GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2.0 pontos). Calcule a distância e o ângulo entre as retas

$$\mathsf{r} = \{(1,1,9) + t(0,-1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{s} = \{(1,0,4) + t(2,2,0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Primeiro, observe que os vetores diretores, $(0,-1,1)$ e $(2,2,0)$ são L.I.. Portanto r e s são concorrentes ou reversas. Além disso, o vetor que liga os pontos iniciais é $(0,1,5)$ e $\{(0,-1,1),(2,2,0),(0,1,5)\}$ continua sendo L.I.. De fato, o produto misto entre eles é dado por:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2+10 = 12 \neq 0.$$

Isso mostra que r e s são reversas, e portanto sua distância é dada por:

$$\text{dist}(r,s) = \frac{|(0,1,5)\cdot(0,-1,1)\wedge(2,2,0)|}{\|(0,-1,1)\wedge(2,2,0)\|}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{12}}$$

$$\left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,2,2) \qquad \|(-2,2,2)\| = \sqrt{4+4+4} \right)$$

$$= \sqrt{12}.$$

$$= 2\sqrt{3}.$$

Data: 04 de novembro de 2019.

Agora, o ângulo entre r e s é dado pelo ângulo entre seus vetores diretores:

$$\theta(r,s) = \arccos\left(\frac{|(0,-1,1)\cdot(2,2,0)|}{\|(0,-1,1)\|\ \|(2,2,0)\|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}\right)$$

$$= \arccos\left(1/2\right)$$

$$= \pi/3 \text{ rad ou } 60^\circ.$$

Questão 2 (2.0 pontos). Calcule a distância e o ângulo entre a reta

$$\mathsf{R} = \{(1,2,0) + t(1,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e o plano

$$\mathsf{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 10\}.$$

O ângulo entre R e P é dado por:

$$\theta(R,P) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(1,1,0)\cdot(0,1,1)|}{\|(1,1,0)\| \ \|(0,1,1)\|}\right),$$

que é o complementar do ângulo entre o vetor diretor de R, $(1,1,0)$, e o vetor normal de P, $(0,1,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\theta(R,P) &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right)\\ &= \operatorname{arc\,sen}(1/2)\\ &= \pi/6 \text{ rad ou } 30^\circ.\end{aligned}$$

Como a reta R não é paralela ao plano P, então ela é concorrente ou está contida no plano. Em ambos os casos,

$$\operatorname{dist}(R,P) = 0.$$

Questão 3 (4.0 pontos). Considere dois números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e as retas

$$\mathrm{r}_1\colon \frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-5}{-1} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{r}_2\colon X = (-1, 2, \alpha) + \lambda(4, 2, \beta).$$

Determine todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

(a) r_1 e r_2 sejam iguais.
(b) r_1 e r_2 sejam paralelas e distintas.
(c) r_1 e r_2 sejam reversas.
(d) r_1 e r_2 sejam concorrentes ($\mathrm{r}_1 \cap \mathrm{r}_2$ é um ponto).

Vamos começar escrevendo uma eq. vetorial para r_1:

$X = (-1, 2, 5) + t(2, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}$.

a) Para que $r_1 = r_2$, temos que ter:

- $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$: LD
- $(-1, 2, \alpha) \in r_1$.

Para que $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$ seja L.D, temos que ter:

$\boxed{\beta = -2}$.

De fato, $2 \cdot (2,1,-1) = (4,2,-2)$. Para que $(-1,2,\alpha) \in r_1$, deve existir $t \in \mathbb{R}$, t.q:

$$\begin{cases} -1 + 2t = -1 \\ 2 + t = 2 \\ 5 - t = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ t = 0 \\ 5 - \alpha = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \boxed{5 = \alpha} \end{cases}.$$

b) Para que r_1 e r_2 sejam paralelas distintas, temos que ter:

- $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$: LD
- $(-1, 2, \alpha) \notin r_1$.

Pelos cálculos feitos no item (a), temos que:

- $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$: LD $\Leftrightarrow \boxed{\beta = -2}$.
- $(-1, 2, \alpha) \notin r_1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq 5}$.

c) Para que r_1 e r_2 sejam reversas, temos que ter:

$\{(2,1,-1), (4,2,\beta), (0,0,5-\alpha)\}$: LI.

Usando o critério do determinante, temos que:

$$\{(2,1,-1),\ (4,2,\beta),\ (0,0,5-\alpha)\}: \text{LI}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{4(5-\alpha) - 4(5-\alpha)}_{0} \neq 0 \ : \text{ impossível.}$$

Isso mostra que não existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para os quais r_1 e r_2 são reversas.

d) Para que r_1 e r_2 sejam concorrentes, temos que ter:

- $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$: LI.
- $\{(2,1,-1), (4,2,\beta), (0,0,5-\alpha)\}$: LD.

Pelos cálculos do item (a), $\{(2,1,-1), (4,2,\beta)\}$ é LI $\Leftrightarrow$ $\boxed{\beta \neq -2}$; e pelo item (c), $\{(2,1,-1), (4,2,\beta), (0,0,5-\alpha)\}$ é LD $\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{R}}$.

Questão 4 (2.0 pontos). Calcule a posição relativa e a interseção entre os planos

$\mathsf{P}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z = 2\}$ e $\mathsf{P}_2 = \{(0,1,5)+\lambda(1,0,3)+\mu(-1,1,1) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$.

Vamos começar escrevendo um vetor normal para P_1:

$$n_1 := (1,-1,2),$$

e um vetor normal para P_2:

$$n_2 := (1,0,3) \wedge (-1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-4,1).$$

Como $\{n_1, n_2\}$ é L.I., então P_1 e P_2 são concorrentes.

Agora vamos calcular $P_1 \cap P_2$. Primeiro, precisamos de uma eq. geral para P_2:

$$-3x-4y+z = (-3,-4,1)\cdot(0,1,5) = 1.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -7y + 7z = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z + 1 \\ y = -1 + z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Assim, $P_1 \cap P_2 = \{(-z+1, -1+z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$$= \{(1,-1,0) + z(-1,+1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$