Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

- $\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{y_1} = \underbrace{-x+1}_{y_2}$

Risolvere l'equazione significa trovare i valori di x tali che

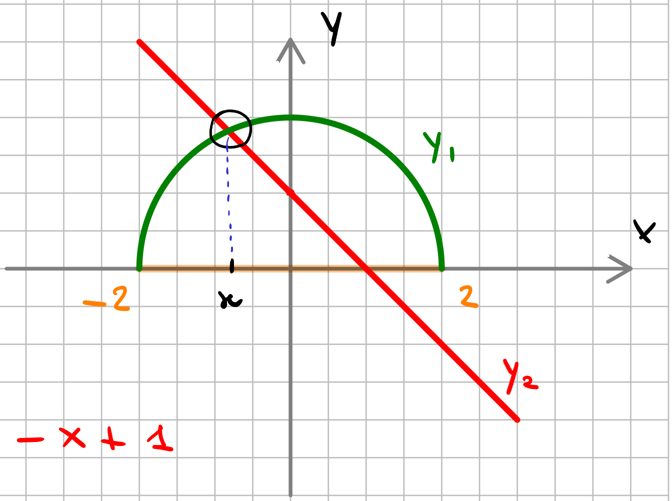
$$\boxed{y_1 = y_2}$$

- Tracciamo il grafico di $y_1 = \sqrt{4-x^2}$

Dominio: $-2 \leq x \leq 2$

Segno: $y_1 \geq 0$

$y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$



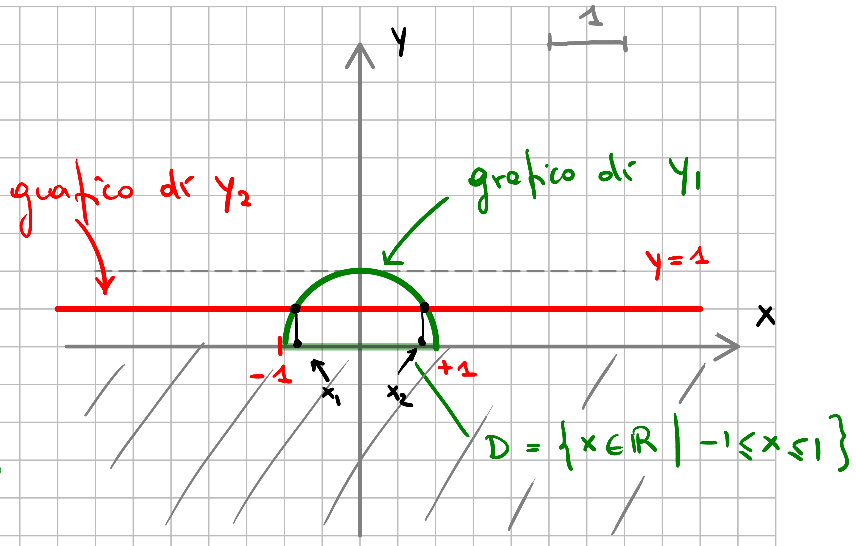
- Tracciamo il grafico di $y_2 = -x+1$

C'è un'unica x (compresa tra -2 e $+2$) in corrispondenza dell'INTERSEZIONE dei grafici. Tale x è dunque l'unica soluzione dell'equazione $y_1 = y_2$

- Dal grafico è possibile dedurre che $-1 < x < 0$.
- Il valore esatto di x lo troviamo risolvendo algebricamente l'equazione

$$\sqrt{4-x^2} = -x+1$$

• $\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y_1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_2}$



• **Grafico di y_1**

Dominio $1-x^2 \geq 0$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

$y_1 \geq 0$ per ogni $x \in D$

(infatti $y_1 = \sqrt{\dots}$)

$y_1 = \sqrt{1-x^2}$

$y_1^2 = 1 - x^2 \longrightarrow x^2 + y_1^2 = 1$

circonferenza $\begin{cases} C = (0,0) \\ r = 1 \end{cases}$

• **Grafico di $y_2 = \frac{1}{2}$**

y_2 è una FUNZIONE COSTANTE

(infatti non dipende da x)

Il suo grafico è la retta orizzontale di equazione $y = \frac{1}{2}$

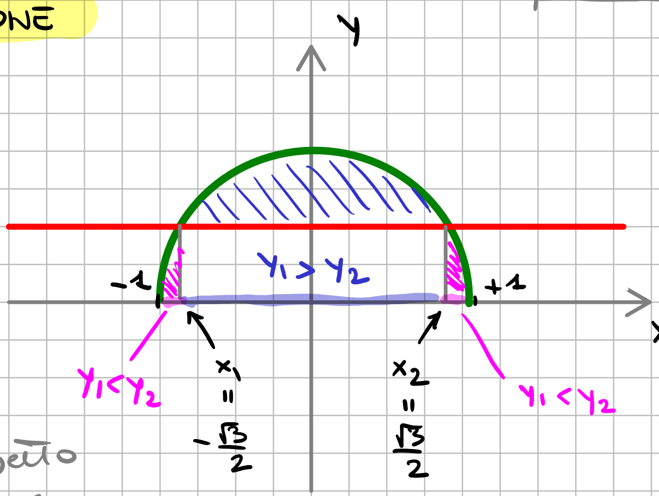
L'equazione ha 2 soluzioni x_1 e x_2

Risoluzione algebrica

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Consideriamo una DISEQUAZIONE

$$\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y_1} > \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_2}$$



$y_1 = y_2$ ⟶ troviamo i punti sull'asse x rispetto a cui i grafici hanno la STESSA ALTEZZA

$y_1 > y_2$ ($<$) ⟶ troviamo i punti sull'asse x rispetto a cui il grafico di y_1 sta SOPRA al grafico di y_2 (sta SOTTO)

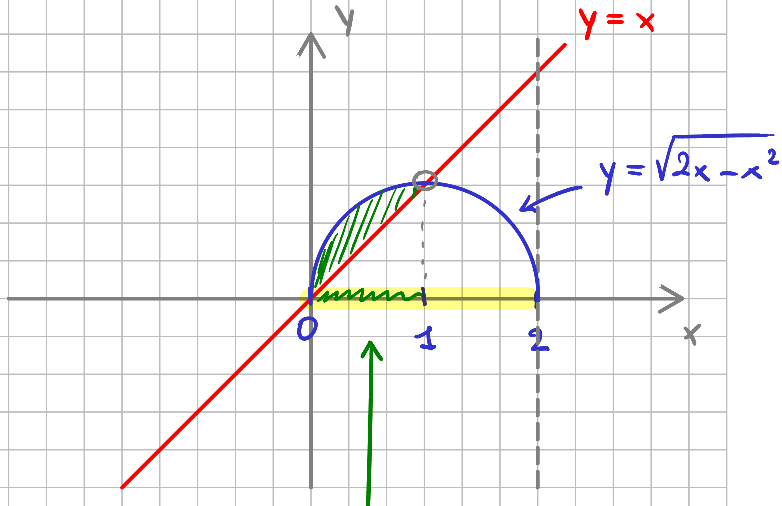
Le soluzioni della disequazione sono $x_1 \leq x \leq x_2$, con $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESERCIZIO

Risolviamo la disequazione $\underbrace{\sqrt{2x-x^2}}_{y_1} > \underbrace{x}_{y_2}$

- Grafico di $y = x$
  (bisettrice I–III quadrante)

- Grafico di $y = \sqrt{2x-x^2}$



→ Dominio:

$2x - x^2 \geq 0$

$x(2-x) \geq 0$

--- 0 + + + 0 --- (0 e 2)

$0 \leq x \leq 2$

SOLUZIONI di $y_1 > y_2$

$0 < x < 1$

→ $y \geq 0$ per ogni $0 \leq x \leq 2$
(infatti $y = \sqrt{\dots}$)

$y^2 = 2x - x^2 \longrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$

Circonferenza di centro $(1,0)$
raggio 1

ESERCIZIO

Risolviamo $\sqrt{4x-x^2} < x - 1$

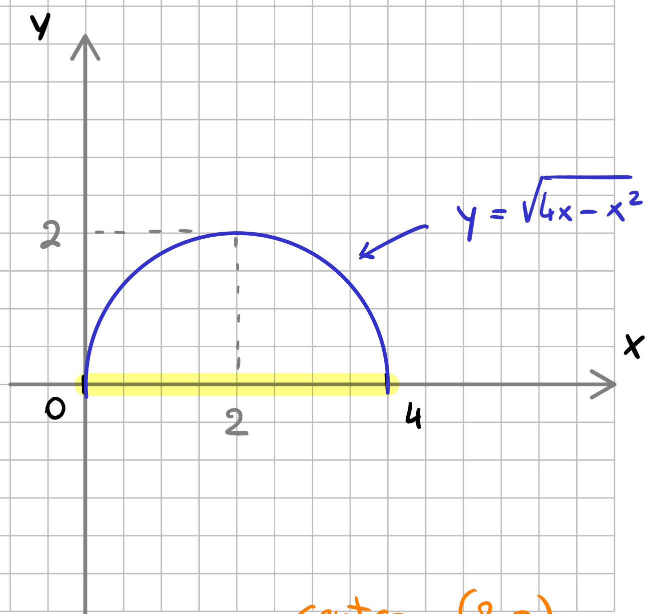
(1) Grafico di $y = \sqrt{4x-x^2}$

- Dominio

$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(4-x) \geq 0$

--- 0 + + + 0 --- (0 e 4)

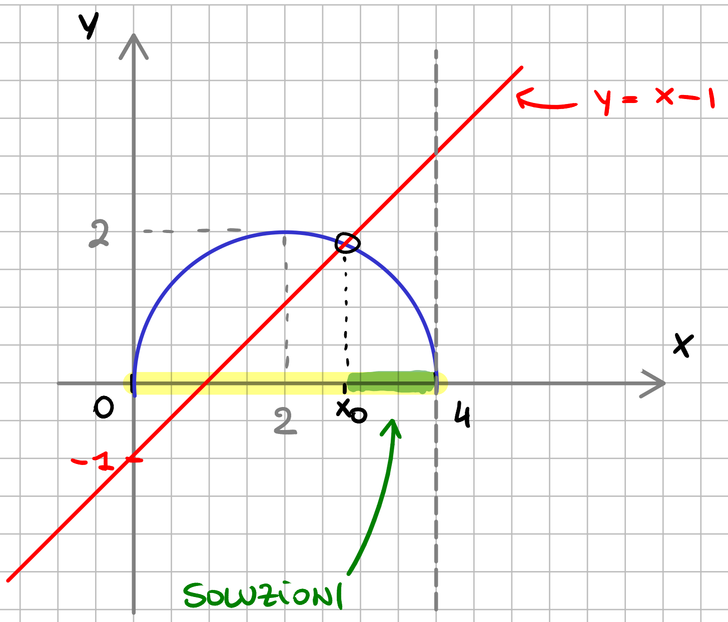
$0 \leq x \leq 4$



- $y \geq 0 \longrightarrow y^2 = 4x - x^2 \longrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$ — centro $(2,0)$, raggio 2

② Grafico di $y = x - 1$

$$\sqrt{4x - x^2} < x - 1$$



$x_0 < x \leq 4$

$\overset{\shortparallel}{?^*}$

③ troviamo il valore di x_0

x_0 è l'unica soluzione dell' equazione:

$$\underset{y_1}{\sqrt{4x - x^2}} = \underset{y_2}{x - 1}$$

Concordanza del segno: $x - 1 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq 1}$

Eleviamo al quadrato:

$$4x - x^2 = (x-1)^2$$

$$4x - x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \qquad \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \overset{!}{=} 7$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3 + \sqrt{7}}{2} \ ✓ \\[2ex] \dfrac{3 - \sqrt{7}}{2} \ ✗ \ \text{(non rispetta la concord. del segno)} \end{cases}$$

* $\boxed{x_0 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}}$

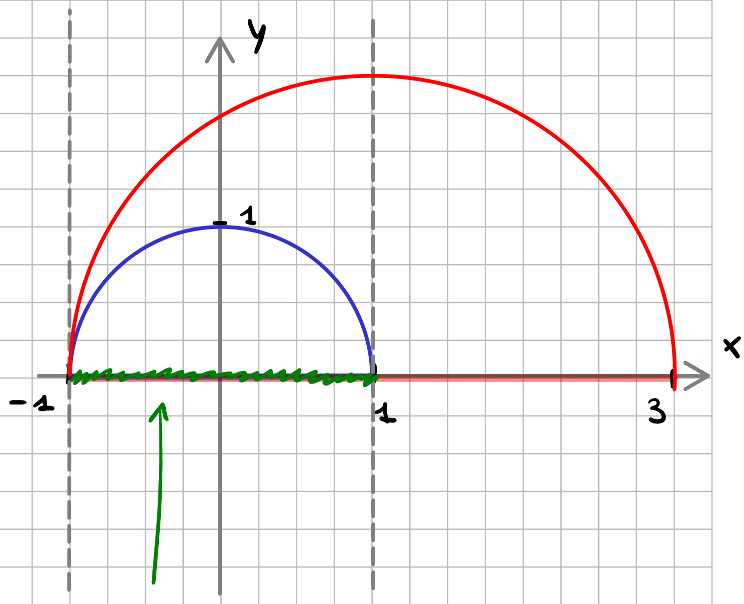
$$2 < \sqrt{7} < 3$$

$$5 < \sqrt{7} + 3 < 6$$

$$\frac{5}{2} < \underbrace{\frac{\sqrt{7} + 3}{2}}_{= x_0} < 3$$

ESERCIZIO

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{2x+3-x^2}$$



SOLUZIONI : $-1 \leq x \leq 1$

$(\bullet \leq \bullet)$

(1) $y = \sqrt{1-x^2}$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$

$y = \sqrt{\dots} \rightarrow y \geq 0$

$x^2 + y^2 = 1$

(2) $y = \sqrt{2x+3-x^2}$

Dominio: $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$$\begin{gathered} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ (x-3)(x+1) \leq 0 \end{gathered}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & -1 & & & & & 3 & & \\ +++ & 0 & - & - & - & - & 0 & + & + & + \end{array}$$

$-1 \leq x \leq 3$

$y = \sqrt{\dots} \longrightarrow y \geq 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$ $\begin{cases} C = (1,0) \\ r = 2 \end{cases}$