Resolução: Função Geradora de Momentos

Exercício 01

(a) FGM $M_X(t)$

Por definição:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx}\, 2x\, dx$$

Integração por partes: escolha $u = 2x$ e $dv = e^{tx}dx$, então $du = 2dx$ e $v = \frac{1}{t}e^{tx}$. Assim:

$$M_X(t) = \frac{2x}{t}e^{tx}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{t}e^{tx}\, dx = \frac{2}{t}e^t - \frac{2}{t^2}(e^t - 1)$$

Logo:

$$\boxed{M_X(t) = \frac{2}{t^2}\left[1 + (t-1)e^t\right]}, \quad t \neq 0,$$

e por continuidade $M_X(0) = 1$.

(b) $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$ via fgm

Expansão de e^t em série (até ordem t^2):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)$$

Então:

$$1 + (t-1)e^t = 1 + (t-1)\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)\right) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + O(t^5)$$

Logo:

$$M_X(t) = \frac{2}{t^2}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8} + O(t^5)\right) = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}t^2 + O(t^3)$$

Como $M_X(t) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 + O(t^3)$, obtemos:

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}, \qquad \frac{E(X^2)}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{E(X^2) = \frac{1}{2}}$$

Então:

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}}$$

Exercício 02

Observe que $X = a + Y$ com $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) FGM de X

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(a+Y)}) = e^{at}E(e^{tY})$$

Para $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$:

$$E(e^{tY}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Logo:

$$\boxed{M_X(t) = e^{at}\frac{\lambda}{\lambda - t}}, \quad t < \lambda$$

(b) $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$

Como $X = a + Y$:

$$\boxed{E(X) = a + \frac{1}{\lambda}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Exercício 03

> **i Comentário — convenção**
>
> Assumo $X = 1$ para “cara” e $X = 0$ para “coroa”, então $X \sim \mathrm{Bernoulli}(1/2)$.

(a) FGM de X

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2}e^{t\cdot 1} + \frac{1}{2}e^{t\cdot 0} = \boxed{\frac{1+e^t}{2}}$$

(b) $E(X)$ e $\text{Var}(X)$ Para Bernoulli(p), $E(X) = p$ e $\text{Var}(X) = p(1-p)$. Com $p = 1/2$:

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{\text{Var}(X) = \frac{1}{4}}$$

Exercício 04

(a) FGM de X

Para $|t| < 1$:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx\right)$$

As integrais convergem se $t+1>0$ e $t-1<0$, isto é, $|t|<1$.

Calculando:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}\,dx = \frac{1}{t+1}, \qquad \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx = \frac{1}{1-t}$$

Logo:

$$M_X(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-t+t+1}{1-t^2}\right) = \boxed{\frac{1}{1-t^2}}, \quad |t|<1$$

(b) $E(X)$ e $\text{Var}(X)$

Como $M_X(t) = (1-t^2)^{-1}$:

$$M_X'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \Rightarrow M_X'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{E(X) = 0}$$

Além disso:

$$M_X''(t) = \frac{2}{(1-t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1-t^2)^3} \Rightarrow M_X''(0) = 2 \Rightarrow \boxed{E(X^2) = 2}$$

Então:

$$\boxed{\text{Var}(X) = 2 - 0^2 = 2}$$

Exercício 05

Se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ independentes, então:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right), \qquad M_Y(t) = \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right)$$

Para $Z = aX + bY$:

$$M_Z(t) = E(e^{t(aX+bY)}) = E(e^{(at)X})E(e^{(bt)Y}) = M_X(at)M_Y(bt)$$

Logo:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \exp\left(a\mu_X t + \frac{a^2\sigma_X^2 t^2}{2}\right)\exp\left(b\mu_Y t + \frac{b^2\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \\ &= \exp\left((a\mu_X + b\mu_Y)t + \frac{(a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Isso é a fgm de uma normal com:

$$\boxed{Z \sim N(a\mu_X + b\mu_Y,\ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)}$$

Exercício 06

(a) FGM de $Y = 3X + 2$

Usando a propriedade:

$$M_{cX+d}(t) = e^{dt}M_X(ct),$$

temos:

$$\boxed{M_Y(t) = e^{2t}M_X(3t) = e^{2t}\left(0.4e^{3t} + 0.6\right)^8}$$

(b) Calcular $E(X)$

Observe que $(pe^t + 1 - p)^n$ é a fgm de $\text{Bin}(n, p)$. Aqui $n = 8$, $p = 0,4$.

Então:

$$\boxed{E(X) = np = 8 \cdot 0,4 = 3,2}$$

Exercício 07

Por definição:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i\sin(tX))$$

Escreva:

$$\varphi_X(t) = a + ib, \quad a = E(\cos(tX)),\ b = E(\sin(tX))$$

Então:

$$|\varphi_X(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pela desigualdade $[E(U)]^2 \leq E(U^2)$:

$$a^2 \leq E(\cos^2(tX)), \qquad b^2 \leq E(\sin^2(tX))$$

Somando:

$$a^2 + b^2 \leq E(\cos^2(tX) + \sin^2(tX)) = E(1) = 1$$

Logo:

$$\boxed{|\varphi_X(t)| \leq 1}$$

Exercício 08

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1+it)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-it)x}\,dx\right)$$

Calculando:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(1+it)x}\,dx = \frac{1}{1+it}, \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-(1-it)x}\,dx = \frac{1}{1-it}$$

Logo:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-it)+(1+it)}{1+t^2}\right) = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$$

Exercício 09

Densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x) + \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{8}\right)\mathbf{1}_{(0,2)}(x)$$

Então:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{itx}\,dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{8}\right)e^{itx}\,dx$$

Parte 1:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{itx}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-it}}{it}$$

Parte 2 (termo constante):

$$\frac{1}{4}\int_{0}^{2} e^{itx}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2it}-1}{it}.$$

Parte 2 (termo linear): Usamos $\int xe^{itx}\,dx = e^{itx}\left(\frac{x}{it} - \frac{1}{(it)^2}\right)$. Logo:

$$\frac{1}{8}\int_{0}^{2} xe^{itx}\,dx = \frac{1}{8}\left[e^{itx}\left(\frac{x}{it} - \frac{1}{(it)^2}\right)\right]_{0}^{2} = \frac{1}{8}\left(e^{2it}\left(\frac{2}{it} - \frac{1}{(it)^2}\right) + \frac{1}{(it)^2}\right)$$

Somando tudo (para $t \neq 0$):

$$\boxed{\varphi_X(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-it}}{it} + \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2it}-1}{it} + \frac{1}{8}\left(e^{2it}\left(\frac{2}{it} - \frac{1}{(it)^2}\right) + \frac{1}{(it)^2}\right), \quad t \neq 0}$$

E, por definição, $\boxed{\varphi_X(0) = 1}$.