Função Geradora de Momentos

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X, ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - \Big[E(X)\Big]^2$$

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X, ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - \Big[E(X)\Big]^2$$

Outras características da distribuição de probabilidade de X podem ser expressas por meio das esperanças das potências de X como por exemplo **coeficientes de assimetria** e **curtose**.

Momentos

Definição 01: Momentos

Seja X uma variável aleatória. Então, o **k-ésimo momento** de X, denotado por μ'_k é definido como,

$$\mu'_k = E(X^k)$$

desde que essa quantidade exista. O **k-ésimo momento central** de uma variável aleatória X, denotado por μ_k é definido como,

$$\mu_k = E\Big[X - E(X)\Big]^k$$

sempre que essa quantidade existir.

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu_1'$

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu'_1$
- $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - [\mu'_1]^2$

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu'_1$
- $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - [\mu'_1]^2$
- Para qualquer variável aleatória, $\mu_1 = 0$.

Momentos

- Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

Momentos

- Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

- Se X é uma variável aleatória contínua,

$$\mu'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx$$

Momentos

Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$.

Momentos

Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$.

Solução: Temos que, se $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^\infty x^k f(x \mid \alpha, \lambda)\, dx = \int_0^\infty x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx \\
&= \int_0^\infty x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x}\, dx
\end{aligned}
$$

Note que a integral é quase a função gama, a não ser pelo termo $e^{-\lambda x}$. Seja então a seguinte mudança de variável,

$$
u = \lambda x \;\Rightarrow\; x = \frac{u}{\lambda}, \qquad dx = \frac{du}{\lambda}
$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha+k-1} e^{-u}\, \frac{du}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+k}\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+k-1} e^{-u}\, du = \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha+k)}{\lambda^{\alpha+k}\,\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\lambda^k}$$

Mas,

$$\Gamma(\alpha+k) = (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

Momentos

De forma que, o k-ésimo momento de uma variável aleatória $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ é dado por

$$E(X^k) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$$

Momentos

Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Momentos

Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Solução: Temos que, se $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$$

Mudança de variável:

$$u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad x = \alpha u^{1/\beta}, \qquad dx = \alpha \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1} du$$

Além disso:

$$x^k = \alpha^k u^{k/\beta}, \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} = u^{(\beta-1)/\beta}, \qquad \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = e^{-u}$$

Momentos

logo,

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$$

$$= \int_0^\infty \alpha^k u^{k/\beta}\, \frac{\beta}{\alpha}\, u^{(\beta-1)/\beta}\, e^{-u}\, \alpha \frac{1}{\beta} u^{1/\beta-1}\, du$$

$$= \alpha^k \int_0^\infty u^{\frac{k+\beta}{\beta}-1} e^{-u}\, du = \alpha^k\; \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right)$$

Função Geradora de Momentos

Definição 02: Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória qualquer. A **função geradora de momentos** (FGM) de X, denotada por M_X, é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

para valores de t em um intervalo contendo 0 onde a experança exista.

Importante: a função geradora de momentos é função de t. Para ela existir basta que exista $\varepsilon > 0$ tal que $E(e^{tX})$ esteja bem definida para qualquer $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Função Geradora de Momentos

Note que a **definição de função geradora de momentos** é feita independente do tipo de variável, mas a forma de encontrá-la depende se a variável for **discreta** ou **contínua**, isto é,

- Se X é discreta,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{\forall x \in S_X} e^{tx} p_X(x)$$

- Se X é contínua,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Função Geradora de Momentos

Teorema 01

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Então, $E(X^k)$ existe para $k = 1, 2, \cdots$ e temos:

$$E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

ou seja, o k-ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k de $M_X(t)$ avaliada em $t = 0$.

Demonstração: Suponha que a função geradora de momentos de X exista para todo t tal que $|t| < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, isto é,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) < \infty, \qquad |t| < \varepsilon$$

Função Geradora de Momentos

Pela série de Maclaurin da função exponencial, para qualquer número real y temos

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Aplicando isso a $y = tX$, obtemos, para cada t com $|t| < \varepsilon$,

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

Temos que $M_X(t) = E(e^{tX})$. Logo, admitindo ser válido permutar soma infinita e esperança, temos

Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n), \qquad |t| < \varepsilon$$

Portanto, $M_X(t)$ é dada, em uma vizinhança de 0, por uma série de potência da forma

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad \text{com } a_n = \frac{E(X^n)}{n!}$$

Função Geradora de Momentos

Da teoria de séries de potência, sabemos que, se

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

então a k-ésima derivada é

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1) \cdots (n-k+1) \, t^{\,n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Agora substituímos $t = 0$:

Observe:

- Se $n > k$, aparece o fator $t^{n-k} = 0^{n-k} = 0$;
- Então **todos** os termos com $n > k$ desaparecem;
- Só o termo com $n = k$ permanece.

O único termo sobrevivente é:

$$a_k \, k(k-1)(k-2)\cdots 1 \, t^0 = a_k \, k!$$

Função Geradora de Momentos

Assim,

$$M_X^{(k)}(0) = a_k\, k! = \frac{E(X^k)}{k!}\, k! = E(X^k)$$

Logo,

$$E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\bigg|_{t=0}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

o que mostra que o k-ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k da função geradora de momentos avaliada em $t = 0$.

Função Geradora de Momentos

Dica Importante!

Para qualquer variável aleatória X:

$$M_X(0) = E(e^{0X}) = 1.$$

Isso sempre deve ocorrer. Use esse fato para verificar se sua FGM está correta.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim Bernoulli(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim Bernoulli(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Por definição,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x (1-p)^{1-x}$$

Como X só assume os valores 0 e 1:

$$M_X(t) = e^{t \cdot 0} p^0 (1-p)^{1-0} + e^{t \cdot 1} p^1 (1-p)^{1-1} = (1-p) + e^t p = 1 - p + e^t p$$

Função Geradora de Momentos

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = 1 - p + pe^t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Veja que $M_X(0) = 1 - p + pe^0 = 1 - p + p \times 1 = 1$. Assim,

- Primeira derivada de $M_X(t)$:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}(1 - p + pe^t) = pe^t$$

Avaliada em $t = 0$, temos $E(X) = M'_X(0) = pe^0 = p$

Função Geradora de Momentos

- Segunda derivada de $M_X(t)$:

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}(M'_X(t)) = \frac{d}{dt}(pe^t) = pe^t$$

Avaliada em $t = 0$, temos $E(X) = M''_X(0) = pe^0 = p$.

Assim,

$$\mathrm{Var}(X) = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 04: Distribuição Binomial

Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 04: Distribuição Binomial

Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Se $X \sim Binomial(n, p)$ então sua f.p. é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Por definição,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Escrevendo $e^{tk} = (e^t)^k$:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k}$$

Temos que o binômio de Newton é dado por:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Assim, tomando $a = pe^t$ e $b = 1 - p$:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Veja que, $M_X(0) = (1 - p + pe^0)^n = (1 - p + p \times 1)^n = 1^n = 1$.

Função Geradora de Momentos

Sabemos que

$$E(X) = M'_X(0)$$

Derivada primeira em relação a t,

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}(1 - p + pe^t)^n = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t$$

Logo,

$$M'_X(0) = n(1 - p + pe^0)^{n-1} \cdot pe^0 = n(1 - p + p)^{n-1}p = np$$

Função Geradora de Momentos

Vamos agora encontrar a segunda derivada. Temos

$$M'_X(t) = npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1}$$

Aplicando a regra do produto:

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= \frac{d}{dt}\left[npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1}\right] \\ &= npe^t(n-1)(1 - p + pe^t)^{n-2} \cdot pe^t \; + \; npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1} \end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

Avaliando em $t = 0$:

- $e^0 = 1$
- $1 - p + pe^0 = 1 - p + p = 1$

Assim,

$$
\begin{aligned}
M''_X(0) &= np \cdot 1 \cdot (n-1) \cdot 1^{\,n-2} \cdot p \cdot 1 \;+\; np \cdot 1 \cdot 1^{\,n-1} \\
&= np(n-1)p + np \\
&= np\big[(n-1)p + 1\big]
\end{aligned}
$$

Função Geradora de Momentos

De forma que,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= M''_X(0) - [M'_X(0)]^2 \\
&= np\big[(n-1)p + 1\big] - (np)^2 \\
&= np\big[(n-1)p + 1 - np\big] \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 05: Distribuição Geométrica

Seja $X \sim Geo(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 05: Distribuição Geométrica

Seja $X \sim Geo(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Seja $X \sim$ Geo(p), cuja função de probabilidade é

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Por definição, temos que,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (e^t)^k (1-p)^{k-1}$$

Função Geradora de Momentos

Reorganizando,

$$M_X(t) = pe^t \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-p)e^t\right]^{k-1}$$

A soma é uma série geométrica com razão

$$r = (1-p)e^t$$

A série converge se e somente se:

$$|(1-p)e^t| < 1$$

Função Geradora de Momentos

Usando a soma da série geométrica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r},$$

temos:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Função Geradora de Momentos

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad \text{para } t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}$$

Note que, $M_X(0) = \dfrac{pe^0}{1-(1-p)e^0} = \dfrac{p}{1-(1-p)} = \dfrac{p}{p} = 1$

Função Geradora de Momentos

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad \text{para } t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}$$

Note que, $M_X(0) = \dfrac{pe^0}{1-(1-p)e^0} = \dfrac{p}{1-(1-p)} = \dfrac{p}{p} = 1$

Sabemos que:

$$E(X) = M_X'(0)$$

Função Geradora de Momentos

Vamos então encontrar a derivada de primeira ordem de

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$$

Use regra do quociente, temos

$$M'_X(t) = \frac{pe^t\big[1 - (1 - p)e^t\big] - pe^t\big[-(1 - p)e^t\big]}{\big[1 - (1 - p)e^t\big]^2}$$

Simplificando o numerador:

$$pe^t\left[1 - (1 - p)e^t + (1 - p)e^t\right] = pe^t$$

Função Geradora de Momentos

Portanto,

$$M'_X(t) = \frac{pe^t}{\left[1-(1-p)e^t\right]^2}$$

Avaliando em $t = 0$:

- $e^0 = 1$
- $1-(1-p)e^0 = 1-(1-p) = p$

Logo,

$$E(X) = M'_X(0) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Função Geradora de Momentos

Encontrando $\mathrm{Var}(X)$, usamos,

$$\mathrm{Var}(X) = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2$$

A derivada segunda é dada por

$$M''_X(t) = \frac{pe^t\left[1 + (1-p)e^t\right]}{\left[1 - (1-p)e^t\right]^3}$$

de forma que

$$M''_X(0) = \frac{p(1 + (1-p))}{p^3} = \frac{p(2-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

Função Geradora de Momentos

e, portanto,

$$\mathrm{Var}(X) = M''_X(0) - \Big[M'_X(0)\Big]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Função Geradora de Momentos

e, portanto,

$$\mathrm{Var}(X) = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Veja que neste exemplo, a função geradora de momentos de $X \sim Geo(p)$ não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, mas está bem definida para $t < \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$. E como $\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) > 0$, a função geradora de momentos está bem definida para t em uma vizinhança de zero.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 06: Distribuição de Poisson

Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 06: Distribuição de Poisson

Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Seja $X \sim Poisson(\lambda)$, cuja função de probabilidade é

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Assim, a função geradora de momentos (fgm) de X é dada por,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

Função Geradora de Momentos

A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

é a expansão em série de Taylor de $e^{\lambda e^t}$. Assim,

$$M_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

Função Geradora de Momentos

Portanto, a fgm de X é

$$\boxed{M_X(t) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right)}$$

Note que, $M_X(0) = \exp\left(\lambda(e^0 - 1)\right) = \exp\left(0\right) = 1$

Função Geradora de Momentos

Portanto, a fgm de X é

$$\boxed{M_X(t) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right)}$$

Note que, $M_X(0) = \exp\left(\lambda(e^0 - 1)\right) = \exp\left(0\right) = 1$

Vamos calcular as derivadas de ordem primeira e ordem segunda para calcular os respectivos momentos:

Pela regra da cadeia,

$$M'_X(t) = \exp\left(\lambda(e^t - 1)\right) \cdot \lambda e^t = \lambda e^t \, M_X(t)$$

Função Geradora de Momentos

Logo,

$$E(X) = M'_X(0) = \lambda e^0 \, M_X(0) = \lambda \cdot 1 \cdot 1 = \lambda$$

Função Geradora de Momentos

Logo,

$$E(X) = M'_X(0) = \lambda e^0 \, M_X(0) = \lambda \cdot 1 \cdot 1 = \lambda$$

A segunda derivada de $M_X(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
M''_X(t) &= \frac{d}{dt}\left[\lambda e^t \, M_X(t)\right] \\
&= \lambda e^t \, M_X(t) + \lambda e^t \, M'_X(t) \\
&= \lambda e^t \, M_X(t) + \lambda e^t \left[\lambda e^t \, M_X(t)\right] \\
&= \lambda e^t \, M_X(t) \left[1 + \lambda e^t\right]
\end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

Agora, avaliando em $t = 0$:

$$M''_X(0) = \lambda e^0 \, M_X(0) \left[1 + \lambda e^0\right] = \lambda \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 + \lambda) = \lambda(1 + \lambda)$$

Portanto,

$$E(X^2) = M''_X(0) = \lambda(1 + \lambda)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(X) &= M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2 \\ &= \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 07 - Distribuição Exponencial: Seja $X \sim exp(\lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 07 - Distribuição Exponencial: Seja $X \sim exp(\lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Seja $X \sim exp(\lambda)$, cuja função densidade é

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Neste caso, a função geradora de momentos (fgm) de X é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - t)x}\, dx$$

válida para $t < \lambda$.

Função Geradora de Momentos

Assim, como

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda-t)x}\, dx = \lambda \frac{e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda-t)}\bigg|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-t}, \quad \lambda - t > 0$$

Logo,

$$\boxed{M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}, \qquad t < \lambda}$$

Note que, $M_X(0) = \frac{\lambda}{\lambda-0} = 1$

Função Geradora de Momentos

Derivando,

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

Portanto,

$$E(X) = M'_X(0) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Função Geradora de Momentos

A segunda derivada é dada por,

$$M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Logo,

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

De forma que,

$$\mathsf{Var}(X) = E(X^2) - \Big[E(X)\Big]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 08 - Distribuição Gamma: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 08 - Distribuição Gamma: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Solução: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, cuja função densidade é

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

A função geradora de momentos é

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\, dx$$

Função Geradora de Momentos

Usamos agora o resultado da função Gamma:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-bx}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}, \qquad b > 0$$

Aqui, $b = \lambda - t$ (precisamos de $\lambda - t > 0$, isto é, $t < \lambda$). Logo,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha}$$

Portanto,

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha, \qquad t < \lambda$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 09 - Distribuição Normal Padrão: Seja $X \sim N(0, 1)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 09 - Distribuição Normal Padrão: Seja $X \sim N(0,1)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Solução: Seja $X \sim N(0,1)$, cuja função densidade é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Queremos encontrar a função geradora de momentos (fgm) dada por

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

Função Geradora de Momentos

Vamos usar a técnica de completar quadrados no expoente,

$$\begin{aligned} tx - \frac{x^2}{2} &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2tx) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2 - t^2) \\ &= -\frac{1}{2}\left[(x-t)^2 - t^2\right] = -\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) dx = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dx$$

Função Geradora de Momentos

A integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) \, dx$$

é a área total sob a curva de uma normal $N(t, 1)$, e portanto é igual a 1.

Logo,

$$\boxed{M_X(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}}$$

Função Geradora de Momentos

Proposição 01 - Transformações Lineares: Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos M_X. Seja $Y = aX + b$. Então, a função geradora de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Função Geradora de Momentos

Proposição 01 - Transformações Lineares: Seja X uma variável aleatória com função geradora de momentos M_X. Seja $Y = aX + b$. Então, a função geradora de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

Demonstração:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = E\left(e^{atX} e^{bt}\right) = e^{bt} E\left(e^{atX}\right) = e^{bt} M_X(at)$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 10 - Distribuição Normal: Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 10 - Distribuição Normal: Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre sua função geradora de momentos.

Solução: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X = \sigma Z + \mu$, em que $Z \sim N(0, 1)$, com função geradora de momentos dada por $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. Assim,

$$M_X(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t} \exp\left(\frac{(\sigma t)^2}{2}\right) = e^{\mu t} \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Função Geradora de Momentos

Logo,

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$\boxed{M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

Função Geradora de Momentos

Teorema 02: Se duas variáveis aleatórias têm funções geradoras de momentos que existem, e são iguais, então elas têm a mesma função de distribuição.

Função Geradora de Momentos

Teorema 02: Se duas variáveis aleatórias têm funções geradoras de momentos que existem, e são iguais, então elas têm a mesma função de distribuição.

A demonstração desse Teorema será omitida, pois ela usa conceitos não estudados neste curso. Veja que o Teorema 02 nos mostra que se duas variáveis aleatórias tem mesma função geradora de momentos então estas variáveis aleatórias são identicamente distribuídas.

Isso significa que podemos identificar a distribuição de uma variável aleatória a partir da sua função geradora de momentos, assim como identificamos a distribuição da variável aleatória a partir da sua função de distribuição, função densidade ou função de probabilidade.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 11: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Considere também $Y = cX, \; c \in \mathbb{R}$. Mostre, a partir da função geradora de momentos, que $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda/c)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 11: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Considere também $Y = cX,\ c \in \mathbb{R}$. Mostre, a partir da função geradora de momentos, que $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda/c)$.

Solução: Por definição,

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(cX)}) = E(e^{(ct)X})$$

Logo,

$$M_Y(t) = M_X(ct) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - ct}\right)^{\alpha}, \qquad ct < \lambda \ \Rightarrow \ t < \frac{\lambda}{c}$$

Função Geradora de Momentos

ou seja,

$$M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - ct}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\lambda/c}{(\lambda/c) - t}\right)^{\alpha}, \qquad t < \frac{\lambda}{c}$$

Veja que trata-se da função geradora de momentos de uma variável aleatória com distribuição $Gamma(\alpha, \lambda/c)$. Logo, $Y \sim Gamma(\alpha, \lambda/c)$.

Função Geradora de Momentos

Teorema 03 - Soma de variáveis independentes: Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e funções geradoras de momentos, respectivamente, iguais a $M_{X_j}(t),\ j = 1, 2, \cdots, n$ para t em alguma vizinhança de zero. Se $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, então a função geradora de momentos de Y existe e é dada por:

$$M_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} M_{X_j}(t)$$

Função Geradora de Momentos

Demonstração: Pela definição, temos

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\ &= E(e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2})\cdots E(e^{tX_n}) \end{aligned}$$

e daí segue o resultado desejado.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 12: Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro p. Se $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, mostre, a partir da função geradora de momentos, que $Y \sim Binomial(n, p)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 12: Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro p. Se $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, mostre, a partir da função geradora de momentos, que $Y \sim Binomial(n, p)$.

Solução: Temos que se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli de parâmetro p, então

$$M_{X_j}(t) = 1 - p + pe^t, \quad j = 1, 2, \cdots n$$

Função Geradora de Momentos

Então, pelo **Teorema 03**, temos

$$M_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} M_{X_j}(t) = \left(1 - p + pe^t\right)^n$$

que corresponde à função geradora de momentos de uma variável aleatória Binomial com parâmetros n e p. Logo, temos que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Binomial(n, p)$.

Função Característica

A **função característica** é uma das ferramentas mais importantes da Teoria das Probabilidades.

Função Característica

A **função característica** é uma das ferramentas mais importantes da Teoria das Probabilidades.

Ela desempenha um papel similar ao da função geradora de momentos (fgm), mas com vantagens significativas: **sempre existe**, determina unicamente a distribuição e facilita o estudo de somas de variáveis aleatórias.

Função Característica

A **função característica** é uma das ferramentas mais importantes da Teoria das Probabilidades.

Ela desempenha um papel similar ao da função geradora de momentos (fgm), mas com vantagens significativas: **sempre existe**, determina unicamente a distribuição e facilita o estudo de somas de variáveis aleatórias.

Definição 03 - Variáveis Aleatórias Complexas: Dizemos que uma variável aleatória X é complexa, se pode ser escrita como

$$X = X^a + i\, X^b$$

em que $i = \sqrt{-1}$ e X^a e X^b são variáveis aleatórias reais.

Função Característica

Para o valor esperado de X, no caso complexo, exigimos que as esperanças das duas partes sejam finitas. Assim, temos:

$$E(X) = E(X^a) + i\,E(X^b)$$

em que $E(X^a)$ e $E(X^b)$ são finitas.

Função Característica

Para o valor esperado de X, no caso complexo, exigimos que as esperanças das duas partes sejam finitas. Assim, temos:

$$E(X) = E(X^a) + i\,E(X^b)$$

em que $E(X^a)$ e $E(X^b)$ são finitas.

Para efeitos práticos, podemos trabalhar funções complexas como se estivéssemos com funções reais.

Função Característica

Para o valor esperado de X, no caso complexo, exigimos que as esperanças das duas partes sejam finitas. Assim, temos:

$$E(X) = E(X^a) + i\,E(X^b)$$

em que $E(X^a)$ e $E(X^b)$ são finitas.

Para efeitos práticos, podemos trabalhar funções complexas como se estivéssemos com funções reais.

As propriedades usuais de números complexos serão usadas. Sendo $z = a + i\,b$, denotaremos por $|z|$ seu módulo e por $\bar{z}$ seu conjugado.

Função Característica

Definição 04 - Função Característica: A função característica de uma variável aleatória X é definida por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E\Big[\cos(tX)\Big] + i\,E\Big[\mathsf{sen}(tX)\Big], \qquad t \in \mathbb{R},$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Função Característica

Observações importantes

1. **Sempre existe**
   Diferentemente da fgm, que pode divergir,
   $$|e^{itX}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |E(e^{itX})| \leq 1.$$
   Portanto, $\varphi_X(t)$ está sempre bem definida.
2. **Determina unicamente a distribuição**
   Se $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ para todo t, então
   $$X \stackrel{d}{=} Y.$$

Função Característica

Observações importantes

3. **É sempre contínua**
   Aliás, é uniformemente contínua em toda a reta real.
4. **Normalização**
   Como $E(e^{it\cdot 0}) = 1$, temos
   $$\varphi_X(0) = 1$$

Função Característica

Relação com Momentos

Se X possui momentos até ordem k, então:

$$\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E(X^n), \qquad n = 1, 2, \dots, k.$$

Em particular:

- $E(X) = -i\,\varphi_X'(0)$
- $\mathrm{Var}(X) = -\varphi_X''(0) - \left[\varphi_X'(0)\right]^2$

Função Característica

Propriedade fundamental: soma de variáveis independentes

Se X e Y são independentes:

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX})\,E(e^{itY}) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t).$$

Esse resultado é crucial, por exemplo, para demonstrar o **Teorema Central do Limite**.

Função Característica

Exemplo 13: Considere uma variável aleatória X com distribuição Uniforme Contínua no intervalo $[a, b]$. Encontre sua função característica.

Função Característica

Exemplo 13: Considere uma variável aleatória X com distribuição Uniforme Contínua no intervalo $[a, b]$. Encontre sua função característica.

Solução: Considere $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, com $a < b$. Temos que, sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b$$

Assim, a função característica de X é

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

Função Característica

Como $f(x)$ é não nula apenas em $[a, b]$:

$$\varphi_X(t) = \int_a^b e^{itx}\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,dx.$$

mudança de variável: $u = itx \Rightarrow du = it\,dx$ ou $dx = \frac{1}{it}du$. Quando $x = a \Rightarrow u = ita$, quando $x = b \Rightarrow u = itb$. Assim,

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{it}e^u\right]_{ita}^{itb} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}, \qquad t \neq 0$$

Função Característica

Exemplo 14: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Encontre sua função característica.

Função Característica

Exemplo 14: Seja $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Encontre sua função característica.

Solução: Se $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$. Temos que sua função densidade é

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

Assim, a função característica de X é

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

Função Característica

Substituindo a densidade:

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda - it)x}\, dx$$

Sabemos que,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-bx}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}$$

Assim,

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda - it)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$$

Função Característica

Observações importantes

- A função característica **generaliza** a fgm para o plano complexo.
- Sempre que a fgm existir, vale:

$$\varphi_X(t) = M_X(it)$$

- Ambas determinam a distribuição, mas a função característica é **mais poderosa**, pois **sempre existe** e se comporta melhor em operações como soma de variáveis independentes.

Função Característica

Exemplo 15: Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função característica e, através dela, encontre $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Função Característica

Exemplo 15: Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função característica e, através dela, encontre $E(X)$ e Var(X).

Solução: Se $X \sim Binomial(n, p)$, sua função geradora de momentos é dada por

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Portanto, segue que

$$\varphi_X(t) = M_X(it) = (1 - p + pe^{it})^n$$

Função Característica

Em geral, se a função característica é $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$, então

$$\varphi'_X(0) = i\,E(X) \quad \Rightarrow \quad E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i}$$

Note que,

$$\varphi_X(t) = g(t)^n, \quad \text{onde} \quad g(t) = 1 - p + pe^{it}$$

e

$$\varphi'_X(t) = ng(t)^{n-1}g'(t) = n(1 - p + pe^{it})^{n-1}\,pie^{it}$$

Função Característica

Avaliando em $t = 0$:

$$\varphi'_X(0) = n(1-p+pe^{i0})^{n-1}\, pie^{i\,0} = n(1-p+pe^{0})^{n-1}\, pie^{0} = n(1-p+p)^{n-1}\, pi = npi$$

Portanto,

$$E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \frac{inp}{i} = np$$

Função Característica

Já temos

$$\varphi'_X(t) = npie^{it}\, g(t)^{n-1}, \quad g(t) = 1 - p + pe^{it}$$

Derivando novamente (regra do produto):

$$\begin{aligned}
\varphi''_X(t) &= npi\Big[ie^{it}g(t)^{n-1} + e^{it}(n-1)g(t)^{n-2}g'(t)\Big] \\
&= npi\Big[ie^{it}g(t)^{n-1} + e^{it}(n-1)g(t)^{n-2}(pie^{it})\Big] \\
&= np\Big[i^2e^{it}g(t)^{n-1} + (n-1)pi^2e^{2it}g(t)^{n-2}\Big] \\
&= -np\Big[e^{it}g(t)^{n-1} + (n-1)pe^{2it}g(t)^{n-2}\Big]
\end{aligned}$$

Função Característica

Em $t = 0$ ($g(0) = 1$, $e^0 = 1$):

$$\varphi''_X(0) = -np[1 \cdot 1^{n-1} + (n-1)p \cdot 1 \cdot 1^{n-2}] = -np[1 + (n-1)p]$$

Então,

$$E(X^2) = -\varphi''_X(0) = np[1 + (n-1)p] = np + n(n-1)p^2$$

Função Característica

Por fim, como $\text{Var}(X) = -\varphi''_X(0) - \left[\varphi'_X(0)\right]^2$

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= -\varphi''_X(0) - \left[\varphi'_X(0)\right]^2 \\
&= \left[np + n(n-1)p^2\right] - (np)^2 \\
&= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 \\
&= np + \left(n^2 - n - n^2\right)p^2 \\
&= np - np^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

Função Característica

Exemplo 16: Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre sua função característica e, através dela, encontre $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Função Característica

Exemplo 16: Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encontre sua função característica e, através dela, encontre $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Solução: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sua função geradora de momentos é dada por

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Portanto, segue que

$$\varphi_X(t) = M_X(it) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Função Característica

Derivando:

$$\varphi_X'(t) = (i\mu - \sigma^2 t)\,\exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = (i\mu - \sigma^2 t)\,\varphi_X(t)$$

Em $t = 0$:

$$\varphi_X(0) = 1, \qquad \varphi_X'(0) = i\mu$$

Logo,

$$E(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \frac{i\mu}{i} = \mu$$

Função Característica

Derivamos novamente:

$$
\begin{aligned}
\varphi_X''(t) &= \frac{d}{dt}\left[(i\mu - \sigma^2 t)\varphi_X(t)\right] \\
&= -\sigma^2\varphi_X(t) + (i\mu - \sigma^2 t)\varphi_X'(t) \\
&= -\sigma^2\varphi_X(t) + (i\mu - \sigma^2 t)^2\varphi_X(t)
\end{aligned}
$$

Em $t = 0$:

$$
\varphi_X(0) = 1, \qquad \varphi_X''(0) = -\sigma^2 + (i\mu)^2 = -\sigma^2 - \mu^2
$$

Portanto,

$$
E(X^2) = -\varphi_X''(0) = \sigma^2 + \mu^2
$$

Função Característica

De forma que,

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$$