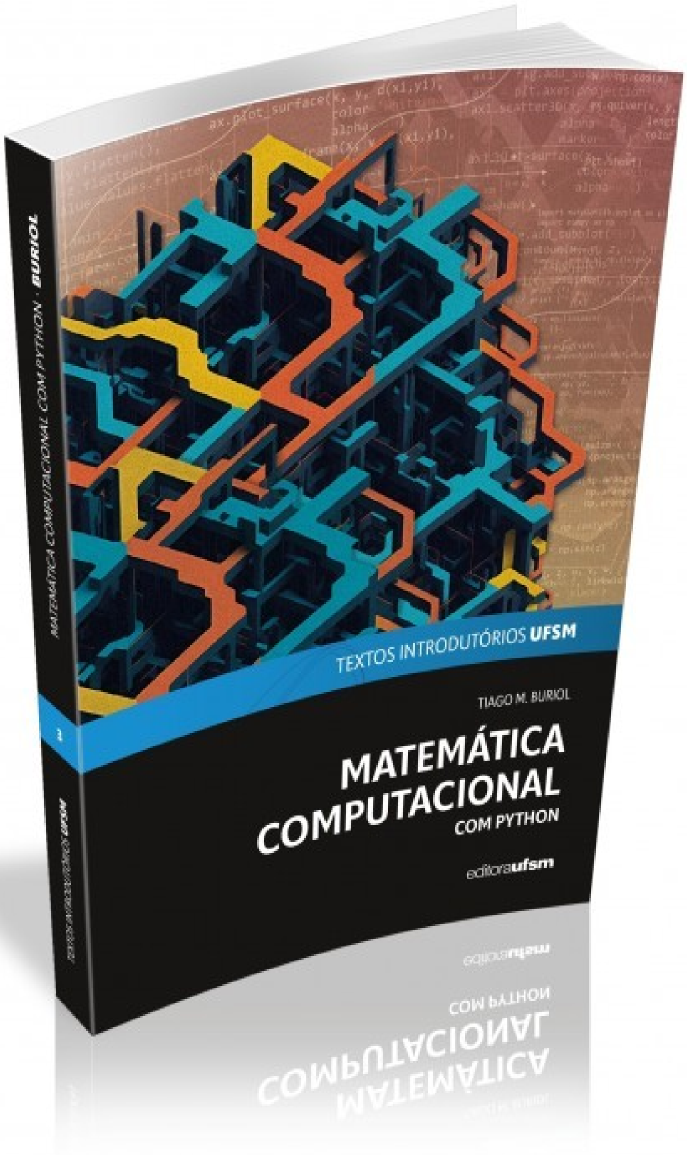
Minicurso 1 – Matemática Computacional em Python.
Prof. Dr. Tiago Buriol (UFSM)

MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

COM PYTHON

editoraufsm

UFSM
Pró-Reitoria de Graduação


MATEMÁTICA COMPUTACIONAL COM PYTHON · BURIOL
TEXTOS INTRODUTÓRIOS UFSM
TIAGO M. BURIOL
MATEMÁTICA
COMPUTACIONAL
COM PYTHON
editoraufsm

Sumário

Introdução à computação numérica e aos erros

A matemática computacional é um ramo da matemática que faz uso da computação para buscar soluções de problemas aplicados, provenientes de diferentes áreas de conhecimento. Em outras palavras, trata de resolver modelos matemáticos computacionalmente, ou seja, por meio de algoritmos e de programação de computadores.

$$F = G\frac{m \times m_t}{d^2}$$

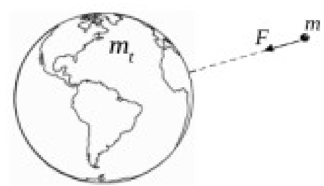
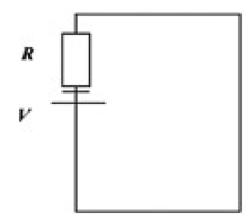
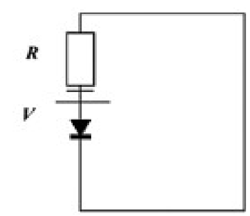


Figura 1.1: Lei da gravitação universal



$$V - R \cdot i = 0$$



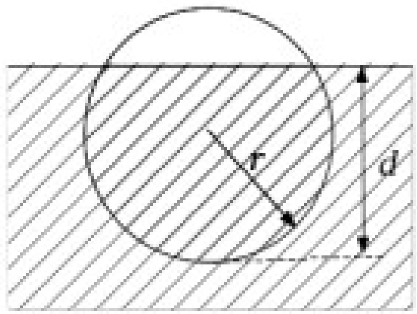
$$V - R \cdot i - \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{i}{I_s}+1\right) = 0$$

Figura 1.2: Lei de Kirchoff

(a) $2,1x - 47,3 = 0$ (d) $xe^x - 2 = 0$

(b) $x^2 + 2x - 3 = 0$ (e) $cos 3\theta - sen\theta = 0$

(c) $senx - x = 0$ (f) $2,1^x + 5,7x = 0$



$$\mu_e V_e g = \mu_a V_a g$$

Figura 1.3: Esfera flutuando e o princípio de Arquimedes

$$\mu_e \frac{4\pi r^3}{3} = \mu_a \int_0^d \pi \left[r^2 - \left(x - r \right)^2 \right] dx$$

$$\mu_e \frac{4\pi r^3}{3} = \mu_a \frac{\pi d^2 \left(3r - d \right)}{3}$$

substituindo os valores $r = 10cm$, $\mu_e = 0,638 g/cm^3$ e

$\mu_a = 1 g/cm^3$, obtemos a equação $1,047 d^3 - 31,415 d^2 + 2672,369 = 0$.

A abordagem numérica

$$x^2 - 7x + 3 = 0)$$

$$x_0 = 1,0$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 3}{7}$$

```
0.5714285714285714
0.4752186588921283
0.46083325339417613
0.45890961249055157
0.45865686177660403
0.4586237309792518
```

Computação simbólica

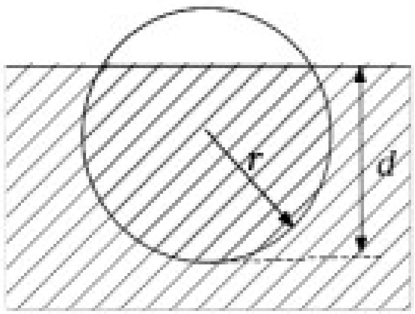
$$x^2 - 7x + 3 = 0$$

Bhaskara

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

```
x = symbols('x')
solve(x**2-7*x+3, x)
```

$$\left[\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2} + \frac{7}{2}\right]$$



$$\mu_e V_e g = \mu_a V_a g$$

$$1{,}047d^3 - 31{,}415d^2 + 2672{,}369 = 0.$$

f(1)= 2642.001	f(11)= 264.711
f(2)= 2555.085	f(12)= -42.175
f(3)= 2417.903	f(13)= -336.507
f(4)= 2236.737	f(14)= -612.003
f(5)= 2017.869	f(15)= -862.381
f(6)= 1767.581	f(16)= -1081.359
f(7)= 1492.155	f(17)= -1262.655
f(8)= 1197.873	f(18)= -1399.987
f(9)= 891.017	f(19)= -1487.073
f(10)= 577.869	f(20)= -1517.631

f(11.0)= 264.711	f(11.5)= 110.091
f(11.1)= 233.637	f(11.6)= 79.425
f(11.2)= 202.631	f(11.7)= 48.858
f(11.3)= 171.701	f(11.8)= 18.399
f(11.4)= 140.852	f(11.9)= -11.948
	f(12.0)= -42.175

Erros nas aproximações numéricas

```
print ("0.2 + 0.4 - 0.5 =", 0.2 + 0.4 - 0.5)
print ("- 0.5 + 0.4 + 0.2 =", - 0.5 + 0.4 + 0.2)
print ("0.2 -0.1 + 0.2 - 0.1 =", 0.2 -0.1 + 0.2 - 0.1)
print ("0.2 - 0.1 + (0.2 - 0.1) =", 0.2 - 0.1 + (0.2 - 0.1))
print ("0.2 + 0.3 + 0.1 =", 0.2 + 0.3 + 0.1 )
print ("0.2 + 0.1 + 0.3 =", 0.2 + 0.1 + 0.3)
```

```
0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.10000000000000009
- 0.5 + 0.4 + 0.2 = 0.10000000000000003
0.2 -0.1 + 0.2 - 0.1 = 0.20000000000000004
0.2 - 0.1 + (0.2 - 0.1) = 0.2
0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6
0.2 + 0.1 + 0.3 = 0.6000000000000001
```

Exercícios

1) Por que a saída para a linha de código `0.1 + 0.2 == 0.3` é `False` se o resultado da soma está correto?

2) Faça as operações `0.1*0.2*0.3` e `0.3*0.2*0.1` usando Python e verifique se a ordem dos fatores afeta o produto.

3) Pesquise e responda: o que é o "épsilon da máquina"? Faça um programa em Python para obter o épsilon da máquina que você usa.

4) A solução positiva da equação $f(x) = x^2 - a$, com $a > 0$, pode ser obtida pelo processo iterativo $x_{i+1} = 1/2(x_i + a/x_i)$, $i = 0,1,2,\ldots$ Sabendo disso, encontre uma aproximação para $\sqrt{3}$ com cinco casas decimais de precisão.

5) Observe que a fórmula de recorrência $x_{i+1} = 4x_i - 1$, com $i = 0,1,2,\ldots$ e $x_0 = 1/3$, gera uma sequência constante $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = 1/3$. Use um programa em Python para gerar essa sequência e veja o que acontece quando o número de elementos aumenta muito. Você saberia explicar o que observa?

Funções e gráficos

Em matemática, costumamos definir uma função $y = f(x)$ como uma regra que relaciona cada elemento x de um conjunto D_f (domínio de f) a um único elemento y de um outro conjunto CD_f (contradomínio). Assim,

$$f : D_f \rightarrow CD_f$$

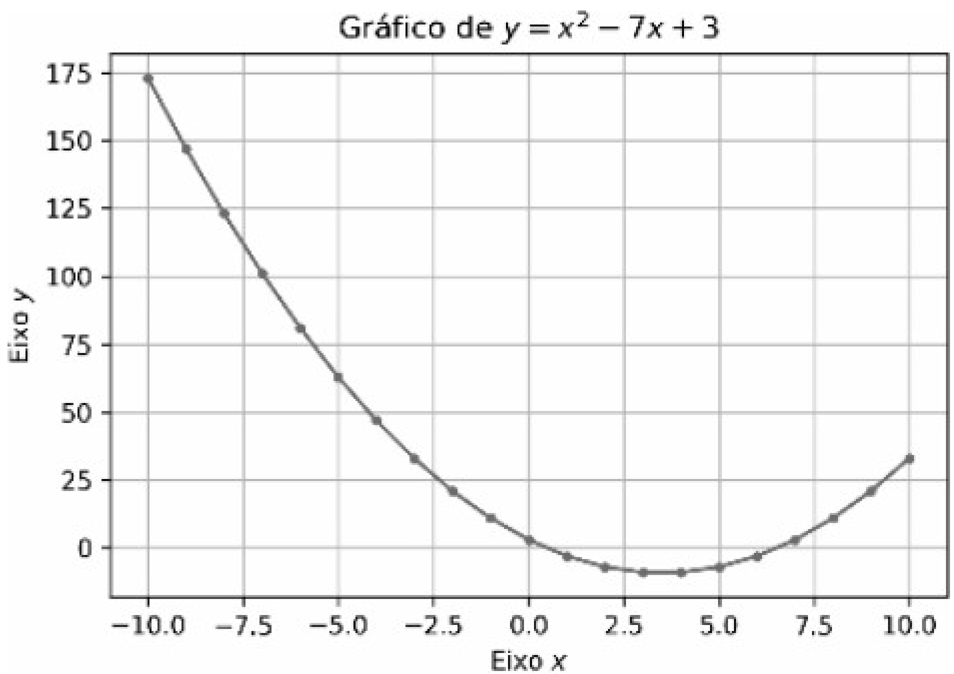
Em computação, uma função é uma sequência de instruções que realiza uma determinada tarefa. Basicamente, consiste em um bloco de código que é executado quando a função é chamada. Uma função pode ter um ou mais argumentos de entrada e uma ou mais saídas. Assim, também podemos dizer que, em computação, uma função "transforma" algo (x) em uma outra coisa (y).

Exemplo 2.1: Uma diária em uma casa de praia custa R$350,00, mais R$50,00 por pessoa, sendo que o local pode ser ocupado por, no mínimo, duas pessoas e, no máximo, sete. Assim, o preço da diária é uma função do número de pessoas que irão ocupar a casa e pode ser expresso pela equação $P(n) = 350 + 50n$, em que n pertence ao conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Para cada possível valor de n, teremos um preço diferente, tal que:

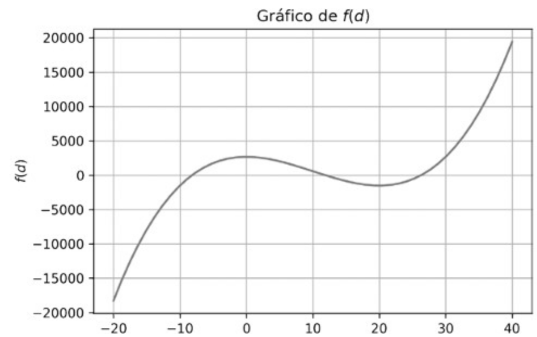
$$P(2) = 350 + 2 \times 50 = 450 \quad P(5) = 350 + 5 \times 50 = 600$$
$$P(3) = 350 + 3 \times 50 = 500 \quad P(6) = 350 + 6 \times 50 = 650$$
$$P(4) = 350 + 4 \times 50 = 550 \quad P(7) = 350 + 7 \times 50 = 700$$

```
P( 2 )= 450
P( 3 )= 500
P( 4 )= 550
P( 5 )= 600
P( 6 )= 650
P( 7 )= 700
```

Exemplo 2.2: Vamos começar plotando o gráfico de $y = x^2 - 7x + 3$. Para isso, precisamos definir a função e criar uma lista de pontos para plotar. Como é mostrado abaixo, vamos usar 21 pontos entre –10 e 10.

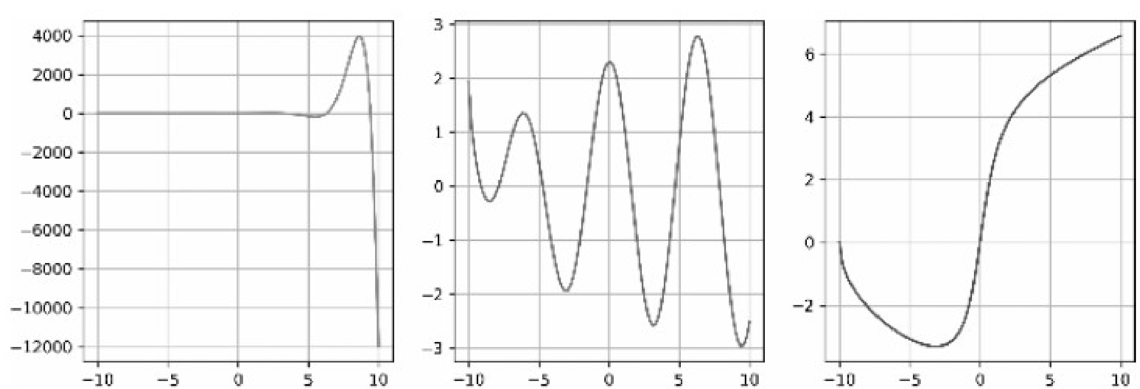


Exemplo 2.3: Vamos agora plotar o gráfico de $f(d) = 1{,}047d^3 - 31{,}415d^2 + 2672{,}369$, modificando um pouco o código anterior.



Exemplo 2.4: Vamos agora modificar os códigos já vistos e plotar mais algumas funções. Você consegue identificar que funções são essas pelo código?

```
f0 = lambda x: np.exp(x)*np.sin(x)
f1 = lambda x: np.cos(x)*np.log(x+10.1)
f2 = lambda x: np.arctan(x)*np.sqrt(x+10)
```



Exercício

1) Plote o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^4 - 20x^3 + 138x^2 - 376x + 305$

b) $f(x) = -28 + 34x - 9x^2$

c) $f(x) = x^3 - 4x - 2$

d) $f(x) = x^2 + 2$

e) $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

f) $h(x) = 1{,}3e^{2x-1}$

g) $h(x) = 3ln(x+1)$

h) $t(x) = 3sen(2x-1)$

i) $t(x) = -0{,}5cos(x/2)$

j) $t(x) = tg(x) - 2$

k) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 3}$

l) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

m) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

n) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 3}$