ÁLGEBRA LINEAR :: PROVA 01

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Observações

(1) Provas sem nomes e sem assinaturas serão consideradas inválidas.
(2) A prova é individual, sem consulta e sem uso de calculadora.
(3) Serão aplicadas sanções a alunos por improbidade na execução de trabalhos acadêmicos.
(4) Não é permitida a utilização de quaisquer aparelhos eletrônicos durante a prova. A utilização de um por um aluno implicará na invalidação da avaliação deste aluno.
(5) Resolva as questões de forma clara, objetiva e organizada, e justifique cada passo. Estes pontos serão levados em consideração durante a correção.

Questão 1 (3,0 pontos)**.** Dado $r \in \mathbb{R}$, denote por $\lfloor r \rfloor$ o maior número inteiro que é menor ou igual a r (ou seja, a parte inteira de r).

(a) (1,5 pontos) Explique por que o conjunto $V = \mathbb{Z}$ munido das operações

$$\begin{array}{rcl} s\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n,m) & \longmapsto & n+m \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} m\colon \mathbb{R}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (\lambda,n) & \longmapsto & \lfloor \lambda n \rfloor \end{array}$$

não é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(b) (1,5 pontos) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}$ munido das operações:

$$s\colon \mathcal{F}(\mathbb{R})\times\mathcal{F}(\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad s(f,g)(x) = f(x)+g(x) \quad \text{para todo } f,g\in\mathcal{F}(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R},$$

$$m\colon \mathbb{R}\times\mathcal{F}(\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad m(\lambda,h)(x) = \lambda h(x) \quad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{R},\ h\in\mathcal{F}(\mathbb{R}),\ x\in\mathbb{R}.$$

Mostre que $W = \{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ para todo } x>0\}$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Data: 06 de abril de 2017.

Questão 2 (3,0 pontos)**.** Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido da soma e multiplicação escalar definidos coordenada-a-coordenada, e considere os subespaços

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\} \text{ e } U = \langle\{(2, 1, 1, 0),\ (1, 2, 0, 1),\ (0, 0, -1, 1)\}\rangle.$$

(a) (2,0 pontos) Encontre uma base para $W \cap U$ contendo o vetor $(1, -1, 0, 0)$.

(b) (0,5 ponto) Qual é a dimensão de $W \cap U$? Justifique.

(c) (0,5 ponto) A soma $W + U$ é direta? Justifique.

Questão 3 (3,0 pontos)**.** Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4_{>0} = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d > 0\}$ munido das operações:

$$s\colon \mathbb{R}^4_{>0} \times \mathbb{R}^4_{>0} \to \mathbb{R}^4_{>0}, \quad s((a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2)) = (a_1a_2,\ b_1b_2,\ c_1c_2,\ d_1d_2),$$

$$m\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4_{>0} \to \mathbb{R}^4_{>0}, \quad m(\lambda,(a,b,c,d)) = (a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda, d^\lambda).$$

Dado o subespaço $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4_{>0} \mid a = b,\ c = d\}$, encontre um subespaço $W' \subseteq \mathbb{R}^4_{>0}$ tal que $W \oplus W' = \mathbb{R}^4_{>0}$. Justifique.

Questão 4 (3,0 pontos)**.** Determine se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. Em seguida, demonstre as que forem verdadeiras e encontre contra-exemplos para as que forem falsas.

(a) (1,0 ponto) $\{2^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$.

(b) (1,0 ponto) Sejam E um espaço vetorial e $C, D \subset E$ subconjuntos linearmente independentes. Se $C \cap D = \emptyset$, então $C \cup D$ é linearmente independente.

(c) (1,0 ponto) Dado qualquer $\mathbb{R}$-espaço vetorial V, para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, temos que $\langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle = \langle\{v_1\}\rangle \oplus \langle\{v_2\}\rangle \oplus \langle\{v_3\}\rangle$.