

## 2.1. Séries de Potências e Fórmula de Taylor

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II da Prof. Doutora Virgínia Santos e no Capítulo 1 dos Apontamentos de Cálculo II do Prof. Doutor Alexandre Almeida (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

# Resumo dos Conteúdos

- 1 Séries de Potências
- 2 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange
- 3 Séries de Taylor
- 4 Anexos

# Série de potências — definição

## Definição:

Chama-se **série de potências centrada em  $c \in \mathbb{R}$**  (ou série de potências de  $x - c$ ) a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots \quad (1)$$

onde  $a_n \in \mathbb{R}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}_0$ . Os números  $a_n$  são designados de **coeficientes da série**.

**Observação:** No caso em que  $c = 0$ , temos a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  que se chama **série de potências centrada na origem**.

**Convenção:** Em (1) supomos que  $a_0(x - c)^0 = a_0$  mesmo que  $x = c$  (isto é, vamos supor que  $0^0 = 1$ ).

## Exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Série de potências centrada na origem com coeficientes unitários.

Notar que [ **porquê?** ]

- a série é convergente sse  $|x| < 1$ , i.e., sse  $x \in ]-1, 1[$ .

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ , para  $|x| < 1$ .

O conjunto  $] -1, 1[$  é chamado de **domínio de convergência** da série.

# Domínio de convergência de uma série de potências

## Definição:

Chama-se **domínio de convergência** da série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$  ao conjunto de pontos  $x \in \mathbb{R}$  para os quais a série é convergente.

## Exemplos:

Usando os Critérios de D'Alembert e/ou de Cauchy e, se necessário, outros critérios de convergência de séries numéricas (como o Critério de Leibniz), podemos concluir que:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \text{domínio de convergência: } \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x + 1)^n; \quad \text{domínio de convergência: } ] - 2, 0]$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n! (x - 2)^n; \quad \text{domínio de convergência: } \{2\}$$

# Domínio de convergência de uma série de potências

**Notação:** Usualmente denota-se o domínio de convergência de uma série de potências por  $D_c$ .

**Observação:** Uma vez que para  $x = c$  a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$$

é convergente, podemos concluir que  $D_c \neq \emptyset$ .

# Intervalo de convergência/Raio de convergência

## Teorema:

Qualquer que seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ , verifica-se uma, e uma só, das seguintes condições:

- (i) a série converge absolutamente em  $x = c$  e diverge se  $x \neq c$ ;
- (ii) a série converge absolutamente em todo o  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (iii) existe um único  $R > 0$  para o qual a série converge absolutamente se  $x \in ]c - R, c + R[$  e diverge se  $x \in ]-\infty, c - R[ \cup ]c + R, +\infty[$ .

## Definições:

Ao número  $R$  chamamos **raio de convergência** da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$ .

No caso (i), consideramos  $R = 0$ ; no caso (ii), consideramos  $R = +\infty$ ; Caso  $R \neq 0$ , o intervalo  $I_c = ]c - R, c + R[$  ( ou  $\mathbb{R}$ , quando  $R = +\infty$ ) designa-se por **intervalo de convergência** da série.

## Exemplos:

①  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; intervalo de convergência:  $\mathbb{R}$  ;  $R = +\infty$

②  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n$  ; intervalo de convergência:  $] -2, 0[$  ;  $R = 1$

## Observações:

- Uma série de potências pode convergir ou não nos extremos do seu intervalo de convergência. O teorema do slide anterior nada afirma sobre a natureza da série nesses pontos.
- O domínio de convergência de uma série de potências contém o seu intervalo de convergência, mas poderá ainda conter algum dos extremos desse intervalo. O estudo da natureza da série nesses pontos é feito caso a caso.



# Raio de Convergência, usando os Coeficientes da Série

## Proposição:

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - c)^n$  uma série de potências com  $a_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$$\textcircled{1} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \text{ se este limite existir.}$$

$$\textcircled{2} \quad R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ se este limite existir.}$$

## Observações:

- $\textcircled{1}$  Estas fórmulas de cálculo do raio de convergência resultam da aplicação do Critério do Quociente ou do Critério da Raiz. Assim, estes métodos funcionam quando a aplicação direta desses critérios também pode ser usada.
- $\textcircled{2}$  **Cuidado com a aplicação:** a série tem que apresentar uma escrita tal como no enunciado da proposição.

# Polinómios de Taylor

## Definição:

Seja  $f$  uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem  $n \in \mathbb{N}$  num dado ponto  $c \in \mathbb{R}$ . Ao polinómio

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

chamamos **polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $c$** .

Caso  $c = 0$ , o polinómio  $T_0^n f(x)$  passa a ser designado por **polinómio de MacLaurin de ordem  $n$  da função  $f$** .

## Observação:

$T_c^n f(x)$  é o único polinómio de grau menor ou igual a  $n$  que assume o mesmo valor que  $f$  em  $c$  e que as suas sucessivas derivadas em  $c$  são iguais às sucessivas derivadas de  $f$  em  $c$ , respetivamente, até à ordem  $n$ .

# Exemplos

- 1 O polinómio de Taylor de ordem  $n$  em  $c$ , para  $c$  qualquer em  $\mathbb{R}$ , de uma função polinomial de grau  $n$  é a própria função. Por exemplo,  $T_1^3(x^3) = x^3$ .
- 2 
$$T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
- 3 
$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$
- 4 
$$T_0^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
- 5 
$$T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

# Fórmula de Taylor

## Teorema:

Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f$  uma função real com derivadas contínuas até à ordem  $(n+1)$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Então, para todo  $x \in I \setminus \{c\}$ , existe  $\theta$  entre  $c$  e  $x$  tal que

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k}_{T_c^n f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}}_{R_c^n f(x)}.$$



Fórmula de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $c$ , com resto de Lagrange

$R_c^n f(x) \rightarrow$  resto de Lagrange de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $c$

$T_c^n f(x) \rightarrow$  polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $c$

Note que, se  $x = c$ ,  $f(c) = T_c^n f(c)$ , (resto nulo).

## Majorantes do resto de Lagrange

O módulo do resto de Lagrange  $R_c^n f(x)$  dá-nos o erro absoluto cometido quando tomamos  $T_c^n f(x)$  por  $f(x)$ , uma vez que

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)|.$$

Mesmo que desconheçamos esse resto é possível, em geral, majorá-lo.

### Formas de efetuar a majoração do resto:

Se a  $(n+1)$ -ésima derivada de  $f$  é contínua num intervalo  $[a, b]$  contendo o ponto  $c$ , então ela é limitada nesse intervalo. Sendo

$M \geq \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)|$ , tem-se que

$$|R_c^n f(x)| \leq M \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para todo o } x \in [a, b].$$

Ver [applet](#), sobre a aproximação de uma função usando polinómios de Taylor.

# Série de Taylor — definição

## Definição:

Se  $f$  admitir derivadas finitas de todas as ordens em  $c$ , à série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots$$

chamamos **série de Taylor da função  $f$  no ponto  $c$** .

Se  $c = 0$ , passamos a chamar-lhe **série de MacLaurin de  $f$** .

## Exemplo:

A série de MacLaurin da função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  é a série de potências  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ .

Relacione com o ponto 3. do [slide 11](#).

No exemplo do slide anterior, a série de Taylor da função no ponto  $c = 0$  converge para a função no intervalo  $] - 1, 1[$ , i.e., para cada  $x \in ] - 1, 1[$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

Questão:

Seja  $I$  um intervalo aberto centrado no ponto  $c$  onde a série de Taylor de  $f$  é convergente, será que a sua soma para cada  $x$  é igual a  $f(x)$ ?

Nem sempre, ver exemplo do slide seguinte!

# Funções Analíticas

## Definição:

Sejam  $I$  um intervalo aberto,  $c \in I$ , e  $f$  uma função definida em  $I$  que admite derivadas finitas de todas as ordens em  $c$ . Dizemos que  $f$  é **analítica em  $c$**  se existir  $r > 0$  tal que, para todo o  $x \in ]c - r, c + r[ \subset I$ , a série de Taylor de  $f$  no ponto  $c$  converge para  $f(x)$ .

## Exemplos

❶ Função analítica em  $c = 0$  :  $g(x) = \frac{1}{1-x}$

❷ Função não analítica em  $c = 0$  :  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

$f$  possui derivadas finitas de todas as ordens em  $\mathbb{R}$ , mas como  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ , a sua série de MacLaurin converge para a função nula.



**Teorema:**

Sejam  $I$  um intervalo,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ . Então, para todo o  $x \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \text{ se, e só se, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n f(x) = 0.$$

**Exemplo:** Seja  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$R_0^n f(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \neq 0, \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n f(x) = 0$ , [**Porquê?**], concluímos que a série de MacLaurin da função exponencial converge para a própria função em  $\mathbb{R}$ , i.e.,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Teorema:

Sejam  $I$  um intervalo,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ . Se existir  $M > 0$  tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad \forall x \in I.$$

Exercício: Usando o teorema anterior mostre que:

$$\textcircled{1} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Compare com os pontos 4. e 5. do [slide 11](#).

# Séries geométricas e séries de Dirichlet

$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$  com  $a, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ : série geométrica de razão  $r$  e primeiro termo

a. Esta série converge se e só se  $|r| < 1$  e tem soma  $S = \frac{a}{1-r}$ .

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ : série de Dirichlet (ou série harmónica) de ordem  $p$ . Esta série converge se e só se  $p > 1$ .

## Critério de D'Alembert e Critério de Cauchy

**Critério de D'Alembert ou Critério do Quociente:** Seja  $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e suponha-se que existe  $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ . Se  $L < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é absolutamente convergente e se  $L > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é divergente.

**Critério de Cauchy ou Critério da Raiz:** Suponha-se que existe  $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ . Se  $L < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é absolutamente convergente e se  $L > 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é divergente.

# Critério da Comparação

**Critério da Comparação:** Suponha-se que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0.$$

Então:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge.

# Critério do Limite

**Critério do Limite:** Sejam  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  duas séries tais que  $a_n \geq 0$  e  $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

- se  $L \in \mathbb{R}^+$ , então as séries têm a mesma natureza.
- se  $L = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge.
- se  $L = +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  diverge.

# Critério de Leibniz

**Critério de Leibniz:** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  tal que:

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,
- a sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona decrescente.

Então a série alternada é convergente.

# Conceitos de Majorantes, Supremo e Máximo

## Majorante de um conjunto:

Seja  $A \subseteq \mathbb{R}$  um conjunto não vazio. Diz-se que  $A$  é um **conjunto majorado** se existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq M$ , para todo o  $x \in A$ . Qualquer  $M$  que satisfaça essa desigualdade é chamado de **majorante** de  $A$ .

## Supremo de um conjunto majorado:

O **supremo** de um conjunto majorado  $A$  é o menor dos majorantes. Isto é,  $s \in \mathbb{R}$  diz-se **supremo de  $A$**  se  $s$  for um majorante e se para todo o  $\epsilon > 0$ , existe  $b \in A$  tal que  $s - \epsilon < b$ . **Notação:**  $s = \sup A$ .

## Axioma do Supremo:

Todo o subconjunto de  $\mathbb{R}$  majorado tem supremo.

## Máximo:

Se  $s = \sup A \in A$ , a  $s$  chama-se **máximo de  $A$** . **Notação:**  $s = \max A$ .



# Método de Indução Matemática

Seja  $P(n)$  uma propriedade que depende de  $n \in \mathbb{N}$ . O **Método de Indução Matemática** é uma técnica de demonstração que tem como objetivo mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

O **Método de Indução Matemática** consiste em dois passos:

- 1 **Passo de base (ou base de indução)**: mostrar que  $P(1)$  é verdadeira;
- 2 **Passo de indução (ou hereditariedade)**: assumindo que  $P(k)$  é verdadeira, mostrar que  $P(k + 1)$  é verdadeira, para  $k \in \mathbb{N}$  arbitrário.

# Método de Indução Matemática (continuação)

## Observações:

- A  $P(k)$  chamamos a **hipótese de indução** e a  $P(k + 1)$  a **tese de indução**.
- Este método pode generalizar-se para situações onde se pretenda mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{Z}$ , com  $n \geq n_0$  para algum  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . No passo base, basta tomar  $n_0$  em vez de 1 e no passo de indução considerar  $k$  inteiro e  $k \geq n_0$ .