Vetores Aleatórios

`Data de entrega: 26 de fevereiro de 2026`

---

1. A tabela abaixo dá a **distribuição conjunta** de X e Y:

$Y \backslash X$	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,0	0,3
2	0,0	0,1	0,1

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) Calcule a esperança e a variância de cada uma das variáveis X e Y.

(c) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.

(d) Calcule $P(X = 1 \mid Y = 0)$ e $P(Y = 2 \mid X = 3)$.

(e) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X = 2,\ Y \leq 1)$.

(f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

---

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com

$$E(X) = E(Y) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$$

Prove que

$$\mathrm{Corr}(U, V) = 0,$$

onde

$$U = X + Y \qquad \text{e} \qquad V = X - Y$$

---

3. Um aluno faz um teste de múltipla escolha com **4 questões do tipo Verdadeiro–Falso**. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

- X_1 = número de acertos entre as duas primeiras questões da prova
- Y_1 = número de acertos entre as duas últimas questões da prova
- X_2 = número de acertos entre as três primeiras questões da prova
- Y_2 = número de acertos entre as três últimas questões da prova

a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

d) Verifique se X_1 e Y_1 são independentes.

e) Verifique se X_2 e Y_2 são independentes.

f) Por que já era de se esperar as diferenças observadas em (d) e (e)?

g) Calcule a covariância entre X_1 e Y_1.

h) Calcule a covariância entre X_2 e Y_2.

i) Calcule as seguintes distribuições condicionais com suas esperanças condicionais:

$$X_2 \mid Y_2 = 0, \qquad X_2 \mid Y_2 = 1, \qquad X_2 \mid Y_2 = 2, \qquad X_2 \mid Y_2 = 3$$

j) Calcule $E[E(X_2 \mid Y_2)]$.

---

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = 4xy, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,$$

e $f(x, y) = 0$ fora desse domínio.

Verifique se X e Y são independentes.

---

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função densidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} c\,x, & 0 < y < x, \quad y < 1 - x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual o valor de c para que a função acima seja realmente uma função densidade conjunta?

b) Encontre a distribuição marginal de X. Encontre $E(X)$ e $Var(X)$.

c) Encontre a distribuição marginal de Y. Encontre $E(Y)$ e $Var(Y)$.

d) Calcule a distribuição condicional de X dado $Y = y$ e sua esperança $g(y) = E(X|Y = y)$.

e) Calcule a distribuição condicional de Y dado $X = x$ e sua esperança $h(x) = E(Y|X = x)$.

f) Encontre $Cov(X, Y)$ e $Cor(X, Y)$.

---

6. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\,x(x - y), & 0 < x < 2, \quad -x < y < x, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Verifique se a função acima realmente é uma função densidade conjunta.

b) Encontre as densidades marginais e suas esperanças.

c) Encontre a distribuição condicional de Y dado $X = x$.

d) Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = y$.

---

7. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é **constante** na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$A = \{(x,y) \,:\, 0 < y < x,\; x + y < 1\}$$

Determine:

(a) a função densidade conjunta de X e Y.

(b) as marginais f_X e f_Y.

(c) $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.

(d) $P(X < 0{,}5,\; Y > 0{,}25)$.

(e) $P(X + Y > 1/2)$.

(f) a covariância e a correlação entre X e Y.

---

8. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é **constante** na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$A = \{(x,y) \,:\, 0 < x < 1,\; x + y < 1\}$$

Determine:

(a) a função densidade conjunta de X e Y.

(b) as marginais f_X e f_Y.

(c) $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.

(d) $P(X < 0{,}5,\; Y > 0{,}5)$.

(e) a covariância e a correlação entre X e Y.

---

9. Considere a seguinte função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha as densidades marginais de X e Y, identificando as respectivas distribuições de probabilidade.

(b) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta.

---

10. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com funções densidades iguais a $f(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, obtenha a densidade conjunta de $U = X + Y$ e $V = 3X + 2Y$. Neste caso, U e V são independentes?