ÁLGEBRA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ________________ Assinatura: ________________ RA: ________

Questão 1. Dado um grupo G, denote por $\mathrm{Aut}(G)$ o conjunto

$$\{f\colon G \to G \mid f \text{ é um isomorfismo de grupos}\}.$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que $\mathrm{Aut}(G)$ munido da função $m\colon \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ dada por $m(f,g) = f \circ g$ (composição de funções) é um grupo.

(b) (2,0 pontos) Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Calcule $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. (Ou seja, encontre um grupo conhecido ao qual $\mathrm{Aut}(G)$ é isomorfo.)

(a) Vamos mostrar as condições (i)-(iii) da definição de grupos.

(i) Dadas $f, g, h \in \mathrm{Aut}(G)$, temos que $m(f, m(g,h)) = f \circ m(g,h) = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = m(f,g) \circ h = m(m(f,g),h)$.

(ii) A função $\mathrm{id}_G\colon G \to G$, dada por $\mathrm{id}_G(g) = g$ para todo $g \in G$, pertence a $\mathrm{Aut}(G)$. De fato, $\mathrm{id}_G(gh) = gh = \mathrm{id}_G(g)\mathrm{id}_G(h)$ para todo $g, h \in G$. Além disso, $m(\mathrm{id}_G, f)(g) = (\mathrm{id}_G \circ f)(g) = \mathrm{id}_G(f(g)) = f(g) = f(\mathrm{id}_G(g)) = (f \circ \mathrm{id}_G)(g) = m(f, \mathrm{id}_G)(g)$ para todos $f \in \mathrm{Aut}(G)$ e $g \in G$. Portanto, $\mathrm{id}_G^{-1} = \mathrm{id}_G$ e $e_{\mathrm{Aut}(G)} = \mathrm{id}_G$.

(iii) Por definição, toda $f \in \mathrm{Aut}(G)$ é bijetora. Portanto existe $f^{-1}\colon G \to G$. Vamos mostrar que $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. De fato, basta mostrar que f^{-1} é um homomorfismo de grupos, pois $f = (f^{-1})^{-1}$. Dados $g, h \in G$, denote $f^{-1}(g) = \tilde{g}$, $f^{-1}(h) = \tilde{h} \in G$, e observe que $g = f(\tilde{g})$, $h = f(\tilde{h})$. Então temos que

$$f^{-1}(gh) = f^{-1}(f(\tilde{g})f(\tilde{h})) = f^{-1}(f(\tilde{g}\tilde{h})) = \tilde{g}\tilde{h} = f^{-1}(g)f^{-1}(h).$$

Isso mostra que f^{-1} é um homomorfismo de grupos e portanto $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Suponha que $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é um isomorfismo de grupos. Em particular, temos $f(n) = nf(1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{Z}$. Consequentemente, $\mathbb{Z} = \{nf(1) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle f(1) \rangle$, ou seja, $f(1)$ é um gerador de $\mathbb{Z}$. Como os únicos geradores de $\mathbb{Z}$ são -1 e 1 (Proposição 6.15), então $f(1) \in \{-1, 1\}$. Para cada $i \in \{-1, 1\}$, denote por $f_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função dada por $f(n) = ni$.

Vamos mostrar que $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ dada por $\varphi(\bar{i}) = f_{(-1)^i}$ ($i \in \{0,1\}$) é um isomorfismo de grupos. Primeiro, observe que φ é bijetora. Agora, para terminar, vamos mostrar que φ é um homomorfismo de grupos. De fato, $(\varphi(\bar{i}) \circ \varphi(\bar{j}))(n) = f_{(-1)^i}(f_{(-1)^j}(n)) = f_{(-1)^i}(n(-1)^j) = (n(-1)^j)(-1)^i = n(-1)^{i+j} = f_{(-1)^{i+j}}(n) = \varphi(\overline{i+j})(n)$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, $i, j \in \{-1, 1\}$. $\square$

Data: 19 de setembro de 2017.

Questão 2. Considere o grupo $G = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ munido da função $m\colon X \times X \to X$ dada por $m(x, y) = x + y$ (soma de dois números reais).

(a) (1,0 ponto) Mostre que $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de G.
(b) (2,0 pontos) Considere o grupo quociente G/H. Mostre que todo elemento $x \in G/H$ tem ordem finita.

(a) Vamos mostrar as condições (i), (ii) da definição de subgrupo.
  (i) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, temos que $m((a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2})) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$. Como $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então $(a+b), (c+d) \in \mathbb{Z}$. Portanto $m((a+b\sqrt{2}), (c+d\sqrt{2}))$ pertence a H.
  (ii) Observe que o inverso de $(a + b\sqrt{2})$ é $\big((-a) + (-b)\sqrt{2}\big)$. De fato,
$$m\left(\left(a + b\sqrt{2}\right), \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right)\right) = 0 = m\left(\left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right), \left(a + b\sqrt{2}\right)\right),$$
$$m(c + d\sqrt{2}, 0) = c + d\sqrt{2} \quad \text{para todos } c, d \in \mathbb{Z}.$$
  Como $a, b \in \mathbb{Z}$, então $-a, -b \in \mathbb{Z}$. Portanto o inverso de $a + b\sqrt{2}$ pertence a H.

(b) Lembre que todo $x \in G/H$ é da forma $\overline{(a + b\sqrt{2})}$ para alguns $a, b \in \mathbb{Q}$. Denote $a = p_a/q_a$ e $b = p_b/q_b$, onde $p_a, p_b \in \mathbb{Z}$, $q_a, q_b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ e $\mathrm{mdc}(p_a, q_a) = \mathrm{mdc}(p_b, q_b) = 1$. Tome $k = q_a q_b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e observe que
$$k\overline{(a + b\sqrt{2})} = \overline{(ka) + (kb)\sqrt{2}} = \overline{(q_b p_a) + (q_a p_b)\sqrt{2}} = \overline{0},$$
pois $(q_b p_a), (q_a p_b) \in \mathbb{Z}$. Isso mostra que a ordem de $x = \overline{(a + b\sqrt{2})}$ é finita ($\leq k$).
$\square$

Questão 3. Sejam G um grupo finito e $\sigma\colon G \to G$ um isomorfismo de grupos que satisfaz: $\sigma^2 = \mathrm{id}_G$; $\sigma(g) = g$ se, e somente se, $g = e_G$.

(a) (1,0 ponto) Mostre que $G = \{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$.
(b) (1,0 ponto) Mostre que $\sigma(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.
(c) (1,0 ponto) Mostre que G é abeliano.

(a) Para todo $g \in G$, temos que $g^{-1}, \sigma(g) \in G$, e portanto $g^{-1}\sigma(g) \in G$. Então considere a função $f\colon G \to G$ dada por $f(g) = g^{-1}\sigma(g)$. Por construção, a imagem de f é $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$. Se mostrarmos que f é injetora, obteremos que f é uma bijeção entre G e $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$. Como G é finito e $\{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\} \subseteq G$, segue daí que $G = \{g^{-1}\sigma(g) \mid g \in G\}$.

Para mostrar que f é injetora, tome $g, h \in G$. Se $f(g) = f(h)$, então $g^{-1}\sigma(g) = h^{-1}\sigma(h)$. Logo $hg^{-1} = \sigma(h)\sigma(g)^{-1} = \sigma(hg^{-1})$. Como $\sigma(x) = x$ se, e somente se, $x = e_G$, então $hg^{-1} = e_G$. Segue daí que $h = g$. Isso mostra que f é injetora.

(b) Vamos mostrar que $g\sigma(g) = e_G$ para todo $g \in G$. Como e_G é o $x \in G$ tal que $\sigma(x) = x$, temos que $g\sigma(g) = e_G$ se, e somente se, $\sigma(g\sigma(g)) = g\sigma(g)$. Por sua vez, $\sigma(g\sigma(g)) = g\sigma(g)$ se, e somente se, $g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1} = e_G$. Usando novamente que e_G é o $x \in G$ tal que $\sigma(x) = x$, temos que $g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1} = e_G$ se, e somente se, $\sigma\left(g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1}\right) = g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1}$, ou seja, $\left(g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1}\right)^2 = e_G$. Usando indução em n, vemos que, para todo $g \in G$:

$$g\sigma(g) = e_G \quad \text{se, e somente se,} \quad \left(g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1}\right)^{2^n} = e_G \quad \text{para todo } n > 0.$$

Como, por hipótese, G é finito, então existe $n > 0$ tal que $\left(g\sigma(g)g^{-1}\sigma(g)^{-1}\right)^{2^n} = e_G$. O resultado segue.

(c) Usando o item (b), temos que $\sigma(g)\sigma(h) = \sigma(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = \sigma(h)\sigma(g)$ para todos $g, h \in G$. Agora, usando o fato de que σ é um isomorfismo de grupos, temos que $\{\sigma(g) \mid g \in G\} = G$. Isso mostra que $xy = yx$ para todos $x, y \in G$, ou seja, que G é abeliano. $\square$

Questão 4. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. É necessário justificar a sua escolha provando as afirmações verdadeiras e encontrando contra-exemplos para as falsas.

(a) (1,0 ponto) Seja G um grupo. Todo subconjunto finito $X \subseteq G$ tal que $N_G(X) = G$ e $xy \in X$ para todos $x, y \in X$ é um subgrupo normal de G.
(b) (1,0 ponto) Existe um subgrupo de $\mathbb{Z}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_{17}$.
(c) (1,0 ponto) Se G é um grupo e os únicos subgrupos $H \subseteq G$ são $H = \{e\}$ e $H = G$, então G é cíclico.

(a) Verdadeiro. Se X é um subconjunto finito e $xy \in X$ para todos $x, y \in X$, então X é um subgrupo de G (Proposição 5.9). Se X é um subgrupo e $N_G(X) = G$, então $gXg^{-1} = X$ para todo $g \in G$, ou seja, X é um subgrupo normal de G.

(b) Falso. Suponha que $H \subseteq \mathbb{Z}$ seja um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_{17}$. Em particular, existe $h \in H \subseteq \mathbb{Z}$, tal que $o(h) = 17$. Isso significa que $17h = 0$. Como $17h = 0 \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $h = 0$, segue que tal h não pode existir. (Lembre que $o(0) = 1$.) Portanto tal subgrupo $H \subseteq \mathbb{Z}$ não pode existir.

(c) Verdadeiro. Se $G = \{e\}$, então G é cíclico. Agora suponha que G é não-trivial e tome $g \in G \setminus \{e_G\}$. Como $\langle g \rangle$ é um subgrupo de G diferente de $\{e_G\}$, por hipótese, $\langle g \rangle = G$. Portanto G é gerado por g, ou seja, G é cíclico. $\square$