

Renato Ricardo de Paula

# **Método de Monte Carlo e Aplicações**

**Volta Redonda - RJ**

**2014**



Renato Ricardo de Paula

## **Método de Monte Carlo e Aplicações**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional.

Universidade Federal Fluminense

Campus Volta Redonda

Instituto de Ciências Exatas - ICEx

Graduação em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional

Orientador: Profa. Dra. Marina Sequeiros Dias

Volta Redonda - RJ

2014

---

Renato Ricardo de Paula

Método de Monte Carlo e Aplicações/ Renato Ricardo de Paula. – Volta Redonda - RJ, 2014-

81 p. : il. ; 30 cm.

Orientador: Profa. Dra. Marina Sequeiros Dias

Monografia – Universidade Federal Fluminense

Campus Volta Redonda

Instituto de Ciências Exatas - ICEx

Graduação em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional, 2014.

1. Método de Monte Carlo. 3. Eventos Discretos. 2. Simulação. I. Marina Sequeiros Dias. II. Universidade Federal Fluminense. III. Instituto de Ciências Exatas. IV. Método de Monte Carlo e Aplicações

CDU 02:141:005.7

---

Renato Ricardo de Paula

## **Método de Monte Carlo e Aplicações**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Matemática com Ênfase em Matemática Computacional.

Trabalho aprovado. Volta Redonda - RJ, Novembro de 2014:

---

**Profª. Dra. Marina Sequeiros Dias**

Orientadora

Departamento de Matemática – ICEx – UFF

---

**Prof. Dr. Denis Mota de Sousa**

Departamento de Matemática – ICEx – UFF

---

**Prof. Dr. Ivan Wilber Aguilar Maron**

Departamento de Matemática – ICEx – UFF

Volta Redonda - RJ

2014



*À minha família.*





# Agradecimentos

À professora Marina Sequeiros Dias pela orientação, incentivo e apoio constante.

Ao professor Ivan Wilber Aguilar Maron pelo apoio e incentivo.

A todos os professores que me acompanharam durante a graduação, em especial ao Prof. André Ebling Brondani e à Profa. Rosemary Miguel Pires.

À minha mãe, Elizabeth, pela amizade e incentivo aos meus estudos.

À minha namorada Laís pelo seu companheirismo e apoio aos meus estudos e projetos.

Aos meus irmãos Eduardo e Leonardo pelo carinho e apoio aos meus estudos.

A Universidade Federal Fluminense Campus Volta Redonda pela oportunidade de cursar a Graduação.

A todos os amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam e ajudaram ao longo de todo o caminho.



# Resumo

O método de Monte Carlo é um método computacional que utiliza números aleatórios e estatísticas para resolver problemas. Atualmente, muitos problemas numéricos em Finanças, Engenharia e Estatística são resolvidos com esse método. O interesse nesse estudo é aplicar a técnica para calcular integrais e para simular eventos discretos. Para os casos em que as integrais não podem ser calculadas explicitamente, para o cálculo de integrais multidimensionais e para calcular integrais impróprias pode-se utilizar simulação de Monte Carlo. A simulação de um modelo probabilístico consiste na geração de mecanismos estocásticos e, em seguida, na observação do fluxo resultante do modelo ao longo do tempo. Dependendo das razões para a simulação, haverá certas quantidades de interesse que se quer determinar. No entanto, a evolução do modelo ao longo do tempo frequentemente envolve uma estrutura lógica complexa de seus elementos. Desse modo, nem sempre é evidente como acompanhar essa evolução de modo a determinar estas quantidades de interesse. Uma estrutura geral construída em torno da ideia de “eventos discretos” foi desenvolvida para ajudar a seguir um modelo ao longo do tempo e determinar as quantidades relevantes de interesse. A simulação baseada nesta estrutura é muitas vezes chamada simulação de eventos discretos. Assim, o estudo do método de Monte Carlo é uma ótima alternativa para tais simulações e requer conhecimento de diferentes áreas do conhecimento: Probabilidade, para descrever processos e experimentos aleatórios; Estatística para analisar os dados; Ciência da Computação para implementação eficiente de algoritmos e Programação Matemática para formular e resolver problemas de otimização.

**Palavras-chaves:** Método de Monte Carlo. Eventos Discretos. Simulação.



# Abstract

The Monte Carlo method is a computational method that uses random numbers and statistics to solve problems. Currently, many numerical problems in Finance, Engineering and Statistics are solved with this method. The interest in this study is to apply the technique to evaluate integrals and to simulate discrete events. In cases where the integrals can not be explicitly evaluated, for the calculation of multidimensional integrals and for evaluating improper integrals, Monte Carlo Simulation can be used. The simulation of a probabilistic model is the generation of stochastic mechanisms and then the observation of the flow resulting from the model over time. Depending on the reasons for the simulation, there will be certain quantities of interest that we will want to determine. Thus, because the model's evolution over time often involves a complex logical structure of its elements, it is not always apparent how to keep track of this evolution so as to determine these quantities of interest. A general framework, built around the idea of "discrete events" has been developed to help one follow a model over time and determine the relevant quantities of interest. The simulation based on this framework is often called discrete event simulation. Thus, the study of the Monte Carlo method is a great alternative for such simulations, and requires knowledge of different areas of knowledge: Probability to describe processes and random experiments; Statistics to analyze the data; Computer Science for efficient implementation of algorithms and Mathematical Programming to formulate and solve optimization problems.

**Key-words:** Monte Carlo Method. Discrete Events. Simulation.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de $F(x)$ . . . . .	22
Figura 2 – Função massa de probabilidade de Poisson com $\lambda = 2$ . . . . .	28
Figura 3 – Função densidade de probabilidade uniforme com $a = 0$ e $b = 1$ . . . . .	29
Figura 4 – Função densidade de probabilidade exponencial . . . . .	30
Figura 5 – Densidade normal padrão . . . . .	31
Figura 6 – Função densidade normal padrão . . . . .	35
Figura 7 – Quadrado . . . . .	50
Figura 8 – Círculo dentro do quadrado . . . . .	50
Figura 9 – Gráfico de $f_1(x) = e^{-x}$ , $x \in [0, 1]$ gerado com $N = 100$ e $N = 1258$ . . . . .	55
Figura 10 – Gráfico de $f_2(x) = x^2 + 1$ , $x \in [0, 1]$ gerado com $N = 100$ e $N = 3426$ . . . . .	56
Figura 11 – Gráfico da função $f_3(x, y) = x^2 + y^2$ , $x, y \in [0, 1]$ . . . . .	56
Figura 12 – Gráfico de $f_3(x, y) = x^2 + y^2$ gerado com $N = 100$ e $N = 6784$ . . . . .	56
Figura 13 – Gráfico da função $f_4(x, y) = 1 - x$ , $x, y \in [0, 1]$ . . . . .	56
Figura 14 – Gráfico de $f_4(x, y) = 1 - x$ gerado com $N = 100$ e $N = 3140$ . . . . .	57
Figura 15 – Gráfico da função $f_5(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ , $x \in [1, 4]$ , $y \in [1, 2]$ . . . . .	57
Figura 16 – Gráfico de $f_5(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ , $x \in [1, 4]$ , $y \in [1, 2]$ gerado com $N = 100$ e $N = 68638$ . . . . .	57
Figura 17 – Mínimo em estoque $\times$ Lucro Mensal médio . . . . .	66
Figura 18 – Máximo em estoque $\times$ Lucro Mensal médio . . . . .	66
Figura 19 – Intervalo de confiança para o Lucro Mensal Médio . . . . .	67
Figura 20 – Gráfico do valor de uma opção de compra . . . . .	70
Figura 21 – Relação entre o valor da opção e o preço de um ativo, (BLACK F.; SCHOLES, 1973). . . . .	70
Figura 22 – Intervalo de confiança para a média do ganho esperado em exercer uma opção segundo a política descrita. . . . .	73





# Lista de tabelas

Tabela 1	–	Estimação do valor de $\pi$ .	51
Tabela 2	–	Cálculo de integrais usando a simulação de Monte Carlo	58
Tabela 3	–	Tabela do risco de uma empresa de seguros	63
Tabela 4	–	Resultados das simulações variando a quantidade mínima em estoque	66
Tabela 5	–	Resultados das simulações variando a quantidade máxima no estoque	67
Tabela 6	–	Ganho Esperado em exercer uma opção dada a política descrita.	73
Tabela 7	–	Tempo médio para exercer uma opção dada a política descrita.	73



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>ELEMENTOS DE PROBABILIDADE</b>	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Variáveis aleatórias</b>	<b>21</b>
1.1.1	Variável aleatória discreta	23
1.1.2	Variável aleatória contínua	24
1.1.3	Funções de uma variável aleatória	25
<b>1.2</b>	<b>Propriedades da Esperança</b>	<b>26</b>
<b>1.3</b>	<b>Variância e desvio-padrão</b>	<b>26</b>
<b>1.4</b>	<b>Distribuições contínuas e discretas</b>	<b>28</b>
1.4.1	Variável aleatória de Poisson	28
1.4.2	Variável aleatória uniforme	29
1.4.3	Variável aleatória exponencial	29
1.4.4	Variável aleatória normal	30
1.4.5	Teorema Central do Limite	31
1.4.6	Processo de Poisson	32
<b>2</b>	<b>UM POUCO DE INFERÊNCIA ESTATÍSTICA</b>	<b>33</b>
<b>2.1</b>	<b>Amostra aleatória</b>	<b>33</b>
2.1.1	Conceitos básicos	33
<b>2.2</b>	<b>Intervalo de Confiança para a média populacional</b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Desigualdade de Markov e Chebyshev</b>	<b>35</b>
<b>2.4</b>	<b>Lei dos grandes números</b>	<b>37</b>
<b>3</b>	<b>NÚMEROS ALEATÓRIOS</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>Geração de números pseudoaleatórios</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Geração de Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Geração de um processo de Poisson</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE MONTE CARLO</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Método para determinar quando parar de gerar novos dados</b>	<b>51</b>
<b>5</b>	<b>APLICAÇÕES DO MÉTODO DE MONTE CARLO</b>	<b>53</b>
<b>5.1</b>	<b>Simulação de Monte Carlo para o cálculo de integrais</b>	<b>53</b>
5.1.1	Objetivo	53
5.1.2	Modelo	53
5.1.2.1	Cálculo de $\int_a^b g(x)dx$	54

5.1.2.2	Cálculo de $\int_0^{\infty} g(x)dx$ . . . . .	54
5.1.2.3	Cálculo de integrais multidimensionais . . . . .	54
5.1.3	Experimentos . . . . .	55
<b>5.2</b>	<b>Simulação de Eventos Discretos . . . . .</b>	<b>58</b>
5.2.1	Simulação de Monte Carlo do risco de uma empresa de seguros . . . . .	59
5.2.1.1	Objetivo . . . . .	59
5.2.1.2	Modelo . . . . .	59
5.2.1.3	Algoritmo . . . . .	61
5.2.1.4	Experimentos . . . . .	62
5.2.2	Simulação de Monte Carlo de um modelo de controle de estoque de uma loja . . . . .	63
5.2.2.1	Objetivo . . . . .	63
5.2.2.2	Modelo . . . . .	63
5.2.2.3	Algoritmo . . . . .	65
5.2.2.4	Experimentos . . . . .	65
5.2.3	Simulação de Monte Carlo do ganho esperado em possuir uma opção de compra de ações . . . . .	67
5.2.3.1	Objetivo . . . . .	68
5.2.3.2	Definições . . . . .	68
5.2.3.3	Modelo . . . . .	69
5.2.3.4	Algoritmo . . . . .	72
5.2.3.5	Experimentos . . . . .	72
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>79</b>

# Introdução

Uma definição formal de Método de Monte Carlo foi dada por Halton (1970). Ele definiu o método como uma técnica para representar a solução de um problema como um parâmetro de uma população hipotética e, que usa uma sequência aleatória de números para construir uma amostra da população da qual estimativas estatísticas desse parâmetro possam ser obtidas.

O primeiro trabalho com método de Monte Carlo foi em 1947 com Jon Von Neuman e Stanislaw Ulam. Conforme colocado em ([ULAM J. VON NEUMANN, 1947](#)) e posteriormente em ([METROPOLIS, 1949](#)), eles propuseram usar uma simulação computacional em uma parte do projeto Manhattan, na Segunda Guerra Mundial. No projeto de construção da bomba atômica, Ulam e Jon Von Neumann consideraram a possibilidade de utilizar o método, que envolvia a simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com o coeficiente de difusão do nêutron em certos materiais.

O nome do método se originou pelo uso da aleatoriedade e da natureza repetitiva das atividades realizadas em cassinos em Monte Carlo, Mônaco. O método de Monte Carlo tem sido utilizado há bastante tempo como forma de obter aproximações numéricas de funções complexas. Estes métodos tipicamente envolvem a geração de observações de alguma distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. O método é também referido como simulação estocástica e é um método relativamente simples e fácil de implementar.

Neste trabalho, apresenta-se a aproximação de Monte Carlo para o cálculo de integrais unidimensionais e multidimensionais, com limites de integração finitos e infinitos; para simulação de eventos discretos, isto é, para representar um sistema arbitrário conforme ele se desenvolve ao longo do tempo. Um sistema de eventos discretos é definido como o sistema no qual a variável temporal é discreta e as variáveis de estado são discretas ou contínuas. Correspondentemente, um sistema de eventos contínuos é o sistema no qual o tempo é uma variável contínua e todas as variáveis de estado são contínuas. A característica essencial de um sistema de eventos discretos é que o estado entre pontos discretos(eventos) consecutivos mantém-se inalterado. Na simulação de um tal processo, isso é necessário somente para avançar o tempo de um evento para o próximo sem se preocupar com tempos intermediários.

Assim, será estudado o Método de Monte Carlo e aplicações. A simulação de Monte Carlo será utilizada ao longo do trabalho para resolver os seguintes problemas: Cálculo de integrais; Risco de uma empresa de seguros; Modelo de controle de estoque de uma loja; Ganho esperado em possuir uma opção de compra de ações. Todas essas aplicações podem

ser encontradas em (ROSS, 2006). As simulações serão realizadas em Python (PYTHON, ). Para outros estudos envolvendo o uso da técnica para cálculo de integrais, consulte (JOHANSEN, 2008) e (KROESE DIRK P.; TAIMRE, 2011). Outros trabalhos que utilizam o método de Monte Carlo para simulação de um empresa de seguros incluem (GENZ, ), (AALABAF-SABAGHI, 2011), (NORGAARD, 1966). Mais informações sobre o uso do método para controle de estoque podem ser encontradas em (RAUN, 1963), (KROESE DIRK P.; TAIMRE, 2011), (ROSS, 1997). Outros trabalhos que usam a técnica de Monte Carlo em finanças incluem (ROSS, 2011), (GLASSERMAN, 2004), (NEFTCI, 2001), (BLACK F.; SCHOLES, 1973), (AALABAF-SABAGHI, 2011), (SETZU, 2008),(GENZ, ).

# 1 Elementos de Probabilidade

Algumas definições e resultados importantes da teoria de probabilidade são introduzidas. Para detalhes da teoria, veja (ROSS, 2008), (JAMES, 2013), (DEGROOT M. H. H.; SCHERVISH, 2011) e (CASELLA G.; BERGER, 2001).

Considere um experimento cujo espaço amostral é  $\Omega$ . Para cada evento  $E$  do espaço amostral  $\Omega$ , assumimos que um número  $P(E)$  seja definido e satisfaça os três axiomas a seguir:

**Axioma 1.**

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

**Axioma 2.**

$$P(\Omega) = 1$$

**Axioma 3.**

Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos  $E_1, E_2, \dots$  (isto é, eventos para os quais  $E_i E_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ ),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

$P(E)$  é conhecida como a *probabilidade* do evento  $E$ .

## 1.1 Variáveis aleatórias

**Definição 1.** Considere um experimento e seja  $\Omega$  o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função  $X$ , que associa a cada elemento  $\omega \in \Omega$  um número real,  $X(\omega)$ , é denominada variável aleatória. Ou seja, variável aleatória é um característico numérico do resultado de um experimento.

A toda variável aleatória  $X$ , associa-se uma função chamada a *função distribuição acumulada* de  $X$ .

**Definição 2.** A função distribuição acumulada  $F$  da variável aleatória  $X$  é definida para qualquer número real  $x$  por:  $F(x) = P(X \leq x)$ .

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$  tem três propriedades básicas:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ;
2.  $F$  é não-decrescente;
3.  $F$  é uma função contínua à direita e tem limite à esquerda.

**Exemplo 1.** Para o lançamento de uma moeda, tem-se  $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$  e  $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$ . Define-se uma variável aleatória  $X$ , isto é, uma função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega = \text{cara}; \\ 0, & \text{se } \omega = \text{coroa}. \end{cases}$$

O objetivo é encontrar a função de distribuição acumulada de  $X$ .

Para isto, é conveniente separar os vários casos de acordo com os valores da variável. Para  $x < 0$ ,  $P(X \leq x) = 0$ , uma vez que o menor valor assumido pela variável  $X$  é 0. No intervalo  $0 \leq x < 1$ , tem-se  $P(X \leq x) = P(X = 0) = 1/2$ . Para  $x \geq 1$ , tem-se  $P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1$ . Dessa forma,  $F(x) = P(X \leq x)$  foi definida para todo  $x$  real. Assim, tem-se

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1/2, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Note que as propriedades de função de distribuição são facilmente verificadas e que  $F(x)$  é não decrescente para todo  $x$  real e, assim, vale a propriedade 2.

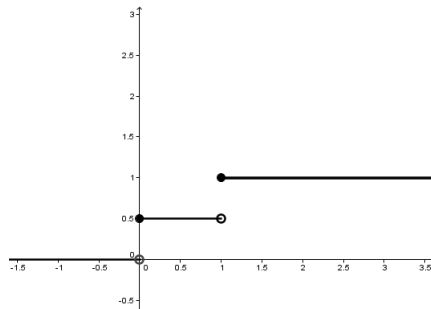


Figura 1: Gráfico de  $F(x)$

**Definição 3.** As variáveis aleatórias  $(X_1, \dots, X_n)$  são independentes se, e somente se, para quaisquer conjuntos de números reais  $A_1, A_2, \dots, A_n$  com  $A_i \in X_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  tem-se que

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n).$$



### 1.1.1 Variável aleatória discreta

**Definição 4.** A variável aleatória  $X$  é discreta se assume um número finito ou enumerável de valores, i.e., se existe um conjunto finito ou enumerável  $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\} \forall \omega \in \Omega$ .

**Definição 5.** A função massa de probabilidade de uma variável aleatória discreta  $X$  é dada por

$$f(x) = P(X = x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

**Exemplo 2.** Suponha que, após um exame médico, pessoas sejam diagnosticadas como tendo diabetes ( $D$ ) e não tendo diabetes ( $N$ ). Admita que três pessoas sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com esse esquema.

O espaço amostral é dado por  $\Omega = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}$ .

O objetivo é saber quantas pessoas com diabetes foram encontradas, não interessando a ordem em que tenham sido selecionadas. Isto é, deseja-se estudar a variável aleatória  $X$ , a qual atribui a cada resultado  $\omega \in \Omega$  o número de pessoas com diabetes. Consequentemente, o conjunto dos possíveis valores de  $X$  é  $\{0, 1, 2, 3\}$ , ou seja,  $X$  é uma variável aleatória discreta.

**Definição 6.** Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores  $\{x_1, x_2, \dots\}$  e seja  $p(x)$  a função de probabilidade de  $X$ , isto é,  $p(x_i) = P(X = x_i)$ . Então, o valor esperado de  $X$ , também chamado de esperança de  $X$  e denotado por  $E(X)$ , é definido por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i).$$

Observa-se que o valor esperado  $E(X)$  só está definido se a série acima for absolutamente convergente, ou seja, se

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) < \infty.$$

. Caso  $E(X)$  seja finita, diz-se que  $X$  é integrável.

#### Observações:

1. Se  $X$  tomar apenas um número finito de valores, a expressão acima se torna  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$ . Neste caso, o valor esperado pode ser considerado como uma média ponderada dos possíveis valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
2. Se todos os valores possíveis de  $X$  forem equiprováveis,  $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , que representa a média aritmética dos  $n$  possíveis valores.

**Exemplo 3.** Considere o lançamento de um dado equilibrado. Seja  $X = \text{“número da face voltada para cima”}$  a variável aleatória. Calcular o valor esperado de  $X$ .

Sabe-se que os valores possíveis de  $X$  são  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e que esses valores são equiprováveis. Assim,

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

### 1.1.2 Variável aleatória contínua

**Definição 7.** A variável aleatória  $X$  é uma variável aleatória contínua se existe uma função não-negativa  $f(x)$  definida para todos os números reais  $x$  com a propriedade de que para qualquer conjunto  $C$  de números reais,  $P(X \in C) = \int_C f(x)dx$ . A função  $f$  é chamada função densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$ .

**Exemplo 4.** Uma válvula eletrônica é instalada em um circuito, seja  $X$  o período de tempo em que a válvula funciona. Neste caso,  $X$  é uma variável aleatória contínua podendo tomar valores nos reais positivos, ou seja, o subconjunto dos números reais  $[0, \infty)$ .

**Definição 8.** A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória  $X$  contínua é definida por

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

**Definição 9.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade  $f(x)$ . Define-se o valor esperado ou esperança matemática ou média de  $X$  por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

desde que a integral esteja bem definida. Caso  $E(X)$  seja finita, diz-se que  $X$  é integrável.

#### Observações:

1. Se a variável é limitada, o cálculo é feito sem ambiguidade e a existência do valor esperado está assegurada. No caso não limitado, podem aparecer situações indefinidas do tipo  $\infty$  e  $-\infty$ , nas quais se diz que a esperança não existe. Assim,  $E(X)$  estará bem definida se a integral, em ambos intervalos,  $[-\infty, 0)$  e  $(0, \infty)$  for finita; isto é

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} xf(x)dx < \infty.$$

2. A interpretação de  $E(X)$  para o caso contínuo é similar ao mencionado para variáveis aleatórias discretas.

### 1.1.3 Funções de uma variável aleatória

Se  $X$  é uma variável aleatória com função distribuição acumulada  $F(x)$ , então qualquer função de  $X$ ,  $g(X)$ , é também uma variável aleatória. Frequentemente  $g(X)$  é de interesse próprio e escreve-se  $Y = g(X)$  para denotar a nova variável aleatória  $g(X)$ . Uma vez que  $Y$  é uma função de  $X$ , pode-se descrever o comportamento probabilístico de  $Y$  em termos de  $X$ . Isto é, para qualquer conjunto  $A$ ,

$$P(Y \in A) = P(g(X) \in A),$$

mostrando que a distribuição de  $Y$  depende das funções  $F$  e  $g$ . Dependendo da escolha de  $g$ , às vezes é possível obter uma expressão tratável para essa probabilidade.

Formalmente, se escreve  $y = g(x)$ , a função  $g(x)$  define um mapeamento a partir do espaço amostral original de  $X$ ,  $\mathcal{X}$ , para um novo espaço amostral  $\mathcal{Y}$ , o espaço amostral da variável aleatória  $Y$ . Isto é,

$$g(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}.$$

Associa-se com  $g$  um mapeamento inverso, denotado por  $g^{-1}$ , o qual é um mapeamento dos subconjuntos de  $\mathcal{Y}$  para os subconjuntos de  $\mathcal{X}$ , e é definido por

$$g^{-1}(A) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) \in A\}.$$

Note que o mapeamento  $g^{-1}$  leva conjuntos em conjuntos; isto é,  $g^{-1}(A)$  é o conjunto dos pontos em  $\mathcal{X}$  que  $g(x)$  leva para o conjunto  $A$ . É possível que  $A$  seja um conjunto com um único ponto, diga-se  $A = \{y\}$ . Então

$$g^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathcal{X} : g(x) = y\}.$$

Neste caso pode-se escrever  $g^{-1}(y)$  em vez de  $g^{-1}(\{y\})$ . A quantidade  $g^{-1}(y)$  pode ser um conjunto, desde que exista mais do que um valor  $x$  para os quais  $g(x) = y$ . Caso exista um único  $x$  para o qual  $g(x) = y$ , então  $g^{-1}(\{y\})$  é o conjunto com um único ponto  $\{x\}$  e escreve-se  $g^{-1}(y) = x$ . Considere a variável aleatória  $Y$  definida por  $Y = g(X)$ , para qualquer conjunto  $A \in \mathcal{Y}$ ,

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(g(X) \in A) \\ &= P(\{x \in \mathcal{X} : g(x) \in A\}) \\ &= P(X \in g^{-1}(A)). \end{aligned}$$

Isto define a distribuição de probabilidade de  $Y$ .

**Definição 10.** *Seja  $f(x)$  a função densidade de probabilidade ou, a função massa de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  se  $X$  é contínua ou discreta, respectivamente. O valor esperado ou média de uma variável aleatória  $g(X)$ , denotada por  $E(g(X))$ , é*

$$E(g(X)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & \text{se } X \text{ é contínua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)f(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)P(X = x), & \text{se } X \text{ é discreta} \end{cases}$$

desde que exista a integral ou a soma.

Para detalhes sobre o assunto, consulte ([CASELLA G.; BERGER, 2001](#)).

## 1.2 Propriedades da Esperança

Sejam  $c$  constante e  $X, Y$  variáveis aleatórias quaisquer e suponha que a esperança exista.

1. Se  $X = c$  então  $E(X) = c$ .
2.  $E(cX) = cE(X)$ .
3.  $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$ .
4. Sejam  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , então  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ .
5.  $E(X \pm c) = E(X) \pm c$ .

## 1.3 Variância e desvio-padrão

**Definição 11.** Se  $X$  é uma variável aleatória com média  $\mu$ , então a variância de  $X$ , denotada por  $\text{Var}(X)$  ou  $\sigma^2$ , é definida por

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Uma forma alternativa para  $\text{Var}(X)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E[X^2] - E[2\mu X] + E[\mu^2] \\ &= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 \\ &= E[X^2] - \mu^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

**Exemplo 5.** Suponha que  $X$  seja uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{se } -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcule  $\text{Var}(X)$ .

Tem-se

$$E(X) = \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 0$$

e

$$E(X^2) = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6}.$$

## Propriedades da Variância

1. Se  $c$  for uma constante, então

$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X).$$

De fato,

$$\text{Var}(X + c) = E[(X + c)^2] - [E(X + c)]^2 = E[X^2 + 2cX + c^2] - [E(X) + c]^2.$$

Portanto,

$$\text{Var}(X + c) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \text{Var}(X).$$

2. Se  $c$  for uma constante, então

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X).$$

De fato,

$$\text{Var}(cX) = c^2 E(X^2) - c^2 [E(X)]^2 = c^2 \text{Var}(X).$$

3. Se  $X$  e  $Y$  forem variáveis aleatórias independentes, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

De fato,

$$\text{Var}(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2 \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \end{aligned}$$

4. Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes. Então,

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

**Definição 12.** O desvio-padrão de  $X$  é a raiz quadrada de  $\text{Var}(X)$ , se a variância existe.

## 1.4 Distribuições contínuas e discretas

Nesta seção serão apresentados os principais modelos contínuos e discretos, que serão necessários para o estudo do método de Monte Carlo.

### 1.4.1 Variável aleatória de Poisson

**Definição 13.** Uma variável aleatória discreta  $X$ , que toma valores  $0, 1, 2, \dots$  é dita ser de Poisson com parâmetro  $\lambda > 0$ , se:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^k}{k!}.$$

O valor esperado e a variância são dados por:

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

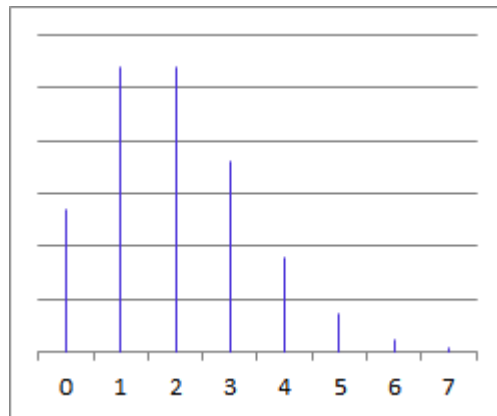


Figura 2: Função massa de probabilidade de Poisson com  $\lambda = 2$

### 1.4.2 Variável aleatória uniforme

**Definição 14.** Uma variável aleatória contínua  $X$  tem distribuição uniforme no intervalo  $(a, b)$  se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Notação:**  $X \sim U(a, b)$ .

O valor esperado e a variância são dados por:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

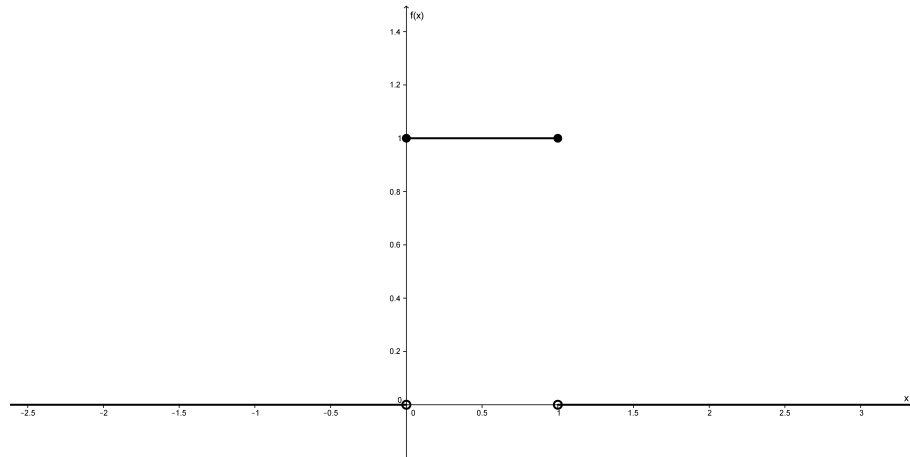


Figura 3: Função densidade de probabilidade uniforme com  $a = 0$  e  $b = 1$

### 1.4.3 Variável aleatória exponencial

**Definição 15.** Uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty$$

para algum  $\lambda > 0$  é dita ser uma variável aleatória exponencial com parâmetro  $\lambda$ .

**Notação:**  $X \sim \exp(\lambda)$ .

A função de distribuição acumulada é

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

O valor esperado e a variância são dados por:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

### 1.4.4 Variável aleatória normal

**Definição 16.** Uma variável aleatória contínua  $X$  é dita ser normalmente distribuída com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

**Notação:**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Não é difícil mostrar que os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  são iguais à esperança e à variância da normal. Isto é,

$$E[X] = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

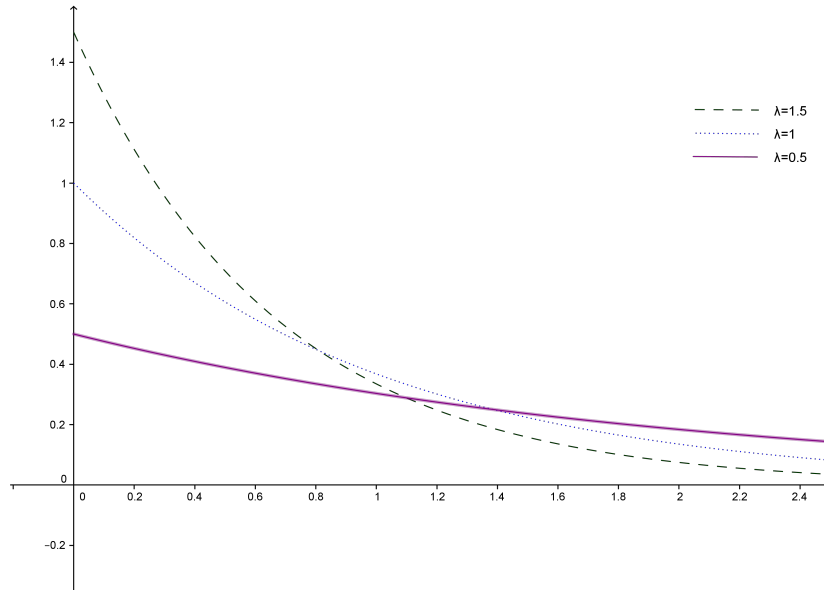


Figura 4: Função densidade de probabilidade exponencial

Um fato importante sobre variáveis aleatórias normais é que se  $X$  é normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então para quaisquer constantes  $a$  e  $b$ ,  $aX + b$  é normalmente distribuída com média  $a\mu + b$  e variância  $a^2\sigma^2$ . Segue disto que se  $X$  é normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

é normal com média 0 e variância 1. Tal variável aleatória  $Z$  é dita ter uma distribuição normal padrão.

Seja  $\Phi$  a função distribuição de uma variável aleatória normal padrão; isto é,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx, \quad -\infty < x < \infty.$$

O resultado de que  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$  tem uma distribuição normal padrão quando  $X$  é normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  é bastante útil porque permite avaliar todas as probabilidades relativas a  $X$  em termos de  $\Phi$ . Por exemplo, a função distribuição de  $X$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left\{\frac{x - \mu}{\sigma}\right\}. \end{aligned}$$



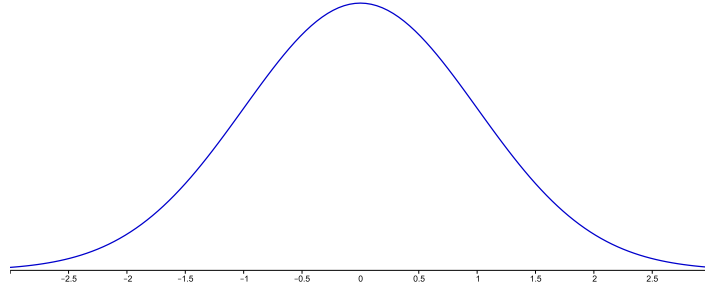


Figura 5: Densidade normal padrão

### 1.4.5 Teorema Central do Limite

Detalhes e demonstração do Teorema Central do Limite podem ser encontrados em (JAMES, 2013) e (ROSS, 2008).

**Teorema 6** (Teorema Central do Limite). *Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tendo média finita  $\mu$  e variância finita  $\sigma^2$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{(X_1 + \dots + X_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})\} = \phi(x).$$

Isto é, dada a sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $X_1, X_2, \dots$ , considere  $S_1, S_2, \dots$  a sequência de somas parciais, definidas por  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , o problema central do limite trata da convergência em distribuição das somas parciais normalizadas,

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}S_n}},$$

para a distribuição normal padrão  $N(0, 1)$ .

### 1.4.6 Processo de Poisson

**Definição 17.** *Suponha que eventos estejam ocorrendo em intervalos de tempo aleatórios e seja  $N(t)$  o número de eventos que ocorrem no intervalo de tempo  $[0, t]$ . Estes eventos são ditos constituírem um processo de Poisson de taxa  $\lambda > 0$ , se :*

1.  $N(0) = 0$ , isto é, o processo começa no tempo 0;
2. o número de eventos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são independentes;

3. a distribuição do número de eventos que ocorrem em um dado intervalo depende apenas do comprimento do intervalo e não do seu local, isto é, a distribuição de probabilidade de  $N(t+s) - N(t)$  é a mesma para todos os valores de  $t$ ;
4.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(h)=1)}{h} = \lambda$ , isto é, em um intervalo pequeno de comprimento  $h$ , a probabilidade de um evento ocorrer é aproximadamente  $\lambda h$ .
5.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0$ , isto é, em um intervalo pequeno de comprimento  $h$ , a probabilidade de dois ou mais eventos ocorrerem é nula.

Essas hipóteses implicam que o número de eventos ocorrendo em um intervalo de comprimento  $t$  é uma variável aleatória de Poisson com média  $\lambda t$ .

**Proposição 7.** Seja  $X_n, n > 1$ , o tempo decorrido entre o  $(n-1)$ -ésimo e o  $n$ -ésimo evento. A sequência  $X_1, X_2, \dots$  dos tempos entre as chegadas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma exponencial de parâmetro  $\lambda$ .

## 2 Um pouco de Inferência Estatística

Os principais resultados de Inferência Estatística utilizados para desenvolver aplicações eficientes do Método de Monte Carlo são descritos. Detalhes e demonstrações dos teoremas apresentados podem ser encontradas em (ROSS, 2006), (ROSS, 2008), (CASELLA G.; BERGER, 2001), (TROSSET, 2001), (JR. P. J.; BONAT, 2012), (TANNER, 1996) e (RAO, 1973).

### 2.1 Amostra aleatória

#### 2.1.1 Conceitos básicos

**Definição 18.** *As variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  são chamadas de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da população  $f(x)$ , se  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias mutuamente independentes e a função densidade de probabilidade ou função massa de probabilidade de cada  $X_i$  é a mesma função  $f(x)$ . Alternativamente,  $X_1, \dots, X_n$  são chamadas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade ou função massa de probabilidade  $f(x)$ .*

**Definição 19.** *Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de uma população e seja  $T(x_1, \dots, x_n)$  uma função real ou função vetorial cujo domínio inclui o espaço amostral de  $(X_1, \dots, X_n)$ . Então, a variável aleatória ou vetor aleatório  $Y = T(X_1, \dots, X_n)$  é chamada de uma estatística. A distribuição de probabilidade de uma estatística  $Y$  é chamada a distribuição de amostragem de  $Y$ .*

A média amostral, a variância amostral e o desvio padrão amostral são três estatísticas que são frequentemente usadas e fornecem bons resumos da amostra.

**Definição 20.** *A média amostral é a média aritmética dos valores em uma amostra aleatória. Isso é denotado geralmente por*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

**Definição 21.** *A variância amostral é a estatística definida por*

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

O desvio-padrão amostral é a estatística definida por  $S = \sqrt{S^2}$ .

**Teorema 8.** *Sejam  $x_1, \dots, x_n$  números quaisquer e  $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$ . Então*

1.  $\min_a \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$
2.  $(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.$

**Teorema 9.** *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias de uma população com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 < \infty$ . Então*

1.  $E(\bar{X}) = \mu,$
2.  $Var \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n},$
3.  $E(S^2) = \sigma^2.$

*Demonstração.* Para provar (1), seja  $g(X_i) = X_i/n$ , então  $E(g(X_i)) = \mu/n$ . Logo,

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} nE(X_1) = \mu.$$

Similarmente para (2), tem-se

$$Var \bar{X} = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} nVar(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Para a variância amostral, utiliza-se o teorema 8. Assim,

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right]\right) \\ &= \frac{1}{n-1} (nE(X_1^2) - nE(\bar{X}^2)) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \sigma^2 \end{aligned}$$

estabelecendo a parte (3) e provando o teorema. □

## 2.2 Intervalo de Confiança para a média populacional

Seja  $Z$  uma variável aleatória normal padrão. Para qualquer  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , seja  $z_\alpha$  dado por  $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ .

Da simetria da função densidade normal padrão sobre a origem, segue que  $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ . Assim,

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

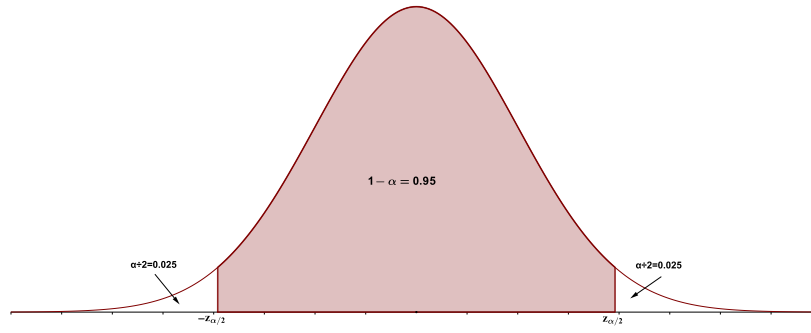


Figura 6: Função densidade normal padrão

Segue que

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \mu)}{S} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

O que equivale a

$$P\left(-z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha.$$

Ou seja, com probabilidade  $1 - \alpha$ ,  $\mu$  estará na região  $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} S / \sqrt{n}$ .

Como  $z_{0.025} = 1.96$ , pode-se afirmar com 95% de confiança que  $\bar{X}$  não difere de  $\mu$  por mais de  $1.96 S / \sqrt{n}$ .

**Observação:** A probabilidade do intervalo a ser escolhido conter o verdadeiro valor da média é igual a  $1 - \alpha$ . Em outras palavras, obtendo várias amostras e, para cada uma delas, calculando-se o correspondente intervalo de confiança para  $\mu$ , tem-se que  $100(1 - \alpha)\%$  das amostras conterão o valor de  $\mu$  e  $100\alpha\%$  das amostras não conterão a média populacional.

## 2.3 Desigualdade de Markov e Chebyshev

A Desigualdade de Markov e a desigualdade de Chebyshev são de grande importância para a demonstração da Lei dos Grandes Números. Detalhes sobre essas desigualdades podem ser encontradas em (JAMES, 2013), (DEGROOT M. H. H.; SCHERVISH, 2011) e (ROBERT C. P.; CASELLA, 1999).

**Proposição 10** (Desigualdade de Markov). *Suponha que  $X$  é uma variável aleatória tal que  $P(X \geq 0) = 1$ . Então para todo número real  $t > 0$*

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

*Demonstração.* Por conveniência, assuma que  $X$  tem uma distribuição discreta para a qual a função de probabilidade é  $f$ . A prova para uma distribuição contínua ou tipos mais

gerais de distribuição é similar. Para uma distribuição discreta,

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \sum_{x < t} xf(x) + \sum_{x \geq t} xf(x).$$

Como  $X$  só pode ter valores não negativos, então todos os valores do somatório são não negativos. Logo,

$$E(X) \geq \sum_{x \geq t} xf(x) \geq \sum_{x \geq t} tf(x) = tP(X \geq t),$$

Portanto,

$$\frac{E(X)}{t} \geq P(X \geq t).$$

□

A desigualdade de Markov é de interesse principalmente para grandes valores de  $t$ . Na verdade, quando  $t \leq E(X)$  é sabido que  $P(X \leq t) \leq 1$ . No entanto, verifica-se a partir da desigualdade de Markov que para cada variável aleatória  $X$  não negativa cuja média é 1, o valor máximo possível de  $P(X \geq 100)$  é de 0,01. Além disso, pode-se verificar que este valor máximo é alcançado, na verdade, para cada variável aleatória  $X$  para as quais  $P(X = 0) = 0,99$  e  $P(X = 100) = 0,01$ .

A desigualdade de Chebyshev está relacionada com a ideia de que a variância de uma variável aleatória é uma medida de como “espalhar” sua distribuição. A desigualdade diz que a probabilidade de  $X$  estar longe da sua média é limitada por uma quantidade que aumenta à medida que  $\text{Var}(X)$  aumenta.

**Corolário 11** (Desigualdade de Chebyshev). *Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $\text{Var}(X)$  existe. Então, para cada número  $t > 0$ ,*

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}.$$

*Demonstração.* Seja  $Y = [X - E(X)]^2$ . Então  $P(Y \geq 0) = 1$  e  $E(Y) = \text{Var}(X)$ . Aplicando a desigualdade em  $Y$ , obtém-se

$$P(|X - E(X)| \geq t) = P(Y \geq t^2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}.$$

□

Pode ser visto a partir desta prova que a desigualdade Chebyshev é simplesmente um caso especial da desigualdade de Markov. Portanto, os comentários que foram dados após a prova da desigualdade de Markov podem ser aplicados também à desigualdade de Chebyshev. Por causa de sua generalidade, estas desigualdades são muito úteis. Por exemplo, se  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  e ao tomar  $t = 3\sigma$ , então a desigualdade de Chebyshev produz:

$$P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

## 2.4 Lei dos grandes números

A desigualdade de Chebyshev pode não ser uma ferramenta prática para determinar o tamanho apropriado da amostra em um problema específico, porque ela pode especificar um tamanho de amostra muito maior do que é realmente necessário para a distribuição em particular, a partir do qual a amostra está sendo tomada. No entanto, a desigualdade de Chebyshev é uma ferramenta teórica valiosa, e será usada para provar um resultado importante conhecido como a *lei dos grandes números*.

Suponha que  $Z_1, Z_2, \dots$  é uma sequência de variáveis aleatórias. A grosso modo, é dito que essa sequência converge para um número  $Z$  dado se a distribuição de probabilidade de  $Z_n$  torna-se cada vez mais concentrada em torno de  $Z$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para ser mais preciso, segue a seguinte definição.

**Definição 22** (Convergência em Probabilidade). *A sequência  $Z_1, Z_2, \dots$  de variáveis aleatórias converge para  $Z$  em probabilidade se para todo número  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = 0.$$

**Notação:**  $Z_n \xrightarrow{P} Z$ .

A principal ideia da convergência em probabilidade é que, quando  $n$  é arbitrariamente grande, a probabilidade da diferença  $|Z_n - Z|$  ser maior do que qualquer número positivo  $\varepsilon$  tende a zero.

**Definição 23** (Convergência quase certa). *A sequência  $Z_1, Z_2, \dots$  de variáveis aleatórias converge quase certamente para  $Z$  se*

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z\right) = 1,$$

ou equivalentemente,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = Z(\omega)\right\}\right) = 1.$$

A convergência quase certa é também conhecida como convergência com probabilidade 1.

**Notação:**  $Z_n \xrightarrow{q.c.} Z$ .

Este resultado nos diz que, o conjunto dos  $\omega$  em que  $Z_n \nrightarrow Z$  tem probabilidade zero. A convergência quase certa é uma convergência pontual em um conjunto de medida 1, ou seja,  $Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega)$  para quase todo  $\omega$ , exceto aqueles dentro de um conjunto de medida nula, ao contrário da convergência em probabilidade, que não diz respeito à

convergência pontual, apenas afirma que para valores grandes de  $n$  as variáveis  $Z_n$  e  $Z$  são aproximadamente iguais com probabilidade bem alta. Convergência em probabilidade é mais fraca que convergência quase certa, já que

convergência quase certa  $\Rightarrow$  convergência em probabilidade,  
convergência em probabilidade  $\nRightarrow$  convergência quase certa.

**Proposição 12.** *Se  $Z_n \rightarrow Z$  quase certamente, então  $Z_n \xrightarrow{P} Z$ .*

A demonstração pode ser obtida em (JAMES, 2013).

**Teorema 13** (Lei dos Grandes Números). *Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  forma uma amostra aleatória de uma distribuição cuja média é  $\mu$  e a variância é finita. Denote por  $\bar{X}_n$  a média amostral. Então*

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

*Demonstração.* Seja  $\sigma^2$  a variância de cada  $X_i$ . Segue-se, a partir da desigualdade de Chebyshev, que para cada número  $\varepsilon > 0$ ,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1,$$

o que significa que  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ . □

Agora pode-se formular a Lei dos Grandes Números de uma maneira mais geral do que a vista anteriormente.

Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias *integráveis* e sejam  $S_1, S_2, \dots$  as *somas parciais*, definidas por  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

**Definição 24.** *Diz-se que  $X_1, X_2, \dots$  satisfazem a Lei Fraca dos Grandes Números se*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

*ou, equivalentemente, se*

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n - (E(X_1) + \dots + E(X_n))}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

**Definição 25.** *Diz-se que  $X_1, X_2, \dots$  satisfazem a Lei Forte dos Grandes Números se*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{q.c} 0$$



ou, equivalentemente, se

$$\frac{(X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2)) + \cdots + (X_n - E(X_n))}{n} \rightarrow 0, \quad \text{quase certamente.}$$

**Teorema 14** (Lei Fraca de Chebyshev). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes 2 a 2 com variâncias finitas e uniformemente limitadas (i.e., existe  $c$  finito tal que para todo  $n$ ,  $\text{Var}(X_n) \leq c$ ). Então  $X_1, X_2, \dots$  satisfazem a Lei Fraca dos Grandes Números:*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

*Demonstração.* Precisa-se mostrar que para  $\varepsilon > 0$ ,

$$P\left(\frac{|S_n - E(S_n)|}{n} \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como  $\text{Var}(S_n) = \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i \leq nc$ , a desigualdade de Chebyshev implica

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon n) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0.$$

□

**Corolário 15** (Lei dos Grandes Números de Bernoulli). *Considere uma sequência de ensaios binomiais independentes, tendo a mesma probabilidade  $p$  de “sucessos” em cada ensaio. Se  $S_n$  é o número de sucessos nos primeiros  $n$  ensaios, então*

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow p \quad \text{em probabilidade.}$$

*Demonstração.* Seja

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se o } n\text{-ésimo ensaio é sucesso,} \\ 0, & \text{se o } n\text{-ésimo ensaio é fracasso.} \end{cases}$$

Então  $X_1, X_2, \dots$  são independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com média  $\mu = p$ . Como  $\text{Var} X_n = p(p-1)$ , a Lei Fraca de Chebyshev implica que

$$\frac{S_n - np}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

□

A hipótese de variâncias finitas foi eliminada por Khintchin, o qual conseguiu provar a Lei dos Grandes Números no caso de variáveis independentes e identicamente distribuídas, supondo apenas integrabilidade.

**Teorema 16** (Lei Fraca de Khintchin). *Se  $X_1, X_2, \dots$  são independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com média comum  $\mu$ , então*

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{em probabilidade.}$$

**Proposição 17** (Lema de Borel-Cantelli). *Seja  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  uma sequência de eventos aleatórios. Temos que:*

1. *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , então  $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ .*
2. *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  e os eventos  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  são independentes, então  $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$ .*

**Teorema 18** (Recíproca para a Lei Forte de Kolmogorov). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Se  $E(|X_1|) = +\infty$ , então, com probabilidade 1, a sequência*

$$\frac{|S_n|}{n} = \frac{|X_1 + \dots + X_n|}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

*não é limitada.*

**Observação:** A Lei Forte afirma que as  $X_n$  são integráveis, então  $\frac{S_n}{n}$  converge para um limite finito ( $= E(X_1)$ ) com probabilidade 1. A recíproca diz que se as  $X_n$  não forem integráveis, então, com probabilidade 1,  $\frac{S_n}{n}$  não convergirá para um limite finito.

*Demonstração.* Se  $E(|X_1|) = +\infty$ , então

$$E\left(\frac{|X_1|}{k}\right) = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pelo critério de integrabilidade,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_1|}{k} \geq n\right) = \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

As variáveis  $X_n$  são identicamente distribuídas, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_1|}{k} \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_n|}{k} \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_n|}{n} \geq k\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por independência das  $X_n$ , os eventos  $A_n = \left[ \frac{|X_n|}{n} \geq k \right]$  são independentes, e a Proposição de Borel-Cantelli implica

$$P \left( \frac{|X_n|}{n} \geq k \right) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo  $B_k = \left[ \frac{|X_n|}{n} \geq k \right]$ , tem-se

$$P \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) = 1,$$

pois a interseção de um número enumerável de eventos de probabilidade 1 também tem probabilidade 1.

Para terminar a prova, basta mostrar que se  $\frac{|X_n|}{n}$  é ilimitada, então  $\frac{|S_n|}{n}$  também é ilimitada. Agora, com  $S_0 = 0$ , tem-se

$$\frac{|X_n|}{n} = \frac{|S_n - S_{n-1}|}{n} \leq \frac{|S_n|}{n} + \frac{|S_{n-1}|}{n},$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Portanto, se  $\frac{|X_n|}{n}$  é ilimitada, então  $\frac{|S_n|}{n}$  é ilimitada ou  $\frac{|S_{n-1}|}{n}$  é ilimitada (se as duas sequências fossem limitadas, a sua soma também seria). Mas se  $n \geq 2$ ,

$$\frac{|S_{n-1}|}{n} = \frac{|S_{n-1}|}{(n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{n}$$

e  $\frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{n} < 1$ , de modo que  $|S_{n-1}|/n$  é ilimitada se, e somente se  $\frac{|S_n|}{n}$  também o é (note que  $|S_{n-1}|/n-1$ , para  $n \geq 2$ , forma a mesma sequência que  $|S_n|/n$ ,  $n \geq 1$ ).  $\square$

Para provar a Lei Forte, primeiro será vista uma extensão da desigualdade de Chebyshev.

**Proposição 19** (Desigualdade de Kolmogorov). *Sejam  $X_1, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes tais que  $E(X_k) = 0$  e  $\text{Var}(X_k) < \infty$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Então, para todo  $\lambda > 0$ ,*

$$P \left( \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^n \text{Var} X_k,$$

onde  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ .

**Teorema 20** (Primeira Lei Forte de Kolmogorov). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e integráveis, e suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < +\infty.$$

Então as  $X_n$  satisfazem a Lei Forte dos Grandes Números, i.e.,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{(E(X_1) + \cdots + E(X_n))}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quase certamente.}$$

**Corolário 21.** *A Lei Forte é satisfeita por toda sequência de variáveis aleatórias independentes e uniformemente limitadas.*

*Demonstração.* Se  $X_1, X_2, \dots$  são uniformemente limitadas, então existe  $c$  finito tal que  $|X_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ . Neste caso,  $\text{Var } X_n \leq E(X_n^2) \leq c^2$  e, como as variáveis estão limitadas, a condição do teorema é satisfeita.  $\square$

**Teorema 22** (A Lei Forte de Komogorov). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com  $E(X_n) = \mu$ . Então*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu.$$

**Corolário 23** (Lei Forte de Borel). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que  $P(X_n = 1) = p$ ,  $P(X_n = 0) = 1 - p$ . Então  $S_n/n \rightarrow p$  quase certamente, onde  $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ .*

## 3 Números Aleatórios

Para qualquer simulação Monte Carlo é necessário gerar números aleatórios. Um número aleatório representa o valor de uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $(0,1)$ .

### 3.1 Geração de números pseudoaleatórios

Os números aleatórios foram originalmente gerados tanto manualmente quanto mecanicamente usando técnicas como jogar um dado, rodar uma roleta ou embaralhar cartas. Entretanto, a aproximação moderna consiste em usar um computador para sucessivamente gerar números *pseudoaleatórios*. Os números pseudoaleatórios constituem uma sequência de valores, os quais, embora sejam gerados deterministicamente devem ter a aparência de variáveis aleatórias uniformes  $(0,1)$  independentes. Detalhes podem ser vistos em (KROESE DIRK P.; TAIMRE, 2011), (FISHMAN, 1999), (GENTLE, 2002), (GIVENS G.H.; HOETING, 2004), (JR. P. J.; BONAT, 2012) e (RAO, 1973).

Uma das aproximações mais comuns para gerar números pseudoaleatórios é o *método congruencial multiplicativo*:

- Considere um valor inicial  $x_0$ , chamado *semente*;
- Recursivamente calcule os valores sucessivos  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , usando:  $x_n = ax_{n-1} \mod m$ , onde  $a$  e  $m$  são inteiros positivos dados. Ou seja,  $x_n$  é o resto da divisão de  $ax_{n-1}$  por  $m$ ;
- A quantidade  $x_n/m$  é chamada um número pseudoaleatório, ou seja, é uma aproximação para o valor de uma variável aleatória uniforme.

As constantes  $a$  e  $m$  a serem escolhidas devem satisfazer três critérios:

1. Para qualquer semente inicial, a sequência resultante deve ter a “aparência” de uma sequência de variáveis aleatórias uniformes  $(0,1)$  independentes.
2. Para qualquer semente inicial, o número de variáveis que podem ser geradas antes da repetição ocorrer deve ser grande.
3. Os valores podem ser calculados eficientemente em um computador digital.

O ponto de partida em simulação computacional é gerar esses números pseudoaleatórios. Neste estudo, assume-se que se tem um bom gerador de números aleatórios e não será preciso entrar no mérito de questões teóricas envolvendo a construção de “bons” geradores de números aleatórios.

## 3.2 Geração de Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

### Método da Transformada Inversa

Suponha que se quer gerar o valor de uma variável aleatória discreta  $X$  tendo função massa de probabilidade:  $P(X = x_j) = p_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ,  $\sum_j p_j = 1$ . Para isso, basta gerar um número aleatório  $U$  e considerar:

$$X = \begin{cases} x_0 & \text{se } U < p_0 \\ x_1 & \text{se } p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{se } \sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^j p_i \\ \vdots & \end{cases}$$

Desde que, para  $0 < a < b < 1$ ,  $P(a \leq U < b) = b - a$ , tem-se:  $P(X = x_j) = P\left(\sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^j p_i\right) = p_j$ . Assim,  $X$  tem a distribuição desejada.

#### Exemplo 24. Geração de uma variável aleatória de Poisson.

A variável aleatória  $X$  é de Poisson com média  $\lambda$  se

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

A chave para usar o método da transformada inversa para gerar uma tal variável aleatória é dada pela seguinte identidade:

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i, \quad i \geq 0.$$

Ao utilizar a recursão acima para calcular as probabilidades de Poisson quando elas são necessárias, o algoritmo da transformada inversa para gerar uma variável aleatória de Poisson com média  $\lambda$  pode ser expresso como segue.

*Passo 1. Gere um número aleatório  $U$ .*

*Passo 2.  $i = 0$ ,  $p = e^{-\lambda}$ ,  $F = p$ .*

*Passo 3. Se  $U < F$ , faça  $X = i$  e pare.*

*Passo 4.*  $p = \lambda p / (i + 1)$ ,  $F = F + p$ ,  $i = i + 1$ .

*Passo 5.* Volte ao passo 3.

A quantidade  $i$  refere-se ao valor atualmente sob consideração;  $p = p_i$  é a probabilidade de  $X$  ser igual a  $i$ , e  $F = F(i)$  é a probabilidade de  $X$  ser menor ou igual a  $i$ .

Suponha agora que se quer gerar uma variável aleatória contínua tendo função distribuição  $F$ .

**Proposição 25.** *Seja  $U$  uma variável aleatória uniforme  $(0,1)$ . Para qualquer função distribuição contínua  $F$ , a variável  $X$  definida por  $X = F^{-1}(U)$  tem distribuição  $F$ . [ $F^{-1}(u)$  é tal que  $F(x) = u$ ].*

Essa proposição mostra que pode-se gerar uma variável aleatória  $X$  de uma função distribuição contínua  $F$  gerando um número aleatório  $U$  e tomando  $X = F^{-1}(U)$ .

**Exemplo 26. Geração de uma variável aleatória exponencial.**

Se  $X$  é uma variável aleatória exponencial com taxa 1, então sua função distribuição é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-x}.$$

Como  $0 \leq F(x) \leq 1$ , tomando  $F(x) = u$ , onde  $u \sim U(0,1)$  tem-se:

$$u = F(x) = 1 - e^{-x}$$

ou

$$1 - u = e^{-x}$$

ou, aplicando o logaritmo

$$x = -\ln(1 - u).$$

Daí, pode-se gerar uma exponencial com parâmetro 1 gerando um número aleatório  $U$  e em seguida fazendo

$$X = F^{-1}(U) = -\ln(1 - U).$$

Uma pequena economia de tempo pode ser obtida notando que  $1 - U$  também é uma uniforme em  $(0,1)$  e assim,  $-\ln(1 - U)$  tem a mesma distribuição que  $-\ln(U)$ . Isto é, o logaritmo negativo de um número aleatório é exponencialmente distribuído com taxa 1.

Além disso, note que se  $X$  é uma exponencial com média 1, então para qualquer constante  $c$ ,  $cX$  é uma exponencial com média  $c$ . Assim, uma variável aleatória exponencial  $X$  com taxa  $\lambda$  (média  $\frac{1}{\lambda}$ ) pode ser gerada através da geração de um número aleatório  $U$  e fazendo

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln U.$$

### Técnica da aceitação-rejeição

Suponha que se tenha um método eficiente para simular uma variável aleatória com função massa de probabilidade  $\{q_j, j \geq 0\}$ . Pode-se usar essa variável como a base para simular uma variável da distribuição tendo função massa de probabilidade  $\{p_j, j \geq 0\}$ . Primeiro, gera-se uma variável aleatória  $Y$  com função massa de probabilidade  $\{q_i\}$  e então aceita-se este valor simulado com uma probabilidade proporcional a  $p_Y/q_Y$ . Especificamente, seja  $c$  uma constante tal que  $\frac{p_j}{q_j} \leq c, \forall j \geq 0$  com  $p_j > 0$ . Seja o método para simular uma variável aleatória  $X$  com função massa de probabilidade  $p_j = P(X = j)$ .

Passo 1: Simule o valor de  $Y$ , com função massa de probabilidade  $q_j$ .

Passo 2: Gere um número aleatório  $U$ .

Passo 3: Se  $U < p_Y/cq_Y$ , faça  $X = Y$  e pare. Caso contrário, retorne ao Passo 1.

**Teorema 27.** *O algoritmo da aceitação-rejeição gera uma variável aleatória  $X$  tal que  $P(X = x_j) = p_j, j = 0, 1, \dots$ . Ademais, o número de iterações do algoritmo necessárias para obter  $X$  é uma variável aleatória geométrica com média  $c$ .*

Suponha que existe um método para gerar uma variável aleatória tendo função densidade de probabilidade  $g(x)$ . Pode-se usá-lo como base para gerar uma variável aleatória de uma distribuição contínua com função densidade de probabilidade  $f(x)$ .

Especificamente, seja  $c$  uma constante tal que  $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c, \forall y \geq 0$ .

Passo 1: Gere  $Y$  com função densidade  $g$ .

Passo 2: Gere um número aleatório  $U$ .

Passo 3: Se  $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ , faça  $X = Y$ . Caso contrário, retorne ao Passo 1.



**Teorema 28.** *Considere o algoritmo aceitação-rejeição, que gera uma variável aleatória com função densidade  $f(x)$  a partir de uma variável aleatória com função densidade  $g(x)$ . Pode-se afirmar que:*

1. *A variável aleatória gerada pelo método da rejeição tem densidade  $f$ .*
2. *O número de iterações do algoritmo necessárias é uma variável aleatória geométrica com média  $c$ .*

Assim como no caso discreto, o valor de  $Y$  é aceito com probabilidade  $f(Y)/cg(Y)$ . Para obter  $Y$ , gera-se um número aleatório  $U$  e então  $Y$  é aceito se  $U \leq f(Y)/cg(Y)$ .

**Exemplo 29. Geração de uma variável aleatória Normal.**

Para gerar uma variável aleatória normal padrão  $Z$ , note primeiramente que o valor absoluto de  $Z$  tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad 0 < x < \infty.$$

Será utilizado o método da aceitação-rejeição com  $g$  sendo a função densidade exponencial com média 1, isto é,

$$g(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty.$$

O algoritmo a seguir gera uma exponencial com taxa 1 e variável aleatória normal padrão independente.

*Passo 1. Gere  $Y_1$ , uma variável aleatória exponencial com taxa 1.*

*Passo 2. Gere  $Y_2$ , uma variável aleatória exponencial com taxa 1.*

*Passo 3. Se  $Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2 > 0$ , faça  $Y = Y_2 - (Y_1 - 1)^2/2$  e vá para o passo 4. Caso contrário, vá para o passo 1.*

*Passo 4. Gere um número aleatório  $U$  e faça*

$$Z = \begin{cases} Y_1, & \text{se } U \leq \frac{1}{2}, \\ -Y_1, & \text{se } U > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

As variáveis aleatórias  $Z$  e  $Y$  geradas anteriormente são independentes, com  $Z$  sendo normal com média 0 e variância 1 e  $Y$  sendo exponencial com taxa 1.

Detalhes de como o algoritmo foi obtido podem ser encontrados em (ROSS, 2006).

### 3.3 Geração de um processo de Poisson

Suponha que se quer gerar os primeiros  $n$  tempos dos eventos de um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ . Para isso, será utilizado o resultado que diz que os tempos entre os eventos sucessivos de tal processo são variáveis aleatórias exponenciais independentes, cada uma com taxa  $\lambda$ . Assim, uma maneira de gerar o processo é gerando os tempos entre os eventos. Então, se forem gerados  $n$  números aleatórios  $U_1, U_2, \dots, U_n$  e calculados  $X_i = -\frac{1}{\lambda} \log U_i$ , então  $X_i$  pode ser considerado como o tempo entre o  $(i-1)$ -ésimo e o  $i$ -ésimo evento do processo de Poisson. Uma vez que o tempo atual do  $j$ -ésimo evento será igual à soma dos primeiros  $j$  intervalos de tempo entre os eventos, segue-se que os valores gerados dos primeiros  $n$  tempos dos eventos são  $\sum_{i=1}^j X_i, j = 1, \dots, n$ . Para gerar as primeiras  $T$  unidades de tempo do processo de Poisson, pode-se seguir o procedimento anterior de gerar sucessivamente os tempos entre os eventos, parando quando a soma ultrapassar  $T$ . Isto é, o algoritmo seguinte pode ser usado para gerar todos os tempos dos eventos que ocorrem no intervalo  $(0, T)$  de um processo de Poisson com taxa  $\lambda$ . No algoritmo,  $t$  refere-se ao tempo,  $I$  é o número de eventos que ocorreram no tempo  $t$ , e  $S(I)$  é o tempo do evento mais recente.

**Gerando as primeiras  $T$  unidades de tempo de um Processo de Poisson com taxa  $\lambda$ .**

Passo 1.  $t = 0, I = 0$ .

Passo 2. Gere um número aleatório  $U$ .

Passo 3.  $t = t - \frac{1}{\lambda} \ln U$ . Se  $t > T$ , pare.

Passo 4.  $I = I + 1, S(I) = t$ .

Passo 5. Vá para o passo 2.

O valor final de  $I$  no algoritmo acima vai representar o número de eventos que ocorrem no tempo  $T$ , e os valores  $S(1), \dots, S(I)$  serão os tempos dos  $I$  eventos em ordem crescente. Esses resultados podem ser vistos com mais detalhes em (ROSS, 2006).

## 4 Método de Monte Carlo

Suponha que se quer estimar  $\theta$ , o valor esperado de alguma variável aleatória  $X$ :

$$\theta = E(X).$$

Suponha, além disso, que possam ser gerados valores de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de probabilidade de  $X$ . Cada vez que for gerado um novo valor, diz-se que uma simulação foi concluída. Suponha que vão ser realizadas  $n$  simulações, assim, serão gerados  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Se

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

for sua média, então pela lei forte dos grandes números,  $\bar{X}$  será usado como um estimador para  $\theta$ . Seu valor esperado e sua variância são dados a seguir. Para o valor esperado tem-se

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \theta.$$

Fazendo

$$\sigma^2 = \text{Var}(X),$$

tem-se

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Além disso, decorre do Teorema Central do Limite que, para  $n$  grande,  $\bar{X}$  terá uma distribuição normal aproximada. Assim, se  $\sigma/\sqrt{n}$  é pequeno, então  $\bar{X}$  tende a estar próximo de  $\theta$  e, quando  $n$  for grande,  $\bar{X}$  será um bom estimador para  $\theta$ . Esta abordagem para estimar um valor esperado é conhecida como a *simulação de Monte Carlo*. Mais detalhes podem ser vistos em (ROSS, 2011) e (RUBINSTEIN, 1981).

A seguir faz-se uma estimativa do valor de  $\pi$  utilizando o método de Monte Carlo (ROSS, 2006).

### Exemplo 30. A estimativa de $\pi$

Suponha que o vetor aleatório  $(X, Y)$  é distribuído uniformemente no quadrado de área 4 centrado na origem. Isto é, é um ponto aleatório na região especificada na Figura 7. Considere a probabilidade desse ponto aleatório no quadrado estar contido dentro do círculo inscrito de raio 1 (Figura 8). Note que, como  $(X, Y)$  é distribuído uniformemente no quadrado, segue que

$$\begin{aligned}
 P\{(X,Y) \text{ está no círculo}\} &= P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} \\
 &= \frac{\text{Área do círculo}}{\text{Área do quadrado}} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Então, se for gerado um grande número de pontos aleatórios no quadrado, a proporção de pontos que caem dentro do círculo será aproximadamente  $\pi/4$ . Se  $X$  e  $Y$  são independentes e ambos são distribuídos uniformemente no intervalo  $(-1, 1)$ , sua densidade conjunta será

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= f(x)f(y) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.
 \end{aligned}$$

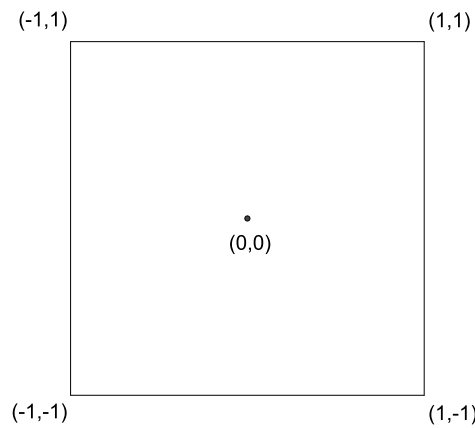


Figura 7: Quadrado

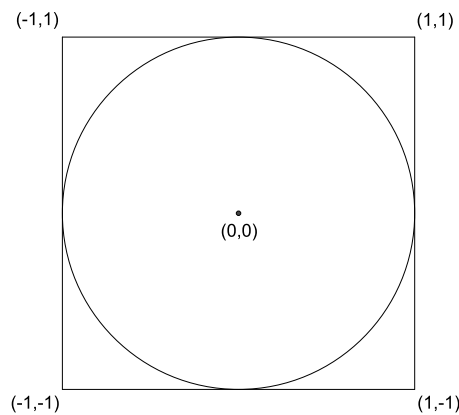


Figura 8: Círculo dentro do quadrado

Como a função densidade de  $(X,Y)$  é constante no quadrado, segue (da definição) que  $(X,Y)$  é distribuída uniformemente no quadrado. Se  $U$  é uniforme em  $(0,1)$  então

$2U$  é uniforme em  $(0, 2)$ , e  $2U - 1$  é uniforme em  $(-1, 1)$ . Se forem gerados números aleatórios  $U_1$  e  $U_2$ , obtidos  $X = 2U_1 - 1$  e  $Y = 2U_2 - 1$ , e definido

$$I = \begin{cases} 1, & \text{se } X^2 + Y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$E(I) = P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, pode-se estimar  $\pi/4$  gerando um grande número de pares de números aleatórios  $u_1, u_2$  e estimando  $\pi/4$  pela fração dos pares para os quais  $(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1$ .

Utilizando o método anterior para estimar o valor de  $\pi$ , tem-se os seguintes resultados:

Simulações	Valor aproximado	Erro
50	3.28000000	0.13840735
100	3.12000000	0.02159265
1000	3.14800000	0.00640735
1000000	3.14161600	0.00002335

Tabela 1: Estimação do valor de  $\pi$ .

## 4.1 Método para determinar quando parar de gerar novos dados

Um estudo de simulação é normalmente realizado para determinar o valor de algumas quantidades  $\theta$  ligadas com um modelo estocástico particular. Uma simulação de um sistema de interesse resulta nos dados de saída  $X$ , uma variável aleatória cujo valor esperado é a quantidade de interesse  $\theta$ . Uma segunda simulação independente, isto é, uma segunda execução da simulação, fornece uma nova e independente variável aleatória tendo média  $\theta$ . Isso continua até se acumular um total de  $n$  execuções, e as  $n$  variáveis aleatórias independentes  $X_1, \dots, X_n$  são todas distribuídas identicamente com média  $\theta$ . A média desses  $n$  valores,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ , é usada então como um estimador, ou aproximador, de  $\theta$ .

Quando aplica-se a simulação de Monte Carlo para resolver um problema, como no exemplo anterior, em que utiliza-se a simulação para estimar o valor de  $\pi$ , é interessante pensar em quando parar de gerar novos dados.

Suponha que, em uma simulação, tem-se a opção de gerar continuamente dados adicionais  $X_i$ . Se o objetivo é estimar o valor de  $\theta = E(X_i)$ , quando deve-se parar de gerar novos dados? A resposta para essa pergunta é que primeiro deve-se escolher um valor aceitável  $d$  para o desvio-padrão do estimador, pois se  $d$  for o desvio-padrão do estimador  $\bar{X}$ , então pode-se, por exemplo, afirmar com 95% de confiança que  $\bar{X}$  não diferirá de  $\theta$  por

mais do que  $1.96d$ . Pode-se então continuar a gerar novos dados até terem sido gerados  $n$  dados nos quais o estimador de  $\sigma/\sqrt{n}$ , a saber,  $S/\sqrt{n}$ , seja menor que o valor aceitável  $d$ . Como o desvio-padrão amostral  $S$  pode não ser particularmente um bom estimador de  $\sigma$  quando o tamanho da amostra é pequeno, recomenda-se o procedimento a seguir para determinar quando parar de gerar novos dados.

Passo 1. Escolha um valor aceitável  $d$  para o desvio-padrão do estimador.

Passo 2. Gere pelo menos 100 valores de dados.

Passo 3. Continue gerando valores de dados adicionais, parando quando tiver gerado  $n$  valores e  $S/\sqrt{n} < d$ , onde  $S$  é o desvio-padrão amostral baseado naqueles  $n$  valores.

Passo 4. A estimativa para  $\theta$  é dada por  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ .

Considere a sequência de valores  $X_1, X_2, \dots$ . Sejam

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^j \frac{X_i}{j} \quad \text{e} \quad S_j^2 = \sum_{i=1}^j \frac{(X_i - \bar{X}_j)^2}{j-1}, j \geq 2$$

a média amostral e variância amostral dos primeiros  $j$  valores. Para calcular sucessivamente o valor atual da média e variância amostral, pode-se utilizar a recursão seguinte.

Com  $S_1^2 = 0, \bar{X}_0 = 0$ , tem-se:

$$\bar{X}_{j+1} = \bar{X}_j + \frac{X_{j+1} - \bar{X}_j}{j+1},$$

$$S_{j+1}^2 = \left(1 - \frac{1}{j}\right) S_j^2 + (j+1)(\bar{X}_{j+1} - \bar{X}_j)^2.$$

Como  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$  é um estimador não-viesado para  $\theta$ , segue-se que o erro quadrado médio é igual a sua variância. Isto é,

$$E((\bar{X} - \theta)^2) = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\text{Var}(X)}{n}.$$

Assim, se for possível obter uma estimativa não-viesada para  $\theta$  com uma variância menor do que a de  $\bar{X}$ , conseguiria-se um estimador melhorado. Baseado nisto, são utilizadas as técnicas de redução de variância, que podem ser vistas em (ROSS, 1997), (KROESE DIRK P.; TAIMRE, 2011), (CASELLA G.; BERGER, 2001), (RUBINSTEIN, 1981), (ROBERT C. P.; CASELLA, 1999) e (KAHN H.; MARSHALL, 1953), que buscam um estimador com uma variância menor que a de  $\bar{X}$ .

## 5 Aplicações do Método de Monte Carlo

Atualmente o Método de Monte Carlo é aplicado em diversas áreas, como em: **Finanças**, na modelagem e simulação de um mercado de opção (SETZU, 2008), (BOYLE, 1977); **Engenharia**, na gestão de portfólio de uma empresa de seguros (NORGAARD, 1966), na análise de um problema de estoque (RAUN, 1963); **Biologia**, usado para a biologia de sistemas de tratamento de câncer (LEHRACH, 2012), para estratégias de otimização e paralelização para a simulação de Monte Carlo de uma infecção pelo HIV (CRANE, 2007). Dentre inúmeras aplicações na **Física**, **Química** e **Medicina**.

### 5.1 Simulação de Monte Carlo para o cálculo de integrais

Os métodos de Monte Carlo tipicamente envolvem a geração de observações de alguma distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. Uma das primeiras aplicações do método foi para calcular integrais. A ideia do método é escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado.

#### 5.1.1 Objetivo

Calcular algumas integrais unidimensionais e multidimensionais com diferentes limites de integração, incluindo  $-\infty$  e  $+\infty$ . Os resultados obtidos serão comparados com a solução analítica e também será considerado o número de simulações necessárias para se obter um estimador com desvio padrão menor do que uma cota dada.

#### 5.1.2 Modelo

Seja  $g(x)$  uma função e suponha que se quer calcular  $\theta$  onde:

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx.$$

Para isso, considere  $U$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(0,1)$  então:

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx = E[g(U)].$$

Se  $U_1, \dots, U_k$  são variáveis aleatórias uniformes independentes, tem-se que as variáveis aleatórias  $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_k)$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tendo média  $\theta$ . Portanto, pela lei forte dos grandes números, segue que, com probabilidade 1,

$$\sum_{i=1}^k \frac{g(U_i)}{n} \longrightarrow E[g(U)] = \theta,$$

onde  $n \longrightarrow \infty$ .

Assim, pode-se aproximar  $\theta$  gerando uma grande quantidade de números aleatórios  $u_i$  e tomar como aproximação o valor médio de  $g(u_i)$ .

#### 5.1.2.1 Cálculo de $\int_a^b g(x)dx$

Para calcular  $\int_a^b g(x)dx$  basta realizar uma substituição  $y = \frac{x-a}{b-a}$ ,  $dy = \frac{dx}{(b-a)}$ .

Assim, obtém-se:

$$\theta = \int_0^1 g(a + [b-a]y)(b-a)dy = \int_0^1 h(y)dy,$$

onde  $h(y) = (b-a)g(a + [b-a]y)$ .

Desse modo, pode-se aproximar  $\theta$  gerando continuamente números aleatórios e tomando o valor médio de  $h$  calculado nesses números.

#### 5.1.2.2 Cálculo de $\int_0^\infty g(x)dx$

Se o interesse é calcular  $\int_0^\infty g(x)dx$ , pode-se aplicar a substituição  $y = \frac{1}{(x+1)}$ ,  $dy = \frac{-dx}{(x+1)^2} = -y^2 dx$ , para obter a identidade:

$$\theta = \int_0^1 h(y)dy,$$

onde  $h(y) = \frac{g(\frac{1}{y} - 1)}{y^2}$ .

#### 5.1.2.3 Cálculo de integrais multidimensionais

O método também pode ser utilizado para o caso de integrais multidimensionais. Suponha que  $g$  é uma função com argumento  $n$ -dimensional e se quer calcular:

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Tem-se que  $\theta$  pode ser expresso como  $\theta = E[g(U_1, \dots, U_n)]$ , onde  $U_1, \dots, U_n$  são variáveis aleatórias uniformes  $(0,1)$  independentes. Portanto, para calcular  $\theta$  é preciso gerar  $k$  conjuntos independentes, cada um consistindo de  $n$  variáveis uniformes  $(0,1)$  independentes:



$$\begin{array}{c}
U_1^1, \dots, U_n^1 \\
U_1^2, \dots, U_n^2 \\
\vdots \\
U_1^k, \dots, U_n^k.
\end{array}$$

Assim, as variáveis  $g(U_1^i, \dots, U_n^i), i = 1, \dots, k$  são todas independentes e identicamente distribuídas com média  $\mu$ . Pode-se estimar  $\theta$  por  $\sum_{i=1}^k g(U_1^i, \dots, U_n^i)/k$ .

Usando números aleatórios também pode-se gerar os valores de variáveis aleatórias de distribuições arbitrárias, como vimos acima.

### 5.1.3 Experimentos

Foram realizados cálculos de integrais simples e múltiplas, com diferentes limites de integração, com 100 simulações e com  $N$  simulações, onde  $N$  está relacionado com o desvio padrão da média, isto é,  $N$  representa o número de simulações realizadas até o desvio padrão da média ficar abaixo de uma cota  $d$  fornecida pelo usuário. Neste experimento, foi considerado  $d = 0.0051$ , pois, neste caso, pode-se garantir com 95% de confiança que a média amostral não diferirá do valor da integral por mais de 0.01.

#### Gráficos - Pontos gerados de uma função $f$

A seguir, serão exibidas algumas funções  $f(x)$  e os pontos gerados de cada uma delas. Em cada caso, a média amostral dos valores de  $f(x)$  obtidos foi usada como estimativa da integral. Para cada uma das funções, inicialmente, foram gerados 100 pontos e em seguida, o número de pontos gerados foi o número de simulações  $N$  necessárias para que o desvio padrão da média ficasse abaixo de uma dada cota.

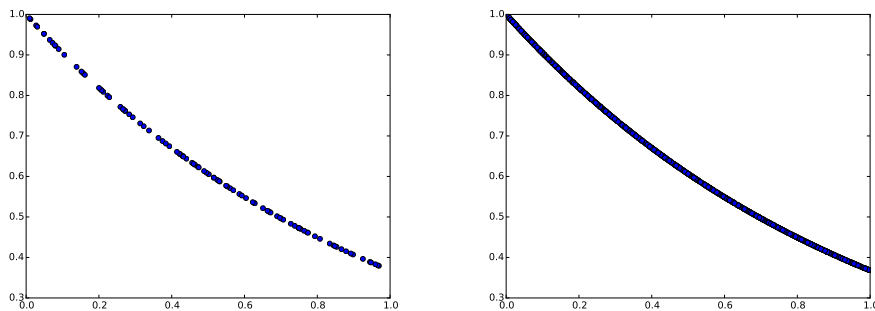


Figura 9: Gráfico de  $f_1(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$  gerado com  $N = 100$  e  $N = 1258$

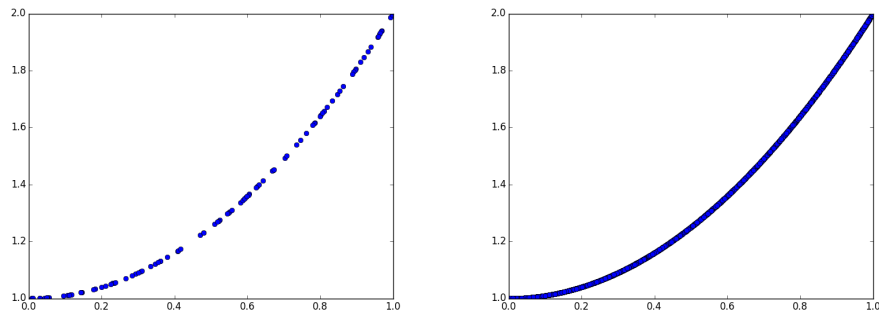


Figura 10: Gráfico de  $f_2(x) = x^2 + 1, x \in [0, 1]$  gerado com  $N = 100$  e  $N = 3426$

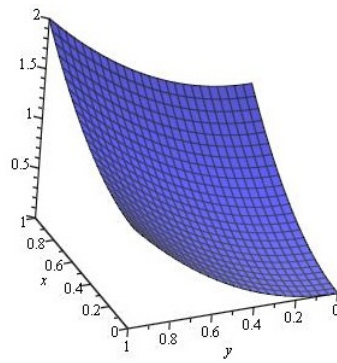


Figura 11: Gráfico da função  $f_3(x, y) = x^2 + y^2, x, y \in [0, 1]$

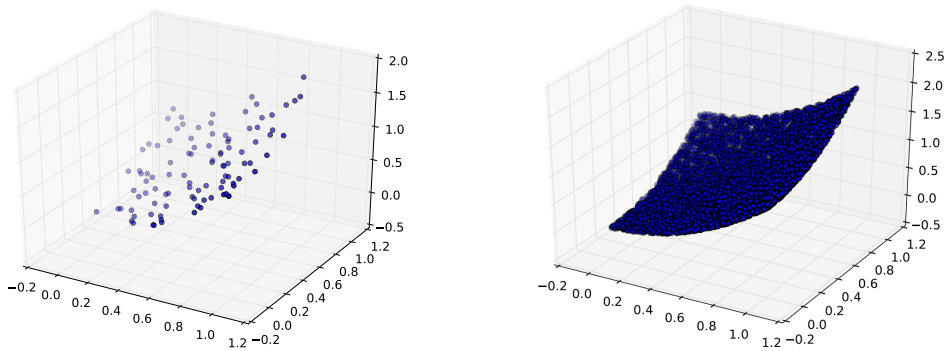


Figura 12: Gráfico de  $f_3(x, y) = x^2 + y^2$  gerado com  $N = 100$  e  $N = 6784$

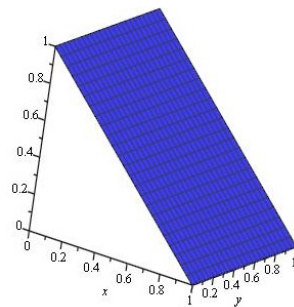


Figura 13: Gráfico da função  $f_4(x, y) = 1 - x, x, y \in [0, 1]$

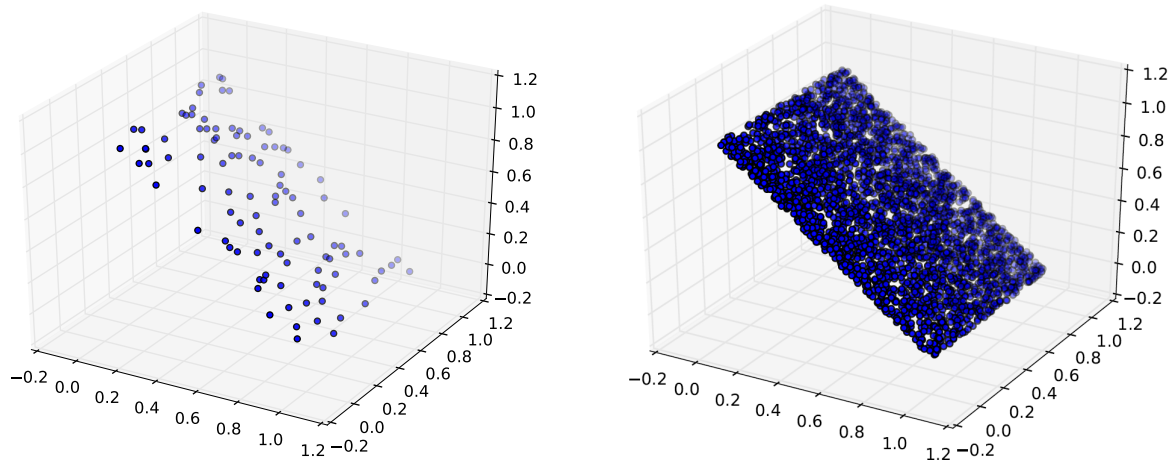


Figura 14: Gráfico de  $f_4(x, y) = 1 - x$  gerado com  $N = 100$  e  $N = 3140$

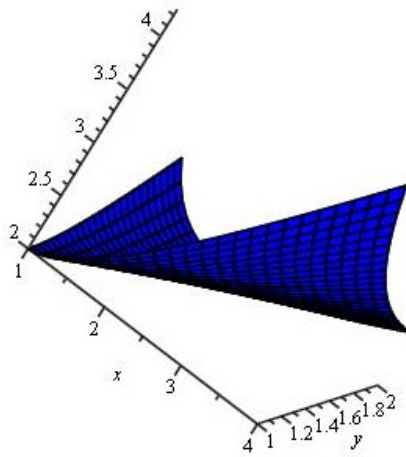


Figura 15: Gráfico da função  $f_5(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $x \in [1, 4]$ ,  $y \in [1, 2]$

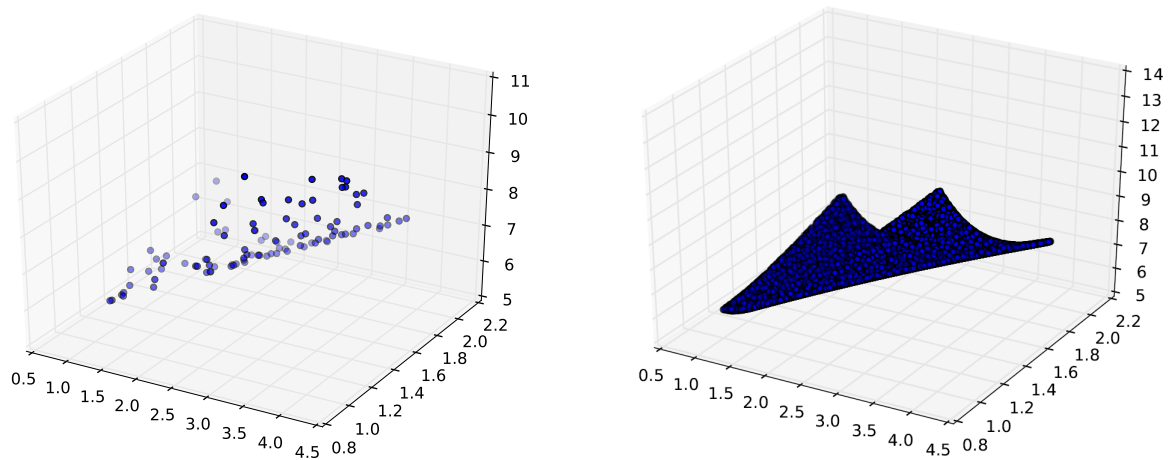


Figura 16: Gráfico de  $f_5(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ,  $x \in [1, 4]$ ,  $y \in [1, 2]$  gerado com  $N = 100$  e  $N = 68638$

Integral	Solução Analítica	$N = 100$		Número de simulações controlado (N)		
		Solução MC	Erro Absoluto	Solução MC	Erro Absoluto	N
$\int_0^1 (x^2 + 1)dx$	1.33333	1.33691	0.00358	1.33830	0.00509	3426
$\int_0^1 e^{-x}dx$	0.63212	0.63305	0.00093	0.63316	0.00104	1258
$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$	21	20.42910	0.5709	20.99744	0.002555	1039427
$\int_1^{1.5} x \ln x dx$	0.143648	0.137035	0.00661	0.14219	0.00145	278
$\int_0^{3\pi/4} e^{3x} \sin 2x dx$	2.58863	2.64546	0.05683	2.58669	0.00193	215054
$\int_0^\infty x(1+x^2)^{-2}dx$	0.5	0.52554	0.02554	0.50006	$6.62 \times 10^{-5}$	4327
$\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$	0.88623	1.03238	0.14616	0.881404	0.00482	13146
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$	0	0.04553	0.04553	-0.00143	0.00143	35004
$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$	0	0.05634	0.05634	-0.00027	0.00027	21089
$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2)dxdy$	0.66667	0.66879	0.00213	0.66461	0.00205	6784
$\int_0^1 \int_0^1 (1-x)dxdy$	0.5	0.53171	0.03171	0.49923	0.00077	3140
$\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dxdy$	7.27804	7.26982	0.00822	7.27739	0.00066	68638
$\int_0^\infty \int_0^2 e^{-(x+y)} dydx$	0.86466	0.816778	0.04788	0.86417	0.00049	18382
$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{0.5} e^{x+y+z} dzdydx$	5.20645	5.10623	0.10022	5.21402	0.00757	203730

Tabela 2: Cálculo de integrais usando a simulação de Monte Carlo

## 5.2 Simulação de Eventos Discretos

Os elementos principais em uma simulação de eventos discretos são as variáveis e os eventos. Para fazer a simulação, precisa-se controlar continuamente algumas variáveis. Em geral, existem três tipos de variáveis que são frequentemente utilizadas, a variável

temporal, as variáveis contadoras e a variável de estado do sistema.

### Variáveis

1. Variável temporal  $t$  - Refere-se ao tempo decorrido.
2. Variáveis contadoras - Essas variáveis contam o número de vezes que certo evento ocorreu num tempo  $t$ .
3. Variável de estado do sistema - Descreve o “estado do sistema” em um tempo  $t$ .

Sempre que ocorre um “evento”, os valores das variáveis acima são alterados ou atualizados, e todos os dados de interesse são coletados. Para determinar quando o próximo evento vai ocorrer, mantém-se uma “lista de eventos”, que lista os próximos eventos e quando eles estão programados para ocorrer. Sempre que ocorrer um evento, é preciso restabelecer a variável temporal, assim como todas as variáveis de estado e as variáveis contadoras, e por fim coletar os dados relevantes. Desta forma, é possível acompanhar o sistema conforme ele evolui ao longo do tempo.

Com o exposto acima, pode-se dar uma ideia geral dos elementos de uma simulação de eventos discretos. Entretanto, é útil, para entender melhor, olhar alguns exemplos. Neste trabalho, apresentam-se três exemplos de simulação de eventos discretos: Um modelo de controle de estoque de uma loja, um modelo de risco de uma empresa de seguros e um modelo de compra de opções. Em todos será utilizado o Método de Monte Carlo.

#### 5.2.1 Simulação de Monte Carlo do risco de uma empresa de seguros

##### 5.2.1.1 Objetivo

O objetivo desta aplicação é simular um modelo de uma empresa de seguros usando o Método de Monte Carlo e verificar a probabilidade de que, dada algumas situações comuns no cotidiano dessa empresa (entrada de novos segurados, saída de um segurado, ocorrência de um sinistro), a mesma não tenha capital negativo ao final de um intervalo de tempo  $T$ .

##### 5.2.1.2 Modelo

Considerações iniciais sobre o modelo.

- Diferentes segurados de uma empresa de seguros geram sinistros de acordo com processos de Poisson independentes com uma taxa comum  $\lambda$ .
- O valor de cada sinistro tem distribuição  $F$ .

- Novos segurados assinam contratos segundo um processo de Poisson com taxa  $v$ .
- Cada segurado existente permanece na empresa por um tempo dado por uma distribuição exponencial com taxa  $\mu$ .
- Cada segurado paga à empresa de seguro um valor fixo  $c$  por unidade de tempo.

Começando com  $n_0$  clientes e capital inicial  $a_0 \geq 0$ , o interesse nesta aplicação é usar simulação para estimar a probabilidade de uma empresa ficar com o capital não negativo ao final de um intervalo de tempo  $T$ . Para isso as variáveis e eventos do modelo serão definidas da seguinte forma.

**Variável Tempo:**  $t$

**Variável de Estado do Sistema:**  $(n, a)$ , onde  $n$  é o número de segurados e  $a$  é o capital atual da empresa.

**Eventos:** Existem três tipos de eventos: um novo segurado, a saída de um segurado e um sinistro.

**Tempo do próximo evento:**  $t_E$ .

Vale observar que se  $(n, a)$  representa o estado do sistema no momento  $t$  então, devido ao fato do mínimo de variáveis aleatórias exponenciais também ser exponencial, o tempo em que o próximo evento vai ocorrer será igual a  $t + X$ , onde  $X$  é uma variável aleatória exponencial com taxa  $v + n\mu + n\lambda$ . Além disso, não importa quando ocorre este próximo evento, ele vai resultar de

- Um novo segurado, com probabilidade  $\frac{v}{v + n\mu + n\lambda}$ .
- A saída de um segurado, com probabilidade  $\frac{n\mu}{v + n\mu + n\lambda}$ .
- Um sinistro, com probabilidade  $\frac{n\lambda}{v + n\mu + n\lambda}$ .

Depois de se determinar quando ocorrerá o próximo evento, será gerado um número aleatório para determinar, dentre as três possibilidades, qual o evento ocorrerá, e então esta informação será usada para determinar o novo valor para a variável do estado do sistema.

Em seguida, dada a variável de estado  $(n, a)$

- $X$  será uma variável aleatória exponencial com taxa  $v + n\mu + n\lambda$

- $J$  será uma variável aleatória tal que:

$$\begin{aligned} J = 1, & \text{ com probabilidade } \frac{v}{v + n\mu + n\lambda}. \\ J = 2, & \text{ com probabilidade } \frac{n\mu}{v + n\mu + n\lambda}. \\ J = 3, & \text{ com probabilidade } \frac{n\lambda}{v + n\mu + n\lambda}. \end{aligned}$$

- $Y$  será uma variável aleatória do valor do sinistro, tendo uma distribuição  $F$ .

### Variável de Saída: I

$I = 1$ , se o capital da empresa é não negativo no intervalo  $[0, t]$ .

$I = 0$ , caso contrário.

#### 5.2.1.3 Algoritmo

##### Inicializar:

Primeiro inicialize

$$t = 0, \quad a = a_0, \quad n = n_0$$

em seguida, gere  $X$  e inicialize

$$t_E = X$$

Para atualizar o sistema é preciso se deslocar até o próximo evento. Será feita no mínimo 100 simulações.

##### Etapa de Atualização:

**Caso 1:**  $t_E > T$ :

Faça  $I = 1$  e termine a execução.

**Caso 2:**  $t_E \leq T$ :

Atualize

$$a = a + nc(t_E - t)$$

$$t = t_E$$

Gere  $J$ :

$J = 1$ : faça  $n = n + 1$

$J = 2$ : faça  $n = n - 1$

$J = 3$ : Gere  $Y$ .

Se  $Y > a$ , faça  $I = 0$  e termine a execução; caso contrário faça  $a = a - Y$ .

Gere  $X$ :

Atualize  $t_E = t + X$

A Etapa de atualização é repetida continuamente até que uma condição de parada ocorra.

### Número de simulações

Caso no final das 100 simulações iniciais, o desvio padrão da variável de saída  $I$  for maior do que 0.02, todo o processo será repetido até o desvio padrão ser menor do que 0.02. Para isso, ao término de cada nova simulação atualiza-se a média e o desvio padrão de  $I$  fazendo:

$$\bar{I}_{j+1} = \bar{I}_j + \frac{I_{j+1} - \bar{I}_j}{j+1} \text{ e } S^2 = \left(1 - \frac{1}{j}\right) S_j^2 + (j+1)(\bar{I}_{j+1} - \bar{I}_j)^2$$

### Probabilidade de capital não-negativo

Em cada simulação, o valor de  $I$  é atualizado em uma unidade, caso a empresa termine o processo de simulação com capital não negativo e, ao término das  $N$  simulações, basta calcular  $I/N$ .

#### 5.2.1.4 Experimentos

As simulações foram feitas usando a linguagem de programação Python. Considere:

- Probabilidade de um novo segurado: 57%;
- Probabilidade de perder um segurado: 33%;
- Probabilidade de ocorrer um sinistro: 10%;
- Valor médio do sinistro: R\$ 10.000,00;
- Número inicial de segurados: 1000;
- Tempo de simulação: 36.



**Caso A:** uma empresa nova.

**Caso B:** uma empresa no mercado.

	Caso A				Caso B			
Capital da empresa (x 1000)	300	500	700	1000	700	700	700	700
Valor pago pelo seguro	120	120	120	120	105	110	115	130
Número de simulações	340	604	540	228	138	403	618	110
<b>Probabilidade de capital não negativo</b>	14%	42%	75%	89%	7%	20%	44%	95%

Tabela 3: Tabela do risco de uma empresa de seguros

No caso A, analisou-se a situação de uma nova empresa após o período de 36 meses, variando-se o capital inicial. Já no caso B, considerou-se uma empresa já no mercado e variou-se o valor pago pelos segurados. Essa simulação permite mostrar o quanto de capital inicial precisa ser investido ao abrir uma nova empresa, de modo que ela tenha maior probabilidade de capital não negativo no final do tempo de simulação considerado e com os valores e probabilidades estabelecidos. Já para uma empresa em funcionamento, mostra o quanto o aumento no valor pago pelo seguro afeta o risco dessa empresa.

## 5.2.2 Simulação de Monte Carlo de um modelo de controle de estoque de uma loja

### 5.2.2.1 Objetivo

Desenvolver um modelo de controle de estoque de uma loja e utilizar simulação de Monte Carlo para analisá-lo a fim determinar uma boa política de gerenciamento de estoque para a loja. Podendo assim estimar o ganho esperado da loja até um certo tempo fixo  $T$ .

### 5.2.2.2 Modelo

Considerações iniciais para o modelo.

- Considere uma loja que armazena certo produto;
- O produto é vendido por um **preço unitário**  $r$ ;
- Os clientes que solicitam o produto aparecem de acordo com um **Processo de Poisson com taxa**  $\lambda$ ;
- A quantidade pedida por cada cliente é uma variável aleatória com distribuição  $G$ .

A fim de atender as demandas, o gerente de estoque deve manter uma quantidade de produto a disposição, e sempre que o estoque disponível ficar abaixo de um determinado valor, unidades adicionais devem ser solicitadas ao distribuidor.

- O gerente de estoque usa uma **política de encomenda**  $(s, S)$ ; ou seja, sempre que o estoque for inferior a  $s$  e não houver nenhum pedido, então pede-se determinada quantidade para que o estoque cresça até  $S$ , onde  $s < S$ .
- Isto é, se o **nível atual do estoque** é  $x$ , não há nenhum pedido pendente e  $x < s$ , então **encomenda-se uma quantidade**  $S - x$ .
- O custo do pedido de  $y$  unidades do produto é uma função  $c(y)$ , e são necessárias  $L$  unidades de tempo para a entrega de um pedido; o pagamento se realiza no momento da entrega.
- A loja tem um **custo  $h$  de manutenção do estoque** por produto, por unidade de tempo.
- Quando um cliente pede uma quantidade do produto maior do que a quantidade existente, então vende-se a quantidade disponível e o resto do pedido representa uma perda para a loja.

Será utilizada simulação para estimar o ganho esperado da loja até certo tempo fixo  $T$ . Para isso, primeiro serão definidas as variáveis e os eventos da seguinte maneira.

**Variável temporal:**  $t$

**Variável de estado do sistema:**  $(x, y)$ , onde  $x$  é a quantidade disponível no estoque e  $y$  a quantidade solicitada.

**Variáveis de contagem:**

$C$ , valor total dos custos dos pedidos até  $t$ ;

$H$ , valor total dos custos de manutenção do estoque até  $t$ ;

$R$ , rendimento total até  $t$ .

**Eventos:** a chegada de um cliente ou um pedido. Os tempos dos eventos são:

$t_0$ , tempo de chegada do próximo cliente,

$t_1$ , tempo no qual um pedido que acabou de ser feito será entregue. Se não existe pedido em andamento, faça  $t_1 = \infty$ .

**Saída:** a saída é o lucro médio da loja por unidade de tempo  $\frac{R-C-H}{T}$ . Várias simulações fornecem  $E[\frac{R-C-H}{T}]$ . Desse modo, variando-se os valores para as quantidades mínima( $s$ ) e máxima( $S$ ) em estoque, pode-se determinar uma política de controle de estoque para a loja.

### 5.2.2.3 Algoritmo

Constantes dadas,  $r, h, s, S, L, c(y)$  e  $G(x)$ ;

**Inicialize:**

$$x = t = H = R = C = 0, t_0 = \frac{-\ln(U(0,1))}{\lambda},$$

$$t_1 = L, y = S.$$

**While**  $t \leq T$ , atualize o sistema usando dois casos:

**If**  $t_0 < t_1$

atualize  $H = H + (t_0 - t)xh$ ,  $t = t_0$ ;

gere  $D \sim G$ , faça  $w = \min(D, x)$ ;

atualize  $R = R + wr$ ,  $x = x - w$ ;

if  $x < s$  e  $y = 0$ , atualize  $y = S - x$ , e  $t_1 = t + L$ ;

atualize  $t_0 = t - \frac{\ln(U(0,1))}{\lambda}$ .

**Else:**

atualize  $H = H + (t_1 - t)xh$ ,  $C = C + c(y)$ ,  $t = t_1$ ;

atualize  $x = x + y$ ,  $y = 0$ ,  $t_1 = \infty$ .

**Saída:**

$$\text{Lucro médio } P = \frac{R-C-H}{T}$$

### Número de simulações

Caso no final das 100 simulações iniciais, o desvio padrão da variável de saída  $P$  for maior do que 0.51, todo o processo será repetido até o desvio padrão ser menor do que 0.51. Esse valor foi escolhido pois, desse modo, pode-se garantir com 95% de confiança que a média amostral não diferirá da média  $\theta$  por mais de 1.

### 5.2.2.4 Experimentos

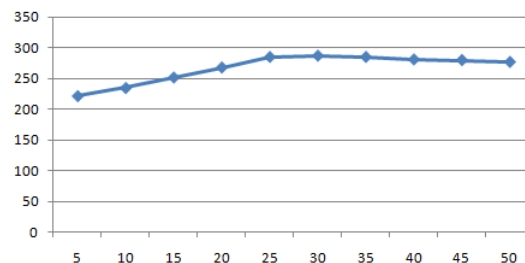
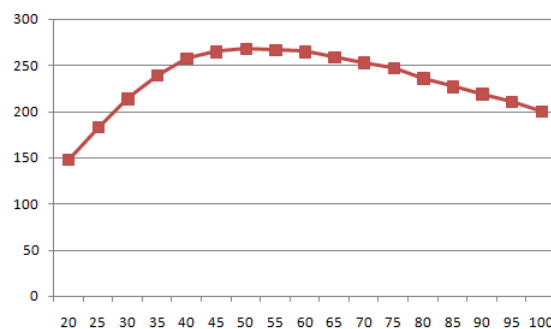
Nas simulações apresentadas abaixo, usa-se os seguintes dados:

- Unidade de tempo: dias
- Tempo de entrega de um pedido: 2 a 4 dias
- Tempo de simulação: 30 dias
- Número médio mensal de clientes que compram o produto: 150

- Demanda por cliente: 1 a 3 produtos
- Custo por unidade de tempo por produto que a loja gasta para manter o produto no estoque: \$ 5,00
- Custo do pedido de cada unidade do produto: \$ 10,00
- Desvio padrão do lucro médio: 1

s	S	Número de entregas	Número de clientes	Número de produtos não vendidos	Lucro	Simulações
5	50	4	146	56	222	3601
10	50	4	147	54	235	3717
15	50	5	147	50	252	3718
20	50	6	147	46	268	3864
25	50	7	147	41	285	3804
30	50	8	147	40	287	3795
35	50	8	147	40	285	3684
40	50	8	147	41	281	3914
45	50	8	147	42	280	3889
50	50	9	147	42	277	3743

Tabela 4: Resultados das simulações variando a quantidade mínima em estoque

Figura 17: Mínimo em estoque  $\times$  Lucro Mensal médioFigura 18: Máximo em estoque  $\times$  Lucro Mensal médio

s	S	Número de entregas	Número de clientes	Número de produtos não vendidos	Lucro	Simulações
20	20	8	136	88	148	1005
20	25	8	140	80	183	1404
20	30	8	143	71	214	1752
20	35	8	145	63	239	2321
20	40	8	146	55	258	2881
20	45	7	146	50	265	3481
20	50	6	147	45	268	3717
20	55	6	147	42	267	4351
20	60	5	148	39	265	4930
20	65	5	148	37	259	5167
20	70	4	148	35	253	5097
20	75	4	148	33	247	6197
20	80	4	148	32	236	6414
20	85	4	148	31	227	6102
20	90	3	148	30	219	5579
20	95	3	148	28	211	6539
20	100	3	149	27	200	8375

Tabela 5: Resultados das simulações variando a quantidade máxima no estoque

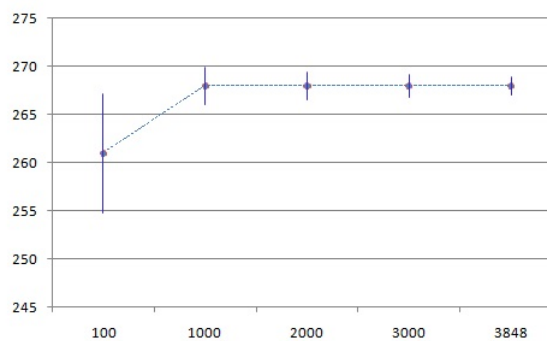


Figura 19: Intervalo de confiança para o Lucro Mensal Médio

### 5.2.3 Simulação de Monte Carlo do ganho esperado em possuir uma opção de compra de ações

O mercado de opções foi criado com o objetivo de proporcionar ao investidor um mecanismo de proteção (hedge) contra possíveis prejuízos. Os contratos de opção controlam o risco relacionado à oscilação das cotações do mercado de ações e do mercado futuro. Por outro lado, o investidor também pode utilizar as opções como um mecanismo de alavancagem, aumentando o potencial de lucro de seu investimento sem aumentar o valor do capital investido. No Mercado Bovespa, o investidor pode negociar opções de compra ou de venda de diversas ações, como por exemplo, opções de ações da Petrobras (PETR4) e da Vale (VALE5). No Mercado BM& F, o investidor pode negociar opções de compra ou de venda de moedas cambiais (dólar), de índices futuros (Ibovespa e DI) e de diversas

mercadorias (boi gordo, café arábica, milho e soja). Mais detalhes podem ser vistos em ([ADVFN](#), ).

#### 5.2.3.1 Objetivo

Usar simulação de Monte Carlo para calcular o ganho esperado em possuir uma opção de compra baseado em uma política para exercício dessa opção.

#### 5.2.3.2 Definições

Serão apresentadas algumas definições sobre o mercado de opções. Para mais detalhes veja ([BMFBOVESPA](#), ) e ([ADVFN](#), ).

**Definição 26.** *Uma **opção** é o direito de comprar ou vender um ativo específico, por um preço, adquirido mediante o pagamento de um valor (o prêmio), para ser exercido em uma data preestabelecida (data de vencimento).*

**Definição 27.** *O comprador de uma **opção de compra americana** pode exercer seu direito a qualquer momento até a data de exercício (vencimento).*

**Definição 28.** *O comprador de uma **opção de compra europeia** pode exercer seu direito apenas na data de exercício (vencimento).*

Titular é o investidor que compra a opção e adquire os direitos (de comprar ou vender ações) a ela referentes. Ao comprar o contrato de opção de compra, o titular deve pagar ao lançador, à vista, um valor (prêmio). O lançador de uma opção de compra é o investidor que, por intermédio de uma corretora de valores mobiliários, vendeu a opção no mercado mediante o recebimento do prêmio, assumindo assim, perante a bolsa de valores, a obrigação de vender o ativo-objeto previsto no contrato, após ser comunicado de que sua posição foi exercida pelo titular da opção. O titular da opção de compra não é obrigado a exercer o seu direito de comprar o ativo-objeto durante o período de validade do contrato. Entretanto, caso o titular da opção de compra decida exercer o seu direito, o lançador é obrigado a vender o ativo-objeto pelo preço de exercício (strike).

#### Qual o objetivo de uma opção de compra?

Garantir que um investidor possa comprar determinado ativo no futuro pagando um valor pré-fixado, mesmo que este ativo valorize-se no mercado.

#### Quando comprar uma opção de compra?

O investidor compra uma opção de compra de determinado ativo-objeto quando identifica um grande potencial de valorização deste ativo-objeto no mercado.

**Exemplo 31.** Comprando uma opção de compra da Petrobrás

- Você compra por R\$ 2 uma opção PETRL32 que te dá o direito de adquirir ações da Petrobrás por R\$ 32 no dia 18/12/14.
- Se no dia 18/12 a ação custar R\$ 31, você não exerce seu direito.
- Se no dia 18/12 a ação custar R\$ 36, você exerce seu direito.
- Compra a ação por R\$ 32 e vende por R\$ 36. Resultado: ganha R\$ 4 - 2 (o que pagou pelo direito).

**Definição 29.** Considere o tempo atual igual a 0 e  $S(y)$  o preço de um título no tempo  $y$  a partir do tempo atual. Diz-se que uma coleção de preços  $S(y), 0 \leq y \leq \infty$  segue um **movimento browniano geométrico (MGB)** com parâmetros de tendência (“drift”)  $\mu$  e volatilidade  $\sigma$  se, para todos os valores não-negativos de  $y$  e  $t$ , a variável aleatória

$$\frac{S(t+y)}{S(y)}$$

é independente de todos os preços até o tempo  $y$ ; e, se além disso,

$$\log \left( \frac{S(t+y)}{S(y)} \right)$$

é uma variável aleatória normal com média  $\mu t$  e variância  $t\sigma^2$ .

Uma consequência da definição acima é que uma vez que  $\mu$  e  $\sigma$  estão determinados, apenas o preço presente - e não a história dos preços passados - que afeta as probabilidades dos preços futuros.

## 5.2.3.3 Modelo

Considerações iniciais para o modelo.

- Seja  $S_n \geq 0$  o preço de uma ação específica ao final de um dia  $n$ .
- Um modelo comum para  $S_n$  é o modelo de passeio aleatório log-normal (lognormal random walk model ou MGB), isto é,

$$S_n = S_0 \exp\{X_1 + \cdots + X_n\}, n \geq 0,$$

onde  $X_1, \dots, X_n$  é uma sequência de variáveis aleatórias normais e independentes, cada uma com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .

- Esse modelo supõe que a cada dia o aumento percentual do preço em relação ao dia anterior tem uma distribuição comum.

- Seja  $\alpha = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$  e suponha que uma pessoa possui uma opção de compra de uma unidade desta ação a um preço fixo  $K$ , chamado o preço de exercício (striking price), ao final de qualquer um dos próximos  $N$  dias.
- $S$  = preço da ação quando a opção é exercida.
- $S - K$  = ganho do detentor da opção, se exercida.

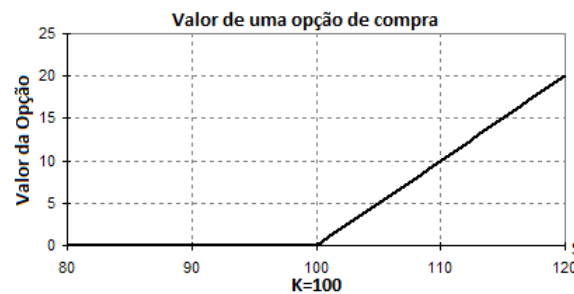


Figura 20: Gráfico do valor de uma opção de compra

Com base na figura 21, pode-se obter as conclusões a seguir. Para detalhes sobre precificação de opções, consulte (BLACK F.; SCHOLES, 1973).

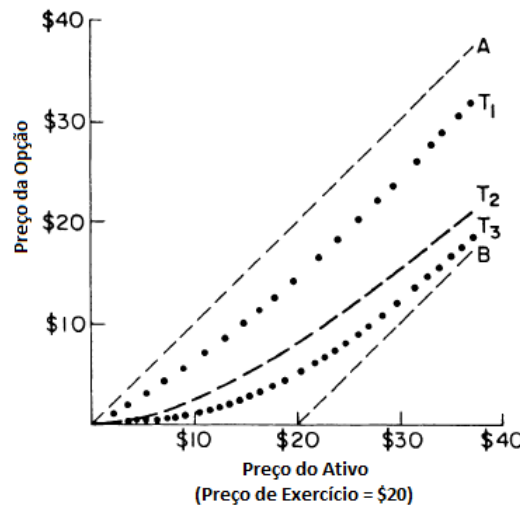


Figura 21: Relação entre o valor da opção e o preço de um ativo, (BLACK F.; SCHOLES, 1973).

- Em geral, quanto maior o preço do ativo, maior o preço da ação.
- Linha A representa o valor máximo da opção.
- Linha B representa o valor mínimo da opção, desde que seu valor não pode ser negativo e não pode ser menor do que o preço da ação menos o preço de exercício.



- $T_1, T_2$  e  $T_3$  representam o valor da opção para maturidades sucessivamente menores.

O ganho esperado ao possuir a opção (a qual não será exercida a menos que o preço da ação exceda  $K$ , durante o período de tempo de interesse) depende da política empregada para o exercício da opção.

**Política quando  $\alpha \geq 0$ :**

Pode-se mostrar que se  $\alpha \geq 0$  então a política ótima é esperar até o último momento possível  $N$  para exercer a opção, desde que o preço exceda  $K$  e, não exercer, caso contrário.

**Política quando  $\alpha < 0$ :**

- Seja  $P_m = S_{N-m}$  o preço da ação quando faltam  $m$  dias para a opção expirar.
- Exerça a opção neste momento se  $P_m > K$  e para cada  $i = 1, \dots, m$

$$P_m > K + P_m e^{i\alpha} \Phi(\sigma\sqrt{i} + b_i) - K\Phi(b_i),$$

$$\text{com } b_i = \frac{i\mu - \ln(K/P_m)}{\sigma\sqrt{i}} \text{ e } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

- Seja  $SP$  o preço da ação quando a opção é exercida, caso ela seja exercida e, considere  $SP$  igual a  $K$ , se a opção nunca é exercida.
- Para determinar o ganho esperado da política descrita, isto é, para determinar  $E[SP] - K$  é necessário utilizar simulação.
- Para simular o preço da ação em dias separados, basta gerar uma variável aleatória normal  $X$  com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  e então usar a relação  $P_{m-1} = P_m e^x$ .
- Se  $P_m$  é o preço com  $m$  dias para a opção expirar e a política não indica o exercício da opção naquele momento, então deve-se gerar  $X$ , determinar o novo preço  $P_{m-1}$  e avaliar se a opção será exercida neste momento.
- Se sim, para aquela rodada da simulação,  $SP = P_{m-1}$ ;
- Caso contrário, então determina-se o preço ao final do próximo dia e o procedimento se repete.
- O valor médio de  $SP - K$  sobre um grande número de simulações é a estimativa do valor esperado em possuir uma opção de compra quando se usa a política descrita.

### 5.2.3.4 Algoritmo

**Entrada:**  $\mu, \sigma, K, N, S0, \alpha = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$

**Inicializar:**  $m = N, P = S0, I = 0$

**While**  $I = 0$  e  $m > 0$ , atualize  $P$ :

Calcule  $V = \max_{i=1}^m (K(1 - \Phi(b_i)) + Pe^{i\alpha}\Phi(\sigma\sqrt{i} + b_i))$

Se  $P < \max(K, V)$ :

gere  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$P = Pe^X$

$m = m - 1$

Caso contrário,  $I = 1$

**Saída:**

Se  $I = 1$ , retorne  $PK = \max(P - K, 0)$  e  $N - m$

Caso contrário, retorne 0.

Ao final das simulações obteremos  $E[P - K]$  e  $E[N - m]$ .

### Número de simulações

Caso no final das 100 simulações iniciais, o desvio padrão da variável de saída  $PK$  for maior do que 0.51, todo o processo será repetido até o desvio padrão ser menor do que 0.51. Esse valor foi escolhido pois, desse modo, pode-se garantir com 95% de confiança que a média amostral não diferirá da média  $\theta$  por mais de 1. Para isso, ao término de cada nova simulação atualiza-se a média e o desvio padrão de  $PK$  fazendo:

$$\overline{PK}_{j+1} = \overline{PK}_j + \frac{PK_{j+1} - \overline{PK}_j}{j+1} \text{ e}$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{j}\right) S_j^2 + (j+1)(\overline{PK}_{j+1} - \overline{PK}_j)^2$$

### 5.2.3.5 Experimentos

Foi realizado um experimento para avaliar o ganho esperado em exercer uma opção de compra dada a política de exercício anteriormente descrita. Os resultados estão na tabelas 6 e 7, que mostram, respectivamente, o ganho médio e o tempo médio para o exercício de uma opção de compra. Já o gráfico 22 é o intervalo de confiança para a média do ganho esperado em exercer uma opção de compra. Foram considerados  $\mu = -0.04$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $N = 20$ (tempo até o vencimento da opção),  $K = 100$ (preço de exercício),  $S0 =$

100(preço da ação). O número de simulações é indicado por  $M$  e a última coluna das tabelas 6 e 7 indica o número de simulações realizadas até que o desvio do estimador fosse menor do que 0.51.

M	100	1000	5000	10044
Ganho Esperado	35.52	34.43	32.19	32.55
$\sigma/\sqrt{M}$	5.19	1.66	0.73	0.50

Tabela 6: Ganho Esperado em exercer uma opção dada a política descrita.

M	100	142
Tempo médio	16.56	16.59
$\sigma/\sqrt{M}$	0.61	0.50

Tabela 7: Tempo médio para exercer uma opção dada a política descrita.

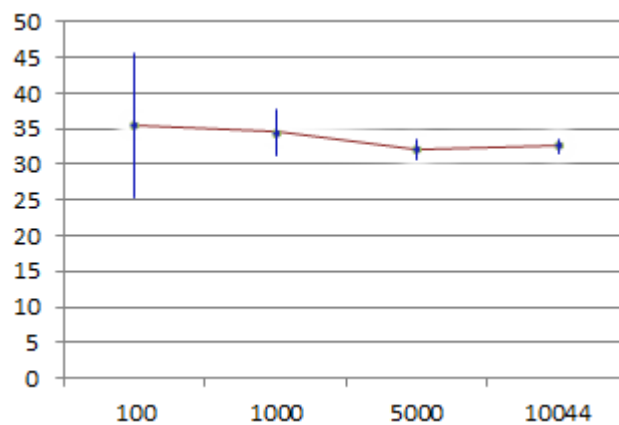


Figura 22: Intervalo de confiança para a média do ganho esperado em exercer uma opção segundo a política descrita.



# Conclusão

O método de Monte Carlo é uma técnica alternativa promissora para estimar um valor esperado. A ideia é estimar a distribuição de uma estatística extraindo amostras aleatórias de uma população e observar o comportamento da estatística sobre as amostras. O método possui muitas aplicações e, neste trabalho o método de Monte Carlo foi utilizado para calcular integrais e simular alguns eventos discretos.

Ao utilizar a simulação de Monte Carlo para o cálculo de integrais, obtém-se um método simples de implementar, abrangente, pois pode-se calcular integrais com quaisquer limites de integração, e adaptativo, pois o método se adapta facilmente para lidar com integrais multidimensionais.

Ao utilizar a simulação para o risco de uma empresa de seguros, verifica-se que o modelo é bem abrangente, podendo ser ajustado para incluir novos eventos e para diferentes empresas de seguros. Ele serve tanto para avaliar a situação de uma empresa ao final de um certo período de tempo, como pode ser usado para avaliar o risco da abertura de uma nova empresa de seguros, isto é, dadas as condições iniciais pode-se prever se um novo negócio tem probabilidade de ter sucesso ou não, com uma certa confiança.

Quando se utiliza a simulação no modelo de controle de estoque de uma loja, verifica-se que ela fornece um meio para estimar o ganho esperado da loja até certo tempo fixo  $T$  e, determina uma boa política de gerenciamento do estoque visando um ganho maior. Uma outra característica dessa aplicação é que o modelo pode ser ajustado para incluir outros eventos, para outras lojas e, pode ser adaptado para o controle de vários produtos em um estoque.

Por fim, quando utiliza-se a simulação de Monte Carlo para o ganho esperado em possuir uma opção de compra de ações, o método se mostra eficiente, pois fornece um meio para verificar se vale ou não a pena possuir uma opção de compra com base em uma determinada política de exercício dessa opção.



## 6 Sugestões para trabalhos futuros

Algumas questões podem ser melhor exploradas, consistindo um caminho para pesquisas futuras, dentre elas merecem destaque:

- Estudar técnicas de redução de variância:

Variáveis Antitéticas,

Variável de Controle,

Stratified Sampling (Amostragem Estratificada),

Latin Hypercube (Hiper cubo Latino),

Importance Sampling (Amostragem por Importância),

Sequências de Baixa Discrepância ou Quase-Monte Carlo (QMC);

- Aplicar o Método Monte Carlo na precificação de opções;





# Referências

- AALABAF-SABAGHI, M. Monte carlo methods and models in finance and insurance. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, John Wiley and Sons, v. 174, 2011. Citado na página 20.
- ADVFN. <<http://br.advn.com/educacional/opcoes/opcao-de-compra>>. Acessado em: 10 Out. 2014. Citado na página 68.
- BLACK F.; SCHOLLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 13, 20 e 70.
- BMFBOVESPA. <[http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/educacional/cursos/curso-basico/fra\\_cur\\_opcoes.htm](http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/educacional/cursos/curso-basico/fra_cur_opcoes.htm)>. Acessado em: 10 Out. 2014. Citado na página 68.
- BOYLE, P. Options: A monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*, v. 4, 1977. Citado na página 53.
- CASELLA G.; BERGER, R. L. *Statistical Inference*. [S.l.]: Thomson Learning, 2001. (Duxbury Advanced Series). Citado 4 vezes nas páginas 21, 26, 33 e 52.
- CRANE, D. H. H. R. M. Optimisation and parallelisation strategies for monte carlo simulation of hiv infection. *Computers in Biology and Medicine*, Elsevier Science, v. 37, 2007. Citado na página 53.
- DEGROOT M. H. H.; SCHERVISH, M. J. *Probability and Statistics*. [S.l.]: Pearson Publications, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 35.
- FISHMAN, G. S. *Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications*. [S.l.]: Springer, 1999. Citado na página 43.
- GENTLE, J. *Elements of Computational Statistics*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 2002. Citado na página 43.
- GENZ, A. *Simulation Methods*. [S.l.]: Lectures Notes. Department of Mathematics. Washington State University. Citado na página 20.
- GIVENS G.H.; HOETING, J. *Computational Statistics*. [S.l.]: Wiley, New Jersey, 2004. Citado na página 43.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Method in Financial Engineering*. [S.l.]: Springer, 2004. Citado na página 20.
- JAMES, B. R. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. Terceira edição. [S.l.]: IMPA, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 21, 31, 35 e 38.
- JOHANSEN, A. M. *Monte Carlo Methods. Lecture Notes*. [S.l.]: University of Bristol. Department of Mathematics, 2008. Citado na página 20.
- JR. P. J.; BONAT, W. H. K. E. Z.-W. M. R. *Métodos Computacionais em Inferência Estatística*. [S.l.]: 20ª SINAPE. Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, João Pessoa- PB- Brasil, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.

- KAHN H.; MARSHALL, A. W. Methods of reducing sample size in monte carlo computations. *Journal of the Operational Research Society*, 1953. Citado na página 52.
- KROESE DIRK P.; TAIMRE, T. B. Z. I. *Handbook for Monte Carlo methods*. [S.l.]: Wiley, 2011. (Wiley Series in Probability and Statistics). Citado 3 vezes nas páginas 20, 43 e 52.
- LEHRACH, C. W. A. K. H. H. A. D. E. M.-D. S. P. J. L. R. H. H. Prediction in the face of uncertainty: A monte carlo-based approach for systems biology of cancer treatment. *Mutation Research/Genetic Toxicology and Environmental Mutagenesis*, Elsevier Science, v. 746, 2012. Citado na página 53.
- METROPOLIS, S. U. N. The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 1949. Citado na página 19.
- NEFTCI, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Finance Derivatives*. Second edition. [S.l.]: Academic Press, 2001. Citado na página 20.
- NORGAARD, R. L. A monte carlo simulation in insurance company portfolio management. *Journal of Risk and Insurance*, John Wiley and Sons, v. 33, 09 1966. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 53.
- PYTHON. <<http://www.python.org>>. Citado na página 20.
- RAO, C. R. *Linear Statistical Inference and its Applications*. Second edition. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 43.
- RAUN, D. L. The application of monte carlo analysis to an inventory problem. *The Accounting Review*, American Accounting Association, v. 38, 10 1963. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 53.
- ROBERT C. P.; CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. [S.l.]: Springer, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 52.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. Sixth edition. [S.l.]: Academic Press, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 52.
- ROSS, S. M. *Simulation*. Fourth edition. [S.l.]: Elsevier Academic Press, Inc, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 20, 33, 47, 48 e 49.
- ROSS, S. M. *A First Course in Probability*. Eight edition. [S.l.]: Pearson, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 21, 31 e 33.
- ROSS, S. M. *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. Third edition. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 49.
- RUBINSTEIN, R. *Simulation and the Monte Carlo Method*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 52.
- SETZU, S. E. M. M. A. Modeling and simulation of an artificial stock option market. *Computational Economics*, Springer US, v. 32, 09 2008. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 53.
- TANNER, M. *Tools for Statistical Inference*. Third edition. [S.l.]: Springer, 1996. Citado na página 33.

TROSSET, M. W. *An Introduction to Statistical Inference and Data Analysis*. [S.l.]: Department of Mathematics, College of William & Mary, 2001. Citado na página 33.

ULAM J. VON NEUMANN, R. D. R. S. Statistical methods in neutron diffusion. *LAMS-551*, April 9 1947. Citado na página 19.