CVV :: EXERCÍCIOS SOBRE OS TEOREMAS DE STOKES E GAUSS

TIAGO MACEDO

§ 1. Teorema de Stokes.

Relembre o enunciado preciso do Teorema de Stokes.

Sob certas condições,

$$\iint_S \operatorname{rot}(V) \bullet d\sigma = \int_C V \bullet d\gamma.$$

Exercícios. Use o Teorema de Stokes para calcular as seguintes integrais.

(a) $\iint_S \operatorname{rot}(V) \bullet d\sigma$, onde $V(x,y,z) = (xz,\ yz,\ xy)$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.

(b) $\iint_S \operatorname{rot}(V) \bullet d\sigma$, onde $V(x,y,z) = (y,\ 0,\ x+y)$ e $\sigma(u,v) = (u,\ v,\ 2-u^2-v^2)$, $u^2+v^2 \leq 1$.

(c) $\iint_S \operatorname{rot}(V) \bullet d\sigma$, onde $V(x,y,z) = (x,\ y,\ xyz)$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1+x+y,\ x,y,z \geq 0\}$.

(d) Mostre que, quando $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma região fechada e limitada, $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, $S = \{(x,y,c) \mid (x,y) \in X\}$ e $V = (P,Q,0)$, o Teorema de Stokes se reduz ao Teorema de Green.

§ 2. Teorema do divergente de Gauss.

Relembre o enunciado preciso do Teorema do divergente de Gauss.

Sob certas condições,

$$\iiint_X \operatorname{div}(V)\, dV = \iint_S V \bullet d\sigma.$$

Exercícios. Use o Teorema de Gauss para calcular as seguintes integrais.

(a) O fluxo do campo $V(x,y,z) = (x^2y,\ yx^2,\ 5-4xyz)$ através da superfície semiesférica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0\}$.

(b) O fluxo do campo $V(x,y,z) = (xy,\ y^2+e^{xz^2},\ \operatorname{sen}(xy))$ através da fronteira do sólido $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2-z,\ 0 \leq z \leq 1-x^2,\ -1 \leq x \leq 1\}$.

(c) O fluxo do campo $V(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$ através da superfície da esfera de raio 1 centrada em $(0,0,2)$. (Porque o Teorema do divergente não é válido para calcular o fluxo desse campo através da superfície da esfera de raio 1 centrada na origem?)

(d) O fluxo do campo $V(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)$ através da fronteira do sólido $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

(e) O fluxo do campo $V(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ z+x)$ através da superfície do tetraedro $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.