CÁLCULO I

Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

Aula – Revisão: Funções reais

FUNÇÕES

O que é uma função?

Definição

Uma função real f é uma lei a qual, para cada elemento x em um subconjunto D de $\mathbb{R}$; faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um subconjunto C de $\mathbb{R}$. D é denominado de domínio e C de contradomínio da função f .

Exemplo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = 2x$$

O que é uma função?

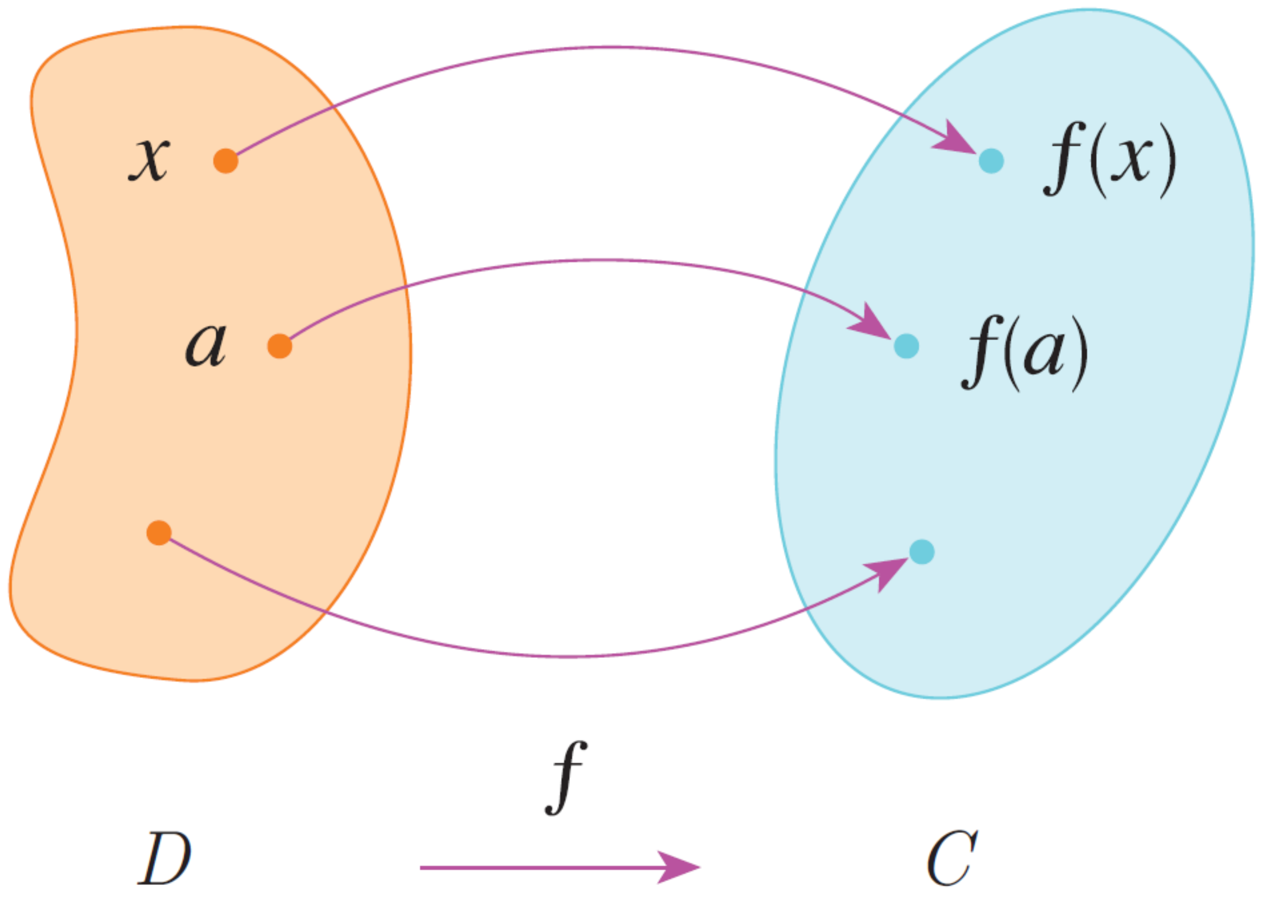
Exemplo 1:

$$
\begin{aligned}
f\ :\ &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&x \longmapsto f(x) = 2x
\end{aligned}
$$

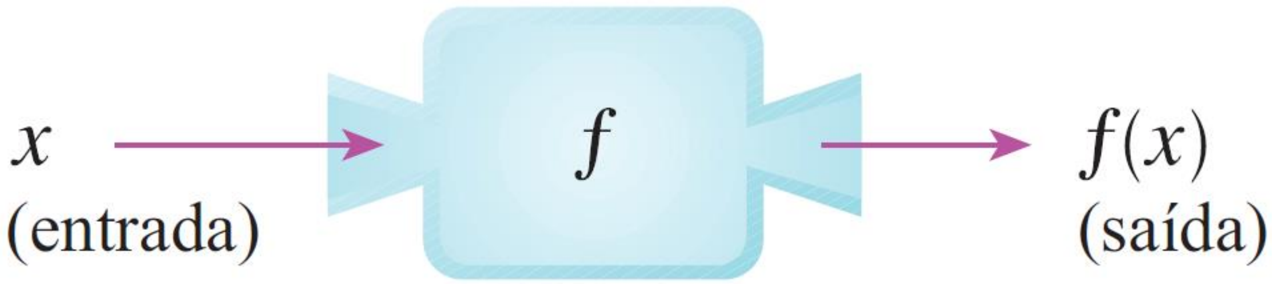
$f(0) = 0$ $\quad$ $f(2) = 4$ $\quad$ $f(a+b) = 2(a+b)$ $\quad$ $f(\triangle) = 2\triangle$

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{2(p+h) - 2p}{h} = \frac{2p + 2h - 2p}{h} = 2$$

Lembram-se dos diagramas de Venn?



Uma outra representação para funções



Cuidado!

$$\begin{aligned} f \,:\, D &\to C \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- Aqui x é um número real no domínio D!
- Aqui $f(x)$ é um número real no contradomínio C! $f(x) \in C$ chama-se o valor assumido pela função f no ponto $x \in D$.
- Aqui f é uma função real que a cada número real x no domínio D associa um único número real $f(x)$ no contradomínio C!
- O correto é dizer "a função f" e não "a função $f(x)$" (ou "a função $y = f(x)$"). Contudo, por simplicidade, livros e pessoas costumam usar as formas incorretas. Exemplo: dizer "a função $y = 2x$" ao invés de "a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = 2x$".

DOMÍNIO E IMAGEM

O que é a imagem de uma função real?

Definição

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores que ela pode assumir. Mais precisamente, a imagem de uma função real $f : D \to C$ é o subconjunto de pontos $y \epsilon C$ para os quais existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$:

Imagem de $f = \{y \in C \mid \text{existe } x \in D \; com \; f(x) = y\}$.

Imagem de uma função

Exemplo 2:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x$$

1 pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (1/2)\ =\ 1$!

2 pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (1)\ = 2$!

$\sqrt{3}$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (\sqrt{3}/2)\ = \sqrt{3}$!

$b\ \in \mathbb{R}$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (b/2)\ = b$!

Moral: Imagem de $f\ = \mathbb{R}$!

Imagem de uma função

Exemplo 3:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

2 pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (\sqrt{2})\ = 2$!

Temos que $f\ (\sqrt{2})\ =\ 2$. Note, também, que $f\ (-\sqrt{2})\ =\ 2$.

Para que $y\ \in$ Imagem de f basta um $x\ \in\ D$ tal que $f\ (x)\ =\ y$!

0 pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (0)\ = 0$!

-1 pertence a imagem de f? Não, pois $\forall x\ \in\ R$, $f\ (x) =\ x^2 \geq 0$ e $-1 < 0$.

$b \geq 0$ pertence a imagem de f? Sim, pois $f\ (\sqrt{b})\ = b$!

$b < 0$ pertence a imagem de f? Não, pois $\forall x\ \in\ R$, $f\ (x) =\ x^2 \geq 0$ e b < 0.

Moral: Imagem de $f\ = [0, +\infty)$!

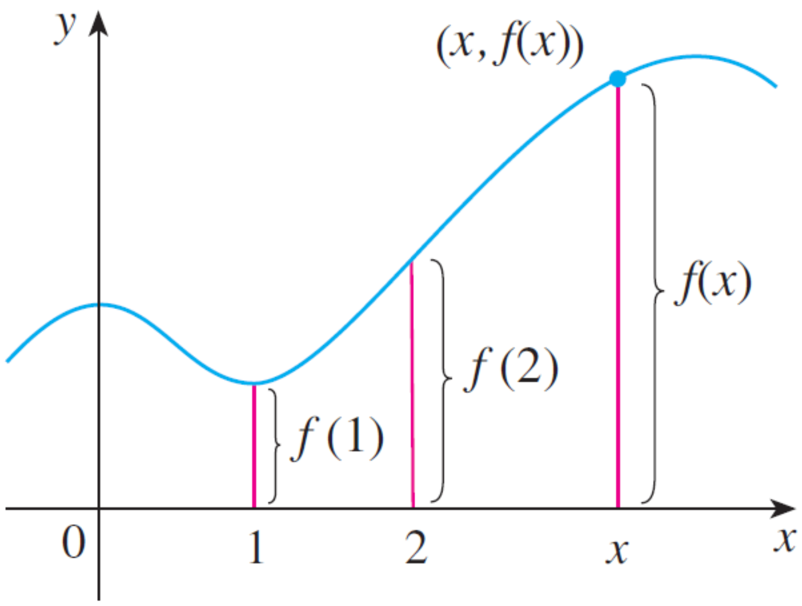
O que é o gráfico de uma função real?

Definição

Se f for uma função, então o gráfico de f será o conjunto de pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ para os quais (x, y) é um par ordenado de f.

$$\text{Gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\}.$$

Gráfico de uma função real



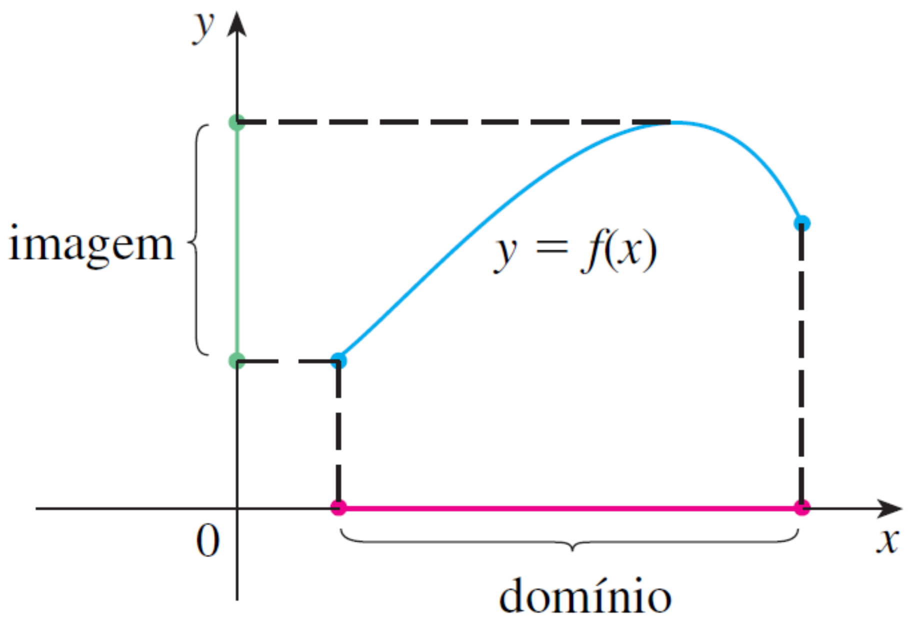
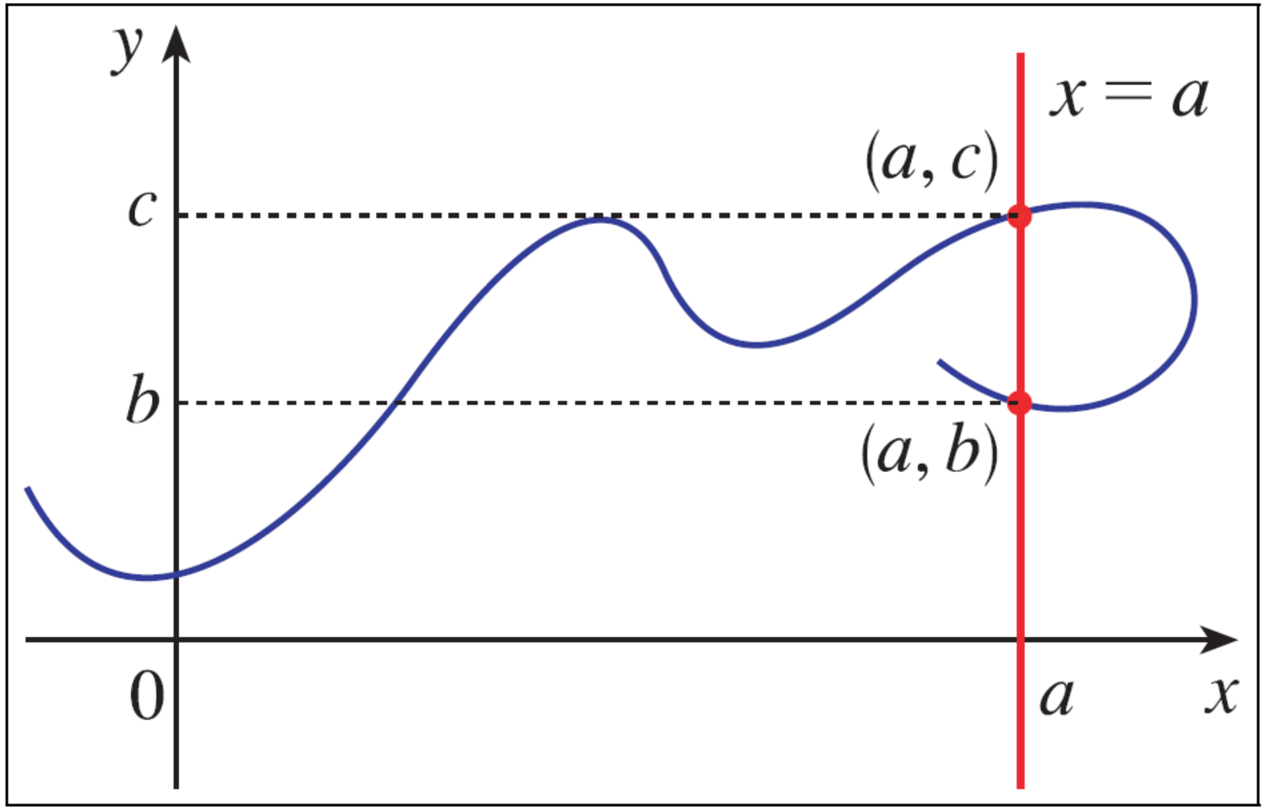


Gráfico de uma função real

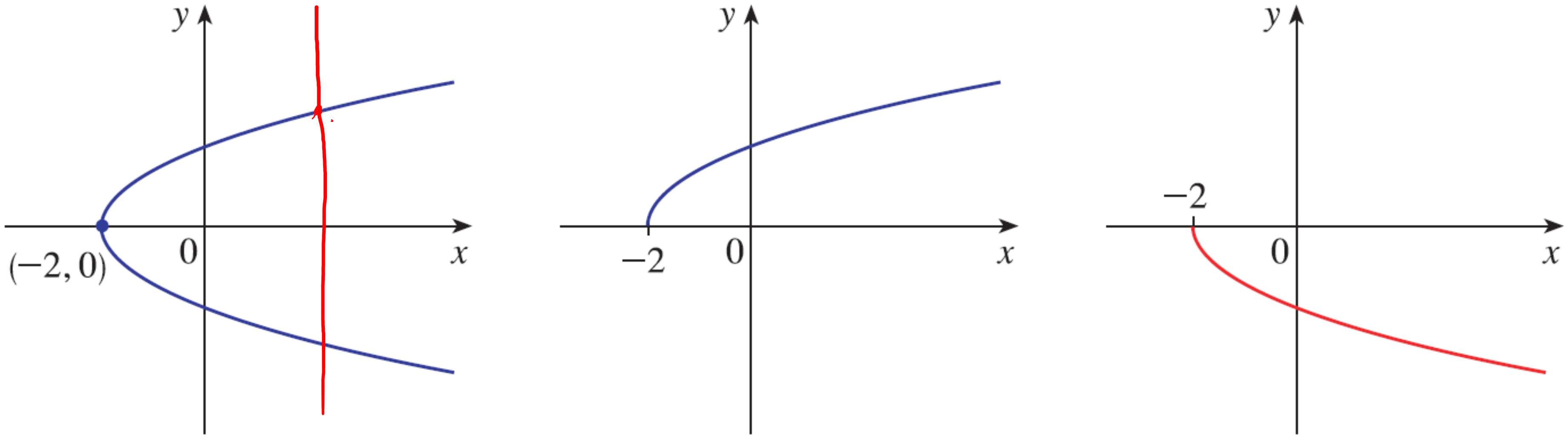
Toda curva é gráfico de uma função real?



A resposta é não!

- Toda reta vertical corta o gráfico de uma função no máximo em 1 ponto!

Gráfico de uma função real



(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

Domínio

Domínio efetivo (natural) de uma função

Convenção

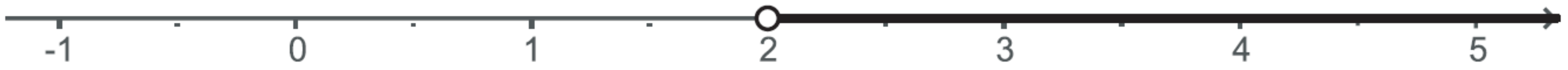
Quando uma função real é definida apenas pela sua lei de associação, convenciona-se que o seu domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual é possível avaliar a função e que o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

Exemplo 4: $f\ (x) = \frac{1}{x}$.

O domínio efetivo (natural) de f é $D\ =\ \mathbb{R} - \{0\}$.

Domínio

- Exemplo 5:
- Qual é o domínio efetivo (natural) de $f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$?



Domínio

- Exemplo 6:

- Qual é o domínio efetivo (natural) de $f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x-6}{x-1}}}$?

$$1 - \frac{2x-6}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{2x-6}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{x-1} < 1$$

$AQUI$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 < x - 1$$

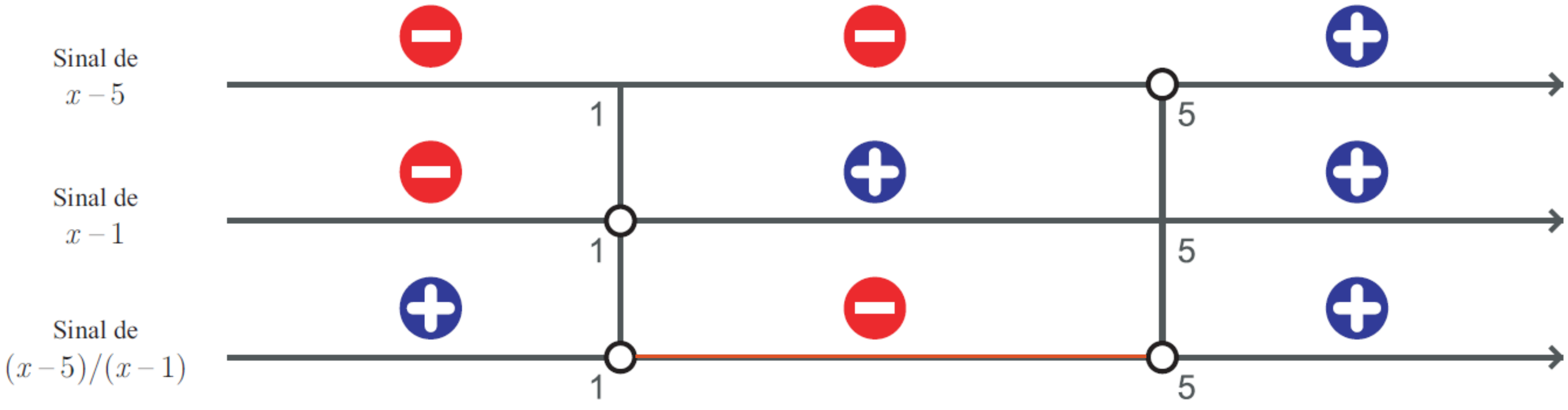
$$\Leftrightarrow 2x - x < -1 + 6$$

$$\Leftrightarrow x < 5$$

- Existe algo de errado neste desenvolvimento?

Sim!

$$\frac{2x-6}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-6-1(x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-1} < 0$$



Domínio efetivo (natural) de $f = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 5\} =]1,5[= (1,5)$.

NOVAS FUNÇÕES A PARTIR DE CONHECIDAS

Transformações de funções

- Objetivo:
  - dado o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma constante c, obter os gráficos das funções

$$y = f(x + c); \quad y = f(x) + c; \quad y = c \,.\, f(x); \quad y = f(c \,.\, x);$$

$$y = f(|x|) \quad \text{e} \quad y = |f(x)|:$$

Transformações de funções: $g(x) = f(x+c)$

- Se f está definida no intervalo $[1,3]$ e $c = 5$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(x+c) = f(x+5)$?

$x \in$ domínio de $g \iff x + c \in$ domínio de $f \iff 1 \leq x + c \leq 3$

$\iff 1 - c \leq x \leq 3 - c \iff x \in [1-c, 3-c]$

$\iff x \in [-4, -2]$.

- Se f está definida no intervalo $[1,3]$ e $c = -3$, qual é o domínio natural (efetivo) de $y = g(x) = f(x+c) = f(x-3)$?

$x \in$ domínio de $g \iff x \in [1-c, 3-c], x \in [4, 6]$.

Transformações de funções: $g(x) = f(x + c)$

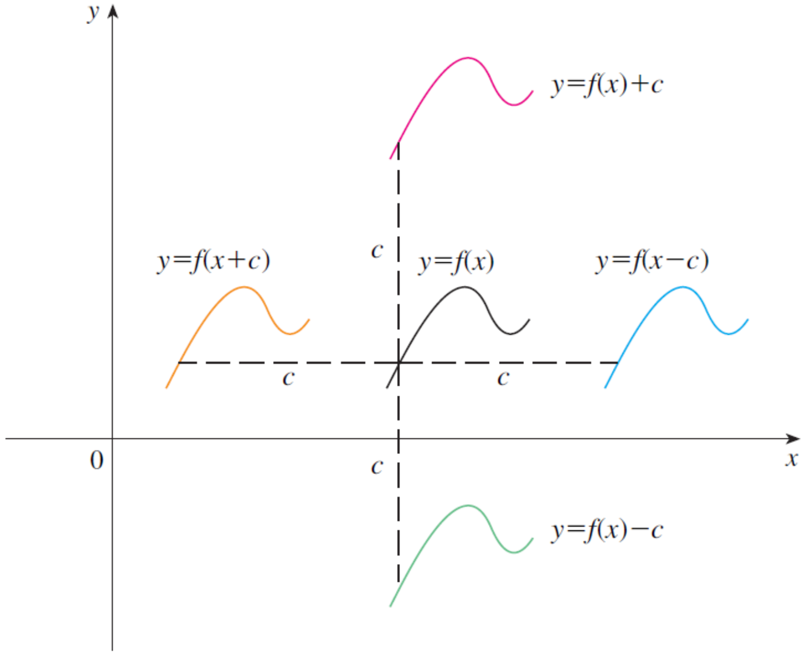
Moral

- Somar uma constante c a variável independente x de uma função f tem o efeito geométrico de transladar horizontalmente para a direita (quando $c < 0$) ou para a esquerda (quando $c > 0$) o gráfico de f.

Transformações de funções

Deslocamentos Verticais e Horizontais: Suponha $c > 0$. Para obter o gráfico de

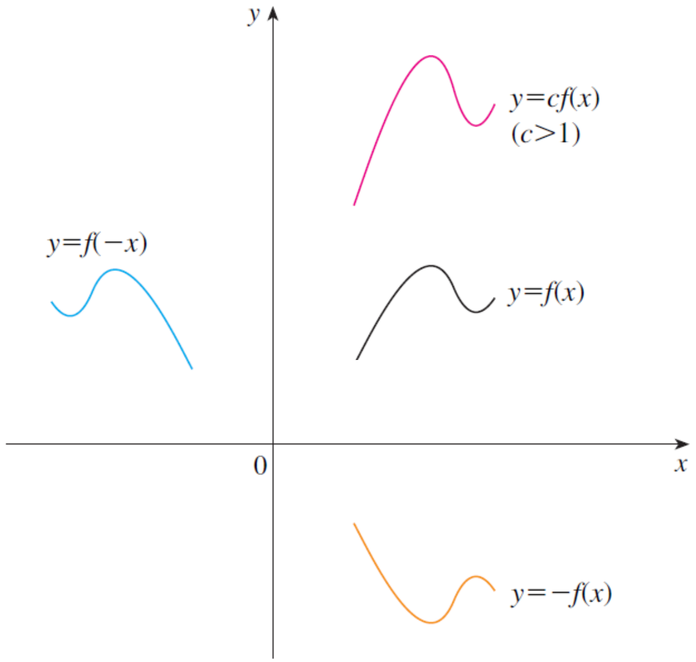
- $y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita;
- $y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda;
- $y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo;
- $y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima.



Transformações de funções

Reflexões e Expansões Horizontais e Verticais: Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de

- $y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
- $y = 1/cf(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
- $y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
- $y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
- $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x;
- $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

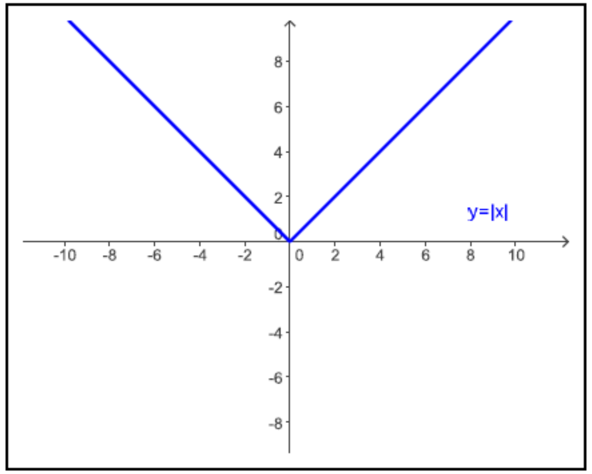


Transformações de funções

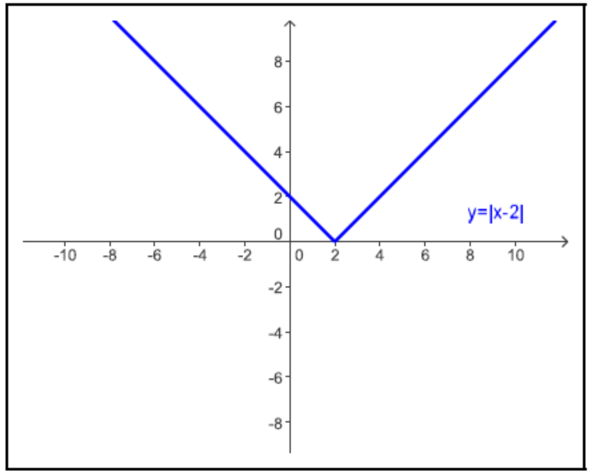
- **Exemplo**: esboce o gráfico de $y = 4 - |x - 2|$

Transformações de funções: $y = 4 - |x - 2|$

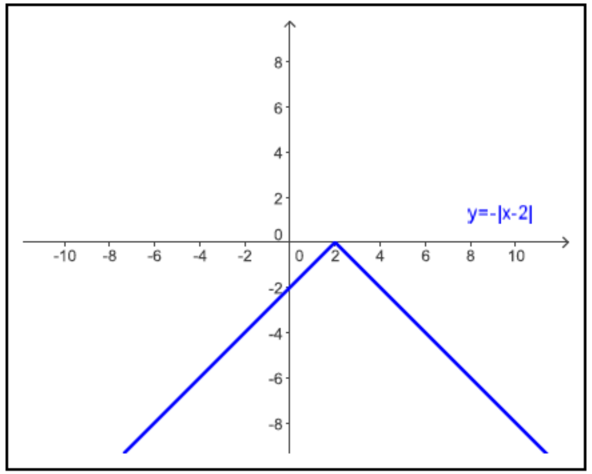
$y = f(x) = |x|$



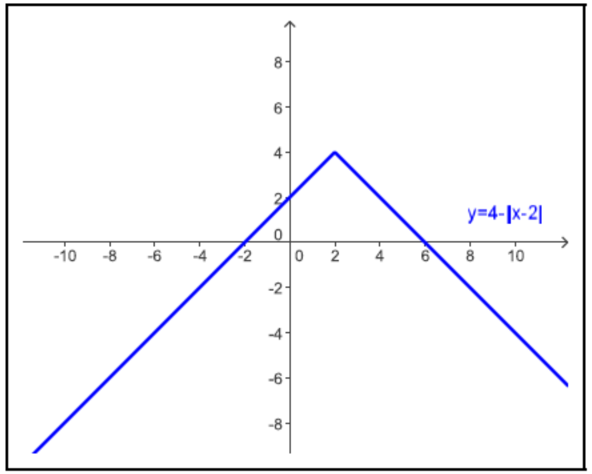
$y = g(x) = f(x-2) = |x-2|$



$y = h(x) = -g(x) = -|x-2|$

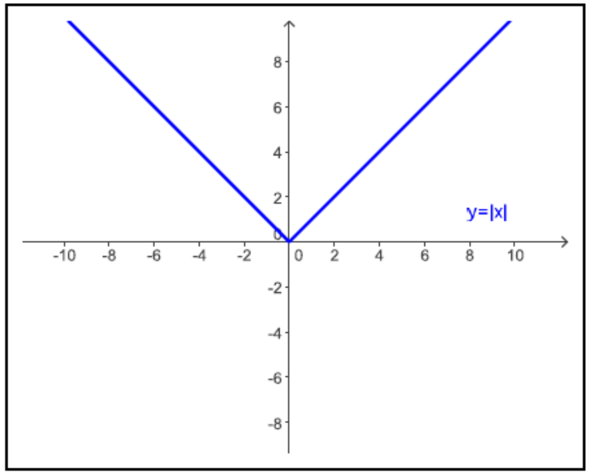


$y = l(x) = h(x) + 4 = 4 - |x-2|$

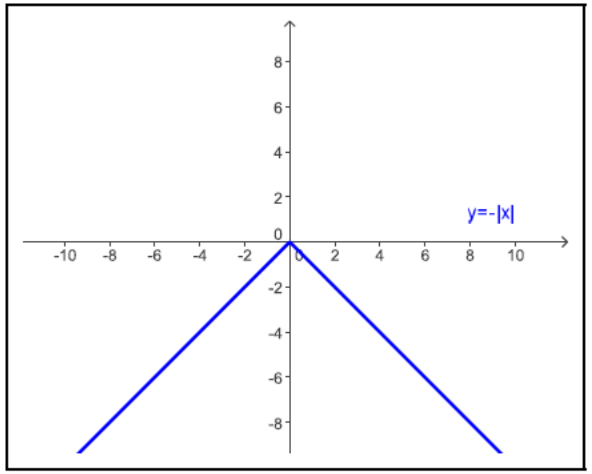


Transformações de funções: $y = 4 - |x - 2|$

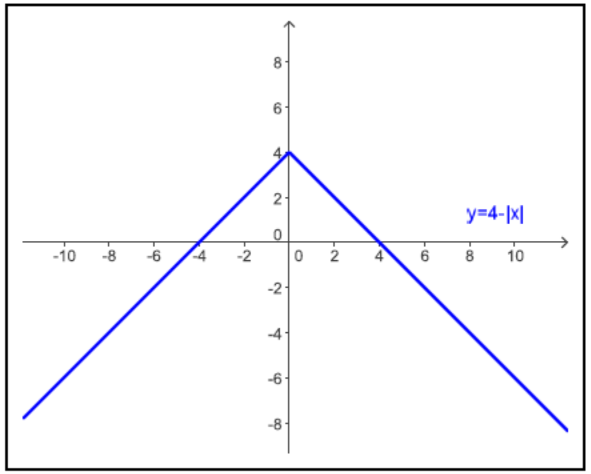
$y = f(x) = |x|$



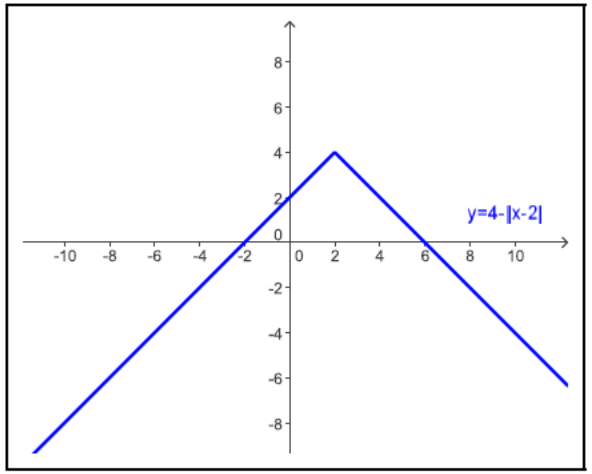
$y = g(x) = -f(x) = -|x|$



$y = h(x) = g(x) + 4 = 4 - |x|$



$y = l(x) = h(x - 2) = 4 - |x - 2|$



FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Função par

Definição

Uma função real $f : D \to C$ é par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

- Exemplo de função par:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 1 - x^4 \end{aligned}$$

- De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x).$$

- Note que a definição de função par pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D, então $-x$ também deve pertencer a D.

Função ímpar

Definição

Uma função real $f : D \to C$ é ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

- Exemplo de função ímpar:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^5 + x \end{aligned}$$

- De fato: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x).$$

- Note que a definição de função ímpar pressupõe que o domínio D seja simétrico com relação a origem 0: se x pertence a D, então $-x$ também deve pertencer a D.

OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Operações com funções

Definição

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e g : $D_g \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais. Definimos as funções soma $f + g$, diferença $f - g$, produto $f.g$ e quociente f/g da seguinte forma:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, com $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, com $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, com $D_{f.g} = D_f \cap D_g$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, com $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g | \, g(x) \neq 0\}$

Operações com funções

- **Exemplo**: Soma $f + g$. Com $f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = x - 3$.

Operações com funções

- **<u>Exemplo</u>**: Diferença $f - g$. Com $f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = x - 3$.

Operações com funções

- **<u>Exemplo</u>**: Produto $f \cdot g$. Com $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ e $g(x) = x - 3$

Operações com funções

- **Exemplo**: Quociente f/g. Com $f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = x - 3$

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

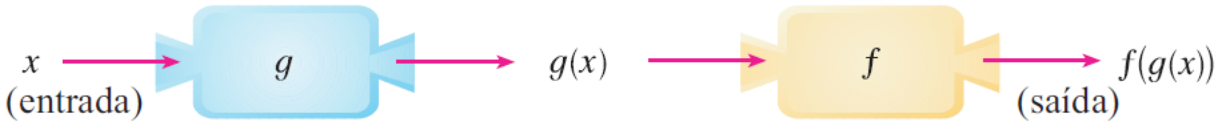
Composição de funções

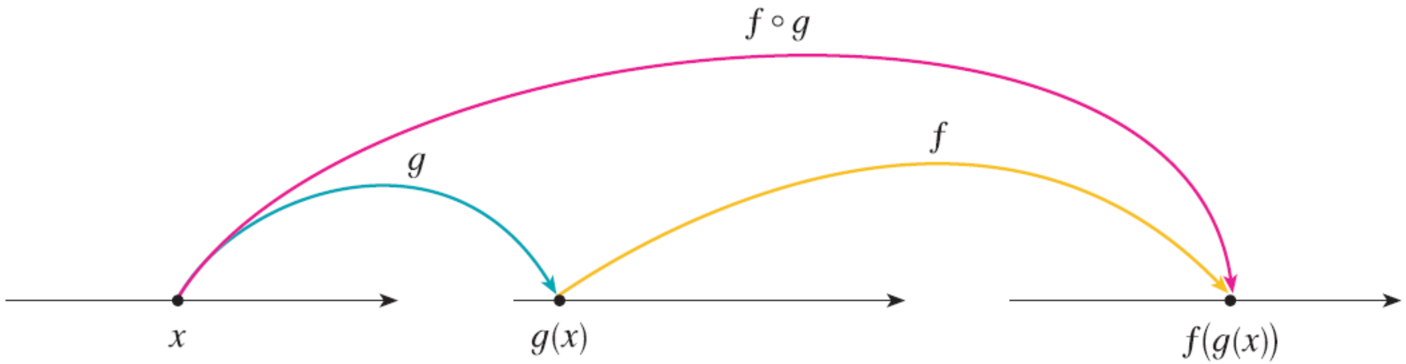
Definição

Sejam $f : D_f \to C_f$ e $g: D_g \to C_g$ duas funções reais, tais que $C_g \subset D_f$.

A composição de f e g é a função $f \circ g: D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)):$$





Composição de funções

- **Exemplo**: $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Composição de funções

- **Exemplo**: $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

- $(f \circ g)(x) = x + 3$
- $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Em geral $f \circ g \neq g \circ f$

A operação de composição de funções não é comutativa!

Identificando composições

$$h(x) = (x^2 + 1)^{10} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = x^{10}$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

Identificando composições

$$h(x) = \mathrm{tg}(x^5) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \mathrm{tg}(x)$$
$$g(x) = x^5$$

Identificando composições

$$h(x) = \sqrt{4 - 3x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = 4 - 3x$$

Identificando composições

$$h(x) = 8 + \sqrt{x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 8 + x$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Identificando composições

$$h(x) = \frac{1}{x+1} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 1/x$$
$$g(x) = x + 1$$

DÚVIDAS?

Jéssica de Paulo Rodrigues

jessica_paulo@uvanet.br

Engenheira da Computação

Mestra em Engenharia Elétrica e de Computação