SUCCESSIONI NUMERICHE

Esempi di successioni

1) Successione dei numeri dispari

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 3 \qquad a_3 = 5 \qquad a_4 = 7 \qquad \dots \qquad a_n = 2n+1$$

TERMINI della successione — TERMINE GENERALE

N.B Il termine generale permette di calcolare l'n-esimo termine della successione.

Ad esempio, il 2021° numero dispari è

$$a_{2021} = 2 \cdot 2021 + 1 = 4043$$

2) Successione delle potenze di $\frac{1}{2}$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16} \qquad \dots$$

Il termine generale della successione è $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

N.B In questo caso il 1° termine della successione corrisponde a $n=0$, il 2° termine a $n=1$, ecc...

3) Successione di Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

N.B. La succ. di Fibonacci è DEFINITA PER RICORSIONE

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2$$

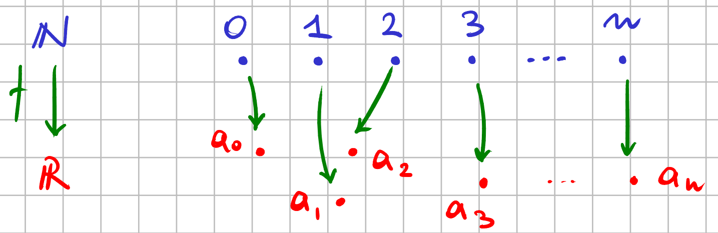
DEFINIZIONE Una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Insieme dei NUMERI NATURALI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

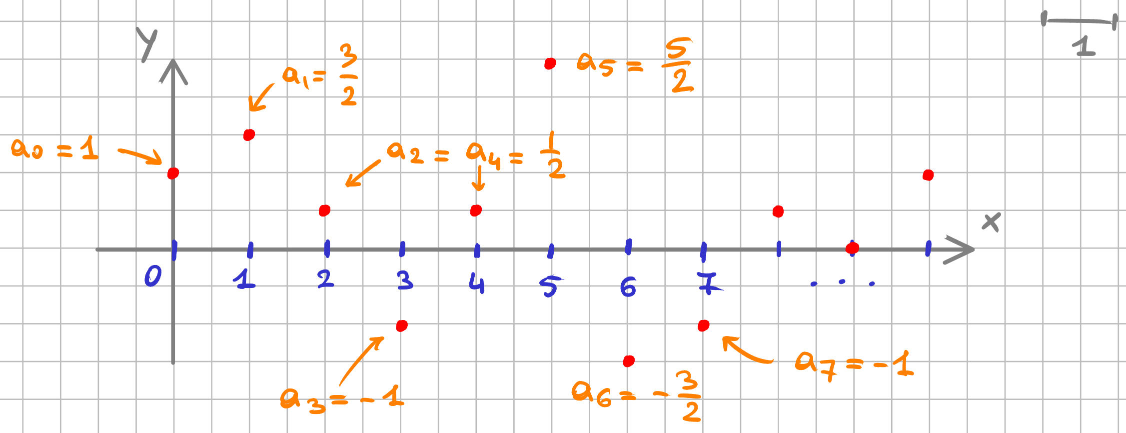
<u>Osservazioni</u>

1) L'immagine di $n \in \mathbb{N}$ è l'n-esimo termine della successione:



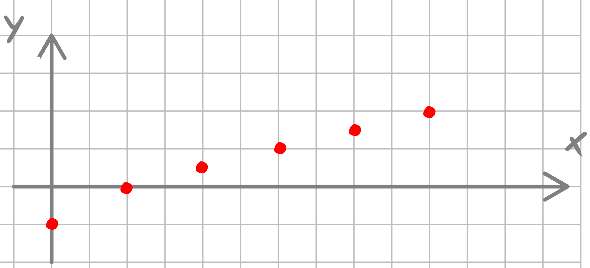
$f(n) = a_n$

2) Il grafico di una successione è un insieme di **PUNTI ISOLATI**



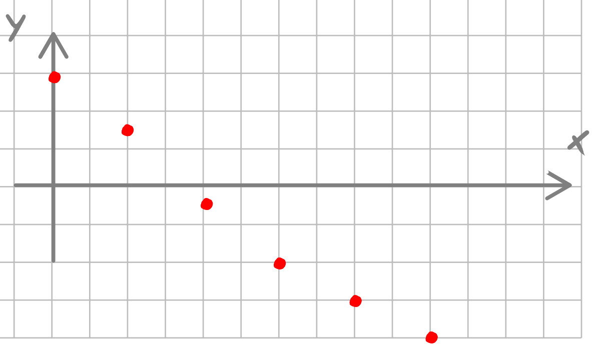
3) Una successione è CRESCENTE se

$a_n < a_{n+1}$ per ogni n



Una successione è DECRESCENTE se

$a_n > a_{n+1}$ per ogni n



4) Per alcune successioni conviene sostituire il dominio $\mathbb{N}$ con l'insieme $\mathbb{N}^+ = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. In tal caso, i primi termini della successione sono $\cancel{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

ESERCIZIO 8 (p. 147)

Consideriamo la successione definita da

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

In corrispondenza di quale n abbiamo $a_n = \frac{3}{4}$?

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$4(n-1) = 3(n+2)$$

$$\downarrow$$

$$n = 10$$

ovvero $\frac{3}{4}$ è il 10° termine della successione ($a_{10} = 3/4$).

Successioni definite per RICORSIONE

Esempi:

1) ESERCIZIO 37 (p. 148)

1° termine della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \boxed{a_n = 2 + \frac{1}{2} a_{n-1}} \end{cases}$$

Formula per calcolare l'n-esimo termine a_n partendo dal termine precedente a_{n-1}

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 + \frac{1}{2} a_1 = 3$$
$$a_3 = 2 + \frac{1}{2} a_2 = \frac{7}{2}$$
$$a_4 = 2 + \frac{1}{2} a_3 = \frac{15}{4}$$
$$a_5 = 2 + \frac{1}{2} a_4 = \frac{31}{8}$$

$\rightsquigarrow$ I primi cinque termini sono

$$2 \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{31}{8}$$

2) ESERCIZIO 34 (p. 148)

Cerchiamo un possibile TERMINE GENERALE a_n per la successione i cui primi termini sono

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \ldots$$

① Osserviamo che ciascun termine a_n si ottiene aggiungendo $+1$ al termine precedente a_{n-1}

$$\begin{cases} a_0 = -1/2 \\ a_n = a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ DEFINIZIONE per RICORSIONE

② Osserviamo la sequenza:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & \xrightarrow{+1} & a_1 & \xrightarrow{+1} & a_2 & \xrightarrow{+1} & a_3 & \xrightarrow{+1} & \ldots & \xrightarrow{+1} & a_n \\ \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2}+1 & & -\frac{1}{2}+2 & & -\frac{1}{2}+3 & & & & -\frac{1}{2}+n \end{array}$$

$$a_n = -\frac{1}{2} + n$$

$\leftarrow$ TERMINE GENERALE

PROGRESSIONI ARITMETICHE

$$a_0 \xrightarrow{+d} a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} \cdots \xrightarrow{+d} a_n \xrightarrow{+d}$$

RAGIONE della successione

Esempi di prog. aritmetiche

- Numeri pari $\quad 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad (d = 2)$
- Numeri dispari $\quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \quad (d = 2)$
- Numeri interi negativi $\quad -1, -2, -3, -4, \dots \quad (d = -1)$
- Successione costante $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \quad (d = 0)$

MONOTONIA di una progressione aritmetica

$d > 0 \longrightarrow$ Successione strettamente CRESCENTE

$d = 0 \longrightarrow$ Successione COSTANTE

$d < 0 \longrightarrow$ Successione strettamente DECRESCENTE

DEFINIZIONE RICORSIVA (di progr. aritmetica) $\longrightarrow$ $a_n = a_{n-1} + d$

$= a_{n-2} + d + d$

$= a_{n-3} + d + d + d$

$\vdots$

TERMINE GENERALE $\longrightarrow$ $a_n = a_0 + d \cdot n$

N.B. Se il 1° termine della progressione aritmetica è a_1 ← $n=1$

allora il suo termine generale è $a_n = a_1 + d(n-1)$

Esempi

$d=2$

Numeri dispari $\quad a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 7 \quad \dots \quad a_n = 1 + 2n$

Numeri pari $\quad a_0 = 0 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 6 \quad \dots \quad a_n = 0 + 2n$

OSSERVAZIONE

$$\dots \quad a_{n-1} \xleftarrow{-d} a_n \xrightarrow{+d} a_{n+1} \quad \dots$$

← Progr. aritmetica

$$\underbrace{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}_{\substack{\text{MEDIA ARITMETICA} \\ \text{tra } a_{n-1} \text{ e } a_{n+1}}} = \frac{a_n - \cancel{d} + a_n + \cancel{d}}{2} = a_n$$

Somma dei primi termini di una progr. aritmetica

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{S_n} = \, ?$$

$$a_1 = a_0 + \cancel{d} \qquad a_2 = a_0 + \cancel{2d}$$

$$\begin{aligned} a_0 &+ a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n \\ a_n &+ a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 = S_n \end{aligned}$$

$$a_{n-1} = a_n - \cancel{d} \qquad a_{n-2} = a_n - \cancel{2d}$$

$$(a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + (a_0 + a_n) + \dots + (a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$(n+1)(a_0 + a_n) = 2S_n$$

$$\overbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}^{S_n} = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$$

Esempi

- Somma dei primi 100 interi positivi

$$\underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{2} + 3 + 4 + \dots + \underset{a_{99}}{100} = \frac{100}{2}(1+100) = \underline{5050}$$

- Somma dei primi 50 numeri dispari

$$\underset{a_0}{1} + \underset{a_1}{3} + 5 + \dots + a_{49} = \frac{50}{2}(1+99) = \underline{2500}$$

$$a_n = 1 + 2n$$

$$a_{49} = 1 + 2 \cdot 49 = 99$$

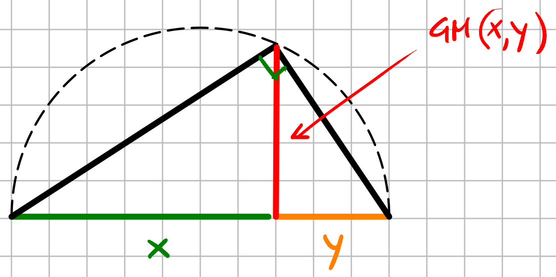
N.B. Iniziando a contare da $n = 1$, la formula diventa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Premessa. La MEDIA GEOMETRICA GM di due numeri reali positivi x e y è definita come $GM(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$

Interpretazione geometrica



Definizione ricorsiva di progr. geometrica $\boxed{a_n = q \cdot a_{n-1}}$

RAGIONE

Esempi

- $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad \ldots \qquad (q = 2)$ ← Potenze di 2
- $10 \quad 5 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \ldots \qquad (q = \frac{1}{2})$
- $1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad \ldots \qquad (q = -1)$ ← Succ. a SEGNI ALTERNI
- $7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad \ldots \qquad (q = 1)$ ← Succ. costante

Proprietà di monotonia delle progr. geometriche

se $a_0 > 0$
$$\begin{cases} q > 1 & \text{SUCC. STRETT. CRESCENTE} \\ q = 1 & \text{SUCC. COSTANTE} \\ 0 < q < 1 & \text{SUCC. STRETT. DECRESCENTE} \end{cases}$$

$q < 0$ SUCC. A SEGNI ALTERNI

Relazione con la media geometrica $\boxed{GM(a_{n-1}, a_{n+1}) = a_n}$ *

$$GM(a_{n-1}, a_{n+1}) = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{\cancel{q}} \cdot a_n \cdot \cancel{q}} = a_n$$

*N.B. Questa relazione è valida solo per le progressioni geometriche a TERMINI POSITIVI $(a_0 > 0,\ q > 0)$

$$a_0 \xrightarrow{\cdot q} a_0 q \xrightarrow{\cdot q} a_0 q^2 \xrightarrow{\cdot q} a_0 q^3 \xrightarrow{\cdot q} \cdots \quad a_0 q^n$$

$$a_0 q = a_1, \quad a_0 q^2 = a_2, \quad a_0 q^3 = a_3, \quad \cdots \quad a_0 q^n = a_n$$

TERMINE GENERALE di una progr. geometrica di ragione q $\longrightarrow$ $\boxed{a_n = a_0 q^n}$ OPPURE $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

FORMULA per i primi termini di una progressione geometrica

$$\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}_{= \ ?}$$

$$S = a_0 + \cancel{a_0 q} + \cancel{a_0 q^2} + \cdots + \cancel{a_0 q^n}$$

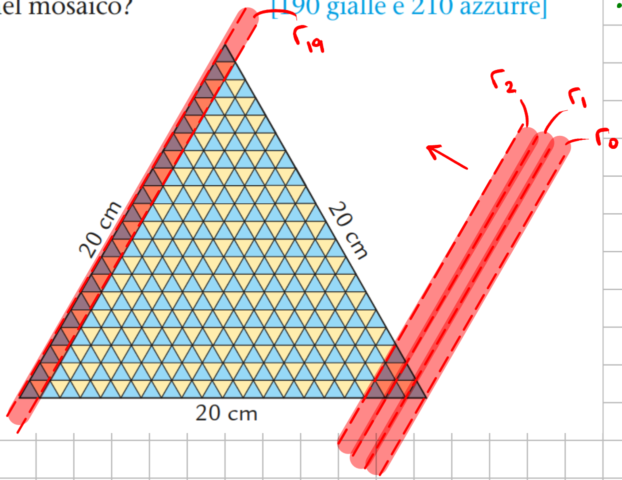
$$-qS = -\cancel{a_0 q} - \cancel{a_0 q^2} - \cdots - \cancel{a_0 q^n} - a_0 q^{n+1}$$

$$(1-q) \cdot S = a_0 (1 - q^{n+1}) \longrightarrow \boxed{S = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

oppure

$$S = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

127 **Un mosaico.** Un mosaico ha la forma di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo 20 cm. Ogni piastrella del mosaico è a forma di triangolo equilatero, il cui lato è lungo 1 cm. Le piastrelle, gialle e azzurre, si alternano come indicato in figura. Quante piastrelle di ciascun colore ci sono nel mosaico? [190 gialle e 210 azzurre]



- Suddividiamo il triangolo in 20 strisce $r_0, r_1, \dots, r_{19}$
- Consideriamo le 2 successioni:

$a_n \leftarrow$ piastrelle azzurre nella striscia r_n

$b_n \leftarrow$ piastrelle gialle nella striscia r_n

Si tratta di PROGRESSIONI ARITMETICHE entrambe di ragione $d = 1$.

$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 4 \quad \dots \quad a_n = 1 + n$

$b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 3 \quad \dots \quad b_n = n$

In particolare abbiamo $a_{19} = 20 \quad b_{19} = 19$

piastrelle nell'ultima striscia (r_{19})

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{\underset{n}{19}} = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_{19}) = \frac{20}{2}(1 + 20) = \underline{\underline{210}}$$

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{19} = \frac{n+1}{2}(b_0 + b_{19}) = \frac{20}{2}(0 + 19) = \underline{\underline{190}}$$

196 **Oscillazioni di un pendolo.** Un pendolo descrive inizialmente, in una sua prima oscillazione, un arco di 20 cm. A ogni oscillazione successiva la lunghezza dell'arco diminuisce del 10% rispetto alla precedente. Qual è la somma delle lunghezze degli archi descritti dal pendolo dopo dieci oscillazioni? [Circa 130,26 cm]

$a_0 = 20$ ← lunghezza in cm del 1° tratto

$a_n = \underbrace{a_{n-1} - \frac{1}{10} a_{n-1}}$ ← a ogni oscillazione la lunghezza del tratto diminuisce del 10 %

$= \left(1 - \frac{1}{10}\right) a_{n-1}$

$= \frac{9}{10} a_{n-1}$

a_n è una progressione geometrica di ragione $q = \frac{9}{10}$

TERMINE GENERALE $\boxed{a_n = 20 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n}$

$a_9 = 20 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 \simeq 7,75$ (lunghezza del tratto percorso nella 10ª oscillazione)

LUNGHEZZA TOTALE del tratto percorso

$a_0 + a_1 + \dots + a_9 = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (con $9 = n$)

$= 20 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{\frac{1}{10}}$

$= 200 \cdot \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\right] = 130,26$