On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 5

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

- Momento de inércia. Cinemática e energia cinética de rotação
- Análise e discussão de exemplos.

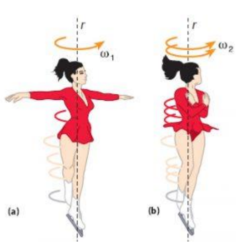
Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

MOMENTO DE INÉRCIA

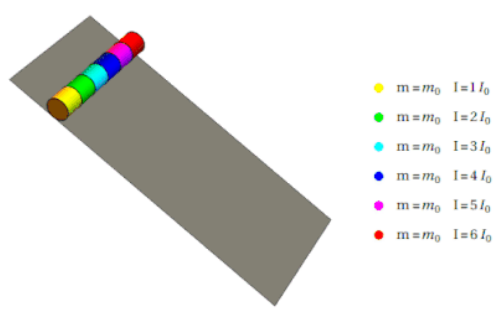
Atrás fizemos referência ao Momento de Inércia de uma partícula $\mathrm{I} = \mathrm{mr}^2$
e de um conjunto de partículas, a propósito do Momento de Força resultante:

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

Como percepcionamos o Momento de Inércia?



A bailarina ao abrir os braços, diminui a velocidade de rotação



Cálculo do Momento de inércia - corpos extensos

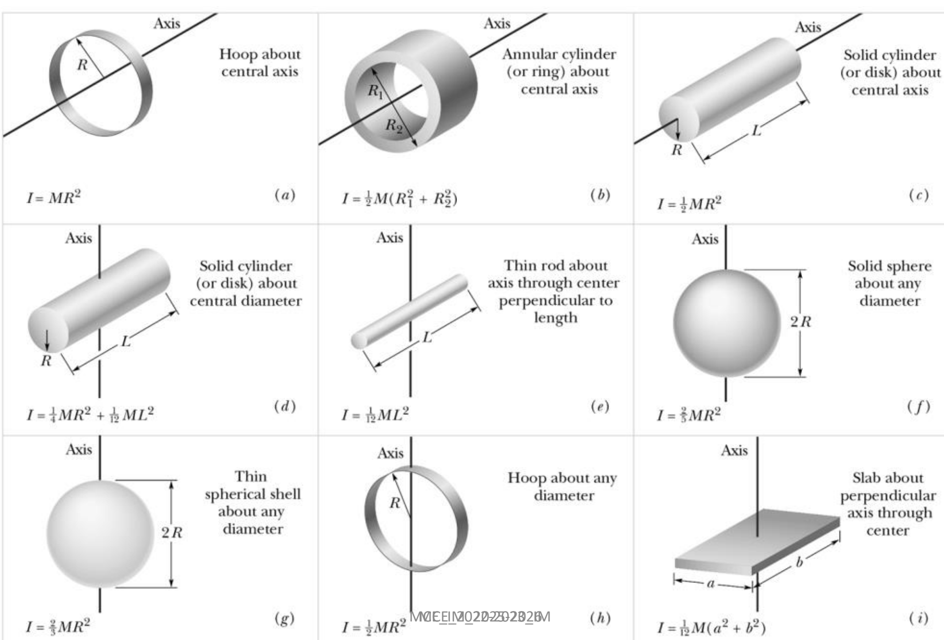
$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, dV$$

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Tabela de Momentos de Inércia para eixos que passam no Centro de Massa



ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

$$\vec{L}_z = \sum I_i \vec{\omega}$$

sendo I, o momento de inércia, $\sum m_i r^2_i$

O MOMENTO DE INÉRCIA É UMA GRANDEZA ESCALAR, que mede a resistência à variação da velocidade angular.

$EC_{partícula} = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

A **ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO** é dada por

v = r ω

$$EC_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Unidade S.I. de energia - joule, J

Variação Temporal do Momento Angular e Momento de Força

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação temporal do momento angular

De notar que o momento da força e o momento angular são calculados em relação ao mesmo ponto

2ª LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

$$\boxed{\vec{\tau} = I \vec{\alpha}}$$

Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de eixo perpendicular ao plano (ponto marcado a verde)

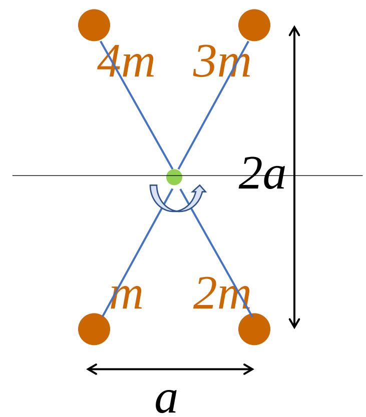
Neste caso, ter-se-á:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

$$= (m + 2m + 3m + 4m)\left(\sqrt{\frac{5}{4}}a\right)^2$$

$$= 10m\left(\frac{5}{4}a^2\right) = M_T\left(\frac{5}{4}a^2\right)$$

M_T = massa total



Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de um eixo horizontal e de um eixo vertical

Calcular o momento de inércia relativamente a:

<u>um eixo horizontal (azul)</u>:

$$I = \sum m_i r_i^2 = ma^2 + 2ma^2 + 3ma^2 + 4ma^2$$

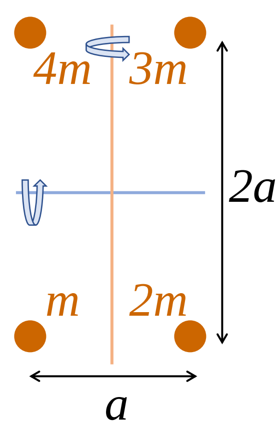
$$= 10ma^2 = M_T a^2$$

M_T = massa total

<u>um eixo vertical (castanho)</u>:

$$I = m\frac{a^2}{4} + 2m\frac{a^2}{4} + 3m\frac{a^2}{4} + 4m\frac{a^2}{4}$$

$$= 10m\frac{a^2}{4} = M_T\frac{a^2}{4}$$

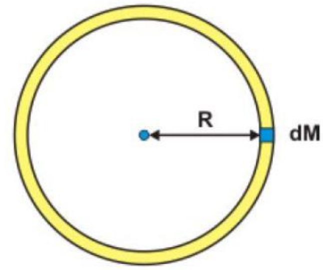


Exemplo - Anel

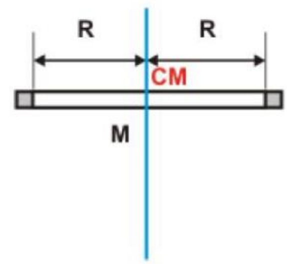
Anel fino homogéneo de massa M e raio R

relativamente a um eixo perpendicular pelo centro.

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M$$



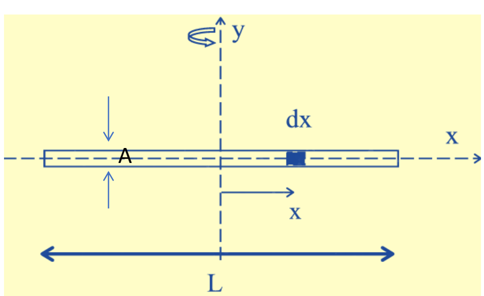
O resultado é o mesmo para um cilindro oco de espessura fina!



Exemplo - Barra homogénea 1

Capítulo 1.4.b – 5.b)

Momento de Inércia relativamente ao eixo perpendicular (transversal) que passa pelo centro de massa da barra



comprimento da barra

A distância ao eixo é a coordenada x $\quad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$

densidade linear, µ

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M

dm = ρ. A.dx

dV

dm = µ.dx

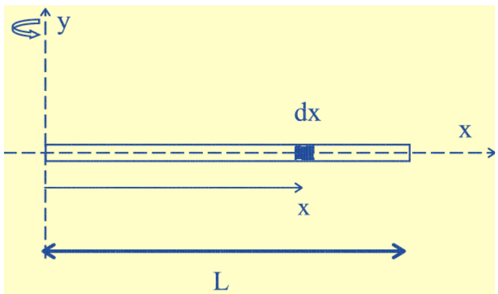
$$I_C = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2}$$

$$\boxed{I_c = \frac{ML^2}{12}}$$

Exemplo - Barra homogénea 2

Capítulo 1.4.b – 5.a)

Momento de Inércia relativamente a um eixo perpendicular que passa pela extremidade da barra



A distância ao eixo é a coordenada x

$$0 \leq x \leq L$$

$$dm = \frac{M}{L}dx$$

Massa Total, M

Comprimento da barra, L

$$I_E = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L$$

$$\boxed{I_E = \frac{ML^2}{3}}$$

Teorema de Steiner ou do eixo paralelo

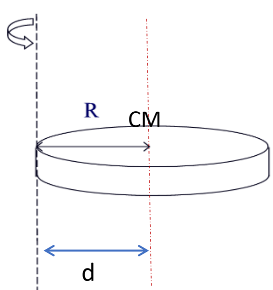
O Teorema permite que consideremos a seguinte igualdade para o momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo Centro de Massa

Capítulo 1.4.b – 7

Momento de Inércia em torno de um eixo paralelo

$$\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$$

TEOREMA DE STEINER



d = distância do CM ao eixo

M = Massa do corpo

Considerando o exemplo ilustrado, obtém-se

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

Capítulo 1.4.b

4 - Duas crianças, com 25 kg, estão sentadas nas extremidades de uma prancha de 2,6 m de comprimento e de 10 kg de massa. A prancha gira com velocidade de cinco rotações por minuto, em torno de um eixo que passa pelo seu centro.

Se cada uma das crianças se sentar 60 cm mais à frente, em direcção ao centro, como se altera a velocidade angular do sistema?

E como varia a energia cinética do sistema?

Sugestão: conservação do momento angular

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_f}$$

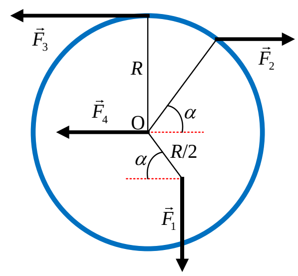
$$\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right) \omega_i = \left(\sum_{i=1}^{n} I_f\right) \omega_f$$

Capítulo 1.4.b

11 - Um homem está em pé, no centro de uma mesa giratória sem atrito, e mantém os braços estendidos horizontalmente, segurando uma massa de 5,0 kg em cada mão.
A mesa é posta em rotação por um agente exterior, com uma velocidade angular de uma rotação em 2,0 s.

Determine o valor da velocidade angular após o homem deixar cair os braços ao longo do corpo. Considere o momento de inércia do homem constante e igual a 5,0 kg.m^2.
A distância original das massas ao eixo de rotação é 90 cm e a final é 15 cm.

Um cilindro de 4 kg de massa pode rodar em torno do eixo central que passa pelo ponto O. Sobre o cilindro são aplicadas quatro forças conforme se ilustra na figura, de intensidades $F_1 = 4$ N, $F_2 = 3$ N, $F_3 = 8$ N e $F_4 = 4{,}9$ N. ($R = 2$ m, $\alpha = 53°$, $I_{cm}=1/2mR^2$, cos(53°) = 0,6 e sen(53°) = 0,8).

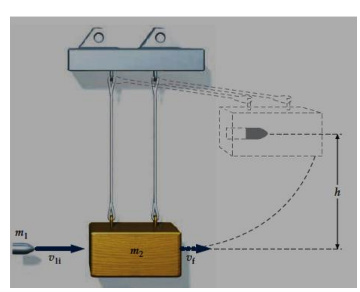


a) Determine a intensidade da aceleração angular do cilindro e identifique se o mesmo roda no sentido horário ou anti-horário.
b) Determine a energia cinética de rotação do cilindro ao fim de 1 s. O cilindro encontra-se inicialmente em repouso.

Capítulo 1.4.a

8. Um pêndulo balístico é constituído por um corpo suspenso dum fio. Um projétil de massa $m_1 = 30$ g penetra no corpo e fica cravado nele. O centro de massa do corpo eleva-se até uma altura h = 30 cm. A massa do corpo é $m_2 = 3{,}0$ kg.

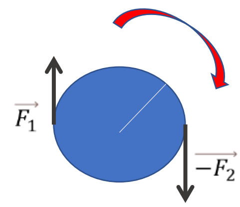
a) Deduza uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados.
b) Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando este atinge o corpo.



ESTÁTICA

Binário de forças

$$\sum \vec{F_i} = 0$$



mas

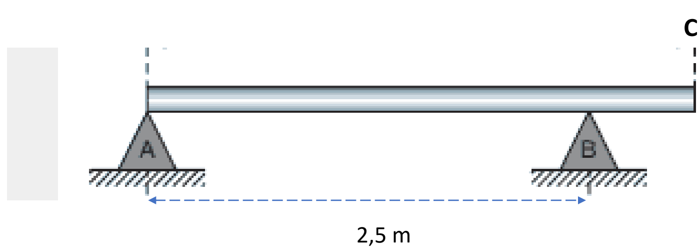
$$\sum \vec{\tau_i} \neq 0$$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

$$\sum \vec{F_i} = 0$$ e, simultaneamente, $$\sum \vec{\tau_i} = 0$$

Capítulo 1.4.b

12. Uma barra uniforme AC de 4 m tem massa m = 50 kg. Existe um ponto fixo B em torno do qual a barra pode rodar. A barra está apoiada no ponto A. Um homem com massa igual a 75 kg anda ao longo da barra partindo de A. Calcule a distância máxima a que o homem pode deslocar-se, mantendo o equilíbrio.

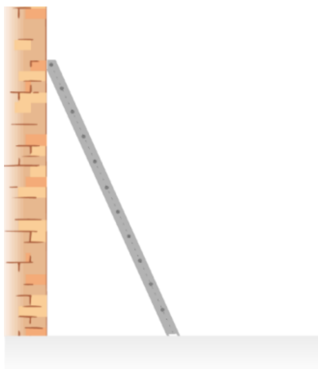


Sugestão: usar as condições de equilíbrio estático
No limite, a reacção sobre A anula-se

Análogo ao 13 do Cap. 1.4.b)

Uma escada homogénea de 5 m de comprimento e de 20 kg de massa, está apoiada numa parede vertical, sem atrito, e num piso rugoso (há atrito), como esquematizado. A escada tem uma inclinação com a horizontal de θ = 53º. A escada encontra-se em equilíbrio sem deslizar.

Considere cos(53º) = 0,6; sen(53º) = 0,8; tan(53º) = 4/3 e g = 10 m/s^2.



a) Faça o diagrama das forças aplicadas à escada e escreva as condições de equilíbrio estático.

b) Determine a força que atua entre a parede e o topo da escada, nas condições da alínea anterior.

c) Determine o valor das forças que atuam entre a escada e o chão assim como o coeficiente de atrito estático.