Trabalho de Métodos Numéricos

Universidade Federal do Ceará

Novembro 2025

1 Sumário

pendente...

2 Implementações

pendente...

3 Achando raiz de f para $a = 1$ e $d_0 = 0,5$

Considere uma função f tal que $f(d) = ae^d - 4d^2$ e $a = 1$, $d_0 = 0,5$ e $\varepsilon = 10^{-4}$. Achemos uma raiz d de $f(d)$ utilizando os seguintes métodos requeridos no enunciado:

- Método de Newton-Raphson
- Método de Newton modificado
- Método da Secante tradicional

4 Teoremas importantes

Teorema 1 $f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \varepsilon \in [a; b]$

Corolário 1 $f'(x) > 0, \forall x \in [a; b]$ ***ou*** $f'(x) < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \xi$ *é único em [a;b]*

Teorema 2 *Seja f uma função e I um intervalo. Se* $f'(x) > 0, \forall x \in I$*, então f(x) é estritamente crescente em I. Já no caso de* $f'(x) < 0, \forall x \in I$*, então f(x) é estritamente decrescente em I.*

5 Aplicando métodos manualmente

Para tal, consideremos números reais de até 6 casas decimais e truncamento.

5.1 Isolamento

5.1.1 Análise Teórica

Para o isolamento, façamos de início a análise teórica para chegarmos a um intervalo I válido.

Assim, para começarmos, testemos alguns valores de d para $f(d)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - 4 * 0 = 1 \\ f(1) &= e^1 - 4 * 1 = -1,281719 \end{aligned}$$

Como vemos, $f(0) * f(1) < 0$ e, portanto, pelo **teorema (1)**, garantidamente há uma raiz no intervalo $[0, 1]$. Agora, é preciso garantir a unicidade da raiz contida nesse intervalo utilizando o **corolário (1)**, para assim darmos início aos métodos de refinamento. Para tal, provemos que $f'(d) < 0, \forall d \in [0, 1]$ ou que $f'(d) > 0, \forall d \in [0, 1]$:

$$\text{Seja} \quad f'(d) = e^d - 8d$$

Assim, devemos mostrar que $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0, 1]$ ou então que $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0, 1]$. Entretanto, ao testarmos valores, vemos que essa afirmação não é verdade:

$$\begin{aligned} f'(0) &= e^0 - 8 * 0 < 0 \Rightarrow 1 < 0 \quad \textbf{(falso)} \\ f'(1) &= e^1 - 8 * 1 > 0 \Rightarrow -5,281718 > 0 \quad \textbf{(falso)} \end{aligned}$$

Portanto, para garantirmos a unicidade pelo corolário, é ideal que apertemos o intervalo. Dito isso, vamos apertá-lo para $[0,5; 1]$ e verificar se esse intervalo é válido. Vale dizer que, como apertamos o intervalo pela extremidade esquerda, para a qual o valor de f era maior do que 0, enquanto o valor de f para a extremidade direita é menor do que 0, então devemos mostrar somente que $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0,5; 1]$.

Para tal, denotemos $g(d) = f'(d) = e^d - 8d$ e vejamos se $g(d)$ é uma função estritamente decrescente em $[0,5; 1]$, utilizando o **teorema (2)**:

$$g'(d) = e^d - 8 < 0?$$

Como $d \in [0,5; 1]$, então $e^d \leq e^1 = 2,718281$.

Daí, $e^d - 8 < 0 \Rightarrow e^d < 8 \Rightarrow 2,718281 < 8$ **(verdade)**.

Visto que todos os valores de e^d em $[0,5; 1]$ são menores ou iguais a $2,718281$, logo provamos que $e^d - 8 = g'(d) < 0, \forall d \in [0,5; 1]$. Ou seja, g(d) é uma função estritamente decrescente nesse intervalo. Para darmos continuidade, atente-se à seguinte definição:

Uma função f é estritamente decrescente em I se $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I.$

Portanto, como $g(d)$ é decrescente em $[0,5; 1]$, então seu maior valor encontra-se no menor d do intervalo, que corresponde a $0,5$. Ou seja,

$$g(0,5) = e^{0,5} - 8 * 0,5 = -2,351279$$

é o menor valor que a função g assume em $[0,5; 1]$. Além disso, considerando-se que g é estritamente decrescente em $[0,5; 1]$, então todos os valores de g são menores do que $-2,351279$ (e portanto menores do que 0), $\forall d \in [0,5; 1]$. Isso nos diz que $g(d) = f'(d) < 0, \forall d \in [0,5; 1]$, isto é, que f também é uma função estritamente decrescente em $[0,5; 1]$.

Por fim, como f é uma função estritamente decrescente em $[0,5;1]$ e $f(0,5) * f(1) < 0$, significa que $I = [0,5;1]$ **é um intervalo válido!**

A título de curiosidade, há outra forma de mostrar que $e^d - 8d < 0, \forall d \in [0,5;1]$, que consiste em analisar o crescimento de duas componentes da nossa função g: e^d e $8d$. Para isso, rearranjemos a inequação da seguinte maneira:

$$e^d < 8d$$

Se analisarmos o gráfico dessas duas componentes de g, veremos que, no intervalo $[0,5;1]$, $8d$, apesar de ser uma função linear, está sempre acima de e^d, que é uma função exponencial, o que demonstra a validade de $e^d - 8d < 0$.

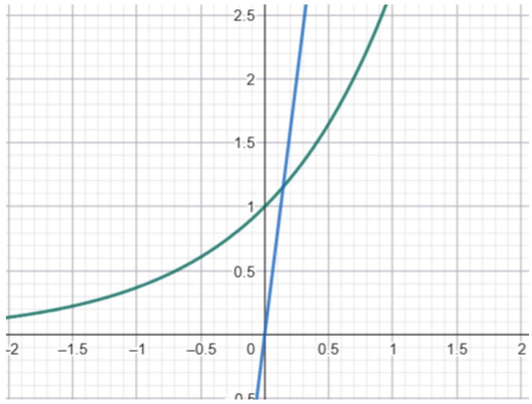

Figura 1: o gráfico em azul corresponde a $8d$, enquanto o gráfico em verde a e^d

5.1.2 Análise gráfica

pendente...

5.2 Método de Newton-Raphson

Agora, após realizarmos o isolamento, podemos finalmente aplicar os métodos de refinamento para encontrar a raiz de f em I, iniciando-se pelo método de Newton-Raphson.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k = 0, 1, 2...$$

Daí, consideremos $I = [0,5;1], f(d) = e^d - 4d^2, \varepsilon = 10^{-4}$ e a aproximação inicial $d_0 = 0,5$:

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,775901$$

$$|d_1 - d_0| = |0,775901 - 0,5| = 0,275901 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_1)| = |f(0,775901)| = 0,235540 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)} = 0,775901 - \frac{f(0,775901)}{f'(0,775901)} = 0,717521$$

$$|d_2 - d_1| = |0,717521 - 0,775901| = 0,05838 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_2)| = |f(0,717521)| = 0,009998 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} = 0,717521 - \frac{f(0,717521)}{f'(0,717521)} = 0,714811$$

$$|d_3 - d_2| = |0,714811 - 0,717521| = 0,00271 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_3)| = |f(0,714811)| = 0,186954 * 10^{-4} < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Daí, temos $\bar{d} = 0,714811$ como nossa aproximação!
Mas e se continuássemos até atingir o primeiro critério de parada?

$$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_3)} = 0,714811 - \frac{f(0,714811)}{f'(0,714811)} = 0,714805$$

$$|d_4 - d_3| = |0,714805 - 0,714811| = 0,000006 < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

5.3 Método de Newton modificado

Agora, achemos a raiz de f em I utilizando o método de Newton modificado, proposto no enunciado do problema da seguinte maneira:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \forall k = 0, 1, 2...$$

Assim, seja $I = [0,5; 1], f(d) = e^d - 4d^2, f'(d_0) = e^{d_0} - 8d_0, \varepsilon = 10^{-4}$ e a aproximação inicial $d_0 = 0,5$:

$$d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,775901$$

$$|d_1 - d_0| = |0,775901 - 0,5| = 0,275901 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_1)| = |f(0,775901)| = 0,235540 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_0)} = 0,775901 - \frac{f(0,775901)}{f'(0,5)} = 0,675725$$

$$|d_2 - d_1| = |0,675725 - 0,775901| = 0,100176 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_2)| = |f(0,675725)| = 0,139040 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_0)} = 0,675725 - \frac{f(0,675725)}{f'(0,5)} = 0,734858$$

$$|d_3 - d_2| = |0,734858 - 0,675725| = 0,059133 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_3)| = |f(0,734858)| = 0,074879 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(d_0)} = 0,734858 - \frac{f(0,734858)}{f'(0,5)} = 0,703011$$

$$|d_4 - d_3| = |0,703011 - 0,734858| = 0,031847 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_4)| = |f(0,703011)| = 0,042927 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_5 = d_4 - \frac{f(d_4)}{f'(d_0)} = 0,703011 - \frac{f(0,703011)}{f'(0,5)} = 0,721268$$

$$|d_5 - d_4| = |0,721268 - 0,703011| = 0,018257 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_5)| = |f(0,721268)| = 0,023870 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_6 = d_5 - \frac{f(d_5)}{f'(d_0)} = 0,721268 - \frac{f(0,721268)}{f'(0,5)} = 0,711115$$

$$|d_6 - d_5| = |0,711115 - 0,721268| = 0,010153 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_6)| = |f(0,711115)| = 0,013522 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_7 = d_6 - \frac{f(d_6)}{f'(d_0)} = 0,711115 - \frac{f(0,711115)}{f'(0,5)} = 0,716866$$

$$|d_7 - d_6| = |0,716866 - 0,711115| = 0,005751 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_7)| = |f(0,716866)| = 0,007582 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_8 = d_7 - \frac{f(d_7)}{f'(d_0)} = 0,716866 - \frac{f(0,716866)}{f'(0,5)} = 0,713641$$

$$|d_8 - d_7| = |0,713641 - 0,716866| = 0,003225 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_8)| = |f(0,713641)| = 0,004276 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_9 = d_8 - \frac{f(d_8)}{f'(d_0)} = 0,713641 - \frac{f(0,713641)}{f'(0,5)} = 0,715459$$

$$|d_9 - d_8| = |0,715459 - 0,713641| = 0,001818 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_9)| = |f(0,715459)| = 0,002401 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{10} = d_9 - \frac{f(d_9)}{f'(d_0)} = 0,715459 - \frac{f(0,715459)}{f'(0,5)} = 0,714437$$

$$|d_{10} - d_9| = |0,714437 - 0,715459| = 0,001022 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_{10})| = |f(0,714437)| = 0,001355 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{11} = d_{10} - \frac{f(d_{10})}{f'(d_0)} = 0,714437 - \frac{f(0,714437)}{f'(0,5)} = 0,715013$$

$$|d_{11} - d_{10}| = |0,715013 - 0,714437| = 0,000576 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_{11})| = |f(0,715013)| = 0,000761 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{12} = d_{11} - \frac{f(d_{11})}{f'(d_0)} = 0,715013 - \frac{f(0,715013)}{f'(0,5)} = 0,714609$$

$$|d_{12} - d_{11}| = |0,714609 - 0,715013| = 0,000324 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_{12})| = |f(0,714609)| = 0,000429 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{13} = d_{12} - \frac{f(d_{12})}{f'(d_0)} = 0,714609 - \frac{f(0,714609)}{f'(0,5)} = 0,714871$$

$$|d_{13} - d_{12}| = |0,714871 - 0,714609| = 0,000182 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_{13})| = |f(0,714871)| = 0,000239 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{14} = d_{13} - \frac{f(d_{13})}{f'(d_0)} = 0,714871 - \frac{f(0,714871)}{f'(0,5)} = 0,714769$$

$$|d_{14} - d_{13}| = |0,714769 - 0,714871| = 0,000102 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$
$$|f(d_{14})| = |f(0,714769)| = 0,000135 > \varepsilon \to \text{continuar...}$$

$$d_{15} = d_{14} - \frac{f(d_{14})}{f'(d_0)} = 0,714769 - \frac{f(0,714769)}{f'(0,5)} = 0,714826$$

$$|d_{15} - d_{14}| = |0,714826 - 0,714769| = 0,000057 < \varepsilon \to \text{parar!}$$
$$|f(d_{15})| = |f(0,714826)| = 0,738163 * 10^{-4} < \varepsilon \to \text{parar!}$$

Daí, chegamos a nossa aproximação $\bar{d} = 0,714826$.

5.4 Método da Secante tradicional

Por fim, façamos agora o refinamento de f utilizando o método da Secante, cuja função de iteração é

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Assim, seja $I = [0,5;1], f(d) = e^d - 4d^2, \varepsilon = 10^{-4}$ e as aproximações iniciais $d_0 = 0,5$ e $d_1 = 1$:

$$d_2 = \frac{d_0 f(d_1) - d_1 f(d_0)}{f(d_1) - f(d_0)} = \frac{0,5f(1) - 1f(0,5)}{f(1) - f(0,5)} = 0,668024$$

$$|d_2 - d_1| = |0,668024 - 1| = 0,331976 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_2)| = |f(0,668024)| = 0,165355 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_3 = \frac{d_1 f(d_2) - d_2 f(d_1)}{f(d_2) - f(d_1)} = \frac{1f(0,668024) - 0,668024f(1)}{f(0,668024) - f(1)} = 0,705958$$

$$|d_3 - d_2| = |0,705958 - 0,668024| = 0,037934 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_3)| = |f(0,705958)| = 0,032279 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_4 = \frac{d_2 f(d_3) - d_3 f(d_2)}{f(d_3) - f(d_2)} = \frac{0,668024f(0,705958) - 0,705958f(0,668024)}{f(0,705958) - f(0,668024)} = 0,715159$$

$$|d_4 - d_3| = |0,715159 - 0,705958| = 0,009201 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_4)| = |f(0,715159)| = 0,001297 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$

$$d_5 = \frac{d_3 f(d_4) - d_4 f(d_3)}{f(d_4) - f(d_3)} = \frac{0,705958f(0,715159) - 0,715159f(0,705958)}{f(0,715159) - f(0,705958)} = 0,714803$$

$$|d_5 - d_4| = |0,714803 - 0,715159| = 0,000356 > \varepsilon \rightarrow \text{continuar...}$$
$$|f(d_5)| = |f(0,714803)| = 0,107019 * 10^{-4} < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

Assim, encontramos nossa aproximação $\bar{d} = 0,714803$ pelo método da Secante.

Mas e se continuássemos, tal como fizemos no método de Newton, até atingir o primeiro critério de parada?

$$d_6 = \frac{d_4 f(d_5) - d_5 f(d_4)}{f(d_5) - f(d_4)} = 0,714805$$

$$|d_6 - d_5| = |0,714805 - 0,714803| = 0,000002 < \varepsilon \rightarrow \text{parar!}$$

6 Estatísticas

pendente...