Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - Agrupamento 4 — $1.^{\underline{a}}$ Prova de Avaliação Discreta

13 de novembro de 2019

Duração: **2h**

[25pts] 1. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x^3) + 2x - \dfrac{\pi}{2}$.

(a) Calcule $f(1)$ e $f'(1)$.

(b) Justifique que f é invertível e calcule $(f^{-1})'(2)$.

[30pts] 2. Seja $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \ln(e^x - 1) - 2x$.

(a) Estude h quanto à monotonia e determine, caso existam, os seus extremantes globais.

(b) Indique, justificando, o contradomínio de h.

[35pts] 3. Seja g a função definida em $[0,1]$ por $g(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ \operatorname{arcsen}(x^2)\operatorname{cotg}(\dfrac{\pi x}{4}) & se \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$

(a) Mostre que g é contínua em $[0,1]$.

(b) g tem extremos globais em $[0,1]$? Justifique, sem fazer cálculos adicionais.

(c) Prove que existe $c \in]0,1[$ tal que $g'(c) = \frac{\pi}{2}$.

[25pts] 4. Determine a função $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $F(1) = 0$ e $F'(x) = 3 - \dfrac{1}{2x^2} + e^{2-2x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

[25pts] 5. Determine o conjunto de todas as primitivas da função $f(x) = \dfrac{7x+4}{x^2 - x - 6}$, $x \in]3, +\infty[$.

[25pts] 6. Determine $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, usando a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$, indicando o domínio utilizado para a variável t.

[20pts] 7. Determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^4}}\,dx$.

[15pts] 8. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja segunda derivada f'' existe e é contínua em $\mathbb{R}$. Mostre que, se $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) \geq 0$ e $f'(1) \geq 0$, então existe $c \in]0,1[$ tal que $f''(c) = 0$.