Lógica Proposicional-2

Conetivas Booleanas

Provas informais e formais com conetivas Booleanas

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011
Capítulos: 3-4-5-6

Conetivas lógicas

- Construir fórmulas arbitrárias a partir de fórmulas atómicas
- Conjunção, disjunção e negação: são funcionais da verdade
  - valor de verdade de afirmações complexas só depende do valor de verdade das frases atómicas
- Significado de conetiva: tabela de verdade
  - mostra como o valor de verdade de uma fórmula construída com ela depende dos valores de verdade dos seus constituintes
- Significado de conetiva: jogo de Henkin-Hintikka
  - Egas e Becas não concordam no valor de verdade de uma frase complexa
  - Egas: diz que é verdadeira; Becas: diz que é falsa
  - Jogadores desafiam-se a justificar as suas afirmações em termos de afirmações mais simples
  - Chegando às fórmulas atómicas, pode examinar-se o mundo e verificar o seu valor lógico

Jogar com o Mundo de Tarski

- Máquina faz papel de adversário e tenta ganhar mesmo quando o jogador faz uma afirmação verdadeira
- Se o jogador faz afirmação falsa:
  - Máquina ganha, pondo em evidência falhas no raciocínio
- Se o jogador faz afirmação verdadeira:
  - Máquina perde se o jogador é capaz de justificar as suas escolhas até às fórmulas atómicas
  - Máquina pode ganhar se alguma das justificações intermédias para a afirmação é mal escolhida

Negação

- Símbolo: ¬
- LN: *não… não se verifica que… nenhum… in- des-*
  - *A Rita não está na sala*
  - *Não se verifica o facto de a Rita estar na sala*
- ¬NaSala(rita)
  - Quando é verdade: quando NaSala(rita) é falso
- LN: dupla negativa tem sentido de negativa reforçada
  - Não faz diferença nenhuma
  - Interpretado como *Não faz diferença alguma*, e não como *Faz alguma diferença*
- LPO: ¬¬ NaSala(rita) é V quando NaSala(rita) for V
- = tem abreviatura para negação: $a \neq b$ em vez de $\neg(a=b)$

$\neg$: Semântica e regra do jogo

- Fórmula P de LPO: existe sempre $\neg$P
- **$\neg$P é verdadeiro se e só se P é falso**
- Tabela de verdade

P	$\neg$P
V	F
F	V

- Regra do jogo: não se faz nada :)
- Quando afirmamos a verdade de $\neg$P, comprometemo-nos com a falsidade de P e vice-versa
- Tarski´s World: reduz a afirmação negativa à positiva e troca o valor lógico escolhido

Conjunção

- Símbolo: $\wedge$
- LN: *e… e também… mas...*

  Rita e Luis estão na sala
- NaSala(rita) $\wedge$ NaSala(luis)
  - Verdadeira se Rita está na sala e Luis está na sala
- LN: 'e' é mais expressivo que $\wedge$:

  Rita entrou na sala e Luis saiu da sala

  Luis saiu da sala e Rita entrou na sala

Entra(rita) $\wedge$ Sai(luis)

Sai(luis) $\wedge$ Entra(rita)

Verdadeiras nas mesmas circunstâncias

$\wedge$: Semântica e regra do jogo

- **P $\wedge$ Q é verdadeiro sse P é verdadeiro e Q é verdadeiro**
- Tabela de verdade

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Regra do Jogo:
  - Se afirmamos V para P $\wedge$ Q, afirmamos a verdade de P e de Q
    - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a verdade deste
    - Se um deles é falso: escolhe esse
    - Se são ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária
  - Se afirmamos F para P $\wedge$ Q: afirmamos que pelo menos um é falso
    - Máquina pede para nos comprometermos com o valor F para um deles

Disjunção

- Símbolo: $\vee$
- LN: *ou…* (entre frases ou entre componentes destas)

  A Rita ou o Luis estão na sala

  Significado corrente é <u>inclusivo</u>
- LPO: disjunção só entre frases

  NaSala(rita) $\vee$ NaSala(luis)

  ~~NaSala(rita $\vee$ luis)~~

  Significado é inclusivo
- LN: significado exclusivo com *ou* … *ou*
- Exclusivo em LPO:

  [NaSala(rita) $\vee$ NaSala(luis)] $\wedge$ $\neg$[NaSala(rita) $\wedge$ NaSala(luis)]
- *nem* … *nem*

  $\neg$ [- $\vee$ -]

$\vee$: Semântica e regra do jogo

- **P $\vee$ Q é verdadeiro se pelo menos um de P e Q é verdadeiro, senão é falso**
- Tabela de verdade:

P	Q	P $\vee$ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Regra do Jogo:
  - Se afirmamos V para P $\vee$ Q
    - Máquina pede para nos comprometermos com o valor V para um deles
  - Se afirmamos F para P $\vee$ Q: afirmamos que ambos são falsos
    - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a falsidade deste
    - Se um só deles é verdadeiro: escolhe esse
    - Se ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária

Regras do jogo

Forma	Afirmação	Quem joga	Objetivo
$P \vee Q$	V F	nós Tarski's World	Escolher um de P e Q verdadeiro
$P \wedge Q$	V F	Tarski's World nós	Escolher um de P e Q falso
$\neg P$	V F	-	Mudar de $\neg P$ para P e trocar valor lógico escolhido

Nota: podemos saber o valor lógico de $P \vee Q$ e não saber os valores lógicos de P nem de Q

O jogo assume conhecimento completo sobre o mundo

Ambiguidade e parênteses

- LN: ambiguidade é comum

  A Rita está na sala ou o Luis está na sala e o Rui está distraído

- LPO:

  $[\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}] \wedge \text{Distraido(rui)}$

  $\text{NaSala(rita)} \vee [\text{NaSala(luis)} \wedge \text{Distraido(rui)}]$

- Negação: parêntesis delimitam alcance

  $\neg\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}$

  $\neg[\text{NaSala(rita)} \vee \text{NaSala(luis)}]$

- Critério dos parêntesis
  - Conjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
  - Disjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
  - Parêntesis extra usados livremente para obter significado pretendido

VERDADE E CONSEQUÊNCIA

Equivalência lógica

- P e Q são logicamente equivalentes: verdadeiras exatamente nas mesmas circunstâncias

$$P \Leftrightarrow Q$$

- Tarski's World:
  - P e Q logicamente equivalentes: verdadeiras nos mesmos mundos
  - Existe um mundo no qual uma é verdadeira e outra falsa: não são logicamente equivalentes

Leis de DeMorgan

$$\neg (R \wedge S) \;\Leftrightarrow\; \neg R \vee \neg S$$

$$\neg (R \vee S) \;\Leftrightarrow\; \neg R \wedge \neg S$$

Equivalência lógica

- **Dupla negação** $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
- Frases logicamente equivalentes: cada uma é consequência lógica da outra
- Usando dupla negação e leis de DeMorgan: qualquer fórmula escrita com $\wedge$, $\vee$, $\neg$ se transforma noutra com $\neg$ aplicada apenas nas fórmulas atómicas - **forma normal com negação**

$$\begin{aligned}\neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C\\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C\\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C\end{aligned}$$

- **Literal**: fórmula atómica ou negação de uma fórmula atómica
- Notar: $\Leftrightarrow$ não é símbolo da linguagem: é uma forma abreviada de dizer que duas fórmulas são logicamente equivalentes

Equivalências lógicas

- Idempotência do $\wedge$:

  $P \wedge Q \wedge P \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge Q$

- Idempotência do $\vee$:

  $P \vee Q \vee P \quad \Leftrightarrow \quad P \vee Q$

- Comutatividade do $\wedge$:

  $P \wedge Q \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad Q \wedge P \wedge R$

- Comutatividade do $\vee$:

  $P \vee Q \vee R \quad \Leftrightarrow \quad Q \vee P \vee R$

Tradução de língua natural

- Frases em LN e em LPO: têm o mesmo significado se tiverem o mesmo valor lógico em todas as circunstâncias
- Se a fórmula A é tradução de uma frase então B, logicamente equivalente a A, também é tradução dessa frase
- Mas…

  Algumas traduções são mais fiéis ao estilo da afirmação inicial

  Ex: *Não é verdade que a Rita e o Luis estejam ambos na sala*

  (1) $\neg$(NaSala(rita) $\wedge$ NaSala(luis))

  (2) $\neg$NaSala(rita) $\vee$ $\neg$NaSala(luis)

  (1) é fiel ao estilo da frase em LN

  (2) não é fiel ao estilo

Satisfação e verdade lógica

- Fórmula satisfazível (logicamente possível):

  - pode ser verdadeira, de um ponto de vista lógico

  ou - há alguma circunstância logicamente possível na qual é verdadeira

- Conjunto de fórmulas é **satisfazível**

existe circunstância possível na qual as fórmulas são simultaneamente verdadeiras

Não basta cada uma ser satisfazível:

$NaSala(rita) \wedge NaSala(luis)$

$\neg NaSala(rita)$

$\neg NaSala(luis)$

- Tarski's World:
  - frase é satisfazível se se pode construir um mundo em que é verdadeira
    - chama-se-lhe TW-satisfazível
- Mas…
  - há frases logicamente satisfazíveis que não podem tornar-se verdadeiras nos mundos do Tarski's World:
    - $\neg$ (Tet(b) $\vee$ Cube(b) $\vee$ Dodec(b)) não é TW-satisfazível

Fórmula logicamente verdadeira

- Fórmula que é verdadeira qualquer que seja o mundo

  $NaSala(rita) \vee \neg NaSala(rita)$

  $\neg(Atento(luis) \wedge \neg Atento(luis))$

  $\neg[(Atento(luis) \vee Atento(rui)) \wedge \neg Atento(luis) \wedge \neg Atento(rui)]$
- P logicamente verdadeiro: $\neg$ P não é satisfazível
- Averiguar satisfação e verdade lógica: tabela de verdade
- $(Cube(a) \wedge Cube(b)) \vee \neg Cube(c)$ $(A \wedge B) \vee \neg C$

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Decidir satisfação de fórmula

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\vee$	$\neg C$
V	V	V	V		F
V	V	F	V		V
V	F	V	F		F
V	F	F	F		V
F	V	V	F		F
F	V	F	F		V
F	F	V	F		F
F	F	F	F		V

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\vee$	$\neg C$
V	V	V	V	**V**	F
V	V	F	V	**V**	V
V	F	V	F	**F**	F
V	F	F	F	**V**	V
F	V	V	F	**F**	F
F	V	F	F	**V**	V
F	F	V	F	**F**	F
F	F	F	F	**V**	V

Tautologia

- **Linhas espúrias**: não representam possibilidades genuínas
  - Ex: A é fórmula atómica a=a

    A segunda metade da 1ª coluna da tabela é espúria: a=a não pode ser falso
  - Ex: A é Tet(c)

    Linhas que têm V para A e para C são espúrias porque c não pode ser tetraedro e cubo
- Investigar **verdade lógica**: linhas espúrias são ignoradas
- Reconhecer linhas espúrias:
  - pelo significado das fórmulas atómicas
- Mais forte que verdade lógica: **tautologia**
  - fórmula verdadeira em todas as linhas, espúrias ou não
  - Tautologias são verdades lógicas, algumas verdades lógicas não são tautologias (a=a)

Tautologia e verdade lógica

F: fórmula construída a partir de fórmulas atómicas com conetivas

Tabela de verdade para F mostra como o seu valor lógico depende do das suas partes atómicas

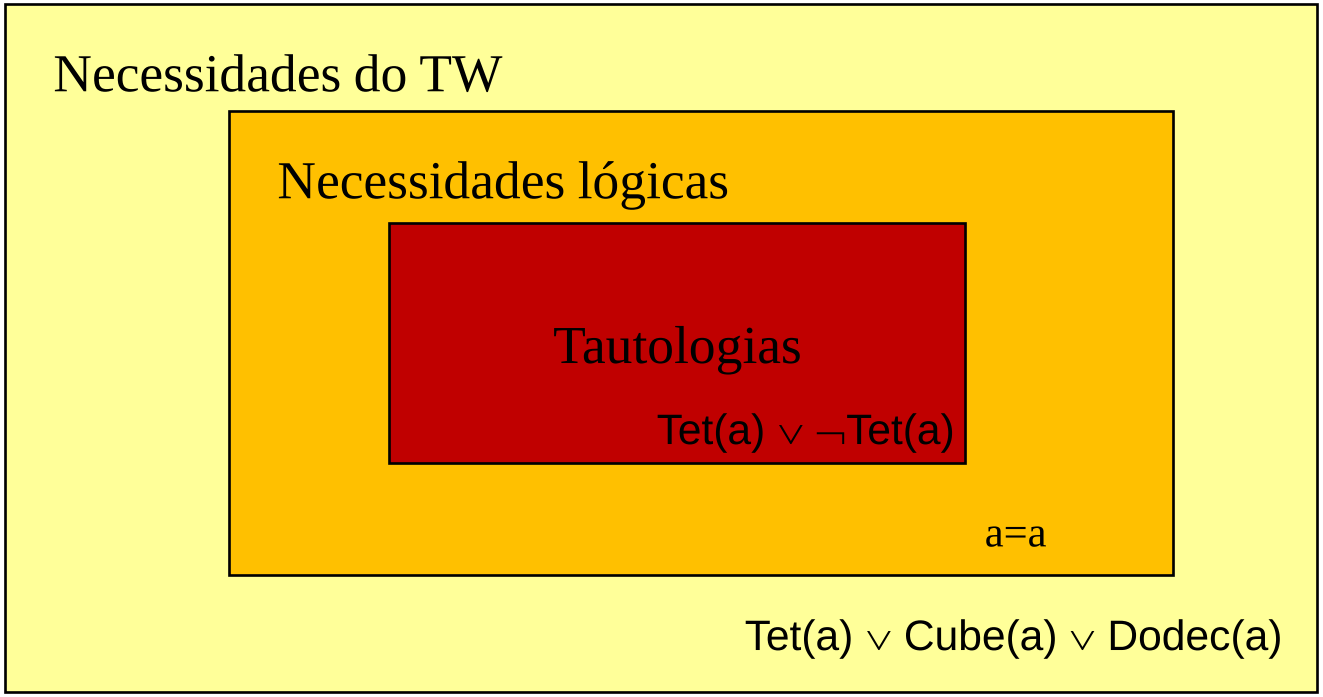
F é **tautologia** se e só se toda a linha lhe atribui V

F é **satisfazível** (possibilidade lógica) se e só se há pelo menos uma linha não espúria que lhe atribui V

F é **logicamente verdadeira** (necessidade lógica) se e só se todas as linhas não espúrias lhe atribuem V

F é TW-satisfazível (TW-possível) se existe um mundo TW que a torna verdadeira

Classificação de fórmulas



- Toda a tautologia é uma verdade lógica
- Há verdades lógicas que não são tautologias
- Prova de verdade lógica
  - se se pode provar P sem premissas, P é verdade lógica

Dois princípios

- **Tautologia** (equivale a V):
- $P \vee \neg P$ - *princípio do terceiro excluído*
  - P é verdade ou P é falso e não há outra hipótese

- **Não satisfazível** (equivale a F):
- $P \wedge \neg P$ - *princípio da não contradição*
  - P não pode ser verdade e falso simultaneamente

Úteis nas simplificações de fórmulas complexas

Equivalência lógica e tautológica

- Frases tautológicamente equivalentes
  - equivalentes atendendo apenas ao significado das conetivas
  - … pode ser averiguado na tabela de verdade
    - S e S’ são tautologicamente equivalentes se cada linha da tabela de verdade conjunta lhes atribui os mesmos valores
- Frases tautologicamente equivalentes são logicamente equivalentes
- Algumas equivalências lógicas não são equivalências tautológicas

Consequência lógica e tautológica

- Frase S' é consequência tautológica de S
  - consequência que atende apenas ao significado das conetivas
  - … pode ser averiguada na tabela de verdade
    - S' é consequência tautológica de S se toda a linha da tabela de verdade que atribui V a S atribui o mesmo valor a S'
- As consequências tautológicas são também consequências lógicas
- Algumas consequências lógicas não são consequências tautológicas
  - Ex: a=c é consequência de a=b $\wedge$ b=c

Noções de consequência em Fitch

- Métodos na construção de provas formais com o Fitch
- Consequência Tautológica (Taut Con)
  - consequência que só atende ao significado das conetivas
  - ignora quantificadores e significado dos predicados
- Consequência de 1ª Ordem (FO Con)
  - consequência atende a conetivas, quantificadores e predicado =
- Consequência Analítica (Ana Con)
  - consequência atende a conetivas, quantificadores, predicado = e maioria dos predicados do TW

Quadrado da simulação

- Lógica como "simulação" para obter *novo* conhecimento
  - partir da realidade
  - representar em LPO
  - raciocinar, obter uma conclusão
  - regressar ao equivalente da conclusão na realidade.

Realidade

frases em Língua Natural

representar

Simulação

frases em LPO

inferir

conclusão

novo conhecimento

PROVA COM CONETIVAS BOOLEANAS

Passos válidos usando $\neg$, $\wedge$ e $\vee$

Para cada conetiva: padrões de inferência

- A P pode seguir-se qualquer fórmula que seja sua consequência
  - Ex: (dupla negação) $\neg\neg P$ dá origem a P, e vice-versa
  - eliminação da negação
- Q é verdade lógica: pode introduzir-se em qualquer ponto
- De $P \wedge Q$ infere-se P e infere-se Q
  - eliminação da conjunção
- Tendo provado P e Q pode inferir-se $P \wedge Q$
  - introdução da conjunção
- Tendo provado P pode inferir-se $P \vee Q \vee \ldots R$
  - introdução da disjunção

Métodos de prova

- **Prova por casos** (eliminação da disjunção)
  - Fórmula a provar: F
  - Disjunção já provada: $P \vee Q$
  - Mostra-se que se obtém F se se assumir P, e que se obtém F se se assumir Q; como um deles tem de verificar-se, conclui-se F
  - Generaliza-se a qualquer número de elementos na disjunção
- **Prova por contradição** (introdução da negação)
  - Fórmula a provar: $\neg F$
  - Premissas: P, Q, R, …
  - Assumir F e mostrar que se obtém uma contradição
  - $\neg F$ é consequência lógica das premissas

Prova por casos

- Mostrar que existem números irracionais b e c tais que b^c é racional
- Considera-se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$: é racional ou é irracional
  - Se é racional: temos $b = c = \sqrt{2}$
  - Se é irracional: fazemos $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $c = \sqrt{2}$
    - $b^c = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

      $= \sqrt{2}^{(\sqrt{2}.\ \sqrt{2})}$

      $= \sqrt{2}^2 = 2$
- Quer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja racional ou irracional, existem b e c irracionais tais que b^c é racional

Prova por casos 2

Provar que Small(c) é consequência de

(Cube(c) $\wedge$ Small(c)) $\vee$ (Tet(c) $\wedge$ Small(c)) :

- Prova:

(Cube(c) $\wedge$ Small(c)) $\vee$ (Tet(c) $\wedge$ Small(c)) é premissa

Vamos analisar 2 casos, para os 2 componentes da disjunção

I- Assume-se Cube(c) $\wedge$ Small(c)

Então Small(c) (por eliminação da conjunção)

II- Assume-se Tet(c) $\wedge$ Small(c)

Então Small(c) (por eliminação da conjunção)

- Em qualquer dos casos: obtém-se Small(c)

Prova por casos 3

De (NaSala(rita) $\wedge$ Feliz(rui)) $\vee$ (NaSala(ana) $\wedge$ Feliz(luis))

pretendemos provar Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis)

- Assumindo a disjunção da premissa temos que
  - (NaSala(rita) $\wedge$ Feliz(rui)) ou
  - (NaSala(ana) $\wedge$ Feliz(luis))

No primeiro caso temos Feliz(rui) e portanto

Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis) por introdução de disjunção

No segundo caso temos Feliz(luis) e portanto

Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis) por introdução de disjunção

- Em qualquer dos casos, tem-se a conclusão pretendida

Prova indireta

- Exemplo:
  - Premissas: BackOf(a,b)
  - BackOf(b,c)
  - i) se assumir Cube(a)
    - Não se consegue extrair mais informação
  - ii) se assumir ¬BackOf(a,b)
    - Contradição direta com uma premissa
    - Pode-se concluir o contrário, embora sem valor acrescentado
  - iii) se assumir BackOf(c,a)
    - De BackOf(a,b) e BackOf(b,c) conclui-se BackOf(a,c) e daí ¬BackOf(c,a)
    - Contradição indireta com uma conclusão das premissas
    - Em geral, se há contradição é porque de algum modo a conclusão contrária já está implícita nas premissas e portanto pode ser explicitada

Prova por contradição

- Premissas: Cube(c) $\vee$ Dodec(c) e Tet(b)
- Concluir: b$\neq$c
- Prova:
  - Supondo b=c
  - Da 1ª premissa: Cube(c) ou Dodec(c)

    Se Cube(c) , então Cube(b) (indiscernibilidade dos idênticos)

    o que contradiz Tet(b)

    Se Dodec(c) então Dodec(b) (indiscernibilidade dos idênticos)

    o que contradiz Tet(b)
- Obtemos contradição nos 2 casos, logo contradição.
- Então, b$\neq$c

Prova por contradição 2

- Provar: $\sqrt{2}$ é irracional
  - Factos acerca dos racionais
    - nº racional pode ser expresso como p/q, com pelo menos 1 de p e q ímpar
    - elevando ao quadrado um número ímpar, obtém-se outro ímpar; se n^2 é par, n é par e n^2 é divisível por 4
- Prova:
  - Suposição: $\sqrt{2}$ é racional

  $\sqrt{2} = p/q$ (um de p e q é ímpar)

  $p^2 / q^2 = 2$ ou $p^2 = 2\, q^2$: p^2 é par e p^2 é divisível por 4

  p^2 é divisível por 4, q^2 é divisível por 2; q é par

  p e q ambos pares: contradiz a afirmação incial
- Então $\sqrt{2}$ não é racional

O que é contradição?

- Afirmação que não pode ser verdadeira
- Conjunto de afirmações que não podem ser verdadeiras simultaneamente

  $NaSala(rita) \land \neg NaSala(rita)$

  $b \neq b$

  Cube(c) e Tet(c)
- Conjunto de frases é contraditório se não puder ser satisfeito
- Para provar F usando contradição:

  Assume-se $\neg$ F

  Constrói-se $\neg \neg$ F

  Conclui-se $\neg \neg$ F e portanto F

Premissas inconsistentes

- Conjunto de frases é inconsistente: não existe um mundo no qual possam ser satisfeitas simultaneamente
- Consequência lógica: qualquer fórmula é consequência de um conjunto inconsistente de premissas
  - Argumento é válido trivialmente por não haver nenhuma circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras

$$\mathrm{NaSala(rita)} \lor \mathrm{NaSala(luis)}$$

$$\neg\mathrm{NaSala(rita)}$$

$$\neg\mathrm{NaSala(luis)}$$

- Argumentos com premissas inconsistentes: pouco úteis
  - se não há circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras, não temos indicação quanto ao valor lógico da conclusão – **argumento não é sólido**

Estilo

- Nas provas informais, os passos mencionados devem ser
  - Relevantes, para não aborrecer nem distrair o leitor
  - De fácil compreensão, para serem convincentes

- Significa que as provas devem levar em consideração a quem se destinam

PROVAS FORMAIS

Regras de inferência para $\wedge$

Eliminação da conjunção ($\wedge$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_i
\end{array}
$$

Introdução da conjunção ($\wedge$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \\
 & \Downarrow \\
 & P_n \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n
\end{array}
$$

P_1 $\Downarrow$ P_n significa que todos os elementos P_1 a P_n têm de aparecer na prova antes de se introduzir a conjunção

$\wedge$ nas provas formais

1. $A \wedge B \wedge C$	
2. B	$\wedge$ Elim: 1
3. C	$\wedge$ Elim: 1
4. $C \wedge B \wedge C$	$\wedge$ Intro: 3,2,3

Parêntesis: introduzir quando puder haver ambiguidade

1. $P \vee Q$	
2. R	
3. $(P \vee Q) \wedge R$	$\wedge$ Intro: 1,2

1. $P \vee Q$	
2. R	
3. $P \vee Q \wedge R$	$\wedge$ Intro: 1,2

Regras de inferência para $\vee$

Introdução da disjunção

($\vee$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_i \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n
\end{array}
$$

Eliminação da disjunção

($\vee$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n \\
 & \ldots \\
 & \begin{array}{|l} \underline{P_1} \\ \ldots \\ F \end{array} \\
 & \Downarrow \\
 & \begin{array}{|l} \underline{P_n} \\ \ldots \\ F \end{array} \\
 & \ldots \\
\triangleright & F
\end{array}
$$

Prova por casos

$\vee$ nas provas formais

1. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$	
2. $(A \wedge B)$	
3. B	$\wedge$ Elim: 2
4. $B \vee D$	$\vee$ Intro: 3
5. $(C \wedge D)$	
6. D	$\wedge$ Elim: 5
7. $B \vee D$	$\vee$ Intro: 6
8. $B \vee D$	$\vee$ Elim: 1, 2-4, 5-7

Objetivo: $B \vee D$

Exemplo

1. $P \vee (Q \wedge R)$	
2. P	
3. $P \vee Q$	? Intro: 2
4. $P \vee R$	$\vee$ Intro: ?
5. ?	$\wedge$ Intro: 3,4
6. $Q \wedge R$	
7. Q	$\wedge$ Elim: ?
8. $P \vee Q$	$\vee$ Intro: 7
9. R	?Elim: 6
10. ?	$\vee$ Intro: 9
11. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\wedge$ Intro: 8,10
12. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\vee$ Elim:?, 2-5, 6-?

Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção

Regras de Inferência para $\neg$

Eliminação da negação ($\neg$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \neg\neg P \\
 & \ldots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

Introdução da negação ($\neg$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l}
 \underline{P} \\
 \ldots \\
 \bot
 \end{array} \\
\triangleright & \neg P
\end{array}
$$

Prova por contradição

⊥ Contradição

Introdução da contradição
(⊥ Intro)

$$\begin{array}{l|l} & P \\ & \dots \\ & \neg P \\ & \dots \\ \triangleright & \perp \end{array}$$

Eliminação da contradição
(⊥ Elim)

$$\begin{array}{l|l} & \perp \\ & \dots \\ \triangleright & P \end{array}$$

Teorema 3

Lei de DeMorgan

1. $\neg P \vee \neg Q$	
2. $P \wedge Q$	
3. $\neg P$	
4. P	$\wedge$ Elim: 2
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4,3
6. $\neg Q$	
7. Q	$\wedge$ Elim: 2
8. $\perp$	$\perp$ Intro: 7,6
9. $\perp$	$\vee$ Elim: 1, 3-5, 6-8
10. $\neg(P \wedge Q)$	$\neg$ Intro: 2-9

$\neg(P \wedge Q)$

Estratégia geral de prova por contradição com prova por casos lá dentro

¬ nas provas formais

1. A	
2. ¬ A	
3. ⊥	⊥ Intro: 1,2
4. ¬¬A	¬ Intro: 2-3

Teorema 1

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

com a eliminação da ¬

1. P	
2. ¬ P	
3. ¬Q	
4. ⊥	⊥ Intro: 1,2
5. ¬¬ Q	¬ Intro: 3-4
6. Q	¬ Elim: 5

Prova-se fórmula arbitrária a partir de premissas inconsistentes

Exemplo

Prova de verdade lógica: não tem premissas

1. $P \wedge Q \wedge \neg P$	
2. P	$\wedge$ Elim: 1
3. $\neg P$	$\wedge$ Elim: 1
4. $\perp$	$\perp$ Intro: 2,3
5. $\neg (P \wedge Q \wedge \neg P)$	$\neg$ Intro: 1-4

Uso de subprovas

1. $(B \land A) \lor (A \land C)$
   2. $B \land A$
   3. B — $\land$ Elim: 2
   4. A — $\land$ Elim: 2

   5. $(A \land C)$
   6. A — $\land$ Elim: 5
7. A — $\lor$ Elim: 1, 2-4, 5-6
8. $A \land B$ — $\land$ Intro: 7,3

Errado
8: usa passo 3
de subprova
fechada

- Quando uma subprova é fechada:
- Suposições são descarregadas
- Subprova pode ser usada como um todo para justificar outros passos

Exemplo

Teorema 2

Lei de DeMorgan

1. $\neg(P \wedge R)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg R)$	
3. $\neg P$	
4. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 3
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4,2
6. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 3-5
7. P	$\neg$ Elim: 6
8. $\neg R$	
9. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9,2
11. $\neg\neg R$	$\neg$ Intro: 8-10
12. R	$\neg$ Elim: 11
13. $P \wedge R$	$\wedge$ Intro: 7,12
14. $\neg(P \wedge R)$	Reit: 1
15. $\perp$	$\perp$ Intro: 13,14
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg R)$	$\neg$ Intro: 2-15
17. $\neg P \vee \neg R$	$\neg$ Elim: 16

$\neg P \vee \neg R$

Exercício

Teorema do Cancelamento

1. $P \vee Q$	
2. $\neg P$	
3. P	
4. $\neg Q$	
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 3,2
6. $\neg\neg Q$	$\neg$ Intro: 4-5
7. Q	$\neg$ Elim: 6
8. Q	
9. Q	Reit: 8
10. Q	$\vee$ Elim: 1,3-7,8-9

Q

Estratégia seguida:

- prova por casos incluindo uma prova por contradição no 1º caso

Experimentar:

- prova por contradição com prova por casos

Citar teoremas

- Para encurtar a prova em F : usar resultados prévios

1.	$\neg(P \wedge Q)$	
2.	P	
3.	$\neg P \vee \neg Q$	Teor Prev (Teorema 2): 1
4.	$\neg\neg P$	Teor Prev (Teorema 1): 2
5.	$\neg Q$	Teor Prev (Cancelamento): 3,4

- Símbolos usados nas provas: podem ser substituídos
  - por outros símbolos
  - por fórmulas arbitrárias

Leis distributivas

Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Equivalências úteis nas simplificações de fórmulas:
  - Leis distributivas
  - Leis de DeMorgan
  - Dupla negação
  - Princípios do 3º excluído ($P \vee \neg P \Leftrightarrow V$) e da não contradição ($P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$)
  - Comutatividade, associatividade
  - Elementos neutro ($\wedge$: V, $\vee$: F) e absorvente ($\vee$: V, $\wedge$: F)
  - Cancelamento, …

Formas normais

- Forma normal disjuntiva (DNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como disjunção de conjunções de literais
  - $(P_1 \wedge ... \wedge P_n) \vee (Q_1 \wedge ... \wedge Q_n) \vee \ldots \vee (R_1 \wedge ... \wedge R_n)$

- Forma normal conjuntiva (CNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como conjunção de disjunções de literais
  - $(P_1 \vee ... \vee P_n) \wedge (Q_1 \vee ... \vee Q_n) \wedge \ldots \wedge (R_1 \vee ... \vee R_n)$

Exemplo

Transformar em forma normal disjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \vee B) \wedge (C \vee D) &\Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge D] \\
&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee [(A \vee B) \wedge D] \\
&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)
\end{aligned}
$$

Transformar em forma normal conjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee C] \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\
&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\
&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)
\end{aligned}
$$

Completude para as funções da verdade

- Uma conetiva arbitrária pode ser expressa com $\neg$, $\wedge$ e $\vee$?
- Conetivas binárias: tabela de verdade tem 4 linhas
  - cada linha pode ter V ou F
  - número de conetivas possíveis: 2^4

P	Q	P $*$ Q
V	V	valor1
V	F	valor2
F	V	valor3
F	F	valor4

$C_1 = P \wedge Q$

$C_2 = P \wedge \neg Q$

$C_3 = \neg P \wedge Q$

$C_4 = \neg P \wedge \neg Q$

Representação de *: disjunção dos C_i correspondentes a linhas com valor V

Todas as funções binárias funcionais da verdade podem ser descritas com $\neg$, $\wedge$ e $\vee$

Completude para as funções da verdade

- Conetivas unárias

P	$\#P$
V	valor1
F	valor2

Ambos os valores F: $P \wedge \neg P$
Outros casos: disjunção de
$C_1 = P$ e $C_2 = \neg P$

- Conetivas de outras aridades

P	Q	R	@(P,Q,R)
V	V	V	F
V	V	F	V
⋮	⋮	⋮	⋮

Exprimir conetiva em DNF:
$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \ldots$

- Bastam, e.g., $\neg$ e $\wedge$: $P \vee Q \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg P \wedge \neg Q)$