Colorações por orientações de grafos

Bolsista (PIBIC-UFRJ): Tiago Montalvão
Orientadora: Márcia Cerioli

19 de outubro de 2016

Definição do Problema

Definição do problema

Definimos a **cor por orientação** de um vértice *u* em um digrafo D como o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

Definição do problema

Definimos a **cor por orientação** de um vértice *u* em um digrafo D como o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

Uma **coloração** de D é uma configuração de cores nos vértices, de tal forma que dois vértices adjacentes possuem cores distintas.

Definição do problema

Definimos a **cor por orientação** de um vértice *u* em um digrafo D como o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

Uma **coloração** de D é uma configuração de cores nos vértices, de tal forma que dois vértices adjacentes possuem cores distintas.

Uma **coloração por orientação** de um grafo G consiste em orientar as arestas em E(G) de tal maneira que as cores por orientação dos vértices de V(G) formem uma coloração.

Definição do problema

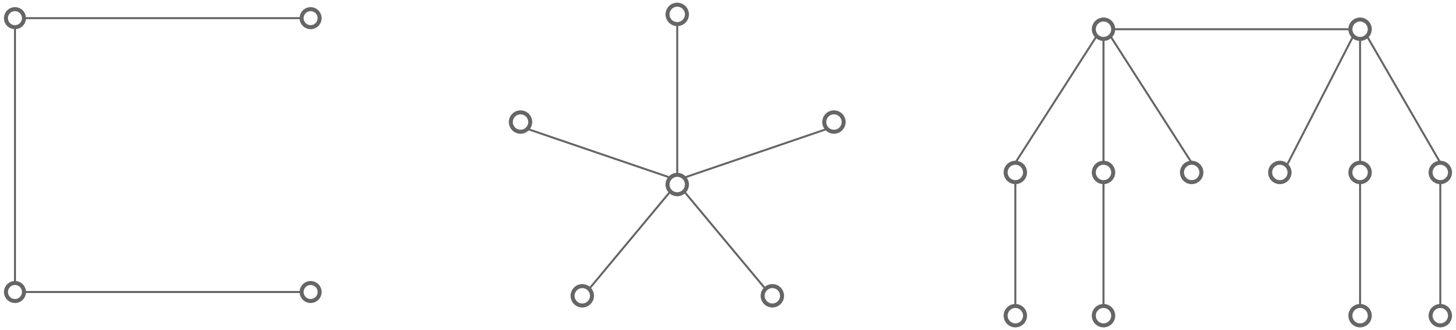
Definimos a **cor por orientação** de um vértice *u* em um digrafo D como o grau de entrada $d_i(u)$ em D.

Uma **coloração** de D é uma configuração de cores nos vértices, de tal forma que dois vértices adjacentes possuem cores distintas.

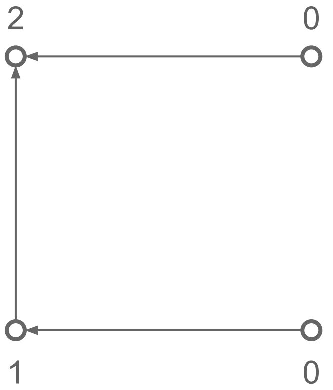
Uma **coloração por orientação** de um grafo G consiste em orientar as arestas em E(G) de tal maneira que as cores por orientação dos vértices de V(G) formem uma coloração.

Dado um grafo G = (V, E), o problema estudado consiste em orientar as arestas em E de tal forma a criar uma coloração com a menor cor máxima $\vec{\chi}(\mathbf{G})$ possível.

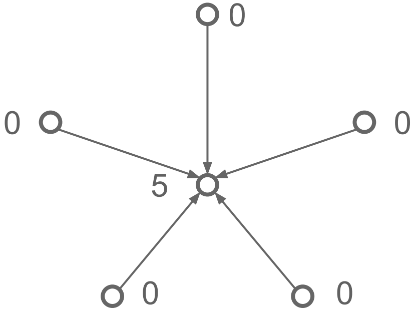
Definição do problema



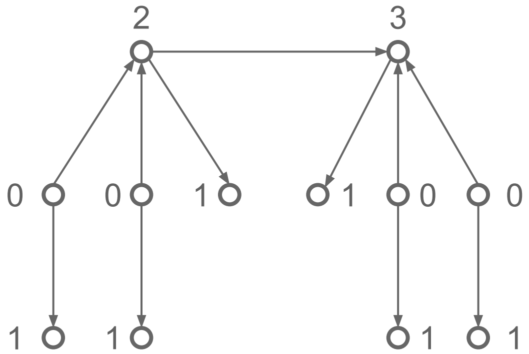
Definição do problema



$\vec{\chi}(G) \leq 2$

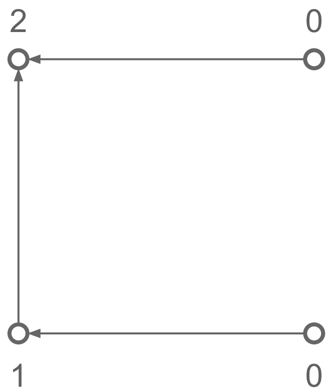


$\vec{\chi}(G) \leq 5$

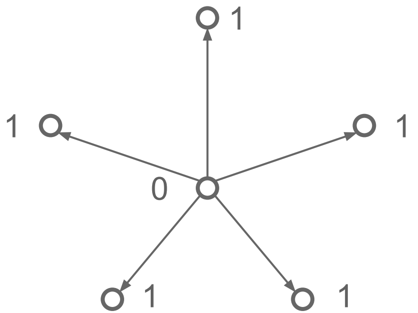


$\vec{\chi}(G) \leq 3$

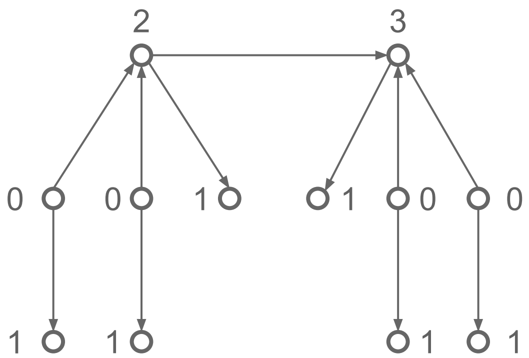
Definição do problema



$\vec{\chi}(G) \leq 2$

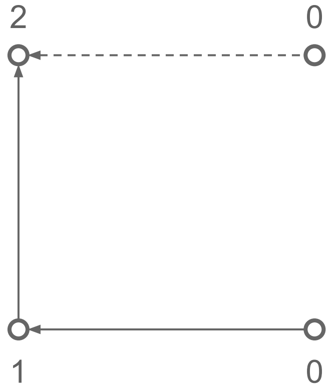


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

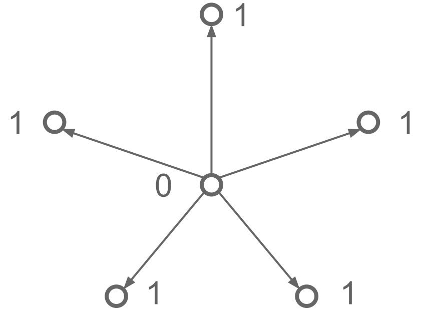


$\vec{\chi}(G) \leq 3$

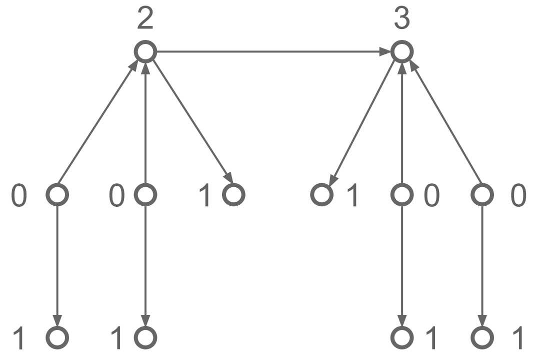
Definição do problema



$\vec{\chi}(G) \leq 2$

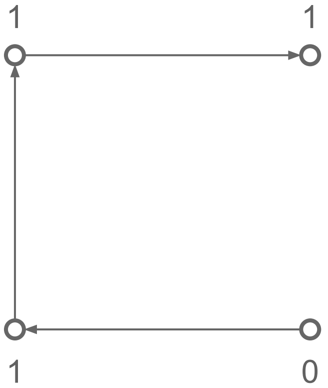


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

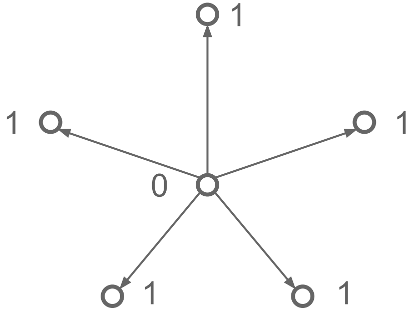


$\vec{\chi}(G) \leq 3$

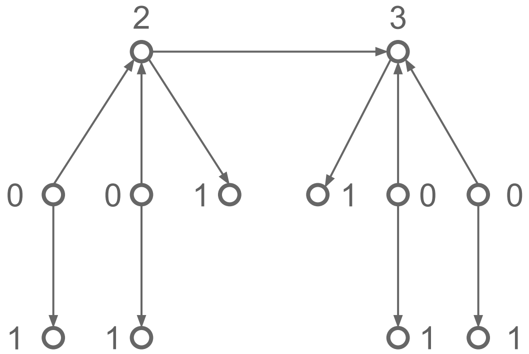
Definição do problema



$\vec{\chi}(G) \leq ?$

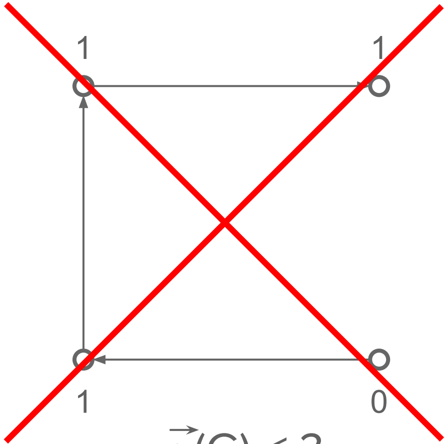


$\vec{\chi}(G) \leq 1$

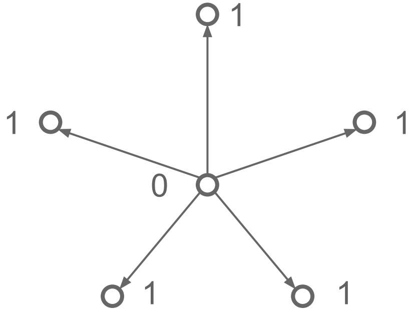


$\vec{\chi}(G) \leq 3$

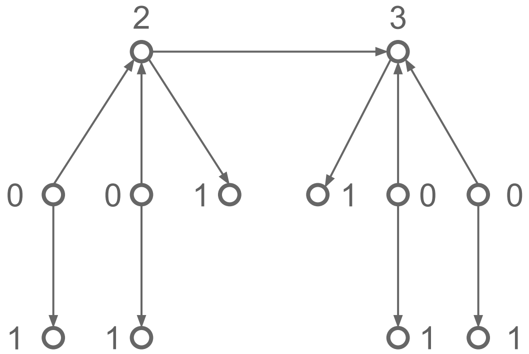
Definição do problema



$\vec{\chi}(G) \leq ?$



$\vec{\chi}(G) \leq 1$



$\vec{\chi}(G) \leq 3$

Definição do problema

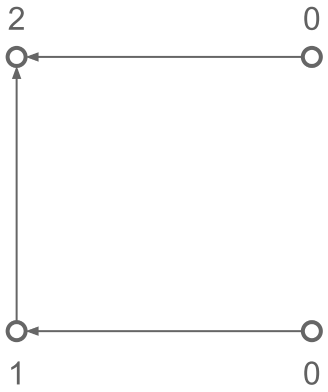
Dificuldades:

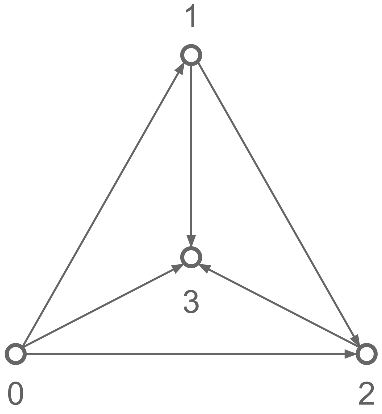
- Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.
- O grafo reverso pode não apresentar uma coloração.
- Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.

Definição do problema

Dificuldades:

- Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.

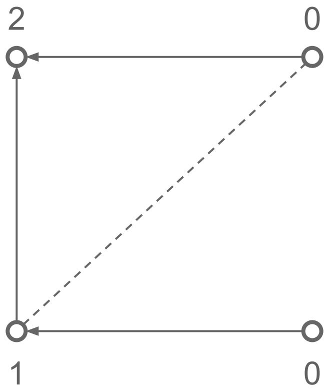




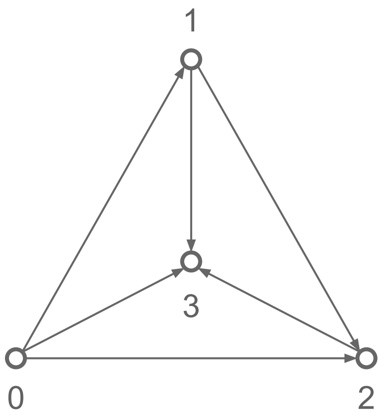
Definição do problema

Dificuldades:

- Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.



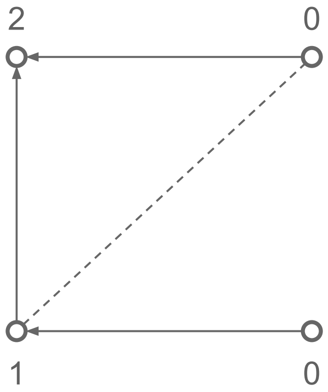
Inserção



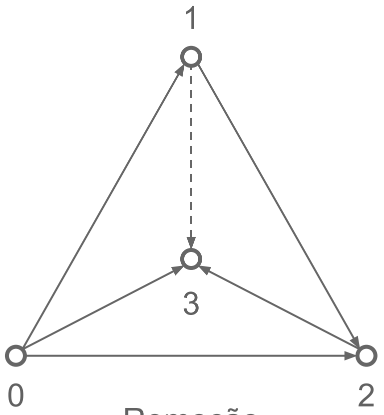
Definição do problema

Dificuldades:

- Inserção e remoção de arestas mudam completamente a estrutura do grafo.



Inserção

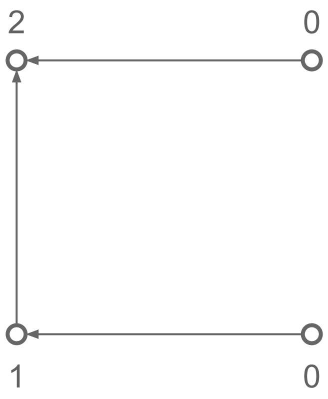


Remoção

Definição do problema

Dificuldades:

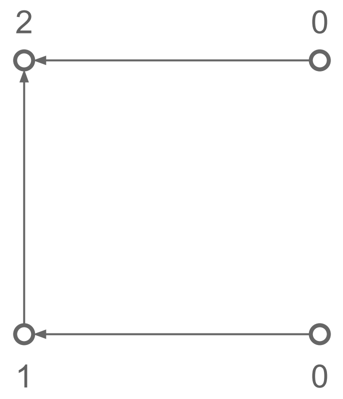
- O grafo reverso pode não apresentar uma coloração.

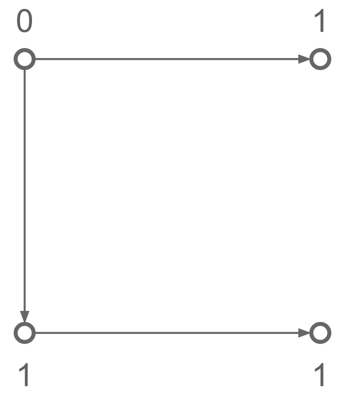


Definição do problema

Dificuldades:

- O grafo reverso pode não apresentar uma coloração.

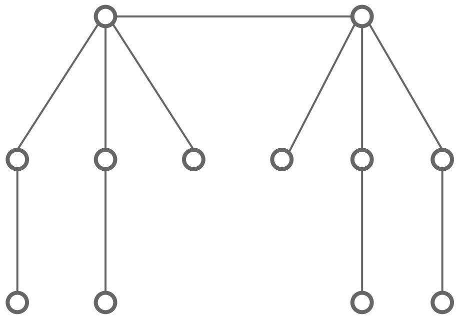




Definição do problema

Dificuldades:

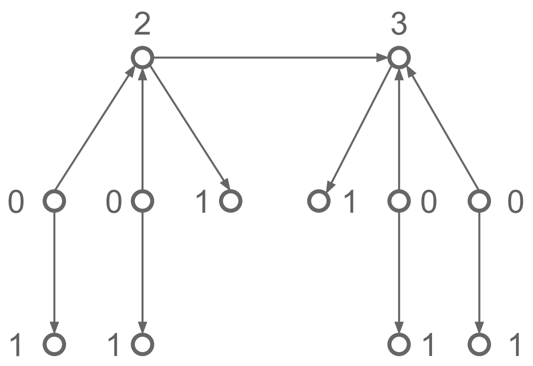
- Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



Definição do problema

Dificuldades:

- Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.

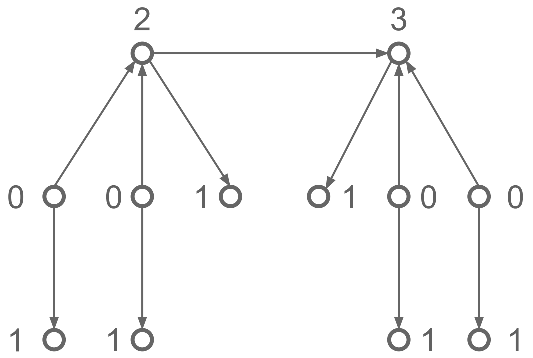


$\vec{\chi}(G) = 3$

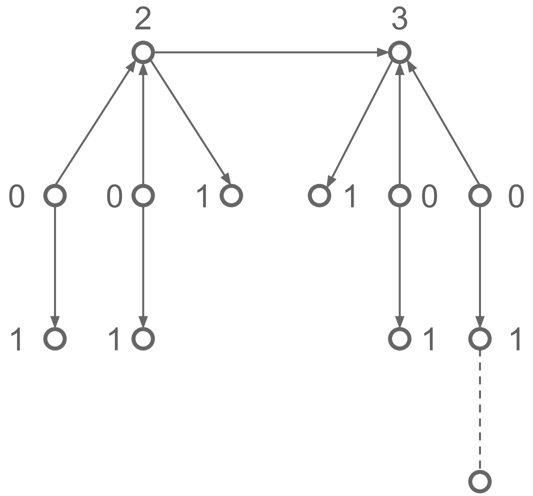
Definição do problema

Dificuldades:

- Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



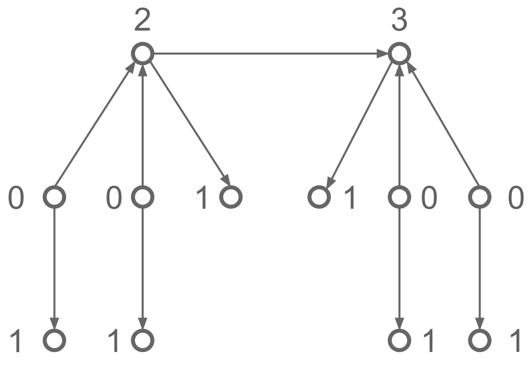
$\vec{\chi}(G) = 3$



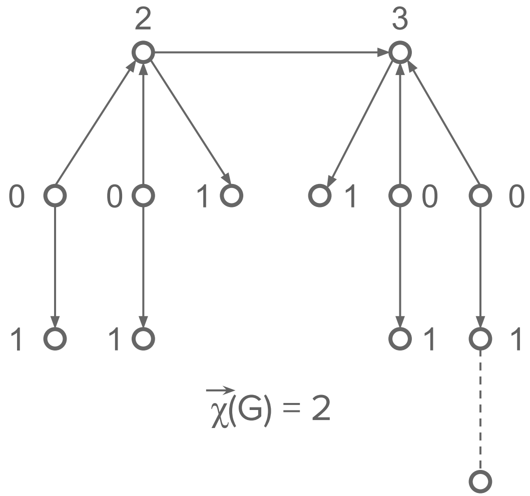
Definição do problema

Dificuldades:

- Subgrafos não dão informações sobre a coloração do grafo.



$\vec{\chi}(G) = 3$



$\vec{\chi}(G) = 2$

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

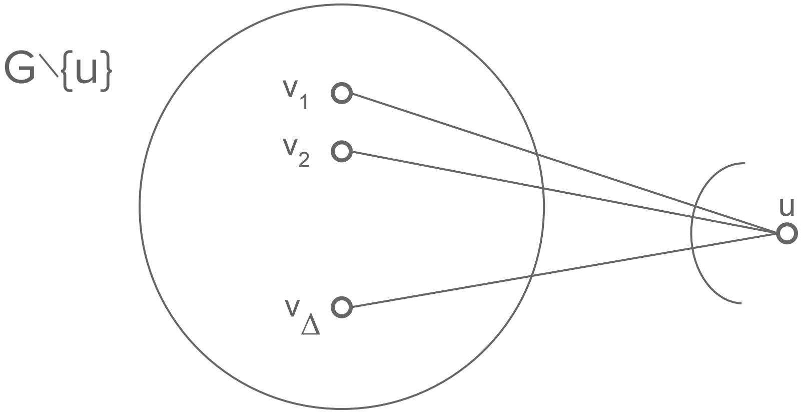
Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.



Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Nesta coloração, nenhum v_i tem cor Δ, pois eles teriam grau $d(v_i) \geq \Delta + 1$ em G.

Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. A demonstração segue por indução em $|V|$.

Considere $u \in V$, tal que $d(u) = \Delta(G)$ e seja $v_i \in N(u)$.

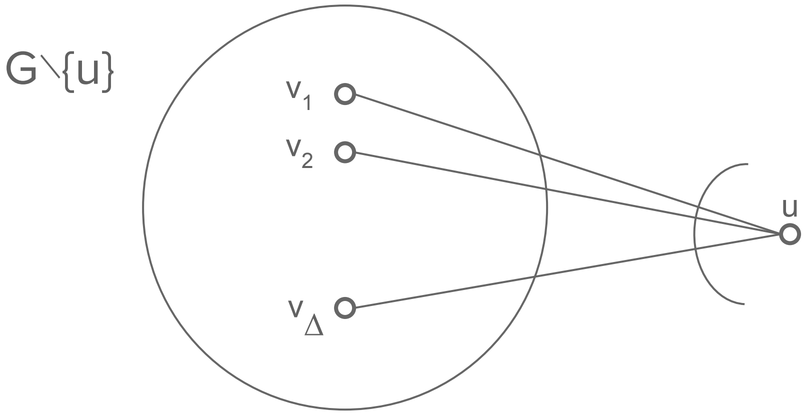
Pela hipótese de indução, $G \setminus \{u\}$ possui uma coloração por orientação.

Nesta coloração, nenhum v_i tem cor Δ, pois eles teriam grau $d(v_i) \geq \Delta + 1$ em G.

Portanto, basta orientar todas as arestas de v_i para u e teremos uma coloração para G com maior cor Δ. Portanto, temos $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

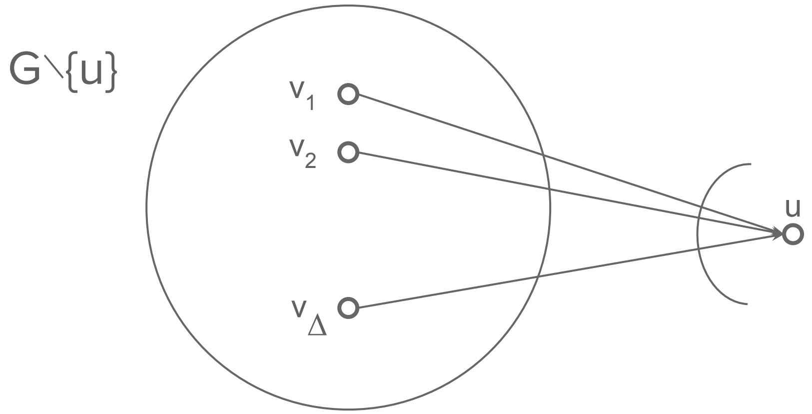
Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.



Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.



Definição do problema

O problema está bem definido para qualquer grafo G e $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

O caso base da indução consiste no grafo trivial, que claramente possui uma coloração, e $0 = \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G) = 0$.

$\square$

Definição do problema

Comparação com número cromático de G.

Como a coloração por orientação é uma coloração, temos que $\chi(G) \leq \vec{\chi}(G) + 1$.

Juntando com a informação anterior, temos que $\chi(G) - 1 \leq \vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$.

Caminho de triângulos

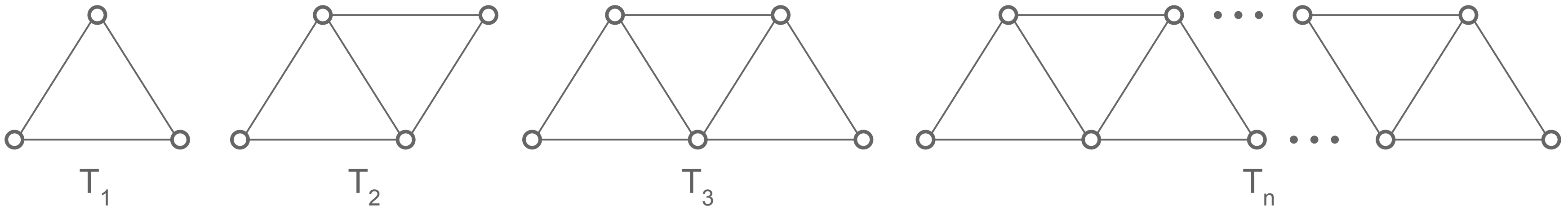
Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos, como abaixo:



Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos.

Obtivemos o seguinte resultado:

- $\vec{\chi}(T_i) = 2$, para $i = 1, 2$
- $\vec{\chi}(T_i) = 3$, para $i \geq 3$

Caminho de triângulos

A primeira classe de grafos estudada foi a de caminho de triângulos.

Seja T_i o caminho com i triângulos.

Obtivemos o seguinte resultado:

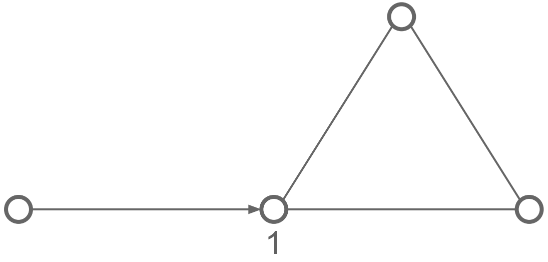
- $\vec{\chi}(T_i) = 2$, para $i = 1, 2$
- $\vec{\chi}(T_i) = 3$, para $i \geq 3$

Dentro de cada triângulo, cada vértice deve ter um cor diferente. Portanto $\vec{\chi}(T_i) \geq 2$.

Caminho de triângulos

Lema estrutural:

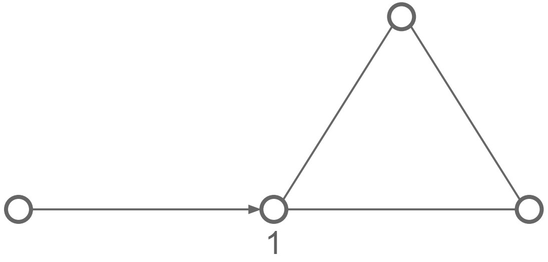
Seja T um triângulo, com um vértice de cor 1 devido a uma aresta externa ao triângulo.



Caminho de triângulos

Lema estrutural:

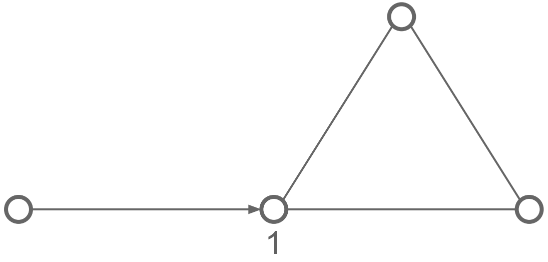
Seja T um triângulo, com um vértice de cor 1 devido a uma aresta externa ao triângulo. Esta configuração não pode existir em nenhuma orientação de G para gerar uma coloração com $\vec{\chi}(G) = 2$.



Caminho de triângulos

Prova:

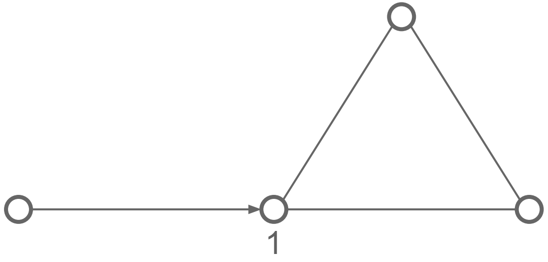
Os demais vértices do triângulo devem ter as cores 0 e 2.



Caminho de triângulos

Prova:

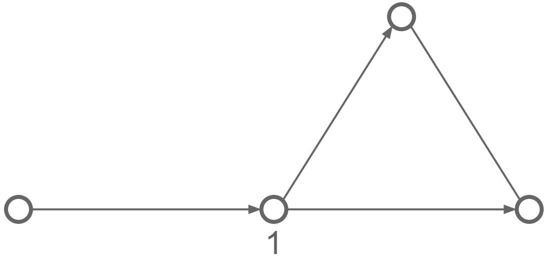
Os demais vértices do triângulo devem ter as cores 0 e 2. Mas como o vértice está fixado com cor 1 com aresta externa, as arestas do triângulo incidentes a ele estarão saindo dele.



Caminho de triângulos

Prova:

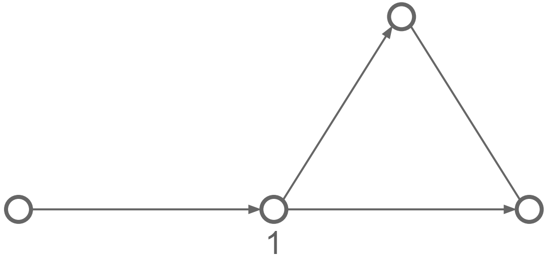
Os demais vértices do triângulo devem ter as cores 0 e 2. Mas como o vértice está fixado com cor 1 com aresta externa, as arestas do triângulo incidentes a ele estarão saindo dele.



Caminho de triângulos

Prova:

Os demais vértices do triângulo devem ter as cores 0 e 2. Mas como o vértice está fixado com cor 1 com aresta externa, as arestas do triângulo incidentes a ele estarão saindo dele. Mas isso já impede um vértice de ter cor 0.



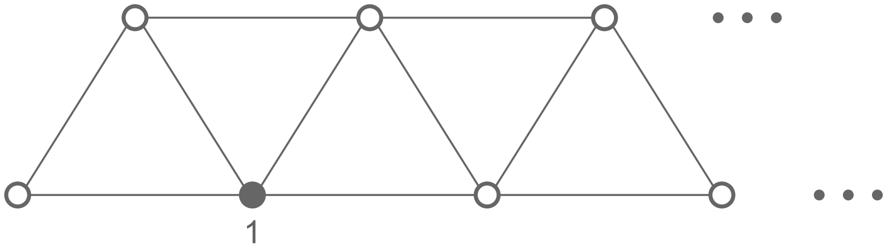
□

Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

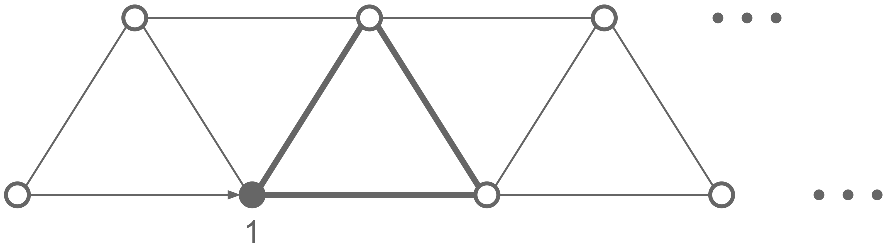


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

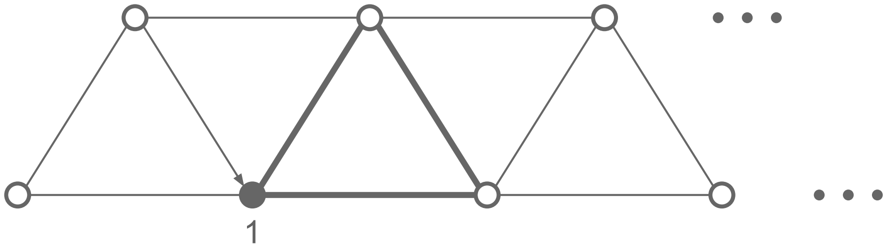


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

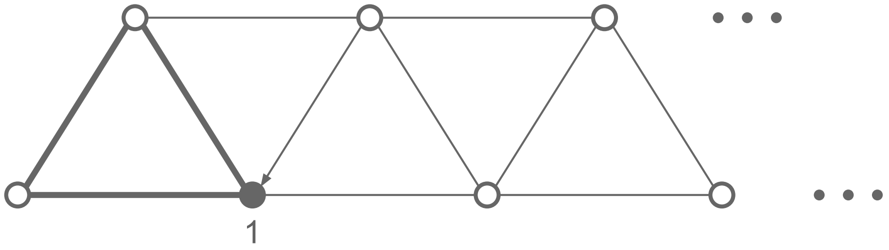


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

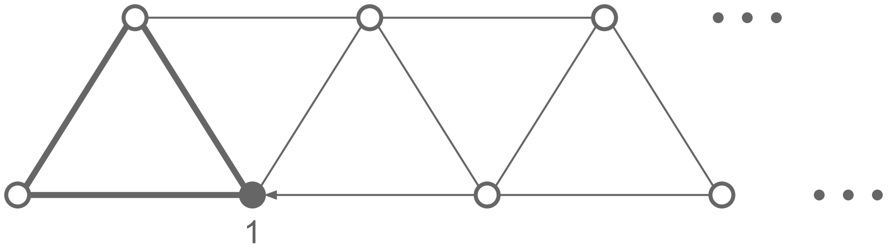


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.



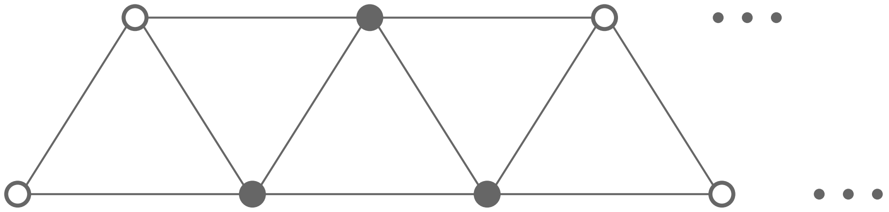
Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

Como o vértice *u* pode ser qualquer vértice do triângulo, nenhum pode ter a cor 2.



Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \geq 5$.

Seja *u* um vértice de grau 4.

Pelo lema, *u* não pode ter a cor 1.

Como o vértice *u* pode ser qualquer vértice do triângulo, nenhum pode ter a cor 2.

Portanto, precisamos da cor 3, sendo então $\vec{\chi}(T_i) \geq 3$.

Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

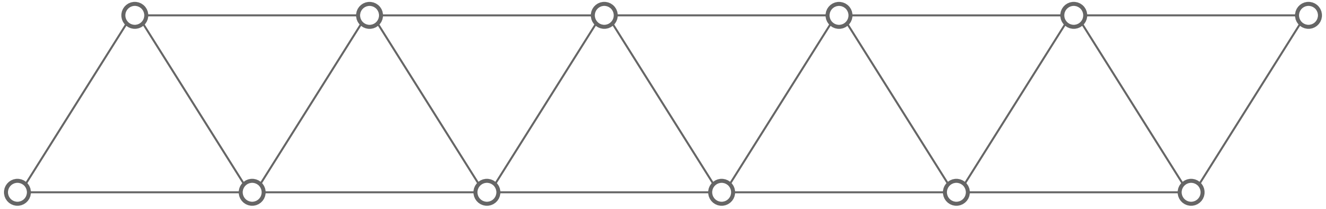
Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.

Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.

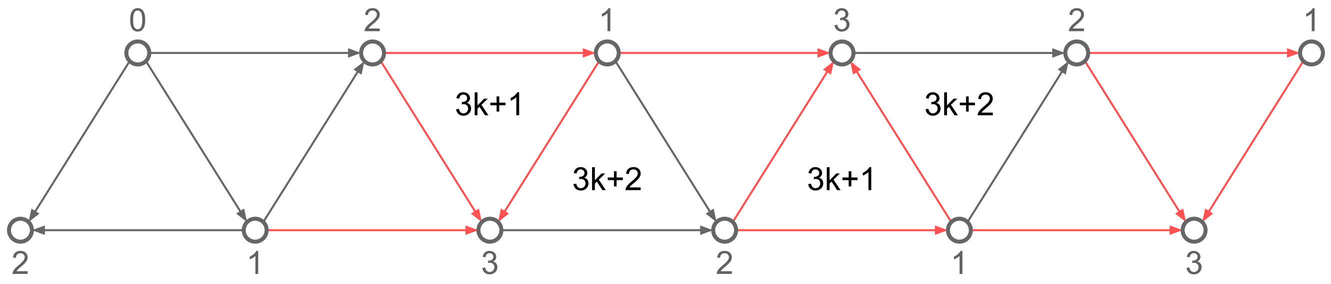


Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.

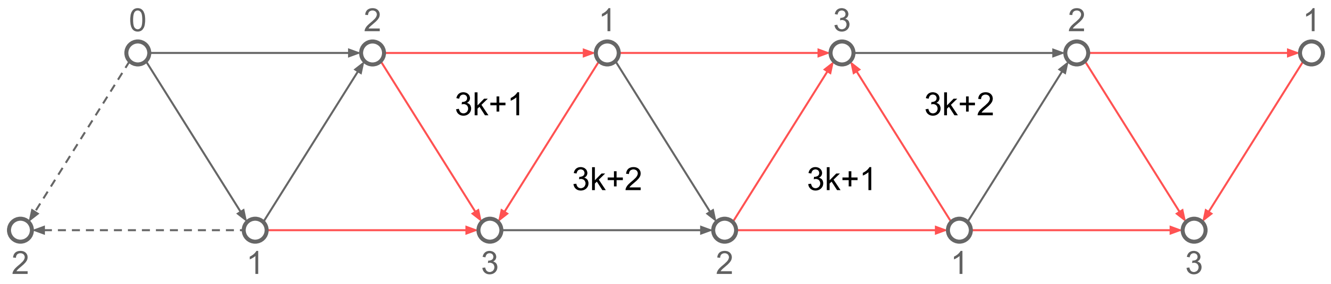


Caminho de triângulos

Seja T_i, $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.

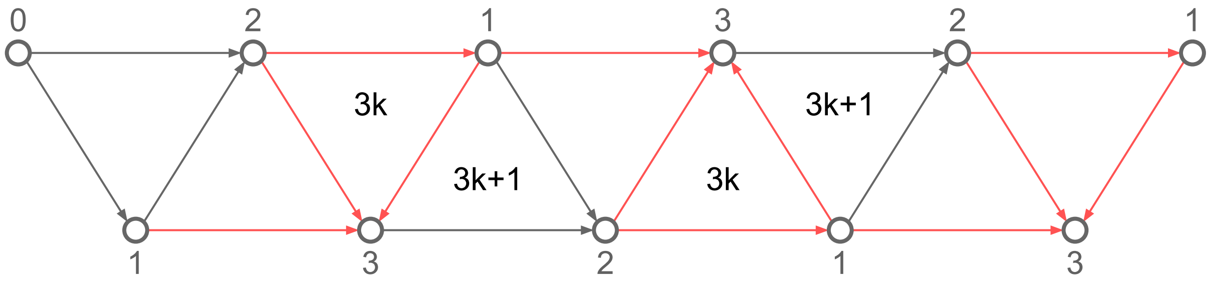


Caminho de triângulos

Seja T_i , $i \leq 4$.

A demonstração se dá de maneira exaustiva, tirando vantagem da simetria do grafo.

Basta agora apresentar uma coloração com $\vec{\chi}(T_i) = 3$.



Árvores

Árvores

Esforço atualmente voltados para árvores.

Classes estudadas:

- Caterpillars
- Lobsters
- Árvores com “caminho central”

Caterpillars

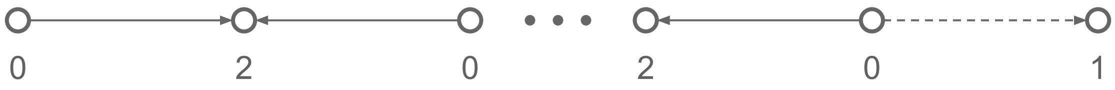
Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...

Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

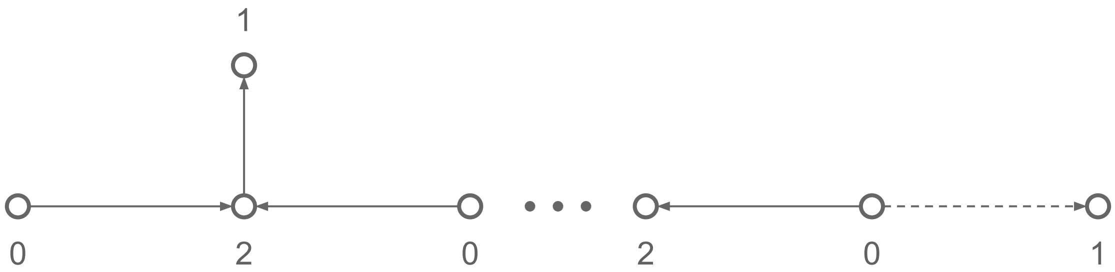
Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...

Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

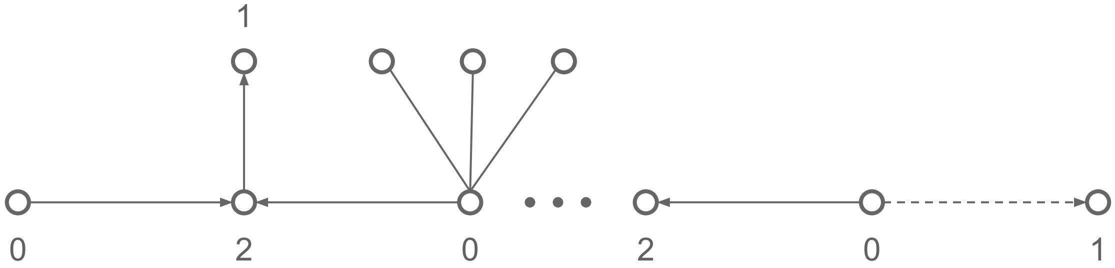
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

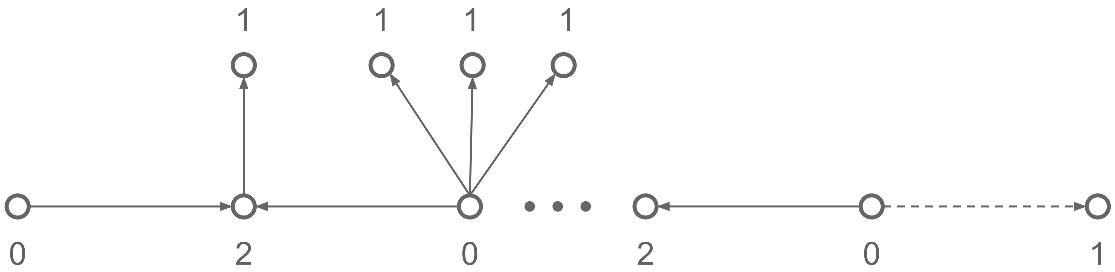
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Caterpillars

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) = 2$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Lobsters

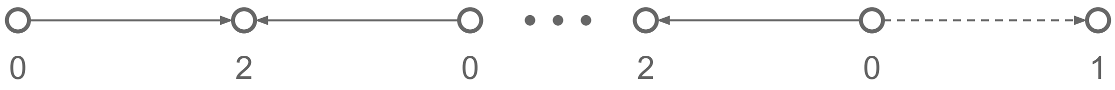
Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...

Lobsters

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

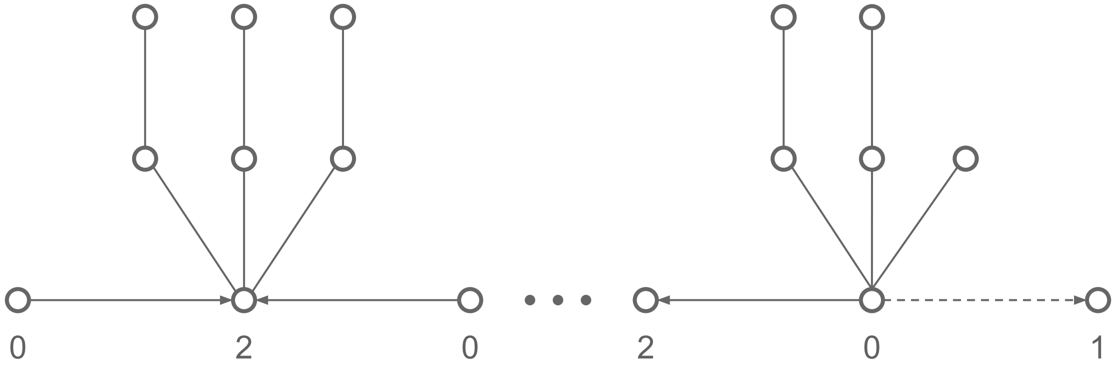
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Lobsters

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

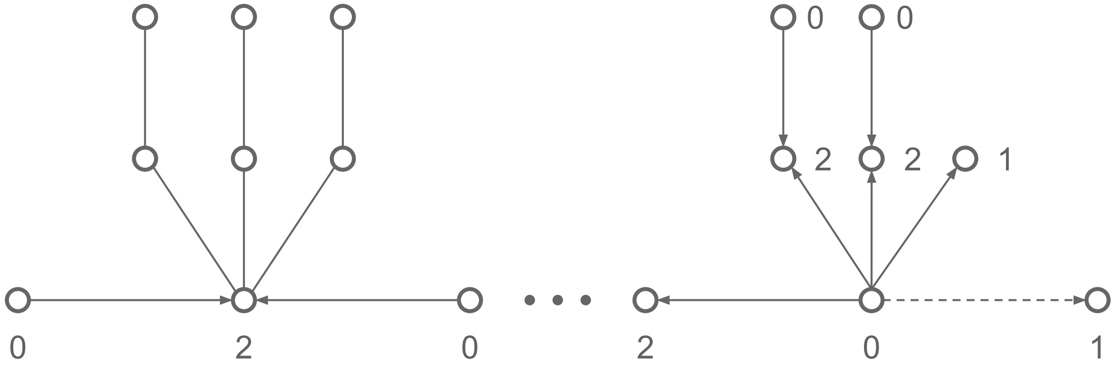
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Lobsters

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

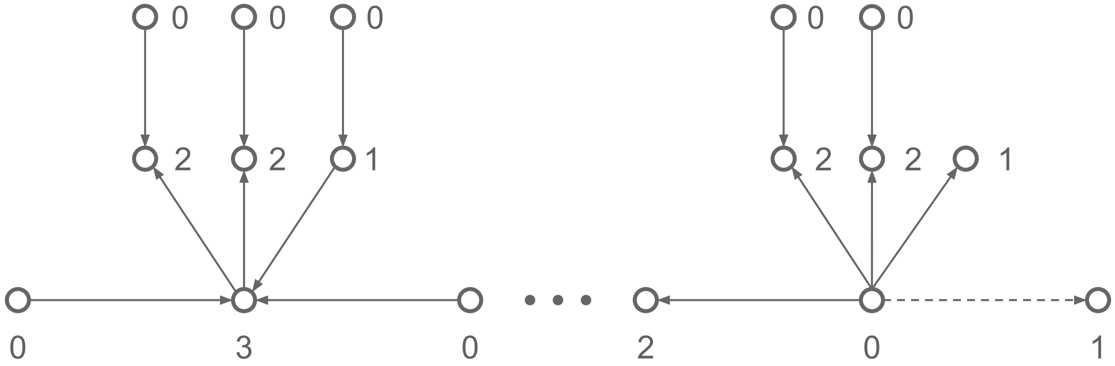
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Lobsters

Para esta classe de árvores, podemos mostrar que $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

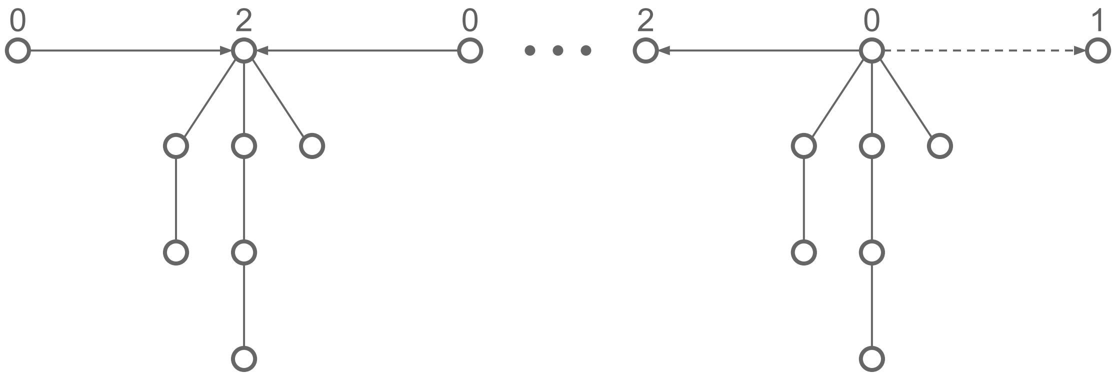
Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...

Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

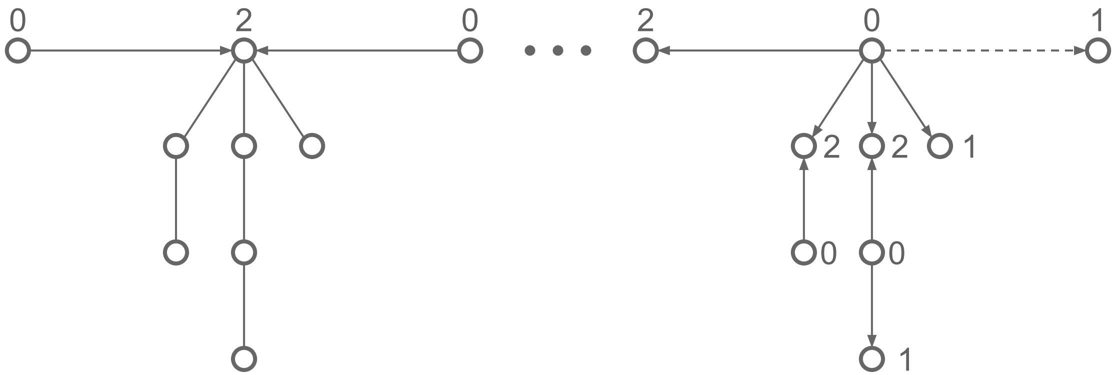
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

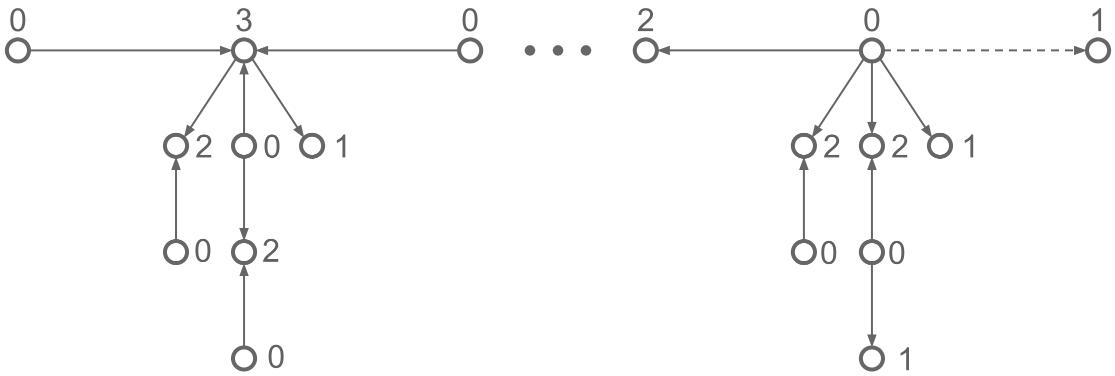
Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Árvores com caminho central

Baseado neste raciocínio, estudamos outro tipo de árvores. Para esta classe de árvores, podemos mostrar que também temos $\vec{\chi}(G) \leq 3$.

Seja P o caminho central. Colorimos os vértices de P com as cores 0, 2, 0, 2, ...



Conjectura

Baseado nos resultados, há a possibilidade de existir um inteiro k, tal que

$$\vec{\chi}(G) \leq k,$$

para qualquer árvore.

Considerações finais

Considerações finais

Neste período de estudos, alguns resultados e observações valem ser ressaltados:

- Foi desenvolvido um programa que testa exaustivamente todas as possíveis orientações de G, com algumas otimizações.

Considerações finais

Neste período de estudos, alguns resultados e observações valem ser ressaltados:

- Foi desenvolvido um programa que testa exaustivamente todas as possíveis orientações de G, com algumas otimizações.
- Foi estudado um artigo de programa inteira que relaxa a restrição de coloração, dando portanto uma cota inferior para $\vec{\chi}(G)$.

Considerações finais

Neste período de estudos, alguns resultados e observações valem ser ressaltados:

- Foi desenvolvido um programa que testa exaustivamente todas as possíveis orientações de G, com algumas otimizações.
- Foi estudado um artigo de programa inteira que relaxa a restrição de coloração, dando portanto uma cota inferior para $\vec{\chi}(G)$.
- Mesmo tendo $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$, conseguimos uma cota superior constante para algumas classes específicas.

Considerações finais

Neste período de estudos, alguns resultados e observações valem ser ressaltados:

- Foi desenvolvido um programa que testa exaustivamente todas as possíveis orientações de G, com algumas otimizações.
- Foi estudado um artigo de programa inteira que relaxa a restrição de coloração, dando portanto uma cota inferior para $\vec{\chi}(G)$.
- Mesmo tendo $\vec{\chi}(G) \leq \Delta(G)$, conseguimos uma cota superior constante para algumas classes específicas.
- Devido à dificuldade intrínseca do problema, não conseguimos ainda um algoritmo eficiente para determinar se $\vec{\chi}(G) \leq p$, fixado $p \leq \Delta(G)$ salvo testar várias possibilidades e tirar vantagem de simetrias.

Obrigado!

Colorações por orientações de grafos

Bolsista (PIBIC-UFRJ): Tiago Montalvão
Orientadora: Márcia Cerioli

19 de outubro de 2016