NOTAS DE CVV :: TEOREMA DO DIVERGENTE DE GAUSS EM $\mathbb{R}^2$

TIAGO MACEDO

§ 1. Motivação.

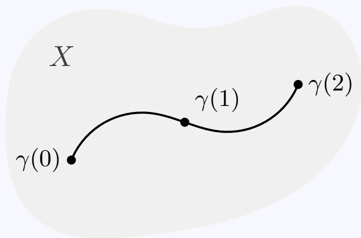
Lembre que, dados um campo de vetores $V\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e uma curva $\gamma\colon [a,b] \to C \subseteq \mathbb{R}^2$ diferenciáveis, tais que $C \subseteq X$, o trabalho do campo V sobre a curva C é dado pela integral

$$\int_C V \bullet d\gamma = \int_a^b V(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, dt.$$

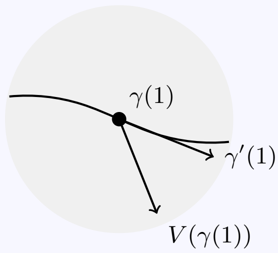
No lado direito da equação acima, o termo $V(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)$ vem da projeção do vetor $V(\gamma(t))$ na direção de $\gamma'(t)$, ou seja, na direção em que a curva está indo.

Observe que quando nós fazemos a projeção de $V(\gamma(t))$ na direção de $\gamma'(t)$, nós perdemos a informação de quanto é a componente de $V(\gamma(t))$ na direção perpendicular (normal) à $\gamma'(t)$.

Exemplo. Sejam $V\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de vetore diferenciável e $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, tais que $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq X$:



Suponha que $V(\gamma(1)) = (1,-3)$ e que $\gamma'(1) = (2,-1)$:



Observe que a projeção de $V(\gamma(1))$ em $\gamma'(1)$ é

$$\left(V(\gamma(1)) \bullet \frac{\gamma'(1)}{\|\gamma'(1)\|}\right) \frac{\gamma'(1)}{\|\gamma'(1)\|} = \left((1,-3) \bullet \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}\right) \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}} = (2,-1).$$

Portanto $V(\gamma(1)) = (1,-3) \neq (2,-1)$. A diferença é $(-1,-2)$. Observe que essa diferença é a projeção de $V(\gamma(1))$ na direção perpendicular (normal) à $(2,-1)$. De fato, a direção normal à $(2,-1)$ é $(1,2)$ e

$$\left(V(\gamma(1)) \bullet \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|}\right) \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \left((1,-3) \bullet \frac{(1,2)}{\sqrt{5}}\right) \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = -(1,2).$$

O Teorema do divergente de Gauss (no caso de $\mathbb{R}^2$) nos dá uma maneira de calcular a integral de um campo $V\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ na direção normal à uma curva fechada $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Intuitivamente, o resultado dessa integral é o fluxo do campo V através da curva γ (para fora).

§ 2. **Teorema do divergente.**

Para enunciar o Teorema do divergente, nós precisamos, primeiro, definir o que é o divergente de um campo de vetores.

Definição. Dado um campo de vetores $V\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável, denote as suas coordenadas por $P, Q\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ou seja, $V(x, y) = (P(x, y),\, Q(x, y))$. O divergente de V é a função $\operatorname{div}(V)\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{div}(V) = P_x + Q_y$.

Exemplos.
(a) Se $V(x, y) = (x,\, y)$, então $P(x, y) = x$ e $Q(x, y) = y$. Nesse caso, $P_x = 1$, $Q_y = 1$ e $\operatorname{div}(V)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função constante $\operatorname{div}(V) = 2$.
(b) Se $V(x, y) = (y,\, x)$, então $P(x, y) = y$ e $Q(x, y) = x$. Nesse caso, $P_x = 0$, $Q_y = 0$ e $\operatorname{div}(V)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ também é uma função constante, $\operatorname{div}(V) = 0$.
(c) Se $V(x, y) = (x^2 + xy,\ 2x + y^3)$, então $P(x, y) = x^2 + xy$ e $Q(x, y) = 2x + y^3$. Nesse caso, $P_x(x, y) = 2x + y$, $Q_y(x, y) = 3y^2$, e $\operatorname{div}(V)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função (não-constante) dada por $\operatorname{div}(V)(x, y) = 2x + y + 3y^2$.

Exercício. Lembre que, para toda função diferenciável $F\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o seu gradiente é um campo de vetores $\nabla F\colon X^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Mostre que $\operatorname{div}(\nabla F) = 0$.

Agora suponha que $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma região fechada e limitada, cuja fronteira é uma curva diferenciável fechada simples $\gamma\colon [a, b] \to C \subseteq \mathbb{R}^2$, e que $V\colon X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores diferenciável tal que $C \subseteq X$. Denote $V(x, y) = (P(x, y),\, Q(x, y))$ e $\gamma(t) = (\mathsf{x}(t),\, \mathsf{y}(t))$.

O vetor tangente à γ em t é $\gamma'(t) = (\mathsf{x}'(t),\, \mathsf{y}'(t))$. Portanto $(\mathsf{y}'(t), -\mathsf{x}'(t))$ é um vetor normal à γ em t. (De fato, $(\mathsf{x}'(t),\, \mathsf{y}'(t)) \bullet (\mathsf{y}'(t), -\mathsf{x}'(t)) = 0$.) Observe que, se γ estiver orientada no sentido anti-horário (ou seja, com X sempre à sua esquerda), esse vetor normal aponta para fora da região X. Assim, a projeção do campo V na direção normal à γ é: $V \bullet (\mathsf{y}', -\mathsf{x}') = P\mathsf{y}' - Q\mathsf{x}'$. Logo o fluxo do campo V através da curva γ (para fora de X) é

$$\int_a^b V \bullet (\mathsf{y}', -\mathsf{x}')\, dt = \int_a^b (P\mathsf{y}' - Q\mathsf{x}')\, dt = \oint_\gamma -Q\, dx + P\, dy.$$

Usando o Teorema de Green na integral de linha do lado direito, obtemos...

Teorema (do divergente de Gauss)**.**

$$\int_a^b V \bullet (\mathsf{y}',\, -\mathsf{x}')\, dt = \iint_X (P_x + Q_y)\, dx\, dy = \iint_X \operatorname{div}(V)\, dx\, dy.$$

Exercícios. Use o Teorema do divergente para calcular os seguintes fluxos.
(a) Fluxo do campo $V(x, y) = (x, y)$ através da circunferência de raio 1.
(b) Fluxo do campo $V(x, y) = (x^2, 0)$ através da elipse $\gamma(t) = (2\cos(t),\, \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) Fluxo do campo $V(x, y) = (0, y)$ através da fronteira do quadrado $X = [0, 1] \times [0, 1]$.
(d) Fluxo do campo $V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ através da fronteira do anel semicircular $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.