DISEQUAZIONI #9

Valori assoluti

24 ottobre 2022

Definizione di valore assoluto

Definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica del valore assoluto:

- $|x|$ è la distanza del numero x da zero

Definizione di valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica del valore assoluto:

- $|x|$ è la distanza del numero x da zero
- Più in generale, $|x - y|$ è la distanza x e y

Proprietà del valore assoluto

Proprietà del valore assoluto

L'espressione $|x|$ è definita per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$. Inoltre:

Proprietà del valore assoluto

L'espressione $|x|$ è definita <u>per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$</u>. Inoltre:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x|^2 = x^2$ e, più in generale, $|x| \cdot |y| = |xy|$
- $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ se $y \neq 0$

Disuguaglianza triangolare

In generale, non è vero che $|x + y| = |x| + |y|$.

- Perché?
- Che relazione deve sussistere tra x e y affinché la relazione sia valida?

Disuguaglianza triangolare

In generale, non è vero che $|x + y| = |x| + |y|$.

- Perché?
- Che relazione deve sussistere tra x e y affinché la relazione sia valida?

S può dimostrare che, per qualsiasi valore di x e di y, vale la cosiddetta disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Valori assoluti e radici quadrate

L'espressione $\sqrt{x^2}$ è definita per qualsiasi valore di x ed uguale al valore assoluto $|x|$. Infatti:

Valori assoluti e radici quadrate

L'espressione $\sqrt{x^2}$ è definita per qualsiasi valore di x ed uguale al valore assoluto $|x|$. Infatti:

- $\sqrt{x^2} = x$ se $x \geq 0$
- $\sqrt{x^2} = -x$ se $x < 0$

Per definizione, abbiamo quindi che $\sqrt{x^2} = |x|$

Nomenclatura

Studieremo espressioni del tipo $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una generica espressione letterale nella variabile x.

Nomenclatura

Studieremo espressioni del tipo $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una generica espressione letterale nella variabile x.

- $|A(x)|$ è detto valore assoluto o modulo di $A(x)$

Nomenclatura

Studieremo espressioni del tipo $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una generica espressione letterale nella variabile x.

- $|A(x)|$ è detto valore assoluto o modulo di $A(x)$
- L'espressione $A(x)$ è l'argomento del valore assoluto

Nomenclatura

Studieremo espressioni del tipo $|A(x)|$, dove $A(x)$ è una generica espressione letterale nella variabile x.

- $|A(x)|$ è detto valore assoluto o modulo di $A(x)$
- L'espressione $A(x)$ è l'argomento del valore assoluto
- Sciogliere il valore assoluto $|A(x)|$ significa riscrivere l'espressione applicando la definizione:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & \text{se } A(x) \geq 0 \\ -A(x) & \text{se } A(x) < 0 \end{cases}$$

Strategia risolutiva generale per equazioni o disequazioni con valori assoluti

Strategia risolutiva generale per equazioni o disequazioni con valori assoluti

1. Studiare il segno di tutti gli argomenti

Strategia risolutiva generale per equazioni o disequazioni con valori assoluti

1. Studiare il segno di tutti gli argomenti
2. In base al segno degli argomenti, sciogliere i valori assoluti, trasformando la (dis)equazione nell'unione di due o più sistemi

Strategia risolutiva generale per equazioni o disequazioni con valori assoluti

1. Studiare il segno di tutti gli argomenti
2. In base al segno degli argomenti, sciogliere i valori assoluti, trasformando la (dis)equazione nell'unione di due o più sistemi

Nota bene: alcune (dis)equazioni particolari possono essere risolte con metodi molto più rapidi

Casi particolari (1)

$$|A(x)| = k$$

Casi particolari (1)

$$|A(x)| = k$$

- Se $k < 0$, l'equazione è impossibile
- Se $k \geq 0$, l'equazione è equivalente a

$$A(x) = k \ \lor \ A(x) = -k$$

Casi particolari (2)

$$|A(x)| \geq k$$

Casi particolari (2)

$$|A(x)| \geq k$$

- Se $k < 0$, la disequazione è sempre verificata
- Se $k \geq 0$, la disequazione è equivalente a

$$A(x) \leq -k \ \vee \ A(x) \geq k$$

Casi particolari (3)

$$|A(x)| \leq k$$

Casi particolari (3)

$$|A(x)| \leq k$$

- Se $k < 0$, la disequazione è impossibile
- Se $k \geq 0$, la disequazione è equivalente a

$$-k \leq A(x) \leq k$$

Casi particolari (4)

$$|A(x)| = |B(x)|$$

Casi particolari (4)

$$|A(x)| = |B(x)|$$

L'equazione è equivalente a

$$A(x) = B(x) \ \vee \ A(x) = -B(x)$$

Casi particolari (5)

$$|A(x)| \gtreqless |B(x)|$$

Casi particolari (5)

$$|A(x)| \gtreqless |B(x)|$$

Poiché entrambi i membri sono positivi, è possibile passare ai quadrati ottenendo

$$A(x)^2 \gtreqless B(x)^2$$

Casi particolari (2^* e 3^*)

I metodi risolutivi per i casi 2 e 3 continuano a essere validi <u>anche se il secondo membro non è costante</u>:

Casi particolari (2^* e 3^*)

I metodi risolutivi per i casi 2 e 3 continuano a essere validi <u>anche se il secondo membro non è costante</u>:

- $|A(x)| \geq B(x)$ è equivalente a

$$A(x) \leq -B(x) \ \vee \ A(x) \geq B(x)$$

Casi particolari (2^* e 3^*)

I metodi risolutivi per i casi 2 e 3 continuano a essere validi anche se il secondo membro non è costante:

- $|A(x)| \geq B(x)$ è equivalente a

$$A(x) \leq -B(x) \;\vee\; A(x) \geq B(x)$$

- $|A(x)| \leq B(x)$ è equivalente a

$$-B(x) \leq A(x) \leq B(x)$$

Esercizi

Equazioni

- 732-766 [Casi particolari (1) o sciogliere i V.A.]
- 767-780 [Casi particolari (4)]
- 781-794 [Sciogliere i V.A.]

Disequazioni

- 796-839 [Casi particolari 2, 3, 2^*, 3^*]
- 842-853 [Casi particolari (5)]
- 855-866 [Sciogliere i V.A.]