MDI200 - Cycle d'harmonisation

Devoir 02

Introduction aux Probabilités - Deuxième Semestre de 2011

Professeur: Michel Grojnowski

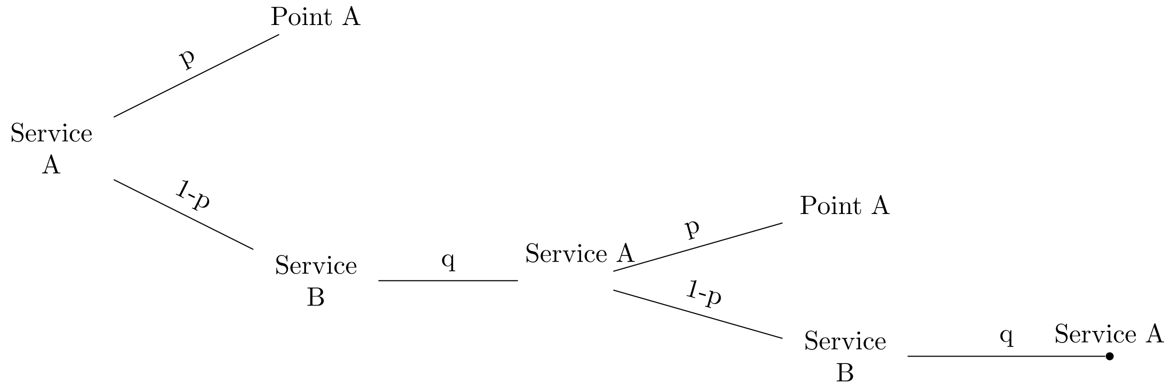
Tiago Chedraoui Silva   Cassier: 214

17 octobre de 2011

1 Exercice 1

1.1

En sachant que A est au service au départ, la probabilité qu'il gagne est, ou il gagne le premier point (p), ou il perde le premier (p-1),il gagne le deuxième (q) e il gagne le troisième(p) et ainsi de suite. Le dessin ci-dessous représente les états du jeu que sont dans un cycle.



Le tableau ci-dessous représente le probabilité de un point.

k	nombre services	Probabilité que A gagne le point après n services
0	1	p
1	3	(1-p)qp
2	5	$(1\text{-p})^2q^2p$
3	7	$(1\text{-p})^3q^3p$

Tab. 1: Probabilite 1 point

En utilisant le tableau, on peut savoir la $P[n = 1]$:

$$P(n = 1) = \sum_{k=0}(1-p)^k q^k p = \frac{p}{1-(1-p)q}; \quad \text{(suite géométrique avec (1-p)q<1)}$$

Pour que A gagne n points, il doit gagne n-1. Ainsi :

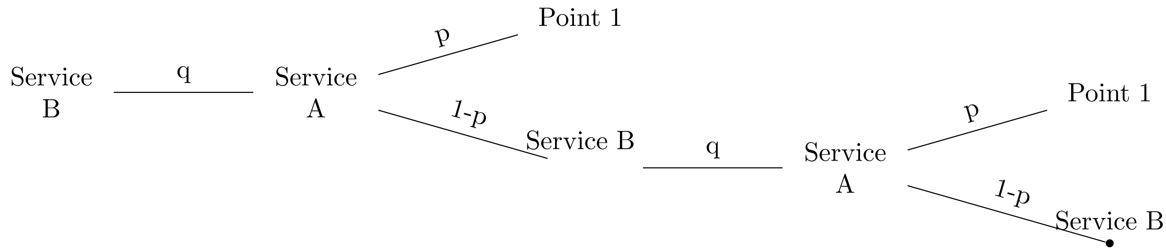
$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1)\sum_{k=0}(1-p)^k q^k p = P(n-1)\frac{p}{1-(1-p)q} \\ &= P(n-1)P(1) \end{aligned}$$

Récursivement on a :

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1)\sum_{k=0}(1-p)^k q^k p = \frac{p}{1-(1-p)q} \\ &= P(n-1)P(1) \\ &= P(n-2)P(1)P(1) \\ &= P(1)^n \end{aligned}$$

1.2

En sachant que B est au service au départ, la probabilité que A gagne un point est, ou il gagne deux points suivantes (qp), ou il gagne le premier (q),perde le deuxième (p-1) et il gagne le troisième (q) e il gagne le quatrième (p) et ainsi de suite. Le dessin ci-dessous représente les états du jeu que sont dans un cycle.



Le tableau ci-dessous représente le probabilité de un point.

k	nombre services	Probabilité que A gagne le point après n services
0	2	pq
1	4	$(1-p)qp$
2	6	$(1-p)qp$
3	8	$(1-p)q^4p$

Tab. 2: Probabilite 1 point

En utilisant le tableau, on peut savoir la $P[n=1]$:

$$Q(n=1) \quad = \quad \sum_{k=0}(1-p)^k q^{k+1} p = \frac{pq}{1-(1-p)q}; \quad \text{(suite géométrique avec (1-p)q<1)}$$

Pour que A gagne n points, il doit gagne n-1. Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(1) &= P(1)q \\ Q(n) &= Q(1)^n \\ &= (P(1)p)^n \\ &= (P(1)^n p^n \\ &= P(n)q^n \end{aligned}$$

1.3

En sachant que $Q(1) = P(1)q$, et que la probabilité de que A gagne le point si il est en service est p au première service plus la probabilité qu'il perde le première service fois la probabilité qu'il gagne si B a le service!

$$\begin{aligned} P(1) &= p + (1-p)Q(1) \\ &= p + q(1-p)P(1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(1)(1-q+qp) &= p \\ P(1) &= \frac{p}{(1-q+qp)} \end{aligned}$$

En récurrence :

$$\begin{aligned} P(n) &= P(1)^n \\ P(n) &= \frac{p^n}{(1-q+qp)^n} \end{aligned}$$

1.4

Soit $\frac{1}{2}$ la probabilité que A commence, ainsi comme B commence. Alors, la probabilité que :

$$\begin{aligned} P[n=21] &= \frac{P[n=21]}{2} + \frac{Q[n=21]}{2} \\ &= \frac{P[1]^{21}}{2} + \frac{q^{21}P[1]^{21}}{2} \\ &= \frac{(1+q^{21})P[1]^{21}}{2} \\ &= \frac{(1+q^{21})}{2}(\frac{p}{1-q+pq})^{21} \end{aligned}$$

2 Exercice 2

2.1

Comme la variable aléatoire X_2 a de valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et X_1 dans $\mathbb{R}$, une composition entre le tuple (X_1, X_2) aura ses valeurs dan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. De cette façon, la densité $f(x1, x2)$ aura valeur nulle en dehors de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_1}{X_2}, X_2)] = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x_2 > 0} g(\frac{X_1}{X_2}, X_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{1}$$

Si on appelle $a = \frac{x_1}{x_2}$ et $b = x_2$, on a $x_2(a, b) = b$ et $x_1(a, b) = ab$. La deuxième étape est calculer le jacobien du changement de variable inverse :

$J = \begin{bmatrix} \frac{d}{da}x1 & \frac{d}{da}x2 \\ \frac{d}{db}x1 & \frac{d}{db}x2 \end{bmatrix} = b * 1 - a * 0 = b$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}[g(\frac{X_1}{X_2}, X_2)] = \int_{a \in \mathbb{R}} \int_{b>0} g(a, b) f(ab, b) b da db = \int\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(u) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v) g(a, b) f(ab, b) b da db \tag{2}$$

Donc, la densité de $U(\frac{X_1}{X_2}, X_2)$ est $f(a, b) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(a) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(a) f(ab, b) b$

2.2

Comme $Y = \frac{X_1}{X_2}$, on a $U(Y, X_2)$, ainsi, pour trouver la loi de Y, on calcule la densité marginale de la première composante de U :

$$f_Y(a) = \int_0^\infty f_1(ab, b)bdb; \quad a \in \mathbb{R} \tag{3}$$

3 Exercice 3

3.1

Si X_1 e X_2 sont deux v.a. de Poisson indépendantes, de paramètres μ_1 et μ_2. La loi caractéristique est donné par :

$$\phi_x(t) = e^{\mu(e^{it}-1)} \tag{4}$$

Comme X_1 e X_2 sont indépendantes :

$$\phi_{x_1+x+2}(t) = \phi_{x_1}(t)\phi_{x_2}(t) = e^{\mu_1(e^{it}-1)}e^{\mu_2(e^{it}-1)} = e^{(\mu_1+\mu_2)(e^{it}-1)} \tag{5}$$

Ainsi la somme de X_1 e X_2(paramètres μ_1 et μ_2) suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

3.2

Pour calculer la espérance et la variance d'une loi de poisso, on doit utiliser génératrice.

$$g_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[X = n] = E[z^X] \tag{6}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P[X = n] \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n (z\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda z} \\ &= e^{\lambda(z-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_x(t) &= \lambda z e^{\lambda(z-1)} \\ g'_x(1) &= E[X] = \lambda \\ g''_x(t) &= \lambda e^{\lambda(z-1)} + (\lambda z)^2 e^{\lambda(z-1)} \\ g''_x(1) &= \lambda + \lambda^2 = E[X^2] \\ Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \lambda \end{aligned}$$

Si le paramètre est 1, alors :

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \\ Var[X] &= 1 \end{aligned}$$

3.3

On va considérer que $P_1, ..., P_n$ sont indépendantes et suivent une loi de poisson de paramètre 1, donné par :

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = P[k]$$

Ainsi, on a :

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \quad = \quad \mathbb{P}[P_1 + P_2 + ... + P_n \leq n]$$

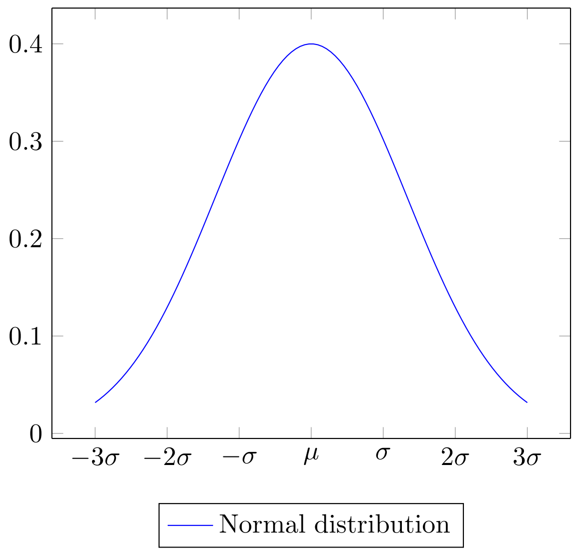
Si on appelle $S_n = P_1 + \cdots + P_n$, le valeur de la moyenne ira être $n\mu$ et la variance $n\sigma^2$. En appellent $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, on peut utiliser la loi de limite central pour approcher Z_n a une loi normal. Soit, comme considéré avant,$\mu = \sigma = 1$, on a,$Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Donc, on peut récrire la équation suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[P_1 + P_2 + ... + P_n \leq n] &= \mathbb{P}[P_1 + P_2 + ... + P_n - n \leq 0] \\
&= \mathbb{P}[\frac{P_1 + P_2 + ... + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0]; \quad \text{n} > 0;
\end{aligned}$$

Pour terminer, par le théorème central limité(TCL), on a :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0)$$

On peut vérifier para le graphique au-dessous, que si on centre la distribution($\mu = 0$),la moitie de la courbe va entre à gauche de 0, cela nous donné la probabilité de $\frac{1}{2}$.



Conclusion :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$$