

<i>MATEMÁTICA FINANCEIRA</i>	75
CONCEITOS GERAIS.....	75
O CONCEITO DO VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO.....	75
FLUXOS DE CAIXA E DIAGRAMAS DE FLUXO DE CAIXA.....	75
EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA.....	76
SEQUÊNCIAS- LEI DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS E DETERMINAÇÃO DE SEUS ELEMENTOS.....	76
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS.....	76
PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS.....	78
JUROS SIMPLES - CÁLCULO DO MONTANTE, DOS JUROS, DA TAXA DE JUROS, DO PRINCIPAL E DO PRAZO DA OPERAÇÃO FINANCEIRA.....	79
JUROS COMPOSTOS - CÁLCULO DO MONTANTE, DOS JUROS, DA TAXA DE JUROS, DO PRINCIPAL E DO PRAZO DA OPERAÇÃO FINANCEIRA.....	80
DESCONTOS - CÁLCULO DO VALOR ATUAL, DO VALOR NOMINAL E DA TAXA DE DESCONTO	81
SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO - SISTEMA PRICE (MÉTODO DAS PRESTAÇÕES CONSTANTES); SISTEMA SAC (MÉTODO DAS AMORTIZAÇÕES CONSTANTES)	81

MATEMÁTICA FINANCEIRA

CONCEITOS GERAIS

O CONCEITO DO VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

O conceito de valor do dinheiro no tempo é muito importante quando estamos estudando Matemática Financeira, pois não podemos de maneira alguma comparar o dinheiro trabalhado na Matemática Básica com o dinheiro trabalhado na Matemática Financeira, uma vez que nesse último, o fator **tempo** será primordial.

Imagine a seguinte situação:

Seu primo pede para que você faça um empréstimo para ele de R\$100,00 com a promessa de que após 1 ano ele irá devolver os mesmos R\$100,00 para você. Será que vale a pena essa operação financeira?

Você precisa analisar alguns pontos antes de tomar a decisão: o **risco**, o **valor do dinheiro** daqui a um ano e **retorno** do capital.

Aqui precisamos salientar que o dinheiro tem diferentes valores conforme o tempo vai passando, pois os R\$ 100,00 de hoje não são os mesmos R\$ 100,00 de daqui a 5 anos. Veja:

Há fatores que modificam o valor do dinheiro no tempo, como, por exemplo, a Inflação, que desvaloriza o dinheiro conforme o tempo vai passando; o Risco de um futuro incerto; e as Operações Financeiras, que fazem o valor do dinheiro também ser modificado.

Resumindo: O que você consegue comprar hoje com R\$ 100,00 não vai conseguir comprar de novo daqui a 5 anos com os mesmos R\$ 100,00.

Em matemática financeira, sempre que quisermos comparar dois capitais, devemos transportá-los para uma mesma data (a uma mesma taxa de juros). E assim, podemos constatar se são iguais (equivalentes) ou não. Portanto, jamais faça soma, subtração, multiplicação ou qualquer outra operação matemática com o valor do dinheiro em datas diferentes.

FLUXOS DE CAIXA E DIAGRAMAS DE FLUXO DE CAIXA

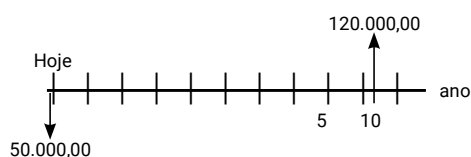
Fluxo de Caixa

A representação da entrada e saída de capital é feita pelo Diagrama do Fluxo de Caixa, que é o gráfico das operações de Capital em uma reta horizontal crescente estabelecida como o tempo.

- **Entrada de Capital:** representada por uma seta para cima;
- **Saída de Capital:** representada por uma seta para baixo.

Exemplo:

Investimento de R\$ 50.000,00 no dia de hoje para recebimento de R\$ 120.000,00 daqui a 10 anos.



Operações Financeiras

Vamos aprender como “transportar” uma parcela no tempo, ou seja, como levar uma parcela presente para o futuro (capitalização) e como trazer uma parcela do futuro para o presente (desconto ou descapitalização). Aqui vale lembrar que vamos depender do regime de capitalização, simples ou composto, e para cada um deles teremos uma maneira de calcular. Veja:

Na Capitalização Simples usaremos as seguintes fórmulas:

$$V_F = V_P \times (1 + i \times t) \text{ ou } V_P = V_F / (1 + i \times t)$$

Já na Capitalização Composta, as equações serão:

$$V_F = V_P \times (1 + i)^t \text{ ou } V_P = V_F / (1 + i)^t$$

Em que,

V_F = Valor Futuro

V_P = Valor Presente ou Valor Atual

i = taxa de juros

t = período

Note que podemos fazer uma analogia com as equações do Montante de regime de juros:

Regime Simples $\rightarrow M = C \times (1 + i \times t)$

Regime Composto $\rightarrow M = C \times (1 + i)^t$

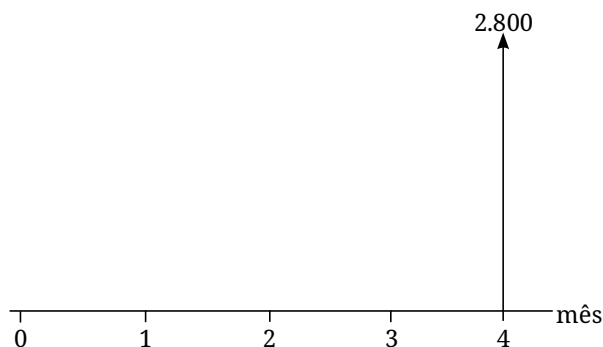
O Montante será sempre entendido como o Valor Futuro e o Capital, como Valor Presente.

Montante \rightarrow Valor Futuro

Capital \rightarrow Valor Presente ou Valor Atual

Exemplo:

Determine o Valor Presente do Fluxo de caixa para uma taxa de juros simples de 10% ao mês.



Note que para calcular o V_P teremos que transportar essa parcela (Valor Futuro) 4 períodos para trás, isto é, “descapitalizá-la”. Vamos aplicar a fórmula do Valor Presente em regime de juros simples e calcular seu valor.

$$V_P = V_F / (1 + i \times t)$$

$$V_P = 2800 / (1 + 0,1 \times 4)$$

$$V_P = 2800 / 1,4$$

$$V_P = 2000$$

I EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA

Dois ou mais capitais, resgatáveis em datas distintas, são equivalentes quando são transportados para uma mesma data e com a mesma taxa de juros, resultarem valores iguais.

Dica

Para saber se dois capitais são equivalentes:

- Coloque na mesma data;
- Veja se têm a mesma taxa de juros;
- Veja se resultam no mesmo valor.

Propriedade Fundamental da Equivalência de Capitais

A equivalência permanecerá válida para qualquer data a partir de uma determinada data focal quando dois capitais são equivalentes.

Em matemática financeira, sempre que quisermos comparar dois capitais, devemos transportá-los para uma mesma data (a uma mesma taxa de juros), pois assim podemos constatar se são iguais (equivalentes) ou não.

SEQUÊNCIAS – LEI DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS E DETERMINAÇÃO DE SEUS ELEMENTOS

Esse tema é cobrado de uma maneira que pode parecer fácil como também pode ser complicado. Descobrir a lei de formação ou padrão da sequência é o seu principal objetivo, pois nas questões sobre sequências/raciocínio sequencial, você será apresentado a um conjunto de dados dispostos de acordo com alguma “regra” implícita, alguma lógica de formação. O desafio é exatamente descobrir essa “regra” para, com isso, encontrar outros termos daquela mesma sequência.

Veja o exemplo:

2, 4, 6, 8, ...

A primeira pergunta que podemos fazer para achar a lei de formação é: os números estão aumentando ou diminuindo?

Caso eles estejam aumentando, devemos tentar as operações de soma ou multiplicação entre os termos. Veja no exemplo colocado acima: 2, 4, 6, 8, ... Do primeiro termo para o segundo, somamos o número dois e depois repetimos isso.

$$\begin{aligned}2 + 2 &= 4 \\4 + 2 &= 6 \\6 + 2 &= 8\end{aligned}$$

Logo, o nosso próximo termo será o número 10, pois $8+2 = 10$.

Caso os números estejam diminuindo, você pode buscar uma lógica envolvendo subtrações ou divisões entre os termos.

Agora, observe essa outra sequência:

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Qual é o seu próximo termo? Vários alunos tendem a dizer que o próximo termo é o 15, mesmo tendo percebido que o 9 não está na sequência. A nossa tendência é relevar esse “probleminha” e marcar logo o valor 15. Muito cuidado! Como já disse, o padrão encontrado deve ser capaz de explicar toda a sequência. Nesse caso, estamos diante dos números primos. Sim, aqueles números que só podem ser divididos por eles mesmos ou então pelo número 1. No caso, o próximo seria o 17, e não o 15. A propósito, os próximos números primos são: 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

I SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS ALTERNADAS

É bem comum aparecerem questões que envolvem uma sequência que tem mais de uma lei de formação. Podemos ter 2 sequências que se alternam, como neste exemplo:

2, 5, 4, 10, 6, 15, 8, 20, ...

Se analisarmos mais minuciosamente, podemos dizer que temos uma sequência que, de um número para outro, devemos somar 2 unidades e também podemos notar que temos a sequência que, de um número para o outro, basta somar 5 unidades, elas estão em sequências numéricas alternadas. Veja:

1° Sequência: 2, 4, 6, 8, ...

2° Sequência: 5, 10, 15, 20, ...

I PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Uma progressão aritmética é aquela em que os termos crescem, sendo adicionados a uma razão constante, normalmente representada pela letra r .

- **Termo inicial:** valor do primeiro número que compõe a sequência;
- **Razão:** regra que permite, a partir de um termo, obter o seguinte.

Observe o exemplo:

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

Veja que $1+2=3$, $3+2=5$, $5+2=7$, $7+2=9$ e assim sucessivamente. Temos um exemplo nítido de uma Progressão Aritmética (PA) com uma razão 2, ou seja, $r = 2$ e termo inicial igual a 1. Em questões envolvendo progressões aritméticas, é importante você saber obter o termo geral e a soma dos termos, conforme veremos a seguir.

Termo Geral da PA

Trata-se de uma fórmula que, a partir do primeiro termo e da razão da PA, permite calcular qualquer outro termo. Temos a seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Nesta fórmula, a_n é o termo de posição n na PA (o “ n -ésimo” termo); a_1 é o termo inicial, r é a razão e n é a posição do termo na PA.

Usando o nosso exemplo vamos descobrir o termo de posição 10. Já temos as informações que precisamos: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

- o termo que buscamos é o da décima posição, isto é, a_{10} ;
- a razão da PA é 2, portanto $r = 2$;
- o termo inicial é 1, logo $a_1 = 1$;
- n , ou seja, a posição que queremos, é a de número 10: $n = 10$

Logo,

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)r \\a_{10} &= 1 + (10-1)2 \\a_{10} &= 1 + 2 \times 9 \\a_{10} &= 1 + 18 \\a_{10} &= 19\end{aligned}$$

Isto é, o termo da posição 10 é o 19. Volte na sequência e confira. Perceba que, com essa fórmula, podemos calcular qualquer termo da PA. O termo da posição 200 é:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)r \\a_{200} &= 1 + (200-1)2 \\a_{200} &= 1 + 2 \times 199 \\a_{200} &= 1 + 398 \\a_{200} &= 399\end{aligned}$$

Soma do Primeiro ao N-ésimo Termo da PA

A fórmula a seguir nos permite calcular a soma dos “n” primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2}$$

Para entendermos um pouco melhor, vamos calcular a soma dos 7 primeiros termos do nosso exemplo que já foi apresentado: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$.

Já sabemos que $a_1 = 1$, e $n = 7$. O termo a_n será, neste caso, o termo a_7 , que observando na sequência é o número 13, ou seja, $a_7 = 13$. Substituindo na fórmula, temos:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{n \times (a_1 + a_n)}{2} \\S_7 &= \frac{7 \times (1 + 13)}{2} \\S_7 &= \frac{7 \times 14}{2} \\S_7 &= \frac{98}{2} = 49\end{aligned}$$

Dependendo do sinal da razão r , a PA pode ser:

- PA crescente: se $r > 0$, a PA terá termos em ordem crescente.

Ex.: $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\} \rightarrow r = 3$;

- PA decrescente: se $r < 0$, a PA terá termos em ordem decrescente.

Ex.: $\{20, 19, 18, 17, \dots\} \rightarrow r = -1$;

- PA constante: se $r = 0$, todos os termos da PA serão iguais.

Ex.: $\{7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, \dots\} \rightarrow r = 0$.

Dica

PA crescente: se $r > 0$;
PA decrescente: se $r < 0$;
PA constante: se $r = 0$.

Em uma progressão aritmética de 3 termos, o segundo termo ou o termo do meio é a média aritmética entre o primeiro e terceiro termo. Veja:

$$\begin{aligned}PA(a_1, a_2, a_3) &\rightarrow a_2 = (a_1 + a_3)/2 \\PA(2, 4, 6) &\rightarrow 4 = (2+6)/2 \rightarrow 4 = 4.\end{aligned}$$

Agora vamos treinar o que aprendemos na teoria com exercícios comentados de diversas bancas. Vamos lá!

- (IBFC – 2015) O total de múltiplos de 4 existentes entre os números 23 e 125 é:

- 25.
- 26.
- 27.
- 28.
- 24.

O primeiro múltiplo de 4 neste intervalo é 24 e o último é 124. Veja que os múltiplos de 4 formam uma PA de razão igual a 4. Então, temos as seguintes informações:

$$a_1 = 24$$

$$a_n = 124$$

$r = 4$ (podemos ir somando de 4 em 4 unidades para obter os múltiplos).

Substituindo na fórmula do termo geral, vamos encontrar a quantidade de elementos (múltiplos):

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$124 = 24 + (n-1)4$$

$$124 = 24 + 4n - 4$$

$$124 - 24 + 4 = 4n$$

$$104 = 4n$$

$$n = 26. \text{ Resposta: Letra B.}$$

- (FCC – 2018) Rodrigo planejou fazer uma viagem em 4 dias. A quantidade de quilômetros que ele percorrerá em cada dia será diferente e formará uma progressão aritmética de razão igual a - 24. A média de quilômetros que Rodrigo percorrerá por dia é igual a 310 km. Desse modo, é correto concluir que o número de quilômetros que Rodrigo percorrerá em seu quarto e último dia de viagem será igual a

- 334.
- 280.
- 322.
- 274.
- 310.

Primeiro devemos achar o a_1 , para depois acharmos o a_4 . Devemos colocar tudo em função de a_1 , para podermos substituir na média. Usando a fórmula do termo geral:

$$r = -24$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\text{Achando } a_4:$$

$$a_4 = a_1 + (4-1)r$$

$$a_4 = a_1$$

$$\text{Colocando } a_2 \text{ em função de } a_1:$$

$$a_2 = a_1 + (2-1)r$$

$$a_2 = a_1 + r$$

Colocando a_3 em função de a_1 :

$$a_3 = a_1 + (3-1)r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

Colocando a_4 em função de a_1 :

$$a_4 = a_1 + (4-1)r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Substituindo na fórmula da média aritmética:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4 = 310$$

$$(a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r)/4 = 310$$

$$4a_1 + 6r = 310 \cdot 4$$

$$4a_1 + 6 \cdot (-24) = 1240$$

$$4a_1 - 144 = 1240$$

$$a_1 = 346$$

Encontrando a_4 :

$$a_4 = 346 + (4-1)r$$

$$a_4 = 346 + 3r$$

$$a_4 = 346 + 3 \cdot (-24)$$

$$a_4 = 274. \text{ Resposta: Letra D.}$$

I PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Observe a sequência a seguir:

$$\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

Cada termo é igual ao anterior multiplicado por 2. Esse é um exemplo típico de Progressão Geométrica, ou simplesmente, PG. Em uma PG, cada termo é obtido a partir da multiplicação do anterior por um mesmo número, o que chamamos de razão da progressão geométrica. A razão é simbolizada pela letra q .

No exemplo acima, temos $q = 2$ e o termo inicial é $a_1 = 1$. Da mesma maneira que vimos para o caso de PA, normalmente, precisamos calcular o termo geral e a soma dos termos.

Termo Geral da PG

A fórmula a seguir nos permite obter qualquer termo (a_n) da progressão geométrica, partindo-se do primeiro termo (a_1) e da razão (q):

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

No nosso exemplo, o quinto termo, a_5 ($n = 5$), pode ser encontrado assim:

$$\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

$$a_5 = 2 \times 2^{5-1}$$

$$a_5 = 2 \times 2^4$$

$$a_5 = 2 \times 16$$

$$a_5 = 32$$

Soma do Primeiro ao N-ésimo Termo da PG

A fórmula a seguir permite calcular a soma dos “ n ” primeiros termos da progressão geométrica:

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

Usando novamente o nosso exemplo e fazendo a soma dos 4 primeiros termos ($n = 4$), temos: $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

$$S_4 = \frac{2 \times (2^4 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_4 = \frac{2 \times (16 - 1)}{1}$$

$$S_4 = \frac{2 \times 15}{1}$$

$$S_4 = 30$$

Soma dos Infinitos Termos de uma Progressão Geométrica

Suponha que você corra 1000 metros, depois, você corra 500 metros, depois, você corra 250 metros e, depois, 125 metros – sempre metade do que você correu anteriormente. Quanto você correrá no total? Observe que o que temos é exatamente uma progressão geométrica infinita, porém, essa PG é decrescente.

Quando temos uma PG infinita com razão $0 < q < 1$, teremos que $q^n = 0$. Entendemos, então, que quanto maior for o expoente, mais próximo de zero será. Portanto, substituindo, teremos:

$$S_\infty = \frac{a_1 \times (0 - 1)}{q - 1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dica

Em uma progressão geométrica, o quadrado do termo do meio é igual ao produto dos extremos.

$$\{a_1, a_2, a_3\} \rightarrow (a_2)^2 = a_1 \times a_3$$

Veja: $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

$$8^2 = 4 \times 16$$

$$64 = 64.$$

A melhor forma de compreender o que vimos na teoria, veremos na prática alguns exercícios de bancas variadas.

1. (FUMARC – 2018) Se a sequência numérica representada por $(6, a_2, a_3, a_4, a_5, 192)$ é uma Progressão Geométrica crescente de razão igual a q , então, é CORRETO afirmar que o valor de q é igual a:

- a) 2.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 8.

Vamos substituir os valores que já temos na fórmula geral da PG para acharmos a razão:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$a_6 = a_1 \times q^{6-1}$$

$$192 = 6 \times q^5$$

$$192/6 = q^5$$

$$32 = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{32}$$

$$q = 2$$

Resposta: Letra A.

2. (IBFC – 2016) Se a soma dos elementos de uma P.G. (progressão geométrica) de razão 3 e segundo termo 12 é igual a 484, então o quarto termo da P.G. é igual a:

- a) 324.
- b) 36.
- c) 108.
- d) 216.

Temos que $a_2 = 12$ e $q = 3$. Para calcularmos o quarto termo, devemos usar a fórmula do termo geral da PG. Veja:

$$a_4 = a_2 \times q^{4-2}$$

$$a_4 = 12 \times 3^2$$

$$a_4 = 12 \times 9$$

$$a_4 = 108$$

Resposta: Letra C.

JUROS SIMPLES – CÁLCULO DO MONTANTE, DOS JUROS, DA TAXA DE JUROS, DO PRINCIPAL E DO PRAZO DA OPERAÇÃO FINANCEIRA

A premissa que é a base da matemática financeira é a seguinte: as pessoas e as instituições do mercado preferem **adiantar** os seus recebimentos e **retardar** os seus pagamentos. Do ponto de vista estritamente racional, é melhor pagar o mais tarde possível caso não haja incidência de juros (ou caso esses juros sejam inferiores ao que você pode ganhar aplicando o dinheiro).

“Juros” é o termo utilizado para designar o “preço do dinheiro no tempo”. Quando você pega certa quantia emprestada no banco, o banco te cobrará uma remuneração em cima do valor que ele te emprestou, pelo fato de deixar você ficar na posse desse dinheiro por um certo tempo. Esta remuneração é expressa pela taxa de juros.

Nos juros simples a incidência ocorre sempre sobre o valor original. Veja um exemplo para melhor entender.

Exemplo 1:

Digamos que você emprestou 1000,00 reais, em um regime de juros simples de 5% ao mês, para um amigo e que o mesmo ficou de quitar o empréstimo após 5 meses. Então temos o seguinte:

CAPITAL EMPRESTADO (1000,00)	VALOR REAJUSTADO
1º mês = 1000,00	1000,00 + (5% de 1000,00) = 1050,00
2º mês = 1050,00	1050,00 + (5% de 1000,00) = 1100,00
3º mês = 1100,00	1100,00 + (5% de 1000,00) = 1150,00
4º mês = 1150,00	1150,00 + (5% de 1000,00) = 1200,00
5º mês = 1200,00	1200,00 + (5% de 1000,00) = 1250,00

Ao final do 5º mês você terá recebido 250,00 reais de juros.

Fórmulas utilizadas em juros simples

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Em que,

J = juros

C = capital

i = taxa em percentual (%)

t = tempo

M = montante

TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES

Para aplicar corretamente uma taxa de juros, é importante saber a **unidade de tempo** sobre a qual a taxa de juros é definida. Isto é, não adianta saber apenas que a taxa de juros é de “5%”. É preciso saber se essa taxa é mensal, bimestral, anual etc. Dizemos que duas taxas de juros são proporcionais quando guardam a mesma proporção em relação ao prazo. Por exemplo, 12% ao ano é proporcional a 6% ao semestre, e também é proporcional a 1% ao mês.

Basta efetuar uma regra de três simples. Para obtermos a taxa de juros bimestral, por exemplo, que é proporcional à taxa de 12% ao ano:

$$\begin{array}{l} 12\% \text{ ao ano} \text{ ----- } 1 \text{ ano} \\ \text{Taxa bimestral} \text{ ----- } 2 \text{ meses} \end{array}$$

Podemos substituir 1 ano por 12 meses, para deixar os valores da coluna da direita na mesma unidade temporal, temos:

$$\begin{array}{l} 12\% \text{ ao ano} \text{ ----- } 12 \text{ meses} \\ \text{Taxa bimestral} \text{ ----- } 2 \text{ meses} \end{array}$$

Efetuada a multiplicação cruzada, temos:

$$12\% \times 2 = \text{Taxa bimestral} \times 12$$

$$\text{Taxa bimestral} = 2\% \text{ ao bimestre}$$

Duas taxas de juros são equivalentes quando são capazes de levar o mesmo capital inicial C ao montante final M, após o mesmo intervalo de tempo.

Uma outra informação muito importante é que o cálculo de taxas equivalentes quando estamos no regime de juros simples pode ser entendido assim: 1% ao mês equivale a 6% ao semestre ou 12% ao ano, e levarão o mesmo capital inicial C ao mesmo montante M após o mesmo período de tempo.

Importante!

No regime de juros simples, taxas de juros proporcionais **são também** taxas de juros equivalentes.

Vamos agora treinar com alguns exercícios para conhecermos como as bancas costumam cobrar estes materiais.

1. (FEPESE – 2018) Uma TV é anunciada pelo preço de R\$ 1.908,00 para pagamento em 12 parcelas de 159,00. A mesma TV custa R\$ 1.410,00 para pagamento à vista. Portanto o juro simples mensal incluído na opção parcelada é:

- Menor que 2%.
- Maior que 2% e menor que 2,5%.
- Maior que 2,5% e menor que 2,75%.
- Maior que 2,75% e menor que 3%.
- Maior que 3%.

$$1.908 - 1.410 = 498 \text{ (juros durante 12 meses)}$$

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$498 = 1410 \cdot 12 \cdot i / 100$$

$$49800 = 16920i$$

$$i = 49800/16920$$

$$i = 2,94\%$$

Resposta: Letra D.

2. (CESPE-CEBRASPE – 2018) Uma pessoa atrasou em 15 dias o pagamento de uma dívida de R\$ 20.000, cuja taxa de juros de mora é de 21% ao mês no regime de juros simples.

Acerca dessa situação hipotética, e considerando o mês comercial de 30 dias, julgue o item subsequente. No regime de juros simples, a taxa de 21% ao mês é equivalente à taxa de 252% ao ano.

() CERTO () ERRADO

No regime simples, sabemos que taxas proporcionais são também equivalentes. Como temos 12 meses no ano, a taxa anual proporcional a 21%am é, simplesmente:

$$21\% \times 12 = 252\% \text{ ao ano}$$

Esta taxa de 252% ao ano é proporcional e também é equivalente a 21% ao mês. Portanto, o item está certo.

Resposta: Certo.

JUROS COMPOSTOS – CÁLCULO DO MONTANTE, DOS JUROS, DA TAXA DE JUROS, DO PRINCIPAL E DO PRAZO DA OPERAÇÃO FINANCEIRA

Imagine que você pegou um empréstimo de R\$10.000,00 no banco, cujo pagamento deve ser realizado após 4 meses, à taxa de juros de 10% ao mês. Ficou combinado que o cálculo de juros de cada mês será feito sobre o total da dívida no mês anterior, e não somente sobre o valor inicialmente emprestado. Neste caso, estamos diante da cobrança de juros compostos. Podemos montar a seguinte tabela:

MÊS DO EMPRÉSTIMO	
1º MÊS	10.000,00
2º MÊS	11.000,00
3º MÊS	12.100,00
4º MÊS	13.310,00
	14.641,00

Logo, ao final de 4 meses você deverá devolver ao banco R\$14.641,00 que é a soma da dívida inicial (R\$10.000,00) e de juros de R\$4.641,00.

Fórmula utilizada em juros compostos

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Poderíamos ter utilizado a fórmula no nosso exemplo. Veja:

$$M = 10000 \times (1 + 10\%)^4$$

$$M = 10000 \times (1 + 0,10)^4$$

$$M = 10000 \times (1,10)^4$$

$$M = 10000 \times 1,4641$$

$$M = 14.641,00 \text{ reais}$$

Podemos fazer a comparação entre juros simples e compostos. Observe a tabela a seguir:

JUROS SIMPLES	JUROS COMPOSTOS
Mais onerosos se $t < 1$	Mais onerosos se $t > 1$
Mesmo valor se $t = 1$	Mesmo valor se $t = 1$
Juros capitalizados no final do prazo	Juros capitalizados periodicamente ("juros sobre juros")
Crescimento linear (reta)	Crescimento exponencial
Valores similares para prazos e taxas curtos	Valores similares para prazos e taxas curtos

- Juros compostos – cálculo do prazo:

Nas questões em que é preciso calcular o prazo você deverá utilizar logaritmos, visto que o tempo "t" está no expoente da fórmula de juros compostos. A propriedade mais importante a ser lembrada é que, sendo dois números A e B, então:

$$\log A^B = B \times \log A$$

Significa que o logaritmo de A elevado ao expoente B é igual a multiplicação de B pelo logaritmo de A.

Uma outra propriedade bastante útil dos logaritmos é a seguinte:

$$\log \left(\frac{A}{B} \right) = \log A - \log B$$

Isto é, o logaritmo de uma divisão entre A e B é igual à subtração dos logaritmos de cada número.

Também é importante ter em mente que "logA" significa "logaritmo do número A na base 10".

Observe um exemplo:

No regime de juros compostos com capitalização mensal à taxa de juros de 1% ao mês, a quantidade de meses que o capital de R\$100.000 deverá ficar investido para produzir o montante de R\$120.000 é expressa por:

$$\frac{\log 2,1}{\log 1,01}$$

Temos a taxa $j = 1\%$ am, capital $C = 100.000$ e montante $M = 120.000$. Na fórmula de juros compostos:

$$\begin{aligned} M &= C \times (1+j)^t \\ 120000 &= 100000 \times (1+1\%)^t \\ 12 &= 10 \times (1,01)^t \\ 1,2 &= (1,01)^t \end{aligned}$$

Podemos aplicar o logaritmo dos dois lados:

$$\begin{aligned} \log 1,2 &= \log (1,01)^t \\ \log 1,2 &= t \cdot \log 1,01 \end{aligned}$$

$$t = \frac{\log 1,2}{\log 1,01}$$

Logo, questão errada.

Vejamos alguns exemplos de questões sobre esse tema:

1. (FCC - 2017) A Cia. Escocesa, não tendo recursos para pagar um empréstimo de R\$ 150.000,00 na data do vencimento, fez um acordo com a instituição financeira credora para pagá-la 90 dias após a data do vencimento. Sabendo que a taxa de juros compostos cobrada pela instituição financeira foi 3% ao mês, o valor pago pela empresa, desprezando-se os centavos, foi, em reais,

- a) 163.909,00.
b) 163.500,00.
c) 154.500,00.
d) 159.135,00.
e) 159.000,00.

Temos uma dívida de C = 150.000 reais a ser paga após t = 3 meses no regime de juros compostos, com a taxa de j = 3% ao mês. O montante a ser pago é dado por:

$$M = C \times (1+j)^t$$

$$M = 150.000 \times (1+0,03)^3$$

$$M = 150.000 \times 1,092727$$

$$M = 15 \times 10927,27$$

$$M = 163.909,05 \text{ reais}$$

$$M = 163.909,05 \text{ reais}$$

Resposta: Letra A.

2. (FCC - 2017) O montante de um empréstimo de 4 anos da quantia de R\$ 20.000,00, do qual se cobram juros compostos de 10% ao ano, será igual a

- a) R\$ 26.000,00.
b) R\$ 28.645,00.
c) R\$ 29.282,00.
d) R\$ 30.168,00.
e) R\$ 28.086,00.

Temos um prazo de t = 4 anos, capital inicial C = 20000 reais, juros compostos de j = 10% ao ano. O montante final é:

$$M = C \times (1+j)^t$$

$$M = 20000 \times (1+0,10)^4$$

$$M = 20000 \times 1,4641$$

$$M = 20000 \times 1,4641$$

$$M = 2 \times 14641$$

$$M = 29282 \text{ reais}$$

Resposta: Letra C.

Sendo assim, o banco vai descontar um valor e ele não te pagará os R\$ 50.000,00, obviamente. Esse desconto vai depender da modalidade adotada, da taxa de juros e do prazo de antecipação. Ou seja, você, certamente, receberá menos que o Valor que consta no título. Vejamos melhor a seguir.

Valor Nominal (N)

É o Valor de Futuro (também chamado de Valor de Face, Montante e Valor Final) do título, isto é, o valor declarado com informações a respeito de quanto o portador do título terá para receber ao final do prazo de vencimento. No nosso exemplo hipotético, seriam os R\$ 50.000,00 (com prazo de vencimento em 10 meses). Para calcular o Valor Nominal do título, iremos utilizar a seguinte expressão:

$$N = A (1 + i \cdot n)$$

Valor Atual (A)

Também chamado de Valor Descontado ou Valor Presente, é o valor que o titular do direito receberá antecipadamente por ele depois de efetuar o desconto. Para calcular o Valor Atual do título, iremos utilizar a seguinte expressão:

$$A = N (1 - i \cdot n)$$

Podemos dizer então que o Desconto (D) é a diferença entre o valor Nominal e o valor Atual.

$$D = N - A$$

Taxa Efetiva (i_e)

Podemos determinar a Taxa Efetiva através da seguinte fórmula:

$$i_e = i_c / 1 - i_c \cdot n$$

Em que,

i_e = Taxa Efetiva

i_c = Taxa do Desconto Comercial Simples

n = Prazo do Desconto

DESCONTOS – CÁLCULO DO VALOR ATUAL, DO VALOR NOMINAL E DA TAXA DE DESCONTO

Na matemática financeira, descontar é: antecipar o valor de um recebível.

Imagine a situação a seguir:

Você tem um direito monetário de R\$ 50.000,00 para receber em 10 meses. Porém, com a necessidade de ter esse valor imediatamente, você recorre a um banco para poder antecipar o que irá receber. O banco, então, propõe o pagamento de um certo valor por esse direito e, assim, a instituição financeira ficará com esse título até o vencimento que, como vimos, ocorrerá em 10 meses. Note que ocorrerá uma mudança na titularidade do direito.

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO – SISTEMA PRICE (MÉTODO DAS PRESTAÇÕES CONSTANTES); SISTEMA SAC (MÉTODO DAS AMORTIZAÇÕES CONSTANTES)

I TABELA PRICE E SAC

Ao financiar o sonho da casa própria, deve-se escolher um sistema de pagamento. Para isso, existem as seguintes opções: tabela Price ou SAC. Aqui, discutiremos um pouco a respeito de tais sistemas, para entendermos o que de fato eles são, se há alguma diferença, vantagem e/ou desvantagem entre eles e se um deles é mais barato/acessível que o outro.

Esses sistemas, basicamente, são formas de amortização e financiamento a longo prazo, acertadas ao banco ou à construtora durante o financiamento da compra de um imóvel: a Tabela Price (Sistema Francês de Amortização) e o SAC (Sistema de Amortização Constante). Ambos, segundo José Mansini, planejador financeiro pela Planejar, “São dois cálculos distintos que determinam de que forma o comprador do imóvel irá pagar [amortizar] o empréstimo que ele fez para este fim. Nestes dois sistemas, será definido o valor da parcela mensal a ser paga”.

Diferenças entre Tabela Price e SAC

Há diferenças entre esses dois sistemas de amortização, mas a diferença que mais se destaca diz respeito à forma e rapidez de amortização (diminuição gradativa da dívida).

Tal distinção afeta desde o valor das parcelas até a quantidade total de juros. No Sistema SAC, tem-se, inicialmente, prestações com valores mais altos e que ficam menores no final, pois (como dito anteriormente) há amortização mensal do valor financiado. Ou seja, da primeira parcela até a última, o valor vai caindo, porque há uma diminuição progressiva dos juros.

Na tabela Price, no entanto, as parcelas começam mais baixas, mas são estáticas, o que significa que não sofrem alteração durante todo o período de financiamento.

Vantagens Oferecidas pela Tabela Price e pelo SAC

A escolha é sempre do comprador. Ou seja, cabe a ele optar pela forma de pagamento que mais se adequa à realidade financeira dele. A escolha, notadamente, deve levar em consideração o fator de correção (**Taxa Referencial – TR** ou **Índice de Preços ao Consumidor Amplo – IPCA**) que julgar mais econômico no momento da assinatura do contrato do financiamento.

Contudo, é válido ressaltar que, quando se necessita de financiamento, optar por um prazo mais curto, se possível, é sempre o melhor a se fazer. Isso porque, em financiamentos imobiliários, paga-se juros sobre o saldo devedor. Logo, quanto mais amortização houver, menos gastos com juros terá o comprador.

Pensando nisso, o Sistema de Amortização Constante (SAC) pode ser mais vantajoso que a tabela Price, porque representa uma economia de cerca de 10%, em média. A tabela Price possui como vantagem sua parcela inicial, que, normalmente, é bem menor. No entanto, pelo SAC, apesar de as parcelas serem maiores no começo, há uma amortização maior da dívida, o que leva a uma economia significativa no final.

Para melhor ilustrar esse comparativo entre as vantagens oferecidas por cada um dos Sistemas (SAC e Price), veja o quadro a seguir, representado um financiamento de R\$ 200 mil parcelado em 20 anos, com juros de 7% ao ano e correção pela TR. Perceba que a prestação do SAC começa a R\$ 439 mais cara, mas o valor total pago no final é quase R\$ 30 mil mais baixo.

	SAC	PRICE
Parcela inicial	R\$ 1.964,16	R\$ 1.524,89
Parcela final	R\$ 838,05	R\$ 1.524,89
Total pago	R\$ 336.264,90	R\$ 365.973,34

Outra Forma de Correção Possível das Prestações de um Financiamento

A Caixa Econômica Federal divulgou em agosto de 2019 uma nova linha de crédito para aquisição de casa própria, que possui juros entre 2,95% e 4,95% ao ano, mais a inflação do país, medida pelo IPCA. Disponível somente para contratos novos, esse novo modelo pode ser usado para financiar até 80% do valor de imóveis novos e usados, com prazo de até 360 meses.

Importante!

A prestação terá seu valor corrigido mensalmente, o que é, geralmente, feito pelo sistema SAC. O valor da parcela, por sua vez, pode ou não diminuir com o decorrer do tempo, pois depende da trajetória da inflação, ao passo que, na tabela Price, a correção feita por meio do IPCA descaracteriza totalmente o conceito de parcelas fixas.

A título de exemplo, leve em consideração o mesmo valor utilizado na situação que vimos anteriormente, de R\$ 200 mil, financiado em 20 anos, diferenciando apenas a taxa, que passa a ser de 4,95%, e uma estimativa de IPCA de 4%. Aqui, cabe salientar que se trata apenas de uma situação hipotética/simulada, já que não é certa a previsão da trajetória da inflação por um período tão longo.

	SAC	PRICE
Parcela inicial	R\$ 1.645,56	R\$ 1.306,69
Parcela final	R\$ 1.833,30	R\$ 2.853,77
Total pago	R\$ 433.014,03	R\$ 475.426,66

Simulação de Financiamento

Para fazer simulações de financiamentos com tabela Price e/ou com o SAC, basta acessar *sites* de bancos, como Banco do Brasil, Bradesco, Caixa, Itaú e Santander, e fazer as simulações.

HORA DE PRATICAR!

1. (CESGRANRIO – 2012) Uma mercadoria é vendida por R\$ 95,00 à vista ou em duas parcelas de R\$ 50,00 cada uma: a primeira no ato da compra, e a segunda um mês após a compra. Qual é, aproximadamente, a taxa de juros mensal cobrada na venda em duas parcelas?

- a) 5%
- b) 5,26%
- c) 10%
- d) 11,11%
- e) 15%

2. (CESGRANRIO – 2012) Um capital de R\$ 1.500,00 resultou em um montante de R\$ 1.530,00 após dois meses. Sendo a remuneração calculada com juros simples, qual é a taxa anual utilizada?

- a) 1%
- b) 1,96%
- c) 2%
- d) 11,76%
- e) 12%

3. (CESGRANRIO – 2011) Um equipamento pode ser adquirido com o pagamento de uma entrada de 30% do valor à vista e mais uma prestação de R\$ 1.386,00 para 60 dias. Se a taxa de juros simples cobrada no financiamento é de 5% ao mês, o valor à vista, em reais, é

- a) 1.800
- b) 2.000
- c) 2.100
- d) 2.200
- e) 2.500

4. (CESGRANRIO – 2013) Um título no valor de R\$ 2.000,00 foi pago com atraso de dez dias. Se são cobrados juros simples de 12% ao mês, o montante pago, em reais, é

- a) 2.080
- b) 2.120
- c) 2.240
- d) 2.400
- e) 2.510

5. (CESGRANRIO – 2014) No controle e acompanhamento do orçamento de caixa, uma empresa comprovou a existência de uma sobra de dinheiro, elevada e consistente, para o próximo ano. Em decorrência, a empresa decidiu pagar, antecipadamente, a dívida bancária de R\$ 350.000,00, vencível dentro de 4 meses, contados do dia do pagamento antecipado, com uma taxa de desconto comercial, negociada com o banco, a juros simples, de 30% ao ano.

Nesse contexto, o valor pago na quitação dessa dívida, nos termos do desconto comercial simples (desconto por fora) negociado, em reais, foi de

- a) 245.000,00
- b) 315.000,00
- c) 318.182,00
- d) 323.750,00
- e) 341.250,00

6. (CESGRANRIO – 2013) Um comerciante descontou um cheque pré-datado para 30 dias, no valor de R\$ 30.000,00, tendo o banco cobrado uma taxa de desconto simples de 5,00% ao mês. Qual é o valor, em reais, emprestado ao lojista, e qual é a taxa efetiva de juros simples ao mês cobrada do cliente, respectivamente?

- a) 28.500,00 e 5,00%
- b) 28.500,00 e 5,26%
- c) 30.000,00 e 5,00%
- d) 30.000,00 e 5,26%
- e) 30.000,00 e 5,52%

7. (CESGRANRIO – 2010) Uma empresa oferece aos seus clientes desconto de 10% para pagamento no ato da compra ou desconto de 5% para pagamento um mês após a compra. Para que as opções sejam indiferentes, a taxa de juros mensal praticada deve ser, aproximadamente,

- a) 0,5%
- b) 3,8%
- c) 4,6%
- d) 5,0%
- e) 5,6%

8. (CESGRANRIO – 2013) Um cliente contraiu um empréstimo, junto a um banco, no valor de R\$ 20.000,00, a uma taxa de juros compostos de 4% ao mês, com prazo de 2 trimestres, contados a partir da liberação dos recursos. O cliente quitou a dívida exatamente no final do prazo determinado, não pagando nenhum valor antes disso.

Dados

$$\begin{aligned} 1,04^2 &\cong 1,082 \\ 1,04^3 &\cong 1,125 \\ 1,04^4 &\cong 1,170 \\ 1,04^5 &\cong 1,217 \\ 1,04^6 &\cong 1,265 \\ 1,04^7 &\cong 1,316 \end{aligned}$$

Qual o valor dos juros pagos pelo cliente na data da quitação dessa dívida?

- a) R\$ 5.300,00
- b) R\$ 2.650,00
- c) R\$ 1.250,00
- d) R\$ 1.640,00
- e) R\$ 2.500,00

9. (CESGRANRIO – 2011) Uma empresa obtém um empréstimo de R\$ 15.000,00 de uma instituição financeira que cobra juros antecipados de 3% ao mês. O prazo da operação é de 3 meses, e o valor líquido liberado pela instituição financeira na conta corrente da empresa correspondeu a R\$ 13.650,00.

Com base nos dados acima, a taxa efetiva mensal composta da operação foi, aproximadamente,

- a) 4,4%
- b) 4,0%
- c) 3,6%
- d) 3,2%
- e) 2,8%

10. (CESGRANRIO – 2011) Um cidadão assina um contrato para a aquisição de um terreno comprometendo-se a pagar, no prazo de 2 meses, a quantia de R\$ 100.000,00. Sabendo-se que, embutidos nesse valor, foram considerados juros compostos de 3% ao mês, o valor original do terreno, em reais, era

- a) 94.000,00
- b) 94.122,15
- c) 94.259,59
- d) 94.499,99
- e) 95.250,00

11. (CESGRANRIO – 2010) Suponha que o Posto de Gasolina Ribeiro Ltda. tem uma dívida com um banco de R\$ 144.000,00 (cento e quarenta e quatro mil reais), que vence em dois meses. O gerente da conta desse Posto fez uma proposta para quitar a dívida à vista. Se a taxa de juros desse financiamento é de 20,0% ao mês, quanto o Posto deve pagar à vista, em reais, ao banco, para a quitação dessa dívida?

- a) 140.000,00
- b) 120.000,00
- c) 115.200,00
- d) 100.000,00
- e) 86.000,00

- 12. (CESGRANRIO – 2018)** Um equipamento, que poderia ser comprado por 100 milhões de reais à vista, foi financiado por meio de dois pagamentos semestrais sucessivos. O primeiro, no valor de 55 milhões de reais, foi pago seis meses após a compra; o segundo, no valor de 60,5 milhões de reais, foi pago 12 meses após a compra.

O valor mais próximo da taxa anual equivalente cobrada nesse financiamento é igual a

- a) 15,5%
- b) 16,1%
- c) 20,0%
- d) 21,0%
- e) 22,5%

- 13. (CESGRANRIO – 2012)** Um produto é vendido à vista com 10% de desconto ou a prazo em dois pagamentos, sendo o primeiro no ato da compra e o segundo 2 meses após a compra. Qual é, aproximadamente, a taxa mensal de juros no pagamento a prazo?

Dado: $\sqrt{5} \approx 2.24$

- a) 10%
- b) 11%
- c) 12%
- d) 24%
- e) 25%

- 14. (CESGRANRIO – 2015)** Arthur contraiu um financiamento para a compra de um apartamento, cujo valor à vista é de 200 mil reais, no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de juros de 1% ao mês, com um prazo de 20 anos. Para reduzir o valor a ser financiado, ele dará uma entrada no valor de 50 mil reais na data da assinatura do contrato. As prestações começam um mês após a assinatura do contrato e são compostas de amortização, juros sobre o saldo devedor do mês anterior, seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais.

A partir dessas informações, o valor, em reais, da **segunda** prestação prevista na planilha de amortização desse financiamento, desconsiderando qualquer outro tipo de reajuste no saldo devedor que não seja a taxa de juros do financiamento, é igual a

- a) 2.087,25
b) 2.218,75
c) 2.175,25
d) 2.125,00
e) 2.225,00

- 15. (CESGRANRIO – 2011)** Consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização).

VIEIRA SOBRINHO J.P. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 2007, p. 220.

Essa definição se refere ao sistema de amortização conhecido como

- b) constante
- c) radial
- d) alemão
- e) francês

✓ **GABARITO**

1	D
2	E
3	A
4	A
5	B
6	B
7	E
8	A
9	D
10	C
11	D
12	D
13	C
14	B
15	E

ANOTAÇÕES //////////////////////////////////

[illegible]