

## SUCCESIONI NUMERICHE

### Esempi di successioni

#### 1) Successione dei numeri dispari

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 5 \quad a_4 = 7 \quad \dots \quad a_n = 2n + 1$$



TERMINI della successione



TERMINE GENERALE

N.B. Il termine generale permette di calcolare l' $n$ -esimo termine della successione.

Ad esempio, il 2021° numero dispari è

$$a_{2021} = 2 \cdot 2021 + 1 = 4043$$

#### 2) Successione delle potenze di $\frac{1}{2}$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{16} \quad \dots$$

Il termine generale della successione è  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

N.B. In questo caso il 1° termine della successione corrisponde a  $n=0$ , il 2° termine a  $n=1$ , ecc...

#### 3) Successione di Fibonacci

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$a_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

N.B. La succ. di Fibonacci è DEFINITA PER RICORSIONE

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2$$

## DEFINIZIONE

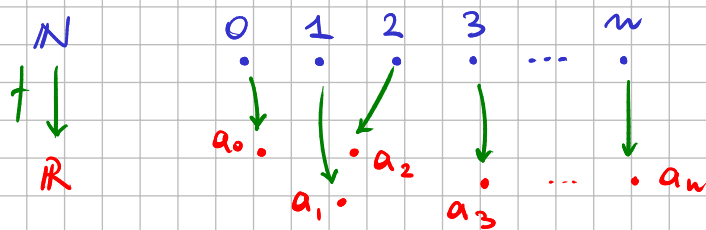
Una successione è una funzione  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Insieme dei NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

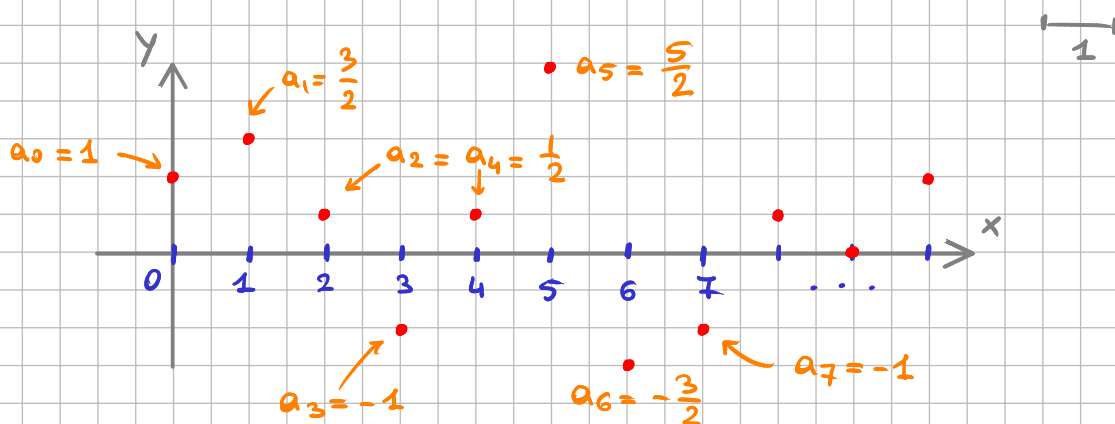
## Osservazioni

- 1) L'immagine di  $n \in \mathbb{N}$  è l' $n$ -esimo termine della successione:

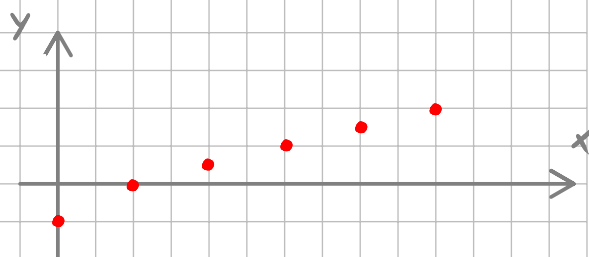


$$f(n) = a_n$$

- 2) Il grafico di una successione è un insieme di PUNTI ISOLATI

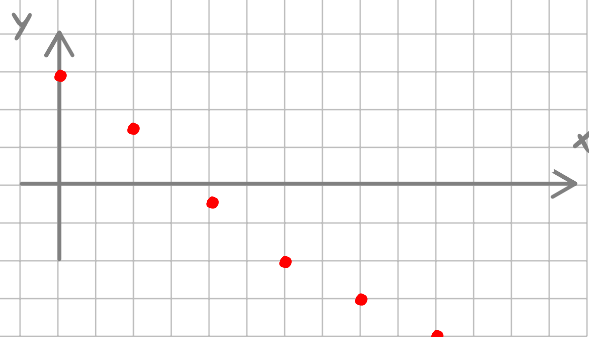


- 3) Una successione è CRESCENTE se  $a_n < a_{n+1}$  per ogni  $n$



Una successione è DECRESCENTE se

$$a_n > a_{n+1} \text{ per ogni } n$$



- 4) Per alcune successioni conviene sostituire il dominio  $\mathbb{N}$  con l'insieme  $\mathbb{N}^+ = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . In tal caso, i primi termini della successione sono  $\cancel{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

### ESERCIZIO 8 (p. 147)

Consideriamo la successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

In corrispondenza di quale  $n$  abbiamo  $a_n = \frac{3}{4}$ ?

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{3}{4}$$

$$4(n-1) = 3(n+2)$$

$$n = 10$$

ovvero  $\frac{3}{4}$  è il 10° termine della successione ( $a_{10} = \frac{3}{4}$ ).

Successioni definite per **RICORSIONE**

Esempi:

#### 1) ESERCIZIO 37 (p. 148)

1° termine della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 + \frac{1}{2} a_{n-1} \end{cases}$$

Formula per calcolare l' $n$ -esimo termine  $a_n$  partendo dal Termine precedente  $a_{n-1}$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2 \\
 a_2 &= 2 + \frac{1}{2} a_1 = 3 \\
 a_3 &= 2 + \frac{1}{2} a_2 = \frac{7}{2} \\
 a_4 &= 2 + \frac{1}{2} a_3 = \frac{15}{4} \\
 a_5 &= 2 + \frac{1}{2} a_4 = \frac{31}{8}
 \end{aligned}$$

I primi cinque termini sono  
 $2 \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{31}{8}$

## 2) ESERCIZIO 34 (p. 148)

Cerchiamo un possibile **TERMINE GENERALE**  $a_n$  per la successione i cui primi termini sono

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \dots$$

① Osserviamo che ciascun termine  $a_n$  si ottiene aggiungendo  $+1$  al termine precedente  $a_{n-1}$

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE per RICORSIONE

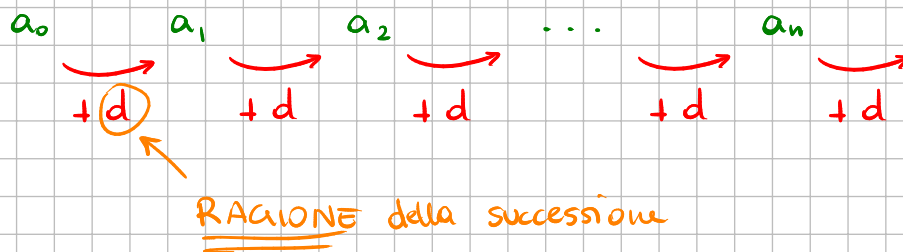
② Osserviamo la sequenza:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 & \xrightarrow{+1} & a_1 & \xrightarrow{+1} & a_2 & \xrightarrow{+1} & a_3 & \xrightarrow{+1} & \dots & \xrightarrow{+1} & a_n \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} + 1 & & -\frac{1}{2} + 2 & & -\frac{1}{2} + 3 & & & & -\frac{1}{2} + n
 \end{array}$$

$$a_n = -\frac{1}{2} + n$$

TERMINE GENERALE

## PROGRESSIONI ARITMETICHE



Esempi di prog. aritmetiche

- Numeri pari  $0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$  ( $d=2$ )
- Numeri dispari  $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$  ( $d=2$ )
- Numeri interi negativi  $-1, -2, -3, -4, \dots$  ( $d=-1$ )
- Successione costante  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$  ( $d=0$ )

**MONOTONIA** di una progressione aritmetica

$d$   $\begin{cases} > 0 \rightarrow \text{Successione strettamente CRESCENTE} \\ = 0 \rightarrow \text{Successione COSTANTE} \\ < 0 \rightarrow \text{Successione strettamente DECRESCENTE} \end{cases}$

DEFINIZIONE RICORSIVA  
(di progr. aritmetica)

$$\rightarrow a_n = a_{n-1} + d$$

$$= a_{n-2} + d + d$$

$$= a_{n-3} + d + d + d$$

$\vdots$

TERMINE GENERALE

$$\rightarrow a_n = a_0 + d \cdot n$$

N.B. Se il 1° termine della progressione aritmetica è  $a_1$   <sup>$n=1$</sup>   
allora il suo termine generale è  $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

Esempi

Numeri dispari  $a_0 = 1$   $a_1 = 3$   $a_2 = 5$   $a_3 = 7$  ...  $a_n = 1 + 2n$   <sup>$d=2$</sup>   
Numeri pari  $a_0 = 0$   $a_1 = 2$   $a_2 = 4$   $a_3 = 6$  ...  $a_n = 0 + 2n$

OSSERVAZIONE

...  $a_{n-1}$   $\xleftarrow{-d}$   $a_n$   $\xrightarrow{+d}$   $a_{n+1}$  ... <sup>Progr. aritmetica</sup>

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n$$

MEDIA ARITMETICA  
tra  $a_{n-1}$  e  $a_{n+1}$

Somma dei primi termini di una progr. aritmetica

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = ?$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{S_n}$

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l} a_0 & + a_1 & + a_2 & \dots & + a_n & = & S_n \\ a_n & + a_{n-1} & + a_{n-2} & \dots & + a_0 & = & S_n \\ \hline & \cancel{a_0 + d} & \cancel{a_0 + 2d} & & & & \\ & \cancel{a_n - d} & \cancel{a_n - 2d} & & & & \end{array}$$

$$(a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + \dots + (a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$(n+1)(a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$\overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}^{S_n} = \frac{n+1}{2} (a_0 + a_n)$$

Esempi:

- Somma dei primi 100 interi positivi

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{2} + 3 + 4 + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ a_{99}}}{100} = \frac{100}{2} (1 + 100) = \underline{\underline{5050}}$$

- Somma dei primi 50 numeri dispari

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{3} + 5 + \dots + a_{49} = \frac{50}{2} (1 + 99) = \underline{\underline{2500}}$$

$$a_n = 1 + 2n$$

$$a_{49} = 1 + 2 \cdot 49$$

$$= 99$$

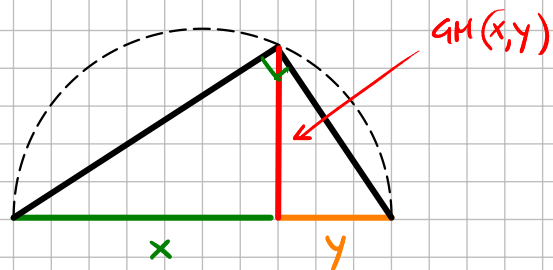
N.B. Iniziando a contare da  $n=1$ , la formula diventa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

## PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Premessa. La MEDIA GEOMETRICA GM di due numeri reali positivi  $x$  e  $y$  è definita come  $GM(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

Interpretazione geometrica



Definizione ricorsiva di progr. geometrica

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

RAGIONE

Esempi

- 1 2 4 8 16 32 ... ( $q = 2$ ) ← Potenze di 2
- 10 5  $\frac{5}{2}$   $\frac{5}{4}$   $\frac{5}{8}$  ... ( $q = \frac{1}{2}$ )
- 1 -1 1 -1 1 ... ( $q = -1$ ) ← Succ. a SEGNI ALTERNI
- 7 7 7 7 7 ... ( $q = 1$ ) ← Succ. costante

Proprietà di monotonia delle progr. geometriche

$$\text{se } a_0 > 0 \left\{ \begin{array}{ll} q > 1 & \text{Succ. STRET. CRESCENTE} \\ q = 1 & \text{Succ. COSTANTE} \\ 0 < q < 1 & \text{Succ. STRET. DECRESCENTE} \\ q < 0 & \text{Succ. A SEGNI ALTERNI} \end{array} \right.$$



Relazione con la media geometrica

$$GM(a_{n-1}, a_{n+1}) = a_n^*$$

$$GM(a_{n-1}, a_{n+1}) = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{d} \cdot a_n \cdot d} = a_n$$

\* N.B. Questa relazione è valida solo per le progressioni geometriche a TERMINI POSITIVI ( $a_0 > 0, d > 0$ )

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \xrightarrow{\cdot q} & a_0 q & \xrightarrow{\cdot q} & a_0 q^2 & \xrightarrow{\cdot q} & a_0 q^3 & \dots & a_0 q^n \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_n \end{array}$$

TERMINE GENERALE  $\rightarrow$   
di una progr. geometrica  
di ragione  $q$

$$a_n = a_0 q^n$$

OPPURE

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

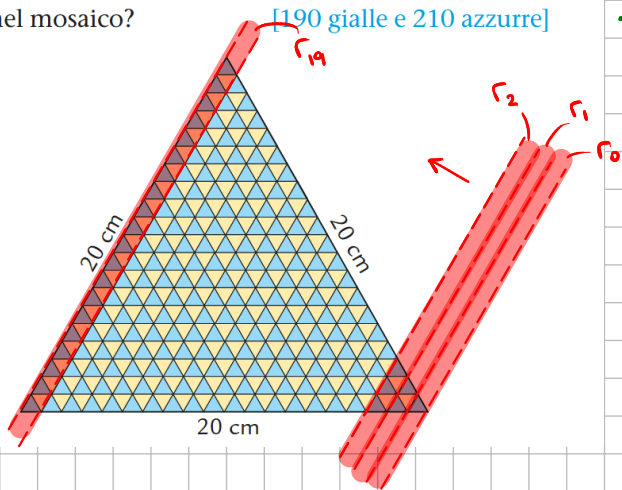
FORMULA per i primi termini di una progressione geometrica

$$\begin{array}{c} ? \\ \cdot \\ \parallel \\ \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_n} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S = a_0 + \cancel{a_0 q} + \cancel{a_0 q^2} + \dots + \cancel{a_0 q^n} \\ - qS = \quad \quad \quad \cancel{- a_0 q} - \cancel{a_0 q^2} - \dots - \cancel{a_0 q^n} - a_0 q^{n+1} \end{array}$$

$$(1 - q) \cdot S = a_0 (1 - q^{n+1}) \rightarrow S = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**127 Un mosaico.** Un mosaico ha la forma di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo 20 cm. Ogni piastrella del mosaico è a forma di triangolo equilatero, il cui lato è lungo 1 cm. Le piastrelle, gialle e azzurre, si alternano come indicato in figura. Quante piastrelle di ciascun colore ci sono nel mosaico?



- Consideriamo le 2 successioni:

$a_n \leftarrow$  piastrelle azzurre nella striscia  $r_n$

$b_n \leftarrow$  piastrelle gialle nella striscia  $r_n$

Si tratta di PROGRESSIONI ARITMETICHE  
entrambe di ragione  $d=1$ .

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 4 \quad \dots \quad a_n = 1 + n$$

$$b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 3 \quad \dots \quad b_n = n$$

In particolare abbiamo  $a_{19} = 20$   $b_{19} = 19$

↑ ↑  
piastrelle nell'ultima striscia (r<sub>19</sub>)

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{19} = \frac{n+1}{2} (a_0 + a_{19})$$

$$= \frac{20}{2} (1 + 20) = \underline{\underline{210}}$$

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{19} &= \frac{n+1}{2} (b_0 + b_{19}) \\ &= \frac{20}{2} (0 + 19) = \underline{\underline{190}} \end{aligned}$$

**196 Oscillazioni di un pendolo.** Un pendolo descrive inizialmente, in una sua prima oscillazione, un arco di 20 cm. A ogni oscillazione successiva la lunghezza dell'arco diminuisce del 10% rispetto alla precedente. Qual è la somma delle lunghezze degli archi descritti dal pendolo dopo dieci oscillazioni? [Circa 130,26 cm]

$$a_0 = 20$$

← lunghezza in cm del 1° tratto

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - \frac{1}{10} a_{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{10}\right) a_{n-1} \\ &= \frac{9}{10} a_{n-1} \end{aligned}$$

← a ogni oscillazione la lunghezza del tratto diminuisce del 10%

←  $a_n$  è una progressione geometrica di ragione  $q = \frac{9}{10}$

TERMINI GENERALI

$$a_n = 20 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$$a_9 = 20 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 \approx 7,75 \quad (\text{lunghezza del tratto percorso nella } 10^{\text{a}} \text{ oscillazione})$$

LUNGHEZZA TOTALE del tratto percorso

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + \dots + a_n &= a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 20 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{\frac{1}{10}} \\ &= 200 \cdot \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right] = \underline{\underline{130,26}} \end{aligned}$$