Função Geradora de Momentos

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X, ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - \Big[E(X)\Big]^2$$

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X, tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X, ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - \Big[E(X)\Big]^2$$

Outras características da distribuição de probabilidade de X podem ser expressas por meio das esperanças das potências de X como por exemplo **coeficientes de assimetria** e **curtose**.

Momentos

Definição 01: Momentos

Seja X uma variável aleatória. Então, o **k-ésimo momento** de X, denotado por μ'_k é definido como,

$$\mu'_k = E(X^k)$$

desde que essa quantidade exista. O **k-ésimo momento central** de uma variável aleatória X, denotado por μ_k é definido como,

$$\mu^k = E\Big[X - E(X)\Big]^k$$

sempre que essa quantidade existir.

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu_1'$

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu_1'$
- $Var(X) = \mu_2 = \mu_2' - [\mu_1']^2$

Momentos

Note que,

- $E(X) = \mu_1'$
- $Var(X) = \mu_2 = \mu_2' - [\mu_1']^2$
- Para qualquer variável aleatória, $\mu_1 = 0$.

Momentos

- Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

Momentos

- Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

- Se X é uma variável aleatória contínua,

$$\mu'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k f(x)\, dx$$

Momentos

Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$.

Momentos

Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$.

Solução: Temos que, se $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k f(x \mid \alpha, \lambda)\, dx = \int_0^\infty x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1}\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

Note que a integral é quase a função gama, a não ser pelo termo $e^{-\lambda x}$. Seja então a seguinte mudança de variável,

$$u = \lambda x \;\Rightarrow\; x = \frac{u}{\lambda}, \qquad dx = \frac{du}{\lambda}$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha+k-1} e^{-u}\, \frac{du}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+k}\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+k-1} e^{-u}\, du = \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha+k)}{\lambda^{\alpha+k}\,\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\lambda^k}$$

Mas,

$$\Gamma(\alpha+k) = (\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

Momentos

De forma que, o k-ésimo momento de uma variável aleatória $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$ é dado por

$$E(X^k) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$$

Momentos

Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Momentos

Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k-ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Solução: Temos que, se $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \int_0^{\infty} x^k \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx$$

Mudança de variável:

$$u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad x = \alpha u^{1/\beta}, \qquad dx = \alpha \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1} du$$

Além disso:

$$x^k = \alpha^k u^{k/\beta}, \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} = u^{(\beta-1)/\beta}, \qquad \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] = e^{-u}$$

Momentos

logo,

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] dx \\
&= \int_0^\infty \alpha^k u^{k/\beta}\,\frac{\beta}{\alpha}\,u^{(\beta-1)/\beta}\,e^{-u}\,\alpha\frac{1}{\beta}u^{1/\beta-1}\,du \\
&= \alpha^k \int_0^\infty u^{\frac{k+\beta}{\beta}-1} e^{-u}\,du = \alpha^k\;\Gamma\left(1+\frac{k}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Função Geradora de Momentos

Definição 02: Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória qualquer. A **função geradora de momentos** (FGM) de X, denotada por M_X, é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

para valores de t em um intervalo contendo 0 onde a experença exista.

Importante: a função geradora de momentos é função de t. Para ela existir basta que exista $\varepsilon > 0$ tal que $E(e^{tX})$ esteja bem definida para qualquer $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Função Geradora de Momentos

Note que a **definição de função geradora de momentos** é feita independente do tipo de variável, mas a forma de encontrá-la depende se a variável for **discreta** ou **contínua**, isto é,

- Se X é discreta,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{\forall x \in S_X} e^{tx} p_X(x)$$

- Se X é contínua,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Função Geradora de Momentos

Teorema 01

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Então, $E(X^k)$ existe para $k = 1, 2, \cdots$ e temos:

$$E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \bigg|_{t=0}$$

ou seja, o k-ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k de $M_X(t)$ avaliada em $t = 0$.

Demonstração: Suponha que a função geradora de momentos de X exista para todo t tal que $|t| < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, isto é,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) < \infty, \qquad |t| < \varepsilon.$$

Função Geradora de Momentos

Pela série de Maclaurin da função exponencial, para qualquer número real y temos

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Aplicando isso a $y = tX$, obtemos, para cada t com $|t| < \varepsilon$,

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots$$

Temos que $M_X(t) = E(e^{tX})$. Logo, admitindo ser válido permutar soma infinita e esperança, temos

Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n), \qquad |t| < \varepsilon$$

Portanto, $M_X(t)$ é dada, em uma vizinhança de 0, por uma série de potência da forma

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad \text{com } a_n = \frac{E(X^n)}{n!}$$

Função Geradora de Momentos

Da teoria de séries de potência, sabemos que, se

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

então a k-ésima derivada é

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, t^{\,n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Agora substituímos $t = 0$:

Observe:

- Se $n > k$, aparece o fator $t^{n-k} = 0^{n-k} = 0$;
- Então **todos** os termos com $n > k$ desaparecem;
- Só o termo com $n = k$ permanece.

O único termo sobrevivente é:

$$a_k \, k(k-1)(k-2)\cdots 1 \, t^0 = a_k \, k!$$

Função Geradora de Momentos

Assim,

$$M_X^{(k)}(0) = a_k\, k! = \frac{E(X^k)}{k!}\, k! = E(X^k)$$

Logo,

$$E(X^k) = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

o que mostra que o k-ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k da função geradora de momentos avaliada em $t = 0$.

Função Geradora de Momentos

Tip 1: Dica Importante!

Para qualquer variável aleatória X:

$$M_X(0) = E(e^{0X}) = 1.$$

Isso sempre deve ocorrer. Use esse fato para verificar se sua FGM está correta.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim Bernoulli(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim Bernoulli(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Por definição,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x (1-p)^{1-x}$$

Como X só assume os valores 0 e 1:

$$M_X(t) = e^{t \cdot 0} p^0 (1-p)^{1-0} + e^{t \cdot 1} p^1 (1-p)^{1-1} = (1-p) + e^t p = 1 - p + e^t p$$

Função Geradora de Momentos

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = 1 - p + pe^t, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Veja que pela Tip 1 $M_X(0) = 1 - p + pe^0 = 1 - p + p \times 1 = 1$. Assim,

- Primeira derivada de $M_X(t)$:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}(1 - p + pe^t) = pe^t$$

Avaliada em $t = 0$, temos $E(X) = M'_X(0) = pe^0 = p$

Função Geradora de Momentos

- Segunda derivada de $M_X(t)$:

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt}(M_X'(t)) = \frac{d}{dt}(pe^t) = pe^t$$

Avaliada em $t = 0$, temos $E(X) = M_X''(0) = pe^0 = p$.

Assim,

$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição Binomial

Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 03: Distribuição Binomial

Seja $X \sim Binomial(n, p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: Se $X \sim Binomial(n, p)$ então sua f.p. é dada por

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Por definição,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Escrevendo $e^{tk} = (e^t)^k$:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k}$$

Temos que o binômio de Newton é dado por:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Assim, tomando $a = pe^t$ e $b = 1 - p$:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Portanto,

$$\boxed{M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Veja que pela Tip 1 $M_X(0) = (1 - p + pe^0)^n = (1 - p + p \times 1)^n = 1^n = 1$.

Função Geradora de Momentos

Sabemos que

$$E(X) = M'_X(0)$$

Derivada primeira em relação a t,

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}(1 - p + pe^t)^n = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t$$

Logo,

$$M'_X(0) = n(1 - p + pe^0)^{n-1} \cdot pe^0 = n(1 - p + p)^{n-1}p = np$$

Função Geradora de Momentos

Vamos agora encontrar a segunda derivada. Temos

$$M'_X(t) = npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1}$$

Aplicando a regra do produto:

$$\begin{aligned} M''_X(t) &= \frac{d}{dt}\left[npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1}\right] \\ &= npe^t(n-1)(1 - p + pe^t)^{n-2} \cdot pe^t \ + \ npe^t(1 - p + pe^t)^{n-1} \end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

Avaliando em $t = 0$:

- $e^0 = 1$
- $1 - p + pe^0 = 1 - p + p = 1$

Assim,

$$
\begin{aligned}
M_X''(0) &= np \cdot 1 \cdot (n-1) \cdot 1^{\,n-2} \cdot p \cdot 1 \;+\; np \cdot 1 \cdot 1^{\,n-1} \\
&= np(n-1)p + np \\
&= np\big[(n-1)p + 1\big]
\end{aligned}
$$

Função Geradora de Momentos

De forma que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 \\
&= np\big[(n-1)p + 1\big] - (np)^2 \\
&= np\big[(n-1)p + 1 - np\big] \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

Exemplo 04: Distribuição Geométrica

Seja $X \sim Geo(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

Exemplo 04: Distribuição Geométrica

Seja $X \sim Geo(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Solução: