SUCCESSIONI NUMERICHE

Esempi di successioni

1) Successione dei numeri dispari

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 5 \qquad a_4 = 7 \qquad \dots \qquad a_n = 2n+1$$

TERMINI della successione

TERMINE GENERALE

N.B Il termine generale permette di calcolare l'n-esimo termine della successione.
Ad esempio, il 2021° numero dispari è

$$a_{2021} = 2 \cdot 2021 + 1 = 4043$$

2) Successione delle potenze di $\frac{1}{2}$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16} \qquad \dots$$

Il termine generale della successione è $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

N.B In questo caso il 1° termine della successione corrisponde a $n=0$, il 2° termine a $n=1$, ecc...

3) Successione di Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

N.B. La succ. di Fibonacci è DEFINITA PER RICORSIONE

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2$$

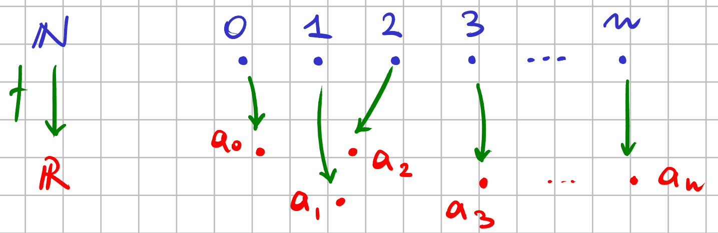
DEFINIZIONE Una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Insieme dei NUMERI NATURALI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

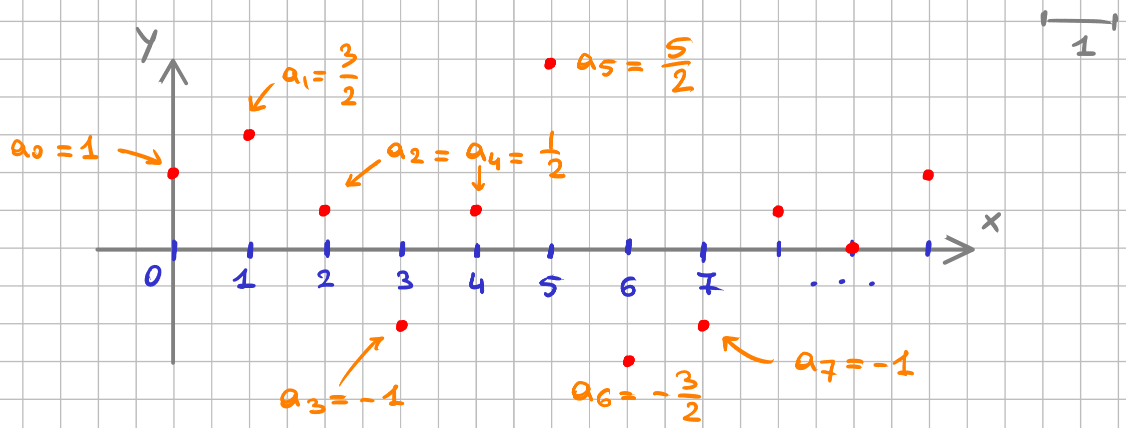
Osservazioni

1) L'immagine di $n \in \mathbb{N}$ è l'n-esimo termine della successione:



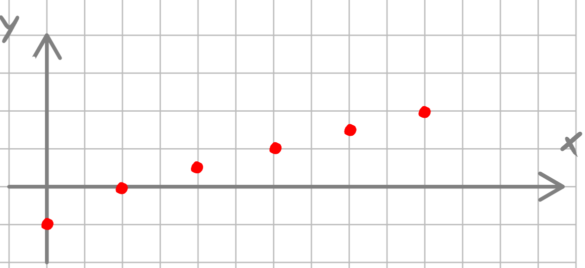
$f(n) = a_n$

2) Il grafico di una successione è un insieme di **PUNTI ISOLATI**



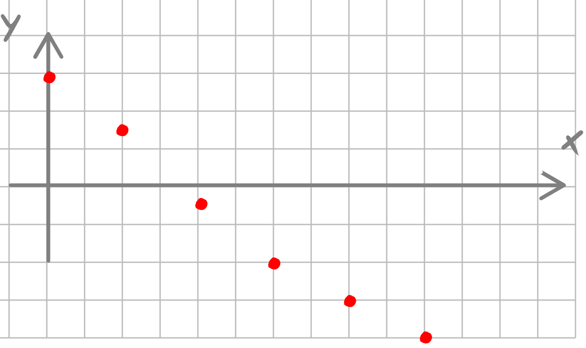
3) Una successione è CRESCENTE se

$a_n < a_{n+1}$ per ogni n



Una successione è DECRESCENTE se

$a_n > a_{n+1}$ per ogni n



4) Per alcune successioni conviene sostituire il dominio $\mathbb{N}$ con l'insieme $\mathbb{N}^+ = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. In tal caso, i primi termini della successione sono $\cancel{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

ESERCIZIO 8 (p. 147)

Consideriamo la successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

In corrispondenza di quale n abbiamo $a_n = \frac{3}{4}$?

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$4(n-1) = 3(n+2)$$

$$\downarrow$$

$$n = 10$$

ovvero $\frac{3}{4}$ è il 10° termine della successione $(a_{10} = 3/4)$.

Successioni definite per **RICORSIONE**

Esempi:

1) ESERCIZIO 37 (p. 148)

1° termine della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \boxed{a_n = 2 + \frac{1}{2} a_{n-1}} \end{cases}$$

Formula per calcolare l'n-esimo termine a_n partendo dal termine precedente a_{n-1}

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + \frac{1}{2} a_1 = 3$

$a_3 = 2 + \frac{1}{2} a_2 = \frac{7}{2}$

$a_4 = 2 + \frac{1}{2} a_3 = \frac{15}{4}$

$a_5 = 2 + \frac{1}{2} a_4 = \frac{31}{8}$

$\rightsquigarrow$ I primi cinque termini sono

$$2 \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{31}{8}$$

2) ESERCIZIO 34 (p. 148)

Cerchiamo un possibile TERMINE GENERALE a_n per la successione i cui primi termini sono

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \dots$$

① Osserviamo che ciascun termine a_n si ottiene aggiungendo $+1$ al termine precedente a_{n-1}

$$\begin{cases} a_0 = -1/2 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE per RICORSIONE

② Osserviamo la sequenza:

$$a_0 \xrightarrow{+1} a_1 \xrightarrow{+1} a_2 \xrightarrow{+1} a_3 \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1} a_n$$

$a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2} + 1$, $a_2 = -\frac{1}{2} + 2$, $a_3 = -\frac{1}{2} + 3$, …, $a_n = -\frac{1}{2} + n$

$$a_n = -\frac{1}{2} + n$$

TERMINE GENERALE

PROGRESSIONI ARITMETICHE

$$a_0 \xrightarrow{+d} a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} \cdots \xrightarrow{+d} a_n \xrightarrow{+d}$$

RAGIONE della successione

Esempi di prog. aritmetiche

- Numeri pari $\quad 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \quad (d = 2)$
- Numeri dispari $\quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \quad (d = 2)$
- Numeri interi negativi $\quad -1, -2, -3, -4, \ldots \quad (d = -1)$
- Successione costante $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \quad (d = 0)$

MONOTONIA di una progressione aritmetica

$d > 0 \longrightarrow$ Successione strettamente CRESCENTE

$d = 0 \longrightarrow$ Successione COSTANTE

$d < 0 \longrightarrow$ Successione strettamente DECRESCENTE

DEFINIZIONE RICORSIVA (di progr. aritmetica) $\longrightarrow$ $a_n = a_{n-1} + d$

$$= a_{n-2} + d + d$$

$$= a_{n-3} + d + d + d$$

$$\vdots$$

TERMINE GENERALE $\longrightarrow$ $a_n = a_0 + d \cdot n$

N.B. Se il 1° termine della progressione aritmetica è a_1 $n = 1$
allora il suo termine generale è $a_n = a_1 + d\,(n-1)$

Esempi

$d = 2$

Numeri dispari	$a_0 = 1$	$a_1 = 3$	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	...	$a_n = 1 + 2n$
Numeri pari	$a_0 = 0$	$a_1 = 2$	$a_2 = 4$	$a_3 = 6$	...	$a_n = 0 + 2n$

OSSERVAZIONE

$$\dots \quad a_{n-1} \xleftarrow{-d} a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1} \quad \dots$$

Progr. aritmetica

$$\underbrace{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}_{\text{MEDIA ARITMETICA tra } a_{n-1} \text{ e } a_{n+1}} = \frac{a_n - \cancel{d} + a_n + \cancel{d}}{2} = a_n$$

Somma dei primi termini di una progr. aritmetica

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{S_n} = ?$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_0+\cancel{d} & a_0+\cancel{2d} & & & \\
 & \parallel & \parallel & & & \\
a_0 & + a_1 & + a_2 & \dots & + a_n & = S_n \\
a_n & + a_{n-1} & + a_{n-2} & \dots & + a_0 & = S_n \\
 & \parallel & \parallel & & & \\
 & a_n-\cancel{d} & a_n-\cancel{2d} & & &
\end{array}$$

$$(a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + \dots + (a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$(n+1)\,(a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$\overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}^{S_n} = \boxed{\frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)}$$

Esempi

- Somma dei primi 100 interi positivi

$$\underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{2} + 3 + 4 + \dots + \underset{a_{99}}{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = \underline{\underline{5050}}$$

- Somma dei primi 50 numeri dispari

$$\underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{3} + 5 + \dots + a_{49} = \frac{50}{2}(1 + 99) = \underline{\underline{2500}}$$

$$a_n = 1 + 2n$$

$$a_{49} = 1 + 2 \cdot 49 = 99$$

N.B. Iniziando a contare da $n = 1$, la formula diventa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$