ÁLGEBRA :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ________________ Assinatura: ________________ RA: ________

Questão 1. Considere o conjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a+b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ munido das operações:

$$s\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-1}],\ \ s(a+b\sqrt{-1},\, c+d\sqrt{-1}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{-1} \ \text{ e}$$

$$m\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-1}],\ \ m(a+b\sqrt{-1},\, c+d\sqrt{-1}) = (ac-bd) + (ad+bc)\sqrt{-1}.$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que $(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}], s, m)$ é um anel comutativo com identidade.
(b) (1,0 ponto) Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ é um subanel do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.
(c) (1,0 ponto) Calcule $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$.
(d) (2,0 pontos) Mostre que o corpo de frações de $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ é isomorfo ao subcorpo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \{a+b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Questão 2. Seja D um domínio tal que todos os seus ideais são principais.

(a) (2,0 pontos) Mostre que um ideal $P \subseteq D$, $P \neq \{0_D\}$, é primo se, e somente se, $P \subseteq D$ é maximal.
(b) (1,0 ponto) Encontre um domínio R e um ideal $P \subseteq R$, $P \neq \{0_D\}$, tal que P é primo, mas P não é maximal.

Questão 3. Sejam $\Bbbk$ um corpo, $n > 0$, e $a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$ elementos distintos. Denote por p o polinômio em $\Bbbk[x]$ dado por $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$.

(a) (1,0 ponto) Mostre que o ideal (p) consiste de todos os polinômios em $\Bbbk[x]$ que têm $a_1, \ldots, a_n$ como raízes.
(b) (2,0 pontos) Mostre que existe um isomorfismo de anéis $\Bbbk[x]/(p) \cong \Bbbk^n$.
(c) (1,0 ponto) Conclua que $(p) \subseteq \Bbbk[x]$ é primo se, e somente se, $(p) \subseteq \Bbbk[x]$ é maximal se, e somente se, $n = 1$.

Data: 30 de novembro de 2017.