CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (3,5 pontos)**.**

(a): (1,0 ponto) Escreva formalmente a definição de função.

(b): (1,0 ponto) Considere o conjunto $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$ e a relação $r : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, onde $r(\alpha, \beta) = \pm\sqrt{\alpha}$ para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$. Explique por que r não é uma função.

(c): (1,5 ponto) Considere a função $r_+ : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $r_+(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha}$. Escreva o domínio, contra-domínio e a imagem de r_+.

Data: 11 de setembro de 2014.

Questão 2 (2,0 pontos)**.**

(a): (1,0 ponto) Defina formalmente curvas de nível de uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b): (1,0 ponto) Calcule as curvas de nível da função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $G(x, y) = x^2 + y^2$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Questão 3 (4,5 pontos)**.**

(a): (1,0 ponto) Dada uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, defina formalmente continuidade de H em um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(b): (1,0 ponto) Mostre que a função $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$R(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & , \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

é contínua em todo ponto diferente de $(0, 0)$.

(c): (1,0 ponto) Calcule o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x, y)$. Justifique.

(d): (0,5 ponto) Mostre que a função $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não é contínua no ponto $(0, 0)$.

(e): (1,0 ponto) Considere a função $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $S(a, b) = (a^2 + b^2)\,\mathrm{sen}(a + b)$ para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que S é contínua no ponto $(0, 0)$.

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ____________________ Assinatura: ____________________ RA: __________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.

(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.

(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.

(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.

(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Considere as seguintes funções:

- $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $P(x,y) = x^2 + y^2$.
- $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $Q(x,y) = |x| + |y| - 1$.
- $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$w(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & , \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Data: 09 de outubro de 2014.

Questão 1 (3,5 pontos)**.** Considere um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(a): (0,5 ponto) Calcule $\nabla P(a, b)$, o gradiente de P em (a, b).

(b): (0,5 ponto) Dada uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escreva formalmente a definição de diferenciabilidade de F em (a, b).

(c): (0,5 ponto) Mostre que a função P é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^2$.

(d): (0,5 ponto) Considere um vetor $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $u^2 + v^2 = 1$. Calcule $D_{(u,v)}P(a, b)$, a derivada direcional da função P na direção de (u, v) no ponto (a, b).

(e): (0,5 ponto) Escreva o plano tangente ao gráfico de P no ponto $(0, 0, 0)$.

(f): (0,5 ponto) Calcule $H_P(a, b)$, a matriz Hessiana de P em (a, b).

(g): (0,5 ponto) Calcule $D_{(a,b)}T$, a diferencial de P em (a, b).

Questão 2 (2,5 pontos)**.**

(a): (0,5 ponto) Calcule $\nabla w(0,0)$, o gradiente de w no ponto $(0,0)$.

(b): (0,5 ponto) Dado um vetor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, calcule $D_{(u,v)}w(0,0)$, usando a definição.

(c): (0,5 ponto) Dado um vetor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, calcule $\nabla w(0,0) \cdot (u,v)$.

(d): (1,0 ponto) A função w é diferenciável no ponto $(0,0)$? Justifique.

Questão 3 (1,5 pontos)**.** Considere um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a): (0,5 ponto) Dada uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$, escreva formalmente a definição de ponto de máximo global para φ.

(b): (0,5 ponto) Dada uma função $\psi : X \to \mathbb{R}$ escreva formalmente a definição de ponto de mínimo local para ψ.

(c): (0,5 ponto) Dada uma função $\xi : X \to \mathbb{R}$, escreva formalmente a definição de ponto de sela para ξ.

Questão 4 (4,5 pontos)**.** Suponha que uma formiga esteja caminhando em uma região $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^2$ cujos pontos (x, y) satisfazem a inequação $Q(x, y) \leq 0$ e cuja temperatura é dada pela função $P : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$.

(a): (0,5 ponto) Calcule os pontos críticos de P em $\mathcal{L}$.

(b): (1,0 ponto) Mostre que os pontos críticos obtidos no item (a) são os pontos mais frios na região $\mathcal{L}$.

(c): (1,0 ponto) Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, calcule os possíveis pontos mais quentes e mais frios da fronteira $\{(x, y) \in \mathcal{L} : Q(x, y) = 0\}$ de $\mathcal{L}$.

(d): (1,0 ponto) Mostre que a função Q não é diferenciável nos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $ab = 0$.

(e): (1,0 ponto) Use o item (d) para justificar o fato de que os pontos mais quentes de $\mathcal{L}$, são $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ e $(0, -1)$ e não são detectados no item (c).

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 03

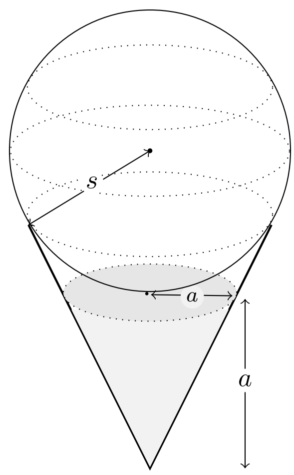
PROF. TIAGO MACEDO

Nome: __________________ Assinatura: __________________ RA: ________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Considere uma casquinha de sorvete de formato cônico e suponha que uma pessoa a encha da seguinte forma. Primeiro, ela enche o fundo da casquinha com calda de chocolate até a altura $a > 0$, formando uma superfície circular de raio a. Depois ela coloca uma bola de sorvete de morango perfeitamente esférica de raio $s > 0$ tangenciando a borda da casquinha e a superfície da calda. Conforme a figura abaixo



Data: 06 de novembro de 2014.

Questão 1 (4,5 pontos)**.** Primeiro vamos calcular o volume da calda de chocolate usando integrais duplas.

(a) Descreva a região

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b \leq x \leq c, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

sobre o qual vamos calcular a integral.

(b) Descreva a função $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ que vamos integrar.

(c) Escreva o volume da calda na forma

$$\int_{\mathcal{R}} F = \int_b^c \int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\ dy\ dx.$$

(d) Descreva $\mathcal{C} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ e a função

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (r, \theta) &\longmapsto (x(r, \theta), y(r, \theta)), \end{aligned}$$

que muda de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

(e) Calcule a matriz Jacobiana J de γ.

(f) Calcule $\mathcal{J} = |\det(J)|$.

(g) Usando a mudança de variáveis, escreva o volume da calda na forma

$$\int_{\mathcal{C}} (F \circ \gamma)\mathcal{J} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (F \circ \gamma)(r, \theta)\mathcal{J}(r, \theta)\ dr\ d\theta.$$

(h) Calcule

$$I_1(\theta) = \int_{a_1}^{b_1} (F \circ \mu)(r, \theta)\mathcal{J}(r, \theta)\ dr.$$

(i) Calcule

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} I_1(\theta)\ d\theta.$$

Questão 2 (5,0 pontos)**.** Agora vamos calcular o volume da bola de morango usando integrais triplas.

(a) Descreva o sólido

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid b \leq x \leq c, f(x) \leq y \leq g(x), \phi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}$$

sobre o qual vamos calcular a integral.

(b) Descreva a função $G : \Gamma \to \mathbb{R}$ que vamos integrar.

(c) Escreva o volume da bola na forma

$$\int_\Gamma G = \int_b^c \int_{f(x)}^{g(x)} \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} G(x,y,z)\ dz\ dy\ dx.$$

(d) Descreva $\mathcal{D} = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subset \mathbb{R}^3$ e a função

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{D} &\longrightarrow \Gamma \\ (\rho,\theta,\varphi) &\longmapsto (x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi)), \end{aligned}$$

que muda de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas.

(e) Calcule a matriz Jacobiana J de μ.

(f) Calcule $\mathcal{J} = |\det(J)|$.

(g) Usando a mudança de variáveis, escreva o volume da bola na forma

$$\int_{\mathcal{D}} (G \circ \mu)\mathcal{J} = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} (G \circ \mu)(\rho,\theta,\varphi)\mathcal{J}(\rho,\theta,\varphi)\ d\rho\ d\theta\ d\varphi.$$

(h) Calcule

$$I_1(\theta,\varphi) = \int_{a_1}^{b_1} (G \circ \mu)(\rho,\theta,\varphi)\mathcal{J}(\rho,\theta,\varphi)\ d\rho.$$

(i) Calcule

$$I_2(\varphi) = \int_{a_2}^{b_2} I_1(\rho,\theta,\varphi)\ d\theta.$$

(j) Calcule

$$I_3 = \int_{a_3}^{b_3} I_2(\varphi)\ d\varphi.$$

Questão 3 (1,5 pontos)**.** Dê um exemplo de uma função $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ que não é integrável. Justifique.

CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 04

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: __________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (4,0 pontos)**.** Suponha que uma formiguinha $\mathcal{F}$ esteja caminhando sobre um certo caminho $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por $c(t) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t), (t-\pi)^2)$ e que uma força $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ x, \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ y, \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ z)$ esteja agindo sobre ela.

(a): (1,0 ponto) Calcule a distância total que $\mathcal{F}$ percorre de $t = 0$ a $t = 2\pi$. (Sugestão: use que $\int_0^{2\pi}(1+4(\theta-\pi)^2)d\theta = 21.256$.)

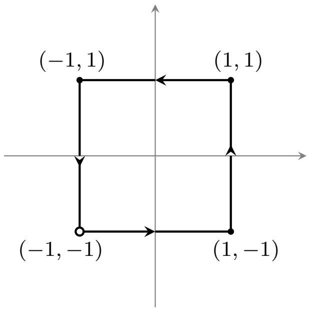
(b): (1,0 ponto) Mostre que $\mathrm{rot}F$ é nulo.

(c): (1,0 ponto) Mostre que o campo F é conservativo.

(d): (1,0 ponto) Calcule o trabalho total da formiguinha para percorrer toda a curva c.

Data: 04 de dezembro de 2014.

Questão 2 (3,0 pontos)**.** Suponha que um ônibus $\mathcal{O}$ siga o seguinte percurso p



no sentido anti-horário e partindo de $(-1,-1)$. Suponha também que a força do vento sobre $\mathcal{O}$, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, seja dada por $V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ em cada ponto do percurso.

(a): (1,0 ponto) Parametrize a curva p que o ônibus percorre.

(b): (1,0 ponto) Usando a parametrização do item (a), calcule a distância percorrida pelo ônibus.

(c): (1,0 ponto) Calcule o trabalho que o ônibus vai ter para completar o percurso p. (Sugestão: use o fato que a integral do campo V independe da curva fechada, simples, C^1 por partes, mesma orientação de p e contornando a origem sobre a qual a integral é calculada.)

Questão 3 (3,0 pontos)**.** Considere a elipse $\mathcal{E}$ cujos pontos satisfazem $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

(a): (2,0 pontos) Use o Teorema de Green para calcular a área de $\mathcal{E}$.

(b): (1,0 ponto) Se a densidade dos pontos de $\mathcal{E}$ for dada por $\delta(x, y) = \frac{36}{9x^2+4y^2}$, calcule a massa de $\mathcal{E}$. (Sugestão: use que a circunferência de $\mathcal{E}$ é 8.)