Lógica Proposicional-1

Linguagens da Lógica Proposicional

Frases atómicas

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011
Capítulos: 1-2

Linguagens de 1ª ordem

- Lógica de primeira ordem (LPO) é *família* de linguagens
  - partilham gramática
  - partilham conetivas e quantificadores
  - diferem no vocabulário usado nas fórmulas básicas
- Fórmulas atómicas --- frases básicas da Língua Natural (LN)
  - Nomes ligados por predicados
    - *Joana corre*
    - *Miguel vive no Porto*
    - *Rita deu jogo ao Manuel*
    - *O cubo é maior que o tetraedro*

Constantes

- Símbolos usados para referir um indivíduo *fixo*
- Nomes em LN são habitualmente ambíguos
  - mesmo nome para indivíduos diferentes
  - nomes desprovidos de referente: *Pai Natal*
- Nome em LPO refere exatamente 1 objeto

> - Cada nome tem de nomear um objeto
> - Um nome não pode nomear mais de um objeto
> - Um objeto pode ter mais de um nome

- Mundo de Tarski: constantes a, b, c, d, e, f

Símbolos de predicado

- Símbolo de predicado: propriedade de objetos ou relação entre objetos
- Fórmula atómica: combinação de símbolo de predicado e nomes

A Clara gosta do Pedro

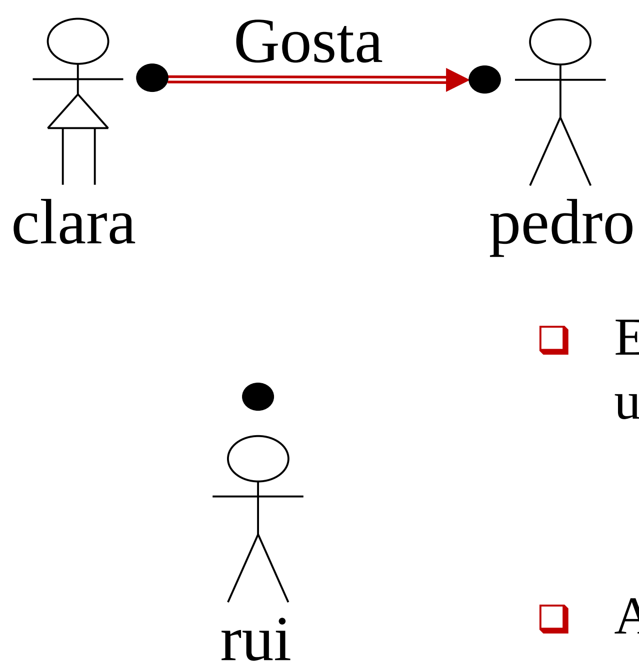
LN:	LPO:
Frase nominal + frase verbal	2 sujeitos lógicos: *Clara e Pedro* predicado *gosta*

Gosta(clara, pedro)

maiúscula
predicado

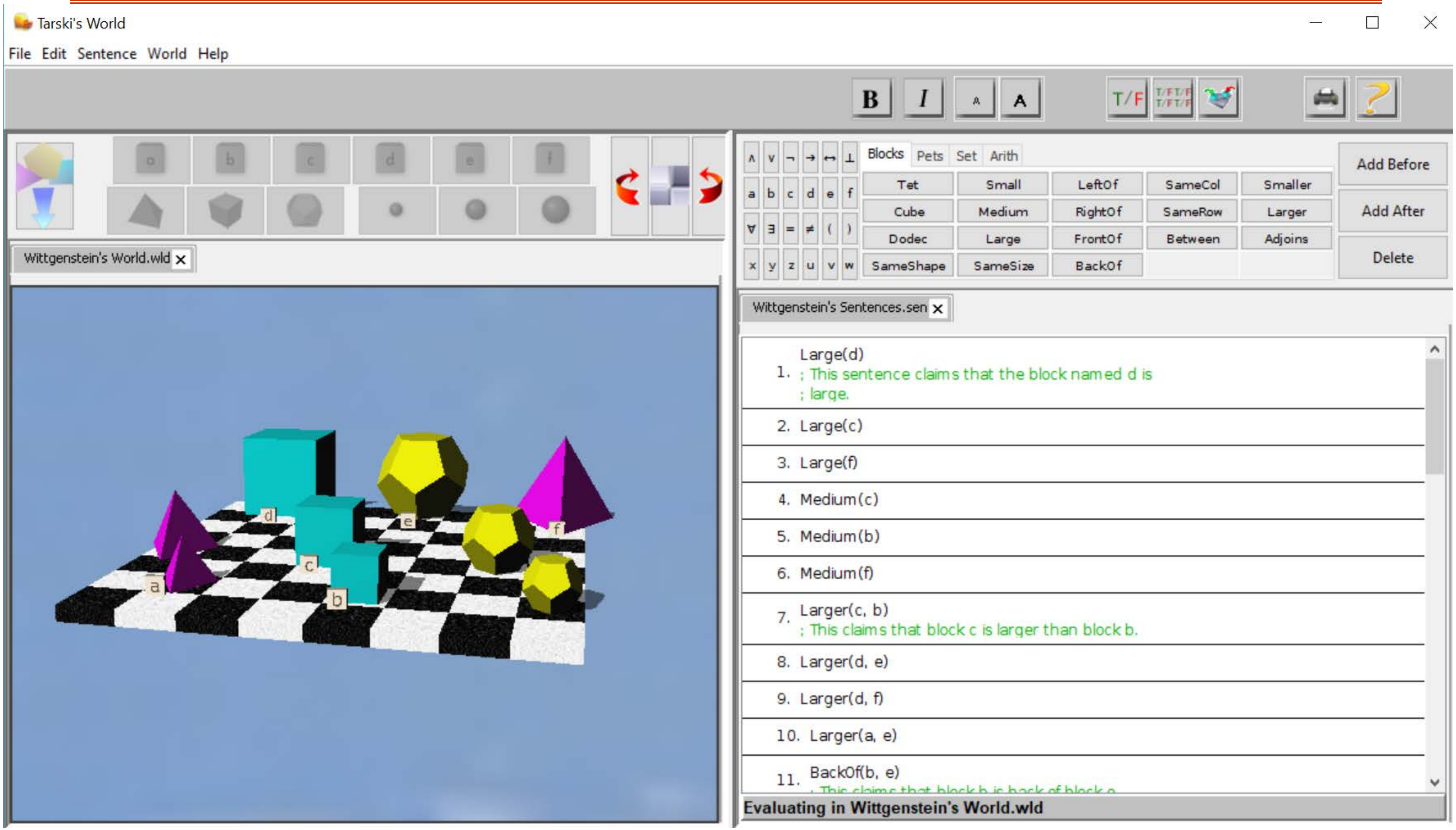
minúscula
constante

Mundo



- Este mundo tem três indivíduos e um predicado
  - Indivíduos com minúscula
  - Predicados com maiúscula
- A Clara não gosta do Rui
  - Se gostasse tinha a ligação entre clara e rui

O Mundo de Tarski



Predicados do Mundo de Tarski

Cube(a) – a é um cubo
Tet(a) – a é um tetraedro (pirâmide)
Dodec(a) – a é um dodecaedro (bola de futebol)

tipo

Small(a) – a é pequeno
Medium(a) – a é médio
Large(a) – a é grande

propriedade: tamanho

Smaller(a,b) – a é menor que b
Larger(a,b) – a é maior que b

comparação: tamanho

LeftOf(a,b) – a está mais próximo da beira esquerda do que b
RightOf(a,b) – a está mais próximo da beira direita do que b
BackOf(a,b) – a está mais próximo da beira de trás do que b
FrontOf(a,b) – a está mais próximo da beira da frente do que b

comparação: posição

SameSize(a,b) – a é do mesmo tamanho que b
SameShape(a,b) – a é da mesma forma que b
SameRow(a,b) – a está na mesma linha que b (horizontal)
SameCol(a,b) – a está na mesma coluna que b (vertical)

comparação: semelhança

Adjoins(a,b) – a e b estão em quadrados adjacentes (não em diagonal)
a = b – a é o mesmo objeto que b (sinónimo)

identidade

Between(a,b,c) – a, b, c na mesma linha, coluna ou diagonal e a está entre b e c

Aridade

- LN: predicados podem ter número de argumentos (aridade) variável

  A Ana deu

  A Ana deu o Bobi

  A Ana deu o Bobi ao Rui

- LPO: predicados têm *aridade* fixa

♦ Mundo de Tarski:

Aridade 1: Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large

Aridade 2: Smaller, Larger, LeftOf, RightOf, BackOf, FrontOf, SameSize, SameShape, SameRow, SameCol, Adjoins, =

Aridade 3: Between

Interpretação rígida

- Predicados com argumentos são fórmulas atómicas
- Fórmulas atómicas são verdadeiras ou falsas
- LN: predicados podem ter significado vago: não é sempre possível decidir se uma propriedade se aplica a um objeto

  Ana, 16 anos; Manuel, 96; Luís, 25

  Jovem(ana) – VERDADE   Jovem(manuel) – FALSO   Jovem(luis) – ?
- LPO: interpretações são rígidas

♦ Mundo de Tarski:

Between(a, b, c) representa *a está entre b e c*

Interpretação:

a, b e c estão na mesma linha, coluna ou diagonal

a está entre b e c

Linguagem de 1ª ordem da Teoria de Conjuntos

- Predicados: = (identidade) e $\in$ (pertença a conjunto)

- Fórmulas atómicas

  a = b - verdade se **a** é o mesmo que **b** (não basta ter aspetos comuns)

  a $\in$ b - verdade se **b** é conjunto e **a** um seu membro

- Notações:

Prefixa	Infixa	Posfixa
Gosta(clara, pedro)	clara Gosta pedro	clara pedro Gosta
=(a, b)	a = b	a b =
$\in$(a, b)	a $\in$ b	a b $\in$

Linguagem de 1ª ordem da Teoria de Conjuntos

- Exemplo:

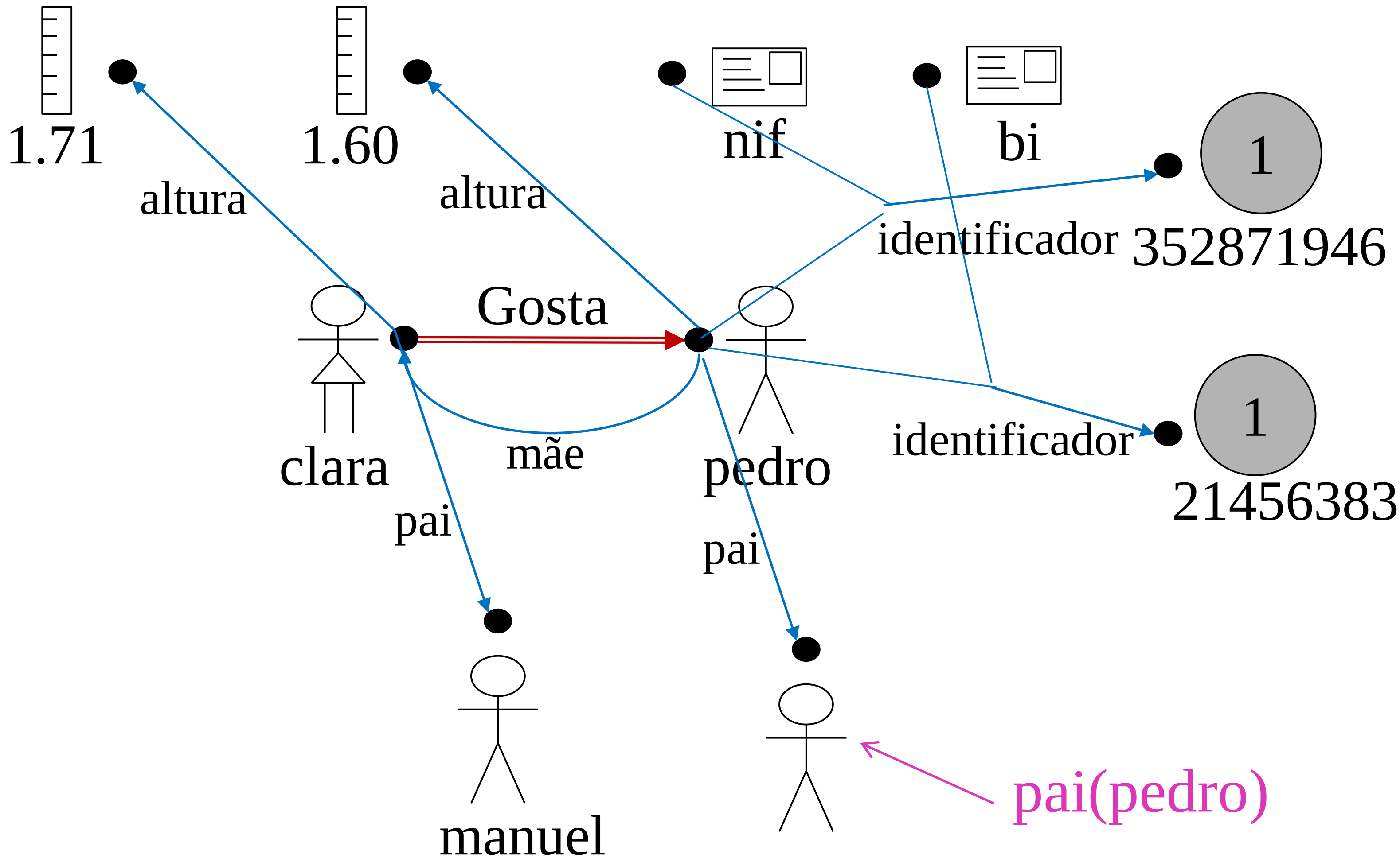
Constantes		Fórmulas atómicas	
a é	2	$a \in a$	Falso
b é	{2, 4, 6}	$a \in b$	Verdade
		$b \in a$	Falso
		$b \in b$	Falso

- Fórmulas atómicas na linguagem dos conjuntos: valor de verdade fica fixado quando se fixa a referência dos nomes
- Fórmulas atómicas no Mundo de Tarski: pode mudar de V para F movendo objetos: LeftOf(a,b)

Símbolos de função

- Um símbolo de função estabelece uma correspondência de objetos para objetos
- Exemplos de símbolos de função: mãe, altura, identificador
- Exemplos de **termos**:
  - mãe(pedro) -- Clara
  - altura(pedro) -- 1,60
  - altura(clara) -- 1,71
  - identificador(pedro,nif) -- 352871946
  - identificador(pedro,bi) -- 21456383
- *Termos* são expressões com símbolos de função e argumentos
- Os argumentos são termos
- Termos funcionam como nomes (complexos)

Mundo


1.71
1.60
nif
bi
altura
altura
1
identificador
352871946
Gosta
clara
mãe
pedro
identificador
1
21456383
pai
pai
manuel
pai(pedro)

Frases nominais complexas

- LN: frases nominais podem ser expressões complexas

  A mãe do Pedro

  Todos os funcionários da FEUP

  Alguém

  Nenhum dos amigos do Manuel

  O pai da mãe do Pedro

- Juntando frase verbal

  (1) A mãe do Pedro gosta de fruta

  (2) Nenhum dos amigos do Manuel gosta de fruta

  (1) tem implícito que alguém gosta de fruta

  (2) mesma estrutura da frase que (1), mas não implica existência de indivíduo

  Expressão de (1) em LPO usa *termo* para construir a frase nominal

  Expressão de (2) em LPO usa *quantificadores*

Termos

- Constantes individuais pedro
- Símbolo de função e argumento mãe(pedro)
- Argumentos são termos mãe(pai(mãe(pedro)))
- Usados como nomes nas fórmulas atómicas
  - MaiorQue(pai(pedro), pedro)
- Termos e predicados: sintaxe parecida, mas
  - mae(pai(pedro)) refere objeto, a avó paterna do Pedro
  - Cubo(Cubo(a)) ??

- Termo é formado aplicando símbolo de função de aridade *n* a *n* termos
- Termo é usado como um nome em fórmulas atómicas

Interpretação

- A LPO pressupõe uma grande simplificação da realidade
  - o mundo é constituído por indivíduos
  - qualquer afirmação é verdadeira ou falsa.

- Uma interpretação dá significado na realidade às frases da linguagem
  - atribui a cada **termo** (**constante** é um caso particular) um indivíduo
  - atribui a cada **fórmula atómica** o valor V ou F.

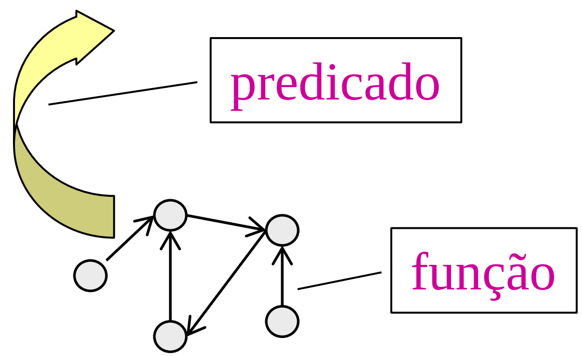
Interpretação

Linguagem — *Interpretação* — **Realidade**

Termo → Indivíduo

Fórmula atómica → V, F

MaiorQue(pai(pedro), pedro)
Gosta(mae(pedro), pedro)
…



- Função é correspondência entre indivíduos
- Predicado é relação entre indivíduos e valor de verdade

Linguagem de 1ª ordem da aritmética

- Fórmulas: acerca dos números naturais e de + e ×
- Vocabulário:
  - Nomes: 0 e 1
  - Símbolos de predicado: =, <   (binários)
  - Símbolos de função: + e ×   (binários)
- Notação: infixa para funções e para predicados
- Número de termos é infinito
  - 0, 1, (1+1), ((1+1) +1), (((1+1) +1) +1) …
- Fórmulas atómicas: com predicados < e =
  - $(1 \times 1) < (1+1)$

Definição indutiva

- Definição indutiva dos termos
  (1) 0 e 1 são termos
  (2) Se t_1 e t_2 são termos, $(t_1 + t_2)$ é termo
  (3) Se t_1 e t_2 são termos, $(t_1 \times t_2)$ é termo
  (4) Não há outros termos para além dos construídos com (1), (2) e (3)

  (1) é a cláusula base
  (2) e (3) são cláusulas recursivas
  (4) é a cláusula de fecho

Linguagens de 1ª ordem

- Especificam-se
  - nomes
  - predicados
  - símbolos de função c/ aridade

- Conetivas e quantificadores: sempre os mesmos

• No mínimo 1 predicado (pode ser =) • Pode não haver funções • Pode não haver nomes

Traduzir LN para LPO

- Representação de conhecimento
  - Passagem do mundo para a lógica
- Escolha de nomes, predicados e funções adequados ao domínio
- Escolha de predicados condiciona expressividade

A Ana deu o Bobi ao Rui — mundo

linguagem 1: DeuBobi(ana, rui)

linguagem 2: Deu(ana, bobi, rui)

lógica

- Objetivo é escolher a linguagem que permite exprimir o que queremos com o menor vocabulário possível (elegância)

Consequência lógica

- Questão central na Lógica:
  - quando é que uma afirmação é consequência lógica de outras
- Lógica formal
  - evitar ambiguidades da LN
  - tornar facilmente reconhecíveis as consequências de cada afirmação

Argumento

- Sequência de afirmações em que uma conclusão decorre de (é suportada por) premissas

Todos os homens são mortais. *Sócrates é homem.* *Logo, Sócrates é mortal.* • tem conclusão no final • é argumento válido	*Lucrécio é homem.* *Afinal, Lucrécio é mortal e todos os homens são mortais.* • tem conclusão no início • pior, não é argumento válido!

- Palavras que indicam consequência
  - *Portanto, logo, então, consequentemente*
- Palavras que indicam premissas
  - *Dado que, se, porque, afinal*

Contraexemplo

- Para mostrar que um argumento com premissas $P_1, \ldots, P_n$ e conclusão Q é **inválido** encontre um contraexemplo, isto é, um mundo em que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.
  - Suponha um mundo em que Lucrécio é um gato
  - Então "Lucrécio é mortal" e "todos os homens são mortais" são frases verdadeiras, mas a conclusão "Lucrécio é um homem" é falsa.

Validade e solidez

- Argumento **válido**: conclusão tem de ser verdadeira se as premissas o forem
  - De Cube(c) e c=b decorre Cube(b)
  - Não há maneira de ter as premissas verdadeiras (c é cubo e é o mesmo objeto que b) sem que a conclusão o seja também
- Reconhecemos que a conclusão é consequência das premissas *sem saber* se estas são verdadeiras
- Argumento **sólido** = argumento válido + premissas verdadeiras
  - Então a conclusão é verdadeira (só a validade não chega)
  - Se Sócrates for um robot, não é mortal; a premissa não é verdadeira e portanto a conclusão não tem que o ser, embora o argumento seja válido
- A verdade das premissas **não** é o problema central dos lógicos
  - Seria necessário um historiador para afirmar que Sócrates é um homem

Prova

- Problema dos lógicos é demonstrar a **validade** dos argumentos
  - Provar que *Sócrates às vezes se preocupa com a morte* é uma consequência lógica das quatro premissas *Sócrates é um homem*, *Todos os homens são mortais*, *Nenhum mortal vive para sempre*, *Todos os que virão a morrer às vezes preocupam-se com isso*.
  - Dado que Sócrates é um homem e todos os homens são mortais, segue-se que Sócrates é mortal. Daqui e da premissa de que nenhum mortal vive para sempre, conclui-se que Sócrates acabará por morrer. Pela última premissa, às vezes preocupa-se com isso.
- **Prova**: demonstração de que uma conclusão decorre das premissas, estabelecendo conclusões intermédias
  - Passo de uma prova: evidência irrefutável de que uma conclusão intermédia é consequência das premissas e conclusões anteriores

Passo irrefutável

- Um passo de uma prova tem que ser irrefutável
  - Não basta que seja verdadeiro na maior parte dos casos, porque:
    - *Quase todos os timorenses falam Tetum (90%)*
    - *António é um timorense*
    - *Então António fala Tetum*
  - Se António for um dos outros 10%, não fala Tetum – contraexemplo, argumento inválido
  - As provas podem ter muitos passos e a sua credibilidade seria muito reduzida
    - Segundo passo com 90% daria 0.9*0.9=0.81 (81%)
    - Terceiro passo: 0.9*0.9*0.9=0.729 (72.9%)

Provas formais e informais

- Diferença é no estilo, não no rigor
- Prova informal (ex: matemática)

  expressa em língua natural, omite os passos mais óbvios

  De Cube(c) e c=b prova-se Cube(b)

  ...preferível para comunicação entre as pessoas
- Prova formal
  - recorre a número fixo de regras e usa apresentação estilizada

    1. Cube(c)
    2. c=b
    3. Cube(b) = Elim: 1,2

  … permitem a validação mecânica

  … permitem provar factos acerca da própria noção de provabilidade

Caraterísticas da identidade

- **Indiscernibilidade dos idênticos** ou **substituição (Eliminação do =)**

  Se provarmos b=c, o que é verdade para b é verdade para c
- **Reflexividade da identidade (Introdução do =)**

  Pode sempre provar-se a=a (nome refere um e um só objeto)
- Simetria da identidade

  Pode concluir-se b=a a partir de a=b
  - pode provar-se dos dois anteriores
- Transitividade da identidade

  De a=b e b=c pode concluir-se a=c
  - pode provar-se a partir da indiscernibilidade dos idênticos

Provas formais

- Sistema dedutivo F (Sistema Fitch, do lógico Frederic Fitch)
- Prova em F da conclusão S a partir das premissas P, Q, R

$$
\begin{array}{|l l}
P & \\
Q & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{premissas} \\
\underline{R} & \\
S_1 & \text{justificação 1} \\
\ldots & \\
S_n & \text{justificação n} \\
S & \text{justificação n+1}
\end{array}
$$

P, Q, R acima da barra: **premissas**
Em geral: linhas numeradas

Regras de inferência

- Introdução da identidade (= Intro)

$$\triangleright \;|\; n=n$$

- Eliminação da identidade (= Elim)

$$
\begin{array}{r|l}
 & P(n) \\
 & \dots \\
 & n=m \\
 & \dots \\
\triangleright & P(m)
\end{array}
$$

- Reiteração (Reit)

$$
\begin{array}{r|l}
 & P \\
 & \dots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

- Operações no sistema de inferência associadas a cada elemento da linguagem
- Principalmente aos elementos comuns
- Par introdução/eliminação do elemento
- ▹ marca conclusão válida, segundo a regra, desde que se verifiquem as linhas anteriores

Provas que usam a identidade

- Exemplo: prova da simetria da igualdade

1. a=b		
2. a= a	= Intro	regra que justifica o passo
3. b=a	= Elim: 2,1	

- = Elim: 2,1 e não 1,2 porque se faz corresponder primeiro o passo *P(n)* na regra Elim com o passo da prova *2. a=a* e depois o passo *n=m* com *1. a=b*
- O segundo passo é usado para substituir o primeiro *a* de *a=a* por *b*

Uma prova formal

- Provar Gosta(b,a) a partir de Gosta(a,a) e de b=a

1. Gosta(a,a) 2. b=a	premissas
…	
Gosta(b,a)	conclusão

1. Gosta(a,a)		
2. b=a		
3. b=b	= Intro	passos
4. a=b	= Elim: 3,2	
5. Gosta(b,a)	= Elim: 1,4	

Regras para fórmulas atómicas

- Explorar as dependências entre os predicados da linguagem aumentando a formalização das regras do mundo
- Na linguagem do Mundo de Tarski:
  - Larger(a,c) é consequência de Larger(a,b) e Larger(b,c)
    - Larger é anti-reflexiva, anti-simétrica, transitiva
  - SameRow(a,b) é consequência de SameRow(b,a)
    - SameRow é reflexiva, simétrica, transitiva
- Regras para fórmulas atómicas (para além da =)
  - Possíveis, mas há muitas, pelo que não se incluem em F

Bidirecionalidade de Between

$$
\begin{array}{l|l}
 & \text{Between(a,b,c)} \\
 & \ldots \\
\triangleright & \text{Between(a,c,b)}
\end{array}
$$

Regras para fórmulas atómicas

- Na matemática: transitividade de $<$

  $k1<k2$

  $k2<k3$

  $k3<k4$ logo $k1<k4$ (2 usos implícitos de transitividade)

- De $x^2 > x^2-1$ e de $x^2-1=(x+1)(x-1)$

  pode concluir-se, por substituição (= Elim),

  $x^2 > (x+1)(x-1)$

- S é consequência lógica de P:
  - Então S é também consequência lógica de P e Q
  - Numa prova: não é obrigatório que todas as premissas sejam usadas