TOPOLOGIA :: AULA 04

/ /

~~Topologia~~

- Lembrar a defn. de base de uma topologia...

*Defn: Dado um conj X, uma família $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é dita base de uma topologia em X quando:

i) $\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) = X$

ii) Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B_3$.

- Prop: Sejam X um conj e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma base de uma topologia em X. Defina $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ como sendo a família formada por: $A \subseteq X$ tal que $\forall a \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$. Então τ é uma topologia em X.

Dem:

i) $\emptyset \in \tau$ por vacuidade;

$X \in \tau$ ~~obviamente~~ pela cond(i) da Defn. base...

ii) Suponha que $A_i \in \tau$, $i \in I$. Se $a \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, então $a \in A_i$ $\forall i \in I$. Logo, existe $B_i \in \mathcal{B}$, tal que $a \in B_i \subseteq A_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

iii) Suponha que $A_1, \dots, A_n \in \tau$, $n > 0$. Se $a \in (A_1 \cap \dots \cap A_n)$, então $a \in A_1, \dots, a \in A_n$. Logo, existem $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ tais que: $a \in B_1 \subseteq A_1$, $\dots$, $a \in B_n \subseteq A_n$.
Usando a cond (ii) da Defn. base, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $a \in B \subseteq (\dots((B_1 \cap B_2) \cap B_3) \dots \cap B_n) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$.

*~~Defn~~: Dados um conj X e uma base $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ para uma topologia em X, defina a topologia gerada por $\mathcal{B}$ como sendo:

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ t.q. } a \in B \subseteq A\}.$$

• Lema: Sejam X um conj. e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma base para uma topologia em X. Denote a topologia gerada por $\mathcal{B}$ por τ. Então:

$$\tau = \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}, i \in I\}.$$ (I pode ser $\emptyset$)

Dem.: Primeiro observe que $\mathcal{B}$ está contida na topologia gerada por $\mathcal{B}$ [$\forall B \in \mathcal{B}$ e $\forall b \in B$, temos que $b \in B \subseteq B \in \mathcal{B}$]. Como τ é uma topologia, então "$\supseteq$".

"$\subseteq$": Por outro lado, seja $A \in \tau$. Se $A = \emptyset$, então $A = \bigcup_{i \in \emptyset} B_i$. Se $A \neq \emptyset$, existe algum $a \in A$. Para cada $a \in A$, como τ, é a topologia gerada por $\mathcal{B}$, existe um $B_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_a \subseteq A$. Fixe esses B_a, $a \in A$, e considere $\left(\bigcup_{a \in A} B_a\right)$. Como $B_a \subseteq A$ $\forall a \in A$, então $\left(\bigcup_{a \in A} B_a\right) \subseteq A$. Como $\forall a \in A$, $a \in B_a \subseteq \left(\bigcup_{a \in A} B_a\right)$, então $A \subseteq \left(\bigcup_{a \in A} B_a\right)$. Logo: $A = \left(\bigcup_{a \in A} B_a\right)$. ∎

• Proposição: Sejam (X, τ) um esp. top. e $\mathcal{B} \subset \tau$. Se $\forall A \in \tau$ e $\forall a \in A$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$, então $\mathcal{B}$ é uma base para τ.

<u>Dem.</u>: 1º) "$\mathcal{B}$ é uma base para uma top. em X".

i) $X \in \tau$, então $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q $x \in B \subseteq X$.

ii) Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \tau$, então $(B_1 \cap B_2) \in \tau$. Logo, $\forall b \in (B_1 \cap B_2)$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $b \in B \subseteq (B_1 \cap B_2)$.

2º) "A top. gerada por $\mathcal{B}$ é τ".

Por hipótese, $\forall A \in \tau$ e $\forall a \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}$, t.q $a \in B \subset A$.

Isso mostra que $\tau \subset$ (top. ger. $\mathcal{B}$). Por outro lado,

~~se $A \subseteq X$ ... $\forall a \in A$ $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q $a \in B \subseteq A$, então~~

$\mathcal{B} \subset \tau$ e, pelo lema anterior, (top. ger. $\mathcal{B}$) $= \{\bigcup_{i \in I} B_i \mid \ldots\}$.

Como τ é uma topologia, então (top. ger. $\mathcal{B}$) $\subseteq \tau$ ■

• <u>Prop.</u>: Sejam X um conj.; $\tau, \tau' \subseteq \mathcal{P}(X)$ duas topologias em X, e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases para as topologias τ e τ'. Então: τ' é mais fina que $\tau \iff$ ~~[illegible]~~ $\forall x \in X$ e $\forall B \in \mathcal{B}$ t.q $x \in B$, $\exists B' \in \mathcal{B}'$ t.q $x \in B' \subseteq B$.

<u>Dem.</u>: ($\Leftarrow$): Seja $A \in \tau$. Como $\mathcal{B}$ é uma base para τ, então ~~[illegible]~~ $\forall a \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}$ t.q $a \in B \subseteq A$. Por hipótese, $\forall a \in A$ e $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists B' \in \mathcal{B}'$ tal que: $a \in B' \subseteq B \subseteq A$. Logo $A \in \tau' =$ (top. ger. $\mathcal{B}'$).

($\Rightarrow$): Se $\tau \subseteq \tau'$, então $\forall A \in \tau$, temos que $A \in \tau'$. Como $\tau =$ (top. ger. $\mathcal{B}$) e $\tau' =$ (top. ger. $\mathcal{B}'$), então $\forall x \in X$ e $\forall B \in \mathcal{B} \subseteq \tau$, temos que $\exists B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$. ■

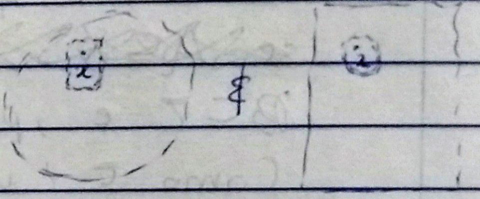
/ /

Exemplo: Considere $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{$intervalos abertos$\}$, $\mathcal{B}' = \{$intervalos $[a,b)\}$ e $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \{(a,b) \setminus \{1/n \mid n>0\} \mid a<b\}$.

1°) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'' \Longrightarrow$ (top. ger. $\mathcal{B}''$) é mais fina que top. usual.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $a,b \in \mathbb{R}$ tq $x \in (a,b)$, temos que $[x,b) \subseteq (a,b)$. $\Longrightarrow$ (top. ger. $\mathcal{B}'$) é mais fina que a usual.

Exemplo: Considere $X = \mathbb{R}^2$.



$\Longrightarrow$ as duas tops. são iguais!