

Distribuições Contínuas

Data de entrega: 18 de dezembro de 2025

-
1. Encontre os valores numéricos das integrais a seguir, **sem resolver as integrais**, usando apenas as propriedades da função gamma. Use o seguinte resultado: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(a) $\int_0^\infty x^2 e^{-3x} dx$

(b) $\int_0^\infty x^4 e^{-x/5} dx$

(c) $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-2x/3} dx$

-
2. Seja $X \sim \text{Gamma}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

- (a) Encontre a função de distribuição de X .
- (b) Verifique se a derivada da função de distribuição encontrada no item (a) é a função densidade de X .

-
3. Segundo o protocolo do departamento de TI de uma empresa, um de seus sistemas passa por manutenção quando apresentar a 4ª falha, contada a partir da última manutenção. Considere que o tempo (em dias) entre duas manutenções consecutivas desse sistema seja uma variável aleatória com distribuição Gama, com média de 48 dias e desvio padrão de 24 dias.

- (a) Para um sistema que acabou de sair da manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar pelos próximos 60 dias sem precisar de manutenção?

- (b) Dado que o sistema está funcionando há 40 dias desde a última manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar por mais 20 dias?
- (c) Se 3 sistemas idênticos e independentes voltam a funcionar simultaneamente depois de uma manutenção, qual é a probabilidade de pelo menos 2 não passarem por manutenção nos próximos 60 dias?
-

4. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição gamma de parâmetros α e λ . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- (a) $f_X(x) = \frac{8}{3} x^3 e^{-2x}, \quad x > 0$
- (b) $f_X(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2}, \quad x > 0$
- (c) $f_X(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi x}} e^{-3x}, \quad x > 0$
-

5. Encontre os valores numéricos para as expressões a seguir, onde B é a função Beta. Use novamente o seguinte resultado: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

- (a) $B(2, 3)$
- (b) $B(3, 1)$
- (c) $B(\frac{1}{2}, 4)$
- (d) $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
-

6. Seja $X \sim \text{Beta}(2, 3)$.

- (a) Apresente a função densidade de X .
- (b) Apresente a função de distribuição de X .
- (c) Determine $E(X)$.
- (d) Determine $\text{Var}(X)$.
- (e) Calcule $P(X \geq E(X))$ e $P(X > E(X) \mid X < E(X) + DP(X))$, onde $DP(X)$ denota o desvio padrão de X .

7. Uma fábrica produz misturas industrializadas para bolos. Sabe-se que a proporção de farinha de trigo em relação aos demais ingredientes secos nessa mistura é uma variável aleatória com distribuição Beta de parâmetros $\alpha = 3/2$ e $\beta = 3$. Após alguns testes, concluiu-se que:

- se a proporção de farinha de trigo for **maior que 50%**, o bolo fica muito seco;
- se essa proporção for **menor que 10%**, o bolo sola.

Nesses dois casos, o bolo não segue os padrões de qualidades estipulados pela fábrica.

- (a) Em média, qual é a proporção de farinha de trigo para os demais ingredientes secos em uma mistura para bolo feita nessa fábrica?
- (b) Qual é a probabilidade de uma mistura para bolo produzida nessa fábrica **não** seguir os padrões de qualidade estipulados pela própria fábrica?
- (c) Sabendo que certa unidade de mistura não segue os padrões de qualidade estipulados pela fábrica, qual é a probabilidade de a proporção de farinha nesta unidade estar **abaixo da média**?
- (d) Em um experimento, unidades dessa mistura para bolo são testadas até que se encontre 3 que não seguem os padrões de qualidade. Em média, nesse experimento, quantas unidades **dentro do padrão de qualidade** são testadas?

8. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição Beta de parâmetros a e b . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- (a) $f_X(x) = 105x^2(1-x)^4, \quad 0 < x < 1$
- (b) $f_X(x) = 20(x^3 - x^4), \quad 0 < x < 1$
- (c) $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1$

9. Seja $X \sim \text{Weibull}(2, 2)$.

- (a) Apresente a função densidade de X .
- (b) Apresente a função de distribuição de X .

- (c) Determine $E(X)$.
 - (d) Determine $\text{Var}(X)$.
 - (e) Calcule $P(X > 1)$ e $P(X > 1 \mid X < 2)$.
-

10. Uma fábrica opera com 5 máquinas e a manutenção só é chamada quando 4 das 5 máquinas quebram. Suponha que o tempo, em dias, entre duas manutenções seja considerado uma variável aleatória com distribuição de Weibull de parâmetros $\alpha = 0,5$ e $\beta = 4$.

- (a) Qual o tempo médio entre duas manutenções seguidas?
 - (b) Qual o desvio padrão do tempo entre duas manutenções seguidas?
 - (c) Qual a probabilidade de a manutenção ficar mais de 10 dias sem aparecer na fábrica?
 - (d) Sabendo que hoje completa 5 dias desde a última manutenção, qual a probabilidade de a próxima manutenção **não** ocorrer nos próximos 3 dias?
 - (e) Qual o menor tempo t , em dias, para o qual podemos dizer que, em 90% das vezes, a manutenção ocorre antes de t ?
-

11. A seguir são apresentadas algumas funções de densidade de variáveis aleatórias com distribuição de Weibull de parâmetros α e β . Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

- (a) $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2e^{-x^3/8}, \quad x > 0$
 - (b) $f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}/2}, \quad x > 0$
 - (c) $f_X(x) = 18xe^{-9x^2}, \quad x > 0$
-

12. Mostre que, para α e β positivos, $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-a)}I_{(a,\infty)}(x)$ é função densidade de probabilidade. Alguns autores definem o modelo Gamma dessa forma, sendo que, nesse caso, o modelo tem um terceiro parâmetro a .

13. A variável X segue o modelo *Beta* de parâmetros $a, b > 0$ se sua densidade for $f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$. Verifique que a densidade Beta com parâmetros $a = b = 1$ é a distribuição $U(0, 1)$.
-

14. Mostre que se $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, então $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.
-

15. Mostre que se $X \sim \text{Beta}(a, b)$, então $E(X) = \frac{a}{a+b}$ e $\text{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$
-

15. Mostre que se $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$, então $E(X) = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$ e $\text{Var}(X) = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$