CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 03

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ________________ Assinatura: ________________ RA: ________

Questão 1 (2 pontos)**.** Calcule a integral $\iint_R \operatorname{sen}(x-y)dxdy$, onde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x,\ 0 \le x+y \le \pi\}.$$

Vamos trocar as coordenadas de (x,y) para $(u,v) = (x-y,\ x+y)$. Nessas novas coordenadas, temos que $R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le v,\ 0 \le v \le \pi\}$. O Jacobiano dessa mudança de coordenadas é

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Então $dudv = 2dxdy$ e a integral que nós queremos calcular fica:

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{sen}(x-y)dxdy &= \int_0^\pi \int_0^v \operatorname{sen}(u)\frac{1}{2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^v \operatorname{sen}(u)dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi -\cos(u)\big]_{u=0}^{u=v} dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi 1-\cos(v)dv \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{sen}(v)\big]_0^\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Tem como fazer sem mudar as coordenadas também.

Data: 27 de maio de 2019.

Questão 2 (2 pontos)**.** Calcule a massa de uma placa plana, sem altura, de formato $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ -y \leq x \leq y\}$, e com densidade $\delta(x,y) = e^{x^2+y^2}$ em cada ponto $(x,y) \in P$.

Primeiro, lembre que a massa dessa placa é dada por $\iint_P \delta(x,y)dxdy$. Para calcular essa integral, vamos trocar as coordenadas de (x,y) para as coordenadas polares (r,θ), onde $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Nessas novas coordenadas, $\delta(r,\theta) = e^{r^2}$ e a placa fica descrita como $P = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \mid 1 \leq r \leq 2,\ \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4\}$. O Jacobiano dessa mudança de coordenadas é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

Então $dxdy = rdrd\theta$, e a massa da placa, que queremos calcular, fica:

$$\begin{aligned} \iint_P \delta(x,y)dxdy &= \int_1^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{r^2} r d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 e^{r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^4 e^u \frac{du}{2} \qquad \text{(usando } u = r^2\text{)} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^4 - e). \end{aligned}$$

Questão 3 (2 pontos)**.** Calcule a área da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3\sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 6\}.$$

Primeiro, observe que a área da superficie S é dada por $\iint_C \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$, onde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ é o círculo de raio 2. Então, vamos calcular as derivadas parciais de z:

$$z_x = 3\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{e} \qquad z_y = 3\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Assim, usando essas derivadas parciais, obtemos que a área de S é:

$$\begin{aligned}
\iint_C \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy &= \iint_C \sqrt{1 + \frac{9x^2}{x^2 + y^2} + \frac{9y^2}{x^2 + y^2}} dxdy \\
&= \iint_C \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 9x^2 + 9y^2}{x^2 + y^2}} dxdy \\
&= \iint_C \sqrt{10} dxdy \\
&= \sqrt{10}\ \text{Área}(C) \\
&= \sqrt{10}\pi 4.
\end{aligned}$$

Questão 4 (2 pontos)**.** Suponha que alguem pegue uma bola de sinuca de raio 2, uma furadeira com uma broca de raio 1, e faça um buraco perfeitamente cilíndrico (de raio 1) passando bem no centro dessa bola de sinuca. Qual é o volume final da bola de sinuca furada? (Dica: $\operatorname{cotg}'(x) = -\operatorname{cosec}(x)^2$.)

Primeiro observe que o volume da bola de sinuca furada não é igual à diferença dos volumes da esfera e do cilindro ($\frac{16\pi}{3} - 4\pi$), porque tem calotas esféricas acima e abaixo do cilindro de raio 1 e altura 4, e dentro da bola de sinuca.

Para calcular o volume da bola de sinuca furada, vamos usar integrais triplas e coordenadas esféricas: $x = \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta)$, $y = \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta)$ e $z = \rho\cos(\phi)$. Lembre que o Jacobiano da mudaça de coordenadas de (x, y, z) para (ρ, ϕ, θ) é $\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)$. Assim, o volume da bola de sinuca furada é $\iiint_B \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta$, onde B denota a bola de sinuca furada.

Para calcularmos a integral $\iiint_B \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta$, precisamos parametrizar B em termos de (ρ, ϕ, θ). Como o raio da bola original é 2 e o raio da broca é 1, então $B = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mid \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi)} \leq \rho \leq 2,\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{6},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Assim, o volume da bola de sinuca furada fica:

$$
\begin{aligned}
\iiint_B \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{1/\operatorname{sen}(\phi)}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \rho^3\Big]_{1/\operatorname{sen}(\phi)}^{2} \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(8 - \frac{1}{\operatorname{sen}(\phi)^3}\right) \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{sen}(\phi) d\phi d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \operatorname{cosec}(\phi)^2 d\phi d\theta \\
&= -\frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \cos(\phi)\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(\phi)\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} d\theta \\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 4\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}
$$

Tem como fazer usando coordenadas cilíndricas também.

Questão 5 (2 pontos)**.** Calcule o hipervolume do hipersólido $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ 0 \leq w \leq xyz\}$.

Denote por S o setor circular $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, e observe que, em coordenadas polares, temos que $S = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Então, o hipervolume de H é dado por:

$$\begin{aligned}
\iiint_H xyz dxdydz &= \iint_S \int_{x^2+y^2}^1 xyzdzdxdy \\
&= \iint_S xy\frac{1}{2}(1 - (x^2 + y^2)^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos(\theta) r \operatorname{sen}(\theta)(1 - r^4)rdrd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)(1 - r^4)drd\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(2\theta)d\theta \int_0^1 (r^3 - r^7)dr \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos(2\theta)}{2}\Big]_0^{\pi/2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$