Notar que: $\|x - proj_W x\| = \|y\| = d(x,W)$

Teorema:

W subespaço de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k)$ base o.n. de W

$u \in \mathbb{R}^n$

$proj_W x = (x \cdot x_1)x_1 + (x \cdot x_2)x_2 + \dots + (x \cdot x_k)x_k$

Nota:

$d(x,W) = \|x - proj_W x\|$ e que $Y = x - proj_W x$

30 - Folha de exercícios

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{P} = \langle \overbrace{(1,1,0)}^{x_1}, \overbrace{(0,0,1)}^{x_2} \rangle$

a)

$\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{P}$.

$\|(1,1,0)\| = \sqrt{2}$

$\|(0,0,1)\| = 1$

$Y_1 = \frac{1}{\|Y_1\|} \cdot Y_1 = \overbrace{\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}}^{Y_1} \cdot Y_2 = \frac{1}{\|Y_2\|} \cdot Y_2 = \overbrace{\boxed{(0,0,1)}}^{Y_2}$

Base o.n. de $\mathcal{P}$

$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1)\right\}$

b) $proj_{\mathcal{P}} \overbrace{(2,-2,1)}^{x} = \overbrace{(x \cdot Y_1)}^{=0} Y_1 + \overbrace{(x \cdot Y_2)}^{=1} Y_2 = (0,0,1)$

$x \cdot Y_1 = (-2,2,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$

$x \cdot Y_2 = (-2,2,1) \cdot (0,0,1) = 1$

Notar que: $\|x - proj_W x\| = \|y\| = d(x,W)$

Teorema:

W subespaço de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k)$ base o.n. de W

$u \in \mathbb{R}^n$

$proj_W x = (x \cdot x_1)x_1 + (x \cdot x_2)x_2 + \dots + (x \cdot x_k)x_k$

Nota:

$d(x,W) = \|x - proj_W x\|$ e que $Y = x - proj_W x$

30 - Folha de exercícios

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$

$\mathcal{P} = < \overbrace{(1,1,0)}^{x_1}, \overbrace{(0,0,1)}^{x_2} >$

a)

$\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{P}$.

$\|(1,1,0)\| = \sqrt{2}$

$\|(0,0,1)\| = 1$

$Y_1 = \frac{1}{\|Y_1\|} \cdot Y_1 = \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$ $\cdot$ $Y_2 = \frac{1}{\|Y_2\|} \cdot Y_2 = \boxed{(0,0,1)}$

Base o.n. de $\mathcal{P}$

$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1)\right\}$

b) $proj_{\mathcal{P}} \overbrace{(2,-2,1)}^{x} = \overbrace{(x \cdot Y_1)}^{=0} Y_1 + \overbrace{(x \cdot Y_2)}^{=1} Y_2 = (0,0,1)$

$x \cdot Y_1 = (-2,2,1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$

$x \cdot Y_2 = (-2,2,1) \cdot (0,0,1) = 1$

c) $A=(2,1,1)$

$d(A,\mathcal{P}) = \| A - proj_{\mathcal{P}} A \|$

$proj_{\mathcal{P}} A = (A\cdot Y_1)\, Y_1 + (A\cdot Y_2)\, Y_2 = \left[(2,1,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) + \left[(2,1,1)\cdot(0,0,1)\right](0,0,1) = \left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)+(0,0,1) =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)+(0,0,1) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$

$d(A,\mathcal{P}) = \|(2,1,1)-\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)\| = \left\|\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $d(A,\mathcal{P})$

Todo o subespaço $W \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ tem uma base o.n.

Ideia de prova:

$\mathcal{B}=(x_1,\dots,x_k)$ base de W, constrói-se a partir desta, usando o método de ortogonalização de grau de Gram-Schmidt, uma base o.n.

1º passo: $Y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$

2º passo: $\tilde{Y}_2 = x_2 - proj_{W_1} x_2$, $W_1 = \langle Y_1 \rangle$,

$Y_2 = \frac{\tilde{Y}_2}{\|\tilde{Y}_2\|}$ notar que $Y_1 \perp Y_2$

No final do passo 2: $\{Y_1, Y_2\}$ o.n.

3º passo: $\tilde{Y}_3 = x_3 - proj_{W_2} x_3$, $W_2 = \langle Y_1, Y_2 \rangle$ notar que $\tilde{Y}_3 \perp W_2$

$Y_3 = \frac{\tilde{Y}_3}{\|\tilde{Y}_3\|}$

No final do passo 3: $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ o.n.

⋮

Vetores próprios e vetores próprios de uma matriz quadrada

Definições:

$A_{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

λ é vetor próprio de A se existir $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

Ax chamamos vetor próprio de A associado a λ

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\overset{\frown}{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \overset{\lambda}{7} \overset{x}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \xrightarrow{A} Ax$$

Vetores próprios (como obter?)

$\lambda \in \mathbb{R}$ valor próprio de A

sse

$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Ax = \lambda x$

sse

$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad Ax - \lambda I_n x = 0$

sse

$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (A - \lambda I_n) x = 0$

sse

$(A - \lambda I_n) x = 0$ é um sistema indeterminado

sse

$\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$ equação característica de A

polinómio de grau n, em λ, o que se chama
polinómio característico de A

Notação: $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$

Assim,

$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$ é valor próprio de A

sse

λ é solução da sua equação característica

sse

λ é raiz do polinómio $p_A(\lambda)$

Uma matriz nxn tem no máximo n valores próprios (reais)

Exemplo:

$A=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(-3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 5-\lambda=0 \vee (-3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \boxed{5=\lambda} \vee \boxed{\lambda=-3}$

Voltando ao exemplo inicial (página anterior)

$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda$ é valor próprio de A sse $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow (3-\lambda)(6-\lambda)-4=0 \Leftrightarrow 18-3\lambda-6\lambda+\lambda^2-4=0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2-9\lambda+14=0}$ $\quad p_A \in V \Leftrightarrow \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{81-4\times 14}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{9\pm 5}{2}$

equação característica

$\Leftrightarrow \lambda = 7 \vee \lambda = 2$

Valores próprios de A: 7 e 2

$\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 2$

Vetores próprios de A associados a $\lambda=7$:

x é vetor próprio de A associado a $\lambda=7$ sse

$(A-7I)x=0$ e $x\neq 0$ $\qquad$ se $x=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $(A-7I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

vetores próprios de A associados a $\lambda=7$

$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

$U_7 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\qquad$ • $\dim U_7 = 1$

↳ subespaço próprio de A associado a $\lambda=7$

Vetores próprios associados a $\lambda=2$

$x=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$ tais que

$$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x+4y=0 \Leftrightarrow \boxed{x=-4y}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} -4y \\ y \end{bmatrix}, y \neq 0, y \in \mathbb{R}}$$

Subespaço próprio de A associado a $\lambda=2$:

$$\mathcal{U}_2=\left\{\begin{bmatrix} -4y \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle \cdot \dim \mathcal{U}_2=1$$

Subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ:

$$\boxed{\mathcal{U}_\lambda=\mathcal{N}(A-\lambda I)}=\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é vetor próprio de } A\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

$$P_\lambda(A)=(7-\lambda)^1(2-\lambda)^1$$

$\lambda=7$ é raiz de multiplicidade 1
$\lambda=2$ é raiz de multiplicidade 1

$$\underbrace{1 \leq \dim \mathcal{U}_7 \leq 1}_{\text{teorema do slide 5}} \Rightarrow \dim \mathcal{U}_7=1$$

$$1 \leq \dim \mathcal{U}_2 \leq 1 \Rightarrow \dim \mathcal{U}_2=1$$

Por exemplo (aplicação do teorema do slides)

$A: 4\times 4$

$P_\lambda(A) = (1-\lambda)^2 (3-\lambda)(4-\lambda)$

1 é valor próprio de A de multiplicidade 2

$1 \leq \dim \mathcal{U}_1 \leq 2$

3 é valor próprio de A de multiplicidade 1

$1 \leq \dim \mathcal{U}_3 \leq 1$ logo, $\boxed{\dim \mathcal{U}_3 = 1}$

Exemplo 1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Valores próprios:

$0 = |A - \lambda I| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^1 (4-\lambda)^1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\times 6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3} \vee \boxed{\lambda = 2}$

Valores próprios de A: 3 e 2

Exemplo 2

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Valores próprios:

$$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow -\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\0&-\lambda&-1\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \begin{vmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda=\pm i$$ → não trabalhamos com compostos

A tem apenas $\lambda=0$ como valor próprio (real) $\dim \mathcal{U}_0=1$ ($\lambda=0$ é raiz simples)

$$\mathcal{U}_0=\{x\in\mathbb{R}^3: (A-0I)x=0\}=\{x\in\mathbb{R}^3: Ax=0\} \qquad x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}0=0\\-z=0\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\y=0\\z=0\end{cases}$$

$$\mathcal{U}_0=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}: x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle \qquad \dim\mathcal{U}_0=1$$

$A_{n\times n}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A

ssc

$\det(A-\lambda I)=0$, $p_A(\lambda)$ equação cartesiana

ssc

$\exists x \neq 0 \quad (A-\lambda I)x=0$

ssc

$\exists x \neq 0 \quad Ax=\lambda x$ vetor próprio associado a λ

$U_\lambda = N(A-\lambda I)$

$=\{x\in\mathbb{R}^n : (A-\lambda I)x=0\}$ Todos os vetores próprios de A e $x=0$ (que não é vetor próprio)

subespaço próprio de A associado a λ.

$1 \leq \dim U_\lambda \leq n_\lambda$ multiplicidade algébrica do vetor próprio.

$\dim U_\lambda = \text{nul}(A-\lambda I)$

Exemplo 3:

$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix} \quad p_A(\lambda)=(1-\lambda)^{2}(2-\lambda)^{1}$ ($n_{\lambda_1}=2$, $n_{\lambda_2}=1$)

Vetores próprios de A: $\lambda_1=1$ (multiplicidade algébrica 2) $\dim U_1 = 1$

$\lambda_2=2$ (multiplicidade algébrica 1)

$U_1=\{x\in\mathbb{R}^3 : (A-\lambda I)x=0\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ $\quad (A-I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}$

$x=(x,y,z)$

$\boxed{\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ vetores próprios

$U_2=\{x\in\mathbb{R}^3 : (A-2I)x=0\} \Leftrightarrow (A-2I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y=0\\-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

$U_2=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle \quad \dim U_2 = 1$

Diagonalização de uma matriz quadrada $A_{n \times n}$

$A, B_{n\times n}$ dizem-se semelhantes se existir P invertível tal que

$$P^{-1}AP = B$$

Observação:

$$P^{-1}AP = B \Leftrightarrow P(P^{-1}AP = BP \Leftrightarrow AP = BP \Leftrightarrow APP^{-1} = BPP^{-1} \Leftrightarrow A = \overbrace{PBP^{-1}}^{\text{se } Q = P^{-1}} \Leftrightarrow A = Q^{-1}BQ$$

Teorema:

Se A e B são semelhantes então $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

Prova:

$P_B(\lambda) = |B - \lambda I|$, por hipótese existe P invertível tal que $B = P^{-1}AP$

$$= |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|P| = \frac{1}{\cancel{|P|}}|A - \lambda I|\cancel{|P|} = |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$

A é diagonalizável sse A é semelhante a uma matriz diagonal sse Existe P invertível e D diagonal $P^{-1}AP = D$

Notas:

- $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ onde λ_i é valor próprio de A
- P é chamada de matriz diagonalizante de A.
- Nem todas as matrizes são diagonalizáveis.

Teorema: $A_{n\times n}$

A é diagonalizável sse A tem n vetores próprios l.i.

Prova:

A é diagonalizável

sse

$\exists P$ invertível tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

sse

existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ l.i. tais que $\longrightarrow \Big[\underbrace{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n}_{P}\Big]^{-1} A \Big[\overbrace{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n}^{P}\Big] = D$

sse

existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ l.i. tais que $\longrightarrow A\left[x_1 \ x_2 \cdots x_n\right] = \left[x_1 \ x_2 \cdots x_n\right] D$

sse

existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ l.i. tais que $\longrightarrow \left[Ax_1 \ Ax_2 \cdots Ax_n\right] = \left[\lambda x_1 \ \lambda x_2 \cdots \lambda x_n\right]$

sse

existem $x_1, \ldots, x_n$ l.i. tais que $\longrightarrow Ax_1 = \lambda x_1$ e $Ax_2 = \lambda x_2 \cdots$ e $Ax_n = \lambda x_n$

Exemplo 1 (slide 6)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ Valores próprios: 2 e 3

$U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$U_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\{x_1, x_2\}$ é l.i., $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Logo, A é diagonalizável e P diagonaliza A, isto é, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Outra matriz diagonalizante: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ neste caso a D associada é $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ$

Exemplo 2:

$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$ Valores próprios de A: $\lambda=0$ $\quad U_0=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ $\dim U_0=1$, no máximo conseguimos conjuntos de vetores próprios l.i. com apenas um vetor. Logo, A não é diagonalizável

$\boxed{\text{A valores próprios distintos estão associados vetores próprios l.i.}}$

Teorema:

A com $P_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{n_{\lambda_1}}(\lambda_2-\lambda)^{n_{\lambda_2}}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{n_\lambda}$.

A tem $\dim U_{\lambda_1}+\dim U_{\lambda_2}+\dots+\dim U_{\lambda_k}$ vetores próprios l.i.

Corolário:

$A_{n\times n}$, como no teorema anterior, A é diagonizável sse $\sum_{i=1}^{k}\dim U_{\lambda_i}=n$

Corolário:

Seja $A_{n\times n}$, com $P_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{n_{\lambda_1}}(\lambda_2-\lambda)^{n_{\lambda_2}}\cdots(\lambda_k-\lambda)^{n_{\lambda_k}}$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_n$ distintos $\quad$ A é diagonalizável

sse

$\dim U_{\lambda_i}=n_{\lambda_i}$, $n_{\lambda_i}>1$ $\quad I^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_2 I$

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ A é diagonalizável pois tem 4 valores próprios distintos

$\dim U_{\lambda_i} = \mathrm{nul}(A - \lambda_i I) = n - \mathrm{car}(A - \lambda_i I)$

Exemplo 2 (slide 8):

A tem $\lambda = 0$ como valor próprio.

$\boxed{U_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad \dim U_0 = 1 < 3}$, logo A não é diagonalizável

$\boxed{A = 0I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{car}(A) = 2, \quad \mathrm{nul}(A) = 1 = \dim U_0}$

Exemplo 3 (slide 9):

Valores próprios de A: 1 e 2

$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim U_1 = 1 < 2 = n_1$

$U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim U_2 = 1$

Como, $n_1 > 1$, A não é diagonalizável

Exemplo 4 (slide 17):

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Valores próprios: $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 2

$\lambda_2 = 2$ com " 1.

A é diagonalizável sse $\dim U_1 = 2$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\dim U_1 = \operatorname{nul}(A - I) = 2$

Conclusão: A é diagonalizável.

Para determinar uma matriz diagonalizante precisamos de vetores próprios

$$U_1 = \left\langle \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\rangle$$

$$U_2 = \left\langle \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_3} \right\rangle$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$ diagonalizada A e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

é a matriz diagonal semelhante correspondente

Isto é,

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) a) $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}$ Valores próprios: $\lambda=0$ (multiplicidade algébrica 3)

$\dim U_0 = \text{nul}\left(\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\right) = 1<3$, logo A não é diagonalizável.

$$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2y+z=0\\4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e) $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$ $|A-\lambda I|=0$

1) a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Valores próprios: $\lambda=0$ (multiplicidade algébrica 3)

$\dim U_0 = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 < 3$, logo A não é diagonalizável.

$Ax=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+z=0 \\ 4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

e) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2-\lambda=0 \vee (3-\lambda)^2-1=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \vee (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=2 \vee \lambda=2 \vee \lambda=4$

$U_2=\{x\in\mathbb{R}^3 : (A-2I)x=0\}$

$(A-2I)x=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow y+z=0 \Leftrightarrow y=-z$

$U_2=\left\{\begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \end{bmatrix} : x,z\in\mathbb{R}\right\}$ $\begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x,z\in\mathbb{R}$

Como a $\dim U_2 = 2$ e 2 é a multiplicidade algébrica de $\lambda=2$, como $\lambda=4$ é raiz simples, podemos concluir que A é diagonalizável

Vetores próprios associados a $\lambda=2$: $\begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \end{bmatrix}$, $x,z\in\mathbb{R}$, x e z não são simultaneamente nulos

ou $U_2\setminus\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A-4I)X = 0\}$

$(A-4I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 := L_3 + L_2 \\ L_1 := L_1 - L_2}}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$U_4 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ Vetores próprios associados a $\lambda = 4$:

$U_4 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ou $\begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Uma matriz diagonalizante de A é $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz diagonal semelhante a A correspondente é $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{ccc} \smile & \smile & \smile \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$

Isto é, $P^{-1} A P = D$

3) O é vetor próprio de A
sse
$\det(A - 0I) = 0$ sse $\det(A) = 0$ sse A não é invertível sse A é singular

5) b) H: $A_{n \times n}$ e invertível e λ é valor próprio de A.

T: $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1}

Prova: Se λ é valor próprio de A, existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Ax = \lambda x$$

(continua...)

Como A é invertível, existe A^{-1} e $x \neq 0$, de $Ax = \lambda x$ vem:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = \lambda(A^{-1}x) \Leftrightarrow x = \lambda(A^{-1}x) \Leftrightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

Logo, $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1} associado a x.

8) Valores próprios de A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \ldots \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 4$$

$$U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad U_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$ Verificar!

A é diagonalizável pois é de ordem 3 e tem 3 valores próprios distintos. ou A é de ordem 3 e tem 3 vetores próprios l.i.:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Uma matriz P diagonalizante é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Existe P tal que: $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

(A^5)

$$A^5 = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}D\underbrace{P^{-1})(P}_{I}DP^{-1}) = PD^5P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad D^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Cálculo da potência de uma matriz diagonalizável:

Se A é diagonalizável existe P invertível tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

com D diagonal, ou seja,

$$A = PDP^{-1}$$

Logo, $A^k = PD^kP^{-1}$

Diagonalização de uma matriz simétrica

A é simétrica se $A^T = A$

Prova-se que

1) A tem n valores próprios reais.
2) A valores próprios distintos correspondem vetores próprios ortogonais.

Permite concluir que existe uma base de $\mathbb{R}^n$: $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de vetores próprios de A o.n., isto é, tal que $\|x_i\| = 1$ e $x_i \cdot x_j = 0$, $i \neq j$

Existe $P = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]$ com $\|x_i\| = 1$ e $x_i \cdot x_j$ tal que

Neste caso, $P^{-1} = P^T$, e A diz-se diagonalizável ortogonalmente

Definição:

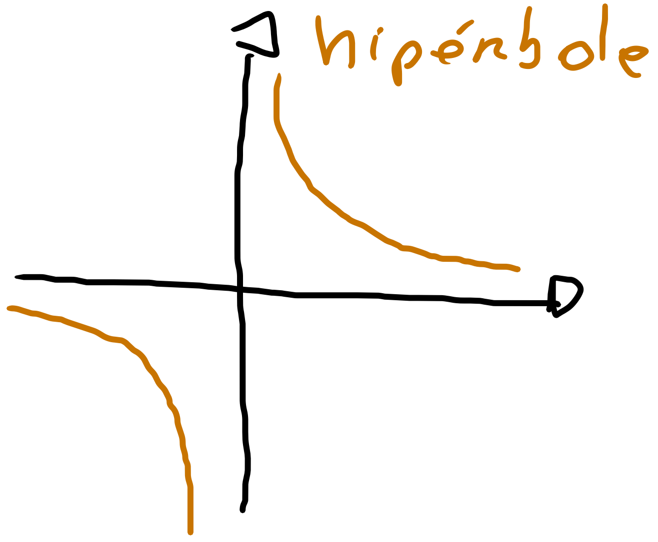
P é ortogonal se $P^{-1} = P^T$, o que é equivalente a dizer que:

$$P = [u_1 \; u_2 \; \cdots \; u_n] \text{ onde } x_i \cdot x_i = 1$$
$$x_i \cdot x_j = 0, \; i \neq j$$

Equação geral de uma cónica

Uma cónica é uma curva plana em que os pontos (x,y) satisfazem uma equação do tipo:

$$\boxed{\alpha x^2+\beta y^2+\underbrace{2\gamma xy}_{\text{termo misto}}}+\boxed{\delta x+\eta y}+\mu=0 \qquad (*)\quad \alpha\neq 0 \vee \beta\neq 0 \vee \gamma\neq 0$$



Exemplos:

1) $\alpha x^2+\beta y^2=4$ (circunferência centrada na origem e de raio 2.

$\alpha=\beta=1 \qquad \mu=-4 \qquad \gamma=\delta=\eta=0 \qquad X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-4=0$

2) $y=5x^2$ (parábola de vértice em $(0,0)$)

$\Leftrightarrow \underbrace{-5}_{\alpha}x^2+\underbrace{y}_{\eta}=\underbrace{0}_{\mu} \qquad \beta=\gamma=\delta=0 \qquad \underbrace{\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}}_{X^T}\underbrace{\begin{bmatrix}-5&0\\0&0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=0$

3) $y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy-1=0$

$\alpha=\beta=0 \qquad \gamma=\frac{1}{2} \qquad \delta=\eta=0 \qquad \mu=-1$

$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/2\\1/2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}yx+\frac{1}{2}xy=xy$

$(*)\quad \underbrace{\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}}_{X^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&\gamma\\\gamma&\beta\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}+\underbrace{\begin{bmatrix}\delta&\eta\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}+\mu=0$

Equação geral na forma matricial (elipse)

$$X^T A X+BX+\mu=0$$

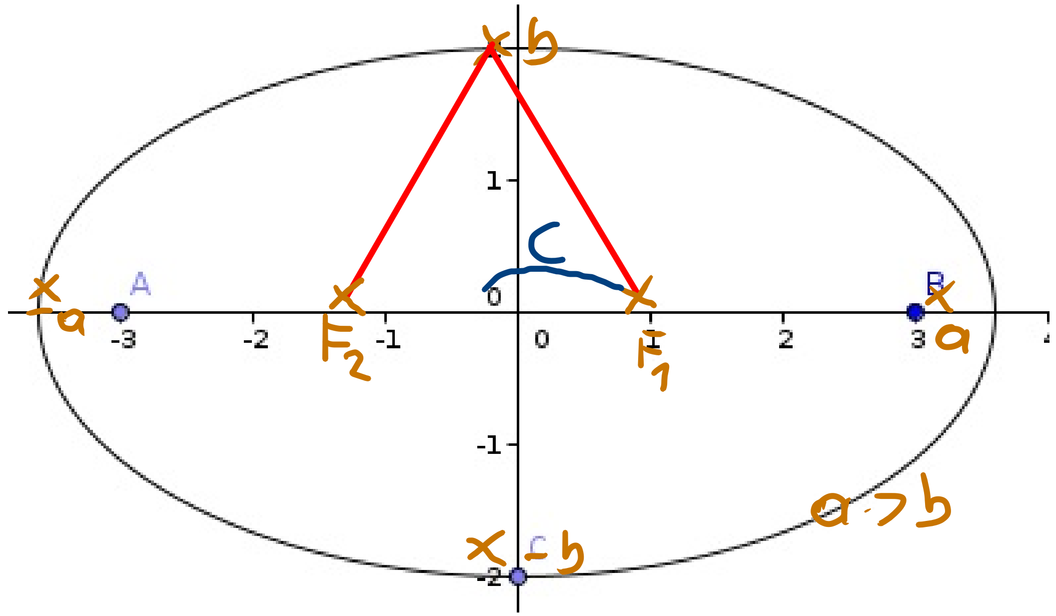
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ax^2+by^2=c$

Onde $X=(x,y)$, A é simétrica não nula e B 1×2.

Equações reduzidas das cónicas

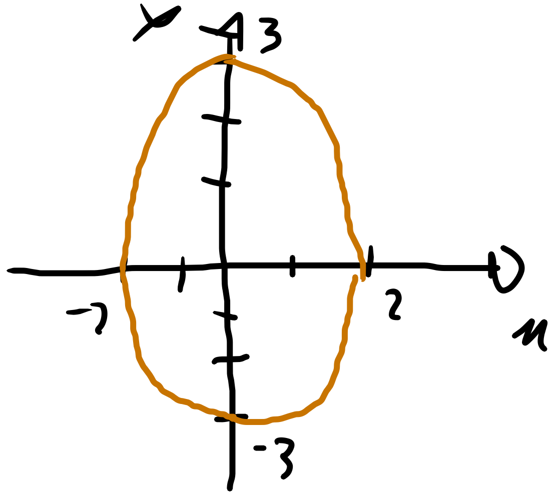
1) Elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{com } a,b\in\mathbb{R}^+$$



Exemplo:

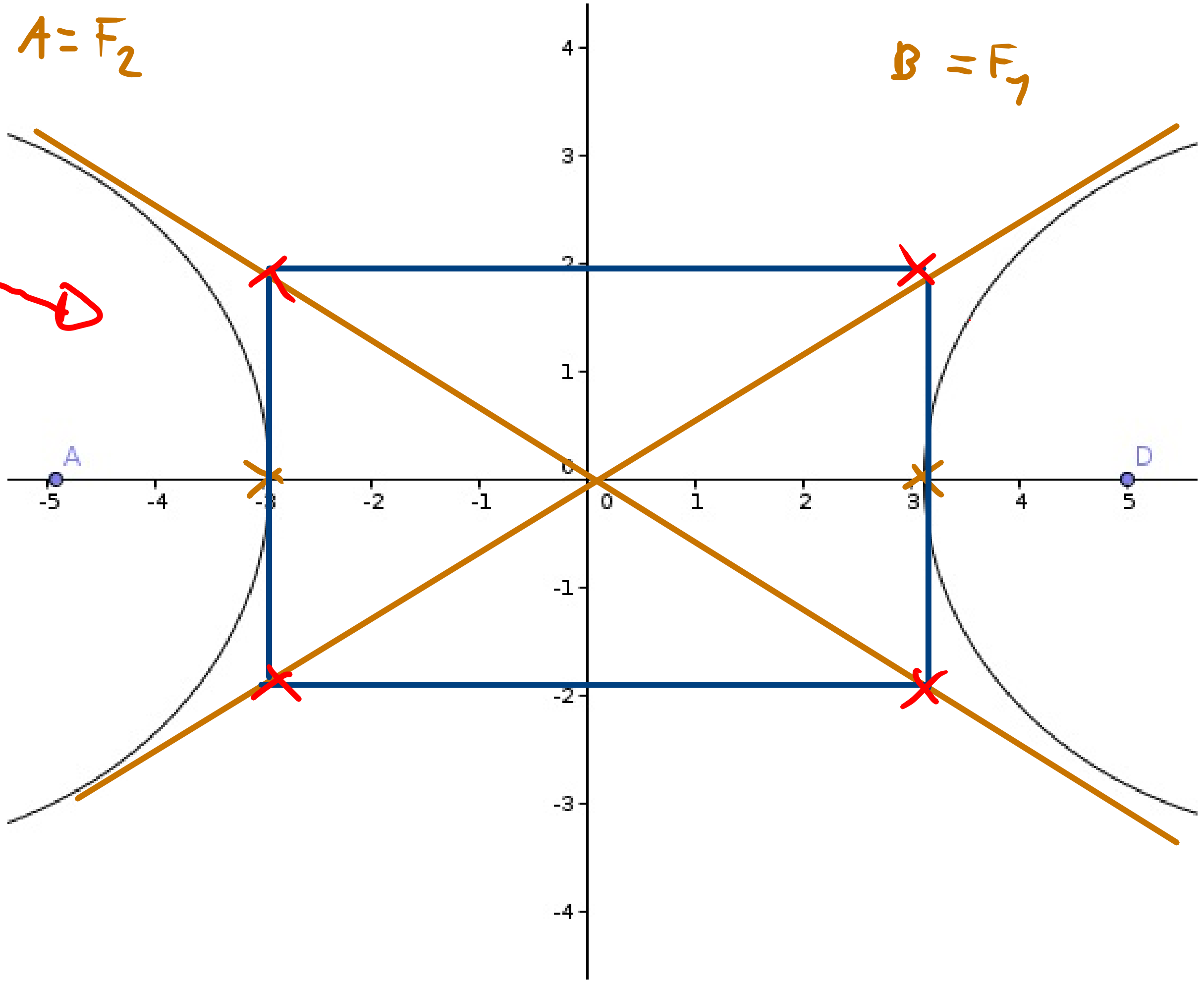
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$



2) Hipérbole

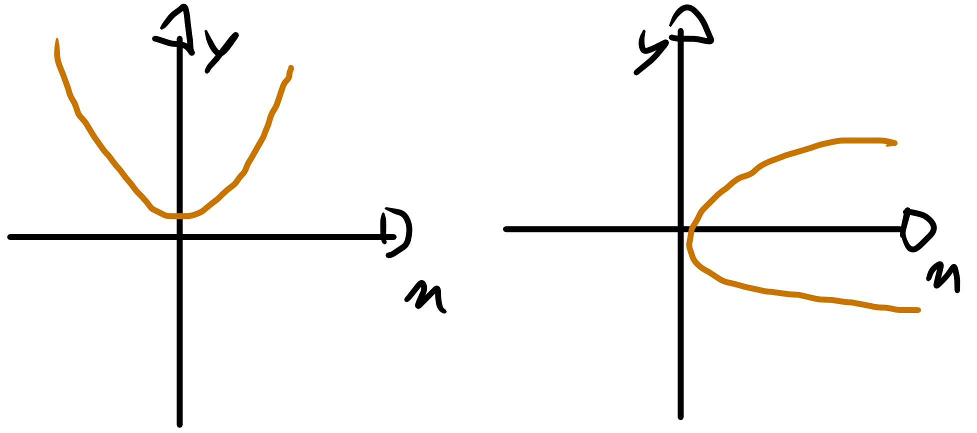
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b\in\mathbb{R}$$

invente!



3) Parábolas

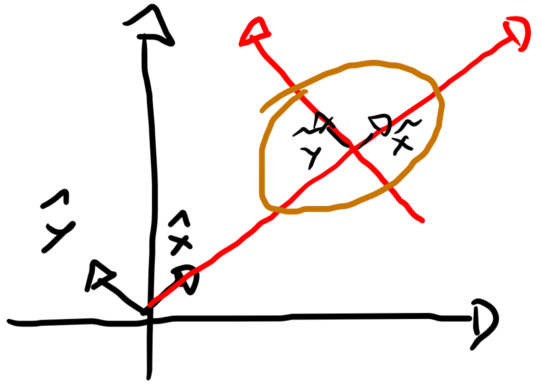
$y=ax^2$ ou $x=ay^2$



Redução da equação geral de uma cónica.

↳ Mudanças de variável (duas em princípio) que tornam a equação da cónica numa equação reduzida.

Ilustração gráfica:



$x^2+\beta y^2+2\gamma xy+\delta x+\eta y+\mu=0$

$\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$

Seja (*) $x^TAx+Bx+\mu=0$ a equação geral da cónica.
Se A não é diagonal, existe o termo misto na equação, diagonalizando ortogonalmente A, conseguimos eliminar esse termo usando esta mudança de variável

$x=P\hat{x}$, onde P é ortogonal e

$P^TAP=D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

De (*), efetuando essa M.V.:

$(P\hat{x})^TAP\hat{x}+BP\hat{x}+\mu=0$

$\hat{x}^T\underbrace{P^TAP}_{D}\hat{x}+\underbrace{BP}_{[\hat{\delta}\ \hat{\eta}]}\hat{x}+\mu=0$

$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\xi} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{\xi}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0$

Poderá ser necessário realizar uma segunda M.V. que corresponde a uma translação da origem do referencial.

Exemplo 1:

$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} X - 6 = 0$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável ortogonalmente $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ é ortogonal e $P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1ª M.V.: $X = P\hat{X}$ $\quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$

$\hat{X}^T D \hat{X} + BP\hat{X} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\,\hat{y} - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - (\hat{y}^2 - 2\sqrt{2} + 2 - 2) - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - (y - \sqrt{2})^2 + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\underbrace{\hat{x}^2}_{\tilde{x}} - \underbrace{(\hat{y} - \sqrt{2})^2}_{\tilde{y}} = 4$

Exemplo 3:

$(2x^2 + 12x) + 3y + 15 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 3y + 15 = 0 \Leftrightarrow 2(x+3)^2 - 18 + 3y + 15 = 0 \Leftrightarrow 2(x+3)^2 + 3(y-1) = 0$

M.V.: $\begin{cases} \tilde{x} = x + 3 \\ \tilde{y} = y - 1 \end{cases} \quad 2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3}\tilde{x}^2$ parábola

1a) $x^2+y^2-2xy+2x+4y+5=0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+5=0$

1º passo: Diagonalizar ortogonalmente A

Valores próprios:

$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-2xy+2x+4y+5=0 \Leftrightarrow X^TAX+BX+5=0$

onde $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ não diagonal

1) Determinar P ortogonal tal que

$P^TAP=D$, onde D é diagonal

$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda=2$

$U_2=\{x\in\mathbb{R}^2: (A-2I)X=0\}$

$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\Big\|$ $\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow y=-x$

$U_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\-x\end{bmatrix}: x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}: x\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$

$U_0=\{x\in\mathbb{R}^2: AX=0\}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad X_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ e $X_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, notar que $X_1\cdot X_2=0$

$\|X_1\|=\sqrt2$ $\quad \|X_2\|=\sqrt2$ $\quad Y_1=\frac{1}{\sqrt2}X_1=\begin{bmatrix}\sqrt2/2\\-\sqrt2/2\end{bmatrix}$ e $Y_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ igual

Logo, $P=\begin{bmatrix}\sqrt2/2&\sqrt2/2\\-\sqrt2/2&\sqrt2/2\end{bmatrix}$ é ortogonal e $P^TAP=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$

2) M.V. $X=P\hat X$, $\hat X=\begin{bmatrix}\hat x\\\hat y\end{bmatrix}$ $\Big\|$ $(P\hat X)^TA(P\hat X)+B(P\hat X)+5=0 \Leftrightarrow \hat X^T\overbrace{P^TAP}^{D}\hat X+BP\hat X+5=0$

$\Leftrightarrow 2\hat x^2+0\hat y^2+\begin{bmatrix}-\sqrt2 & 3\sqrt2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat x\\\hat y\end{bmatrix}+5=0\Leftrightarrow 2\hat x^2-\sqrt2\hat x+3\sqrt2\hat y+5=0$

3) Preparação da 2ª M.V.: $2\left(\hat x^2-\frac{\sqrt2}{2}\hat x\right)+3\sqrt2\hat y+5=0 \Leftrightarrow 2\left(\hat x^2-2\frac{\sqrt2}{4}\hat x+\frac18-\frac18\right)+3\sqrt2\hat y+5=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\hat x-\frac{\sqrt2}{4}\right)^2-\frac14+3\sqrt2\hat y+5=0\Leftrightarrow 2\left(\hat x-\frac{\sqrt2}{4}\right)^2+3\sqrt2\hat y+\frac{19}{4}=0\Leftrightarrow 2\left(\hat x-\frac{\sqrt2}{4}\right)^2+3\sqrt2\left(\hat y+\frac{19/4}{3\sqrt2}\right)=0$

4) M.V.: $\begin{cases} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \tilde{x} \\ \hat{y} + \frac{19}{12\sqrt{2}} = \tilde{y} \end{cases}$ $\quad 2\tilde{x}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}^2$ parábola.

Quádrica:

$$X^T \overset{\to 3\times 3}{A} X + \overset{\to 1\times 3}{B} X + \overset{\to \in \mathbb{R}}{\mu} = 0$$

Exemplos:

Termos mistos

1) $4x^2 + 5y^2 - 3z^2 + \boxed{2xy} + \boxed{3xz} - \boxed{6yz} + \underbrace{\boxed{x + 3y - 7z}}_{B} + 6 = 0$

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3/2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3/2 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{[1\ 3\ -7]}_{B}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 6 = 0$$

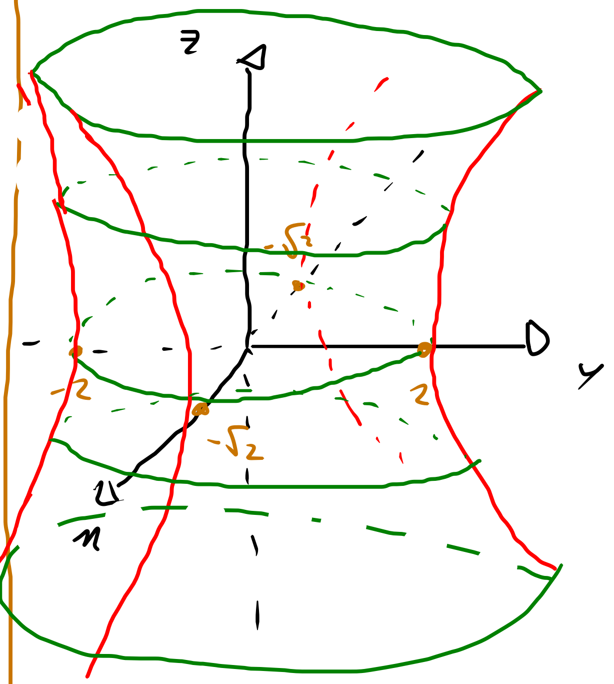
2) $x^2 + y^2 + 3xz + 4z - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow [x\ y\ z]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + [0\ 0\ 4]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 5 = 0$$

Como reduzir uma equação geral de uma quádrica?

Processo análogo às cónicas.

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$



Planos coordenados:

$x=0$; yOz | $y=0$; xOz | $z=0$; xOy

Se $z=0$,

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, elipse

Se $x=0$,

$\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, hipérbole

Se $y=0$

$\frac{x^2}{2} - z^2 = 1$, hipérbole

Se $z=-1$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 2$, elipse

4) M.V.: $\begin{cases} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \tilde{x} \\ \hat{y} + \frac{19}{12\sqrt{2}} = \tilde{y} \end{cases}$ $\qquad 2\tilde{x}^2 + 3\sqrt{2}\,\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}^2$ parábola.

Quádrica:

$$\underbrace{X^T A X}_{A \in 3\times 3} + \underbrace{BX}_{B \in 1\times 3} + \underbrace{\mu}_{\mu \in \mathbb{R}} = 0$$

Exemplos:

Termos mistos

1) $4x^2 + 5y^2 - 3z^2 + \boxed{2xy} + \boxed{3xz} - \boxed{6yz} + \underbrace{\boxed{x + 3y - 7z}}_{B} + 6 = 0$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3/2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3/2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 6 = 0$$

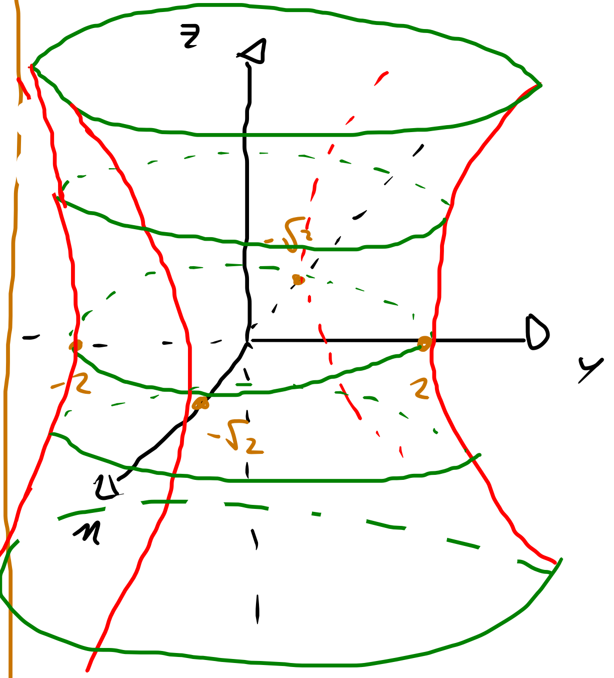
2) $x^2 + y^2 + 3xz + 4z - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 5 = 0$$

Como reduzir uma equação geral de uma quádrica?

Processo análogo às cónicas.

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$



Planos coordenados:

$x=0$; yOz | $y=0$; xOz | $z=0$; xOy

Se $z=0$,

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, elipse

Se $x=0$,

$\frac{y^2}{4} - z^2 = 1$, hipérbole

Se $y=0$

$\frac{x^2}{2} - z^2 = 1$, hipérbole

Se $z=-1$

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 2$, elipse

Equações reduzidas das quádricas:

Epsilóides:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hiperbolóides:

• de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

• de duas folhas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Parabolóides:

• elípticos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

• hiperbólicos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

Cilindros:

• elípticos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

• parabólicos

$$y=ax^2$$

• hiperbólicos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Cones:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$

Exercícios:

2a) $x^2-y^2-6z^2+4x-6y-9=0$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4-4-(y^2+6y+9-9)-6z^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-(y+3)^2-6z^2-9-4+9=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x+2)}_{\tilde{x}}{}^2-\underbrace{(y+3)}_{\tilde{y}}{}^2-6\underbrace{z}_{\tilde{z}}{}^2=4$

M.V.: $\begin{cases}\tilde{x}=x+2\\ \tilde{y}=y+3\\ \tilde{z}=z\end{cases}$ $\quad \tilde{x}^2-\tilde{y}^2-6\tilde{z}^2=4$

$\Leftrightarrow \frac{\tilde{x}^2}{4}-\frac{\tilde{y}^2}{4}-\frac{\tilde{z}^2}{\frac{2}{3}}=1$ hiperbolóide de duas folhas.

2d) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+2z+1=0$

$\Leftrightarrow X^T A X + BX + 1 = 0$

onde $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\end{bmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

1) Diagonalizar

$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 4-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee (1-\lambda)(4-\lambda)-4=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0 \vee 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda^2-5\lambda=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda=0 \vee \lambda=5$

$U_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$$

$$U_0 = \left\{\begin{bmatrix} -2y \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A - 5I)x = 0\} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 0 \end{cases} \quad U_5 = \left\{\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; \|X_1\| = \sqrt{5} \quad \Big| \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \|X_2\| = 1 \quad \Big| \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \|X_3\| = \sqrt{5}$$

Logo $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é ortogonal e $P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) M.V.

$X = P\hat{X}$ $\qquad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$

$\hat{X}^T D \hat{X} + BP\hat{X} + \alpha = 0,$

$$5\hat{x}^2 + \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5\hat{x}^2 + \begin{bmatrix} -10/\sqrt{5} & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\hat{x}^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} + 2\hat{z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\hat{x}^2 - \frac{10\sqrt{5}}{5}\hat{x} + \frac{5}{25} - \frac{5}{25}\right) + 2\hat{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -2\hat{z}$$

Aula extra (facultativa) $\rightarrow$ 4/1/23 15-17 11.1.30

Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 3x$

i) $f(x_1+x_2) = 3(x_1+x_2) = 3x_1+3x_2 = f(x_1)+f(x_2)$

ii) $f(\alpha x) = 3(\alpha x = \alpha(3x) = \alpha f(x)$

f é aplicação linear.

Definição de aplicação linear:

V, W e.v.

$\phi: V \to W$ aplicação é linear <u>se</u> i) $\forall x,y \in V \quad \phi(x)+\phi(y)$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V \quad \phi(\alpha x) = \alpha\,\phi(x)$

se $W = V$, ϕ operador linear

Exemplos:

1) $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \mapsto (x+y, x-y, 3x+2y)$

i) $\forall x,y \in \mathbb{R}^2 \quad \phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$

Consideremos $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, qualquer

$\phi(x+y) = \phi(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1+y_1-x_2-y_2, 3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2))$
$= (x_1+x_2, x_1-x_2, 3x_1+2x_2) + (y_1+y_2, y_1-y_2, 3y_1+2y_2)$
$= \phi(x) + \phi(y)$

ii) $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^2} \quad \phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$

Consideremos: $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, quaisquer

$\phi(\alpha x) = \phi(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2, 3\alpha x_1 + 2\alpha x_2) = \alpha(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2) = \alpha \phi(x)$

Logo, ϕ é aplicação linear

2) $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) = (x+y, x-y, 3xy)$

Contraexemplo:

$(x,y) = (1,2) \quad \alpha = 2$

$\phi(\alpha(x,y)) = \phi(2,4) = (6,-2,24)$

$\alpha\phi(x,y) = 2\phi(1,2) = 2(3,-1,6) = (6,-2,12)$

Logo, $\phi(2(1,2)) \neq 2\phi(1,2)$

ϕ não é linear

1) $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2) $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

matriz de rotação em torno do eixo Oz, com ângulo de rotação θ.

Propriedades fundamentais

$\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ e.v.

i) $\phi(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$, se ϕ for linear.

ii) ϕ é aplicação linear sse

$$\phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 \phi(x_1) + \alpha_2 \phi(x_2) + \dots + \alpha_k \phi(x_k),\ k \geq 2$$

$x_i \in \mathcal{V}$, quaisquer, e $\alpha_i \in \mathbb{R}$, quaisquer.

Exemplos de aplicação:

De (i):

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (x - y, y + 1)$

$\phi(0,0) = (0-0, 0+1) = (0,1) \neq (0,0)$, logo ϕ não é linear

De (ii):

Suponhamos $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear e $\phi(1,0) = (4,7)$ e $\phi(0,1) = (-1,2)$

$$\phi(x,y) = \phi(x(1,0) + y(0,1)) = x\,\phi(1,0) + y\,(0,1) = x(4,7) + y(-1,2) = (4x - y, 7x + 2y)$$

Consequência de (ii):

Fixada uma base $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathcal{V}$, uma aplicação linear $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ fica completamente determinada por $\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)$.

1)a) $\phi(x,y) = (x+1,\ y,\ x+y)$

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

i) $\phi(0,0) = (0+1,\ 0,\ 0+0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$ logo ϕ não é linear

f) $\phi(at^2+bt+c) = a+(t+1)(bt+c) = a+bt^2+ct+bt+c = bt^2+(c+b)t+(a+c)$ $\quad \phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$

i) $\forall_{p,q\in\mathcal{P}_2}$ $\phi(p+q) = \phi(p)+\phi(q)$

ii) $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}$ $\forall_{p\in\mathcal{P}_2}$ $\phi(\alpha p) = \alpha\phi(p)$

ou $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ $\forall_{p,q\in\mathcal{P}_2}$ $\phi(\alpha p+\beta q) = \alpha\phi(p)+\beta\phi(q)$

i) Sejam $p,q \in \mathcal{P}_2$, quaisquer:

$p(t) = a_1t^2+b_1t+c_1$

$q(t) = a_2t^2+b_2t+c_2$

$$\phi(p+q) = \phi\big((a_1+a_2)t^2+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)\big) = (b_1+b_2)t^2+(b_1+b_2+c_1+c_2)t+(a_1+a_2+c_1+c_2)$$

$$= \big(b_1t^2+(b_1+c_1)t+a_1+c_1\big)+\big(b_2t^2+(b_2+c_2)t+a_2+c_2\big) = \phi(p(t))+\phi(q(t))$$

ii) Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$ e $p\in\mathcal{P}_2$ quaisquer:

$p(t) = at^2+bt+c \quad a,b,c\in\mathbb{R}$

$$\phi(\alpha\, p(t)) = \phi\big((\alpha a)t^2+(\alpha b)t+(\alpha c)\big) = (\alpha b)t^2+(\alpha c+\alpha b)t+\alpha a+\alpha c = \alpha\big(bt^2+(c+b)t+(a+c)\big) = \alpha\,\phi(p(t))$$

De i e ii, ϕ é linear

4) $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é aplicação linear

$\phi(1,1) = (2,-3)$

$\phi(0,1) = (1,2)$

(a) $\phi(3,-2)$

1º → Determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(3,-2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -5 \end{cases}$

2º → Cálculo de $\phi(3,-2)$:

$$\phi(3,-2) = \phi(3(1,1) - 5(0,1)) \overset{\phi \text{ é linear}}{=} 3\phi(1,1) - 5\phi(0,1) = 3(2,-3) - 5(1,2) = (6-5, -9-10) = (1,-19)$$

(b) $(a,b) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b-a \end{cases}$

$$\phi(a,b) = \phi(a(1,1) + (b-a)(0,1)) \overset{\phi \text{ é linear}}{=} a\phi(1,1) + (b-a)\phi(0,1)$$

$$= a(2,-3) + (b-a)(1,2) = (2a+b-a, -3a+2b-2a) = (a+b, -5a+2b)$$

Matriz de uma aplicação

Exemplo introdutório:

$\phi: \mathbb{R}^2 = V \to \mathbb{R}^3 = W$

$(x,y) \mapsto (x+y, x-y, 3x)$

ϕ é linear.

continua...

$\mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$

$\mathcal{E}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$$[\phi(x,y)]_{\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[(x,y)]_{\mathcal{E}_2}}$$

$$[\phi(x,y)]_{\mathcal{E}_3} = M\,[(x,y)]_{\mathcal{E}_2}$$

↳ Matriz de ϕ relativa a $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$.

Notação:

$M = M(\phi, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ $\quad [\phi(x,y)]_{\mathcal{E}_3} = M(\phi, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)\,[(x,y)]_{\mathcal{E}_2}$

Matriz de ϕ relativa às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$:

$$\phi : V \to W$$

$\mathcal{B}_V = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $\quad \mathcal{B}_W(v_1, v_2, \dots, v_m)$

Objetivo:

Determinar M tal que:

$$[\phi(u)]_{\mathcal{B}_W} = M\,[u]_{\mathcal{B}_V}$$

Se $x \in V$, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$, i.e., $[x]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$\phi(u) = a_1 \phi(u_1) + a_2 \phi(u_2) + \dots + a_n \phi(u_n)$

$$[\phi(u)]_{\mathcal{B}_W} = \underbrace{\left[a_1 [\phi(u_1)]_{\mathcal{B}_W} + a_2 [\phi(u_2)]_{\mathcal{B}_W} + \dots + a_n [\phi(u_n)]_{\mathcal{B}_W}\right]}_{M} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

↳ $[u]_{\mathcal{B}_V}$

Notação:

$m = M(\phi, \beta_{\mathcal{V}}, \beta_{\mathcal{W}})$

matriz de ϕ relativa às bases $\beta_{\mathcal{W}}, \beta_{\mathcal{V}}$.

Exemplo (slide 8):

$\phi : \mathbb{R}^2$

Prova de que $P^{-1} = P^T$

Se $P = [x_1 \ x_2 \cdots x_n]$ tal que $x_i \cdot x_i = 1$ e $x_i \cdot x_j = 0$, $i \neq j$

então

$$P^T P = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \cdots x_n] = \begin{bmatrix} \overbrace{x_1^T x_1}^{1} & \overbrace{x_1^T x_2}^{0} & \cdots & \overbrace{x_1^T x_n}^{0} \\ \overset{0}{x_2^T x_1} & \overset{1}{x_2^T x_2} & \cdots & \overset{0}{x_2^T x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overset{0}{x_n^T x_1} & \overset{0}{x_n^T x_2} & & \overset{1}{x_n^T x_n} \end{bmatrix} = I_n \quad \text{logo} \quad P^{-1} = P^T$$

Exemplo 5 (slide 22)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T = A$

Notar que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Valores próprios de A: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1$

$U_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle x_1 \qquad \|x_1\| = \sqrt{2} \qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle x_2 \qquad \|x_2\| = \sqrt{2} \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

P diagonalizante ortogonal de A: $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = P$

Ou seja, $P^{-1} = P^T$ e $\quad P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

15) $A=\begin{bmatrix}3&-4&-4\\-4&1&0\\-4&0&5\end{bmatrix}$

a) Mostre que 9 é valor próprio de A

b) Diagonalizar ortogonalmente A.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 9 & 9 & -81 \\ 9 & & -9 & 0 & 81 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} = R \end{array}$$

a) $\lambda=9$ é valor próprio de A sse $|A-9I|=0$

$|A-9I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-6&-4&-4\\-4&-8&0\\-4&0&-4\end{vmatrix} \underset{L_3:L_3-L_1}{=} \begin{vmatrix}-6&-4&-4\\-4&-8&0\\2&4&0\end{vmatrix}=0$ $\Leftarrow L_2=-2L_3$

b) $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -\lambda^3+9\lambda^2+9\lambda-81=0 \Leftrightarrow (\lambda-9)(-\lambda^2-9)=0 \Leftrightarrow \lambda=9 \vee \lambda=3 \vee \lambda=-3$

$U_9=\left\langle\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}\right\rangle$ $\quad x_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}, x_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$ são ortogonais entre si

$U_3=\left\langle\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}\right\rangle$ $\quad \|x_1\|=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$ $\quad \left\{\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{3}x_3\right\}$ é uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$

$\|x_2\|=3$

$U_{-3}=\left\langle\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ $\quad \|x_3\|=3$

Logo, $P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&-1&2\\1&2&2\\2&-2&1\end{bmatrix}$ é ortogonal e $P^TAP=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$

16)

$A_{3\times3}$ simétrica

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são vetores próprios de A associados a $\lambda = 1$

$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vetor próprio de A associado a $\lambda = -3$

a) $U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ porque $\{x_1, x_2\}$ são l.i. $= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\{x_1, x_2, x_3\}$ são l.i. porque $P = [x_1\ x_2\ x_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, ver que $\det(P) = 2$

e

$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ logo $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^{-1}$

↳ substituir P por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $PDP^T = A$