Uma Proposta de Demonstração para a Conjectura de Goldbach Utilizando o Teorema de Dirichlet

(Preprint)

Tiago Bandeira*

3 de junho de 2025

Resumo

Este trabalho visa abordar a Conjectura de Goldbach e utiliza o Teorema de Dirichlet sobre progressões aritméticas para tentar demonstrar o resultado principal presente neste artigo. Tal resultado mostra que para todo primo p > 2 e os q's da sequência Sn(P) que são primos, a soma p + q é capaz de gerar todos os números pares naturais que são maiores que 2. Ou seja, é possível construir o conjunto de todos os pares maiores que 2 por meio da união dos subconjuntos gerados por P + Sn(P). Por mais que esse resultado não seja uma prova definitiva e talvez não inovadora, essa ideia pode contribuir sistematicamente como ponto de partida para uma forma de demonstração em trabalhos futuros. A sequência Sn(P) bem como as demais ideias ditas nesse resumo serão apresentadas no decorrer do artigo.

Palavras-chave: conjectura de goldbach; números primos; teoria dos números.

1 Introdução

A introdução apresenta o contexto do problema, motivações, trabalhos relacionados e a organização do artigo.

2 Fundamentação Teórica

Aqui você descreve os conceitos, definições e ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

Proposição 2.1. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par. Considere a sequência ordenada dos números ímpares estritamente menores que a:*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a - 1\}$$

Então, para todo $k \in S$, vale que:

$$a = k + (a - k)$$

e ambos k e $a - k$ pertencem a S, sendo simétricos em relação aos termos centrais da sequência.

*tiagobandeirabarros@gmail.com

Demonstração. Observemos que os elementos de S podem ser descritos pela progressão aritmética:

$$S = \{2n - 1 \mid n = 1, 2, \ldots, \tfrac{a}{2}\}$$

O número total de elementos da sequência é $\frac{a}{2}$, inteiro pois a é par.

Seja um elemento arbitrário $k = 2n - 1$, com $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{a}{2}\}$. Calculamos seu par simétrico:

$$a - k = a - (2n - 1) = (a - 2n) + 1$$

Note que $(a - 2n)$ é par, e portanto $(a - 2n) + 1$ é ímpar. Além disso, verificamos que:

$$a - k \leq a - 1$$

$$a - k \geq 1$$

Logo, $a - k \in S$.

A soma do par $(k, a - k)$ resulta em:

$$k + (a - k) = (2n - 1) + (a - (2n - 1)) = a$$

Portanto, qualquer elemento de S somado ao seu simétrico gera exatamente a.

□

Exemplos

Seja $a = 12$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 11 = 12, \quad 3 + 9 = 12, \quad 5 + 7 = 12$$

Seja $a = 10$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 9 = 10, \quad 3 + 7 = 10, \quad 5 + 5 = 10$$

O termo central 5 se emparelha consigo mesmo.

Conclusão

Dessa forma, qualquer número par $a > 2$ pode ser decomposto como a soma de dois números ímpares menores que a, escolhidos de forma simétrica em relação aos termos centrais da sequência dos ímpares menores que a.

Proposição 2.2. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e seja*

$$S = \{1, 3, 5, \dots, a-1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Sejam $b, c \in S$ dois termos simétricos em relação aos termos centrais da sequência, e seja i a distância posicional de b até o centro da sequência S. Então, a diferença entre c e b satisfaz:

$$|c-b| = \begin{cases} 4i, & \textit{se } |S| \textit{ é ímpar} \\ 4i+2, & \textit{se } |S| \textit{ é par} \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ é o número de elementos da sequência.

Demonstração. A sequência S possui $N = \frac{a}{2}$ termos, com

$$S = \{2n-1 \mid n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Considere b o termo na posição n, com $1 \leq n \leq N$, e seu termo simétrico c na posição $N-n+1$. Assim,

$$b = 2n-1, \quad c = 2(N-n+1)-1 = 2N-2n+1.$$

A diferença entre os termos é:

$$|c-b| = |(2N-2n+1)-(2n-1)| = |2N-4n+2| = 2|N-2n+1|.$$

Definimos i como a distância posicional de b até o centro da sequência. Dependendo da paridade de N, o centro é definido como:

- Se N é ímpar, existe um termo central único na posição $m = \frac{N+1}{2}$. Assim,

  $$i = |n-m| = \left| n - \frac{N+1}{2} \right|.$$

  Neste caso,

  $$|N-2n+1| = 2i,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2 \times 2i = 4i.$$

- Se N é par, existem dois termos centrais nas posições $m_1 = \frac{N}{2}$ e $m_2 = \frac{N}{2}+1$. Para b à esquerda do centro,

  $$i = m_1 - n \implies 2i = |N-2n|,$$

  e

  $$|N-2n+1| = 2i+1,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2(2i+1) = 4i+2.$$

Assim, mostramos que a diferença entre termos simétricos na sequência S segue a fórmula desejada, dependendo da paridade de N.

□

Corolário 2.3. *Sejam $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a-1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Seja $b \in S$ um termo a uma distância posicional i do centro da sequência. Então, seu termo simétrico $c \in S$ satisfaz:

$$c = \begin{cases} b + 4i, & se\ |S|\ é\ ímpar \\ b + 4i + 2, & se\ |S|\ é\ par \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ e i é a distância posicional de b até o centro da sequência.

Teorema 2.4 (Teorema de Dirichlet para Progressões Aritméticas)**.** *Sejam a e d inteiros positivos tais que $mdc(a, d) = 1$. Então, a progressão aritmética da forma*

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \ldots$$

contém infinitos números primos.

O Teorema de Dirichlet sobre progressões aritméticas garante que toda progressão da forma $a + nd$, com $mdc(a, d) = 1$, contém infinitos números primos. Por ser complexa e envolver ferramentas matemáticas além do escopo deste trabalho a prova do Teorema de Dirichlet não será demonstrada aqui. Porém é possível encontrá-la em [1].

Definição 2.5 (Sequência $S_n(p)$)**.** Seja $p > 2$ um número primo fixado. Definimos a sequência $S_n(p)$, com $n \in \mathbb{N}$, como o conjunto dos números ímpares da forma

$$S_n(p) = \begin{cases} p + 4n \\ p + 4n + 2 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.6. *A sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos.*

Demonstração. Observamos que, nos dois casos,

- Para $p + 4n$, temos

  $$p + 4n = p + 2(2n) = p + 2k_1,$$

  para algum $k_1 \in \mathbb{N}$.

- Para $p + 4n + 2$, temos

  $$p + 4n + 2 = p + 2(2n + 1) = p + 2k_2,$$

  para algum $k_2 \in \mathbb{N}$.

Como $mdc(p, 2) = 1$, ambos os casos satisfazem as condições do **Teorema de Dirichlet para progressões aritméticas** 2.4, que garante que toda progressão da forma $a + kn$, com $mdc(a, k) = 1$, contém infinitos números primos.

Portanto, a sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos. □

Observação 2.7. Note que a definição 2.5 está relacionada diretamente ao Corolário 2.3.

Observação 2.8. Para um q = $S_n(p)$: ou q é um primo ímpar ou q é um composto ímpar.

Proposição 2.9. *Seja $p > 2$ um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Então, a soma $S_n(p) + p$ é um número par.*

Demonstração. Por definição, $S_n(p)$ é ímpar. De fato, como $p > 2$ é um número primo, ele também é ímpar. Assim, a soma de dois números ímpares é sempre um número par. Portanto, $S_n(p) + p$ é par. □

3 Resultados Principais

Lema 3.1. *Seja $p > 2$ um número primo e $q > p$ um número ímpar pertencente à sequência $S_n(p)$. Se q é primo ou q não é múltiplo de p, então*

$$2p \nmid (p+q)$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois casos:

Caso I: q é múltiplo de p.

Se q é múltiplo de p, então existe um inteiro k tal que

$$q = pk$$

Logo,

$$p + q = p + pk = p(1+k)$$

Portanto,

$$2p \mid p(1+k) \implies 2p \mid (p+q)$$

Isso mostra que se q *é múltiplo de* p, então $2p$ divide $p + q$. O contrapositivo também é verdadeiro: se q *não é múltiplo de* p, então

$$2p \nmid (p+q)$$

Caso II: q é primo.

Suponha, por absurdo, que $2p \mid (p+q)$. Então, existe um inteiro $k > 0$ tal que

$$p + q = 2pk$$

Isolando q, obtemos

$$q = 2pk - p = p(2k-1)$$

Ou seja, q é múltiplo de p. Como p é um primo estritamente menor que q (pois $q > p$), isso implica que q é um número composto, o que contradiz a hipótese de que q é primo.

Portanto, se q é primo,

$$2p \nmid (p+q)$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.2. *Seja $p > 2$ um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Então, todo número par da forma $p + S_n(p)$, tal que $S_n(p) > p$, não é múltiplo de p. Ou seja,*

$$p \nmid (p + S_n(p)) \quad \textit{sempre que} \quad S_n(p) > p$$

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 3.1, observando que a única possibilidade de múltiplo de p ocorre quando $S_n(p) = p$, o que é excluído pela condição $S_n(p) > p$. □

3.1 Proposta de Demonstração para a conjectura de Goldbach

Teorema 3.3 (Cobertura dos Números Pares)**.** *Seja*

$$B = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = p + q,\ p \in P,\ q \in Q_p\}$$

onde P é o conjunto dos números primos maiores que três, e Q_p é um subconjunto dos primos pertencentes à sequência $S_n(p)$.

Então,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n = A$$

onde A é o conjunto dos números naturais pares maiores que dois.

Em outras palavras, todo número par maior que dois pode ser expresso como a soma de um primo $p \in P$ e um primo $q \in Q_p$.

Demonstração. Seja $p \in P$ com $p > 2$, e seja Q_p o subconjunto dos números primos pertencentes à sequência $S_n(p)$, conforme definido na Definição 2.5. Pelo Lema 3.1 e pelo Corolário 3.2, sabemos que a sequência $p + S_n(p)$ com $p > 2$ gera todos os números pares que não são múltiplos de p, com exceção do termo específico $2p$, que é o único múltiplo de p presente.

Definimos, então, para cada $i \in \mathbb{N}$ associado a um primo $p_i \in P$, o conjunto:

$$A_i = \{p_i + q_j \mid q_j \in Q_{p_i}\}$$

onde cada termo $p_i + q_j$ é a soma do primo fixo p_i com um primo q_j pertencente à sequência $S_n(p_i)$.

Observamos que, com exceção de $2p_i$, todos os elementos de A_i não são múltiplos de p_i, dado que os termos da sequência $S_n(p_i)$ são construídos justamente para evitar os múltiplos de p_i, salvo o termo inicial $2p_i$ quando presente. Além disso, aqueles que não são múltiplos de p_i podem ser múltiplos de primos menores (se houver) ou maiores, mas não de p_i especificamente.

Dessa forma, os conjuntos A_i preenchem, de forma distribuída, os pares não múltiplos dos respectivos primos p_i, e a sobreposição entre esses conjuntos é evitada, salvo nos casos em que um número é múltiplo de outros primos diferentes de p_i.

Assim, a união dos conjuntos A_i, ou seja,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

cobre integralmente o conjunto dos números pares maiores que dois, sem omitir elementos e sem redundância sistemática de termos, exceto por eventuais múltiplos comuns a diferentes primos.

Nota-se, adicionalmente, que estamos considerando apenas $p > 2$. O caso $p = 2$ é especial, pois a sequência $S_n(2)$ se reduz a duas progressões específicas:

$$S_n(2) = \begin{cases} 4n + 2 \\ 4n + 4 \end{cases}$$

que não satisfazem as condições do Teorema de Dirichlet, pois $mdc(4, 2) \neq 1$ e $mdc(4, 4) \neq 1$. Portanto, $p = 2$ não é incluído na definição geral do teorema.

Se estendermos a definição formalmente para $p = 2$, o único termo válido seria quando $n = 0$, ou seja,

$$a_1 = \{4\}$$

Por fim, considerando qualquer $a_n \in B$, temos que todos os números pares da união das sequências A_i pertencem a A, isto é,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n = A$$

Encerrando, portanto, a demonstração do teorema. $\square$

3.2 Discussão dos Resultados

Apresente aqui a interpretação e análise dos resultados obtidos.

4 Conclusão

Aqui você faz um resumo dos principais resultados, as contribuições do trabalho e possíveis direções para pesquisas futuras.

Agradecimentos

Se desejar, agradeça às instituições, agências de fomento ou colaboradores.

Referências

[1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[2] C. D. C. Paiva, et al. *A busca pela prova da conjectura de Goldbach: explorando suas conquistas*. Caderno Pedagógico, 21(7): e5770-e5770, 2024.