GEOMETRIA ANALÍTICA :: LISTA DE EXERCÍCIOS 03

Exercício 1. Considere a reta $r = \{(2,4,1) + \lambda(1,-1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e o ponto $p = (4,1,-1) \in \mathbb{R}^3$. Verifique que $p \notin r$, e determine as equações (i) vetorial, (ii) paramétricas, e (iii) simétricas da única reta que é paralela à r e passa por p.

Exercício 2. Considere as retas r e s, cujas equações simétricas são:

$$r\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5} \qquad \text{e} \qquad s\colon x = -y = \frac{z-1}{4}.$$

Determine se r e s são perpendiculares (ortogonais).

Exercício 3. Considere as retas t e t' determinadas por:

$$t\colon \frac{x+1}{2} = y = -z \qquad \text{e} \qquad t'\colon \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y = 2z. \end{cases}$$

Determine se t e t' são perpendiculares (ortogonais).

Exercício 4. Considere a reta r cujas equações simétricas são $\frac{x}{2} = y = z$. Encontre uma reta em $\mathbb{R}^3$ que: passe por $(1,1,1)$, intercepte r, e seja perpendicular a r.

Exercício 5. Considere os pontos $A = (4,2,-1)$, $B = (6,4,-6)$, $C = (-1,3,2)$ e $D = (0,-1,5)$.

(a) Determine a equação da reta r que passa por A e B.
(b) Determine a reta perpendicular a r (item (a)) que passa por C.
(c) Determine a reta paralela a r (item (a)) que passa por D.
(d) Mostre que os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são linearmente independentes.
(e) Determine a área do triângulo ABC.

Exercício 6. Considere o plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = -1\}$ e o ponto $p = (1,3,4)$. Determine as equações (i) vetorial, (ii) paramétricas, e (iii) geral do único plano em $\mathbb{R}^3$ que passa por p e é paralelo a Π.

Exercício 7. Fixe um ponto $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. (Se você quiser, escolha $x_0, y_0, z_0, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ de modo que $x_0\, y_0\, z_0\, u_1\, u_2\, u_3\, v_1\, v_2\, v_3$ seja o seu CPF.) Denote por Π o único plano que contém p e tem u e v como vetores diretores.

(a) Escreva a equação vetorial de Π.
(b) Escreva as equações paramétricas de Π.
(c) Escreva a equação geral de Π.
(d) Determine todos os possíveis pares de vetores diretores para Π.
(e) Determine todos os vetores normais a Π.

Data: 28 de setembro de 2019.

Exercício 8. Fixe um ponto $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. (Se você quiser, escolha $x_0, y_0, z_0, u_1, u_2, u_3$ de modo que $x_0y_0z_0u_1u_2u_3$ seja seu RA.) Denote por r a única reta que contém p e tem u como vetor diretor.

(a) Escreva a equação vetorial de r.
(b) Escreva as equações paramétricas de r.
(c) Escreva as equações simétricas de r.
(d) Encontre um sistema linear para o qual r é o conjunto solução.
(e) Determine o único plano em $\mathbb{R}^3$ que é perpendicular a r.

Exercício 9. Considere as retas

$$r = \{(1,1,0) + \lambda(2,1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad s = \{(1,0,0) + \mu(1,1,0) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Determine as equações (i) vetorial, (ii) paramétricas, e (iii) geral do único plano em $\mathbb{R}^3$ que contém a reta r e é perpendicular (ortogonal) à s.

Exercício 10. Considere A o ponto $(-2, 1, 4)$, r a única reta em $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos $B = (1, 2, 1)$ e $C = (-1, 3, 1)$, e Π o único plano em $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos A, B e C.

(a) Determine a única reta em $\mathbb{R}^3$ que: passa por $D = (1, 1, 1)$, e é perpendicular a Π.
(b) Determine uma reta em $\mathbb{R}^3$ que: passe por D, e seja paralela a Π.

Exercício 11. Considere o vetor $v = (1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$. Encontre $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que:

- $v = v_1 + v_2$,
- v_1 é paralelo ao plano $\{(1,1,0) + \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
- v_2 é paralelo à reta $\{\lambda(2,1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 12. Determine todos os $m, n \in \mathbb{R}$ tais que a reta $\{(n,2,0)+\lambda(2,m,m) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ esteja contida no plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 1\}$.

Exercício 13. Considere os planos

$$\Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = -1\} \quad \text{e} \quad \Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}.$$

Verifique se existe um plano em $\mathbb{R}^3$ que: contenha $\Pi_1 \cap \Pi_2$, e tenha $(1, 1, -1)$ como vetor normal.

Exercício 14. Considere o vetor $u = (1, 2, 1)$ e a reta r cujos pontos são as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Determine o único plano em $\mathbb{R}^3$ que contém r e tem u como vetor normal.

Exercício 15. Considere os pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, 3, \sqrt{2})$. Determine todos os vértices do único cubo que tem: $\overline{AB}$ como uma de suas diagonais, e uma de suas faces contida no plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$.

Exercício 16. Determine as posições relativas:

(a) das duas retas: $x+3=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3}$ e $X=(0,2,2)+\lambda(1,1,-1)$.
(b) da reta e do plano: $\frac{x-1}{2}=y=z$ e $X=(3,0,1)+\lambda(2,0,1)+\mu(2,2,0)$.
(c) dos planos: $x-y+2z=2$ e $X=(0,0,1)+\lambda(1,0,3)+\mu(-1,1,1)$.

Exercício 17. Considere $A=(1,2,0)$, $A'=(3,-2,7)$, $v=(1,-1,1)$ e $v'=(-\pi,\pi,-\pi)$. Denote por r a reta com equação vetorial $X=A+\lambda v$ e por r' a reta com equação vetorial $X=A'+\lambda v'$.

(a) Verifique que $\{v,v'\}$ é um conjunto LD e que $\{v,\vec{AA'}\}$ é um conjunto LI. Conclua que as retas r e r' são paralelas (não coincidentes).
(b) Escreva as equações simétricas de r e r'.
(c) Reescreva as equações simétricas de r e de r' como sistemas lineares da forma

$$\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\xi_1\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\xi_2\end{cases}\quad\text{(para } r) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases}\alpha_1'x+\beta_1'y+\gamma_1'z=\xi_1'\\ \alpha_2'x+\beta_2'y+\gamma_2'z=\xi_2'\end{cases}\quad\text{(para } r').$$

Mostre que o seguinte sistema linear é impossível (ou seja, não tem solução):

$$\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\xi_1\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\xi_2\\ \alpha_1'x+\beta_1'y+\gamma_1'z=\xi_1'\\ \alpha_2'x+\beta_2'y+\gamma_2'z=\xi_2'\end{cases}.$$

(d) Escolha $A''\in\mathbb{R}^3$ de modo que $\{v,\vec{AA''}\}$ seja um conjunto LD. Considere a reta s com equação vetorial $X=A''+\lambda v'$ e conclua que r e s são coincidentes.
(e) Escreva as equações simétricas de s como um sistema linear da forma

$$\begin{cases}\alpha_1''x+\beta_1''y+\gamma_1''z=\xi_1''\\ \alpha_2''x+\beta_2''y+\gamma_2''z=\xi_2''\end{cases}.$$

Mostre que o seguinte sistema linear é possível indeterminado (ou seja, tem infinitas soluções):

$$\begin{cases}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\xi_1\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\xi_2\\ \alpha_1''x+\beta_1''y+\gamma_1''z=\xi_1''\\ \alpha_2''x+\beta_2''y+\gamma_2''z=\xi_2''\end{cases}$$

(f) Escolha um vetor v'' de modo que $\{v,v''\}$ seja um conjunto LI, e considere a reta r'' com equação vetorial $X=A+\lambda v''$. Explique porque as retas r e r'' são concorrentes.
(g) Escreva as equações simétricas de r'' como um sistema linear da forma

$$\begin{cases}\alpha_1'''x+\beta_1'''y+\gamma_1'''z=\xi_1'''\\ \alpha_2'''x+\beta_2'''y+\gamma_2'''z=\xi_2'''\end{cases}.$$

Mostre que o seguinte sistema linear é possível determinado (ou seja, tem solução única):

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \xi_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \xi_2 \\ \alpha_1''' x + \beta_1''' y + \gamma_1''' z = \xi_1''' \\ \alpha_2''' x + \beta_2''' y + \gamma_2''' z = \xi_2''' \end{cases}$$

(h) Qual é o ponto de interseção entre r e r''?
(i) Usando um argumento análogo, tente construir uma reta em $\mathbb{R}^3$ que é reversa a r.

Exercício 18. Determine a posição relativa, o ângulo, e a distância entre as retas r e s:

(a) $r = \{(1,0,-3) + \alpha(0,1,3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(1,2,1) + \beta(1,1,1) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.
(b) $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}\}$ e $s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y = \frac{z-1}{4}\}$.
(c) $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x+1}{2} = y = -z\}$ e $s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 3z+1,\ 2x = y+2z\}$.

Exercício 19. Determine todos os pontos da reta $r = \{(1,1,4) + \lambda(1,-1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ cujas distâncias ao ponto $p = (1,1,1)$ são $\sqrt{11}$. A distância de p à r é maior, menor, ou igual à $\sqrt{3}$?

Exercício 20. Seja Π o único plano que contém as retas

$$r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 5,\ y = 1\} \quad \text{e} \quad s = \{(4,1,1) + \lambda(4,2,-3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Determine todos os planos cujas distâncias a Π são 2.

Exercício 21. Determine a única reta que: contém o ponto $(1,-2,3)$, forma um ângulo de $\pi/4$ com o eixo x, e forma um ângulo de $\pi/3$ com o eixo y.

Exercício 22. Considere os planos

$$\Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{e} \quad \Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}.$$

Determine as retas que: são paralelas a Π_1, e formam um ângulo de $\pi/4$ com Π_2.

Exercício 23. Determine todos os pontos da reta

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 1 = 2y = z\}$$

cujas distâncias aos pontos $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ são as mesmas.

Exercício 24. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ que equidistam dos três planos

$$\Pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\},$$
$$\Pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z + 2\},$$
$$\Pi_3 = \{(x,yz) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}.$$