CÁLCULO EM VÁRIAS VARIÁVEIS :: PROVA 04

PROF. TIAGO MACEDO

Nome: ______________________ Assinatura: ______________________ RA: ________

Questão 1 (2.5 pontos)**.** Calcule a massa de uma mola com formato espiral $\gamma(\theta) = (\cos(10\,\theta),\ \mathrm{sen}(10\,\theta),\, \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e densidade de massa constante igual à e.

A massa M da mola é dada pela integral de linha

$$\int_\Gamma e\, d\gamma,$$

onde Γ é curva em $\mathbb{R}^3$ dada pela imagem de γ. Assim temos:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} e\|(-10\,\mathrm{sen}(10\,\theta),\ 10\cos(10\,\theta),\ 1)\|\ d\theta \\ &= e\int_0^{2\pi} \sqrt{100\,\mathrm{sen}^2(10\,\theta) + 100\cos^2(10\,\theta) + 1}\ d\theta \\ &= e\int_0^{2\pi} \sqrt{101}\ d\theta \\ &= e\sqrt{101}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\sqrt{101}\pi e. \end{aligned}$$

Data: 26 de junho de 2019.

Questão 2 (2.5 pontos)**.** Calcule a integral de linha do campo de vetores $C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $C(x,y) = (xy^2,\ x^2y)$ sobre o retângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$.

Denote por R o retângulo (preenchido) $[0,2] \times [0,3]$, cuja fronteira é o retângulo (a curva) de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$. Observe que a função $P\colon R \to \mathbb{R}$ dada por $P(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ satisfaz $\nabla P(x,y) = (xy^2,\ x^2y) = C(x,y)$. Isso significa que C é um campo conservativo. Como o retângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$ é uma curva fechada, então a integral de linha do campo $C\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre o retângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$ é 0.

Questão 3 (2.5 pontos)**.** Suponha que uma abelhinha esteja colhetando pólen entre sua colmeia e um certo jardim. Para isso, ela percorre um trajeto circular com 3m de raio em torno da origem da cidade das abelhinhas, e a 1m de altura do solo. Durante uma de suas várias viagens, o vento sopra com a seguinte força $V(x, y, z) = (xz,\, 2yz - 7x,\, 3x^2)$ na cidade das abelhinhas. Calcule o trabalho que a abelhinha terá que fazer para completar esta viagem da colmeia até o jardim.

O trabalho T que a abelhinha terá que fazer é dado por

$$T = -\int_\Gamma V \bullet d\gamma,$$

onde Γ é a curva dada pela imagem da função $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (3\cos(t),\ 3\,\mathrm{sen}(t),\ 1)$, ou seja, o trajeto da abelhinha. Observe que Γ é a fronteira do disco $D = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, cujo vetor normal em cada ponto é $n = (0, 0, 1)$. Usando o Teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned} T &= -\iint_D \mathrm{rot}(V) \bullet n \ dx\, dy \\ &= -\iint_D (-2y, -5x, -7) \bullet (0, 0, 1) \ dx\, dy \\ &= -\iint_D (-7) \ dx\, dy \\ &= 7\,\mathrm{Area}(D) \\ &= 63\pi. \end{aligned}$$

Questão 4 (2.5 pontos)**.** Calcule o fluxo do campo de vetores $W\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $W(x,y,z) = (xy,\, 3yz^2,\, x\,\mathrm{sen}(z))$ para fora das paredes do cubo centrado na origem, com lados 2×2 paralelos aos eixos coordenados.

O cubo centrado na origem, com lados 2×2 paralelos aos eixos coordenados é dado por $K = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$. Usando o Teorema de Gauss, o fluxo do campo W para fora das paredes de K é dado por

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} W \bullet n \; d\sigma &= \iiint_K \mathrm{div}(W(x,y,z)) \; dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y + 3z^2 + x\cos(z) \; dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2y + 6z^2 + \cos(z)\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} \; dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2y + 6z^2 \; dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} y^2\Big|_{-1}^{1} + 12z^2 \; dz \\
&= \int_{-1}^{1} 12z^2 \; dz \\
&= 4z^3\Big|_{-1}^{1} \\
&= 8.
\end{aligned}$$