MDI200 - Cycle d'harmonisation

Devoir 01

Introduction aux Probabilités - Deuxième Semestre de 2011

Professeur: Michel Grojnowski

Tiago Chedraoui Silva   Cassier: 214

17 octobre de 2011

1 Exercice 1

1.1

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $G(a_1, \mu)$ et $G(a_2, \mu)$, cela veut dire :

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)\frac{\mu^{a_1}}{\Gamma(a_1)}x^{a_1-1}e^{-\mu x} \tag{1}$$

$$f(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)\frac{\mu^{a_2}}{\Gamma(a_2)}x^{a_2-1}e^{-\mu x} \tag{2}$$

Où :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \tag{3}$$

En utilisant la convolution, on doit trouver la loi de probabilité d'une somme de deux variables indépendantes $Z = X + Y$.

Donc, soit K(z) une loi de probabilité on a :

$$f(z) = f(x)f(y) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
K(z) &= \int_0^\infty \frac{\mu^{a_2}}{\Gamma(a_2)}x^{a_2-1}e^{-\mu x}\frac{\mu^{a_1}}{\Gamma(a_1)}(z-x)^{a_1-1}e^{-\mu(z-x)}dx \\
&= \frac{\mu^{a_2+a_1}}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_1)}\int_0^\infty x^{a_2-1}e^{-\mu x}(z-x)^{a_1-1}e^{-\mu(z-x)}dx \\
&= \frac{\mu^{a_2+a_1}e^{-\mu z}}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_1)}\int_0^\infty x^{a_2-1}(z-x)^{a_1-1}dx
\end{aligned}$$

Si $x = tz$ (Donc, $dx = zdt$)

$$\begin{aligned}
K(z) &= \frac{\mu^{a_2+a_1}e^{-\mu z}}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_1)}\int_0^1 t^{a_2-1}z^{a_2-1}(z^{a_1-1}(1-t)^{a_1-1})zdt \\
&= \frac{\mu^{a_2+a_1}e^{-\mu z}z^{a_2+a_1-1}}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_1)}\int_0^1 t^{a_2-1}(1-t)^{a_1-1}dt
\end{aligned}$$

En connaissant la fonction Beta :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{5}$$

Et la propriété :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{6}$$

On a :

$$K(z) = \frac{\mu^{a_2+a_1} e^{-\mu z} z^{a_2+a_1-1}}{\Gamma(a_2)\Gamma(a_1)} \frac{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}$$

Finalement :

$$K(z) = \frac{\mu^{a_2+a_1} e^{-\mu z} z^{a_2+a_1-1}}{\Gamma(a_1+a_2)} \tag{7}$$

Ainsi :

$$\gamma_x + \gamma_y = \gamma_{x+y}$$

Par la démonstration au dessus, le résultat ne serais pas semblable si les secondes paramètres ne sont pas le mêmes, parce que $\mu_1^r \mu_2^s = \mu^{s+r}$ si et seulement si $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

On peut aussi utiliser la fonction caractéristique :

$$\phi_{x_1+x_2} = \phi_{x_1} + \phi_{x_2} = \frac{1}{(1-\frac{it}{\mu})^{a_1+a_2}} \tag{8}$$

Donc, on a une loi $G(a_1+a_2, \mu)$

1.2

Soit X une v.a de loi $N(0,\sigma^2)$, la v.a. X^2 suit une loi $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$:

$$\begin{aligned} E[g(X^2)] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x^2) e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(x^2) e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx \end{aligned}$$

Changement de variable : $t = x^2$ $(dt = 2xdx)$

$$E[g(t)] = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} g(t) t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2\sigma}} dt \tag{9}$$

Donc, la v.a X a une loi $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$.

1.3

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi $N(0, \sigma^2)$. La loi, et la densité de la v.a $Y = X_1^2 + ... + X_n^2$ suite une loi $G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$, que s'appelle aussi, loi du khi-carré.

Ainsi, la densité est :

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \tag{10}$$

Et, la loi est :

$$F(t) = \frac{\gamma(n/2, 1/2)}{\Gamma(n/2)} = G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \tag{11}$$

1.4

1.4.1

Soit T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant la condition d'absence d'usure (non-vieillissement), on a pour $t = 0$, ça veut dire qui le début est 0 et donc, il n'existe pas de différence entre las probabilités de deux temps (non-vieillissement) :

$$P(T \geq s + t/T \geq s) = P(T \geq t/T \geq 0) = P(T \geq t) \tag{12}$$

Parce que $T \geq t = 0$ et $P[T \geq 0] = 1$. Et pour $t \geq 0$ et sachant la probabilité conditionnel :

$$P(T \geq s + t/T \geq s) = \frac{P[(T \geq s + t) \cap (T \geq s)]}{P(T \geq s)} = \frac{P(T \geq s + t)}{P(T \geq s)} \tag{13}$$

Avec les équations antérieurs, on a :

$$P(T \geq s) = \frac{P(T \geq s + t)}{P(T \geq t)} \tag{14}$$

Si $G(t) = P(T \geq t)$ donc :

$$G(s) = \frac{G(s + t)}{G(t)}, (G(0) = 1) \tag{15}$$

1.4.2

Soi G(s) la loi de probabilité, pour avoir la densité de cette loi, G(s) doit être dérivable. Ainsi, la unique fonction (et sa dérivé) dont le produit entre deux fonctions (dérivées) est le même que la fusionnions (dérivée) de la somme est une exponentiel (ou zéro, mais on considère $\lambda > 0$) :

$$G(t) = e^{\lambda t} \tag{16}$$

Donc, la dérivé (fonction de densité) :

$$f(t) = \lambda e^{\lambda t} \tag{17}$$

Comme f(t) doit être plus petite que 1, $f(t) \leq 1$, donc on sait que, comme $t \geq 0$, $\lambda \leq 0$.

Pour considérer que $t \in \mathbb{R}$, on sache que tout réel peut être considéré comme une limite d'une suite de rationnels, et que la fonction exponentiel est continue sur $\mathbb{R}$, donc on peut élargir la notation pour les réels ($\mathbb{R}$).

2 Exercice 2

2.1

En sachant que la loi de probabilité de poisson est donné par :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}, k \in \mathbb{N} \tag{18}$$

Étant un processus ponctuel de poisson tel que, pour tout instant t, la v.a. $N_{0,t}$, suit une loi de Poisson de paramètre λt, $\lambda > 0$, on a :

$$P(N_{0,t} = k) = \frac{e^{-\lambda(t-0)}(\lambda(t-0))^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

Ainsi,

$$P(N_{0,t} - N_{0,s} = N_{s,t} = k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

On voit que $N_{0,t} = N_{0,s} + N_{s,t}$, veut dire que le nombre d'arrivées entre 0 et t, est la somme entre les temps 0 et s ; et s et t. Donc, le nombre dans un période s et t, irais être le nombre entre 0 et t moins le nombre entre 0 et s.

En utilisant la fonction caractéristique on a :

$$\phi_{x_1} = E[e^{itx}] = e^{\lambda t_1(e^{it}-1)} \tag{19}$$

Donc, comme $N_{0,s}$ et $N_{s,t}$ sont indépendantes, soit $Y = N_{0,t}$,$X_1 = N_{0,s}$ et $X_2 = N_{s,t}$. On a :

$$\phi_{Y=X_2+X_1} = \phi_{X_2}\phi_{X_1} = e^{\lambda(t+s)(e^{in}-1)}$$

Étant donné cela, on voit que la fonction caractéristique corresponde a une fonction de poisson avec les paramètres t+s.

Ainsi, on peut vérifier que :

$$P(N_{0,t} - N_{0,s} = N_{s,t} = k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^k}{k!}, k \in N \tag{20}$$

2.2

On sache que T_1 est la première arrivée, donc $P[T_1 \geq t] = P[N_{0,t} = 0]$, parce que jusqu'au moment t on doit avoir aucune arrivées pour que au moment un petit peu plus grand que t, on a la première arrivée.

Ainsi :

$$P(N_{0,t} = 0) = \frac{e^{-\lambda(t-0)}(\lambda(t-0))^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

On sait que $t_n = X_1 + X_2 + ... + x_n$, cela veut dire que le temps t_n est le temps nécessaire pour que on a n arrivées. Comme un arrive a une loi exponentiel (il respect la loi de poisson), t_n serait donne par une somme de v.a. dont la loi de densité est exponentiel. Ainsi, la densité et la loi d'un processus de poisson est donné respectivement par :

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \tag{21}$$

Preuve :

$$P[T_n > t] = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{22}$$

$$P[T_{n+1} > t] = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = P[T_n > t] + \frac{e^{-\lambda(t)}(\lambda(t))^n}{n!} \tag{23}$$

En utilisant l'équation 23, on peut dire que :

$$P[T_n > t] = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \tag{24}$$

Si et seulement si l'équation suivante est vérifié :

$$\frac{\lambda^{n+1}}{(n)!} \int_t^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx + \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{25}$$

Par intégration par partie, on a $x^n = U$, $nx^{n-1} = dU$ et $e^{-\lambda x}dx = dV$, $V = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^{n+1}}{(n)!} \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} [VU|_t^\infty - \int_t^\infty V dU] \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} [\frac{x^n e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \int \frac{x^{n-1} n e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx] \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} [\frac{-x^n e^{-\lambda x}}{n} |_t^\infty + \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx] \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} [\frac{-t^n e^{-\lambda t}}{n} + \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx] \\
&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence on a démontrer que la formule de probabilité est vraiment applicable a T_n, et de même façon on a vérifié que T_n suit une loi $G(n, \lambda)$.

$$G(n, \lambda) = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = P[T_n > t] \tag{26}$$

2.3

Soit T_1 et $T_2 - T_1$ indépendantes, on a que $\phi_{T_2} = \phi_{T_1} * \phi_{T_2-T_1}$:

Comme T_n suivre une loi $G(n, \lambda)$, en utilizant les fonctions caractéristiques (voir le énonce de la question 1 du devoir), on a :

$$\phi_{T_2} = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}^2} = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \phi_{T_2-T_1} \tag{27}$$

Cela résulte dans le fonction caractéristique de $T_2 - T_1$:

$$\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} = \phi_{T_2-T_1} \tag{28}$$

Ainsi, $T_2 - T_1$ suit une loi $G(1, \lambda)$ ainsi come T_1.

2.4

On sait que :

$$P[T_2 > t] = 1 - P[T_2 < t] \tag{29}$$

Donc :

$$P[T_2 < t] = 1 - P[T_2 > t] \tag{30}$$

Nous voudrions chercher la probabilité tel que $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t]$, donc si t=0 ou s = 0, on a $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 0$ et cela nous donne une probabilité 0. On doit rappeler que $P[A \cap B] = P[A|B]P[B]$, si $P[A] = 0$ ou $P[B] = 0$, $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 0$.

Pour analyser les autres situations, on a :

$$P[T_2 > t] = \frac{\lambda^2}{(2-1)!} \int_t^\infty x^{2-1} e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 * \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}|_t^\infty\right) - \lambda^{-2} e^{-\lambda x}|_t^\infty = \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}$$

Comme on voudrait la probabilité d'intersection entre s e t, si $t < s$, le événemet la probabilité de que $P[T_1 < t]$, est la même que $P[T_2 < t]$, parce que le si on a deux événemts avant t on a un avant s.

Donc, reste la probabilité si $0 < s < t$, la dans lequel il y a deux cas :

1. Au moins deux arrivées dans [0,s]
2. Exactement un arrivée dans [0,s] et au moins deux arrivées dans [s,t]

Comme il y a deux cas, on a que la probabilité est la somme de ces deux cas. Ainsi :

$$P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = P[T_2 < s] + P[N_{0,s} = 1] * P[T_1 < t - s], \quad si \quad 0 \leq s \leq t \tag{31}$$

$$P[T_2 < s] = 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda s}$$

$$P[N_{0,s} = 1] * P[T_1 < t - s] = s\lambda e^{-\lambda s}[1 - e^{-\lambda(t-s)}]$$

Finalement :

$$P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda s} + s\lambda e^{-\lambda s}[1 - e^{-\lambda t - s}] = 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda t} \tag{32}$$

Conclusion :
Si $s \leq 0$ ou $t \leq 0$, donc $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 0$. Donc,(F(s,t)=0).
Si $0 \leq s \leq t$, donc $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 1 - P[T_2 > s]$. Donc,(F(s,t)=$1 - \lambda s e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s}$).
Si $0 \leq t \leq s$, donc $P[T_1 \leq s \cap T_2 \leq t] = 1 - P[T_2 > t]$. Donc,(F(s,t)=$1 - \lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}$).

2.5

Avec la fonction de répartition, on peut avoir la densité en dérivant la fonction de répartition.

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \frac{\partial^2 F_{T_1,T_2}(s,t)}{\partial_s \partial_t} \tag{33}$$

Aisi :

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \frac{\partial^2 F_{T_1,T_2}(s,t)}{\partial_s \partial_t} = 0, \quad si \quad t < 0, \text{ ou } s < 0$$

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \frac{\partial^2 F_{T_1,T_2}(s,t)}{\partial_s \partial_t} = 0, \quad si \quad 0 < t < s$$

Observation :

$$f_{T_2}(t) = \frac{\partial F_{T_1,T_2}(s,t)}{\partial_t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad si \quad 0 < t < s$$

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \frac{\partial^2 F_{T_1,T_2}(s,t)}{\partial_s \partial_t} = \lambda^2 e^{-\lambda t}, \quad si \quad 0 < s < t$$

Pour déduire que T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendantes, on doit avoir :

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = f_{T_1}(s) * f_{T_2}(t)$$

Ainsi, comme la loi de dénsité sont :$f_{T_1}(s) = \lambda e^{-\lambda s}$ et loi de $f_{T_2 - T_1}(t-s) = \lambda^2 e^{-\lambda t - s}$

$$f_{T_1,T_2}(s,t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} = \lambda^2 e^{-\lambda(t-s)} \lambda^2 e^{-\lambda s} = f_{T_1}(s) f_{T_2 - T_1}(t-s) \tag{34}$$

Donc, les lois sont indépendantes.