Colorações por orientações de grafos

Bolsista: Tiago Carvalho G. Montalvão
Bacharelado em Ciência da Computação
PIBIC/UFRJ desde março de 2016

Orientadora: Profª Márcia R. Cerioli
Departamento de Ciência da Computação

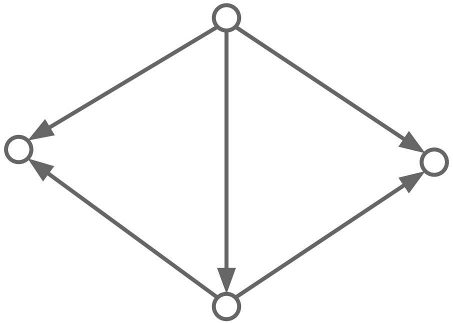
19 de outubro de 2016
XXXVIII Jornada Giulio Massarani de Iniciação Científica, Tecnológica, Artística e Cultural

Coloração por orientação

Coloração por orientação

Dado um digrafo D,

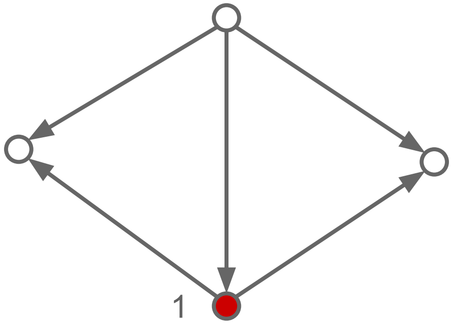
a **cor por orientação** de um vértice *u* é o grau de entrada $d_i(u)$ em D.



Coloração por orientação

Dado um digrafo D,

a **cor por orientação** de um vértice *u* é o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

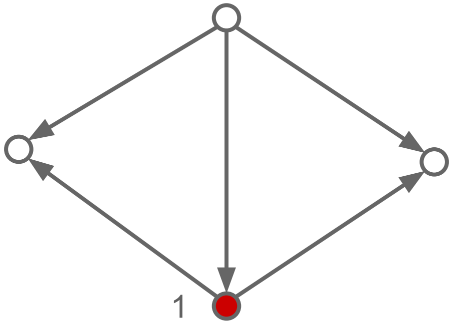


Coloração por orientação

Dado um digrafo D,

a **cor por orientação** de um vértice *u* é o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

uma **coloração por orientação** de um grafo G consiste em orientar as arestas em E(G) de tal maneira que as cores por orientação dos vértices de V(G) formem uma coloração.

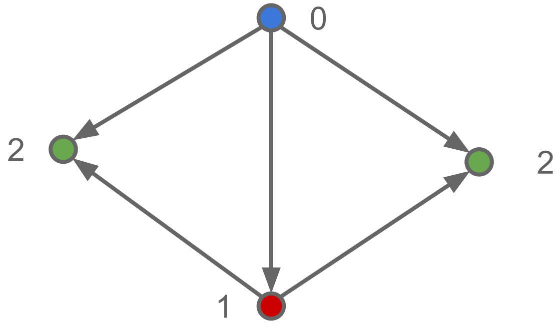


Coloração por orientação

Dado um digrafo D,

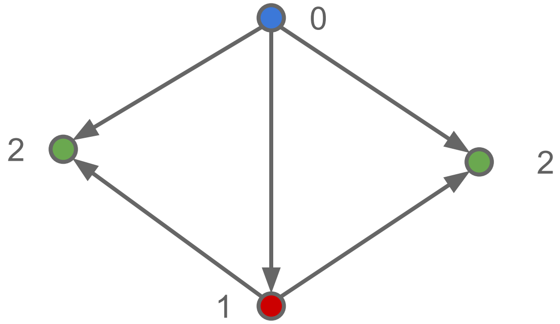
a **cor por orientação** de um vértice *u* é o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

uma **coloração por orientação** de um grafo G consiste em orientar as arestas em E(G) de tal maneira que as cores por orientação dos vértices de V(G) formem uma coloração.



Coloração por orientação

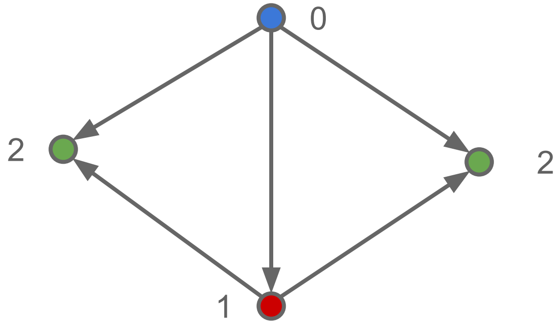
O número cromático orientado de G, denotado por $\vec{\chi}$**(G)**, é a menor maior cor dentre todas as colorações por orientação.



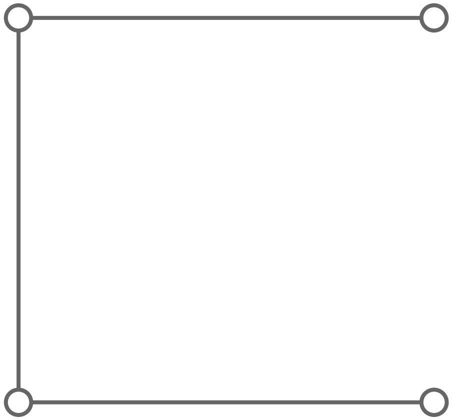
Coloração por orientação

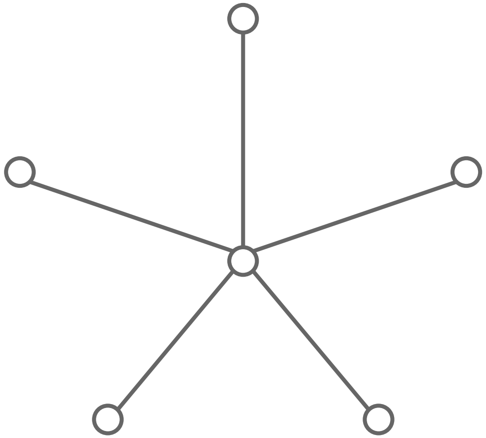
O número cromático orientado de G, denotado por $\vec{\chi}(\mathbf{G})$, é a menor maior cor dentre todas as colorações por orientação.

O problema consiste em achar este parâmetro para um grafo G arbitrário.

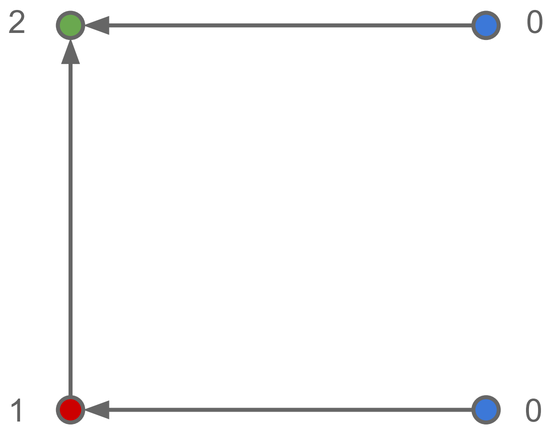


Exemplos

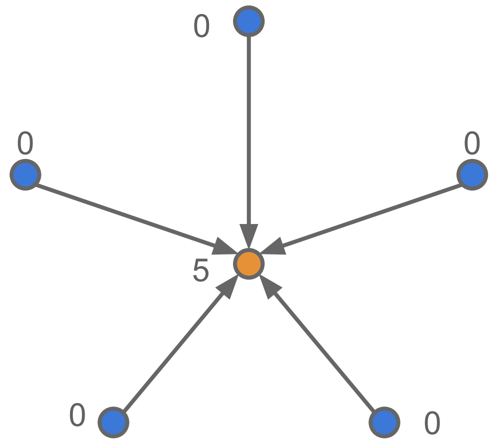




Exemplos

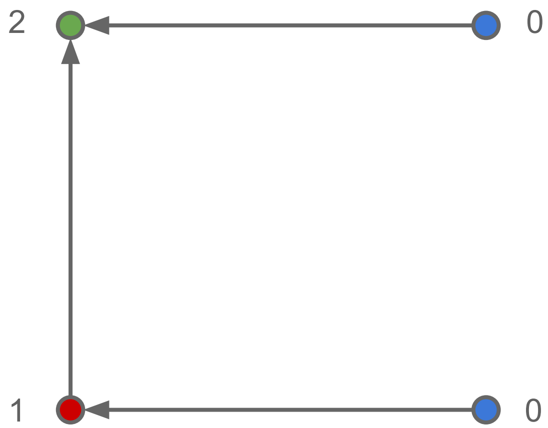


$\vec{\chi}(G) \leq 2$

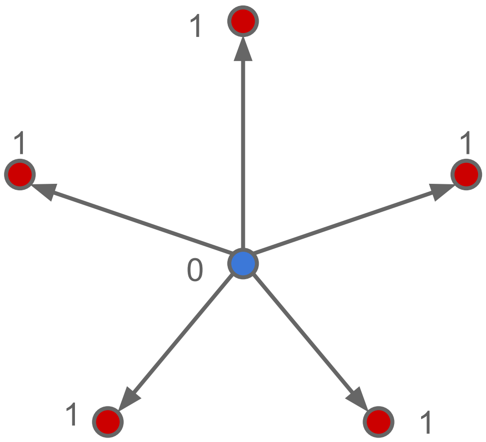


$\vec{\chi}(G) \leq 5$

Exemplos

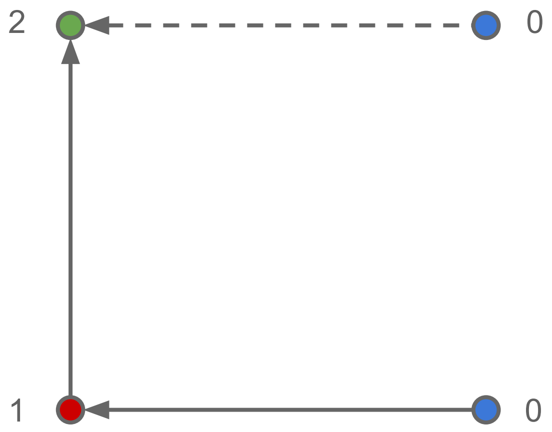


$\vec{\chi}(G) \leq 2$

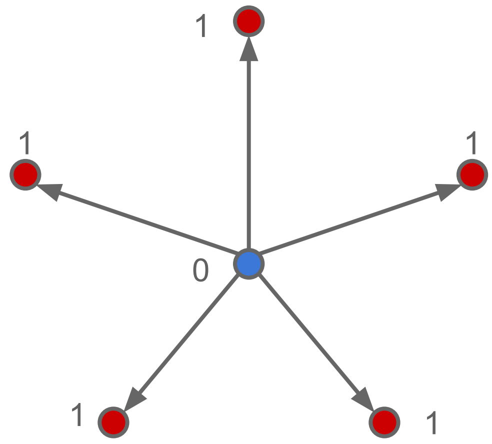


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

Exemplos

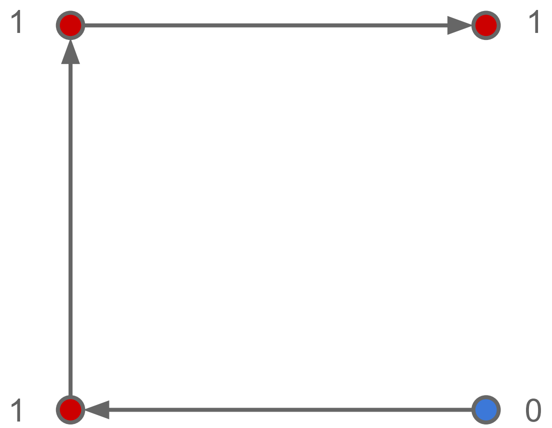


$\vec{\chi}(G) \leq 2$

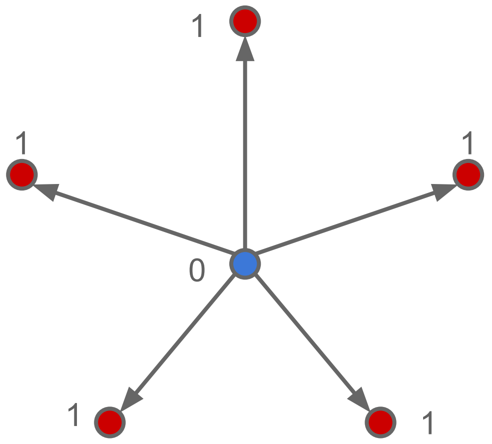


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

Exemplos

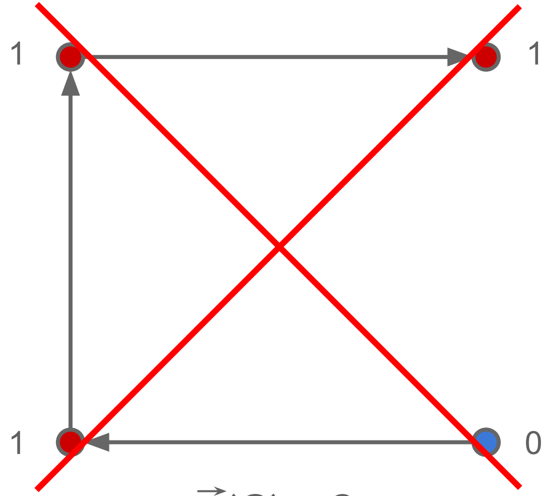


$\vec{\chi}(G) \leq ?$

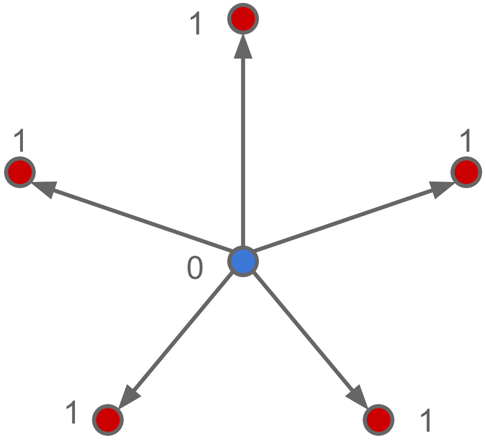


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

Exemplos



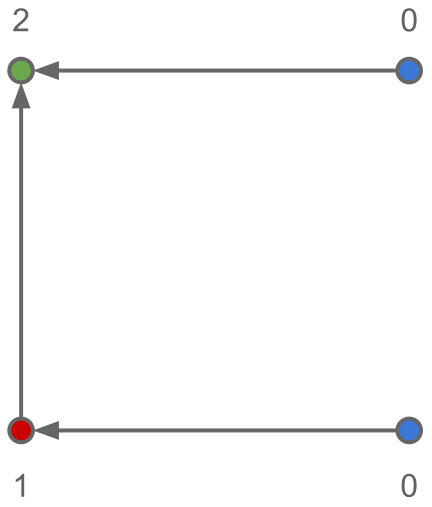
$\vec{\chi}(G) \leq ?$

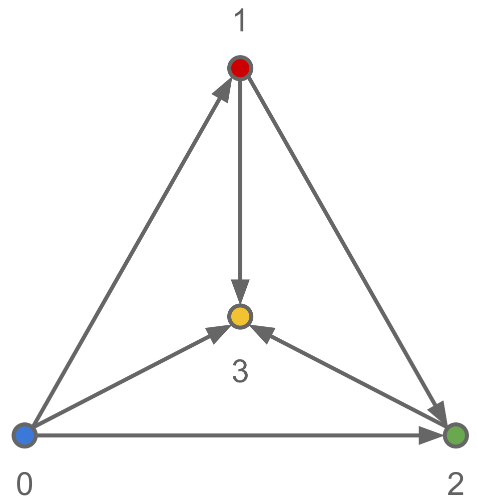


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

Dificuldades

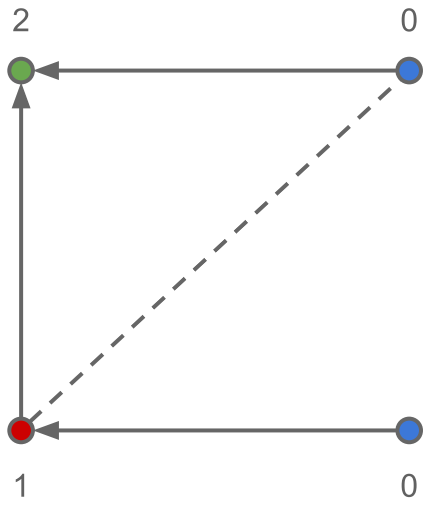
Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.



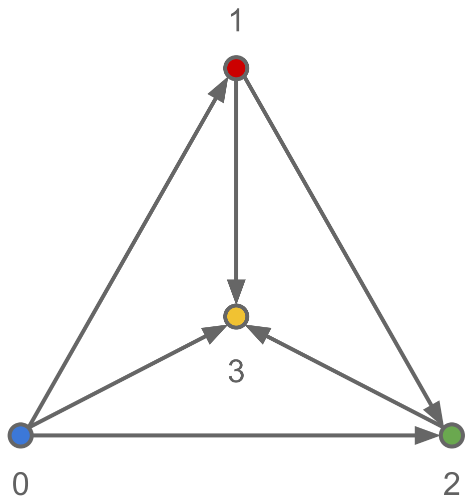


Dificuldades

Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.

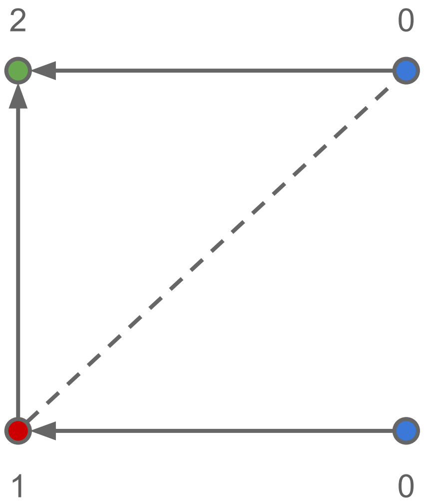


Inserção

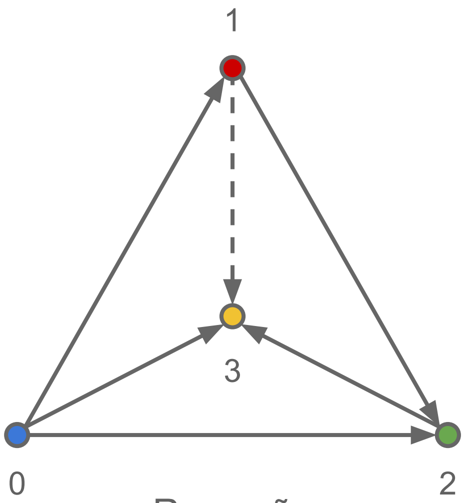


Dificuldades

Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.



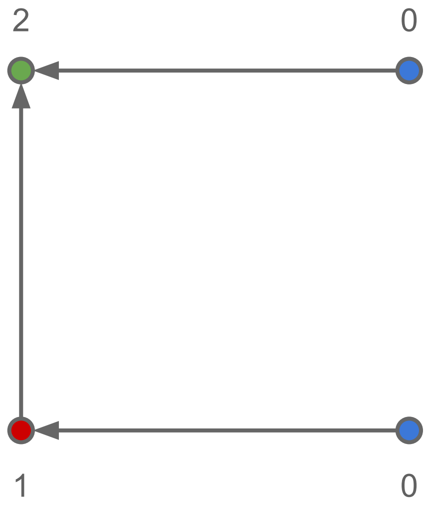
Inserção



Remoção

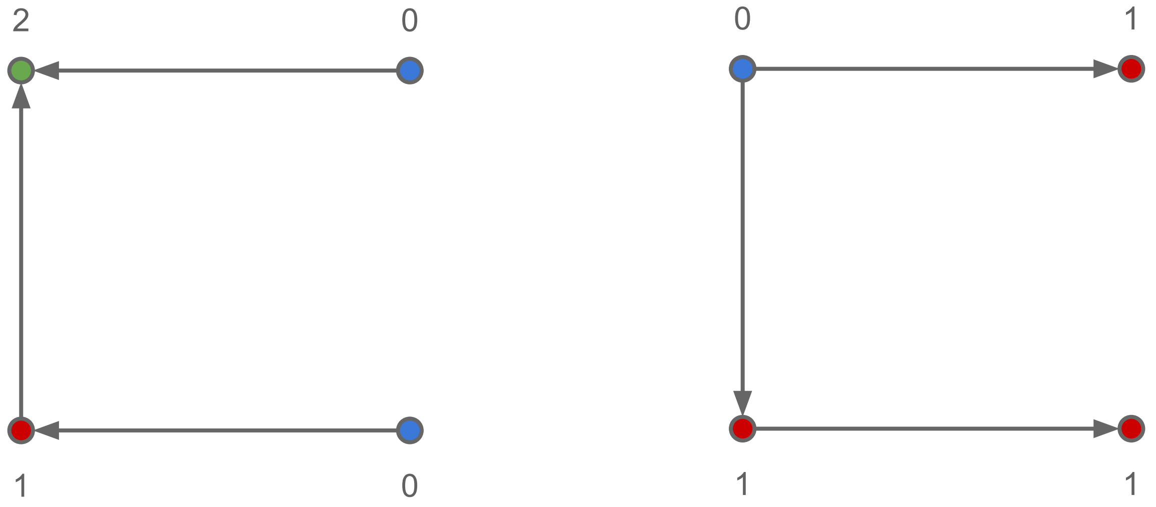
Dificuldades

A orientação reversa pode não fornecer uma coloração por orientação.



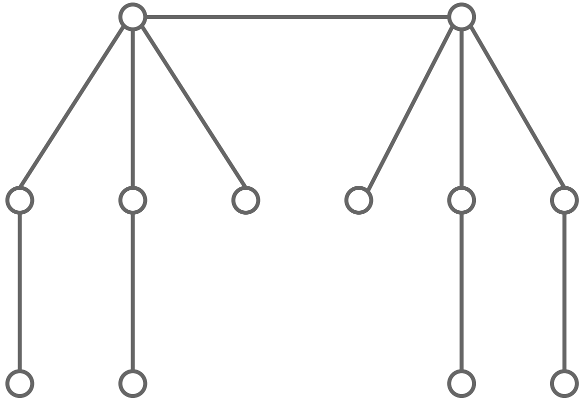
Dificuldades

A orientação reversa pode não fornecer uma coloração por orientação.



Dificuldades

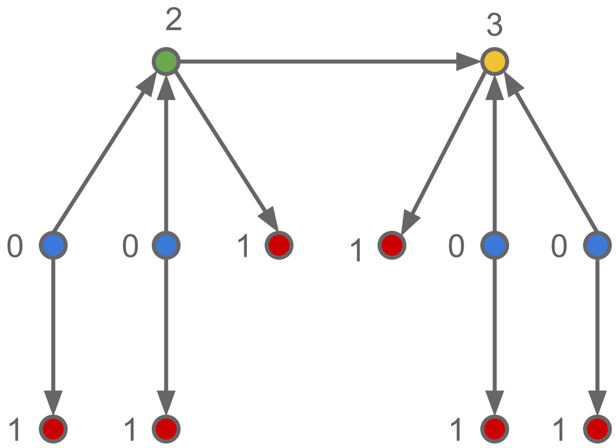
Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



$\vec{\chi}(G) = 3$

Dificuldades

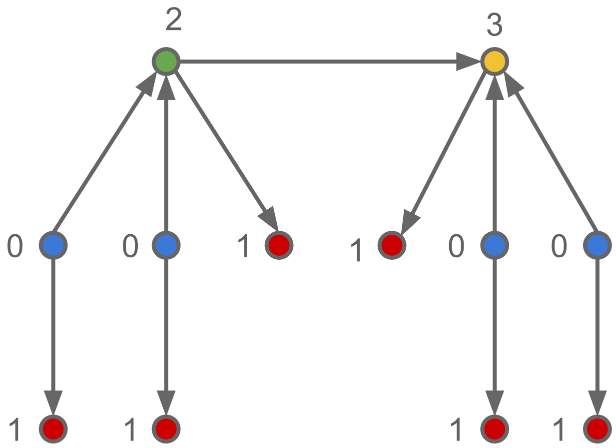
Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



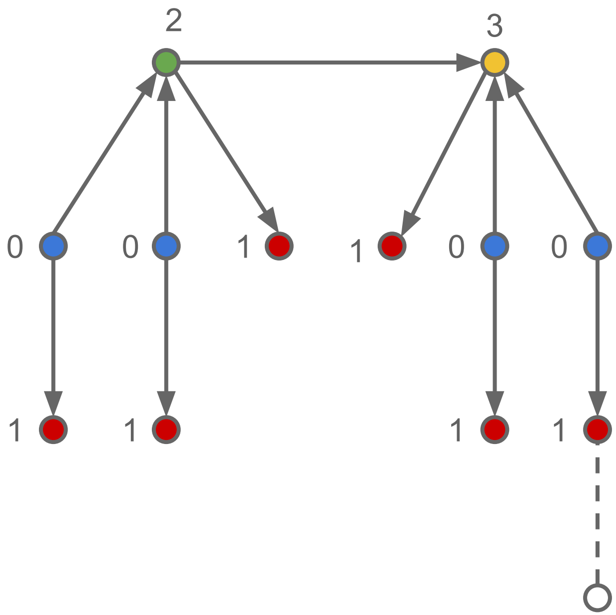
$\vec{\chi}(G) = 3$

Dificuldades

Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.

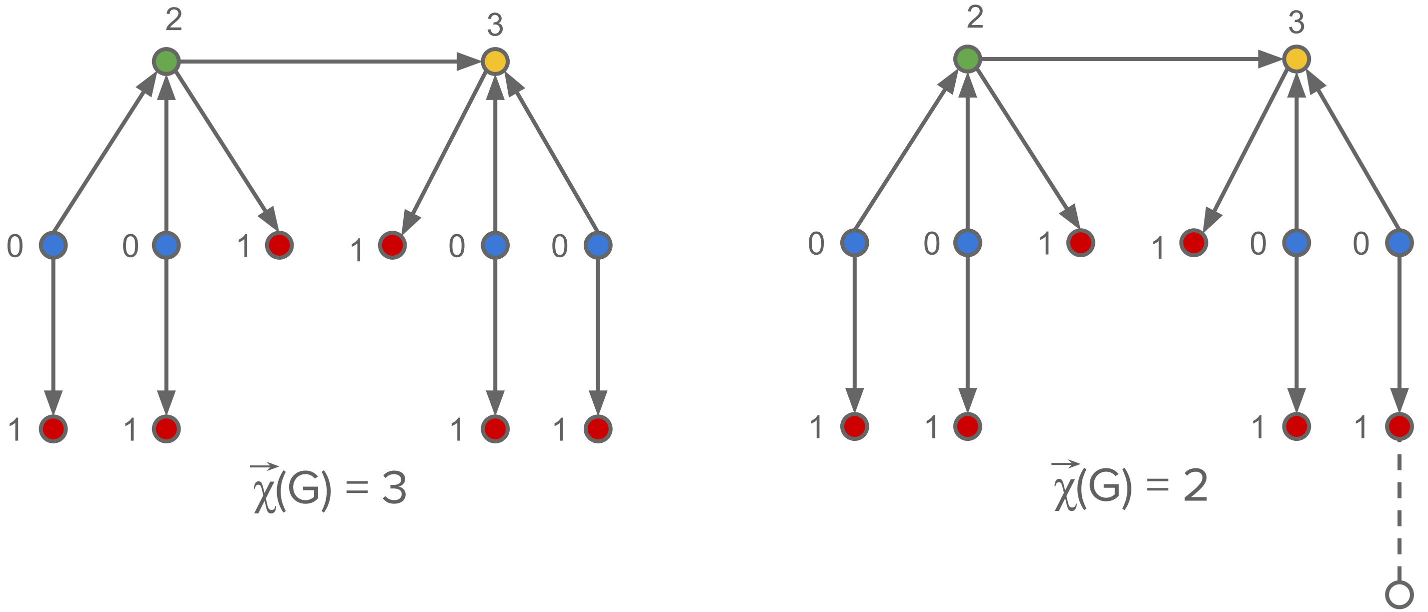


$\vec{\chi}(G) = 3$



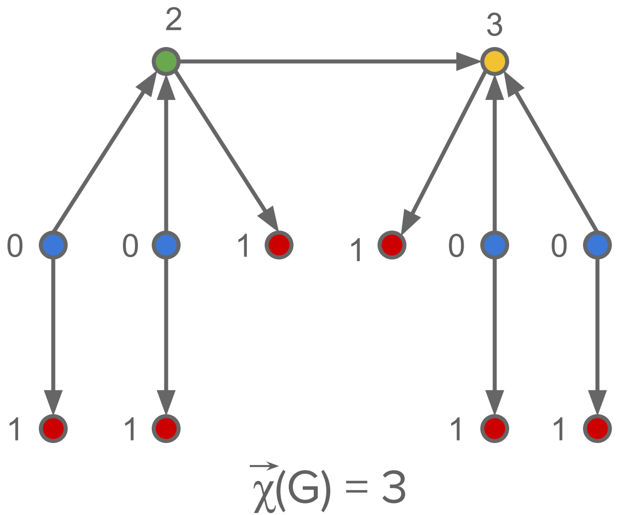
Dificuldades

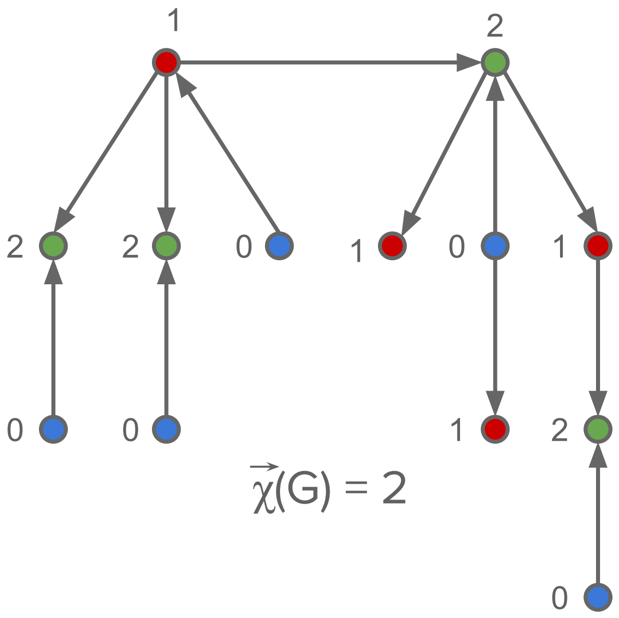
Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



Dificuldades

Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.





Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

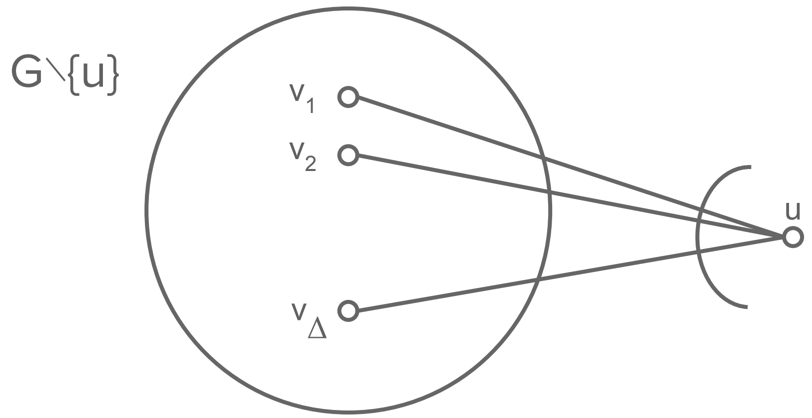
Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja G = (V, E) um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.



Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Nesta coloração, nenhum v_i tem cor Δ, pois eles teriam grau $d(v_i) \geq \Delta + 1$ em G.

Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

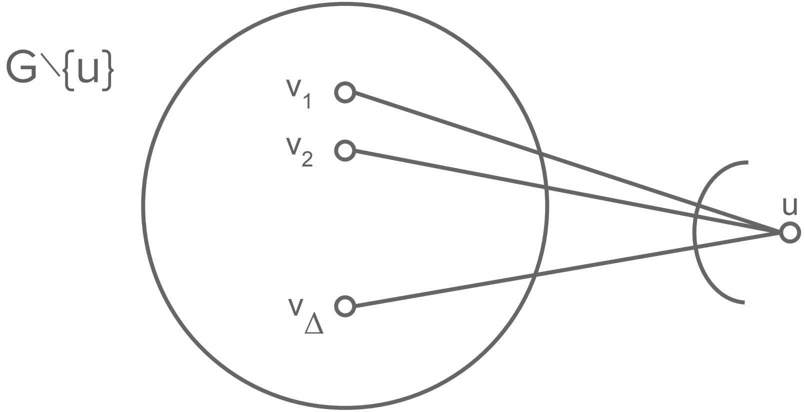
Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Nesta coloração, nenhum v_i tem cor Δ, pois eles teriam grau $d(v_i) \geq \Delta + 1$ em G.

Portanto, basta orientar todas as arestas de v_i para u e teremos uma coloração para G com maior cor Δ. Portanto, temos $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

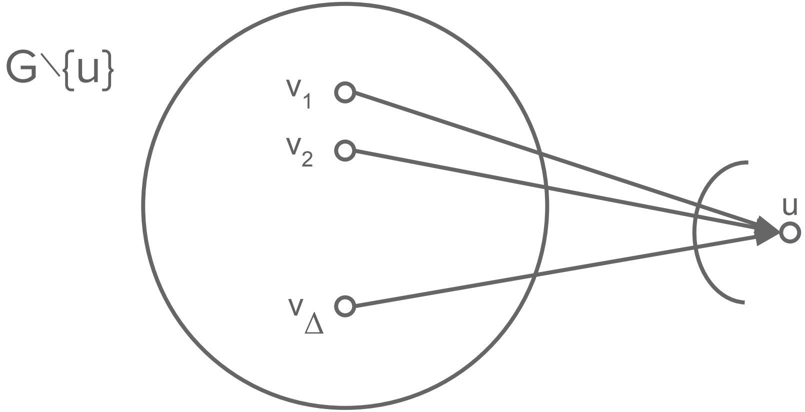
Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.



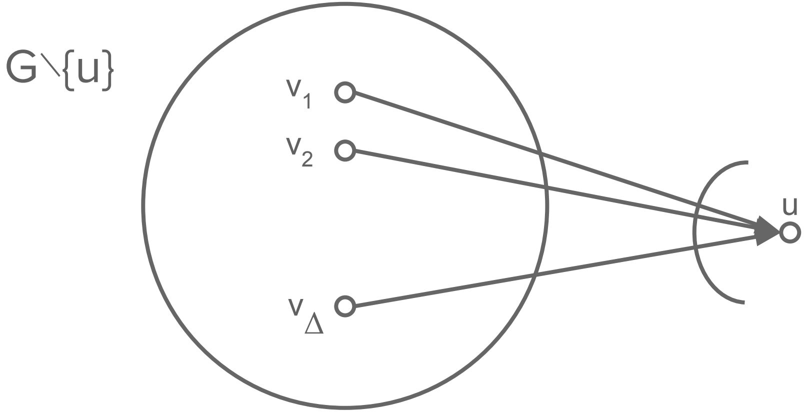
Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.



Coloração por orientação

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.



O caso base da indução consiste no grafo trivial, que claramente possui uma coloração, e $0 = \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G) = 0$.

$\square$

Coloração por orientação

Comparação com número cromático:

Temos a seguinte cota inferior:

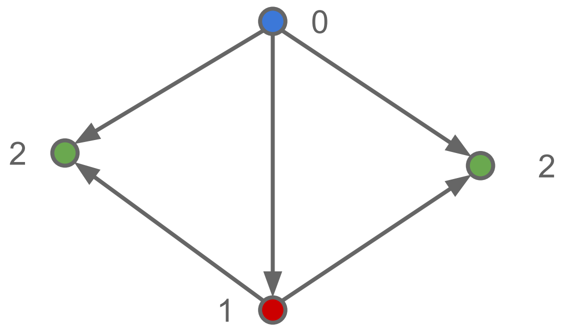
$$\chi(G) - 1 \leq \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$$

Coloração por orientação

Comparação com número cromático:

Temos a seguinte cota inferior:

$$\chi(G) - 1 \leq \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$$



$\chi(G) = 3$

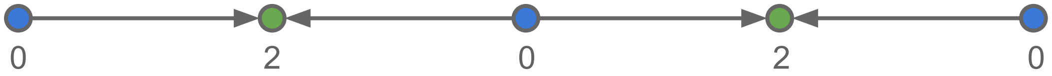
$\vec{\chi}(G) = 2$

Coloração por orientação

Comparação com número cromático:

Temos a seguinte cota inferior:

$$\chi(G) - 1 \leq \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$$



$\chi(G) = 2$

$\vec{\chi}(G) = 2$

Coloração por orientação

ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

Discrete Applied Mathematics 143 (2004) 374–378

DISCRETE APPLIED MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/dam

Notes

Minimizing maximum indegree

V. Venkateswaran

AT&T Laboratories, 200 Laurel Avenue, Middletown, NJ 07748, USA

Received 9 July 2001; received in revised form 9 July 2003; accepted 16 July 2003

Abstract

We study the problem of orienting the edges of a given simple graph so that the maximum indegree of nodes is minimized. We also develop an algorithm to produce such an extremal orientation on any given simple graph.

MSC: 05C35

Keywords: Graph theory; Extremal orientation

V. Venkateswaran / Discrete Applied Mathematics 143 (2004) 374 – 378

Caminho de triângulos

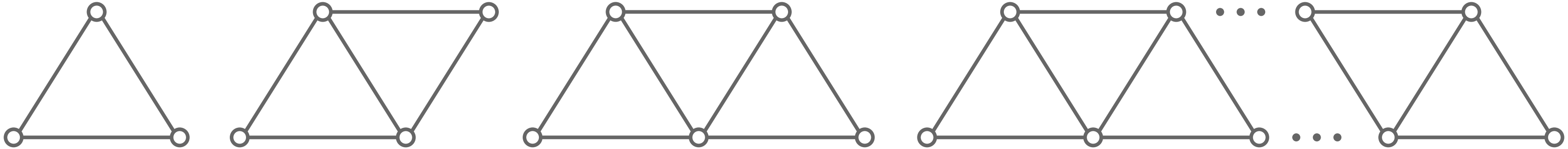
Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos, como abaixo:



T_1 T_2 T_3 T_n

Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos.

Obtivemos o seguinte resultado:

- $\vec{\chi}(T_i) = 2$, para $i = 1, 2$
- $\vec{\chi}(T_i) = 3$, para $i \geq 3$

Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos.

Obtivemos o seguinte resultado:

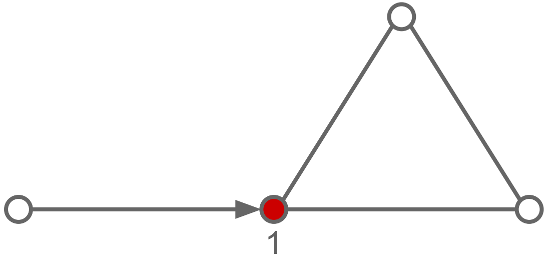
- $\vec{\chi}(T_i) = 2$, para $i = 1, 2$
- $\vec{\chi}(T_i) = 3$, para $i \geq 3$

Dentro de cada triângulo, cada vértice deve ter um cor diferente. Portanto $\vec{\chi}(T_i) \geq 2$.

Caminho de triângulos

Lema estrutural:

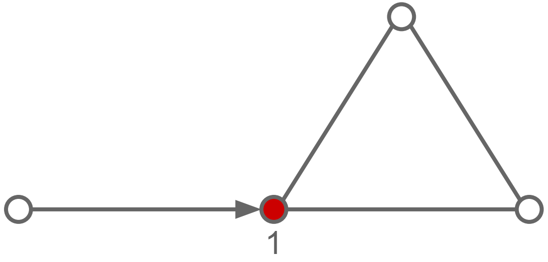
Seja T um triângulo, com um vértice de cor 1 devido a uma aresta externa ao triângulo.



Caminho de triângulos

Lema estrutural:

Seja T um triângulo, com um vértice de cor 1 devido a uma aresta externa ao triângulo. Esta estrutura não pode ocorrer em nenhuma orientação de G para gerar uma coloração com $\vec{\chi}(G) = 2$.

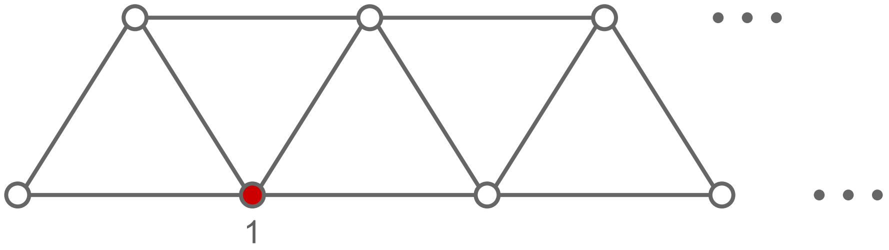


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

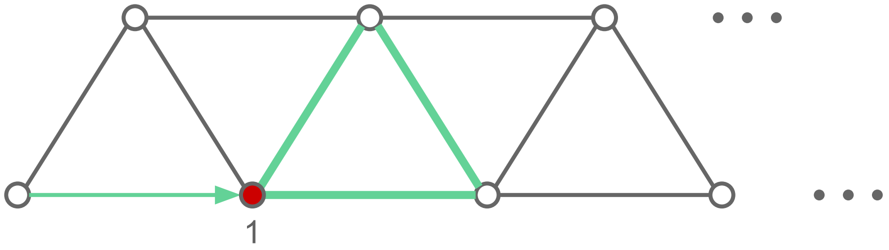


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

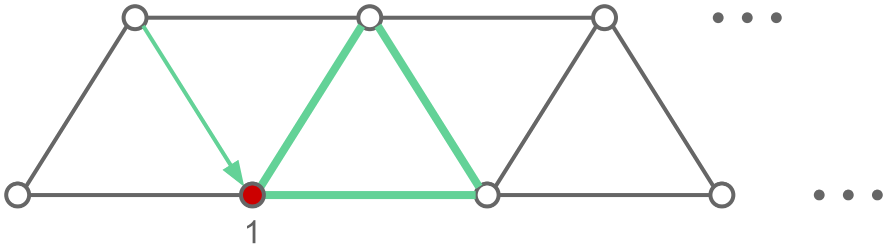


Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

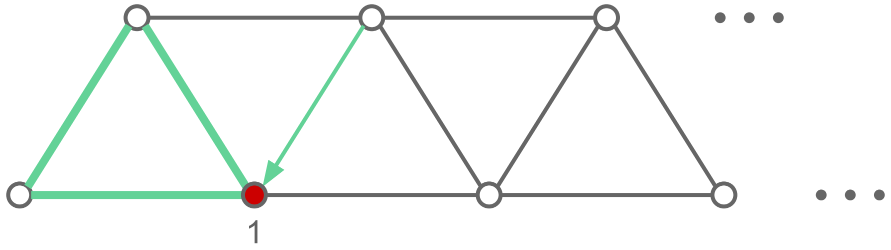


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

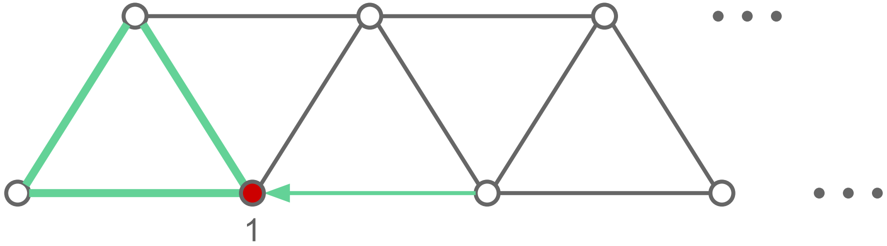


Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.



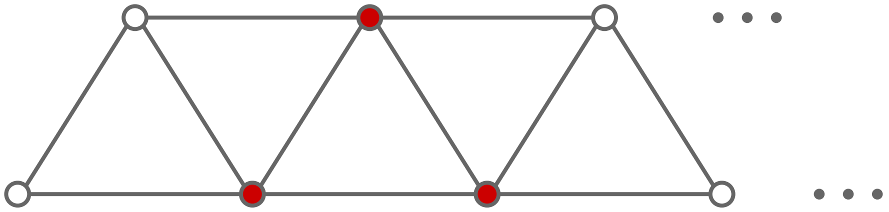
Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

Como o vértice *u* pode ser qualquer vértice do triângulo, nenhum pode ter a cor 1.



Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

Como o vértice *u* pode ser qualquer vértice do triângulo, nenhum pode ter a cor 1.

Portanto, precisamos da cor 3, sendo então $\vec{\chi}(T_i) \geq 3$.

Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

Como o vértice *u* pode ser qualquer vértice do triângulo, nenhum pode ter a cor 1.

Portanto, precisamos da cor 3, sendo então $\vec{\chi}(T_i) \geq 3$.

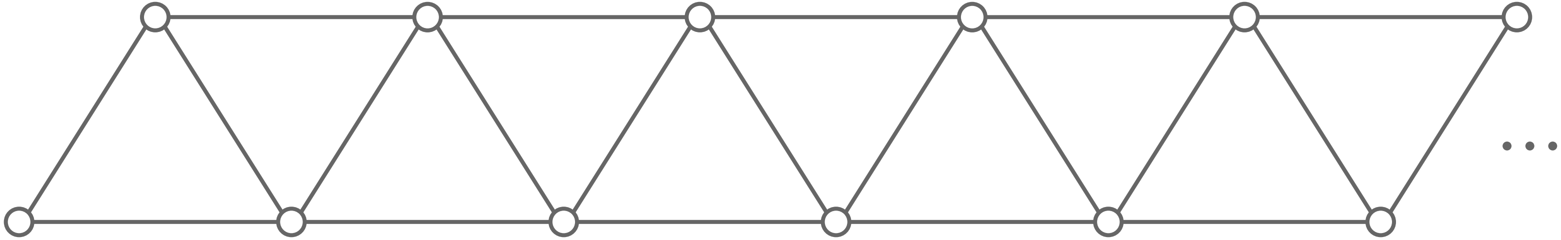
Para T_i , $i \leq 4$, a demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Caminho de triângulos

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.

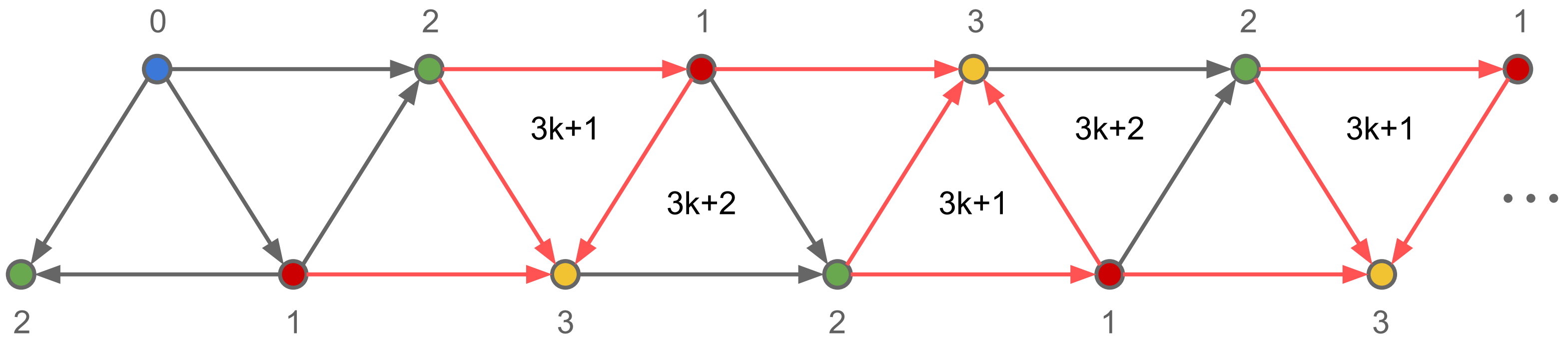
Caminho de triângulos

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.



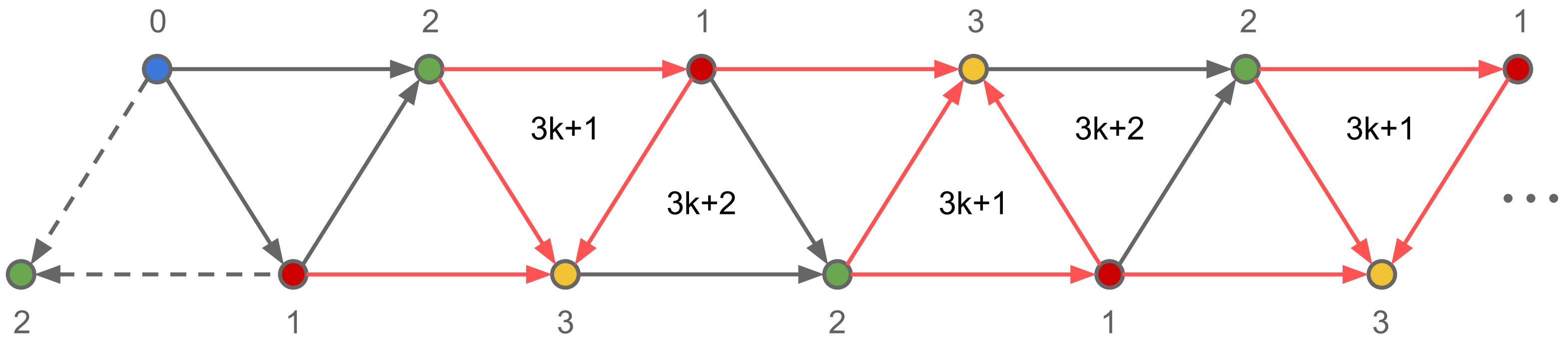
Caminho de triângulos

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.



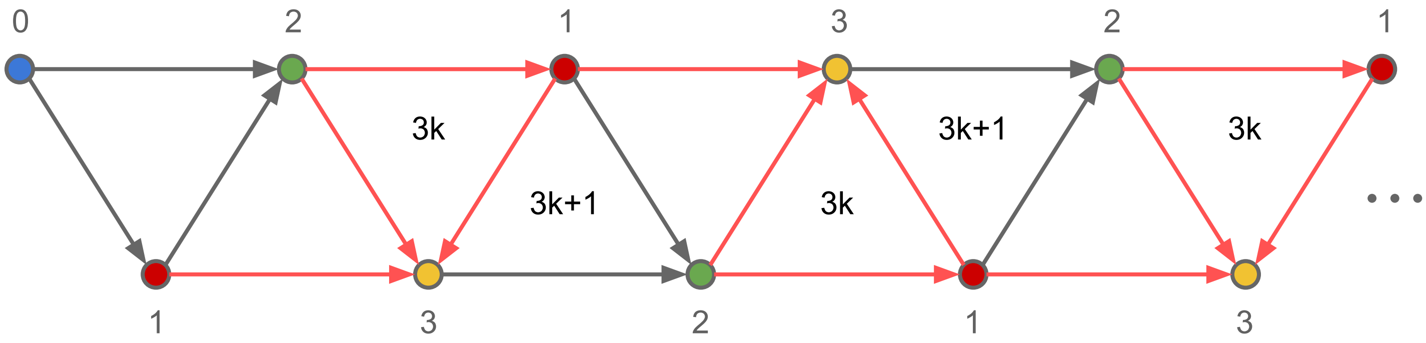
Caminho de triângulos

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.



Caminho de triângulos

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.



Árvores

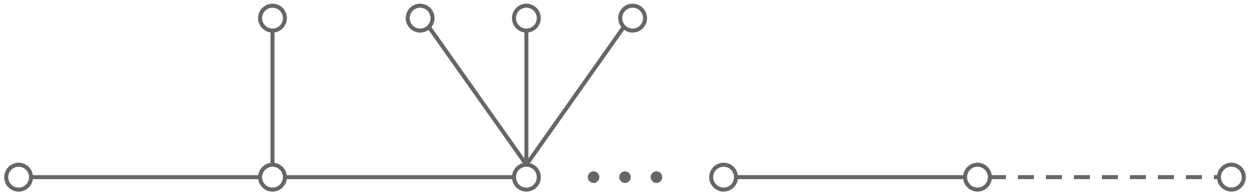
Árvores

- Grau máximo $\Delta(T)$
- Estrutura
  - Caterpillars
  - Árvores com “caminho central”

Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

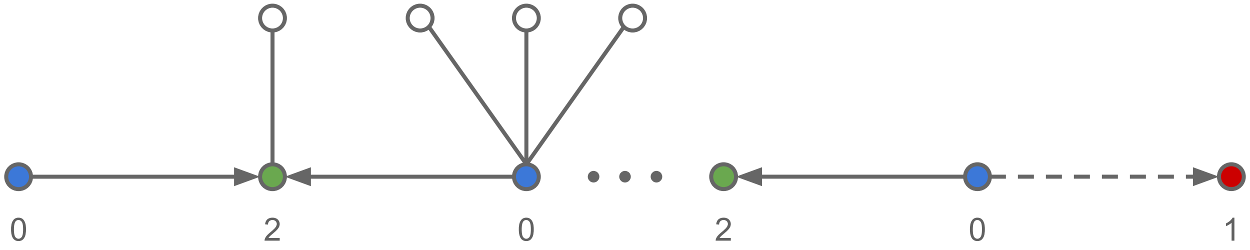
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

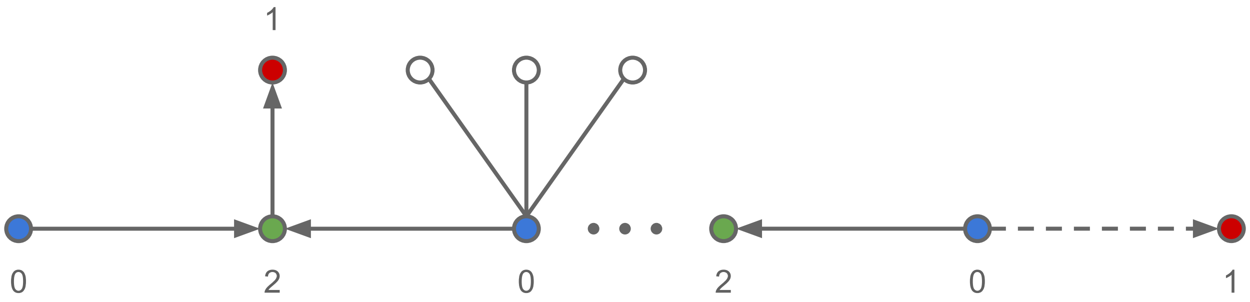
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

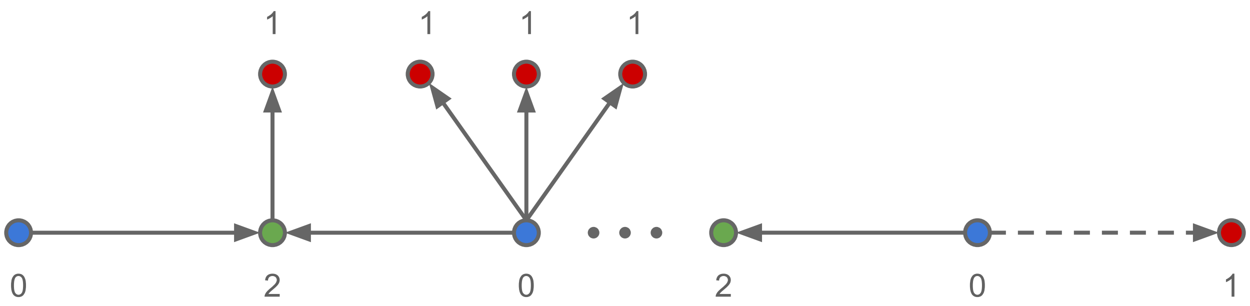
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

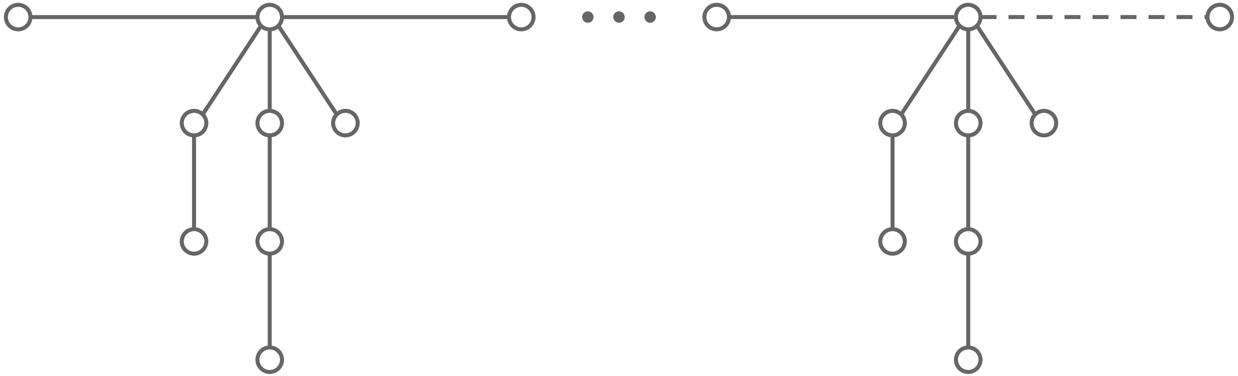
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, …



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

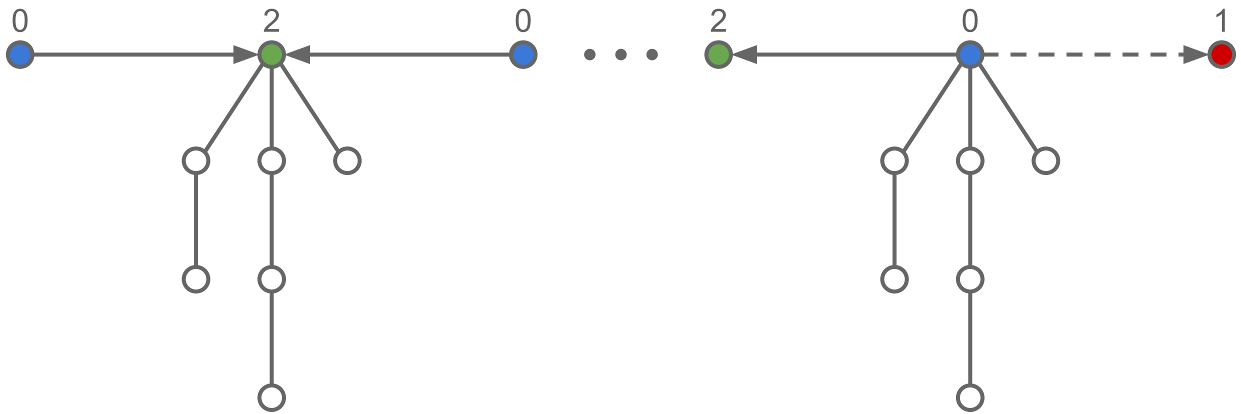
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

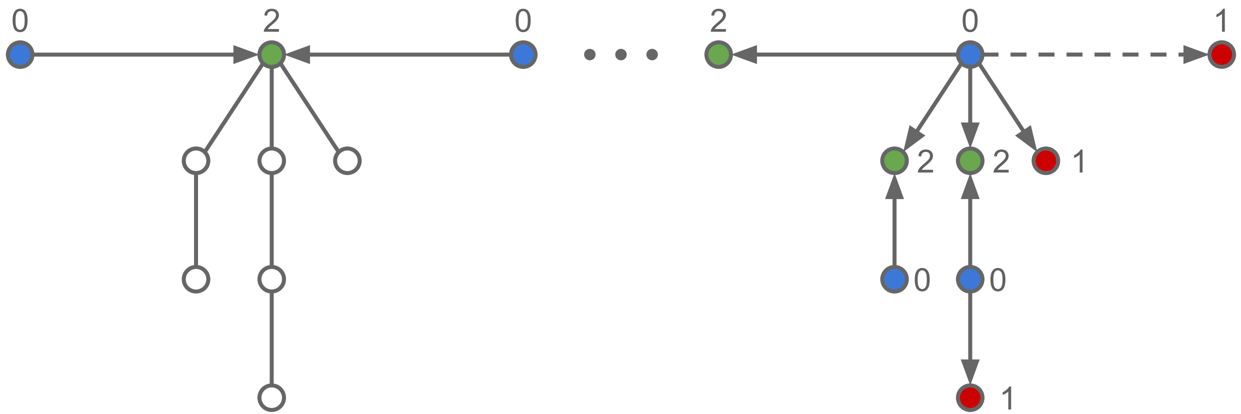
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

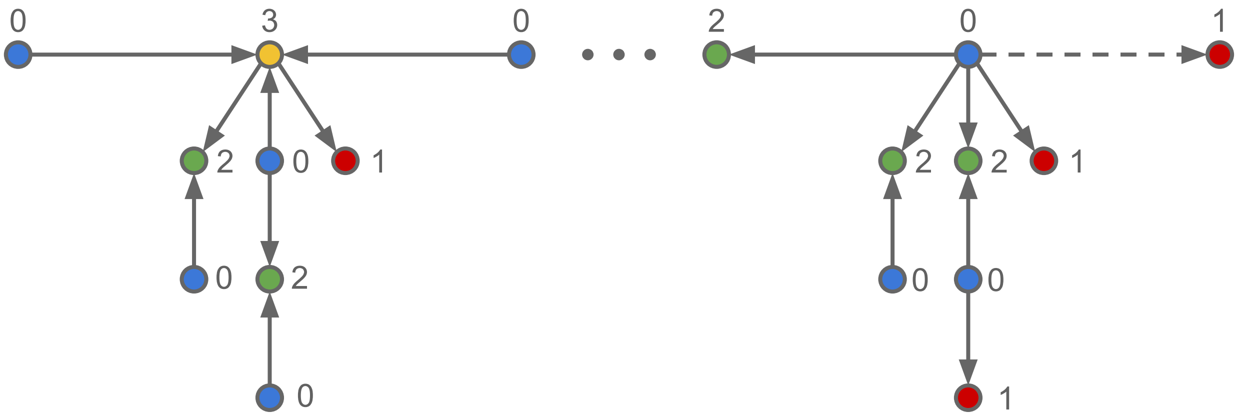
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

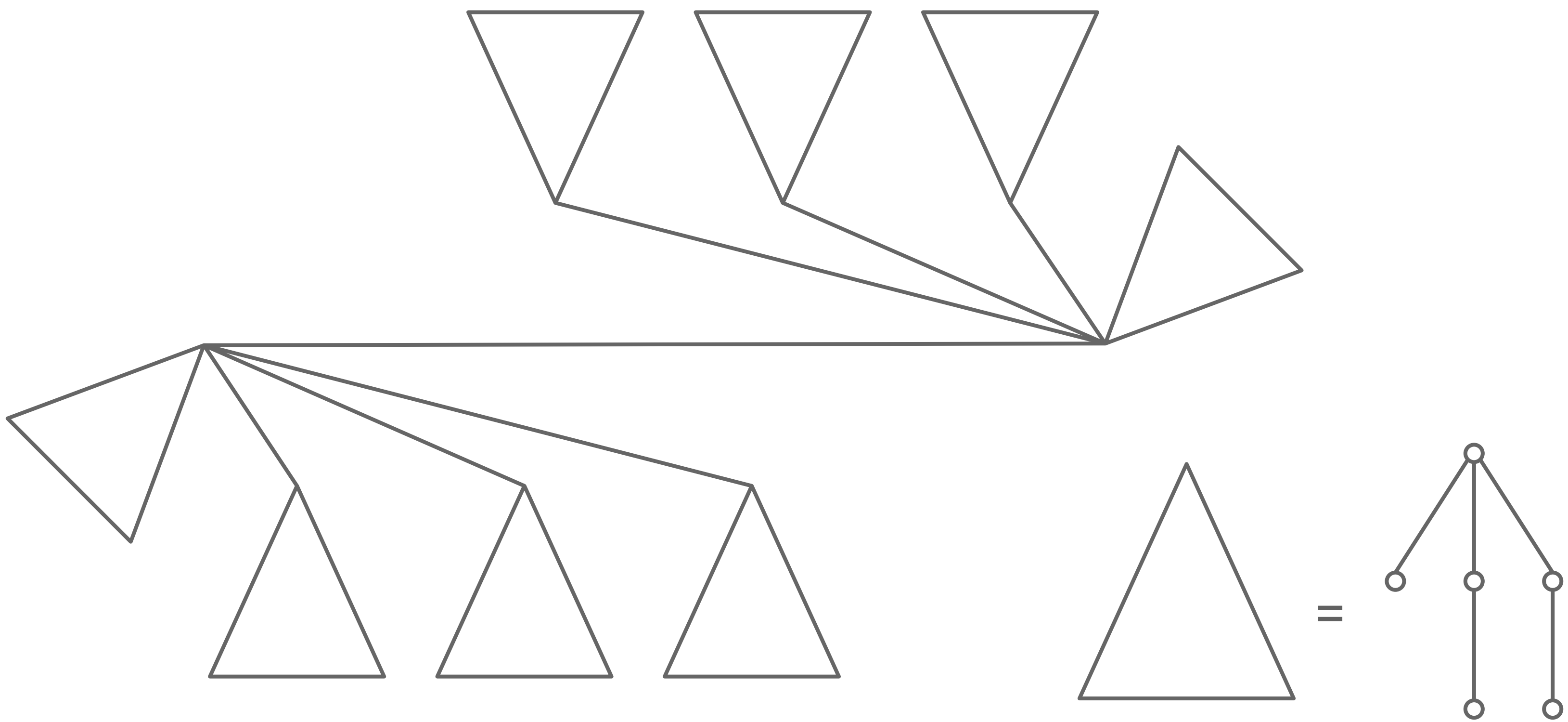
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Conjectura

Existe um inteiro k, tal que $\vec{\chi}$**(G) ≤ k**, para qualquer árvore.

$\overrightarrow{\chi}(T) = 4$



Trabalhos futuros

Trabalhos futuros

- Provar ou refutar a conjectura sobre árvores.
- Caracterizar as árvores com $\vec{\chi}(G) = 1$, $\vec{\chi}(G) = 2$, $\vec{\chi}(G) = 3$, $\vec{\chi}(G) = 4$, ... (?)
- Encontrar outras estruturas que impedem que $\vec{\chi}(G)$ assuma algum valor.

Obrigado!

Colorações por orientações de grafos

Bolsista: Tiago Carvalho G. Montalvão
Bacharelado em Ciência da Computação
PIBIC/UFRJ desde março de 2016

Orientadora: Prof^{a} Márcia R. Cerioli
Departamento de Ciência da Computação

19 de outubro de 2016
XXXVIII Jornada Giulio Massarani de Iniciação Científica, Tecnológica, Artística e Cultural