GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ____________________ Assinatura: ____________________ RA: __________

OBSERVAÇÕES

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (2,0 pontos). Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(a) (1,0 ponto) Determine se A é inversível ou se A é singular. Justifique. (Dica: "sim" não é a resposta correta.)

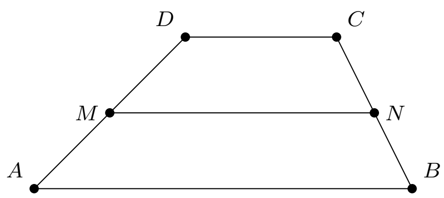
(b) (1,0 ponto) Quantas soluções tem o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + \pi y + \pi^2 z + \pi^3 w = 1 \\ x + e y + e^2 z + e^3 w = 1 \\ x + \sqrt{2} y + 2z + 2\sqrt{2} w = 1 \end{cases}$$

? Justifique.

Data: 12 de setembro de 2016.

Questão 2 (2,0 pontos)**.** Considere um trapézio $ABCD$, onde os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{AD}$ e N o ponto médio do lado $\overline{BC}$:



Mostre que:

(a) (1,0 ponto) O segmento $\overline{MN}$ é paralelo aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

(b) (1,0 ponto) A medida do segmento $\overline{MN}$ é a média aritmética das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Questão 3 (4,0 pontos)**.** Considere o seguinte sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\Sigma : \begin{cases} x & + & ky & + & (k+1)z & = & k \\ (k+1)x & & & + & z & = & k \\ & & ky & & & = & 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) (1,5 ponto) Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

(i) Σ seja impossível.

(ii) Σ seja possível determinado.

(iii) Σ seja possível indeterminado.

(b) (0,5 ponto) Defina o que é uma solução para o sistema linear Σ.

(c) (0,5 ponto) Tome $k = 0$ e encontre o conjunto S_0 de todas as soluções de Σ. Justifique.

(d) (1,5 ponto) Encontre um subcojunto de S_0 (item (c)) que seja linearmente independente e gere S_0. Justifique.

Questão 4 (4,0 pontos)**.** Determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. Em seguida, demonstre as que forem verdadeiras e encontre contra-exemplos para as que forem falsas.

(a) (1,0 ponto) Toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é equivalente à matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) (1,0 ponto) Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ é inversível, então A^t é inversível.

(c) (1,0 ponto) Para quaisquer $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, temos que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(d) (1,0 ponto) Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são inversíveis, então $A + B$ é inversível.

GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ____________________ Assinatura: ____________________ RA: ________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (3,0 pontos)**.** Considere $\alpha = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ e

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(\frac{\sqrt{5}}{20}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{10} \right) \right\}.$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que β não é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a matriz M de mudança de bases da β para α.

(c) (1,0 ponto) Mostre que $M(v)_\alpha = (v)_\beta$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Data: 31 de outubro de 2016.

Questão 2 (3,0 pontos)**.** Considere os vetores $v = (1, -2, 1)$, $u = (1, 2, 3)$, $w = (4, 5, 6)$.

(a) (1,0 ponto) Mostre que $\lambda v = u \wedge w$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) (1,0 ponto) Mostre que $S = \{u, v, w\}$ não é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(c) (1,0 ponto) Mostre que $[u, v, w] = 18$.

Questão 3 (3,0 pontos)**.** Considere o ponto $p = (1, 2, 3)$, o vetor $v = (4, 5, 6)$, e a reta $r = \{p + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) (1,0 ponto) Escreva as equações paramétricas de r.

(b) (1,0 ponto) Escreva as equações simétricas de r.

(c) (1,0 ponto) Mostre que r é o conjunto solução do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 5x & - & 4y & = & -3 \\ 3x & - & 2z & = & -3 \end{array} \right. .$$

Questão 4 (3,0 pontos)**.** Considere o ponto $p = (1, 1, 1)$, os vetores $u = (-1, -1, 2)$ e $v = (0, 0, 2)$, e o plano $\Pi = \{p + \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação geral de Π.

(b) (1,0 ponto) Determine todos os vetores normais a Π, ou seja, todos os vetores $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $X \perp Y$ para todo $Y \in \Pi$.

(c) (1,0 ponto) Determine a intersecção do plano Π com a reta r (da Questão 3), ou seja, todos os vetores $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $X \in r$ e $X \in \Pi$.

GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: __________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.

(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.

(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.

(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.

(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (4,0 pontos)**.** Determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.

(a) A reta $\{(1,1,0)+\lambda(1,-1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ e o plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+z=2\}$ são paralelos.

(b) A reta $\{(0,1,0)+\lambda(\sqrt{2},\sqrt{2},0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ e o plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=10\}$ formam um ângulo de $\pi/6$.

(c) A distância entre o ponto $(1,0,1)$ e a reta $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y=3z\}$ é $\sqrt{34}/7$.

(d) A distância da origem ao plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-2z=0\}$ é 2.

Data: 07 de dezembro de 2016.

Questão 2 (3,0 pontos)**.** Considere as seguintes retas em $\mathbb{R}^3$:

$$r = \{(1,1,2) + \lambda(1,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad s = \{(\pi, \sqrt{17}, e^2) + \mu(1,0,-1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que o ângulo entre r e s é $\pi/2$.

(b) (1,0 ponto) Calcule $r \cap s$ e determine se r e s são perpendiculares.

(c) (1,0 ponto) Mostre que a distância entre r e s é $\sqrt{17} - 1$.

Questão 3 (2,0 pontos)**.** Escreva, em coordenadas polares, a equação de uma elipse centrada na origem, cujo eixo maior está contido no eixo x e tem comprimento 6. Verifique sua resposta.

Questão 4 (3,0 pontos)**.** Considere as seguintes curvas em $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3xy + 2y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 2\}.$$

(a) (1,0 ponto) Determine se γ_1 é uma elipse, uma hipérbole, ou uma parábola.

(b) (1,0 ponto) Determine se γ_2 é uma elipse, uma hipérbole, ou uma parábola.

(c) (1,0 ponto) Calcule os 4 pontos distintos, A, B, C e D, onde γ_1 e γ_2 se intersectam e mostre que a área do paralelogramo $ABCD$ é 3.