GEOMETRIA ANALÍTICA :: LISTA DE EXERCÍCIOS 02

§ Vetores

Exercício 1. Dados os pontos $A = (-2, 2)$, $B = (1, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (3, 4)$, $E = (3, 2)$, $F = (6, 1)$, $G = (3, 1)$, $H(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, represente graficamente, no plano cartesiano, os seguintes vetores:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
(b) $2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\,\overrightarrow{EF}$;
(c) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE}$;
(d) $\overrightarrow{CF} - (3\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$.

Exercício 2. Dados $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$, encontre $C \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Exercício 3. Suponha que $ABCD$ é um paralelogramo. Encontre o vértice D oposto ao vértice B, onde:

(a) $A = (-3, -1)$, $B = (4, 2)$ e $C = (5, 5)$;
(b) $A = (5, 1)$, $B = (7, 3)$ e $C = (3, 4)$.

Exercício 4. Dados os pontos $A = (-3, 2)$ e $B = (5, -2)$, encontre os pontos M e N pertencentes ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ tais que: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$.

Exercício 5. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, encontre os escalares α e β tais que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$.

§ Dependencia, independencia linear e base

Exercício 6. Determine $\xi \in \mathbb{R}$ para que os vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ sejam linearmente independentes:

(a) $u = (2, \xi^2 - 1, 0)$, $v = (-6, 4, 0)$ e $w = (0, \xi, 1)$.
(b) $u = (\xi, 1, \xi + 1)$, $v = (0, 1, \xi)$ e $w = (0, \xi, 2\xi)$.
(c) $u = (\xi, r_1, r_2)$, $v = (r_3, \xi, r_4)$ e $w = (r_5, r_6, \xi)$, onde $r_1r_2r_3r_4r_5r_6$ é o seu RA.

Exercício 7. Determine se o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é linearmente dependente ou linearmente independente:

(a) $S = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
(b) $S = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 0)\}$.
(c) $S = \{(1, 0, 0), (20,\ 2,\ 3), (30,\ 4,\ 6)\}$.
(d) $S = \{(1, 2, 1), (1, -1, 7), (4, 5, -4)\}$.

Data: 8 de setembro de 2019.

Exercício 8. Encontre um conjunto linearmente independente e que gere (ou seja, uma base) o conjunto de soluções dos sistemas lineares abaixo.

(a) $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z - w = 0 \\ 2x + 3y + z + 2w = 0 \\ 4x + 7y + 7z = 0 \end{cases}$

Exercício 9. Fixe $n > 0$. (Pode escolher $n = 3$, se você preferir.)

(a) Mostre que $\{v, u\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se, se somente se, v e u são dois vetores colineares.
(b) Mostre que $\{v, u, w\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se, se somente se, v, u e w são três vetores coplanares.
(c) Dado $m > 0$, mostre que $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se, se somente se, v_0 pertence ao subespaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$, ou seja, v_0 é uma combinação linear de $\{v_1, \ldots, v_m\}$.
(d) Dado $m > n$, mostre que qualquer conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente.
(e) Dado $m \leq n$, encontre um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ que é linearmente dependente. (Ou seja, nem todo conjunto com $m \leq n$ elementos é linearmente independente.)

§ Produto escalar e ortogonalidade

Exercício 10. Considere $n > 0$. (Pode escolher $n = 3$, se você preferir.)

(a) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$ não nulos, mostre que, se $v \cdot w = 0$, então $\{v, w\}$ é linearmente independente.
(b) Dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ não nulos, mostre que, se $v \cdot w = u \cdot w = u \cdot v = 0$, então $\{v, w, u\}$ é linearmente independente.
(c) Encontre $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ tais que $v \cdot w = u \cdot w = 0$ e $\{v, w, u\}$ é linearmente dependente.
(d) Dado $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$, mostre que, se $e_i \cdot e_j = 0$ para todo $i \neq j$, então β é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 11. Encontre $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tais que $u \cdot v = u \cdot w$ e $v \neq w$.

Exercício 12. Mostre que as diagonais de um losango são ortogonais.

Exercício 13. Uma aplicação física para o produto escalar é o cálculo do trabalho realizado por uma certa força constante para deslocar um objeto de forma retilínea. Explicitamente, se um certo objeto for deslocado do ponto $A \in \mathbb{R}^2$ até o ponto $B \in \mathbb{R}^2$ pelo efeito de uma força $\overrightarrow{F}$, então o trabalho realizado pela força é dado por $T = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{F}$.

(a) Suponha que um carrinho seja puxado por uma distância de 100m, ao longo de um caminho horizontal, por uma força constante de 70N e que forma um ângulo de 35 graus acima da horizontal. Encontre o trabalho realizado por essa força para deslocar o carrinho neste trajeto.

(b) Suponha agora que, no item (a), o ângulo que o vetor de força forma com a horizontal fosse de 90 graus. Esta força contribuiria para o deslocamento do carrinho?
(c) Qual seria a melhor forma de minimizar o trabalho?

Exercício 14. Determine se S é (i) um conjunto conjunto ortogonal, (ii) um conjunto ortonormal e (iii) uma base:

(a) $S = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
(b) $S = \{(\pi,0,0),\ (0,e^3,0),\ (0,0,\sqrt{2})\} \subset \mathbb{R}^3$.
(c) $S = \{(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (0,0,\sqrt{2})\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercício 15. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,2,3,0)$, $v_2 = (1,2,0,0)$ e $v_3 = (1,0,0,1)$

- Obtenha a projeção ortogonal de v_2 sobre v_1.
- Utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal para W.

§ Angulo, norma, produto vetorial e produto misto

Exercício 16. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vetores satisfazendo:

- $\{u, v, w\}$ é uma base.
- $\theta(u, v) = \pi/6,\ \ u \cdot w = v \cdot w = 0,$
- $\|u\| = 1$ e $\|w\| = 4$.

Calcule $[u, v, w]$.

Exercício 17. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ vetores satisfazendo:

- $\theta(u, v) = \frac{\pi}{6}$,
- $\|u\| = 1$ e $\|v\| = 7$.

Calcule $\|u \wedge v\|$ e $\|\frac{1}{3}u \wedge \frac{3}{4}v\|$.

Exercício 18. Encontre todas as soluções $X \in \mathbb{R}^3$ para o sistema de equações

$$\begin{cases} X \cdot (2,3,4) = 9 \\ X \wedge (-1,1,-1) = (-2,0,2). \end{cases}$$

Exercício 19. Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $u = (2,-2,0)$, $v = (0,1,0)$, $w = (-2,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 20. Considere os pontos

$$A = (4,2,-1),\ B = (6,4,-6),\ C = (-1,3,2),\ D = (0,-1,5)\ \in\ \mathbb{R}^3.$$

(a) Determine o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.
(b) Determine a área do triângulo ABC.
(c) Mostre que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ é linearmente independente.
(d) Determine a altura do tetraedro $ABCD$ em relação à base ABC.

(e) Determine o volume do tetraedro $ABCD$.

Exercício 21.

(a) Encontre um vetor unitário e ortogonal aos vetores $(1, -3, 1)$ e $(-3, 3, 3)$.
(b) Calcule a área do paralelogramo formado pelos vetores $u = (1, 1, -1)$ e $v = (2, 1, 4)$.
(c) Calcule a área do triângulo ABC, tal que $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.

Exercício 22. O torque é uma grandeza física vetorial, que está relacionada com a direção que um objeto sofre rotação. Dado um objeto e uma força $\overrightarrow{F}$, o torque neste objeto é dado por $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{F}$, onde $\overrightarrow{d}$ é o vetor que vai do eixo de rotação do objeto ao ponto onde a força $\overrightarrow{F}$ é aplicada.

(a) Se um parafuso for apertado por uma chave de boca de 25cm com uma força de 40N aplicada perpendicularmente a ela, qual é o torque no parafuso?
(b) Modifique o ângulo em que a força é aplicada à chave de boca, de modo que o torque se anule (mesmo mantendo a força de 40N).