ÁLGEBRAS DE LIE

EXERCÍCIOS :: AULA 24

Sejam $(E, (\cdot,\cdot))$ um espaço Euclidiano, $\Phi \subseteq E$ um sistema de raízes, $\Delta \subseteq \Phi$ um sistema simples, e $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{GL}(E)$ o grupo de Weyl de Φ.

24.1. (Humphreys 13.1) Suponha que Φ seja decomponível, que $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sejam sistema de raízes irredutíveis tais que $\Phi_1 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_n$, e que $\Delta_i = \Delta \cap \Phi_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ (de modo que $\Delta = \Delta_1 \sqcup \cdots \sqcup \Delta_n$). Denote por Λ o reticulado de pesos de Φ e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denote por Λ_i o reticulado de pesos de Φ_i. Mostre que $\Lambda \cong \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n$ como grupo abeliano.

24.2. (Humphreys 13.2) Encontre um exemplo explícito de $\lambda \notin \Lambda^+$ e $\alpha \in \Delta$ tais que $\lambda - \alpha \in \Lambda^+$.

24.3. (Humphreys 13.3) Calcule explicitamente os pesos fundamentais de F_4.

24.4. (Humphreys 13.6) Se Φ for irredutível, mostre que as únicas raízes que são pesos dominantes são: a raíz longa mais alta, e no caso em que o sistema de raízes não é de tipo ADE (*simply-laced*), a raiz curta mais alta.

24.5. (Humphreys 13.12) Considere o sistema de raízes de tipo A_2. Encontre a órbita dos pesos fundamentais pelo grupo de Weyl, e encontre explicitamente o menor conjunto saturado com peso máximo $\omega_1 + 3\omega_2$.

24.6. (Humphreys 13.12) Considere o sistema de raízes de tipo G_2. Encontre a órbita dos pesos fundamentais pelo grupo de Weyl, e encontre explicitamente o menor conjunto saturado com peso máximo $\omega_1 + 2\omega_2$.

Entregar dia: 08 de julho de 2019.