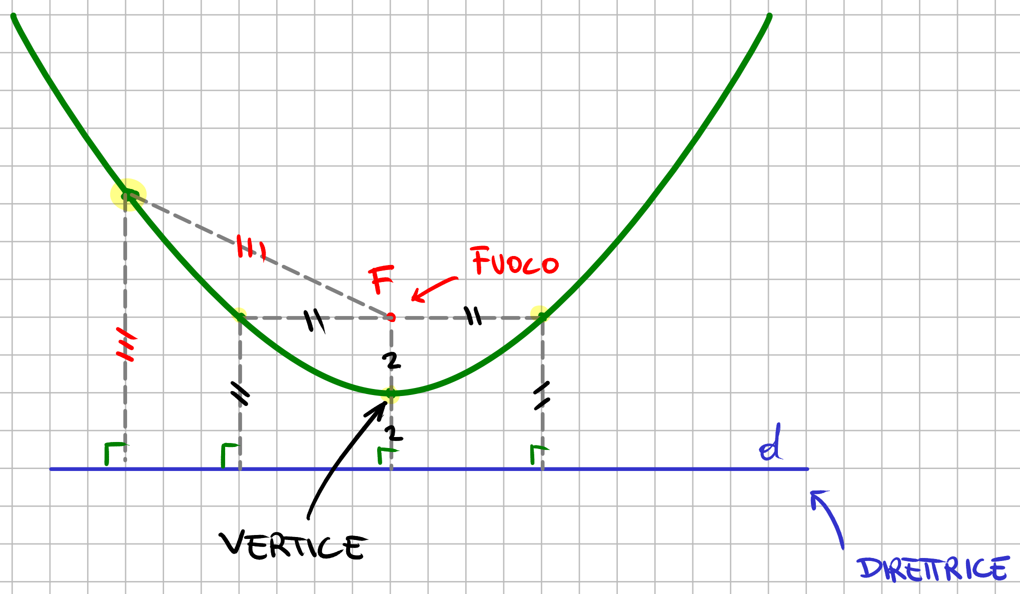
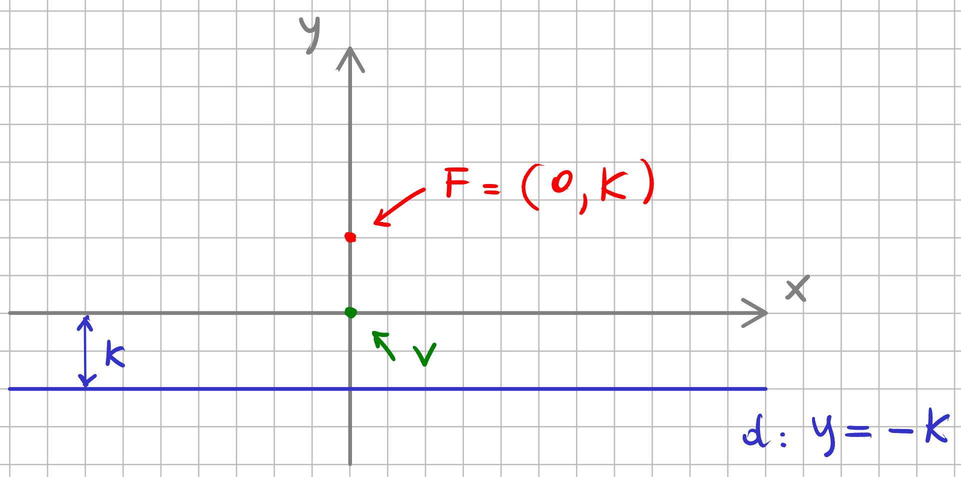
PARABOLA nel piano cartesiano



La parabola avente per fuoco F e per direttrice d è il luogo dei punti equidistanti da F e da d.

Equazione della parabola nel piano cartesiano con il vertice nell'origine



Un generico punto $P = (x, y)$ sta sulla parabola se

$$\overline{PF} = \text{distanza}\,(P, d)$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$$
$$\overset{!}{=} \sqrt{x^2 + (y-k)^2}$$

Direttrice in forma normale

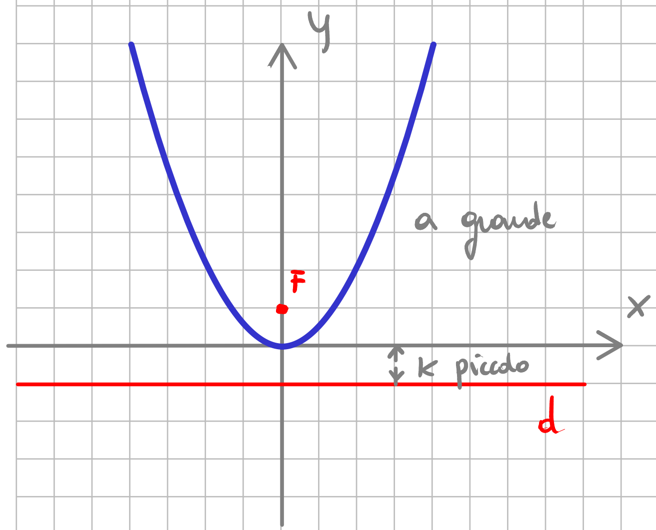
$d:\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + k = 0$

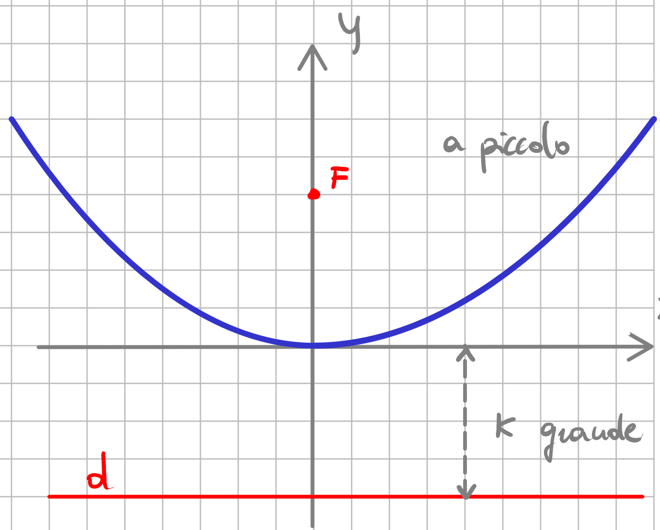
distanza $(P, d) = |y + k|$

$$\sqrt{x^2 + (y-k)^2} = |y + k|$$
$$x^2 + (y-k)^2 = (y+k)^2$$
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{y^2} + 2ky + \cancel{k^2}$$
$$x^2 = 4ky$$

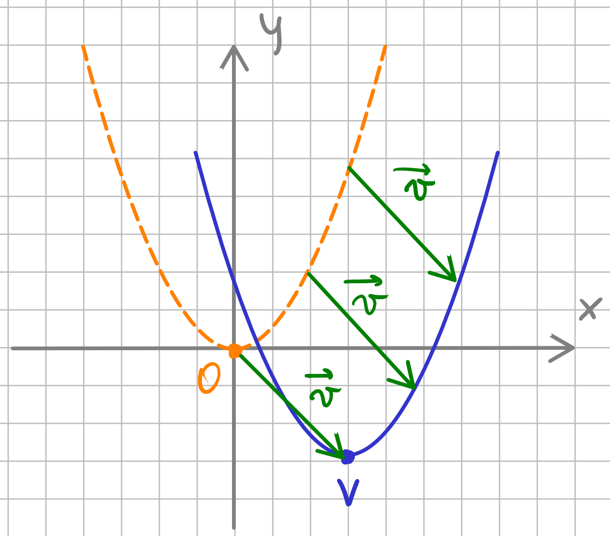
Equazione della parabola con il vertice in $O = (0,0)$

$$y = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{= a} \cdot x^2$$





In generale, se il vertice della parabola è $V = (x_V, y_V)$, la sua equazione si ottiene trasformando



$$y = ax^2$$

come in una TRASLAZIONE lungo

$$\vec{v} = (x_V, y_V)$$

$x_V = v_x$, $y_V = v_y$

$$y = ax^2 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow x - x_V \\ y \longrightarrow y - y_V \end{array}} \longrightarrow y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Equazione di una generica parabola "verticale"*

* con asse di simmetria verticale

Equazione in forma normale

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

$$y = a(x^2 - 2x_V x + x_V^2) + y_V$$

$$y = ax^2 \underbrace{- 2ax_V}_{b} x + \underbrace{ax_V^2 + y_V}_{c}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -2ax_V \longrightarrow x_V = -\frac{b}{2a}$$

$$c = ax_V^2 + y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_V = \frac{b^2}{4a} + y_V \longrightarrow y_V = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}\ *$$

$$*\ y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Analogamente, le coordinate del FUOCO F e l'equazione della della DIRETTRICE d si ottengono TRASLANDO lungo $\vec{v} = (x_v, y_v)$

$$(0, k) \longrightarrow \boxed{F = (x_v, y_v + k)}$$

$$y = -k \longrightarrow \boxed{d: \; y = y_v - k}$$

$\left(k = \frac{1}{4a}\right)$

Esempio Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 2$

$a = 1$ $b = -4$ $c = 2$

Il vertice della parabola ha coordinate

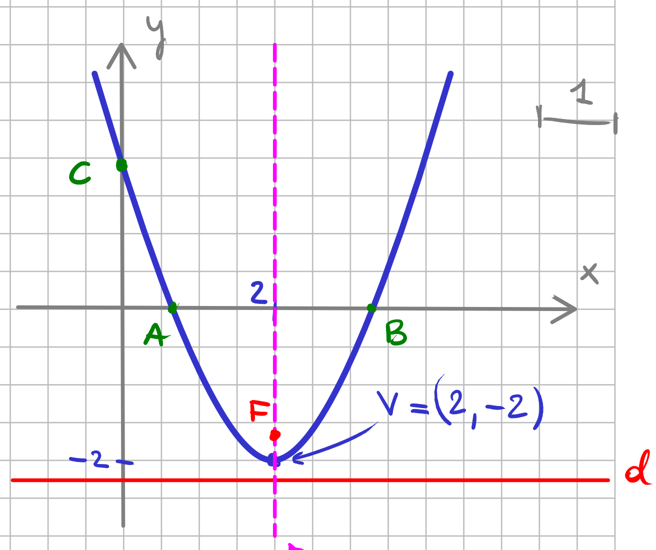
$$V = \left(\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{-\frac{b}{2a}}, \underset{\substack{\parallel \\ -2}}{-\frac{\Delta}{4a}}\right)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8$

Poiché $k = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$ troviamo

$$F = \left(\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{x_v}, \underset{\substack{\parallel \\ -\frac{7}{4}}}{y_v + k}\right)$$

$$d: \; y = y_v - k \longrightarrow d: y = -\frac{9}{4}$$



asse di simmetria

$x = 2$

L'asse di simmetria è la retta (verticale) passante per il vertice: in generale ha equazione $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$

Per trovare i punti di intersezione con gli assi risolviamo:

Asse y: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \longrightarrow \underline{\underline{C = (0, 2)}}$

Asse x : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2} \\ \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

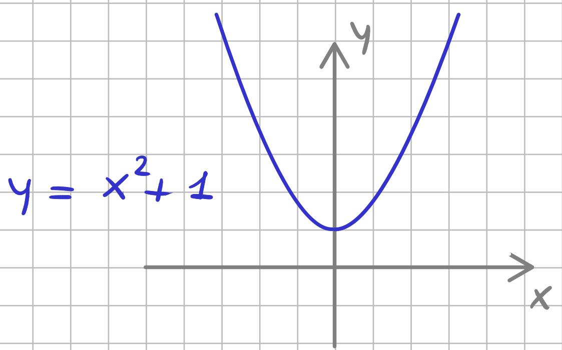
$$\longrightarrow \quad A = (2-\sqrt{2}, 0) \qquad B = (2+\sqrt{2}, 0)$$

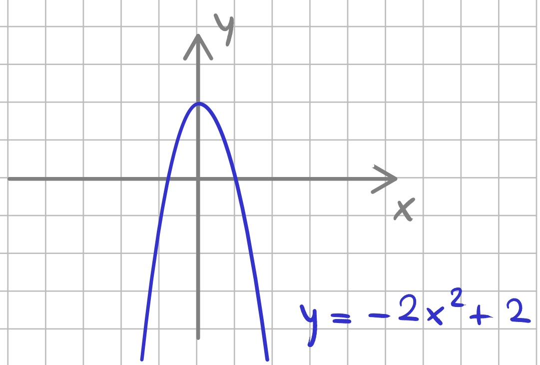
In generale, Δ
- > 0 2 punti di int. con l'asse x
- $= 0$ 1 punto
- < 0 nessun punto di intersezione

Osservazioni

La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

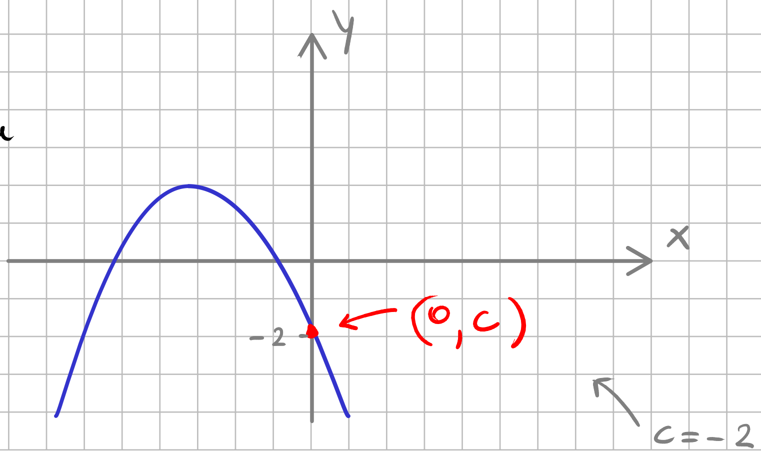
- è simmetrica rispetto all'asse y se $b = 0$





- passa per l'origine se $c = 0$

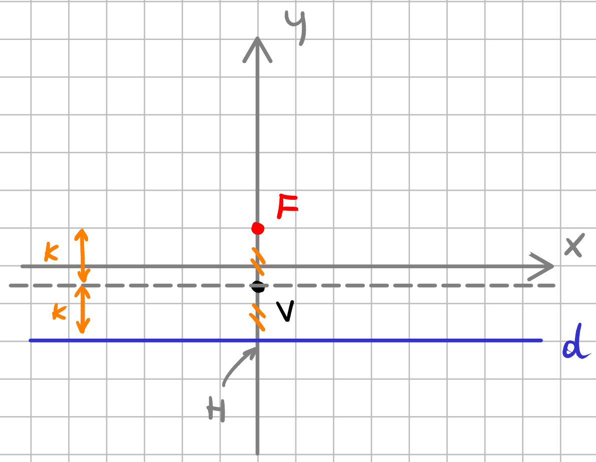
In generale, la parabola passa per il punto $(0, c)$



Esercizio 4 (449)

$F = (0, 1)$

$d: \ y = -2$



Il vertice V è il punto medio del segmento FH

$$V = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$K = \frac{3}{2} \longrightarrow a = \frac{1}{4K} = \frac{1}{6}$$

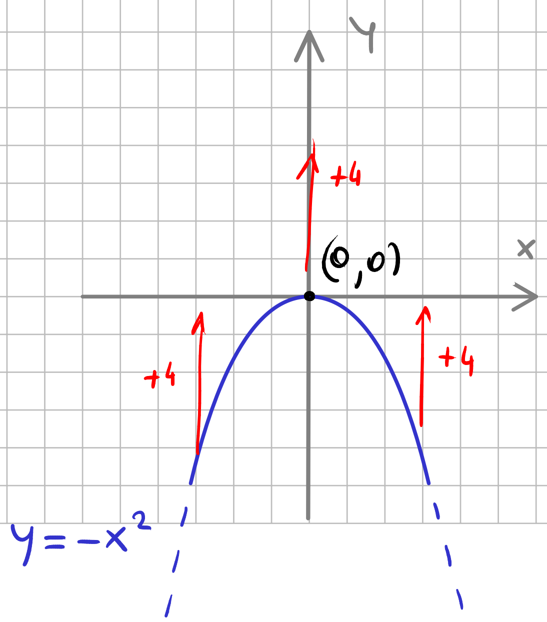
L'equazione della parabola è $y - y_V = a(x - x_V)^2$, con $y_V = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{6}$, $x_V = 0$

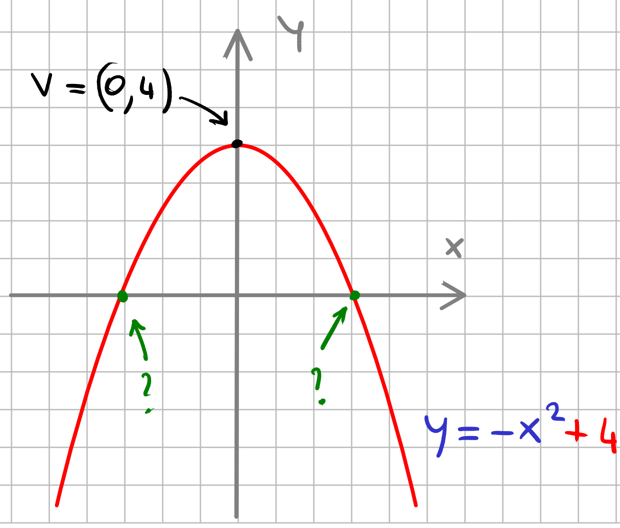
$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^2 \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$$

Oss: si tratta di una parabola simmetrica rispetto all'asse y

Esercizio 16 (451)

Disegnare la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$



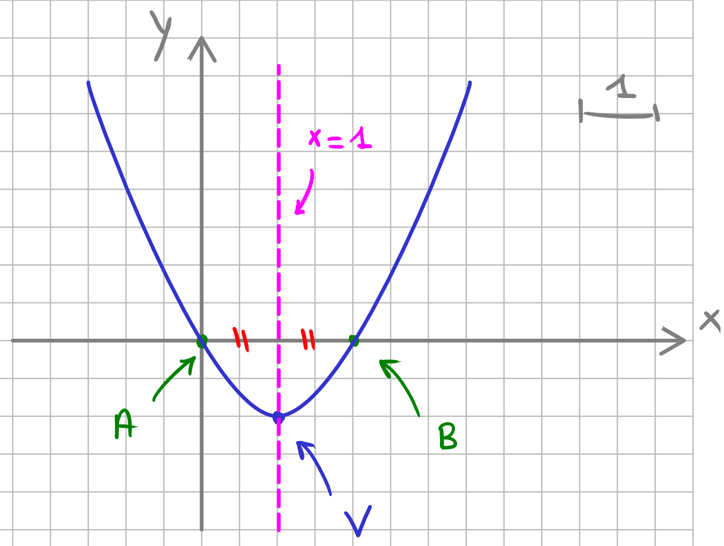


ESERCIZIO 17

$y = x^2 - 2x$

$a > 0 \rightarrow \cup$

$c = 0 \rightarrow$ passa per l'origine



$y + 1 = x^2 - 2x + 1$

$y + 1 = (x-1)^2$

$y - y_V = a(x - x_V)^2$

$y_V = -1$ $\qquad$ $x_V = 1$

Vertice della parabola: $V = (1, -1)$

Punti di intersezione con l'asse x:

$y = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0$ $\quad x = 0$; $x = 2$

$A = (0,0)$ $\qquad$ $B = (2,0)$

ESERCIZIO 20

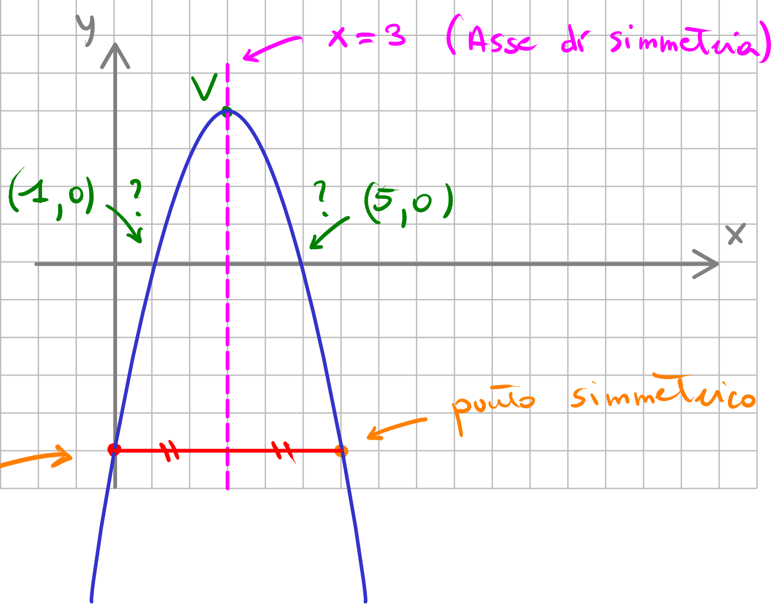
$y = -x^2 + 6x - 5$ $\qquad$ $a = -1$ $\quad$ $b = 6$ $\quad$ $c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$

Vertice della parabola

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\uparrow$ 3 $\qquad$ $\uparrow$ 4



Poiché $c = -5$ la parabola passa per $(0,-5)$

Verifichiamo se i punti di intersezione con l'asse x sono

$(1,0)$ e $(5,0)$

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

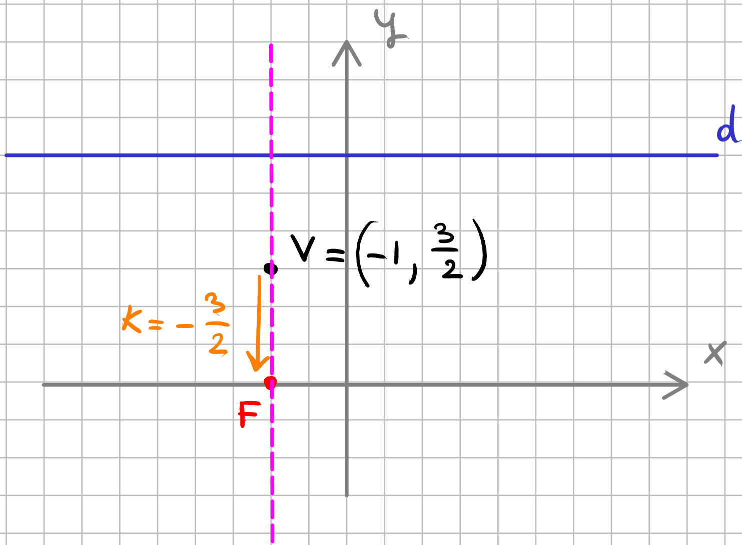
$$0 = -1^2 + 6 \cdot 1 - 5 \quad \checkmark \qquad\qquad 0 = -5^2 + 6 \cdot 5 - 5 \quad \checkmark$$

ESERCIZIO 6 (449)

$F = (-1, 0)$

$d: \; y = 3$

$$a = \frac{1}{4k} = \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{6}$$



$$y - y_v = a(x - x_v)^2 \longrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}(x+1)^2$$

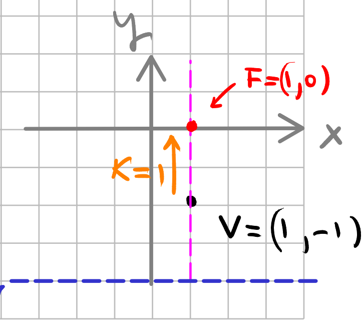
Forma normale: $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{3}{2}}_{= +\frac{4}{3}}$

ESERCIZIO 34 (451)

$$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1 \longrightarrow \overset{y_v}{y - (-1)} = \overset{a}{\frac{1}{4}}(x - \overset{x_v}{1})^2$$

$$k = \frac{1}{4a} = 1$$

$V = (x_v, y_v)$, con $x_v = 1$, $y_v = -1$



$d: \; y = -2$

Esercizio 21

$y = 2x^2 - 6x$

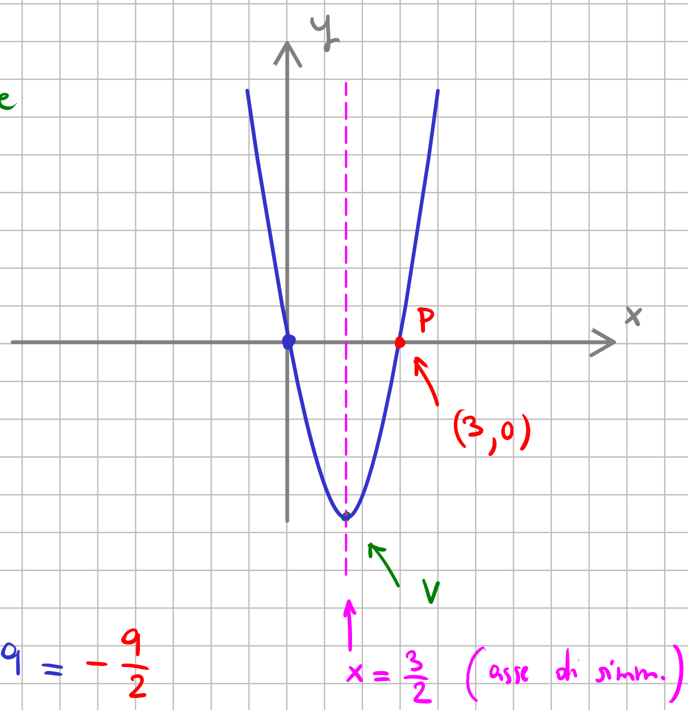
$a = 2$ $\quad b = -6$ $\quad c = 0$

$\cup$ $\qquad$ passa per l'origine

Troviamo le coordinate del vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a} \, , \; y_v\right)$$

$= 3/2 \qquad = ?$



Poiché V sta sulla parabola

$$y_v = 2x_v^2 - 6x_v$$

$$y_v = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

Verifichiamo che $P = (3, 0)$ sta sulla parabola :

$$0 = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \quad ✓$$

Esercizio 27

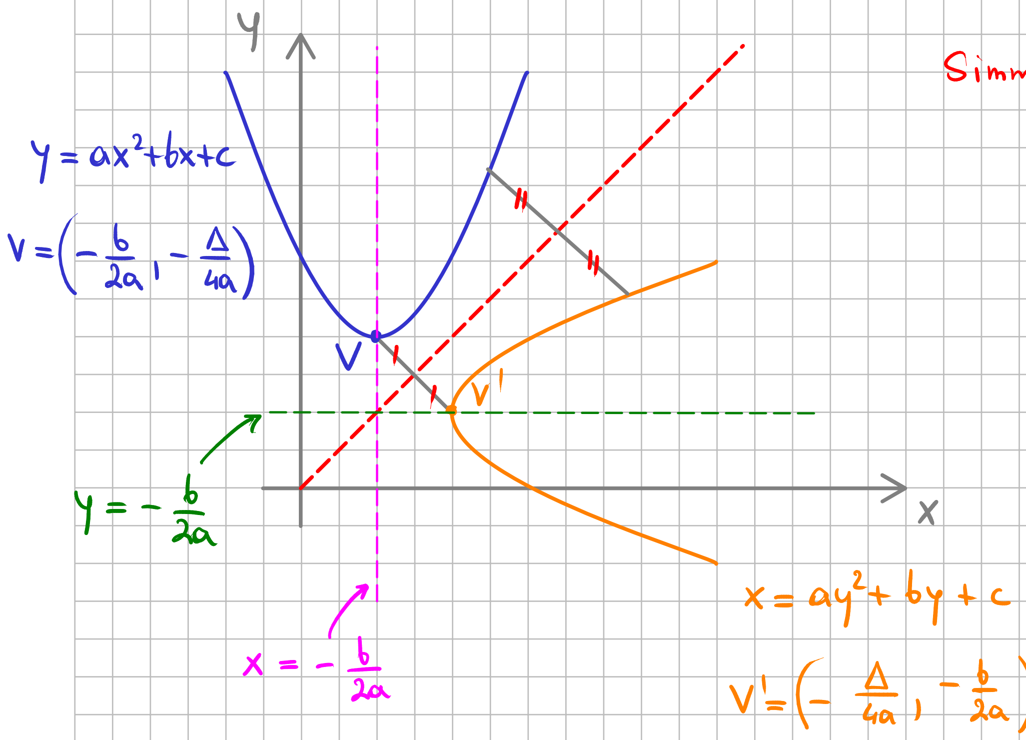
$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \longrightarrow \underbrace{y - 2}_{y_v \text{ in } 2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a}\left(x - \underbrace{(-1)}_{x_v}\right)^2$$

$V = (-1, 2)$:)

(. . .)

PARABOLE ORIZZONTALI*

* con asse di simmetria orizzontale



Simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$

$x \longrightarrow y$

$y \longrightarrow x$

N.B. Una parabola orizzontale NON È il grafico di una funzione! (Invece, ovviamente, una parabola verticale lo è)

ESERCIZIO 47

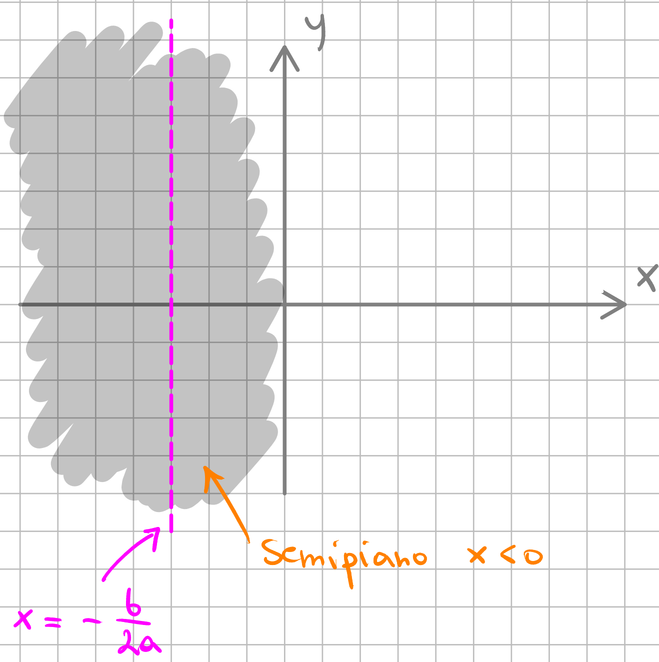
$y = ax^2+bx+c$

b) L'asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$ si trova nel semipiano $x<0$ quando

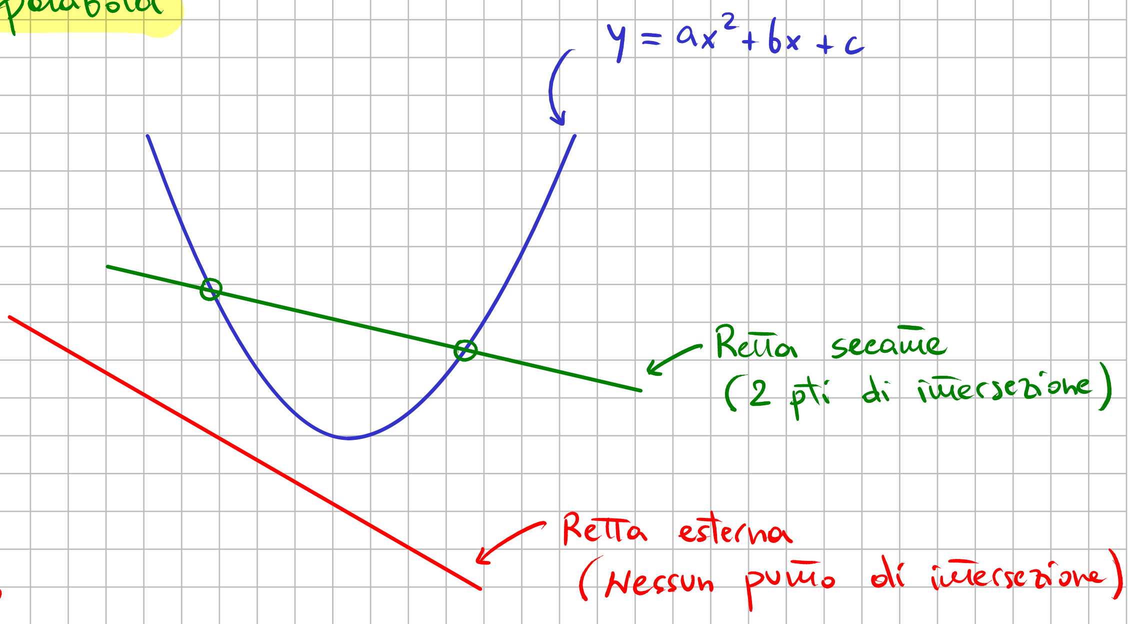
$$-\frac{b}{2a} < 0$$

$a = k^2-1 \quad \downarrow \quad b = -(k^2-2k)$

$$\frac{k^2-2k}{2(k^2-1)} > 0 \qquad (\dots)$$



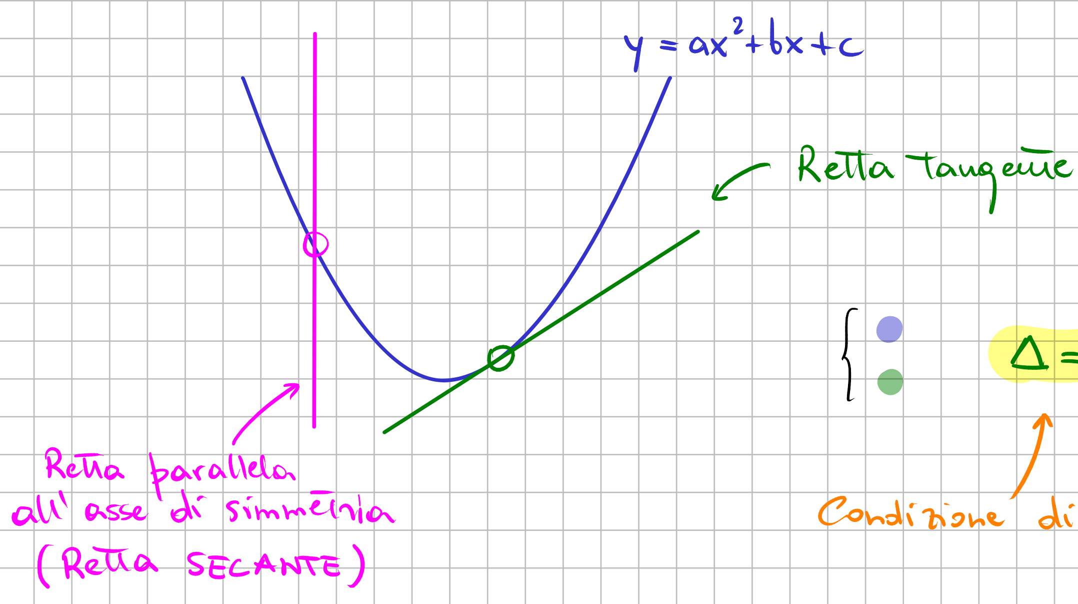
Retta e parabola



$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

Rette con un solo punto di intersezione



$\boxed{\Delta = 0}$

Condizione di tangenza

ESERCIZIO 89 (456)

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è $-2x + 4 = x^2 - 4$

$x^2 + 2x - 8 = 0$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9$

Poiché $\Delta > 0$, si tratta di una retta secante (ci sono due punti di intersezione).

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = -4 \longrightarrow y_1 = 12 \\ x_2 = 2 \longrightarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

I due punti di intersezione sono $(-4, 12)$ e $(2, 0)$.

Esercizio 91 (456)

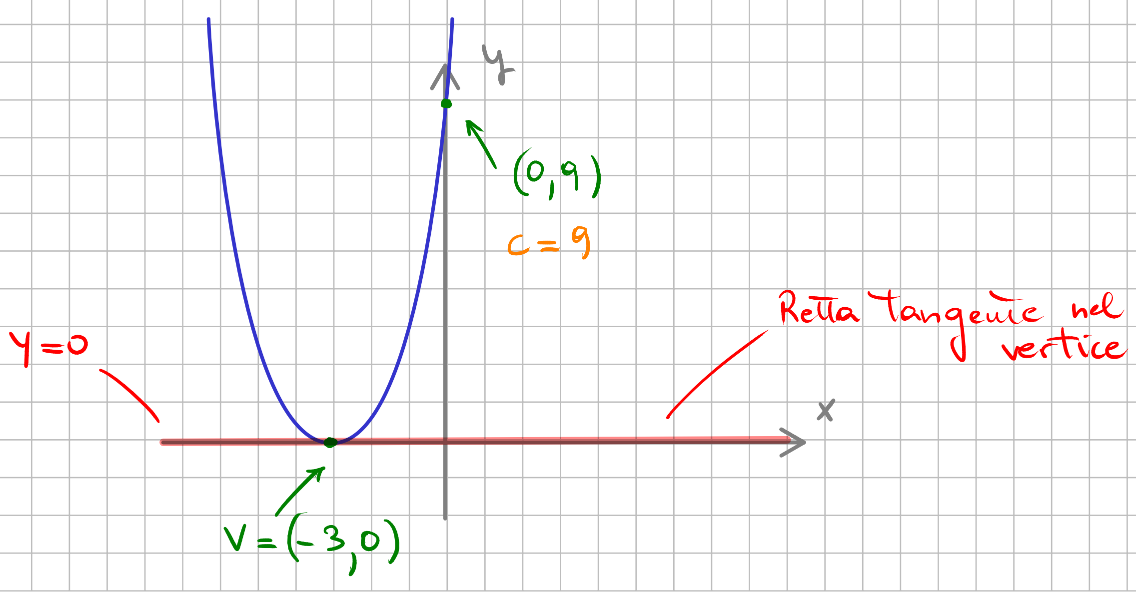
$y = x^2 + 6x + 9 \longrightarrow y = (x+3)^2$

$y - y_v = a(x - x_v)^2$

$y_v = 0$ $\qquad 1$ $\qquad x_v = -3$

Il VERTICE è

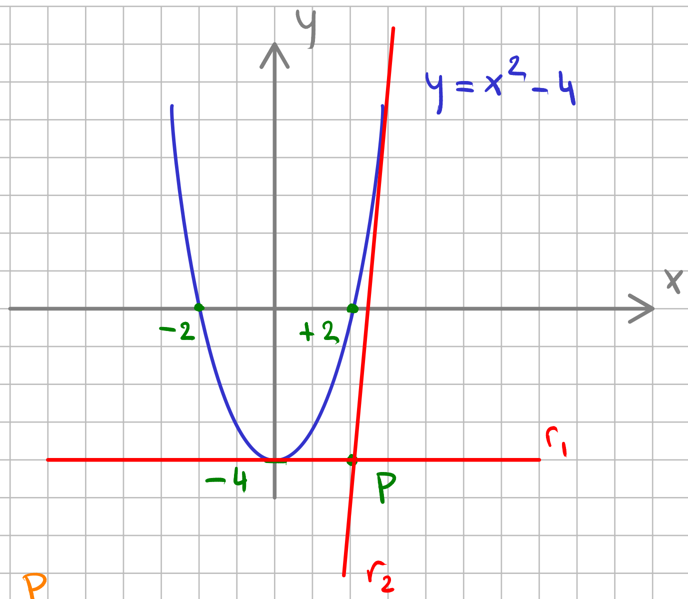
$V = (-3, 0)$



ESERCIZIO 115 (458)

$y = x^2 - 4$

$P = (2, -4)$



Ci sono 2 RETTE TANGENTI

$\boxed{y + 4 = m(x - 2)}$

Generica retta passante per P

$m = ?$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = m(x-2) - 4 \end{cases}$$

Equazione risolvente

$m(x-2) \cancel{-4} = x^2 \cancel{-4}$

$x^2 - mx + 2m = 0$

$a = 1 \qquad b = -m \qquad c = 2m$

$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 8m$

Condizione di tangenza: $\boxed{\Delta = 0}$

$m^2 - 8m = 0$

$m(m-8) = 0 \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 8 \end{cases}$

Le equazioni delle 2 rette tangenti sono

$y + 4 = m(x - 2)$

$m = 0$: $r_1: y = -4$

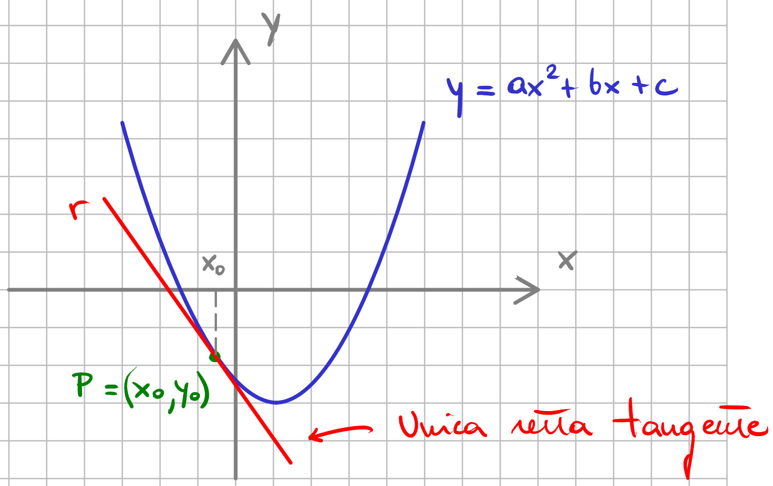
$m = 8$: $r_2: y = 8x - 20$

Retta Tangente alla parabola in un suo punto

TEOREMA

Il coeff. angolare di r è

$$m = 2ax_0 + b$$



Dimostrazione

La generica retta passante per $P = (x_0, y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ Il sistema ha un'unica soluzione $x = x_0 \quad y = y_0$

$$ax^2 + bx + c = m(x - x_0) + y_0$$

$$\underbrace{ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0}_{A(x)} = 0$$

$\leftarrow$ L'equazione risolvente ha un'unica soluzione $x = x_0$

$$\parallel$$

$$\underbrace{a(x - x_0)^2}_{B(x)}$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\parallel$$

$$2(x-1)^2$$

$x = 1$ unica soluzione

I due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ sono uguali

$$A(x) = ax^2 + (b - m)x + \dots$$

$$B(x) = ax^2 - 2ax_0\, x + \dots$$

$$b - m = -2ax_0 \longrightarrow \boxed{m = 2ax_0 + b}$$

$\square$

ESERCIZIO 120 (458)

$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$

$P \leftarrow$ il punto della parabola con $x = 3$

Trovare l'equazione della retta tangente passante per P.

$P = (3, ?)$

$y_P = -\frac{1}{3}x_P^2 + 3x_P$

$= -\frac{1}{3}3^2 + 3 \cdot 3$

$= 6$

$P = (3, 6)$

L'equazione della retta tangente è del tipo

$y - 6 = m(x-3)$

?

Possiamo calcolare m con la formula

$m = 2ax_P + b = 2\left(-\frac{1}{3}\right)3 + 3 = 1$

$a = -\frac{1}{3}$, $x_P = 3$, $b = 3$

$y - 6 = 1(x-3)$

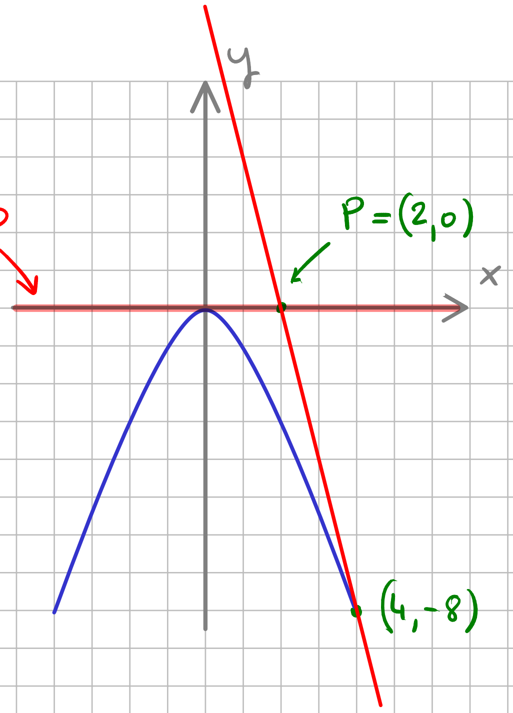
$y = x + 3$

ESERCIZIO 119

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$y = m(x-2)$$

Generica retta per $P=(2,0)$



$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = m(x-2) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = m(x-2) \quad \leftarrow \text{Equazione risolvente}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + mx - 2m = 0$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad b = m$ $\quad c = -2m$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= m^2 - 4\,\frac{1}{2}(-2m)$$
$$\Delta = m^2 + 4m$$

$$m^2 + 4m = 0 \longrightarrow m(m+4) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \;* \\ m = -4 \;** \end{cases}$$

* $y = 0$

** $y = -4x + 8$

$\quad\;\; -8 \qquad 4$

Il punto $(4,-8)$ sta sulla retta?

$$-8 = -8$$

✓

ESERCIZIO 52

$y = (a-1)x^2 - 2ax + a + 2$

$\Delta/4 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

$\Delta/4 = a^2 - (a-1)(a+2)$
$= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - a + 2$

① $\frac{\Delta}{4} > 0$ (2 punti sull'asse x)

$-a+2>0 \longrightarrow \underline{\underline{a<2}}$

② $a - 1 > 0$ (concavità verso l'alto)

$\longrightarrow \underline{\underline{a>1}}$

① + ② $\longrightarrow \begin{cases} a<2 \\ a>1 \end{cases} \longrightarrow 1 < a < 2$

Grafico di $y=\sqrt{x}$

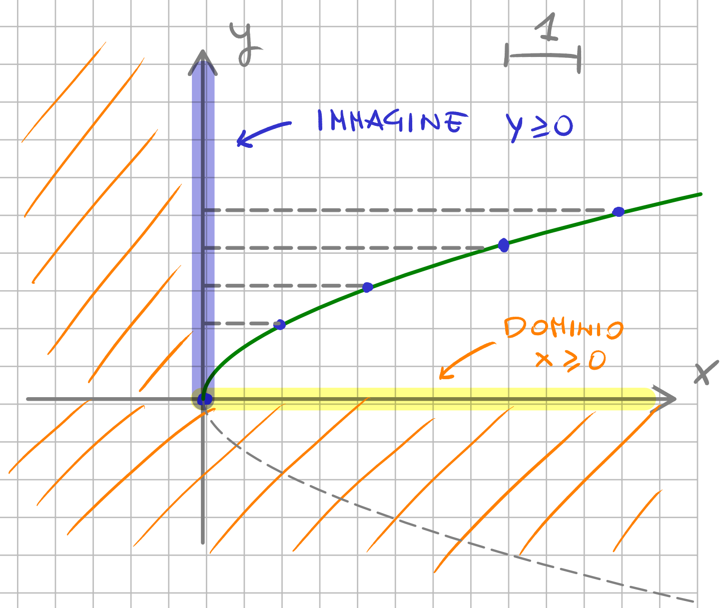
Osservazioni

① y è una funzione definita solo per $x \geq 0$

Dominio di y

② $y \geq 0$

(y è una radice quadrata)



x	0	1	2	3	4	5	...
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	...

Elevando al quadrato:

$x = y^2$

"$x = ay^2 + by + c$"

Parabola con asse di simmetria orizzontale (l'asse x) e VERTICE nell'origine

③ $y=\sqrt{x}$ è una **FUNZIONE CRESCENTE**

se $x_1 < x_2$ allora $\underset{\sqrt{x_1}}{\overset{\|}{y_1}} < \underset{\sqrt{x_2}}{\overset{\|}{y_2}}$

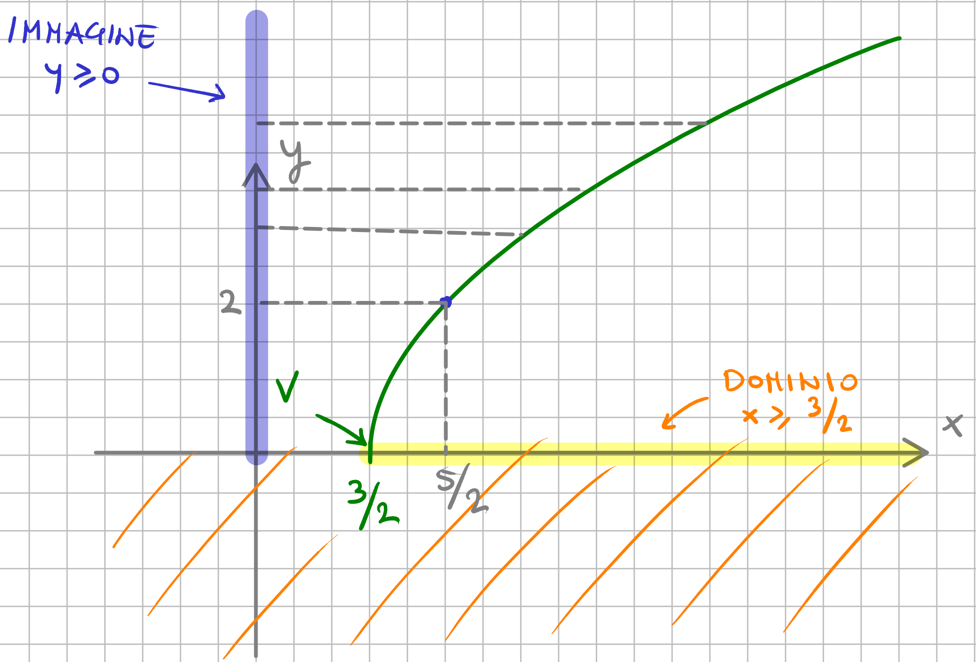
Altri esempi:

$y=\sqrt{4x-6}$

① Dominio $4x-6 \geq 0 \longrightarrow$ $x \geq 3/2$

② Segno: $y \geq 0$ (è una radice quadrata)

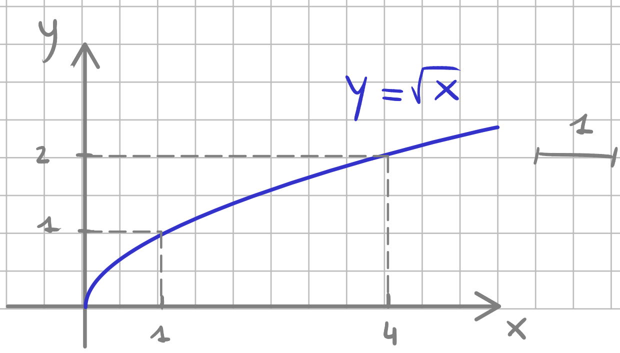
x	y
$3/2$	0
$5/2$	2

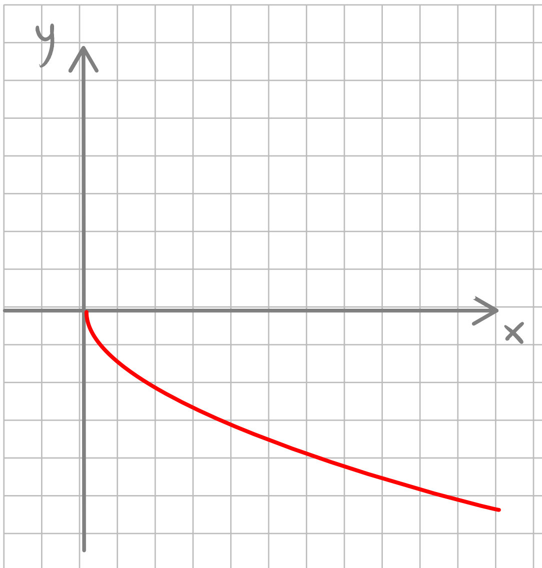


$y=\sqrt{4x-6} \longrightarrow y^2 = 4x-6 \longrightarrow x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{2}$

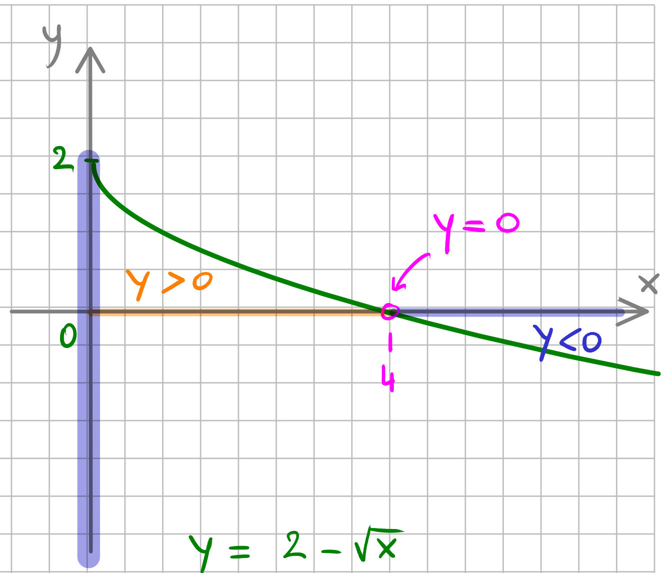
$a = \frac{1}{4}$

$y = 2 - \sqrt{x}$





$y = -\sqrt{x}$



$y = 2 - \sqrt{x}$

$(y = -\sqrt{x} + 2)$

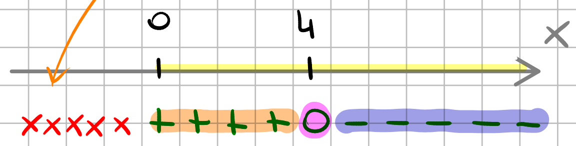
$y = 0$?

$\uparrow$

$2 - \sqrt{x} = 0 \longrightarrow \sqrt{x} = 2 \longrightarrow x = 4$

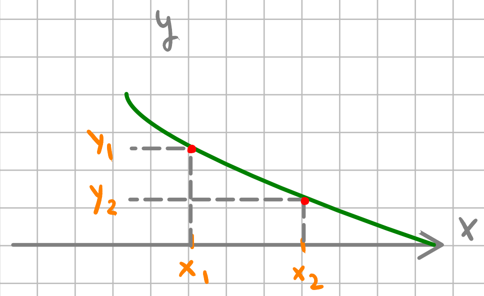
Segno della funzione $y = 2 - \sqrt{x}$

Se $x < 0$, la funzione y non è definita.



Osservazione : si tratta di una funzione DECRESCENTE *

* se $x_1 < x_2$ allora $y_1 > y_2$



N.B. Dal suo grafico possiamo osservare che l'immagine della funzione $y = 2 - \sqrt{x}$ è l'insieme delle y tali che

$y \leq -2$