# ÁLGEBRA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

**Questão 1.** Considere o conjunto $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ e a função $p\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p(x, y) = xy$ (produto de dois números complexos).

(a) (1,0 ponto) Explique por que $(\mathbb{C}, p)$ não é um grupo.
(b) (1,0 ponto) Considere agora o grupo abeliano $S^1 = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\}$ munido da função $p$. Mostre que $H = \{z \in S^1 \mid p(z, z) = 1\}$ é um subgrupo de $S^1$.
(c) (1,0 ponto) Mostre que $|S^1|$ é infinita, $|H|$ é finita, e explique por que isso não contradiz o Teorema de Lagrange.
(d) (2,0 pontos) Mostre que existe um isomorfismo de grupos $S^1/H \cong S^1$.

(a) Se $(\mathbb{C}, p)$ fosse um grupo, para todo $z \in \mathbb{C}$ existiria $w \in \mathbb{C}$ tal que $p(z, w) = e_{\mathbb{C}} = p(w, z)$. Como $p(1, z) = z = p(z, 1)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então $e_{\mathbb{C}} = 1$. Como $p(0, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então não existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $p(z, w) = 1$. Logo $(\mathbb{C}, p)$ não pode ser um grupo.

(b) Vamos verificar as condições (i) e (ii) da definição de subgrupo.
   (i) Se $z_1, z_2 \in H$, então $z_1z_1 = z_2z_2 = 1$. Consequentemente, $p(z_1z_2, z_1z_2) = (z_1z_2)(z_1z_2) = (z_1z_1)(z_2z_2) = 1$. Logo $z_1z_2 \in H$.
   (ii) Se $z \in H$, então $p(z, z) = 1$, ou seja, $z^{-1} = z \in H$.

(c) Considere $q \in \mathbb{Q}$ e $z_q = \cos(q) + \mathrm{sen}\,(q)\sqrt{-1}$. Vamos mostrar que $z \in S^1$ e $z^k \neq 1$ para todo $k > 0$. Primeiro, $(\cos\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 1$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, em particular, para $\theta = q$. Além disso, $z^k = \cos(kq) + \mathrm{sen}\,(kq)\sqrt{-1}$ para todo $k > 0$. De fato, para $k = 1$, a afirmação é óbvia. Por indução, suponha que $z^{k-1} = \cos((k-1)q) + \mathrm{sen}\,((k-1)q)\sqrt{-1}$. Então

$$
\begin{aligned}
z^k &= zz^{k-1} \\
&= \left(\cos(q) + \mathrm{sen}\,(q)\sqrt{-1}\right)\left(\cos((k-1)q) + \mathrm{sen}\,((k-1)q)\sqrt{-1}\right) \\
&= \cos(q)\cos((k-1)q) - \mathrm{sen}\,(q)\mathrm{sen}\,((k-1)q) \\
&\quad + \left(\cos(q)\mathrm{sen}\,((k-1)q) + \mathrm{sen}\,(q)\cos((k-1)q)\right)\sqrt{-1} \\
&= \cos(kq) + \mathrm{sen}\,(kq)\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

Observe que $\cos(\theta) = 1$ e $\mathrm{sen}\,(\theta) = 0$ se, e somente se, $\theta \in \{(2\pi)n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Como $kq \in \mathbb{Q}$ e $2n\pi \notin \mathbb{Q}$, então $z^k \neq 1$ para todo $k > 0$.

---

*Data:* 26 de setembro de 2017.

O enunciado do Teorema de Lagrange é o seguinte: "Se $G$ é um grupo **finito** e $H \subseteq G$ é um subgrupo, então $|G\colon H| = |G|/|H|$." Como $|S^1|$ não é finita, isso não contradiz o Teorema de Lagrage.

(d) Defina $f\colon S^1 \to S^1$ por $f(z) = p(z,z)$. Vamos mostrar que $f$ um homomorfismo de grupos. Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos que $f(zw) = p(zw, zw) = zwzw = zzww = p(z,z)p(w,w) = f(z)f(w)$. Agora vamos mostrar que $f$ é sobrejetor. Dado $(a + b\sqrt{-1}) \in S^1$, tome $w = \left(\frac{1+a}{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{1-a}{2}\right)^{1/2}\sqrt{-1}$. Primeiro observe que $w \in S^1$. De fato, $\left(\frac{1+a}{2}\right) + \left(\frac{1-a}{2}\right) = 1$. Além disso,

$$f(w) = ww = \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1-a}{2}\right) + 2\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1-a}{2}\right)^{1/2}\right)\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}.$$

Como $\ker(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z,z) = 1\} = H$, segue do Primeiro Teorema de Isomorfismo de grupos que $S^1/H = S^1/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f) = S^1$. $\square$

**Questão 2.** Considere $n > 0$, $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto de matrizes de ordem $n \times n$ e entradas reais e $GL_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$. Munido da multiplicação usual de matrizes, $GL_n$ é um grupo, e munido do produto usual de números reais, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ também é um grupo.

(a) (1,0 ponto) Mostre que a função $\det\colon GL_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo de grupos.
(b) (1,0 ponto) Mostre que o subgrupo $SL_n = \{A \in GL_n \mid \det(A) = 1\} \subseteq GL_n$ é normal.

(a) Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para todos $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, $\det\colon GL_n \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um homomorfismo de grupos.
(b) Precisamos mostrar que $gSL_ng^{-1} = SL_n$ para todo $g \in GL_n$. Observe que, se $gSL_ng^{-1} \subseteq SL_n$ para todo $g \in GL_n$, então $SL_n = g(g^{-1}SL_ng)g^{-1} \subseteq gSL_ng^{-1}$ para todo $g \in GL_n$. Agora, para todo $A \in SL_n$, temos que $\det(gAg^{-1}) = \det(A) = 1$ para todo $g \in GL_n$. Isso mostra que $gSL_ng^{-1} = SL_n$ para todo $g \in GL_n$. $\square$

**Questão 3.** Sejam $G$ um grupo finito e $\sigma\colon G \to G$ um isomorfismo de grupos que satisfaz: $\sigma^2 = \mathrm{id}_G$; $\sigma(g) = g$ se, e somente se, $g = e_G$.

(a) (1,0 ponto) Mostre que $G = \{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$.
(b) (1,0 ponto) Mostre que $\sigma(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.
(c) (1,0 ponto) Mostre que $G$ é abeliano.

(a) Para todo $g \in G$, temos que $g^{-1}, \sigma(g) \in G$, e portanto $g^{-1}\sigma(g) \in G$. Então considere a função $f\colon G \to G$ dada por $f(g) = g^{-1}\sigma(g)$. Por construção, a imagem de $f$ é $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$. Se mostrarmos que $f$ é injetora, obteremos que $f$ é uma bijeção entre $G$ e $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$. Como $G$ é finito e $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\} \subseteq G$, segue daí que $G = \{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$.

Para mostrar que $f$ é injetora, tome $g, h \in G$. Se $f(g) = f(h)$, então $g^{-1}\sigma(g) = h^{-1}\sigma(h)$. Logo $hg^{-1} = \sigma(h)\sigma(g)^{-1} = \sigma(hg^{-1})$. Como $\sigma(x) = x$ se, e somente se, $x = e_G$, então $hg^{-1} = e_G$. Segue daí que $h = g$. Isso mostra que $f$ é injetora.

(b) Vamos mostrar que $g\sigma(g) = e_G\sigma(g)g$ para todo $g \in G$. Pelo item (a), para todo $g \in G$, existe $x \in G$ tal que $g = x^{-1}\sigma(x)$. Assim, temos que $\sigma(g) = \sigma(x^{-1}\sigma(x)) = \sigma(x)^{-1}x$. Logo

$$g\sigma(g) = (x^{-1}\sigma(x))(\sigma(x)^{-1}x) = e_G,$$
$$\sigma(g)g = (\sigma(x)^{-1}x)(x^{-1}\sigma(x)) = e_G.$$

(c) Usando o item (b), temos que $\sigma(g)\sigma(h) = \sigma(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = \sigma(h)\sigma(g)$ para todos $g, h \in G$. Agora, usando o fato de que $\sigma$ é um isomorfismo de grupos, temos que $\{\sigma(g) \mid g \in G\} = G$. Isso mostra que $xy = yx$ para todos $x, y \in G$, ou seja, que $G$ é abeliano. $\square$

**Questão 4.** Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. É necessário justificar a sua escolha provando as afirmações verdadeiras e encontrando contra-exemplos para as falsas.

(a) (1,0 ponto) Seja $G$ um grupo. Se $H_1, H_2 \subseteq G$ são subgrupos, então $(H_1 \cup H_2) \subseteq G$ é um subgrupo.

(b) (1,0 ponto) Para todos os grupos $G_1$ e $G_2$: $H = \{(g_1, e_{G_2}) \mid g_1 \in G_1\} \subseteq G_1 \times G_2$ é um subgrupo normal e $(G_1 \times G_2)/H \cong G_2$.

(a) Falsa. Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, considere o subgrupo $\langle n \rangle = \{zn \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Observe que $\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle$ não é um subgrupo de $\mathbb{Z}$. De fato, $2, 3 \in \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle$, mas $2 + 3 = 5 \notin \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle$.

(b) Verdadeira. Considere a função $f \colon G_1 \times G_2 \to G_2$ dada por $f(g_1, g_2) = g_2$. Primeiro observe que $f$ é um homomorfismo de grupos. De fato, para todos $a_1, b_1 \in G_1$ e $a_2, b_2 \in G_2$, temos que $f((a_1, a_2)(b_1, b_2)) = f(a_1 b_1, a_2 b_2) = a_2 b_2 = f(a_1, a_2) f(b_1, b_2)$. Além disso, $f$ é sobrejetor, já que $f(e_{G_1}, g_2) = g_2$ para todo $g_2 \in G_2$. Agora, o núcleo de $f$ é:

$$\ker(f) = \{(a, b) \in (G_1 \times G_2) \mid f(a, b) = b = e_{G_2}\} = \{(a, e_{G_2}) \mid a \in G_1\} = H.$$

Portanto, $H$ é um subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ e, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo de grupos, temos existe um isomorfismo de grupos $(G_1 \times G_2)/H \cong G_2$. $\square$