GEOMETRIA ANALÍTICA :: PROVA 04

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ____________________ Assinatura: ____________________ RA: ________

Encontre a equação reduzida e classifique cada uma das cônicas abaixo. Justifique suas respostas de forma clara.

Questão 1 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = -1$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 2 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $xy = 1$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 3 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+2x-2\sqrt{3}y = -4$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 4 (2.0 pontos). Conjunto solução da equação $r = 4\cos(\theta)$ em $\mathbb{R}^2$.

Questão 5 (2.0 pontos). Lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas distâncias ao ponto $(2, 1)$ são iguais ao dobro das suas distâncias à reta dada por $x - 1 = 0$.

Data: 02 de dezembro de 2019.

#1. $x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = -1 \iff x^2 + 2x + 1 + 3(y^2 - 2y) = 0$

$\iff (x+1)^2 + 3(y-1)^2 - 3 = 0$

$\iff (x+1)^2 + 3(y-1)^2 = 3$

$\iff \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$

Essa é a equação reduzida de uma elipse.

#2. $xy = 1$. Vamos aplicar a rotação de um ângulo θ, tq $\cot g(2\theta) = 0$. Como $\cot g(2\theta) = 0 \iff \cos(2\theta) = 0$, então temos que $2\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ ou $7\pi/2$. Vamos escolher $2\theta = \pi/2$, ou seja, $\theta = \pi/4$.

Neste caso, $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}(\theta)$. Assim,

$$R_{\pi/4}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y ; \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right);$$

e a equação $xy = 1$ se torna:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) = 1.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Essa é a equação reduzida de uma hipérbole.

#3. $3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}\,y = -4.$

Vamos aplicar uma rotação de um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, tal que $\cot g(2\theta) = \dfrac{3-1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Como $\cot g(2\theta) = 1/\sqrt{3} \iff$

$\sqrt{3}\cos(2\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$, então $1 = \operatorname{sen}^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) = (\sqrt{3}\cos(2\theta))^2 + \cos^2(2\theta) = 4\cos^2(2\theta)$. Assim, $\cos^2(2\theta) = 1/4$; ou seja, $\cos(2\theta) = \pm 1/2$, e consequentemente, $\operatorname{sen}(2\theta) = \pm\sqrt{3}/2$. Daí, concluímos que $2\theta = \pi/3, 4\pi/3$. Escolha $2\theta = \pi/3$, de modo que $\theta = \pi/6$.

Nesse caso, temos: $\cos(\theta) = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen}(\theta) = 1/2$, e

$$R_{\pi/6}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right).$$

A equação $3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + 2x - 2\sqrt{3}\,y = -4$ se torna:

$$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

$$+ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) - 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = -4.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$\left(\frac{9}{4} + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-6\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) + 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)xy$$

$$+ \left(\frac{3}{4} - 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\right)y^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}\right)x - \left(\frac{2}{2} + 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y = -4.$$

Ou seja,

$$4x^2 - 4y = -4 \iff y = x^2 + 1$$

$$\iff (y-1) = x^2.$$

Essa é a equação reduzida de uma parábola.

#4. $r = 4\cos(\theta)$.

Lembre que, em coordenadas polares, $x = r\cos(\theta)$.
Então:

$$r = 4\cos(\theta) \iff r = 4\frac{x}{r} \quad \text{ou} \quad r = 0$$

$$\iff r^2 = 4x \quad \text{ou} \quad r = 0.$$

Lembre também que, em coordenadas polares, $r^2 = x^2 + y^2$. Então:

$$r = 4\cos(\theta) \iff x^2 + y^2 = 4x \quad \text{ou} \quad r = 0$$
$$\iff x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0$$
$$\iff (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0$$
$$\iff (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{ou} \quad r = 0.$$

Por fim, observe que $r = 0 \iff (x,y) = (0,0)$; e que $(0-2)^2 + 0^2 = 4$. Assim:

$$r = 4\cos(\theta) \iff (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Essa é a equação reduzida de uma elipse.

#5. $\text{dist}((x,y),(2,1)) = 2\,\text{dist}((x,y), r)$, $r = \{(1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$\iff \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2\,|x-1|$$
$$\iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4(x-1)^2$$
$$\iff (y-1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4)$$
$$= 3x^2 - 4x$$
$$= 3(x^2 - 4/3\,x)$$
$$= 3(x - 2/3)^2 - 3 \cdot 4/9$$
$$= 3(x - 2/3)^2 - 4/3.$$
$$\iff 3(x - 2/3)^2 - (y-1)^2 = 4/3$$
$$\iff \frac{(x - 2/3)^2}{4/9} - \frac{(y-1)^2}{4/3} = 1.$$

Essa é a equação reduzida de uma hipérbole.