ICT - UNIFESP - São José dos Campos

**Prova 1 - Geometria Analítica (Turmas IB e ID)**

05/09/2018

Nome:_____

RA:_____

| Questões | Pontos | Notas |
|---|---|---|
| Q1 | 2.5 | |
| Q2 | 2.5 | |
| Q3 | 3.0 | |
| Q4 | 2.0 | |
| Total | 10.0 | |

- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos. O aluno que for flagrado utilizando tais equipamentos receberá nota zero nesta avaliação.
- A prova pode ser feita à lápis.
- O aluno que estiver envolvido em esquema de cola receberá nota zero nesta avaliação.
- **BOA PROVA!!!**

---

**Q1.** (2.5 pontos) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \end{cases}.$$

Encontre os valores de $\alpha$ para os quais o sistema em questão tem:
(a) solução única (0.5 ponto).
(b) infinitas soluções (0.5 ponto).
(c) nenhuma solução (0.5 ponto).
Nos casos (a) (0.5 ponto) e (b) (0.5 ponto), encontre o conjunto solução do sistema.

---

**Q2.**(2.5 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix},$$

onde $a$, $b$ e $c$ são números reais quaisquer.

(a) (1.0 ponto) O que acontece com o valor do determinante de $A$ se $a = b$ ou $b = c$ ou $a = c$? Responda a esta pergunta com base nas propriedades do determinante, **sem** calculá-lo explicitamente.

(b) (1.5 ponto) Para $a = -1$, $b = 1$ e $c = 2$, encontre a inversa de $A$.

---

**Q3.** Considere os vetores $\vec{u} = (-2,\ 1,\ 3)$, $\vec{v} = (1,\ 2,\ 1)$ e $\vec{w} = (-7,\ -4,\ 3)$, e o ponto $A(2, -1, 3)$.

(a) (1.0 ponto) Determine se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente dependente ou independente.

(b) (1.0 ponto) Encontre $a$ e $b$ tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$;

(c) (1.0 ponto) Encontre os pontos $B$, $C$ e $D$ que são vértices do paralelogramo $ABCD$ tal que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u}$ e $\overrightarrow{AD} = b\vec{v}$, com $a$ e $b$ do item anterior. O que se pode dizer sobre o vetor diagonal $\overrightarrow{AC}$?

---

**Q4.**(2.0 pontos) Dadas duas matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$, mostre $det(AB) = det(A).det(B)$.

---

/ /

#1. $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$

a) $\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^3 + 2 - 3\alpha = 0 \iff \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 2$

$= \alpha^2(\alpha - 1) + \alpha(\alpha - 1) - 2(\alpha - 1$

$= (\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha + 2)$

$= 0$

$\iff \alpha = 1$ ou $\alpha = -2$.

SPD: para todo $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$. (0,5)

b) Para $\alpha = 1$: o sistema fica $x + y + z = 1$. Assim, o conj. de soluções é $\{(x, y, 1-x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (0,5)
Portanto: SPI. (0,5)

c) $\alpha = -2$: o sistema fica $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$.

Escalonando...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Portanto: SI. (0,5)

* Agora resolvendo o sistema quando $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z = \frac{1}{\alpha+2}$, $y = z$, $x = 1 - (\alpha+1)z = 1 - \frac{\alpha+1}{\alpha+2} = \frac{1}{\alpha+2}$: solução única. (0,5)

DATAPEL

/ /

#2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Se $a = b$, as duas primeiras linhas são iguais. Se $a = c$, ... ; Se $b = c$, ... . Em qualquer um desses casos, $\det(A) = 0$. (1,0)

b) Tome $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$. Então $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

* Por cofator: $\det(A) = 5 - (-1) = 6$;

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +2 & -3 & +1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & +2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificando: $A \cdot A^{-1} = I_3$ ...

* Por escalonamento: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1/3 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/6 & 1/2 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -1/2 & 1/3 \end{array}\right)$$

(1,5).

DATAPEL

#3

a) $\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -12 - 12 - 7 + 42 - 8 - 3$ (0,5)

$= -42 + 42$

$= 0.$

Portanto $\{u, v, w\}$ são LD. (0,5)

b) $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow (-2x, x, 3x) + (y, 2y, y) = (-7, -4, 3)$ (0,5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -7 \\ x + 2y = -4 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 5y = -15 \\ -5y = 15 \end{cases}$$

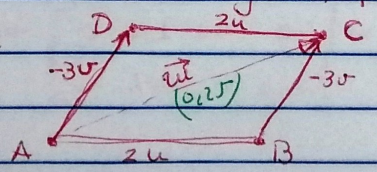
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ y = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$ (0,5)

Verificando: $2 \cdot \vec{u} - 3\vec{v} = (-4, 2, 6) + (-3, -6, -3)$

$= (-7, -4, 3) = \vec{w}$. ✓

c) $A = (2, -1, 3)$. Se $\vec{AB} = 2u = (-4, 2, 6)$, então $B = (-2, 1, 9)$ (0,25). Se $\vec{AD} = -3v = (-3, -6, -3)$, então $D = (-1, -7, 0)$ (0,25). Agora, para encontrar C, observe que:




Então: $C = B - 3v = D + 2u$ : $* B - 3v = (-2, 1, 9) + (-3, -6, -3)$

$= (-5, -5, 6)$. (0,25).

$* D + 2u = (-1, -7, 0) + (-4, 2, 6) = (-5, -5, 6)$ ✓

DATAPEL

#4.

* $\det(A) = ad - bc$ ; (0,5)
* $\det(B) = cf - de$ ; (0,5)
* $AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ c^2+de & cd+df \end{pmatrix}$ (0,5)

$$\Rightarrow \det(AB) = (ac+be)(cd+df) - (ad+bf)(c^2+de)$$
$$= \cancel{ac^2d} + acdf + bcde + \cancel{bdef}$$
$$- \cancel{acd} - ad^2e - bc^2f - \cancel{bdef} ;$$

* $\det(A)\det(B) = (ad-bc)(cf-de)$
$$= acdf - ad^2e - bc^2f + bcde .$$ (0,5)

DATAPEL

## Erros mais comuns

**Q1.**

- Não saber resolver a equação $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$.
- Multiplicar ou dividir uma linha por 0 ao escalonar a matriz. Por exemplo, quando $\alpha = 0$, multiplicar a segunda linha por $\alpha$; ou quando $\alpha = 1$, dividir a terceira linha por $(1 - \alpha)$.
- Não verificar se o resultado encontrado realmente é uma solução do sistema.

**Q2.** No item (a), não justificar. No item (b), não verificar se a matriz obtida realmente é a inversa de $A$.

**Q3.** Não verificar se os resultados fazem sentido. Por exemplo, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD (item (a)) se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (item (b)).

UNIFESP - ICT - São José dos Campos

**Prova 02 - Geometria Analítica (Turma IB)**

10/10/2018

Nome: _____

RA: _____

| Questões | Pontos | Notas |
|---|---|---|
| Q1 | 3.0 | |
| Q2 | 2.0 | |
| Q3 | 4.0 | |
| Q4 | 1.0 | |
| Total | 10.0 | |

- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos. O aluno que for flagrado utilizando tais equipamentos receberá nota zero nesta avaliação.
- A prova pode ser feita à lápis.
- O aluno que estiver envolvido em esquema de cola receberá nota zero nesta avaliação.
- **BOA PROVA**

**Questão 1** (3.0 pontos)**.** Considere os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 0)$, $C = (-1, 2, 1)$.

(a) Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$.

(b) Calcule a área do triângulo $ABC$.

(c) Encontre a equação geral do único plano que contem $A$, $B$ e $C$.

**Questão 2** (2.0 pontos)**.** Considere o conjunto $S = \{(1, 0, 1), (-2, 1, 2)\}$.

(a) Mostre que $S$ é um conjunto ortogonal.

(b) Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vetores $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

**Questão 3** (4.0 pontos)**.** Considere dois números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e as retas

$$r_1\colon \frac{x-1}{2} = y - 3 = \frac{z-4}{-1} \qquad \text{e} \qquad r_2\colon X = (-1, 2, \alpha) + \lambda(4, 2, \beta).$$

Determine todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

(a) $r_1$ e $r_2$ sejam coincidentes ($r_1 = r_2$).

(b) $r_1$ e $r_2$ sejam paralelas e não-coincidentes.

(c) $r_1$ e $r_2$ sejam reversas.

(d) $r_1$ e $r_2$ sejam concorrentes ($r_1 \cap r_2$ é um ponto).

**Questão 4** (1.0 ponto)**.** Calcule a posição relativa e a interseção entre os planos

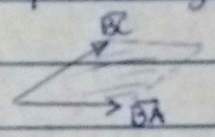
$$P_1\colon x - y + 2z = 2 \qquad \text{e} \qquad P_2\colon X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1).$$

/ /

**#1.** $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (0, -1, 1)$,
$\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 1)$.

(a) $\cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \, \|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (0,5) (1,0)

(b) Área do triângulo ABC $= \frac{1}{2}$ Área do paralelogramo




$$= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| \quad (0{,}5)$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \|(-1, -2, -2)\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1+4+4}$$

$$= 3/2 \quad (1{,}0)$$

(c) Considere B como ponto inicial e $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ como vetores diretores. Então o vetor normal é $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} \overset{(0,5)}{=} (-1, -2, -2)$. Logo a equação geral fica

$$-x - 2y - 2z = (-1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 0) = -5$$

ou

$$x + 2y + 2z = 5. \quad (1{,}0)$$

Verificando: (A): $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow$ A pertence ao plano;
(B): $1 + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow$ B pertence ao plano;
(C): $-1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow$ C pertence ao plano.

DATAPEL

/ /

**#2.**

(a) $(1,0,1)\cdot(-2,1,2) = -2+0+2 = 0$.

Como os dois vetores são ortogonais, então $S$ é ortogonal. (0,5)

(b) Gram-Schmidt.

Uma base de $\mathbb{R}^3$ tem que ter 3 vetores. Considere qualquer vetor $v \notin \langle\{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2); (-2/3, 1/3, 2/3)\}\rangle$, por exemplo, $v=(0,1,0)$. (0,5) De fato,

$$\det\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}/3 - \sqrt{2}/3 \neq 0,$$

então $\{(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2); (-2/3, 1/3, 2/3); (0,1,0)\}$ é LI.

(uma ideia boa: escolher $v = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \wedge (-2/3, 1/3, 2/3)$.)

Agora vamos ortonormalizar essa base.

* ortogonalizando:
  - $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\cdot(-2/3, 1/3, 2/3) = 0$ ok
  - $(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\cdot(0,1,0) = 0$ ok
  - $\underbrace{(-2/3, 1/3, 2/3)}_{w}\cdot\underbrace{(0,1,0)}_{v} = 1/3$, então:

$$\text{proj}_w^{\perp}(v) = \frac{1/3}{\|w\|^2}\, w = (-2/9, 1/9, 2/9).$$

Logo: $(0,1,0) - (-2/9, 1/9, 2/9) = (2/9, 8/9, -2/9)$ é ortogonal à $(-2/3, 1/3, 2/3)$. De fato,

$$(-2/3, 1/3, 2/3)\cdot(2/9, 8/9, -2/9) = \frac{-4+8-4}{27} = 0.$$

(0,5)

* normalizando:
  - $\|(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)\| = \sqrt{(2/4 + 0 + 2/4)} = 1$,
  - $\|(-2/3, 1/3, 2/3)\| = 1$;
  - $\|(2/9, 8/9, -2/9)\| = \sqrt{4/81 + 64/81 + 4/81} = \sqrt{72}/9 = 6\sqrt{2}/9$.

**Conclusão:** $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{6\sqrt{2}}, \frac{8}{6\sqrt{2}}, \frac{-2}{6\sqrt{2}}\right)\right\}$ é ortonormal

(0,5)

/ /

**#3.** Primeiro, vamos escrever a equação vetorial da reta $r_1$. Como a equação simétrica é da forma:

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z},$$

então

$$r_1: \quad X = (1,3,4) + \lambda(2,1,-1).$$

Agora vamos comparar os vetores diretores e os ptos iniciais das duas retas:

* $\{(2,1,-1),(4,2,\beta)\}$ é LD $\Leftrightarrow \beta = -2$.

De fato, $(4,2,\beta) = \lambda(2,1,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2\lambda \\ 2 = \lambda \\ \beta = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \beta = -2$ ✓

* O vetor que liga os ptos iniciais das duas retas é: $(2,1,4-\alpha)$. Comparando com o vetor diretor de $r_1$; $\{(2,1,-1),(2,1,4-\alpha)\}$ é LD $\Leftrightarrow$ $-1 = 4-\alpha \Leftrightarrow \alpha = 5$.

* Além disso, $\{(2,1,-1),(4,2,\beta),(2,1,4-\alpha)\}$ é LI $\Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & \beta & 4-\alpha \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4-\alpha) + \cancel{2\beta} - 4 - \cancel{2\beta} + 4 - 4(4-\alpha) \neq 0,$$

o que é impossível!

**Conclusão:**

a) coincidentes $\Leftrightarrow \beta = -2$ e $\alpha = 5$. (1.0)

b) paralelas: $\beta = -2$ e $\alpha \neq 5$. (1.0)

c) reversas: não existem $\alpha$ e $\beta$. (1.0)

d) concorrentes: $\beta \neq -2$. (1.0)

DATAPEL

/ /

**#4.** Vamos encontrar a equação geral do plano $P_2$. Como os vetores diretores de $P_2$ são $(1,0,3)$ e $(-1,1,1)$, então um vetor normal é

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-3,-4,1). \quad (0{,}25)$$

Assim, tomando $(0,0,1)$ como pto inicial, temos a seguinte equação geral:

$$-3x - 4y + z = 1 \quad (0{,}25)$$

Agora, vamos intersectar $P_2$ com $P_1$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -3x - 4y + z = 1 \end{cases} \overset{(0{,}25)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -7y + 7z = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

Portanto, a interseção $P_1 \cap P_2$ é $\{(1-z, z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$
$= \{(1,-1,0) + \lambda(-1,1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$: uma reta. (0,25)

DATAPEL

| Questões | Pontos | Notas |
|---|---|---|
| Q1 | 1.5 | |
| Q2 | 1.5 | |
| Q3 | 1.5 | |
| Q4 | 1.5 | |
| Q5 | 1.5 | |
| Q6 | 1.5 | |
| Q7 | 1.5 | |
| Total | 10.5 | |

UNIFESP - ICT - São José dos Campos

**Prova 03 - Geometria Analítica (Turma IB)**

21/novembro/2018

Nome: _____

RA: _____

- Respostas sem justificativa não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos. O aluno que for flagrado utilizando tais equipamentos receberá nota zero nesta avaliação.
- O aluno que estiver envolvido em esquema de cola receberá nota zero nesta avaliação.
- **BOA PROVA**

Identifique e encontre a forma reduzida da cônica/quádrica:

**Q 1.** Dada como o lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$\det \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 288.$$

**Q 2.** Dada pela equação $x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 2y = 1$.

**Q 3.** Dada como o lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância à reta $y = 2$ é igual a sua distância ao ponto $(3, 0)$.

**Q 4.** Dada como o lugar geométrico dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que a soma das distâncias de $(x, y, z)$ aos pontos $(2, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$ é igual a 6.

**Q 5.** Dada pela equação $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 2z = 0$.

**Q 6.** Dada pela equação $z = x^2 - y^2 - 2x - 4y$.

**Q 7.** Dada pela equação $-2x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 4$.

/ /

**Q1.**

$$288 = \det\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y & 0 \\ 36 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 30 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y \\ 36 & 0 & 6 \\ 30 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -18 \det\begin{pmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y \\ 6 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -18 \det\begin{pmatrix} x^2+y^2-4 & x-2 & y \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -18\left(4(x-2)+6y-(x^2+y^2-4)\right)$$

$$= -18\left(-x^2-y^2+4x+6y-4\right)$$

$$= 18\left(((x-2)^2-4)+((y-3)^2-9)+4\right)$$

$$= 18\left((x-2)^2+(y-3)^2-9\right)$$

$$\Leftrightarrow 16 = (x-2)^2+(y-3)-9$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{25} = 1. \Rightarrow \Delta = -4\sqrt{25}\cdot\sqrt{25} < 0.$$

* Identificação: elipse (circunferência)
* Eq. reduzida: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{25} = 1.$

/ /

**Q2.** $x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 2y = 1$.

· Eliminando os termos lineares (translação):

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (x'+x_0)^2 + 3(x'+x_0)(y'+y_0) + (y'+y_0)^2 - 2(x'+x_0) - 2(y'+y_0)$$

$$= (x')^2 + 3x'y' + (y')^2 + \underline{(2x_0+3y_0-2)}x' + \underline{(3x_0+2y_0-2)}y' + (x_0^2+3x_0y_0+y_0^2-2x_0-2y_0)$$

$\Rightarrow$ para eliminar os termos $x', y'$, temos que ter:

$$\begin{cases} 2x_0+3y_0 = 2 \\ 3x_0+2y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+y_0 = 4/5 \\ x_0-y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2/5 \\ y_0 = 2/5 \end{cases}.$$

Substituindo $x_0 = y_0 = 2/5$, obtemos:

$$1 = (x')^2 + 3x'y' + (y')^2 + 0x' + 0y' + \left(\frac{4}{25} + \frac{12}{25} + \frac{4}{25} - \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right)$$

$$= (x')^2 + 3x'y' + (y')^2 - \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow (x')^2 + 3x'y' + (y')^2 = 9/5.$$

· Eliminando o termo misto (rotação):

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta)x'' - \operatorname{sen}(\theta)y'' \\ y' = \operatorname{sen}(\theta)x'' + \cos(\theta)y'' \end{cases}$$ . Daqui, temos:

$$9/5 = (\cos^2(\theta)(x'')^2 - 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)x''y'' + \operatorname{sen}^2(\theta)(y'')^2)$$
$$+ 3(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)(x'')^2 + (\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))x''y'' - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)(y'')^2)$$
$$+ (\operatorname{sen}^2(\theta)(x'')^2 + 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)x''y'' + \cos^2(\theta)(y'')^2)$$
$$= (\cos^2(\theta) + 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))x''$$
$$+ 3(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))x''y'' + (\operatorname{sen}^2(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + \cos^2(\theta))(y'')^2$$

(continua)

/ /

Então, para eliminar o termo $x''y''$, temos que ter $\cos^2(\theta) = \text{sen}^2(\theta)$. Tomando $\text{sen}(\theta) = \cos(\theta) = \sqrt{2}/2$, nós obtemos:

$$9/5 = (1/2 + 3/2 + 1/2)(x'')^2 + 0\, x''y'' + (1/2 - 3/2 + 1/2)(y'')^2$$

$$= 5/2\,(x'')^2 + (-1/2)(y'')^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{18/25} - \frac{(y'')^2}{18/5} = 1 \Rightarrow \Delta = \underset{<0}{-4} \cdot \underset{>0}{\left(\sqrt{\frac{18}{25}}\right)} \underset{>0}{\left(-\sqrt{\frac{18}{5}}\right)} > 0.$$

* Identificação: hipérbole
* Eq. reduzida: $\dfrac{(x'')^2}{18/25} - \dfrac{(y'')^2}{18/5} = 1$

/ /

**Q3.**

$$\text{dist}((x,y),(3,0)) = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$
$$\text{dist}((x,y), y=2) = |y-2|$$

Então: $\text{dist}((x,y),(3,0)) = \text{dist}((x,y), y=2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = |y-2|$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2 = (y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = -4y+4$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = -4(y-1). \Rightarrow \Delta = 0.$$

* Identificação: parábola.
* Eq. reduzida: $(x-3)^2 = -4(y-1)$.

/ /

**Q4.** $\text{dist}((x,y,z),(2,0,0)) = \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$

$\text{dist}((x,y,z),(-2,0,0)) = \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$

Então: $\text{dist}((x,y,z),(2,0,0)) + \text{dist}((x,y,z),(-2,0,0)) = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2+z^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2} + ((x+2)^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow -8x - 36 = -12\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$

$\Leftrightarrow (2x+9) = 3\sqrt{(x+2)^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow (4x^2+36x+81) = 9((x+2)^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 81 = 9x^2+\cancel{36x}+36+9y^2+9z^2-4x^2-\cancel{36x}$

$= 5x^2+9y^2+9z^2+36$

$\Leftrightarrow 5x^2+9y^2+9z^2 = 45$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{5} = 1.$

- Intersecções:

  + $\underline{x=k}$: $y^2/5 + z^2/5 = (1-k^2/9)$ é uma elipse (circunferência) para todo $k \in [-3,3]$

  + $\underline{y=l}$: $x^2/9 + z^2/5 = (1-l^2/5)$ é uma elipse p/todo $l \in [-\sqrt{5},\sqrt{5}]$.

  + $\underline{z=m}$: $x^2/9 + y^2/5 = (1-m^2/5)$ é uma elipse para todo $m \in [-\sqrt{5},\sqrt{5}]$.

* Identificação: elipsoide
* Eq. reduzida: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{5} = 1.$

/ /

**Q5.** $x^2 + \sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 2z = 0.$

· Eliminando o termo misto via rotação:

$$\begin{cases} x = x'\cos(\theta) - y'\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y = x'\,\mathrm{sen}(\theta) + y'\cos(\theta) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = ((x')^2\cos^2\theta) - 2x'y'\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + (y')^2\,\mathrm{sen}^2(\theta))$$
$$+ \sqrt{3}\left((x')^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + (\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta))\,x'y' - \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)(y')^2\right)$$
$$+ 2\left((x')^2\,\mathrm{sen}^2\theta + 2x'y'\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + (y')^2\cos^2(\theta)\right) - 2z$$
$$= \left(\cos^2(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)(x')^2$$
$$+ \left(2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \sqrt{3}\left(\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)\right)\right)x'y'$$
$$+ \left(\mathrm{sen}^2\theta - \sqrt{3}\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2\cos^2(\theta)\right)(y')^2 - 2z \quad (\star)$$

Para anular o termo $x'y'$, temos que ter:

$$0 = 2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \sqrt{3}\left(\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)\right)$$
$$= \mathrm{sen}(2\theta) + \sqrt{3}\cos(2\theta)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{sen}(2\theta) = -\sqrt{3}\cos(2\theta)} \quad (\dagger)$$
$$\Rightarrow 1 = \mathrm{sen}^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)$$
$$= (3+1)\cos^2(2\theta)$$
$$\Rightarrow \cos^2(2\theta) = 1/4 \Rightarrow \cos(2\theta) = \pm 1/2$$
$$\Rightarrow \mathrm{sen}^2(2\theta) = 3/4 \Rightarrow \mathrm{sen}(2\theta) = \pm\sqrt{3}/2$$

Voltando na eq. $(\dagger)$, temos que ter:

$\cos(2\theta) = 1/2$ e $\mathrm{sen}(2\theta) = -\sqrt{3}/2$

ou

$\cos(2\theta) = -1/2$ e $\mathrm{sen}(2\theta) = \sqrt{3}/2$.

Fazendo a primeira escolha, obtemos:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} = \frac{3/2}{2} = 3/4 \Rightarrow \cos(\theta) = \pm\sqrt{3}/2$$

e

$$\mathrm{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{1/2}{2} = 1/4 \Rightarrow \mathrm{sen}(\theta) = \pm 1/2.$$

Usando a escolha acima, segue que: $\cos(\theta) = +\sqrt{3}/2$ e $\mathrm{sen}(\theta) = -1/2$

(continua)

/ /

Voltando na equação (A), nós obtemos:

$$0 = \left(3/4 - 3/4 + 1/2\right)(x')^2 + \left(-2\sqrt{3}/4 + \cancel{\sqrt{3}\left(3/4 - 1/4\right)}^{\,0}\right) x'y'$$
$$+ \left(1/4 + 3/4 + 3/2\right)(y')^2 - 2z$$
$$= \frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2/5} - 2z$$

· Intersecções:

+ $\underline{x = k}$: $\dfrac{(y')^2}{2/5} = 2z - (k^2/2)$ : parábola

+ $\underline{y = \ell}$: $\dfrac{(x')^2}{2} = 2z - (5\ell^2/2)$ : parábola.

+ $\underline{z = m}$: $\dfrac{(x')^2}{2} + \dfrac{(y')^2}{2/5} = 2m$ : elipse $\forall m \geq 0$.

* Identificação: parabolóide elíptico

* Eq. reduzida: $\dfrac{(x')^2}{2} + \dfrac{(y')^2}{2/5} - 2z = 0$.

/ /

**Q6.**

$$z = x^2 - y^2 - 2x - 4y$$
$$= ((x-1)^2 - 1) - ((y+2)^2 - 4)$$
$$= (x-1)^2 - (y+2)^2 + 3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y+2)^2 = (z-3).$$

. Interseções:

+ $\underline{x = k}$: $-(y+2)^2 = z - (3 - (k-1)^2)$ : parábola
+ $\underline{y = l}$: $(x-1)^2 = z - 3 + (l+2)^2$ : parábola
+ $\underline{z = m}$: $(x-1)^2 - (y+2)^2 = (m-3)$ : hipérbole.

* Identificação: parabolóide hiperbólico.
* Eq. reduzida: $(x-1)^2 - (y+2)^2 = (z-3)$.

/ /

**Q7.** $-2x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 4.$

· Interseções:

+ $x = k$: $4z^2 - 3y^2 = 4 + 2k^2$ : hipérbole
+ $y = l$: $4z^2 - 2x^2 = 4 + 3l^2$ : hipérbole
+ $z = m$: $2x^2 + 3y^2 = 4m^2 - 4$ : elipse $\forall\, m \in (-\infty, -1]$ ou $m \in [1, \infty)$

Como $2x^2 + 3y^2 = 4m^2 - 4$ não tem solução para $m \in (-1, 1)$, ($2x^2 + 3y^2 \geq 0$ e $4m^2 - 4 < 0$ $\forall\, m \in (-1, 1)$), então essa quádrica tem duas partes disjuntas.

* Identificação: hiperboloide elíptico de 2 folhas
* Eq. reduzida: $-2x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 4.$