Propiedades de la Transformada de Fourier.

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Propiedad.	***Descripción Matemática.***	
1.- Linealidad.	*Si:* $x_n(t) \longleftrightarrow X_n(\omega)$ $\sum_{n=1}^{N} a_n\, x_n(t) \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n\, X_n(\omega)$ donde los a_n son constantes.	$\sum_{n=1}^{N} a_n\, x_n(t) \longleftrightarrow \sum_{n=1}^{N} a_n\, X_n(f)$ donde los a_n son constantes.
2.- Escalado.	$x(a\,t) \longleftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$x(a\,t) \longleftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
3.- Dualidad o simetría.	*Si:* $x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$ $X(t) \longleftrightarrow 2\,\pi\, x(-\omega)$	*Si:* $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$
4.- Desplazamiento en el tiempo.	$x(t - t_o) \longleftrightarrow X(\omega)\, e^{-j\omega t_o}$	$x(t - t_o) \longleftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f t_o}$
5.- Desplazamiento en la frecuencia.	$x(t)\, e^{j\omega_o t} \longleftrightarrow X(\omega - \omega_o)$	$x(t)\, e^{j2\pi f_o t} \longleftrightarrow X(f - f_o)$
6.- Diferenciación en el tiempo.	$\frac{d^n x}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$	$\frac{d^n x}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$
7.- Integración en el tiempo.	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\, \delta(\omega)$	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\, \delta(f)$
8.- Diferenciación en la frecuencia.	$(-jt)^n\, x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X}{d\omega^n}$	$(-j\,2\,\pi t)^n\, x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X}{df^n}$
9.- Multiplicación en el tiempo.	$x_1(t)\, x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$	$x_1(t)\, x_2(t) \longleftrightarrow [X_1(f) * X_2(f)]$
10.- Convolución en el tiempo.	$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\omega)\, X_2(\omega)$	$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f)\, X_2(f)$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}\,df \quad \longleftrightarrow \quad X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\,dt$$

J. CALVO

Relación de Parseval para señales de energía: $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(\omega)\rvert^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(f)\rvert^2\, df$

Sea una señal g(t) periódica, de periodo T_0 y $g_p(t)$ un periodo de la señal, con:

$g_p(t) \longleftrightarrow G_p(\omega)$

Suma de Poisson.-

Con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $\quad g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_p(t-nT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_p(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}$

$\cos(\varphi \pm \theta) = \cos\varphi\ \cos\theta \mp \operatorname{sen}\varphi\ \operatorname{sen}\theta$		$\operatorname{sen}(\varphi \pm \theta) = \operatorname{sen}\varphi\ \cos\theta \pm \cos\varphi\ \operatorname{sen}\theta$	
$Sa(x) = \frac{sen\,(x)}{x}$	$sinc\,(x) = \frac{sen\,(\pi x)}{\pi x}$	$rect\left(\frac{t}{\tau}\right) = G_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0 & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$tri\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert/\tau & \lvert t\rvert < \tau \\ 0 & \lvert t\rvert \geq \tau \end{cases}$

Tabla de Transformadas de Fourier básicas.

Señal.	Transformada. (ω)	Transformada. (f)
$\delta(t)$	1	1
1	$2\pi\,\delta(\omega)$	$\delta(f)$
$e^{j(\omega_0 t+\phi)}$	$2\pi\, e^{j\phi}\,\delta(\omega-\omega_o)$	$e^{j\phi}\,\delta(f-f_o)$
$sgn\,(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$	$\dfrac{1}{j\pi f}$
$\dfrac{j}{\pi t}$	$sgn\,(\omega)$	$sgn\,(f)$
$u\,(t)$	$\pi\,\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$	$\dfrac{1}{2}\,\delta(f)+\dfrac{1}{j2\pi f}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_o t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\;\delta(\omega-n\omega_o)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\;\delta(f-n/T_o)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_o)$	$\dfrac{2\pi}{T_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_o)$	$\dfrac{1}{T_o}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\dfrac{n}{T_o}\right)$
$rect\left(\dfrac{t}{\tau}\right)=G_\tau(t)$	$\tau\,Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)=\tau\,sinc\left(\dfrac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau\,Sa\,(\pi f\tau)=\tau\,sinc\,(f\tau)$
$\dfrac{W}{2\pi}Sa\left(\dfrac{Wt}{2}\right)=BSa(\pi Bt)$	$rect\left(\dfrac{\omega}{W}\right)=G_W(\omega)$	$rect\left(\dfrac{2\pi f}{W}\right)=rect\left(\dfrac{f}{B}\right),\quad W=2\pi B$
$tri\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\tau\left[Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2$	$\tau\,[\,sinc\,(f\tau)\,]^2$
$cos\,(\omega_o t+\phi)$	$\pi\,[\delta(\omega-\omega_o)\,e^{j\phi}+\delta(\omega+\omega_o)\,e^{-j\phi}]$	$\dfrac{1}{2}\,[\delta(f-f_o)\,e^{j\phi}+\delta(f+f_o)\,e^{-j\phi}]$
$sen\,(\omega_o t+\phi)$	$j\,\pi\,[\delta(\omega+\omega_o)\,e^{-j\phi}-\delta(\omega-\omega_o)\,e^{j\phi}]$	$\dfrac{1}{2j}\,[\delta(f-f_o)\,e^{j\phi}-\delta(f+f_o)\,e^{-j\phi}]$
$cos\,(\omega_o t)\,u\,(t)$	$\dfrac{\pi}{2}\,[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)]+\dfrac{j\omega}{\omega_o^2-\omega^2}$	$\dfrac{1}{4}\,[\delta(f-f_o)+\delta(f+f_o)]+\dfrac{jf}{2\pi(f_o^2-f^2)}$
$sen\,(\omega_o t)\,u\,(t)$	$\dfrac{\pi}{2j}\,[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)]+\dfrac{\omega_o}{\omega_o^2-\omega^2}$	$\dfrac{1}{4j}\,[\delta(f-f_o)-\delta(f+f_o)]+\dfrac{f_o}{2\pi(f_o^2-f^2)}$
$e^{-\alpha t}\,u\,(t)$ *	$\dfrac{1}{\alpha+j\omega}$	$\dfrac{1}{\alpha+j2\pi f}$
$t\,e^{-\alpha t}\,u\,(t)$ *	$\dfrac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$	$\dfrac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\;e^{-\alpha t}\,u\,(t)$ *	$\dfrac{1}{(\alpha+j\omega)^n}$	$\dfrac{1}{(\alpha+j2\pi f)^n}$
$e^{-\alpha\lvert t\rvert}$, $\alpha>0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$
$\lvert t\rvert e^{-\alpha\lvert t\rvert}$, *	$\dfrac{4\alpha\,j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$	$\dfrac{4\alpha\,j(2\pi f)}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-\alpha t}\,cos\,(\omega_o t)\,u\,(t)$ *	$\dfrac{\alpha+j\omega}{\omega_o^2+(\alpha+j\omega)^2}$	$\dfrac{\alpha+j2\pi f}{(2\pi f_o)^2+(\alpha+j2\pi f)^2}$
$e^{-\alpha t}\,sen\,(\omega_o t)\,u\,(t)$ *	$\dfrac{\omega_o}{\omega_o^2+(\alpha+j\omega)^2}$	$\dfrac{2\pi f_o}{(2\pi f_o)^2+(\alpha+j2\pi f)^2}$
e^{-at^2} , $a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\;e^{-\omega^2/4a}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\;e^{-\pi^2 f^2/a}$

* $Re(\alpha)>0$, $\omega_o=2\,\pi f_o$, $f_o=1/T_o$