Resolução: Transformação de Variáveis Aleatórias

Exercício 01

Como $X \in (-1, 1)$, então $X^2 \in (0, 1)$ e, portanto, $Y = 4 - X^2 \in (3, 4)$.

Para $3 < y < 4$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(4 - X^2 \leq y) = P(X^2 \geq 4 - y) = P(|X| \geq \sqrt{4 - y})$$

Logo,

$$F_Y(y) = 1 - P(|X| < \sqrt{4 - y})$$

Como X é uniforme em $(-1, 1)$, $P(|X| < a) = a$ para $0 < a < 1$. Assim,

$$F_Y(y) = 1 - \sqrt{4 - y}, \quad 3 < y < 4$$

Derivando:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{4 - y}}, \quad 3 < y < 4,$$

e $f_Y(y) = 0$ fora desse intervalo.

> ⚠ Atenção
>
> A transformação $y = 4 - x^2$ **não é monótona** em $(-1, 1)$. Aqui o método via CDF é o mais seguro.

Exercício 02

A densidade de X é $f_X(x) = \frac{1}{2}$ para $1 < x < 3$.

(a) $Y = 3X + 4$

Passo 1 — suporte
Se $1 < x < 3$, então $7 < y < 13$

Passo 2 — inversa e jacobiano
$x = \frac{y-4}{3}$ e $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}$

Passo 3 — densidade

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-4}{3}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad 7 < y < 13$$

Logo,

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{6}\,\mathbf{1}_{(7,13)}(y)}$$

(b) $Y = e^X$

Passo 1 — suporte
Se $1 < x < 3$, então $e < y < e^3$

Passo 2 — inversa e jacobiano
$x = \ln y$ e $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$

Passo 3 — densidade

$$f_Y(y) = f_X(\ln y)\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}, \quad e < y < e^3$$

Logo,

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2y}\,\mathbf{1}_{(e,e^3)}(y)}$$

Exercício 03

$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$

Transformando: - se $X = 1$, $Y = 5$; - se $X = 2$, $Y = 7$; - se $X = 3$, $Y = 9$.

Logo,

$$\boxed{P(Y = 5) = P(Y = 7) = P(Y = 9) = \frac{1}{3}}$$

Exercício 04

Defina $X =$ número de tentativas até abrir (inclui a correta). Em cada tentativa, probabilidade de sucesso $p = \frac{1}{4}$.

(a) Função de probabilidade de X

X é geométrica (suporte $\{1, 2, ...\}$):

$$\boxed{P(X = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, ...}$$

(b) $Y =$ número de chaves erradas até abrir; escrever Y em função de X

Se a abertura ocorre na X-ésima tentativa, então houve $X - 1$ erros:

$$\boxed{Y = X - 1}$$

(c) Função de probabilidade de Y

Como $Y = X - 1$, então $Y \in \{0, 1, 2, ...\}$ e

$$\boxed{P(Y = y) = \left(\frac{3}{4}\right)^{y} \frac{1}{4}, \quad y = 0, 1, 2, ...}$$

Exercício 05

A CDF é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{8}, & -2 \le x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \le x < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(a) Função de probabilidade de X

Os saltos dão as massas: - em $x = -2$: $P(X = -2) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$; - em $x = -1$: $P(X = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$; - em $x = 1$: $P(X = 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; - em $x = 2$: $P(X = 2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Logo,

$$\boxed{P(X = -2) = \frac{1}{8},\ P(X = -1) = \frac{3}{8},\ P(X = 1) = \frac{1}{4},\ P(X = 2) = \frac{1}{4}}$$

(b) $Y = X^2$: função de probabilidade de Y

Os valores possíveis: - $Y = 1$ quando $X = \pm 1$; - $Y = 4$ quando $X = \pm 2$ (aqui só temos -2 e 2)

Então:

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8},$$
$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

Logo,

$$\boxed{P(Y = 1) = \frac{5}{8}, \quad P(Y = 4) = \frac{3}{8}}$$

Exercício 06

Primeiro:

$$P(X = 1) = \frac{4}{10},\ P(X = 2) = \frac{3}{10},\ P(X = 3) = \frac{2}{10},\ P(X = 4) = \frac{1}{10}$$

Como $Y = 2 - X$: - $X = 1 \Rightarrow Y = 1$ com prob. $4/10$; - $X = 2 \Rightarrow Y = 0$ com prob. $3/10$; - $X = 3 \Rightarrow Y = -1$ com prob. $2/10$; - $X = 4 \Rightarrow Y = -2$ com prob. $1/10$

Logo,

$$\boxed{P(Y = 1) = \frac{4}{10},\ P(Y = 0) = \frac{3}{10},\ P(Y = -1) = \frac{2}{10},\ P(Y = -2) = \frac{1}{10}}$$

Exercício 07

Probabilidades por sorteio: - vermelha: $p_R = \frac{2}{10} = 0.2$ (ganha $+1$ ponto), - preta: $p_B = \frac{3}{10} = 0.3$ (perde -1 ponto), - branca: $p_W = \frac{5}{10} = 0.5$ (0 ponto)

Sejam r, b, w as contagens em 3 sorteios ($r + b + w = 3$).
Então $P(r, b, w) = \frac{3!}{r!b!w!} p_R^r p_B^b p_W^w$ e a pontuação é $X = r - b$.

(a) Função de probabilidade de X

Os valores possíveis são $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. A distribuição resulta em:

$$\boxed{\begin{aligned} P(X = -3) &= 0,027, \\ P(X = -2) &= 0,135, \\ P(X = -1) &= 0,279, \\ P(X = 0) &= 0,305, \\ P(X = 1) &= 0,186, \\ P(X = 2) &= 0,060, \\ P(X = 3) &= 0,008 \end{aligned}}$$

Comentário

A forma "estrutural" é: somar $P(r, b, w)$ sobre todas as triplas (r, b, w) que dão o mesmo $x = r - b$.

(b) Y = dinheiro ganho/perdido

Regra: - se $X > 0$, ganha $R\$2$ por ponto positivo $\Rightarrow Y = 2X$; - se $X < 0$, perde $R\$1$ por ponto negativo $\Rightarrow Y = X$ (pois X já é negativo); - se $X = 0$, $Y = 0$

Assim:

$$Y = \begin{cases} X, & X < 0, \\ 0, & X = 0, \\ 2X, & X > 0 \end{cases}$$

Logo, o suporte de Y é $\{-3, -2, -1, 0, 2, 4, 6\}$ e:

$$\boxed{\begin{aligned} P(Y = -3) = P(X = -3) &= 0,027, \\ P(Y = -2) = P(X = -2) &= 0,135, \\ P(Y = -1) = P(X = -1) &= 0,279, \\ P(Y = 0) = P(X = 0) &= 0,305, \\ P(Y = 2) = P(X = 1) &= 0,186, \\ P(Y = 4) = P(X = 2) &= 0,060, \\ P(Y = 6) = P(X = 3) &= 0,008 \end{aligned}}$$

Exercício 08

Como X é exponencial com taxa 2:

$$F_X(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0$$

Como $Y = 3X + 2$ (monótona crescente): - se $y < 2$, $P(Y \leq y) = 0$; - se $y \geq 2$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{2(y-2)}{3}\right)$$

Logo,

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2, \\ 1 - \exp\left(-\frac{2(y-2)}{3}\right), & y \geq 2 \end{cases}}$$

Exercício 09

(a) $Y = X^3$

Transformação monótona crescente em $x > 0$.
Inversa: $x = y^{1/3}$, com $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$.

Então:

$$f_Y(y) = f_X(y^{1/3})\left|\frac{dx}{dy}\right| = e^{-y^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3}, \quad y > 0$$

Logo,

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{3y^{2/3}}e^{-y^{1/3}}, \quad y > 0}$$

(b) $Z = \frac{3}{(X+1)^2}$

Para $x > 0$, $z = 3/(x+1)^2$ é **decrescente** e o suporte é:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow z \uparrow 3, \qquad x \to \infty \Rightarrow z \downarrow 0,$$

logo $0 < z < 3$.

Inversa:

$$z = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow x + 1 = \sqrt{\frac{3}{z}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{z}} - 1$$

Derivada:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\sqrt{3}}{2} z^{-3/2} \Rightarrow \left|\frac{dx}{dz}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-3/2}$$

Então:

$$f_Z(z) = f_X\left(\sqrt{\frac{3}{z}} - 1\right)\left|\frac{dx}{dz}\right| = \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{z}} + 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-3/2}, \quad 0 < z < 3$$

Logo,

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-3/2} \exp\left(1 - \sqrt{\frac{3}{z}}\right), \quad 0 < z < 3}$$

Exercício 10

A densidade de R é:

$$f_R(r) = \frac{1}{B(2,2)} r^1 (1-r)^1 = 6r(1-r), \quad 0 < r < 1$$

0.1 (a) Volume $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

Defina $c = \frac{4\pi}{3}$, então $v = cr^3$ e $0 < v < c$

Inversa: $r = (v/c)^{1/3}$ e:

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{3} c^{-1/3} v^{-2/3}$$

Logo:

$$f_V(v) = f_R\big((v/c)^{1/3}\big)\left|\frac{dr}{dv}\right| = 6\left(\frac{v}{c}\right)^{1/3}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3}\right) \cdot \frac{1}{3} c^{-1/3} v^{-2/3}$$

Simplificando:

$$\boxed{f_V(v) = 2c^{-2/3} v^{-1/3}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3}\right), \quad 0 < v < c, \quad c = \frac{4\pi}{3}}$$

Esperança:

$$E(V) = c\,E(R^3)$$

Para Beta$(2,2)$:

$$E(R^3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

Logo:

$$\boxed{E(V) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{15}}$$

(b) Área $A = 4\pi R^2$

Defina $d = 4\pi$, então $a = dr^2$ e $0 < a < d$.

Inversa: $r = \sqrt{a/d}$ e:

$$\frac{dr}{da} = \frac{1}{2\sqrt{da}}$$

Então:

$$f_A(a) = f_R\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)\left|\frac{dr}{da}\right| = 6\sqrt{\frac{a}{d}}\left(1 - \sqrt{\frac{a}{d}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{da}}$$

Como $\sqrt{a/d}/\sqrt{da} = 1/d$, fica:

$$\boxed{f_A(a) = \frac{3}{d}\left(1 - \sqrt{\frac{a}{d}}\right), \quad 0 < a < d, \quad d = 4\pi}$$

Esperança:

$$E(A) = d\,E(R^2)$$

Para Beta$(2,2)$:

$$E(R^2) = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

Logo:

$$\boxed{E(A) = 4\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{6\pi}{5}}$$

Exercício 11

A densidade de I é $f_I(i) = \frac{1}{2}$ para $9 < i < 11$.

Como $P = 2I^2$ é crescente para $I > 0$, o suporte é:

$$p \in (2 \cdot 9^2,\ 2 \cdot 11^2) = (162,\ 242)$$

Inversa:

$$i = \sqrt{\frac{p}{2}}$$

Derivada:

$$\frac{di}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}$$

Logo:

$$f_P(p) = f_I\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)\left|\frac{di}{dp}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2p}} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{2p}}}, \quad 162 < p < 242$$

Esperança:

$$E(P) = 2E(I^2)$$

Para $I \sim U(a, b)$:

$$E(I^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Com $a = 9, b = 11$:

$$E(I^2) = \frac{81 + 99 + 121}{3} = \frac{301}{3} \Rightarrow \boxed{E(P) = 2\cdot\frac{301}{3} = \frac{602}{3}}$$

Exercício 12

Como $\ln Y = X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então Y é lognormal:

$$\boxed{Y \sim \text{LogNormal}(\mu, \sigma^2)}$$

Densidade:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0}$$

Também:

$$\boxed{E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}, \qquad \boxed{\text{Var}(Y) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}}$$