

Pesquisa Operacional

Prof. Rogerio Coelho

O número é o regente das formas e ideias.

Pitágoras

Pesquisa Operacional

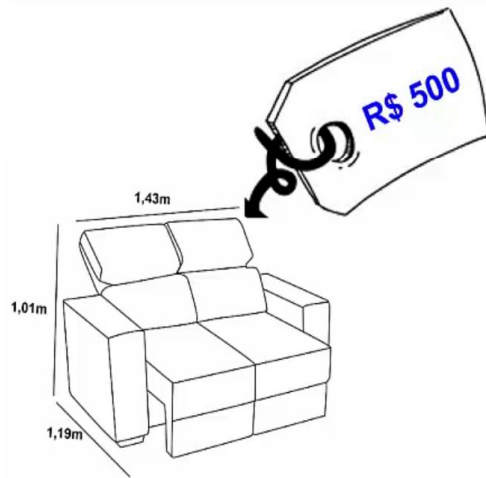
- Aula: Visão Geral de Pesquisa Operacional
 - Objetivos da Aulas:
 - Estudar as origens e evoluções da Pesquisa Operacional.
 - Entender a importância da Pesquisa Operacional para tomada de decisão.
 - Compreender como o processo de modelagem auxilia a resolução de problemas em engenharia, economia, administração, finanças e contabilidade.
 - Identificar os principais elementos que compõem um determinado modelo.

Pesquisa Operacional

- Aula: Visão Geral de Pesquisa Operacional
 - Objetivos da Aulas:
 - Identificar e compreender as fases de Pesquisa Operacional.
 - Reconhecer e diferenciar os modelos determinísticos dos estocásticos.
 - Reconhecer e diferenciar cada umas das ferramentas de Pesquisa Operacional, estabelecendo as circunstâncias a partir das quais elas devem ser utilizadas.
 - Identificar outras técnicas de Pesquisa Operacional que estão sendo utilizadas recentemente.

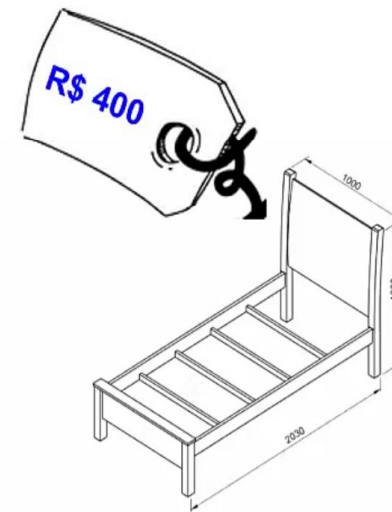
Pesquisa Operacional

Uma indústria de móveis fabrica sofás e camas.
Sabe-se que:



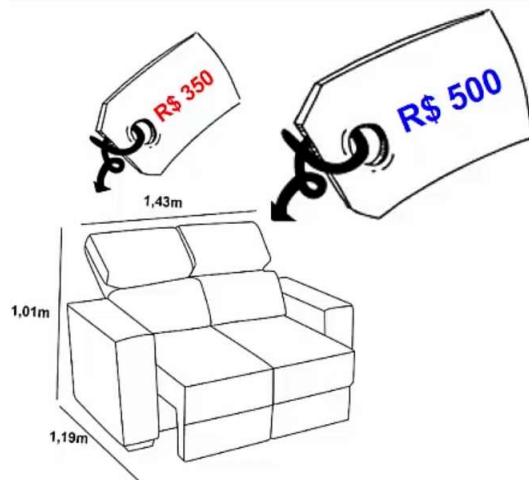
PREÇO

Com base exclusivamente
nestas informações, qual
produto a indústria deve
optar por fabricar?



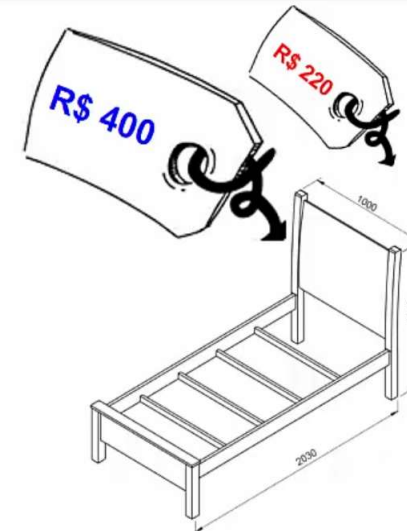
Pesquisa Operacional

Uma indústria de móveis fabrica sofás e camas.
Sabe-se que:



PREÇO
CUSTO

Considerando também as informações de custo, qual produto a indústria deve optar por fabricar?



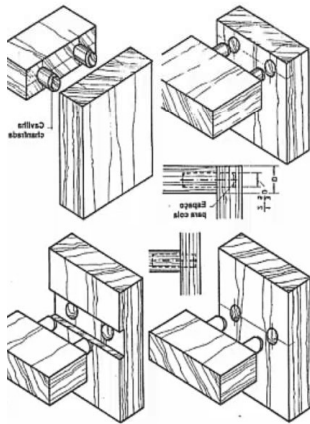
Pesquisa Operacional

Uma indústria de móveis fabrica sofás e camas.
Sabe-se que:



Pesquisa Operacional

Uma indústria de móveis fabrica sofás e camas.



E se considerarmos a
disponibilidade dos
insumos?

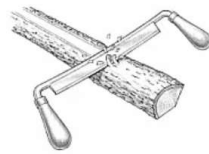
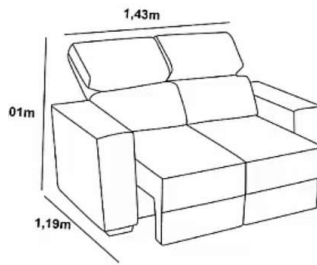


Pesquisa Operacional

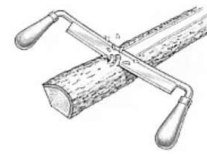
Uma indústria de móveis fabrica sofás e camas.
Sabe-se que:

INSUMOS

Dispomos de 270 metros de tábua...
Que decisão tomaria agora??



3 metros
de tábua



5 metros
de tábua



Pesquisa Operacional

Apesar de não sabermos o custo da tábua, os dados nos permitem definir o lucro por metro desse insumo.



	SOFÁ	CAMA
Lucro (R\$):	150	180
Consumo de tábuas (m):	3	5
Lucro por tábua (R\$/m):	50	36

Pesquisa Operacional

- **Introdução à Pesquisa Operacional**
 - A Pesquisa Operacional surgiu na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial (1939 - 1945).
 - Tinha como objetivo a solução de problemas de natureza logística, tática e de estratégia militar, quando um grupo de cientistas foi convocado para decidir sobre a utilização mais eficaz dos recursos militares.
 - Os resultados positivos alcançados pelo grupo de Cientistas fizeram com que a Pesquisa Operacional fosse disseminada nos USA.

Pesquisa Operacional

- Introdução à Pesquisa Operacional
 - Uma equipe liderada por George B. Dantzig deu origem ao método Simplex para resolução de problemas de Programação Linear.
 - Desde então esse conhecimento vem sendo aplicado para a otimização de recursos em diversos segmentos industriais e comerciais (engenharia, marketing, finanças, microeconomia, operações e logísticas, recursos humanos etc).
 - Ver o filme “O jogo da Imitação”.

Pesquisa Operacional

- **Introdução à Pesquisa Operacional**
 - O avanço da Pesquisa Operacional tornou-se possível graças ao aumento do poder de processamento e à quantidade de memória disponíveis nos computadores nos últimos anos.
 - **Principalmente devido Processamento Paralelo**
 - CORBA (Common Object Request Broker Architectute)
 - É a arquitetura para estabelecer e simplificar a troca de dados entre sistemas distribuídos heterogêneos.
 - Componentes de software possam se comunicar de forma transparente ao usuário, mesmo que para isso seja necessário interoperar com outro software, em outro sistema operacional

Pesquisa Operacional

- Introdução à Pesquisa Operacional
 - Em termos gerais, podemos dizer que a PO consiste na utilização de um método científico (modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos computacionais) para a tomada de decisão.
 - Dessa forma a PO atua cada vez mais em um ramo multidisciplinar, envolvendo áreas de engenharia de produção, matemática aplicada e gestão de negócios.

Pesquisa Operacional

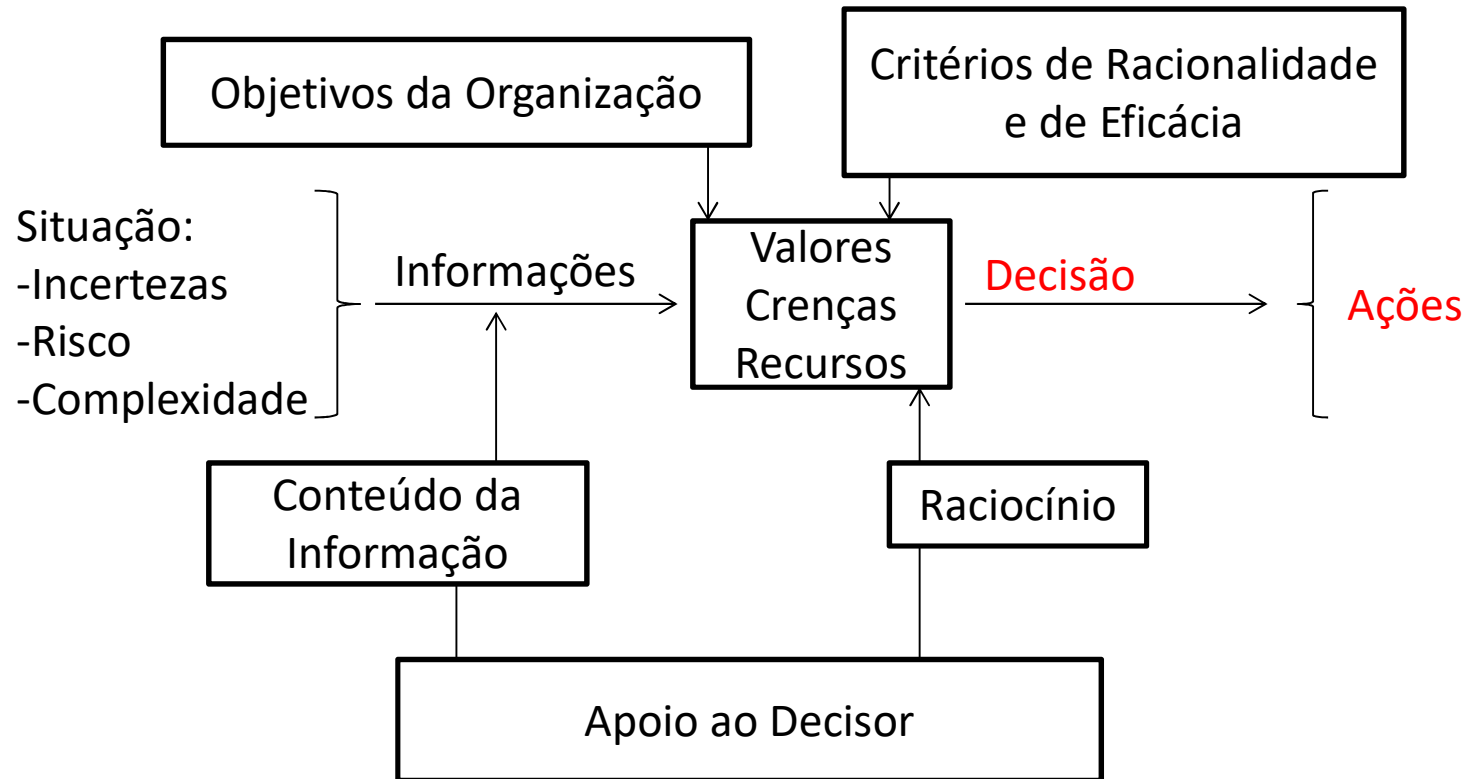
- O Processo de Tomada de Decisão
 - Segundo a Wikipedia O Processo de Tomada de Decisão é “o processo pelo qual são escolhidas algumas ou apenas uma entre muitas alternativas para as ações a serem tomadas”.
 - Exemplos:
 - A determinação da melhor composição de uma carteira de investimentos (ações da Bovespa).
 - Qual melhor caminho a ser traçado em uma cidade.
 - Waze

Pesquisa Operacional

- O Processo de Tomada de Decisão
 - Segundo Liczbinski (2002), a tomada de decisões é um processo complexo e envolve diversos fatores **internos** e **externos** ligados à organização, entre eles temos:
 - Ambiente
 - Risco e Incerteza
 - Custo e qualidade requerida pelo produto ou serviço
 - Agentes tomadores de decisão
 - Cultura
 - O próprio mercado.

Pesquisa Operacional

Tomada de Decisão



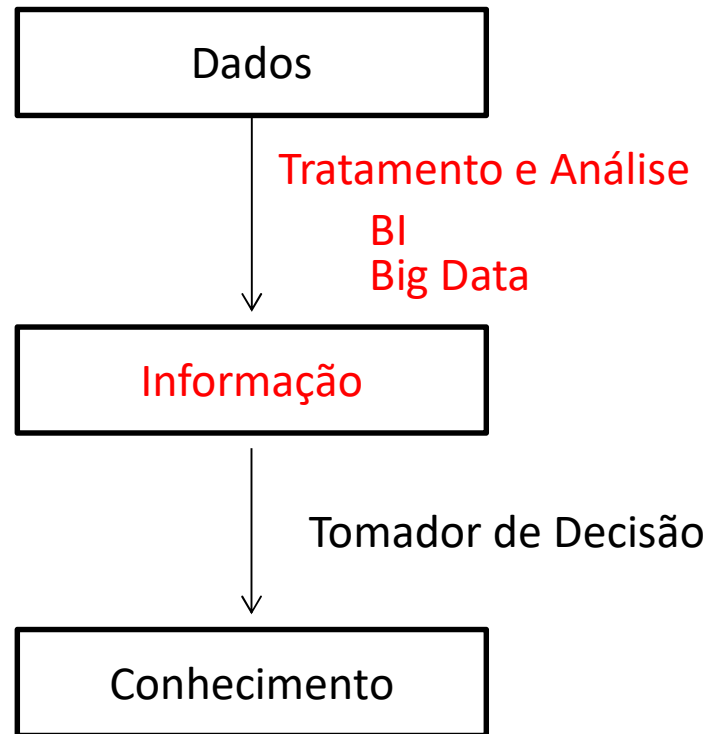
Pesquisa Operacional

- O Processo de Tomada de Decisão
 - Assim, podemos identificar que os **objetivos da organização** estão diretamente relacionados com a **tomada de decisão**.
 - A fim de que sejam **minimizadas** as **incertezas**, os **riscos** e a complexidade inerentes ao processo e com o intuito de que seja escolhido a decisão eficaz entre as diversas alternativas disponíveis, torna-se fundamental o **valor e qualidade da informação**.
 - Base de Conhecimentos
 - Processos

Pesquisa Operacional

- O Processo de Tomada de Decisão
 - Nas organizações ainda é nítida a existência de executivos que insistem em tomar decisões estratégicas sem qualquer embasamento proveniente de um **tratamento de dados** e sem a consideração de **incertezas**, **riscos** e complexidade inerentes ao processo em questão.
 - BI (**Business Intelligence**).
 - Ferramentas que proporcionam informações com qualidade para tomadas de decisões.
 - **MUITO CARO!!!**
 - BigData

Pesquisa Operacional



Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Segundo Lisboa (2009), um modelo é a **representação simplificada de um sistema real**, podendo ser um projeto já existente ou um projeto futuro.
 - No primeiro caso, pretende-se reproduzir o funcionamento real do sistema existente, de forma a aumentar a produtividade.
 - No segundo caso, o objetivo é definir a estrutura ideal do futuro sistema.

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Um modelo é composto pelos elementos principais:
 - Variáveis de Decisão
 - Parâmetros
 - Função Objetivo
 - Restrições

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Variáveis de Decisão
 - As variáveis de decisão são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo. Podem ser:
 - Contínuas: Podem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais (conjunto infinito).
 - » Quantidade ótima a ser produzida de litros de cada refrigerante em uma empresa de bebidas.
 - » Quantidade ótima a fabricar em kg de cada tipo de cereal em uma empresa de alimentos.
 - » Porcentagem ótimas de cada ativo a ser alocado na carteira de investimentos.

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Variáveis de Decisão
 - Discretas: Podem assumir quaisquer valores dentro de um conjunto finito ou uma quantidade enumerável de valores, sendo aquelas provenientes de determinada contagem.
 - » Número ideal de funcionários por turno de trabalho.
 - Binárias: Podem assumir dois possíveis valores:
 - » 1: quando a característica de interesse está presente.
 - » 0: Caso contrário.
 - » Exemplo: Fabricar ou não um determinado produto.

Pesquisa Operacional

Para identificar as **variáveis de decisão**, recomenda-se as seguintes regras:

- Pergunte “O decisor tem autoridade para escolher o valor numérico (quantidade) do item?” Se a resposta for “sim” esta é uma variável de decisão;
- Seja bem preciso com respeito às unidades (moeda e quantidade, por exemplo) de cada variável de decisão (incluindo o fator tempo, como horário, diário, semanal, mensal);
- Cuidado para não confundir as **variáveis de decisão** com os **parâmetros do problema**, como número de máquinas na fábrica, quantidade de cada recurso usado na fabricação de um produto, capacidade de produção da fábrica, custos de produção, custos de transporte, demandas pelos produtos e assim por diante.

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Parâmetros
 - São valores fixos previamente conhecidos do problema. Como exemplo de parâmetros contidos em um modelo matemático.
 - Custo variável para produzir determinado tipo de móvel.
 - Lucro ou custo por unidade de produtos fabricados.
 - Custo por funcionário contratado.
 - Margem de contribuição unitária quando da fabricação e venda de um determinado eletrodoméstico.
 - Demanda de cada produto para um problema de Mix de produção.

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão

- Função Objetivo

- É uma **função matemática** que determina o **valor-alvo** que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das **variáveis de decisão** e dos **parâmetros**, podendo ser uma função de **maximização** (lucro, receita, nível de serviço etc) ou de **minimização** (custo, risco, erro etc).

- Minimização do custo total de produção.
 - Minimização do risco de crédito de carteira de investimentos.
 - Maximização do ROI em equipamentos.
 - Maximização do lucro.
 - Minimização do número de funcionários por turno.

Pesquisa Operacional

- Modelagem para Tomada de Decisão
 - Restrições
 - Pode ser entendida como um conjunto de equações (expressões matemáticas de igualdade) e inequações (expressões matemáticas de desigualdade) que as variáveis de decisão do modelo deve satisfazer.
 - Capacidade máxima de produção.
 - Risco máximo a que um determinado investidor está disposto a se submeter.
 - Demanda mínima aceitável de produtos.
 - Número máximo de veículos disponíveis.

Pesquisa Operacional

Um procedimento que ajuda na elaboração de **restrições** é o seguinte:

- Crie uma restrição com palavras inicialmente, da seguinte forma, **a quantidade requerida de um recurso tem alguma relação com a disponibilidade do recurso**. Essas **relações** podem ser expressas por meio de igualdades ($=$) ou desigualdades (\geq ou \leq);
- Assegure-se que a unidade do termo do lado esquerdo da restrição é a mesma unidade do termo do lado direito;
- Traduza a restrição em palavras para a **notação matemática** utilizando valores conhecidos ou estimados para os parâmetros e os símbolos matemáticos adotados para as variáveis de decisão;
- Reescreva a restrição, se necessário, de modo que **os termos envolvendo as variáveis de decisão fiquem no lado esquerdo da expressão matemática**, enquanto só o valor associado a uma constante fique no lado direito.

Pesquisa Operacional

Uma indústria produz dois produtos: celular e computador, sendo que cada produto consome um certo número de **horas** em 3 máquinas: placa, solda e montagem para ser produzido conforme a tabela abaixo.

Produto	Tempo - Placa	Tempo - Solda	Tempo - Montagem
Celular	2	1	4
Cmp	2	2	2

O tempo de funcionamento **máximo semanal** nas máquinas são:

Máquina	Horas máxima por semana
Placa	160
Solda	120
Montagem	168

O lucro obtido pela venda do celular é de R\$1,00 e o lucro pela venda do computador é de R\$1,50.

Quais são as variáveis de decisão, os parâmetros, as restrições e função objetivo de forma a maximizar o lucro?

Pesquisa Operacional

- Neste problema as **variáveis de decisão** são as **quantidades de produtos** construídos por **semana**: X_1 = celular e X_2 = computador
- Os **parâmetros** fornecidos são os **tempos de consumo em cada máquina** para produção de um produto, o **lucro** etc.
- As **restrições** são os **limites de funcionamento máximo de cada máquina**.
- A **função objetivo** é uma função matemática que determine o **lucro** em função das variáveis de decisão e que deve ser **maximizada**.

Pesquisa Operacional

- Neste problema as **variáveis de decisão** são as **quantidades de produtos de cada tipo** a serem produzidas. X_1 = celular e X_2 = computador.
- As **restrições** são os **limites de funcionamento máximo de cada máquina**.
 - $2X_1 + 2X_2 \leq 160$ - Placa
 - $X_1 + 2X_2 \leq 120$ - Solda
 - $4X_1 + 2X_2 \leq 168$ - Montagem
 - $X_1, X_2 \geq 0$
- A **função objetivo** é uma função matemática que determine o **lucro** em função das variáveis de decisão e que deve ser **maximizada**.
 - $\text{Max } Z(X_1, X_2) = 1 X_1 + 1.5X_2$
 - $Z = 94, x_1 = 16$ e $x_2=52$ = Depois aprenderemos a calcular esses valores.**

Pesquisa Operacional

Uma companhia deseja programar a produção de três utensílios de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos – mão-de-obra e material. A companhia está considerando a fabricação de três produtos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados a seguir:

O suprimento de material de Aço é de **200 kg** por dia. A disponibilidade diária de mão-de-obra é **150 horas**. Formule um modelo de Programação Linear para determinar a produção diária de cada um dos utensílios de modo a maximizar o lucro total da companhia.

	Modelo		
	Faca	Colher	Garfo
Mão-de-obra (horas por unidade)	7	3	6
Material (kg por unidade)	4	4	5
Lucro (\$ por unidade)	4	2	3

Pesquisa Operacional

Formulação do modelo

1. Identificação das variáveis de decisão:

X_1 – produção diária do modelo faca por semana

X_2 – produção diária do modelo colher por semana

X_3 – produção diária do modelo garfo por semana

2. Identificação das restrições:

(Limitação de material) $\longrightarrow 4X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 200$

(Limitação de mão de obra) $\longrightarrow 7X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 150$

(Não-negatividade) $\longrightarrow X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0.$

3. Identificação do objetivo: maximização do lucro total

$$\text{Lucro Total} = F_{\text{obj}} = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

$$\text{Max } F_{\text{obj}} = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

Pesquisa Operacional

Uma empresa fabrica dois produtos, bloco estrutural e bloco canaletas. O lucro unitário do bloco estrutural é de **R\$ 1.000,00** e o lucro unitário do bloco canaletas é de **R\$ 1.800,00**. A empresa precisa de **20 horas** para fabricar uma unidade de bloco estrutural e **30 horas** de bloco canaletas. O tempo anual disponível para produção é de **3.200 horas**. A demanda mínima esperada para cada produto é de **40 unidades** anuais para bloco estrutural e de **30 unidades** anuais para bloco canaletas. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Pesquisa Operacional

Variáveis de decisão

x_1 -> Quantidade de bloco estrutural por ano.

x_2 -> Quantidade de bloco canaleta por ano.

Função objetivo

Maximizar o lucro

$$F_{\text{Obj}} \text{ Max } Z(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1800x_2$$

Restrições

$$20x_1 + 30x_2 \leq 3200$$

$$x_1 \geq 40$$

$$x_2 \geq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pesquisa Operacional

O Alfaiate Wanderlan tem disponível os seguintes tecidos: 16 metros de algodão, 11 metros de seda e 15 metros de lã. Para um terno são necessários 2 metros de algodão, 1 metro de seda e 1 metro de lã.

Para um vestido, são necessários 1 metro de algodão, 2 metros de seda e 3 metros de lã. Se um terno é vendido por R\$300,00 e um vestido por R\$500,00, quantas peças de cada tipo o alfaiate deve fazer no mês, de modo a maximizar o seu lucro? Faça o modelo do problema utilizando Programação Linear.

Pesquisa Operacional

Variáveis de Decisão:

x_1 = quantidade de terno produzida no mês

x_2 = quantidade de vestido produzida no mês

Parâmetros:

Venda do Terno = R\$300,00

Venda do Vestido = R\$500,00

Restrição:

Algodão: $2x_1 + x_2 \leq 16$

Seda: $x_1 + 2x_2 \leq 11$

La: $x_1 + 3x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

Função Objetivo:

Max $Z(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$

Pesquisa Operacional

Uma fábrica de celulares produz dois tipos de celulares, Simples e Top. O lucro unitário do Celular Simples é de R\$ 200,00 e o Lucro unitário do Celular Top é de R\$ 350,00. A empresa precisa de 20 minutos para fabricar uma unidade do Celular Simples e 30 minutos para fabricar uma unidade do Celular Top. O tempo mensal disponível para produção é de 200 horas. A produção mensal de Celulares Simples não pode ultrapassar 200 unidades. Identifique as variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições.

Pesquisa Operacional

Variáveis de Decisão

x_1 -> Celular Simples produzido no mês.

x_2 -> Celular Top produzido no mês.

Função objetivo

$$\text{Max } Z = 200x_1 + 350x_2$$

Restrições

$$1/3x_1 + 1/2x_2 \leq 200$$

$$x_1 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinho e triciclo. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R\$12,00 e R\$60,00, respectivamente. As matérias primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para unidade de carrinho e triciclo produzido, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar lucro líquido semanal. Formular o problema de programação linear que maximiza o lucro e determinar a solução ótima.

Pesquisa Operacional

- Variável de decisão:
 - X_1 = quantidade de carrinhos a serem produzidas por semana.
 - X_2 = quantidade de triciclo a serem produzidas por semana.
- Função Objetivo:
 - $Fob = \max z = 12X_1 + 60X_2$
- Restrições:
 - $0,25 X_1 + 0,5 X_2 \leq 36$ (usinagem)
 - $0,1 X_1 + 0,75 X_2 \leq 22$ (pintura)
 - $0,1 X_1 + 0,4 X_2 \leq 15$ (montagem)
 - $X_1, X_2 \geq 0$ (Restrição da não negatividade).
- Resposta:
 - $x_1 = 70$ e $x_2 = 20$ e $Z = R\$2.040,00$

1) A *Investe&Futuro* possui um capital de R\$14.000,00 para investir **numa carteira de 4 projetos**, tendo estudado a rentabilidade dos mesmos em um ano. Na tabela apresenta-se, para cada projeto/investimento, o montante de capital a investir e a rentabilidade esperada (Valor Atualizado Líquido):

Projeto	Capital (R\$)	Rentabilidade (R\$)
1	5 000	16 000
2	7 000	22 000
3	4 000	12 000
4	3 000	8 000

Que projetos devem ser selecionados de forma a maximizar a rentabilidade sem exceder o capital? Estabeleça o PPL, identificando as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.

Resolução:

Variáveis de Decisão:

X_1 = Projeto 1 selecionado no ano.

X_2 = Projeto 2 selecionado no ano.

X_3 = Projeto 3 selecionado no ano.

X_4 = Projeto 4 selecionado no ano.

Restrições:

$$5.000X_1 + 7.000X_2 + 4.000X_3 + 3.000X_4 \leq 14.000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Função Objetivo:

$$\text{Max } Z = 16.000X_1 + 22.000X_2 + 12.000X_3 + 8.000X_4$$

Num laboratório químico, querem produzir um ácido com as seguintes características:

a) o ácido deve conter no mínimo 20% do componente B_1 , no máximo 20% do componente B_2 e no mínimo 30% do componente B_3 ;

b) o peso específico deve ser menor ou igual a 1.

O ácido deverá ser produzido a partir de uma mistura de 3 **matérias-primas**, R_1 , R_2 , R_3 . A percentagem na qual os componentes B_1 , B_2 e B_3 encontram-se nas matérias-primas bem como o peso específico e o preço por unidade são dados pela tabela a seguir.

Considerando que o peso específico do ácido será dado levando-se em conta a proporção **em que as matérias-primas se encontram na mistura**, formular o problema para determinar esta proporção, minimizando o custo da produção do ácido. Estabeleça o PPL, identificando as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.

	B_1	B_2	B_3	Peso específico	Preço por unidade
R_1	15	10	40	1,04	140
R_2	20	15	30	0,95	120
R_3	25	30	35	1,00	130

Resolução:

Variáveis de Decisão:

X_1 = Quantidade de matéria prima R_1 na mistura

X_2 = Quantidade de matéria prima R_2 na mistura

X_3 = Quantidade de matéria prima R_3 na mistura

Restrições:

$$15X_1 + 20X_2 + 25X_3 \geq 20 \quad (\text{Componente } B_1)$$

$$10X_1 + 15X_2 + 30X_3 \leq 20 \quad (\text{Componente } B_2)$$

$$40X_1 + 30X_2 + 35X_3 \geq 30 \quad (\text{Componente } B_3)$$

$$1,04X_1 + 0,95X_2 + 1,00X_3 \leq 1 \quad (\text{Peso})$$

$$X_1, X_2, X_3 > 0$$

Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = 140X_1 + 120X_2 + 130X_3$$

3) A firma Motores Recreativos produz carrinhos de golfe e carrinhos para neve em suas três instalações fabris. **A fábrica A** produz diariamente 45 carrinhos de golfe e 35 para neve. **A fábrica B** produz 55 carrinhos para neve e nenhum para golfe. **A fábrica C** produz diariamente 65 carrinhos para golfe e nenhum para neve. Os custos operacionais diários das fábricas A, B e C, são respectivamente, R\$ 20.000, R\$19.000 e R\$ 21.000. **Quantos dias cada uma das fábricas** deve operar durante o mês de setembro de modo a cumprir um programa de produção de 1.300 carrinhos de golfe e 1.500 para a neve, a um custo mínimo? Estabeleça o PPL, identificando as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.

	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C
Carrinhos para golfe	45	0	65
Carrinhos para neve	35	55	0
Custos operacionais	20 000	19 000	21 000

Variáveis de Decisão:

X_1 = Quantidade de dias de operação da **fábrica A** deve operar no mês de Setembro

X_2 = Quantidade de dias de operação da **fábrica B** deve operar no mês de Setembro

X_3 = Quantidade de dias de operação da **fábrica C** deve operar no mês de Setembro

Restrições:

$$45X_1 + 65X_3 = 1300$$

$$35X_1 + 55X_2 = 1500$$

$$30 \leq X_1, X_2, X_3 \leq 0$$

Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = 20.000X_1 + 19.000X_2 + 21.000X_3$$

4) Marina deseja ir a uma festa no final de semana e não possui roupa adequada para tal evento. Por ter se comportado bem durante a semana, seu bondoso pai, o Sr. Rogerio resolve lhe fazer um agrado presenteando-a com R\$300,00. Com este dinheiro Marina decide ir ao shopping comprar uma belíssima roupa para a festa tão esperada. Por ser uma adolescente muito econômica, resolveu que só vai comprar o essencial, ou seja, uma blusa, uma calça e uma bota **ou** um sapato. A tarefa não foi tão fácil, pois Marina ficou deslumbrada pelos vários modelos de roupa e tipos de calçados da loja. Na tabela estão representados os modelos que a jovem menina gostou. Qual tipo de combinação a Marina poderá fazer de forma a minimizar o custo das compras? Estabeleça o PPL, identificando as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.

Peças	Opções	Preço (R\$)
1) Blusa	1) Bordada	R\$ 42,00
	2) Lisa	R\$ 35,00
2) Calça	1) Xadrez	R\$ 87,00
	2) Capri	R\$ 79,00
3) Bota	1) Cano alto	R\$ 80,00
	2) Cano curto	R\$ 50,00
4) Sapato	1) Sandália	R\$ 75,00
	2) Anabela	R\$ 42,00

Resolução:

Variáveis de decisão:

X_{11} = Blusa bordada

X_{12} = Blusa lisa

X_{21} = Calça xadrez

X_{22} = Calça capri

X_{31} = Bota cano alto

X_{32} = Bota cano curto

X_{41} = Sapato sandália

X_{42} = Sapato anabela

Restrições:

$$42X_{11} + 35X_{12} + 87X_{21} + 79X_{22} + 80X_{31} + 50X_{32} + 75X_{41} + 42X_{42} \leq 300$$

$$X_{11} + X_{12} = 1$$

$$X_{21} + X_{22} = 1$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{41} + X_{42} = 1$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}, X_{41}, X_{42} \in \{0,1\}$$

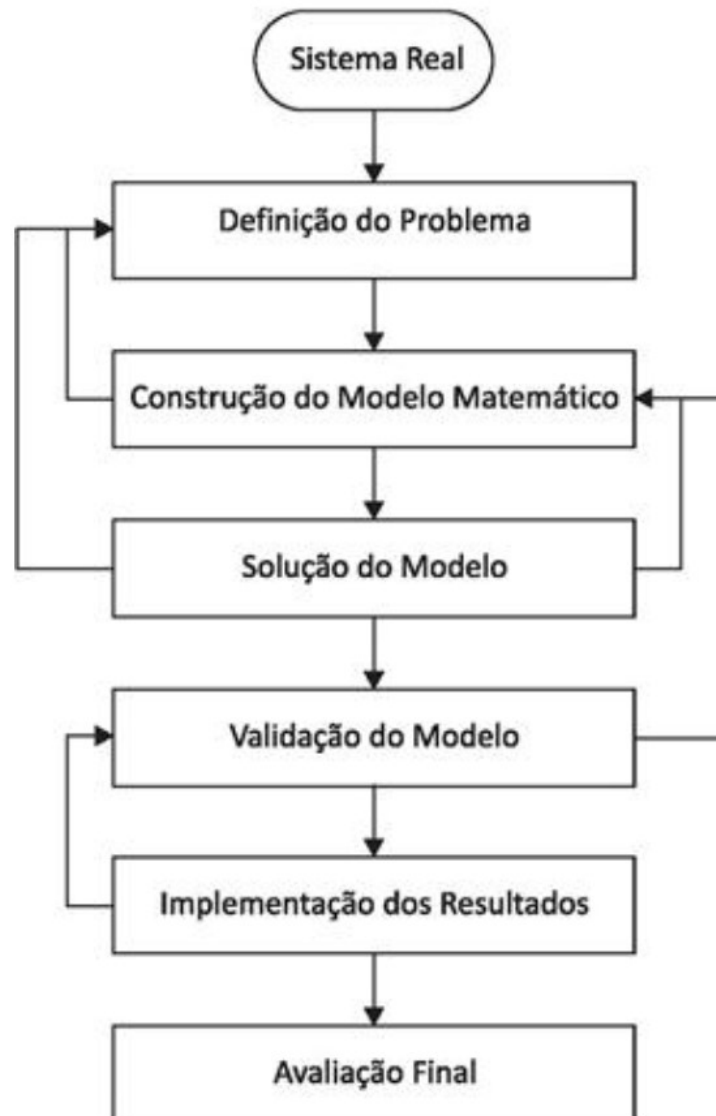
Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = 42X_{11} + 35X_{12} + 87X_{21} + 79X_{22} + 80X_{31} + 50X_{32} + 75X_{41} + 42X_{42}$$

Pesquisa Operacional

- **Processo de Modelagem e Resolução de Problemas**
 - A pesquisa operacional auxilia o processo de tomada de decisão com a utilização de modelos que possam representar o sistema real.
 - Uma vez construído o modelo, a próxima fase consiste na solução do mesmo por meio de técnicas de Pesquisa Operacional.
 - A solução obtida precisa ser válida de forma que o objetivo em questão tenha sido atingido.

Pesquisa Operacional



Pesquisa Operacional

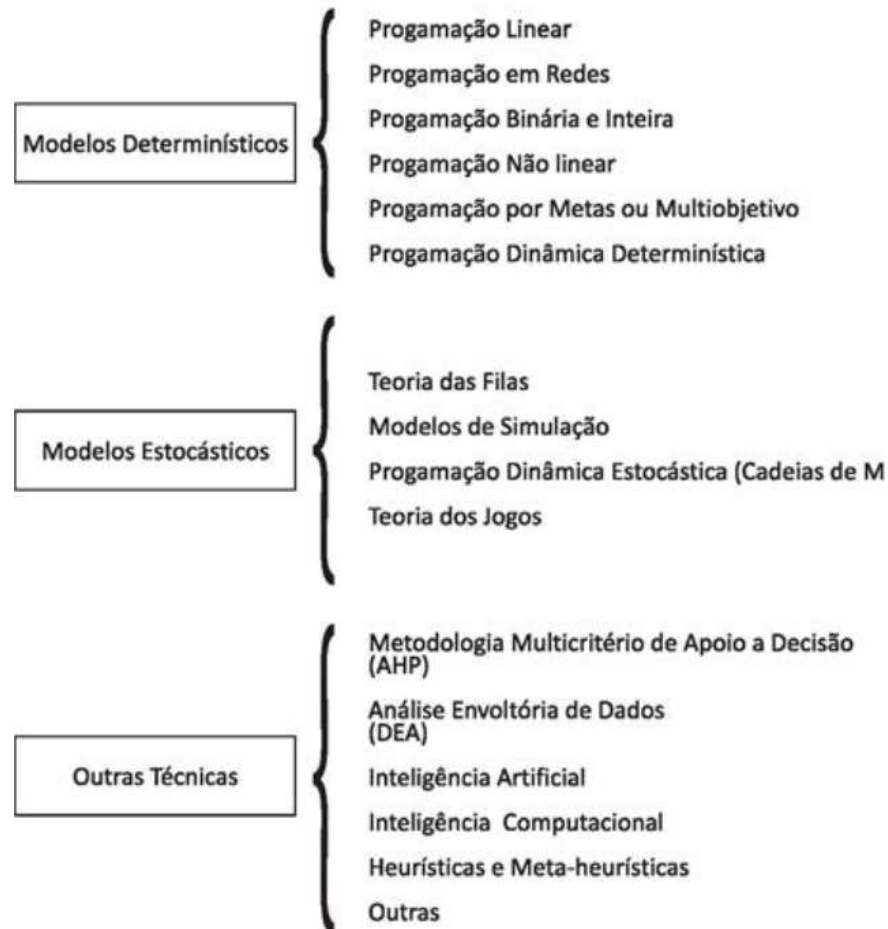
- Processo de Modelagem e Resolução de Problemas
 - Definição do Problema:
 - Quais os objetivos, quais os caminhos para a solução do modelo, quais as limitações técnicas de sistema, relações de um sistema com outros sistemas (internos e externos).
 - Construção do Modelo Matemático.
 - Quais equações (**função objetivo** e **restrições**) que tem como objetivo otimizar a eficiência do sistema.
 - Solução do Modelo
 - Será aplicado diversas técnicas de Pesquisa Operacional, tais como **SIMPLEX**, algoritmo bastante popular na resolução de modelos linear e também pode ser utilizado na resolução de problemas de programação em redes.

Pesquisa Operacional

- **Processo de Modelagem e Resolução de Problemas**
 - Validação do Modelo
 - Um modelo é considerado válido se conseguir representar ou prever o comportamento do sistema.
 - Implementação de resultados
 - Validado o modelo o mesmo deve ser controlado e acompanhado por uma equipe responsável de forma a detectar e corrigir possíveis mudanças nos valores da nova solução.
 - Avaliação final
 - Verificar se o objetivo final foi alcançado.

Pesquisa Operacional

- Ferramentas da Pesquisa Operacional
 - Segundo Eom e Kim (2006), uma classificação das ferramentas de PO é proposta conforme a figura abaixo.



Pesquisa Operacional

- **Modelos Determinísticos**
 - São aqueles em que todas as variáveis envolvidas em sua formulação são constantes e conhecidas.
 - É resultante de uma única solução exata, solução ótima.
 - Os modelos determinísticos são frequentemente resolvidos por métodos analíticos que geram solução ótima.

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Linear
 - Em um **Problema de Programação Linear (PPL)**, a função objetivo e todas as restrições do modelo serão representadas por funções lineares das variáveis de decisão.
 - Uma função é dita **linear** quando envolve apenas constantes e termos com variáveis de primeira ordem.
 - Ex: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 8x_2 - 2x_3$
 - As variáveis de decisão são **contínuas**.

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Não Linear
 - Em um **Problema de Programação Não Linear (PPNL)**, a **função objetivo ou uma das restrições** do modelo será representada por **uma função não linear** das variáveis de decisão.
 - Ex: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_2 - 2x_3$
 - As variáveis de decisão são **contínuas**.
 - Programação Inteira
 - Um problema é classificado como sendo de **Programação Inteira (PI)** quando **todas as variáveis de decisão do modelo são discretas, ou seja**, não podem ser fracionadas.
 - Programa Binária
 - Um problema é classificado como sendo de **Programação Binária (PB)** quando **todas as variáveis de decisão do modelo são binárias**.

Pesquisa Operacional

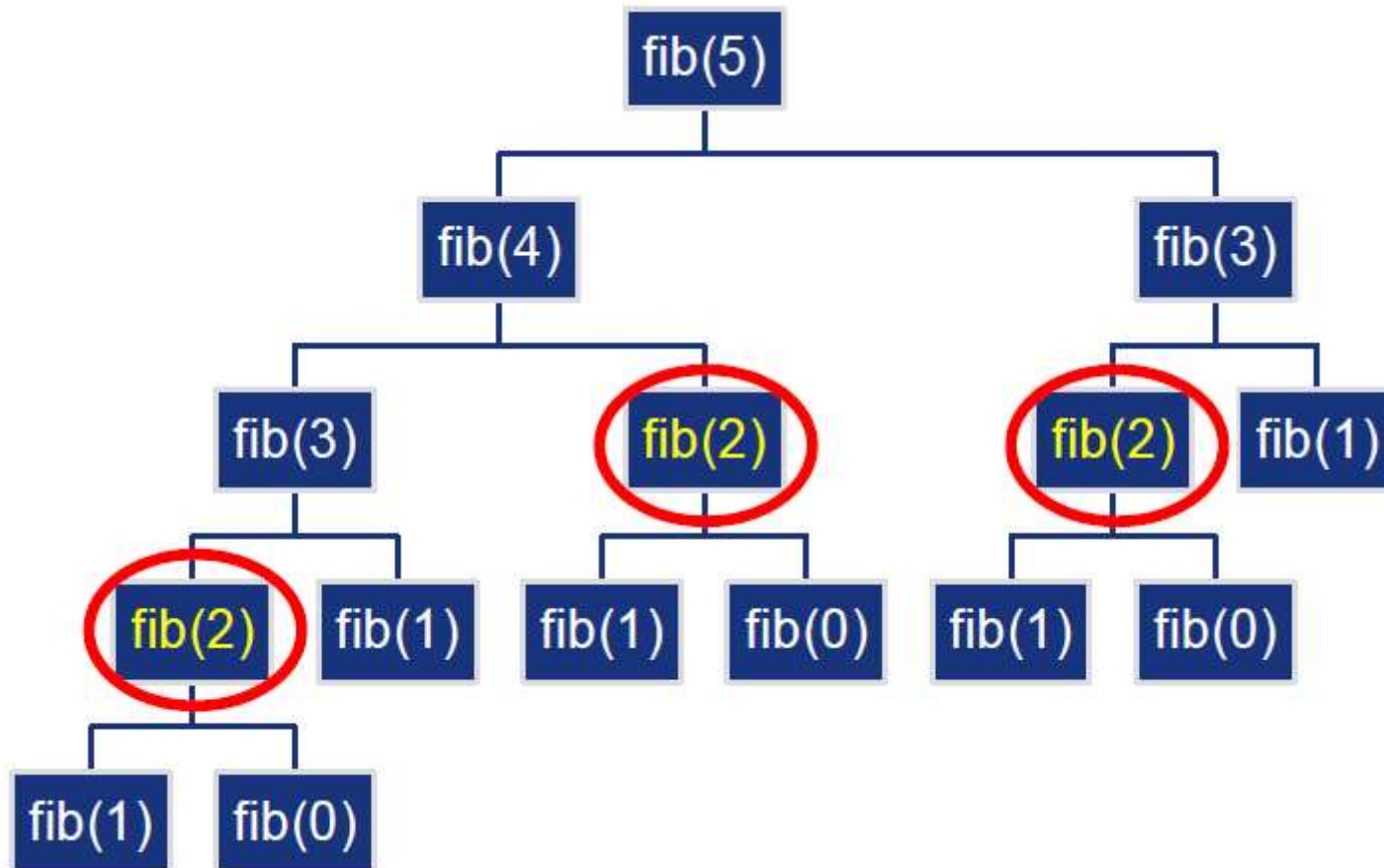
- Modelos Determinísticos
 - Programação em Redes
 - Os problemas de programação em redes são modelados por meio de **uma estrutura de grafo ou rede** que consiste **em diversos nós**, em que cada nó deve estar conectado a um ou mais arcos.
 - Programação Dinâmica Determinística
 - A programação dinâmica é utilizada quando o problema principal pode ser **decomposto em subproblemas**. (Dividir para Conquistar)
 - Calcular o mesmo subproblema **apenas uma vez**.
 - Ela possibilita a descrição do estado do sistema em **função do avanço da contagem do tempo**, ao contrário dos modelos estáticos, que consideram apenas um dado momento.
 - Todas as variáveis envolvidas **são não aleatórias**.

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística
 - fib(n):
 - Se $n=0$ ou $n=1$ então
 - » Retorna n
 - Senão
 - » Retornar $\text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística

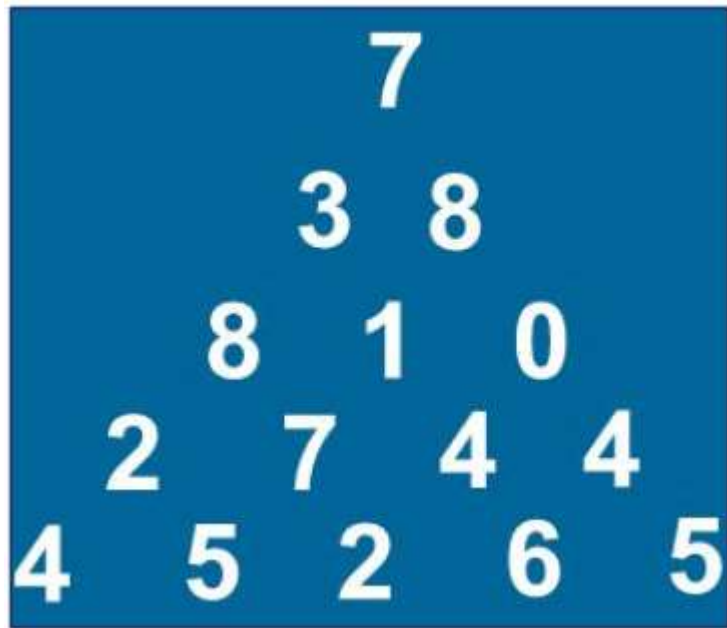


Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística
 - Como Melhorar???

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística
 - Problema da Pirâmide



Problema

Calcular a rota, que começa no topo da pirâmide e acaba na base, com maior soma. Em cada passo podemos ir diagonalmente para baixo e para a esquerda ou para baixo e para a direita.

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística
 - Problema da Pirâmide

	1	2	3	4	5
1	7				
2	3	8			
3	8	1	0		
4	2	7	4	4	
5	4	5	2	6	5

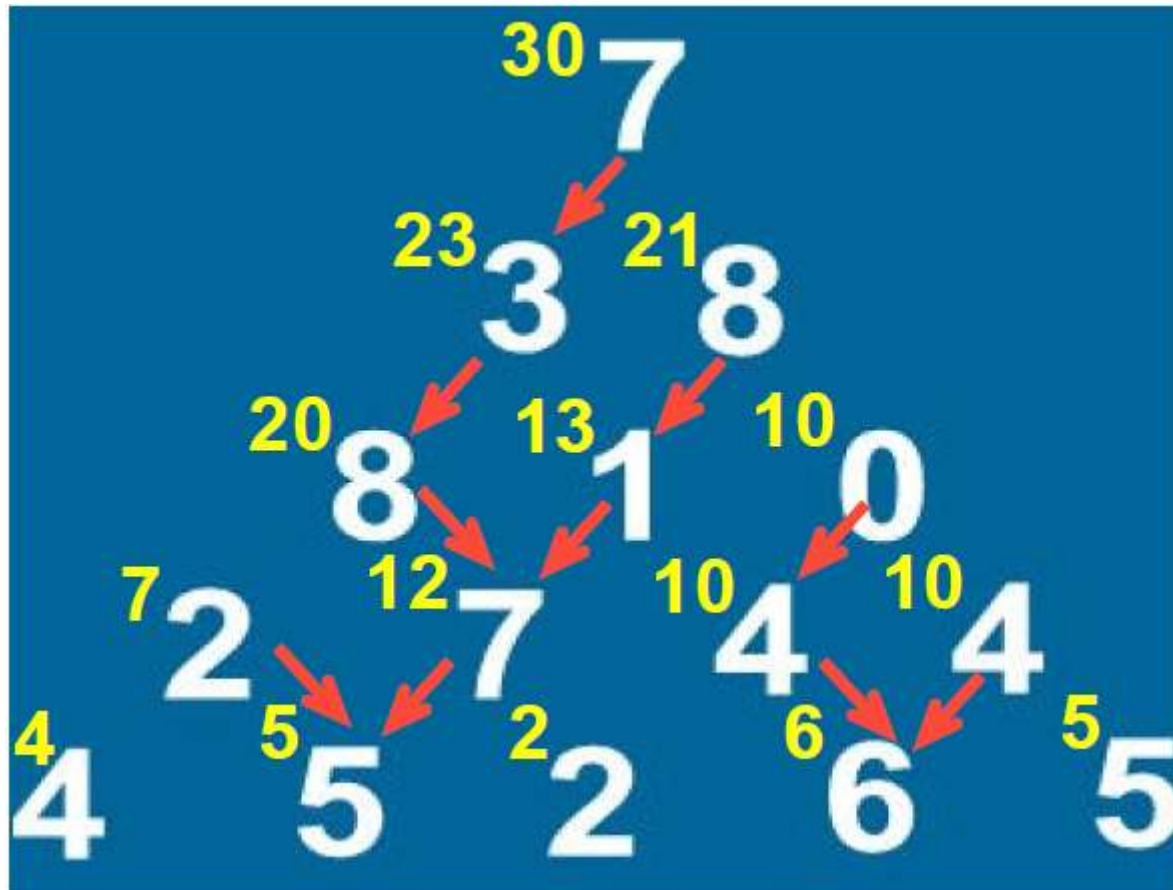
			7			
		3	8			
	8	1	0			
2	7	4	4			
4	5	2	6	5		

Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
 - Programação Dinâmica Determinística
 - Problema da Pirâmide: Implementar em C++
 - Arquivo de Entrada: entrada.in
- Primeira linha: com o número de linhas e colunas
- O restante são os dados.
- Exemplo:
- ```
5
7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

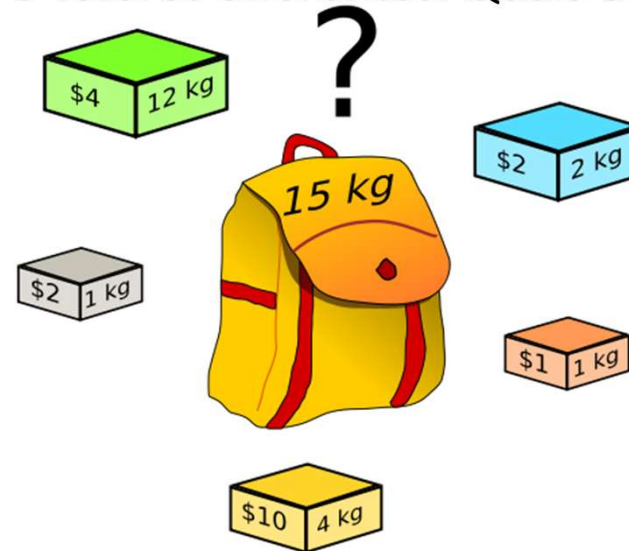
# Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
  - Programação Dinâmica Determinística
    - Problema da Pirâmide:



# Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
  - Programação Dinâmica Determinística
    - Problema da Mochila:
      - Um ladrão entra em uma loja de diamantes com apenas uma mochila e deve escolher quais objetos inserir em sua mochila de **forma a maximizar** seu roubo. Sabe-se que o ladrão não pode ultrapassar o volume da mochila e, além disso, cada objeto tem peso diferente e valores diferentes. Quais objetos o ladrão deve levar?



# Pesquisa Operacional

- Modelos Determinísticos
  - Programação Dinâmica Determinística
    - Problema da Mochila:
      - Um contêiner com capacidade limitada deve ser carregado com diversos produtos de pesos e tamanhos diferentes. Como devemos proceder para carregar o máximo possível de produtos, desperdiçando o mínimo possível de espaço.
      - Um computador está sobrecarregado de arquivos e os mesmos devem ser transferidos para mídias em CD, e sabe-se que será necessário mais de um CD. Como deve-se proceder para carregar o máximo possível de arquivos em cada CD, desperdiçando o mínimo possível de espaço em cada mídia.

# Pesquisa Operacional

- Modelos Estocásticos

- Utilizam variáveis aleatórias em que pelo menos uma de suas características operacionais é definida por meio de funções de probabilidade.
  - Cadeia de Markov (Redes de Computadores etc)
- Dessa forma os modelos estocásticos geram mais de uma solução e buscam analisar os diferentes cenários, **não tendo a garantia da solução ótima.**
- Os modelos Estocásticos são frequentemente resolvidos por meio de métodos numéricos (programas de computador).
- Dentre os modelos estocásticos, destacam-se a teoria das filas, a simulação, a programação dinâmica estocástica e a teoria dos jogos.

# Pesquisa Operacional

- Exercícios

1 – O que é Pesquisa Operacional? Quais são as razões para a sua utilização?

2 – Qual a relação entre Pesquisa Operacional e tomada de decisão?

3 – Quais são os principais elementos contidos em um modelo matemático? Descreva e exemplifique cada um deles.

4 – Determinada variável de decisão pode ser classificada segunda quais escalas de mensuração? Quais as diferenças existentes entre cada tipo de escala?

5 – Classifique as variáveis como discreta, contínua ou binária:

- a) Tempo de atendimento de cada cliente
- b) Distância percorrida
- c) Atuação em um ramo de atividade: indústria ou comércio.
- d) Número de lojas de um varejista
- e) Nível de Serviço (Alto ou Baixo).

# Pesquisa Operacional

- Exercícios

6 – Você acaba de ser nomeado o gestor de investimentos da sua família que quer maximizar o retorno de suas aplicações. Você tem apenas dois tipos de investimentos: ações ou renda fixa. Sabendo que a família vai disponibilizar a você um montante de R\$10.000,00, que a taxa de retorno esperada para a aplicação no período será de  $A\%$ , que a taxa de retorno esperada para a aplicação em renda fixa no período analisado será de  $R\%$  e que o montante a ser aplicado em ações não deve exceder a 25% do total, defina as variáveis de decisão, os parâmetros, a função objetivo e as restrições.

7 – Quais as fases compreendem o estudo da Pesquisa Operacional?

8 – Quais as principais diferenças entre os conceitos de modelos determinísticos e estocásticos?

9 – Classifique as funções a seguir como lineares e não lineares

# Pesquisa Operacional

- Exercícios

9 – Classifique as funções a seguir como lineares e não lineares.

a)  $24x_1 + 12x_2 = 10$

b)  $\ln(x_1) - x_2 + x_3 = 5$

c)  $x_1x_2 + 4(x_3)^3 = 45$

d)  $e^2x_2 + 10x_3 < 60$