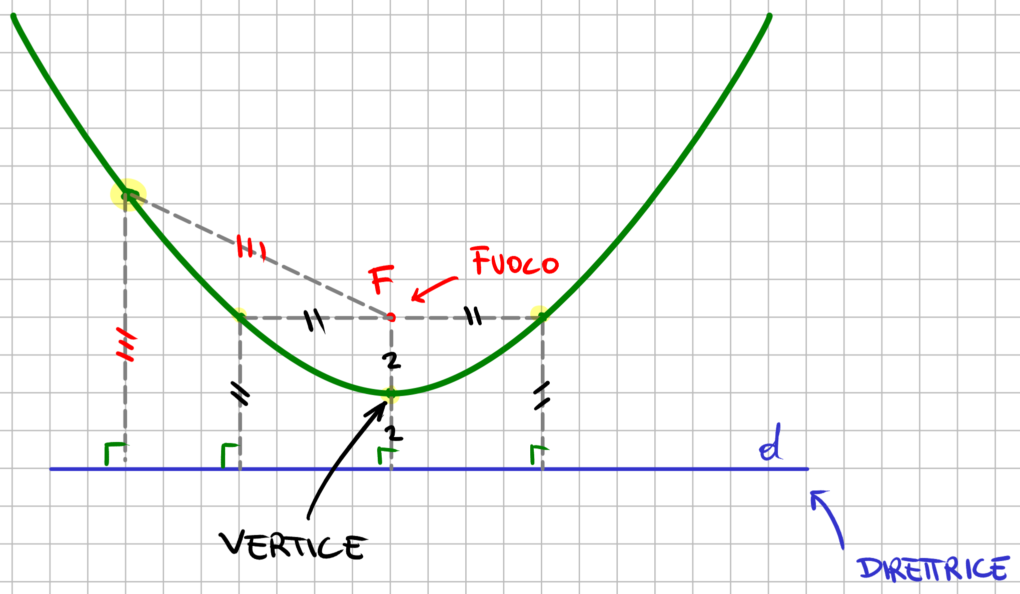
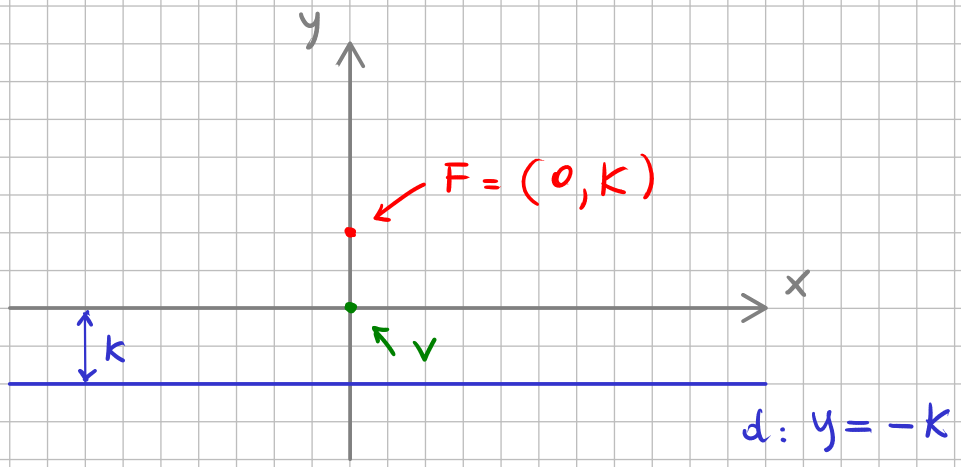
PARABOLA nel piano cartesiano



La parabola avente per fuoco F e per direttrice d è il luogo dei punti equidistanti da F e da d.

Equazione della parabola nel piano cartesiano con il vertice nell'origine



Un generico punto $P = (x, y)$ sta sulla parabola se

$$\overline{PF} = \text{distanza}\,(P, d)$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2} \overset{!}{=} \sqrt{x^2+(y-k)^2}$$

Direttrice in forma normale

$d:\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + k = 0$

distanza $(P, d) = |y + k|$

$$\sqrt{x^2+(y-k)^2} = |y+k|$$

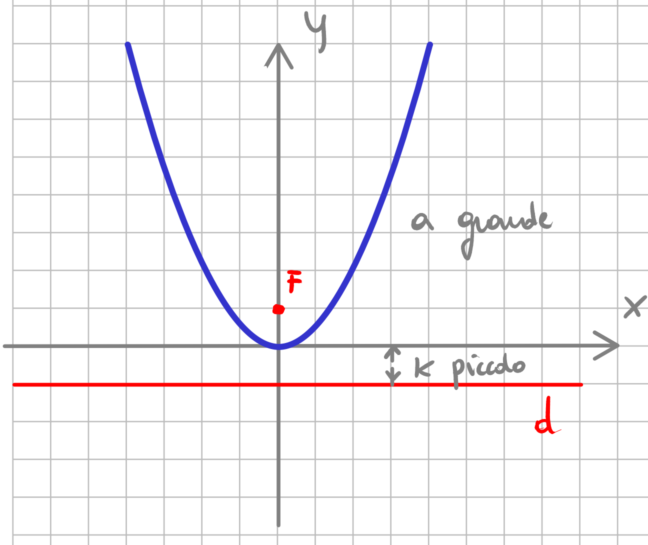
$$x^2+(y-k)^2 = (y+k)^2$$

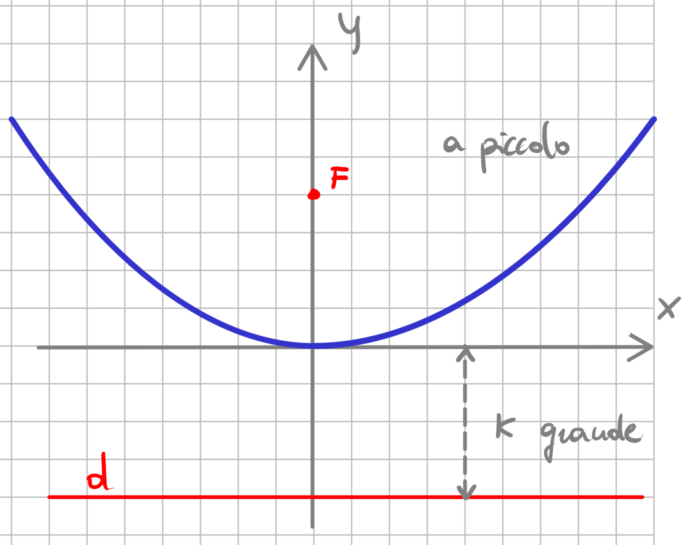
$$x^2+\cancel{y^2}-2ky+\cancel{k^2} = \cancel{y^2}+2ky+\cancel{k^2}$$

$$x^2 = 4ky$$

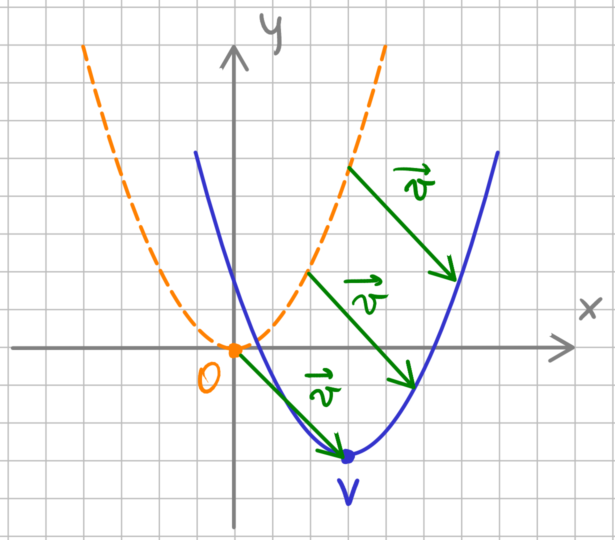
Equazione della parabola con il vertice in $O = (0,0)$

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{=a} \cdot x^2}$$





In generale, se il vertice della parabola è $V = (x_V, y_V)$, la sua equazione si ottiene trasformando



$$y = ax^2$$

come in una TRASLAZIONE lungo

$$\vec{v} = (\underset{v_x}{\underset{\|}{x_V}}, \underset{v_y}{\underset{\|}{y_V}})$$

$$y = ax^2 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow x - x_V \\ y \longrightarrow y - y_V \end{array}} \longrightarrow y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Equazione di una generica parabola "verticale"*

* con asse di simmetria verticale

Equazione in forma normale

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

$$y = a(x^2 - 2x_V x + x_V^2) + y_V$$

$$y = ax^2 \underbrace{- 2ax_V}_{b} x + \underbrace{ax_V^2 + y_V}_{c} \qquad y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -2ax_V \longrightarrow x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$c = ax_V^2 + y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_V = \frac{b^2}{4a} + y_V \longrightarrow y_V = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \ *$$

$$* \ y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Analogamente, le coordinate del FUOCO F e l'equazione della della DIRETTRICE d si ottengono TRASLANDO lungo $\vec{v} = (x_V, y_V)$

$$(0, k) \longrightarrow \boxed{F = (x_V,\ y_V + k)}$$

$$y = -k \longrightarrow \boxed{d:\ y = y_V - k}$$

$$\left(k = \frac{1}{4a}\right)$$

Esempio Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 2$

$a = 1$ $\quad b = -4$ $\quad c = 2$

Il vertice della parabola ha coordinate

$$V = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a} = 2 \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -2$$

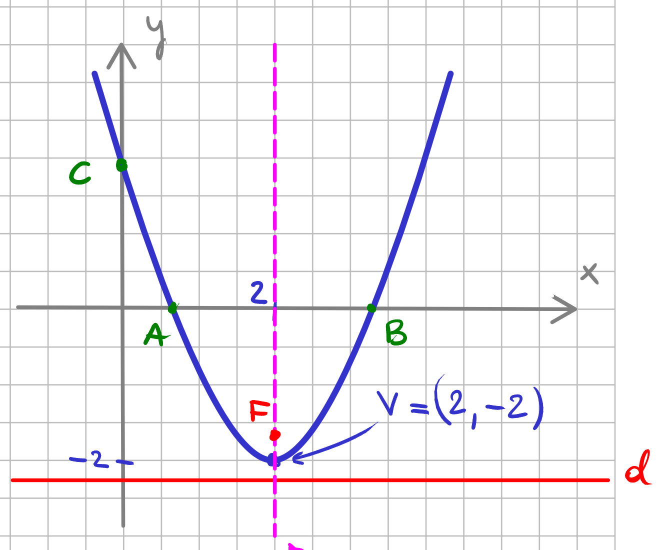
$$\Delta = b^2 - 4ac = 8$$

Poiché $k = \dfrac{1}{4a} = \dfrac{1}{4}$ troviamo

$$F = (x_V,\ y_V + k)$$

$$x_V = 2 \qquad y_V + k = -\frac{7}{4}$$

$$d:\ y = y_V - k \longrightarrow d: y = -\frac{9}{4}$$



asse di simmetria

$x = 2$

L'asse di simmetria è la retta (verticale) passante per il vertice: in generale ha equazione $\boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$

Per trovare i punti di intersezione con gli assi risolviamo:

Asse y : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \longrightarrow C = (0, 2)$

Asse x : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2} \\[2mm] \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} A = (2-\sqrt{2}, 0) \\ B = (2+\sqrt{2}, 0) \end{array}$$

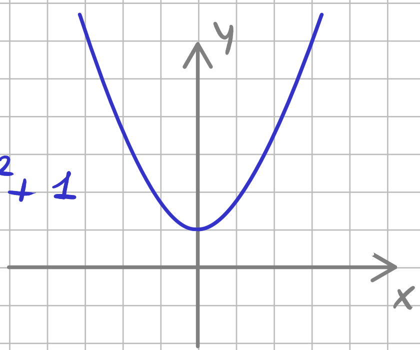
In generale, Δ
- > 0 2 punti di int. con l'asse x
- $= 0$ 1 punto
- < 0 nessun punto di intersezione

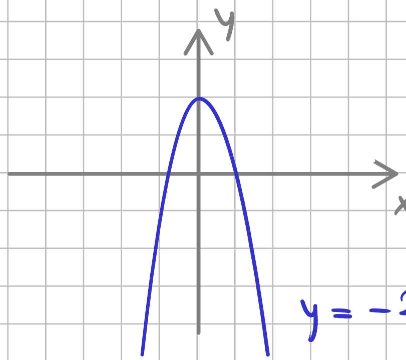
Osservazioni

La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

- è simmetrica rispetto all'asse y se $b = 0$

$y = x^2 + 1$

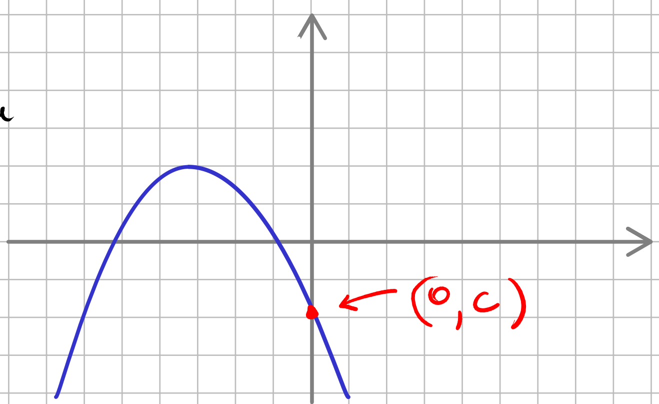




$y = -2x^2 + 2$

- passa per l'origine se $c = 0$

In generale, la parabola passa per il punto $(0, c)$



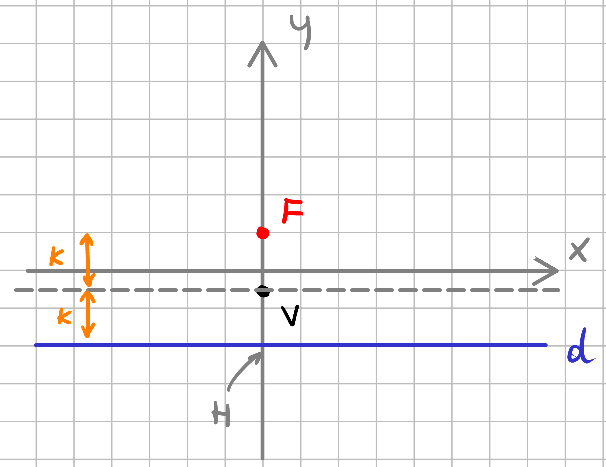
Esercizio 4 (449)

$F = (0, 1)$

$d: \ y = -2$

Il vertice V è il punto medio del segmento FH

$$V = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$



$$K = \frac{3}{2} \longrightarrow a = \frac{1}{4K} = \frac{1}{6}$$

L'equazione della parabola è $y - y_V = a(x - x_V)^2$

$$y_V \to -\frac{1}{2}, \quad a \to \frac{1}{6}, \quad x_V \to 0$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^2 \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$$

Oss: si tratta di una parabola simmetrica rispetto all'asse y

Esercizio 16 (451)

Disegnare la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$