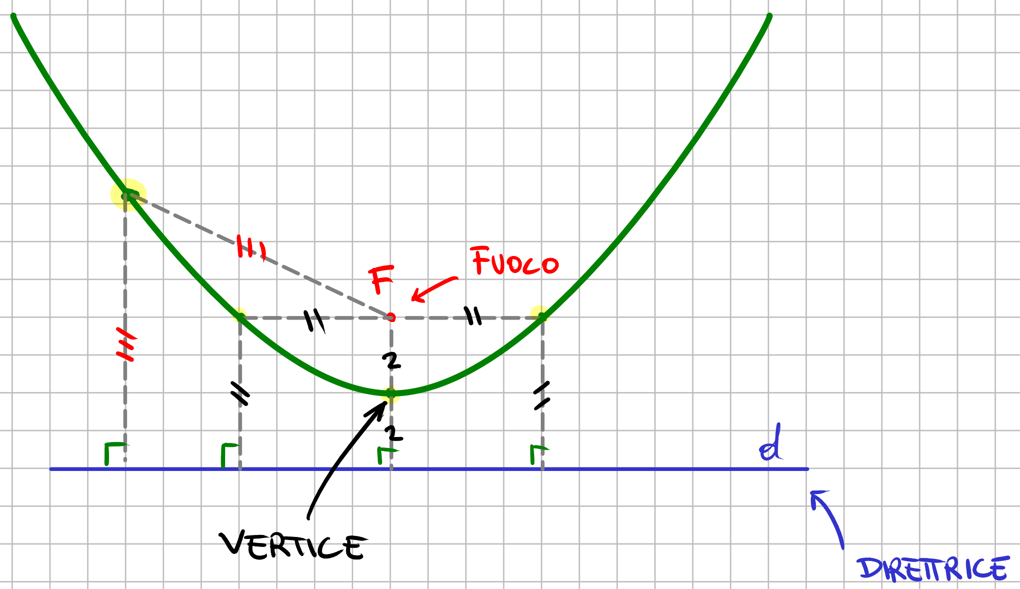
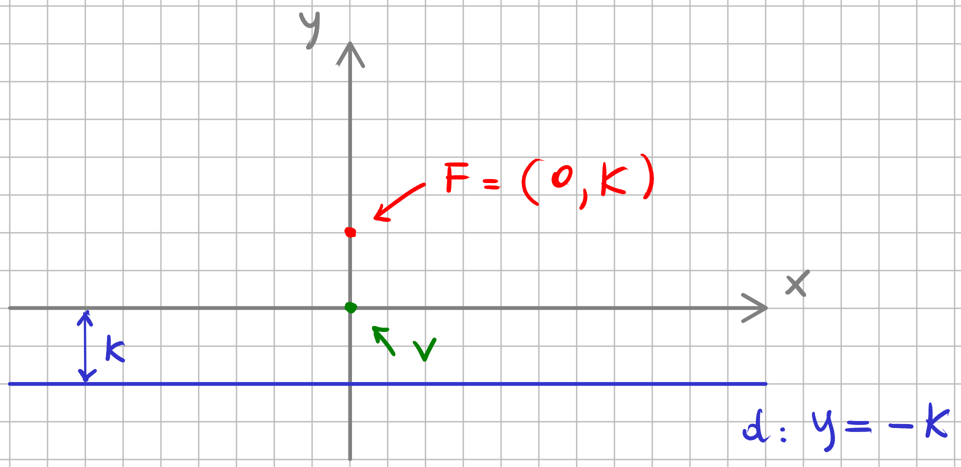
PARABOLA nel piano cartesiano



La parabola avente per fuoco F e per direttrice d è il luogo dei punti equidistanti da F e da d.

Equazione della parabola nel piano cartesiano con il vertice nell' origine



Un generico punto $P = (x, y)$ sta sulla parabola se

$$\overline{PF} = \text{distanza}(P, d)$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \overset{!}{=} \sqrt{x^2 + (y - k)^2}$$

Direttrice in forma normale

$d: 0 \cdot x + 1 \cdot y + k = 0$

$$\text{distanza}(P, d) = |y + k|$$

$$\sqrt{x^2 + (y - k)^2} = |y + k|$$

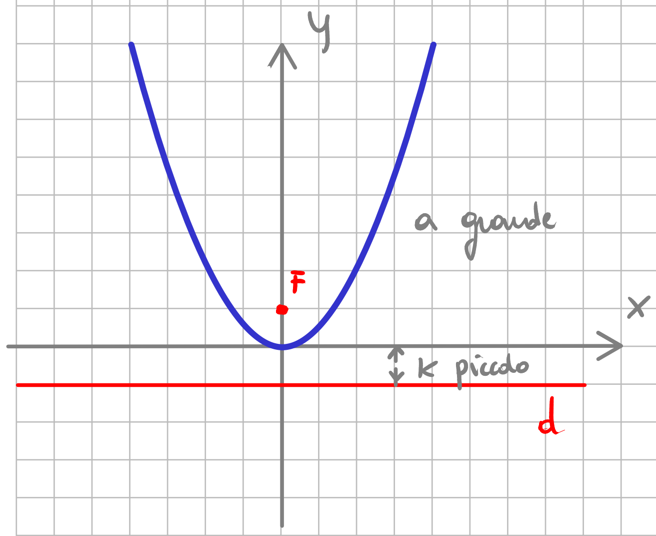
$$x^2 + (y - k)^2 = (y + k)^2$$

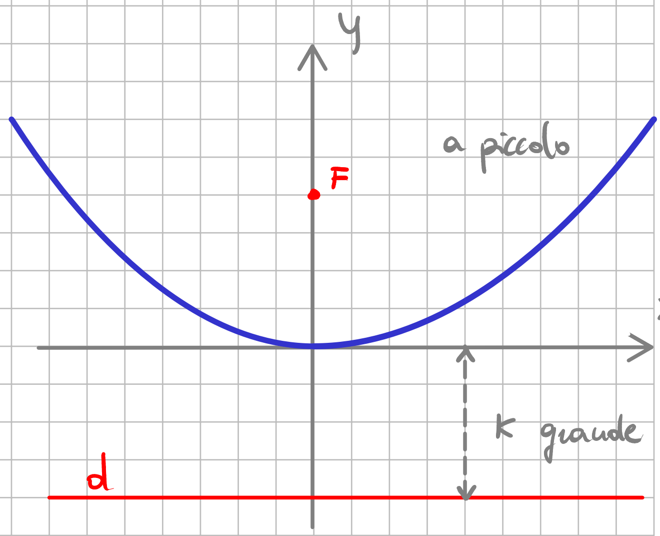
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{y^2} + 2ky + \cancel{k^2}$$

$$x^2 = 4ky$$

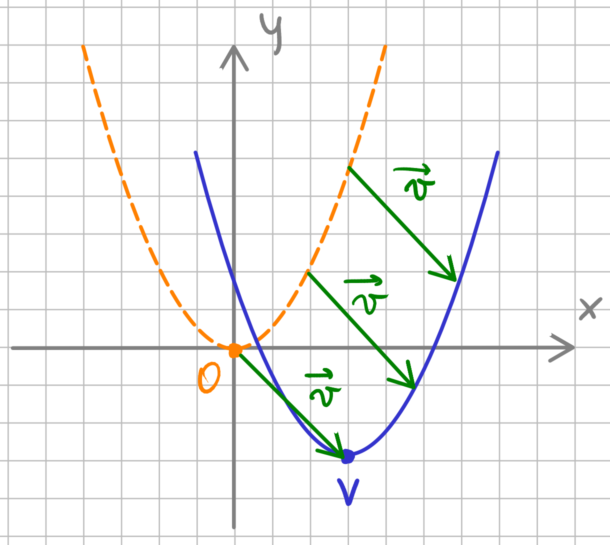
Equazione della parabola con il vertice in $O = (0,0)$

$$y = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{= a} \cdot x^2$$





In generale, se il vertice della parabola è $V = (x_v, y_v)$, la sua equazione si ottiene trasformando



$$y = ax^2$$

come in una TRASLAZIONE lungo

$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$

$x_v = v_x$, $y_v = v_y$

$$y = ax^2 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow x - x_v \\ y \longrightarrow y - y_v \end{array}} \longrightarrow \boxed{y - y_v = a(x - x_v)^2}$$

Equazione di una generica parabola "verticale"*

* con asse di simmetria verticale

Equazione in forma normale

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$y = a(x^2 - 2x_v x + x_v^2) + y_v$$

$$y = ax^2 \underbrace{- 2ax_v}_{b} x + \underbrace{ax_v^2 + y_v}_{c} \qquad y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -2ax_v \longrightarrow \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

$$c = ax_v^2 + y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_v = \frac{b^2}{4a} + y_v \longrightarrow y_v = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \; *$$

$$* \; \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Analogamente, le coordinate del FUOCO F e l'equazione della della DIRETTRICE d si ottengono TRASLANDO lungo $\vec{v} = (x_V, y_V)$

$$(0, k) \longrightarrow F = (x_V,\ y_V + k)$$

$$y = -k \longrightarrow d:\ y = y_V - k$$

$\left(k = \frac{1}{4a}\right)$

Esempio Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 2$

$a = 1$ $\quad b = -4$ $\quad c = 2$

Il vertice della parabola ha coordinate

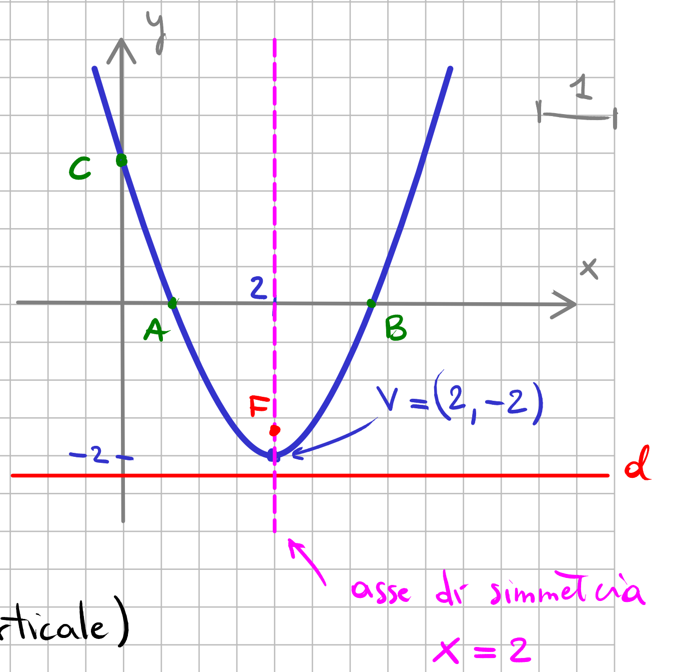
$$V = \left(\underset{\substack{\| \\ 2}}{-\frac{b}{2a}},\ \underset{\substack{\| \\ -2}}{-\frac{\Delta}{4a}}\right)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8$

Poiché $k = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$ troviamo

$$F = \left(\underset{\substack{\| \\ 2}}{x_V},\ \underset{\substack{\| \\ -\frac{7}{4}}}{y_V + k}\right)$$

$$d:\ y = y_V - k \longrightarrow d: y = -\frac{9}{4}$$



L'asse di simmetria è la retta (verticale) passante per il vertice: in generale ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$

Per trovare i punti di intersezione con gli assi risolviamo:

Asse y: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \longrightarrow C = (0, 2)$

Asse x : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2} \\ \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$\longrightarrow \quad A = (2-\sqrt{2}, 0) \qquad B = (2+\sqrt{2}, 0)$

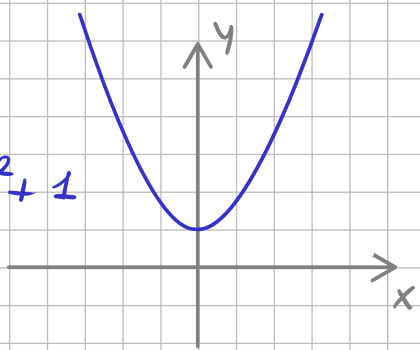
In generale, Δ
- > 0 : 2 punti di int. con l'asse x
- $= 0$: 1 punto
- < 0 : nessun punto di intersezione

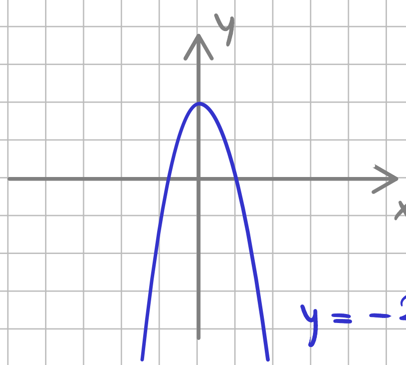
Osservazioni

La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

- è simmetrica rispetto all'asse y se $b = 0$

$y = x^2 + 1$

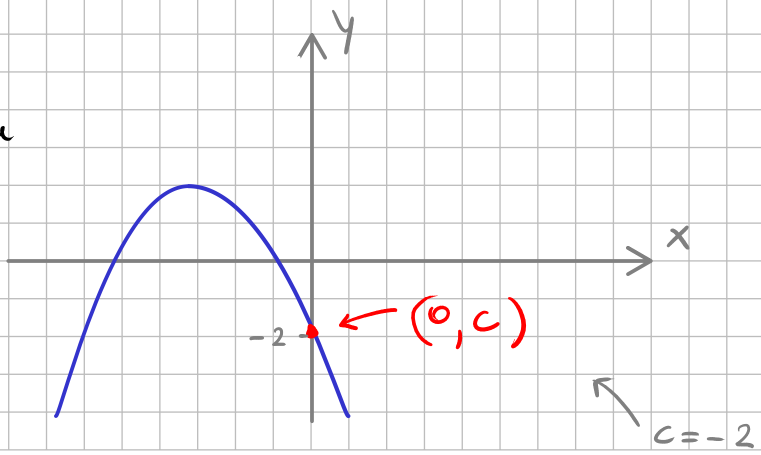




$y = -2x^2 + 2$

- passa per l'origine se $c = 0$

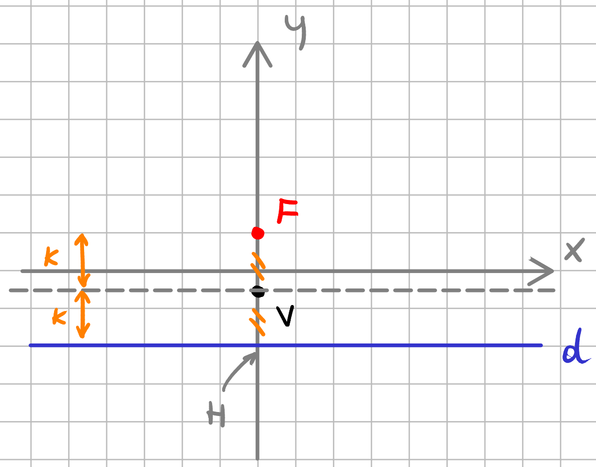
In generale, la parabola passa per il punto $(0, c)$



Esercizio 4 (449)

$F = (0, 1)$

$d: \; y = -2$



Il vertice V è il punto medio del segmento FH

$$V = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$K = \frac{3}{2} \longrightarrow a = \frac{1}{4K} = \frac{1}{6}$$

L'equazione della parabola è $y - y_V = a\,(x - x_V)^2$

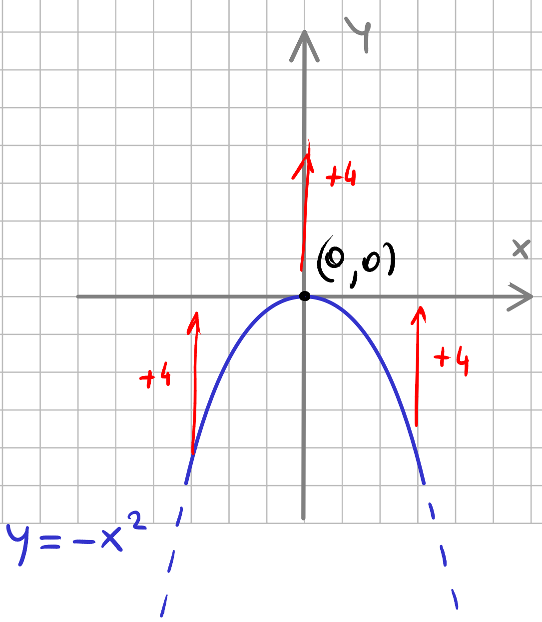
$$y_V \to -\frac{1}{2} \qquad a \to \frac{1}{6} \qquad x_V \to 0$$

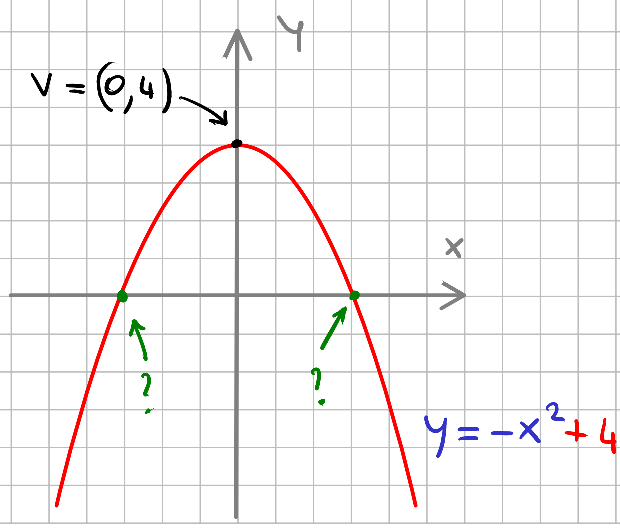
$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^2 \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$$

Oss: si tratta di una parabola simmetrica rispetto all'asse y

Esercizio 16 (451)

Disegnare la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$



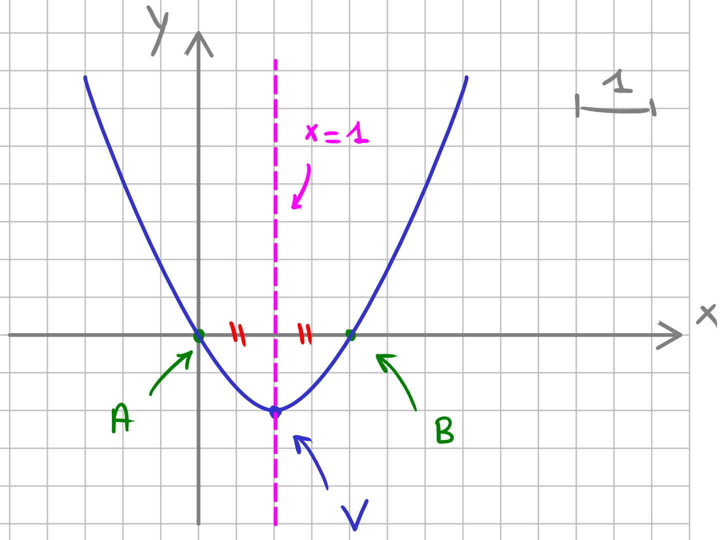


ESERCIZIO 17

$y = x^2 - 2x$

$a > 0 \rightarrow \cup$

$c = 0 \rightarrow$ passa per l'origine



$y + 1 = x^2 - 2x + 1$

$y + 1 = (x-1)^2$

$y - y_V = a(x - x_V)^2$

$y_V = -1$ $\qquad$ $x_V = 1$

Vertice della parabola: $V = (1, -1)$

Punti di intersezione con l'asse x:

$y = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$A = (0,0)$ $\qquad$ $B = (2,0)$

ESERCIZIO 20

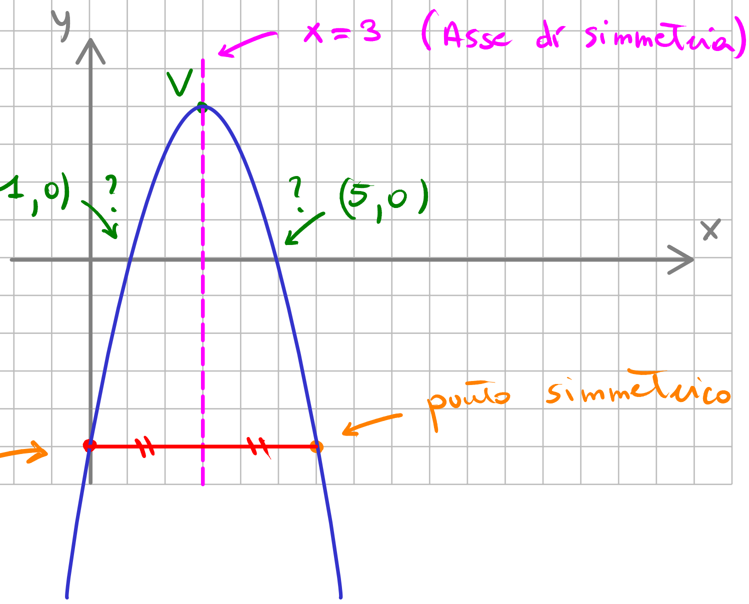
$y = -x^2 + 6x - 5$ $\qquad$ $a = -1$ $\quad$ $b = 6$ $\quad$ $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$

Vertice della parabola

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\uparrow$ 3 $\qquad$ $\uparrow$ 4



Poiché $c = -5$ la parabola passa per $(0,-5)$

Verifichiamo se i punti di intersezione con l'asse x sono

$(1,0)$ e $(5,0)$

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

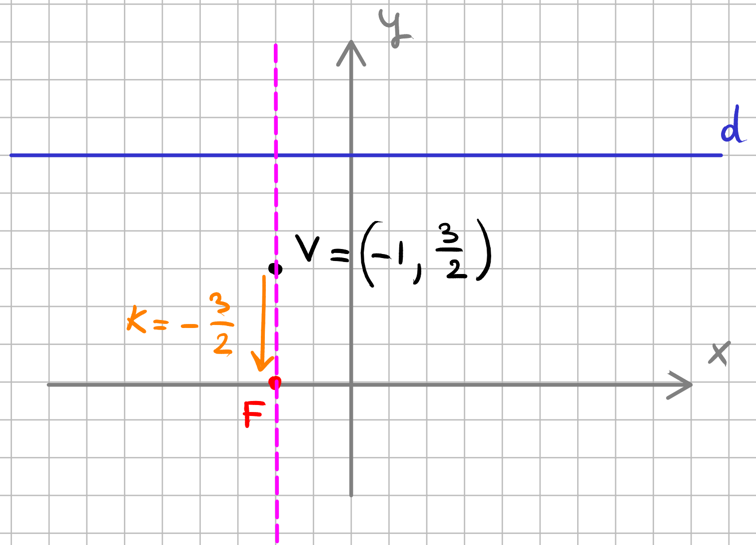
$0 = -1^2 + 6 \cdot 1 - 5$ ✓

$0 = -5^2 + 6 \cdot 5 - 5$ ✓

ESERCIZIO 6 (449)

$F = (-1, 0)$

$d: \ y = 3$



$$a = \frac{1}{4k} = \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{6}$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2 \longrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}(x+1)^2$$

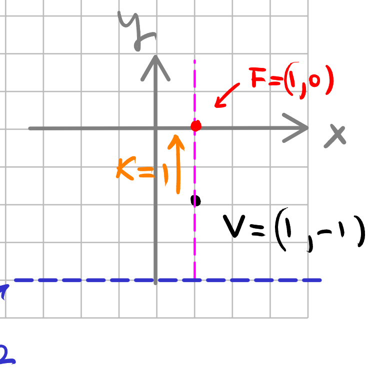
Forma normale: $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{3}{2}}_{= + \frac{4}{3}}$

ESERCIZIO 34 (451)

$$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1 \longrightarrow y - (\overset{y_v}{-1}) = \overset{a}{\frac{1}{4}}(x - \overset{x_v}{1})^2$$

$$k = \frac{1}{4a} = 1$$

$V = (\underset{1}{x_v}, \underset{-1}{y_v})$



Esercizio 21

$$y = 2x^2 - 6x$$

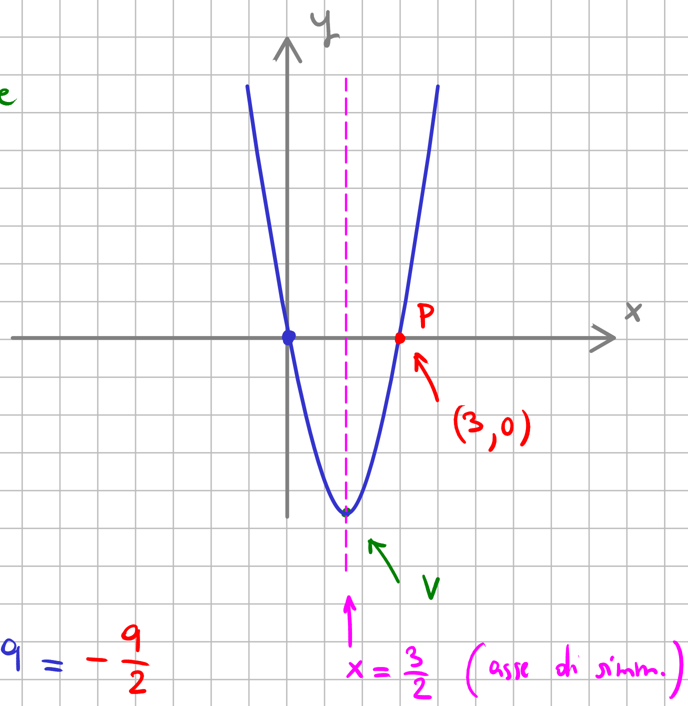
$a = 2$ $\quad$ $b = -6$ $\quad$ $c = 0$

$\cup$ $\qquad$ passa per l'origine

Troviamo le coordinate del vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a} \, , \, y_V \right)$$

$-\frac{b}{2a} = 3/2 \qquad y_V = ?$



Poiché V sta sulla parabola

$$y_V = 2x_V^2 - 6x_V$$

$$y_V = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}$$

$$V = \left(\frac{3}{2} \, , -\frac{9}{2}\right)$$

Verifichiamo che $P = (3,0)$ sta sulla parabola:

$$0 = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \quad \checkmark$$

Esercizio 27

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \longrightarrow \underbrace{y - 2}_{} = -\frac{1}{2}\left(x - (-1)\right)^2$$

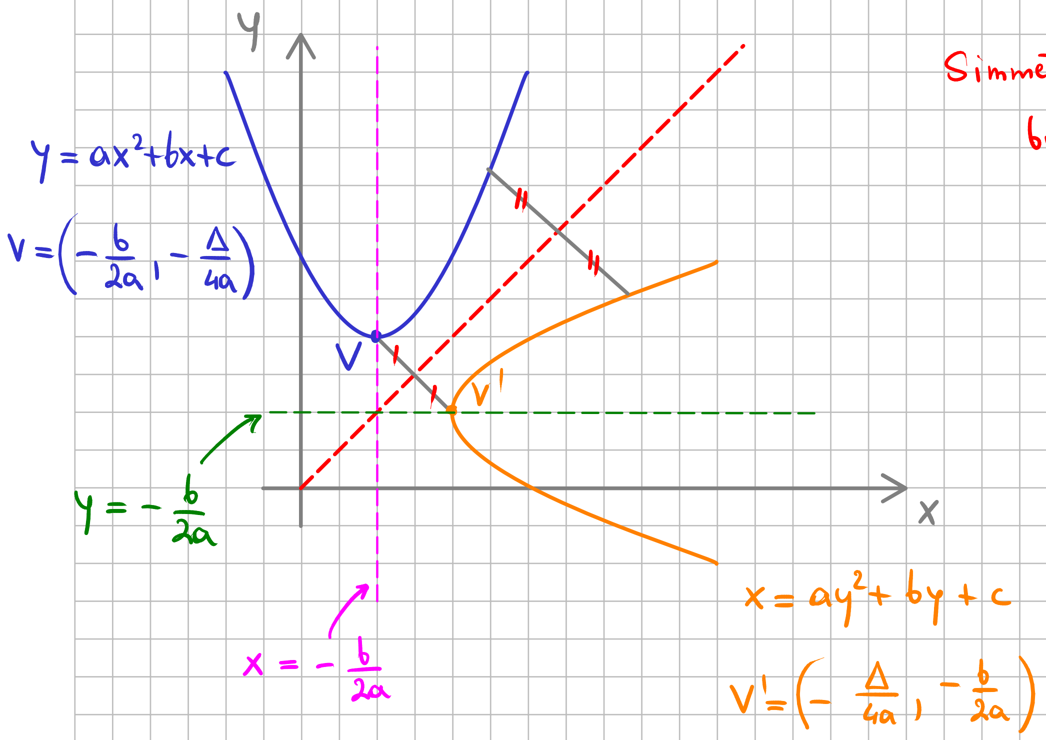
$2 \to y_V \qquad -\frac{1}{2} \to a \qquad -1 \to x_V$

$$V = (-1, 2)$$

(...)

PARABOLE ORIZZONTALI *

* con asse di simmetria orizzontale



Simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$

$x \longrightarrow y$

$y \longrightarrow x$

N.B. Una parabola orizzontale NON È il grafico di una funzione!
(Invece, ovviamente, una parabola verticale lo è)

ESERCIZIO 47

$y = ax^2+bx+c$

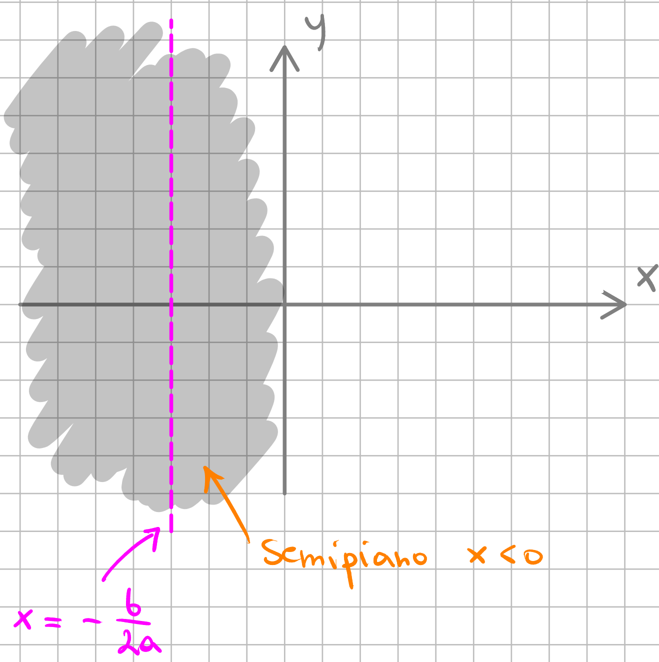
b) L'asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$ si trova nel semipiano $x<0$ quando

$$-\frac{b}{2a} < 0$$

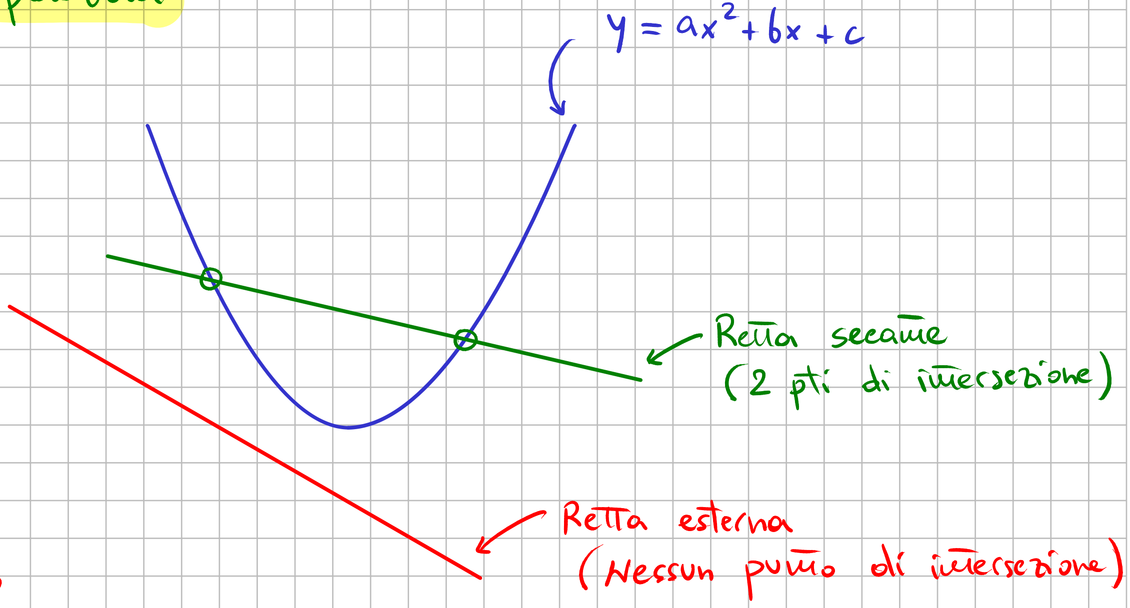
$a = k^2-1 \quad \downarrow \quad b = -(k^2-2k)$

$$\frac{k^2-2k}{2(k^2-1)} > 0$$

(...)



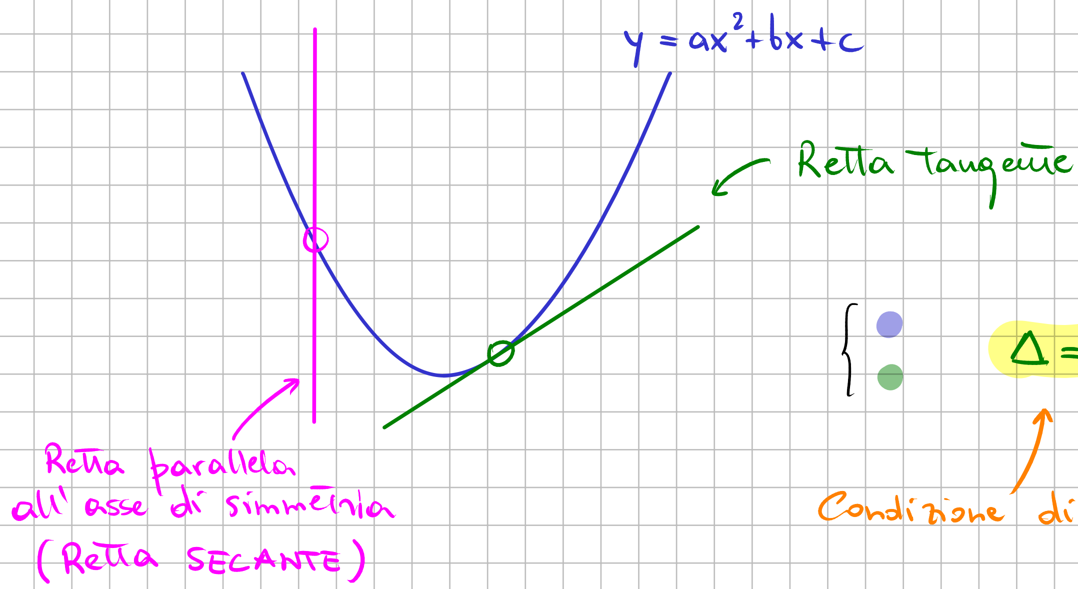
Retta e parabola



$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

Rette con un solo punto di intersezione



$\Delta = 0$

Condizione di tangenza

ESERCIZIO 89 (456)

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $-2x+4 = x^2-4$

$$\boxed{x^2 + 2x - 8 = 0} \qquad \frac{\Delta}{4} = 1+8 = 9$$

Poiché $\Delta > 0$, si tratta di una retta secante (ci sono due punti di intersezione).

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = -4 \longrightarrow y_1 = 12 \\ x_2 = 2 \longrightarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

I due punti di intersezione sono $(-4, 12)$ e $(2, 0)$.

Esercizio 91 (456)

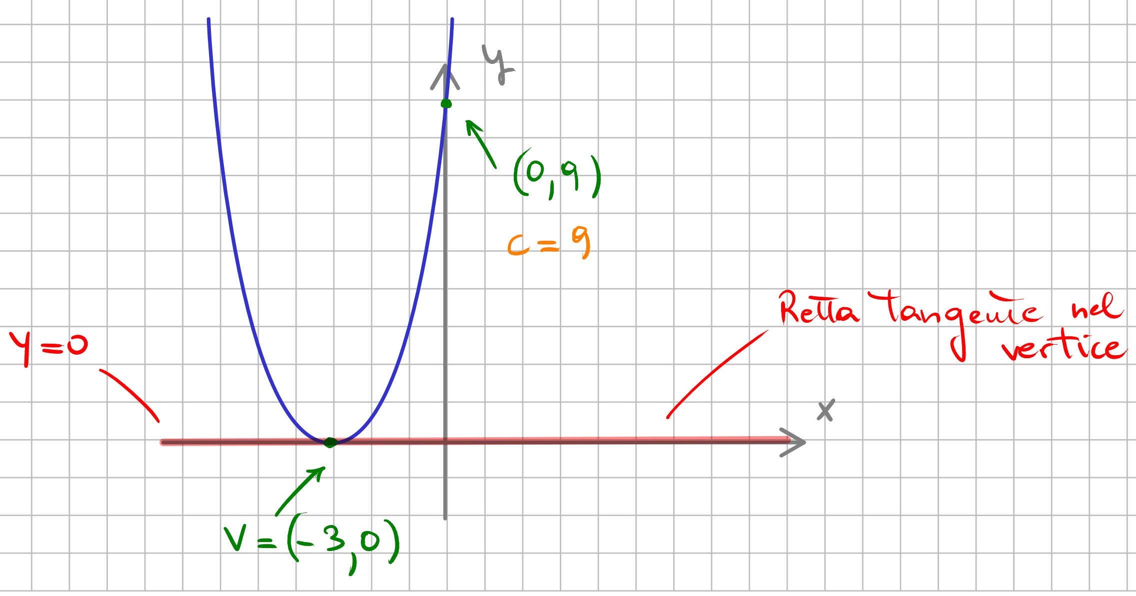
$$y = x^2 + 6x + 9 \longrightarrow y = (x+3)^2$$

$$y - y_v = a\,(x - x_v)^2$$

$y_v = 0$ $\qquad$ 1 $\qquad$ $x_v = -3$

Il VERTICE è

$V = (-3, 0)$

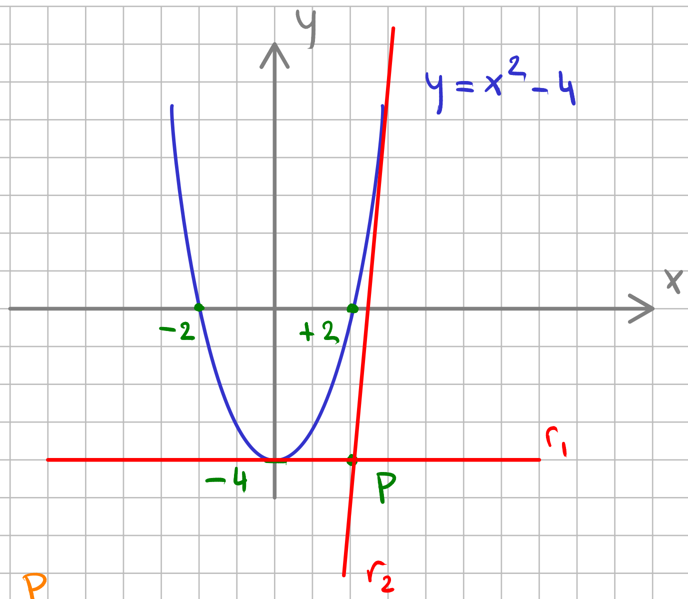


ESERCIZIO 115 (458)

$y = x^2 - 4$

$P = (2, -4)$

Ci sono 2 RETTE TANGENTI



$\boxed{y + 4 = m(x - 2)}$

Generica retta passante per P

$m = ?$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = m(x-2) - 4 \end{cases}$$

Equazione risolvente

$m(x-2) \cancel{-4} = x^2 \cancel{-4}$

$x^2 - mx + 2m = 0$

$a = 1$ $\quad b = -m$ $\quad c = 2m$

$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 8m$

Condizione di tangenza: $\Delta = 0$

$m^2 - 8m = 0$

$m(m - 8) = 0$ $\quad m_1 = 0$ $\quad m_2 = 8$

Le equazioni delle 2 rette tangenti sono

$y + 4 = m(x - 2)$

$m = 0$: $\quad r_1: \ y = -4$

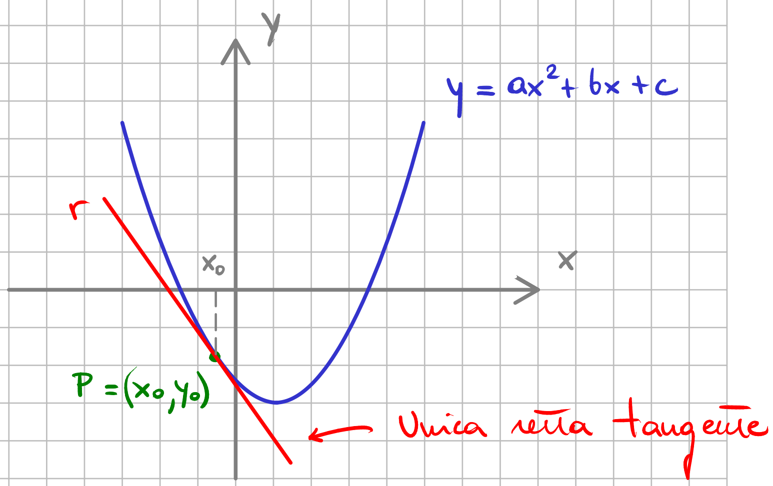
$m = 8$: $\quad r_2: \ y = 8x - 20$

Retta Tangente alla parabola in un suo punto

TEOREMA

Il coeff. angolare di r è

$$m = 2ax_0 + b$$



Dimostrazione

La generica retta passante per $P = (x_0, y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \leftarrow \text{Il sistema ha un'unica soluzione } x = x_0 \quad y = y_0$$

$$ax^2 + bx + c = m(x - x_0) + y_0$$

$$\underbrace{ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0}_{A(x)} = 0 \quad \leftarrow \text{L'equazione risolvente ha un'unica soluzione } x = x_0$$

$$\| $$

$$\underbrace{a(x - x_0)^2}_{B(x)}$$

$$\underline{2x^2 - 4x + 2} = 0$$

$$\|$$

$$\underline{2(x-1)^2}$$

$x = 1$ unica soluzione

I due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ sono uguali

$$A(x) = ax^2 + \underline{(b - m)}x + \dots$$

$$B(x) = ax^2 \underline{- 2ax_0}\, x + \dots$$

$$b - m = -2ax_0 \longrightarrow \boxed{m = 2ax_0 + b}$$

☒

ESERCIZIO 120 (458)

$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$

P ← il punto della parabola con $x = 3$

Trovare l'equazione della retta tangente passante per P.

$P = (3, ?)$

$$y_P = -\frac{1}{3}x_P^2 + 3x_P = -\frac{1}{3}3^2 + 3 \cdot 3 = 6$$

$P = (3, 6)$

L'equazione della retta tangente è del tipo

$$y - 6 = \underset{?}{m}(x - 3)$$

Possiamo calcolare m con la formula

$$m = 2\underset{-\frac{1}{3}}{a}\underset{3}{x_p} + \underset{3}{b} = 2\left(-\frac{1}{3}\right)3 + 3 = 1$$

$$y - 6 = 1(x - 3)$$

$$y = x + 3$$