Universidade de São Paulo
Escola Politécnica
Curso de Engenharia de Computação

Condução de calor em placa plana com fontes e sorvedouros

Tiago Koji Castro Shibata (8988730), tiago.shibata@usp.br

Deborah Hidemi Kamiguchi Watanabe (4430967), deborah.watanabe@usp.br

RELATÓRIO apresentado ao Professor Alexandre Roma do MAP/IME-USP como atividade da disciplina MAP3122 - Métodos Numéricos.

São Paulo - SP

31/03/2016

Resumo

A geração de calor está presente no dia a dia de todos os seres. Desde as perdas de energias ocorrentes na mais simples das reações biológicas, o calor muitas vezes representa a energia desperdiçada, o movimento caótico de moléculas que se dispersam do fenômeno sendo realizado.

Na engenharia, a geração de calor e principalmente o aumento de temperatura têm grandes consequências, podendo criar um ambiente desagradável em uma construção mal planejada, queimar um motor ou causar danos em equipamentos. Em eletrônica, o aumento de temperatura leva circuitos a queimarem ou desligarem-se se possuírem proteção contra sobretemperatura. Neste trabalho, focamos em um modelo simples de condução de calor, em uma placa plana. A placa possuirá fontes e sorvedouros, simulando a ação de uma placa eletrônica metálica contendo componentes integrados. Algumas regiões (com componentes) serão tradadas como fontes de calor, e a placa como um todo terá uma pequena perda de calor (representando a troca de calor com o ar).

Nesse trabalho, desejamos simular a condução de calor em uma barra ou placa a partir da equação de difusão de calor, aplicando métodos numéricos em soluções computacionais. Obteremos mapas de temperatura e fluxo de calor para diferentes condições e configurações. Apresentando a temperatura próxima aos componentes, podemos simular a temperatura na qual a placa final operará e tentar melhorar a disposição dos mesmos.

Sumário

1 Introdução

- introduzir o problema a ser estudado
- apresentar trabalhos relacionados
- apresentar motivação
- apresentar objetivos
- Último parágrafo deve conter a organização do documento

2 Modelo

Em nosso modelo, a placa plana será discretizada em múltiplos quadrados de dimensão pequena. Cada pequeno quadrado será a menor subdivisão da placa que trataremos e possuirá uma temperatura homogênea. Nesse trabalho, os elementos serão sempre uniformes, bidimensionais e retangulares.

As condições iniciais serão tomadas como temperatura homogênea em toda a placa (placa desligada e equilibrada). O calor gerado pelos componentes será tomado de seus datasheets e seu número e posições será configurável. Utiliza-se o modelo de placa bidimensional, homogênea e isotrópica, ou seja, suas propriedades não se alteram em diferentes direções ou posições e a condução térmica é constante em toda a sua extensão. Parâmetros do material necessários para o modelo são k (condutividade térmica), ρ (massa específica) e c_p (calor específico).

Duas propriedades são de interesse nesse estudo: o fluxo de calor, que indica a passagem de energia térmica, é proporcional ao oposto do gradiente da temperatura (os operandos de u(x, y, t) foram omitidos por simplicidade) [?]:

$$q = -kA\frac{\partial u}{\partial x}$$

Onde $u(x, t)$ é a temperatura em x no momento t e A a área de contato.

Observe que o modelo físico de fluxo de calor indica que ele flui do local mais quente para o menos quente (gradiente negativo). Além disso, e mais importante, é a temperatura nos pontos da barra. A equação de difusão de calor é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w(x)$$

Sendo α o coeficiente de difusão térmica. Para materiais homogêneos e isotrópicos, α é constante e vale:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Foi adotado como tempo inicial o instante 0 ($t_0 = 0$).

3 Metodologia de desenvolvimento

O desenvolvimento foi gradual, com testes de cada parte do programa. Os diferentes métodos implementados passaram por testes unitários, onde eram comparados com implementações do sistema (implementações fornecidas pelo ambiente MATLAB/Octave). Após confirmar o funcionamento das partes, passamos a montar o programa principal. Os programas de teste chamam a implementação do trabalho e do sistema e calculam a soma de erros absolutos, mostrando-o na tela. Por exemplo, para a função de cálculo de gradiente, temos test_grad.m (apenas partes relevantes mostradas aqui):

```
function test_grad
%TEST_GRAD Testa grad.m.
%    Testa em matrix com valores aleatórios.
    M = rand(8);
    [our_dM_dx, our_dM_dy] = grad(M);
    [system_dM_dx, system_dM_dy] = gradient(M);

    errors = sum(sum(abs(our_dM_dx - system_dM_dx))) + sum(sum(abs(our_dM_dy - system_dM_dy)));
    display(sprintf('Soma dos erros para solução esperada: %.9E', errors));
end
```

Que resulta em valores da ordem de 10^{-16}, atribuídos a arredondamento numérico.

4 Modelagem matemática

Em nosso modelo, a placa plana será discretizada em múltiplos quadrados de dimensão pequena. Cada pequeno quadrado será a menor subdivisão da placa que trataremos e possuirá uma temperatura homogênea.

As condições iniciais serão tomadas como temperatura homogênea em toda a placa (placa desligada e equilibrada). O calor gerado pelos componentes será tomado de seus datasheets e seu número e posições será configurável. Utiliza-se o modelo de placa bidimensional, homogênea e isotrópica, ou seja, suas propriedades não se alteram em diferentes direções ou posições e a condução térmica é constante em toda a sua extensão. O fluxo de energia térmica, que indica locais com grande variação (gradiente) de temperatura, é proporcional ao inverso do gradiente da temperatura (os operandos de u(x, y, t) foram omitidos por simplicidade)

5 Métodos numéricos

Mostraremos métodos aplicados para discretizar e aproximar numericamente o problema.

O espaço considerado é discreto (possuimos valores da função em estudo apenas em alguns pontos) e precisamos de um método de aproximar a derivada dessa função. Podemos fazê-lo calculando os primeiros termos da série de Taylor em torno de um ponto. Suponhamos que, para os pontos x e $x + \Delta x$, de temperatura u conhecida, desejamos aproximar a derivada no intermédio ($u'(x + \frac{\Delta x}{2})$). Sabemos que a temperatura é contínua e infinitamente derivável. Temos, por expansão em série de Taylor com resto de Lagrange em torno de $x + \frac{\Delta x}{2}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x + \tfrac{\Delta x}{2}) - u'(x + \tfrac{\Delta x}{2})\tfrac{\Delta x}{2} + u''(\xi_1)\tfrac{(\frac{\Delta x}{2})^2}{2} \\ u(x + \Delta x) &= u(x + \tfrac{\Delta x}{2}) + u'(x + \tfrac{\Delta x}{2})\tfrac{\Delta x}{2} + u''(\xi_2)\tfrac{(\frac{\Delta x}{2})^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Onde ξ_1 é algum ponto entre x e $x + \frac{\Delta x}{2}$ e ξ_2 entre $x + \frac{\Delta x}{2}$ e $x + \Delta x$. Subtraíndo a segunda equação da primeira, temos:

$$u(x + \Delta x) - u(x) = u'(x + \frac{\Delta x}{2})\Delta x + u''(\xi_1)\frac{\Delta x^2}{8} - u''(\xi_2)\frac{\Delta x^2}{8}$$

Ou seja:

$$u'(x + \frac{\Delta x}{2}) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u''(\xi_2)\frac{\Delta x}{8} - u''(\xi_1)\frac{\Delta x}{8}$$

Portanto podemos aproximar a derivada em um ponto médio a dois de valores conhecidos como $\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$ com erro $u''(\xi_2)\frac{\Delta x}{8} - u''(\xi_1)\frac{\Delta x}{8}$. Majorando o erro, temos:

$$|erro| \leq \max_{x \leq \xi_{max} \leq x+\Delta x} u''(\xi_{max})\frac{\Delta x}{8} - \min_{x \leq \xi_{min} \leq x+\Delta x} u''(\xi_{min})\frac{\Delta x}{8}$$

Com ξ_{max} e ξ_{min} como valores onde u'' é máximo e mínimo entre x e $x + \Delta x$. Para $\frac{\Delta x}{8}$ pequeno, a aproximação será boa. Além disso, o problema de condução de calor tende a $u'' = 0$ (temperatura crescendo/decrescendo uniformemente), portanto esperamos que u'' seja pequeno conforme a simulação avança.

De posse de aproximações boas para $u'(x - \frac{\Delta x}{2})$ e $u'(x + \frac{\Delta x}{2})$, podemos calcular a derivada nos pontos de estudo ($u'(x)$) pela média entre as derivadas ($\frac{u'(x-\frac{\Delta x}{2})+u'(x+\frac{\Delta x}{2})}{2}$). Aplicando expansão em série de Taylor u' em torno de x, temos um sistema semelhante a 1:

$$\begin{aligned} u'(x + \tfrac{\Delta x}{2}) &= u'(x) + u''(x)\tfrac{\Delta x}{2} + u'''(\xi_1)\tfrac{(\frac{\Delta x}{2})^2}{2} \\ u'(x - \tfrac{\Delta x}{2}) &= u'(x) - u''(x)\tfrac{\Delta x}{2} + u'''(\xi_2)\tfrac{(\frac{\Delta x}{2})^2}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Somando as equações, temos:

$$u'(x+\frac{\Delta x}{2})+u'(x-\frac{\Delta x}{2})=2u'(x)+u'''(\xi_1)\frac{\Delta x}{8}+u'''(\xi_2)\frac{\Delta x}{8}$$

Ou seja, $u'(x) = \frac{u'(x+\frac{\Delta x}{2})+u'(x-\frac{\Delta x}{2})}{2}$ com $|erro| \leq \max_{x-\frac{\Delta x}{2}\leq\xi_{max}\leq x-\frac{\Delta x}{2}} 2u'''(\xi_{max})\frac{\Delta x}{8}$. Para Δx suficientemente pequeno, calcular u' como a média das derivadas laterais é uma boa aproximação.

Na figura 1 é mostrado um gráfico ilustrando a aproximação da derivada conhecendo alguns pontos de uma função. São desenhados alguns pontos de $x^2 + 1.4$. Para cada par de pontos consecutivos, aproximamos a derivada no centro do intervalo. Para análise numérica, nos interessa aproximar a derivada nos pontos dados e não nos intermediários, e a aproximamos calculando a média entre intermediários consecutivos.

Mostrar equação de aproximação do gradiente.

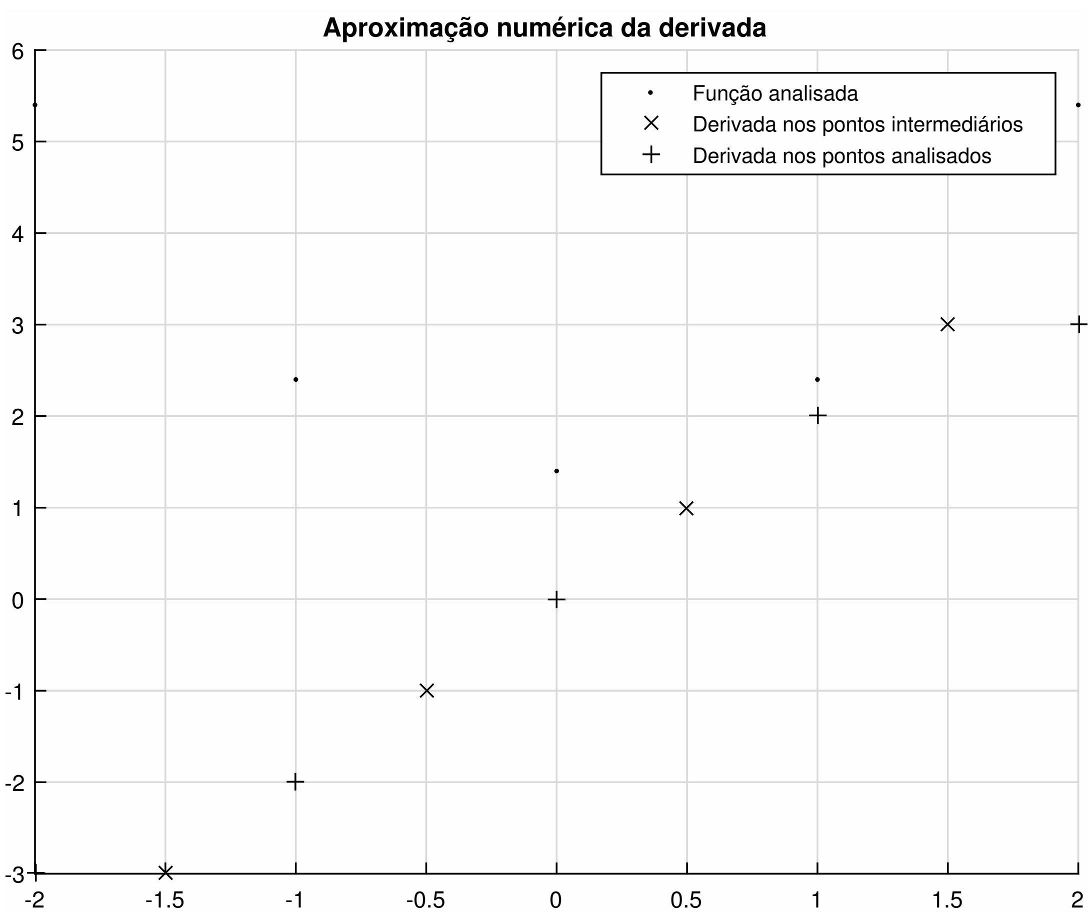


Figura 1: Aproximação da derivada

6 Exemplos de Equações

Nesta seção serão apresentados diferentes exemplos de equações.

6.1 Equações simples

Sem numeração

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{2^{i-1}}{4}$$

Com numeração

$$\int\limits_{0}^{100} \sqrt[4]{\frac{2n}{7}} \tag{3}$$

$$M^{-1}(AD^{-1}A^T)M^{-T}\bar{y} = M^{-1}(AD^{-1}(r_d - X^{-1}r_a) + r_p), \tag{4}$$

6.2 Equações com mais de uma linha

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ and $c \in \mathbb{R}^n$. Referenciando a equação (5)

6.3 Sistema linear

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$d_i = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{se } i = 0 \\ 2 & \text{caso contrário} \end{array} \right\}$$

7 Tabelas

7.1 Tabela Simples

12	13	14
15	16	17

Tabela 1: Título da tabela

7.2 Tabela mais elaborada

	CCF preconditioner		Number of nonzeros	
Problem	η	$\frac{n(AD^{-1}A^T)}{nrow}$	FCC	Cholesky
ELS-19	-11	31	87750	3763686
SCR20	-12	31	103179	2591752
NUG15	-12	32	54786	6350444
PDS-20	15	5	625519	7123636

Tabela 2: Título da Tabela.

Referenciando a tabela 2.

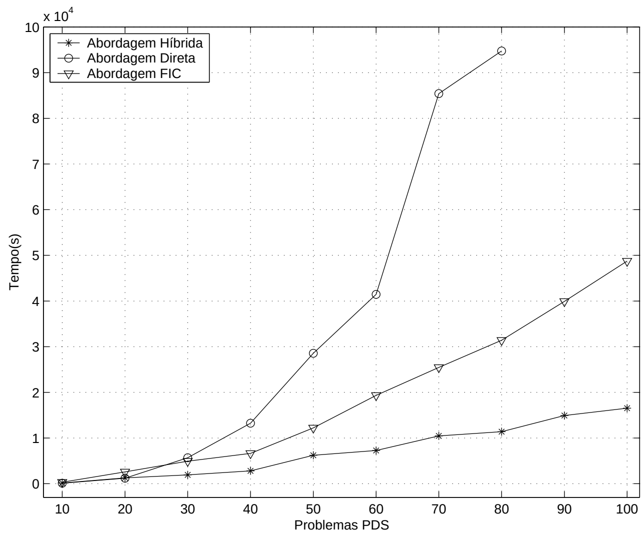
8 Edição

Comando para preservar a formatação do texto.

```
#include <iostream>            // < > is used for standard libraries.
void main(void)                // ''main'' method always called first.
{
 cout << ''This is a message.'';
                               // Send to output stream.
}
```

9 Inserir figuras

Para citar referências bibliográficas [?], [?].



10 Conclusões

Apresentar as conclusões finais.

Agradecimentos Agradecimentos aos colaboradores, professores que eventualmente procuraram para ajudar em algum aspecto do modelo, colega que ajudou a compor alguma parte do trabalho e assim por diante.