

Ergodicidad y estimación de la Densidad Espectral de Potencia aplicada a una secuencia de bits aleatoria modulada por la PCM Bipolar RZ

Pablo Bermeo
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador

pablo.bermeog@ucuenca.edu.ec

Sebastián Guazhima
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador

sebastian.guazhima@ucuenca.edu.ec

Tyrone Novillo
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador

tyrone.novillo@ucuenca.edu.ec

Dayana Jara
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador
dayana.jara93@ucuenca.edu.ec

Jonnathan Robles
Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca
Cuenca, Ecuador
jonnathan.roblesr98@ucuenca.edu.ec

Resumen—This study investigates the statistical properties and periodicity of a bipolar RZ modulated signal by analyzing its time-averaged mean and time-averaged autocorrelation function. The results demonstrate that the time-averaged mean remains constant, indicating the signal is ergodic in mean, with temporal and ensemble means being equivalent. The autocorrelation function exhibits peaks at multiples of T and negative values, reflecting the repetitive and bipolar nature of the signal. The decay of autocorrelation with increasing τ signifies a loss of correlation over time, a characteristic of ergodic signals. Non-parametric estimation of PSD shows both direct and indirect methods approach the theoretical PSD with a $1/Tb$ bandwidth. The periodogram method reveals greater variability and sensitivity to sample variations, useful for detecting fine spectral details. The indirect method, with 100 samples, offers a more stable spectral representation, which significantly improves with 10,000 samples, despite higher computational demands.

Keywords— Bipolar RZ modulation, time-averaged mean, autocorrelation, ergodicity, power spectral density, periodogram method, non-parametric estimation

I. INTRODUCCIÓN

Un proceso estocástico es un concepto que conlleva a representar magnitudes aleatorias, o una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, como el tiempo. En estos sistemas, el comportamiento no es determinista, ya que el estado siguiente del sistema se determina tanto por las acciones predecibles del proceso como por elementos aleatorios. Entonces, las sucesiones aleatorias se refieren a situaciones en las que es posible observar o medir varios eventos impredecibles de forma simultánea.

En el ámbito de las comunicaciones, los procesos estocásticos son importantes para el análisis y diseño de sistemas. Estos procesos permiten modelar y predecir el comportamiento de señales que presentan un comportamiento aleatorio. Un contexto en el cual se aplica la aleatoriedad es en los bits que serán enviados, no sin antes haber sido modulados.

Justamente en este último concepto, la modulación, reposa un extenso mundo de técnicas y lógicas codifican la información a partir

de amplitudes, frecuencias, fases, signo, etc. Dentro de estas modulaciones se encuentran las llamadas *Pulse Code Modulation* (PCM) que emplean distintas formas de pulsos para modular o representar un bit 1 o 0. Si los pulsos son siempre de un mismo signo, se los conoce como unipolares, si toman amplitudes con distinto signo se conocen como bipolares. Por otra parte el pulso podría durar todo el tiempo de representación de un bit o únicamente la mitad. Esto último produce la distinción entre modulación sin retorno a cero (NRZ) o con retorno a cero (RZ).

Acorde a los conceptos anteriores, se ha planteado el análisis de una modulación PCM Bipolar RZ como un proceso estocástico que recibe una secuencia aleatoria de bits. En este contexto, el análisis se centrará en primer lugar en el desarrollo analítico de la representación del proceso estocástico: obtención de función de media, autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia. Luego, se analizará la Ergodicidad del proceso mediante aproximaciones aplicada a una realización (modulación PCM) de 10000 bits aleatorios. Por último se realiza la aproximación de la Densidad espectral de potencia a partir de métodos no paramétricos indirectos y directos.

II. MARCO TEÓRICO

II-A. Modulación Bipolar RZ

La lógica Bipolar RZ es un tipo de modulación por Líneas de código o también llamado *Pulse Code Modulation* (PCM). En este caso el nombre de Bipolar hace referencia a que emplea dos valores de distinto signo para un bit a modular 1 o 0. A diferencia de otros tipos de códigos en los que el pulso (o función base) que se emplea para representar cada bit ocupa un valor constante en todo el tiempo de bit; la característica RZ de este tipo de modulación refiere a que el pulso con el que se modula *retorna a cero*. El significado de RZ es *return zero*.

En este caso la característica de retorno a cero, se aplica a la modulación de un bit 1. En la modulación Bipolar RZ, 1 se modula con un valor 1 o -1 que dura la mitad del tiempo de bit, luego, como su nombre lo dice, retorna a cero.

II-B. Ergodicidad

Un proceso estocástico es ergódico si se puede caracterizar estadísticamente a partir de una realización.

El calculo de los distintos momentos estadísticos (esperanza y autocorrelación) supone la integración sobre todo el espacio de medida. Esto significa conocer un modelo para el proceso, o tener registrados todos los experimentos posibles. [1]

A continuación se muestran las formulas de ergodicidad:
II-B1. media promediada en el tiempo:

$$\langle s(t) \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} s(t) dt \quad (1)$$

II-B2. autocorrelación promediada en el tiempo:

$$R_{ss}(\tau) = \langle s(t) \rangle \langle s(t+\tau) \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} s(t)s(t+\tau) dt \quad (2)$$

Existe un conjunto de procesos llamados ergódicos para los cuales las medias estadísticas coinciden con las medias temporales. Evidentemente, un proceso ergódico debe ser estacionario ya que las medias temporales justamente integran a lo largo del tiempo para obtener resultados constantes.

II-C. Estimadores no paramétricos de la densidad espectral de potencia

Los estimadores no paramétricos de la DSP permiten analizar la composición en frecuencia de una señal sin asumir un modelo específico para el proceso generador de la señal. Esto es especialmente útil en situaciones donde el modelo subyacente de la señal no es conocido o es muy complejo. Estos estimadores pueden identificar las frecuencias en las cuales una señal tiene mayor energía. La DSP proporciona información sobre cómo se distribuye la potencia de un proceso estocástico a través de diferentes frecuencias. Esto es de utilidad en la caracterización de procesos como ruido blanco, ruido de banda estrecha y ruido de banda ancha.

Los métodos no paramétricos para estimar la DSP se dividen generalmente en dos categorías: el método directo, conocido como periodograma, y el método indirecto, también llamado método de la correlación.

II-C1. Método Directo: Periodograma: El periodograma se basa en la transformada de Fourier de la señal y su objetivo es estimar la densidad espectral de potencia a partir de muestras finitas del proceso.

Sea $S(t)$ un proceso estocástico estacionario, y supongamos que se tiene un conjunto de N muestras $S(0), S(1), \dots, S(N-1)$. El periodograma se define como:

$$\hat{S}_{SS}(f) = \frac{1}{2t_0} |S(f)|^2 \quad (3)$$

- **Sesgo y Varianza:** El periodograma es un estimador insesgado de la DSP verdadera, pero su varianza no disminuye al aumentar N , lo que puede llevar a estimaciones ruidosas.
- **Resolución de Frecuencia:** La resolución de frecuencia del periodograma depende inversamente del número de muestras N .

II-C2. Método Indirecto: Método de la Correlación:

El método indirecto se basa en la estimación de la función de autocorrelación del proceso estocástico y luego en la aplicación de la transformada de Fourier para obtener la DSP.

Primero, se estima la función de autocorrelación $R_{SS}(k)$ del proceso $S(t)$:

$$\hat{R}_{SS}(\tau) = \left\langle s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right\rangle \quad (4)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0 - |\tau|} \int_{-t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 - \frac{|\tau|}{2}} s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) dt \quad (5)$$

Una vez estimada $\hat{R}_{SS}(k)$, se obtiene la PSD mediante la transformada de Fourier:

$$\hat{S}_{SS}(f) = \mathcal{F}\{\hat{R}_{SS}(\tau)\} \quad (6)$$

- **Sesgo y Varianza:** A diferencia del periodograma, el método de la correlación puede tener menor varianza si se usa un estimador de autocorrelación adecuado.
- **Ventaneo:** Es común aplicar una ventana de peso $w(n)$ a la señal para reducir el efecto de las discontinuidades en los bordes de las muestras.

Aunque el periodograma es simple de implementar y computacionalmente eficiente, puede ser ruidoso debido a su alta varianza. Su contraparte, el método de la correlación ofrece mejores estimaciones en términos de varianza, pero requiere estimar la función de autocorrelación, lo cual puede ser más complejo y computacionalmente costoso.

III. DESARROLLO

III-A. Desarrollo analítico

Considerando la forma general de la modulación mediante la lógica Bipolar RZ

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b),$$

donde a_k pertenece a una secuencia aleatoria a_n que puede tomar valores de 1, -1 o 0, T_b es el tiempo de duración de un bit; La función $p(t)$ se define en la modulación Bipolar RZ como

$$p(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < T_b/2 \\ 0, & \text{ow} \end{cases}$$

y se presenta en la Figura 1

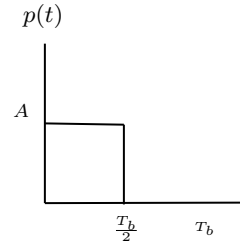


Figura 1: Función base para la modulación bipolar RZ.

Se sabe que la función de autocorrelación de $s(t)$ está dada por

$$R_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k] p(t) * p(-t)|_{\tau - kT_b}.$$

En la última expresión es posible visualizar que la función de autocorrelación depende únicamente de τ ; suceso que comprende una mínima intuición sobre la característica WSS del proceso $s(t)$.

Además, la caracterización probabilística del proceso requiere de su función de valor esperado junto con la autocorrelación. Note que la última expresión aún no está completamente definida, pues se requiere de los valores correspondientes a $R_{AA}[k]$.

En este sentido se procede a realizar el cálculo de la función de media para $s(t)$, $\mu_S(t)$.

Considerando

$$\mu_S(t) = E \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b) \right\},$$

y el hecho de que a_k es el único elemento aleatorio, se tiene que

$$\mu_S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{a_k\} p(t - kT_b).$$

En tanto, se requiere de $E\{a_k\}$. Para el cálculo de $E\{a_k\}$, se ha reconocido el hecho de que el valor modulador de amplitud $a_k = 0$ ocurre únicamente si un bit 0 llega a ser modulado; el bit 1, puede generar valores moduladores de amplitud $a_k = 1$ o $a_k = -1$. Dado que un bit recibido o (dispuesto para modulado) tiene la misma probabilidad de ser 0 o 1, entonces la probabilidad $a_k = 0$ sería de 1/2, mientras que las probabilidades $a_k = 1$ y $a_k = -1$ se dividen de forma equitativa ya que no existe desigualdad de dependencia ante su *suceso generador* que es un bit 1 dispuesto a ser modulado. El esquema 2 es una representación de la lógica descrita.

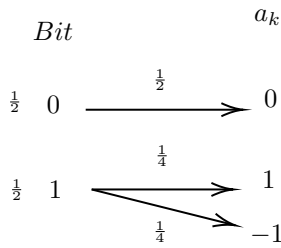


Figura 2: Distribución de probabilidad para los distintos valores de a_k .

A partir de esta última deducción se procede a calcular $E\{a_k\}$ como

$$E\{a_k\} = (0) \left(\frac{1}{2}\right) + (1) \left(\frac{1}{4}\right) - (1) \left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Al aplicar este concepto sobre $\mu_S(t)$ se tiene que

$$\mu_S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{a_k\} p(t - kT_b) = 0.$$

Ahora se procede a realizar el cálculo de la función de autocorrelación de a_k , $R_{AA}[k, k+m]$. Antes de pasar a la resolución considérese que debido a la lógica de la modulación Bipolar RZ, si dos valores 1 sucesivos llegan a ser modulados, uno de ellos empleará $a_k = 1$ y el siguiente $a_{k+1} = -1$ o viceversa. Es decir que en valores 1 sucesivos, la ocurrencia a_k tiene un efecto sobre a_{k+1} : acotar su espacio muestral de $a_{k+1} = 1$ y $a_{k+1} = -1$ a **únicamente** $a_{k+1} = 1$ o $a_{k+1} = -1$. Esto último altera las probabilidades de a_{k+1} .

En cambio, si no se analizan bits 1 que son sucesivos, si no que tienen una separación de 2, 3, ..., m valores, la alteración debida a a_k sobre a_{k+m} es inexistente. Ya no existe un acotamiento del espacio muestral. En este sentido, se han propuesto tres casos de análisis:

1. Caso $m = 0$. En este caso, por la definición de $R_{AA}[k, k]$, se tiene

$$R_{AA}[k, k] = E\{a_k^2\}.$$

Note que la variable aleatoria a_k^2 arroja el valor de 0 cuando $a_k = 0$ y 1, cuando $a_k = 1$ o $a_k = -1$. Es decir que el evento $a_k^2 = 0$ comparte la probabilidad de $a_k = 0$. En cambio, $a_k^2 = 1$ se compone de la suma de probabilidades de $a_k = -1$ y $a_k = 1$. En tanto

$$R_{AA}[k, k] = E\{a_k^2\} = (1) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + (0) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. Caso $m = \pm 1$: En el diagrama de la figura 3 se muestran los posibles resultados que arroja el producto $a_k a_{k\pm 1}$. La probabilidad conjunta de cada fila en el diagrama se consigue a través de la multiplicación directa $P(a_k = a)P(a_{k\pm 1} = b)$ debido su independencia. No obstante, surge una excepción, como ya se explico anteriormente, cuando $a = 1$ y $b = -1$. Esto provoca que se origine una dependencia en este evento y, por lo tanto,

$$P(a_k = 1 \text{ y } a_{k\pm 1} = -1)$$

$$= P(a_k = 1 | a_{k\pm 1} = -1) P(a_{k\pm 1} = -1) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

La situación se repite cuando se trabaja la probabilidad $P(a_k = -1 \text{ y } a_{k\pm 1} = 1)$

a_k	$a_{k\pm 1}$	$P(a_k a_{k\pm 1})$
0	0	1/4
0	1	1/8
0	-1	1/8
1	0	1/8
1	1	No se puede dar
1	-1	1/8
-1	0	1/8
-1	1	1/8
-1	-1	No se puede dar

Figura 3: Distribución de probabilidad para los distintos valores de $a_k a_{k+1}$.

Finalmente, se tiene que

$$E\{a_k a_{k+1}\} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}.$$

3. Caso $|m| > 1$: En este caso las probabilidades cambian debido a que ya no existen dependencias. En tanto, toda probabilidad se calcula a través de la multiplicación directa $P(a_k = a)P(a_{k\pm m} = b)$. Además, el espacio muestral de $a_k a_{k\pm m}$ se expande con dos elementos mas. Esto se puede observar al comparar los diagramas 3 y 4. Con el nuevo conjunto de probabilidades, se puede operar el valor esperado $E\{a_k a_{k\pm m}\}$:

$$E\{a_k a_{k\pm m}\} = (1) \left(\frac{1}{16}\right) + (1) \left(\frac{1}{16}\right) + (-1) \left(\frac{1}{16}\right) + (-1) \left(\frac{1}{16}\right) = 0.$$

Se concluye que $R_{AA}[k, k+m] = R_{AA}[m]$ y se tiene el siguiente comportamiento:

a_k	a_{k+m}	$P(a_k a_{k+m})$
0	0	1/4
0	1	1/8
0	-1	1/8
1	0	1/8
1	1	1/16
1	-1	1/16
-1	0	1/8
-1	1	1/16
-1	-1	1/16

Si se puede dar

Si se puede dar

Figura 4: Distribución de probabilidad para los distintos valores de $a_k a_{k+1}$.

$$R_{AA}[m] = \begin{cases} \frac{1}{2} & , m = 0 \\ -\frac{1}{4} & , m = \pm 1 \\ 0 & , \text{ow} \end{cases}$$

Al volver a considerar la autocorrelación de $S(t)$

$$R_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k] p(t) * p(-t)|_{\tau-kT_b}$$

junto con lo hallado acerca de $R_{AA}[m]$, se tiene que

$$R_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_b} \left[-\frac{1}{4} p(t) * p(t)|_{\tau+T_b} + \frac{1}{2} p(t) * p(-t)|_{\tau} - \frac{1}{4} p(t) * p(t)|_{\tau-T_b} \right]$$

A partir de esta última expresión también es posible hallar la densidad espectral de potencia de $S(t)$. En general

$$S_{ss}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k] e^{-j2\pi f k T_b}$$

por lo que al unirlo con el mismo hallazgo de $R_{AA}[m]$ se tiene que

$$\begin{aligned} S_{ss}(f) &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left[-\frac{1}{4} e^{-j2\pi f T_b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2\pi f T_b} \right] \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left(\frac{1 - \cos(2\pi f T_b)}{2} \right) \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sin^2(\pi f T_b) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene la siguiente caracterización del proceso $S(t)$

- Función de media: $\mu_S(t) = 0$

- Función de autocorrelación:

$$R_{ss}(\tau) = \frac{1}{T_b} \left[-\frac{1}{4} p(t) * p(t)|_{\tau+T_b} + \frac{1}{2} p(t) * p(-t)|_{\tau} - \frac{1}{4} p(t) * p(t)|_{\tau-T_b} \right]$$

- Densidad Espectral de Potencia:

$$S_{ss}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sin^2(\pi f T_b)$$

Donde $|P(f)| = \frac{T_b}{2} \text{Sinc}\left(\frac{T_b}{2} f\right)$

La gráfica resultante de la autocorrelación se presenta en la Figura 5.

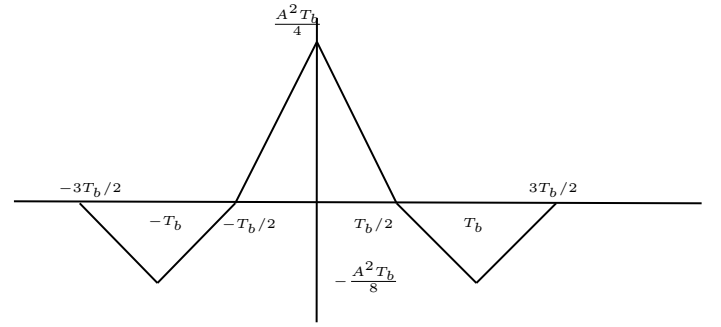


Figura 5: Autocorrelación de $S(t)$, $R_{ss}(\tau)$.

La gráfica de la Densidad Espectral de Potencia se presenta en la Figura 6

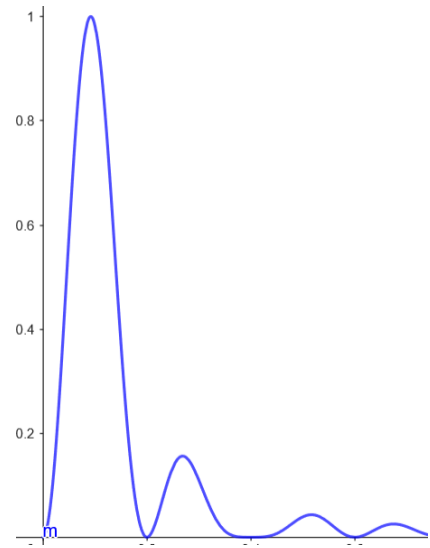


Figura 6: Densidad Espectral de Potencia.

III-B. Modulación Bipolar RZ

La modulación Bipolar RZ requiere de dos lógicas para ser implementado. La primera se centra en el hecho de que esta modulación usa un valor 1 para un bit recibido 1, pero si luego llega nuevamente un valor 1, entonces el valor con el que se produce la modulación es -1 ; para el siguiente uno, será 1 y el patrón continúa. En resumen, la modulación de un bit 1 alterna entre valores 1 y -1 .

La segunda lógica únicamente esta relacionada a la función base de la modulación, que tiene que desplazarse a medida que se modulan los bits.

Para la primera lógica, se ha implementado un código sencillo que se encarga de alternar los valores 1 y -1 para la llegada de bits 1. Esto, lo realiza a través de una bandera que toma el valor de 1 cuando un bit 1 ya ha sido modulado con un valor 1; a partir de esta señal, el siguiente 1 se modulará con un -1 y cambiará el valor de la bandera a 0. A continuación se presenta la codificación:

```
aks = [];
bl_flag = 0;

for i = 1:length(bk)

    current_bit = bk(i);

    if( current_bit == 0 )
        ak = 0;
    elseif ( current_bit == 1 & bl_flag == 0 )
        ak = A;
        bl_flag = 1;
    elseif ( current_bit == 1 & bl_flag == 1 )
        ak = -A;
        bl_flag = 0;
    end

    aks(i) = ak;
end

Mod_Signal = [];
T_total = [];

for i = 0:length(aks) - 1
    if i == 0
        T_total(1,1:res) = linspace(0,T,res);
        Mod_Signal(1, 1:res) = aks(1)*p;
    else
        T_total( 1, i*res:(i+1)*res - 1 ) =
            linspace( i*T + 1e-3, (i+1)*T, res );

        Mod_Signal(1,i*res:(i+1)*res - 1) = aks(i+1)*p;
    end
end
```

El resultado de la modulación para una serie de bits $a_k = \{01101001\}$ se presenta en la figura 7.

III-C. Ergodicidad

En Matlab se implemento un programa descrito en anexos, para encontrar la media y autocorrelación promediada en el tiempo

III-C1. Media promediada en el tiempo: Para calcular la función de media promediada en el tiempo se uso la ecuación ya mencionada.

$$\langle s(t) \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} s(t) dt \quad (7)$$

Con la función trapz(), se integra una muestra de $s(t)$, obteniendo la grafica 8.

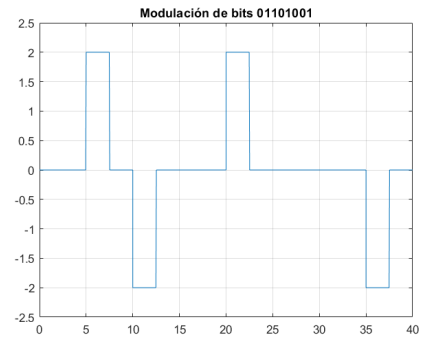


Figura 7: Modulación de los bits 01101001 con $T_b = 5$ y amplitud de modulación de 2

III-C2. Autocorrelación promediada en el tiempo: Ahora para calcular la función de autocorrelación promediada en el tiempo se calculo de acuerdo a la ecuación.

$$R_{ss}(\tau) = \langle s(t) \rangle \langle s(t + \tau) \rangle = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} s(t)s(t + \tau) dt \quad (8)$$

Para calcular la función de la autocorrelación se desplazo la señal construida PCM con respecto al desplazamiento τ como vector y luego se integra en el intervalo de tiempo de toda la secuencia, obteniendo la grafica 9.

III-C3. Graficar y comparar las funciones ensemble con las promediadas en el tiempo de media y autocorrelación e indique si $s(t)$ es ergódica en la media y/o en la autocorrelación:

■ Función en la media:

Se puede observar en la figura 8 que la función de media promediada en el tiempo tenderá a 0, por lo que es ergódica en la media.

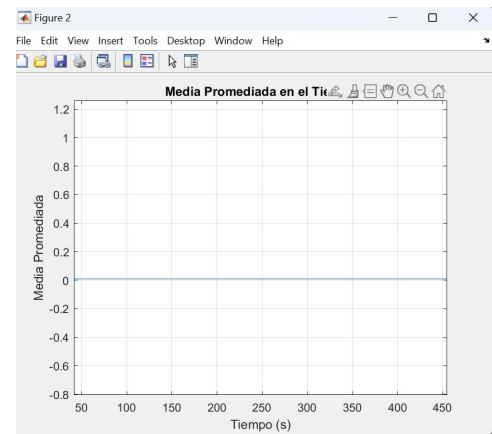


Figura 8: Función de media promediada en el tiempo

■ Función en la autocorrelación:

En la figura 9 se muestra la función de autocorrelación promediada en el tiempo la cual puede mostrar picos y valles que indican la correlación positiva y negativa entre los puntos en el tiempo. Un pico en $\tau = 0$ representa la autocorrelación máxima, ya que la señal está perfectamente correlacionada consigo misma sin desfase.

La presencia de picos en intervalos de $\tau = \pm nT$ (donde n es un entero) indica la repetitividad de la señal modulada. Esto es esperado en una señal modulada bipolar RZ, donde los bits están separados por un tiempo T . La presencia de valores negativos en la autocorrelación refleja la naturaleza bipolar de la señal. Cuando τ coincide con el desfase de un bit positivo y un bit negativo, la correlación es negativa. La función de autocorrelación es decreciente a medida que τ se aleja de cero indica la pérdida de correlación a medida que los puntos en el tiempo están más separados. Este comportamiento es típico en señales ergódicas.

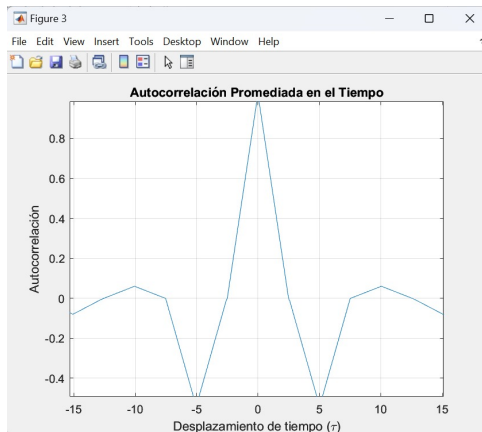


Figura 9: Función de autocorrelación promediada en el tiempo

III-D. Estimación de la densidad espectral de potencia

A continuación, se detalla la implementación en Matlab para la estimación de PSD (*Power Spectral Density*) mediante dos métodos; el método indirecto o estimación de autocorrelación y el método directo o de periodograma:

III-D1. Método directo: Para estimar la densidad espectral de potencia involucra el tomar una realización del proceso estocástico, es decir una realización de la señal $s(t)$ que está modulada por BRZ. Para esta señal, se obtendrá su transformada de Fourier, para posteriormente sacar la magnitud cuadrática de la transformada y dividirla para dos veces la duración de la señal (t_0). Este método es el más sencillo para obtener la estimación de la PSD mediante solo una realización del proceso estocástico.

Como se observa a continuación, se muestra las líneas de código implementadas para este método:

```
s = Mod_Signal;
ts = T_total;
TF_S = abs(fftshift(fft(s)));
L = length(TF_S);
F1_sam = 100; %frecuencia de muestreo
f1 = (-(L)/2 : (L)/2-1)/(L)*F1_sam;

PSD_DIRECTO = ((1/(2*length(ts)))*(TF_S).^2);
```

En el código se observa la transformada de la señal $s(t)$ mediante el uso de la FFT y *fftshift* para centrar las frecuencias de la señal, para luego aplicar la ecuación del periodograma. Además, se obtuvo el vector de frecuencias $f1$ normalizado por la longitud L y escalado por la frecuencia de muestreo. Este vector representará el eje de frecuencias para la transformada de Fourier.

III-D2. Método indirecto: Para obtener la estimación de la PSD del proceso estocástico mediante este método es mediante un proceso de estimación de la función de autocorrelación de la señal.

Debido a que el proceso estocástico es **WSS**, entonces la estimación de la función de autocorrelación $\hat{R}_{ss}(\tau)$ se puede obtener. Entonces, para estimar la autocorrelación, se la realiza para dos señales s desplazadas $(t - \frac{\tau}{2})$ y $(t + \frac{\tau}{2})$. Entonces, se debe integrar la multiplicación de las señales desplazadas con los límites definidos $t_0 - \frac{|\tau|}{2}$ y $-t_0 + \frac{|\tau|}{2}$ y luego multiplicar el resultado para dos veces la duración de la señal desplazada por un τ .

Entonces, en Matlab se debe generar diferentes valores para el desplazamiento de la señal, para generar diferentes desplazamientos τ . Lo que fue realizado mediante la porción de código que se muestra a continuación:

```
n_bits = length(s); %número de muestras
dt = 1; % Incremento de tiempo
tau_max = n_bits-1; %desplazamiento max de tau
d_tau = 1; % Incremento de tau
tau = -tau_max:d_tau:tau_max; % Vector de tau

% Función de autocorrelación
R_SS = zeros(size(tau));
for i = 1:length(tau)
    desplazamiento = round(tau(i)/2);

    if tau(i) >= 0
        s_desp = s(1:end-desplazamiento) .* ...

            s(desplazamiento+1:end);
    else
        s_desp = s(1-desplazamiento:end) .* ...

            s(1:end+desplazamiento);
    end
    R_SS(i) = (1/(2*n_bits - abs(tau(i))))...
```

```

* sum(s_desp);
end

%%%transformada de Rss (PSD)%%%

S_SS = abs(fftshift(fft(R_SS)));
L2 = length(S_SS);
F2_sam = 200;
f = (-L2/2: L2/2-1)/L2*F2_sam;

```

Para estimar correctamente, se debe crear un vector de desplazamiento para que τ tome esos valores, este se creará usando la longitud total de la señal.

Para crear los desplazamientos de la señal

Para desplazar la señal, se inicia un bucle *for* que recorre cada valor en el vector tau. Se calcula el desplazamiento como la mitad del valor actual de tau, redondeado como un entero.

A continuación, se evalúa si el valor de tau es mayor o igual a cero, multiplica los elementos de s desplazados hacia adelante por los elementos originales de s. Si tau es negativo, multiplica los elementos de s desplazados hacia atrás por los elementos originales de s. Así, obteniendo las dos señales desplazadas hacia adelante y detrás multiplicadas.

Finalmente, se calcula el valor de la función de autocorrelación para el desplazamiento actual. Esto se hace tomando la suma discreta de los productos y dividiéndola por el factor $\frac{1}{2t_0 - |\tau|}$.

Y de igual forma, se calcula la transformada de Fourier de la estimación de la autocorrelación y obtener la estimación de la PSD y de forma similar se obtuvo el vector de frecuencias normalizado. En este caso, es de tomar en cuenta que la longitud total de la señal es el doble debido al vector de desplazamiento τ .

III-D3. Obtención de gráficas de la estimación del PSD:

A continuación se muestran las gráficas obtenidas al estimar la densidad espectral de potencia mediante la aplicación de los dos métodos vistos en esta práctica.

En la figura 10, se muestra la estimación usando el método del periodograma, en este caso es para una cantidad de 100 bits modulados.

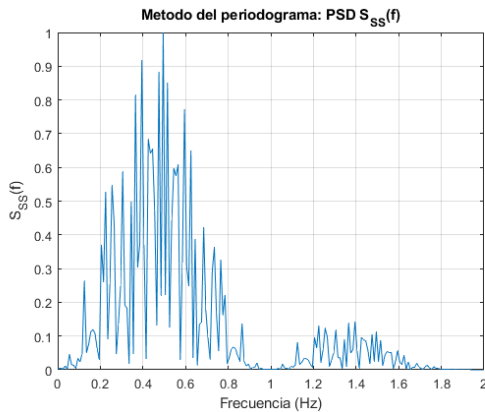


Figura 10: Estimación de la PSD usando el periodograma (100 bits modulados)

También, en la Figura 11, se muestra la estimación de la potencia al usar el método de indirecto o de estimación de auto correlación.

Estas gráficas están normalizadas en amplitud y en frecuencia, en el caso de la frecuencia se normalizó para $1/T_b$ tomando en cuenta la longitud de la señal en frecuencia.

A simple vista, para una cantidad no muy mayor de bits codificados, se puede observar que la estimación de PSD mediante ambos métodos coinciden en donde se concentra la densidad de potencia

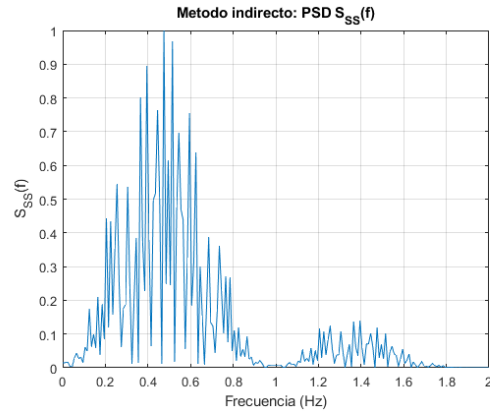


Figura 11: Estimación de la PSD usando el método indirecto (100 bits modulados)

de la señal codificada mediante BRZ. Se puede decir también que el ancho de banda es $1/T_b$ con un $T_b = 1$ (Banda base), en la cual se concentra la mayor parte de la potencia de la señal. Además, comparando con la PSD teórica, las estimaciones realizadas son correctas.

Cabe resaltar que la resolución para 100 bits no es muy clara, entonces se realizará la estimación para una gran cantidad de bits (10 000 bits modulados).

En las Figuras 12 y 13 se muestra las estimaciones con una cantidad suficientemente grande de bits, en ellas se muestra una mejor resolución. Se puede reafirmar que la mayor cantidad de l espectro de densidad de potencia de la señal se encuentra para el ancho de banda señalado anteriormente.

Además, se resalta que le método indirecto presenta una gráfica uniforme a lo largo de las frecuencias y con menor ruido y picos de la señal *sinc* mas uniformes en comparación con el método del periodograma, esto debido a todas las iteraciones que realiza el método indirecto y además de duplicar la longitud de las señales desplazadas.

Se recalca que el método indirecto es mejor, sin embargo, este tiene una mayor exigencia computacional ya que más de 2 horas se tomo el tiempo de compilación para obtener la estimación indirecta. En comparación con el periodograma, este es mas sencillo de implementar.

Como adición, para el proceso de la estimación de PSD por el método indirecto, se necesito encontrar la función de auto correlación estimada que se puede observar en la Figura 14.

IV. CONCLUSIONES

La función de media promediada en el tiempo y la función de autocorrelación promediada en el tiempo de una señal modulada bipolar RZ proporcionan una visión integral sobre las propiedades estadísticas y la periodicidad de la señal. De las gráficas obtenidas, se observa que la media promediada en el tiempo se mantiene constante, lo que sugiere que la señal es ergódica en la media, es decir, la media temporal y la media ensemble son equivalentes. Asimismo, la función de autocorrelación muestra picos en múltiplos de T y valores negativos, reflejando la estructura repetitiva y la naturaleza bipolar de la señal. El decrecimiento de la autocorrelación a medida que τ aumenta indica una pérdida de correlación con el tiempo, lo cual es característico de señales ergódicas. En conjunto, estos resultados confirman que la señal modulada bipolar RZ es ergódica tanto en la media como en la autocorrelación, validando su comportamiento estadístico predecible y su estructura temporal consistente.

Respecto a la estimación no paramétrica, ambos se acercan a la PSD teorica, mostrando un ancho de banda de $1/T_b$ en banda base. En

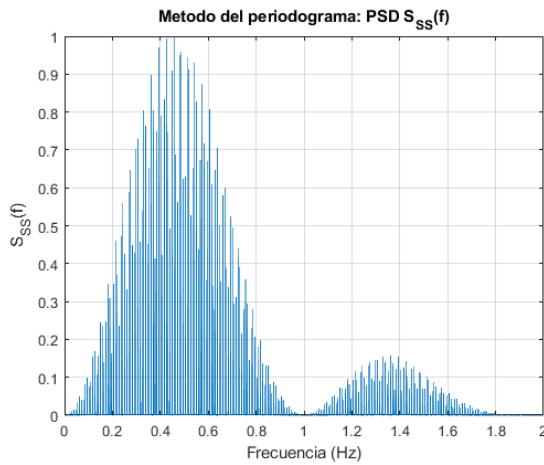


Figura 12: Estimación de la PSD usando el periodograma para 10 000 bits modulados)

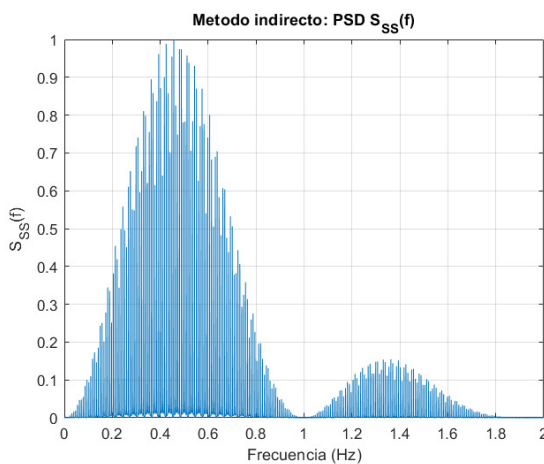


Figura 13: Estimación de la PSD usando el metodo indirecto para 10 000 bits modulados)

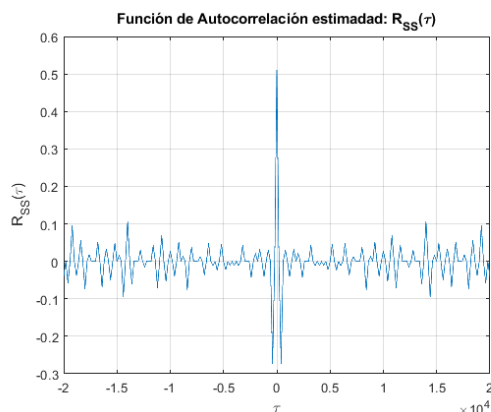


Figura 14: Estimación de la autocorrelación (100 bits modulados)

la primera comparación de los métodos directo e indirecto con 100

muestras, el método del periodograma mostró mayor variabilidad en las estimaciones de PSD, con picos más pronunciados y fluctuaciones más marcadas. Esto sugiere una mayor sensibilidad a las variaciones de la muestra, lo que puede ser útil para detectar detalles finos en los datos espectrales.

El método indirecto con 100 muestras presentó una PSD más uniforme y menos ruidosa, con picos menos pronunciados pero más consistentes a lo largo de las frecuencias, lo que indica una mayor estabilidad en la representación espectral. Sin embargo, al incrementar el tamaño de la muestra a 10,000 en el método indirecto, se observa una mejora notable en la resolución y estabilidad de la PSD. La gráfica con 10,000 muestras muestra una PSD que mantiene una forma general similar a la obtenida con 100 muestras, pero más clara y con menos ruido.

Computacionalmente, el método indirecto es más preciso, pero también más complejo y exigente en términos de recursos. Para generar la gráfica con 10,000 muestras, se requirió un tiempo de procesamiento de más de 4 horas, lo que refleja la alta carga computacional necesaria para este método.

Mientras que el método directo proporciona una visión más detallada y específica de la variabilidad espectral con tamaños de muestra pequeños, el método indirecto se beneficia significativamente de un mayor tamaño de muestra, ofreciendo una representación más estable y precisa de la PSD. Debido a esto es importante considerar el tamaño de la muestra y el método de estimación adecuado según los requisitos específicos del análisis espectral.

REFERENCIAS

- [1] F. Paganini, "Ergodicidad en procesos estocásticos," 2013.
- [2] S. L. Miller and R. L. Childers, *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. Academic Press, 2004.
- [3] J. L. Devore, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, 9th ed. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2015.
- [4] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, and K. Ye, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9th ed. Pearson, 2011.
- [5] R. Rincón Duarte, "Ruido gaussiano blanco aditivo," 2014.
- [6] V. M. Burbano, A. M. Valdivieso, and L. A. Salcedo, *Simulación con modelos aleatorios*. UPTC, 2014.

V. ANEXOS

V-A. Generador de modulación Bipolar RZ

```
1 function[Mod_Signal, T_total] = GenBipRZ(A,T,bk)
2
3 %Resolucion
4 res = 100;
5
6 %=====
7 % Generar los valores a_k para la modulacion
8 %=====
9
10 aks = [];
11 bl_flag = 0;
12
13
14 for i = 1:length(bk)
15
16     current_bit = bk(i);
17
18     if( current_bit == 0 )
19         ak = 0;
20     elseif ( current_bit == 1 & bl_flag == 0 )
21         ak = A;
22         bl_flag = 1;
23     elseif ( current_bit == 1 & bl_flag == 1 )
24         ak = -A;
25         bl_flag = 0;
26     end
27
28     aks(i) = ak;
29 end
30 %=====
31
32
33
34 %=====
35 %           Modular con los aks
36 %=====
37 %Definicion de la señal p(t) a desplazar
38 op = ones(1,res/2);
39 zp = zeros(1,res/2);
40 p = [op zp];
41
42 %Modulacion
43 Mod_Signal = [];
44 T_total = [];
45
46 for i = 0:length(aks) - 1
47
48     if i == 0
49         T_total(1,1:res) = linspace(0,T,res);
50         Mod_Signal(1, 1:res) = aks(1)*p;
51     else
52         T_total( 1, i*res:(i+1)*res - 1 ) = linspace( i*T + 1e-3, (i+1)*T, res );
53
54         Mod_Signal(1,i*res:(i+1)*res - 1) = aks(i+1)*p;
55     end
56
57 end
58
59 %=====
60
61 end
```

V-B. Funciones de Media y Autocorrelación

```
1 %=====
2 % MEDIA PROMEDIADA EN EL TIEMPO
3 %=====
4 T_total_duration = T_total(end) - T_total(1); % Duración total del tiempo
5 time_averaged_mean = trapz(T_total, Mod_Signal) / T_total_duration;
6
7 fprintf('Media promediada en el tiempo: %f\n', time_averaged_mean);
8
9 % Graficar la media promediada en el tiempo
10 figure;
11 plot(T_total, time_averaged_mean * ones(size(T_total)));
12 title('Media Promediada en el Tiempo')
13 xlabel('Tiempo (s)')
14 ylabel('Media Promediada')
15 grid on;
```

```

16
17 %=====
18 % AUTOCORRELACION PROMEDIADA EN EL TIEMPO
19 %=====
20 tau = linspace(-T_total_duration/2, T_total_duration/2, length(T_total));
21 autocorr_avg = zeros(size(tau));
22
23 for i = 1:length(tau)
24     shift = round(tau(i) / (T_total(2) - T_total(1)));
25     if shift < 0
26         shifted_signal = [zeros(1, -shift) Mod_Signal(1:end+shift)];
27     else
28         shifted_signal = [Mod_Signal(shift+1:end) zeros(1, shift)];
29     end
30     autocorr_avg(i) = trapz(T_total, Mod_Signal .* shifted_signal);
31 end
32
33 autocorr_avg = autocorr_avg / T_total_duration;
34
35 % Graficar la autocorrelación promediada en el tiempo
36 figure;
37 plot(tau, autocorr_avg);
38 grid on;
39 title('Autocorrelación Promediada en el Tiempo')
40 xlabel('Desplazamiento de tiempo (\tau)')
41 ylabel('Autocorrelación')

```

V-C. Estimación de PSD por método directo

```

1 %%
2 %%%%%%%%% ESTIMACION DE PSD METODO DIRECTO %%%%
3 %% Señal modulada con BRZ s(t);
4 s = Mod_Signal;
5 %%%%%%%%%
6
7 ts = T_total;
8 TF_S = abs(fftshift(fft(s)));
9 L = length(TF_S);
10
11 Fl_sam = 200; %frecuencia de sampleo
12 fl = (- (L)/2 : (L)/2-1)/(L)*Fl_sam;
13
14 PSD_DIRECTO = ((1/(2*length(ts)))*(TF_S).^2);
15
16 figure(2);
17 plot(fl, PSD_DIRECTO/max(PSD_DIRECTO));
18 xlim([0 2]);
19 xlabel('Frecuencia (Hz)');
20 ylabel('S_{SS}(f)');
21 title('Metodo del periodograma: PSD S_{SS}(f)');
22 xlim ([0 2]);
23 grid on;

```

V-D. Estimación de PSD por método indirecto

```

1 %%%%%%%%% ESTIMACION DE PSD METODO INDIRECTO %%%%%%%%%
2 n_bits = length(s); % número de muestras
3 dt = 1; % Incremento de tiempo
4 tau_max = n_bits-1; % desplazamiento maximo que tendrá la señal
5 d_tau = 1; % Incremento de tau
6 tau = -tau_max:d_tau:tau_max; % Vector de tau
7
8 % Función de autocorrelación
9 R_SS = zeros(size(tau));
10 for i = 1:length(tau)
11     desplazamiento = round(tau(i)/2);
12
13     if tau(i) >= 0
14         s_desp = s(1:end-desplazamiento) .* s(desplazamiento+1:end);
15     else
16         s_desp = s(1-desplazamiento:end) .* s(1:end+desplazamiento);
17     end
18     R_SS(i) = (1/(2*n_bits - abs(tau(i)))) * sum(s_desp);
19 end
20
21 % Graficar la función de autocorrelación
22 figure(3);
23 plot(tau, R_SS);
24 xlabel('\tau');
25 ylabel('R_{SS}(\tau)');
26 title('Función de Autocorrelación estimada: R_{SS}(\tau)');
27 grid on;
28

```

```

29 % Transformada de Fourier de la función de autocorrelación
30
31 S_SS = abs(fftshift(fft(R_SS)));
32 L2 = length(S_SS);
33 F2_sam = 400; %doble de frecuencia en comparación del periodograma (doble del tamaño por los desplazamientos)
34 f = (-L2/2: L2/2-1)/L2*F2_sam ; % Vector de frecuencias (ajustado para la resolución de tau)
35 % Graficar la densidad espectral de potencia
36 figure(4);
37 plot(f, S_SS/max(S_SS));
38 xlabel('Frecuencia (Hz)');
39 ylabel('S_{SS}(f)');
40 title('Metodo indirecto: PSD S_{SS}(f)');
41 xlim ([0 2]);
42 grid on;

```