ÁLGEBRA LINEAR :: LISTA DE EXERCÍCIOS 01

Exercício 1. Mostre que o conjunto V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$:

(a) Considere $V = \mathbb{R}$ munido da soma usual de números reais e da multiplicação escalar como sendo a multiplicação usual de números reais.

(b) Dado $d \geq 0$, considere $V = \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d \mid a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}\}$ munido da soma e multiplicação escalar usuais de polinômios.

(c) Considere $V = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$ munido da soma dada por

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) = (x_0 + y_0,\ x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots),$$

e da multiplicação escalar dada por

$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_0,\ \lambda x_1,\ \lambda x_2, \dots).$$

(d) Dados um $\mathbb{R}$-espaço vetorial E (com soma $+_E$ e multiplicação escalar $\cdot_E$) e um conjunto não-vazio X, considere o conjunto $V = \mathcal{F}(X, V) = \{f \colon X \to E \mid\ f \text{ é uma função}\}$ munido da soma $+_V$ dada por

$$(f +_V g) \colon X \to V, \quad (f +_V g)(x) = f(x) +_E g(x) \quad \text{para todos } f, g \in V \text{ e } x \in X,$$

e multiplicação escalar $\cdot_V$ dada por

$$(\lambda \cdot_V f) \colon X \to V, \quad (\lambda \cdot_V f)(x) = \lambda \cdot_E f(x) \quad \text{para todos } \lambda \in \mathbb{R},\ f \in V \text{ e } x \in X.$$

Exercício 2. Usando a definição de espaços vetoriais, explique por que as seguintes operações não definem estruturas de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais em $\mathbb{R}^2$.

(a) Soma dada por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; e multiplicação escalar dada por $\lambda(x, y) = (x, \lambda y)$.

(b) Soma dada por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; e multiplicação escalar dada por $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Exercício 3. Mostre W é um subespaço do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V:

(a) Considere $V = M_n(\mathbb{R})$ como o conjunto formado pelas matrizes reais de ordem $n \times n$, e $W = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\}$.

(b) Considere $V = M_n(\mathbb{R})$, e $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$.

(c) Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ como o conjunto formado pelas funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e W como o subconjunto formado pelas funções contínuas.

(d) Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, e W como o subconjunto das funções diferenciáveis, ou seja, $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f' \text{ existe}\}$.

(e) Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, e $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(-1) = 0,\ f' \text{ existe e } f'(1) = 0\}$.

Data: 4 de abril de 2017.

Exercício 4. Explique por que S não é um subespaço do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V:

(a) Considere $V = \mathbb{R}^3$ munido das operações usuais, e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$.

(b) Considere $V = \mathbb{R}^3$ e S o subconjunto de soluções do sistema linear

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

(c) Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{\lambda(a, b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\mu(c, d) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$, onde $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ são elementos distintos e tais que $(a, b) \neq \nu(c, d)$ para todo $\nu \in \mathbb{R}$.

(d) Considere $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ e $S = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p'(2) = 1\} \cup \{0\}$.

Exercício 5. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $W = \{f \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid f'(1) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

(b) Encontre um subespaço $W_1 \subset \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = W \oplus W_1$.

(c) Encontre outro subespaço $W_2 \subset \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = W \oplus W_2$ e $W_1 \neq W_2$.

Exercício 6. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ e os subespaços

$$W_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A = A^t\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | A = -A^t\}.$$

Mostre que $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$. Além disso, encontre todas as matrizes $T_1 \in W_1$ e $T_2 \in W_2$ tais que $T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. Determine se o vetor v é gerado pelo conjunto S ou não:

(a) Considere $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ e $S = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

(b) Considere $v = (5, 6, 7) \in \mathbb{R}^3$ e $S = \{(0, 3, 4), (2, 1, 2), (1, 0, 1)\}$.

(c) Considere $v = t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $S = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}$.

(d) Considere $v = \mathrm{id} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ a função identidade e

$$S = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \cup \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 8. Encontre bases para cada um dos subespaços $W \subseteq V$ do **Exercício 3**(a), (b).

Exercício 9. Explique por que o subconjunto β não é uma base do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V:

(a) Considere $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$.

(b) Considere $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 7, 8), (1, 2, 2), (1, 4, 1), (0, 8, 2)\}$.

(c) Considere $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\beta = \{1, t, \dots, t^{2015}\}$.

(d) Considere $V = M_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(e) Considere $V = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 10. Use o Teorema do Completamento para construir uma base para o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e, em seguida, determine a sua dimensão:

(a) Considere $V = \mathbb{R}$ munido das operações usuais.

(b) Considere $V = \mathbb{R}_{>0}$, com a soma de $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ dada por ab; e a multiplicação escalar de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $a \in \mathbb{R}_{>0}$ dada por a^λ.

(c) Considere $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ munido das operações usuais.

(d) Considere V o espaço de soluções do sistema linear $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 4z & = & 0. \end{array}\right.$

Exercício 11. Considere o sistema linear

$$S : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

e o subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$ formado por todas as soluções de S.

(a) Encontre uma base β de W satisfazendo $(0, \pi, -\pi, 0) \in \beta$. Justifique.

(b) Explique por que $\gamma = \{(1,1,-2,1); (1,-1,0,1); (0,1,-1,0)\}$ não é uma base de W.

Exercício 12. Quais são as possíveis interseções de dois planos (subespaços de dimensão 2) em $\mathbb{R}^4$? Justifique.

Exercício 13. (a) O $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é finitamente gerado? Justifique.

(b) Em geral, mostre que, se X for um conjunto infinito ou E for um espaço vetorial que não é finitamente gerado, então o espaço vetorial $\mathcal{F}(X, V)$ (ver **Exercício 1**(d)) não é finitamente gerado.