Uma Proposta de Demonstração para a Conjectura de Goldbach Utilizando o Teorema de Dirichlet

(Preprint)

Tiago Bandeira*

June 10, 2025

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem para a Conjectura de Goldbach, utilizando conceitos da Teoria dos Números relacionados a progressões aritméticas e simetrias entre números ímpares. Por meio da definição de uma sequência $S_n(p)$, associada a cada número primo $p > 2$, e da aplicação do Teorema de Dirichlet, mostra-se que todo número par maior que dois pode ser representado como a soma de um primo fixo e outro primo pertencente a essa sequência. O desenvolvimento teórico inclui definições formais, proposições, corolários e um teorema central que estabelece que a união dos subconjuntos formados por somas do tipo $p + S_n(p)$ cobre integralmente o conjunto dos números pares maiores que dois. Embora este trabalho não afirme se tal resultado configura ou não uma demonstração definitiva da conjectura, a abordagem proposta oferece uma nova perspectiva estrutural sobre o problema e abre possibilidades para pesquisas futuras baseadas em decomposições algébricas e simétricas dos números pares.

Abstract

This paper presents an approach to the Goldbach Conjecture based on concepts from Number Theory related to arithmetic progressions and symmetries among odd numbers. Through the definition of a sequence $S_n(p)$, associated with each prime number $p > 2$, and the application of Dirichlet's theorem, it is shown that every even number greater than two can be expressed as the sum of a fixed prime and another prime belonging to this sequence. The theoretical development includes formal definitions, propositions, corollaries, and a central theorem that establishes that the union of the subsets formed by sums of the type $p + S_n(p)$ fully covers the set of even numbers greater than two. While it is not claimed here whether this result constitutes a definitive proof of the conjecture, the proposed approach offers a new structural perspective on the problem and opens possibilities for future research based on algebraic and symmetric decompositions of even numbers.

Palavras-chave: conjectura de goldbach; números primos; teoria dos números.

1 Introdução

A Conjectura de Goldbach, proposta em 1742 por Christian Goldbach em uma correspondência com Leonhard Euler, é um dos problemas mais antigos e famosos ainda não resolvidos da Teoria dos Números. Seu enunciado é simples e elegante: **todo número inteiro par maior que dois pode ser expresso como a soma de dois números**

*tiagobandeira.goldbach2025@gmail.com

primos. Apesar de resistir a séculos de tentativas de demonstração, a conjectura já foi verificada computacionalmente para números muito grandes (da ordem de $4 \cdot 10^{18}$)[3], mas uma prova geral e formal permanece desconhecida.

Diversas abordagens foram desenvolvidas ao longo do tempo para tentar compreender a estrutura que envolve a distribuição dos números primos e sua relação com os números pares. Dentre os trabalhos mais relevantes, destacam-se os estudos baseados em análise matemática, combinatória aditiva, estatística dos primos e o uso de progressões aritméticas associadas ao Teorema de Dirichlet, que garante a existência de infinitos primos em certas classes aritméticas.

Além disso, uma abordagem análoga àquela de Ellman (2000)[6] foi adotada aqui, em que, a partir de uma análise combinatória das somas entre primos ímpares, mostra-se que a totalidade dos números pares é coberta. Embora a formalização técnica difira em relação ao trabalho original de Ellman, o espírito da estratégia — demonstrar a completude das somas entre primos — é compartilhado e inspira nosso método.

Assim, este trabalho apresenta uma abordagem que busca estruturar a geração dos números pares maiores que dois através da soma de dois primos, sendo um deles fixado e o outro pertencente a uma sequência específica associada ao primo fixado. Mais precisamente, explora-se uma construção baseada na sequência $S_n(p)$, composta por números ímpares simétricos relacionados a cada primo $p > 2$, combinada com a aplicação do Teorema de Dirichlet para garantir a infinitude de primos dentro dessas sequências.

A motivação para essa abordagem surge da observação das simetrias existentes entre os números ímpares menores que um dado número par, e da possibilidade de decompor o conjunto dos pares em subconjuntos construídos por somas do tipo $p + q$, onde q percorre a sequência $S_n(p)$. Essa decomposição revela uma estrutura interna que organiza os pares segundo progressões aritméticas, oferecendo uma nova perspectiva sobre o problema.

O presente artigo está organizado da seguinte forma: na seção de **Fundamentação Teórica** são apresentadas as definições formais, proposições, corolários e os teoremas clássicos que sustentam a construção da proposta, com destaque para o Teorema de Dirichlet e as propriedades das sequências $S_n(p)$. Na seção de **Proposta de Demonstração para a Conjectura de Goldbach** é enunciado e demonstrado o teorema central do trabalho, que mostra como a união dos subconjuntos gerados pelas somas $p+S_n(p)$ cobre o conjunto dos números pares maiores que dois. Na sequência, apresenta-se uma **Discussão do Corolários3.16 e do Teorema3.18 e Implicações na Conjectura de Goldbach**, na qual são analisadas as implicações dessa estrutura sobre a Conjectura de Goldbach, bem como as limitações e potenciais desdobramentos futuros da abordagem proposta. Em seguida, é dedicado uma seção para as **Considerações Finais sobre a Abordagem Estrutural** que fala sobre o objetivo principal do trabalho. Por fim, a seção de **Conclusão** resume os principais achados e sugere caminhos para investigações posteriores.

A conjectura de Goldbach

Conjectura 1 (Conjectura de Goldbach)*.* Todo número inteiro par maior que dois pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Formalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$ e n é par, existe $p, q \in \mathbb{P}$ (com $\mathbb{P}$ sendo o conjunto dos números primos) tais que:

$$n = p + q$$

2 Fundamentação Teórica

Proposição 2.1. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par. Considere a sequência ordenada dos números ímpares estritamente menores que a:*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a-1\}$$

Então, para todo $k \in S$, vale que:

$$a = k + (a-k)$$

e ambos k e $a-k$ pertencem a S, sendo simétricos em relação aos termos centrais da sequência.

Demonstração. Observemos que os elementos de S podem ser descritos pela progressão aritmética:

$$S = \{2n-1 \mid n = 1, 2, \ldots, \tfrac{a}{2}\}$$

O número total de elementos da sequência é $\frac{a}{2}$, inteiro pois a é par.

Seja um elemento arbitrário $k = 2n-1$, com $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{a}{2}\}$. Calculamos seu par simétrico:

$$a - k = a - (2n-1) = (a-2n) + 1$$

Note que $(a-2n)$ é par, e portanto $(a-2n)+1$ é ímpar. Além disso, verificamos que:

$$a - k \leq a - 1$$

$$a - k \geq 1$$

Logo, $a - k \in S$.

A soma do par $(k, a-k)$ resulta em:

$$k + (a-k) = (2n-1) + (a-(2n-1)) = a$$

Portanto, qualquer elemento de S somado ao seu simétrico gera exatamente a. □

2.1 Exemplos

Seja $a = 12$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 11 = 12, \quad 3 + 9 = 12, \quad 5 + 7 = 12$$

Seja $a = 10$:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Os pares simétricos são:

$$1 + 9 = 10, \quad 3 + 7 = 10, \quad 5 + 5 = 10$$

O termo central 5 se emparelha consigo mesmo.

Dessa forma, qualquer número par $a > 2$ pode ser decomposto como a soma de dois números ímpares menores que a, escolhidos de forma simétrica em relação aos termos centrais da sequência dos ímpares menores que a.

Proposição 2.2. *Seja $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e seja*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a-1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Sejam $b, c \in S$ dois termos simétricos em relação aos termos centrais da sequência, e seja i a distância posicional de b até o centro da sequência S. Então, a diferença entre c e b satisfaz:

$$|c-b| = \begin{cases} 4i, & \textit{se } |S| \textit{ é ímpar} \\ 4i+2, & \textit{se } |S| \textit{ é par} \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ é o número de elementos da sequência.

Demonstração. A sequência S possui $N = \frac{a}{2}$ termos, com

$$S = \{2n-1 \mid n = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Considere b o termo na posição n, com $1 \leq n \leq N$, e seu termo simétrico c na posição $N-n+1$. Assim,

$$b = 2n-1, \quad c = 2(N-n+1)-1 = 2N-2n+1.$$

A diferença entre os termos é:

$$|c-b| = |(2N-2n+1)-(2n-1)| = |2N-4n+2| = 2|N-2n+1|.$$

Definimos i como a distância posicional de b até o centro da sequência. Dependendo da paridade de N, o centro é definido como:

- Se N é ímpar, existe um termo central único na posição $m = \frac{N+1}{2}$. Assim,

  $$i = |n-m| = \left| n - \frac{N+1}{2} \right|.$$

  Neste caso,

  $$|N-2n+1| = 2i,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2 \times 2i = 4i.$$

- Se N é par, existem dois termos centrais nas posições $m_1 = \frac{N}{2}$ e $m_2 = \frac{N}{2}+1$. Para b à esquerda do centro,

  $$i = m_1 - n \implies 2i = |N-2n|,$$

  e

  $$|N-2n+1| = 2i+1,$$

  portanto,

  $$|c-b| = 2(2i+1) = 4i+2.$$

Assim, mostramos que a diferença entre termos simétricos na sequência S segue a fórmula desejada, dependendo da paridade de N.

$\square$

Corolário 2.3. *Sejam $a \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ e a par, e*

$$S = \{1, 3, 5, \ldots, a - 1\}$$

a sequência dos números ímpares menores que a.

Seja $b \in S$ um termo a uma distância posicional i do centro da sequência. Então, seu termo simétrico $c \in S$ satisfaz:

$$c = \begin{cases} b + 4i, & \text{se } |S| \text{ é ímpar} \\ b + 4i + 2, & \text{se } |S| \text{ é par} \end{cases}$$

onde $|S| = \frac{a}{2}$ e i é a distância posicional de b até o centro da sequência.

Teorema 2.4 (Teorema de Dirichlet para Progressões Aritméticas)**.** *Sejam a e d inteiros positivos tais que $mdc(a, d) = 1$. Então, a progressão aritmética da forma*

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ \ldots$$

contém infinitos números primos.

O Teorema de Dirichlet sobre progressões aritméticas garante que toda progressão da forma $a + nd$, com $mdc(a, d) = 1$, contém infinitos números primos. Por ser complexa e envolver ferramentas matemáticas além do escopo deste trabalho a prova do Teorema de Dirichlet não será demonstrada aqui. Porém é possível encontrá-la em [1].

Teorema 2.5 (Postulado de Bertrand)**.** *Para todo número inteiro $n > 1$, existe pelo menos um número primo p tal que*

$$n < p < 2n.$$

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em Galvin [5] inspirada na prova de Erdős para o Postulado de Bertrand.

Definição 2.6 (Sequência $S_n(p)$)**.** Seja $p > 2$ um número primo fixado. Definimos a sequência $S_n(p)$, com $n \in \mathbb{N}$, como o conjunto dos números ímpares da forma

$$S_n(p) = \begin{cases} p + 4n \\ p + 4n + 2 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.7. *A sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos.*

Demonstração. Observamos que, nos dois casos,

- Para $p + 4n$, temos
$$p + 4n = p + 2(2n) = p + 2k_1,$$
para algum $k_1 \in \mathbb{N}$.

- Para $p + 4n + 2$, temos

$$p + 4n + 2 = p + 2(2n + 1) = p + 2k_2,$$

para algum $k_2 \in \mathbb{N}$.

Como $mdc(p, 2) = 1$, ambos os casos satisfazem as condições do **Teorema de Dirichlet para progressões aritméticas** 2.4, que garante que toda progressão da forma $a + kn$, com $mdc(a, k) = 1$, contém infinitos números primos.

Portanto, a sequência $S_n(p)$ contém infinitos números primos. □

Observação 2.8. Note que a definição 2.6 está relacionada diretamente ao Corolário 2.3.

Observação 2.9. Para um q = $S_n(p)$: ou q é um primo ímpar ou q é um composto ímpar.

Proposição 2.10. *Seja $p > 2$ um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Então, a soma $S_n(p) + p$ é um número par.*

Demonstração. Por definição, $S_n(p)$ é ímpar. De fato, como $p > 2$ é um número primo, ele também é ímpar. Assim, a soma de dois números ímpares é sempre um número par. Portanto, $S_n(p) + p$ é par. □

Proposição 2.11 (Propriedade da divisibilidade na soma)**.** *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$. Então,*

$$a \mid (b + c) \ e \ a \mid b \iff a \mid c.$$

Demonstração. Suponha que $a \mid (b + c)$ e $a \mid b$. Então, existem $f, g \in \mathbb{N}$ tais que

$$b + c = a \cdot f \quad \text{e} \quad b = a \cdot g.$$

Substituindo b na primeira equação, obtemos:

$$a \cdot g + c = a \cdot f.$$

Isolando c, temos:

$$c = a \cdot (f - g).$$

Como $f - g \in \mathbb{N}$ (já que $f > g$), segue que $a \mid c$.

Reciprocamente, suponha que $a \mid b$ e $a \mid c$. Então existem $g, h \in \mathbb{N}$ tais que

$$b = a \cdot g \quad \text{e} \quad c = a \cdot h.$$

Somando essas expressões, temos:

$$b + c = a \cdot g + a \cdot h = a \cdot (g + h).$$

Logo, $a \mid (b + c)$.

Assim, mostramos que:

$$a \mid (b + c) \text{ e } a \mid b \iff a \mid c,$$

como queríamos demonstrar. □

3 Proposta de Demonstração para a Conjectura de Goldbach

Proposição 3.1 (Simetria dos Múltiplos)**.** *Seja $a > 2$ um número par natural e seja p um número primo tal que $p \mid a$. Então, o simétrico $S_n(p)$ de p também é múltiplo de p.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que o simétrico $S_n(p) = q$ não seja múltiplo de p.

Sendo $a = q + p$ e assumindo que $p \mid a$, segue que:

$$p \mid (q + p)$$

O que, pela Proposição 2.11, implica que:

$$p \mid q$$

O que é um absurdo, pois assumimos que q não é múltiplo de p.

Portanto, a suposição é falsa e conclui-se que $S_n(p)$ é múltiplo de p sempre que $p \mid a$. □

Lema 3.2. *Seja $p > 2$ um número primo e $q > p$ um número ímpar pertencente à sequência $S_n(p)$. Se q é primo ou q não é múltiplo de p, então*

$$2p \nmid (p + q)$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois casos:

Caso I: q não é múltiplo de p.

Se $p \nmid q$, então pelo contrapositivo das Proposições 2.11 e 3.1 temos:

$$p \nmid (p + q) \implies 2p \nmid (p + q)$$

Caso II: q é primo.

Se q é um primo e, por hipótese $q > p$, então $p \nmid q$ e procedemos como no Caso I.

Portanto, se q é primo maior que p ou q não é múltiplo de p, então

$$2p \nmid (p + q)$$

o que conclui a demonstração.

□

Corolário 3.3. *Seja $p > 2$ um número primo e $n \in \mathbb{N}$. Se $q = S_n(p)$ é primo e $q > p$, então*

$$p \nmid (p + S_n(p))$$

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 3.2, observando que a única possibilidade de múltiplo de p ocorre quando $S_n(p) = p$, o que é excluído pela condição $S_n(p) > p$. □

Proposição 3.4. *Seja $a \in \mathbb{N}$ um número par tal que $a > 6$. Então, não existe nenhum conjunto de primos $P = \{p \in \mathbb{P} : p < \frac{a}{2}\}$ tal que*

$$a = \prod_{p < \frac{a}{2}} p$$

Em outras palavras, nenhum número par $a > 6$ pode ser expresso como o produto de todos os primos estritamente menores que $\frac{a}{2}$.

Demonstração. Seja a um número par tal que $a > 6$. Seja

$$P(a) = \prod_{p<\frac{a}{2}} p$$

o produto de todos os primos estritamente menores que $\frac{a}{2}$.

Observamos que para $a > 6$ vale $\frac{a}{2} > 3$, portanto o conjunto de primos menores que $\frac{a}{2}$ contém pelo menos os primos 2 e 3, e frequentemente mais.

O produto $P(a)$ cresce de forma supermultiplicativa, já que cada primo adicionado ao produto faz com que seu valor cresça pelo menos multiplicando pelo menor primo seguinte.

Basta verificar que para qualquer $a > 6$, o produto $P(a)$ é estritamente maior que a:

- Se $\frac{a}{2} \geq 5$, então $P(a) \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, e como $\frac{a}{2} \geq 5$, então $a \geq 10$, mas $30 > 10$, logo a igualdade é impossível.

- Para valores maiores de a, o número de primos no produto só aumenta, e consequentemente $P(a)$ cresce rapidamente.

Logo, não existe $a > 6$ par tal que

$$a = \prod_{p<\frac{a}{2}} p$$

□

Proposição 3.5 (Existência de Primos Não Divisores)**.** *Seja $a \in \mathbb{N}$ um número par tal que $a > 6$. Então, existe pelo menos um primo $p \in \mathbb{P}$, com $p < \frac{a}{2}$, tal que p não divide a.*

Demonstração. Por contradição, suponha que todo primo $p < \frac{a}{2}$ divide a. Isso implicaria que a é múltiplo do produto de todos os primos estritamente menores que $\frac{a}{2}$, ou seja,

$$a = k \cdot \prod_{p<\frac{a}{2}} p$$

para algum $k \in \mathbb{N}$. No entanto, isso contradiz diretamente a Proposição 3.4, que estabelece que nenhum número par $a > 6$ pode ser expresso como o produto de todos os primos menores que $\frac{a}{2}$.

Portanto, nossa suposição leva a um absurdo. Assim, necessariamente, existe pelo menos um primo $p < \frac{a}{2}$ tal que p não divide a.

Isso conclui a demonstração. □

3.1 Propagação Estrutural e Cobertura dos Números pares Pares

Definição 3.6 (Conjunto Q_p)**.** Seja $p \in P$ um número primo fixo com $p > 2$. Definimos Q_p como o subconjunto dos números primos pertencentes à sequência $S_n(p)$, ou seja:

$$Q_p = \{q \in S_n(p) \mid q \text{ é primo}\}$$

onde $S_n(p)$ é a sequência dos números ímpares construídos com base na simetria dos números não múltiplos de p, conforme definido anteriormente. O conjunto Q_p representa, portanto, todos os primos que pertencem à sequência $S_n(p)$ associada a cada primo p.

Definição 3.7 (Conjunto A_p)**.** Para um primo $p \in P$ com $p > 2$, definimos:

$$A_p = \{p + q \mid q \in Q_p\}$$

onde Q_p é o subconjunto dos números primos pertencentes à sequência $S_n(p)$. O conjunto A_p contém todos os pares gerados pela soma do primo p com os primos de sua sequência associada.

Definição 3.8 (Conjunto dos Pares Maiores que 2 A)**.** Seja A definido como o conjunto dos números pares maiores que dois. Ou seja,

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2 \text{ e } a \text{ é par}\}$$

Proposição 3.9 (Simetria de Propagação a partir de um Par Menor)**.** *Seja $m > a$ um número par. Para qualquer par $a = p + q \in A_p$, existe um deslocamento $k \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$m = p + (q + 2k) \quad \textit{ou} \quad m = p + (q - 2k)$$

e portanto $m \in A_p$, desde que $q \pm 2k$ seja primo. Isso ocorre porque a diferença $m - a = 2k$ pode ser compensada por um deslocamento simétrico no elemento $q \in Q_p$, preservando a estrutura de A_p e reforçando sua propagação.

Demonstração. Seja $m > a$, com $a = p + q \in A_p$, e seja $q \in Q_p$ o simétrico de p que gera a.

Como $m - a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$m = a + 2k = p + (q + 2k).$$

Se $q + 2k$ for primo e $q + 2k > p$, então, como $S_n(p)$ é a sequência dos ímpares maiores que p não múltiplos de p, segue que $q + 2k \in S_n(p)$ e, sendo primo, $q + 2k \in Q_p$.

Logo, $m = p + (q + 2k) \in A_p$.

O mesmo argumento vale para $m < a$, com $m = a - 2k = p + (q - 2k)$, assumindo $q - 2k$ primo, maior que p e não múltiplo de p.

Assim, a distância entre pares pode ser compensada por deslocamentos nos simétricos de p, mantendo m pertencente a A_p, o que conclui a demonstração. □

Proposição 3.10 (Cobertura Parcial dos Números Pares pelos Subconjuntos A_p)**.** *Seja m um número par tal que $m > 2$. Então, existe pelo menos um primo $p \in P$ tal que p não divide m, e, portanto, m deve pertencer a algum subconjunto A_p, onde:*

$$A_p = \{p + q \mid q \in Q_p\}$$

com Q_p sendo o conjunto dos primos pertencentes à sequência $S_n(p)$ associada a p.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe um número par $m > 2$ tal que m não pertence a nenhum subconjunto A_p para todo $p \in P$. Isso implica que, para todo primo p, o número m é múltiplo de p.

Contudo, já foi demonstrado nas Proposições 3.4 e 3.5 que não há como m ser múltiplo de todos os primos p_i tais que $p_i < m/2$.

Logo, necessariamente, existe pelo menos um primo p tal que p não divide m. Consequentemente, como as sequências $a_n = p + S_n(p)$ são construídas excluindo os ímpares compostos em $S_n(p)$ e, por sua vez, também os múltiplos de p, o número m pode pertencer a algum subconjunto $A_p = \{p+q \mid q \in Q_p\}$, onde q percorre os primos da sequência $S_n(p)$.

Isso conclui a demonstração. □

Observação 3.11. A Proposição 3.10 reforça que, embora cada subconjunto A_p exclua especificamente os múltiplos de p, a união dos subconjuntos cobre parcialmente o conjunto dos números pares maiores que dois. Isso decorre do fato de que não existe número par finito que seja múltiplo de todos os primos menores que a metade desse par. E parcialmente, pois nem todos os pares não múltiplos de p são garantidos em um único A_p, porém a união dos A_p e a cobertura para todos os pares maiores que dois será demonstrada no próximo teorema.

Lema 3.12 (Propagação Estrutural por Deslocamento Simétrico). *Seja $a = p + q$, com $p \in P$, $q \in Q_p$ e $q > p$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $q + 2k$ (ou $q - 2k$) for primo, então:*

$$a \pm 2k = p + (q \pm 2k)$$

e como $q \pm 2k > p$ e não múltiplo de p, tem-se que $q \pm 2k \in Q_p \subset S_n(p)$, logo $a \pm 2k \in A_p$.

Demonstração. Seja $q \in Q_p$ tal que $a = p + q$. Como $q > p$ e $Q_p \subset S_n(p)$, então q é um primo ímpar não múltiplo de p, pertencente à sequência simétrica $S_n(p)$.

Considere $q + 2k$, para $k \in \mathbb{N}$. Se $q + 2k$ for primo e satisfizer $q + 2k > p$ e $q + 2k \not\equiv 0 \pmod p$, então $q + 2k \in S_n(p)$, e sendo primo, $q + 2k \in Q_p$. Portanto:

$$a + 2k = p + (q + 2k) \in A_p.$$

Analogamente, se $q - 2k > p$ e $q - 2k$ também for primo e não múltiplo de p, então $q - 2k \in Q_p$, e:

$$a - 2k = p + (q - 2k) \in A_p.$$

Logo, a estrutura A_p permite a geração de pares consecutivos por deslocamento simétrico dos elementos $q \in Q_p$, concluindo a demonstração. □

Lema 3.13 (Cobertura Estrutural dos Números Pares). *Seja $a > 2$ um número par. Então existe ao menos um primo $p < \frac{a}{2}$ tal que $a \in A_p$, onde:*

$$A_p = \{p + q \mid q \in Q_p\},$$

e Q_p é o conjunto dos primos pertencentes à sequência simétrica $S_n(p)$ associada a p.

Demonstração. Seja $a > 2$ um número par. Suponha, por absurdo, que a não pertence a nenhum subconjunto A_p, com $p < \frac{a}{2}$. Isso implica que, para todo primo p nessa faixa, não existe $q \in Q_p$ tal que $a = p + q$.

Mais ainda, como demonstrado na seção anterior, essa exclusão deve valer também para todos os deslocamentos simétricos $q = S_n(p) \pm 2k$, que, sendo maiores que p e não múltiplos de p, também pertencem a $S_n(p)$, e, se primos, pertencem a Q_p. Assim, para manter a exclusão total de a, todos esses deslocamentos devem deixar de gerar primos — o que contradiz a infinitude e a densidade dos primos em $S_n(p)$, conforme garantido pelo Teorema de Dirichlet. Isso também contradiz o Postulado de Bertrad (Teorema 2.5), uma vez que:

$$\frac{a}{2} < q = S_n(p) < 2 \cdot \frac{a}{2} = a$$

Isto é, se $p \neq q$, então existe pelo menos um q entre $a/2$ e a tal que q é primo.

Além disso, conforme a Proposição 3.9, qualquer par a pode ser alcançado por deslocamento a partir de algum par menor $a_0 = p + q$ pertencente a A_p, o que reforça a conectividade da estrutura.

Logo, a suposição de que a não pertence a nenhum A_p leva a uma contradição com as propriedades da estrutura construída. Conclui-se, portanto, que todo número par $a > 2$ pertence a ao menos um subconjunto A_p. □

Corolário 3.14 (Contradição Estrutural por Exclusão Total). *Seja $a > 2$ um número par. Então a pertence a algum A_p.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe um número par $a > 4$ tal que $a \notin A_p$ para todo primo $p < \frac{a}{2}$, e que não exista $q \in Q_p$ tal que $q = S_n(p) \pm 2k$ e $a = p + q$. Isso implica que a não pode ser obtido nem por combinação direta, nem por deslocamento simétrico a partir de qualquer subconjunto A_p, o que contradiz a estrutura baseada na infinitude dos primos, na progressão simétrica dos elementos de $S_n(p)$ e na continuidade das somas geradas em A_p.

Como foi demonstrado anteriormente, os conjuntos A_p são formados por somas da forma $p + q$, com $q \in Q_p$, e sua propagação ocorre através de deslocamentos simétricos $q \pm 2k$, que também pertencem a Q_p sempre que satisfazem as condições de primalidade e $q \pm 2k > p$.

Como existem diversos primos $p < \frac{a}{2}$, e para cada um deles a sequência $S_n(p)$ contém infinitos ímpares não múltiplos de p, dos quais infinitos são primos por Dirichlet, a exclusão completa de a requer que todos esses primos falhem simultaneamente em gerar a, tanto diretamente quanto por deslocamento. Isso é estruturalmente incompatível com a densidade dos primos nos conjuntos Q_p e com a progressão simétrica dos pares gerados por A_p.

Logo, a suposição de que a está fora de todos os conjuntos A_p, inclusive por deslocamento simétrico, contradiz a própria estrutura construtiva baseada em infinitude, simetria e progressão. Isso conclui a demonstração por absurdo. □

Os resultados apresentados até aqui — em particular, o Lema 3.13, que garante que todo número par $a > 2$ pertence a algum subconjunto A_p, e o Corolário 3.14, que reforça essa afirmação via argumento de exclusão estrutural — permitem consolidar formalmente a cobertura completa do conjunto dos números pares maiores que dois por meio das somas entre primos organizadas nos subconjuntos A_p.

A seguir, enunciamos o resultado que expressa essa cobertura de forma global e sistemática.

Teorema 3.15 (Cobertura dos Números Pares). *Seja*

$$B = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n = p + q,\, p \in P,\, q \in Q_p\},$$

onde P é o conjunto dos números primos maiores que dois, e Q_p é o subconjunto dos primos pertencentes à sequência simétrica $S_n(p)$ associada a cada $p \in P$.

Então, a união das sequências $a_n \in B$ cobre integralmente o conjunto dos números pares maiores que dois, isto é,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n = A,$$

com $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2 \text{ e } a \text{ é par}\}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.13 e pelo Corolário 3.14, todo número par $a > 2$ pertence a algum subconjunto $A_p = \{p + q \mid q \in Q_p\}$, com Q_p sendo o subconjunto dos primos pertencentes à sequência $S_n(p)$ associada ao primo p. O Corolário 3.14 reforça que não é possível estruturalmente excluir um número par da totalidade dos A_p, dado o comportamento de propagação simétrica dos termos $q \pm 2k$ e a densidade dos primos nos conjuntos Q_p.

Portanto, todo número par $a > 2$ é gerado por alguma sequência $a_n = p + q$, com $p \in P$ e $q \in Q_p$. Assim, a união das sequências a_n contidas em B cobre integralmente o conjunto A dos pares maiores que dois:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n = A.$$

Nota-se, adicionalmente, que estamos considerando apenas $p > 2$. O caso $p = 2$ é especial, pois a sequência $S_n(2)$ se reduz a duas progressões específicas:

$$S_n(2) = \begin{cases} 4n+2 \\ 4n+4 \end{cases}$$

que não satisfazem as condições do Teorema de Dirichlet, pois $mdc(4,2) \neq 1$ e $mdc(4,4) \neq 1$. Portanto, $p = 2$ não é incluído na definição geral do teorema.

Se estendermos a definição formalmente para $p = 2$, o único termo válido seria quando $n = 0$, ou seja,

$$a_1 = \{4\}$$

Ou seja, o número 4 constitui um caso especial, pois é o único número par gerado exclusivamente pela soma $2 + 2$, isto é, pelo conjunto A_2. Como a construção principal considera apenas primos $p > 2$, o número 4 não é alcançado pelas sequências A_p com $p > 2$, nem pela propagação por deslocamento simétrico. No entanto, como mencionado anteriormente, esse caso está adequadamente tratado e incorporado na estrutura através da definição isolada de $a_1 = \{4\}$, que representa a única contribuição de A_2.

Portanto, a cobertura estabelecida pelo Teorema permanece válida para todos os pares $a > 2$, com a inclusão explícita de 4 como um caso particular.

□

Corolário 3.16 (Par Simétrico de Primos)**.** *Todo número par $a > 2$ possui um par simétrico de primos p e $q \in S_n(p)$ tal que:*

$$a = p + S_n(p)$$

Demonstração. Seja a um número par tal que $a > 2$. Pelo Teorema 3.15, sabemos que:

$$a \in \bigcup_{p \in P} A_p$$

onde cada subconjunto A_p é dado por:

$$A_p = \{p + q \mid q \in S_n(p)\}$$

com p um primo pertencente a P e q um primo pertencente à sequência $S_n(p)$.

Por definição, todo elemento $a \in A_p$ pode ser escrito como:

$$a = p + S_n(p)$$

com p e $S_n(p)$ ambos números primos. Como a sequência $S_n(p)$ é simétrica em relação ao primo p, de acordo com o Corolário 2.3 e com a Definição 2.6, então qualquer número par $a \in A_p$ possui um par simétrico de primos.

Logo, todo número par $a > 2$ pode ser representado como:

$$a = p + q$$

com p e q sendo primos, onde $q \in S_n(p)$.

Esse resultado é garantido diretamente pelo Teorema 3.15, uma vez que, para todas a sequências $a_n = p + S_n(p)$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} a_n = A$$

o que completa a demonstração. □

Observação 3.17. Um par simétrico p e $S_n(p)$ tal que $a = p + S_n(p)$ é o equivalente na literatura a dizer que esse par é uma das partições de a. Isso porque um mesmo par pode possuir várias partições, ou seja ele pode ser gerado a partir da soma entre pares distintos de primos, ou no caso deste artigo, dizemos que diferentes sequências a_n podem gerar um mesmo par.

Teorema 3.18 (Formulação Simétrica da Conjectura de Goldbach)**.** *Todo número par $a > 2$ pode ser expresso como a soma de dois números primos p e q, tais que:*

$$a = p + q$$

onde p é um número primo pertencente ao conjunto P (primos maiores que dois) e q é um número primo pertencente à sequência $S_n(p)$ associada a p, conforme definida neste trabalho.

Em outras palavras, para todo número par $a > 2$, existe um par simétrico de primos (p, q), sendo $q \in S_n(p)$, tal que:

$$a = p + S_n(p)$$

Demonstração. O resultado segue diretamente do Teorema 3.15 (Cobertura dos Números Pares) e do Corolário 3.16, os quais estabelecem que todo número par maior que dois pertence à união dos subconjuntos formados por somas da forma $p+q$, com p pertencente ao conjunto dos primos P e q pertencente à sequência $S_n(p)$. Como demonstrado, a sequência $S_n(p)$ contém infinitos primos e possui relação simétrica com p, garantindo que todo número par pode ser expresso como a soma de um primo p e de um primo $q \in S_n(p)$.

Ressalta-se que o caso $a = 4$ é gerado diretamente como $4 = 2+2$, através da sequência $S_n(2)$, que constitui um caso particular dentro da construção. Para todos os outros primos $p > 2$, as propriedades estruturais da sequência $S_n(p)$ são plenamente aplicáveis conforme as definições apresentadas.

Isso conclui a demonstração. □

4 Discussão do Corolário 3.16 e do Teorema 3.18 e Implicações na Conjectura de Goldbach

O Corolário 3.16 estabelecido no contexto deste trabalho demonstra que todo número par $a > 2$ possui um **par simétrico de primos**, especificamente da forma $a = p + q$, onde p é um primo fixado pertencente ao conjunto P (primos maiores que três) e q é um primo pertencente à sequência $S_n(p)$. O Teorema 3.18 estende esse resultado a Conjectura de Goldbach a fim de demonstrá-lo.

4.1 Interpretação Estrutural

A sequência $S_n(p)$ possui uma construção baseada na simetria dos números ímpares menores que um determinado valor, conforme definido anteriormente na Proposição 2.2, no Corolário 2.3 e na Definiçãp 2.6. Dessa forma, para cada primo p, a sequência $S_n(p)$ fornece um subconjunto de primos que, somados a p, geram números pares que não são múltiplos de p, exceto pelo termo $2p$, mas, coletivamente, a união desses pares cobre **todo o conjunto dos pares maiores que dois**, como garantido pelo Teorema 3.15.

4.2 Propagação Estrutural e Exclusão por Contradição

Na seção anterior, exploramos como a estrutura desenvolvida a partir das sequências $S_n(p)$ permite não apenas a geração de um número par específico a, mas também a propagação de representações para pares subsequentes e anteriores por meio de deslocamentos simétricos. Tal característica sustenta a densidade e interconexão entre os subconjuntos A_p, sugerindo que o não pertencimento de um par a qualquer A_p levaria a uma contradição estrutural.

4.3 Implicações Diretas na Conjectura de Goldbach

Este resultado sustenta, sob a construção proposta, que qualquer número par maior que dois **pode ser expresso como a soma de dois primos**, sendo um deles um primo fixo p e o outro um primo proveniente da sequência $S_n(p)$ associada a esse p.

A simetria observada na construção da sequência $S_n(p)$ não apenas sugere, mas também estrutura formalmente a geração dos pares como combinações específicas de primos e seus simétricos dentro das sequências.

4.4 Observação de Relevância

Ainda que o Teorema 3.18 possa não constituir uma demonstração completa da Conjectura de Goldbach no sentido clássico, este trabalho fornece uma estrutura formal elaborada e uma decomposição do conjunto dos pares em subconjuntos que, isoladamente, são gerados pela soma de primos específicos com seus simétricos nas sequências $S_n(p)$.

Essa abordagem pode, portanto, representar uma estratégia alternativa na busca de uma demonstração completa, ao invés de se focar exclusivamente na busca de por um par de primos qualquer, opta-se pela decomposição sistemática do conjunto dos pares, distribuindo-os segundo as progressões e simetrias associadas a cada primo p.

4.5 Perspectivas

Essa formulação permite avançar na análise estrutural do problema, podendo conduzir a novos lemas e teoremas que, eventualmente, possam atacar os casos residuais ou demonstrar a exaustividade da cobertura para todos os números pares.

Além disso, a abordagem sugere a possibilidade de análise algorítmica, uma vez que cada subconjunto A_i pode ser gerado computacionalmente a partir de um primo p_i e dos elementos da sequência $S_n(p_i)$.

4.6 Conclusão da Discussão

O Corolário 3.16, portanto, não apenas reforça a validade da construção proposta, como também fornece uma formulação que conecta diretamente a Conjectura de Goldbach com o Teorema de Dirichlet aplicado às progressões associadas às sequências $S_n(p)$, e com as propriedades de simetria dos números ímpares menores que um determinado limite. Além disso, esse resultado é a principal para demonstrar o Teorema 3.18 deste trabalho.

5 Considerações Finais sobre a Abordagem Estrutural

O objetivo central deste trabalho não foi apresentar uma demonstração direta da Conjectura de Goldbach nos moldes tradicionais, isto é, a partir da simples verificação da existência de um par de primos p e q tal que $a = p + q$ para cada número par $a > 2$.

Em vez disso, a proposta aqui desenvolvida busca construir uma estrutura matemática baseada em propriedades de simetria, progressões aritméticas e exclusão sistemática de múltiplos, com o intuito de compreender como os pares podem emergir da organização interna dos primos.

A partir da definição das sequências $S_n(p)$ e dos subconjuntos $A_p = \{p + q \mid q \in Q_p\}$, onde Q_p representa os primos contidos em $S_n(p)$, foi possível observar uma malha algébrica que sugere um padrão de cobertura dos números pares baseado em regularidades estruturais. Essa malha parece se propagar por meio de deslocamentos simétricos dos elementos q, com a propriedade de que, caso $q + 2k$ ou $q - 2k$ seja primo, então o próximo (ou anterior) número par pode ser alcançado dentro do mesmo subconjunto A_p.

A abordagem aqui proposta, portanto, pode ser interpretada como uma tentativa de compreender a Conjectura de Goldbach não pela força bruta de combinar primos aleatoriamente, mas por meio de uma organização sistemática, onde a simetria dos ímpares e as restrições aritméticas impõem uma estrutura que pode justificar a representação de todos os pares.

Ainda que essa estrutura possar não constituir, a priori, uma prova formal da conjectura, acredita-se que ela ofereça uma nova perspectiva sobre o problema, passível de aprofundamentos futuros e refinamentos que poderão, eventualmente, contribuir para a compreensão teórica mais ampla da conjectura e da distribuição dos primos.

6 Conclusão

Este trabalho apresentou uma abordagem alternativa para a Conjectura de Goldbach, fundamentada na decomposição dos números pares maiores que dois em somas da forma $p + q$, onde p é um primo fixo e q pertence a uma sequência específica $S_n(p)$ associada a esse primo. A partir da aplicação do Teorema de Dirichlet e das propriedades de simetria dos números ímpares, foi possível demonstrar que a união dos subconjuntos formados por essas somas gera integralmente o conjunto dos números pares maiores que dois.

Embora haja a possibilidade do resultado obtido não configurar uma prova definitiva da Conjectura de Goldbach através do Teorema 3.18, ele oferece uma contribuição significativa no sentido de estruturar o problema sob uma nova ótica, organizando os números pares segundo padrões algébricos e simétricos. Além disso, essa abordagem abre espaço para a formulação de novos lemas, conjecturas auxiliares e estratégias de demonstração que podem ser exploradas em pesquisas futuras.

Como trabalhos futuros, sugere-se aprofundar a análise das interseções entre os subconjuntos gerados, investigar a distribuição dos primos dentro das sequências $S_n(p)$ e explorar a possibilidade de estender essa abordagem para outros problemas clássicos da Teoria dos Números. A proposta aqui apresentada também pode ser adaptada para análises computacionais, permitindo a geração e a verificação automatizada das estruturas formadas, contribuindo assim tanto para a pesquisa teórica quanto para o desenvolvimento de algoritmos relacionados à distribuição dos números primos.

Agradecimentos

Ofereço este trabalho em homenagem a todos os meus professores de matemática, que contribuíram para minha formação e paixão pela matemática.

Referências

[1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer, 1976.

[2] C. D. C. Paiva, et al. *A busca pela prova da conjectura de Goldbach: explorando suas conquistas.* Caderno Pedagógico, 21(7): e5770-e5770, 2024.

[3] T. Oliveira e Silva, S. Herzog, and S. Pardi, Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Math. Comp.* **83** (2014), no. 288, 2033–2060.

[4] A. Hefez, *Elementos de Aritmética*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[5] David Galvin, *Erdős's proof of Bertrand's postulate*, 2013. https://www3.nd.edu/~dgalvin1/pdf/bertrand.pdf

[6] Roger Ellman, *A Proof of "Goldbach's Conjecture"*, 2000. Disponível em: https://arxiv.org/abs/math/0005185.