CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (5 pontos)**.** Considere o seguinte algoritmo:

Input: $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
if *F não for contínua em (a,b)* **then**
  print "F não é diferenciável, porque não é contínua em (a,b)";
else if *$F_x(a,b)$ ou $F_y(a,b)$ não existirem* **then**
  print "F não é diferenciável, porque o gradiente de F em (a,b) não existe";
else if *F_x e F_y forem contínuas em (a,b)* **then**
  print "F é diferenciável em (a,b)";
else
  Calcule $z(x,y) = F(a,b) + F_x(a,b)(x-a) + F_y(a,b)(y-b)$;
  if $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{F(x,y)-z(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \neq 0$ **then**
    print "F não é diferenciável em (a,b), porque o limitão não é 0";
  else
    print "F é diferenciável em (a,b)".

Rode o algorítmo acima para as funções a seguir e indique a saída.

(a) $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ `Saída:` F não é diferenciável, porque não é contínua em (a,b).

(b) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. `Saída:` F não é diferenciável, porque o gradiente de F em (a,b) não existe.

(c) $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ `Saída:` F é diferenciável em (a,b).

(d) $F(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ `Saída:` F não é diferenciável em (a,b), porque o limitão não é 0.

(e) $F(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ `Saída:` F é diferenciável em (a,b).

Data: 24 de abril de 2019.

Questão 2 (2 pontos)**.** Considere uma superfície em $\mathbb{R}^3$ cuja altura em relação ao nível do mar é, em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dada pela função $H(x, y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$ (onde o eixo x indica o `Leste` e o eixo y indica o `Norte`). Se chover sobre essa superfície, em cada ponto onde a chuva cair, ou ela vai correr em alguma direção, ou ela vai ficar parada. Encontre os pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ com $0 \leq a, b \leq 2\pi$, nos quais a chuva vai:

(a) Ficar parada.
(b) Correr em direção ao Leste.

Observe que, em cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a chuva vai correr na direção em que a inclinação da montanha for maior (para baixo), ou seja, na direção que a altura da montanha $H(x, y)$ decrescer mais. Agora, lembre que, dado um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a derivada direcional na direção $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, nos dá a taxa de variação de H na direção de v: $D_v H(a, b) \in \mathbb{R}$. Além disso, como H é diferenciável, $D_v H(a, b) = \nabla H(a, b) \cdot v$ é máxima (resp. mínima) quando $v = \frac{\nabla H(a,b)}{\|\nabla H(a,b)\|}$ (resp. $v = -\frac{\nabla H(a,b)}{\|\nabla H(a,b)\|}$). Assim, para cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a água vai correr na direção $v = -\frac{\nabla H(a,b)}{\|\nabla H(a,b)\|}$.

(a) Usando o argumento acima, a água vai ficar parada se, e somente se, $\nabla H(a, b) = (0, 0)$. Explicitamente, temos que ter:

$$0 = H_x(a, b) = \cos(a)\cos(b) \qquad \text{e} \qquad 0 = H_y(a, b) = -\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Da primeira equação, segue que $a \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ou $b \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, e da segunda equação, segue que $a \in \{0, \pi, 2\pi\}$ ou $b \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Agora, observe que, se $a \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, então $a \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, logo temos que ter $b \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Analogamente, se $b \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, então $b \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, logo temos que ter $a \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Juntando esses dois casos, nós concluimos que os pontos onde a chuva fica parada são:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),$$
$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

(b) Usando o argumento acima, concluimos que a água vai correr na direção `Leste` quando $-\frac{\nabla H(a,b)}{\|\nabla H(a,b)\|} = (1, 0)$. Explicitamente, temos que ter:

$$-\|\nabla H(a, b)\| = H_x(a, b) = \cos(a)\cos(b) \qquad \text{e} \qquad 0 = H_y(a, b) = -\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

Da primeira equação, segue que $\cos(a)\cos(b) < 0$, e da segunda equação, segue que $a \in \{0, \pi, 2\pi\}$ ou $b \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

Vamos estudar cada um dos casos separadamente. Primeiro, observe que, se $a \in \{0, 2\pi\}$, temos que $\cos(a) = 1 > 0$. Logo, nesses casos, segue da primeira equação que $\cos(b) < 0$, ou seja, $\frac{\pi}{2} < b < \frac{3\pi}{2}$. Agora, se $a = \pi$, temos que $\cos(a) = -1 < 0$. Logo, nesse caso, segue da primeira equação que $\cos(b) > 0$, ou seja, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$.

Analogamente, se $b \in \{0, 2\pi\}$, temos que $\cos(b) = 1 > 0$. Logo, nesses casos, segue da primeira equação que $\cos(a) < 0$, ou seja, $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$. Agora, se $b = \pi$, temos que $\cos(b) = -1 < 0$. Logo, nesse caso, segue da primeira equação que $\cos(a) > 0$, ou seja, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$.

Juntando todos esses casos, concluimos que o conjunto de pontos onde a água corre para `Leste` é:

$$\left\{(0,b) \mid \frac{\pi}{2} < b < \frac{3\pi}{2}\right\} \cup \left\{(\pi,b) \mid -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(2\pi,b) \mid \frac{\pi}{2} < b < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$\cup \left\{(a,0) \mid \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}\right\} \cup \left\{(a,\pi) \mid -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(a,2\pi) \mid \frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Questão 3 (3 pontos)**.** Suponha que a Unifesp tenha $6\pi\, m^2$ de um super-papelão disponível para produzir uma lixeira-modelo. Por questões estruturais, essa lixeira-modelo deverá ter formato cilíndrico, com raio da base igual a $r \geq 0$, altura igual a $h \geq 0$, e sem tampa. Determine o maior volume da lixeira-modelo que pode ser construida com parte (ou todo) esse super-papelão.

Nosso objetivo é maximizar a função $V(h,r) = \pi h r^2$, restrita a condição $A(h,r) = \pi r^2 + 2\pi h r \leq 6\pi$.

Primeiro observe que $\nabla V(h,r) = (\pi r^2,\ 2\pi h r) = (0,0)$ se, se somente se, $r = 0$. Nesse caso, $V(h,0) = 0$ para todo $h \geq 0$. Como $V(1,1) = \pi > 0$ e $A(1,1) = 3\pi < 6\pi$, então os pontos da forma $(h,0)$ com $h \geq 0$ não são de máximo para V. Isso significa que a função V não tem pontos de máximo no conjunto $\{(h,r) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi r^2 + 2\pi h r < 6\pi\}$.

Porém, como o conjunto $\{(h,r) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi r^2 + 2\pi h r \leq 6\pi\}$ é compacto (limitado e fechado), o Teorema de Weierstrass implica que V deve ter ao menos um ponto de máximo global nesse conjunto. Como, pelo parágrafo anterior, este ponto de máximo não pertence ao interior, ele deve pertencer à fronteira: $\{(h,r) \in \mathbb{R}^2 \mid A(h,r) = \pi r^2 + 2\pi h r = 6\pi\}$.

Usando multiplicadores de Lagrange para calcular os pontos de máximo e mínimo de V restrita ao conjunto $\{(h,r) \in \mathbb{R}^2 \mid A(h,r) = 6\pi\}$, temos que ter

$$\nabla V(h,r) = \lambda \nabla A(h,r), \qquad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Explicitamente, temos:

$$(\pi r^2,\ 2\pi h r) = (\lambda 2\pi r,\ \lambda 2\pi(r+h)) \quad \text{e} \quad \pi r^2 + 2\pi h r = 6\pi.$$

Como $r \neq 0$, temos que:

$$r = 2\lambda, \qquad hr = \lambda(r+h), \qquad r^2 + 2hr = 6.$$

Consequentemente, $\lambda > 0$ e temos que:

$$r = 2\lambda, \qquad h = 2\lambda, \qquad 12\lambda^2 = 6.$$

Daí concluimos que $r = h = \sqrt{2}$ e que $V(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\pi\sqrt{2}\, m^3$ é o volume máximo.