Determinantes

Determinante de uma matriz $\boxed{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

Teorema de Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Escolhemos 1 linha ou 1 coluna. De preferência a que tem mais zeros.

Por exemplo a linha 1:

$$\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \; & a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \\ & - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \\ & + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \end{aligned}$$

Regra de Sarrus

Apenas para matrizes 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Propriedades do determinante

1. $\det(A) = \det(A^T)$

2. Se A tem linha (ou coluna) nula, ou duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det(A) = 0$

3. Se B resulta de A por troca de duas linhas (ou colunas), então $\det(B) = -\det(A)$

4. Se B resulta de A por multiplicação de uma linha (ou coluna) por um escalar α, então $\det(B) = \alpha \det(A)$

5. Se B resulta de A substituindo a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha j, $L_i = L_i + \alpha L_j$, então $\det(B) = \det(A)$

6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\boxed{\text{Nota: } \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)}$

Menor, cofator e adjunta

Dada uma matriz $A_{n\times n}$:

Podemos obter M_{ij} $(n-1)(n-1)$ que se obtém de A por eliminação da sua linha i e coluna j.

⇒ O menor de A é $\boxed{\det(M_{ij})}$

⇒ O cofator de A é $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})}$

⇒ A adjunta de A é a matriz transposta do cofator de A.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 35 & -22 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ -21 & 14 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -21 \\ -22 & 2 & 14 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema

A é invertível $\iff \det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$$

Corolário: Seja $A_{n \times n}$. O sistema homogéneo $AX = 0$ tem solução não trivial se e só se $\det(A) = 0$

Regra de Cramer

Seja $A_{n \times n}$ tal que $\det(A) \neq 0$

Então o sistema $AX = B$ é possível e determinado e a sua única solução é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{é dada por} \quad x_{1\dots n} = \frac{\det(A_{1\dots n})}{\det(A)}$$

onde $A_{1\dots n}$ obtém-se de A por substituição da sua coluna $1\dots n$ pela coluna B

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Quando $\det(A) \neq 0$, pode usar-se a Regra de Cramer e, nesse caso, a solução do sistema obtém-se da seguinte forma

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$