Otimização Combinatória: Trabalho Final

Gabriel Mattos Langeloh

2 de agosto de 2023

1 Instruções gerais

- O trabalho deve ser realizado em duplas.
- Cada dupla deve escolher uma meta-heurística e um problema (definidos abaixo) e informar o professor imediatamente (Moodle / e-mail).
- Cada par (problema, heurística) deve ser único na turma. Conflitos serão resolvidos por ordem de pedido.
- O trabalho consiste em:
  - Formular o problema escolhido como programa inteiro misto.
  - Implementar a formulação (ex: com Julia / JuMP) e executar a formulação sobre as instâncias dadas, com limite de tempo.
  - Propor componentes para a meta-heurística escolhida resolver o problema (vizinhança, condição de parada, crossover, etc).
  - Implementar a meta-heurística proposta em qualquer linguagem de programação.
  - Executar a implementação sobre as instâncias dadas e apresentar os resultados.
  - Analisar criticamente os resultados, preferencialmente com dados, tabelas, gráficos, etc.
  - Escrever um relatório completo explicando o que foi feito, apresentando todos os resultados.
- Entrega: 28/08

2 Meta-heurísticas

- Simulated Annealing
- Late Acceptance Hill Climbing
- GRASP
- Busca Tabu
- VNS
- Busca local iterada
- Algoritmos genéticos

3 Problema 1 - Reduzindo Redes Sociais

Considere um grafo não-direcionado $G = (V, A)$ onde cada vértice v representa uma pessoa em uma rede social, e cada aresta $\{u, v\}$ indica que u e v estão relacionados nessa rede.

Seja $S \subseteq V$ um subconjunto de pessoas. Dizemos que esse subconjunto é k-relacionado se todos os vértices do subgrafo $G[S]$ induzido por S possuem grau pelo menos k (isto é, cada pessoa desse subconjunto está relacionada a pelo menos k outras pessoas do subconjunto).

Considere agora o seguinte problema: decidir um subconjunto P de p pessoas "importantes" para remover da rede social de forma que, no grafo $G - P$, o tamanho do subconjunto k-relacionado máximo seja o menor possível. Uma instância desse problema é, então, dada por um grafo G e os valores inteiros k e p.

3.1 Exemplos

Intuitivamente, o problema corresponde a encontrar as pessoas mais importantes da rede que, se forem removidas, causam com que as pessoas remanescentes sejam menos relacionadas entre si.

É importante observar que calcular o tamanho do maior conjunto k-relacionado em um grafo G é um problema polinomial. De fato, pode-se notar que nenhum vértice de grau $< k$ pode fazer parte desse conjunto. Assim, basta remover iterativamente cada um dos vértices de G que possuem grau $< k$, de modo que o grafo resultante será k-relacionado (e nenhum subgrafo maior pode ter essa propriedade).

Considere o grafo G da Figura 1, com $k = 3$ e $p = 1$. O grafo dado já é 3-relacionado, pois todo vértice possui grau pelo menos 3. Uma solução factível poderia ser dada, por exemplo, pela remoção do vértice 13. É fácil verificar que, nesse caso, o grafo continua 3-relacionado, de modo que obtemos uma solução com valor da função objetivo 13, correspondendo aos 13 vértices que restam no grafo. Por outro lado, removendo, por exemplo, o vértice 1, o grafo resultante G_1 não é mais 3-relacionado pois, por exemplo, o grau do vértice 2 se torna 2. Calculando o tamanho do subconjunto k-relacionado máximo de G_1 com o algoritmo polinomial descrito acima, obtemos um valor de 7, correspondendo ao subgrafo 3-relacionado induzido por $S = \{6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$. De fato, essa é a solução ótima para essa instância, mas esse fato não é óbvio sem verificar outras possibilidades de vértices a serem removidos.

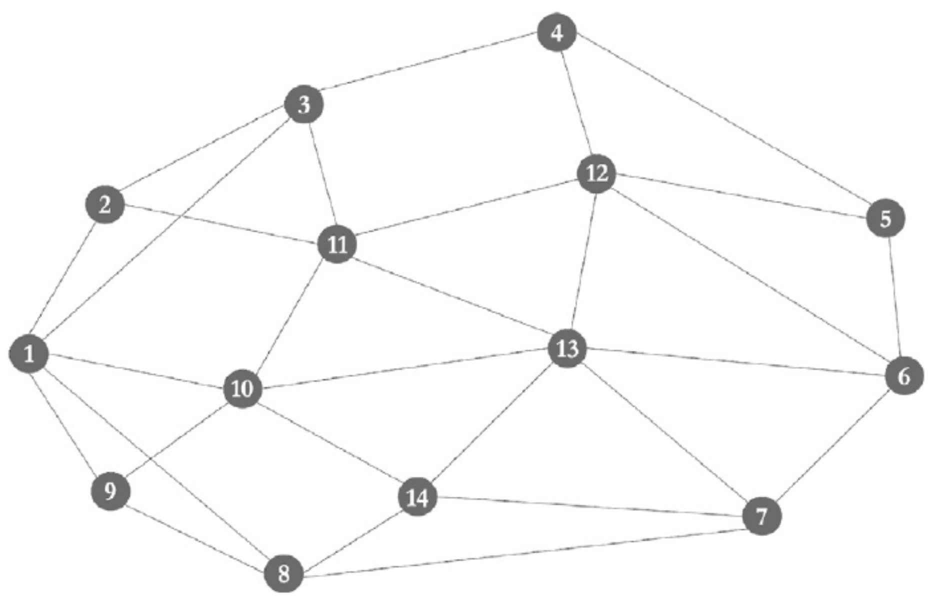

Figura 1: Exemplo de instância.

3.2 Instâncias e formato

Uma instância é dada por um grafo $G = (V, A)$, um inteiro k e um inteiro p. As instâncias são fornecidas em um arquivo texto cuja primeira linha contém os valores n, m, k, p separados por espaços, onde n é o número de vértices do grafo, m é o número de arestas e k, p são os valores inteiros descritos no enunciado do problema. Cada uma das m linhas seguintes contém dois inteiros u, v separados por espaços e corresponde à existência da aresta $\{u, v\}$ no grafo.

4 Problema 2 - Torneio Esportivo

Considere um torneio esportivo com n times (com n par), onde cada time deve jogar exatamente uma vez com cada outro time. O torneio é dividido em $n - 1$ rodadas, onde em cada rodada cada time deve jogar exatamente uma vez. Além disso, determinar que o jogo entre os times i, j ocorrerá na rodada r possui um custo c_{ijr}.

Determinar a tabela dos jogos que ocorrerão em cada rodada de modo a minimizar o custo total.

4.1 Exemplos

Considere um torneio com $n = 4$ times. Então existem $C_4^2 = 6$ jogos entre esses times (são 6 pares de times). Esses jogos podem ser realizados em $n - 1 = 3$ rodadas, com 2 jogos em cada rodada. Esse tipo de situação sempre ocorre: o número de jogos é sempre C_n^2, o número de rodadas é $n - 1$ e há sempre $C_n^2/(n-1) = n/2$ jogos em cada rodada, pois podemos fazer $n/2$ pares com os n times para cada rodada. Um exemplo de solução factível com $n = 4$ times é atribuir os jogos $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ à primeira rodada, os jogos $\{1, 3\}$ e $\{2, 4\}$ à segunda e os jogos $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ à terceira. Considerando os custos fornecidos na Tabela 1, essa solução factível possui custo total $(0 + 5) + (0 + 3) + (0 + 1) = 9$. Essa é uma das várias soluções ótimas para essa instância, todas com custo 9.

4.2 Instâncias e formato

As instâncias são fornecidas em arquivos texto cuja primeira linha contém o número n de times. Cada uma das demais linhas representa os custos de

	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3

Tabela 1: Tabela de custos para uma instância com $n = 4$ times. Cada entrada $a_{r,\{i,j\}}$ corresponde ao custo de realizar o jogo entre os times $\{i, j\}$

realizar cada jogo em alguma rodada com os 4 valores numéricos i, j, r, c cada, separados por espaços, onde i, j são os times que jogam, r é a rodada em que o jogo ocorre e c é o custo de realizar tal jogo nessa rodada. Os valores i, j, r são inteiros, enquanto o custo c pode ser inteiro ou real. Se não há linha no arquivo correspondendo ao jogo $\{i, j\}$ na rodada r, isso significa que o custo da realização desse jogo nessa rodada é 0. Times são numerados de 0 a $n-1$ e rodadas de 0 a $n-2$.

5 Problema 3 - Roteamento em Redes Móveis

Considere um grafo $G = (V, A)$ representando uma rede móvel onde cada vértice $v \in V$ corresponde a um dispositivo que funciona tanto como roteador intermediário da rede quanto como cliente, e cada aresta corresponde a uma conexão direta entre dois dispositivos. Deseja-se selecionar um conjunto S de dispositivos para formar a "espinha dorsal" da rede, isto é, um subconjunto através do qual pacotes podem ser roteados de qualquer dispositivo para qualquer outro dispositivo da rede. Para que isso seja possível, o conjunto S deve ser conexo em G, e qualquer vértice $v \in V$ deve ou estar em S ou ter um vizinho em S. Deseja-se minimizar o número de dispositivos dedicados a essa tarefa, isto é, deseja-se minimizar $|S|$.

5.1 Exemplos

Considere G o grafo na figura 2. Sempre existem soluções factíveis: por exemplo, selecionar todos os dispositivos para fazerem parte do conjunto S. Outro exemplo de solução factível é selecionar $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, pois esse conjunto é conexo e todos os demais vértices são adjacentes a algum desses. Já a solução dada pelo conjunto $S = \{1, 2, 6, 7\}$ não é factível, pois os vértices 4 e 12 não são adjacentes a nenhum vértice de S. Uma solução ótima para essa instância, de valor 4, é $S = \{5, 6, 7, 8\}$. Nem todas as instâncias fornecidas terão um formato de grid como esse exemplo.

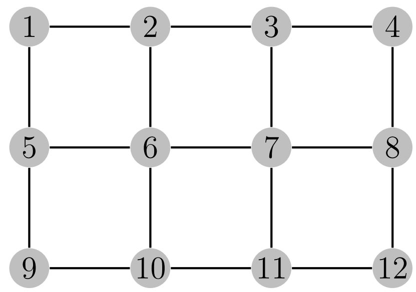

Figura 2: Grafo G representando uma rede móvel.

5.2 Instâncias e formato

As instâncias são fornecidas em um arquivo texto onde a primeira linha contém valores inteiros n, m separados por espaços correspondendo respectivamente ao número de vértices e arestas do grafo. Cada uma das m linhas seguintes contém dois valores inteiros u, v separados por espaços, correspondendo à existência da aresta $\{u, v\}$ em G. Vértices são numerados de 1 a n.