Tiago Koji Castro Shibata - 8988730 - tiago.shibata@usp.br
Deborah Hidemi Kamiguchi Watanabe - 4430967 - deborah.watanabe@usp.br

MAP3122 - Métodos Numéricos
Relatório Preliminar

Condução de calor em placa plana com fontes e sorvedouros

Professor Alexandre Roma

Tiago Koji Castro Shibata - 8988730 - tiago.shibata@usp.br
Deborah Hidemi Kamiguchi Watanabe - 4430967 - deborah.watanabe@usp.br

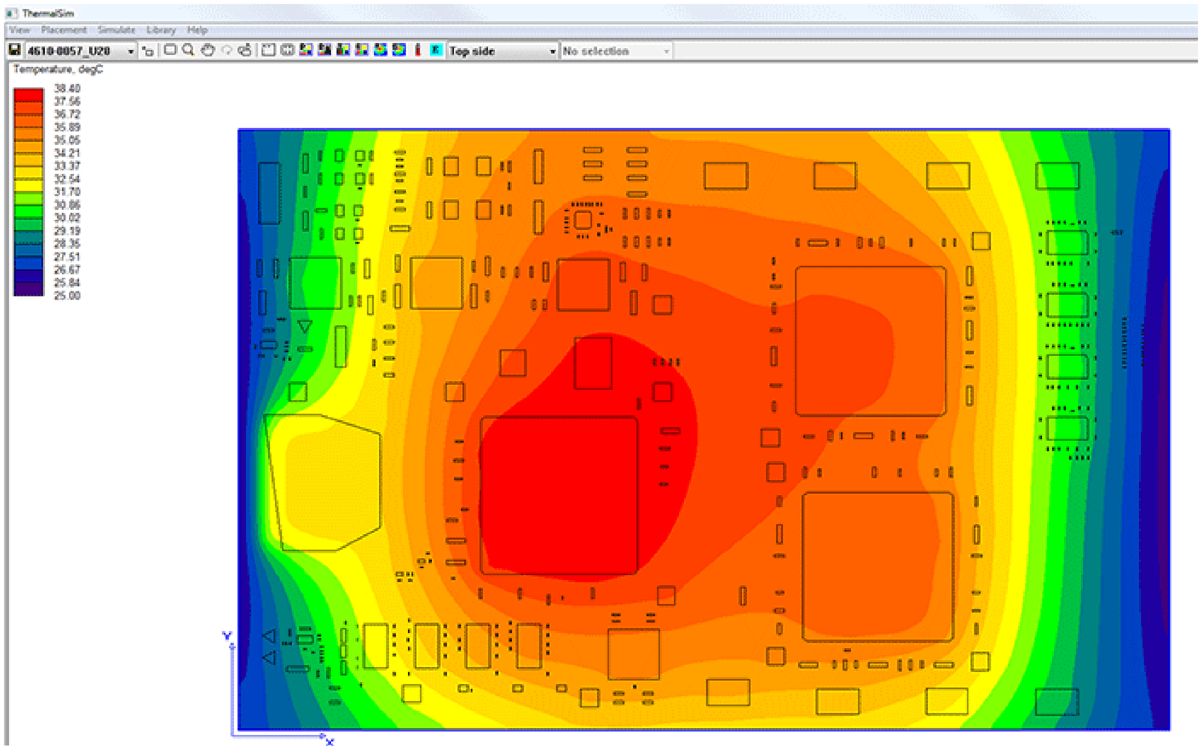
Resumo

A geração de calor está presente no dia a dia de todos os seres. Desde as perdas de energias ocorrentes na mais simples das reações biológicas, o calor muitas vezes representa a energia desperdiçada, o movimento caótico de moléculas que se dispersam do fenômeno sendo realizado.

Na engenharia, a geração de calor e principalmente o aumento de temperatura têm grandes consequências, podendo criar um ambiente desagradável em uma construção mal planejada, queimar um motor ou mesmo causar danos em equipamentos. Em eletrônica, o aumento de temperatura leva circuitos a queimarem ou desligarem-se se possuírem proteção contra sobretemperatura. Neste trabalho, focamos em um modelo simples de condução de calor, em uma placa plana. A placa possuirá fontes e sorvedouros, simulando a ação de uma placa eletrônica metálica contendo componentes integrados. Algumas regiões (com componentes) serão tradadas como fontes de calor, e a placa como um todo terá uma pequena perda de calor (representando a troca de calor com o ar).

Com esse trabalho, desejamos obter mapas de temperatura e fluxo de calor para diferentes condições e configurações. Apresentando a temperatura próxima aos componentes, podemos simular a temperatura na qual a placa final operará e tentar melhorar a disposição dos mesmos.

Um exemplo de mapa de temperatura é mostrado abaixo, tirado do software de simulação HyperLynx (https://www.mentor.com/pcb/hyperlynx/thermal/).



Exemplo de mapa de temperaturas

Nosso modelo simplificado deverá conter poucos circuitos (fontes de calor), muito menos que a imagem acima de uma placa completa, mas deverá gerar visualizações úteis e interessantes.

Modelo

Em nosso modelo, a placa plana será discretizada em múltiplos quadrados de dimensão pequena. Cada pequeno quadrado será a menor subdivisão da placa que trataremos e possuirá uma temperatura homogênea. Essa resolução é baseada nos métodos de elementos finitos, onde uma subdivisão fina e finita de uma peça permite aproximações numéricas de fenômenos em objetos complexos e difíceis de resolver analiticamente. No entanto, em elementos finitos cada elemento é geralmente representado por uma forma não uniforme, como um grafo. Nesse trabalho, os elementos serão uniformes, bidimensionais e retangulares sempre.

As condições iniciais serão tomadas como temperatura homogênea em toda a placa (placa desligada e equilibrada). O calor gerado pelos componentes será tomado de seus datasheets e seu número e posições será configurável. Utiliza-se o modelo de placa bidimensional, homogênea e isotrópica, ou seja, suas propriedades não se alteram em diferentes direções ou posições e a condução térmica é constante em toda a sua extensão.

O fluxo de energia térmica, que indica locais com grande variação (gradiente) de temperatura, é proporcional ao inverso do gradiente da temperatura (os operandos de u(x, y, t) foram omitidos por simplicidade) [1]:

$$q \;=\; -k\,A\,\nabla u$$

$$u(x,\ y,\ t) \;=\; temperatura\ em\ (x, y)\ no\ momento\ t$$
$$k \;=\; condutividade\ térmica$$
$$A \;=\; área\ de\ contato$$
$$\nabla u \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Observe que o modelo físico de fluxo de calor indica que ele flui do local mais quente para o menos quente (gradiente negativo). No modelo, ∇u será aproximado numericamente pela diferença de temperatura entre quadrados consecutivos na direção x e y. q será calculado iterando por $q(x,\ y)$ por todo $(x,\ y)$ contido na placa. Assim geraremos um mapa do fluxo de energia na placa.

Para o material bidimensional, homogêneo e isotrópico, vale que o coeficiente de difusão térmica é constante. Esse coeficiente é representado por α nas fórmulas e pode ser encontrado para diferentes materiais. Ele é calculado a partir de outras propriedades específicas, valendo:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Tiago Koji Castro Shibata - 8988730 - tiago.shibata@usp.br
Deborah Hidemi Kamiguchi Watanabe - 4430967 - deborah.watanabe@usp.br

$$k = condutividade\ t\acute{e}rmica$$
$$\rho = massa\ espec\acute{i}fica$$
$$c_p = calor\ espec\acute{i}fico$$

De posse de α e de nosso modelo simplificado, podemos aplicar a equação do calor, descrita por [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + w(x, y)$$

$$u(x, y, t) = temperatura\ em\ (x, y)\ no\ momento\ t$$
$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$w(x, y) = valor\ recebido\ de\ fonte/perdido\ para\ sorvedouro$$

A equação também será aplicada em toda a extensão da placa. Ela relaciona a mudança de temperatura em certo ponto no tempo com o laplaciano da temperatura, ou o divergente do gradiente, representado por ∇^2. Esse valor é intuitivo e semelhante a resultados vistos nas disciplinas de física e electromagnetismo: o aumento de temperatura no ponto é relacionado com o divergente do fluxo de calor, ou seja, o calor realmente "ganho", ficando a temperatura constante se calor ganho de um lado é perdido para outro mais frio. Também indica que um ponto pode entrar em equilíbrio térmico mesmo se sua temperatura for diferente da temperatura em seu entorno, se seu "lucro" de calor for nulo. O laplaciano será aproximado numericamente a partir do gradiente. Por exemplo, calculando apenas para o eixo x (os mesmos passos são repetidos para y):

Aproximação da derivada antes do ponto:

$$\frac{\partial u(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x}$$

Depois do ponto:

$$\frac{\partial u(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x}$$

E aproximação da segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial u(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t)}{\partial x}}{\Delta x} =$$

$$\frac{\frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x} - \frac{u(x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$\frac{u(x + \Delta x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t) - 2 * u(x, y, t)}{\Delta x^{2}}$$

Essa última apresentação da fórmula é encontrada em literatura do tema [2] e é a mais utilizada para aproximação de laplaciano em matrizes bidimensionais. É interessante notar também que o pacote MATLAB e similares possuem função para calcular o laplaciano de matrizes e também de grafos [3] (conforme já citado, usados para resolução em elementos finitos mais avançada, não abordada nesse trabalho), e poderemos comparar e validar nossa implementação de laplaciano com a do software.

$w(x, y)$ será positivo nas regiões com componentes e negativo no restante da placa.

Referências

[1] A equação de calor - UFSC - http://mtm.ufsc.br/~daniel/matap/calor_dif_fin1.pdf
[2] General discrete Laplace operators on polygonal meshes - Humboldt-Universität zu Berlin - https://www.informatik.hu-berlin.de/de/forschung/gebiete/viscom/thesis/final/Diplomarbeit_Herholz_201301.pdf
[3] MATLAB discrete laplacian - MathWorks© - http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/del2.html