Lógica Proposicional-2

Conetivas Booleanas

Provas informais e formais com conetivas Booleanas

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011

Capítulos: 3-4-5-6

Conetivas lógicas

- Construir fórmulas arbitrárias a partir de fórmulas atómicas
- Conjunção, disjunção e negação: são funcionais da verdade
  - valor de verdade de afirmações complexas só depende do valor de verdade das frases atómicas
- Significado de conetiva: tabela de verdade
  - mostra como o valor de verdade de uma fórmula construída com ela depende dos valores de verdade dos seus constituintes
- Significado de conetiva: jogo de Henkin-Hintikka
  - Egas e Becas não concordam no valor de verdade de uma frase complexa
  - Egas: diz que é verdadeira; Becas: diz que é falsa
  - Jogadores desafiam-se a justificar as suas afirmações em termos de afirmações mais simples
  - Chegando às fórmulas atómicas, pode examinar-se o mundo e verificar o seu valor lógico

Jogar com o Mundo de Tarski

- Máquina faz papel de adversário e tenta ganhar mesmo quando o jogador faz uma afirmação verdadeira
- Se o jogador faz afirmação falsa:
  - Máquina ganha, pondo em evidência falhas no raciocínio
- Se o jogador faz afirmação verdadeira:
  - Máquina perde se o jogador é capaz de justificar as suas escolhas até às fórmulas atómicas
  - Máquina pode ganhar se alguma das justificações intermédias para a afirmação for mal escolhida

Negação

- Símbolo: ¬
- LN: *não… não se verifica que… nenhum… in- des-*
  - *A Rita não está na sala*
  - *Não se verifica o facto de a Rita estar na sala*
- ¬NaSala(rita)
  - Quando é verdade: quando NaSala(rita) é falso
- LN: dupla negativa tem sentido de negativa reforçada
  - Não faz diferença nenhuma
  - Interpretado como *Não faz diferença alguma*, e não como *Faz alguma diferença*
- LPO: ¬¬ NaSala(rita) é V quando NaSala(rita) for V
- = tem abreviatura para negação: $a \neq b$ em vez de $\neg(a=b)$

¬: Semântica e regra do jogo

- Fórmula P de LPO: existe sempre ¬P
- **¬P é verdadeiro se e só se P é falso**
- Tabela de verdade

P	¬P
V	F
F	V

- Regra do jogo: não se faz nada :)
- Quando afirmamos a verdade de ¬P, comprometemo-nos com a falsidade de P e vice-versa
- Tarski´s World: reduz a afirmação negativa à positiva e troca o valor lógico escolhido

Conjunção

- Símbolo: $\wedge$
- LN: *e… e também… mas...*

  Rita e Luis estão na sala
- NaSala(rita) $\wedge$ NaSala(luis)
  - Verdadeira se Rita está na sala e Luis está na sala
- LN: ‘e’ é mais expressivo que $\wedge$:

  Rita entrou na sala e Luis saiu da sala

  Luis saiu da sala e Rita entrou na sala

Entra(rita) $\wedge$ Sai(luis)
Sai(luis) $\wedge$ Entra(rita)

Verdadeiras nas mesmas circunstâncias

$\wedge$: Semântica e regra do jogo

- **P $\wedge$ Q é verdadeiro sse P é verdadeiro e Q é verdadeiro**
- Tabela de verdade

P	Q	P $\wedge$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Regra do Jogo:
  - Se afirmamos V para P $\wedge$ Q, afirmamos a verdade de P e de Q
    - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a verdade deste
    - Se um deles é falso: escolhe esse
    - Se são ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária
  - Se afirmamos F para P $\wedge$ Q: afirmamos que pelo menos um é falso
    - Máquina pede para nos comprometermos com o valor F para um deles

Disjunção

- Símbolo: $\lor$
- LN: *ou…* (entre frases ou entre componentes destas)

  A Rita ou o Luis estão na sala

  Significado corrente é <u>inclusivo</u>
- LPO: disjunção só entre frases

  NaSala(rita) $\lor$ NaSala(luis)

  ~~NaSala(rita $\lor$ luis)~~

  Significado é inclusivo
- LN: significado exclusivo com *ou* … *ou*
- Exclusivo em LPO:

  [NaSala(rita) $\lor$ NaSala(luis)] $\land$ $\neg$[NaSala(rita) $\land$ NaSala(luis)]
- *nem* … *nem*

  $\neg$ [- $\lor$ -]

$\vee$: Semântica e regra do jogo

- **P $\vee$ Q é verdadeiro se pelo menos um de P e Q é verdadeiro, senão é falso**
- Tabela de verdade:

P	Q	P $\vee$ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Regra do Jogo:
  - Se afirmamos V para P $\vee$ Q
    - Máquina pede para nos comprometermos com o valor V para um deles
  - Se afirmamos F para P $\vee$ Q: afirmamos que ambos são falsos
    - Máquina escolhe P ou Q e compromete-nos com a falsidade deste
    - Se um só deles é verdadeiro: escolhe esse
    - Se ambos verdadeiros ou ambos falsos: escolha arbitrária

Regras do jogo

Forma	**Afirmação**	**Quem joga**	**Objetivo**
$P \vee Q$	V F	nós Tarski's World	Escolher um de P e Q verdadeiro
$P \wedge Q$	V F	Tarski's World nós	Escolher um de P e Q falso
$\neg P$	V F	-	Mudar de $\neg P$ para P e trocar valor lógico escolhido

Nota: podemos saber o valor lógico de $P \vee Q$ e não saber os valores lógicos de P nem de Q

O jogo assume conhecimento completo sobre o mundo

Ambiguidade e parênteses

- LN: ambiguidade é comum

  A Rita está na sala ou o Luis está na sala e o Rui está distraído

- LPO:

  [NaSala(rita) $\lor$ NaSala(luis)] $\land$ Distraido(rui)

  NaSala(rita) $\lor$ [NaSala(luis) $\land$ Distraido(rui)]

- Negação: parêntesis delimitam alcance

  $\neg$NaSala(rita) $\lor$ NaSala(luis)

  $\neg$[NaSala(rita) $\lor$ NaSala(luis)]

- Critério dos parêntesis
  - Conjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
  - Disjunção de qualquer número de frases: sem parêntesis
  - Parêntesis extra usados livremente para obter significado pretendido

VERDADE E CONSEQUÊNCIA

Equivalência lógica

- P e Q são logicamente equivalentes: verdadeiras exatamente nas mesmas circunstâncias

$$P \Leftrightarrow Q$$

- Tarski's World:
  - P e Q logicamente equivalentes: verdadeiras nos mesmos mundos
  - Existe um mundo no qual uma é verdadeira e outra falsa: não são logicamente equivalentes

Leis de DeMorgan

$$\neg (R \wedge S) \quad \Leftrightarrow \quad \neg R \vee \neg S$$

$$\neg (R \vee S) \quad \Leftrightarrow \quad \neg R \wedge \neg S$$

Equivalência lógica

- **Dupla negação** $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
- Frases logicamente equivalentes: cada uma é consequência lógica da outra
- Usando dupla negação e leis de DeMorgan: qualquer fórmula escrita com $\wedge$, $\vee$, $\neg$ se transforma noutra com $\neg$ aplicada apenas nas fórmulas atómicas - **forma normal com negação**

$$\begin{aligned}\neg((A \vee B) \wedge \neg C) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee C\end{aligned}$$

- **Literal**: fórmula atómica ou negação de uma fórmula atómica
- Notar: $\Leftrightarrow$ não é símbolo da linguagem: é uma forma abreviada de dizer que duas fórmulas são logicamente equivalentes

Equivalências lógicas

- Idempotência do $\wedge$:

  $P \wedge Q \wedge P \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge Q$

- Idempotência do $\vee$:

  $P \vee Q \vee P \quad \Leftrightarrow \quad P \vee Q$

- Comutatividade do $\wedge$:

  $P \wedge Q \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad Q \wedge P \wedge R$

- Comutatividade do $\vee$:

  $P \vee Q \vee R \quad \Leftrightarrow \quad Q \vee P \vee R$

Leis distributivas

Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Equivalências úteis nas simplificações de fórmulas:
  - Idempotência
  - Leis distributivas
  - Leis de DeMorgan
  - Dupla negação
  - Princípios do 3º excluído ($P \vee \neg P \Leftrightarrow V$) e da não contradição ($P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$)
  - Comutatividade, associatividade
  - Elementos neutro ($\wedge$: V, $\vee$: F) e absorvente ($\vee$: V, $\wedge$: F)
  - Cancelamento, …

Formas normais

- Forma normal disjuntiva (DNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como disjunção de conjunções de literais
  - $(P_1 \wedge ... \wedge P_n) \vee (Q_1 \wedge ... \wedge Q_n) \vee \ldots \vee (R_1 \wedge ... \wedge R_n)$

- Forma normal conjuntiva (CNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como conjunção de disjunções de literais
  - $(P_1 \vee ... \vee P_n) \wedge (Q_1 \vee ... \vee Q_n) \wedge \ldots \wedge (R_1 \vee ... \vee R_n)$

Exemplo

Transformar em forma normal disjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \vee B) \wedge (C \vee D) &\Leftrightarrow [(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge D] \\
&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee [(A \vee B) \wedge D] \\
&\Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)
\end{aligned}
$$

Transformar em forma normal conjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (C \wedge D) &\Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee C] \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\
&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge [(A \wedge B) \vee D] \\
&\Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)
\end{aligned}
$$

Tradução de língua natural

- Frases em LN e em LPO: têm o mesmo significado se tiverem o mesmo valor lógico em todas as circunstâncias
- Se a fórmula A é tradução de uma frase então B, logicamente equivalente a A, também é tradução dessa frase
- Mas…

  Algumas traduções são mais fiéis ao estilo da afirmação inicial

  Ex: *Não é verdade que a Rita e o Luis estejam ambos na sala*

  (1) $\neg(\text{NaSala(rita)} \wedge \text{NaSala(luis)})$

  (2) $\neg\text{NaSala(rita)} \vee \neg\text{NaSala(luis)}$

  (1) é fiel ao estilo da frase em LN

  (2) não é fiel ao estilo

Satisfação e verdade lógica

- Fórmula satisfazível (logicamente possível):
  - pode ser verdadeira, de um ponto de vista lógico

  ou - há alguma circunstância logicamente possível na qual é verdadeira
- Conjunto de fórmulas é **satisfazível**

existe circunstância possível na qual as fórmulas são simultaneamente verdadeiras

Não basta cada uma ser satisfazível:

NaSala(rita) ∨ NaSala(luis)

¬NaSala(rita)

¬NaSala(luis)

- Tarski's World:
  - frase é satisfazível se se pode construir um mundo em que é verdadeira
    - chama-se-lhe TW-satisfazível
- Mas…
  - há frases logicamente satisfazíveis que não podem tornar-se verdadeiras nos mundos do Tarski's World:
    - ¬ (Tet(b) ∨ Cube(b) ∨ Dodec(b)) não é TW-satisfazível

Fórmula logicamente verdadeira

- Fórmula que é verdadeira qualquer que seja o mundo

  NaSala(rita) ∨ ¬NaSala(rita)

  ¬(Atento(luis) ∧ ¬Atento(luis))

  ¬[(Atento(luis) ∨ Atento(rui)) ∧ ¬Atento(luis) ∧ ¬Atento(rui)]
- P logicamente verdadeiro: ¬ P não é satisfazível
- Averiguar satisfação e verdade lógica: tabela de verdade
- (Cube(a) ∧ Cube(b)) ∨ ¬Cube(c)   (A ∧ B) ∨ ¬C

A	B	C	(A ∧ B) ∨ ¬C
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Decidir satisfação de fórmula

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\vee$	$\neg C$
V	V	V	V		F
V	V	F	V		V
V	F	V	F		F
V	F	F	F		V
F	V	V	F		F
F	V	F	F		V
F	F	V	F		F
F	F	F	F		V

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\vee$	$\neg C$
V	V	V	V	**V**	F
V	V	F	V	**V**	V
V	F	V	F	**F**	F
V	F	F	F	**V**	V
F	V	V	F	**F**	F
F	V	F	F	**V**	V
F	F	V	F	**F**	F
F	F	F	F	**V**	V

Tautologia

- **Linhas espúrias**: não representam possibilidades genuínas
  - Ex: A é fórmula atómica a=a

    A segunda metade da 1ª coluna da tabela é espúria: a=a não pode ser falso
  - Ex: A é Tet(c)

    Linhas que têm V para A e para C são espúrias porque c não pode ser tetraedro e cubo
- Investigar **verdade lógica**: linhas espúrias são ignoradas
- Reconhecer linhas espúrias:
  - pelo significado das fórmulas atómicas
- Mais forte que verdade lógica: **tautologia**
  - fórmula verdadeira em todas as linhas, espúrias ou não
  - Tautologias são verdades lógicas, algumas verdades lógicas não são tautologias (a=a)

Tautologia e verdade lógica

F: fórmula construída a partir de fórmulas atómicas com conetivas

Tabela de verdade para F mostra como o seu valor lógico depende do das suas partes atómicas

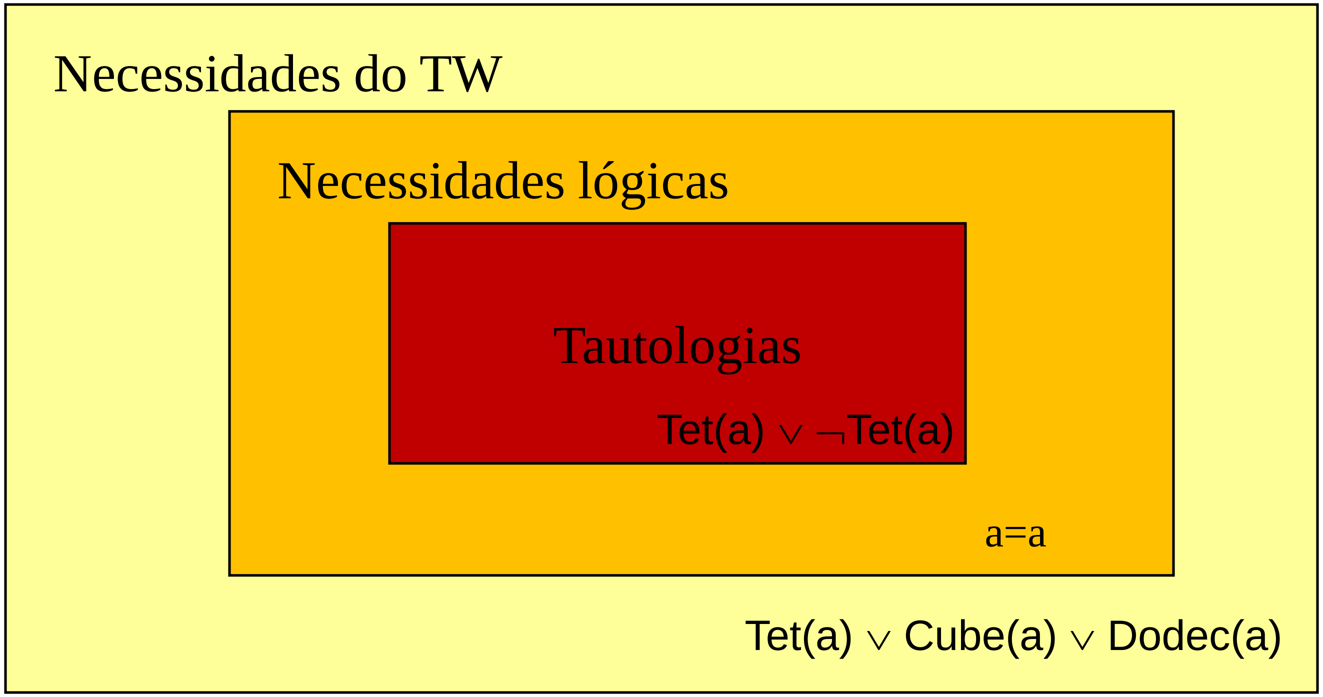
F é **tautologia** se e só se toda a linha lhe atribui V

F é **satisfazível** (possibilidade lógica) se e só se há pelo menos uma linha não espúria que lhe atribui V

F é **logicamente verdadeira** (necessidade lógica) se e só se todas as linhas não espúrias lhe atribuem V

F é TW-satisfazível (TW-possível) se existe um mundo TW que a torna verdadeira

Classificação de fórmulas



- Toda a tautologia é uma verdade lógica
- Há verdades lógicas que não são tautologias
- Prova de verdade lógica
  - se se pode provar P sem premissas, P é verdade lógica

Dois princípios

- **Tautologia** (equivale a V):
- $P \lor \neg P$ - *princípio do terceiro excluído*
  - P é verdade ou P é falso e não há outra hipótese

- **Não satisfazível** (equivale a F):
- $P \land \neg P$ - *princípio da não contradição*
  - P não pode ser verdade e falso simultaneamente

Úteis nas simplificações de fórmulas complexas

Equivalência lógica e tautológica

- Frases tautologicamente equivalentes
  - equivalentes atendendo apenas ao significado das conetivas
  - … pode ser averiguado na tabela de verdade
    - S e S’ são tautologicamente equivalentes se cada linha da tabela de verdade conjunta lhes atribui os mesmos valores
- Frases tautologicamente equivalentes são logicamente equivalentes
- Algumas equivalências lógicas não são equivalências tautológicas

Consequência lógica e tautológica

- Frase S' é consequência tautológica de S
  - consequência que atende apenas ao significado das conetivas
  - … pode ser averiguada na tabela de verdade
    - S' é consequência tautológica de S se toda a linha da tabela de verdade que atribui V a S atribui o mesmo valor a S'
- As consequências tautológicas são também consequências lógicas
- Algumas consequências lógicas não são consequências tautológicas
  - Ex: a=c é consequência de a=b $\wedge$ b=c

Noções de consequência em Fitch

- Métodos na construção de provas formais com o Fitch
- Consequência Tautológica (Taut Con)
  - consequência que só atende ao significado das conetivas
  - ignora quantificadores e significado dos predicados
- Consequência de 1ª Ordem (FO Con)
  - consequência atende a conetivas, quantificadores e predicado =
- Consequência Analítica (Ana Con)
  - consequência atende a conetivas, quantificadores, predicado = e maioria dos predicados do TW

Quadrado da simulação

- Lógica como “simulação” para obter *novo* conhecimento
  - partir da realidade
  - representar em LPO
  - raciocinar, obter uma conclusão
  - regressar ao equivalente da conclusão na realidade.