

# Resolução: Função Geradora de Momentos

## Exercício 01

(a) FGM  $M_X(t)$

Por definição:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} 2x \, dx$$

Integração por partes: escolha  $u = 2x$  e  $dv = e^{tx} dx$ , então  $du = 2dx$  e  $v = \frac{1}{t}e^{tx}$ . Assim:

$$M_X(t) = \frac{2x}{t}e^{tx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{t}e^{tx} \, dx = \frac{2}{t}e^t - \frac{2}{t^2}(e^t - 1)$$

Logo:

$$M_X(t) = \frac{2}{t^2} [1 + (t-1)e^t], \quad t \neq 0,$$

e por continuidade  $M_X(0) = 1$ .

---

(b)  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$  via fgm

Expansão de  $e^t$  em série (até ordem  $t^2$ ):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)$$

Então:

$$1 + (t-1)e^t = 1 + (t-1) \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4) \right) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + O(t^5)$$

Logo:

$$M_X(t) = \frac{2}{t^2} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + O(t^5) \right) = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}t^2 + O(t^3)$$

Como  $M_X(t) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 + O(t^3)$ , obtemos:

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}, \quad \frac{E(X^2)}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{E(X^2) = \frac{1}{2}}$$

Então:

$$\boxed{\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}}$$

---

### Exercício 02

Observe que  $X = a + Y$  com  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

(a) FGM de  $X$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(a+Y)}) = e^{at}E(e^{tY})$$

Para  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ :

$$E(e^{tY}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Logo:

$$\boxed{M_X(t) = e^{at} \frac{\lambda}{\lambda - t}}, \quad t < \lambda$$

---

(b)  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$

Como  $X = a + Y$ :

$$\boxed{E(X) = a + \frac{1}{\lambda}}, \quad \boxed{\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

---

### Exercício 03

**i** Comentário — convenção

Assumo  $X = 1$  para “cara” e  $X = 0$  para “coroa”, então  $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ .

(a) FGM de  $X$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2}e^{t \cdot 1} + \frac{1}{2}e^{t \cdot 0} = \boxed{\frac{1 + e^t}{2}}$$

---

(b)  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$  Para Bernoulli( $p$ ),  $E(X) = p$  e  $\text{Var}(X) = p(1 - p)$ . Com  $p = 1/2$ :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}}, \quad \boxed{\text{Var}(X) = \frac{1}{4}}$$

---

#### Exercício 04

(a) FGM de  $X$

Para  $|t| < 1$ :

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(t+1)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx \right)$$

As integrais convergem se  $t + 1 > 0$  e  $t - 1 < 0$ , isto é,  $|t| < 1$ .

Calculando:

$$\int_{-\infty}^0 e^{(t+1)x} dx = \frac{1}{t+1}, \quad \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \frac{1}{1-t}$$

Logo:

$$M_X(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1-t+t+1}{1-t^2} \right) = \boxed{\frac{1}{1-t^2}}, \quad |t| < 1$$

---

(b)  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$

Como  $M_X(t) = (1 - t^2)^{-1}$ :

$$M'_X(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \Rightarrow M'_X(0) = 0 \Rightarrow \boxed{E(X) = 0}$$

Além disso:

$$M''_X(t) = \frac{2}{(1-t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1-t^2)^3} \Rightarrow M''_X(0) = 2 \Rightarrow \boxed{E(X^2) = 2}$$

Então:

$$\boxed{\text{Var}(X) = 2 - 0^2 = 2}$$

---

**Exercício 05**

Se  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  e  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  independentes, então:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right), \quad M_Y(t) = \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right)$$

Para  $Z = aX + bY$ :

$$M_Z(t) = E(e^{t(aX+bY)}) = E(e^{(at)X})E(e^{(bt)Y}) = M_X(at)M_Y(bt)$$

Logo:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \exp\left(a\mu_X t + \frac{a^2\sigma_X^2 t^2}{2}\right) \exp\left(b\mu_Y t + \frac{b^2\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \\ &= \exp\left((a\mu_X + b\mu_Y)t + \frac{(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Isso é a fgm de uma normal com:

$$Z \sim N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

---

**Exercício 06**

(a) FGM de  $Y = 3X + 2$

Usando a propriedade:

$$M_{cX+d}(t) = e^{dt} M_X(ct),$$

temos:

$$M_Y(t) = e^{2t} M_X(3t) = e^{2t} (0.4e^{3t} + 0.6)^8$$

---

(b) Calcular  $E(X)$

Observe que  $(pe^t + 1 - p)^n$  é a fgm de  $\text{Bin}(n, p)$ . Aqui  $n = 8$ ,  $p = 0,4$ .

Então:

$$E(X) = np = 8 \cdot 0,4 = 3,2$$

---

**Exercício 07**

Por definição:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i \sin(tX))$$

Escreva:

$$\varphi_X(t) = a + ib, \quad a = E(\cos(tX)), \quad b = E(\sin(tX))$$

Então:

$$|\varphi_X(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pela desigualdade  $[E(U)]^2 \leq E(U^2)$ :

$$a^2 \leq E(\cos^2(tX)), \quad b^2 \leq E(\sin^2(tX))$$

Somando:

$$a^2 + b^2 \leq E(\cos^2(tX) + \sin^2(tX)) = E(1) = 1$$

Logo:

$$\boxed{|\varphi_X(t)| \leq 1}$$

---

**Exercício 08**

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(1+it)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(1-it)x} dx \right)$$

Calculando:

$$\int_{-\infty}^0 e^{(1+it)x} dx = \frac{1}{1+it}, \quad \int_0^{\infty} e^{-(1-it)x} dx = \frac{1}{1-it}$$

Logo:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{(1-it) + (1+it)}{1+t^2} \right) = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$$

---

**Exercício 09**

Densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(-1,0)}(x) + \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{8}\right) \mathbf{1}_{(0,2)}(x)$$

Então:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{itx} dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{8}\right) e^{itx} dx$$

**Parte 1:**

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{itx} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{itx}}{it} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-it}}{it}$$

**Parte 2 (termo constante):**

$$\frac{1}{4} \int_0^2 e^{itx} dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{e^{itx}}{it} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2it} - 1}{it}.$$

**Parte 2 (termo linear):** Usamos  $\int x e^{itx} dx = e^{itx} \left( \frac{x}{it} - \frac{1}{(it)^2} \right)$ . Logo:

$$\frac{1}{8} \int_0^2 x e^{itx} dx = \frac{1}{8} \left[ e^{itx} \left( \frac{x}{it} - \frac{1}{(it)^2} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{8} \left( e^{2it} \left( \frac{2}{it} - \frac{1}{(it)^2} \right) + \frac{1}{(it)^2} \right)$$

Somando tudo (para  $t \neq 0$ ):

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-it}}{it} + \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2it} - 1}{it} + \frac{1}{8} \left( e^{2it} \left( \frac{2}{it} - \frac{1}{(it)^2} \right) + \frac{1}{(it)^2} \right), \quad t \neq 0}$$

E, por definição,  $\boxed{\varphi_X(0) = 1}$ .