Aplicaciones de Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Pablo Bermeo
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador
pablo.bermeog@ucuenca.edu.ec

Sebastián Guazhima
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador
sebastian.guazhima@ucuenca.edu.ec

Tyrone Novillo
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador
tyrone.novillo@ucuenca.edu.ec

***Resumen*—This research explores theoretical problems and applications related to Markov chains. The cited problems include the Toy Collection problem and the Gambler's Ruin problem, both characterized and analyzed in their steady-state forms. Regarding applications, the research presents the Modeling of the RED mechanism and the Gauss-Markov Mobility Model in mobile ad hoc networks.**

***Keywords*—** Markov chains, steady-state analysis, RED mechanism modeling, Gauss-Markov Mobility Model, mobile ad hoc networks.

I. INTRODUCCIÓN

Las Cadenas de Markov en tiempo discreto permite modelar sistemas dinámicos donde el futuro estado del sistema depende únicamente del estado presente, sin importar cómo los estados en tiempos anteriores. Este proceso, tiene aplicaciones en diversos campos, desde la teoría de juegos, biología, las finanzas y la informática. En este informe, se abordarán en varios aspectos clave de las Cadenas de Markov, Probabilidades de Transición y Estado, y Probabilidades de absorción. Y contextualizar, a través de ejemplos concretos como el problema de la colección de juguetes y Gambler's Ruin.

El problema de la colección de juguetes, que trata sobre la acumulación de una serie de objetos únicos a través de eventos repetidos, y el problema de "Gambler's Ruin", que examina la probabilidad de que un jugador pierda todo su capital, servirán para describir los estados de absorción y transitorios en Cadenas de Markov.

Además, se detallarán diferentes aplicaciones específicas de las Cadenas de Markov en el ámbito de las telecomunicaciones, donde son utilizadas, por ejemplo, para modelar y mejorar la eficiencia de sistemas de transmisión de datos y en las redes de computadores, donde se puede dar una mejor optimización del rendimiento y la fiabilidad de las redes. Estas aplicaciones demostrarán la importancia del estudio de las Cadenas de Markov y su aplicación para resolver de problemas complejos en la vida real y aplicados a Telecomunicaciones.

II. MARCO TEÓRICO

II-A. *Caracterización de una cadena de Markov*

La caracterización de una cadena de Markov se basa principalmente en el los tipos de estados presentes en la cadena. Luego, se considera la periodicidad de los estados. El comportamiento en Estado estacionario también permite sabes *hacia donde va* la cadena de Markov, o su convergencia.

Los tipos de estados en una cadena de Markov son los siguientes:

- Estado absorbente: Cumple que la probabilidad de realizar una transición hacia sí mismo es de 1. No es posible abandonar estos estados.
- Estados accesibles y comunicados: Un estado j se denomina accesible si la probabilidad de realizar una transición de un estado i a j en una diferencia de tiempo n es mayor a cero. Si esta propiedad se cumple de forma recíproca, es decir es posible realizar una transición tanto de i a j cuanto de j a i, se dice que iyj son estados comunicados.
- Estados transitorios y recurrentes: Se considera la definición para la probabilidad de que un estado i vuelva a suceder luego de una diferencia de tiempo n.

$$f_{i,i}^{(n)} = P(X_{k+n} = i, X_{k+m} \neq i \\ \text{para } m = 1, 2, \ldots, n-1 | X_k = i) \ .$$

A partir de esta definición, surgen los criterios para definir estados recurrentes y transitorios:

- Criterio para un estado recurrente: $f_{i,i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} = 1$
- Criterio para un estado transitorio: $f_{i,i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} < 1$

La **periodicidad** de una cadena de Markov se particulariza a cada uno de sus estados, por lo que se define el periódo de un estado i como $d(i)$. El periódo $d(i)$ es el máximo común divisor de todo los enteros $n \geq 1$ que hacen que la probabilidad de volver al estado sea disinta de cero.

El comportamiento en *estado estacionario* de una cadena de Markov surge cuando se plantea

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}^k.$$

Donde k refiere a una diferencia de tiempo arbitraria entre estados y $\mathbf{P}^k$ es la matriz de probabilidad de transición en esa diferencia de tiempo. La interpretación reside en que se analiza la probabilidad de retorno en cada uno de los estados. A partir de la matriz resultante se sabrá el comportamiento al que converge la cadena.

II-B. *Probabilidades de Absorción y Tiempo Esperado hasta la Absorción*

En esta sección se examinará el comportamiento a corto plazo de las Cadenas de Markov.

Primero, se considera el caso en el que la cadena de Markov comienza en un estado de transición. Es de interés, la primera condición repetida y el tiempo que tarda en ocurrir. Entonces, el comportamiento posterior de la cadena de Markov (después de encontrar el estado iterativo) es irrelevante.

Si hay un solo estado absorbente k, entonces su probabilidad de estado estacionario es 1 (porque todos los demás estados son transitorios y tienen probabilidades de estado estacionario de cero), y a partir de cualquier estado inicial, su probabilidad de estado estacionario es 1.

Si hay múltiples estados absorbentes, la probabilidad de alcanzar eventualmente uno de ellos sigue siendo 1, pero el estado absorbente al que se ingresa es aleatorio y la probabilidad asociada puede depender del estado inicial que exista.

A continuación, se especifica un estado de absorción particular, denotado por s, y consideramos la probabilidad de absorción a partir de i y eventualmente alcanzando s.

III. Desarrollo

IV. Ejercicios sobre las Cadenas de Markov

IV-A. El problema de la colección de juguetes

Planteamiento: Supongamos que cada vez que un niño compra comida infantil en su restaurante de comida rápida favorito, recibe una de cuatro figuras de acción. Naturalmente, el niño quiere coleccionar las cuatro figuras de acción, por lo que regularmente almuerza en este restaurante. Este proceso puede describirse mediante una cadena de Markov. En este caso, sea $X[k] \in 0, 1, 2, 3, 4$ el número de figuras de acción **diferentes** que el niño ha recogido después de comprar k comidas. Suponga que cada comida contiene uno de las cuatro figuras con igual probabilidad y que la figura de acción en cualquier comida es independiente de lo que contiene en cualquier comida anterior o futura.

La cadena de Markov referente a este problema se puede caracterizar a partir de la matriz de probabilidades de transición, $\mathbf{P}$. Los elementos de $\mathbf{P}$ componen de las probabilidades de que el niño tenga i figuras de acción diferentes en k comidas, para luego tener j figuras en $k+1$. Esto se denota por $p_{i,j}$.

Algunos de los valores $p_{i,j}$ son directamente cero, en el contexto de este problema. Por ejemplo, $p_{i,0}$ es una incoherencia , ya que el niño no puede pasar de tener i figuras a 0, todas la probabilidades de esta forma son 0. En la misma línea, todo valor $p_{i,j}$ donde $|i-j| > 1$ también es imposible en nuestro problema, pues el niño consigue las figuras de una en una: su probabilidad es 0.

Acorde a las consideraciones anteriores, se tiene que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

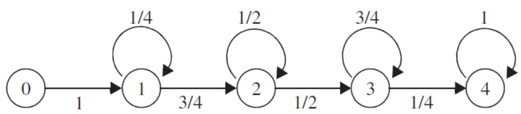

Figura 1: Representación de la Cadena de Markov con diagramas de estado.

Para caracterizar la Cadena de Markov a partir de sus tipos de estado presentes, considere el diagrama de estados de la Figura 1. Allí es posible visualizar que la forma de comunicación entre estados, sus capacidades de absorción, recurrencia, etc. Cada una de estas especificaciones se detallan a continuación:

- **Estados absorbentes:** Note el estado 4 en la Figura 1. Es imposible salir de este estado hacia ningún otro. Esto se debe a que si el niño ya tiene las 4 figuras, cualquier número de comidas posterior $k+n$ siempre volverá al estado 4.
- **Estado inaccesibles y comunicados:** Al ser un proceso de conteo puramente ascendente, no puede existir una comunicación entre los estados. Además, la accesibilidad se da únicamente entre pares que cumplen $|i-j| = 1$.
- **Estados recurrentes y transitorios:** Dado un estado i en $X[k]$, se considera la probabilidad de que $X[k+n] = i$. En otras palabras, se considera la probabilidad de que un estado i vuelva a ocurrir luego de una diferencia de tiempo n. Esta probabilidad se denota como

$$f_{i,i}^{(n)} = P(X_{k+n} = i, X_{k+m} \neq i \\ \text{para } m = 1, 2, \ldots, n-1 | X_k = i) .$$

A partir de esta definición, surgen los criterios para definir estados recurrentes y transitorios:

  - Criterio para un estado recurrente: $f_{i,i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} = 1$
  - Criterio para un estado transitorio: $f_{i,i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} < 1$

La aplicación de estos criterios en nuestro contexto se ha dividido en dos casos: los estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y el estado 4. Para el primer conjunto de estados, el empleo de la definición de $f_{i,i}^{(n)}$ genera incoherencias (o casos imposibles) con $n \geq 2$, pues requiere de que los estados intermedios sean distintos de i, para luego volver a i. En nuestro caso de conteo puramente ascendente, no se pueden volver a estados anteriores. No obstante, si que es posible

$$f_{i,i}^{(1)} = P(X_{k+1} = i, | X_k = i) .$$

Por lo que los criterios para determinar un estado transitorio o recurrente resultarán en valores menores a 1. En tanto, los estados $0, 1, 2, 3$ son transitorios.

Para el caso del estado 4, se ha considerado que la característica de *estado transitorio* o *estado recurrente* implican que una vez se *ha salido* de un estado, luego exista una probabilidad de volver. No es posible salir del estado 4. En tanto, el estado 4 no es transitorio ni recurrente, es absorbente.
- **Periodicidad:** Dado que los estados no estan comunicados, la única periodicidad que puede existir ocurre cuando i en K, vuelve a i en $k+1$, esto para los estados $\{1, 2, 3, 4\}$. Ahora este retorno puede suceder cada $k+1$,$k+2$,$k+3$,$\ldots$, diferencias de tiempo cuyo máximo común divisor es 1. En tanto, se cumple la condición para una cadena de Markov aperiódica.

Por último se analizará el comportamiento de la cadena en estado estacionario. Para esto, es posible hallar una nueva matriz de probabilidades de transición, que represente $p_{i,j}^{(n)}$.Esta última magnitud representa la probabilidad de que ocurra la transición de un estado i, que ocurre en k a j, que lo hace en $k+n$. Para esto, se emplea las ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_k p_{i,k}^{m} p_{k,j}^{n-m}$$
$$\text{para } m = 0, 1, 2, \ldots, n .$$

Con lo cual nacería matriz de probabilidades de transición dada una diferencia de tiempo n, $\mathbf{P}^n$. Se puede demostrar que cuando se obtiene el comportamiento en estado estacionario, es decir

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}^k,$$

la matriz resultante tiene todas sus filas de la forma [00001]. Esto significa que con con un número sumamente grande de comidas, se asegura la convergencia al estado 4. En otras palabras, el niño podrá completar la colección.

IV-B. Gambler's Ruin o Problema de la Ruina del Jugador

El problema de la ruina del jugador trata básicamente de un jugador que gana \$1 en cada ronda con probabilidad p y pierde \$1 con probabilidad $1p$, con cada ronda independiente con la siguiente.

El jugador juega de forma continua hasta que acumula una cantidad objetivo de \$ m (Ganancia) o si pierde todo su dinero (Quiebra). El objetivo es determinar las probabilidades de ganar (alcanzar \$ m) o perder (llegar a \$ 0) comenzando desde un estado inicial con cantidad de dinero $\$i$.

Para desarrollar este ejercicio, es necesario encontrar los estados de la Cadena de Markov e identificarlos entre ellos. Para lo cual se realiza un diagrama de transición de probabilidad mostrada en la Figura 2.

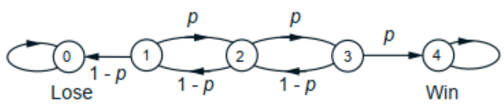

Figura 2: Cadena de Markov con diagramas de estado con el estado m = 4.

Observando la figura, se dice que el estado inicial (**0**) y el estado final (**m**) son absorbentes ya que son estados en los cuales el jugador no puede salir de allí, es decir el jugador llega a la quiebra y no tiene más dinero o el mismo gana hasta su objetivo y se retira con ganancia máxima.

Por lo tanto, los demás estados diferentes de *0* y *m*, son de tipo transitorios.

Entonces, se busca encontrar las probabilidades de absorción en cada uno de estados (0 y m), que dependen del estado inicial *i*.

Para desarrollar el problema, se supone el estado de absorción $s = 0$, en cuyo caso la probabilidad de absorción es la probabilidad de perder comenzando desde el estado *i*.

Estas probabilidades satisfacen:

- $a_0 = 1$
- $a_m = 0$
- $a_i = (1-p)a_{i-1} + p(a_{i+1})$, $1 \leq i \leq m-1$

Donde a_0 es la probabilidad cuando el estado inicial es $i = 0$ en el cual el jugador tiene $0 y por lo tanto la probabilidad de quiebra es 1. En el otro caso extremo, existe probabilidad 0 de quiebra cuando es a_m ya que el jugador tienen el objetivo de $m. Y se resuelve la ecuación para a_i, en donde el jugador empieza por un valor de dinero i.

Entonces, las ecuaciones se resuelven en términos de diferencias:

$$(1-p)(a_{i-1} - a) = (p)(a_i - a_{1+1})$$

Se define un δ_i y un ρ:

$$\delta_i = \rho\delta_{i-1}$$
$$\rho = \frac{1-p}{p}$$

Entonces:

$$\delta_i = \rho^i \delta_0$$

Se resalta que se evalúa en el rango para todo $i \neq 0y1$.

Ahora se realiza la suma de todos los δ:

$$\delta_0 + \delta_1 + ... + \delta m - 1 = a_0 - a_m = 1$$
$$(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^{m-1})\delta_0 = 1$$

Usando la fórmula de la suma de una serie geométrica, se obtiene:

$$\delta_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^m}, \rho \neq 1$$
$$\delta_i = \frac{1}{m}, \rho = 1$$

Una vez obtenidos los valores de ρ_i se puede calcular la probabilidad de absorción a_i:

$$a_i = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^{i-1})\delta_0$$

Y se obtiene dos expresiones diferentes, para el caso en el que el jugador obtenga su ganancia máxima o cuando llegue a la quiebra.

Estas ecuaciones son las siguiente:

Para la probabilidad de perder, empezando con una fortuna de dinero i;

$$a_i = \frac{\rho^i - \rho^m}{1-\rho^m}, \rho \neq 1$$
$$a_i = \frac{m-i}{m}, \rho = 1$$

Y para la probabilidad de ganar, empezando con una cantidad de dinero i, lo cual puede ser entendido como el complemento de $a'_i = 1 - a_i$. Ya que es el extremo opuesto;

$$a'_i = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^m}, \rho \neq 1 \quad (1)$$
$$a'_i = \frac{i}{m}, \rho = 1 \quad (2)$$

Las soluciones para ambos casos indican que para un $\rho > 1$:

$$\frac{1-p}{p} > 1$$
$$p < 0{,}5$$

Y adicionalmente, el jugador tiene probabilidades desfavorables para el jugador, entonces, la probabilidad de perder se acerca a 1 cuando el objetivo de llegar a m es muy grande.

Finalmente, lo que trata de buscar para el problema de la ruina del jugador, es obtener un indicador de probabilidad para evitar o saber cuando se perderá todo el dinero en apuestas. Ya que si no tiene unas probabilidades favorables, entonces se que si se busca obtener grandes ganancias bajo probabilidades desfavorables, existe una gran certeza de terminar en la ruina financiera para el apostador.

V. Aplicaciones de Cadenas de Markov

V-A. *Modelado del mecanismo RED*

El mecanismo RED (*Random Early Detection* o detección temprana aleatoria por sus siglas en inglés) es un algoritmo que gestiona y controla la congestión en los routers de la red. Dicho algoritmo espera y descarta paquetes hasta el momento en que la cola está llena pero comienza a descartarlos aleatoriamente un poco antes cuando la longitud de la cola comienza a crecer demasiado rápido.

El mecanismo RED es un algotimo del tipo AQM (*Active Queue Managment* o manejo de colas activas) que se introduce en los enrutadores IP en la capa de red (capa 3).

En este algoritmo, cuando un paquete llega al enrutador, se calcula una longitud de cola promedio de la forma:

$$avg = (1-x) \cdot avg + w \cdot n$$

Donde w es un valor arbitrario pequeño y n es el tamaño actual de la cola. Adicionalmente, se definen dos umbrales fijos: mínimo y máximo. Si la longitud promedio de la cola es mayor al umbral máximo, el paquete que se acaba de recibir es descartado. Por otra parte, si la longitud es menor al mínimo, el paquete se guarda. La Figura 4 muestra el diagrama de flujo que debe ejecutar mediante código el router. La fórmula para la probabilidad de descarte de un paquete es la siguiente y su función de densidad de probabilidad sew muestra en la Figura 3.

$$p_d(avg) = \begin{cases} 0 & \text{para } avg < min \\ \frac{avg-min}{max-min} \cdot p_{max} & \text{para } avg \in \langle min, max\rangle \\ 1 & \text{para } avg > max \end{cases}$$

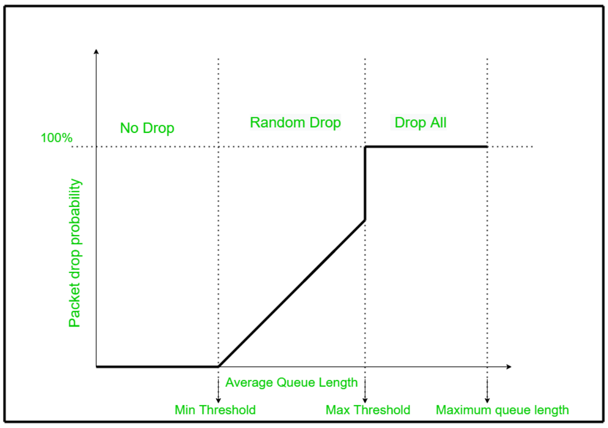

Figura 3: Función de densidad de probabilidad para la probabilidad de desechar paquetes.

En teoría, mientras más grande la cola, es más probable encontrar paquetes desechados.

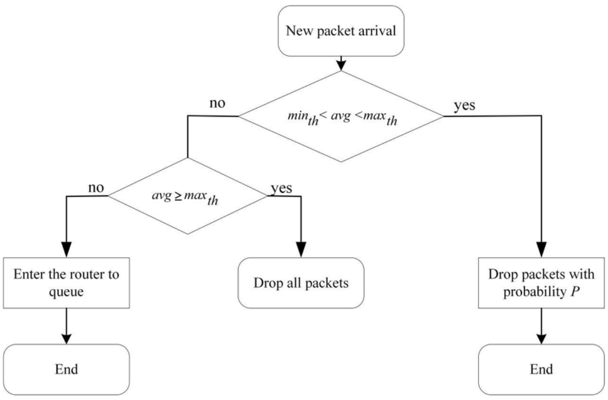

Figura 4: Diagrama de flujo del algoritmo RED

Para definir el *switch* o el accionar del controlador RED con DTMC, se define el vector de estados:

$$V = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$$

Donde n_1 es el tamaño actual de la cola, n_2 es la parte entera de longitud de cola promedio o $\lfloor avg \rfloor$ y los valores restantes de n_i (para $i = 3, 4, 5, 6$) hacen una aproximación de la parte fraccionaria de awg $(avg - \lfloor avg \rfloor)$ de la siguiente manera:

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{para } avg - \lfloor avg \rfloor \in \langle \frac{i-3}{4}, \frac{i-2}{4} \rangle \\ 1 & o.w \end{cases}$$

La llegada de un nuevo paquete está representada como la transición de un estado de la cadena de Markov desde $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ a $(n_1 + 1, n_2^*, n_3^*, n_4^*, n_5^*, n_6^*)$ donde $n_2^*, \ldots, n_6^*$ representa el avg calculado luego de la llegada de un nuevo paquete. Su contraparte, la salida de un paquete está representada por la transición del estado $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ a $(n_1 - 1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$. [1]

En lugar de evaluar eventos de llegada y salida de paquetes en tiempo continuo, para manejar estas Cadenas discretamente, se evalúa el tamaño de cola en intervalos de tiempo discretos. Esto significa que en cada unidad de tiempo se verifica si ocurre una llegada o salida de un paquete. Esto también sugiere que las transiciones de estado ocurren en cada paso discreto.

V-B. Modelo de movilidad Gauss-Markov en redes ad hoc móviles

Inicialmente, las redes inalámbricas han iniciado con una infraestructura fija, donde existe un punto de acceso centralizado para que los dispositivos finales (usuarios) puedan transferir información de diferente índole. Por otra parte, en la actualidad, ya se conoce y se maneja el concepto de redes inalámbricas sin infraestructura totalmente fija. Esto permite la conexión de dispositivos finales sin la necesidad de un punto de acceso centralizado. De esta manera, cada dispositivo (nodo) dentro de la red puede comportarse como emisor, receptor o enrutador de datos.

Las redes sin infraestructura o Ad-Hoc (Figura 5) aprovechan el gran crecimiento de memoria y procesamiento de los dispositivos móviles para así eliminar el punto de acceso centralizado, y realizar estos procesos de cómputo dentro de los dispositivos finales.

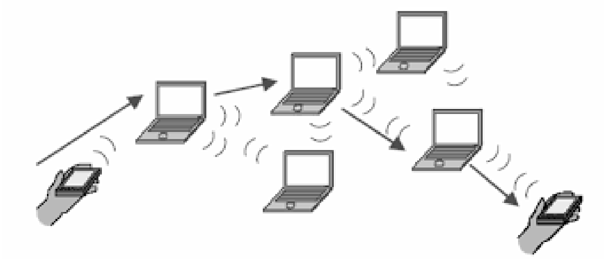

Figura 5: Red móvil Ad hoc

Sin embargo, considerando que las redes esporádicas permiten movilidad a los usuarios, las rutas de encaminamiento de datos no son predecibles con facilidad y por tanto implica una topología de red cambiante. Esto puede provocar que el encaminamiento de la información sobrecargue la red debido a los constantes descubrimientos de ruta, por lo tanto una red con bajo rendimiento y baja calidad de servicio.

Una solución es el modelo de movilidad Gauss-Markov. El constante cambio de posición y movilidad puede modelarse como un proceso estocástico donde las probabilidades de transición entre diferentes ubicaciones depende de factores como la velocidad de movimiento, dirección y configuración de la red.

El modelo de movilidad Gauss-Markov asume que la movilidad de los dispositivos puede ser modelada como un proceso estocástico donde los cambios de estado (por ejemplo, de emisor a receptor o enrutador) son probabilísticos y dependen del estado actual del dispositivo y de factores aleatorios modelados por una distribución Gaussiana.

VI. CONCLUSIONES

Las cadenas de Markov son relativamente simples de analizar cuando se trata de procesos suma puramente ascendentes. Esto se debe a que no existen relaciones de retorno entre los estados. En un proceso suma puramente ascendente se podría prescindir de todo tipo de retorno (inclusive de aquellos en los que el estado vuelve hacia sí mismo). Esto último no sucedió en el problema de la colección de juguetes, pues si existían probabilidades de retorno. En cuanto a la convergencia de la cadena de Markov, se podía intuir que la

Cadena debía converger hacia el estado absorbente, pues una vez que haya entrado, ya era imposible salir. Nuevamente, si se realiza una comparación con un proceso suma puramente ascendente sin estados absorbentes, la cadena de Markov no debería tener ninguna convergencia, pues existen estados infinitos.

En cuanto a la probabilidad de absorción, relacionado al problema de la ruina del jugador, proporciona un indicador de cómo las decisiones bajo incertidumbre pueden llevar a resultados predecibles en el largo plazo. En este caso particular, se demostró que bajo probabilidades desfavorables, la probabilidad de ruina financiera para el jugador se aproxima a 1 a medida que el capital del objetivo máximo aumenta, independientemente de su tamaño inicial. Este estudio ofrece una buena herramienta en la gestión de riesgos en situaciones de juego en apuestas, además se demuestra la aplicabilidad de las cadenas de Markov con estados absorbentes para otros ámbitos, como la economía y la ingeniería, para evitar llegar a un fracaso rotundo y apuntar para un buen éxito.

Las cadenas de Markov ofrecen una flexibilidad notable para modelar sistemas complejos donde el comportamiento futuro depende del estado actual, siendo aplicables tanto en el control de congestión de redes como en la gestión de movilidad en redes ad hoc móviles. Este tipo de proceso estocástico puede solventar de cierta forma las deficiencias ocasionadas por hardware. Estas aplicaciones permiten optimizar el rendimiento de las redes al simular y analizar diversos escenarios bajo condiciones dinámicas y variables, mejorando así la calidad de servicio mediante una previsión más efectiva y una gestión más eficiente de los recursos de red. Es de importancia entender el proceso debido a que en cierta forma modela máquinas de estados, las cuales permiten contruir y entender una red de computadoras.

REFERENCIAS

[1] B. Bylina, “Using markov chains for modelling networks,” *Department of Computer Science, Institute of Mathematics, Marie Curie-Skłodowska University*, 2005.

[2] S. L. Miller and R. L. Childers, *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. Academic Press, 2004.

[3] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, 9th ed. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2015.

[4] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. Ye, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9th ed. Pearson, 2011.

[5] V. M. Burbano, A. M. Valdivieso, and L. A. Salcedo, *Simulación con modelos aleatorios*. UPTC, 2014.

[6] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, 1st ed. Massachusetts Institute of Technology (MIT), 2000, lecture Notes for Course 6.041-6.431, Fall 2000.