

MDI200 - CYCLE D'HARMONISATION

Devoir 02

Introduction aux Probabilités - Deuxième Semestre de 2011

PROFESSEUR: MICHEL GROJNOWSKI

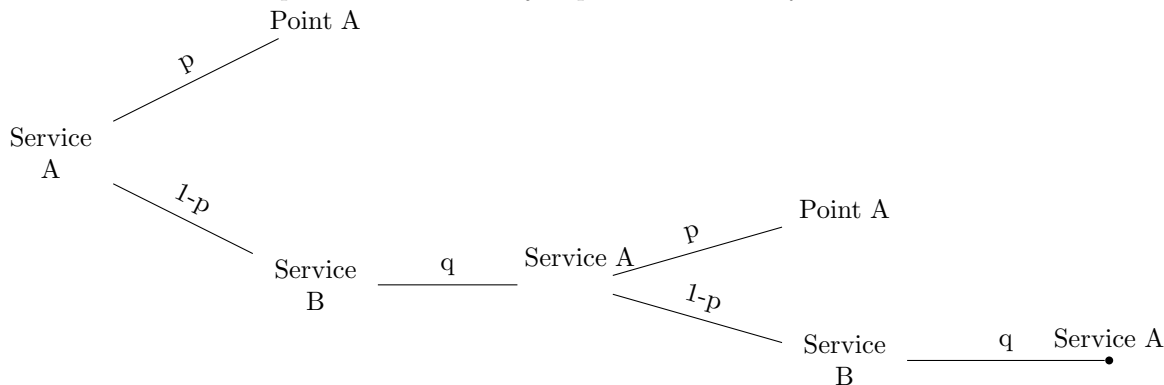
TIAGO CHEDRAOUI SILVA CASSIER: 214

17 octobre de 2011

1 Exercice 1

1.1

En sachant que A est au service au départ, la probabilité qu'il gagne est, ou il gagne le premier point (p), ou il perd le premier (p-1), il gagne le deuxième (q) e il gagne le troisième(p) et ainsi de suite. Le dessin ci-dessous représente les états du jeu que sont dans un cycle.



Le tableau ci-dessous représente le probabilité de un point.

| k | nombre services | Probabilité que A gagne le point après n services |
|---|-----------------|---|
| 0 | 1 | p |
| 1 | 3 | (1-p)qp |
| 2 | 5 | (1-p) ² q ² p |
| 3 | 7 | (1-p) ³ q ³ p |

TAB. 1: Probabilite 1 point

En utilisant le tableau, on peut savoir la $P[n = 1]$:

$$P(n = 1) = \sum_{k=0} (1-p)^k q^k p = \frac{p}{1 - (1-p)q}; \quad (\text{suite géométrique avec } (1-p)q < 1)$$

Pour que A gagne n points, il doit gagner n-1. Ainsi :

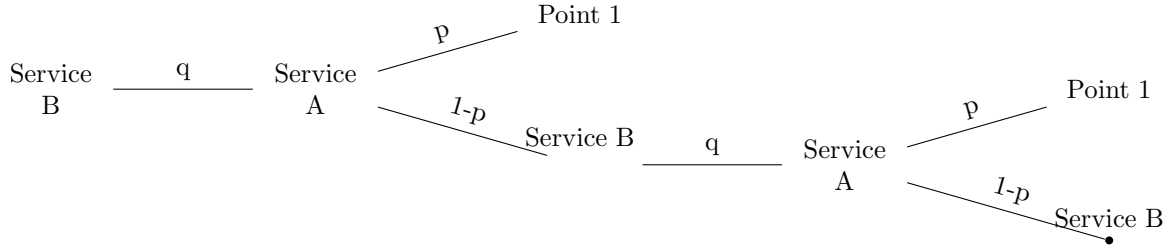
$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) \sum_{k=0} (1-p)^k q^k p = \frac{p}{1 - (1-p)q} \\ &= P(n-1)P(1) \end{aligned}$$

Récurivement on a :

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) \sum_{k=0} (1-p)^k q^k p = \frac{p}{1 - (1-p)q} \\ &= P(n-1)P(1) \\ &= P(n-2)P(1)P(1) \\ &= P(1)^n \end{aligned}$$

1.2

En sachant que B est au service au départ, la probabilité que A gagne un point est, ou il gagne deux points suivantes (qp), ou il gagne le premier (q),perde le deuxième (p-1) et il gagne le troisième (q) e il gagne le quatrième (p) et ainsi de suite. Le dessin ci-dessous représente les états du jeu que sont dans un cycle.



Le tableau ci-dessous représente le probabilité de un point.

| k | nombre services | Probabilité que A gagne le point après n services |
|---|-----------------|---|
| 0 | 2 | pq |
| 1 | 4 | $(1-p)qp$ |
| 2 | 6 | $(1-p)qp$ |
| 3 | 8 | $(1-p)q^4p$ |

TAB. 2: Probabilite 1 point

En utilisant le tableau, on peut savoir la $P[n = 1]$:

$$Q(n = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k q^{k+1} p = \frac{pq}{1 - (1-p)q}; \quad (\text{suite géométrique avec } (1-p)q < 1)$$

Pour que A gagne n points, il doit gagne n-1. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(1) &= P(1)q \\ Q(n) &= P(n)q \end{aligned}$$

1.3

En sachant que $Q(1) = P(1)q$, et que la probabilité de que A gagne le point si il est en service est p au première service plus la probabilité qu'il perde le première service fois la probabilité qu'il gagne si B a le service!

$$\begin{aligned} P(1) &= p + (1-p)Q(1) \\ &= p + q(1-p)P(1) \end{aligned}$$

En récurrence :

$$\begin{aligned} P(2) &= p + q(1-p)P(2) = p + q(1-p)P(1)^2 \\ P(n) &= p + q(1-p)P(2) = p + q(1-p)P(1)^n \end{aligned}$$

1.4

Soit $\frac{1}{2}$ la probabilité que A commence, ainsi comme B commence. Alors, la probabilité que :

$$\begin{aligned}P[n = 21] &= \frac{P[n = 21]}{2} + \frac{Q[n = 21]}{2} \\&= \frac{P[1]^{21}}{2} + \frac{qP[1]^{21}}{2} \\&= \frac{(1+q)P[1]^{21}}{2} \\&= \frac{(1+q)}{2} \left(\frac{p}{1-q+pq} \right)^{21}\end{aligned}$$

2 Exercice 2

2.1

Comme la variable aléatoire X_2 a de valeurs dans \mathbb{R}_+ et X_1 dans \mathbb{R} , une composition entre le tuple (X_1, X_2) aura ses valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. De cette façon, la densité $f(x_1, x_2)$ aura valeur nulle en dehors de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_1}{X_2}, X_2)] = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 > 0} g(\frac{X_1}{X_2}, X_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (1)$$

Si on appelle $a = \frac{x_1}{x_2}$ et $b = x_2$, on a $x_2(a, b) = b$ et $x_1(a, b) = ab$. Par conséquent :

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_1}{X_2}, X_2)] = \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{v > 0} g(u, v) f(uv, v) v du dv = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(u) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) g(u, v) f(uv, v) u du dv \quad (2)$$

Donc, la densité de $U(\frac{X_1}{X_2}, X_2)$ est $f(u, v) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(u) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) g(u, v) f(uv, v) u$

2.2

Comme $Y = \frac{X_1}{X_2}$, on a $U(Y, X_2)$, ainsi, pour trouver la loi de Y, on calcule la densité marginale de la première composante de U :

$$f_Y(u) = \int_0^\infty f_1(uv) f_2(v) v dv; \quad u \in \mathbb{R} \quad (3)$$

3 Exercice 3

Si X_1 et X_2 sont deux v.a. de Poisson indépendantes, de paramètres μ_1 et μ_2 . La loi caractéristique est donné par :

$$\phi_x(t) = e^{\mu(e^{it} - 1)} \quad (4)$$

Comme X_1 e X_2 sont indépendantes :

$$\phi_{x_1+x+2}(t) = \phi_{x_1}(t)\phi_{x_2}(t) = e^{\mu_1(e^{it}-1)}e^{\mu_2(e^{it}-1)} = e^{(\mu_1+\mu_2)(e^{it}-1)} \quad (5)$$

Ainsi la somme de X_1 e X_2 (paramètres μ_1 et μ_2) suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

3.1

Pour calculer la espérance et la variance d'une loi de poisson, on doit utiliser génératrice.

$$g_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[X = n] = E[z^X] \quad (6)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[X = n] \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (\lambda)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda z} \\ &= e^{\lambda(z-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_x(t) &= \lambda z e^{\lambda(z-1)} \\ g'_x(1) &= E[X] = \lambda \\ g''_x(t) &= \lambda e^{\lambda(z-1)} + (\lambda z)^2 e^{\lambda(z-1)} \\ g''_x(1) &= \lambda + \lambda^2 = E[X] + E[X]^2 \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 \end{aligned}$$

Si le paramètre est 1, alors :

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \\ Var[X] &= 1 \end{aligned}$$

3.2

Soit $\lambda = 1$

3.3