Vetores Aleatórios

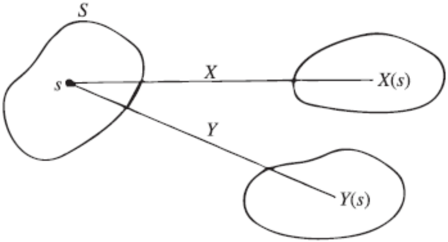
Introdução

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações, associações.

Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Definição: Sejam ε um experimento e S um espaço amostral associado a ε. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional** (também chamada **vetor aleatório**).



Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Se $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s)$, ..., $X_n = X_n(s)$ forem n funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denominaremos $(X_1, \ldots, X_n)$ uma **variável aleatória n-dimensional** (ou um **vetor aleatório n-dimensional**).

Caso discreto

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório** n**—dimensional discreto** como sendo um vetor formado por n **variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y).

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i,\ Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j);
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y).

O conjunto dos termos $\{(x_i, y_j,\ p(x_i, y_j)),\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots\}$ é denominado **distribuição de probabilidade conjunta** de (X, Y).

Função de Probabilidade Conjunta

Para vetores n-dimensionais, a função de probabilidade conjunta é $P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n)$ e satisfaz

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n) = 1$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X: o número de bolas brancas observadas.
- Y: a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Note que,

$$X = \{0, 1, 2\}, \quad \text{e} \quad Y = \{0, 1\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Além disso,

$$P(1B, 2B) \;=\; P(X = 2, Y = 0) = P(1B)\,P(2B \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(1B, 2V) \;=\; P(X = 1, Y = 1) = P(1B)\,P(2V \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2B) \;=\; P(X = 1, Y = 0) = P(1V)\,P(2B \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2V) \;=\; P(X = 0, Y = 1) = P(1V)\,P(2V \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Temos então, a distribuição conjunta de (X, Y)

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Função de Distribuição Acumulada

Seja (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)** F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

Função de Distribuição Acumulada

Seja (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)** F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

$$F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

De forma análoga, para vetores n-dimensionais,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2,\ \dots,\ X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{x_1' \leq x_1} \sum_{x_2' \leq x_2} \cdots \sum_{x_n' \leq x_n} P(X_1 = x_1',\ X_2 = x_2',\ \dots,\ X_n = x_n') \end{aligned}$$

Função de Distribuição Acumulada

Considere a distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ do exemplo da urna:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Função de Distribuição Acumulada

Para $y = 0$

$$F(0,0) = P(X \leq 0, Y \leq 0) = p(0,0) = 0$$

$$F(1,0) = P(X \leq 1, Y \leq 0) = p(0,0) + p(1,0) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$F(2,0) = P(X \leq 2, Y \leq 0) = p(0,0) + p(1,0) + p(2,0) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

Função de Distribuição Acumulada

Para $y = 1$

$$
\begin{aligned}
F(0,1) &= P(X \leq 0, Y \leq 1) = p(0,0) + p(0,1) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10} \\
F(1,1) &= P(X \leq 1, Y \leq 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10} \\
F(2,1) &= P(X \leq 2, Y \leq 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(2,0) + p(0,1) + p(1,1) + p(2,1) \\
&= 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 = 1
\end{aligned}
$$

Função de Distribuição Acumulada

Tabela final dos valores da fda

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ ou } x < 0, \\ 0, & 0 \leq y < 1,\ 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{3}{10}, & 0 \leq y < 1,\ 1 \leq x < 2, \\ \dfrac{2}{5}, & 0 \leq y < 1,\ x \geq 2, \\ \dfrac{3}{10}, & y \geq 1,\ 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{9}{10}, & y \geq 1,\ 1 \leq x < 2, \\ 1, & y \geq 1,\ x \geq 2 \end{cases}$$

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

- A **distribuição marginal de** X é definida como

$$P(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y), \qquad \forall x$$

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

- A **distribuição marginal de** X é definida como

$$P(X = x) = \sum_{y} p(x, y) = \sum_{y} P(X = x, Y = y), \qquad \forall x$$

- Analogamente, a **distribuição marginal de** Y é definida como

$$P(Y = y) = \sum_{x} p(x, y) = \sum_{x} P(X = x, Y = y), \qquad \forall y$$

Distribuições Marginais

Em geral, se $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um **vetor aleatório** n**-dimensional**, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n$$

Distribuições Marginais

Em geral, se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é um **vetor aleatório** n**-dimensional**, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_r$$

No nosso exemplo,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Distribuições Condicionais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y)$. A **distribuição condicional de X dado $Y = y$** é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(Y = y)}, \qquad \forall x$$

Distribuições Condicionais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y)$. A **distribuição condicional de X dado** $Y = y$ é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(Y = y)}, \qquad \forall x$$

Analogamente, define-se a **distribuição condicional de Y dado** $X = x$ como

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(X = x)}, \qquad \forall y$$

Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x.

Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x.

Assim, se X assume n valores distintos e Y assume m valores distintos, teremos ao todo $n + m$ **distribuições condicionais**.

Distribuições Condicionais

Voltando ao exemplo, note que temos as distribuições condicionais $X \mid Y = 0$ e $X \mid Y = 1$. Analogamente, temos as distribuições condicionais $Y \mid X = 0$, $Y \mid X = 1$ e $Y \mid X = 2$.

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Distribuições Condicionais

Assim,

$$P(X = 0 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 0,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0}{2/5} = 0$$

$$P(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 1,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 2,\ Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$$

Distribuições Condicionais

Analogamente, temos que

$$P(X=0 \mid Y=1) = \frac{P(X=0,\ Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(X=1,\ Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2 \mid Y=1) = \frac{P(X=2,\ Y=1)}{P(Y=1)} = 0$$

Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x\, P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y\, P(Y = y \mid X = x)$$

Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x \, P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y \, P(Y = y \mid X = x)$$

Observação: Note que o subscrito X indica que a variável aleatória é X e, portanto, estamos calculando a média (ou esperança) dos valores que X assume fixado o valor y. Observação análoga vale para o subscrito Y.

Esperança Condicional

Voltando ao exemplo, vamos encontrar $E(X \mid Y = 0)$:

$$\begin{aligned}
E(X \mid Y = 0) &= \sum_x x\, P(X = x \mid Y = 0) \\
&= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Esperança Condicional

De forma análoga, vamos encontrar $E(X \mid Y = 1)$:

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_x x\, P(X = x \mid Y = 1) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

Analogamente,

$$E(Y \mid X = 0) = \sum_y y\, P(Y = y \mid X = 0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$E(Y \mid X = 1) = \sum_y y\, P(Y = y \mid X = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y \mid X = 2) = \sum_y y\, P(Y = y \mid X = 2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Esperança Condicional

Note que, para cada valor y de Y, temos um valor diferente de $E(X \mid Y = y)$ e, para cada valor x de X, temos um valor diferente de $E(Y \mid X = x)$.

Esperança Condicional

Note que, para cada valor y de Y, temos um valor diferente de $E(X \mid Y = y)$ e, para cada valor x de X, temos um valor diferente de $E(Y \mid X = x)$.

Sendo assim, podemos definir uma **função** g que associa, a cada valor y de Y, o valor $g(y) = E(X \mid Y = y)$ e outra **função** h que associa, a cada valor x de X, o valor $h(x) = E(Y \mid X = x)$, ou seja,

$$g: \; y \longmapsto g(y) = E(X \mid Y = y)$$

$$h: \; x \longmapsto h(x) = E(Y \mid X = x)$$

Esperança Condicional

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas.

Esperança Condicional

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas.

Vamos denotar essas esperanças por $E_Y[g(Y)]$ e $E_X[h(X)]$, que são calculadas como

$$E_Y[g(Y)] = \sum_y g(y)\, P(Y = y)$$

$$E_X[h(X)] = \sum_x h(x)\, P(X = x)$$

Esperança Condicional

Assim, usando a definição da esperança condicional, temos que

$$
\begin{aligned}
E_Y[g(Y)] &= \sum_y g(y)\, P(Y=y) = \sum_y E_X(X \mid Y=y)\, P(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\, P(X=x \mid Y=y)\, P(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\, \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)}\, P(Y=y) \\
&= \sum_y \sum_x x\, P(X=x,\ Y=y) \\
&= \sum_x x \sum_y P(X=x,\ Y=y) \\
&= \sum_x x\, P(X=x) = E(X)
\end{aligned}
$$

Esperança Condicional

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned}
E_X[h(X)] &= \sum_x h(x)\, P(X = x) = \sum_x E_Y(Y \mid X = x)\, P(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\, P(Y = y \mid X = x)\, P(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\, \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(X = x)}\, P(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y y\, P(X = x,\ Y = y) \\
&= \sum_y y \sum_x P(X = x,\ Y = y) \\
&= \sum_y y\, P(Y = y) = E(Y)
\end{aligned}$$

Esperança Condicional

Resumindo:

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = E(X)$$

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = E(Y)$$

Esse resultado estabelece a **Lei da Esperança Total**.

Esperança Condicional

No exemplo, $Y \in \{0, 1\}$ e $X \in \{0, 1, 2\}$, com distribuição conjunta:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Esperança Condicional

As marginais são:

$$P(Y=0)=\frac{4}{10},\quad P(Y=1)=\frac{6}{10},$$
$$P(X=0)=\frac{3}{10},\quad P(X=1)=\frac{6}{10},\quad P(X=2)=\frac{1}{10}$$

E as esperanças condicionais já calculadas:

$$E(X\mid Y=0)=\frac{5}{4},\qquad E(X\mid Y=1)=\frac{1}{2},$$
$$E(Y\mid X=0)=1,\qquad E(Y\mid X=1)=\frac{1}{2},\qquad E(Y\mid X=2)=0$$

Esperança Condicional

Primeiro, calculemos $E(X)$ diretamente pela marginal de X:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\,P(X=x) \\ &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

Agora, calculemos $E_Y[E(X \mid Y)]$:

$$\begin{aligned}
E_Y[E(X \mid Y)] &= \sum_y E(X \mid Y = y)\, P(Y = y) \\
&= E(X \mid Y = 0)\, P(Y = 0) + E(X \mid Y = 1)\, P(Y = 1) \\
&= \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \\
&= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\
&= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y\,P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

e,

$$
\begin{aligned}
E_X[E(Y \mid X)] &= \sum_x E(Y \mid X = x)\, P(X = x) \\
&= E(Y \mid X = 0)\, P(X = 0) + E(Y \mid X = 1)\, P(X = 1) + E(Y \mid X = 2)\, P(X = 2) \\
&= 1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \\
&= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = \frac{3}{5} = E(Y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição (Independência de variáveis aleatórias discretas): Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x,\ Y = y)$. Dizemos que X e Y são **independentes** se, e somente se,

$$P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y), \qquad \forall x,\ y$$

Ou seja, a **distribuição conjunta** é o **produto das distribuições marginais**.

De forma análoga, para vetores n-dimensionais,

$$P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \dots,\ X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i), \qquad \forall\, x_1, x_2, \dots, x_n$$

Independência de Variáveis Aleatórias

Lembrando a distribuição conjunta do exemplo:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X=0)=\frac{3}{10},\quad P(X=1)=\frac{6}{10},\quad P(X=2)=\frac{1}{10}$$

Independência de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Pela definição, X e Y seriam independentes se, para todo x e y,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

mas,

Considere o par $(x, y) = (0, 0)$:

Independência de Variáveis Aleatórias

- Da tabela conjunta:
$$P(X = 0, Y = 0) = 0$$
- Pelo produto das marginais:
$$P(X = 0)\, P(Y = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Como
$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)\, P(Y = 0),$$
concluímos que X **e** Y **não são independentes**.

Funções de Variáveis Aleatórias

TEOREMA 01: Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta $P(X = x,\ Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real tal que cada par (x, y) é levado a $h(x, y)$. Então,

$$E[h(X,Y)] = \sum_{i} \sum_{j} h(x_i, y_j)\, P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

De forma análoga, para vetores n-dimensionais,

$$E[h(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_n)\, p(x_1, \dots, x_n)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

TEOREMA 02: Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta $P(X = x,\ Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $h(x, y) = x + y$. Então,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_x \sum_y (x+y)\,P(X=x,\ Y=y) \\
&= \sum_x \sum_y x\,P(X=x,\ Y=y) + \sum_x \sum_y y\,P(X=x,\ Y=y) \\
&= \sum_x x \sum_y P(X=x,\ Y=y) + \sum_y y \sum_x P(X=x,\ Y=y) \\
&= \sum_x x\,P(X=x) + \sum_y y\,P(Y=y) \\
&= E(X) + E(Y)
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

No exemplo da urna, a distribuição conjunta é:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X=0)=\frac{3}{10}, \quad P(X=1)=\frac{6}{10}, \quad P(X=2)=\frac{1}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y=0)=\frac{4}{10}, \quad P(Y=1)=\frac{6}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y=0)=\frac{4}{10}, \quad P(Y=1)=\frac{6}{10}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x\,P(X=x) \\ &= 0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10}+\frac{2}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{y} y\, P(Y = y) \\
&= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y\,P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X) + E(Y) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Note que, como $E(X+Y) = \sum_{x,y}(x+y)\,P(X=x, Y=y)$, temos:

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= (1+0)\cdot\frac{3}{10} + (2+0)\cdot\frac{1}{10} + (0+1)\cdot\frac{3}{10} + (1+1)\cdot\frac{3}{10} \\
&= 1\cdot\frac{3}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{3}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \\
&= \frac{14}{10} = \frac{7}{5}
\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Teorema 02,

$$E(X+Y) = \frac{7}{5} = E(X) + E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2 \\
&= E\left[X+Y-E(X)-E(Y)\right]^2 \\
&= E\left[(X-E(X))+(Y-E(Y))\right]^2 \\
&= E\left[(X-E(X))^2\right]+E\left[(Y-E(Y))^2\right]+2E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] \\
&= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]
\end{aligned}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observe que, na variância da soma, aparece um termo envolvendo a **esperança do produto dos desvios em torno das médias**. Esse termo define a **covariância** de duas variáveis aleatórias. Note ainda, que as variáveis

$$X' = X - E(X) \quad \text{e} \quad Y' = Y - E(Y)$$

são variáveis aleatórias ambas com média zero, isto é,

$$E(X') = E(Y') = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Covariância): A **covariância** entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Covariância): A **covariância** entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Substituindo essa definição na expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias, obtém-se o seguinte resultado.

Resultado 01: A variância da soma de duas variáveis aleatórias é dada por

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Uma forma alternativa de cálculo da covariância resulta de

$$
\begin{aligned}
E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\
&= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

Aqui usamos que $E(kX) = kE(X)$ e também que $E(k) = k$. Logo,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

1. $\text{Cov}(aX + b,\ cY + d) = ac\ \text{Cov}(X, Y)$

De fato,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(aX + b,\ cY + d) &= E[(aX + b - E(aX + b))(cY + d - E(cY + d))] \\
&= E[(aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d)] \\
&= E[a(X - E(X))\, c(Y - E(Y))] \\
&= ac\, E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= ac\ \text{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

2. $\mathrm{Cov}(X+Y,\ Z+W) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y,\ Z+W) &= E[(X+Y)(Z+W)] - E(X+Y)\,E(Z+W) \\
&= E(XZ + XW + YZ + YW) - [E(X)+E(Y)][E(Z)+E(W)] \\
&= E(XZ) + E(XW) + E(YZ) + E(YW) \\
&\quad - E(X)E(Z) - E(X)E(W) - E(Y)E(Z) - E(Y)E(W) \\
&= [E(XZ) - E(X)E(Z)] + [E(XW) - E(X)E(W)] \\
&\quad + [E(YZ) - E(Y)E(Z)] + [E(YW) - E(Y)E(W)] \\
&= \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)
\end{aligned}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

3.
$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\ \mathrm{Cov}(X, Y)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X - Y) &= \mathrm{Var}[X + (-Y)] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X,\ -Y) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(-1)\,\mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\ \mathrm{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Resultado 02: Se X e Y são variáveis aleatórias **independentes**, então

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

De fato,

Se X e Y são independentes, então

$$P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Nesse caso,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy\, P(X = x,\ Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy\, P(X = x)\, P(Y = y) \\ &= \left(\sum_x x\, P(X = x) \right) \left(\sum_y y\, P(Y = y) \right) \\ &= E(X)\, E(Y) \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Note que a recíproca desse resultado **não é verdadeira**, isto é, **covariância nula não significa independência** entre as variáveis.

Funções de Variáveis Aleatórias

Como exemplo, consideremos a seguinte distribuição de probabilidade conjunta:

Distribuição conjunta $p(x, y)$ (com marginais)

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_Y(y)$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
$p_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	1

Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} E(XY) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} \\ + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{38}{20} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X)\,E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X)\,E(Y)$$

Logo,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X)\,E(Y)$$

Logo,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Entretanto, X e Y **não são independentes**, pois, por exemplo,

$$P(X = 0,\ Y = 1) = \frac{3}{20} \neq P(X = 0)\,P(Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Definição (Coeficiente de Correlação): O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y},$$

onde σ_X e σ_Y são os **desvios-padrão** de X e Y, respectivamente.

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Coeficiente de Correlação): O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\operatorname{Cor}(X,Y) = E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y},$$

onde σ_X e σ_Y são os **desvios-padrão** de X e Y, respectivamente.

TEOREMA 03: Dadas duas variáveis aleatórias X e Y com esperança, variância e covariância finitas, então

$$-1 \leq \operatorname{Cor}(X,Y) \leq 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Demonstração

Sejam

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}, \qquad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y},$$

as variáveis aleatórias **padronizadas**.

Das propriedades de esperança e variância, sabemos que

$$E(X^*) = E(Y^*) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X^*) = \mathrm{Var}(Y^*) = 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Sabemos também que a variância de qualquer variável aleatória é não-negativa. Em particular,

$$\mathrm{Var}(X^* + Y^*) \geq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X^* + Y^*) &= \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) + 2\ \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 + 2\ \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \geq -1$$

Analogamente, considerando

$$\mathrm{Var}(X^* - Y^*) \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X^* - Y^*) &= \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) - 2\ \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 - 2\ \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Portanto,

$$-1 \leq \mathrm{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Mas, por definição,

$$\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = \mathrm{Cor}(X, Y),$$

o que completa a demonstração.

Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y=y)$
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y=y)$
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Temos,

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Somando apenas os termos não nulos da distribuição conjunta:

$$E(XY) = (1 \cdot 1)\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando a fórmula alternativa da covariância,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \frac{3}{10} - 1 \cdot \frac{3}{5} \\
&= \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \\
&= -\frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

- Variância de X

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} \\
&= \frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{16}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{16}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias

- Variância de Y

Como Y é Bernoulli com $P(Y = 1) = \frac{3}{5}$,

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{6}{25}}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Por definição,

$$\operatorname{Cor}(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Substituindo os valores obtidos,

$$\operatorname{Cor}(X,Y) = \frac{-\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{3}{5}}\,\sqrt{\frac{6}{25}}} = -\frac{3}{10}\sqrt{\frac{125}{18}}$$

Numericamente,

$$\operatorname{Cor}(X,Y) \approx -0,79$$

Caso contínuo

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R, poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R, poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R, poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório** n**—dimensional contínuo** como sendo um vetor formado por n **variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Função Densidade Conjunta

Seja (X, Y) um **vetor aleatório contínuo**. A função densidade conjunta $f(x, y)$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$
3. $P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$

Função Densidade Conjunta

Exemplo: Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional (X, Y) tenha fdp conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função Densidade Conjunta

1. Vamos verificar que a função densidade conjunta $f(x, y)$ satisfaz a condição de não-negatividade:

Na região limitada por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$, temos:

- $x^2 \geq 0$, pois o quadrado de qualquer número real é não-negativo;
- $\dfrac{xy}{3} \geq 0$, pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Logo, a soma desses termos também é não-negativa:

$$x^2 + \frac{xy}{3} \geq 0$$

Função Densidade Conjunta

2. Verifiquemos se a função densidade conjunta satisfaz $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2\int_0^1 \left(x^2+\frac{xy}{3}\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 \frac{xy}{3}\,dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{yx^2}{6}\right|_0^1\right] dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+\frac{y}{6}\right) dy \\
&= \int_0^2 \frac{1}{3}dy + \int_0^2 \frac{y}{6}dy = \left.\frac{y}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{y^2}{12}\right|_0^2 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1
\end{aligned}
$$

Densidades Marginais

As **densidades marginais** de X e Y são definidas por:

$$f_X(x) = \int f(x, y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int f(x, y)\, dx$$

Densidades Marginais

Voltando ao exemplo, vamos encontrar as densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

- **Densidade marginal de X:** Por definição,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

Como o suporte em y é $0 \leq y \leq 2$, para $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = \int_0^2 x^2\, dy + \int_0^2 \frac{xy}{3}\, dy \\ &= x^2(2-0) + \frac{x}{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 2x^2 + \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{2} = 2x^2 + \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Densidade marginal de Y:** De forma análoga,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

Como o suporte em x é $0 \leq x \leq 1$, para $0 \leq y \leq 2$:

Densidades Marginais

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} \, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{y}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}
\end{aligned}
$$

Densidades Marginais

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 \frac{xy}{3}\, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \frac{y}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}$$

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{y}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Por definição, temos que

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Note que, para cada y temos uma densidade condicional diferente. Analogamente,

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

e para cada x temos uma densidade condicional diferente.

Distribuições e Esperanças Condicionais

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, para $0 \leq y \leq 2$,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y+2} = \frac{2x(3x+y)}{y+2}$$

Logo,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2x(3x+y)}{y+2}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma análoga, para $0 < x \leq 1$ (note que $f_X(0) = 0$, mas isso ocorre com probabilidade zero),

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{x + \frac{y}{3}}{2x + \frac{2}{3}} = \frac{3x + y}{6x + 2} = \frac{3x + y}{2(3x + 1)}$$

Logo,

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{3x + y}{2(3x + 1)}, & 0 \leq y \leq 2,\ 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X \mid Y = y) = \int x\, f_{X|Y}(x \mid y)\, dx = \int x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \int y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, dy = \int y\, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X \mid Y = y) = \int x\, f_{X|Y}(x \mid y)\, dx = \int x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \int y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, dy = \int y\, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy$$

Note que, assim como no caso discreto, para cada valor y de Y, temos um valor diferente de $E_X(X \mid Y = y)$, e para cada valor x de X, temos um valor diferente de $E_Y(Y \mid X = x)$.

Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo, aqui também podemos definir uma função g que associa a cada valor de Y o valor $E_X(X \mid Y = y)$ e outra função h que associa a cada valor de X o valor $E_Y(Y \mid X = x)$, ou seja,

$$g : y \longmapsto g(y) = E_X(X \mid Y = y),$$
$$h : x \longmapsto h(x) = E_Y(Y \mid X = x)$$

Como X e Y são variáveis aleatórias, essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$, cujas esperanças são calculadas como

$$E_Y[g(Y)] = \int g(y)\, f_Y(y)\, dy$$
$$E_X[h(X)] = \int h(x)\, f_X(x)\, dx$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Usando a definição de esperança condicional, temos que

$$
\begin{aligned}
E_Y[g(Y)] &= \int g(y)\, f_Y(y)\, dy = \int E_X(X \mid Y = y)\, f_Y(y)\, dy \\
&= \int \left(\int x \,\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx \right) f_Y(y)\, dy = \int\!\!\int x\, f(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int x \left(\int f(x,y)\, dy \right) dx = \int x\, f_X(x)\, dx = E(X)
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = E(X)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Analogamente,

$$\begin{aligned}
E_X[h(X)] &= \int h(x)\, f_X(x)\, dx = \int E_Y(Y \mid X = x)\, f_X(x)\, dx \\
&= \int \left(\int y\, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}\, dy \right) f_X(x)\, dx = \int\!\!\int y\, f(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int y \left(\int f(x,y)\, dx \right) dy = \int y\, f_Y(y)\, dy = E(Y)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = E(Y)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

Para nosso exemplo, temos:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

- Vamos verificar que $E_Y[E(X \mid Y)] = E(X)$:

A densidade condicional é

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y+2}, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(y) = E(X \mid Y = y) &= \int_0^1 x\, f_{X|Y}(x \mid y)\, dx = \int_0^1 x\, \frac{6x^2 + 2xy}{y+2}\, dx = \frac{1}{y+2} \int_0^1 (6x^3 + 2yx^2)\, dx \\ &= \frac{1}{y+2}\left(6 \cdot \frac{1}{4} + 2y \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{y+2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2y}{3}\right) = \frac{4y+9}{6(y+2)}, \qquad 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$
\begin{aligned}
E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y)\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6}\, dy \\
&= \int_0^2 \frac{4y+9}{36}\, dy = \frac{1}{36}\left[2y^2 + 9y\right]_0^2 = \frac{1}{36}(8+18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$
\begin{aligned}
E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y)\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6}\, dy \\
&= \int_0^2 \frac{4y+9}{36}\, dy = \frac{1}{36}\left[2y^2+9y\right]_0^2 = \frac{1}{36}(8+18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 x\left(2x^2+\frac{2x}{3}\right)\, dx = \int_0^1 \left(2x^3+\frac{2}{3}x^2\right)\, dx \\
&= 2\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}+\frac{2}{9} = \frac{13}{18}
\end{aligned}
$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X \mid Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X \mid Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

- Verificar $E_X[E(Y \mid X)] = E(Y)$

A densidade condicional é

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{3x+y}{2(3x+1)}, \qquad 0 \leq y \leq 2,\ 0 < x \leq 1$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo,

$$\begin{aligned}
h(x) = E(Y \mid X = x) &= \int_0^2 y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, dy = \int_0^2 y\, \frac{3x + y}{2(3x+1)}\, dy \\
&= \frac{1}{2(3x+1)} \int_0^2 (3xy + y^2)\, dy = \frac{1}{2(3x+1)} \left(3x \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 + \frac{y^3}{3}\bigg|_0^2 \right) \\
&= \frac{1}{2(3x+1)} \left(3x \cdot 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9x+4}{3(3x+1)}, \qquad 0 < x \leq 1
\end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Note que

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3} = \frac{2x(3x+1)}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned}
E_X[h(X)] &= \int_0^1 h(x)\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{9x+4}{3(3x+1)} \cdot \frac{2x(3x+1)}{3}\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{2x(9x+4)}{9}\, dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (18x^2 + 8x)\, dx \\
&= \frac{1}{9}\left(18 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}(6+4) = \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Além disso,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^2 y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 y \cdot \frac{y+2}{6}\, dy \\
&= \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y)\, dy \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
E_X[E(Y \mid X)] = \frac{10}{9} = E(Y)
$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

Definição (Independência de variáveis aleatórias contínuas): Seja (X, Y) um **vetor aleatório contínuo** com função densidade conjunta $f(x, y)$. Sejam $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ as densidades marginais de X e Y, respectivamente. Então, diz-se que X e Y são **variáveis aleatórias independentes** se

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y), \qquad \forall\, x, y$$

Ou seja, a **densidade conjunta** é o **produto das densidades marginais** para todo par (x, y) no domínio de definição.

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

No exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \dfrac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição, X e Y seriam independentes se

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição, X e Y seriam independentes se

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \text{para todo } (x,y)$$

Para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$,

$$\begin{aligned} f_X(x) f_Y(y) &= \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right)\left(\frac{y+2}{6}\right) = \frac{y+2}{3}\left(x^2 + \frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{y+2}{3}x^2 + \frac{y+2}{9}x = \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{y}{9} + \frac{2}{9}\right)x \\ &\neq x^2 + \frac{xy}{3} = f(x,y) \end{aligned}$$

Assim, concluímos que X **e** Y **não são independentes**.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Assim como no caso discreto, conhecida a densidade conjunta de (X, Y), podemos ter interesse em estudar a densidade de uma variável aleatória definida como uma função $h(X, Y)$, em que h é uma função real, isto é, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

TEOREMA 04: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x,y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então,

$$E[h(X,Y)] = \int\int h(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

TEOREMA 04: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = \int\int h(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

TEOREMA 05: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(X, Y) = aX + bY$, com a e b números reais quaisquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = a\, E(X) + b\, E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo Teorema 05, para a combinação linear

$$h(X,Y) = aX + bY,$$

vale

$$E[h(X,Y)] = aE(X) + bE(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Temos que a marginal de X é

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18}
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

A marginal de Y é

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, \qquad 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 y \left(\frac{y+2}{6}\right)\, dy \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 (y^2 + 2y)\, dy = \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3} + 4\right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Escolhendo, por exemplo,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -3,$$

temos

$$h(X, Y) = 2X - 3Y$$

Pelo Teorema 05,

$$\begin{aligned} E(2X - 3Y) &= 2E(X) - 3E(Y) = 2 \cdot \frac{13}{18} - 3 \cdot \frac{10}{9} \\ &= \frac{13}{9} - \frac{30}{9} = -\frac{17}{9} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y)\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)\, dx\, dy$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y)\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)\, dx\, dy$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
(2x - 3y)\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) &= (2x)x^2 + (2x)\frac{xy}{3} - (3y)x^2 - (3y)\frac{xy}{3} \\
&= 2x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 3x^2y - xy^2 \\
&= 2x^3 - \frac{7}{3}x^2y - xy^2
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral interna em x (de 0 a 1)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(2x^3 - \frac{7}{3}x^2 y - xy^2\right)\,dx &= \int_0^1 2x^3\,dx \; - \; \frac{7}{3}y\int_0^1 x^2\,dx \; - \; y^2\int_0^1 x\,dx \\
&= 2\cdot\frac{1}{4} \; - \; \frac{7}{3}y\cdot\frac{1}{3} \; - \; y^2\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral externa em y (de 0 a 2)

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2\right)\, dy &= \int_0^2 \frac{1}{2}\, dy \;-\; \frac{7}{9}\int_0^2 y\, dy \;-\; \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\, dy \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 \;-\; \frac{7}{9}\cdot\frac{2^2}{2} \;-\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3} \\
&= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}
\end{aligned}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral externa em y (de 0 a 2)

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2\right)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, dy \;-\; \frac{7}{9}\int_0^2 y\, dy \;-\; \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\, dy$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \;-\; \frac{7}{9}\cdot\frac{2^2}{2} \;-\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3}$$
$$= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}$$

Logo, verificamos numericamente a linearidade:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto.
A covariância entre X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto.
A covariância entre X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

O coeficiente de correlação é definido por

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Valem todas as propriedades vistas anteriormente para o caso discreto. Em particular, se X e Y são variáveis aleatórias contínuas **independentes**, então

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

A recíproca, em geral, **não é verdadeira**, uma vez que a covariância mede apenas a **relação linear** entre as variáveis.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já obtivemos

$$E(X) = \frac{13}{18}, \qquad E(Y) = \frac{10}{9}$$

A seguir calculamos $E(XY)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ e $\mathrm{Cor}(X,Y)$.

- Cálculo de $E(XY)$

Por definição,

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 xy \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx\, dy$$

Expandindo:

$$xy \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) = x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^1 \left(x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3} \right) \, dx\, dy = \int_0^2 \left[y \int_0^1 x^3 \, dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 \, dx \right] dy$$

$$= \int_0^2 \left[y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3} \right) \, dx \, dy = \int_0^2 \left[y \int_0^1 x^3 \, dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 \, dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2 \\
&= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54}
\end{aligned}
$$

- Covariância: Temos que

$$
\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)
$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \frac{43}{54} - \left(\frac{13}{18}\right)\left(\frac{10}{9}\right)\\ &= \frac{43}{54} - \frac{130}{162} = \frac{129}{162} - \frac{130}{162} = -\frac{1}{162}\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Correlação

Para a correlação, precisamos das variâncias. Primeiro, vamos calcular $E(X^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^2 \int_0^1 x^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 x^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^3 y}{3}\right)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{5} + \frac{y}{3}\cdot\frac{1}{4}\right] dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{y}{12}\right) dy = \left[\frac{y}{5} + \frac{y^2}{24}\right]_0^2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{24} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{17}{30}
\end{aligned}
$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

Então,

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

Agora, vamos calcular $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^2 \int_0^1 y^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 y^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[y^2 \int_0^1 x^2\,dx + \frac{y^3}{3}\int_0^1 x\,dx\right] dy = \int_0^2 \left(y^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{6}\right) dy = \left[\frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{24}\right]_0^2 = \frac{8}{9} + \frac{16}{24} = \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{73}{1620}}, \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

Coeficiente de correlação

Por definição,

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{73}{1620}}\sqrt{\frac{26}{81}}}$$

Simplificando, obtém-se

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = -\frac{\sqrt{9490}}{1898} \approx -0.0513$$

Transformações Bivariadas

Exemplo: Considere o nosso vetor aleatório contínuo (X, Y) com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \qquad V = X + Y$$

Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \qquad V = X + Y$$

Da definição,

$$u = x, \qquad v = x + y \;\Rightarrow\; x = u, \quad y = v - u$$

Logo, a inversa é

$$(x, y) = (u,\ v - u)$$

Transformações Bivariadas

O Jacobiano da transformação inversa $(u, v) \mapsto (x, y)$ é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim, $|J| = 1$. Como $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$, então:

- $u = x \in [0, 1]$;
- $y = v - u \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq v - u \leq 2 \Rightarrow u \leq v \leq u + 2$

Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \qquad u \leq v \leq u + 2$$

Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \qquad u \leq v \leq u + 2$$

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y)\,|J| = f_{X,Y}(u,\ v - u) \cdot 1,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= u^2 + \frac{u(v - u)}{3} \\ &= u^2 + \frac{uv - u^2}{3} = \frac{2u^2 + uv}{3} \end{aligned}$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1,\ u \leq v \leq u+2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1,\ u \leq v \leq u + 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Validade da função densidade

Não-negatividade

No suporte da distribuição temos

$$u \geq 0 \quad \text{e} \quad v \geq u \geq 0$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$2u^2 \geq 0 \qquad \text{e} \qquad uv \geq 0$$

Portanto,

$$2u^2 + uv \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_{U,V}(u,v) \geq 0$$

em todo o suporte.

Fora do suporte, $f_{U,V}(u,v) = 0$, o que também satisfaz a condição.

Transformações Bivariadas

Devemos verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv\,du = 1$$

Como o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \qquad u \leq v \leq u+2,$$

temos

$$\int_0^1 \int_u^{u+2} \frac{2u^2+uv}{3}\,dv\,du = \int_0^1 \frac{1}{3}\left[\int_u^{u+2} (2u^2+uv)\,dv\right] du$$

Transformações Bivariadas

Integral interna em v

$$\begin{aligned}
\int_u^{u+2} (2u^2 + uv)\, dv &= 2u^2(v)\Big|_u^{u+2} + u\frac{v^2}{2}\Big|_u^{u+2} \\
&= 2u^2(2) + \frac{u}{2}\left[(u+2)^2 - u^2\right] \\
&= 4u^2 + \frac{u}{2}(4u+4) \\
&= 4u^2 + 2u^2 + 2u \\
&= 6u^2 + 2u
\end{aligned}$$

Transformações Bivariadas

Integral externa em u

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{3}(6u^2 + 2u)\,du &= \frac{1}{3}\int_0^1 (6u^2 + 2u)\,du \\
&= \frac{1}{3}\left(6 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3}(2 + 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Logo, $f_{U,V}(u, v)$é uma função densidade de probabilidade conjunta válida.

Transformações Bivariadas

Exemplo: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade $f_X(x) = e^{-x}$, para $x \geq 0$ e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

Transformações Bivariadas

Exemplo: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade $f_X(x) = e^{-x}$, para $x \geq 0$ e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

Como X e Y são independentes, e com distribuição Exponencial(1),

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}, \qquad f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{I}_{\{y \geq 0\}}$$

Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}\mathbf{I}_{\{x\geq 0,\ y\geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \qquad V = \frac{Y}{X}$$

Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}\mathbf{I}_{\{x\geq 0,\ y\geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \qquad V = \frac{Y}{X}$$

De $V = \dfrac{Y}{X}$, obtemos $Y = VX$. Substituindo em $U = X + Y$:

$$U = X + VX = X(1+V) \quad \Rightarrow \quad X = \frac{U}{1+V}$$

Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V\frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como $X > 0$ e $Y > 0$, temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V\frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como $X > 0$ e $Y > 0$, temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

Temos então, que a inversa é

$$x(u,v) = \frac{u}{1+v}, \qquad y(u,v) = \frac{uv}{1+v}$$

Transformações Bivariadas

O Jacobiano dessa transformação é:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} - \left(-\frac{u}{(1+v)^2}\right) \cdot \frac{v}{1+v}$$

$$= \frac{u}{(1+v)^2}$$

Transformações Bivariadas

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|$$

Como $x(u,v) + y(u,v) = \dfrac{u}{1+v} + \dfrac{uv}{1+v} = u$, segue que

$$f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) = e^{-u}$$

Portanto,

$$f_{U,V}(u,v) = e^{-u} \cdot \frac{u}{(1+v)^2}, \qquad u > 0,\ v > 0$$