Uma Proposta de Demonstração para a Conjectura de Goldbach Utilizando o Teorema de Dirichlet

(Preprint)

Tiago Bandeira*

2 de junho de 2025

Resumo

Este trabalho visa abordar a Conjectura de Goldbach e utiliza o Teorema de Dirichlet sobre progressões aritméticas para tentar demonstrar o resultado principal presente neste artigo. Tal resultado mostra que para todo primo p > 2 e os q's da sequência Sn(P) que são primos, a soma p + q é capaz de gerar todos os números pares naturais que são maiores que 2. Ou seja, é possível construir o conjunto de todos os pares maiores que 2 por meio da união dos subconjuntos gerados por P + Sn(P). Por mais que esse resultado não seja uma prova definitiva e talvez não inovadora, essa ideia pode contribuir sistematicamente como ponto de partida para uma forma de demonstração em trabalhos futuros. A sequência Sn(P) bem como as demais ideias ditas nesse resumo serão apresentadas no decorrer do artigo.

Palavras-chave: conjectura de goldbach; números primos; teoria dos números.

1 Introdução

A introdução apresenta o contexto do problema, motivações, trabalhos relacionados e a organização do artigo.

2 Fundamentação Teórica

Aqui você descreve os conceitos, definições e ferramentas matemáticas utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

Proposição 2.1. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par. Considere a sequência ordenada dos números ímpares estritamente menores que a:*

$$S = \{1, 3, 5, \dots, a-1\}$$

Então, para todo $k \in S$, vale que:

$$a = k + (a - k)$$

e ambos k e $a - k$ pertencem a S, sendo simétricos em relação aos termos centrais da sequência.

*tiagobandeirabarros@gmail.com

Demonstração. Observemos que os elementos de S podem ser descritos pela progressão aritmética:

$$S = \{2n - 1 \mid n = 1, 2, \ldots, \tfrac{a}{2}\}$$

O número total de elementos da sequência é $\frac{a}{2}$, inteiro pois a é par.

Seja um elemento arbitrário $k = 2n - 1$, com $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{a}{2}\}$. Calculamos seu par simétrico:

$$a - k = a - (2n - 1) = (a - 2n) + 1$$

Note que $(a - 2n)$ é par, e portanto $(a - 2n) + 1$ é ímpar. Além disso, verificamos que:

$$a - k \leq a - 1$$

$$a - k \geq 1$$

Logo, $a - k \in S$.

A soma do par $(k, a - k)$ resulta em:

$$k + (a - k) = (2n - 1) + (a - (2n - 1)) = a$$

Portanto, qualquer elemento de S somado ao seu simétrico gera exatamente a.

□

Exemplos

Seja $a = 12$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 11 = 12, \quad 3 + 9 = 12, \quad 5 + 7 = 12$$

Seja $a = 10$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 9 = 10, \quad 3 + 7 = 10, \quad 5 + 5 = 10$$

O termo central 5 se emparelha consigo mesmo.

Conclusão

Dessa forma, qualquer número par $a > 2$ pode ser decomposto como a soma de dois números ímpares menores que a, escolhidos de forma simétrica em relação aos termos centrais da sequência dos ímpares menores que a.

Proposição 2.2. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e seja*

$$S = \{1, 3, 5, \dots, a-1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Sejam $b, c \in S$ dois termos simétricos em relação aos termos centrais da sequência, e seja i a distância posicional de b até o centro da sequência S. Então, a diferença entre c e b satisfaz:

$$|c-b| = \begin{cases} 4i, & \textit{se } |S| \textit{ é ímpar} \\ 4i+2, & \textit{se } |S| \textit{ é par} \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ é o número de elementos da sequência.

Demonstração. A sequência S possui $N = \frac{a}{2}$ termos, com

$$S = \{2n-1 \mid n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Considere b o termo na posição n, com $1 \leq n \leq N$, e seu termo simétrico c na posição $N - n + 1$. Assim,

$$b = 2n-1, \quad c = 2(N-n+1) - 1 = 2N - 2n + 1.$$

A diferença entre os termos é:

$$|c-b| = |(2N-2n+1) - (2n-1)| = |2N - 4n + 2| = 2|N - 2n + 1|.$$

Definimos i como a distância posicional de b até o centro da sequência. Dependendo da paridade de N, o centro é definido como:

- Se N é ímpar, existe um termo central único na posição $m = \frac{N+1}{2}$. Assim,

  $$i = |n-m| = \left| n - \frac{N+1}{2} \right|.$$

  Neste caso,

  $$|N-2n+1| = 2i,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2 \times 2i = 4i.$$

- Se N é par, existem dois termos centrais nas posições $m_1 = \frac{N}{2}$ e $m_2 = \frac{N}{2} + 1$. Para b à esquerda do centro,

  $$i = m_1 - n,$$

  e

  $$|N-2n+1| = 2i+1,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2(2i+1) = 4i+2.$$

Assim, mostramos que a diferença entre termos simétricos na sequência S segue a fórmula desejada, dependendo da paridade de N.

$\square$

Corolário 2.3. *Sejam $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a-1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Seja $b \in S$ um termo a uma distância posicional i do centro da sequência. Então, seu termo simétrico $c \in S$ satisfaz:

$$c = \begin{cases} b + 4i, & \text{se } |S| \text{ é ímpar} \\ b + 4i + 2, & \text{se } |S| \text{ é par} \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ e i é a distância posicional de b até o centro da sequência.

Teorema 2.4 (Teorema de Dirichlet para Progressões Aritméticas)**.** *Sejam a e d inteiros positivos tais que $mdc(a, d) = 1$. Então, a progressão aritmética da forma*

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

contém infinitos números primos.

O Teorema de Dirichlet sobre progressões aritméticas garante que toda progressão da forma $a + nd$, com $mdc(a, d) = 1$, contém infinitos números primos. Por ser complexa e envolver ferramentas matemáticas além do escopo deste trabalho a prova do Teorema de Dirichlet não será demonstrada aqui. Porém é possível encontrá-la em [4].

Definição 2.5 (Sequência $S_n(p)$)**.** Seja $p > 2$ um número primo fixado. Definimos a sequência $S_n(p)$, com $n \in \mathbb{N}$, como o conjunto dos números da forma

$$S_n(p) = \begin{cases} p + 4n \\ p + 4n + 2 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.6. *A sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos.*

Demonstração. Observamos que, nos dois casos,

- Para $p + 4n$, temos
  $$p + 4n = p + 2(2n) = p + 2k_1,$$
  para algum $k_1 \in \mathbb{N}$.
- Para $p + 4n + 2$, temos
  $$p + 4n + 2 = p + 2(2n+1) = p + 2k_2,$$
  para algum $k_2 \in \mathbb{N}$.

Como $mdc(p, 2) = 1$, ambos os casos satisfazem as condições do **Teorema de Dirichlet para progressões aritméticas** 2.4, que garante que toda progressão da forma $a + kn$, com $mdc(a, k) = 1$, contém infinitos números primos.

Portanto, a sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos. □

Observação 2.7. Note que a definição 2.5 está relacionada diretamente ao Corolário 2.3.

3 Resultados Principais

3.1 Teoremas e Demonstrações

Teorema 3.1 (Nome do Teorema)**.** *Seja $x \in \mathbb{R}$. Então vale que*

$$x^2 \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente do fato de que qualquer número real elevado ao quadrado é não-negativo. $\square$

3.2 Discussão dos Resultados

Apresente aqui a interpretação e análise dos resultados obtidos.

4 Conclusão

Aqui você faz um resumo dos principais resultados, as contribuições do trabalho e possíveis direções para pesquisas futuras.

Agradecimentos

Se desejar, agradeça às instituições, agências de fomento ou colaboradores.

Referências

[1] Autor, A. (Ano). *Título do livro*. Editora.

[2] Autor, B. (Ano). Título do artigo. *Nome do Periódico*, volume(número), páginas.

[3] Autor, C. (Ano). Título do site. Disponível em: `https://www.exemplo.com`. Acesso em: dia mês ano.

[4] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.