

## Vetores Aleatórios

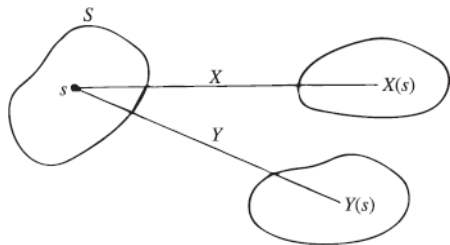
# Introdução

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações, associações.

Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais

**Definição:** Sejam  $\varepsilon$  um experimento e  $S$  um espaço amostral associado a  $\varepsilon$ . Sejam  $X = X(s)$  e  $Y = Y(s)$  duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado  $s \in S$ . Denominaremos  $(X, Y)$  uma **variável aleatória bidimensional** (também chamada **vetor aleatório**).



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Se  $X_1 = X_1(s)$ ,  $X_2 = X_2(s)$ , ...,  $X_n = X_n(s)$  forem  $n$  funções, cada uma associando um número real a cada resultado  $s \in S$ , denominaremos  $(X_1, \dots, X_n)$  uma **variável aleatória  $n$ -dimensional** (ou um **vetor aleatório  $n$ -dimensional**).

Caso discreto

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de  $(X, Y)$  forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de  $(X, Y)$  possam ser representados por  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de  $(X, Y)$  forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de  $(X, Y)$  possam ser representados por  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Discretas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória discreta bidimensional** se os valores possíveis de  $(X, Y)$  forem finitos ou infinitos numeráveis. Isto é, os valores possíveis de  $(X, Y)$  possam ser representados por  $(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots, m, \dots$

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional discreto** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório  $n$ -dimensional discreto** como sendo um vetor formado por  $n$  **variáveis aleatórias discretas** definidas no **mesmo espaço amostral**.



## Função de Probabilidade Conjunta

**Definição:** Seja  $(X, Y)$  uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível  $(x_i, y_j)$  associaremos um número  $p(x_i, y_j)$  representando  $P(X = x_i, Y = y_j)$  e satisfazendo as seguintes condições:

1.  $p(x_i, y_j) \geq 0$ , para todo  $(x_i, y_j)$ ;

2. 
$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

## Função de Probabilidade Conjunta

**Definição:** Seja  $(X, Y)$  uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível  $(x_i, y_j)$  associaremos um número  $p(x_i, y_j)$  representando  $P(X = x_i, Y = y_j)$  e satisfazendo as seguintes condições:

1.  $p(x_i, y_j) \geq 0$ , para todo  $(x_i, y_j)$ ;

2. 
$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

A função  $p$  definida para todo  $(x_i, y_j)$  no contradomínio de  $(X, Y)$  é denominada **função de probabilidade conjunta** de  $(X, Y)$ .

## Função de Probabilidade Conjunta

**Definição:** Seja  $(X, Y)$  uma **variável aleatória discreta bidimensional**. A cada resultado possível  $(x_i, y_j)$  associaremos um número  $p(x_i, y_j)$  representando  $P(X = x_i, Y = y_j)$  e satisfazendo as seguintes condições:

1.  $p(x_i, y_j) \geq 0$ , para todo  $(x_i, y_j)$ ;

2. 
$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

A função  $p$  definida para todo  $(x_i, y_j)$  no contradomínio de  $(X, Y)$  é denominada **função de probabilidade conjunta** de  $(X, Y)$ .

O conjunto dos termos  $\{(x_i, y_j, p(x_i, y_j)), i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots\}$  é denominado **distribuição de probabilidade conjunta** de  $(X, Y)$ .

## Função de Probabilidade Conjunta

Para vetores  $n$ -dimensionais, a função de probabilidade conjunta é  $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$  e satisfaz

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = 1$$

## Função de Probabilidade Conjunta

**Exemplo:** Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶  $X$ : o número de bolas brancas observadas.
- ▶  $Y$ : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

## Função de Probabilidade Conjunta

**Exemplo:** Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶  $X$ : o número de bolas brancas observadas.
- ▶  $Y$ : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

## Função de Probabilidade Conjunta

**Exemplo:** Considere o experimento aleatório que consiste em sortear duas bolas, sem reposição, de uma urna que contém 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B). Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- ▶  $X$ : o número de bolas brancas observadas.
- ▶  $Y$ : a cor da segunda bola sorteada, em que 1 se a bola for V e 0, se for B.

Temos que, o espaço amostral do experimento

$$S = \{(1B, 2B), (1B, 2V), (1V, 2B), (1V, 2V)\}$$

Note que,

$$X = \{0, 1, 2\}, \quad \text{e} \quad Y = \{0, 1\}$$

## Função de Probabilidade Conjunta

Além disso,

$$P(1B, 2B) = P(X = 2, Y = 0) = P(1B) P(2B \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(1B, 2V) = P(X = 1, Y = 1) = P(1B) P(2V \mid 1B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2B) = P(X = 1, Y = 0) = P(1V) P(2B \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(1V, 2V) = P(X = 0, Y = 1) = P(1V) P(2V \mid 1V) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$



## Função de Probabilidade Conjunta

Temos então, a distribuição conjunta de  $(X, Y)$

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

## Função de Distribuição Acumulada

Seja  $(X, Y)$  uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)**  $F$  da variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$  é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

## Função de Distribuição Acumulada

Seja  $(X, Y)$  uma **variável aleatória bidimensional**. A **função de distribuição acumulada (fd)**  $F$  da variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$  é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} p(x', y')$$

De forma análoga, para vetores  $n$ -dimensionais,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{x'_1 \leq x_1} \sum_{x'_2 \leq x_2} \dots \sum_{x'_n \leq x_n} P(X_1 = x'_1, X_2 = x'_2, \dots, X_n = x'_n) \end{aligned}$$

## Função de Distribuição Acumulada

Considere a distribuição conjunta  $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$  do exemplo da urna:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

## Função de Distribuição Acumulada

Para  $y = 0$

$$F(0, 0) = P(X \leq 0, Y \leq 0) = p(0, 0) = 0$$

$$F(1, 0) = P(X \leq 1, Y \leq 0) = p(0, 0) + p(1, 0) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$F(2, 0) = P(X \leq 2, Y \leq 0) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(2, 0) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

## Função de Distribuição Acumulada

Para  $y = 1$

$$F(0, 1) = P(X \leq 0, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(0, 1) = 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

$$F(1, 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(0, 1) + p(1, 1) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\begin{aligned} F(2, 1) &= P(X \leq 2, Y \leq 1) = p(0, 0) + p(1, 0) + p(2, 0) + p(0, 1) + p(1, 1) + p(2, 1) \\ &= 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 = 1 \end{aligned}$$

# Função de Distribuição Acumulada

Tabela final dos valores da fda

$y \backslash x$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

## Função de Distribuição Acumulada

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ ou } x < 0, \\ 0, & 0 \leq y < 1, 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{10}, & 0 \leq y < 1, 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{5}, & 0 \leq y < 1, x \geq 2, \\ \frac{3}{10}, & y \geq 1, 0 \leq x < 1, \\ \frac{9}{10}, & y \geq 1, 1 \leq x < 2, \\ 1, & y \geq 1, x \geq 2 \end{cases}$$



## Distribuições Marginais

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x_i, y_j)$ .

## Distribuições Marginais

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x_i, y_j)$ .

► A **distribuição marginal de  $X$**  é definida como

$$P(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y), \quad \forall x$$

## Distribuições Marginais

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x_i, y_j)$ .

► A **distribuição marginal de  $X$**  é definida como

$$P(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y), \quad \forall x$$

► Analogamente, a **distribuição marginal de  $Y$**  é definida como

$$P(Y = y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x P(X = x, Y = y), \quad \forall y$$

## Distribuições Marginais

Em geral, se  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  é um **vetor aleatório**  $n$ -dimensional, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

## Distribuições Marginais

Em geral, se  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  é um **vetor aleatório  $n$ -dimensional**, então

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

No nosso exemplo,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	$\frac{0}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

## Distribuições Condicionais

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x, y)$ . A **distribuição condicional de  $X$  dado  $Y = y$**  é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \forall x$$

## Distribuições Condicionais

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x, y)$ . A **distribuição condicional de  $X$  dado  $Y = y$**  é definida como

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \quad \forall x$$

Analogamente, define-se a **distribuição condicional de  $Y$  dado  $X = x$**  como

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}, \quad \forall y$$

## Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de  $X$  para cada valor  $y$  e uma distribuição condicional de  $Y$  para cada valor  $x$ .



## Distribuições Condicionais

Note que existe uma distribuição condicional de  $X$  para cada valor  $y$  e uma distribuição condicional de  $Y$  para cada valor  $x$ .

Assim, se  $X$  assume  $n$  valores distintos e  $Y$  assume  $m$  valores distintos, teremos ao todo  $n + m$  **distribuições condicionais**.

## Distribuições Condicionais

Voltando ao exemplo, note que temos as distribuições condicionais  $X \mid Y = 0$  e  $X \mid Y = 1$ . Analogamente, temos as distribuições condicionais  $Y \mid X = 0$ ,  $Y \mid X = 1$  e  $Y \mid X = 2$ .

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	$\frac{0}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

## Distribuições Condicionais

Assim,

$$P(X = 0 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0}{2/5} = 0$$

$$P(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$$

## Distribuições Condicionais

Analogamente, temos que

$$P(X = 0 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 0$$

## Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y P(Y = y \mid X = x)$$

## Esperança Condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva **esperança condicional**:

$$E_X(X \mid Y = y) = \sum_x x P(X = x \mid Y = y)$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \sum_y y P(Y = y \mid X = x)$$

**Observação:** Note que o subscrito  $X$  indica que a variável aleatória é  $X$  e, portanto, estamos calculando a média (ou esperança) dos valores que  $X$  assume fixado o valor  $y$ . Observação análoga vale para o subscrito  $Y$ .

## Esperança Condicional

Voltando ao exemplo, vamos encontrar  $E(X \mid Y = 0)$ :

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 0) &= \sum_x x P(X = x \mid Y = 0) \\ &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

De forma análoga, vamos encontrar  $E(X \mid Y = 1)$ :

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = 1) &= \sum_x x P(X = x \mid Y = 1) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



## Esperança Condicional

Analogamente,

$$E(Y \mid X = 0) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$E(Y \mid X = 1) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y \mid X = 2) = \sum_y y P(Y = y \mid X = 2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

## Esperança Condicional

Note que, para cada valor  $y$  de  $Y$ , temos um valor diferente de  $E(X \mid Y = y)$  e, para cada valor  $x$  de  $X$ , temos um valor diferente de  $E(Y \mid X = x)$ .

## Esperança Condicional

Note que, para cada valor  $y$  de  $Y$ , temos um valor diferente de  $E(X \mid Y = y)$  e, para cada valor  $x$  de  $X$ , temos um valor diferente de  $E(Y \mid X = x)$ .

Sendo assim, podemos definir uma **função**  $g$  que associa, a cada valor  $y$  de  $Y$ , o valor  $g(y) = E(X \mid Y = y)$  e outra **função**  $h$  que associa, a cada valor  $x$  de  $X$ , o valor  $h(x) = E(Y \mid X = x)$ , ou seja,

$$g : y \longmapsto g(y) = E(X \mid Y = y)$$

$$h : x \longmapsto h(x) = E(Y \mid X = x)$$

## Esperança Condicional

Como  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias  $g(Y)$  e  $h(X)$  e suas esperanças podem também ser calculadas.

## Esperança Condicional

Como  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias  $g(Y)$  e  $h(X)$  e suas esperanças podem também ser calculadas.

Vamos denotar essas esperanças por  $E_Y[g(Y)]$  e  $E_X[h(X)]$ , que são calculadas como

$$E_Y[g(Y)] = \sum_y g(y) P(Y = y)$$

$$E_X[h(X)] = \sum_x h(x) P(X = x)$$

## Esperança Condicional

Assim, usando a definição da esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \sum_y g(y) P(Y = y) = \sum_y E_X(X \mid Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x P(X = x \mid Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} P(Y = y) \\ &= \sum_y \sum_x x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) = E(X) \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \sum_x h(x) P(X = x) = \sum_x E_Y(Y \mid X = x) P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y P(Y = y \mid X = x) P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} P(X = x) \\ &= \sum_x \sum_y y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y y \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y y P(Y = y) = E(Y) \end{aligned}$$

# Esperança Condicional

**Resumindo:**

$$E_Y[E_X(X | Y)] = E(X)$$

$$E_X[E_Y(Y | X)] = E(Y)$$

Esse resultado estabelece a **Lei da Esperança Total**.



## Esperança Condicional

No exemplo,  $Y \in \{0, 1\}$  e  $X \in \{0, 1, 2\}$ , com distribuição conjunta:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

## Esperança Condicional

As marginais são:

$$\begin{aligned}P(Y = 0) &= \frac{4}{10}, & P(Y = 1) &= \frac{6}{10}, \\P(X = 0) &= \frac{3}{10}, & P(X = 1) &= \frac{6}{10}, & P(X = 2) &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

E as esperanças condicionais já calculadas:

$$\begin{aligned}E(X \mid Y = 0) &= \frac{5}{4}, & E(X \mid Y = 1) &= \frac{1}{2}, \\E(Y \mid X = 0) &= 1, & E(Y \mid X = 1) &= \frac{1}{2}, & E(Y \mid X = 2) &= 0\end{aligned}$$

## Esperança Condicional

Primeiro, calculemos  $E(X)$  diretamente pela marginal de  $X$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

Agora, calculemos  $E_Y[E(X | Y)]$ :

$$\begin{aligned} E_Y[E(X | Y)] &= \sum_y E(X | Y = y) P(Y = y) \\ &= E(X | Y = 0) P(Y = 0) + E(X | Y = 1) P(Y = 1) \\ &= \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X | Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

## Esperança Condicional

Logo,

$$E_Y[E_X(X | Y)] = \frac{4}{5} = E(X)$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} \\ &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

e,

$$\begin{aligned} E_X[E(Y \mid X)] &= \sum_x E(Y \mid X = x) P(X = x) \\ &= E(Y \mid X = 0) P(X = 0) + E(Y \mid X = 1) P(X = 1) + E(Y \mid X = 2) P(X = 2) \\ &= 1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

## Esperança Condicional

Logo,

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = \frac{3}{5} = E(Y)$$



## Independência de Variáveis Aleatórias

**Definição (Independência de variáveis aleatórias discretas):** Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório discreto** com distribuição conjunta  $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  são **independentes** se, e somente se,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y), \quad \forall x, y$$

Ou seja, a **distribuição conjunta** é o **produto das distribuições marginais**.

De forma análoga, para vetores  $n$ -dimensionais,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n$$

## Independência de Variáveis Aleatórias

Lembrando a distribuição conjunta do exemplo:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$

## Independência de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Pela definição,  $X$  e  $Y$  seriam independentes se, para todo  $x$  e  $y$ ,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

mas,

Considere o par  $(x, y) = (0, 0)$ :

## Independência de Variáveis Aleatórias

- Da tabela conjunta:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0$$

- Pelo produto das marginais:

$$P(X = 0) P(Y = 0) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Como

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0) P(Y = 0),$$

concluimos que  $X$  e  $Y$  **não são independentes**.

## Funções de Variáveis Aleatórias

**TEOREMA 01:** Seja  $(X, Y)$  um **veter aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta  $P(X = x, Y = y)$ . Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real tal que cada par  $(x, y)$  é levado a  $h(x, y)$ . Então,

$$E[h(X, Y)] = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

De forma análoga, para vetores  $n$ -dimensionais,

$$E[h(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

**TEOREMA 02:** Seja  $(X, Y)$  um **veter aleatório discreto** com função de probabilidade conjunta  $P(X = x, Y = y)$ . Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real tal que  $h(x, y) = x + y$ . Então,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Usando o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_x \sum_y (x + y) P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y x P(X = x, Y = y) + \sum_x \sum_y y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) + \sum_y y \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) + \sum_y y P(Y = y) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

No exemplo da urna, a distribuição conjunta é:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0

As marginais são:

$$P(X = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{10}$$



## Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$P(Y = 0) = \frac{4}{10}, \quad P(Y = 1) = \frac{6}{10}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

e,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X) + E(Y) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Note que, como  $E(X + Y) = \sum_{x,y} (x + y) P(X = x, Y = y)$ , temos:

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= (1 + 0) \cdot \frac{3}{10} + (2 + 0) \cdot \frac{1}{10} + (0 + 1) \cdot \frac{3}{10} + (1 + 1) \cdot \frac{3}{10} \\ &= 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \\ &= \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Teorema 02,

$$E(X + Y) = \frac{7}{5} = E(X) + E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

## Funções de Variáveis Aleatórias

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a **variância da soma de duas variáveis aleatórias**.

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= E [(X + Y) - E(X + Y)]^2 \\&= E [X + Y - E(X) - E(Y)]^2 \\&= E [(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2 \\&= E [(X - E(X))^2] + E [(Y - E(Y))^2] + 2E [(X - E(X))(Y - E(Y))] \\&= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E [(X - E(X))(Y - E(Y))]\end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Observe que, na variância da soma, aparece um termo envolvendo a **esperança do produto dos desvios em torno das médias**. Esse termo define a **covariância** de duas variáveis aleatórias. Note ainda, que as variáveis

$$X' = X - E(X) \quad \text{e} \quad Y' = Y - E(Y)$$

são variáveis aleatórias ambas com média zero, isto é,

$$E(X') = E(Y') = 0$$



## Funções de Variáveis Aleatórias

**Definição (Covariância):** A **covariância** entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

**Definição (Covariância):** A **covariância** entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Substituindo essa definição na expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias, obtém-se o seguinte resultado.

**Resultado 01:** A variância da soma de duas variáveis aleatórias é dada por

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Uma forma alternativa de cálculo da covariância resulta de

$$\begin{aligned}E[(X - E(X))(Y - E(Y))] &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\&= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E(X)E(Y) \\&= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\&= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

Aqui usamos que  $E(kX) = kE(X)$  e também que  $E(k) = k$ . Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Propriedades da covariância

1.  $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{ Cov}(X, Y)$

De fato,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(aX + b, cY + d) &= E[(aX + b - E(aX + b))(cY + d - E(cY + d))] \\ &= E[(aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d)] \\ &= E[a(X - E(X)) c(Y - E(Y))] \\ &= ac E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= ac \text{ Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Propriedades da covariância

$$2. \operatorname{Cov}(X + Y, Z + W) = \operatorname{Cov}(X, Z) + \operatorname{Cov}(X, W) + \operatorname{Cov}(Y, Z) + \operatorname{Cov}(Y, W)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X + Y, Z + W) &= E[(X + Y)(Z + W)] - E(X + Y) E(Z + W) \\&= E(XZ + XW + YZ + YW) - [E(X) + E(Y)][E(Z) + E(W)] \\&= E(XZ) + E(XW) + E(YZ) + E(YW) \\&\quad - E(X)E(Z) - E(X)E(W) - E(Y)E(Z) - E(Y)E(W) \\&= [E(XZ) - E(X)E(Z)] + [E(XW) - E(X)E(W)] \\&\quad + [E(YZ) - E(Y)E(Z)] + [E(YW) - E(Y)E(W)] \\&= \operatorname{Cov}(X, Z) + \operatorname{Cov}(X, W) + \operatorname{Cov}(Y, Z) + \operatorname{Cov}(Y, W)\end{aligned}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Propriedades da covariância

3.

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X - Y) &= \text{Var}[X + (-Y)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, -Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(-1) \text{Cov}(X, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

**Resultado 02:** Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias **independentes**, então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

De fato,

Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Nesse caso,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y xy P(X = x) P(Y = y) \\ &= \left( \sum_x x P(X = x) \right) \left( \sum_y y P(Y = y) \right) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$



## Funções de Variáveis Aleatórias

Note que a recíproca desse resultado **não é verdadeira**, isto é, **covariância nula não significa independência** entre as variáveis.

## Funções de Variáveis Aleatórias

Como exemplo, consideremos a seguinte distribuição de probabilidade conjunta:

**Distribuição conjunta  $p(x, y)$  (com marginais)**

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_Y(y)$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
$p_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	1

## Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Para essa distribuição, temos:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{20} \\ &\quad + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 0 \cdot 3 \cdot \frac{4}{20} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{38}{20} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Observa-se que

$$E(XY) = \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \cdot 2 = E(X) E(Y)$$

Logo,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Entretanto,  $X$  e  $Y$  **não são independentes**, pois, por exemplo,

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{3}{20} \neq P(X = 0) P(Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

**Definição (Coeficiente de Correlação):** O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

onde  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  são os **desvios-padrão** de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.



## Funções de Variáveis Aleatórias

**Definição (Coeficiente de Correlação):** O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

onde  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  são os **desvios-padrão** de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**TEOREMA 03:** Dadas duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com esperança, variância e covariância finitas, então

$$-1 \leq \text{Cor}(X, Y) \leq 1$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## Demonstração

Sejam

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}, \quad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y},$$

as variáveis aleatórias **padronizadas**.

Das propriedades de esperança e variância, sabemos que

$$E(X^*) = E(Y^*) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X^*) = \text{Var}(Y^*) = 1$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Sabemos também que a variância de qualquer variável aleatória é não-negativa. Em particular,

$$\text{Var}(X^* + Y^*) \geq 0$$

Logo,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X^* + Y^*) &= \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) + 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 + 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) \geq -1$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Analogamente, considerando

$$\text{Var}(X^* - Y^*) \geq 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Var}(X^* - Y^*) &= \text{Var}(X^*) + \text{Var}(Y^*) - 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &= 1 + 1 - 2 \text{Cov}(X^*, Y^*) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Portanto,

$$-1 \leq \text{Cov}(X^*, Y^*) \leq 1$$

Mas, por definição,

$$\text{Cov}(X^*, Y^*) = \text{Cor}(X, Y),$$

o que completa a demonstração.

## Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	$\frac{0}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

## Funções de Variáveis Aleatórias

Voltando ao exemplo da urna,

$Y \backslash X$	0	1	2	$P(Y = y)$
0	$\frac{0}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{6}{10}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Temos,

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} = 1$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



## Funções de Variáveis Aleatórias

Da mesma forma,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Somando apenas os termos não nulos da distribuição conjunta:

$$E(XY) = (1 \cdot 1) \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Usando a fórmula alternativa da covariância,

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

temos

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{3}{10} - 1 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \\ &= -\frac{3}{10}\end{aligned}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias

## ► Variância de $X$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{12}{10} = \frac{16}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{16}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

### ► Variância de $Y$

Como  $Y$  é Bernoulli com  $P(Y = 1) = \frac{3}{5}$ ,

$$\text{Var}(Y) = \frac{3}{5} \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{6}{25}}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias

Por definição,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Substituindo os valores obtidos,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{-\frac{3}{10}}{\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{6}{25}}} = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{125}{18}}$$

Numericamente,

$$\text{Cor}(X, Y) \approx -0,79$$

Caso contínuo

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se  $(X, Y)$  puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se  $(X, Y)$  tomar todos os valores em uma região  $R$ , poderemos dizer que  $(X, Y)$  é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se  $(X, Y)$  puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se  $(X, Y)$  tomar todos os valores em uma região  $R$ , poderemos dizer que  $(X, Y)$  é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Contínuas

**Definição:**  $(X, Y)$  será uma **variável aleatória contínua bidimensional** se  $(X, Y)$  puder tomar todos os valores em algum conjunto não numerável do plano euclidiano. Por exemplo, se  $(X, Y)$  tomar todos os valores em uma região  $R$ , poderemos dizer que  $(X, Y)$  é uma **variável aleatória bidimensional contínua**.

Podemos pensar que um **vetor aleatório bidimensional contínuo** é um vetor formado por **duas variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

De forma análoga, podemos definir um **vetor aleatório  $n$ -dimensional contínuo** como sendo um vetor formado por  $n$  **variáveis aleatórias contínuas** definidas no **mesmo espaço amostral**.

## Função Densidade Conjunta

Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório contínuo**. A função densidade conjunta  $f(x, y)$  é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $f(x, y) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3.  $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$

## Função Densidade Conjunta

**Exemplo:** Suponhamos que a variável aleatória contínua bidimensional  $(X, Y)$  tenha fdp conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

## Função Densidade Conjunta

1. Vamos verificar que a função densidade conjunta  $f(x, y)$  satisfaz a condição de não-negatividade:

Na região limitada por  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 2$ , temos:

- ▶  $x^2 \geq 0$ , pois o quadrado de qualquer número real é não-negativo;
- ▶  $\frac{xy}{3} \geq 0$ , pois  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Logo, a soma desses termos também é não-negativa:

$$x^2 + \frac{xy}{3} \geq 0$$

## Função Densidade Conjunta

2. Verifiquemos se a função densidade conjunta satisfaz  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy \\&= \int_0^2 \left[ \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \right] dy \\&= \int_0^2 \left[ \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{yx^2}{6} \Big|_0^1 \right] dy = \int_0^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{6} \right) dy \\&= \int_0^2 \frac{1}{3} dy + \int_0^2 \frac{y}{6} dy = \frac{y}{3} \Big|_0^2 + \frac{y^2}{12} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1\end{aligned}$$

## Densidades Marginais

As **densidades marginais** de  $X$  e  $Y$  são definidas por:

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx$$

## Densidades Marginais

Voltando ao exemplo, vamos encontrar as densidades marginais  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$ :

► **Densidade marginal de  $X$ :** Por definição,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Como o suporte em  $y$  é  $0 \leq y \leq 2$ , para  $0 \leq x \leq 1$ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy = \int_0^2 x^2 dy + \int_0^2 \frac{xy}{3} dy \\ &= x^2(2 - 0) + \frac{x}{3} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{2} = 2x^2 + \frac{2x}{3} \end{aligned}$$

## Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



## Densidades Marginais

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

► **Densidade marginal de  $Y$ :** De forma análoga,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Como o suporte em  $x$  é  $0 \leq x \leq 1$ , para  $0 \leq y \leq 2$ :

## Densidades Marginais

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{y}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} \end{aligned}$$

## Densidades Marginais

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{xy}{3} dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{y}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} \end{aligned}$$

Logo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Por definição, temos que

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Note que, para cada  $y$  temos uma densidade condicional diferente. Analogamente,

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

e para cada  $x$  temos uma densidade condicional diferente.

## Distribuições e Esperanças Condicionais

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Assim, para  $0 \leq y \leq 2$ ,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y + 2} = \frac{2x(3x + y)}{y + 2}$$

Logo,

$$f_{X|Y}(x | y) = \begin{cases} \frac{2x(3x + y)}{y + 2}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma análoga, para  $0 < x \leq 1$  (note que  $f_X(0) = 0$ , mas isso ocorre com probabilidade zero),

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{x + \frac{y}{3}}{2x + \frac{2}{3}} = \frac{3x + y}{6x + 2} = \frac{3x + y}{2(3x + 1)}$$

Logo,

$$f_{Y|X}(y | x) = \begin{cases} \frac{3x + y}{2(3x + 1)}, & 0 \leq y \leq 2, \ 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X \mid Y = y) = \int x f_{X|Y}(x \mid y) dx = \int x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$E_Y(Y \mid X = x) = \int y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$



## Distribuições e Esperanças Condicionais

Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$E_X(X | Y = y) = \int x f_{X|Y}(x | y) dx = \int x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$E_Y(Y | X = x) = \int y f_{Y|X}(y | x) dy = \int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

Note que, assim como no caso discreto, para cada valor  $y$  de  $Y$ , temos um valor diferente de  $E_X(X | Y = y)$ , e para cada valor  $x$  de  $X$ , temos um valor diferente de  $E_Y(Y | X = x)$ .

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo, aqui também podemos definir uma função  $g$  que associa a cada valor de  $Y$  o valor  $E_X(X \mid Y = y)$  e outra função  $h$  que associa a cada valor de  $X$  o valor  $E_Y(Y \mid X = x)$ , ou seja,

$$\begin{aligned}g &: y \mapsto g(y) = E_X(X \mid Y = y), \\h &: x \mapsto h(x) = E_Y(Y \mid X = x)\end{aligned}$$

Como  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias, essas funções definem novas variáveis aleatórias  $g(Y)$  e  $h(X)$ , cujas esperanças são calculadas como

$$\begin{aligned}E_Y[g(Y)] &= \int g(y) f_Y(y) dy \\E_X[h(X)] &= \int h(x) f_X(x) dx\end{aligned}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Usando a definição de esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int g(y) f_Y(y) dy = \int E_X(X | Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \int \left( \int x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \right) f_Y(y) dy = \iint x f(x, y) dx dy \\ &= \int x \left( \int f(x, y) dy \right) dx = \int x f_X(x) dx = E(X) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$E_Y[E_X(X | Y)] = E(X)$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Analogamente,

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \int h(x) f_X(x) dx = \int E_Y(Y \mid X = x) f_X(x) dx \\ &= \int \left( \int y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \right) f_X(x) dx = \iint y f(x, y) dy dx \\ &= \int y \left( \int f(x, y) dx \right) dy = \int y f_Y(y) dy = E(Y) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$E_X[E_Y(Y \mid X)] = E(Y)$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Esses resultados correspondem à **Lei da Esperança Total** no caso contínuo, em perfeita analogia com o caso discreto.

Para nosso exemplo, temos:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

► Vamos verificar que  $E_Y[E(X | Y)] = E(X)$ :

A densidade condicional é

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{y+2}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{y+2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} g(y) = E(X | Y = y) &= \int_0^1 x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_0^1 x \frac{6x^2 + 2xy}{y+2} dx = \frac{1}{y+2} \int_0^1 (6x^3 + 2yx^2) dx \\ &= \frac{1}{y+2} \left( 6 \cdot \frac{1}{4} + 2y \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{y+2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2y}{3} \right) = \frac{4y+9}{6(y+2)}, \quad 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y) f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \int_0^2 \frac{4y+9}{36} dy = \frac{1}{36} [2y^2 + 9y]_0^2 = \frac{1}{36} (8 + 18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$



## Distribuições e Esperanças Condicionais

De forma que,

$$\begin{aligned} E_Y[g(Y)] &= \int_0^2 g(y) f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{4y+9}{6(y+2)} \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \int_0^2 \frac{4y+9}{36} dy = \frac{1}{36} [2y^2 + 9y]_0^2 = \frac{1}{36}(8 + 18) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left( 2x^2 + \frac{2x}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 \right) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X | Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Portanto,

$$E_Y[E(X | Y)] = \frac{13}{18} = E(X)$$

► Verificar  $E_X[E(Y | X)] = E(Y)$

A densidade condicional é

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2x}{3}} = \frac{3x + y}{2(3x + 1)}, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 < x \leq 1$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Logo,

$$\begin{aligned}h(x) = E(Y \mid X = x) &= \int_0^2 y f_{Y|X}(y \mid x) dy = \int_0^2 y \frac{3x + y}{2(3x + 1)} dy \\&= \frac{1}{2(3x + 1)} \int_0^2 (3xy + y^2) dy = \frac{1}{2(3x + 1)} \left( 3x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 \right) \\&= \frac{1}{2(3x + 1)} \left( 3x \cdot 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9x + 4}{3(3x + 1)}, \quad 0 < x \leq 1\end{aligned}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Note que

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3} = \frac{2x(3x + 1)}{3}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_X[h(X)] &= \int_0^1 h(x) f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{9x + 4}{3(3x + 1)} \cdot \frac{2x(3x + 1)}{3} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2x(9x + 4)}{9} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 (18x^2 + 8x) dx \\ &= \frac{1}{9} \left( 18 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{9}(6 + 4) = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

## Distribuições e Esperanças Condicionais

Além disso,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \cdot \frac{y+2}{6} dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy \\ &= \frac{1}{6} \left( \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_X[E(Y \mid X)] = \frac{10}{9} = E(Y)$$

# Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

# Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto.

**Definição (Independência de variáveis aleatórias contínuas):** Seja  $(X, Y)$  um **vetor aleatório contínuo** com função densidade conjunta  $f(x, y)$ . Sejam  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  as densidades marginais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então, diz-se que  $X$  e  $Y$  são **variáveis aleatórias independentes** se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x, y$$

Ou seja, a **densidade conjunta** é o **produto das densidades marginais** para todo par  $(x, y)$  no domínio de definição.



# Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

No exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As marginais são

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2x}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição,  $X$  e  $Y$  seriam independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y)$$

## Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pela definição,  $X$  e  $Y$  seriam independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{para todo } (x, y)$$

Para  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= \left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right) \left(\frac{y+2}{6}\right) = \frac{y+2}{3} \left(x^2 + \frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{y+2}{3}x^2 + \frac{y+2}{9}x = \left(\frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{y}{9} + \frac{2}{9}\right)x \\ &\neq x^2 + \frac{xy}{3} = f(x, y) \end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $X$  e  $Y$  **não são independentes**.

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Assim como no caso discreto, conhecida a densidade conjunta de  $(X, Y)$ , podemos ter interesse em estudar a densidade de uma variável aleatória definida como uma função  $h(X, Y)$ , em que  $h$  é uma função real, isto é,  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

**TEOREMA 04:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta  $f(x, y)$  e seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = \iint h(x, y) f(x, y) dx dy$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

**TEOREMA 04:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta  $f(x, y)$  e seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = \iint h(x, y) f(x, y) dx dy$$

**TEOREMA 05:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta  $f(x, y)$  e seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $h(X, Y) = aX + bY$ , com  $a$  e  $b$  números reais quaisquer. Então,

$$E[h(X, Y)] = a E(X) + b E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo, a densidade conjunta é

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo Teorema 05, para a combinação linear

$$h(X, Y) = aX + bY,$$

vale

$$E[h(X, Y)] = aE(X) + bE(Y)$$



## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Temos que a marginal de  $X$  é

$$f_X(x) = 2x^2 + \frac{2x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left( 2x^2 + \frac{2x}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 \right) dx = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

A marginal de  $Y$  é

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{y+2}{6}, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \left( \frac{y+2}{6} \right) dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^2 (y^2 + 2y) dy = \frac{1}{6} \left( \frac{8}{3} + 4 \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Escolhendo, por exemplo,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -3,$$

temos

$$h(X, Y) = 2X - 3Y$$

Pelo Teorema 05,

$$\begin{aligned} E(2X - 3Y) &= 2E(X) - 3E(Y) = 2 \cdot \frac{13}{18} - 3 \cdot \frac{10}{9} \\ &= \frac{13}{9} - \frac{30}{9} = -\frac{17}{9} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y) \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

# Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Pelo Teorema 04,

$$E(2X - 3Y) = \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y) \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

Temos que,

$$\begin{aligned} (2x - 3y) \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) &= (2x)x^2 + (2x)\frac{xy}{3} - (3y)x^2 - (3y)\frac{xy}{3} \\ &= 2x^3 + \frac{2}{3}x^2y - 3x^2y - xy^2 \\ &= 2x^3 - \frac{7}{3}x^2y - xy^2 \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

► Integral interna em  $x$  (de 0 a 1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left( 2x^3 - \frac{7}{3}x^2y - xy^2 \right) dx &= \int_0^1 2x^3 dx - \frac{7}{3}y \int_0^1 x^2 dx - y^2 \int_0^1 x dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{3}y \cdot \frac{1}{3} - y^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2\end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

► Integral externa em  $y$  (de 0 a 2)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy &= \int_0^2 \frac{1}{2} dy - \frac{7}{9} \int_0^2 y dy - \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{7}{9} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3} \\ &= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}\end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

► Integral externa em  $y$  (de 0 a 2)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{9}y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy &= \int_0^2 \frac{1}{2} dy - \frac{7}{9} \int_0^2 y dy - \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{7}{9} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{3} \\ &= 1 - \frac{14}{9} - \frac{4}{3} = 1 - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} = -\frac{17}{9}\end{aligned}$$

Logo, verificamos numericamente a linearidade:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$



## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto.  
A covariância entre  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

As definições de **covariância** e **correlação** são as mesmas vistas para o caso discreto. A covariância entre  $X$  e  $Y$  é definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

O coeficiente de correlação é definido por

$$\text{Cor}(X, Y) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Valem todas as propriedades vistas anteriormente para o caso discreto. Em particular, se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias contínuas **independentes**, então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

A recíproca, em geral, **não é verdadeira**, uma vez que a covariância mede apenas a **relação linear** entre as variáveis.

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

No nosso exemplo,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já obtivemos

$$E(X) = \frac{13}{18}, \quad E(Y) = \frac{10}{9}$$

A seguir calculamos  $E(XY)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$  e  $\text{Cor}(X, Y)$ .

# Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

## ► Cálculo de $E(XY)$

Por definição,

$$E(XY) = \int_0^2 \int_0^1 xy f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 xy \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy$$

Expandindo:

$$xy \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) = x^3y + \frac{x^2y^2}{3}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^1 \left( x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[ y \int_0^1 x^3 dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[ y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left( \frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[ \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^1 \left( x^3 y + \frac{x^2 y^2}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[ y \int_0^1 x^3 dx + \frac{y^2}{3} \int_0^1 x^2 dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[ y \cdot \frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right] dy = \int_0^2 \left( \frac{y}{4} + \frac{y^2}{9} \right) dy = \left[ \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{27} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{8} + \frac{8}{27} = \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{43}{54} \end{aligned}$$

► Covariância: Temos que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{43}{54} - \left(\frac{13}{18}\right) \left(\frac{10}{9}\right) \\ &= \frac{43}{54} - \frac{130}{162} = \frac{129}{162} - \frac{130}{162} = -\frac{1}{162}\end{aligned}$$



# Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

## ► Correlação

Para a correlação, precisamos das variâncias. Primeiro, vamos calcular  $E(X^2)$ :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^2 \int_0^1 x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 x^2 \left( x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^1 \left( x^4 + \frac{x^3 y}{3} \right) dx dy = \int_0^2 \left[ \frac{1}{5} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{4} \right] dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{1}{5} + \frac{y}{12} \right) dy = \left[ \frac{y}{5} + \frac{y^2}{24} \right]_0^2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{24} = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{17}{30} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{17}{30} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{73}{1620}$$

Agora, vamos calcular  $E(Y^2)$ :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^2 \int_0^1 y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 y^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[ y^2 \int_0^1 x^2 dx + \frac{y^3}{3} \int_0^1 x dx \right] dy = \int_0^2 \left( y^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{y^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{y^2}{3} + \frac{y^3}{6} \right) dy = \left[ \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{24} \right]_0^2 = \frac{8}{9} + \frac{16}{24} = \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Então,

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}$$

Logo,

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{73}{1620}}, \quad \sigma_Y = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

# Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

## Coeficiente de correlação

Por definição,

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{73}{1620}} \sqrt{\frac{26}{81}}}$$

Simplificando, obtém-se

$$\text{Cor}(X, Y) = -\frac{\sqrt{9490}}{1898} \approx -0.0513$$

## Transformações Bivariadas

**Exemplo:** Considere o nosso vetor aleatório contínuo  $(X, Y)$  com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \quad V = X + Y$$

# Transformações Bivariadas

Vamos definir uma transformação **invertível**:

$$U = X, \quad V = X + Y$$

Da definição,

$$u = x, \quad v = x + y \Rightarrow x = u, \quad y = v - u$$

Logo, a inversa é

$$(x, y) = (u, v - u)$$



# Transformações Bivariadas

O Jacobiano da transformação inversa  $(u, v) \mapsto (x, y)$  é

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Assim,  $|J| = 1$ . Como  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 2$ , então:

- ▶  $u = x \in [0, 1]$ ;
- ▶  $y = v - u \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq v - u \leq 2 \Rightarrow u \leq v \leq u + 2$

## Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2$$

## Transformações Bivariadas

Portanto, o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2$$

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) |J| = f_{X,Y}(u, v - u) \cdot 1,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= u^2 + \frac{u(v - u)}{3} \\ &= u^2 + \frac{uv - u^2}{3} = \frac{2u^2 + uv}{3} \end{aligned}$$

## Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1, u \leq v \leq u + 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Transformações Bivariadas

Logo,

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{2u^2 + uv}{3}, & 0 \leq u \leq 1, u \leq v \leq u + 2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

► Validade da função densidade

## Não-negatividade

No suporte da distribuição temos

$$u \geq 0 \quad \text{e} \quad v \geq u \geq 0$$

## Transformações Bivariadas

Logo,

$$2u^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad uv \geq 0$$

Portanto,

$$2u^2 + uv \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_{U,V}(u, v) \geq 0$$

em todo o suporte.

Fora do suporte,  $f_{U,V}(u, v) = 0$ , o que também satisfaz a condição.

# Transformações Bivariadas

Devemos verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv du = 1$$

Como o suporte é

$$0 \leq u \leq 1, \quad u \leq v \leq u + 2,$$

temos

$$\int_0^1 \int_u^{u+2} \frac{2u^2 + uv}{3} dv du = \int_0^1 \frac{1}{3} \left[ \int_u^{u+2} (2u^2 + uv) dv \right] du$$

# Transformações Bivariadas

Integral interna em  $v$

$$\begin{aligned}\int_u^{u+2} (2u^2 + uv) dv &= 2u^2(v)\Big|_u^{u+2} + u\frac{v^2}{2}\Big|_u^{u+2} \\ &= 2u^2(2) + \frac{u}{2} [(u+2)^2 - u^2] \\ &= 4u^2 + \frac{u}{2}(4u + 4) \\ &= 4u^2 + 2u^2 + 2u \\ &= 6u^2 + 2u\end{aligned}$$



# Transformações Bivariadas

Integral externa em  $u$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{3}(6u^2 + 2u) du &= \frac{1}{3} \int_0^1 (6u^2 + 2u) du \\ &= \frac{1}{3} \left( 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3}(2 + 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Logo,  $f_{U,V}(u,v)$  é uma função densidade de probabilidade conjunta válida.

## Transformações Bivariadas

**Exemplo:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade  $f_X(x) = e^{-x}$ , para  $x \geq 0$  e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

## Transformações Bivariadas

**Exemplo:** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com parâmetro igual a 1, isto é, com densidade de probabilidade  $f_X(x) = e^{-x}$ , para  $x \geq 0$  e igual a zero no complementar. Determinar a densidade conjunta de:

$$U = X + Y \quad \text{e} \quad V = \frac{Y}{X}$$

Como  $X$  e  $Y$  são independentes, e com distribuição Exponencial(1),

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{I}_{\{x \geq 0\}}, \quad f_Y(y) = e^{-y} \mathbf{I}_{\{y \geq 0\}}$$

## Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \mathbf{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \quad V = \frac{Y}{X}$$

## Transformações Bivariadas

E a densidade conjunta é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \mathbf{I}_{\{x \geq 0, y \geq 0\}}$$

Defina a transformação

$$U = X + Y, \quad V = \frac{Y}{X}$$

De  $V = \frac{Y}{X}$ , obtemos  $Y = VX$ . Substituindo em  $U = X + Y$ :

$$U = X + VX = X(1 + V) \quad \Rightarrow \quad X = \frac{U}{1 + V}$$

## Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V \frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como  $X > 0$  e  $Y > 0$ , temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

## Transformações Bivariadas

Então,

$$Y = VX = V \frac{U}{1+V} = \frac{UV}{1+V}$$

Como  $X > 0$  e  $Y > 0$ , temos necessariamente

$$U > 0 \quad \text{e} \quad V > 0$$

Temos então, que a inversa é

$$x(u, v) = \frac{u}{1+v}, \quad y(u, v) = \frac{uv}{1+v}$$

# Transformações Bivariadas

O Jacobiano dessa transformação é:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} - \left( -\frac{u}{(1+v)^2} \right) \cdot \frac{v}{1+v} \\ &= \frac{u}{(1+v)^2} \end{aligned}$$



# Transformações Bivariadas

Pelo método do Jacobiano,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|$$

Como  $x(u, v) + y(u, v) = \frac{u}{1+v} + \frac{uv}{1+v} = u$ , segue que

$$f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) = e^{-u}$$

Portanto,

$$f_{U,V}(u, v) = e^{-u} \cdot \frac{u}{(1+v)^2}, \quad u > 0, v > 0$$