GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: __________________ Assinatura: __________________ RA: ______

Questão 1 (2.0 pontos). Calcule a distância e o ângulo entre as retas

$$\mathsf{r} = \{(1,1,9) + t(0,1,-1) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{s} = \{(1,0,4) + t(1,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

O ângulo entre r e s é dado pelo ângulo entre seus vetores diretores, $(0,1,-1)$ e $(1,1,0)$. Assim,

$$\theta(r,s) = \arccos\left(\frac{|(0,1,-1)\cdot(1,1,0)|}{\|(0,1,-1)\|\ \|(1,1,0)\|}\right)$$

$$= \arccos\left(1/\sqrt{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \arccos(1/2)$$

$$= \pi/3 \text{ rad ou } 60^\circ.$$

Observe que, como $\theta(r,s) \neq 0$, então as retas só podem ser concorrentes ou reversas. Como o vetor que liga os pontos iniciais é $(0,1,5)$ e o conj. $\{(0,1,5), (0,1,-1), (1,1,0)\}$ é L.I, então r e s são reversas. De fato:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -6 \neq 0.$$

Data: 04 de novembro de 2019.

Como r e s são reversas, a distância entre elas é dada pela projeção do vetor $(0,1,5)$ sobre $(0,1,-1)\wedge(1,1,0)$, que é normal às duas retas. Assim,

$$\operatorname{dist}(r,s) = \frac{|(0,1,5)\cdot(0,1,-1)\wedge(1,1,0)|}{\|(0,1,-1)\wedge(1,1,0)\|}$$

$$= \frac{|-6|}{\|(1,-1,-1)\|} \qquad \left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,-1) \right)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

Questão 2 (2.0 pontos). Calcule a distância e o ângulo entre a reta

$$\mathsf{R} = \{(0,1,0) + t(-1,-1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e o plano

$$\mathsf{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 10\}.$$

O ângulo entre R e P é dado pelo complementar do ângulo entre o vetor diretor de R, $(-1,-1,0)$, e o vetor normal de P, $(0,1,1)$. Assim,

$$\theta(R,P) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(-1,-1,0)\cdot(0,1,1)|}{\|(-1,-1,0)\|\ \|(0,1,1)\|}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|-1|}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(1/2\right)$$

$$= \pi/6 \text{ rad ou } 30^\circ.$$

Como $\theta(R,P) \neq 0$, então R e P são concorrentes.

Logo:

$$\operatorname{dist}(R,P) = 0.$$

Questão 3 (4.0 pontos). Considere dois números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = y - 3 = \frac{z-4}{-1} \qquad \text{e} \qquad r_2 : X = (-1, 2, \alpha) + \lambda(4, 2, \beta).$$

Determine todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

(a) r_1 e r_2 sejam iguais.
(b) r_1 e r_2 sejam paralelas e distintas.
(c) r_1 e r_2 sejam reversas.
(d) r_1 e r_2 sejam concorrentes ($r_1 \cap r_2$ é um ponto).

Primeiro, vamos escrever uma eq. vetorial para r_1:

$$X = (1, 3, 4) + t(2, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Para que $r_1 = r_2$, temos que ter:

- $(-1, 2, \alpha) \in r_1$
- $\{(4, 2, \beta), (2, 1, -1)\}$: L.D.

Para que $(-1, 2, \alpha) \in r_1$, deve existir $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 2 = 3 + t \\ \alpha = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = 2t \\ -1 = t \\ t = 4 - \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ -1 = t = 4 - \alpha \iff \boxed{\alpha = 5} \end{cases}$$

De fato, $(-1, 2, 5) = (1, 3, 4) - (2, 1, -1)$.

Para que $\{(4, 2, \beta), (2, 1, -1)\}$ seja L.D, temos que ter:

$$\boxed{\beta = -2}$$

De fato, $(4, 2, -2) = 2 \cdot (2, 1, -1)$.

b) Para que r_1 e r_2 sejam paralelas distintas, temos que ter:

- $(-1, 2, \alpha) \notin r_1$
- $\{(4, 2, \beta), (2, 1, -1)\}$: LD.

Usando os cálculos do item (a), concluímos que:

- $(-1, 2, \alpha) \notin r_1 \iff \boxed{\alpha \neq 5}$
- $\{(4, 2, \beta), (2, 1, -1)\}$: LD $\iff \boxed{\beta = -2}$.

c) Para que r_1 e r_2 sejam reversas, temos que ter: $\{(4,2,\beta), (2,1,-1), (2,1,4-\alpha)\}$: LI. Usando o determinante,

$$\{(4,2,\beta), (2,1,-1), (2,1,4-\alpha)\} : \text{LI}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & \beta \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4-\alpha \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\cancel{4(4-\alpha)} - \cancel{4} + \cancel{2\beta} - \cancel{2\beta} + \cancel{4} - \cancel{4(4-\alpha)}}_{=0} \neq 0.$$

Como $\det\begin{pmatrix} 4 & 2 & \beta \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4-\alpha \end{pmatrix} = 0 \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então r_1 e r_2 nunca são reversas.

d) Para que r_1 e r_2 sejam concorrentes, temos que ter:

- $\{(4,2,\beta), (2,1,-1)\}$: LI
- $\{(4,2,\beta), (2,1,-1), (2,1,4-\alpha)\}$: LD.

Pelos cálculos do item (a), $\{(4,2,\beta), (2,1,-1)\}$ é LI $\forall \boxed{\beta \neq -2}$; e pelos cálculos do item (c), $\{(4,2,\beta), (2,1,-1), (2,1,4-\alpha)\}$ é LD. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}}$

Questão 4 (2.0 pontos). Calcule a posição relativa e a interseção entre os planos

$\mathsf{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 2\}$ e $\mathsf{P}_2 = \{(0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Primeiro observe que um vetor normal à P_1 é $(1,-1,2) =: n_1$; e um vetor normal à P_2 é:

$$(1,0,3) \wedge (-1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-4,1) =: n_2.$$

(De fato, $(-3,-4,1)\cdot(1,0,3) = -3+0+3 = 0$ e $(-3,-4,1)\cdot(-1,1,1) = 3-4+1 = 0$.) Como $\{(1,-1,2);(-3,-4,1)\}$ é L.I., então P_1 e P_2 só podem ser concorrentes.

Agora, vamos calcular $P_1 \cap P_2$. Para isso, vamos escrever a eq. geral de P_2:

$$-3x - 4y + z = (-3,-4,1)\cdot(0,0,1) = 1.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -7y + 7z = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z - 1 \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Então $P_1 \cap P_2 = \{(1-z, z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

$$= \{(1,-1,0) + z(-1,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$