NOTAS DE CVV :: TEOREMA DE GREEN

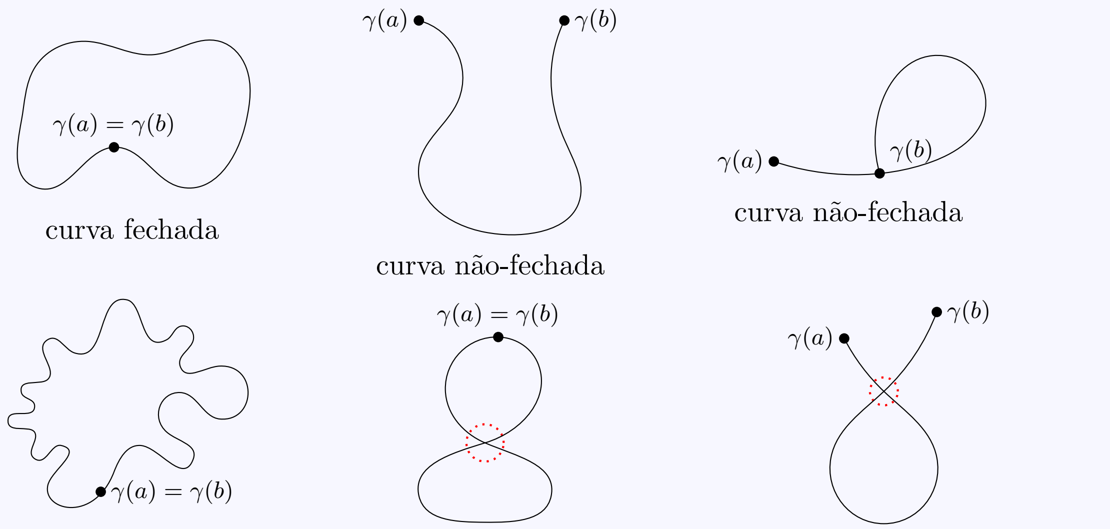
TIAGO MACEDO

§ 1. **Curvas.**

Lembrem que uma curva em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. (Na verdade, o que nós imaginamos intuitivamente que seja uma curva é $\mathrm{im}(\gamma)$.) Nessas notas, sempre vamos assumir que γ é diferenciável. Além disso, se $n = 2$ (resp. $n = 3$), vamos denotar $\gamma(t) = (\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t))$ (resp. $\gamma(t) = (\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t), \mathsf{z}(t))$). Nesses casos, dizer que γ é diferenciável significa dizer que as funções x, y e z são diferenciáveis.

Definição. Uma curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dita fechada quando $\gamma(a) = \gamma(b)$. Uma curva fechada $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é dita simples quando os únicos $t, s \in [a,b]$ distintos, tais que $\gamma(t) = \gamma(s)$ são $t = a$ e $s = b$.

Exemplos. Em $\mathbb{R}^2$:



curva fechada — curva não-fechada — curva não-fechada

curva fechada simples — curva fechada não-simples — curva não-fechada (nem simples)

Observe que, se $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ for uma curva fechada então $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ (ou seja, o plano $\mathbb{R}^2$ sem a curva) é separado em duas regiões: a que está dentro de γ (e que é limitada), e a que está fora de γ (e que não é limitada). Além disso, quando γ é uma curva fechada e simples, a região dentro da curva é conexa (ou seja, só tem um pedaço). Na verdade, esse fato é conhecido como Teorema da Curva de Jordan.

§ 2. **Campos de vetores e integral de linha.**

Considere um campo de vetores $V\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nessas notas, sempre vamos assumir que V é diferenciável. Além disso, vamos denotar $V(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Assim, dizer que V é diferenciável significa dizer que as funções P e Q são diferenciáveis.

Agora, dados uma curva $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ e um campo de vetores $V\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq X^\circ$, lembre que podemos definir uma função $F\colon \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$F(\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t)) = V(\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t)) \bullet \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \qquad t \in [a,b].$$

Lembre também que:

$$\begin{aligned}
\int V \bullet d\gamma &= \int F\, d\gamma \\
&= \int_a^b F(\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t))\, \|(\mathsf{x}'(t), \mathsf{y}'(t))\|\; dt \\
&= \int_a^b V(\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t)) \bullet (\mathsf{x}'(t), \mathsf{y}'(t))\; dt \\
&= \int_\gamma P\, dx + Q\, dy.
\end{aligned}$$

Por fim, dado um campo de vetores $V\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, lembre que o rotacional de V é a função $\mathrm{rot}(V)\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\mathrm{rot}(V)(x,y) = Q_x(x,y) - P_y(x,y)$.

§ 3. Teorema de Green.

Lembre do CUV que, dada uma função diferenciável $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, o Teorema Fundamental do Cálculo dizia que

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a). \tag{3.1}$$

Ou seja, para se calcular a integral da função f', basta calcular f (a primitiva da f') na fronteira do intervalo $[a,b]$. O Teorema de Green é uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para integrais duplas. Para entender essa analogia, vamos reinterpretar os termos que aparecem na equação (3.1).

No lado esquerdo de (3.1), a integral simples no intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ será substituída por uma integral dupla em uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Assim, a função f' deverá ser substituída por uma função $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Agora, observe que a fronteira de R é uma curva. Assim, no lado direito, a avaliação da primitiva de f' na fronteira de $[a,b]$ será substituído pela integral de um campo de vetores. Por fim, o análogo à derivada da função f, nesse caso, é o rotacional desse campo de vetores.

Teorema (de Green)**.** Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada cuja fronteira é uma curva γ fechada simples. Se $V\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ for um campo de vetores diferenciável, então

$$\iint_R \mathrm{rot}(V)\, dx\, dy = \int V \bullet\, d\gamma.$$

Denote o campo de vetores $V = (P,Q)$ e a curva $\gamma = (\mathsf{x}, \mathsf{y})$. Nas hipóteses do Teorema de Green, temos que

$$\iint_R (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy.$$

Exercícios. Use o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais.

(a) Denote por γ a fronteira do triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Mostre que $\int_\gamma x^4\,dx + (xy)\,dy = 1/6$.

(b) Denote por α é a fronteira do anel semicircular $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Mostre que $\oint_\alpha y^2\,dx + (3xy)\,dy = 14/3$.

(c) Mostre que $\oint_{C_3} (3y - e^{\sin(x)})\,dx + (7x + \sqrt{y^4+1})\,dy = 36\pi$, onde C_3 é a circunferência de raio 3.

(d) Denote por C_1 a circunferência de raio 1. Mostre que $\oint_{C_1} (x^4 - y^3)\,dx + (x^3+y^5)\,dy = 3\pi/2$.

(e) Denote por C_1 a circunferência de raio 1. Mostre que $\oint_{C_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi$.

(f) Dados $a, b > 0$, calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.