

Vetores Aleatórios

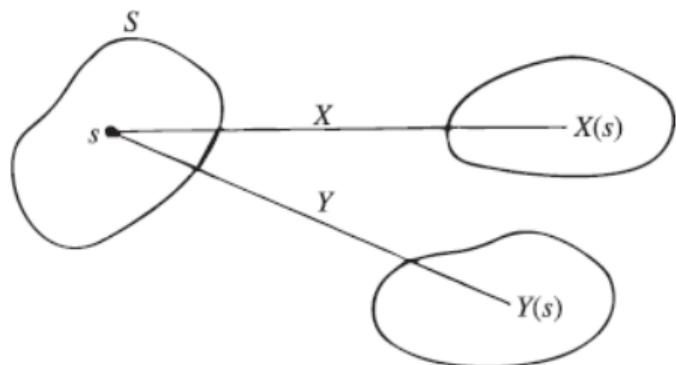
Introdução

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações, associações.

Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Definição: Sejam ε um experimento e S um espaço amostral associado a ε . Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional** (também chamada **vetor aleatório**).



Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Se $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s)$, ..., $X_n = X_n(s)$ forem n funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$, denominaremos (X_1, \dots, X_n) uma **variável aleatória n -dimensional** (ou um **vetor aleatório n -dimensional**).

Caso discreto

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, n, \dots, j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, n, \dots, j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de (X, Y) possam ser representados por (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, n, \dots, j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório n -dimensional discreto** como sendo um vetor formado por n **variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j) ;

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j) ;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y) .

Função de Probabilidade Conjunta

Definição: Seja (X, Y) uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representando $P(X = x_i, Y = y_j)$ e satisfazendo as seguintes condições:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x_i, y_j) ;

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada **função de probabilidade conjunta** de (X, Y) .

O conjunto dos termos $\{(x_i, y_j, p(x_i, y_j)), i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$ é denominado **distribuição de probabilidade conjunta** de (X, Y) .

Função de Probabilidade Conjunta

Para vetores n -dimensionais, a função de probabilidade conjunta é $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$ e satisfaz

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = 1$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶ X : o número de bolas brancas observadas.
- ▶ Y : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶ X : o número de bolas brancas observadas.
- ▶ Y : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Exemplo: Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶ X : o número de bolas brancas observadas.
- ▶ Y : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Note que,

$$X = \{0, 1, 2\}, \quad \text{e} \quad Y = \{0, 1\}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Além disso,

$$P(1B, 2B) = P(X = 2, Y = 0) = P(1B) P(2B | 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(1B, 2V) = P(X = 1, Y = 1) = P(1B) P(2V | 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2B) = P(X = 1, Y = 0) = P(1V) P(2B | 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2V) = P(X = 0, Y = 1) = P(1V) P(2V | 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Função de Probabilidade Conjunta

Temos então, a distribuição conjunta de (X, Y)

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Função de Distribuição Acumulada

Seja (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)** F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

Função de Distribuição Acumulada

Seja (X, Y) uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)** F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

De forma análoga, para vetores n -dimensionais,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{x'_1 \leq x_1} \sum_{x'_2 \leq x_2} \cdots \sum_{x'_n \leq x_n} P(X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \dots, X_n = x'_n) \end{aligned}$$

Função de Distribuição Acumulada

Considere a distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ do exemplo da urna:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Função de Distribuição Acumulada

Para $y = 0$

$$F(0, 0) = P(X \leq 0, Y \leq 0) = p(0, 0) = 0$$

$$F(1, 0) = P(X \leq 1, Y \leq 0) = p(0, 0) + p(1, 0) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$F(2, 0) = P(X \leq 2, Y \leq 0) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(2, 0) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

Função de Distribuição Acumulada

Para $y = 1$

$$F(0, 1) = P(X \leq 0, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(0, 1) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$F(1, 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(0, 1) + p(1, 1) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\begin{aligned} F(2, 1) &= P(X \leq 2, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(2, 0) + p(0, 1) + p(1, 1) + p(2, 1) \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 = 1 \end{aligned}$$

Função de Distribuição Acumulada

Tabela final dos valores da fda

$y \setminus x$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ ou } x < 0, \\ 0, & 0 \leq y < 1, 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{10}, & 0 \leq y < 1, 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{5}, & 0 \leq y < 1, x \geq 2, \\ \frac{3}{10}, & y \geq 1, 0 \leq x < 1, \\ \frac{9}{10}, & y \geq 1, 1 \leq x < 2, \\ 1, & y \geq 1, x \geq 2 \end{cases}$$

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

- ▶ A **distribuição marginal de X** é definida como

$$P(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y), \quad \forall x$$

Distribuições Marginais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$.

- ▶ A **distribuição marginal de X** é definida como

$$P(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y), \quad \forall x$$

- ▶ Analogamente, a **distribuição marginal de Y** é definida como

$$P(Y = y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x P(X = x, Y = y), \quad \forall y$$

Distribuições Marginais

Em geral, se (X_1, X_2, \dots, X_n) é um **vetor aleatório n -dimensional**, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_r)$$

Distribuições Marginais

Em geral, se (X_1, X_2, \dots, X_n) é um **vetor aleatório n -dimensional**, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

No nosso exemplo,

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Distribuições Condicionais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y)$. A **distribuição condicional de X dado $Y = y$** é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \forall x$$

Distribuições Condicionais

Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y)$. A **distribuição condicional de X dado $Y = y$** é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \forall x$$

Analogamente, define-se a **distribuição condicional de Y dado $X = x$** como

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}, \quad \forall y$$

Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x .

Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x .

Assim, se X assume n valores distintos e Y assume m valores distintos, teremos ao todo $n + m$ **distribuições condicionais**.

Distribuições Condicionais

Voltando ao exemplo, note que temos as distribuições condicionais $X | Y = 0$ e $X | Y = 1$. Analogamente, temos as distribuições condicionais $Y | X = 0$, $Y | X = 1$ e $Y | X = 2$.

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Distribuições Condicionais

Assim,

$$P(X = 0 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0}{2/5} = 0$$

$$P(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$$

Distribuições Condicionais

Analogamente, temos que

$$P(X = 0 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 0$$

Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y P(Y = y \mid X = x)$$

Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y P(Y = y \mid X = x)$$

Observação: Note que o subscrito X indica que a variável aleatória é X e, portanto, estamos calculando a média (ou esperança) dos valores que X assume fixado o valor y . Observação análoga vale para o subscrito Y .

Esperança Condisional

Voltando ao exemplo, vamos encontrar $E(X \mid Y = 0)$:

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 0) &= \sum_x x P(X = x \mid Y = 0) \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

De forma análoga, vamos encontrar $E(X \mid Y = 1)$:

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_x x P(X = x \mid Y = 1) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

Analogamente,

$$E(Y \mid X = 0) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$E(Y \mid X = 1) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y \mid X = 2) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Esperança Condisional

Note que, para cada valor y de Y , temos um valor diferente de $E(X \mid Y = y)$ e, para cada valor x de X , temos um valor diferente de $E(Y \mid X = x)$.

Esperança Condisional

Note que, para cada valor y de Y , temos um valor diferente de $E(X | Y = y)$ e, para cada valor x de X , temos um valor diferente de $E(Y | X = x)$.

Sendo assim, podemos definir uma **função** g que associa, a cada valor y de Y , o valor $g(y) = E(X | Y = y)$ e outra **função** h que associa, a cada valor x de X , o valor $h(x) = E(Y | X = x)$, ou seja,

$$g : y \longmapsto g(y) = E(X | Y = y)$$

$$h : x \longmapsto h(x) = E(Y | X = x)$$

Esperança Condisional

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas.

Esperança Condisional

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas.

Vamos denotar essas esperanças por $E_Y[g(Y)]$ e $E_X[h(X)]$, que são calculadas como

$$E_Y[g(Y)] = \sum_y g(y) P(Y = y)$$

$$E_X[h(X)] = \sum_x h(x) P(X = x)$$

Esperança Condisional

Assim, usando a definição da esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \sum_y g(y) P(Y = y) = \sum_y E_X(X \mid Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x P(X = x \mid Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) = E(X) \end{aligned}$$

Esperança Condicional

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \sum_x h(x) P(X = x) = \sum_x E_Y(Y \mid X = x) P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y P(Y = y \mid X = x) P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y y \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y y P(Y = y) = E(Y) \end{aligned}$$

Esperança Condisional

Resumindo:

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = E(X)$$

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = E(Y)$$

Esse resultado estabelece a **Lei da Esperança Total**.

Esperança Condisional

No exemplo, $Y \in \{0, 1\}$ e $X \in \{0, 1, 2\}$, com distribuição conjunta:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

Esperança Condisional

As marginais são:

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10},$$

$$P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$

E as esperanças condicionais já calculadas:

$$E(X | Y = 0) = \frac{5}{4}, \quad E(X | Y = 1) = \frac{1}{2},$$

$$E(Y | X = 0) = 1, \quad E(Y | X = 1) = \frac{1}{2}, \quad E(Y | X = 2) = 0$$

Esperança Condisional

Primeiro, calculemos $E(X)$ diretamente pela marginal de X :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Esperança Condisional

Agora, calculemos $E_Y[E(X | Y)]$:

$$\begin{aligned} E_Y[E(X | Y)] &= \sum_y E(X | Y = y) P(Y = y) \\ &= E(X | Y = 0) P(Y = 0) + E(X | Y = 1) P(Y = 1) \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X | Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Espetrança Condisional

e,

$$\begin{aligned}E_X[E(Y \mid X)] &= \sum_x E(Y \mid X = x) P(X = x) \\&= E(Y \mid X = 0) P(X = 0) + E(Y \mid X = 1) P(X = 1) + E(Y \mid X = 2) P(X = 2) \\&= 1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} \\&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \\&= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Esperança Condicional

Logo,

$$E_X[E_Y(Y | X)] = \frac{3}{5} = E(Y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias

Definição (Independência de variáveis aleatórias discretas): Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Dizemos que X e Y são **independentes** se, e somente se,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y), \quad \forall x, y$$

Ou seja, a **distribuição conjunta** é o **produto das distribuições marginais**.

De forma análoga, para vetores n -dimensionais,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n$$

Independência de Variáveis Aleatórias

Lembrando a distribuição conjunta do exemplo:

Y \ X		0	1	2
0	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$

Independência de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Pela definição, X e Y seriam independentes se, para todo x e y ,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

mas,

Considere o par $(x, y) = (0, 0)$:

Independência de Variáveis Aleatórias

- Da tabela conjunta:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0$$

- Pelo produto das marginais:

$$P(X = 0) P(Y = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Como

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) P(Y = 0),$$

concluímos que X e Y **não são independentes**.

Funções de Variáveis Aleatórias

TEOREMA 01: Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que cada par (x, y) é levado a $h(x, y)$. Então,

$$E[h(X, Y)] = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

De forma análoga, para vetores n -dimensionais,

$$E[h(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

TEOREMA 02: Seja (X, Y) um **vetor aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $h(x, y) = x + y$. Então,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_x \sum_y (x + y) P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y x P(X = x, Y = y) + \sum_x \sum_y y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) + \sum_y y \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) + \sum_y y P(Y = y) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

No exemplo da urna, a distribuição conjunta é:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X) + E(Y) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Note que, como $E(X + Y) = \sum_{x,y} (x + y) P(X = x, Y = y)$, temos:

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= (1 + 0) \cdot \frac{3}{10} + (2 + 0) \cdot \frac{1}{10} + (0 + 1) \cdot \frac{3}{10} + (1 + 1) \cdot \frac{3}{10} \\ &= 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \\ &= \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Teorema 02,

$$E(X + Y) = \frac{7}{5} = E(X) + E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= E [(X + Y) - E(X + Y)]^2 \\&= E [X + Y - E(X) - E(Y)]^2 \\&= E [(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2 \\&= E [(X - E(X))^2] + E [(Y - E(Y))^2] + 2E [(X - E(X))(Y - E(Y))] \\&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E [(X - E(X))(Y - E(Y))]\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observe que, na variância da soma, aparece um termo envolvendo a **esperança do produto dos desvios em torno das médias**. Esse termo define a **covariância** de duas variáveis aleatórias. Note ainda, que as variáveis

$$X' = X - E(X) \quad \text{e} \quad Y' = Y - E(Y)$$

são variáveis aleatórias ambas com média zero, isto é,

$$E(X') = E(Y') = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Covariância): A **covariância** entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Covariância): A **covariância** entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Substituindo essa definição na expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias, obtém-se o seguinte resultado.

Resultado 01: A variância da soma de duas variáveis aleatórias é dada por

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{ Cov}(X, Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Uma forma alternativa de cálculo da covariância resulta de

$$\begin{aligned} E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Aqui usamos que $E(kX) = kE(X)$ e também que $E(k) = k$. Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

1. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{ Cov}(X, Y)$

De fato,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(aX + b, cY + d) &= E[(aX + b - E(aX + b))(cY + d - E(cY + d))] \\ &= E[(aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d)] \\ &= E[a(X - E(X)) c(Y - E(Y))] \\ &= ac E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= ac \text{ Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

2. $\text{Cov}(X + Y, Z + W) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(X, W) + \text{Cov}(Y, Z) + \text{Cov}(Y, W)$

De fato,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X + Y, Z + W) &= E[(X + Y)(Z + W)] - E(X + Y)E(Z + W) \\&= E(XZ + XW + YZ + YW) - [E(X) + E(Y)][E(Z) + E(W)] \\&= E(XZ) + E(XW) + E(YZ) + E(YW) \\&\quad - E(X)E(Z) - E(X)E(W) - E(Y)E(Z) - E(Y)E(W) \\&= [E(XZ) - E(X)E(Z)] + [E(XW) - E(X)E(W)] \\&\quad + [E(YZ) - E(Y)E(Z)] + [E(YW) - E(Y)E(W)] \\&= \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(X, W) + \text{Cov}(Y, Z) + \text{Cov}(Y, W)\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Propriedades da covariância

3.

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{ Cov}(X, Y)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X - Y) &= \text{Var}[X + (-Y)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(-Y) + 2 \text{ Cov}(X, -Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(-1) \text{ Cov}(X, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{ Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Resultado 02: Se X e Y são variáveis aleatórias **independentes**, então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

De fato,

Se X e Y são independentes, então

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Nesse caso,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy P(X = x) P(Y = y) \\ &= \left(\sum_x x P(X = x) \right) \left(\sum_y y P(Y = y) \right) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Note que a recíproca desse resultado **não é verdadeira**, isto é, **covariância nula não significa independência** entre as variáveis.

Funções de Variáveis Aleatórias

Como exemplo, consideremos a seguinte distribuição de probabilidade conjunta:

Distribuição conjunta $p(x, y)$ (com marginais)

$Y \setminus X$	0	1	2	$p_Y(y)$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
$p_X(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	1

Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} \\ &\quad + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{38}{20} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Entretanto, X e Y **não são independentes**, pois, por exemplo,

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{20} \neq P(X = 0) P(Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Coeficiente de Correlação): O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

onde σ_X e σ_Y são os **desvios-padrão** de X e Y , respectivamente.

Funções de Variáveis Aleatórias

Definição (Coeficiente de Correlação): O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

onde σ_X e σ_Y são os **desvios-padrão** de X e Y , respectivamente.

TEOREMA 03: Dadas duas variáveis aleatórias X e Y com esperança, variância e covariância finitas, então

$$-1 \leq \text{Cor}(X, Y) \leq 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Demonstração

Sejam

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}, \quad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y},$$

as variáveis aleatórias **padronizadas**.

Das propriedades de esperança e variância, sabemos que

$$E(X^*) = E(Y^*) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X^*) = \text{Var}(Y^*) = 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Sabemos também que a variância de qualquer variável aleatória é não-negativa. Em particular,

$$\text{Var}(X^* + Y^*) \geq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X^* + Y^*) &= \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) + 2 \text{ Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 + 2 \text{ Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) \geq -1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Analogamente, considerando

$$\text{Var}(X^* - Y^*) \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Var}(X^* - Y^*) &= \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) - 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 - 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Portanto,

$$-1 \leq \text{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Mas, por definição,

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) = \text{Cor}(X, Y),$$

o que completa a demonstração.

Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \setminus X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Temos,

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Somando apenas os termos não nulos da distribuição conjunta:

$$E(XY) = (1 \cdot 1) \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Usando a fórmula alternativa da covariância,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{3}{10} - 1 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \\ &= -\frac{3}{10}\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

► Variância de X

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} \\&= \frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{16}{10}\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{16}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

► Variância de Y

Como Y é Bernoulli com $P(Y = 1) = \frac{3}{5}$,

$$\text{Var}(Y) = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{6}{25}}$$

Funções de Variáveis Aleatórias

Por definição,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Substituindo os valores obtidos,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{-\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{6}{25}}} = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{125}{18}}$$

Numericamente,

$$\text{Cor}(X, Y) \approx -0,79$$

Caso contínuo

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R , poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R , poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

Definição: (X, Y) será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores em uma região R , poderemos dizer que (X, Y) é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório n -dimensional contínuo** como sendo um vetor formado por n **variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

Função Densidade Conjunta

Seja (X, Y) um **vetor aleatório contínuo**. A função densidade conjunta $f(x, y)$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$

Função Densidade Conjunta

Exemplo: Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional (X, Y) tenha fdp conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função Densidade Conjunta

1. Vamos verificar que a função densidade conjunta $f(x, y)$ satisfaz a condição de não-negatividade:

Na região limitada por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$, temos:

- ▶ $x^2 \geq 0$, pois o quadrado de qualquer número real é não-negativo;
- ▶ $\frac{xy}{3} \geq 0$, pois $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Logo, a soma desses termos também é não-negativa:

$$x^2 + \frac{xy}{3} \geq 0$$

Função Densidade Conjunta

2. Verifiquemos se a função densidade conjunta satisfaz $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy \\&= \int_0^2 \left[\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \right] dy \\&= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{yx^2}{6} \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6} \right) dy \\&= \int_0^2 \frac{1}{3} dy + \int_0^2 \frac{y}{6} dy = \frac{y}{3} \Big|_0^2 + \frac{y^2}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\end{aligned}$$

Densidades Marginais

As **densidades marginais** de X e Y são definidas por:

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx$$

Densidades Marginais

Voltando ao exemplo, vamos encontrar as densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$:

- ▶ **Densidade marginal de X :** Por definição,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Como o suporte em y é $0 \leq y \leq 2$, para $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy = \int_0^2 x^2 dy + \int_0^2 \frac{xy}{3} dy \\ &= x^2(2 - 0) + \frac{x}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{2} = 2x^2 + \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ **Densidade marginal de Y :** De forma análoga,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Como o suporte em x é $0 \leq x \leq 1$, para $0 \leq y \leq 2$:

Densidades Marginais

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \\&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{y}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}\end{aligned}$$

Densidades Marginais

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \\&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{y}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}\end{aligned}$$

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Por definição, temos que

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Note que, para cada y temos uma densidade condicional diferente. Analogamente,

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

e para cada x temos uma densidade condicional diferente.

Distribuições e Esperanças Condicionais

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Assim, para $0 \leq y \leq 2$,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y+2} = \frac{2x(3x+y)}{y+2}$$

Logo,

$$f_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} \frac{2x(3x+y)}{y+2}, & 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma análoga, para $0 < x \leq 1$ (note que $f_X(0) = 0$, mas isso ocorre com probabilidade zero),

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{x + \frac{y}{3}}{2x + \frac{2}{3}} = \frac{3x + y}{6x + 2} = \frac{3x + y}{2(3x + 1)}$$

Logo,

$$f_{Y|X}(y | x) = \begin{cases} \frac{3x + y}{2(3x + 1)}, & 0 \leq y \leq 2, \ 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X \mid Y = y) = \int x f_{X|Y}(x \mid y) dx = \int x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \int y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X \mid Y = y) = \int x f_{X|Y}(x \mid y) dx = \int x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \int y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

Note que, assim como no caso discreto, para cada valor y de Y , temos um valor diferente de $E_X(X \mid Y = y)$, e para cada valor x de X , temos um valor diferente de $E_Y(Y \mid X = x)$.

Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo, aqui também podemos definir uma função g que associa a cada valor de Y o valor $E_X(X | Y = y)$ e outra função h que associa a cada valor de X o valor $E_Y(Y | X = x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} g : y &\longmapsto g(y) = E_X(X | Y = y), \\ h : x &\longmapsto h(x) = E_Y(Y | X = x) \end{aligned}$$

Como X e Y são variáveis aleatórias, essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$, cujas esperanças são calculadas como

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int g(y) f_Y(y) dy \\ E_X[h(X)] &= \int h(x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Usando a definição de esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int g(y) f_Y(y) dy = \int E_X(X \mid Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int \left(\int x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx \right) f_Y(y) dy = \iint x f(x,y) dx dy \\ &= \int x \left(\int f(x,y) dy \right) dx = \int x f_X(x) dx = E(X) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$E_Y[E_X(X \mid Y)] = E(X)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Analogamente,

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \int h(x) f_X(x) dx = \int E_Y(Y \mid X = x) f_X(x) dx \\ &= \int \left(\int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \right) f_X(x) dx = \iint y f(x, y) dy dx \\ &= \int y \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int y f_Y(y) dy = E(Y) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = E(Y)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

Para nosso exemplo, temos:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

► Vamos verificar que $E_Y[E(X | Y)] = E(X)$:

A densidade condicional é

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y+2}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(y) &= E(X | Y = y) = \int_0^1 x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_0^1 x \frac{6x^2 + 2xy}{y+2} dx = \frac{1}{y+2} \int_0^1 (6x^3 + 2yx^2) dx \\ &= \frac{1}{y+2} \left(6 \cdot \frac{1}{4} + 2y \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{y+2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2y}{3} \right) = \frac{4y+9}{6(y+2)}, \quad 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y) f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \int_0^2 \frac{4y+9}{36} dy = \frac{1}{36} [2y^2 + 9y]_0^2 = \frac{1}{36}(8 + 18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y) f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \int_0^2 \frac{4y+9}{36} dy = \frac{1}{36} [2y^2 + 9y]_0^2 = \frac{1}{36}(8+18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X | Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X | Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

- ▶ Verificar $E_X[E(Y | X)] = E(Y)$

A densidade condicional é

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{3x + y}{2(3x + 1)}, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 < x \leq 1$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo,

$$\begin{aligned} h(x) = E(Y \mid X = x) &= \int_0^2 y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int_0^2 y \frac{3x + y}{2(3x + 1)} dy \\ &= \frac{1}{2(3x + 1)} \int_0^2 (3xy + y^2) dy = \frac{1}{2(3x + 1)} \left(3x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{2(3x + 1)} \left(3x \cdot 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9x + 4}{3(3x + 1)}, \quad 0 < x \leq 1 \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Note que

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3} = \frac{2x(3x + 1)}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \int_0^1 h(x) f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{9x + 4}{3(3x + 1)} \cdot \frac{2x(3x + 1)}{3} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x(9x + 4)}{9} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 (18x^2 + 8x) dx \\ &= \frac{1}{9} \left(18 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{9}(6 + 4) = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Distribuições e Esperanças Condicionais

Além disso,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_X[E(Y | X)] = \frac{10}{9} = E(Y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

Definição (Independência de variáveis aleatórias contínuas): Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo com função densidade conjunta $f(x, y)$. Sejam $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ as densidades marginais de X e Y , respectivamente. Então, diz-se que X e Y são variáveis aleatórias independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x, y$$

Ou seja, a **densidade conjunta** é o **produto das densidades marginais** para todo par (x, y) no domínio de definição.

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

No exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição, X e Y seriam independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição, X e Y seriam independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y)$$

Para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$,

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) \left(\frac{y+2}{6}\right) = \frac{y+2}{3} \left(x^2 + \frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{y+2}{3}x^2 + \frac{y+2}{9}x = \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{y}{9} + \frac{2}{9}\right)x \\ &\neq x^2 + \frac{xy}{3} = f(x, y) \end{aligned}$$

Assim, concluímos que X e Y **não são independentes**.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Assim como no caso discreto, conhecida a densidade conjunta de (X, Y) , podemos ter interesse em estudar a densidade de uma variável aleatória definida como uma função $h(X, Y)$, em que h é uma função real, isto é, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

TEOREMA 04: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = \iint h(x, y) f(x, y) dx dy$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

TEOREMA 04: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = \iint h(x, y) f(x, y) dx dy$$

TEOREMA 05: Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $h(X, Y) = aX + bY$, com a e b números reais quaisquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = a E(X) + b E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo Teorema 05, para a combinação linear

$$h(X, Y) = aX + bY,$$

vale

$$E[h(X, Y)] = aE(X) + bE(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Temos que a marginal de X é

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) dx = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

A marginal de Y é

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \left(\frac{y+2}{6} \right) dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy = \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} + 4 \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Escolhendo, por exemplo,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -3,$$

temos

$$h(X, Y) = 2X - 3Y$$

Pelo Teorema 05,

$$\begin{aligned} E(2X - 3Y) &= 2E(X) - 3E(Y) = 2 \cdot \frac{13}{18} - 3 \cdot \frac{10}{9} \\ &= \frac{13}{9} - \frac{30}{9} = -\frac{17}{9} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y) \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y) \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

Temos que,

$$\begin{aligned}(2x - 3y) \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) &= (2x)x^2 + (2x)\frac{xy}{3} - (3y)x^2 - (3y)\frac{xy}{3} \\&= 2x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 3x^2y - xy^2 \\&= 2x^3 - \frac{7}{3}x^2y - xy^2\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral interna em x (de 0 a 1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(2x^3 - \frac{7}{3}x^2y - xy^2 \right) dx &= \int_0^1 2x^3 dx - \frac{7}{3}y \int_0^1 x^2 dx - y^2 \int_0^1 x dx \\&= 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{3}y \cdot \frac{1}{3} - y^2 \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral externa em y (de 0 a 2)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy &= \int_0^2 \frac{1}{2} dy - \frac{7}{9} \int_0^2 y dy - \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 dy \\&= \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{7}{9} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3} \\&= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

- Integral externa em y (de 0 a 2)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy &= \int_0^2 \frac{1}{2} dy - \frac{7}{9} \int_0^2 y dy - \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 dy \\&= \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{7}{9} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3} \\&= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}\end{aligned}$$

Logo, verificamos numericamente a linearidade:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto.
A covariância entre X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto. A covariância entre X e Y é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

O coeficiente de correlação é definido por

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Valem todas as propriedades vistas anteriormente para o caso discreto. Em particular, se X e Y são variáveis aleatórias contínuas **independentes**, então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

A recíproca, em geral, **não é verdadeira**, uma vez que a covariância mede apenas a **relação linear** entre as variáveis.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já obtivemos

$$E(X) = \frac{13}{18}, \quad E(Y) = \frac{10}{9}$$

A seguir calculamos $E(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$ e $\text{Cor}(X, Y)$.

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

► Cálculo de $E(XY)$

Por definição,

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 xy \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

Expandindo:

$$xy \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) = x^3y + \frac{x^2y^2}{3}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^3y + \frac{x^2y^2}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[y \int_0^1 x^3 dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^3y + \frac{x^2y^2}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[y \int_0^1 x^3 dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54} \end{aligned}$$

► Covariância: Temos que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{43}{54} - \left(\frac{13}{18}\right)\left(\frac{10}{9}\right) \\ &= \frac{43}{54} - \frac{130}{162} = \frac{129}{162} - \frac{130}{162} = -\frac{1}{162}\end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

► Correlação

Para a correlação, precisamos das variâncias. Primeiro, vamos calcular $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^2 \int_0^1 x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 x^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^3 y}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{y}{12} \right) dy = \left[\frac{y}{5} + \frac{y^2}{24} \right]_0^2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{24} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{17}{30} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

Agora, vamos calcular $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^2 \int_0^1 y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 y^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[y^2 \int_0^1 x^2 dx + \frac{y^3}{3} \int_0^1 x dx \right] dy = \int_0^2 \left(y^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{6} \right) dy = \left[\frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{24} \right]_0^2 = \frac{8}{9} + \frac{16}{24} = \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{73}{1620}}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Coeficiente de correlação

Por definição,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{73}{1620}} \sqrt{\frac{26}{81}}}$$

Simplificando, obtém-se

$$\text{Cor}(X, Y) = -\frac{\sqrt{9490}}{1898} \approx -0.0513$$

Transformações Bivariadas

Exemplo: Considere o nosso vetor aleatório contínuo (X, Y) com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \quad V = X + Y$$

Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \quad V = X + Y$$

Da definição,

$$u = x, \quad v = x + y \Rightarrow x = u, \quad y = v - u$$

Logo, a inversa é

$$(x, y) = (u, v - u)$$

Transformações Bivariadas

O Jacobiano da transformação inversa $(u, v) \mapsto (x, y)$ é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim, $|J| = 1$. Como $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$, então:

- ▶ $u = x \in [0, 1]$;
- ▶ $y = v - u \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq v - u \leq 2 \Rightarrow u \leq v \leq u + 2$

Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2$$

Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2$$

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) |J| = f_{X,Y}(u, v-u) \cdot 1,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= u^2 + \frac{u(v-u)}{3} \\ &= u^2 + \frac{uv - u^2}{3} = \frac{2u^2 + uv}{3} \end{aligned}$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1, \ u \leq v \leq u + 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1, u \leq v \leq u + 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ▶ Validade da função densidade

Não-negatividade

No suporte da distribuição temos

$$u \geq 0 \quad \text{e} \quad v \geq u \geq 0$$

Transformações Bivariadas

Logo,

$$2u^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad uv \geq 0$$

Portanto,

$$2u^2 + uv \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_{U,V}(u, v) \geq 0$$

em todo o suporte.

Fora do suporte, $f_{U,V}(u, v) = 0$, o que também satisfaz a condição.

Transformações Bivariadas

Devemos verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv du = 1$$

Como o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2,$$

temos

$$\int_0^1 \int_u^{u+2} \frac{2u^2 + uv}{3} dv du = \int_0^1 \frac{1}{3} \left[\int_u^{u+2} (2u^2 + uv) dv \right] du$$

Transformações Bivariadas

Integral interna em v

$$\begin{aligned}\int_u^{u+2} (2u^2 + uv) \, dv &= 2u^2(v) \Big|_u^{u+2} + u \frac{v^2}{2} \Big|_u^{u+2} \\&= 2u^2(2) + \frac{u}{2} [(u+2)^2 - u^2] \\&= 4u^2 + \frac{u}{2}(4u+4) \\&= 4u^2 + 2u^2 + 2u \\&= 6u^2 + 2u\end{aligned}$$

Transformações Bivariadas

Integral externa em u

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{3}(6u^2 + 2u) du &= \frac{1}{3} \int_0^1 (6u^2 + 2u) du \\&= \frac{1}{3} \left(6 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\&= \frac{1}{3}(2 + 1) \\&= 1\end{aligned}$$

Logo, $f_{U,V}(u, v)$ é uma função densidade de probabilidade conjunta válida.

Transformações Bivariadas

Exemplo: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade $f_X(x) = e^{-x}$, para $x \geq 0$ e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

Transformações Bivariadas

Exemplo: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade $f_X(x) = e^{-x}$, para $x \geq 0$ e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

Como X e Y são independentes, e com distribuição Exponencial(1),

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}, \quad f_Y(y) = e^{-y} \mathbf{I}_{\{y \geq 0\}}$$

Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \mathbf{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \quad V = \frac{Y}{X}$$

Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \mathbf{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \quad V = \frac{Y}{X}$$

De $V = \frac{Y}{X}$, obtemos $Y = VX$. Substituindo em $U = X + Y$:

$$U = X + VX = X(1 + V) \Rightarrow X = \frac{U}{1 + V}$$

Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V \frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como $X > 0$ e $Y > 0$, temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V \frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como $X > 0$ e $Y > 0$, temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

Temos então, que a inversa é

$$x(u, v) = \frac{u}{1+v}, \quad y(u, v) = \frac{uv}{1+v}$$

Transformações Bivariadas

O Jacobiano dessa transformação é:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} - \left(-\frac{u}{(1+v)^2} \right) \cdot \frac{v}{1+v}$$
$$= \frac{u}{(1+v)^2}$$

Transformações Bivariadas

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|$$

Como $x(u, v) + y(u, v) = \frac{u}{1+v} + \frac{uv}{1+v} = u$, segue que

$$f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) = e^{-u}$$

Portanto,

$$f_{U,V}(u, v) = e^{-u} \cdot \frac{u}{(1+v)^2}, \quad u > 0, v > 0$$