

# Bounds for maximal cardinality of non-averaging sets

Tiago E. Siller

February 24, 2023

Let  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  be the set of natural numbers. We say that a set  $S \subset \mathbb{N}$  is **non-averaging** if there is no three distinct terms  $x, y, z \in S$  such that  $z - y = y - x$  (that is,  $x, y, z$  are in arithmetic progression).

Let  $N$  be a non-negative integer number. We define  $r(N)$  as the maximal cardinality of a non-averaging set contained in  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

In tables below, we list the values of  $r(N)$  and the best bounds for  $m_0(N) \leq r(N) \leq m_1(N)$  when the value of  $r(N)$  is not known.

$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$	$N$	$r(N)$
1	1	31	12	61	19	91	24	121	31
2	2	32	13	62	19	92	25	122	32
3	2	33	13	63	20	93	25	123	32
4	3	34	13	64	20	94	25	124	32
5	4	35	13	65	20	95	26	125	32
6	4	36	14	66	20	96	26	126	32
7	4	37	14	67	20	97	26	127	32
8	4	38	14	68	20	98	26	128	32
9	5	39	14	69	20	99	26		
10	5	40	15	70	20	100	27		
11	6	41	16	71	21	101	27		
12	6	42	16	72	21	102	27		
13	7	43	16	73	21	103	27		
14	8	44	16	74	22	104	28		
15	8	45	16	75	22	105	28		
16	8	46	16	76	22	106	28		
17	8	47	16	77	22	107	28		
18	8	48	16	78	22	108	28		
19	8	49	16	79	22	109	28		
20	9	50	16	80	22	110	28		
21	9	51	17	81	22	111	29		
22	9	52	17	82	23	112	29		
23	9	53	17	83	23	113	29		
24	10	54	18	84	24	114	30		
25	10	55	18	85	24	115	30		
26	11	56	18	86	24	116	30		
27	11	57	18	87	24	117	30		
28	11	58	19	88	24	118	30		
29	11	59	19	89	24	119	30		
30	12	60	19	90	24	120	30		

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
129	32	33	159	35	39	189	40	47
130	32	33	160	35	39	190	40	47
131	32	33	161	36	40	191	40	48
132	32	34	162	36	41	192	40	48
133	32	35	163	36	41	193	40	48
134	32	35	164	36	41	194	40	48
135	32	35	165	36	42	195	40	48
136	32	35	166	36	42	196	40	48
137	32	35	167	36	42	197	40	48
138	32	35	168	36	42	198	40	48
139	32	35	169	37	43	199	40	48
140	32	35	170	37	43	200	40	48
141	32	35	171	37	43	201	40	49
142	33	36	172	37	43	202	40	50
143	33	37	173	38	44	203	40	50
144	33	37	174	38	44	204	41	50
145	33	37	175	38	44	205	41	51
146	33	37	176	38	44	206	41	51
147	33	37	177	38	44	207	41	51
148	34	37	178	38	44	208	41	52
149	34	37	179	38	44	209	41	52
150	34	37	180	38	44	210	42	52
151	34	38	181	38	45	211	42	52
152	34	39	182	38	45	212	42	52
153	34	39	183	39	46	213	42	53
154	34	39	184	39	46	214	42	53
155	34	39	185	39	46	215	42	53
156	35	39	186	39	46	216	42	53
157	35	39	187	39	47	217	42	53
158	35	39	188	40	47	218	43	53

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
219	43	53	249	47	61	279	50	66
220	43	53	250	47	61	280	50	66
221	44	54	251	48	61	281	51	67
222	44	55	252	48	62	282	51	68
223	44	55	253	48	62	283	51	68
224	44	55	254	48	62	284	52	69
225	44	55	255	48	62	285	52	69
226	44	56	256	48	62	286	52	69
227	44	56	257	48	62	287	52	69
228	44	56	258	48	62	288	52	70
229	44	56	259	48	62	289	52	70
230	44	56	260	48	62	290	52	70
231	44	57	261	48	63	291	52	70
232	44	57	262	48	64	292	52	71
233	44	57	263	48	64	293	52	71
234	44	57	264	48	64	294	53	71
235	44	58	265	48	65	295	53	71
236	44	58	266	48	65	296	53	71
237	45	58	267	49	65	297	53	71
238	45	58	268	49	65	298	53	71
239	45	58	269	49	66	299	54	71
240	45	58	270	49	66	300	54	71
241	46	59	271	49	66	301	54	72
242	46	59	272	49	66	302	54	73
243	46	59	273	50	66	303	54	73
244	46	60	274	50	66	304	54	73
245	46	60	275	50	66	305	54	74
246	46	60	276	50	66	306	54	74
247	46	60	277	50	66	307	55	74
248	46	61	278	50	66	308	55	74

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
309	55	74	339	59	81	369	64	89
310	55	75	340	59	81	370	64	89
311	56	75	341	60	82	371	64	89
312	56	75	342	60	82	372	64	89
313	56	75	343	60	82	373	64	90
314	56	76	344	60	83	374	64	90
315	56	76	345	60	83	375	64	90
316	56	76	346	60	83	376	64	90
317	56	76	347	60	83	377	64	91
318	56	76	348	60	84	378	64	91
319	56	77	349	60	84	379	64	91
320	56	77	350	60	84	380	64	91
321	56	77	351	60	84	381	64	92
322	56	78	352	60	85	382	64	92
323	56	78	353	60	85	383	64	92
324	56	78	354	61	85	384	64	92
325	57	78	355	61	85	385	64	93
326	57	78	356	61	86	386	64	93
327	57	79	357	62	86	387	64	93
328	57	79	358	62	86	388	64	93
329	57	79	359	62	86	389	64	93
330	57	79	360	62	86	390	64	94
331	58	79	361	62	87	391	64	94
332	58	80	362	62	87	392	64	94
333	58	80	363	62	87	393	64	94
334	58	80	364	63	88	394	64	95
335	58	80	365	64	88	395	64	95
336	58	81	366	64	88	396	64	95
337	58	81	367	64	88	397	64	95
338	59	81	368	64	88	398	64	96

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
399	64	96	429	66	103	459	69	110
400	64	96	430	66	103	460	69	110
401	64	96	431	66	104	461	69	111
402	64	97	432	66	104	462	69	111
403	64	97	433	67	104	463	69	111
404	64	97	434	67	104	464	69	112
405	65	97	435	67	105	465	69	112
406	65	98	436	67	105	466	69	112
407	65	98	437	67	105	467	70	112
408	65	98	438	67	105	468	70	112
409	65	98	439	67	105	469	70	113
410	65	99	440	67	105	470	70	113
411	65	99	441	67	106	471	70	113
412	65	99	442	67	106	472	70	113
413	65	99	443	68	106	473	70	114
414	65	100	444	68	107	474	70	114
415	65	100	445	68	107	475	70	114
416	65	100	446	68	107	476	70	114
417	66	100	447	68	107	477	71	114
418	66	101	448	68	108	478	71	114
419	66	101	449	68	108	479	71	114
420	66	101	450	68	108	480	71	114
421	66	101	451	68	108	481	71	115
422	66	102	452	68	109	482	72	116
423	66	102	453	68	109	483	72	116
424	66	102	454	68	109	484	72	116
425	66	102	455	68	109	485	72	117
426	66	102	456	68	110	486	72	117
427	66	103	457	68	110	487	72	117
428	66	103	458	68	110	488	72	117

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
489	72	117	519	76	124	549	78	131
490	72	118	520	76	124	550	78	132
491	72	118	521	76	124	551	78	132
492	72	118	522	76	125	552	78	132
493	72	118	523	76	125	553	78	132
494	72	119	524	76	126	554	78	132
495	72	119	525	76	126	555	78	132
496	72	119	526	76	126	556	78	132
497	72	119	527	76	126	557	78	132
498	73	119	528	76	127	558	79	132
499	73	119	529	76	127	559	79	132
500	73	119	530	76	127	560	79	132
501	73	120	531	76	127	561	79	132
502	73	120	532	76	127	562	79	133
503	73	121	533	76	128	563	80	134
504	73	121	534	76	128	564	80	134
505	73	121	535	76	128	565	80	135
506	74	121	536	76	128	566	80	135
507	74	122	537	76	128	567	80	135
508	74	122	538	77	128	568	80	136
509	74	122	539	77	128	569	80	136
510	74	122	540	77	128	570	80	136
511	74	122	541	77	129	571	80	136
512	74	123	542	77	130	572	80	137
513	74	123	543	77	130	573	80	137
514	75	123	544	77	130	574	80	137
515	75	123	545	77	131	575	80	137
516	75	124	546	77	131	576	80	137
517	75	124	547	77	131	577	80	137
518	76	124	548	78	131	578	80	137

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
579	80	137	609	82	145	639	84	152
580	80	137	610	82	145	640	84	152
581	80	138	611	82	145	641	84	153
582	80	139	612	82	146	642	84	153
583	80	139	613	82	146	643	84	153
584	80	139	614	82	146	644	84	153
585	80	140	615	82	146	645	85	154
586	80	140	616	82	147	646	85	154
587	80	140	617	82	147	647	85	154
588	80	140	618	82	147	648	85	154
589	80	140	619	82	147	649	85	154
590	80	141	620	82	147	650	85	155
591	80	141	621	82	148	651	86	155
592	80	141	622	82	148	652	86	155
593	80	141	623	83	148	653	86	156
594	80	141	624	83	149	654	86	156
595	81	142	625	83	149	655	86	156
596	81	142	626	83	149	656	86	156
597	81	142	627	83	149	657	86	156
598	81	142	628	83	149	658	86	157
599	81	142	629	84	150	659	87	157
600	81	142	630	84	150	660	87	157
601	81	142	631	84	150	661	87	157
602	81	143	632	84	151	662	88	158
603	81	143	633	84	151	663	88	158
604	81	144	634	84	151	664	88	158
605	81	144	635	84	151	665	88	158
606	81	144	636	84	151	666	88	159
607	82	144	637	84	152	667	88	159
608	82	145	638	84	152	668	88	159



$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
669	88	159	699	89	167	729	92	174
670	88	160	700	89	167	730	92	174
671	88	160	701	89	167	731	92	174
672	88	160	702	90	167	732	92	174
673	88	160	703	90	168	733	92	175
674	88	161	704	90	168	734	92	175
675	88	161	705	90	168	735	92	175
676	88	161	706	90	168	736	92	175
677	88	161	707	90	168	737	92	176
678	88	161	708	90	169	738	93	176
679	88	162	709	90	169	739	93	176
680	88	162	710	90	169	740	93	176
681	88	162	711	90	169	741	93	176
682	88	162	712	90	170	742	94	177
683	88	163	713	90	170	743	94	177
684	88	163	714	90	170	744	94	177
685	88	163	715	90	170	745	94	178
686	88	163	716	90	171	746	94	178
687	88	164	717	90	171	747	94	178
688	88	164	718	91	171	748	94	178
689	88	164	719	91	171	749	94	178
690	88	164	720	91	171	750	95	179
691	88	165	721	91	171	751	95	179
692	88	165	722	92	172	752	96	179
693	88	165	723	92	172	753	96	179
694	89	165	724	92	173	754	96	180
695	89	166	725	92	173	755	96	180
696	89	166	726	92	173	756	96	180
697	89	166	727	92	173	757	96	180
698	89	166	728	92	174	758	96	180

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
759	96	180	789	97	188	819	100	194
760	96	180	790	97	188	820	100	194
761	96	180	791	97	188	821	100	194
762	96	181	792	97	189	822	100	195
763	96	182	793	97	189	823	100	196
764	96	182	794	97	189	824	100	196
765	96	182	795	97	189	825	100	196
766	96	182	796	98	189	826	100	196
767	96	183	797	98	190	827	100	197
768	96	183	798	98	190	828	100	197
769	96	183	799	98	190	829	100	197
770	96	183	800	98	190	830	100	197
771	96	184	801	98	190	831	100	198
772	96	184	802	98	191	832	100	198
773	96	184	803	98	191	833	100	198
774	96	184	804	98	191	834	101	198
775	96	185	805	98	192	835	101	198
776	96	185	806	98	192	836	101	198
777	96	185	807	98	192	837	101	198
778	96	185	808	98	192	838	101	198
779	96	185	809	98	193	839	101	198
780	96	185	810	98	193	840	102	198
781	96	185	811	98	193	841	102	198
782	96	186	812	99	193	842	102	199
783	96	186	813	99	194	843	102	200
784	97	187	814	99	194	844	102	200
785	97	187	815	99	194	845	102	201
786	97	187	816	99	194	846	102	201
787	97	187	817	99	194	847	102	201
788	97	188	818	100	194	848	103	201

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
849	103	202	879	105	208	909	108	216
850	103	202	880	105	208	910	108	216
851	104	202	881	106	208	911	108	216
852	104	202	882	106	209	912	109	216
853	104	203	883	106	209	913	109	217
854	104	203	884	106	210	914	109	217
855	104	203	885	106	210	915	109	217
856	104	203	886	106	210	916	109	217
857	104	203	887	106	210	917	109	217
858	104	203	888	106	211	918	109	218
859	104	203	889	106	211	919	109	218
860	104	203	890	106	211	920	110	218
861	104	203	891	107	211	921	110	218
862	104	204	892	107	211	922	110	219
863	104	205	893	107	212	923	110	219
864	104	205	894	107	212	924	110	219
865	104	205	895	107	212	925	110	219
866	104	206	896	108	212	926	110	220
867	104	206	897	108	213	927	110	220
868	104	206	898	108	213	928	111	220
869	104	206	899	108	213	929	111	220
870	104	206	900	108	213	930	111	220
871	105	207	901	108	213	931	111	221
872	105	207	902	108	214	932	112	221
873	105	207	903	108	214	933	112	221
874	105	207	904	108	214	934	112	222
875	105	208	905	108	215	935	112	222
876	105	208	906	108	215	936	112	222
877	105	208	907	108	215	937	112	222
878	105	208	908	108	215	938	112	223

$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$	$N$	$m_0(N)$	$m_1(N)$
939	112	223	969	113	230	999	116	237
940	112	223	970	113	230	1000	116	237
941	112	223	971	113	230			
942	112	223	972	114	231			
943	112	224	973	114	231			
944	112	224	974	114	231			
945	112	224	975	114	232			
946	112	224	976	114	232			
947	112	225	977	114	232			
948	112	225	978	114	232			
949	112	225	979	114	232			
950	112	225	980	114	233			
951	112	226	981	114	233			
952	112	226	982	114	233			
953	112	226	983	114	234			
954	112	226	984	114	234			
955	112	227	985	114	234			
956	112	227	986	115	234			
957	112	227	987	115	234			
958	112	227	988	115	235			
959	112	228	989	115	235			
960	113	228	990	115	235			
961	113	228	991	115	235			
962	113	228	992	116	236			
963	113	229	993	116	236			
964	113	229	994	116	236			
965	113	229	995	116	236			
966	113	229	996	116	237			
967	113	230	997	116	237			
968	113	230	998	116	237			