Revisão Probabilidade I

1 Variáveis Aleatórias (VAs)

Definição. Uma variável aleatória é uma função que associa a cada resultado do experimento um número real.

- **Discretas:** suporte finito/enumerável (ex.: 0,1,2,...). Caracterizam-se por **função de probabilidade** $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$. Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1} p_i = 1$
- **Contínuas:** suporte intervalar. Caracterizam-se por **densidade** $f(x)$ tal que $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Uma função densidade satisfaz $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

A **função de distribuição** é $F(x) = P(X \leq x)$. Em ambos os casos, $F(x)$ é não-decrescente e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

2 Momentos

Seja X uma varável aleatória.

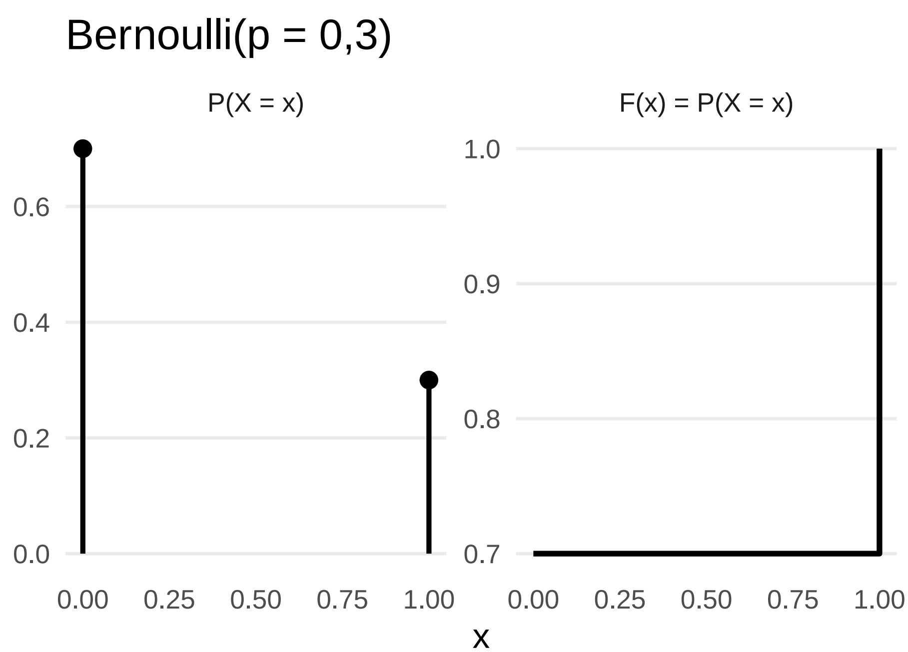
- **Esperança:** $E[X] = \sum_x x\,p(x)$ (discreta) ou $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ (contínua).
- **Variância:** $Var(X) = E\big[(X - E[X])^2\big] = E[X^2] - E[X]^2$.
- **Desigualdade de Jensen (convexa ϕ):** $\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$.
- **Propriedades úteis:** linearidade $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

3 Distribuições Discretas

3.1 Bernoulli (p)

Interpretação: 1 sucesso/fracasso em único ensaio.

Item	Expressão
Suporte	$x \in \{0, 1\}$
Parâmetro	$0 < p < 1$
Função de probabilidade $p(x)$	$p^x(1-p)^{1-x}$
Distribuição $F(x)$	0 se $x < 0$; $1-p$ se $0 \leq x < 1$; 1 se $x \geq 1$
Esperança $E[X]$	p
Variância $Var(X)$	$p(1-p)$



ℹ Mostrar demonstração

A variável Bernoulli assume valores 0 e 1, com $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = 1 - p$.
Esperança

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Segundo momento

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p.$$

Variância

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exemplo: Um alarme dispara corretamente com probabilidade $p = 0{,}92$. Seja $X = 1$ se o alarme dispara corretamente, 0 caso contrário.

a. Calcule $P(X = 1)$ e $P(X = 0)$.

b. Calcule $E[X]$ e interprete.

Solução:

- $P(X = 1) = 0{,}92$
- $P(X = 0) = 0{,}08$

$$E[X] = p = 0{,}92$$

Interpretação: o alarme funciona corretamente em **92% dos acionamentos**.
