

2.2. Sucessões e séries de funções.

Séries de potências (revisitadas) e séries de Fourier

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 2 dos Apontamentos de Cálculo II de Alexandre Almeida (2018) e no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II de Virgínia Santos (2009/2010) (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

Resumo dos Conteúdos

- 1 Sucessões de funções: convergências pontual e uniforme
 - Exemplo introdutório
 - Conceitos e propriedades básicas
 - Propriedades das sucessões convergentes uniformemente
- 2 Séries de funções: convergências pontual e uniforme
 - Conceitos e propriedades básicas
 - Propriedades das séries uniformemente convergentes
 - Critério de Weierstrass
- 3 Séries de potências/Séries de Taylor
 - Propriedades relativas à convergência uniforme
 - Desenvolvimentos de uma função em série de Taylor
- 4 Séries de Fourier
 - Definições e exemplos
 - Extensões periódicas; série dos senos e série dos cossenos
 - Convergência pontual (Teorema de Dirichlet)

Exemplo introdutório

Para $x \in]-1, 1[$, a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

é convergente e a sua soma é, para cada x , $s(x) = \frac{1}{1-x}$.

A afirmação anterior tem a seguinte interpretação usando de convergência sucessões:

Para cada $x \in]-1, 1[$, a sucessão das somas parciais $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

é tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exemplo introdutório (cont.)

Essa convergência pode ainda ser encarada da seguinte forma:

Considerem-se as funções $s_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$, de domínio $] -1, 1[$.

A sucessão (de funções)

$$s_1(x), s_2(x), s_3(x), \dots, s_n(x), \dots$$

é convergente, ponto a ponto, para a função $s(x) = \frac{1}{1 - x}$, no intervalo $] -1, 1[$.

Este conceito de convergência (convergência pontual) e outro “mais exigente” (convergência uniforme) será aqui objeto de estudo.

Sucessão de funções

Definição:

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(D)$ o conjunto das funções reais de variáveis reais definidas em D .

Uma **sucessão de funções definidas em D** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma aplicação

$$\begin{aligned}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{F}(D) \\ n &\mapsto f_n\end{aligned}$$

Observação:

Note-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}f_n: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x)\end{aligned}$$

Exemplos

- ① $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é uma sucessão de funções definidas em \mathbb{R} . Isto é, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a seguinte sucessão de funções definidas em \mathbb{R} :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{x}{2}, f_3(x) = \frac{x}{3}, \dots, f_n(x) = \frac{x}{n}, \dots$$

- ② $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1],$$

é uma sucessão de funções definidas em $[0, 1]$. Isto é, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a seguinte sucessão de funções definidas em $[0, 1]$:

$$h_1(x) = x, h_2(x) = x^2, h_3(x) = x^3, \dots, h_n(x) = x^n, \dots$$

Convergência pontual

Definição:

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge pontualmente para f em D** se, para cada $x \in D$,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Exemplos:

- ① $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula pois, para todo o $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

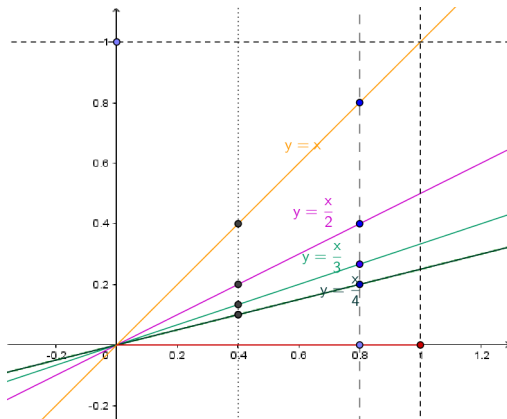
Nota: O domínio das funções pode ser alargado a \mathbb{R} , mantendo-se a convergência pontual para $f(x) \equiv 0$.

Exemplos (cont.)

Ilustração gráfica—Exemplo 1:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = 0$$

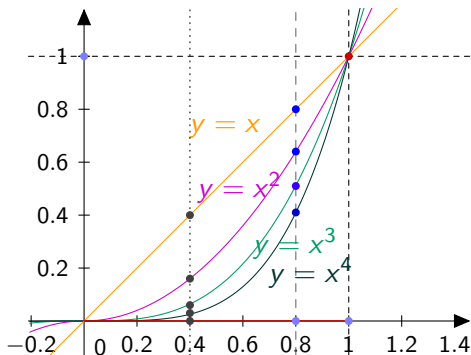


Exemplos (cont.)

2. $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função $h(x)$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

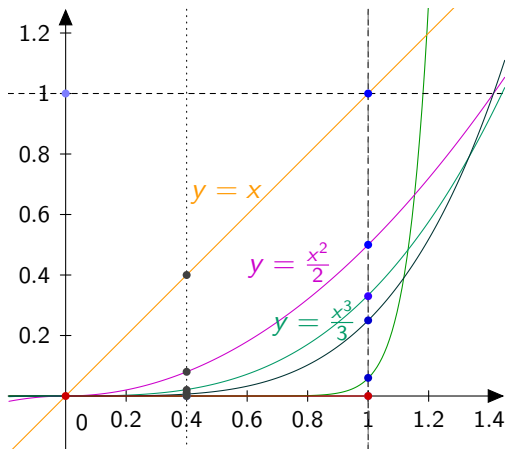
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

3. $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula.

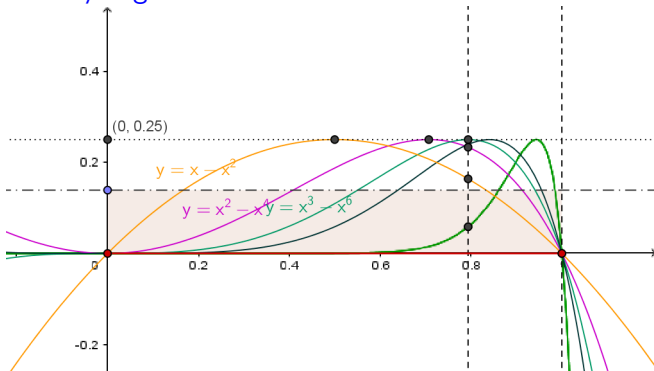
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

4. $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$, converge pontualmente para a função nula.

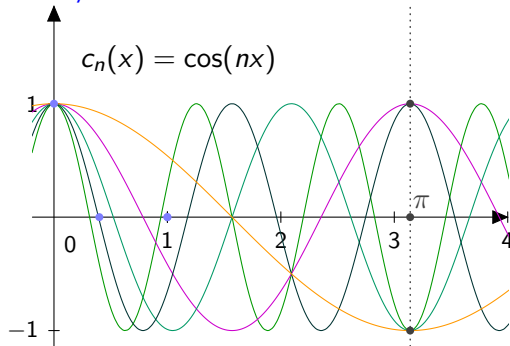
Ilustração gráfica:



Exemplos (cont.)

5. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0, \pi]$, não converge pontualmente.

Ilustração Gráfica:



Voltando aos exemplos 3 e 4

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem pontualmente para a função nula (ex. 3 e 4, resp.). **Haverá alguma diferença na forma como convergem?**

Analisando os esboços gráficos respetivos nota-se os seguintes comportamentos distintos:

- Em $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o gráfico de $g_n(x)$ vai-se *aproximando* do gráfico da *função limite*, à medida que n cresce. Isto é, fixada uma faixa (qualquer, tão "pequena" quanto se queira) em torno do gráfico da função limite, é sempre possível encontrar uma ordem a partir da qual, todos os pontos de interseção da reta $x = x_0$ (com $x_0 \in [0, 1]$ arbitrário) com os gráficos das funções g_n se situam nessa faixa. Assim, a partir de uma determinada ordem, *todos os gráficos das funções g_n situam-se na faixa considerada.* [▶ ver applet](#)
- Em $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal não acontece. Isto é, é possível definir uma faixa em torno do gráfico da função limite para a qual não existe uma ordem, a partir da qual os gráficos de $p_n(x)$ se situem nessa faixa. [▶ ver applet](#)

Convergência uniforme

Definição:

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformemente para f em D** se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo, ou seja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$.

Exemplo:

A sucessão de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ do Exemplo 3 converge uniformemente para a função nula em $[0, 1]$. De facto,

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Nos outros exemplos a convergência é uniforme?

Ex. 1 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$,
converge uniformemente para a função nula (porquê?) [▶ ver applet](#)

Ex. 2 $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$,
não converge uniformemente para a função $h(x)$ definida por
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (\text{porquê?})$$

[▶ ver applet](#)

Ex. 4 $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$,
converge pontualmente para a função nula, mas não converge
uniformemente. (porquê?) [▶ ver applet](#)

Ex. 5 $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $c_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0, \pi]$,
nem sequer converge pontualmente. [▶ ver applet](#)

A convergência uniforme implica a convergência pontual

Proposição:

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f num conjunto D , então $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f nesse conjunto.

Prova:

Para cada $x \in D$,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| = M_n, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D , então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$.
Logo, para cada $x \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e, portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Propriedades das sucessões convergentes uniformemente

Teorema: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$.

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $[a, b]$, então:

(i) f é contínua em $[a, b]$ e

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c) = f(c),$$

$c \in [a, b]$;

(ii) f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a, b]$, então

$$f \text{ é diferenciável em } [a, b] \quad \text{e} \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Observações relativas ao teorema anterior

- 1 As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada sucessão não converge uniformemente.
- 2 O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, apenas assumirmos a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a sucessão numérica $(f_n(x_0))$ seja convergente).
- 3 A continuidade e a diferenciabilidade nos extremos do intervalo devem ser tomadas como laterais.

Série de funções

Definição:

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$. Chama-se série de funções de termo geral f_n ao par $((f_n), (S_n))_{n \in \mathbb{N}}$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad x \in D.$$

Representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{ou, em alternativa, por} \quad f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

Observação:

Tal como nas série numéricas, a $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chamamos a sucessão (de funções) das somas parciais da série de termo geral f_n .

Convergência pontual/uniforme de uma série de funções

Definição: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções definidas em D tal que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sua sucessão de somas parciais.

- 1 A série de funções **converge pontualmente** em D se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir **pontualmente** em D .
- 2 A série de funções **converge uniformemente** em D se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir **uniformemente** em D .

Caso a série seja convergente, a função S limite da sucessão $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ designa-se por **soma da série** e escreve-se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S$.

Neste caso, diz-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge para S (pontual ou uniformemente, conforme o caso).

Exemplo:

Já vimos que a série de potências, definidas em \mathbb{R} ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

converge pontualmente em $] - 1, 1[$ e a sua soma é $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Além disso, esta série converge uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido em $] - 1, 1[$ (ver a justificação mais à frente, no slide 28). Veja a seguinte [applet](#) .

Note que:

Se uma série de funções converge uniformemente em D , então converge pontualmente em D . O recíproco não é verdadeiro.

Domínio de Convergência de uma série de funções

Observação:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ é convergente (pontualmente) em D com soma S , então

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é convergente e tem soma $S(x)$, para cada $x \in D$, e vice-versa.

Definição:

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, onde f_n estão definidas em D . Ao conjunto dos pontos $x \in D$ para os quais a série numérica correspondente é convergente chama-se **domínio de convergência da série**.

Exemplo: A série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ (definidas em \mathbb{R}) tem domínio de convergência \mathbb{R}^+ .

Propriedades das séries uniformemente convergentes

Teorema:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$. Suponha-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ com soma S . Então:

- (i) A soma S é contínua em $[a, b]$;
- (ii) A soma S é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

[integração termo a termo];

- (iii) Adicionalmente, se cada f_n é de classe C^1 em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$(S(x))' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x))', \quad x \in [a, b]$$

[derivação termo a termo].

Observações relativas ao teorema anterior

- 1 As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada série de funções não converge uniformemente. Isto é, se a função limite f não satisfizer alguma das propriedades listadas, a convergência da série não é uniforme no intervalo em causa.
- 2 O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, assumirmos apenas a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ seja convergente).

Observações relativas ao teorema anterior

- Como podemos constatar, a convergência uniforme permite preservar certas propriedades importantes como são a integração e a derivação termo a termo.
- Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com a sucessão das somas parciais.
- O resultado seguinte, conhecido como **Crítério de Weierstrass**, é bastante útil na prática pois fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

Critério de Weierstrass

(condição suficiente de convergência uniforme de uma série de funções)

Teorema:

Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica de termos não negativos, tais que

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D.$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D .

Exemplo:

(aplicação do Critério de Weierstrass, integração e derivação termo a termo)

Pelo Critério de Weierstrass, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge uniformemente em \mathbb{R} (Porquê?).

Neste caso, é possível integrar e derivar termo a termo a sua função soma, i.e.,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n^2 + x^2} dx \right) = \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \quad (\text{Confirme!})$$

Exercício:

Faça uma análise análoga ao exemplo anterior usando a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

Séries de Potências: convergência uniforme

Teorema:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência $I_c =]c - R, c + R[$.

Prova para o caso $c = 0$: Seja $[a, b] \subset]-R, R[$.

Note-se que, para todo o $x \in [a, b]$, $|x| \leq M$, onde $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Logo,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| M^n, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| M^n$ é convergente (porque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n M^n$ converge absolutamente), o Critério de Weierstrass permite concluir que a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[a, b]$.

Teorema de Abel:

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in \mathbb{R}^+$. Se a série converge no ponto $x = c + R$ (respetivamente, no ponto $x = c - R$), então ela converge uniformemente em $[c, c + R]$ (respetivamente, em $[c - R, c]$).

Exemplo de aplicação:

O domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$ é $[-7, 3[$ (verifique!).

Então, pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente em $[-7, -2]$. Conjugando com o Teorema do slide 28, conclui-se que esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma

$$[-7, b], \text{ com } -7 < b < 3.$$

Observações:

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu domínio de convergência.

Deste modo:

- A função soma de uma série de potências é contínua.
- Pode-se derivar termo a termo.
- Pode-se integrar termo a termo.

Mais precisamente, do teorema do slide 23 resulta o teorema do slide seguinte.

Teorema: Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências, $I_c =]c - R, c + R[$

o seu intervalo de convergência, e $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$. Então:

- (i) A função f é contínua em todo o domínio (de convergência da série).
- (ii) A função f é diferenciável e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$, $\forall x \in I_c$.
- (iii) A função F , definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$, é a primitiva de f em I_c tal que $F(c) = 0$.
- (iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

Unicidade de representação de uma função em série de potências

Teorema:

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n, \quad x \in I_c =]c-R, c+R[,$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I_c e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Observações:

1. Para se provar o teorema anterior basta considerar a propriedade (ii) do Teorema do slide 31 e fazer alguns cálculos adicionais.
2. O teorema anterior mostra que sempre que uma série de potências convirja para $f(x)$ numa vizinhança do seu centro c , ela é a série de Taylor de $f(x)$ centrada em c .

Exemplos de aplicação das propriedades das séries de potências



obtenção de desenvolvimentos de Taylor de uma função recorrendo ao desenvolvimento em Taylor de outra função (adequada).

- 1 Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

podemos concluir que (Porquê?)

- 1
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n, \quad -1 < x < 1;$$

- 2
$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 \leq x < 1,$$

- 3
$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \quad 0 < x \leq 2.$$

2 Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x < 1,$$

podemos concluir que (Porquê?)

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Desenvolvimento em série de MacLaurin "famosos"

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \text{para } x \in]-1, 1[,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

Desenvolvimento em série de MacLaurin "famosos" (continuação)

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para } x \in]-1, 1[.$$

Séries Trigonométricas

Definição:

As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \quad (1)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^+$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são sucessões numéricas, têm a designação genérica de **séries trigonométricas**.

Observações:

- Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ forem absolutamente convergentes, então a série (1) é absolutamente e uniformemente convergente em \mathbb{R} .
- Caso (1) seja convergente, a sua soma $S(x)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{\omega}$.

Revisão do conceito de função periódica

Definição:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **periódica** se existir $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O **período** de f é o menor valor de T que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que, f é **T -periódica**.

Observações:

- Se f é T -periódica, então pode converter-se, por mudança de variável, numa 2π -periódica, para tal basta considerar-se

$$F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

- Por esse motivo, passamos a considerar apenas funções 2π -periódicas.

Coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente, a_n e b_n são completamente determinadas pela função f .

- **Determinação de a_0 :** Mostra-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Coeficientes de Fourier (cont.)

- Determinação de a_m , com $m \geq 1$: Multiplica-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] ,$$

por $\cos(mx)$ e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi]$, obtendo-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x) dx = \pi a_m$$

e, portanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx , \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

- Determinação de b_m , com $m \geq 1$: Usando argumentos análogos, obtém-se

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx , \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

Série de Fourier

Definição:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$.
Chama-se **série de Fourier** associada à função f (ou da função f) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

onde a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) e b_n ($n \in \mathbb{N}$) são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

a_n e b_n são designados por **coeficientes de Fourier** da função f .

Notação:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

- Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude 2π (devido à periodicidade das funções integrandas em causa).
- Uma série de Fourier nem sempre converge. Caso seja convergente, a sua soma é periódica com período 2π , mas pode ser diferente de f .
- Se f é uma função ímpar, a sua série de Fourier é uma *série de senos*.
- Se f é uma função par, a sua série de Fourier é uma *série de cossenos*.

Exemplos

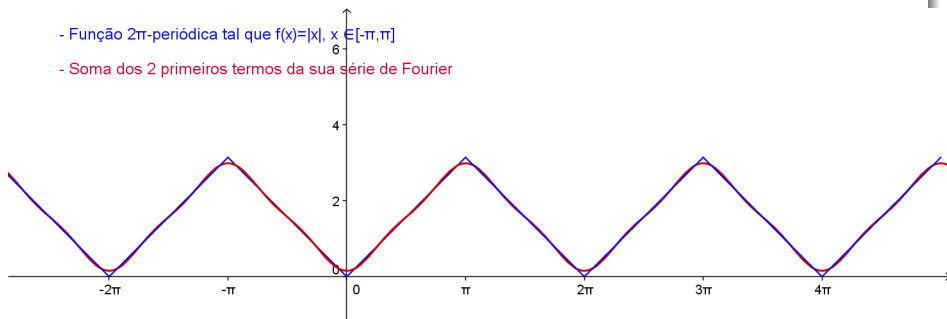
- Seja f a função 2π -periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Neste caso,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

Ilustração gráfica:

▶ ver applet

- Função 2π -periódica tal que $f(x)=|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$
- Soma dos 2 primeiros termos da sua série de Fourier

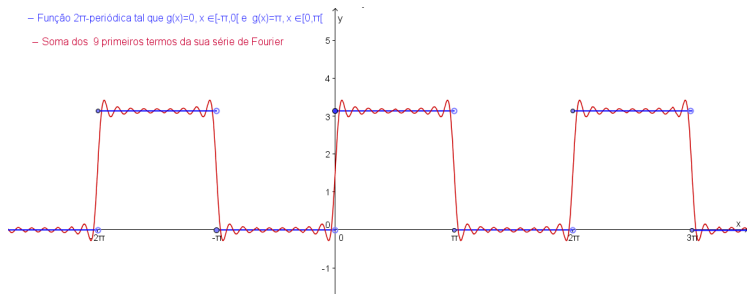


Exemplos (cont.)

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica e $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Neste caso, $g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$

Ilustração gráfica:



► ver applet

Extensões Periódicas

Extensões de funções definidas em intervalos de amplitude 2π :

- Se $f : [a, a + 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos estendê-la a todo o \mathbb{R} de forma única de forma a torná-la 2π -periódica. O mesmo se passa se $f :]a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Por isso, supondo que f é integrável, com algum abuso de linguagem, dizemos que a **série de Fourier de f é a série de Fourier da sua extensão 2π -periódica a \mathbb{R} .**

- Caso o domínio de f seja fechado, isto é, $f : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}$, consideramos que **a série de Fourier de f é a série de Fourier da extensão 2π -periódica de $f|_{[a, a + 2\pi[}$ (ou $f|_{]a, a + 2\pi]}$, é indiferente, pois a série obtida é a mesma).**
- Para simplificar a escrita, com algum abuso de linguagem, é frequente representar por f estas extensões 2π -periódicas de f .

Extensões Periódicas (continuação)

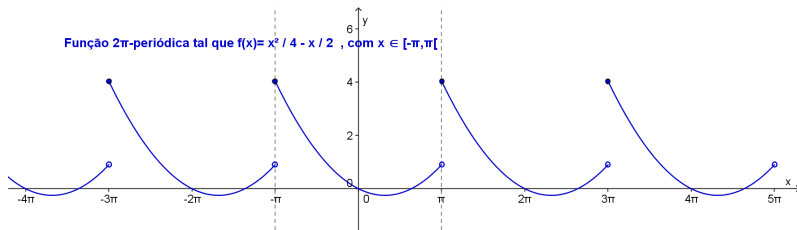
- Exemplo:

$$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

a sua série de Fourier é a série de Fourier da função, de domínio \mathbb{R} , 2π -periódica tal que $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$, para $x \in [-\pi, \pi]$.

Ilustração gráfica:



► ver applet

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões ímpares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a “extensão” ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$f_i: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



extensão ímpar de f

A série de Fourier da extensão ímpar de f é uma série de senos.

Extensões Periódicas (continuação)

Extensões pares de funções definidas no intervalo $[0, \pi]$:

Seja $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Considere-se a extensão ao intervalo $[-\pi, \pi]$ definida da seguinte forma:

$$f_p: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



extensão par de f

A série de Fourier da extensão par de f é uma série de cossenos.

Exemplo

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

Extensão par de f :

$$\begin{aligned} f_p: [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_p(x) = |x| \end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão par de f é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

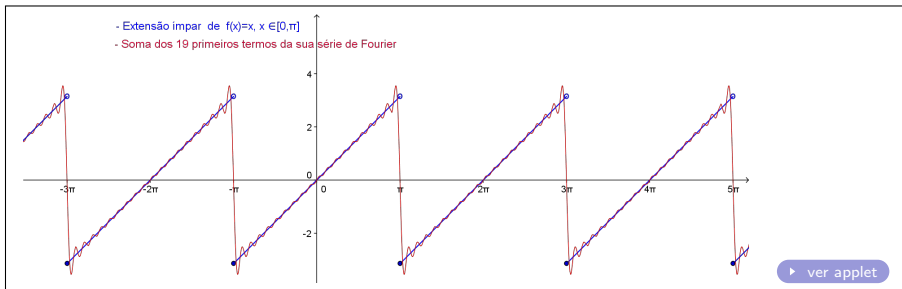
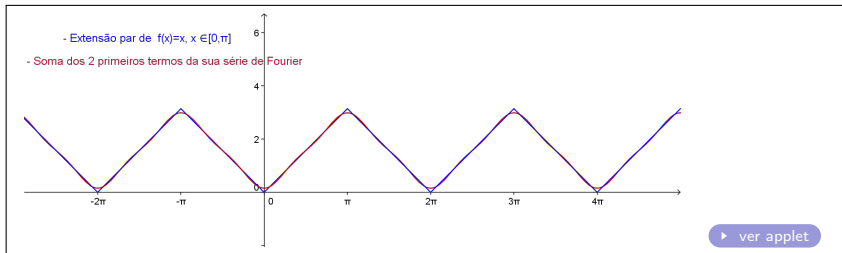
Extensão ímpar de f :

$$\begin{aligned} f_i: [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_i(x) = x \end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de f é

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$$

Ilustrações Gráficas



Convergência de uma série de Fourier

Uma série de Fourier nem sempre converge para a função que lhe deu origem. No entanto, sob certas condições podemos identificar a sua soma e, como vamos ver, nalguns desses casos a soma coincide com a função original. Analise os seguintes exemplos gráficos:

- 1 Onda Triangular [▶ ver applet](#)
- 2 Função quadrática par [▶ ver applet](#)
- 3 Onda quadrada [▶ ver applet](#)
- 4 Dente de serra [▶ ver applet](#)
- 5 Função quadrática (não par) [▶ ver applet](#)

Antes enunciar as ditas condições, precisamos de introduzir a noção de **função seccionalmente diferenciável**.

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Definições:

- f diz-se **seccionalmente contínua** em $[a, b]$ se existir uma partição $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) de $[a, b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ ($j = 1, \dots, n$) e existirem e forem finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \rightarrow a_{j-1}^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) := \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

A função f diz-se **seccionalmente contínua** em \mathbb{R} se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} .

- Uma função seccionalmente contínua diz-se **seccionalmente diferenciável** se a sua derivada é também seccionalmente contínua.

Observação: Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é 2π -periódica, então f é seccionalmente diferenciável em \mathbb{R} sse f é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, (ou em qualquer outro intervalo de amplitude 2π).

Convergência de uma série de Fourier (cont.)

Teorema de Dirichlet:

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e seccionalmente diferenciável (em \mathbb{R}) e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier de f converge no ponto c para $\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ (a média dos limites laterais de f no ponto c).

Observações: Nas condições do Teorema de Dirichlet:

- A série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \text{ é ponto de continuidade de } f; \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & , \text{ se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f. \end{cases}$$

- S é periódica com período 2π , pelo que basta conhecer $S(x)$ num intervalo de amplitude 2π .

Exemplo de função que satisfaz o Teorema de Dirichlet

Seja f a função 2π -periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$. Já vimos,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2} \quad \text{▶ slide 43}.$$

Como f é contínua em \mathbb{R} e a sua derivada é seccionalmente contínua em \mathbb{R} (**Justifique!**), pelo **Teorema de Dirichlet** conclui-se que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Outro exemplo de aplicação do Teorema de Dirichlet

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } 2\pi\text{-periódica e } g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Já vimos que

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

► slide 44

Como g é seccionalmente diferenciável em \mathbb{R} (**Justifique!**), então, pelo **Teorema de Dirichlet**, para $x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (pontos onde g é contínua) tem-se que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x].$$

Nos pontos $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (pontos onde g é descontínua),

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplos de aplicação ao cálculo de somas de séries numéricas

1 Já vimos que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Tomando $x = 0$, obtemos $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (1)$$

Partindo de (1), é possível mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

2 Já vimos que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x \in \{0, \pi\} \\ \pi & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Tomando $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$