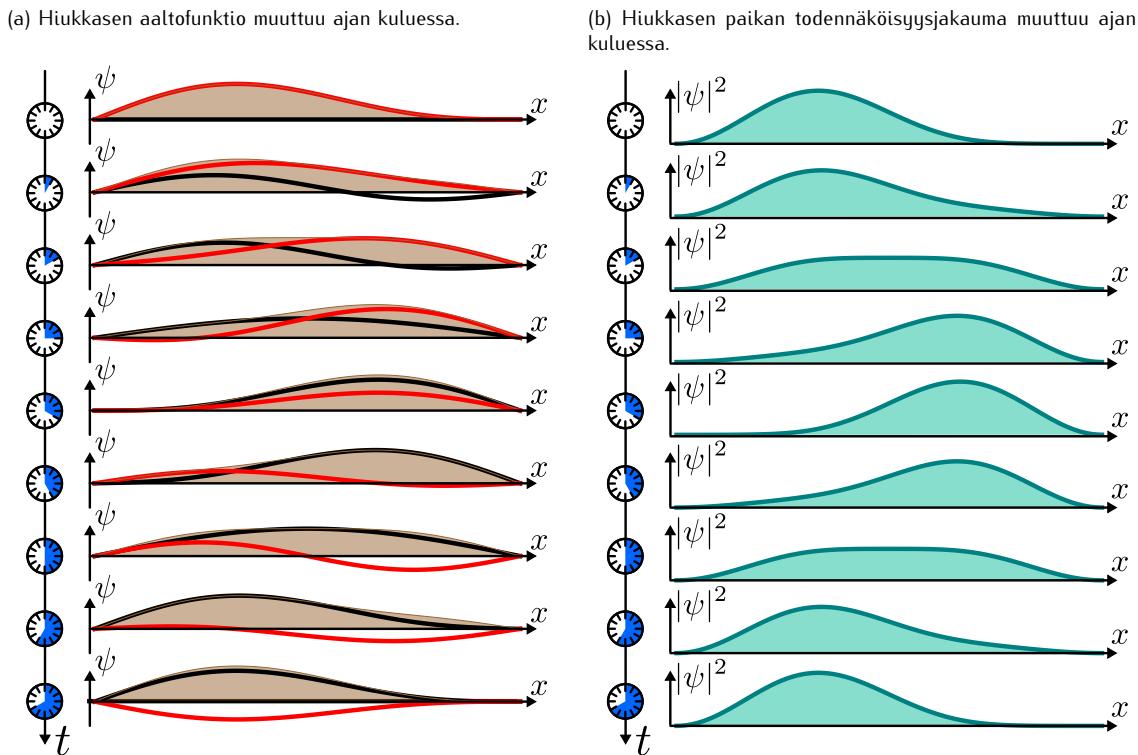
ja tämä *ei riipu ajasta*. Tämä johtuu siitä, että aaltofunktion ajasta riippuva osuus $e^{-i\omega t}$ on aina itseisarvoltaan yksi. Toisin sanoen vaikka aaltofunktion reaal- ja imaginääriosat värähtelevät ajan muuttuessa, yhdessä ne muodostavat funktion, jonka itseisarvo ei muutu vaikka aika kuluisi.

Tästä seuraa, että *hiukkisen paikan todennäköisyysjakauma ei muutu* (kuva 17.32 (b)). Tällaisia kvanttimekaanisia tiloja kutsutaan **stationaaristiksi** eli 'paikoillaan oleviksi'. Tässäkään tilassa *hiukkanen ei kuitenkaan ole paikoillaan* siinä mielessä, että sen nopeus olisi nolla. Edellähän juuri totesimme, että hiukkasen on *aina* pakko liikkua, ja tässä tilassa hiukkanen liikkuu yhtä aikaa kahteen suuntaan. Sen sijaan hiukkanen on paikoillaan siinä mielessä, että *todennäköisyysjakauma ei muutu ajan kuluessa*. Tämän voi ymmärtää niiin, että koska hiukkanen liikkuu yhtä aikaa sekä positiiviseen että negatiiviseen suuntaan, sen paikan todennäköisyysjakauma ei muutu ajan kuluessa.

Kaikki tilat $|n\rangle$ ovat edellä esitetyn tarkastelun mukaan stationaarisia, ja niitä kutsutaan *hiukkisen ominaistiloiksi*. Vastaavasti hiukkisen sallittuja energioita näissä ominaistiloissa kutsutaan *hiukkisen ominaisenergioiksi*. Hiukkasen ei kuitenkaan tarvitse välttämättä olla juuri ominaistilassa, vaan hiukkanen voi olla myös tällaisten tilojen *superpositiossa*, jolloin tilanne on aaltofunktoiden näkökulmasta samanlainen kuin esimerkiksi värähtevässä kitaran kielessä, jossa soi yhtä aikaa useita seisovia aaltoja harmonisilla taajuuksilla (vrt. kuva 15.31). Esimerkiksi ominaistilojen superposition $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle$ aaltofunktio $\psi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x, t) + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x, t)$ on aina nolla pisteissä $x = 0$ ja $x = L$, joten sekin on kuopassa olevan elektronin mahdollinen aaltofunktio. Tämä aaltofunktio ja siihen liittyvä paikan todennäköisyysjakauma on pürretty kuvassa 17.33.

Kvanttimekaanisessa tapauksessa ominaistilojen kulmataajuudet riippuvat tilan *kokonaisenergiasta* Planckin säädön $\omega_n = E_n/\hbar$ mukaisesti. Tästä johtuen ominaistiloilla, joilla on eri energiat, on myös eri taajuudet. Niinpä eri energioihin liittyvien ominaistilojen superpositio sisältää useita eri taajuudella värähteleviä komponentteja, joten tällainen superpositio *ei ole stationaarinen tila* vaan hiukkisen paikan todennäköisyysjakauma muuttuu ajan kuluessa. Kuvan hiukkisen todennäköisyysjakauma on aluksi painottunut kuopan vasempaan laitaan, mutta ajan kuluessa jakauma liikkuu kuopassa edestakaisin. Aaltofunktio käyttäätyy tällaisessa tilanteessa samoin kuin kuvassa 15.31 esitetty soittimen kieli, jossa värähtelee samanaikaisesti useita seisovia aaltoja.

Kuva 17.33: Jos tila ei ole ominaistila, hiukkasen todennäköisyysjakauma muuttuu ajan kuluessa.



Hiukkasen paikan sijaan yleensä meitä kuitenkin kiinnostaa hiukkasen liikemääri ja etenkin sen energia. Stationaarisessa tilassa hiukkasselä on täsmällinen energia, mutta tila $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle$ on superpositio kahdesta tilasta, joilla on eri energiat. Niinpä tässä tilassa hiukkasen energia on epämääräinen, ja energian mittaus antaa *joko* tuloksen $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ *tai* tuloksen $E_2 = 4\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. Siis vaikka ominaistilat $|n\rangle$ eivät ole hiukkasten ainoat sallitut tilat potentiaalienergiakuopassa, energiat E_n ovat ainoat mahdolliset energiat, joita hiukkasselä voidaan havaita olevan.



17.30 Elektroni on äärettömän syvässä energiakuopassa, jonka leveys on 1.0 nm, tilassa $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|4\rangle$. Mitä energian arvoja elektronille voidaan mitata ja mikä on energian odotusarvo? (Vrt. esimerkki 17.3).

Samankaltainen periaate pätee kaikissa systeemeissä, joissa hiukkanen on vangittu pieneen tilaan. Muun muassa atomeissa ja molekyyleissä positiivisesti varautuneet ytimet (protonit) vetävät negatiivisesti varautuneita elektroneja sähköisesti puoleensa ja elektronien potentiaalienergia on sitä pienempi mitä lähempänä ytimiä ne ovat. Niinpä elektronien näkökulmasta atomi on kolmiulotteinen potentiaalikuoppa joka vangitsee elektronin ytimen läheisyyteen. Siksi elektronit voivat saada atomeissa vain joitakin tiettyjä ominaisenergioita. Elektronien energiota mittaavissa prosesseissa kuten fotonien absorptiossa ja emissiossa elektroneilla voidaan havaita olevan vain näitä ominaisenergioita, mikä selittää esimerkiksi diskreettien absorptio- ja emissiospektrien synnyyn sekä mustan kappaleen säteilyn ominaisuudet.



17.31 Selitä omin sanoin, millaisia ovat kvanttimekaaniset seisovat aallot ja mitä tarkoitetan stationaarisilla tiloilla. Millaisen aallon muodostaa esimerkiksi laattikoon vangitti elektroni? Missä mielessä stationaarisessa tilassa oleva elektroni on paikoillaan ja missä mielessä se liikkuu? Entä jos tila on erilaisten stationaaristen tilojen superpositio?

esimerkki 17.5

Normitus

Yhtälöiden (17.68) ja (17.70) kuvaama seisovan aallon aaltofunktio on normittamaton, joten sen itseisarvon neliö ei kuva hiukkasen todennäköisyysjakaumaa. Ratkaise vastaava normitettu aaltofunktio $\psi_n(x, t)$ potentiaalienergiakuopassa, jonka leveys on L .

TILANNE Aaltofunktion normittaminen tarkoittaa sen kertomista jollakin sopivalla vakiolla niin, että funktio toteuttaa normitusehdon. Niinpä yhtälön (17.70) mukaan aaltofunktio täytyy olla muotoa

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t}, \quad (17.74)$$

missä A_n on normitusvakio, joka tehtävässä tulee ratkaista. Jos kuopan leveys on L , aaltoluvun mahdolliset arvot ovat $k_n = n\frac{\pi}{L}$ ja taajuudet $\omega_n = \frac{1}{\hbar}E_n = \frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}n^2$.

SUUNNITELMA Normitetun aaltofunktion itseisarvon neliön integraali yli koko avaruuden on yksi, koska tämä kuva hiukkasen paikan todennäköisyyttä ja hiukkasen täytyy olla jossakin. Koska aaltofunktio on nolla kaikkialla muualla kuin kuopassa, tässä tapauksessa riittää integroida kuopan leveyden yli.

Normitusehdo on yhtälönä

$$\int_0^L |\psi_n(x, t)|^2 dx = 1. \quad (17.75)$$

RATKAISU Auki kirjoitettuna normitusehdo on

$$|A_n|^2 \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = 1. \quad (17.76)$$

Yhtälön vasemman puolen voi integroida esimerkiksi kirjoittamalla sinin neliön muotoon $\sin^2(k_n x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2k_n x))$ ja muistamalla kosinin integrointisäännön $\int \cos(2k_n x) dx = -\frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x)$. Tulokseksi saadaan

$$|A_n|^2 \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2}|A_n|^2 \int_0^L (1 - \cos(2k_n x)) dx \quad (17.77)$$

$$= \frac{1}{2}|A_n|^2 \left[x + \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n x) \right]_0^L \quad (17.78)$$

$$= \frac{1}{2}|A_n|^2 \left(L + \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n L) - 0 - \frac{1}{2k_n} \sin(0) \right) \quad (17.79)$$

$$= \frac{L}{2}|A_n|^2. \quad (17.80)$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa on huomioitu, että $2k_n L = 2n\frac{\pi}{L}L = 2n\pi$ ja sinifunktio $\sin(2n\pi) = 0$ aina kun n on kokonaisluku. Normituskertoimiksi voidaan nyt ratkaista

$$|A_n| = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (17.81)$$

Mathematica:

```
(* aaltofunktio *)
psi = a Sin[k x] Exp[-I omega t];
omega = hbar k^2/2 m;
reunaehdo = {k -> n Pi/L, t -> 0}

(* normitus olettaen a reaaliseksi *)
normi = Simplify[
  Integrate[Abs[psi]^2 /. reunaehdo, {x, 0, L}],
  {Element[n, Integers], Element[a, Reals]}
]
(Abs[a]^2 L)/2

(* ratkaisu *)
Solve[normi == 1, a]
{{a -> -(Sqrt[2]/Sqrt[L])}, {a -> Sqrt[2]/Sqrt[L]}}
```

ARVIOINTI Normitusvakio ei riipu kvanttiluvusta n . Huomataan kuitenkin, että normitusehdosta voidaan ratkaista ainosaan kertoimen A_n itseisarvo. Voidaan siis valita $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$, jolloin aaltofunktiaksi tulee

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) e^{-i\omega_n t}, \quad (17.82)$$

mutta aivan yhtä hyvin voitaisiin valita esimerkiksi $A_n = i\sqrt{\frac{2}{L}}$, jolloin aaltofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$\psi_n(x, t) = i\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{2i} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{2L}} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) e^{-i\omega_n t}. \quad (17.83)$$

Tästä muodosta nähdään, että aaltofunktio on yhdistelmä muotoa $e^{ik_n x}$ olevia aaltoja.

Schrödingerin yhtälö

Potentiaalikuopassa olevalla elektronilla on siis tiettyjä ominaistiloja ja näitä vastaavia ominaisenergioita, koska kuopan reunat asettivat hiukkasen aaltofunktioille reunaehdon. Aaltofunktio heijastuu kuopan reunasta, ja näin kuopaan syntyy samanlaisia seisovia aaltoja kuin jännitettyyn kitaran kieleen. Nämä käy *aina*, kun hiukkanen on vangittu pieneen tilaan. Todellisuudessa hiukkaset eivät kuitenkaan ole äärettömän syvissä, täsmällisen levyisissä laatikoissa, vaan esimerkiksi atomeissa olevien elektronien potentiaalienergia riippuu ytimestä mitatusta etäisyystä. Siispä vaikka elektronin aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja kaikissa potentiaalikuopissa, aaltojen muoto riippuu kuopan muodosta. Erityisesti elektronin aaltofunktion kulmataajuus ja energia riippuvat siitä, millainen elektronin potentiaalienergia on, eikä niitä yleensä voi päättää yhtä yksinkertaisesti kuin kuvassa 17.31. Monimutkaisten tilanteiden analysoimiseksi tarvitaan fysiikalinen laki, jonka perusteella hiukkasten tilat voidaan määrittää *missä tahansa tilanteessa*.

Tämä laki on kvanttimekaniikan peruslaki eli **Schrödingerin yhtälö** (Erwin Schrödingerin mukaan). Schrödingerin yhtälöä ei voi varsinaisesti *johtaa* mistään. Se on peruslaki, jota ei voi perustella klassisen mekaanikan kautta. Historiallisesti Schrödinger päätyi yhtälöönsä ja aaltofunktion käsittelyseen samaan tapaan kuin mekin: etsimällä hiukkasia kuvavaa aaltoa, joka toteuttaisi de Broglien hypoteesin liikemääärän ja allonpituuden riippuvuudesta. Samalla Schrödinger päätteli yhtälön, jonka ratkaisuja nämä aaltofunktiot ovat. Sittemmin yhtälöä on testattu valtavasti sekä kokeellisesti että teoreettisesti johtamalla sen avulla tunnettuja klassisia lakeja. Yhtälön on todettu toimivan erinomaisella tarkkuudella.

Schrödingerin yhtälö voi saada erilaisissa systeemeissä erilaisia muotoja, minkä vuoksi yleisesti pätevä yhtälön kirjoittaminen on hankala. Yleisimillään Schrödingerin yhtälön voi modernissa kvanttimekaniikassa kirjoittaa muotoon

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle, \quad (17.84)$$

missä E_{kokonais} on hiukkasen kokonaisenergia ja \hat{H} hiukkasen kokonaisenergiaa kuvava *operaattori* (ns. Hamiltonin operaattori William Rowan Hamiltonin mukaan). Joissakin tilanteissa \hat{H} voi olla matriisi, jolloin Schrödingerin yhtälö on matriisin ominaisarvo-yhtälö. Toisissa tilanteissa \hat{H} voi sisältää esimerkiksi derivaatoja, jolloin kyseessä on differentiaaliyhtälö. Kummassakin tapauksessa on mahdollista, että yhtälön ratkaisut ovat diskreetit, jolloin ratkaisuna saatavat ominaisarvot E_{kokonais} ovat hiukkasen mahdolliset kokonaisenergian arvot ja vastaavat *ominaistilat* $|\psi\rangle$ ovat ne stationaariset tilat, joissa hiukkasella on ominaisarvoa vastaava kokonaisenergia.

Schrödinger muotoili alunperin yhtälön nimenomaan aaltofunktioille, jolloin loppululos on differentiaaliyhälö. Hän oivalsi, että aaltofunktion $\psi(x) = e^{ikx}$ derivaatta x :n suhteen on

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik e^{ikx} = ik\psi. \quad (17.85)$$

Toisin sanoen jos tämän aaltofunktion derivoi ja derivaatan kertoo tekijällä $-i\hbar$, loppuloksenä on aaltofunktio itse kerrottuna sen liikemäärellä,

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i^2 \hbar k \psi = \hbar k \psi = p_x \psi. \quad (17.86)$$

Tästä herää ajatus, voisiko *kaikkien* aaltofunktioiden liikemääärän laskea samaan tapaan. Osoittautuu, että vastaus on ei. Aivan näin suoraviivaisesti lasku ei onnistu. Osoittautuu kuitenkin, että tämä laskuoperaatio — derivointi ja vakiolla $-i\hbar$ kertominen — liittyy yleisesti aaltofunktioiden liikemäärään, ja sen kautta on mahdollista laskea liikemäärään odotusarvo missä tahansa tilassa. Toisin sanoen *aaltofunktion liikemäärästä* kuvaa *laskusääntö*

$$\hat{p}_x \hat{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (17.87)$$

Operaattori \hat{p}_x ei ole vielä mikään funktio vaan laskusääntö funktion muuttamiseksi toiseksi funktioksi, koska siinä ei kerrota, mitä derivoidaan. Operaattorille voidaan antaa funktio $\psi(x)$ operoitavaksi, ja tällöin saadaan loppuloksenä uusi funktio $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = -i\hbar \psi'(x)$. Tässä vastauksen symboli $\hat{=}$ tarkoittaa, että kyseessä on operaattorin muoto, kun käytämme nimenomaan aaltofunktioita, mutta muissa esitysmuodoissa liikemäärästä vastaava laskusääntö voi olla erilainen.



17.32 Olkoon $\psi(x) = A \sin(kx)$. Mitä on $\hat{p}_x \psi$? Onko olemassa jokin vakio p niin että $\hat{p}_x \psi = p\psi$?

Sen, että liikemäärä liittyy aaltofunktion derivaattaan, voi perustella täsmällisesti, mutta se vaatii huomattavasti syvempää ymmärrystä kvantimekaniikan teoreettisesta rakenteesta, emmekä valitettavasti tässä vaiheessa voi sitä tehdä. Jos nyt kuitenkin hyväksymme, että tällainen operaattori eli laskusääntö liittyy aaltofunktion liikemäärään, voimme johtaa muitakin tärkeitä operaattoreita. Jos nimittäin suhteellisuusteoriaa

ei tarvitse huomioida, liike-energia on $K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{p_x^2}{2m}$. Voisi siis arvata, että liike-energian operaattori muodostetaan korottamalla liikemääärän operaattori neliöön. Tässä kohtaa pitää olla myös tarkkana siitä, mitä operaattorin neliöiminen ylipäänsä tarkoittaa. Operaattorin neliö ei tarkoita sitä, että operaattoria sovellettaisiin kerran ja tämän jälkeen lopputulos neliötäisiin, vaan sitä, että operaattoria käytetään kaksi kertaa, $\hat{p}_x^2\psi = \hat{p}_x(\hat{p}_x\psi)$. Tällä logiikalla liike-energian operaattori on

$$\hat{K}|\psi\rangle = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2|\psi\rangle \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{(-i\hbar)^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \quad (17.88)$$

Vaikea emme tätäkään voi sen syvälliemin perustella, tämä arvaus osoittautuu oikeaksi.

Vastaava potentiaalienergian operaattori on aaltofunktion tapauksessa vain *kertominen potentiaalienergia-funktioilla*

$$\hat{U}|\psi\rangle \stackrel{\hat{=}}{=} U(x)\psi(x). \quad (17.89)$$

Kokonaisenergia on puolestaan liike-energian ja potentiaalienergian summa, joten kokonaisenergiaa kuvaa operaattori $\hat{H} = \hat{K} + \hat{U}$. Näin ollen *aaltofunktion Schrödingerin yhtälö* $\hat{H}|\psi\rangle = (\hat{K} + \hat{U})|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle$ saa muodon

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E_{\text{kokonais}}\psi(x). \quad (17.90)$$

Jos hiukkasen potentiaalienergia $U(x)$ tunnetaan paikan funktiona, tästä yhtälöstä voidaan periaatteessa ratkaista ominaistiloja kuvavat aaltofunktiot $\psi(x)$ sekä näitä vastaavat ominaisenergiat E_{kokonais} . Käytännössä yhtälön ratkaiseminen tarkasti on kuitenkin erittäin vaikeaa joitakin erityistapauksia lukuunottamatta.

Ominaistilat väärtelevät aina Planckin kulmataajuudella $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$, joten niiden ajasta riippuvat aaltofunktiot ovat aina muotoa

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}. \quad (17.91)$$

Hiukkasen *kaikki mahdolliset tilat* voidaan puolestaan aina muodostaa tällaisten ominaistilojen superposiiton.



17.33 Eräässä systeemissä elektronin ominaisaaltofunktiot ovat $\psi_n(x)$ ja ominaisenergiat $E_n = (n + 1/2)\epsilon$, missä ϵ on jokin pieni energia. (a) Mikä on tilan $|n\rangle$ aaltofunktion kulmataajuus? (b) Mikä on elektronin ajasta riippuvan aaltofunktion lauseke tilassa $|n\rangle$? (c) Mikä on ajasta riippuvan aaltofunktion lauseke superpositiotilassa $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$?

esimerkki 17.6

Hiukkanen kuopassa

Ratkaise äärettömän syvässä potentiaaliopassa olevan hiukkasen ominaisenergiat Schrödingerin yhtälön avulla.

SUUNNITELMA Hiukkasen ominaistilojen aaltofunktiot ratkaistin jo aikaisemmin. Sijoitetaan nämä funkciot Schrödingerin yhtälöön, jolloin jos aaltofunktiot todella ovat Schrödingerin yhtälön ratkaisuja, energia-operaattorilla operoiminen palauttaa alkuperäisen ominaisfunktion sitä vastaavalla energialla kerrottuna.

Aaltofunktiot ovat muotoa

$$\psi_n(x, t) = A \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t}, \quad (17.92)$$

missä A on normeerausvakio. Koska potentiaaliopassa potentiaalienergia on nolla, Schrödingerin yhtälö on

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E_{\text{kokonais}}\psi. \quad (17.93)$$

RATKAISU Aaltofunktion derivaatat ovat

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = n \frac{\pi}{L} A \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} = -n^2 \frac{\pi^2}{L^2} A \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t}. \quad (17.94)$$

Sijoitus Schrödingerin yhtälöön antaa tuloksen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \left(-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} A\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2 A \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) e^{-i\omega t} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2 \psi_n = E_{\text{kokonais}}\psi_n, \quad (17.95)$$

joten kokonaisenergian täytyy olla

$$E_{\text{kokonais}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} n^2. \quad (17.96)$$

ARVIOINTI Ratkaistu kokonaisenergia on sama mikä aikaisemmin pääteltiin hiukkasen aaltoluvun perusteella, kuten piääkin.

esimerkki 17.7

Matriisimuotoinen Schrödingerin yhtälö

Eräällä kvanttimekaanisella hiukkasella on vain kaksi energian ominaistila, $|\uparrow\rangle$ ja $|\downarrow\rangle$, joissa hiukkasen energia on E_{\uparrow} ja E_{\downarrow} . Mikä on hiukkasen Schrödingerin yhtälö?

SUUNNITELMA Koska hiukkasella on vain kaksi ominaistila, voimme kuvata näitä pystyvektoreina

$$|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (17.97)$$

Hiukkanen voi olla muissakin tiloissa, mutta nämä voidaan aina esittää ominaistilojen superpositiona

$$|\psi\rangle = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} c_{\uparrow} \\ c_{\downarrow} \end{bmatrix} = \mathbf{c}, \quad (17.98)$$

missä c_{\uparrow} ja c_{\downarrow} ovat jotkin mahdollisesti kompleksilukuarvoiset kertoimet.

Hiukkasen ominaistilat ovat Schrödingerin yhtälön ominaisratkaisuja, joten Schrödingerin yhtälössä esiintyvän Hamiltonin operaattorin täytyy olla se matriisi, jonka ominaisvektoreita ominaistilat ovat. Tiloja vastaavat energiat ovat puolestaan yhtälön ominaisarvot.

RATKAISU Koska ominaistilat kuvattiin yksikkövektoreina, Hamiltonin operaattoria kuvaava matriisi on

$$\hat{H} \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix}, \quad (17.99)$$

sillä tälle pätee

$$\hat{H}|\uparrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\uparrow} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{=} E_{\uparrow}|\uparrow\rangle \quad (17.100)$$

sekä

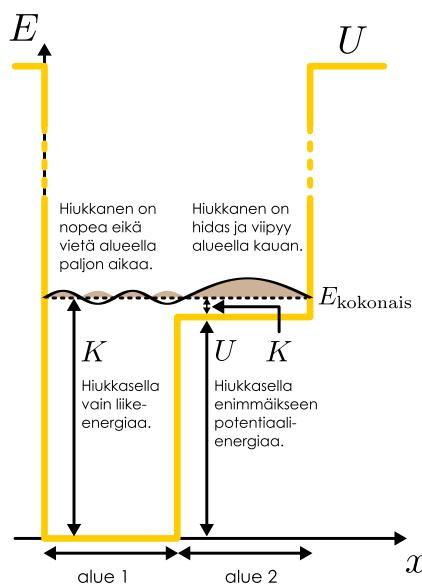
$$\hat{H}|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{\downarrow} \end{bmatrix} \hat{=} E_{\downarrow}|\downarrow\rangle \quad (17.101)$$

Systeemiä kuvaava Schrödingern yhtälö on näin ollen matriisin ominaisarvo-yhtälö

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_{\text{kokonais}}|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} E_{\uparrow} & 0 \\ 0 & E_{\downarrow} \end{bmatrix} \mathbf{c} = E_{\text{kokonais}}\mathbf{c} \quad (17.102)$$

Paikasta riippuva potentiaali

Kuva 17.34: Elektronin aallonpituuus ja amplitudi muuttuvat, jos elektronin liike-energia muuttuu.



Päättämme kvantimekaniikan tarkastelun aikanaan luvussa 17.5 esittelemällä kvantimekaanisen atomimallin. Atomissa elektri on ytimen sähkökentän muodostamassa potentiaalikuopassa, jossa se muodostaa seisovia aaltoja. Tämä rajoittaa elektronin aaltofunktion mahdollista muotoa, ja siksi elektronilla on atomissa vain tiettyjä sallittuja ominaisenergioita. Atomi on kuitenkin monimutkaisempi potentiaalikuoppa kuin kuvan 17.31 yksiulotteinen laatikko, ja siksi aaltofunktioiden muotoa ei voi päättää yhtä helposti kuin "laatikossa". Atomiin sidotun elektronin mahdolliset aaltofunktiot pitää ratkaista Schrödingerin yhtälöstä, mutta nämä ratkaisut ovat varsin monimutkisia. Ymmärtääksemme hiukan paremmin miksi aaltofunktiot käyttäätyvät atomissa kuten käyttäätyvät, tutkimme ensin yksinkertaisempaa tapausta: yksiulotteista potentiaalikuoppaa, jossa elektronin potentiaalienergia riippuu paikasta. Tarkastelemme esimerkinä kuvan 17.34 systeemiä, jossa elektri on vangittu äärettömän syvään potentiaalienergiakuoppaan. Erotuksena aikaisemmasta tämä kuoppa on jaettu kahteen osaan, joista toisessa elektronin potentiaalienergia on nolla (alue 1) ja toisessa $U_0 > 0$ (alue 2).

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin kuopan korkeaman puoliskon potentiaalienergia, $E_{\text{kokonais}} > U_0$, jolloin hiukkasan pääsee liikkumaan vapaasti koko kuopan alueella. Koska kuopan syvässä päässä alueessa 1 hiukkasan

potentiaalienergia on nolla, sen kokonaisenergia on tässä kuopan osassa vain liike-energiaa, $E_{\text{kokonais}} = K$. Alueessa 2 hiukkasella on sen sijaan myös potentiaalienergiaa, joten hiukkasen kokonaisenergia on liike-energian ja potentiaalienergian summa, $E_{\text{kokonais}} = K + U_0$. Niinpä sen liike-energia on pienempi kuin alueessa 1. Tilanne on hiukan samanlainen kuin klassisella heilurilla: Tasapainoasemassa heilurin liike-energia on suurimmillaan, mutta heilurin heilahtaaessa ylöspäin sen liike-energiaa muuttuu potentiaalienergiaksi. Heilurin kokonaisenergia on kuitenkin koko ajan vakio.

Kuitenkin koska elektroni on kvanttimekaaninen hiukkanen, se ei liiku kuopassa edestakaisin vaan sen aaltofunktio täyttää koko kuopan. Niinpä elektroni on samanaikaisesti sekä alueessa 1 että alueessa 2. Niinpä parempi klassinen analogia elektronin aaltofunktioille onkin aaltoileva köysi, jossa on sekä ohut että paksu osuus. Toisin sanoen piste, jossa elektronin potentiaalienergia muuttuu, on *rajapinta*, jonka eri puolilla aallolla on erilaiset ominaisuudet.

Alueessa 1 hiukkasella on vain liike-energiaa, joten sen kokonaisenergia on

$$E_{\text{kokonais}} = K = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}. \quad (17.103)$$

Tästä aaltoluvaksi ratkeaa

$$k_1 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m E_{\text{kokonais}}}. \quad (17.104)$$

Alueessa 2 hiukkasen liike-energia on sen kokonaisenergian ja potentiaalienergian erotus,

$$E_{\text{kokonais}} - U_0 = K = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}, \quad (17.105)$$

joten aaltoluku tässä alueessa on

$$k_2 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m (E_{\text{kokonais}} - U_0)}. \quad (17.106)$$

Niinpä alueessa 1, jossa elektronilla on paljon liike-energiaa, elektronilla täytyy olla suuri aaltoluku ja siis pieni aallonpituuus. Alueessa 2 elektronilla on vähän liike-energiaa, joten sillä on pieni aaltoluku ja suuri aallonpituuus. Tämä pääteee yleisesti: mitä syvämpi potentiaalikuoppa on elektronin kokonaisenergiaan verrattuna, sitä suurempi aaltoluku ja lyhyempi aallonpituuus elektronin aaltofunktiossa on.



- 17.34** (a) Millainen aaltofunktio kuvan 17.34 potentiaalikuoppaan muodostuu, kun U_0 lähestyy nollaa?
 (b) Vertaa aaltofunktion aaltolukuja alueissa 1 ja 2, kun elektronin kokonaisenergia on suuri verrattuna potentiaalienergiaan U_0 . (c) Vertaa kohtia (a) ja (b).

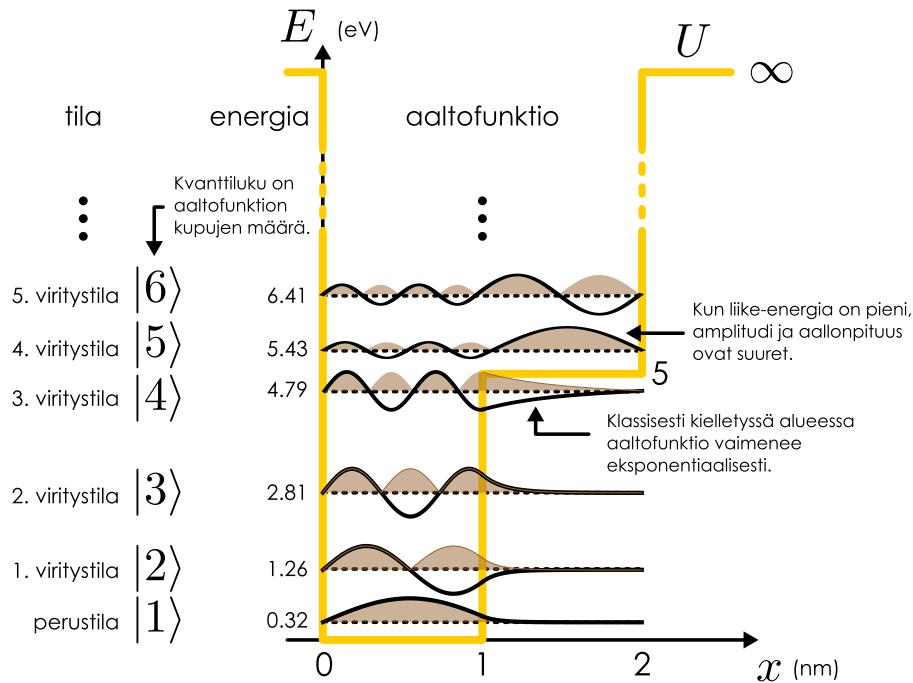
Aaltojen muodon ja aaltoluvut voisi johtaa myös suoraan Schrödingerin yhtälöstä, sillä aaltofunktion si-nimuotoisuus sekä liike-energian lauseke $K = \hbar^2 k^2 / (2m)$ ovat yhtälön suoria seurauksia. Tämän enempää informaatiota Schrödingerin yhtälöstä itsestään ei kuitenkaan saada. Aaltojen amplitudia ja vaihetta ei voida siitä ratkaista, ja erityisesti myöskään hiukkasen *kokonaisenergiaa ei voida ratkaista pelkästään Schrödingerin yhtälöstä*. Tasaisen kuopan tapauksessahan energian sallitut arvot seurasivat vaativuudesta, että aaltofunktio on kuopan reunalla nolla (eli toisin sanoen kuoppaan on mahduttava täsmälleen kokonislukumäärä seisovan aallon kupuja). Tämä on aaltofunktiossa asetettu *reunaehdo*, ja nytkin energian ominaisarvot on ratkaistava reuna- ja jatkuvuusehtojen avulla.

Aaltofunktio on oltava kaikkialla jatkuva — erityisesti eri alueiden rajalla. Lisäksi aaltofunktion derivaatan on oltava jatkuva kaikkialla muualla paitsi kuopan reunalla. (Tämä poikkeus johtuu siitä, että potentiaalienergia on ääretön kuopan reunalla.) Ominaisenergioiden ratkaiseminen näiden ehtojen avulla on esitetty esimerkissä 17.8, kun kuopan leveys on 2 nm ja matalampi puoli on 5 eV pohjaa korkeammalla. Lopputuloksena saatavia ominaisilojen aaltofunktioita on piirretty kuvaan 17.35. Aaltofunktio voidaan ratkaista samalla tavalla kuin esimerkissä 15.5, jossa ratkaistiin köydessä kulkevan aallon muoto, kun köydessä on ohut ja paksu osuus. Tällöin aaltofunktio määritettiin erikseen sekä ohuessa että paksussa köydessä, ja nämä ratkaisut yhdistettiin vaativalla, että rajapinnalla aaltofunktion täytyi olla sekä jatkuva että derivoitava.

Kuvasta 17.35 nähdään, että aaltofunktion amplitudi on suurempi kuopan matalassa päässä eli alueessa 2. Matemaattisesti tämä seuraa aallon jatkuvuusehdoista alueiden 1 ja 2 rajapinnalla, mutta tämänkin ominaisuuden voi ymmärtää klassisen analogian kautta. Mitä suurempi liike-energia hiukkasella nimittäin on, sitä suurempi nopeus sillä täytyy olla. Esimerkiksi klassinen heiluri liikkuu tasapainoasemassa nopeasti ja heilahduksen ääriasennossa hitaasti. Toisaalta tämä tarkoittaa sitä, että heiluri ohittaa tasapainoasemansa nopeasti mutta viipyy heilahduksen ääriasennossa kauan. Jos siis värähtelevästä heilurista otetaan valokuvaa satunnaisella ajan hetkellä, heiluri on valokuvassa todennäköisemmin lähellä heilahduksen ääriasemaa kuin tasapainoasemaa. Tämäkin on yleisesti totta: liikkova kappale viettää suhteellisesti eniten aikaa alueessa, jossa se liikkuu hitaasti — eli alueessa jossa sillä on pieni liike-energia.

Kvanttimekaaninen hiukkanen ei ole missään tiettyssä paikassa, mutta hiukkasen paikan kvanttimekaaninen todennäköisyysjakauma käytätyy samalla tavalla kuin klassisen hiukkasen paikan jakauma ajan suhteen

Kuva 17.35: Aalofunktio potentiaalienergian riippuessa paikasta. Klassinen hiukkasan ei voi koskaan liikkua alueella, jossa sen potentiaalienergia olisi kokonaisenergiaa suurempi, koska tällöin hiukkasen liike-energia olisi negatiivinen. Kvanttimekaanisen hiukkasen todennäköisyysjakauma kuitenkin ulottuu myös tähän alueeseen.



— kvanttihiukkasan paikan todennäköisyyshiheys on suurin alueissa, joissa hiukkasen nopeus on pienin. Edelleen koska hiukkasan paikan todennäköisyys liittyy sen aalofunktion itsearvon neljöön, aalofunktion amplitudin täytyy olla suuri alueessa, jossa hiukkasen liike-energia on pieni ja sen potentiaalienergia on suuri. Tämäkin ilmiö näkyi kuvassa 17.35, sillä aalofunktion amplitudi on tiloissa $|5\rangle$ ja $|6\rangle$ alueessa 1 matala ja alueessa 2 korkea.

Ilmiö on samantyyppinen kuin rantaan saapuvilla veden pinta-aalloilla. Aallot nimittäin liikkuvat matalassa vedessä sitä hitaanmin, mitä matalampaa vesi on. Rantaan saapuvat aallot siis hidastuvat ja samalla niiden korkeus (amplitudi) kasvaa. Samaan tapaan myös kvanttimekaanisten aaltojen amplitudi kasvaa niiden hidastuessa. Aallot kuitenkin eroavat siinä, että meren aaltojen aallonpituuus *lyhentyy* niiden hidastuessa mutta kvanttimekaanisten aaltojen aallonpituuus *pitenee*.

17.35 Kuinka köydessä kulkevan aallon (i) nopeus, (ii) amplitudi ja (iii) aallonpituuus muuttuvat, jos köysi muutuu (a) ohuemaksi tai (b) paksummaksi. Vertaa tulosta kvanttimekaaniseen aalofunktioon.

Edellisessä analyysissä tarkasteltiin vain tilannetta, jossa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin sen potentiaalienergia alueessa 2. Näihin ei kuitenkaan välittämättä tarvitse olla, vaan elektronin kokonaisenergia voi aivan hyvin olla tätä pienempikin, jolloin elektroni on vangittu kuopan syvempään puoliskoon eli alueeseen 1. Klassisen mekanikan mukaan elektronin ei tällöin pitäisi päästä lainkaan pois alueesta 1, koska elektronin liike-energian pitäisi olla alueessa 2 negatiivinen. Klassisesti tämä on mahdotonta, koska liike-energia on pienimmillään nolla levossa olevalla kappaleella. *Kvanttimekaanisesti näin ei kuitenkaan ole!* Jos nimittäin $E_{\text{kokonais}} < U_0$, Schrödingerin yhtälöksi alueessa 2 saadaan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + U_0 \psi_2(x) = E_{\text{kokonais}} \psi_2(x), \quad (17.107)$$

ja tästä voidaan edelleen ratkaista aalofunktion toiseksi derivaataksi

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{2m(U_0 - E_{\text{kokonais}})}{\hbar^2} \psi_2(x). \quad (17.108)$$

Tämän yhtälön ratkaisee yrite $\psi_2(x) = e^{\eta x}$. Tälle yritteelle nimittäin pätee $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \eta^2 \psi_2(x)$, ja näiden lausekkeiden sijoitus Schrödingerin yhtälöön antaa tuloksen

$$\eta^2 \psi_2(x) = \frac{2m(U_0 - E_{\text{kokonais}})}{\hbar^2} \psi_2(x), \quad (17.109)$$

joka toteutuu kaikilla x -koordinaatin arvoilla vain, jos

$$\eta = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E_{\text{kokonais}})}. \quad (17.110)$$

Huomaa, että sekä negatiivinen että positiivinen ratkaisu on mahdollinen.

Schrödingerin yhtälön mukaan aaltofunktio ei siis ole alueessa 2 nolla eikä sinimuotoinen aalto vaan se muuttuu eksponentiaalisesti. Schrödingerin yhtälön yleinen ratkaisu alueessa 2 on näin ollen muotoa

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\eta x} + B_2 e^{-\eta x}. \quad (17.111)$$

Tässä esiintyvien vakioiden A_2 ja B_2 arvoja ei voi laskea Schrödingerin yhtälöstä vaan ne on jälleen päätteltyä reunaehtoista. Koska Schrödingerin yhtälö on yhdessä ulottuvuudessa toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, yleisessä ratkaisussa pitää olla täsmälleen kaksi vapaata parametria.



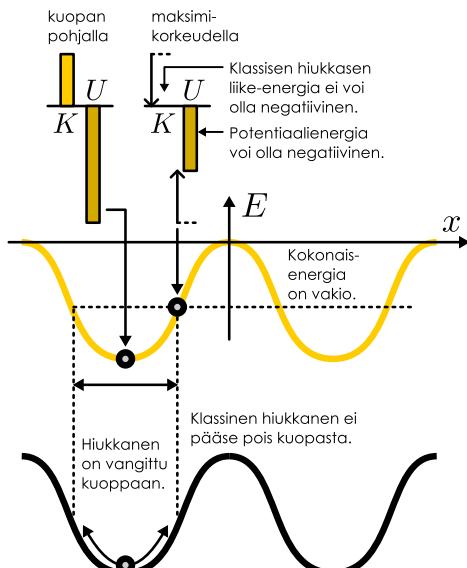
17.36 Miten parametri η muuttuu, jos elektronin kokonaisenergia kasvaa? Miten tämä näkyy aaltofunktiossa? Vertaa kuvaan 17.35!

Yhteenvedona siis aaltofunktio on alueessa 1 sinimuotoinen, koska tässä alueessa elektronin kokonaisenergia on suurempi kuin potentiaalienergia. Alueessa 2 aaltofunktio on sen sijaan eksponentiaalinen, kuten kuvassa 17.35 nähdään. Aaltofunktion on mentävä kuopan oikealla reunalla nollaan, koska potentiaalienergia kohoaa siellä äärettömäksi. Niinpä aaltofunktion täytyy olla alueessa 2 eksponentiaalisesti vaimeneva siirryttäässä pois päin alueesta 1. Tämä on yleispätevä tulos: Klassisesti kielletystä alueessa, jossa hiukkasen kokonaisenergia on pienempi kuin sen potentiaalienergia, hiukkasen aaltofunktio vaimenee eksponentiaalisesti. Vakio $1/\eta$ kuvaava vaimenemisen mittakaavaa ja sitä kutsutaankin vaimenemismatkaksi tai tunkeutumisyvydeksi.

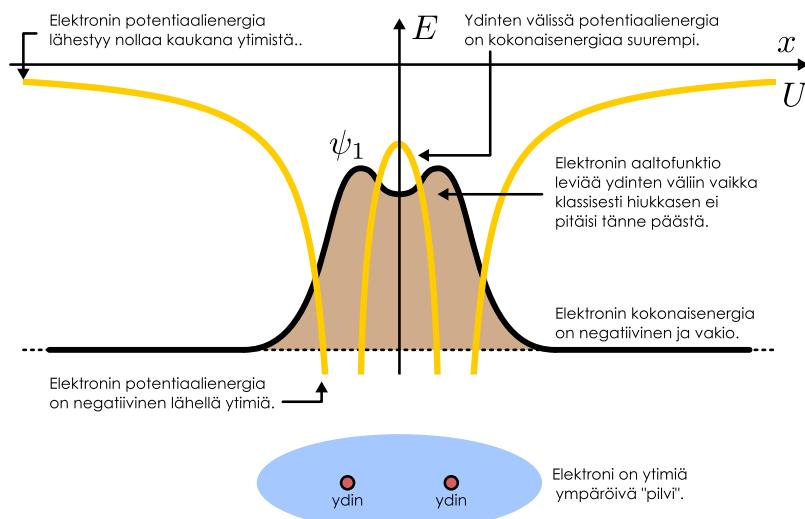
Ilmiö on erityisen mielenkiintoinen silloin, jos systeemissä on potentiaalienergiavalli eli kapea korkean potentiaalienergian alue. Jos esimerkiksi syteemissä on kaksi erillistä potentiaalienergiakuoppaa ja hiukkanen on aluksi yhdessä kuopassa, sen ei klassisen mekanikan mukaan pitäisi mitenkään päästää sieltä pois ilman, että ulkopuolinen vuorovaikutus antaa sillä lisää energiota (kuva 17.36 (a)). Esimerkiksi jos maahan kaivaa kaksi kuoppaa ja asettaa yhteen pallon, pallo ei hyppää itsestään kuopasta toiseen. Kvanttimekaniikassa kuitenkin tilanne on toinen. Jos kuoppien välinen etäisyys on tunkeutumissyyjien luokkaa tai sitä pienempi, hiukkasen aaltofunktio pääsee klassisesti kielletyn alueen läpi kuopasta toiseen. Kvanttimekaanisen hiukkasen aaltofunktio voi siis olla nollasta poikkeava kummassakin kuopassa ja paikkaa mitattaessa hiukkasen voidaan havaita siirtyneen eri kuopaan kuin mihin se alunperin asetettiin. Silloin hiukkasella on nollaa suurempi *todennäköisyys läpäistä alue, jonka kautta sen ei klassisen mekanikan mukaan pitäisi voida koskaan kulkea*.

Kuva 17.36: Klassinen hiukkanen ei voi päästä pois potentiaalienergiakuopasta, jos hiukkasen kokonaisenergia on liian pieni. Kvanttimekaanisen hiukkasen aaltofunktio kuitenkin levittää yli kuopan ulkopuolellekin. Kovalenttiin sidostuun, kun elektroni levää kahden atomiytimen väliseen klassisesti kiellettyyn alueeseen, jossa potentiaalienergia on elektronin kokonaisenergiaa suurempi.

(a) Klassinen hiukkanen kuopassa.

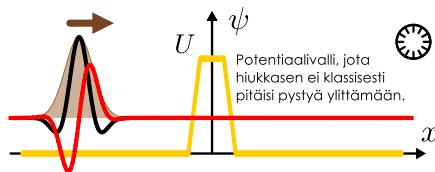


(b) Elektroni kahden atomiytimen ympärillä.

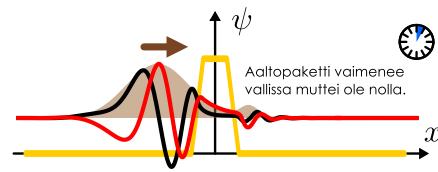


Kuva 17.37: Kvanttimekaanista hiukkasta kuvaava aaltopulssi voi tunneloitua läpi potentiaalivallista eli alueesta, jossa hiukkisen potentiaalienergia on sen kokonaisenergiaa suurempi.

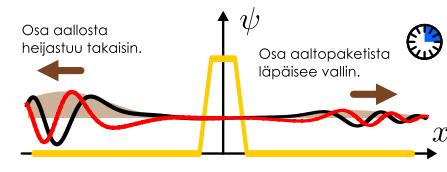
(a) Aaltopulssi saapuu vasemmalta.



(b) Aaltopulssi tunneloituu vallin läpi.



(c) Osa aallostaa heijastuu, osa läpäisee vallin.



Tätä ilmiötä kutsutaan **tunneloitumiseksi** ja se on erittäin tärkeä sekä monissa luonnonilmiöissä että teknologisissa sovelluksissa. Eräs tällainen ilmiö on kovalenttisten sidosten muodostuminen, jonka yksinkertainen malli on esitetty kuvassa 17.36 (b). Kuvan molekyylissä on kaksi atomia, joista kummankin ydin muodostaa elektroneille potentiaalikuopan, koska ytimen positiivisesti varautuneet protonit vetävät negatiivisesti varautuneita elektroneja sähköisesti puoleensa. Jotta elektroni pysyi atomissa, sen kokonaisenergia on oltava pienempi kuin tämän kuopan ulkoreunan korkeus, mutta itse asiassa elektronin kokonaisenergia on yleensä myös pienempi kuin potentiaalienergia ydinten *välissä*. Klassinen hiukkanen olisi tällaisessa tilanteessa vangittu *yhden* ytimen ympärille eikä mitään sidosta voisi syntyä. Kvanttimekaanisen elektronin aalofunktio pääsee kuitenkin kulkemaan atomien välisen alueen läpi ja levittäytymään *kummankin* ytimen ympärille. Tällöin elektroni ei ole kummankaan ytimen "oma" vaan atomit jakavat sen muodostaan sidoksen.



17.37 Montako kupua on kuvan 17.36 (b) aalofunktiossa? (Huom. kupu ei ole aalofunktion maksimi vaan solmujen erottama alue.) Mikä on tilan kvanttiluku? Miltä näyttäisi seuraavan viritystilan aalofunktio?

Myös vapaasti liikkuvat hiukkaset voivat tunneloitua kuten kuvassa 17.37, jossa elektronia kuvaava aaltopulssi törmää energiavalliin eli alueeseen, jossa elektronin potentiaalienergia olisi sen kokonaisenergiaa suurempi. Jos elektroni olisi klassinen hiukkanen, sen liike-energia ei voisi mitenkään riittää nousemaan tämän energiavallin yli eikä elektroni siis voisi millään päästä vallin toiselle puolelle. Kuitenkin koska elektroni on aalto, se ei kipoo energiavallista kuin pallo seinästä vaan vallikin on aalloolle vain rajapinta. Jos valli olisi paksu, aalto kokoisii kokonaisheljastumisen ja elektroni palaisi varmasti takaisin tulosuuntaansa. Sen sijaan jos valli on tarpeeksi ohut, osa aalosta voi läpäistä sen ja jatkaa matkaansa vallin takana alueessa, johon elektronin ei klassisen hiukkasmallin mukaan pitäisi päästä. Tätä hyödynnetään esimerkiksi tunnelointimikroskoopissa, jossa pintojen rakenteita voidaan havaita atomienkin kokoluokkaa tarkemmin tuomalla erittäin terävä neula alle nanometrin päähän tutkittavasta pinnasta. Elektronin irrottaminen tutkittavasta pinnasta vaatisi paljon energiota, joten pinnan ja neulan välillä jäävä rako on elektronille potentiaalienergiavalli. Klassisesti elektronien pitäisi pysyä tiukasti kiinni pinnassa, mutta todellisuudessa elektroniaallot voivat tunneloitua tutkittavasta pinnasta neulaan ilman, että niitä varsinaisesti irrotetaan pinnasta antamalla niille energiota. Elektronien tunneloituessa pinnan ja neulan välillä siirtyy varausta ja systeemissä kulkee siis sähkövirta, ja mikroskoopin toiminta perustuu tämän virran mittauiseen neulan paikan funktiona.



17.38 Jos kuvan 17.37 (c) elektronin paikka tai nopeus mitataan, mitä voidaan havaita ja kuinka todennäköisesti?

esimerkki 17.8

Epätasainen kuoppa

Hiukkanen on potentiaalikuopassa, jonka leveys on 2 nm. Hiukkasen potentiaalienergia on nolla välillä [0 nm, 1 nm], $U_0 = 5 \text{ eV}$ välillä [1 nm, 2 nm] ja ääretön muualla. Mikä ovat hiukkasen ensimmäiset ominaisenergiat, joille $E_{\text{kokonais}} > U_0$.

SUUNNITELMA Jaetaan systeemi alueisiin 1 ja 2 kuten kuvassa 17.34. Merkitään kuopan leveyttä L . Tekstissä osoitettiin, että alueessa, jossa potentiaalienergia on vakio ja hiukkasen kokonaisenergiaa pienempi, aaltofunktio on sinimuotoinen. Aaltofunktion täytyy olla nolla kuopan reunilla, jossa potentiaalienergia on ääretön, ja sekä aaltofunktio että sen derivaatan on oltava jatkuvia alueiden rajalla.

Alueessa 1 aaltofunktioksi voidaan valita

$$\psi_1(x) = A_1 \sin(k_1 x), \quad (17.112)$$

koska tämä on reunaehdon $\psi_1(0) = 0$ toteuttava Schrödingerin yhtälön ratkaisu. Tässä aaltoluku on Schrödingerin yhtälön perusteella

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}. \quad (17.113)$$

Alueessa 2 aaltofunktioksi puolestaan saadaan

$$\psi_2(x) = A_2 \sin(k_2(x - L)), \quad (17.114)$$

missä aaltoluku on

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}, \quad (17.115)$$

sillä tämä toteuttaa reunaehdon $\psi_2(L) = 0$. Jäljelle jäävät vielä jatkuvuusehdot alueiden rajalla

$$\psi_1(L/2) = \psi_2(L/2) \quad (17.116)$$

$$\psi'_1(L/2) = \psi'_2(L/2) \quad (17.117)$$

sekä normitusehdo

$$\int_0^{L/2} |\psi_1|^2 dx + \int_{L/2}^0 |\psi_2|^2 dx = 1. \quad (17.118)$$

Energian ominaisarvot ratkeavat jatkuvuusehdoista. Aaltofunktion amplitudi selviää normitusehdosta, mutta sitä ei tässä tarvitse välttämättä ratkaista.

RATKAISU Aaltofunktion derivaatat ovat $\psi'_1(x) = A_1 k_1 \cos(k_1 x)$ ja $\psi'_2(x) = A_2 k_2 \cos(k_2(x - L))$. Jakamalla aaltofunktion ja sen derivaatan jatkuvuusehdot puolittain toisillaan voimme kirjoittaa

$$\frac{\psi_1(L/2)}{\psi'_1(L/2)} = \frac{\psi_2(L/2)}{\psi'_2(L/2)} \quad (17.119)$$

eli auki kirjoitettuna

$$\frac{1}{k_1} \tan(k_1 L/2) = \frac{1}{k_2} \tan(-k_2 L/2) \quad (17.120)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}} \tan\left(\frac{L\sqrt{2mE_{\text{kokonais}}}}{2\hbar}\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}} \tan\left(-\frac{L\sqrt{2m(E_{\text{kokonais}} - U_0)}}{2\hbar}\right). \quad (17.121)$$

Jatkuvuusehtojen jakaminen puolittain toisillaan supisti pois tuntemattomat amplitudit A_1 ja A_2 , jolloin yhtälön ainoaksi tuntemattomaksi jää elektronin kokonaisenergia E_{kokonais} . Energian sallitut arvot voidaan siis ratkaista tästä yhtälöstä.

Kyseessä on ns. transsidenttinen yhtälö, jonka ratkaisua ei voi kirjoittaa eksplisiittisesti alkeisfunktioiden avulla, mutta ratkaisu voidaan etsiä numeerisesti halutulla tarkkuudella. Ratkaisut voi etsiä graafisesti esimerkiksi piirtämällä yhtälön molemmat puolet energian E_{kokonais} funktiona, jolloin kuvaajat leikkaavat täsmälleen niillä energian arvoilla, joilla yhtälö toteutuu. Alla oleva Mathematica-koodi piirtää tämän kuvaajan sekä etsii numeerisesti yhtälön juuret.

Alimmaksi sallituksi energiaksi, joka on suurempi kuin 5 eV, saadaan 5.43 eV. Aaltofunktion kuvaajassa on viisi kupua, joten tilan kvanttiluku on $n = 5$. (Kuopassa on siis oltava neljä ominaisiltaa, jotka ovat energialtaan pienemmät kuin 5 eV) Seuraavat ominaisenergiat ovat $E_6 = 6.41 \text{ eV}$, $E_7 = 7.49 \text{ eV}$, $E_8 = 8.70 \text{ eV}$ jne.

```
Mathematica: (* aaltofunktio *)
psi1[x_] := a1 Sin[k1 x]
psi2[x_] := a2 Sin[k2 (x - L)]
psi[x_] := Piecewise[{{psi1[x], x < L/2}, {psi2[x], x > L/2}}]
potene[x_] := Piecewise[{{0, x < L/2}, {u, x > L/2}}]
k1 = 1/hbar Sqrt[2 m ene];
k2 = 1/hbar Sqrt[2 m (ene - u)];

(* yksiköt: nm, eV ja s *)
metri = 10^9;
eV = 1;
sekunti = 1;
joule = 1/(1.60217662*10^-19);
valonnopeus = 3*10^8 metri/sekunti;

(* vakioiden arvot, [m] = MeV/c^2 *)
```

```

arvot = {u -> 5, hbar -> 1.0545718*10^-34 joule sekunti,
m -> 0.510998910*10^6 eV/valonnopeus^2 , L -> 2};

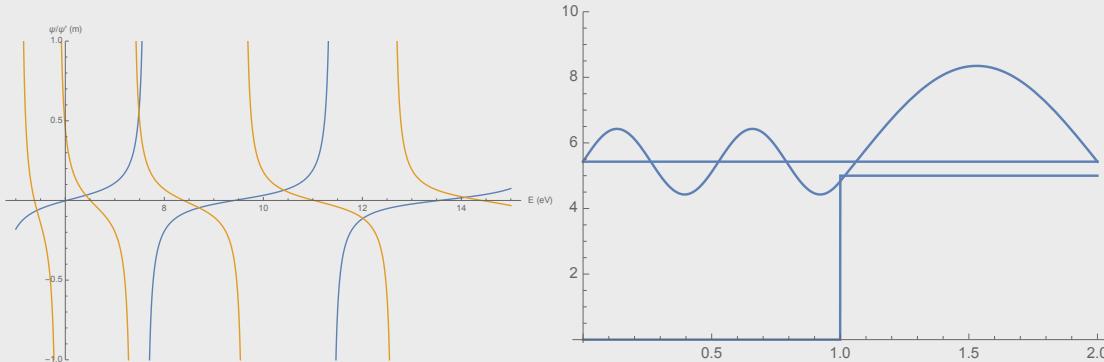
(* graafinen ratkaisu *)
Plot[
  psi1[L/2]/psi1'[L/2] /. arvot,
  psi2[L/2]/psi2'[L/2] /. arvot
], {ene, 5, 15},
PlotRange -> {-1, 1},
AxesLabel -> {"E (eV)", "[\Psi]/[\Psi]', (m)"}

(* numeerinen ratkaisu alkuarvauksella ene = 5.5 *)
energia = FindRoot[
  psi1[L/2]/psi1'[L/2] == psi2[L/2]/psi2'[L/2] /. arvot,
  {ene, 5.5}]
{ene -> 5.42747}

(* ratkaistaan jatkuvuusehdo *)
jatkuvuus = FindRoot[
  psi1[L/2] == psi2[L/2] /. arvot /. energia /. a1 -> 1,
  {a2, 1}]
{a2 -> -2.92129}
amplitudi = {a1 -> 1, jatkuvuus[[1]]};

(* aaltofunktion ja potentiaalin kuvaaja *)
Plot[ {ene, potene[x], ene + psi[x]}
  /. arvot /. amplitudi /. energia
  {x, 0, L /. arvot},
  PlotRange -> {-0.1, 10}]

```



ARVIOINTI Helpoin tapa todeta ratkaisun järkevyys on tarkastella aaltofunktion kuvaajaa. Aaltofunktio on selkeästi nolla kuopan reunilla. Lisäksi alueiden 1 ja 2 reunalla aaltofunktio on jatkuva (kuvaajassa ei ole "hyppyä") ja myös aaltofunktion derivaatta on jatkuva (kuvaajassa ei ole "kulmaa"). Energian ominaisarvon oikeellisuus voidaan tarkistaa sijoittamalla funktio Schrödingerin yhtälöön.



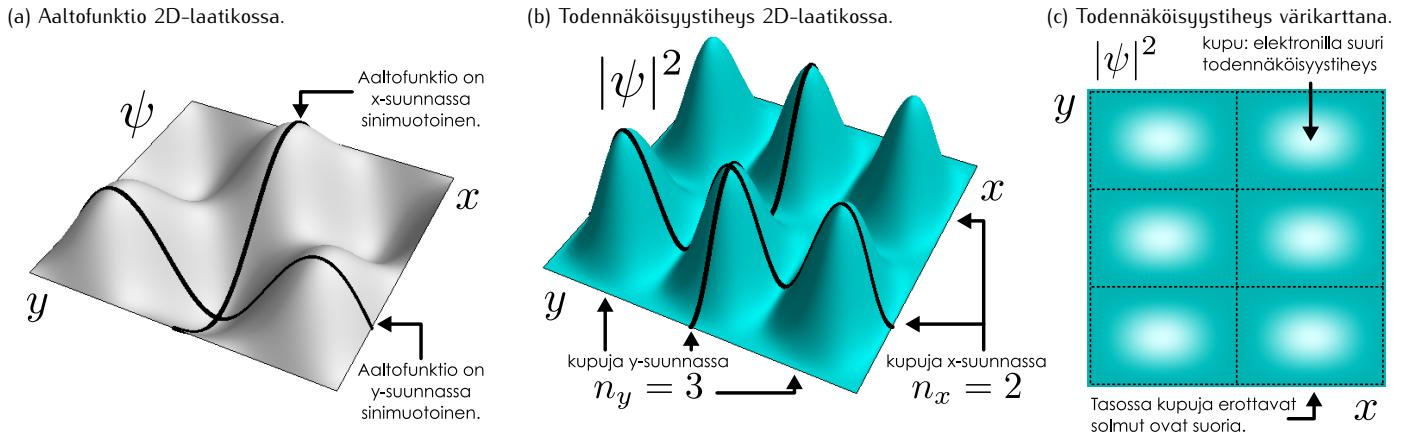
17.39 Selitä omien sanojen, miten kuvataan elektronia systeemissä, jossa elektronin potentiaalienergia riippuu paikasta. Millaisia aaltoja elektroni muodostaa? Mikä on Schrödingerin yhtälö, mitä sen avulla voi ratkaista, ja millaisen matemaattisen muodon se tässä tilanteessa saa?

Moniulotteiset aaltofunktiot

Toistaiseksi olemme tutkinneet kvanttimekaanisia hiukkasia vain yhdessä ulottuvuudessa, mutta todelliset systeemit ovat yleensä kolmiulotteisia. Erityisesti haluamme kuvilla, millaisia elektronien aaltofunktiot ovat atomissa, joka on geometrialtaan kolmiulotteinen, pallosymmetrinen systeemi.

Kvanttimekaaniset aallot käyttäätyvät pääasiassa samalla tavalla yhdessä ja useassa ulottuvuudessa, mutta ulottuvuuksien määällä on kuitenkin tärkeä merkitys, sillä useassa ulottuvuudessa kvanttimekaanisilla aaltofunktioilla on enemmän mahdollisia tapoja värähdyttää aivan kuten klassillisillakin aalloilla. Lisäksi koska atomissa elektroni on vangittu pallomaiseen tilaan, sen muodostamien aaltojen täytyy olla erilaisia kuin jos elektroni olisi vaikkapa suorakulmaisen särmion muotoisessa tilassa. Suorakulmaiset koordinaatistot ovat kuitenkin yksinkertaisempia kuin pallomaiset, joten tutkimme ensin kaksi- ja kolmiulotteisessa suorakulmaisessa laatikossa olevan elektronin aaltofunktioita. Tässä vaiheessa tarkoitus on siis ymmärtää vasta se, miten ulottuvuuksien määärä vaikuttaa siihen, miten aaltofunktio kuvataan. Pallosymmetrian vaikutukseen menemme vasta, kun esittelemme atomimallin.

Klassisen hiukkasen paikan voi kuvata koordinaateilla, ja näitä koordinaatteja tarvitaan aina yhtä monta kuin avaruudessa on ulottuvuuksia. Esimerkiksi yhdessä ulottuvuudessa riittää koordinaatti x , mutta kah-

Kuva 17.38: Kaksiulotteisessa laatikossa olevan elektronin aalofunktio ja todennäköisyystiheys tilassa $|2, 3\rangle$.

dessa ulottuvuudessa vaaditaan kaksi koordinaattia, jotka voivat olla esimerkiksi karteesiset (x, y) tai vaikkapa napakoordinaatiston (r, θ). Kolmessa ulottuvuudessa tarvitaan kolme koordinaattia kuten karteesisen koordinaatiston (x, y, z) tai pallokoordinaatiston (r, ϕ, θ). Hiukkasen liike puolestaan voidaan kuvata näiden koordinaattien muutoksena ajan suhteella. Esimerkiksi kolmessa ulottuvuudessa hiukkasen rata tunnetaan, jos tiedetään sen koordinaatit ajan funktiona, $x(t), y(t), z(t)$, ja esimerkiksi nopeus ja kiilthyvyys saadaan derivoimalla koordinaatteja ajan suhteella.

Kvanttimekaaninen elektroni sen sijaan ei ole yhdessä pisteessä sijaitseva hiukkanen vaan avaruuteen levittäytynyt aalto, jota kuvaaa aalofunktio. Aalofunktio on sekä paikan että ajan funktio, ja avaruuden ulottuvuuksien määrä ilmeneekin siinä, monenko koordinaatin funktio aalofunktio on. Esimerkiksi yhdessä ulottuvuudessa aalofunktio on paikkakoordinaatin x sekä ajan t funktio, $\psi(x, t)$. Kolmessa ulottuvuudessa aalofunktio on kaikkien paikkakoordinaattien sekä ajan funktio, esim. $\psi(x, y, z, t)$ tai $\psi(r, \phi, \theta, t)$. Lisäksi jos kyseessä on ominaistila, aalofunktion aikariippuvuus on aina kompleksinen eksponenttifunktio kulmataajuudella $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$, jolloin aalofunktion voi kirjoittaa pelkästään paikan funktiona muodossa

$$\psi_{\text{aikariippuva}}(x, y, z, t) = \psi_{\text{aikariippumaton}}(x, y, z)e^{-i\omega t}. \quad (17.122)$$

Koska kaikki tilat voidaan kuvata ominaistilojen superpositiona, yleensä riittää tarkastella vain näitä ajasta riippumattomia aalofunktioita.

Ominaistilat voi myös indeksoida *kvanttiluvulla*. Esimerkiksi yksiulotteisessa potentiaaliopassa olevan elektronin tilan ominaisuudet voi päätellä sen aalofunktion kupujen lukumäärän n perusteella. Samoin vapaan elektronin tilan ominaisuudet määritetään sen aaltoluku k . Tämä on hyödyllistä, koska hiukkasen ominaisuudet voidaan kirjoittaa kvanttilukujen funktiona. Esimerkiksi vapaan hiukkasen lüke-energia on aaltoluvun funktio, $E_{\text{kokonais}} = K = \hbar^2 k^2 / (2m)$ ja L -levyisessä kuopassa olevan elektronin energia on kupujen lukumäärän funktio, $E_{\text{kokonais}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$. Tällaisissa tapauksissa hiukkasen aalofunktioita ei oikeastaan tarvitse lainkaan tuntea, sillä pelkkä kvanttiluku riittää.

Yksiulotteisessa systeemissä tilan aalofunktion indeksointiin tarvitaan yksi kvanttiluku. Useassa ulottuvuudessa *kvanttilukuja tarvitaan yksi jokaista ulottuvuutta kohti*. Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.38, johon on piirretty kaksiulotteisessa laatikossa (eli äärettömän syvässä potentiaaliopassa) olevan elektronin aalofunktio. Tässä tapauksessa elektroni muodostaa seisovan aallon sekä x - että y -suunnassa, ja elektronin aalofunktiossa täytyy olla kokonaislukumäärä kupuja kummassakin suunnassa. Aalofunktio väärätelee tässä tilassa kuin nelion muotoisen rummun kalvo.

Kuvan 17.38 esimerkissä kupuja on x -suunnassa 2 ja y -suunnassa 3 eli yhteensä $2 \times 3 = 6$. Tila voidaan indeksoida kupujen määrää kuvaavin kvanttiluvuin n_x ja n_y , jolloin sitä voidaan merkitä yksinkertaisesti $|n_x, n_y\rangle$. Tässä esimerkissä on siis kyseessä tila $|2, 3\rangle$. Kupujen kokonaislukumäärä 6 ei kelpaa kvanttiluvuksi, koska esimerkiksi tilassa $|1, 6\rangle$ on myös kuusi kupua, mutta tämä on eri tila kuin $|2, 3\rangle$. (Teknisesti olisi toki mahdollista luetteloida nämä tilat käyttäen vain yhtä kokonaislukuindeksia, mutta tälläinen luettelointi olisi väistämättä täysin abstrakti eikä indeksillä olisi mitään fysikaalista tulkintaa. Siksi näin ei ole tapana tehdä.)

Vastaavasti kolmiulotteisessa laatikossa olevan elektronin aalofunktio muodostaa seisavia aaltoja kolmessa suunnassa, x , y ja z , ja jokaiseen suuntaan liittyy kupujen lukumäärän kertova kvanttiluku. Niinpä tässä tapauksessa elektronin tilat voidaan indeksoida muodossa $|n_x, n_y, n_z\rangle$. Kolmessa ulottuvuudessa tarvitaan siis kolme kvanttilukua.



- 17.40** (a) Luettelo kaikki tilat $|n_x, n_y, n_z\rangle$, joissa elektronin aaltofunktiossa on 8 kupua. (10 kpl)
 (b) $L_x \times L_y \times L_z$ laatikossa elektronin energia on $E_{\text{kokonais}} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2})$. Elektroni on kuutiessa, jonka sivun pituus on L . Luettelo kaikki tilat, joissa energia on $33\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. (6 kpl)

Aaltofunktioiden ratkaiseminen

Aaltofunktioiden muodon kvalitatiivinen päätely:

1. Jos systeemi ei rajoita hiukkasta äärelliselle alueelle, aaltofunktio muodostaa aaltopulssin, joka voidaan kuvata äärettömiin ulottuvien aaltojen (esim. tilojen $|k\rangle$) superpositiona.
2. Jos systeemi rajoittaa hiukkasen äärelliselle alueelle, aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja.
3. Hiukkasen liike-energian ollessa suuri aaltofunktion aaltoluku on suuri ja amplitudi pieni. Siispä hiukkasen aaltofunktio muodostaa tiheitä ja matalia aaltoja, kun sen kokonaisenergian ja potentiaalienergian erotus on suuri.
4. Alueessa, jossa hiukkasen kokonaisenergia on pienempi kuin sen potentiaalienergia, aaltofunktio väistyy eksponentiaalisesti paikan funktio. Vaimeneminen on sitä nopeampaa, mitä suurempi on potentiaalienergian ja hiukkasen kokonaisenergian erotus.
5. Seisovia aaltoja muodostavalla hiukkasella on diskreetit ominaistilat. Yhdessä ulottuvuudessa nämä voidaan indeksoida kvanttiluvulla n , joka on aaltofunktiossa esiintyvien kupujen lukumäärä.
6. Useassa ulottuvuudessa aaltofunktion indeksoivia kvanttilukuja tarvitaan yhtä monta kuin mikä on ulottuvuuksien lukumäärä.

Aaltofunktioiden laskeminen:

1. Määritä hiukkasen potentiaalienergia paikan funktiona. Tee tarvittaessa yksinkertaistavia oletuksia. Paloittain määritellyn potentiaalienergian tapauksessa jaa ongelma alueisiin.
2. Määritä reuna- ja jatkuvuusehdot, jotka aaltofunktion toteutettava alueiden reunilla. Erityisesti aaltofunktion pitää olla kaikkialla jatkuva. Jos potentiaalienergia on ääretön, aaltofunktio on nolla. Muutoin aaltofunktion derivaatan pitää myös olla jatkuva.
3. Kirjoita Schrödingerin yhtälö erikseen kussakin tarkasteltavassa alueessa ja ratkaise se. Huomaa, että koska Schrödingerin yhtälö on differentiaaliyhdiste, aaltofunktioiden lausekkeisiin jää välttämättä tuntemattomia vakioita. Yhtälön ratkaiseminen alkeisfunktoiden avulla on myös usein mahdotonta, jolloin on turvauduttava esimerkiksi sarjakehitelmiin.
4. Ratkaise tuntemattomista suureista mahdollisimman monta reunaehdot avulla.
5. Ratkaise loput tuntemattomista suureista normitusehdon avulla, jos normittaminen on tarpeellista. Rajoitteluun alueeseen (potentiaalienergiakuoppaan) vangitun hiukkasen aaltofunktion on lähestyttävä nollaa äärettömyksissä, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$, sillä muutoin funktio ei voi normittaa.
6. Jos hiukkasen kokonaisenergia on kaikkialla suurempi kuin systeemin potentiaalienergia, hiukkanen on vapaa liikkumaan minne tahansa. Tällöin voidaan ensin ratkaista normittamattonat funktiot, jotka eivät lähesty äärettömyksissä nollaa (esim. funktiot e^{ikx} ovat tällaisia). Hiukkasta kuvaava aaltopulssi voidaan muodostaa näiden superpositiona.
7. Ominaisfunktio aikakehitys on aina muotoa $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$, missä taajuus $\omega = E_{\text{kokonais}}/\hbar$.
8. Mikä tahansa tila voidaan esittää ominaistilojen superpositiona, esim. $\psi(x, t) = \sum_n a_n \psi_n(x, t)$ tai $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \psi_k(x, t) dk$.

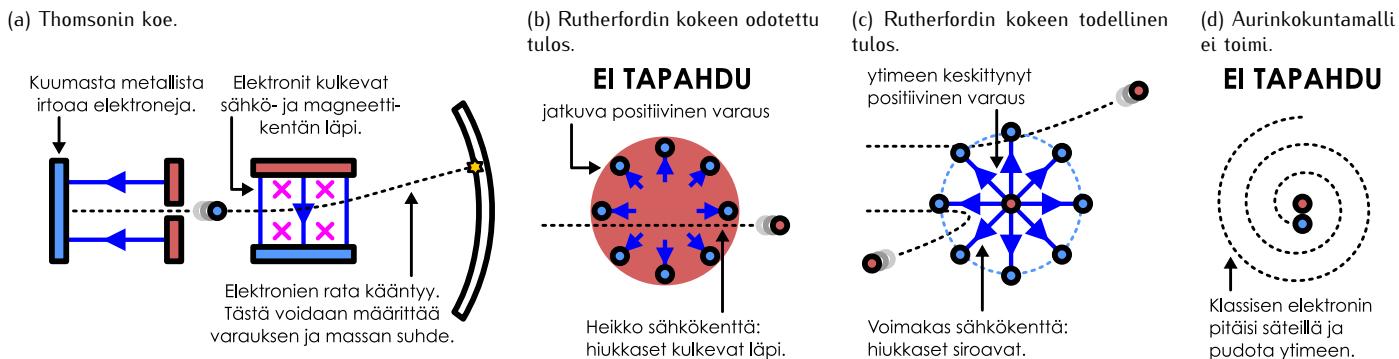
17.5 Atomi

Atomin osat: ydin ja elektronit

Atomin rakennetta ei tunnettu vielä 1900-luvun alussa. Oli kuitenkin huomattu, että kuumat metallit lähettilivät säteilyä, ja 1897 Joseph Thomson osoitti tämän säteilyn koostuvan hyvin pienistä varatuista hiukkasia havaitsemalla säteilyn kääntyvän sähkömagneetisessa kentässä (kuva 17.39 (a)). Hän myös mittasi näiden hiukkasten varauksen ja massan suhteen. Hiukkaset olivat elektroneja, ja koska niitä irtosi kaikista materiaaleista, niiden täytyi olla aineen perusosia. Kuitenkin koska aine on sähköisesti neutraalia, siinä täytyi olla myös positiivisesti varautunut osuus. Thomsonin atomimallissa elektronit olivatkin positiivisesti varatuun aineeseen upotettuja pistemäisiä hiukkasia — kuin rusinoita pullissa, minkä vuoksi mallia kutsutaankin rusinapullamalliksi.

Vuonna 1909 Ernest Rutherford osoitti atomien positiivisen varauksen keskittyneen niiden keskukseen — atomiytimeen — pommittamalla ohutta kultakalvoa alfahiukkasilla eli heliumytimillä. Kokeessa osa hiukkasia sirosi takaisin tulosuuntaansa, mikä oli hyvin yllättävää. Jos atomi nimittäin olisi Thomsonin mallin

Kuva 17.39: Elektroni löytyi kuumien metallien säteilystä. Ydin löytyi pommittamalla ohuita kalvoja varatuilla hiukkasilla. Näin syntyi atomimalli, jossa elektroni kiertää ydintä. Tämä malli ei kuitenkaan ole klassisesti mahdollinen, koska kiihtyvässä liikkeessä olevan elektronin pitäisi sääteillä pois kaikki energiansa.



mukaista jatkuvaa positiivista ainetta, nopeat hiukaset kulkisivat siitä helposti läpi kuin sumuun heitettyt palot (kuva 17.39 (b)). Nyt hiukkasia kuitenkin kimposi takaisin, joen atomin massa ja positiivinen varaus eivät voineet olla levinneet kovin suureen tilavuuteen vaan niiden täytyi olla keskittynyt hyvin pieneen alueeseen (kuva 17.39 (c)). Näin oli löydetty atomiydin, jonka myöhemmin ymmärrettiin koostuvan positiivisesti varautuneista protoneista sekä neutraaleista neutroneista. Rutherfordin atomimalli muistuttikin aurinkokuntaa, sillä siinä elektronit kiersivät ydintä kuin planeetat.

! 17.41 Thomsonin mallissa atomin positiivisesti varautunut osa on tasaisesti varautunut pallo, jonka koonaisvaraus on $Q = Ze$ (tässä Z on protonien lukumäärä) ja säde noin $R = 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$. (a) Potentiaali on nolla äärettömän kaukana atomista. Mikä on potentiaali atomin pinnalla, jos $Z = 79$? (b) Gaussin laista voidaan johtaa potentiaaliksi tasaisesti varatun pallon sisällä $V(r) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Zer^2}{R^3}$. Mikä on potentiaali atomin keskipisteessä? (c) Hiukkanen, jonka varaus on $2e$, kulkee suoraan kohti atomia. Kuinka paljon energiota hiukkasella on oltava, jotta se kulkisi atomin lävitse? (d) Entä jos positiivisen varauksen säde onkin 10^{-14} m ? (e) Miten tämä selittää Rutherfordin kokeen?

Tämäkin malli on kuitenkin mahdoton, sillä ydintä kiertävä elektroni olisi ympyräliukkeessa, jossa sillä on aina kiihtyvyys kohti ydintä. Kiihtyvässä liikkeessä olevat varatut hiukaset kuitenkin lähettävät sähkömagnetista säteilyä, mikä kuluttaa niiden energiota. Klassisen fysiikan mukaan siis elektronin liike-energian pitäisi kadota säteilynä ja elektronin tulisi "pudota" ytimeen sen vauhdin hidastuessa (kuva 17.39 (d)). Kvanttimekanikan ja hiukkasten aaltomallin kehitylessä 1910- ja 1920-luvuilla mm. Bohr esitti osittaisia ratkaisuja tähän ongelmaan, mutta vasta kvanttimekanikan peruslain eli Schrödingerin yhtälön löydystyä elektronien todellinen luonne ja atomien rakenne pystyttiin selittämään kunnolla. Tässä luvussa kuvaillemme tämän modernin kvanttimekaanisen atomimallin perusominaisuudet.

Elektronin etäisyys ytimestä

Aloitetaan atomien tarkastelu yksinkertaisimmasta mahdollisesta atomista eli vedystä. Vetyatomi koostuu protonista ja elektronista, jotka vetävät toisiaan puoleensa Coulombin lain mukaisesti. Koska protoni on paljon elektronia massiivisempi, ajattelemme tässä protonin olevan levossa ja elektronin liikkuvan protonin ympäillä. Tarkalleen ottaen levossa olevassa atomissa systeemin *massakeskipiste* pysyy paikoillaan, mutta massakeskipiste on hyvin lähellä protonia.

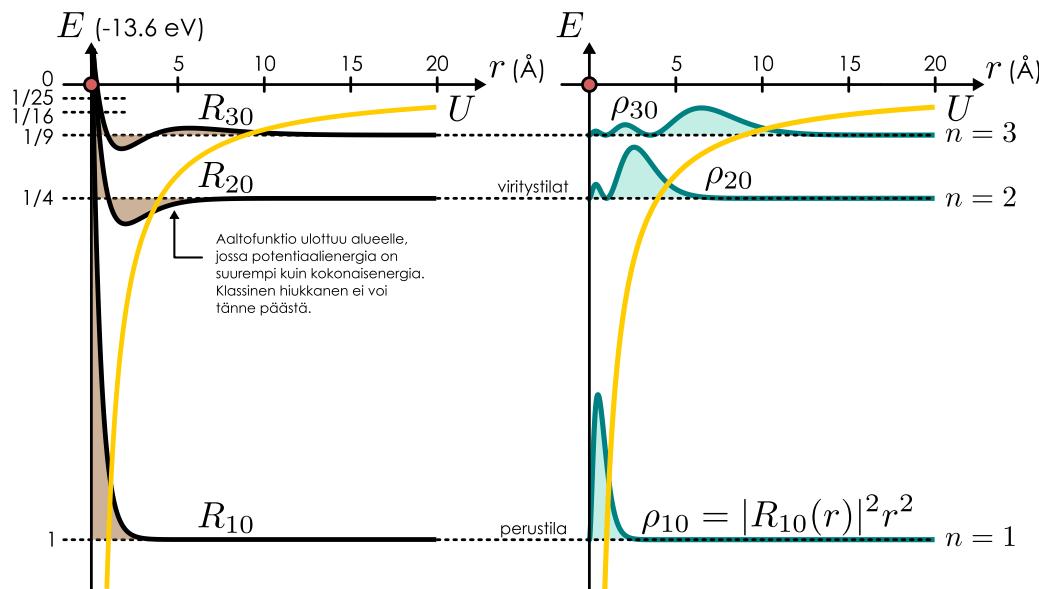
Protonin ympäälle luoma sähköinen potentiaali muodostaa elektronille potentiaalikuopan. Potentiaalienergian nollatasoksi on tapana valita tilanne, jossa elektroni on äärettömän kaukana protonista, jolloin elektronin potentiaalienergiaa kuvaava funktio

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (17.123)$$

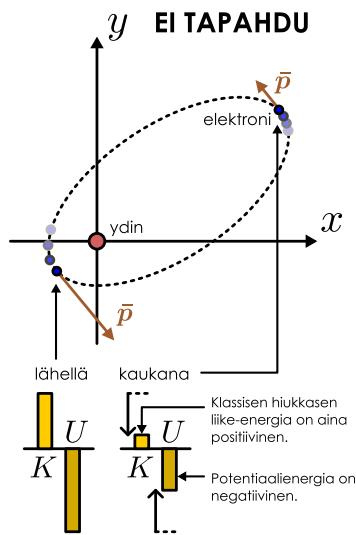
missä e on alkeisvaraus ja r hiukkasten välinen etäisyys. Koska elektronin ja protonin välillä on attraktiivinen vuorovaikuttus, elektronin potentiaalienergia *pienenee*, kun elektroni lähestyy ydintä. Niinpä elektronin potentiaalienergia on kaikkialla nollaa pienempi eli *negatiivinen*.

Jos nyt elektronin *kokonaisenergia* on negatiivinen, elektroni ei pääse koskaan pakenemaan ytimen luota vaan se on vangittu ytimen muodostamaan potentiaaliakuoppaan. Tällöin elektroni on jollakin ominaistilallaan (tai näiden tilojen superpositiossa), mikä muistuttaa klassisen fysiikan tilannetta, jossa elektroni on stabiililla ydintä kiertävällä radalla (kuva 17.40). Kvanttimekaanisella elektronilla ei kuitenkaan ole täsmällistä rataa eikä elektroni ole ydintä kiertävä pallo vaan ydintä ympäröivä aalto.

Kuva 17.41: Kvanttimekaanisen elektronin aaltofunktion radiaaliosuus ja todennäköisyysjakauma olla etäisyydellä r ytimestä kun $n = 1, 2, 3$ ja $l = 0$.



Kuva 17.40: Klassinen kiertorata ei ole oikea malli elektronille atomissa.



Yhtälö voidaan ratkaista pallokoordinaatistossa kirjoittamalla aaltofunktio radiaalisen ja kulmariippuvan funktion tulona

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\phi, \theta), \quad (17.125)$$

jolloin nämä osuudet voidaan separoida ja ratkaista erikseen. Lasku on pitkä emmekä käy sitä tässä läpi, koska osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen pallokoordinaatistossa ei ole tämän kurssin asia. Lopputulos on kuitenkin se, että kulmariippuvan osuuden ratkaisut ovat ns. *palloharmonisia funktioita* $Y_l^m(\phi, \theta)$, jotka voidaan indeksoida kahdella kokonaisluvulla l ja m . Nämä ovat aaltofunktion kulmariippuvan osuuden kvanttiluvut. Atomin keskuksesta mitatusta etäisyydestä riippuvan osuuden ratkaisut eli *radiaalifunktiot* $R_{nl}(r)$ voidaan indeksoida niin ikään kahdella indeksillä n ja l , joista l on *sama* kvanttiluku kuin kulmariippuvassa osuudessa esiintynyt indeksi l . Näin elektronin aaltofunktion indeksointiin tarvitaan yhteensä *kolme* kvanttilukua n , l ja m . Näin pitääkin olla, koska atomi on *kolmiulotteinen* systeemi.

Tyhjässä avaruudessa olevan vetyatomin elektronin ominaisenergiat riippuvat *vain* pääkvanttiluvusta n , ja ne ovat Schrödingerin yhtälön mukaan

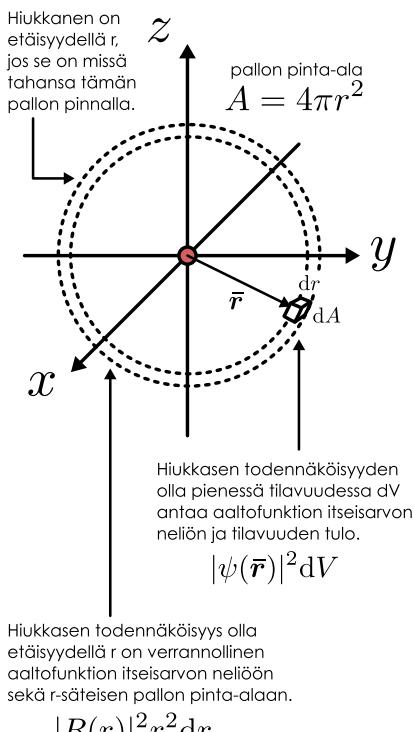
$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = (-13.6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2}, \quad (17.126)$$

missä m_e on elektronin massa. (Täsmällisemmin m_e on protonin ja elektronin massakeskipistekoordinaatistossa laskettu ns. redusoitu massa, joka on hieman elektronin todellista massaa pienempi.) Pienin mahdollinen energia eli elektronin perustilan energia on $E_1 = -13.6$ eV ja kvanttiluvun n kasvaessa energia kasvaa eli tulee vähemmän negatiiviseksi. Energia ei kuitenkaan kasva loputonkaan kuten äärettömän syvän kuopan tapauksessa vaan se lähestyy nolla. Jos elektronin energia kasvaa nolla suuremmaksi, elektroni irtoaa atomista.



- 17.42** (a) Paljonko energiaa tarvitaan irrottamaan elektroni vetyatomin (i) perustilalta ja (ii) 1. viritystilalta?
 (b) Elektroni siirtyy vetyatomin 1. viritystilalta perustilalle emittoiden fotonin. Mikä on fotonin taajuus?

Kuva 17.42: Radiaalisen todennäköisyysjakauman laskussa tarvittava geometria.



kaisemmin tarkastellussa yksilotteisessa laatikossa (kuva 17.30), jossa elektronin pitäisi klassisesti kiimpilla edestakaisin, mutta jossa kvanttimekaaninen elektroni onkin itse asiassa samanaikaisesti vastakkaisiin suuntiin kulkeva seisova aalto.

Seisovissa aalloissa täytyy aina olla kokonaislukumääärä solmuja. Ja koska solmuja on kokonaislukumääärä, myös niiden välissä olevia kupuja on oltava kokonaislukumääärä. (Aallon yhdessä päässä voisi olla puolikas-kkin kuppeja, mutta laskemme tässä kaikki solmujen erottamat alueet kokonaiksi kuvuiksi.) Osoittautuu, että radiaalifunktiossa kupujen määärä on $n - l$. Esimerkiksi kuvaan 17.41 piirretystä funktiossa R_{10} on yksi kuppe, funktiossa R_{20} on kaksi kupua, ja funktiossa R_{30} kolme. Toisin sanoen kupuja on sitä enemmän mitä suurempi kvanttiluku n on ja mitä pienempi kvanttiluku l on. Kupuja on oltava vähintään yksi, joten täytyy olla $n > l \geq 0$.



- 17.43** Elektronin perustilan aalofunktio on $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\pi^{1/2} a^{3/2}} e^{-r/a}$, missä a on ns. Bohrin säde.

- (a) Millä todennäköisyydellä elektroni on pienessä tilavuudessa $\Delta V = (0.01a)^3$ etäisyydellä (i) $r = a/2$ tai (ii) $r = a$ ytimestä?
 (b) Mikä on sellaisen pallokuoren tilavuus, jonka paksuus on $\Delta r = 0.01a$ ja säde (i) $r = a/2$ tai (ii) $r = a$?
 (c) Millä todennäköisyydellä elektroni on *jossakin* pallokuoren (i) tai (ii) sisällä?

Elektronin joitakin ominaisenergioita on piirretty kuvaan 17.41 vaakasuorina katkoviivoina. Kuvassa on esitetty myös elektronin radiaalinen aalofunktio $R_{n0}(r)$ sekä ytimestä mitattu etäisyyden r todennäköisyysjakauma $\rho_{n0}(r)$ näissä tiloissa. Tässä tapauksessa elektronin todennäköisyyttä olla etäisyydellä r ytimestä ei kuvaan radiaalifunktion itseisarvon neliö $|R(r)|^2$ vaan funktio

$$P(r) = |R(r)|^2 r^2. \quad (17.127)$$

Syy tähän on piirretty kuvaan 17.42. Elektronin todennäköisyys olla missä tahansa *yksittäisessä pisteessä* on verrannollinen sen aalofunktion itseisarvon neliöön $|\psi|^2$. Erityisesti jos piste on etäisyydellä r ytimestä, elektronin todennäköisyys olla tuossa pisteessä on verrannollinen radiaalifunktion $R(r)$ itseisarvon neliöön. Toisaalta etäisyydellä r olevat pisteet muodostavat pallon pinnan, ja niinpä näiden *pisteiden määrä* on verrannollinen tämän pinnan alaan, $4\pi r^2$. Elektroni on etäisyydellä r , jos se on *jossakin* r -säteisen pallon pinnalla, ja tämän todennäköisyys on verrannollinen sekä elektronin todennäköisyyteen olla kussakin tämän pinnan pisteessä, $|R(r)|^2$, että pisteiden määrään, r^2 . Esimerkissä 17.9 tämä tulos johdetaan täsmällisesti.

Koska elektronin radiaalisessa aalofunktiossa on kupuja ja solmuja, se muodostuu seisovista aalloista. Seisovat aallot puolestaan syntyvät kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aalon superpositiona. Koska tässä tapauksessa seisovat aallot syntyvät radiaalisuunnassa, näiden vastakkaisiin suuntiin kulkevien aaltojen täytyy liikkua kohti ydintä ja siitä poispäin. Elektroni siis tavallaan liikkuu samanaikaisesti sekä ydintä kohti että siitä poispäin. Tilanne on samankaltainen kuin ai-

esimerkki 17.9

Elektronin radiaalinen todennäköisyysjakauma

Elektri on vetyatomissa perustilalla $\psi_{100}(r, \phi, \theta) = R_{10}(r)Y_0^0(\phi, \theta)$. Tässä radiaalifunktio on $R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a}$, missä a on Bohrin säde, ja kulmaosuus on vakio $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Millä etäisyydellä ytimestä elektri on suurimmalla todennäköisyydellä?

SUUNNITELMA Aaltofunktion itseisarvon neliö kuvaaa hiukkasen todennäköisyystiheyttä olla tiettyssä pisteessä. Nyt kysytään kuitenkin hiukkasen todennäköisyyttä olla etäisyydellä r , ja tällaisia pisteitä on paljon. Saadaksemme siis selville hiukkasen todennäköisyyden olla jollakin tietyllä etäisyydellä, meidän on laskettava yhteen hiukkasen todennäköisydet olla kaikissa näissä pisteissä.

Todennäköisyys, että hiukkanen on pisteen \vec{r} ympärillä sijaitsevan pienen tilavuuden dV sisällä on aaltofunktion itseisarvon neliön ja tilavuuden tulo, $dP(\vec{r}) = |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dV$, kuten kuvassa 17.42 on nähty. Etäisyydellä r olevat pisteet muodostavat avaruudessa pallon, joten tarkastellaan tälläista dr -paksuista pallokuorta. Pallon pinta voidaan myös jakaa pieniin dA -kokoisiin pinta-ala-alkioihin, jolloin kuori tulee jaettua tilavuusalkioihin, joiden koko on $dV = dr dA$.

Todennäköisyys, että elektri on jossakin tämän kuoren sisällä saadaan näin ollen laskemalla yhteen hiukkasen todennäköisyys olla kuoren muodostavien tilavuusalkioiden sisällä eli integroimalla pinnan yli

$$dP(r) = \left(\int_A |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dA \right) dr. \quad (17.128)$$

Toisaalta hiukkasen todennäköisyys olla kuoren sisällä voidaan ilmaista radiaalisen todennäköisyystiheyden ja kuoren paksuuden tulona $dP(r) = \rho_R(r)dr$ joten tämän perusteella hiukkasen todennäköisyysjakaumaa kuvaavat tiheysfunktio

$$\rho_R(r) = \frac{dP}{dr} = \int_A |\psi(r, \phi, \theta)|^2 dA. \quad (17.129)$$

RATKAISU Todennäköisyysjakauman lausekkeessa integraali lasketaan pallon pinnan yli eli kulmamuuttujien ϕ ja θ suhtein, joten radiaalifunktio R on tässä integraalissa vakio ja se voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle. Jakaumafunktio on siis $\rho_R(r) = |R(r)|^2 \int_A |Y(\phi, \theta)|^2 dA$. Lisäksi kulmafunktio Y on vakio, joten jäljelle jää vain vakion integraali pallon pinnan yli, jolloin tulos on pallon pinta-ala $A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$,

$$\rho_R(r) = |R(r)|^2 \frac{1}{4\pi} \int_A dA = |R(r)|^2 \frac{1}{4\pi} A_{\text{pallo}} = |R(r)|^2 r^2. \quad (17.130)$$

Tässä lasku oli helppo, koska Y oli vakio, mutta itse asiassa palloharmoniset funktiot on normitettu niin, että sama tulos saadaan kaikissa tiloissa.

Perustilassa todennäköisyysjakauma on näin ollen

$$\rho_{10}(r) = |R_{10}(r)|^2 r^2 = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}. \quad (17.131)$$

Tämän maksimi löydetään derivaatan nollakohdasta,

$$\rho'_{10}(r) = \left(\frac{8r}{a^3} - \frac{8r^2}{a^4} \right) e^{-2r/a} = (a-r) \frac{8r}{a^4} e^{-2r/a} = 0, \quad (17.132)$$

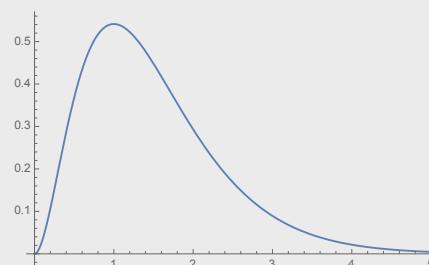
ja ratkaisu on $a = r$ eli todennäköisin etäisyys on juuri Bohrin säde.

Mathematica:

```
(* aaltofunktion radiaaliosuuus *)
r10[r_] := 2/a^(3/2) Exp[-r/a];
rho10[r_] := r10[r]^2 r^2;

(* maksimi *)
Solve[rho10'[r] == 0, r]
{{r -> 0}, {r -> a}};

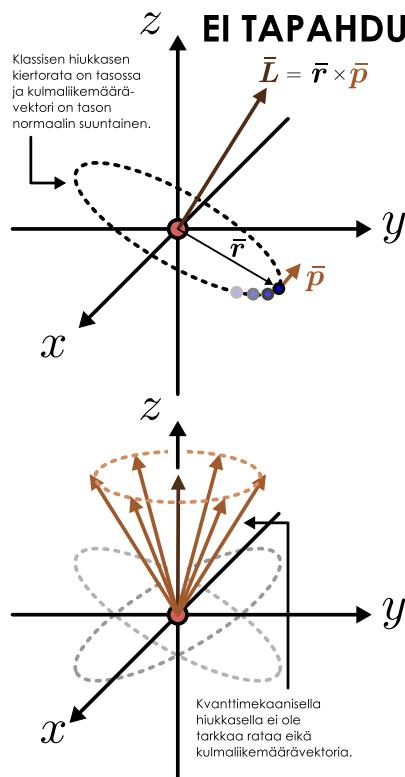
Plot[rho10[r] /. a->1, {r, 0, 5}]
```



ARVIOINTI Hiukkasen todennäköisyysjakauma on maksimissaan Bohrin säteen etäisyydellä a ytimestä. Vaikkei hiukkasella olekaan mitään täsmällistä rataa eikä edes etäisyyttä ytimestä, tästä voidaan pitää jonkinlaisena atomin koon mittana. Se ei ole välttämättä *paras* atomin koon mitta, sillä esimerkiksi hiukkasen etäisyyden odotusarvo $\langle r \rangle$ on tästä suurempi, koska jakauma on epäsymmetrinen.

Elektronin kiertoliike ytimen ympäri

Kuva 17.43: Kvanttimekaanisen elektronin kulmaliikemääärän suunta on epämääräinen.



Elektri muodostaa siis radiaalisuunnassa seisovia aaltoja, mutta tämän lisäksi elektri muodostaa myös *ydintä kiertäviä aaltoja*. Edelleen koska elektronilla on massa, näillä aalloilla on kulmaliikemäärästä ytimen suhteesta, vaikka ydintä toisaan kiertääkin aalto eikä klassinen hiukanen.

Kulmaliikemäärästä kuvaavat vektorit \bar{L} . Klassiseksi tämän vektorin suunta kertoo, minkä akselin ympäri hiukanen kiertää, ja vektorin suuruus kertoo kulmaliikemäären suuruuden, joka riippuu ratasäteestä ja kiertonopeudesta (kuva 17.43). Mitä nopeammin ja mitä kauempaan kiertoakselista hiukanen kulkee, sitä pidempi on sen kulmaliikemäädrävektori. Kvanttimekaaninen hiukanen ei kuitenkaan ole täsmällisellä radalla kulkeva pieni planeetta vaan aalto, jonka paikka ja liikerata on epämääräinen. Niinpä elektronin kulmaliikemääräkään ei ole täsmällinen vaan siihenkin liittyy epätarkkuus samaan tapaan kuin elektronin paikkaan ja liikemääräkin. Täsmällisesti ilmaisten kulmaliikemäärä on vektori, jonka x -, y - ja z -komponenteilla on kullaan oma todennäköisyysjakaumansa. Emme tästä todista, mutta itse asiassa atomissa ominaistilalla olevan elektronin kulmaliikemäären suuruus eli vektorin \bar{L} pituus on täsmällinen eli sen hajonta on nolla, mutta sen suunta on epämääräinen. Siispä kun elektri on atomissa ominaistilalla, tiedämme tarkasti kuinka suurella kulmaliikemäärellä elektri ydintä kiertää, mutta tämä kiertoliike ei tapahdu missään täsmällisessä tasossa, koska ydintä kiertävä aalto ei kulje täsmällistä liikerataa pitkin.

Tutkiessamme aalofunktioita yhdessä ulottuvuudessa opimme, että etenevä aalto kuvaavissa aalofunktioissa sekä reaali- että imaginääriosat muodostavat etenevä aaltoja niin, että imaginääriosat kulkevat reaaliosan edellä (vrt. kuva 17.13). Tämä pääsee myös kiertoliikkeessä oleville aalloille. Jos nimittäin elektri kiertää ydintä jonkin akselin ympäri, sen aalofunktion reaali- ja imaginääriosat muodostavat tässä suunnassa etenevät, ydintä kiertävät aallot kuten kuvan 17.44 (a) on pörretty.

Opimme yhdessä ulottuvuudessa myös sen, että vastakkaisiin suuntiin kulkevien aaltojen superpositio muodosta seisovan aallon, ja näin käy myös ydintä kiertävän elektronin aalofunktiossa, jos ydintä kiertää kaksi aaltoa yhtä aikaa vastakkaisiin suuntiin. Itse asiassa osoittautuu, että pallon pinnalla kulkeva aalto voi muodostaa etenevä aallon vain yhden akselin ympäri. Muissa suunnissa on pakko muodostua seisovia aaltoja. Tämä ei ole kvantimekaaninen erikoisuus vain yleinen aaltojen ominaisuus, joka pääsee myös ydintä kiertävän elektronin aalofunktiolle. Seisovien aaltojen suunnissa aalofunktioon muodostuu solmuja ja kupoja.

Akseli, jonka ympäri etenevä aalto kiertää, voi tieteenkin osoittaa mihin avaruuden suuntaan tahansa, mutta tapana on valita koordinaatiston z -suuntaan tämän kiertoakselin suuntaiseksi. Koska kulmaliikemäädrävektori \bar{L} liittyy elektronin kiertoliikkeeseen, ydintä z -akselin ympäri kiertävän elektronin liikkeeseen liittyy z -suuntainen kulmaliikemäären komponentti L_z . Erityisesti oikean käden säännön mukaisesti L_z on positiivinen, jos elektri kiertää ydintä positiivisen z -akselin suunnasta katsottaessa vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan. Kuvassa 17.44 (a) on juuri tämä tilanne, joten siinä kulmaliikemäären z -komponentti on positiivinen.

Ydintä kiertävä aalto ei voi olla millainen tahansa, koska aalofunktion täytyy olla jatkuva. Tämä tarkoittaa sitä, että kun kierremme täyden kierroksen ytimen ympäri, aallon reaali- ja imaginääriosien täytyy palata samoihin arvoihin kuin missä ne alunperin olivat. Toisin sanoen yhteen kierroksen täytyy mahtua täsmälleen jokin kokonaislukumäärä aallonpituuksia, ja kvanttiluku m kertoo näiden lukumäären. Esimerkiksi kuvassa 17.44 (a) $m = 5$ ja ydintä kiertämään mahtuu viisi aallonpituuutta. Tilanne on samankaltainen kuin yksilottaiseen kuoppaan vangitun elektronin tapauksessa. Kuopassa elektronin aalofunktio muodostaa seisovia aaltoja, ja kuoppaan pitää aina mahtua kokonaislukumäärä kupoja, minkä vuoksi vain tietyt aallonpituuudet ovat sallittuja. Kiertoradalla ei ole reunoa, mutta yksi kierros on silti äärellisen pituinen, mikä rajoittaa mahdollisia aallonpituuksia.

Koska kiertävässä aalossa täytyy olla kokonaislukumäärä aallonpituuksia, vain tietynlaiset ja tiettyllä kulmanopeudella kiertävät aallot ovat mahdollisia. Toisin sanoen *kiertoliike on kvantittunutta*. Suoraan etenevä elektronin liikemäärä sekä nopeus ovat suoraan verrannolliset aaltolukuun ja siis kääntäen verrannollinen aallonpituuteen. Toisin sanoen mitä tiheämässä aallot ovat, sitä nopeammin elektri liikkuu. Aivan samoin kiertoliikkeessä olevan elektronin kulmanopeus on kääntäen verrannollinen ydintä kiertävien aaltojen aal-

lonpituuteen eli suoraan verrannollinen aallonpituuksien lukumäärään. Ajatellaan yksinkertaisuuden vuoksi elektronin kiertävän ydintä ympyräradalla, jonka z -akselista mitattu sade on r . Tällöin elektronin kulmalii-kemääräni z -komponentti on radan säteen ja elektronin liikemäärän tulo,

$$L_z = rp = r\hbar k. \quad (17.133)$$

Aallonpituuden avulla lausuttuna aaltoluku on $k = 2\pi/\lambda$, joten kulmalii-kemääräni voi kirjoittaa myös muotoon

$$L_z = r\hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{L}{\lambda}, \quad (17.134)$$

sillä r -säteisen ympyräradan pituus on $L = 2\pi r$. Toisaalta jos aallossa on yhden kierroksen matkalla täsmälleen m aallonpituitta, radan pituus on aallonpituuden avulla kirjoitettuna $L = m\lambda$. Niinpä radan pituuden ja aallonpituuden suhde on juuri m , ja kulmalii-kemääräni komponentilla L_z on täsmällinen arvo

$$L_z = \hbar m. \quad (17.135)$$

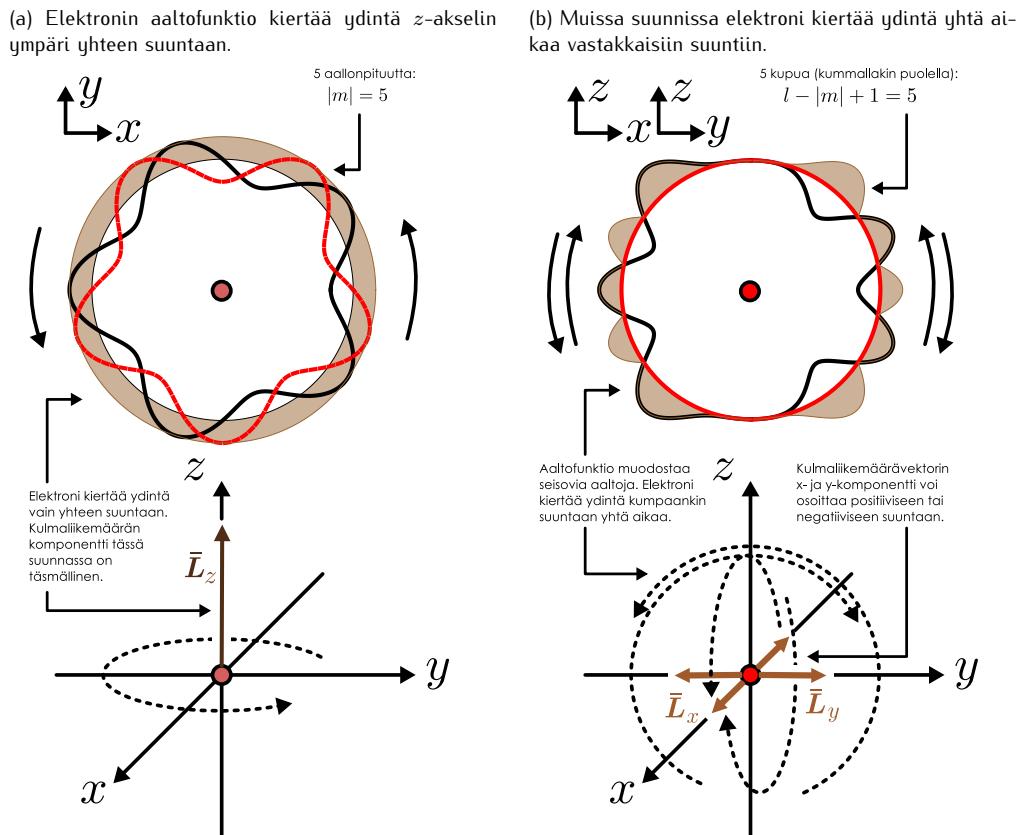
Siispä z -akselia kiertävän aallon kulmalii-kemääräni arvon täytyy olla jokin redusoidun Planckin vakion monikerta, ja se riippuu kvanttiluvusta m . Mitkään muut arvot eivät ole mahdollisia.

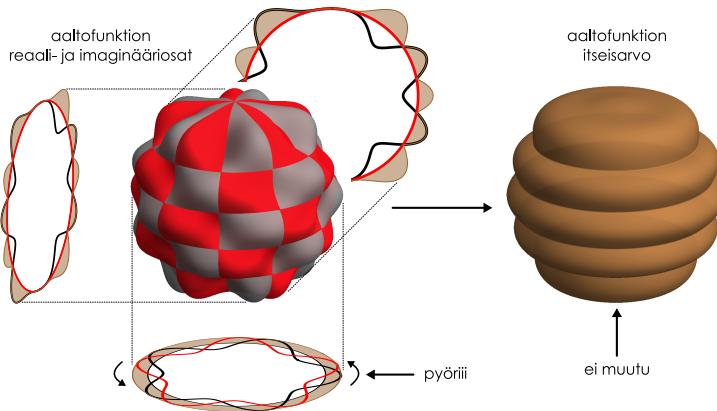
Edellä esitetynä päättelyssä elektronin oletettiin kiertävän r -säteistä rataa, mutta tämä ei ole totta, koska elektronin etäisyys ytimestä on epämääräinen. Tällä ei kuitenkaan ole loppujen lopuksi väliä, sillä kulmalii-kemääräni z -komponentin arvo ei riipu siitä, kuinka kaukana ytimestä elektroni on, vaan ainoastaan kvanttiluvusta m eli ydintä kiertävien aallonpituuksien lukumäärästä.

Oikean käden säännön mukaisesti kulmalii-kemäärävektorin suunta riippuu elektronin kiertosuunnasta: kiertosuunnan käänäminen käänää myös kulmalii-kemäärävektorin ympäri. Erityisesti kulmalii-kemääräni z -komponentti voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä, kumpaan suuntaan elektroni kiertää z -akselia. Niinpä kvanttiluku m voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen elektronin kiertosuunnasta.

Ydintä z -akselin ympäri kiertävä klassinen hiukanen liikkuisi vain xy -tasossa, jolloin sen nopeus z -suunnassa olisi täsmälleen nolla. Tämä ei kuitenkaan ole epätarkkuusperiaatteen perusteella mahdollista, sillä elektronilla ei voi olla täsmällistä z -koordinaattia ja z -suuntaista liikemäärää. Niinpä vaikka kvanttimekaaninen elektroni kiertäisi ydintä *pääasiassa* z -akselin ympäri xy -tasossa, sillä on pakko olla lükkettä *myös* z -akselin suunnassa eli x - ja y -akselien ympäri.

Kuva 17.44: Kvanttimekaanisen elektronin aaltofunktion kulmaosuus, kun $l = 9$ ja $m = 5$. Aaltofunktio muodostaa ytimen ympärille sekä seisovia että eteneviä aaltoja. Elektroniaalto kiertää siis ydintä yhtä aikaa useilla kieroradalla sekä eri suuntiin, ja tämän vuoksi elektronin kulmalii-kemääräni suunta on epämääräinen.



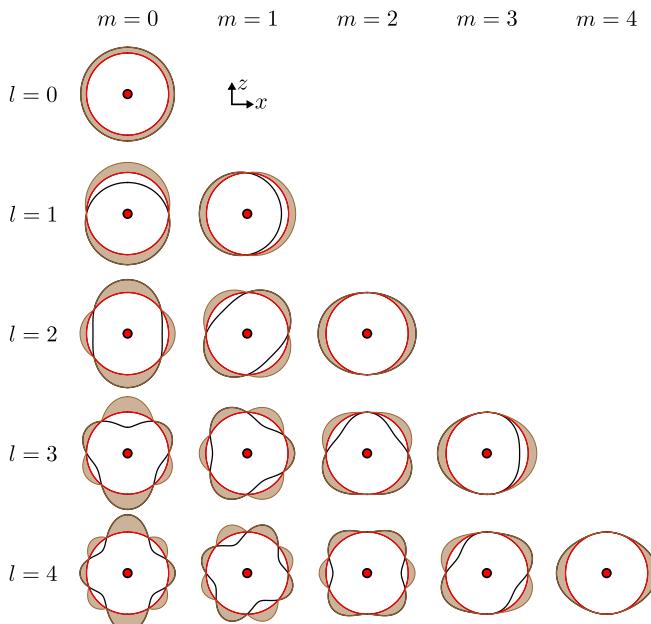
Kuva 17.45: Aaltofunktion kulmaosus piirrettynä pallon pinnalle, kun $l = 9$ ja $m = 5$.

akseleiden ympäri kiertäviä aaltoja, eli elektronilla on kiertoliikettä näiden akseleiden ympäri *kumpaanakin suuntaan yhtä aikaa*. Elektronin aaltofunktio on symmetrinen z -akselin suhteen, joten kuvassa 17.44 (b) nähdään pystyakselin kummallekin puolelle pürttyvän samanlaiset seisovat aallot.

Seisovien aaltojen kupujen ja solmujen lukumäärän on oltava kokonaisluku. Osoittautuu, että kupujen lukumäärä kierrettäessä positiivisen z -akselin suunnasta puoli kierrosta alas päin negatiivisen z -akselin suuntaan saadaan lausekkeesta $l - |m| + 1$. Kuvan esimerkissä lausekkeen arvo on $9 - 5 + 1 = 5$, ja seisova aalto muodostaa viisi kupua pystyakselin kummallekin puolelle. Koska kupoja on oltava tälläkin kierroksella vähintään yksi, kvanttiluvulle täytyy päteä $l - |m| + 1 \geq 1$ eli $l \geq |m|$.



17.44 Mitkä ovat elektronin kvanttiluvut, jos sen aaltofunktion radiaaliosuudessa on 1 kupa, z -akselia kiertää 2 aallonpituitta myötäpäivään ja x -akselin ympärillä (puolen kierroksen matkalla) on 3 kupua? Mikä on elektronin energia ja kulmalükemäärän z -komponentti tässä tilassa?

Kuva 17.46: Aaltofunktion seisovien aaltojen muoto eri kvanttiluvuilla $l, m \leq 4$.

suunnassa vakio, joten vaikka aalto pyörii, sen itseisarvo ei muutu ajan kuluessa.

Kuvan 17.45 aaltofunktiota on varsin monimutkainen, mutta tämä johtuu siitä, että kvanttilukujen arvot $l = 9$ ja $m = 5$ ovat hyvin suuret. Normaaleissa atomeissa elektronit eivät ole käytännössä koskaan tällaisissa tiloissa vaan yleensä nämä kvanttiluvut saavat pieniä arvoja. Nämä kvanttiluvut valittiin tähän esimerkkiin vain siksi, että aaltofunktion rakenne näkyy paljon selkeämmin, kun funktiossa on paljon kupuja. Tavalliset, pienten kvanttilukujen aaltofunktioiden seisovat aallot on taulukoitu kuvaan 17.46 kvanttilukujen l ja m funktiona.

Kuvaan 17.44 (b) on piirretty elektronin aaltofunktion muoto x - tai y -akselin suunnasta katsottuna tilassa $l = 9$ ja $m = 5$. Toisin sanoen z -akseli osoittaa kuvassa ylöspäin ja elektronin kiertoliike z -akselin ympäri tapahtuu kuvassa vaakatasossa. Kuten kuvassta nähdään, elektronin aaltofunktio muodostaa pystysuunnassa kupuja ja solmuja, ja nämä voidaan jälleen tulkita kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon muodostamaksi seisovaksi aalloksi. Tässä tapauksessa nämä vastakkaisiin suuntiin kulkevat aallot ovat ydintä x - ja y -akseleiden ympäri *kumpaanakin suuntaan yhtä aikaa*.

Kuvassa 17.45 on yhdistetty edelliset tulokset piirtämällä koko aaltofunktion kulmasta riippuva osuus pallopinnalle. Kuvaan on piirretty reaaliosuus harmaalla, imaginääriosuus punaisella sekä erikseen itseisarvo ruskealla, ja kuvajat on piirretty pallon pinnalle siten, että positiiviset arvot on esitetty kumpuina ja negatiiviset arvot kuoppina. Koska reaali- ja imaginääriosuutta kuvaavat pinnat leikkaavat, pinnan väri määräytyy sen mukaan, kumpi näistä on suurempi. Jos esimerkiksi imaginääriosuus on reaaliosuutta suurempi, punainen pinta piirtyy korkeammalle ja se peittää harmaan pinnan. Kuvasta nähdään, kuinka aaltofunktio muodostaa todellakin viisi aallonpituitta kiertäessään kuvassa pystyyn valitun z -akselin, koska $m = 5$. Lisäksi jos funktio kierretään "pohjoisnavalta etelänavalle", matkalle jää viisi kupua, koska $l - |m| + 1 = 5$. Aaltofunktio pyörii pystyakselin ympäri, mihin liittyy kulmalükemäärän komponentti L_z . Aaltofunktion itseisarvo on kuitenkin tässä kierroksessa pysyvä.



17.45 Tutki kuva 17.46. Miten aalofunktio muuttuu, kun l kasvaa? Entä kun m kasvaa? Onko tiloissa $m = 0$ joiain erikoista?

Seisoven aaltojen muodostuminen x - ja y -akselien ympärille tarkoittaa sitä, että elektronin kulmaliikemäärävektorilla on komponentit myös x - ja y -suunnissa. Nämä kulmaliikemäärään komponentit ovat kuitenkin epämääritetyt. Jos mittaisimme esimerkiksi elektronin kulmaliikemäärään x -akselin ympäri eli kulmaliikemäärään komponentin L_x , elektronin voitaisiin havaita kiertävän täitä akselia kumpaan tahansa suuntaan. Nämä eri kiertosuunnat vastaavat kulmaliikemäärään komponentin L_x eri etumerkkejä, ja niinpä komponentille L_x voidaan mitata sekä positiivinen että negatiivinen arvo. Itse asiassa myös komponentin L_x itsesarvolla on hajontaa. Aivan samanlainen päättely pätee komponentille L_y . Toisin sanoen ainostaan yksi kulmaliikemäärävektorin \bar{L} komponenteista voi olla täsmällisesti tunnettu ja vektorin muut komponentit ovat välittämättä epämääritetyt. Tästä syystä kulmaliikemäärävektorin suunta ei voi koskaan olla täsmällinen (ellei kulmaliikemäärä ole nolla) vaan siihen liittyy aina epätarkkuus.

Vaikka kvanttimekaanisen elektronin kulmaliikemäärävektorin kaikkia komponentteja ei voida tietää samanaikeisesti, vektorin *pituudella* voi silti olla tarkka arvo. Täsmällinen matemaattinen analyysi osoittaa, että kulmaliikemääränen neliö riippuu kvanttiluvusta l seuraavasti

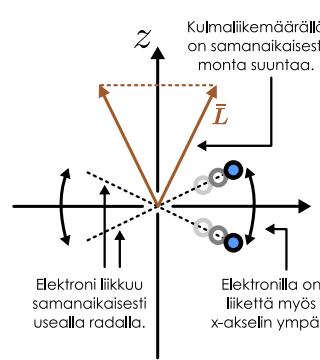
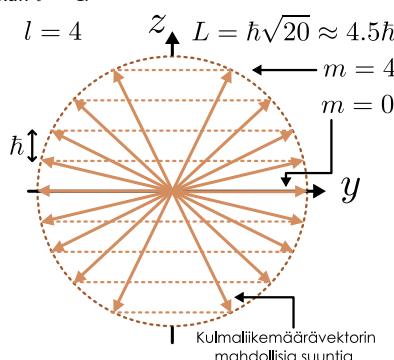
$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (17.136)$$

mukaisesti (missä $l \geq 0$), eli kulmaliikemääränen itsearvo on $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Tätä on havainnollistettu kuvassa 17.47: \bar{L} on vektori, jolla on täsmällinen pituus ja z -komponentti, mutta epämääritetyt x - ja y -komponentit. Vektori \bar{L} ei siis osoita mihinkään täsmälliseen suuntaan vaan sillä on samanaikaisesti useita suuntia. Tämän voi ajatella tarkoittavan sitä, että koska elektronin paikka ja liikemäärä ovat epämääritetyt, elektroni voi kulkea samanaikaisesti usealla kiertoradalla. Elektronin kulmaliikemääräsuuruus on kaikilla näillä radoilla sama, L , mutta nämä radat kulkevat erisuuntaisilla tasoilla. Tällöin vektorilla \bar{L} on epämääritty suunta, koska kulmaliikemäärä on kohtisuorassa kiertoradan tasoa vastaan.

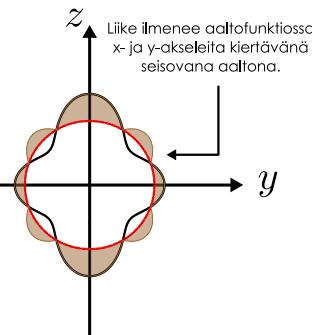
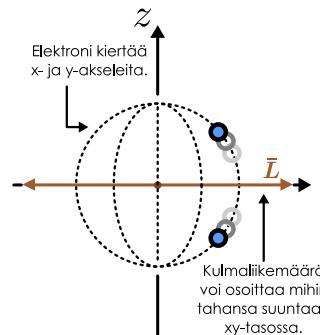
Tämä tulos asettaa myös rajotuksen kvanttiluvuille m ja l . Elektronin kulmaliikemäärävektorin pituuden neliö on Pythagoraan lauseen perusteella sen komponenttien neliöiden summa, $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, ja

Kuva 17.47: Kulmaliikemäärävektorin pituuden määritää kvanttiluku l ja sen z -komponentin kvanttiluku m . Jos $m = l$, elektroni kiertää pääasiassa z -akselia. Jos taas $m = 0$, elektronin liike tapahtuu pelkästään x - ja y -akselien ympäri. Tämä on mahdollista, koska elektroni on aalto. Jos elektronia ryttää ajatella klassisena hiukkasena, tulos tarkoittaisi elektronin liikkuvan usealla radalla yhtä aikaa.

(a) Kulmaliikemäärävektorin mahdolliset asennot, kun $l = 4$. (b) Klassinen analogia ja aalofunktio tilassa $l = 4, m = 4$.



(c) Klassinen analogia ja aalofunktio tilassa $l = 4, m = 0$.



erityisesti koska jokaisen komponentin neliö on positiivinen, kulmaliikemääärän neliön on oltava suurempi kuin sen z -komponentin neliön, $L^2 > L_z^2$. Kvanttilukujen avulla kirjoitettuna epäyhtälö saa muodon $\hbar^2(l^2 + l) > \hbar^2 m^2$, ja koska $l \geq 0$, tämä toteutuu vain, jos $l \geq |m|$. Kvanttiluku m ei siis voi olla itseisarvoltaan suurempi kuin l . Pohjimiltaan tässä on kyse siitä, että jos elektronin kulmaliikemääärä z -akselin ympäri (kvanttiluku m) on suuri, myös elektronin kokonaiskulmaliikemääärän (kvanttiluvun l) täytyy olla suuri.



- 17.46** (a) Mikä on elektronin kulmaliikemääärän suuruus, jos kvanttiluku l on (i) 0, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 4, (v) 8?
 (b) Vertaa lukuja L/\hbar ja l . Lähestyykö näiden erotus jotakin raja-arvoa, kun l kasvaa?

Jos kvanttiluku $l = 0$, elektronin kulmaliikemäärä on nolla. Tässä tilassa elektroni *ei kierrä ydintä lainkaan* vaan se liikkuu ainoastaan kohti ydintä ja siitä pois päin. Tässä tilassa kulmaliikemääärän kaikkien komponenttienkin täytyy luonnollisesti olla nollia, koska vektorin pituus on nolla täsmälleen silloin kun sen kaikki komponenttit ovat nollia. Vain tässä erikoistapauksessa kulmaliikemäärän kaikilla komponenteilla on täsmällinen arvo. Jos l ei ole nolla, kulmaliikemäärä on itseisarvoltaan nollaa suurempi. Tällöin vain yhdellä kulmaliikemääränpäällä voi olla täsmällinen arvo. Tämän komponentin suunta voi olla *mikä tahansa* aivan kuten klassisella kiertoradalla olevan hiukkasen rata voi kulkea minkä suuntaisessa tasossa tahansa. On vain *tapa*, että koordinaatiston z -suunta valitaan niin, että juuri siinä suunnassa kulmaliikemäärellä on täsmällinen komponentti, eikä tähän liity mitään erityistä fysikaalista merkitystä. Jos $m = l$, elektronin kiertoliike tapahtuu pääasiassa z -akselin ympäri, mutta tällöinkin elektronilla on hieman kulmaliikemäärä x - ja y -akselien ympäri, koska aina täytyy olla $L^2 > L_z^2$ (kuva 17.47 (b)). Jos $m = 0$, elektroni *ei kierrä ydintä lainkaan* z -akselin ympäri vaan se kulkee *ainoastaan* x - ja y -akselien ympäri (kuva 17.47 (c)).



- 17.47** Tarkastele kuvaa 17.47, jossa $l = 4$.
 (a) Perustele kuvan ja kulmaliikemäärävektorin avulla, miksei voi olla $m = 5$.
 (b) Mikä on kulmaliikemäärävektorin ja z -akselin välinen kulma, jos $m = 4$?
 (c) Kuinka pitkä elektronin kulmaliikemäärävektorin xy -tason suuntainen komponentti on tällöin?

Koska elektroni on varattu hiukan, sen kiertoliike ytimen ympäällä muodostaa mikroskooppisen virtasilmukan ja tähän virtasilmukkaan liittyvän magneettinen dipolimomentti. Rataliikkeeseen liittyvä dipolimomenttivektori on siis yhdensuuntainen elektronin kulmaliikemäärävektorin kanssa. Koska kulmaliikemäärä on epämääräinen, myöskään siihen liittyvän magneettisen dipolimomenttivektorin kaikkia komponentteja ei voida tuntea samanaikaisesti. Magneettisen dipolin potentiaalienergia ulkoisessa magneettikentässä riippuu kuitenkin vain momenttivektorin *kentän suuntaisesta* komponentista, jota kuvaa kvanttiluku m , kun z -akseli valitaan magneettikentän suuntaiseksi. Niinpä magneettikentässä elektronin energia riippuu pääkvanttiluvun n lisäksi myös sivukvanttiluvusta m . Tätä kutsutaan *Zeemanin ilmiöksi*, ja tästä johtuen kvanttilukua m nimitetään myös *magneettiseksi kvanttiluvuksi*.

Yhteenvedona siis pääkvanttiluku n voi saada minkä tahansa positiivisen kokonaislukuarvon

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.137)$$

ja l voi saada vain tätä pienemmät kokonaislukuarvot

$$l = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (17.138)$$

Luku m voi saada kokonaislukuarvot, jotka ovat itseisarvoltaan korkeintaan l , joten

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (17.139)$$

Näiden kvanttilukujen indeksoimia ominaistiloja merkitään $|n, l, m\rangle$.

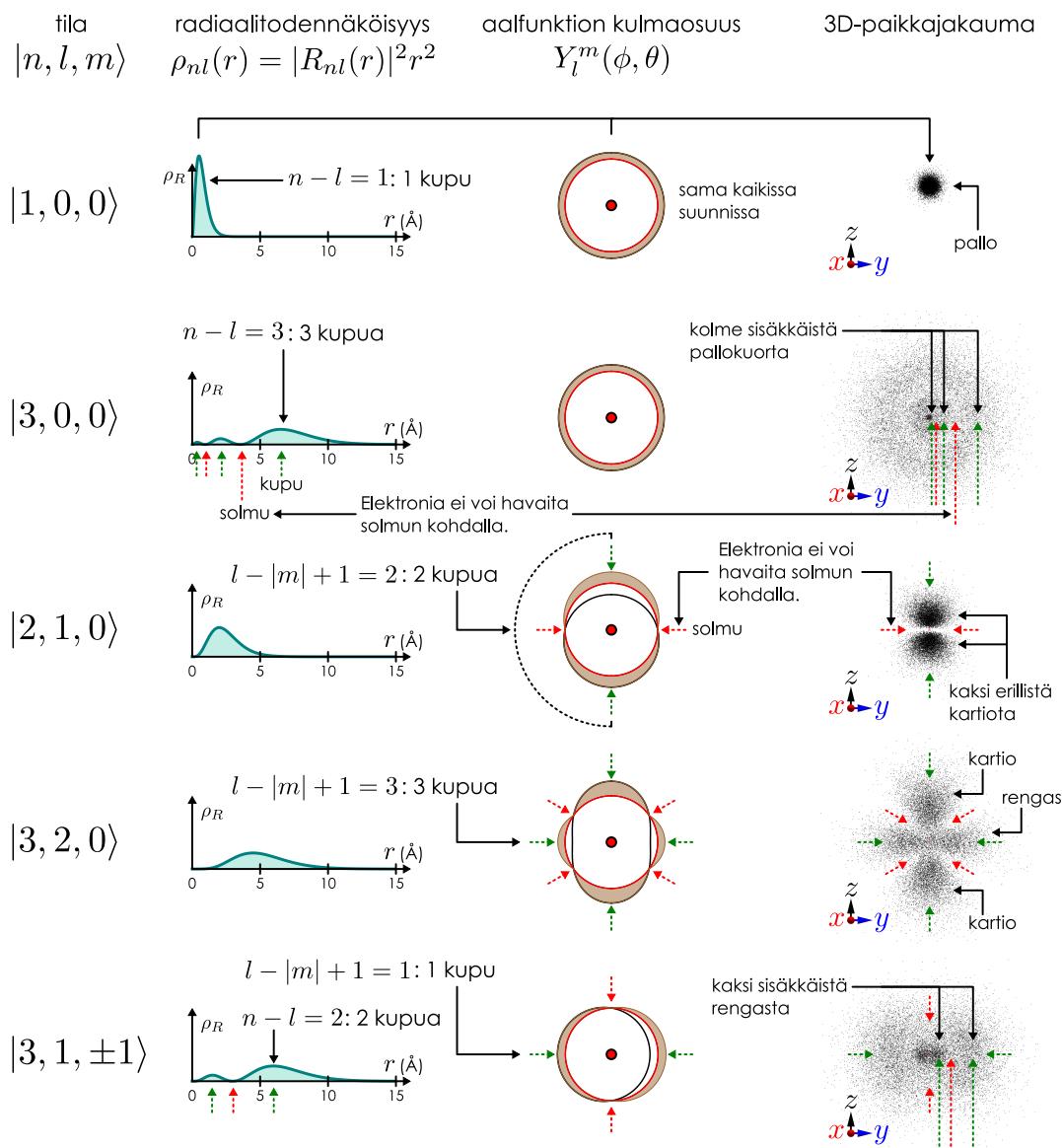


- 17.48** Kirjoita omin sanoin tiivistelmä atomimallista. Millaisia aaltoja elektroni voi muodostaa ytimen ympärille? Mitä elektronin kulmaliikemääristä voidaan tietää? Millaisilla kvanttiluvuilla näitä tiloja indeksoidaan ja mitä fysikaalisia ominaisuuksia kvanttiluvuista voi laskea?

Elektronin paikka

Elektroni ei siis ole vetyatomissa ydintä kiertävä pieni planeetta vaan aalto, ja erityisesti elektronin aaltofunktio muodostaa eri suunnissa seisovia ja eteneviä aaltoja. Osaamme nyt määrittää ominaistilassa olevan elektronin kokonaisenergian sekä kulmaliikemäären suuruuden ja yhden komponentin, eikä elektronin liikkeestä oikeastaan sen enempää voikaan tietää. Viimeinen asia, joka meidän pitäisi vielä elektronin aaltofunktiossa selvittää, on elektronin paikka. Tutkimme toki jo erikseen radiaalista todennäköisyysfunktiota ja aaltofunktion kulmasta riippuvaa osuutta, mutta nyt yhdistämme oppimamme ja päättelimme elektronin paikan kolmiulotteisessa avaruudessa.

Kuva 17.48: Elektronin paikkajakauman muodon määrätyminen aaltofunktion radiaali- ja kulmaosista. Elektronia ei voi koskaan havaita etäisyydeltä, jolla radiaalfunktiossa on solmu, eikä suunnasta, jossa kulmafunktiossa on solmu.



Elektroni on aalto, jonka paikka on epämääräinen. Ominaistilassa elektroni ei ole missään tietyn paikassa vaan sen aaltofunktio on levinnyt kaikkialle ytimen ympärille. Hiukkisen sijaan onkin parempi ajatella, että elektroni on kuin pilvi. Käytännössä elektronin paikan täsmällinen mittaaminen atomista olisi varsin vaikeaa, mutta vaikka se olisi periaatteessa mahdollista tehdä, tulos olisi satunnainen ja noudattaisi aaltofunktion määräämää todennäköisyysjakaumaa. Niinpä kun puhumme elektronin paikasta, tarkoittamme täsmällisesti ottaen elektronin paikan todennäköisyysjakaumaa. Tällä jakaumalla on kuitenkin merkitystä, sillä elektronin paikka vaikuttaa esimerkiksi atomin kemiallisuksiin.

Päättelimme nyt elektronin paikan jakauman kuvaan 17.48 piirretystä tiloissa. Kuvassa on viisi erilaista tilaa, ja kullekin tilalle on piirretty sen radiaalinen todennäköisyysjakauma, aalofunktion kulmarippuvan osuuden seisovia aaltoja muodostava osuus sekä elektronin paikan jakauma kolmessa ulottuvuudessa. Paikan jakauma on piirretty arpomalla 15000 satunnaispistettä aalofunktion määräämästä todennäköisyysjakaumasta.

Kuvan ensimmäinen tila on perustila $|1, 0, 0\rangle$. Tässä tilassa radiaalfunktiossa on yksi kupu ja kulmafunktio on vakio. Tämä tarkoittaa sitä, että elektroni voi olla yhtä suurella todennäköisyydellä missä tahansa suunnassa ytimestä katsoen, jolloin paikan jakauma on pallo, jonka keskellä ydin on.

Toinen tila on $|3, 0, 0\rangle$. Tässä tilassa kulmaosuus on jälleen vakio, joten nytkin elektroni voi olla missä tahansa suunnassa yhtä suurella todennäköisyydellä. Radiaalfunktiossa on kuitenkin kolme kupua, joita erottaa kaksi solmua. Solmen kohdalla todennäköisyys havaita elektroni on nolla, joten elektronin paikan

jakaumaan muodostuu kolme pallokuorta. Radiaalifunktion kunkin kuvun kohdalla on kuori, jossa elektroni on suurella todennäköisyydella, ja kunkin solmun kohdalla on kuoria erottava "tyhjä" alue, jossa elektroni ei voi olla.

Kolmas tila on $|2, 1, 0\rangle$. Nyt radiaalifunktiossa on jälleen vain yksi kupu, mutta nyt kulmafunktiossa on kuvut atomin "navoilla" eli z -akselilla ja solmu "päiväntasaajalla" eli xy -tasossa. Tämä tarkoittaa sitä, että *elektronia ei voi havaita kaikissa suunnissa yhtä suurella todennäköisyydella*. Suurin todennäköisyys on kupujen suunnassa ja solmujen suunnassa elektronin havaitsemisen todennäköisyyks on nolla. Paikan jakauma on pyörähdyssymmetrisen z -akselin suhteen, joten elektronin paikan todennäköisyystiheys on nolla koko xy -tasossa, ja niinpä paikan jakaumaan muodostuu kaksi erillistä, likimain kartion muotoista aluetta, joista toinen on ytimestä positiivisen z -suunnan puolella ja toinen negatiivisessa suunnassa.

Seuraavassa tilassa $|3, 2, 0\rangle$ kulmafunktiossa on kuvut sekä navoilla että päiväntasaajalla. Napojen kuppeja vastaavat tässäkin tapauksessa z -suuntaiset kartion muotoiset alueet, joissa elektronin havaitsemisen todennäköisyyks on suuri. Päiväntasaajan kupu ilmenee xy -tasossa ydintä kiertävään renkaana.

Kuvan viimeisessä tilassa $|3, 1, 1\rangle$ radiaalifunktiossa on kaksi kupua. Kulmafunktiossa on puolestaan kuvut päiväntasaajalla sekä solmut navoilla. Nyt siis elektronia ei voi havaita niillä etäisyysillä, joilla radiaalifunktiossa on solmut, eikä niissä suunnissa, joissa kulmafunktiossa on solmut. Niinpä koska kulmafunktiossa on kupu xy -tasossa, paikan jakauma muodostaa ydintä kiertäviä renkaita. Koska radiaalifunktiossa on kaksi kupua, renkaita on kaksi sisäkkäin.

Samaan tapaan voidaan päättää elektronin paikan jakauma missä tahansa ominaistilassa. Tila $l = 0$ on pallosymmetrinen, ja siinä elektronin paikan jakauma muodostaa ydintä ympäröivä pallopintoja. Sisäkkäisiä pallopintoja on yksi jokaista radiaalifunktion kupua kohti. Tiloissa $l > 0$ paikkajakauma ei ole pallosymmetrinen vaan se jakautuu kartioihin ja renkaisiin. Kartiot syntyvät vain tiloissa $m = 0$, koska vain näissä tiloissa aaltofunktiolla on kuvut atomin navoilla. Muihin suuntiin osuvat kuvut muodostavat renkaita, joita siis syntyy sitä enemmän mitä enemmän kupujakin on. Kaikkien tilojen $n \leq 3$ paikkajakaumat on püürretty luvun lopussa olevaan kuvaan 17.50.



17.49 Millainen on elektronin paikan todennäköisyysjakauma tilassa $|6, 4, 1\rangle$?

Spin

Kvanttiluvut n , l ja m riittävät indeksoimaan elektronin kvanttimekaanisen tilan ominaisuudet, jotka riippuvat elektronin paikasta ja kulmaliiikemääristä, koska kolmessa ulottuvuudessa aaltofunktion indeksointi vaatii kolme kvanttilukua. Erityisesti kvanttiluvut l ja m seuraavat atomin *pallosymmetriasta*, joten nämä kvanttiluvut kuvavat kvanttimekaanisen hiukkasen tilaa *kaikkissa pallosymmetrisissä potentiaaleissa* riippumatta siitä millainen funktio potentiaalienergia $U(r)$ on. Toisaalta niitä ei koskaan esiinny esimerkiksi yksiuotuisissa systeemeissä. Elektronin tilan kuvaus ei kuitenkaan ole vielä täydellinen, sillä elektronilla on myös *sisäinen ominaisuus* nimeltä **spin**, ja siihen liittyy neljäs kvanttiluku s , joka elektronin tapauksessa voi saada ainoastaan arvot

$$s = \pm \frac{1}{2}. \quad (17.140)$$

Kaikkiaan siis elektronin tiloja vetyatomissa kuvaa neljä kvanttilukua, ja tiloja voidaan merkitä $|n, l, m, s\rangle$.

Spin on vektorisuhure, joka muistuttaa matemaattisilta ominaisuuksiltaan kulmaliiikemääriä. Samaan tapaan kuin kvanttiluku m liittyy elektronin rataliikkeen kulmaliiikemäären z -komponenttiin, vastaavasti kvanttiluku s kuvaa spin-vektorin z -komponenttia

$$S_z = \hbar s. \quad (17.141)$$

Elektronin spin-vektorin pituus on *aina*

$$S = \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = \hbar \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (17.142)$$

Tämä on sama arvo, jonka kulmaliiikemääri L saisi, jos kvanttiluku l olisi *puolikas*. Kvanttiluku m voi saada minimissään arvon $-l$ ja maksimissaan l sekä kaikki kokonaislukuarvot näiden väliltä — esim. jos $l = 1$, m voi saada arvot $-1, 0$ ja 1 . Samaan tapaan spin-kvanttiluku s voi saada arvot $-1/2$ ja $1/2$, joiden erotus on myös 1 . Tässäkin suhteessa spin siis käyttää samalla tavalla kuin kulmaliiikemääri.

Vaikka spin muistuttaa kulmaliiikemääriä, se on puhtaasti kvanttimekaaninen ominaisuus, jolla *ei ole* suoraa klassista vastinetta. Pyörimislükkeen kulmaliiikemäären kvanttiluvun l täytyy *aina* olla kokonaisluku, mutta elektronin spinille vastaava luku on $1/2$, joten spin *ei* kuvaa pyörimistä missään klassisessa mielessä. Elektroni *ei ole* pieni pyörivä pallo eikä spiniä voi selittää elektronin pyörimisenä. Spiniä *ei* voi esittää myöskään aaltofunktiona, koska spin *ei* liity elektronin paikkaan avaruudessa vaan on sen *sisäinen ominaisuus*. Niinpä

spinin käsittely vaatii esimerkin 17.7 kaltaista käsittelyä matriisien avulla. Emme perehdy tässä esityksessä spinin ominaisuuksiin tarkemmin, mutta pelkästään tämän kvanttiluvun olemassaololla on tärkeä merkitys aineen rakenteelle ja kemiallisille ominaisuuksille.

Spin voidaan havaita magneettikentän avulla, koska spinin liittyy magneettinen momentti aivan kuten elektronin kiertoliukkeeseenkin. Tästä johtuen ulkoisessa magneettikentässä olevan elektronin energia riippuu siitä, onko elektronin spin kentän suuntainen vai siihen nähden vastakkaisuuntainen. Lisäksi elektronin kohdistuu epähomogeenisessa magneettikentässä voima aivan kuin pieneen kestomagneettiin. Erityisesti tämän magneettisen voiman suunta riippuu siitä, osoitaako spin-vektori samaan vai vastakkaiseen suuntaan kuin magneettikenttä. Täsmällisemmin jos magneettikentän suunta valitaan z -suunnaksi, voiman suunta riippuu spin-vektorin z -komponentin arvosta, jolla on siis elektronin tapauksessa täsmälle kaksi mahdollista arvoa, $-\frac{1}{2}\hbar$ ja $\frac{1}{2}\hbar$. Tästä johtuen epähomogeenisessa magneettikentässä kulkeva elektronisuihku *jakautuu kahtia* elektronin spinin suunnan eli kvanttiluvun s perusteella.

Elektronin spinin liittyvä magneettinen momentti on itse asiassa $\bar{\mu} = -g\frac{e}{2m_e}\bar{S}$, missä $g \approx 2.002$ on vakio. Tämän ns. g -tekijän tarkka arvo on määritetty sekä kokeellisesti että teoreettisesti 13 desimaalin tarkkuudella eli suhteellisella tarkkuudella 10^{-13} . Niinpä g -tekijä onkin tarkimmin tunnettuja luonnonvakioita (tietenkin tarkasti määriteltyjä arvoja kuten valonnopeutta lukuunottamatta)!



17.50 On olemassa myös hiukkasia, joiden spin ei ole puolikas. Eraän hiukkasen spin-vektorin pituus on $S = \hbar\sqrt{15}/4$. Mitkä arvot tämän hiukkasen kvanttiluku s voi saada? Jos tällaisten hiukkasten suheku kulkee epähomogenisen magneettikentän läpi, kuinka moneen osaan se jakautuu?

Monielektroniset atomit ja rakenteet

Vetyatomi on yksinkertaisin mahdollinen atomi, koska se koostuu vain yhdestä protonista ja yhdestä elektronista. Kaikkien muiden alkuaineiden atomeissa on *useita* elektroneja, ja tämä tekee elektronien ominaisuustojen tarkan ratkaisemisen mahdottomaksi elektronien keskinäisen vuorovaikutuksen vuoksi. Tavanomainen approksimaatio onkin olettaa, että monielektronisissa atomeissa yksittäiset elektronit käyttäytyvät likimain samaan tapaan kuin elektri vetyatomissa. Toisin sanoen oletetaan, että elektronien tilat voidaan indeksoida samoin kvanttiluvuin n , l , m sekä s , jolloin atomin kvanttimekaaninen tila tunnetaan, kun sen kaikkien elektronien kaikki kvanttiluvut tiedetään. Tämä *ei ole* täsmälle totta, mutta se on usein hyvä malli.

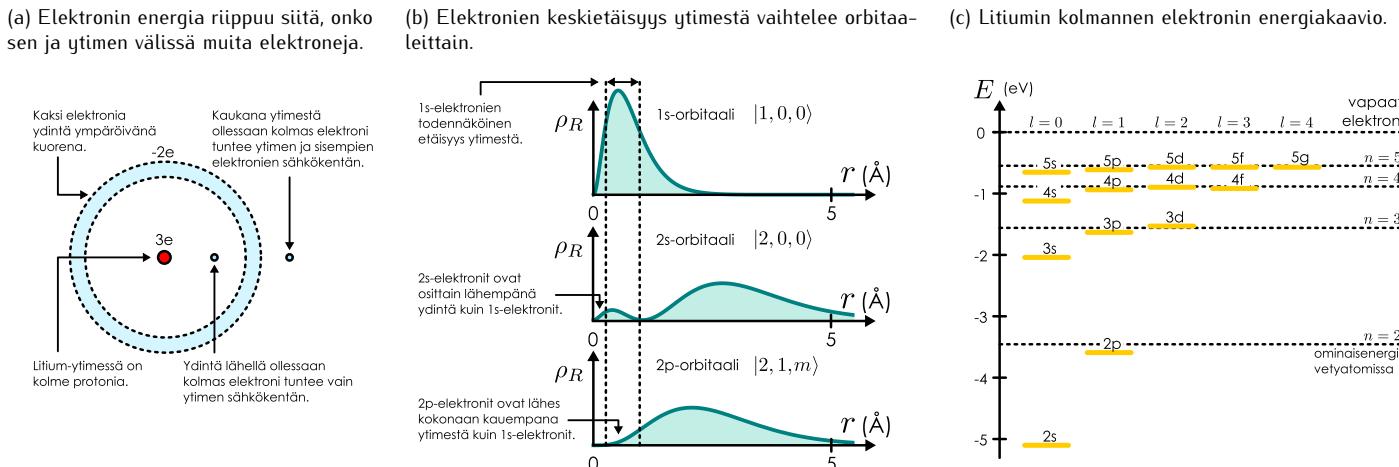
Kvanttilukujen fysikaalinen merkitys on tässä mallissa sama kuin vetyatomin tapauksessa. Kvanttiluvut l ja m kuvavat elektronin liikkeen kulmalikemääriä ja kvanttiluku n liittyy siihen, kuinka kaukana ytimestä elektri keskimäärin on. Kuitenkin koska elektronit vuorovaikuttavat keskenään ja atomin ytimen varaus on suurempi kuin vetyatomissa, elektronien energiat *eivät ole* samat kuin vetyatomissa ja ne riippuvat kvanttiluvun n lisäksi myös kvanttiluvusta l . Esimerkkinä voidaan tarkastella vaikkapa litiumatomia, jolla on kolme elektronia ja jonka ytimessä on kolme protonia. Tällaisen atomin ytimessä on kolminkertainen sähkövaraus vetyyn verrattuna, joten ytimen ja yhden elektronin välinen vuorovaikutus on voimakkuudeltaan kolminkertainen. Näin ollen esimerkiksi tilassa $|1, 0, 0, 1/2\rangle$ olevan elektronin energian pitäisi olla litiumissa enemmän negatiivisempi (eli itseisarvoltaan suurempi) verrattuna vastaavaan elektronin vetyatomissa.

Elektronit eivät myöskään ole kaikki yhtä lähellä ydintä, sillä elektronien paikan todennäköisyysjakauma riippuu kvanttiluvuista n ja l kuten kuvassa 17.50 on esitetty. Elektri, jonka pääkvanttiluku on $n = 1$, on keskimäärin lähempänä ydintä kuin elektri, jonka pääkvanttiluku on esimerkiksi $n = 2$. Gaussin lain perusteella pallomaisen varausjakauman sähkökenttä on samanlainen kuin pallon keskellä olevan pistevaraukseen kenttä, joten tarkasteltaessa ydintä ja sitä ympäröiviä elektroneja kaukaa, niitä ei voi erottaa pistevarauksetta, jonka suuruus on ytimen varauksen ja elektronien varausten summa. Nyt jos esimerkkimme litiumatomissa on kaksi elektronia tilalla $|1, 0, 0, \pm 1/2\rangle$ ja yksi elektri tilalla $|2, 0, 0, 1/2\rangle$, tämä yksinäinen elektri on keskimäärin kauempana ytimestä kuin muut elektronit ja niinpä se tuntee *ytimen ja ydintä lähempänä olevien elektronien yhteisen sähkökentän* (kuva 17.49 (a)). Koska ytimen varaus on $3e$ ja kahden elektronin varaus on $-2e$, tämä elektri siis kokee likimain samanlaisen vuorovaikutuksen kuin elektri, joka kiertää pistevarausta $3e - 2e = e$ — eli yhtä protonia, aivan kuten elektri vetyatomissa. Niinpä tämän elektronin energian voisi olettaa olevan likimain sama kuin vetyatomissa tilalla $|2, 0, 0, 1/2\rangle$ olevan elektronin, eli $E_2 = -3.4$ eV. Aivan täsmälle näin ei ole, koska elektronin todennäköisyysjakauma ulottuu myös lähelle ydintä, joten elektri ei ole kokonaan muiden elektronien ratojen ulkopuolella (kuva 17.49 (b)). Kuitenkin mitä kauempana ytimestä kolmas elektri on, eli mitä suuremmat ovat sen kvanttiluvut n ja l , sitä vähemmän sen energia poikkeaa elektronin energiasta vetyatomissa vastaavalla kvanttililla (kuva 17.49 (c)). Elektronien energiasojojen poikkeamat vetyatomien vastaavista voidaan periaatteessa päättää samantyyppisellä logiikalla muissakin monielektronisissa atomeissa, mutta tilanne on tieteenkin sitä monimutkaisempi mitä enemmän elektroneja atomiin kuuluu. Yleisesti kuitenkin elektronin energia on sitä pienempi mitä pienemmät sen kvanttiluvut n ja l ovat.

Elektronien ominaisuustoja atomeissa kutsutaan **orbitaaleiksi** (engl. orbit, 'kiertorata'). Elektronien sijoittuminen eri orbitaaleille ilmaistaan usein lyhyesti ns. *spektroskooppisella notaatiolla* nl^x , missä n on pääkvant-

KVANTTIMEKANIICKA

Kuva 17.49: Litiumin kolmannen elektronin energia, kun kaksi muuta elektronia ovat 1s-orbitaalilla. Tiloilla, joilla kolmas elektroni on pääasiassa kauempana ytimestä kuin 1s-kuori, elektronin energia on melko tarkasti sama kuin vetyatomissa olevan elektronin. Jos elektroni pääsee tästä lähemmäs ydintä (s-orbitaalit), sen energia on pienempi.



tilukua vastaava numero, l on kulmaliükemäärän kvanttilukua vastaava *kirjain*, ja x on kyseisillä orbitaaleilla olevien elektronien lukumäärä. Tilojen $l = 0, 1, 2, 3$, jne. kirjainsymbolit ovat s , p , d , f jne. (tulevat historiallisesti sanoista 'simple', 'principal', 'diffuse' ja 'fundamental'), joita esimerkiksi litiumatomin, jossa elektronit ovat tiloilla $|1, 0, 0, 1/2\rangle$, $|1, 0, 0, -1/2\rangle$ ($n = 1, l = 0$ eli 1s) sekä $|2, 0, 0, 1/2\rangle$ ($n = 2, l = 0$ eli 2s), elektronirakennetta merkitään $1s^2 2s^1$ (2 elektronia 1s ja 1 elektroni 2s orbitaaleilla). Kvanttilukujen m ja s eroja ei tässä merkinnässä huomioida, koska elektronien energia ei riipu näistä kvanttiluvuista ellei atomi ole magneettikentässä.



17.51 Mikä on hapen, natriumin, ja magnesiumin elektronirakenne spektroskooppisessa notaatiossa?

Elektronien sijoittumista orbitaaleille ohjaat kaksi perussääntöä: elektronit pyrkivät pienimmän energian tilaan ja mitkään kaksi elektronia eivät voi olla samassa kvanttimekaanisessa tilassa. Säännöstä ensimmäisen olemme jo nähneet esimerkiksi emissiota tarkasteltaessa. Virittynyt elektroni pyrkii itsestään palaamaan takaisin perustilalle eli pienimmän energian tilaan. Toinen sääntö on kuitenkin uusi. Sitä kutsutaan **Paulin kieltosäännöksi** (Wolfgang Paulin mukaan), ja se ei ole mitenkään itsestäänselvä. Elektroneillahan ei ole esimerkiksi tarkkaa paikkaa, joten kyse ei ole siitä, että elektronit olisivat toistensa "tiellä" klassisten pallojen tapaan. Elektronien paikkaa kuvaa aalofunktio, eivätkä aallot törmää samaan tapaan kuin klassiset hiukkaset. Erityisesti kahdella elektronilla, joilla on eri spin-kvanttiluvut, voi olla muuten täsmälleen samanlaiset kvanttiluvut eli ne voivat olla levinneet avaruuteen *täsmälleen samalla tavalla*. Kieltosääntö ei pidä myöskään sekoittaa elektronien väliseen sähköiseen voimaan. Toki elektronit hylkivät toisiaan, koska negatiivisina hiukkasina niiden välisen vuorovaikutuksen potentiaalienergia on sitä suurempi mitä lähempänä toisiaan elektronit ovat. Periaatteessa kuitenkin kaksi elektronia voidaan tuoda mielivaltaisen lähelle toisiaan antamalla niille tarpeeksi energiaa. Kieltosääntö sen sijaan on absoluuttinen: elektronit eivät voi *millioinkaan* olla samassa kvanttitilassa. Kyseessä on jälleen puhtaasti kvanttimekaaninen ominaisuus, joka pätee ns. **fermioneille**, joita mm. elektroni, protoni ja neutronikin ovat. Se ei päde ns. **bosoneille** kuten fotoneille, joten fotone voi olla samassa kvanttimekaanisessa tilassa mielivaltaisen monta!

Koska esimerkiksi kvanttilukua $n = 1$ vastaa vain kaksi tilaa, $|1, 0, 0, 1/2\rangle$ ja $|1, 0, 0, -1/2\rangle$, Paulin säännöön mukaan 1s-orbitaalille mahtuu siis maksimissaan *kaksi* elektronia. Kolmannen elektronin on asetuttava energiassa toiseksi matalimallelle orbitaalille, joka on 2s, eli esimerkiksi tilalle $|2, 0, 0, 1/2\rangle$. Vaikkapa typiatomissa on seitsemän elektronia, joista typen elektronista kaksi on orbitaalilla 1s, kaksi orbitaalilla 2s ja kolme orbitaalilla 2p. Kaikkiaan typen elektronirakennetta merkitään siis $1s^2 2s^2 2p^3$. Koska kaikilla tiloilla $|2, 1, m, s\rangle$ on sama energia, typen kolme 2p-elektronia voivat olla *millä tahansa näistä tiloista tai jossakin tilojen superpositiiossa* kuten esimerkiksi tiloissa $|2, 1, 0, 1/2\rangle$, $|2, 1, 0, -1/2\rangle$ (ns. p_z -orbitaalit) ja $\frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1, 1, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2, 1, -1, 1/2\rangle$ (ns. p_x -orbitaalit). Merkintä $2p^3$ ei siis kerro täsmälleen millaiset näiden elektronien tilat ovat, mutta atomin kemiallisten ominaisuuksien kannalta tärkeintä onkin se, että näillä orbitaaleilla on vain *kolme* elektronia — siellä on siis vielä tilaa *kolmelle muulle* elektronille.



17.52 Kolme elektronia asetetaan äärettömän syvään potentiaalikuoppaan (kuva 17.31). Oletetaan, että elektronien välinen sähköinen vuorovaikutus muuttaa elektronien sallittujen tilojen energioita vain vähän. Mitkä ovat elektronien energiat? Mikä on pienin ja toiseksi pienin energia, jonka jokin kuopassa oleva elektroni voi absorboida (yksiköissä $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$)?

Atomien elektronirakenne on kaiken kemian lähtökohta, sillä kemia on seurausta juuri atomien elektronien käyttäytymisestä. Vaikka orbitaalimalli on vain approksimaatio, se on usein riittävä selittämään eri alkuaineiden kemialliset ominaisuudet. Alkuaineiden jaksollisessa järjestelmässä alkuaineet jaotellaan ryhmään kuten alkaliometalleihin, halogeeneihin ja jalokaasuihin, ja jaottelu perustuu pohjimmiltaan siihen, että kussakin ryhmässä kaikkien alkuaineiden uloimmat elektronit ovat samantyyppisillä orbitaaleilla. Esimerkiksi alkaliometalleissa eli litiumissa, natriumissa, kaliumissa, rubidiumissa, cesiumissa ja franciumissa suurin energia on elektronilla, joka on yksin orbitaalilla $2s^1$ (Li), $3s^1$ (Na), $4s^1$ (K), $5s^1$ (Rb), $6s^1$ (Cs) ja $7s^1$ (Fr). Nämä alkuaineet ovatkin kemiallisesti hyvin aktiivisia, sillä niiden on helppo luovuttaa tämä yksi elektroni jollekin toiselle atomille. Tällöin atomit voivat ionisoitua, jolloin niiden elektronien lukumäärä muuttuu, tai muodostaa kovalentteja molekyylisidoksia, joissa elektronit ovat levittyneet useamman kuin yhden ytimen ympärille.

Kovalentteja sidoksia muodostavien elektronien sanotaan olevan *molekyyliorbitaaleilla*. Nämä ovat jälleen astetta monimutkaisempia kuin atomiorbitaalit, mutta niidenkin voi usein ajatella muodostuneen atomiorbitaalien kvanttimekaanisenä superpositionina, jolloin puhutaan orbitaalien hybridisaatiosta. Kiinteissä aineissa, joissa valtava määrä atomeja on järjestynyt suuraksi rakenteiksi, elektronit eivät enää välittämättä kuulu edes atomiparille vaan ne levivät aineeseen aaltopulsseina samaan tapaan kuin vapaat elektronit. Tällöin elektroneiden sallitut energiat eivät ole enää diskreetit kuten atomeissa vaan ne muodostavat jatkumon kuten vapaille hiukkasilla. Tällaisilla elektroneilla ei silti voi olla aivan mitä tahansa energioita, koska vuorovaikutus säännöllisen hilan muodostavien atomiydinten kanssa rajoittaa elektronien aaltofunktioita. Niinpä vaikka elektronien mahdolliset energiat muodostavat jatkumon, siinä on "aukkoja" eli kiellettyjen energoiden alueita. Tätä nimitetään elektronien *vyörakenteeksi*, ja aukkojen erottamia sallittujen energoiden arvojen alueita kutsutaan elektronivöiksi. Vyörakenne selittää, miksi materiaalit ovat johteita, eristeitä tai puolijohteita. Lopujen lopuksi aineiden *kaikki* kemialliset ja sähköiset ominaisuudet ovatkin seurausta elektronien kvanttimekaniikasta.



17.53 Selitä omin sanoin, mikä on spin, orbitaali ja spektroskooppinen notaatio. Miten elektronit asettuvat eri tiloiille vetyä raskaammissa alkuaineissa ja miksi spin liittyy tähän?

Yhteenvetö: Kvanttimekaniikkka

Fotoni

- Sähkömagneettinen säteily koostuu fotoneista.
- Fotonin energia on suoraan verrannollinen sen taajuuteen

$$E = \hbar\omega$$

ja lüikemäärä aaltolukuun

$$p = \hbar k.$$

- Jos elektroni absorboi fotonin, fotonin koko energia siirryy elektronille. Absorptio on mahdollinen vain jos elektroni pystyy vastaanottamaan juuri tämän verran energiaa.
- Sähkömagneettisen säteilyn intensiteetti on verrannollinen pinnaalle saapuvien fotonien lukumäärään aikayksikössä, $I = n_{\text{fotoni}} E_{\text{fotoni}} / \Delta t$. Kääntäen, todennäköisyys havaita fotoneja on verrannollinen klassisen sähkömagneetisen aallon amplitudin neliöön, $n_{\text{fotoni}} / \Delta t \sim |\vec{E}|^2$.

Todennäköisyyslaskenta

- Jos ρ_X on jatkuvan satunnaismuuttujan jakauman tiheysfunktio, todennäköisyys mitata satunnaismuuttujalle arvo väliltä $[a, b]$ on

$$P(a < x < b) = \int_a^b \rho_X(x) dx.$$

- Jakauman pitää toteuttaa normitusehota

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) dx = 1.$$

- Jos satunnaismuuttuja mitataan monta kertaa, näiden mittausten keskiarvo lähestyy muuttujan odotusarvoa. Odotusarvo on

$$\mu_x = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_X(x) dx.$$

- Satunnaismuuttujan varianssi on

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \rho_X(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

- Hajonta mittaa sitä, kuinka kaukana odotusarvosta satunnaismuuttujan arvot yksittäisissä mittauksissa ovat. Hajonta on varianssin neliöjuuri, $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$.

Kvanttimekaaninen superpositio ja epätarkkuus

- Kvanttimekaanikassa hiukkasten ominaisuuksia kuvaavat kvanttimekaaninen **tila** $|\psi\rangle$. Hiukkasan paikkaa kuvaavat tilaan liittyvät **aaltofunktio** $\psi(x)$ ja hiukkasan lüikemäärä sen **aaltolukuesitys** $a(k)$. Aaltofunktioita ja aaltolukuesitystä yhdistää *Fourier-muunnos*.

- Tilassa $|k\rangle$ hiukkasella on tarkka lüikemäärä

$$p_x = \hbar k$$

sekä liike-energia

$$K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

mutta täysin epämääräinen paikka. Hiukkasan aaltofunktio on tässä tilassa muotoa $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$.

- Tilassa $|\psi\rangle$ hiukkasan paikan todennäköisyysjakauman tiheysfunktio on sen aaltofunktion itseisarvon neliö, $\rho_X(x) = |\psi(x)|^2$. Hiukkasan lüikemäärä on verrannollinen sen aaltolukuun $p_x = \hbar k$, jonka todennäköisyysjakauman tiheysfunktio on aaltolukuesityksen itseisarvon neliö, $\rho_K(k) = |a(k)|^2$.

- Yleisesti, jos hiukkasan jokin ominaisus y saa tiloissa $|i\rangle$ tarkat arvot y_i , hiukkasan tila $|\psi\rangle$ voidaan esittää näiden tilojen superpositiona $|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$. Aaltofunktioiden avulla superposition voi esittää summanaa

$$\psi(x) = \sum_i c_i \psi_i(x).$$

Tällaisessa superpositiotilassa hiukkasan ominaisuuden y mittaus antaa tulokseksi jonkin sellaisen arvon y_i , jolle kerroin c_i ei ole nolla.

- Jos paikan ja lüikemäären epätarkkuudeksi määritellään niiden hajonta, kaikille tiloille pätee **epätarkkuusperiaate**

$$\Delta x \Delta p_x = \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ominaistilat ja -energiat

- Alueissa, joissa hiukkasen kokonaisenergia on potentiaalienergiaa suurempi, aaltofunktio muodostaa aaltoja. Alueissa, joissa hiukkasen kokonaisenergia on potentiaalienergiaa pienempi, aaltofunktio vaimenee eksponentiaalisesti.
- Jos hiukkasen kokonaisenergia on sen potentiaalienergiaa suurempi kaikkialla, hiukkanen on **vapaa** ja se pääsee liikkumaan minne tahansa. Tällöin hiukkasen energia voi saada mitä tahansa arvoja.
- Jos hiukkasen kokonaisenergia on sen potentiaalienergiaa suurempi vain rajoitetussa alueessa, hiukkanen on vangittu potentiaalienergiakuoppaan. Tällöin hiukkasen energia voi saada vain joitakin tiettyjä arvoja, jotka määrätyvät systeemin asettamista reunaehtoista. Erityisesti hiukkasen aaltofunktion pitää olla kaikkialla jatkuva.
- Tiloja, joissa hiukkasen kokonaisenergialla on tarkka arvo, kutsutaan **ominaistiloiksi**. Näitä tiloja vastaavia energian arvoja kutsutaan hiukkasen **ominaisenergioiksi**. Jos hiukkasen energia mitataan, tulokseksi saadaan aina jokin ominaisenergia.

- Ominaistilassa olevan hiukkasen ominaisuuksien todennäköisyysjakaumat eivät muutu ajan kuluessa.
- Kaikki tilat voidaan esittää ominaistilojen superpositiona.
- Vapaan hiukkasen aaltofunktio muodostaa aaltopulssin, ja tämä ei ole ominaistila.
- Potentiaalienergiakuopassa olevan hiukkasen aaltofunktio muodostaa seisovia aaltoja, ja nämä ovat ominaistiloja. Seisovissa aalloissa täytyy aina olla kokonaislukumäärä n kupuja, joten tämä on **kvanttiluku**, jonka avulla ominaistilat $|n\rangle$ voi indeksoida.
- Yleisesti hiukkasen ominaistilat ja -energiat määräät **Schrödingerin yhtälö**, joka on kvanttimekaniikan peruslaki. Aaltofunktiosetyksessä yhtälö saa muodon

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x) = E_{\text{kokonais}}\psi(x).$$

Yhtälön ensimmäinen termi kuvailee hiukkasen liike-energiaa ja toinen potentiaalienergiaa. Yhtälön oikea puoli kuvailee hiukkasen kokonaisenergiaa.

Atomi

- Atomi on elektronille potentiaalienergiakuoppa, jossa elektronin aaltofunktio muodostaa sekä ydinästä kiertäviä että seisovia aaltoja.
- Vetyatomissa elektronin ominaistilojen $|n, l, m, s\rangle$ paikasta riippuvan osuuden indeksointiin tarvitaan kolme kvanttilukua, n , l ja m , ja lisäksi elektronin sisäistä spin-ominaisuutta kuvaava kvanttiluku s . Näiden sallitut arvot ovat

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \\ l &= 0, 1, \dots, n-1 \\ m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l \\ s &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Elektronin kokonaisenergia vetyatomissa riippuu vain pääkvanttiluvusta n , kun ulkoista magneettikenttää ei ole

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = (-13.6 \text{ eV}) \frac{1}{n^2}.$$

- Ulkoisessa magneettikentässä elektronien energiat riippuvat myös kvanttiluvuista m ja s .

- Elektronin kulmaliikeväärän itseisarvo riippuu kvanttiluvusta l

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$$

ja kulmaliikeväärän z -komponentti riippuu kvanttiluvusta m

$$L_z = \hbar m.$$

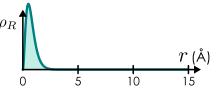
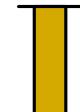
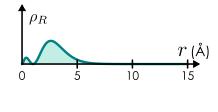
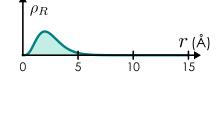
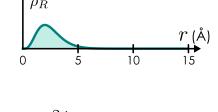
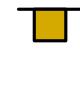
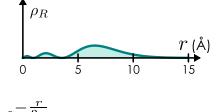
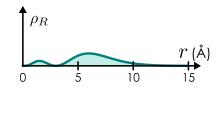
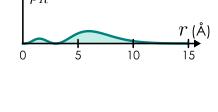
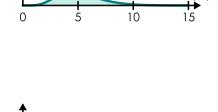
- Usean elektronin atomeissa kunkin elektronin voi ajatella olevan tilassa, joka muistuttaa elektronin tilaa vetyatomissa ja jota kuvavat siis samat kvanttiluvut n, l, m, s . Tämä on kuitenkin vain approksimaatio.
- Elektroni on **fermioni**, mikä tarkoittaa sitä, että kaksi elektronia ei voi koskaan olla täsmälleen samassa kvanttillassa. Erityisesti usean elektronin atomissa millään kahdella elektronilla voi olla täsmälleen samoja kvanttilukuja. Tämä on **Paulin kieltosääntö**.
- Elektronien tiloja atomeissa kutsutaan **orbitaaleiksi**. Elektronien sijoittumista eri orbitaaleille merkitään nl^x , missä n on pääkvanttiluvun arvo, l on sivukvanttilukua merkitsevä kirjain (s, p, d, f, jne.) ja x on kyseisillä orbitaaleilla olevien elektronien lukumäärä.

Sanasto

- kvanttimekaniikka (quantum mechanics)
- valosähköinen ilmiö (photoelectric effect)
- fotoni (photon)
- absorptio (absorption)
- emissio (emission)
- musta kappale (blackbody)
- tunneloituminen (tunneling)
- fermioni (fermion)
- bosoni (boson)
- orbitaali (orbital)
- Planckin vakio (Planck's constant)
- redusoitu Planckin vakio (reduced Planck's constant)
- aaltofunktio (wavefunction)
- aaltolukesitus (wavenumber representation)
- Fourier-muunnos (Fourier transform)

- epätarkkuusperiaate (uncertainty principle)
- ominaistila (eigenstate)
- ominaisenergia (eigenenergy)
- stationaarinen tila (stationary state)
- perustila (ground state)
- viritystila (excited state)
- kvanttiluku (quantum number)
- Schrödingerin yhtälö (Schrödinger equation)
- reunaehdo (boundary condition)
- Paulin sääntö (Pauli principle)
- jatkova jakauma (continuous distribution)
- todennäköisyystiheys (probability density)
- varianssi (variance)
- keskijajonta (standard deviation)

Kuva 17.50: Elektronin ensimmäiset ominaistilat vetyatomissa. Funktioissa R_{nl} esiintyvä vakio $a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m on ns. Bohrin sade. Sarakkeen "paikka" kuvissa on tietokoneella arvottu 15000 satunnaista paikkaa tilaan liittyyväästä paikan todennäköisyyss-jakaumasta.

tila $ n, l, m\rangle$	aaltofunktio $\psi_{nlm}(r, \phi, \theta) = R_{nl}(r)Y_l^m(\phi, \theta)$	etäisyys ρ_R	energia	kulmaaikemääärä	paikka
$ 1, 0, 0\rangle$	$R_{10}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-\frac{r}{a}}$ $Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$		-13.60 eV	 $L_z = 0$ $L = 0$	Näkymä z-suunnasta. Hiukkanen ei kierä lainkaan. Tämä ei olisi mahdollista klassisesti.
$ 2, 0, 0\rangle$	$R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}a^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}$ $Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$		-3.40 eV	 $L_z = 0$ $L = 0$	Näkymä x-suunnasta.
$ 2, 1, 0\rangle$	$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}}$ $Y_1^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$		-3.40 eV	 $L_z = 0$ $L = \hbar\sqrt{2}$	Näkymä y-suunnasta.
$ 2, 1, \pm 1\rangle$	$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}}$ $Y_1^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$		-3.40 eV	 $L_z = \hbar$ $L = \hbar\sqrt{2}$	Näkymä z-suunnasta. Tämä on tila $m=1$. Tilassa $m=-1$ vektori osoittaa alas päin.
$ 3, 0, 0\rangle$	$R_{30}(r) = \frac{2}{81\sqrt{3}a^{3/2}} \left(27 - 18\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_0^0(\phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$		-1.51 eV	 $L_z = 0$ $L = 0$	Näkymä x-suunnasta.
$ 3, 1, 0\rangle$	$R_{31}(r) = \frac{4}{81\sqrt{6}a^{3/2}} \left(6\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_1^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$		-1.51 eV	 $L_z = 0$ $L = \hbar\sqrt{2}$	Näkymä y-suunnasta.
$ 3, 1, \pm 1\rangle$	$R_{31}(r) = \frac{4}{81\sqrt{6}a^{3/2}} \left(6\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_1^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$		-1.51 eV	 $L_z = \hbar$ $L = \hbar\sqrt{2}$	Näkymä z-suunnasta.
$ 3, 2, 0\rangle$	$R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_2^0(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$		-1.51 eV	 $L_z = 0$ $L = \hbar\sqrt{6}$	Näkymä x-suunnasta.
$ 3, 2, \pm 1\rangle$	$R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_2^{\pm 1}(\phi, \theta) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}$		-1.51 eV	 $L_z = \hbar$ $L = \hbar\sqrt{6}$	Näkymä z-suunnasta.
$ 3, 2, \pm 2\rangle$	$R_{32}(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}a^{3/2}} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r}{3a}}$ $Y_2^{\pm 2}(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm i2\phi}$		-1.51 eV	 $L_z = 2\hbar$ $L = \hbar\sqrt{6}$	Näkymä y-suunnasta.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (1/5)

17.1 Punaisen valon aallonpituuus on noin 700 nm eli $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ m. Sen taajuus on siis sinimuotoisen aaltoliukkeen perusyhtälön mukaan $f = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}/(7 \cdot 10^{-7} \text{ m}) = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Tällä taajuudella energiavantti on $E = hf = 3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Tämä vastaa lämpötilaa $T = E/k_B = 21000 \text{ K}$.

Huom. tämä ei tarkoita sitä, että punahehkuisen tähden tai rautakappaleen lämpötila olisi 20000 K. Kuten kuvasta 17.1 voi lukea, punahehkuisen kappaleen lämpötila on luokkaa 3000 – 4000 K. (Esimeriksi Aurinkon pintalämpötila on noin 6000 K, ja Aurinko on kelta-valkoinen tähti.) Lämpötilassa 20000 K suurin osa taajuudella $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ väärätelevistä hiukkasista väärätelee, mutta punaisen valon lähetämiseen riittää noin 3500 K lämpötila, koska jo tässä lämpötilassa tarpeksi moni taajuudella $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ väärätelevä vapausaste alkaa väärhdellä ja lähtää valoa.

17.2 (a) Jos pisara lentää ulos kattilasta A, se päättyy kaltevalle tasolle ja liukuu itsestään kattilaan B riippumatta siitä, minne pisara alunperin lähti. Tämä kuvaa sitä, että elektronin irrotus levystä A vaatii tietyn energian, mutta kun elektroni on irronnut metallista, sähköinen voima vetää sen levylle B.

(b) Jännitelähte tuottaa potentiaalieron eli analogiassa se nostaa kattilan A korkeammalle kuin kattilan B.

(c) Virta on määritelty siirtymän varauksen suhteen kuluvaan aikaan. Niinpä vedelle vastaava mittari mittaa sitä, kuinka paljon vettä (montako pisaraa) kattilaan B saapuu sekunnissa. Mittari rekisteröi siis vain pisaroiden määrän eikä niiden vauhdilla ole mitään merkitystä virran kannalta.

17.3 Nyt kattila B on korkeammalla kuin A, joten vaikka pisara lennähtäisi ulos kattilasta A, se yleensä valuu sinne takaisin. Jotta pisara pääsisi kattilaan B, sen täytyy lentää sinne suoraan. Samoin sähköinen voima vetää elektroneja nyt kohti levää A, joten vaikka elektroni irtooasi levystä, sen liike-energia ei välittämättä riitä viemään sitä levylle B asti. Vain tarpeeksi nopeasti liikkuvat elektronit voivat saavuttaa levyn B.

17.4 Klassisen mallin mukaan aalto kuljettaa energiota jatkuvasti, jolloin pitäisi kulua jonkin aikaa ennen kuin levijen elektronit voivat saada tarpeeksi energiota irrotakseen metallista. Kun metalli lämpenee, elektronien keskimääräisen energian pitäisi kasvaa, jolloin elektroneja sekä irtooaa enemmän etä suuremmilla liike-energioilla. Elektronien määrä havaitaan virtana, mutta elektronien energia pysyytysjännitteessä, joten tämän mukaan myös pysyytysjänniteen pitäisi kasvaa. Taajuuden ei klassisen mallin mukaan pitäisi vaikuttaa elektronien energian mitenkään, koska sähkömagneettisen aallon kuljettama energia riippuu vain sen amplitudista.

17.5 (a) Fotonin energia on verrannollinen sen taajuuteen. Lusikan energia on puolestaan verrannollinen sen massaan ja nopeuden neljöön. Niinpä suurtaajuksinen fotoni vastaisi tässä analogiassa suurta tai nopeasti liikkuvaa lusikkaa.

(b) Vähiten energiota tarvitaan irrottamaan ne elektronit tai pisarat, joilla on jo valmiaksi eniten potentiaalienergiaa. Vesianalogiassa nämä ovat veden pinnalla olevat pisarat. Jos energiota tarvitaan enemmän kuin minimimäärä, pisara ei ollut veden pinnalla vaan syvemmällä. Samaan tapaan metallissa olevilla elektroneilla ei ole kaikilla sama energia vaan osa on "syvemmällä" eli niillä on vähemmän potentiaalienergiaa. (Elektroneilla potentiaalienergia ei riipu kuitenkaan siitä, onko elektroni metallin pinnalla vai ei.)

(c) Fotonimallissa fotonin luovuttama energiansa kokonaan yhdelle elektronille ja katoaa. Vesianalogiassa tämä tarkoittaisi sitä, että lusikka osuu täsmälleen yhteen pisaraan ja katoaa. Lisäksi lusikan ei tarvitse osua veden pinnalla olevaan pisaraan vaan se voi kulkea pinnan läpi (häiritsemättä pinnalla olevaa vettä) ja "osua" johonkin pintaan syvemmällä olevaan pisaraan. No, tämä ei tietenkään ole mahdollista lusikoilla ja vedellä, joten tässä kohtaa analogia ei enää toimi.

17.6 (a) Yhden fotonin energia on $E_{\text{fotoni}} = hf = 3.3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, joten $n_{\text{fotoni}} = 10^9$ fotonia kuljettaa energian $E = n_{\text{fotoni}} E_{\text{fotoni}} = 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ J}$. Kun tämä energia saapuu alalle $A = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$ ajassa $\Delta t = 1 \text{ s}$, intensiteetti on $I = \frac{E}{A \Delta t} = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

(b) Nyt ilmaisimeen saapuu energia $E = 1 \text{ J}$ joka sekunti, joten fotoneja on $n_{\text{fotoni}} = E/E_{\text{fotoni}} = 3.0 \cdot 10^{18}$.

17.7 (a) Kun valo kulkee kahdesta raosta, varjostimelle pääsee kaksinkertainen intensiteetti verrattuna siihen, että rakoja olisi auki vain yksi. Niinpä myös fotonien määrän täytyy olla kaksinkertainen, kun molemmat raot on auki.

(b) Kun vain yksi rako on auki, valoaalto kokee raossa diffraktion, jolloin ilmaisimelle syntyy yksi hyvin leveä diffraktiomaksimi. Ts. ilmaisimella on yksi leveä alue, jonne fotonit saapuvat satunnaisesti. Kun molemmat raot on auki, valoaalto kulkee kummastakin raosta ja diffraktoituu. Eri raoista kulkeneet aallot kohtaavat rakojen takana ja interferoivat. Ilmaisimelle muodostuu interferenssikuvio, jossa suuren ja pienen intensiteetin alueet vaihtelevat. Ts. ilmaisimella on vuorotellen alueita, joihin osuu paljon fotoneja, ja alueita, joihin ei saavu lainkaan fotoneita.

17.9 (a) Kosini on nolla, kun sen argumentti on 0.5π , 1.5π jne. eli puolen aallonpituuuden välein. Nollakohtia on yhden nanometrin matkalla siis $1 \text{ nm}/\frac{1}{2}\lambda = 1 \text{ nm} \cdot k/\pi \approx 8$.

(b) Kompleksinen eksponenttifunktio ei ole nolla koskaan.

Tämän tehtävän tarkoitus on saada sinut huomaamaan, että kun aaltofunktio on kompleksinen, se voi aaltoilla ja silti olla nollasta poikkeava kaikkealla.

17.10 Aaltofunktion reaaliosa on $\cos(kx - \omega t)$ ja imaginääriosa $\sin(kx - \omega t)$. Nämä kumpikin liikkuvat x-akselilla positiiviseen suuntaan, jos $k > 0$, ja negatiiviseen suuntaan, jos $k < 0$. Ajan hetkellä $t = 0$, reaaliosa on 1 origossa riippumatta aaltoluvun merkistä. Tässä pisteessä on siis aallonharja. Origoa lähiin piste, jossa imaginääriosa on 1, on $kx = \pi/2$ eli $x = \pi/(2k)$. Jos $k > 0$, tämä piste on $x = \lambda/4$, ja jos $k < 0$, piste on $x = -\lambda/4$. Imaginääriosaan aallonharja on siis etäisyyden $\lambda/4$ päässä reaaliosan aallonharjasta aallon kulkusuunnassa.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (2/5)

17.11 (a) Kuvaajassa reaali- ja imaginääriosuuden aallot tiivistyvät eli aallonpituuus puolittuu. (b) Liikemäärä kaksinkertaistuu, joten (c) nopeus kaksinkertaistuu ja (d) liike-energia nelinkertaistuu.

17.12 Liike-energia ei kerro liitteen suuntaa. Elektronin liike-energia on sama sen aaltoluvun ollessa sekä k että $-k$. Ei siis riittää tietää liike-energiaa elektronin tilan täsmälliseksi määrittämiseksi.

17.14 (a) Atomien säde vaihtelee eikä se ole edes kovin täsmällisesti määritelty suure, mutta yleisesti atomien sade on suuruusluokkaa 10^{-10} m. Elektronin aaltofunktio on siis levinnyt atomissa näin suurelle alueelle.

(b) Elektronin aaltofunktio on levinnyt koko sille alueelle, missä elektroni voidaan havaita. Nyt tämän alueen leveys ilmaisimella on noin $0.1 \text{ m} \cdot 10^\circ \approx 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ rad} \approx 0.02 \text{ m}$. Elektroniaalto voi siis levittää hyvin suurelle alueelle.

17.16 (a) Normitusehdon mukaan todennäköisyystiheyden rajaaman pinta-alan täytyy olla 1. Välillä $[0 \text{ m}, 0.5 \text{ m}]$ rajattu ala on $P_{X < 0.5 \text{ m}} = 0.5 \text{ m} \cdot 1/5 \text{ m} = 0.1$. Tämä on todennäköisyys sille, että X saa arvon tältä väiltä eli (b)-kohdan vastaus. Todennäköisyys, että $X > 0.5 \text{ m}$, on siis $P_{X > 0.5 \text{ m}} = A \cdot 0.5 \text{ m} = 0.9$, mistä ratkeaa $A = 1.8 \text{ m}^{-1}$.

17.17 Odotusarvo saadaan integroimalla paikkakoordinaatin ja todennäköisyystiheyden tulo. Koska todennäköisyystiheys on määritelty paloissa, myös integraali pitää laskea paloissa.

$$\langle X \rangle = \int_{0.0 \text{ m}}^{0.5 \text{ m}} x \cdot (0.2 \text{ m}^{-1}) dx + \int_{0.5 \text{ m}}^{1.0 \text{ m}} x \cdot (1.8 \text{ m}^{-1}) dx = 0.7 \text{ m}. \quad (17.143)$$

17.18 Nyt integroidaan x^2 kerrottuna todennäköisyystiheydellä,

$$\langle X^2 \rangle = \int_{0.0 \text{ m}}^{0.5 \text{ m}} x^2 \cdot (0.2 \text{ m}^{-1}) dx + \int_{0.5 \text{ m}}^{1.0 \text{ m}} x^2 \cdot (1.8 \text{ m}^{-1}) dx = 0.533 \text{ m}^2. \quad (17.144)$$

Huomaa lopputuloksen yksikkö.

17.19 Varianssin voi laskea integroimalla funktioita $(x - \mu_X)^2 = (x - 0.7 \text{ m})^2$, mutta koska tiedämme jos neliön keskiarvon, voimme laskea yksinkertaisesti

$$\sigma_X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 0.533 \text{ m}^2 - (0.7 \text{ m})^2 = 0.0433 \text{ m}^2. \quad (17.145)$$

Keskihajonta on tämän neliöjuuri

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = 0.208 \text{ m}. \quad (17.146)$$

17.20 (a) Ei ole totta. Mittaustulosten keskiarvo lähestyy odotusarvoa, kun mittausten määrä kasvaa, mutta voi olla niinkin, ettei paikalle mitata ikinä samaa arvoa kuin odotusarvo.

(b) Ei ole totta. Keskihajonta mittaa tulosten poikkeamaa odotusarvosta, mutta se ei ole yläraja.

(c) Ei ole totta. Aaltofunktion itseisarvon neliö kuvailee paikan todennäköisyystiheyttä mutta ei todennäköisyystä itsessään. Todennäköisyystiheyden rajaaman pinta-alan täytyy olla yksi, mutta todennäköisyystiheys itsessään voi olla kuinka suuri tahansa.

(d) On totta. Jos $|\psi(x)| < 1/\sqrt{2}$ kaikkialla, on myös $|\psi(x)|^2 < 1/2$. Tällöin todennäköisyystiheyden rajaama pinta-ala on $\int |\psi(x)|^2 dx < \int_0^2 \frac{1}{2} dx = 1$. Mutta normitusehdon mukaan tämän täytyy olla täsmälleen yksi, ja vastaoletuksessa $|\psi(x)| < 1/\sqrt{2}$ on väärin.

17.21 (a) Koska kummankin tuloksen todennäköisyys on yhtä suuri, paikan odotusarvo on pisteen $x = a$ ja $x = b$ puolivälissä eli $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(a + b)$.

(b) Elektronin todennäköisyys olla tässä pisteessä on nolla. Odotusarvo ei siis tarkoita todennäköisintä arvoa.

17.22 (a) Jos vektorit \bar{a} ja \bar{b} asetetaan peräkkäin, saadaan graafisesti laskettua summa $\bar{a} + \bar{b}$. Tässä kuviossa vektorit siis muodostavat kolmion sivut. Kolmion sivujen pituksille pätee $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$ täsmälleen silloin, kun kyseessä on suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat \bar{a} ja \bar{b} , joista tämä tulos pätee täsmälleen silloin, kun vektorit \bar{a} ja \bar{b} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tai ainakin toinen vektoreista on nollavektori.

(b) Kompleksiluvut voi kuvata kompleksitaso vektoreina, jolloin niiden yhteenlasku ja itseisarvo lasketaan aivan samalla tavalla kuin geometristen vektoreiden vastaavat laskutoimitukset. Niinpä tuloksen täytyy pätee samalla ehdolla kuin kohdassa (a) eli silloin, kun kompleksilukuja kuvaavat vektorit ovat kompleksitasossa kohtisuorassa toisiaan vastaan tai toinen on nolla.

Voimme tuki todistaa tämän myös suoralla laskulla. Ensinnäkin $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + z_2 z_1^*$. Kysytty relaatio siis pätee, jos $z_1 z_2^* + z_2 z_1^* = 0$. Toisaalta luvun $Z = z_1 z_2^*$ konjugaatti on $Z^* = (z_1 z_2^*)^* = z_1^* z_2$ eli nyt vaaditaan $Z + Z^* = 0$. Aina pätee $Z + Z^* = 2\operatorname{Re}[Z]$, joten pitää siis olla $\operatorname{Re}[Z] = \operatorname{Re}[z_1 z_2^*] = 0$. Kirjoitetaanpa luvut nyt eksponenttimuodossa: $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$ jolloin $z_2^* = r_2 e^{-i\phi_2}$. Tulon $z_1 z_2^* = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$ reaaliosa on nolla, jos kompleksilukua kuvaava vektori on kompleksitasossa pystysuora eli jos $\phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, missä n on kokonaisluku. Tämä kuitenkin tarkoittaa sitä, että kompleksilukujen vaihe-ero on $\pm \frac{1}{2}\pi$ eli neljänneskierros, jolloin kompleksilukuja kuvaavien vektoreiden täytyy olla kompleksitasossa kohtisuorat.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (3/5)

17.23 Normitusehdoksi tulee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_a \psi_a(x) + c_b \psi_b(x)|^2 dx = |c_a|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_a(x)|^2 dx + |c_b|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_b(x)|^2 dx = |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1. \quad (17.147)$$

Toisin sanoen kertoimien itseisarvojen neliöiden summan täytyy olla yksi. Tulkinta on se, että jos mittaamme, onko hiukanen tilassa $|a\rangle$ vai $|b\rangle$, tulos on a todennäköisyydellä $|c_a|^2$ ja b todennäköisyydellä $|c_b|^2$.

17.24 (a) Aaltoluku voi saada vain arvot $k = 5 \text{ nm}^{-1}$ ja $k = 6 \text{ nm}^{-1}$, joten liikemäärä $p_x = \hbar k$ voi saada arvot $p_x = 5.3 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ ja $p_x = 6.3 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$. (Huom. $1 \text{ nm}^{-1} = (10^{-9} \text{ m})^{-1} = 10^9 \text{ m}^{-1}$.)

(b) Nopeus on $v_x = p_x/m_e$, ja tämä voi saada arvot 579 km/s ja 694 km/s . Näiden keskiarvo on 636 km/s .

17.25 (a) Aaltoluku voi saada vain arvot $k = 1 \text{ nm}^{-1}$ ja $k = 2 \text{ nm}^{-1}$, joten liikemäärä $p_x = \hbar k$ voi saada arvot $p_x = 1.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$ ja $p_x = 2.1 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$.

(b) Aaltolukuesityksen itseisarvon neliö edustaa todennäköisyyttä mitata tietty aaltoluku. Nyt ensimmäisen tuloksen todennäköisyys on siis $P(k = 1 \text{ nm}^{-1}) = |3/5|^2 = 9/25 = 0.36$ ja toisen $P(k = 2 \text{ nm}^{-1}) = |4/5|^2 = 16/25 = 0.64$.

(c) Odotusarvot ovat $\langle k \rangle = P(k = 1 \text{ nm}^{-1})(1 \text{ nm}^{-1}) + P(k = 2 \text{ nm}^{-1})(2 \text{ nm}^{-1}) = 1.64 \text{ nm}^{-1}$ ja $\langle p_x \rangle = \hbar \langle k \rangle = 1.7 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$.

17.26 Huom. käytämme tässä ratkaisussa epätarkkuudelle symbolia σ_x ja muutokselle Δx .

(a) Karkeasti voimme arvioida, että elektronin paikan keskiarvo on $\langle x \rangle = 1 \text{ nm}$, jolloin sen paikan epätarkkuus on korkeintaan $\sigma_x \leq 1 \text{ nm}$. Koska $\sigma_x \sigma_k \geq 1/2$ aaltoluvun epätarkkuuden on oltava vähintään $\sigma_k \geq 0.5 \text{ nm}^{-1}$. Liikemäären epätarkkuuden on siis oltava $\sigma_{p_x} = \hbar \sigma_k \geq 5.3 \cdot 10^{-26} \text{ kgm/s}$.

(b) Nopeuden epätarkkuuden pitää olla $\sigma_{v_x} = \frac{1}{m_e} \sigma_{p_x} \geq 57.8 \text{ km/s}$.

Yhdessä mikrosekunnissa elektronin paikan odotusarvo siirtyy matkan $\Delta \langle x \rangle = \langle v_x \rangle \Delta t = 100000 \text{ m/s} \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0.1 \text{ m}$, joten paikan odotusarvo on mikrosekunnin kuluttua $\langle x \rangle = 0.1 \text{ m}$. Kuitenkin koska nopeuden epätarkkuudeksi arvioitiin $\sigma_{v_x} \approx 60 \text{ km/s}$, siirtymän epätarkkuudeksi tulee $\sigma_{\Delta x} = \sigma_{v_x} \Delta t = 0.06 \text{ m}$. Voimme siis arvioida, että elektri on mikrosekunnin kuluttua keskimäärin pisteessä $\langle x \rangle = 0.1 \text{ m}$ ja sen paikan epätarkkuus on luokkaa $\sigma_x = \sigma_{v_x} \Delta t = 0.06 \text{ m}$. Niinpä voimme arvioida, että elektri on todennäköisesti välillä $[0.04 \text{ m}, 0.16 \text{ m}]$.

17.28 Kuvat ovat samanlaiset. Jos aalto on vangittu välille, jonka pituus on L niin, että aaltofunktio on oltava välin reunilla nolla, mahdolliset aallonpituudet ovat $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = L$, $\lambda_3 = 2L/3$ jne., yleisesti $\lambda_n = 2L/n$. Aaltoluku on tällöin $k_n = 2\pi/\lambda_n = n\pi/L$. Tähän asti klassinen ja kvanttimekaaninen tilanne on täysin samanlainen. Taajuus on kuitenkin erilainen klassisessa ja kvanttimekaanisessa tapauksessa. Klassiselle aallolle pätee sinimuotoisen aaltoliukkeen perusyhtälön mukaan $f_n = v/\lambda_n = nv/(2L)$ ja $\omega_n = vk_n = nv\pi/L$, missä v on aallon nopeus väliaineessa. Jos väliaine on dispersioton, v on aallosta riippumaton vakio. Kvanttimekaaniset aallot kokevat voimakkaan dispersion, ja niiden nopeus riippuu aallon ominaisuuksista. (Tietenkin, sillä kyllähän esimerkiksi elektri voi liikkua eri nopeuksilla riippuen sen liike-energiasta.) Kvanttimekaaniselle aallolle kulmataajuus on $\omega_n = \frac{1}{\hbar} E_n = \frac{\hbar}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar \pi^2}{2m L^2} n^2$.

17.29 Tässä on laskettu $e^{i(kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{-i\omega t}$, joka perustuu yleiseen säädötön $e^{a+b} = e^a e^b$. Viimeisessä yhtäsuuruudessa on vain otettu $e^{-i\omega t}$ yhtiseksi tekijäksi.

Suoralla laskulla saadaan

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos -\theta + i \sin -\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) = 2i \sin \theta. \quad (17.148)$$

Jakamalla $2i$:llä saadaan yhtälö (17.69).

17.30 (a) Kvanttimekaaninen kulmataajuus on $\omega_n = \frac{1}{\hbar} E_n = \frac{\epsilon}{\hbar} (n + 1/2)$.

(b) $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\omega_n t}$.

(c) $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\omega_2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\frac{\epsilon}{2\hbar} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\frac{3\epsilon}{2\hbar} t}$.

17.32 Suoralla laskulla $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \psi'(x) = -i\hbar A k \cos(kx)$. Koska yleisesti $\sin x \neq \cos x$, ei ole olemassa mitään vakiota p , jolla pätki $\hat{p}_x \psi = p\psi$. Tämä johtuu siitä, että hiukanen liikemäärä on tässä tilassa epämääriäinen.

17.33 (a) Kulmataajuus on $\omega_n = \frac{\epsilon}{\hbar} (n + \frac{1}{2})$. (b) Aaltofunktio on $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} (n + \frac{1}{2}) t}$. (c) Superposition aaltofunktio on

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} \frac{3}{2} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar} \frac{5}{2} t}. \quad (17.149)$$

17.34 (a) Kun U_0 lähestyy nollaa, kuopasta tulee tasainen. Tällöin aaltofunktio pitää siis lähestyä jo aikaisemmin tutkimaamme seisovaa aaltoa, jolla on kaikki alueella sama aallonpituuus.

(b) Jos $E \gg U_0$, $k_2 = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonaist}} - U_0)} \approx \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_{\text{kokonaist}})} = k_1$. Siispä tällöin elektronin aaltoluku ja aallonpituuus ovat kuopassa likimain vakiot.

(c) Kummassakin tapauksessa aallonpituudesta tulee likimain sama alueissa 1 ja 2. Näin pitääkin käydä, koska jos elektronin energia on hyvin suuri kuopan epätasaisuuteen nähdien, kuoppa on elektronin näkökulmasta likimain tasainen.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (4/5)

17.35 Kun aalto saapuu ohuempaan köyteen, aallon nopeus, amplitudi ja aallonpituuus kaikki kasvavat. Kun aalto taas saapuu paksuun köyteen nämä kaikki pienenevät. Tämä johtuu siitä, että paksussa köydessä on suuri inertia ja siksi liike hidastuu. Taajuus pysyy vakiona, joten aallonpituuudenkin täytyy silloin kasvaa. Lisäksi aallon energiatihesys on verrannollinen köyden pituustiheyteen, joten koska energia ei voi lisääntyä, täytyy aallon amplitudin pienentyä.

Kvanttimekaaninen aalto käyttäätyy hieman eri tavalla. Kun kvanttimekaaninen aalto saapuu alueeseen, jossa sen potentiaalienergia on suuri, aallon nopeus pienenee mutta amplitudi ja aallonpituuus kasvavat. Tämä johtuu siitä, että potentiaalienergian kasvaessa liike-energian täytyy pienentyä, jolloin aallon nopeus pienenee. Kvanttimekaanisen aallon aaltoluku riippuu kuitenkin sen liike-energiasta, joten liike-energian pienentyessä myös aaltoluku pienenee eli aallonpituuus kasvaa. Kvanttimekaanisen aallon amplitudi ei liity suoraan aallon energiaan vaan todennäköisyyteen havaita hiukanen. Klassisesti hiukanen viettää eniten aikaa alueessa, jossa se liukkuu hitaasti, joten liike-energian pienentyessä havainnointitodennäköisyyksä kasvaa, ja niiinpä amplitudinkin täytyy kasvaa.

17.36 Jos kokonaisenergia kasvaa, η pienenee. Tällöin funktio $e^{\pm\eta x}$ muuttuu loivemmin paikan funktiona eli aaltofunktio vaimenee alueessa 2 hitaanmin. Tämä näkyy myös kuvassa 17.35, jossa esimerkiksi tilan $|4\rangle$ aaltofunktio tunkeutuu pitkälle alueen 2 sisään kun taas tilan $|1\rangle$ aaltofunktio vaimenee hyvin nopeasti. Huomaa myös, että η on reaalinen vain silloin, kun kokonaisenergia on pienempi kuin U_0 . Jos energia on liian suuri, aalto pääsee vapaasti liikkumaan myös alueessa 2 eikä aaltofunktio vaimene eksponentiaalisesti vaan väärätelee sinimuotoisesti.

17.37 Kuvassa on yksi kupu vaikka aaltofunktiossa onkin kaksi maksimia. Koska näiden maksimien välissä ei ole solmua, ne määritellään yhdeksi kuvaksi. Jos kvanttilukuna käytetään kupujen määrää, tämä kvanttiluku on 1. Ensimmäisellä viritystilalla aaltofunktiossa olisi yksi solmu, jonka symmetrian perusteella täytyy asettua systeemiin keskelle ydinten väliin. Aaltofunktio olisi solmun yhdellä puolella positiivinen (jos funktio on reaalinen) ja toisella negatiivinen.

17.38 Elektronin aaltofunktio on jakautunut kuvassa kahteen osaan. Toinen näistä osista jatkaa matkaansa vallin läpi kuvassa oikealle kun taas toinen heijastuu takaisin. Jos elektronin paikka mitataan, elektroni löytyy jommaстakummasta pulssista, mutta on täysin satunnaisista kummasta. Samoin jos elektronin nopeus mitataan, voidaan tulokseksi saada kumpi tahansa suunta. Todennäköisyys on verrannollinen pulssin amplitudin nelioön, joten ilmeisesti on todennäköisempää havaita heijastunut kuin vallin läpäissyt pulssi, mutta kumpikin havainto on täysin mahdollinen.

17.40 (a) Kupuja on $n_x n_y n_z$ kpl, joten sopivat tilat ovat $|8, 1, 1\rangle, |1, 8, 1\rangle, |1, 1, 8\rangle, |4, 2, 1\rangle, |4, 1, 2\rangle, |2, 4, 1\rangle, |1, 4, 2\rangle, |2, 1, 4\rangle, |1, 2, 4\rangle$ sekä $|2, 2, 2\rangle$.

(b) Nyt pitää siis olla $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 33$. Sopivat tilat ovat $|5, 2, 2\rangle, |2, 5, 2\rangle, |2, 2, 5\rangle, |4, 4, 1\rangle, |4, 1, 4\rangle$ sekä $|1, 4, 4\rangle$. Nyt on siis olemassa monta eri tilaa, joilla on kaikilla sama energia. Tätä kutsutaan degeneraatioksi.

17.41 (a) Varatun pallon potentiaali on pallon ulkopuolella samanlainen kuin pisteverauksen potentiaali eli $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$. Atomien pinnalla siis $V(R) = 1100$ V.

(b) Varatun pallon sisällä sähkökenttä muuttuu lineaarisesti, $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}$ (ks. luku 10, Gaussin laki). Potentiaali on tämän integraali, joten pallon sisällä

$$V(r) = V(R) - \int_R^r E(r) dr = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Zer^2}{R^3}. \quad (17.150)$$

Atomien keskipisteessä $V(0) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} = 1700$ V.

(c) Hiukkasen potentiaalienergia kaukana atomista on nolla ja atomien keskipisteessä $U = 2eV(0) = 3400$ eV. Jos hiukkasella on tätä enemmän energiota, se pääsee kulkemaan varatun pallon läpi.

(d) Jos positiivinen varaus on keskittynyt pallokseen, jonka säde on $R = 10^{-14}$ m, potentiaali pallon keskellä on $V(0) = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R} = 1.7 \cdot 10^7$ V ja hiukkanen tarvitsisi energian $3.4 \cdot 10^7$ eV päästään läpi.

(e) Thompsonin mallin mukaan hiukkasten pitäisi läpäistä kaikki atomit, jos niiden liike-energia on joitakin kiloelektronivoltteja. Rutherfordin kokeessa kuitenkin nähtiin, että jotkin hiukkaset kimposivat atomista takaisin tulosuuntaansa, vaikka niiden liike-energia oli paljon tätä suurempia. Selitys oli se, että atomi ei ole varattu pallo, jonka säde on 10^{-10} m, vaan atomin keskellä on varattu ydin, jonka säde on 10^{-14} m. Tällöin hiukkanen tarvitsee kymmenien megaelektronivolttien energian saavuttaakseen ytimen. Tätä pienemmällä energiolla suoraan ydintä kohti saapuvat hiukkaset pysähtyvät ja kääntyvät ympäri.

17.42 (a) Perustilan energia on -13.6 eV, kun potentiaalienergian nollakohta on valittu äärettömän kauas ytimestä. Jotta elektroni irtosisi atomista, sillä täytyy olla niin paljon energiota, että se voi päästää ytimestä periaatteessa kuinka kauas tahansa. Tällöin elektronin kokonaisenergia on oltava suurempi kuin sen potentiaalienergia äärettömyksissä eli positiivinen. Siispä elektronin irrottaminen perustilasta vaatii energian 13.6 eV. Vastaavasti 1. viritystilan energia on $(-13.6eV)\frac{1}{4} = -3.4$ eV, joten tältä tilalta elektronin irrottaminen vaatii 3.4 eV energiota.

(b) Elektroni menettää nyt energiota 10.2 eV, ja samalla syntyy fotoni, jolla on näin paljon energiota. Fotonin taajuus on siis $f = E/h = 2.5 \cdot 10^{15}$ Hz.

Vastaukset pohdintakysymyksiin (5/5)

17.43 (a) Todennäköisyys havaita elektroni pienessä tilavuudessa on $P = |\psi|^2 \Delta V$, kun tilavuus on niin pieni että aaltofunktio on sen sisällä likimain vakio. Nyt siis $P_{a/2} = \frac{1}{\pi a^3} e^{-1} (0.01a)^3 = 1.17 \cdot 10^{-7}$ ja $P_a = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2} (0.01a)^3 = 0.43 \cdot 10^{-7}$.

(b) Tilavuus on likimain kuoren pinta-alan ja paksuuden tulo, $V = A\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$. Siispä $V_{a/2} = 0.01\pi a^3$ ja $V_a = 0.04\pi a^3$.

(c) Jos pallokuoren, jonka säde on $a/2$, jakaa $\Delta V = 10^{-6}a^3$ -kokoisuun osiin, näitä osia on $n_{a/2} = V_{a/2}/\Delta V = 31416$ kpl. Koska jokaisessa osassa todennäköisyys elektronin havaitsemiselle on $P_{a/2} = 1.17 \cdot 10^{-7}$, kokonaistodennäköisyys havaita elektroni jossakin tämän kuoren sisällä on $P(r = a/2) = n_{a/2} P_{a/2} = 0.0037$. Samaan tapaan a -säteiseen kuoreen mahtuu samanlaisia osia $n_a = 125664$ kpl, jolloin kokonaistodennäköisyys on $P(r = a) = n_a P_a = 0.0054$.

Huomataan siis, että vaikka kohdassa (a) elektronin todennäköisyys olla tietystä pienessä tilavuudessa on suurempi etäisyydellä $a/2$, on todennäköisempää havaita elektroni jossakin etäisyydellä a kuin etäisyydellä $a/2$, koska kauempana ytimestä on enemmän mahdollisia paikkoja.

17.44 Koska z -akselia kiertää 2 aallonpituitta myötäpäivään eli negatiiviseen suuntaan, $m = -2$. Koska x -akselin ympäri muodostuu 3-kupuinen seisova aalto, $l - |m| + 1 = 3$ eli $l = 4$. Radiaaliosuuden kupujen määrä on $n - l = 1$, joten $n = 5$. Tässä tilassa $E = (-13.6 \text{ eV})/5^2 = -0.54 \text{ eV}$ ja $L_z = \hbar m = -2.1 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

17.45 Kun l kasvaa, kupujen ja solmujen määrä lisääntyy. Kun m kasvaa, niiden määrä pienenee. Tiloissa $m = 0$ on se erikoisuus, että vain näissä tiloissa aaltofunktiossa on kuvut z -akselin suunnassa eli atomin "navoilla". Kaikissa muissa tiloissa navoilla on solmut.

17.46 Kulmaliikeämäät ovat $l = 0 : L = 0$, $l = 1 : L = \hbar\sqrt{2} = 1.41\hbar$, $l = 2 : L = \hbar\sqrt{6} = 2.45\hbar$, $l = 4 : L = \hbar\sqrt{20} = 4.47\hbar$, $l = 8 : L = \hbar\sqrt{72} = 8.49\hbar$. Kun $l > 0$, pätee aina $L/\hbar > l$, ja itse asiassa $L/\hbar \rightarrow l + \frac{1}{2}$, kun $l \rightarrow \infty$.

17.47 (a) Kulmaliikeämäärävektorin pituuden määrää kvanttiluku l ja sen z -komponentin luku m . Nyt $l = 4$, joten vektorin pituus on tunnettu, noin $4.5\hbar$. Niinpä vektoria kuvaavan nuolen täytyy olla kuvaan piirretyn ympyrän säteen pituinen. Kuvaan piirretty vaakaviivat kuvaavat vektorin z -komponentin mahdollisia arvoja. Nämä viivat ovat välimatkan \hbar etäisyydellä toisistaan, ja korkein kuvaan piirretty viiva kuvailee lukua $m = 4$, joka on siis korkeudella $4\hbar$. Seuraava viiva vastaisi lukua $m = 5$, mutta se tulisi jo korkeudelle $5\hbar$ eli ympyrän ulkopuolelle. Koska vektori ei voi olla näin pitkä kun $l = 4$, tämä ei ole sallittu arvo luvulle m .

(b) Nyt siis $L = \hbar\sqrt{20}$ ja $L_z = 4\hbar$, joten $\theta = \arccos \frac{L_z}{L} = 0.464 = 26.6^\circ$. (c) Pythagoraan lauseella $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, joten $L_{xy} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{L^2 - L_z^2} = \hbar\sqrt{20 - 4^2} = 2\hbar$. Kulmaliikeämäärän komponentin pituus xy -tasossa on siis täsmällinen, mutta sen suunta ei ole ja niinpä kulmaliikeämäärän x - ja y -komponentteihin liittyy epätarkkuus (ts. niiden mittaus antaa jonkin satunnaisen tuloksen, vrt. paikan ja liikemäärän epätarkkuusperiaate).

17.49 Nyt $n - l = 2$, joten radiaalifunktiossa on kaksi kupua. Lisäksi $l - |m| + 1 = 4$, joten kulmafunktiossa on neljä kupua, ja koska $m > 0$, atomin navoilla ei ole kupuja. Siispä paikan todennäköisyysjakaumassa on radiaalisuunnassa kaksi kerrosta ja kulmasuunnassa neljä rengasta. Kaikkiaan jakauma muodostaa siis $2 \times 4 = 8$ rengasta.

17.50 Spin on kvanttimekaanista kulmaliikeämäärää, ja spin-vektorin pituus noudattaa samaa sääntöä kuin kiertoliukkeen kulmaliikeämäärävektorin pituus, $S = \hbar\sqrt{s_{\text{kokonais}}(s_{\text{kokonais}} + 1)}$, missä $s_{\text{kokonais}} \geq 0$ on variainen spin-kvanttiluku. Tekstissä mainittu s on itse asiassa spinin z -komponentin kvanttiluku. Ts. s_{kokonais} vastaa kvanttiluku l ja s vastaa kvanttilukua m . Ero rataliukkeen ja spinin välillä on siinä, että rataliukkeen kulmaliikeämäärän kvanttilukujen täytyy aina olla kokonaislukuja, mutta spin-kvanttiluvut voivat olla myös puolikkaita.

Nyt siis $s_{\text{kokonais}}(s_{\text{kokonais}} + 1) = 15/4$, josta ratkeaa $s_{\text{kokonais}} = \frac{3}{2}$. Kvanttiluku s saa arvoja yhden välein alkaen arvosta $s = -s_{\text{kokonais}}$ ja päätytten arvoon $s = s_{\text{kokonais}}$ eli mahdolliset arvot ovat $s = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Epähomogenisessa magneettikentässä hiukkaseen kohdistuva voima riippuu hiukkisen spinin komponentista kentän suunnassa, ja tällä hiukkasella kentän suuntainen komponentti voi siis saada neljä eri arvoa. Niinpä hiukkassuihku jakautuu neljään osaan.

17.51 O: $1s^2 2s^2 2p^4$, Na: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, Mg: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$

17.52 Tehtävän oletuksilla elektronien sallitut energiat ovat siis samat kuin yhden kuoppaan asetetun elektronin sallitut energiat eli $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$. Koska kyseessä on yksiulotteinen systeemi, elektronin tilan indeksointiin tarvitaan vain kvanttiluku $n = 1, 2, \dots$, joka määrää elektronin paikan ja liikkeen kuopassa, sekä luku $s = \pm \frac{1}{2}$, joka kertoo elektronin spinin suunnan. Muistathan, että yksiulotteisessa systeemissä paikan ja liikkeen kuvaamiseen tarvitaan vain YKSI kvanttiluku! Esimerkiksi kvanttiluvut l ja m tarvittiin atomissa, koska atomi on kolmiulotteinen ja vieläpä pallosymmetrinen systeemi. Yksiulotteinen kuoppa ei ole pallo, joten näitä kvanttilukuja EI ole. Elektronin tila voidaan siis merkitä $|n, s\rangle$.

Paulin kieltosäännön mukaan elektronit eivät voi asettua samalle kvanttilille, joten kolme elektronia voivat asettua esimerkiksi tiloille $|1, \frac{1}{2}\rangle$, $|1, -\frac{1}{2}\rangle$ ja $|2, \frac{1}{2}\rangle$. Tällöin kahdella elektronilla on energia $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ ja yhdellä $4 \frac{2\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. Pienin energia, jonka elektroni voi absorboida, on tilalta $n = 1$ tilalle $n = 2$ siirtymiseen vaadittava energia eli $3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$. (Huom. tila $|2, -\frac{1}{2}\rangle$ on yhä vapaa.) Toiseksi pienin energia on tilalta $n = 2$ tilalle $n = 3$ siirtymiseen vaadittava energia $5 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$.