

Função Geradora de Momentos

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X , tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X , tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X , ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Momentos

Calculamos algumas características de uma variável aleatória X , tais como $E(X)$ e $Var(X)$, através da distribuição de probabilidade de X

Vimos que a variância pode ser expressa como uma **função da esperança** das duas primeiras potências de X , ou seja,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Outras características da distribuição de probabilidade de X podem ser expressas por meio das esperanças das potências de X como por exemplo **coeficientes de assimetria** e **curtose**.

Momentos

i Definição 01: Momentos

Seja X uma variável aleatória. Então, o **k-ésimo momento** de X , denotado por μ'_k é definido como,

$$\mu'_k = E(X^k)$$

desde que essa quantidade exista. O **k-ésimo momento central** de uma variável aleatória X , denotado por μ_k é definido como,

$$\mu^k = E\left[X - E(X)\right]^k$$

sempre que essa quantidade existir.

Momentos

Note que,

$$\blacktriangleright E(X) = \mu'_1$$

Momentos

Note que,

► $E(X) = \mu'_1$

► $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - [\mu'_1]^2$

Momentos

Note que,

- ▶ $E(X) = \mu'_1$
- ▶ $Var(X) = \mu_2 = \mu'_2 - [\mu'_1]^2$
- ▶ Para qualquer variável aleatória, $\mu_1 = 0$.

Momentos

- Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

Momentos

- ▶ Se X é uma variável aleatória discreta,

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p(x_i)$$

- ▶ Se X é uma variável aleatória contínua,

$$\mu'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^k f(x) dx$$

Momentos

i Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k -ésimo momento de $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

Momentos

i Exemplo 01: Momentos da distribuição Gamma

Encontre o k -ésimo momento de $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

Solução: Temos que, se $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^{\infty} x^k f(x \mid \alpha, \lambda) dx = \int_0^{\infty} x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^k \frac{\lambda e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Note que a integral é quase a função gama, a não ser pelo termo $e^{-\lambda x}$. Seja então a seguinte mudança de variável,

$$u = \lambda x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u}{\lambda}, \quad dx = \frac{du}{\lambda}$$

Momentos

Assim,

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha+k-1} e^{-u} \frac{du}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^{\alpha+k} \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+k-1} e^{-u} du = \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha + k)}{\lambda^{\alpha+k} \Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha) \lambda^k} \end{aligned}$$

Mas,

$$\Gamma(\alpha + k) = (\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \cdots (\alpha + 1)\alpha \Gamma(\alpha)$$

Momentos

De forma que, o k -ésimo momento de uma variável aleatória $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ é dado por

$$E(X^k) = \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + k - 1)}{\lambda^k}$$

Momentos

i Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k -ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Momentos

i Exemplo 02: Momentos da distribuição Weibull

Encontre o k -ésimo momento de $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$.

Solução: Temos que, se $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, então sua função densidade é dada por,

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Momentos

Assim,

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] dx$$

Mudança de variável:

$$u = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \Rightarrow x = \alpha u^{1/\beta}, \quad dx = \alpha \frac{1}{\beta} u^{1/\beta-1} du$$

Além disso:

$$x^k = \alpha^k u^{k/\beta}, \quad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} = u^{(\beta-1)/\beta}, \quad \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] = e^{-u}$$

Momentos

logo,

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] dx \\ &= \int_0^\infty \alpha^k u^{k/\beta} \frac{\beta}{\alpha} u^{(\beta-1)/\beta} e^{-u} \alpha \frac{1}{\beta} u^{1/\beta-1} du \\ &= \alpha^k \int_0^\infty u^{\frac{k+\beta}{\beta}-1} e^{-u} du = \alpha^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Função Geradora de Momentos

i Definição 02: Função Geradora de Momentos

Seja X uma variável aleatória qualquer. A **função geradora de momentos** (FGM) de X , denotada por M_X , é definida por

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

para valores de t em um intervalo contendo 0 onde a esperança exista.

Importante: a função geradora de momentos é função de t . Para ela existir basta que exista $\varepsilon > 0$ tal que $E(e^{tX})$ esteja bem definida para qualquer $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Função Geradora de Momentos

Note que a **definição de função geradora de momentos** é feita independente do tipo de variável, mas a forma de encontrá-la depende se a variável for **discreta** ou **contínua**, isto é,

► Se X é discreta,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{\forall x \in S_X} e^{tx} p_X(x)$$

► Se X é contínua,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Função Geradora de Momentos

i Teorema 01

Suponha que a função geradora de momentos de X exista para $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Então, $E(X^k)$ existe para $k = 1, 2, \dots$ e temos:

$$E(X^k) = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}$$

ou seja, o k -ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k de $M_X(t)$ avaliada em $t = 0$.

Demonstração: Suponha que a função geradora de momentos de X exista para todo t tal que $|t| < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, isto é,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) < \infty, \quad |t| < \varepsilon.$$

Função Geradora de Momentos

Pela série de Maclaurin da função exponencial, para qualquer número real y temos

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

Aplicando isso a $y = tX$, obtemos, para cada t com $|t| < \varepsilon$,

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots$$

Temos que $M_X(t) = E(e^{tX})$. Logo, admitindo ser válido permutar soma infinita e esperança, temos

Função Geradora de Momentos

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n), \quad |t| < \varepsilon$$

Portanto, $M_X(t)$ é dada, em uma vizinhança de 0, por uma série de potência da forma

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad \text{com } a_n = \frac{E(X^n)}{n!}$$

Função Geradora de Momentos

Da teoria de séries de potência, sabemos que, se

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

então a k -ésima derivada é

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) t^{n-k}$$

Função Geradora de Momentos

Agora substituímos $t = 0$:

Observe:

- ▶ Se $n > k$, aparece o fator $t^{n-k} = 0^{n-k} = 0$;
- ▶ Então **todos** os termos com $n > k$ desaparecem;
- ▶ Só o termo com $n = k$ permanece.

O único termo sobrevivente é:

$$a_k k(k-1)(k-2) \cdots 1 t^0 = a_k k!$$

Função Geradora de Momentos

Assim,


$$M_X^{(k)}(0) = a_k k! = \frac{E(X^k)}{k!} k! = E(X^k)$$

Logo,

$$E(X^k) = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

o que mostra que o k -ésimo momento de X é igual à derivada de ordem k da função geradora de momentos avaliada em $t = 0$.

Função Geradora de Momentos

 Dica Importante!

Para qualquer variável aleatória X :

$$M_X(0) = E(e^{0X}) = 1.$$

Isso sempre deve ocorrer. Use esse fato para verificar se sua FGM está correta.

Função Geradora de Momentos

i Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Função Geradora de Momentos

i Exemplo 03: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. Encontre sua função geradora de momentos e a partir dela, encontre $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Solução: