Integrais Duplas e Triplas

Introdução

Na teoria da probabilidade, especialmente quando lidamos com **vetores aleatórios contínuos**, as **integrais múltiplas** desempenham um papel central. Diferentemente do caso discreto, em que probabilidades são obtidas por somas, no caso contínuo as probabilidades são calculadas por integrais, que admitem uma interpretação geométrica natural como volumes sob superfícies.

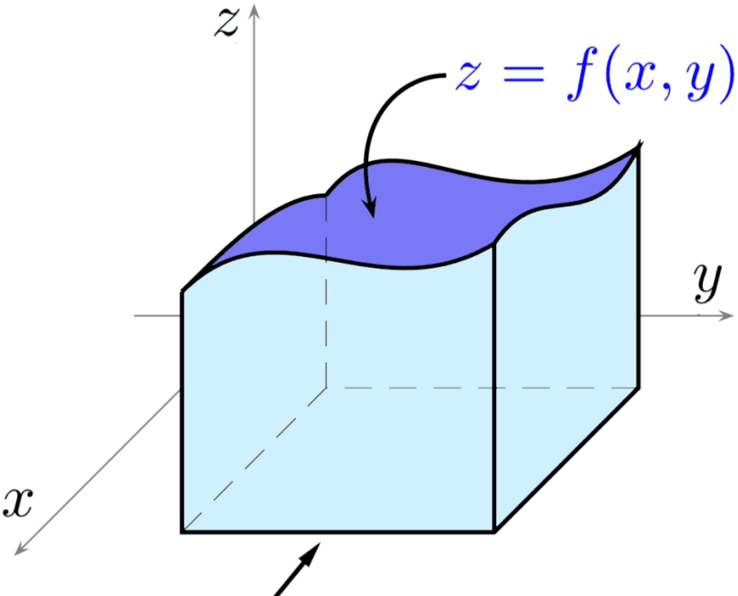
Integrais Duplas

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e integrável em uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. A integral dupla de f sobre R é definida por

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

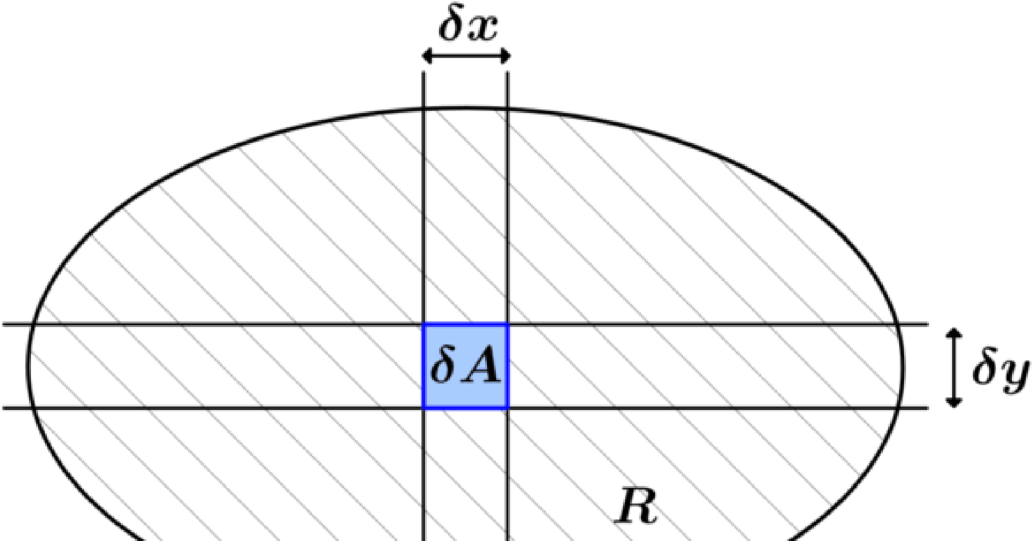
Geometricamente, essa integral representa o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $z = f(x, y)$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pela região R.

Integrais Duplas



Integrais Duplas

- dA depende das coordenadas. Em coordenadas cartesianas, temos:



Integrais Duplas

Por conseguinte, esta integral é avaliada como:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

Integrais Duplas

Por conseguinte, esta integral é avaliada como:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

Na prática, integrais duplas são calculadas como **integrais iteradas**. Seja

$$R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

Assim, pelo **Teorema de Fubini**, a integral é:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Integrais Duplas

Primeiro, calculamos a integral interna e depois a integral externa. Neste caso, a integral interna é em relação a x. No entanto, a ordem de integração não importa, pois podemos calcular a integral em relação a y primeiro.

Integrais Duplas

Exemplo 01: Calcule

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy$$

Integrais Duplas

Exemplo 01: Calcule

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy$$

Solução: Como $[0,1]\times[0,1]$ é um retângulo, podemos escrever a integral dupla como uma integral iterada:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dx\,dy$$

Integrais Duplas

Passo 1: integrar em relação a x

Aqui y é constante. Então:

$$\int_0^1 (x+y)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 y\,dx$$

Calculando cada parte:

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 y\,dx = y\int_0^1 1\,dx = y(1-0) = y$$

Integrais Duplas

Logo, a integral interna é:

$$\int_0^1 (x + y)\, dx = \frac{1}{2} + y$$

Integrais Duplas

Logo, a integral interna é:

$$\int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y$$

Passo 2: integrar em relação a y

Agora integramos o resultado de 0 a 1:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy + \int_0^1 y\,dy$$

Integrais Duplas

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dy = \frac{y}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 y\,dy = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Somando:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right)\,dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Logo,

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy = 1$$

Integrais Duplas

Exemplo 02: Na integral dupla seguinte, indicar a região R de integração e encontrar o seu valor:

$$\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$$

Integrais Duplas

Exemplo 02: Na integral dupla seguinte, indicar a região R de integração e encontrar o seu valor:

$$\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$$

Solução: A integral está escrita na forma iterada

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (\cdot)\, dy\, dx$$

Logo, a região de integração é

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

Integrais Duplas

Trata-se de um **retângulo** no plano cartesiano, com base no intervalo $[0, 2]$ do eixo x e altura no intervalo $[0, 1]$ do eixo y. Assim, mantendo x fixo, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy &= \int_0^1 1\, dy + \int_0^1 2x\, dy + \int_0^1 2y\, dy \\ &= y\Big|_0^1 + 2x\, y\Big|_0^1 + 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= 1 + 2x + 1 \\ &= 2 + 2x\end{aligned}$$

Integrais Duplas

vamos agora, integrar em relação a x:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2+2x)\,dx &= \int_0^2 2\,dx + \int_0^2 2x\,dx \\
&= 2x\Big|_0^2 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\
&= 4+4 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Integrais Duplas

Esse valor representa o **volume** do sólido limitado:

- inferiormente pelo plano $z = 0$,
- superiormente pela superfície $z = 1 + 2x + 2y$,
- lateralmente pela região retangular $R = [0, 2] \times [0, 1]$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Até agora, consideramos integrais duplas sobre regiões retangulares. No entanto, em muitas aplicações, especialmente em Probabilidade, a região de integração não é um retângulo, mas sim uma região mais geral do plano.

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Até agora, consideramos integrais duplas sobre regiões retangulares. No entanto, em muitas aplicações, especialmente em Probabilidade, a região de integração não é um retângulo, mas sim uma região mais geral do plano.

Nesses casos, a integral dupla continua sendo definida como

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

mas o cálculo exige uma descrição adequada da região R.

Regiões Gerais no Plano

Uma **região geral** $R \subset \mathbb{R}^2$ é qualquer subconjunto do plano que possa ser descrito por desigualdades envolvendo x e y.

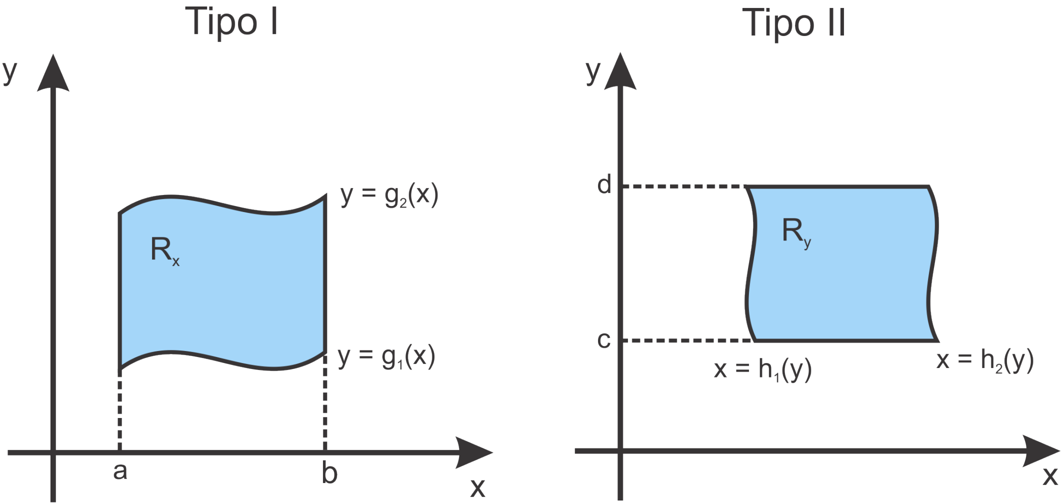
Regiões Gerais no Plano

Uma **região geral** $R \subset \mathbb{R}^2$ é qualquer subconjunto do plano que possa ser descrito por desigualdades envolvendo x e y.

Na prática, trabalhamos principalmente com dois tipos de regiões:

- Regiões do tipo **I** (ou regiões x)
- Regiões do tipo **II** (ou regiões y)

Regiões Gerais no Plano



Regiões do Tipo I (Regiões x)

Uma região R é dita do tipo I se pode ser escrita na forma

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Nesse caso, a integral dupla é calculada como

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Interpretação geométrica

- x varia em um intervalo fixo $[a, b]$;
- para cada x, a variável y varia entre duas curvas.

Exemplo: Região do Tipo I

Considere a região limitada pelas curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x,$$

com $0 \leq x \leq 1$.

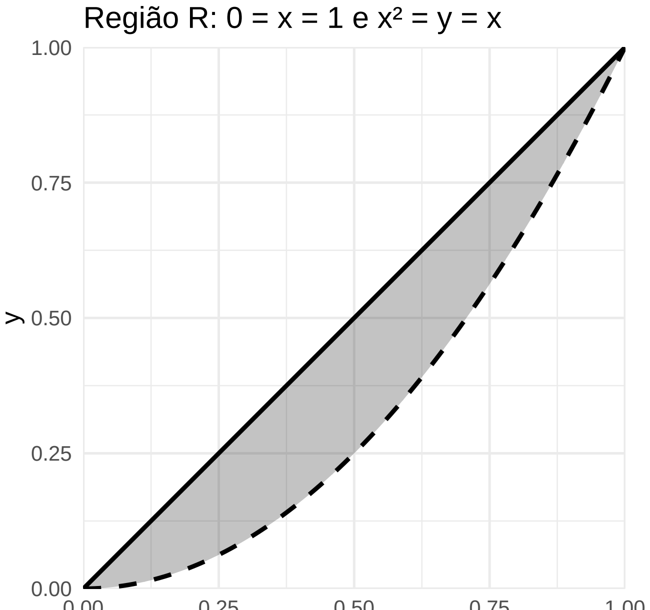
A região é

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$$

A integral dupla de $f(x, y)$ sobre R é

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy\, dx$$

Exemplo: Região do Tipo I



Regiões do Tipo II (Regiões y)

Uma região R é dita do tipo II se pode ser escrita como

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Nesse caso,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Interpretação geométrica

- y varia em um intervalo fixo $[c, d]$;
- para cada y, a variável x varia entre duas curvas.

Exemplo: Região do Tipo II

Considere a região limitada por

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = y,$$

com $0 \leq y \leq 1$.

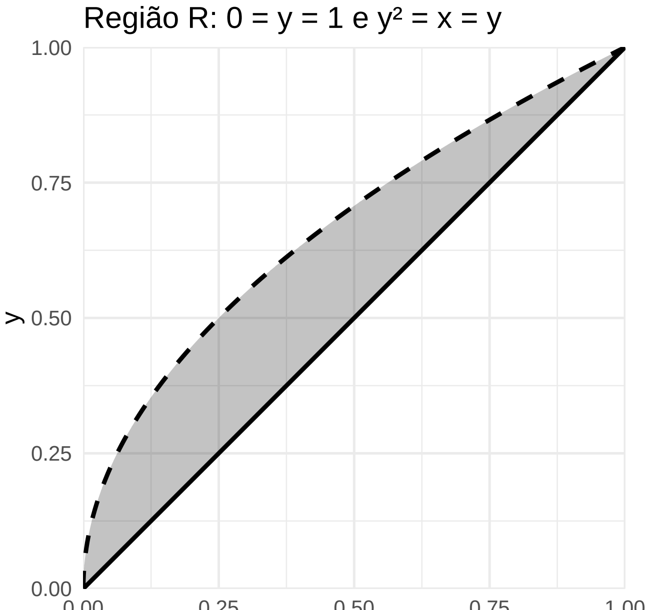
A região é

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$$

A integral dupla de $f(x, y)$ sobre R é

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Exemplo: Região do Tipo II



Troca da Ordem de Integração

Uma mesma região R pode, muitas vezes, ser descrita tanto como região do tipo I quanto do tipo II.

Trocar a ordem de integração significa reescrever

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

na forma

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy,$$

mantendo a mesma região R.

Troca da Ordem de Integração