GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2,0 pontos). Encontre todas as soluções do seguinte sistema linear:

$$(S_1):\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+4z+8w=0 \\ x+3y+9z+27w=0 \\ x+4y+16z+64w=0. \end{cases}$$

Vamos escalonar o sistema linear S_1 usando sua matriz associada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ : L_2 - L_1 \\ : L_3 - L_1 \\ : L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & 21 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : L_3/2 \\ : L_4/3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : L_3 - L_2 \\ : L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ : L_4 - 2 \times L_3 . \end{array}$$

Data: 28 de agosto de 2019.

Daí segue que o sistema linear S_1 é equivalente (ou seja, tem as mesmas soluções) que o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ \quad y + 3z + 7w = 0 \\ \qquad z + 6w = 0 \\ \qquad\quad 2w = 0 . \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, concluimos que:

$w = 0$, $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$.

Assim, a única solução do sistema S_1 é:

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0).$$

Questão 2 (2,0 pontos). Encontre todos os números $a, b, c \in \mathbb{R}$ para os quais o seguinte sistema linear é possível:

$$(S_2): \begin{cases} 3x + y - 6z = a \\ 2x + y - 5z = b \\ x - 2y + 5z = c. \end{cases}$$

O sistema linear S_2 ser possível significa que ele tem alguma solução. Vamos escalonar o sistema S_2 usando sua matriz aumentada para determinar quando ele é possível:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 1 & -5 & b \\ 1 & -2 & 5 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & c \\ 2 & 1 & -5 & b \\ 3 & 1 & -6 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} : L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ : L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & c \\ 0 & 5 & -15 & b-2c \\ 0 & 7 & -21 & a-3c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : L_2 - 2 * L_1 \\ : L_3 - 3 * L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & c \\ 0 & 1 & -3 & \frac{b}{5} - \frac{2}{5}c \\ 0 & -1 & 3 & -\frac{a}{7} + \frac{3}{7}c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : L_2 / 5 \\ : L_3 / -7 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & c \\ 0 & 1 & -3 & \frac{b}{5} - \frac{2}{5}c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{35} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : \\ : L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{b}{5} + \frac{c}{5} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{b}{5} - \frac{2}{5}c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{35} \end{array}\right] \begin{array}{l} : L_1 + 2 * L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Primeiro, observe que o sistema S_2' será impossível se $-\frac{a}{7}+\frac{b}{5}+\frac{c}{35}\neq 0$, devido à última equação do sistema escalonado. Por outro lado, se $\frac{a}{7}=\frac{b}{5}+\frac{c}{35}$, então o sistema S_2 é equivalente a:

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = \frac{b}{5}+\frac{c}{5} \\ \quad y - 3z = \frac{b}{5}-\frac{2}{5}c \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são: $\{(b/5 + c/5 + z,\ b/5 - 2c/5 + 3z,\ z) \mid z \in \mathbb{R}\}$; ou seja, nesses casos, o sistema é possível.

Questão 3. Considere os seguintes conjuntos

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (3-k)x + 2y + 4z = 2 \ \text{ e } \ 2x - ky + 2z = 1\},$$
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y + (3-k)z = (k+3)\},$$

onde k é uma constante.

(a) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P = \emptyset$.
(b) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P$ tem só um ponto.
(c) (2,0 pontos) Encontre todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais $R \cap P$ tem mais de um ponto.

Observe que os três itens perguntam sobre propriedades do conjunto $(R \cap P)$, que é exatamente o conj. de vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que resolvem o seguinte sistema linear:

$$(S_3): \begin{cases} (3-k)x + 2y + 4z = 2 \\ 2x - ky + 2z = 1 \\ 4x + 2y + (3-k)z = (k+3). \end{cases}$$

Assim, $(R \cap P) = \emptyset$ significa que o sistema S_3 é impossível; $(R \cap P)$ ter só um ponto significa que S_3 é possível determinado; e $(R \cap P)$ ter mais de um ponto significa que S_3 é possível indeterminado.

Para que o sistema S_3 seja SPD, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 3-k & 2 & 4 \\ 2 & -k & 2 \\ 4 & 2 & 3-k \end{pmatrix}$, associada ao sistema, deve ser diferente de zero; ou seja, a matriz deve ser invertível.

$$\det\begin{pmatrix} 3-k & 2 & 4 \\ 2 & -k & 2 \\ 4 & 2 & 3-k \end{pmatrix} = -k(3-k)(3-k)+32 -4(3-k)-4(3-k)+16k$$

$$= -k^3+6k^2-9k+32-24+8k+16k$$

$$= -k^3+6k^2+15k+8.$$

Então o sistema é SPI ou SI se, e somente se,

$$-k^3+6k^2+15k+8=0.$$

Observe que $k=-1$ é uma solução desta ~~polinômio~~ equação de 3° grau. Logo:

$$0 = -k^3+6k^2+15k+8 = (k+1)(-k^2+7k+8)$$

$$=-(k+1)(k^2-7k-8)$$

$$= -(k+1)(k-8)(k+1)$$

$$= -(k+1)^2(k-8).$$

$$\iff k=-1 \text{ ou } k=8.$$

• $\underline{k=-1}$: $S_3: \begin{cases} 4x+2y+4z=2 \\ 2x+y+2z=1 \\ 4x+2y+4z=2 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x+y+2z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$

é SPI.

• $\underline{k=8}$: $S_3: \begin{cases} -5x+2y+4z=2 \\ 2x-8y+2z=1 \\ 4x+2y-5z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} x-4y+z=1/2 \\ -18y+9z=9/2 \\ 18y-9z=9 \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} x-4y+z=1/2 \\ -2y+z=1/2 \\ 0=9/2 \end{cases}$$

é SI.

Respostas: a) $k=8$

b) $k\neq 8$ e $k\neq -1$

c) $k=-1$.