ÁLGEBRAS DE LIE

EXERCÍCIOS :: AULA 11

11.1. (Humphreys 6.5(a) e (c)) Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita. Mostre que $Z(\mathfrak{g})$ é igual ao radical solúvel de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo (via adjunta) completemente redutível.

11.2. (Humphreys 6.5(a) e (d)) Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita. Mostre que, se $Z(\mathfrak{g})$ é igual ao seu radical solúvel de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus_g \mathfrak{g}'$ e que $\mathfrak{g}'$ é semissimples. Use essa decomposição para mostrar que todo $\mathfrak{g}$-módulo onde todo elemento de $Z(\mathfrak{g})$ age de maneira semissimples, é completamente redutível.

11.3. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V e W dois $\mathfrak{g}$-módulos. O grupo de $\mathfrak{g}$-extensões de V por W é definido como o grupo $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(V, W)$ formado por todas as sequências exatas curtas de $\mathfrak{g}$-módulos da forma $0 \to V \to E \to W \to 0$. A operação de grupo definida em $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é chamada de *soma de Baer* e o elemento neutro desta operação é $E = V \oplus W$.

Mostre que, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, então $\mathrm{Ext}^1(V, W)$ é trivial (ou seja, o grupo $\{0\}$) para quaisquer $\mathfrak{g}$-módulos V, W de dimensão finita. (É por isso que a categoria de $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita é chamada de semissimples.)

Entregar dia: 06 de maio de 2019.