ELEMENTOS DE ÁLGEBRA :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1. Dado um grupo G, denote por $\mathrm{Aut}(G)$ o conjunto

$$\{f\colon G \to G \mid f \text{ é um isomorfismo de grupos}\}.$$

(a) (1,0 ponto) Mostre que $\mathrm{Aut}(G)$ munido da função $m\colon \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ dada por $m(f,g) = f \circ g$ (composição de funções) é um grupo.

(b) (2,0 pontos) Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Calcule $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. (Ou seja, encontre um grupo conhecido ao qual $\mathrm{Aut}(G)$ é isomorfo.)

(a) Vamos mostrar as condições (i)-(iii) da definição de grupos.

(i) Dadas $f, g, h \in \mathrm{Aut}(G)$, temos que $m(f, m(g,h)) = f \circ m(g,h) = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = m(f,g) \circ h = m(m(f,g),h)$.

(ii) A função $\mathrm{id}_G\colon G \to G$, dada por $\mathrm{id}_G(g) = g$ para todo $g \in G$, pertence a $\mathrm{Aut}(G)$. De fato, $\mathrm{id}_G(gh) = gh = \mathrm{id}_G(g)\mathrm{id}_G(h)$ para todo $g,h \in G$. Além disso, $m(\mathrm{id}_G, f)(g) = (\mathrm{id}_G \circ f)(g) = \mathrm{id}_G(f(g)) = f(g) = f(\mathrm{id}_G(g)) = (f \circ \mathrm{id}_G)(g) = m(f, \mathrm{id}_G)(g)$ para todos $f \in \mathrm{Aut}(G)$ e $g \in G$. Portanto, $\mathrm{id}_G^{-1} = \mathrm{id}_G$ e $e_{\mathrm{Aut}(G)} = \mathrm{id}_G$.

(iii) Por definição, toda $f \in \mathrm{Aut}(G)$ é bijetora. Portanto existe $f^{-1}\colon G \to G$. Vamos mostrar que $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$. De fato, basta mostrar que f^{-1} é um homomorfismo de grupos, pois $f = (f^{-1})^{-1}$. Dados $g, h \in G$, denote $f^{-1}(g) = \widetilde{g}$, $f^{-1}(h) = \widetilde{h} \in G$, e observe que $g = f(\widetilde{g})$, $h = f(\widetilde{h})$. Então temos que

$$f^{-1}(gh) = f^{-1}(f(\widetilde{g})f(\widetilde{h})) = f^{-1}(f(\widetilde{g}\widetilde{h})) = \widetilde{g}\widetilde{h} = f^{-1}(g)f^{-1}(h).$$

Isso mostra que f^{-1} é um homomorfismo de grupos e portanto $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Suponha que $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é um isomorfismo de grupos. Em particular, temos $f(n) = nf(1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{Z}$. Consequentemente, $\mathbb{Z} = \{nf(1) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle f(1) \rangle$, ou seja, $f(1)$ é um gerador de $\mathbb{Z}$. Como os únicos geradores de $\mathbb{Z}$ são -1 e 1 (Proposição 6.15), então $f(1) \in \{-1, 1\}$. Para cada $i \in \{-1,1\}$, denote por $f_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função dada por $f(n) = ni$.

Vamos mostrar que $\varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ dada por $\varphi(\bar{i}) = f_{(-1)^i}$ ($i \in \{0,1\}$) é um isomorfismo de grupos. Primeiro, observe que φ é bijetora. Agora, para terminar, vamos mostrar que φ é um homomorfismo de grupos. De fato, $(\varphi(\bar{i}) \circ \varphi(\bar{j}))(n) = f_{(-1)^i}(f_{(-1)^j}(n)) = f_{(-1)^i}(n(-1)^j) = (n(-1)^j)(-1)^i = n(-1)^{i+j} = f_{(-1)^{i+j}}(n) = \varphi(\overline{i+j})(n)$ para todos $n \in \mathbb{Z}$, $i, j \in \{-1, 1\}$. $\square$

Data: 19 de setembro de 2017.

Questão 2. Considere o grupo $G = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ munido da função $m\colon X \times X \to X$ dada por $m(x, y) = x + y$ (soma de dois números reais).

(a) (1,0 ponto) Mostre que $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de G.
(b) (2,0 pontos) Considere o grupo quociente G/H. Mostre que todo elemento $x \in G/H$ tem ordem finita.

(a) Vamos mostrar as condições (i), (ii) da definição de subgrupo.
   (i) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, temos que $m((a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2})) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$. Como $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então $(a+b), (c+d) \in \mathbb{Z}$. Portanto $m((a+b\sqrt{2}), (c+d\sqrt{2}))$ pertence a H.
   (ii) Observe que o inverso de $(a + b\sqrt{2})$ é $\big((-a) + (-b)\sqrt{2}\big)$. De fato,

$$m\left(\left(a + b\sqrt{2}\right), \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right)\right) = 0 = m\left(\left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right), \left(a + b\sqrt{2}\right)\right),$$
$$m(c + d\sqrt{2}, 0) = c + d\sqrt{2} \quad \text{para todos } c, d \in \mathbb{Z}.$$

   Como $a, b \in \mathbb{Z}$, então $-a, -b \in \mathbb{Z}$. Portanto o inverso de $a + b\sqrt{2}$ pertence a H.

(b) Lembre que todo $x \in G/H$ é da forma $\overline{(a + b\sqrt{2})}$ para alguns $a, b \in \mathbb{Q}$. Denote $a = p_a/q_a$ e $b = p_b/q_b$, onde $p_a, p_b \in \mathbb{Z}$, $q_a, q_b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ e $\mathrm{mdc}(p_a, q_a) = \mathrm{mdc}(p_b, q_b) = 1$. Tome $k = q_a q_b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e observe que

$$k\overline{(a + b\sqrt{2})} = \overline{(ka) + (kb)\sqrt{2}} = \overline{(q_b p_a) + (q_a p_b)\sqrt{2}} = \overline{0},$$

pois $(q_b p_a), (q_a p_b) \in \mathbb{Z}$. Isso mostra que a ordem de $x = \overline{(a + b\sqrt{2})}$ é finita ($\leq k$). $\square$

Questão 3.

(a) (1,0 ponto) Dado um homomorfismo sobrejetivo de grupos $f\colon G \to H$, mostre que existe um isomorfismo de grupos $G/\ker(f) \cong H$ (sem usar o primeiro Teorema de Isomorfismo de grupos).

(b) (2,0 pontos) Sejam G um grupo e $N, K \subseteq G$ dois subgrupos normais. Se $G = NK$, mostre que existe um isomorfismo de grupos $G/(N \cap K) \cong G/N \times G/K$.

(a) Considere a função $F\colon G/\ker(f) \to H$ dada por $F(\overline{g}) = f(g)$. Vamos mostrar que F é um isomorfismo de grupos. Primeiro, observe que F está bem definida. De fato, se $k \in \ker(f)$, então:

$$F(\overline{gk}) = f(gk) = f(g)f(k) = f(g)e_H = f(g) = F(\overline{g}).$$

Agora vamos verificar que F é um homomorfismo de grupos. Dados $g_1, g_2 \in G$, temos:

$$F(\overline{g_1}\,\overline{g_2}) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = F(\overline{g_1})F(\overline{g_2}).$$

Como F é um homomorfismo de grupo, F é injetora se, e somente se, $\ker(F) = \{\overline{e_G}\}$. Vamos calcular o núcleo de F:

$$\begin{aligned}\ker(F) &= \{\overline{g} \in G/\ker(f) \mid F(\overline{g}) == f(g) = e_H\}\\ &= \{\overline{g} \in G/\ker(f) \mid g \in \ker(f)\}\\ &= \{\overline{e_G}\}.\end{aligned}$$

Isso mostra que F é injetora. O fato de F ser sobrejetora segue da definição de F e da hipótese que f é sobrejetora. Com isso concluímos que F é um isomorfismo de grupos entre $G/\ker(f)$ e H.

(b) Vamos definir um homomorfismo de grupos sobrejetor $f\colon G \to G/N \times G/K$ tal que $\ker(f) = (N \cap K)$. Daí, usando o item (b), segue que existe um isomorfismo de grupos $G/(N \cap K) \cong G/N \times G/K$.

Dado $g \in G$, denote a correspondente classe de equivalência em G/N (resp. G/K) por $\overline{g}$ (resp. $\widetilde{g}$). Agora considere a função $f\colon G \to G/N \times G/K$ dada por $f(g) = (\overline{g}, \widetilde{g})$. Primeiro vamos verificar que f é um homomorfismo de grupos. Para todos $g, h \in G$, temos que:

$$f(gh) = (\overline{gh}, \widetilde{gh}) = (\overline{g}\,\overline{h}, \widetilde{g}\widetilde{h}) = (\overline{g}, \widetilde{g})(\overline{h}, \widetilde{h}) = f(g)f(h).$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \{g \in G \mid f(g) = (\overline{e_G}, \widetilde{e_G})\}\\ &= \{g \in G \mid (\overline{g}, \widetilde{g}) = (\overline{e_G}, \widetilde{e_G})\}\\ &= \{g \in G \mid g \in N,\ g \in K\}\\ &= (N \cap K).\end{aligned}$$

Por fim, vamos mostrar que f é sobrejetora. Por hipótese, para todo $g \in G$, existem $n \in N$ e $k \in K$ tais que $nk = g$. Além disso, $\overline{nk} = \overline{k}$ e $\widetilde{nk} = \widetilde{n}$. Logo, para todo $(\overline{g}, \widetilde{h}) \in G/N \times G/K$, existem $k \in K$ e $n \in N$ tais que $(\overline{g}, \widetilde{h}) = (\overline{k}, \widetilde{n}) = f(nk)$. $\square$

Questão 4. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. É necessário justificar a sua escolha provando as afirmações verdadeiras e encontrando contra-exemplos para as falsas.

(a) (1,0 ponto) Seja G um grupo. Todo subconjunto finito $X \subseteq G$ tal que $N_G(X) = G$ e $xy \in X$ para todos $x, y \in X$ é um subgrupo normal de G.
(b) (1,0 ponto) Existe um subgrupo de $\mathbb{Z}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_{17}$.
(c) (1,0 ponto) Se G é um grupo e os únicos subgrupos $H \subseteq G$ são $H = \{e\}$ e $H = G$, então G é cíclico.

(a) Verdadeiro. Se X é um subconjunto finito e $xy \in X$ para todos $x, y \in X$, então X é um subgrupo de G (Proposição 5.9). Se X é um subgrupo e $N_G(X) = G$, então $gXg^{-1} = X$ para todo $g \in G$, ou seja, X é um subgrupo normal de G.

(b) Falso. Suponha que $H \subseteq \mathbb{Z}$ seja um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_{17}$. Em particular, existe $h \in H \subseteq \mathbb{Z}$, tal que $o(h) = 17$. Isso significa que $17h = 0$. Como $17h = 0 \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $h = 0$, segue que tal h não pode existir. (Lembre que $o(0) = 1$.) Portanto tal subgrupo $H \subseteq \mathbb{Z}$ não pode existir.

(c) Verdadeiro. Se $G = \{e\}$, então G é cíclico. Agora suponha que G é não-trivial e tome $g \in G \setminus \{e_G\}$. Como $\langle g \rangle$ é um subgrupo de G diferente de $\{e_G\}$, por hipótese, $\langle g \rangle = G$. Portanto G é gerado por g, ou seja, G é cíclico. $\square$