Vetores Aleatórios

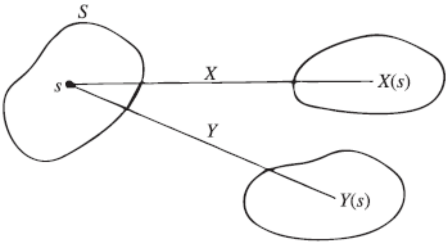
Introdução

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações, associações.

Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Definição: Sejam ε um experimento e S um espaço amostral associado a ε. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional** (também chamada **vetor aleatório**).



Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Se $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s)$, ..., $X_n = X_n(s)$ forem n funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denominaremos $(X_1, \ldots, X_n)$ uma **variável aleatória n-dimensional** (ou um **vetor aleatório n-dimensional**).

Caso discreto

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório n—dimensional discreto** como sendo um vetor formado por n **variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y).

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y).

O conjunto dos termos $\{(x_i, y_j,\ p(x_i, y_j)),\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots\}$ é denominado **distribuição de probabilidade conjunta** de (X, Y).

Função de Probabilidade Conjunta

Para vetores n-dimensionais, a função de probabilidade conjunta é $P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n)$ e satisfaz

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n) = 1$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Note que,

$$X = \{0, 1, 2\}, \quad \text{e} \quad Y = \{0, 1\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Além disso,

$$P(1B, 2B) \;=\; P(X = 2, Y = 0) = P(1B)\, P(2B \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(1B, 2V) \;=\; P(X = 1, Y = 1) = P(1B)\, P(2V \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2B) \;=\; P(X = 1, Y = 0) = P(1V)\, P(2B \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2V) \;=\; P(X = 0, Y = 1) = P(1V)\, P(2V \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Função de Probabilidade Conjunta

$X \backslash Y$	0 (B)	1 (V)	$P(X = x)$
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
$P(Y = y)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1