

# Bounds for maximal cardinality of non-averaging sets

Tiago E. Siller

April 30, 2023

Let  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  be the set of natural numbers. We say that a set  $S \subset \mathbb{N}$  is **non-averaging** if there is no three distinct terms  $x, y, z \in S$  such that  $z - y = y - x$  (that is,  $x, y, z$  are in arithmetic progression).

Let  $N$  be a non-negative integer number. We define  $r(N)$  as the maximal cardinality of a non-averaging set contained in  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

In tables below, we list the values of  $r(N)$  and the best bounds for  $m_0(N) \leq r(N) \leq m_1(N)$  when the value of  $r(N)$  is not known.

$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$
1	1	31	12	61	19	91	24	121	31
2	2	32	13	62	19	92	25	122	32
3	2	33	13	63	20	93	25	123	32
4	3	34	13	64	20	94	25	124	32
5	4	35	13	65	20	95	26	125	32
6	4	36	14	66	20	96	26	126	32
7	4	37	14	67	20	97	26	127	32
8	4	38	14	68	20	98	26	128	32
9	5	39	14	69	20	99	26	129	32
10	5	40	15	70	20	100	27	130	32
11	6	41	16	71	21	101	27	131	32
12	6	42	16	72	21	102	27	132	32
13	7	43	16	73	21	103	27	133	32
14	8	44	16	74	22	104	28	134	32
15	8	45	16	75	22	105	28	135	32
16	8	46	16	76	22	106	28	136	32
17	8	47	16	77	22	107	28		
18	8	48	16	78	22	108	28		
19	8	49	16	79	22	109	28		
20	9	50	16	80	22	110	28		
21	9	51	17	81	22	111	29		
22	9	52	17	82	23	112	29		
23	9	53	17	83	23	113	29		
24	10	54	18	84	24	114	30		
25	10	55	18	85	24	115	30		
26	11	56	18	86	24	116	30		
27	11	57	18	87	24	117	30		
28	11	58	19	88	24	118	30		
29	11	59	19	89	24	119	30		
30	12	60	19	90	24	120	30		

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
137	32	33	167	36	41	197	40	47
138	32	34	168	36	41	198	40	47
139	32	34	169	37	41	199	40	48
140	32	35	170	37	42	200	40	48
141	32	35	171	37	42	201	40	48
142	33	36	172	37	42	202	40	48
143	33	36	173	38	42	203	40	49
144	33	36	174	38	42	204	41	49
145	33	36	175	38	43	205	41	49
146	33	37	176	38	43	206	41	49
147	33	37	177	38	43	207	41	50
148	34	37	178	38	43	208	41	50
149	34	37	179	38	43	209	41	50
150	34	37	180	38	44	210	42	50
151	34	38	181	38	44	211	42	50
152	34	38	182	38	44	212	42	51
153	34	38	183	39	44	213	42	51
154	34	38	184	39	44	214	42	51
155	34	39	185	39	45	215	42	51
156	35	39	186	39	45	216	42	52
157	35	39	187	39	45	217	42	52
158	35	39	188	40	45	218	43	52
159	35	39	189	40	45	219	43	52
160	35	39	190	40	46	220	43	53
161	36	40	191	40	46	221	44	53
162	36	40	192	40	46	222	44	53
163	36	40	193	40	46	223	44	53
164	36	40	194	40	47	224	44	53
165	36	41	195	40	47	225	44	54
166	36	41	196	40	47	226	44	54

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
227	44	54	257	48	61	287	52	67
228	44	54	258	48	61	288	52	67
229	44	54	259	48	61	289	52	68
230	44	55	260	48	61	290	52	68
231	44	55	261	48	61	291	52	68
232	44	55	262	48	62	292	52	68
233	44	55	263	48	62	293	52	69
234	44	56	264	48	62	294	53	69
235	44	56	265	48	62	295	53	69
236	44	56	266	48	63	296	53	69
237	45	56	267	49	63	297	53	69
238	45	56	268	49	63	298	53	70
239	45	57	269	49	63	299	54	70
240	45	57	270	49	63	300	54	70
241	46	57	271	49	64	301	54	70
242	46	57	272	49	64	302	54	70
243	46	57	273	50	64	303	54	71
244	46	58	274	50	64	304	54	71
245	46	58	275	50	65	305	54	71
246	46	58	276	50	65	306	54	71
247	46	58	277	50	65	307	55	72
248	46	59	278	50	65	308	55	72
249	47	59	279	50	65	309	55	72
250	47	59	280	50	66	310	55	72
251	48	59	281	51	66	311	56	72
252	48	59	282	51	66	312	56	73
253	48	60	283	51	66	313	56	73
254	48	60	284	52	67	314	56	73
255	48	60	285	52	67	315	56	73
256	48	60	286	52	67	316	56	74

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
317	56	74	347	60	80	377	64	87
318	56	74	348	60	81	378	64	87
319	56	74	349	60	81	379	64	87
320	56	74	350	60	81	380	64	88
321	56	75	351	60	81	381	64	88
322	56	75	352	60	81	382	64	88
323	56	75	353	60	82	383	64	88
324	56	75	354	61	82	384	64	89
325	57	76	355	61	82	385	64	89
326	57	76	356	61	82	386	64	89
327	57	76	357	62	83	387	64	89
328	57	76	358	62	83	388	64	89
329	57	76	359	62	83	389	64	90
330	57	77	360	62	83	390	64	90
331	58	77	361	62	83	391	64	90
332	58	77	362	62	84	392	64	90
333	58	77	363	62	84	393	64	91
334	58	78	364	63	84	394	64	91
335	58	78	365	64	84	395	64	91
336	58	78	366	64	85	396	64	91
337	58	78	367	64	85	397	64	91
338	59	78	368	64	85	398	64	92
339	59	79	369	64	85	399	64	92
340	59	79	370	64	85	400	64	92
341	60	79	371	64	86	401	64	92
342	60	79	372	64	86	402	64	92
343	60	80	373	64	86	403	64	93
344	60	80	374	64	86	404	64	93
345	60	80	375	64	87	405	65	93
346	60	80	376	64	87	406	65	93

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
407	65	94	437	67	100	467	70	107
408	65	94	438	67	100	468	70	107
409	65	94	439	67	101	469	70	107
410	65	94	440	67	101	470	70	107
411	65	94	441	67	101	471	70	108
412	65	95	442	67	101	472	70	108
413	65	95	443	68	102	473	70	108
414	65	95	444	68	102	474	70	108
415	65	95	445	68	102	475	70	109
416	65	96	446	68	102	476	70	109
417	66	96	447	68	102	477	71	109
418	66	96	448	68	103	478	71	109
419	66	96	449	68	103	479	71	109
420	66	96	450	68	103	480	71	110
421	66	97	451	68	103	481	71	110
422	66	97	452	68	103	482	72	110
423	66	97	453	68	104	483	72	110
424	66	97	454	68	104	484	72	111
425	66	98	455	68	104	485	72	111
426	66	98	456	68	104	486	72	111
427	66	98	457	68	105	487	72	111
428	66	98	458	68	105	488	72	111
429	66	98	459	69	105	489	72	112
430	66	99	460	69	105	490	72	112
431	66	99	461	69	105	491	72	112
432	66	99	462	69	106	492	72	112
433	67	99	463	69	106	493	72	113
434	67	100	464	69	106	494	72	113
435	67	100	465	69	106	495	72	113
436	67	100	466	69	107	496	72	113

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
497	72	113	527	76	120	557	78	127
498	73	114	528	76	120	558	79	127
499	73	114	529	76	120	559	79	127
500	73	114	530	76	121	560	79	127
501	73	114	531	76	121	561	79	127
502	73	114	532	76	121	562	79	128
503	73	115	533	76	121	563	80	128
504	73	115	534	76	122	564	80	128
505	73	115	535	76	122	565	80	128
506	74	115	536	76	122	566	80	129
507	74	116	537	76	122	567	80	129
508	74	116	538	77	122	568	80	129
509	74	116	539	77	123	569	80	129
510	74	116	540	77	123	570	80	129
511	74	116	541	77	123	571	80	130
512	74	117	542	77	123	572	80	130
513	74	117	543	77	124	573	80	130
514	75	117	544	77	124	574	80	130
515	75	117	545	77	124	575	80	131
516	75	118	546	77	124	576	80	131
517	75	118	547	77	124	577	80	131
518	76	118	548	78	125	578	80	131
519	76	118	549	78	125	579	80	131
520	76	118	550	78	125	580	80	132
521	76	119	551	78	125	581	80	132
522	76	119	552	78	125	582	80	132
523	76	119	553	78	126	583	80	132
524	76	119	554	78	126	584	80	133
525	76	120	555	78	126	585	80	133
526	76	120	556	78	126	586	80	133

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
587	80	133	617	82	140	647	85	146
588	80	133	618	82	140	648	85	147
589	80	134	619	82	140	649	85	147
590	80	134	620	82	140	650	85	147
591	80	134	621	82	141	651	86	147
592	80	134	622	82	141	652	86	147
593	80	135	623	83	141	653	86	148
594	80	135	624	83	141	654	86	148
595	81	135	625	83	142	655	86	148
596	81	135	626	83	142	656	86	148
597	81	135	627	83	142	657	86	149
598	81	136	628	83	142	658	86	149
599	81	136	629	84	142	659	87	149
600	81	136	630	84	143	660	87	149
601	81	136	631	84	143	661	87	149
602	81	136	632	84	143	662	88	150
603	81	137	633	84	143	663	88	150
604	81	137	634	84	144	664	88	150
605	81	137	635	84	144	665	88	150
606	81	137	636	84	144	666	88	151
607	82	138	637	84	144	667	88	151
608	82	138	638	84	144	668	88	151
609	82	138	639	84	145	669	88	151
610	82	138	640	84	145	670	88	151
611	82	138	641	84	145	671	88	152
612	82	139	642	84	145	672	88	152
613	82	139	643	84	146	673	88	152
614	82	139	644	84	146	674	88	152
615	82	139	645	85	146	675	88	153
616	82	140	646	85	146	676	88	153



$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
677	88	153	707	90	160	737	92	166
678	88	153	708	90	160	738	93	166
679	88	153	709	90	160	739	93	167
680	88	154	710	90	160	740	93	167
681	88	154	711	90	160	741	93	167
682	88	154	712	90	161	742	94	167
683	88	154	713	90	161	743	94	168
684	88	155	714	90	161	744	94	168
685	88	155	715	90	161	745	94	168
686	88	155	716	90	162	746	94	168
687	88	155	717	90	162	747	94	168
688	88	155	718	91	162	748	94	169
689	88	156	719	91	162	749	94	169
690	88	156	720	91	162	750	95	169
691	88	156	721	91	163	751	95	169
692	88	156	722	92	163	752	96	169
693	88	157	723	92	163	753	96	170
694	89	157	724	92	163	754	96	170
695	89	157	725	92	164	755	96	170
696	89	157	726	92	164	756	96	170
697	89	157	727	92	164	757	96	171
698	89	158	728	92	164	758	96	171
699	89	158	729	92	164	759	96	171
700	89	158	730	92	165	760	96	171
701	89	158	731	92	165	761	96	171
702	90	158	732	92	165	762	96	172
703	90	159	733	92	165	763	96	172
704	90	159	734	92	166	764	96	172
705	90	159	735	92	166	765	96	172
706	90	159	736	92	166	766	96	173

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
767	96	173	797	98	179	827	100	186
768	96	173	798	98	180	828	100	186
769	96	173	799	98	180	829	100	186
770	96	173	800	98	180	830	100	187
771	96	174	801	98	180	831	100	187
772	96	174	802	98	180	832	100	187
773	96	174	803	98	181	833	100	187
774	96	174	804	98	181	834	101	188
775	96	175	805	98	181	835	101	188
776	96	175	806	98	181	836	101	188
777	96	175	807	98	182	837	101	188
778	96	175	808	98	182	838	101	188
779	96	175	809	98	182	839	101	189
780	96	176	810	98	182	840	102	189
781	96	176	811	98	182	841	102	189
782	96	176	812	99	183	842	102	189
783	96	176	813	99	183	843	102	190
784	97	177	814	99	183	844	102	190
785	97	177	815	99	183	845	102	190
786	97	177	816	99	184	846	102	190
787	97	177	817	99	184	847	102	190
788	97	177	818	100	184	848	103	191
789	97	178	819	100	184	849	103	191
790	97	178	820	100	184	850	103	191
791	97	178	821	100	185	851	104	191
792	97	178	822	100	185	852	104	191
793	97	179	823	100	185	853	104	192
794	97	179	824	100	185	854	104	192
795	97	179	825	100	186	855	104	192
796	98	179	826	100	186	856	104	192

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
857	104	193	887	106	199	917	109	206
858	104	193	888	106	199	918	109	206
859	104	193	889	106	200	919	109	206
860	104	193	890	106	200	920	110	206
861	104	193	891	107	200	921	110	207
862	104	194	892	107	200	922	110	207
863	104	194	893	107	201	923	110	207
864	104	194	894	107	201	924	110	207
865	104	194	895	107	201	925	110	208
866	104	195	896	108	201	926	110	208
867	104	195	897	108	201	927	110	208
868	104	195	898	108	202	928	111	208
869	104	195	899	108	202	929	111	208
870	104	195	900	108	202	930	111	209
871	105	196	901	108	202	931	111	209
872	105	196	902	108	202	932	112	209
873	105	196	903	108	203	933	112	209
874	105	196	904	108	203	934	112	210
875	105	197	905	108	203	935	112	210
876	105	197	906	108	203	936	112	210
877	105	197	907	108	204	937	112	210
878	105	197	908	108	204	938	112	210
879	105	197	909	108	204	939	112	211
880	105	198	910	108	204	940	112	211
881	106	198	911	108	204	941	112	211
882	106	198	912	109	205	942	112	211
883	106	198	913	109	205	943	112	212
884	106	199	914	109	205	944	112	212
885	106	199	915	109	205	945	112	212
886	106	199	916	109	206	946	112	212

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
947	112	212	977	114	219
948	112	213	978	114	219
949	112	213	979	114	219
950	112	213	980	114	220
951	112	213	981	114	220
952	112	213	982	114	220
953	112	214	983	114	220
954	112	214	984	114	221
955	112	214	985	114	221
956	112	214	986	115	221
957	112	215	987	115	221
958	112	215	988	115	221
959	112	215	989	115	222
960	113	215	990	115	222
961	113	215	991	115	222
962	113	216	992	116	222
963	113	216	993	116	223
964	113	216	994	116	223
965	113	216	995	116	223
966	113	217	996	116	223
967	113	217	997	116	223
968	113	217	998	116	224
969	113	217	999	116	224
970	113	217	1000	116	224
971	113	218			
972	114	218			
973	114	218			
974	114	218			
975	114	219			
976	114	219			

**Remark 1**  $\sum m_0 = 69731$ ,  $\sum m_1 = 114244$ ,  $diff = 44513$ .

**Theorem 2** *With the values above, we conclude that*

$$r(N)/N \leq 116/507 \quad (= 0.22879684418145957\dots)$$

*for all  $N \geq 499$ .*