MDI224

Optimisation de portefeuille

Travaux Pratique 3 - Deuxième semestre de 2012

Professeur: Roland BADEAU

Anthony CLERBOUT	Casier: 234
Tiago CHEDRAUOI SILVA	Casier: 214

Février 6, 2011

Table des matières

Table des figures

1 Frontière de marché

1.1 Estimation des caractéristiques du marché

La fonction “mean” a été utilisé pour qu'on puisse trouver le vecteur de rendement moyen. Pour la matrice de covariance on a fait :

$$Q = \mathbb{E}[(R - m) * (R - m)^t]$$

Ces fonctions peuvent être vue dans le début du code Ventes à découvert autorisées dans la prochaine section.

1.2 Ventes à découvert autorisées

Le problème d'optimisation est de minimiser le risque pour un certain rendement souhaité.

$$\begin{aligned} minJ(x) &= \frac{x^tQx}{2} \\ u^tx &= 1 \\ x^tm &\geq Re \end{aligned}$$

Le lagrangien du problème est :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= \frac{x^tQx}{2} + \lambda(u^tx - 1) + \mu(Re - x^tm) \\ \delta_x L &= Qx + \lambda u - \mu m = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$x = \mu Q^{-1}m - \lambda Q^{-1}u$$

En utilisant ce x dans le contraintes, on ira avoir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{B^2 - DA} \begin{pmatrix} B & -A \\ -D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Re \end{pmatrix}$$

Avec le μ et λ, on peut calculer le x^* et σ^*, mais il existe deux cas, un quand $Re < B/A$ et d'autre quand $Re \geq B/A$.

$$
\begin{aligned}
Re &\geq B/A \\
x^* &= \mu Q^{-1}m - \lambda Q^{-1}u \\
\sigma^* &= x^*Qx = f(Re)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Re &< B/A \\
x^* &= \frac{Q^{-1}u}{u^tQ^{-1}u} \\
\sigma^* &= \sqrt{\frac{1}{u^tQ^{-1}u}}
\end{aligned}
$$

Le code pour ces calculs est au dessous.

Ventes à découvert autorisées

```
function [ sigma ] = redement( RR, nActives, ReVar )

m = mean(RR);
m = m(1,1:nActives);
rendSize = size(RR,1);
RRc = RR(1:rendSize,1:nActives) - ones(rendSize,1)*m;
Q = RRc' * RRc/rendSize;

u = ones(nActives,1);

A = u'*inv(Q)*u;
B = u'*inv(Q)*m';
D = m*inv(Q)*m';
delta = A*D-B*B;
limRe = B/A;

sigma=[];

for Re=ReVar,

  lambda = (D-Re*B)/delta;
  mi = (-B+A*Re)/delta;

  xe = inv(Q)*(lambda*u + mi*m');

  if (Re<B/A)
    sigmaRes = 1/sqrt(A);
  else
    sigmaRes = sqrt(xe'*Q*xe);
  end;

  sigma = [sigma sigmaRes ];

end;

end
```

La figure au dessous affiche la frontière du marché pour un nombre différents d'actifs. On peut voir que pour un rendement fixe, plus d'actifs implique un risque plus petite.

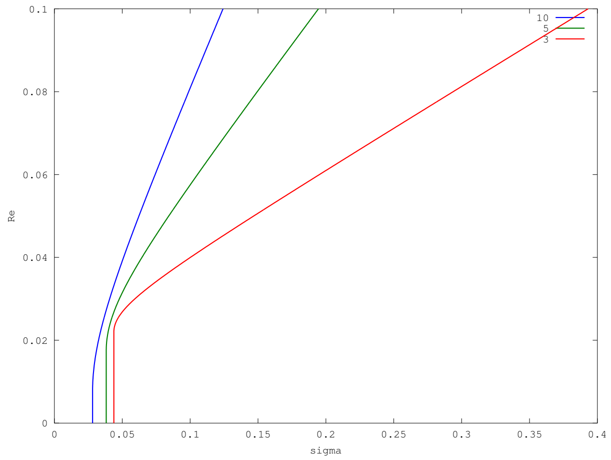

FIG. 1: Frontière du marché pour un nombre différent d'actifs

En suite, on a pris deux actifs et on a varier leur corrélation entre -0.9 et 0.9. Voir le code au dessous.

Ventes à découvert autorisées

```
function [ sigmaRho1,sigmaRho2, sigmaRho3 ] = rendCov( RR, nActives , ReVar )

m = mean(RR);
m = m(1,1:nActives);
rendSize = size(RR,1);

RRc = RR(1:rendSize,1:nActives) - ones(rendSize,1)*m;
Q = RRc' * RRc/rendSize;
u = ones(nActives,1);

RhoVar = -0.9:0.9:0.9;

sigma1 = sqrt(Q(1,1));
sigma2 = sqrt(Q(2,2));

for Rho=RhoVar,

  Q = [sigma1*sigma1 Rho*sigma1*sigma2 ; Rho*sigma1*sigma2 sigma2*sigma2 ];
  A = u'*inv(Q)*u;
  B = u'*inv(Q)*m';
  D = m*inv(Q)*m';
  delta = A*D-B*B;
  limRe = B/A;

  sigmaRho=[];

  for Re=ReVar,

    lambda = (D-Re*B)/delta;
    mi = (-B+A*Re)/delta;

    xe = inv(Q)*(lambda*u + mi*m');

    if (Re<=B/A)
      sigmaRes = 1/sqrt(A);
    else
      sigmaRes = sqrt(xe'*Q*xe);
    end;

    sigmaRho = [sigmaRho sigmaRes ];
  end;

  switch Rho
    case -0.9
      sigmaRho1 = sigmaRho ;
    case 0
      sigmaRho2 = sigmaRho ;
    case 0.9
```

```
        sigmaRho3 = sigmaRho ;
    end

end;

end
```

La figure au dessous affiche le rendement en fonction du risque pour un portefeuille à 2 actifs pour différentes valeurs de la corrélation.

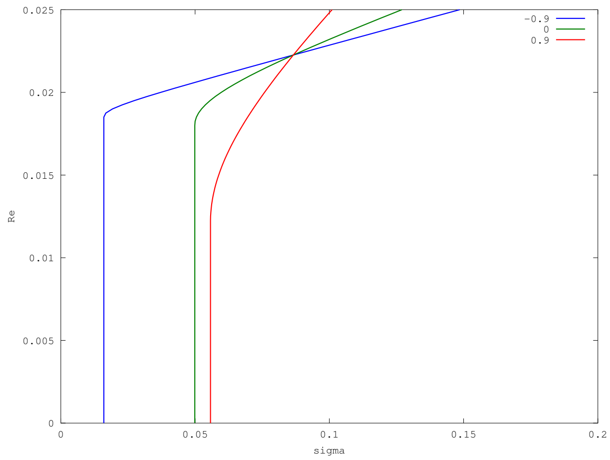

FIG. 2: Rendement x risque : 2 actifs pour différentes valeurs de la corrélation.

1.3 Ventes à découvert non autorisées

Pour que le problème ait une solution, le rendement avec la moyenne plus grand doit être plus grand que R_e, cela veut dire, si on investisse tout dans ce actif on peut avoir un rendement plus haut que R_e, par contre en ajoutant des actifs avec un rendement plus petite $x^t m$ ira diminuer.

Ainsi, pour qu'il existe au moins une solution, le $max_i m_i$ doit être plus grande que R_e et x_0 sera un vecteur que a un investissement de 100% dans $max_i m_i$. On peut facilement que ce x satisfait les contraintes.

Comme a ce moment les ventes à découvert sont non autorisées, cela veut dire que notre problème sera :

$$
\begin{aligned}
min J(x) &= \frac{x^t Q x}{2} \\
u^t x &= 1 \\
x^t m &\geq Re \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, en utilisant la fonction QPactivate.m pour tracer la frontière du marcher, le code suivante a été crée. :

Ventes à découvert non autorisées

```
%PARTIE 1.4=========================
load RR.txt

m = mean(RR);
rendSize = size(RR,1);
RRc = RR(1:rendSize,1:10) - ones(
    rendSize,1)*m;
Q = RRc' * RRc/rendSize;

r = zeros(10,1);
A = ones(10,1)';
C = [-m;-eye(10)];

solinit = zeros(10,1) ;
solinit(3)= 1;
tol = 1e-10;

ReVar = 0.0:0.002:0.041;

solfinal = [];

for d=-ReVar,
 d = [d; zeros(10,1) ];
 [sol,mult] = QPactivate(Q, r, A, C, d,
      solinit, tol)
 solm = sqrt(sol'*Q*sol);
 disp(solm);
 solfinal = [solfinal solm];
end;

% Plot graphic
h = figure;
filename = 'parte14';
p=plot(solfinal,ReVar,"linewidth", 4);
xlabel('sigma');
ylabel('Re');
print(h, '-depsc2', filename);
```

Comme résultat, on a la figure suivante :

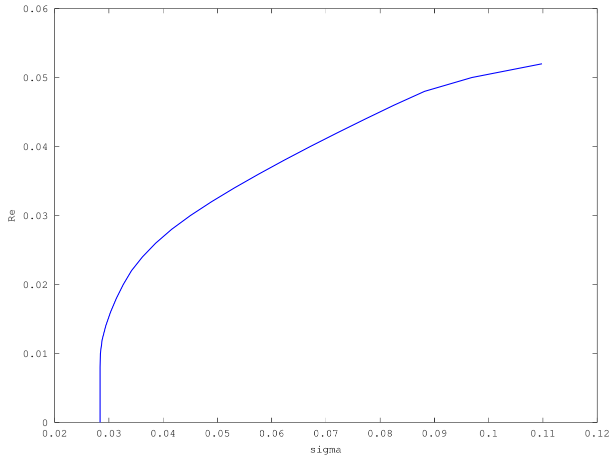

FIG. 3: Rendement x risque : ventes a découverte autorisées.

En ajoutant un actif de risque 0, on doit résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} minJ(x) &= \frac{x^t \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x}{2} \\ x_f + u^t x &= 1 \\ x_f R_f x_a^t m_a &\geq Re \\ x_a &\geq 0 \\ x_f &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la fonction QPactivate.m pour tracer la frontière du marcher, le code suivante a été crée. :

Ventes à découvert non autorisées : actif risque 0

```
%PARTIE AVEC REND FIXE
m = mean(RR);
rendSize = size(RR,1);
RRc = RR(1:rendSize,1:10) - ones(
    rendSize,1)*m;
Qin = RRc' * RRc/rendSize;

%
% Q = [Q 0]
%     [0 0]
Q = [Qin zeros(10,1); zeros(1,11)];

% red fixe
Rf = 0.02;

% not used
r = zeros(11,1);

% somme x doit etre 1
A = ones(11,1)';

% somme invest > Re et investissement >
    0
C = [[-m -Rf];-eye(11)];

% solinitial = x avec m max
solinit = zeros(11,1) ;
solinit(4)= 1;

```

```
tol = 1e-10;

% minisation du risque pour
% ses valeurs de Re
ReVar = 0.0:0.002:0.041;

solfinal = [];

for d=ReVar,
 d = [-d; zeros(11,1) ];
 [sol,mult] = QPactivate(Q, r, A, C, d,
      solinit, tol)
 solm = sqrt((1-sol(11))*(1-sol(11))*
      sol(1:10)'*Qin*sol(1:10));
 solfinal = [solfinal solm];
end;

 disp(solfinal);

% Plot graphic
h = figure;
filename = 'fixerend';
p=plot(solfinal,ReVar,"linewidth", 4);
xlabel('sigma');
ylabel('Re');
print(h, '-depsc2', filename);
```

Comme résultat, on a la figure suivante.

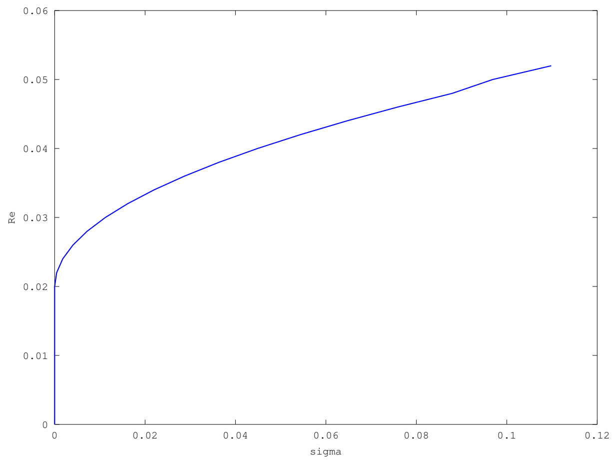

FIG. 4: Rendement x risque : actif sans risques.

Ainsi, on vérifie que cet ensemble comporte la droite issue du point de coordonnées $(0, R_f)$ et tangente à la frontière de marché.

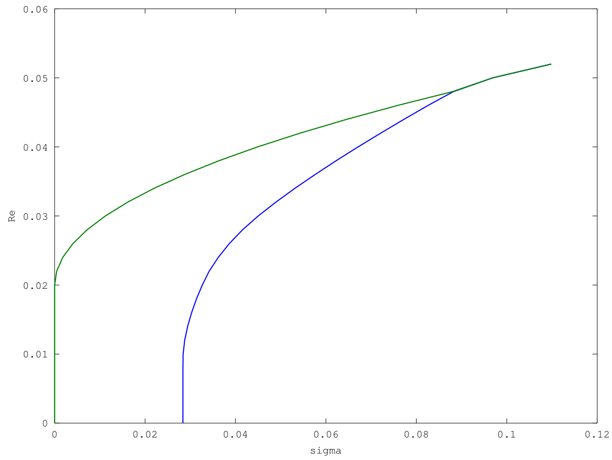

FIG. 5: Rendement x risque : comparaison avec et actif sans risques.

Le code précédent nous a donné aussi le ratio sharpe de 0.3. Pour le marché 2, on a crée le code suivante :

Ventes à découvert non autorisées : Marché 2

```
sp506=load('sp500em') ;
m = mean (sp506.prices(1:2,:));
rendSize = 3448;
RRc = sp506.prices - ones(rendSize,1)*m ;
Q = RRc' * RRc/rendSize;
nActives=506;
u = ones(nActives,1);

r = zeros(nActives,1);
A = ones(nActives,1)';
C = [-m;-eye(nActives)];

solinit = zeros(nActives,1) ;
solinit(4)= 1;
tol = 1e-10;
%tol = 1e-4;
ReVar = 0.0:0.5:15.0;

solfinal2 = [];

for d=-ReVar,
  d = [d; zeros(nActives,1) ];
  [sol,mult] = QPactivate(Q, r, A, C, d, solinit, tol);
  solm = sqrt(sol'*Q*sol);
  disp(solm);
  solfinal2 = [solfinal2 solm];
end;

% Plot graphic
h = figure;
filename = 'marche2';
p=plot(solfinal2,ReVar,"linewidth", 4);
xlabel('sigma');
ylabel('Re');
print(h, '-depsc2', filename);
```

Comme résultat on a :

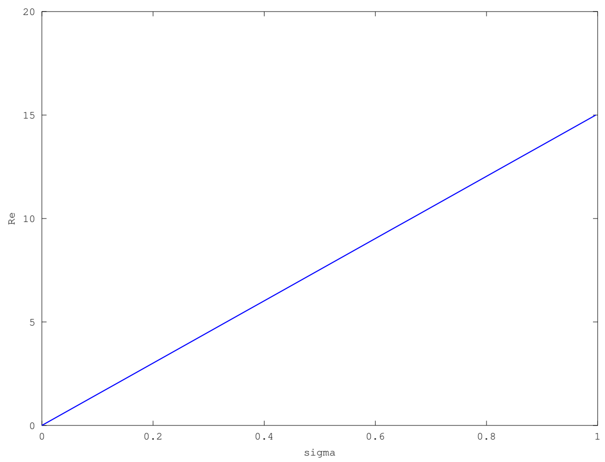

FIG. 6: Rendement x risque : Marche 2.

En supposant l'investissement dans l'actif sans risque on a :

Fréquence temporelle	horizon temporel	Rendement	Risque
Jour	365	7.57%	0
Jour	1000	22.13%	0
Semaine	150	23.35%	0
Semaine	300	52.18%	0
Mois	60	43.32%	0
Mois	90	71.6%	0