Função Geradora de Momentos

`Data de entrega: 29 de janeiro de 2026`

---

1) Suponha que X tenha f.d.p. dada por

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) Determine a função geradora de momentos (fgm) de X.

(b) Empregando a fgm, calcule $E(X)$ e $V(X)$.

---

2) Suponha que X tenha a seguinte f.d.p.:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \quad x \geq a$$

(a) Determine a fgm de X.

(b) Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

---

3) Seja X o resultado da jogada de uma moeda equilibrada.

(a) Determine a fgm de X.

(b) Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

---

4) Suponha que a variável aleatória contínua X tenha f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

(a) Ache a fgm de X.

(b) Empregando a fgm, ache $E(X)$ e $V(X)$.

---

5) Empregue a fgm para mostrar que, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, com distribuições $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, respectivamente, então

$$Z = aX + bY$$

será também normalmente distribuída, na qual a e b são constantes.

---

6) Suponha que a fgm da variável aleatória X seja da forma

$$M_X(t) = (0{,}4e^t + 0{,}6)^8.$$

(a) Qual será a fgm da variável aleatória $Y = 3X + 2$?

(b) Calcule $E(X)$.

---

7) Seja $\varphi_X(t)$ a função característica de uma variável aleatória X. Mostre que, para qualquer que seja X,

$$|\varphi_X(t)| \leq 1$$

(o que garante que, diferentemente da função geratriz de momentos, a função característica sempre existe). **Dica:** use o fato de que se $z = a + ib$, então o módulo de z é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

---

8) A variável X tem densidade $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, x real. Mostre que sua função característica é dada por

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

---

9) Seja X variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{1}_{(-1,0)}(x) \;+\; \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{x}{8}\right)\mathbf{1}_{(0,2)}(x)$$

Obtenha a função característica de X.