ÁLGEBRAS DE LIE

EXERCÍCIOS :: AULA 03

3.1. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e duas representações $\rho_1 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$, $\rho_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$, verifique que

$$\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \oplus V_2) \qquad \text{dada por} \qquad \rho(x)(v_1, v_2) = (\rho_1(x)(v_1), \rho_2(x)(v_2))$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $V_1 \oplus V_2$.

3.2. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e duas representações $\rho_1 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$, $\rho_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$, verifique que

$$\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2) \qquad \text{dada por} \qquad \rho(x)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(x)(v_1) \otimes v_2 \, + \, v_1 \otimes \rho_2(x)(v_2)$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $V_1 \otimes V_2$.

3.3. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e uma representação $\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, verifique que

$$\rho^* \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*) \qquad \text{dada por} \qquad \rho^*(x)(f) = -f(\rho(x)(-))$$

define uma representação de $\mathfrak{g}$ em V^*.

3.4. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e duas representações $\rho_1 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$, $\rho_2 \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$, use essas representações para construir uma representação

$$\rho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L}(V_1, V_2)).$$

3.5. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e um $\mathfrak{g}$-módulo V de dimensão finita, mostre que V é irredutível se, e somente se, V^* é irredutível.

3.6. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e um $\mathfrak{g}$-módulo V de dimensão finita, considere o $\mathfrak{g}$-módulo $V \otimes V$. Mostre que

$$S = \operatorname{span}\{v \otimes w + w \otimes v \mid v, w \in V\} \qquad \text{e} \qquad A = \operatorname{span}\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$$

são submódulos de $V \otimes V$.

Entregar dia: 09 de abril de 2019.