SUCCESSIONI NUMERICHE

Esempi di successioni

1) Successione dei numeri dispari

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 5 \qquad a_4 = 7 \qquad \dots \qquad a_n = 2n+1$$

TERMINI della successione

TERMINE GENERALE

N.B Il termine generale permette di calcolare l'n-esimo termine della successione.

Ad esempio, il 2021° numero dispari è

$$a_{2021} = 2 \cdot 2021 + 1 = 4043$$

2) Successione delle potenze di $\frac{1}{2}$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16} \qquad \dots$$

Il termine generale della successione è $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

N.B In questo caso il 1° termine della successione corrisponde a $n=0$, il 2° termine a $n=1$, ecc...

3) Successione di Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

N.B. La succ. di Fibonacci è DEFINITA PER RICORSIONE

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2$$

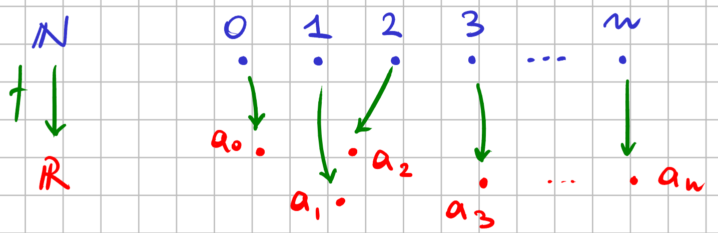
DEFINIZIONE Una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Insieme dei NUMERI NATURALI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

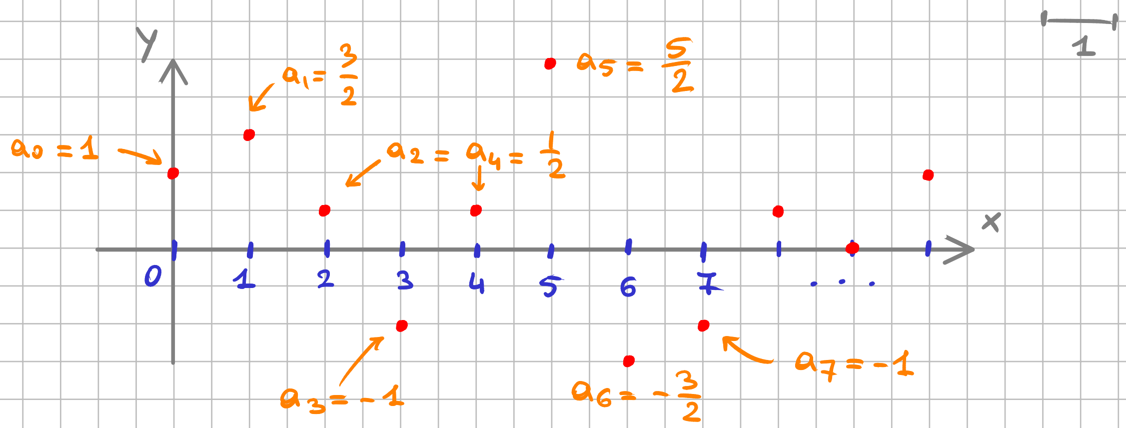
Osservazioni

1) L'immagine di $n \in \mathbb{N}$ è l'n-esimo termine della successione:



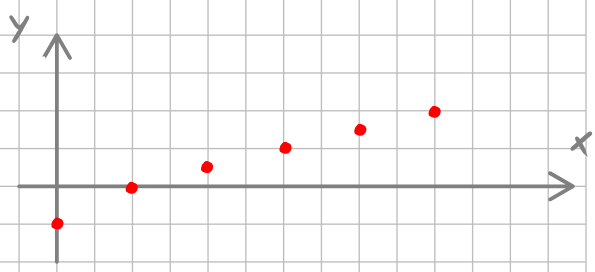
$\boxed{f(n) = a_n}$

2) Il grafico di una successione è un insieme di **PUNTI ISOLATI**



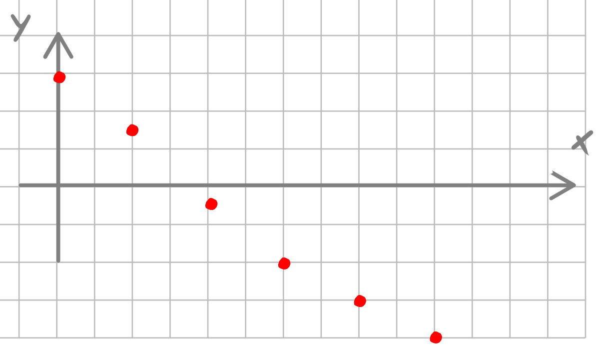
3) Una successione è CRESCENTE se

$\boxed{a_n < a_{n+1}}$ per ogni n



Una successione è DECRESCENTE se

$\boxed{a_n > a_{n+1}}$ per ogni n



4) Per alcune successioni conviene sostituire il dominio $\mathbb{N}$ con l'insieme $\mathbb{N}^+ = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. In tal caso, i primi termini della successione sono $\cancel{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

ESERCIZIO 8 (p. 147)

Consideriamo la successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} \qquad \text{per } n = 1, 2, \ldots$$

In corrispondenza di quale n abbiamo $a_n = \frac{3}{4}$?

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$4(n-1) = 3(n+2)$$

$$\downarrow$$

$$n = 10$$ ovvero $\frac{3}{4}$ è il 10° termine della successione ($a_{10} = 3/4$).

Successioni definite per RICORSIONE

Esempi:

1) ESERCIZIO 37 (p. 148)

1° termine della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \boxed{a_n = 2 + \frac{1}{2} a_{n-1}} \end{cases}$$

Formula per calcolare l'n-esimo termine a_n partendo dal termine precedente a_{n-1}

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + \frac{1}{2} a_1 = 3$

$a_3 = 2 + \frac{1}{2} a_2 = \frac{7}{2}$

$a_4 = 2 + \frac{1}{2} a_3 = \frac{15}{4}$

$a_5 = 2 + \frac{1}{2} a_4 = \frac{31}{8}$

$\rightsquigarrow$ I primi cinque termini sono

$2 \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{31}{8}$

2) ESERCIZIO 34 (p. 148)

Cerchiamo un possibile TERMINE GENERALE a_n per la successione i cui primi termini sono

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \dots$$

① Osserviamo che ciascun termine a_n si ottiene aggiungendo $+1$ al termine precedente a_{n-1}

$$\begin{cases} a_0 = -1/2 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE per RICORSIONE

② Osserviamo la sequenza:

$$a_0 \xrightarrow{+1} a_1 \xrightarrow{+1} a_2 \xrightarrow{+1} a_3 \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1} a_n$$

$$a_0 = -\frac{1}{2} \qquad a_1 = -\frac{1}{2} + 1 \qquad a_2 = -\frac{1}{2} + 2 \qquad a_3 = -\frac{1}{2} + 3 \qquad a_n = -\frac{1}{2} + n$$

$$a_n = -\frac{1}{2} + n$$

TERMINE GENERALE