On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 4

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

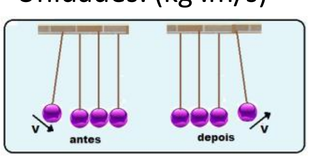
- Momento linear do sistema. Conservação do Momento linear. Colisões. Centro de massa.
- Momento de uma força. Dinâmica de rotação.
- Momento angular. Conservação do momento angular.

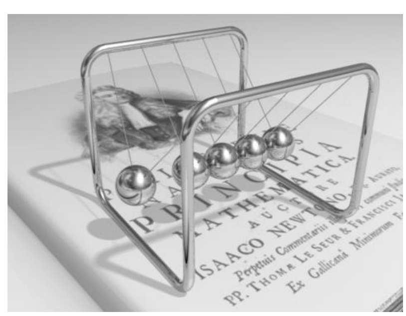
Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Momento linear
ou Quantidade de movimento

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unidades: (kg .m/s)





Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

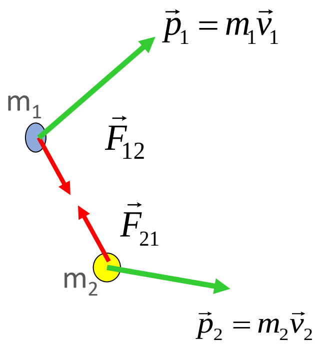
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Newtons_cradle_animation_book.gif

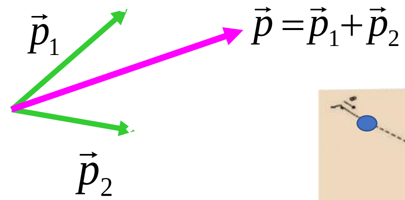
2ª LEI DE NEWTON

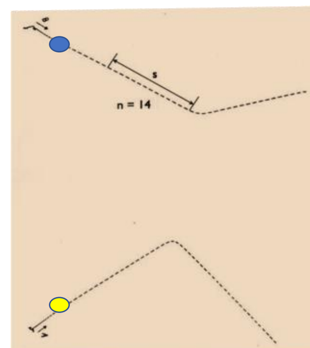
$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A força resultante aplicada sobre uma partícula é igual à **variação temporal do seu momento linear**

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear







O que acontece ao momento linear de cada partícula?
E do conjunto?

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear

<u>O momento linear total de um sistema</u>, composto de 2 (ou mais) partículas sujeitas somente às suas interacções mútuas, <u>permanece constante</u>

$$\sum \vec{p_i} = \sum \vec{p_f} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_i} = \vec{P_f}$$

LEI DE CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

num Sistema Isolado

- é um dos conceitos mais importantes na Física

A 3 DIMENSÕES: $P_{xi} = P_{xf}$ $\quad P_{yi} = P_{yf}$ $\quad P_{zi} = P_{zf}$

Colisões

- numa colisão há forte interacção entre 2 corpos
- as forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- poderá ou não existir contacto físico

De acordo com A 3ª LEI DE NEWTON:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 \Rightarrow -\Delta\vec{p}_2$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$$

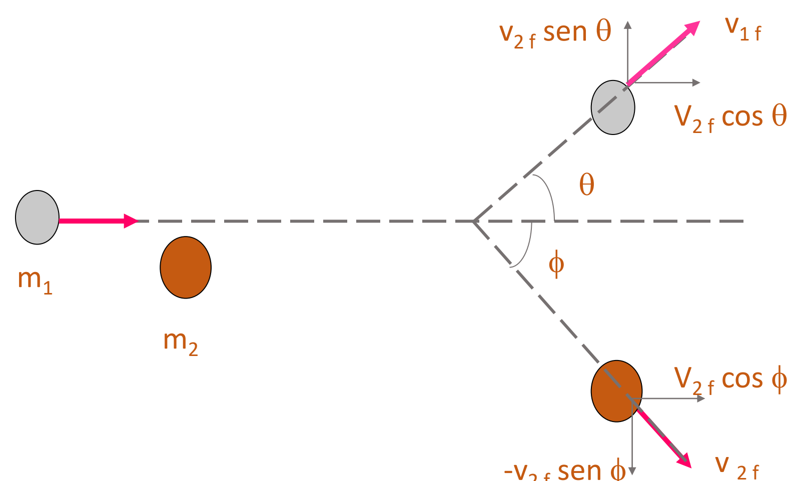
A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero!

TIPOS DE COLISÕES

- ELÁSTICAS: colisões que conservam momento linear + energia cinética
- INELÁSTICAS: colisões que só conservam o momento linear
  - COLISÕES PERFEITAMENTE INELÁSTICAS: os objectos mantêm-se juntos após a colisão

Colisão a 2D

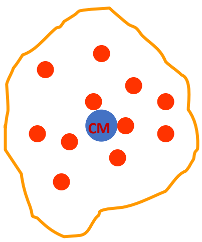
Uma bola de massa m_1 desloca-se com uma velocidade v_{1i} e colide lateralmente com uma bola de massa m_2, inicialmente em repouso



Centro de massa

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a acção das forças aplicadas ao sistema, como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto:

o centro de massa (CM)



Independentemente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

Centro de massa e equilíbrio

Tipos de equilíbrio

Para que um corpo fique em equilíbrio é necessário que a linha que contém o Centro de Massa não saia da base de sustentação do corpo

Equilíbrio estável - o corpo regressa à posição inicial se deslocado. Acontece quando o ponto de sustentação está acima do centro de gravidade

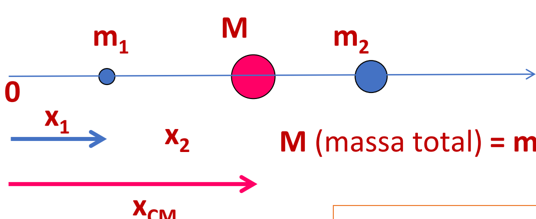
Equilíbrio instável - o corpo afasta-se, se deslocado da sua posição

Equilíbrio indiferente - o corpo mantém a sua posição, se deslocado

Centro de massa

Um corpo no espaço, longe da atracção gravitacional de qualquer planeta, possui centro de massa, <u>mas não centro de gravidade</u>, CG.

Localização do Centro de Massa a 1D



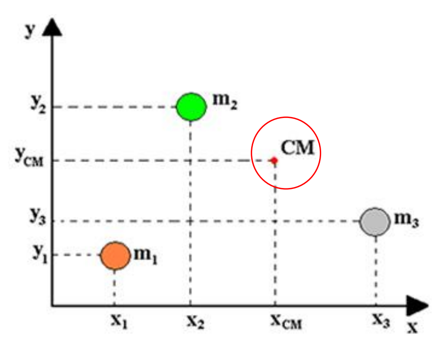
M (massa total) **= m_1 + m_2**

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$$

Para *n* partículas *i*

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i$$

Localização do Centro de Massa (2D)



Localização do Centro de Massa a 3 D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas i:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$com \quad \vec{r}_i = x_i \hat{\imath} + y_i \hat{\jmath} + z_i \hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i$$

A posição do CM, para uma distribuição contínua de massa, será dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

Movimento de um sistema de partículas

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

F_i **são as forças aplicadas ao sistema (externas e internas)**

de acordo com a 3ª lei de Newton, anulam-se

Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

- Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero:

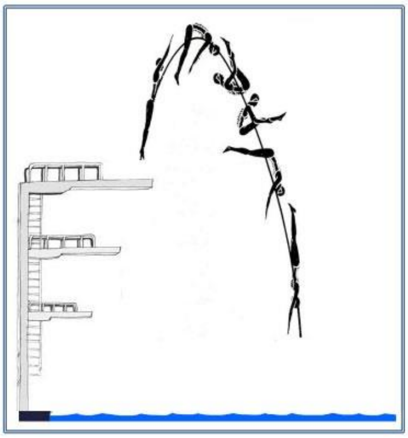
$a_{CM}=0$, o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

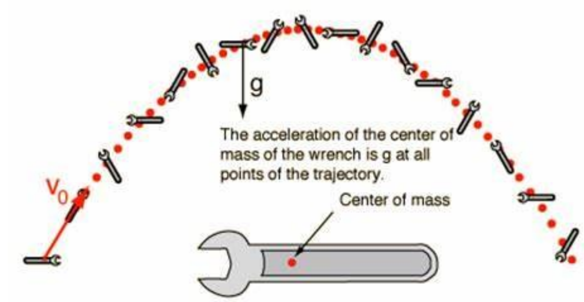
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = M\vec{v}_{CM} = const.$$

- O momento linear total do sistema conserva-se, quando não há forças externas aplicadas ao sistema (sistema isolado)

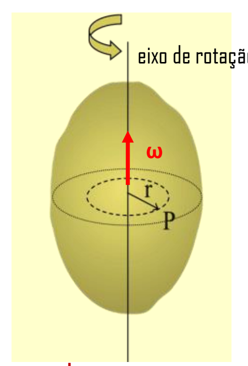
Corpo Rígido

Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um MOVIMENTO DE ROTAÇÃO.





Corpo Rígido: rotação

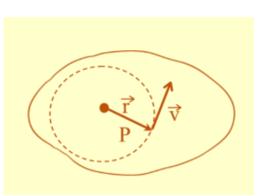


SITUAÇÃO MAIS SIMPLES - movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajectória de cada partícula vai ser circular.

A trajectória de P é uma circunferência de raio r, a distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO

Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos, no plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P

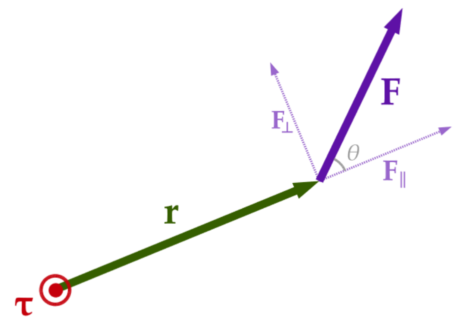


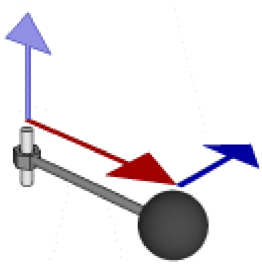
Cinemática de rotação

Distância e ângulo descrito	$s = r\theta$
Velocidade linear e Velocidade angular	$v = r\omega$
Aceleração centrípeta e Velocidade angular	$a_c = r\omega^2$
Aceleração tangencial e Aceleração angular	$a_t = r\alpha$

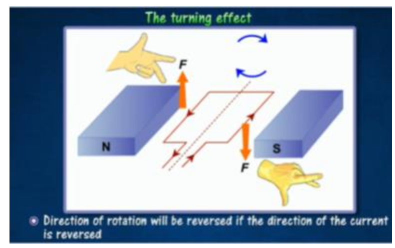
Momento de uma Força ou Torque

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad |\vec{\tau}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.sin(\theta)$$





$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$



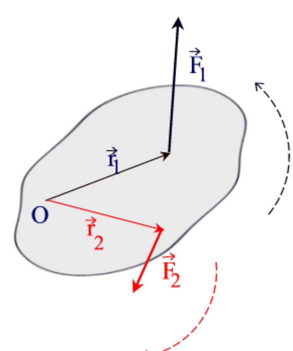
Momento angular $\boxed{\vec{L} = \vec{r} x \vec{p}}$ (ver diapositivo 24)

Rotação e Momento de uma força

O que acontece se tivermos mais do que uma força aplicada?
Como analisar o efeito conjunto?

O movimento do sistema vai ser determinado pelo **momento resultante**, que é dado por

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



Neste exemplo, os dois vectores têm sentidos opostos.

Em que sentido vai rodar o corpo em torno de O?

Rotação e Momento de uma força

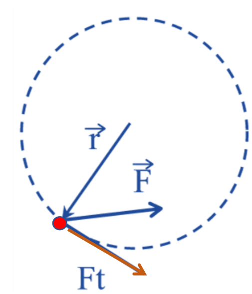
Consideremos o caso simples de uma partícula de massa **m**, com movimento circular de raio **r** e sujeita a uma força **F**.

A aceleração tangencial da partícula é dada por

$$F_t = ma_t$$

O momento de F resulta apenas da componente tangencial de F (porquê?)

$$|\vec{\tau}| = rF_t = ma_t r$$



Relacionando com a aceleração angular, obtém-se

$$\tau = mr^2\alpha \qquad \text{isto é,} \qquad \boxed{\tau = I\alpha}$$

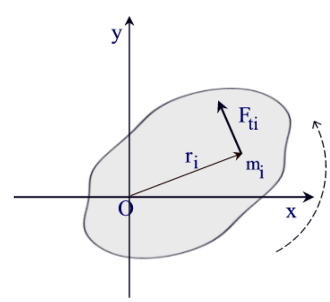
em que **I** é o **MOMENTO DE INÉRCIA** da partícula

Rotação e Momento de uma força

A expressão anterior é generalizável para um sólido constituído por **muitas partículas**, rodando em torno dum eixo Z.

Para cada partícula de massa m_i temos

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$



O momento (componente Z) aplicado a cada uma corresponde a:

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares, obtém-se:

Momento de inércia (ver à frente)

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha$$

Rotação e Momento de uma força

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

Nesta soma, só contribuem as forças exteriores aplicadas ao corpo, pois as forças entre partículas (interiores) dão contribuições que cancelam aos pares, devido à lei de acção-reacção.

A lei de movimento para a rotação em torno dum eixo tem uma forma que é análoga à da 2ª lei de Newton para a translação, usando as grandezas correspondentes

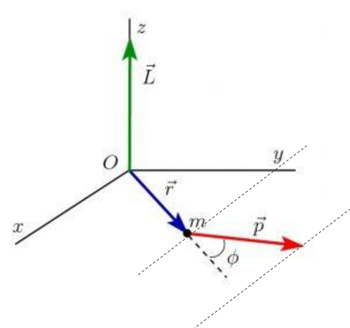
$$F = ma \leftrightarrow \boxed{\tau = I\alpha}$$

Em cada caso, F e t são as resultantes das forças e momentos exteriores.

MOMENTO ANGULAR

O momento angular de uma partícula m em relação a um ponto O é definido como o momento do vector momento linear, **p**

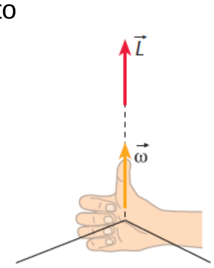
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$



As suas unidades SI são $kg.m^2s^{-1}$

De acordo com as regras do produto vectorial (ϕ ângulo entre r e v)

$$\boxed{\left|\vec{L}\right| = mvr\, sen\phi}$$



para determinar o sentido do vector **L,** usa-se a **regra da mão direita**

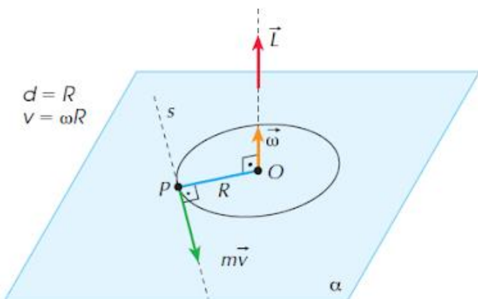
MOMENTO ANGULAR

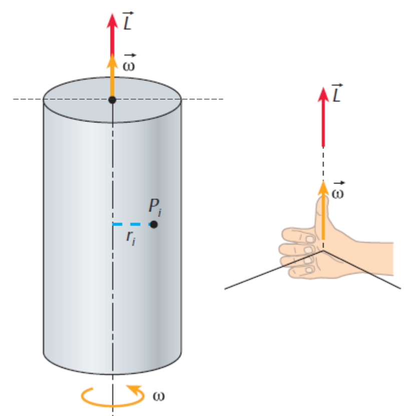
- **MOVIMENTO CIRCULAR**

Neste caso ϕ=90º e fica

$$L = m v r = m\omega r^2$$

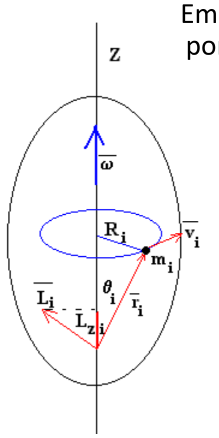
v = r ω





MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Para o caso dum corpo rígido em rotação em torno dum eixo fixo, vamos obter uma expressão que relaciona directamente $\vec{L}$ com a velocidade angular $\vec{\omega}$.



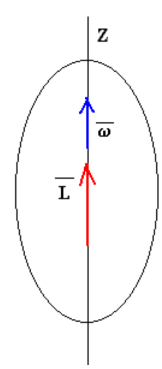
Em relação ao eixo, o movimento de cada partícula é circular, portanto

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i \omega r_i^2$$

A soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

$$\boxed{L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)\omega = I\omega_z}$$

$$\boxed{L_z = I\omega_z}$$



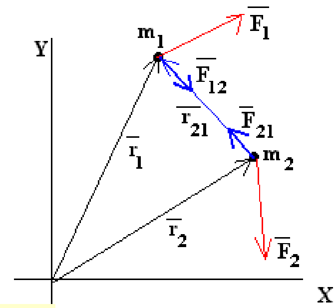
para um eixo de simetria que passe pelo CM

Numa situação geral, a relação é mais complexa!

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Vamos verificar este resultado para um SISTEMA DE DUAS PARTÍCULAS, sujeitas a forças exteriores e interiores (interacção)



Para cada partícula, vimos que

$$\boxed{\frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{i\,ext} + \vec{F}_{i\,int}\right)}$$

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \frac{d\,\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\,\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{1int}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{2\,ext} + \vec{F}_{2\,int}\right) =$$
$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2\,ext} + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \left(\vec{F}_{1int}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext}$$

PELA LEI DA ACÇÃO-REACÇÃO $\boxed{\vec{F}_{1int} = -\vec{F}_{2\,int}}$ **que são paralelas a** $r_2 - r_1$ $[=\overrightarrow{r_{21}}]$

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizável. Cada partícula está sujeita a forças exteriores e interiores ao sistema. A contribuição destas últimas, somada sobre todas as partículas, é nula (devido à lei de acção-reacção).

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} = \sum_i \frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

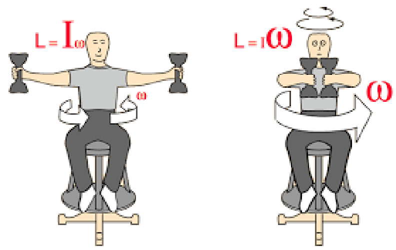
NUM SISTEMA ISOLADO (sem forças exteriores aplicadas), **O MOMENTO ANGULAR É CONSTANTE.**

Se **r** e **F** forem colineares, **L** é constante – **acção de Forças Centrais**

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Num sistema isolado, o momento angular mantém-se constante.
Uma situação interessante ocorre quando o momento de inércia varia.

$$\boxed{\overrightarrow{L_{início}} = \overrightarrow{L_{fim}}}$$



$$\boxed{(I\ \omega)_{\text{início}} = (\ I\ \omega\ )_{\text{fim}}}$$

https://youtu.be/5cRb0xvPJ2M