ÁLGEBRAS DE LIE

EXERCÍCIOS :: AULAS 05 E 06

5.1. (Humphreys 3.2) Mostre que $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e somente se, existe uma cadeia de subálgebras $\{o\} \subsetneq \mathfrak{h}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{h}_k \subseteq \mathfrak{h}_{k+1} = \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h}_i$ é um ideal em $\mathfrak{h}_{i+1}$ e $\mathfrak{h}_{i+1}/\mathfrak{h}_i$ é abeliana para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

5.2. (Humphreys 3.4) Mostre que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ é solúvel (resp. nilpotente) se, e somente se, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra solúvel (resp. nilpotente) de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

5.3. (Humpphreys 3.6) Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} \neq \{o\}$, mostre que existe um ideal nilpotente-maximal e um ideal solúvel-maximal em $\mathfrak{g}$. Descreva esses ideais explicitamente em alguns exemplos pequenos.

5.4. (Humphreys 3.10) Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e I um ideal de $\mathfrak{g}$. Mostre que, se $\mathfrak{g}/I$ é nilpotente e $\mathrm{ad}(x)|_I$ é nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

5.5. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, mostre que todo subespaço vetorial $W \subseteq \mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}'$ é um ideal. Conclua que, se $\mathfrak{g}$ for solúvel ou nilpotente (de dimensão finita), então existe um ideal de codimensão 1 em $\mathfrak{g}$.

5.6. Classifique todas as álgebras de Lie de dimensão 3 sobre $\mathbb{C}$. (Analise separadamente os casos em que $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}'$ tem dimensão 0, 1, 2 ou 3.)

Entregar dia: 09 de abril de 2019.