

# Eletricidade & Magnetismo

(2013-2014)

## Proposta de Resolução do Relatório Individual de Laboratório

10 de dezembro de 2013

Versão A & Versão B

### 1) Eletroestática

[3 valores]

Quando o aluno eletriza por fricção uma barra de **acrílico** / **PVC** esta fica carregada **positivamente** / **negativamente** na zona em que foi friccionada. O pano usado fica por sua vez carregado com carga oposta.

Inicialmente o eletroscópio encontra-se descarregado. Ao aproximar a barra da cabeça do eletroscópio, por indução eletrostática, esta fica carregada **negativamente** / **positivamente**. Como há um fluxo de cargas **negativas** / **positivas** para a cabeça do eletroscópio, as palhetas (na outra extremidade) ficam com excesso de cargas **positivas** / **negativas**.

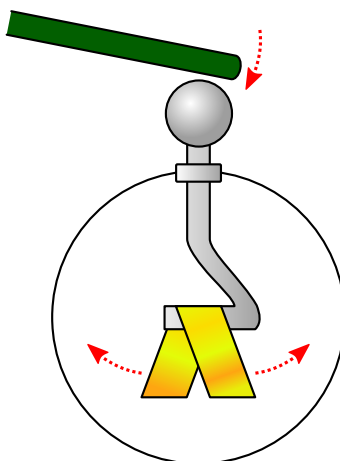


Figura 1: Eletroscópio de palhetas.

Como as duas palhetas finas e de massa muito pequena ficam ambas carregadas com a mesma carga, devido à força eletrostática repulsiva entre as cargas de mesmo sinal, as palhetas afastam-se uma da outra (Fig. 1). Este fenómeno ocorre, independentemente da carga induzida, logo é impossível avaliar o sinal da carga induzida na cabeça do eletroscópio.

Ao tocar com a barra de **acrílico** / **PVC** na cabeça do eletroscópio, como são de material mau condutor, as cargas presentes na cabeça não irão fluir totalmente para a barra. Ao afastar-se a barra da cabeça, o eletroscópio tende para o equilíbrio eletrostático. Se parte da carga tiver sido descarregada pela barra aquando do contacto, uma carga residual permanece nas palhetas e elas permanecem afastadas.

### 2) Circuitos de corrente contínua

[2 valores]

Determinar o circuito equivalente de Thévenin consiste em simplificar o circuito esquematizado na Fig. 1 do enunciado num circuito constituído por uma fonte de tensão ligada em série com uma resistência, como mostra a Fig. 2.

Para determinar  $V_{Th}$  precisamos de calcular a queda de tensão, em circuito aberto, entre os nodos  $A$  e  $B$  do circuito original e para determinar  $R_{Th}$  "curto-circuita-se" a fonte de tensão do circuito original e determina-se a resistência equivalente entre os mesmos nodos.

Em ambas as versões, no circuito original encontram-se duas resistências associadas em paralelo de  $2.2\text{ k}\Omega$  e de  $220\text{ }\Omega$ . A resistência equivalente à associação de ambas será:

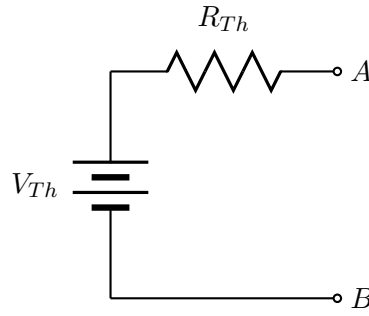


Figura 2: Circuito equivalente de Thévenin

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{220} + \frac{1}{2.2 \times 10^3}} = \frac{1}{\frac{2.2 \times 10^3 + 220}{220 \times 2.2 \times 10^3}} = \frac{220 \times 2.2 \times 10^3}{2.2 \times 10^3 + 220} = 200 \, \Omega$$

Logo, por uma questão de simplificação, em ambas as versões esta associação em paralelo pode ser substituída por uma resistência de  $200 \, \Omega$ .

$R_{Th}$  :

Se substituirmos a fonte de tensão por um curto-circuito e tendo em conta a simplificação anterior, o circuito original terá a disposição de resistências da Fig. 3.

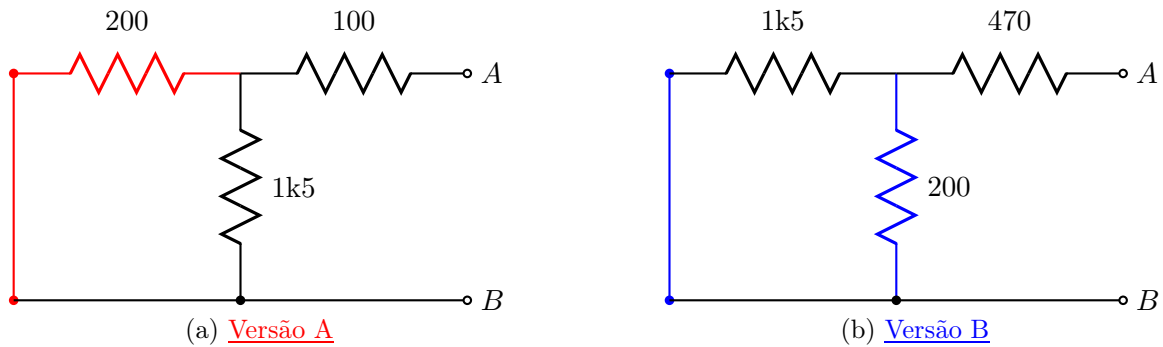


Figura 3: Associação de resistências para determinar  $R_{Th}$

Nestas condições, a resistência equivalente de  $200 \, \Omega$  encontra-se associada em paralelo com a resistência de  $1.5 \, k\Omega$ , que por sua vez encontram-se ambas associadas em série com a resistência de  $100 \, \Omega$  /  $470 \, \Omega$ . Vamos então definir  $R'_{eq} = 200 \parallel 1k5$ ,

$$R'_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{1}{1.5 \times 10^3}} = \frac{1}{\frac{1.5 \times 10^3 + 200}{200 \times 1.5 \times 10^3}} = \frac{200 \times 1.5 \times 10^3}{1.5 \times 10^3 + 200} = \frac{3000}{17} \, \Omega$$

Versão A :

$$R_{Th} = \frac{3000}{17} + 100 = \frac{4700}{17} \Rightarrow \boxed{R_{Th} \approx 276 \, \Omega}$$

Versão B :

$$R_{Th} = \frac{3000}{17} + 470 = \frac{10990}{17} \Rightarrow \boxed{R_{Th} \approx 646 \, \Omega}$$

$V_{Th}$  :

Como a tensão de Thévenin ( $V_{Th}$ ) é a tensão em circuito aberto entre os nodos  $A$  e  $B$ , logo não existe corrente a fluir na resistência de  $100 \, \Omega$  /  $470 \, \Omega$ . Assim não ocorre uma quebra de tensão nesta resistência.

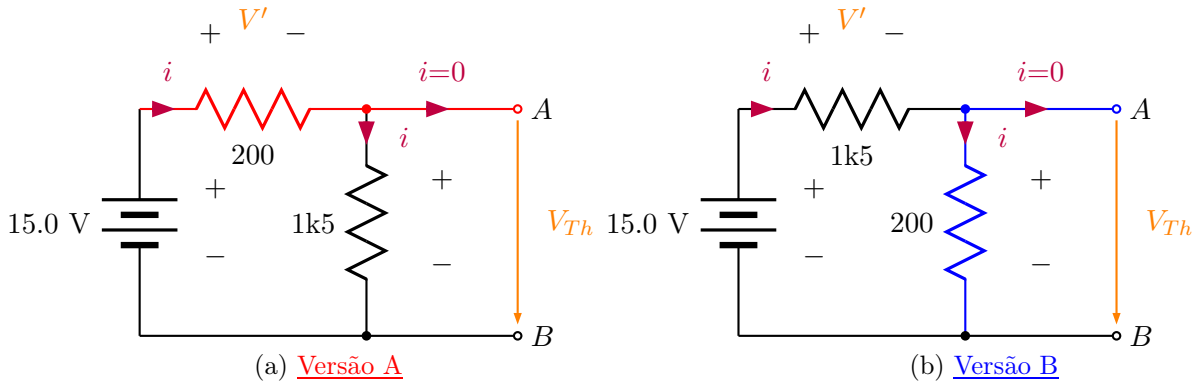


Figura 4: Análise do divisor resistivo para determinar  $V_{Th}$

Para a determinação de  $V_{Th}$ , necessitamos apenas de analisar o circuito da Fig. 4, que nas aulas práticas vulgarmente denominávamos por divisor resistivo.

Usando as leis de Kirchhoff para analisar o circuito da Fig. 4, verificamos que a corrente  $i$  que flui na resistência de  $200 \Omega$  é igual à corrente que flui na resistência de  $1.5 \text{ k}\Omega$ , logo obtemos a seguinte igualdade a partir da lei de Ohm,

Versão A :

$$i = \frac{V'}{200} = \frac{V_{Th}}{1.5 \times 10^3} \Rightarrow V' = \frac{200}{1.5 \times 10^3} V_{Th}$$

Versão B :

$$i = \frac{V'}{1.5 \times 10^3} = \frac{V_{Th}}{200} \Rightarrow V' = \frac{1.5 \times 10^3}{200} V_{Th}$$

A partir da lei das malhas, a totalidade das subidas/quedas de tensão ao longo de uma malha têm de se anular, logo

$$15.0 - V' - V_{Th} = 0 \Leftrightarrow V' = 15.0 - V_{Th}$$

Igualando a expressão anterior com a obtida a partir da lei dos nós,

Versão A :

$$\frac{200}{1.5 \times 10^3} V_{Th} = 15.0 - V_{Th} \Leftrightarrow \frac{200}{1.5 \times 10^3} V_{Th} + V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow \left[ \frac{200}{1.5 \times 10^3} + 1 \right] V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{200 + 1.5 \times 10^3}{1.5 \times 10^3} V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow V_{Th} = 15.0 \frac{1.5 \times 10^3}{200 + 1.5 \times 10^3} \Leftrightarrow V_{Th} = \frac{225}{17} \Rightarrow \boxed{V_{Th} \approx 13.2 \text{ V}}$$

Versão B :

$$\frac{1.5 \times 10^3}{200} V_{Th} = 15.0 - V_{Th} \Leftrightarrow \frac{1.5 \times 10^3}{200} V_{Th} + V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow \left[ \frac{1.5 \times 10^3}{200} + 1 \right] V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{200 + 1.5 \times 10^3}{200} V_{Th} = 15.0 \Leftrightarrow V_{Th} = 15.0 \frac{200}{200 + 1.5 \times 10^3} \Leftrightarrow V_{Th} = \frac{30}{17} \Rightarrow \boxed{V_{Th} \approx 1.76 \text{ V}}$$

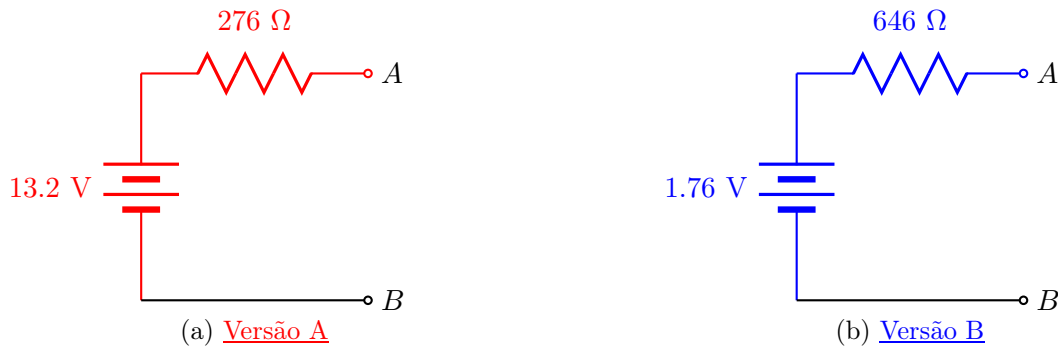


Figura 5: Circuitos equivalentes aos circuitos originais.

O circuito equivalente de Thévenin do original será então o representado na Fig. 5.

### 3) Bobinas de Helmholtz

a)

[3 valores]

O efeito de Hall consiste na produção de uma diferença de potencial (Tensão de Hall) através de um condutor elétrico, geralmente um semicondutor, transversal à corrente elétrica no condutor e a um campo magnético perpendicular à corrente (ver Fig.6).

Num semicondutor, esta corrente é devida aos portadores de carga majoritários, tipicamente eletrões (carga negativa) ou lacunas (carga positiva). Quando um campo magnético está presente e não é paralelo à direção de movimento dos portadores de carga, estes sofrem a ação de uma força (força de Lorentz). Na ausência de tal campo magnético, os portadores de carga fluiriam aproximadamente em trajetória retilínea. Contudo, quando um campo magnético com uma componente perpendicular é aplicado, a sua trajetória tende a curvar de modo que as cargas começam a acumular numa das faces do material. Por consequência, cargas de sinal oposto acumularão na face oposta. O resultado é uma distribuição assimétrica de densidade de carga ao longo do elemento do condutor, simultaneamente perpendicular à corrente de portadores de carga e do campo magnético aplicado. A separação de cargas estabelece um campo elétrico que se opõe à evolução da migração de carga, logo em equilíbrio uma diferença de potencial elétrico é estabelecida desde que se mantenha o fluxo de portadores de carga. Esta diferença de potencial é proporcional à componente perpendicular do campo magnético aplicado.

b)

[2,5 valores]

A partir dos valores experimentais fornecidos e usando a expressão do campo magnético no interior do solenoide  $B_S$ , a representação gráfica da tensão de Hall  $V_H$  em função de  $B_S$  encontra-se na Fig. 7. Notem que os pontos experimentais têm uma barra de erro ao longo de  $x$ . Isto deve-se ao facto de o campo magnético não ser uma medição direta mas sim um calculo a partir da corrente efetivamente medida. Este cálculo está sujeito a uma incerteza que reflete assim as barras de erro representadas. Este aspeto é puramente opcional, não sendo exigida aquando da realização do relatório individual.

Para a calibração deverão recordar o final da resposta à alínea anterior. O objetivo da calibração da sonda é determinar a constante de proporcionalidade entre o campo magnético  $B_S$  e a tensão de Hall  $V_H$ .

$$B_S = C_c V_H$$

Como podem verificar não podemos obter a constante de calibração  $C_c$  aplicando diretamente o método dos mínimos desvios quadráticos (MMDQ) dos dados apresentados na Fig. 7.

Esta era uma das "rasteiras" presentes do enunciado!

Mas se fizerem corresponder  $V_H$  à variável  $x$ ,  $B_S$  à variável  $y$  e aproximarem os valores experimentais a uma reta do tipo  $y = mx + b$  pelo MMDQ, rapidamente obtemos a igualdade  $C_c \pm \Delta C_c = m \pm \Delta m$ .

Em resultado do MMDQ, obteriam os seguintes parâmetros:

$$m \pm \Delta m = \boxed{C_c \pm \Delta C_c = 38.2 \pm 0.2 \text{ (mT/V)}}$$

$$b \pm \Delta b = 34.5 \pm 11.2 \text{ (}\mu\text{V)}$$

$$r^2 = 0.99967692$$

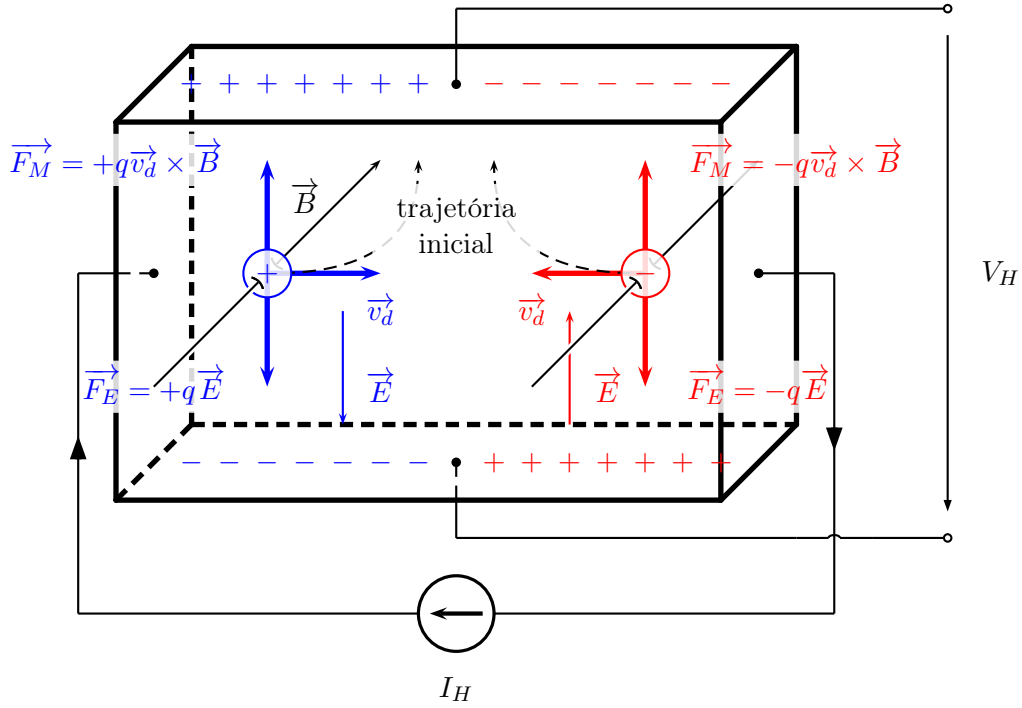


Figura 6: Efeito de Hall num semicondutor.

c)

[2 valores]

Inicialmente precisamos de obter o campo magnético produzido pela bobina. Para isso recorreremos à constante de calibração obtida na alínea anterior,

$$B_{\text{bobina}} = C_c V_H \Rightarrow B_{\text{bobina}} = 38.2 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-3} = 1.91 \text{ mT}$$

$$\Delta B_{\text{bobina}} = \sqrt{\left[ \frac{\partial B_{\text{bobina}}}{\partial C_c} \Delta C_c \right]^2 + \left[ \frac{\partial B_{\text{bobina}}}{\partial V_H} \Delta V_H \right]^2} = \sqrt{[V_H \Delta C_c]^2 + [C_c \Delta V_H]^2} \Rightarrow$$

$$\Delta B_{\text{bobina}} = 0.04 \text{ mT}$$

$$B_{\text{bobina}} \pm \Delta B_{\text{bobina}} = 1.91 \pm 0.04 \text{ (mT)}$$

Para determinar o campo magnético produzido por uma espira usa-se a expressão fornecida. O máximo do campo ocorre no plano da espira ( $x = 0$ ) logo,

$$B_{\text{espira}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + 0)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{R^3} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \Rightarrow B_{\text{espira}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.50}{2 \times 3.5 \times 10^{-2}} = 8.98 \text{ } \mu\text{T}$$

$$\Delta B_{\text{espira}} = \sqrt{\left[ \frac{\partial B_{\text{espira}}}{\partial I} \Delta I \right]^2 + \left[ \frac{\partial B_{\text{espira}}}{\partial R} \Delta R \right]^2} = \mu_0 \sqrt{\left[ \frac{\Delta I}{2R} \right]^2 + \left[ -\frac{I \Delta R}{2R^2} \right]^2} \Rightarrow$$

$$\Delta B_{\text{espira}} = 4\pi \times 10^{-7} \sqrt{\left[ \frac{0.01}{2 \times 3.5 \times 10^{-2}} \right]^2 + \left[ -\frac{0.50 \times 0.1 \times 10^{-2}}{2 (3.5 \times 10^{-2})^2} \right]^2} = 0.31 \text{ } \mu\text{T}$$

$$B_{\text{espira}} \pm \Delta B_{\text{espira}} = 8.98 \pm 0.31 \text{ (}\mu\text{T)}$$

Por uma questão de simplificação vamos supor que todas as espiras da bobina estão no mesmo plano. Como o campo magnético obedece ao princípio da sobreposição, penso que será claro que facilmente obtemos a igualdade,

$$B_{\text{bobina}} = n B_{\text{espira}} \Leftrightarrow n = \frac{B_{\text{bobina}}}{B_{\text{espira}}},$$

em que  $n$  é o número de espiras.

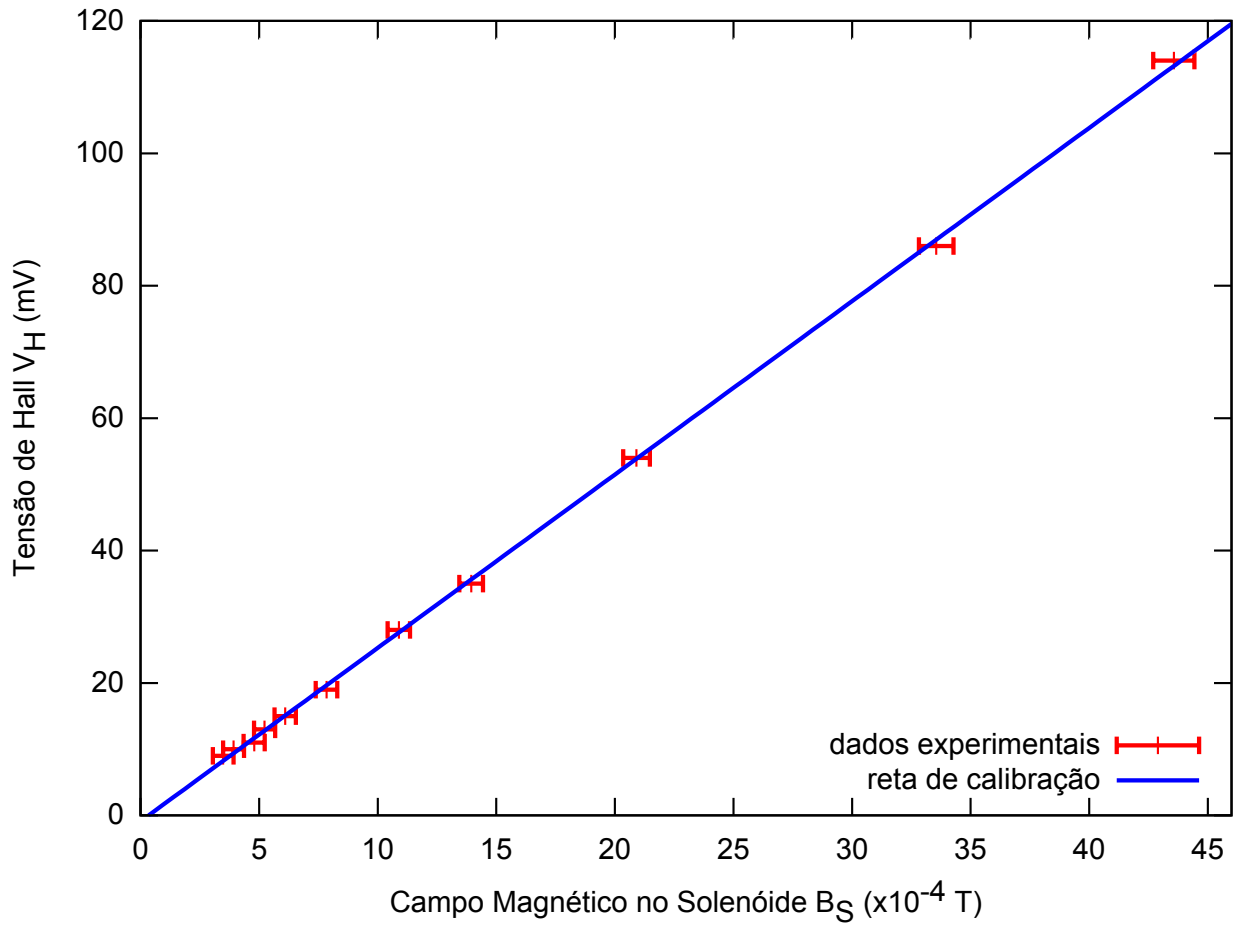


Figura 7: Tensão de Hall em função do campo magnético no interior do solenoide.

$$n = \frac{B_{\text{bobina}}}{B_{\text{espira}}} \Rightarrow n = \frac{1.91 \times 10^{-3}}{8.98 \times 10^{-6}} = 213 \text{ espiras}$$

$$\Delta n = \sqrt{\left[ \frac{\partial n}{\partial B_{\text{bobina}}} \Delta B_{\text{bobina}} \right]^2 + \left[ \frac{\partial n}{\partial B_{\text{espira}}} \Delta B_{\text{espira}} \right]^2} = \sqrt{\left[ \frac{\Delta B_{\text{bobina}}}{B_{\text{espira}}} \right]^2 + \left[ -\frac{B_{\text{bobina}} \Delta B_{\text{espira}}}{(B_{\text{espira}})^2} \right]^2} \Rightarrow$$

$$\Delta n = \sqrt{\left[ \frac{0.04 \times 10^{-3}}{8.98 \times 10^{-6}} \right]^2 + \left[ -\frac{1.91 \times 10^{-3} \times 0.31 \times 10^{-6}}{(8.98 \times 10^{-6})^2} \right]^2} = 9 \text{ espiras}$$

$$n = 213 \pm 9 \text{ (espiras)}$$

#### 4) Indução

a)

[2,5 valores]

Primeiro analisamos o Canal A (Fig. 2 do enunciado) onde se observa o sinal do *primário*. Precisamos de estimar  $\frac{di}{dt}$ , mas como o osciloscópio não mede variações de corrente, medimos a variação de tensão numa resistência conhecida de  $100 \Omega$ .

$$\Delta t \approx 4.0 \text{ div} \times 0.15 \text{ ms/div} \approx 0.60 \text{ ms}$$

$$\Delta V \approx 8.0 \text{ div} \times 1.0 \text{ V/div} \approx 8.0 \text{ V}$$

Aplicando a lei de Ohm,

$$\Delta V = R \Delta I \Leftrightarrow \Delta I = \frac{\Delta V}{R} \approx 80 \text{ mA}$$

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} \approx 133 \text{ A/s}}$$

f.e.m.:

Para determinar experimentalmente a f.e.m. induzida no *secundário* basta determinar a amplitude do sinal medido pelo Canal B do osciloscópio (Fig. 2 do enunciado), contudo o enunciado tem mais uma "rasteira". Como podiam verificar pelo parâmetro "OffsetB" o zero não estava bem definido.

$$2\varepsilon = 3.0 \text{ div} \times 0.2 \text{ V/div} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0.3 \text{ V}}$$

$M$ :

$$\varepsilon = M \frac{di}{dt} \Rightarrow M = \frac{\varepsilon}{\frac{di}{dt}}$$

$$M_{\text{experimental}} = \frac{0.3}{133} \Rightarrow \boxed{M_{\text{experimental}} = 2.26 \text{ mH}}$$

A partir da Eq. 3 do enunciado,

$$\frac{\varepsilon}{\frac{di}{dt}} = M_{\text{teórico}} = \pi \mu_0 \frac{N}{l} r^2 N_b \Rightarrow M_{\text{teórico}} = \pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3000 \times (1.38 \times 10^{-2})^2 \times 1200 \Rightarrow$$

$$\boxed{M_{\text{teórico}} = 2.71 \text{ mH}}$$

Alguns autores comparam valores experimentais com valores previstos para uma grandeza através de uma exactidão definida da seguinte forma:

$$\left| \frac{M_{\text{experimental}} - M_{\text{teórico}}}{M_{\text{teórico}}} \right| = \left| \frac{2.26 - 2.71}{2.71} \right| \approx 17\%$$

b)

[2,5 valores]

Para esboçar o sinal induzido no *secundário* precisamos de saber a forma do sinal, a sua amplitude ( $A$ ) e o seu período ( $T$ ).

Pela Eq. 3 no enunciado sabemos que a f.e.m. induzida no *secundário* é proporcional à derivada em ordem ao tempo do sinal do *primário*. O sinal do tipo "dente-de-serra" pode ser aproximado a uma sucessão de segmentos de recta repetidos infinitamente, todos com o mesmo declive. Ora, nestes segmentos a derivada é simplesmente uma constante, como mostra a Fig. 8. Contudo nos extremos, o sinal não é estável, logo a derivada apresentará perturbações (Fig. 8 a tracejado). Aplicando um raciocínio semelhante à alínea anterior, mas mantendo-nos afastados das extremidades.

$$\Delta t \approx 4.0 \text{ div} \times 0.05 \text{ ms/div} \approx 0.20 \text{ ms}$$

$$\Delta V \approx 4.0 \text{ div} \times 0.1 \text{ V/div} \approx 0.4 \text{ V}$$

Aplicando a lei de Ohm,

$$\Delta V = R \Delta I \Leftrightarrow \Delta I = \frac{\Delta V}{R} \approx 4 \text{ mA}$$

$$\frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{di}{dt} \approx 20 \text{ A/s}$$

Logo a f.e.m. (amplitude do sinal no *secundário*),

$$A = \varepsilon = M \frac{di}{dt} \Rightarrow A = 2.71 \times 10^{-3} \times 20 \Rightarrow \boxed{A \approx 54 \text{ mV}}$$

O período no *secundário* é o mesmo do sinal no *primário*, ou seja,

$$T = 5.2 \text{ div} \times 0.05 \text{ ms/div} \Rightarrow \boxed{T = 0.26 \text{ ms}}$$

c)

[2,5 valores]

Ao introduzir-se uma barra de **níquel** / **ferrite** estamos a alterar o meio do sistema físico. Podemos verificar que a permeabilidade magnética do meio é aproximadamente **99** / **637** vezes superior à permeabilidade magnética inicial (do vácuo).

$$\frac{\mu_{\text{níquel}}}{\mu_0} = \frac{1.25 \times 10^{-4} \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \approx 99 \quad \frac{\mu_{\text{ferrite}}}{\mu_0} = \frac{8 \times 10^{-4} \text{ H/m}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \approx 637$$

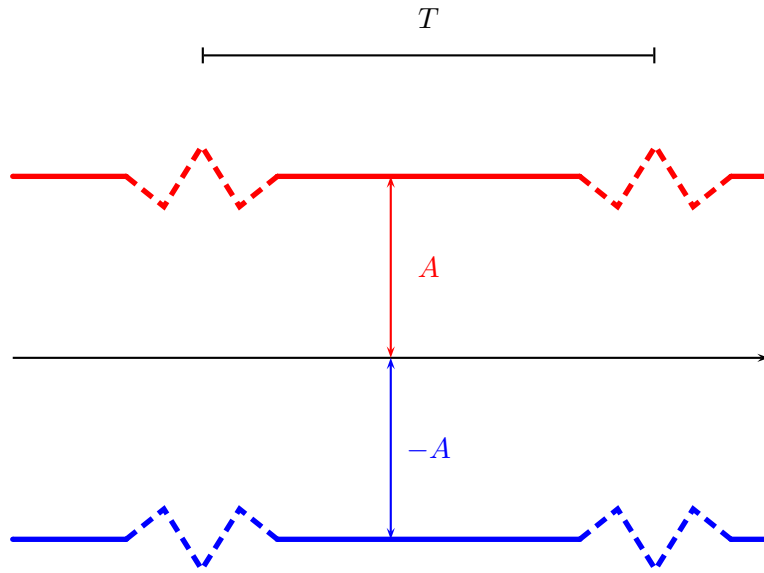


Figura 8: Esboço do sinal indusido no *secundário* na alínea b).

Facilmente se percebe, pela Eq. 3 do enunciado, que o coeficiente de indução mútua  $M_{12}$  e, por conseguinte, a amplitude da força eletromotriz  $\varepsilon$  ira sofrer um aumento da mesma ordem de grandeza.

$$\varepsilon_{\text{níquel}} \approx 99\varepsilon_{\text{a}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{\text{níquel}} \approx 30 \text{ V}} \quad \varepsilon_{\text{ferrite}} \approx 637\varepsilon_{\text{a}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{\text{ferrite}} \approx 191 \text{ V}}$$