ÁLGEBRAS DE LIE

EXERCÍCIOS :: AULA 04

4.1. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, mostre que uma transformação linear $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma derivação se, e somente se, $\mathrm{ad}(\delta x) = \delta \circ \mathrm{ad}(x) - \mathrm{ad}(x) \circ \delta$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

4.2. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, mostre que uma transformação linear $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um automorfismo se, e somente se, $\mathrm{ad}(\phi x) = \phi \circ \mathrm{ad}(x) \circ \phi^{-1}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

4.3. (Humphreys 2.1) Mostre que $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

4.4. (Humphreys 2.10) Mostre que $\sigma(x) = -y$, $\sigma(h) = -h$, $\sigma(y) = -x$ define um automorfismo em $\mathfrak{sl}(2)$.

4.5. (Humphreys 2.11) Mostre que toda matriz $A \in GL(n)$ define um automorfismo de $\mathfrak{sl}(n)$ via $\phi_A(x) = Ax^tA^{-1}$, $x \in \mathfrak{sl}(n)$.

4.6. Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e A e uma álgebra associativa e comutativa. Dadas $\delta_1 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$) e $\delta_2 \in \mathrm{Der}(A)$ (resp. $\mathrm{Aut}(A)$), determine se $\delta\colon \mathfrak{g} \otimes A \to \mathfrak{g} \otimes A$ dada por $\delta(x \otimes a) = \delta_1(x) \otimes \delta_2(a)$ é uma derivação (resp. um automorfismo) da álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$.

4.7. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e σ um automorfismo de $\mathfrak{g}$. Mostre que $\mathfrak{g}^\sigma := \{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = x\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$.

4.8. Dadas duas álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$, verifique que o produto semidireto delas é uma álgebra de Lie.

4.9. Dados uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, um $\mathfrak{g}$-módulo V e um automorfismo $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Mostre que $x \cdot v := \sigma(x)v$ define uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo em V. (Esse $\mathfrak{g}$-módulo é chamado de *torcido* e, às vezes, denotado por V^σ.)

Entregar dia: 09 de abril de 2019.