

Vetores Aleatórios

Data de entrega: 26 de fevereiro de 2026

1. A tabela abaixo dá a **distribuição conjunta** de X e Y :

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-----|-----|-----|
| 0 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 1 | 0,2 | 0,0 | 0,3 |
| 2 | 0,0 | 0,1 | 0,1 |

- (a) Determine as distribuições marginais de X e Y .
 - (b) Calcule a esperança e a variância de cada uma das variáveis X e Y .
 - (c) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.
 - (d) Calcule $P(X = 1 \mid Y = 0)$ e $P(Y = 2 \mid X = 3)$.
 - (e) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X = 2, Y \leq 1)$.
 - (f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y .
-

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com

$$E(X) = E(Y) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$$

Prove que

$$\text{Corr}(U, V) = 0,$$

onde

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = X - Y$$

3. Um aluno faz um teste de múltipla escolha com **4 questões do tipo Verdadeiro–Falso**. Suponha que o aluno esteja “chutando” todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X_1 = número de acertos entre as duas primeiras questões da prova
 - Y_1 = número de acertos entre as duas últimas questões da prova
 - X_2 = número de acertos entre as três primeiras questões da prova
 - Y_2 = número de acertos entre as três últimas questões da prova
- a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1 , Y_1 , X_2 , Y_2 e suas probabilidades.
- b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.
- c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.
- d) Verifique se X_1 e Y_1 são independentes.
- e) Verifique se X_2 e Y_2 são independentes.
- f) Por que já era de se esperar as diferenças observadas em (d) e (e)?
- g) Calcule a covariância entre X_1 e Y_1 .
- h) Calcule a covariância entre X_2 e Y_2 .
- i) Calcule as seguintes distribuições condicionais com suas esperanças condicionais:

$$X_2 \mid Y_2 = 0, \quad X_2 \mid Y_2 = 1, \quad X_2 \mid Y_2 = 2, \quad X_2 \mid Y_2 = 3$$

- j) Calcule $E[E(X_2 \mid Y_2)]$.
-

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = 4xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

e $f(x, y) = 0$ fora desse domínio.

Verifique se X e Y são independentes.

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função densidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} cx, & 0 < y < x, \quad y < 1 - x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Qual o valor de c para que a função acima seja realmente uma função densidade conjunta?
- Encontre a distribuição marginal de X . Encontre $E(X)$ e $Var(X)$.
- Encontre a distribuição marginal de Y . Encontre $E(Y)$ e $Var(Y)$.
- Calcule a distribuição condicional de X dado $Y = y$ e sua esperança $g(y) = E(X|Y = y)$.
- Calcule a distribuição condicional de Y dado $X = x$ e sua esperança $h(x) = E(Y|X = x)$.
- Encontre $Cov(X, Y)$ e $Cor(X, Y)$.

6. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}x(x - y), & 0 < x < 2, \quad -x < y < x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique se a função acima realmente é uma função densidade conjunta.
- Encontre as densidades marginais e suas esperanças.
- Encontre a distribuição condicional de Y dado $X = x$.
- Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = y$.

7. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é **constante** na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$A = \{(x, y) : 0 < y < x, x + y < 1\}$$

Determine:

- (a) a função densidade conjunta de X e Y .
- (b) as marginais f_X e f_Y .
- (c) $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.
- (d) $P(X < 0,5, Y > 0,25)$.
- (e) $P(X + Y > 1/2)$.
- (f) a covariância e a correlação entre X e Y .

8. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é **constante** na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$A = \{(x, y) : 0 < x < 1, x + y < 1\}$$

Determine:

- (a) a função densidade conjunta de X e Y .
- (b) as marginais f_X e f_Y .
- (c) $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.
- (d) $P(X < 0,5, Y > 0,5)$.
- (e) a covariância e a correlação entre X e Y .

9. Considere a seguinte função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Obtenha as densidades marginais de X e Y , identificando as respectivas distribuições de probabilidade.

(b) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.

10. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com funções densidades iguais a $f(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, obtenha a densidade conjunta de $U = X + Y$ e $V = 3X + 2Y$. Neste caso, U e V são independentes?