



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE_IM_2025-2026

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 2

Cap. 1 Cinemática

Movimento curvilíneo

1.2 Dinâmica da partícula

Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações. Força de atrito. Força elástica.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
 Gab. 13.3.16

Movimento circular

Trajectória circular

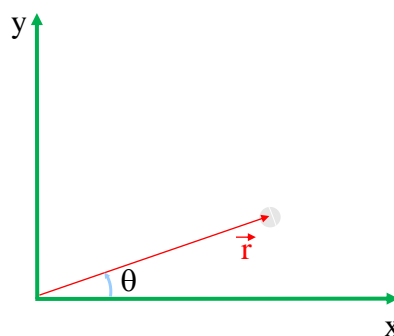
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$x = |\vec{r}| \cos \theta$$

$$y = |\vec{r}| \sin \theta$$

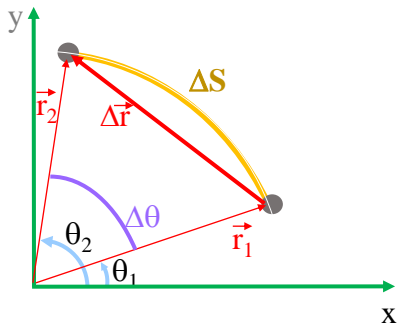
r e θ são coordenadas polares

θ posição angular



MCE_IM_2025-2026

Movimento circular



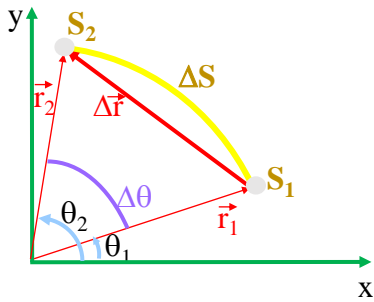
$$\Delta S = r \Delta \theta$$
$$r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

movimento em sentido retrógrado indica
o sentido positivo do movimento

MCE_IM_2025-2026

Movimento circular

S - posição medida sobre a
circunferência

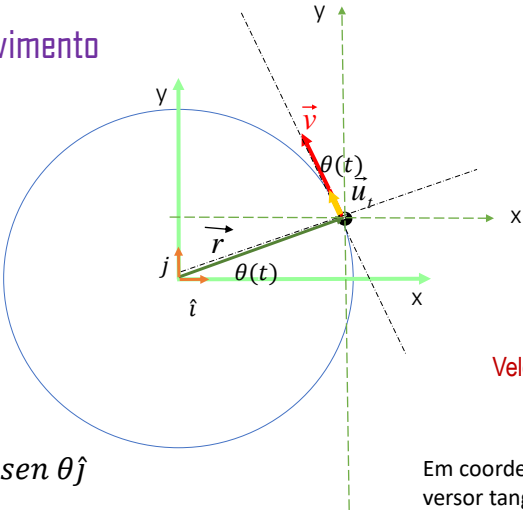


As posições podem ser descritas em termos de r (cartesiana),
θ (angular) e s (linear), estando relacionados entre si pela
relação

$$s = r \theta$$
$$com\ r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

MCE_IM_2025-2026

Velocidade no movimento circular



$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

Velocidade é sempre tangente à circunferência (trajetória)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \theta \hat{i} + |\vec{r}| \sin \theta \hat{j}$$

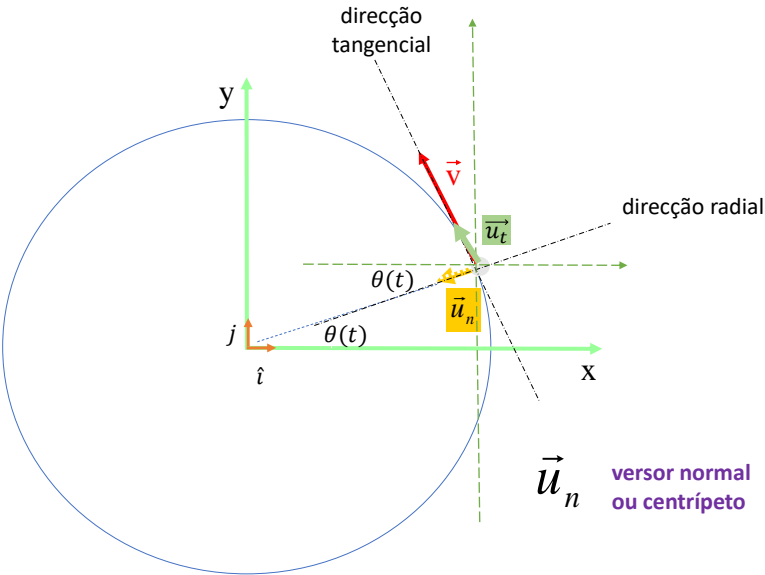
Em coordenadas cartesianas, o versor tangente será dado por:

$$\vec{v} = v[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$$

$$\vec{u}_t = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

MCE_IM_2025-2026

Aceleração no movimento circular



$$\vec{u}_n = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}$$

\vec{u}_n versor normal ou centrípeto

MCE_IM_2025-2026

Aceleração no movimento circular

Analiticamente, poderemos chegar à mesma conclusão

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[v(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i})]}{dt}$$

$$\vec{v} = v[-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + v\left[-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\hat{j} - \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\hat{i}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + v\frac{d\theta}{dt}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}v$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + \frac{v^2}{r}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}]$$

MCE_IM_2025-2026

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{i}) + \frac{v^2}{r}[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}] \Leftrightarrow$$

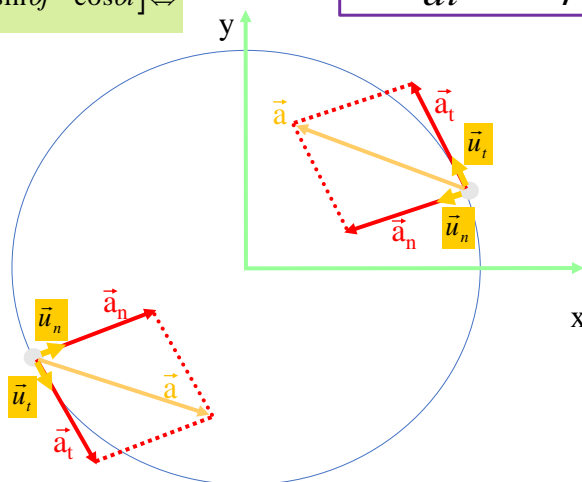
$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n$$

a_t - aceleração tangencial

a_n - aceleração radial

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$



MCE_IM_2025-2026

aceleração tangencial - traduz a variação temporal do módulo da velocidade

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

aceleração normal (centrípeta ou radial) - traduz a variação temporal da direcção da velocidade

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

MCE_IM_2025-2026

Questão 2

Uma partícula de massa $m=1\text{kg}$, inicialmente em repouso, parte da origem do referencial em $t=0\text{s}$, sujeita à ação de uma força dada por: $\vec{F}(t) = t\hat{x} + 4t\hat{y}$ (N). Determine:

- O vetor posição, $\vec{r}(t)$.
- A componente tangencial do vetor aceleração.

MCE_IM_2025-2026

Movimento Circular – Relação entre grandezas lineares e angulares

$$s = R \theta$$

R = constante no movimento circular

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v = \frac{rd\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r\omega$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$v = R \omega$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$a = R \alpha$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

MCE_IM_2025-2026

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a_t = \frac{d(\omega r)}{dt} \Leftrightarrow a_t = r \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow$$

NB: no movimento circular, r é constante

$$a_t = r \alpha$$

a_t – aceleração tangencial (linear)

α - aceleração angular rad/s²

Exemplos

→ Pêndulo

→ Movimento curvilíneo

MCE_IM_2025-2026

Movimento circular uniforme (m.c.u.)

$$|\vec{v}| = \text{constante}; \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{constante}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \implies \mathbf{a}_t = \mathbf{0}$$

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} \neq \vec{0} \implies a_n \neq 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

- A aceleração normal é constante no m.c.u.
- Não há aceleração tangencial

MCE_IM_2025-2026

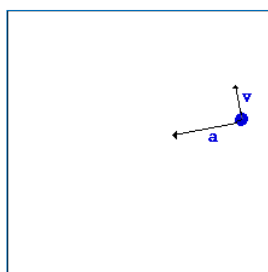
$$a_t = 0 \implies \alpha = \frac{a_t}{r} = 0$$

$$v = cte \implies \omega = \frac{v}{r} = cte$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$1 \text{ volta} \implies \Delta\theta = 2\pi$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \equiv T$$



T – período (s)

$$T = \frac{1}{f}$$

<http://surendranath.tripod.com/CirclePlus/CirclePlus.html>

f - frequência (Hz ou s⁻¹)

MCE_IM_2025-2026

Movimento Circular - Equações cinemáticas

$$\Delta s = \int_0^t v dt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

$$\Delta v = \int_0^t a_t dt$$

$$v = v_0 + a_t t$$

$$\Delta \theta = \int_0^t \omega dt$$

se $\alpha = \text{cte}$

$$\Delta \omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

MCE_IM_2025-2026

Questão 3

Um ponto descreve uma circunferência de acordo com a lei $s=t^3+2t^2$, onde s é medido em metro ao longo da circunferência e t vem em segundo.

Em $t=2s$, a aceleração total do ponto é $16\sqrt{2} \text{ ms}^{-2}$. Calcule o raio da circunferência.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(t^3 + 2t^2)}{dt} = 3t^2 + 4t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(3t^2 + 4t)}{dt} = 6t + 4$$

Em $t=2s$

$$v(t=2) = 3 \times 2^2 + 4 \times 2 = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$a_t(t=2s) = 6 \times 2 + 4 = 16 \text{ ms}^{-2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Em $t=2s$ $16\sqrt{2} = \sqrt{16^2 + a_n^2}$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow 16 = \frac{20^2}{r} \Leftrightarrow r = 25m$$

MCE_IM_2025-2026

1ª Lei de Newton ou Lei da Inércia

Uma partícula livre move-se com velocidade constante: movimento em linha recta com velocidade constante ou repouso.

2ª Lei de Newton - Lei fundamental

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

se m for constante

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

MCE_IM_2025-2026

3ª Lei de Newton – Lei da Acção-Reacção

As forças surgem aos pares

Para cada acção há uma reacção de igual intensidade mas de sentido oposto.

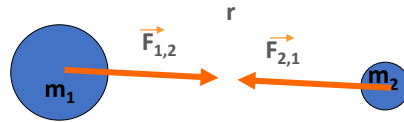
A força exercida no corpo 1 pelo corpo 2 é simétrica da força exercida no corpo 2 pelo corpo 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{Par acção-reacção}$$

**Os pares acção-reacção
actuaem SEMPRE em corpos
DIFERENTES**

MCE_IM_2025-2026

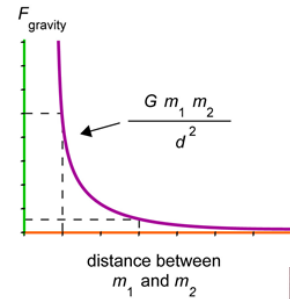
Lei da Gravitação de Newton



$F_{1,2}$ - Força exercida *na* massa m_1 pela massa m_2

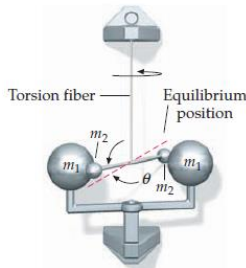
$F_{2,1}$ - Força exercida *na* massa m_2 pela massa m_1

Forças a distância



Forças atractivas!

$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

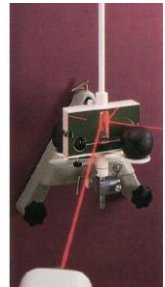


Balança de Cavendish - esquema e dispositivo laboratorial

G - Constante de Gravitação Universal

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

MCE_IM_2025-2026



Dispositivo experimental

Campo Gravítico

$$F_{1,2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

O efeito de m_2 em m_1 é acelerar m_1
Então podemos escrever

$$F_{1,2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{G m_2}{r^2}$$

$$F_{1,2} = m_1 \left[\frac{G m_2}{r^2} \right]$$

$$F_{1,2} = m_1 g$$

g é o CAMPO GRAVÍTICO

É a força por unidade de massa em m_1 devido à massa m_2 .

Todas as massas criam um **campo gravítico $g(r)$** no espaço

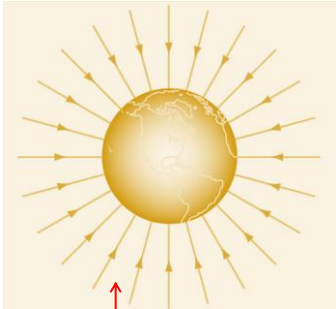
$$g(r) = G \frac{M}{r^2}$$

Vector dirigido para M

g é também a aceleração sofrida por uma massa colocada nesse ponto

MCE_IM_2025-2026

Campo gravítico da terra (linhas de campo)



linhas de campo

$g_0 = G \frac{M_T}{r_T^2}$ Na superfície terrestre

$g = G \frac{M_T}{(r_T + h)^2} \Leftrightarrow g = G \frac{M_T}{r_T^2 (1 + \frac{h}{r_T})^2} \Leftrightarrow$

$g = \frac{g_0}{(1 + \frac{h}{r_T})^2}$

h - altura acima da superfície terrestre

se h = 6 km ... g diminui 2/1000 !!

MCE_IM_2025-2026

equilíbrio

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Massa **m** em equilíbrio

Massa **m**

$T = mg$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$

$F_{x,Res.} = T_1 \cos \theta_2 - T_2 \cos \theta_1 = 0$

$F_{y,Res.} = T_1 \sin \theta_2 + T_2 \sin \theta_1 - mg = 0$

equilíbrio

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Ponto **Q**

MCE_IM_2025-2026

Problemas de Dinâmica

Três massas de 5 kg estão colocadas nos vértices de um triângulo equilátero, cujo lado mede 0,25 m.
Determine a intensidade, direcção e sentido da força gravitacional resultante sobre uma das massas, devido à presença das outras duas.

Sugestão:

$$\mathbf{F}_{2,3} = -F_{2,3} \hat{i}$$
$$\mathbf{F}_{1,3} = -F_{1,3} \cos 60^\circ \hat{i} + F_{1,3} \sin 60^\circ \hat{j}$$
$$\mathbf{R}_3 = (-F_{2,3} - F_{1,3} \cos 60^\circ) \hat{i} + F_{1,3} \sin 60^\circ \hat{j} \text{ (N)}$$

MCE_IM_2025-2026

Problemas de Dinâmica

2 - Calcule a aceleração dos corpos da figura e a tensão nas cordas. Aplique ao caso em que $m_1 = 50 \text{ g}$, $m_2 = 80 \text{ g}$ e $F = 1 \text{ N}$.

a)

$$R_1 = T - P_1 = T - m_1 g = m_1 a$$
$$R_2 = F - T = m_2 a$$
$$a_1 = a_2 = a$$

b)

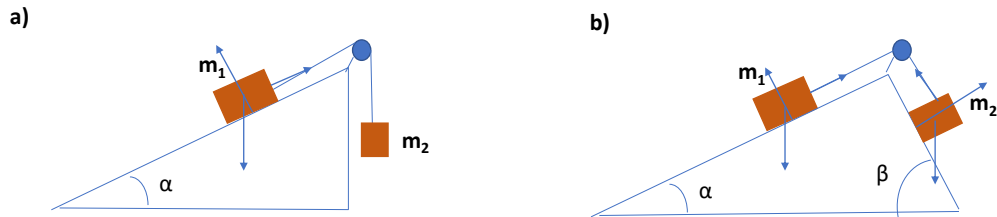
roldanas fixas

NB: As roldanas fixas servem para mudar a direcção e sentido das forças aplicadas; não diminuem a intensidade das forças aplicadas
Sugestão: Fazer o diagrama de forças em cada corpo e depois aplicar a 2ª lei de Newton a cada um deles

MCE_IM_2025-2026

Problemas de Dinâmica

3 - Determine a aceleração com que os corpos na figura se movem e as tensões nas cordas.



NB : Considerem os valores anteriormente disponibilizados para o problema 4

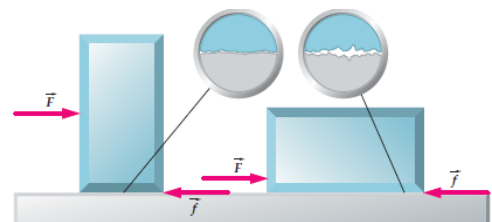
MCE_IM_2025-2026

FORÇA DE ATRITO (sólido)

Superfícies de dois materiais em contacto

A força de atrito f tende a impedir o movimento relativo das superfícies

Microscopicamente a força tem origem eléctrica
Lubrificação separa as superfícies



Força de atrito

- estático
- cinético

MCE_IM_2025-2026

FORÇA DE ATRITO (estático)

Na situação limite, em que a **força de atrito estático atinge o valor máximo**, verifica-se que:

a força de atrito estático máxima é proporcional à normal exercida entre as superfícies

$$f_{a.e.max} = \mu_E N$$

μ_E é o **coeficiente de atrito estático**, para as duas superfícies

Em geral, temos:

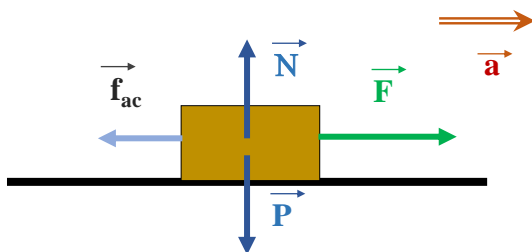
$$f_{a.e.} \leq \mu_E N$$

Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto

MCE_IM_2025-2026

FORÇA DE ATRITO (cinético)

Quando o corpo entra em movimento, temos uma situação com atrito cinético e verifica-se que:



a força de atrito cinético é proporcional à normal exercida entre as superfícies

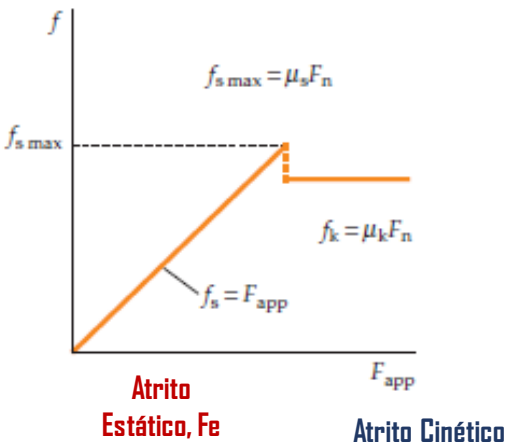
$$f_{a.c.} = \mu_C N$$

μ_C é o **coeficiente de atrito cinético**, para as duas superfícies

Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto

MCE_IM_2025-2026

COMO VARIA A FORÇA DE ATRITO com a força aplicada?



	μ_e	μ_c
Aço sobre aço	0,74	0,57
Cobre sobre aço	0,53	0,36
Borracha sobre cimento	1,0	0,8
Madeira sobre madeira	0,25-0,5	0,2
Gelo sobre aço	0,1	0,03
Teflon sobre teflon	0,04	0,04

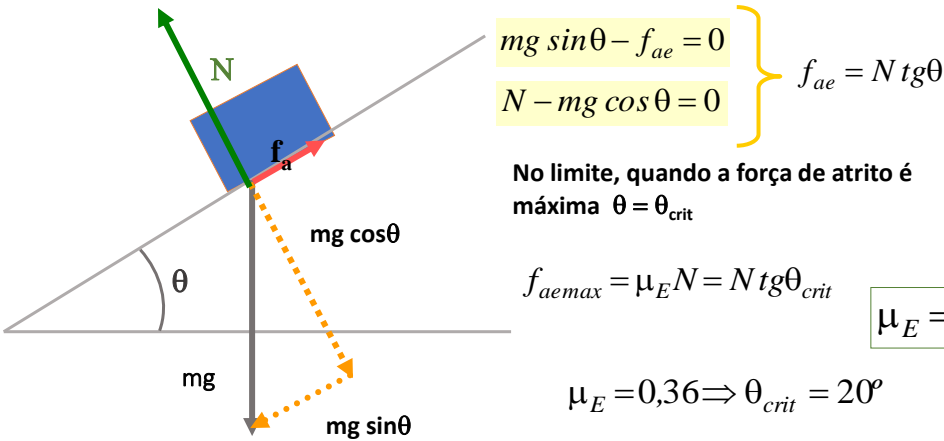
Atrito Cinético < Atrito Estático

MCE_IM_2025-2026

Como medir o coeficiente de atrito μ ?

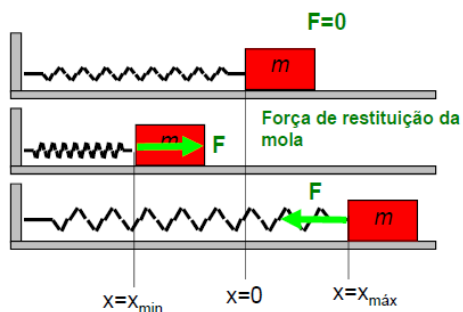
Um corpo é colocado num plano inclinado, ficando em repouso. A inclinação θ é aumentada até atingir um valor máximo (crítico) θ_{crit} que se relaciona com μ_E .

Em repouso $\theta \leq \theta_{crit}$



MCE_IM_2025-2026

Força elástica



Força elástica ou força restauradora, F

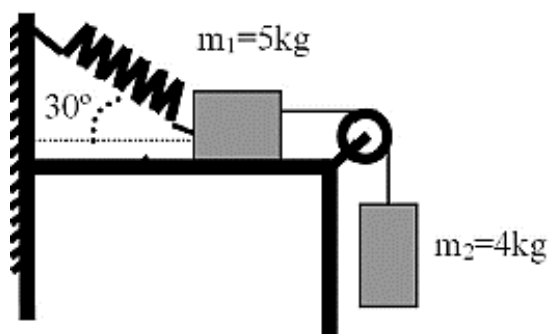
$$F = -kx$$

k = constante da mola

MCE_IM_2025-2026

Problemas de Dinâmica

- 19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força $k = 400\text{N/m}$. Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o alongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):
- Se não houver atrito.
 - Se o coeficiente de atrito entre m_1 e a mesa for 0,4.



MCE_IM_2025-2026



Problemas de Dinâmica

1. Determine a força de atrito exercida pelo ar sobre um corpo cuja massa é de 0,4 kg se ele cair com uma aceleração de $9,0 \text{ m/s}^2$.
2. Um bloco de madeira está sobre um plano inclinado cuja inclinação se pode variar. Aumenta-se gradualmente a inclinação até que o bloco comece a deslizar, para uma inclinação de 30° . Determine o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano.

MCE_IM_2025-2026