

Revisão Probabilidade I

1 Variáveis Aleatórias (VAs)

Definição. Uma variável aleatória é uma função que associa a cada resultado do experimento um número real.

- **Discretas:** suporte finito/enumerável (ex.: 0,1,2,...). Caracterizam-se por **função de probabilidade** $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$. Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- **Contínuas:** suporte intervalar. Caracterizam-se por **densidade** $f(x)$ tal que $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$. Uma função densidade satisfaz $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

A **função de distribuição** é $F(x) = P(X \leq x)$. Em ambos os casos, $F(x)$ é não-decrescente e $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

2 Momentos

Seja X uma variável aleatória.

- **Esperança:** $E[X] = \sum_x x p(x)$ (discreta) ou $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ (contínua).
- **Variância:** $Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$.
- **Desigualdade de Jensen (convexa ϕ):** $\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$.
- **Propriedades úteis:** linearidade $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

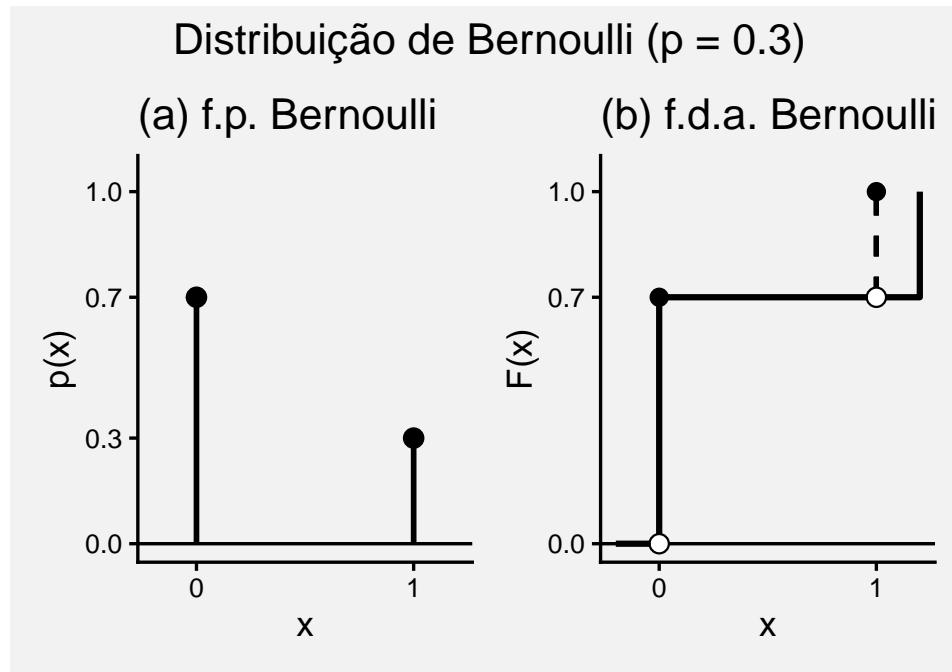
3 Distribuições Discretas

3.1 Bernoulli (p)

Interpretação: 1 sucesso/fracasso em único ensaio.

Item	Expressão
Suporte	$x \in \{0, 1\}$
Parâmetro	$0 < p < 1$
Função de probabilidade $p(x)$	$p^x(1-p)^{1-x}$
Distribuição $F(x)$	0 se $x < 0$; $1 - p$ se $0 \leq x < 1$; 1 se $x \geq 1$
Esperança $E[X]$	p
Variância $Var(X)$	$p(1-p)$

```
Warning in geom_segment(aes(x = 1, xend = 1, y = 1 - p, yend = 1), linetype = "dashed", : All
i Please consider using `annotate()` or provide this layer with data containing
a single row.
```



Exemplo: Um alarme dispara corretamente com probabilidade $p = 0,92$. Seja $X = 1$ se o alarme dispara corretamente, 0 caso contrário.

- a. Calcule $P(X = 1)$ e $P(X = 0)$.
- b. Calcule $E[X]$ e interprete.

Solução:

- $P(X = 1) = 0,92$
- $P(X = 0) = 0,08$

$$E[X] = p = 0,92$$

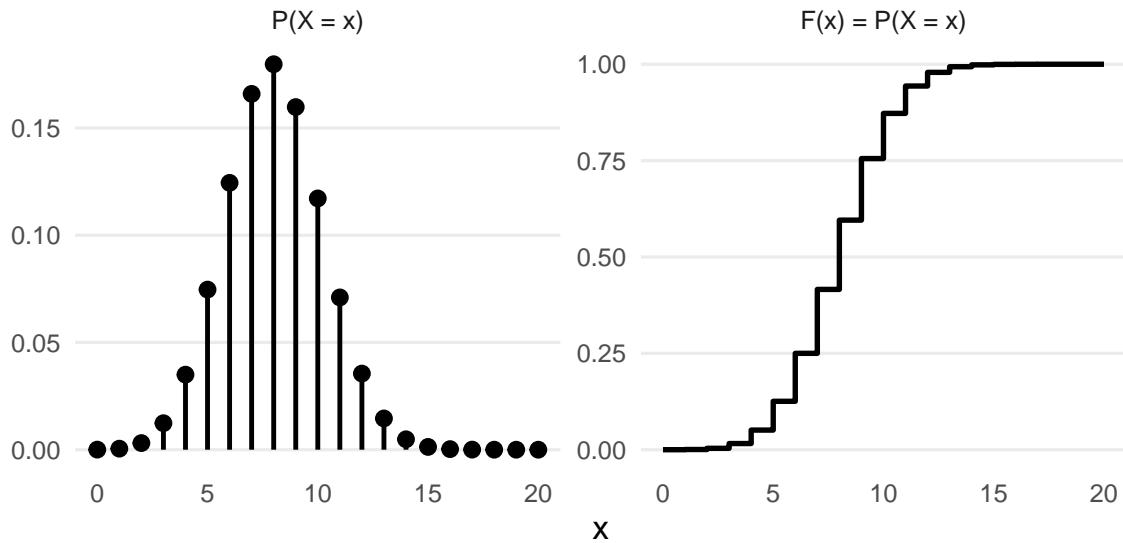
Interpretação: o alarme funciona corretamente em **92% dos acionamentos**.

3.2 Binomial (n, p)

Interpretação: número de sucessos em n ensaios independentes, prob. p .

Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, \dots, n$
Parâmetros	$n \in \mathbb{N}, 0 < p < 1$
$p(k)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$
$E[X]$	np
$Var(X)$	$np(1-p)$

Binomial($n = 20$, $p = 0,4$)



Exemplo: A probabilidade de um cliente comprar um produto é $p = 0,3$. Em um dia, 20 clientes entram na loja. Seja X = número de compras.

a. Calcule $P(X = 8)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} (0,3)^8 (0,7)^{12} \approx 0,053$$

b.

$$E[X] = np = 20 \cdot 0,3 = 6$$

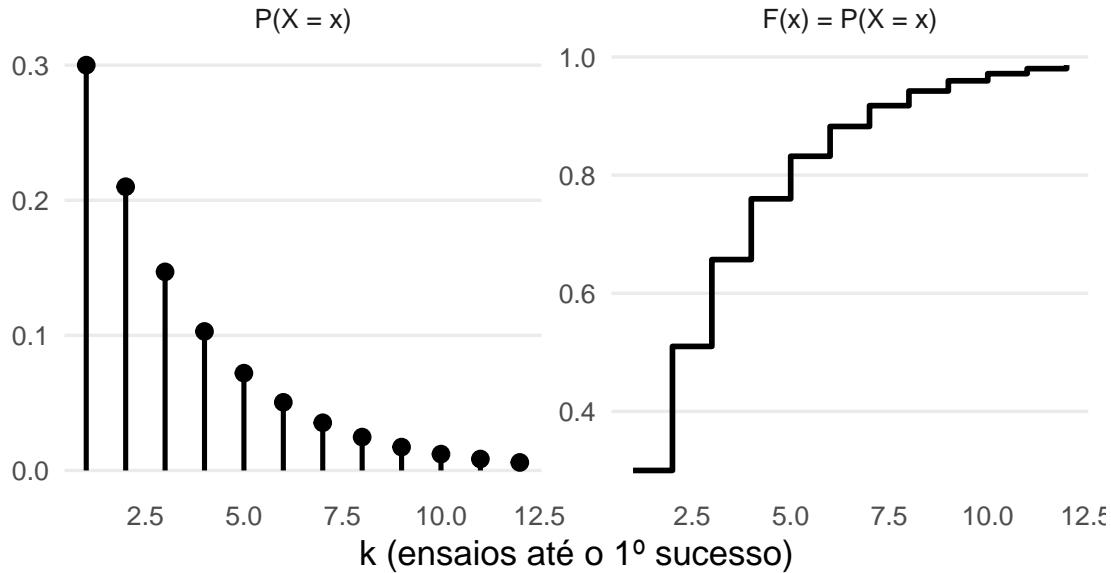
3.3 Geométrica (p)

Convenção usada: X = número de ensaios até o 1º sucesso (apoio 1, 2, ...).

Item	Expressão
$p(k)$	$p(1 - p)^{k-1}$

Item	Expressão
$F(k)$	$1 - (1 - p)^k$
$E[X]$	$1/p$
$Var(X)$	$(1 - p)/p^2$
Propriedade	Sem memória: $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$

Geométrica($p = 0,3$)



Exemplo: Uma chamada telefônica é atendida com probabilidade $p = 0,15$. Seja X = número de tentativas até o primeiro atendimento.

- Calcule $P(X = 4)$.
- Calcule $P(X > 4)$.
- Determine $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 4) = 0,15(0,85)^3 \approx 0,092$$

b.

$$P(X > 4) = 0,85^4 \approx 0,522$$

c.

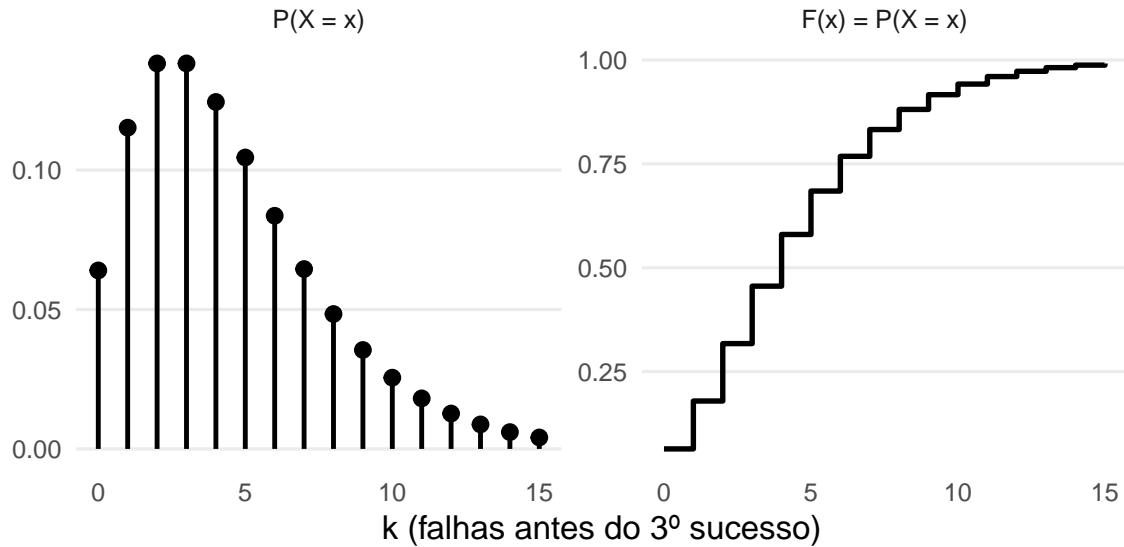
$$E[X] = \frac{1}{0,15} \approx 6,67$$

3.4 Pascal / Negativa (r, p)

Convenção usada: Y = número de **falhas antes do r -ésimo sucesso** (apoio 0, 1, ...).

Item	Expressão
$p(k)$	$\binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k \binom{j+r-1}{j} (1-p)^j p^r$
$E[Y]$	$r(1-p)/p$
$Var(Y)$	$r(1-p)/p^2$

Binomial Negativa($r = 3, p = 0,4$)



Exemplo: Um pesquisador precisa de 4 pessoas que aceitem responder um questionário. Cada tentativa tem probabilidade $p = 0,25$ de sucesso. Seja Y = número de recusas até o 4º sucesso.

- Calcule $P(Y = 6)$.
- Calcule $E[Y]$.

Solução:

a.

$$P(Y = 6) = \binom{9}{6} (0,75)^6 (0,25)^4 \approx 0,050$$

b.

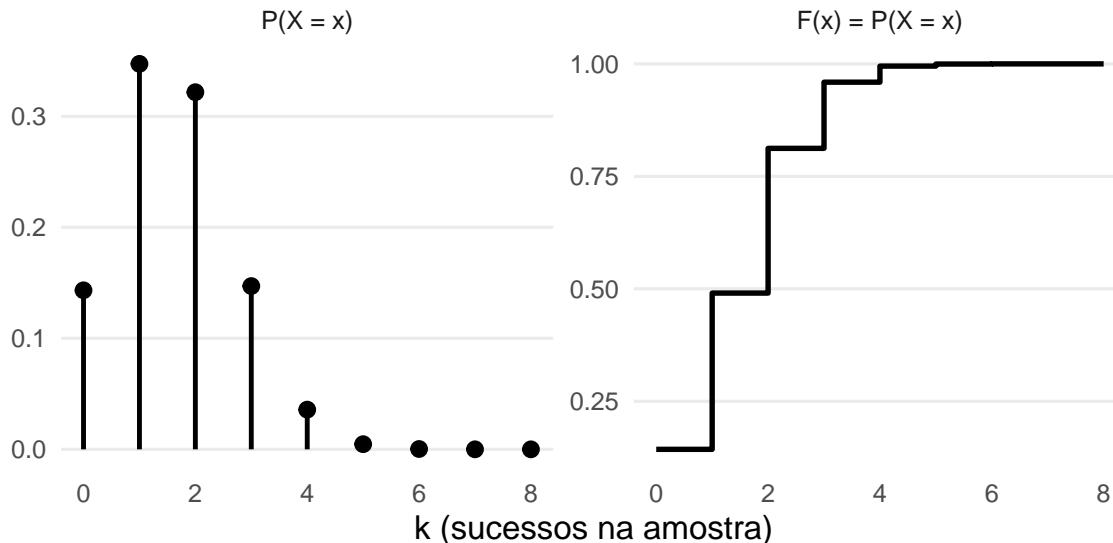
$$E[Y] = \frac{4(1 - 0,25)}{0,25} = 12$$

3.5 Hipergeométrica (N, K, n)

Amostragem sem reposição. N total, K sucessos na população, amostra n .

Item	Expressão
Suporte	$k = \max(0, n - (N - K)), \dots, \min(n, K)$
$p(k)$	$\frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$E[X]$	$n \frac{K}{N}$
$Var(X)$	$n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$

Hipergeométrica($N=50$, $K=8$, $n=10$)



Exemplo: Um lote tem $N = 80$ peças, sendo $K = 10$ defeituosas. Retira-se uma amostra de $n = 12$ peças. Seja X = número de defeituosas na amostra.

a. Calcule $P(X = 2)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{70}{10}}{\binom{80}{12}}$$

Resultado aproximado: **0,283**

b.

$$E[X] = 12 \cdot \frac{10}{80} = 1,5$$

3.6 Poisson (λ)

Contagem de eventos raros em intervalo fixo.

Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, 2, \dots$
$p(k)$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \lambda^j / j!$
$E[X]$	λ
$Var(X)$	λ

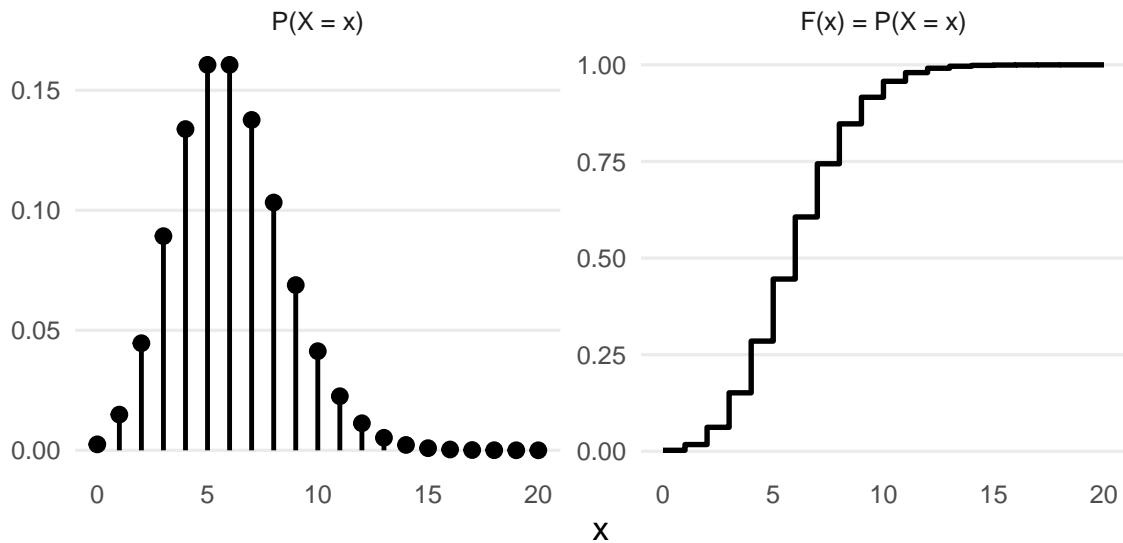
```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>
```

Poisson(.. = 6)



Exemplo: A taxa média de chamadas em um call center é $\lambda = 12$ chamadas por hora. Seja N = número de chamadas.

- Calcule $P(N = 10)$.
- Calcule $P(N \geq 15)$.
- Calcule $E[N]$ e $Var(N)$.

Solução:

a.

$$P(N = 10) = e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \approx 0,104$$

b.

$$P(N \geq 15) = 1 - P(N \leq 14) \approx 0,263$$

c.

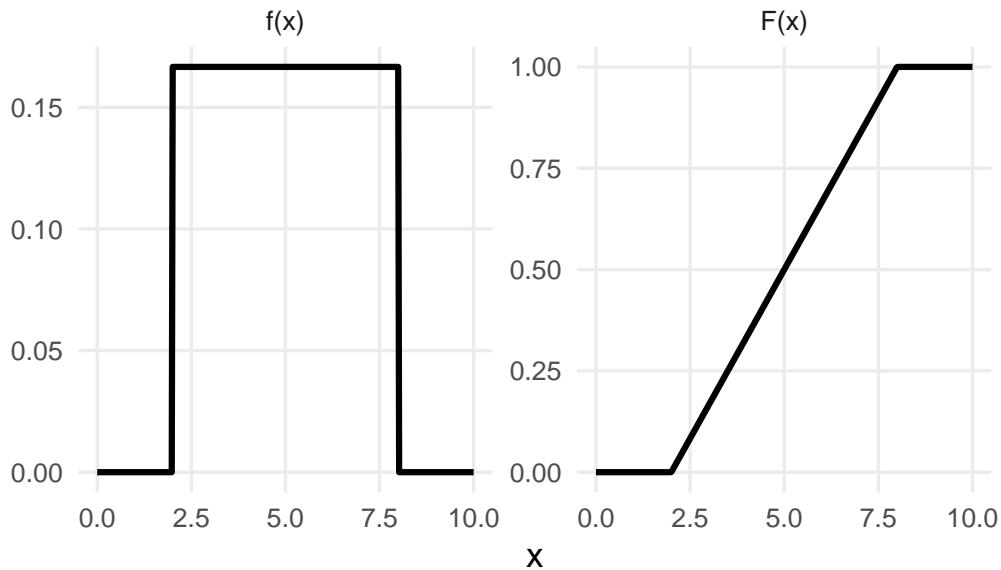
$$E[N] = 12, \quad Var(N) = 12$$

4 Distribuições Contínuas

4.1 Uniforme (a, b)

Item	Expressão
Suporte	$a \leq x \leq b$
$f(x)$	$1/(b-a)$
$F(x)$	$(x-a)/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$
$E[X]$	$(a+b)/2$
$Var(X)$	$(b-a)^2/12$

Uniforme(2, 8)



Exemplo: O tempo de resposta de um servidor *web* varia uniformemente entre 50 ms e 90 ms, ou seja $T \sim U(50, 90)$.

- Calcule $P(60 < T < 80)$.
- Calcule $E[T]$ e $Var(T)$.

c. Interprete o valor esperado no contexto.

Solução:

a.

$$P(60 < T < 80) = \frac{80 - 60}{90 - 50} = \frac{20}{40} = 0,5$$

b.

$$E[T] = \frac{50 + 90}{2} = 70$$

$$Var(T) = \frac{(90 - 50)^2}{12} = \frac{1600}{12} \approx 133,33$$

c. O tempo médio de resposta é 70 ms.

4.2 Exponencial (λ) (parametrização por taxa)

Item	Expressão
Suporte	$x \geq 0$
$f(x)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
$F(x)$	$1 - e^{-\lambda x}$
$E[X]$	$1/\lambda$
$Var(X)$	$1/\lambda^2$
Propriedade	Sem memória: $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$

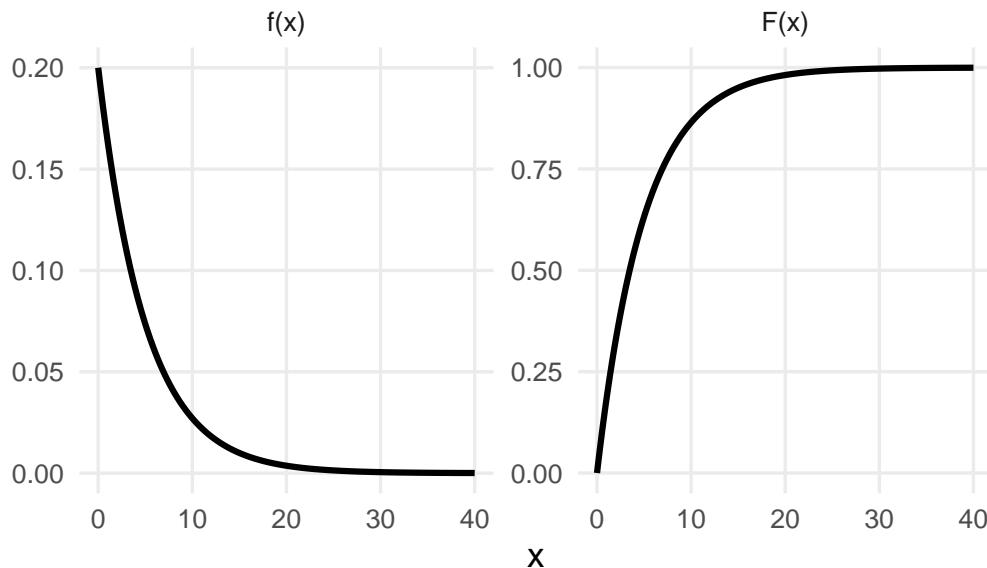
```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>
```

Exponencial(.. = 0,2)



Exemplo: O tempo entre chegadas ao caixa segue $X \sim Exp(0,2)$.

- Calcule $P(X > 8)$.
- Determine a mediana.
- Interprete a propriedade “sem memória”.

Solução:

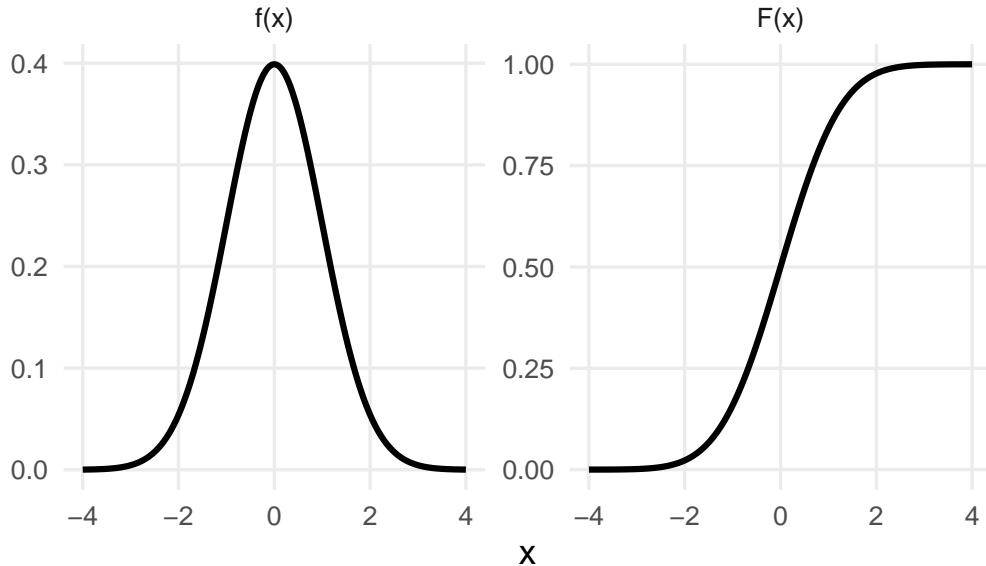
- $$P(X > 8) = e^{-0,2 \cdot 8} = e^{-1,6} \approx 0,2019$$
 - $$m = \frac{\ln 2}{0,2} = 5 \ln 2 \approx 3,47$$
 - O tempo adicional não depende do tempo já passado.
-

4.3 Normal (μ, σ^2)

Item	Expressão
Suporte	$x \in \mathbb{R}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
$F(x)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (não possui forma fechada)
$E[X]$	μ
$Var(X)$	σ^2

Uso de Tabelas: padronize $Z = (X - \mu)/\sigma$ e leia $P(Z \leq z)$ na tabela da Normal padrão $\Phi(z)$.

Normal(0, 1)



Exemplo: Pesos de pacotes seguem $W \sim N(25, 1,5^2)$.

- Calcule $P(24 < W < 27)$.
- Determine o percentil 95%.
- Interprete o percentil no controle de qualidade.

Solução:

a.

$$P(24 < W < 27) = P(-0,67 < Z < 1,33) = \Phi(1,33) - \Phi(-0,67)$$

$$\approx 0,9082 - 0,2514 = 0,6568$$

b.

$$x_{0,95} = 25 + 1,645 \cdot 1,5 = 27,4675$$

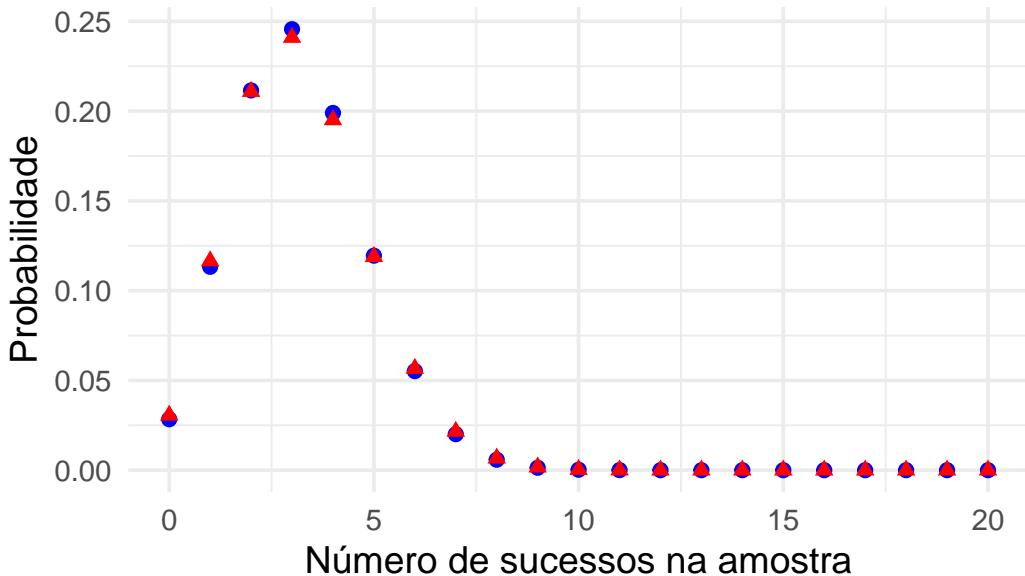
c. 95% dos pacotes pesam até 27,47 kg.

5 Aproximações Clássicas

5.1 Hipergeométrica \approx Binomial

Condição: população grande vs. amostra pequena (fração amostral n/N pequena). Use $X \sim \text{Bin}(n, p = K/N)$ como aproximação.

Aproximação: Hgeo(N=500, K=80, n=20) \sim Bir



5.2 Binomial \approx Poisson

Condição: n grande, p pequeno, $\lambda = np$ moderado.
Aproximação: $P_{Bin}(X = k) \approx e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <bb>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

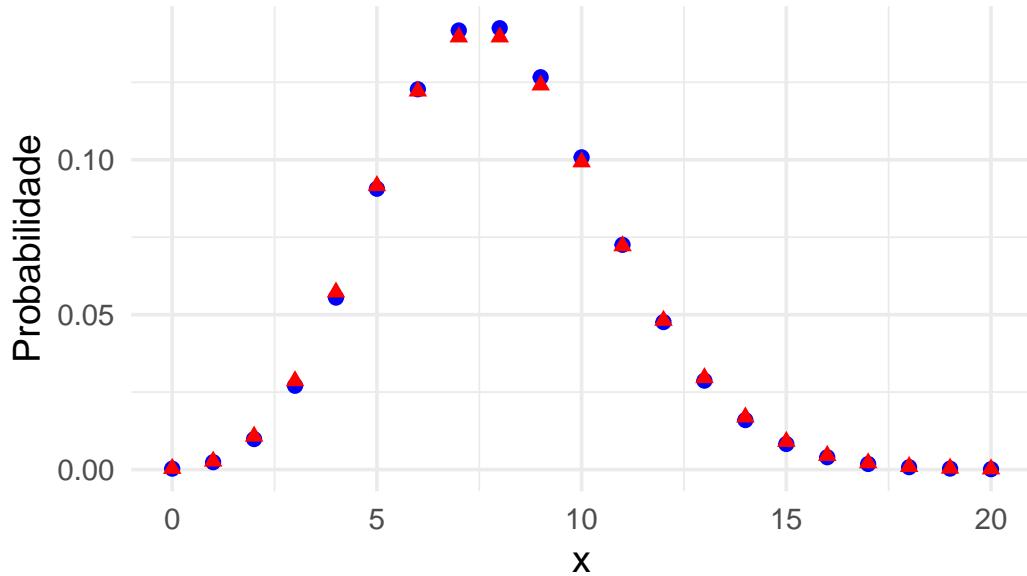
```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <ce>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson( =8)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <bb>
```

Aproximação: Binom(200,0.04) ... Poisson(..=8)



5.3 Binomial ≈ Normal

Condição: $np(1 - p) \gtrsim 10$.

Aproximação: $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1 - p))$ com correção de continuidade.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <86>
```

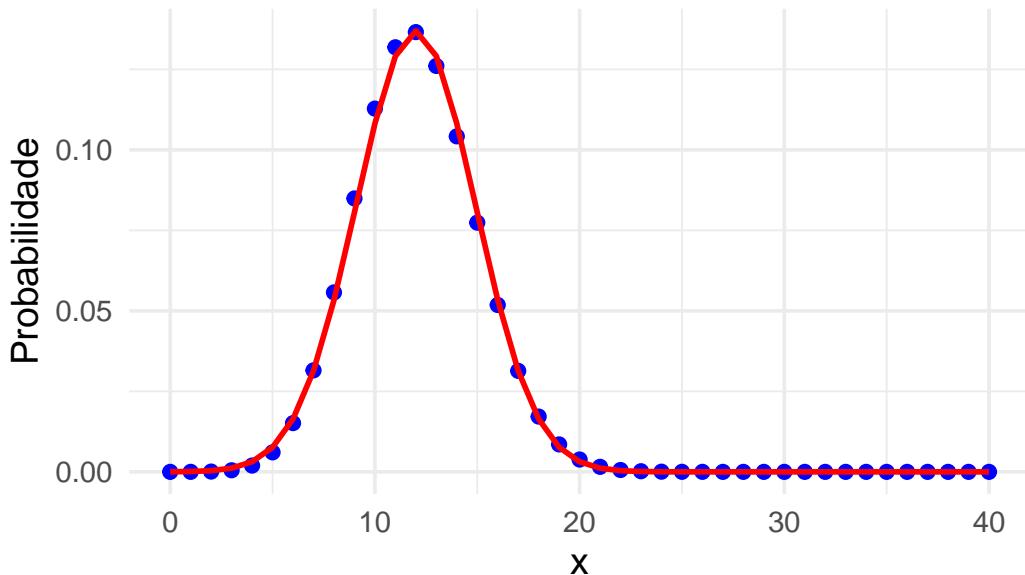
```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <92>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```

Aproximação: $\text{Binom}(n=40, p=0.3)$... $\text{Normal}(12, 8.4)$



5.4 Poisson \approx Normal

Condição: $\lambda \gtrsim 10$.

Aproximação: $X \approx N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$ com correção de continuidade.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :  
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in  
'mbcsToSbcs': dot substituted for <ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <bb>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <92>

Warning in grid.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <ce>

Warning in grid.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <bb>

Warning in grid.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson( =30) → Normal(30,30)' in
'mbcstoSbcs': dot substituted for <92>
```

Aproximação: Poisson(..=30) ... Normal(30,30)

