

## Transformação de Variáveis Unidimensionais

## Função de Variável Aleatória

Se  $X$  é uma variável aleatória com função densidade acumulada  $F_x(x)$ , então qualquer função de  $X$ , por exemplo,  $g(X)$  também é uma variável aleatória.

## Função de Variável Aleatória

Se  $X$  é uma variável aleatória com função densidade acumulada  $F_x(x)$ , então qualquer função de  $X$ , por exemplo,  $g(X)$  também é uma variável aleatória.

Geralmente,  $g(X)$  é de nosso interesse e denotamos  $Y = g(X)$  para indicar a nova variável aleatória  $g(X)$ .

## Função de Variável Aleatória

Se  $X$  é uma variável aleatória com função densidade acumulada  $F_x(x)$ , então qualquer função de  $X$ , por exemplo,  $g(X)$  também é uma variável aleatória.

Geralmente,  $g(X)$  é de nosso interesse e denotamos  $Y = g(X)$  para indicar a nova variável aleatória  $g(X)$ .

Uma vez que  $Y$  é uma função de  $X$ , podemos descrever o comportamento probabilístico de  $Y$  em termos de  $X$ , isto é, para um dado conjunto  $A$ ,

$$P(Y \in A) = P(g(X) \in A)$$

mostrando que a distribuição de  $Y$  depende das funções  $F_X$  e  $g$ .

## Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos  $y = g(x)$ , a função  $g(x)$  define uma função no suporte original de  $X$ , denotado por  $S_X$ , para um novo espaço amostral, denotado por  $S_Y$ , o suporte de  $Y$ .

## Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos  $y = g(x)$ , a função  $g(x)$  define uma função no suporte original de  $X$ , denotado por  $S_X$ , para um novo espaço amostral, denotado por  $S_Y$ , o suporte de  $Y$ .

Seja então a função inversa de  $g$ , denotada por  $g^{-1}$ , que é uma função de  $S_y$  para  $S_x$ .

$$g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$$

## Função de Variável Aleatória

Formalmente, ao escrevermos  $y = g(x)$ , a função  $g(x)$  define uma função no suporte original de  $X$ , denotado por  $S_X$ , para um novo espaço amostral, denotado por  $S_Y$ , o suporte de  $Y$ .

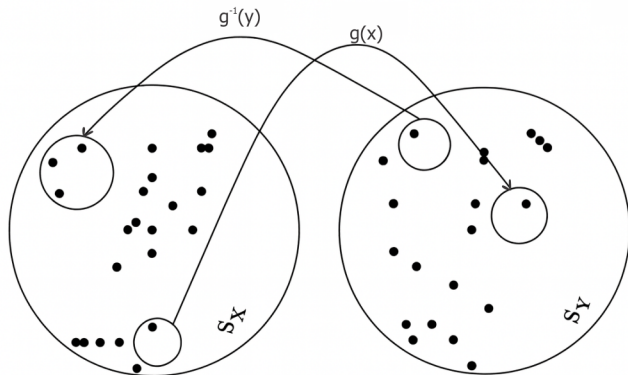
Seja então a função inversa de  $g$ , denotada por  $g^{-1}$ , que é uma função de  $S_y$  para  $S_x$ .

$$g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$$

Portanto, a função inversa consiste no conjunto de valores de  $X$ , para os quais  $g(x) = y$ , dado um valor de  $y$  fixado do suporte de  $Y$ , que é a variável aleatória obtida pela transformação de interesse,  $g(X)$ .

## Função de Variável Aleatória

É importante observar que cada valor de  $x$  pertencente ao suporte de  $X$ , corresponde a um único valor de  $y$  pertencente ao suporte de  $Y$ . Por outro lado, um valor  $y \in S_Y$  pode corresponder a mais de um valor do suporte de  $X$ , conforme ilustra a figura abaixo





## Função de Variável Aleatória

Finalmente, se a variável aleatória  $Y$  for definida por  $Y = g(X)$ , podemos escrever para qualquer conjunto  $A \subset S_Y$ ,

$$\begin{aligned}P(Y \in A) &= P(g(X) \in A) \\&= P(\{x \in S_X : g(x) \in A\}) \\&= P(X \in g^{-1}(A))\end{aligned}$$

Isto define a distribuição de probabilidade de  $Y$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Se  $X$  for uma variável aleatória discreta e  $Y = g(X)$ , então  $Y$  também será uma variável aleatória discreta. Assim,

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x), \quad \text{para } y \in S_Y$$

e  $p_Y(y) = 0$  para  $y \notin S_Y$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 01:** Suponhamos que a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$  é dada pela tabela abaixo:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Seja  $Y = 3X + 1$ . Encontre a distribuição da variável aleatória  $Y$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 01:** Suponhamos que a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$  é dada pela tabela abaixo:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Seja  $Y = 3X + 1$ . Encontre a distribuição da variável aleatória  $Y$ .

**Solução:**

Como  $Y = 3X + 1$ ,

$y = 3x + 1$	-5	-2	1	4	7	10
$p_Y(y)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 02:** Considere a mesma distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$ , dada pela tabela abaixo:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Contudo, vamos agora definir a variável aleatória  $Y = X^2$ . Qual a distribuição de probabilidades de  $Y$ ?

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 02:** Considere a mesma distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$ , dada pela tabela abaixo:

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Contudo, vamos agora definir a variável aleatória  $Y = X^2$ . Qual a distribuição de probabilidades de  $Y$ ?

**Solução:**

Temos que  $S_X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Como  $Y = X^2$ , temos que o suporte de  $Y$  é dado por  $S_Y = \{0, 1, 4, 9\}$ , de forma que a distribuição da variável  $Y$  será dada por:

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0,2$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,5$$

$$P(Y = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,2$$

$$P(Y = 9) = P(X = 3) = 0,1$$

Logo,

$y = x^2$	0	1	4	9
$p_Y(y)$	0,2	0,5	0,2	0,1

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 03:** Suponha que  $X \sim Poisson(\lambda)$ , com função de probabilidade

$$P(x|\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considere que  $Y = g(X)$ , tal que  $g(X) = 0$ , se  $x$  é par e  $g(X) = 1$ , se  $x$  é ímpar. Obter a função de probabilidade de  $Y$ .



## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 03:** Suponha que  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , com função de probabilidade

$$P(x|\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Considere que  $Y = g(X)$ , tal que  $g(X) = 0$ , se  $x$  é par e  $g(X) = 1$ , se  $x$  é ímpar. Obter a função de probabilidade de  $Y$ .

**Solução:**

Temos que o conjunto suporte de  $Y$  é  $S_Y = \{0, 1\}$ . Vamos calcular a  $P(Y = 0)$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$P(Y = 0) = P(g(X) = 0) = P(X \text{ ser par})$$

$$= \sum_{x \in \{0, 2, 4, \dots\}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}.$$

# Aparte — Séries de Taylor e Maclaurin

## Série de Taylor

Expansão de uma função em torno de um ponto  $a$ :

A expansão de Taylor escrita termo a termo é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

# Aparte — Séries de Taylor e Maclaurin

## Série de Maclaurin

Caso particular da série de Taylor com  $a = 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Exemplos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Assim,  $e^\lambda + e^{-\lambda} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e$ ,

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{2} (e^\lambda + e^{-\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-2\lambda}). \end{aligned}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Como  $\sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y) = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X \text{ ser ímpar}) = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-2\lambda} \right). \end{aligned}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

Como  $\sum_{y=0}^{\infty} P(Y = y) = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X \text{ ser ímpar}) = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-2\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-2\lambda} \right). \end{aligned}$$

Finalmente,  $p_Y(y) = 0$  para outros valores de  $y \notin S_Y$ . Portanto,  $Y \sim \text{Bernoulli}(p)$  com

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-2\lambda} \right), \quad \lambda > 0$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 04:** Considere que  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  com função de probabilidade

$$P(x|n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Considere  $Y = g(X) = n - X$  e obtenha a distribuição de probabilidade de  $Y$ .



## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

**Exemplo 04:** Considere que  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  com função de probabilidade

$$P(x|n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Considere  $Y = g(X) = n - X$  e obtenha a distribuição de probabilidade de  $Y$ .

**Solução:**

Considerando  $Y = g(X) = n - X$ , temos que  $S_Y = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Quando  $Y = y$ , temos  $X = n - y$ , assim,

## Função de Variável Aleatória: Caso Discreto

$$\begin{aligned}P(Y = y) &= P(g(X) = y) = P(X = g^{-1}(y)) = P(X = n - y) \\&= \binom{n}{n - y} p^{n-y} (1 - p)^{n-(n-y)} \\&= \binom{n}{n - y} p^{n-y} (1 - p)^y \\&= \binom{n}{y} (1 - p)^y p^{n-y}, \quad \text{uma vez que } \binom{n}{n - y} = \binom{n}{y}\end{aligned}$$

que equivale a dizer que  $Y \sim \text{binomial}(n, 1 - p)$ .

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

## Método da Função de Distribuição

**Teorema:** Consideremos uma variável aleatória contínua  $X$  com função de distribuição de probabilidade  $F_X$  conhecida e a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $Y = g(X)$  é uma variável aleatória com função distribuição dada por

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y])) = \int_{g^{-1}((-\infty, y])} f_X(x) \, dx$$

em que  $g^{-1}(y)$  é a função inversa de  $g$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

- ▶ Esse método consiste em encontrar a função de distribuição da variável transformada  $Y = g(X)$  a partir da função de distribuição de  $X$ .
- ▶ Se  $Y$  for variável aleatória contínua, podemos então obter a sua função densidade a partir da derivada da função de distribuição já encontrada.
- ▶ Não necessariamente  $Y = g(X)$  será variável aleatória contínua,  $Y$  por ser contínua, discreta e até mesmo uma variável aleatória que não seja nem discreta nem contínua.

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 05:** Considere que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , sendo  $\lambda > 0$  conhecido, com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para  $Y = g(X)$  dada por

$$Y = g(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq \frac{1}{\lambda} \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases}$$

obter a distribuição de  $Y$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

### Solução:

Como o evento  $\{Y = 0\}$  ocorre quando  $X \leq 1/\lambda$  e a função de distribuição exponencial é  $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ , então

$$P(Y = 0) = F_X\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \exp\left(-\lambda \times \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-1}$$

Temos então, que

$$P(Y = 1) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo,  $Y$  é uma variável aleatória discreta, pois  $S_Y = \{0, 1\}$ . Além disso,  $Y \sim \text{Bernoulli}(p = e^{-1})$ , com  $fp$  dada por

$$p_Y(y) = \begin{cases} p^y(1-p)^{1-y} & \text{para } y \in \{0, 1\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

com  $p = e^{-1}$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 06:** Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $X \sim N(0, 1)$ , cuja *fdp* é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

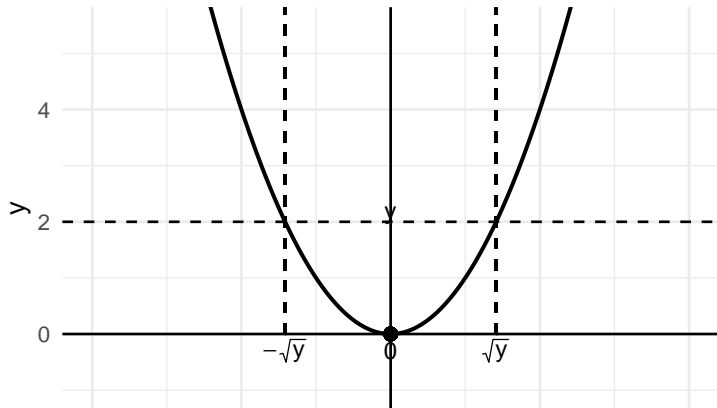
Considerando  $Y = g(X) = X^2$ , obter a função densidade de probabilidade de  $Y$ .



## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

### Solução:

Temos que o evento  $\{Y \leq y\}$ , para  $y$  fixado e pertencente ao conjunto suporte  $S_Y = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ , cuja equivalência em relação aos eventos pertencentes ao suporte de  $X$ ,  $S_X = \mathbb{R}$ , é dada por  $\{Y \leq y\} = \{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$ , conforme ilustrado abaixo



## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Portanto,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi_X(\sqrt{y}) - \Phi_X(-\sqrt{y})$$

para  $y > 0$ , sendo  $\Phi_X$ , a função de distribuição de probabilidade da normal padrão.

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Se derivarmos  $F_Y(y)$  em relação a  $y$ , e usando o fato de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , temos

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left[\Phi_X(\sqrt{y}) - \Phi_X(-\sqrt{y})\right]}{dy} \\&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (\text{regra da cadeia}) \\&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (\text{simetria da normal}) \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} = \chi_1^2(y).\end{aligned}$$

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

## Método do Jacobiano

**Teorema:** Seja  $X$  com fdp  $f_X(x)$  e  $Y = g(X)$ , onde  $g$  é uma função monótona. Sejam  $S_X = \{x : f_X(x) > 0\}$  e  $S_Y = \{y : y = g(x) \text{ para algum } x \in S_X\}$ . Suponha que  $f_X(x)$  seja contínua em  $S_X$  e que  $g^{-1}(y)$  tenha uma derivada contínua em  $S_Y$ . Então,

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & y \in S_Y \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 07:** Suponha uma variável aleatória contínua

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma > 0.$$

Sua função densidade é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Definimos a nova variável aleatória

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Queremos encontrar a distribuição de  $Y$  usando o **método do jacobiano**.

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Passo 1:** Escrever a transformação e a inversa

A transformação é

$$Y = g(X) = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Isolando  $X$  em função de  $Y$ , obtemos a inversa:

$$X = \sigma Y + \mu.$$

Isto é,

$$x = g^{-1}(y) = \sigma y + \mu.$$

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Passo 2:** Calcular o jacobiano em 1D

No caso unidimensional, o jacobiano é o valor absoluto da derivada de  $x$  em relação a  $y$ :

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy} \sigma y + \mu = \sigma \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d}{dy} \sigma y + \mu \right| = \sigma$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Passo 3:** Para  $Y = g(X)$  com  $g$  monotônica, a densidade de  $Y$  é dada por

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

No nosso caso:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\sigma y + \mu) \sigma \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \sigma \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma y)^2}{2\sigma^2}\right) \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \end{aligned}$$



## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo,

$$f_Y(y) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

que é exatamente a densidade da **Normal Padrão**.

Portanto,

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 08:** Seja  $X \sim U(0, 1)$ . Obtenha a função densidade de  $Y = -\ln(X)$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 08:** Seja  $X \sim U(0, 1)$ . Obtenha a função densidade de  $Y = -\ln(X)$ .

**Solução:**

Sabemos que se  $X \sim U(0, 1)$ , então sua função densidade  $f_X(x)$  é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que  $Y = -\ln(X)$ . Como  $0 < X < 1$ , então  $Y > 0$ .

Invertendo:

$$Y = -\ln(X) \Rightarrow -Y = \ln(X) \Rightarrow X = e^{-Y}$$

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Portanto:

$$x = g^{-1}(y) = e^{-y}$$

**Jacobiano**

$$\frac{d}{dy}x = \frac{d}{dy}e^{-y} = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d}{dy}x \right| = e^{-y}$$

Temos que

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}g^{-1}(y) \right|$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Substituindo:

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y}$$

uma vez que  $f_X(x) = 1$  no intervalo  $(0, 1)$ .

$$f_Y(y) = 1 \cdot e^{-y} = e^{-y}, \quad y > 0.$$

Temos que  $Y \sim \text{Exp}(\lambda = 1)$

# Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

## Generalização do Método do Jacobiano

Se  $Y = g(X)$  não é monótona em  $\mathbb{R}$ , podemos aplicar o método do Jacobiano em cada um dos intervalos em que  $g$  é monótona, da seguinte forma:

- 1) Defina uma partição de  $\mathbb{R}_X$  formada pelos intervalos  $I_1, I_2, \dots, I_k$  tais que a função  $g$  é monótona em cada  $I_j$ ,  $j = 1 \dots k$ .
- 2) Obtenha  $f_j(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$  a cada intervalo  $I_j$ .
- 3) Finalmente, obtenha

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^k f_j(y)$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 09: (Exemplo 06 revisitado)** Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $X \sim N(0, 1)$ , cuja *fdp* é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Considerando  $Y = g(X) = X^2$ , obter a função densidade de probabilidade de  $Y$ , usando o **método do Jacobiano**.

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

### Solução:

Note que, neste caso, temos duas regiões disjuntas do suporte de  $X$ ,  $S_X$ , em que  $g(x) = x^2$  é injetora. Temos,  $S_{X_1} = (-\infty, 0]$  e  $S_{X_2} = [0, \infty)$ . Logo,  $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$  para  $x \leq 0$  e  $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$  para  $x > 0$ . Portanto,



## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right| \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}\right) \left| \frac{d}{dy}(-\sqrt{y}) \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\right) \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} \\&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}} e^{-y/2} y^{-1/2} = \chi_1^2(y).\end{aligned}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 10:** Seja  $X \sim U(-1, 1)$ . Qual a distribuição de  $Y = X^2$ ?

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

**Exemplo 10:** Seja  $X \sim U(-1, 1)$ . Qual a distribuição de  $Y = X^2$ ?

**Solução:**

Definindo a função indicadora de um conjunto  $A$  como

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

podemos escrever a função densidade de  $X$  como  $f_X(x) = \frac{1}{2}I_{(-1,1)}(x)$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Como  $Y = X^2$  não é monótona em  $(-1, 1)$ , mas o é em  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$  podemos utilizar a generalização do método do Jacobiano, ou seja, no intervalo  $(-1, 0)$ ,  $g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$  e no intervalo  $(0, 1)$   $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$ . Assim,

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= f_X(g_1^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| + f_X(g_2^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_2^{-1}(y) \right| \\&= f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} (-\sqrt{y}) \right| + f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \\&= \frac{1}{2} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\&= \frac{1}{4\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad 0 < y < 1\end{aligned}$$

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo, se  $X \sim U(-1, 1)$ , a distribuição de  $Y = X^2$  é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

que é exatamente a densidade  $Beta(1/2, 1)$ .

## Função de Variável Aleatória: Caso Contínuo

Logo, se  $X \sim U(-1, 1)$ , a distribuição de  $Y = X^2$  é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

que é exatamente a densidade  $Beta(1/2, 1)$ .

Assim, se  $X \sim U(-1, 1)$ ,  $Y = X^2 \sim Beta(1/2, 1)$ .

# A Transformação Integral

Um importante e conhecido teorema é o **Teorema da Probabilidade Integral**, que relaciona a distribuição uniforme contínua com todas as outras distribuições de probabilidade.



# A Transformação Integral

Um importante e conhecido teorema é o **Teorema da Probabilidade Integral**, que relaciona a distribuição uniforme contínua com todas as outras distribuições de probabilidade.

Seu resultado é importante na **Estatística Computacional**, pois permite que sejam simuladas amostras aleatórias de qualquer distribuição de probabilidade.

## A Transformação Integral

**Teorema da probabilidade integral:** Consideremos  $X$  uma variável aleatória absolutamente contínua com função de distribuição acumulada  $F_X$ . Então  $U = F_X(X)$  possui distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Por outro lado, se  $U \sim U(0, 1)$ , então  $X = F_X^{-1}(U)$  possui função de distribuição acumulada  $F_X$ .

## A Transformação Integral

**Demonstração:** Considere  $X$  uma variável aleatória absolutamente contínua com função de distribuição acumulada  $F_X$ , então

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(F_X(X) \leq u) = P(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

Por outro lado, se  $U \sim U(0, 1)$ , então

$$P(X \leq x) = P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x), \text{ pois } U \text{ é uniforme}$$

Assim  $X$  possui função de distribuição  $F_X$ .

## A Transformação Integral

**Exemplo 11: (Geração de variáveis da distribuição exponencial)** Considere que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Se  $U \sim U(0, 1)$ , qual é a distribuição de  $X = F_X^{-1}(U)$ ?

## A Transformação Integral

**Exemplo 11: (Geração de variáveis da distribuição exponencial)** Considere que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Se  $U \sim U(0, 1)$ , qual é a distribuição de  $X = F_X^{-1}(U)$ ?

**Solução:**

A função inversa é dada por

$$u = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u)$$

## A Transformação Integral

Assim, pelo teorema da transformação integral,

$$X = F_X^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

possui distribuição exponencial com função de distribuição  $F_X$ . Podemos utilizar esse resultado para gerar realizações de uma amostra aleatória da distribuição exponencial. Para isso, basta gerarmos realizações uniformes  $u$  e aplicarmos a relação anterior.

## A Transformação Integral

**Exemplo 12: (Geração de variáveis da distribuição Weibull)** Considere que  $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$ , cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x \geq 0$$

Se  $U \sim U(0, 1)$ , qual é a distribuição de  $X = F_X^{-1}(U)$ ?

## A Transformação Integral

**Exemplo 12: (Geração de variáveis da distribuição Weibull)** Considere que  $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$ , cuja função de distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}, \quad x \geq 0$$

Se  $U \sim U(0, 1)$ , qual é a distribuição de  $X = F_X^{-1}(U)$ ?

**Solução:**

A função inversa é dada por

$$u = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \Rightarrow e^{-(x/\alpha)^\beta} = 1 - u \Rightarrow (x/\alpha)^\beta = -\ln(1 - u) \Rightarrow x = \alpha [-\ln(1 - u)]^{1/\beta}$$



# A Transformação Integral

Assim, pelo teorema da transformação integral,

$$X = F_X^{-1}(U) = \alpha [-\ln(1 - U)]^{1/\beta}$$

possui distribuição Weibull com função de distribuição  $F_X$ .