NOTAS DE AULA DE ELEMENTOS DE ÁLGEBRA

TIAGO MACEDO

Aula 3

1.3. Grupos simétricos

Para cada $n > 0$, denote por S_n o conjunto formado por todas as permutações (ou seja, todas as bijeções) do conjunto $X = \{1, \dots, n\}$. Defina uma operação binária $m \colon S_n \times S_n \to S_n$ da seguinte forma $m(f, g) = f \circ g$ (a composição das funções f e g). Vamos verificar que $(S_n, \circ)$ é um grupo.

(i) $m(m(f, g), h)$ e $m(f, m(g, h))$ são bijeções do conjunto $\{1, \dots, n\}$, então para compará-las, vamos aplicá-las nos elementos de $\{1, \dots, n\}$. Para cada $x \in \{1, \dots, n\}$, temos:

$$\begin{aligned} m(m(f,g),h)(x) &= (m(f,g)\circ h)(x) & \qquad m(f,m(g,h))(x) &= (f\circ m(g,h))(x)\\ &= ((f\circ g)\circ h)(x) & &= (f\circ(g\circ h))(x)\\ &= (f\circ g)(h(x)) & &= f((g\circ h)(x))\\ &= f(g(h(x))), & &= f(g(h(x))). \end{aligned}$$

(ii) A função identidade $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ dada por $\mathrm{id}_X(x) = x$ para todo $x \in \{1, \dots, n\}$ é uma permutação. Além disso, temos que $m(f, \mathrm{id}_X) = f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_X \circ f = m(\mathrm{id}_X, f)$ para toda $f \in S_n$. Portanto id_X é o (único) elemento neutro de $(S_n, \circ)$.

(iii) Para cada permutação (uma bijeção) σ do conjunto $\{1, \dots, n\}$, existe uma função inversa, denotada $\sigma^{-1} \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Pela definição, a função inversa de σ é aquela que satisfaz $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_X = \sigma^{-1} \circ \sigma$. Portanto σ^{-1} é exatamente o elemento inverso de σ em $(S_n, \circ)$, um 2-ciclo.

Agora vamos introduzir uma notação para lidar com os elementos de S_n. Fixe $\sigma \in S_n$. Primeiro, verifique que, para cada $x \in \{1, \dots, n\}$ existe $k \leq n$ (que depende de σ e x) tal que $\sigma^k(x) = x$. (Use o fato de que σ é uma bijeção e que $\{1, \dots, n\}$ é um conjunto finito.) Em particular, tome o menor $k \leq n$ tal que $\sigma(1) = 1$. Se $k = n$, então denotamos σ por $(1\ \sigma(1)\ \dots\ \sigma^{n-1}(1))$. Se $k < n$, então $\{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)\} \subsetneq \{1, \dots, n\}$. Tome o menor $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)\}$ e o menor $\ell \leq n$ tal que $\sigma^\ell(i) = i$. Se $k + \ell = n$, então denotamos σ por $(i\ \sigma(i)\ \dots\ \sigma^{\ell-1}(i))(1\ \sigma(1)\ \dots\ \sigma^{k-1}(1))$. Caso contrário, repita esse processo até esgotar todos os elementos de $\{1, \dots, n\}$.

Os termos da forma $(i\ \sigma(i)\ \dots\ \sigma^p(i))$ são chamados de p-ciclos. Caso existam 1-ciclos na decomposição de σ, eles são cancelados (exceto se $\sigma = \mathrm{id}_X$). Por exemplo, se $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$, então nós teríamos $\sigma = (n)(n-1)\dots(2)(1)$, e nesse caso, nós denotamos σ simplesmente por (1).

Exemplo 3.1. Considere S_2, o conjunto de permutações do conjunto $X = \{1, 2\}$. Observe que as únicas permutações de $\{1, 2\}$ são: id_X e $\sigma \colon \{1, 2\} \to \{1, 2\}$ dada por $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(2) = 1$. Portanto $|S_2| = 2$. Além disso, observe que $\sigma^2 = \mathrm{id}_X$, ou seja, $o(\sigma) = 2$. Usando a notação acima, denotamos id_X por (1) e σ por $(1\ 2)$.

Exemplo 3.2. Considere S_3, o conjunto de permutações do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. Usando a notação acima, observe que as permutações de $\{1, 2, 3\}$ são as seguintes:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_X = (1)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (1\ 2)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (1\ 3)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (2\ 3)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (1\ 2\ 3)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (1\ 3\ 2)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

Em particular, observe que $|S_3| = 6$. Para calcular a multiplicação entre desses elementos, basta ler os elementos como funções (da direita para a esquerda), seguindo o caminho que cada $x \in \{1, 2, 3\}$ faz. Por exemplo, $(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3\ 2)$. Em particular, observe que os 2-ciclos $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$ tem ordem 2, e os 3-ciclos $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$ tem ordem 3. Além disso, observe que esse grupo não é comutativo. De fato $(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ e $(1\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 2\ 3)$.

Exercício 3.3. Mostre que $|S_n| = n!$ e que a ordem de todo p-ciclo é p.

Exercício 3.4. Dado um grupo G, mostre que, se $|G| \leq 5$, então G é abeliano.

1.5. Grupo dos quatérnios

Considere o conjunto $\mathbb{H}$ (ou Q_8) formado pelos símbolos $\{1, -1,\ i, -i,\ j, -j,\ k, -k\}$. Defina $m\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ como sendo a única operação binária tal que $(\mathbb{H}, m)$ é um grupo e que satisfaz:

$$\begin{gathered} m(1, h) = m(h, 1) = h \quad \text{para todo } h \in \mathbb{H}, \\ m(-1, -1) = 1, \qquad m(i, i) = m(j, j) = m(k, k) = -1, \\ m(-1, i) = m(i, -1) = -i, \quad m(-1, j) = m(j, -1) = -j, \quad m(-1, k) = m(k, -1) = -k, \\ m(i, j) = -m(j, i) = k, \quad m(j, k) = -m(k, j) = i, \quad m(k, i) = -m(i, k) = j. \end{gathered}$$

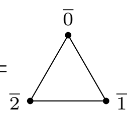
Observe que $\mathbb{H}$ é um grupo finito, $|\mathbb{H}| = 8$, e que não é abeliano. Observe também que $o(1) = 1$, $o(-1) = 2$ e $o(\pm i) = o(\pm j) = o(\pm k) = 4$.

1.2. Grupos diedrais

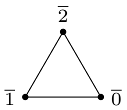
Para cada $n > 2$, denote por D_{2n} o conjunto formado por todas as simetrias de um n-ágono regular Δ_n (movimentos rígidos no espaço, ou seja, composições de translações, rotações e reflexões, que preservam Δ_n). Como toda simetria de Δ_n é uma função $f\colon \Delta_n \to \Delta_n$, defina a operação binária $m\colon D_{2n} \times D_{2n} \to D_{2n}$ como $m(f, g) = f \circ g$, a composição dessas funções.

Vamos verificar que $(D_{2n}, \circ)$ é um grupo. Primeiro, observe que a composição de duas simetrias de Δ_n é uma simetria de Δ_n. Depois, lembre que a composição de funções é associativa (veja, por exemplo, a verificação da associatividade para o grupo simétrico). Agora observe que a função identidade id_{Δ_n} é uma simetria de Δ_n e satisfaz $\mathrm{id}_{\Delta_n} \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ \mathrm{id}_{\Delta_n}$ para todo $\sigma \in D_{2n}$. Finalmente, observe que toda translação, rotação e reflexão é invertível, portanto todo movimento rígido σ que preserva Δ_n admite uma inversa, ou seja, uma função σ^{-1} satisfazendo $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_{\Delta_n} = \sigma^{-1} \circ \sigma$, e que σ^{-1} também preserva Δ_n.

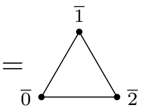
Exemplo 3.5. Considere o grupo D_6 de simetrias de um triângulo equilátero Δ_3. Para descrever as simetrias de Δ_3, vamos enumerar seus vértices com inteiros módulo 3:

$\Delta_3 =$ 

Observe que a rotação (no sentido horário) em torno do centro de Δ_3 de um ângulo de $2\pi/3$ (ou $120°$), é uma simetria de Δ_3. De fato, se denotarmos essa rotação por r, teremos:

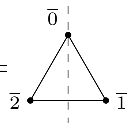
$r\,(\Delta_3)\ =$ 

Observe ainda que $r^2 = (r \circ r)$ é a rotação de um ângulo de $4\pi/3$ (no sentido horário em torno do centro) de Δ_3,

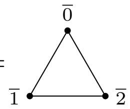
$r^2\,(\Delta_3)\ =$ 

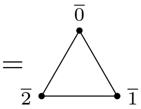
e que r^3 é a rotação de um ângulo de 2π, ou seja, $r^3 = \mathrm{id}_{\Delta_3}$. Com isso, concluímos que $o(r) = 3$.

Observe também que a reflexão de Δ_3 em relação à reta que passa pelo vértice $\overline{0}$ e pelo centro de Δ_3,

$\Delta_3\ =$ 

é uma outra simetria de Δ_3. De fato, se denotarmos essa reflexão por s, teremos:

$s\,(\Delta_3)\ =$ 

$s^2\,(\Delta_3)\ =$ 

Como s troca a ordem dos vértices (no sentido horário, de $\overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}$ para $\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1}$), mas id_{Δ_3}, r e r^2 não invertem, é fácil concluir que $s \notin \{\mathrm{id}_{\Delta_3}, r, r^2\}$. Além disso, $o(s) = 2$.

De fato, a disposição dos vértices é uma forma de identificar as simetrias de Δ_3, pois toda simetria de Δ_3 pode ser unívocamente identificada com uma permutação do conjunto $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Por exemplo, r pode ser identificada com a permutação $(\overline{0}\ \overline{2}\ \overline{1})$, r^2 pode ser identificada com a permutação $(\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{2})$ e s pode ser identificada com a permutação $(\overline{1}\,\overline{2})$. Verifique que, identificando os elementos de D_6 com permutações em S_3, podemos concluir que $\mathrm{id}_{\Delta_3}, r, r^2, s, sr, sr^2$ são elementos distintos. Isso implica que $|D_6| \geq 6$.

Além disso, como toda simetria é um movimento rígido, um elemento $\sigma \in D_6$ é unicamente determinado pela permutação induzida dos vértices de Δ_3. Consequentemente, $|D_6| \leq |S_3| = 6$. Juntando essas duas desigualdades, concluímos que $|D_6| = 6$ e que as simetrias de Δ_3 são $\{\mathrm{id}_{\Delta_3}, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Em particular, todas as outras possíveis simetrias se identificam com uma dessas. Por exemplo, $rs = sr^2$, $srs = r^2$ e $r^2 s = sr$.

Voltando ao caso geral, vamos mostrar que $|D_{2n}| = 2n$ e vamos descrever todos as simetrias de Δ_n. Primeiro, enumere os vértices de um n-ágono regular Δ_n no sentindo horário com os inteiros módulo n. Denote por r a simetria que rotaciona Δ_n de um ângulo de $2\pi/n$ no sentido horário e por s a reflexão em relação a reta que passa pelo vértice $\overline{0}$ e pelo centro de Δ_n. Assim como no caso $n = 3$, toda simetria de Δ_n pode ser unívocamente identificada com uma permutação do conjunto $\mathbb{Z}_n$. (Ou seja, podemos definir uma função $\vartheta\colon D_{2n} \to S_n$.) Em particular, r se identifica com a permutação $(\overline{0}\ \ \overline{n-1}\ \ \cdots\ \ \overline{1})$; se n for par, s se identifica com a permutação $(\overline{1}\ \ \overline{-1})(\overline{2}\ \ \overline{-2})\cdots(\overline{\tfrac{n}{2}-1}\ \ \overline{\tfrac{n}{2}+1})$, e se n for ímpar, s se identifica com a permutação $(\overline{1}\ \ \overline{-1})(\overline{2}\ \ \overline{-2})\cdots(\overline{\tfrac{n-1}{2}}\ \overline{\tfrac{n+1}{2}})$.

Além disso, como toda simetria é um movimento rígido, todo elemento em D_{2n} é unicamente determinado pela permutação de $\mathbb{Z}_n$ ao qual ele está associado. (Ou seja, a função ϑ é injetora.) Verifique que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, r^i pode ser identificada com a permutação $(\overline{0}\ \ \overline{-i}\ \ \overline{-2i}\ \ \cdots\ \ \overline{i})$. Use esse fato para concluir que $o(r) = n$ e que $\mathrm{id}_{\Delta_n}, r, \ldots, r^{n-1}$ são todas simetrias distintas. Verifique também que $o(s) = 2$ e que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sr^i pode ser identificada com a permutação $(\overline{0}\ \ \overline{i}\ \ \overline{2i}\ \ \cdots\ \ \overline{-i})$. Use esses fatos (e o fato de s trocar a ordem dos vértices de Δ_n e r não trocar) para concluir que $\mathrm{id}_{\Delta_n}, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}$ são todos elementos distintos de Δ_n. Com isso, concluímos que $|D_{2n}| \geq 2n$.

Agora observe que, como toda simetria é um movimento rígido, se dois vértices são adjacentes, então suas imagens pela simetria devem continuar adjacentes. Em particular, se soubermos as imagens dos vértices $\overline{0}$ e $\overline{1}$ (que devem ser adjacentes), podemos determinar unicamente as imagens de todos os outros vértices. De fato, se $\sigma(\overline{0}) = \overline{i}$, então $\sigma(\overline{1}) \in \{\overline{i-1},\ \overline{i+1}\}$. Se $\sigma(\overline{1}) = \overline{i+1}$ (resp. $\sigma(\overline{1}) = \overline{i-1}$), como $\sigma(\overline{2})$ deve ser adjacente a $\sigma(\overline{1})$ e $\overline{i} = \sigma(\overline{0})$, então $\sigma(\overline{2}) = \overline{i+2}$ (resp. $\sigma(\overline{2}) = \overline{i-2}$). Usando esse mesmo argumento, verifique que $\sigma(\overline{k}) = \overline{i+k}$ (resp. $\sigma(\overline{k}) = \overline{i-k}$) para todo $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$. Com isso, concluímos que existem n possibilidades para escolhermos $\sigma(\overline{0})$ e 2 possibilidades para escolhermos $\sigma(\overline{1})$ (os outros seguem como consequência), ou seja, $|D_{2n}| \leq 2n$.

Juntando essas duas desigualdades, concluímos que $|D_{2n}| = 2n$ e que

$$D_{2n} = \{\mathrm{id}_{\Delta_n}, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}.$$

Exercício 3.6. Escreva o elemento $rsrsrsrs$ em termos de $\mathrm{id}_{\Delta_n}, r, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}$.