Aula 05 - Parte 01 - Autovalores e Autovetores

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

Sistemas que Evoluem no Tempo

Vimos que sistemas dinâmicos, como a população de presas e predadores ou o fluxo de bicicletas em Montreal, podem ser modelados por uma matriz de transição **A**.

A cada passo (mês, semana, etc.), o estado do sistema é atualizado pela mesma regra:

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{novo}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{antigo}}$$

Se aplicarmos essa regra repetidamente, o que acontece com o sistema a longo prazo?

Vamos fazer isso: direto para o notebook da aula, exercício 1!

O Mistério do Ponto de Equilíbrio

No sistema de bicicletas de Montreal, não importa como as bicicletas são distribuídas inicialmente, após muitas iterações, elas sempre convergem para a mesma distribuição final (proporção).

Este estado final, que não muda mais, é chamado de **ponto de estabilidade** ou **equilíbrio**. Por que ele existe?

A Direção Invariante: O Autovetor

Um **autovetor** de uma matriz **A** é um vetor especial que, quando multiplicado pela matriz, **não muda de direção**. Ele sofre somente uma *escala*:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\lambda$$

- **A** é a matriz de transformação.
- **x** é o **autovetor**.
- **λ ** é o **autovalor** associado.

O Fator de Escala: O Autovalor

O **autovalor (λ)** é o número que nos diz *quanto* o autovetor foi esticado ou encolhido.

- Se λ **= 2**, o autovetor dobrou de tamanho.
- Se λ **= 0.5**, ele foi reduzido pela metade.
- Se λ **= 1**, ele permaneceu **exatamente o mesmo**.

O estado de equilíbrio que encontramos no problema das bicicletas é um autovetor da matriz **A** com um autovalor **λ = 1**. É por isso que ele não muda mais!

Verifique no Exercício 2 da aula como isso funciona em Python!

Previsão do Futuro: Explosão, Equilíbrio ou Colapso

O comportamento de um sistema dinâmico a longo prazo é totalmente determinado por seus autovalores.

Após N iterações, o estado é $v_N = A^N v_0$. O que acontece com A^N quando N é grande depende dos autovalores:

- Se **|λ| > 1**: O sistema **explode** (tende ao infinito) naquela direção.
- Se **|λ| = 1**: O sistema atinge um **equilíbrio** estável.
- Se **|λ| < 1**: O sistema **colapsa** (tende a zero).

No problema dos carcarás e sapos, os autovalores eram `1.0` e `0.9`, indicando que o sistema tenderia a um equilíbrio ($\lambda = 1$) e não a uma explosão.

Decomposição em Autovetores

A equação $Ax = x\lambda$ pode ser generalizada para todos os autovetores e autovalores de uma matriz. Isso nos permite "decompor" a matriz **A** em seus componentes fundamentais:

$$\begin{cases} Ax_1 & = x_1\lambda_1 \\ Ax_2 & = x_2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow A \begin{bmatrix} | & | \\ x_1 & x_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ x_1 & x_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Essa fórmula nos permite construir uma matriz a partir de seus autovalores e autovetores desejados:

$$AP = PQ \Rightarrow A = PQP^{-1}$$

Iterando N vezes

A decomposição torna a análise de longo prazo muito mais fácil. Para calcular A elevado à potência N, a fórmula se torna:

$$\boldsymbol{A^N} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q^N}\boldsymbol{P}^{-1}$$

Vamos demonstrar isso!

Como posso escrever A^2 usando as matrizes P e Q? E A^3? Encontre a regra que leva ao caso geral A^N!

Sistemas em regime

Sabemos que:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{P}^{-1}$$

Como Q é diagonal, $\boldsymbol{Q}^{N}$ é simplesmente a matriz com os autovalores elevados à potência N.

$$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{bmatrix}$$

Portanto, o comportamento do sistema após muitas iterações é dominado pelo autovalor de maior magnitude.

Hora da chamada!

Hoje estamos na Aula 05, Parte 01!

O gabarito está disponível. Se você olhar o gabarito antes de resolver o exercício, não adianta fazer o exercício! Então, só olhe depois que tiver uma solução que você realmente acredita que está correta!