

Aula 06 - Parte 01 - Regressão

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

Cenário: Medindo a Velocidade do Som

Imagine medir a velocidade do som:

- Uma pessoa grita e aciona um cronômetro.
- Outra pessoa, a metros de distância, para o cronômetro ao ouvir o grito.
- O experimento é repetido para várias distâncias.

Teoria: Movimento Uniforme

O som se propaga a uma velocidade constante (c), seguindo um movimento uniforme:

$$t = \frac{1}{c} \Delta s$$

Onde t é o tempo de propagação e Δs é a distância.

Então, medimos t para vários valores de Δs , e então estimamos o coeficiente \$

Imperfeições nas Medições

Na realidade, as medições são imperfeitas devido a:

- **Erro humano:** Acionamento manual do cronômetro.
- **Variações do ambiente:** Vento, temperatura afetam a velocidade do som.
- **Fontes de erro imprevisíveis.**

Esses erros se somam, resultando em desvios com uma distribuição Gaussiana (Normal) de média zero.

Erro Quadrático Médio

O EQM quantifica o quão bem um modelo se ajusta aos dados medidos.

Fórmula:

$$\text{EQM} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - (ax_n + b))^2$$

Onde:

- N é o número total de medições.
- y_n é o valor medido.
- $ax_n + b$ é o valor estimado pelo modelo linear para x_n .

Exercício: calcule $\frac{d_{\text{EQM}}}{da}$.

Descida pelo Gradiente (Gradient Descent)

Partindo de um coeficiente angular atual (a_{atual}), estimamos um novo modelo usando a seguinte regra de atualização:

$$a_{\text{novo}} = a_{\text{atual}} - \alpha \cdot e'(a_{\text{atual}})$$

Onde:

- a_{novo} é o coeficiente angular atualizado.
- a_{atual} é o coeficiente angular na iteração anterior.
- α (alpha) é a **taxa de aprendizado (learning rate)**, um valor pequeno e positivo (por exemplo, 0.01).
- $e'(a_{\text{atual}})$ é a derivada do EQM em relação a a no ponto a_{atual} .

Estimando a Aceleração da Gravidade (g)

- Tempo de queda (t) de um objeto de altura (h):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- Elevando ao quadrado:

$$t^2 = \frac{2}{g}h$$

- Seja $y = t^2$ e $x = h$. Então, a relação é linear:

$$y = ax$$

onde o coeficiente angular $a = \frac{2}{g} \Rightarrow g = \frac{2}{a}$.

Procedimento Experimental

1. **Objeto:** Escolha um objeto que possa ser jogado sem quebrar (ex: borracha).
2. **Medições:** Solte o objeto de diferentes alturas (h) e meça o tempo de queda (t) com um cronômetro. Anote vários pares (h, t) .
3. **Compartilhe:** Junte as medições com a turma.
4. **Transformação:** Para cada ponto, calcule $y = t^2$.
5. **Estimativa de a :** Use a função `melhorar_modelo` (descida pelo gradiente) com seus dados de (h, t^2) para estimar o coeficiente a .
6. **Cálculo de g :** Utilize a relação $g = \frac{2}{a}$ para calcular o valor da aceleração da gravidade.

Hora da chamada!

Hoje estamos na Aula 06, Parte 01!