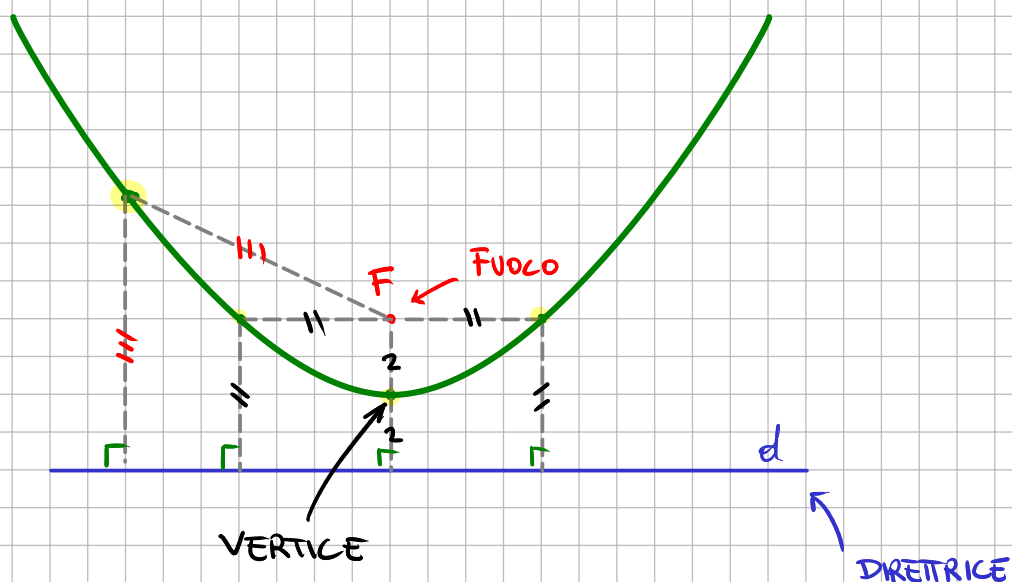
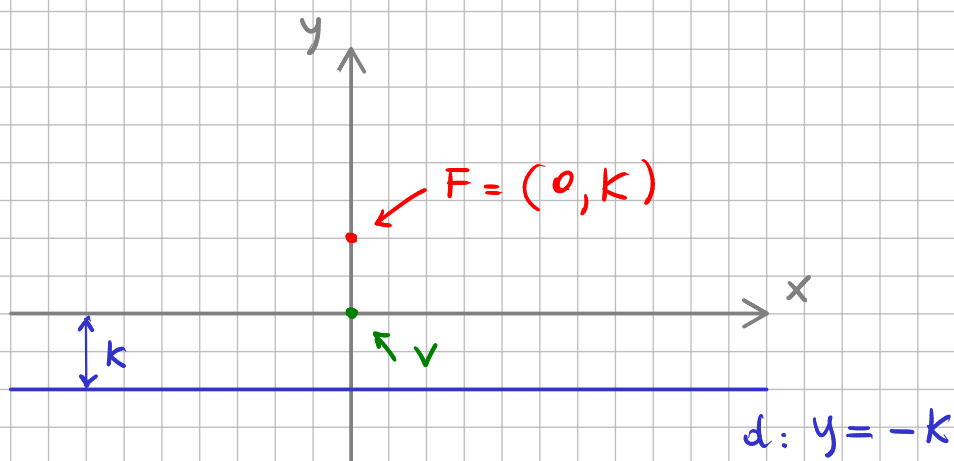


## PARABOLA nel piano cartesiano



La parabola avente per fuoco  $F$  e per direttrice  $d$  è il luogo dei punti equidistanti da  $F$  e da  $d$ .

Equazione della parabola nel piano cartesiano con il vertice nell'origine



Un generico punto  $P = (x, y)$  sta sulla parabola se

$$\overline{PF} = \text{distanza}(P, d)$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (y - k)^2}$$

distanza  $(P, d) = |y + k|$

Direttrice in forma normale

$$d: 0 \cdot x + 1 \cdot y + k = 0$$

$$\sqrt{x^2 + (y - k)^2} = |y + k|$$

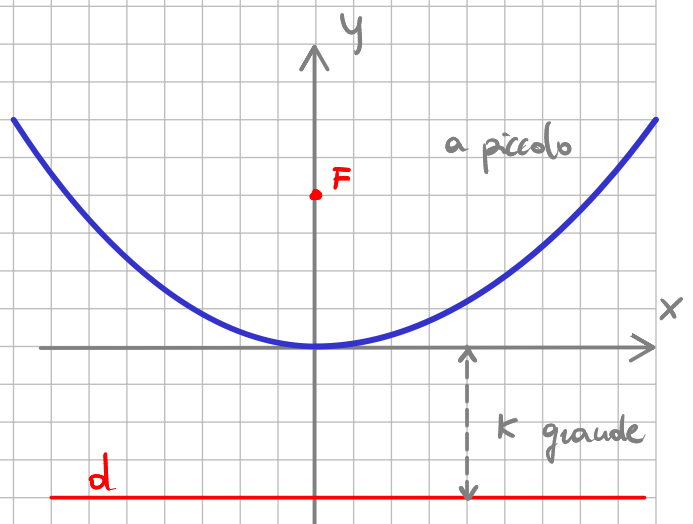
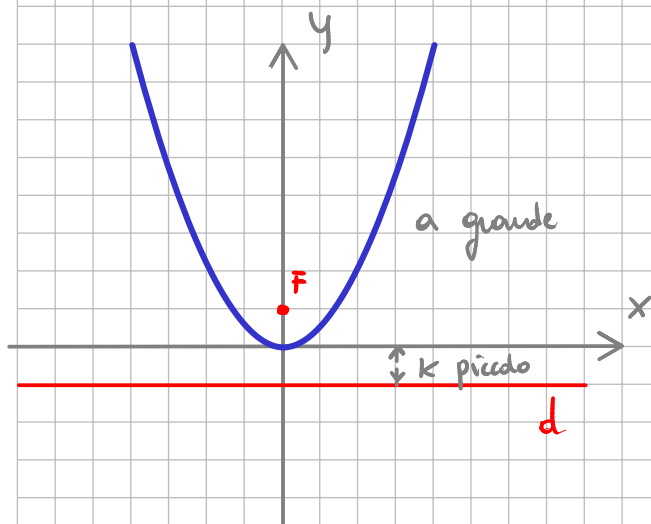
$$x^2 + (y - k)^2 = (y + k)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{y^2} + 2ky + \cancel{k^2}$$

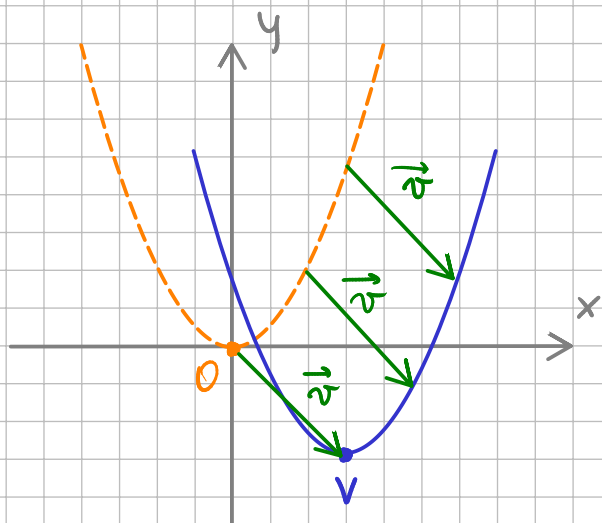
$$x^2 = 4ky$$

Equazione della parabola  
con il vertice in  $O = (0,0)$

$$y = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{\text{"a"}} x^2$$



In generale, se il vertice della parabola è  $V = (x_v, y_v)$ , la sua equazione si ottiene trasformando



$$y = ax^2$$

come in una TRASLAZIONE lungo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

" "   
  $\sigma_x \quad \sigma_y$

$$y = ax^2$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow x - x_v \\ y \rightarrow y - y_v \end{array}$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

Equazione di una generica parabola "verticale" \*

\* con asse di simmetria verticale

Equazione in forma normale

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$y = a(x^2 - 2x_v x + x_v^2) + y_v$$

$$y = ax^2 - \underbrace{2ax_v}_{b}x + \underbrace{ax_v^2 + y_v}_{c}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -2ax_v \rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$c = ax_v^2 + y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_v = \frac{b^2}{4a} + y_v \rightarrow y_v = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$* y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\Delta}{4a} * \\ &\uparrow \\ &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &\uparrow \end{aligned}$$

Analogamente, le coordinate del **FUOCO F** e l'equazione della **DIRETRICE d** si ottengono TRASLANDO lungo  $\vec{v} = (x_v, y_v)$

$$\begin{aligned}(0, k) &\longrightarrow F = (x_v, y_v + k) & (k = \frac{1}{4a}) \\ y = -k &\longrightarrow d: y = y_v - k\end{aligned}$$

Esempio Consideriamo la parabola di equazione  $y = x^2 - 4x + 2$

Il vertice della parabola ha coordinate

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

"                      "  
2                      -2

$a=1$                        $b=-4$                        $c=2$

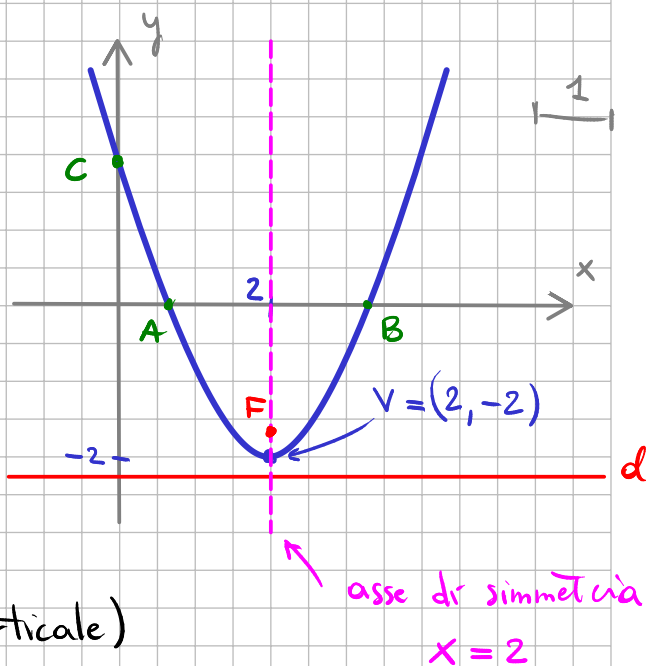
$$\Delta = b^2 - 4ac = 8$$

Poiché  $k = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$  troviamo

$$F = \left( x_v, y_v + k \right)$$

"                      "  
2                       $-\frac{7}{4}$

$$d: y = y_v - k \longrightarrow d: y = -\frac{9}{4}$$



L'asse di simmetria è la retta (verticale)

passante per il vertice: in generale

ha equazione  $x = -\frac{b}{2a}$

Per trovare i punti di intersezione con gli assi risolveremo:

Asse y :  $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \longrightarrow \underline{\underline{C = (0, 2)}}$

Asse x :  $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$

$\rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} \\ \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

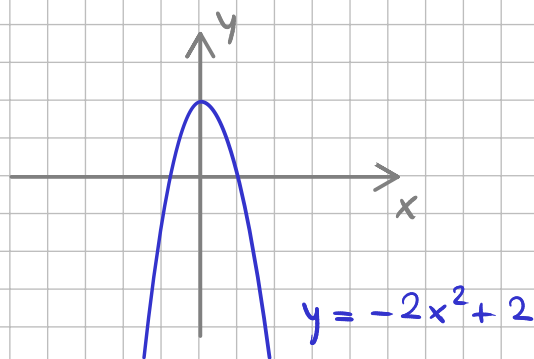
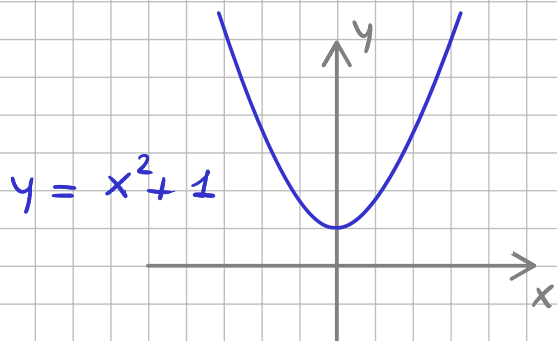
$\rightarrow \begin{cases} A = (2 - \sqrt{2}, 0) \\ B = (2 + \sqrt{2}, 0) \end{cases}$

In generale,  $\Delta$   $\begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$   $\begin{cases} 2 \text{ punti di int. con l'asse } x \\ 1 \text{ punto} \\ \text{nessun punto di intersezione} \end{cases}$

### Osservazioni

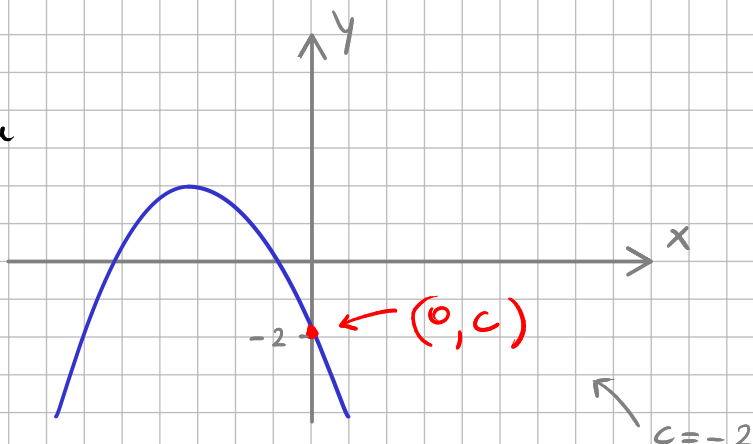
La parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$

- è simmetrica rispetto all'asse  $y$  se  $b = 0$



- passa per l'origine se  $c = 0$

In generale, la parabola passa per il punto  $(0, c)$



### Esercizio 4 (449)

$$F = (0, 1)$$

$$d: y = -2$$

Il vertice  $V$  è il punto medio del segmento  $FH$

$$V = (0, -\frac{1}{2})$$

$$k = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4k} = \frac{1}{6}$$

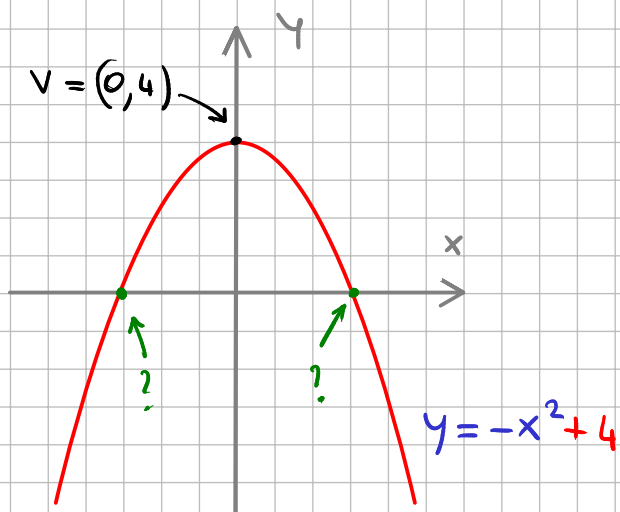
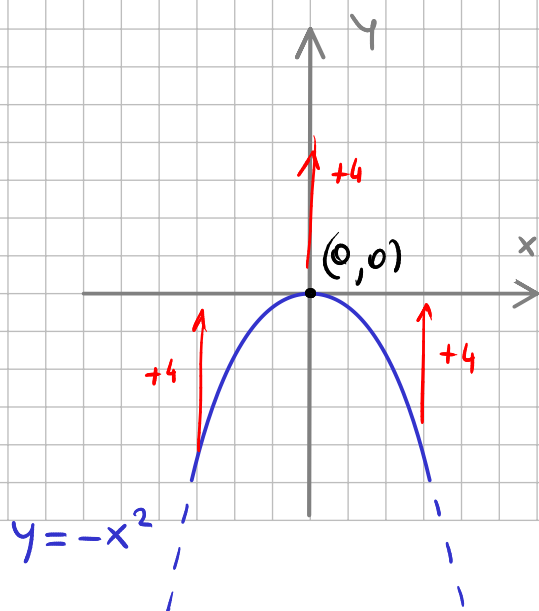
L'equazione della parabola è  $y - y_v = a(x - x_v)^2$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^2 \rightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$$

Oss: si tratta di una parabola simmetrica rispetto all'asse  $y$

### Esercizio 16 (451)

Disegnare la parabola di equazione  $y = -x^2 + 4$



## ESERCIZIO 17

$$y = x^2 - 2x$$

$$a > 0 \rightarrow \cup$$

$c = 0 \rightarrow$  passa per l'origine

$$y + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$y + 1 = (x - 1)^2$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$y_v = -1$$

$$x_v = 1$$

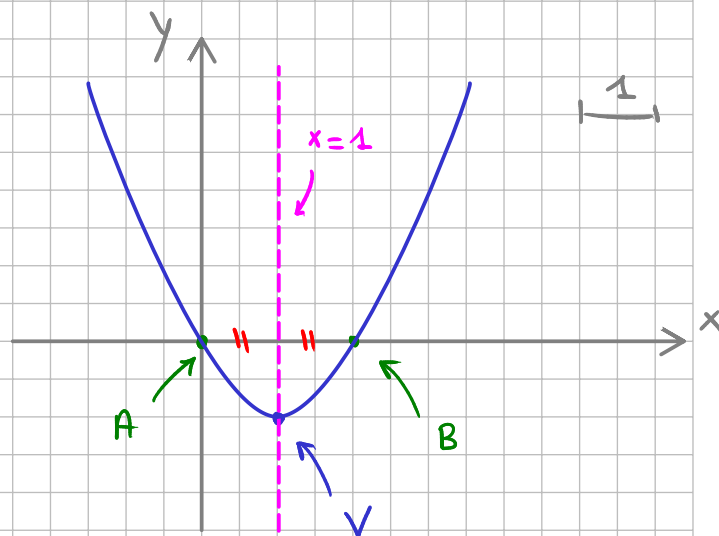
Vertice della parabola:  $V = (1, -1)$

Punti di intersezione con l'asse  $x$ :

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = (0, 0)$$

$$B = (2, 0)$$



## ESERCIZIO 20

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$$a = -1 \quad b = 6 \quad c = -5$$

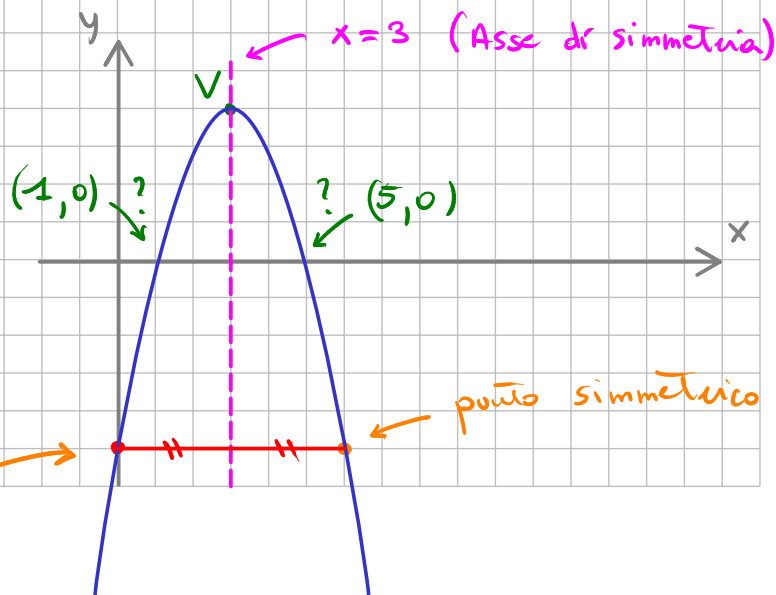
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$$

Vertice della parabola

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$\uparrow$$
  
3

$$\uparrow$$
  
4



Poiché  $c = -5$  la parabola

passa per  $(0, -5)$

Verifichiamo se i punti di intersezione con l'asse x sono

$$(1, 0) \quad \text{e} \quad (5, 0)$$

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$$0 = -1^2 + 6 \cdot 1 - 5$$

✓

$$0 = -5^2 + 6 \cdot 5 - 5$$

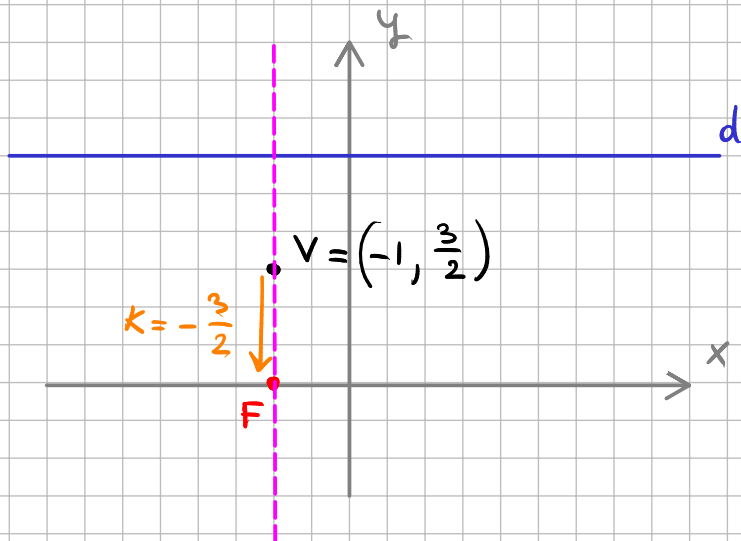
✓

### ESERCIZIO 6 (449)

$$F = (-1, 0)$$

$$d: y = 3$$

$$a = \frac{1}{4k} = \frac{1}{4 \cdot (-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{6}$$



$$y - y_v = a(x - x_v)^2 \rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}(x + 1)^2$$

Forma normale:  $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}$

+  $\frac{4}{3}$

### ESERCIZIO 34 (451)

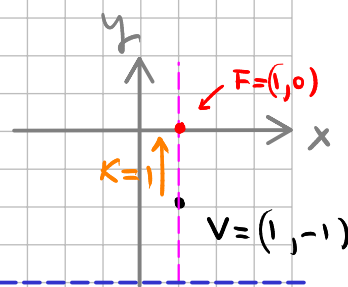
$$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$$

$$\rightarrow y - (-1) = \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$V = (x_v, y_v)$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $1 \quad -1$

$$k = \frac{1}{4a} = 1$$



$$d: y = -2$$



### Esercizio 21

$$y = 2x^2 - 6x$$

$$a = 2 \quad b = -6 \quad c = 0$$



passa per l'origine

Troviamo le coordinate del vertice

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, y_v \right)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ = 3/2 & = ? \end{array}$$

Poiché V sta sulla parabola

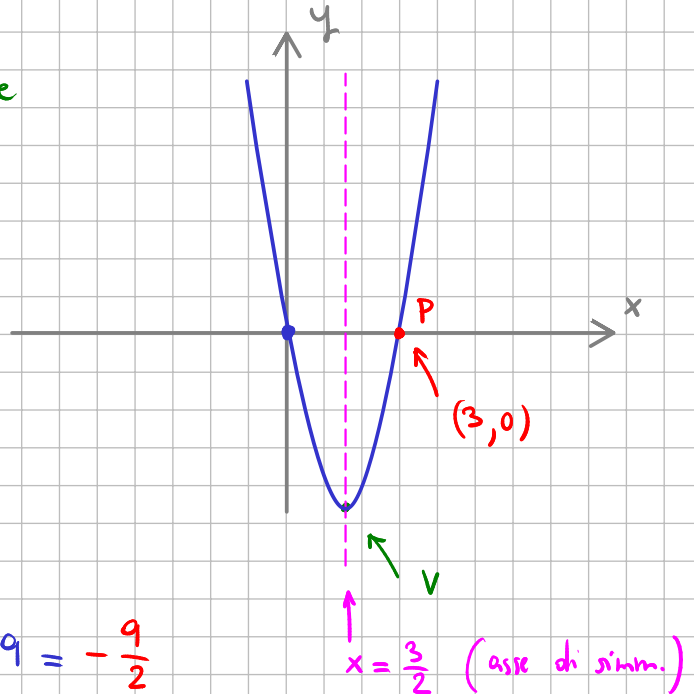
$$y_v = 2x_v^2 - 6x_v$$

$$y_v = 2 \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}$$

$$V = \left( \frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right)$$

Verifichiamo che  $P = (3, 0)$  sta sulla parabola:

$$0 = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \quad \checkmark$$



### Esercizio 27

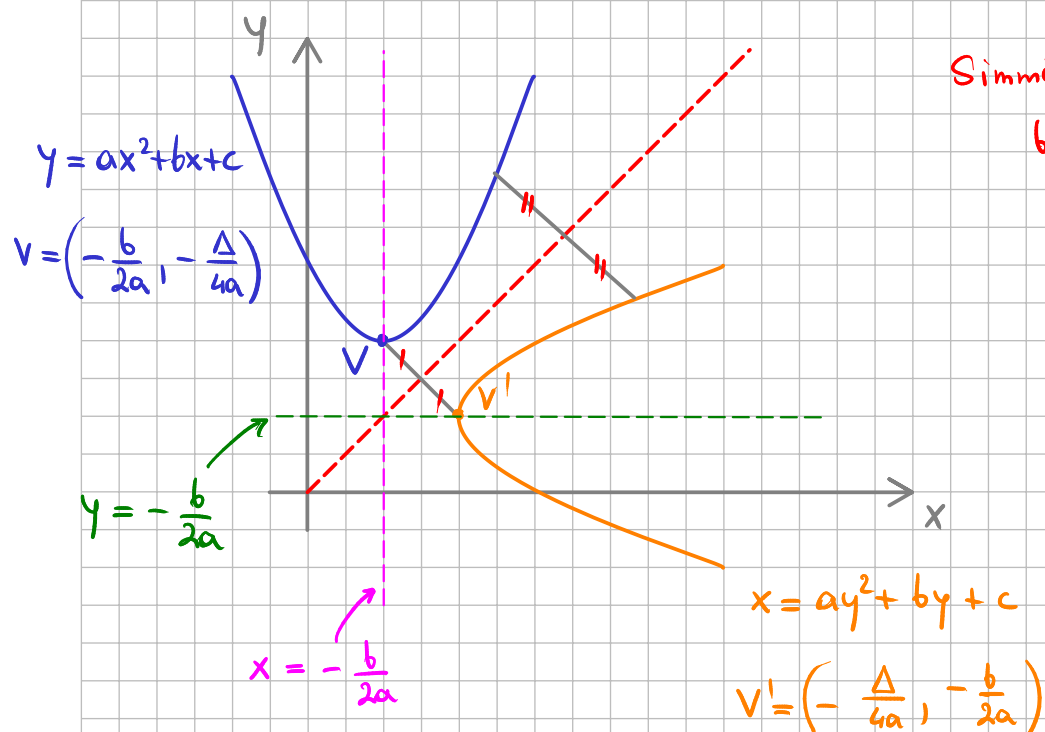
$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \longrightarrow y - \underset{\substack{\uparrow \\ y_v}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ a}} (x - \underset{\substack{\uparrow \\ x_v}}{-1})^2$$

$$V = (-1, 2) \quad \therefore$$

(...)

## PARABOLE ORIZZONTALI \*

\* con asse di simmetria orizzontale



Simmetria rispetto alla  
bisettrice  $y=x$

$x \rightarrow y$   
 $y \rightarrow x$

N.B. Una parabola orizzontale NON È il grafico di una funzione!  
 (Invece, ovviamente, una parabola verticale lo è)

## ESERCIZIO 47

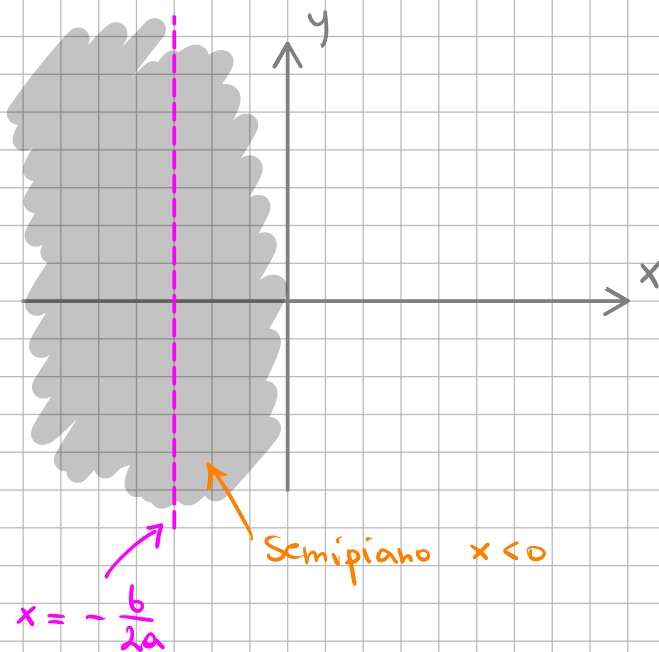
$$y = ax^2 + bx + c$$

- b) L'asse di simmetria  $x = -\frac{b}{2a}$   
 si trova nel semipiano  $x < 0$   
 quando

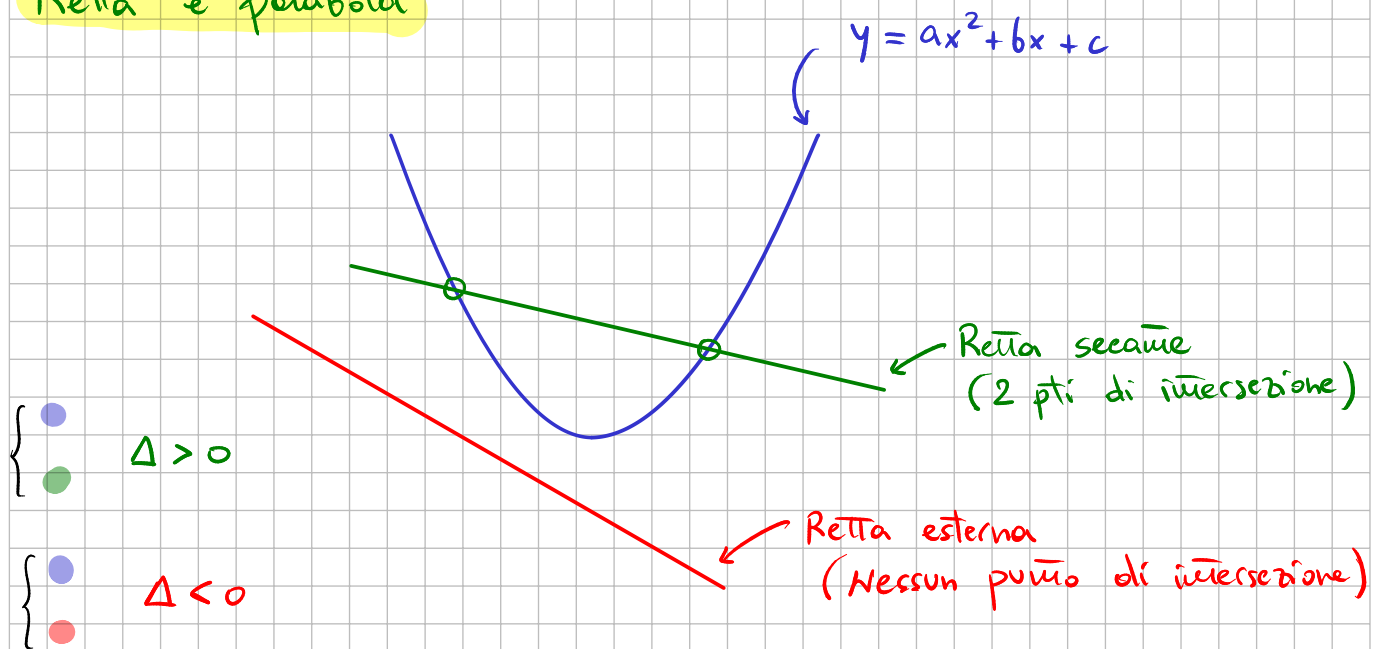
$$-\frac{b}{2a} < 0$$

$$a = k^2 - 1 \quad \downarrow \quad b = -(k^2 - 2k)$$

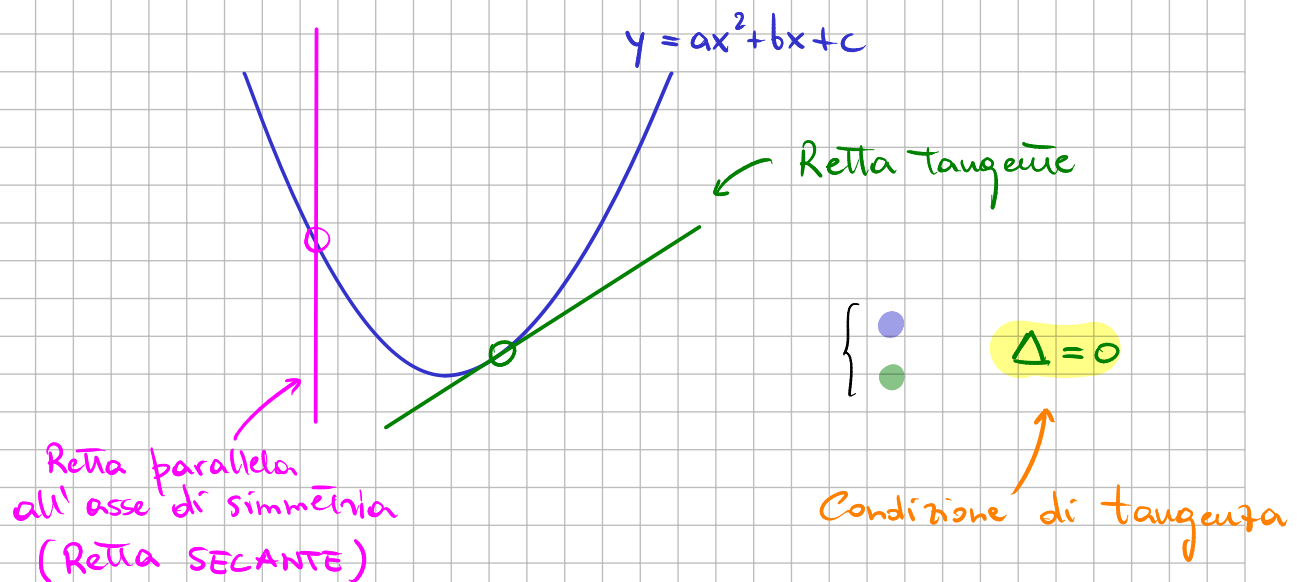
$$\frac{k^2 - 2k}{2(k^2 - 1)} > 0 \quad (\dots)$$



## Retta e parabola



Rette con un solo punto di intersezione



### Esercizio 89 (456)

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

L'equazione risolvibile è  $-2x + 4 = x^2 - 4$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9$$

Poiché  $\Delta > 0$ , si tratta di una retta secante (ci sono due punti di intersezione).

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow y_1 = 12 \\ x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 0 \end{cases}$$

I due punti di intersezione sono  $(-4, 12)$  e  $(2, 0)$ .

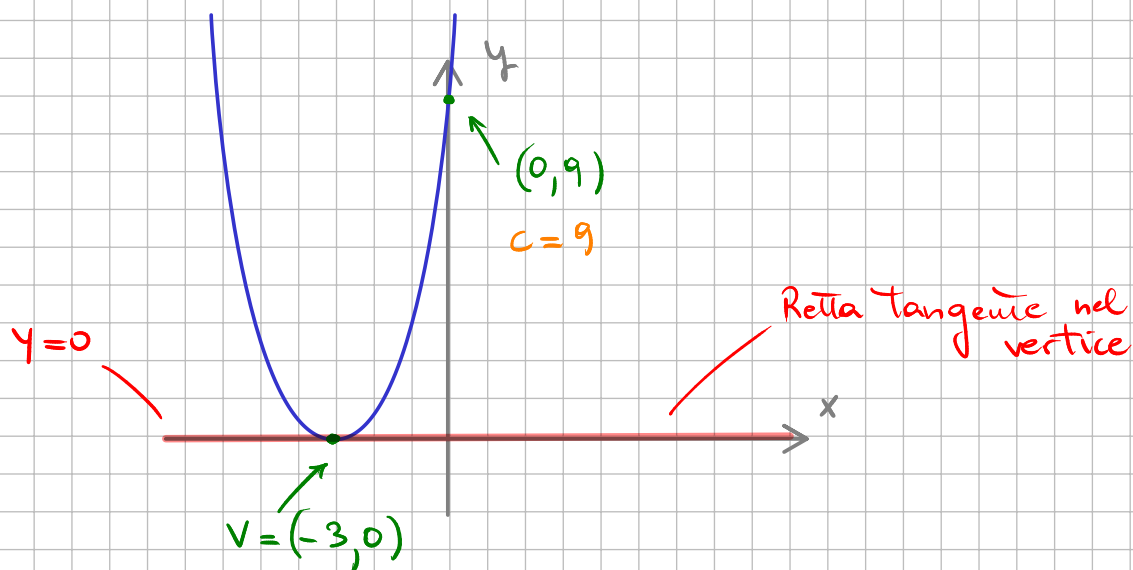
### Esercizio 91 (456)

$$y = x^2 + 6x + 9 \rightarrow y = (x + 3)^2$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

Annotations:  $y_v = 0$ ,  $a = 1$ ,  $x_v = -3$

Il VERTICE è  
 $V = (-3, 0)$



## ESERCIZIO 115 (458)

$$y = x^2 - 4$$

$$P = (2, -4)$$

Ci sono 2 RETTE TANGENTI

$$y + 4 = m(x - 2)$$

Generica retta passante per P

$$m = ?$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = m(x - 2) - 4 \end{cases}$$

Equazione risolvente

$$m(x - 2) - 4 = x^2 - 4$$

$$x^2 - mx + 2m = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -m$$

$$c = 2m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 8m$$

Condizione di tangenza:  $\Delta = 0$

$$m^2 - 8m = 0$$

$$m(m - 8) = 0$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 8$$

Le equazioni delle 2 rette tangenti sono

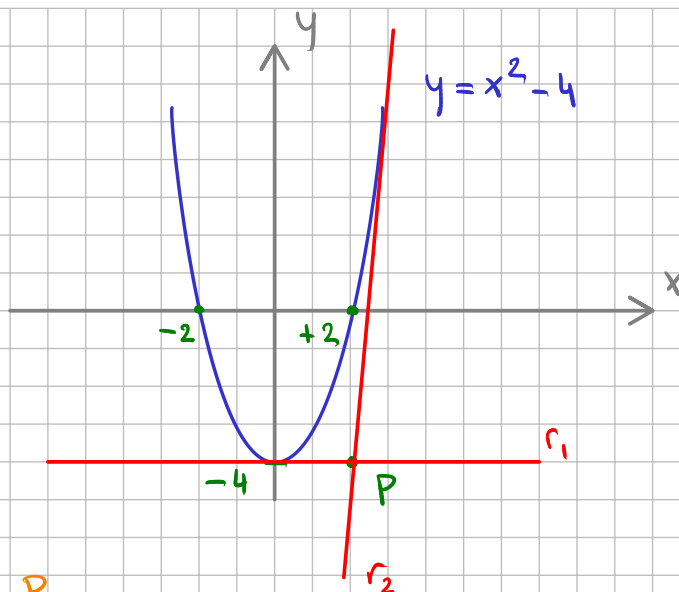
$$y + 4 = m(x - 2)$$

$$m = 0$$

$$r_1: y = -4$$

$$m = 8$$

$$r_2: y = 8x - 20$$

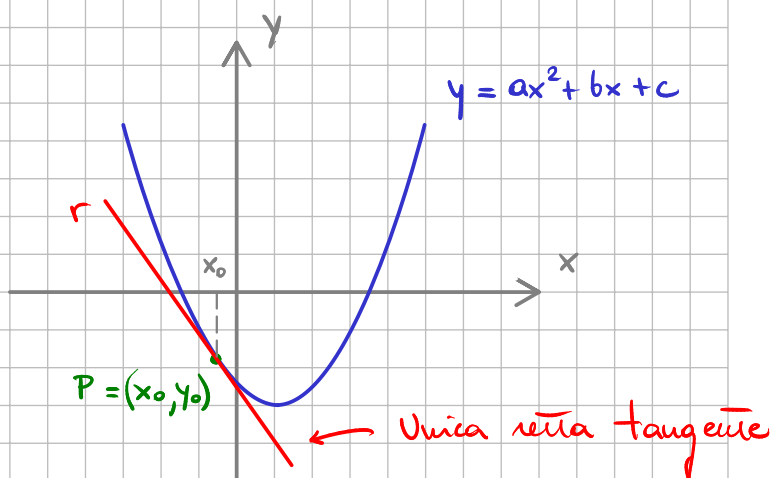


## Retta Tangente alla parabola in un suo punto

### TEOREMA

Il coeff. angolare di  $r$  è

$$m = 2ax_0 + b$$



### Dimostrazione

La generica retta passante

per  $P = (x_0, y_0)$  ha equazione  $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

← Il sistema ha un'unica soluzione  
 $x = x_0 \quad y = y_0$

$$ax^2 + bx + c = m(x - x_0) + y_0$$

$$\underbrace{ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0}_{A(x)} = 0 \quad \leftarrow \text{L'equazione risolta ha un'unica soluzione } x = x_0$$

$$\underbrace{a(x - x_0)^2}_{B(x)}$$

± due polinomi  $A(x)$  e  $B(x)$   
sono uguali

$$\underbrace{2x^2 - 4x + 2}_{=0}$$

$$\underbrace{2(x - 1)^2}_{x=1 \text{ unica soluzione}}$$

$$A(x) = ax^2 + \underline{(b - m)}x + \dots$$

$$B(x) = ax^2 - \underline{2ax_0}x + \dots$$

$$b - m = -2ax_0 \quad \longrightarrow \quad m = 2ax_0 + b$$



## ESERCIZIO 120 (458)

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$$

P ← il punto della parabola con  $x = 3$

Trovare l'equazione della retta tangente passante per P.

$$P = (3, ?)$$

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{1}{3}x_p^2 + 3x_p \\ &= -\frac{1}{3}3^2 + 3 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$P = (3, 6)$$

L'equazione della retta tangente è del tipo

$$y - 6 = m(x - 3)$$

Possiamo calcolare  $m$  con la formula

$$m = 2ax_p + b = 2\left(-\frac{1}{3}\right)3 + 3 = 1$$

$$y - 6 = 1(x - 3)$$

$$y = x + 3$$

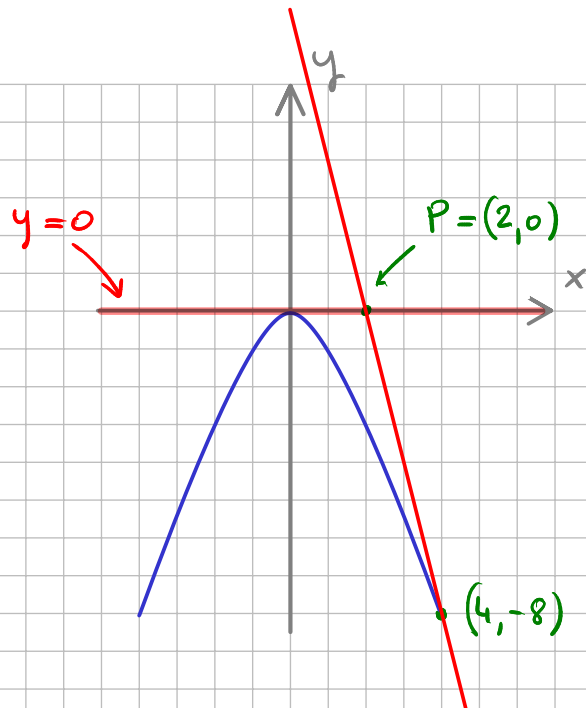
## Esercizio 119

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$y = m(x - 2)$$

Generica retta per  $P = (2, 0)$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 \\ y = m(x - 2) \end{cases}$$



$$-\frac{1}{2}x^2 = m(x - 2) \quad \leftarrow \text{Equazione risolvente}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + mx - 2m = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = m$$

$$c = -2m$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= m^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2m) \\ \Delta &= m^2 + 4m \end{aligned}$$

$$m^2 + 4m = 0 \rightarrow m(m + 4) = 0 \begin{cases} m = 0^* \\ m = -4^{**} \end{cases}$$

$$* \quad y = 0$$

$$** \quad y = -4x + 8$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ -8 & 4 \end{array}$$

$$-8 = -8$$

Il punto  $(4, -8)$  sta sulla retta?





### ESERCIZIO 52

$$\Delta/4 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a+2$$

$$\begin{aligned}\Delta/4 &= a^2 - (a-1)(a+2) \\ &= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - a + 2\end{aligned}$$

①  $\frac{\Delta}{4} > 0$  (2 punti sull'asse x)

$$-a+2 > 0 \rightarrow \underline{\underline{a < 2}}$$

②  $a-1 > 0$  (concavità verso l'alto)

$$\swarrow \underline{\underline{a > 1}}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a > 1 \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{1 < a < 2}}$$