Integrais Duplas e Triplas

Introdução

Na teoria da probabilidade, especialmente quando lidamos com **vetores aleatórios contínuos**, as **integrais múltiplas** desempenham um papel central. Diferentemente do caso discreto, em que probabilidades são obtidas por somas, no caso contínuo as probabilidades são calculadas por integrais, que admitem uma interpretação geométrica natural como volumes sob superfícies.

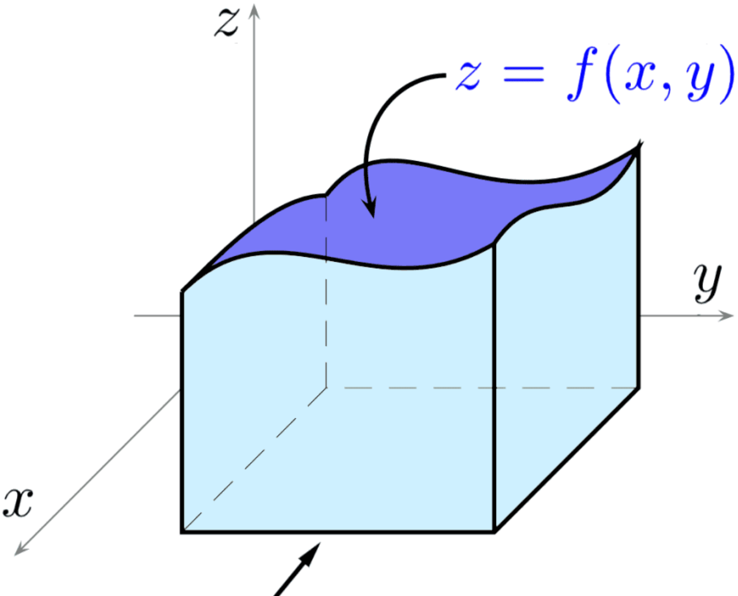
Integrais Duplas

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e integrável em uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. A integral dupla de f sobre R é definida por

$$\iint_R f(x, y)\, dA$$

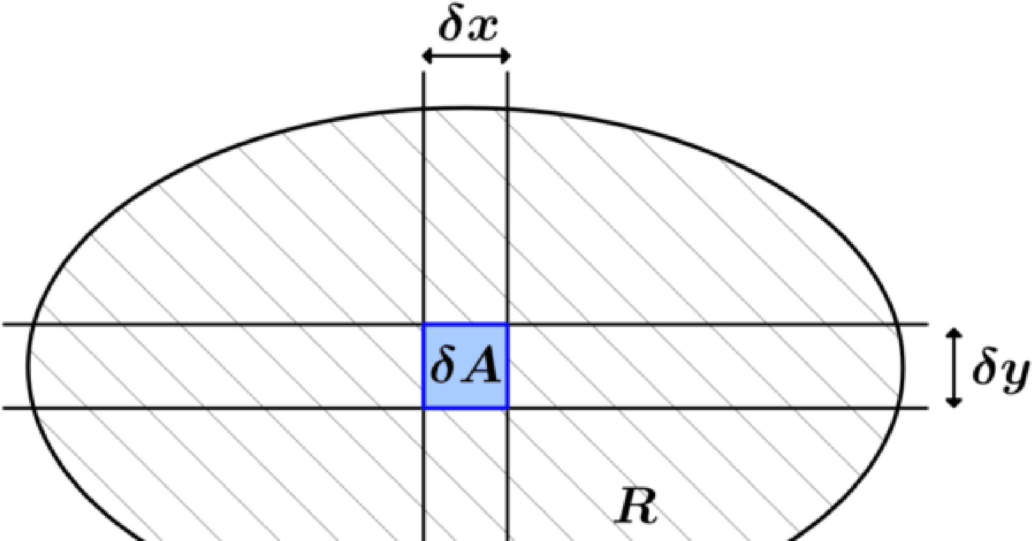
Geometricamente, essa integral representa o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $z = f(x, y)$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pela região R.

Integrais Duplas



Integrais Duplas

- dA depende das coordenadas. Em coordenadas cartesianas, temos:



Integrais Duplas

Por conseguinte, esta integral é avaliada como:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

Integrais Duplas

Por conseguinte, esta integral é avaliada como:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

Na prática, integrais duplas são calculadas como **integrais iteradas**. Seja

$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

Assim, pelo **Teorema de Fubini**, a integral é:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Integrais Duplas

Primeiro, calculamos a integral interna e depois a integral externa. Neste caso, a integral interna é em relação a x. No entanto, a ordem de integração não importa, pois podemos calcular a integral em relação a y primeiro.

Integrais Duplas

Exemplo 01: Calcule

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\, dx\, dy$$

Integrais Duplas

Exemplo 01: Calcule

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy$$

Solução: Como $[0,1]\times[0,1]$ é um retângulo, podemos escrever a integral dupla como uma integral iterada:

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dx\,dy$$

Integrais Duplas

Passo 1: integrar em relação a x

Aqui y é constante. Então:

$$\int_0^1 (x+y)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 y\,dx$$

Calculando cada parte:

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 y\,dx = y\int_0^1 1\,dx = y(1-0) = y$$

Integrais Duplas

Logo, a integral interna é:

$$\int_0^1 (x + y)\, dx = \frac{1}{2} + y$$

Integrais Duplas

Logo, a integral interna é:

$$\int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y$$

Passo 2: integrar em relação a y

Agora integramos o resultado de 0 a 1:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy + \int_0^1 y\,dy$$

Integrais Duplas

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\, dy = \frac{y}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 y\, dy = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Somando:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right)\, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Logo,

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y)\, dx\, dy = 1$$

Exemplo 02: Na integral dupla seguinte, indicar a região R de integração e encontrar o seu valor:

$$\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$$

Integrais Duplas

Exemplo 02: Na integral dupla seguinte, indicar a região R de integração e encontrar o seu valor:

$$\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dy\, dx$$

Solução: A integral está escrita na forma iterada

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 (\cdot)\, dy\, dx$$

Logo, a região de integração é

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

Integrais Duplas

Trata-se de um **retângulo** no plano cartesiano, com base no intervalo $[0, 2]$ do eixo x e altura no intervalo $[0, 1]$ do eixo y. Assim, mantendo x fixo, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 + 2x + 2y)\,dy &= \int_0^1 1\,dy + \int_0^1 2x\,dy + \int_0^1 2y\,dy \\
&= y\Big|_0^1 + 2x\,y\Big|_0^1 + 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \\
&= 1 + 2x + 1 \\
&= 2 + 2x
\end{aligned}$$

Integrais Duplas

vamos agora, integrar em relação a x:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2+2x)\,dx &= \int_0^2 2\,dx + \int_0^2 2x\,dx \\ &= 2x\Big|_0^2 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\ &= 4+4 \\ &= 8\end{aligned}$$

Integrais Duplas

Esse valor representa o **volume** do sólido limitado:

- inferiormente pelo plano $z = 0$,
- superiormente pela superfície $z = 1 + 2x + 2y$,
- lateralmente pela região retangular $R = [0, 2] \times [0, 1]$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Até agora, consideramos integrais duplas sobre regiões retangulares. No entanto, em muitas aplicações, especialmente em Probabilidade, a região de integração não é um retângulo, mas sim uma região mais geral do plano.

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Até agora, consideramos integrais duplas sobre regiões retangulares. No entanto, em muitas aplicações, especialmente em Probabilidade, a região de integração não é um retângulo, mas sim uma região mais geral do plano.

Nesses casos, a integral dupla continua sendo definida como

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy,$$

mas o cálculo exige uma descrição adequada da região R.

Regiões Gerais no Plano

Uma **região geral** $R \subset \mathbb{R}^2$ é qualquer subconjunto do plano que possa ser descrito por desigualdades envolvendo x e y.

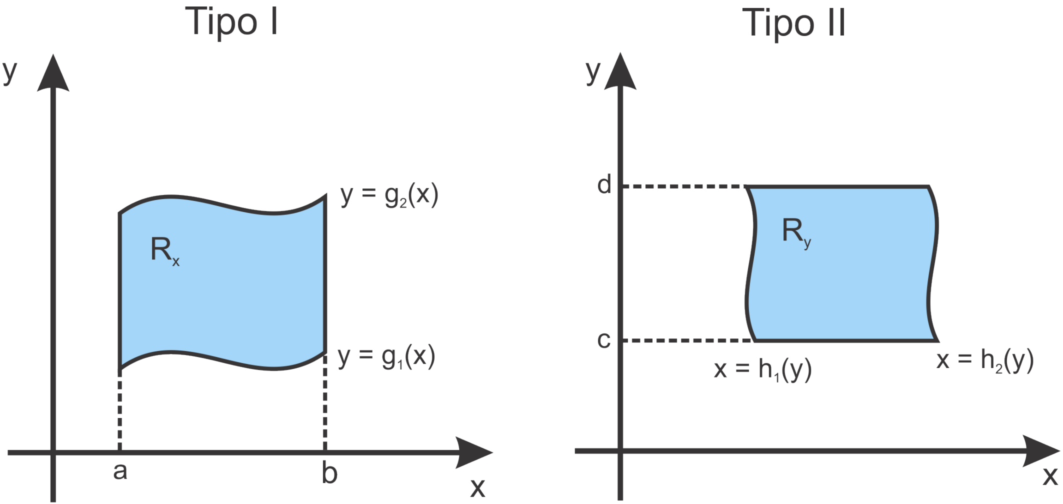
Regiões Gerais no Plano

Uma **região geral** $R \subset \mathbb{R}^2$ é qualquer subconjunto do plano que possa ser descrito por desigualdades envolvendo x e y.

Na prática, trabalhamos principalmente com dois tipos de regiões:

- Regiões do tipo **I** (ou regiões x)
- Regiões do tipo **II** (ou regiões y)

Regiões Gerais no Plano



Regiões do Tipo I (Regiões x)

Uma região R é dita do tipo I se pode ser escrita na forma

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Nesse caso, a integral dupla é calculada como

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Interpretação geométrica

- x varia em um intervalo fixo $[a, b]$;
- para cada x, a variável y varia entre duas curvas.

Exemplo: Região do Tipo I

Considere a região limitada pelas curvas

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x,$$

com $0 \leq x \leq 1$.

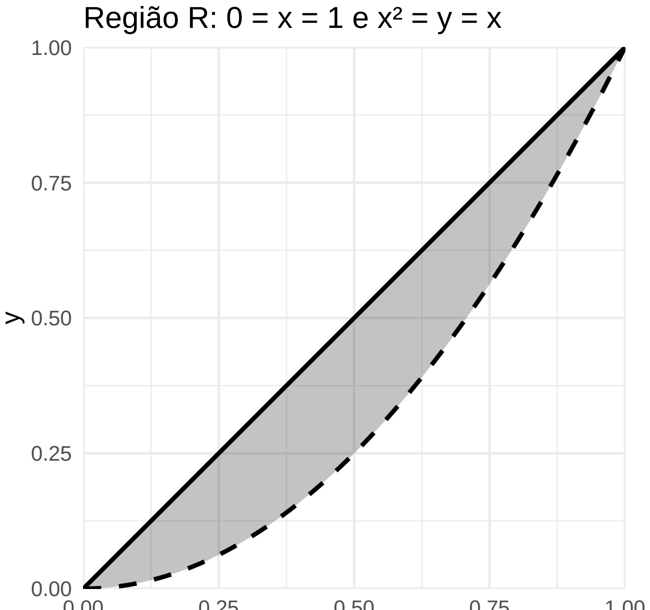
A região é

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$$

A integral dupla de $f(x, y)$ sobre R é

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy\, dx$$

Exemplo: Região do Tipo I



Regiões do Tipo II (Regiões y)

Uma região R é dita do tipo II se pode ser escrita como

$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Nesse caso,

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Interpretação geométrica

- y varia em um intervalo fixo $[c, d]$;
- para cada y, a variável x varia entre duas curvas.

Exemplo: Região do Tipo II

Considere a região limitada por

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = y,$$

com $0 \leq y \leq 1$.

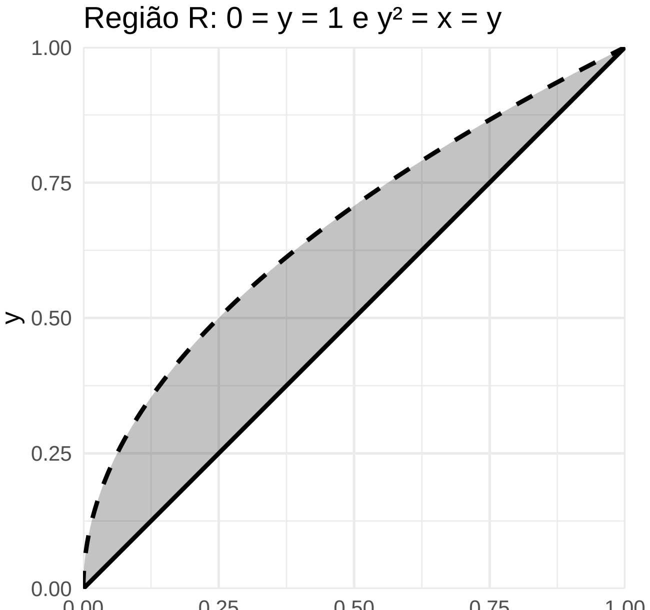
A região é

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$$

A integral dupla de $f(x, y)$ sobre R é

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Exemplo: Região do Tipo II



Troca da Ordem de Integração

Uma mesma região R pode, muitas vezes, ser descrita tanto como região do tipo I quanto do tipo II.

Trocar a ordem de integração significa reescrever

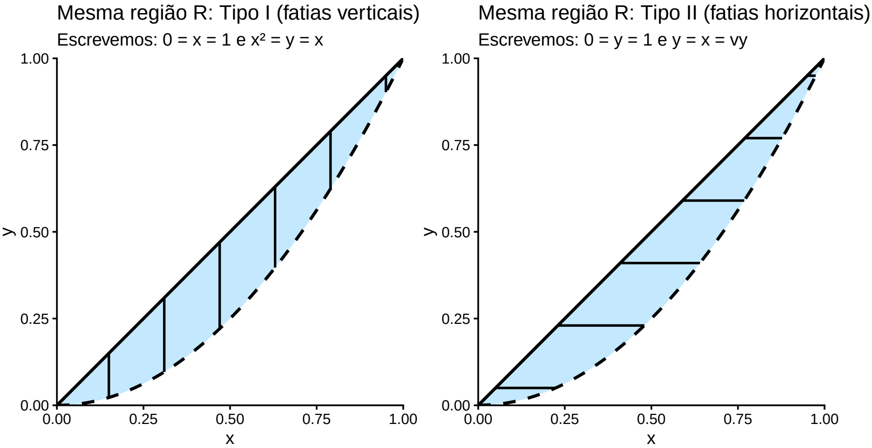
$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

na forma

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy,$$

mantendo a mesma região R.

Troca da Ordem de Integração



Integrais Duplas em Regiões Gerais

Exemplo 03: Resolver a integral dupla

$$\int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Exemplo 03: Resolver a integral dupla

$$\int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx$$

Solução: Identificação da Região de Integração

A integral está na forma

$$\int_{x=0}^3 \int_{y=4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} (\cdot)\,dy\,dx$$

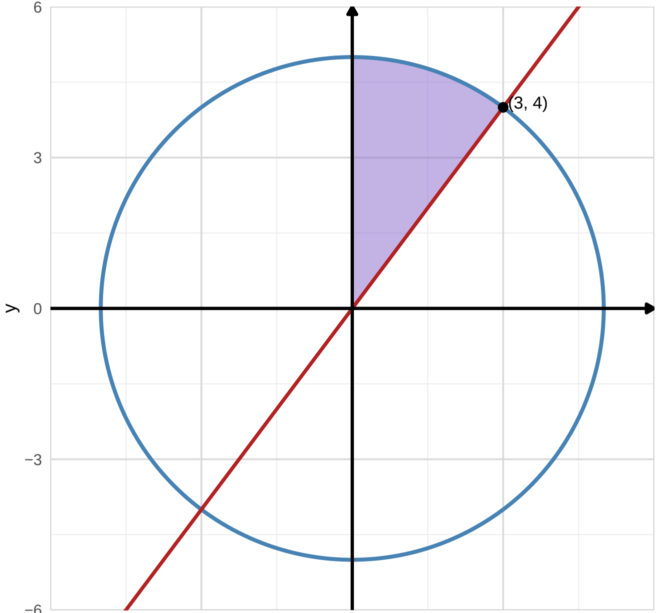
Integrais Duplas em Regiões Gerais

Logo, a região de integração é

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ \tfrac{4x}{3} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$$

ou seja, R é a região compreendida entre a reta $y = \frac{4x}{3}$ e o círculo $x^2 + y^2 = 25$, no primeiro quadrante, conforme ilustrado na Figura. Nessa região, a interseção entre as duas curvas é o ponto $P(3, 4)$.

Integrais Duplas em Regiões Gerais



Integrais Duplas em Regiões Gerais

Como a função integranda é $f(x, y) = x$, integramos primeiro em relação a y, tratando x como constante:

$$\int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy = x \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} dy$$

$$= x\,y\Big|_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}}$$

$$= x\left(\sqrt{25-x^2} - \frac{4x}{3}\right)$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Agora integramos em relação a x:

$$\int_0^3 x\left(\sqrt{25-x^2}-\frac{4x}{3}\right)\,dx=\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx-\frac{4}{3}\int_0^3 x^2\,dx$$

Cálculo de $\int_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx$

Faça a substituição

$$u=25-x^2 \quad \Rightarrow \quad du=-2x\,dx$$

Quando $x=0\to u=25$ e quando $x=3\to u=16$.

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x\left(\sqrt{25-x^2}-\frac{4x}{3}\right)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{25}^{16}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{16}^{25} \\
&= \frac{1}{3}(25^{3/2}-16^{3/2}) \\
&= \frac{1}{3}\cdot(125-64) = \frac{61}{3}
\end{aligned}$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Cálculo de $\frac{4}{3}\int_0^3 x^2\,dx$

$$\frac{4}{3}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{4}{3}\cdot 9 = 12$$

Substituindo os resultados:

$$\int_0^3\int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{61}{3} - 12 = \frac{25}{3}$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Exemplo 04: Na integral do exemplo anterior, alterar a ordem de integração e indicar a integral resultante.

Exemplo 04: Na integral do exemplo anterior, alterar a ordem de integração e indicar a integral resultante.

Solução: No exemplo anterior, tínhamos a integral

$$\int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} x \, dy \, dx,$$

cuja região é

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \ \tfrac{4x}{3} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Para inverter a ordem, fixamos y e vemos como x varia.

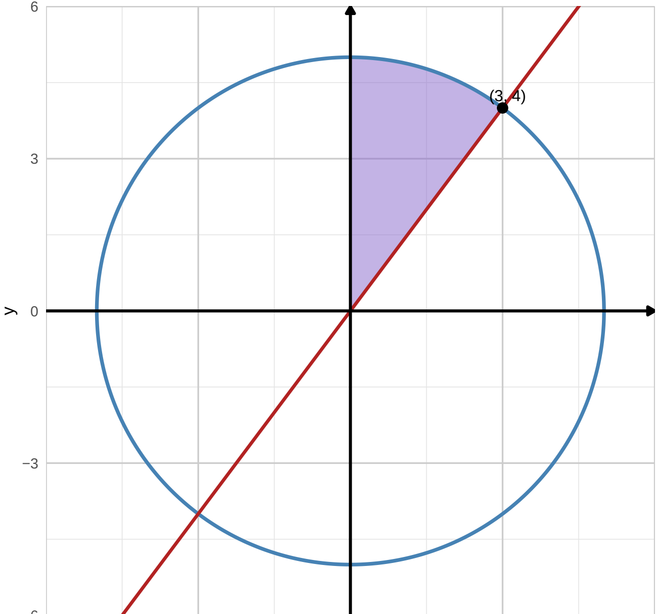
No primeiro quadrante, para um y fixo, o limite à esquerda vem da reta

$$y = \frac{4x}{3} \iff x = \frac{3y}{4},$$

e o limite à direita vem do círculo

$$x^2 + y^2 = 25 \iff x = \sqrt{25 - y^2}.$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais



Integrais Duplas em Regiões Gerais

Quanto aos valores de y na região:

- o menor y ocorre em $(0,0)$: $y = 0$,
- o maior y ocorre no topo do semicírculo: $y = 5$.

Logo, a região pode ser descrita por

$$R = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 5,\ \frac{3y}{4} \leq x \leq \sqrt{25 - y^2} \right\}$$

Assim, a integral equivalente é

$$\int_0^5 \int_{3y/4}^{\sqrt{25-y^2}} x \, dx \, dy$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Calculando rapidamente:

$$\int_0^5 \int_{3y/4}^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,dy = \int_0^5 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3y/4}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \int_0^5 \frac{1}{2}\left((25-y^2) - \frac{9y^2}{16}\right) dy$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}\left(25 - y^2 - \frac{9y^2}{16}\right) = \frac{1}{2}\left(25 - \frac{25y^2}{16}\right) = \frac{25}{2}\left(1 - \frac{y^2}{16}\right)$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Então,

$$\int_0^5 \frac{25}{2}\left(1-\frac{y^2}{16}\right)dy = \frac{25}{2}\left[y-\frac{y^3}{48}\right]_0^5 = \frac{25}{2}\left(5-\frac{125}{48}\right) = \frac{25}{3}$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Exemplo 05: Resolver

$$\iint_R x \, dA,$$

onde R é a região entre as curvas $y = 2x$ e $y = x^2$.

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Exemplo 05: Resolver

$$\iint_R x\, dA,$$

onde R é a região entre as curvas $y = 2x$ e $y = x^2$.

Solução: Região de integração R

Para encontrar os pontos de interseção, resolvemos

$$x^2 = 2x \iff x(x-2) = 0,$$

logo,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

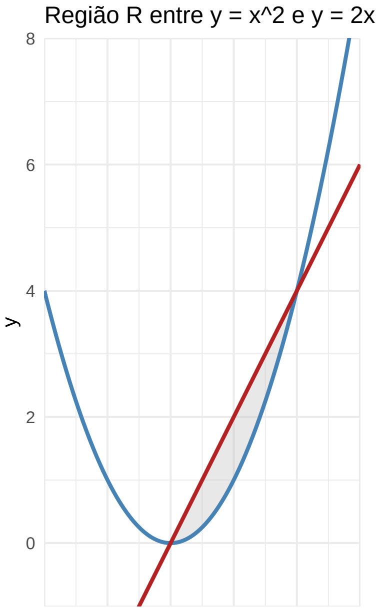
Para $0 < x < 2$, temos $2x > x^2$, então:

- curva superior: $y = 2x$,
- curva inferior: $y = x^2$

Assim, a região pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais



Integrais Duplas em Regiões Gerais

Escrevendo a integral como integral iterada

Como R é do tipo I, temos

$$\iint_R x\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x\,dy\,dx$$

Passo 1: integral interna (em relação a y)

Como x é constante em relação a y:

$$\int_{x^2}^{2x} x\,dy = x\int_{x^2}^{2x} dy = x\,[y]_{x^2}^{2x} = x(2x - x^2)$$

Integrais Duplas em Regiões Gerais

Passo 2: integral externa (em relação a x)

$$\int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2\cdot 2^3}{3} - \frac{2^4}{4} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

Integrais Triplas

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função não negativa e integrável em uma região $V \subset \mathbb{R}^3$. A integral tripla

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV$$

representa um hipervolume e é utilizada para modelar vetores aleatórios tridimensionais.

Integrais Triplas

Assim como no caso bidimensional, integrais triplas são avaliadas como integrais iteradas.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

com limites determinados pela geometria de V.

Integrais triplas

Exemplo 06: Calcular a integral tripla

$$\iiint_B xyz^2 \, dV,$$

em que B é a caixa retangular

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 3\}$$

Integrais triplas

Exemplo 06: Calcular a integral tripla

$$\iiint_B xyz^2\,dV,$$

em que B é a caixa retangular

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

Solução: Como B é uma caixa retangular, podemos escrever diretamente:

$$\iiint_B xyz^2\,dV = \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2\,dz\,dy\,dx$$

Integrais triplas

Passo 1: integrar em relação a z

Tratando x e y como constantes:

$$\int_0^3 xyz^2\,dz = xy\int_0^3 z^2\,dz = xy\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^3 = xy\cdot\frac{27}{3} = 9xy$$

Passo 2: integrar em relação a y

Agora:

$$\int_{-1}^2 9xy\,dy = 9x\int_{-1}^2 y\,dy = 9x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^2 = 9x\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = 9x\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{2}x$$

Integrais triplas

Passo 3: integrar em relação a x

Por fim:

$$\int_0^1 \frac{27}{2} x \, dx = \frac{27}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{4}$$

Logo,

$$\iiint_B xyz^2 \, dV = \frac{27}{4}$$

Integrais triplas

Exemplo 07: Calcule a integral tripla

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV,$$

na caixa retangular

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Integrais triplas

Exemplo 07: Calcule a integral tripla

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV,$$

na caixa retangular

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Solução: Como G é uma caixa retangular, podemos escrever:

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} 12xy^2z^3\,dz\,dy\,dx$$

Integrais triplas

Passo 1: integrar em relação a z

Tratando x e y como constantes:

$$\int_0^2 12xy^2 z^3 \, dz = 12xy^2 \int_0^2 z^3 \, dz = 12xy^2 \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 = 12xy^2 \cdot \frac{16}{4} = 12xy^2 \cdot 4 = 48xy^2$$

Passo 2: integrar em relação a y

Agora:

$$\int_0^3 48xy^2 \, dy = 48x \int_0^3 y^2 \, dy = 48x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 48x \cdot \frac{27}{3} = 48x \cdot 9 = 432x$$

Integrais triplas

Passo 3: integrar em relação a x

Por fim:

$$\int_{-1}^{2} 432x\,dx = 432\int_{-1}^{2} x\,dx = 432\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 432\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) = 432\cdot\frac{3}{2} = 648$$

Logo,

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV = 648$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em muitos problemas, a região de integração é complicada no sistema original de coordenadas. A mudança de variáveis permite transformar a integral para um novo sistema mais conveniente.

Seja

$$(x, y) = T(u, v),$$

onde T é uma transformação diferenciável e bijetiva. Então,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(T(u, v))\, |J(u, v)|\, du\, dv,$$

onde $J(u, v)$ é o Jacobiano da transformação.

O Jacobiano

Para

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

define-se o Jacobiano por

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

O Jacobiano

Para

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

define-se o Jacobiano por

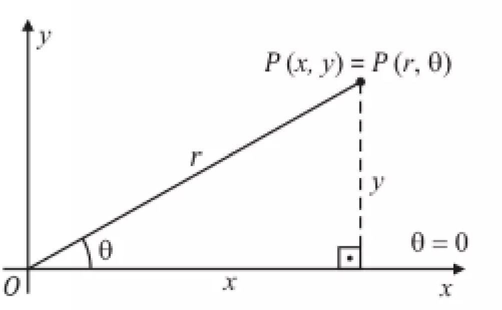
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

O Jacobiano mede o fator de distorção de área causado pela transformação:

$$dx\,dy = |J(u,v)|\,du\,dv$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Observe que:



No sistema de coordenadas polares, temos

$$x = x(r, \theta) = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = y(r, \theta) = r \,\text{sen}\, \theta$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

O jacobiano da transformação é

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathsf{sen}\ \theta \\ \mathsf{sen}\ \theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\,\mathsf{sen}\ \theta)(\mathsf{sen}\ \theta)$$

$$= r\cos^2\theta + r\,\mathsf{sen}^2\,\theta = r(\cos^2\theta + \mathsf{sen}^2\,\theta) = r$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Logo, pelo teorema de mudança de variáveis, se $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen }\theta)$, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)\,|J(r,\theta)|\,dr\,d\theta$$

Como $|J(r,\theta)| = r$, obtemos a forma operacional:

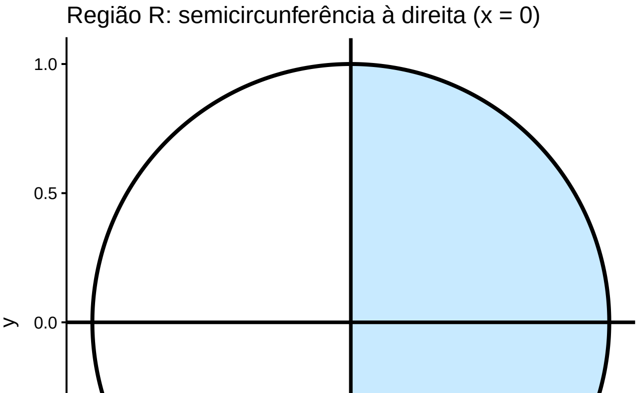
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen }\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Exemplo 08: Calcule

$$\iint_R (x-y)\,dA,$$

sendo R o semi-círculo de centro na origem e raio 1 (isto é, a região $x^2+y^2 \leq 1$ com $x \geq 0$).



Integral Dupla em Coordenadas Polares

Solução: Em coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathsf{sen}\ \theta, \qquad dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Solução: Em coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathsf{sen}\ \theta, \qquad dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Assim, o integrando fica:

$$x - y = r\cos\theta - r\,\mathsf{sen}\ \theta = r(\cos\theta - \mathsf{sen}\ \theta)$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Solução: Em coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\textsf{sen}\ \theta, \qquad dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Assim, o integrando fica:

$$x - y = r\cos\theta - r\,\textsf{sen}\ \theta = r(\cos\theta - \textsf{sen}\ \theta)$$

Como R é o semicírculo superior de raio 1, temos

$$0 \leq r \leq 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

De forma que,

$$\iint_R (x-y)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r(\cos\theta - \textsf{sen }\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2(\cos\theta - \textsf{sen }\theta)\,dr\,d\theta$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

De forma que,

$$\iint_R (x-y)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r(\cos\theta - \text{sen }\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2(\cos\theta - \text{sen }\theta)\,dr\,d\theta$$

Integrando em relação a r

$$(\cos\theta - \text{sen }\theta)\int_0^1 r^2\,dr = (\cos\theta - \text{sen }\theta)\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}(\cos\theta - \text{sen }\theta)$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Integrando em relação a θ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(\cos\theta - \text{sen }\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen }\theta\,d\theta$$

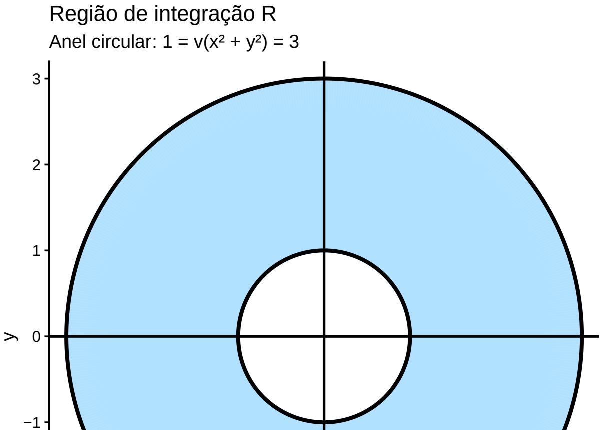
$$= \frac{1}{3}\text{sen }\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\text{sen }\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen }\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(1-(-1)) + \frac{1}{3}(0-0) = \frac{2}{3}$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Exemplo 09: Calcule
$$\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\, dA,$$
sendo R a região delimitada por $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$.



Integral Dupla em Coordenadas Polares

Solução: Em coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\ \theta, \qquad dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Além disso,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r \quad (r \geq 0)$$

Como R é um anel completo, os limites são:

$$1 \leq r \leq 3, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Assim,

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_1^3 r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^2\, dr\, d\theta$$

Integral em r

$$\int_1^3 r^2\, dr = \frac{r^3}{3}\bigg|_1^3 = \frac{27 - 1}{3} = \frac{26}{3}$$

Integral em θ

$$\int_0^{2\pi} \frac{26}{3} d\theta = \frac{26}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{26}{3} \cdot \theta\bigg|_0^{2\pi} = \frac{52\pi}{3}$$