

**Álgebra Linear e Geometria Analítica - A**

1º Teste

3 de Novembro de 2023

Justifique devidamente as respostas a todas as questões

Duração total do teste: 1h30m

(3,5 val.)1) Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ , o vetor  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  e o sistema de equações lineares

$AX = b$ , onde  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é o vetor das incógnitas.

a) Verifique que  $A$  é invertível.

b) Verifique que o sistema  $AX = b$  tem uma única solução e calcule o valor de  $y$  pela regra de Cramer.

(3 val.)2) Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ , o vetor  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e o sistema de equações lineares

$AX = b$ , onde  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  é o vetor das incógnitas. Resolva o sistema  $AX = b$ , através do método de fatorização  $A = LU$ .

(1,5 val.)3) Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.2 unidades do mesmo setor, 0.7 unidades da agricultura e 0 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.4 unidades do seu próprio output, 0.4 unidades da manufaturação e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.5 unidades dos serviços, 0.2 unidades da manufaturação e 0.2 da agricultura. Sabendo que a demanda final (procura final) é 10 unidades de manufaturação, 5 unidades de agricultura e 10 unidades de serviços. Escreva o modelo de Leontief  $x = Cx + d$  para o problema e indique a matriz  $C$  e  $d$  para este problema.

(6 val.)4) Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes invertíveis de dimensão  $3 \times 3$ . Considere a equação matricial

$$A^T \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $X$  é uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ .

a) Justifique a seguinte afirmação verdadeira: a matriz  $X$  é sempre não invertível quaisquer que sejam as matrizes  $A, B$  invertíveis.

b) Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , na equação acima e calcule a matriz  $X$ .

(6 val.)5) Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

a) Verifique se  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Complete  $\langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \text{_____}\}$  e apresente todos os cálculos efetuados.