N

GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 02

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: __________

Questão 1 (2,5 pontos). Encontre todas as possíveis combinações lineares dos vetores $(3,2,1)$, $(1,1,-2)$, $(-6,-5,5)$ em $\mathbb{R}^3$.

Uma combinação linear dos vetores $(3,2,1)$, $(1,1,-2)$ e $(-6,-5,5)$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$ da forma:

$$x(3,2,1) + y(1,1,-2) + z(-6,-5,5),$$

para alguns $x,y,z \in \mathbb{R}$. Ou seja, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de $(3,2,1)$, $(1,1,-2)$, $(-6,-5,5)$ se: existem $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais que

$$(3x, 2x, x) + (y, y, -2y) + (-6z, -5z, 5z) = (a,b,c).$$

Escrevendo essa equação coordenada-a-coordenada, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - 6z = a \\ 2x + y - 5z = b \\ x - 2y + 5z = c. \end{cases}$$

Escalonando esse sistema como na Prova 01, obtemos que ele tem solução se, e somente se,

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5} + \frac{c}{35}.$$

Então as combinações lineares de $(3,2,1)$, $(1,1,-2)$,

Data: 25 de setembro de 2019.

$(-6,-5,5)$ são: $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, t.q. $\frac{a}{7} = \frac{b}{5} + \frac{c}{35}$.

Questão 2 (2,5 pontos). Mostre que o conjunto $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ é uma base para o conjunto de soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Primeiro, vamos resolver o sistema, usando escalonamento:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow x + z = y.$$

Assim, o conj. solução desse sistema é:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x+z\} = \{(x, x+z, z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle\{(1,1,0), (0,1,1)\}\rangle.$$

Isso mostra que o conj. sol. do sistema é gerado por $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$. Para mostrar que essa é uma base, basta mostrar que $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ é linearmente independente.

Suponha que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ satisfaçam:

$$\lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1) = (0,0,0).$$

Isso é equivalente à: $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ ser uma solução do sist:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases},$$

cuja única sol. é: $\lambda = 0, \mu = 0$.

Isso mostra que $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ é uma base do conj. sol. do sistema acima.

Questão 3 (2,5 pontos). Aplique o processo de Gram-Schmidt e construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir dos seguintes vetores: $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_1$, $(-1, 1, 3)$ e $(-1, -4, 1)$.

* Projetando $(-1,1,3)$ sobre $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$:

$$(-1,1,3) - \text{proj}^{\perp}_{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)}(-1,1,3) = (-1,1,3) - \left(\frac{(-1,1,3)\cdot(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)}{\|(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)\|^2}\right)(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)$$

$$= (-1,1,3) - \frac{\sqrt{2}}{1}(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$$

$$= \boxed{(-2,1,2)}_2.$$

* Projetando $(-1,-4,1)$ sobre $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$:

$$(-1,-4,1) - \text{proj}^{\perp}_{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)}(-1,-4,1) = (-1,-4,1) - \left(\frac{(-1,-4,1)\cdot(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)}{\|(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)\|^2}\right)(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)$$

$$= (-1,-4,1) - (0,0,0)$$

$$= (-1,-4,1)$$

* Projetando $(-1,-4,1)$ sobre $(-2,1,2)$:

$$(-1,-4,1) - \text{proj}^{\perp}_{(-2,1,2)}(-1,-4,1) =$$

$$= (-1,-4,1) - \left(\frac{(-1,-4,1)\cdot(-2,1,2)}{\|(-2,1,2)\|^2}\right)(-2,1,2)$$

$$= (-1,-4,1) - (0,0,0)$$

$$= \boxed{(-1,-4,1)}_3.$$

* Normalizando os vetores obtidos:

- $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\|(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\|} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$;

- $\dfrac{(-2,1,2)}{\|(-2,1,2)\|} = \dfrac{(-2,1,2)}{\sqrt{9}} = (-2/3, 1/3, 2/3)$;

- $\dfrac{(-1,-4,1)}{\|(-1,-4,1)\|} = \dfrac{(-1,-4,1)}{\sqrt{18}} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{6}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

Conclusão: $\{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), (-2/3, 1/3, 2/3), (-\sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}/6)\}$ é uma base orto

Questão 4 (2,5 pontos). Encontre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem:

- v é ortogonal à $(1,-1,0)$,
- cosseno do ângulo entre v e $(0,0,1)$ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
- volume do paralelepípedo formado por v, $(0,0,1)$ e $(1,-1,0)$ é 2.

Suponha que $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. As condições acima podem ser reescritas como:

i) $(x,y,z)\cdot(1,-1,0)=0$,

ii) $\dfrac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{\|(x,y,z)\|\ \|(0,0,1)\|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

iii) $\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\pm 2$.

Colocando essas três equações em um sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x-y = 0 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ x+y = \pm 2. \end{cases}$$

Da primeira eq. segue que: $x=y$. Substituindo na terceira eq., obtemos que $2x=\pm 2$, ou seja, $x=y=\pm 1$.

Substituindo na ~~segunda eq.~~, obtemos que:

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{z^2+2}$$
$$\Rightarrow z^2=\frac{1}{3}(z^2+2) \Leftrightarrow 3z^2=z^2+2$$
$$\Leftrightarrow z^2=1$$
$$\Leftrightarrow z=\pm 1.$$

Para $z=-1$, temos que: $-1=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+2}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{3}$ ↯. Então $z=1$, $x=y=\pm 1$.

<u>Conclusão:</u> $v=(1,1,1)$ ou $v=(-1,-1,1)$.