

Revisão Probabilidade I

1 Variáveis Aleatórias (VAs)

Definição. Uma variável aleatória é uma função que associa a cada resultado do experimento um número real.

- **Discretas:** suporte finito/enumerável (ex.: $0, 1, 2, \dots$). Caracterizam-se por **função de probabilidade** $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$. Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1} p_i = 1$
- **Contínuas:** suporte intervalar. Caracterizam-se por **densidade** $f(x)$ tal que $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$. Uma função densidade satisfaz $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

A **função de distribuição** é $F(x) = P(X \leq x)$. Em ambos os casos, $F(x)$ é não-decrescente e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

2 Momentos

Seja X uma variável aleatória.

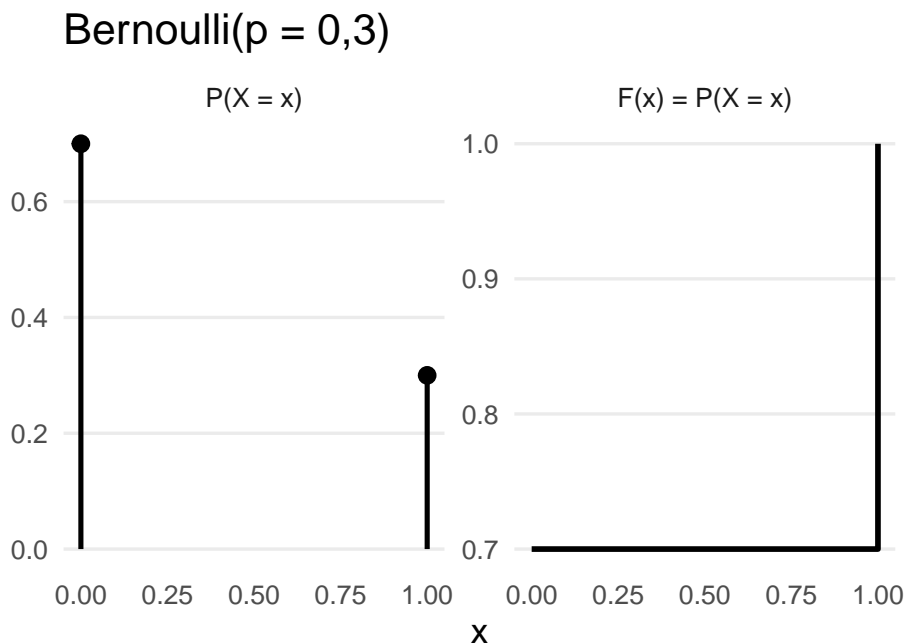
- **Esperança:** $E[X] = \sum_x x p(x)$ (discreta) ou $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ (contínua).
- **Variância:** $Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$.
- **Desigualdade de Jensen (convexa ϕ):** $\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$.
- **Propriedades úteis:** linearidade $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

3 Distribuições Discretas

3.1 Bernoulli (p)

Interpretação: 1 sucesso/fracasso em único ensaio.

Item	Expressão
Suporte	$x \in \{0, 1\}$
Parâmetro	$0 < p < 1$
Função de probabilidade $p(x)$	$p^x(1-p)^{1-x}$
Distribuição $F(x)$	0 se $x < 0$; $1-p$ se $0 \leq x < 1$; 1 se $x \geq 1$
Esperança $E[X]$	p
Variância $Var(X)$	$p(1-p)$



i Mostrar demonstração

A variável Bernoulli assume valores 0 e 1, com $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = 1 - p$.

Esperança

$$E(X) = 0(1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Segundo momento

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p.$$

Variância

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exemplo: Um alarme dispara corretamente com probabilidade $p = 0,92$. Seja $X = 1$ se o alarme dispara corretamente, 0 caso contrário.

a. Calcule $P(X = 1)$ e $P(X = 0)$.

b. Calcule $E[X]$ e interprete.

Solução:

- $P(X = 1) = 0,92$
- $P(X = 0) = 0,08$

$$E[X] = p = 0,92$$

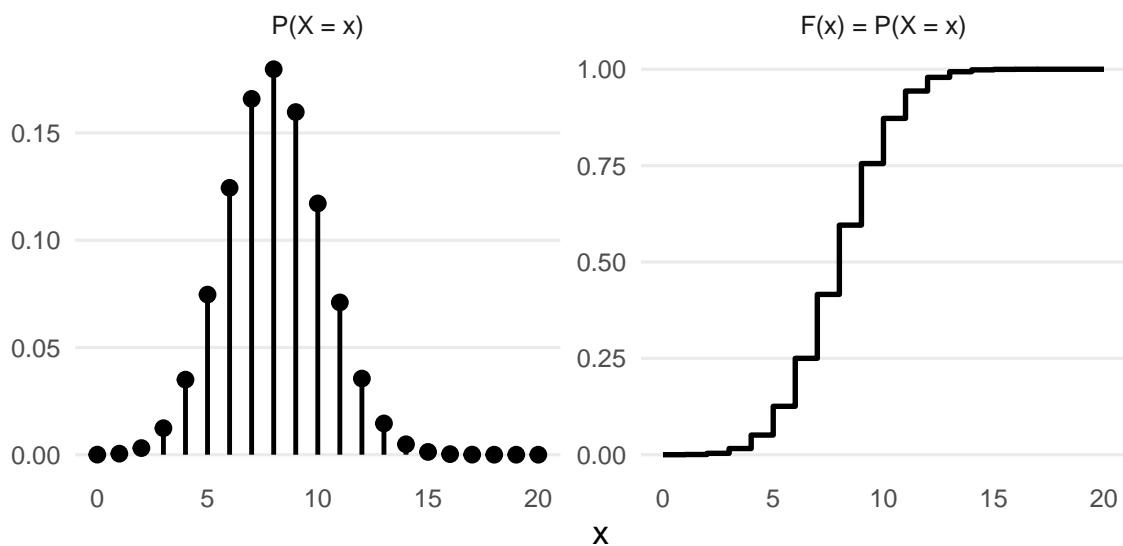
Interpretação: o alarme funciona corretamente em **92% dos acionamentos**.

3.2 Binomial (n, p)

Interpretação: número de sucessos em n ensaios independentes, prob. p .

Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, \dots, n$
Parâmetros	$n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$
$p(k)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$
$E[X]$	np
$\text{Var}(X)$	$np(1-p)$

Binomial($n = 20, p = 0,4$)



i Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, isto é,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Vamos demonstrar:

- $E(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$

usando

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k), \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de E(X)

Pela definição:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Note que o termo com $k = 0$ é zero (pois tem um fator k), então podemos começar em $k = 1$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Usamos agora a identidade combinatória

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Substituindo:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Colocamos n em evidência:

$$E(X) = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Agora fazemos a mudança de índice $j = k - 1$:

- quando $k = 1$, $j = 0$;
- quando $k = n$, $j = n - 1$;
- $k = j + 1$.

Então:

$$E(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-(j+1)}.$$

Reorganizando as potências:

$$p^{j+1} = p \cdot p^j, \quad n - (j + 1) = (n - 1) - j,$$

obtemos:

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

Repare que a soma

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

é exatamente o desenvolvimento binomial de

$$(p + (1-p))^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

Portanto:

$$E(X) = np \cdot 1 = np.$$

Cálculo de $E(X^2)$

Pela definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Truque clássico: escrever

$$k^2 = k(k-1) + k.$$

Então:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Chamemos:

- $A = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $B = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Logo, $E(X^2) = A + B$.

Mas repare que $B = E(X)$, que já calculamos:

$$B = E(X) = np.$$

Falta calcular A .

Cálculo de A

Usamos agora a identidade:

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Então:

$$A = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Podemos tirar $n(n-1)$ em evidência:

$$A = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Agora faça a mudança de índice $j = k - 2$:

- quando $k = 2, j = 0$;
- quando $k = n, j = n - 2$;
- $k = j + 2$.

Substituindo:

$$A = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} (1-p)^{n-(j+2)}.$$

Reorganizando as potências:

$$p^{j+2} = p^2 p^j, \quad n - (j + 2) = (n - 2) - j,$$

temos:

$$A = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{(n-2)-j}.$$

A soma é novamente um binômio:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{(n-2)-j} = (p + (1-p))^{n-2} = 1^{n-2} = 1.$$

Portanto:

$$A = n(n-1)p^2.$$

Conclusão para $E(X^2)$

Lembrando que:

- $A = n(n-1)p^2$
- $B = np$

temos:

$$E(X^2) = A + B = n(n-1)p^2 + np.$$

Cálculo de $\text{Var}(X)$

Agora usamos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já temos:

- $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$
- $E(X) = np$

Logo:

$$\text{Var}(X) = (n(n-1)p^2 + np) - (np)^2.$$

Agora expandimos:

$$(np)^2 = n^2p^2,$$

então:

$$\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2.$$

Note que

$$n(n-1)p^2 = (n^2 - n)p^2,$$

então:

$$\text{Var}(X) = (n^2 - n)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1 - p).$$

Logo,

Para $X \sim \text{Binomial}(n, p)$,

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Exemplo: A probabilidade de um cliente comprar um produto é $p = 0,3$. Em um dia, 20 clientes entram na loja. Seja X = número de compras.

a. Calcule $P(X = 8)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} (0,3)^8 (0,7)^{12} \approx 0,053$$

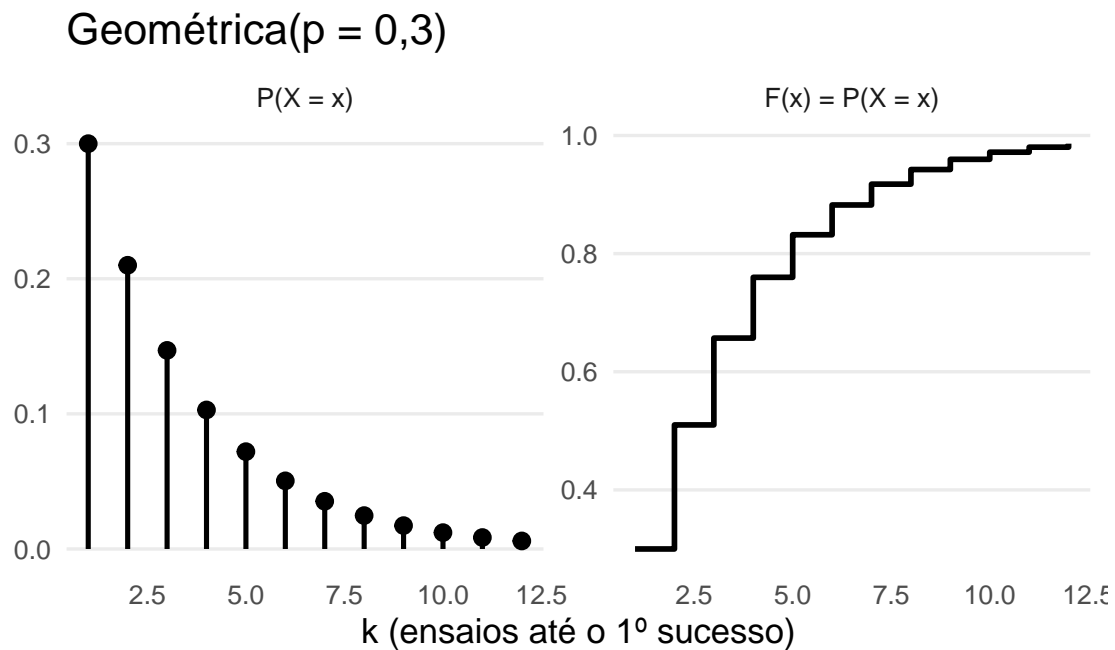
b.

$$E[X] = np = 20 \cdot 0,3 = 6$$

3.3 Geométrica (p)

Convenção usada: X = número de **ensaios até o 1º sucesso** (apoio 1, 2, ...).

Item	Expressão
$p(k)$	$p(1 - p)^{k-1}$
$F(k)$	$1 - (1 - p)^k$
$E[X]$	$1/p$
$Var(X)$	$(1 - p)/p^2$
Propriedade	Sem memória: $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$



i Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Geom}(p)$ com suporte $k = 1, 2, \dots$, isto é,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Vamos demonstrar que

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2},$$

usando as definições

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k), \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$

Pela definição de esperança:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}.$$

Colocamos o fator p em evidência:

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}.$$

Para simplificar, definimos

$$r = 1 - p.$$

Note que $0 < r < 1$. Então a soma fica

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1}.$$

Agora usamos uma identidade clássica de séries: - Sabemos que, para $|r| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

Derivando em relação a r :

$$\frac{d}{dr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1-r} \right) = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Note que o termo $k = 0$ é zero, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Voltando à expressão de $E(X)$:

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Lembrando que $r = 1 - p$, então

$$1 - r = 1 - (1 - p) = p.$$

Logo:

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Cálculo de $E(X^2)$

Pela definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p (1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1},$$

com $r = 1 - p$.

Então precisamos do valor de

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1}.$$

Usaremos de novo a série geométrica e suas derivadas.

Já sabemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

1. **Primeira derivada:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1 - r)^2}.$$

2. **Multiplicando por r :**

$$r \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k r^k = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$

3. **Derivando novamente:** Vamos derivar a expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k$$

em relação a r :

$$\frac{d}{dr} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k r^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1}.$$

Agora derivamos o outro lado:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{(1-r)^2} \right) = \frac{(1-r)^2 - r \cdot 2(1-r)(-1)}{(1-r)^4}.$$

Simplificando o numerador:

$$(1-r)^2 + 2r(1-r) = (1-2r+r^2) + (2r-2r^2) = 1-r^2 = (1-r)(1+r).$$

Assim,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{(1-r)^2} \right) = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^4} = \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Voltando para $E(X^2)$:

$$E(X^2) = p \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Substituímos $r = 1-p$ e $1-r = p$:

- $1+r = 1+(1-p) = 2-p$
- $(1-r)^3 = p^3$

Então:

$$E(X^2) = p \cdot \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Cálculo de $\text{Var}(X)$

Agora usamos

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já encontramos:

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $E(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$

Logo:

$$\text{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p} \right)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Logo,

Para $X \sim \text{Geom}(p)$, com $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, temos:

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemplo: Uma chamada telefônica é atendida com probabilidade $p = 0,15$. Seja X = número de tentativas até o primeiro atendimento.

- Calcule $P(X = 4)$.
- Calcule $P(X > 4)$.
- Determine $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 4) = 0,15(0,85)^3 \approx 0,092$$

b.

$$P(X > 4) = 0,85^4 \approx 0,522$$

c.

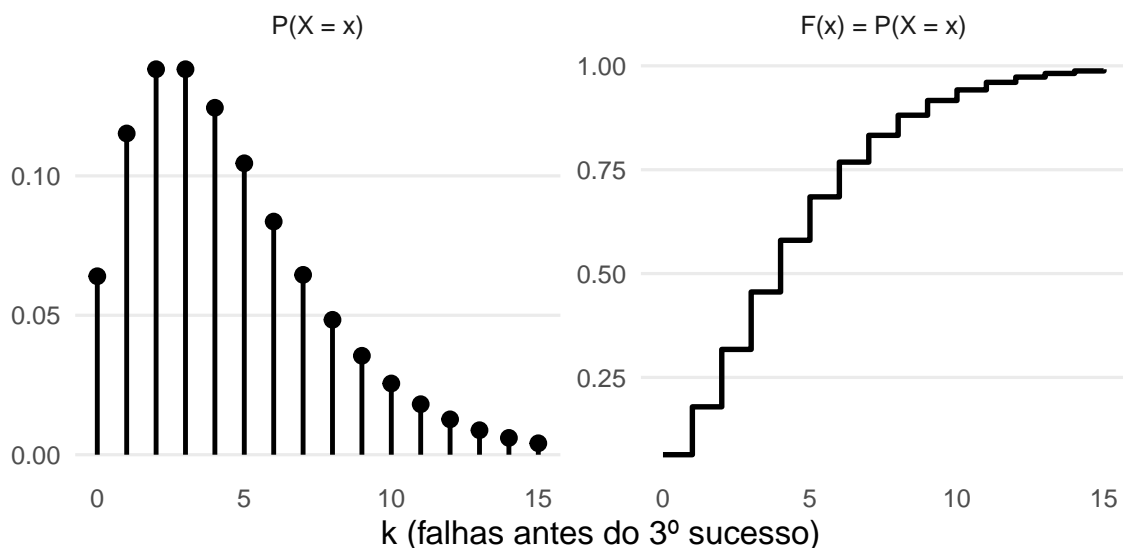
$$E[X] = \frac{1}{0,15} \approx 6,67$$

3.4 Pascal / Binomial Negativa (r, p)

Convenção usada: Y = número de **falhas antes do r -ésimo sucesso** (apoio $0, 1, \dots$).

Item	Expressão
$p(k)$	$\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k \binom{j+r-1}{j}(1-p)^j p^r$
$E[Y]$	$r(1-p)/p$
$Var(Y)$	$r(1-p)/p^2$

Binomial Negativa($r = 3, p = 0,4$)



i Mostrar demonstração

Vamos usar a seguinte **definição**:

- Em cada tentativa, ocorre **sucesso** com probabilidade p e **falha** com probabilidade $1 - p$, independentemente.
- X é o **número de falhas até o r -ésimo sucesso**.
- Dizemos então que $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$, com $r \in \mathbb{N}$.

A função de probabilidade é

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nosso objetivo é demonstrar que

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Em vez de somar diretamente a série da f.p., vamos usar uma **interpretação construída a partir da Geométrica**, que já sabemos tratar.

Ligação com a distribuição geométrica

Considere o processo de Bernoulli (tentativas independentes com probabilidade de sucesso p).

Entre sucessos consecutivos, o número de falhas que ocorre é sempre do mesmo tipo:

- Antes do **1º sucesso**, temos um certo número de falhas Y_1 .
- Entre o **1º e o 2º sucesso**, temos um número de falhas Y_2 .
- ...
- Entre o **(r-1)º** e o **r-ésimo sucesso**, temos um número de falhas Y_r .

Essas quantidades Y_1, Y_2, \dots, Y_r são independentes e têm **mesma distribuição**. Além disso, o número total de falhas até o r -ésimo sucesso é

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r.$$

Vamos então:

1. Determinar a distribuição de cada Y_i .
2. Calcular $E(Y_i)$ e $\text{Var}(Y_i)$.
3. Somar para obter $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Distribuição de Y_i (número de falhas entre dois sucessos)

Entre dois sucessos consecutivos, o experimento funciona assim:

- Observamos uma sequência de falhas, todas com probabilidade $(1 - p)$,
- seguida de um sucesso, com probabilidade p .

Se $Y_i = k$, isso significa: falha, falha, ..., falha (k vezes), depois um sucesso. Logo

$$P(Y_i = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Essa é uma **Geométrica com suporte em** $\{0, 1, 2, \dots\}$, às vezes chamada de **geométrica “deslocada”** ou “número de falhas antes do sucesso”.

Sabemos que:

- Se G tem $P(G = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, então $E(G) = \frac{1}{p}$ e $\text{Var}(G) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Se definimos $Y = G - 1$, então Y tem suporte $\{0, 1, 2, \dots\}$, e

$$E(Y) = E(G - 1) = E(G) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p},$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(G - 1) = \text{Var}(G) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Portanto, cada Y_i tem:

$$E(Y_i) = \frac{1-p}{p}, \quad \text{Var}(Y_i) = \frac{1-p}{p^2}.$$

E os Y_i são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídos).

Expressão de X como soma de geométricas

Relembrando:

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r,$$

com Y_i independentes e com a mesma distribuição.

Vamos usar:

- **Linearidade da esperança:**

$$E(X) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_r),$$

- **Variância da soma de independentes:**

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}(Y_r),$$

pois não há termos de covariância (independência \Rightarrow covariância zero).

Cálculo de $E(X)$

Pela linearidade da esperança:

$$E(X) = E(Y_1 + \cdots + Y_r) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_r).$$

Como todos têm a mesma esperança:

$$E(X) = r \cdot E(Y_1).$$

Usando o valor encontrado para a geométrica:

$$E(Y_1) = \frac{1-p}{p},$$

então:

$$E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p} = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Este é o valor esperado da Binomial Negativa (número de falhas até o r -ésimo sucesso).

Cálculo de $\text{Var}(X)$

Da variância da soma de variáveis independentes:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_r) = \text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}(Y_r),$$

pois $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ para $i \neq j$.
Como todas têm a mesma variância:

$$\text{Var}(X) = r \cdot \text{Var}(Y_1).$$

Usando o valor da geométrica:

$$\text{Var}(Y_1) = \frac{1-p}{p^2},$$

obtemos:

$$\text{Var}(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Portanto, para $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$ (número de falhas até o r -ésimo sucesso), temos:

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exemplo: Um pesquisador precisa de 4 pessoas que aceitem responder um questionário. Cada tentativa tem probabilidade $p = 0,25$ de sucesso. Seja $Y =$ número de recusas até o 4º sucesso.

- a. Calcule $P(Y = 6)$.
- b. Calcule $E[Y]$.

Solução:

a.

$$P(Y = 6) = \binom{9}{6} (0,75)^6 (0,25)^4 \approx 0,050$$

b.

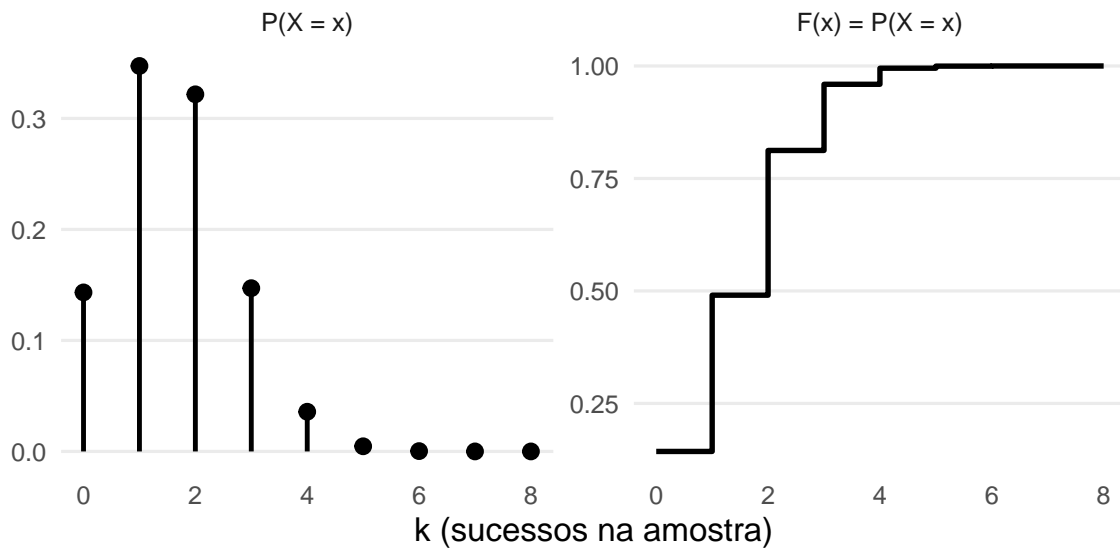
$$E[Y] = \frac{4(1-0,25)}{0,25} = 12$$

3.5 Hipergeométrica (N, K, n)

Amostragem sem reposição. N total, K sucessos na população, amostra n .

Item	Expressão
Suporte	$k = \max(0, n - (N - K)), \dots, \min(n, K)$
$p(k)$	$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$E[X]$	$n \frac{K}{N}$
$Var(X)$	$n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$

Hipergeométrica(N=50, K=8, n=10)



Mostrar demonstração

Considere:

- Uma população finita com N elementos.
- K desses N elementos são “sucessos” (por exemplo, peças defeituosas).
- Os demais $N - K$ são “fracassos”.
- Retiramos uma amostra **sem reposição** de tamanho n .

Seja X o **número de sucessos na amostra**. Dizemos que

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n).$$

A função de probabilidade é

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, \min(K, n).$$

Queremos demonstrar que:

$$E(X) = n \frac{K}{N}, \quad \text{Var}(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Em vez de somar diretamente a f.p., vamos usar uma abordagem com **variáveis indicadoras**.

Representando X como soma de indicadores

Imagine que a amostra de tamanho n é extraída em **ordem**: 1ª retirada, 2ª retirada, ..., n -ésima retirada.

Defina, para cada $i = 1, \dots, n$:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo elemento sorteado é sucesso;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então o número total de sucessos na amostra é

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Isso é intuitivo: cada Y_i indica se houve sucesso naquela retirada, e a soma conta quantos sucessos houve ao todo.

Esperança de X via linearidade

Usando linearidade da esperança:

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n).$$

Como a população é homogênea e a amostragem é simétrica, todas as retiradas têm a mesma probabilidade de ser sucesso. Ou seja:

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \dots = E(Y_n).$$

Basta, então, calcular $E(Y_1)$.

Cálculo de $E(Y_i)$

Por definição,

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1).$$

Mas $Y_i = 1$ significa que, na i -ésima retirada, escolhemos um elemento “sucesso”.

Como as retiradas são todas igualmente prováveis (sem viés) e a população tem K sucessos em N elementos, temos:

$$P(Y_i = 1) = \frac{K}{N}, \quad \text{para qualquer } i.$$

Logo,

$$E(Y_i) = \frac{K}{N}.$$

Portanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = n \cdot \frac{K}{N}.$$

Isso demonstra:

$$E(X) = n \frac{K}{N}.$$

Variância de X :

Queremos agora

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1 + \dots + Y_n).$$

Lembre que, em geral, para variáveis quaisquer:

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

As Y_i **não são independentes** (pois a amostragem é sem reposição), então precisamos levar em conta as covariâncias.

Pela simetria do problema:

- Todas as variâncias $\text{Var}(Y_i)$ são iguais.
- Todas as covariâncias $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$ com $i \neq j$ são iguais.

Então podemos escrever:

$$\text{Var}(X) = n \text{Var}(Y_1) + 2 \binom{n}{2} \text{Cov}(Y_1, Y_2) = n \text{Var}(Y_1) + n(n-1) \text{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Assim, precisamos calcular:

1. $\text{Var}(Y_1)$
 2. $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$
-

Cálculo de $\text{Var}(Y_1)$

Como Y_1 é uma variável indicadora (0 ou 1) com

$$P(Y_1 = 1) = \frac{K}{N}, \quad P(Y_1 = 0) = 1 - \frac{K}{N},$$

temos:

$$E(Y_1) = \frac{K}{N}, \quad E(Y_1^2) = E(Y_1) = \frac{K}{N}$$

(pois $Y_1^2 = Y_1$ quando $Y_1 \in \{0, 1\}$).

Logo:

$$\text{Var}(Y_1) = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2 = \frac{K}{N} - \left(\frac{K}{N}\right)^2 = \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N} \cdot \frac{N - K}{N} = \frac{K(N - K)}{N^2}.$$

Cálculo de $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$

Por definição:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2).$$

Já sabemos que

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \frac{K}{N}.$$

Então precisamos de $E(Y_1 Y_2)$, que é

$$E(Y_1 Y_2) = P(Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = 1),$$

pois $Y_1 Y_2 = 1$ somente quando ambos são 1.

Cálculo de $P(Y_1 = 1, Y_2 = 1)$

Interprete o sorteio em duas etapas, sem reposição:

1. Primeira retirada é sucesso: probabilidade K/N .
2. Dada uma primeira retirada de sucesso, restam:
 - $K - 1$ sucessos
 - em um total de $N - 1$ elementos.

Então a probabilidade de a **segunda** retirada também ser sucesso é:

$$\frac{K-1}{N-1}.$$

Logo:

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{K}{N} \cdot \frac{K-1}{N-1} = \frac{K(K-1)}{N(N-1)}.$$

Portanto:

$$E(Y_1 Y_2) = \frac{K(K-1)}{N(N-1)}.$$

Covariância

Agora:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \frac{K(K-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{K}{N}\right)^2.$$

Vamos colocar os termos no mesmo denominador. Note que

$$\left(\frac{K}{N}\right)^2 = \frac{K^2}{N^2} = \frac{K^2(N-1)}{N^2(N-1)}.$$

E

$$\frac{K(K-1)}{N(N-1)} = \frac{K(K-1)N}{N^2(N-1)}.$$

Então:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{K(K-1)N - K^2(N-1)}{N^2(N-1)}.$$

Simplificando o numerador:

$$K(K-1)N - K^2(N-1) = K[N(K-1) - K(N-1)].$$

Dentro dos colchetes:

$$N(K-1) - K(N-1) = (NK - N) - (KN - K) = NK - N - KN + K = -N + K = K - N.$$

Logo o numerador é:

$$K(K - N) = -K(N - K).$$

Portanto:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{-K(N - K)}{N^2(N - 1)}.$$

Isso mostra que a covariância é **negativa**: faz sentido, pois sem reposição, ao observar um sucesso na primeira retirada, fica ligeiramente **menos provável** ver outro sucesso na segunda.

Variância de X

Relembrando:

$$\text{Var}(X) = n \text{Var}(Y_1) + n(n-1) \text{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Substituímos os valores encontrados:

- $\text{Var}(Y_1) = \frac{K(N-K)}{N^2}$
- $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -\frac{K(N-K)}{N^2(N-1)}$

Então:

$$\text{Var}(X) = n \cdot \frac{K(N-K)}{N^2} + n(n-1) \cdot \left(-\frac{K(N-K)}{N^2(N-1)} \right).$$

Colocamos o fator comum $\frac{K(N-K)}{N^2}$ em evidência:

$$\text{Var}(X) = \frac{K(N-K)}{N^2} \left[n - \frac{n(n-1)}{N-1} \right].$$

Agora vamos simplificar o colchete:

$$n - \frac{n(n-1)}{N-1} = n \left[1 - \frac{n-1}{N-1} \right] = n \left[\frac{N-1-(n-1)}{N-1} \right] = n \left[\frac{N-n}{N-1} \right].$$

Portanto:

$$\text{Var}(X) = \frac{K(N-K)}{N^2} \cdot n \frac{N-n}{N-1}.$$

Podemos reescrever $K(N-K)/N^2$ como

$$\frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N} \right).$$

Assim:

$$\text{Var}(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Assim, para $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n)$:

- **Esperança:**

$$E(X) = n \frac{K}{N}.$$

- **Variância:**

$$\text{Var}(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}.$$

Exemplo: Um lote tem $N = 80$ peças, sendo $K = 10$ defeituosas. Retira-se uma amostra de $n = 12$ peças. Seja X = número de defeituosas na amostra.

a. Calcule $P(X = 2)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{70}{10}}{\binom{80}{12}}$$

Resultado aproximado: **0,283**

b.

$$E[X] = 12 \cdot \frac{10}{80} = 1,5$$

3.6 Poisson (λ)

Contagem de eventos raros em intervalo fixo.

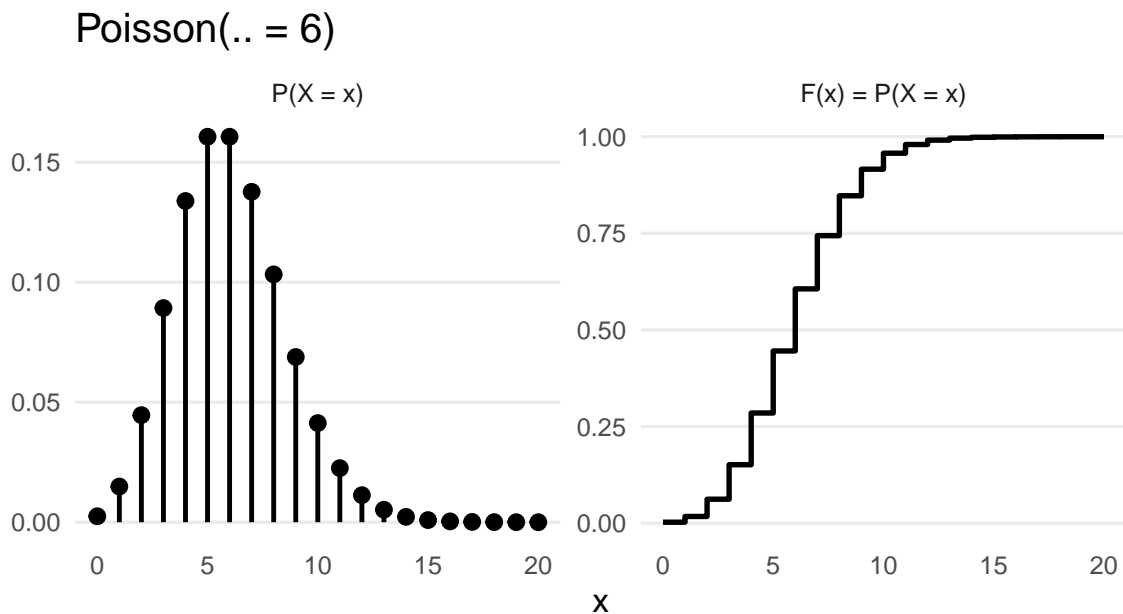
Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, 2, \dots$
$p(k)$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \lambda^j / j!$
$E[X]$	λ
$Var(X)$	λ

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Poisson(= 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Poisson(= 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Poisson(= 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Poisson(= 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>



i Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda > 0$. A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nosso objetivo é demonstrar:

$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Usaremos somente as definições:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k), \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$

Pela definição de esperança:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

O termo $k = 0$ é nulo, então:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Usamos a identidade:

$$k \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.$$

Logo:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.$$

Agora fazemos a mudança de variável $j = k - 1$:

- quando $k = 1$, $j = 0$
- quando $k \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$

Então:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

Mas:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}.$$

Portanto:

$$E(X) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Assim demonstramos:

$$E(X) = \lambda.$$

Cálculo de $E(X^2)$

Agora usamos a definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Truque clássico: escrever

$$k^2 = k(k-1) + k.$$

Então:

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Chamemos:

- Primeiro somatório:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Segundo somatório:

$$B = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

Mas já vimos antes que $B = E(X) = \lambda$.

Vamos calcular A .

Cálculo do termo A

Note que:

$$k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{(k-2)!}.$$

Portanto:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}.$$

Fazemos a mudança de variável $j = k - 2$:

- quando $k = 2$, $j = 0$
- quando $k \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$

Então:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

A soma é novamente e^λ , logo:

$$A = e^{-\lambda} \lambda^2 e^\lambda = \lambda^2.$$

Agora juntamos:

- $A = \lambda^2$
- $B = \lambda$

Portanto:

$$E(X^2) = A + B = \lambda^2 + \lambda.$$

Variância

Usamos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Substituindo:

- $E(X) = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Temos:

$$\text{Var}(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Logo, para $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Exemplo: A taxa média de chamadas em um call center é $\lambda = 12$ chamadas por hora. Seja N = número de chamadas.

- Calcule $P(N = 10)$.
- Calcule $P(N \geq 15)$.
- Calcule $E[N]$ e $\text{Var}(N)$.

Solução:

a.

$$P(N = 10) = e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \approx 0,104$$

b.

$$P(N \geq 15) = 1 - P(N \leq 14) \approx 0,263$$

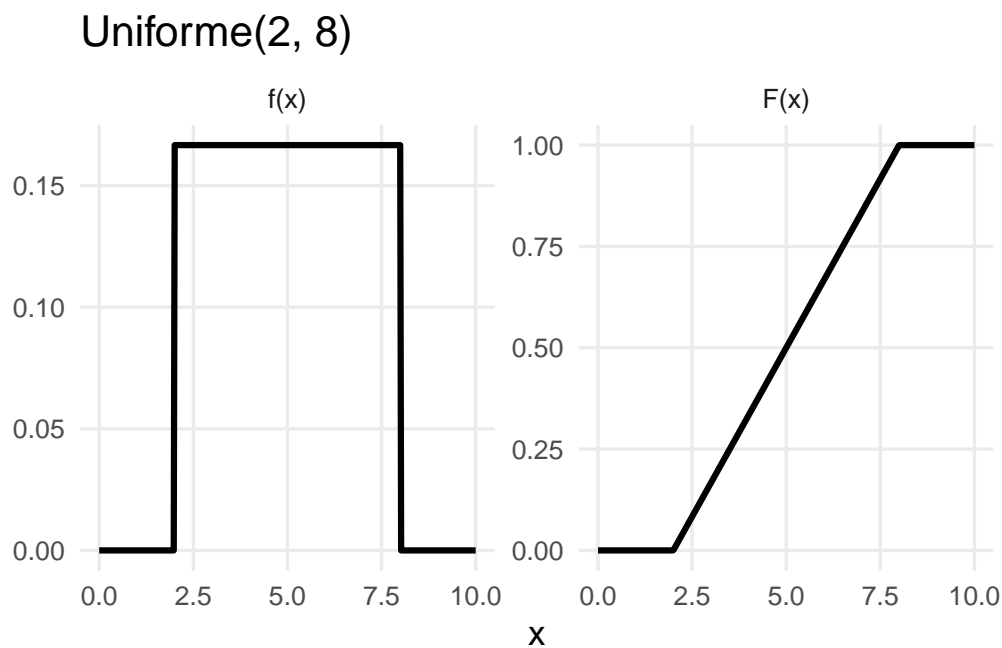
c.

$$E[N] = 12, \quad \text{Var}(N) = 12$$

4 Distribuições Contínuas

4.1 Uniforme (a, b)

Item	Expressão
Suporte	$a \leq x \leq b$
$f(x)$	$1/(b-a)$
$F(x)$	$(x-a)/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$
$E[X]$	$(a+b)/2$
$\text{Var}(X)$	$(b-a)^2/12$



i Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, com $a < b$.

A função densidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nosso objetivo é demonstrar que

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

usando apenas as definições:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$

Pela definição:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Como $f(x) = 0$ fora do intervalo $[a, b]$, temos:

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx.$$

Calculamos a integral:

$$\int_a^b x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Logo:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Fatoramos $b^2 - a^2$:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Substituindo:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Portanto:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Cálculo de $E(X^2)$

Pela definição:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx.$$

Calculamos a integral:

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Então:

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.$$

Agora usamos a fatoração:

$$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2).$$

Substituindo:

$$E(X^2) = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Portanto:

$$E(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Cálculo de $\text{Var}(X)$

Usamos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já obtivemos:

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $E(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$

Então:

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

Primeiro, calculemos o quadrado:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Agora escrevemos a variância com denominador comum. O denominador comum entre 3 e 4 é 12:

- Primeiro termo:

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{12}.$$

- Segundo termo:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{12}.$$

Então:

$$\text{Var}(X) = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{12} - \frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{12}.$$

Subtraindo os numeradores:

$$4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2) = 4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2 = (4a^2 - 3a^2) + (4ab - 6ab) + (4b^2 - 3b^2) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Logo:

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b - a)^2}{12},$$

pois

$$a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2.$$

Assim, para $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, demonstramos que:

$$E(X) = \frac{a + b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Exemplo: O tempo de resposta de um servidor *web* varia uniformemente entre 50 ms e 90 ms, ou seja $T \sim U(50, 90)$.

- Calcule $P(60 < T < 80)$.
- Calcule $E[T]$ e $\text{Var}(T)$.
- Interprete o valor esperado no contexto.

Solução:

-

$$P(60 < T < 80) = \frac{80 - 60}{90 - 50} = \frac{20}{40} = 0,5$$

-

$$E[T] = \frac{50 + 90}{2} = 70$$

$$Var(T) = \frac{(90 - 50)^2}{12} = \frac{1600}{12} \approx 133,33$$

c. O tempo médio de resposta é 70 ms.

4.2 Exponencial (λ)

Item	Expressão
Suporte	$x \geq 0$
$f(x)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
$F(x)$	$1 - e^{-\lambda x}$
$E[X]$	$1/\lambda$
$Var(X)$	$1/\lambda^2$
Propriedade	Sem memória: $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$

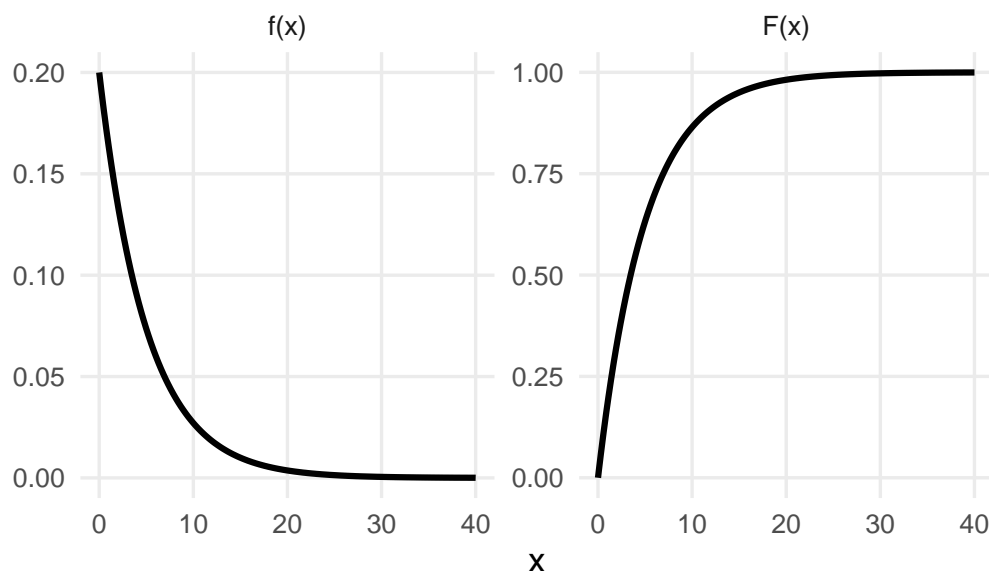
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Exponencial(= 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Exponencial(= 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Exponencial(= 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Exponencial(= 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>

Exponencial(.. = 0,2)



i Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, com $\lambda > 0$.

A função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo é demonstrar:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

usando apenas as definições:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx, \quad E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Cálculo de $E(X)$

Pela definição:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Para resolver a integral, usamos **integração por partes**.

Escolhemos: - $u = x \rightarrow du = dx$ - $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \rightarrow v = -e^{-\lambda x}$
Aplicando integração por partes:

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx.$$

Agora avaliamos cada termo:

1. Primeira parte:

- Quando $x \rightarrow \infty$: $x e^{-\lambda x} \rightarrow 0$.
- Quando $x = 0$: $0 \cdot e^0 = 0$.

Logo:

$$[-x e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = 0.$$

2. Integral restante:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Cálculo de $E(X^2)$

Pela definição:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Vamos aplicar **integração por partes duas vezes**.

Primeira integração por partes

Escolha: - $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$ - $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \rightarrow v = -e^{-\lambda x}$

Então:

$$E(X^2) = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx.$$

O primeiro termo é zero, pelo mesmo argumento anterior.

Assim:

$$E(X^2) = 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Segunda integração por partes

Agora resolvemos:

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Escolha: - $u = x \rightarrow du = dx$ - $dv = e^{-\lambda x} dx \rightarrow v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

Então:

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx.$$

O primeiro termo novamente é zero.

Resta:

$$\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Voltando ao ponto onde paramos:

$$E(X^2) = 2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cálculo da variância

Usamos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Substituindo:

- $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Então:

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Logo, para $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exemplo: O tempo entre chegadas ao caixa segue $X \sim \text{Exp}(0,2)$.

- Calcule $P(X > 8)$.
- Determine a mediana.
- Interprete a propriedade “sem memória”.

Solução:

a.

$$P(X > 8) = e^{-0,2 \cdot 8} = e^{-1,6} \approx 0,2019$$

b.

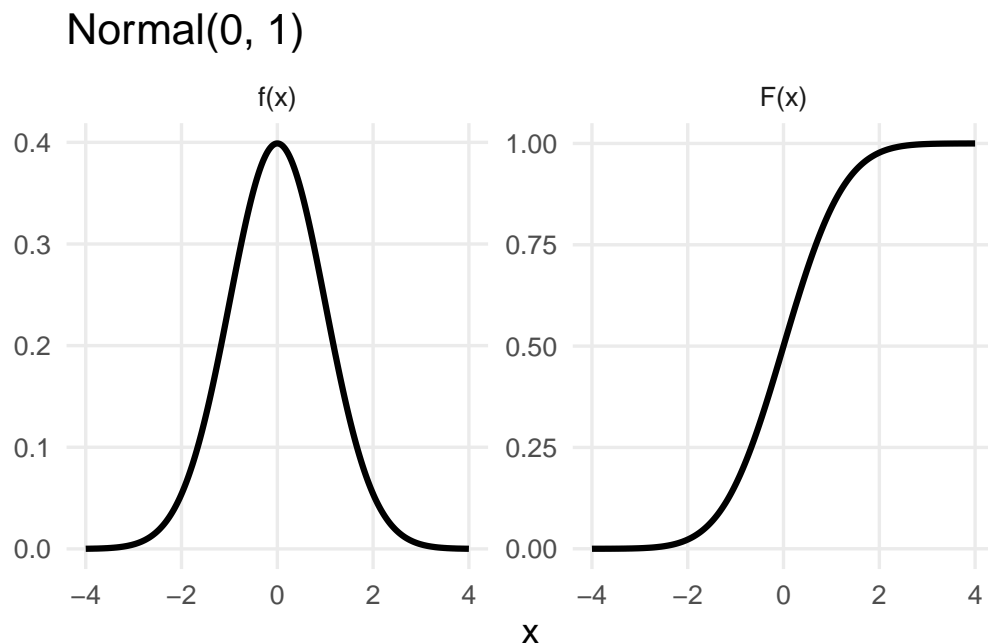
$$m = \frac{\ln 2}{0,2} = 5 \ln 2 \approx 3,47$$

c. O tempo adicional não depende do tempo já passado.

4.3 Normal (μ, σ^2)

Item	Expressão
Suporte	$x \in \mathbb{R}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
$F(x)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (não possui forma fechada)
$E[X]$	μ
$Var(X)$	σ^2

Uso de Tabelas: padronize $Z = (X - \mu)/\sigma$ e leia $P(Z \leq z)$ na tabela da Normal padrão $\Phi(z)$.



i Mostrar demonstração

Vamos considerar uma variável aleatória normal geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma > 0.$$

A densidade é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nosso objetivo é demonstrar, a partir das definições, que

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

A estratégia será:

1. Calcular $E(Z)$ e $\text{Var}(Z)$ para a **normal padrão** $Z \sim N(0, 1)$.
2. Usar a relação $X = \mu + \sigma Z$.

Normal padrão $Z \sim N(0, 1)$

Para a normal padrão, a densidade é

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Queremos mostrar que:

$$E(Z) = 0, \quad E(Z^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(Z) = 1.$$

Cálculo de $E(Z)$

Pela definição:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz.$$

Observe que:

- A função $e^{-z^2/2}$ é **par** (simétrica): $e^{-(-z)^2/2} = e^{-z^2/2}$.
- A função z é **ímpar**: $(-z) = -z$.
- Logo, o produto $ze^{-z^2/2}$ é **ímpar**.

A integral de uma função ímpar em intervalo simétrico é zero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2} dz = 0.$$

Portanto:

$$E(Z) = 0.$$

Cálculo de $E(Z^2)$

Pela definição:

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz.$$

Para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz,$$

vamos usar um truque padrão com um parâmetro auxiliar.

Considere, para $a > 0$:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/2} dz.$$

Este é um **integral gaussiano**. Sabe-se (ou demonstra-se via coordenadas polares) que

$$I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Agora vamos derivar $I(a)$ em relação a a para obter uma integral com z^2 .

Derivando $I(a)$

Por um lado, derivando “dentro” da integral (legítimo sob condições usuais):

$$I'(a) = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a} (e^{-az^2/2}) dz.$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{-az^2/2} = -\frac{z^2}{2} e^{-az^2/2}.$$

Logo:

$$I'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{z^2}{2} e^{-az^2/2} dz = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2} dz.$$

Por outro lado, derivando a expressão fechada

$$I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = (2\pi)^{1/2} a^{-1/2},$$

temos

$$I'(a) = (2\pi)^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) a^{-3/2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} a^{-3/2}.$$

Igualando as duas expressões para $I'(a)$:

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2} dz = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} a^{-3/2}.$$

Multiplicando por -2 ambos os lados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2} dz = \sqrt{2\pi} a^{-3/2}.$$

Aplicando o resultado em $a = 1$

Queremos o caso com $a = 1$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz.$$

Pela fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} \cdot 1^{-3/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Agora voltamos para $E(Z^2)$:

$$E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

Logo:

$$E(Z^2) = 1.$$

Variância da normal padrão

A variância é

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 1 - 0^2 = 1.$$

Concluimos:

$$E(Z) = 0, \quad \text{Var}(Z) = 1 \quad \text{para } Z \sim N(0, 1).$$

Normal geral $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Uma variável normal geral pode ser escrita como

$$X = \mu + \sigma Z,$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

Vamos usar essa relação para encontrar $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Cálculo de $E(X)$

Usando a linearidade da esperança:

$$E(X) = E(\mu + \sigma Z) = E(\mu) + E(\sigma Z) = \mu + \sigma E(Z).$$

Como já mostramos que $E(Z) = 0$, obtemos:

$$E(X) = \mu + \sigma \cdot 0 = \mu.$$

Cálculo de $\text{Var}(X)$

Usamos a propriedade de variância para transformações lineares:

$$\text{Var}(a + bZ) = b^2 \text{Var}(Z).$$

Aqui, $a = \mu$ e $b = \sigma$, então:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 \text{Var}(Z).$$

Sabemos que $\text{Var}(Z) = 1$, logo:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

Assim, para uma variável aleatória normal geral $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, demonstramos que:

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Exemplo: Pesos de pacotes seguem $W \sim N(25, 1,5^2)$.

- Calcule $P(24 < W < 27)$.
- Determine o percentil 95%.
- Interprete o percentil no controle de qualidade.

Solução:

a.

$$P(24 < W < 27) = P(-0,67 < Z < 1,33) = \Phi(1,33) - \Phi(-0,67)$$

$$\approx 0,9082 - 0,2514 = 0,6568$$

b.

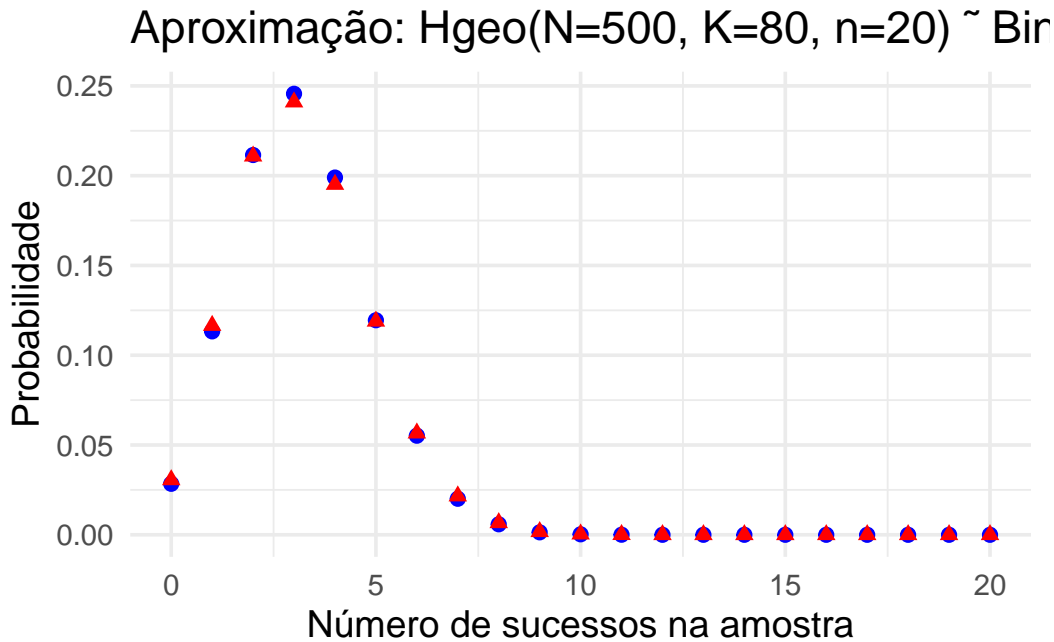
$$x_{0,95} = 25 + 1,645 \cdot 1,5 = 27,4675$$

- c. 95% dos pacotes pesam até 27,47 kg.

5 Aproximações Clássicas

5.1 Hipergeométrica \approx Binomial

Condição: população grande vs. amostra pequena (fração amostral n/N pequena).
Use $X \sim \text{Bin}(n, p = K/N)$ como aproximação.



5.2 Binomial \approx Poisson

Condição: n grande, p pequeno, $\lambda = np$ moderado.

Aproximação: $P_{\text{Bin}}(X = k) \approx e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

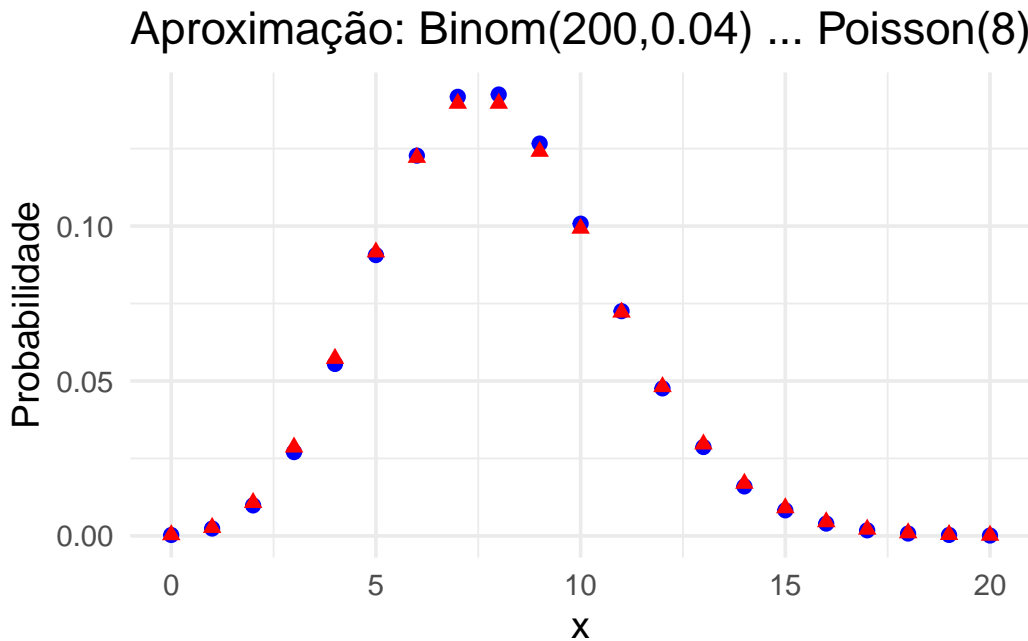
```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>



5.3 Binomial \approx Normal

Condição: $np(1 - p) \gtrsim 10$.

Aproximação: $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1 - p))$ com **correção de continuidade**.

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

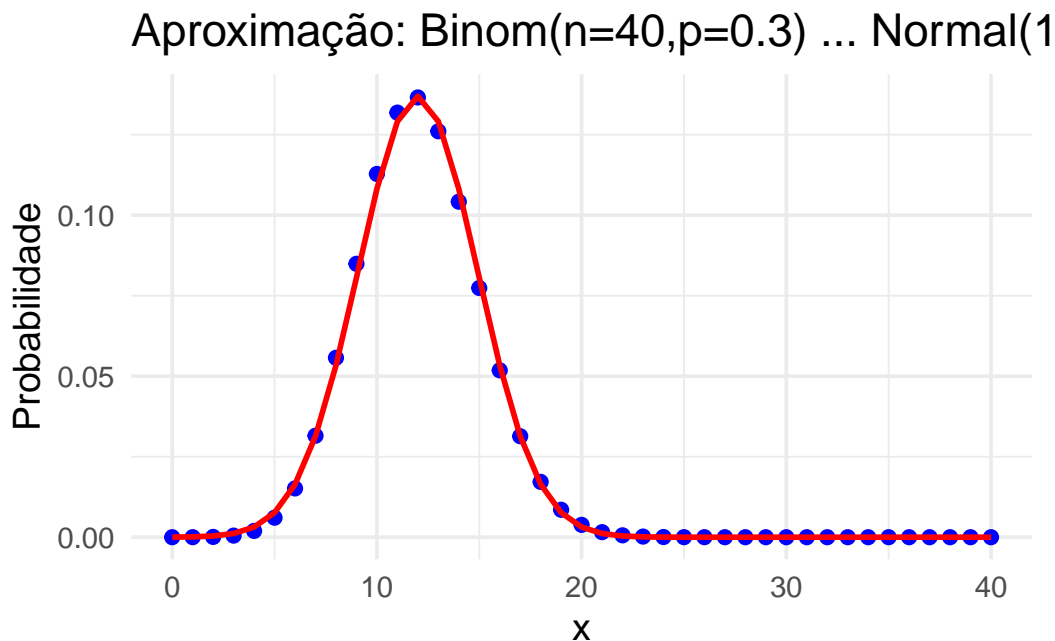
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```



5.4 Poisson \approx Normal

Condição: $\lambda \gtrsim 10$.

Aproximação: $X \approx N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$ com correção de continuidade.

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x\$label), x\$x, x\$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>

