

Verifica di Matematica

Versione B

La prova consiste di 5 esercizi da svolgere sul foglio protocollo allegato

Esercizio 1 (5 punti)

Consideriamo la funzione f definita da $y = 1 - \sqrt{2+x}$.

- Determinare il dominio di f e calcolare il valore di $f(-2)$ e di $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Mostrare che il grafico di f è un ramo di parabola nel piano cartesiano e tracciarlo. Successivamente, studiare il segno di f e individuare i valori di x per cui $f(x) = 0$.
- Stabilire se f è una funzione pari, dispari oppure né l'una né l'altra.
- Dopo aver mostrato che la funzione f è iniettiva, stabilire in che modo è possibile restringere il codominio per renderla suriettiva.

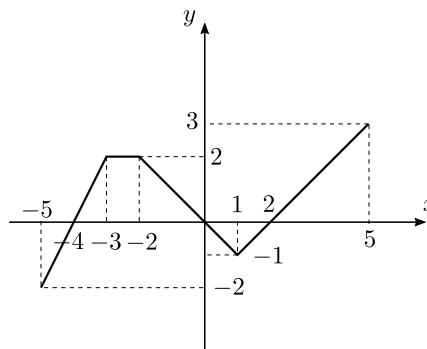
Esercizio 2 (4 punti)

Consideriamo la funzione f il cui grafico è la linea spezzata rappresentata di seguito.

- Determinare il dominio e l'immagine di f .
- Che valore ha $f(2)$?
- Quali sono le controimmagini del valore 0?
- Al variare di k , determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k$$

- Mostrare che la funzione f non è invertibile rispetto al suo intero dominio. In quali intervalli risulta invece invertibile?



Esercizio 3 (3 punti)

Consideriamo le due funzioni f e g definite da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1$$

- a) Determinare il dominio di f e il dominio di g .
- b) Restringendo il dominio ai valori $x \geq 0$, mostrare che le funzioni f e g sono entrambe iniettive e determinare l'espressione analitica delle loro funzioni inverse f^{-1} e g^{-1} .
- c) Determinare l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 4 (2 punti)

Consideriamo la successione definita ricorsivamente come segue:

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2} \quad (\text{se } n > 0) \end{cases}$$

- a) Elencare i primi sei termini della successione.
- b) Si tratta di una progressione aritmetica, geometrica oppure né l'una né l'altra?
- c) È possibile modificare il termine iniziale a_0 in modo che la successione sia costante?

Esercizio 5 (2 punti)¹

Nel corso del 2020 Andrea ha raccolto da terra 10 bottiglie di plastica e, a partire dal 2021, ha deciso di raccogliere ogni anno il doppio delle bottiglie rispetto all'anno precedente.

- a) Quante saranno le bottiglie raccolte da Andrea durante l'anno 2039?
- b) Quante saranno in totale le bottiglie raccolte da Andrea dal 2020 al 2039?
- c) Sapendo che dal 2020 al 2042 le bottiglie totali raccolte saranno 83 886 070, calcolare il numero di bottiglie che Andrea raccoglierà nel 2043.

¹Alcune identità utili: $2^{19} = 524\,288$ $2^{20} = 1\,048\,576$