Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

UNIFESP

Mestrado em Matemática Pura e Aplicada

SUPERÁLGEBRAS DE LIE DE DIMENSÃO FINITA

Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

São José dos Campos
2021

Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

Superálgebras de Lie de dimensão finita

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Paulo - Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Pura e Aplicada.
Orientador: Tiago Rodrigues Macedo

São José dos Campos
2021

Andrade, Aline Jaqueline de Olivera

Superálgebras de Lie de dimensão finita / Aline Jaqueline de Oliveira Andrade. - São José dos Campos, 2021.

xii, 27f.

Dissertação (Mestra) - Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Titulo em inglês: Finite-dimensional Lie Superalgebras.

1. Superálgebras de Lie. 2. Teoria de Representações. 3. Classificação.

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenador do Programa: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Apoio Financeiro: CAPES

Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

SUPERÁLGEBRAS DE LIE DE DIMENSÃO FINITA

Presidente da banca:

Prof. Dr.Tiago Rodrigues Macedo

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ivan Kaygorodov

Prof. Dr. Lucas Henrique Calixto

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Dedico esse trabalho à minha mãe Leda (in memorian), à minha tia Maisa e à minha avó Almerita elas são, sem dúvidas, as pessoas mais importantes da minha vida!

Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado força e coragem para seguir meus objetivos.

À minha mãe Leda (in memorian), por ter sido um exemplo de pessoa, por sempre ter me mostrado a importância dos estudos, por me ensinar que devo seguir meus sonhos e nunca desistir.

À minha tia Maisa, por ter sido muito mais que uma tia e mesmo com tanta dificuldade ter me motivado à estudar e sempre acreditar na minha capacidade.

Ao meu orientador Tiago pela excelente orientação, pela paciência, pelos ensinamentos (matemáticos e da vida), pela atenção e dedicação destinados a essa dissertação.

À banca por ter aceitado avaliar meu trabalho.

Aos amigos da UNIFESP pela companhia e por alegrarem meus dias. Em especial à Brenda e à Beatriz que sempre se fizeram presentes, por me motivarem, por me inspirarem, por sempre me mostrarem meu potencial e por acreditarem em mim em momentos que eu mesma não acreditava mais.

Aos amigos da UFV e de Viçosa, a distância e o tempo nunca vão apagar o carinho que tenho por vocês.

À todas as pessoas que se aproximaram e à todas as pessoas que se afastaram de mim nesses anos de estudo, vocês não sabem o quanto me ajudaram.

À Capes pelo auxílio financeiro.

Estuda Lili! Única coisa que ninguém nunca vai te tirar é o seu estudo!
OLIVEIRA, Leda Augusto

Resumo

Superálgebras de Lie são importantes ferramentas utilizadas em Física de Partículas e Supersimetria. Nessa dissertação, são apresentados conceitos básicos, como superespaços vetoriais, superálgebras de Lie e representações, além da classificação das superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos.

Palavras-chave: superálgebras de Lie, teoria de representações, classificação.

Abstract

Lie superalgebras are importante gadgets used in Particle Physics and Supersymmetry. In this dissertation, some basic concepts, such as vector superspaces, Lie superalgebras and representations, are presented. Furthemore, the classification of finite-dimensional Lie superalgebras over the field of complex number is also presented.

Keywords: Lie superalgebras, representation theory, classification.

Sumário

INTRODUÇÃO

No artigo (BEREZIN; KATS, 1970) as superálgebras de Lie tiveram sua primeira aparição, inicialmente, como álgebras de Lie de certos grupos generalizados e hoje em dia, conhecemos tais grupos generalizados como os supergrupos de Lie. Já no artigo (BEREZIN; LEITES, 1975), foi desenvolvida uma teoria análoga à teoria de álgebras de Lie, tal teoria estabelece a conexão entre supergrupos de Lie e superálgebras de Lie. Assim, podemos dizer que as superálgebras de Lie são uma genaralização das álgebras de Lie.

As superálgebras de Lie têm estreita relação com Física de Partículas. Assim, o interesse nesta estrutura vem de meados do século XX. Do ponto de vista matemático, no entanto, o interesse em superálgebras de Lie aumentou consideravelmente em 1977, após o importante artigo de V. Kac (KAC, 1977b). Nesse artigo, dentre outras coisas, V. Kac classifica as superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.

Além disso, as superálgebras de Lie e a teoria de representações de superálgebras de Lie têm sido intensamente pesquisada, principalmente nos últimos anos, devido às suas relações com áreas como supersimetria, teoria de cordas, gravitação, eletromagnetismo, teoria de números e equações diferenciais, por exemplo.

Vários resultados importantes sobre aplicação da teoria de superálgebras de Lie foram publicados como por exemplo, o estudo sobre superálgebras de Lie $A(n,n)$-graduadas, novas superálgebras de Lie simples de característica 3, subsuperálgebras maximais para superálgebras de Lie do tipo Cartan, classificação de superálgebras de Lie simples $\mathbb{Z}$-graduadas e superálgebras de Jordan simples e hom-estruturas em superálgebras de Lie simples de dimensão finita. Além disso, com o estudo das superálgebras surgiram perguntas interesseantes como: existem outras disciplinas da Matemática como as superálgebras? Existe uma quantidade miníma de geradores para as superálgebras de Lie? A resposta é afirmativa para ambas as perguntas.

No que diz respeito à primeira pergunta, sabemos que o físico-matemático Berezin foi o pioneiro a tratar a supergeometria e a superálgebra como disciplinas distintas, além dessas existe também a superanálise em superespaços e superdomínios, como podemos verificar no artigo (LEITES, 1980), nesse artigo Leites faz a tradução de resultados importantes da análise para superdomínios tais como: o Teorema da Função Inversa, seus corolários e Teorema do Posto. E nesse mesmo artigo, Leites trata da integração em superdomínios.

Agora, quanto ao número minímo de geradores, temos alguns resultados importantes, Albuquerque e Elduque (1993) mostraram que toda superálgebra de Lie simples clássica pode ser gerada por 1 elemento, Liming Tang e Wende Liu (2011) provaram que qualquer super álgebra de Lie simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0 é gerado por 2 elementos e também provaram em 2019 provaram que qualquer superálgebra de Lie do tipo Cartan é gerada por um elemento.

Além das superálgebras de Lie, existem outras superálgebras como, por exemplo, as de Jordan, as de Schur generalizadas, as de Leibniz. No artigo (KAC, 1977a), V. Kac, nos diz que I. L. Kantor descobriu uma notável ligação entre as álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas e as álgebras de Jordan e tal ligação, fez com que a classificação de Albert de para álgebras Jordan simples, por um método mais simples. Ainda nesse mesmo artigo, V. Kac, desenvolve o método de Kantor e o aplica à classificação de superálgebras de Jordan simples e este resultado é derivado da classficação de superálgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas. O que nos mostra que as superálgebras de Lie também tem uma ligação com as superálgebras de Jordan.

Notemos que a estrutura das superálgebras de Lie simissimples é diferente da estrutura das álgebras de Lie simissimples, pois uma álgebra de Lie é semissimples quando esta é escrita como soma direta de álgebras de Lie simples, já no caso das superálgebras de Lie, o seguinte Teorema do artigo (KAC, 1977b), nos dá a definição de superálgebra de Lie semissimples.

Teorema 0.1. *Sejam $S_1, \cdots, S_r$ superálgebras de Lie de dimensão finita, $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$, $S = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i \otimes \Lambda(n_i)$ e $\mathfrak{h}$ uma subsuperálgebra de $\operatorname{Der} S$ contendo S. Denotemos $\mathfrak{h}_i$ o conjunto de componentes de elementos de $\mathfrak{h}$ em $1 \otimes \operatorname{Der} \Lambda(n_i)$. Então,*

(a) $\mathfrak{h}$ é semissimples se, e só se, $\Lambda(n_i)$ é $\mathfrak{h}_i$ simples para todo i.

(b) Todas as superálgebras de Lie de dimensão finita são da forma indicada.

(c) $\operatorname{Der} \mathfrak{h}$ é o normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\operatorname{Der} S$, desde que $\mathfrak{h}$ seja semissimples.

Existem algumas técnicas que podem ser utilizadas para para classificação das superálgebras de Lie, dentre elas destacamos teoria de representações, superálgebras contragradientes e sistemas de raízes. E nesta dissertação optamos por utilizar a teoria de representações. O objetivo principal dessa dissertação é apresentar essa classificação, ou seja, apresentar e descrever cada uma dessas superálgebras de Lie simples.

A dissertação, no entanto, não requer nenhum conhecimento prévio sobre superálgebras de Lie. Os únicos conhecimentos esperados do(a) leitor(a) são de álgebra linear e elementos de álgebra. No Capítulo 1 são apresentadas todos os conceitos básicos necessários para descrever a classificação das superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.

Mais especificamente, nesse capítulo, são definidos e exemplificados conceitos como: superespaços vetoriais, superálgebras (de Lie), superálgebras (de Lie) simples, representações e módulos. Além disso, são demonstrados alguns resultados estruturais sobre superálgebras de Lie como: Lema de Schur, Teorema de Engel e Teorema de Ado.

Já no Capítulo 2, são apresentadas cada uma das superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Mais especificamente, cada uma dessas superálgebras de Lie é definida explicitamente, suas partes par e ímpar são descritas em termos de (representações de) álgebras de Lie redutivas explicitamente, e suas dimensões são calculadas.

É importante observar que a demonstração de que essas superálgebras de Lie apresentadas no Capítulo 2 são as únicas superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ é fortemente baseada na teoria de representações de álgebras de Lie redutivas de dimensão finita. Como explorar profundamente esse tema fugiria ao escopo dessa dissertação, optamos por não abordá-lo. Ainda assim, representações de álgebras de Lie, além de diversas outras importantes construções da teoria de superálgebras de Lie, foram usadas no Capítulo 2.

Capítulo 1

SUPERÁLGEBRAS DE LIE

Neste capítulo, definiremos estruturas importantes para elaboração desta dissertação e utilizaremos como referências o artigo (KAC, 1977b) e a dissertação (CALIXTO, 2013).

Notação

As notações que utilizaremos ao longo desta dissertação são as seguintes

- Seja $(G,+) \doteq G$ um grupo abeliano.
- Seja $(\mathbb{F},+,\cdot) \doteq \mathbb{F}$ um corpo. Todas as vezes que omitirmos sobre qual corpo estamos considerando as estruturas, este será o corpo $\mathbb{F}$.
- Seja $V_{\mathbb{F}} \doteq V$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

1.1 Espaços Vetoriais G-graduados

Nesta seção introduzimos e exemplificamos conceitos necessários, e importantes, para descrever a próxima seção e para o desenvolvimento dessa dissertação.

Definição 1.1.1. *Uma* $\mathbb{F}$***-álgebra*** *é um espaço vetorial A sobre um corpo $\mathbb{F}$ munido de uma função bilinear $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, denotada $\cdot(a,b) = a \cdot b$, e chamada de multiplicação.*

Seja V um espaço vetorial. Uma G***-graduação*** *de V é uma familia $\{V_\alpha \mid \alpha \in G\}$ de subespaços de V tais que*

$$V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha.$$

Um espaço espaço vetorial V é dito G***-graduado*** *se este está munido com uma G-graduação. Se $a \in V_\alpha$, $\alpha \in G$, então dizemos que a é* ***homogêneo de grau*** *α e denotaremos α por $|a|$.*

*Consideremos V um espaço vetorial G-graduado $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$. Um subespaço W de V é dito G-**graduado** se*

$$W = \bigoplus_{\alpha \in G} (W \cap V_\alpha).$$

*Um **superespaço vetorial** é um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$-graduado, ou seja, um espaço vetorial V tal que existem subespaços vetoriais $V_{\overline{0}}$ e $V_{\overline{1}}$, com $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$. Os elementos de $V_{\overline{0}}$ são chamados **pares** e os elementos de $V_{\overline{1}}$ são chamados **ímpares**. Um **subsuperespaço** W de V é um subespaço vetorial de V $\mathbb{Z}_2$-graduado, tal que $W_{\overline{0}} = W \cap V_{\overline{0}}$ e $W_{\overline{1}} = W \cap V_{\overline{1}}$.*

Ao longo desta dissertação, se $|a|$ se fizer presente em uma expressão, estaremos assumindo que a é um elemento homogêneo.

Exemplo 1.1. *Consideremos o espaço vetorial $V = \mathbb{F}[t]$. Uma $\mathbb{Z}$-graduação de $\mathbb{F}[t]$ é dada por $V_i = span\{t^i\}$, para todo $i \geq 0$, e $V_i = \{0\}$, para todo $i < 0$. Sejam $a_i t^i \in V_i$ e $\sum_{j \neq i} a_j t^j \in \sum_{j \neq i} V_j$. Assim,*

$$\begin{aligned} a_i t^i = \sum_{j \neq i} a_j t^j &\Longrightarrow a_i t^i - \sum_{j \neq i} a_j t^j = 0 \\ &\Longrightarrow a_i = 0 \text{ e } a_j = 0, \forall j \neq i. \end{aligned}$$

Logo, $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$. Além disso, dado $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{F}[t]$, temos $a_i t^i \in V_i$, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Portanto, $\mathbb{F}[t] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$.

Exemplo 1.2. *Consideremos o espaço das matrizes triangulares superiores,*

$$V = \{(a_{ij})_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0, \text{ para todo } i > j,\ i, j \in \{1, \cdots, n\}\}.$$

Para cada $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, consideremos $V_{\overline{k}}$ como sendo o subespaço formado pelas matrizes $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ tais que $a_{ij} = 0$ para todos $j \neq i + k$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Observemos que $V = \bigoplus_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_n} V_{\overline{k}}$, pois dada $A = (a_{ij})_{i,j} \in V$, temos

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1\,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n\,n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde cada um dos termos do lado direito da igualdade são unicamente determinados por A. Logo, V é $\mathbb{Z}_n$-graduado.

Exemplo 1.3. *Consideremos V como no Exemplo 1.2 e definamos, para cada $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$, o subespaço*

$$V_{\overline{m}} = \{(a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } j \notin \{i + m' \mid m' \equiv_n m\}\}.$$

Observemos que $V = \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}_n} V_{\overline{m}}$, mas $V_i \cap V_j \neq \{0\}$, pois qualquer matriz diagonal pertence a $V_{\overline{m}}$, para todo $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$. Logo, a soma $\sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}_n} V_{\overline{m}}$ não é direta. Portanto, com a estrutura dada nesse exemplo, V não é um espaço vetorial $\mathbb{Z}_n$-graduado.

Exemplo 1.4. *Sejam $\mathcal{L}(V,\mathbb{F}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ transformação linear}\}$ e $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ um superespaço vetorial definimos o* ***superespaço dual*** *V^* por*

$$V^* = (V^*)_{\overline{0}} \oplus (V^*)_{\overline{1}}, \quad \text{com } (V^*)_\alpha = \{f \in \mathcal{L}(V,\mathbb{F}) \mid f(V_{\alpha+\overline{1}}) = \{0\}\}. \tag{1.1}$$

Consideremos $V^\vee := V_{\overline{0}}^\vee \oplus V_{\overline{1}}^\vee$, com $(V_{\overline{0}})^\vee := \{T : V_{\overline{0}} \to \mathbb{F} \mid T \text{ é linear}\}$ e $(V_{\overline{1}})^\vee := \{T : V_{\overline{1}} \to \mathbb{F} \mid T \text{ é linear}\}$ sendo os respectivos espaços vetoriais duais usuais. Mostremos que existem isomorfismos de espaços vetoriais $(V^*)_{\overline{0}} \cong V_{\overline{0}}^\vee$ e $(V^*)_{\overline{1}} \cong V_{\overline{1}}^\vee$.

Dado $T \in V_{\overline{0}}^\vee$, definamos $f_T \in V^*$ da seguinte forma: dado $v \in V$, existem $v_0 \in V_{\overline{0}}$ e $v_1 \in V_{\overline{1}}$ tais que $v = v_0 + v_1$; assim $f_T(v) := T(v_0)$. Observemos que, como $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$, temos que v_0, v_1 são unicamente determinados por v. Isso implica que f_T está bem definida. Observemos também que $f_T(V_{\overline{1}}) = 0$. Além disso, notemos que, para quaisquer $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, existem $v_0, w_0 \in V_{\overline{0}}$ e $v_1, w_1 \in V_{\overline{1}}$ tais que $v = v_0 + v_1$ e $w = w_0 + w_1$. Logo, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, temos $(v+\lambda w) = (v_0+\lambda w_0)+(v_1+\lambda w_1)$. Assim, $f_T(v+\lambda w) = T(v_0+\lambda w_0) = T(v_0) + \lambda T(w_0) = f_T(v) + \lambda f_T(w)$. Isso mostra que $f_T \in (V^*)_{\overline{0}}$. Mostremos agora que a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V_{\overline{0}}^\vee & \longrightarrow & (V^*)_{\overline{0}} \\ & T & \longmapsto & f_T \end{array}$$

é um isomorfismo linear. Dados $T, S \in V_{\overline{0}}^\vee$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in V$ e $v_0 \in V_{\overline{0}}$ tal que $v - v_0 \in V_{\overline{1}}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(T+\lambda S)(v) &= f_{(T+\lambda S)}(v) \\ &= (T+\lambda S)(v_0) \\ &= T(v_0) + \lambda S(v_0) \\ &= f_T(v) + \lambda f_S(v) \\ &= (f_T + \lambda f_S)(v) \\ &= (\varphi(T) + \lambda\varphi(S))(v). \end{aligned}$$

Logo φ é linear. Para mostrar que φ é um isomorfismo, verificaremos que a função $\psi : (V^*)_{\overline{0}} \to V_{\overline{0}}^{\vee}$ dada por $\psi(f) = f|_{V_{\overline{0}}}$ é a inversa de φ. De fato, para todos $T \in V_{\overline{0}}^{\vee}$ e $v_0 \in V_{\overline{0}}$, temos

$$\psi(\varphi(T))(v_0) = \psi(f_T)(v_0) = f_T|_{V_{\overline{0}}}(v_0) = T(v_0),$$

e, para todos $S \in (V^*)_{\overline{0}}$, $w \in V$ e $w_0 \in V_{\overline{0}}$ tal que $w - w_0 \in V_{\overline{1}}$, temos

$$\varphi(\psi(S))(w) = \varphi(S|_{V_{\overline{0}}})(w) = f_{S|_{V_{\overline{0}}}}(w) = S|_{V_{\overline{0}}}(w) = S(w_0) = S(w).$$

O isomorfismo entre $V_{\overline{1}}^{\vee}$ e $(V^*)_{\overline{1}}$ é análogo.

Exemplo 1.5. *Sejam V um espaço vetorial G-graduado e W um subespaço G-graduado de V. Consideremos o espaço vetorial quociente V/W, e definamos uma G-graduação em V/W da seguinte forma:*

$$(V/W)_g := \{v + W \mid v \in V_g\}, \qquad \text{para cada} \quad g \in G. \tag{1.2}$$

Para verificar que, de fato, isso define uma G-graduação em V/W, vamos mostrar que $V/W = \sum_{g\in G}(V/W)_g$ e que $(V/W)_g \cap \bigoplus_{h \in G\setminus\{g\}} (V/W)_h = \{0 + W\}$ para todo $g \in G$.

Primeiro observemos que $(V/W)_g \subseteq V/W$ para todo $g \in G$. Assim, $\sum_{g\in G}(V/W)_g \subseteq V/W$. Por outro lado, como V é G-graduado, temos que, para cada $v \in V$ e $g \in G$, existe $v_g \in V_g$, tal que $v = \sum_{g\in G} v_g$. Assim, $v + W = \left(\sum_{g\in G} v_g\right) + W = \sum_{g\in G}(v_g + W) \in \sum_{g\in G}(V/W)_g$. Isso mostra que $(V/W) = \sum_{g\in G}(V/W)_g$.

Agora fixe $g \in G$ e suponha que $\overline{v} \in (V/W)_g \cap \sum_{h\in G\setminus\{g\}} (V/W)_h$. Por definição, para cada $h \in G$, existem $v_h \in V_h$ tais que $v_g + W = \overline{v} = \sum_{h\in G\setminus\{g\}} v_h + W$. Consequentemente, $v_g - \sum_{h\in G\setminus\{g\}} v_h \in W$. Como W é G-graduado por hipótese, segue que $v_h \in W$ para todo $h \in G$. Isso implica que $\overline{v} = 0 + W$, e mostra que $(V/W)_g \cap \sum_{h\in G\setminus\{g\}} (V/W)_h = \{0 + W\}$.

Portanto, a Equação 1.2 define uma G-graduação em V/W.

Exemplo 1.6. *Sejam G um grupo abeliano, $V = \bigoplus_{\alpha\in G} V_\alpha$ e $W = \bigoplus_{\beta\in G} W_\beta$ espaços vetoriais G-graduados. Definamos a seguinte G-graduação no produto tensorial entre V e W:*

$$(V \otimes W)_\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} (V_\alpha \otimes W_\beta) \qquad \text{para cada} \quad \gamma \in G. \tag{1.3}$$

Para ver que essa é, de fato, uma G-graduação em $V \otimes W$, lembremos que, pelas propriedades do produto tensorial de espaços vetoriais, temos

$$V \otimes W = \left(\bigoplus_{\alpha\in G} V_\alpha\right) \otimes \left(\bigoplus_{\beta\in G} W_\beta\right) = \bigoplus_{\alpha,\beta\in G} V_\alpha \otimes W_\beta = \bigoplus_{\gamma\in G}\left(\bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} V_\alpha \otimes W_\beta\right).$$

No caso em que V e W são superespaços vetoriais, temos

$$(V \otimes W)_{\overline{0}} = \bigoplus_{\alpha+\beta=\overline{0}} (V_\alpha \otimes W_\beta) \quad \text{e} \quad (V \otimes W)_{\overline{1}} = \bigoplus_{\alpha+\beta=\overline{1}} (V_\alpha \otimes W_\beta). \tag{1.4}$$

Exemplo 1.7. *Sejam G um grupo abeliano e $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$, $W = \bigoplus_{\beta \in G} W_\beta$ espaços vetoriais G-graduados. Vamos mostrar que $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial G-graduado, com*

$$\mathcal{L}(V,W)_\beta := \{T \in \mathcal{L}(V,W) \mid T(V_s) \subseteq W_{s+\beta}, \text{ para todo } s \in G\}, \tag{1.5}$$

para cada $\beta \in G$.

Fixe $\alpha \in G$ e suponha que $T \in \mathcal{L}(V,W)_\alpha \cap \sum_{\gamma \in G \setminus \{\alpha\}} \mathcal{L}(V,W)_\gamma$. Assim, $T(V_0) \subseteq W_\alpha$ e $T(V_0) \subseteq \sum_{\gamma \in G\setminus\{\alpha\}} W_\gamma$; ou seja, $T(V_0) \subseteq W_\alpha \cap \sum_{\gamma \in G\setminus\{\alpha\}} W_\gamma$. Como W é G-graduado por hipótese, então $W_\alpha \cap \sum_{\gamma \in G\setminus\{\alpha\}} W_\gamma = \{0\}$. Daí segue que $T = 0$, e consequentemente, que $\mathcal{L}(V,W)_\alpha \cap \sum_{\gamma \in G\setminus\{\alpha\}} \mathcal{L}(V,W)_\gamma = \{0\}$.

Agora, consideremos $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Como V é G-graduado, para cada $v \in V$ e $g \in G$, existe um único $v_g \in V_g$ tal que $v = \sum_{g \in G} v_g$. Como $T \in \mathcal{L}(V,W)$, temos

$$T(v) = T\left(\sum_{g \in G} v_g\right) = \sum_{g \in G} T(v_g) = \sum_{g \in G}\sum_{h \in G} w_{g,h},$$

com $w_{g,h} \in W_h$ tal que

$$T(v_g) \doteq \sum_{h \in G} w_{g,h}.$$

Para cada $h \in G$, definamos $T_h : V \longrightarrow W$ como sendo

$$T_h(v) = \sum_{g \in G} w_{g,g+h}.$$

Observemos que

$$\sum_{h \in G} T_h(v) = \sum_{h \in G}\sum_{g \in G} w_{g,g+h} = \sum_{g \in G}\sum_{k \in G} w_{g,k} = \sum_{g \in G} T(v_g) = T(v).$$

Logo,

$$T = \sum_{g \in G} T_g.$$

Além disso. observemos que, se $v \in V_g$ para algum $g \in G$, então $v = v_g$ e $T_h(v) = T_h(v_g) = w_{g,g+h} \in W_{g+h}$. Portanto, $T_g \in \mathcal{L}(V,W)_g$ para todo $g \in G$. Isso mostra que $\mathcal{L}(V,W) = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{L}(V,W)_g$. Mais ainda, no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, temos que $\mathcal{L}(V,W)$ é um superespaço vetorial.

Definição 1.1.2. *Sejam* $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$ *e* $W = \bigoplus_{\alpha \in G} W_\alpha$ *espaços vetoriais* G*-graduados. Uma* ***transformação linear de espaços vetoriais graduados*** *é uma transformação linear* $T : V \longrightarrow W$ *que preserva a graduação, ou seja,* $T(V_\alpha) \subseteq W_{\varphi(\alpha)}$*, para todos* $\alpha \in G$ *com* $\varphi : G \longrightarrow G$ *isomorfismo de grupos. Um* ***isomorfismo de espaços vetoriais graduados*** *é uma transformação linear graduada entre esses espaços que é bijetora.*

Observemos que, no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, o único isomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ é $\varphi = \mathrm{id}$.

Exemplo 1.8. *O conjunto dos números complexos* $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*, com*

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i \quad \text{e} \quad \lambda\,(x_1 + y_1) = \lambda x_1 + \lambda y_1 i,$$

para todos $(x_1 + y_1 i)\,, (x_2 + y_2 i) \in \mathbb{C}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideremos as $\mathbb{Z}_2$*-graduações de* $\mathbb{C}$ *dadas por* $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{\bar{0}} \oplus \mathbb{C}_{\bar{1}}$*, com* $\mathbb{C}_{\bar{0}} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathbb{C}_{\bar{1}} = \{yi \mid y \in \mathbb{R}\}$*;* $\mathbb{C}_{\bar{0}} = 0$ *e* $\mathbb{C}_{\bar{1}} = \mathbb{C}$*;* $\mathbb{C}_{\bar{0}} = \mathbb{C}$ *e* $\mathbb{C}_{\bar{1}} = 0$*. A menos de isomorfismos, essas são todas as possíveis* $\mathbb{Z}_2$*-graduações de* $\mathbb{C}$.

1.2 Álgebras G-graduadas

Nesta seção definimos álgebras G-graduadas, superálgebras e outros conceitos necessários para descrição de superálgebras de Lie e de outras estruturas importantes.

Definição 1.2.1. *Uma* $\mathbb{F}$***-álgebra*** G***-graduada*** *é uma* $\mathbb{F}$*-álgebra* $(A, \cdot)$ *munida de uma* G*-graduação*

$$A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha,$$

para os quais $A_\alpha \cdot A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$*, para todos* $\alpha,\ \beta \in G$.

Dada uma $\mathbb{F}$*-álgebra* G*-graduada* $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$*, uma* ***subálgebra*** G***-graduada de*** A *é um subespaço vetorial* G*-graduado* B *de* A *tal que* $b_1 \cdot b_2 \in B$ *para todo* $b_1, b_2 \in B$.

Uma ***superálgebra*** *é uma álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada* $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$*, e uma* ***subsuperálgebra*** *é uma subálgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada* $B \subseteq A$.

Exemplo 1.9. *No Exemplo 1.7, se* $V = W$*, então* $\mathcal{L}(V, W)$ *é denotado por* $\mathrm{End}(V)$ *e nesse caso, munido da composição,* $\mathrm{End}(V)$ *é uma álgebra associativa. De fato, lembremos do Exemplo 1.7 que* $\mathrm{End}(V)$ *é um espaço vetorial* G*-graduado. Depois, sejam* $\alpha, \beta \in G$*,* $T_1 \in \mathrm{End}(V)_\alpha$ *e* $T_2 \in \mathrm{End}(V)_\beta$*. Assim,* $T_1(V_s) \subseteq V_{s+\alpha}$ *e* $T_2(V_s) \subseteq V_{s+\beta}$*, para todo* $s \in G$*. Daí,*

$$(T_1 \circ T_2)(V_s) = T_1(T_2(V_s)) \subseteq T_1(V_{s+\beta}) \subseteq V_{s+\alpha+\beta},$$

para todos $s \in G$*. Logo* $\mathrm{End}(V)_\alpha \circ \mathrm{End}(V)_\beta \subseteq \mathrm{End}(V)_{\alpha+\beta}$.

Exemplo 1.10. *Seja* $V = \mathbb{F}^{\alpha+\beta}$ *um* $\mathbb{F}$*-espaço vetorial munido da* $\mathbb{Z}_2$*-graduação,* $V_{\overline{0}} = \mathbb{F}^{\alpha}$ *e* $V_{\overline{1}} = \mathbb{F}^{\beta}$*. Neste caso, denotaremos* $\mathrm{End}(V)$ *por* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)$*. Uma* $\mathbb{Z}$*-graduação de* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)$ *é dada por* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{-1} \oplus \mathrm{End}(\alpha,\beta)_0 \oplus \mathrm{End}(\alpha,\beta)_1$*, com*

$$\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \middle| \, C \in M_{\beta\times\alpha}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{0} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \middle| \, A \in M_{\alpha\times\alpha}(\mathbb{F}), \ D \in M_{\beta\times\beta}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, B \in M_{\alpha\times\beta}(\mathbb{F}) \right\}.$$

Observemos que essa $\mathbb{Z}$*-graduação é consistente com a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação de* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)$ *dada por* $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{0}} \oplus \mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{1}}$*,*

$$\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{0}} = \mathrm{End}_0(\alpha,\beta) \qquad e \qquad \mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{1}} = \mathrm{End}(\alpha,\beta)_{-1} \oplus \mathrm{End}(\alpha,\beta)_1.$$

Observemos que a $\mathbb{Z}$*-graduação de* $\mathrm{End}(V)$ *é, de fato, consistente com a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação dada acima, pois* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)_z$ *é um subespaço* $\mathbb{Z}_2$*-graduado de* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)$*, para todo* $z \in \{-1,0,1\}$ *e* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{0}} = \bigoplus_{i \text{ par}} \mathrm{End}(\alpha,\beta)_i$ *e* $\mathrm{End}(\alpha,\beta)_{\overline{1}} = \bigoplus_{j \text{ ímpar}} \mathrm{End}(\alpha,\beta)_j$*.*

Exemplo 1.11. *Sejam* $(B,*)$ *e* $(C,\bullet)$ *superálgebras. Consideremos a* ***soma direta*** *de superálgebras, definida por* $A = B \oplus C$*. Sejam* $x, y \in A$ *tais que* $x = x^1 + x^2$ *e* $y = y^1 + y^2$*. Assim,*

$$x \cdot y = \left(x^1 + x^2\right) \cdot \left(y^1 + y^2\right) := \left(x^1 * y^1\right) + \left(x^2 \bullet y^2\right).$$

Observemos que A *é uma superálgebra ao considerarmos a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação dada por*

$$A_{\overline{0}} = B_i \oplus C_j, \ i + j = \overline{0} \qquad e \qquad A_{\overline{1}} = B_i \oplus C_j, \ i + j = \overline{1}.$$

Exemplo 1.12. *Sejam* $(A,*)$ *e* $(B,\bullet)$ *superálgebras. O* ***produto tensorial*** *dessas superálgebras é definido como sendo o espaço vetorial* $A \otimes B$*, munido da* $\mathbb{Z}_2$*-graduação dada por*

$$(A \otimes B)_{\overline{0}} = \bigoplus_{\alpha+\beta=\overline{0}} (A_\alpha \otimes B_\beta) \qquad e \qquad (A \otimes B)_{\overline{1}} = \bigoplus_{\alpha+\beta=\overline{1}} (A_\alpha \otimes B_\beta),$$

e da multiplicação dada por

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} (a_1 * a_2) \otimes (b_1 \bullet b_2) \quad \text{para todo } a_i \in A, \ b_i \in B.$$

Definição 1.2.2. *Um* ***ideal à esquerda*** *(respectivamente, à direita) de uma álgebra* G*-graduada* $(A,\cdot)$ *é uma subálgebra* G*-graduada* $I \subset A$*, tal que*

$$a \cdot i \in I \quad (\text{resp. } i \cdot a \in I),$$

para todos $a \in A$ *e* $i \in I$*. Dizemos que* I *é um* ***ideal bilateral*** *(ou simplesmente,* ***ideal****), quando* I *é um ideal tanto à direita quanto à esquerda.*

Exemplo 1.13. *Consideremos a álgebra das matrizes triangulares superiores*

$$B = \{(a_{ij})_{i,j} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } 1 \leq j < i \leq 3\}.$$

Observemos que os conjuntos $B_{\overline{0}}$ o subespaço das matrizes triangulares estritamente superiores

$$B_{\overline{0}} = \{(a_{ij})_{i,j} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq i \leq 3\},$$

e $B_{\overline{1}}$ o subespaço das matrizes diagonais

$$B_{\overline{1}} = \{(a_{ij})_{i,j} \in M_{3\times 3}(\mathbb{F}) \mid a_{ij} = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \neq i \leq 3\}.$$

constituem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de B.

Observemos que $B_{\overline{0}} \cap B_{\overline{1}} = 0$ e que, dada $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in B$, temos $a = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in B_{\overline{0}} + B_{\overline{1}}$. Logo, $B_{\overline{0}} \oplus B_{\overline{1}}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de B.

Sejam $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in B$ e $b = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{\overline{0}}$. Observemos que

$$bc = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{12}c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{\overline{0}},$$

$$ab = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ 0 & 0 & a_{22}b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{\overline{0}},$$

$$ba = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}a_{22} & b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ 0 & 0 & b_{23}a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{\overline{0}}.$$

Isso mostra que $B_{\overline{0}}$ é um ideal de B.

Exemplo 1.14. *Sejam A uma álgebra G-graduada e I um ideal G-graduado de A. Consideremos o espaço vetorial quociente (A/I) e a G-graduação em (A/I) dada (no Exemplo 1.5) por*

$$(A/I)_g := \{a + I \mid a \in A_g\}, \quad \text{para cada } g \in G. \tag{1.6}$$

Agora, mostremos que $(A/I)_g \cdot (A/I)_h \subseteq (A/I)_{g+h}$ *para todos* $g, h \in G$. *Dados* $g, h \in G$, $a + I \in (A/I)_g$ *e* $b + I \in (A/I)_h$, *temos* $(a + I) \cdot (b + I) = (ab) + I$. *Como podemos tomar* $a \in A_g$, $b \in A_h$, *e como* A *é uma álgebra* G*-graduada, temos* $ab \in A_{g+h}$. *Isso implica que* $(A/I)_g \cdot (A/I)_h \subseteq (A/I)_{g+h}$. *Logo, a Equação 1.6 define uma* G*-graduação na álgebra* (A/I).

Exemplo 1.15. *Seja* V *um superespaço vetorial. Definamos a* ***superálgebra tensorial*** $T(V)$ *como sendo o espaço vetorial*

$$T(V) = \bigoplus_{i \geq 0} T^i(V), \text{ com } T^i(V) = V^{\otimes i} \text{ para cada } i \geq 0,$$

munido do produto dado por $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m$ *para todo* $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in T^k(V)$, $w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^m(V)$, $k, m \geq 0$, *com unidade dada por* $1 \in \mathbb{F} = V^{\otimes 0}$, *e com* $\mathbb{Z}_2$*-graduação dada por*

$$T(V)_{\bar{0}} = \bigoplus_{\substack{\sum_{i=1}^n \alpha_i = \bar{0} \\ n \geq 0}} (V_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes V_{\alpha_n}) \quad e \quad T(V)_{\bar{1}} = \bigoplus_{\substack{\sum_{i=1}^n \alpha_i = \bar{1} \\ n \geq 0}} (V_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes V_{\alpha_n}).$$

Como $T^1(V) = V$, *existe uma inclusão natural*

$$i : V \hookrightarrow T(V).$$

Além disso, se a dimensão de V *seja finita, dim*$(V) = n$, *e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *for uma base de V, então o conjunto* $\{1, v_{k_1} \cdots v_{k_m} \mid m > 0, k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\}\}$ *é uma base para* $T(V)$.

Exemplo 1.16. *Seja* V *um espaço vetorial. Consideremos* $T(V)$ *a sua álgebra tensorial e* J *o ideal bilateral de* $T(V)$ *gerado pelos elementos da forma* $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in V$. *A* ***álgebra simétrica*** *de* V *é definida por*

$$S(V) := \frac{T(V)}{J}.$$

Suponhamos que a dimensão de V *seja finita,* $\dim(V) = n$, *e consideremos uma base* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *para* V. *Nesse caso, o conjunto*

$$\{v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \mid i_1, \ldots, i_n \geq 0\}$$

forma uma base para $S(V)$. *Em particular, a álgebra* $S(V)$ *é isomorfa à álgebra de polinômios em* n *variáveis comutativas,* $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemplo 1.17. *Seja* V *um espaço vetorial. Consideremos* $T(V)$ *a sua álgebra tensorial e* J *o ideal bilateral de* $T(V)$ *gerado pelos elementos da forma* $x \otimes y + y \otimes x$, $x, y \in V$. *A* ***álgebra de Grassmann*** *(ou* ***álgebra exterior****) de* V *é definida por*

$$\Lambda(V) := \frac{T(V)}{J}.$$

No caso particular em que a dimensão de V é finita, $\dim V = n$*, denotaremos* $\Lambda(V)$ *por* $\Lambda(n)$.

Suponhamos que a dimensão de V seja enumerável e seja Ξ uma base ordenada para V. Nesse caso, o conjunto

$$\{\xi_1 \cdots \xi_r \mid \xi_1, \ldots, \xi_r \in \Xi \text{ tal que } \xi_1 < \cdots < \xi_r\} \tag{1.7}$$

forma uma base para $\Lambda(V)$. Em particular, no caso em que a dimensão de V é finita, $\dim V = n$*, temos que* $\dim \Lambda(n) = 2^n$.

Além disso, $\Lambda(V)$ admite uma $\mathbb{Z}$-graduação, dada por

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(V), \qquad \Lambda^k(V) := span\{\xi_1 \cdots \xi_k \mid \xi_1 < \cdots < \xi_k\}. \tag{1.8}$$

Se supusermos ainda que V é um superespaço vetorial concentrado em grau $\bar{1}$, então $\Lambda(V)$ admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação (não confundir, nesse caso, $\Lambda(V)$ com a superálgebra de Grassmann de V), dada por

$$\Lambda(V) = \Lambda(V)_{\bar{0}} \oplus \Lambda(V)_{\bar{1}}, \qquad \Lambda(V)_{\bar{0}} := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k}(V), \quad \Lambda(V)_{\bar{1}} := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k+1}(V). \tag{1.9}$$

Definição 1.2.3. *Uma álgebra G-graduada A é dita* ***simples*** *se $A^2 \neq 0$ e se seus únicos ideais são $\{0\}$ e A.*

Exemplo 1.18. *Consideremos $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, munido da $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por $\mathbb{C}_{\bar{0}} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{C}_{\bar{1}} = \{yi \mid y \in \mathbb{R}\}$. Pelo Exemplo 1.8, $\mathbb{C}$ é uma superálgebra. Suponhamos que I seja um ideal próprio de $\mathbb{C}$. Observemos que $\mathbb{C}$ tem dimensão* 2 *e daí, I tem dimensão* 1 *(sobre* $\mathbb{R}$*). Escolha um vetor gerador para I, $a+bi \neq 0$. Como I é um ideal de $\mathbb{C}$, temos $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi) \in I$. Como $a + bi \neq 0$, temos $1 = \frac{1}{a^2+b^2}a^2 + b^2 \in I$. Isso mostra que $\mathbb{C} \subseteq I$, o que contradiz a hipótese de* $\dim I = 1$.

Definição 1.2.4. *Sejam A e B álgebras. Uma aplicação $\varphi : A \longrightarrow B$ é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se para todos $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{F}$ temos*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda\, \varphi(x).$$

Se φ for bijetora, então φ é um ***isomomorfismo****; e se $\varphi : A \longrightarrow A$, diremos que φ é um* ***endomorfismo*** *de A.*

Sejam A e A' álgebras G-graduadas. Um ***homomorfismo de álgebras G-graduadas*** *$\phi : A \longrightarrow A'$ é um homomorfismo de álgebras tal que: existe um automorfismo do grupo G, $\varphi : G \longrightarrow G$, satisfazendo*

$$\phi(A_\alpha) \subseteq A'_{\varphi(\alpha)} \quad \text{para todo } \alpha \in G.$$

Lembremos que no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, o único isomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ é $\varphi = \text{id}$.

Exemplo 1.19. *Seja* $\phi : \mathbb{F}[t] \to \mathbb{F}[t]$ *dado por*

$$\phi(\alpha_n t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0) = \alpha_n t^{2n} + \alpha_{n-1}t^{2(n-1)} + \cdots + \alpha_1 t^2 + \alpha_0, \ \alpha_i \in \mathbb{F},$$

com $\varphi = id_{\mathbb{Z}_2}$. *Observemos que* ϕ *é um homomorfismo de álgebras. No entanto,* ϕ *não é um homomorfismo graduado, pois* $\phi\left(\mathbb{F}\left[t\right]_{\bar{1}}\right) \nsubseteq \mathbb{F}\left[t\right]_{\bar{1}}$, *por exemplo,* $t \in \mathbb{F}[t]_{\bar{1}}$, *mas* $\phi(t) = t^2 \in \mathbb{F}[t]_{\bar{0}}$.

1.3 Superálgebras de Lie

Nesta seção definimos superálgebras de Lie, superálgebras simples, enunciamos e demonstramos os Teoremas dos Isomorfismos para superálgebras de Lie, descrevemos a construção da superálgebra universal envelopante e também enunciamos o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Definição 1.3.1. *Seja* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ *uma superálgebra com a multiplicação denotada por* $[\cdot,\cdot]$. *Dizemos que* $\mathfrak{g}$ *é uma* ***superálgebra de Lie****, se sua multiplicação satisfaz as seguintes condições*

1. $[a,b] = -(-1)^{|a||b|}\left[b,a\right],$
2. $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{|a||b|}[b,[a,c]],$

para quaisquer $a,b,c \in \mathfrak{g}$ *(com* a,b *homogêneos).*

Exemplo 1.20. *Seja* $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ *uma superálgebra associativa. Consideremos uma nova multiplicação* $[\cdot,\cdot]$ *definida como a única transformação bilinear satisfazendo:* $[x,y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx$, *para todos* $x,y \in A$. *Assim, para todos* $x,y,z \in A$, *temos*

- *Sejam* $a,b \in A$. *Observemos que* $[a,b] = ab - ba \in A_{\bar{0}}$ *se* $a,b \in A_i$, $i \in \{\bar{0}, \ \bar{1}\}$ *e* $[a,b] = ab + ba \in A_{\bar{1}}$ *se* $a \in A_i$ *e* $b \in A_j$, $i,j \in \{\bar{0}, \ \bar{1}\}$, *com* $i \neq j$. *Logo,* $[\cdot,\cdot]$ *é graduado.*
- $[y,x] = yx - (-1)^{|y||x|}xy = -(-1)^{|x||y|}\left(xy - (-1^{|x||y|})yx\right) = -(-1)^{|x||y|}[x,y].$
-

$$\begin{aligned}
[[a,b],c] \ &+ \ (-1)^{|a||b|}[b,[a,c]] \\
&= [ab - (-1)^{|a||b|}ba, c] + (-1)^{|a||b|}[b, ac - (-1)^{|a||c|}ca] \\
&= [ab,c] - (-1)^{|a||b|}[ba,c] \\
&\quad +(-1)^{|a||b|}[b,ac] - (-1)^{|a||b|+|a||c|}[b,ca] \\
&= abc - (-1)^{(|a|+|b|)|c|}cab \\
&\quad -(-1)^{|a||b|}\left(bac - (-1)^{(|b|+|a|)|c|}cba\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{|a||b|}bac - (-1)^{|a||b|}(-1)^{(|a|+|c|)|b|}acb \\
&-(-1)^{|a||b|+|a||c|}\big(bca - (-1)^{(|c|+|a|)|b|}cab\big) \\
= \;& abc - (-1)^{|a||c|+|b||c|}cab \\
&-(-1)^{|a||b|}bac + (-1)^{|b||c|+|a||c|+|a||b|}cba \\
&+(-1)^{|a||b|}bac - (-1)^{|b||c|}acb \\
&-(-1)^{|a||b|+|a||c|}bca + (-1)^{|a||c|+|b||c|}cab \\
= \;& abc - (-1)^{|a||b|+|a||c|}bca - (-1)^{|b||c|}\big(acb - (-1)^{|a|(|b|+|c|)}cba\big) \\
= \;& [a, bc] - (-1)^{|b||c|}[a, cb] \\
= \;& [a, bc - (-1)^{|b||c|}cb] \\
= \;& [a, [b, c]].
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.21. *Suponhamos que $V = \mathbb{F}^{\alpha,\beta}$ como no Exemplo 1.10. Pelo Exemplo 1.20,* $\mathrm{End}(V)$ *munida do supercomutador é uma superálgebra de Lie. Essa superálgebra de Lie será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$ ou $\mathfrak{gl}(\alpha, \beta)$, e no caso particular em que $\beta = 0$, ela será denotada, simplesmente, por $\mathfrak{gl}(\alpha)$.*

Observemos que, assim como na notação de $\mathrm{End}(V)$*, na notação de $\mathfrak{gl}(V)$, a referência explícita ao corpo $\mathbb{F}$ está omitida, mas será clara pelo contexto.*

Exemplo 1.22. *Consideremos uma superálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$. Lembremos da Definição 1.2.1 que uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subsuperespaço vetorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[h_1, h_2] \in \mathfrak{h}$ para todo $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$. Neste caso, $\mathfrak{h}$ é dita uma **subsuperálgebra de Lie** de $\mathfrak{g}$.*

Observemos que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, pois $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}+\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Mas, se $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \neq \{0\}$, então $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ não é subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, pois $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

Exemplo 1.23. *Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie. Lembremos da Definição 1.2.2, que um ideal de $\mathfrak{g}$ é um subsuperespaço vetorial $I \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[i, x] \in I$ para todo $i \in I$, $x \in \mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que I é um **ideal da superálgebra de Lie** $\mathfrak{g}$.*

*Por exemplo, para toda superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a **subsuperálgebra derivada**, definida como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := span\{[x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$, é um ideal de $\mathfrak{g}$. De fato, dados $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [x_i, y_i] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $a \in \mathfrak{g}$, temos*

$$[a, z] = \left[a, \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]\right] = \sum_{i=0}^{n} [a, [x_i, y_i]] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

*Além disso, o **centro** de $\mathfrak{g}$, definido como $Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0,\ para\ todo\ y \in \mathfrak{g}\}$, também é um ideal de $\mathfrak{g}$. De fato, $[x, a] = 0 \in Z(\mathfrak{g})$ para todos $a \in Z(\mathfrak{g}), x \in \mathfrak{g}$. (Observemos que $0 \in Z(\mathfrak{g})$, uma vez que $0 = [0, y]$, para todo $y \in \mathfrak{g}$.)*

Exemplo 1.24. *Lembremos do Exemplo 1.14 a construção do quociente de uma álgebra graduada por um ideal graduado. Agora, sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e I um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathfrak{g}$. A $\mathbb{Z}_2$-graduação no espaço vetorial $\mathfrak{g}/I$ é dada por*

$$(\mathfrak{g}/I)_{\bar{0}} = \{x + I \mid x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}\} \quad \text{e} \quad (\mathfrak{g}/I)_{\bar{1}} = \{x + I \mid x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}\}.$$

Além disso, o supercolchete em $\mathfrak{g}/I$ é dado por

$$[x + I, y + I] := [x, y] + I, \quad \text{para todos} \quad x + I,\, y + I \in \mathfrak{g}/I.$$

Com isso, munimos $\mathfrak{g}/I$ com uma estrutura de superálgebra de Lie.

Exemplo 1.25. *Uma* ***superderivação de grau s****, $s \in \mathbb{Z}_2$, de uma superálgebra A é um endomorfismo $\delta \in \operatorname{End}_s A$ com a propriedade*

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{s|a|}a\delta(b),$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$. O conjunto de todas as derivações de grau s de A é denotado por $\operatorname{Der}_s A$.

Observemos que $\operatorname{Der}_s A$ *é um subespaço de* $\operatorname{End} A$. *De fato, dados $\delta_1, \delta_2 \in \operatorname{Der}_s A$, $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$ e $b, c \in \mathfrak{g}$, temos*

$$\begin{aligned}
(a_1\delta_1 + a_2\delta_2)(bc) &= a_1\delta_1(bc) + a_2\delta_2(bc)\\
&= a_1\left(\delta_1(b)c + (-1)^{s|b|}\ b\delta_1(c)\right) + a_2\left(\delta_2(b)c + (-1)^{s|b|}\ b\delta_2(c)\right)\\
&= a_1\delta_1(b)c + a_1(-1)^{s|b|}\ b\delta_1(c) + a_2\delta_2(b)c + a_2(-1)^{s|b|}\ b\delta_2(c)\\
&= (a_1\delta_1 + a_2\delta_2)(b)c + (-1)^{s|b|}b(a_1\delta_1 + a_2\delta_2)(c).
\end{aligned}$$

Consideremos $\operatorname{Der} A = \operatorname{Der}_{\bar{0}} A \oplus \operatorname{Der}_{\bar{1}} A$. *Observemos que* $\operatorname{Der} A$ *é uma subsuperálgebra de Lie de* $\operatorname{End} A$. *De fato, dados $\delta \in \operatorname{Der}_s A$, $\theta \in \operatorname{Der}_r A, s, r \in \mathbb{Z}_2$ e $a.b \in A$, temos*

$$\begin{aligned}
[\delta, \theta](ab) &= \delta\left(\theta(ab)\right) - (-1)^{rs}\ \left(\theta(\delta(ab))\right)\\
&= \delta\Big(\theta(a)b + (-1)^{r|a|}\ a\theta(b)\Big) - (-1)^{rs}\,\theta\Big(\delta(a)b + (-1)^{s|a|}\ a\delta(b)\Big)\\
&= \delta\left(\theta(a)b\right) + (-1)^{r|a|}\,\delta\left(a\theta(b)\right) - (-1)^{rs}\ \theta\left(\delta(a)b\right) - (-1)^{rs+s|a|}\,\theta\left(a\delta(b)\right)\\
&= \Big(\delta(\theta(a))b + (-1)^{s(r+|a|)}\ \theta(a)\delta(b)\Big)\\
&\quad + (-1)^{r|a|}\Big(\delta(a)\theta(b)\,(-1)^{s|a|}\ a\delta(\theta(b))\Big)\\
&\quad - (-1)^{rs}\Big(\theta(\delta(a)b + (-1)^{r(s+|a|)}\,\delta(a)\theta(b)\Big)\\
&\quad - (-1)^{rs+s|a|}\Big(\theta(a)\delta(b) + (-1)^{r|a|}\ a\theta(\delta(b))\Big)\\
&= \left((\delta\circ\theta)(a)b - (-1)^{rs}\ (\theta\circ\delta)(a)b\right)\\
&\quad + \Big((-1)^{r|a|+s|a|}\ a\,(\delta\circ\theta)(b) - (-1)^{rs+s|a|+r|a|}\ a\,(\theta\circ\delta)(b)\Big)\\
&= \left((\delta\circ\theta) - (-1)^{rs}\ (\theta\circ\delta)\right)(a)b + (-1)^{r|a|+s|a|}\ a\left((\delta\circ\theta) - (-1)^{rs}\ (\theta\circ\delta)\right)(b)
\end{aligned}$$

$$= \quad [\delta,\theta]\,(a)b + (-1)^{(r+s)|a|} \quad a\,[\delta,\theta]\,(b).$$

A superálgebra Der A *é chamada a* ***superálgebra de derivações de*** A *e cada elemento de* Der A *é chamado de derivação de* A*.*

Exemplo 1.26. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma superálgebra de Lie. Segue da identidade de Jacobi que* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *dada por* $\mathrm{ad}(b) = [b, -]$ *é uma derivação de* $\mathfrak{g}$*. De fato, dados* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *homogêneos, temos*

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(x)[y,z] &= [x,[y,z]]\\ &= [[x,y],z] + (-1)^{|x||y|}[y,[x,z]]\\ &= [\mathrm{ad}(x)(y),z] + (-1)^{|x||y|}\,[y,\mathrm{ad}(x)(z)]\,.\end{aligned}$$

Essas derivações $\mathrm{ad}(x)$*,* $x \in \mathfrak{g}$*, são chamadas* ***internas****, o conjunto dessas derivações é denotado por* $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ *e formam um ideal de* $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$*. De fato, dados* $x, a \in \mathfrak{g}$ *homogêneos e* $\delta \in \mathrm{Der}_s\,\mathfrak{g}$*, temos*

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(x),\delta]\,(a) &= \Big(\mathrm{ad}(x)\circ\delta - (-1)^{|x|s}\,\delta\circ\mathrm{ad}(x)\Big)\,(a)\\ &= \mathrm{ad}(x)\,(\delta(a)) - (-1)^{|x|s}\;\delta\,(\mathrm{ad}(x)(a))\\ &= [x,\delta(a)] - (-1)^{s|x|}\delta[x,a]\\ &= [x,\delta(a)] - (-1)^{s|x|}([\delta(x),a] + (-1)^{s|x|}[x,\delta(a)])\\ &= -(-1)^{s|x|}\,\mathrm{ad}(\delta(x))(a).\end{aligned}$$

Exemplo 1.27. *Lembremos da definição de homomorfismo de álgebras* G*-graduadas (ver Definição 1.2.4). Sejam* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *superálgebras de Lie. Definamos um homomorfismo de superálgebras de Lie* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *é um homomorfismo de álgebras* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas e tal que*

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)],$$

para todos x*,* $y \in \mathfrak{g}$*.*

Sejam $\ker\varphi$ *o núcleo de* φ *e* $\mathrm{im}\varphi$ *a imagem de* φ*. Mostremos que* $\ker\varphi$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$*. Primeiro, mostremos que* $\ker\varphi$ *é um subsuperespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$*. Sejam* x*,* $y \in \ker\varphi$ *e* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Assim,*

$$\varphi(x+\lambda y) = \varphi(x) + \lambda\;\varphi(y) = 0.$$

Como $x \in \ker\varphi \subseteq \mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{g}$ *é* $\mathbb{Z}_2$*-graduada, existem* $x_i \in \mathfrak{g}_i$*, com* $i \in \mathbb{Z}_2$*, tais que* $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$*. Daí,*

$$0 = \varphi(x) = \varphi(x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}) = \varphi(x_{\bar{0}}) + \varphi(x_{\bar{1}}) \Longrightarrow \varphi(x_{\bar{0}}) = -\varphi(x_{\bar{1}}).$$

Como $\varphi(x_i) \in \mathfrak{h}_i$*,* $i \in \mathbb{Z}_2$ *e* $\mathfrak{h}$ *é* $\mathbb{Z}_2$*-graduado, temos* $\varphi(x_i) = 0$*, com* $i \in \mathbb{Z}_2$*. Logo,* $\ker\varphi$ *é um subsuperespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$*. Agora, sejam* $k \in \ker\varphi$ *e* $x \in \mathfrak{g}$*. De onde,*

$$\varphi([k,x]) = [\varphi(k),\varphi(x)] = [0,\varphi(x)] = 0.$$

Isso mostra que $[k, x] \in \ker\varphi$. *Logo, por definição,* $\ker\varphi$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$.

Agora, mostremos que $\mathrm{im}\varphi$ *é uma subsuperálgebra de Lie de* $\mathfrak{h}$. *Primeiro mostremos que* $\mathrm{im}\varphi$ *é um subsuperespaço vetorial de* $\mathfrak{h}$. *Sejam,* y_1, $y_2 \in \mathrm{im}\varphi$ *e* $\lambda \in \mathbb{F}$. *Assim, existem* x_1, $x_2 \in \mathfrak{g}$, *tais que,* $\varphi(x_1) = y_1$ *e* $\varphi(x_2) = y_2$. *Daí,*

$$y_1 + \lambda\ y_2 = \varphi(x_1) + \lambda\ \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + \lambda\ x_2).$$

Além disso, dado $y \in \mathrm{im} \subseteq \mathfrak{h}$, *por definição, existe* $x \in \mathfrak{g}$, *tal que* $y = \varphi(x)$. *Como* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *são* $\mathbb{Z}_2$*-graduados, existem* $y_i \in \mathfrak{h}_i$ *e* $x_i \in \mathfrak{g}_i$, $i \in \mathbb{Z}_2$, *tais que* $y = y_{\bar{0}} + y_{\bar{1}}$ *e* $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$. *De onde,*

$$y_{\bar{0}} + y_{\bar{1}} = \varphi(x) = \varphi(x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}) = \varphi(x_{\bar{0}}) + \varphi(x_{\bar{1}}) \Longrightarrow y_{\bar{0}} - \varphi(x_{\bar{0}}) = \varphi(x_{\bar{1}}) - y_{\bar{1}}.$$

Novamente, como $\mathfrak{h}$ *é* $\mathbb{Z}_2$*-graduada, temos* $\varphi(x_i) - y_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}_2$. *Logo,* $\varphi(x_i) = y_i$, $i \in \mathbb{Z}_2$, *ou seja,* $y_i \in \mathrm{im}\varphi$, $i \in \mathbb{Z}_2$. *Consequentemente,* $\mathrm{im}\varphi$ *é um subsuperespaço vetorial de* $\mathfrak{h}$. *Agora, mostremos que* $\mathrm{im}\varphi$ *é uma subsuperálgebra de* $\mathfrak{h}$. *Sejam,* y_1, $y_2 \in \mathrm{im}\varphi$. *Assim, existem* x_1, $x_2 \in \mathfrak{g}$, *tais que,* $\varphi(x_1) = y_1$ *e* $\varphi(x_2) = y_2$. *Daí,*

$$[y_1, y_2] = [\varphi(x_1), \varphi(x_2))] = \varphi([x_1, x_2]).$$

Isso mostra que $[y_1, y_2] \in \mathrm{im}\varphi$. *Logo,* $\mathrm{im}\varphi$ *é uma subsuperálgebra de* $\mathfrak{h}$.

Teorema 1.1 (Teoremas de isomorfismo para superálgebras de Lie)**.** *Sejam* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *superálgebras de Lie e* $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *um homomorfismo de superálgebras de Lie.*

(a) A função

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \dfrac{\mathfrak{g}}{\ker(\varphi)} & \longrightarrow & \mathrm{im}(\varphi) \\ & x + \ker(\varphi) & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

é um isomorfismo de superálgebras de Lie.

(b) Se I *e* J *são ideais graduados de* $\mathfrak{g}$ *tais que* $I \subseteq J$, *então* $\dfrac{J}{I}$ *é um ideal graduado de* $\dfrac{\mathfrak{g}}{I}$ *e existe um isomorfismo de superálgebras de Lie* $\dfrac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \dfrac{\mathfrak{g}}{J}$.

(c) Se I *e* J *são ideais graduados de* $\mathfrak{g}$, *então* $I \cap J$ *é um ideal graduado de* I, J *é um ideal graduado de* $I + J$, *e existe um isomorfismo de superálgebras de Lie* $\dfrac{I + J}{J} \cong \dfrac{I}{I \cap J}$.

(d) Para todo ideal graduado $I \subseteq \ker(\varphi)$, *existe um único homomorfismo de superálgebras de Lie* $\Psi : \dfrac{\mathfrak{g}}{I} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *satisfazendo* $\Psi(x + I) = \varphi(x)$, *para todo* $x \in \mathfrak{g}$.

Demonstração:

(a) Mostremos que Ψ está bem definida. Sejam $x + \ker(\varphi)$, $y + \ker(\varphi) \in \dfrac{\mathfrak{g}}{\ker(\varphi)}$, tais que $x + \ker(\varphi) = y + \ker(\varphi)$. Assim, $x - y \in \ker(\varphi)$ e daí,

$$0 = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

$$\Longrightarrow \Psi(x + \ker(\varphi)) = \Psi(y + \ker(\varphi)).$$

Logo, Ψ está bem definida.

Observemos que Ψ é graduada. De fato, como φ é um homomorfismo de superálgebras de Lie, temos $\varphi(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{0}}$, $\varphi(\mathfrak{g}_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{1}}$ e que $\ker\varphi$ é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$ (ver Exemplo 1.27) Lembremos da $\mathbb{Z}_2$-graduação do quociente, dada por $(\mathfrak{g}/I)_s = \{x+I \mid x \in \mathfrak{g}_s\}$ para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ (ver Exemplo 1.24). Daí, $\Psi(\mathfrak{g}/\ker(\varphi))_{\overline{0}} = \varphi(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{0}}$ e $\Psi(\mathfrak{g}/\ker(\varphi))_{\overline{1}} = \varphi(\mathfrak{g}_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{1}}$. Logo, Ψ é graduada.

Agora, mostremos que Ψ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Sejam $x + \ker(\varphi)$, $y + \ker(\varphi) \in \dfrac{\mathfrak{g}}{\ker(\varphi)}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Psi((x + \ker\varphi) + \lambda(y + \ker\varphi)) &= \Psi((x + \lambda y) + \ker\varphi) \\
&= \varphi(x + \lambda y) \\
&= \varphi(x) + \lambda\varphi(y) \\
&= \Psi(x + \ker\varphi) + \lambda\Psi(y + \ker\varphi).
\end{aligned}$$

Logo, φ é linear. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\Psi([x + \ker(\varphi), y + \ker(\varphi)]) &= \Psi([x, y] + \ker(\varphi)) \\
&= \varphi([x, y]) \\
&= [\varphi(x), \varphi(y)] \\
&= [\Psi(x + \ker(\varphi)), \Psi(y + \ker(\varphi))].
\end{aligned}$$

Logo, Ψ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Além disso,

$$\begin{aligned}
\ker(\Psi) &= \{v + \ker(\varphi) \mid \Psi(v + \ker(\varphi)) = 0\} \\
&= \{v + \ker(\varphi) \mid \varphi(v) = 0\} \\
&= \{v + \ker(\varphi) \mid v \in \ker(\varphi)\} \\
&= 0 + \ker(\varphi).
\end{aligned}$$

Logo, Ψ é injetora. Além disso, dado $h \in \operatorname{im}(\varphi)$, existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que $\varphi(x) = h$. Consequentemente, $\Psi(x + \ker\varphi) = \varphi(x) = h$. Daí, segue que Ψ é sobrejetora. Portanto, Ψ é um isomorfismo de superálgebras de Lie.

(b) Consideremos as $\mathbb{Z}_2$-graduações de I dada por $I_s = \mathfrak{g}_s \cap I$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ e de J dada por $J_s = \mathfrak{g}_s \cap J$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ (observemos que ambas são induzidas da $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathfrak{g}$). Sejam I e J ideais graduados de $\mathfrak{g}$, com $I \subseteq J$. Primeiro mostremos que J/I é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathfrak{g}/I$. Sejam $j + I \in J/I$ e $x + I \in \mathfrak{g}/I$. Daí, $[j + I, x + I] = [j, x] + I$ e como J é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$, temos $[j, x] \in J$, de onde, $[j, x] + I \in J/I$. Além disso, a $\mathbb{Z}_2$-graduação em J/I é dada por

$(J/I)_s = \{j + I \mid j \in J_s\}$ para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Como J é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathfrak{g}$, temos que J/I é um ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathfrak{g}/I$. Agora, consideremos a aplicação dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathfrak{g}/I & \longrightarrow & \mathfrak{g}/J \\ & x + I & \longrightarrow & x + J. \end{array}$$

Primeiro mostremos que φ está bem definida. Sejam $x + I$, $y + I \in \mathfrak{g}/I$. Assim, $x - y \in I \subseteq J$. De onde, $x - y \in J$. Daí, $x + J = y + J$. Logo, φ está bem definida. Agora, mostremos que φ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Sejam $x + I$, $y + I \in \mathfrak{g}/I$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Assim,

$$\varphi((x+I)+\lambda(y+I)) = \varphi((x+\lambda y)+I) = (x+\lambda y)+J = x+J+\lambda(y+J) = \varphi(x)+\lambda\varphi(y).$$

Logo, φ é linear. Mostremos que φ é graduada. Consideremos as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $\mathfrak{g}/I$ dada por $(\mathfrak{g}/I)_s = \{x + I \mid x \in \mathfrak{g}_s\}$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ e de $\mathfrak{g}/J$ dada por $(\mathfrak{g}/J)_s = \{x + J \mid x \in \mathfrak{g}_s\}$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Pela definição de φ, temos $\varphi\left((\mathfrak{g}/I)_s\right) \subseteq (\mathfrak{g}/J)_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Logo, φ é graduada. Além disso

$$\varphi([x + I, y + I]) = \varphi([x, y] + I) = [x, y] + J = [x + J, y + J] = [\varphi(x + I), \varphi(y + I)].$$

Logo, φ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Vamos mostrar que $\ker\varphi = J/I$. Observemos que $J/I \subseteq \ker\varphi$, pois se $j \in J$, então $\varphi(j + I) = j + J = 0 + J$. Logo, $j + I \in \ker\varphi$. Seja $x + I \in \ker\varphi$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(x + I) = J &\Longrightarrow x + J = J \\ &\Longrightarrow x \in J \\ &\Longrightarrow x + I \in J/I. \end{aligned}$$

Logo, $\ker\varphi = J/I$. Observemos que φ é sobrejetor, pois dado $x + J \in \mathfrak{g}/J$, existe $x+I \in \mathfrak{g}/I$, tal que $\varphi(x+I) = x+J$. Portanto, pelo item (a), obtemos um isomorfismo de superálgebras de Lie

$$\frac{\mathfrak{g}/I}{J/I} \cong \frac{\mathfrak{g}}{J}.$$

(c) Sejam I e J ideais graduados de $\mathfrak{g}$. Para cada $s \in \mathbb{Z}_2$, denote $I_s := I \cap \mathfrak{g}_s$ e $J_s := J \cap \mathfrak{g}_s$. Como I, J são ideais graduados de $\mathfrak{g}$, então $I = I_{\overline{0}} \oplus I_{\overline{1}}$ e $J = J_{\overline{0}} \oplus J_{\overline{1}}$.

Além disso, $I + J = (I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) \oplus (I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}})$. De fato, como $(I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) \subseteq I + J$ e $(I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}}) \subseteq I + J$, então $(I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}}) \subseteq I + J$. Por outro lado, dado $x \in I + J$, pela definição de $I + J$, existem $i \in I$ e $j \in J$ tais que $x = i + j$. Como $I = I_{\overline{0}} \oplus I_{\overline{1}}$ e $J = J_{\overline{0}} \oplus J_{\overline{1}}$, então existem únicos $i_{\overline{0}} \in I_{\overline{0}}$, $i_{\overline{1}} \in I_{\overline{1}}$, $j_{\overline{0}} \in J_{\overline{0}}$ e $j \in J_{\overline{1}}$ tais que $i = i_{\overline{0}} + i_{\overline{1}}$ e $j = j_{\overline{0}} + j_{\overline{1}}$. Assim, $x = i + j = (i_{\overline{0}} + i_{\overline{1}}) + (j_{\overline{0}} + j_{\overline{1}}) = (i_{\overline{0}} + j_{\overline{0}}) + (i_{\overline{1}} + j_{\overline{1}}) \in (I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}})$. Isso mostra que $I + J \subseteq (I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}})$. Por fim, observemos que, como $(I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{g}_{\overline{0}}$, $(I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{g}_{\overline{1}}$ e $\mathfrak{g}_{\overline{0}} \cap \mathfrak{g}_{\overline{1}} = \{0\}$, temos $(I_{\overline{0}} + J_{\overline{0}}) \cap (I_{\overline{1}} + J_{\overline{1}}) = \{0\}$.

Agora, mostremos que $I \cap J = (I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}) \oplus (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}})$. Por um lado, como $I_{\overline{0}}, I_{\overline{1}} \subseteq I$ e $J_{\overline{0}}, J_{\overline{1}} \subseteq J$, então $(I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}), (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}}) \subseteq I \cap J$; e consequentemente, $(I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}}) \subseteq I \cap J$. Além disso, como $I_{\overline{0}} \cap I_{\overline{1}} = J_{\overline{0}} \cap J_{\overline{1}} = \{0\}$, então $I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}} \cap I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}} = \{0\}$. Para terminar, mostremos que $(I \cap J) \subseteq (I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}})$. Seja $a \in (I \cap J)$. Como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\overline{1}}$, $I = I_{\overline{0}} \oplus I_{\overline{1}}$ e $J = J_{\overline{0}} \oplus J_{\overline{1}}$, então existem únicos $a_{\overline{0}} \in I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}$ e $a_{\overline{1}} \in I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}}$ tais que $a = a_{\overline{0}} + a_{\overline{1}}$. Logo, $a \in (I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}) + (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}})$. Portanto, $I \cap J = (I_{\overline{0}} \cap J_{\overline{0}}) \oplus (I_{\overline{1}} \cap J_{\overline{1}})$.

Sejam $a \in I \cap J$ e $i \in I$. Daí, $[a, i] \in I \cap J$, pois como $a \in I$ e $a \in J$, temos $[a, i] \in I$ e $[a, i] \in J$ (já que I e J são ideais graduados de $\mathfrak{g}$). Logo, $I \cap J$ é um ideal graduado de I. Agora, sejam $a \in J$ e $x \in I + J$. Como J é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$, temos $[a, x] \in J$. Logo, J é um ideal graduado de $I + J$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & I & \longrightarrow & \dfrac{I+J}{J} \\ & i & \longmapsto & i + J. \end{array}$$

Mostremos que Φ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Sejam $a, b \in I$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Assim, $\Phi(a + \lambda b) = (a + \lambda b) + J = (a + J) + \lambda(b + J) = \Phi(a) + \lambda\Phi(b)$. Logo, Φ é linear. Além disso, $\Phi([a, b]) = [a, b] + J = [a + J, b + J] = [\Phi(a), \Phi(b)]$. Logo, Φ é um homomorfismo.

Agora, mostremos que $\ker \Phi = I \cap J$. Observemos que $I \cap J \in \ker \Phi$, pois se $i \in I \cap J$, então $i \in J$, de onde, $\Phi(i) = i + J = 0 + J$. Seja $i \in I$, tal que $\Phi(i) = J$. Daí,

$$i + J = \Phi(i) = 0 + J \Longleftrightarrow i \in J \Longleftrightarrow i \in I \cap J.$$

Assim, $\ker \Phi \subseteq I \cap J$. Logo, $\ker \Phi = I \cap J$. Resta mostrar que Φ é sobrejetor. Dado $x \in \mathfrak{g}$ tal que $x + J \in \frac{I+J}{J}$, existem $i \in I$ e $j \in J$, tais que $x + J = (i + j) + J = \Phi(i + j)$. Logo, Φ é sobrejetor. Portanto, pelo item (a), temos

$$\frac{I}{I \cap J} \cong \frac{I + J}{J}.$$

(d) Seja I ideal graduado de $\mathfrak{g}$, tal que $I \subseteq \ker(\varphi)$. Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \dfrac{\mathfrak{g}}{I} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ & x + I & \longrightarrow & \varphi(x). \end{array}$$

Mostremos que Ψ está bem definida. Sejam $x + I$, $y + I \in \dfrac{\mathfrak{g}}{I}$ tais que $x + I = y + I$. Assim, $x - y \in I \subseteq \ker(\varphi)$ e daí,

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) &\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \\ &\Longrightarrow \Psi(x + I) = \Psi(y + I). \end{aligned}$$

Logo, Ψ está bem definida.

Lembremos da $\mathbb{Z}_2$-graduação do quociente (ver Exemplo 1.24) dada por $(\mathfrak{g}/I)_s = \{x + I \mid x \in \mathfrak{g}_s\}$ para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Observemos que Ψ é graduada. De fato, como φ é um homomorfismo, temos $\varphi(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{0}}$ e $\varphi(\mathfrak{g}_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{1}}$. Assim, $\Psi(\mathfrak{g}/I)_{\overline{0}} = \varphi(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{0}}$ e $\Psi(\mathfrak{g}/I)_{\overline{1}} = \varphi(\mathfrak{g}_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\overline{1}}$. Logo, Ψ é graduada.

Mostremos que Ψ é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Sejam $x+I, y+I \in \dfrac{\mathfrak{g}}{I}$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Assim,

$$\begin{aligned}\Psi((x+I) + \lambda(y+I)) &= \Psi((x + \lambda y) + I)\\ &= \varphi(x + \lambda y)\\ &= \varphi(x) + \lambda\varphi(y)\\ &= \Psi(x + \ker\varphi) + \lambda\Psi(y + \ker\varphi).\end{aligned}$$

Logo, Ψ é linear. Mais ainda,

$$\begin{aligned}\Psi([x+I, y+I]) &= \Psi([x,y] + I)\\ &= \varphi([x,y])\\ &= [\varphi(x), \varphi(y)]\\ &= [\Psi(x+I), \Psi(y+I)].\end{aligned}$$

Logo, φ é um homomorfismo de superálgebras de Lie.

Finalmente, mostremos que Ψ é única. Consideremos uma aplicação $\Psi' : \mathfrak{g}/I \longrightarrow \mathfrak{h}$, tal que $\Psi'(x+I) = \varphi(x)$, para todo $x+I \in (\mathfrak{g}/I)$. Assim, $\Psi'(x+I) = \varphi(x) = \Psi(x+I)$, para todo $x + I \in (\mathfrak{g}/I)$. Logo, Ψ é única.

■

Agora mostraremos que a definição de superálgebra de Lie está relacionada com a definição de álgebra de Lie, através do chamado Envelope de Grassmann de uma superálgebra. Primeiro, consideremos a observação abaixo que será utilizada na proposição a seguir.

Observação 1.1. *Seja V um espaço de dimensão finita enumerável e $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{Z}_{n>0}\}$ uma base ordenada para V. Consideremos a álgebra de Grassmann $\Lambda(V)$. Vamos mostrar que a $\mathbb{Z}_2$-graduação $\Lambda(V) = \Lambda(V)_{\overline{0}} \oplus \Lambda(V)_{\overline{1}}$ de fato é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação da sua estrutura de álgebra associativa. Ou seja, vamos mostrar que os elementos de $\Lambda(V)_{\overline{0}}$ comutam com qualquer elemento de $\Lambda(V)$ (pertencem ao centro da álgebra $\Lambda(V)$) e os elementos de $\Lambda(V)_{\overline{1}}$ anticomutam entre si.*

Consideremos $m, n, p, q \geq 0$, sequências de inteiros positivos $1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n}, 1 \leq j_1 < \cdots < j_{2m}, 1 \leq k_1 < \cdots < k_{2p+1}, 1 \leq l_1 < \cdots < l_{2q+1}$, e os respectivos elementos $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2n}}, \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_{2m}} \in \Lambda(V)_{\overline{0}}$, $\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_{2p+1}}, \xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{2q+1}} \in \Lambda(V)_{\overline{1}}$. Usando repetidamente o fato de $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, obtemos que:

$$(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2n}})(\xi_{j_1} \cdots \xi_{j_{2m}}) = (-1)^{2n}\xi_{j_1}(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2n}})\xi_{j_2} \cdots \xi_{j_{2m}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \left((-1)^{2n}\right)^{2m} \xi_{j_1}\cdots\xi_{j_{2m}}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}}) \\
&= (\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_{2m}})(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}}), \\
(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}})(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}}) &= (-1)^{2n}\xi_{k_1}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}})\xi_{k_2}\cdots\xi_{k_{2p+1}} \\
&= \dots \\
&= \left((-1)^{2n}\right)^{2q+1} \xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}}) \\
&= (\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}})(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}}), \\
(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}})(\xi_{l_1}\cdots\xi_{l_{2q+1}}) &= (-1)^{2q+1}\xi_{l_1}(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}})\xi_{l_2}\cdots\xi_{l_{2q+1}} \\
&= \dots \\
&= \left((-1)^{2m+1}\right)^{2r+1} (\xi_{l_1}\cdots\xi_{l_{2q+1}})(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}}) \\
&= -(\xi_{l_1}\cdots\xi_{l_{2q+1}})(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2p+1}}).
\end{aligned}
$$

Como os elementos de $\Lambda(V)_{\bar{0}}$ são combinações lineares de elementos da forma $\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{2n}}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_{2n}$, e os elementos de $\Lambda(V)_{\bar{1}}$ são combinações lineares de elementos da forma $\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_{2m+1}}$, com $1 \leq k_1 < \cdots < k_{2m+1}$, segue que os elementos de $\Lambda(V)_{\bar{0}}$ são centrais e os elementos de $\Lambda(V)_{\bar{1}}$ anticomutam entre si. Isso mostra que a $\mathbb{Z}_2$-graduação $\Lambda(V) = \Lambda(V)_{\bar{0}} \oplus \Lambda(V)_{\bar{1}}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação como álgebra associativa.

Proposição 1.1. *Sejam $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, V um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável e $\Xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ uma base ordenada para V. Definamos o* envelope de Grassmann *de $\mathfrak{g}$ como sendo $G(\mathfrak{g}) := (\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes \Lambda(V)_{\bar{0}}) \oplus (\mathfrak{g}_{\bar{1}} \otimes \Lambda(V)_{\bar{1}})$ munido da única transformação bilinear $[\![\cdot,\cdot]\!]\colon G(\mathfrak{g}) \times G(\mathfrak{g}) \longrightarrow G(\mathfrak{g})$ que satisfaz $[\![x\otimes\xi, y\otimes\zeta]\!] = [x,y]\otimes\xi\wedge\zeta$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $\xi, \zeta \in \Lambda(V)$. Então: $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie se, e somente se, $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie.*

Demonstração: Inicialmente suponhamos que $\mathfrak{g}$ seja uma superálgebra de Lie. Mostremos que $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie. Sejam $x = g_0\otimes\xi_0 + g_1\otimes\xi_1$, $y = h_0\otimes\zeta_0 + h_1\otimes\zeta_1$, $z = k_0\otimes\tau_0 + k_1\otimes\tau_1 \in G(\mathfrak{g})$, com $g_0, h_0, k_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $\xi_0, \zeta_0, \tau_0 \in \Lambda(V)_{\bar{0}}$, $g_1, h_1, k_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e $\xi_1, \zeta_1, \tau_1 \in \Lambda(V)_{\bar{1}}$. Mostremos que vale a anticomutatividade.

$$
\begin{aligned}
[\![x,y]\!] &= [g_0\otimes\xi_0 + g_1\otimes\xi_1, h_0\otimes\zeta_0 + h_1\otimes\zeta_1] \\
&= [g_0\otimes\xi_0, h_0\otimes\zeta_0] + [g_0\otimes\xi_0, h_1\otimes\zeta_1] + [g_1\otimes\xi_1, h_0\otimes\zeta_0] + [g_1\otimes\xi_1, h_1\otimes\zeta_1] \\
&= [g_0,h_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0) + [g_0,h_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1) + [g_1,h_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0) + [g_1,h_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1) \\
&= -[h_0,g_0]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_0) - [h_1,g_0]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_0) - [h_0,g_1]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_1) \\
&\quad - [h_1,g_1]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_1) \\
&= -[h_0\otimes\zeta_0 + h_1\otimes\zeta_1, g_0\otimes\xi_0 + g_1\otimes\xi_1] \\
&= -[\![y,x]\!].
\end{aligned}
$$

Logo, a anticomutatividade é válida. Agora mostremos que vale a identidade de Jacobi em $G(\mathfrak{g})$.

$$
\begin{aligned}
[\![[\![x,y]\!],z]\!]+[\![y,[\![x,z]\!]]\!] &= [\![[g_0,h_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0)\,,z]\!]+[\![[g_0,h_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1)\,,z]\!]\\
&\quad+[\![[g_1,h_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0)\,,z]\!]+[\![[g_1,h_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1)\,,z]\!]\\
&\quad+[\![y,[g_0,k_0]\otimes(\xi_0\wedge\tau_0)]\!]+[\![y,[g_1,k_0]\otimes(\xi_1\wedge\tau_0)]\!]\\
&\quad+[\![y,[g_0,k_1]\otimes(\xi_0\wedge\tau_1)]\!]+[\![y,[g_1,k_1]\otimes(\xi_1\wedge\tau_1)]\!]\\
&= [\![[g_0,h_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0),k_0\otimes\tau_0+k_1\otimes\tau_1]\!]\\
&\quad+[\![[g_0,h_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1)\,,k_0\otimes\tau_0+k_1\otimes\tau_1]\!]\\
&\quad+[\![[g_1,h_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0),k_0\otimes\tau_0+k_1\otimes\tau_1]\!]\\
&\quad+[\![[g_1,h_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1),k_0\otimes\tau_0+k_1\otimes\tau_1]\!]\\
&\quad+[\![h_0\otimes\zeta_0+h_1\otimes\zeta_1,[g_0,k_0]\otimes(\xi_0\wedge\tau_0)]\!]\\
&\quad+[\![h_0\otimes\zeta_0+h_1\otimes\zeta_1,[g_1,k_0]\otimes(\xi_1\wedge\tau_0)]\!]\\
&\quad+[\![h_0\otimes\zeta_0+h_1\otimes\zeta_1,[g_0,k_1]\otimes(\xi_0\wedge\tau_1)]\!]\\
&\quad+[\![h_0\otimes\zeta_0+h_1\otimes\zeta_1,[g_1,k_1]\otimes(\xi_1\wedge\tau_1)]\!]\\
&= [[g_0,h_0],k_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[[g_0,h_0],k_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_0,h_1],k_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)+[[g_0,h_1],k_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_1,h_0],k_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[[g_1,h_0],k_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_1,h_1],k_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)+[[g_1,h_1],k_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)\\
&\quad+[h_0,[g_0,k_0]]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_0\wedge\tau_0)+[h_1,[g_0,k_0]]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_0\wedge\tau_0)\\
&\quad+[h_0,[g_1,k_0]]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_1\otimes\tau_0)+[h_1,[g_1,k_0]]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_1\otimes\tau_0)\\
&\quad+[h_0,[g_0,k_1]]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_0\wedge\tau_1)+[h_1,[g_0,k_1]]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[h_0,[g_1,k_1]]\otimes(\zeta_0\wedge\xi_1\wedge\tau_1)+[h_1,[g_1,k_1]]\otimes(\zeta_1\wedge\xi_1\wedge\tau_1)\\
&= [[g_0,h_0],k_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[[g_0,h_0],k_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_0,h_1],k_0]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)+[[g_0,h_1],k_1]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_1,h_0],k_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[[g_1,h_0],k_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[[g_1,h_1],k_0]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)+[[g_1,h_1],k_1]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)\\
&\quad+[h_0,[g_0,k_0]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[h_1,[g_0,k_0]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)\\
&\quad+[h_0,[g_1,k_0]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\otimes\tau_0)-[h_1,[g_1,k_0]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\otimes\tau_0)\\
&\quad+[h_0,[g_0,k_1]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)+[h_1,[g_0,k_1]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[h_0,[g_1,k_1]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)-[h_1,[g_1,k_1]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)\\
&= [g_0,[h_0,k_0]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)+[g_1,[h_0,k_0]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_0)\\
&\quad+[g_0,[h_0,k_1]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)+[g_1,[h_0,k_1]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_0\wedge\tau_1)\\
&\quad+[g_0,[h_1,k_0]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)+[g_1,[h_1,k_0]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_0)\\
&\quad+[g_0,[h_1,k_1]]\otimes(\xi_0\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)+[g_1,[h_1,k_1]]\otimes(\xi_1\wedge\zeta_1\wedge\tau_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\![g_0 \otimes \xi_0, [h_0, k_0] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_0)]\!] + [\![g_1 \otimes \xi_1, [h_0, k_0] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_0)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0, [h_0, k_1] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_1)]\!] + [\![g_1 \otimes \xi_1, [h_0, k_1] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_1)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0, [h_1, k_0] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_0)]\!] + [\![g_1 \otimes \xi_1, [h_1, k_0] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_0)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0, [h_1, k_1] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_1)]\!] + [\![g_1 \otimes \xi_1, [h_1, k_1] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_1)]\!] \\
&= [\![g_0 \otimes \xi_0 + g_1 \otimes \xi_1, [h_0, k_0] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_0)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0 + g_1 \otimes \xi_1, [h_0, k_1] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_1)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0 + g_1 \otimes \xi_1, [h_1, k_0] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_0)]\!] \\
&\quad + [\![g_0 \otimes \xi_0 + g_1 \otimes \xi_1, [h_1, k_1] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_1)]\!] \\
&= [\![x, [h_0, k_0] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_0)]\!] + [\![x, [h_0, k_1] \otimes (\zeta_0 \wedge \tau_1)]\!] \\
&\quad + [\![x, [h_1, k_0] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_0)]\!] + [\![x, [h_1, k_1] \otimes (\zeta_1 \wedge \tau_1)]\!] \\
&= [\![x, [\![y, z]\!]]\!].
\end{aligned}
$$

Isso mostra que, se $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie, então $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Lie.

Reciprocamente, suponhamos que $G(\mathfrak{g})$ seja uma álgebra de Lie. Mostremos que $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie.

Para mostrar que $[\cdot, \cdot]$ satisfaz a superanticomutatividade, considere elementos homogêneos $x \otimes \xi, y \otimes \zeta \in G(\mathfrak{g})$, e observemos que

$$
\begin{aligned}
[x, y] \otimes (\xi \wedge \zeta) &= [\![x \otimes \xi, y \otimes \zeta]\!] \\
&= -[\![y \otimes \zeta, x \otimes \xi]\!] \\
&= -[y, x] \otimes (\zeta \wedge \xi) \\
&= -(-1)^{|\xi||\zeta|}[y, x] \otimes (\xi \wedge \zeta).
\end{aligned}
$$

Como $|\xi| = |x|$ e $|\zeta| = |y|$, isso implica que $\big([x, y] + (-1)^{|x||y|}[y, x]\big) \otimes \eta = 0$, para todo $\eta \in \Lambda(V)$. Consequentemente, $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ homogêneos. Isso mostra que $[\cdot, \cdot]$ satisfaz a super anti comutatividade.

Agora, para mostrar a super identidade de Jacobi, considere três elementos homogêneos $x \otimes \xi, y \otimes \zeta, z \otimes \tau \in G(\mathfrak{g})$, e observemos que

$$
\begin{aligned}
[x, [y, z]] \otimes (\xi \wedge \zeta \wedge \tau) &= [\![(x \otimes \xi), [\![(y \otimes \zeta), (z \otimes \tau)]\!]]\!] \\
&= [\![[\![(x \otimes \xi), (y \otimes \zeta)]\!], (z \otimes \tau)]\!] + [\![(y \otimes \zeta), [\![(x \otimes \xi), (z \otimes \tau)]\!]]\!] \\
&= [[x, y], z] \otimes (\xi \wedge \zeta \wedge \tau) + [y, [x, z]] \otimes (\zeta \wedge \xi \wedge \tau) \\
&= [[x, y], z] \otimes (\xi \wedge \zeta \wedge \tau) + (-1)^{|\zeta||\xi|}[y, [x, z]] \otimes (\xi \wedge \zeta \wedge \tau).
\end{aligned}
$$

Como $|\xi| = |x|$ e $|\zeta| = |y|$, isso implica que $\big([x, [y, z]] - [[x, y], z] - (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]\big) \otimes \eta = 0$, para todo $\eta \in \Lambda(V)$. Consequentemente, $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$, para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogêneos. Isso mostra que $[\cdot, \cdot]$ satisfaz a super identidade de Jacobi, e termina a demonstração. ■

1.3.1 Formas bilineares, supertraço e superálgebras simples

Nesta subseção, vamos construir exemplos de superálgebra de Lie simples e não-simples (ver Exemplos 1.28 e 1.29).

Definição 1.3.2. *Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ um espaço $\mathbb{Z}_2-$graduado e f uma forma bilinear $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Diremos que:*

- *f é **consistente** se $f(a,b) = 0$, para todos $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $b \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$.*
- *f é **supersimétrica** se $f(a,b) = (-1)^{|a||b|} f(b,a)$ para todos $a, b \in \mathfrak{g}$ homogêneos.*
- *f é **invariante** se $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie e $f([a,b], c) = f(a, [b,c])$ para todos $a, b, c \in \mathfrak{g}$.*

*Consideremos uma matriz $a = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(m,n)$ e definamos o seu **supertraço** por*

$$str(a) = tr(\alpha) - tr(\delta).$$

.

Lema 1.1. *A forma bilinear $\kappa(a,b) = \operatorname{str}(ab)$ em $\mathfrak{gl}(V)$ é consistente, supersimétrica, invariante, e além disso, $\operatorname{str}([a,b]) = 0$, para todos $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$.*

Demonstração: Inicialmente, observemos que κ é uma forma bilinear, pois a multiplicação em $\mathfrak{gl}(V)$ e o traço são transformações lineares. Agora, vamos mostrar que κ é consistente. Sejam $a = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}}$ e $b = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_2 \\ \hline \gamma_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}}$. Assim, $ab = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha_1\beta_2 \\ \hline \delta_1\gamma_2 & 0 \end{array}\right)$ e $ba = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_2\delta_1 \\ \hline \gamma_2\alpha_1 & 0 \end{array}\right)$. Daí,

$$\kappa(a,b) = \operatorname{str}(ab) = 0 = \operatorname{str}(ba) = \kappa(b,a). \tag{1.10}$$

Isso mostra que κ é consistente.

Provemos agora que κ é supersimétrica. Sejam $a = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 \end{array}\right)$, $b = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \delta_2 \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}}$. Observemos que $ab = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1\delta_2 \end{array}\right)$ e $ba = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_2\delta_1 \end{array}\right)$. Daí,

$$\kappa(a,b) = \operatorname{str}(ab) = \operatorname{tr}(\alpha_1\alpha_2) - \operatorname{tr}(\delta_1\delta_2) = \operatorname{tr}(\alpha_2\alpha_1) - \operatorname{tr}(\delta_2\delta_1) = \operatorname{str}(ba) = \kappa(b,a).$$

Agora, sejam $a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_1 \\ \hline \gamma_1 & 0 \end{array}\right)$, $b = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_2 \\ \hline \gamma_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}}$. Assim, $ab = \left(\begin{array}{c|c} \beta_1\gamma_2 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_1\beta_2 \end{array}\right)$ e $ba = \left(\begin{array}{c|c} \beta_2\gamma_1 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_2\beta_1 \end{array}\right)$. Daí,

$$\kappa(a,b) = \operatorname{str}(ab) = \operatorname{tr}(\beta_1\gamma_2) - \operatorname{tr}(\gamma_1\beta_2) = -\operatorname{str}(ba) = -\kappa(b,a).$$

Junto com a Equação (1.10), isso mostra que κ é supersimétrica.

Provemos agora que $\operatorname{str}([a,b]) = 0$, para todos $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$. Sabemos que $\operatorname{str}([a,b]) = \operatorname{str}\left(ab - (-1)^{|a||b|}\, ba\right)$. Se $a \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}}$ ou $b \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}}$, então

$$\operatorname{str}([a,b]) = \operatorname{str}(ab - ba) = \operatorname{str}(ab) - \operatorname{str}(ba) = 0.$$

Se $a, b \in \mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}}$, com $a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_1 \\ \hline \gamma_1 & 0 \end{array}\right)$ e $b = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta_2 \\ \hline \gamma_2 & 0 \end{array}\right)$, então $ab = \left(\begin{array}{c|c} \beta_1\gamma_2 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_1\beta_2 \end{array}\right)$ e $b = \left(\begin{array}{c|c} \beta_2\gamma_1 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_2\beta_1 \end{array}\right)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\operatorname{str}([a,b]) &= \operatorname{str}\left(ab - (-1)^{(\bar{1}\,\bar{1})}\, ba\right) \\
&= \operatorname{str}(ab + ba) \\
&= \operatorname{str}\left(\left(\begin{array}{c|c} \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1 \end{array}\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) - \operatorname{tr}(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1) \\
&= \operatorname{tr}(\beta_1\gamma_2) + \operatorname{tr}(\beta_2\gamma_1) - \operatorname{tr}(\gamma_1\beta_2) - \operatorname{tr}(\gamma_2\beta_1) \\
&= \operatorname{tr}(\beta_1\gamma_2) + \operatorname{tr}(\beta_2\gamma_1) - \operatorname{tr}(\beta_2\gamma_1) - \operatorname{tr}(\beta_1\gamma_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{str}([a,b]) = 0$, para todos $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$.

Resta mostrar que κ é invariante. Como $\mathfrak{gl}(V)$ é uma superálgebra associativa, temos $[b, ac] = [b,a]\,c + (-1)^{|a||b|} a\,[b,c]$, para todos $a, b, c \in \mathfrak{gl}(V)$. De fato, dados $a, b, c \in \mathfrak{gl}(V)$, temos

$$\begin{aligned}
[b,a]c + (-1)^{|a||b|}\, a[b,c] &= \left(ba - (-1)^{|b||a|}\, ab\right) c + (-1)^{|a||b|}\, a \left(bc - (-1)^{|b||c|}\, cb\right) \\
&= bac - (-1)^{|b||a|} abc + (-1)^{|a||b|}\, abc - (-1)^{|a||b|+|b||c|}\, acb \\
&= bac - (-1)^{|b|(|a|+|c|)} acb \\
&= [b, ac].
\end{aligned}$$

Daí, segue que $\kappa([b,a],c) + (-1)^{|a||b|}\kappa(a,[b,c]) = \operatorname{str}([b,ac]) = 0$. Logo, $\kappa([a,b],c) = -(-1)^{|a||b|}\kappa([b,a],c) = \kappa(a,[b,c])$. Portanto, κ é invariante. ■

Consideremos $e_1, \cdots e_m, e_{m+1}, \cdots, e_{m+n}$ uma base de V, na qual os m primeiros vetores formam uma base de $V_{\bar{0}}$ e os n últimos formam uma base de $V_{\bar{1}}$, e a denominaremos **base homogênea**. A forma matricial de uma transformação linear $T : V \longrightarrow V$ nesta base é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \delta \end{array}\right],$$

com α uma matriz $m \times m$, δ uma matriz $n \times n$, β uma matriz $m \times n$ e γ uma matriz $n \times m$.

Definição 1.3.3. *A* ***superálgebra de Lie Especial Linear*** *é definida por*

$$\mathfrak{sl}\,(m,n) = \{a \in \mathfrak{gl}\,(m,n)\,|str\,(a) = 0\}.$$

Observemos que $\mathfrak{sl}(m,n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(m,n)$ para todo $m,n \geq 0$. De fato, inicialmente, notemos que $\mathfrak{sl}(m,n)$ é um subsupersespaço de $\mathfrak{gl}(m,n)$, já que, $0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{sl}(m,n)$ e dados $x, y \in \mathfrak{sl}(m,n)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos, $\operatorname{str}(x) = 0 = \operatorname{str}(y)$ e como o supertraço é linear, segue que $\operatorname{str}(x+\lambda y) = \operatorname{str}(x)+\lambda\operatorname{str}(y) = 0$. Além disso, dadas $h_1, h_2 \in \mathfrak{sl}(m,n)$, pelo Lema 1.1, temos $\operatorname{str}([h_1,h_2]) = 0$ e portanto, $[h_1,h_2] \in \mathfrak{sl}(m,n)$.

Exemplo 1.28. *Consideremos a superálgebra de Lie*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,2) = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} a+d & x & y \\ \hline z & a & b \\ w & c & d \end{array}\right) \middle|\, a,b,c,d,x,y,z,w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Observemos que $\mathfrak{sl}(1,2)$ é uma superálgebra de dimensão 8 e que as partes pares e ímpares são $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} a+d & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}\right) \middle|\, a,c,c,d \in \mathbb{C} \right\}$ *e* $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, *com*

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{array}\right) \middle|\, z,w \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & x & y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \middle|\, x,y \in \mathbb{C} \right\}.$$

Para mostrar que $\mathfrak{sl}(1,2)$ é uma superálgebra de Lie simples, primeiro, consideremos uma base para $\mathfrak{sl}(1,2)$, dada por $\zeta = \{X,H,Y,Z,U^+,V^+,U^-,V^-\}$, na qual

$$X = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad Y = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad Z = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$U^+ = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad U^- = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad V^+ = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad V^- = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Os comutadores entre elementos de ζ são dados pela seguinte tabela:

	X	H	Z	V^-	Y	U^+	U^-	V^+
$[X,-]$	0	$2X$	X	$-H$	U^-	0	0	$-U^+$
$[H,-]$	$-2X$	0	0	$2V^-$	Y	$-U^+$	$-U^-$	V^+
$[Z,-]$	$-X$	0	0	V^-	0	0	$-U^-$	V^+
$[V^-,-]$	H	$-2V^-$	$-V^-$	0	0	$-V^-$	Y	0
$[Y,-]$	$-U^-$	$-Y$	0	0	0	Z	0	V^-
$[U^+,-]$	0	U^+	0	V^+	Z	0	X	0
$[U^-,-]$	0	U^-	U^-	$-Y$	0	X	0	$Z-H$
$[V^+,-]$	U^+	$-V^+$	$-V^+$	0	V^-	0	$Z-H$	0

Segue da tabela acima que $\mathfrak{sl}(1,2)$ não contém nenhum ideal próprio. De fato, se $I \subseteq \mathfrak{sl}(1,2)$ for um ideal não-nulo de $\mathfrak{sl}(1,2)$, então existem $a_1, \ldots, a_8 \in \mathbb{C}$ não todos nulos, tais que $a_1U^- + a_2Y + a_3X + a_4H + a_7Z + a_6V^- + a_7U^+ + a_8V^+ \in I$. Usando os comutadores explicitados na tabela acima (e dependendo de quais coeficientes são não-nulos), vemos que $\zeta \subseteq I$. Segue daí que $\mathfrak{sl}(1,2) \subseteq I$.

Exemplo 1.29. *Dado $n > 0$, consideremos a superálgebra de Lie*

$$\mathfrak{sl}(n,n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \middle| \, A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{F}), \ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) \right\}.$$

Observemos que $\mathfrak{sl}(n|n)$ tem dimensão $4n^2 - 1$, que

$$\mathfrak{sl}(n,n)_{\overline{0}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \middle| \, A, D \in M_{n\times n}(\mathbb{F}), \ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) \right\},$$

e que $\mathfrak{sl}(n,n)_{\overline{1}} = \mathfrak{sl}(n,n)_{-1} \oplus \mathfrak{sl}(n,n)_1$, com

$$\mathfrak{sl}(n,n)_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \middle| \, C \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{sl}(n,n)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}) \right\}.$$

Notemos que $\mathfrak{sl}(n,n)$ não é simples, já que o ideal I gerado por $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_n \end{array} \right)$ é próprio. De fato, $I = span \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_n \end{array} \right) \right\}$, pois toda matriz da forma $A = \lambda \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_n & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_n \end{array} \right)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, é par e satisfaz $[A, B] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ para todo $B \in \mathfrak{sl}(n,n)$. Portanto, como I é um ideal próprio, temos que $\mathfrak{sl}(n,n)$ não é uma superálgebra de Lie simples.

Exemplo 1.30. *Sejam $0 \leq m \leq n$ e F uma forma bilinear não-degenerada em $\mathbb{C}^{m,n}$ tal que a sua restrição à parte par é simétrica, a sua restrição à parte ímpar é anti-simétrica, e as par e ímpar são ortogonais. Definamos a superálgebra de Lie **ortossimplética** $\mathfrak{osp}(m,n)$ como sendo $\mathfrak{osp}(m,n) = \mathfrak{osp}(m,n)_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{osp}(m,n)_{\overline{1}}$, com*

$$\mathfrak{osp}(m,n)_s := \{T \in \mathfrak{gl}(m,n)_s \mid F(Tv, w) = -(-1)^{s|v|}F(v, Tw), \text{ para todos } v, w \in \mathbb{C}^{m,n}\}$$

para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Observemos que $\mathfrak{osp}(m,n)$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{gl}(m,n)$. De fato, sejam $v, w \in \mathbb{C}^{m,n}$, $T \in \mathfrak{osp}(m,n)_t$ e $S \in \mathfrak{osp}(m,n)_s$, $s, t \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
F\left([T,S](v), w\right) &= F\left(\left(T \circ S - (-1)^{|t||s|} S \circ T\right)(v), w\right) \\
&= F\left((T \circ S)(v), w\right) - (-1)^{|t||s|} F\left((S \circ T)(v), w\right) \\
&= -(-1)^{(t+s)|v|} F\left(v, (T \circ S)(w)\right) + (-1)^{|t||s|}(-1)^{(t+s)|v|} F\left(v, (T \circ S)(w)\right) \\
&= -(-1)^{(s+t)|v|} \left(F(v, (T \circ S)(w)) - (-1)^{|t||s|} F(v, (S \circ T)(w))\right)
\end{aligned}$$

$$= -(-1)^{(s+t)|v|} F\left(v, \left(T \circ S - (-1)^{|t||s|} S \circ T\right)(w)\right)$$
$$= -(-1)^{(s+t)|v|} F\left(v, [T,S](w)\right).$$

Agora nós vamos identificar as matrizes correspondentes aos elementos de $\mathfrak{osp}(m,n)$*. Para isso, fixemos uma base para o superespaço vetorial* $\mathbb{C}^{m,n}$ *de forma que os* m *primeiros vetores dessa base formem uma base para* $\mathbb{C}^{m,n}_{\bar{0}}$ *e os* n *últimos vetores formem uma base para* $\mathbb{C}^{m,n}_{\bar{1}}$*. Observemos que, em relação a essa base, a matriz de Gram de* F *tem a forma*

$$J := \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right), \tag{1.11}$$

com $G \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ *uma matriz simétrica invertível e* $H \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *uma matriz antissimétrica invertível (em particular,* n *é par). Além disso, para todos* $v, w \in \mathbb{C}^{m,n}$*, temos*

$$F(v,w) = (v)^t J(w),$$

com (w) *é o vetor-coluna formado pelas coordenadas de* w *na base fixada e* $(v)^t$ *é o vetor-linha formado pelas coordenadas de* v *nesta base.*

Sejam $X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ *a matriz de um elemento* $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m,n})$*,* $v \in \mathbb{C}^{m+n}$*,* $v_0 \in \mathbb{C}^{m,n}_{\bar{0}}$ *e* $v_1 \in \mathbb{C}^{m,n}_{\bar{1}}$ *tais que* $v = v_0 + v_1$*:*

- *Se* T *e* v *são pares, então* $F(Tv,-) = -F(v,T-)$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & v_t X^t J = -v^t JX \\ \iff\ & (v_0^t \mid 0)\left(\begin{array}{c|c} A^t & 0 \\ \hline 0 & D^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) = -(v_0^t \mid 0)\left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \\ \iff\ & (v_0^t \mid 0)\left(\begin{array}{c|c} A^tG & 0 \\ \hline 0 & D^tH \end{array}\right) = -(v_0^t \mid 0)\left(\begin{array}{c|c} GA & 0 \\ \hline 0 & HD \end{array}\right) \\ \iff\ & (v_0^t A^t G \mid 0) = (-v_0^t GA \mid 0). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de v_0*, temos*

$$A^t G = -GA. \tag{1.12}$$

- *Se* T *é par e* v *é ímpar, então* $F(Tv,-) = -F(v,T-)$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & v^t X^t J = -v^t JX \\ \iff\ & (0 \mid v_1^t)\left(\begin{array}{c|c} A^t & 0 \\ \hline 0 & D^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) = -(0 \mid v_1^t)\left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \\ \iff\ & (0 \mid v_1^t)\left(\begin{array}{c|c} A^tG & 0 \\ \hline 0 & D^tH \end{array}\right) = -(0 \mid v_1^t)\left(\begin{array}{c|c} GA & 0 \\ \hline 0 & HD \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\iff (0 \mid v_1^t D^t H) = (0 \mid v_1^t HD).$$

Pela arbitrariedade de v_1, temos

$$D^t H = -HD. \tag{1.13}$$

- *Se T e v são ímpares, então $F(Tv, -) = F(v, T-)$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
&v_t X^t J = v^t JX \\
&\iff (0 \mid v_1^t) \left(\begin{array}{c|c} 0 & C^t \\ \hline B^t & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) = (0 \mid v_1^t) \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \\
&\iff (v_0^t \mid 0) \left(\begin{array}{c|c} 0 & C^t H \\ \hline B^t G & 0 \end{array}\right) = (0 \mid v_1^t) \left(\begin{array}{c|c} 0 & GB \\ \hline HC & 0 \end{array}\right) \\
&\iff (v_1^t B^t G \mid 0) = (v_1^t HC \mid 0).
\end{aligned}$$

Novamente, pela arbitrariedade de v_1, temos

$$B^t G = HC. \tag{1.14}$$

- *Se T é ímpar e v é par, então $F(Tv, -) = -F(v, T-)$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
&v^t X^t J = -v^t JX \\
&\iff (v_0^t \mid 0) \left(\begin{array}{c|c} 0 & C^t \\ \hline B^t & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) = -(v_0^t \mid 0) \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \\
&\iff (v_0^t \mid 0) \left(\begin{array}{c|c} 0 & C^t H \\ \hline B^t G & 0 \end{array}\right) = (-v_0^t \mid 0) \left(\begin{array}{c|c} 0 & GB \\ \hline HC & 0 \end{array}\right) \\
&\iff (0 \mid v_0^t C^t H) = (0 \mid -v_0^t GB),
\end{aligned}$$

Novamente, pela arbitrariedade de v_0, temos $C^t H = -GB$. Essa equação é equivalente à:

$$\begin{aligned}
C^t H = -GB &\iff (H^t C)^t = (-B^t G^t)^t \\
&\iff (-HC)^t = (-B^t G)^t \\
&\iff -HC = -B^t G \\
&\iff B^t G = HC.
\end{aligned}$$

Assim, das Equações 1.12, 1.13 e 1.14, obtemos que X é a matriz correspondente a um elemento $T \in \mathfrak{osp}(m,n)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} A^t G + GA = 0, \\ B^t G - HC = 0, \\ D^t H + HD = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

1.3.2 Superálgebra Universal Envelopante

Lembremos que no Exemplo 1.15, nós definimos a álgebra tensorial $T(V)$ de um superespaço vetorial V. No caso em que $V = \mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie, podemos considerar o ideal bilateral J de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos da forma

$$x \otimes y - (-1)^{|x||y|}\ y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g} \text{ homogêneos.} \tag{1.16}$$

Observemos que, se denotarmos $|x| = i$ e $|y| = j$, então os três termos da Equação (1.16) têm grau $i + j$. Isso implica que J é um ideal graduado de $T(\mathfrak{g})$. Assim,

$$U(\mathfrak{g}) := \frac{T(\mathfrak{g})}{J} \tag{1.17}$$

é uma superálgebra associativa, chamada **superálgebra universal envelopante** de $\mathfrak{g}$. A multiplicação em $U(\mathfrak{g})$, que é induzida pela multiplicação em $T(\mathfrak{g})$, será denotada simplesmente pela concatenação.

Consideremos a inclusão $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ definida no Exemplo 1.15, a projeção canônica $\pi : T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})$, e definamos $\sigma \doteq \pi \circ i : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$. Pela Equação (1.16), temos

$$\sigma(x)\sigma(y) - (-1)^{|x||y|}\ \sigma(y)\sigma(x) = \sigma\left([x, y]\right), \quad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ homogêneos.} \tag{1.18}$$

Se a dimensão de $\mathfrak{g}$ for finita, $\dim \mathfrak{g} = n$, dada uma base graduada $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathfrak{g}$, o conjunto $\{i(x_{k_1}) \cdots i(x_{k_m}) \mid 0 \leq m,\ 1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n\}$ forma uma base graduada de $T(\mathfrak{g})$ (ver Exemplo 1.15), e consequentemente, usando a Equação (1.18), concluímos que o conjunto

$$\{\sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \mid 0 \leq m,\ 1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_m \leq n\} \tag{1.19}$$

gera $U(\mathfrak{g})$.

O par $(U(\mathfrak{g}), \sigma)$ é unicamente determinado (a menos de isomorfismo) pela propriedade universal a seguir.

Proposição 1.2. *Seja A uma álgebra associativa com unidade. Para toda transformação linear $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ tal que*

$$f\left([a, b]\right) = f(a)f(b) - (-1)^{|a||b|}\ f(b)f(a), \quad \text{para todos } a, b \in \mathfrak{g} \text{ homogêneos,} \tag{1.20}$$

existe um único homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que

$$f = \tilde{f} \circ \sigma.$$

Demonstração: Seja $f : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ uma transformação linear. Observemos que existe um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, explicitamente dado por:

$$\tilde{f}\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1, \ldots, k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m})\right) := \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1, \ldots, k_m} f(x_{k_1}) \cdots f(x_{k_m}).$$

De fato, $\tilde{f}$ é um homomorfismo de álgebras, pois, para quaisquer $\gamma \in \mathbb{F}$,

$$u = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \in U(\mathfrak{g}),$$
$$w = \sum_{1 \leq l_1, \ldots, l_p \leq n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} \sigma(x_{l_1}) \cdots \sigma(x_{l_p}) \in U(\mathfrak{g}),$$

temos

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(u+w) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) + \sum_{1 \leq l_1, \ldots, l_p \leq n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} \sigma(x_{l_1}) \cdots \sigma(x_{l_p}) \right) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ 1 \leq l_1 \ldots l_p \leq n}} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \ \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) + \beta_{l_1,\ldots,l_p} \sigma(x_{l_1}) \cdots \sigma(x_{l_p}) \right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n \\ 1 \leq l_1 \ldots l_p \leq n}} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1}) \cdots f(x_{k_m}) + \beta_{l_1,\ldots,l_p} f(x_{l_1}) \cdots f(x_{l_p}) \\
&= \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1}) \cdots f(x_{k_m}) + \sum_{1 \leq l_1 \ldots l_p \leq n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} f(x_{l_1}) \cdots f(x_{l_p}) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \right) + \tilde{f}\left(\sum_{1 \leq l_1, \ldots, l_p \leq n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} \sigma(x_{l_1}) \cdots \sigma(x_{l_p}) \right) \\
&= \tilde{f}(u) + \tilde{f}(w),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(\gamma u) \\
&= \tilde{f}\left(\gamma \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \right) \\
&= \tilde{f}\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \gamma \ \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \right) \\
&= \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \gamma \ \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1}) \cdots f(x_{k_m}) \\
&= \ \gamma \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1}) \cdots f(x_{k_m}) \\
&= \ \gamma \ \tilde{f}\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \right) \\
&= \ \gamma \ \tilde{f}(u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(uw) \\
&= \tilde{f}\left(\left(\sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_m \leq n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} \sigma(x_{k_1}) \cdots \sigma(x_{k_m}) \right) \left(\sum_{1 \leq l_1, \ldots, l_p \leq n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} \sigma(x_{l_1}) \cdots \sigma(x_{l_p}) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{f}\left(\sum_{\substack{1\le k_1,\ldots,k_m\le n\\ 1\le l_1,\ldots,l_p\le n}} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\beta_{l_1,\ldots,l_p}\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\sigma(x_{l_1})\cdots\sigma(x_{l_p})\right)\\
&= \sum_{\substack{1\le k_1,\ldots,k_m\le n\\ 1\le l_1,\ldots,l_p\le n}} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\beta_{l_1,\ldots,l_p} f(x_{k_1})\cdots f(x_{k_m}) f(x_{l_1})\cdots f(x_{l_p})\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1})\cdots f(x_{k_m}) \sum_{1\le l_1,\ldots,l_p\le n} \beta_{l_1,\ldots,l_p} f(x_{l_1})\cdots f(x_{l_p})\\
&= \tilde{f}\left(\sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\right)\tilde{f}\left(\sum_{1\le l_1,\ldots,l_p\le n} \beta_{l_1,\ldots,l_p}\sigma(x_{l_1})\cdots\sigma(x_{l_p})\right)\\
&= \tilde{f}(u)\tilde{f}(w).
\end{aligned}
$$

Além disso, observemos que $\tilde{f}(\sigma(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Suponhamos que existam homomorfismos de álgebras $\tilde{f},\ \overline{f} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, tais que $\tilde{f}\circ\sigma = f = \overline{f}\circ\sigma$. Consideremos $u \in U(\mathfrak{g})$. Pela Equação 1.19, existem $m \geq 0$, $1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_m \leq n$ e $x_{k_1},\ldots,x_{k_m} \in \mathfrak{g}$ homogêneos, tais que $u = \sum\limits_{m\geq 0}\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})$. Assim, aplicando $\tilde{f}$ e $\overline{f}$, temos

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(u) &= \overline{f}\left(\sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\right)\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\overline{f}\left(\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\right)\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\overline{f}(\sigma(x_{k_1}))\cdots\overline{f}(\sigma x_{k_m}))\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m} f(x_{k_1})\cdots f(x_{k_m})\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\tilde{f}(\sigma(x_{k_1}))\cdots\tilde{f}(\sigma(x_{k_m}))\\
&= \sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\tilde{f}\left(\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\right)\\
&= \tilde{f}\left(\sum_{1\le k_1,\ldots,k_m\le n} \lambda_{k_1,\ldots,k_m}\sigma(x_{k_1})\cdots\sigma(x_{k_m})\right)\\
&= \tilde{f}(u).
\end{aligned}
$$

Logo, $\overline{f} = \tilde{f}$. ■

O seguinte teorema é importante para a descrição da superálgebra universal envelopante e também para a teoria de representações de $\mathfrak{g}$.

Teorema 1.2 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\overline{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\overline{1}}$ uma superálgebra de Lie, X_0 uma base para $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ e X_1 uma base para $\mathfrak{g}_{\overline{1}}$. Se $\leq$ é uma relação de ordem total em*

$X = X_0 \cup X_1$, então o conjunto de todos os monômios da forma

$$x_1 x_2 \cdots x_n,$$

com $x_i \in X$, $x_i \leq x_{i+1}$ e $x_i \neq x_{i+1}$ se $x_i \in X_1$, é uma base para $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (MUSSON, 2012, Theorem 6.1.1). ■

Exemplo 1.31. *Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie abeliana (ou seja, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$) de dimensão finita, com dim $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = m$ e dim $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = n$. Nesse caso, a Equação 1.18 (omitindo σ), se torna*

$$x \otimes y - (-1)^{|x||y|}\ y \otimes x, \quad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ homogêneos.}$$

*Observemos que esse exemplo generaliza o Exemplo 1.16, e por isso, $U(\mathfrak{g})$ nesse caso é chamada de **álgebra simétrica de** $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.32. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, com $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = span\{x\}$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = span\{y\}$ e $[x, y] = y$. Nesse caso, a Equação 1.18 (omitindo σ), se torna*

$$y \otimes y - (-1)^{|y||y|}\ y \otimes y - [y, y] = y \otimes y + y \otimes y, \qquad \text{ou seja,} \quad y^2 = 0,$$
$$x \otimes y - (-1)^{|x||y|}\ y \otimes x - [x, y] = x \otimes y - \ y \otimes x - y, \qquad \text{ou seja,} \quad yx = xy - y.$$

Consequentemente, $\{\sigma(x)^k \sigma(y)^\epsilon \mid k \geq 0,\ \epsilon \in \{0, 1\}\}$ forma uma base para $U(\mathfrak{g})$ e existe um isomorfismo de espaços vetoriais $U(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{F}[x] \otimes \Lambda(1)$.

Corolário 1.1. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e $U(\mathfrak{g})$ a superálgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$ (ver Equação 1.17). A aplicação $\sigma =: \pi \circ i : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo injetor de superálgebras de Lie.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{g}$ Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e $U(\mathfrak{g})$ a superálgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$. Consideremos $\sigma =: \pi \circ i : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$. Mostremos que σ é um homomorfismo de superálgebras.

Observemos que como π e i são graduadas e são lineares, temos que $\sigma = \pi \circ i$ é graduada e é linear. Sejam x, $y \in \mathfrak{g}$. Como π e i são homomorfismos de superálgebras, temos

$$\begin{aligned}
\sigma([x, y]) &=: (\pi \circ i)([x, y]) \\
&= \pi(i([x, y])) \\
&= \pi(i(x)i(y)) - (-1)^{|x||y|}\ \pi(i(x)i(y)) \\
&= \pi(i(x))\pi(i(y)) - (-1)^{|x||y|}\ \pi(i(y))\pi(i(x)) \\
&= \sigma(x)\sigma(y) - (-1)^{|x||y|}\ \sigma(y)\sigma(x).
\end{aligned}$$

Logo, σ é um homomorfismo de superálgebras de Lie.

Agora, consideremos X_0 uma base para $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e X_1 uma base para $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, pelo Teorema de PBW (ver Teorema 1.2), temos que os monômios da forma $\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots\sigma(x_n)$ são uma base para $U(\mathfrak{g})$. Logo, $\{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \cdots, \sigma(x_n)\}$ é um conjunto linearmente independe e daí, σ é injetor. Portanto, σ é um homomorfismo injetor de superálgebras de Lie. ■

Observação 1.2. *Em toda superálgebra de Lie pode ser identificada com uma subsuperálgebra de Lie de uma superálgebra de Lie cujo supercolchete é dado pelo supercomutador.*

De fato. Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie. Consideremos $U(\mathfrak{g})$ a superálgebra universal envelopante (ver Equação 1.17), sabemos que $U(\mathfrak{g})$ é uma superálgebra associativa e também que em toda superálgebra associativa está definido o supercomutador (ver Exemplo 1.20). Como $\sigma := \pi \circ i$ é um homomorfismo injetor (ver Corolário 1.1), temos $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$. Portanto, através de σ, o supercolchete de $\mathfrak{g}$ se identifica com o supercomutador da superálgebra de Lie $U(\mathfrak{g})$.

1.4 Módulos e representações de superálgebras de Lie

Assim como na teoria de álgebras de Lie, na teoria de superálgebras de Lie, as estruturas de módulos e as representações estão intimamente ligados e nessa seção definimos e exemplificamos essas estruturas e também suas relações.

Definição 1.4.1. *Dados V um superespaço vetorial e A uma superálgebra, uma **representação (graduada)** de A em V é um homomorfismo graduado de superálgebras $\rho : A \longrightarrow \operatorname{End} V$. Em particular, uma **representação (graduada)** ρ de uma superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ em V é um homomorfismo de superálgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, tal que $\rho(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)_{\bar{0}}$ e $\rho(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)_{\bar{1}}$. Ou seja, $\rho(\mathfrak{g}_i)(V_j) \subseteq V_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}_2$, e*

$$\rho([g_1, g_2])(v) = \big(\rho(g_1) \circ \rho(g_2) - (-1)^{|g_1||g_2|}\rho(g_2) \circ \rho(g_1)\big)(v), \tag{1.21}$$

*para todos $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$ homogêneos e $v \in V$. Se ρ é injetora, então a representação ρ é dita **fiel**.*

Exemplo 1.33. *Seja $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie. Consideremos a representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ induzida pelo supercolchete $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Explicitamente, essa representação é dada por*

$$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \qquad \operatorname{ad}(a)(b) = [a, b], \quad \text{para todo } a, b \in \mathfrak{g}.$$

*Essa representação é chamada de **representação adjunta**.*

Observemos que ad *é uma transformação linear par, pois $[\cdot,\cdot]$ é bilinear e é graduado (ver Definição 1.3.1). Além disso,* ad *é uma representação de $\mathfrak{g}$. De fato, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ homogêneos e $z \in \mathfrak{g}$, temos*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}([x, y])(z) &= [[x, y], z] \\
&= [x, [y, z]] - (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]] \\
&= \operatorname{ad}(x)([y, z]) - (-1)^{|x||y|} \operatorname{ad}(y)([x, z]) \\
&= \operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y)(z) - (-1)^{|x||y|} \operatorname{ad}(y) \circ \operatorname{ad}(x)(z) \\
&= [\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)](z).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.34. *Dados $m, n > 0$, a **representação natural** da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$ em $\mathbb{C}^{m,n}$ é definida por $\eta = \mathrm{Id}_{\mathfrak{gl}(m,n)} : \mathfrak{gl}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m,n})$; ou seja, $\eta(A)(v)$ é dado pela multiplicação à esquerda da matriz A pelo vetor v visto como uma matriz-coluna (compare com o Exemplo 1.43). Com efeito, observemos que $\eta(\mathfrak{gl}(m,n)_{\bar{0}}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m,n})_{\bar{0}}$ e $\eta(\mathfrak{gl}(m,n)_{\bar{1}}) = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m,n})_{\bar{1}}$. Além disso, dados $a, b \in \mathfrak{gl}(m,n)$ homogêneos, temos*

$$\begin{aligned}
\big(\eta(a)\circ\eta(b) - (-1)^{|a||b|}\eta(b)\circ\eta(a)\big)(v) &= (\eta(a)\circ\eta(b))(v) - (-1)^{|a||b|}(\eta(b)\circ\eta(a))(v)\\
&= \eta(a)(\eta(b)(v)) - (-1)^{|a||b|}\eta(b)(\eta(a)(v))\\
&= abv - (-1)^{|a||b|}bav\\
&= (ab - (-1)^{|a||b|}ba)(v)\\
&= [a,b](v)\\
&= \eta([a,b])(v).
\end{aligned}$$

Logo, η é uma representação.

Exemplo 1.35. *Seja $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação (graduada) de $\mathfrak{g}$ em V. Definamos a **representação dual (graduada)** de $\mathfrak{g}$ em V^* por*

$$\rho^*(x)f = -(-1)^{|x||f|} f \circ \rho(x),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $f \in V^*$ graduados. Como f e ρ são lineares e graduadas, temos que $\rho^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ é linear e graduada. Mostremos também que ρ^* é um homomorfismo de superálgebras de Lie. Dados $x, y \in \mathfrak{g}$ graduados e $f \in V^*$:

$$\begin{aligned}
&\rho^*([x,y])f\\
&= -(-1)^{(|x|+|y|)|f|} f\circ\rho([x,y])\\
&= -(-1)^{(|x|+|y|)|f|} f\circ\big(\rho(x)\circ\rho(y) - (-1)^{|x||y|}\,\rho(y)\circ\rho(x)\big)\\
&= -(-1)^{(|x|+|y|)|f|} f\circ\rho(x)\circ\rho(y) + (-1)^{(|x|+|y|)|f|+|x||y|} f\circ\rho(y)\circ\rho(x)\\
&= (-1)^{(|x|+|y|)|f|+|y|(|f|+|x|)}\rho^*(y)(f\circ\rho(x)) - (-1)^{(|x|+|y|)|f|+|x||y|+|x|(|f|+|y|)}\rho^*(x)(f\circ\rho(y))\\
&= -(-1)^{|x||f|+|x||y|+|x||f|}\rho^*(y)(\rho^*(x)f) + (-1)^{|y||f|+|f||y|}\rho^*(x)(\rho^*(y)f)\\
&= \big(\rho^*(x)\rho^*(y) - (-1)^{|x||y|}\rho^*(y)\rho^*(x)\big)f\\
&= [\rho^*(x), \rho^*(y)]\,f.
\end{aligned}$$

Logo, $\rho^*(x)f$ é um homomorfismo de superálgebras de Lie.

Exemplo 1.36. *Sejam $\rho_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^1)$ e $\rho_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^2)$ representações (graduadas) de $\mathfrak{g}$. Definamos o **produto tensorial** de ρ_1 e ρ_2 como sendo a representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^1 \otimes V^2)$ dada por*

$$\rho(x)(v_1\otimes v_2) = \rho_1(x)v_1\otimes v_2 + (-1)^{|x||v_1|}v_1\otimes\rho_2(x)v_2, \tag{1.22}$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V^1$, $v_2 \in V^2$ homogêneos.

Observemos que, como $\rho_1(\mathfrak{g}_i)(V^1_j) \subseteq V^1_{i+j}$ e $\rho_2(\mathfrak{g}_i)(V^2_k) \subseteq V^2_{i+k}$ para todos $i, j, k \in \mathbb{Z}_2$, temos $\rho(\mathfrak{g}_i)(V^1_j \otimes V^2_k) \subseteq (V^1_{i+j} \otimes V^2_k + V^1_j \otimes V^2_{i+k}) \subseteq (V^1 \otimes V^2)_{i+j+k}$. Além disso, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V^1$ e $v_2 \in V^2$ homogêneos, temos:

$$
\begin{aligned}
&\rho([x,y])(v_1 \otimes v_2)\\
&\quad= \rho_1([x,y])v_1 \otimes v_2 + (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|} v_1 \otimes \rho_2([x,y])v_2\\
&\quad= \big(\rho_1(x) \circ \rho_1(y) - (-1)^{|x||y|}\rho_1(y) \circ \rho_1(x)\big)\, v_1 \otimes v_2\\
&\qquad + (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|} v_1 \otimes \big(\rho_2(x) \circ \rho_2(y) - (-1)^{|x||y|}\rho_2(y) \circ \rho_2(x)\big)\, v_2\\
&\quad= \rho_1(x)\rho_1(y)v_1 \otimes v_2 - (-1)^{|x||y|}\rho_1(y)\rho_1(x)v_1 \otimes v_2\\
&\qquad + (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|} v_1 \otimes \rho_2(x)\rho_2(y)v_2 - (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|+|x||y|} v_1 \otimes \rho_2(y)\rho_2(x)v_2\\
&\quad= \rho_1(x)\rho_1(y)v_1 \otimes v_2 + (-1)^{|x|(|y|+|v_1|)}\rho_1(y)v_1 \otimes \rho_2(x)v_2\\
&\qquad + (-1)^{|y||v_1|}\rho_1(x)v_1 \otimes \rho_2(y)v_2 + (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|} v_1 \otimes \rho_2(x)\rho_2(y)v_2\\
&\qquad - (-1)^{|x||y|}\big(\rho_1(y)\rho_1(x)v_1 \otimes v_2 + (-1)^{|y|(|x|+|v_1|)}\rho_1(x)v_1 \otimes \rho_2(y)v_2\big)\\
&\qquad - (-1)^{|x||y|}\big((-1)^{|x||v_1|}\rho_1(y)v_1 \otimes \rho_2(x)v_2 + (-1)^{(|x|+|y|)|v_1|}\rho_2(y)\rho_2(x)v_2\big)\\
&\quad= \rho(x)(\rho_1(y)v_1 \otimes v_2 + (-1)^{|y||v_1|} v_1 \otimes \rho_2(y)v_2)\\
&\qquad - (-1)^{|x||y|}\rho(y)(\rho_1(x)v_1 \otimes v_2 + (-1)^{|x||v_1|} v_1 \otimes \rho_2(x)v_2)\\
&\quad= (\rho(x) \circ \rho(y) - (-1)^{|x||y|}\rho(y) \circ \rho(x))(v_1 \otimes v_2).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.37. *Sejam $\rho_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\rho_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ representações de $\mathfrak{g}$ em V e W, respectivamente. Consideremos o superespaço vetorial $\mathcal{L}(V,W)$ e a representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}(V,W))$ dada por*

$$\rho(x)f = \rho_2(x) \circ f - (-1)^{|x||f|} f \circ \rho_1(x),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $f \in \mathcal{L}(V,W)$ homogêneos.

Vamos verificar que ρ é, de fato, uma representação. Como ρ_1, ρ_2 são transformações lineares, temos ρ também é uma transformação linear. Além disso, como $\rho_1(\mathfrak{g}_i)(V_j) \subseteq V_{i+j}$ e $\rho_2(\mathfrak{g}_i)(W_k) \subseteq W_{i+k}$, para todos $i, j, k \in \mathbb{Z}_2$, temos:

$$(\rho(x)f)(v) = \rho_2(x)(f(v)) - (-1)^{|x||f|} f(\rho_1(x)(v)) \in V^2_{i+j+k},$$

para todos $x \in \mathfrak{g}_i$, $v \in V_j$, $f \in \mathcal{L}(V,W)_k$, $i, j, k \in \mathbb{Z}_2$. Isso mostra que $\rho(x)(f) \in \mathcal{L}(V,W)_{i+k}$, para todos $x \in \mathfrak{g}_i$, $f \in \mathcal{L}(V,W)_k$, $i, k \in \mathbb{Z}_2$. Para terminar, vamos mostrar que $\rho([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)]$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. De fato, dados $x, y \in g$ e $f \in \mathcal{L}(V,W)$ homogêneos, temos:

$$
\begin{aligned}
&[\rho(x),\ \rho(y)]\, f\\
&\quad= (\rho(x) \circ \rho(y) - (-1)^{|x||y|}\rho(y) \circ \rho(x))f\\
&\quad= \rho(x)\rho(y)f - (-1)^{|x||y|}\rho(y)\rho(x)f\\
&\quad= \rho_2(x) \circ \rho_2(y) \circ f - (-1)^{|y||f|}\rho_2(x) \circ f \circ \rho_1(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{|x|(|f|+|y|)}\rho_2(y)\circ f\circ\rho_1(x)+(-1)^{|x|(|f|+|y|)+|y||f|}f\circ\rho_1(y)\circ\rho_1(x)\\
&-(-1)^{|x||y|}\rho_2(y)\circ\rho_2(x)\circ f+(-1)^{|x||y|+|x||f|}\rho_2(y)\circ f\circ\rho_1(x)\\
&+(-1)^{|x||y|+|y|(|f|+|x|)}\rho_2(x)\circ f\circ\rho_1(y)-(-1)^{|x||y|+|x||f|+(|x|+|f|)|y|}f\circ\rho_1(x)\circ\rho_1(y)\\
=\;&\rho_2(x)\circ\rho_2(y)\circ f-(-1)^{|x||y|}\rho_2(y)\circ\rho_2(x)\circ f\\
&-(-1)^{(|x|+|y|)|f|}f\circ\rho_1(x)\circ\rho_1(y)+(-1)^{|x||y|+(|x|+|y|)|f|}f\circ\rho_1(y)\circ\rho_1(x)\\
=\;&\rho_2([x,y])\circ f-(-1)^{|[x,y]|\,|f|}f\circ\rho_1([x,y])\\
=\;&\rho([x,y])f.
\end{aligned}
$$

Lema 1.2. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ um superespaço vetorial.*

(a) Se $\rho:U(\mathfrak{g})\longrightarrow \mathrm{End}(V)$ é uma representação de $U(\mathfrak{g})$, então $(\rho\circ\sigma):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$.

(b) Se $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, então existe $\tilde{\rho}:U(\mathfrak{g})\longrightarrow\mathrm{End}(V)$ uma representação de $U(\mathfrak{g})$ tal que $\tilde{\rho}\circ\sigma=\rho$.

Demonstração. Consideremos $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ um superespaço vetorial.

(a) Sejam $a,b\in\mathfrak{g}$ homogêneos. Sabemos que $\sigma([a,b])=\sigma(a)\sigma(b)-(-1)^{|a||b|}\sigma(b)\sigma(a)$, que $\sigma(\mathfrak{g}_{\bar{0}})\subseteq U(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$, e que $\sigma(\mathfrak{g}_{\bar{1}})\subseteq U(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$. Além disso, como ρ é uma representação, temos $\rho(U(\mathfrak{g})_{\bar{0}})\subseteq\mathrm{End}(V)_{\bar{0}}$ e $\rho(U(\mathfrak{g})_{\bar{1}})\subseteq\mathrm{End}(V)_{\bar{1}}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(\rho\circ\sigma)([a,b])&=\rho\left(\sigma(a)\sigma(b)-(-1)^{|a||b|}\sigma(b)\sigma(a)\right)\\
&=\rho(\sigma(a))\circ\rho(\sigma(b))-(-1)^{|a||b|}\rho(\sigma(b))\circ\rho(\sigma(a))\\
&=(\rho\circ\sigma)(a)\circ(\rho\circ\sigma)(b)-(-1)^{|\rho\circ\sigma(a)||\rho\circ\sigma(b)|}(\rho\circ\sigma)(b)\circ(\rho\circ\sigma)(a)\\
&=[(\rho\circ\sigma)(a),(\rho\circ\sigma)(b)].
\end{aligned}
$$

Portanto, $\rho\circ\sigma$ é uma representação de $\mathfrak{g}$.

(b) Seja $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$. Como ρ é um homomorfismo de superálgebras de Lie, temos pela Proposição 1.2, que existe um homomorfismo de superálgebras associativas $\tilde{\rho}:U(\mathfrak{g})\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)=\mathrm{End}(V)$ tal que $\tilde{\rho}\circ\sigma=\rho$. Observemos que $\tilde{\rho}$ é uma representação de $U(\mathfrak{g})$ em V. ∎

Definição 1.4.2. *Sejam V um superespaço vetorial e $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$. Um subsuperespaço $W\subseteq V$ é dito **invariante** quando $\rho(x)(w)\in W$, para todos $x\in\mathfrak{g}$ e $w\in W$. Uma **subrepresentação** de ρ é um homomorfismo de superálgebras de Lie $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(W)$, tal que $W\subseteq V$ é um subsuperespaço invariante e $\sigma(x)(w)=\rho(x)(w)$ para todos $x\in\mathfrak{g}$ e $w\in W$. A representação $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow V$ é dita **irredutível** quando $V\neq\{0\}$ e todo subsuperespaço vetorial W de V tal que $\{0\}\subsetneq W\subsetneq V$ não é $\mathfrak{g}$-invariante; isto é, se um subsuperespaço $W\subseteq V$ é tal que $\rho(x)(w)\in W$ para todos $x\in\mathfrak{g}$, $w\in W$, então $W=\{0\}$ ou $W=V$.*

Exemplo 1.38. *Dados $m, n > 0$, consideremos a representação natural de $\mathfrak{gl}(m,n)$, dada explicitamente por $\eta = \mathrm{Id}_{\mathfrak{gl}(m,n)} : \mathfrak{gl}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m,n})$ (ver Exemplo 1.34). Observemos que essa é uma representação irredutível. De fato, suponhamos que $W \subseteq \mathbb{C}^{m,n}$ seja um subespaço invariante não-nulo, e para cada $i \in \{1, \dots, m+n\}$, denotemos por e_i o elemento $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m,n}$, cuja i-ésima coordenada é 1 e todas as outras são 0. Observemos que $\{e_i \mid i \in \{1, \dots, m+n\}\}$ forma uma base de $\mathbb{C}^{m,n}$, e portanto, para todo $w \in W$, existem $w_1, \dots, w_{n+m} \in \mathbb{C}$, tais que $w = \sum_{i=1}^{m+n} w_i e_i$. Além disso, se $w \neq 0$, então existe $i \in \{1, \dots, m+n\}$, tal que $w_i \neq 0$. Fixemos tal i e, para cada $k \in \{1, \dots, n+m\}$, consideremos a matriz $A_k = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(m,n)$ cuja entrada $a_{ki} = \dfrac{1}{w_i}$ e as demais são todas nulas. Observemos que $\eta(A_k)(w) = e_k$, para todo $k \in \{1, \cdots, m+n\}$. Como W é um subespaço invariante de $\mathbb{C}^{m,n}$, isso mostra que $e_k \in W$, para todo $k \in \{1, \dots, m+n\}$. Como $\{e_i \mid i \in \{1, \dots, m+n\}\}$ é uma base de $\mathbb{C}^{m,n}$, segue que $W = \mathbb{C}^{m,n}$. Isso mostra que $\mathbb{C}^{m,n}$ é irredutível.*

Exemplo 1.39. *Consideremos uma superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e sua representação adjunta* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *(ver Exemplo 1.33). Observemos que um subsuperespaço vetorial $W \subseteq \mathfrak{g}$ é invariante se, e somente se, W é um ideal de $\mathfrak{g}$. De fato, se W é um subespaço invariante de $\mathfrak{g}$, então $\mathrm{ad}(x)(w) = [x, w] \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Como $[x, w] \in W \subseteq \mathfrak{g}$, temos que W é um ideal de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, se W é um ideal de $\mathfrak{g}$, então $[x, w] \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Daí, $\mathrm{ad}(x)(w) = [x, w] \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Logo, W é um subespaço invariante de $\mathfrak{g}$. Em particular,* ad *é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, a superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é simples.*

Consideremos o caso particular da superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, dada por: $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = span\{x\}$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = span\{y\}$, $[x, x] = [y, y] = 0$, $[x, y] = y$. Observemos que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, mas não é invariante. De fato, $\sigma(x)(w) = \mathrm{ad}(x)(y) = [y, x] = (-1)^{|\bar{1}||\bar{0}|}[x, y] = -y \notin \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Por outro lado, $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é um subespaço invariante de $\mathfrak{g}$. De fato, $\sigma(x)(w) = \mathrm{ad}(x)(y) = [x, y] = y$ e $\sigma(x)(w) = \mathrm{ad}(y)(y) = [y, y] = 0$. Além disso, como $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tem dimensão 1, temos que σ é uma subrepresentação irredutível.

Exemplo 1.40. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie, V um superespaço vetorial, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, e W um subsuperespaço invariante de V. Denotemos por $\pi : V \longrightarrow \dfrac{V}{W}$ a projeção canônica, dada explicitamente por $\pi(v) = v + W$ (ver Exemplo 1.5). Vamos mostrar que existe uma única representação $\tilde{\rho} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\left(\dfrac{V}{W}\right)$ que satisfaz $\tilde{\rho}(x) \circ \pi = \pi \circ \rho(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

De fato, definamos $\tilde{\rho}(x)(v + W) := \rho(x)(v) + W$ para todo $v + W \in V/W$. Inicialmente, mostremos que $\tilde{\rho}$ está bem definida. Seja $w \in W$ e fixemos $x \in \mathfrak{g}$. Assim,

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho}(x) \circ \pi)(w) &= (\pi \circ \rho(x))(w) \\ &= \pi(\rho(x)(w)) \in W,\end{aligned}$$

pois W é um subsuperespaço invariante.

Agora, mostremos que $\tilde{\rho}$ é linear. Sejam x, $y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(x+\lambda y)(v+W) &= \rho(x+\lambda y)(v)+W\\ &= (\rho(x)+\lambda\ \rho(y))(v)+W\\ &= \rho(x)(v)+W+\lambda\ \rho(y)(v)+W\\ &= \tilde{\rho}(x)(v+W)+\lambda\ \tilde{\rho}(y)(v+W).\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\rho}$ é linear. Mostremos que $\tilde{\rho}$ é homogênea. Dados $x \in \mathfrak{g}$ e $v+W \in V/W$ homogêneos, temos que $\tilde{\rho}(x)(v+W) = \rho(x)(v)+W \in (V/W)_{|v|+|x|}$, pois $\rho(x)(v) \in V_{|v|+|x|}$. Por fim, vamos mostrar que $\tilde{\rho}([x,y]) = \tilde{\rho}(x)\circ\tilde{\rho}(y)-(-1)^{|x||y|}\tilde{\rho}(y)\circ\tilde{\rho}(x)$ para todos $x,y \in \mathfrak{g}$. De fato,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}([x,y])\circ\pi &= \pi\circ\rho([x,y])\\ &= \pi\circ(\rho(x)\circ\rho(y)-(-1)^{|x||y|}\rho(y)\circ\rho(x))\\ &= \pi\circ\rho(x)\circ\rho(y)-(-1)^{|x||y|}\pi\circ\rho(y)\circ\rho(x)\\ &= \tilde{\rho}(x)\circ\pi\circ\rho(y)-(-1)^{|x||y|}\tilde{\rho}(y)\circ\pi\circ\rho(x)\\ &= \tilde{\rho}(x)\circ\tilde{\rho}(y)\circ\pi-(-1)^{|x||y|}\tilde{\rho}(y)\circ\tilde{\rho}(x)\circ\pi\\ &= [\tilde{\rho}(x),\tilde{\rho}(y)]\circ\pi, \qquad \text{para todos } x,y\in\mathfrak{g} \text{ homogêneos.}\end{aligned}$$

*Como π é sobrejetora, $\tilde{\rho}$ é linear e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, temos $\tilde{\rho}([x,y]) = \tilde{\rho}(x)\circ\tilde{\rho}(y)-(-1)^{|x||y|}\tilde{\rho}(y)\circ\tilde{\rho}(x)$, para todos $x,y \in \mathfrak{g}$. Isso mostra que $\tilde{\rho}$ é uma representação, chamada de **representação quociente**.*

Definição 1.4.3. *Sejam V, W superespaços vetoriais, $\rho_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\rho_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ representações de $\mathfrak{g}$. Uma aplicação linear graduada $\varphi : V \longrightarrow W$ é um **homomorfismo de representações** se*

$$\varphi\left(\rho_1(x)v\right) = \rho_2(x)\varphi(v), \ \textit{para todos } x \in \mathfrak{g} \textit{ e } v \in V.$$

Exemplo 1.41. *Consideremos a superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1,1)$ (ver Exemplo 1.29) e sua representação adjunta (ver Exemplo 1.39). Consideremos também o superespaço vetorial $\mathbb{F}^{1,1}$, munido da sua representação natural (ver Exemplo 1.34). Agora, definamos a transformação linear*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{F}^{1,1} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(1,1)\\ & (x|y) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} x & y\\ \hline 0 & x\end{array}\right).\end{array}$$

Observemos que T não é um homomorfismo de representações. De fato, se tomarmos $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ \hline 1 & 0\end{array}\right) \in \mathfrak{sl}(1,1)$ e $z = (1|0) \in \mathbb{F}^{1,1}$, temos que $T(\eta(A)(z)) = T(0|1) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$. Por outro lado, $T(z) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\\ \hline 0 & 1\end{array}\right)$, e consequentemente, $\mathrm{ad}(A)(T(z)) = [A,T(z)] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.

Exemplo 1.42. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie, V um superespaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de $\mathfrak{g}$. Para todo subespaço invariante $W \subseteq V$, a inclusão $i : W \longrightarrow V$, dada por $i(w) = w$, é um homomorfismo de representações. Com efeito, denotemos por $\rho_W : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ a subrepresentação dada por $\rho_W(x)(w) = \rho(x)(w)$. Para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$, temos*

$$i(\rho_W(x)(w)) = \rho_W(x)(w) = \rho(x)(w) = \rho(x)(i(w)).$$

A partir de agora e sempre que for necessário, identificaremos $M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ com as matrizes-linha $M_{1\times(m+n)}(\mathbb{C})$.

Exemplo 1.43. *Dados $m, n > 0$, consideremos a representação dual à representação natural $\eta = \mathrm{Id}_{\mathfrak{gl}(m,n)} : \mathfrak{gl}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m,n})$ (ver Exemplo 1.34). Explicitamente, $\eta^* : \mathfrak{gl}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}((\mathbb{C}^{m,n})^*)$ é dada por $\eta^*(A)(f) = -(-1)^{|A||f|} f \circ \eta(A)$, para todos $A \in \mathfrak{gl}(m,n)$ e $f \in (\mathbb{C}^{m,n})^*$ homogêneos (ver Exemplo 1.35). Vamos mostrar que existe um isomorfismo de representações entre η^* e a representação $\rho : \mathfrak{gl}(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}))$, de $\mathfrak{gl}(m,n)$ no espaço de matrizes $M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, dada pelo produto de matrizes, $\rho(A)(B) = -(-1)^{|A||B|}BA$, para todos $A \in \mathfrak{gl}(m,n)$ e $B \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ homogêneas (compare com o Exemplo 1.34).*

Para explicitar o isomorfismo, primeiro, para cada $a = (a_1 \dots a_m | a_{m+1} \dots a_{m+n}) \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, consideremos o funcional linear $f_a : \mathbb{C}^{m,n} \to \mathbb{C}$ dado por

$$f_a(b_1 \cdots b_m | b_{m+1} \cdots b_{m+n}) := a_1 b_1 + \cdots + a_{m+n} b_{m+n}.$$

Queremos mostrar que $f_a \in (\mathbb{C}^{m,n})^*$, para todo $a \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$. Para começar, observemos que, para cada $a = (a_1 \cdots a_m | a_{m+1} \cdots a_{m+n}) \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, temos $f_a = f_{(a_1 \cdots a_m | 0 \cdots 0)} + f_{(0 \cdots 0 | a_{m+1} \cdots a_{m+n})}$. De fato, para todo $b = (b_1 \cdots b_m | b_{m+1} \cdots b_{m+n}) \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, temos

$$\begin{aligned} f_a(b) &= a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_{m+n} b_{m+n} \\ &= a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m + 0 b_{m+1} + \cdots + 0 b_{m+n} \\ &\quad + 0 b_1 + \cdots + 0 b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_{m+n} b_{m+n} \\ &= f_{(a_1 \cdots a_m | 0 \cdots 0)}(b) + f_{(0 \cdots 0 | a_{m+1} \cdots a_{m+n})}(b). \end{aligned}$$

Agora observemos que $f_{(a_1 \cdots a_m | 0 \cdots 0)} \in (\mathbb{C}^{m,n})^*_{\bar{0}}$ e que $f_{(0 \cdots 0 | a_{m+1} \cdots a_{m+n})} \in (\mathbb{C}^{m,n})^*_{\bar{1}}$. Com efeito, sejam $b = (0 \cdots 0 | b_{m+1} \cdots b_{m+n}) \in (\mathbb{C}^{m,n})_{\bar{1}}$ e $c = (c_1 \cdots c_m | 0 \cdots 0) \in (\mathbb{C}^{m,n})_{\bar{0}}$, quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned} f_{(a_1 \cdots a_m | 0 \cdots 0)}(b) &= f_{(a_1 \cdots a_m | 0 \cdots 0)}(0 \cdots 0 \mid b_{m+1} \cdots b_{m+n}) \\ &= a_1 0 + \cdots + a_m 0 + 0 b_{m+1} + \cdots + 0 b_{m+n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{(0\cdots 0|a_{m+1}\cdots a_{m+n})}(c) =& f_{(0\cdots 0|a_{m+1}\cdots a_{m+n})}(c_1 \cdots c_m|0 \cdots 0) \\ =& 0c_1 + \cdots + 0c_m + a_{m+1}0 + \cdots + a_{m+n}0 \\ =& \ 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $f_a = f_{(a_1\cdots a_m|0\cdots 0)} + f_{(0\cdots 0|a_{m+1}\cdots a_{m+n})} \in (\mathbb{C}^{m,n})^*_{\bar{0}} \oplus (\mathbb{C}^{m,n})^*_{\bar{1}} = (\mathbb{C}^{m,n})^*$. *Assim, podemos definir a função*

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^{m,n})^* \\ & a & \longrightarrow & f_a. \end{array} \tag{1.23}$$

Mostremos que Ψ *é linear. Dados* $a, c \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $b \in \mathbb{C}^{m,n}$, *temos*

$$\begin{aligned} \Psi(a + \lambda c)(b) =& f_{a+\lambda c}(b) \\ =& (a_1 + \lambda c_1)b_1 + \cdots + (a_{m+n} + \lambda c_{m+n})b_{m+n} \\ =& a_1b_1 + \cdots + a_{m+n}b_{m+n} + \lambda(c_1b_1 + \cdots + c_{m+n}b_{m+n}) \\ =& f_a(b_1, \ldots, b_{m+n}) + \lambda f_c(b_1, \ldots, b_{m+n}) \\ =& (\Psi(a) + \lambda\Psi(c))(b). \end{aligned}$$

Isso mostra que Ψ *é linear. Agora, para mostrar que* Ψ *é injetora, seja* $a \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ *tal que* $\Psi(a) = f_a = 0 \in (\mathbb{C}^n)^*$. *Isso significa que*

$$a_1b_1 + \cdots + a_{m+n}b_{m+n} = 0$$

para todo $b \in \mathbb{C}^{m,n}$. *Pela arbitrariedade de* b, *temos* $a_1 = \cdots = a_n = 0$. *Isso mostra que* Ψ *é injetora. Para concluir que* Ψ *é um isomorfismo, basta mostrar usar o Teorema do Núcleo e da Imagem. De fato, como* Ψ *é injetora e como* $\dim(\mathbb{C}^{m,n})^* = \dim \mathbb{C}^\vee_{\bar{0}} + \dim \mathbb{C}^\vee_{\bar{1}} = \dim \mathbb{C}^n + \dim \mathbb{C}^m = n + m = \dim M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ *(pelo Exemplo 1.4), temos que* Ψ *é um isomorfismo linear.*

Para terminar, vamos mostrar que Ψ *é, de fato, um isomorfismo de representações de* $\mathfrak{gl}(m,n)$. *Dados* $A \in \mathfrak{gl}(m,n)$, $b \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ *e* $c \in \mathbb{C}^{m,n}$, *com* A *e* b *homogêneos. Observemos que*

$$\begin{aligned} &\eta^*(A)(f_b(c)) \\ =& -(-1)^{|A||f_b|}\left(f_b \circ \eta(A)\right)(c) \\ =& -(-1)^{|A||b|} f_b(\eta_A(c)) \\ =& -(-1)^{|A||b|} f_b\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+n,1} & \cdots & a_{m+n,m+n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{pmatrix}\right) \\ =& -(-1)^{|A||b|} f_b\left(a_{1,1}c_1 + \cdots + a_{1,m+n}c_{m+n} \ \ldots \ a_{m+n,1}c_1 + \cdots + a_{m+n,m+n}c_{m+n}\right) \end{aligned}$$

$$= - (-1)^{|A||b|} \left((a_{1,1}c_1 + \cdots + a_{1,m+n}c_{m+n})b_1 + \cdots + (a_{m+n,1}c_1 + \cdots + a_{m+n,m+n}c_{m+n})b_{m+n} \right)$$
$$= - (-1)^{|A||b|} \left((b_1 a_{1,1} + \cdots + b_{m+n}a_{m+n,1})c_1 + \cdots + (b_1 a_{1,m+n} + \cdots + b_{m+n}a_{m+n,m+n})c_{m+n} \right)$$
$$= - (-1)^{|A||b|} \begin{pmatrix} b_1 a_{1,1} + \cdots + b_{m+n}a_{m+n,1} & \cdots & b_1 a_{1,m+n} + \cdots + b_{m+n}a_{m+n,m+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{pmatrix}$$
$$= - (-1)^{|A||b|} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_{m+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ m+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+n\ 1} & \cdots & a_{m+n\ m+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{pmatrix}$$
$$= f_{-(-1)^{|A||b|}bA}(c),$$

ou seja,

$$\eta^*(A)(f_b(c)) = f_{-(-1)^{|A||b|}bA}(c). \tag{1.24}$$

De onde concluímos que

$$(\eta^*(A)(\Psi(b)))(c) = f_{\rho(A)(b)}(c) = \Psi(\rho(A)(b))(c).$$

Logo, Ψ é um homomorfismo de representações. Portanto, Ψ é um isomorfismo de representações. Além disso, quando $A \in \mathfrak{gl}(m,n)_{\overline{0}}$,

$$\eta^*(A)f_b = -f_{bA} = -f_{\eta(A^t)b}. \tag{1.25}$$

Exemplo 1.44. *Sejam $m, n > 0$ e consideremos a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)$. Consideremos também a representação natural de $\mathfrak{gl}(m)$ em $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{m,0}$, $\eta : \mathfrak{gl}(m) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^m)$ (ver Exemplo 1.34) e a representação dual da representação natural de $\mathfrak{gl}(n)$, $\eta^* : \mathfrak{gl}(n) \longrightarrow \mathfrak{gl}((\mathbb{C}^n)^*)$ (ver Exemplo 1.35). Como no Exemplo 1.36, a única transformação bilinear $\rho : \mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}((\mathbb{C}^m) \otimes (\mathbb{C}^n)^*)$ que satisfaz*

$$\rho((x_1, x_2), (v \otimes f)) = \eta(x_1)(v) \otimes f + v \otimes \eta^*(x_2)(f),$$

para todos $x_1 \in \mathfrak{gl}(m)$, $x_2 \in \mathfrak{gl}(n)$, $v \in \mathbb{C}^m$, $f \in (\mathbb{C}^n)^*$, é uma representação de $\mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)$.

Agora consideremos o espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e a única transformação bilinear $\sigma : \mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(M_{m\times n}(\mathbb{C}))$ que satisfaz $\sigma(A,B)(M) = AM - MB$, para todos $A \in \mathfrak{gl}(m)$, $B \in \mathfrak{gl}(n)$ e $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Para verificar que σ é uma representação, observemos que, para todos $A_1, A_2 \in \mathfrak{gl}(m)$, $B_1, B_2 \in \mathfrak{gl}(n)$ e $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, temos:

$$\begin{aligned} &\sigma[(A_1, B_1), (A_2, B_2)](M) \\ &\quad = \sigma([A_1, A_2], [B_1, B_2])(M) \\ &\quad = [A_1, A_2]M - M[B_1, B_2] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1A_2M - A_2A_1M - MB_1B_2 + MB_2B_1 \\
&= A_1A_2M - A_1MB_2 + A_1MB_2 - A_2A_1M + A_2MB_1 - A_2MB_1 - MB_1B_2 + MB_2B_1 \\
&= A_1(A_2M - MB_2) - (A_2M - MB_2)B_1 - A_2(A_1M - MB_1) + (A_1M - MB_1)B_2 \\
&= \sigma(A_1, B_1)(A_2M - MB_2) - \sigma(A_2, B_2)(A_1M - MB_1) \\
&= \sigma(A_1, B_1)(\sigma(A_2, B_2)(M)) - \sigma(A_2, B_2)(\sigma(A_1, B_1)(M)) \\
&= [\sigma(A_1, B_1), \sigma(A_2, B_2)](M).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que existe um isomorfismo de representações entre ρ e σ. Explicitamente, dados $v \in \mathbb{C}^m$ e $f \in (\mathbb{C}^n)^*$, definamos a função $\heartsuit : \mathbb{C}^m \otimes (\mathbb{C}^n)^* \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{C})$ estendendo linearmente

$$
\heartsuit(v \otimes f) := v \heartsuit f := \begin{pmatrix} v_1f_1 & v_1f_2 & \cdots & v_1f_n \\ v_2f_1 & v_2f_2 & \cdots & v_2f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_mf_1 & v_mf_2 & \cdots & v_mf_n \end{pmatrix}, \tag{1.26}
$$

com $f_i = f(e_i)$, onde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ é o único vetor cuja i-ésima entrada é 1 e as outras são 0, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Ou seja, $v \heartsuit f$ é o produto da matriz coluna (em $M_{m\times 1}(\mathbb{C})$) que corresponde à v pela uma matriz linha (em $M_{1\times n}(\mathbb{C})$) que corresponde à f.

Inicialmente, mostremos que $\heartsuit$ é um homomorfismo de representações. Sejam $v = (v_1, \cdots, v_m) \in \mathbb{C}^m$, $f = (f_1, \cdots, f_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$, $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{gl}(m)$ e $B = (b_{i,j}) \in \mathfrak{gl}(n)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\heartsuit\ (\rho(A, B)(v \otimes f)) \\
&\quad = \heartsuit\ (\eta(A)(v) \otimes f + v \otimes \eta^*(B)(f)) \\
&\quad = \heartsuit\ (\eta(A)(v) \otimes f) + \heartsuit\ (v \otimes \eta^*(B)(f)) \\
&\quad = \heartsuit\ \left(\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1m}v_m \\ a_{21}v_1 + \cdots + a_{2m}v_m \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m \end{pmatrix} \otimes (f_1, \cdots, f_n) \right) \qquad (1.27) \\
&\qquad - \heartsuit\ \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \otimes (f_1b_{11} + \cdots + f_nb_{n1},\ \cdots,\ f_1b_{1n} + \cdots + f_nb_{nn}) \right) \\
&\quad = \begin{pmatrix} (a_{11}v_1 + \cdots + a_{1m}v_m)f_1 & \cdots & (a_{11}v_1 + \cdots + a_{1m}v_m)f_n \\ (a_{21}v_1 + \cdots + a_{2m}v_m)f_1 & \cdots & (a_{21}v_1 + \cdots + a_{2m}v_m)f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m)f_1 & \cdots & (a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mm}v_m)f_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \begin{pmatrix} v_1(f_1b_{11} + \cdots + f_nb_{n1}) & \cdots & v_1(f_1b_{1n} + \cdots + f_nb_{nn}) \\ v_2(f_1b_{11} + \cdots + f_nb_{n1}) & \cdots & v_2(f_1b_{1n} + \cdots + f_nb_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m(f_1b_{11} + \cdots + f_nb_{n1}) & \cdots & v_m(f_1b_{1n} + \cdots + f_nb_{nn}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}v_1f_1 + \cdots + a_{1m}v_mf_1 & \cdots & a_{11}v_1f_n + \cdots + a_{1m}v_mf_m \\ a_{21}v_1f_1 + \cdots + a_{2m}v_mf_1 & \cdots & a_{21}v_1f_n + \cdots + a_{2m}v_mf_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}v_1f_1 + \cdots + a_{mm}v_mf_1 & \cdots & a_{m1}v_1f_n + \cdots + a_{mm}v_mf_n \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} v_1f_1b_{11} + \cdots + v_1f_nb_{n1} & \cdots & v_1f_1b_{1n} + \cdots + v_1f_nb_{nn} \\ v_2f_1b_{11} + \cdots + v_2f_nb_{n1} & \cdots & v_2f_1b_{1n} + \cdots + v_2f_nb_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_mf_1b_{11} + \cdots + v_mf_nb_{n1} & \cdots & v_mf_1b_{1n} + \cdots + v_mf_nb_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1f_1 & \cdots & v_1f_n \\ v_2f_1 & \cdots & v_2f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_mf_1 & \cdots & v_mf_n \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} v_1f_1 & \cdots & v_1f_n \\ v_2f_1 & \cdots & v_2f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_mf_1 & \cdots & v_mf_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \heartsuit\,(v \otimes f) - \heartsuit\,(v \otimes f) \cdot B \\
&= \sigma(A, B)\,(\,\heartsuit\,(v \otimes f)\,).
\end{aligned}
$$

Logo, $\heartsuit$ é um homomorfismo de representações.

Agora vamos mostrar que $\heartsuit$ é uma função sobrejetora. Seja $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ a matriz com 1 na entrada ij e todas as demais nulas. Assim, existem $v_i \in \mathbb{C}^m$ e $f_j \in (\mathbb{C}^n)^*$, com v_i o vetor que tem 1 na linha i e f_j o vetor que tem 1 na coluna j, tais que

$$
\heartsuit\,(v_i \otimes f_j) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{ij}.
$$

Como $\{E_{ij} \mid i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}\}$ é uma base de $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $\heartsuit$ é uma transformação linear, temos que $\operatorname{im}\heartsuit$ é um subespaço vetorial de $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, e consequentemente, que $\heartsuit$ é sobrejetor. Agora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos *que* $mn = \dim \operatorname{im} \heartsuit = dim(\mathbb{C}^m \otimes (\mathbb{C}^n)^*) - dim \ker \heartsuit = mn - dim \ker \heartsuit$ *. De onde,* $dim \ker \heartsuit = 0$*. Isso mostra que* $\heartsuit$ *é injetor. Portanto,* $\heartsuit$ *é um isomorfismo de representações.*

Definição 1.4.4. *Seja* $\mathfrak{g}$ *é uma superálgebra de Lie. Um* $\mathfrak{g}$***-módulo*** *é um superespaço vetorial* V *munido de uma aplicação bilinear* $\alpha : \mathfrak{g} \times V \to V$ *(usualmente denotada por* $\alpha(x, v) =: x \cdot v$*) tal que* $\alpha(\mathfrak{g}_i, V_j) \subseteq V_{i+j}$*, para* $i, j \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$*, e*

$$\alpha(x, \alpha(y, v)) - (-1)^{|x||y|}\alpha(y, \alpha(x, v)) = \alpha\left([x, y], v\right)$$

(ou equivalentemente, $x \cdot (y \cdot v) - (-1)^{|x||y|} y \cdot (x \cdot v) = [x, y] \cdot v$*), para todos* $x, y \in \mathfrak{g}$*,* $v \in V$*. Um* $\mathfrak{g}$***-submódulo*** *é um super subespaço vetorial* $W \subseteq V$ *tal que* $\alpha(x, w) \in W$*, para todos* $x \in \mathfrak{g}$ *e* $w \in W$*. Um* $\mathfrak{g}$*-módulo* V *é dito* ***irredutível*** *quando os únicos* $\mathfrak{g}$*-submódulos* $W \subseteq V$ *são* $W = \{0\}$ *e* $W = V$*.*

Observemos que todo $\mathfrak{g}$-módulo induz uma representação de $\mathfrak{g}$. De fato, seja V um $\mathfrak{g}$-módulo munido da ação $\alpha : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$. Pela Definição 1.4.4, como α é uma transformação bilinear, podemos definir uma transformação linear $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ dada por

$$\begin{aligned} \rho(x) := \alpha(x, -) : \quad V &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ v &\longmapsto \rho(x)(v) = \alpha(x, v). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Pela Definição 1.4.4, como $\alpha(\mathfrak{g}_i, V_j) \subseteq V_{i+j}$, temos $\rho(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)_{\overline{0}}$ e $\rho(\mathfrak{g}_{\overline{1}}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)_{\overline{1}}$. Além disso, como $\alpha(x, \alpha(y, v)) - (-1)^{|x||y|}\alpha(y, \alpha(x, v)) = \alpha\left([x, y], v\right)$, temos

$$\begin{aligned} \rho([x, y])(v) &= \alpha\left([x, y], v\right) \\ &= \alpha(x, \alpha(y, v)) - (-1)^{|x||y|}\alpha(y, \alpha(x, v)) \\ &= \rho(x) \circ \rho(y)(v) - (-1)^{|x||y|}\rho(y) \circ \rho(x)(v), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Ou seja, ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$.

Por outro lado, toda representação de $\mathfrak{g}$ induz um $\mathfrak{g}$-módulo. De fato, seja $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação. Definamos $\alpha : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ como sendo $\alpha(x, v) = \rho(x)(v)$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Observemos que, como ρ é uma transformação linear, temos que α é uma transformação bilinear. Além disso, como $\rho(\mathfrak{g}_i)(V_j) \subseteq V_{i+j}$, temos $\alpha(\mathfrak{g}_i, V_j) \subseteq V_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Por fim, observemos que

$$\begin{aligned} \alpha\left([x, y], v\right) &:= \rho([x, y])(v) \\ &= \rho(x) \circ \rho(y)(v) - (-1)^{|x||y|}\rho(y) \circ \rho(x)(v) \\ &=: \alpha(x, \alpha(y, v)) - (-1)^{|x||y|}\alpha(y, \alpha(x, v)), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Isso mostra que α mune V de uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo.

Lembremos que a função $\alpha : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$, dada por $\alpha(x, v) = \rho(x)(v)$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, mune V de uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo. Como $\rho(x)(w) \in W$, então $\alpha(x, w) \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Isso mostra que W corresponde a um $\mathfrak{g}$-submodulo de V.

Por outro lado, lembremos que todo $\mathfrak{g}$-módulo$V$ induz uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, dada por $\rho(x) = \alpha(x, -)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Se W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, então $\alpha(x, w) \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Logo $\rho_W(x) = \rho(x)(w) \in W$, para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $w \in W$. Isso mostra que ρ_W corresponde a uma subrepresentação de V.

Exemplo 1.45. *Consideremos uma superálgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\alpha = [\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. *Pela Definiçao 1.3.1,* α *mune* $\mathfrak{g}$ *com uma estrutura de* $\mathfrak{g}$*-módulo. Observemos que a representação correspondente à esta ação é a representação adjunta (Exemplo 1.33). De fato,* $\alpha(x, -) = [x, -] = \mathrm{ad}(x)$, *para todo* $x \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.46. *Dados* $m, n > 0$, *consideremos a função*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathfrak{gl}(m,n) \times M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}) \\ & (A, B) & \longmapsto & -(-1)^{|A||B|}BA, \end{array} \tag{1.29}$$

para todos A, B *homogêneos. Para mostrar que* α *induz em* $M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ *uma estrutura de* $\mathfrak{gl}(m,n)$*-módulo, primeiro observemos que* α *é bilinear, porque o produto de matrizes é bilinear. Depois, observemos que* $|\alpha(A, B)| = |-(-1)^{|A||B|}BA| = |BA| = |B| + |A|$, *para todos* $A \in \mathfrak{gl}(m,n)$ *e* $B \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$ *homogêneos. Isso implica que* $\alpha(\mathfrak{gl}(m,n)_i,\ M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})_j) \subseteq M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})_{i+j}$, *para quaisquer* $i, j \in \mathbb{Z}_2$. *Para terminar, observemos que, para todos* $A, B \in \mathfrak{gl}(m,n)$ *homogêneos e* $C \in M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$, *temos*

$$\begin{aligned} &\alpha(A, \alpha(B, C)) - (-1)^{|A||B|}\alpha(B, \alpha(A, C)) \\ &= \alpha(A, -(-1)^{|A||B|}CB) - (-1)^{|A||B|}\alpha(B, -(-1)^{|A||C|}CA) \\ &= -(-1)^{|B||C|}\left(-(-1)^{|A|(|C|+|B|)}\right)CBA + (-1)^{|A||B|}(-1)^{|A||C|}\left(-(-1)^{|B|(|C|+|A|)}\right)CAB \\ &= (-1)^{|B||C|}(-1)^{|A||C|}(-1)^{|A||B|}CBA + \left(-(-1)^{(|A|+|B|)|C|}CAB\right) \\ &= -(-1)^{(|A|+|B|)|C|}CAB - (-1)^{|A||B|}\left(-(-1)^{(|B|+|A|)|C|}CBA\right) \\ &= \alpha(AB, C) - (-1)^{|A||B|}\alpha(BA, C) \\ &= \alpha\left(AB - (-1)^{|A||B|}BA, C\right) \\ &= \alpha\left([A, B], C\right). \end{aligned}$$

Logo, α *induz uma estrutura de* $\mathfrak{g}$*-módulo em* $M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C})$.

Como todo $\mathfrak{gl}(m,n)$*-módulo induz uma representação, dada a aplicação* α *definida na Equação 1.29, temos que a representação associada é isomorfa a representação dual da representação natural* η^* *(ver Exemplos 1.34 e 1.35). Com efeito, da Equação 1.28, temos*

$$\begin{array}{rccc} \rho(A) = \alpha(A, -) : & M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{1\times(m,n)}(\mathbb{C}) \\ & B & \longmapsto & -(-1)^{|A||B|}BA, \end{array}$$

e do Exemplo 1.43, temos que ρ *é isomorfa à representação* η^*.

Exemplo 1.47. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma superálgebra de Lie,* V *um superespaço vetorial,* $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ *uma representação de* $\mathfrak{g}$ *em* V, *e* $W \subseteq V$ *um subsuperespaço invariante. Lembremos do Exemplo 1.40 no qual* $\tilde{\rho} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}\left(\dfrac{V}{W}\right)$, *a representação quociente, é definida* *explicitamente por $\tilde{\rho}(x)(v+W) = \rho(v) + W$. Assim, definamos*

$$\tilde{\alpha}(x, v+W) := \tilde{\rho}(x)(v+W) = \rho(x)(v) + W,$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Observemos que $\tilde{\alpha}$ induz uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo no superespaço vetorial V/W, chamado de módulo quociente.

Exemplo 1.48. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie, V e W $\mathfrak{g}$-módulos, com as estruturas dadas pelas aplicações bilineares $\alpha_1 : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ e $\alpha_2 : \mathfrak{g} \times W \longrightarrow W$, respectivamente. Consideremos a aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rrcl} \alpha: & \mathfrak{g} \times (V \otimes W) & \longrightarrow & V \otimes W \\ & (x, v \otimes w) & \longmapsto & \alpha_1(x,v) \otimes w + (-1)^{|x||v|} v \otimes \alpha_2(x,w). \end{array}$$

Observemos que essa α é a ação associada ao produto tensorial das representações induzidas de α_1 e α_2. De fato, sejam ρ_1 e ρ_2 as representações de $\mathfrak{g}$ induzidas por α_1 e α_2, respectivamente. Explicitamente,

$$\rho_1(x)(v) := \alpha_1(x,v) \qquad \text{e} \qquad \rho_2(x)(w) := \alpha_2(x,w),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ e $w \in W$. Agora, consideremos o produto tensorial das representações ρ_1, ρ_2 (ver Exemplo 1.36):

$$\rho(x)(v \otimes w) := \rho_1(x)(v) \otimes w + (-1)^{|x||v|} v \otimes \rho_2(x)(w) = \alpha_1(x,v) \otimes w + (-1)^{|x||v|} v \otimes \alpha_1(x,w),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $w \in W$ homogêneos. Por fim, observemos que a ação induzida por ρ é a função bilinear $\alpha : \mathfrak{g} \times (V \otimes W) \to (V \otimes W)$ dada por

$$\alpha(x, v \otimes w) := \rho(x)(v \otimes w) = \alpha_1(x,v) + (-1)^{|x||v|} v \otimes \alpha_2(x,w),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $w \in W$ homogêneos.

Isso mostra que, de fato, α é a ação associada ao produto tensorial das representações induzidas de α_1 e α_2. Consequentemente, α mune $V \otimes W$ da estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo.

Exemplo 1.49. *Sejam $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e V, W $\mathfrak{g}$-módulos com estruturas dadas pelas aplicações bilineares $\alpha_1 : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ e $\alpha_2 : \mathfrak{g} \times W \longrightarrow W$, respectivamente. Consideremos a única transformação bilinear que satisfaz*

$$\begin{array}{rrcl} \alpha: & \mathfrak{g} \times \mathcal{L}(V,W) & \longrightarrow & \mathcal{L}(V,W) \\ & (x, T) & \longmapsto & \alpha_2(x, T(-)) - (-1)^{|x||T|} T(\alpha_1(x,-)), \end{array} \tag{1.30}$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $T \in \mathcal{L}(V,W)$ homogêneos.

Observemos que α é associada à representação $\mathcal{L}(V,W)$ dada no Exemplo 1.37. Com efeito, sejam ρ_1 e ρ_2 representações induzidas de α_1 e α_2, respectivamente. Explicitamente,

$$\rho_1(x)(v) := \alpha_1(x,v) \quad \text{e} \quad \rho_2(x)(w) := \alpha_2(x,w),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ e $w \in W$. Agora, consideremos a representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{L}(V,W))$ dada por

$$\begin{aligned}(\rho(x)T)(v) &:= (\rho_2(x) \circ T)(v) - (-1)^{|x||T|}(T \circ \rho_1(x))(v) \\ &= \alpha_2(x, T(v)) - (-1)^{|x||T|}T(\alpha_1(x,v)),\end{aligned}$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$ homogêneos e $v \in V$. Finalmente, observemos que a ação induzida de ρ é a aplicação bilinear $\alpha_\rho : \mathfrak{g} \times \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(V,W)$ dada por

$$\alpha(x, T(v)) := (\rho(x)T)(v) = \alpha_2(x, T(v)) - (-1)^{|x||T|}T(\alpha_1(x,v)) = \alpha(x,T)(v),$$

para todos $x \in \mathfrak{g}$, $T \in \mathcal{L}(V,W)$ homogêneos e $v \in V$. Logo, α mune $\mathcal{L}(V,W)$ com a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo.

Definição 1.4.5. *Sejam V e W dois $\mathfrak{g}$-módulos. Um **homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos** é uma transformação linear $\Phi : V \to W$ tal que $\Phi(V_i) \subseteq W_{\varphi(i)}$, com $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ um isomorfismo de grupos, e tal que $\Phi(\alpha_1(x,v)) = \alpha_2(x, \Phi(v))$, (ou equivalentemente, $\Phi(x \cdot_1 v) = x \cdot_2 \varphi(v)$) para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, com $\alpha_1 : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$, $\alpha_2 : \mathfrak{g} \times W \longrightarrow W$ (denotamos equivalentemente, $\alpha_1(x,v) =: x \cdot_1 v$ e $\alpha_2(x,w) =: x \cdot_2 w$) as transformações lineares que dão estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo a V e a W, respectivamente. O conjunto de todos os homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos $\Phi : V \longrightarrow W$ será denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$.*

Lembremos que no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, o único isomorfismo de grupos $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é $\varphi = \mathrm{id}$.

Observemos que todo homomorfismo de representações corresponde a um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. De fato, sejam $\rho_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, $\rho_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ representações de $\mathfrak{g}$ e $\varphi : V \longrightarrow W$ um homomorfismo de representações. Como mostramos anteriormente, toda representação induz uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo e tal estrutura é dada por $\alpha_1(x,v) = \rho_1(x)(v)$ e $\alpha_2(x,w) = \rho_2(x)(w)$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ e $w \in W$. Como φ é um homomorfismo de representações, temos $\varphi(\alpha_1(x,v)) = \varphi(\rho_1(x)v) = \rho_2(x)\varphi(v) = \alpha_2(x, \varphi(v))$. Logo, φ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

Reciprocamente, todo homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos corresponde a um homomorfismo de representações. Com efeito, sejam V, W $\mathfrak{g}$-módulos e $\Phi : V \longrightarrow W$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Como mostramos anteriormente, todo $\mathfrak{g}$-módulo induz uma representação de $\mathfrak{g}$. Consideremos $\rho_1(x)(v) = \alpha_1(x,v)$ e $\rho_2(x)(w) = \alpha_2(x,w)$ as representações de $\mathfrak{g}$ induzidas por V e W, respectivamente. Agora, como Φ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, temos $\Phi(\rho_1(x)(v)) = \Phi(\alpha_1(x,v)) = \alpha_2(x, \Phi(v)) = \rho_2(x)(\Phi(v))$. Logo, Φ é um homomorfismo de representações.

Observemos que dados V e W $\mathfrak{g}$-módulos, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ é um subsuperespaço vetorial de $\mathcal{L}(V,W)$. De fato, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W) \subset \mathcal{L}(V,W)$ e $0 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$. Além disso, dados $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $v \in V$, temos que:

$$\alpha_2(x, (\varphi + \lambda\psi)(v)) = \alpha_2(x, \varphi(v)) + \lambda\, \alpha_2(x, \psi(v))$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(\alpha_1(x,v)) + \lambda\,\psi(\alpha_1(x,v)) \\ &= (\varphi + \lambda\psi)(\alpha_1(x,v)). \end{aligned}$$

Logo, $(\varphi+\lambda\psi) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$; ou seja, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(V,W)$. Para mostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ é um subespaço $\mathbb{Z}_2$-graduado, lembremos da $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathcal{L}(V,W)$ dada, no Exemplo 1.7:

$$\mathcal{L}(V,W)_\beta = \{T \in \mathcal{L}(V,W) \mid T(V_s) \subseteq W_{s+\beta}, \text{ para todo } s \in \mathbb{Z}_2\},$$

para todo $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Agora tome $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(V,W)$ e $\mathcal{L}(V,W)$ é um subsuperespaço vetorial, temos que existem (únicos) $\varphi_0 \in \mathcal{L}(V,W)_{\bar{0}}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{L}(V,W)_{\bar{1}}$ tais que $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Mostremos que $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$. Para isso, observemos que, para todos $v \in V$ e $x \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi_0(\alpha_1(x,v)) + \varphi_1(\alpha_1(x,v)) &= \varphi(\alpha_1(x,v)) \\ &= \alpha_2(x,\varphi(v)) \\ &= \alpha_2(x,\varphi_0(v)+\varphi_1(v)) \\ &= \alpha_2(x,\varphi_0(v)) + \alpha_2(x,\varphi_1(v)). \end{aligned}$$

De onde,

$$\varphi_0(\alpha_1(x,v)) - \alpha_2(x,\varphi_0(v)) = -(\varphi_1(\alpha_1(x,v)) - \alpha_2(x,\varphi_1(v))).$$

Em particular, quando v,x são homogêneos, $v \in V_i$ e $x \in \mathfrak{g}_j$, temos $\varphi_0(\alpha_1(x,v)) \in \varphi_0(V_{i+j}) \subseteq W_{i+j}$, $\alpha_2(x,\varphi_0(v)) \in \alpha_2(\mathfrak{g}_j, V_i) \subseteq W_{i+j}$, $\varphi_1(\alpha_1(x,v)) \in \varphi_1(V_{i+j}) \subseteq W_{i+j+\bar{1}}$ e $\alpha_2(x,\varphi_1(v)) \in \alpha_2(\mathfrak{g}_j, V_{i+\bar{1}} \subseteq W_{i+j+\bar{1}}$. Como W é um superespaço vetorial, temos $W_{i+j} \cap W_{i+j+\bar{1}} = 0$, e consequentemente:

$$\varphi_0(\alpha_1(x,v)) - \alpha_2(x,\varphi_0(v)) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi_0(\alpha_1(x,v)) = \alpha_2(x,\varphi_0(v))$$

e

$$\varphi_1(\alpha_1(x,v)) - \alpha_2(x,\varphi_1(v)) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi_1(\alpha_1(x,v)) = \alpha_2(x,\varphi_1(v)).$$

Segue daí, do fato de $\mathfrak{g}$ e V serem superespaços vetoriais, do fato de α_1, α_2 serem bilineares, e do fato de φ_0, φ_1 serem lineares, que $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$.

Exemplo 1.50. *Neste exemplo, vamos mostrar que núcleos e a imagens de homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos são submódulos. Mais explicitamente, seja $\varphi : V \longrightarrow W$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, com a estutura de $\mathfrak{g}$-módulo em V é dada por $\alpha_1 : \mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ e a estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo em W é dada por $\alpha_2 : \mathfrak{g} \times W \longrightarrow W$.*

Consideremos $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$, *o núcleo do homomorfismo φ. Mostremos que* $\ker\varphi$ *é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Observemos que* $\ker\varphi \subseteq V$ *e* $\ker\varphi \neq \emptyset$, *pois* $0 = \varphi(0)$.

Vamos começar mostrando que $\ker\varphi$ *é um subespaço vetorial de V. Sejam $u, v \in$* $\ker\varphi$ *e $\lambda \in \mathbb{F}$, daí, $u + \lambda\, v \in V$. Assim,*

$$\varphi(u+\lambda v) = \varphi(u) + \lambda\ \varphi(v) = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Daí, $u + \lambda v \in \ker\varphi$*. Isso mostra que* $\ker\varphi$ *é um subespaço vetorial de* V*. Para mostrar que* $\ker\varphi$ *é um subsuperespaço, considere* $v \in \ker\varphi$*. Como* V *é um superespaço vetorial, existem* $v_0 \in V_{\bar{0}}$ *e* $v_1 \in V_{\bar{1}}$*, tais que* $v = v_0 + v_1$*. Assim,*

$$0 = \varphi(v) = \varphi(v_0 + v_1) = \varphi(v_0) + \varphi(v_1) \Longrightarrow \varphi(v_0) = -\varphi(v_1).$$

Agora, como $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$*, temos* $\varphi(v_0) \in W_{\bar{0}}$ *e* $\varphi(v_1) \in W_{\bar{1}}$*; e como* W *é um superespaço vetorial, temos que* $\varphi(v_0) = -\varphi(v_1) \in W_{\bar{0}} \cap W_{\bar{1}} = \{0\}$*. Logo,* $v_0, v_1 \in \ker\varphi$*. Para terminar, vamos mostrar que* $\ker\varphi$ *é um* $\mathfrak{g}$*-submódulo de* V*. Sejam* $x \in \mathfrak{g}$ *e* $v \in \ker\varphi$*. Assim,*

$$\varphi(\alpha_1(x, v)) = \alpha_2(x, \varphi(v)) = \alpha_2(x, 0) = 0.$$

Logo, $\alpha_1(x, v) \in \ker\varphi$*.*

Consideremos $\mathrm{im}\varphi = \{w \in W \mid \varphi(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$*. Mostremos que* $\mathrm{im}\varphi$ *é um* $\mathfrak{g}$*-submódulo de* W*. Inicialmente, observemos que* $\mathrm{im}\varphi \subseteq W$ *e* $\mathrm{im}\varphi \neq \emptyset$*, pois* $0 = \varphi(0) \in \mathrm{im}\varphi$*.*

Vamos mostrar que $\mathrm{im}\varphi$ *é um subespaço vetorial de* W*. Sejam* $w_1, w_2 \in \mathrm{im}\varphi$ *e* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Existem* $v_1, v_2 \in V$ *tais que* $\varphi(v_1) = w_1$ *e* $\varphi(v_2) = w_2$*. Daí,*

$$w_1 + \lambda w_2 = \varphi(v_1) + \lambda\varphi(v_2) = \varphi(v_1 + \lambda v_2).$$

Assim, $v_1 + \lambda v_2 \in V$ *é tal que* $\varphi(v_1 + \lambda v_2) = w_1 + \lambda w_2$*, isto é,* $w_1 + \lambda w_2 \in \mathrm{im}\varphi$*. Isso mostra que* $\mathrm{im}\varphi$ *é um subespaço vetorial de* W*. Vamos mostrar agora que* $\alpha_2(\mathfrak{g}, \mathrm{im}\varphi) \subseteq \mathrm{im}\varphi$*. Seja* $w \in \mathrm{im}\varphi$*. Existe* $v \in V$ *tal que* $\varphi(v) = w$*. Assim,*

$$\alpha_2(x, w) = \alpha_2(x, \varphi(v)) = \varphi(\alpha_1(x, v)).$$

Como $\alpha_1(x, v) \in V$*, para todos* $x \in \mathfrak{g}$ *e* $v \in V$*, então* $\alpha_2(x, w) = \varphi(\alpha_1(x, v)) \in \mathrm{im}\varphi$*. Isso mostra que* $\alpha_2(\mathfrak{g}, \mathrm{im}\varphi) \subseteq \mathrm{im}\varphi$*. Para terminar, vamos mostrar que* $\mathrm{im}\varphi$ *é um superespaço vetorial de* W*. Dado* $w \in \mathrm{im}\ \varphi$*, existem únicos* $w_0 \in W_{\bar{0}}$ *e* $w_1 \in W_{\bar{1}}$ *tais que* $w = w_0 + w_1$*. Existem também* $v \in V$*, e únicos* $v_0 \in V_{\bar{0}}$*,* $v_1 \in V_{\bar{1}}$*, tais que* $v = v_0 + v_1$*, e* $\varphi(v) = w$*. Assim,*

$$w_0 + w_1 = w = \varphi(v) = \varphi(v_0 + v_1) = \varphi(v_0) + \varphi(v_1).$$

Como $\varphi(v_0) \in W_{\bar{0}}$*,* $\varphi(v_1) \in W_{\bar{1}}$ *e* W *é um superespaço vetorial, temos*

$$\varphi(v_0) - w_0 = 0 \Longrightarrow \varphi(v_0) = w_0 \quad \text{e} \quad \varphi(v_1) - w_1 = 0 \Longrightarrow \varphi(v_1) = w_1.$$

Logo, $w_0, w_1 \in \mathrm{im}\ \varphi$*.*

1.5 Resultados estruturais

Nesta seção demonstramos resultados importantes da teoria de superálgebras de Lie, lembremos que todos esses resultados têm seus análogos para álgebras de Lie.

Lema 1.3 (Lema de Schur)**.** *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g}$ uma $\mathbb{F}$-superálgebra de Lie de dimensão finita. Se V, W forem $\mathfrak{g}$-módulos não-triviais, irredutíveis e de dimensão finita, então* $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \leq 1$.

Demonstração: Suponhamos que V, W são $\mathfrak{g}$-módulos não-triviais, irredutíveis e de dimensão finita. Se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{0\}$, então $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \leq 1$.

Caso contrário, se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \neq \{0\}$, então existe um homomorfismo não-trivial de $\mathfrak{g}$-módulos $f : V \longrightarrow W$. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é um homomorfismo não-trivial, então existe $v \in V$, tal que $f(v) \neq 0$, ou seja, $\ker f \neq V$. Como V é um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível e $\ker f$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, segue que $\ker f = \{0\}$. Logo f é injetor. Novamente, como f é não-trivial, segue que $\mathrm{im} f \neq \{0\}$. Como $\mathrm{im} f$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de W e W é irredutível, temos $\mathrm{im} f = W$. Logo, f é sobrejetor. Isso mostra que $V \cong W$. Por outro lado, se $V \cong W$ (como $V \neq 0$), então existe isomorfismo (não-trivial) $f : V \longrightarrow W$. Isso mostra que, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \neq \{0\}$ se, e somente se, $V \cong W$.

Antes de mostrar o caso geral, suponhamos primeiro que $V = W \neq 0$ e fixe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$. Como $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, $V \neq 0$ e V tem dimensão finita, temos que o polinômio característico de f tem uma raiz $\lambda \in \mathbb{F}$. Logo, existe $v \in V \setminus \{0\}$, tal que $f(v) = \lambda v$; ou seja, $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$. Como $f, \mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$, então $(f - \lambda \mathrm{Id}) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$; e consequentemente, $\ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo não-trivial de V. Como V é irredutível, temos $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}) = V$; ou seja, $f(v) = \lambda v$, para todo $v \in V$. Isso implica que $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) \leq 1$.

■

Lema 1.4. *Consideremos $\mathfrak{g}$ uma superálgebra de Lie e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ uma subsuperálgebra.*

a) $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$ *é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$.*

b) $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ *se, e somente se, $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração:

a) Como $\mathfrak{h}$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$, temos $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Isso mostra que $\mathfrak{h} \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Agora mostremos que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$. Primeiro, observemos que, como $\mathfrak{h}$ é uma subsuperálgebra, temos que: $[x, h] \in \mathfrak{h}$ se, e somente se, $[h, x] \in \mathfrak{h}$. Agora, se $x_1, x_2 \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, então

$$\begin{aligned} [[x_1, x_2], h] &= -(-1)^{|h|(|x_1|+|x_2|)}[h, [x_1, x_2]] \\ &= -(-1)^{|h|(|x_1|+|x_2|)} \Big([[h, x_1], x_2] + (-1)^{|h||x_1|} [x_1, [h, x_2]]\Big) \in \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

pois $[h, x_1], [h, x_2] \in \mathfrak{h}$ por hipótese. Logo $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{h}$. Por fim, mostremos que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ é uma subsuperespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Dado $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, como $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie, existem $x_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $x_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, tais que $x = x_0 + x_1$. Assim,

$$[x_0, h] + [x_1, h] = [x, h] \in \mathfrak{h}, \qquad \text{para todo} \quad h \in \mathfrak{h}.$$

Além disso, como $\mathfrak{h}$ é uma subsuperespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, para todo $h \in \mathfrak{h}$, existem $h_0 \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ e $h_1 \in \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ tais que $h = h_0 + h_1$. Assim, tomando $h = h_0$ na equação acima, teremos que $[x_0, h] \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $[x_1, h] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Usando o fato de $[x_0, h] + [x_1, h] \in \mathfrak{h}$ e de $\mathfrak{h}$ ser um subsuperespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ novamente, concluímos que $[x_0, h], [x_1, h] \in \mathfrak{h}$.

b) Observemos que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ se, e somente se, $[x, \mathfrak{h}] \in \mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Agora, pela Definição 1.2.2, $[x, \mathfrak{h}] \in \mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ se, e somente se $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.

■

Lema 1.5. *Seja V um superespaço vetorial não-nulo de dimensão finita. Se $T \in \mathfrak{gl}(V)$ for nilpotente, então $\mathrm{ad}(T) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ é nilpotente.*

Demonstração: Consideremos $\mathrm{ad}(T) := L_T - (-1)^{|T|}R_T$, com $L_T, R_T \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$ são as composições à esquerda e à direita por T, respectivamente. Observemos que $L_T \circ R_T = R_T \circ L_T$. De fato, para todo $x \in \mathfrak{gl}(V)$, temos $(L_T \circ R_T)(x) = L_T(R_T(x)) = L_T(xT) = T(xT) = (Tx)T = R_L(Tx) = R_T(L_T(x))) = (R_T \circ L_T)(x)$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(T)^k &= = (L_T - (-1)^{|T|}R_T)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} L_T^i \left(-(-1)^{|T|}R_T\right)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{|T|(k-i)} \binom{k}{i} L_{T^i} R_{T^{k-i}}. \end{aligned}$$

Logo, se $T^n = 0$, para algum $n > 0$, então $(\mathrm{ad}(T))^{2n} = 0$. Portanto, se T é nilpotente, então $\mathrm{ad}(T)$ é nilpotente. ■

Teorema 1.3 (Teorema de Engel). *Seja $\mathfrak{g}$ uma subsuperálgebra não-trivial de uma superálgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$, tal que V um superespaço vetorial não-nulo de dimensão finita. Se $x \in \mathfrak{g}$ for nilpotente, para todo $x \in \mathfrak{g}$, então existe $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $x(v) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ e $\dim(\mathfrak{gl}(V)) < \infty$, faremos indução sobre $\dim(\mathfrak{g})$.

Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, então existe $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tal que $\mathfrak{g} = span\{x\}$ e, por hipótese, $x^m = 0$ para algum $m > 0$. Escolha $n = \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid x^m = 0\}$. Por construção, existe $w \in V$ tal que $v := x^{n-1}(w) \neq 0$. Observemos que $x(v) = x^n(w) = 0$.

Suponhamos que $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ e que, para toda subsuperálgebra de Lie não-trivial $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{gl}(W)$ tal que W é um superespaço vetorial não-nulo de dimensão finita, $\dim \mathfrak{s} < \dim \mathfrak{g}$, e s é nilpotente para todo $s \in \mathfrak{s}$, assim existe $w \in W \setminus \{0\}$ tal que $s(w) = 0$, para todo $s \in \mathfrak{s}$ (*hipótese de indução*).

Como $\dim \mathfrak{g} > 1$, temos que existe uma subsuperálgebra de Lie própria $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. De fato, como $\dim \mathfrak{g} > 0$, temos: ou $\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}} > 0$, ou $\dim \mathfrak{g}_{\bar{0}} = 0$ e $\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}} > 0$. No primeiro caso, existe $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$, tal que $span\{x\}$ é uma subsuperálgebra própria de $\mathfrak{g}$; e no segundo caso, existe $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$, tal que $span\{y\}$ é uma subsuperálgebra própria de $\mathfrak{g}$. De fato, como $\dim \mathfrak{g}_{\bar{1}} > 0$, existe $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$. Observemos que $span\{y\} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e que $[y, y] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$, de onde, $0 = [\lambda\, y, \mu\, y]$ para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Além disso, como $\dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = \dim(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) + \dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = \dim(\mathfrak{g}) > 1$ e $\dim(span\{y\}) = 1$, temos $\dim(span\{y\}) < \dim(\mathfrak{g})$. Portanto, $span\{y\}$ é uma subsuperálgebra própria de $\mathfrak{g}$.

Como existem subsuperálgebras de Lieprópias de $\mathfrak{g}$, podemos fixar uma subsuperálgebra de Lie própria maximal $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é uma subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, temos que para todo $h \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}(h)$ induz uma transformação linear $\overline{\mathrm{ad}}(h) \in \mathfrak{gl}\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\right)$, dada por

$$\overline{\mathrm{ad}}(h)(x + \mathfrak{h}) \doteq [h, x] + \mathfrak{h}, \qquad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Além disso, lembremos que, por hipótese, todo elemento $h \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ é nilpotente. Assim, pelo Lema 1.5 temos que $\mathrm{ad}(h)$ é nilpotente, e consequentemente, que $\overline{\mathrm{ad}}(h)$ é nilpotente, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Vamos usar a hipótese de indução sobre $\mathfrak{s} = \overline{\mathrm{ad}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ para mostrar que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{s}$ fosse não-trivial, pela hipótese de indução, existiria $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, tal que

$$\overline{\mathrm{ad}}(h)\,(x + \mathfrak{h}) = 0 + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \qquad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Isso significaria que $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$. Pela maximalidade de $\mathfrak{h}$ e pelo Lema 1.4, teríamos que $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, e consequentemente, que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Isso implica que, de fato, $\mathfrak{s} = 0$.

Como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é uma superálgebra de Lie. Consideremos a projeção canônica $\pi : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Como $\mathfrak{h}$ é um ideal próprio de $\mathfrak{g}$, temos duas possibilidades: ou $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \not\subseteq \mathfrak{h}$, ou $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \not\subseteq \mathfrak{h}$. No primeiro caso, fixemos $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \setminus \mathfrak{h}$; e no segundo caso, fixemos $x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \setminus \mathfrak{h}$. Vamos mostrar que $\pi^{-1}\left(\mathbb{F}x\right) = span\left(\mathfrak{h} \cup \{x\}\right)$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$. Por construção, $\pi^{-1}(\mathbb{F}x)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Além disso, como $\mathfrak{h}$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$ e x é homogêneo, então $\pi^{-1}(\mathbb{F}x)$ é um subsuperespaço de $\mathfrak{g}$. Para terminar de mostrar que $\pi^{-1}(\mathbb{F}x)$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$, primeiro, observemos que

$$[\lambda x + h_1,\, \mu x + h_2] = \lambda\mu[x, x] + \lambda[x, h_2] + \mu[h_1, x] + [h_1, h_2],$$

para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$. Depois, observemos que, como $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, temos $[x, h_2], [h_1, x], [h_1, h_2] \in \mathfrak{h}$. Por fim, observemos que: no caso em que $x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, temos $[x, x] = 0$; e no caso em que $x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, temos $[x, x] \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{h}$. Isso mostra que $\pi^{-1}(\mathbb{F}x)$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$. Como $\pi^{-1}(\mathbb{F}x)$ é uma subsuperálgebra de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h} \subsetneq \pi^{-1}(\mathbb{F}x)$, a maximalidade de $\mathfrak{h}$ implica que $\pi^{-1}(\mathbb{F}x) = \mathfrak{g}$.

Agora vamos, finalmente, encontrar um vetor $v \in V$ tal que $g(v) = 0$ para todo $g \in \mathfrak{g}$. Consideremos o subespaço $W' = \{v \in V \mid h(v) = 0, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$. Pela hipótese de indução (com $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}$ e $W = V$), vemos que $W' \neq 0$. Além disso, W' é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. De fato, como $\mathfrak{g} = span(\mathfrak{h} \cup \{x\})$, basta mostrar que $(\lambda x + h)(v) \in W'$, para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $h \in \mathfrak{h}$. Para isso, observemos que

$$h_2((\lambda x + h)(v)) = \lambda h_2(x(v)) + h_2(h(v)) = \lambda x(h_2(v)) + \lambda[h_2, x](v) = 0,$$

para todos $\lambda \in \mathbb{F}$, $h, h_2 \in \mathfrak{h}$ e $v \in W'$. Como $\mathfrak{h}(W') = 0$, pelo item (d) do Teorema dos Isomorfismos 1.1, a ação de $\mathfrak{g}$ em W' induz uma ação de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ em W'; explicitamente, $(\lambda x + \mathfrak{h}) \cdot (v) = \lambda x(v)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $v \in W'$. Pela hipótese de indução (com $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e $W = W'$), existe $v \in W' \setminus \{0\}$ tal que $(x + \mathfrak{h}) \cdot (v) = 0$. Como $\mathfrak{g} = span(\mathfrak{h} \cup \{x\})$, temos $g(v) = 0$, para todo $g \in \mathfrak{g}$.

∎

O resultado a seguir é importante, pois nos diz que toda superálgebra de Lie de dimensão finita possui uma representação matricial (comparar com a Observação 1.2).

Teorema 1.4 (Teorema de Ado). *Se $\mathfrak{g}$ é uma superálgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica $k \neq 2$, então $\mathfrak{g}$ tem uma representação fiel de dimensão finita.*

Demonstração: Sejam $\{x_1, \ldots, x_m\}$ uma base de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Consideremos o subespaço vetorial $V := span\{y_1 \cdots y_s \mid 0 < s \leq n\}$. Observemos que, pelo Teorema de PBW 1.2, temos $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \oplus VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ como espaço vetorial.

Como $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, pelo Teorema de Ado para álgebras de Lie (ver, por exemplo, (SAN MARTIN, 2010, Teorema 10.9)), temos que existe uma representação fiel de dimensão finita de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $\rho : \mathfrak{g}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$. Estenda ρ a uma representação $\tilde{\rho}$ de $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ (ver Lema 1.2), e denotemos $\ker \tilde{\rho}$ por K. Observemos que K é um ideal de $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$.

Consideremos $K' := K \oplus VK$. Observemos que K' é um subespaço vetorial de $U(\mathfrak{g})$. Mostremos que K' é também um ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$. Para isso, vamos mostrar que, para todos $k' \in K'$ e $u \in U(\mathfrak{g})$, temos que $uk' \in K'$. Fixemos $k' \in K'$ e $u \in U(\mathfrak{g})$; observemos que, como $K' = K \oplus VK$, temos que existem $k_1, k_2 \in K$ e $v \in V$, tais que $k' = k_1 + vk_2$, e como $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \oplus VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, temos existem $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ e $w \in V$, tais que $u = u_1 + wu_2$. Assim, temos que $uk' = uk_1 + uvk_2 = u_1k_1 + wu_2k_1 + u_1vk_2 + wu_2vk_2$. Como K é um ideal de $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, $k_1 \in K$, $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ e $w \in V$, então $u_1k_1 \in K \subseteq K'$ e $wu_2k_1 \in VK \subseteq K'$. Assim, para terminar de mostrar que $uk' \in K'$, vamos mostrar que $u_1v, u_2v \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$. De fato, vamos mostrar apenas que $u_1v \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, já que a demonstração de que $u_2v \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ é completamente análoga.

Comecemos observando que, pelo Teorema de PBW 1.2, como $u_1 \in U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, para cada $i \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, existe um único $\lambda_i \in \mathbb{F}$ tal que $u_1 = \displaystyle\sum_{i \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}} \lambda_i x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$, e como $v \in V$, para cada $j \in \{0,1\}^n$, existe um único $\mu_j \in \mathbb{F}$ tal que $v = \displaystyle\sum_{j \in \{0,1\}^n} \mu_j y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}$. Assim, para mostrar que $u_1v \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, é suficiente mostrar que

$$x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}}), \qquad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \text{ e } j \in \{0,1\}^n.$$

Vamos fazer isso usando indução em $i_1 + \cdots + i_m$.

No caso $i_1 + \cdots + i_m = 0$, temos que $x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} = y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} \in V \subseteq VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$. No caso em que $i_1 + \cdots + i_m = 1$, temos que $x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} = x_k y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}$, para algum

$k \in \{1, \ldots, m\}$. Daí, da definição de $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ (ver (1.18)) e do fato que $j_1, \ldots, j_n \in \{0, 1\}$, segue que

$$\begin{aligned} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} &= x_k y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} \\ &= y_1^{j_1} x_k y_2^{j_2} \cdots y_n^{j_n} + j_1 [x_k, y_1] y_2^{j_2} \cdots y_n^{j_n} \\ &= y_1^{j_1} y_2^{j_2} x_k y_3^{j_3} \cdots y_n^{j_n} + j_2 y_1^{j_1} [x_k, y_2] y_3^{j_3} \cdots y_n^{j_n} + j_1 [x_k, y_1] y_2^{j_2} \cdots y_n^{j_n} \\ &= \cdots \\ &= y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} x_k + \sum_{l=1}^{n} j_l y_1^{j_1} \cdots y_{l-1}^{j_{l-1}} [x_k, y_l] y_{l+1}^{j_{l+1}} \cdots y_n^{j_n}. \end{aligned}$$

Agora observemos que $y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} x_k \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, e que, como $x_k \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, temos $y_1^{j_1} \cdots y_{l-1}^{j_{l-1}} [x_k, y_l] y_{l+1}^{j_{l+1}} \cdots y_n^{j_n} \in V \subseteq VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ para todo $l \in \{1, \ldots, n\}$. Isso implica que $x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ no caso em que $i_1 + \cdots + i_m = 1$. Para completar a indução, suponha que $i_1 + \cdots + i_m > 1$ e observemos que, nesse caso, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$, tal que $i_k \neq 0$ e $i_q = 0$ para todo $q > k$, $q \leq m$. Assim,

$$x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} = (x_1^{i_1} \cdots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{i_k - 1})(x_k y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}).$$

Agora observemos que, pela hipótese de indução, $x_k y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n} \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$; e consequentemente (usando a hipótese de indução novamente), $(x_1^{i_1} \cdots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{i_k - 1})(x_k y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}) \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$.

Isso implica que $u_1 v, u_2 v \in VU(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$; e consequentemente, que $uk' = u_1 k_1 + w u_2 k_1 + u_1 v k_2 + w u_2 v k_2 \in K + VK = K'$. Isso mostra que $K' = K \oplus VK$ é um ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$. Como M tem dimensão finita, temos que K tem co-dimensão finita em $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$, e como V tem dimensão finita ($\dim V = 2^n - 1$), segue que K' tem co-dimensão finita em $U(\mathfrak{g})$. Denotemos por $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g})/K')$ a representação induzida da multiplicação à esquerda em $U(\mathfrak{g})$; ou seja, $\mu(x)(u + K') = xu + K'$. Vamos mostrar que μ é uma representação fiel de $\mathfrak{g}$.

Vamos começar mostrando que, para todo $x \in \mathfrak{g}$, $\mu(x)$ de fato define uma transformação linear em $U(\mathfrak{g})/K'$. Para começar, observemos que, se $u, u' \in U(\mathfrak{g})$ são tais que $u - u' \in K'$, então $xu - xu' = x(u - u') \in K'$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, pois K' é um ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$. Isso implica que $\mu(x) : U(\mathfrak{g})/K' \to U(\mathfrak{g})/K'$ é uma função bem definida. Depois observemos que $\mu(x)((u + K') + \lambda(u' + K')) = \mu(x)((u + \lambda u') + K') = x(u + \lambda u') + K' = (xu + \lambda xu') + K' = (xu + K') + \lambda(xu' + K') = \mu(x)(u + K') + \lambda\mu(x)(u' + K')$, para todos $x \in \mathfrak{g}$, $u, u' \in U(\mathfrak{g})$, $\lambda \in \mathbb{F}$, pois a multiplicação em $U(\mathfrak{g})$ é bilinear. Isso mostra que $\mu(x) \in \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g})/K')$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Agora, mostremos que $\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U(\mathfrak{g})/K')$ é uma transformação linear. Dados $x, y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que: $\mu(x + \lambda y)(u + K') = ((x + \lambda y)u) + K' = (xu + \lambda yu) + K' = (xu + K') + \lambda(yu + K') = \mu(x)(u + K') + \lambda\mu(y)(u + K')$, para todo $u \in U(\mathfrak{g})$, pois a multiplicação de $U(\mathfrak{g})$ é bilinear. Isso mostra que $\mu(x + \lambda y) = \mu(x) + \lambda\mu(y)$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Agora vamos mostrar que μ é uma representação de $\mathfrak{g}$. Primeiro observemos que, se $x \in \mathfrak{g}_i$ e $u + K' \in (U(\mathfrak{g})/K')_j$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, então $u \in U(\mathfrak{g})_j$ (ver Exemplo 1.5) e, consequentemente, $xu \in U(\mathfrak{g})_{i+j}$. Isso implica que $\mu(x)(u + K') = xu + K' \in U(\mathfrak{g})_{i+j}$, e consequentemente, que $\mu(\mathfrak{g}_i, (U(\mathfrak{g})/K')_j) \subseteq (U(\mathfrak{g})/K')_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Depois observemos que, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ homogêneos e $u \in U(\mathfrak{g})$, temos

$$\begin{aligned}
\mu([x,y])(u+K') &= [x,y]u + K' \\
&= (xyu - (-1)^{|x||y|}yxu) + K' \\
&= (x(yu) + K') - (-1)^{|x||y|}(y(xu) + K') \\
&= \mu(x)(yu + K') - (-1)^{|x||y|}\mu(y)(xu + K') \\
&= \mu(x)(\mu(y)(u + K')) - (-1)^{|x||y|}\mu(y)(\mu(x)(u + K')).
\end{aligned}$$

Isso implica que $\mu([x,y]) = \mu(x) \circ \mu(y) - (-1)^{|x||y|}\mu(y) \circ \mu(x)$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ homogêneos. Com isso, concluímos que μ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $U(\mathfrak{g})/K'$.

Para terminar, vamos mostrar que μ é injetora. De fato, suponhamos que $x \in \ker \mu \subseteq \mathfrak{g}$. Vamos mostrar que $x = 0$. Por definição, como $x \in \ker \mu$, então $\mu(x)(u+K') = 0+K$, para todo $u \in U(\mathfrak{g})$. Em particular, para o caso em que $u = 1$, vemos que $x + K' = 0 + K'$, ou seja, que $x \in K'$. Sejam $x_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $x_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, tais que $x = x_0 + x_1$. Como $x \in K' = K \oplus VK$, temos que $x_0 \in K$ e $x_1 \in VK$. Como $K = \ker \tilde{\rho}$ e $\rho : \mathfrak{g}_{\bar{0}} \to \mathfrak{gl}(M)$ é fiel, temos que $x_0 = 0$. Além disso, pelo Teorema de PBW 1.2, $x_1 \in VK$ somente se, $x_1 \in V$, ou seja, somente se $x_1 = 0$ ou $1 \in K$. O segundo caso não ocorre pelo fato de ρ ser fiel. Assim, $x_1 = 0$. Daí, concluímos que $x = 0$. Isso mostra que μ é fiel. ∎

Capítulo 2

SUPERÁLGEBRAS DE LIE SIMPLES DE DIMENSÃO FINITA

A classificação das superálgebras de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ é dada pelo seguinte resultado de V. Kac:

Teorema 2.1 ((KAC, 1977b, Theorem 5))**.** *Uma superálgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ é isomorfa ou a uma álgebra de Lie simples de dimensão finita, ou a uma superálgebra de Lie de uma das seguintes famílias: $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n)$, $D(m,n)$, $D(2,1,\alpha)$, $F(4)$, $G(3)$, $P(n)$, $Q(n)$, $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$, $H(n)$.*

Algumas propriedades das famílias de superálgebras de Lie listadas no teorema acima estão resumidas na tabela abaixo:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$	$\mathfrak{g}_{\bar{1}}$	$\dim \mathfrak{g}$
$A(m,n)$, $m<n$	$\mathfrak{sl}(m+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathbb{C}$	$(\mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^*) \oplus ((\mathbb{C}^{m+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1})$	$(m+n+2)^2-1$
$A(n,n)$	$\mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1)$	$(\mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^*) \oplus ((\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1})$	$4(n+1)^2-2$
$B(m,n)$	$\mathfrak{so}(2m+1) \oplus \mathfrak{sp}(2n)$	$\mathbb{C}^{2m+1} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^*$	$2(m+n)^2-m+3n$
$C(n)$	$\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)$	$(\mathbb{C}^{2n-2})^* \oplus \mathbb{C}^{2n-2}$	$2n^2+n-3$
$D(m,n)$	$\mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{sp}(2n)$	$\mathbb{C}^{2m} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^*$	$2(m+n)^2-m+n$
$D(2,1,\alpha)$	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$	17
$F(4)$	$\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\mathrm{spin}_7 \otimes \mathbb{C}^2$	40
$G(3)$	$G_2 \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\mathbb{C}^7 \otimes \mathbb{C}^2$	31
$P(n)$	$\mathfrak{sl}(n+1)$	$S^2(\mathbb{C}^{n+1}) \oplus \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$	$2(n+1)^2-1$
$Q(n)$	$\mathfrak{sl}(n+1)$	$\mathfrak{sl}(n+1)$	$2(n+1)^2-2$

No caso das superálgebras de Cartan $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$, $H(n)$ consideramos a $\mathbb{Z}$-graduação (que é mais fina que a $\mathbb{Z}_2$-graduação) para a classificação, que é dada como na tabela abaixo.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_j$	$dim\mathfrak{g}$
$W(n)$	$\mathfrak{gl}(n)$	$\Lambda^{j+1}(n) \otimes (\mathbb{C}^n)^*$	$n2^n$
$S(n)$	$\mathfrak{sl}(n)$	$-$	$(n-1)2^n+1$
$\tilde{S}(n)$	$\mathfrak{sl}(n)$	$-$	$(n-1)2^n+1$
$H(n)$	$\mathfrak{so}(n)$	$\Lambda^{j+2}(n)$	2^n-2

Neste capítulo, vamos construir explicitamente cada uma das famílias de superálgebras de Lie simples das tabelas acima e explicar algumas subclassificações destas superálgebras de Lie.

As principais bibliografias utilizadas nesse capítulo são os artigos (BAGCI; CALIXTO; MACEDO, 2019) e (KAC, 1977b), os livros (MUSSON, 2012), (SCHEUNERT, 1979), (CHENG; WANG, 2012), e a dissertação (CALIXTO, 2013).

As superálgebras de Lie de dimensão finita são divididas em duas grandes classes: clássicas e do tipo Cartan. As superálgebras clássicas são aquelas cuja componente $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ é redutiva (e $\mathfrak{g}_{\overline{1}}$ é completamente redutível como $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$-módulo). Já para as superálgebras de tipo Cartan, isso não acontece. As superálgebras de Lie clássicas são dividas em duas subclasses: básicas e estranhas. As superálgebras de Lie clássicas básicas são aquelas que admitem uma forma bilinear par superssimétrica, invariante e não-degenearada. Para as superálgebras clássicas estranhas, tal forma bilinear não existe.

2.1 Superálgebras de Lie clássicas básicas

2.1.1 $A(m,n)$

Lembremos da Definição 1.3.3 que, para cada $m,n \geq 0$, $\mathfrak{sl}(m,n)$ é definida como sendo a subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(m,n)$ formada pelas matrizes de supertraço nulo. Quando $m=n$, a superálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(m,n)=\mathfrak{sl}(n,n)$ tem um ideal de dimensão 1 constituído pelas matrizes da forma $\lambda \mathrm{Id}_{n+1,n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (ver Exemplo 1.29). Definamos

$$A(m,n) := \begin{cases} \mathfrak{sl}(m+1,n+1), & \text{para } 0 \leq m < n, \\ \dfrac{\mathfrak{sl}(n+1,n+1)}{span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\}}, & \text{para } 0 < m = n. \end{cases}$$

No caso em que $0 \leq m < n$, a $\mathbb{Z}$-graduação de $\mathfrak{gl}(m+1,n+1)$ dada no Exemplo 1.21 induz a seguinte $\mathbb{Z}$-graduação em $A(m,n)$:

$$A(m,n)_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; \beta \in M_{(m+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}) \right\},$$

$$A(m,n)_0 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right) \middle| \; \alpha \in M_{(m+1)\times(m+1)}(\mathbb{C}),\ \delta \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}),\ \mathrm{tr}(\alpha)=\mathrm{tr}(\delta) \right\},$$

$$A(m,n)_{-1} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma & 0 \end{array} \right) \middle|\ \gamma \in M_{(n+1)\times(m+1)}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Consequentemente, $A(m,n)$ admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por: $A(m,n)_{\bar{0}} = A(m,n)_0$ e $A(m,n)_{\bar{1}} = A(m,n)_{-1} \oplus A(m,n)_1$. Consideremos bases de $A(m,n)_1$, $A(m,n)_0$ e $A(m,n)_{-1}$ dadas, respectivamente, por

$$\zeta_1 = \{E_{i,j} \mid i \in \{1,\dots,m+1\} \text{ e } j \in \{m+2,\dots,m+n+2\}\}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \zeta_0 = & \{E_{ij} \mid i \neq j \in \{1,\dots,m+1\} \text{ ou } i \neq j \in \{m+2,\dots,m+n+2\}\} \\ & \cup \{E_{i,i} - (-\delta_{i,n+1})E_{i+1,i+1} \mid i \in \{1,\dots,m+n+1\}\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\zeta_{-1} = \{E_{i,j} \mid i \in \{m+2,\dots,m+n+2\} \text{ e } j \in \{1,\dots,m+1\}\}. \tag{2.3}$$

Observemos que a álgebra de Lie $A(m,n)_{\bar{0}}$ é isomorfa à $\mathfrak{sl}(m+1)\oplus\mathfrak{sl}(n+1)\oplus\mathbb{C}$, através do seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : A(m,n)_0 & \longrightarrow \mathfrak{sl}(m+1)\oplus\mathfrak{sl}(n+1)\oplus\mathbb{C} \\ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right) & \longmapsto \left(\alpha - \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1},\ \delta - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1} \right), \end{aligned}$$

para todo $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right) \in A(m,n)_0$.

Mostremos que φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 \end{array} \right)$, $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \delta_2 \end{array} \right) \in A(m,n)_0$. Assim,

$$\begin{aligned} & \varphi_0([M_1,M_2]) \\ & = \varphi_0 \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \end{array} \right) \\ & = \Bigg(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1},\ \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 - \frac{\operatorname{tr}(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \\ & \quad \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)}{n+1} \Bigg) \\ & =(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1,\ \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1,\ 0) \\ & =([\alpha_1,\ \alpha_2],\ [\delta_1,\ \delta_2],\ 0) \\ & = \Bigg([\alpha_1,\ \alpha_2] - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1)}{m+1}[\mathrm{Id}_{m+1},\ \alpha_2] - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_2)}{m+1}[\alpha_1,\ \mathrm{Id}_{m+1}] + \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1)\operatorname{tr}(\alpha_2)}{(m+1)^2}[\mathrm{Id}_{m+1},\ \mathrm{Id}_{m+1}], \\ & \quad [\delta_1,\ \delta_2] - \frac{\operatorname{tr}(\delta_1)}{n+1}[\mathrm{Id}_{n+1},\ \delta_2] - \frac{\operatorname{tr}(\delta_2)}{n+1}[\delta_1,\ \mathrm{Id}_{n+1}] + \frac{\operatorname{tr}(\delta_1)\operatorname{tr}(\delta_2)}{(n+1)^2}[\mathrm{Id}_{n+1},\ \mathrm{Id}_{n+1}],\ 0 \Bigg) \\ & = \Bigg(\left[\alpha_1 - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1},\ \alpha_2 - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_2)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1} \right], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\delta_1 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \delta_2 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right],\ \left[\frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1},\ \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\right]\Bigg) \\
&= \Bigg[\left(\alpha_1 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1},\ \delta_1 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}\right), \\
&\quad \left(\alpha_2 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1},\ \delta_2 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\right)\Bigg] \\
&= \left[\varphi_0(M_1), \varphi_0(M_2)\right].
\end{aligned}
$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Agora, mostremos que $\ker(\varphi_0) = \{0\}$. Seja $M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \in A(m,n)_0$, tal que $\varphi_0(M) = (0,0,0)$. Assim, $\alpha = \frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1}$, $\delta = \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}$ e $\mathrm{tr}(\alpha) = 0$. Como $\mathrm{tr}(\delta) = \mathrm{tr}(\alpha)$, temos $\mathrm{tr}(\delta) = 0$, daí, $\alpha = 0$ e $\delta = 0$. Logo, $\ker(\varphi_0) = \{0\}$ e consequentemente, φ_0 é injetora.

Observemos que na Equação 2.2 explicitamos uma base para $A(m,n)_0$, de onde temos, $dim(A(m,n)_0) = (m+1)^2 + (n+1) - 1$. Agora, como φ_0 é injetora e $dim(A(m,n)_0) = (m+1)^2 + (n+1)^2 - 1 = dim(\mathfrak{sl}(m+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathbb{C})$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_0 é sobrejetora. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Além disso, $A(m,n)_1$ é isomorfo ao $A(m,n)_0$-módulo $\mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}$, cuja representação associada, $\rho_1 : A(m,n)_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C})$, é a única que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\rho_1\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right)(v \otimes f \otimes \lambda) &= \eta\left(\alpha - \frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{m+1}\mathrm{Id}_{m+1}\right)(v) \otimes f \otimes \lambda \\
&\quad + v \otimes \eta^*\left(\delta - \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right)(f) \otimes \lambda \\
&\quad + v \otimes f \otimes \left(\frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}\right)\lambda,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

para todos $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \in A(m,n)_0$, $v \in \mathbb{C}^{m+1}$, $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, com η sendo a representação natural de $\mathfrak{sl}(m+1)$ (ver Exemplo 1.34) e η^* sendo a representação dual (ver Definição 1.35) da representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$. De fato, lembremos que $\heartsuit$ foi definido na Equação 1.26 (ver Exemplo 1.44), e consideremos a única transformação linear entre os $A(m,n)_0$-módulos $A(m,n)_1$ e $\mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}$ que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 : \mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow A(m,n)_1 \\
a \otimes f \otimes \lambda &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(a \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^{m+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Dado $M \in M_{(m+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$, pelo Exemplo 1.44, existem $a \in \mathbb{C}^{m+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, tais que $a \heartsuit f \in M_{(m+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$ e daí, $\varphi_1(a \otimes f \otimes 1) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Logo, φ_1 é sobrejetor.

Observemos que na Equação 2.1 explicitamos uma base de $A(m,n)_1$ e dada essa base, temos $dim(A(m,n)_1) = (m+1)(n+1)$. Agora, como φ_1 é linear e sobrejetor e $dim(\mathbb{C}^{m+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}) = (n+1)(m+1) = dim(A(m,n)_1)$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_1 é injetor.

Mostremos que φ_1 é um homomorfismo de $A(m,n)_0$-módulos. Sejam $v \in \mathbb{C}^{m+1}$, $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \in A(m,n)_0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1\left(\rho_1\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right)(v \otimes f \otimes \lambda)\right) \\
&= \varphi_1\left(\eta\left(\alpha - \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1}\operatorname{Id}_{m+1}\right)(v) \otimes f \otimes \lambda\right) + \varphi_1\left(v \otimes \eta^*\left(\delta - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\operatorname{Id}_{n+1}\right)(f) \otimes \lambda\right) \\
&\quad + \varphi_1\left(v \otimes f \otimes \left(\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\right)\lambda\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda\left(\eta\left(\alpha - \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1}\operatorname{Id}_{m+1}\right)(v) \heartsuit f\right) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda\left(v \heartsuit \eta^*\left(\delta - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\operatorname{Id}_{n+1}\right)(f)\right) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\right)\lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda\left(\eta(\alpha)\, v - \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1}v\right) \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda\left(v \heartsuit \left(\eta^*(\delta)f - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}f\right)\right) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\right)\lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda((\eta(\alpha)\, v) \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1}\lambda\right)(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit \eta^*(\delta)f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\lambda\right)(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \left(\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\right)\lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda((\eta(\alpha)\, v) \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit \eta^*(\delta)f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda((\eta(\alpha)\, v) \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(-\frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} + \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1} + \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda((\eta(\alpha)\, v) \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit \eta^*(\delta)f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(\eta(\alpha)\ v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit \eta^*(\delta) f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda(v \heartsuit f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \right] \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right), \varphi_1(v \otimes f \otimes \lambda) \right].
\end{aligned}
$$

Observemos que a igualdade $\overset{\star}{=}$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44). Logo, φ_1 é um homomorfismo de $A(m,n)_{\overline{0}}$-módulos. Portanto, φ_1 é um isomorfismo de $A(m,n)_{\overline{0}}$-módulos.

Mais ainda, $A(m,n)_{-1}$ é isomorfo ao $A(m,n)_0$-módulo $(\mathbb{C}^{m+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}$, cuja representação associada, $\rho_{-1} : A(m,n) \longrightarrow \mathfrak{gl}((\mathbb{C}^{m+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C})$, é a única que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\rho_{-1} \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) (f \otimes v \otimes \lambda) &= \eta^* \left(\alpha - \frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{m+1} \mathrm{Id}_{n+1}\right)(f) \otimes v \otimes \lambda \\
&+ f \otimes \eta \left(\delta - \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1} \mathrm{Id}_{n+1}\right)(v) \otimes \lambda \\
&+ f \otimes v \otimes \left(\frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{m+1} - \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}\right) \lambda,
\end{aligned}
$$

para todos $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array}\right) \in A(m,n)_0$, $f \in (\mathbb{C}^{m+1})^*$, $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, com η a representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ (ver Exemplo 1.34) e η^* a representação dual (ver Definição 1.35) da representação natural de $\mathfrak{sl}(m+1)$. De fato, consideremos a única transformação linear entre os $A(m,n)_0$-módulos $(\mathbb{C}^{m+1}) \otimes \mathbb{C}^{n+1}$ e $A(m,n)_{-1}$, que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\varphi_{-1} : (\mathbb{C}^{m+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow A(m,n)_{-1} \\
f \otimes b \otimes \lambda &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\lambda(b \heartsuit f) & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

para todos, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in (\mathbb{C}^{m+1})^*$ e $b \in \mathbb{C}^{n+1}$.

A demonstração de que φ_{-1} isomorfismo de $A(m,n)_0$-módulos é análoga a demonstração feita para φ_1. Além disso, $A(m,n)_{-1}$ é isomorfo ao $A(m,n)_0$-módulo dual de $A(m,n)_1$. Além disso, observemos que a dimensão de $A(m,n)$ é $(m+n+2)^2 - 1$.

Seja, agora, $1 \leq m = n$. Nesse caso, a $\mathbb{Z}$-graduação de $\mathfrak{gl}(n+1, n+1)$ dada no Exemplo 1.21 induz a seguinte $\mathbb{Z}$-graduação em $A(n,n)$:

$$
A(n,n)_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma & 0 \end{array}\right) + span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\} \;\middle|\; \gamma \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}) \right\} \Big/ span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\},
$$

$$A(n,n)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right) \middle| \alpha, \delta \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}),\ \operatorname{tr}(\alpha) = \operatorname{tr}(\delta) \right\} \Big/ span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\},$$

$$A(n,n)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\} \ \middle|\ \beta \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}) \right\} \Big/ span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\}.$$

Consequentemente, $A(n,n)$ admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por: $A(n,n)_{\bar{0}} = A(n,n)_0$ e $A(n,n)_{\bar{1}} = A(n,n)_{-1} \oplus A(n,n)_1$.

Consideremos as bases de $A(n,n)_1$, $A(n,n)_0$ e $A(n,n)_{-1}$ dadas, respectivamente, por

$$\zeta_1 = \{[E_{i,j}] \mid i \in \{1,\ldots,n+1\} \text{ e } j \in \{n+2,\ldots,2n+2\}\}, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \zeta_0 = &\{[E_{ij}] \mid i \neq j \in \{1,\ldots,n+1\} \text{ ou } i \neq j \in \{n+2,\ldots,2n+2\}\} \\ &\cup \{[E_{i,i}] - [E_{i+1,i+1}] \mid i \in \{1,\ldots,n\} \cup \{n+2,\ldots,2n+1\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\zeta_{-1} = \{[E_{i,j}] \mid i \in \{n+2,\ldots,2n+2\} \text{ e } j \in \{1,\ldots,n+1\}\}. \tag{2.7}$$

Observemos que a álgebra de Lie $A(n,n)_{\bar{0}}$ é isomorfa à $\mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1)$, através do seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : A(n,n)_0 &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1) \\ \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right] &\longmapsto \left(\alpha - \frac{\operatorname{tr}(\alpha)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \delta - \frac{\operatorname{tr}(\delta)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \right), \end{aligned}$$

para todo $\left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta \end{array} \right] \in A(n,n)_0$.

Inicialmente, mostremos que φ_0 está bem definida. Sejam $A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 \end{array} \right]$, $B = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \delta_2 \end{array} \right] \in A(n,n)_0$, tais que $A = B$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_0(A) &= \left(\alpha_1 - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \delta_1 - \frac{\operatorname{tr}(\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \right) \\ &= \left(\alpha_2 - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \delta_2 - \frac{\operatorname{tr}(\delta_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \right) \\ &= \varphi_0(B). \end{aligned}$$

Logo, φ_0 está bem definida. Agora, mostremos que φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 \end{array} \right]$ e $M_2 = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \delta_2 \end{array} \right]$ em $A(n,n)_0$. Assim,

$$\begin{aligned} &\varphi_0([M_1, M_2]) \\ &= \varphi_0 \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \end{array} \right) \\ &= \left((\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1) - \frac{\operatorname{tr}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) - \frac{\operatorname{tr}(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1,\ \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1) \\
&= ([\alpha_1,\alpha_2],[\delta_1,\delta_2]) \\
&= \left([\alpha_1,\alpha_2] - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{n+1}[\mathrm{Id}_{n+1},\alpha_2] - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{n+1}[\alpha_1,\mathrm{Id}_{n+1}] + \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)\,\mathrm{tr}(\alpha_2)}{(n+1)^2}[\mathrm{Id}_{n+1},\mathrm{Id}_{n+1}],\right. \\
&\quad \left.[\delta_1,\delta_2] - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}[\mathrm{Id}_{n+1},\delta_2] - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}[\delta_1,\mathrm{Id}_{n+1}] + \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)\,\mathrm{tr}(\delta_2)}{(n+1)^2}[\mathrm{Id}_{n+1},\mathrm{Id}_{n+1}]\right) \\
&= \left(\left[\alpha_1 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \alpha_2 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right],\ \left[\delta_1 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \delta_2 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right]\right) \\
&= \left[\left(\alpha_1 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \delta_1 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right),\ \left(\alpha_2 - \frac{\mathrm{tr}(\alpha_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1},\ \delta_2 - \frac{\mathrm{tr}(\delta_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right)\right] \\
&= [\varphi_0(M_1),\varphi_0(M_2)]\,.
\end{aligned}
$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Agora, mostremos que $\ker(\varphi_0) = span\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_{n+1} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{n+1}\end{array}\right)\right\}$. Seja $M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \delta\end{array}\right)$ em $A(n,n)_0$ tal que $\varphi_0(M) = (0,0)$. Assim, $\left(\alpha - \frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, \delta_1 - \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right) = (0,0)$. Daí, $a_{ij} = 0$, para todos $i \neq j$, $i,j \in \{1,\cdots,n+1\}$, $a_{ii} = \frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{n+1}$, $i \in \{1,\cdots,n+1\}$, $d_{ij} = 0$, para todos para todos $i \neq j$, $i,j \in \{1,\cdots,n+1\}$, $d_{ii} = \frac{\mathrm{tr}(\delta)}{n+1}$, $i \in \{1,\cdots,n+1\}$. Como $\mathrm{tr}(\alpha) = \mathrm{tr}(\delta)$, temos $a_{ii} = d_{ii}$, para todo $i \in \{1,\cdots,n+1\}$. Logo, $\ker(\varphi_0) = span\left\{\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_{n+1} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{n+1}\end{array}\right)\right\}$. Na Equação 2.6 explicitamos uma base para $A(n,n)_0$ e dada essa base, temos $dim(A(n,n)_0) = 2(n+1)^2 - 2$ e pelo Teorema dos Isomorfismos para álgebras de Lie, temos que $A(n,n)_0 \cong \mathrm{im}(\varphi_0)$ e também $dim(\mathrm{im}(\varphi_0)) = 2(n+1)^2 - 2$. Portanto, $A(n,n)_0 \cong \mathfrak{sl}(n+1) \oplus \mathfrak{sl}(n+1)$.

Além disso, os $A(n,n)_0$-módulos $A(n,n)_{\pm 1}$ são ambos isomorfos ao produto tensorial (ver Definição 1.36) da representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ (ver Exemplo 1.34) e sua representação dual (ver Definição 1.35). De fato, lembremos que $\heartsuit$ foi definido na Equação 1.26 (ver Exemplo 1.44) e consideremos a única transformação linear entre os $A(n,n)_0$-módulos $A(n,n)_1$ e $\mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^*$ que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 : \mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* &\longrightarrow A(n,n)_1 \\
a \otimes f &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & a \heartsuit f \\ \hline 0 & 0\end{array}\right),
\end{aligned}
$$

para todos $a \in (\mathbb{C}^{n+1})$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Mostremos que φ_1 é um homomorfismo de $A(n,n)_{\overline{0}}$-módulos. Consideremos a única transformação linear β_1 que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\beta_1 \colon\ (A(n,n)_0) \times (\mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^*) &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^* \\
\left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2\end{array}\right), (v \otimes f)\right) &\mapsto \eta(A_1)(v) \otimes f + v \otimes \eta^*(A_2)(f),
\end{aligned}
$$

para todos A_1, $A_2 \in \mathfrak{sl}(n+1)$, $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, com η a representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ e η^* a dual da representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$. Sejam $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array}\right) \in A(n,n)_0$, $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\beta_1\left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array}\right), (v \otimes f)\right)\\
&= \varphi_1(\eta(A_1)(v) \otimes f + v_1 \otimes \eta^*(A_2)(f))\\
&= \varphi_1(\eta(A_1)(v) \otimes f) + \varphi_1(v \otimes \eta^*(A_2)(f))\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \eta(A_1)(v) \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \heartsuit \eta^*(A_2)f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \eta(A_1)(v) \heartsuit f + v \heartsuit \eta^*(A_2)f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\\
&\stackrel{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1(v \heartsuit f) - (v \heartsuit f)A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & v \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)\\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\right]\\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right),\ \varphi_1(v \otimes f)\right].
\end{aligned}
$$

Observemos que a igualdade $\stackrel{\star}{=}$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44). Logo, φ_1 é um homomorfismo de $A(m,n)_{\overline{0}}$-módulos.

Dado $M \in A(n,n)_1$, pelo Exemplo 1.44, existem $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, tais que $a \heartsuit f \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$. Daí, $\varphi_1(a \otimes f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a \heartsuit f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Logo, φ_1 é sobrejetor. Na Equação 2.5 explicitamos uma base para $A(n,n)_1$ e dada essa base, temos $dim(A(n,n)_1) = (n+1)^2$. Mais ainda, como φ_1 é linear, injetor e $dim(A(n,n)_1) = dim(\mathbb{C}^{n+1} \otimes (\mathbb{C}^{n+1})^*)$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_1 é sobrejetor. Portanto, φ_1 é um isomorfismo de $A(n,n)_{\overline{0}}$-módulos.

Agora, consideremos a única transformação linear entre os $A(n,n)_0$-módulos $A(n,n)_{-1}$ e $(\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1}$ que satisfaz

$$
\begin{aligned}
\varphi_{-1} : (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow A(n,n)_{-1}\\
f \otimes v &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline v \heartsuit f & 0 \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

para todos $v \in (\mathbb{C}^{n+1})$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Mostremos que φ_{-1} é um homomorfismo de de $A(n,n)_{\bar{0}}$-módulos. Sejam A_1, $A_2 \in \mathfrak{sl}(n+1)$, $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ e $v \in \mathbb{C}^{n+1}$. Consideremos a única transformação linear β_{-1} que satisfaz

$$\begin{array}{ccc} (A(n,n)_0) \times ((\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1}) & \to & (\mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathbb{C}^{n+1} \\ \left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right), (f \otimes v) \right) & \mapsto & \eta^*(A_1)(f) \otimes v + f \otimes \eta(A_2)(v), \end{array}$$

para todos A_1, $A_2 \in \mathfrak{sl}(n+1)$, $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, com η a representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ e η^* a dual da representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$. Observemos que a demonstração que φ_{-1} é um isomorfismo de $A(n,n)_0$-módulos é análoga à feita para φ_1. Mais ainda, $A(n,n)_{-1}$ é isomorfo ao dual do $A(n,n)_0$-módulo $A(n,n)_1$. Portanto, a dimensão de $A(n,n)$ é $4(n+1)^2 - 2$.

2.1.2 $B(m,n)$

Lembremos do Exemplo 1.30 que, para cada $m, n > 0$, $\mathfrak{osp}(m,n)$ é a subsuperálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(m,n)$ formada pelas matrizes que satisfazem as equações do Sistema 1.15. Dados $m \geq 0$ e $n \geq 1$, definamos

$$B(m,n) := \mathfrak{osp}(2m+1, 2n).$$

Lembremos também que, a menos de isomorfismo, a definição de $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n)$ não depende da escolha de F (ver Exemplo 1.30). Assim, podemos escolhê-la como sendo a forma bilinear cuja matriz de Gram (relativa a certa base fixada de $\mathbb{C}^{2m+1,\,2n}$) é dada por

$$\left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array} \right), \quad \text{com} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_m \\ 0 & \mathrm{Id}_m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Assim, $B(m,n)$ é constituída pelas matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & -u^t & -v^t & x & x_1 \\ v & a & b & y & y_1 \\ u & c & -a^t & z & z_1 \\ \hline -x_1^t & -z_1^t & -y_1^t & d & e \\ x^t & z^t & y^t & f & -d^t \end{array} \right), \tag{2.9}$$

com $a \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$, $b, c \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ sendo antissimétricas, $d \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $e, f \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ sendo simétricas, $u, v \in M_{m\times 1}(\mathbb{C})$, $y, y_1, z, z_1 \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $x, x_1 \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$.

Consideremos uma base ζ_0 de $B(m,n)_0$ dada por

$$\begin{gathered} E_{1+j,1} - E_{1,1+m+j},\ E_{1+m+j,1} - E_{1,1+j},\ E_{1+j,1+j} - E_{1+m+j,1+m+j},\ E_{1+j,1+j}, E_{1+m+j,1+j}, \\ E_{2m+1+i,2m+1+i} - E_{2m+n+1+i,2m+n+i},\ E_{2m+1+i,2m+1+n+i}, E_{2m+n+1+i,2m+1+i}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

com $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, n\}$, e uma base $\zeta_{\bar{1}}$ de $B(m,n)_{\bar{1}}$ dada por

$$\begin{aligned} E_{1,2m+1+j} - E_{2m+1+n+j,1},\ & E_{1,2m+n+1+j} - E_{2m+1+j,1}, \\ E_{1+i,2m+1+j} - E_{2m+n+1+j,1+m+j},\ & E_{1+i,2m+n+1+j} - E_{2m+1+j,1+m+j}, \\ E_{m+1+i,2m+1+j} - E_{2m+n+1+j,1+i},\ & E_{m+1+i,2m+n+1+j} - E_{2m+1+j,1+i}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

com $i \in \{1, \cdots, m\}$ e $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Observemos que a álgebra de Lie $B(m,n)_{\bar{0}}$ é isomorfa à $\mathfrak{so}(2m+1) \oplus \mathfrak{sp}(2n)$, através da função dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & B(m,n)_{\bar{0}} & \longrightarrow & \mathfrak{so}(2m+1) \oplus \mathfrak{sp}(2n) \\ & \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) & \longmapsto & (\alpha, \beta), \end{array}$$

para todo $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \in B(m,n)_{\bar{0}}$.

Inicialmente, mostremos que φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1 \end{array}\right)$, $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta_2 \end{array}\right) \in B(m,n)_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim

$$\begin{aligned} \varphi_0\left(\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1 \end{array}\right) + \lambda \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta_2 \end{array}\right)\right) &= \varphi_0\left(\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 + \lambda\alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1 + \lambda\beta_2 \end{array}\right)\right) \\ &= (\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \beta_1 + \lambda\beta_2) \\ &= (\alpha_1, \beta_1) + \lambda(\alpha_2, \beta_2) \\ &= \varphi_0\left(\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1 \end{array}\right)\right) + \lambda\, \varphi_0\left(\left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta_2 \end{array}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo, φ_0 é linear. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \varphi_0([M_1, M_2]) = \varphi_0 & \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1 \end{array}\right) \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1) \\ &= ([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) \\ &= [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] \\ &= [\varphi_0(M_1), \varphi_0(M_2)]\,. \end{aligned}$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Observemos que na Equação 2.1.2, explicitamos uma base para $B(m,n)_{\bar{0}}$ e dada essa base temos, $dim(B(m,n)_{\bar{0}}) = 2m^2 + m + 2 + n^2 + n$. Agora, provemos que φ_0 é bijetor. Seja $M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \in B(m,n)_0$, tal que $\varphi_0(M) = (0,0)$. Assim, $(0,0) = \varphi_0(M) = (\alpha, \beta)$.

De onde, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Daí, $\ker(\varphi_0) = \{0\}$. Logo, φ_0 é injetora. Como $dim(B_{\bar{0}}) = 2m^2 + m + 2n^2 + n = dim(\mathfrak{so}(2m+1)) + dim(\mathfrak{sp}(2n))$ e $\varphi_{\bar{0}}$ é injetora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_0 é sobrejetora. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Além disso, o $B(m,n)_{\bar{0}}$-módulo $B(m,n)_{\bar{1}}$ é isomorfo ao produto tensorial (ver Definição 1.36) da representação natural de $\mathfrak{so}(2m+1)$ em $\mathbb{C}^{2m+1}$ (ver Exemplo 1.34) com o dual $(\mathbb{C}^{2n})^*$ da representação natural de $\mathfrak{sp}(2n)$ em $\mathbb{C}^{2n}$ (ver Definição 1.35). Consideremos a única transformação linear entre os $B(m,n)_{\bar{0}}$-módulos $B(m,n)_{\bar{1}}$ e $\mathbb{C}^{2m+1} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^*$ que satisfaz

$$\varphi_1 : \mathbb{C}^{2m+1} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^* \to B(m,n)_{\bar{1}}, \qquad \varphi_1(v \otimes f) = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & a_1 & a_2 \\ & & & b_1 & b_2 \\ & & & c_1 & c_2 \\ \hline -a_2^t & -c_2^t & -b_2^t & & \\ a_1^t & c_1^t & b_1^t & & \end{array}\right),$$

para todos $v \in \mathbb{C}^{2m+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$, com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ dados explicitamente, em termos de $v = (v_1, \ldots, v_{2m+1}) \in \mathbb{C}^{2m+1}$ e $f = (f_1, \ldots, f_{2n}) \in (\mathbb{C}^{2n})^*$, da seguinte forma

$$\left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right) := \left(\begin{array}{cccc|ccc} v_1 f_1 & v_1 f_2 & \cdots & v_1 f_n & v_1 f_{n+1} & \cdots & v_1 f_{2n} \\ \hline v_2 f_1 & v_2 f_2 & \cdots & v_2 f_n & v_2 f_{n+1} & \cdots & v_2 f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{m+1} f_1 & v_{m+1} f_2 & \cdots & v_{m+1} f_n & v_{m+1} f_{n+1} & \cdots & v_{m+1} f_{2n} \\ \hline v_{m+2} f_1 & v_{m+2} f_2 & \cdots & v_{m+2} f_n & v_{m+2} f_{n+1} & \cdots & v_{m+2} f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{2m+1} f_1 & v_{2m+1} f_2 & \cdots & v_{2m+1} f_n & v_{2m+1} f_{n+1} & \cdots & v_{2m+1} f_{2n} \end{array}\right).$$

Observemos que $\left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right) = v \heartsuit f$ e denotemos $\left(\begin{array}{c|c|c} -a_2^t & -c_2^t & -b_2^t \\ \hline a_1^t & c_1^t & b_1^t \end{array}\right)$ por $f \spadesuit v$.

Mostremos que φ_1 é um homomorfismo de $B(m,n)_0$-módulos. Sejam $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array}\right) \in B(m,n)_0$, $v \in \mathbb{C}^{2m+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$. Assim,

$$\begin{aligned} &\varphi_1\left(\left(\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array}\right), (v \otimes f)\right) \\ &= \varphi_1(\eta(A_1)v \otimes f + v \otimes \eta^*(A_2)f) \\ &= \varphi_1(\eta(A_1)v \otimes f) + \varphi_1(v \otimes \eta^*(A_2)f) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \eta(A_1)v \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit \eta(A_1)v & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & v \heartsuit \eta^*(A_2)f \\ \hline \eta^*(A_2)f \spadesuit v & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\eta(A_1)v \heartsuit f) + (v \heartsuit \eta^*(A_2)f) \\ \hline (\eta^*(A_2)f \spadesuit v) + (f \spadesuit \eta(A_1)v) & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1(v \heartsuit f) - (v \heartsuit f)A_2 \\ \hline A_2(f \spadesuit v) - (f \spadesuit v)A_1 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & (v \heartsuit f) \\ \hline (f \spadesuit v) & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & (v \heartsuit f) \\ \hline (f \spadesuit v) & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right) \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} 0 & (v \heartsuit f) \\ \hline (f \spadesuit v) & 0 \end{array}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Observemos que na igualdade $\overset{\star}{=}$ a passagem $(\eta(A_1)v \heartsuit f) + (v \heartsuit \eta^*(A_2)f) = A_1(v \heartsuit f) - (v \heartsuit f)A_2$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44). Além disso, pela definição de $f \spadesuit v$, temos $(\eta^*(A_2)f \spadesuit v) = A_2(f \spadesuit v))$, pois se $v \heartsuit f = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right)$ e $A_2 = \left(\begin{array}{c|c} d & e \\ \hline j & -d^t \end{array}\right) \in \mathfrak{sp}(2n)$, então

$$
\begin{aligned}
-(v \heartsuit f)A_2 &= - \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} d & e \\ \hline j & -d^t \end{array}\right) \\
&= - \left(\begin{array}{c|c} a_1d + a_2j & a_1e - a_2d^t \\ \hline b_1d + b_2j & b_1e - b_2d^t \\ \hline c_1d + c_2j & c_1e - c_2d^t \end{array}\right).
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
A_2(f \spadesuit v) &= \left(\begin{array}{c|c|c} ea_1^t - ea_2^t & ec_1^t - dc_2^t & eb_1^t - db_2^t \\ \hline -d^ta_1^t - ja_2^t & -d^tc_1^t - jc_2^t & -d^tb_1^t - jb_2^t \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} e^ta_1^t - da_2^t & e^tc_1^t - dc_2^t & e^tb_1 - db_2^t \\ \hline -d^ta_1 - j^ta_2^t & -d^tc_1^t - j^tc_2^t & -d^tb_1^t - j^tb_2^t \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} (a_1e - a_2d^t)^t & (c_1e - c_2d^t)^t & (b_1e - b_2d^t)^t \\ \hline -(a_1d + a_2j)^t & -(c_1d + c_2j)^t & -(b_1d + b_2j)^t \end{array}\right).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Analogamente, se $v \heartsuit f = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right)$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -u^t & -v^t \\ v & a & b \\ u & c & -a^t \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2m+1)$, então

$$
\begin{aligned}
A_1(v \heartsuit f) &= \begin{pmatrix} 0 & -u^t & -v^t \\ v & a & b \\ u & c & -a^t \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} -u^tb_1 - v^tc_1 & -u^tb_2 - v^tc_2 \\ \hline va_1 + ab_1 + bc_1 & va_2 + ab_2 + bc_2 \\ \hline ua_1 + cb_1 - a^tc_1 & ua_2 + cb_2 - a^tc_2 \end{array}\right).
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(f \spadesuit v)A_1 &= \left(\begin{array}{c|c|c} -a_2^t & -c_2^t & -b_2^t \\ \hline a_1^t & c_1^t & b_1^t \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 & -u^t & -v^t \\ v & a & b \\ u & c & -a^t \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} -c_2^t v - b_2^t u & a_2^t u^t - c_2^t a - b_2^t c & a_2^t v^t - c_2^t b + b_2^t a^t \\ \hline c_1^t v + b_1^t u & -a_1^t u^t + c_1^t a + b_1^t c & -a_1^t v^t - c_1^t b + b_1^t a^t \end{array}\right). \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Comparando a equação 2.12 com 2.13 e a equação 2.14 com 2.15, vemos que

$$(\eta^*(A_2)f \spadesuit v) + (f \spadesuit \eta(A_1)v) = A_2(f \spadesuit v) - (f \spadesuit v)A_1.$$

Logo, φ_1 é um homomorfismo de $B(m,n)_{\bar{0}}$-módulos.

Dado $X \in M_{(2m+1)\times(2n)}(\mathbb{C})$, pelo Exemplo 1.44, existem $v \in \mathbb{C}^{2m+1}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$, tais que $v \heartsuit f = X$, daí existe $Y \in M_{(2n)\times(2m+1)}(\mathbb{C})$, tal que $f \spadesuit v = Y$. Assim, $\varphi_1(v \otimes f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline Y & 0 \end{array}\right)$. Logo, φ_1 é sobrejetor. Observemos que na Equação 2.1.2 explicitamos uma base para $B(m,n)_{\bar{1}}$ e dada essa base, temos $dim(B(m,n)_{\bar{1}}) = 4mn + 2n$.

Além disso, como φ_1 é linear, sobrejetor e $dim(B(m,n)_{\bar{1}}) = dim(\mathbb{C}^{2m+1} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^*)$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_1 é um isomorfismo de $B(m,n)_{\bar{0}}$-módulos. Consequentemente, a dimensão de $B(m,n)$ é $2(m+n)^2 + m + 3n$.

2.1.3 $C(n)$

Relembremos a definição da superálgebra $\mathfrak{osp}(m,n)$ (Exemplo 1.30). Para cada $n \geq 2$, defina

$$C(n) := \mathfrak{osp}(2, 2n-2).$$

Como, a menos de isomorfismo, a definição de $\mathfrak{osp}(2,2n-2)$ não depende da escolha de F (ver Exemplo 1.30), podemos escolhê-la como sendo a forma bilinear cuja matriz de Gram (relativa a uma certa base fixada de $\mathbb{C}^{(2,\,2n-2)}$) é dada por

$$J = \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right), \quad \text{com} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{n-1} \\ -\mathrm{Id}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando as equações do Sistema 1.15, segue que os elementos de $C(n)$ consistem das matrizes da seguinte forma

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & x & x_1 \\ 0 & -\alpha & y & y_1 \\ \hline y_1^t & x_1^t & a & b \\ -y^t & -x^t & c & -a^t \end{array}\right),$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$, $a,b,c \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$, b,c sendo simétricas, $x, x_1, y, y_1 \in M_{1\times(n-1)}(\mathbb{C})$.

Consideremos a $\mathbb{Z}$-graduação de $C(n) = C(n)_{-1} \oplus C(n)_0 \oplus C(n)_1$, com

$$C(n)_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & y & y_1 \\ \hline y_1^t & 0 & & \\ -y^t & 0 & & \end{array} \right) \middle| \, y, y_1 \in M_{1\times(n-1)}(\mathbb{C}) \right\},$$

$$C(n)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^t \end{array} \right) \middle| \, \alpha \in \mathbb{C},\ a, b, c \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C}),\ b, c \text{ simétricas} \right\},$$

$$C(n)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} & & x & x_1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_1^t & & \\ 0 & -x^t & & \end{array} \right) \middle| \, x, x_1 \in M_{1\times(n-1)}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Observemos que $C(n)_{\bar{0}} = C(n)_0$ e $C(n)_{\bar{1}} = C(n)_{-1} \oplus C(n)_1$. Além disso, consideremos as bases de $C(n)_{-1}$, $C(n)_0$ e $C(n)_1$ dadas por

$$\zeta_{-1} = \{E_{2,2+j} - E_{n+1+j,1},\ E_{2,n+1+j} + E_{2+j,1} \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}, \tag{2.16}$$

$$\zeta_0 = \{E_{1,1} - E_{2,2},\ E_{2+i,2+j} - E_{n+1+j,n+1+i},\ E_{n+1+i,2+j},\ E_{n+1+i,2+j} \mid i, j \in \{1, \dots, n-1\}\}, \tag{2.17}$$

$$\zeta_1 = \{E_{1,2+j} - E_{n+1+j,2},\ E_{1,n+1+j} + E_{2+j,2} \mid j \in \{1, \dots, n-1\}\}. \tag{2.18}$$

Observemos também que $C(n)_0$ é isomorfa à superálgebra de Lie $\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)$, e esse isomorfismo é explicitamente dado por:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2) & \longrightarrow & C(n)_0 \\ & \left(\alpha, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a^t \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^t \end{array} \right), \end{array}$$

para todos $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array} \right) \in \mathfrak{sp}(2n-2)$.

De fato, mostremos que φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie. Primeiro mostremos que φ_0 é linear. Sejam $\left(\alpha_1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}\right), \left(\alpha_2, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2^t \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\varphi_0 \left(\left(\alpha_1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}\right) + \lambda \left(\alpha_2, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2^t \end{pmatrix}\right) \right) \\ &= \varphi_0 \left(\left(\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ c_1 + \lambda c_2 & -a_1^t - \lambda a_2^t \end{pmatrix}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1+\lambda\alpha_2 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_1-\lambda\alpha_1 & & \\ \hline & & a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ & & c_1+\lambda c_2 & -(a_1-\lambda a_2)^t \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_1 & & \\ \hline & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & -a_1^t \end{array}\right) + \lambda \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_1 & & \\ \hline & & a_2 & b_2 \\ & & c_2 & -a_2^t \end{array}\right)$$
$$= \varphi_0\left(\alpha_1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}\right) + \lambda\varphi_0\left(\alpha_2, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2^t \end{pmatrix}\right).$$

Logo, φ_0 é linear. Agora, mostremos que φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left(\alpha_1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}\right)$, $M_2 = \left(\alpha_2, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2^t \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)$. Assim,

$$\varphi_0([M_1, M_2])$$
$$= \varphi_0\left([\alpha_1,\alpha_2], \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2^t \end{pmatrix}\right]\right)$$
$$= \varphi_0\left(0, \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2-b_2c_1-a_2a_1 & a_1b_2-b_1a_2^t-a_2b_1+b_2a_1^t \\ c_1a_2-a_1^tc_2-c_2a_1+a_2^tc_1 & c_1b_2+a_1^ta_2^t-c_2b_1-a_2^ta_1^t \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & a_1a_2+b_1c_2-b_2c_1-a_2a_1 & a_1b_2-b_1a_2^t-a_2b_1+b_2a_1^t \\ & & c_1a_2-a_1^tc_2-c_2a_1+a_2^tc_1 & -(-b_2c_1-a_2a_1+b_1c_2+a_1a_2)^t \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_1 & & \\ \hline & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & -a_1^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_2 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_2 & & \\ \hline & & a_2 & b_2 \\ & & c_2 & -a_2^t \end{array}\right)$$
$$- \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_2 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_2 & & \\ \hline & & a_2 & b_2 \\ & & c_2 & -a_2^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & 0 & & \\ 0 & -\alpha_1 & & \\ \hline & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & -a_1^t \end{array}\right)$$
$$= [\varphi_0(M_1), \varphi_0(M_2)].$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Mostremos que φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie. Seja $M = \left(\alpha, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1^t \end{pmatrix}\right)$, tal que $\varphi_0(M) = 0$. Assim,

$$0 = \varphi_0(M) = \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^t \end{array}\right) \Longrightarrow \alpha = 0, a = 0, b = 0, c = 0.$$

De onde, $M = 0$. Logo, φ_0 é injetor. Observemos que na Equação 2.17 explicitamos uma base para $C(n)_0$ e dada essa base, temos $dim(C(n)_0) = 2n^2 - 3n + 1$. Além disso, como φ_0 é linear, injetor e $dim(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)) = dim(C(n)_0)$, temos que φ_0 é sobrejetor. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Para descrever a estrutura dos $C(n)_0$-módulos $C(n)_{\pm 1}$, considere $\theta : \mathbb{C} \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$ a representação dada por $\theta(\alpha) = \alpha$. Assim, o $C(n)_0$-módulo $C(n)_1$ é isomorfo ao produto tensorial de θ com o dual da representação natural de $\mathfrak{sp}(2n-2)$ em $\mathbb{C}^{2n-2}$:

$$\rho_1 \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right) (\lambda \otimes f) = \theta(\alpha)\lambda \otimes f + \alpha \otimes \eta^*(A)(f),$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$ e $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right) \in C(n)_0$, com $A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array}\right)$.

De fato, esse isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{C}_\theta \otimes (\mathbb{C}^{2n-2})^* & \longrightarrow & C(n)_1 \\ & (\lambda \otimes f) & \longmapsto & \left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 & \lambda v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda v_2^t & & \\ 0 & -\lambda v_1^t & & \end{array}\right), \end{array}$$

com $v_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $v_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$ sendo as únicas matrizes-linha tais que $\Psi^{-1}(f) = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$.

Dados $f \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$, sejam $v_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $v_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$ as únicas matrizes-linha tais que $\Psi^{-1}(f) = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$, e dado $\overline{f} \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$, sejam $w_1 = (b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,n-1})$, $w_2 = (b_{1,n} \ \cdots \ b_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$ as únicas matrizes-linha tais que $\Psi^{-1}(\overline{f}) = (b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$. Assim,

$$\varphi_1(\lambda \otimes (f + \overline{f})) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda(v_1 + w_1) & \lambda(v_2 + w_2) \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda(v_2 + w_2)^t & & \\ 0 & -\lambda(v_1 + w_1)^t & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 & \lambda v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda v_2^t & & \\ 0 & -\lambda v_1^t & & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda w_1 & \lambda w_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda w_2^t & & \\ 0 & -\lambda w_1^t & & \end{array}\right)$$
$$= \varphi_1(\lambda \otimes f) + \varphi_1(\lambda \otimes \overline{f}).$$

Logo, φ_1 é linear.

Agora, mostremos que φ_1 é um homomorfismo de $C(n)_0$-módulos. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$, com $v_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $v_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$ são únicas tais que $\Psi^{-1}(f) = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$ e $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$. Assim,

$$\varphi_1\left(\rho_1\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right)(\lambda \otimes f)\right)$$
$$= \varphi_1(\theta(\alpha)\lambda \otimes f + \lambda \otimes \eta^*(A)(f))$$
$$= \varphi_1(\theta(\alpha)\lambda \otimes f) + \varphi_1(\lambda \otimes \eta^*(A)(f))$$
$$= \varphi_1(\alpha\lambda \otimes f) + \varphi_1(\lambda \otimes \eta^*(A)f)$$
$$\overset{\star}{=} \left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1 & \alpha\lambda v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha\lambda v_2^t & & \\ 0 & -\alpha\lambda v_1^t & & \end{array}\right)$$
$$- \left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda(v_1 a + v_2 c) & \lambda(v_1 b - v_2 a^t) \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda(v_1 b - v_2 a^t)^t & & \\ 0 & -\lambda(v_1 a + v_2 c)^t & & \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1 - \lambda(v_1 a + v_2 c) & \alpha\lambda v_2 - \lambda(v_1 b - v_2 a^t) \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha\lambda v_2^t - \lambda(v_1 b - v_2 a^t)^t & & \\ 0 & -\alpha\lambda v_1^t + \lambda(v_1 a + v_2 c)^t & & \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1 - \lambda v_1 a - \lambda v_2 c & \alpha\lambda v_2 - \lambda v_1 b + \lambda v_2 a^t \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha\lambda v_2^t - \lambda b^t v_1^t + \lambda a v_2^t & & \\ 0 & -\alpha\lambda v_1^t + \lambda c^t v_2^t + \lambda a^t v_1^t & & \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1 & \alpha\lambda v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda a v_2^t - \lambda b^t v_1^t & & \\ 0 & \lambda c^t v_2^t + \lambda a^t v_1^t & & \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 a+\lambda v_2 c & \lambda v_1 b-\lambda v_2 a^t\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & -\alpha\lambda v_2^t & & \\ 0 & \alpha\lambda v_1^t & & \end{array}\right)\\
&=\left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1-\lambda v_1 a-\lambda v_2 c & \alpha\lambda v_2-\lambda v_1 b+\lambda v_2 a^t\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda a v_2^t-\lambda b^t v_1^t & & \\ 0 & \lambda c^t v_2^t+\lambda a^t v_1^t & & \end{array}\right)\\
&=\left(\begin{array}{cc|cc} & & \alpha\lambda v_1 & \alpha\lambda v_2\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda a v_2^t-\lambda b^t v_1^t & & \\ 0 & \lambda c^t v_2^t+\lambda a^t v_1^t & & \end{array}\right)\\
&\quad-\left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 a+\lambda v_2 c & \lambda v_1 b-\lambda v_2 a^t\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & -\alpha\lambda v_2^t & & \\ 0 & \alpha\lambda v_1^t & & \end{array}\right)\\
&=\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b\\ & & c & -a^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 & \lambda v_2\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda v_2^t & & \\ 0 & -\lambda v_1^t & & \end{array}\right)\\
&\quad-\left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 & \lambda v_2\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda v_2^t & & \\ 0 & -\lambda v_1^t & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b\\ & & c & -a^t \end{array}\right)\\
&=\left[\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b\\ & & c & -a^t \end{array}\right),\left(\begin{array}{cc|cc} & & \lambda v_1 & \lambda v_2\\ & & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda v_2^t & & \\ 0 & -\lambda v_1^t & & \end{array}\right)\right]\\
&=\left[\varphi_0^{-1}\left(\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right)\right),\varphi_1(\lambda\otimes f)\right].
\end{aligned}
$$

Observemos que a Equação $\overset{\star}{=}$ segue da Equação 1.24. Logo, φ_1 é um homomorfismo de $C(n)_0$-módulos.

Agora, mostremos que φ_1 é um isomorfismo.

Dado $\left(\begin{array}{cc|cc} & & v_1 & v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & v_2^t & & \\ 0 & -v_1^t & & \end{array}\right) \in C(n)_1$, existe $f \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$, com $v_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $v_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$ são únicas tais que $\Psi^{-1}(f) = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$. Assim, $\varphi_1(1\otimes f) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & v_1 & v_2 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & v_2^t & & \\ 0 & -v_1^t & & \end{array}\right)$. Logo, φ_1 é sobrejetor. Além disso, na Equação 2.18 explicitamos uma base de $C(n)_1$, de onde, $dim(C(n)_1) = 2n-2$. Como $dim(C(n)_1) = dim(\mathbb{C}_\theta \oplus \mathbb{C}^{2n-2})$ e φ_1 é sobrejetor, temos pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, que φ_1 é injetor. Logo, φ_1 é um isomorfismo de $C(n)_0$-módulos.

Uma representação do $C(n)_0$-módulo $C(n)_{-1}$ é dada pelo produto tensorial de θ^* com a representação natural de $\mathfrak{sp}(2n-2)$ em $\mathbb{C}^{2n-2}$:

$$\rho_{-1}\left(\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right)\right)(\lambda\otimes v) = \theta^*(\alpha)\lambda\otimes v + \lambda\otimes\eta(A)(v),$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right) \in C(n)_0$, e $v \in \mathbb{C}^{2n-2}$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{-1}: & \mathbb{C}_{\theta^*}\otimes\mathbb{C}^{2n-2} & \longrightarrow & C(n)_{-1} \\ & \lambda\otimes w & \longmapsto & \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & -w_2 & w_1 \\ \hline w_1^t & 0 & & \\ w_2^t & 0 & & \end{array}\right) \end{array},$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $w = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,2n-2}) \in \mathbb{C}^{2n-2}$, com $w_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $w_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$.

Mostremos que φ_{-1} é um homomorfismo de $C(n)_0$-módulos. Inicalmente, mostremos que φ_{-1} é linear. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}_\theta$, $w_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $w_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2})$, $v_1 = (b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,n-1})$, $v_2 = (b_{1,n} \ \cdots \ b_{1,2n-2}) \in M_{1\times 2n-2}(\mathbb{C})$.Daí,

$$\begin{aligned} &\varphi_{-1}(\lambda_1\otimes v) + \alpha\ \varphi_{-1}(\lambda_2\otimes w) \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & -\lambda_1 v_2 & \lambda_1 v_1 \\ \hline \lambda_1 v_1^t & 0 & & \\ \lambda_1 v_2^t & 0 & & \end{array}\right) + \alpha\left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & -\lambda_2 w_2 & \lambda_2 w_1 \\ \hline \lambda_2 w_1^t & 0 & & \\ \lambda_2 w_2^t & 0 & & \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 0 \\
 & & -\lambda_1 v_2 - \alpha\lambda_2 w_2 & \lambda_1 v_1 + \alpha\lambda_2 w_1 \\
\hline
\lambda_1 v_1^t + \alpha\lambda_2 w_1^t & 0 & & \\
\lambda_1 v_2^t + \alpha\lambda_2 w_2^t & 0 & &
\end{array}\right) \\
&= \varphi_{-1}((\lambda_1 \otimes v) + \alpha\ (\lambda_2 \otimes w)).
\end{aligned}
$$

Logo, φ_{-1} é linear.

Agora, sejam $\lambda \in \mathbb{C}$, $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right) \in C(n)_0$, com $A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array}\right)$ e $w \in \mathbb{C}^{2n-2}$, com $w_1 = (a_{1,1}\ \cdots\ a_{1,n-1})$, $w_2 = (a_{1,n}\ \cdots\ a_{1,2n-2}) \in M_{1\times n-1}(\mathbb{C})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{-1}\left(\rho_{-1}\left(\left(\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right)(\lambda\otimes w)\right)\right)\right) \\
&= \varphi_{-1}(\theta^*(\alpha)\lambda\otimes w + \lambda\otimes\eta(A)w) \\
&= \varphi_{-1}(\theta^*(\alpha)\lambda\otimes w) + \varphi_{-1}(\lambda\otimes\eta(A)w) \\
&= \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 0 \\
 & & \alpha\lambda w_2 & -\alpha\lambda w_1 \\
\hline
-\alpha\lambda w_1^t & 0 & & \\
-\alpha\lambda w_2^t & 0 & &
\end{array}\right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 0 \\
 & & -\lambda w_1 c + \lambda w_2 a & \lambda w_1 a^t + \lambda w_2 b \\
\hline
\lambda a w_1^t + \lambda b w_2^t & 0 & & \\
\lambda c w_1^t - \lambda a^t w_2^t & 0 & &
\end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & \alpha\lambda w_2 - \lambda w_1 c + \lambda w_2 a & -\alpha\lambda w_1 + \lambda w_1 a^t + \lambda w_2 b \\
\hline
-\alpha\lambda w_1^t + \lambda a w_1^t + \lambda b w_2^t & 0 & & \\
-\alpha\lambda w_2^t + \lambda c w_1^t - \lambda a^t w_2^t & 0 & &
\end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 0 \\
 & & \alpha\lambda w_2 & -\alpha\lambda w_1 \\
\hline
\lambda a w_1^t + \lambda b w_2^t & 0 & & \\
\lambda c w_1^t - \lambda a^t w_2^t & 0 & &
\end{array}\right) \\
&\quad - \left(\begin{array}{cc|cc}
 & & 0 & 0 \\
 & & -\lambda w_2 a + \lambda w_1 c & -\lambda w_2 b - \lambda w_1 a^t \\
\hline
\alpha\lambda w_1^t & 0 & & \\
\alpha\lambda w_2^t & 0 & &
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
= \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & -\lambda w_2 & \lambda w_1 \\ \hline \lambda w_1^t & 0 & & \\ \lambda w_2^t & 0 & & \end{array}\right)
$$

$$
- \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & -\lambda w_2 & \lambda w_1 \\ \hline \lambda w_1^t & 0 & & \\ \lambda w_2^t & 0 & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^t \end{array}\right)
$$

$$
= \left[\varphi_0^{-1}\left(\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & \\ 0 & -\alpha & \\ \hline & & A \end{array}\right)\right), \varphi_{-1}(\lambda \otimes f)\right].
$$

Logo, φ_{-1} é um homomorfismo de $C(n)_0$-módulos.

Dado $\left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & v_1 & v_2 \\ \hline v_1^t & 0 & & \\ v_2^t & 0 & & \end{array}\right) \in C(n)_{-1}$, existe $v \in (\mathbb{C}^{2n-2})^*$, com $v_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n-1})$, $v_2 = (a_{1,n} \ \cdots \ a_{1,2n-2})$ únicas tais que $\Psi^{-1}(f) = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,2n-2})$ e daí, $\varphi_{-1}(1 \otimes v) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & v_1 & v_2 \\ \hline v_1^t & 0 & & \\ v_2^t & 0 & & \end{array}\right)$. Logo, φ_{-1} é sobrejetor. Observemos que na Equação 2.16 explicitamos uma base para $C(n)_{-1}$ e dada essa base, temos $dim(C(n)_{-1}) = 2n-2$. Agora, como φ_{-1} é linear, sobrejetor e $dim(C_{\theta^*} \oplus (\mathbb{C}^{2n-2})^*) = dim(C(n)_{-1})$, temos que φ_{-1} é injetor. Portanto, φ_{-1} é um isomorfismo de $C(n)_0$-módulos.

Além disso, $dim(C(n)) = dim(\mathfrak{g}_{\overline{0}}) + dim(\mathfrak{g}_{-1}) + dim(\mathfrak{g}_1) = 2n^2 - 3n + 1 + 2n - 2 + 2n - 2 = 2n^2 + n - 3$.

2.1.4 $D(m,n)$

Lembremos da definição da superálgebra de Lie $\mathfrak{osp}(m,n)$ dada no Exemplo 1.30. Definamos $D(m,n) = \mathfrak{osp}(2m,2n), m \geq 2, n \geq 1$. Consideremos

$$
J = \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right), \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m \\ \mathrm{Id}_m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}
$$

Assim, os elementos de $D(m,n)$ são da seguinte forma:

$$
\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & y & y_1 \\ c & -a^t & z & z_1 \\ \hline -z_1^t & -y_1^t & d & e \\ z^t & y^t & f & -d^t \end{array}\right), \tag{2.20}
$$

com $a \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$, $b,\ c \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ anti-simétricas, $d \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $e, f \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ simétricas e $y, y_1, z, z_1 \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Consideremos uma base $\zeta_{\overline{1}}$ de $D(m,n)_{\overline{1}}$ dada por

$$\begin{aligned} &E_{j,2m+i} - E_{2m+n+i,m+j},\ E_{j,2m+n+i} - E_{2m+i,m+j},\\ &E_{m+j,2m+i} - E_{2m+n+i,j},\ E_{m+j,2m+n+i} - E_{2m+i,j}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

com $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, \cdots, m\}$ e uma ζ_0 base de $D(m,n)_0$ dada por

$$\begin{gathered} E_{j,j} - E_{m+j,m+j},\ E_{j,m+j}, E_{m+j,j},\\ E_{2m+i,2m+i} - E_{2m+n+i,2m+n+i},\ E_{2m+i,2m+n+i}, E_{2m+n+i,2m+i}, \end{gathered} \tag{2.22}$$

com $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, \cdots, m\}$.

Em particular, temos que $\mathfrak{osp}(m,n)_{\overline{0}}$ é uma álgebra de Lie isomorfa à $\mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{sp}(2n)$, tal isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & D(m,n)_{\overline{0}} & \longrightarrow & \mathfrak{so}(2m) \oplus \mathfrak{sp}(2n) \\ & \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) & \longmapsto & (\alpha, \beta), \end{array}$$

para todo $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \in D(m,n)_{\overline{0}}$.

Mostremos que φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1 \end{array}\right)$ e $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta_2 \end{array}\right) \in D(m,n)_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_0([M_1, M_2]) = \varphi_0 &\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1 \end{array}\right) \\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1, \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1) \\ &= ([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) \\ &= [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] \\ &= [\varphi_0(M_1), \varphi_0(M_2)]. \end{aligned}$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Além disso, queremos mostrar que $\ker(\varphi_0) = \{0\}$. Seja $M = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$ em $D(m,n)_0$ tal que $\varphi_0(M) = (0,0)$. Assim, $(\alpha, \beta) = (0,0)$. Daí, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. De onde, $\ker(\varphi_0) = \{0\}$. Logo, φ_0 é injetora. Na Equação 2.1.4 explicitamos uma base para $D(m,n)_{\overline{0}}$, e dada essa base, temos $dim(D(m,n)_0) = 2m^2 - m + 2n^2 + n$. Como $dim(D(m,n))_{\overline{0}} = dim(\mathfrak{so}(2m)) + dim(\mathfrak{sp}(2n))$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_0 é sobrejetora. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Consideremos a representação natural de $\mathfrak{sp}(2m)$ em $\mathbb{C}^{2m}$ (ver Exemplo 1.34) e o dual $(\mathbb{C}^{2n})^*$ da representação natural de $\mathfrak{so}(2n)$ (ver Definição 1.35). Seja φ_1 a única transformação linear entre o $D(m,n)_{\bar{0}}$-módulo $D(m,n)_{\bar{1}}$ e $\mathbb{C}^{2m} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^*$ que satisfaz

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{C}^{2m} \otimes (\mathbb{C}^{2n})^* & \longrightarrow & D(m,n)_{\bar{1}} \\ & v \otimes f & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} & v \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit v & \end{array}\right), \end{array}$$

com $v \in \mathbb{C}^{2m}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$.

Mostremos que φ_1 é um homomorfismo de $D(m,n)_0$-módulos.

Consideremos a aplicação bilinear ρ_1 dada pelo produto tensorial da representação natural de $\mathfrak{sp}(2n)$ pela representação dual da representação natural de $\mathfrak{so}(2n)$. Sejam $A \in \mathfrak{sp}(2m)$, $B \in \mathfrak{so}(2n)$, $w \in \mathbb{C}^{2m}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\left(\rho_1\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)(w \otimes f)\right) \\
&= \varphi_1(\eta(A)w \otimes f + w \otimes \eta^*(B)f) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} & (\eta(A)w) \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit (\eta(A)w) & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & w \heartsuit (\eta^*(B)f) \\ \hline \eta^*(B)f) \spadesuit w & \end{array}\right) \\
&\overset{\dagger}{=} \left(\begin{array}{c|c} & (\eta(A)w) \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit (\eta(A)w) & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & w \heartsuit (-f_B) \\ \hline (-f_B) \spadesuit w & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} & (\eta(A)w) \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit (\eta(A)w) & \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} & w \heartsuit f_B \\ \hline f_B \spadesuit w & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} & (\eta(A)w) \heartsuit f - w \heartsuit f_B \\ \hline f \spadesuit (\eta(A)w) - f_B \spadesuit w & \end{array}\right) \\
&\overset{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} & A(w \heartsuit f) - (w \heartsuit f)B \\ \hline B(f \spadesuit w) - (f \spadesuit w)A & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} & w \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit w & \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} & w \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit w & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),\ \varphi_1(w \otimes f)\right].
\end{aligned}$$

Observemos que a igualdade $\overset{\dagger}{=}$ segue da Equação 1.24 (ver Exemplo 1.43) e na igualdade $\overset{\star}{=}$ a passagem $\eta(A)w \heartsuit f - w \heartsuit f_B = A(w \heartsuit f) - (w \heartsuit f)B$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44) e a passagem $f \spadesuit (\eta(A)w) - f_B \spadesuit w = B(f \spadesuit w) - (f \spadesuit w)A$ é análoga à feita para a superálgebra $B(m,n)$ (ver Equações (2.12)-(2.14)). Logo φ_1 é um homomorfismo de $D(m,n)_{\bar{0}}$-módulos.

Observemos que na Equação 2.1.4 explicitamos uma base de $D(m,n)_{\bar{1}}$, e dada essa base, temos $dim(D(m,n)_{\bar{1}}) = 4mn$. Dado $X \in M_{(2m)\times(2n)}(\mathbb{C})$, pelo Exemplo 1.44, temos que existem $v \in \mathbb{C}^{2m}$ e $f \in (\mathbb{C}^{2n})^*$, tais que $v \heartsuit f \in M_{(2m)\times(2n)}(\mathbb{C})$, com $X_2 = v \heartsuit f$ e existe $X_3 \in M_{(2n)\times(2m)}(\mathbb{C})$, tal que $f \spadesuit v = X_3$. Daí, $\varphi_1(v \otimes u) = \left(\begin{array}{c|c} & v \heartsuit f \\ \hline f \spadesuit v & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & X_2 \\ \hline X_3 & \end{array}\right)$. Além disso, como φ_1 é linear e sobrejetor, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_1 é injetor. Logo, φ_1 é um isomorfismo. Mais ainda, $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) + \dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = 2m^2 - m + 2n^2 + n + 2m(2n) = 2(m+n)^2 - m + n$.

2.2 Superálgebras de Lie clássicas básicas e excepcionais

2.2.1 $F(4)$

A superálgebra de Lie $F(4)$ é uma superálgebra de Lie de dimensão 40; a álgebra de Lie $F(4)_{\bar{0}}$ é isomorfa à soma direta das álgebras de Lie simples $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{sl}(2)$; e o $F(4)_{\bar{0}}$-módulo $F(4)_{\bar{1}}$ é isomorfo ao produto tensorial do $\mathfrak{so}(3)$-módulo spin_7 e da representação natural de $\mathfrak{sl}(2)$ em $\mathbb{C}^2$. Uma construção do $\mathfrak{so}(3)$-módulo spin_7 pode ser encontrada em (SAN MARTIN, 2010, Seção 11.3), e uma realização da superálgebra $F(4)$ pode ser encontrada em (KAC, 1977b, Proposition 2.5.4(a)).

2.2.2 $G(3)$

A superálgebra de Lie $G(3)$ é uma superálgebra de Lie de dimensão 31; a álgebra de Lie $G(3)_{\bar{0}}$ é isomorfa à soma direta das álgebras de Lie simples G_2 e $\mathfrak{sl}(2)$; e o $G(3)_{\bar{0}}$-módulo $G(3)_{\bar{1}}$ é isomorfo ao produto tensorial das representações naturais de G_2 em $\mathbb{C}^7$ e de $\mathfrak{sl}(2)$ em $\mathbb{C}^2$. Uma realização desta superálgebra pode ser encontrada em (KAC, 1977b, Proposition 2.5.4(a)).

2.2.3 $D(2,1;\alpha)$

Para cada $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1\}$, existe uma superálgebra de Lie simples, denotada por $D(2,1;\alpha)$. Para todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1\}$, a dimensão de $D(2,1;\alpha)$ é 17; a álgebra de Lie $D(2,1;\alpha)_{\bar{0}}$ é isomorfa à soma direta de três cópias da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$; e o $D(2,1;\alpha)_{\bar{0}}$-módulo $D(2,1;\alpha)_{\bar{1}}$ é isomorfo ao produto tensorial de três cópias das respectivas representações naturais de $\mathfrak{sl}(2)$ em $\mathbb{C}^2$. Uma realização desta superálgebra pode ser encontrada em (KAC, 1977b, Proposition 2.5.4(b)).

2.3 Superálgebras de Lie clássicas estranhas

2.3.1 $P(n)$

Dado $n \geq 2$, defina a superálgebra de Lie $P(n)$ como sendo a subsuperálgebra da superálgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n+1, n+1)$ consistindo das matrizes

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & -a^t \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(n+1, n+1), \quad \text{tais que} \quad \mathrm{tr}(a) = 0,\ b \text{ é simétrica e } c \text{ é antissimétrica.}$$

A $\mathbb{Z}$-graduação de $\mathfrak{gl}(n+1, n+1)$ dada no Exemplo 1.21 induz a $\mathbb{Z}$-graduação $P(n) = P(n)_{-1} \oplus P(n)_0 \oplus P(n)_1$ dada por

$$\begin{aligned} P(n)_{-1} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; c \text{ é antissimétrica} \right\}, \\ P(n)_0 &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right) \;\middle|\; \mathrm{tr}(a) = 0 \right\}, \\ P(n)_1 &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;\middle|\; b \text{ é simétrica} \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que essa $\mathbb{Z}$-graduação é consistente com a $\mathbb{Z}_2$-graduação $P(n) = P(n)_{\bar{0}} \oplus P(n)_{\bar{1}}$, pois $P(n)_{\bar{0}} = P(n)_0$ e $P(n)_{\bar{1}} = P(n)_{-1} \oplus P(n)_1$.

Consideremos as seguintes bases para $P(n)_{-1}$, $P(n)_0$ e $P(n)_1$ dadas, respectivamente, por

$$\zeta_{-1} = \{E_{n+1+i,j} - E_{n+1+j,i} \mid i < j \in \{1, \ldots, n+1\}\}, \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} \zeta_0 = &\{E_{i,i} - E_{1+i,1+i} - E_{n+1+i,n+1+i} + E_{n+2+i,n+2+i} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &\cup \{E_{i,j} - E_{n+1+j,n+1+i} \mid i \neq j \in \{1, \ldots, n+1\}\}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\zeta_1 = \{E_{i,n+1+j} + E_{j,n+1+i} \mid i \leq j \in \{1, \ldots, n+1\}\}. \tag{2.25}$$

A álgebra de Lie $P(n)_{\bar{0}}$ é isomorfa à $\mathfrak{sl}(n+1)$. De fato, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \ \mathfrak{sl}(n+1) &\longrightarrow P(n)_{\bar{0}} \\ a &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right), \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathfrak{sl}(n+1)$.

Mostremos que φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie. Sejam a, $b \in \mathfrak{sl}(n+1)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_0(a + \lambda\, b) &= \left(\begin{array}{c|c} a + \lambda b & 0 \\ \hline 0 & -(a+\lambda b)^t \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right) + \lambda \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b^t \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$= \varphi_0(a) + \lambda\ \varphi_0(b).$$

Logo φ_0 é linear. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi_0([a,b]) &= \varphi_0(ab-ba)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} ab-ba & 0 \\ \hline 0 & -(ab-ba)^t \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} ab-ba & 0 \\ \hline 0 & -b^ta^t+a^tb^t \end{array}\right)\\
&= \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b^t \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right)\\
&= \left[\left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & -b^t \end{array}\right)\right]\\
&= [\varphi_0(a),\ \varphi_0(b)]\,.
\end{aligned}$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie. Observemos que na Equação 2.24 explicitamos uma base para $P(n)_{\overline{0}}$ e dada essa base, temos $dim(P(n)_{\overline{0}}) = (n+1)^2 - 1$.

Além disso, seja $a \in \mathfrak{sl}(n+1)$, tal que $\varphi_0(a) = 0$. Daí, $0 = \varphi_0(a) = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & -a^t \end{array}\right)$, de onde, $a = 0$. De onde, $\ker(\varphi_0) = \{0\}$. Logo φ_0 é injetor. Como $dim(P(n)_{\overline{0}}) = (n+1)^2 - 1 = \dim(\mathfrak{sl}(n+1))$ e como φ_0 é injetora, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_0 é sobrejetora. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Mais ainda, se considerarmos a representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ e uma base $\{v_1, \cdots, v_{n+1}\}$ para $\mathbb{C}^{n+1}$, então uma base para $S^2(\mathbb{C}^{n+1})$ é dada por $\{v_i \odot v_i, v_i \odot v_j \mid$ para todos $i > j,\ i,j \in \{1, \cdots, n+1\}\}$. Consideremos T_1 a única transformação bilinear que satisfaz

$$\begin{array}{cccc}
T_1: & P(n)_0 \times S^2(\mathbb{C}^{n+1}) & \longrightarrow & S^2(\mathbb{C}^{n+1})\\
& \left(\left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right), v \odot w\right) & \longmapsto & \eta(a)v \odot w + v \odot \eta(a)w,
\end{array}$$

para todos $\left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right) \in P(n)_0$ e $v,\ w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Mostremos que T_1 mune $S^2(\mathbb{C}^{n+1})$ com a estrutura de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo. Sejam $\left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right) \in P(n)_0$ e $v \odot w \in (S^2(\mathbb{C}^{n+1}))_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Daí, $T_1\left(\left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right), v \odot w\right) = \eta(a)v \odot w + v \odot \eta(a)w \in (S^2(\mathbb{C}^{n+1}))_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Logo, $T_1(P(n)_0, (S^2(\mathbb{C}^{n+1}))_s) \subseteq (S^2(\mathbb{C}^{n+1}))_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Além disso, sejam $A = \left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{c|c} b & \\ \hline & -b^t \end{array}\right) \in P(n)_0$ e $v \odot w \in S^2(\mathbb{C}^{n+1})$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&T_1\left([A,B], v\odot w\right)\\
&=T_1\left(\left(\begin{array}{c|c} ab-ba & \\ \hline & a^tb^t-b^ta^t \end{array}\right), v\odot w\right)\\
&=\eta([a,b])v\odot w + v\odot\ \eta([a,b])w\\
&=\left(\eta(a)\circ\eta(b)-\eta(b)\circ\eta(a)\right)v\odot w + v\odot\left(\eta(a)\circ\eta(b)-\eta(b)\circ\eta(a)\right)w\\
&=\eta(a)\circ\eta(b)v\odot w-\eta(b)\circ\eta(a)v\odot w + v\odot\ \eta(a)\circ\eta(b)w - v\odot\ \eta(b)\circ\eta(a)w\\
&=\eta(a)\circ\eta(b)v\odot w-\eta(b)\circ\eta(a)v\odot w + \eta(b)v\odot\eta(a)w+\eta(a)v\odot\eta(b)w\\
&\quad-\eta(a)v\odot\eta(b)w-\eta(b)v\odot\eta(a)w + v\odot\ \eta(a)\circ\eta(b)w - v\odot\ \eta(b)\circ\eta(a)w\\
&=\eta(a)\circ\eta(b)v\odot w+\eta(b)v\odot\eta(a)w+\eta(a)v\odot\eta(b)w+v\odot\eta(a)\circ\eta(b)w\\
&\quad-\eta(b)\circ\eta(a)v\odot w-\eta(a)v\odot\eta(b)w-\eta(b)v\odot\eta(a)w-v\odot\eta(b)\circ\eta(a)w\\
&=T_1\left((A,\eta(b)v\odot w+v\odot\eta(b)w)\right)-T_1\left(B,\eta(a)v\odot w+v\odot\eta(a)w\right)\\
&=T_1\left(A,T_1\left(B,v\odot w\right)\right)-T_1\left(B,T_1\left(A,v\odot w\right)\right).
\end{aligned}$$

Portanto, T_1 mune $S^2(\mathbb{C}^{n+1})$ com a estrutura de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo.

Dados $\alpha=(a_1,\cdots,a_{n+1})$, $\beta=(b_1,\cdots,b_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$, pelo Exemplo 1.43, existem únicos funcionais lineares $f_\alpha, f_\beta\in(\mathbb{C}^{n+1})^*$ tais que $f_\alpha(x)=a_1x_1+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}$ e $f_\beta(x)=b_1x_1+\cdots+b_{n+1}x_{n+1}$, para todo $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}$.

Consideremos a única transformação linear entre os $P(n)_0$-módulos $P(n)_1$ e $S^2(\mathbb{C}^{n+1})$ que satisfaz

$$\begin{array}{rcc}
\varphi_1: S^2(\mathbb{C}^{n+1}) & \longrightarrow & P(n)_1\\
\alpha\odot\beta & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha\heartsuit f_\beta+\beta\heartsuit f_\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}$$

para todos $\alpha\in\mathbb{C}^{n+1}$ e $\beta\in\mathbb{C}^{n+1}$.

Sejam $\alpha\odot\beta\in S^2(\mathbb{C}^{n+1})$ e $M=\left(\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & -m^t \end{array}\right)\in P(n)_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
&[\varphi_0^{-1}(M),\varphi_1(\alpha\odot\beta)]\\
&\quad=\left[\left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m^t \end{array}\right),\left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha\heartsuit f_\beta+\beta\heartsuit f_\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\right]\\
&\quad=\left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha\heartsuit f_\beta+\beta\heartsuit f_\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\\
&\qquad-\left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha\heartsuit f_\beta+\beta\heartsuit f_\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m^t \end{array}\right)\\
&\quad=\left(\begin{array}{c|c} 0 & m(\alpha\heartsuit f_\beta)+m(\beta\heartsuit f_\alpha)-(\alpha\heartsuit f_\beta)(-m^t)-(\beta\heartsuit f_\alpha)(-m^t) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\eta(m)\alpha) \heartsuit f_\beta - \alpha \heartsuit (\eta^*(m^t) f_\beta) + (\eta(m)\beta) \heartsuit f_\alpha - \beta \heartsuit (\eta^*(m^t) f_\alpha) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\stackrel{\dagger}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & (\eta(m)\alpha) \heartsuit f_\beta + \alpha \heartsuit f_{\eta(m)\beta} + (\eta(m)\beta) \heartsuit f_\alpha + \beta \heartsuit f_{\eta(m)\alpha} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & \eta(m)\alpha \heartsuit f_\beta + \beta \heartsuit f_{\eta(m)\alpha} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha \heartsuit f_{\eta(m)\beta} + \eta(m)\beta \heartsuit f_\alpha \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$= \varphi_1(\eta(m)\alpha \odot \beta) + \varphi_1(\alpha \odot \eta(m)\beta)$$
$$= \varphi_1(\eta(m)\alpha \odot \beta + \alpha \odot \eta(m)\beta)$$
$$= \varphi_1\left(T_1\left(M, (\alpha \odot \beta)\right)\right).$$

Observemos que a igualdade $\stackrel{\dagger}{=}$ segue da Equação 1.25 (ver Exemplo 1.43) e a igualdade $\stackrel{\star}{=}$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44). Logo, φ_1 é um homomorfismo de $P(n)_{\overline{0}}$-módulos.

Lembremos que denotamos $E_{k,l} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ a matriz com 1 na entrada kl e todas as demais nulas, $v_k \in \mathbb{C}^n$ o vetor com 1 na linha k e todas as demais nulas e $f_k \in (\mathbb{C}^n)^*$ o vetor que tem 1 na coluna k.

Agora, dado $E_{i,j} + E_{j,i} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$, com $i,\ j \in \{1, \cdots, n+1\}$, pelo Exemplo 1.44, existem $v_i,\ v_j \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f_i,\ f_j \in (\mathbb{C}^{n+1})$, com $i,\ j \in \{1, \cdots, n+1\}$ tais que $v_i \heartsuit f_j = E_{i,j}$ e $v_j \heartsuit f_i = E_{j,i}$, $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$. Daí, $v_i \heartsuit f_j + v_j \heartsuit f_i = E_{i,j} + E_{j,i}$, $i,\ j \in \{1, \cdots, n+1\}$, ou seja, existem $v_i,\ v_j \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $f_i,\ f_j \in (\mathbb{C}^{n-1})^*$, tais que $\left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & v_i \heartsuit f_j + v_j \heartsuit f_i \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in P(n)_1$, com $i,\ j \in \{1, \cdots, n-1\}$. Como $\{E_{i,n+1+j} + E_{j,n+1+i} \mid i \leq j \in \{1, \cdots, n+1\}\}$ é uma base de $P(n)_1$ e φ_1 é uma transformação linear, temos que im φ_1 é um subespaço vetorial de $M_{(2n+2)\times(2n+2)}(\mathbb{C})$, e consequentemente, φ_1 é sobrejetor. Na Equação 2.25 explicitamos uma base para $P(n)_1$ e dada essa base, temos que $dim(P(n)_1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Agora, como φ_1 é linear, sobrejetor e $dim(P(n)_1) = dim(S^2(\mathbb{C}^{n+1}))$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_1 é injetor. Portanto, φ_1 é um isomorfismo de $P(n)_0$-módulos.

Analogamente, se considerarmos a representação dual da representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$, então $\Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*) = span\{v^{i_1} \wedge v^{i_2} \mid 1 \leq i_1 < i_2 \leq n+1\}$, com $\{v^1, \cdots, v^{n+1}\}$ uma base de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$, admite uma estrutura de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo dada pela única transformação bilinear que satisfaz

$$\begin{array}{rccc} T_2: & P(n)_0 \times \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*) & \longrightarrow & \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*) \\ & (M, f_\gamma \wedge f_\delta) & \longmapsto & \eta^*(m)\ f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(m)\ f_\delta, \end{array}$$

para todos $M = \left(\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & -m^t \end{array}\right) \in P(n)_0$ e $f_\gamma,\ f_\delta \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$.

Mostremos que T_2 mune $\Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ com a estrutura de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo. Sejam $M \in P(n)_0$ e $f_\gamma \wedge f_\delta \in (\Lambda^2(\mathbb{C}^{n+1})^*)_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Assim, $T_2(M, f_\gamma \wedge f_\delta) = -(\eta^*(m) f_\gamma \wedge$

$f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(m)f_\delta) \in (\Lambda^2(\mathbb{C}^{n+1})^*)_s$. Logo, $T_2(P(n)_0, (\Lambda^2(\mathbb{C}^{n+1})^*)_s) \subseteq \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)_s$, para cada $s \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Agora, sejam $A = \left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & -a^t \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{c|c} b & \\ \hline & -b^t \end{array}\right) \in P(n)_0$ e $f_\gamma \wedge f_\delta \in \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$. De onde,

$$
\begin{aligned}
&T_2([A,B], f_\gamma \wedge f_\delta)\\
&= T_2\left(\left(\begin{array}{c|c} ab-ba & \\ \hline & a^tb^t - b^ta^t \end{array}\right), f_\gamma \wedge f_\delta\right)\\
&= \eta^*(ab-ba)f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(ab-ba)f_\delta\\
&= \eta^*([a,b])f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*([a,b])f_\delta\\
&=(\eta^*(a)\circ\eta^*(b) - \eta^*(b)\circ\eta^*(a))f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge (\eta^*(a)\circ\eta^*(b) - \eta^*(b)\circ\eta^*(a))f_\delta\\
&= \eta^*(a)\circ\eta^*(b)f_\gamma \wedge f_\delta - \eta^*(b)\circ\eta^*(a)f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(a)\circ\eta^*(b)f_\delta - f_\gamma \wedge \eta^*(b)\circ\eta^*(a)f_\delta\\
&= \eta^*(a)\circ\eta^*(b)f_\gamma \wedge f_\delta + \eta^*(b)f_\gamma \wedge \eta^*(a)f_\delta + \eta^*(a)f_\gamma \wedge \eta^*(b)f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(a)\circ\eta^*(b)f_\delta\\
&\quad - \eta^*(b)\circ\eta^*(b)f_\gamma \wedge f_\delta - \eta^*(a)f_\gamma \wedge \eta^*(b)f_\delta - \eta^*(b)f_\gamma \wedge \eta^*(a)f_\delta - f_\gamma \wedge \eta^*(b)\circ\eta^*(a)f_\delta\\
&= T_2(A, \eta^*(b)f_\gamma \wedge f_\delta) + T_2(A, f_\gamma \wedge \eta^*(b)f_\delta) - T_2(B, \eta^*(a)f_\gamma \wedge f_\delta) - T_2(B, f_\gamma \wedge \eta^*(a)f_\delta)\\
&= T_2(A, \eta^*(b)f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(b)f_\delta) - T_2(B, \eta^*(a)f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(a)f_\delta)\\
&=T_2(A, T_2(B, f_\gamma \wedge f_\delta)) - T_2(B, T_2(A, f_\gamma \wedge f_\delta)).
\end{aligned}
$$

Portanto, T_2 mune $\Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ com estrutura de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo.

Além disso, consideremos a única transformação linear entre $\Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$ como $P(n)_{-1}$ dada por

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi_{-1}: & \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*) & \longrightarrow & P(n)_{-1}\\
& f_\gamma \wedge f_\delta & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right),
\end{array}
$$

para todos f_γ, $f_\delta \in \Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)$.

Mostremos que φ_{-1} é um homomorfismo de $P(n)_{\overline{0}}$-módulo. Sejam $\gamma, \delta \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $M = \left(\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & -m^t \end{array}\right) \in P(n)_0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{-1}(T_2(M, f_\gamma \wedge f_\delta))\\
&\quad= \varphi_{-1}(\eta^*(m)f_\gamma \wedge f_\delta + f_\gamma \wedge \eta^*(m)f_\delta)\\
&\quad= \varphi_{-1}(\eta^*(m)f_\gamma \wedge f_\delta) + \varphi_{-1}(f_\gamma \wedge \eta^*(m)f_\delta)\\
&\quad\overset{\dagger}{=} \varphi_{-1}((-f_{\eta(m^t)\gamma}) \wedge f_\delta) + \varphi_{-1}(f_\gamma \wedge (-f_{\eta(m^t)\delta}))\\
&\quad= -\varphi_{-1}(f_{\eta(m^t)\gamma} \wedge f_\delta) - \varphi_{-1}(f_\gamma \wedge f_{\eta(m^t)\delta})\\
&\quad= -\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \eta(m^t)\gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit f_{\eta(m^t)\gamma} & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma \heartsuit f_{\eta(m^t)\delta} - \eta(m^t)\delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right)\\
&\quad= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\eta(m^t)\gamma \heartsuit f_\delta + \delta \heartsuit f_{\eta(m^t)\gamma} - \gamma \heartsuit f_{\eta(m^t)\delta} + \eta(m^t)\delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\dagger}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\eta(m^t)\gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit \eta^*(m) f_\gamma + \gamma \heartsuit \eta^*(m) f_\delta + \eta(m^t)\delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{\star}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -m^t(\gamma \heartsuit f_\delta) - (\gamma \heartsuit f_\delta)m + m^t(\delta \heartsuit f_\gamma) + (\delta \heartsuit f_\gamma)m & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & -m^t \end{array}\right) \\
&= \left[M, \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \gamma \heartsuit f_\delta - \delta \heartsuit f_\gamma & 0 \end{array}\right) \right].
\end{aligned}
$$

Observemos que a igualdade $\overset{\dagger}{=}$ segue da Equação 1.25 (ver Exemplo 1.43) e a igualdade $\overset{\star}{=}$ segue da Equação 1.27 (ver Exemplo 1.44). Logo, φ_{-1} é um homomorfismo de $P(n)_{\overline{0}}$-módulos.

Lembremos que denotamos $E_{k,l} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ é a matriz com 1 na entrada kl e todas as demais nulas, $v_k \in \mathbb{C}^m$ é o vetor que tem 1 na linha k e todas as demais nulas e $f_k \in (\mathbb{C}^n)^*$ é o vetor que tem 1 na coluna i e $f_j \in (\mathbb{C}^n)^*$ é o vetor que tem 1 na coluna k e as demais nulas.

Assim, dado $E_{i,j} - E_{j,i} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$, com $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$, pelo Exemplo 1.44, existem $v_i, v_j \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $f_i, f_j \in (\mathbb{C}^{n+1})$, com $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$ tais que $v_i \heartsuit f_j = E_{i,j}$ e $v_j \heartsuit f_i = E_{j,i}$, $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$. Daí, $v_i \heartsuit f_j - v_j \heartsuit f_i = E_{i,j} - E_{j,i}$, $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$, ou seja, existem $v_i, v_j \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $f_i, f_j \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$, tais que $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline E_{i,j} - E_{j,i} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline v_i \heartsuit f_j - v_j \heartsuit f_i & 0 \end{array}\right) \in P(n)_{-1}$, com $i, j \in \{1, \cdots, n+1\}$. Como $\{E_{n+1+i,j} - E_{n+1+j,i} \mid i < j \in \{1, \cdots, n+1\}\}$ é uma base de $P(n)_{-1}$ e φ_{-1} é uma transformação linear, temos que im φ_{-1} é um subespaço vetorial de $M_{(2n+2)\times(2n+2)}(\mathbb{C})$, e consequentemente, φ_{-1} é sobrejetor.

Na Equação 2.23 explicitamos uma base para $P(n)_{-1}$ e dada essa base, temos que $dim(P(n)_{-1}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Agora, como φ_{-1} é linear, sobrejetor e $dim(\Lambda^2((\mathbb{C}^{n+1})^*)) = \dfrac{n(n+1)}{2} = dim(P(n)_{-1})$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que φ_{-1} é injetor. Portanto, φ_{-1} é um isomorfismo de $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$-módulos. Agora, como $dim(P(n)_0) = dim(\mathfrak{sl}(n+1)) = (n+1)^2 - 1$, $dim(P(n)_1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ e $\dim(P(n)_{-1}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, temos $dim(\mathfrak{g}) = 2(n+1)^2 - 1$.

2.3.2 $Q(n)$

Seja $n \geq 2$. Defina a superálgebra de Lie $\tilde{Q}(n)$ como sendo a subsuperálgebra de $\mathfrak{sl}(n+1, n+1)$ consistindo das matrizes

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & a \end{array}\right), \quad \text{tais que} \quad \operatorname{tr}(b) = 0.$$

Observemos que a matriz $\mathrm{Id}_{n+1,n+1}$ pertence ao centro de $\tilde{Q}(n)$, e definamos

$$Q(n) := \frac{\tilde{Q}(n)}{span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\}}.$$

A $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathfrak{gl}(n+1,n+1)$ dada no Exemplo 1.21 induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $\mathfrak{sl}(n+1,n+1)$, que por sua vez, induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $Q(n)$, já que $\mathrm{Id}_{n+1,n+1}$ é homogênea de grau $\overline{0}$. Essa $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida em $Q(n)$ é dada por

$$Q(n)_{\overline{0}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right) \middle| \; a \in \mathfrak{gl}(n+1) \right\} \Big/ span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\} ,$$

$$Q(n)_{\overline{1}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array} \right) + span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\} \middle| \; b \in \mathfrak{sl}(n+1) \right\} \Big/ span_{\mathbb{C}}\{\mathrm{Id}_{n+1,n+1}\} .$$

Consideremos as bases de $Q(n)_{\overline{0}}$ e $Q(n)_{\overline{1}}$ dadas por

$$\begin{aligned} \zeta_0 =& \{E_{i,j} - E_{i.i} \mid 1 \leq i,j \leq n\} \cup \{E_{n+1+i,n+1+j} - E_{n+1+i,n+1+i} \mid 1 \leq i,j \leq n\}, & (2.26) \\ \zeta_1 =& \{E_{i,n+1+j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{E_{i,n+1+i} - E_{i+1,n+1+i} \mid 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{E_{i+n+1,j} \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1\} \cup \{E_{i+n+1,i} - E_{i+n+1,i} \mid 1 \leq i \leq n\}. & (2.27) \end{aligned}$$

Notemos que $Q(n)_{\overline{0}}$ é isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n+1)$. Com efeito, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\overline{0}}: & Q(n)_{\overline{0}} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(n+1) \\ & \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right] & \longmapsto & a - \dfrac{\mathrm{tr}(a)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}. \end{array}$$

Observemos que $\varphi_{\overline{0}}$ está bem definida. Com efeito, sejam $x = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_1 \end{array} \right]$ e $y = \left[\begin{array}{c|c} a_2 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array} \right]$ em $Q(n)_{\overline{0}}$ tais que $x - y = [\lambda \ \mathrm{Id_{n+1}}]$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{0}}(x) - \varphi_{\overline{0}}(y) &= \varphi_{\overline{0}}\left(\left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|c} a_2 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array} \right] \right) = \varphi_{\overline{0}}([\lambda \ \mathrm{Id}_{n+1}]) \\ &= \lambda \ \mathrm{Id}_{n+1} - \frac{\mathrm{tr}(\lambda \ \mathrm{Id}_{n+1})}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

De onde,

$$\varphi_{\overline{0}}(x) - \varphi_{\overline{0}}(y) = 0 \Longrightarrow \varphi_{\overline{0}}(x) = \varphi_{\overline{0}}(y).$$

Mostremos que $\varphi_{\overline{0}}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $M_1 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_1 \end{array} \right]$, $M_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_2 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array} \right] \in Q(n)_{\overline{0}}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\varphi_{\overline{0}}(M_1 + \lambda M_2) = \varphi_{\overline{0}}\left(\begin{array}{c|c} a_1 + \lambda a_2 & 0 \\ \hline 0 & a_1 + \lambda a_2 \end{array} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1 + \lambda a_2 - \frac{\operatorname{tr}(a_1 + \lambda a_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \\
&= a_1 + \lambda a_2 - \frac{\operatorname{tr}(a_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} - \lambda\frac{\operatorname{tr}(a_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \\
&= a_1 - \frac{\operatorname{tr}(a_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} + \lambda\left(a_2 - \frac{\operatorname{tr}(a_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right) \\
&= \varphi_{\overline{0}}(M_1) + \lambda\, \varphi_{\overline{0}}(M_1).
\end{aligned}
$$

Logo, $\varphi_{\overline{0}}$ é linear. Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\overline{0}}([M_1, M_2]) &= \varphi_{\overline{0}}\left(\begin{array}{c|c} a_1a_2 - a_2a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_1a_2 - a_2a_1 \end{array}\right) \\
&= a_1a_2 - a_2a_1 - \frac{\operatorname{tr}(a_1a_2 - a_2a_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} \\
&= a_1a_2 - a_2a_1 \\
&= [a_1, a_2] \\
&= [a_1, a_2] - \frac{\operatorname{tr}(a_1)}{n+1}[\mathrm{Id}_{n+1}, a_2] - \frac{\operatorname{tr}(a_2)}{n+1}[a_1, \mathrm{Id}_{n+1}] \\
&\quad + \frac{\operatorname{tr}(a_1)\operatorname{tr}(a_2)}{(n+1)^2}[\mathrm{Id}_{n+1}, \mathrm{Id}_{n+1}] \\
&= \left[a_1 - \frac{\operatorname{tr}(a_1)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}, a_2 - \frac{\operatorname{tr}(a_2)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1}\right] \\
&= [\varphi_{\overline{0}}(M_1), \varphi_{\overline{0}}(M_2)]
\end{aligned}
$$

Logo, $\varphi_{\overline{0}}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Agora mostraremos que $\varphi_{\overline{0}}$ é injetora. Seja $x \in Q(n)_{\overline{0}}$ tal que $\varphi_{\overline{0}}(x) = 0$. Assim, $a - \frac{\operatorname{tr}(a)}{n+1}\mathrm{Id}_{n+1} = 0$. Daí, $a_{ij} = 0$, para todos $i \neq j$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ e $a_{ii} = \frac{\operatorname{tr}(a)}{n+1}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. De onde, $x = [0] \in Q(n)_{\overline{0}}$. Logo, $\varphi_{\overline{0}}$ é injetora. Na Equação 2.26 explicitamos uma base para $Q(n)_{\overline{0}}$ e dada essa base, temos $dim(Q(n)_{\overline{0}}) = (n+1)^2 - 1$. Agora, como $dim(Q(n)_{\overline{0}}) = (n+1)^2 - 1 = dim(\mathfrak{sl}(n+1))$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\varphi_{\overline{0}}$ é sobrejetora. Portanto, $\varphi_{\overline{0}}$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Além disso, o $Q(n)_{\overline{0}}$-módulo $Q(n)_{\overline{1}}$ é isomorfo à representação adjunta de $\mathfrak{sl}(n+1)$, através do isomorfismo dado por

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\overline{1}} :\quad Q(n)_{\overline{1}} &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n+1) \\
\left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right] &\longmapsto \quad b.
\end{aligned}
$$

De fato, mostremos inicialmente que $\varphi_{\overline{1}}$ está bem definida. Sejam $x = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b_1 \\ \hline b_1 & 0 \end{array}\right]$ e $y = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b_2 \\ \hline b_2 & 0 \end{array}\right]$ em $Q(n)_{\overline{1}}$ tais que $x = y$. Assim, $\varphi_{\overline{1}}(x) = \varphi_{\overline{1}}(y)$. Logo, $\varphi_{\overline{1}}$ está bem definida.

Mostremos, agora, que $\varphi_{\bar{1}}$ é linear. Sejam $x = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b_1 \\ \hline b_1 & 0 \end{array}\right]$, $y = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b_2 \\ \hline b_2 & 0 \end{array}\right] \in Q(n)_{\bar{1}}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bar{1}}(x+\lambda y) &= \varphi_{\bar{1}}\left(\begin{array}{c|c} 0 & b_1+\lambda b_2 \\ \hline b_1+\lambda b_2 & 0 \end{array}\right) \\
&= b_1 + \lambda b_2 \\
&= \varphi_{\bar{1}}(x) + \lambda\varphi_{\bar{1}}(y).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{\bar{1}}$ é linear.

Além disso, sejam $z = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \in Q(n)_{\bar{0}}$ e $y = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right] \in Q(n)_{\bar{1}}$, com $a, b \in \mathfrak{sl}(n+1)$. Daí,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bar{1}}([z,y]) &= \varphi_{\bar{1}}\left(\left[\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right]\right]\right) \\
&= \varphi_{\bar{1}}\left(\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right] - (-1)^{\bar{0}\,\bar{1}}\left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right]\right) \\
&= \varphi_{\bar{1}}\left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & ab \\ \hline ab & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} 0 & ba \\ \hline ba & 0 \end{array}\right]\right) \\
&= \varphi_{\bar{1}}\left(\left[\begin{array}{c|c} 0 & ab-ba \\ \hline ab-ba & 0 \end{array}\right]\right) \\
&= ab - ba \\
&= [a,b] \\
&= [a,b] - \frac{\operatorname{tr}(a)}{n+1}\left[\operatorname{Id}_{n+1}, b\right] \\
&= \left[a - \frac{\operatorname{tr}(a)}{n+1}\operatorname{Id}_{n+1}, b\right] \\
&= \left[\varphi_{\bar{0}}(z), \varphi_{\bar{1}}(y)\right],
\end{aligned}$$

para todo $z \in Q(n)_{\bar{0}}$ e $y \in Q(n)_{\bar{1}}$. Logo, $\varphi_{\bar{1}}$ é um homomorfismo de $Q(n)_{\bar{0}}$-módulos.

Agora, mostremos que $\varphi_{\bar{1}}$ é injetora. Seja $x = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline b & 0 \end{array}\right] \in Q(n)_{\bar{1}}$ tal que $\varphi_{\bar{1}}(x) = 0$. De onde, $b = 0$. Logo $\ker\varphi_{\bar{1}} = \{0\}$, e consequentemente, $\varphi_{\bar{1}}$ é injetora. Na Equação 2.27 explicitamos uma base para $Q(n)_{\bar{1}}$ e dada essa base, temos $dim(Q(n)_{\bar{1}}) = (n+1)^2 - 1$. Agora, como $\varphi_{\bar{1}}$ é linear, injetora e $dim(Q(n)_{\bar{1}}) = (n+1)^2 - 1 = dim(\mathfrak{sl}(n+1))$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\varphi_{\bar{1}}$ é sobrejetora. Portanto, $\varphi_{\bar{1}}$ é um isomorfismo. Em particular, $\dim Q(n) = 2\dim\mathfrak{sl}(n+1) = 2(n+1)^2 - 2$.

2.4 Superálgebras de Lie de tipo Cartan

2.4.1 $W(n)$

Seja $n \geq 2$. Lembremos do Exemplo 1.17 no qual $\Lambda(n)$ denota a álgebra de Grassmann em um espaço vetorial n-dimensional, e denotemos seus geradores por $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Lembremos também, do Exemplo 1.20, que podemos considerar $\Lambda(n)$ como uma superálgebra de Lie, com seu supercolchete sendo dado pelo supercomutador. Mais ainda, neste caso, a superálgebra de Lie $\Lambda(n)$ é abeliana. Além disso, lembremos do Exemplo 1.25 que $\mathrm{Der}(\Lambda(n))$ é uma superálgebra de Lie quando munida do supercomutador (induzido de $\mathrm{End}(\Lambda(n))$). Definamos $W(n) := \mathrm{Der}(\Lambda(n))$.

Além disso, cada superderivação $D \in W(n)$ é escrita como

$$D = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \tag{2.28}$$

com a superderivação $\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$ sendo unicamente determinada por

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i} = \delta_{i,j}$$

e $P_i \in \Lambda(n)$ sendo unicamente determinado por

$$D(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i} = P_j.$$

Observe ainda que, se $D \in W(n)_j$, então $P_i = D(\xi_i) \in \Lambda^{j+1}(n)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Agora, suponhamos que $D = \sum_{i=1}^{n} P_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$ e $D = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$. Assim

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i} = D(\xi_k) = \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} \Longleftrightarrow P_k = Q_k,$$

para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, D é escrita de forma única como na Equação 2.28.

A $\mathbb{Z}$-graduação de $\Lambda(n)$, dada por

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V), \quad \text{com} \quad \Lambda^k(n) := span\{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\},$$

induz uma $\mathbb{Z}$-graduação $W(n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W(n)_j$, dada por

$$W(n)_j := \{D \in W(n) \mid D(\Lambda^s(n)) \subseteq \Lambda^{s+j}(n)\}.$$

Observemos que $W(n)_j = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \middle| P_i \in \Lambda^{j+1}(n),\ i \in \{1, \cdots, n\} \right\}$, e que, em particular, $W(n)_j \neq 0$ somente se $j \in \{-1, 0, \ldots, n-1\}$. Observemos também que, como a

$\mathbb{Z}$-graduação $\Lambda(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^k(n)$ induz a $\mathbb{Z}_2$-graduação $\Lambda(n) = \Lambda(n)_{\overline{0}} \oplus \Lambda(n)_{\overline{1}}$ dada por $\Lambda(n)_{\overline{0}} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda^{2j}(n)$ e $\Lambda(n)_{\overline{1}} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda^{2j+1}(n)$, então a $\mathbb{Z}$-graduação $W(n) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W(n)_j$ induz a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação $W(n) = W(n)_{\overline{0}} \oplus W(n)_{\overline{1}}$:

$$W(n)_{\overline{0}} := \bigoplus_{\substack{j\equiv 0 \\ (\mathrm{mod}\ 2)}} W(n)_j = \left\{ D \in W(n) \mid D(\Lambda^k(n)) \subseteq \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda^{k+2j}(n) \right\},$$

$$W(n)_{\overline{1}} := \bigoplus_{\substack{j\equiv 1 \\ (\mathrm{mod}\ 2)}} W(n)_j = \left\{ D \in W(n) \mid D(\Lambda^k(n)) \subseteq \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda^{k+2j+1}(n) \right\}. \tag{2.29}$$

Observemos ainda que $W(n)_0$ é uma álgebra de Lie isomorfa à $\mathfrak{gl}(n)$, através do isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 : & \mathfrak{gl}(n) & \longrightarrow & W(n)_0 \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}. \end{array} \tag{2.30}$$

De fato, sejam $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ em $\mathfrak{gl}(n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi_0(A+\lambda B) &= \varphi_0\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \varphi_0\left(\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+\lambda b_{11} & a_{n2}+\lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn}+\lambda b_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}+\lambda b_{ij}) \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \lambda \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\ &= \varphi_0(A) + \lambda\ \varphi_0(B). \end{aligned}$$

Logo, φ_0 é linear.

Além disso, consideremos ξ_s, para todo $s \in \{1, \cdots, n\}$. Assim,

$$[\varphi_0(A), \varphi_0(B)]\,(\xi_s) = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right] (\xi_s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl} \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right] (\xi_s) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl} \left[\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right] (\xi_s) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij} b_{kl} \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \xi_k \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_l} - \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l} \xi_i \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi_j} \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij} b_{ks} \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} - \sum_{i,k,l=1}^{n} a_{is} b_{kl} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_l} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ks} \xi_i - \sum_{i,k=1}^{n} a_{is} b_{ki} \xi_k \\
&= \sum_{r=1}^{n} \varphi_0(a_{ir} b_{rj})(\xi_s) - \sum_{r=1}^{n} \varphi_0(b_{ir} a_{rj})(\xi_s) \\
&= \varphi_0 \left(\sum_{r=1}^{n} (a_{ir} b_{rj} - b_{ir} a_{rj}) \right)_{i,j} (\xi_s) \\
&= \varphi_0 [A, B](\xi_s).
\end{aligned}
$$

Logo, φ_0 é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Mostremos que $\ker \varphi_0 = \{0\}$. Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ em $\mathfrak{gl}(n)$ tal que $\varphi_0(A)(\xi_k) = 0$, para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi_0(A)(\xi_k) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \xi_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ \xi_i,
\end{aligned}
$$

como $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é uma base de $\Lambda^1(n)$, temos $a_{1k} = \cdots = a_{nk} = 0$, para todos $k \in \{1, \cdots, n\}$. Assim, $A = 0$. De onde, $\ker \varphi_0 = \{0\}$. Logo, φ_0 é injetor. Agora, mostremos que φ_0 é sobrejetor. Como $\left\{ \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mid i, j \in \{1, \cdots, n\} \right\}$ é uma base de $W(n)_0$, dado $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ em $W(n)_0$, existe $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ em $\mathfrak{gl}(n)$ tal que $\varphi_0(A)(\xi_k) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_j$, com $k \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, φ_0 é sobrejetor. Portanto, φ_0 é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Além disso, cada $W(n)_j$ é um $W(n)_0$-módulo isomorfo a $\Lambda^{j+1}(\mathbb{C}^n) \otimes (\mathbb{C}^n)^*$, através do isomorfismo dado como sendo a única transformação linear que satisfaz

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j: & W(n)_j & \longrightarrow & \Lambda^{j+1}(\mathbb{C}^n) \otimes (\mathbb{C}^n)^* \\ & \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} & \longmapsto & e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{j+1}} \otimes f_i, \end{array}$$

para todos $j \in \{-1, \ldots, n-1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+1} \leq n$ e $f_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, com $f_i(e_i) = 1$ e $f_i(e_j) = 0$, para todo $i \neq j$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Observemos que φ_j é de fato um isomorfismo, pois cada φ_j é, por definição, uma transformação linear e como $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$ é uma base de $W(n)_j$ e $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{j+1}} \otimes f_i$ é base de $\Lambda^{j+1}(\mathbb{C}^n) \otimes (\mathbb{C}^n)^*$, temos que φ_j leva base em base. Além disso, como $dim(W(n)_j) = n\binom{n}{j+1}$, para cada $j \in \{0, \cdots, n-1\}$, temos $\dim(\mathfrak{g}) = n2^n$.

2.4.2 $S(n)$

Seja $n \geq 3$. Consideremos a transformação linear div : $W(n) \longrightarrow \Lambda(n)$ dada por

$$\operatorname{div}(D) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(D(\xi_i)), \quad \text{para todo } D \in W(n).$$

Mostremos que div é, de fato, linear. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e D_1, $D_2 \in W(n)$, com $D_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ e $D_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D_1 + \lambda\ D_2) &= \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \lambda \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \lambda \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)(\xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}(\xi_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_i) \\ &= \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}\right) + \lambda\ \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \\ &= \operatorname{div}(D_1) + \lambda\ \operatorname{div}(D_2). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Logo, div é linear.

Consideremos $S(n) = \{D \in W(n) \mid \operatorname{div}(D) = 0\}$ e a $\mathbb{Z}$-graduação de $S(n)$ dada por

$$S(n) = S(n)_{-1} \oplus S(n)_0 \oplus \cdots \oplus S(n)_{n-2}$$

é herdada de $W(n)$. Mostremos que, de fato, a $\mathbb{Z}$-graduação é herdada de $W(n)$. Seja $D \in S(n)$. Como $S(n) \subset W(n)$ e $W(n)$ é $\mathbb{Z}$-graduada, existem únicos $D_i \in W(n)_i$, com

$i \in \{-1, \cdots, n-1\}$, tais que $D = \sum_{i=-1}^{n-1} D_i$. Além disso, como $D \in S(n)$, temos $\operatorname{div}(D) = 0$. Assim,

$$0 = \operatorname{div}(D) = \operatorname{div}\left(\sum_{i=-1}^{n-1} D_i\right) = \sum_{i=-1}^{n-1} \operatorname{div}(D_i).$$

Mostremos que $\operatorname{div}(D_{-1}) = \cdots = \operatorname{div}(D_{n-1}) = 0$. Observemos que $\operatorname{div}(D_{-1}) = 0$ e $\operatorname{div}(D_i) \in \Lambda^i(n)$, para todo $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, uma vez que dados $D_{-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, $D_0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $D_1 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ijl}\xi_i\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l}, \cdots, D_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1\ldots ni}\xi_1 \cdots \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(D_{-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(D_{-1}(\xi_k))}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial \xi_k} = 0, \ a_k \in \mathbb{C}, \\
\operatorname{div}(D_0) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_0(\xi_k)}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \in \Lambda^0(n), \\
\operatorname{div}(D_1) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_1(\xi_k)}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sum_{i,j,l=1}^{n} a_{ijl}\xi_i\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_l}(\xi_k)\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk} \frac{\partial(\xi_i\xi_j)}{\partial \xi_k} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk} \frac{\partial(\xi_i\xi_j)}{\partial \xi_k} = \sum_{j=k+1}^{n} a_{kjk}\xi_j - \sum_{i=1}^{k} a_{ikk}\xi_i \in \Lambda^1(n), \\
&\vdots \\
\operatorname{div}(D_{n-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_{n-1}(\xi_k)}{\partial \xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1\cdots ni}\xi_1 \cdots \xi_n \frac{\partial(\xi_k)}{\partial \xi_i}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{1\cdots nk}\xi_1 \cdots \xi_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, a_{1\cdots nk}\xi_1 \cdots \widehat{\xi_k} \cdots \xi_n \in \Lambda^{n-1}(n),
\end{aligned}$$

como $\Lambda(n)$ é $\mathbb{Z}$-graduada e $\operatorname{div}(D) = 0$, temos $\operatorname{div}(D_i) = 0$, para todo $i \in \{-1, \cdots, n-1\}$. Além disso, como $\operatorname{div}(D_{-1}) = 0$, temos $S(n)_{-1} = W(n)_{-1}$ e como $\operatorname{div}(D_i) \in \Lambda^i(n)$, segue que $S(n)_i \subset W(n)_i$, para todo $i \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Observemos que, de fato $S(n)_{n-1} = 0$. Como $S(n)_{n-1} = \{D \in W(n)_{n-1} \mid \operatorname{div}(D) = 0\}$, temos

$$\begin{aligned}
0 = \operatorname{div}(D) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(P_i \frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial \xi_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} \\
&= \frac{\partial P_1}{\partial \xi_1} + \cdots + \frac{\partial P_n}{\partial \xi_n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_1 \frac{\partial(\xi_1 \cdots \xi_n)}{\partial \xi_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial(\xi_1 \cdots \xi_n)}{\partial \xi_n} \\
&= \lambda_1 \xi_2 \cdots \xi_n + \lambda_2 \xi_1 \xi_3 \cdots \xi_n + \cdots + \lambda_n \xi_1 \cdots \xi_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Como $\{\xi_2 \cdots \xi_n,\ \xi_1\xi_3 \cdots \xi_n, \cdots,\ \xi_1 \cdots \xi_{n-1}\}$ é base de $\Lambda^{n-1}(n)$, temos $\lambda_i = 0$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, $S(n)_{n-1} = 0$.

Mostremos que $S(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$. Observemos que $S(n) = \ker(\mathrm{div})$ e como div é linear, temos que $S(n)$ é um subespaço vetorial de $W(n)$.

Dada a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $W(n)$, consideremos a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $S(n)$, induzida de $W(n)$, dada por $S(n)_{\bar{0}} = S(n) \cap W(n)_{\bar{0}} = \bigoplus_{i:\ \text{par}} S(n)_i$ e $S(n)_{\bar{1}} = S(n) \cap W(n)_{\bar{1}} = \bigoplus_{j:\ \text{ímpar}} S(n)_j$. Portanto, $S(n)$ é um subsuperespaço vetorial de $W(n)$.

Agora, vamos mostrar que $S(n)$ é também uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$. De fato, sejam D_1 e D_2 em $S(n)$ homogêneos, com $D_1 = \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ e $D_2 = \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Assim, $[D_1, D_2] = \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, com

$$
\begin{aligned}
R_i &= [D_1, D_2]\,(\xi_i) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}, \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right](\xi_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} - (-1)^{|D_1||D_2|} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right)(\xi_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} - (-1)^{|D_1||D_2|} \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}([D_1, D_2]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(P_k \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} \right) - (-1)^{|D_1||D_2|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(Q_j \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} + (-1)^{|P_k|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} \\
&\quad - (-1)^{|D_1||D_2|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} - (-1)^{|D_1||D_2|} (-1)^{|Q_j|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} - (-1)^{|D_1|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_k} \\
&\quad - (-1)^{|D_1||D_2|} (-1)^{|D_1||D_2|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{|D_1||D_2|}(-1)^{|D_2|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q_j\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial P_i}{\partial\xi_j}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_k}{\partial\xi_i}\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_k}-(-1)^{|D_1|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}P_k\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_k}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial\xi_j}\frac{\partial Q_j}{\partial\xi_i}\\
&+(-1)^{(|D_1|+1)|D_2|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q_j\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial P_i}{\partial\xi_j}\\
=&\ -(-1)^{|D_1|}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}P_k\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(Q_i)-(-1)^{|D_2|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}Q_j\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(P_i)\\
=&\,(-1)^{|D_1|}\sum_{k=1}^{n}P_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_i}\right)+(-1)^{|D_2|}\sum_{j=1}^{n}Q_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial\xi_i}\right)\\
=&\ 0.
\end{aligned}
$$

Agora, mostremos que $S(n)_0$ é isomorfa à $\mathfrak{sl}(n)$. Consideremos $\overline{\varphi_0}$ dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi_0}:\ \mathfrak{sl}(n) &\longrightarrow S(n)_0\\
A &\longmapsto \varphi_0(A),
\end{aligned}
$$

com φ_0 o isomorfismo descrito na Equação 2.30. Observemos que $\overline{\varphi_0}$ é um homomorfismo injetor, pois φ_0 é um isomorfismo. Para mostrar que $\overline{\varphi_0}$ está bem definida mostremos que $\operatorname{im}(\overline{\varphi_0}) = S(n)_0$. Para isso, como $S(n)_0 = \{D \in W(n)_0 \mid \operatorname{div}(D) = 0\}$, temos $0 = \operatorname{div}(D) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_i}$, com $a_{ij}\xi_i \in \Lambda^1(n)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
0=\operatorname{div}(D)=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(a_{ij}\xi_i)}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_i}\\
=&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(a_{ii}\xi_i)}{\partial\xi_i}\\
=&\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.
\end{aligned}
$$

Agora, dado $D = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_i} \in S(n)_0$, temos $D \in W(n)_0$ e $\sum_{i=1}^{n}a_{ii} = 0$. Como φ_0 é sobrejetor, existe $A \in \mathfrak{sl}(n)$, tal que $\overline{\varphi_0}(A) = \varphi_0(A) = D$. Logo, $\overline{\varphi_0}$ é sobrejetor. Logo, $S(n)_0$ é isomorfa à $\mathfrak{sl}(n)$.

Lembremos que $S(n)_{-1} = W(n)_{-1}$. Agora, para $j \geq 1$ e $D \in S(n)_j$, existe um coeficiente $a_{(i_1,\ldots,i_{j+1},k)} \in \mathbb{C}$ para cada $(j+2)$-upla $(i_1,\ldots,i_{j+1},k)$, tal que

$$
D=\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_{j+1}\leq n\\ 1\leq k\leq n}}a_{(i_1,\ldots,i_{j+1},k)}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{j+1}}\frac{\partial}{\partial\xi_k}.
$$

Para encontrar uma base para $S(n)_j$, primeiro observemos que, se $k \notin \{i_1,\ldots,i_{j+1}\}$, então

$$
\operatorname{div}\left(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{j+1}}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)=\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_t}\left(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{j+1}}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right)(\xi_t)\overset{t=k}{=}\frac{\partial(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_{j+1}})}{\partial\xi_k}=0.
$$

Depois, observemos que, se $k = i_l$, $l \in \{1, \ldots, j+1\}$, então

$$\operatorname{div}\left(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\right) = \frac{\partial(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}})}{\partial \xi_{i_l}} = (-1)^{l+1} \xi_{i_1} \cdots \widehat{\xi_{i_l}} \cdots \xi_{i_{j+1}}.$$

Isso implica que $D = \sum a_{(i_1,\ldots,i_{j+1},k)} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_k} \in S(n)_j$ se, e somente se,

$$\operatorname{div}(D) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+1} \leq n \\ 1 \leq l \leq j+1}} (-1)^{l+1} a_{(i_1,\ldots,i_{j+1},l)} \xi_{i_1} \cdots \widehat{\xi_{i_l}} \cdots \xi_{i_{j+1}} = 0.$$

Como $\{\xi_{m_1} \cdots \xi_{m_j} \mid 1 \leq m_1 < \cdots < m_j \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^j(n)$, para cada j-upla $(m_1, \ldots, m_j)$, temos que ter

$$\sum_{(i_1,\ldots,\widehat{i_l},\ldots i_{j+1}) = (m_1,\ldots,m_j)} (-1)^{l+1} a_{(i_1,\ldots,i_{j+1},i_l)} = 0.$$

Resolvendo essas equações lineares para cada j-upla $(m_1, \ldots, m_j)$, vemos que o conjunto formado pelos elementos da forma

$$\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \qquad \text{e} \qquad \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{i_l}} - (-1)^{l+r} \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_{j+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{p_r}}, \tag{2.32}$$

com $k \notin \{i_1, \ldots, i_{j+1}\}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+1} \leq n$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_{j+1} \leq n$, $(i_1, \ldots, i_{j+1}) \neq (p_1, \ldots, p_{j+1})$, $l, r \in \{1, \ldots, j+1\}$ e $\{i_1, \ldots, i_{j+1}\} \setminus \{i_l\} = \{p_1, \ldots, p_{j+1}\} \setminus \{p_r\}$, é uma base de $S(n)_j$. (Além disso, é possível mostrar que $S(n)_j$ é um $S(n)_0$-módulo irredutível gerado pelo vetor de peso máximo $\xi_1 \cdots \xi_{j+1} \dfrac{\partial}{\partial \xi_n}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n-2\}$.)

Vamos usar a base acima para calcular a dimensão de $S(n)$. Primeiro lembremos que $S(n)_{-1} = W(n)_{-1}$ e $S(n)_0 \cong \mathfrak{sl}(n)$. Depois, para cada $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, observemos que temos $\binom{n}{j+1}(n-(j+1))$ elementos distintos da forma $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_k}$, tais que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+1} \leq n$ e $k \notin \{i_1, \ldots, i_{j+1}\}$; e $\binom{n}{j}((n-j)-1)$ elementos distintos da forma $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_{i_l}} - (-1)^{l+r} \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_{j+1}} \dfrac{\partial}{\partial \xi_{p_r}}$, tais que $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+1} \leq n$, $1 \leq p_1 < \cdots < p_{j+1} \leq n$, $(i_1, \ldots, i_{j+1}) \neq (p_1, \ldots, p_{j+1})$, $l, r \in \{1, \ldots, j+1\}$ e $\{i_1, \ldots, i_{j+1}\} \setminus \{i_l\} = \{p_1, \ldots, p_{j+1}\} \setminus \{p_r\}$. Consequentemente, usando um pouco de combinatória, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\dim S(n) \\
&\qquad = \dim S(n)_{-1} + \dim S(n)_0 + \dim S(n)_1 + \cdots + \dim S(n)_{n-2} \\
&\qquad = \dim W(n)_{-1} + (\dim W(n)_0 - 1) + \sum_{j=1}^{n-2} \left(\binom{n}{j+1}(n-j-1) + \binom{n}{j}(n-j-1) \right) \\
&\qquad = n + (n^2 - 1) + \sum_{j=1}^{n-2} \binom{n+1}{j+1}(n-j-1) \\
&\qquad = n + (n^2 - 1) + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n+1}{k}(n-k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}(n-k)+1 \\
&= n2^{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)2^{n+1}+1 \\
&= (n-1)2^n+1.
\end{aligned}
$$

2.4.3 $\tilde{S}(n)$

Seja $n \geq 4$ par. Defina

$$\tilde{S}(n) = \left\{ D \in W(n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D(\xi_i)\right) = 0 \right\}.$$

Vamos começar a análise de $\tilde{S}(n)$ mostrando que $\tilde{S}(n)$ é um subespaço vetorial de $W(n)$. De fato, dados $D_1, D_2 \in \tilde{S}(n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)(D_1+\lambda D_2)(\xi_i)\right) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)(D_1(\xi_i)+\lambda D_2(\xi_i))\right) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_1(\xi_i)\right) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_2(\xi_i)\right) \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Isso mostra que $D_1+\lambda D_2 \in \tilde{S}(n)$, e consequentemente, que $\tilde{S}(n)$ é um subespaço vetorial de $W(n)$.

Seguindo a análise de $\tilde{S}(n)$, vamos mostrar que $\tilde{S}(n)$ herda a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $W(n)$. Ou seja, vamos mostrar que, definindo $\tilde{S}(n)_{\bar{0}} := \tilde{S}(n) \cap W(n)_{\bar{0}}$ e $\tilde{S}(n)_{\bar{1}} := \tilde{S}(n) \cap W(n)_{\bar{1}}$, temos que $\tilde{S}(n) = \tilde{S}(n)_{\bar{0}} \oplus \tilde{S}(n)_{\bar{1}}$. De fato, pela definição, $\tilde{S}(n)_{\bar{0}} \cap \tilde{S}(n)_{\bar{1}} = \{0\}$ e $\tilde{S}(n)_{\bar{0}}, \tilde{S}(n)_{\bar{1}} \subseteq \tilde{S}(n)$. Para terminar, resta mostrar que $\tilde{S}(n) \subseteq \tilde{S}(n)_{\bar{0}} + \tilde{S}(n)_{\bar{1}}$. Para mostrar isso, consideremos $D \in \tilde{S}(n)$. Como $\tilde{S}(n) \subseteq W(n)$ e $W(n) = W(n)_{\bar{0}} \oplus W(n)_{\bar{1}}$, existem únicos $D_{\bar{0}} \in W(n)_{\bar{0}}$ e $D_{\bar{1}} \in W(n)_{\bar{1}}$, tais que $D = D_{\bar{0}} + D_{\bar{1}}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D(\xi_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_{\bar{0}}(\xi_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_{\bar{1}}(\xi_i)\right).
\end{aligned}
$$

Como n é par, $D_{\bar{0}}(\Lambda(n))_{\bar{1}} \subseteq \Lambda(n)_{\bar{1}}$ e $D_{\bar{0}}(\Lambda(n))_{\bar{1}} \subseteq \Lambda(n)_{\bar{1}}$, temos que essa primeira somatória do lado direito da última igualdade pertence a $\Lambda(n)_{\bar{0}}$ e essa segunda somatória pertence a $\Lambda(n)_{\bar{1}}$. Como $\Lambda(n)_{\bar{0}} \cap \Lambda(n)_{\bar{1}} = \{0\}$, segue que ambas as somatórias se anulam; ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_{\bar{0}}(\xi_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1+\xi_1\cdots\xi_n)D_{\bar{1}}(\xi_i)\right) = 0.$$

Isso mostra que $D_{\bar{0}}, D_{\bar{1}} \in \tilde{S}(n)$, e consequentemente, que $D \in \tilde{S}(n)_{\bar{0}} + \tilde{S}(n)_{\bar{1}}$. Isso implica que $\tilde{S}(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$.

Apesar de herdar a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $W(n)$, $\tilde{S}(n)$ não herda a $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$. De fato, $(\xi_1 \cdots \xi_n - 1)\dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \in \tilde{S}(n)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, pois:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left((1 + \xi_1 \cdots \xi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n - 1)\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\xi_k)\right) = \frac{\partial(-1)}{\partial \xi_i} = 0.$$

Mas $\dfrac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \xi_n} \notin \tilde{S}(n)$. De fato, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left((1 + \xi_1 \cdots \xi_n)\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\xi_k)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(1 + \xi_1 \cdots \xi_n) = (-1)^{i+1}\xi_1 \cdots \widehat{\xi_i} \cdots \xi_n \neq 0.$$

Seguindo a descrição da superálgebra de Lie $\tilde{S}(n)$, vamos definir uma $\mathbb{Z}_n$-graduação em $\tilde{S}(n)$. Para isso, primeiro observemos que $S(n)_0, \ldots, S(n)_{n-2} \subseteq \tilde{S}(n)$. De fato, suponhamos que $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ e que $D \in S(n)_j$. Nesse caso,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1 + \xi_1 \cdots \xi_n)D(\xi_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}D(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((\xi_1 \cdots \xi_n)D(\xi_i)\right) = \operatorname{div}(D) + 0,$$

pois $(\xi_1 \cdots \xi_n)D(\xi_i) \in \Lambda^{n+j+1}(n) = \{0\}$. Como $D \in \tilde{S}(n)$, isso implica que $\operatorname{div}(D) = 0$; ou seja, que $D \in S(n)$. Depois lembremos do parágrafo anterior que $(\xi_1 \cdots \xi_n - 1)\dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \in \tilde{S}(n)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Com isso, vamos definir $\tilde{S}(n)_{[0]} = S(n)_0, \ldots, \tilde{S}(n)_{[n-2]} = S(n)_{n-2}$ e

$$\tilde{S}(n)_{[n-1]} = span\left\{(\xi_1 \cdots \xi_n - 1)\frac{\partial}{\partial \xi_i} \;\middle|\; i \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

O fato de que $\tilde{S}(n)_{[i]} \cap \sum_{j \neq i} \tilde{S}(n)_{[j]} = \{0\}$ segue da construção de cada $\tilde{S}(n)_{[j]}$ e do fato de que $W(n) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W(n)_j$ é uma $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$. Já o fato de que $\tilde{S}(n)_{[j]} \subseteq \tilde{S}(n)$ foi demonstrado acima. Assim, para mostrar que $\tilde{S}(n) = \bigoplus_{[j] \in \mathbb{Z}_n} \tilde{S}(n)_{[j]}$ é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação de $\tilde{S}(n)$ resta mostrar que $\tilde{S}(n) \subseteq \sum_{[j] \in \mathbb{Z}_n} \tilde{S}(n)_{[j]}$. De fato, como $\tilde{S}(n) \subseteq W(n)$ e $W(n) = \bigoplus_{k=-1}^{n-1} W(n)$, para todo $D \in \tilde{S}(n)$ e cada $j \in \{-1, 0, \ldots, n-1\}$, existe um único $D_j \in W(n)_j$, tal que $D = D_{-1} + D_0 + \cdots + D_{n-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1 + \xi_1 \cdots \xi_n)D(\xi_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=-1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left((1 + \xi_1 \cdots \xi_n)D_j(\xi_i)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=-1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}D_j(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=-1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left((\xi_1\cdots\xi_n)D_j(\xi_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}D_0(\xi_i) + \cdots + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}D_{n-2}(\xi_i)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}D_{n-1}(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left((\xi_1\cdots\xi_n)D_{-1}(\xi_i)\right).
\end{aligned}
$$

Observemos que os $n-1$ primeiros termos do lado direito da última igualdade acima pertencem, respectivamente, à $\Lambda^0(n),\ldots,\Lambda^{n-2}(n)$, e que o n-ésimo (último) termo pertence a $\Lambda^{n-1}(n)$. Como $\Lambda(n)=\Lambda^0(n)\oplus\cdots\oplus\Lambda^n(n)$, segue que cada um desses termos se anula; ou seja,

$$
\operatorname{div}(D_0)=\cdots=\operatorname{div}(D_{n-2})=0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div}(D_{n-1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left((\xi_1\cdots\xi_n)D_{-1}(\xi_i)\right)=0.
$$

As primeiras $n-1$ equações implicam que $D_0\in\tilde{S}(n)_{[0]},\ldots,D_{n-2}\in\tilde{S}(n)_{[n-2]}$, e a última implica que $(D_{-1}+D_{n-1})\in S(n)_{[n-1]}$.

Para terminar, lembre que, como $\tilde{S}(n)_{[0]}=S(n)_0\cong\mathfrak{sl}(n)$, então $\dim\tilde{S}(n)_{[0]}=n^2-1$. Depois, lembremos que $\tilde{S}(n)_{[j]}=S(n)_j$, e da seção anterior que $\dim S(n)_j=\binom{n+1}{j+1}(n-j-1)$, para todo $j\in\{-1,1,2,\ldots,n-2\}$. Por fim, observemos que $\{(\xi_1\cdots\xi_n-1)\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}\mid i\in\{1,\ldots,n\}\}$ é uma base de $\tilde{S}(n)_{[n-1]}$; o que implica que $\dim\tilde{S}(n)_{[n-1]}=n$. Assim, obtemos que:

$$
\begin{aligned}
\dim\tilde{S}(n) &= \dim\tilde{S}(n)_{[0]}+\dim\tilde{S}(n)_{[1]}+\cdots+\dim\tilde{S}(n)_{[n-1]}\\
&= (n^2-1)+\sum_{j=1}^{n-2}\binom{n+1}{j+1}(n-j-1)+n\\
&= \dim S(n)\\
&= (n-1)2^n+1.
\end{aligned}
$$

2.4.4 $H(n)$

Seja $n\geq 4$. Para construir a última família de superálgebras de Lie simples de dimensão finita, vamos usar a seguinte função:

$$
\begin{aligned}
D_\bullet:\ \Lambda(n) &\longrightarrow W(n)\\
x &\longmapsto D_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}.
\end{aligned}
$$

Observemos que $D_\bullet$ é linear. De fato, para todos x, $y\in\Lambda(n)$ e $\alpha\in\mathbb{C}$, temos que

$$
D_{x+\alpha y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(x+\alpha y)}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} + \alpha \, \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \alpha \, \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \\
&= D_x + \alpha \, D_y.
\end{aligned}
$$

Além disso, observemos que, se $x \in \Lambda^j(n)$, $j \in \{0, \dots, n\}$, então $D_x \in W(n)_{j-2}$. De fato, se $x \in \Lambda^j(n)$, então $\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \in \Lambda^{j-1}(n)$, e consequentemente, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \in W(n)_{j-2}$. Isso mostra, em particular, que $D_\bullet$ é uma transformação linear $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Agora, antes de construir as superálgebras de Lie $H(n)$, consideremos

$$
\tilde{H}(n) = span\{D_x \mid x \in \Lambda(n)\} \subseteq W(n).
$$

Observemos que, como $\tilde{H}(n)$ é a imagem da transformação linear $\mathbb{Z}_2$-graduada $D_\bullet$ em $W(n)$, temos que $\tilde{H}(n)$ é um subsuperespaço vetorial de $W(n)$. Ainda mais, $\tilde{H}(n)$ é uma subsuperálgebra de $W(n)$. De fato, mostremos que, para todos $x, y \in \Lambda(n)$ homogêneos, se denotarmos $(-1)^{|x|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} =: z$, teremos que $[D_x, D_y] = D_z \in \tilde{H}(n)$. De fato:

$$
\begin{aligned}
[D_x, D_y](\xi_j) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right] (\xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right] (\xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \circ \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} - (-1)^{|x||y|} \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \circ \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) (\xi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - (-1)^{|x||y|} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - (-1)^{|x||y|} (-1)^{|x|(|y|-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \\
&= -(-1)^{|x|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial y}{\partial \xi_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \\
&= (-1)^{|x|} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \frac{\partial y}{\partial \xi_l} - (-1)^{|x|} (-1)^{|x|} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \\
&= (-1)^{|x|} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_l} \frac{\partial y}{\partial \xi_l} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\xi_j) \\
&= D_z(\xi_j). \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Isso mostra que $[D_x, D_y] \in \tilde{H}(n)$ para todos $x, y \in \Lambda(n)$ homogêneos, e implica que $\tilde{H}(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$.

Continuando a análise de $\tilde{H}(n)$, vamos mostrar que $\tilde{H}(n)$ herda a $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$. Ou seja, mostraremos que, definindo $\tilde{H}(n)_j = \tilde{H}(n) \cap W(n)_j$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, temos que $\tilde{H}(n) = \tilde{H}(n)_{-1} \oplus \cdots \oplus \tilde{H}(n)_{n-2}$. De fato, por construção, temos que $\tilde{H}(n)_j \subseteq \tilde{H}(n)$, e pelo fato de $W(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W(n)_k$ ser uma $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$, temos que $\tilde{H}(n)_i \cap \sum_{j\neq i} \tilde{H}(n)_j = \{0\}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, resta mostrar que $\tilde{H}(n) \subseteq \tilde{H}(n)_{-1} + \cdots + \tilde{H}(n)_{n-2}$. Por definição, dado $D \in \tilde{H}(n)$, existe $x \in \Lambda(n)$ tal que $D = D_x$. Como $\Lambda(n) = \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^j(n)$, existem únicos $x_0 \in \Lambda^0(n), \ldots, x_n \in \Lambda^n(n)$ tais que $x = x_0 + \cdots + x_n$. Como $D_\bullet$ é uma transformação linear tal que $D_\bullet(\Lambda^j(n)) \subseteq W(n)_{j-2}$, temos que $D_x = D_{x_0} + \cdots + D_{x_n}$, com $D_{x_0} = 0$, $D_{x_1} \in W(n)_{-1}, \ldots, D_{x_n} \in \Lambda^{n-2}(n)$. Agora, como $W(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} W(n)_k$, essa decomposição de D_x como componentes $\mathbb{Z}$-homogêneas é única. Isso justifica por que $\tilde{H}(n)$ herda a $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$.

Agora vamos construir uma base para cada componente homogênea $\tilde{H}(n)_j$. Para isso, fixemos $j \in \{-1, 0, \ldots, n-2\}$ e consideremos o conjunto

$$\beth_j := \left\{ \sum_{k=1}^{j+2} (-1)^k \xi_{i_1} \cdots \widehat{\xi_{i_k}} \cdots \xi_{i_{j+2}} \frac{\partial}{\partial \xi_{i_k}} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n \right\}.$$

Lembremos que $D_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \in \tilde{H}(n)_j$ para todo $x \in \Lambda^{j+2}(n)$. Em particular, isso implica que $\beth_j \subseteq \tilde{H}(n)_j$. Além disso, lembremos da Equação 1.8 que, para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$, o conjunto $\{\xi_{t_1} \cdots \xi_{t_k} \mid 1 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq n\}$ é uma base de $\Lambda^k(n)$. Como

$$D_{\xi_{t_1} \cdots \xi_{t_{j+2}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\xi_{t_1} \cdots \xi_{t_{j+2}})}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{j+2} (-1)^{k+1} \xi_{t_1} \cdots \widehat{\xi_{t_k}} \cdots \xi_{t_{j+2}} \frac{\partial}{\partial \xi_{t_k}},$$

temos $\tilde{H}(n)_j = span\{D_x \mid x \in \Lambda^{j+2}(n)\} = span\{D_{\xi_{t_1} \cdots \xi_{t_{j+2}}} \mid 1 \leq t_1 < \cdots < t_{j+2} \leq n\} = span\ \beth_j$. Ou seja, $\beth_j$ é um conjunto gerador para $\tilde{H}(n)$.

Para terminar de mostrar que $\beth_j$ é uma base de $\tilde{H}(n)$, vamos mostrar que $\beth_j$ é linearmente independente. Suponhamos que existam coeficientes $a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} \in \mathbb{C}$, para cada $j+2$-upla $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n$, tais que $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n} a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} D_{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+2}}} = 0$. Como essa soma pertence a $W(n)$, temos que existem $P_1, \ldots, P_n \in \Lambda(n)$ tais que

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n} a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} D_{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+2}}} = \sum_{t=1}^{n} P_t \frac{\partial}{\partial \xi_t}.$$

Explicitamente, $P_t = \sum a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} \frac{\partial}{\partial \xi_t}(\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+2}})$, onde essa soma percorre todas as $j+2$-uplas tais que $t \in \{i_1, \ldots, i_{j+2}\}$. O fato de $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n} a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} D_{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{j+2}}}$ se anular significa que $P_t = 0$ para todo $t \in \{1, \cdots, n\}$. Agora, dadas $j+2$-uplas distintas

$(p_1, \ldots, p_{j+2})$ e $(q_1, \ldots, q_{j+2})$ tais que $t \in \{p_1, \ldots, p_{j+2}\} \cap \{q_1, \ldots, q_{j+2}\}$, observemos que $\{p_1, \ldots, p_{j+2}\} \setminus \{t\} \neq \{q_1, \ldots, q_{j+2}\} \setminus \{t\}$. Isso implica que todos os coeficientes $a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})}$ tais que $t \in \{i_1, \ldots, i_{j+2}\}$ se anulam. Percorrendo todos os $t \in \{1, \ldots, n\}$, concluímos que $a_{(i_1,\ldots,i_{j+2})} = 0$, para todo $1 \leq i_1 < \cdots < i_{j+2} \leq n$. Isso mostra que $\daleth_j$ é linearmente independente.

Apesar de ser uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$, $\tilde{H}(n)$ não é simples. De fato, consideremos a sua subsuperálgebra derivada (que é um ideal):

$$H(n) = \left[\tilde{H}(n), \tilde{H}(n)\right].$$

Como $\tilde{H}(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$ e $[\tilde{H}(n), \tilde{H}(n)]$ é uma subsuperálgebra de Lie de $\tilde{H}(n)$ (ver Exemplo 1.23), temos que $H(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie de $W(n)$. Em particular, $H(n)$ herda a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $W(n)$. Ou seja, se tomarmos $H(n)_{\bar{0}} = \tilde{H}(n) \cap W(n)_{\bar{0}}$ e $H(n)_{\bar{1}} = \tilde{H}(n) \cap W(n)_{\bar{1}}$, então teremos que $H(n) = H(n)_{\bar{0}} \oplus H(n)_{\bar{1}}$.

Vamos mostrar que, além da $\mathbb{Z}_2$-graduação, $H(n)$ também herda a $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$. Ou seja, vamos mostrar que $H(n) = H(n)_{-1} \oplus H(n)_0 \oplus \cdots \oplus H(n)_{n-2}$, onde $H(n)_j$ é definido por $H(n) \cap W(n)_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$. O fato de que $H(n)_j \subseteq H(n)$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ segue da construção, e o fato de que $H(n)_i \cap \sum_{j \neq i} H(n)_j = \{0\}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ segue do fato de que $W(n) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W(n)_k$ é uma $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$. Assim, resta mostrar que $H(n) \subseteq H(n)_{-1} + \cdots + H(n)_{n-2}$. Para isso, primeiro lembremos que $[\tilde{H}(n), \tilde{H}(n)]$ é definido como sendo $span\{[D_1, D_2] \mid D_1, D_2 \in \tilde{H}(n)\}$ (ver Exemplo 1.23). Depois lembremos que $\tilde{H}(n) = span\{D_x \mid x \in \Lambda(n)\}$. Finalmente, lembremos que $\Lambda(n) = \Lambda^0(n) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(n)$. Consequentemente, o fato de que $[\tilde{H}(n), \tilde{H}(n)] \subseteq H(n)_{-1} + \cdots + H(n)_{n-2}$ segue do fato de que, para todos $x \in \Lambda^i(n)$, $y \in \Lambda^j(n)$ e $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, temos que $[D_x, D_y] = D_z$, onde $z = (-1)^i \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial \xi_k} \frac{\partial y}{\partial \xi_k} \in \Lambda^{i+j-2}(n)$ (ver (2.33)). Isso mostra que $H(n)$ herda a $\mathbb{Z}$-graduação de $W(n)$.

Agora, vamos mostrar que, de fato, $H(n)_k = \tilde{H}(n)_k$ para $k \in \{-1, 0, \ldots, n-3\}$, e que $H(n)_{n-2} = 0$. Para isso lembremos que $H(n)_k = \sum_{i+j=k} [\tilde{H}(n)_i, \tilde{H}(n)_j]$ e que $\daleth_k$ é uma base de $\tilde{H}(n)_k$, para todo $k \in \{-1, 0, \ldots, n-2\}$. Além disso, lembremos que todo elemento $\zeta \in \daleth_k$ é da forma $D_{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k+2}}}$, para alguns $1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+2} \leq n$. Nos casos em que $k \in \{-1, 0, \ldots, n-3\}$, temos que $k + 2 \leq n$; ou seja, para toda $k+2$-upla $(i_1, \ldots, i_{k+2})$, existe $l \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $l \notin \{i_1, \ldots, i_{k+2}\}$. Escolhendo um tal l, obtemos que $[D_{\xi_l}, D_{\xi_l \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k+2}}}] = -D_{\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k+2}}} \in H(n)_k$ (ver (2.33)). Isso implica que $\daleth_k \subseteq H(n)_k$; e consequentemente, que $\tilde{H}(n)_k \subseteq H(n)_k$, para todo $k \in \{-1, 0, \ldots, n-3\}$. Já para o caso em que $k = n-2$, vamos mostrar que $[\tilde{H}(n)_i, \tilde{H}(n)_j] = 0$, para todos $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$ tais que $i + j = n - 2$. De fato, basta provar para os elementos das respectivas bases; ou seja, basta provar que

$$\left[D_{\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_{i+2}}}, D_{\xi_{q_1}\cdots\xi_{q_{j+2}}}\right] = (-1)^{i+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_{i+2}})\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\xi_{q_1}\cdots\xi_{q_{j+2}}) = 0$$

sempre que $i+j=n-2$. Para isso, observemos que, se $i+j=n-2$, então $(i+2)+(j+2)=n+4$. Isso implica que existem, pelo menos dois elementos em $\{p_1,\dots,p_{i+2}\}\cap\{q_1,\dots,q_{j+2}\}$. Ou seja, para todo $k\in\{1,\dots,n\}$, existe l tal que $l\in(\{p_1,\dots,p_{i+2}\}\cap\{q_1,\dots,q_{j+2}\})\setminus\{k\}$. Isso implica que todos os termos da somatória $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_{i+2}})\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\xi_{q_1}\cdots\xi_{q_{j+2}})$ são nulos.

Com isso, nós mostramos que $H(n)=H(n)_{-1}\oplus H(n)_0\oplus\cdots\oplus H(n)_{n-3}$. Em particular, isso implica que $H(n)$ é uma subsuperálgebra de Lie própria de $\tilde{H}(n)$. Agora, vamos descrever cada uma das componentes homogêneas $H(n)_j$, $j\in\{-1,0,\dots,n-3\}$, começando pela álgebra de Lie $H(n)_0$.

Vamos mostrar que a restrição do isomorfismo φ_0 definido em (2.30) a $\mathfrak{so}(n)$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Para isso, primeiro lembre que $\mathfrak{so}(n)$ é, por definição, a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$ formada pelas matrizes A tais que $JA=-A^tJ$, onde J é a matriz de Gram de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada em $\mathbb{C}^n$ (compare com a definição de $\mathfrak{osp}(m,n)$ dada no Exemplo 1.30). Como $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, escolhas distintas de J resultam em álgebras de Lie isomorfas. Em geral, para estudar a estrutura de $\mathfrak{so}(n)$, é conveniente escolher J como sendo

$$J=\begin{cases}\begin{pmatrix} O & \mathrm{Id}_{n/2}\\ \mathrm{Id}_{n/2} & O\end{pmatrix}, & \text{nos casos em que } n \text{ é par},\\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & o & o\\ o & O & \mathrm{Id}_{(n-1)/2}\\ o & \mathrm{Id}_{(n-1)/2} & O\end{pmatrix}, & \text{nos casos em que } n \text{ é ímpar}.\end{cases}$$

No entanto, para descrever esse isomorfismo, será mais conveniente escolher $J=\mathrm{Id}_n$. Nesse caso, a condição $JA=-A^tJ$ se torna $A=-A^t$; ou seja, A é antissimétrica.

Usando a descrição de $\mathfrak{so}(n)$ acima, como sendo formada pelas matrizes $A\in\mathfrak{gl}(n)$ antissimétricas, definamos

$$\begin{aligned}\eta_0 :\quad \mathfrak{so}(n) &\longrightarrow H(n)_0\\ (a_{ij})_{i,j=1}^{n} &\longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}.\end{aligned}$$

Primeiro precisamos mostrar que a função η_0 está bem definida; ou seja, que $\eta_0(A)\in H(n)_0$ para toda $A\in\mathfrak{so}(n)$. Para isso, observemos que, se $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}\in\mathfrak{so}(n)$, então $a_{ij}=-a_{ji}$ para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Assim,

$$\eta_0(A)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial \xi_j} - \xi_j\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)\\
&= -\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}D_{\xi_i\xi_j} \in \tilde{H}(n)_0 = H(n)_0.
\end{aligned}
$$

O fato de que η_0 é um homomorfismo injetor de álgebras de Lie segue do fato de que η_0 é a restrição do isomorfismo de álgebras de Lie φ_0 definido na Equação 2.30. Assim, para mostrar que η_0 é um isomorfismo, resta mostrar que ele é sobrejetor. Isso segue dos fatos que $\eta_0(E_{i,j} - E_{j,i}) = -D_{\xi_i\xi_j}$ para todo $1 \leq i < j \leq n$, e que $\beth_0 = \{D_{\xi_i\xi_j} \mid 1 \leq 1 < j \leq n\}$ é uma base para $\tilde{H}(n)_0 = H(n)_0$.

Além disso, para cada $j \in \{-1, 1, 2, \ldots, n-3\}$, a transformação linear $D_\bullet$ induz um isomorfismo entre $H(n)_j$ e $\Lambda^{j+2}(\mathbb{C}^n)$. De fato, lembremos que $D_\bullet(\Lambda^{j+2}(n)) \subseteq W(n)_j$ e denotemos

$$
\begin{array}{rccl}
\eta_j: & \Lambda^{j+2}(n) & \longrightarrow & H(n)_j \\
 & x & \longmapsto & D_x, \qquad \text{para cada } j \in \{-1, 1, 2, \ldots, n-3\}.
\end{array}
$$

Como $H(n)_j = \tilde{H}(n)_j$ para todo $j \in \{-1, 1, 2, \ldots, n-3\}$ e $D_\bullet$ é uma transformação linear cuja imagem é $\tilde{H}(n)$, temos que η_j é uma transformação linear sobrejetora, para todo $j \in \{-1, 1, 2, \ldots, n-3\}$. Além disso, os fatos de $\beth_j$ ser uma base para $\tilde{H}(n)_j$ e de $H(n)_j = \tilde{H}(n)_j$ para todo $j \in \{-1, 0, 1, \ldots, n-3\}$ implicam que η_j também é injetora. Isso mostra que η_j é um isomorfismo para cada $j \in \{-1, 1, 2, \ldots, n-3\}$. (Além disso, é possível mostrar que η_j induz um isomorfismo de $H(n)_0$-módulos.)

Para concluir, vamos calcular a dimensão de $H(n)$:

$$
\begin{aligned}
\dim H(n) &= \dim H(n)_{-1} + \cdots + \dim H(n)_{n-3}\\
&= \dim \Lambda^1(n) + \dim \mathfrak{so}(n) + \dim \Lambda^3(n) + \cdots + \dim \Lambda^{n-1}(n)\\
&= (\dim \Lambda(n) - \dim \Lambda^0(n) - \dim \Lambda^2(n) - \dim \Lambda^n(n)) + \dim \mathfrak{so}(n)\\
&= (2^n - 1 - \binom{n}{2} - 1) + \binom{n}{2}\\
&= 2^n - 2.
\end{aligned}
$$

REFERÊNCIAS

BAGCI, Irfan; CALIXTO, Lucas; MACEDO, Tiago. Weyl modules and Weyl functors for Lie superalgebras. **Algebr. Represent. Theory**, v. 22, n. 3, p. 723–756, 2019.

BEREZIN, F.; KATS, G. Lie groups with commuting and anticommuting parameters. **Math. USSR**, v. 11, n. 2, p. 311–326, 1970.

BEREZIN, F.; LEITES, D. Supervarieties. **Sov. Math. Dokl**, v. 16, n. 2, p. 1218–1222, 1975.

CALIXTO, L. H. **Super álgebra de funções**. 2013. F. 139. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas.

CHENG, Shun-Jen; WANG, Weiqiang. **Dualities and representations of Lie superalgebras**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. v. 144. (Graduate Studies in Mathematics).

KAC, V. G. Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras. **Communications in Algebra**, v. 5, n. 1, p. 1375–1400, 1977.

________. Lie superalgebras. **Advances in Math.**, v. 26, n. 1, p. 8–96, 1977.

LEITES, D. A. Introduction to the theory of supermanifolds. **Russian Math. Surveys**, v. 35, n. 1, p. 1–64, 1980.

MUSSON, Ian M. **Lie superalgebras and enveloping algebras**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. v. 131. (Graduate Studies in Mathematics).

SAN MARTIN, L. A. B. **Álgebras de Lie**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2010.

SCHEUNERT, Manfred. **The theory of Lie superalgebras**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1979. v. 716. (Lecture Notes in Mathematics). An introduction.