

Bounds for maximal cardinality of non-averaging sets

Tiago E. Siller

September 9, 2023

Let $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ be the set of natural numbers. We say that a set $S \subset \mathbb{N}$ is **non-averaging** if there is no three distinct terms $x, y, z \in S$ such that $z - y = y - x$ (that is, x, y, z are in arithmetic progression).

Let N be a non-negative integer number. We define $r(N)$ as the maximal cardinality of a non-averaging set contained in $\{1, 2, \dots, N\}$.

In tables below, we list the values of $r(N)$ and the best bounds for $m_0(N) \leq r(N) \leq m_1(N)$ when the value of $r(N)$ is not known.

N	$r(N)$	N	$r(N)$	N	$r(N)$	N	$r(N)$	N	$r(N)$
1	1	31	12	61	19	91	24	121	31
2	2	32	13	62	19	92	25	122	32
3	2	33	13	63	20	93	25	123	32
4	3	34	13	64	20	94	25	124	32
5	4	35	13	65	20	95	26	125	32
6	4	36	14	66	20	96	26	126	32
7	4	37	14	67	20	97	26	127	32
8	4	38	14	68	20	98	26	128	32
9	5	39	14	69	20	99	26	129	32
10	5	40	15	70	20	100	27	130	32
11	6	41	16	71	21	101	27	131	32
12	6	42	16	72	21	102	27	132	32
13	7	43	16	73	21	103	27	133	32
14	8	44	16	74	22	104	28	134	32
15	8	45	16	75	22	105	28	135	32
16	8	46	16	76	22	106	28	136	32
17	8	47	16	77	22	107	28	137	33
18	8	48	16	78	22	108	28	138	33
19	8	49	16	79	22	109	28	139	33
20	9	50	16	80	22	110	28	140	33
21	9	51	17	81	22	111	29	141	33
22	9	52	17	82	23	112	29		
23	9	53	17	83	23	113	29		
24	10	54	18	84	24	114	30		
25	10	55	18	85	24	115	30		
26	11	56	18	86	24	116	30		
27	11	57	18	87	24	117	30		
28	11	58	19	88	24	118	30		
29	11	59	19	89	24	119	30		
30	12	60	19	90	24	120	30		

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
142	33	34	172	37	41	202	40	47
143	33	35	173	38	41	203	40	48
144	33	35	174	38	41	204	41	48
145	33	36	175	38	42	205	41	48
146	33	36	176	38	42	206	41	48
147	33	36	177	38	42	207	41	48
148	34	36	178	38	42	208	41	48
149	34	36	179	38	42	209	41	49
150	34	37	180	38	43	210	42	49
151	34	37	181	38	43	211	42	49
152	34	37	182	38	43	212	42	49
153	34	37	183	39	43	213	42	49
154	34	37	184	39	43	214	42	50
155	34	38	185	39	44	215	42	50
156	35	38	186	39	44	216	42	50
157	35	38	187	39	44	217	42	50
158	35	38	188	40	44	218	43	50
159	35	38	189	40	44	219	43	51
160	35	39	190	40	45	220	43	51
161	36	39	191	40	45	221	44	51
162	36	39	192	40	45	222	44	51
163	36	39	193	40	45	223	44	52
164	36	39	194	40	45	224	44	52
165	36	40	195	40	46	225	44	52
166	36	40	196	40	46	226	44	52
167	36	40	197	40	46	227	44	52
168	36	40	198	40	46	228	44	53
169	37	40	199	40	46	229	44	53
170	37	41	200	40	47	230	44	53
171	37	41	201	40	47	231	44	53

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
232	44	53	262	48	60	292	52	66
233	44	54	263	48	60	293	52	66
234	44	54	264	48	60	294	53	66
235	44	54	265	48	60	295	53	67
236	44	54	266	48	61	296	53	67
237	45	55	267	49	61	297	53	67
238	45	55	268	49	61	298	53	67
239	45	55	269	49	61	299	54	67
240	45	55	270	49	61	300	54	68
241	46	55	271	49	62	301	54	68
242	46	56	272	49	62	302	54	68
243	46	56	273	50	62	303	54	68
244	46	56	274	50	62	304	54	69
245	46	56	275	50	62	305	54	69
246	46	56	276	50	63	306	54	69
247	46	57	277	50	63	307	55	69
248	46	57	278	50	63	308	55	69
249	47	57	279	50	63	309	55	70
250	47	57	280	50	63	310	55	70
251	48	57	281	51	64	311	56	70
252	48	58	282	51	64	312	56	70
253	48	58	283	51	64	313	56	70
254	48	58	284	52	64	314	56	71
255	48	58	285	52	65	315	56	71
256	48	58	286	52	65	316	56	71
257	48	59	287	52	65	317	56	71
258	48	59	288	52	65	318	56	71
259	48	59	289	52	65	319	56	72
260	48	59	290	52	66	320	56	72
261	48	60	291	52	66	321	56	72

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
322	56	72	352	60	79	382	64	85
323	56	72	353	60	79	383	64	85
324	56	73	354	61	79	384	64	85
325	57	73	355	61	79	385	64	85
326	57	73	356	61	79	386	64	86
327	57	73	357	62	80	387	64	86
328	57	74	358	62	80	388	64	86
329	57	74	359	62	80	389	64	86
330	57	74	360	62	80	390	64	87
331	58	74	361	62	80	391	64	87
332	58	74	362	62	81	392	64	87
333	58	75	363	62	81	393	64	87
334	58	75	364	63	81	394	64	87
335	58	75	365	64	81	395	65	88
336	58	75	366	64	81	396	65	88
337	58	75	367	64	82	397	65	88
338	59	76	368	64	82	398	65	88
339	59	76	369	64	82	399	65	88
340	59	76	370	64	82	400	65	89
341	60	76	371	64	83	401	65	89
342	60	77	372	64	83	402	65	89
343	60	77	373	64	83	403	65	89
344	60	77	374	64	83	404	65	89
345	60	77	375	64	83	405	65	90
346	60	77	376	64	84	406	65	90
347	60	78	377	64	84	407	65	90
348	60	78	378	64	84	408	65	90
349	60	78	379	64	84	409	65	90
350	60	78	380	64	84	410	66	91
351	60	78	381	64	85	411	66	91

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
412	66	91	442	67	97	472	70	104
413	66	91	443	68	98	473	70	104
414	66	92	444	68	98	474	70	104
415	66	92	445	68	98	475	70	104
416	66	92	446	68	98	476	70	104
417	66	92	447	68	98	477	71	105
418	66	92	448	68	99	478	71	105
419	66	93	449	68	99	479	71	105
420	66	93	450	68	99	480	71	105
421	66	93	451	68	99	481	71	106
422	66	93	452	68	99	482	72	106
423	66	93	453	68	100	483	72	106
424	66	94	454	68	100	484	72	106
425	66	94	455	68	100	485	72	106
426	66	94	456	68	100	486	72	107
427	66	94	457	68	101	487	72	107
428	66	94	458	69	101	488	72	107
429	66	95	459	69	101	489	72	107
430	66	95	460	69	101	490	72	107
431	66	95	461	69	101	491	72	108
432	67	95	462	69	102	492	72	108
433	67	96	463	69	102	493	72	108
434	67	96	464	69	102	494	72	108
435	67	96	465	69	102	495	72	108
436	67	96	466	69	102	496	72	109
437	67	96	467	70	103	497	72	109
438	67	97	468	70	103	498	73	109
439	67	97	469	70	103	499	73	109
440	67	97	470	70	103	500	73	110
441	67	97	471	70	103	501	73	110

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
502	73	110	532	76	116	562	79	122
503	73	110	533	76	116	563	80	123
504	73	110	534	76	117	564	80	123
505	73	111	535	76	117	565	80	123
506	74	111	536	76	117	566	80	123
507	74	111	537	76	117	567	80	124
508	74	111	538	77	117	568	80	124
509	74	111	539	77	118	569	80	124
510	74	112	540	77	118	570	80	124
511	74	112	541	77	118	571	80	124
512	74	112	542	77	118	572	80	125
513	74	112	543	77	118	573	80	125
514	75	112	544	77	119	574	80	125
515	75	113	545	77	119	575	80	125
516	75	113	546	77	119	576	80	125
517	75	113	547	77	119	577	80	126
518	76	113	548	78	120	578	80	126
519	76	113	549	78	120	579	80	126
520	76	114	550	78	120	580	80	126
521	76	114	551	78	120	581	80	126
522	76	114	552	78	120	582	80	127
523	76	114	553	78	121	583	80	127
524	76	115	554	78	121	584	80	127
525	76	115	555	78	121	585	80	127
526	76	115	556	78	121	586	80	127
527	76	115	557	78	121	587	80	128
528	76	115	558	79	122	588	80	128
529	76	116	559	79	122	589	80	128
530	76	116	560	79	122	590	80	128
531	76	116	561	79	122	591	80	129

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
592	80	129	622	82	135	652	86	141
593	80	129	623	83	135	653	86	142
594	80	129	624	83	135	654	86	142
595	81	129	625	83	136	655	86	142
596	81	130	626	83	136	656	86	142
597	81	130	627	83	136	657	86	142
598	81	130	628	83	136	658	86	143
599	81	130	629	84	136	659	87	143
600	81	130	630	84	137	660	87	143
601	81	131	631	84	137	661	87	143
602	81	131	632	84	137	662	88	143
603	81	131	633	84	137	663	88	144
604	81	131	634	84	138	664	88	144
605	81	131	635	84	138	665	88	144
606	81	132	636	84	138	666	88	144
607	82	132	637	84	138	667	88	144
608	82	132	638	84	138	668	88	145
609	82	132	639	84	139	669	88	145
610	82	132	640	84	139	670	88	145
611	82	133	641	84	139	671	88	145
612	82	133	642	84	139	672	88	145
613	82	133	643	84	139	673	88	146
614	82	133	644	84	140	674	88	146
615	82	134	645	85	140	675	88	146
616	82	134	646	85	140	676	88	146
617	82	134	647	85	140	677	88	146
618	82	134	648	85	140	678	88	147
619	82	134	649	85	141	679	88	147
620	82	135	650	85	141	680	88	147
621	82	135	651	86	141	681	88	147

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
682	88	148	712	90	154	742	94	160
683	88	148	713	90	154	743	94	160
684	88	148	714	90	154	744	94	161
685	88	148	715	90	154	745	94	161
686	88	148	716	90	155	746	94	161
687	88	149	717	90	155	747	94	161
688	88	149	718	91	155	748	94	161
689	88	149	719	91	155	749	94	162
690	88	149	720	91	156	750	95	162
691	88	149	721	91	156	751	95	162
692	88	150	722	92	156	752	96	162
693	88	150	723	92	156	753	96	162
694	89	150	724	92	156	754	96	163
695	89	150	725	92	157	755	96	163
696	89	150	726	92	157	756	96	163
697	89	151	727	92	157	757	96	163
698	89	151	728	92	157	758	96	163
699	89	151	729	92	157	759	96	164
700	89	151	730	92	158	760	96	164
701	89	152	731	92	158	761	96	164
702	90	152	732	92	158	762	96	164
703	90	152	733	92	158	763	96	165
704	90	152	734	92	158	764	96	165
705	90	152	735	92	159	765	96	165
706	90	153	736	92	159	766	96	165
707	90	153	737	92	159	767	96	165
708	90	153	738	93	159	768	96	166
709	90	153	739	93	159	769	96	166
710	90	153	740	93	160	770	96	166
711	90	154	741	93	160	771	96	166

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
772	96	166	802	98	173	832	100	179
773	96	167	803	98	173	833	100	179
774	96	167	804	98	173	834	101	179
775	96	167	805	98	173	835	101	180
776	96	167	806	98	173	836	101	180
777	96	167	807	98	174	837	101	180
778	96	168	808	98	174	838	101	180
779	96	168	809	98	174	839	101	180
780	96	168	810	98	174	840	102	181
781	96	168	811	98	175	841	102	181
782	96	168	812	99	175	842	102	181
783	96	169	813	99	175	843	102	181
784	97	169	814	99	175	844	102	181
785	97	169	815	99	175	845	102	182
786	97	169	816	99	176	846	102	182
787	97	170	817	99	176	847	102	182
788	97	170	818	100	176	848	103	182
789	97	170	819	100	176	849	103	182
790	97	170	820	100	176	850	103	183
791	97	170	821	100	177	851	104	183
792	97	171	822	100	177	852	104	183
793	97	171	823	100	177	853	104	183
794	97	171	824	100	177	854	104	184
795	97	171	825	100	177	855	104	184
796	98	171	826	100	178	856	104	184
797	98	172	827	100	178	857	104	184
798	98	172	828	100	178	858	104	184
799	98	172	829	100	178	859	104	185
800	98	172	830	100	179	860	104	185
801	98	172	831	100	179	861	104	185

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
862	104	185	892	107	191	922	110	198
863	104	185	893	107	192	923	110	198
864	104	186	894	107	192	924	110	198
865	104	186	895	107	192	925	110	198
866	104	186	896	108	192	926	110	199
867	104	186	897	108	193	927	110	199
868	104	186	898	108	193	928	111	199
869	104	187	899	108	193	929	111	199
870	104	187	900	108	193	930	111	199
871	105	187	901	108	193	931	111	200
872	105	187	902	108	194	932	112	200
873	105	187	903	108	194	933	112	200
874	105	188	904	108	194	934	112	200
875	105	188	905	108	194	935	112	200
876	105	188	906	108	194	936	112	201
877	105	188	907	108	195	937	112	201
878	105	189	908	108	195	938	112	201
879	105	189	909	108	195	939	112	201
880	105	189	910	108	195	940	112	201
881	106	189	911	108	195	941	112	202
882	106	189	912	109	196	942	112	202
883	106	190	913	109	196	943	112	202
884	106	190	914	109	196	944	112	202
885	106	190	915	109	196	945	112	203
886	106	190	916	109	197	946	112	203
887	106	190	917	109	197	947	112	203
888	106	191	918	109	197	948	112	203
889	106	191	919	109	197	949	112	203
890	106	191	920	110	197	950	112	204
891	107	191	921	110	198	951	112	204

N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$	N	$m_0(N)$	$m_1(N)$
952	112	204	982	114	210			
953	112	204	983	114	211			
954	112	204	984	114	211			
955	112	205	985	114	211			
956	112	205	986	115	211			
957	112	205	987	115	211			
958	112	205	988	115	212			
959	112	205	989	115	212			
960	113	206	990	115	212			
961	113	206	991	115	212			
962	113	206	992	116	212			
963	113	206	993	116	213			
964	113	207	994	116	213			
965	113	207	995	116	213			
966	113	207	996	116	213			
967	113	207	997	116	213			
968	113	207	998	116	214			
969	113	208	999	116	214			
970	113	208	1000	116	214			
971	113	208						
972	114	208						
973	114	208						
974	114	209						
975	114	209						
976	114	209						
977	114	209						
978	114	209						
979	114	210						
980	114	210						
981	114	210						

Remark 1 $\sum m_0 = 69755$, $\sum m_1 = 109667$, $diff = 39912$.

Theorem 2 *With the values above, we conclude that*

$$r(N)/N \leq 11/50 \quad (= 0.22)$$

for all $N \geq 487$.