Elettrostatica #4

Il Teorema di Gauss

22 dicembre 2022

Campi vettoriali

Campi vettoriali

Il campo elettrico $\vec{E}$ è un esempio di campo vettoriale:

Campi vettoriali

Il campo elettrico $\vec{E}$ è un esempio di campo vettoriale: a ogni punto dello spazio corrisponde un vettore.

Campi vettoriali

Il campo elettrico $\vec{E}$ è un esempio di campo vettoriale: a ogni punto dello spazio corrisponde un vettore.

- In altri termini, un campo vettoriale $\vec{E}$ in una regione di spazio A è una funzione

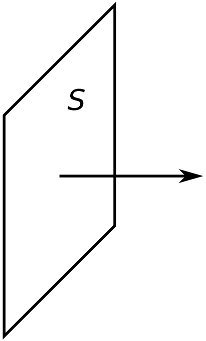
$$\vec{E} \colon A \to \mathbb{R}^3$$

dove $\mathbb{R}^3$ indica l'insieme dei vettori tridimensionali.

Superfici orientate

Superfici orientate

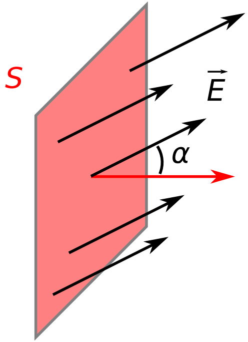
Una superficie S nello spazio si dice orientata se è fissato uno dei due possibili versi della direzione normale:



Flusso di un campo vettoriale (1)

Flusso di un campo vettoriale (1)

Supponiamo che una superficie orientata piana S si trovi in un campo vettoriale uniforme $\vec{E}$:



Flusso di un campo vettoriale (2)

Flusso di un campo vettoriale (2)

Il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie S è definito come

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot \mathrm{Area}(S) \cdot \cos\alpha$$

Flusso di un campo vettoriale (2)

Il flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie S è definito come

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot \text{Area}(S) \cdot \cos\alpha$$

Osservazioni

- Il flusso è una grandezza scalare
- Il segno del flusso dipende dall'angolo α
- Il flusso del campo elettrico si misura in $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}$

Flusso di un campo vettoriale (3)

Alcuni casi particolari:

Flusso di un campo vettoriale (3)

Alcuni casi particolari:

- Se $\vec{E}$ è perpendicolare a S allora semplicemente

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot \text{Area}(S)$$

Flusso di un campo vettoriale (3)

Alcuni casi particolari:

- Se $\vec{E}$ è perpendicolare a S allora semplicemente

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot \text{Area}(S)$$

- Se il campo $\vec{E}$ è parallelo a S, allora $\Phi_S(\vec{E}) = 0$

Flusso di un campo vettoriale (3)

Alcuni casi particolari:

- Se $\vec{E}$ è perpendicolare a S allora semplicemente

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot \mathrm{Area}(S)$$

- Se il campo $\vec{E}$ è parallelo a S, allora $\Phi_S(\vec{E}) = 0$
- Infine, se il campo $\vec{E}$ attraversa S nel verso opposto a quello fissato, allora $\Phi_S(\vec{E}) < 0$

Flusso di un campo vettoriale (4)

Flusso di un campo vettoriale (4)

Se la superficie S non è piana oppure il campo $\vec{E}$ non è uniforme, il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ si definisce come segue:

Flusso di un campo vettoriale (4)

Se la superficie S non è piana oppure il campo $\vec{E}$ non è uniforme, il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ si definisce come segue:

1. Si suddivide S in più superfici $S_1, S_2, \ldots$ che possono essere considerate piane in un campo $\vec{E}$ uniforme

Flusso di un campo vettoriale (4)

Se la superficie S non è piana oppure il campo $\vec{E}$ non è uniforme, il flusso $\Phi_S(\vec{E})$ si definisce come segue:

1. Si suddivide S in più superfici $S_1, S_2, \ldots$ che possono essere considerate piane in un campo $\vec{E}$ uniforme
2. Si sommano i singoli flussi attraverso ogni superficie:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) + \cdots$$

Superfici chiuse

Superfici chiuse

Una superficie S si dice chiusa se divide lo spazio in due regioni: una interna a S e l'altra esterna a S.

Superfici chiuse

Una superficie S si dice chiusa se divide lo spazio in due regioni: una interna a S e l'altra esterna a S.

- Esempi di superfici chiuse sono una sfera o un cubo

Superfici chiuse

Una superficie S si dice chiusa se divide lo spazio in due regioni: una interna a S e l'altra esterna a S.

- Esempi di superfici chiuse sono una sfera o un cubo
- Per convenzione, ogni superficie chiusa è orientata dall'interno verso l'esterno

Esempio importante

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare a S in tutti i suoi punti

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare a S in tutti i suoi punti
- L'intensità del campo è $E = k\,Q/r^2$ nei punti di S

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare a S in tutti i suoi punti
- L'intensità del campo è $E = k\,Q/r^2$ nei punti di S
- Il segno di $\Phi_S(\vec{E})$ è lo stesso della carica Q

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare a S in tutti i suoi punti
- L'intensità del campo è $E = k\,Q/r^2$ nei punti di S
- Il segno di $\Phi_S(\vec{E})$ è lo stesso della carica Q

Concludiamo che $\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi k \cdot Q$

Esempio importante

Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q e sia S una superficie sferica di raggio r di centro Q.

- Il campo $\vec{E}$ è perpendicolare a S in tutti i suoi punti
- L'intensità del campo è $E = k\,Q/r^2$ nei punti di S
- Il segno di $\Phi_S(\vec{E})$ è lo stesso della carica Q

Concludiamo che $\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi k \cdot Q$ (non dipende da r !)

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (1)

Se S è una qualsiasi superficie chiusa in un campo elettrico $\vec{E}$, allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi k \cdot Q_{\text{in}}$$

dove Q_{in} è la somma di tutte le cariche all'interno di S.

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (1)

Se S è una qualsiasi superficie chiusa in un campo elettrico $\vec{E}$, allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi k \cdot Q_{\text{in}}$$

dove Q_{in} è la somma di tutte le cariche all'interno di S.

- Il flusso di $\vec{E}$ attraverso S dipende solo dalla carica elettrica totale all'interno di S

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (1)

Se S è una qualsiasi superficie chiusa in un campo elettrico $\vec{E}$, allora

$$\Phi_S(\vec{E}) = 4\pi k \cdot Q_{\text{in}}$$

dove Q_{in} è la somma di tutte le cariche all'interno di S.

- Il flusso di $\vec{E}$ attraverso S dipende solo dalla carica elettrica totale all'interno di S
- Se S non contiene cariche, allora $\Phi_S(\vec{E}) = 0$

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (2)

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (2)

È possibile riscrivere il Teorema di Gauss come

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon}$$

dove $\varepsilon = 1/4\pi k$ è la costante dielettrica del mezzo che ospita il campo elettrico $\vec{E}$.

Il Teorema di Gauss per il campo elettrico (2)

È possibile riscrivere il Teorema di Gauss come

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon}$$

dove $\varepsilon = 1/4\pi k$ è la costante dielettrica del mezzo che ospita il campo elettrico $\vec{E}$.

- Il valore della costante dielettrica del vuoto è

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$$