

# Resolução: Transformação de Variáveis Aleatórias

## Exercício 01

Como  $X \in (-1, 1)$ , então  $X^2 \in (0, 1)$  e, portanto,  $Y = 4 - X^2 \in (3, 4)$ .

Para  $3 < y < 4$ :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(4 - X^2 \leq y) = P(X^2 \geq 4 - y) = P(|X| \geq \sqrt{4 - y})$$

Logo,

$$F_Y(y) = 1 - P(|X| < \sqrt{4 - y})$$

Como  $X$  é uniforme em  $(-1, 1)$ ,  $P(|X| < a) = a$  para  $0 < a < 1$ . Assim,

$$F_Y(y) = 1 - \sqrt{4 - y}, \quad 3 < y < 4$$

Derivando:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{4 - y}}, \quad 3 < y < 4,$$

e  $f_Y(y) = 0$  fora desse intervalo.

### Atenção

A transformação  $y = 4 - x^2$  **não é monótona** em  $(-1, 1)$ . Aqui o método via CDF é o mais seguro.

---

## Exercício 02

A densidade de  $X$  é  $f_X(x) = \frac{1}{2}$  para  $1 < x < 3$ .

(a)  $Y = 3X + 4$

**Passo 1 — suporte**

Se  $1 < x < 3$ , então  $7 < y < 13$

**Passo 2 — inversa e jacobiano**

$$x = \frac{y-4}{3} \text{ e } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$$

**Passo 3 — densidade**

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-4}{3}\right) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad 7 < y < 13$$

Logo,

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} \mathbf{1}_{(7,13)}(y)$$


---

(b)  $Y = e^X$

**Passo 1 — suporte**

Se  $1 < x < 3$ , então  $e < y < e^3$

**Passo 2 — inversa e jacobiano**

$$x = \ln y \text{ e } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

**Passo 3 — densidade**

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}, \quad e < y < e^3$$

Logo,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2y} \mathbf{1}_{(e,e^3)}(y)$$


---

**Exercício 03**

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$$

Transformando: - se  $X = 1$ ,  $Y = 5$ ; - se  $X = 2$ ,  $Y = 7$ ; - se  $X = 3$ ,  $Y = 9$ .

Logo,

$$P(Y = 5) = P(Y = 7) = P(Y = 9) = \frac{1}{3}$$


---

**Exercício 04**

Defina  $X$  = número de tentativas até abrir (inclui a correta). Em cada tentativa, probabilidade de sucesso  $p = \frac{1}{4}$ .

(a) Função de probabilidade de  $X$

$X$  é geométrica (suporte  $\{1, 2, \dots\}$ ):

$$P(X = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, \dots$$

---

(b)  $Y$  = número de chaves erradas até abrir; escrever  $Y$  em função de  $X$

Se a abertura ocorre na  $X$ -ésima tentativa, então houve  $X - 1$  erros:

$$Y = X - 1$$

---

(c) Função de probabilidade de  $Y$

Como  $Y = X - 1$ , então  $Y \in \{0, 1, 2, \dots\}$  e

$$P(Y = y) = \left(\frac{3}{4}\right)^y \frac{1}{4}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

---

**Exercício 05**

A CDF é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{8}, & -2 \leq x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Função de probabilidade de  $X$

Os saltos dão as massas: - em  $x = -2$ :  $P(X = -2) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$ ; - em  $x = -1$ :  $P(X = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ ; - em  $x = 1$ :  $P(X = 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ; - em  $x = 2$ :  $P(X = 2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

Logo,

$$\boxed{P(X = -2) = \frac{1}{8}, P(X = -1) = \frac{3}{8}, P(X = 1) = \frac{1}{4}, P(X = 2) = \frac{1}{4}}$$


---

(b)  $Y = X^2$ : função de probabilidade de  $Y$

Os valores possíveis: -  $Y = 1$  quando  $X = \pm 1$ ; -  $Y = 4$  quando  $X = \pm 2$  (aqui só temos  $-2$  e  $2$ )

Então:

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8},$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Logo,

$$\boxed{P(Y = 1) = \frac{5}{8}, P(Y = 4) = \frac{3}{8}}$$


---

### Exercício 06

Primeiro:

$$P(X = 1) = \frac{4}{10}, P(X = 2) = \frac{3}{10}, P(X = 3) = \frac{2}{10}, P(X = 4) = \frac{1}{10}$$

Como  $Y = 2 - X$ : -  $X = 1 \Rightarrow Y = 1$  com prob.  $4/10$ ; -  $X = 2 \Rightarrow Y = 0$  com prob.  $3/10$ ; -  $X = 3 \Rightarrow Y = -1$  com prob.  $2/10$ ; -  $X = 4 \Rightarrow Y = -2$  com prob.  $1/10$

Logo,

$$\boxed{P(Y = 1) = \frac{4}{10}, P(Y = 0) = \frac{3}{10}, P(Y = -1) = \frac{2}{10}, P(Y = -2) = \frac{1}{10}}$$


---

### Exercício 07

Probabilidades por sorteio: - vermelha:  $p_R = \frac{2}{10} = 0.2$  (ganha  $+1$  ponto), - preta:  $p_B = \frac{3}{10} = 0.3$  (perde  $-1$  ponto), - branca:  $p_W = \frac{5}{10} = 0.5$  (0 ponto)

Sejam  $r, b, w$  as contagens em 3 sorteios ( $r + b + w = 3$ ).

Então  $P(r, b, w) = \frac{3!}{r!b!w!} p_R^r p_B^b p_W^w$  e a pontuação é  $X = r - b$ .

(a) Função de probabilidade de  $X$

Os valores possíveis são  $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ . A distribuição resulta em:

$$\begin{aligned}P(X = -3) &= 0,027, \\P(X = -2) &= 0,135, \\P(X = -1) &= 0,279, \\P(X = 0) &= 0,305, \\P(X = 1) &= 0,186, \\P(X = 2) &= 0,060, \\P(X = 3) &= 0,008\end{aligned}$$

**i** Comentário

A forma “estrutural” é: somar  $P(r, b, w)$  sobre todas as triplas  $(r, b, w)$  que dão o mesmo  $x = r - b$ .

---

(b)  $Y =$  dinheiro ganho/perdido

Regra: - se  $X > 0$ , ganha R\$2 por ponto positivo  $\Rightarrow Y = 2X$ ; - se  $X < 0$ , perde R\$1 por ponto negativo  $\Rightarrow Y = X$  (pois  $X$  já é negativo); - se  $X = 0$ ,  $Y = 0$

Assim:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 0, \\ 0, & X = 0, \\ 2X, & X > 0 \end{cases}$$

Logo, o suporte de  $Y$  é  $\{-3, -2, -1, 0, 2, 4, 6\}$  e:

$$\begin{aligned}P(Y = -3) &= P(X = -3) = 0,027, \\P(Y = -2) &= P(X = -2) = 0,135, \\P(Y = -1) &= P(X = -1) = 0,279, \\P(Y = 0) &= P(X = 0) = 0,305, \\P(Y = 2) &= P(X = 1) = 0,186, \\P(Y = 4) &= P(X = 2) = 0,060, \\P(Y = 6) &= P(X = 3) = 0,008\end{aligned}$$

---

### Exercício 08

Como  $X$  é exponencial com taxa 2:

$$F_X(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0$$

Como  $Y = 3X + 2$  (monótona crescente): - se  $y < 2$ ,  $P(Y \leq y) = 0$ ; - se  $y \geq 2$ :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{2(y-2)}{3}\right)$$

Logo,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ 1 - \exp\left(-\frac{2(y-2)}{3}\right), & y \geq 2 \end{cases}$$

---

### Exercício 09

(a)  $Y = X^3$

Transformação monótona crescente em  $x > 0$ .

Inversa:  $x = y^{1/3}$ , com  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ .

Então:

$$f_Y(y) = f_X(y^{1/3}) \left| \frac{dx}{dy} \right| = e^{-y^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3}, \quad y > 0$$

Logo,

$$f_Y(y) = \frac{1}{3y^{2/3}} e^{-y^{1/3}}, \quad y > 0$$

---

(b)  $Z = \frac{3}{(X+1)^2}$

Para  $x > 0$ ,  $z = 3/(x+1)^2$  é **decrecente** e o suporte é:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow z \uparrow 3, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow z \downarrow 0,$$

logo  $0 < z < 3$ .

Inversa:

$$z = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow x+1 = \sqrt{\frac{3}{z}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{z}} - 1$$

Derivada:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}z^{-3/2} \Rightarrow \left| \frac{dx}{dz} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-3/2}$$

Então:

$$f_Z(z) = f_X\left(\sqrt{\frac{3}{z}} - 1\right) \left| \frac{dx}{dz} \right| = \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{z}} + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-3/2}, \quad 0 < z < 3$$

Logo,

$$f_Z(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-3/2} \exp\left(1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right), \quad 0 < z < 3$$

---

### Exercício 10

A densidade de  $R$  é:

$$f_R(r) = \frac{1}{B(2, 2)}r^1(1-r)^1 = 6r(1-r), \quad 0 < r < 1$$

#### 0.1 (a) Volume $V = \frac{4\pi}{3}R^3$

Defina  $c = \frac{4\pi}{3}$ , então  $v = cr^3$  e  $0 < v < c$

Inversa:  $r = (v/c)^{1/3}$  e:

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{3}c^{-1/3}v^{-2/3}$$

Logo:

$$f_V(v) = f_R((v/c)^{1/3}) \left| \frac{dr}{dv} \right| = 6 \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3}\right) \cdot \frac{1}{3}c^{-1/3}v^{-2/3}$$

Simplificando:

$$f_V(v) = 2c^{-2/3}v^{-1/3} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3}\right), \quad 0 < v < c, \quad c = \frac{4\pi}{3}$$

Esperança:

$$E(V) = c E(R^3)$$

Para Beta(2, 2):

$$E(R^3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

Logo:

$$E(V) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{15}$$

---

(b) Área  $A = 4\pi R^2$

Defina  $d = 4\pi$ , então  $a = dr^2$  e  $0 < a < d$ .

Inversa:  $r = \sqrt{a/d}$  e:

$$\frac{dr}{da} = \frac{1}{2\sqrt{da}}$$

Então:

$$f_A(a) = f_R\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right) \left|\frac{dr}{da}\right| = 6\sqrt{\frac{a}{d}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{d}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{da}}$$

Como  $\sqrt{a/d}/\sqrt{da} = 1/d$ , fica:

$$f_A(a) = \frac{3}{d} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{d}}\right), \quad 0 < a < d, \quad d = 4\pi$$

Esperança:

$$E(A) = d E(R^2)$$

Para Beta(2, 2):

$$E(R^2) = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

Logo:

$$E(A) = 4\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{6\pi}{5}$$

---

### Exercício 11

A densidade de  $I$  é  $f_I(i) = \frac{1}{2}$  para  $9 < i < 11$ .

Como  $P = 2I^2$  é crescente para  $I > 0$ , o suporte é:

$$p \in (2 \cdot 9^2, 2 \cdot 11^2) = (162, 242)$$

Inversa:

$$i = \sqrt{\frac{p}{2}}$$

Derivada:

$$\frac{di}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}$$

Logo:

$$f_P(p) = f_I\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right) \left|\frac{di}{dp}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2p}} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{2p}}}, \quad 162 < p < 242$$

Esperança:

$$E(P) = 2E(I^2)$$

Para  $I \sim U(a, b)$ :

$$E(I^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Com  $a = 9, b = 11$ :

$$E(I^2) = \frac{81 + 99 + 121}{3} = \frac{301}{3} \Rightarrow \boxed{E(P) = 2 \cdot \frac{301}{3} = \frac{602}{3}}$$

---

### Exercício 12

Como  $\ln Y = X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $Y$  é lognormal:

$$\boxed{Y \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2)}$$

Densidade:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0}$$

Também:

$$\boxed{E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}, \quad \boxed{\text{Var}(Y) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}}$$