GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 04

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ____________________ Assinatura: ____________________ RA: ________

Encontre a equação reduzida e classifique cada uma das cônicas abaixo. Justifique suas respostas de forma clara.

Questão 1 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $x^2 + 2x + 4y^2 + 6y = \overset{3/4}{\cancel{0}}$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 2 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 16$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 3 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 4 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $r = \operatorname{sen}(\theta) + 2\cos(\theta)$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 5 (2.0 pontos). Lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas distâncias ao ponto $(3, 2)$ são iguais ao dobro das suas distâncias à reta dada por $y - 1 = 0$.

Data: 02 de dezembro de 2019.

#1. $x^2 + 2x + 4y^2 + 6y = 3/4 \iff (x^2+2x+1) + 4(y^2 + 3/2\, y) = 7/4$

$$\iff (x+1)^2 + 4(y+3/4)^2 - 9/4 = 7/4$$

$$\iff (x+1)^2 + 4(y+3/4)^2 = 4$$

$$\iff \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3/4)^2}{1} = 1.$$

Essa é a equação reduzida de uma elipse.

#2. $11x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + y^2 = 16.$

Vamos aplicar uma rotação de $\theta \in [0, 2\pi)$, tal que $\cot g(2\theta) = \frac{11-1}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Observe que:

$$\cot g(2\theta) = 1/\sqrt{3} \iff \sqrt{3}\cos(2\theta) = sen(2\theta)$$

$$\Rightarrow 3\cos^2(2\theta) = sen^2(2\theta)$$

$$\Rightarrow 1 = sen^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)$$

$$= 4\cos^2(2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^2(2\theta) = 1/4$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta) = \pm 1/2 \quad e \quad sen(2\theta) = \pm\sqrt{3}/2.$$

Assim, $2\theta = \pi/3$ ou $4\pi/3$ e portanto $\theta = \pi/6$ ou $2\pi/3$.
Vamos escolher $\theta = \pi/6$. Então $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $sen\,\theta = 1/2$ e $R_{\pi/6}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$. Aplicando na equação $11x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + y^2 = 16$, obtemos:

$$11\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 + 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 16.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$\left(11\cdot\frac{3}{4} + 10\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(11\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-2}{2} + 10\sqrt{3}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)xy$$

$$+ \left(\frac{11}{4} + 10\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3}{4}\right)y^2 = 16.$$

$\leadsto 16x^2 - 4y^2 = 16 \iff x^2 - y^2/4 = 1$: hipérbole

#3. $x^2+2xy+y^2+x-y=0$.

Vamos aplicar uma rotação de $\theta \in [0,2\pi)$ tal que $\cot g(2\theta)=0$. Ou seja, $\cos(2\theta)=0$. Observe que $\cos(2\theta)=0 \iff 2\theta=\pi/2$ ou $3\pi/2 \iff \theta=\pi/4$ ou $3\pi/4$. Vamos escolher $\theta=\pi/4$.

Nesse caso, $\cos\theta=\sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{2}/2$ e

$$R_{\pi/4}(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

Aplicando na equação $x^2+2xy+y^2+x-y=0$, obtemos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)-\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}x}+\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)=0.$$

$$\iff \left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-1+\cancel{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}+1\right)xy+\left(\cancel{\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}}\right)y^2-\sqrt{2}\,y=0$$

$$\iff 2x^2-\sqrt{2}\,y=0.$$

$$\iff y=\frac{2}{\sqrt{2}}x^2=\sqrt{2}\,x^2.$$

Essa é a eq. reduzida de uma parábola.

#4. $r = \text{sen}(\theta) + 2\cos(\theta)$.

Lembre que, em coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Então:

$$r = \text{sen}(\theta) + 2\cos(\theta) \Leftrightarrow r = \frac{y}{r} + \frac{2x}{r} \quad \text{ou} \quad r = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 = y + 2x \quad \text{ou} \quad r = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = y + 2x \quad \text{ou} \quad (x,y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 - y) = 0 \quad \text{ou} \quad x = y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y - 1/2)^2 - 1/4 = 0 \quad \text{ou} \quad x = y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 5/4 \quad \text{ou} \quad x = y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{5/4} + \frac{(y-1/2)^2}{5/4} = 1.$$

Essa é a eq. reduzida de uma elipse.

#5. $\text{dist}((x,y),(3,2)) = 2\,\text{dist}((x,y), r)$, $r = \{(t,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 2|y-1|$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4(y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = (4y^2 - 8y + 4) - (y^2 - 4y + 4)$$

$$= 3y^2 - 4y$$

$$= 3(y^2 - 4/3\,y)$$

$$= 3(y - 2/3)^2 - 4/3.$$

$$\Leftrightarrow 3(y - 2/3)^2 - (x-3)^2 = 4/3. \Leftrightarrow \frac{(y-2/3)^2}{4/9} - \frac{(x-3)^2}{4/3} = 1.$$

Essa é a equação reduzida de uma hipérbole.