Transformação de Variáveis Unidimensionais

Função de Variável Aleatória

Se X é uma variável aleatória com função densidade acumulada $F_x(x)$, então qualquer função de X, por exemplo, $g(X)$ também é uma variável aleatória.

Função de Variável Aleatória

Se X é uma variável aleatória com função densidade acumulada $F_x(x)$, então qualquer função de X, por exemplo, $g(X)$ também é uma variável aleatória.

Geralmente, $g(X)$ é de nosso interesse e denotamos $Y = g(X)$ para indicar a nova variável aleatória $g(X)$.

Função de Variável Aleatória

Se X é uma variável aleatória com função densidade acumulada $F_x(x)$, então qualquer função de X, por exemplo, $g(X)$ também é uma variável aleatória.

Geralmente, $g(X)$ é de nosso interesse e denotamos $Y = g(X)$ para indicar a nova variável aleatória $g(X)$.

Uma vez que Y é uma função de X, podemos descrever o comportamento probabilístico de Y em termos de X, isto é, para um dado conjunto A,

$$P(Y \in A) = P(g(X) \in A)$$

mostrando que a distribuição de Y depende das funções F_X e g.

Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos $y = g(x)$, a função $g(x)$ define uma função no suporte original de X, denotado por S_X, para um novo espaço amostral, denotado por S_Y, o suporte de Y.

Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos $y = g(x)$, a função $g(x)$ define uma função no suporte original de X, denotado por S_X, para um novo espaço amostral, denotado por S_Y, o suporte de Y.

Seja então a função inversa de g, denotada por g^{-1}, que é uma função de S_y para S_x.

$$g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$$

Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos $y = g(x)$, a função $g(x)$ define uma função no suporte original de X, denotado por S_X, para um novo espaço amostral, denotado por S_Y, o suporte de Y.

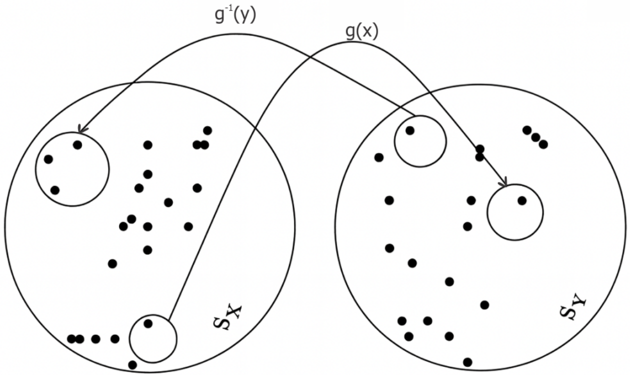
Seja então a função inversa de g, denotada por g^{-1}, que é uma função de S_y para S_x.

$$g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$$

Portanto, a função inversa consiste no conjunto de valores de X, para os quais $g(x) = y$, dado um valor de y fixado do suporte de Y, que é a variável aleatória obtida pela transformação de interesse, $g(X)$.

Função de Variável Aleatória

É importante observar que cada valor de x pertencente ao suporte de X, corresponde a um único valor de y pertencente ao suporte de Y. Por outro lado, um valor $y \in S_Y$ pode corresponder a mais de um valor do suporte de X, conforme ilustra a figura abaixo



Função de Variável Aleatória

Finalmente, se a variável aleatória Y for definida por $Y = g(X)$, podemos escrever para qualquer conjunto $A \subset S_Y$,

$$\begin{aligned} P(Y \in A) &= P(g(X) \in A) \\ &= P(\{x \in S_X : g(x) \in A\}) \\ &= P(X \in g^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Isto define a distribuição de probabilidade de Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Se X for uma variável aleatória discreta e $Y = g(X)$, então Y também será uma variável aleatória discreta. Assim,

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x), \qquad \text{para } y \in S_Y$$

e $p_Y(y) = 0$ para $y \notin S_Y$.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 01: Suponhamos que a distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada pela tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Seja $Y = 3X + 1$. Encontre a distribuição da variável aleatória Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 01: Suponhamos que a distribuição de probabilidades da variável aleatória X é dada pela tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Seja $Y = 3X + 1$. Encontre a distribuição da variável aleatória Y.

Solução:

Como $Y = 3X + 1$,

$y = 3x + 1$	-5	-2	1	4	7	10
$p_Y(y)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 02: Considere a mesma distribuição de probabilidades da variável aleatória X, dada pela tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Contudo, vamos agora definir a variável aleatória $Y = X^2$. Qual a distribuição de probabilidades de Y?

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 02: Considere a mesma distribuição de probabilidades da variável aleatória X, dada pela tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Contudo, vamos agora definir a variável aleatória $Y = X^2$. Qual a distribuição de probabilidades de Y?

Solução:

Temos que $S_X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Como $Y = X^2$, temos que o suporte de Y é dado por $S_Y = \{0, 1, 4, 9\}$, de forma que a distribuição da variável Y será dada por:

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0{,}2$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0{,}5$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0{,}2$$

$$P(Y = 9) = P(X = 3) = 0{,}1$$

Logo,

$y = x^2$	0	1	4	9
$p_Y(y)$	0,2	0,5	0,2	0,1

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 03: Suponha que $X \sim Poisson(\lambda)$, com função de probabilidade

$$P(x|\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considere que $Y = g(X)$, tal que $g(X) = 0$, se x é par e $g(X) = 1$, se x é ímpar. Obter a função de probabilidade de Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 03: Suponha que $X \sim Poisson(\lambda)$, com função de probabilidade

$$P(x|\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considere que $Y = g(X)$, tal que $g(X) = 0$, se x é par e $g(X) = 1$, se x é ímpar. Obter a função de probabilidade de Y.

Solução:

Temos que o conjunto suporte de Y é $S_Y = \{0, 1\}$. Vamos calcular a $P(Y = 0)$.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) = P(g(X)=0) &= P(X \text{ ser par}) \\
&= \sum_{x \in \{0,2,4,\ldots\}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}
$$

Aparte — Séries de Taylor e Maclaurin

Série de Taylor

Expansão de uma função em torno de um ponto a:
A expansão de Taylor escrita termo a termo é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aparte — Séries de Taylor e Maclaurin

Série de Maclaurin

Caso particular da série de Taylor com $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Exemplos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Assim, $e^{\lambda} + e^{-\lambda} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ e,

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\
&= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Como $\sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y) = 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
P(Y = 1) = P(X \text{ ser ímpar}) &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Como $\sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y) = 1$, temos que

$$P(Y = 1) = P(X \text{ ser ímpar}) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right).$$

Finalmente, $p_Y(y) = 0$ para outros valores de $y \notin S_Y$. Portanto, $Y \sim Bernoulli(p)$ com

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right), \qquad \lambda > 0$$

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 04: Considere que $X \sim Binomial(n, p)$ com função de probabilidade

$$P(x|n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{\, n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considere $Y = g(X) = n - X$ e obtenha a distribuição de probabilidade de Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Exemplo 04: Considere que $X \sim Binomial(n, p)$ com função de probabilidade

$$P(x|n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{\, n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considere $Y = g(X) = n - X$ e obtenha a distribuição de probabilidade de Y.

Solução:

Considerando $Y = g(X) = n - X$, temos que $S_Y = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Quando $Y = y$, temos $X = n - y$, assim,

Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) = P(g(X)=y) = P(X=g^{-1}(y)) &= P(X=n-y) \\
&= \binom{n}{n-y} p^{n-y}(1-p)^{n-(n-y)} \\
&= \binom{n}{n-y} p^{n-y}(1-p)^{y} \\
&= \binom{n}{y}(1-p)^{y} p^{n-y}, \qquad \text{uma vez que } \binom{n}{n-y} = \binom{n}{y}
\end{aligned}
$$

que equivale a dizer que $Y \sim binomial(n, 1-p)$.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Método da Função de Distribuição

Teorema: Consideremos uma variável aleatória contínua X com função de distribuição de probabilidade F_X conhecida e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $Y = g(X)$ é uma variável aleatória com função distribuição dada por

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y])) = \int_{g^{-1}\left((-\infty,y]\right)} f_X(x)\ dx$$

em que $g^{-1}(y)$ é a função inversa de g.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

- Esse método consiste em encontrar a função de distribuição da variável transformada $Y = g(X)$ a partir da função de distribuição de X.
- Se Y for variável aleatória continua, podemos então obter a sua função densidade a partir da derivada da função de distribuição já encontrada.
- Não necessariamente $Y = g(X)$ será variável aleatória contínua, Y por ser contínua, discreta e até mesmo uma variável aleatória que não seja nem discreta nem contínua.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 05: Considere que $X \sim Exp(\lambda)$, sendo $\lambda > 0$ conhecido, com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Para $Y = g(X)$ dada por

$$Y = g(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq \dfrac{1}{\lambda} \\ 1, & c.c. \end{cases}$$

obter a distribuição de Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Solução:

Como o evento $\{Y = 0\}$ ocorre quando $X \leq 1/\lambda$ e a função de distribuição exponencial é $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, então

$$P(Y = 0) = F_X\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \exp\left(-\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-1}$$

Temos então, que

$$P(Y = 1) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo, Y é uma variável aleatória discreta, pois $S_Y = \{0, 1\}$. Além disso, $Y \sim Bernoulli(p = e^{-1})$, com *fp* dada por

$$p_Y(y) = \begin{cases} p^y(1-p)^{1-y} & \text{para } y \in \{0,1\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

com $p = e^{-1}$.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 06: Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim N(0,1)$, cuja *fdp* é dada por

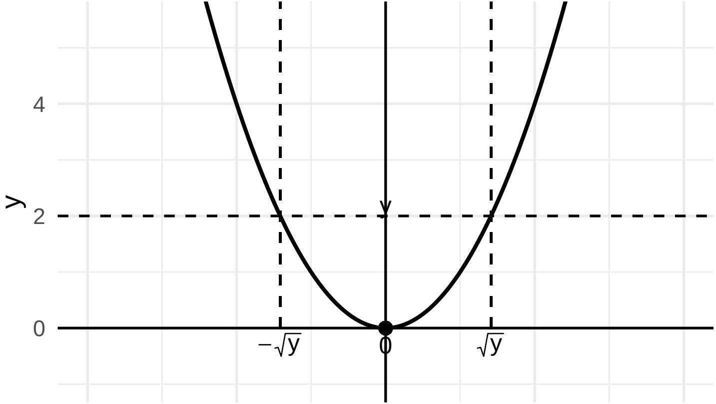
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Considerando $Y = g(X) = X^2$, obter a função densidade de probabilidade de Y.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Solução:

Temos que o evento $\{Y \leq y\}$, para y fixado e pertencente ao conjunto suporte $S_Y = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, cuja equivalência em relação aos eventos pertencentes ao suporte de X, $S_X = \mathbb{R}$, é dada por $\{Y \leq y\} = \{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$, conforme ilustrado abaixo



Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Portanto,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi_X(\sqrt{y}) - \Phi_X(-\sqrt{y})$$

para $y > 0$, sendo Φ_X, a função de distribuição de probabilidade da normal padrão.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Se derivarmos $F_y(y)$ em relação a y, e usando o fato de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, temos

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \frac{d\left[\Phi_X(\sqrt{y}) - \Phi_X(-\sqrt{y})\right]}{dy} \\
&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{(regra da cadeia)} \\
&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \text{(simetria da normal)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}\, e^{-y/2}\, y^{-1/2} = \chi_1^2(y).
\end{aligned}
$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Método do Jacobiano

Teorema: Seja X com *fdp* $f_X(x)$ e $Y = g(X)$, onde g é uma função monótona. Sejam $S_X = \{x : f_X(x) > 0\}$ e $S_Y = \{y : y = g(x)$ para algum $x \in S_X\}$. Suponha que $f_X(x)$ seja contínua em S_X e que $g^{-1}(y)$ tenha uma derivada contínua em S_Y. Então,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| & y \in S_Y \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 07: Suponha uma variável aleatória contínua

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma > 0.$$

Sua função densidade é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Definimos a nova variável aleatória

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Queremos encontrar a distribuição de Y usando o **método do jacobiano**.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Passo 1: Escrever a transformação e a inversa

A transformação é

$$Y = g(X) = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Isolando X em função de Y, obtemos a inversa:

$$X = \sigma Y + \mu.$$

Isto é,

$$x = g^{-1}(y) = \sigma y + \mu.$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Passo 2: Calcular o jacobiano em 1D

No caso unidimensional, o jacobiano é o valor absoluto da derivada de x em relação a y:

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}\,\sigma y + \mu = \sigma \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d}{dy}\,\sigma y + \mu\right| = \sigma$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Passo 3: Para $Y = g(X)$ com g monotônica, a densidade de Y é dada por

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$$

No nosso caso:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(\sigma y + \mu)\, \sigma \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\, \sigma \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma y)^2}{2\sigma^2}\right)\, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo,

$$f_Y(y) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

que é exatamente a densidade da **Normal Padrão**.

Portanto,

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 08: Seja $X \sim U(0,1)$. Obtenha a função densidade de $Y = -\ln(X)$.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 08: Seja $X \sim U(0,1)$. Obtenha a função densidade de $Y = -\ln(X)$.

Solução:

Sabemos que se $X \sim U(0,1)$, então sua função densidade $f_X(x)$ é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $Y = -\ln(X)$. Como $0 < X < 1$, então $Y > 0$.

Invertendo:

$$Y = -\ln(X) \;\Rightarrow\; -Y = \ln(X) \;\Rightarrow\; X = e^{-Y}$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Portanto:

$$x = g^{-1}(y) = e^{-y}$$

Jacobiano

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}e^{-y} = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d}{dy}x\right| = e^{-y}$$

Temos que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Substituindo:

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y}$$

uma vez que $f_X(x) = 1$ no intervalo $(0, 1)$.

$$f_Y(y) = 1 \cdot e^{-y} = e^{-y}, \quad y > 0.$$

Temos que $Y \sim Exp(\lambda = 1)$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Generalização do Método do Jacobiano

Se $Y = g(X)$ não é monótona em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o método do Jacobiano em cada um dos intervalos em que g é monótona, da seguinte forma:

1) Defina uma partição de $\mathbb{R}_X$ formada pelos intervalos $I_1, I_2, \cdots I_k$ tais que a função g é monótona em cada I_j, $\;j = 1 \cdots k$.

2) Obtenha $f_j(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$ a cada intervalo I_j.

3) Finalmente, obtenha

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_j(y)$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 09: (Exemplo 06 revisitado) Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim N(0,1)$, cuja *fdp* é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Considerando $Y = g(X) = X^2$, obter a função densidade de probabilidade de Y, usando o **método do Jacobiano**.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Solução:

Note que, neste caso, temos duas regiões disjuntas do suporte de X, S_X, em que $g(x) = x^2$ é injetora. Temos, $S_{X_1} = (-\infty, 0]$ e $S_{X_2} = [0, \infty)$. Logo, $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ para $x \leq 0$ e $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$ para $x > 0$. Portanto,

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| \frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2} \right) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2} \right) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} = \chi_1^2(y).
\end{aligned}
$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 10: Seja $X \sim U(-1,1)$. Qual a distribuição de $Y = X^2$?

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Exemplo 10: Seja $X \sim U(-1, 1)$. Qual a distribuição de $Y = X^2$?

Solução:

Definindo a função indicadora de um conjunto A como

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

podemos escrever a fução densidade de X como $f_X(x) = \dfrac{1}{2} I_{(-1,1)}(x)$.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Como $Y = X^2$ não é monótona em $(-1, 1)$, mas o é em $(-1, 0)$ e $(0, 1)$ podemos utilizar a generalização do método do Jacobiano, ou seja, no intervalo $(-1, 0)$, $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ e no intervalo $(0, 1)$ $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Assim,

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right| \\
&= f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} (-\sqrt{y}) \right| + f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad 0 < y < 1
\end{aligned}
$$

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo, se $X \sim U(-1, 1)$, a distribuição de $Y = X^2$ é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

que é exatamente a densidade $Beta(1/2, 1)$.

Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo, se $X \sim U(-1,1)$, a distribuição de $Y = X^2$ é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

que é exatamente a densidade $Beta(1/2,1)$.

Assim, se $X \sim U(-1,1)$, $Y = X^2 \sim Beta(1/2,1)$.

A Transformação Integral

Um importante e conhecido teorema é o **Teorema da Probabilidade Integral**, que relaciona a distribuição uniforme contínua com todas as outras distribuições de probabilidade.

A Transformação Integral

Um importante e conhecido teorema é o **Teorema da Probabilidade Integral**, que relaciona a distribuição uniforme contínua com todas as outras distribuições de probabilidade.

Seu resultado é importante na **Estatística Computacional**, pois permite que sejam simuladas amostras aleatórias de qualquer distribuição de probabilidade.

A Transformação Integral

Teorema da probabilidade integral: Consideremos X uma variável aleatória absolutamente contínua com função de distribuição acumulada F_X. Então $U = F_X(X)$ possui distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Por outro lado, se $U \sim U(0, 1)$, então $X = F_X^{-1}(U)$ possui função de distribuição acumulada F_X.

A Transformação Integral

Demonstração: Considere X uma variável aleatória absolutamente contínua com função de distribuição acumulada F_X, então

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(F_X(X) \leq u) = P(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

Por outro lado, se $U \sim U(0,1)$, então

$$P(X \leq x) = P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x), \text{ pois } U \text{ é uniforme}$$

Assim X possui função de distribuição F_X.

A Transformação Integral

Exemplo 11: (Geração de variáveis da distribuição exponencial) Considere que $X \sim Exp(\lambda)$, cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

Se $U \sim U(0,1)$, qual é a distribuição de $X = F_X^{-1}(U)$?

A Transformação Integral

Exemplo 11: (Geração de variáveis da distribuição exponencial) Considere que $X \sim Exp(\lambda)$, cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

Se $U \sim U(0,1)$, qual é a distribuição de $X = F_X^{-1}(U)$?

Solução:

A função inversa é dada por

$$u = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

A Transformação Integral

Assim, pelo teorema da transformação integral,

$$X = F_X^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$$

possui distribuição exponencial com função de distribuição F_X. Podemos utilizar esse resultado para gerar realizações de uma amostra aleatória da distribuição exponencial. Para isso, basta gerarmos realizações uniformes u e aplicarmos a relação anterior.

A Transformação Integral

Exemplo 12: (Geração de variáveis da distribuição Weibull) Considere que $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, \qquad x \geq 0$$

Se $U \sim U(0,1)$, qual é a distribuição de $X = F_X^{-1}(U)$?

A Transformação Integral

Exemplo 12: (Geração de variáveis da distribuição Weibull) Considere que $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, \qquad x \geq 0$$

Se $U \sim U(0,1)$, qual é a distribuição de $X = F_X^{-1}(U)$?

Solução:

A função inversa é dada por

$$u = 1-e^{-(x/\alpha)^\beta} \Rightarrow e^{-(x/\alpha)^\beta} = 1-u \Rightarrow (x/\alpha)^\beta = -\ln(1-u) \Rightarrow x = \alpha\left[-\ln(1-u)\right]^{1/\beta}$$

A Transformação Integral

Assim, pelo teorema da transformação integral,

$$X = F_X^{-1}(U) = \alpha \left[-\ln(1-U) \right]^{1/\beta}$$

possui distribuição Weibull com função de distribuição F_X.