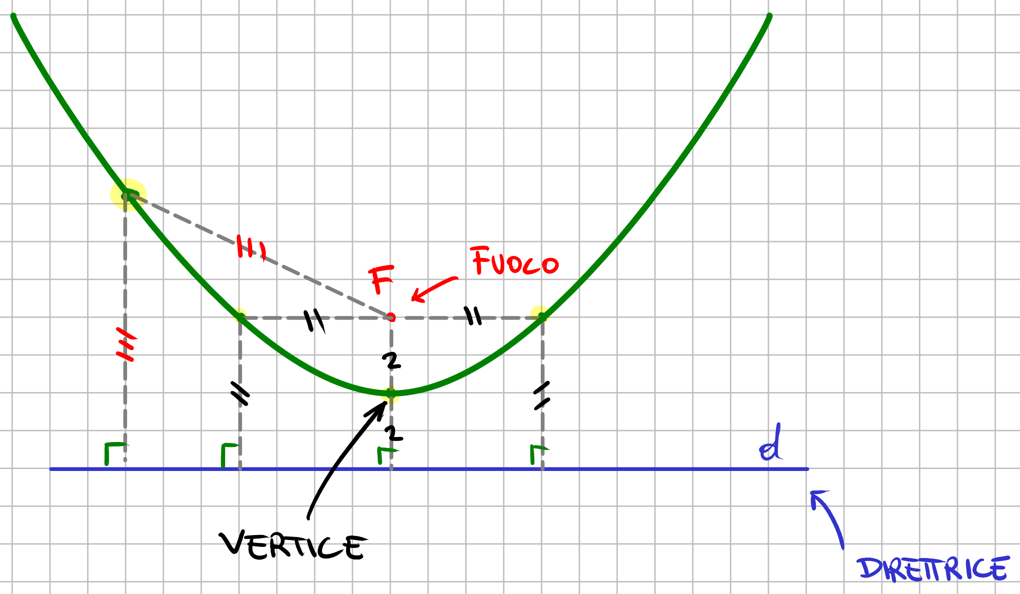
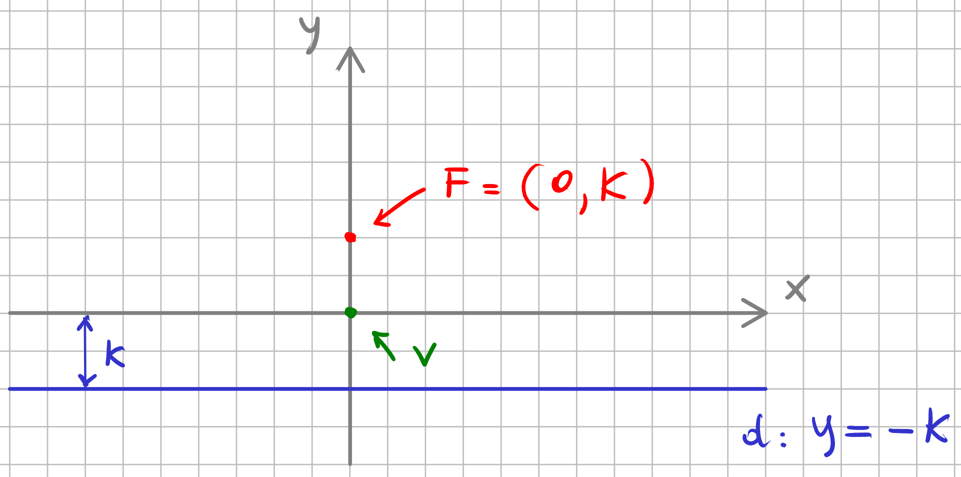
PARABOLA nel piano cartesiano



La parabola avente per fuoco F e per direttrice d è il luogo dei punti equidistanti da F e da d.

Equazione della parabola nel piano cartesiano con il vertice nell'origine



Un generico punto $P = (x, y)$ sta sulla parabola se

$$\overline{PF} = \text{distanza}(P, d)$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (y-k)^2}$$

Direttrice in forma normale

$d:\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + k = 0$

$\text{distanza}(P, d) = |y + k|$

$$\sqrt{x^2 + (y-k)^2} = |y + k|$$

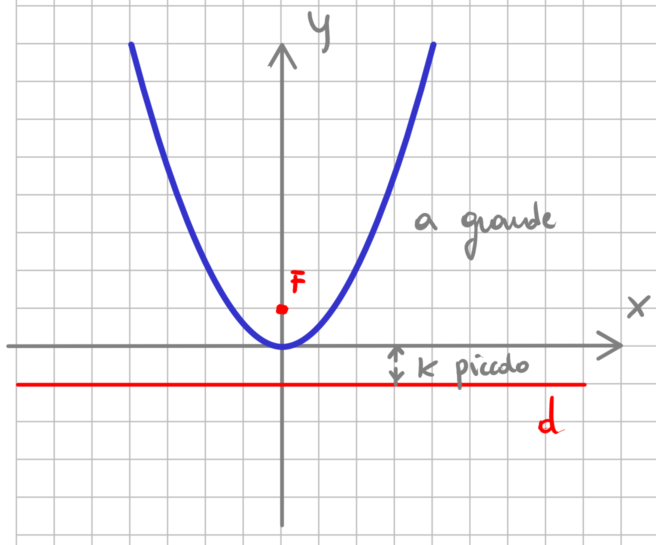
$$x^2 + (y-k)^2 = (y+k)^2$$

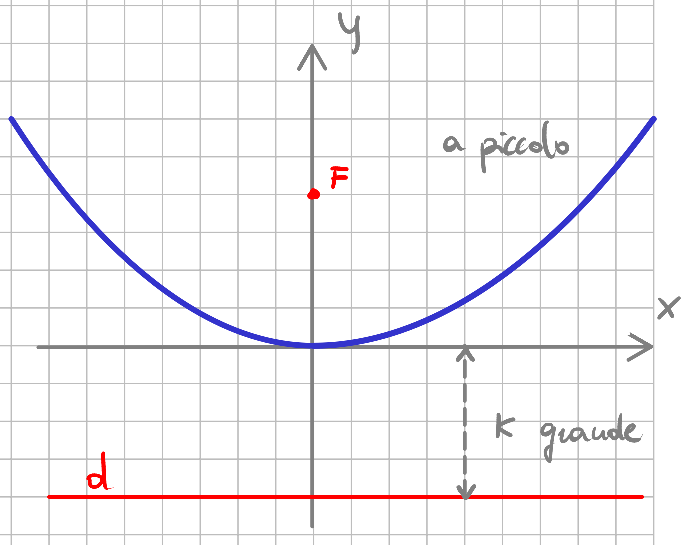
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2ky + \cancel{k^2} = \cancel{y^2} + 2ky + \cancel{k^2}$$

$$x^2 = 4ky$$

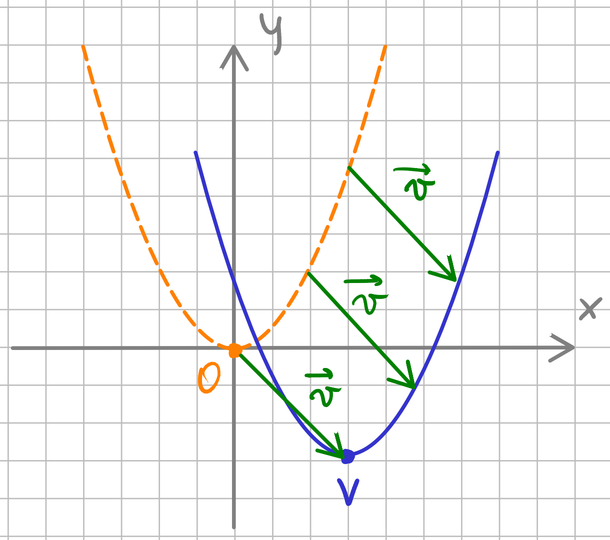
Equazione della parabola con il vertice in $O = (0,0)$

$$y = \underbrace{\frac{1}{4k}}_{=a} x^2$$





In generale, se il vertice della parabola è $V=(x_v, y_v)$, la sua equazione si ottiene trasformando



$$y = ax^2$$

come in una TRASLAZIONE lungo

$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$

$x_v = v_x$, $y_v = v_y$

$$y = ax^2 \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x \longrightarrow x - x_v \\ y \longrightarrow y - y_v \end{matrix}} \longrightarrow y - y_v = a(x - x_v)^2$$

Equazione di una generica parabola "verticale"*

* con asse di simmetria verticale

Equazione in forma normale

$$y - y_v = a(x - x_v)^2$$

$$y = a(x^2 - 2x_v x + x_v^2) + y_v$$

$$y = ax^2 \underbrace{- 2ax_v}_{b} x + \underbrace{ax_v^2 + y_v}_{c}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$b = -2ax_v \longrightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$c = ax_v^2 + y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + y_v = \frac{b^2}{4a} + y_v \longrightarrow y_v = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} *$$

$$* \; y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Analogamente, le coordinate del FUOCO F e l'equazione della della DIRETTRICE d si ottengono TRASLANDO lungo $\vec{v} = (x_v, y_v)$

$$(0, k) \longrightarrow \boxed{F = (x_v,\ y_v + k)}$$

$$y = -k \longrightarrow \boxed{d:\ y = y_v - k}$$

$\left(k = \frac{1}{4a}\right)$

Esempio Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 2$

$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 2$

Il vertice della parabola ha coordinate

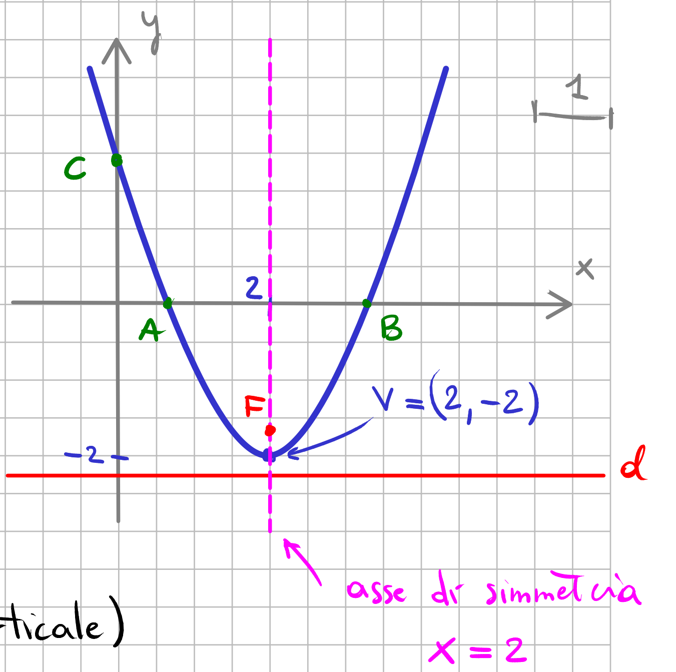
$$V = \left(\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{=\,2},\ \underbrace{-\frac{\Delta}{4a}}_{=\,-2}\right)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8$

Poiché $k = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$ troviamo

$$F = (\underbrace{x_v}_{=\,2},\ \underbrace{y_v + k}_{=\,-\frac{7}{4}})$$

$$d:\ y = y_v - k \longrightarrow d: y = -\frac{9}{4}$$



L'asse di simmetria è la retta (verticale) passante per il vertice: in generale ha equazione $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$

Per trovare i punti di intersezione con gli assi risolviamo:

Asse y: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0^2 - 4\cdot 0 + 2 = 2 \longrightarrow \underline{\underline{C = (0, 2)}}$

Asse x : $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2} \\ \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

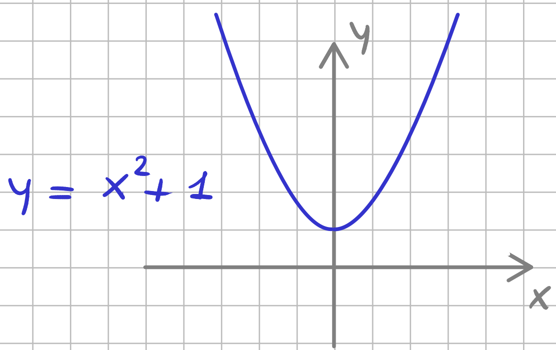
$$\longrightarrow \quad A = (2-\sqrt{2}, 0) \qquad B = (2+\sqrt{2}, 0)$$

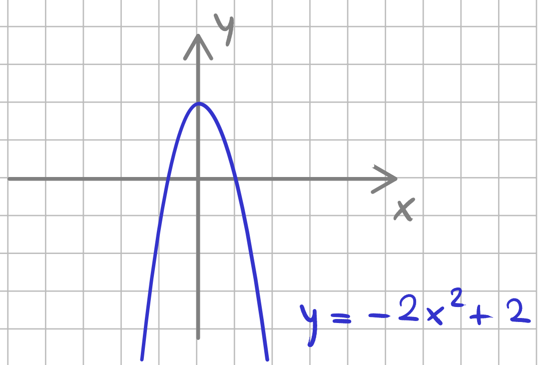
In generale, Δ
- > 0 2 punti di int. con l'asse x
- $= 0$ 1 punto
- < 0 nessun punto di intersezione

Osservazioni

La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

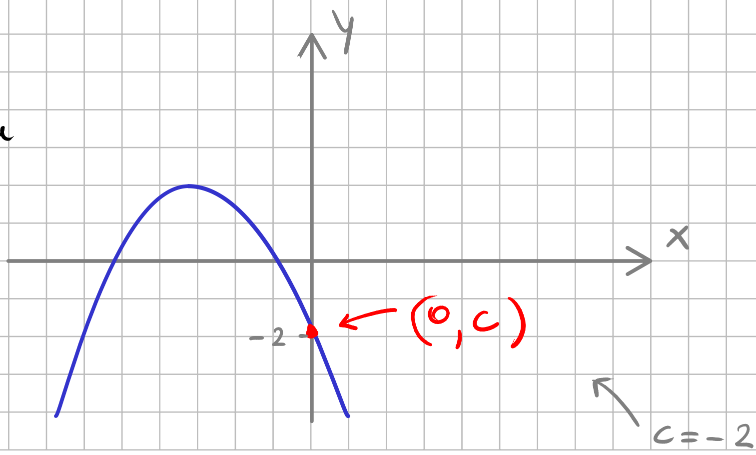
- è simmetrica rispetto all'asse y se $b = 0$





- passa per l'origine se $c = 0$

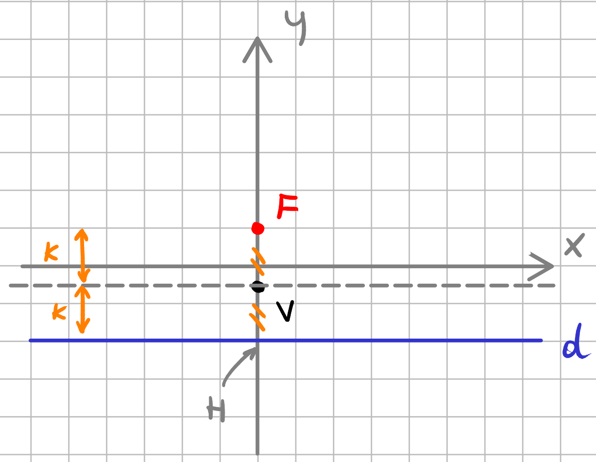
In generale, la parabola passa per il punto $(0, c)$



Esercizio 4 (449)

$F = (0, 1)$

$d: \; y = -2$



Il vertice V è il punto medio del segmento FH

$$V = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$K = \frac{3}{2} \longrightarrow a = \frac{1}{4K} = \frac{1}{6}$$

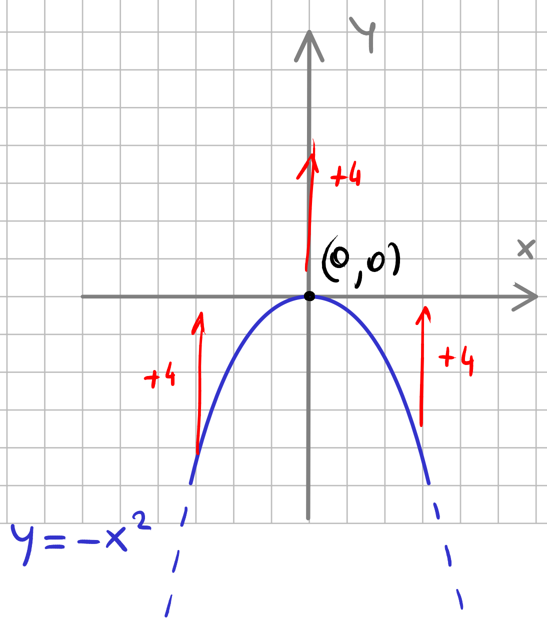
L'equazione della parabola è $y - y_V = a\,(x - x_V)^2$, con $y_V = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{6}$, $x_V = 0$

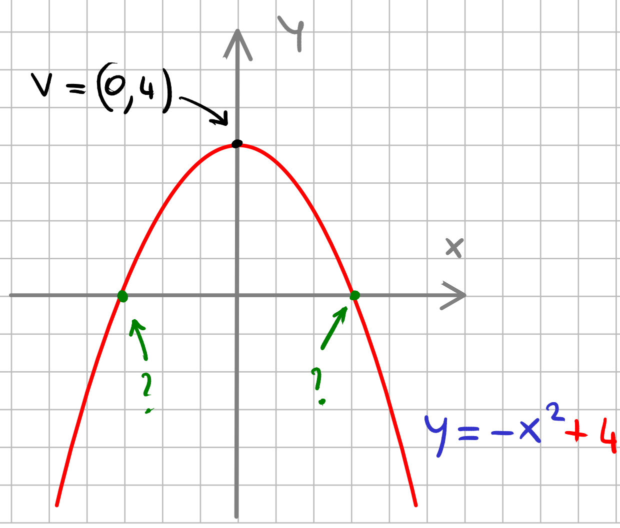
$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x^2 \longrightarrow y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}$$

Oss: si tratta di una parabola simmetrica rispetto all'asse y

Esercizio 16 (451)

Disegnare la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$





ESERCIZIO 17

$y = x^2 - 2x$

$a > 0 \rightarrow \cup$

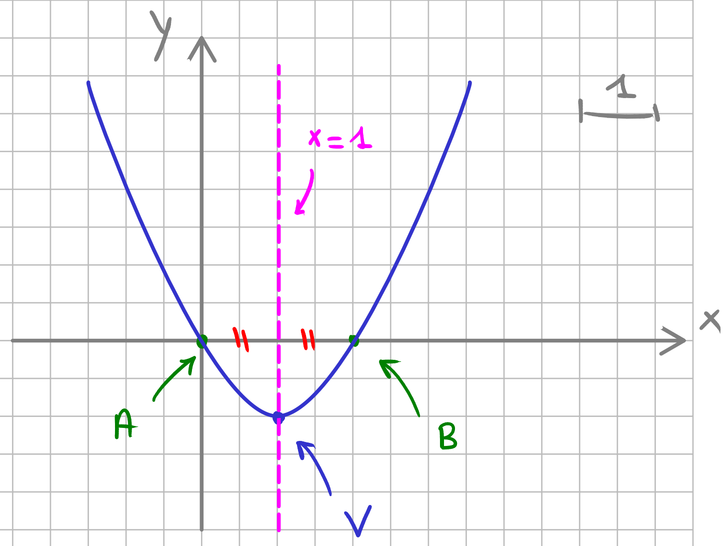
$c = 0 \rightarrow$ passa per l'origine

$y + 1 = x^2 - 2x + 1$

$y + 1 = (x-1)^2$

$y - y_V = a(x - x_V)^2$

$y_V = -1 \qquad x_V = 1$



Vertice della parabola: $V = (1, -1)$

Punti di intersezione con l'asse x:

$y = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$A = (0,0) \qquad B = (2,0)$

ESERCIZIO 20

$y = -x^2 + 6x - 5 \qquad a = -1 \qquad b = 6 \qquad c = -5$

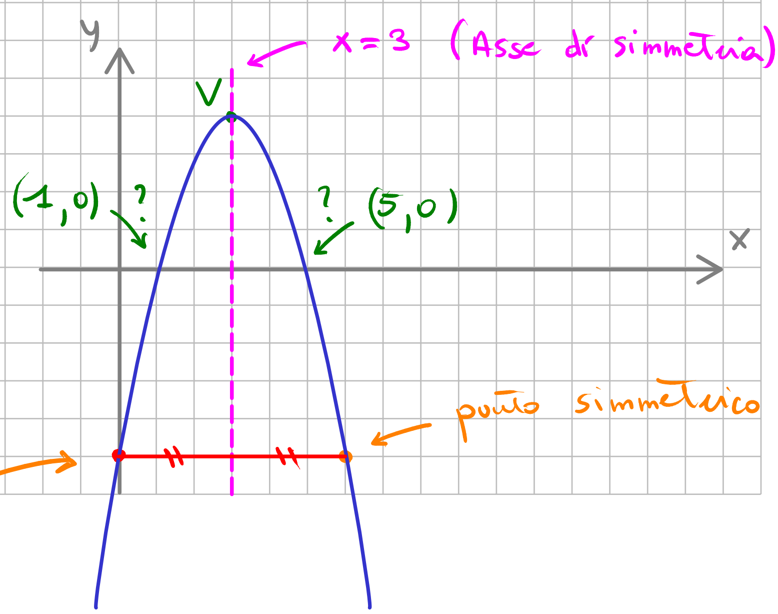
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16$

Vertice della parabola

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$

$\uparrow \qquad \uparrow$

$3 \qquad 4$



Poiché $c = -5$ la parabola passa per $(0, -5)$

Verifichiamo se i punti di intersezione con l'asse x sono

$(1,0)$ e $(5,0)$

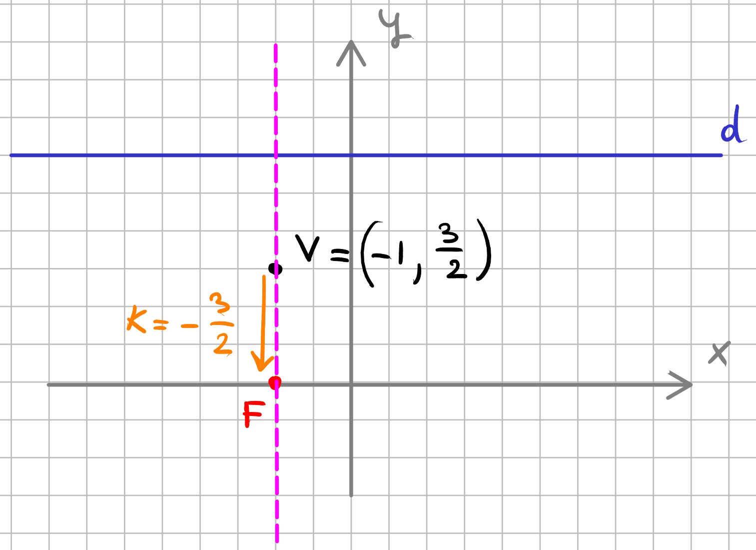
$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$$0 = -1^2 + 6 \cdot 1 - 5 \quad ✓ \qquad\qquad 0 = -5^2 + 6 \cdot 5 - 5 \quad ✓$$

ESERCIZIO 6 (449)

$F = (-1, 0)$

$d: \; y = 3$



$$a = \frac{1}{4k} = \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{6}$$

$$y - y_v = a(x - x_v)^2 \longrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}(x+1)^2$$

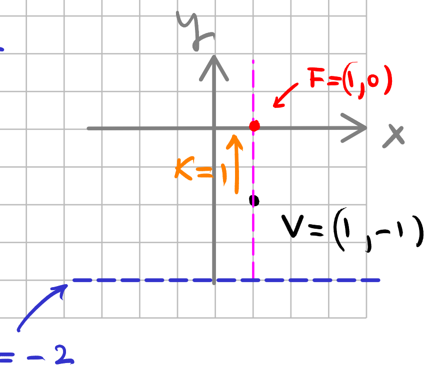
Forma normale: $y = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{3}{2}}_{= +\frac{4}{3}}$

ESERCIZIO 34 (451)

$$y = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1 \longrightarrow y - (\underset{y_v}{-1}) = \underset{a}{\frac{1}{4}}(x - \underset{x_v}{1})^2$$

$$V = (x_v, y_v) = (1, -1)$$

$$k = \frac{1}{4a} = 1$$

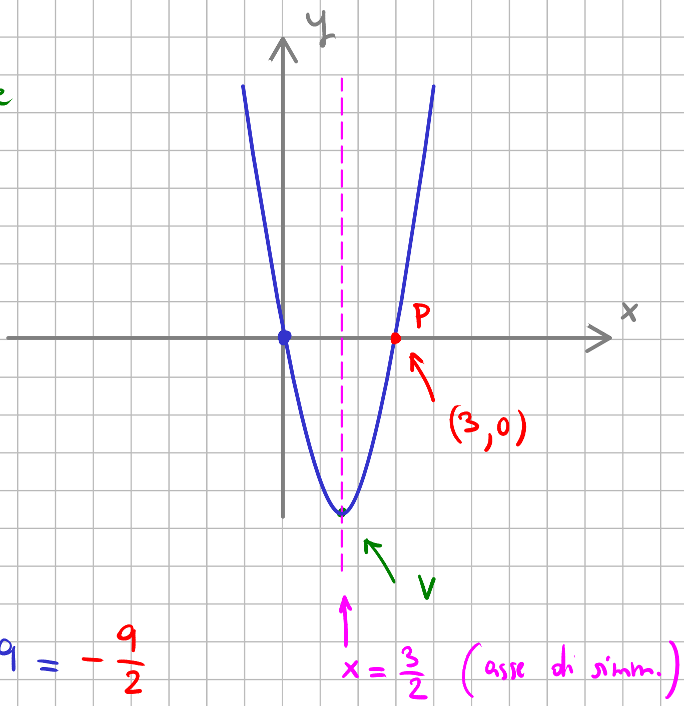


Esercizio 21

$y = 2x^2 - 6x$

$a = 2$ $\quad b = -6$ $\quad c = 0$

$\cup$ $\qquad$ passa per l'origine



Troviamo le coordinate del vertice

$$V = \left(\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{=3/2},\ \underbrace{y_v}_{=?}\right)$$

Poiché V sta sulla parabola

$$y_v = 2x_v^2 - 6x_v$$

$$y_v = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2}$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

Verifichiamo che $P = (3, 0)$ sta sulla parabola:

$$0 = 2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 \quad ✓$$

Esercizio 27

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \longrightarrow \underbrace{y - 2}_{y_v} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a}\left(x - \underbrace{(-1)}_{x_v}\right)^2$$

$V = (-1, 2)$:‿

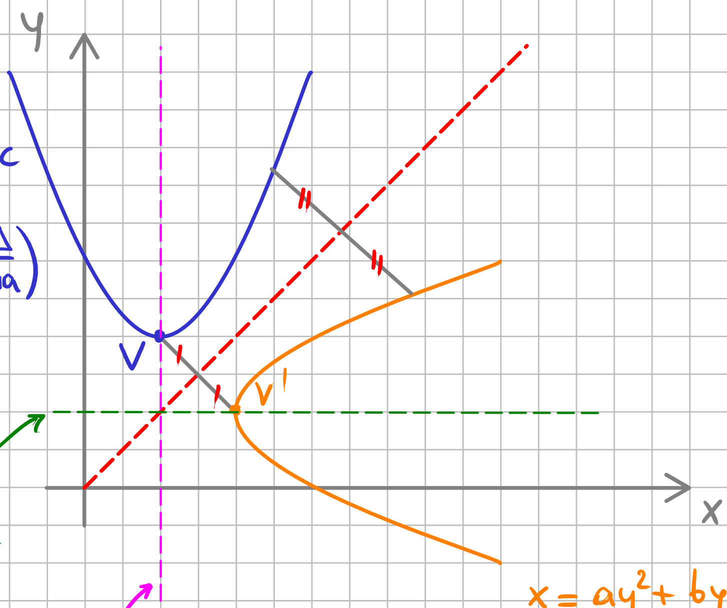
(...)

PARABOLE ORIZZONTALI *

* con asse di simmetria orizzontale

$y = ax^2+bx+c$

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$



$y = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a}$

Simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$

$x \longrightarrow y$

$y \longrightarrow x$

$x = ay^2+by+c$

$V' = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

N.B. Una parabola orizzontale NON È il grafico di una funzione!
(Invece, ovviamente, una parabola verticale lo è)