Revisão Probabilidade I

1 Variáveis Aleatórias (VAs)

Definição. Uma variável aleatória é uma função que associa a cada resultado do experimento um número real.

- **Discretas:** suporte finito/enumerável (ex.: 0,1,2,...). Caracterizam-se por **função de probabilidade** $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$. Uma função de probabilidade satisfaz $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_{i=1} p_i = 1$
- **Contínuas:** suporte intervalar. Caracterizam-se por **densidade** $f(x)$ tal que $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Uma função densidade satisfaz $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

A **função de distribuição** é $F(x) = P(X \leq x)$. Em ambos os casos, $F(x)$ é não-decrescente e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

2 Momentos

Seja X uma varável aleatória.

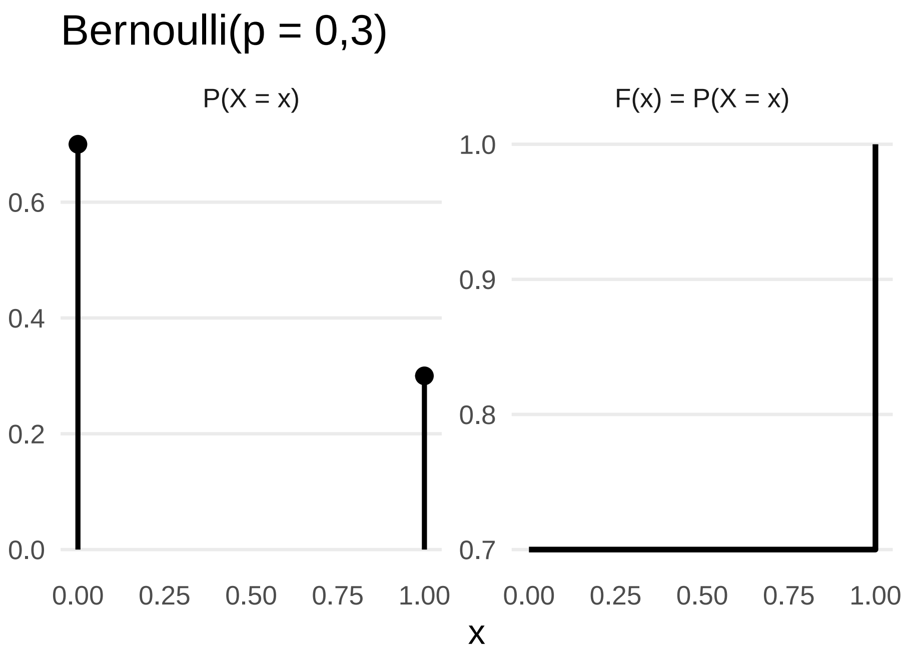
- **Esperança:** $E[X] = \sum_x x\,p(x)$ (discreta) ou $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ (contínua).
- **Variância:** $Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$.
- **Desigualdade de Jensen (convexa ϕ):** $\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$.
- **Propriedades úteis:** linearidade $E[aX + b] = aE[X] + b$; $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

3 Distribuições Discretas

3.1 Bernoulli (p)

Interpretação: 1 sucesso/fracasso em único ensaio.

Item	Expressão
Suporte	$x \in \{0, 1\}$
Parâmetro	$0 < p < 1$
Função de probabilidade $p(x)$	$p^x(1-p)^{1-x}$
Distribuição $F(x)$	0 se $x < 0$; $1-p$ se $0 \leq x < 1$; 1 se $x \geq 1$
Esperança $E[X]$	p
Variância $Var(X)$	$p(1-p)$



Mostrar demonstração

A variável Bernoulli assume valores 0 e 1, com $P(X = 1) = p$ e $P(X = 0) = 1 - p$.
Esperança

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Segundo momento

$$E(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 \cdot p = p.$$

Variância

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exemplo: Um alarme dispara corretamente com probabilidade $p = 0{,}92$. Seja $X = 1$ se o alarme dispara corretamente, 0 caso contrário.

a. Calcule $P(X = 1)$ e $P(X = 0)$.

b. Calcule $E[X]$ e interprete.

Solução:

- $P(X = 1) = 0{,}92$
- $P(X = 0) = 0{,}08$

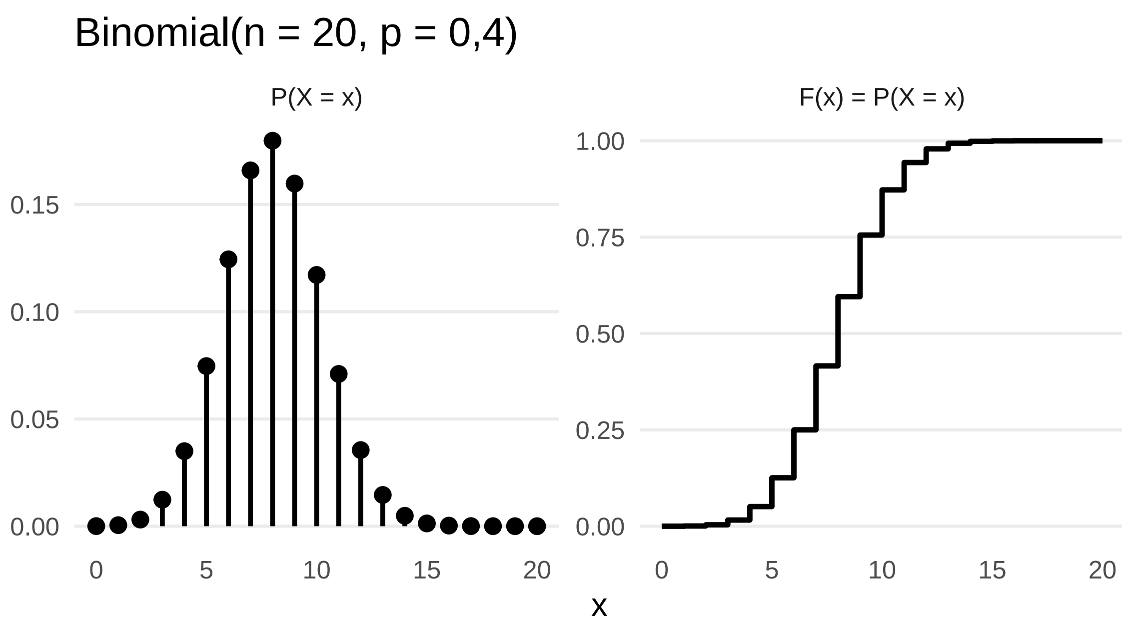
$$E[X] = p = 0{,}92$$

Interpretação: o alarme funciona corretamente em **92% dos acionamentos**.

3.2 Binomial (n, p)

Interpretação: número de sucessos em n ensaios independentes, prob. p.

Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, \ldots, n$
Parâmetros	$n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$
$p(k)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$
$E[X]$	np
$Var(X)$	$np(1-p)$



Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, isto é,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vamos demonstrar:

- $E(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$

usando

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k), \qquad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de E(X)
Pela definição:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Note que o termo com $k = 0$ é zero (pois tem um fator k), então podemos começar em $k = 1$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Usamos agora a identidade combinatória

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Substituindo:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Colocamos n em evidência:

$$E(X) = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Agora fazemos a mudança de índice $j = k - 1$:

- quando $k = 1$, $j = 0$;
- quando $k = n$, $j = n - 1$;
- $k = j + 1$.

Então:

$$E(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-(j+1)}.$$

Reorganizando as potências:

$$p^{j+1} = p \cdot p^j, \qquad n - (j+1) = (n-1) - j,$$

obtemos:

$$E(X) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

Repare que a soma

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

é exatamente o desenvolvimento binomial de

$$(p + (1-p))^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

Portanto:

$$E(X) = np \cdot 1 = np.$$

Cálculo de $E(X^2)$
Pela definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Truque clássico: escrever

$$k^2 = k(k-1) + k.$$

Então:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} [k(k-1) + k] \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Chamemos:

- $A = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $B = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Logo, $E(X^2) = A + B$.
Mas repare que $B = E(X)$, que já calculamos:

$$B = E(X) = np.$$

Falta calcular A.

Cálculo de A
Usamos agora a identidade:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Então:

$$A = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Podemos tirar $n(n-1)$ em evidência:

$$A = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Agora faça a mudança de índice $j = k - 2$:

- quando $k = 2$, $j = 0$;
- quando $k = n$, $j = n - 2$;
- $k = j + 2$.

Substituindo:

$$A = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} (1-p)^{n-(j+2)}.$$

Reorganizando as potências:

$$p^{j+2} = p^2 p^j, \qquad n - (j+2) = (n-2) - j,$$

temos:

$$A = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{(n-2)-j}.$$

A soma é novamente um binômio:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{(n-2)-j} = (p + (1-p))^{n-2} = 1^{n-2} = 1.$$

Portanto:

$$A = n(n-1)p^2.$$

Conclusão para $E(X^2)$
Lembrando que:

- $A = n(n-1)p^2$
- $B = np$

temos:

$$E(X^2) = A + B = n(n-1)p^2 + np.$$

Cálculo de $\mathrm{Var}(X)$
Agora usamos:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já temos:

- $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$
- $E(X) = np$

Logo:

$$\text{Var}(X) = (n(n-1)p^2 + np) - (np)^2.$$

Agora expandimos:

$$(np)^2 = n^2p^2,$$

então:

$$\text{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2.$$

Note que

$$n(n-1)p^2 = (n^2 - n)p^2,$$

então:

$$\text{Var}(X) = (n^2 - n)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p).$$

Logo,
Para $X \sim \text{Binomial}(n, p)$,

$$E(X) = np, \qquad \text{Var}(X) = np(1-p).$$

Exemplo: A probabilidade de um cliente comprar um produto é $p = 0{,}3$. Em um dia, 20 clientes entram na loja. Seja $X =$ número de compras.

a. Calcule $P(X = 8)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 8) = \binom{20}{8}(0{,}3)^8(0{,}7)^{12} \approx 0{,}053$$

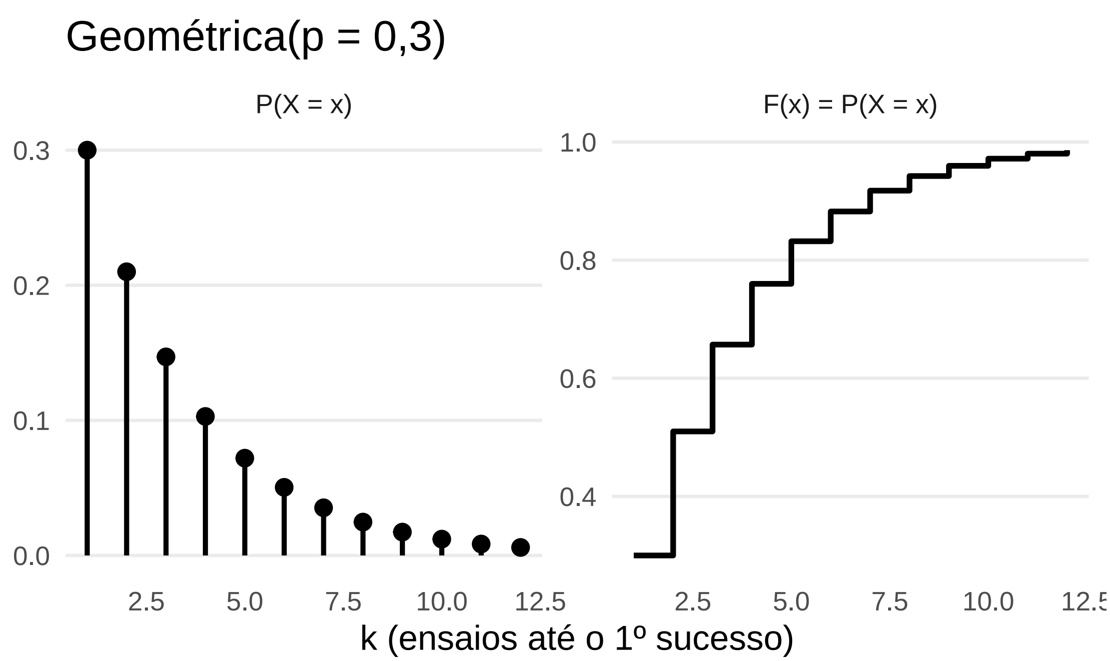
b.

$$E[X] = np = 20 \cdot 0{,}3 = 6$$

3.3 Geométrica (p)

Convenção usada: X = número de **ensaios até o 1º sucesso** (apoio $1, 2, ...$).

Item	Expressão
$p(k)$	$p(1-p)^{k-1}$
$F(k)$	$1-(1-p)^k$
$E[X]$	$1/p$
$Var(X)$	$(1-p)/p^2$
Propriedade	**Sem memória**: $P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$



Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Geom}(p)$ com suporte $k = 1, 2, ...$, isto é,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Vamos demonstrar que

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{e} \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

usando as definições

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(X=k), \qquad \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$
Pela definição de esperança:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(1-p)^{k-1}.$$

Colocamos o fator p em evidência:

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

Para simplificar, definimos

$$r = 1 - p.$$

Note que $0 < r < 1$. Então a soma fica

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1}.$$

Agora usamos uma identidade clássica de séries: - Sabemos que, para $|r| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

Derivando em relação a r:

$$\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Note que o termo $k = 0$ é zero, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Voltando à expressão de $E(X)$:

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Lembrando que $r = 1 - p$, então

$$1 - r = 1 - (1 - p) = p.$$

Logo:

$$E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Cálculo de $E(X^2)$
Pela definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1},$$

com $r = 1 - p$.
Então precisamos do valor de

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1}.$$

Usaremos de novo a série geométrica e suas derivadas.
Já sabemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

1. **Primeira derivada**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1 - r)^2}.$$

2. **Multiplicando por r**:

$$r \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k r^k = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$

3. **Derivando novamente**: Vamos derivar a expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k$$

   em relação a r:

$$\frac{d}{dr}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k r^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1}.$$

Agora derivamos o outro lado:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{(1-r)^2}\right) = \frac{(1-r)^2 - r\cdot 2(1-r)(-1)}{(1-r)^4}.$$

Simplificando o numerador:

$$(1-r)^2 + 2r(1-r) = (1-2r+r^2) + (2r-2r^2) = 1-r^2 = (1-r)(1+r).$$

Assim,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{(1-r)^2}\right) = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^4} = \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{k-1} = \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Voltando para $E(X^2)$:

$$E(X^2) = p \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Substituímos $r = 1-p$ e $1-r = p$:

- $1 + r = 1 + (1-p) = 2 - p$
- $(1-r)^3 = p^3$

Então:

$$E(X^2) = p \cdot \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Cálculo de $\mathrm{Var}(X)$
Agora usamos

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já encontramos:

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $E(X^2) = \dfrac{2-p}{p^2}$

Logo:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Logo,
Para $X \sim \text{Geom}(p)$, com $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, ...,$ temos:

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemplo: Uma chamada telefônica é atendida com probabilidade $p = 0{,}15$. Seja $X =$ número de tentativas até o primeiro atendimento.

a. Calcule $P(X = 4)$.

b. Calcule $P(X > 4)$.

c. Determine $E[X]$.

Solução:

a.
$$P(X = 4) = 0{,}15(0{,}85)^3 \approx 0{,}092$$

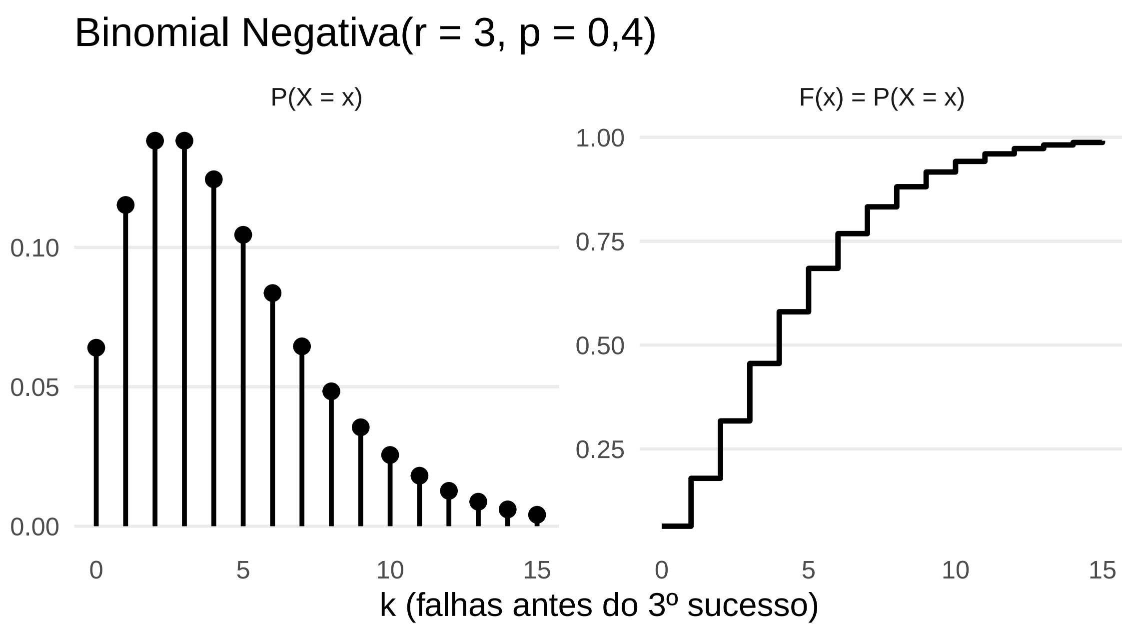
b.
$$P(X > 4) = 0{,}85^4 \approx 0{,}522$$

c.
$$E[X] = \frac{1}{0{,}15} \approx 6{,}67$$

3.4 Pascal / Binomial Negativa (r, p)

Convenção usada: $Y =$ número de **falhas antes do r-ésimo sucesso** (apoio $0, 1, ...$).

Item	Expressão
$p(k)$	$\binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^{k} \binom{j+r-1}{j}(1-p)^j p^r$
$E[Y]$	$r(1-p)/p$
$Var(Y)$	$r(1-p)/p^2$



Mostrar demonstração

Vamos usar a seguinte **definição**:

- Em cada tentativa, ocorre **sucesso** com probabilidade p e **falha** com probabilidade $1-p$, independentemente.
- X é o **número de falhas até o r-ésimo sucesso**.
- Dizemos então que $X \sim \text{Binomial Negativa}(r, p)$, com $r \in \mathbb{N}$.

A função de probabilidade é

$$P(X=k) = \binom{k+r-1}{k}(1-p)^k p^r, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nosso objetivo é demonstrar que

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad \text{e} \qquad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Em vez de somar diretamente a série da f.p., vamos usar uma **interpretação construída a partir da Geométrica**, que já sabemos tratar.

Ligação com a distribuição geométrica
Considere o processo de Bernoulli (tentativas independentes com probabilidade de sucesso p).
Entre sucessos consecutivos, o número de falhas que ocorre é sempre do mesmo tipo:

- Antes do **1º sucesso**, temos um certo número de falhas Y_1.
- Entre o **1º e o 2º sucesso**, temos um número de falhas Y_2.
- ...
- Entre o **(r-1)º** e o **r-ésimo sucesso**, temos um número de falhas Y_r.

Essas quantidades $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$ são independentes e têm **mesma distribuição**.
Além disso, o número total de falhas até o r-ésimo sucesso é

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r.$$

Vamos então:

1. Determinar a distribuição de cada Y_i.
2. Calcular $E(Y_i)$ e $\mathrm{Var}(Y_i)$.
3. Somar para obter $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Distribuição de Y_i (número de falhas entre dois sucessos)
Entre dois sucessos consecutivos, o experimento funciona assim:

- Observamos uma sequência de falhas, todas com probabilidade $(1-p)$,

- seguida de um sucesso, com probabilidade p.

Se $Y_i = k$, isso significa: falha, falha, ..., falha (k vezes), depois um sucesso.
Logo

$$P(Y_i = k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Essa é uma **Geométrica com suporte em** $\{0, 1, 2, \dots\}$, às vezes chamada de **geométrica "deslocada"** ou "número de falhas antes do sucesso".
Sabemos que:

- Se G tem $P(G = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, então $E(G) = \frac{1}{p}$ e $\mathrm{Var}(G) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Se definimos $Y = G - 1$, então Y tem suporte $\{0, 1, 2, \dots\}$, e

$$E(Y) = E(G-1) = E(G) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p},$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(G-1) = \mathrm{Var}(G) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Portanto, cada Y_i tem:

$$E(Y_i) = \frac{1-p}{p}, \qquad \mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1-p}{p^2}.$$

E os Y_i são i.i.d. (independentes e identicamente distribuídos).

Expressão de X como soma de geométricas
Relembrando:

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r,$$

com Y_i independentes e com a mesma distribuição.
Vamos usar:

- **Linearidade da esperança**:

$$E(X) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_r),$$

- **Variância da soma de independentes**:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}(Y_r),$$

  pois não há termos de covariância (independência $\Rightarrow$ covariância zero).

Cálculo de $E(X)$
Pela linearidade da esperança:

$$E(X) = E(Y_1 + \cdots + Y_r) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_r).$$

Como todos têm a mesma esperança:

$$E(X) = r \cdot E(Y_1).$$

Usando o valor encontrado para a geométrica:

$$E(Y_1) = \frac{1-p}{p},$$

então:

$$E(X) = r \cdot \frac{1-p}{p} = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Este é o valor esperado da Binomial Negativa (número de falhas até o r-ésimo sucesso).

Cálculo de $\text{Var}(X)$
Da variância da soma de variáveis independentes:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_r) = \text{Var}(Y_1) + \cdots + \text{Var}(Y_r),$$

pois $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ para $i \neq j$.
Como todas têm a mesma variância:

$$\text{Var}(X) = r \cdot \text{Var}(Y_1).$$

Usando o valor da geométrica:

$$\text{Var}(Y_1) = \frac{1-p}{p^2},$$

obtemos:

$$\text{Var}(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Portanto, para $X \sim$ Binomial Negativa(r, p) (número de falhas até o r-ésimo sucesso), temos:

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \qquad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exemplo: Um pesquisador precisa de 4 pessoas que aceitem responder um questionário. Cada tentativa tem probabilidade $p = 0{,}25$ de sucesso. Seja $Y =$ número de recusas até o 4º sucesso.

a. Calcule $P(Y = 6)$.

b. Calcule $E[Y]$.

Solução:

a.

$$P(Y = 6) = \binom{9}{6}(0{,}75)^6(0{,}25)^4 \approx 0{,}050$$

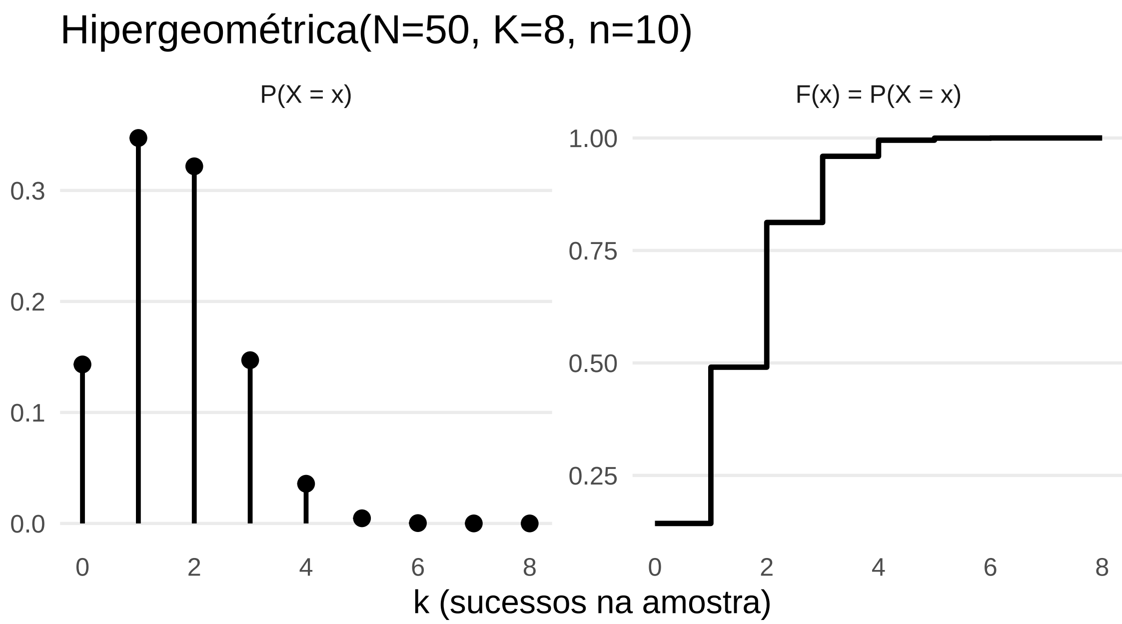
b.

$$E[Y] = \frac{4(1 - 0{,}25)}{0{,}25} = 12$$

3.5 Hipergeométrica (N, K, n)

Amostragem sem reposição. N total, K sucessos na população, amostra n.

Item	Expressão
Suporte	$k = \max(0, n-(N-K)), \dots, \min(n, K)$
$p(k)$	$\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$E[X]$	$n\,\dfrac{K}{N}$
$Var(X)$	$n\,\dfrac{K}{N}\left(1-\dfrac{K}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$



Mostrar demonstração

Considere:

- Uma população finita com N elementos.
- K desses N elementos são "sucessos" (por exemplo, peças defeituosas).
- Os demais $N-K$ são "fracassos".
- Retiramos uma amostra **sem reposição** de tamanho n.

Seja X o **número de sucessos na amostra**. Dizemos que

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n).$$

A função de probabilidade é

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, \min(K, n).$$

Queremos demonstrar que:

$$E(X) = n\frac{K}{N}, \qquad \mathrm{Var}(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Em vez de somar diretamente a f.p., vamos usar uma abordagem com **variáveis indicadoras**.

Representando X como soma de indicadores
Imagine que a amostra de tamanho n é extraída em **ordem**: 1ª retirada, 2ª retirada, ..., n-ésima retirada.
Defina, para cada $i = 1, \dots, n$:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo elemento sorteado é sucesso;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então o número total de sucessos na amostra é

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Isso é intuitivo: cada Y_i indica se houve sucesso naquela retirada, e a soma conta quantos sucessos houve ao todo.

Esperança de X via linearidade
Usando linearidade da esperança:

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n).$$

Como a população é homogênea e a amostragem é simétrica, todas as retiradas têm a mesma probabilidade de ser sucesso. Ou seja:

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \cdots = E(Y_n).$$

Basta, então, calcular $E(Y_1)$.

Cálculo de $E(Y_i)$
Por definição,

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1).$$

Mas $Y_i = 1$ significa que, na i-ésima retirada, escolhemos um elemento "sucesso".
Como as retiradas são todas igualmente prováveis (sem viés) e a população tem K sucessos em N elementos, temos:

$$P(Y_i = 1) = \frac{K}{N}, \quad \text{para qualquer } i.$$

Logo,

$$E(Y_i) = \frac{K}{N}.$$

Portanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = n \cdot \frac{K}{N}.$$

Isso demonstra:

$$E(X) = n\frac{K}{N}.$$

Variância de X:
Queremos agora

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n).$$

Lembre que, em geral, para variáveis quaisquer:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

As Y_i **não são independentes** (pois a amostragem é sem reposição), então precisamos levar em conta as covariâncias.
Pela simetria do problema:

- Todas as variâncias $\mathrm{Var}(Y_i)$ são iguais.
- Todas as covariâncias $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ com $i \neq j$ são iguais.

Então podemos escrever:

$$\mathrm{Var}(X) = n\,\mathrm{Var}(Y_1) + 2\binom{n}{2}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = n\,\mathrm{Var}(Y_1) + n(n-1)\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Assim, precisamos calcular:

1. $\mathrm{Var}(Y_1)$

2. $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$

Cálculo de $\mathrm{Var}(Y_1)$
Como Y_1 é uma variável indicadora (0 ou 1) com

$$P(Y_1 = 1) = \frac{K}{N}, \quad P(Y_1 = 0) = 1 - \frac{K}{N},$$

temos:

$$E(Y_1) = \frac{K}{N}, \qquad E(Y_1^2) = E(Y_1) = \frac{K}{N}$$

(pois $Y_1^2 = Y_1$ quando $Y_1 \in \{0, 1\}$).
Logo:

$$\mathrm{Var}(Y_1) = E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2 = \frac{K}{N} - \left(\frac{K}{N}\right)^2 = \frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N} \cdot \frac{N-K}{N} = \frac{K(N-K)}{N^2}.$$

Cálculo de $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$
Por definição:

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2).$$

Já sabemos que

$$E(Y_1) = E(Y_2) = \frac{K}{N}.$$

Então precisamos de $E(Y_1 Y_2)$, que é

$$E(Y_1 Y_2) = P(Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = 1),$$

pois $Y_1 Y_2 = 1$ somente quando ambos são 1.

Cálculo de $P(Y_1 = 1, Y_2 = 1)$
Interprete o sorteio em duas etapas, sem reposição:

1. Primeira retirada é sucesso: probabilidade K/N.
2. Dada uma primeira retirada de sucesso, restam:
   - $K - 1$ sucessos
   - em um total de $N - 1$ elementos.

Então a probabilidade de a **segunda** retirada também ser sucesso é:

$$\frac{K-1}{N-1}.$$

Logo:

$$P(Y_1=1, Y_2=1) = \frac{K}{N} \cdot \frac{K-1}{N-1} = \frac{K(K-1)}{N(N-1)}.$$

Portanto:

$$E(Y_1Y_2) = \frac{K(K-1)}{N(N-1)}.$$

Covariância

Agora:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \frac{K(K-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{K}{N}\right)^2.$$

Vamos colocar os termos no mesmo denominador. Note que

$$\left(\frac{K}{N}\right)^2 = \frac{K^2}{N^2} = \frac{K^2(N-1)}{N^2(N-1)}.$$

E

$$\frac{K(K-1)}{N(N-1)} = \frac{K(K-1)N}{N^2(N-1)}.$$

Então:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{K(K-1)N - K^2(N-1)}{N^2(N-1)}.$$

Simplificando o numerador:

$$K(K-1)N - K^2(N-1) = K[N(K-1) - K(N-1)].$$

Dentro dos colchetes:

$$N(K-1)-K(N-1) = (NK-N)-(KN-K) = NK-N-KN+K = -N+K = K-N.$$

Logo o numerador é:

$$K(K-N) = -K(N-K).$$

Portanto:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{-K(N-K)}{N^2(N-1)}.$$

Isso mostra que a covariância é **negativa**: faz sentido, pois sem reposição, ao observar um sucesso na primeira retirada, fica ligeiramente **menos provável** ver outro sucesso na segunda.

Variância de X
Relembrando:

$$\mathrm{Var}(X) = n\,\mathrm{Var}(Y_1) + n(n-1)\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2).$$

Substituímos os valores encontrados:

- $\mathrm{Var}(Y_1) = \dfrac{K(N-K)}{N^2}$
- $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = -\dfrac{K(N-K)}{N^2(N-1)}$

Então:

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \frac{K(N-K)}{N^2} + n(n-1) \cdot \left(-\frac{K(N-K)}{N^2(N-1)}\right).$$

Colocamos o fator comum $\dfrac{K(N-K)}{N^2}$ em evidência:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{K(N-K)}{N^2}\left[n - \frac{n(n-1)}{N-1}\right].$$

Agora vamos simplificar o colchete:

$$n - \frac{n(n-1)}{N-1} = n\left[1 - \frac{n-1}{N-1}\right] = n\left[\frac{N-1-(n-1)}{N-1}\right] = n\left[\frac{N-n}{N-1}\right].$$

Portanto:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{K(N-K)}{N^2} \cdot n\frac{N-n}{N-1}.$$

Podemos reescrever $K(N-K)/N^2$ como

$$\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right).$$

Assim:

$$\mathrm{Var}(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Assim, para $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n)$:

- **Esperança**:

$$E(X) = n\frac{K}{N}.$$

- **Variância**:

$$\mathrm{Var}(X) = n\frac{K}{N}\left(1 - \frac{K}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Exemplo: Um lote tem $N = 80$ peças, sendo $K = 10$ defeituosas. Retira-se uma amostra de $n = 12$ peças. Seja X = número de defeituosas na amostra.

a. Calcule $P(X = 2)$.

b. Calcule $E[X]$.

Solução:

a.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{70}{10}}{\binom{80}{12}}$$

Resultado aproximado: **0,283**

b.

$$E[X] = 12 \cdot \frac{10}{80} = 1{,}5$$

3.6 Poisson (λ)

Contagem de eventos raros em intervalo fixo.

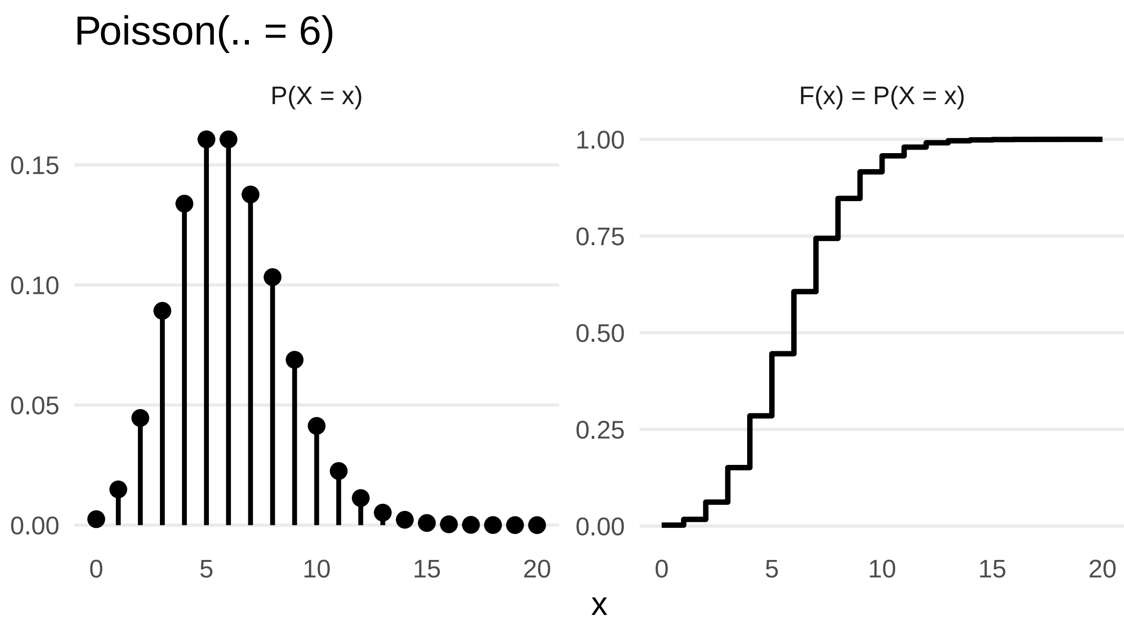
Item	Expressão
Suporte	$k = 0, 1, 2, ...$
$p(k)$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$
$F(k)$	$\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^j/j!$
$E[X]$	λ
$Var(X)$	λ

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<ce>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Poisson( = 6)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted for
<bb>
```



Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda > 0$. A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nosso objetivo é demonstrar:

$$E(X) = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Usaremos somente as definições:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X = k), \qquad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$
Pela definição de esperança:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

O termo $k = 0$ é nulo, então:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Usamos a identidade:

$$k \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.$$

Logo:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.$$

Agora fazemos a mudança de variável $j = k - 1$:

- quando $k = 1$, $j = 0$
- quando $k \to \infty$, $j \to \infty$

Então:

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

Mas:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}.$$

Portanto:

$$E(X) = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Assim demonstramos:

$$E(X) = \lambda.$$

Cálculo de $E(X^2)$
Agora usamos a definição:

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Truque clássico: escrever

$$k^2 = k(k-1) + k.$$

Então:

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Chamemos:

- Primeiro somatório:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}$$

- Segundo somatório:

$$B = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}$$

Mas já vimos antes que $B = E(X) = \lambda$.
Vamos calcular A.

Cálculo do termo A
Note que:

$$k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{(k-2)!}.$$

Portanto:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}.$$

Fazemos a mudança de variável $j = k - 2$:

- quando $k = 2$, $j = 0$
- quando $k \to \infty$, $j \to \infty$

Então:

$$A = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}.$$

A soma é novamente e^{λ}, logo:

$$A = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Agora juntamos:

- $A = \lambda^2$
- $B = \lambda$

Portanto:

$$E(X^2) = A + B = \lambda^2 + \lambda.$$

Variância
Usamos:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Substituindo:

- $E(X) = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Temos:

$$\text{Var}(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Logo, para $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

$$E(X) = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Exemplo: A taxa média de chamadas em um call center é $\lambda = 12$ chamadas por hora. Seja $N =$ número de chamadas.

a. Calcule $P(N = 10)$.

b. Calcule $P(N \geq 15)$.

c. Calcule $E[N]$ e $Var(N)$.

Solução:

a.
$$P(N = 10) = e^{-12}\frac{12^{10}}{10!} \approx 0{,}104$$

b.
$$P(N \geq 15) = 1 - P(N \leq 14) \approx 0{,}263$$

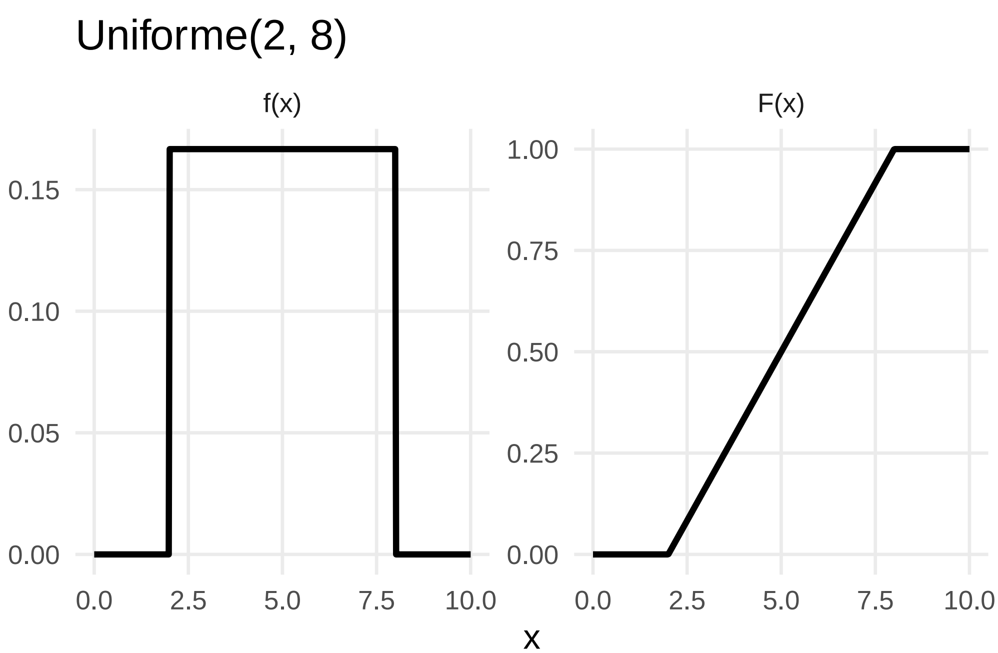
c.

$$E[N] = 12, \qquad Var(N) = 12$$

4 Distribuições Contínuas

4.1 Uniforme (a, b)

Item	Expressão
Suporte	$a \leq x \leq b$
$f(x)$	$1/(b-a)$
$F(x)$	$(x-a)/(b-a)$ para $a \leq x \leq b$
$E[X]$	$(a+b)/2$
$Var(X)$	$(b-a)^2/12$



ℹ Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, com $a < b$.

A função densidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nosso objetivo é demonstrar que

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

usando apenas as definições:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx, \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx, \qquad \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Cálculo de $E(X)$
Pela definição:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Como $f(x) = 0$ fora do intervalo $[a, b]$, temos:

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx.$$

Calculamos a integral:

$$\int_a^b x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Logo:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Fatoramos $b^2 - a^2$:

$$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a).$$

Substituindo:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Portanto:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Cálculo de $E(X^2)$
Pela definição:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx.$$

Calculamos a integral:

$$\int_a^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Então:

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

Agora usamos a fatoração:

$$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2).$$

Substituindo:

$$E(X^2) = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Portanto:

$$E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Cálculo de $\mathrm{Var}(X)$
Usamos:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Já obtivemos:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $E(X^2) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$

Então:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Primeiro, calculemos o quadrado:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}.$$

Agora escrevemos a variância com denominador comum. O denominador comum entre 3 e 4 é 12:

- Primeiro termo:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{4(a^2+ab+b^2)}{12}.$$

- Segundo termo:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{3(a^2+2ab+b^2)}{12}.$$

Então:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{4(a^2+ab+b^2)}{12} - \frac{3(a^2+2ab+b^2)}{12}.$$

Subtraindo os numeradores:

$$4(a^2+ab+b^2)-3(a^2+2ab+b^2) = 4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2 = (4a^2-3a^2)+(4ab-6ab)+(4b^2-3b^2) = a^2-2ab$$

Logo:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

pois

$$a^2-2ab+b^2 = (b-a)^2.$$

Assim, para $X \sim \text{Uniforme}(a,b)$, demonstramos que:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo: O tempo de resposta de um servidor *web* varia uniformemente entre 50 ms e 90 ms, ou seja $T \sim U(50,90)$.

a. Calcule $P(60 < T < 80)$.

b. Calcule $E[T]$ e $Var(T)$.

c. Interprete o valor esperado no contexto.

Solução:

a.

$$P(60 < T < 80) = \frac{80-60}{90-50} = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

b.

$$E[T] = \frac{50+90}{2} = 70$$

$$Var(T) = \frac{(90-50)^2}{12} = \frac{1600}{12} \approx 133{,}33$$

c. O tempo médio de resposta é 70 ms.

4.2 Exponencial (λ)

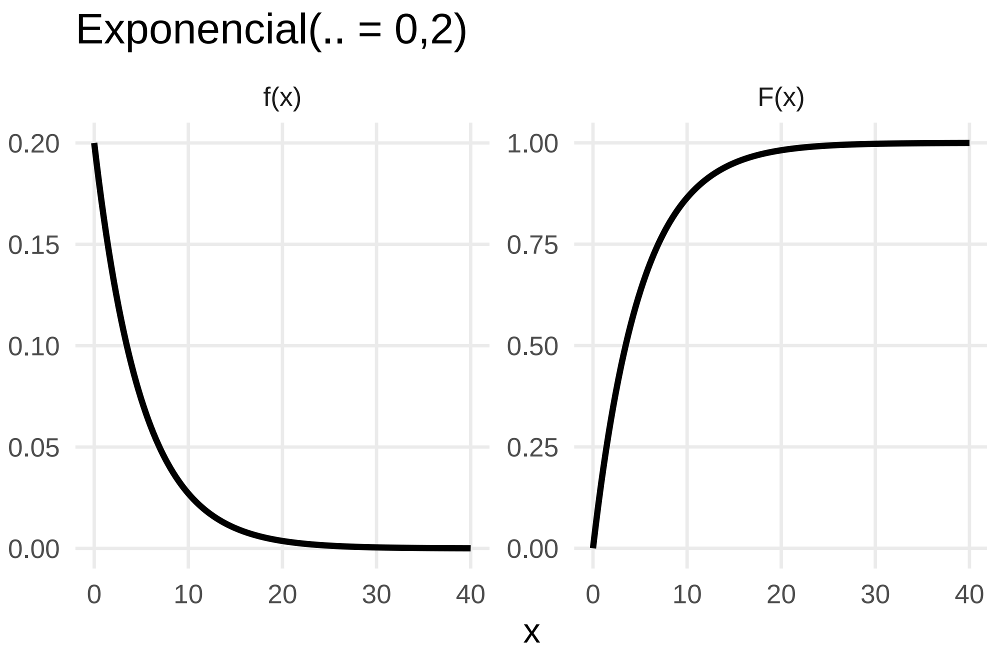
Item	Expressão
Suporte	$x \geq 0$
$f(x)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
$F(x)$	$1 - e^{-\lambda x}$
$E[X]$	$1/\lambda$
$Var(X)$	$1/\lambda^2$
Propriedade	**Sem memória**: $P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <ce>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Exponencial( = 0,2)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
for <bb>
```



Mostrar demonstração

Considere $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, com $\lambda > 0$.
A função densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Nosso objetivo é demonstrar:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

usando apenas as definições:

$$E(X) = \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx, \qquad E(X^2) = \int_0^\infty x^2\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Cálculo de $E(X)$
Pela definição:

$$E(X) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Para resolver a integral, usamos **integração por partes**.

Escolhemos: - $u = x \to du = dx$ - $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \to v = -e^{-\lambda x}$
Aplicando integração por partes:

$$\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx.$$

Agora avaliamos cada termo:

1. **Primeira parte**:

   - Quando $x \to \infty$: $xe^{-\lambda x} \to 0$.
   - Quando $x = 0$: $0 \cdot e^0 = 0$.

   Logo:
   $$\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0.$$

2. **Integral restante**:
   $$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Portanto:
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Cálculo de $E(X^2)$
Pela definição:
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

Vamos aplicar **integração por partes duas vezes**.

Primeira integração por partes
Escolha: - $u = x^2 \to du = 2x\,dx$ - $dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \to v = -e^{-\lambda x}$
Então:
$$E(X^2) = \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}\,dx.$$

O primeiro termo é zero, pelo mesmo argumento anterior.
Assim:
$$E(X^2) = 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx.$$

Segunda integração por partes
Agora resolvemos:

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx.$$

Escolha: - $u = x \to du = dx$ - $dv = e^{-\lambda x}dx \to v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$
Então:

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx.$$

O primeiro termo novamente é zero.
Resta:

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Voltando ao ponto onde paramos:

$$E(X^2) = 2\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cálculo da variância
Usamos:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Substituindo:

- $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Então:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loggo, para $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exemplo: O tempo entre chegadas ao caixa segue $X \sim Exp(0{,}2)$.

a. Calcule $P(X > 8)$.

b. Determine a mediana.

c. Interprete a propriedade "sem memória".

Solução:

a.
$$P(X > 8) = e^{-0{,}2\cdot 8} = e^{-1{,}6} \approx 0{,}2019$$

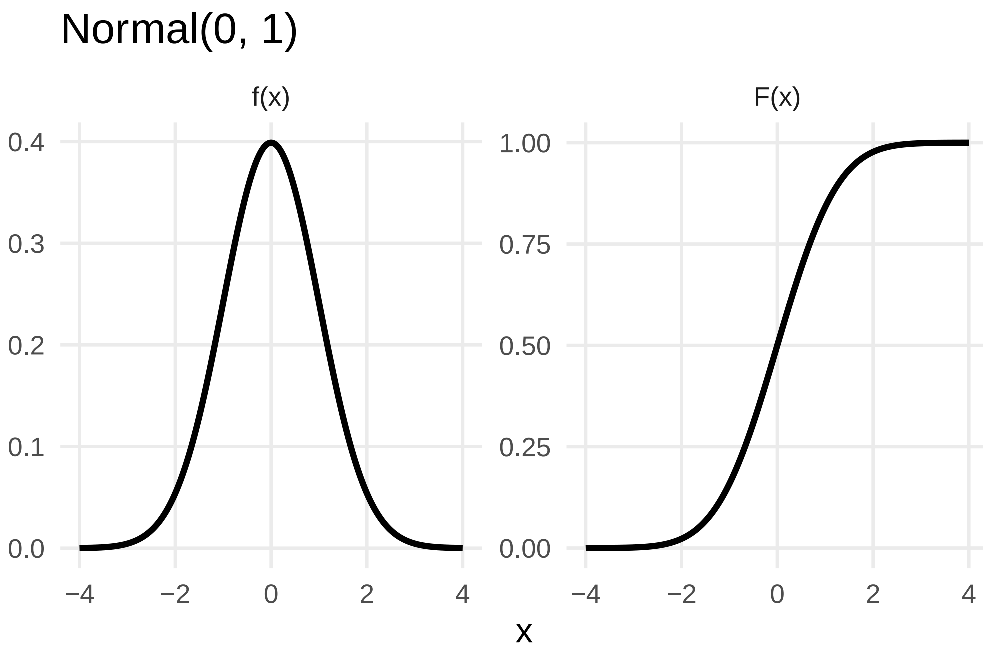
b.
$$m = \frac{\ln 2}{0{,}2} = 5\ln 2 \approx 3{,}47$$

c. O tempo adicional não depende do tempo já passado.

4.3 Normal (μ, σ^2)

Item	Expressão
Suporte	$x \in \mathbb{R}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
$F(x)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (não possui forma fechada)
$E[X]$	μ
$Var(X)$	σ^2

Uso de Tabelas: padronize $Z = (X-\mu)/\sigma$ e leia $P(Z \leq z)$ na tabela da Normal padrão $\Phi(z)$.



ℹ Mostrar demonstração

Vamos considerar uma variável aleatória normal geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma > 0.$$

A densidade é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nosso objetivo é demonstrar, a partir das definições, que

$$E(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

A estratégia será:

1. Calcular $E(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$ para a **normal padrão** $Z \sim N(0,1)$.
2. Usar a relação $X = \mu + \sigma Z$.

Normal padrão $Z \sim N(0,1)$
Para a normal padrão, a densidade é

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Queremos mostrar que:

$$E(Z) = 0, \qquad E(Z^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(Z) = 1.$$

Cálculo de $E(Z)$
Pela definição:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2}\, dz.$$

Observe que:

- A função $e^{-z^2/2}$ é **par** (simétrica): $e^{-(-z)^2/2} = e^{-z^2/2}$.
- A função z é **ímpar**: $(-z) = -z$.
- Logo, o produto $ze^{-z^2/2}$ é **ímpar**.

A integral de uma função ímpar em intervalo simétrico é zero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2}\, dz = 0.$$

Portanto:

$$E(Z) = 0.$$

Cálculo de $E(Z^2)$
Pela definição:

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz.$$

Para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz,$$

vamos usar um truque padrão com um parâmetro auxiliar.
Considere, para $a > 0$:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/2}\, dz.$$

Este é um **integral gaussiano**. Sabe-se (ou demonstra-se via coordenadas polares) que

$$I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Agora vamos derivar $I(a)$ em relação a a para obter uma integral com z^2.

Derivando $I(a)$
Por um lado, derivando "dentro" da integral (legítimo sob condições usuais):

$$I'(a) = \frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2/2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\big(e^{-az^2/2}\big)\,dz.$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{-az^2/2} = -\frac{z^2}{2} e^{-az^2/2}.$$

Logo:

$$I'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{z^2}{2} e^{-az^2/2}\,dz = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2}\,dz.$$

Por outro lado, derivando a expressão fechada

$$I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = (2\pi)^{1/2} a^{-1/2},$$

temos

$$I'(a) = (2\pi)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-3/2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,a^{-3/2}.$$

Igualando as duas expressões para $I'(a)$:

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2}\,dz = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,a^{-3/2}.$$

Multiplicando por -2 ambos os lados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}\,a^{-3/2}.$$

Aplicando o resultado em $a = 1$
Queremos o caso com $a = 1$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz.$$

Pela fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}\cdot 1^{-3/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Agora voltamos para $E(Z^2)$:

$$E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = 1.$$

Logo:

$$E(Z^2) = 1.$$

Variância da normal padrão
A variância é
$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 1 - 0^2 = 1.$$
Concluímos:
$$E(Z) = 0, \qquad \text{Var}(Z) = 1 \quad \text{para } Z \sim N(0,1).$$

Normal geral $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Uma variável normal geral pode ser escrita como
$$X = \mu + \sigma Z,$$
onde $Z \sim N(0,1)$.
Vamos usar essa relação para encontrar $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Cálculo de $E(X)$
Usando a linearidade da esperança:
$$E(X) = E(\mu + \sigma Z) = E(\mu) + E(\sigma Z) = \mu + \sigma E(Z).$$
Como já mostramos que $E(Z) = 0$, obtemos:
$$E(X) = \mu + \sigma \cdot 0 = \mu.$$

Cálculo de $\text{Var}(X)$
Usamos a propriedade de variância para transformações lineares:
$$\text{Var}(a + bZ) = b^2 \,\text{Var}(Z).$$
Aqui, $a = \mu$ e $b = \sigma$, então:
$$\text{Var}(X) = \text{Var}(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 \,\text{Var}(Z).$$
Sabemos que $\text{Var}(Z) = 1$, logo:
$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

Assim, para uma variável aleatória normal geral $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, demonstramos que:
$$E(X) = \mu, \qquad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Exemplo: Pesos de pacotes seguem $W \sim N(25, 1{,}5^2)$.

a. Calcule $P(24 < W < 27)$.

b. Determine o percentil 95%.

c. Interprete o percentil no controle de qualidade.

Solução:

a.

$$P(24 < W < 27) = P(-0{,}67 < Z < 1{,}33) = \Phi(1{,}33) - \Phi(-0{,}67)$$

$$\approx 0{,}9082 - 0{,}2514 = 0{,}6568$$

b.

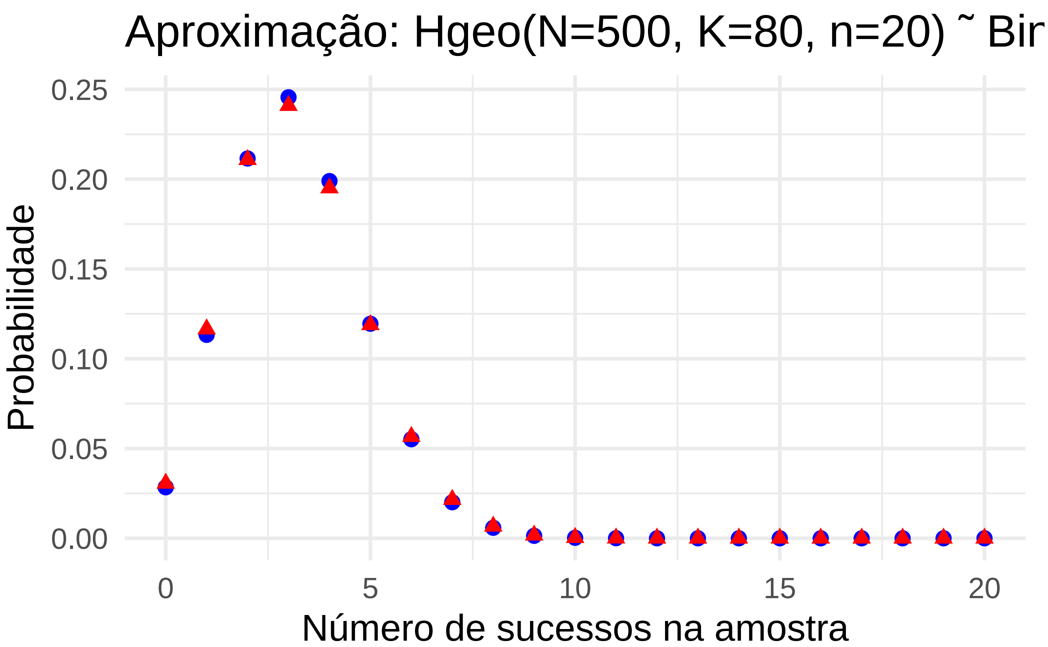
$$x_{0,95} = 25 + 1{,}645 \cdot 1{,}5 = 27{,}4675$$

c. 95% dos pacotes pesam até 27,47 kg.

5 Aproximações Clássicas

5.1 Hipergeométrica $\approx$ Binomial

Condição: população grande vs. amostra pequena (fração amostral n/N pequena). Use $X \sim Bin(n, p = K/N)$ como aproximação.



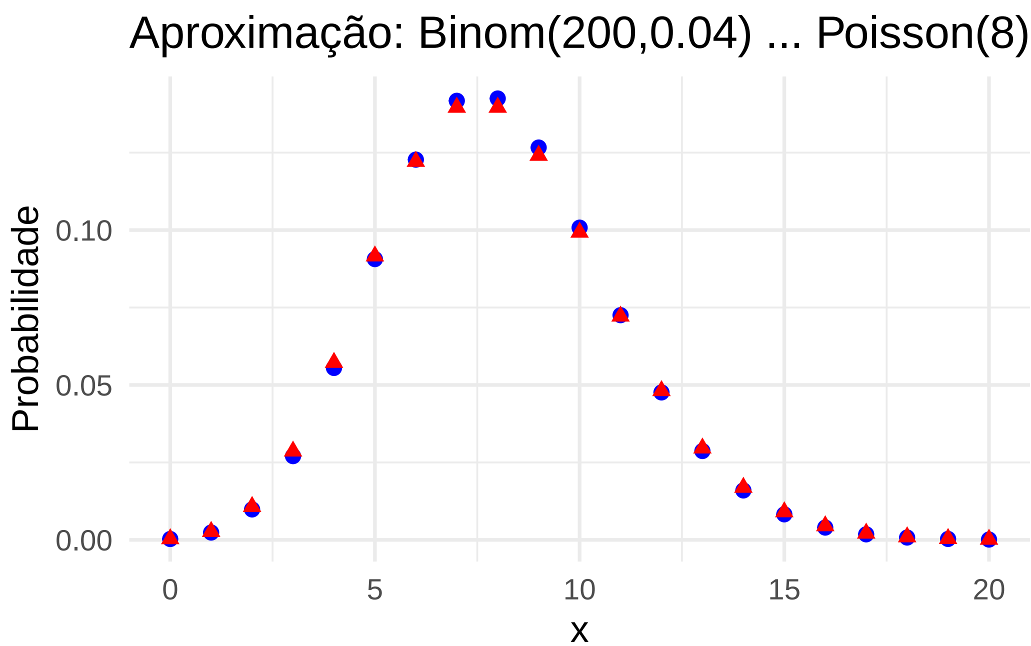
5.2 Binomial $\approx$ Poisson

Condição: n grande, p pequeno, $\lambda = np$ moderado.
Aproximação: $P_{Bin}(X = k) \approx e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(200,0.04) → Poisson(8)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```



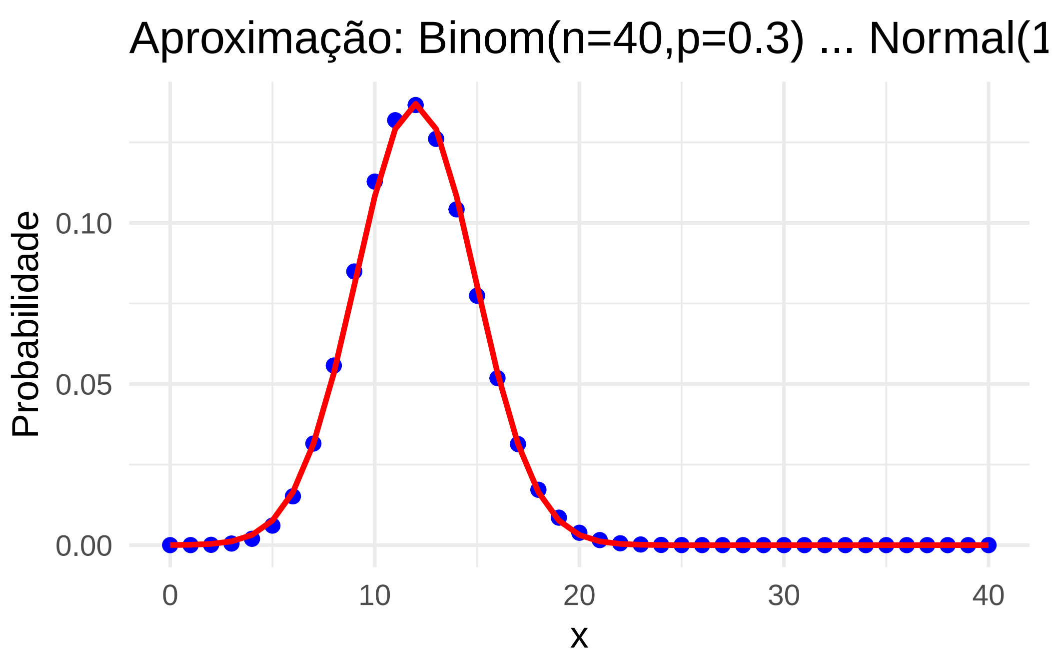
5.3 Binomial $\approx$ Normal

Condição: $np(1-p) \gtrsim 10$.
Aproximação: $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$ com **correção de continuidade**.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>
```

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Binom(n=40,p=0.3) → Normal(12,8.4)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```



5.4 Poisson $\approx$ Normal

Condição: $\lambda \gtrsim 10$.
Aproximação: $X \approx N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$ com correção de continuidade.

```
Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call(C_textBounds, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <e2>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <86>

Warning in grid.Call.graphics(C_text, as.graphicsAnnot(x$label), x$x, x$y, :
conversion failure on 'Aproximação: Poisson(30) → Normal(30,30)' in
'mbcsToSbcs': dot substituted for <92>
```