GEOMETRIA ANALÍTICA :: LISTA DE EXERCÍCIOS 01

§ Sistemas lineares

Exercício 1. Considere os seguintes sistemas de equações nas variáveis x, y, z. Escreva a equação matricial associada ao sistema, depois escalone, encontre as soluções, e classifique o sistema.

(a) $\begin{cases} 2^x.2^y.2^z = 8 \\ 3^x.3^z = 3^9.9^y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x + 4y - 6z = a \\ x - y + 4z = b \\ 6y - 14z = c \end{cases}$

Exercício 2. Determine os valores $k \in \mathbb{R}$ para os quais os sistemas abaixo são: (i) possíveis determinados, (ii) possíveis indeterminados, e (iii) impossíveis.

(a) $\begin{cases} x - 2y - kz = 2 \\ -kx + 3y - 2z = 4 \\ -y - z = 2k \end{cases}$ (b) $\begin{cases} kx + y + z - 1 = 0 \\ x + ky + z - 1 = 0 \\ x + y + kz - 1 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - kt = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -x + 2y + kz = 1 \\ kx + 4y - 4z = 2 \\ 2x + y + z = -2k \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = k \\ x + y + z = k \\ 3x + 2y + z = k \end{cases}$

Exercício 3. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se X é uma solução do sistema linear $(AA^t - 3I_2)X = B$, então qual é o valor de $x + y$?

Exercício 4. Suponha que uma fábrica produza três produtos distintos, p_1, p_2 e p_3, utilizando dois materiais distintos, m_1 e m_2. Suponha também que, para a produção de um quilo de p_1 são utilizados 2 gramas de m_1 e 1 grama de m_2; para a produção de um quilo de p_2 são utilizados 1 grama de m_1 e 3 gramas de m_2; e para a produção de um

Data: 8 de agosto de 2019.

quilo de p_3 são utilizados 3 gramas de m_1 e 5 gramas de m_2. Suponha ainda que, o preço de venda do quilo de p_1 é $\mathbb{R}\$3$, do quilo de p_2 é $\mathbb{R}\$2$, e do quilo de p_3 é $R\$5$ reais.

Se, depois de produzir e vender todos os produtos p_1, p_2, p_3 com $1,9$kg de m_1 e $2,4$kg de m_2, essa fábrica arrecadou $\mathbb{R}\$2900$, então quantos quilos de p_1, p_2, p_3 foram produzidos e vendidos?

Exercício 5. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se o gráfico de f passa pelos pontos $(0,\ 10)$, $(1,\ 7)$, $(3,\ -11)$ e $(4,\ -14)$, então quais são os valores de a, b, c, d ?

§ Matrizes e suas operações

Exercício 6. Sejam $m, n > 0$. Mostre que:

(a) $A + B = B + A$ para todas $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ para todas $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(c) A matriz nula $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ é a única que satisfaz $A + O = A = O + A$ para toda matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(d) Para toda matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, existe uma única matriz $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ que satisfaz $A + B = O = B + A$.
(e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(f) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(g) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(h) $1A = A$ para toda $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
(i) $(AB)C = A(BC)$ para todas $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$.
(j) $A(B + C) = AB + AC$ para todas $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$.
(k) $I_n A = A = A I_m$ para toda $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Exercício 7. Encontre todas as matrizes $A \in M_2(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz B abaixo (ou seja, tais que $AB = BA$).

(a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 8. Encontre todas as matrizes $A \in M_2(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = O$ (onde $O \in M_2(\mathbb{R})$ é a matriz nula).

Exercício 9. Mostre que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Exercício 10. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule $(A+B)^2$.
(b) Calcule $A^2+2AB+B^2$. (Observe que $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.)
(c) Mostre que, se $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ comutam, então $(X+Y)^2 = X^2+2XY+Y^2$.

§ Matriz inversa e determinantes

Exercício 11. Determine os valores de $\theta \in \mathbb{R}$ que tornam as matrizes abaixo inversíveis.

(a) $\begin{pmatrix} sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 1 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\theta \end{pmatrix}$

Exercício 12. Se $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} = -1$, então qual é o valor de

$$\det\begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}?$$

Exercício 13. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 14. Para as seguintes matrizes A, determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $det(A - \lambda I_3) = 0$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 15. Seja $n > 0$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, demonstrando as que forem verdadeiras e encontrando contra-exemplos para as que forem falsas.

(a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfaz $A^2 = I_n$, então $A = I_n$ ou $A = -I_n$.
(b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e AB é invertível, então A e B são invertíveis.
(c) Um sistema linear com 3 equações e 5 variáveis sempre possui infinitas soluções.
(d) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A + 2B) = \det A + 2 \det B$.
(e) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfaz $A^4 - 2A^2 + 5A - 2I_n = 0$, então A não é invertível.
(f) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^t = -A^t$, então $A = O$.
(g) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ satisfazem $AB = 0$, então $BA = 0$.

Exercício 16. Use escalonamento para encontrar a inversa da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 17. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine A^{-1} e resolva a equação matricial $(AX)^t = B$ (na variável X).

Exercício 18. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{17} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule $\det(A^n)$ para todo $n \geq 0$.
(b) Use escalonamento para calcular a inversa de A.
(c) Resolva a equação matricial $AX = B$ (na variável X).