CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1. Seja H uma função tal que $H(x,y) = 10 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ para todo (x,y) no domínio de H.

(a) Determine o domínio de H. Justifique.
(b) Determine a imagem de H. Justifique.
(c) Para cada $k \in \mathbb{R}$, esboce a curva de nível k de H. Justifique.

Questão 2. Seja V uma função tal que $V(x,y,z) = \frac{\pi}{\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}}$ para todo (x,y,z) no domínio de V.

(a) Determine o domínio de V. Justifique.
(b) Determine a imagem de V. Justifique.
(c) Para cada $k \in \mathbb{R}$, esboce a superfície de nível k de V. Justifique.

Questão 3. Denote por D o subconjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Considere a função $F\colon D \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = \frac{y^4}{x^4+y^4}$. Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y),$$
ou mostre que esse limite não existe.
(b) Considere a função $J\colon D \to \mathbb{R}$ dada por $J(x,y) = \frac{x\,\mathrm{sen}(y)}{|x|}$. Calcule
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} J(x,y),$$
ou mostre que esse limite não existe.
(c) Sejam g, m_1, m_2 constantes em $\mathbb{R}$. Considere a função $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$G(x,y,z) = \begin{cases} g\frac{m_1m_2}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$
Determine se G é contínua em $(0,0,0)$. Justifique.
(d) A posição de uma certa mosca no espaço é uma função que varia continuamente em relação ao tempo. Determine se a função $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$P(t) = (\cos(t),\ 2\,\mathrm{sen}(t),\ \cos(t)^2 - \mathrm{sen}(t)\cos(t))$$
pode descrever a posição de uma mosca no espaço. Justifique.

Data: 12 de março de 2018.

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (3,0 pontos)**.** Calcule o gradiente da função no ponto dado. Justifique.

(a) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2)e^{xy} + z^3$, num ponto arbitrário $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

(c) Uma função $Z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaz $x^2 + y^2 - Z^2 = 0$, no ponto $(1,0)$.

(a) Por definição, $\nabla F(a,b,c) = (F_x(a,b,c),\ F_y(a,b,c),\ F_z(a,b,c))$ para qualquer ponto $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Usando as regras do produto e da cadeia, obtemos que

$$\nabla F(a,b,c) = (2a\cos(a^2)e^{ab} + b\operatorname{sen}(a^2)e^{ab},\ a\operatorname{sen}(a^2)e^{ab},\ 3c^2).$$

(b) Por definição, $\nabla G(a,b) = (G_x(a,b),\ G_y(a,b))$ para qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. No caso particular do ponto $(0,0)$, precisamos calcular G_x e G_y pela definição:

$$\begin{aligned} G_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{G(h,0) - G(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} \\ &= 1 \\ &\text{e} \\ G_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{G(0,h) - G(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\nabla G(a,b) = (G_x(0,0),\ G_y(0,0)) = (1,0)$.

Data: 25 de abril de 2018.

(c) Por definição, $\nabla Z(a,b) = (Z_x(a,b),\, Z_y(a,b))$ para qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Como Z é uma função que satisfaz $x^2+y^2-Z^2=0$, então $Z^2 = x^2+y^2$. Por exemplo, $Z(1,0)^2 = 1$. Usando a relação $x^2+y^2-Z^2=0$, podemos calcular Z_x e Z_y implicitamente. De fato, $x^2+y^2-Z^2=0$ implica que

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2-Z(x,y)^2)=0, \qquad \text{ou seja,} \qquad 2x - 2Z(x,y)Z_x(x,y) = 0.$$

Em particular, no ponto $(1,0)$, temos $2 = 2Z(1,0)Z_x(1,0)$. Como $Z(1,0)^2 = 1$, então $Z(1,0) \neq 0$, e segue que $Z_x(1,0) = \frac{1}{Z(1,0)}$. Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-Z(x,y)^2)=0, \qquad \text{ou seja,} \qquad 2y - 2Z(x,y)Z_y(x,y) = 0.$$

Em particular, no ponto $(1,0)$, temos $0 = 2Z(1,0)Z_x(1,0)$. Como $Z(1,0)^2 = 1$, então $Z(1,0) \neq 0$, e segue que $Z_y(1,0) = 0$. Portanto

$$\nabla Z(1,0) = \left(\frac{1}{Z(1,0)}, 0\right).$$

Questão 2 (3,0 pontos)**.** Calcule o espaço tangente ao gráfico da função no ponto dado. Justifique.

(a) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2)e^{xy} + z^3$, no ponto $(0,\pi,1) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $H(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

(c) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y) = |x| + |y| - 1$ no ponto $(1,0)$.

(a) Por definição, o espaço tangente ao gráfico de F no ponto (a,b,c) é dado pela equação

$$w = F(a,b,c) + F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c).$$

Pela **Questão 1**(a), temos que $F_x(a,b,c) = 2a\cos(a^2)e^{ab} + b\operatorname{sen}(a^2)e^{ab}$, $F_y(a,b,c) = a\operatorname{sen}(a^2)e^{ab}$ e $F_z(a,b,c) = 3c^2$. Portanto o espaço tangente ao gráfico de F no ponto $(0,\pi,1)$ é dado pela equação

$$w = 1 + 3(z-1) = 3z - 2.$$

(b) Por definição, o plano tangente ao gráfico de H no ponto $(0,0)$ é dado pela equação

$$z = H(0,0) + H_x(0,0)x + H_y(0,0)y.$$

Calculando $H_x(0,0)$ e $H_y(0,0)$ pela definição, obtemos que

$$\begin{aligned} H_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{H(h,0) - H(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{H(0,h) - H(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente ao gráfico de H no ponto $(0,0)$ é dado pela equação $z = 0$.

(c) Por definição, o plano tangente ao gráfico de Q no ponto $(1,0)$ é dado pela equação

$$z = Q(1,0) + Q_x(1,0)(x-1) + Q_y(1,0)y.$$

Calculando $Q_x(0,0)$ e $Q_y(0,0)$ pela definição, obtemos que

$$\begin{aligned} Q_x(1,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{Q(1+h,0) - H(1,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|1+h| - 1 - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h+1-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 \\ &= 1 \\ &\text{e} \\ Q_y(1,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{Q(1,h) - Q(1,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+|h| - 1 - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \text{não existe.} \end{aligned}$$

Portanto, o plano tangente ao gráfico de Q no ponto $(1,0)$ não existe.

Questão 3 (3,0 pontos)**.** Determine se a função é diferenciável no ponto dado. Justifique.

(a) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2)e^{xy} + z^3$, no ponto $(0,\pi,1) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $H(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

(c) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $Q(x,y) = |x| + |y| - 1$ no ponto $(1,0)$.

(a) Lembre que, se as derivadas parciais de uma função são contínuas em um certo ponto, então essa função é diferenciável nesse ponto. Pela **Questão 1**(a), as derivadas parciais de F são dadas por

$$F_x(x,y,z) = 2x\cos(x^2)e^{xy} + y\operatorname{sen}(x^2)e^{xy}, \quad F_y(x,y,z) = x\operatorname{sen}(x^2)e^{xy}, \quad F_z(x,y,z) = 3z^2.$$

Como F_x, F_y e F_z são contínuas em todo $\mathbb{R}^3$, segue que F é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Por definição, a função H é diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{H(x,y) - H(0,0) - H_x(0,0)x - H_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Lembre da **Questão 2**(b) que $H_x(0,0) = H_y(0,0) = 0$. Portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{H(x,y) - H(0,0) - H_x(0,0)x - H_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Agora observe que

$$\frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{3/2} x,$$

onde $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ é limitada e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Logo H é diferenciável.

(c) Lembre que, se uma função é diferenciável em um certo ponto, então todas as deriadas parciais dessa função existem nesse ponto. Pela **Questão 2**(c), $Q_y(1,0)$ não existe. Portanto Q não é diferenciável em $(1,0)$.

Questão 4 (3,0 pontos)**.** Encontre os pontos de máximo e mínimo locais e globais da função $J(x,y) = x^2 + y^2$ no conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

Primeiro observe que a função J é contínua, X é limitado e fechado. Portanto, pelo Teorema de Weierstrass, a função J tem pontos de máximo e mínimo globais em X. Vamos separar X e dois pedaços e analizá-los separadamente:

- o interior, $X^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+3y^2 < 1\}$. Lembre que, se um ponto $(x,y) \in X^\circ$ é de máximo ou mínimo local, então $\nabla J(x,y) = (0,0)$. Agora, $\nabla J(x,y) = (2x, 2y) = (0,0)$ se, e somente se, $(x,y) = (0,0)$. Então $(0,0)$ é o único ponto em X° que possivelmente é de máximo ou de mínimo local. Como
$$\det \begin{pmatrix} J_{xx}(0,0) & J_{xy}(0,0) \\ J_{yx}(0,0) & J_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0,$$
então $(0,0)$ é um ponto de mínimo local para J. Na verdade, como
$$J(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = J(x,y) \qquad \text{para todo } (x,y) \in X,$$
então $(0,0)$ é um ponto de mínimo global para J em X.
- a fronteira, $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 1\}$. Para encontrar os máximos e mínimos da função J (função objetivo) restrita ao conjunto ∂X, vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange.

  Primeiro, denote $R(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 1$. Agora lembre que $\nabla J(x,y) = (2x, 2y)$ e observe que $\nabla R(x,y) = (4x, 6y)$. Então temos que $\nabla J(x,y) = \lambda \nabla R(x,y)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $2x = 4\lambda x$ e $2y = 6\lambda y$. Daí segue que: $\lambda = 2$ e $y = 0$, ou $x = 0$ e $\lambda = 3$. Como $2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2 \neq 1$, essas duas possibilidades são mutuamente excludentes. No primeiro caso, $y = 0$ implica que $x^2 = 1/2$, ou seja, $x = \sqrt{2}/2$ ou $x = -\sqrt{2}/2$. No segundo caso, $x = 0$ implica que $y^2 = 1/3$, ou seja, $y = \sqrt{3}/3$ ou $y = -\sqrt{3}/3$.

  Vamos analisar os resultados encontrados acima. Se $x^2 = 1/2$ e $y = 0$, então $J(x,y) = 1/2$. Se $x = 0$ e $y^2 = 1/3$, então $J(x,y) = 1/3$. Como $1/3 < 1/2$, os pontos $(\sqrt{2}/2, 0)$ e $(-\sqrt{2}/2, 0)$ são os pontos de máximo de J sobre a fronteira ∂X, enquanto os pontos $(0, \sqrt{3}/3)$ e $(0, -\sqrt{3}/3)$ são os pontos de mínimo de J sobre ∂X.

Além disso, como $1/2 > 1/3 > 0$ e J não tem pontos de máximo no interior de X, segue que $(0,0)$ é o único ponto de mínimo global para J em X, e $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$ são os únicos pontos de máximo global de J em X.

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ________________ Assinatura: ________________ RA: ________

Questão 1. Considere a região limitada e fechada $R \subseteq \mathbb{R}^2$ delimitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $x = \sqrt{\pi/2}$. Calcule a integral $\iint_R \operatorname{sen}(x^2)\, dA$.

Primeiro observe que a região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}\}. \qquad [1{,}0 \text{ ponto}]$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{sen}(x^2)\, dA &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen}(x^2)\, dy\, dx \qquad [1{,}5 \text{ ponto}] \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \operatorname{sen}(x^2)\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(u)\, du \\
&= -\cos(\pi/2) - (-\cos(0)) \\
&= 1. \qquad [2{,}0 \text{ pontos}]
\end{aligned}$$

Data: 06 de junho de 2018.

Questão 2. Cosidere o único tetraedro $T \subseteq \mathbb{R}^3$ cujos vértices são os pontos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Calcule a integral $\iiint_T z\,dV$.

Primeiro observe que o tetraedro T pode ser descrito como

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1-x-y,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}. \qquad \text{[1,0 ponto]}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\iiint_T z\,dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx \qquad \text{[1,5 ponto]}\\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx\\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^0 -\frac{u^2}{2}\,du\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^3\,dx\\
&= \int_1^0 -\frac{1}{6}v^3\,dv\\
&= \frac{1}{24}. \qquad \text{[2,0 pontos]}
\end{aligned}$$

Questão 3. Calcule o volume do sólido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ delimitado pelos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $x^2+y^2+z=8$.

Primeiro observe que $\text{Vol}(S) = \iiint_S dV$. [0,5 ponto] Agora, para determinar os intervalos de integração, observe que a intersecção dos parabolóides $z = x^2+y^2$ e $x^2+y^2+z=8$ ocorre quando $8 = (x^2+y^2)+z = z+z = 2z$, ou seja, quando $z = 4$. Portanto, o sólido S pode ser descrito por $S = S_1 \cup S_2$, onde

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x^2+y^2 \le z,\ 0 \le z \le 4\} \quad \text{e}$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x^2+y^2 \le 8-z,\ 4 \le z \le 8\}. \qquad [1{,}0 \text{ ponto}]$$

Assim, o volume de S é dado por

$$\text{Vol}(S) = \iiint_S dV = \iiint_{S_1} dV + \iiint_{S_2} dV.$$

Para calcular essas integrais, vamos usar coordenadas cilíndricas [1,5 ponto]:

$$\begin{aligned}
\iiint_{S_1} dV &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{z}{2}\,d\theta\,dz \\
&= \int_0^4 \pi z\,dz \\
&= \frac{\pi}{2}4^2 \\
&= 8\pi \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{S_2} dV &= \int_4^8 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8-z}} r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \int_4^8 \int_0^{2\pi} \frac{8-z}{2}\,d\theta\,dz \\
&= \int_4^8 \pi(8-z)\,dz \\
&= \pi\left(8(8-4) - \frac{(8^2-4^2)}{2}\right) \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

Portanto $\text{Vol}(S) = 16\pi$. [2,0 pontos]

Questão 4. Suponha que a densidade de massa de um certo objeto

$$O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

seja dada por $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Calcule a massa do objeto O. (Caso seja necessário, use que $\sec'(x) = \operatorname{tg}(x)\sec(x)$.)

Primeiro observe que a massa de O é dada por $\iiint_O \delta\, dV$. [0,5 ponto] Agora, observe que O é o objeto acima do plano $z = 2\sqrt{3}$ e abaixo da casca esférica $x^2+y^2+z^2 = 16$. Ou seja, O é um pedaço da esfera de raio 4: $x^2+y^2+z^2 \leq 16$. Além disso, quando $z = 2\sqrt{3}$ e $x^2+y^2+z^2 = 16$, temos que $x^2+y^2 = 16-(2\sqrt{3})^2 = 4$; ou seja, (x,y) pertence à circunferência de raio 2 centrada em $(0,0)$.

Vamos usar coordenadas esféricas para calcular a massa de O. [1,0 ponto] Para isso, observe que, em coordenadas esféricas, O pode ser descrito como

$$O = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/6,\ 2\sqrt{3}/\cos(\phi) \leq \rho \leq 4\}. \qquad \text{[1,5 ponto]}$$

Como $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\rho}$, a massa de O é dada por

$$\begin{aligned}
\text{massa}(O) &= \iiint_O \delta\, dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_{2\sqrt{3}/\cos(\phi)}^{4} \frac{1}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(\phi)\int_{2\sqrt{3}/\cos(\phi)}^{4} \rho\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(\phi)\frac{1}{2}\left(16 - \frac{12}{\cos(\phi)^2}\right) d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} 8\operatorname{sen}(\phi) - 6\operatorname{tg}(\phi)\sec(\phi) d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 8(\cos(0)-\cos(\pi/6)) + 6(\sec(0)-\sec(\pi/6))\, d\theta \\
&= 2\pi\left(8(1-\sqrt{3}/2) + 6(1-2/\sqrt{3})\right) \\
&= 28\pi - 8\sqrt{3}\pi. \qquad \text{[2,0 pontos]}
\end{aligned}$$

Questão 5. Suponha que a Terra seja um elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, cujo eixo equatorial é $a = 6.378.137$ m e o eixo polar é $b = 6.356.752,3142$ m. (Isso não é exatamente verdade, mas é utilizado como aproximação para GPSs.) Utilize integrais duplas para calcular a área da superfície da Terra.

Primeiro, observe que a área da superfície do Hemisfério Norte e a área da superfície do Hemisfério Sul são iguais. Portanto a área da Terra é duas vezes a área do Hemisfério Norte. Agora vamos descrever o Hemisfério Norte como o gráfico de uma função.

Considere o círculo de raio a, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, e defina a função $F\colon C \to \mathbb{R}$ como sendo $F(x,y) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. [1,0 ponto] Observe que o Hemisfério Norte é o gráfico de F. Agora, a área do gráfico de F é dada por $\iint_C \sqrt{1+F_x^2+F_y^2}\,dx\,dy$. [1,5 ponto]

Calculando F_x e F_y, obtemos:

$$F_x(x,y) = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \text{e} \quad F_y(x,y) = \frac{-by}{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Portanto

$$1+F_x^2+F_y^2 = 1+\frac{b^2x^2+b^2y^2}{a^2(a^2-x^2-y^2)} = \frac{a^4+(b^2-a^2)x^2+(b^2-a^2)y^2}{a^2(a^2-x^2-y^2)}.$$

Assim, para calcular $\iint_C \sqrt{1+F_x^2+F_y^2}\,dx\,dy$, vamos usar coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\iint_C \sqrt{1+F_x^2+F_y^2}\,dx\,dy &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)r^2}{a^2(a^2-r^2)}}\, r\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \int_0^a \sqrt{1-\frac{b^2r^2}{a^2(a^2-r^2)}}\, r\,dr. \qquad \text{[2,0 pontos]}\end{aligned}$$

Agora, a integral $\int_0^a \sqrt{1-\frac{b^2r^2}{a^2(a^2-r^2)}}\, r\,dr$ não é simples. De fato, ela não pode ser calculada usando funções elementares. Essa integral é dada por uma função chamada de *elíptica*.

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: SUB DA PROVA 04

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2,0 pontos)**.** Calcule a integral de linha $\int_\gamma e^x y\,dx + e^x\,dy$, onde $\gamma(t) = (t,\, e^{2t})$, $t \in [0, 1]$.

Como $\gamma(t) = (t, e^{2t})$, vamos substituir na integral: x por t, y por e^{2t}, $dx = dt$ e $dy = 2e^{2t}dt$. (1.0 ponto) Substituindo e aplicando os limites de integração, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\gamma e^x y\,dx + e^x\,dy &= \int_0^1 e^t e^{2t} + e^t(2e^{2t})\,dt \qquad \text{(1.5 ponto)} \\ &= \int_0^1 3e^{3t}\,dt \\ &= e^{3t}\Big|_0^1 \\ &= e^3 - 1. \qquad \text{(2.0 pontos)} \end{aligned}$$

Data: 06 de julho de 2018.

Questão 2 (2,0 pontos)**.** Calcule o fluxo do campo $V(x, y, z) = (x, y, z)$ para fora do hemisfério esférico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$.

Vamos parametrizar a esfera usando coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \sigma\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow S \\ (\phi, \theta) &\longmapsto (\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta),\ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta),\ \cos(\phi)) . \end{aligned}$$

Usando essa parametrização, temos $V(\sigma(\phi, \theta)) = (\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta),\ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta),\ \cos(\phi))$. (0.5 ponto) Além disso, o vetor normal à S é:

$$\begin{aligned} \sigma_\phi \times \sigma_\theta &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ -\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\operatorname{sen}^2(\phi)\cos(\theta),\ \operatorname{sen}^2(\phi)\operatorname{sen}(\theta),\ \operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)\right) . \end{aligned}$$

Observe que esse vetor normal aponta para fora. Por exemplo, $\sigma_\phi \times \sigma_\theta(\pi/2, 0) = (1, 0, 0)$. (1.0 ponto) Assim, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S V \bullet d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(\sigma(\phi, \theta)) \bullet (\sigma_\phi \times \sigma_\theta)\, d\phi\, d\theta \qquad \text{(1.5 ponto)} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(\phi)\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^3(\phi)\operatorname{sen}^2(\theta) + \operatorname{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(\phi) + \operatorname{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi)\big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ d\theta \\ &= 2\pi. \qquad \text{(2.0 pontos)} \end{aligned}$$

Questão 3 (2,0 pontos)**.** Calcule a integral de linha $\oint_C (y^2\cos(x))\,dx + (x^2+2y\,\mathrm{sen}(x))\,dy$, onde C é a curva triangular com vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,6)$.

Para fazer o cálculo direto, nós teríamos que parametrizar três segmentos de reta (de $(0,0)$ a $(2,0)$, de $(2,0)$ a $(2,6)$, e de $(2,6)$ a $(0,0)$) e depois calcular três integrais de linha. Ao invés disso, vamos usar o Teorema de Green para trocar essas três integrais de linha por uma única integral dupla.

Considere o campo de vetores $V(x,y) = (y^2\cos(x),\ x^2+2y\,\mathrm{sen}(x))$, e lembre que o Teorema de Green implica que:

$$\oint_C V \bullet d\gamma = \iint_T \mathrm{rot}(V)\,dx\,dy,$$

onde T é o triângulo delimitado por C. (0.5 ponto) Explicitamente,

$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 3x\} \quad \text{e}$$
$$\mathrm{rot}(V) = (2x+2y\cos(x)) - (2y\cos(x)) = 2x.$$

(1.0 ponto) Então,

$$\begin{aligned}
\oint_C (y^2\cos(x))\,dx + (x^2+2y\,\mathrm{sen}(x))\,dy &= \int_0^2\int_0^{3x} 2x\,dy\,dx \qquad \text{(1.5 ponto)}\\
&= \int_0^2 (2x)(3x)\,dx\\
&= \int_0^2 6x^2\,dx\\
&= 2x^3\Big|_0^2\\
&= 16. \qquad \text{(2.0 pontos)}
\end{aligned}$$

Questão 4 (2,0 pontos)**.** Calcule o fluxo do campo $V(x,y,z) = (2xy,\, -y^2,\, z)$ para fora da superfície elíptica

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad a,b,c > 0.$$

Para calcular a integral $\iint_E V \bullet d\sigma$ diretamente, nós deveríamos parametrizar E, calcular o vetor normal exterior e depois avaliar a integral (como feito na **Questão 2**). Ao invés disso, vamos usar o Teorema do divergente de Gauss para trocar essa integral de superfície por uma integral tripla.

Considere o campo V e lembre que o Teorema do divergente de Gauss implica que

$$\iint_E V \bullet d\sigma = \iiint_X \operatorname{div}(V)\, dx\, dy\, dz,$$

onde X é o elipsóide delimitado por E. (0.5 ponto) Explicitamente, $\operatorname{div}(V) = 2y - 2y + 1 = 1$. (1.0 ponto) Assim, segue que

$$\iint_E V \bullet d\sigma = \iiint_X dx\, dy\, dz = \text{Volume}(X). \qquad \text{(1.5 ponto)}$$

O volume do elipsóide X pode ser calculado por

$$\text{Volume}(X) = 2 \iint_R c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dA,$$

onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$. Para calcular essa integral, vamos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\,\text{sen}(\theta) \end{cases}, \quad \text{onde } r \in [0,1] \text{ e } \theta \in [0, 2\pi].$$

Observe que o Jacobiano dessa transformação é

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos(\theta) & -ar\,\text{sen}(\theta) \\ b\,\text{sen}(\theta) & br\cos(\theta) \end{vmatrix} = abr.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(X) &= 2c \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2\cos^2(\theta) - r^2\,\text{sen}^2(\theta)}\,(abr)\, dr\, d\theta \\
&= 2abc \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr\, d\theta \\
&= 2abc \int_0^{2\pi} \int_1^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du\, d\theta \\
&= abc \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sqrt{u}^3 \Big|_0^1 d\theta \\
&= \frac{2}{3}abc \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{4}{3}\pi abc. \qquad \text{(2.0 pontos)}
\end{aligned}$$

Questão 5 (2,0 pontos)**.** Calcule o fluxo do campo $\text{rot}(V)$, onde $V(x, y, z) = (0,\ x,\ x+y)$, para fora da superfície S parametrizada por $\sigma(u, v) = (u,\ v,\ 2 - u^2 - v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 2$.

Considere o sólido $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$. Observe que a fronteira de X é a união da superfície S com a superfície plana

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2,\ z = 0\}.$$

Além disso, uma parametrização simples de R é dada por $\tau(x, y) = (x, y, 0)$. Pelo Teorema do divergente de Gauss, temos que

$$\iint_S \text{rot}(V) \bullet d\sigma + \iint_R \text{rot}(V) \bullet d\tau = \iiint_X \text{div}(\text{rot}(V))\, dx\, dy\, dz. \qquad \text{(0.5 ponto)}$$

Como $\text{div}(\text{rot}(V)) = 0$, segue que $\iint_S \text{rot}(V) \bullet d\sigma = -\iint_R \text{rot}(V) \bullet d\tau$. (1.0 ponto)

Agora observe que um vetor normal à R apontando para fora de X é $(0, 0, -1)$. Assim, para calcularmos $\iint_R \text{rot}(V) \bullet d\tau$, basta calcularmos a terceira coordenada do $\text{rot}(V)$: $\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} = 1$. (1.5 ponto) Ou seja, $-\iint_R \text{rot}(V) \bullet d\tau = -\iint_R -1\, dx\, dy = \text{Área}(R) = 2\pi$. (2.0 pontos)

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: EXAME

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (1,0 ponto)**.** Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ou mostre que o limite não existe.

Questão 2 (1,0 ponto)**.** Determine se a função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^4}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0,0)$.

Questão 3 (1,0 ponto)**.** Calcule o gradiente no ponto $(0,1)$ de uma função $Z(x,y)$ que satisfaz $x^2 - 2y^2 + 2Z^2 = 4xyZ$.

Questão 4 (1,0 ponto)**.** Determine se a função $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln|x|}{y}, & \text{se } x, y \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0 \text{ ou } y = 0, \end{cases}$$

é diferenciável.

Questão 5 (2,0 pontos)**.** Encontre e classifique os pontos críticos da função $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $J(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3 - 6x$.

Questão 6 (1,0 ponto)**.** Encontre a maior região retangular que pode ser cercada com 200 metros de cerca, usando que um dos lados desta região já tem um muro.

Questão 7 (1,0 ponto)**.** Calcule a área da superfície de um cone circular de altura h e raio da base r.

Questão 8 (1,0 ponto)**.** Escolha um $r > 0$, e calcule a integral de linha $\int_\gamma \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a circunferência de raio r centrada na origem.

Questão 9 (1,0 ponto)**.** Calcule o fluxo do rotacional do campo $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $V(x,y,z) = (-y,\, x,\, e^{x^2+y^2+z^2})$ para fora da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}.$$

Data: 11 de julho de 2018.