Distribuições Contínuas

`Data de entrega: 20 de janeiro de 2026`

---

1. Encontre os valores numéricos das integrais a seguir, **sem resolver as integrais**, usando apenas as propriedades da função gamma. Use o seguinte resultado: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(a) $\int_0^\infty x^2 e^{-3x}\, dx$

(b) $\int_0^\infty x^4 e^{-x/5}\, dx$

(c) $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-2x/3}\, dx$

---

2. Seja $X \sim \text{Gamma}\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Encontre a função de distribuição de X.

(b) Verifique se a derivada da função de distribuição encontrada no item (a) é a função densidade de X.

---

3. Segundo o protocolo do departamento de TI de uma empresa, um de seus sistemas passa por manutenção quando apresentar a 4ª falha, contada a partir da última manutenção. Considere que o tempo (em dias) entre duas manutenções consecutivas desse sistema seja uma variável aleatória com distribuição Gama, com média de 48 dias e desvio padrão de 24 dias.

(a) Para um sistema que acabou de sair da manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar pelos próximos 60 dias sem precisar de manutenção?

(b) Dado que o sistema está funcionando há 40 dias desde a última manutenção, qual é a probabilidade de ele funcionar por mais 20 dias?

(c) Se 3 sistemas idênticos e independentes voltam a funcionar simultaneamente depois de uma manutenção, qual é a probabilidade de pelo menos 2 não passarem por manutenção nos próximos 60 dias?

---

4. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição gamma de parâmetros α e λ. Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

(a) $f_X(x) = \frac{8}{3}\, x^3 e^{-2x}, \quad x > 0$

(b) $f_X(x) = \frac{1}{4}\, x e^{-x/2}, \quad x > 0$

(c) $f_X(x) = \sqrt{\frac{3}{\pi x}}\, e^{-3x}, \quad x > 0$

---

5. Encontre os valores numéricos para as expressões a seguir, onde B é a função Beta. Use novamente o seguinte resultado: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(a) $B(2, 3)$

(b) $B(3, 1)$

(c) $B\big(\frac{1}{2}, 4\big)$

(d) $B\big(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\big)$

---

6. Seja $X \sim \text{Beta}(2, 3)$.

(a) Apresente a função densidade de X.

(b) Apresente a função de distribuição de X.

(c) Determine $E(X)$.

(d) Determine $\text{Var}(X)$.

(e) Calcule $P\big(X \geq E(X)\big)$ e $P\big(X > E(X) \,\big|\, X < E(X) + DP(X)\big)$, onde $DP(X)$ denota o desvio padrão de X.

7. Uma fábrica produz misturas industrializadas para bolos. Sabe-se que a proporção de farinha de trigo em relação aos demais ingredientes secos nessa mistura é uma variável aleatória com distribuição Beta de parâmetros $\alpha = 3/2$ e $\beta = 3$. Após alguns testes, concluiu-se que:

- se a proporção de farinha de trigo for **maior que 50%**, o bolo fica muito seco;
- se essa proporção for **menor que 10%**, o bolo sola.

Nesses dois casos, o bolo não segue os padrões de qualidades estipulados pela fábrica.

(a) Em média, qual é a proporção de farinha de trigo para os demais ingredientes secos em uma mistura para bolo feita nessa fábrica?

(b) Qual é a probabilidade de uma mistura para bolo produzida nessa fábrica **não** seguir os padrões de qualidade estipulados pela própria fábrica?

(c) Sabendo que certa unidade de mistura não segue os padrões de qualidade estipulados pela fábrica, qual é a probabilidade de a proporção de farinha nesta unidade estar **abaixo da média**?

(d) Em um experimento, unidades dessa mistura para bolo são testadas até que se encontre 3 que não seguem os padrões de qualidade. Em média, nesse experimento, quantas unidades **dentro do padrão de qualidade** são testadas?

---

8. A seguir, são apresentadas algumas funções densidade de variáveis aleatórias com distribuição Beta de parâmetros a e b. Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

(a) $f_X(x) = 105x^2(1-x)^4, \quad 0 < x < 1$

(b) $f_X(x) = 20(x^3 - x^4), \quad 0 < x < 1$

(c) $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1$

---

9. Seja $X \sim \text{Weibull}(2, 2)$.

(a) Apresente a função densidade de X.

(b) Apresente a função de distribuição de X.

(c) Determine $E(X)$.

(d) Determine $\text{Var}(X)$.

(e) Calcule $P(X > 1)$ e $P(X > 1 \mid X < 2)$.

---

10. Uma fábrica opera com 5 máquinas e a manutenção só é chamada quando 4 das 5 máquinas quebram. Suponha que o tempo, em dias, entre duas manutenções seja considerado uma variável aleatória com distribuição de Weibull de parâmetros $\alpha = 0{,}5$ e $\beta = 4$.

(a) Qual o tempo médio entre duas manutenções seguidas?

(b) Qual o desvio padrão do tempo entre duas manutenções seguidas?

(c) Qual a probabilidade de a manutenção ficar mais de 10 dias sem aparecer na fábrica?

(d) Sabendo que hoje completa 5 dias desde a última manutenção, qual a probabilidade de a próxima manutenção **não** ocorrer nos próximos 3 dias?

(e) Qual o menor tempo t, em dias, para o qual podemos dizer que, em 90% das vezes, a manutenção ocorre antes de t?

---

11. A seguir são apresentadas algumas funções de densidade de variáveis aleatórias com distribuição de Weibull de parâmetros α e β. Para cada uma delas, determine os valores dos parâmetros.

(a) $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2 e^{-x^3/8}, \quad x > 0$

(b) $f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/2}, \quad x > 0$

(c) $f_X(x) = 18xe^{-9x^2}, \quad x > 0$

---

12. Mostre que, para α e β positivos, $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-a)}I_{(a,\infty)}(x)$ é função densidade de probabilidade. Alguns autores definem o modelo Gamma dessa forma, sendo que, nesse caso, o modelo tem um terceiro parâmetro a.

---

13. A variável X segue o modelo *Beta* de parâmetros $a, b > 0$ se sua densidade for $f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$. Verifique que a densidade Beta com parâmetros $a = b = 1$ é a distribuição $U(0,1)$.

---

14. Mostre que se $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, então $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ e $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

---

15. Mostre que se $X \sim Beta(a, b)$, então $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$ e $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

---

15. Mostre que se $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, então $E(X) = \alpha\Gamma\left(\dfrac{1}{\beta}+1\right)$ e $\mathrm{Var}(X) = \alpha^2\left\{\Gamma\left(\dfrac{2}{\beta}+1\right) - \left[\Gamma\left(\dfrac{1}{\beta}+1\right)\right]^2\right\}$