

# Distribuições Contínuas

Data de entrega: 18 de dezembro de 2025

---

1. Encontre os valores numéricos das integrais a seguir, **sem resolver as integrais**, usando apenas as propriedades da função gamma. Use o seguinte resultado:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

(a)  $\int_0^\infty x^2 e^{-3x} dx$

(b)  $\int_0^\infty x^4 e^{-x/5} dx$

(c)  $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-2x/3} dx$

---

2. Seja  $X \sim \text{Gamma}\left(3, \frac{1}{2}\right)$ .

- (a) Encontre a função de distribuição de  $X$ .

- (b) Verifique se a derivada da função de distribuição encontrada no item (a) é a função densidade de  $X$ .
- 

3. Segundo o protocolo do departamento de TI de uma empresa, um de seus sistemas passa por manutenção quando apresentar a 4<sup>a</sup> falha, contada a partir da última manutenção. Considere que o tempo (em dias) entre duas manutenções consecutivas desse sistema seja uma variável aleatória com distribuição Gama, com média de 48 dias e desvio padrão de 24 dias.

- (a) Para um sistema que acabou de sair da manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar pelos próximos 60 dias sem precisar de manutenção?

- (b) Dado que o sistema está funcionando há 40 dias desde a última manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar por mais 20 dias?
- (c) Se 3 sistemas idênticos e independentes voltam a funcionar simultaneamente depois de uma manutenção, qual é a probabilidade de pelo menos 2 não passarem por manutenção nos próximos 60 dias?
- 

4. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição gamma de parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- (a)  $f_X(x) = \frac{8}{3} x^3 e^{-2x}, \quad x > 0$
- (b)  $f_X(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}, \quad x > 0$
- (c)  $f_X(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi x}} e^{-3x}, \quad x > 0$
- 

5. Encontre os valores numéricos para as expressões a seguir, onde  $B$  é a função Beta. Use novamente o seguinte resultado:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

- (a)  $B(2, 3)$
- (b)  $B(3, 1)$
- (c)  $B(\frac{1}{2}, 4)$
- (d)  $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
- 

6. Seja  $X \sim \text{Beta}(2, 3)$ .

- (a) Apresente a função densidade de  $X$ .
- (b) Apresente a função de distribuição de  $X$ .
- (c) Determine  $E(X)$ .
- (d) Determine  $\text{Var}(X)$ .
- (e) Calcule  $P(X \geq E(X))$  e  $P(X > E(X) \mid X < E(X) + DP(X))$ , onde  $DP(X)$  denota o desvio padrão de  $X$ .

---

7. Uma fábrica produz misturas industrializadas para bolos. Sabe-se que a proporção de farinha de trigo em relação aos demais ingredientes secos nessa mistura é uma variável aleatória com distribuição Beta de parâmetros  $\alpha = 3/2$  e  $\beta = 3$ . Após alguns testes, concluiu-se que:

- se a proporção de farinha de trigo for **maior que 50%**, o bolo fica muito seco;
- se essa proporção for **menor que 10%**, o bolo sola.

Nesses dois casos, o bolo não segue os padrões de qualidades estipulados pela fábrica.

- Em média, qual é a proporção de farinha de trigo para os demais ingredientes secos em uma mistura para bolo feita nessa fábrica?
  - Qual é a probabilidade de uma mistura para bolo produzida nessa fábrica **não** seguir os padrões de qualidade estipulados pela própria fábrica?
  - Sabendo que certa unidade de mistura não segue os padrões de qualidade estipulados pela fábrica, qual é a probabilidade de a proporção de farinha nesta unidade estar **abaixo da média**?
  - Em um experimento, unidades dessa mistura para bolo são testadas até que se encontre 3 que não seguem os padrões de qualidade. Em média, nesse experimento, quantas unidades **dentro do padrão de qualidade** são testadas?
- 

8. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição Beta de parâmetros  $a$  e  $b$ . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- $f_X(x) = 105x^2(1-x)^4$ ,  $0 < x < 1$
  - $f_X(x) = 20(x^3 - x^4)$ ,  $0 < x < 1$
  - $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $0 < x < 1$
- 

9. Seja  $X \sim \text{Weibull}(2, 2)$ .

- Apresente a função densidade de  $X$ .
- Apresente a função de distribuição de  $X$ .

- (c) Determine  $E(X)$ .  
 (d) Determine  $\text{Var}(X)$ .  
 (e) Calcule  $P(X > 1)$  e  $P(X > 1 \mid X < 2)$ .
- 

10. Uma fábrica opera com 5 máquinas e a manutenção só é chamada quando 4 das 5 máquinas quebram. Suponha que o tempo, em dias, entre duas manutenções seja considerado uma variável aleatória com distribuição de Weibull de parâmetros  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 4$ .

- (a) Qual o tempo médio entre duas manutenções seguidas?  
 (b) Qual o desvio padrão do tempo entre duas manutenções seguidas?  
 (c) Qual a probabilidade de a manutenção ficar mais de 10 dias sem aparecer na fábrica?  
 (d) Sabendo que hoje completa 5 dias desde a última manutenção, qual a probabilidade de a próxima manutenção **não** ocorrer nos próximos 3 dias?  
 (e) Qual o menor tempo  $t$ , em dias, para o qual podemos dizer que, em 90% das vezes, a manutenção ocorre antes de  $t$ ?
- 

11. A seguir são apresentadas algumas funções de densidade de variáveis aleatórias com distribuição de Weibull de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- (a)  $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2e^{-x^3/8}$ ,  $x > 0$   
 (b)  $f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/2}$ ,  $x > 0$   
 (c)  $f_X(x) = 18xe^{-9x^2}$ ,  $x > 0$
- 

12. Mostre que, para  $\alpha$  e  $\beta$  positivos,  $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x - a)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-a)}I_{(a,\infty)}(x)$  é função densidade de probabilidade. Alguns autores definem o modelo Gamma dessa forma, sendo que, nesse caso, o modelo tem um terceiro parâmetro  $a$ .

---

13. A variável  $X$  segue o modelo *Beta* de parâmetros  $a, b > 0$  se sua densidade for  $f(x) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}I_{(0,1)}(x)$ . Verifique que a densidade Beta com parâmetros  $a = b = 1$  é a distribuição  $U(0, 1)$ .
- 

14. Mostre que se  $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ , então  $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$  e  $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ .

---

15. Mostre que se  $X \sim Beta(a, b)$ , então  $E(X) = \frac{a}{a+b}$  e  $\text{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

---

15. Mostre que se  $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$ , então  $E(X) = \alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$  e  $\text{Var}(X) = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$