

## EXERCÍCIOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

### CONJUNÇÃO, DISJUNÇÃO E NEGAÇÃO - PROVA

1 {4.2} **Tautologias.** Assuma que A, B e C são frases atômicas. Use o programa Boole para construir tabelas de verdade para cada uma das frases seguintes. Usando as tabelas, diga quais das frases são tautologias.

1.  $(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$
2.  $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
3.  $\neg(A \wedge B) \vee C$
4.  $(A \vee B) \vee \neg(A \vee (B \wedge C))$ .

2 {4.3} **Frases não independentes.** Suponha agora que as frases A, B e C do problema anterior não são logicamente independentes. Determine quais das frases 1-4 do problema anterior são satisfazíveis ou logicamente verdadeiras, em cada uma das seguintes situações:

1. A é necessariamente verdadeira (e.g. A é  $b=b$ ).
2. A é necessariamente falsa (e.g.  $\text{Smaller}(a,a)$ ).
3. C é uma consequência lógica de A e B, i.e., sempre que A e B são verdadeiros, C também o é (e.g. A é  $\text{Larger}(a,b)$ , B é  $\text{Larger}(b,c)$  e C é  $\text{Larger}(a,c)$ ).

3 {4.4, 4.5, 4.6, 4.7} **Tabelas de verdade.** Suponha que A, B, C e D são frases atômicas independentes. Construa tabelas de verdade para cada uma das frases seguintes. Indique quais são satisfazíveis e quais são tautologias.

1.  $\neg(B \wedge \neg(C \vee B))$
2.  $A \vee \neg(B \vee \neg(C \wedge A))$
3.  $\neg[(\neg A \vee \neg(B \wedge C)) \vee (A \wedge B)]$
4.  $\neg[(\neg A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D)]$

4 {Sec 4.3} **Consequência lógica.** As tabelas de verdade, para além da determinação da verdade lógica, também podem servir para verificar a consequência lógica. Para saber se Q é uma consequência lógica de P, construa uma tabela de verdade com todas as frases atômicas de P e Q e os próprios P e Q e verifique se, em todas as linhas não espúrias, sempre que P é verdade Q também o é (se esta propriedade se mantiver mesmo nas linhas espúrias, fala-se de consequência tautológica).

1.  $\text{Cubo}(b)$  é uma consequência tautológica de  $(\text{Cubo}(a) \vee \text{Cubo}(b)) \wedge \text{Tet}(a)$ ?
2.  $\text{Cubo}(b)$  é uma consequência lógica de  $(\text{Cubo}(a) \vee \text{Cubo}(b)) \wedge \text{Tet}(a)$ ?
3.  $\text{Cubo}(b)$  é uma consequência tautológica de  $(\text{Cubo}(a) \vee \text{Cubo}(b)) \wedge \neg \text{Cubo}(a)$ ?
4.  $\text{Cubo}(b)$  é uma consequência lógica de  $(\text{Cubo}(a) \vee \text{Cubo}(b)) \wedge \neg \text{Cubo}(a)$ ?
5.  $\text{Dodec}(c)$  é uma consequência tautológica de  $\text{Dodec}(b) \wedge c=b$ ?
6.  $\text{Dodec}(c)$  é uma consequência lógica de  $\text{Dodec}(b) \wedge c=b$ ?
7.  $\text{Dodec}(c)$  é uma consequência lógica de  $\text{Dodec}(b) \wedge e=c$ ?

- 5 {5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6} **Passos válidos.** Lista-se a seguir um conjunto de passos de inferência dos quais apenas alguns são válidos. Diga quais, justificando com as tabelas de verdade respetivas ou mostrando como um determinado passo pode levar de premissas verdadeiras a conclusões falsas.
1. De  $P \vee Q$  e  $\neg P$  inferir  $Q$ .
  2. De  $P \vee Q$  e  $Q$  inferir  $\neg P$ .
  3. De  $\neg(P \vee Q)$  inferir  $\neg P$ .
  4. De  $\neg(P \wedge Q)$  e  $P$  inferir  $\neg Q$ .
  5. De  $\neg(P \wedge Q)$  inferir  $\neg P$ .
  6. De  $P \wedge Q$  e  $\neg P$  inferir  $Q$ .
- 6 {5.7} **Prova informal.** Prove  $\text{Happy}(\text{carl})$  a partir das seguintes premissas, anotando apenas os passos importantes, tais como o uso da prova por casos ou da prova por contradição:
1.  $\text{Home}(\text{max}) \vee \text{Home}(\text{claire})$
  2.  $\neg \text{Home}(\text{max}) \vee \text{Happy}(\text{carl})$
  3.  $\neg \text{Home}(\text{claire}) \vee \text{Happy}(\text{carl})$
- 7 {5.8} **Consequência lógica.** Prove  $\text{BackOf}(a,b)$  a partir das quatro premissas seguintes:
1.  $\text{LeftOf}(a,b) \vee \text{RightOf}(a,b)$
  2.  $\text{BackOf}(a,b) \vee \neg \text{LeftOf}(a,b)$
  3.  $\text{FrontOf}(b,a) \vee \neg \text{RightOf}(a,b)$
  4.  $\text{SameCol}(c,a) \wedge \text{SameRow}(c,b)$
- 8 {5.23, 5.24, 5.25} **Números naturais.** Prove os três factos seguintes sobre os números naturais, a partir dos factos básicos da aritmética e das definições de par e ímpar.
- a) Assuma que  $n^2$  é ímpar. Prove que  $n$  é ímpar.
  - b) Assuma que  $n+m$  é ímpar. Prove que  $n \times m$  é par.
  - c) Assuma que  $n^2$  é divisível por 3. Prove que  $n^2$  é divisível por 9.
- 9 {6.2} **Prova incompleta no Fitch.** Abrir Exercise 6.2 que contém uma prova incompleta. Completar os passos e as justificações e verificar a prova.
- 10 {6.3, 6.6} **Provas em Fitch.** Use o Fitch para construir provas formais para as seguintes fórmulas.
- a)  $a=c \wedge b=d$  a partir de  $a=b \wedge b=c \wedge c=d$
  - b)  $A \wedge (B \vee C)$  a partir de  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 11 {Sec 6.3} Abrir Negation 2 com Fitch. A prova apresentada tem como premissas um conjunto de fórmulas, das quais alguns subconjuntos são contraditórios.
- Foque cada passo que contém o símbolo  $\perp$  e veja as frases que são citadas. Só um destes passos é uma aplicação da regra  $\perp$  **Intro**. Complete-o e verifique.
  - Dos restantes passos, há um em que as frases citadas são contradições tautológicas. Atribua-lhe a justificação **Taut Con** e verifique. (Este passo poderia ser derivado das mesmas premissas apenas com as regras Booleanas.)

- Dos restantes passos, há dois cujas frases de suporte são contraditórias atendendo ao significado do  $=$ . Atribua-lhe a justificação **FO Con** e verifique. (Este passo poderia ser derivado das mesmas premissas usando as regras para o  $=$ .)
  - Verifique que os restantes passos não podem ser justificados pelas regras  $\perp$  **Intro**, **Taut Con** e **FO Con**. Atribua-lhes a justificação **Ana Con** e verifique.
- 12** {6.24, 6.25} **DeMorgan**. Construa provas informais e, em seguida, provas formais semelhantes em estrutura, das seguintes frases, sem recorrer às leis de DeMorgan:
- a)  $\neg P \wedge \neg Q$  a partir da premissa  $\neg(P \vee Q)$ .
  - b)  $\neg(P \vee Q)$  a partir da premissa  $\neg P \wedge \neg Q$ .
- 13** {6.35, 6.38} **Provas sem premissas**. Construa provas formais sem premissas de:
- a)  $\neg(a=b \wedge \text{Dodec}(a) \wedge \text{Cube}(b))$
  - b)  $\neg(\text{SameRow}(a,b) \wedge \text{SameRow}(b,c) \wedge \text{FrontOf}(c,a))$
  - c)  $\neg(a=b \wedge b \neq a)$ .
- 14** {6.28} **Contradição em sentido lato**. Produza uma prova formal no Fitch de  $\text{Small}(c)$  a partir das premissas  $\text{Cube}(c) \vee \text{Small}(c)$  e  $\text{Dodec}(c)$ . Pode usar **Ana Con** envolvendo literais e  $\perp$ .