T

GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2,5 pontos). Encontre todas as possíveis combinações lineares dos vetores $(3,2,6)$, $(1,1,-3)$, $(-6,-5,3)$ em $\mathbb{R}^3$.

Uma combinação linear dos vetores $(3,2,6)$, $(1,1,-3)$, $(-6,-5,3)$ é um vetor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ da forma:

$$(a,b,c) = x(3,2,6) + y(1,1,-3) + z(-6,-5,3),$$

p/ alguns $x,y,z \in \mathbb{R}$. Ou seja, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de $(3,2,6)$, $(1,1,-3)$ e $(-6,-5,3)$ se: existem $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(a,b,c) = (3x, 2x, 6x) + (y, y, -3y) + (-6z, -5z, 3z).$$

Escrevendo essa equação coordenada-a-coordenada, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - 6z = a \\ 2x + y - 5z = b \\ 6x - 3y + 3z = c \end{cases}$$

Escalonando esse sistema como na Prova 01, concluímos que ele tem solução se, e somente se: $2a = \frac{5}{2}b + \frac{1}{6}c$. Assim, o conjunto de todas as combinações lineares de $(3,2,6)$, $(1,1,-3)$, $(-6,-5,3)$ é: $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a = \frac{5}{2}b + \frac{1}{6}c\}$.

Data: 25 de setembro de 2019.

Questão 2 (2,5 pontos). Mostre que o conjunto $\{(2,1,0),(3,0,1)\}$ forma uma base para o conjunto de soluções do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ -2x+4y+6z=0 \\ -x+2y+3z=0 \end{cases}.$$

Primeiro, vamos resolver o sistema, usando escalonamento:

$$\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ -2x+4y+6z=0 \\ -x+2y+3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\iff x = 2y+3z.$$

Assim, o conj. solução desse sistema é:

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=2y+3z\} = \{(2y+3z, y, z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{y(2,1,0)+z(3,0,1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}$$
$$= \langle \{(2,1,0),(3,0,1)\}\rangle.$$

Isso mostra que o conj. solução do sistema é gerado por $\{(2,1,0),(3,0,1)\}$. Para mostrar que essa é uma base, basta mostrar que $\{(2,1,0),(3,0,1)\}$ é linearmente independente.

Suponha que $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ satisfaçam:

$$\lambda(2,1,0)+\mu\cdot(3,0,1)=(0,0,0).$$

Isso é equivalente à (λ,μ) ser uma sol. do sist.:

$$\begin{cases} 2\lambda+3\mu=0 \\ \lambda=0 \\ \mu=0 \end{cases},$$

cuja única solução é: $\lambda=0$, $\mu=0$.

Isso mostra que $\{(2,1,0),(3,0,1)\}$ é uma base do conj. sol. do sistema acima.

Questão 3 (2,5 pontos). Aplique o processo de Gram-Schmidt e construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ a partir da base $\{(1,-1),(3,4)\}$.

* Projetando (3,4) sobre (1,-1):

$$\text{proj}_{(1,-1)}^{\perp}(3,4) = \left(\frac{(3,4)\cdot(1,-1)}{\|(1,-1)\|^2}\right)(1,-1) = \frac{-1}{2}(1,-1)$$
$$= (-1/2, 1/2).$$

• Observe que: $(3,4)-(-1/2,1/2) = (7/2, 7/2)$ é ortogonal à $(1,-1)$. De fato, $(7/2,7/2)\cdot(1,-1) = 0$.

* Normalizando a base $\{(1,-1),(7/2,7/2)\}$:

• $\dfrac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|} = \dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

• $\dfrac{(7/2,7/2)}{\|(7/2,7/2)\|} = \dfrac{(7/2,7/2)}{\sqrt{49/2}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

• Observe que $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Questão 4 (2,5 pontos). Encontre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem:

$$(S_4): \begin{cases} v \wedge (1,1,2) = (-1,-5,3) \\ v \bullet (1,1,1) = 4 \\ [v,(1,1,1),(1,1,2)] = 3 \end{cases} .$$

Suponha que $v = (x,y,z)$. Da primeira equação acima, segue que:

$$(-1,-5,3) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2y-z, -2x+z, x-y),$$

ou seja, $\begin{cases} 2y - z = -1 \\ -2x + z = -5 \\ x - y = 3 \end{cases}$. Escalonando e resolvendo esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 2y - z = -1 \\ -2x + z = -5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + z = 1 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3+y \\ z = 1+2y \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Da segunda equação do sistema S_4, temos que: $4 = (x,y,z)\cdot(1,1,1) = x+y+z$. Se usamos que $x = 3+y$ e $z = 1+2y$, concluímos que:

$$4 = x+y+z = (3+y)+y+(1+2y) = 4+4y,$$

ou seja, $y=0$. Logo: $x=3$ e $z=1$.

Da terceira equação do sistema S_4, temos que:

$$3 = \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2x+y+z-x-2y-z = x+y.$$ Para $x=3$, $y=0$, $z=1$, de fato, temos que: $x+y=3$.

Conclusão: $v = (3,0,1)$.