GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2,0 pontos). Encontre todas as soluções do seguinte sistema linear:

$$(S_1): \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + 3y + 4z + w = 0 \\ 3x + 4y + z + 2w = 0 \\ 4x + y + 2z + 3w = 0. \end{cases}$$

Vamos escalonar o sistema usando a sua matriz associada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ : L_2 - 2^* L_1 \\ : L_3 - 3^* L_1 \\ : L_4 - 4^* L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ : -L_2 \\ : L_3/2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : L_3 + L_2 \\ : L_4 + 7^* L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : L_3/-2 \\ : L_4/-4 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ : L_4 + L_3 \end{array}$$

Data: 28 de agosto de 2019.

Daí segue que o sistema linear S_1 é equivalente (ou seja, tem as mesmas soluções) que o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ \quad\ \ y + 2z + 7w = 0 \\ \qquad\quad z - w = 0 \\ \qquad\quad -10w = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, concluímos que:

$w = 0$, $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$.

Assim, a única soluçao de S_1 é: $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$.

Questão 2 (2,0 pontos). Encontre todos os números $a, b, c \in \mathbb{R}$ para os quais o seguinte sistema linear é possível:

$$(S_2): \begin{cases} 3x + y - 6z = a \\ 2x + y - 5z = b \\ 6x - 3y + 3z = c. \end{cases}$$

O sistema linear S_2 ser possível é equivalente a ele admitir alguma solução. Vamos escalonar o sistema S_2 usando sua matriz aumentada para determinar quando S_2 não é impossível.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 1 & -5 & b \\ 6 & -3 & 3 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 1 & -5 & b \\ -2 & 1 & -1 & -c/3 \end{array}\right] : L_3/-3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 1 & -5 & b \\ 0 & 2 & -6 & b-\frac{c}{3} \end{array}\right] : L_3+L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 0 & 1 & -3 & 3b-2a \\ 0 & -1 & 3 & -\frac{b}{2}+\frac{c}{6} \end{array}\right] \begin{array}{l} : 3L_2 - 2 \cdot L_1 \\ : L_3/-2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 0 & 1 & -3 & 3b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+\frac{5}{2}b+\frac{1}{6}c \end{array}\right] : L_2+L_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 3a-3b \\ 0 & 1 & -3 & 3b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+\frac{5}{2}b+\frac{1}{6}c \end{array}\right] : L_1-L_2 \, .$$

Primeiro, observe que o sistema S_2 será impossível se $-2a + \frac{5}{2}b + \frac{1}{6}c \neq 0$, devido à última equação do sistema escalonado. Por outro lado, se $2a = \frac{5}{2}b + \frac{1}{6}c$, então o sistema S_2 ~~tem~~ é equivalente à:

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = a - b \\ \quad y - 3z = 3b - a \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são: $\{(a-b+z,\ 3b-a+3z,\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $2a = \frac{5}{2}b + \frac{1}{6}c$; ou seja, nesses casos o sistema é possível.

Questão 3. Considere os seguintes conjuntos

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ky + z = k \text{ e } kx + y + z = k^2\},$$
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + kz = 1\},$$

onde k é uma constante.

(a) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P = \emptyset$.
(b) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P$ tem só um ponto.
(c) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P$ tem mais de um ponto.

Observe que os três itens perguntam sobre propriedades do conjunto $R \cap P$, que é exatamente o conjunto de vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que resolvem o seguinte sistema linear:

$$(S_3'): \begin{cases} x + ky + z = k \\ kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = k^2. \end{cases}$$

a) $R \cap P = \emptyset$ significa que o sistema S_3' não tem nenhuma solução, ou seja, é impossível.

b) $(R \cap P)$ ter só um ponto significa que o sistema S_3 tem só uma solução, ou seja, é possível determinado.

c) $R \cap P$ ter mais de um ponto significa que o sistema S_3' tem mais de uma solução, ou seja, é possível indeterminado.

Para que o sistema S_3 seja SPI ou SI, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$, associada ao sistema, ~~deve ser não invertível, ou seja, seu determinante~~ deve ser 0.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3k - k^3 - 2 = 0 \iff k^3 - 3k + 2 = 0.$$

Observe que $k = 1$ é uma solução desta equação do 3° grau. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = k^3 - 3k + 2 &= (k-1)(k^2+k-2) \\ &= (k-1)(k+2)(k-1) \\ &\iff k = 1 \text{ ou } k = -2. \end{aligned}$$

• $\underline{k=1}$: $S_3: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

é SPI.

• $\underline{k=-2}$: $S_3: \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ 3y - 3z = 6 \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

é SI.

Respostas: a) $k = -2$

b) $k \neq 1$ e $k \neq -2$

c) $k \neq 1$.