Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Bacharelado em Matemática Computacional

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ALGÉBRICA

Luiz Filipe Moraes Saldanha Oliveira

São José dos Campos

29 de março de 2021

Luiz Filipe Moraes Saldanha Oliveira

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ALGÉBRICA

Trabalho de Graduação apresentado à Universidade Federal de São Paulo – Instituto de Ciência e Tecnologia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Matemática Computacional.

Orientador:
Prof. Dr. Tiago Rodrigues Macedo

São José dos Campos

29 de março de 2021

Oliveira, Luiz Filipe

Introdução à Geometria Algébrica / Luiz Filipe Moraes Saldanha Oliveira. – São José dos Campos, 2021.

vii, 27f.

Trabalho de Graduação (Bacharel) – Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia. Bacharelado em Matemática Computacional.

Título em inglês: Introduction to Algebraic Geometry.

1. Geometria Algébrica 2. Álgebra Comutativa 3. Topologia

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Bacharelado em Matemática Computacional

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Marcelo Cristino Gama

Coordenador do Curso: Prof. Dr. Thadeu Alves Senne

RESUMO

Geometria Algébrica é uma das mais importantes áreas da Matemática e uma das referências mais utilizadas para seu estudo é o livro “Algebraic Geometry” de Robin Hartshorne [4]. Este livro traz uma introdução à Geometria Algébrica clássica (do ponto de vista de pontos e equações) e moderna (do ponto de vista de anéis e esquemas). O objetivo principal deste trabalho é traduzir e comentar as três primeiras seções do primeiro capítulo do livro de R. Hartshorne. Nestas seções são estudadas variedades algébricas afins e projetivas, os objetos de estudo principais da geometria algébrica clássica, além de funções regulares e morfismos de variedades. No caminho, foram estudados resultados de topologia geral e álgebra comutativa necessários para compreender o conteúdo.

Palavras-chave: Geometria Algébrica, Álgebra Comutativa, Topologia

ABSTRACT

Algebraic Geometry is one of the most important areas of Mathematics, and one of its most used references is the book "Algebraic Geometry" by Robin Hartshorne [4]. This book presents an introduction to both classical Algebraic Geometry (from the point of view of points and equations) and modern (from the point of view of rings and schemes). The main goal of this work is to translate and comment the first three sections of the first chapter of this book into Portuguese. They cover the definition and inital properties of affine and projective algebraic varieties, the main objects of study classical algebraic geometry, as well as regular functions and morphisms. The material from Point Set Topology and Commutative Algebra needed to understand these first two sections is also added to the text.

Keywords: Algebraic Geometry, Commutative Algebra, Topology

Sumário

INTRODUÇÃO

Geometria algébrica é uma área da matemática que integra conceitos principalmente de topologia e da álgebra no estudo de variedades algébricas, que são definidas como conjuntos de soluções de sistemas de equações polinomiais. Assim, podemos ver as variedades algébricas como curvas, superfícies, hiperfícies, etc. Esse tema é estudado desde a antiguidade, mas foi com a introdução da geometria analítica que passou a ser mais explorado. Descartes e Fermat, por exemplo, abordaram o problema da classificação que, na sua forma mais forte, consiste em classificar variedades algébricas, agrupando aquelas que podem ser obtidas umas das outras a partir de certas transformações (como, por exemplo, translações e rotações de cônicas em $\mathbb{R}^2$).

Sendo uma área antiga e bastante ampla da matemática, existem diferentes maneiras de se abordá-la, assim como diversas aplicações. Por exemplo, em outras áreas da matemática, como a análise complexa (no estudo de variedades sobre o corpo dos números complexos) e a teoria dos números (no estudo de variedades sobre corpos finitos), além de outras áreas do conhecimento, como física, criptografia, biologia, aprendizado de máquina e estatística. Por exemplo, em mecânica clássica (resp. quântica), o espaço de estados de um sistema físico é descrito por uma variedade afim (resp. projetiva) e seus observáveis são descritos por certas funções nessas variedades.

Também é comum dividir a geometria algébrica em duas fases: a clássica e a moderna. A primeira mais voltada para o estudo de pontos e equações, enquanto a segunda é mais voltada ao estudo de anéis e esquemas. Como do ponto de vista clássico variedades algébricas são definidas a partir de sistemas de equações polinomiais, uma possível abordagem é tentar encontrar propriedades e relações entre variedades estudando os sistemas de equações que as definem. Assim, utilizamos os chamados morfismos de variedades, que são funções entre variedades algébricas que nos possibilitam encontrar propriedades e relações a partir de certas álgebras associadas aos sistemas de equações que as definem. Este será o ponto de vista abordado neste trabalho.

O objetivo deste trabalho é fazer uma introdução à geometria algébrica, traduzindo e comentando o livro “Algebraic Geometry” de Robin Hartshorne. Este livro faz uma introdução à geometria algébrica clássica e moderna. Neste trabalho são estudados resultados introdutórios do ponto de vista clássico apresentados logo no primeiro capítulo do livro. Em especial, são apresentadas variedades algébricas, algumas de suas propriedades, e morfismos (funções) entre variedades. Além disso, o trabalho também traz alguns conceitos principalmente de topologia e álgebra comutativa necessários para esse passo inicial. O autor está assumindo que são conhecidos alguns dos conteúdos das unidades curriculares obrigatórias do BMC, em particular, de Elementos de Álgebra. Assim, definições de grupos e anéis, por exemplo, que serão omitidas, podem ser encontradas em [3].

Para fazer uma introdução ao estudo de variedades, este trabalho apresenta as variedades algébricas, os espaços onde essas são estudadas (os espaços afim e projetivo) e os morfismos de variedades. Assim, o trabalho foi separado em três partes, cada uma baseada em uma seção do primeiro capítulo do livro. Na primeira são apresentados o espaço e as variedades afins e suas propriedades, introduzindo também alguns conceitos de topologia para apresentar a topologia de Zariski no espaço afim e de álgebra comutativa para a compreensão de algumas propriedades das variedades afins.

Na segunda parte do trabalho trata sobre o espaço projetivo e as variedades projetivas. Como variedades projetivas são definidas por polinômios homogêneos, então é feita uma introdução à graduação de anéis; e para estudar algumas propriedades do espaço projetivo, são apresentados também as funções contínuas e os homeomorfismos. Essas duas primeiras partes do trabalho ainda trazem as soluções de alguns dos exercícios propostos no livro.

Na última parte do trabalho, são apresentados os morfismos de variedades, para isso, são introduzidas as funções regulares e para desenvolver as propriedades de variedades algébricas e de seus morfismos, são introduzidos também conceitos de teoria de categorias, além de serem apresentados mais alguns resultados de topologia e álgebra comutativa.

Como o trabalho apresenta resultados de diferentes áreas e fontes, o texto está separado por cores, cada cor representando um conteúdo ou uma fonte diferente. Os trechos em cinza são definições e propriedades que foram traduzidas diretamente do Hartshorne; os trechos em azul são fatos enunciados no livro cuja demonstração não é apresentada ou referenciada, mas que são demonstradas neste trabalho; as partes em verde são resultados de outras áreas necessários para a compreensão do conteúdo; e as partes em preto no texto são detalhes ou demonstrações adicionadas pelo autor do trabalho.

Capítulo 1

VARIEDADES AFINS

1.1 Conjuntos Algébricos

Durante todo o texto, k denotará um corpo algebricamente fechado. Para cada $n \geq 0$, considere o anel $A_n := k[x_1, \ldots, x_n]$ de polinômios em n variáveis distintas e coeficientes em k. Observe que os elementos de A_n podem ser vistos como funções $k^n \to k$ através da avaliação das variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Em particular, todo $c \in k$ pode ser visto como a função constante, $c : k^n \to k$ dada por $c(a_1, \ldots, a_n) = c$ para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.

Definição (de espaco afim e conjunto algébrico)**.** O *espaço afim n-dimensional* é definido como sendo o conjunto k^n e é denotado por $\mathbf{A}^n$. Para cada subconjunto $T \subseteq A_n$, defina o *conjunto de zeros de T* como sendo

$$Z(T) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Um subconjunto $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ é dito *algébrico* quando $Y = Z(T)$ para algum $T \subseteq A_n$.

Proposição 1.1. Seja $n \geq 0$.

(a) $Z(A_n) = \emptyset$ e $Z(0) = \mathbf{A}^n$.

(b) Se $T_1, T_2 \subseteq A_n$, então $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$.

(c) Para qualquer família de subconjuntos $T_i \subseteq A_n$, $i \in I$, temos que $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) = Z\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right)$.

Demonstração. (a) Dado um polinômio constante não nulo $f \in A_n$, temos que $f(P) \neq 0$ para todo $P \in \mathbf{A}^n$. Logo $Z(f) = \emptyset$. Como $f \in A_n$, então $Z(A_n) = \emptyset$. Isso mostra a primeira igualdade. Para mostrar a segunda igualdade, observe que, se $g = 0 \in A_n$, então $g(P) = 0$ para todo $P \in \mathbf{A}^n$. Logo $Z(0) = Z(g) = \mathbf{A}^n$.

(b) Observe que $P \in Z(T_1) \cup Z(T_2)$ se, e somente se, $f(P) = 0$ para todo $f \in T_1$ ou $g(P) = 0$ para todo $g \in T_2$. Isso, por sua vez, é equivalente a $f(P)g(P) = 0$ para todo $f \in T_1$, $g \in T_2$. Como, por definição, os elementos de T_1T_2 são produtos de elementos de T_1 e T_2, então: $f(P)g(P) = 0$ para todo $f \in T_1$, $g \in T_2$ é equivalente a dizer que $P \in Z(T_1T_2)$. Isso mostra que $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1T_2)$.

(c) Observe que $P \in \bigcap_{i \in I} Z(T_i)$ se, e somente se, $f(P) = 0$ para todo $f \in T_i$, $i \in I$. Ou seja, $P \in Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$. □

Anotação 1. Existem subconjuntos $T_1, T_2 \subseteq A_n$, tais que $Z(T_1T_2) \neq Z(T_1 \cap T_2)$.

Demonstração. Considere $n = 1$, $T_1 = \{1\}$ e $T_2 = \{x\}$ em $A_1 = k[x]$. Então temos que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ e $T_1T_2 = \{x\}$. Portanto $Z(T_1 \cap T_2) = Z(\emptyset) = \mathbf{A}^1$ e $Z(T_1T_2) = Z(x) = \{0\}$. □

Anotação 2. Se T é um subconjunto de A_n, e $a = \langle T \rangle$ é o ideal de A_n gerado por T, então $Z(T) = Z(a)$.

Demonstração. Se $f \in a$, então existem polinômios $f_1, \ldots, f_k \in A_n$ e $t_1, \ldots, t_k \in T$ tais que $f = f_1t_1 + \cdots + f_kt_k$. Assim, se $P \in Z(T)$, então $t_i(P) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ e, consequentemente,

$$f(P) = f_1(P)t_1(P) + \cdots + f_k(P)t_k(P) = 0.$$

Logo, $P \in Z(a)$. Isso mostra que $Z(T) \subseteq Z(a)$. Para mostrar que $Z(a) \subseteq Z(T)$, sejam $P \in Z(a)$ e $f \in T$. Como $f \in T \subseteq a$, então $f(P) = 0$. Portanto $P \in Z(T)$. □

Definição (de anel noetheriano)**.** Um anel A é dito *noetheriano* se para toda cadeia crescente $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ de ideais de A, existe um inteiro positivo m tal que $I_m = I_k$ para todo $k \geq m$.

Teorema (de base de Hilbert)**.** Se A é um anel noetheriano, então $A[x]$ também é um anel noetheriano.

Demonstração. Ver [1, Theorem 7.5]. □

Anotação 3. Para todo $n \geq 0$, temos que $k[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel noetheriano.

Demonstração. Primeiro, note que todo corpo k é um anel noetheriano. De fato, como os únicos ideais de um corpo são $\{0\}$ e k, então toda cadeia crescente de ideais em k pode ter no máximo dois ideais distintos.

Agora vamos usar indução em n. Como k é noetheriano, pelo Teorema da base de Hilbert, $k[x_1]$ é noetheriano. Suponha que $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ seja noetheriano. Pelo Teorema da base de Hilbert, $k[x_1,\dots,x_{n-1}][x_n] \cong k[x_1,\dots,x_{n-1},x_n]$ também é noetheriano. □

Anotação 4. Seja A um anel, A é noetheriano se, e somente se, todo ideal $a \subseteq A$ tem um conjunto finito de geradores.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que exista um ideal $a \subseteq A$ que não seja finitamente gerado. Assim, podemos tomar uma cadeia de ideais em a iniciando em $\langle f_1 \rangle$, onde $f_1 \in a$ e $f_{k+1} \in a \setminus \langle f_1,\dots,f_k \rangle$, obtendo

$$\langle f_1 \rangle \subsetneqq \langle f_1, f_2 \rangle \subsetneqq \cdots \subsetneqq \langle f_1,\dots,f_k \rangle \subsetneqq \cdots$$

Ou seja, A não é noetheriano. A afirmação segue da contrapositiva.

($\Leftarrow$) Seja $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_r \subseteq \cdots \subseteq A$ uma cadeia de ideais em A. Então o conjunto $I_\infty := \bigcup_{i \geq 1} I_i$, é um ideal de A. De fato, I_∞ é não vazio, já que cada $I_i \subseteq I_\infty$ é um ideal de A. Se $a, b \in I_\infty$, então, por construção, $a \in I_{i_a}$ e $b \in I_{i_b}$ para alguns $i_a, i_b \geq 1$. Tomando $j = \max\{i_a, i_b\}$, então $a, b \in I_j$. Como I_j é um ideal, então $a - b \in I_j \subseteq I_\infty$. Finalmente, se $c \in A$, então $ac \in I_{i_a} \subseteq I_\infty$, pois I_{i_a} é um ideal de A.

Como, por hipótese, todo ideal de A é finitamente gerado, então I_∞ é finitamente gerado. Tome $\{a_1,\dots,a_s\}$ um conjunto de geradores para I_∞. Pela construção de I_∞, existem $i_1,\dots,i_s \geq 1$ tais que $a_1 \in I_{i_1},\dots,a_s \in I_{i_s}$. Seja $k = \max\{i_1,\dots,i_s\}$. Como $\{a_1,\dots,a_s\} \subseteq I_k$, então $I_\infty = \langle a_1,\dots,a_s \rangle \subseteq I_k$; e como $I_k \subseteq I_\infty$, então $I_k = I_\infty$. Assim, se $k' \geq k$, então $I_\infty = I_k \subseteq I_{k'} \subseteq I_\infty$, ou seja, $I_{k'} = I_\infty$ para todo $k' \geq k$. □

Anotação 5. Para todo $T \subseteq A_n$, existe um subconjunto finito $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq A_n$ tal que $Z(T) = Z(f_1,\dots,f_r)$.

Demonstração. Tome $a = \langle T \rangle$. Como A_n é noetheriano, então a é finitamente gerado. Sejam $f_1,\dots,f_r \in A_n$ tais que $a = \langle f_1,\dots,f_r \rangle$. Pela Anotação 2, temos que $Z(T) = Z(a) = Z(\langle f_1,\dots,f_r \rangle) = Z(f_1 \dots f_r)$. □

1.2 Topologia de Zariski

Definição (de topologia)**.** Dado um conjunto X, uma *topologia* em X é uma família τ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:

i. $\emptyset$ e X pertencem a τ;

ii. a união de qualquer subfamília de membros de τ pertence a τ;

iii. a interseção de uma subfamília finita de membros de τ pertence a τ.

Quando τ for uma topologia em X, os subconjuntos $A \in \tau$ são chamados de *abertos* e os subconjuntos $Y = A^c$, $A \in \tau$, são chamados de *fechados*.

A definição acima, assim como todo conteúdo relacionado à Topologia Geral, são baseados em [6].

Proposição. Seja X um conjunto, e seja $\mathscr{F}$ uma família de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(a) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathscr{F}$;

(b) A interseção de uma família arbitrária de membros de $\mathscr{F}$ pertence a $\mathscr{F}$;

(c) A união de uma família finita de membros de $\mathscr{F}$ pertence a $\mathscr{F}$.

A família $\tau = \{F^c \mid F \in \mathscr{F}\}$ é uma topologia em X e $\mathscr{F}$ coincide com a família de fechados de (X, τ).

Demonstração. Como $X \in \mathscr{F}$ e $\emptyset \in \mathscr{F}$, então $\emptyset = X^c \in \tau$ e $X = \emptyset^c \in \tau$.

Seja α uma família arbitrária de membros de τ. Pelas Leis de De Morgan, $(\bigcup_{A\in\alpha} A)^c = \bigcap_{A\in\alpha} A^c$. Pela construção, $A^c \in \mathscr{F}$ para todo $A \in \alpha$. Pela hipótese (b), $\bigcap_{A\in\alpha} A^c \in \mathscr{F}$. Portanto $\bigcup_{A\in\alpha} A \in \tau$.

Seja β uma família finita de membros de τ. Pelas Leis de De Morgan, $(\bigcap_{B\in\beta} B)^c = \bigcup_{B\in\beta} B^c$. Pela construção, $B^c \in \mathscr{F}$ para todo $B \in \beta$. Pela hipótese (c), $\bigcup_{B\in\beta} B^c \in \mathscr{F}$. Portanto $\bigcap_{B\in\beta} B \in \tau$. □

Observe que, pela Proposição 1.1 e pela Proposição acima, a família formada pelos complementares de conjuntos algébricos em $\mathbf{A}^n$ define uma topologia em $\mathbf{A}^n$.

Definição (topologia de Zariski)**.** Defina a *topologia de Zariski em* $\mathbf{A}^n$ tomando como abertos os complementares dos conjuntos algébricos, ou seja, $\{Z(T)^c \subseteq \mathbf{A}^n \mid T \subseteq A_n\}$.

Definição (de espaço topológico Hausdorff)**.** Um espaço topológico (X, τ) é dito *Hausdorff* se, dados $x \neq y \in X$, existem $U, V \in \tau$, tais que $a \in U$, $b \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Anotação 6.

(a) Todo corpo algebricamente fechado é infinito.

(b) Todo ideal de $k[x]$ é principal.

(c) A topologia de Zariski em $\mathbf{A}^1$ é equivalente à topologia cofinita.

(d) A topologia de Zariski em $\mathbf{A}^1$ não é Hausdorff.

Demonstração. (a): Pela contrapositiva, se $k = \{k_1, \ldots, k_n\}$ é um corpo finito, então o polinômio

$$f(x) = (x - k_1)(x - k_2) \cdots (x - k_n) + 1_k$$

não tem raízes em k. Logo k não é algebricamente fechado. Portanto, todo corpo algebricamente fechado é infinito.

(b): Sejam $I \neq 0$ um ideal de A e p um elemento com o menor grau possível em $I \setminus \{0\}$. Pelo Algoritmo de divisão de Euclides, se $f \in I \setminus \{0\}$, existem $q, r \in k[x]$ tais que

$$f = qp + r \qquad \text{e} \qquad \text{grau}(r) < \text{grau}(p) \ \text{ ou } \ r = 0.$$

Como $f, p \in I$ e $r = f - qp$, então $r \in I$, pois I é fechado pela soma. Como p tem o menor grau possível em $I \setminus \{0\}$, então $r = 0$. Portanto, todo polinômio $f \in I$ é da forma $f = qp$ para algum $q \in k[x]$, ou seja, $I = \langle p \rangle$ é principal.

(c): Lembre que a topologia cofinita em um conjunto X tem a família de abertos dada por

$$\tau = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Note que na topologia cofinita, um conjunto $F \subseteq X$ é fechado se $X \setminus (X \setminus F) = F$ é finito ou se $F = X \setminus \emptyset$. Ou seja, os fechados de X são os seus subconjuntos finitos e X.

Agora, tome $T \subseteq k[x]$. Da Anotação 2, temos que $Z(T) = Z(\langle T \rangle)$. Pelo item (b), existe $f \in A$ tal que $\langle T \rangle = \langle f \rangle$. Assim, $Z(T) = Z(f)$. Como todo polinômio em $k[x]$ tem um número finito de raízes, então $Z(f)$ é um conjunto finito. Portanto os conjuntos algébricos de $\mathbf{A}^1$, os fechados na topologia de Zariski, são finitos. Por outro lado, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in k$, o polinômio $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ satisfaz $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

(d): Pelo item (c), os subconjuntos fechados próprios da topologia de Zariski em $\mathbf{A}^1$ são os subconjuntos finitos. Se $\mathbf{A}^1$ fosse Hausdorff, então, para todos $x \neq y \in \mathbf{A}^1$, existiriam abertos disjuntos $A, B \subseteq \mathbf{A}^1$ tais que $x \in A$ e $y \in B$. Como A é aberto, então $\mathbf{A}^1 \setminus A$ é finito; como $A \cap B = \emptyset$, então $B \subseteq \mathbf{A}^1 \setminus A$ é finito; e como B é aberto, então B^c é finito. Consequentemente,

$\mathbf{A}^1 = B \cup B^c$ é finito. Pelo item (a), isso contradiz o fato de k ser algebricamente fechado. □

1.3 Variedades Afins

Definição (de fecho)**.** Dados um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subseteq X$, denote por $\mathscr{Z}_Y$ a família formada pelos subconjuntos fechados de X que contêm Y, e defina o *fecho* de Y como sendo o subconjunto $\overline{Y} := \bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito *denso* em X quando $\overline{Y} = X$.

Anotação 7. Sejam X um espaço topológico. Para todo subconjunto $Y \subseteq X$, o fecho $\overline{Y}$ é o menor (em relação à inclusão) subconjunto fechado de X que contém Y. Em particular, Y é fechado se, e somente se, $Y = \overline{Y}$.

Demonstração. Fixe um subconjunto $Y \subseteq X$. Primeiro observe que $\overline{Y}$ é fechado. De fato, como todo subconjunto $Z \in \mathscr{Z}_Y$ é fechado, então $\bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$ é fechado. Como $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$ por definição, isso mostra que $\overline{Y}$ é fechado. Agora observe que $Y \subseteq \overline{Y}$. De fato, como $Y \subseteq Z$ para todo $Z \in \mathscr{Z}_Y$, então $Y \subseteq \bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$. Como $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$ por definição, isso mostra que $Y \subseteq \overline{Y}$. Portanto $\overline{Y}$ é fechado e contém Y.

Como $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathscr{Z}_Y} Z$ e $\mathscr{Z}_Y$ consiste de todos os subconjuntos fechados de X que contém Y, então $\overline{Y} \subseteq Z$ para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ que contém Y. Isso mostra que $\overline{Y}$ é o menor (em relação à inclusão) subconjunto fechado de X que contém Y.

Em particular, se Y é fechado, então $Y \in \mathscr{Z}_Y$; e portanto, $\overline{Y} \subseteq Y$. Como $Y \subseteq \overline{Y}$, então $Y = \overline{Y}$. Por outro lado, se $Y = \overline{Y}$, como $\overline{Y}$ é fechado, então Y é fechado. Isso mostra que Y é fechado se, e somente se, $Y = \overline{Y}$. □

Definição (de topologia induzida)**.** Dados um espaço topológico (X, τ) e um subconjunto Y de X, a família

$$\tau_Y = \{Y \cap A | A \in \tau\}$$

é chamada *topologia induzida* por τ em Y.

Anotação 8. Seja (X, τ) um espaço topológico.

(a) Para todo subconjunto Y de X, a família τ_Y é, de fato, uma topologia em Y.

(b) Um subconjunto $Z \subseteq Y$ é fechado na topologia induzida τ_Y se, e somente se, existe um subconjunto fechado $\tilde{Z}$ de X, tal que $Z = \tilde{Z} \cap Y$.

Demonstração.

(a) Vamos mostrar que τ_Y satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição de topologia.

i. Como $\emptyset, X \in \tau$, então $\emptyset = \emptyset \cap Y$ e $Y = Y \cap X$ estão em τ_Y.

ii. Seja $\{B_i\}_{i\in I}$ uma subfamília de τ_Y. Para cada $i \in I$, escolha $A_i \in \tau$ tal que $B_i = A_i \cap Y$. Assim
$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap Y) = Y \cap (\cup_{i\in I} A_i)\,.$$
Como τ é uma topologia em X, então $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$. Logo $\bigcup_{i\in I} B_i = Y \cap (\cup_{i\in I} A_i) \in \tau_Y$.

iii. Sejam $B_1, \ldots, B_n$ uma subfamília finita de τ_Y. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, escolha $A_i \in \tau$ tal que $B_i = A_i \cap Y$. Assim
$$B_1 \cap \cdots \cap B_n = (A_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (A_n \cap Y) = Y \cap (A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$
Como τ é uma topologia em X, então $(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \in \tau$. Logo $(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = Y \cap (A_1 \cap \cdots \cap A_n) \in \tau_Y$.

(b) Lembre que um subconjunto de um espaço topológico é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto. Em particular, um subconjunto $Z \subseteq Y$ é fechado se, e somente se, $Y \setminus Z \in \tau_Y$. Assim, pela definição da topologia induzida, Z é fechado em Y se, e somente se, existe $A \in \tau$ tal que $Y \setminus Z = A \cap Y$. Como $X = A \cup (X \setminus A)$, então $Y = Y \cap X = (Y \cap A) \cup (Y \cap (X \setminus A)) = (Y \setminus Z) \cup (Y \cap (X \setminus A))$. Consequentemente, $Z = Y \setminus (Y \setminus Z) = (Y \cap (X \setminus A))$. Como $A \in \tau$, então $X \setminus A$ é fechado em X. Isso prova o resultado. □

Definição (de subconjunto irredutível)**.** Dado um espaço topológico X, um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito *irredutível* se $Y \neq \emptyset$ e, para quaisquer fechados $Y_1, Y_2 \subseteq X$ tais que $Y = Y_1 \cup Y_2$, temos que $Y_1 = Y$ ou $Y_2 = Y$.

Anotação 9. Todo subconjunto aberto e não vazio de um espaço topológico irredutível é irredutível e denso.

Demonstração. Sejam X um espaço topológico irredutível e Y um subconjunto aberto não vazio de X. Suponha, por contradição, que Y não seja irredutível. Então existem Y_1 e Y_2 subconjuntos fechados próprios de Y tais que $Y = Y_1 \cup Y_2$. Como Y_1 e Y_2 são fechados em Y, existem X_1 e X_2 subconjuntos fechados de X, tais que $Y_1 = Y \cap X_2$ e $Y_2 = Y \cap X_2$. Tome $Y' = Y_2 \cup (X \setminus Y)$. Como Y é aberto em X, então $X \setminus Y$ é fechado, e portanto Y' também é fechado em X. Além disso, como Y_1, Y_2 são subconjuntos próprios de Y por hipótese, então $Y' \neq X$. De fato, $(Y')^c =$

$(Y_2 \cup (X \setminus Y))^c = Y_2^c \cap Y = Y_2^c \cap (Y_1 \cup Y_2) = Y_2^c \cap Y_1 = Y_1 \setminus Y_2$ não é vazio. Assim, $X = Y_1 \cup Y'$, o que contradiz a hipótese de X ser irredutível.

Além disso, Y é denso em X. De fato, se $\overline{Y} \neq X$, então $X = (X \setminus Y) \cup \overline{Y}$. Como $(X \setminus Y)$ é um fechado próprio de X pois, por hipótese, Y é aberto e não vazio, e $\overline{Y}$ é um fechado próprio de X, pois estamos supondo que $\overline{Y} \neq X$, isso contradiz a hipótese de X ser irredutível. □

Anotação 10. Se Y é um subconjunto irredutível de um espaço topológico X, então o fecho de Y em X também é irredutível.

Demonstração. Vamos mostrar a contrapositiva. Se $\overline{Y}$ não for irredutível, então existem Y_1 e Y_2 fechados próprios em $\overline{Y}$ tais que $\overline{Y} = Y_1 \cup Y_2$. Como Y_1 e Y_2 são fechados em $\overline{Y}$, então existem F_1 e F_2 fechados de X tais que $Y_1 = \overline{Y} \cap F_1$ e $Y_2 = \overline{Y} \cap F_2$. Como $\overline{Y}$ é fechado e a interseção de fechados também é um fechado, então Y_1 e Y_2 são fechados em X. Além disso, se $Y \subseteq Y_i$, para algum $i \in \{1,2\}$, então $\overline{Y} \subseteq \overline{Y_i} = Y_i$. Isso contradiria a condição de que $Y_1, Y_2 \subsetneq Y$. Portanto, $Y = (Y \cap Y_1) \cup (Y \cap Y_2)$ não é irredutível. □

Definição (de variedade afim e quase-afim)**.** Uma *variedade afim* é definida como sendo um subconjunto fechado e irredutível de $\mathbf{A}^n$, para algum $n \geq 0$, e uma *variedade quase-afim* é definida como sendo um subconjunto aberto de uma variedade afim.

1.4 Ideais

Definição (ideal de um conjunto)**.** Seja $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, o *ideal* de Y é o subconjunto de A_n dado por

$$I(Y) := \{f \in A_n \mid f(P) = 0 \text{ para todo } P \in Y\}.$$

Anotação 11. Para qualquer subconjunto $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, o conjunto $I(Y)$ é um ideal de A_n.

Demonstração. Primeiro, observe que $I(Y) \neq \emptyset$, pois, como o polinômio nulo se anula em todo ponto de $\mathbf{A}^n$, então $0 \in I(Y)$. Além disso, se $P \in Y$ e $f, g \in I(Y)$, então $(f-g)(P) = f(P) - g(P) = 0$. Ou seja, $I(Y)$ é um subgrupo abeliano de A_n. Por fim, se $P \in Y$, $f \in I(Y)$ e $h \in A$, então $(fh)(P) = f(P)h(P) = 0h(P) = 0$. Isso mostra que $I(Y)$ é um ideal de A_n. □

Definição (de radical de um ideal, e de ideal radical)**.** Dados A um anel e I um ideal de A, o *radical de I* é definido como o conjunto

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^r \in I \text{ para algum } r \geq 1\}.$$

Quando $I = \sqrt{I}$, dizemos que I é um *ideal radical*.

Anotação 12. Sejam A um anel e I um ideal de A.

(a) $\sqrt{I}$ é um ideal de A.

(b) Se I é primo, então I é radical.

Demonstração. (a): Precisamos mostrar que: $\sqrt{I} \neq \emptyset$; que se $a, b \in \sqrt{I}$, então $a - b \in \sqrt{I}$; e que $ax \in \sqrt{I}$ para todo $a \in \sqrt{I}$ e todo $x \in A$. Primeiro, observe que, para todo $a \in I$, temos que $a^1 = a \in I$, ou seja, $a \in \sqrt{I}$. Além disso, como I é ideal, então $I \neq \emptyset$. Assim $\emptyset \neq I \subseteq \sqrt{I}$. Isso mostra que $\sqrt{I} \neq \emptyset$.

Agora, tome $a, b \in \sqrt{I}$. Por definição, existem $r, s \geq 0$ tais que $a^r, b^s \in I$. Assim, temos que $(a-b)^{r+s} \in I$. De fato, $(a-b)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} \binom{r+s}{i} a^{r+s-i}(-b)^i$. Agora, se $0 \leq i \leq s$, então $r + s - i \geq r$, o que implica que $a^{r+s-i} \in I$, e consequentemente, $\binom{r+s}{i} a^{r+s-i}(-b)^i \in I$. Caso contrário, se $i > s$, então $b^s \in I$, e consequentemente, $\binom{r+s}{i} a^{r+s-i}(-b)^i \in I$. Assim, $(a-b)^{r+s}$ é uma soma de termos de I. Como I é um ideal, então $(a-b)^{r+s} \in I$; e consequentemente, $a - b \in \sqrt{I}$.

Por fim, sejam $a \in \sqrt{I}$ e $x \in A$. Por definição, existe $r > 0$ tal que $a^r \in I$. Assim $(ax)^r = a^r x^r \in I$. Isso implica que $ax \in \sqrt{I}$.

(b): Seja I um ideal primo. Se $x \in I$, então $x^1 = x \in I$; e consequentemente, $x \in \sqrt{I}$. Logo $I \subseteq \sqrt{I}$.

Por outro lado, tome $x \in \sqrt{I}$ e $r > 0$ tal que $x^r \in I$. Vamos usar indução para mostrar que $x \in I$. Se $r = 1$, então $x = x^1 \in I$. Agora, supondo que $r > 1$, temos que $x^r = xx^{r-1} \in I$. Como I é um ideal primo, então $x \in I$ ou $x^{r-1} \in I$. No primeiro caso, temos que $x \in I$. No segundo caso, temos que $x^{r-1} \in I$; e o resultado segue da hipótese de indução. Logo, se $x \in \sqrt{I}$, então $x \in I$; ou seja, $\sqrt{I} \subseteq I$. □

Proposição 1.2. Seja $n \geq 0$.

(a) Se $T_1 \subseteq T_2$ são subconjuntos de A_n, então $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

(b) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos de $\mathbf{A}^n$, então $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(c) Para quaisquer subconjuntos $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbf{A}^n$, temos que $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(d) Para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_n$, temos que $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(e) Para todo subconjunto $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, temos que $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

Demonstração. (a): Se P é um ponto de $Z(T_2)$, então $f(P) = 0$ para todo polinômio f em T_2. Em particular, $q(P) = 0$ para todo q em T_1, pois $T_1 \subseteq T_2$. Assim, P também está em $Z(T_2)$.

(b): Se f é um polinômio qualquer em $I(Y_2)$, então $f(P) = 0$ para todo P em Y_2. Como $Y_1 \subseteq Y_2$, então $f(Q) = 0$ para todo ponto Q em Y_1. Portanto f também está em $I(Y_1)$.

(c): Como $Y_1, Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$, então pelo item (b), $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_1)$ e $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_2)$. Assim $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Para mostrar a outra continência, tomamos um polinômio qualquer f em $I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Como f se anula em todo ponto de Y_1 e todo ponto de Y_2, então $f(P) = 0$ para todo P em $Y_1 \cup Y_2$, ou seja, $f \in I(Y_1 \cup Y_2)$. Assim $I(Y_1) \cap I(Y_2) \subseteq I(Y_1 \cup Y_2)$. Portanto, $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(d): A inclusão $\subseteq$ segue do Teorema de zeros de Hilbert. Para mostrar a inclusão $\supseteq$, observe que, se $f^n \in \mathfrak{a}$, então $f(P)^n = f^n(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$. Como $f(P) \in k$, então $f(P)^n = 0$ se, e somente se, $f(P) = 0$; ou seja, se e somente se, $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$.

(e): Para mostrar a inclusão $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$, lembre que $Z(I(Y))$ é fechado e observe que $Y \subseteq Z(I(Y))$ (pois $f(P) = 0$ para todo $P \in Y$ e $f \in I(Y)$). Como $\overline{Y}$ é o menor fechado contendo Y, então $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$.

Para mostrar a inclusão $Z(I(Y)) \subseteq \overline{Y}$, suponha que W seja um fechado contendo Y e escolha um ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_n$ tal que $W = Z(\mathfrak{a})$. Como $Y \subseteq W = Z(\mathfrak{a})$, pelo item (b), temos que $I(Y) \supseteq I(Z(\mathfrak{a}))$; e pelo item (d), temos que $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Y)$. Como $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, então $\mathfrak{a} \subseteq I(Y)$. Agora, pelo item (a), temos que $W = Z(\mathfrak{a}) \supseteq Z(I(Y))$. Como $\overline{Y}$ é a interseção de todos os fechados contendo Y, segue daí que $Z(I(Y)) \subseteq \overline{Y}$. □

Teorema (de zeros de Hilbert)**.** Seja $n \geq 0$. Para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A_n$, temos que $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Demonstração. Ver [2, Theorem 32]. □

Corolário 1.3. Para cada $n \geq 0$, temos que $I(-)$ e $Z(-)$ induzem bijeções:

$$\begin{tikzcd} \{\text{ideais radicais de } A_n\} \arrow[r, bend left, "Z(-)"] & \{\text{subconjuntos fechados de } \mathbf{A}^n\}, \arrow[l, bend left, "I(-)"] \end{tikzcd}$$

que invertem inclusões. Além disso, um subconjunto fechado $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ é irredutível se, e somente se, $I(Y)$ é um ideal primo de A_n.

Demonstração. Pela Proposição 1.2, partes (d) e (e), $I(-)$ e $Z(-)$ induzem bijeções entre as famílias de ideais radicais de A_n e de subconjuntos fechados de $\mathbf{A}^n$; e pela Proposição 1.2, partes (a) e (b), $I(-)$ e $Z(-)$ invertem inclusões.

Para mostrar a parte *além disso*, considere um ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A_n$. Queremos mostrar que $Z(\mathfrak{p})$ é irredutível. Se Y_1, Y_2 são subconjuntos fechados de $\mathbf{A}^n$ tais que $Z(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$, então pela Proposição 1.2, temos que:

$$\sqrt{\mathfrak{p}} = I(Z(\mathfrak{p})) = I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2).$$

Como $\mathfrak{p}$ é primo, então $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Portanto $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Agora, suponha que $\mathfrak{p} \neq I(Y_1)$ e $\mathfrak{p} \neq I(Y_2)$. Como $\mathfrak{p} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ por hipótese, então $\mathfrak{p} \subsetneq I(Y_1)$ e $\mathfrak{p} \subsetneq I(Y_2)$. Assim, existem $a \in I(Y_1) \setminus \mathfrak{p}$ e $b \in I(Y_2) \setminus \mathfrak{p}$. Observe que, como $I(Y_1)$ e $I(Y_2)$ são ideais (Anotação 11), então $ab \in I(Y_1) \cap I(Y_2) \subseteq \mathfrak{p}$. Isso contradiz o fato de que $\mathfrak{p}$ é um ideal primo. Logo $\mathfrak{p} = I(Y_1)$ ou $\mathfrak{p} = I(Y_2)$, e consequentemente, $Z(\mathfrak{p}) = Z(I(Y_1)) = Y_1$ ou $Z(\mathfrak{p}) = Z(I(Y_2)) = Y_2$. □

Anotação 13. Um ideal $\mathfrak{m} \subseteq A_n$ é maximal se, e somente se, $\mathfrak{m} = I(P)$ para algum $P \in \mathbf{A}^n$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de A_n, então $\mathfrak{m}$ é um ideal primo. Assim, se $Y = Z(\mathfrak{m})$, então Y é uma variedade afim. Como, por definição Y é não vazio, podemos tomar P um ponto em Y e pela Proposição 1.2 temos que $\mathfrak{m} = I(Y) \subseteq I(P)$. Mas $I(P) \neq A_n$ pois P não é raiz de nenhum polinômio constante não nulo. Assim, como, por hipótese, $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal, então $I(P) = \mathfrak{m}$.

($\Leftarrow$) Agora, suponha que $\mathfrak{m} = I(P)$ para algum $P \in \mathbf{A}^n$. Se J é um ideal de A_n contendo $\mathfrak{m}$, então $Z(J) \subseteq Z(\mathfrak{m}) = \{P\}$, então $Z(J) = \emptyset$ ou $Z(J) = P$. No primeiro caso, $\sqrt{J} = I(Z(J)) = I(\emptyset) = A_n$; e assim, $J = A_n$. No segundo caso, $\sqrt{J} = I(Z(J)) = I(P) = \mathfrak{m}$, então $J \subseteq \mathfrak{m}$. Mas, como estamos supondo $\mathfrak{m} \subseteq J$, então $J = \mathfrak{m}$. Logo $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal. □

Definição (de álgebra finitamente gerada)**.** Dada uma álgebra A sobre um corpo k, dizemos que A é uma álgebra *finitamente gerada* sobre k se A é finitamente gerada como um anel sobre k, ou seja, se existe um subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de A tal que todo elemento $p \in A$ pode ser escrito da forma

$$p = \sum_{i=0}^{r} a_i x_1^{d_{1i}} \ldots x_n^{d_{n1}}, \qquad \text{onde } a_i \in k \text{ e } d_{1i}, \ldots, d_{ni} \in \mathbb{Z}^+.$$

Anotação 14.

(a) Para todo $n \geq 0$, o anel de polinômios em n variáveis $k[x_1,\ldots,x_n]$ é uma k-álgebra finitamente gerada.

(b) Seja A uma k-álgebra finitamente gerada. Se I é um ideal de A, então A/I é uma k-álgebra finitamente gerada.

(c) Seja A uma k-álgebra, se A é finitamente gerada, então existem $n \in \mathbb{N}$ e I um ideal de $k[x_1,\ldots,x_n]$ tais que $A \cong k[x_1,\ldots,x_n]/I$. Além disso, A é um domínio de integridade se, somente se, I é um ideal primo.

Demonstração. (a): Pela definição do anel de polinômios, cada elemento de $k[x_1,\ldots,x_n]$ é um polinômio em $x_1,\ldots,x_n$ com coeficientes em k. Assim, como o conjunto $\{x_1,\ldots,x_n\}$ é finito, então $k[x_1,\ldots,x_n]$ é uma k-álgebra finitamente gerada.

(b): Suponha que A é uma álgebra finitamente gerada por elementos $a_1,\ldots,a_n$. Assim, todo elemento de A pode ser escrito como um polinômio em $\{a_1,\ldots,a_n\}$ com coeficientes em k. Como a projeção canônica $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$, $\pi(a) = a+I$, é um homomorfismo sobrejetor de anéis, temos que A/I é uma k-álgebra finitamente gerada pelos elementos $\{a_1+I,\ldots,a_n+I\}$ com coeficientes em k.

(c): Se A é uma k-álgebra finitamente gerada, então existem $y_1,\ldots,y_n \in A$ tais que A é gerada por $\{y_1,\ldots,y_n\}$. Usando o Lema 1.14(a), existe um único homomorfismo de k-álgebras $\phi : k[x_1,\ldots,x_n] \to A$ que satisfaz $\phi(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Em particular, $\phi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(y_1,\ldots,y_n)$ para cada $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, e como $\{y_1,\ldots,y_n\}$ é um conjunto gerador de A, então ϕ é sobrejetor. De fato, dado $a \in A$, podemos escrever

$$a = \sum_{i=0}^{m} a_i y_1^{d_{1,i}} \ldots y_n^{d_{n,i}}, \qquad \text{para algum } m \in \mathbb{N},$$

para alguns $a_i \in k$ para cada $i \in \{0,\ldots,m\}$. Tomando $f_a \in k[x_1,\ldots,x_n]$ tal que

$$f_a(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=0}^{m} a_i x_1^{d_{1,i}} \ldots x_n^{d_{n,i}},$$

então $a = \phi(f)$. Assim, seja $I = \ker(\phi)$, pelo Primeiro Teorema de Isomorfismos de anéis, temos que $k[x_1,\ldots,x_n]/I \cong A$. Isso mostra a primeira afirmação.

Para mostrar a parte *além disso*, basta lembrar que se I é um ideal de $k[x_1,\ldots,x_n]$, então $k[x_1,\ldots,x_n]/I$ é um domínio se, e somente se, I é primo. □

Definição (de anel de coordenadas afim)**.** Dados $n \geq 0$ e uma variedade afim $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, definimos o *anel de coordenadas afim* de Y como sendo $A(Y) := k[x_1,\ldots,x_n]/I(Y)$.

Anotação 15. Sejam $n \geq 0$ e $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ uma variedade afim.

(a) $A(Y)$ é um domínio de integridade.

(b) $A(Y)$ é uma k-álgebra finitamente gerada.

Demonstração. (a): Como $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ é uma variedade afim, então Y é um conjunto algébrico irredutível. Pelo Corolário 1.3, $I(Y)$ é um ideal primo. Portanto $A(Y) = A/I(Y)$ é um domínio de integridade.

(b): Segue direto da Anotação 14, pois $A(Y) = A_n/I(Y)$. □

Definição (de espaço topológico noetheriano)**.** Um espaço topológico X é chamado de *noetheriano* se para qualquer cadeia decrescente $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ de subconjuntos fechados de X, existe m inteiro positivo tal que $Y_k = Y_m$ para todo $k \geq m$.

Proposição 1.4. Se X é um espaço topológico noetheriano, então todo subconjunto fechado $Y \subseteq X$ pode ser escrito como uma união finita $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ de subconjuntos fechados irredutíveis de X. Além disso, se supomos também que $Y_i \nsubseteq Y_j$ para todo $i \neq j$, então os subconjuntos $Y_1, \ldots, Y_r$ são unicamente determinados.

Demonstração. Para mostrar que esta decomposição existe, tome $\mathfrak{S}$ como sendo a família de todos os subconjuntos fechados de X que não podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis de X. Supondo que $\mathfrak{S}$ é não-vazia, então pelo Exercício **1.7a**, $\mathfrak{S}$ tem um elemento minimal Y. Como $Y \in \mathfrak{S}$, então Y é redutível. Assim, tome Y', Y'' fechados em Y tais que $Y = Y' \cup Y''$. Como Y é minimal em $\mathfrak{S}$, então $Y', Y'' \notin \mathfrak{S}$, ou seja, Y' e Y'' podem ser escritos como uniões finitas de sunconjuntos fechados irredutíveis de X. Assim, como $Y = Y' \cup Y''$, então Y também pode ser escrito como união finita de subconjuntos fechados irredutíveis de X. Isso contradiz a construção de $\mathfrak{S}$. Portanto $\mathfrak{S} = \emptyset$, ou seja, se Y é fechado em X, então Y pode ser escrito como uma união finita de subconjuntos fechados irredtuíveis de X.

Agora, tome $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$, onde, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, Y_i é fechado e irredutível e $Y_i \subsetneq Y_j$, se $i \neq j$. A unicidade desta representação segue por indução em r. Se $r = 1$, então Y é um fechado irredutível e, portanto, não pode ser escrito como união de subconjuntos fechados próprios. Supondo que r é um inteiro maior que 1 e que a unicidade desta representação vale para o fechado $Y \setminus Y_r = Y_1 \cup \cdots \cup Y_{r-1}$. Temos que, se $Y = Y_1' \cup \ldots Y_s'$ é uma outra representação de Y em fechados irredutíveis. Então, como $Y_r \subseteq Y$ e Y_r é um fechado de Y, então $Y_r = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, s\}} (Y_r \cap Y_i')$. Mas, como Y_r é irredutível, então $Y_r = Y_r \cap Y_i'$ para algum i, ou seja, $Y_2 \subseteq Y_i'$. De modo equivalente, temos que $Y_i' = \bigcup_{j \in \{1,\ldots,r\}} (Y_i' \cap Y_j)$ e que $Y_i' \subseteq Y_j$ para algum j. Logo, temos que $Y_r = Y_i'$, para agum $i \in \{1,\ldots,s\}$. Logo, temos que $Y \setminus Y_r = Y \setminus Y_i'$. Portanto, como estamos supondo a unicidade da representação em fechados irredutíveis para $Y_r \setminus Y_r$ e $Y_r = Y_i'$, temos que esta representação também é única para Y. □

Corolário 1.5. Todo conjunto algébrico em $\mathbf{A}^n$ pode ser escrito de forma única como união finita de variedades afins não-contidas umas nas outras.

Demonstração. Vamos começar mostrando que todo conjunto algébrico é noetheriano. Seja $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ uma cadeia de subconjuntos fechados de $\mathbf{A}^n$, então, pela Proposição 1.2, $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \cdots$ é uma cadeia de ideais em A_n. Pela Anotação 3, A_n é um anel noetheriano, assim, existe $k > 0$ tal que se $i \geq k$, então $I(Y_i) = I(Y_{i+i})$. Além disso, pela Proposição 1.2 novamente, temos que $Z(I(Y_i)) = Y_i$ para todo $i > 0$, já que cada Y_i é fechado em $\mathbf{A}^n$. Assim, temos que se $i \geq k$, então $Y_i = Y_{i+1}$. Isso mostra que $\mathbf{A}^n$ é noetheriano. O resultado do corolário segue da Proposição 1.4. □

1.5 Dimensão

Definição (de dimensão de espaços topológicos)**.** Dado um espaço topológico X, a *dimensão de X* é definida como sendo o maior inteiro positivo n tal que exista uma cadeia $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ de subconjuntos fechados irredutíveis distintos de X.

Definição (de altura de ideais primos e dimensão de Krull)**.** Dado um anel A, a *altura de um ideal primo* p de A é definida como o maior inteiro n tal que exista uma cadeia $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n = p$ de distintos ideais primos de A; e será denotada por $\mathrm{ht}(p)$. A *dimensão de Krull* de A é o supremo das alturas de todos os ideais primos de A.

Anotação 16. Sejam A e B anéis e $\phi : A \to B$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis com núcleo N.

(a) Um ideal $I \subseteq B$ é primo se, e somente se, $\phi^{-1}(I)$ é um ideal primo de A tal que $N \subseteq \phi^{-1}(I)$.

(b) um ideal $I \subseteq B$ é maximal se, e somente se, $\phi^{-1}(I)$ é um ideal maximal de A tal que $N \subseteq \phi^{-1}(I)$.

Demonstração. (a) ($\Rightarrow$) Temos que $N \subseteq \phi^{-1}(I)$ pois, como I é um ideal, então $0 \in I$. Assim, $N = \phi^{-1}(0) \subseteq \phi^{-1}(I)$. Agora, considere $x, y \in A$ tais que $xy \in \phi^{-1}(I)$. Como $\phi(xy) \in I$, então $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \in I$. Como I é um ideal primo, então $\phi(x) \in I$ ou $\phi(y) \in I$. Logo $x \in \phi^{-1}(I)$ ou $y \in \phi^{-1}(I)$, ou seja, $\phi^{-1}(I)$ é um ideal primo de A.

($\Leftarrow$) Suponha que $\phi^{-1}(I)$ é um ideal primo de A tal que $N \subseteq \phi^{-1}(I)$. Tome $a, b \in B$ tais que $ab \in I$. Como ϕ é sobrejetora, então existem $x, y \in A$, $z \in \phi^{-1}(I)$, tais que $a = \phi(x)$, $b = \phi(y)$ e $ab = \phi(z)$. Assim, $\phi(xy - z) = \phi(x)\phi(y) - \phi(z) = ab - ab = 0$; ou seja, $xy - z \in N$. Como $N \subseteq \phi^{-1}(I)$ e $z \in \phi^{-1}(I)$, então $xy \in \phi^{-1}(I)$. Como $\phi^{-1}(I)$ é primo, então $x \in \phi^{-1}(I)$ ou $y \in \phi^{-1}(I)$. Isso mostra que $a = \phi(x) \in I$ ou $b = \phi(y) \in I$; ou seja, que I é um ideal primo.

(b) ($\Rightarrow$) Temos que $N \subseteq \phi^{-1}(I)$ pois, como $0 \in I$, então $N = \phi^{-1}(0) \subseteq \phi^{-1}(I)$. Além disso, $\phi^{-1}(I)$ é maximal pois se $J \subseteq A$ é um ideal contendo $\phi^{-1}(I)$, temos que $I \subseteq \phi(J)$, pois ϕ é sobrejetiva. Assim, como I é maximal, então $\phi(J) = I$ ou $\phi(J) = A$. Se $\phi(J) = I$, então $J \subseteq \phi^{-1}(I)$ e com isso, $J = \phi^{-1}(I)$. Se $\phi(J) = B$, então $J = A$ pois dado $a \in A$, como $\phi(J) = B$, existe $j \in J$ tal que $\phi(j) = \phi(a)$, assim $a - j \in N \subseteq J$. Logo, $a \in J$.

($\Leftarrow$) Supondo que $\phi^{-1}(I)$ é um ideal maximal de A, se tomarmos um ideal $J \subseteq B$ contendo I, então $\phi^{-1}(I) \subseteq \phi^{-1}(J)$. Assim, como $\phi^{-1}(I)$ é maximal, então $\phi^{-1}(J) = \phi^{-1}(I)$ ou $\phi^{-1}(J) = A$. Além disso, como ϕ é um homomorfismo sobrejetivo, então $J = \phi(\phi^{-1}(J))$. Logo, $J = \phi(\phi^{-1}(J)) = \phi(\phi^{-1}(I)) = I$ ou $J = \phi(A) = B$. Portanto, I é um ideal maximal. $\square$

Proposição 1.6. Se Y é um conjunto algébrico afim, então $\dim(Y) = \dim A(Y)$.

Demonstração. Denote $r := \dim Y$ e considere uma cadeia $\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_r \subseteq Y$ de subconjuntos fechados irredutíveis de Y. Lembre do Corolário 1.3 que um subconjunto $Z \subseteq Y$ é fechado e irredutível em Y se, e somente se, $I(Z)$ é um ideal primo de A_n tal que $I(Y) \subseteq I(Z)$; e que $Z = Y$ se, e somente se, $I(Z) = I(Y)$. Assim, $A_n \supsetneq I(Y_0) \supsetneq I(Y_1) \supsetneq \cdots \supsetneq I(Y_r) \supseteq I(Y)$ é uma cadeia de ideais primos de A_n. Além disso, como a projeção canônica $\pi : A_n \twoheadrightarrow A_n/I(Y) = A(Y)$ é sobrejetiva, pela Anotação 16, $A(Y) \supseteq \pi(I(Y_0)) \supseteq \pi(I(Y_1)) \supseteq \cdots \supseteq \pi(I(Y_r))$ é uma cadeia de ideais primos de $A(Y)$, e pelos Teoremas de Isomorfismo de Anéis, $\pi(I(Y_0)) \supsetneq \pi(I(Y_1)) \supsetneq \cdots \supsetneq \pi(I(Y_r))$. Isso implica que $\dim A(Y) \geq r = \dim Y$.

Por outro lado, denote $s := \dim A(Y)$ e considere uma cadeia maximal de ideais primos $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s \subseteq A(Y)$. Pelos Teoremas de Isomorfismo de Anéis e pela Anotação 16, temos que $I(Y) \subseteq \pi^{-1}(P_0) \subsetneq \pi^{-1}(P_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \pi^{-1}(P_s) \subseteq A_n$ é uma cadeia de ideais primos e distintos de A_n. Agora, pelo Corolário 1.3, temos que $Y \subseteq Z(\pi^{-1}(P_0)) \subsetneq Z(\pi^{-1}(P_1)) \subsetneq \cdots \subsetneq$

$Z(\pi^{-1}(P_s)) \subseteq \mathbf{A}^n$ é uma cadeia de subconjuntos irredutíveis e distintos de $\mathbf{A}^n$. Isso implica que $\dim Y \geq s = \dim A(Y)$. $\square$

Teorema 1.7. Seja B uma k-álgebra finitamente gerada que é um domínio de integridade.

(a) A dimensão de B é igual ao grau de transcendência de $K(B)$, o seu corpo de frações.

(b) Para qualquer ideal primo p de B, temos que

$$\mathrm{ht}(p) + \dim(B/p) = \dim B.$$

Demonstração. Matsumura [5, Ch. 5, §14] $\square$

Proposição 1.8. A dimensão de $\mathbf{A}^n$ é n.

Demonstração. Pela Proposição 1.6, $\dim \mathbf{A}^n = \dim A(\mathbf{A}^n)$. Como $I(\mathbf{A}^n) = \{0\}$, então $A(\mathbf{A}^n) = k[x_1, \ldots, x_n]/\{0\} = k[x_1, \ldots, x_n]$. Pelo Teorema 1.7(a), $\dim(k[x_1, \ldots, x_n]) = n$. Assim, $\dim \mathbf{A}^n = \dim A(\mathbf{A}^n) = \dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$. $\square$

Proposição 1.9. Se Y é uma variedade quase-afim, então $\dim(Y) = \dim(\overline{Y})$.

Demonstração. Considere uma cadeia $\emptyset \subsetneq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subseteq Y$ de subconjuntos fechados irredutíveis de Y. Observe que, pela Anotação 10, $\emptyset \subsetneq \overline{Z_0} \subseteq \overline{Z_1} \subseteq \cdots \subseteq \overline{Z_r} \subseteq \overline{Y}$ é uma cadeia de subconjuntos fechados irredutíveis de $\overline{Y}$. (Durante toda essa demonstração, $\overline{\cdot}$ denotará o fecho de um conjunto em X.) Observe ainda que, se $\overline{Z_i} = \overline{Z_{i+1}}$ para algum $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, então $Z_i = \overline{Z_i} \cap Y = \overline{Z_{i+1}} \cap Y = Z_{i+1}$ (pela Anotação 7). Como, por construção, $Z_i \subsetneq Z_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \ldots, r-1\}$, então $\overline{Z_i} \subsetneq \overline{Z_{i+1}}$. Isso implica que $\dim Y \leq \dim \overline{Y}$.

Agora, suponha que $r = \dim Y$. Vamos mostrar que a cadeia de fechados irredutíveis $\emptyset \subsetneq \overline{Z_0} \subsetneq \overline{Z_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Z_r} \subseteq \overline{Y}$ é maximal. Suponha que existam $i \in \{0, \ldots, r-1\}$ e um fechado irredutível V de $\overline{Y}$, tais que $\overline{Z_i} \subseteq V \subseteq \overline{Z_{i+1}}$. Observe que $V \cap Y$ seria um fechado irredutível de Y. De fato, tome $V_1, V_2 \subseteq Y$ fechados tais que $V \cap Y = V_1 \cup V_2$. Assim, temos

$$V = (V \cap Y) \cup (V \setminus Y) = V_1 \cup V_2 \cup (V \setminus Y). \tag{1.1}$$

Como Y é uma variedade quase-afim, então Y é aberta em $\overline{Y}$. Consequentemente, $\overline{Y} \setminus Y$ é fechado em $\overline{Y}$, e $V \setminus Y$ é fechado em V. Da equação (1.1) e da irredutibilidade de V, segue que $V = V_1$ ou $V = V_2 \cup (V \setminus Y)$. Ainda mais, pela irredutibilidade de V, neste segundo caso, temos que $V = V_2$ ou $V = V \setminus Y$. Considerando essas três opções: se $V = V_1$, então $V \cap Y = V_1$; se

$V = V_2$, então $V \cap Y = V_2$; e se $V = V \setminus Y$, então $V \cap Y = \emptyset$. Como $V \cap Y \supseteq \overline{Z_i} \cap Y = Z_i \supsetneq \emptyset$, essa última opção é impossível. Isso mostra que $V \cap Y$ é um fechado irredutível de Y.

Lembre que $\overline{Z_i} \subseteq V \subseteq \overline{Z_{i+1}}$. Como $Z_i = \overline{Z_i} \cap Y$ para todo $i \in \{0, \dots, r\}$ (pela Anotação 7) e, por hipótese, a cadeia $\emptyset \subsetneq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_r \subseteq Y$ é maximal dentre todas as cadeias de subconjuntos fechados irredutíveis de Y (porque $r = \dim Y$), então $Z_i = V \cap Y$ ou $V \cap Y = Z_{i+1}$. No primeiro caso, segue que $V = \overline{V \cap Y} = \overline{Z_i}$, e no segundo caso, segue que $V = \overline{Z_{i+1}}$. □

Teorema 1.10 (do ideal principal de Krull)**.** Seja A um anel noetheriano. Se $f \in A$ é um elemento que não é nem uma unidade, nem um divisor de zero, então todo ideal primo minimal contendo f tem altura 1.

Demonstração. Atiyah-MacDonald [1, Corollary 11.17, p. 122] □

Proposição 1.11. Seja A um domínio noetheriano. Todo ideal primo de A com altura 1 é principal se, e somente se, A é um domínio de fatoração única.

Demonstração. Matsumura [5, Theorem 47, p. 141] □

Proposição 1.12. Uma variedade afim Y em $\mathbf{A}^n$ tem dimensão $n-1$ se, e somente se, $Y = Z(f)$ para algum polinômio f irredutível e não constante em A_n.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como Y é uma variedade, então pelo Corolário 1.3, $I(Y)$ é um ideal primo. Pela Proposição 1.6, $\dim Y = \dim A(Y)$; pelo Teorema 1.7(b), $\dim(A(Y)) = \dim A_n - \operatorname{ht}(I(Y))$; e pelo Teorema 1.7(a), $\dim A_n = n$. Assim, se $\dim Y = n-1$, então $\operatorname{ht} I(Y) = 1$. Como A_n é um domínio de fatoração única, pela Proposição 1.11, $I(Y)$ é um ideal principal. Logo, existe $f \in A_n$ tal que $\langle f \rangle = I(Y)$, e consequentemente, $Y = Z(f)$. Além disso, como $I(Y) = \langle f \rangle$ é um ideal primo, então f é um polinômio primo; e como A_n é um domínio, então f é irredutível. Por fim, se f fosse constante, então $f = 0$ ou $f \neq 0$. No primeiro caso, $Y = Z(\langle 0 \rangle) = \mathbf{A}^n$ não tem dimensão $n-1$; e no segundo caso, $Y = Z(\langle f \rangle) = \emptyset$ não é uma variedade afim. Isso mostra que f não é constante.

($\Leftarrow$) Se $f \in A_n$ é um polinômio irredutível e não constante, então $\langle f \rangle$ é um ideal primo. Assim, pelo Corolário 1.3, $Z(f) = Z(\langle f \rangle)$ é uma variedade afim de $\mathbf{A}^n$; pela Proposição 1.6, $\dim Z(f) = \dim A(Z(f))$; pela Proposição 1.2(d), $I(Z(f)) = \sqrt{\langle f \rangle}$; pela Anotação 12(b), $\langle f \rangle = \sqrt{\langle f \rangle}$; e pelo Teorema 1.7, $\dim A(Z(f)) = \dim A_n - \operatorname{ht}\langle f \rangle = n - \operatorname{ht}\langle f \rangle$. Como A_n é um domínio, então f não é um divisor de zero. Além disso, por hipótese, f é irredutível, logo não é constante. Assim, como A_n é um anel noetheriano (Anotação 3) e $\langle f \rangle$ é um ideal minimal contendo f, então, pelo Teorema 1.10, $\operatorname{ht}\langle f \rangle = 1$. Assim, $\dim Z(f) = n-1$. □

Exercícios Resolvidos e Lemas Auxiliares

Lema 1.13 (Pequeno Teorema de Bezout)**.** Seja K um corpo. Para todos $p \in K[x]$ e $r \in K$, existe $q \in K[x]$ tal que

$$p(x) = q(x)(x-r) + p(r).$$

Além disso, se K é o corpo de frações de um domínio R, $p \in R[x]$ e $r \in R$, então $q \in R[x]$.

Demonstração. Denote $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Observe que $p(x) - p(r) = a_n(x^n - r^n) + \cdots + a_1(x-r)$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, temos que $\frac{x^i - r^i}{x-r} = \sum_{j=0}^{i-1} r^j x^{i-j-1}$, pois

$$\begin{aligned}
(x-r)\sum_{j=0}^{i-1} r^j x^{i-j-1} &= \sum_{j=0}^{i-1} r^j x^{i-j} - \sum_{j=0}^{i-1} r^{j+1} x^{i-j-1} \\
&= \left(x^i + \sum_{j=1}^{i-1} r^j x^{i-j}\right) - \left(r^i + \sum_{j=0}^{i-2} r^{j+1} x^{i-(j+1)}\right) \\
&= x^i + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left(r^j x^{i-j}\right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(r^k x^{i-k}\right)\right) - r^i \\
&= x^i - r^i.
\end{aligned}$$

Assim, colocando $(x-r)$ em evidência em $p(x) - p(r)$, temos

$$p(x) - p(r) = (x-r)\left[a_n \frac{x^n - r^n}{x-r} + \cdots + a_2 \frac{x^2 - r^2}{x-r} + a_1\right].$$

Como $\frac{x^i - r^i}{x-r} = \sum_{j=0}^{i-1} r^j x^{i-j-1} \in R[x]$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, então $q(x) := a_n \frac{x^n - r^n}{x-r} + \cdots + a_2 \frac{x^2 - r^2}{x-r} + a_1 \in K[x]$ e $p(x) = (x-r)q(x) + p(r)$.

Além disso, se K é o corpo de frações de um domínio R, $p \in R[x]$ e $r \in R$, tomando $q(x)$ como no parágrafo acima, temos que $q \in R[x]$. De fato, como $p \in R[x]$ e $r \in R$, então para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$, $\frac{x^i - r^i}{x-r} = \sum_{j=0}^{i-1} r^j x^{i-j-1} \in R[x]$. $\square$

1.1 (a) Seja Y a curva plana $y = x^2$ (i.e. Y é o conjunto de zeros do polinômio $f = y - x^2$). Mostre que $A(Y)$ é isomorfa ao anel de polinômios em uma variável.

Considere o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned}
\phi : k[x,y] &\to k[t] \\
f(x,y) &\mapsto f(t,t^2).
\end{aligned}$$

Vamos usar o Teorema de Isomorfismos de Anéis para mostrar que

$$A(Y) := k[x,y]/I(Y) = k[x,y]/\langle y-x^2\rangle \cong k[t].$$

Seja $f \in \ker(\phi)$ e considere f como um polinômio em $k(x)[y]$. Como $K = k(x)$ é o corpo de frações do domínio $R = k[x]$ e $x^2 \in k[x]$, pelo Lema 1.13, existe $q \in R[y] = k[x,y]$ tal que $f(x,y) = (y-x^2)q(x,y) + f(x,x^2)$. Como $f \in \ker\phi$, então $f(x,x^2) = \phi(f) = 0$. Portanto $f(x,y) = (y-x^2)q(x,y) \in \langle y-x^2\rangle$. Isso mostra que $\ker(\phi) \subseteq \langle y-x^2\rangle$. Por outro lado, $\langle y-x^2\rangle \subseteq \ker(\phi)$, pois $\phi(y-x^2) = t^2-t^2 = 0$. Assim, $\ker(\phi) = \langle y-x^2\rangle$.

Agora, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva. De fato, se $f(t) = \sum_{i=0}^n f_i t^i \in k[t]$, então $f = \phi(g)$, onde $g(x,y) = \sum_i^n f_i x^i \in k[x,y]$. Isso implica que $k[x,y]/\langle y-x^2\rangle \cong k[t]$.

Por fim, note que $Y = Z(y-x^2) = Z(\langle y-x^2\rangle)$ pela Anotação 2. Assim, $I(Y) = I(Z(\langle y-x^2\rangle)) = \sqrt{\langle y-x^2\rangle}$ pela Proposição 1.2(d) e pela Anotação 12(b). Como $k[x,y]/\langle y-x^2\rangle \cong k[t]$ é um domínio, então $\langle y-x^2\rangle$ é um ideal primo de $k[x,y]$. Assim, $I(Y) = \sqrt{\langle y-x^2\rangle} = \langle y-x^2\rangle$.

(b) Seja Z a curva $xy = 1$. Mostre que $A(Z)$ não é isomorfa ao anel de polinômios em uma variável.

Primeiro, vamos mostrar que $xy-1$ é um polinômio irredutível. Para isso, sejam $f,g \in k[x,y]$ tais que $fg = xy-1$. Como $fg = xy-1$ não é uma unidade de $k[x,y]$, podemos supor, sem perda de generalidade, que f não é um polinômio constante. Assim, supondo que $grau_x(f) \neq 0$, como $grau_x(xy-1) = 1$, então $grau_x(f) = 1$ e $grau_x(g) = 0$. Com isso, temos dois casos: $grau_y(g) = 0$ e $grau_y(g) = 1$. No primeiro caso, $grau_x(g) = grau_y(g) = 0$, ou seja g é constante. No segundo, se $grau_y(g) = 1$, então $grau_y(f) = 0$. Assim, sejam $f(x,y) = ax+b$ e $g(x,y) = cy+d$, $a,b,c,d \in k$, então $(fg)(x,y) = ac(xy)+ad(x)+bc(y)+bd$. Como $fg = xy-1$, então $ac = 1$, logo $a,c \neq 0$ e $d = b = 0$, o que implica que $bd = 0 \neq -1$, uma contradição. Logo, temos que, se $fg = xy-1$ e $grau_x(f) \neq 0$, então g é uma constante e o mesmo acontece se tomarmos inicialmente, $grau_y(f) \neq 0$. Portanto, $xy-1$ é irredutível.

Assim, como $Z = Z(xy-1) = Z(\langle xy-1\rangle)$ pela Anotação 2, então $A(Z) = k[x,y]/I(Z(\langle xy-1\rangle)) = k[x,y]/\sqrt{\langle xy-1\rangle} = k[x,y]/\langle xy-1\rangle$ pela Proposição 1.2(d) e Anotação 12(b). Agora, suponha que exista um isomorfismo de anéis $\psi : A(Z) = k[x,y]/\langle xy-1\rangle \to k[t]$. Se $a \in k\setminus 0$, então $1 = \psi(1) = \psi(aa^{-1}) = \psi(a)\psi(a^{-1})$, ou seja, $\psi(a)$ é invertível em $k[t]$. Como o grupo de unidades de $k[t]$ é $k\setminus\{0\}$, então

$\psi(a) \in k \setminus \{0\}$. Agora, considere $\psi(x) =: p(t) = a_0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n \in k[t]$ para alguns $a_0, a_1, \ldots, a_n \in k$. Como $1 = \psi(1) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, então $grau(\psi(x)) = 0$, ou seja, $\psi(x) \in k$. De modo análogo, $\psi(y) \in k$. Assim, se $f = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} t^i t^{-j} \in k[t, t^{-1}]$, onde $f_{ij} \in k$, então

$$\psi(f) = \psi\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f_{ij} t^i t^{-j}\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \psi(f_{ij}) \psi(t^i) \psi(t^{-j}).$$

Como $\psi(x)$, $\psi(y)$, $\psi(f_{ij}) \in k$, então $\psi(f) \in k$. Ou seja, $\mathrm{im}(\psi) \subseteq k$. Isso contradiz o fato que de ψ é bijetiva, pois não é uma função sobrejetora.

(c) Seja f um polinômio quadrático irredutível em $k[x,y]$, e seja W a cônica definida por f. Mostre que $A(W)$ é isomorfa à $A(Y)$ ou $A(Z)$. Determine também quando $A(W) \cong A(Y)$ e quando $A(W) \cong A(Z)$.

Lema 1.14. Seja $n > 0$.

(a) Para quaisquer $p_1, \ldots, p_n \in A_n = k[x_1, \cdots, x_n]$, existe um único homomorfismo de k-álgebras $\phi : A_n \to A_n$ satisfazendo $\phi(x_i) = p_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Sejam A uma matriz $n \times n$ com entradas $a_{i,j} \in k$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $p_1, \ldots, p_n \in A_n$ dados por $p_i(x_1, \ldots, x_n) := a_{i,1} x_1 + \cdots + a_{i,n} x_n$, e $\phi : A_n \to A_n$ o único homomorfismo de k-álgebras satisfazendo $\phi(x_i) = p_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Se $A = (a_{i,j})_{i,j}$ for uma matriz invertível, então ϕ é um automorfismo.

(c) Para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in k^n$, o único homomorfismo de k-álgebras $\phi : A_n \to A_n$ que satisfaz $\phi(x_i) = x_i - a_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ é um automorfismo.

Demonstração.

(a) Defina uma função $\phi : A_n \to A_n$ da seguinte forma

$$\phi\left(\sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} a_{i_1, \ldots, i_n} p_1^{i_1} \cdots p_n^{i_n},$$

para todos $a_{i_1, \ldots, i_n} \in k$. Observe que $\phi(f) = f(p_1, \ldots, p_n)$ para todo $f \in A_n$, em particular, $\phi(x_i) = p_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vamos mostrar que ϕ é um homomorfismo de k-álgebras:

$$\begin{aligned}\phi(af-g) &= (af-g)(p_1,\dots,p_n)\\ &= af(p_1,\dots,p_n)-g(p_1,\dots,p_n)\\ &= a\phi(f)-\phi(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(fg) &= (fg)(p_1,\dots,p_n)\\ &= f(p_1,\dots,p_n)g(p_1,\dots,p_n)\\ &= \phi(f)\phi(g),\end{aligned}$$

para todos $f,g \in A_n$, $a \in k$. Isso mostra que existe um homomorfismo de k-álgebras satisfazendo a condição $\phi(x_i) = p_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$.

Para mostrar a unicidade, basta observar que, se $\psi : A_n \to A_n$ é um homomorfismo de k-álgebras satisfazendo $\psi(x_i) = p_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, então $\psi(f) = f(p_1,\dots,p_n) = \phi(f)$ para todo $f \in A_n$.

(b) Vamos construir ϕ^{-1} explicitamente. Como a matriz A é invertível, então existe uma matriz $B = (b_{i,j})_{i,j}$ inversa de A. Defina $\psi : A_n \to A_n$ como sendo o único homomorfismo de k-álgebras que satisfaz $\psi(x_i) = b_{i,1}x_1 + \cdots + b_{i,n}x_n$. Vamos mostrar que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, mostrando que $\psi \circ \phi(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Fixe $i \in \{1,\dots,n\}$ e observe que

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(x_i) &= \psi(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n)\\ &= a_{i,1}(b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,n}x_n) + \cdots + a_{i,n}(b_{n,1}x_1 + \cdots + b_{n,n}x_n)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,1}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,n}\right)x_n.\end{aligned}$$

Como $AB = I_n$, então $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,l} = 1$ se $l = i$ e $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,1} = 0$ se $l \neq i$. Isso implica que $\psi \circ \phi(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$.

Pelo item (a) e pelo fato de que $\psi \circ \phi(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, concluímos que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. A demonstração de que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ é completamente análoga, trocando os papéis de A e B.

(c) Vamos construir ϕ^{-1} explicitamente. Usando o item (a), defina $\psi : A_n \to A_n$ como sendo o único homomorfismo de k-álgebras que satisfaz $\psi(x_i) = x_i + a_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Vamos mostrar que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, mostrando que $\psi \circ \phi(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Fixe $i \in \{1,\dots,n\}$ e observe que

$$\psi \circ \phi(x_i) = \psi(x_i - a_i) = (x_i + a_i) - a_i = x_i.$$

Pelo item (a) e pelo fato de que $\psi \circ \phi(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, concluímos que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. A demonstração de que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ é completamente análoga, trocando a_i por $-a_i$. $\square$

Suponha que $k = \mathbb{C}$ e seja $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \in \mathbb{C}[x,y]$ irredutível. Vamos analisar três casos distintos:

- $A \neq 0$. Nesse caso, podemos reescrever

$$\begin{aligned} f(x,y) &= Ax^2 + (By+D)x + (Cy^2+Ey+F) \\ &= \left(\sqrt{A}x + \frac{By+D}{2\sqrt{A}}\right)^2 - \frac{(By+D)^2}{4A} + (Cy^2+Ey+F) \\ &= \left(\sqrt{A}x + \frac{By+D}{2\sqrt{A}}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{4A}\right)y^2 + \left(E - \frac{BD}{2A}\right)y + \left(F - \frac{D^2}{4A}\right). \end{aligned}$$

Observe que, nesse ponto, nós temos dois casos distintos a considerar:

* $C - \frac{B^2}{4A} \neq 0$. Nesse caso, observe que

$$\begin{aligned} f(x,y) = \left(\sqrt{A}x + \frac{By+D}{2\sqrt{A}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2\sqrt{A}}y + \frac{2AE-BD}{2\sqrt{A(4AC-B^2)}}\right)^2 \\ + \frac{(4AF-D^2)(4AC-B^2)-(2AE-BD)^2}{4A(4AC-B^2)}. \end{aligned}$$

Primeiro, defina $\phi_1 : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ como sendo o único homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras satisfazendo

$$\phi_1(x) = \left(\sqrt{A}x + \frac{By+D}{2\sqrt{A}}\right) \quad \text{e} \quad \phi_1(y) = \left(\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2\sqrt{A}}y + \frac{2AE-BD}{2\sqrt{A(4AC-B^2)}}\right).$$

Pelo Lema 1.14, ϕ_1 é um automorfismo. Além disso, observe que

$$\phi_1\left(x^2 + y^2 + \frac{(4AF-D^2)(4AC-B^2)-(2AE-BD)^2}{4A(4AC-B^2)}\right) = f.$$

Depois, defina $\phi_2 : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ como sendo o único homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras que satisfaz

$$\phi_2(x) = iy + x \quad \text{e} \quad \phi_2(y) = \frac{4A(4AC-B^2)}{(4AF-D^2)(4AC-B^2)-(2AE-BD)^2}(iy - x).$$

Pelo Lema 1.14, ϕ_2 também é um automorfismo. Além disso, observe que

$$\phi_2(xy-1) = -\left(\frac{4A(4AC-B^2)}{(4AF-D^2)(4AC-B^2)-(2AE-BD)^2}(x^2+y^2)+1\right).$$

Consequentemente, $\mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong \mathbb{C}[x,y]/\langle f\rangle$. Portanto, $A(W) \cong A(Z)$

nesse caso.

* $C - \frac{B^2}{4A} = 0$. Nesse caso, defina $\phi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ como sendo o único homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras que satisfaz

$$\phi(x) = \left(\sqrt{A}x + \frac{By+D}{2\sqrt{A}}\right) \quad \text{e} \quad \phi(y) = \left(E - \frac{BD}{2A}\right)y + \left(F - \frac{D^2}{4A}\right).$$

Pelo Lema 1.14, ϕ é um automorfismo. Além disso, observe que $\phi(x^2+y) = f(x,y)$. Consequentemente, $\mathbb{C}[x,y]/\langle f\rangle \cong \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y\rangle$. Portanto, nesse caso, $A(W) \cong A(Y)$.

- $A = 0$ e $C \neq 0$. Esse caso segue do caso $A \neq 0$, após aplicar o único automorfismo de k-álgebras $\phi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ que satisfaz $\phi(x) = y$ e $\phi(y) = x$ (ver Lema 1.14(b)).
- $A = C = 0$ e $B \neq 0$. Esse caso segue do caso $A \neq 0$, após aplicar o único automorfismo de k-álgebras $\phi : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$ que satisfaz $\phi(x) = x+y$ e $\phi(y) = x-y$ (ver Lema 1.14(b)).

1.2 Seja $Y \subseteq \mathbf{A}^3$ o conjunto $Y = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in k\}$.

- Mostre que Y é uma variedade afim de dimensão 1.
- Encontre geradores para o ideal $I(Y)$.
- Mostre que $A(Y)$ é isomorfa ao anel de polinômios em uma variável.

Primeiro, note que se $f(x,y,z) = y - x^2$ e $g(x,y,z) = z - x^3 \in k[x,y,z]$, então $Y = Z(y-x^2, z-x^3)$. De fato, se $P \in Y$, então $P = (t,t^2,t^3)$ para algum $t \in k$. Assim, $f(P) = f(t,t^2,t^3) = t^2 - t^2 = 0$ e $g(P) = g(t,t^2,t^3) = t^3 - t^3 = 0$. Por outro lado, seja $Q = (q_1,q_2,q_3) \in Z(y-x^2, z-x^3)$. Como $f(Q) = 0$, então $q_2 = q_1^2$, e como $g(Q) = 0$, então $q_3 = q_1^3$. Assim, $Q = (q_1, q_1^2, q_1^3) \in Y$.

Isso mostra que $Y = Z(y-x^2, z-x^3)$. Além disso, pela Anotação 2, $Z(\langle y-x^2, z-x^3\rangle) = Y$. Agora, considere o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi : k[x,y,z] &\to k[t] \\ f(x,y,z) &\mapsto f(t,t^2,t^3). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que ϕ é sobrejetor, que seu núcleo é igual a $\langle y-x^2, z-x^3\rangle$, e usar o Teorema de Isomorfismos de Anéis para concluir que

$$A(Y) := k[x,y,z]/I(Y) = k[x,y,z]/\langle y-x^2, z-x^3\rangle \cong k[t].$$

Assim, obteremos que:

- $\langle y-x^2, z-x^3\rangle$ é primo, pois $k[t]$ é um domínio;
- $I(Y) = \langle y-x^2, z-x^3\rangle$, pela Proposição 1.2(d) e Anotação 12(b);
- $A(Y) \cong k[t]$;
- Y é uma variedade afim, pelo Corolário 1.3;
- $\dim(Y) = \dim(A(Y)) = \dim k[t] = 1$, pela Proposição 1.6.

Seja $h \in \ker\phi$ e considere h como um elemento de $k(x,z)[y]$. Pelo Lema 1.13, existe $q_1 \in k[x,y,z]$ tal que $h(x,y,z) = (y-x^2)q_1(x,y,z) + h(x,x^2,z)$. Agora considere $h(x,x^2,z)$ como um elemento de $k(x)[z]$. Novamente pelo Lema 1.13, existe $q_2 \in k[x,z]$ tal que $h(x,x^2,z) = (z-x^3)q_2(x,z) + h(x,x^2,x^3)$. Assim, obtemos que

$$h(x,y,z) = (y-x^2)q_1(x,y,z) + (z-x^3)q_2(x,z) + h(x,x^2,x^3).$$

Como $h \in \ker\phi$, então $0 = \phi(h) = h(x,x^2x^3)$. Logo,

$$h(x,y,z) = (y-x^2)q_1(x,y,z) + (z-x^3)q_2(x,y,z) \in \langle y-x^2, y-x^3\rangle,$$

ou seja, $\ker\phi \subseteq \langle y-x^2, z-x\rangle$. Por outro lado, como $\phi(y-x^2) = t^2-t^2 = 0$ e $\phi(z-x^3) = t^3-t^3 = 0$, então $\langle y-x^2, z-x^3\rangle \subseteq \ker(\phi)$. Isso mostra que $\ker(\phi) = \langle y-x^2, z-x^3\rangle$.

Além disso, observe que ϕ é sobrejetiva. De fato, se $h(t) = \sum_{i=0}^n h_i t^i \in k[t]$, então $h = \phi(\tilde{h})$, para $\tilde{h}(x,y,z) = \sum_i^n h_i x^i \in k[x,y,z]$. Usando o Teorema de Isomorfismos de Anéis, isso implica que $k[x,y,z]/\langle y-x^2, z-x^3\rangle \cong k[t]$.

1.3 Seja Y o conjunto algébrico de $\mathbf{A}^3$ definido pelos polinômios x^2-yz e $xz-x$. Mostre que Y é a união de três componentes irredutíveis, descreva cada uma delas, e encontre seus ideais primos.

Primeiro, note que se $xz-x=0$ e $x^2-yz=0$, então um dos seguintes três casos ocorre:

(I) $x=0$, $y=0$ e $z\in k$,

(II) $x=0$, $z=0$ e $y\in k$,

(III) $x\neq 0$, $z=1$ e $y=x^2$.

Assim, sejam $Y_1 := \{(x,y,z)\in\mathbf{A}^3 \mid x=y=0\}$, $Y_2 := \{(x,y,z)\in\mathbf{A}^3 \mid x=z=0\}$ e $Y_3 := \{(x,y,z)\in\mathbf{A}^3 \mid z=1 \text{ e } y=x^2\}$. Como $Y = Y_1\cup Y_2\cup Y_3$, se mostrarmos que Y_1, Y_2 e Y_3 são conjuntos fechados irredutíveis de $\mathbf{A}^3$, mostraremos que Y é a união dessas três componentes irredutíveis. Nesse processo, encontraremos seus ideais primos.

(I) Observe que $Y_1 = Z(x,y)$. Assim, para mostrar que Y_1 é uma componente irredutível de Y, basta mostrar que $\langle x,y\rangle$ é um ideal primo. Para isso, considere a função

$$\begin{aligned}\phi : k[x,y,z] &\to k[t]\\ f(x,y,z) &\mapsto f(0,0,t).\end{aligned}$$

Primeiro, note que ϕ é um homomorfismo de anéis. De fato, se $f,g\in k[x,y,z]$, então

$$\phi(f-g)=(f-g)(0,0,t)=f(0,0,t)-g(0,0,t)=\phi(f)-\phi(g),$$
$$\phi(fg)=(fg)(0,0,t)=f(0,0,t)g(0,0,t)=\phi(f)\phi(g) \quad \text{e} \quad \phi(1)=1(0,0,t)=1.$$

Além disso, ϕ é um homomorfismo sobrejetor. De fato, se $p(t)=\sum_{i=0}^{n}p_it^i\in k[t]$, então $p=\phi(\tilde{p})$, onde $\tilde{p}(x,y,z)=\sum_{i=0}^{n}p_iz^i\in k[x,y,z]$.

Pelo parágrafo anterior, ϕ é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Assim, segue dos Teoremas de Isomorfismo de Anéis que $k[t]\cong k[x,y,z]/\ker(\phi)$. Então, se mostrarmos que $\ker\phi=\langle x,y\rangle$, concluiremos que $k[x,y,z]/\langle x,y\rangle\cong k[t]$. Como $k[t]$ é um domínio, segue daí que $\langle x,y\rangle$ é um ideal primo, e consequentemente, que $I(Z(x,y))=\sqrt{\langle x,y\rangle}=\langle x,y\rangle$, pela Proposição 1.2(d) e Anotação 12(b).

Vamos mostrar que $\langle x,y\rangle=\ker\phi$. Por um lado, se $f\in\langle x,y\rangle$, então existem $a,b\in k[x,y,z]$ tais que $f(x,y,z)=a(x,y,z)x+b(x,y,z)y$. Assim, $\phi(f)=f(0,0,t)=a(0,0,t)0+b(0,0,t)0=0$. Por outro lado, seja $g(x,y,z)\in\ker\phi$, e considere g como um elemento de $k(y,z)[x]$. Pelo Lema 1.13, existe $q_1\in k[x,y,z]$ tal que $g(x,y,z)=xq_1(x,y,z)+g(0,y,z)$. Usando novamente o Lema 1.13, vendo $g(0,y,z)$ como um elemento de $k(z)[y]$, existe $q_2\in k[y,z]$ tal que $g(0,y,z)=yq_2(x,y,z)+g(0,0,z)$. Assim, temos que

$$g(x,y,z)=xq_1(x,y,z)+yq_2(y,z)+g(0,0,z).$$

Como $g\in\ker\phi$, então $\phi(g)=g(0,0,z)=0$. Logo, $g(x,y,z)=xq_1(x,y,z)+yq_2(y,z)\in\langle x,y\rangle$.

(II) Observe que $Y_2=Z(x,z)$. Então, analogamente ao caso de Y_1, para mostrar que Y_2 é uma componente irredutível de Y, basta mostrar que $\langle x,z\rangle$ é um ideal primo de $k[x,y,z]$. Essa demonstração é análoga à do caso de Y_1, substituindo a função ϕ pela função

$$\begin{aligned}\phi' : k[x,y,z] &\to k[t]\\ f(x,y,z) &\mapsto f(0,y,0).\end{aligned}$$

(III) Observe que $Y_3=Z(x-y^2,z-1)$. Então, analogamente aos casos de Y_1 e Y_2, para mostrar que Y_3 é uma variedade afim, basta mostrar que $\langle x-y^2,z-1\rangle$ é um ideal primo de

$k[x,y,z]$. Essa demonstração é análoga à do caso Y_1, substituindo a função ϕ pela função

$$\psi : k[x,y,z] \to k[s]$$
$$f(x,y,z) \mapsto f(s^2,s,1).$$

1.4 Identifique $\mathbf{A}^2$ com $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ da maneira natural, e mostre que a topologia de Zariski em $\mathbf{A}^2$ não é a mesma que a topologia produto de duas cópias de $\mathbf{A}^1$ com a topologia de Zariski.

Considere $f(x,y) = x - y \in k[x,y]$, e note que $Z(f) = \{(x,y) \in \mathbf{A}^2 \mid x = y\} = \{(a,a) \mid a \in k\}$. Como k é algebricamente fechado, então k é infinito pela Anotação 6(a). Em particular, $Z(f)$ é um conjunto infinito.

Observe que $Z(f)$ é fechado na topologia produto de $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ se, e somente se, $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \setminus Z(f)$ é aberto. Como k é infinito, então existem $a, b \in k$, tais que $a \neq b$; ou seja, $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \setminus Z(f) \neq \emptyset$. Além disso, $\mathbf{A}^2 \setminus Z(f)$ é aberto se, e somente se, para todo $a \neq b$, existirem abertos $U, V \subseteq \mathbf{A}^1$ tais que $(a,b) \in U \times V \subseteq \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \setminus Z(f)$. Nesse caso, $Z(f) \subseteq (U^c \times V) \cup (U \times V^c)$. Como U, V são abertos em $\mathbf{A}^1$, então U^c, V^c são conjuntos finitos. Consequentemente, $Z(f) = (Z(f) \cap (U^c \times V)) \cup (Z(f) \cap (U \times V^c)) = \{(a,a) \mid a \in U^c\} \cup \{(b,b) \mid b \in V^c\}$ é finito. Isso contradiz o fato de $Z(f)$ ser infinito.

1.5 Mostre que uma k-álgebra B é isomorfa ao anel de coordenadas afins de um conjunto algébrico em $\mathbf{A}^n$ (para algum $n \geq 0$) se, e somente se, B é uma k-álgebra finitamente gerada sem elementos nilpotentes.

($\Rightarrow$) Se $B \cong A_n/I(T)$ para algum conjunto algébrico T em $\mathbf{A}^n$, então $T = Z(\mathfrak{a})$ para algum ideal $\mathfrak{a}$ de A_n. Pela Proposição 1.2(d), $I(T) = I(Z(a)) = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Como $I(T)$ é radical, então B não tem elementos nilpotentes. De fato, se $x^k \equiv 0$ módulo $I(T)$, para algum $x \in A_n$, então $x^k \in I(T)$. Mas como $I(T)$ é radical, então $x \in I(T)$, e consequentemente, $x \equiv 0$ módulo $I(T)$. Isso mostra que B não tem nilpotentes. Como $B \cong A_n/I(T)$, então B é uma k-álgebra finitamente gerada pela Anotação 15(b).

($\Leftarrow$) Supondo que B é uma k-álgebra finitamente gerada, então $B \cong A_n/a$, para algum $n > 0$ e algum ideal $a \subseteq A_n$. Se B não tem nilpotentes, então o ideal a é radical pois, se $x \in A_n$ e $x^r \in a$ para algum $r > 0$, como $\bar{x}^r = \overline{x^r} = \bar{0}$ em A_n/a, então $\bar{x} = \bar{0}$, pois $B = A_n/a$ não tem nilpotentes, ou seja, $x \in a$. Portanto $a = \sqrt{a}$. Como a é um ideal radical de A_n, então $a = \sqrt{a} = I(Z(a))$ pela Proposição 1.2(d). Portanto $B \cong A_n/I(Z(a))$ é o anel de coordenadas do conjunto algébrico $Z(a)$.

1.6
- Mostre que todo subconjunto aberto e não-vazio de um espaço topológico irredutível é denso e irredutível.

Ver Anotação 9.

- Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X. Mostre que, se Y for irredutível (com a topologia induzida), então $\overline{Y}$ também é irredutível.

  Ver Anotação 10.

1.7 (a) Mostre que as seguintes condições são equivalentes para um espaço topológico X:

(i) X é noetheriano.

(ii) Toda família $\{Y_i\}_{i\in I}$, onde $I \neq \emptyset$ e Y_i é fechado em X para todo $i \in I$, tem um elemento minimal.

(iii) X satisfaz a condição de cadeia ascendente para subconjuntos abertos.

(iv) Toda família $\{U_i\}_{i\in I}$, onde $I \neq \emptyset$ e U_i é aberto em X para todo $i \in I$, tem um elemento maximal.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Considere uma família de fechados $\{Y_i\}_{i\in I}$ de X, munido da ordem parcial $\preceq$ dada por $Y \preceq Y' \Leftrightarrow Y \supseteq Y'$. Agora, considere uma cadeia descendente de elementos de $\{Y_i\}_{i\in I}$, $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$. Como X é Notheriano, então existe $r_0 > 0$ tal que $Y_r = Y_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Assim, toda cadeia de elementos de $\{Y_i\}_{i\in I}$ tem cota superior. Logo, pelo Lema de Zorn, $\{Y_i\}_{i\in I}$ tem um elemento maximal. Por construção esse elemento maximal em relação à $\preceq$ é um elemento minimal em relação à inclusão.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Considere uma cadeia de abertos $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq X$. Para cada $n > 0$, considere o fechado $Y_n := X \setminus U_n$, e observe que $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$. Por (ii), a família de fechados $\{Y_i\}_{i>0}$ tem um elemento minimal, ou seja, existe $r_0 > 0$ tal que $Y_r = Y_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Portanto, $U_r = U_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Isso mostra que X satisfaz a condição de cadeia ascendente para subconjuntos abertos.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Seja $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de elementos de $\{U_i\}_{i\in I}$. Como X satisfaz a condição de cadeia ascendente para conjuntos abertos, então existe $r_0 > 0$ tal que $U_r = U_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Como toda cadeia ascendente de elementos de $\{U_i\}_{i\in I}$ tem cota superior, pelo Lema de Zorn, $\{U_i\}_{i\in I}$ tem um elemento maximal.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Considere uma cadeia de fechados $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$. Para cada $n > 0$, considere o aberto $U_n := X \setminus Y_n$, e observe que $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq X$. Por (iv), a família de abertos $\{U_i\}_{i>0}$ tem um elemento maximal. Assim, existe $r_0 > 0$ tal que $U_r = U_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Portanto $Y_r = Y_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Isso mostra que X é noetheriano.

(b) Mostre que todo espaço topológico noetheriano é quasi-compacto, ou seja, que toda cobertura por abertos admite uma subcobertura finita.

Sejam X um espaço topológico noetheriano e $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de X por abertos. Denote por $\mathscr{U}$ a coleção formada por todas as uniões finitas de elementos de $\{U_i\}_{i\in I}$, e observe que todo elemento de $\mathscr{U}$ é aberto. Pelo Exercício **1.7**a, $\mathscr{U}$ tem um elemento maximal, $A = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Suponha que $X \neq A$, ou seja, suponha que exista $x \in X \setminus A$. Como $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, então existe $k \in I$ tal que $x \in U_k$. Isso implica que $A \cup U_k \in \mathscr{U}$ e $A \subsetneq U_k \cup A$. Isso contradiz a maximalidade de Z em $\mathscr{U}$. Portanto tal x não pode existir.

(c) Todo subespaço de um espaço topológico noetheriano é noetheriano com a topologia induzida.

Se X é um espaço topológico noetheriano e Y um subespaço de X, então toda cadeia de fechados em Y é da forma $Y \cap X_1 \supseteq Y \cap X_2 \supseteq \cdots$, onde $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$ é uma cadeia de fechados em X. Assim, como X é noetheriano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_n = X_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $Y \cap X_n = Y \cap X_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Isso mostra que Y é noetheriano.

(d) Todo espaço topológico noetheriano e Hausdorff é finito e sua topologia é discreta.

Seja X um espaço topológico noetheriano e Hausdorff. Pela Proposição 1.4, X pode ser escrito como uma união finita de fechados irredutíveis, $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Como X é Hausdorff, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, X_i também é. De fato, se $a, b \in X_i$, como X é Hausdorff, existem abertos $U_a, U_b \subseteq X$ tais que $a \in U_a$, $b \in U_b$ e $U_a \cap U_b = \emptyset$. Assim, $U_a \cap X_i$ e $U_b \cap X_i$, são abertos de X_i disjuntos e $a \in U_a \cap X_i$, $b \in U_b \cap X_i$.

Por construção, para cada $x \in X$, existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $x \in X_i$. Fixe tal i. Vamos mostrar que $X_i = \{x\}$.

Se $X_i \supsetneq \{x\}$, então existe $y \in X_i \setminus \{x\}$. Como X_i é Hausdorff, existem abertos $U_x, U_y \subseteq X_i$, tais que $x \in U_x$, $y \in U_y$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$. Como U_x é um aberto não-vazio do espaço irredutível X_i, pela Anotação 9, $\overline{U_x} = X_i$. Isso contradiz a existência de U_y, pois como $y \in X_i = \overline{U_x}$, então $U_y \cap U_x \neq \emptyset$.

Isso mostra que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, onde $X_1 = \{x_1\}, \ldots, X_n = \{x_n\}$ são as componentes irredutíveis de X. Em particular, X é finito. Além disso, como $X_1 = \{x_1\}, \ldots, X_n = \{x_n\}$ são fechados em X, então todo subconjunto de X também é fechado. Portanto a topologia de X é discreta.

1.8 Sejam Y uma variedade afim de dimensão r em $\mathbf{A}^n$ e H uma hiperfície de $\mathbf{A}^n$. Mostre que, se $Y \not\subseteq H$, então toda componente irredutível de $Y \cap H$ tem dimensão $(r-1)$.

Como Y é uma variedade afim em $\mathbf{A}^n$, então existe um ideal primo $P \subseteq A_n$ tal que $Y = Z(P)$. Como H é uma hiperfície de $\mathbf{A}^n$, então pela Proposição 1.13, existe um polinômio não-constante e irredutível $f \in A_n$ tal que $H = Z(f)$. Assim, $A(Y) = A_n/P$ e $Y \cap H = Z(P \cup \{f\})$. Como $\mathbf{A}^n$ é noetheriano, então segue da Proposição 1.4 que existem ideais primos $Q_1, \dots, Q_m \subseteq A_n$, tais que

$$Y \cap H = V_1 \cup \cdots \cup V_m, \quad \text{onde } V_1 = Z(Q_1), \dots, \ V_m = Z(Q_m).$$

Vamos mostrar que $\dim V_1 = \cdots = \dim V_m = r-1$.

Fixe $i \in \{1, \dots, m\}$. Como $V_i \subseteq Y \cap H$, então $Q_i = I(Z(Q_i)) = I(V_i) \supseteq I(Y \cap H) = \sqrt{\langle P, \{f\}\rangle} \supseteq P = I(Y)$. Considere $\overline{f} \in A(Y)$ e $\overline{Q_i} \subseteq A(Y)$ as respectivas imagens de f e Q_i pela projeção canônica $A_n \twoheadrightarrow A(Y)$. Como $f \in Q_i$, então $\overline{f} \in \overline{Q_i}$; e como Q_i é primo, então pela Anotação 16, $\overline{Q_i}$ é um ideal primo de $A(Y)$. Vamos mostrar que $\overline{Q_i}$ é um ideal primo minimal contendo $\overline{f}$.

Como $I(Y \cap H) = I(V_1 \cup \cdots \cup V_m) = I(V_1) \cap \cdots \cap I(V_m) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ e $I(Y \cap H) = \sqrt{\langle P \cup \{f\}\rangle}$, então $Q_1, \dots Q_m$ são ideais primos minimais de A_n que contém $P \cup \{f\}$. De fato, supondo que exista um ideal primo Q de A_n tal que $P \cup \{f\} \subseteq Q$ e $Q \subseteq Q_i$ para algum $i \in \{1, \dots, m\}$, então $Z(Q)$ é uma variedade afim contida em $Z(P \cup \{f\}) = Y \cap H$ e $V_i \subseteq Z(Q)$. Temos, então, dois casos diferentes: pode existir ou não $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ tal que $V_j \subseteq Z(Q)$. Se não existe, temos $Y \cap H = V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1} \cup Z(Q) \cup V_{i+1} \cup \cdots \cup V_m$, o que contradiz o fato de que a decomposição $Y \cap H = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ é única. Se existe $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ tal que $V_j \subseteq Z(Q)$, supondo sem perda de generalidade que $j > i$, temos $Y \cap H = V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup \cdots \cup V_{j-1} \cup V_{j+1} \cup \cdots \cup V_m \cup Z(Q)$, o que também contradiz o fato de que a decomposição de $Y \cap H$ é única.

Desse fato e da Anotação 16 segue que $\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_m}$ são os ideais primos minimais de $A(Y)$ que contêm $\overline{f}$. Agora vamos mostrar que $\operatorname{ht}(\overline{Q_i}) = 1$. Para isso, observe que $A(Y)$ é um anel noetheriano pela Anotação 15(b) e pelo Teorema da base de Hilbert. Além disso, observe que $\overline{f}$ não é nem um divisor de zero, nem uma unidade. De fato, como P é primo, então $A(Y)$ é um domínio de integridade, e como $f \notin P$, então $\overline{f} \neq \overline{0}$. Além diso, se $\overline{f}$ fosse uma unidade, como $\overline{f} \in \overline{Q_i}$, então $\overline{Q_i} = A(Y)$ não seria primo. Assim, pelo Teorema 1.10, temos que $\operatorname{ht}(\overline{Q_i}) = 1$.

Por fim, pela Proposição 1.6, temos que $\dim V_i = \dim Z(Q_i) = \dim A_n/Q_i$; e pelo Teorema de Isomorfismos de Anéis temos que, $A_n/Q_i \cong (A_n/P)/(Q_i/P) \cong A(Y)/\overline{Q_i}$. Logo, pelo Teorema 1.7(b), concluímos que

$$\dim V_i = \dim A(Y)/\overline{Q_i} = \dim A(Y) - \operatorname{ht} \overline{Q_i} = \dim Y - \operatorname{ht} \overline{Q_i} = r-1.$$

1.9 Mostre que, se $\mathfrak{a} \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ for um ideal gerado por r elementos, então a dimensão de cada componente irredutível de $Z(\mathfrak{a})$ é $\geq n-r$.

Como $\mathbf{A}^n$ é uma variedade noetheriana, pela Proposição 1.4, existem ideais primos $P_1,\ldots,P_m \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ tais que $Z(\mathfrak{a}) = Z(P_1)\cup\cdots\cup Z(P_m)$. Para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, denote $Z(P_i) =: V_i$. Se $P_i \nsubseteq P_j$ para todos $i \neq j \in \{1,\ldots,m\}$, então $V_1,\ldots,V_m$ são as componentes irredutíveis de $Z(\mathfrak{a})$ (pela Proposição 1.4). Queremos mostrar que $\dim V_i \geq n-r$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Sem perda de generalidade, podemos fixar $i=1$. (As demonstrações dos outros casos são análogas.) Vamos provar que $\dim V_1 \geq n-r$.

Observe que, pela Proposição 1.6, temos que $\dim V_1 = \dim A(V_1)$. Além disso, como P_1 é um ideal primo de $k[x_1,\ldots,x_n]$ e $V_1 = Z(P_1)$, então pela Proposição 1.2(d), temos que $A(V_1) = k[x_1,\ldots,x_n]/I(V_1) = k[x_1,\ldots,x_n]/P_1$; pelo Teorema 1.7(a), temos que $\dim k[x_1,\ldots,x_n] = n$; e pelo Teorema 1.7(b), temos que $\dim A(V_1) = n - \mathrm{ht}(P_1)$. Se $\mathrm{ht}(P_1) \leq r$, então teremos que $\dim V_1 = \dim A(V_1) \geq n-r$. Portanto, para provar que $\dim V_1 \geq n-r$, basta provar que $\mathrm{ht}(P_1) \leq r$.

Suponha que $\{0\} = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_h = P_1$ é uma cadeia de ideais primos. Queremos mostrar que $h \leq r$. Para isso, considere $f_1,\ldots,f_r \in k[x_1,\ldots,x_n]$ geradores de $\mathfrak{a}$, e para cada $i \in \{1,\ldots,h\}$, defina

$$h_i = \min\{j \in \{1,\ldots,h\} \mid f_i \in Q_j\}.$$

Defina também $h_0 = 0$. Como os polinômios $f_1,\ldots,f_r$ geram $\mathfrak{a}$, independentemente da ordem, podemos ordenar estes polinômios de maneira que $h_1 \leq \cdots \leq h_r$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_r$.

Agora, vamos mostrar que $h_i - h_{i-1} \leq 1$ para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, usando contradição. Se $h_i - h_{i-1} > 1$, então teríamos que $h_{i-1} < h_{i-1}+1 < h_i$ e $Q_{h_{i-1}} \subsetneq Q_{h_{i-1}+1} \subsetneq Q_{h_i}$. Consequentemente, $\langle\overline{0}\rangle = \frac{Q_{h_{i-1}}}{Q_{h_{i-1}}} \subsetneq \frac{Q_{h_{i-1}+1}}{Q_{h_{i-1}}} \subsetneq \frac{Q_{h_i}}{Q_{h_{i-1}}}$ é uma cadeia de ideais primos em $A_n/Q_{h_{i-1}}$. Note que $f_i + Q_{h_{i-1}}$ não é nem uma unidade, nem um divisor de zero em $A_n/Q_{h_{i-1}}$. De fato, $f_i + Q_{h_{i-1}}$ não é uma unidade pois, $f_i \in Q_{h_i}$ e $Q_{h_i}/Q_{h_{i-1}}$ é um ideal próprio de $A_n/Q_{h_{i-1}}$, e $f_i + Q_{h_{i-1}}$ não é um divisor de zero pois como $Q_{h_{i-1}}$ é um ideal primo, então $A_n/Q_{h_{i-1}}$ é um domínio de integridade. Temos então que o ideal primo minimal de $A_n/Q_{h_{i-1}}$ que contém $f_i + Q_{h_{i-1}}$ tem altura maior que 1. Isso contradiz o Teorema 1.10.

Como $h_i - h_{i-1} \leq 1$ para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, então $h_r \leq r$. Além disso, $h_r = h$. De fato, para justificar essa afirmação, vamos usar contradição. Se $h_r < h$, então $\mathfrak{a} = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle \subseteq Q_{h-1} \subsetneq P_1$. Como Q_{h-1} é primo, isso contradiz o fato de que $P_1,\ldots,P_n$ são os ideais primos minimais que contêm $\mathfrak{a}$. Isso mostra que $h = h_r$ e $h_r \leq r$, o que implica que $h \leq r$. Consequentemente, $\mathrm{ht}(P_1) \leq r$.

1.10 (a) Mostre que, se Y for um subespaço de um espaço topológico X, então $\dim Y \leq \dim X$.

Considere uma cadeia $\emptyset \subsetneq W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_m \subseteq Y$ de fechados irredutíveis em Y. Queremos mostrar que $m \leq \dim X$.

Como cada W_i é fechado em Y, então existem $V_1, \ldots, V_m$ fechados em X tais que $W_i = Y \cap V_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i$, podemos escolher $V_i = \overline{W_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Agora, note que $\overline{W_0} \neq \emptyset$, pois $W_0 \subseteq \overline{W_0}$ e W_0 é não vazio. Além disso, note que $\overline{W_{i-1}} \subsetneq \overline{W_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. De fato, se $\overline{W_{i-1}} = \overline{W_i}$, então $W_{i-1} = Y \cap \overline{W_{i-1}} = Y \cap \overline{W_i} = W_i$. Isso contradiria a hipótese de que $W_{i-1} \subsetneq W_i$. Além disso, pela Anotação 10, cada $\overline{W_i}$ é irredutível em X. Assim, $\emptyset \subsetneq \overline{W_0} \subsetneq \overline{W_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{W_m} \subseteq X$ é uma cadeia de fechados irredutíveis em X. Portanto, $m \leq \dim X$.

(b) Mostre que, se $\{U_i\}_{i \in I}$ for uma cobertura aberta de um espaço topológico X, então $\dim X = \sup\{\dim U_i \mid i \in I\}$.

Pelo item (a), já sabemos que $\dim X \geq \dim U_i$ para todo $i \in I$. Portanto $\dim X \geq \sup\{\dim U_i \mid i \in I\}$. Para provar a outra desigualdade, denote $\dim X$ por n e considere uma cadeia de fechados irredutíveis $\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n$ de X. Queremos mostrar que existe $i \in I$ tal que $V_0 \cap U_i \neq \emptyset$ e que $V_k \cap U_i \neq V_{k-1} \cap U_i$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Primeiro, note que, como $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X e $V_0 \neq \emptyset$, então existe $i \in I$ tal que $V_0 \cap U_i \neq \emptyset$. Depois, note que, dado um aberto $U \subseteq X$, se $V_0 \cap U \neq \emptyset$, então $V_k \cap U \neq V_{k-1} \cap U$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. De fato, vamos mostrar a contrapositiva: se $V_k \cap U = V_{k-1} \cap U$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$, então $V_0 \cap U = \emptyset$. Primeiro, fixe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_k \cap U = V_{k-1} \cap U$. Depois, escreva $V_k = V_{k-1} \cup (V_k \setminus U)$. Como V_{k-1} é fechado em X, então V_{k-1} é fechado em V_k; e como U é aberto em X, então $V_k \setminus U$ é fechado em V_k. Além disso, como V_k é irredutível e $\emptyset \subsetneq V_{k-1} \subsetneq V_k$, então $V_k \setminus U = V_k$. Logo, $V_0 \subseteq V_k \subseteq U^c$, logo $V_0 \cap U = \emptyset$. Isso mostra que existe $i \in I$ tal que $V_0 \cap U_i \neq \emptyset$ e que $V_k \cap U_i \neq V_{k-1} \cap U_i$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Fixe $i \in I$ tal que $V_0 \cap U_i \neq \emptyset$ e que $V_k \cap U_i \neq V_{k-1} \cap U_i$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Considere a cadeia $\emptyset \subsetneq V_0 \cap U_i \subsetneq \cdots \subsetneq V_n \cap U_i \subseteq U_i$ de fechados de U_i. Como U_i é aberto e $V_0, \ldots, V_k$ são irredutíveis, então $V_0 \cap U_i, \ldots, V_n \cap U_i$ é irredutível pela Anotação 9. Isso implica que $\dim U_i \geq n$. Consequentemente, $\sup\{\dim U_i \mid i \in I\} \geq \dim X$.

(c) Dê um exemplo de um espaço topológico X e de um subconjunto aberto e denso $U \subseteq X$ tal que $\dim U < \dim X$.

Sejam $X = \{a, b\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Observe que (X, τ) é um espaço topológico e que $\dim X = 1$. De fato, $\{b\} \subsetneq X$ é a maior cadeia de fechados irredutíveis em X. Tomando $U = \{a\}$, temos que U é aberto e denso, pois o único fechado que contém U é X. Além disso, temos que $\dim U = 0$, pois a única cadeia de fechados irredutíveis em $\{a\}$ com a topologia induzida é $\{a\}$.

(d) Seja X um espaço topológico irredutível e de dimensão finita. Mostre que, se Y for um subconjunto fechado de X tal que $\dim Y = \dim X$, então $Y = X$.

Denote $\dim Y$ por m, e considere $\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m \subseteq Y$, uma cadeia de fechados irredutíveis de Y. Como para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, V_i é fechado em Y, então existe W_i fechado em X tal que $V_i = Y \cap W_i$. Além disso, como a interseção de fechados em X é fechada, então cada V_i é fechado em X. Assim, a cadeia $\emptyset \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m \subseteq X$ é uma cadeia de fechados em X.

Se $V_m \neq X$, como X é um espaço topológico irredutível, então teríamos que $\emptyset \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_m \subsetneq X$ seria uma cadeia de fechados irredutíveis em X de comprimento $m+1$. Isso implicaria que $\dim X \geq m+1$, o que contradiria a hipótese de que $\dim X = m$. Portanto, $V_m = X$. Finalmente, como $V_m \subseteq Y \subseteq X$, então $V_m = Y = X$.

(e) Dê um exemplo de um espaço topológico noetheriano de dimensão infinita.

Considere o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina o subconjunto $a_n := \{m \mid m \geq n\}$. Vamos mostrar que $\tau := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \sqcup \{\emptyset\}$ é uma topologia em $\mathbb{N}$:

- Da definição de τ, temos que $\{\emptyset\} \in \tau$ e $\mathbb{N} = a_0 \in \tau$.
- Seja $\{a_{n_i}\}_{i \in I}$ é uma família qualquer de elementos de τ. Vamos mostrar que $\bigcup_{i \in I} a_{n_i} \in \tau$. Para isso, seja $N := \{n_i \mid i \in I\}$. Como $N \subseteq \mathbb{N}$, existe $i \in I$ tal que $n_i \leq n$ para todo $n \in N$. Fixe tal i. Note que, para todo $n \in N$, se $m \in a_n$, como $n_i \leq n \leq m$, então $m \in a_{n_i}$. Assim, $a_n \subseteq a_{n_i}$ para todo $n \in N$. Logo, $\bigcup_{n \in N} a_n \subseteq a_{n_i} \subseteq \bigcup_{n \in N} a_n$. Isso implica que $\bigcup_{n \in N} a_n = a_{n_i} \in \tau$.
- Sejam $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$. Observe que $a_{n_1} \cap \cdots \cap a_{n_p} = a_{\max\{n_1, \ldots, n_p\}} \in \tau$. De fato se $m \in a_{n_i}$, então $m \geq n_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Assim, $a_{n_1} \cap \cdots \cap a_{n_p} \subseteq a_{\max\{n_1, \ldots, n_p\}} \subseteq a_{n_1} \cap \cdots \cap a_{n_p}$.

Isso mostra que τ é uma topologia em $\mathbb{N}$. Para mostrar que $(\mathbb{N}, \tau)$ é noetheriano, vamos mostrar que toda família de subconjuntos fechados $\{F_i\}_{i \in I}$ de $(\mathbb{N}, \tau)$ admite um elemento minimal. Do Exercício **1.7**a, segue que $(\mathbb{N}, \tau)$ é noetheriano. Primeiro, note que se F é fechado em $(\mathbb{N}, \tau)$, então $F = \mathbb{N} \setminus a_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja $\{F_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos fechados de $(\mathbb{N}, \tau)$. Cada F_i é da forma $F_i = \{0, 1, 2, \ldots, n_i - 1\}$ para algum $n_i \in \mathbb{N}$. Seja $N := \{n_i \in \mathbb{N} \mid i \in I\}$.

Como $N \subseteq \mathbb{N}$, então $\mu := \min N \in N$. Além disso, $F_{n_\mu} \subseteq F_n$ para todo $n \in N$. Ou seja, F_{n_μ} é um elemento minimal para $\{F_i\}_{i \in I}$.

Agora, para mostrar que $(\mathbb{N}, \tau)$ tem dimensão infinita, vamos mostrar que todo subconjunto fechado desse espaço é irredutível. Para isso, tome um fechado F_n, $n \in \mathbb{N}$, e suponha que existam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que $F_n = F_{n_1} \cup F_{n_2}$. Sem perda de generalidade, suponha que $n_1 \geq n_2$. Então $F_{n_1} \supseteq F_{n_2}$. Logo $F_n = F_1 \cup F_2 = F_{n_2}$. Isso mostra que F_n é irredutível. Como consequência do fato de que todo subconjunto fechado de $\mathbb{N}$ é irredutível, a cadeia $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n \subsetneq \cdots$ é uma cadeia infinita de fechados irredutíveis de $(\mathbb{N}, \tau)$. Logo $(\mathbb{N}, \tau)$ tem dimensão infinita.

1.12 Dê um exemplo de um polinômio irredutível $f \in \mathbb{R}[x,y]$ tal que $Z(f)$ não é irredutível em $\mathbf{A}^2$.

Considere o polinômio $f(x,y) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x,y]$. Observe que f é irredutível, pois não tem raízes em $\mathbb{R}$. De fato, se f fosse redutível, então existiriam polinômios $g, h \in \mathbb{R}[x,y] \setminus \mathbb{R}$ tais que $f = gh$. Em particular, $\text{grau}(g)\text{grau}(h) = \text{grau}(gh) = \text{grau}(f) = 2$. Como $g, h \notin \mathbb{R}$ (porque não são nulos, nem unidades), então $\text{grau}(g), \text{grau}(h) > 0$. Isso implica que $\text{grau}(g) = \text{grau}(h) = 1$.

Sejam $a \neq 0$ e $p(x,y) = ax + b$ um polinômio de grau 1 em $\mathbb{R}[x,y]$. Observe que $Z(p) = \{(-\frac{b}{a}, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. De fato, $p(-\frac{b}{a}, c) = a(-\frac{b}{a}) + b = 0$; e $p(x,y) = ax + b = 0$ se, e somente se, $x = -\frac{b}{a}$. Em particular, $Z(p) \neq \emptyset$. Aplicando essa observação à g e h, concluímos que $Z(f) = Z(gh) = Z(g) \cup Z(h) \neq \emptyset$. Por outro lado, $Z(f) = \emptyset$, pois $a^2 + 1 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Isso mostra que: f é irredutível e que $Z(f) = \emptyset$ (que não é irredutível).

Capítulo 2

VARIEDADES PROJETIVAS

2.1 Espaço Projetivo

Anotação 17. Em $\mathbf{A}^{n+1} \setminus 0$, a relação

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n), \quad \text{para todo } \lambda \in k \setminus \{0\},$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Precisamos mostrar que a relação $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Sejam $(a_0, \ldots, a_n), (b_0, \ldots, b_n), (c_0, \ldots, c_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$. Como $(a_0, \ldots, a_n) = (1a_0, \ldots, 1a_n)$, então a relação $\sim$ é reflexiva. Se $(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n)$ então existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tal que $(b_0, \ldots, b_n) = (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$. Assim, $(a_0, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{\lambda} b_0, \ldots, \frac{1}{\lambda} b_n\right)$. Isso justifica o fato de que $(b_0, \ldots, b_n) \sim (a_0, \ldots, a_n)$, e mostra que a relação $\sim$ é simétrica. Por fim, se $(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n)$ e $(b_0, \ldots, b_n) \sim (c_0, \ldots, c_n)$, então existem $\alpha, \beta \in k \setminus \{0\}$ tais que $(b_0, \ldots, b_n) = (\alpha a_0, \ldots, \alpha a_n)$ e $(c_0, \ldots, c_n) = (\beta b_0, \ldots, \beta b_n)$. Assim, $(c_0, \ldots, c_n) = (\beta b_0, \ldots, \beta b_n) = (\alpha\beta a_0, \ldots, \alpha\beta a_n)$. Isso mostra que $(a_0, \ldots, a_n) \sim (c_0, \ldots, c_n)$, e portanto que a relação $\sim$ é transitiva. Logo, $\sim$ é uma relação de equivalência. $\square$

Definição (de espaço projetivo)**.** O *espaço projetivo n-dimensional* é definido como sendo o conjunto de classes de equivalência de $\mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ sob a relação de equivalência

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n), \quad \text{para todo } \lambda \in k \setminus \{0\}.$$

Dado um elemento $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^{n+1}$, a sua classe de equivalência em $\mathbf{P}^n$ será denotada por $[a_0 : \cdots : a_n]$.

2.2 Anéis Graduados

Definição (de anel graduado, de elementos homogêneos, de ideal homogêneo)**.** Um anel A é dito um *anel graduado* se existem subgrupos abelianos (em relação à adição) $A_d \subseteq A$, para cada $d \in \mathbb{N}$, tais que $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ (como grupo abeliano) e $A_d A_e \subseteq A_{d+e}$ para todos $d, e \in \mathbb{N}$. Nesse caso, os elementos de A_d, $d \in \mathbb{N}$, são ditos *elementos homogêneos de grau* d, e para todo $a \in A_d$, denotaremos d por $deg(a)$. Além disso, um ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ é dito *homogêneo* se $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}}(\mathfrak{a}\cap A_d)$.

Anotação 18. Seja A um anel graduado, um ideal $a \subseteq A$ é um ideal homogêneo se, e somente se, a pode ser gerado por elementos homogêneos de A.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $a = \bigoplus_{d\geq 0}(a\cap A_d)$ é um ideal homogêneo em A, então todo elemento de a pode ser escrito como soma de elementos homogêneos, ou seja, em $\bigcup_{d\geq 0}(a\cap A_d)$. Assim, $a \subseteq \langle \bigcup_{d\geq 0}(a\cap A_d)\rangle$. Além disso, como $(a\cap A_d) \subseteq a$ para todo $d \geq 0$, então $\langle \bigcup_{d\geq 0}(a\cap A_d)\rangle \subseteq a$. Portanto, $a = \langle \bigcup_{d\geq 0}(a\cap A_d)\rangle$.

($\Leftarrow$) Sejam $T \subseteq A$ um conjunto de elementos homogêneos em A e $a = \langle T\rangle$. Por definição, se $x \in a$, existem elementos $t_1,\ldots,t_k \in T$ e $x_1,\ldots,x_k \in A$ tais que $x = \sum_{j=1}^{k} x_j t_j$. Como $A = \bigoplus_{d\geq 0} A_d$, então para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$, x_j pode ser escrito como soma finita de elementos homogêneos $x_{j,1},\ldots,x_{j,n_j} \in A$, ou seja,

$$x_j = \sum_{l=0}^{n_j} x_{j,l}, \quad \text{onde, para cada } l \in \{1,\ldots,n_j\},\ x_{j,l} \in A_{d_l} \text{ para algum } d_l \geq 0.$$

Assim,

$$x = \sum_{j=1}^{k} x_j t_j = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{n_j} x_{j,l} t_j.$$

Como, para cada $l \in \{0,\ldots,n_j\}$ e $j \in \{1,\ldots,k\}$, os elementos $x_{j,l}$ e t_j são homogêneos, então $x_{j,l}t_j$ também é homogêneo. Além disso, como $t_j \in T \subseteq a$, então $x_{j,l}t_j \in a$. Ou seja, x pode ser escrito como soma finita de elementos homogêneos de a. Assim, $a \subseteq \bigoplus_{d\geq 0}(a\cap A_d)$. Por outro lado, como $(a\cap A_d) \subseteq a$ para todo $d \geq 0$, então $\bigoplus_{d\geq 0}(a\cap A_d) \subseteq a$. Portanto $a = \bigoplus_{d\geq 0}(a\cap A_d)$, ou seja, a é um ideal homogêneo. □

Anotação 19. Seja A um anel graduado. Se a e b são ideais homogêneos de A, então $a+b$, ab e $\sqrt{a}$ também são ideais homogêneos de A.

Demonstração.

- $(a+b)$: Se $x \in a+b$, então existem $x_a \in a$ e $x_b \in b$ tais que $x = x_a + x_b$. Como $x_a \in a = \bigoplus_{d\geq 0}(a \cap A_d)$ e $x_b \in b = \bigoplus_{d\geq 0}(b \cap A_d)$, então existem $d_1, \ldots, d_k \geq 0$ e elementos $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k \in A$ (não necessariamente todos não nulos) tais que $\alpha_i, \beta_i \in A_{d_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x_a = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ e $x_b = \beta_1 + \cdots + \beta_k$. Assim,

$$x = x_a + x_b = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + (\beta_1 + \cdots + \beta_k) = (\alpha_1 + \beta_1) + \cdots + (\alpha_k + \beta_k),$$

  onde $\alpha_i + \beta_i \in (a+b) \cap A_{d_i}$ para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$. Isso mostra que todo elemento de $a+b$ pode ser escrito como soma finita de elementos homogêneos de $a+b$. Portanto $a+b = \bigoplus_{d\geq 0}((a+b) \cap A_d)$, ou seja, $a+b$ é um ideal homogêneo.

- (ab): Se $x \in ab$, então $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, para alguns $a_1, \ldots, a_n \in a$ e $b_1, \ldots, b_n \in b$. Como a é um ideal homogêneo, então para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}$, onde cada a_{ij} é um elemento homogêneo de a para cada $j \in \{1, \ldots, n_i\}$. Analogamente, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i = \sum_{k=1}^{m_i} b_{ik}$, onde cada b_{ik} é um elemento homogêneo de b. Assim,

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^{m_i} b_{ik} \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^{m_i} a_{ij} b_{ik} \right) \right].$$

  Como, cada a_{ij} é um elemento homogêneo de a e cada b_{ik} é um elemento homogêneo de b, então cada $a_{ij}b_{ik}$ é um elemento homogêneo de ab. Portanto, x pode ser escrito como uma soma finita de elementos homogêneos de ab. Logo, $ab = \bigoplus_{d\geq 0}(ab \cap A_d)$.

- $\sqrt{a}$: Seja $x \in \sqrt{a}$. Como $x \in A$, então existem $k, d_1, \ldots, d_k \geq 0$, $x_1 \in A_{d_1}, \ldots, x_k \in A_{d_k}$ tais que $x = x_1 + \cdots + x_k$. Queremos mostrar que $x_1, \ldots, x_k \in \sqrt{a}$. Vamos usar indução para mostrar isso. Se $k = 1$, então $x = x_1 \in \sqrt{a}$. Agora suponha que $k > 1$ e, como a soma em A é comutativa, suponha, sem perda de generalidade, que $d_1 < \cdots < d_k$. Como $x \in \sqrt{a}$, então existe $r > 0$ tal que $(x_1 + \cdots + x_k)^r = x^r \in a$. Daí segue que

$$(x_1 + \cdots + x_k)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (x_1 + \cdots + x_{k-1})^{r-j} x_k^j \in a.$$

  Note que o elemento de maior grau que aparece na soma acima é $x_k^r \in A_{rd_k}$. Como a é um ideal homogêneo, então $x_k^r \in a$. Logo, $x_k \in \sqrt{a}$. Agora, note que, como $x, x_k \in \sqrt{a}$, então $x - x_k = x_1 + \cdots + x_{k-1} \in \sqrt{a}$. Pela hipótese de indução, $x_1, \ldots, x_{k-1} \in \sqrt{a}$. $\square$

Anotação 20. Seja A um anel graduado e $\mathfrak{a} \subseteq A$ um ideal homogêneo. O ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ é primo se, e somente se, para todo $f, g \in A$ homogêneos tais que $fg \in \mathfrak{a}$, temos que $f \in \mathfrak{a}$ ou $g \in \mathfrak{a}$.

Demonstração. A parte "*somente se*" segue direto da definição de ideal primo. Para provar a parte "*se*", precisamos mostrar que, se $a, b \in A$ são tais que $ab \in \mathfrak{a}$, então $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. Para mostrar isso, primeiro, denote $a = a_1 + \cdots + a_n$, $b = b_1 + \cdots + b_m$, onde $a_1 \in A_{d_1}, \ldots, a_n \in A_{d_n}$, $b_1 \in A_{e_1}, \ldots, b_m \in A_{e_m}$, $0 \leq d_1 < \cdots < d_n$, $0 \leq e_1 < \cdots < e_m$. Vamos usar indução em n e m:

- Suponha que $n = 1$ e $m = 1$. Nesse caso, $a = a_1$ e $b = b_1$ são elementos homogêneos. Assim, pela hipótese, se $ab \in \mathfrak{a}$, então $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$.

- Suponha que $n = 1$ e $m > 1$. Suponha também que, para todo $d, e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}$, $k < m$, $a \in A_d$ (homogêneo) e $x \in A_{e_1} \oplus \cdots \oplus A_{e_k}$: se $ax \in \mathfrak{a}$, então $a \in \mathfrak{a}$ ou $x \in \mathfrak{a}$. Sejam $d \in \mathbb{N}$, $a \in A_d$, $0 \leq e_1 < \cdots < e_m$ e $b \in A_{e_1} \oplus \cdots \oplus A_{e_m}$. Observe que $ab = (ab_1 + \cdots + ab_{m-1}) + ab_m$ e que, como $e_1 < \cdots < e_m$, então $(d + e_1) < \cdots < (d + e_{m-1}) < (d + e_m)$. Assim, se $ab \in \mathfrak{a}$, como $\mathfrak{a}$ é um ideal homogêneo, então $ab_m \in \mathfrak{a}$. Como a e b_m são homogêneos, isso e a hipótese de indução implicam que $a \in \mathfrak{a}$ ou $b_m \in \mathfrak{a}$. No primeiro caso, $a \in \mathfrak{a}$; e no segundo caso, como $a(b_1 + \cdots + b_{m-1}) = ab - ab_m \in \mathfrak{a}$, então $a \in \mathfrak{a}$ ou $b_1 + \cdots + b_{m-1} \in \mathfrak{a}$. Neste primeiro caso, $a \in \mathfrak{a}$; e neste segundo caso, se $b_1 + \cdots + b_{m-1} \in \mathfrak{a}$, então $b = (b_1 + \cdots + b_{m-1}) + b_m \in \mathfrak{a}$. Ou seja, em todos os casos temos que $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$.

- Suponha que $n > 1$ e $m \geq 1$. Suponha também que, para todo $d_1, \ldots, d_l$, $l < n$, $x \in A_{d_1} \oplus \cdots \oplus A_{d_l}$ e $b \in A$: se $xb \in \mathfrak{a}$, então $x \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. Sejam $d_1 < \cdots < d_n \in \mathbb{N}$, $a \in A_{d_1} \oplus \cdots \oplus A_{d_n}$, $e_1 < \cdots < e_m \in \mathbb{N}$ e $b \in A_{e_1} \oplus \cdots \oplus A_{e_m}$. Observe que temos $ab = (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_1) + \cdots + (a_1 b_m + \cdots + a_n b_m)$. Como $d_1 < \cdots < d_n$, $e_1 < \cdots < e_m$ e $\mathfrak{a}$ é um ideal homogêneo, se $ab \in \mathfrak{a}$, então $a_n \in \mathfrak{a}$ ou $b_m \in \mathfrak{a}$. No primeiro caso, $(a_1 + \cdots + a_{n-1})b = ab - a_n b \in \mathfrak{a}$; e consequentemente, pela hipótese de indução, $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. No segundo caso, $a(b - b_m) \in \mathfrak{a}$; e indutivamente, obtemos que $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. $\square$

Anotação 21. Seja $n > 0$ e $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$. Se f é um polinômio homogêneo de grau $d \in \mathbb{N}$, então $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$ para todos $\lambda, a_0, \ldots, a_n \in k$.

Demonstração. Como f é um polinômio homogêneo de grau d, então existe $m > 0$ e, para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$ e $j \in \{0, \ldots, n\}$, existem $f_j \in k$ e $d_{ij} \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{i=0}^{m} d_{ij} = d$ e $f =$

$\sum_{j=0}^{m} f_j x_0^{d_{0j}} \ldots x_n^{d_{nj}}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) &= \sum_{j=0}^{m} f_j (\lambda a_0)^{d_{0j}} \cdots (\lambda a_n)^{d_{nj}} \\ &= \sum_{j=0}^{m} f_j \lambda^{d_{0j}} a_0^{d_{0j}} \cdots \lambda^{d_{nj}} a_n^{d_{nj}} \\ &= \sum_{j=0}^{m} f_j \lambda^{d_{0j}+\cdots+d_{nj}} a_0^{d_{0j}} \cdots a_n^{d_{nj}} \\ &= \lambda^d \sum_{j=0}^{m} f_j a_0^{d_{0j}} \ldots a_n^{d_{nj}} \\ &= \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n). \end{aligned}$$ □

Observe que um polinômio em $k[x_0, \ldots, x_n]$ não necessariamente assume o mesmo valor quando avaliado em representantes diferentes da mesma classe de equivalência da Anotação 17. Ou seja, nem todo polinômio em $k[x_0, \ldots x_n]$ induz uma função $\mathbf{P}^n \to k$. No entanto, pela Anotação 21, os polinômios homogêneos induzem uma função $\mathbf{P}^n \to \{0,1\}$.

Anotação 22. Sejam $n > 0$ e $S = k[x_0, \ldots, x_n]$. Então S é um anel graduado, $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$, onde $S_d := \mathrm{span}_k\{x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \mid d_0 + d_1 + \cdots + d_n = d\}$ para cada $d \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Primeiro observe que, como S_d é um subespaço vetorial de S, então, em particular, S_d é um subgrupo abeliano de S, para todo $d \in \mathbb{N}$. Além disso, como $\{x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \mid d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}\}$ forma uma k-base para S, então $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$.

Para terminar de mostrar que S é um anel graduado, considere $d, e \in \mathbb{N}$, $f \in S_d$ e $g \in S_e$. Para cada $(d_0, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $d_0 + \cdots + d_n = d$, existe $f_{(d_0,\ldots,d_n)} \in k$ (somente uma quantidade finita deles, não-nula) tal que $f = \sum_{d_0+\cdots+d_n=d} f_{(d_0,\ldots,d_n)} x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}$ e, para cada $(e_0, \ldots, e_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $e_0 + \cdots + e_n = e$, existe $g_{(e_0,\ldots,e_n)} \in k$ (somente uma quantidade finita deles, não-nula) tal que $g = \sum_{e_0+\cdots+e_n=e} g_{(e_0,\ldots,e_n)} x_0^{e_0} \cdots x_n^{e_n}$. Assim,

$$fg = \sum_{d_0+\cdots+d_n=d} \sum_{e_0+\cdots+e_m=e} f_{(d_0,\ldots,d_n)} g_{(e_0,\ldots,e_m)} x_0^{d_0+e_0} \cdots x_n^{d_n+e_n}.$$

Como $(d_0 + e_0) + \cdots + (d_n + e_n) = (d_0 + \cdots + d_n) + (e_0 + \cdots + e_n) = d + e$ e somente uma quantidade finita dos coeficientes $f_{(d_0,\ldots,d_n)} g_{(e_0,\ldots,e_m)}$ é não-nula, então $fg \in S_{d+e}$. □

A partir de agora, denotaremos por S o anel $k[x_0, \ldots, x_n]$, munido da graduação da dada por $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$, onde $S_d := \mathrm{span}_k\{x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \mid d_0 + d_1 + \cdots + d_n = d\}$ para cada $d \in \mathbb{N}$. Além disso, denotaremos por S^h o conjunto $\bigcup_{d\in\mathbb{N}} S_d$, formado por todos os elementos homogêneos de S.

2.3 Topologia de Zariski em $\mathbf{P}^n$

Definição (de conjunto de zeros, de ideais homogêneos, de conjuntos algébricos)**.** Seja $T \subseteq S^h$ um conjunto de polinômios homogêneos, o *conjunto de zeros* de T é definido como

$$Z(T) := \{P \in \mathbf{P}^n \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Dado um ideal homogêneo $a \subseteq S$, existe um conjunto de geradores homogêneos de a (pela Anotação 18), ou seja, existe $T \subseteq S^h$ tal que $a = \langle T \rangle$. Defina o *conjunto de zeros* de a como sendo $Z(a) := Z(T)$, e defina um subconjunto $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ como sendo um *conjunto algébrico*, se $Y = Z(T)$ para algum conjunto T de elementos homogêneos de S (ou, equivalentemente, para algum ideal homogêneo $a \subseteq S$).

Anotação 23. Para todo subconjunto $T \subseteq S^h$, existe um subconjunto finito $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de T, tal que $Z(T) = Z(f_1, \ldots, f_n)$.

Demonstração. Como T é um conjunto de polinômios homogêneos, então, pela definição, $Z(T) = Z(\langle T \rangle)$. Como S é um anel noetheriano, então, pela Anotação 4, $\langle T \rangle$ é finitamente gerado. Sejam $p_1, \ldots, p_r \in S$ geradores de $\langle T \rangle$. Como $p_1, \ldots, p_r \in \langle T \rangle$, então, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existem $s_{i,1}, \ldots s_{i,k_i} \in S$ e $t_{i,1}, \ldots, t_{i,k_i} \in T$ tais que $p_i = \sum_{l=1}^{k_i} s_{i,l} t_{i,l}$. Tome $n = k_1 + \cdots + k_r$, $f_1 = t_{1,1}, f_2 = t_{1,2}, \ldots, f_n = t_{r,k_r}$, e observe que $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = \langle T \rangle$. De fato, por um lado, como $f_1, \ldots, f_n \in T$, então $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \subseteq \langle T \rangle$; e por outro lado, $\langle T \rangle = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle \subseteq \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. □

Proposição 2.1. Seja $n \geq 0$.

(a) $\emptyset$ e $\mathbf{P}^n$ são conjuntos algébricos.

(b) Se $T_1, T_2 \subseteq S^h$, então $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$.

(c) Para qualquer família $\{T_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de S^h, temos que $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) = Z\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right)$.

Demonstração.

(a) Os conjuntos $\emptyset, \mathbf{P}^n$ são algébricos, pois $\emptyset = Z(1)$, $\mathbf{P}^n = Z(0)$, e $0, 1 \in S_0$.

(b) Observe que, como $T_1, T_2 \in S^h$, então $T_1 T_2 \subseteq S^h$ pela Anotação 21. A demonstração de que $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$ é completamente análoga a demonstração da Proposição 1.1(b).

(c) Observe que, como $T_i \in S^h$ para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i\in I} T_i \subseteq S^h$. A demonstração de que $\bigcap_{i\in I} Z(T_i) = Z\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right)$ é completamente análoga a demonstração da Proposição 1.1(c). $\square$

Definição (de topologia de Zariski, de variedade projetiva, de variedade quase-projetiva)**.** A *topologia de Zariski* em $\mathbf{P}^n$ é definida tomando os conjuntos abertos como os complementares dos conjuntos algébricos. Uma *variedade projetiva* é definida como sendo um conjunto algébrico irredutível em $\mathbf{P}^n$, para algum $n \geq 0$. Uma *variedade quase-projetiva* é definida como sendo um subconjunto aberto de uma variedade projetiva.

Definição (de ideal homogêneo de conjunto, de anel de coordenadas homogêneas)**.** Dado um subconjunto $Y \subseteq \mathbf{P}^n$, o *ideal homogêneo* $I(Y)$ é definido como sendo o ideal gerado por $\{f \in S^h \mid f(P) = 0$ para todo $P \in Y\}$, e o *anel de coordenadas homogêneas de* Y é definido como sendo o anel $S(Y) := S/I(Y)$.

Anotação 24. Todo ponto do espaço projetivo é uma variedade projetiva.

Demonstração. Seja $P \in \mathbf{P}^n$, se $P = [P_0, \cdots, P_n]$, existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $P_i \neq 0$, nesse caso, $Z\left(x_0 - \frac{P_0}{P_i}x_i, \ldots, x_{i-1} - \frac{P_{i-1}}{P_i}x_i, x_{i+1} - \frac{P_{i+1}}{P_i}x_i, \ldots, x_n - \frac{P_n}{P_i}x_i\right) = \{P\}$. Para facilitar a notação, vamos mostrar apenas o caso $i = 0$, os demais são análogos.

Denote por f_j o polinômio $x_j - \frac{P_j}{P_0}x_0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ e por X o conjunto $Z(f_1, \ldots, f_n)$. Note que $P \in X$ pois, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f_j(P) = P_j - \frac{P_j}{P_0}P_0 = 0.$$

Pelo outro lado, dado $Q = [Q_0 : \cdots : Q_n] \in X$, temos que para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $f_j(Q) = 0$, logo $Q_j = \frac{P_j}{P_0}Q_0$. Assim, se $Q_0 = 0$, então $Q_j = 0$ para todo j, o que contradiz o fato de que Q é um ponto do espaço projetivo. Temos então que $Q_0 \neq 0$, o que implica que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $P_j = \frac{P_0}{Q_0}Q_j$. Além disso, como $P_0 = \frac{P_0}{Q_0}Q_0$, então $P \sim Q$.

Com isso, temos que $\{P\}$ é um conjunto algébrico projetivo. Para mostrar que também é uma variedade projetiva, note que se Y é um fechado qualquer de $\mathbf{P}^n$, então $\{P\} \cap Y = P$ ou $\emptyset$. Logo não podemos escrever $\{P\}$ como união de dois subconjuntos próprios fechados na topologia induzida. Portanto $\{P\} = X$ é uma variedade projetiva. $\square$

Anotação 25. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, seja $U_i := \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$. Então $\{U_i\}_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbf{P}^n$.

Demonstração. Primeiro note que, como cada $U_0,\ldots,U_n$ é complementar de um conjunto algébrico, então $U_0,\ldots,U_n$ são, de fato, conjuntos abertos de $\mathbf{P}^n$. Agora, tome $[p_0:\cdots:p_n]\in\mathbf{P}^n$. Pela definição de espaço projetivo, existe $i\in\{0,\ldots,n\}$ tal que $p_i\neq 0$. Assim, $[p_0:\cdots:p_n]\notin Z(x_i)$, ou seja, $[p_0:\cdots:p_n]\in U_i$. Isso mostra que $\mathbf{P}^n=\bigcup_{i\in\{0,\ldots,n\}}U_i$. □

Anotação 26. Para cada $i\in\{0,\ldots,n\}$, a função

$$\varphi_i : U_i \to \mathbf{A}^n \quad \text{dada por} \quad \varphi_i[a_0:\cdots:a_n]=\left(\frac{a_0}{a_i},\ldots,\frac{a_{i-1}}{a_i},\frac{a_{i+1}}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i}\right)$$

está bem definida.

Demonstração. Fixe $i\in\{0,\cdots,n\}$. Se $(a_0,\ldots,a_n),(b_0,\ldots,b_n)\in\mathbf{A}^{n+1}$ são tais que $a_i\neq 0$, $b_i\neq 0$, e $(b_0,\ldots,b_n)=(\lambda a_0,\ldots,\lambda a_n)$ para algum $\lambda\in k\setminus\{0\}$, então

$$\varphi_i[b_0:\cdots:b_n]=\left(\frac{b_0}{b_i},\ldots,\frac{b_n}{b_i}\right)=\left(\frac{\lambda a_0}{\lambda a_i},\ldots,\frac{\lambda a_n}{\lambda a_i}\right)=\left(\frac{a_0}{a_i},\ldots,\frac{a_n}{a_i}\right)=\varphi_i[a_0:\cdots:a_n].$$

Isso mostra que φ_i está bem definida. □

Definição (de função contínua)**.** Sejam X,Y dois espaços topológicos e a um elemento de X. Uma função $f:X\to Y$ é dita *contínua em a*, quando para todo subconjunto aberto $V\subseteq Y$ contendo $f(a)$, o subconjunto $f^{-1}(V)\subseteq X$ também é aberto; e f é dita *contínua* (em X) quando f é contínua em todo $a\in X$.

Anotação 27. Sejam X e Y espaços topológicos e $f:X\to Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é contínua.

(b) Se A é aberto em Y, então $f^{-1}(A)$ é aberto em X.

(c) Se B é fechado em Y, então $f^{-1}(B)$ é fechado em X.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Primeiro observe que, se A é um aberto de Y tal que $A\cap\operatorname{im}(f)=\emptyset$, então $f^{-1}(A)=\emptyset$ é aberto em X. Agora suponha que $A\subseteq Y$ é um aberto tal que $A\cap\operatorname{im}(f)\neq\emptyset$. Observe que, para todo elemento $y\in A\cap\operatorname{im}(f)$, o subconjunto A é um aberto contendo y. Assim, pela definição de função contínua, $f^{-1}(A)$ é aberto.

(b) $\Rightarrow$ (c): Se B é fechado em Y, então $Y\setminus B$ é aberto. Assim, pela hipótese, $f^{-1}(Y\setminus B)$ é aberto em X. Como $X\setminus f^{-1}(B)=f^{-1}(Y\setminus B)$ é aberto, então $f^{-1}(B)$ é fechado em X.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sejam $x \in X$ e A um aberto de Y tal que $f(x) \in A$. Como A é aberto, então $Y \setminus A$ é fechado. Assim, pela hipótese, $f^{-1}(Y \setminus A)$ é fechado em X. Como $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(X \setminus A)$ é fechado, então $f^{-1}(A)$ é aberto em X. □

Definição (de homeomorfismo)**.** Sejam X e Y espaços topológicos, uma função $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo* se é bijetiva e f e f^{-1} são contínuas.

Anotação 28. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é um homeomorfismo.

(b) f é contínua, bijetora, e para cada A aberto em X, $f(A)$ é aberto em Y.

(c) f é contínua, bijetora, e para cada F fechado em X, $f(F)$ é fechado em Y.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Pela definição de homeomorfismo, temos que f é contínua e bijetora. Assim, basta mostrar que a imagem de qualquer subconjunto aberto de X é um subconjunto aberto de Y. Como f é um homeomorfismo, então f^{-1} é contínua. Assim, se A é aberto em X, então pela Anotação 27, $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ é aberto em Y.

(b) $\Rightarrow$ (a): Pela hipótese, temos que para todo aberto $A \subseteq X$, $f(A)$ é aberto em Y. Assim, como f é uma bijeção, isso é equivalente a dizer que para cada A aberto em X, a imagem inversa de A por f^{-1} é aberta em Y. Logo, pela Anotação 27, f^{-1} é contínua. Portanto, como f é uma bijeção e f e f^{-1} são contínuas, então f é um homeomorfismo.

(a) $\Leftrightarrow$ (c): Segue do fato de que f é uma bijeção contínua e da Anotação 27. □

Proposição 2.2. Sejam $n > 0$ e, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, considere $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$ munido da topologia induzida por $\mathbf{P}^n$. Para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, a função

$$\varphi_i : U_i \to \mathbf{A}^n \quad \text{dada por} \quad \varphi_i[a_0 : \cdots : a_n] = \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Para facilitar a notação, vamos mostrar que φ_0 é um homeomorfismo. Para os demais casos, a demonstração é análoga. Primeiro, vamos mostrar que φ_0 é bijetiva. De fato, dado $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{A}^n$, note que $[1 : a_1 : \cdots : a_n] \in U_0$ e $(a_1, \ldots, a_n) = \varphi_0[1 : a_1 : a_2 : \cdots : a_n]$. Note também que, se $P = [p_0 : \cdots : p_n]$ e $Q = [q_0 : \cdots : q_n]$ são pontos de U_0 tais que $\varphi_0(P) = \varphi_0(Q)$, então

$$(q_0, q_1, \ldots, q_n) = q_0\left(1, \frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = q_0\left(1, \frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}\right) = \left(\frac{q_0}{p_0}p_0, \frac{q_0}{p_0}p_1, \ldots, \frac{q_0}{p_0}p_n\right).$$

Isso implica que $P \sim Q$ em $\mathbf{P}^n$, ou seja, φ_0 é injetiva. Portanto, φ_0 é uma bijeção entre U_0 e $\mathbf{A}^n$.

Agora, para terminar de mostrar que φ_0 é um homeomorfismo, pela Anotação 28, basta mostrar que φ_0 é contínua e leva fechados de U_0 em fechados de $\mathbf{A}^n$. Para mostrar que φ_0 leva fechados em fechados, denote $S = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $A_n = k[y_1, \ldots, y_n]$, e considere a função

$$\begin{aligned} \alpha_0 : S^h &\longrightarrow A_n \\ f(x_0, x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto f(1, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Sejam $Y \subseteq U_0$ um conjunto fechado de U_0 e $\overline{Y}$ o fecho de Y em $\mathbf{P}^n$. Como $\overline{Y}$ é fechado em $\mathbf{P}^n$, então $\overline{Y} = Z(T)$ para algum $T \subseteq S^h$. Vamos mostrar que $\varphi_0(Y) = Z(\alpha_0(T))$. De fato, se $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \varphi_0(Y)$ e $f \in T$, então $\alpha_0(f)(P) = f(1, p_1, \ldots, p_n)$. Agora note que, como φ_0 é uma bijeção, então $\varphi_0^{-1}(P) = [1 : p_1 : \cdots : p_n] \in Y$. Assim, como $Y \subseteq \overline{Y} = Z(T)$, então temos que $\alpha_0(f)(P) = f(1, p_1, \ldots, p_n) = 0$, ou seja, $P \in Z(\alpha_0(T))$. Pelo outro lado, se $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in Z(\alpha_0(T))$ e $f \in T$, então $f(1, q_1, \ldots, q_n) = \alpha_0(f)(Q) = 0$. Logo $\varphi_0^{-1}(Q) = [1 : q_1 : \cdots : q_n] \in Z(T) = \overline{Y}$. Além disso, como $[1 : q_1 : \cdots, q_n] \in U_0$, então $[1 : q_1 : \cdots : q_n] \in \overline{Y} \cap U_0 = Y$. Isso implica que $Q = \varphi_0[1 : q_1 : \cdots : q_n] \in \varphi_0(Y)$. Assim, $\varphi_0(Y) = Z(\alpha(T))$ é um conjunto fechado de $\mathbf{A}^n$. Portanto, φ_0 leva fechados em fechados.

Agora, para mostrar que φ_0 é contínua, pela Anotação 27, basta mostrar que a imagem inversa de fechados de $\mathbf{A}^n$ são fechados em U_0. Como φ_0 é uma bijeção, então basta mostrar que a imagem de um conjunto fechado de $\mathbf{A}^n$ por φ_0^{-1} é fechada em U_0. Para isso, considere a função

$$\begin{aligned} \beta_0 : A_n &\longrightarrow S \\ f(y_1, \ldots, y_n) &\longmapsto x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right), \qquad \text{onde} \quad d = grau(f). \end{aligned}$$

Observe que $\beta_0(f) \in S^h$. De fato, se $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \ldots x_n^{d_{n,i}}$, onde cada $f_i \in k$, então

$$\beta(f) = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = x_0^d \sum_{i \geq 0} f_i \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{d_{1,i}} \ldots \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{d_{n,i}} = \sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \ldots x_n^{d_{n,i}} x_0^{d - \sum_{j=1}^{n} d_{j,i}}.$$

Assim, como $d \geq \sum_{j=0}^{n} d_{j,i}$, para todo $i \geq 0$ tal que $f_i \neq 0$, então $\beta(f)$ é um polinômio homogêneo e $deg(\beta(f)) = d$. Agora, dado um fechado de $\mathbf{A}^n$, $W = Z(T')$ para algum $T' \subseteq A_n$, vamos mostrar que $\varphi_0^{-1}(W) = Z(\beta_0(T')) \cap U_0$. De fato, tome $P \in \varphi_0^{-1}(W)$ e $f \in T'$. Se $P = [p_0 : \cdots : p_n]$, então $\beta_0(f)(P) = p_0^d f\left(\frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}\right) = p_0^d f(\varphi_0(P))$. Como $P \in \varphi_0^{-1}(W)$, então $\varphi_0(P) \in W = Z(T')$. Assim $\beta_0(f)(P) = f(\varphi_0(P)) = 0$ e $P \in Z(\beta_0(T'))$. Além disso, como $\varphi_0^{-1}(W) \subseteq U_0$, então $P \in U_0$. Portanto, $P \in Z(\beta_0(T')) \cap U_0$. Agora, para mostrar o outro lado, tome $Q \in Z(\beta_0(T')) \cap U_0$ e $f \in T'$. Como $Q \in Z(\beta_0(T'))$, então $\beta_0(f)(Q) = 0$. Assim, se

$Q = [q_0 : \cdots : q_n]$, então $q_0^d f\left(\frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = \beta_0(f)(Q) = 0$. Como $Q \in U_0$, então $q_0^d \neq 0$. Assim, $f(\varphi_0(Q)) = f\left(\frac{q_1}{q_0}, \cdots, \frac{q_n}{q_0}\right) = 0$. Assim, temos que $\varphi_0(Q) \in Z(T') = W$, então $Q \in \varphi_0^{-1}(W)$. Portanto, temos que $\varphi_0^{-1}(W) = Z(\beta_0(T'))$ é um conjunto fechado de $\mathbf{P}^n$. □

Anotação 29. Sejam X e Y espaços topológicos e S um subespaço topológico de X. Se $\phi : X \to Y$ é um homeomorfismo, então $\phi|_S : S \to \phi(S)$ também é um homeomorfismo.

Demonstração. Como ϕ é um homeomorfismo, então ϕ é uma bijeção; e consequentemente, $\phi|_S : S \to \phi(S)$ é uma bijeção. Além disso, como ϕ é contínua, então, para todo aberto $A \subseteq Y$, temos que $\phi^{-1}(A)$ é um aberto de X (pela Anotação 27). Assim, dado um aberto $B \in \phi(S)$, existe um aberto $A \subseteq Y$ tal que $B = A \cap \phi(S)$, e portanto, $\phi|_S^{-1}(B) = \phi|_S^{-1}(A \cap \phi(S)) = \phi^{-1}(A) \cap S$ é aberto em S. Pela Anotação 27, isso implica que $\phi|_S$ é contínua. Para terminar, vamos mostrar que $\phi|_S$ é aberta. Se A é aberto em S, então $A = S \cap B$, para algum B aberto em X. Como B é aberto, então $\phi(B)$ é aberto em Y. Assim, $\phi|_S(A) = \phi(B) \cap \phi(S)$ é aberto em $\phi(S)$. Da Anotação 28, segue que ϕ é um homeomorfismo. □

Anotação 30. Sejam X e Y espaço topológicos e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo. Um subconjunto $A \subseteq X$ é irredutível se, e somente se, $\phi(A) \subseteq Y$ é irredutível.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Tome $Z_1, Z_2 \subseteq \phi(A)$ fechados tais que $\phi(A) = Z_1 \cup Z_2$. Como Z_1 e Z_2 são fechados em $\phi(A)$, então existem B_1 e B_1 fechados em Y tais que $Z_1 = \phi(A) \cap B_1$ e $Z_2 = \phi(A) \cap B_2$. Como ϕ é um bijetora, temos que:

$$A = \phi^{-1}(\phi(A)) = \phi^{-1}((\phi(A) \cap B_1) \cup (\phi(A) \cap B_2)) = (A \cap \phi^{-1}(B_1)) \cup (A \cap \phi^{-1}(B_2)).$$

Além disso, como B_1, B_2 são fechados em Y e ϕ é contínua, então $\phi^{-1}(B_1)$ e $\phi^{-1}(B_2)$ são fechados em X; e consequentemente, $A \cap \phi^{-1}(B_1)$ e $A \cap \phi^{-1}(B_2)$ são fechados em A. Como A é irredutível (por hipótese) e $A = (A \cap \phi^{-1}(B_1)) \cup (A \cap \phi^{-1}(B_2))$, então $A = A \cap \phi^{-1}(B_1)$ ou $A = A \cap \phi^{-1}(B_2)$. Assim, temos que: $\phi(A) \subseteq \phi(\phi^{-1}(B_1)) = B_1$ ou $\phi(A) \subseteq \phi(\phi^{-1}(B_2)) = B_2$. Consequentemente, $Z_1 = \phi(A)$ ou $Z_2 = \phi(A)$. Isso mostra que $\phi(A)$ é irredutível.

($\Leftarrow$) Análogo ao caso anterior, trocando ϕ por $\phi^{-1} : Y \to X$. □

Corolário 2.3. Se $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ é uma variedade projetiva (resp. quase-projetiva), então: $\{Y \cap U_i\}_{i \in \{0,\ldots,n\}}$ é uma cobertura aberta de Y, e para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $Y \cap U_i$ é homeomorfo a uma variedade afim (resp. quase-afim).

Demonstração. Como $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ e, pela Anotação 25, $\{U_i\}_{i\in\{0,\cdots,n\}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbf{P}^n$, então $Y = (Y \cap U_0) \cup \cdots \cup (Y \cap U_n)$. Além disso, como para cada $i \in \{0,\cdots,n\}$, U_i é aberto em $\mathbf{P}^n$, então $Y \cap U_i$ é aberto em Y. Portanto, $\{Y \cap U_i\}_{i\in\{0,\cdots,n\}}$ é uma cobertura aberta de Y.

Além disso, se Y é uma variedade projetiva, então Y é um fechado irredutível de $\mathbf{P}^n$. Como $Y \cap U_i$ é aberto em Y, pela Anotação 9, $Y \cap U_i$ é irredutível, para todo $i \in \{0,\ldots,n\}$. Além disso, para cada $i \in \{0,\cdots,n\}$, temos que $Y \cap U_i$ é fechado em U_i. Assim, pela Proposição 2.2 e pela Anotação 30, a imagem de $Y \cap U_i$ por φ_i é um fechado irredutível de $\mathbf{A}^n$, ou seja, é uma variedade afim.

Se Y é uma variedade quase-projetiva, então Y é um subconjunto aberto de uma variedade projetiva X. Assim, pelo parágrafo anterior, $\varphi_i(X \cap U_i)$ é uma variedade afim de $\mathbf{A}^n$ para todo $i \in \{0,\ldots,n\}$. Como Y é aberto em X, então $Y \cap U_i$ é aberto em $X \cap U_i$. Consequentemente, $\varphi_i(Y \cap U_i)$ é um subconjunto aberto de $\varphi_i(X \cap U_i)$; ou seja, $\varphi_i(Y \cap U_i)$ é uma variedade quase-afim de $\mathbf{A}^n$. $\square$

Exercícios Resolvidos e Lemas Auxiliares

2.1 Prove o "Nullstellensatz homogêneo", que diz: se $\mathfrak{a} \subseteq S$ é um ideal homogêneo e se $f \in S$ é um polinômio homogêneo com $deg(f) > 0$, tal que $f(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$, então $f^q \in \mathfrak{a}$ para algum $q > 0$.

Sejam $Z_{\mathbf{P}^n}(\mathfrak{a})$ e $Z_{\mathbf{A}^{n+1}}(\mathfrak{a})$ os conjuntos de zeros de $\mathfrak{a}$ em $\mathbf{P}^n$ e $\mathbf{A}^{n+1}$, respectivamente. Se $P \in Z_{\mathbf{A}^{n+1}}(\mathfrak{a})$, então $f(P) = 0$ para todo, $f \in \mathfrak{a}$, e em particular, para todo f homogêneo de $\mathfrak{a}$. Isso mostra que $Z_{\mathbf{A}^{n+1}}(\mathfrak{a}) \subseteq Z_{\mathbf{P}^n}(\mathfrak{a})$. Assim, se f é um polinômio homogêneo, tal que $f(P) = 0$ para todo ponto $P \in Z_{\mathbf{P}^n}(\mathfrak{a})$, então $f(P) = 0$ para todo $P \in Z_{\mathbf{A}^{n+1}}(\mathfrak{a})$. Portanto, pelo Teorema de zeros de Hilbert, $f^q \in \mathfrak{a}$ para algum $q > 0$.

2.2 Para um ideal homogêneo $\mathfrak{a} \subseteq S$, mostre que as afirmações a seguir são equivalentes:

(i) $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$;

(ii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$ ou $\sqrt{\mathfrak{a}} = S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$;

(iii) $\mathfrak{a} \supseteq S_d$ para algum $d > 0$;

(i) $\Rightarrow$ (ii): Primeiro observe que, pelo Exercício 2.1, para todo polinômio homogêneo $f \in S_+ \cap I(Z(\mathfrak{a})) = S_+ \cap I(\emptyset) = S_+$, temos que $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Isso implica que $S_+ \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por outro lado, vamos mostrar que, se I é um ideal homogêneo contendo S_+ (como é o caso de $\sqrt{\mathfrak{a}}$, pela Anotação 19), então $I = S_+$ ou $I = S$. Se $f \in I$ for um elemento homogêneo, então temos duas possibilidades: $f(0,\dots,0) = 0$ ou $f(0,\dots,0) \in k \setminus \{0\}$. No primeiro caso, $f \in S_+$; e no segundo caso, pela Anotação 22, $f \in S_0 = k$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$ ou $\sqrt{\mathfrak{a}} = S_+$, então $S_1 \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Assim, para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, existe $d_i > 0$ tal que $x_i^{d_i} \in \mathfrak{a}$. Considere $d = d_0 + \cdots + d_n > 0$. Vamos mostrar que $S_d \subseteq \mathfrak{a}$. Pela Anotação 22, $S_d = \text{span}_k\{x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \mid i_0 + \cdots + i_n = d\}$. Assim, basta provar que, $x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \in \mathfrak{a}$ para todo $i_0,\dots,i_n \geq 0$ tal que $i_0 + \cdots + i_n = d$. Observe que, se $i_0 + \cdots + i_n = d$, então existe $k \in \{0,\dots,n\}$ tal que $i_k \geq d_k$. Caso contrário, se $i_0 < d_0,\dots,i_n < d_n$, então $i_0 + \cdots + i_n < d$. Como $x_k^{d_k} \in \mathfrak{a}$, isso implica que $x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n} \in \mathfrak{a}$ para todo $i_0,\dots,i_n \geq 0$ tal que $i_0 + \cdots + i_n = d$. Consequentemente, $S_d \subseteq \mathfrak{a}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Se $S_d \subseteq \mathfrak{a}$ para algum $d > 0$, então $x_0^d,\dots,x_n^d \in \mathfrak{a}$. Assim, se existisse $[a_0 : \cdots : a_n] \in Z(\mathfrak{a})$, então $a_0^d = \cdots = a_n^d = 0$; ou seja, $a_0 = \cdots = a_n = 0$. Isso contradiria o fato de que $a_i \neq 0$ para algum $i \in \{0,\dots,n\}$. Então $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

2.3 (a) Se $T_1 \subseteq T_2$ são subconjuntos de S^h, então $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

Se $P \in Z(T_2)$, então $f(P) = 0$ para todo $f \in T_2$. Em particular, como $T_1 \subseteq T_2$, então $q(P) =$ para todo $q \in T_1$, ou seja, $P \in Z(T_1)$. Portanto, $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

(b) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos de $\mathbf{P}^n$, então $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

Se f é um polinômio homogêneo de $I(Y_2)$, então $f(P) = 0$ para todo $P \in Y_2$. Em particular, como $Y_1 \subseteq Y_2$, então $f(Q) = 0$, para todo $Q \in Y_1$, ou seja, $f \in I(Y_1)$. Como $I(Y_2)$ é o ideal gerado pelos polinômios homogêneos de $k[x_0, \ldots, x_n]$ que se anulam em todos os pontos de Y_2, então todos os geradores de $I(Y_2)$ estão em $I(Y_1)$. Portanto, $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(c) Para quaisquer dois subconjuntos Y_1 e Y_2 de $\mathbf{P}^n$, $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

Como $Y_1, Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$, pelo item (b), $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_1)$, $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_2)$, e assim $I(Y_1 \cup Y_2) \subseteq I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Por outro lado, se $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$, então f é um polinômio homogêneo de S que se anula em todo ponto de Y_1 e em todo ponto de Y_2. Ou seja, se $P \in Y_1 \cup Y_2$, então $f(P) = 0$. Isso mostra que $I(Y_1 \cup Y_2) \supseteq I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(d) Se $\mathfrak{a} \subseteq S$ é um homogêneo ideal tal que $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, então $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{a}$.

Pelo Exercício 2.1, $I(Z(\mathfrak{a})) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por outro lado, se $f \in \sqrt{a}$, então existe $k > 0$ tal que $f^k \in \mathfrak{a}$. Assim, $f^k(P) = 0$ para todo ponto $P \in Z(\mathfrak{a})$. Consequentemente, $f(P) = 0$ para todo $P \in Z(\mathfrak{a})$. Portanto $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$.

(e) Para cada subconjunto $Y \subseteq \mathbf{P}^n$, $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

Primeiro, note que $Y \subseteq Z(I(Y))$, pois se $P \in Y$, então $f(P) = 0$ para todo f homogêneo em $I(Y)$.

Agora, considere $\mathfrak{a}$ um ideal homogêneo de S e $Z(\mathfrak{a})$ um fechado de $\mathbf{P}^n$. Pelo item (b), se $Y \subseteq Z(\mathfrak{a})$, então $I(Y) \supseteq I(Z(\mathfrak{a})) \supseteq \mathfrak{a}$, e pelo item (a), $Z(I(Y)) \subseteq Z(\mathfrak{a})$. Portanto $Z(I(Y))$ é o menor fechado que contem Y.

2.4 (a) Existe uma bijeção entre os cojuntos algébricos em $\mathbf{P}^n$ e os ideais homogêneos radicais de S diferentes de S_+. Essa bijeção inverte inclusões e é induzida por $I(-)$ e $Z(-)$.

Denote por $\mathscr{Z}$ os conjuntos algébricos de $\mathbf{P}^n$ e por $\mathscr{I}$ os ideais homogêneos radicais de S diferentes de S_+. Observe que I, Z induzem funções $I : \mathscr{Z} \to \mathscr{I}$ e $Z : \mathscr{I} \to \mathscr{Z}$.

Vamos começar mostrando que $I : \mathscr{Z} \to \mathscr{I}$ é injetora e inverte inclusões. Sejam $Y_1, Y_2 \in \mathscr{Z}$. Se $I(Y_1) = I(Y_2)$, pelo Exercício 2.3(e), $Y_1 = \overline{Y_1} = Z(I(Y_1)) = Z(I(Y_2)) = \overline{Y_2} = Y_2$. Além disso, I inverte inclusões. De fato, se $Y_1 \subseteq Y_2$, pelo Exercício 2.3(b), $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

Agora vamos mostrar que $Z : \mathscr{I} \to \mathscr{Z}$ é injetora e inverte inclusões. Sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathscr{I}$. Se $Z(\mathfrak{a}) = Z(\mathfrak{b})$, então pelo Exercício 2.3(d), temos que $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = I(Z(\mathfrak{a})) = I(Z(\mathfrak{b})) = \sqrt{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$. Além disso, se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, então pelo Exercícios 2.3(a), $Z(\mathfrak{a}) \supseteq Z(\mathfrak{b})$.

Como, pelo Exercício 2.3, partes (d) e (e), $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ para todo $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}$

e $Z(I(Y)) = \overline{Y} = Y$ para todo $Y \in \mathscr{X}$, então I e Z são inversas uma da outra, e em particular, bijeções.

(b) Um conjunto algébrico $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ é irredutível se, somente se, $I(Y)$ é um ideal primo.

($\Rightarrow$) Seja Y um fechado irredutível de $\mathbf{P}^n$. Tome $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ tais que $fg \in I(Y)$. Queremos mostrar que $f \in I(Y)$ ou $g \in I(Y)$. Como $fg \in I(Y)$, então $\langle fg \rangle \subseteq I(Y)$. Assim, pelo Exercício **2.3**, $Y = Z(I(Y)) \subseteq Z(fg)$. Além disso, temos que $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, pois, $P \in Z(fg)$ se, e somente se, $f(P)g(P) = 0$. Como k é um domínio de integridade, $f(P)g(P) = 0$ se, e somente se, $f(P) = 0$ ou $g(P) = 0$. Ou seja, $P \in Z(fg)$ se, e somente se, $P \in Z(f)$ ou $P \in Z(g)$; o que é equivalente a dizer que $P \in Z(f) \cup Z(g)$.

O argumento do parágrafo acima mostra que podemos escrever Y como $Y = (Y \cap Z(f)) \cup (Y \cap Z(g))$. Como $Y \cap Z(f)$, $Y \cap Z(g)$ são fechados e Y é irredutível, então $Y = Y \cap Z(f)$ ou $Y = Y \cap Z(g)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $Y = Y \cap Z(f)$, então $Y \subseteq Z(f)$. Assim, pelo Exercício **2.3** $f \in \sqrt{\langle f \rangle} = I(Z(f)) \subseteq I(Y)$. Isso mostra que $I(Y)$ é um ideal primo.

($\Leftarrow$) Seja Y um conjunto algébrico de $\mathbf{P}^n$ tal que $I(Y)$ é um ideal primo. Suponha que $Y = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1 e Y_2 são fechados em Y. Queremos mostrar que $Y_1 \subseteq Y$ ou $Y_2 \subseteq Y$. Pelo Exercício **2.3**, $I(Y) = I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Como $I(Y)$ é um ideal primo por hipótese, então $I(Y) = I(Y_1)$ ou $I(Y) = I(Y_2)$ (ver demonstração da parte *além disso* do Corolário 1.3). Além disso, como Y_1 e Y_2 são fechados em Y e Y é fechado em $\mathbf{P}^n$, então Y_1 e Y_2 também são fechados em $\mathbf{P}^n$. Assim, $Y = Z(I(Y)) = Z(I(Y_1)) = \overline{Y}_1 = Y_1$ ou $Y = Z(I(Y)) = Z(I(Y_2)) = \overline{Y}_2 Y_2$. Logo, Y é irredutível.

(c) Mostre que $\mathbf{P}^n$ é irredutível.

Como $I(\mathbf{P}^n) = \{0\}$ é um ideal primo em $k[x_0, \ldots, x_n]$, então pelo item (b), $\mathbf{P}^n$ é irredutível.

2.5 (a) $\mathbf{P}^n$ é um espaço topológico noetheriano.

Seja $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ uma cadeia descendente de fechados em $\mathbf{P}^n$. Então pelo Exercício **2.3**, $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \cdots$ é uma cadeia ascendente de ideais homogêneos em S. Pela Anotação 3, $k[x_0, \ldots, x_n]$ é um anel noetheriano. Logo existe $r_0 > 0$ tal que $I(Y_r) = I(Y_{r_0})$ para todo $r \geq r_0$. Em particular, $Z(I(Y_r)) = Z(I(Y_{r_0}))$ para todo $r \geq r_0$. Do Exercício **2.3**(e), segue que $Y_r = Y_{r_0}$ para todo $r \geq r_0$. Portanto, $\mathbf{P}^n$ é um espaço topológico noetheriano.

(b) Todo conjunto algébrico em $\mathbf{P}^n$ pode ser escrito de maneira única como uma união de subconjuntos algébricos irredutíveis não contidos uns nos outros.

Seja F a família de todos os conjuntos algébricos (subconjuntos fechados) não-vazios de $\mathbf{P}^n$ que não podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos algébricos irredutíveis. Se F for não-vazia, pelo Exercício **1.7**a, F tem algum elemento minimal, Z. Se Z fosse irredutível, então Z não seria um membro de F. Assim, existiriam fechados próprios $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ tais que $Z = Z_1 \cup Z_2$. Como Z é minimal em F, então $Z_1, Z_2 \notin F$, ou seja, Z_1, Z_2 poderiam ser escritos como uniões finitas de subconjuntos fechados irredutíveis. Logo Z poderia ser escrito como uma união finita de subconjuntos fechados irredutíveis. Isso contradiria com o fato de que Z ser um membro de F. Portanto F é vazia, ou seja, não existem conjuntos algébricos não-vazios de $\mathbf{P}^n$ que não podem ser escritos como uma união finita de subconjuntos algébricos irredutíveis.

2.6 Se Y é uma variedade projetiva, mostre que $\dim S(Y) = \dim(Y) + 1$.

Suponha que $Y \subseteq \mathbf{P}^n$. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, considere o aberto $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$, a função $\varphi_i : U_i \to \mathbf{A}^n$ dada por

$$\varphi_i[x_0 : \cdots : x_n] = (a_0/a_i, \ldots, a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \ldots, a_n/a_i),$$

e denote $Y_i := \varphi_i(Y \cap U_i)$. Vamos mostrar que, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, temos que $\dim Y_i = \dim(Y \cap U_i)$ (Lema 2.4) e $S(Y)_{x_i} \cong A(Y_i)[t, t^{-1}]$ como k-álgebras (Lema 2.6). Observe que esses resultados implicam que:

$$\begin{aligned}
\dim(Y) &= \max\{\dim(Y \cap U_i) \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} && \text{(pelo Exercício } \mathbf{1.10}\text{)} \\
&= \max\{\dim Y_i \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} && \text{(pelo Lema 2.4)} \\
&= \max\{\dim A(Y_i) \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} && \text{(pela Proposição 1.6)} \\
&= \max\{\dim A(Y_i)[t, t^{-1}] - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} && \\
&= \max\{\dim S(Y)_{x_i} - 1 \mid i \in \{0, \ldots, n\}\} && \text{(pelo Lema 2.6)} \\
&= \dim S(Y) - 1 && \text{(pelo Teorema 1.7).}
\end{aligned}$$

Isso demonstra o enunciado do exercício.

Lema 2.4. Sejam X e Y espaços topológicos e $A \subseteq X$. Se $\phi : X \to Y$ é um homeomorfismo, então $\dim(A) = \dim(\phi(A))$.

Demonstração. Denote $\dim(A) =: r$. Ou seja, r é o maior inteiro tal que existe uma cadeia $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_r$ de fechados irredutíveis em A. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$, como A_i é fechado em A, existe B_i fechado em X tal que $A_i = A \cap B_i$. Como cada B_i é fechado em X e ϕ é um homeomorfismo, então $\phi(B_i)$ é fechado em Y. Como $\phi(A_i) = \phi(A \cap B_i) = \phi(A) \cap$

$\phi(B_i)$, então $\phi(A_i)$ é fechado em $\phi(A)$. Assim, $\phi(A_0) \subsetneq \phi(A_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \phi(A_r)$ é uma cadeia de subconjuntos fechados de $\phi(A)$. Além disso, pelo Lema 30, $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_r)$ também são irredutíveis. Logo, $\dim(\phi(A)) \geq \dim A$. Analogamente, trocando A por $\phi(A)$ e ϕ por ϕ^{-1}, podemos mostrar que $\dim A \geq \dim \phi(A)$. O resultado segue. □

Seja Y uma variedade projetiva em $\mathbf{P}^n$. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, considere a k-álgebra $S(Y)_{x_i}$. Lembre que $S(Y)_{x_i}$ é gerada, como k-espaço vetorial, por classes de equivalências da forma

$$\frac{f}{x_i^k}, \qquad \text{onde} \quad f \in S(Y) \text{ é homogêneo e } k \geq 0.$$

Denote por $S(Y)^0_{x_i}$ a subálgebra gerada pelos elementos da forma f/x_i^k, onde $k \geq 0$ e $f \in S(Y)$ é homogêneo de grau k.

Lema 2.5. Se $i \in \{0, \ldots, n\}$ é tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, então existe um isomorfismo de k-álgebras $S(Y)_{x_i} \cong S(Y)^0_{x_i}[t, t^{-1}]$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $i = 0$. (A demonstração dos outros casos é completamente análoga.) Defina ϕ como sendo o único homomorfismo de k-álgebras $\phi : S \to S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}]$ que satisfaz

$$\phi(x_0) = t, \quad \phi(x_1) = \frac{x_1}{x_0}t, \quad \ldots, \quad \phi(x_n) = \frac{x_n}{x_0}t.$$

Vamos começar mostrando que $\phi(f) = 0$ para todo $f \in I(Y)$. Como $I(Y)$ é um ideal homogêneo, para todo $f \in I(Y)$, existem $a_1, \ldots, a_r \in S$ e $f_1, \ldots, f_r \in I(Y) \cap S_h$, tais que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$. Se, para cada $i \in \{0, \ldots, r\}$, denotamos $deg(f_i) =: d_i$, pela Anotação 22, temos que:

$$\phi(f_i(x_0, \ldots, x_n)) = f_i\left(t, \frac{x_1}{x_0}t, \ldots, \frac{x_n}{x_0}t\right) = \left(\frac{t}{x_0}\right)^{d_i} f_i(x_0, \ldots, x_n).$$

Consequentemente, como ϕ é um homomorfismo de álgebras, temos que

$$\phi(f) \;=\; a_1 f_1 x_0^{-d_1} t^{d_1} + \cdots + a_n f_n x_0^{-d_n} t^{d_n} \;\in\; S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}].$$

Como $f_1, \ldots, f_n \in I(Y)$, então $\phi(f) = 0 \in S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}]$.

Pelo Teorema de Isomorfismo para k-álgebras, isso implica que ϕ induz um homomorfismo de k-álgebras $\varphi : S(Y) \to S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}]$, dado explicitamente por $\varphi(f + I(Y)) = \phi(f)$. Agora observe que, para todo $k \geq 0$, $\varphi(x_0^k)$ é uma unidade em $S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}]$. De fato, $\varphi(x_0^k)t^{-k} = t^k t^{-k} = 1$ para todo $k \geq 0$. Pela propriedade universal da localização (ver [1, Proposition 3.1]), isso implica que φ induz um homomorfismo de k-álgebras $\psi : S(Y)_{x_0} \to S(Y)^0_{x_0}[t, t^{-1}]$, dado explicitamente por $\psi\left(\sum_{k \geq 0} f_k / x_0^k\right) = \sum_{k \geq 0} \varphi(f_k) t^{-k}$.

Para terminar, vamos mostrar que ψ é uma bijeção. Para mostrar que ψ é injetiva, tome $g = \sum_{k\geq 0} g_k/x_0^k \in S(Y)_{x_0}$ tal que $\psi(g) = 0$. Se, para cada $k \geq 0$, denotarmos $deg(g_k) =: d_k$, temos que

$$\psi(g) = \psi\left(\sum_{k\geq 0} \frac{g_k}{x_0^k}\right) = \sum_{k\geq 0} g_k\left(t, \frac{x_1}{x_0}t, \ldots, \frac{x_n}{x_0}t\right)t^{-k} = \sum_{k\geq 0} g_k(x_0, \cdots, x_n)\frac{t^{d_k-k}}{x_0^{d_k}}.$$

Assim, $\psi(g) = 0$ se, e somente se, para cada $k \geq 0$, $g_k \in I(Y)$, ou seja, $g_k = 0$ em $S(Y)$. Portanto, $\psi(g) = 0$ se, e somente se, $g = 0 \in S(Y)_{x_0}$. Isso mostra que ψ é injetiva. Para mostrar que ψ é sobrejetiva, seja $p = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k}{x_0^{d_k}} t^k \in S(Y)^0_{x_0}[t,t^{-1}]$, onde $p_k \in S(Y)$ é um elemento homogêneo de grau d_k. Observe que $p = \psi(\tilde{p})$ para $\tilde{p} = \sum_{k\geq 0} p_k x_0^{k-d_k} \in S(Y)_{x_0}$. De fato,

$$\psi(\tilde{p}) = \sum_{k\geq 0} \psi(p_k)x_0^{k-d_k} = \sum_{k\geq 0} p_k(x_0, \cdots, x_n)\frac{t^{d_k+(k-d_k)}}{x_0^{d_k}} = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k}{x_0^{d_k}} t^k = p.$$

Isso mostra que ψ é sobrejetiva.

Portanto, $\psi : S(Y)_{x_0} \to S(Y)^0_{x_0}[t,t^{-1}]$ é um isomorfismo de k-álgebras. □

Lema 2.6. Seja Y uma variedade projetiva em $\mathbf{P}^n$, e para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, considere o aberto $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$. Se $Y \cap U_i \neq \emptyset$, então existe um isomorfismo de k-álgebras $S(Y)_{x_i} \cong A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$.

Demonstração. Pelo Lema 2.5, $S(Y)_{x_i} \cong S(Y)^0_{x_i}[x_i, x_i^{-1}]$ como k-álgebras. Assim, para mostrar que $S(Y)_{x_i} \cong A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$, é suficiente mostrar que $S(Y)^0_{x_i} \cong A(Y_i)$ como k-álgebras. Para mostrar que $S(Y)^0_{x_i} \cong A(Y_i)$, denote as variáveis do anel de polinômios S por $x_0, x_1, \ldots, x_n$, as variáveis do anel de polinômios A_n por $y_1, \ldots, y_n$, e considere a função

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & S(Y)^0_{x_i} & \longrightarrow & A(Y_i) \\ & f(x_0, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(y_1, \ldots, y_i, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n). \end{array}$$

Para mostrar que α está bem definida, tome $f, g \in S(Y)^0_{x_i}$ tais que $f - g \in I(Y)$, $P \in Y_i$, e $Q = [a_0 : \cdots : a_n] \in Y \cap U_i$ tal que $P = \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(f-g)(P) &= (f-g)\left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) \\ &= f\left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) - g\left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) \\ &= f(a_0, \ldots, a_n) - g(a_0, \ldots, a_n) \\ &= (f-g)(Q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\alpha(f-g) \in I(Y_i)$. Para mostrar que α é um homomorfismo de k-álgebras, sejam $f,g \in S(Y)^0_{x_i}$ e $\lambda \in k$. Então:

$$\begin{aligned}\alpha(f+\lambda g) &= (f+\lambda g)(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)\\ &= f(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)+\lambda g(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)\\ &= \alpha(f)+\lambda\alpha(g)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha(fg) &= (fg)(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)\\ &= f(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)g(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)\\ &= \alpha(f)\alpha(g).\end{aligned}$$

Agora, para mostrar que α é injetora, como α é linear, basta mostrar que se $\alpha(f)=0 \in A(Y_i)$, então $f=0 \in S(Y)^0_{x_i}$. Pelas respectivas definições, $\alpha(f)=0 \in A(Y_i)$ se, e somente se, $\alpha(f)(P)=0$ para todo $P \in Y_i$, onde

$$Y_i = \varphi_i(Y \cap U_i) = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{A}^n \mid [a_1:\cdots:a_i:1:a_{i+1}:\cdots:a_n] \in Y\}.$$

Como $\alpha(f)(a_1,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_i,1,a_{i+1},\dots,a_n)$, então $\alpha(f)(Y_i)=0$ implica que $f(Y\cap U_i)=0$. Isso mostra que α é injetora. Para terminar, vamos mostrar que α é sobrejetiva. Dado $g = \sum_{(d_1,\dots,d_n)} \lambda_{(d_1,\dots,d_n)} y_1^{d_1}\cdots y_n^{d_n} \in A(Y_i)$, observe que

$$g = \alpha\left(\sum_{(d_1,\dots,d_n)} \lambda_{(d_1,\dots,d_n)} x_0^{d_1}\cdots x_{i-1}^{d_i} x_{i+1}^{d_{i+1}}\cdots x_n^{d_n}\right).$$

Isso mostra a sobrejetividade. □

2.7 (a) $\dim \mathbf{P}^n = n$.

Como $I(\mathbf{P}^n)=\{0\}$, então $S(\mathbf{P}^n)=S$. Pelo Exercício **2.6**, $\dim \mathbf{P}^n = \dim S - 1$; e pelo Teorema 1.7(a), $\dim S = n+1$. Assim, $\dim \mathbf{P}^n = n$.

(b) Se $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ é uma variedade quasi-projetiva, então $\dim Y = \dim \overline{Y}$.

Para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, considere o aberto $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$, a função $\varphi_i : U_i \to \mathbf{A}^n$ dada por $\varphi_i[x_0:\cdots:x_n] = (a_0/a_i,\dots,a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i,\dots,a_n/a_i)$, e denote $Y_i := \varphi_i(Y\cap U_i) \subseteq \mathbf{A}^n$. Pelo Exercício **2.6**,

$$\dim \overline{Y} = \max\{\dim(\overline{Y}\cap U_i) \mid i \in \{0,\dots,n\}\},$$

e pelo Lema 2.4, $\dim(\overline{Y}\cap U_i) = \dim \varphi_i(\overline{Y}\cap U_i)$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$. Além disso, temos que, $\varphi_i(\overline{Y}\cap U_i) = \overline{Y_i}$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$.

De fato, fixe $i \in \{0,\dots,n\}$ e lembre que, como φ_i é contínua, a imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado. Assim, $\varphi_i^{-1}(\overline{\varphi_i(Y \cap U_i)})$ é um fechado de U_i que contém $Y \cap U_i$. Em particular, $\overline{Y} \cap U_i \subseteq \varphi_i^{-1}(\overline{\varphi_i(Y \cap U_i)})$. Logo, $\varphi_i(Y \cap U_i) \subseteq \varphi_i(\overline{Y} \cap U_i) \subseteq \overline{\varphi_i(Y \cap U_i)} = \overline{Y_i}$. Além disso, como φ_i é um homeomorfismo e $\overline{Y} \cap U_i$ é fechado em U_i, então $\varphi_i(\overline{Y} \cap U_i)$ é fechado em $\mathbf{A}^n$. Portanto $\overline{Y_i} = \overline{\varphi_i(Y \cap U_i)} \subseteq \varphi_i(\overline{Y} \cap U_i)$.

Isso mostra que $\dim \overline{Y} = \max\{\dim \overline{Y_i} \mid i\{0,\dots,n\}\}$. Da Proposição 1.9 segue que $\dim \overline{Y_i} = \dim Y_i$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$. Usando novamente o Lema 2.4, obtemos que $\dim Y_i = \dim(Y \cap U_i)$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$; e usando novamente o Exercício **2.6**, obtemos que $\dim Y = \max\{\dim(Y \cap U_i) \mid i \in \{0,\dots,n\}\}$. O resultado segue.

2.8 Uma variedade projetiva $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ tem dimensão $n-1$ se, e somente se, $Y = Z(f)$, para algum polinômio $f \in S$ homogêneo e irredutível com grau maior que zero.

($\Rightarrow$) Se $\dim Y = n-1$, então, pelo Exercício **2.6**, $\dim S(Y) = n$. Agora, pelo Teorema 1.7,

$$\mathrm{ht}(I(Y)) + \dim(S(Y)) = \dim S = n+1.$$

Logo $\mathrm{ht}\, I(Y) = 1$. Além disso, como Y é uma variedade projetiva, pelo Exercício **2.4**, $I(Y)$ é um ideal primo. Pela Anotação 3, S é noetheriano. Assim, como $I(Y)$ é primo e $\mathrm{ht}\, I(Y) = 1$, pela Proposição 1.11, $I(Y)$ é principal. Ou seja, existe $f \in S$ tal que $I(Y) = \langle f \rangle$. Como $I(Y)$ é um ideal homogêneo por definição, então podemos escolher f como sendo um polinômio homogêneo pela Anotação 18. Como $\langle f \rangle$ é primo, então f é primo e, consequentemente, irredutível. Além disso, o grau de f é maior que 0. Caso contrário, ou seja, se o grau de f fosse 0, então $f \in k$. Nesse caso, se $f = 0$, então $Y = Z(f) = \mathbf{P}^n$, o que contradiria a hipótese de $\dim Y = n-1$; e se $f \neq 0$, então $\langle f \rangle = S$ e $Y = Z(f) = \emptyset$ não seria uma variedade.

($\Leftarrow$) Sejam $f \in S$ um polinômio homogêneo, irredutível, com grau maior que 0 e $Y = Z(f)$. Como S é um domínio de fatoração única, então f é primo. Assim, $\langle f \rangle$ é um ideal primo, homogêneo e próprio de S. Pelo Exercício **2.3**, $I(Z(f)) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$. Como S é um domínio de integridade, então f não é um divisor de zero, e como o grau de f é maior que 0, então f não é uma unidade. Assim, pelo Teorema 1.10, $\mathrm{ht}\, I(Y) = \mathrm{ht}\langle f \rangle = 1$; e pelo Teorema 1.7, $\mathrm{ht}\langle f \rangle + \dim(S/\langle f \rangle) = \dim S = n+1$. Logo, $\dim S(Y) = \dim(S/\langle f \rangle) = n$. Pelo Exercício **2.6**, $\dim S(Y) = \dim Y + 1$, logo $\dim Y = n-1$.

Capítulo 3

Morfismos

3.1 Funções Regulares

Definição (função regular afim)**.** Dada uma variedade quase-afim $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, uma função $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é dita *regular* em um ponto $p \in Y$ quando existem um aberto $U \subseteq Y$ e polinômios $g, h \in A_n$ tais que $p \in U$, $h(u) \neq 0$ e $f(u) = g(u)/h(u)$ para todo $u \in U$. O conjunto de todas as funções regulares $f : Y \to \mathbf{A}^1$ será denotado por $\mathscr{O}(Y)$.

Anotação 31. Seja X um espaço topológico irredutível. Se Y, Z são subconjuntos abertos e não-vazios de X, então $Y \cap Z$ é um aberto não-vazio de X.

Demonstração. Como X é irredutível e Y, Z são abertos não-vazios de X, então Y e Z são densos em X (pela Anotação 9). Em particular, o menor fechado que contém Z é $\overline{Z} = X$. Se $Y \cap Z$ fosse vazio, então $X \setminus Y$ seria um fechado próprio de X que contém Z. Isso contradiz o fato de que $\overline{Z} = X$. Além disso, como Y, Z são abertos, então $Y \cap Z$ é aberto. □

Anotação 32. Considere uma variedade quase-afim $Y \subseteq \mathbf{A}^n$. Observe que a estrutura de k-álgebra em k induz as seguintes operações no conjunto de funções $Y \to \mathbf{A}^1$:

$$(f+g)(y) := f(y) + g(y), \qquad (\lambda f)(y) := \lambda(f(y)), \qquad (fg)(y) := f(y)g(y), \tag{3.1}$$

para todos $f, g : Y \to \mathbf{A}^1$, $\lambda \in k$, $y \in Y$. O conjunto $\mathscr{O}(Y)$, de funções regulares em Y, é uma k-álgebra com as operações (3.1).

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathscr{O}(Y)$, $\lambda \in k$ e $y \in Y$. Como f e g são regulares em y, então existem polinômios $f_1, f_2, g_1, g_2 \in A_n$ e abertos $U, V \subseteq Y$ tais que: U e V contêm y, $f_2(u) \neq 0$ e

$f(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ para todo $u \in U$, $g_2(v) \neq 0$ e $g(v) = \frac{g_1(v)}{g_2(v)}$ para todo $v \in V$. Denote $U \cap V$ por W e observe que W é um aberto de Y que contém y.

Para todo $w \in W$, temos que:

$$(f+g)(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} + \frac{g_1(w)}{g_2(w)} = \frac{f_1(w)g_2(w) + g_1(w)f_2(w)}{f_2(w)g_2(w)} = \frac{f_1g_2 + g_1f_2}{f_2g_2}(w),$$
$$(\lambda f)(w) = \lambda \frac{f_1(w)}{f_2(w)} = \frac{\lambda f_1}{f_2}(w),$$
$$(fg)(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} \frac{g_1(w)}{g_2(w)} = \frac{f_1(w)g_1(w)}{f_2(w)g_2(w)} = \frac{f_1g_1}{f_2g_2}(w).$$

Como $f_1, f_2, g_1, g_2 \in A_n$, então $(f_1g_2 + g_1f_2), (f_2g_2), (\lambda f_1), (f_1g_1) \in A_n$. Além disso, como, para todo $w \in W$, $f_2(w), g_2(w) \neq 0$, então $(f_2g_2)(w) \neq 0$. Isso mostra que $(f+g), (\lambda f), (fg)$ são funções regulares em Y. Isso mostra que, de fato, (3.1) induz operações em $\mathscr{O}(Y)$.

Para mostrar que as operações induzidas por (3.1) munem $\mathscr{O}(Y)$ de uma estrutura de anel, fixe $f, g, h \in \mathscr{O}(Y)$, um ponto $p \in Y$, abertos $U, V, T \subseteq Y$ tais que $p \in U, V, T$, e polinômios $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2 \in A_n$ tais que $f(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$, $g(v) = \frac{g_1(v)}{g_2(v)}$, $h(w) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)}$ para todos $u \in U$, $v \in V$, $t \in T$. Como U, V, T são abertos não-vazios de Y, então, pela Anotação 31, $U \cap V \cap T$ é um aberto não-vazio de Y. Além disso, $f_2(y), g_2(y), h_2(y) \neq 0$ para todo $y \in U \cap V \cap T$. Assim, $f+g$, fg e λf correspondem, respectivamente à soma, ao produto e à multiplicação por escalar no corpo de frações de A_n. Consequentemente, essas operações satisfazem os seus respectivos axiomas. Além disso, como as funções constantes 0 e 1 são polinomiais, então elas são regulares em todo Y e são os elementos neutros, respectivamente, da soma e do produto em $\mathscr{O}(Y)$. $\square$

Lema 3.1. Seja $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ uma variedade quase-afim. Se $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular, então f é contínua.

Demonstração. Observe que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(C) \subseteq Y$ é fechado para todo $C \subseteq \mathbf{A}^1$ fechado. Agora lembre que $C \subseteq \mathbf{A}^1$ é fechado se, e somente se, C é um conjunto finito de pontos. Assim, é suficiente mostrar que $f^{-1}(a) \subseteq Y$ é fechado para todo $a \in \mathbf{A}^1$.

Fixe $a \in \mathbf{A}^1$. Pela Anotação 33, é suficiente mostrar que, para todo $p \in f^{-1}(a)$, existe um aberto $U \subseteq Y$ tal que $p \in U$ e $f^{-1}(a) \cap U$ é fechado em U. Como f é regular, então, para cada $p \in Y$, existem um aberto $U \subseteq Y$ e polinômios $g, h \in A_n$, tais que $p \in U$, $h(u) \neq 0$ e $f(u) = g(u)/h(u)$ para todo $u \in U$. Assim, $f^{-1}(a) \cap U = \{u \in U \mid g(u)/h(u) = a\} = Z(g - ah) \cap U$. Como $Z(g - ah)$ é fechado em $\mathbf{A}^n$, então $Z(g - ah) \cap U$ é fechado em U. $\square$

Anotação 33. Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $Z \subseteq X$ é fechado se, e somente se, existe uma cobertura aberta $\mathscr{U}$ de X tal que $Z \cap U$ é fechado em U para todo $U \in \mathscr{U}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam Z um subconjunto fechado de X e $\mathscr{U}$ uma cobertura de X por conjuntos abertos. Para todo $U \in \mathscr{U}$, temos que $Z \cap U$ é fechado de U, pela definição de topologia induzida.

($\Leftarrow$) Sejam Z um subconjunto de X e $\mathscr{U}$ uma cobertura de X por abertos tal que $Z \cap U$ é fechado em U para todo $U \in \mathscr{U}$. Como $U \cap Z$ é fechado em U, então $U \setminus (U \cap Z)$ é aberto em U para todo $U \in \mathscr{U}$. Assim, como U é aberto em X, então $U \cap Z^c$ é aberto em X para todo $U \in \mathscr{U}$. Agora, note que $X \setminus Z = (\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U) \setminus Z = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} (U \cap Z^c)$ é uma união de conjuntos abertos de X. Portanto $X \setminus Z$ é aberto em X, e consequentemente, Z é fechado em X. □

Definição (função regular projetiva)**.** Dada uma variedade quase-projetiva $Y \subseteq \mathbf{P}^n$, uma função $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é dita *regular* em um ponto $p \in Y$ quando existem um aberto $U \subseteq Y$ e polinômios $g, h \in S^h$ homogêneos de mesmo grau tais que $p \in U$, $h(u) \neq 0$ e $f(u) = g(u)/h(u)$ para todo $u \in U$. O conjunto de todas as funções regulares $f : Y \to \mathbf{A}^1$ será denotado por $\mathscr{O}(Y)$.

Anotação 34. Seja $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ uma variedade quase-projetiva. O conjunto de funções regulares $\mathscr{O}(Y)$, munido das operações (3.1), é uma k-álgebra.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathscr{O}(Y)$, $\lambda \in k$ e $y \in Y$. Como f e g são regulares em y, então existem polimômios homogêneos $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S$ e abertos $U, V \subseteq Y$ tais que $deg(f_1) = deg(f_2)$, $f_2(u) \neq 0$, $f(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ para todo $u \in U$, $deg(g_1) = deg(g_2)$, $g_2(v) \neq 0$ e $g(v) = \frac{g_1(v)}{g_2(v)}$ para todo $v \in V$. Seja $W := U \cap V$, observe que W é um aberto não vazio de Y, $y \in W$ e que, para todo $w \in W$, temos que:

$$(f+g)(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} + \frac{g_1(w)}{g_2(w)} = \frac{f_1(w)g_2(w) + g_1(w)f_2(w)}{f_2(w)g_2(w)} = \frac{f_1g_2 + g_1f_2}{f_2g_2}(w),$$
$$(\lambda f)(w) = \lambda \frac{f_1(w)}{f_2(w)} = \frac{\lambda f_1}{f_2}(w),$$
$$(fg)(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)} \frac{g_1(w)}{g_2(w)} = \frac{f_1(w)g_1(w)}{f_2(w)g_2(w)} = \frac{f_1g_1}{f_2g_2}(w).$$

Como $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S$, então $(f_1g_2 + g_1f_2), (f_1g_1), (f_2g_2) \in S$ e como para todo $w \in W$, temos que $f_2(w), g_2(w) \neq 0$, então $(f_2g_2)(w) \neq 0$. Além disso, se denotarmos $d := deg(f_1) = deg(f_2)$ e $e := deg(g_1) = deg(g_2)$, então pela Anotação 22, $f_1g_2, g_1f_2, f_1g_2 + g_1f_2 \in S_{d+e}$, $\lambda f_1, f_2 \in S_d$ e $f_1g_1, f_2g_2 \in S_{d+e}$. Logo, temos que $f + g$, λf e fg são funções regulares em Y.

Isso mostra que, de fato, as operações (3.1) induzem operações em $\mathscr{O}(Y)$. A demonstração de que estas operações munem $\mathscr{O}(Y)$ de a estrutura de k-álgebra é completamente análoga à Anotação 32. □

Anotação 35. Seja $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ uma variedade quase-projetiva. Se $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular, então f é contínua.

Demonstração. Essa demonstração é completamente análoga à demonstração do Lema 3.1. $\square$

3.2 Morfismos de Variedades

Definição (de variedade, de morfismo de variedade)**.** Uma *variedade* é definida como sendo uma variedade afim (ou seja, um conjunto algébrico irredutível de um espaço afim $\mathbf{A}^n$), quase-afim (ou seja, um subconjunto aberto de uma variedade afim), projetiva (ou seja, um conjunto algébrico irredutível de um espaço projetivo $\mathbf{P}^n$), ou quase-projetiva (ou seja, um subconjunto aberto de uma variedade projetiva).

Dadas duas variedades X, Y, uma função $\varphi : X \to Y$ é dita um *morfismo de variedades* quando φ é contínua e, para todo aberto $V \subseteq Y$ e toda função regular $f : V \to \mathbf{A}^1$, a função $(f \circ \varphi) : \varphi^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ também é regular.

Anotação 36. Sejam X uma variedade e $f, g \in \mathscr{O}(X)$. Se $f|_U = g|_U$ para algum aberto não-vazio $U \subseteq X$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Tome $h = f - g$, e observe que $h \in \mathscr{O}(X)$ pela Anotação 32. Como $f|_U = g|_U$, então $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ para todo $x \in U$; ou seja, $\emptyset \subsetneq U \subseteq h^{-1}(0)$. Como $\{0\}$ é finito, então $\{0\}$ é um conjunto algébrico; e portanto $\{0\}$ é fechado em $\mathbf{A}^1$. Além disso, como h é regular, então h é contínua pelo Lema 3.1 e Anotação 35. Isso implica que $h^{-1}(0)$ é um conjunto fechado de X; e portanto $\overline{U} \subseteq h^{-1}(0)$. Além disso, como U é aberto e não vazio em X, então U é denso pela Anotação 9. Isso implica que $h^{-1}(0) = X$; ou seja, $h(x) = 0$ para todo $x \in X$. Logo, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

Anotação 37. Para toda variedade X, a função $\mathrm{id}_X : X \to X$ é um morfismo de variedades.

Demonstração. Observe que id_X é contínua, porque se $A \subseteq X$ é um conjunto aberto, então $\mathrm{id}_X^{-1}(A) = A$ é aberto em X. Agora sejam V um aberto de X e $f : V \to \mathbf{A}^1$ uma função regular. Como $\mathrm{id}_X^{-1}(V) = V$ e $f \circ \mathrm{id}_X = f$, então $f \circ \mathrm{id}_X$ é regular em $\mathrm{id}_X^{-1}(V)$. $\square$

Anotação 38. Se X, Y, Z são variedades e $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ são morfismos de variedades, então $\psi \circ \varphi : X \to Z$ também é um morfismo de variedades.

Demonstração. Observe que $\psi \circ \varphi$ é contínua, pois se A é um subconjunto aberto de Z, como ψ é contínua, então $\psi^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto de Y. Assim, como φ é contínua, então $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(A))$ é um subconjunto aberto de X. Portanto, $(\psi \circ \varphi)^{-1}(A)$ é um subconjunto aberto de X.

Agora tome V aberto em Z e $f : (\psi \circ \varphi)^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ uma função regular qualquer. Como a composição de funções é associativa, então $f \circ (\psi \circ \varphi) = (f \circ \psi) \circ \varphi$. Assim, como ψ é um morfismo, então $f \circ \psi$ é uma função regular. Como φ é um morfismo, então $(f \circ \psi) \circ \varphi$ é uma função regular. Portanto, como f é uma função regular qualquer e $f \circ (\psi \circ \varphi)$ é uma função regular, então $\psi \circ \varphi$ é um morfismo. $\square$

Anotação 39. Seja Y uma variedade.

(a) Todo morfismo de variedades $\varphi : Y \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular em $\mathscr{O}(Y)$.

(b) Toda função regular $f \in \mathscr{O}(Y)$ é um morfismo de variedades $f : Y \to \mathbf{A}^1$.

Demonstração. (a): Considere a função $f = \mathrm{id}_{\mathbf{A}^1}$. Note que f é uma função regular em $\mathbf{A}^1$, pois é um função polinomial. Como φ é um morfismo de variedades, então $f \circ \varphi$ é uma função regular em $\varphi^{-1}(\mathbf{A}^1) = Y$. Ou seja, $\varphi = f \circ \varphi \in \mathscr{O}(Y)$.

(b): Fixe $f \in \mathscr{O}(Y)$. Pelo Lema 3.1 e pela Anotação 35, $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é contínua. Agora sejam V um aberto de $\mathbf{A}^1$ e $g \in \mathscr{O}(V)$. Vamos mostrar que $(g \circ f) : f^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ também é uma função regular. Para isso, tome $P \in f^{-1}(V)$. Como f é regular e $f^{-1}(V)$ é aberto, então existem um aberto $U \subseteq f^{-1}(V)$, contendo P, e polinômios f_1, f_2 (em A_n, no caso afim; e em S^h, tais que $deg(f_1) = deg(f_2)$, no caso projetivo), tais que $f_2(u) \neq 0$ e $f(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ para todo $u \in U$. Além disso, como $g \in \mathscr{O}(V)$ e $f(P) \in V$, então existem um aberto $W \subseteq V$, contendo $f(P)$, e polinômios $g_1, g_2 \in A_1$, tais que $g_2(w) \neq 0$ e $g(w) = \frac{g_1(w)}{g_2(w)}$ para todo $w \in W$. Além disso, como W é aberto e f é contínua, então $f^{-1}(W)$ é um aberto de $f^{-1}(V)$. Assim, temos que $U \cap f^{-1}(W)$ é um aberto de $f^{-1}(V)$ contendo P. Vamos mostrar que $g \circ f$ é um quociente de polinômios em $U \cap f^{-1}(W)$. Para isso, note que como $A_1 \cong k[t]$, então existem $d_1, d_2 \geq 0$ e $g_{1,0}, \ldots, g_{1,d_1}, g_{2,0}, \ldots, g_{2,d_2} \in k$ tais que $g_1(t) = \sum_{i=0}^{d_1} g_{1,i} t^i$ e $g_2(t) = \sum_{j=0}^{d_2} g_{2,j} t^j$. Assim, para todo $u \in U \cap f^{-1}(W)$, temos que

$$\begin{aligned} g \circ f(u) &= g\left(\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right) \\ &= \frac{g_1\left(\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right)}{g_2\left(\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right)} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{d_1} g_{1,i}\left(\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right)^i}{\sum_{j=0}^{d_2} g_{2,j}\left(\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\right)^j} \\ &= \frac{f_2(u)^{d_2}}{f_2(u)^{d_1}} \frac{\sum_{i=0}^{d_1} g_{1,i} f_1(u)^i f_2(u)^{d_1-i}}{\sum_{j=0}^{d_2} g_{2,j} f_1(u)^j f_2(u)^{d_2-j}}. \end{aligned}$$

Note que $f_2(u)^{d_1} \neq 0$ para todo $u \in U \cap f^{-1}(W)$, pois $f_2(u) \neq 0$ para todo $u \in U$. Note também que, como $f_2(u)^{d_2}\left(\sum_{j=0}^{d_2} g_{2,j} f_1(u)^j f_2(u)^{d_2-j}\right) = g_2(f(u)) \neq 0$ para todo $u \in f^{-1}(W)$, então $\sum_{j=0}^{d_2} g_{2,j} f_1(u)^j f_2(u)^{d_2-j} \neq 0$ para todo $u \in U \cap f^{-1}(W)$. Isso mostra que $g \circ f$ é uma função regular em $f^{-1}(V)$. Como consequência, concluímos que $f : Y \to \mathbf{A}^1$ é um morfismo de variedades. □

Definição (isomorfismo de variedades)**.** Dadas duas variedades X, Y, uma função $\varphi : X \to Y$ de variedades é dita um *isomorfismo de variedades* quando φ é um morfismo de variedades, uma função bijetora, e $\varphi^{-1} : Y \to X$ também é um morfismo de variedades.

Anotação 40. Sejam X, Y variedades. Se $\varphi : X \to Y$ é um isomorfismo de variedades, então φ é um homeomorfismo.

Demonstração. Como φ é um isomorfismo, então admite um morfismo inverso. Ou seja, existe $\psi : Y \to X$ tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Em particular, φ é uma função bijetiva. Como φ e ψ são morfismos, então, por definição, são funções contínuas. Portanto, φ é um homeomorfismo. □

A volta da anotação anterior não é verdade. Ou seja, nem todo homeomorfismo entre duas variedades algébricas é necessariamente um isomorfismo de variedades algébricas (para um exemplo explícito, ver Anotação 50).

Definição (de categoria)**.** Uma *categoria* C consiste em um conjunto de *objetos* O, para cada $x, y \in O$, um conjunto de *setas* (ou *morfismos*) $\mathrm{Mor}(x,y)$, e de uma função *composição* $\circ$: $\bigsqcup_{x,y,z \in O} \mathrm{Mor}(y,z) \times \mathrm{Mor}(x,y) \to \bigsqcup_{x,z \in O} \mathrm{Mor}(x,z)$, satisfazendo:

- Para todo $x \in O$, existe um *morfismo identidade* $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Mor}(x,x)$.
- Se $x,y,z,w \in O$, $f \in \mathrm{Mor}(x,y)$, $g \in \mathrm{Mor}(y,z)$ e $h \in \mathrm{Mor}(z,w)$, então
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
ou seja, a composição é associativa.
- Se $x,y,z \in O$, $f \in \mathrm{Mor}(x,y)$ e $g \in \mathrm{Mor}(y,z)$, então
$$\mathrm{id}_y \circ f = f \text{ e } g \circ \mathrm{id}_y = g.$$

Definição (categoria de variedades)**.** A *categoria de variedades* é a categoria cujos objetos são variedades e os morfismos são morfismo entre variedades.

3.3 Álgebras de funções regulares

Anotação 41. Seja Y uma variedade, e considere o conjunto
$$C := \{(U,f) \mid U \subseteq Y \text{ é um aberto e } f \in \mathscr{O}(U)\}.$$
A relação $\sim$ em C definida por $(U,f) \sim (V,g)$ quando $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ é de equivalência.

Demonstração. Considere $(U,f),(V,g),(W,h) \in C$. Como $U \cap U = U$, então $f|_U = f|_U$, logo $(U,f) \sim (U,f)$. Isso mostra que $\sim$ é uma relação reflexiva. Agora, suponha que $(U,f) \sim (V,g)$; ou seja, que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. Como $V \cap U = U \cap V$, então $(V,g) \sim (U,f)$. Isso mostra que $\sim$ é simétrica. Por fim, para mostrar que $\sim$ é transitiva, suponha que $(U,f) \sim (V,g)$ e que $(V,g) \sim (W,h)$; ou seja, suponha que $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$ e $g|_{V\cap W} = h|_{V\cap W}$. Assim, pela Anotação 36, $f = g$ em U e como $g = h$ em $V \cap W$, então $g = h$ em todo W. Logo em $U \cap W$, $f = g = h$. Portanto, $(U,f) \sim (W,h)$. □

Definição (de anel local)**.** Dados uma variedade Y e um ponto $p \in Y$, o *anel local* de p em Y é definido como sendo o conjunto de classes de equivalência de pares (U,f), onde $U \subseteq Y$ é um aberto tal que $p \in U$ e $f \in \mathscr{O}(U)$, módulo a relação de equivalência definida por
$$(U,f) \sim (V,g) \quad \Leftrightarrow \quad f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}.$$
O anel local de p em Y será denotado por $\mathscr{O}_p$ e a classe de equivalência de um par (U,f) em $\mathscr{O}_p$ será denotada por $\langle U,f \rangle$.

Anotação 42. Sejam Y uma variedade e $p \in Y$.

(a) O conjunto $\mathscr{O}_p$ é um anel quando munido das operações

$$\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, f + g \rangle \quad \text{e} \quad \langle U, f \rangle \cdot \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, fg \rangle, \tag{3.2}$$

para todos $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in \mathscr{O}_p$.

(b) O subconjunto $\mathfrak{m}_p := \{\langle U, f \rangle \in \mathscr{O}_p \mid f(p) = 0\}$ é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_p$.

Portanto $\mathscr{O}_p$ é um anel local cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_p$.

Demonstração. (a): A demonstração dessa parte é análoga às demonstrações das Anotações 32 e 34. O elemento neutro da adição é dado por $\langle Y, 0 \rangle$, o elemento oposto a um elemento $\langle U, f \rangle \in \mathscr{O}_p$ em relação à adição é dado por $\langle U, -f \rangle$, e o elemento neutro do produto é dado por $\langle Y, 1 \rangle$.

(b): Vamos começar mostrando que $\mathfrak{m}_p$ é um ideal próprio de $\mathscr{O}_p$. Para isso, note que $\langle Y, 0 \rangle \in \mathfrak{m}_p$, pois $0(p) = 0$. Agora tome $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in \mathfrak{m}_p$ e $\langle W, h \rangle \in \mathscr{O}_p$. Como $f(p) = g(p) = 0$, então $(f - g)(p) = f(p) - g(p) = 0$; e consequentemente, $\langle U \cap V, f - g \rangle \in \mathfrak{m}_p$. Além disso, $(fh)(p) = f(p)h(p) = 0 \cdot h(p) = 0$; e consequentemente, $\langle U \cap W, fh \rangle \in \mathfrak{m}_p$. Portanto $\mathfrak{m}_p$ é um ideal. Por fim, observe que $\mathfrak{m}_p$ é um ideal próprio de $\mathscr{O}_p$, pois $\langle Y, 1 \rangle \in \mathscr{O}_p$ e $1(p) = 1$, ou seja, $\langle Y, 1 \rangle \notin \mathfrak{m}_p$.

Para mostrar que $\mathfrak{m}_p$ é maximal e é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_p$, primeiro vamos mostrar que todo elemento de $\mathscr{O}_p \setminus \mathfrak{m}_p$ é uma unidade. Dado $\langle U, f \rangle \in \mathscr{O}_p \setminus \mathfrak{m}_p$, existem polinômios f_1, f_2 (em A_n no caso afim, e em S^h de mesmo grau no caso projetivo), tais que $f(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ e $f_2(u) \neq 0$ para todo $u \in U$. Considere o subconjunto fechado $Z(f_1)$, e observe que $Z(f_1) \not\supseteq U$. Caso contrário, se $Z(f_1) \supseteq U$, então $f_1(U) = 0$; e consequentemente, pela Anotação 36, $f_1(Y) = 0$. Isso contradiria a hipótese de que $f \notin \mathfrak{m}_p$. Assim, temos que $Z(f_1) \cap U$ é um subconjunto fechado próprio de U; e consequentemente, $V = U \setminus (U \cap Z(f_1))$ é aberto próprio de U. Além disso, $p \in V$, pois como $\langle U, f \rangle \notin \mathfrak{m}_p$, então $f(p) \neq 0$. Como $f_1(v) \neq 0$ para todo $v \in V$, então $\langle V, \frac{f_2}{f_1} \rangle \in \mathscr{O}_p$. Além disso, temos que $\langle U, f \rangle \langle V, \frac{f_2}{f_1} \rangle = \langle V, 1 \rangle = \langle Y, 1 \rangle$. Isso mostra que $\langle U, f \rangle$ é uma unidade de $\mathscr{O}_p$. Isso mostra que todo elemento de $\mathscr{O}_p \setminus \mathfrak{m}_p$ é uma unidade.

Agora, se $\mathfrak{n}$ é um ideal maximal de $\mathscr{O}_p$, então ou $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m}_p$, ou existe $\langle U, f \rangle \in \mathfrak{n}$ tal que $\langle U, f \rangle \notin \mathfrak{m}_p$. No primeiro caso, como $\mathfrak{m}_p$ é maximal, então $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_p$. No segundo caso, como $\langle U, f \rangle \notin \mathfrak{m}_p$, então $\langle U, f \rangle$ é uma unidade. Logo, nesse caso, $\mathfrak{n} = \mathscr{O}_p$, o que contradiz a maximalidade de $\mathfrak{n}$. Portanto $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_p$ é o único ideal maximal de $\mathscr{O}_p$. □

Definição (corpo de resíduos)**.** Dados uma variedade Y e um ponto $p \in Y$, o *corpo de resíduos* de p é definido como $k_p := \mathscr{O}_p / \mathfrak{m}_p$, onde $\mathfrak{m}_p := \{\langle U, f \rangle \mid f(p) = 0\}$.

Anotação 43. Seja Y uma variedade. Para todo ponto $p \in Y$, existe um isomorfismo de corpos $k_p \cong k$.

Demonstração. Considere a função

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{O}_p &\to k \\ \langle U, f \rangle &\mapsto f(p). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que ϕ é um homomorfismo sobrejetor de anéis cujo núcleo é $\mathfrak{m}_p$. Assim, seguirá do Teorema de Isomorfismos de Anéis que $k_p = \mathscr{O}_p / \mathfrak{m}_p \cong k$ como anéis.

Vamos começar mostrando que ϕ está bem definida. Se $\langle U, f \rangle = \langle V, g \rangle \in \mathscr{O}_p$, então $p \in U \cap V$ e $f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$. Consequentemente, $\phi(f) = f(p) = g(p) = \phi(g)$. Agora vamos mostrar que ϕ é um homomorfismo de anéis. Para isso, tome $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in \mathscr{O}_p$, e observe que:

$$\begin{aligned} \phi(\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle) = \phi(\langle U \cap V, f + g \rangle) &= (f+g)(P) \\ &= f(P) + g(P) = \phi(\langle U, f \rangle) + \phi(\langle V, g \rangle), \\ \phi(\langle U, f \rangle \langle V, g \rangle) = \phi(\langle U \cap V, fg \rangle) &= (fg)(P) \\ &= f(P)g(P) = \phi(\langle U, f \rangle)\phi(\langle V, g \rangle). \end{aligned}$$

Como ϕ é um homomorfismo de anéis, por definição, $\ker \phi := \{\langle U, f \rangle \in \mathscr{O}_p \mid f(p) = 0\} = \mathfrak{m}_p$. Por fim, observe que ϕ é sobrejetiva. De fato, para cada $c \in k$, a função constante $f_c : Y \to \mathbf{A}^1$, dada por $f_c(y) = c$ para todo $y \in Y$, é regular em Y e $\phi(\langle Y, f_c \rangle) = f_c(p) = c$. □

Definição. Dada uma variedade Y, defina seu *corpo de funções* como sendo o conjunto formado pelas classes de equivalência de pares (U, f), onde $U \subseteq Y$ é um aberto e $f \in \mathscr{O}(U)$, módulo a relação de equivalência definida por

$$(U, f) \sim (V, g) \quad \Leftrightarrow \quad f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

O corpo de funções de Y será denotado por $K(Y)$ e cada elemento em $K(Y)$ será chamado de *função racional* em Y.

Anotação 44. Dada uma variedade Y, seu corpo de funções $K(Y)$ é um corpo quando munido das operações:

$$\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, f + g \rangle \quad \text{e} \quad \langle U, f \rangle \cdot \langle V, g \rangle := \langle U \cap V, fg \rangle. \tag{3.3}$$

Demonstração. Essa demonstração é análoga às demonstrações das Anotações 32, 34 e 42. O elemento neutro da adição é dado por $\langle Y, 0 \rangle$, o elemento oposto a um elemento $\langle U, f \rangle \in$

$K(Y)$ em relação à adição é dado por $\langle U,-f\rangle$, o elemento neutro do produto é dado por $\langle Y,1\rangle$. Para encontrar o elemento inverso de $\langle U,f\rangle$ com relação ao produto, tome $P \in U$ e U' um subconjunto aberto de U contendo P, onde $f(u) = \frac{f_1}{f_2}(u)$ para todo $u \in U'$, para alguns $f_1, f_2 \in A_n$ tais que $f_2(u) \neq 0$. Seja $V = U \setminus Z(f_1)$, então $\left\langle V, \frac{f_2}{f_1}\right\rangle \in K(Y)$ e

$$\langle U,f\rangle \left\langle V, \frac{f_2}{f_1}\right\rangle = \left\langle U\cap V, f\frac{1}{f}\right\rangle = \left\langle U\cap V\cap U', \frac{f_1}{f_2}\frac{f_2}{f_1}\right\rangle = \langle U\cap V\cap U', 1\rangle = \langle Y,1\rangle.$$

Assim, definimos, $\langle U,f\rangle^{-1} := \left\langle V, \frac{f_2}{f_1}\right\rangle$. Para mostrar que $\langle U,f\rangle^{-1}$ está bem definido, tome um ponto $Q \in U$ qualquer, W um aberto contendo Q e $g_1, g_2 \in A_n$ polinômios tais que $g_2(w) \neq 0$ e $f(w) = \frac{g_1}{g_2}(w)$ para todo $w \in W$. Temos que, se $V' = W \setminus Z(g_1)$, como $\frac{f_1}{f_2}(z) = f(z) = \frac{g_1}{g_2}(z)$ para todo $z \in V \cap V'$, então $\frac{f_2}{f_1}(z) = \frac{g_2}{g_1}(z)$ para todo $z \in V\cap V'$. Logo, $\left\langle V, \frac{f_2}{f_1}\right\rangle = \left\langle V', \frac{g_2}{g_1}\right\rangle$. □

Anotação 45. Seja Y uma variedade. Para todo ponto $p \in Y$, existem homomorfismos injetores de anéis $\mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_p \to K(Y)$.

Demonstração. Vamos construir explicitamente homomorfismos injetores de anéis $\mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_p$ e $\mathscr{O}_p \to K(Y)$:

- $\mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_p$: Lembre que, dada $f \in \mathscr{O}(Y)$, por definição, f é regular em todo Y. Como Y é um aberto de Y que contém p, então podemos definir a função

$$\begin{aligned} \xi_p : \mathscr{O}(Y) &\to \mathscr{O}_p \\ f &\mapsto \langle Y,f\rangle. \end{aligned}$$

Observe que ξ_p é um homomorfismo de anéis. De fato, se $f,g \in \mathscr{O}(Y)$, então

$$\xi_p(f+g) = \langle Y, f+g\rangle = \langle Y,f\rangle + \langle Y,g\rangle = \xi_p(f)+\xi_p(g),$$
$$\xi_p(fg) = \langle Y, fg\rangle = \langle Y,f\rangle\langle Y,g\rangle = \xi_p(f)\xi_p(g).$$

Além disso, ξ_p é um homomorfismo injetor, pois se $\xi_p(f) = \langle Y,0\rangle$, então $\langle Y,f\rangle = \langle Y,0\rangle$, logo $f = 0$ em todo Y.

- $\mathscr{O}_p \to K(Y)$: Lembre que, dada $\langle U,f\rangle \in \mathscr{O}_p$, por definição, U é aberto em Y, $p \in U$ e $f \in \mathscr{O}(U)$. Além disso, se $\langle U,f\rangle = \langle V,g\rangle \in \mathscr{O}_p$, então $U\cap V$ é um aberto de Y, $p \in U\cap V$ e $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. Assim, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \xi_p' : \mathscr{O}_p &\to K(Y) \\ \langle U,f\rangle &\mapsto \langle U,f\rangle. \end{aligned}$$

Observe que, pelas Anotações 42 e 44, ξ'_p é um homomorfismo de anéis. Além disso, ξ'_p é injetor. De fato, se $\langle U,f\rangle \in \mathscr{O}_p$ é tal que $\xi'_p(\langle U,f\rangle) = \langle Y,0\rangle$, então $f=0$ em U. Como $\langle U,0\rangle = \langle Y,0\rangle$ em $\mathscr{O}_p$, então $\langle U,f\rangle = \langle Y,0\rangle$ em $\mathscr{O}_p$. $\square$

3.4 Relações entre variedades e anéis

Anotação 46. Se X e Y são variedades e $\phi : X \to Y$ é um isomorfismo de variedades, então $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(Y)$, $\mathscr{O}_p \cong \mathscr{O}_{\phi(p)}$ para todo $p \in X$, e $K(X) \cong K(Y)$.

Demonstração. Nós vamos construir um isomorfismo de anéis $K(X) \to K(Y)$ e usar os homomorfismos injetores da Anotação 45 para induzir isomorfismos $\mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(Y)$ e $\mathscr{O}_p \to \mathscr{O}_{\phi(p)}$.

Considere a função

$$\begin{aligned} \psi : K(X) &\longrightarrow K(Y) \\ \langle U,f\rangle &\longmapsto \langle \phi(U), f\circ\phi^{-1}\rangle. \end{aligned}$$

Primeiro vamos verificar que ψ está bem definida. Se $\langle U,f\rangle, \langle V,g\rangle \in K(X)$ são tais que $\langle U,f\rangle = \langle V,g\rangle$, então $f=g$ em $U\cap V$. Assim, $f\circ\phi^{-1} = g\circ\phi^{-1}$ em $\phi(U\cap V)$. Como ϕ é um homeomorfismo (ver Anotação 40), então $\phi(U\cap V) = \phi(U)\cap\phi(V)$ e $\phi(U),\phi(V)$ são abertos em Y. Logo $\psi(\langle U,f\rangle) = \langle \phi(U), f\circ\phi^{-1}\rangle = \langle \phi(V), g\circ\phi^{-1}\rangle = \psi(\langle V,g\rangle)$.

Agora vamos verificar que ψ é um homomorfismo de corpos (anéis). Se $\langle U,f\rangle, \langle V,g\rangle \in K(X)$, então:

$$\begin{aligned} \psi(\langle U,f\rangle + \langle V,g\rangle) &= \psi(\langle U\cap V, f+g\rangle) \\ &= \langle \phi(U\cap V), (f+g)\circ\phi^{-1}\rangle \\ &= \langle \phi(U)\cap\phi(V), f\circ\phi^{-1} + g\circ\phi^{-1}\rangle \\ &= \langle \phi(U), f\circ\phi^{-1}\rangle + \langle \phi(V), g\circ\phi^{-1}\rangle \\ &= \psi(\langle U,f\rangle) + \psi(\langle V,g\rangle), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\langle U,f\rangle \cdot \langle V,g\rangle) &= \psi(\langle U\cap V, fg\rangle) \\ &= \langle \phi(U\cap V), (fg)\circ\phi^{-1}\rangle \\ &= \langle \phi(U)\cap\phi(V), (f\circ\phi^{-1})(g\circ\phi^{-1})\rangle \\ &= \langle \phi(U), f\circ\phi^{-1}\rangle \cdot \langle \phi(V), g\circ\phi^{-1}\rangle \\ &= \psi(\langle U,f\rangle)\cdot\psi(\langle V,g\rangle). \end{aligned}$$

Para terminar de mostrar que ψ é um isomorfismo de anéis, vamos mostrar que ψ é bijetora. Para mostrar que ψ é sobrejetiva, considere uma função regular h em um aberto W de Y. Como h é uma função regular e ϕ é um morfismo de variedades, então $h \circ \phi$ é uma função regular no aberto $\phi^{-1}(W)$ de X. Como $h = (h \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ e $W = \phi(\phi^{-1}(W))$, então $\langle W, h\rangle = \psi(\langle \phi^{-1}(W), h \circ \phi\rangle)$. Isso mostra que ψ é sobrejetiva. Para mostrar que ψ é injetiva, suponha que $\langle U, f\rangle \in K(X)$ seja tal que $\psi(\langle U, f\rangle) = \langle Y, 0\rangle$. Então $f \circ \phi^{-1} = 0$ em $Y \cap \phi(U) = \phi(U)$. Assim, $f = (f \circ \phi^{-1}) \circ \phi = 0 \circ \phi = 0$ em $\phi^{-1}(\phi(U)) = U$; ou seja, $\langle U, f\rangle = \langle X, 0\rangle$. Como ψ é um homomorfismo de anéis, isso implica que ψ é injetora.

Portanto, temos que ψ é um isomorfismo de anéis entre $K(X)$ e $K(Y)$. Para mostrar que existem isomorfismos de anéis $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(Y)$ e $\mathscr{O}_p \cong \mathscr{O}_{\phi(p)}$, vamos compor ψ com os homomorfismos ξ_p, ξ'_p definidos na Anotação 45. Explicitamente, fixe $p \in X$, denote $\phi(p) =: q \in Y$, e considere o seguinte diagrama de (homomorfismos de) anéis:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(X) \arrow[r, "\xi_{X,p}"] & \mathscr{O}_p \arrow[r, "\xi'_{X,p}"] & K(X) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathscr{O}(Y) \arrow[r, "\xi_{Y,q}"'] & \mathscr{O}_q \arrow[r, "\xi'_{Y,q}"'] & K(Y)
\end{tikzcd}$$

onde $\xi_{X,p} : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}_p$ é dada por $\xi_{X,p}(f) = \langle X, f\rangle$, $\xi_{Y,q} : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_q$ é dada por $\xi_{Y,q}(g) = \langle Y, g\rangle$, $\xi'_{X,p} : \mathscr{O}_p \to K(X)$ é dada por $\xi'_{X,p}\langle U, f\rangle = \langle U, f\rangle$, e $\xi'_{Y,q} : \mathscr{O}_q \to K(Y)$ é dada por $\xi'_{Y,q}\langle V, g\rangle = \langle V, g\rangle$.

Observe que, como ψ e $\xi'_{X,p}$ são homomorfismos injetores de anéis (ver Anotação 45), então $\psi \circ \xi'_{X,p} : \mathscr{O}_p \to K(Y)$ é um homomorfismo injetor de anéis. Além disso, como $\xi'_{Y,q}$ também é um homomorfismo injetor de anéis (ver Anotação 45), então existe uma inversa à esquerda de $\xi'_{Y,q}$, ou seja, um isomorfismo de anéis $\zeta'_{Y,q} : \operatorname{im}(\xi'_{Y,q}) \to \mathscr{O}_q$ tal que $\zeta'_{Y,q} \circ \xi'_{Y,q} = \mathrm{id}_{\mathscr{O}_q}$. Assim, se mostrarmos que $\operatorname{im}(\xi'_{Y,q}) = \operatorname{im}(\psi \circ \xi'_{X,p})$, seguirá que $(\zeta'_{Y,q} \circ \psi \circ \xi'_{X,p}) : \mathscr{O}_p \to \mathscr{O}_q$ é um isomorfismo de anéis.

Para mostrar que $\psi(\xi'_{X,p}(\mathscr{O}_p)) \subseteq \xi'_{Y,q}(\mathscr{O}_q)$, tome $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_p$. Lembre que $\xi'_{X,p}(\langle U, f\rangle) = \langle U, f\rangle \in K(X)$ e $\psi(\xi'_{X,p}(\langle U, f\rangle)) = \langle \phi(U), f \circ \phi^{-1}\rangle$. Como $p \in U$ e ϕ é um isomorfismo de variedades, então $\phi(U)$ é um aberto de Y contendo $q = \phi(p)$ e $f \circ \phi^{-1}$ é uma função regular em $\phi(U)$. Isso mostra que $\langle \phi(U), f \circ \phi^{-1}\rangle \in \mathscr{O}_q$. Portanto $\xi'_{Y,q}\langle \phi(U), f \circ \phi^{-1}\rangle = \psi(\xi'_{X,p}(\langle U, f\rangle))$ em $K(Y)$. Como tomamos $\langle U, f\rangle \in \mathscr{O}_p$ qualquer, isso implica que $\psi(\xi'_{X,p}(\mathscr{O}_p)) \subseteq \xi'_{Y,q}(\mathscr{O}_q)$.

Para mostrar o outro lado da igualdade, $\xi'_{Y,q}(\mathscr{O}_q) \subseteq \psi(\xi'_{X,p}(\mathscr{O}_p))$, tome $\langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_q$. Lembre que $\xi'_{Y,q}(\langle V, g\rangle) = \langle V, g\rangle \in K(Y)$. Agora observe que, como g é uma função regular em V e ϕ é um isomorfismo de variedades, então $g \circ \phi$ é uma função regular no aberto $\phi^{-1}(V) \subseteq X$. Além disso, como $q = \phi(p) \in V$, então $p \in \phi^{-1}(V)$. Isso mostra que $\langle \phi^{-1}(V), g \circ \phi \rangle \in \mathscr{O}_p$. Além disso, $\psi(\xi'_{X,p}(\langle \phi^{-1}(V), g \circ \phi \rangle) = \psi(\langle \phi^{-1}(V), g \circ \phi \rangle) = \langle \phi(\phi^{-1}(V)), (g \circ \phi) \circ \phi^{-1} \rangle = \langle V, g \rangle$. Isso implica que $\xi'_{Y,q}(\mathscr{O}_q) \subseteq \psi(\xi'_{X,p}(\mathscr{O}_p))$.

A demonstração de que existe um isomorfismo de anéis $\mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(Y)$ é análoga. De fato, se denotarmos uma inversa à esquerda de $\xi_{Y,q}$ por $\zeta_{Y,q}$, teremos que tal isomorfismo será dado por $\zeta_{Y,q} \circ \zeta'_{Y,q} \circ \psi \circ \xi'_{X,p} \circ \xi_{X,p}$. □

Anotação 47. Dado um anel R, denote por $\operatorname{MaxSpec}(R)$ o conjunto formado por todos os ideais maximais de R. Se R for um domínio, então $R = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)} R_{\mathfrak{m}}$.

Demonstração. Denote o corpo de frações de R por $K(R)$ e observe que $R \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)} R_{\mathfrak{m}}$. De fato, para cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)$, como $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal, então $1 \notin \mathfrak{m}$. Consequentemente, para todo $x \in R$, temos que $x = \frac{x}{1} \in R_{\mathfrak{m}}$, e portanto, $R \subseteq R_{\mathfrak{m}}$. Como $R \subseteq R_{\mathfrak{m}}$ para cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)$, então $R \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)} R_{\mathfrak{m}}$.

Depois, considere $a \in K(R)$ e defina $I_a := \{r \in R \mid ra \in R\}$. Observe que I_a é um ideal de R, e que $I_a = R$ se, e somente se, $a \in R$. De fato, dados $x, y \in I_a$ e $z \in R$, temos que: $(x-y)a = xa - ya \in R$, pois $xa, ya \in R$; e $(rx)a = r(xa) \in R$, pois $r \in R$ e $xa \in R$. Isso mostra que I_a é um ideal. Agora vamos mostrar que $a \in R$ se, e somente se, $I_a = R$. Se $a \in R$, então $xa \in R$ para todo $x \in R$; ou seja, $R = I_a$. Por outro lado, se $I_a = R$, então $a = 1a \in R$.

Assim, para mostrar que $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R$, basta mostrar que: se $a \in K(R)$ é tal que $I_a \neq R$, então existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(R)$ tal que $a \notin R_{\mathfrak{m}}$. De fato, se $I_a \neq R$, então existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec}(\mathrm{R})$ tal que $I_a \subseteq \mathfrak{m}$. Por contradição, se $a \in R_{\mathfrak{m}}$, então existem $b \in R$ e $c \in R \setminus \mathfrak{m}$ tais que $a = b/c$. Logo $c \in I_a \subseteq \mathfrak{m}$, pois $ca = b \in R$. Isso é um absurdo. □

Teorema 3.2. Seja $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ uma variedade afim.

(a) Existe um isomorfismo de anéis entre $\mathscr{O}(Y)$ e $A(Y)$.

(b) Denote por $\pi_Y : A_n \to A(Y)$ a projeção canônica, $\pi_Y(f) = f + I(Y)$, e para cada $p \in Y$, defina $\mathfrak{m}(p) := \pi_Y(I(p))$. A função $\mathfrak{m} : Y \to \operatorname{MaxSpec}(A(Y))$, definida por $p \mapsto \mathfrak{m}(p)$, é injetora.

(c) Para cada $p \in Y$, existe um isomorfismo de anéis $\mathscr{O}_p \cong A(Y)_{\mathfrak{m}(p)}$ e $\dim \mathscr{O}_p = \dim Y$.

(d) Existe um isomorfismo de corpos entre $K(Y)$ e o corpo de frações de $A(Y)$. Consequentemente, $K(Y)$ é uma extensão de k finitamente gerada com grau de transcendência igual a $\dim Y$.

Demonstração. Vamos provar o teorema na seguinte ordem: parte (b), parte (c), parte (d), e finalmente, parte (a). Para começar, lembre que todo polinômio $f \in A_n$ induz uma função $Y \to k$. Assim, considere a função

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}\colon A_n &\longrightarrow \mathscr{O}(Y) \\ f &\longmapsto f|_Y\,. \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{\alpha}$ é um homomorfismo de anéis. Além disso, observe que $\tilde{\alpha}$ fatora a um homomorfismo de anéis $\alpha : A(Y) \to \mathscr{O}(Y)$, pois $\tilde{\alpha}(f) = 0$ se, e somente se, $f \in I(Y)$. Em particular, α é injetora.

(b) Pela Anotação 13, para todo $p \in \mathbf{A}^n$, o ideal $I(p)$ é maximal em A_n. Como $p \in Y$, então $I(Y) \subseteq I(p)$; e consequentemente, segue da Anotação 16 que $\pi_Y(I(p))$ é maximal em $A(Y)$. Isso mostra que, de fato m induz uma função $Y \to \operatorname{MaxSpec}(A(Y))$. Agora, para mostrar que a função $\mathsf{m} : p \mapsto \mathsf{m}(p)$ é injetora, observe que, se $p, q \in Y$ são tais que $\mathsf{m}(p) = \mathsf{m}(q)$, então $I(p) = I(q)$. De fato, se f é um polinômio em $I(p)$, então $\pi_Y(f) \in \mathsf{m}(p)$ e como $\mathsf{m}(p) = \mathsf{m}(q)$, então existe $g \in I(q)$ tal que $\pi_Y(g) = \pi_Y(f)$. Além disso, $I(Y) \subseteq I(q)$. Assim, seja $r = f - g$, então $r \in I(Y) \subseteq I(q)$, logo, $f = r + g \in I(q)$. Com isso, temos que $I(p) \subseteq I(q)$; o caso $I(q) \subseteq I(q)$ é totalmente análogo, pois como p também é um ponto de Y, então $I(Y) \subseteq I(p)$. Assim, pelo Corolário 1.3, $p = q$.

(c) Fixe $p \in Y$, considere o homomorfismo de anéis $\xi_p : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}_p$ dado por $\xi_p(f) = \langle Y, f \rangle$, e o homomorfismo $(\xi_p \circ \alpha) : A(Y) \to \mathscr{O}_p$. Observe que, se $g \in A(Y) \setminus \mathsf{m}(p)$, então $p \in Y \setminus Z(\alpha(g))$; e consequentemente, $Y \setminus Z(g)$ é um aberto não-vazio de Y. Isso implica que, $(\xi_p \circ \alpha)(g)$ é uma unidade em $\mathscr{O}_p$ (compare com a demonstração da Anotação 42(b)). Pela propriedade universal da localização, isso implica que $(\xi_p \circ \alpha)$ induz um homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \alpha_p\colon A(Y)_{\mathsf{m}(p)} &\longrightarrow \mathscr{O}_p \\ \frac{f}{g} &\longmapsto \left\langle U, \frac{f}{g} \right\rangle, \qquad \text{onde} \quad U = Y \setminus Z(g). \end{aligned}$$

Como α é injetor e ξ_p é injetor (ver Anotação 45), então α_p é injetor. Além disso, temos que α_p é sobrejetor. De fato, pela definição de $\mathscr{O}_p$, se $\langle V, h \rangle \in \mathscr{O}_p$, então V é um aberto de Y que contém p e $h \in \mathscr{O}(V)$. Agora, como $p \in V$ e $h \in \mathscr{O}(V)$, então existem um aberto V' de V e $h_1, h_2 \in A_n$ tais que $p \in V'$, $h(v') = \frac{h_1(v')}{h_2(v')}$ e $h_2(v') \neq 0$ para todo $v' \in V'$. Em particular, como $p \in V'$, então $h_2(p) \neq 0$; e consequentemente, $\pi_Y(h_2) \notin \mathsf{m}(p)$. Para concluir que α_p é sobrejetor, vamos mostrar que $\alpha_p\left(\frac{\pi_Y(h_1)}{\pi_Y(h_2)}\right) = \langle V, h \rangle$ em $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$. Como Y é uma variedade e V é um aberto não-vazio de Y, então V é irredutível e denso em Y (ver Anotação 9); como $Y \setminus Z(h_2)$ é um aberto de Y e $p \in V' \subseteq V \cap (Y \setminus Z(h_2))$, então $W := V \cap (Y \setminus Z(h_2))$ é um aberto não-vazio de V; como V é irredutível e W é um aberto não-vazio de V, então W é irredutível e denso em V. Além disso, como $\frac{h_1}{h_2} \in \mathscr{O}(W)$, $h \in \mathscr{O}(V) \subseteq \mathscr{O}(W)$, V' é aberto em W, e $\frac{h_1(v')}{h_2(v')} = h(v')$ para todo $v' \in V'$, então, pela Anotação 36, $\frac{h_1(w)}{h_2(w)} = h(w)$ para todo $w \in W$. Isso mostra que $\alpha_p\left(\frac{\pi_Y(h_1)}{\pi_Y(h_2)}\right) = \langle V, h\rangle$. Portanto, α_p é sobrejetor, e consequentemente, um isomorfismo de anéis entre $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$ e $\mathscr{O}_p$.

Agora, note que $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$ é um anel local e seu ideal maximal é $\mathsf{m}(p)$, pois todo elemento de $A(Y)_{\mathsf{m}(p)} \setminus \mathsf{m}(p)$ é uma unidade. Assim, como $\alpha_p : A(Y)_{\mathsf{m}(p)} \to \mathscr{O}_p$ é um isomorfismo de anéis, então segue da Anotação 16 que $\alpha_p(\mathsf{m}(p)) = \mathfrak{m}_p$. Além disso, temos que todo ideal próprio de $\mathscr{O}_p$ está contido em $\mathfrak{m}_p$. Usando estes resultados, a Anotação 43, a Proposição 1.6 e o Teorema 1.7, obtemos que

$$\dim Y = \dim A(Y) = \operatorname{ht}\mathsf{m}(p) + \dim A(Y)/\mathsf{m}(p) = \operatorname{ht}\mathfrak{m}_p + \dim k_p = \dim \mathscr{O}_p.$$

(d) Primeiro observe que, como $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$ é uma localização de $A(Y)$, então os corpos de frações de $A(Y)$ e $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$ são isomorfos. Depois observe que, como $A(Y)_{\mathsf{m}(p)} \cong \mathscr{O}_p$ (parte (c)), então o corpo de frações de $A(Y)_{\mathsf{m}(p)}$ é isomorfo ao corpo de frações de $\mathscr{O}_p$. Assim, para mostrar que o corpo de frações de $A(Y)$ é isomorfo a $K(Y)$, basta mostrar que o corpo de frações de $\mathscr{O}_p$ é isomorfo a $K(Y)$.

Para isso, denote o corpo de frações de $\mathscr{O}_p$ por $\mathscr{K}_p$, e considere a função $\xi_p' : \mathscr{O}_p \to K(Y)$ definida na Anotação 45 como sendo dada por $\xi_p'(\langle U, f\rangle) = \langle U, f\rangle$. Como ξ_p' é injetora (ver Anotação 45), se $\langle U, f\rangle \neq \langle Y, 0\rangle \in \mathscr{O}_p$, então $\xi_p'\langle U, f\rangle \neq \langle Y, 0\rangle \in K(Y)$. Consequentemente, pela propriedade universal do corpo de frações (ver [1, Property 3.1]), ξ_p' induz um homomorfismo de corpos $\Xi_p : \mathscr{K}_p \to K(Y)$, dado explicitamente por (ver Anotação 44):

$$\Xi_p\left(\langle U, f\rangle / \langle V, g\rangle\right) = \langle U, f\rangle \cdot \langle V, g\rangle^{-1}.$$

Vamos mostrar que Ξ_p é um isomorfismo. Primeiro note que $\Xi_p \neq 0$, pois $\Xi_p(\langle Y, c\rangle) = \langle Y, c\rangle \neq 0$ para toda função constante $c \neq 0$. Como $\mathscr{K}_p$ é um corpo e Ξ_p é um homomorfismo de corpos, isso implica que Ξ_p é injetor. Para mostrar que Ξ_p é sobrejetor, fixe $\langle W, h\rangle \in K(Y)$. Por definição, $W \subseteq Y$ é um aberto e $h \in \mathscr{O}(W)$, ou seja, para todo $w \in W$, existem polinômios $h_1, h_2 \in A_n$ e um aberto $W' \subseteq W$, tais que $w \in W'$, $h(w') = \frac{h_1(w')}{h_2(w')}$ e $h_2(w') \neq 0$ para todo $w' \in W'$. Defina $f = h_1|_Y$, $V = Y \setminus Z(h_2)$, $g = h_2|_V$, observe que $\langle Y, f\rangle \in \mathscr{O}_p$, que $\langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_p \setminus \{\langle Y, 0\rangle\}$, e que $\Xi_p(\langle Y, f\rangle / \langle V, g\rangle) = \langle W, h\rangle$. De fato, como $h(w') = \frac{h_1(w')}{h_2(w')}$ para todo $w' \in W'$ em K(Y), então $\langle W, h\rangle = \langle W', \frac{h_1}{h_2}\rangle$ e como $\Xi_p(\langle Y, f\rangle / \langle V, g\rangle) = \langle Y \cap V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\rangle$, então para todo $w' \in W' \cap (Y \cap V \setminus Z(g))$, temos

$$\frac{f}{g}(w') = \frac{f(w')}{g(w')} = \frac{h_1|_Y(w')}{h_2|_V(w')} = \frac{h_1(w')}{h_2(w')} = \frac{h_1}{h_2}(w').$$

Logo, $\Xi_p(\langle Y,f\rangle/\langle V,g\rangle) = \langle Y \cap V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\rangle = \langle W', \frac{h_1}{h_2}\rangle = \langle W,h\rangle$. Isso mostra que Ξ_p é um isomorfismo de corpos entre $\mathscr{K}_p$ (o corpo de frações de $\mathscr{O}_p$) e $K(Y)$.

(a) Fixe $p \in Y$ qualquer e considere o seguinte diagrama de (homomorfismos de) anéis:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(Y) \arrow[r, "\xi_p"] & \mathscr{O}_p \arrow[r, "\xi'_p"] & \mathscr{K}_p \arrow[dr, "\Xi_p"] & \\
& & & K(Y). \\
A(Y) \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "\pi_p"'] & A(Y)_{\mathfrak{m}(p)} \arrow[uu, "\alpha_p"] \arrow[r, "\pi'_p"'] & K(A(Y)) \arrow[ur, "\Pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que

$$\mathscr{O}(Y) \cong \Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right) = \Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right) \cong A(Y).$$

Para isso, note que, como ξ_p, ξ'_p e Ξ_p são homomorfismos injetores, então $\mathscr{O}(Y) \cong \Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right)$, assim como $\Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right) \cong A(Y)$, pois π_p, π'_p e Π_Y são injetores. Logo, basta mostrar a igualdade $\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right) = \Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right)$.

Para mostrar que $\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right) \subseteq \Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right)$, vamos mostrar o seguinte:

$$\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right) \subseteq \bigcap_{q \in Y} \Xi_p \circ \xi'_q\left(\mathscr{O}_q\right) \subseteq \bigcap_{q \in Y} \Pi_Y \circ \pi'_q\left(A(Y)_{\mathfrak{m}_q}\right) = \Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right).$$

Assim, tome $f \in \mathscr{O}(Y)$. Temos que $\xi_p(f) = \langle Y,f\rangle \in \mathscr{O}_p$, que $\xi'_p(\langle Y,f\rangle) = \langle Y,f\rangle \cdot \langle Y,1\rangle^{-1} = \langle Y,f\rangle$, pois $Z(1) = \emptyset$, e que $\Xi_p(\langle Y,f\rangle) = \langle Y,f\rangle$. Então $\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p(f) = \langle Y,f\rangle$. Como tomamos p um ponto qualquer de Y, então temos que $\Xi_q \circ \xi'_q \circ \xi_q(f) = \langle Y,f\rangle \in K(Y)$ para qualquer $q \in Y$, ou seja,

$$\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p(f) = \langle Y,f\rangle \in \bigcap_{q \in Y} \Xi_q \circ \xi'_q \circ \xi_q(\mathscr{O}(Y)) \subseteq \bigcap_{q \in Y} \Xi_p \circ \xi'_q\left(\mathscr{O}_q\right).$$

Isso mostra a primeira continência, $\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_q(\mathscr{O}(Y)) \subseteq \bigcap_{q \in Y} \Xi_p \circ \xi'_q\left(\mathscr{O}_q\right)$. Agora, tome $q \in Y$ e $\langle U,f\rangle \in \mathscr{O}_q$ quaisquer, temos que $\Xi_q \circ \xi'_q(\langle U,f\rangle) = \langle U,f\rangle \in K(Y)$. Como $q \in U$, então existem um aberto $U' \subseteq U$ e polinômios $f_1, f_2 \in A_n$, tais que $q \in U'$, $f_2(u') \neq 0$ e $f(u') = \frac{f_1}{f_2}(u')$ para todo $u' \in U'$. Assim, $\langle U,f\rangle = \left\langle U', \frac{f_1}{f_2}\right\rangle$, e como $q \in U'$, então $f_2(q) \neq 0$. Assim, $\langle U,f\rangle = \left\langle U', \frac{f_1}{f_2}\right\rangle = \left\langle V, \frac{f_1}{f_2}\right\rangle = \Pi_q\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$. Além disso, temos que $\frac{f_1}{f_2} \in \pi'_q\left(A(Y)_{\mathfrak{m}_q}\right)$, pois $f_2(q) \neq 0$. Logo, $\Xi_q \circ \xi'_q(\langle U,f\rangle) = \langle U,f\rangle \in \Pi_q \circ \pi'_q\left(A(Y)_{\mathfrak{m}_q}\right)$. Isso mostra a segunda continência, $\bigcap_{q \in Y} \Xi_q \circ \xi'_q\left(\mathscr{O}_q\right) \subseteq \bigcap_{q \in Y} \Pi_q \circ \pi'_q\left(A(Y)_{\mathfrak{m}_q}\right)$. A igualdade $\bigcap_{q \in Y} \Pi_Y \circ \pi'_q\left(A(Y)_{\mathfrak{m}_q}\right) = \Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right)$ segue da Anotação 47.

Agora, para mostrar que $\Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p\left(A(Y)\right) \subseteq \Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right)$, tome $f \in A(Y)$, e observe que $\Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p(f) = \langle Y, f \rangle \in K(Y)$, pois $\pi'_p \circ \pi_p(f) = \frac{f}{1} \in K(A(Y))$. Além disso, como f é polinomial, então $\alpha(f) \in \mathscr{O}(Y)$. Assim, vendo f com um elemento de $\mathscr{O}(Y)$, temos que $\Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p(\alpha(f)) = \langle Y, \alpha(f) \rangle$. Logo, para cada $f \in A(Y)$ temos

$$\Pi_Y \circ \pi'_p \circ \pi_p(f) = \langle Y, f \rangle = \Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p(\alpha(f)) \in \Xi_p \circ \xi'_p \circ \xi_p\left(\mathscr{O}(Y)\right). \qquad \square$$

Proposição 3.3. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, considere o aberto $U_i := \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$. Para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, a função $\varphi_i : U_i \to \mathbf{A}^n$, definida por $\varphi_i[a_0 : \cdots : a_n] = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right)$, é um isomorfismo de variedades.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $i = 0$. Para os demais casos, a demonstração é análoga. Pela Proposição 2.2, temos que φ_0 é um homeomorfismo. Assim, basta mostrar que φ_0 e φ_0^{-1} são morfismos de variedades.

Primeiro, tome um aberto $V \subseteq \mathbf{A}^n$ e $f \in \mathscr{O}(V)$. Vamos mostrar que $(f \circ \varphi_0) : \varphi_0^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular. Para cada $p \in \varphi_0^{-1}(V)$, considere $q := \varphi_0(p) \in V$. Como $f \in \mathscr{O}(V)$, então existem um aberto $W \subseteq V$ e polinômios $f_1, f_2 \in A_n$ tais que $q \in W$, $f_2(w) \neq 0$ e $f(w) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)}$ para todo $w \in W$. Como φ_0 é contínua e W é um aberto de $\mathbf{A}^1$ tal que $\varphi_0(p) = q \in W$, então $\varphi_0^{-1}(W)$ é um aberto de U_i tal que $p \in \varphi_0^{-1}(W)$. Além disso, para todo $r = [r_0 : \cdots : r_n] \in \varphi_0^{-1}(W)$, temos que:

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi_0)(r) &= f(\varphi_0(r)) \\
&= \frac{f_1(\varphi_0(r))}{f_2(\varphi_0(r))} \\
&= \frac{f_1\left(\frac{r_1}{r_0}, \dots, \frac{r_n}{r_0}\right)}{f_2\left(\frac{r_1}{r_0}, \dots, \frac{r_n}{r_0}\right)} \\
&= \frac{r_0^{-d_1}\beta_0(f_1)(r)}{r_0^{-d_2}\beta_0(f_2)(r)} \\
&= \frac{r_0^{d_2}\beta_0(f_1)(r)}{r_0^{d_1}\beta_0(f_2)(r)},
\end{aligned}$$

onde $d_1 = deg(f_1)$, $d_2 = deg(f_2)$ e $\beta_0 : A_n \to S^h$ é definida como na Proposição 2.2. Como $x_0^{d_1}, x_0^{d_1}, \beta_0(f_1), \beta_0(f_2) \in S^h$, então $x_0^{d_2}\beta_0(f_1)$ e $x_0^{d_1}\beta_0(f_2)$ são polinômios homogêneos de grau $d_1 + d_2$. Com isso, para mostrar que $f \circ \varphi_0$ é regular em p, basta mostrar que $x_0^{d_1}\beta_0(f_2)$ não se anula em nenhum ponto de $\varphi_0^{-1}(W)$. Para mostrar que $x_0^{d_1}$ não se anula em $\varphi_0^{-1}(W)$, note que $\varphi_0^{-1}(W) \subseteq U_0$. Em particular, se $r = [r_0 : \cdots : r_n] \in \varphi_0^{-1}(W)$, então $r_0 \neq 0$. Logo $x_0^{d_1}$ não se anula em $\varphi_0^{-1}(W)$. Agora, para mostrar que $\beta_0(f_2)$ não se anula em $\varphi_0^{-1}(W)$, lembre da demonstração da Proposição 2.2 que $\varphi_0^{-1}(Z(f_2)) = Z(\beta_0(f_2)) \cap U_0$. Assim,

$$Z(\beta_0(f_2)) \cap \varphi_0^{-1}(W) = \varphi_0^{-1}(Z(f_2)) \cap \varphi_0^{-1}(W) = \varphi_0^{-1}(Z(f_2) \cap W) = \varphi_0^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

pois φ_0 é um homeomorfismo e $f_2(w) \neq 0$ para todo $w \in W$. Isso implica que a função $f \circ \varphi_0 : \varphi_0^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ é regular.

Agora, para mostrar que φ_0^{-1} é um morfismo de variedades, considere um aberto $V \subseteq U_0$ e $g \in \mathscr{O}(V)$. Vamos mostrar que $(g \circ \varphi_0^{-1}) : \varphi_0(V) \to \mathbf{A}^1$ é regular. Dado $p \in \varphi_0(V)$, como φ_0 é bijetora, então $\varphi_0^{-1}(p) =: q \in V$. Como g é regular em V, então existem um aberto $W \subseteq V$ e polinômios $g_1, g_2 \in S^h$ homogêneos de mesmo grau (d) tais que $g_2(w) \neq 0$ e $g(w) = \frac{g_1(w)}{g_2(w)}$ para todo $w \in W$. Como W é aberto em U_0 e φ_0 é aberta, então $\varphi_0(W)$ é aberto em $\mathbf{A}^n$ e, para cada $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \varphi_0(W)$, temos que

$$\begin{aligned}(g \circ \varphi_0^{-1})(r) &= g[1 : r_1 : \cdots : r_n] \\ &= \frac{g_1(1, r_1, \ldots, r_n)}{g_2(1, r_1, \ldots, r_n)} \\ &= \frac{\alpha_0(g_1)(r)}{\alpha_0(g_2)(r)},\end{aligned}$$

onde $\alpha_0 : S^h \to A_n$ é uma função definida na Proposição 2.2. Assim, temos que $g \circ \varphi_0^{-1}(x) = \frac{\alpha_0(g_1)}{\alpha_0(g_2)}(x)$ para todo $x \in \varphi_0(W)$. Com isso, para terminar de mostrar que $g \circ \varphi_0^{-1}$ é uma função regular em $\varphi_0(W)$, basta mostrar que $\alpha_0(g_2)(Q) \neq 0$ para todo $Q \in \varphi_0(W)$, ou seja, $Z(\alpha_0(g_2)) \cap \varphi_0(W) = \emptyset$. Para isso, lembre da demonstração da Proposição 2.2 que $Z(\alpha_0(g_2)) = \varphi_0(Z(g_2))$. Assim, como $Z(g_2) \cap W = \emptyset$ e φ_0 é injetora, então

$$Z(\alpha_0(g_2)) \cap \varphi_0(W) = \varphi_0(Z(g_2)) \cap \varphi_0(W) = \varphi_0(Z(g_2) \cap W) = \emptyset.$$

Isso mostra que $g \circ \varphi_0^{-1}$ é um função regular.

Portanto, como φ_0 é um homeomorfismo e φ_0 e φ_0^{-1} são morfismos de variedades, então φ_0 é um isomorfismo de variedades. □

Anotação 48. Sejam S um domínio graduado.

(a) Para todo ideal primo homogêneo $p \subseteq S$, o conjunto $T := (S \setminus p) \cap S^h$ (ou seja, T é o conjunto de todos elementos homogêneos de S que não estão em p) é um subconjunto multiplicativo de S^h.

(b) Para todo elemento homogêneo $u \in S \setminus \{0\}$, o conjunto $U := \{u^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto multiplicativo de S^h.

(c) Seja V um subconjunto multiplicativo qualquer de S^h, se para cada $d \in \mathbb{Z}$ definirmos

$$(V^{-1}S)_d := \left\{ \frac{f}{g} \in V^{-1}S \mid f \in S^h \text{ e } deg\left(\frac{f}{g}\right) := deg(f) - deg(g) \right\} \cup \{0\},$$

então $V^{-1}S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (V^{-1}S)_d$ é uma graduação do anel de frações $V^{-1}S$.

Demonstração.

(a) Primeiro, note que $T \neq \emptyset$. De fato, se todos os elementos homogêneos de S estivessem em p, como S é gerado por seus elementos homogêneos, então $S \subseteq p$. Mas, como p é primo, então $p \neq S$. Depois, note que $0 \notin T$, pois p é um ideal de S e $0 \in p$. Agora, dados $f, g \in T$, como f e g são homogêneos, então fg também é homogêneo; e como $f, g \notin p$ e p é primo, então $fg \notin p$. Logo, $fg \in T$. Portanto, como por definição, $T \subseteq S^h$, temos que T é um subconjunto multiplicativo de S^h.

(b) Para mostrar que U é um subconjunto multiplicativo de S^h, primeiro note que $U \neq \emptyset$, pois $u \in U$. Além disso, $0 \notin U$, pois $u \neq 0$ e S é um domínio. Depois tome $a, b \in U$, por definição, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $a = u^n$ e $b = u^m$. Assim, $ab = (u^n)(u^m) = u^{n+m} \in U$. Além disso, $U \subseteq S^h$, pois, para todo $u^n \in U$, como u é um elemento homogêneo então $u^n \in S^h$. Logo, U é um subconjunto multiplicativo de S^h.

(c) Primeiro, note que, para todo $\frac{f}{g} \in V^{-1}S$, $deg\left(\frac{f}{g}\right)$ está bem definido. De fato, dado $\frac{r}{s} \in V^{-1}S$ tal que $\frac{r}{s} \sim \frac{f}{g}$, então $fs - rg = 0$, ou seja, $rg = fs$. Como $deg(rg) = deg(r) + deg(g)$ e $deg(fs) = deg(f) + deg(s)$, então $deg(r) + deg(g) = deg(f) + deg(s)$. Assim, $deg(r) - deg(s) = deg(f) - deg(g)$. Logo, $deg\left(\frac{r}{s}\right) = deg\left(\frac{f}{g}\right)$.

Agora observe que, dados $d, e \in \mathbb{Z}$ distintos, temos que $(V^{-1}S)_d \cap (V^{-1}S)_e = \{0\}$. De fato, $\frac{f}{g} \in (V^{-1}S)_d$ e $\frac{f}{g} \in (V^{-1}S)_e$ se, e somente se, $d = deg\left(\frac{f}{g}\right) = e$ ou $\frac{f}{g} = 0$. Como tomamos $d \neq e$, então não podemos ter $d = deg\left(\frac{f}{g}\right) = e$. Assim, se $\frac{f}{g} \in (V^{-1}S)_d \cap (V^{-1}S)_e$, então $\frac{f}{g} = 0$.

Para mostrar que $V^{-1}S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (V^{-1}S)_d$, tome $\frac{f}{g} \in V^{-1}S$. Como S é um anel graduado e $f \in S$, podemos escrever $f = \sum_{i \geq 0}^{n} f_{d_i}$, onde f_{d_i} é um elemento homogêneo de grau d_i para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Assim, temos que

$$\frac{f}{g} = \frac{\sum_{i=0}^{n} f_{d_i}}{g} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_{d_i}}{g}.$$

Com isso, como cada f_{d_i} é um elemento homogêneo e como $g \in V \subseteq S^h$, então para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\frac{f_{d_i}}{g} \in (V^{-1}S)_{d_i - deg(g)}$. Logo, $\frac{f}{g} \in \sum_{d \in \mathbb{Z}} (V^{-1}S)_d$, pois pode ser escrito como soma finita de elementos homogêneos. Portanto, $V^{-1}S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (V^{-1}S)_d$.

Por fim, para terminar de mostrar que $V^{-1}S$ é um anel graduado, vamos mostrar que $(V^{-1}S)_d \cdot (V^{-1}S)_e \subseteq (V^{-1}S)_{d+e}$ para todos $d, e \in \mathbb{Z}$. Dados $\frac{f}{g} \in (V^{-1}S)_d$ e $\frac{r}{s} \in (V^{-1}S)_e$, temos que $\frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} = \frac{fr}{gs}$. Como f, r, g e s são homogêneos e $g, s \in V$, então fr, gs também são homogêneos, $gs \in V$ e

$$deg(fr) - deg(gs) = (deg(f) - deg(g)) + (deg(r) - deg(s)) = d + e.$$

Isso mostra que $\frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} = \frac{fr}{gs} \in (V^{-1}S)_{d+e}$. □

Definição. Seja S um domínio graduado. Dado um ideal primo homogêneo $p \subseteq S$, denote $T := S^h \setminus p$, considere o anel de frações graduado $T^{-1}S$ (como na Anotação 48), e defina

$$S_{(p)} := (T^{-1}S)_0 = \left\{ \frac{f}{g} \in T^{-1}S \,\middle|\, deg(f) = deg(g) \right\}.$$

Dado $f \in S^h \setminus \{0\}$, denote $U := \{f^n \mid n \geq 0\}$, considere o anel de frações graduado $U^{-1}S$ (como na Anotação 48), e defina

$$S_{(f)} := (U^{-1}S)_0 = \left\{ \frac{r}{s} \in U^{-1}S \,\middle|\, deg(r) = deg(s) \right\}.$$

Anotação 49. Sejam S um domínio graduado, p um ideal primo homogêneo de S, $T := S^h \setminus p$, f um elemento homogêneo não-nulo de S, e $U = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(a) $S_{(p)}$ e $S_{(f)}$ são subanéis dos anéis de frações $T^{-1}S$ e $U^{-1}S$, respectivamente.

(b) $S_{(p)}$ é um anel local com ideal maximal $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)} := \{f/g \in S_{(p)} \mid f \in p\}$.

(c) Se $p = \langle 0 \rangle$, então $S_{(\langle 0 \rangle)}$ é um corpo.

Demonstração.

(a) Pela Anotação 48, $S_{(p)} = (T^{-1}S)_0$ e $S_{(f)} = (U^{-1}S)_0$ são fechados sob a soma e o produto e contêm o elemento neutro da soma de S. Isso mostra que $S_{(p)}$ e $S_{(f)}$ são subanéis de S.

(b) Para mostrar que $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)} = \{f/g \in S_{(p)} \mid f \in p\}$ é um subconjunto próprio de S, observe que $1 = \frac{1}{1} \in S_{(p)} \setminus (p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$. De fato, se $f/g = 1/1 \in \{f/g \in S_{(p)} \mid f \in p\}$, então $f = g \in T \cap p$. Como $T \cap p = \emptyset$, então tal f/g não existe.

Para mostrar que $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$ é fechado pela adição, considere $f_1/g_1, f_2/g_2 \in \{f/g \in S_{(p)} \mid f \in p\}$. Observe que $f_1/g_1 - f_2/g_2 = (f_1g_2 - f_2g_1)/g_1g_2$. Como $S_{(p)}$ é um subanel de $T^{-1}S$, então $f_1/g_1 - f_2/g_2 \in S_{(p)}$; como $f_1, f_2 \in p$ e p é um ideal de S, então $f_1g_2 - f_2g_1 \in p$. Isso mostra que $f_1/g_1 - f_2/g_2 \in (p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$.

Para terminar de mostrar que $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$ é um ideal de $S_{(p)}$, considere $f/g \in \{f/g \in S_{(p)} \mid f \in p\}$ e $r/s \in S_{(p)}$. Observe que $f/ \cdot r/s = fr/gs \in S_{(p)}$, pois $S_{(p)}$ é um subanel de $T^{-1}S$. Além disso, como $f \in p$ e p é um ideal de S, então $fr \in p$. Isso implica que $f/ \cdot r/s = fr/gs \in (p \cap T^{-1}S) \cap S_{(p)}$.

Para mostrar que $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$ é o único ideal maximal de $S_{(p)}$, pela demonstração da Anotação 42, basta mostrar que todo elemento de $S_{(p)} \setminus (p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$ é uma unidade. Para isso, note que se $\frac{r}{s} \in S_{(p)}$ e $\frac{r}{s} \notin (p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$, então $r \notin p$; ou seja, $r \in T$. Como $\frac{r}{s} \in S_{(p)}$ e $r \in T$, então $\frac{s}{r} \in S_{(p)}$ e $deg(s) = deg(r)$. Logo, $\frac{r}{s}$ é uma unidade de $S_{(p)}$, pois $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = 1$. Portanto, se $\frac{r}{s}$ não está em $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$, então $\frac{r}{s}$ é uma unidade de $S_{(p)}$. Isso implica que $S_{(p)}$ é um anel local e $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(p)}$ é seu único ideal maximal.

(c) Se $p = \langle 0 \rangle$, como $p \cdot T^{-1}S = \{0\}$, então $(p \cdot T^{-1}S) \cap S_{(\langle 0 \rangle)} = \{0\}$ é um ideal maximal de $S_{(\langle 0 \rangle)}$. Portanto, $S_{(\langle 0 \rangle)}$ é um corpo. □

Teorema 3.4. Seja $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ uma variedade projetiva e, para cada $p \in Y$, denote por $\mathrm{m}(p)$ o ideal de $S(Y)$ gerado pelos elementos homogêneos de $S(Y)$ que se anulam em p. Então existem isomorfismos de anéis:

(a) $\mathscr{O}(Y) \cong k$.

(b) $\mathscr{O}_p \cong S(Y)_{\mathrm{m}(p)}$ para todo $p \in Y$.

(c) $K(Y) \cong S(Y)_{(\langle 0 \rangle)}$.

Demonstração. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, sejam $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$ e $Y_i = Y \cap U_i$. Lembre da demonstração do Lema 2.6 que existe um isomorfismo de anéis $A(Y_i) \cong S(Y)_{(x_i)}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Agora vamos provar as afirmações do enunciado na seguinte ordem: primeiro a parte (b), depois a parte (c), e finalmente a parte (a).

(b): Dado $p \in Y$, existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $p \in Y_i$. Suponha que $p \in Y_0$. (Os outros casos são completamente análogos e, nesse caso, a notação é mais simples.) Agora observe que $\mathscr{O}_{p,Y} \cong \mathscr{O}_{p,Y_0}$, pois a função $\xi : \mathscr{O}_{p,Y} \to \mathscr{O}_{p,Y_0}$ dada por $\xi\langle U, f \rangle = \langle U \cap Y_0, f|_{U \cap Y_0} \rangle$ é um isomorfismo de anéis. Para mostrar que ξ está bem definida, primeiro note que $\xi\langle U, f \rangle$ é de fato um elemento de $\mathscr{O}_{p,Y_0}$: como U e Y_0 são subconjuntos abertos de Y, então $U \cap Y_0$ é um subconjunto aberto de Y; e como f é regular em U, então $f|_{U \cap Y_0}$ é regular em $U \cap Y_0$. Depois, note que dados $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in \mathscr{O}_{p,Y}$ tais que $\langle U, f \rangle = \langle V, g \rangle$, para cada $v \in U \cap V \cap Y_0$, $f(v) = g(v)$. Logo

$$\begin{aligned}\xi\langle U, f \rangle = \langle U \cap Y_0, f|_{U \cap Y_0} \rangle &= \langle U \cap V \cap Y_0, f|_{U \cap V \cap Y_0} \rangle \\ &= \langle U \cap V \cap Y_0, g|_{U \cap V \cap Y_0} \rangle = \langle V \cap Y_0, g|_{V \cap Y_0} \rangle = \xi\langle V, g \rangle.\end{aligned}$$

Isso mostra que ξ está bem definida.

Agora, para mostrar que ξ é um homomorfismo de anéis, tome $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathscr{O}_{p,Y}$ e note que

$$\xi(\langle U\cap V, f+g\rangle) = \langle U\cap V\cap Y_0, f+g\rangle = \langle U\cap Y_0, f\rangle + \langle V\cap Y_0, g\rangle = \xi(\langle U, f\rangle)+\xi(\langle V, g\rangle),$$
$$\xi(\langle U\cap V, fg\rangle) = \langle U\cap V\cap Y_0, fg\rangle = \langle U\cap Y_0, f\rangle\langle V\cap Y_0, g\rangle = \xi(\langle U, f\rangle)\xi(\langle V, g\rangle).$$

Além disso, temos que ξ é injetiva. De fato, se $\langle U\cap Y_0, f|_{U\cap Y_0}\rangle = \xi(\langle U, f\rangle) = \langle Y_0, 0\rangle$, então $f(u) = 0$ para todo $u \in U\cap Y_0$. Como $U\cap Y_0$ é um aberto de U, então $\langle U, f\rangle = \langle U, 0\rangle$. Observe também que ξ é sobrejetiva. De fato, dado $\langle W, r\rangle \in \mathscr{O}_{p,Y_0}$, temos que W é um aberto de Y_0, e portanto é um aberto de Y. Logo $\langle W, r\rangle \in \mathscr{O}_{p,Y}$ e $\xi(\langle W, r\rangle) = \langle W\cap Y_0, r\rangle = \langle W, r\rangle$. Isso mostra que $\mathscr{O}_{p,Y} \cong \mathscr{O}_{p,Y_0}$.

Agora, como Y_0 é uma variedade afim em $\mathbf{A}^n$ (ver Proposição 3.3), podemos considerar a projeção canônica $\pi_{Y_0} : A_n \to A(Y_0)$, dada explicitamente por $\pi_{Y_0}(f) = f + I(Y_0)$. Denote $\mathsf{m}_0(p) := \pi_{Y_0}(I(p))$, e lembre do Teorema 3.2(c) que $\mathscr{O}_{p,Y_0} \cong A(Y_0)_{\mathsf{m}_0(p)}$.

Continuando, observe que o isomorfismo de anéis $\alpha : S(Y)_{(x_0)} \to A(Y_0)$, dado na demonstração do Lema 2.6 por $\alpha(f(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = f(1, y_1, \ldots, y_n)$, induz um isomorfismo $S(Y)_{\mathsf{m}(p)} \cong A(Y_0)_{\mathsf{m}_0(p)}$. De fato, dado $f \in \mathsf{m}(p)$ um polinômio homogêneo de grau d, se $p = [p_0 : \cdots : p_n]$, então $\alpha(f)(p) = 0$ se, somente se, $f(p) = 0$, pois

$$\alpha(f)(p) = f\left(1, \frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0}\right) = \frac{1}{p_0^d} f(p_0, \ldots, p_n) = 0.$$

Logo, $\alpha(f) \in \mathsf{m}_0(P)$. Assim, como $\mathsf{m}(p)$ é um ideal homogêneo, então, $\alpha(\mathsf{m}(p)) \subseteq \mathsf{m}_0(p)$. Partindo do outro lado, dado $g \in \mathsf{m}_0(p)$, se $g = \sum_{i\geq 0} g_i x_1^{e_{0,i}} \ldots x_n^{e_{n,i}}$, então $g = \alpha(g')$, onde

$$g' := \sum_{i\geq 0} \frac{g_i x_1^{e_{0,i}} \ldots x_n^{e_{n,i}}}{x_0^{\sum_{j=0}^n e_{j,i}}}$$

pertence a $\mathsf{m}(p)$, pois

$$g'(p) = \sum_{i\geq 0} \frac{g_i p_1^{e_{0,i}} \ldots p_n^{e_{n,i}}}{p_0^{\sum_{j=0}^n e_{j,i}}} = \sum_{i\geq 0} g_i \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{e_{0,i}} \cdots \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{e_{n,i}} = g(p) = 0.$$

(c): Primeiro observe que $K(Y) \cong K(Y_i)$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Vamos mostrar o caso

$i = 0$, a demonstração é análoga para os demais casos. Assim, considere a função

$$\begin{aligned} \xi' : K(Y) &\to K(Y_0) \\ \langle U, f\rangle &\mapsto \langle U \cap Y_0, f\rangle \end{aligned}$$

A demonstração do fato de que ξ' é um isomorfismo de anéis é análoga ao caso de ξ no item (b), pois como Y é irredutível, então pela Anotação 31, a interseção de quaisquer dois abertos não vazios de Y é não vazia.

Agora, como $Y_0, \ldots, Y_n$ são variedades afins, pelo Teorema 3.2(d), existe um isomorfismo de anéis (corpos) $K(Y_i) \cong K(A(Y_i))$ (o corpo de frações de $A(Y_i)$) para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Para terminar, vamos mostrar que o isomorfismo de anéis $\alpha : S(Y)_{(x_i)} \to A(Y_i)$, dado na demonstração do Lema 2.6 por $\alpha(f(x_0, \ldots, x_n)) = f(y_1, \ldots, y_i, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n)$, induz um isomorfismo de anéis $S(Y)_{((0))} \cong K(A(Y_i))$. Novamente, vamos mostrar apenas para o caso $i = 0$, os demais são análogos. Dado $\frac{f}{g} \in K(A(Y_0))$, sabemos que se $f = \sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}}$ e $g = \sum_{i \geq 0} g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}}$, onde $f_i, g_i \in k$ para todo $i \geq 0$ e apenas finitos não nulos, então existem $f', g' \in S(Y)$ tais que $f = \alpha(f')$ e $g = \alpha(g')$, dados por

$$f' = \sum_{i \geq 0} \frac{f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}}}{x_0^{\sum_{j=0}^{n} d_{j,i}}} \quad \text{e} \quad g' = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}}}{x_0^{\sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}}.$$

Também temos que, como $g \notin I_0(Y)$, então $g' \notin I(Y)$, pois dado $p \in Y$ tal que $g(p) \neq 0$, então

$$g'(p_0, \cdots, p_n) = \sum_{i \geq 0} \frac{g_i p_1^{e_{1,i}} \cdots p_n^{e_{n,i}}}{p_0^{\sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}} = \sum_{i \geq 0} g_i \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{e_{1,i}} \cdots \left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{e_{n,i}} = g(p) \neq 0.$$

Com isso, para mostrar que $\frac{f'}{g'} \in S(Y)_{(\langle 0\rangle)}$, basta mostrar que $deg\left(\frac{f'}{g'}\right) = 0$. Assim, note que

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\sum_{i \geq 0} \frac{f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}}}{x_0^{\sum_{j=0}^{n} d_{j,i}}}}{\sum_{i \geq 0} \frac{g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}}}{x_0^{\sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}}} = \frac{\frac{\sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}} x_0^{d - \sum_{j=0}^{n} d_{j,i}}}{x_0^d}}{\frac{\sum_{i \geq 0} g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}} x_0^{e - \sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}}{x_0^e}} = \frac{x_0^e}{x_0^d} \frac{\sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}} x_0^{d - \sum_{j=0}^{n} d_{j,i}}}{\sum_{i \geq 0} g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}} x_0^{e - \sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}},$$

onde $d = \sum_{f_i \neq 0} \sum_{j=0}^{n} d_{j,i}$ e $e = \sum_{g_i \neq 0} \sum_{j=0}^{n} e_{j,i}$. Como $\sum_{i \geq 0} f_i x_1^{d_{1,i}} \cdots x_n^{d_{n,i}} x_0^{d - \sum_{j=0}^{n} d_{j,i}}$ é um polinômio homogêneo de grau d e $\sum_{i \geq 0} g_i x_1^{e_{1,i}} \cdots x_n^{e_{n,i}} x_0^{e - \sum_{j=0}^{n} e_{j,i}}$ é um polinômio homogêneo de grau e, então $deg\left(\frac{f'}{g'}\right) = G + F - (F + G) = 0$. Logo, temos que $\alpha : S(Y)_{(\langle 0\rangle)} \to K(A(Y_0))$ é sobrejetiva. Agora para mostrar que α é injetiva, basta observar que se $\alpha\left(\frac{f'}{g'}\right) = 0$, então

$f_i = 0$ para todo $i \geq 0$. Logo, $\frac{f'}{g'} = 0$, pois $f' = 0$. Com isso, temos que $S(Y)_{(\langle 0 \rangle)}$ e $K(A(Y_0))$ são isomorfos.

(a): Lembre da Anotação 45 que $\mathscr{O}(Y)$ é isomorfo a um subanel de $K(Y)$. Como, pela parte (c), $K(Y)$ é isomorfo a $S(Y)_{(\langle 0 \rangle)}$, então podemos identificar $\mathscr{O}(Y)$, $S(Y)$ e $K(Y)$ com subanéis do corpo de frações $K(S(Y))$.

Agora considere $f \in \mathscr{O}(Y)$. Observe que, para todo $i \in \{0,\dots,n\}$, $f|_{Y_i}$ também é uma função regular. Como Y_i é uma variedade afim, pelo Teorema 3.2(a), $\mathscr{O}(Y_i) \cong A(Y_i)$; e pelo Lema 2.6, $A(Y_i) \cong S(Y)_{(x_i)}$. Assim, para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, a função f se identifica com um elemento da forma $g_i/x_i^{d_i} \in S(Y)_{(x_i)} \subseteq K(S(Y))$, para algum polinômio homogêneo $g_i \in S(Y)$ e $d_i \geq 0$ tal que $deg(g_i) = d_i$. Agora considere o corpo de frações de $S(Y)$, temos que para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, $x_i^{d_i} f = g_i \in S(Y)_{d_i}$. Tomando, $D \geq \sum_{i=0}^n d_i$ qualquer, dado um monômio $x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} \in S(Y)_D$, note existe pelo menos um $k \in \{0,\dots,n\}$ tal que $e_k \geq d_k$, pois se $e_i < d_i$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$, então $x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} \notin S(Y)_D$, pois $\sum_{i=0}^n e_i < \sum_{i=0}^n d_i \leq D$. Tomando, então, $k \in \{0,\dots,n\}$ tal que $e_k \geq d_k$, temos

$$x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f = x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n}\frac{g_k}{x_k^{d_k}} = \left(x_0^{e_0}\cdots x_{k-1}^{e_{k-1}} x_k^{e_k-d_k} x_{k+1}^{e_{k+1}}\cdots x_n^{e_n}\right) g_k \in S(Y)_D.$$

Assim, como pela Anotação 22, $S(Y)_D$ é o k-espaço vetorial gerado pelos monômios em $x_0,\dots,x_n$ com grau D, então $S(Y)_D \cdot f \subseteq S(Y)_D$. Por indução, temos que dado $q > 0$ qualquer, $S(Y)_D \cdot f^q \subseteq S(Y)_D$, pois supondo que $S(Y)_D \cdot f^{q-1} \subseteq S(Y)_D$, dado $g \in S(Y)_D$, temos $gf^q = (gf^{q-1})f \in S(Y)_D$. Em particular, $x_0^D f^q \in S(Y)_D$, para todo $q > 0$. Assim, o subanel $S(Y)[f] \subseteq L$ está contido em $x_0^{-D}S(Y) \subseteq L$, pois dado um monômio $x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} \in S(Y)$, como

$$x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f = x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n}\frac{g_0}{x_0^{d_0}} = x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}\frac{g_0}{x_0^{d_0-e_0}},$$

se $d_0 - e_0 \leq 0$, temos que $x_0^{d_0}\cdots x_n^{e_n} f = x_0^{d_0-e_0} x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n} g_0$ está em $S(Y)$, logo, $x_0^{d_0}\cdots x_n^{e_n} f \in x_0^{-D}S(Y)$. Agora, se $d_0 - e_0 \geq 0$, então $D \geq d_0 - e_0$, pois $D \geq d_0$, logo

$$x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f = x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}\frac{g_0}{x_0^{d_0-e_0}} = x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n} g_0^r \frac{x_0^{D-d_0+e_0}}{x_0^{-D}} \in x_0^{-D}S(Y).$$

Além disso, supondo que dado $r \geq 0$, $x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f^{r-1} \in x_0^{-D}S(Y)$, então existe $g \in S(Y)$ tal que $x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f^{r-1} = \frac{g}{x_0^D}$. Assim, como $D \geq d_0$, temos

$$x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f^r = \left(x_0^{e_0}\cdots x_n^{e_n} f^{r-1}\right) f = \left(\frac{g}{x_0^D}\right)\frac{g_0}{x_0^{d_0}} = \frac{x_0^{D-d_0}}{x_0^{2D}} g g_0 \in x_0^{-D}S(Y).$$

Logo, como $x_0^{-D}S(Y)$ é fechado pela soma, então $S(Y)[f] \subseteq x_0^{-D}S(Y)$.

Como $S(Y)[f]$ é um $S(Y)$-módulo finitamente gerado, então f é integral sobre $S(Y)$ (ver Atiyah p. 59), ou seja, existem $a_1, \ldots, a_m \in S(Y)$ tais que

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^1 + a_m = 0.$$

Mas, se para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tomarmos a decomposição $a_i = a_{i,0} + \cdots + a_{i,k}$, onde $k = \max\{deg(a_i) \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$, $a_{i,0}, \ldots, a_{i,k_i} \in S^h$ e $a_{i,j} = 0$ se $j > deg(a_i)$, temos

$$0 = f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^1 + a_m = \sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,0} + \ldots + \sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,k}.$$

Note que para cada $j \in \{0, \ldots, k\}$, $\sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,j} \in S(Y)_j$, pois $f \in S(Y)_0$. Assim, temos que

$$\sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,0} = -\sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,1} - \ldots - \sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,k} = 0, \quad \text{pois } S(Y) = \bigoplus_{j \geq 0} S(Y)_j.$$

Portanto, como $\sum_{i=0}^{m} f^{m-i} a_{i,0} = 0$, então f é algébrico sobre $S(Y)_0$. Por fim, observe que $S(Y)_0 = k$ (ver Anotação 22). Como k é algebricamente fechado, então $f \in k$ e concluímos que $\mathscr{O}(Y) = k$, pois já sabemos que $k \subseteq \mathscr{O}(Y)$, uma vez que toda função polinomial é regular. □

Denote por $\mathfrak{Var}_k$ a categoria cujos objetos são variedades sobre k e os morfismos são morfismos entre variedades (ver as respectivas definições); e denote por $\mathfrak{Alg}_k$ a categoria cujos objetos são k-álgebras e os morfismos são homomorfismos entre k-álgebras.

Proposição 3.5. Sejam X, Y variedades sobre k. Se Y for uma variedade afim, então existe uma bijeção natural entre os conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Y), \mathscr{O}(X))$.

Demonstração. Primeiro lembre do Teorema 3.2 que, como Y é uma variedade afim (por hipótese), então $A(Y) \cong \mathscr{O}(Y)$. Assim, é equivalente mostrar que existe uma bijeção natural entre os conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X))$.

Para isso, vamos começar construindo explicitamente duas funções

$$\alpha_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X)) \text{ e } \beta_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y).$$

Dado um morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$, lembre que se $f \in \mathscr{O}(Y)$, então $f \circ \varphi \in \mathscr{O}(X)$. Assim, podemos definir $\alpha_\bullet$ como sendo dada por $\alpha_\bullet(\varphi) := \alpha_\varphi$, onde $\alpha_\varphi : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ é dada por $\alpha_\varphi(f) := f \circ \varphi$ para toda $f \in \mathscr{O}(Y)$. Vamos verificar que, de fato, α_φ é um homomorfismo de k-álgebras para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$. De fato, dados $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$, $f, g \in \mathscr{O}(Y)$ e

$\lambda \in k$, temos que

$$\alpha_\varphi(f+\lambda g) = (f+\lambda g)\circ\varphi = f\circ\varphi + \lambda(g\circ\varphi) = \alpha_\varphi(f) + \lambda\alpha_\varphi(g),$$
$$\alpha_\varphi(fg) = (fg)\circ\varphi = (f\circ\varphi)(g\circ\varphi) = \alpha_\varphi(f)\alpha_\varphi(g).$$

Isso mostra que, de fato, $\alpha_\bullet$ uma função $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X))$.

Agora vamos construir a função $\beta_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$. Para isso, suponha que $Y \subseteq \mathbf{A}^n$, e para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, denote por $x_i : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$ a i-ésima função coordenada, dada explicitamente por $x_i(a_1,\dots,a_n) = a_i$ para cada $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{A}^n$. Para cada $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X))$ e cada $i \in \{1,\dots,n\}$, denote $\xi_i := h(x_i|_Y) \in \mathscr{O}(X)$, e defina $\beta_h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$ por $\beta_h(P) = (\xi_1(P),\dots,\xi_n(P))$ para cada $P \in X$. Para mostrar que, para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X))$, $\beta_h : X \to Y$ é de fato um morfismo de variedades, primeiro vamos mostrar que a imagem de β_h está de fato contida em Y. Como Y é uma variedade afim, então $Y = Z(I(Y))$. Assim, dados $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X))$ e $P \in X$, para mostrar que $\beta_h(P) \in Y$, basta mostrar que $f(\beta_h(P)) = 0$ para todo $f \in I(Y)$. Dado $f \in I(Y)$, para cada $(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, existe $f_{i_1,\dots,i_n} \in k$ (apenas finitos deles não-nulos), tal que $f(t_1,\dots,t_n) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\dots,i_n} t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}$; e dados $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y),\mathscr{O}(X))$, $P \in X$, observe que

$$\begin{aligned} f(\beta_h(P)) &= f(\xi_1(P),\cdots,\xi_n(P)) \\ &= f(h(x_1)(P),\cdots,h(x_n)(P)) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\dots,i_n}(h(x_i)(P))^{i_1}\cdots(h(x_n)(P))^{i_n} \\ &= h\left(\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\dots,i_n}(x_1)^{i_1}\cdots(x_n)^{i_n}\right)(P) \\ &= h(f(x_1,\dots,x_n))(P). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como $f(x_1,\dots,x_n) : Y \to \mathbf{A}^1$ é a função nula, então $h(f(x_1,\dots,x_n))(P) = 0$. Agora, note que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, $y_i \circ \beta_h(P) = y_i(h(x_1)(P),\dots,h(x_n)(P)) = h(x_i)(P) \in \mathscr{O}(X)$ é uma função regular em X. Logo, como $\beta_h(X) \subseteq Y$, e $x_i \circ \beta_h \in \mathscr{O}(X)$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, então, pelo Lema 3.6, β_h é de fato um morfismo.

Para mostrar que $\alpha_\bullet$ e $\beta_\bullet$ são bijeções, vamos mostrar que, de fato, elas são inversas uma da outra. Para isso, tome $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$. Como $\alpha_\bullet(\varphi) = \alpha_\varphi$, então $\alpha_\varphi(f)(x_i) = x_i \circ \varphi$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Assim,

$$(\beta_\bullet \circ \alpha_\bullet)(\varphi)(P) = \beta_{\alpha_\varphi}(P) = (x_1\circ\varphi(P),\dots,x_n\circ\varphi(P)) = \varphi(P) \quad \text{para cada } P \in X. \tag{3.5}$$

Ou seja, $\beta_\bullet \circ \alpha_\bullet(\varphi) = \varphi$. Agora, tome $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X))$. Pela equação (3.4), temos que

$$(\alpha_\bullet \circ \beta_\bullet)(h)(f) = \alpha_\bullet(\beta_h)(f) = \alpha_{\beta_h}(f) = (f \circ \beta_h) = h(f) \quad \text{para cada } f \in \mathscr{O}(Y).$$

Logo, $\alpha_\bullet$ e $\beta_\bullet$ são inversas uma da outra.

Por fim, vamos mostrar que $\alpha_\bullet$ é natural em X e Y. Primeiro, sejam $X, X' \in \mathfrak{Var}_k$ e $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X', X)$. Observe que $(\alpha_\xi \circ \alpha_\bullet)(\varphi) = \alpha_\xi \circ \alpha_\varphi = \alpha_{\varphi\circ\xi}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{Var}(X,Y)$. De fato, dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(\mathscr{O}(Y), \mathscr{O}(X'))$, temos que

$$\alpha_\xi \circ \alpha_\varphi(f) = \alpha_\xi(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi) \circ \xi = f \circ (\varphi \circ \xi) = \alpha_{\varphi\circ\xi}(f). \tag{3.6}$$

Depois, sejam $Y, Y' \in \mathfrak{Var}_k$ e $\zeta \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(Y, Y')$. De maneira análoga ao caso anterior, observe que $(\alpha_\bullet \circ \alpha_\zeta)(\varphi) = \alpha_\varphi \circ \alpha_\zeta = \alpha_{\zeta\circ\varphi}$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$. Isso mostra que $\alpha_\bullet$ é um isomorfismo natural. □

Lema 3.6. Sejam X uma variedade, $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ uma variedade afim, e considere, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a i-ésima função coordenada $x_i : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$, definida por $x_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i$. Uma função $\psi : X \to Y$ é um morfismo de variedades se, e somente se, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, a função $(x_i \circ \psi) : X \to \mathbf{A}^1$ é regular.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como x_i é polinomial, então $x_i|_Y : Y \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular, ou seja, $x_i|_Y \in \mathscr{O}(Y)$. Assim, pela Anotação 39, $x_i|_Y : Y \to \mathbf{A}^1$ é um morfismo de variedades. Como $\psi : X \to Y$ também é um morfismo de variedades, então, pela Anotação 38, temos que $(x_i \circ \psi) : X \to \mathbf{A}^1$ é um morfismo de variedades. Consequentemente, pela Anotação 39, $x_i \circ \psi$ é uma função regular.

($\Leftarrow$): Suponha que $x_i \circ \psi$ é uma função regular para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Primeiro vamos mostrar que $f \circ \psi$ é uma função regular para todo $f \in A_n$. De fato, para cada $P \in X$, temos que $\psi(P) = ((x_1 \circ \psi)(P), \ldots, (x_n \circ \psi)(P))$. Além disso, para todo $f \in A_n$, existem $f_{i_1,\ldots,i_n} \in k$ tais que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. Assim,

$$(f \circ \psi)(P) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\ldots,i_n} (x_1 \circ \psi)(P)^{i_1} \cdots (x_n \circ \psi)(P)^{i_n}.$$

Isso mostra que $f \circ \psi = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} f_{i_1,\ldots,i_n} (x_1 \circ \psi)^{i_1} \cdots (x_n \circ \psi)^{i_n}$. Como $x_1 \circ \psi, \ldots, x_n \circ \psi \in \mathscr{O}(X)$ (por hipótese) e $\mathscr{O}(X)$ é uma k-álgebra (pelas Anotações 32 e 34), então $f \circ \psi \in \mathscr{O}(X)$, ou seja, $f \circ \psi$ é regular em X. Em particular, pelo Lema 3.1 e pela Anotação 35, isso implica que $f \circ \psi : X \to \mathbf{A}^1$ é uma função contínua.

Agora vamos mostrar que ψ é contínua. Para isso, lembre da Anotação 27 que isso é equivalente a mostrar que a imagem inversa de cada fechado de Y é fechada em X. Assim, tome Z um fechado em Y. Como Y é uma variedade afim, então existe $T \subseteq A_n$ tal que $Z = Y \cap Z(T)$. Assim,

$$\bigcap_{f\in T} (f\circ\psi)^{-1}(0) = \bigcap_{f\in T} \psi^{-1}(f^{-1}(0)\cap Y) = \psi^{-1}\left(\bigcap_{f\in T} f^{-1}(0)\cap Y\right) = \psi^{-1}(Z).$$

Como $\{0\}$ é um fechado em $\mathbf{A}^1$ e $f\circ\psi$ é contínua para todo $f\in T$ (pelo parágrafo anterior), isso implica que $\psi^{-1}(Z)$ é fechado em X; e consequentemente, que ψ é contínua.

Por fim, vamos mostrar que, para todo aberto $V \subseteq Y$ e todo $g \in \mathscr{O}(V)$, temos que $g\circ \psi : \psi^{-1}(V) \to \mathbf{A}^1$ é uma função regular. De fato, dado $P \in \psi^{-1}(V)$, temos que $\psi(P) = ((x_1\circ\psi)(P),\ldots,(x_n\circ\psi)(P)) \in V$. Como $(x_1\circ\psi),\ldots,(x_n\circ\psi)$ são funções regulares (por hipótese), então existem abertos $V_1,\ldots,V_n \subseteq X$, contendo P, e polinômios $\psi_{1,1},\psi_{1,2},\ldots,\psi_{n,1},\psi_{n,2}$ (em A_n, no caso afim; e em S^h, tais que $deg(\psi_{i,1}) = deg(\psi_{i,2})$), tais que $\psi_{i,2}(v_i) \neq 0$ e $(x_i\circ\psi)(v_i) = \frac{\psi_{i,1}(v_i)}{\psi_{i,2}(v_i)}$ para todo $v_i \in V_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Assim, defina $W := \psi^{-1}(V)\cap V_1\cap\cdots\cap V_n$, e observe que W é um aberto de X. Além disso, observe que, para todo $g \in A_n$, existem $g_{i_1,\ldots,i_n} \in k$, tais que $g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} g_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$. Assim, para todo $w\in W$, temos que

$$\begin{aligned} g\circ\psi(w) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} g_{i_1,\ldots,i_n} \left(\frac{\psi_{1,1}(w)}{\psi_{1,2}(w)}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\psi_{n,1}(w)}{\psi_{n,2}(w)}\right)^{i_n} \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} g_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\psi_{1,1}(w)^{i_1}\cdots\psi_{n,1}(w)^{i_n}}{\psi_{1,2}(w)^{i_1}\cdots\psi_{n,2}(w)^{i_n}}. \end{aligned}$$

Note que isso mostra que $g\circ\psi|_W$ é uma função racional, cujo denominador não se anula em W, pois $\psi_{i,2}(w)\neq 0$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$ e $w\in W$. Com isso, concluímos que $g\circ\psi \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(V))$. Logo, ψ é um morfismo. □

Corolário 3.7. Duas variedades afins X,Y são isomorfas se, e somente se, as k-álgebras $A(X)$ e $A(Y)$ são isomorfas.

Demonstração. Primeiro lembre do Teorema 3.2 que, como X,Y são variedades afins, então $\mathscr{O}(X)\cong A(X)$ e $\mathscr{O}(Y)\cong A(Y)$ como k-álgebras. (Para não carregar tanto a notação, nesta demonstração, vamos omitir estes isomorfismos.) Agora vamos usar os isomorfismos explícitos entre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Y),\mathscr{O}(X))$ dados na demonstração da Proposição 3.5.

$(\Rightarrow)$: Suponha que exista um isomorfismo de variedades $\varphi : X\to Y$. Isso significa, em particular, que existe um homomorfismo de variedades $\psi : Y \to X$ tal que $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_X$ e

$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Agora lembre da demonstração da Proposição 3.5 que $\alpha_\varphi : A(Y) \to A(X)$ é dado por $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ e, analogamente, que $\alpha_\psi : A(X) \to A(Y)$ é dado por $\alpha_\psi(g) = g \circ \psi$. Consequentemente, $(\alpha_\psi \circ \alpha_\varphi)(f) = \alpha_\psi(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi) \circ \psi = f$ para todo $f \in A(Y)$, e analogamente, $(\alpha_\varphi \circ \alpha_\psi)(g) = \alpha_\varphi(g \circ \psi) = (g \circ \psi) \circ \varphi = g$ para todo $g \in A(X)$. Isso mostra que $\alpha_\psi \circ \alpha_\varphi = \mathrm{id}_{A(Y)}$ e $\alpha_\varphi \circ \alpha_\psi = \mathrm{id}_{A(X)}$. Consequentemente, $\alpha_\varphi : A(Y) \to A(X)$ é um isomorfismo de k-álgebras.

($\Leftarrow$): Suponha que exista um isomorfismo de k-álgebras $h : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$. Em particular, isso significa que existe um homomorfismo de k-álgebras $g : \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(Y)$ tal que $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(Y)}$ e $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(X)}$. Vamos mostrar que $\beta_h \circ \beta_g = \beta_{g\circ h} = \mathrm{id}_Y$. Para começar, suponha que $Y \subseteq \mathbf{A}^m$, e para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, denote por $y_i : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^1$ a i-ésima função coordenada, dada explicitamente por $y_i(a_1,\dots,a_m) = a_i$ para cada $(a_1,\dots,a_m) \in \mathbf{A}^m$. Analogamente, suponha que $X \subseteq \mathbf{A}^n$, e para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, denote por $x_i : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^1$ a i-ésima função coordenada, dada explicitamente por $x_i(a_1,\dots,a_n) = a_i$ para cada $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{A}^n$.

Agora vamos mostrar que $\beta_{g\circ h} = \mathrm{id}_Y$. De fato, observe que, para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, temos que $(g \circ h)(y_i) = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(Y)}(y_i) = y_i$. Isso implica que $\beta_{g\circ h} = (y_1,\dots,y_m) = \mathrm{id}_Y$. Agora vamos mostrar que $\beta_{g\circ h} = \beta_h \circ \beta_g$. De fato, se denotarmos $h(y_1) =: \xi_1,\dots,h(y_m) =: \xi_m$, temos que $\beta_h(\beta_g(P)) = (\xi_1(\beta_g(P)),\dots,\xi_m(\beta_g(P)))$ para cada $P \in Y$. Agora, pela equação (3.4), para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, temos que $\xi_i(\beta_g(P)) = \xi_i(g(x_1)(P),\dots,g(x_n)(P)) = g(\xi_i)(P)$. Como $g(\xi_i) = g(h(y_i)) = (g \circ h)(y_i)$ para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, segue que

$$\beta_h(\beta_g(P)) = (\xi_1(\beta_g(P)),\dots,\xi_m(\beta(g)(P))) = (g(\xi_1)(P),\dots,g(\xi_m)(P)) = \beta_{g\circ h}(P). \qquad (3.7)$$

Isso implica que $\beta_h \circ \beta_g = \mathrm{id}_Y$. Analogamente, temos que $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{h\circ g} = \mathrm{id}_X$. Daí concluímos que β_g é o morfismo de variedades inverso de β_h; e consequentemente, que X é isomorfa a Y. □

Anotação 50 ([4, Exercício I.3.2(a)])**.** Seja $\varphi : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^2$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ para todo $t \in \mathbf{A}^1$. φ é um morfismo de variedades e um homeomorfismo de $\mathbf{A}^1$ para sua imagem, $Y := Z(y^2 - x^3) \subseteq \mathbf{A}^2$, mas $\varphi : \mathbf{A}^1 \to Y$ não é um isomorfismo de variedades.

Demonstração. Sejam $r, s \in \mathbf{A}^1$, tais que $r \neq s$. Como $r^3 \neq s^3$, então $\varphi(r) = (r^2, r^3) \neq (s^2, s^3) = \varphi(s)$. Logo, φ é injetora. Agora, seja $(u, v) \in Y$, temos que $u^3 = v^2$. Se $v = 0$, então $(u, v) = (0, 0) = \varphi(0)$, se $v \neq 0$, note que $u \neq 0$ e temos

$$\frac{v^2}{u^2} = \frac{u^3}{u^2} = u \quad \text{e} \quad \frac{v^3}{u^3} = \frac{v^3}{v^2} = v.$$

Ou seja, se $t = \frac{v}{u}$, então $\varphi(t) = (u,v)$. Logo, φ é sobrejetiva. Portanto, φ é uma bijeção entre $\mathbf{A}^1$ e Y.

Agora, para mostrar que φ é um homeomorfismo, primeiro vamos mostrar que φ é contínua. Lembre da Anotação 27 que φ é contínua se, e somente se, para cada subconjunto fechado F de Y, $\varphi^{-1}(F)$ é fechado em $\mathbf{A}^1$. Mas, além disso, temos que se F é fechado em Y, então $F = U \cap Y$ para algum U fechado em $\mathbf{A}^2$. Assim, pela Anotação 5, existem $f_1, \dots, f_r \in A_2$ tais que $F = Z(f_1, \dots, f_r) = Z(f_1) \cup \cdots \cup Z(f_r)$ para algum $r \geq 0$. Logo, para mostrar que φ é contínua, basta mostrar que dado $f \in A_2$ qualquer, $\varphi^{-1}(Z(f) \cap Y)$ é fechado. Assim, dado $f \in \mathbf{A}_2$, temos que $\varphi^{-1}(Z(f) \cap Y) = Z(g)$, onde $g(t) := f(t^2, t^3)$. De fato, dado $t \in \varphi^{-1}(Z(f) \cap Y)$, $g(t) = f(t^2, t^3) = f(\varphi(t)) = 0$, pois $\varphi(t) \in Z(f) \cap Y$ e se $t \in Z(g)$, então como $f(t^2, t^3) = 0$, $\varphi(t) \in Z(f) \cap Y$. Isso mostra que φ é contínua. Agora, lembre da Anotação 28, que como φ é bijetiva e contínua, se $\varphi(G)$ é fechado para cada $G \subseteq \mathbf{A}^1$ fechado, então φ é um homeomorfismo. Assim, vamos mostrar que para cada $g \in A_1$, $\varphi(Z(g))$ é um subconjunto fechado de Y. Dado $g \in A_1$, escreva $g(t) = \sum_{i=0}^{m} g_i t^i$, onde $g_i \in k$. Agora, tome $(u,v) \in \varphi(Z(g))$, temos que existe $t \in Z(g)$ tal que $\varphi(t) = (u,v)$, mas se $u \neq 0$, então $t = \frac{v}{u}$. Assim,

$$\begin{aligned} g(t) = 0 \Leftrightarrow g\left(\frac{v}{u}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} g_i \frac{v^i}{u^i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=0}^{m} g_i v^i u^{m-i}}{u^m} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} g_i v^i u^{m-i} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, seja $g' \in A_2$ dado por $g(x,y) = \sum_{i=0}^{m} g_i y^i x^{m-i}$, temos que para cada $t \in Z(g)$, se $t \neq 0$, então $g'(\varphi(t)) = 0$. e se $t = 0$, então $g'(\varphi(t)) = g'(0,0) = g(0) = 0$. Assim, $\varphi(Z(g)) \subseteq Z(g) \cap Y$. Além disso, dado $(u,v) \subseteq Z(g) \cap Y$, também temos que $g'(u,v) = 0$ se, somente se, $g\left(\frac{v}{u}\right) = 0$. Ou seja, $\varphi(Z(g)) = Z(g') \cap Y$. Portanto, φ é homeomorfismo.

Como já sabemos que φ é contínua, para mostrar que φ é um morfismo, basta mostrar que se V é um aberto de Y e $f \in \mathscr{O}(V)$, então $f \circ \varphi \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(V))$. Assim, tome $P \in \varphi^{-1}(V)$. Como $f \in \mathscr{O}(V)$, existe um aberto $U \subseteq V$ e polinômios $f_1, f_2 \in A_2$ tais que $\varphi(P) \in U$, $f_2(u) \neq 0$ e $f(u) = \frac{f_1}{f_2}(u)$ para todo $u \in U$. Assim, como φ é contínua, temos que $\varphi^{-1}(U)$ é aberto em $\varphi^{-1}(V)$, $P \in \varphi^{-1}(U)$ e para cada $t \in \varphi^{-1}(U)$, temos

$$f \circ \varphi(t) = f(t^2, t^3) = \frac{f_1}{f_2}(t^2, t^3),$$

onde $f_2(t^2, t^3) \neq 0$, pois $(t^2, t^3) \in U$. Logo, como $g_1(t) := f_1(t^2, t^3)$ e $g_2(t) := g_2(t^2, t^3)$ são polinomiais, temos que $f \circ \varphi \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(V))$.

Finalmente, vamos mostrar que φ não é um isomorfismo. Para isso, lembre do Corolário 3.7 que considerando a função $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(\mathbf{A}^1, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Y), A(\mathbf{A}^1))$ definida no Teorema 3.5, se $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(\mathbf{A}^1, Y)$ é um isomorfismo, então $\alpha(\psi) = \alpha_\psi$ é um isomorfismo de k-álgebras. Pela contrapositiva, vamos mostrar que α_φ não é um isomorfismo, o que implica que φ não é um isomorfismo de variedades. Dado $f \in A(Y)$, temos que para cada $t \in \mathbf{A}^1$

$$\alpha_\varphi(f)(t) = f \circ \varphi(t) = f(t^2, t^3).$$

Assim, vendo f como um elemento de $k[y][x]$, temos que $grau_x(f) < grau_t(\alpha_\varphi(f))$ para todo $f \notin k$. De fato, se $f = \sum_{i \geq 0} f_i x^{d_i} y^{e_i}$, onde $f_i \in k$ para cada $i \geq 0$ e os f_i são apenas finitos não nulos, então

$$f(t^2, t^3) = \sum_{i \geq 0} f_i t^{2d_i} t^{3e_i}.$$

Logo, seja $l_x > 0$ tal que $grau_x(f) = d_{l_x}$, então $grau_t(\alpha_\varphi(f)) \geq 2d_{l_x}$. Vendo f como um elemento de $k[x][y]$, se $grau_y(f) = e_{l_y}$, onde $l_y > 0$, então $grau_t(\alpha_\varphi(f)) \geq 3e_{l_y}$, ou seja, $grau_y(f) < grau_t(\alpha_\varphi(f))$. Portanto, temos que se $g \in A(\mathbf{A}^1) \cong k[t]$ é dado por $g(t) = t$, como $grau_t(g) = 1$, se $\alpha_\varphi(f) = g$, então f é constante, pois $grau_x(f) < 1$ e $grau_y(f) < 1$. Mas, se $f(x,y)$ é constante, então $f(t^2, t^3)$ é constante, portanto, $g \notin \alpha_\varphi(A(Y))$, ou seja, α_φ não é um isomorfismo. $\square$

Pela Anotação 14, temos que uma k-álgebra é finitamente gerada se, e somente se, é isomorfa a algum quociente do anel de polinômios e, em particular, k-álgebras que são domínios são isomorfas a quocientes por ideais primos.

Agora, lembre que $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ é uma variedade afim se, e somente se, $I(Y)$ é um ideal primo. Logo, toda k-álgebra finitamente gerada que seja um domínios de integridade é isomorfa ao anel de coordenadas de alguma variedade afim sobre k. Com isso, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.8. Dadas duas variedades afins X, Y, considere as respectivas álgebras $A(X), A(Y)$, e dado um morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$, considere o homomorfismo de álgebras $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$ induzido pelo homomorfismo de álgebras $\alpha_\varphi : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$, dado por $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ (ver Proposição 3.5). As relações $X \mapsto A(X)$ e $\varphi \mapsto \varphi^*$ induzem uma equivalência de categorias (contravariante) entre a categoria de variedades afins e a categoria das álgebras finitamente geradas que são domínios.

Demonstração. Para não carregar tanto a notação, nesta demonstração, vamos omitir os isomorfismos $A(X) \cong \mathscr{O}(X)$ e $A(Y) \cong \mathscr{O}(Y)$ dados na demonstração do Teorema 3.2. Ou seja, vamos identificar uma classe de equivalência $f \in A(X)$ (resp. $g \in A(Y)$), de um polinômio módulo o ideal $I(X)$ (resp. $I(Y)$), com a respectiva função polinomial $X \to \mathbf{A}^1$ (resp. $Y \to \mathbf{A}^1$). Assim, para todo morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$, o morfismo de k-álgebras $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$ será identificado com α_φ.

Para mostrar que $\alpha_\bullet$ induz uma equivalência de categorias, considere a função $\beta_\bullet$ (definida também na demonstração da Proposição 3.5) e note que:

- $\alpha_{\mathrm{id}_X} = \mathrm{id}_{A(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{Var}_k$. De fato, $\alpha_{\mathrm{id}_X}(f) = f \circ \mathrm{id}_X = f$ para todo $f \in A(X)$.
- Pela equação (3.6), $\alpha_{\psi\circ\varphi} = \alpha_\varphi \circ \alpha_\psi$ para todos $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(Y,Z)$, $X,Y,Z \in \mathfrak{Var}_k$.
- Pela equação (3.5), $\beta_{\alpha_\varphi} = \varphi$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Var}_k}(X,Y)$, $X,Y \in \mathfrak{Var}_k$.
- $\beta_{\mathrm{id}_{A(X)}} = \mathrm{id}_X$ para todo $X \in \mathfrak{Var}_k$. De fato, para todo $P \in X$,
$$\beta_{\mathrm{id}_{A(X)}}(P) = (\mathrm{id}_{A(X)}(x_1)(P), \cdots, \mathrm{id}_{A(X)}(x_n)(P)) = (x_1(P), \cdots, x_n(P)) = P.$$
- Pela equação (3.7), $\beta_{h\circ g} = \beta_g \circ \beta_h$ para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{Var}_k$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Y),A(X))$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Z),A(Y))$.
- Pela equação (3.4), $\alpha_{\beta_h} = h$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}_k}(A(Y),A(X))$, $X,Y \in \mathfrak{Var}_k$.

Isso mostra que $\alpha_\bullet$ e $\beta_\bullet$ induzem funtores inversos, e portanto equivalências de categorias. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ATIYAH, M. F., AND MACDONALD, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[2] DUMMIT, D. S., AND FOOTE, R. M. *Abstract Algebra*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 1991.

[3] GARCIA, A., AND LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

[4] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, New York, 1977.

[5] MATSUMURA, H. *Commutative Algebra, 2 ed.* The Benjamin/Cummings Publishin Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1980.

[6] MUJICA, J. Notas de topologia geral. `http://www.ime.unicamp.br/`, 2005. Último acesso em: 14/02/2011.