Emparelhamentos

Tiago Montalvão

Emparelhamentos

Um conjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado de emparelhamento em G se não existem duas arestas distintas e_1, $e_2 \in M$ adjacentes em G.

Emparelhamentos

Um conjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado de emparelhamento em G se não existem duas arestas distintas e_1, $e_2 \in M$ adjacentes em G.

Um emparelhamento M *satura* um vértice *v*, e *v* é dito M-saturado se alguma aresta em M é incidente a *v*. Caso contrário, *v* é M-insaturado.

Emparelhamentos

Um conjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado de emparelhamento em G se não existem duas arestas distintas e_1, $e_2 \in M$ adjacentes em G.

Um emparelhamento M *satura* um vértice *v*, e *v* é dito M-saturado se alguma aresta em M é incidente a *v*. Caso contrário, *v* é M-insaturado.

Se todo vértice em V(G) é M-saturado, o emparelhamento é dito *perfeito*.

Emparelhamentos

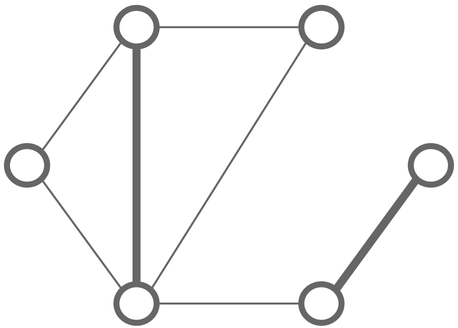
Um conjunto $M \subseteq E(G)$ é chamado de emparelhamento em G se não existem duas arestas distintas $e_1, e_2 \in M$ adjacentes em G.

Um emparelhamento M *satura* um vértice *v*, e *v* é dito M-saturado se alguma aresta em M é incidente a *v*. Caso contrário, *v* é M-insaturado.

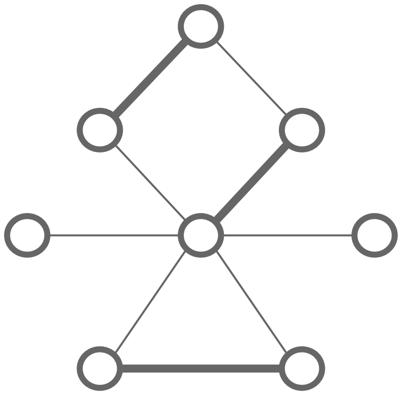
Se todo vértice em V(G) é M-saturado, o emparelhamento é dito *perfeito*.

M é um *emparelhamento máximo* se não existe um emparelhamento M’, tal que $|M'| > |M|$.

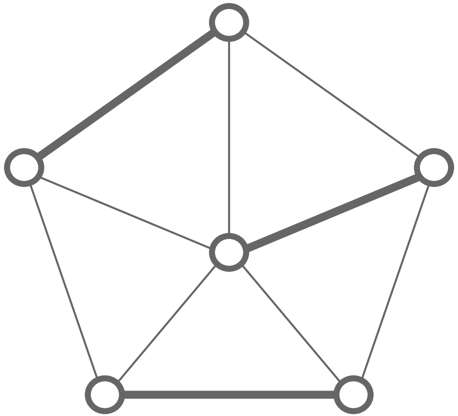
Emparelhamentos



Emparelhamento



Emparelhamento máximo

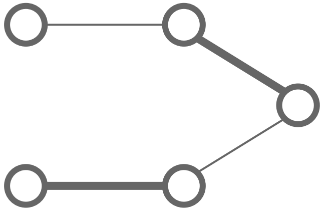


Emparelhamento perfeito

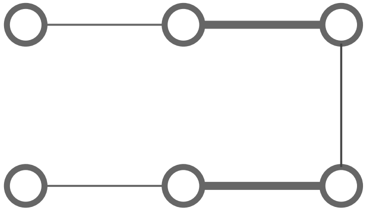
Emparelhamentos

Seja M um emparelhamento de G. Um caminho M-alternante em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E\M e M.

Um caminho M-aumentante é um caminho M-alternante que começa e termina em um vértice M-insaturado.



Caminho M-alternante



Caminho M-aumentante

Teorema de Berge

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

Um emparelhamento M em G é máximo se e somente se G não contém um caminho M-aumentante.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Rightarrow$) Se um emparelhamento M em G é máximo, então G não contém um caminho M-aumentante.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Rightarrow$) Se um emparelhamento M em G é máximo, então G não contém um caminho M-aumentante.

Seja M um emparelhamento em G, e suponha que G contém um caminho M-aumentante $v_0 v_1 \ldots v_{2m+1}$. Seja M' $\subseteq$ E(G) definido como:

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

(⇒) Se um emparelhamento M em G é máximo, então G não contém um caminho M-aumentante.

Seja M um emparelhamento em G, e suponha que G contém um caminho M-aumentante $v_0 v_1 \ldots v_{2m+1}$. Seja M' ⊆ E(G) definido como:

$$M' = (M \setminus \{v_1 v_2, v_3 v_4, \ldots, v_{2m-1} v_{2m}\} \cup \{v_0 v_1, v_2 v_3, \ldots, v_{2m} v_{2m+1}\})$$

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Rightarrow$) Se um emparelhamento M em G é máximo, então G não contém um caminho M-aumentante.

Seja M um emparelhamento em G, e suponha que G contém um caminho M-aumentante $v_0v_1 \ldots v_{2m+1}$. Seja M' $\subseteq$ E(G) definido como:

$$M' = (M \setminus \{v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2m-1}v_{2m}\} \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \ldots, v_{2m}v_{2m+1}\})$$

M' também é emparelhamento em G e $|M'| > |M|$. Portanto, M não é máximo.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

Definição:

Diferença simétrica (Δ ou $\oplus$) entre dois conjuntos é o conjunto dos elementos que pertencem a um dos conjuntos, mas não aos dois.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

Definição:

Diferença simétrica (Δ ou $\oplus$) entre dois conjuntos é o conjunto dos elementos que pertencem a um dos conjuntos, mas não aos dois.

Mais formalmente:

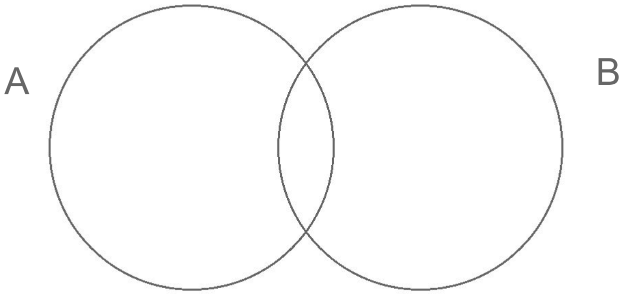
$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

Definição:

Diferença simétrica (Δ ou $\oplus$) entre dois conjuntos é o conjunto dos elementos que pertencem a um dos conjuntos, mas não aos dois.

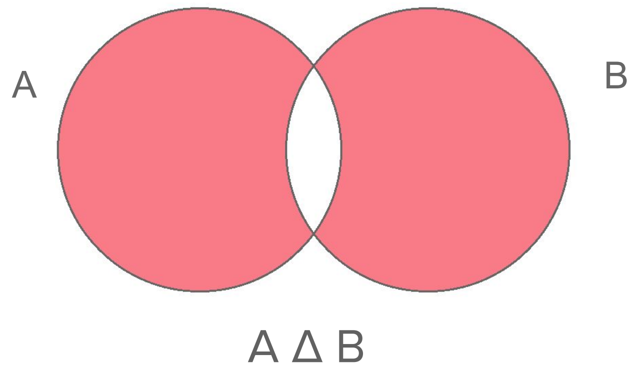


Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

Definição:

Diferença simétrica (Δ ou ⊕) entre dois conjuntos é o conjunto dos elementos que pertencem a um dos conjuntos, mas não aos dois.



Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Suponha que exista um emparelhamento máximo M' tal que $|M'| > |M|$.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Suponha que exista um emparelhamento máximo M’ tal que $|M'| > |M|$.

Seja $H = G[M \Delta M']$.

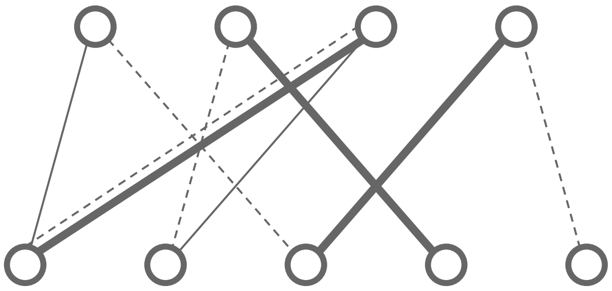
Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

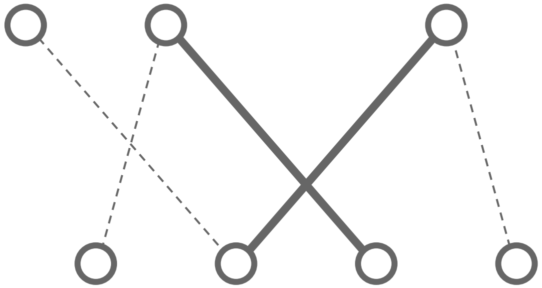
(⇐) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Suponha que exista um emparelhamento máximo M’ tal que $|M'| > |M|$.

Seja H = G[M Δ M’].



Arestas em negrito em M / Arestas tracejadas em M’



G[M Δ M’]

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Suponha que exista um emparelhamento máximo M’ tal que $|M'| > |M|$.

Seja $H = G[M \Delta M']$.

Cada vértice em H tem grau 1 ou 2. Sendo assim, cada componente de H é (i) um ciclo par com arestas alternadamente em M e M’ ou (ii) um caminho com arestas alternadamente em M e M’.

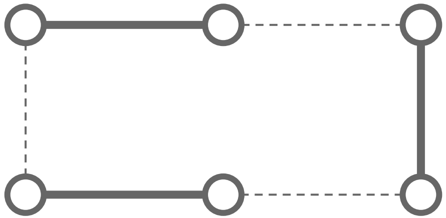
Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

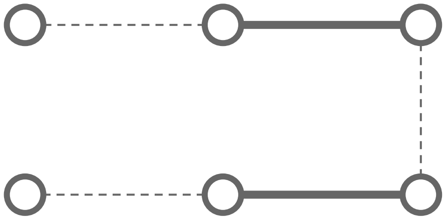
(⇐) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

(i) um ciclo par com arestas alternadamente em M e M’.

(ii) um caminho com arestas alternadamente em M e M’.



(i)



(ii)

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Como $|M'| > |M|$, há em H algum componente P que é um caminho começando e terminando com arestas em M'.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Como $|M'| > |M|$, há em H algum componente P que é um caminho começando e terminando com arestas em M'.

Como os vértices extremos de P são M'-saturados em H, eles são M-insaturados em G.

Emparelhamentos

Teorema de Berge (1957)

($\Leftarrow$) Se G não contém um caminho M-aumentante, então M é máximo.

Como $|M'| > |M|$, há em H algum componente P que é um caminho começando e terminando com arestas em M'.

Como os vértices extremos de P são M'-saturados em H, eles são M-insaturados em G.

Sendo assim, P é um caminho M-aumentante em G.

□

Teorema de Hall

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X,Y). G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X se e somente se $|N(S)| \geq |S|, \forall\ S \subseteq X$.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Rightarrow$) Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X, então $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Rightarrow$) Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X, então $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ S $\subseteq$ X.

Seja S $\subseteq$ X e M um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Rightarrow$) Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X, então $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$.

Seja $S \subseteq X$ e M um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Cada vértice em S está ligado a um vértice diferente em N(S).

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Rightarrow$) Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X, então $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$.

Seja $S \subseteq X$ e M um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Cada vértice em S está ligado a um vértice diferente em N(S).

Portanto, temos $|N(S)| \geq |S|$.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Rightarrow$) Se G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X, então $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$.

Seja $S \subseteq X$ e M um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Cada vértice em S está ligado a um vértice diferente em N(S).

Portanto, temos $|N(S)| \geq |S|$.

Como S foi escolhido arbitrariamente, a relação é válida para todo $S \subseteq X$.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall\ S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Suponha que a relação é válida, mas G não possui um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall\ S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Suponha que a relação é válida, mas G não possui um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Seja M* um emparelhamento máximo. Pela hipótese, há algum vértice *u* em X M*-insaturado. Seja Z o conjunto de todos os vértices conectados a *u* por caminhos M*-alternantes.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

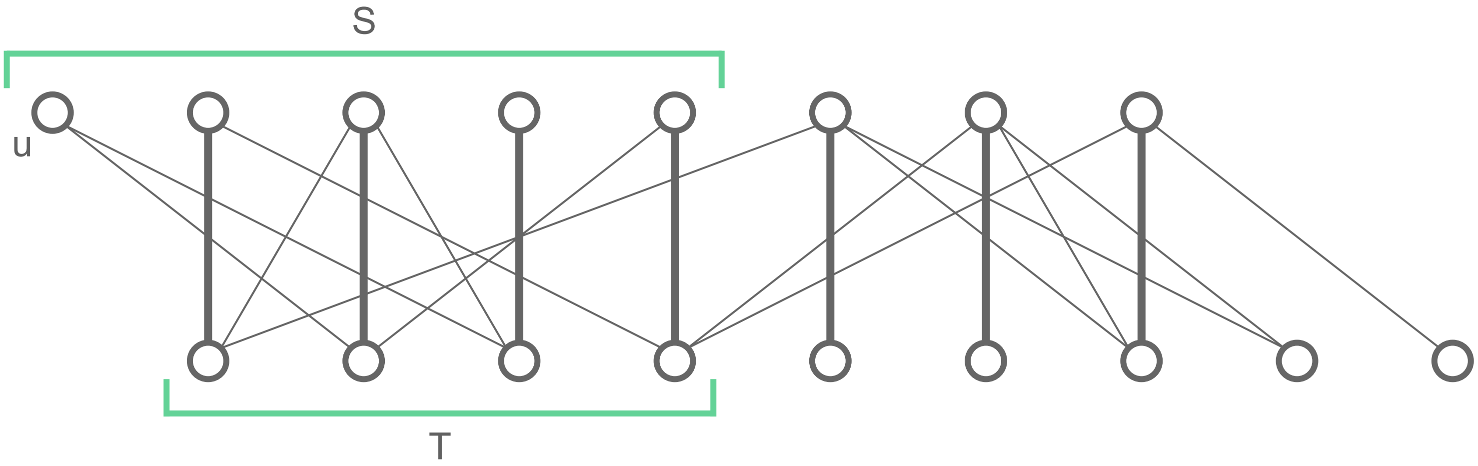
($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ S $\subseteq$ X, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Pelo teorema de Berge, sabemos que *u* é o único vértice M*-insaturado em Z, pois M* é máximo. Seja S = Z∩X e T = Z∩Y.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.



Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Todo vértice de $S \setminus \{u\}$ está emparelhado com vértices de T em M*. Sendo assim, temos que $|T| = |S| - 1$ e $N(S) \supseteq T$.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Todo vértice de $S \setminus \{u\}$ está emparelhado com vértices de T em M*. Sendo assim, temos que $|T| = |S| - 1$ e $N(S) \supseteq T$.

Temos, na verdade, que $N(S) = T$, pois cada vértice em $N(S)$ está conectado a *u* por um caminho M*-alternante.

Emparelhamentos

Teorema de Hall (1935)

($\Leftarrow$) Se $|N(S)| \geq |S|$, $\forall$ $S \subseteq X$, então G contém um emparelhamento que satura todo vértice em X.

Todo vértice de $S \setminus \{u\}$ está emparelhado com vértices de T em M^*. Sendo assim, temos que $|T| = |S| - 1$ e $N(S) \supseteq T$.

Temos, na verdade, que $N(S) = T$, pois cada vértice em $N(S)$ está conectado a *u* por um caminho M^*-alternante.

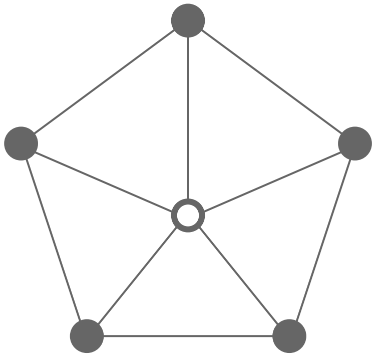
Sendo assim, $|T| = |N(S)| = |S| - 1 < |S|$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Emparelhamentos

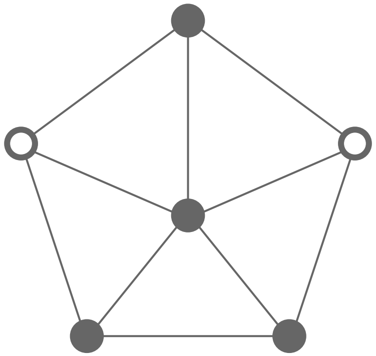
Cobertura de vértices

Uma *cobertura* de um grafo G é um K ⊆ V tal que toda aresta de G tem pelo menos uma extremidade em K.

K é uma *cobertura mínima* se não existe uma cobertura K', tal que |K'| < |K|.



Cobertura



Cobertura mínima

Emparelhamentos

Cobertura de vértices

Se K é uma cobertura de G e M um emparelhamento de G, então K contém pelo menos uma extremidade de cada aresta de M. Então, é verdade que

$$|M| \leq |K|$$

Mais particularmente, seja K* uma cobertura mínima e M* um emparelhamento máximo. Então

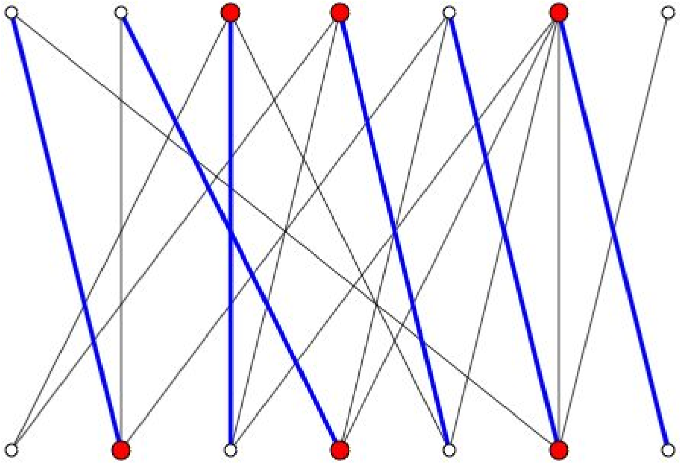
$$|M^*| \leq |K^*|$$

Teorema de König

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.



Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Lema: Seja M um emparelhamento e K uma cobertura, tal que $|M| = |K|$. Neste caso, M é um emparelhamento máximo e K uma cobertura mínima.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Lema: Seja M um emparelhamento e K uma cobertura, tal que $|M| = |K|$. Neste caso, M é um emparelhamento máximo e K uma cobertura mínima.

Sabemos que $|M^*| \leq |K^*|$, para M^* e K^* ótimos. Sendo assim:

$$|M| \leq |M^*| \leq |K^*| \leq |K|$$

Como $|M| = |K|$, temos que $|M| = |M^*| = |K^*| = |K|$.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.

Seja um grafo G com bipartição (X,Y) e M* um emparelhamento máximo de G.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.

Seja um grafo G com bipartição (X,Y) e M* um emparelhamento máximo de G.

Seja U o conjunto de todos os vértices M*-insaturados em X (possivelmente vazio) e Z o conjunto de todos os vértices conectados por caminhos M*-alternantes a vértices de U.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.

Seja um grafo G com bipartição (X,Y) e M* um emparelhamento máximo de G.

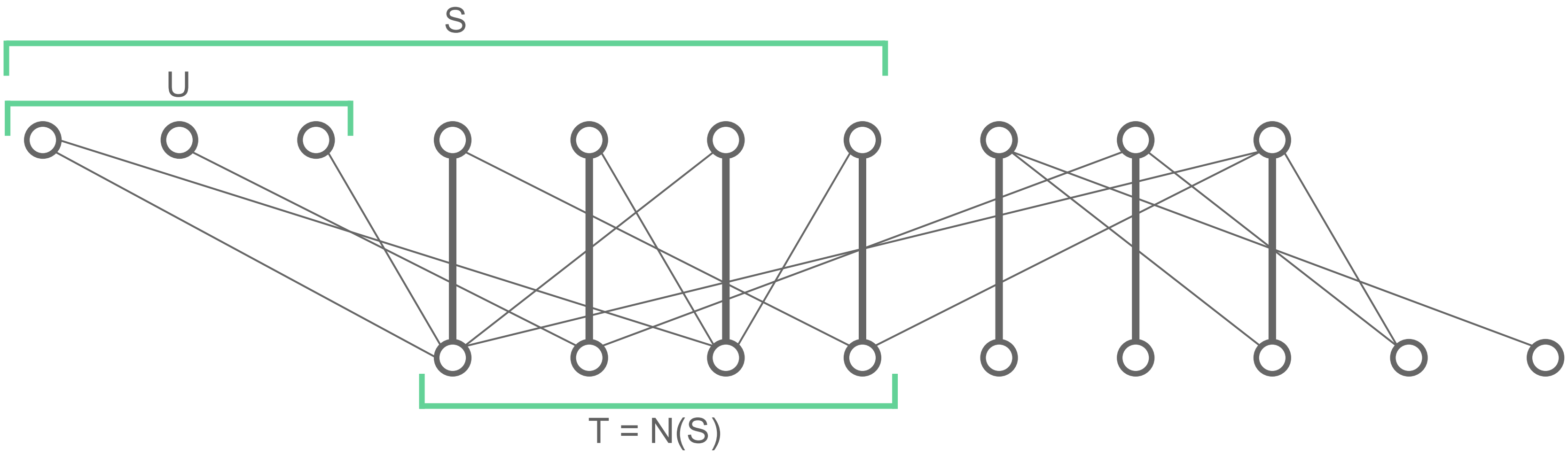
Seja U o conjunto de todos os vértices M*-insaturados em X (possivelmente vazio) e Z o conjunto de todos os vértices conectados por caminhos M*-alternantes a vértices de U.

Seja $S = Z \cap X$ e $T = Z \cap Y$. Sabemos, assim como na prova anterior, que $N(S) = T$.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

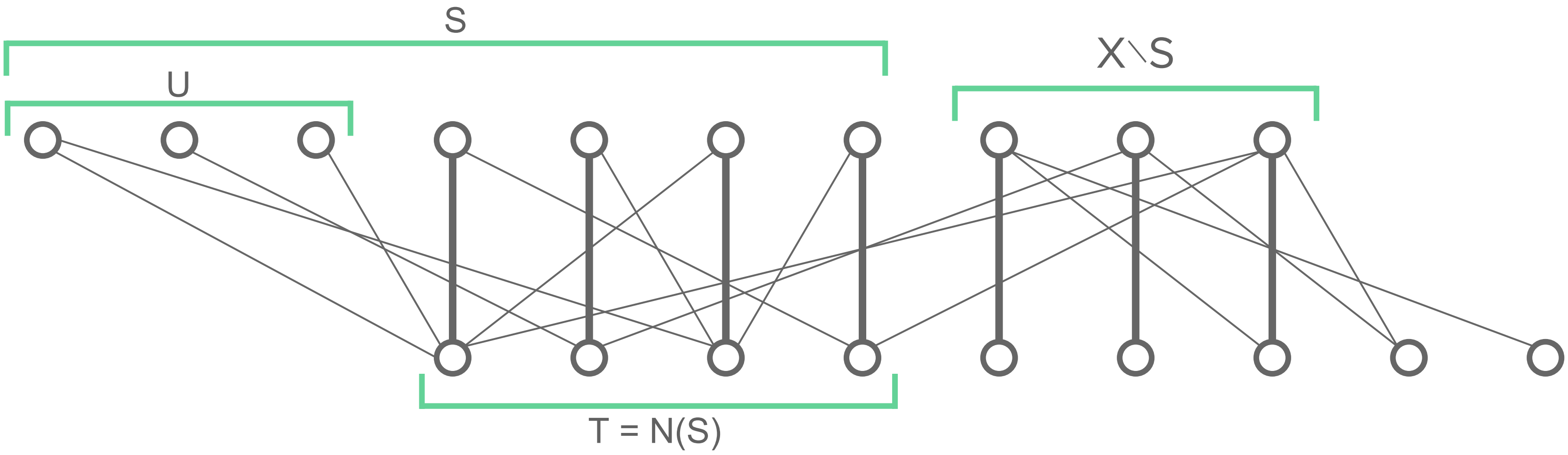
Em um grafo bipartido, a quantidade de arestas no emparelhamento máximo é igual ao número de vértices na cobertura mínima, ou seja, vale $|M^*| = |K^*|$.



Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Seja $K = (X \setminus S) \cup T$.

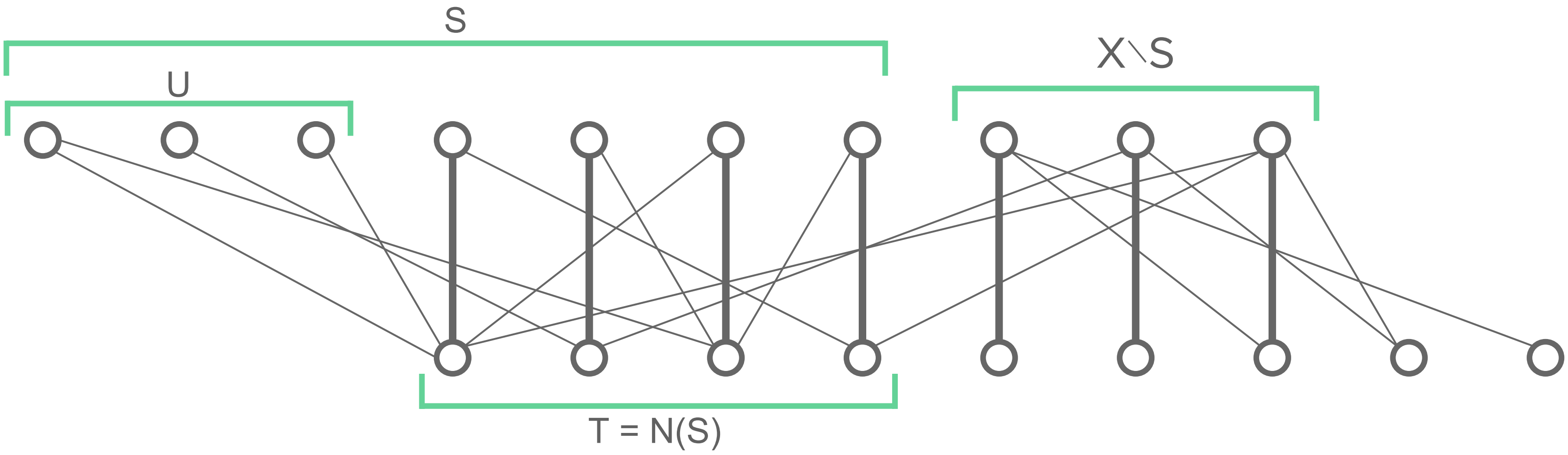


Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Seja K = (X∖S) ∪ T.

Toda aresta de G tem pelo menos uma das extremidades em K.



Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Seja $K = (X \setminus S) \cup T$.

Toda aresta de G tem pelo menos uma das extremidades em K. Caso contrário, existiria uma aresta com uma extremidade em S e outra em $Y \setminus T$, contradizendo $N(S) = T$.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Seja $K = (X \setminus S) \cup T$.

Toda aresta de G tem pelo menos uma das extremidades em K. Caso contrário, existiria uma aresta com uma extremidade em S e outra em $Y \setminus T$, contradizendo $N(S) = T$.

Portanto, K é uma cobertura de G e $|M^*| = |K|$.

Emparelhamentos

Teorema de König (1931)

Seja $K = (X \setminus S) \cup T$.

Toda aresta de G tem pelo menos uma das extremidades em K. Caso contrário, existiria uma aresta com uma extremidade em S e outra em $Y \setminus T$, contradizendo $N(S) = T$.

Portanto, K é uma cobertura de G e $|M^*| = |K|$.

Pelo lema provado anteriormente, K é uma cobertura mínima.

$\square$

Teorema de Tutte

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

Um grafo G possui um emparelhamento perfeito se e somente se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

Um grafo G possui um emparelhamento perfeito se e somente se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.

Definição:

Uma componente é par ou ímpar se seu número de vértices é par ou ímpar, respectivamente.

$o(G)$ denota o número de componentes ímpares de G.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Rightarrow$) Se G possui um emparelhamento perfeito, então $o(G \setminus S) \leq |S|, \forall S \subset V$.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Rightarrow$) Se G possui um emparelhamento perfeito, então $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.

Sejam $S \subset V$ e $G_1, G_2, \ldots, G_n$ as componentes ímpares de $G \setminus S$.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Rightarrow$) Se G possui um emparelhamento perfeito, então $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.

Sejam $S \subset V$ e $G_1, G_2, \ldots, G_n$ as componentes ímpares de $G \setminus S$.

Como cada G_i é ímpar, existe um vértice $u_i \in G_i$ que deve ser emparelhado com um vértice v_i de S.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Rightarrow$) Se G possui um emparelhamento perfeito, então $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.

Sejam $S \subset V$ e $G_1, G_2, \ldots, G_n$ as componentes ímpares de $G \setminus S$.

Como cada G_i é ímpar, existe um vértice $u_i \in G_i$ que deve ser emparelhado com um vértice v_i de S.

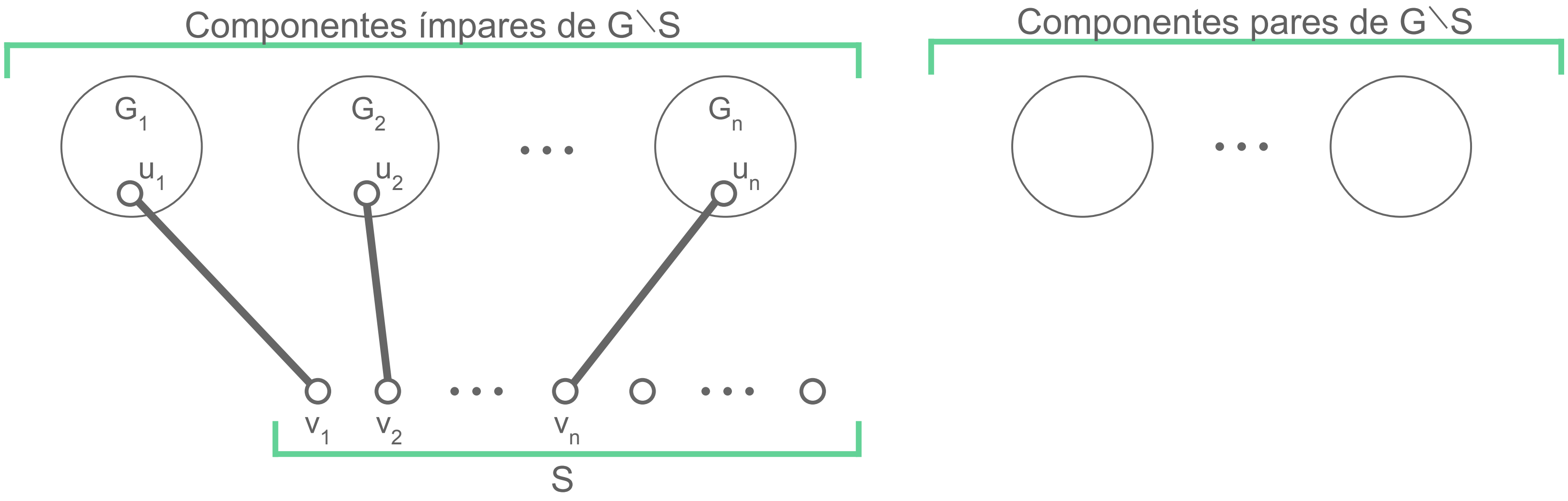
Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq S$, temos que:

$$o(G \setminus S) = n = |\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}| \leq |S|$$

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

(⇒) Se G possui um emparelhamento perfeito, então $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$.



Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Suponha que G não possua emparelhamento perfeito. Note que adicionar arestas pode fazer o grafo ter um, pois eventualmente ele será ser completo.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Suponha que G não possua emparelhamento perfeito. Note que adicionar arestas pode fazer o grafo ter um, pois eventualmente ele será ser completo.

Seja G* um grafo maximal não possuindo emparelhamento perfeito, tal que G é subgrafo gerador.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Suponha que G não possua emparelhamento perfeito. Note que adicionar arestas pode fazer o grafo ter um, pois eventualmente ele será ser completo.

Seja G^* um grafo maximal não possuindo emparelhamento perfeito, tal que G é subgrafo gerador.

Então é verdade que $o(G^* \setminus S) \leq o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$ pois adicionar arestas em $G \setminus S$ não incrementa o número de componentes ímpares.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Sabemos que $|V|$ é par, pois fazendo $S = \emptyset$, temos que $o(G^* \setminus S) = o(G^*) \leq |\emptyset| = 0$.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Sabemos que $|V|$ é par, pois fazendo $S = \emptyset$, temos que $o(G^* \setminus S) = o(G^*) \leq |\emptyset| = 0$.

Seja U o conjunto de todos os vértices de grau $|V|$-1 em G^*. Sabemos que $U \neq V$, caso contrário G^* seria completo e teria um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Sabemos que $|V|$ é par, pois fazendo $S = \emptyset$, temos que $o(G^* \setminus S) = o(G^*) \leq |\emptyset| = 0$.

Seja U o conjunto de todos os vértices de grau $|V|$-1 em G^*. Sabemos que $U \neq V$, caso contrário G^* seria completo e teria um emparelhamento perfeito.

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

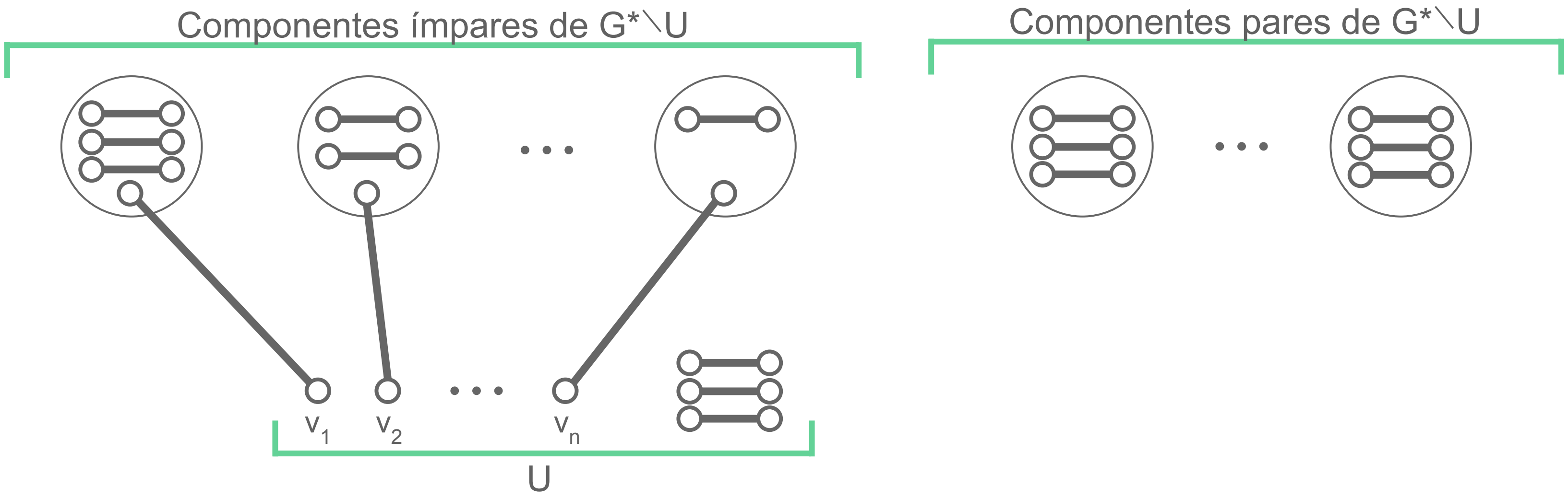
($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Sabemos que $o(G^* \setminus U) \leq |U|$. Mas, usando o lema, conseguimos construir um emparelhamento perfeito da seguinte forma:

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.



Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Como assumimos que G* não possuía um emparelhamento perfeito, chegamos a uma contradição.

Emparelhamentos

Teorema de Tutte (1947)

($\Leftarrow$) Se $o(G \setminus S) \leq |S|$, $\forall S \subset V$, então G possui um emparelhamento perfeito.

Como assumimos que G* não possuía um emparelhamento perfeito, chegamos a uma contradição.

Logo, G possui um emparelhamento perfeito.

$\square$

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^* \setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que *xy*, *yz* $\in E(G^*)$, mas *xz* $\notin E(G^*)$.

Emparelhamentos

Lema: $G^*\setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^*\setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que *xy*, *yz* $\in$ E(G*), mas *xz* $\notin$ E(G*).

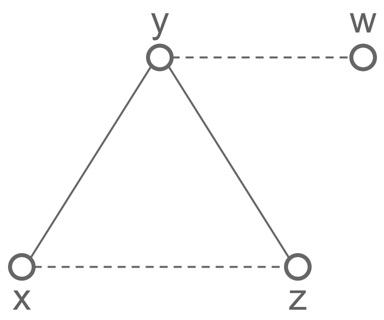
Como y $\notin$ U, existe um vértice w em $G^*\setminus U$ tal que *yw* $\notin$ E(G*).

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^* \setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que *xy*, *yz* $\in E(G^*)$, mas *xz* $\notin E(G^*)$.

Como y $\notin$ U, existe um vértice w em $G^* \setminus U$ tal que *yw* $\notin E(G^*)$.



Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^* \setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que *xy*, *yz* $\in$ E(G*), mas *xz* $\notin$ E(G*).

Como y $\notin$ U, existe um vértice w em $G^* \setminus U$ tal que *yw* $\notin$ E(G*).

Como G* é um grafo maximal que não possui um emparelhamento perfeito, G*+e tem um emparelhamento perfeito, $\forall$ e $\notin$ E(G*).

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^* \setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que xy, yz $\in$ $E(G^*)$, mas $xz \notin E(G^*)$.

Como $y \notin U$, existe um vértice w em $G^* \setminus U$ tal que $yw \notin E(G^*)$.

Como G^* é um grafo maximal que não possui um emparelhamento perfeito, G^*+e tem um emparelhamento perfeito, $\forall e \notin E(G^*)$. Sejam M_1 e M_2 os emparelhamentos perfeitos em G^*+xz e em G^*+yw, respectivamente.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Suponha que exista algum componente de $G^* \setminus U$ não completo. Então existem x, y, z $\in$ V, tal que *xy*, *yz* $\in$ E(G*), mas *xz* $\notin$ E(G*).

Como y $\notin$ U, existe um vértice w em $G^* \setminus U$ tal que *yw* $\notin$ E(G*).

Como G* é um grafo maximal que não possui um emparelhamento perfeito, G*+e tem um emparelhamento perfeito, $\forall$ e $\notin$ E(G*). Sejam M_1 e M_2 os emparelhamentos perfeitos em G*+*xz* e em G*+*yw*, respectivamente.

Seja H o subgrafo de $G^* \cup \{xz, yw\}$ induzido por $M_1 \Delta M_2$.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Todo vértice de H possui grau 2, pois é adjacente a exatamente uma aresta de M_1 e de M_2. Portanto, H é uma união disjunta de ciclos, todos pares, pois alternam entre arestas de M_1 e M_2. Dois casos aparecem:

(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

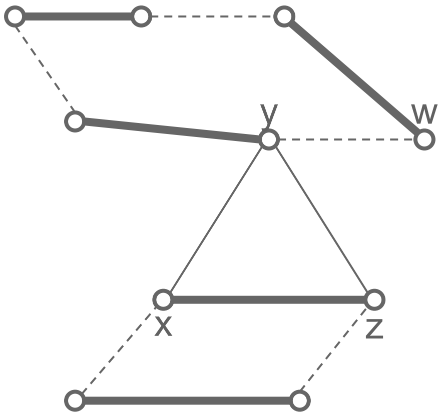
(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

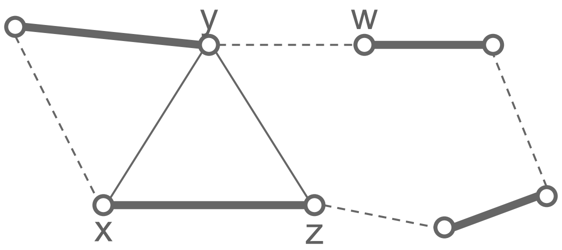
(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.



M_1 em negrito

M_2 tracejado



Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

Podemos construir um emparelhamento perfeito em G* selecionando as arestas de M_1 do ciclo que contém a aresta *yw* e as arestas de M_2 do outro.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

Podemos construir um emparelhamento perfeito em G^* selecionando as arestas de M_1 do ciclo que contém a aresta *yw* e as arestas de M_2 do outro. Todas elas estão em G^* e formam um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(i) *xz* e *yw* estão em componentes diferentes em H.

Podemos construir um emparelhamento perfeito em G^* selecionando as arestas de M_1 do ciclo que contém a aresta *yw* e as arestas de M_2 do outro. Todas elas estão em G^* e formam um emparelhamento perfeito.

Portanto, este caso não pode ocorrer pois, por hipótese, G^* não possui um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Seja esta componente C.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Seja esta componente C. Podemos construir um emparelhamento perfeito em G^* selecionando as arestas de M_1 do caminho y, w, ..., z junto com a aresta *yz* e as arestas de M_2 de C que estão neste caminho.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Seja esta componente C. Podemos construir um emparelhamento perfeito em G^* selecionando as arestas de M_1 do caminho y, w, ..., z junto com a aresta *yz* e as arestas de M_2 de C que estão neste caminho. Todas elas estão em G^* e formam um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

(ii) *xz* e *yw* estão na mesma componente em H.

Seja esta componente C. Podemos construir um emparelhamento perfeito em G^* selecionando as arestas de M_1 do caminho y, w, ..., z junto com a aresta *yz* e as arestas de M_2 de C que estão neste caminho. Todas elas estão em G^* e formam um emparelhamento perfeito.

Portanto, este caso não pode ocorrer pois, por hipótese, G^* não possui um emparelhamento perfeito.

Emparelhamentos

Lema: $G^* \setminus U$ é uma união disjunta de grafos completos.

Como ambos os casos levam à contradição, temos que $G^* \setminus U$ é de fato uma união disjunta de grafos completos.

$\square$

Aplicações

Aplicações

Um exemplo clássico de aplicação dos emparelhamentos é o problema da atribuição (assignment problem).

Aplicações

Um exemplo clássico de aplicação dos emparelhamentos é o problema da atribuição (assignment problem).

Dados n agentes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e n tarefas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, é possível atribuir agentes para tarefas, de forma que um agente tenha exatamente uma tarefa e cada tarefa seja executada por exatamente um agente, sendo que cada agente está qualificado para as tarefas $T(X_i) \neq \emptyset$?

Aplicações

Um exemplo clássico de aplicação dos emparelhamentos é o problema da atribuição (assignment problem).

Dados n agentes X_1, X_2, ..., X_n e n tarefas Y_1, Y_2, ..., Y_n, é possível atribuir agentes para tarefas, de forma que um agente tenha exatamente uma tarefa e cada tarefa seja executada por exatamente um agente, sendo que cada agente está qualificado para as tarefas $T(X_i) \neq \emptyset$?

Podemos modelar este problema como um grafo bipartido G(X, Y), sendo X o conjunto de agentes e Y o conjunto de tarefas. Há uma aresta (x, y) se o agente x está qualificado para a tarefa y.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Dado um grafo bipartido, este algoritmo retorna um emparelhamento máximo em $O(|E| \sqrt{|V|})$.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Dado um grafo bipartido, este algoritmo retorna um emparelhamento máximo em $O(|E| \sqrt{|V|})$.

Foi desenvolvido em 1973 por John Hopcroft e Richard Karp.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Dado um grafo bipartido, este algoritmo retorna um emparelhamento máximo em $O(|E| \sqrt{|V|})$.

Foi desenvolvido em 1973 por John Hopcroft e Richard Karp.

Pelo teorema de Berge, uma ideia inicial para computar um emparelhamento máximo é começar com um emparelhamento arbitrário M e procurar por caminhos aumentantes.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Dado um grafo bipartido, este algoritmo retorna um emparelhamento máximo em $O(|E| \sqrt{|V|})$.

Foi desenvolvido em 1973 por John Hopcroft e Richard Karp.

Pelo teorema de Berge, uma ideia inicial para computar um emparelhamento máximo é começar com um emparelhamento arbitrário M e procurar por caminhos aumentantes.

O algoritmo utiliza esta ideia, mas em cada passo é descoberto um conjunto maximal de caminhos aumentantes mínimos.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Seja G(X, Y) bipartido.

M ⬅ Ø

Enquanto existe um caminho aumentante

P ⬅ $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ conjunto maximal de caminhos aumentantes mínimos disjuntos P_i

M ⬅ M Δ $\{P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n\}$

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Corretude:

Cada iteração do algoritmo adiciona pelo menos uma aresta ao emparelhamento. Portanto, o algoritmo termina.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Corretude:

Cada iteração do algoritmo adiciona pelo menos uma aresta ao emparelhamento. Portanto, o algoritmo termina.

O algoritmo pára quando não há caminhos aumentantes. Pelo teorema de Berge, isto garante a maximalidade do emparelhamento.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Cada iteração do algoritmo consiste de uma busca simples (pode ser implementada com uma busca em largura + busca em profundidade). Portanto, cada iteração requer tempo $O(|E|)$.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Cada iteração do algoritmo consiste de uma busca simples (pode ser implementada com uma busca em largura + busca em profundidade). Portanto, cada iteração requer tempo $O(|E|)$. Sendo assim, após as primeiras $\sqrt{|V|}$ iterações, o algoritmo requer um tempo $O(|E|\sqrt{|V|})$.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Cada iteração do algoritmo consiste de uma busca simples (pode ser implementada com uma busca em largura + busca em profundidade). Portanto, cada iteração requer tempo $O(|E|)$. Sendo assim, após as primeiras $\sqrt{|V|}$ iterações, o algoritmo requer um tempo $O(|E|\sqrt{|V|})$.

Seja M o emparelhamento após as primeiras $\sqrt{|V|}$ iterações.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Cada iteração do algoritmo consiste de uma busca simples (pode ser implementada com uma busca em largura + busca em profundidade). Portanto, cada iteração requer tempo $O(|E|)$. Sendo assim, após as primeiras $\sqrt{|V|}$ iterações, o algoritmo requer um tempo $O(|E|\sqrt{|V|})$.

Seja M o emparelhamento após as primeiras $\sqrt{|V|}$ iterações.

A cada iteração, o algoritmo incrementa o caminho aumentante mínimo em pelo menos uma aresta. Portanto, o tamanho de qualquer caminho aumentante nesta iteração é maior que $\sqrt{|V|}$.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo. H é uma união disjunta de ciclos pares e caminhos aumentantes.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo. H é uma união disjunta de ciclos pares e caminhos aumentantes. Como o tamanho de cada caminho aumentante é pelo menos $\sqrt{|V|}$, há no máximo $\sqrt{|V|}$ caminhos.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo. H é uma união disjunta de ciclos pares e caminhos aumentantes. Como o tamanho de cada caminho aumentante é pelo menos $\sqrt{|V|}$, há no máximo $\sqrt{|V|}$ caminhos.

Isto implica que o $|M^*| - |M| \leq \sqrt{|V|}$.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo. H é uma união disjunta de ciclos pares e caminhos aumentantes. Como o tamanho de cada caminho aumentante é pelo menos $\sqrt{|V|}$, há no máximo $\sqrt{|V|}$ caminhos.

Isto implica que o $|M^*|-|M| \leq \sqrt{|V|}$.

Portanto, o algoritmo executará no máximo mais $\sqrt{|V|}$ iterações.

Algoritmo de Hopcroft-Karp

Análise assintótica:

Seja $H = G[M \Delta M^*]$, sendo M^* um emparelhamento máximo. H é uma união disjunta de ciclos pares e caminhos aumentantes. Como o tamanho de cada caminho aumentante é pelo menos $\sqrt{|V|}$, há no máximo $\sqrt{|V|}$ caminhos.

Isto implica que o $|M^*| - |M| \leq \sqrt{|V|}$.

Portanto, o algoritmo executará no máximo mais $\sqrt{|V|}$ iterações.

Sendo assim, o algoritmo tem complexidade $O(|E| \sqrt{|V|})$.

Algoritmo de Micali–Vazirani

Algoritmo de Micali–Vazirani

A mesma ideia pode ser aplicada a grafos que não são bipartidos.

Algoritmo de Micali–Vazirani

A mesma ideia pode ser aplicada a grafos que não são bipartidos.

A maior dificuldade está, porém, em como achar os caminhos aumentantes.

Algoritmo de Micali–Vazirani

A mesma ideia pode ser aplicada a grafos que não são bipartidos.

A maior dificuldade está, porém, em como achar os caminhos aumentantes.

Em 1980, Micali e Vazirani apresentaram um método que realiza esta etapa em tempo linear. Sendo assim, a complexidade de tal algoritmo é a mesma do algoritmo de Hopcroft-Karp.

Algoritmo de Micali–Vazirani

A mesma ideia pode ser aplicada a grafos que não são bipartidos.

A maior dificuldade está, porém, em como achar os caminhos aumentantes.

Em 1980, Micali e Vazirani apresentaram um método que realiza esta etapa em tempo linear. Sendo assim, a complexidade de tal algoritmo é a mesma do algoritmo de Hopcroft-Karp.

O método é bem complexo e não houve provas completas de sua corretude até 2012, quando o próprio Vazirani escreveu um artigo, com uma prova simplificada sobre o algoritmo.

Referências

Graph Theory With Applications, J.A. Bondy, U.S.R. Murty

https://math.la.asu.edu/~andrzej/teach/mat416/proofs3.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_(graph_theory)

https://en.wikipedia.org/wiki/Hopcroft%E2%80%93Karp_algorithm

http://www.cc.gatech.edu/~vazirani/new-proof.pdf