GEOMETRIA ANALÍTICA :: LISTA DE EXERCÍCIOS 04

§ Cônicas

Exercício 1. Esboce o gráfico e encontre a equação geral das cônicas abaixo. Inclua em seu gráfico informações relevantes como vértices, centro, eixos e retas assíntotas.

(a) $y^2 - x^2 = 16$.
(b) $y^2 + 28x = 0$.
(c) $2x^2 + 3y^2 = 4$.
(d) $(x-3)^2 = 4(y-1)$.
(e) $(y+9)^2 = -4(x+5)$.
(f) $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.
(g) $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.
(h) $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 4$.

Exercício 2. Em cada um dos itens abaixo, determine uma equação da cônica que satisfaz as condições dadas, e esboce o seu gráfico.

(a) Elipse de focos $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$, e eixo maior de comprimento igual a 10.
(b) Hipérbole de focos $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$, e vértices $A_1 = (-3, 0)$, $A_2 = (3, 0)$.
(c) Parábola de foco $F = (2, 0)$ e reta diretriz dada por $x + 2 = 0$.
(d) Elipse de vértices $A_1 = (-10, 0)$, $A_2 = (10, 0)$, e excentricidade igual a $\frac{1}{2}$.
(e) Elipse com centro $C = (0, 0)$, focos pertencentes ao eixo x, excentricidade igual a $\frac{2}{3}$, e passando pelo ponto $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$.
(f) Hipérbole com vértices $A_1 = (0, -2)$, $A_2 = (0, 2)$, e assíntotas dadas por $y = -\frac{1}{4}x$, $y = \frac{1}{4}x$.
(g) Hipérbole com focos $F_1 = (-8, 0)$, $F_2 = (8, 0)$, e excentricidade igual a $\frac{4}{3}$.
(h) Parábola com vértice $V = (0, 0)$, simétrica em relação ao eixo y, e passando pelo ponto $(2, -3)$.

Exercício 3. Encontre o lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ cujas distâncias ao ponto $(3, 2)$ sejam iguais à metade das suas distâncias à reta dada por $y - 2 = 0$.

Exercício 4. Um satélite de órbita elíptica com excentricidade $\frac{1}{3}$ viaja ao redor de um planeta situado em um dos focos da elipse. Sabendo que a distância mais próxima do satélite ao planeta é de 300km, calcule a maior distância entre o planeta e o satélite.

Exercício 5. Considere a elipse E definida por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Obtenha a equação da hipérbole cujos focos são os vértices de E e cujos vértices são os focos de E.

Data: 12 de novembro de 2019.

Exercício 6. Encontre a equação de uma elipse com $a = 4$, $b = 1$, centrada na origem, e com focos no eixo x. Depois faça uma rotação de $60°$ e centralize a elipse em $(2, 1)$.

Exercício 7. Para cada uma das cônicas abaixo, escreva a forma reduzida de suas equações e esboce seus gráficos.

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$.
(b) $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 2 = 0$.
(c) $3x^2 + xy - 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$.
(d) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$.
(e) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$.
(f) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
(g) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.
(h) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2 = 0$.
(i) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

Exercício 8. Qual é a distância entre o centro da circunferência dada por $x^2+y^2+8x = 6y$ e o foco da elipse dada por $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ cujas coordenadas são positivas?

Exercício 9. Encontre as interseções entre as seguintes cônicas:

(a) $2x^2 + 3y^2 = 24$ e $x^2 - y^2 = 5$.
(b) $2x^2 + 3y^2 = 12$ e $x^2 + \frac{y^2}{4} = 2$.
(c) $x^2 + 2y = 2$ e $x^2 + \frac{y^2}{4} = 2$.

Exercício 10. Descreva o lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a seguinte equação

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

§ Quádricas

Exercício 11. Identifique a quádrica e esboce seu gráfico:

(a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.
(b) $3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12x - 8y - 2z + 16 = 0$.
(c) $x^2 + y + z^2 = 0$.
(d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 16 = 0$.
(e) $4x^2 - 8x - 9y^2 + 6y - 36z + 3 = 0$.
(f) $4x^2 - 2y^2 - z^2 - 3 = 0$.
(g) $x + y^2 + 2y + z^2 - 3z - 3 = 0$.
(h) $x^2 - y + z^2 = 9$.

Exercício 12. Obtenha uma equação para o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que equidistam do plano $x = 2$ e do ponto $(-2, 0, 0)$.

Exercício 13. Escreva uma equação para o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ cujas somas das distâncias aos pontos $(2,0,0)$ e $(-2,0,0)$ é igual a 6.

Exercício 14. Considere a quádrica Ω dada por $-2x^2 - 5y^2 + 9z^2 = 2$. Faça um esboço do gráfico de Ω, e determine todos os planos paralelos aos planos coordenados que interceptam Ω em uma elipse de distância focal 2.

Exercício 15. Considere a quádrica Θ dada por $-2x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 4$.

(a) Encontre as interseções de Θ com todos os planos paralelos aos planos coordenados, ou seja, $x = k$ $(k \in \mathbb{R})$, $y = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ e $z = m$ $(m \in \mathbb{R})$.
(b) Faça um esboço do gráfico de Θ.
(c) Determine, caso existam, todos os planos paralelos ao plano $z = \pi$ que interceptam Θ em uma elipse de distância focal $2\sqrt{2}$.

§ Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

Exercício 16. Encontre as coordenadas cartesianas dos pontos com coordenadas polares:

(a) $(1, \pi/3)$.
(b) $(-\sqrt{2}, \pi/3)$.
(c) $(3, -2\pi/3)$.
(d) $(-1, 2\pi/3)$.
(e) $(-2, -\pi/3)$.

Exercício 17. Encontre as coordenadas polares dos pontos com coordenadas cartesianas:

(a) $(2, -2)$.
(b) $(3\sqrt{3}, 3)$.
(c) $(-1, -\sqrt{3})$.

Exercício 18. Encontre as equações em coordenadas cartesianas para as curvas cujas equações em coordenadas polares são:

(a) $r = 2\cos(\theta)$.
(b) $r\cos(\theta) = 1$.
(c) $r = 2\,\mathrm{sen}(\theta) + 2\cos(\theta)$.

Exercício 19. Encontre as equações em coordenadas polares para as curvas cujas equações em coordenadas cartesianas são:

(a) $x = -y^2$.
(b) $x^2 + 2y^2 = 4$.
(c) $9x^2 - 4y^2 = 36$.

Exercício 20. Encontre as coordenadas cilíndricas dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:

(a) $(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$.

(b) $(0, -1, -1)$.
(c) $(-\sqrt{3}, -3, -2)$.

Exercício 21. Encontre as equações em coordenadas cilíndricas e esféricas para as curvas cujas equações em coordenadas cartesianas são:

(a) $z = x^2 + y^2$.
(b) $x^2 + y^2 = 2y$.
(c) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Exercício 22. Em cada um dos itens abaixo, nós descrevemos um sólido em $\mathbb{R}^3$ usando coordenadas cartesianas. Descreva esses sólidos usando desigualdades envolvendo coordenadas cilíndricas.

(a) Sólido delimitado pelo cilindro de raio 1 centrado no eixo z, pelo cilindro de raio 2 centrado no eixo z, pelo plano $z = 4$, e pelo plano $z = 0$.
(b) Sólido delimitado pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.
(c) Sólido dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, e no primeiro octante de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 23. Em cada um dos itens abaixo, nós descrevemos um sólido em $\mathbb{R}^3$ usando coordenadas cartesianas. Descreva esses sólidos usando desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

(a) Sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.
(b) Sólido dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 0$, e abaixo do cone $z^2 = x^2 + y^2$.