ÁLGEBRA LINEAR :: LISTA DE EXERCÍCIOS 02

Exercício 1. Determine as coordenadas do vetor v na base β e na base γ; a matriz de mudança de base de β para a base γ; e verifique que $(v)_\beta = [\mathrm{id}]^\gamma_\beta (v)_\gamma$:

(a) Considere $v = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$, β a base canônica e $\gamma = \{(1,1,1), (1,2,0), (3,1,0)\}$.

(b) Considere $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,1), (1,-1)\}$ e $\gamma = \{(2,3), (4,6)\}$.

(c) Considere $v = at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\beta = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ e $\gamma = \{1, 2-t, 1+t^2\}$.

(d) Considere $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$,

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(e) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V = \mathbb{C}$, $v = \pi + \sqrt{2}i$, $\beta = \{1, i\}$ e $\gamma = \{1+i, 1-i\}$.

Exercício 2. Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} \quad\;\; y + z + w = 0 \\ x + 2y + 2z + w = 0 \\ x + y + z \qquad\; = 0 \end{cases}$$

e o subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$ formado por todas as soluções de S.

(a) Determine as coordenadas do vetor $(0, \pi, -\pi, 0)$ na base $\alpha = \{(1, -1, 0, 1); (1, 0, -1, 1)\}$.

(b) Encontre a matriz $[\mathrm{id}]^\varepsilon_\alpha$ de mudança de base de α para $\varepsilon = \{(0, \pi, -\pi, 0); (e^2, 0, -e^2, e^2)\}$.

(c) Verifique que $[\mathrm{id}]^\varepsilon_\alpha [w]_\varepsilon = [w]_\alpha$ para todo $w \in W$.

Exercício 3. Mostre que a função T é uma transformação linear:

(a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$ para todo $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(b) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(c) Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, considere $T : V \to V$ dada por $T(v) = \alpha v$ para todo $v \in V$.

(d) Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V, considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V \times V$, e T como sendo a soma $s : V \times V \to V$.

Exercício 4. Usando a definição de transformação linear, explique por que as seguintes funções não são transformações lineares:

(a) $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ para toda $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(b) Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e um vetor $w \in V, w \neq o_V$, considere a função $t : V \to V$ dada por $t(v) = v + w$ para todo $v \in V$.

(c) Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial $V \neq \{o\}$, considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R} \times V$, e a função m como sendo a multiplicação escalar $m : \mathbb{R} \times V \to V$.

Data: 14 de maio de 2017.

Exercício 5.

(a) Dadas as bases canônicas $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{D} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, construa a única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz $T(1,0) = (0,1,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$, e calcule $[T]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$.

(b) Denote por E_{ij} a matriz cuja entrada na posição (i,j) é 1 e todas as outras entradas são 0. Observe que $\mathcal{C} = \{E_{ij} \mid i,j \in \{1,2\}\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$; construa a única transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ que satisfaz $T(E_{ij}) = E_{ji}$ para todo $i,j \in \{1,2\}$; e encontre a matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

(c) Dada a base $\beta = \{\sqrt{17}\}$ de $\mathbb{R}$ e a base $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, construa a única transformação linear $T : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ que satisfaz $T(\sqrt{17}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e encontre a matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

(d) Dada a base $\gamma = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C} = \{1,t\}$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, construa a única transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = 0$, $T(1+t) = 1$ e $T(1+t+t^2) = 1+2t$, e encontre a matriz $[T]_{\mathcal{C}}^{\gamma}$.

Exercício 6. Dados o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V de dimensão $n > 0$ e a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, encontre uma transformação linear $T : V \to V$ e uma base $\beta \subset V$, tais que $[T]_{\beta}^{\beta} = A$.

(a) Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Considere $V = \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Considere $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y,z) = (-y-z, -x-z, -x-y),$$

e as bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(-1,0,1),(-1,1,0)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in M_3(\mathbb{R})$, que satisfaz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(v)_{\mathcal{B}} = (T(v))_{\mathcal{B}}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) Encontre a matriz $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in M_3(\mathbb{R})$, que satisfaz $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 8. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Mostre que:

(a) Para toda $T \in \mathcal{L}(V,V)$, temos $\mathrm{id}_V \circ T = T = T \circ \mathrm{id}_V$.

(b) Se $R,S,T \in \mathcal{L}(V,V)$, então $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

(c) Se $R,S,T \in \mathcal{L}(V,V)$, então $R \circ (S+T) = (R \circ S) + (R \circ T)$.

Exercício 9. Encontre exemplos de:

(a) Transformações lineares $S,T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T \circ S \neq S \circ T$.

(b) Funções $f,g : X \to Y$ e $h : Y \to Z$, tais que $h \circ (f+g) \neq (h \circ f) + (h \circ g)$.

(c) Vetores $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$, para os quais não existe transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo $T(1,0) = (x_1,y_1)$, $T(0,1) = (x_2,y_2)$ e $T(1,1) = (x_3,y_3)$.

(d) Matrizes $A \in M_2(\mathbb{R})$ para as quais não existem bases $\alpha,\beta \subset \mathbb{R}^2$ tais que $[\mathrm{id}]_{\beta}^{\alpha} = A$.

Exercício 10. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x + 2y + 2z,\ 3x + 2y,\ 2x + 2y + z).$$

(a) Encontre o núcleo de F. Justifique.
(b) Encontre a imagem de F. Justifique.

Exercício 11. Mostre que a transformação linear $S : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por $S(t^i) = t^{i+1}$ para todo $i \geq 0$ é injetora, mas não é sobrejetora (e consequentemente que S não é bijetora). Por que isso não contradiz o corolário do Teorema do Núcleo-Imagem (veja p. 113 do Callioli)?

Exercício 12. Sejam V, W, U três espaços vetoriais, $T : V \to W$ e $S : W \to U$ duas transformações lineares.

(a) Mostre que $\mathrm{id}_V : V \to V$, dada por $\mathrm{id}_V(v) = v$ para todo $v \in V$, é um automorfismo.
(b) Mostre que, se $T : V \to W$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : W \to V$ é um isomorfismo.
(c) Mostre que, se T e S são isomorfismos, então $(S \circ T) : V \to U$ é isomorfismo.
(d) Mostre que, se $V = W = U$ e T não é um isomorfismo, então $(S \circ T)$ não é um isomorfismo para nenhuma transformação linear S.

Exercício 13. Determine se T é um isomorfismo linear ou não.

(a) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dado por $T(x, y) = (x + y) + (x - y)i$.
(b) Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(z, w) = (z + w,\ z + 2w,\ 2z + w)$.
(c) Considere $T : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = (a + c) + (a + b)t + (b + c)t^2$.
(d) Considere $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dado por $T(z) = \|z\|$.
(e) Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2y + z,\ 3x + y,\ 4x + 2y + z)$.

Exercício 14. Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}_{>0} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$ munido da adição dada por

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (a, b) &\longmapsto ab, \end{aligned}$$

e da multiplicação escalar dada por

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (r, a) &\longmapsto a^r. \end{aligned}$$

Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}$ munido da soma (usual) dada por

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto (a + b), \end{aligned}$$

e da multiplicação escalar (usual) dada por

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (r, a) &\longmapsto ra. \end{aligned}$$

Considere também a função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, dada por $E(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que E é uma transformação linear.
(b) E é um isomorfismo? Justifique.

Exercício 15. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) A transformação linear $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ satisfazendo $H(t^i) = t^{i+1}$ para cada $i \geq 0$ é um automorfismo.

(b) Se $T : \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}^{17}$ não é invertível, então $S \circ T : \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}^{17}$ não é invertível para nenhuma $S : \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}^{17}$.

Exercício 16. Considere a transformação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x + 2y + 2z,\ 2x + y + 2z,\ 2x + 2y + z),$$

o subconjunto e $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ e a base $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre a matriz $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \in M_3(\mathbb{R})$, que satisfaz $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(v)_{\mathcal{B}} = (F(v))_{\mathcal{B}}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) Encontre a matriz $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in M_3(\mathbb{R})$, que satisfaz $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Encontre a matriz $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in M_3(\mathbb{R})$, que satisfaz $[F]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (F(v))_{\mathcal{C}}$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

(d) F é um automorfismo? Justifique.