Ciência da Computação

GRAFOS

Aula 03
Representações de Grafos

Max Pereira

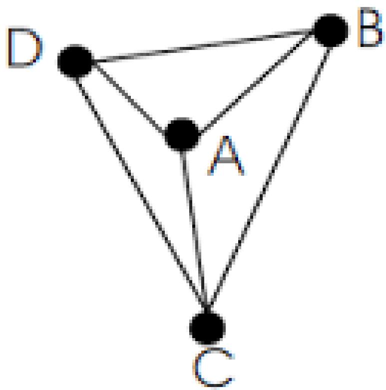
Representação

A maior vantagem de um grafo é a sua **representação visual da informação**. Mas para a <u>manipulação</u> e <u>armazenamento</u> em um **computador**, essa informação tem que ser representada de outras maneiras.

Representação

Listas de arestas

Uma maneira simples de representar um grafo é utilizar uma lista de arestas.
Para representar uma aresta precisamos de um vetor contendo dois vértices.



A	B
A	C
A	D
B	C
B	D
C	D

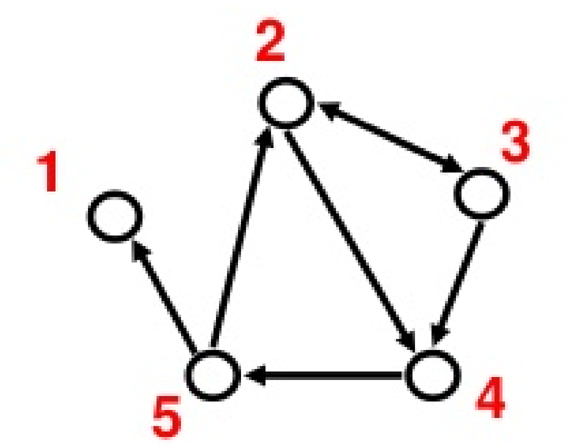
Importante!
Listas de arestas são simples, mas se precisamos encontrar uma determinada aresta, devemos percorrer toda a lista.

[[A,B], [A,C], [A,D], [B,C], [B,D], [C,D]]

Representação

Lista de arestas

Representação de um grafo orientado.



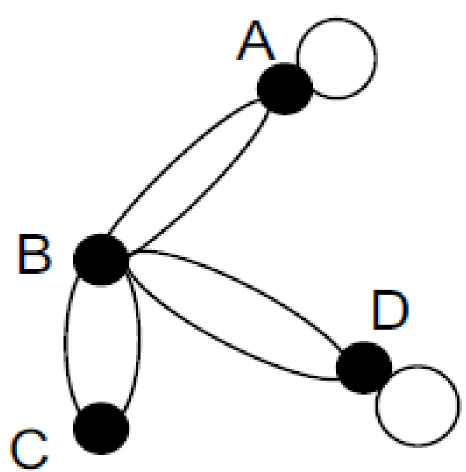
2	3
2	4
3	2
3	4
4	5
5	1
5	2

[[2,3], [2,4], [3,2], [3,4], [4,5], [5,1], [5,2]]

Representação

Lista de arestas

Representação de um multigrafo.



A	A
A	B
A	B
B	C
B	C
B	D
B	D
D	D

[[A,A], [A,B], [A,B], [B,C], [B,C], [B,D], [B,D], [D,D]]

Podemos acrescentar um terceiro elemento no vetor ou mais informação ao objeto!

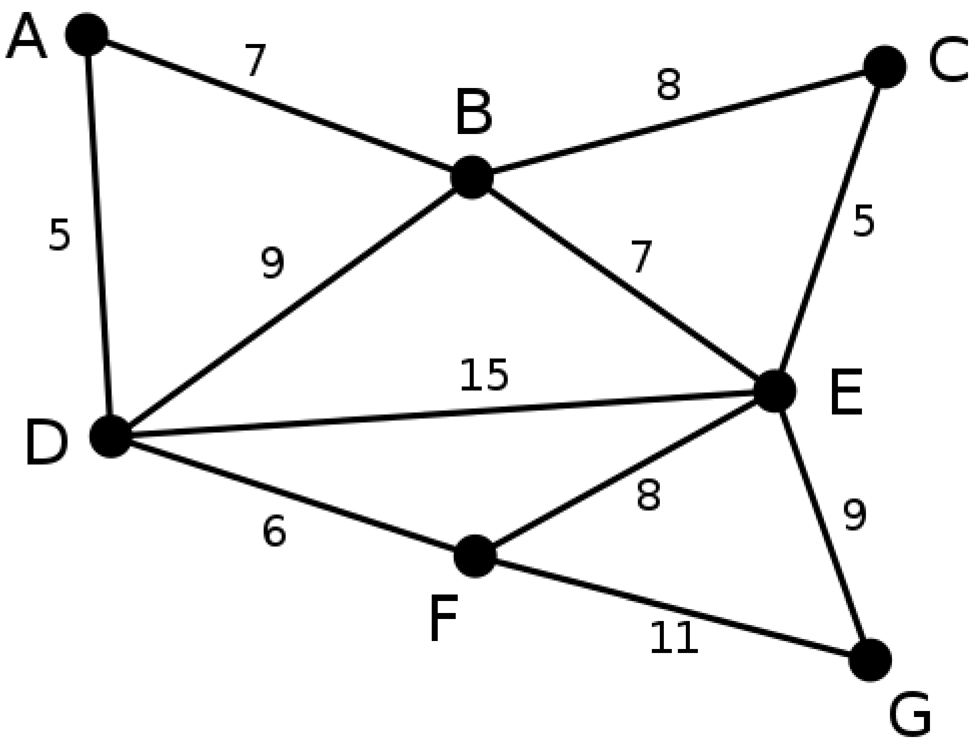
A	A	1
A	B	2
B	C	2
B	D	2
D	D	1

Quantidade de arestas

Representação

Grafo Valorado ou Ponderado

Um grafo é dito valorado quando um número real é associado aos seus vértices e/ou arestas (peso da ligação).



A	B	7
A	D	5
B	C	8
B	D	9
B	E	7
C	E	5
D	E	15
D	F	6
E	F	8
E	G	9
F	G	11

Valor da aresta

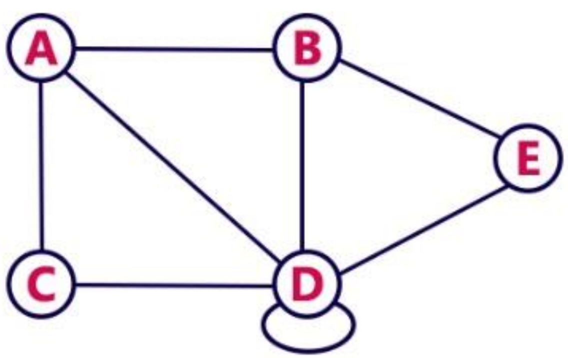
[[A,B,7], [A,D,5], [B,C,8], [B,D,9], [B,E,7], [C,E,5]...]

Representação

Matriz de Adjacência

Para um grafo com $|V|$ vértices, uma <u>matriz de adjacência</u> é uma matriz $|V| \times |V|$ de 0s (zeros) e 1s (uns), onde a entrada na linha *i* e coluna *j* será 1 se e somente se a aresta (*i, j*) estiver no grafo.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ (i,j) \in E \\ 0, se\ (i,j) \notin E \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Representação

Matriz de Adjacência

Com uma matriz de adjacência, podemos descobrir se uma aresta está presente no grafo, apenas procurando pela **entrada correspondente na matriz**. Por exemplo, se a matriz for denominada *M1* podemos verificar se a aresta (*i, j*) está presente no grafo apenas procurando por *M1*[*i*] [*j*].

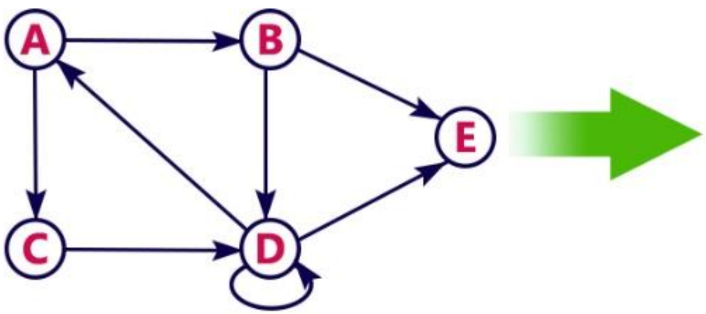
Desvantagens:

- Precisamos de $|V|^2$ de espaço para armazenar a matriz.
- Se precisarmos saber quais vértices são adjacentes a um determinado vértice *i*, será necessário percorrer todas as entradas da linha *i*, mesmo que um número pequeno de vértices seja adjacente ao vértice *i*.

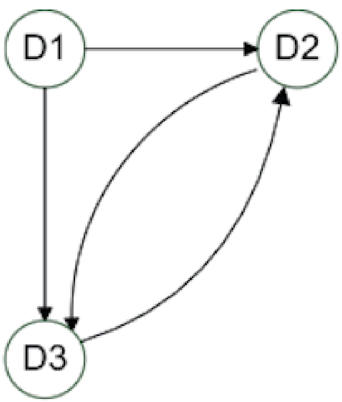
Representação

Matriz de Adjacência

Representação para um grafo orientado.



$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

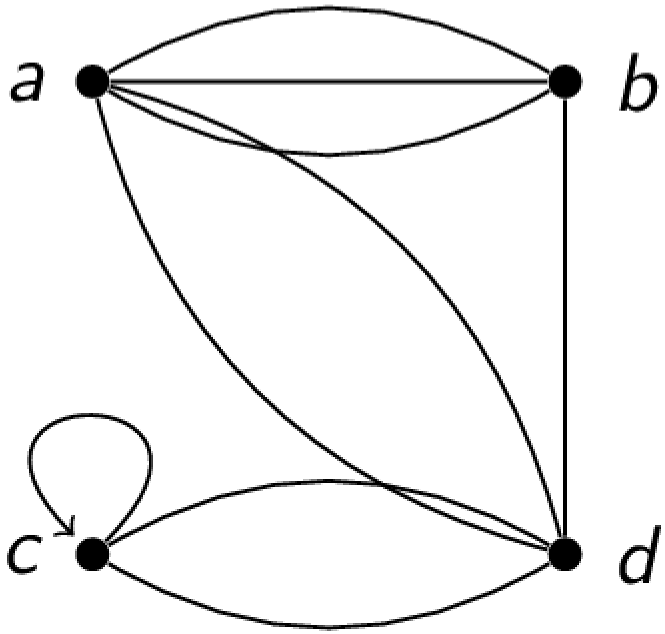


$$
\begin{array}{c} \\ D1 \\ D2 \\ D3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} D1 & D2 & D3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Representação

Matriz de Adjacência

Representação para um multigrafo.

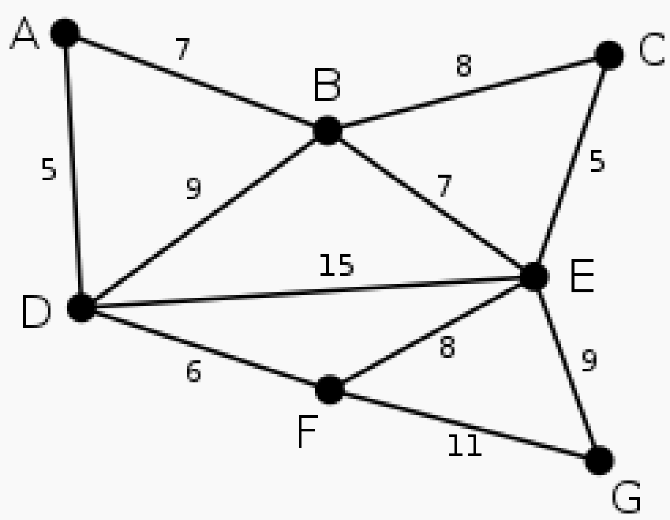


$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Representação

Matriz de Adjacência

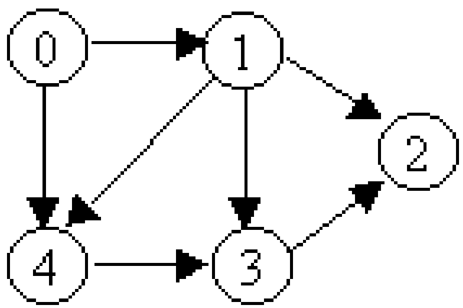
Representação para um <u>grafo valorado</u>.

Grafo valorado	Matriz de valores
	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 15 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

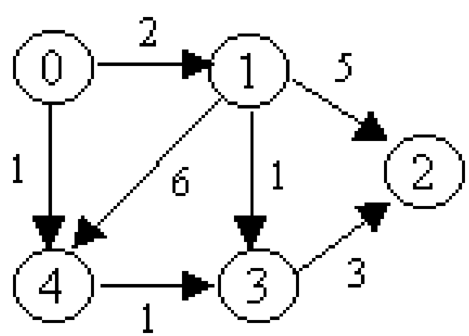
Representação

Matriz de Adjacência

Representação para um grafo valorado.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



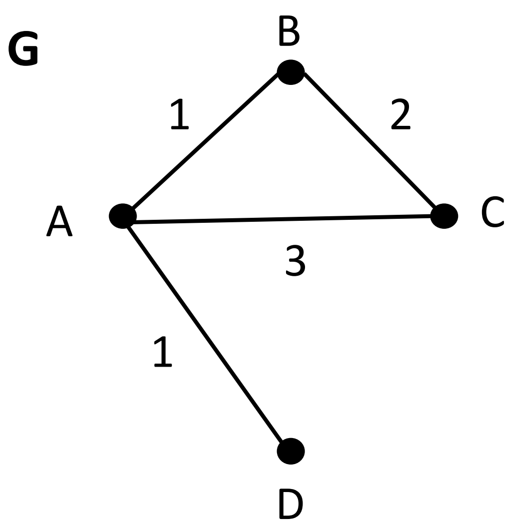
$$A = \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 5 & 1 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

∞ - representa um valor muito alto.

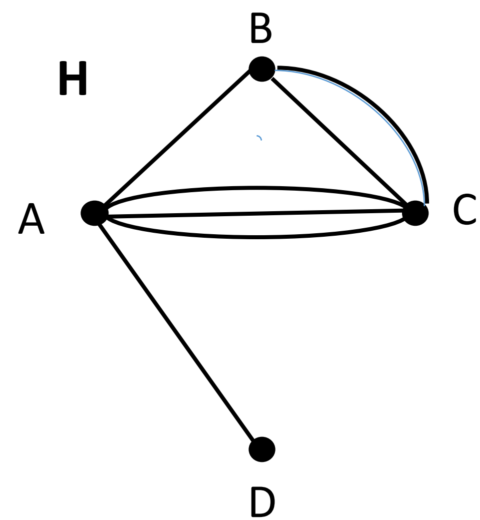
Representação

Matriz de Adjacência

Análise de grafos valorados.



$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \end{array}$$

Os grafos *G* e *H* possuem a mesma matriz de adjacência e, de certa forma, os grafos possuem o **mesmo comportamento**. Por exemplo, o fluxo de tráfego na internet (ou mesmo tráfego em rodovias).

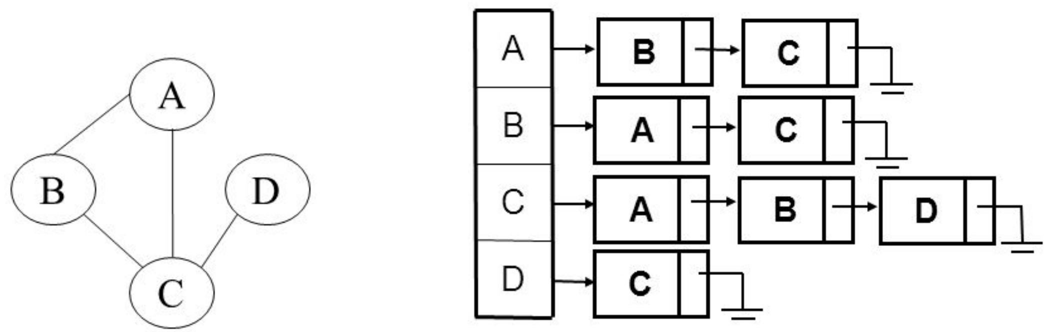
Representação

Listas de Adjacência

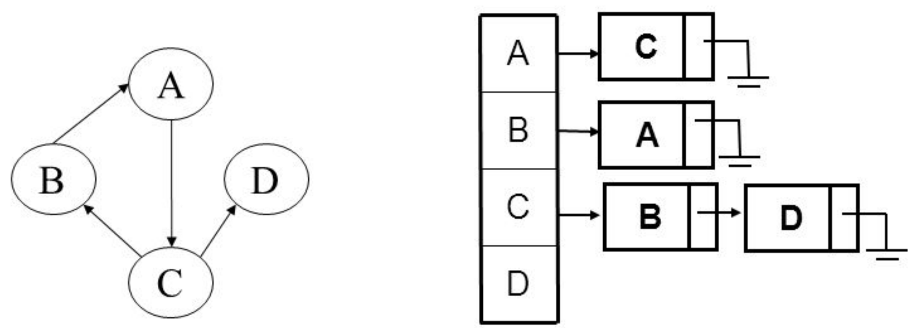
Quando representamos um grafo com listas de adjacência, estamos combinando matrizes de adjacência com listas de arestas. Para cada vértice *i*, precisamos armazenar um **vetor de vértices** adjacentes a ele.

Tipicamente temos um vetor de tamanho $|V|$ de **listas de adjacência**, uma lista de adjacência por vértice.

Grafo não orientado



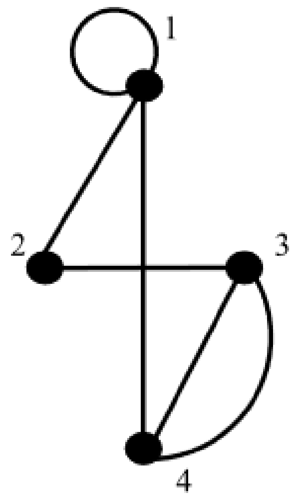
Grafo orientado

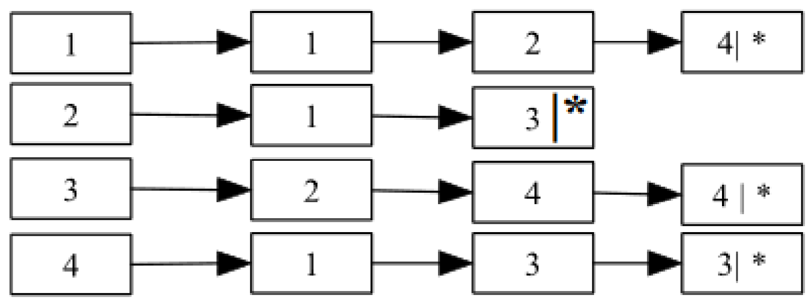


Representação

Listas de Adjacência

Um vetor de tamanho $|V|$ de **listas de adjacência**, uma lista de adjacência por vértice.



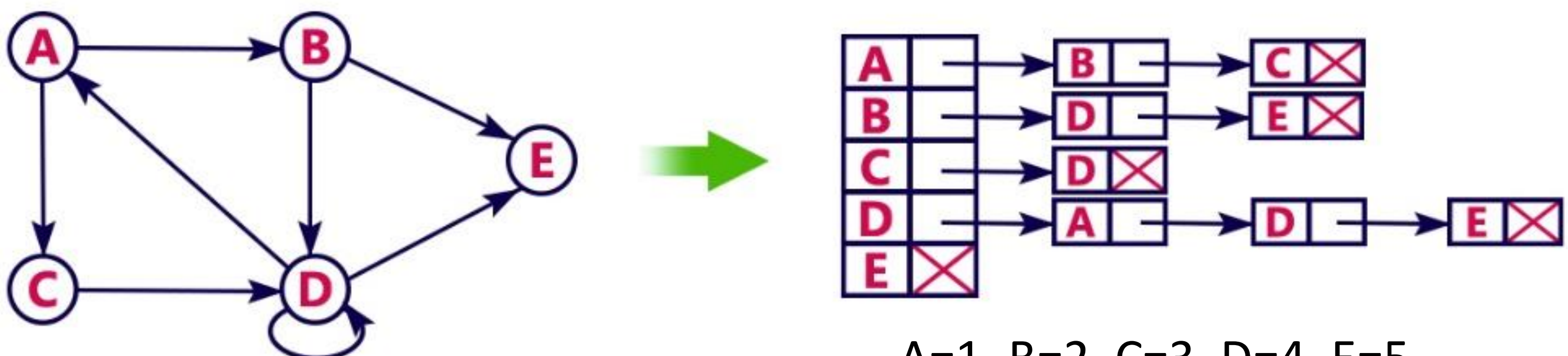


[[1, 2, 4],
[1, 3],
[2, 4, 4],
[1, 3, 3]]

Representação

Listas de Adjacência

Um vetor de tamanho $|V|$ de **listas de adjacência**, uma lista de adjacência por vértice.



A=1, B=2, C=3, D=4, E=5

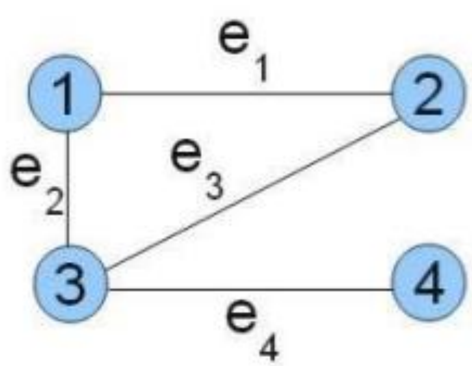
```
[ [2, 3],
  [4, 5],
  [4],
  [1, 4, 5],
  [] ]
```

Representação

Matriz de Incidência

Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas. A matriz de incidência A de G é uma matriz $n \times m$: $A = [a_{ij}]$ onde as n linhas correspondem aos n vértices e as m colunas correspondem as m arestas, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ a\ j_{ésima}\ aresta\ e_j\ for\ incidente\ ao\ i_{ésimo}\ vértice \\ 0, \quad\quad caso\ contrário \end{cases}$$

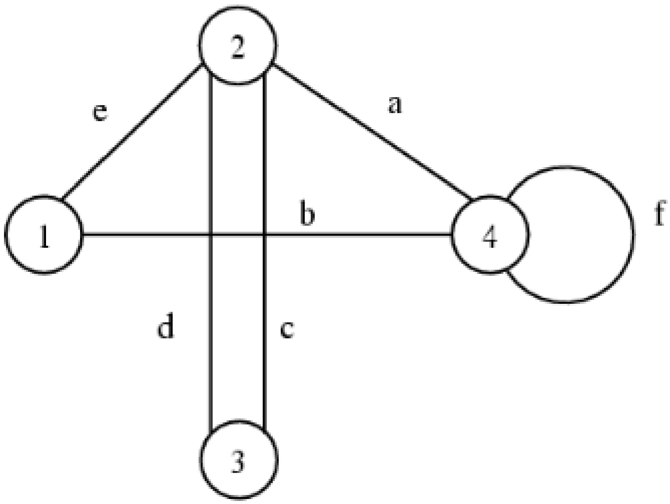


	e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

Representação

Matriz de Incidência

Representação para um **multigrafo com laço**.



Matriz de Incidência

	a	b	c	d	e	f
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0
4	1	1	0	0	0	2

Representação

É possível utilizar esta estrutura para armazenar dígrafos?

Sim. Uma vez que ao dizer que uma **aresta incide em um vértice** é necessário especificar se ela converge para ou diverge do vértice.

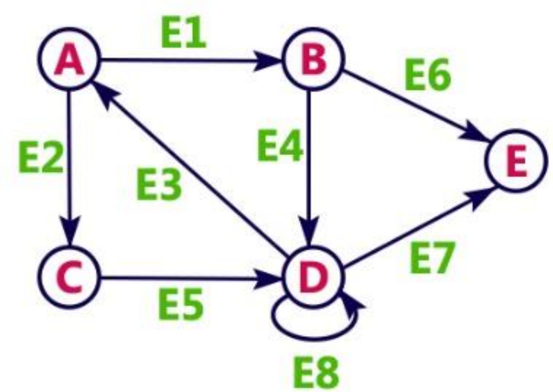
Seja *D* um dígrafo com *n* vértices e *m* arestas. Sua matriz de incidência $A = [a_{ij}]$ é definida como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ a\ aresta\ e_j\ diverge\ do\ vertice\ v_i \\ -1, se\ a\ aresta\ e_j\ converge\ para\ o\ vértice\ v_i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Representação

Matriz de incidência para grafos orientados (dígrafos).

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ a\ aresta\ e_j\ diverge\ do\ vertice\ v_i \\ -1, se\ a\ aresta\ e_j\ converge\ para\ o\ vértice\ v_i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E1 & E2 & E3 & E4 & E5 & E6 & E7 & E8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Trabalho 1

Implementar as seguintes representações de grafos:

- Listas de arestas
- Listas de adjacência
- Matriz de adjacência
- Matriz de incidência

Entrada:

✓ Tipo de grafo: não-orientado ou orientado
✓ Valorado (s/n) – somente arestas
✓ Conjunto V
✓ Conjunto E

Saída:

✓ As três formas de representação